ВІДОКРЕМЛЕНИЙ ПІДРОЗДІЛ НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ БІОРЕСУРСІВ І

**ПРИРОДОКОРИСТУВАННЯ УКРАЇНИ "НІЖИНСЬКИЙ АГРОТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ"**

Кафедра природничо-математичних та загальноінженерних дисциплін

**МАЙБОРОДІНА Н.В.**

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ

ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

Методичні рекомендації до виконання практичних робіт

для студентів спеціальності 071 "Облік і оподаткування"

Ніжин – 2021

**УДК 517.2 (072)**

Д 50

*Рекомендовано до друку рішенням науково-методичної ради факультету інженерії та енергетики Відокремленого підрозділу Національного університету біоресурсів і природокористування України "Ніжинський агротехнічний інститут"*

(*Протокол № 3 від 01 жовтня 2021 р.*)

Укладач:

**Майбородіна Н.В.**, кандидат фізико-математичних наук, старший викладач кафедри природничо-математичних та загальноінженерних дисциплін ВП НУБіП України "Ніжинський агротехнічний інститут".

Рецензенти:

**Мейш Ю.А.**, доктор технічних наук, професор кафедри вищої математики Національного транспортного університету;

**Кресан Т.А.**, кандидат технічних наук, доцент кафедри природничо-математичних та загальноінженерних дисциплін ВП НУБіП України "Ніжинський агротехнічний інститут".

Майбородіна Н.В.

**Диференціальне числення функції однієї змінної**: методичні рекомендації до виконання практичних робіт для студентів спеціальності 071 "Облік і оподаткування" / Майбородіна Н.В. – Ніжин: ПП Лисенко М.М., 2021. – 160 с.

Методичні рекомендації призначені для виконання завдань практичних занять з диференціального числення функції однієї змінної дисципліни "Математика для економістів". Наведено теоретичні відомості з диференціального числення функції однієї змінної, приклади розв’язання основних типів задач, завдання для аудиторної і самостійної роботи, запитання для самоконтролю, завдання для індивідуальні роботи.

Для студентів спеціальності 071 "Облік і оподаткування" денної форми навчання.

УДК 517.2 (072)

© Майбородіна Н.В., 2021

|  |  |
| --- | --- |
| **Вступ**……………………………………………………………………. | **6** |
| **РОЗДІЛ 1. ПОХІДНА. ДИФЕРЕНЦІАЛ** …………………………… | **7** |
| **§1.1.Означення похідної. Правила, формули диференціювання**.. | **8** |
| *Завдання для аудиторної роботи…………….....................* | **11** |
| *Завдання для самостійної роботи……………..……………* | **11** |
| **§ 1.2. Геометричний зміст похідної**…............................................. | **12** |
| *Завдання для аудиторної роботи…………….....................* | **13** |
| *Завдання для самостійної роботи……………..……………* | **13** |
| **§ 1.3. Фізичний зміст похідної**…....................................................... | **13** |
| *Завдання для аудиторної роботи…………….....................* | **14** |
| *Завдання для самостійної роботи……………..………..….* | **14** |
| **§ 1.4. Похідна складеної функції**….................................................. | **15** |
| *Завдання для аудиторної роботи…………….....................* | **16** |
| *Завдання для самостійної роботи……………..…..……….* | **16** |
| **§ 1.5. Похідна функції, яка задана параметрично**……………... | **17** |
| *Завдання для аудиторної роботи…………….....................* | **19** |
| *Завдання для самостійної роботи……………..………..….* | **19** |
| **§ 1.6. Похідна неявно заданої функції**…………………………... | **20** |
| *Завдання для аудиторної роботи…………….....................* | **20** |
| *Завдання для самостійної роботи……………..…..……….* | **20** |
| **§ 1.7. Логарифмічне диференціювання**………………………… | **21** |
| *Завдання для аудиторної роботи…………….....................* | **22** |
| *Завдання для самостійної роботи……………..………..….* | **22** |
| **§ 1.8. Похідна показниково-степеневої функції**……………….. | **22** |
| *Завдання для аудиторної роботи…………….....................* | **24** |
| *Завдання для самостійної роботи……………..……..…….* | **24** |
| **§ 1.9. Диференціал**…........................................................................... | **24** |
| **1.9.1.**Означення диференціала та його геометричний зміст… | **24** |
| **1.9.2.**Властивості диференціала. Інваріантність диференціала.. | **26** |
| *Завдання для аудиторної роботи…………….....................* | **28** |
| *Завдання для самостійної роботи……………..……..…….* | **28** |
| **1.9.3.**Застосування диференціала в наближених обчисленнях | **29** |
| *Завдання для аудиторної роботи…………….....................* | **29** |
| *Завдання для самостійної роботи……………..………..….* | **29** |
| **§ 1.10. ПОХІДНІ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ**…...................................... | **30** |
| *Завдання для аудиторної роботи…………….....................* | **35** |
| *Завдання для самостійної роботи……………..……..…….* | **35** |
| **§ 1.11. ДИФЕРЕНЦІАЛИ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ**…..................... | **36** |
| *Завдання для аудиторної роботи…………….....................* | **38** |
| *Завдання для самостійної роботи……………..……..…….* | **38** |
| ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ ДО РОЗДІЛУ 1………………. | **38** |

|  |  |
| --- | --- |
| **РОЗДІЛ 2. ТЕОРЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО**  **ЧИСЛЕННЯ**……………………………………….…………………… | **39** |
| **§ 2.1. Теореми Ферма, Ролля, Коші і Лагранжа**……………….. | **39** |
| *Завдання для аудиторної роботи…………….....................* | **42** |
| *Завдання для самостійної роботи……………..…………...* | **42** |
| **§ 2.2. Правило Лопіталя**………………………………………….. | **43** |
| *Завдання для аудиторної роботи……………......................* | **47** |
| *Завдання для самостійної роботи……………..……………* | **48** |
| **§ 2.3. Формула Тейлора**…………………………………….…….. | **48** |
| *Завдання для аудиторної роботи……………......................* | **51** |
| *Завдання для самостійної роботи……………..……………* | **52** |
| **§ 2.4. Застосування формули Тейлора**………………………….. | **52** |
| *Завдання для аудиторної роботи…………….....................* | **56** |
| *Завдання для самостійної роботи……………..……………* | **56** |
| **§ 2.5. Застосування формули Тейлора в економічних задачах**……………………………………………………………..……. | **56** |
| ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ ДО РОЗДІЛУ 2………………. | **58** |
| **РОЗДІЛ 3. ЗАСТОСУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЙ** ….......................... | **59** |
| **§ 3.1. Монотонність функції**….......................................................... | **59** |
| *Завдання для аудиторної роботи……………......................* | **60** |
| *Завдання для самостійної роботи……………..……………* | **60** |
| **§ 3.2. Локальний екстремум функції**….......................................... | **61** |
| *Завдання для аудиторної роботи……………......................* | **63** |
| *Завдання для самостійної роботи……………..……………* | **64** |
| **§ 3.3. Найбільше і найменше значення функції**…....................... | **64** |
| *Завдання для аудиторної роботи……………......................* | **65** |
| *Завдання для самостійної роботи……………..……………* | **65** |
| **§ 3.4. Опуклість і вгнутість кривих. Точки перегину**………... | **65** |
| *Завдання для аудиторної роботи……………......................* | **67** |
| *Завдання для самостійної роботи……………..……………* | **67** |
| **§ 3.5. Асимптоти кривої**…................................................................. | **68** |
| *Завдання для аудиторної роботи…………….....................* | **70** |
| *Завдання для самостійної роботи……………..……………* | **70** |
| **§ 3. 6. Схема дослідження функції та побудови графіка функції**…....................................................................................................... | **71** |
| *Завдання для аудиторної роботи…………….....................* | **77** |
| *Завдання для самостійної роботи……………..……………* | **77** |
| ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ ДО РОЗДІЛУ 3………….…… | **77** |

РОЗДІЛ 4.ЗАСТОСУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ

|  |  |
| --- | --- |
| **ДО ЗАДАЧ ТЕОРІЇ НАБЛИЖЕНЬ ТА ІНТЕРПОЛЯЦІЇ**…………….. | **79** |
| **§ 4.1. Наближене розв’язування рівнянь**….................................. | **79** |
| **4.1.1.** Метод поділу відрізка пополам (метод “вилки”)…...... | **80** |
| **4.1.2.** Метод хорд…....................................................................... | **81** |
| **4.1.3.** Метод дотичних (метод Ньютона) …............................... | **84** |
| **4.1.4.** Комбінований метод (хорд і дотичних) …...................... | **86** |
| *Завдання для аудиторної роботи……………......................* | **88** |
| *Завдання для самостійної роботи……………..……………* | **88** |
| **§ 4.2. Інтерполяція функцій**…......................................................... | **89** |
| *Завдання для аудиторної роботи…………….....................* | **91** |
| *Завдання для самостійної роботи……………..……………* | **91** |
| **§ 4.3. Диференціал довжини дуги**…............................................... | **92** |
| *Завдання для аудиторної роботи…………….....................* | **95** |
| *Завдання для самостійної роботи……………..……………* | **95** |
| **§ 4.4. Кривина плоскої лінії**…......................................................... | **95** |
| *Завдання для аудиторної роботи……………......................* | **101** |
| *Завдання для самостійної роботи……………..……………* | **101** |
| ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ ДО РОЗДІЛУ 4………………. | **101** |
| **РОЗДІЛ 5. ЗАСТОСУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ В ЕКОНОМІЦІ**……. | **103** |
| **§ 5.1. Граничний (маргінальний) аналіз економічних процесів.**  **Економічний зміст похідної**….............................................. | **103** |
| *Завдання для аудиторної роботи…………….....................* | **108** |
| *Завдання для самостійної роботи……………..……………* | **109** |
| **§ 5.2. Задачі оптимізації**…................................................................. | **109** |
| *Завдання для аудиторної роботи…………….....................* | **111** |
| *Завдання для самостійної роботи……………..……………* | **112** |
| **§ 5.3. Застосування похідної для дослідження динаміки функції**... | **113** |
| *Завдання для аудиторної роботи……………......................* | **115** |
| *Завдання для самостійної роботи……………..……………* | **116** |
| **§ 5.4. Економічне застосування диференціала.**  **Мультиплікатор і акселератор**…............................................................ | **117** |
| **§ 5.5. Еластичність функції**…........................................................... | **121** |
| **5.5.1.** Поняття еластичності функції…....................................... | **122** |
| **5.5.2.** Застосування еластичності в економічному аналізі…... | **125** |
| *Завдання для аудиторної роботи……………......................* | **128** |
| *Завдання для самостійної роботи……………..……………* | **129** |
| ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ ДО РОЗДІЛУ 5………………. | **129** |
| *ЗАВДАННЯ ДЛЯ ІНДИВІДУАЛЬНІ РОБОТИ*……………………… | **131** |
| СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ……………………... | **158** |

**ВСТУП**

Математика має важливе значення як під час навчання у вищому навчальному закладі, так і для подальшої діяльності спеціаліста. Вона необхідна для успішного засвоєння багатьох спеціальних дисциплін: мікро- та макроекономіки, маркетингу, теорії прогнозування, економетрики, економічного і фінансового ризику. Дослідження багатьох процесів у промисловій технології та економіці пов’язане з розробкою математичної моделі даного явища. Для успішного дослідження математичних моделей у процесах економіки та планування майбутній спеціаліст повинен дотримуватися певної математичної культури.

Студент повинен знати основи диференціального числення функцій однієї змінної; роль і місце математичних методів при розв’язанні економічних задач; повинен уміти сформулювати економічну задачу в математичних термінах, побудувати математичну модель економічної задачі та знайти шляхи розв’язання одержаної моделі.

В методичних вказівках наведено теоретичні відомості з диференціального числення функції однієї змінної, приклади розв’язання основних типів задач, завдання для аудиторної і самостійної роботи, запитання для самоконтролю, індивідуальні завдання для самостійної роботи.

Кожне індивідуальне завдання містить 30 варіантів завдань. Для індивідуальних завдань прийнята нумерація за розділами (1-ше число – номер розділу, 2-ге – номер завдання).

Виконуючи завдання, студент повинен керуватися такими вказівками: індивідуальні завдання потрібно виконувати в окремому зошиті, на обкладинці якого зазначають номер контрольної роботи, прізвище та ініціали студента, навчальний шифр (номер залікової книжки). Розв’язані задачі записують у тому порядку, в якому вони вказані у варіанті. Спочатку записують умову задачі. Розв’язання задач і пояснення до них повинні бути досить докладними.

РОЗДІЛ 1. ПОХІДНА. ДИФЕРЕНЦІАЛ

**Диференціальне числення** – це розділ математики, в якому розглядається дослідження функцій за допомогою похідних та диференціалів. Деякі задачі диференціального числення розв'язані ще в давнину. Наприклад, Евклід розв'язав задачу про паралелограм найбільшої площі, який можна вписати в даний трикутник; Архімед побудував дотичну до спіралі, що носить його ім'я; Аполлоній побудував дотичну до еліпса, гіперболи та параболи.

Загальні методи диференціального числення розроблено Ньютоном і Лейбніцем наприкінці 17 ст., але лише в 19 ст. Коші обґрунтував ці методи на основі теорії границь.

§ 1.1. ОЗНАЧЕННЯ ПОХІДНОЇ. ПРАВИЛА, ФОРМУЛИ ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ

Центральне поняття диференціального числення – похідна – широко використовується при розв'язуванні багатьох задач з математики, фізики, економіки та інших наук, а також при вивченні різних процесів. Якщо перебіг того чи іншого процесу описується деякою функцією, то дослідження даного процесу зводиться до вивчення властивостей цієї

функції та їх похідної.

***Похідною*** функції *y*  *f* *x* в точці *х* називається границя

відношення приросту функції *y* в цій точці до приросту аргументу *х* ,

при умові, що приріст аргументу прямує до нуля.

Похідна позначається символами *y*,

За означенням

*f* *x*,

*y**x* ,

*dy* .

dx

*f* *x* 

###### lim

*y* 

###### lim

*f* *x*  *x* *f* *x*

(1.1)

*x*0 *x* *x*0 *x*

Нехай

*u*  *u**x*, *v*  *v**x* – диференційовані функції від *х* .

Правила диференціювання

|  |  |
| --- | --- |
| **1.** *C*  *u*  *C*  *u*,*C*  *const* **.** | **3.** *u*  *v*  *u*  *v*  *u*  *v* **.** |
| **2.** *u*  *v*  *u*  *v***.** |   **4.**  *u*   *u**v*  *uv* **.**   *v*  *v*2    |

**Формули диференціювання**

|  |  |
| --- | --- |
| **1.** *C*  0 , *C*  *const* **.** | **10.** ctg *x*   1 **.**  sin 2 *x* |
| **2.***xn*   *n*  *xn*1, *n*  *R* **.** | **11.** arcsin *x*  1  1  *x*2 |
| **3.** *ex*   *ex* **.** | **12.** arccos *x*   1 **.**  1  *x*2 |
| **4.** *ax*   *ax*  ln *a* **.** | **13.** arctg *x*  1 **.**  1  *x*2 |
| **5.** ln *x*  1 **.**  *x* | **14.** arcctg *x*   1 **.**  1  *x*2 |
| **6.** log *x*  1 **.**  *a x*  ln *a* | **15.** sh *x*  ch *x* **.** |
| **7.** sin *x*  cos *x* **.** | **16.** ch *x*  sh *x* **.** |
| **8.** cos *x*  sin *x* **.** | **17.** th *x*  1 **.**  ch2 *x* |
| **9.** tg *x*  1 **.**  cos2 *x* | **18.** cth *x*   1 **.**  sh 2 *x* |

Операція знаходження похідної називається ***диференціюванням***.

Функція називається ***диференційованою в точці***, якщо вона має похідну в цій точці.

Значення похідної функції *y*  *f* *x* в точці *х*  *х*0 позначається

символами

*y* *х* *х*0 ,

*f* *x*0 ,

*y**x*

*х**х*0 ,

*df* *х*0 .

##### dx

**Приклад 1.1.** Знайти похідну функції

*y*  5.

За формулою диференціювання 1 отримуємо

*y*  5  0 .

**Приклад 1.2.** Знайти похідну функції

*y*  5*х* .

За правилом диференціювання 1 отримуємо

*за формулою*



*y* 

5  *х*

####  5 

*х*

####  5 

*х*1  *диференціювання* 2

5 1 *х*

11

 5  *х*0

####  5 1  5.

**Приклад 1.3.** Знайти похідну функції

*y*  5*х*3.

За правилом диференціювання 1 отримуємо

*за формулою*

*y*  5  *х*3 

 5  *х*3 

*диференціювання* 2

####   5  3  *х*31

 15  *х*2

 15*х*2 .

**Приклад 1.4.** Знайти похідну функції

*y*  *x*5  7*x*3  8*x*  22 .

За правилами диференціювання 1 і 2 з використанням формул диференціювання 1 і 2 отримуємо

*y*  *x*5  7*x*3  8*x*  22  *x*5   7  *x*3   8  *x*1   22 

####  *x*5   7  *x*3   8  *x*1   22  5  *x*51  7  *x*31  8  *x*11  0 

 5  *x*4

 7  *x*2

 8  *x*0

 5*x*4

 7*x*2

####  8 1  5*x*4

 7*x*2

 8.

**Приклад 1.5.** Знайти похідну функції

*y*  *х*8  ln *x* .

За правилом диференціювання 3 та формулами диференціювання 2 і 5 отримуємо

*y*  *х*8  ln *x*

 *х*8   ln *x*  *х*8  ln *x*

####  8  *х*81  ln *x*  *х*8  1 

##### х

 8  *х*7  ln *x*  *х*7  8*х*7 ln *x*  *х*7 .

3*x*

**Приклад 1.6.** Знайти похідну функції

*y*  *х*3 .

За правилом диференціювання 4 та формулами диференціювання 2 і 4

отримуємо

3*х*   *х*3  3*х*  *х*3  3*х*  ln 3 *х*3  3*х*  3 *x*31

*у*   3 2 

*х* 

*х*32 

####  3*х*  ln 3  *х*3  3*х*  3  *x*2

*х*6

 *x*2  3*х*  ln 3  *х*  3*х*  3 

*х*6

 3*х*  ln 3 *х*  3*х*  3 

*х* 4

3*х*  ln 3 *х*  3 

*х* 4

3 *х* *x* ln 3  3

.

*х* 4

**Приклад 1.7.** Знайти похідну функції

*y*  2 .

*х*5

Запишемо функцію *у* в вигляді

*y*  2

*х*5

####  2  1

*х*5

 2  *х* 5. За правилом

диференціювання 1 і формулою диференціювання 2 отримуємо

#### *y*  2  *х* 5   2  *х* 5   2  *х* 51  2  *х* 6  2  1  2 .

*х*6 *х*6

**Приклад 1.8.** Знайти похідну функції

*y*  7

*х*5 .

5

Запишемо функцію *у* в вигляді диференціювання 2 отримуємо

*y*  7 *х*5

 *х* 7 . За формулою

 5  5

5 1 5

5  7

5 57

5  2

5  2

#### 5 1

*y*   *х* 7    *х* 7   *х* 7 7 

 *х* 7   *х* 7   *х* 7   

####  

7

7

 

####  5  1 .

7 *х*2

7

#### 7 7 7 7 2

*х* 7

**Приклад 1.9.** Знайти похідну функції

*y*  1  *x*2  sin *x* 

 1 .

*х*3

5 *х*3

3

Запишемо функцію *у* в вигляді

*y*  1  *x*4  sin *x*  *х* 5

* *х*3 . За

правилами диференціювання 2 і 3 та формулами диференціювання 2 і 7:

#### 3 

*y*  1  *x*4 

 sin *x*  1  *x*4

 sin *x*

 

  *х*5 

####  

 *х*3 

 0  4*х*

41

 sin *x* 

  3

31

   

3  2

####  1  *x*4

 cos *x*  *х*5

#### 5

  3

*х*31  4*x*3 sin *x* 

1  *x*4

cos *x*   *х* 5 

#### 5

 3*х*4

 4*x*3 sin *x*  1  *x*4 cos *x*  3  1

#### 5

5 *х*2

 3 . .

*х*4

**Приклад 1.10.** Знайти похідну функції

*x*

*y*  .

2

#### arcsin *x*

За правилом диференціювання 4 та формулами диференціювання 4 і 11 отримуємо

*у* 

2*х* 

####  arcsin *x*  2*х*

 arcsin *x*  

arcsin *x*2

2*х*  ln 2  arcsin *x*  2*х* 

arcsin *x*2

1

1  *x*2

*х* 

2  ln 2  arcsin *x*  

 1  *x*2 

#### 

arcsin 2 *x*



*х*

#### 1  ln 2  arcsin *x*   1

 

1  *x*2

2*х* 

1  *x*2

#### arcsin 2 *x*



2

####  2 

1  *x*2  arcsin 2 *x*

ln 2  arcsin *x* 

1  *x*

 1 .

**Приклад 1.11.** Знайти похідну функції

*y*  *x*3  5 в точці

*х*0  4 .

За правилом диференціювання 1 з використанням формул диференціювання 1 і 2 отримуємо

*y*  *x*3  5  *x*3   5  3  *x*31  0  3  *x*2  3*x*2 .

Знайдемо значення похідної в точці *у**х*0  :

*у*4  3  42  48.

Завдання для аудиторної роботи

* + 1. Знайти похідну функції
    2. Знайти похідну функції
    3. Знайти похідну функції

*y*  5*x*3  4*x*2

*y*  *e x*  cos *x* .

*x*3

*y*  .

#### sin *x*

 6*x*  2 .

* + 1. Знайти похідну функції

*y*  8*x*3  3 *x* .

* + 1. Знайти похідну функції

*y*  4

*x*5

* *x*3

#### 3

 5*x*  7 .

* + 1. Знайти похідну функції

*y*  2

7 *x*4

 5*x*2

#### 2

 5*x* .

* + 1. Знайти похідну функції

*y*  5*x*4  3 в точці

*х*0  2 .

Завдання для самостійної роботи

* + 1. **с.** Знайти похідну функції

 *x*3  *x*2

#### 4 3

*y*

 7*x*  8.

* + 1. **с.** Знайти похідну функції

*y*  *x*3  *tgx* .

* + 1. **с.** Знайти похідну функції

*y*  log3 *x* .

3*x*

* + 1. **с.** Знайти похідну функції
    2. **с.** Знайти похідну функції

*y* 

*y*  6

5 *x*4

*x*4

#### 7

 *x*6 .

6



*x*

####  5*x*2

2

4*x*3

####  14 .

8

* + 1. **с.** Знайти похідну функції *y* 

  6*x* .

#### 3

8 *x*3

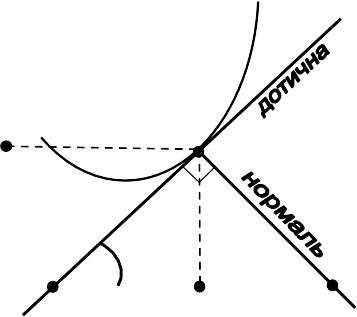
* + 1. **с.** Знайти похідну функції

*y*  3*x*5  6 в точці

*х*0  3.

§ 1.2. ГЕОМЕТРИЧНИЙ ЗМІСТ ПОХІДНОЇ

**Геометричний зміст похідної**:



*у*

*y*  *f* *x*

*у*

*М* 0

0



0 *А*

*N*

*х*0

*В х*

* кутовий коефіцієнт дотичної до

графіка функції *y*  *f* *x* в точці *М* 0 *x*0 , *y*0  або

* тангенс кута  (рис.1.1), що утворює

дотична до кривої в точці

*М* 0 з додатним

напрямом осі *Ох* – ***це похідна функції***

*f* *x*0 :

Рис. 1.1

*k*  *tg* 

*f* *x*0  . **(1.2)**

Рівняння дотичної

*АМ* 0

до кривої

*y*  *f* *x* в точці *М* 0 *x*0 , *y*0 , де

*y*0 

*f* *x*0  (рис. 1.1):

. **(1.3)**

*y*  *y*0  *f* *x*0 *x*  *x*0 

Використовуючи формули (1.3) можна знайти довжину відрізка

*АМ* 0 ,

яка називається ***довжиною відрізка дотичної*** та довжину відрізка *АN* , яка називається ***піддотичною***.

***Рівняння нормалі*** *ВМ* 0 до кривої *y*  *f* *x* в точці *М* 0 *x*0 , *y*0 , де

*y*0 

*f* *x*0 

(рис. 1.1):

. **(1.4)**

*y*  *y*  

0

1

*f* *x* 

*x*  *x* 

0

0

Використовуючи формули (1.4) можна знайти довжину відрізка

*BМ* 0 ,

яка називається ***довжиною відрізка нормалі*** та довжину відрізка *ВN* , яка називається ***піднормаллю***.

**Приклад 1.12.** Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої т. *x*0  3 .

*у*  *х*2 в

Оскільки

*f* *х*0  

*f* *x*  *х*2 , то

*f* 3  2  3  6.

*f* *x*  *х*2   2*х* .

Знайдемо *y*0 : Отже,

*y*0  *f* *x*0   *f* 3  3

2

 9 .

рівняння дотичної:

*y*  9  6*x*  3

 6*x*  *у*  9  0;

рівняння нормалі:

*y*  9   1 *x*  3 

### 6

*x*  6 *y*  57  0 .

Завдання для аудиторної роботи

* + 1. Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої

*x*0  2 .

* + 1. Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої

*x*0  1. Знайти довжини відрізків дотичної і нормалі в цій точці.

*у*  *х*4

*у*  5*х*2

в т.

в т.

* + 1. В яких точках кутовий коефіцієнт дотичної до параболи

*y*  *x*3  1 дорівнює 3?

* + 1. В якій точці дотична до параболи

*y*  *x*3

паралельна осі *ОХ* ?

* + 1. Під яким кутом перетинаються гіпербола

*y*  ?

*x*

*y*  1

*x*

і парабола

**Завдання для самостійної роботи 1.2.1с.** Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої

*x*0  5.

* + 1. **с.** Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої

*у*  3*х*2

*у*  5*х*2

в т.

в т.

*x*0  2 . Знайти довжини відрізків піддотичної і піднормалі в цій точці.

* + 1. **с.** У якій точці дотична до параболи віссю *ОХ* ?

*y*  *x*3

утворює кут

450 з

* + 1. **с.** Під якими кутами перетинаються парабола

3*x*  *y*  2  0 ?

*y*  *x* 2

і пряма

* + 1. **с.** Скласти рівняння дотичних до кривої перетину з віссю *ОY* .

*y*  4

4  *x*2

в точці

§ 1.3. ФІЗИЧНИЙ ЗМІСТ ПОХІДНОЇ

**Фізичний зміст похідної**: якщо деякий процес описується функцією

*у*  *f* *t* , то похідна *у*  *f* *t*  є швидкістю зміни цього процесу в часі.

***Прискорення*** – це похідна від швидкості, тобто *у*  *f* *t* .

**Приклад 1.13**. Задано закон зміни шляху матеріальної точки

*s**t*   3*t* 3  *t* 2  *t* 1.

Знайти значення швидкості та прискорення цієї точки в момент часу

*t*0  2.

Швидкість: Прискорення:

*v**t*  *s**t*  9*t*2  2*t*  1;

*v**t*0   *v*(2)  *s*(2)  9  22  2  2  1  41 (од.).

*a**t*   *s**t*   18*t*  2;

*a**t*0   *a*(2)  *s*(2)  18  2  2  38 (од.).

Завдання для аудиторної роботи

* + 1. Задано закон зміни шляху матеріальної точки

*s**t*   5*t* 5  *t* 4  3*t* 1.

Знайти значення швидкості та прискорення цієї точки в момент часу

*t*0  1.

* + 1. Задано закон зміни шляху матеріальної точки

*s**t*   6*t* 4  4*t* 3  2*t*  1.

Знайти значення швидкості та прискорення цієї точки в момент часу

*t*0  3.

* + 1. Задано закон зміни шляху матеріальної точки

*s**t*   2*t* 3  *t* 2  3*t*  21.

Знайти значення швидкості та прискорення цієї точки в момент часу

*t*0  2.

**Завдання для самостійної роботи 1.3.1с.** Задано закон зміни шляху матеріальної точки

*s**t*   7*t* 7  2*t* 4  3*t*  1.

Знайти значення швидкості та прискорення цієї точки в момент часу

*t*0  1.

* + 1. **с.** Задано закон зміни шляху матеріальної точки

*s**t*   *t* 6  2*t* 4  5*t*  9 .

Знайти значення швидкості та прискорення цієї точки в момент часу

*t*0  2.

* + 1. **с.** Задано закон зміни шляху матеріальної точки

*s**t*   3*t* 3  *t* 2  3*t*  5.

Знайти значення швидкості та прискорення цієї точки в момент часу

*t*0  3.

§ 1.4. ПОХІДНА СКЛАДЕНОЇ ФУНКЦІЇ

Нехай

*y*  *f* *u*, а

*u*  *x*, тоді

*y*  *f*  *x*

– складена функція з

проміжним аргументом *u* і кінцевим аргументом *х* .

**Похідна складеної функції** обчислюється за формулою:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *y*  *f* *u*, *u*  *x*  *y**x*  *yu* *u**x* | | |
|  | *y**x*  *f*  *x**x* | . |

або

(1.5)

**Приклад 1.14.** Знайти похідну складеної функції

*y*  cos3 *x* .



тому

Для функції

*y*  cos3 *x*  cos *x*3

останньою дією є піднесення до кубу,

*y*  *u*3 , де проміжний аргумент *u*  cos *x* . За формулою (1.5) отримуємо

*y*  *y* *u*  *u*3    cos *x*   3*u* 2   sin *x*  3cos *x*2  sin *x* 

*х u х u х*

 3cos2 *x*  sin *x* .

**Приклад 1.15.** Знайти похідну складеної функції *y*  cos 3*x* .

Для функції *y*  cos3*x*  cos3*x* останньою дією є дія cos, тому

*y*  cos *u* , де проміжний аргумент *u*  3*x* .

За формулою (1.5) отримуємо

*y**х*  *yu* *u**х*  cos*u**u*  3*x**х*  sin *u*  3  sin 3*x*  3  3sin 3*x* .

**Приклад 1.16.** Знайти похідну складеної функції *y*  ln *tg*5*x* .

1. спосіб. Для функції

*y*  ln *tg*5*x*

останньою дією є взяття логарифму,

тому

*y*  ln *u* , де проміжний аргумент

*u*  *tg*5*x* . Проміжним аргументом

для виразу *tg*5*x*

є *v*  5*x* . Отже, задана функція має вигляд

*y*  ln *u* ,

Тоді формулою (1.5) отримуємо

*u*  *tgv* ,

*v*  5*x* .

*y*  *y* *u*  *v*

 ln *u*   *tgv*   5*x* 

####  1  1

 5  1  1

####  5 

*х u v x*

*u v x*

*u* cos2 *v*

*tgv* cos2 *v*

 cos *v* 

#### sin *v*

1

#### cos2 *v*

 5 

1

#### sin *v*

 1

#### cos *v*

 5 

5 

sin *v*  cos *v*

1

#### sin *v*

cos *v*

 1

#### cos2 *v*

 5 

####  5

sin 5*x*  cos 5*x*

####  2  5

2  sin 5*x*  cos 5*x*

 10 .

#### sin 10*x*

1. спосіб. На практиці проміжні аргументи окремо не виписують, але похідні від них позначають штрихом.

ln *tg*5*x*

 1

*tg*5*x*

 *tg*5*x* 

 1

*tg*5*x*

 1

#### cos2 5*x*

 5*x*

 1

*tg*5*x*

 1

#### cos2 5*x*

 5 

####  1 

sin 5*x*

#### cos 5*x*

 5

1

#### cos2 5*x*



####  5 

cos 5*x* 

#### sin 5*x*

2  5

1

#### cos2 5*x*



####  5 

10

1

#### sin 5*x*

.

 1

#### cos 5*x*

 5 

#### sin 5*x*  cos 5*x*

2  sin 5*x*  cos 5*x*

#### sin10*x*

Завдання для аудиторної роботи

* + 1. Знайти похідну складеної функції
    2. Знайти похідну складеної функції
    3. Знайти похідну складеної функції
    4. Знайти похідну складеної функції
    5. Знайти похідну складеної функції
    6. Знайти похідну складеної функції

*y*  sin5 *x* .

*y*  sin 5*x* .

*y*  .

5 *x*4  3*x*

*y*  *ctgх*2 .

*y*  ln 2*x* .

#### 5

*y*  arccos 3 .

##### x

* + 1. Знайти похідну складеної функції

*y*  sin4 log2

#### 3

*x*3 .

* + 1. Знайти похідну складеної функції

*y*  *tg*4 .

*x*7

Завдання для самостійної роботи

* + 1. **с.** Знайти похідну складеної функції
    2. **с.** Знайти похідну складеної функції **1.4.3с.** Знайти похідну складеної функції **1.4.4с.**. Знайти похідну складеної функції
    3. **с.**. Знайти похідну складеної функції
    4. **с.** Знайти похідну складеної функції

*y*  cos5 *x* .

*y*  cos 5*x* .

*y*  .

4 *x*3  5*x*

*y*  *tgх*2 .

*y*  ln *x* .

#### 2

*y*  arcsin 2 .

##### x

* + 1. **с.** с. Знайти похідну складеної функції

*y*  cos2 ln *x*5 .

* + 1. **с.** с. Знайти похідну складеної функції

*y*  *ctg*3 4 .

*x*5

§ 1.5. ПОХІДНА ФУНКЦІЇ, ЯКА ЗАДАНА ПАРАМЕТРИЧНО

Нехай функція *y* 

*f* *x* задана параметрично рівняннями

*x*   *t* ,

 *y*  *t* ,



  *t*   . **(1.6)**

**Похідна функції, яка задана параметрично** обчислюється за формулою

. **(1.7)**

*y*  

*dy y*

*t*



*x*

*dx x*

*t*

**Для похідної другого порядку** аналогічно маємо

*y* 

*d y* *y* 

2

*x*

*dx*2







*x*

*t*

*x*

*t*

. **(1.8)**

**Приклад 1.17.** Знайти похідну

*y**x*

параметрично заданої функції

*x*  *tgt*;

#### 

Знайдемо похідні по *t*

 *y* 

#### 



1 .

#### cos2 *t*

*xt*  *tgt* 

1 ,

#### cos2 *t*

*yt*

####  1 

 cos2 *t* 







1  cos2 *t*  1 cos2 *t* 

 cos2 *t* 2

 0  cos2 *t*  1 2  cos *t*  cos *t*  

#### cos4 *t*

 0  2  cos *t*   sin *t* 

#### cos4 *t*

###### 2sin *t*

2  cos *t*  sin *t* cos4 *t*

 2 sin *t* .

#### cos3 *t*

Отже,

*y**x* 

*yt*

*x*

######  cos3 *t*

1

2sin *t*

3



:

1 2sin *t*

2 3



 cos2 *t*

###### 1

 2sin *t*

cos*t*

 2*tgx* .

*t*

###### cos2 *t*

cos *t*

cos *t*

cos *t*

**Приклад 1.18.** Знайти похідну *y**x*

#### 

параметрично заданої функції

*t* 2

4 *t*

*x* 

#### 

 *y* 

 ;

#### 2

5  *t* .

3 *t* 2

####  2

Знайдемо похідні по *t*

#### 

*x*  

3



*t*  *t* 

 4

2



*t* 

 1

 *t* 4

 1  *t*

####  

  *t*

2





#### 1 

4 



 1  *t* 2 

 1  *t*

1 1

4

####  1  2  *t*

21

 1  *t*  4 

####  

2

  

#### 2    2 4 2 4

 1  2  *t*  1  1

4 *t* 3

* *t*,

#### 2 4

 5 *t*    2 

1





3

 2 

3





1



####  2 

 2 1

3

*yt*  

####    5  *t*

2

3 *t* 2

  *t* 

#### 2

 5  *t*

   *t* 

#### 2

 5     *t* 

#### 3

       

####  1 1   10

2 3

 5

 *t* 3

####  1   10  1

2 3

3 *t* 5

 1 .

#### 2

Отже,

*y**x* 

*yt* *x*

1 1

###### 



4

 *t*

4 *t* 3

 10  1

*t*

1

###### 

 *t*

4  4 *t* 3

 1  10

1  *t*  4 

######   

4 *t* 3

4  4 *t* 3

20  3  3 *t*5

 1

6  3 *t*5

3 3 *t*5 2

3 *t*5

4 *t*3

3 *t*5

3  3 *t*5 2

####   1  4  *t* 

4 *t*3

4  4 *t*3

: 20  3 

####   1  4  *t* 

 6  

20  3  3 *t*5

1  4  *t*  4 *t* 3

5

6  3 *t*5

3  *t* 3

4  4 *t*3

#### 1  4  *t*  4 *t*3 3

5  3

3  12 *t* 11

####   

20  3  3 *t*5

3  

2  *t* 4

  *t* 3

#### 2

20  3  3 *t*5

4  

 *t*12 

11 3 11

4 *t*3

40  6 3 *t*5

11 1 3  11

11 8

  3 *t* 12

40  63 *t*5

 12 *t*1  *t* 4  *t*12

  3*t*12

 12 *t*

4 12

  3*t*12

 12 *t* 3 

####   312 *t*11  12

40  63 *t*5

40  63 *t*5

3 *t*8

40  63 *t*5

.

Завдання для аудиторної роботи

**1.5.1..** Знайти похідну

*y**x* параметрично заданої функції

*x*  4 cos *t*;

 *y*  5sin *t*.



**1.5.2..** Знайти похідну

*y**x*

параметрично заданої функції

*x*  4*t* 3  2*t* 2;

 *y*  *t* 2.



**1.5.3..** Знайти похідну

*y**x*

параметрично заданої функції

*x*  2 sin *t*;

####  *y*  4 cos 2*t*.



**1.5.4..** Знайти похідну

**1.5.5..** Знайти похідну

*y**x* параметрично заданої функції

*y**x* параметрично заданої функції

*x*  *tgt*;

 *y*  cos *t*.



*x*  sin *t*;

 *y*  *ctgt*.



Завдання для самостійної роботи

* + 1. **с.** Знайти похідну

*y**x* параметрично заданої функції

*x*  4 sin *t*;

 *y*  5cos *t*.



* + 1. **с.** Знайти похідну

*y**x*

параметрично заданої функції

*x*  5*t* 4

 3*t*5;

 *y*  *t*5.



* + 1. **с.** Знайти похідну

*y**x*

параметрично заданої функції

*x*  2 cos *t*;

####  *y*  4 sin 2*t*.



* + 1. **с.** Знайти похідну
    2. **с.** Знайти похідну

*y**x* параметрично заданої функції

*y**x* параметрично заданої функції

*x*  cos *t*;

 *y*  *tgt*.



*x*  *ctgt*;

 *y*  sin *t*.



§ 1.6. ПОХІДНА НЕЯВНО ЗАДАНОЇ ФУНКЦІЇ

Нехай неявна функція

*y**х* задана рівнянням

*F* *x*, *y*  0 . **(1.9)**

Щоб знайти **похідну неявно заданої функції** *y**х*, потрібно

1. взяти похідну по *x* від обох частин рівняння

*y* функцією від *x* :

*F* *x*, *y*  0 , вважаючи

 *F* *x*,*y* *х* 0 *х*.

1. отримане рівняння розв’язати відносно похідної *y*.

**Приклад 1.19.** Знайти похідну неявно заданої функції

*x*2  *y* 2  5*x*  7 *y*  23.

Диференціюємо обидві частини рівності по *х* , вважаючи *у* функцією від *х* :

*x*2  *y* 2  5*x*  7 *y*  23  ,

*х*

*х*

2*x*  2 *y*  *y*  5  7 *y*  0 .

Отримане рівняння розв’язуємо відносно *y*:

*y*2 *y*  7  5  2*x* 

*y* 

5  2*x* .

2 *y*  7

Завдання для аудиторної роботи

* + 1. Знайти похідну неявно заданої функції

*x*3  *x*2 *y* 4

* ln *y*  8.
  + 1. Знайти похідну неявно заданої функції

*x*3  *x*2 *y* 4  *y* 2

 26 .

* + 1. Знайти похідну неявно заданої функції

*x*2 

*y*  *arcctgy* .

* + 1. Знайти похідну неявно заданої функції ln*x*2 

*y* *x*

*y*

 4 .

* + 1. Знайти похідну неявно заданої функції 2*x*
* 2 *y*

 2*x*  *y* .

Завдання для самостійної роботи

* + 1. **с.** Знайти похідну неявно заданої функції 3*x*4 *y*3  lg *y*  *x*4

 5.

* + 1. **с.** Знайти похідну неявно заданої функції

4*x*5 

*y*3

*x*2 *y*

 5

 9.

* + 1. **с.** Знайти похідну неявно заданої функції

*x*  5 *y*  arccos *y* .

* + 1. **с.** Знайти похідну неявно заданої функції

2*xy*  arcsin*x*  *y*.

* + 1. **с.** Знайти похідну неявно заданої функції 5*x*
* 5*y*

 5*x*  *y* .

§ 1.7. ЛОГАРИФМІЧНЕ ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ

**ПРАВИЛО 1.1.** Якщо функція

*y*  *f* *x* являє собою добуток кількох

множників, то перш ніж диференціювати функцію, її можна прологарифмувати.

**Приклад 1.20.** Знайти похідну функції *y*   *tg* 2 *x*  .

3 sin *x*

4 cos *x*

Прологарифмуємо обидві частини даного рівняння:

ln *y*  ln5 sin *x*  tg2 *x*  4 cos *x* , *властивість* : ln*a*  *b*  ln *a*  ln *b* 

#### ln *y*  ln  ln tg2 *x*  ln 4 cos *x* ,

5 sin *x*

ln *y*  lnsin *x*5

1

* lntg*x*2
* lncos *x*1 , *властивість* ln *ab*

 *b* ln *a*

ln *y*  1 ln sin *x*  2 ln tg*x*  1 ln cos *x* ,

4

#### 5 4

ln *y*  1 ln sin *x*  2 ln sin *x*  1 ln cos *x* ,  *властивість* : ln *a*  ln *a*  ln *b* 





5 cos *x* 4  *b* 

ln *y*  1 ln sin *x*  2  ln sin *x*  ln cos *x*  1 ln cos *x* ,

#### 5 4

ln *y*  1 ln sin *x*  2 ln sin *x*  2 ln cos *x*  1 ln cos *x* ,

#### 5 4

ln *y*   1  2 ln sin *x*   2  1  ln cos *x* ,

####    

   

5

4

#### ln *y*   1  2\5  ln sin *x*   2\4  1  ln cos *x* ,

   

####    

5

4

ln *y*  1  2  5  ln sin *x*   2  4  1 ln cos *x* ,

####    

   4 

5

ln *y*  11 ln sin *x*  7 ln cos *x* .

#### 5 4

Продиференціюємо обидві частини останньої рівності:

 



####  11  7 

ln *y*

####  ln sin *x*



4

5

ln cos *x*  ,

#### 

1  *y*  11  1  cos *x*  7  1

  sin *x*,

*y* 5 sin *x* 4 cos *x*

#### 1  *y*  11  cos *x*  7   sin *x* ,

*y* 5 sin *x* 4 cos *x*

*y* 

*y*  11  ctg*x*  7  tg*x*  ,

*y* 



####  4

5

 tg2 *x* 

5 sin *x*

4 cos *x*



#### 

 11 ctg*x*  7 tg*x* .



####  

5

4

 

Завдання для аудиторної роботи

* + 1. Знайти похідну функції

*y*  *x*5  (4  3*x*)3  (4  2*x*)6.

* + 1. Знайти похідну функції

*y*  *x*2 

 1  *x*.

7

5  *x*

*x*  22

* + 1. Знайти похідну функції *y*  3 1 .
    2. Знайти похідну функції

*x*  35  *x*  43

*y*  5*x*4  1  3*x*2  2  3*x* 16  8*x* 12*x*2 .

* + 1. Знайти похідну функції

*y*  ( *x*  6)

*x*  3 .

Завдання для самостійної роботи

3 *x*  3

* + 1. **с.** Знайти похідну функції

*x*  7

*y*  *x*3  (2  3*x*)4  (5  3*x*)5.

* + 1. **с.** Знайти похідну функції

*y*  *x*3 

 8  *x*2 . 2

* + 1. **с.** Знайти похідну функції

*x*  53

*y* .



3 1

* + 1. **с.** Знайти похідну функції

*x*  64  *x*  45

*y*  2*x*3  1 2*x*4  2  5*x* 16  8*x*2 .

4 *x*  5

* + 1. **с.** Знайти похідну функції

*y*  ( *x*  7)

*x*  9 .

§ 1.8. ПОХІДНА ПОКАЗНИКОВО-СТЕПЕНЕВОЇ ФУНКЦІЇ

Нехай задана ***показниково-степенева функція***

*у*  *uv*

, **(1.10)**

де *u*  *u**x*, *v*  *v**x* – диференційовані функції від *х* .

Для знаходження похідної застосовуємо операцію **логарифмічного диференціювання**:

* + - 1. задану функцію

*у*  *uv*

спочатку прологарифмувати:

ln *y*  ln*u*

*v* ;

*за властивістю логарифмів*

# 

ln *y*  *v*  ln *u* ;

* + - 1. знайти похідну як від неявно заданої функції:

ln *y*  *v*  ln *u*;

1  *y*  *v*  ln *u*  *v*  *u* ; *y*  *v* ln *u*  *v*  *u*;

*y u y u*

* + - 1. розв’язати отримане рівняння відносно *у* (домножуємо ліву і праву частину на *у* ):

*у* 

*y*  *v* ln *u*  *v*  *u*  ;

* + - 1. підставити значення

 

 

*u*

*у*  *uv* **:**

*у*  *u*  *v* ln *u*  *v* 

*v*





*u*



*u* 







.

**Приклад 1.21.** Знайти похідну показникові-степеневої функції

*y*  *x*sin 3 *x* .

Для знаходження похідної застосовуємо операцію логарифмічного диференціювання:

1. задану функцію

*y*  *x*sin 3 *x*

спочатку прологарифмуємо:

ln *y*  ln*x*sin3*x* 

*за властивістю логарифмів*

# 

ln *y*  sin 3*x*  ln *x* ;

1. знаходимо похідну як від неявно заданої функції:

1  *y*  sin 3*x*  ln *x*  sin 3*x*  ln *x* ;

##### y

*y*  *сos*3*x*  3  ln *x*  sin 3*x*  1 ;

##### y x

1. розв’язуємо отримане рівняння відносно *у* (домножуємо ліву і праву частину на *у* ):

*y*  *y*   *сos*3*x*  3  ln *x*  sin 3*x*  1  ;

1. підставляємо значення

 

 

*x*

*y*  *x*sin 3 *x* :

*y*  *x*sin3*x* 3*сos*3*x* ln *x*  1 sin 3*x*  .

####  

 

*x*

Завдання для аудиторної роботи

**1.8.1.** Знайти похідну показникові-степеневої функції

**1.8.1.** Знайти похідну показникові-степеневої функції

**1.8.1.** Знайти похідну показникові-степеневої функції

**1.8.1.** Знайти похідну показникові-степеневої функції

**1.8.1.** Знайти похідну показникові-степеневої функції

*у*  *x*5*x* .

*у*  *x*5 *x* .

*у*  ln *x*5*x* .

*у*  *x*5 *x* .

*у*  *x*cos 5*x* .

**Завдання для самостійної роботи 1.8.1с.** Знайти похідну показникові-степеневої функції

* + 1. **с.** Знайти похідну показникові-степеневої функції
    2. **с.** Знайти похідну показникові-степеневої функції
    3. **с.** Знайти похідну показникові-степеневої функції
    4. **с.** Знайти похідну показникові-степеневої функції

*у*  *x*6*x* .

*у*  *x*6 *x* .

*у*  ln 6*x*8*x* .

*у*  2*x*6 *x* 5 .

*у*  5*x**tg* 3*x* .

§ 1.9. ДИФЕРЕНЦІАЛ

* + 1. **Означення диференціала та його геометричний зміст**

Поняття диференціала тісно пов'язане з поняттям похідної.

***Диференціал*** наближено дорівнює приросту функції і пропорційний приросту аргументу. В наслідок цього диференціал широко застосовується при дослідженні різноманітних процесів і явищ.

Будь-який процес протягом достатньо малого проміжку часу змінюється майже рівномірно, тому дійсний приріст величини, що

характеризує процес, можна замінити диференціалом цієї величини на даному проміжку часу. Таку заміну називають ***лінеаризацією процесу***.

Нехай функція *у*  *f* *x* диференційовна в точці *х* *a*; *b*, тобто в

цій точці має похідну

*f* *х* 

lim *у* . Тоді з властивості нескінченно

*x* 0 *х*

малих величин можна записати

*у* 

*х*

*f* *х*   ,

  0 , при

*х*  0 :

*у*  *f* *x* *x*    *x* . **(1.11)**

***Диференціалом*** *dy* ***функції*** *у*  *f* *x* ***в точці*** *x* називається головна,

*dy*  *f* *x* *x* .

лінійна відносно *х* , частина приросту функції

*f* *x* в цій точці:

 **Якщо**

*у*  *х* **, то**

*у* 

*х*  1**, тому**

*dy*  *dx*  *x* **, тобто диференціал**

незалежної змінної x збігається з її приростом, тобто .

*dx*  *x*

Отже, ***диференціалом*** *dy* ***функції***

називати вираз

*dy*  *f* *x* *dx*

*y*  *f* *x*

***в точці*** *x* можна

. **(1.12)**

Формула (1.12) дає змогу розглядати похідну як відношення диференціала функції до диференціала незалежної змінної

. **(1.13)**

*f* *x*  *dy*

*dx*

**Геометричний зміст диференціалу** функції зрозуміти з рис.1.2.

Оскільки

*y*  *f* *x*

можна

*MN*  *y* , *PN*  *LN*  *tg*

 *x*  *f* *x*  *dx* 

*f* *x*  *f* *x* *dx*  *dy* .

Отже, диференціал функції *y*  *f* *x* при заданих значеннях *х* і *х*

дорівнює приросту ординати дотичної до кривої

*y*  *f* *x*

в точці *х* .

Приріст функції *у*

при цьому дорівнює приросту ординати кривої.

Таким чином, заміна приросту функції на її диференціал

*у*

*dу*

геометрично означає заміну ординати *АМ* кривої на ординату дотичної *АР* :

.

*у*  *dу*

*х* .

Зрозуміло, що така заміна доцільна лише для достатньо малих значень

*у*

*у*  *у*

*М*

*P*

*у*

*L*



*dу*

*N*

*у*



0

*х*

*х*  *х*

*A*

Рис. 1.2

*х*

*х*

* + 1. Властивості диференціала. Інваріантність диференціала

Оскільки диференціал функції дорівнює добутку її похідної на диференціал незалежної змінної, то властивості диференціалу можна легко дістати із відповідних властивостей похідної.

Якщо, наприклад, *u* і *v* – диференційовні функції від *x* ,*C* – стала, то маємо такі правила знаходження диференціалів:

Правила знаходження диференціалів

|  |
| --- |
| **1.** *dC*  0 **.** |
| **2.** *d* *C*  *u*  *C*  *du* **.** |
| **3.** *d* *u*  *v*  *du*  *dv* **.** |
| **4.** *d* *u*  *v*  *du*  *v*  *u*  *dv* **.** |
| **5.** *d*  *u*   *du*  *v*  *u*  *dv* **.**   *v*  *v*2    |

Особливо важливий висновок випливає з правила диференціювання

складної функції. Нехай *у*  *f* *x*  *f*  *t*  – складена функція з

проміжним аргументом *x*   *t*  і кінцевим аргументом *t* , причому функції

*f* *x* і  *t*  диференційовні в точках *x* і *t* . Тоді існує похідна *уt*  *у**x*  *xt*, а

отже, і диференціал

*dy* 

*уt*  *dt* 

*у**x*  *xt*  *dt* 

*у**x*  *dx* ,

. **(1.14)**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | *dy*  *у**x*  *dx* | |
| *dy*  *f* *x* *dx* | | і |

Порівнюючи формули

*dy* 

*у**x*  *dx* , одержуємо

властивість диференціала, яку називають ***інваріантністю (незмінністю) форми диференціала***: перший диференціал функції визначається за однією і тією ж самою формулою незалежно від того, чи змінна *х* є незалежною змінною, чи вона є функцією іншої змінної.

Проте слід зауважити, що формули (1.12), де *х* – незалежна змінна і (1.14), де *х* – залежна змінна, однакові лише на вигляд, а зміст їх різний.

Якщо у формулі (1.12)

*dx*  *х**t*  *dt*  *x* .

*dx*  *x* , то у формулі (1.14)

**Приклад 1.22.** Для функції

*у*  *f* *x*  1 *x*2

#### 2

знайти диференціал *dy* і

приріст *y*

при

*dx*  *х*  1

#### 2

і *dx*  *х*  1

#### 4

та порівняти їх.

За формулою (1.12):

*dy* 

*f* *x* *dx* 

*dy*   1

#### 

 2



*x*2 



#### 

 *dx* 

1  *x*2   *dx* 

#### 2

1  2  *х*  *dx*  *х*  *dx* .

#### 2

*dx*  1 :

#### 2

*dу*(2)  2  1  1.

2

   

1  1 2 1

2 1  2

#### 1 1  1 2

*y*  *f*

*x*  *x*  *f*

*x*  *у*  2  *x*  2 

* +  *x*

#### 2

 2  *x*

 2  *х*      *x* 

#### 2 4 2

   

####  1  *x*2  1  2  *х*  1  1  1  1  *x*2  1 *x*  1 .

2 2

#### *у*2  1  2  1  1  1  11 .

2 2 4 2 2 8

#### 2 8 8 8

1

*dу*(2)

*dx*  1

2

 *у*2

*х*  1 , оскільки

2

1  1 .

#### 8

*dx*  1 : *dу*(2)  2  1  1 .

#### 4 4 2

    1 

1 2 1

2 1  2

#### 1 1  1 2

*y*  *f*

*x*  *x*  *f*

*x*  *у*  2  *x*  4 

* +  *x*

#### 2

 2  *x*

 2  *х*      *x* 

#### 4 16 2

   

####  1  *x*2  1  2  *х*  1  1  1  1  *x*2  1 *x*  1 .

*у*2 

#### 1  2  1 

4 32

1 \16

#### 2

2

####  1 

32

2

116  1

32

#### 1

4 2 16 2

####  17 .

32

#### 16 17

4 32

*dу*(2)

*dx*  1

4

 *у*2

*х*  1 , оскільки

4

  .

#### 2 32 32

**Приклад 1.23.** Знайти диференціал функції

*y*  ln *tg*5*x* :

а) при довільних значеннях *x* і

*x* ;

б) при

в) при

*x*   ;

#### 20

*x*   і

#### 20

*x*  0,5.

а) користуючись формулою (1.12) знаходимо

*dy*  ln *tg*5*x*  *dx* 

1

*tg*5*x*

 *tg*5*x*  *dx* 

1

*tg*5*x*

 1

#### cos2 5*x*

5*x*  *dx* 

####  1

*tg*5*x*

 1

#### cos2 5*x*

 5  *dx* 

1

#### sin 5*x*

cos5*x*

 1

#### cos2 5*x*

 5  *dx*  cos5*x* 

#### sin 5*x*

1

#### cos2 5*x*

 5  *dx* 

####  1

sin 5*x*

####  10

 1

#### cos 5*x*

 *dx* ;

 5  *dx* 

5

#### sin 5*x*  cos 5*x*

 *dx* 

#### 2  5

2  sin 5*x*  cos 5*x*

 *dx* 

#### sin10*x*

б) *dy*

*x* 

20

####  10

sin10  





  *dx* 

10

#### sin 

 *dx*  10  *dx*  10  *dx* ;

#### 1

в) *dy*

*x*  

20

####  20 

 10

 

####  0,5 





2

#### 10

sin 

####  0,5  10  0,5  10  0,5  5.

1

*х* 0,5

#### sin10 



#### 20  2

Завдання для аудиторної роботи

* + - 1. Знайти диференціал функції
      2. Знайти диференціал функції
      3. Знайти диференціал функції

*y*  *x*2  ln *x* . *y*  *e*2*x*  14 . *y*  *ex*  ln *x* .

#### 2  *x*2

* + - 1. Знайти диференціал функції *y* 

*e*3*x* .

* + - 1. Знайти диференціал функції

*y*  ln 3*x*  1 .

*x*  3

Завдання для самостійної роботи

**1.9.2.1с.** Знайти диференціал функції **1.9.2.2с.** Знайти диференціал функції **1.9.2.3с.** Знайти диференціал функції **1.9.2.4с.** Знайти диференціал функції

*y*  *x*3  3*x* .

*y*  ln2*x*  3*x* .

*y*  *ex*  cos *x* .

*y* lg*x* 2  4*x*.

#### 1  *x*2

1  *x*

**1.9.2.5с.** Знайти диференціал функції

*y*  ln .

* + 1. ЗАСТОСУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛА В НАБЛИЖЕНИХ ОБЧИСЛЕННЯХ

Оскільки *y*  *dy* , то підставивши значення *y*  *f* *x*0  *x* *f* *x*0  і

*dy* 

*f* *x*0  *x* , отримаємо формулу **застосування диференціала в**

наближених обчисленнях:

. **(1.15)**

*f* *x*0  *x*  *f* *x*0   *f* *x*0  *x*

**Приклад 1.24.** Обчислити наближено ln1,5.

За умовою

*f* *x*  ln *x* ,

*x*0  *x*  1,5.

Нехай Обчислюємо

*x*0  1,

*f* *x*0   ln *x*0

*x*  0,5.

####  ln1  0.

Оскільки

*f* *x*  ln *x*  1 , то

##### x

*f* *х*0  

*f* 1  1  1.

#### 1

За формулою (1.14):

ln*x*0

Отже,

 *x*  ln *x*0

* ln *x*0

  *x* .

#### ln1,5  ln 1 0,5  0 1 0,5  0,5.

Завдання для аудиторної роботи

* + - 1. Обчислити наближено

*tg*460 .

* + - 1. Обчислити наближено sin 610 .
      2. Обчислити наближено
      3. Обчислити наближено
      4. Обчислити наближено

22,01 .

#### 9,03 .

log4 16,06 .

Завдання для самостійної роботи

* + - 1. **с.** Обчислити наближено **1.9.3.2с.** Обчислити наближено **1.9.3.3с.** Обчислити наближено
      2. **с.** Обчислити наближено
      3. **с.** Обчислити наближено

*tg*440 .

#### sin 590 .

33,01.

#### 25,05 .

log2 4,04 .

§ 1.10. ПОХІДНІ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ

Похідні порядків, вищих, ніж перший, називають ***похідними вищих порядків***.

***Похідною другого порядку*** називається похідна  *f* *x* і позначається

  *d* 2 *y*

*d*  *dу* 

*у* , *f* *x*,

,  .

Отже, за означенням

*dx*2

*dx*  *dx* 

. **(1.16)**

*f*  *x*   *f* *x*

**Приклад 1.25.** Знайти похідну другого порядку для функції

*y*  4sin *x* .

Знаходимо спочатку похідну першого порядку:

*y*  4sin *x*  4sin *x*  4cos *x* .

Для знаходження похідної другого порядку, знаходимо похідну від похідної першого порядку. Маємо

*y*  4cos *x*  4cos *x*  4sin *x* .

***Похідною*** *n* ***-го порядку*** називається похідна  *f* *n*1*x*

позначається

, яка

Отже, за означенням

*y* *n*  ,

*f* *n* 

*x*,

*d n y*

.

##### dxn

. **(1.17)**

*f* *n*  *x*  *f* *n*1 *x*

**Приклад 1.26.** Знайти похідну третього порядку від функції

*f* *x*  5*х*6  7*х*4  2*х*3  18*х*  27 .

#### *f* *x*  5  6  *х*61  7  4  *х*41  2  3 *х*31  18 1  0  30*х*5  28*х*3  6*х*2  18.

*f*  *x*  30  5  *х*51  28  3 *х*31  6  2  *х*21  0  150*х*4  84*х*2  12*х*.

#### *f* *x*  150  4  *х*41  84  2  *х*21  12 1  600*х*3  168*х*  12.

**Приклад 1.27.** Для функції

*n* -го порядку.

*f* *x*  4*х*3  15*х*2  2 ,

*f* *x*  *х*4  5*х*3  2*х*  7

*f*  *x*  12*х*2  30*х* ,

знайти похідну

*f* *x*  24*х*  30 ,

*f* 4*x*  24 ,

*f* 5*x*  0.

Отже, при

*n*  5 : *f* *n* *x*  0.

**Приклад 1.28.** Довести, що похідна *n* -го порядку функції

*y*  sin *x* є

вигляд

*y**n*   sin *x*  *n*  .

####  

2

 

Скористаємось методом математичної індукції. Перевіримо істинність

формули при *n*  1:

*y*  sin *x*  cos *x*  sin *x*    .

####  

2

 

Нехай формула є істинною при

*n*  *k* :

*y**k*   sin *x*  *k*  . Доведемо,

####  

2

 

що звідси випливає її істинність при тобто *y**k* 1  sin *x*  *k*  1  .

 

####  2 

Дійсно,

*n*  *k*  1,

*k* 1  *k*    

*k*  1 

 *k*   *k*  

*y*  *y*

 sin *x* 

#### 2 

 cos *x*  2   sin *x* 

#### 2  2  

      

 sin *x*  *k*  1 .

####  

2

 

Отже, згідно з методом математичної індукції,

sin *x**n*  sin *x*  *n* .

####  

 

2

**Формули для похідних** *n* **-го порядку** елементарних функцій:

1. . **(1.18)**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *xm* *n*   *m**m*  1*m*  2...  *m*  *n*  1*xm**n* | | |
| *a x* *n*   *a x*  ln*n a* | | . |
| *e x* *n*   *ex* | . | |

2. **(1.19)**

3. **(1.20)**

4. **(1.21)**

|  |  |
| --- | --- |
| sin *x**n*  sin *x*  *n*    2     | . |
| cos *x**n*  cos *x*  *n*    2     | |

5. . **(1.22)**

6. . **(1.23)**

ln *x*

*n* 



1*n*1  *n* 1!

*xn*

Для знаходження похідної *n* -го порядку **добутку функцій**

*v**x* використовують ***формулу Лейбніца***:

*u**x* та

(1.24)

*u*  *v**n*  *u**n*  *v*  *n*  *u**n*1  *v*  *n*  *n*  1  *u**n*2  *v*  ...

 *n*  *n*  1 *n*  2...  *n*  *k*  1  *u**n* *k*   *v**k*   ...  *u*  *v**n* .

2!

*k*!

**Приклад 1.29.** Знайти похідну

*y*25

для функції

*y*  *x*3  sin *x* .

Позначимо *u*  sin *x* і *v*  *x*3.

Обчислимо похідні для функції *v*  *x*3:

*v*  *x*3   3*x*2 , *v*  3*x*2   6*x* ,

*v*  6*x*  6 ,

*v*4  6  0.

Отже, при *k*  3 похідна *v**k*   0 .

Обчислимо похідні для функції *u*  sin *x*

за формулою (1.21),

враховуючи, що функція sin *x* періодична з періодом

2 :

*u*22  sin *x*22  sin *x*  22   sin*x*  11   sin*x*  10

   

####  

 2 

 sin*x*      sin *x*.

*u*23  sin *x*23  sin *x*  23   sin *x*  10  3   sin *x*  3  

####   cos *x*.

  

####   

  

#### 2   2 

2

*u*24  sin *x*24  sin *x*  24   sin*x*  12   sin *x*.

####  

2

 

*u*25  sin *x*25  sin *x*  25   sin *x*  12     sin *x*    

####  cos *x*.

  

####   

  

####   

2

2

2

За формулою Лейбніца (1.24) маємо

*u*  *v*25  *u*25  *v*  25*u*24  *v*  25  24 *u*23  *v*  25  24  23 *u*22  *v*.

#### 2! 3!

Підставимо значення обчислених похідних:

*y* 25  cos *x*  *x*3  25sin *x*  3*x*2  25  24   cos *x* 6*x*  25  24  23   sin *x* 6 

#### 2! 3!

 *x*3 cos *x*  75*x*2 sin *x*  1800*x* cos *x*  13800sin *x*.

Отже,

 *x*3  sin *x*25  *x*3 cos *x*  75*x*2 sin *x*  1800*x* cos *x*  13800 sin *x*.

Нехай **функція задана у параметричній формі** рівняннями

*x*  *x**t* , *y*  *y**t* , де параметр *t*  ,  .

**ПРАВИЛО 1.2**: якщо функції *x*  *x**t*  та *y*  *y**t* 

мають *перші*

*похідні*, причому *x**t*   0 при *t* ,  , а *x*  *x**t* 

– строго монотонна

функція, то першу похідну

*y**x* або

*dy* знаходять за формулою

##### dx

*y* 

*yt* .

*x x*

*t*

Якщо функції

*x*  *x**t*  та

#### 

*y*  *y**t*  мають *похідні другого порядку*, то

*d* 2 *y*

можна знайти другу похідну

*yx* або

*dx*2 :

*d* 2 *y*  *dy* ' 1

 *y*  1

*y*  *x*  *y*  *x*

#### 2     

  *t*  

 *tt t* 3 *t tt* .

*dx*  *dx* *t xt*

 *xt* 

*xt*

*xt*

. **(1.25)**

*d* 2 *y*  *yt**t*  *xt*  *yt*  *xt**t*

*dx*2

*xt*3

Аналогічно можна знайти *похідну будь-якого порядку*

*n*  2 :

**Приклад 1.30.** Знайти

*y**x*, якщо

*x*  cos *t* ,

. **(1.26)**

*y*  sin *t* , *t*  0;   .

*d n y* 

*dxn*





 *d n*1 *y* '

1

*dx*

*n*

1



*t*



*x*

*t*



Для того, щоб знайти *y**x* потрібно знайти *yt* та *xt*:

####  2 

*yt*  sin *t*   cos *t* , *xt*  cos *t*    sin *t* .

*y**x* 

*yt* *xt*

 cos *t*  *ctgt* .

#### sin *t*

Другу похідну

*y**x**x*

знайдемо за формулою (1.26):

*y*  *y* '  1

  *ctgt* '  1

####  1  1

  1 .

*xx x t*

*xt*

*t*  sin *t*

sin2 *t*

#### sin *t*

sin3 *t*

За цією ж формулою знайдемо і третю похідну:

 

 ' 1

 1 ' 1 

3 ' 1

*yxxx* 

*yxx*

*t*  *x*   sin3 *t* 

  sin *t* 

#### sin

*t t*   sin *t* 

*t*  *t*

  3sin4 *t*  cos *t* 

1

#### sin *t*

 3cos *t* 

#### sin4 *t*

1

#### sin *t*

  3cos *t* .

#### sin5 *t*

Отже,

*y**x*   3cos *t* .

#### sin5 *t*

*F* *x*,

Нехай **функція задана у неявній формі** у вигляді рівняння

*y*  0 . Диференціюючи це рівняння по *x* , знаходимо з отриманої

рівності першу похідну

*y**x*.

**ПРАВИЛО 1.3**: щоб знайти другу похідну, потрібно продиференціювати по *x* першу похідну і у отримане співвідношення

підставити знайдене перед цим значення *y**x*. Продовжуючи

диференціювання, можна послідовно знайти похідні будь-якого порядку. Всі вони будуть виражені через незалежну змінну *x* і функцію *y* .

**Приклад 1.31.** Знайти

*y**x*, якщо

*х*3  *у*4  *у*  5 .

Продиференціюємо рівняння

*х*3  *у*4  *у*  5  0

по *x* . Отримаємо:

Звідси знаходимо

#### 3*х*2  4 *у*3  *у*  *у*  0  0.

*у*4 *у*3  1 3*х*2 , отже

####  3*х*2

 

*у* 4 *у*3 1

3*х*2

#### 1  4 *у*3 .



Диференціюючи отриманий вираз *у* по *х* , маємо:

 2  2  3 2 3 

#### 

 3*х*

*у*  1  4 *у*3 

3*х*   1  4 *у*  3*х*  1  4 *у* 

 1  4 *у*3 2 

####  

 6*х*  1  4 *у*3  3*х*2  0  4  3 *у*2  *у*  6*х*  24*xу*3  36*х*2 *у*2  *у* 

1  4 *у*3 2 1  4 *у*3 2

6*х*  24*xу*3  36*х*2 *у*2  *у* підставимо у 6*х*  24*xу*

3

 36*х*2 *у*2

 3*х*2

#### 1  4 *у*3

 1  4 *у*3 2  1  4 *у*3 2 

6*х*  24*xу*3 1  4 *у*3  108*х*4 *у*2



1  4 *у*3 3

6*х*  48*xу*3  96*xу*6  108*х*4 *у*2



1  4 *у*3 3

6*х*  24*xу*3  24*xу*3  96*xу*6  108*х*4 *у*2

1  4 *у*3 3 



#### .

Завдання для аудиторної роботи

* + 1. Знайти похідну 2-го порядку для функції *y*  3cos *x* .
    2. Знайти похідну 2-го порядку для функції *y*  cos 3*x* .
    3. Знайти похідну 2-го порядку для функції

*y*  cos3 *x*

в точці

*х*   .

0 2

* + 1. Знайти похідну 2-го порядку для неявно заданої функції

2*x*  3*y*  sin *y* .

* + 1. Знайти похідну 2-го порядку для параметрично заданої функції

 *x*  3sin 2*t*,

####  *y*  2 cos2 *t*.



* + 1. Знайти похідну 4-го порядку для функції
    2. Знайти похідну *n* -го порядку для функції

*y*  2*х*5  6*х*3  *х*2

*y*  cos *x* .

 9 .

Завдання для самостійної роботи

* + 1. **с.** Знайти похідну 2-го порядку для функції *y*  3sin *x* .
    2. **с.** Знайти похідну 2-го порядку для функції *y*  sin 3*x* .
    3. **с.** Знайти похідну 2-го порядку для функції

*y*  sin3 *x*

в точці

*х*   .

0 4

* + 1. **с.** Знайти похідну 2-го порядку для неявно заданої функції

*x*2 *y*2  2*x*  3*y*  0.

* + 1. **с.** Знайти похідну 2-го порядку для параметрично заданої функції

 *x*  3sin2 *t*,

####  *y*  2 cos2 *t*.



* + 1. **с.** Знайти похідну 4-го порядку для функції

*y*  3*х*6  7*х*5  8*х*4  44 .

* + 1. **с.** Знайти похідну *n* -го порядку для функції

*y*  sin *x* .

§ 1.11. ДИФЕРЕНЦІАЛИ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ

Нехай

*y*  *f* *x*

* диференційована на деякому проміжку функція

незалежної змінної *x* .

Першим диференціалом (диференціалом першого порядку) dy

функції *y*  *f* *x* в точці *x* називається вираз (1.12)

*dy*  *f* *x* *dx* .

Тоді її диференціал *dy*  *f* *x* *dx* теж є функцією аргументу *x* і

можна знайти диференціал цієї функції. Диференціал диференціала *d* *dy*

функції *y*  *f* *x* називають її ***другим диференціалом***, або ди***ференціалом***

***другого порядку***. Його позначають *d* 2 *y*

або *d* 2 *f* *x*.

Знайдемо вираз для

*d* 2 *y* :

*d* 2 *y*  *d* *dy*  *d*  *f* *x* *dx*   *f* *x* *dx**dx* 

*f*  *x**dx*2.

Таким чином, отримали формулу для **другого диференціала**

(диференціала другого порядку):

. **(1.27)**

*d* 2 *y*  *f*  *x**dx* 2

Третім диференціалом (диференціалом третього порядку) d 3 y

функції *y*  *f* *x* в точці *x* називається диференціал від другого

диференціала *d* *d* 2 *y*. Його позначають *d* 3 *y* або *d* 3 *f* *x*.

Знайдемо диференціал третього поряду як диференціал диференціала

другого порядку:

*d* 3 *y*  *d* *d* 2 *y* *d* *f*  *x* *dx*2  *f*  *x* *dx*2 *dx*  *f* *x**dx*3.

Таким чином, отримали формулу для **третього диференціала**

(диференціала третього порядку):

. **(1.28)**

*d* 3 *y*  *f* *x**dx*3

Взагалі, *n* ***-м диференціалом*** (***диференціалом*** *n* ***-го порядку***) *d n y*

функції *y*  *f* *x* в точці *x* називається диференціал від диференціала

*n*  1-го порядку *d* *d n*1*y*. Його позначають *d n y* або *d n f* *x* і формула

для обчислення має вигляд:

*d n y*  *f* *n*  *x**dxn*

. **(1.29)**

**Приклад 1.32.** Знайти диференціал третього порядку

*y*  sin 5*x* .

*d* 3 *y*

функції

Оскільки

*y*  sin 5*x*  5cos5*x* ,

*y*  5cos 5*x*  5   5sin 5*x*  25sin 5*x* ,

*y*   25sin 5*x*  25  5cos5*x*  125cos5*x* , то за формулою (1.29):

*d* 3 *y*  125cos 5*xdx*3.

Наведені вище формули для диференціалів вищих порядків є вірними, якщо *x* є незалежною змінною. Якщо ж змінна *x* є функцією незалежної

змінної *t* , тобто *x*  *x**t* , то

*d* 2 *y*  *d* *dy*  *d*  *f* *x* *dx*  *d*  *f* *x**dx* 

*f* *x**d* *dx* 

*f*  *x**dx*2 

*f* *x**d* 2*x*.

Отже, **другий диференціал для складеної функції** має вигляд

*d* 2 *y*  *f*  *x**dx*2  *f* *x**d* 2*x*

. **(1.30)**

Таким чином, якщо у функції *y*  *f* *x* змінна *x* є залежною змінною

( *x*  *x**t* ), то

*d* 2 *y* 

*f*  *x**dx*2 . Ми бачимо, що диференціали вищих порядків

не мають властивості інваріантності форми.

**Приклад 1.33.** Знайти *d* 2 *y* , якщо *y*  *x*3, а *x*  *t*4  3, *t* – незалежна змінна.

Оскільки *y*  *f* *x* є складеною функцією, то використаємо формулу

(1.30). Знайдемо похідні і диференціали:

*f* *x*  *x*3, *f* *x*  *x*3   3*x*2 ,

*f*  *x*  3*x*2   6*x* .

*dx*  *x*  *dt*  *t*4  3  *dt*  4*t*3*dt* ,

*t*

*d* 2*x*  *xt**t*

 *dt*2  4*t*3   *dt*2  12*t*2*dt*2 .

Підставивши ці вирази у вираз для другого диференціалу отримаємо:

*d* 2 *y* ,

*d* 2 *y*  6*x*  4*t*3*dt* 2  3*x*2 12*t*2*dt*2  6*t*4  34*t*3*dt* 2  36*t*4  32 *t*2*dt*2 

 6*t* 4  316*t*6  6*t*6  18*t*2 *dt*2  6*t*4  322*t*6  18*t*2 *dt*2 

 12*t*2 *t*4  311*t*4  9*dt*2 .

Зауважимо, що аналогічний результат ми б отримали, записавши спочатку *y* як функцію незалежної змінної *t* , тобто підставивши у вираз для

*y**x*

функцію

*x*  *t*4  3

і далі використавши формулу (1.30) для отриманої

функції незалежної змінної *t* .

Завдання для аудиторної роботи

* + 1. Знайти диференціал 2-го порядку для функції

*y*  6*х* 4  7*х*3  8 .

* + 1. Знайти диференціал 2-го порядку для функції

*y*  4*х* .

* + 1. Знайти диференціал 2-го порядку для функції

*y*  sin 3*x*  cos 3*x* .

* + 1. Знайти диференціал 3-го порядку для функції
    2. Знайти диференціал *n* -го порядку для функції

Завдання для самостійної роботи

*y*  .

*y*  7  4 cos2 *x* .

7 *x* 4

* + 1. **с.** Знайти диференціал 2-го порядку для функції

*y*  5*х*6  3*х* 2  2 .

* + 1. **с.** Знайти диференціал 2-го порядку для функції

*y*  52*х* .

* + 1. **с.** Знайти диференціал 2-го порядку функції

*y*  sin 5*x*  cos5*x*  2.

* + 1. **с.** Знайти диференціал 3-го порядку для функції
    2. **с.** Знайти диференціал *n* -го порядку для функції

*y*  .

*y*  4  3sin2 *x* .

4 *x*3

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ ДО РОЗДІЛУ 1

1. Що називається похідною функції?
2. Охарактеризуйте символи *f* *x* і *f* *x*0 .
3. В чому полягає геометричний зміст похідної?
4. В чому полягає фізичний зміст похідної?
5. Сформулюйте правила диференціювання.
6. Сформулюйте формули диференціювання.
7. Як знаходиться похідна складеної функції. Навести приклад.
8. Як знаходиться похідна функції, яка задана параметрично. Навести приклад.
9. Як знаходиться похідна неявно заданої функції. Навести приклад.
10. У чому суть логарифмічного диференціювання. Навести приклад.
11. Як знаходиться похідна показниково-степеневої функції. Навести приклад.
12. Що називається похідною другого порядку?
13. Як знаходиться похідні вищих порядків.
14. Що називається диференціалом функції?
15. Який геометричний зміст диференціала функції?
16. Назвати властивості диференціала.
17. В чому полягає інваріантність форми диференціала?
18. Як знаходиться диференціали вищих порядків.

РОЗДІЛ 2. ТЕОРЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ

**§ 2.1. ТЕОРЕМИ ФЕРМА, РОЛЛЯ, КОШІ І ЛАГРАНЖА**

**Теорема Ферма.** Нехай функція

*f* *x*

неперервна на інтервалі *a*; *b* і

набуває свого найбільшого і найменшого значення у деякій точці *с* цього

інтервалу. Тоді, якщо в точці *с* існує похідна *f* *с*, то *f* *с*  0 .

**Геометричний зміст теореми Ферма**: якщо в точці *х*  *с* функція

*f* *x* досягає найбільшого і найменшого значення, то дотична до графіка

цієї функції в точці

*с*; *f* *c* паралельна осі *Ox* .

**Теорема Ролля.** Якщо функція *f* *x* неперервна на відрізку *a*;*b*,

диференційована на інтервалі *a*; *b* і на кінцях відрізка набуває однакових

значень *f* *a*  *f* *b*, то знайдеться хоча б одна точка *c* *a*;*b*, в якій

*f* *с*  0 .

**Геометричний зміст теореми Ролля**: якщо функція задовольняє умови теореми Ролля, то на графіку цієї функції знайдеться хоча б одна точка, в якій дотична паралельна осі *Ox* .

*у у*

*у* 

0 *a*

*с*1

*с*2

*b*

*x*

*у*  *f* *x*

*f* *x*

0 *a с b x*

Рис. 2.1

Рис. 2.2

**Приклад 2.1.** Перевірити справедливість теореми Ролля для функції

*f* *x*  *х*3  7*х*2  4*х*  11 на відрізку  2; 1.

Оскільки функція *f* *x* неперервна і диференційовна при всіх

значенях *х*  2; 1 і її значення на кінцях відрізку  2; 1 рівні між собою:

*f*  2   23  7   22  4   2  11  8  28  8  11  1,

*f* 1  13  7 12  4 1  11  1  7  4  11  1, то теорема Ролля на цьому відрізку справджується.

**Теорема Коші.** Якщо функції *f* *x* та  *x* неперервні на відрізку

*a*;*b*, диференційовані на інтервалі *a*;*b*, причому існує така точка *c* *a*;*b*, що

*f* *b* *f* *a*  *f* *с*

*b* *a* *с*

 *x*  0

*х* *a*;*b*,

. **(2.1)**

**Приклад 2.2.** Знайти на відрізку

0;  

точку, для якої справджується

теорема Коші для функцій



*f* *x*  sin *x*

#### 2 

і  *x*  1  cos *x* .

Оскільки

*a*  0 , *b*   , то

#### 2

*f* *a*  *f* 0  sin 0  0,

*f* *b* 

*f*     sin 

 1,

####  2  2

 

 *a*   0  1  cos 0  1  1  2 ,

 *b*       1  cos 

####  1  0  1.

 2  2

####  

Підставимо знайдені значення в формулу (2.1):

*f*    

 2 

 



*f* 0

#### 

*f* *с*

  , 

#### 1  0 

*f* *с*

  , 

*f* *с*

   1.

     0  *с*

1  2  *с*  *с*

####  2 



Отже,



*f* *с*   *с*.

Знайдемо похідні заданих функцій

*f* *x*  sin *x*  cos *x* .

 *x*  1  cos *x*  0   sin *x*   sin *x* .

Прирівняємо значення похідних в точці *c* :

*f* *с*   *с*,  cos *c*   sin *c*,  cos *c*  sin *c* , 

*c*   .

#### 4

Оскільки

  0;   , то точка *c*  

– шукана точка, для якої

#### 4  2  4

справджується теорема Коші для заданих функцій.

*f* *x*

**Теорема Лагранжа (формула скінчених приростів)**. Якщо функція

неперервна на відрізку *a*;*b*, диференційована на інтервалі *a*;*b*, то

знайдеться хоча б одна точка *c* *a*;*b*, в якій

*f* *b* *f* *a*  *f* *c**b*  *a*

або

(2.2)

*f* *b* *f* *a* 

*b*  *a*

**Приклад 2.3.** Знайти на відрізку 0;

*f* *c* . **(2.3)**

3 точку, для якої справджується

теорема Лагранжа для функції *f* *x*  *х*3  3*х*  1.

Функція *f* *x* неперервна і диференційована при всіх значеннях

*х*  0; 3.

Оскільки *a*  0 , *b*  3, то

*f* *a*  *f* 0  03  3 0  1  1,

*f* *b*  *f* 3  33  3 3  1  19 .

Підставимо знайдені значення в формулу (2.3):

*f* *b* *f* *a* 

*b*  *a*

*f* *c*, 

#### 19  1 

3  0

*f* *c*, 

*f* *c*  6.

Знайдемо похідну заданої функції:

*f* *x*  *х*3  3*х*  1  *х*3    3*х*  1  3*х*2  3  0  3*х*2  3. Знайдемо значення *с* з рівняння:

*f* *c*  6  3*с*2  3  6  3*с*2  9  *с*2  3  *с*   .

3

Відрізку 0; 3 належить лише точка *с*  , отже вона і є шуканою.

3

**Економічний зміст теореми Лагранжа**: нехай *y*  *f* *x* виражає

залежність випуску *y* від витрат *х* деякого специфічного ресурсу. Якщо

об’єм витрат збільшується від *а* до *b* одиниць, то різниця виражає відповідну зміну випуску.

*f* *b* *f* *a*

*f* *b*

*f* *a*

Відношення

*b*  *a*

показує, на скільки одиниць в середньому

змінюється випуск продукції, якщо витрати виросли на одну одиницю.

*f* *b* *f* *a*

Іншими словами,

*a*;*b*.

*b*  *a*

– середнє виробництво ресурсу на проміжку

*Граничне виробництво ресурсу* дорівнює значенню похідної функції випуску при даному рівні витрат. Якщо витрати ресурсу

ресурсу.

*c* одиниць, то

*f* *c* – відповідне їм граничне відношення

На основі теореми Лагранжа можна стверджувати, що для процесу

виробництва, який описаний функцією випуску *y*  *f* *x*, яка неперервна на

відрізку *a*; *b* і диференційована на *a*;*b*, існує хоча б один граничний

рівень витрат *c* , при якому граничне виробництво відповідного ресурсу співпадає з його середнім виробництвом.

Завдання для аудиторної роботи

* + 1. Перевірити справедливість теореми Ролля для функції

*f* *x*  ln cos *x*

на відрізку

  ;   .

####  3 3 

* + 1. Довести, що рівняння *x*5  5*x*  9  0

корінь.

має лише один дійсний

* + 1. Знайти на відрізку 0; 2

точку, для якої справджується теорема

Коші для функцій *f* *x*  2*х*3  5  1 і  *x*  *x*2  4 .

* + 1. Знайти на відрізку 1; *е* точку, для якої справджується теорема

Лагранжа для функції *f* *x*  ln *x* .

* + 1. На дузі параболи *f* *x*  *x*2  2*х*  3, обмеженій точками *А*2; 3

і *В*4; 11, знайти точку, дотична в якій паралельна хорді *АВ* .

Завдання для самостійної роботи

* + 1. **с.** Перевірити справедливість теореми Ролля для функції

*f* *x*  1  на відрізку  1; 1.

3 *х*2

* + 1. **с.** Перевірити справедливість теореми Ролля для функції

*f* *x*  1  на відрізку 1; 5.

3 *х*2  6*х*  5

* + 1. **с.** Знайти точку, для якої справджується теорема Коші для функцій

*f* *x*  *х*3 і  *x*  *x*2 .

* + 1. **с.** Знайти на відрізку 1; 4 точку, для якої справджується теорема

Лагранжа для функції *f* *x*  .

*x*

* + 1. **с.** Довести, що на відрізку  1; 2 теорему Лагранжа не можна

3 *x*2

застосувати для функцій

*f* *x*  4

*x*

та  *x*  1 

. Пояснити графічно.

§ 2.2. ПРАВИЛО ЛОПІТАЛЯ

При вивченні тем границі ми познайомилися з деякими способами розкриття невизначеностей. Розглянемо ще один спосіб, який ґрунтується на застосування похідних.

**Теорема 2.1 (розкриття невизначеності виду ).** Нехай функції

0

0

*f* *x*

та  *x*

визначені і диференційовані в околі точки

*х*0 , за винятком,

можливо, самої точки

*х*0 , причому

#### lim

*x**x*0

*f* *x*  lim*x*  0 ,

*x**x*0

і у вказаному околі *x*  0 . Тоді якщо існує границя відношення похідних

*f* *x*

lim , то існує і границя відношення функцій

#### lim

*f* *x*

і ці границі рівні

*x**x*0 *x*

між собою:

*x* *x*0 *x*

. **(2.4)**

lim *f* *x*  lim *f* *x*

*x**x*0 *x* *x**x*0 *x*

**Зауваження 1.** Теорема справедлива і у випадку

*х*0  .

**Зауваження 2.** Якщо похідні *f* *x* і *x* задовольняють ті самі

умови, що і функції *f* *x* та *x*, то теорему 1 можна застосовувати ще раз.

При цьому дістанемо

lim *f* *x*  lim *f* *x*  lim *f* *x*

*x**x*0 *x* *x**x*0 *x* *x**x*0 *x*

. **(2.5)**

Взагалі, теорему 1 можна застосовувати доти, поки не перейдемо до

*f* *n**x*

відношення похідних

 *n*  *x* :

. **(2.6)**

lim

*x**x*0 *x*

*f* *x*

 lim

*f* *n**x*

*x**x*0 

*n* 

*x*

**Приклад 2.4.** Обчислити границю

lim

*x*0

*е*5 *х*  *е*3 *х*

.

*x*

#### lim

*е*5 *х*  *е*3 *х*

2*x*

####  0  lim

0

 

*е*5 *х*  *е*3 *х* 

#### 

 lim

5*е*5*х*  3*е*3*х* 2

####  lim

5  3

#### 2

 1.

*x*0

  *x*0

2*x*

*x*0

*x*0

Теорема 2.2 (розкриття невизначеності виду

*f* *x* та  *x* визначені і диференційовані в околі точки

**).** Нехай функції

*х*0 та





#### lim

*x**x*0

*f* *x*  lim *x*   ,

*x**x*0

*x*  0 .

*f* *x*

Тоді якщо існує границя

 

*f* *x*

lim , то існує і границя відношення

*x**x*0  *x*

функцій

 

lim

*x* *x*0  *x*

і ці границі рівні між собою:

. **(2.7)**

lim *f* *x*  lim *f* *x*

*x**x*0 *x* *x**x*0 *x*

Виражене теоремами 1 і 2 правило обчислення границь ***називають правилом Лопіталя (Бернулі – Лопіталя)***.

**Приклад 2.5.** Обчислити границю

lim ln *x* .

  

*x* *x*2

1





lim





ln *x*  

####   lim

ln *x*

 lim *x* 

lim

#### 1   1

  0 .



*x* *x*2





*x*

*x*2 

*x* 2*x*

*x* 2*x*2

####  

 Невизначеності виду

0   **,**

   **,**

00 **,** 1 **,** 0

спочатку зводять до

**основних**

1. **і**  **, а потім застосовують правило Лопіталя.**

#### 0 

Невизначеність виду

0  

: якщо

lim

*x**x*0

*f* *x*  0,

lim *x*   ,то

*x**x*0

lim *f* *x**x*  lim *f* *x*  0

*x**x*0

*x**x*0

1

*x*

0

, **(2.8)**

або

. **(2.9)**

lim *f* *x**x*  lim *x*  

*x**x*0

*x**x*0

1

*f* *x*



**Приклад 2.6.** Обчислити границю

lim3  *х* *tg* *x* .

  



*x*  

  

*x*3

3  *х*

 0 

6

3  *х* 

#### lim 3

*х tg*

#### 0 lim

  lim 

*x*3 6

*x*3 *ctg* *x*

0

*x*3 

*x* 

####  lim 1

 lim 1

6

####  6 .

 *ctg* 

####  6 

*x*3

1  

sin 2 *x* 6

#### 6

*x*3   

#### 6

Невизначеність виду

  

**: якщо**

lim

*x**x*0

*f* *x*  lim *x*   **, то**

*x**x*0

1

1

*f* *x* *x*  *x* *f* *x*  0



1

*f* *x* *x*



1

0

, **(2.10)**

**Приклад 2.7.** Обчислити границю

lim*tgх*  sec *x*.

*x*

2



 

lim*tgх*  sec *x*      lim sin *x* 





#### 1   lim sin *x* 1  0 

   cos *x* cos *x*   cos *x* 0

*x x x*

2 2 2

####  lim

*x*

2

sin *x* 1

cos *x*

####  lim

*x*

2

cos *x*

#### sin *x*

 0  0 .

#### 1

Невизначеність виду

00

**: якщо**

lim

*x**x*0

*f* *x*  lim *x*  0 **, то**

*x**x*0

, **(2.11)**

lim *f* *x*  *e*

 *x* 

*x* *x*0

lim  *x* ln *f* *x* 

*x**x*0

 0  

**Приклад 2.8.** Обчислити границю

limsin 3*x**tg* 2 *x* .

*x*0

*x*0

limsin 3*x**tg* 2 *x*

*x*0

 00  *e* lim *tg* 2 *x*ln sin 3 *x*  .

Розглянемо окремо границю

lim*tg* 2*x* ln sin 3*x* :

*x*0

   

ln sin 3*x*



ln sin 3*x*

lim *tg* 2*x* ln sin 3*x*  0  

####  lim

    lim  

*x*0

#### 1  cos 3*x*  3

*x*0

*ctg* 2*x*

 *x*0 *ctg* 2*x*

2

####  lim sin 3*x*   3 lim*ctg*3*x*  sin 2 2*x*  3 lim sin

2*x* 

*x*0

#### 3

 1  2

#### sin 2 2*x*

2*x*2 3

2 *x*0

4*х*2

2 *x*0

*tg*3*x*

####   lim

2 *x*0 3*x*

####   lim

2 *x*0 3*x*

 2 lim *х*  0 .

*x*0

Отже,

*tg* 2 *x*

lim *tg* 2 *x*ln sin 3 *x*  0

limsin 3*x*

*x*0

 *ex*0

 *е*  1.

Аналогічно за формулою (2.11) розкривається невизначеність .

1

 4

**Приклад 2.9.** Обчислити границю

limcos 5*x*

*x*0

*x*2 .

4 lim   4 lncos5 *x*   4 lim  1 lncos5 *x* 

limcos 5*x* *x*2

*x*0





 1  *ex*0 *x*2



  *e*



 

*x*0 *x*2  .

Розглянемо окремо границю

#### lim

1. ln cos 5*x*  .

####  1

  

*x*0  *x*

ln cos 5*x*

2



#### 0

ln cos 5*x*

#### lim 2 ln cos 5*x*  

  0

####  lim

2     lim  

*x*0  *x*

#### 1



####   sin 5*x* 5

*x*0 *x*

0

*x*0

*x*2 

####  lim cos 5*x*   5 lim *tg*5*x*   5 lim 5*x*   25 .

*x*0

Отже,

2*x*

4  4  25 



1. *x*0 *x*

2 *x*0 *x* 2

limcos 5*x* *x*2  *e* 

2

*x*0



  *е*50 .

Аналогічно за формулою (2.11) розкривається невизначеність .

0

**Приклад 2.10.** Обчислити границю

limln *ctgx**tg* 3 *x* . *x*0

*x*0

limln *ctgx**tg* 3 *x*

*x*0

 0  *e* lim *tg* 3 *x*lnln *ctgx* .

Розглянемо окремо границю lim*tg*3*x* ln ln *ctgx* :

*x*0

##    

ln ln *ctgx*



ln ln *ctgx*

lim *tg*3*x* ln ln *ctgx*  0  

####  lim

    lim  

*x*0

#### 1  1    1 

 





*x*0

*ctg*3*x*

 *x*0 *ctg*3*x*

####  lim

ln *ctgx*

*ctgx* 

sin2 *x* 

#### 1 lim

sin2 3*x*

####  1 lim

sin2 3*x* 

*x*0

 1

#### sin2 3*x*

1

 3

3*x*2

3 *x*0 ln *ctgx*  *ctgx*  sin2 *x*

##### х

3 *x*0 ln *ctgx*  cos *x*  sin *x*

####  lim

3 *x*0 ln *ctgx*  cos *x*  *x*

####  3lim

*x*0 ln *ctgx*  cos *x*

 0 .

Отже,

*tg* 3 *x*

lim *tg* 3 *x*lnln *ctgx*  0

limln *ctgx*

*x*0

 *ex* 0

 *е*  1.

Завдання для аудиторної роботи

* + 1. Обчислити границю

lim1  cos8*x* .

* + 1. Обчислити границю

*x*0

lim

*x* 

tg2 2*x*

ln(*x*  5) .

4 *x*  3

* + 1. Обчислити границю

lim  *x*   

*x*   / 2 ctg*x*



.

2cos *x* 

* + 1. Обчислити границю

lim(*a*1/ *x*  1)*x*.

*x*

* + 1. Обчислити границю
    2. Обчислити границю
    3. Обчислити границю

limcos *x**x*2 .

*x*0

1

lim*x* 1*x*1.

*x*1

lim *tgx*2*x* .

*x*

2

Завдання для самостійної роботи

* + 1. **с.** Обчислити границю

lim

lg *x*  *x* .

*x*  0 *x*  sin *x*

3 *x*  5

* + 1. **с.** Обчислити границю

lim

*x* 

ln( *x*  8) .

* + 1. **с.** Обчислити границю  1

 1 

lim

3 .

*x*1 21  *x*  31 

*x* 

* + 1. **с.** Обчислити границю

lim ln *x*  ln(*x*  1).

*x* 1

* + 1. **с.** Обчислити границю

lim1  *tgx*

*x*0

*x* 2 1

*x* .

* + 1. **с.** Обчислити границю

lim2  *х*cos*x* .

* + 1. **с.** Обчислити границю

4

*x*2

lim*сtgx*3*x* .

*x*0

§ 2.3. ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА

Розглянемо одну з основних формул математичного аналізу, так звану формулу Тейлора, яка широко застосовується як в самому аналізу, так і в суміжних дисциплінах. Зупинимося лише на наступних застосуваннях.

В п. 1.9.4 ми побачили, що заміна приросту функції її диференціалом дає змогу утворювати різні наближені формули. Виявляється, що ці формули можна уточнити, якщо застосувати диференціали вищих порядків: про це і йдеться у формулі Тейлора.

Формула Тейлора дає змогу розробити простий аналітичний апарат

для обчислення значень функції *у*  *f* *x*, які відповідають заданим

значенням змінної *х* . Зрозуміло, що в тих випадках, коли функція задається

формулою виду

*у*  *х*2  5*х*  7 , значення функції обчислюється лише за

допомогою трьох арифметичних дій.

Але, як знайти, наприклад, значення функції

*у*  cos *x* ? Очевидно, цю

задачу найпростіше розв'язати за допомогою калькулятора. Але ж калькулятор дає лише відповідь. А питання про те, які він при цьому виконує дії залишається відкритим. Формула Тейлора вказує, які арифметичні дії потрібно виконати над *х* , щоб одержати cos *x* .

Іншими словами, формула Тейлора дає змогу зобразити функцію многочленом, щоб зручно для складання програм і обчислення цієї функції на ЕОМ.

Ще одне практичне застосування формули Тейлора пов'язане з обробкою числових експериментальних даних. Якщо в результаті

експерименту одержано масив значень *хі* ; *уі* , то спочатку будують графік

залежності *у*  *f* *x*, а потім залежність описують аналітично, причому, як

правило, у вигляді многочлена.

**Теорема 2.3.** Нехай функція

*f* *x*

має в точці

*x*0 і в деякому її околі

похідні до *n* 1-го порядку включно, і нехай *x* – довільне значення

аргументу із вказаного околу *x*  *x*0 . Тоді між точками *x* і *x*0 знайдеться

така точка *c* , що справедлива формула (2.12), яка називається формулою

Тейлора для функції *f* *x* в околі точки *x*0

(2.12)

*f x*

   *f x*0

 

*f* *x* 



0 *x*  *x*0 



*f* *x* 



0

*x*  *x*0   ...

2

 *f* *x*  

*n* 

0

1!

*x x*0  

*n*

*f*

*n*

2!

1

*n*!

*n* 1!

*c*

*x*  *x*0 ,

*n*1

*c*  *x*0   *x*  *x*0 , 0    1.

***Многочленом Тейлора степеня*** *n* для функції частинну суму

*f* *x*

називають

(2.13)

*Р*  

*n*

*x x*   *f x*

0

 

*f* *x* 



0

0

1!

*x*  *x* 

*f* *x* 



0

0

2!

*x*  *x*

0

2  ...

 *f* *x*  

*n* 

0

*n*!

*x x*

0

*n*

***Залишковим членом у формі Лагранжа*** називають вираз

*Rn*  

*x x*0  

*f*

*n*

1

*n* 1!

*c*

*x*  *x*0

*n*1

. **(2.14)**

 Величина

*Rn* *x*  *x*0  **показує, яку помилку ми робимо, замінюючи**

функцію

*f* *x* **її многочленом Тейлора**

*Рn* *x*  *x*0 **.**

Отже, формулу (2.12) можна подати у вигляді

*f* *x*  *Рn* *x*  *x*0  *Rn* *x*  *x*0 .

Формулу (2.12) можна записати у вигляді

Коли функція *f* *x* є многочленом *Рп* *х*

. **(2.15)**

степеня *п* , то похідна

*f* *x*  

*п*

*f* *x* 

*і* 

0

*x*  *x*  

*і*

*f*

*n*1

*c*

*x*  *x* 

*n*1

0

*і* 0

*і*!

*n* 1!

0

*Р**п*1*х*  0, тому формула (2.13) матиме вигляд

*п*

. **(2.16)**

*Р* *x*  

*п*

*Рп* *x* 

*і* 

0

*п*

*x*  *x* 

*і*

*і*0

*і*!

0

Формулу (2.16) називають ***формулою Тейлора для многочлена***.

**Приклад 2.11.** Записати многочлен Тейлора відносно двочлена

*х* 1

для функції *f* *x*   4*х*3  3*х*2  2*х*  1.

Оскільки задана функція являє собою многочлен, то скористаємося

формулою (2.16) при

*п*  3 і

*x*0  1.

*f*  1   4 13  3 12  2 1  1  10 .

*f* *x*  12*х*2  6*х*  2 ,

*f* *x*   24*х*  6 ,

*f*  1  12 12  6 1  2  20 .

*f*   1   24 1  6  30 .

*f* *x*   24 ,

*f*  1   24.

Підставивши в формулу Тейлора для многочлена знайдені значення, одержимо

*f* *x*  10  20*х*  1  15*х*  12  4*х*  13 .

**Приклад 2.12.** Записати многочлен Тейлора третього степеня відносно

двочлена *х* 1 для функції *f* *x*  .

4 *х*

Розклад функції за формулою Тейлора має вигляд (2.12). За умовою

*n*  3,

4 *x*

*x*0  1.

*f* 1 

1  3





*x*1

####  4 1  1.

 4  4  4 1

1

####  1 1

*f* *x*  

*x*    *x*

#### 

  *x*  ,

####  4

4 4 *x*3

*f* 1   .

#### 4

4 4 13

3  7



  1  4  4 3

3

*f* *x*   *x*

####  4

   *x*

####  16

  ,

#### 16 4 *x*7

*f* 1  

  3 .

#### 16

3

16 4 17

7  11



#### 

 3  21  21

4

4

*f* *x*   *x*

####  16

  *x*  ,

####  64

64 4 *x*11

*f* 1 

#### 21 

11

64 4 111

 21



21 .

#### 64

 15

*f IV*

*x*   *x* 4 

####  64 

  231 *x* 4  

#### 256

231 ,

*f IV* *с*  

256 4 *x*15

256 4 *с*15

231 .

Поклавши в формулі Тейлора (2.12)

*n*  3 ,

*x*0  1, одержимо

 1 1 *х* 1 3 *х* 12 

4 *х*



21 *х* 13 

231

*х* 14 ,

#### 4 16  2!

64  3!

#### 256 4 *с*15  4!

 1 1 *х* 1

4 *х*

#### 4

3 *х* 12 

#### 32

7

#### 128

*х* 13 

77 *х* 14 ,

де число *с* лежить між 1 та *х* , тому

2048 4 *с*15

*Р* *x* 1  1 1 *х* 1

3 4

3 *х* 12 

#### 32

7

#### 128

*х* 13 .

Завдання для аудиторної роботи

* + 1. Розкласти многочлен

*х*  2 .

* + 1. Розкласти многочлен

*х*  2 .

*f* *x*  *х*3  6*х*2  7*х*  6

*f* *x*  3*х*4  5*х*3  4*х*  1

за степенями

за степенями

* + 1. Знайти многочлен третього степеня, якщо

*f* 3  2 ,

*f* 3  1,

*f*  3  4 , *f* 3  18 . Обчислити *f*  2  2 , *f* 0,

*f*  5.

* + 1. Задана функція

*f* *x*  *х*6  3*х*2  2*х* . Знайти три перші члени

розкладу за степенями *х*  2 .

* + 1. Для функції *f* *x*  *х*6  3*х*2  2*х* , яка розкладена за степенями

*х*  1, обчислити *f* 1; 9 наближено за першими трьома членами розкладу.

Завдання для самостійної роботи

* + 1. **с.** Розкласти многочлен *f* *x*  *х*2  *х*  12 за степенями

*х*  1.

* + 1. **с.** Розкласти многочлен

*f* *x*  2*х*4  5*х*3  3*х*2  8*х*  4 за

степенями

*х*  2 .

* + 1. **с.** Розкласти функцію

що містить *х*  23.

*f* *x* 

*х*

#### 1  *х*

за степенями

*х*  2

до члена,

* + 1. **с.** Розкласти многочлен *f* *x*  *х*4  5*х*3  5*х*2  *х*  2

*х*  2 .

*х*

за степенями

* + 1. **с.** Вивести формулу Тейлора для функції

*n*  3.

*f* *x*  при *х*0  1,

§ 2.4. ЗАСТОСУВАННЯ ФОРМУЛИ ТЕЙЛОРА ДО НАБЛИЖЕНИХ ОБЧИСЛЕНЬ

1. Формула Тейлора дає змогу обчислювати значення функції

*у*  *f* *x* для заданих значень *х* .

1. Формула Тейлора дає змогу зобразити дану функцію *у*  *f* *x*

многочленом, що зручно для складання програм і обчислень цієї функції на ЕОМ.

***Формулою Маклорена*** називають формулу Тейлора (2.12) при

*x*0  0:

, **(2.17)**

*f x*

   *f* 0

  *f* 0

1!

*х*

 *f* 0

2!

*х* ...

2 

 *f* *n*0

*n*!

*х*

*n*  *f* *n*1 *c*

*n* 1!

*х*

*n*1

*c*   *х*, 0    1.

Оскільки

*x*  *x*0

 *х* ,

*f* *x*0

 *х*

*f* *x*0

  *y* ,

*f* *n**x*

*xn*

 *d n y* , то

формулу (2.12) можна подати у вигляді

*y*  *dy*  *d y*  *d y*  ...  *d y*  *R* *x*

2

3

*n* 

2!

3!

*n*!

*n*

0

. **(2.18)**

 Многочлени Тейлора дають найкраще наближення функції

*у*  *f* *x*

у вигляді многочленна даного степеня поблизу точки

*x*0 **, тобто серед**

усіх многочленів цього степеня, які збігаються з функцією при

*х*  *x*0 **, лише для многочленна Тейлора величина** *Rn* *x*  *x*0 

виявляється найменшою.

**Розклад елементарних функцій за формулою Маклорена**

#### 1

1  *х*

 1  *х*  *х*2  ...  *хn*  ...,

*х*  1 . **(2.19)**

#### 1

1  *х*

 1  *х*  *х*2  ...   1*n хn*  ...,

*х*  1 . **(2.20)**

#### 1  *x*

 1  *х*  *х*

#### 2 8

2

 *n*   *n*

...  1  2*n**n*!2 4*n*

 1 2*n* ! *х*

####  ...,

*х*  1 . **(2.21)**

*ех*  1  *х*  *х*

2

#### 1! 2!

 ...  *х*

*n*!

*n*

####  ...

. **(2.22)**

   

*x*  *х*2

 *х*3 

  1*n*

*n* 1  

#### ln 1 *x*

1 2

    *x*  *х*

2

3

 *х*3

...

####  

*n*  1

#### 1

*х*

*n* 1 

#### ...,

*х* 1 . **(2.23)**

#### 

#### ln 1 *x*

1 2 3

*х х*3 *х*5

...

*х*

*n*  1

 1*n*

..., *х*

2*n* 1

1 . **(2.24)**

#### sin *x*   

1! 3!

5!  ...  2*n*  1! *х*

####  ....

. **(2.25)**

cos *x*  1  *х*

2

#### 2!

* *х* 4

#### 4!

 ... 

1*n*

2*n*!

*х* 2*n*

####  ...

. **(2.26)**

arcsin *x*  *x* 

*x*3 

#### 6

3*x*5

#### 40

 ...  2*n*!

4*n*  2*n*  1 *n*!2

*x*2*n* 1

####  ...,

*х*  1 . **(2.27)**

arccos *x*    1 *x*  1 *x*3  3 *x*5  ...

. **(2.28)**

#### 2 1 6 40

*arctgx*  *x* 

#### 1

*х*3  *х*5

3 5



####  ... 

*x*3

 1*n*

*x*5

*х*2*n* 1

#### ...,



2*n*  1

*x*7

*х*  1

.(**2.29)**

##### arctgx 

* *x* 

#### 2

 

#### 3 5 7

 ...

. **(2.30)**

1  *x*

 1   *x*     1 *х*2  ...     1...  *n*  1 *хn*  ...

. **(2.31)**

#### 2! *n*!

**Приклад 2.13.** Записати многочлен Маклорена для функції на відрізку 1; 1 з точністю 0,001. Обчислити значення *е*.

*f* *x*  *ех*

Розклад функції

*f* *x*  *ех*

за формулою Маклорена має вигляд (2.22).

Підберемо таке *n* , при якому модуль залишкового члена був би меншим від

числа 0,001, маючи на увазі, що за умовою

*х*  1.

Оскільки число *с* лежить між 0 та *х* , то *ес*

 *е x*

 *е* .

Отже, модуль залишкового члена для будь-якого *n* :

*х n* 1

*Rn* *x*  *ес*

*хn* 1

*n*  1!

 *е* *n*  1! 

*е* 

*n*  1 !

 

3

*n*  1! .

3

*R*1 *x* 

11! 

#### 3  3  0,001;

2! 2

6

2

*R* *x*  

2

3 1 !

24

8

3  

#### 3  3  1  0,001;

*R* *x*  

2 1 !

3!

3

120

40

3   3 

#### 3  1  0,001;

*R* *x*  

4!

4

5 1 !

720

240

3   3 

#### 3  1

* 0,001;

*R* *x*  

4 1 !

5!

5

6 1 !

7!

5040

1680

3   3 

#### 3  1

* 0,001;

*R* *x*  

6!

6

3   3 

#### 3  1

 0,001.

Отже, при

*n*  6

модуль залишкового члена менший від числа

0,001,

тому з точністю до 0,001 справедлива наближена формула

*ех* 

 *х*  *х*2

 *х*3

 *х*4

 *х*5

*х*6

,



*х* 

1; 1.

#### 1! 2! 3! 4! 5! 6!

1

Обчислимо значення функції *f* *x*  *ех* при *х*  1:

#### *е*1  1 

1  12

#### 1! 2!

 13

#### 3!

 14

#### 4!

 15

#### 5!

 16

#### 6!

 2 

517

#### 720

 2,718 .

Отже, з точністю до 0,001 значення

*е*  2,718 .

**Приклад 2.14.** Записати п’ять перших членів розкладу функції

*f* *x*  *х*3 sin *x* за формулою Маклорена.

Скористаємося розкладом функції Маклорена (2.25). Отже,

*f* *x*  sin *x*

за формулою

 *х*3

3 *х*3

*x* sin *x*  *x*   

####  1! 3!

*х*  *х*7 

#### 5! 7!

5

*х*9  *х*4

####  

9!  1!

 *х*6 

#### 3!

*х*  *х*10

#### 5! 7!

8

*х*12

.



#### 9!

**Приклад 2.15.** Записати чотири перших члена розкладу функції

*f* *x*  3*х* за формулою Маклорена.

Скористаємося розкладом функції (2.22). Отже,



*f* *x*  *ех*

за формулою Маклорена

3*х*  *е х* ln3 1 

*х* ln 3 

#### 1!

*х* ln 32 2!

*х* ln 33 3!

*х* ln 34

.



#### 4!

**Приклад 2.16.** Обчислити lg 52.

Використаємо властивості логарифмів:

#### lg 52  lg100  0,52  lg100  lg 0,52  2  lg 0,52.

Використаємо формулу переходу від натуральних логарифмів до десяткових:

lg *x*  ln *x* 

#### ln10

lg 0,52 

#### ln 0,52 ln10

 ln1  0,48 .

#### ln10

Обчислимо окремо ln1  0,48 і ln10. Для цього скористаємося

розкладом функції *f* *x*  ln1  *x* за формулою Маклорена (2.23). Отже,





ln1  0,48 

####  0,48 

1

 0,482 2

 0,483 3

 0,484 4

####  0,6453.

Аналогічно, ln10  2,3026 . Отже,

#### lg 0,52   0,6453  0,2802 .

2,3026

Завдання для аудиторної роботи

* + 1. За допомогою формули Тейлора наближено обчислити sin180 .
    2. За допомогою формули Тейлора наближено обчислити ln1,2 .
    3. Записати розклад функції ln cos *x* до члена *x*6 .
    4. Записати розклад функції sinsin *x* до члена
    5. Обчислити *е* з точністю до 106 .

*x*3.

Завдання для самостійної роботи

* + 1. **с.** За допомогою формули Тейлора наближено обчислити

*arctg*0,8.

* + 1. **с.** За допомогою формули Тейлора наближено обчислити

#### arcsin 0,45.

* + 1. **с.** За допомогою формули Тейлора наближено обчислити 1,11,2.
    2. **с.** Записати розклад функції ln sin *x*

##### x

до члена

*x*6 .

* + 1. **с.** Обчислити cos 90 з точністю до 103 .

§ 2.5. ЗАСТОСУВАННЯ ФОРМУЛИ ТЕЙЛОРА В ЕКОНОМІЧНИХ ЗАДАЧАХ

Наближена рівність

*f* *х*  *T*2 *х*

застосовується в задачах

економічної статистики. Наприклад, розглянемо таку задачу. Припустимо, що для чисел відомо середнє арифметичне

*a* 

і середнє квадратичне відхилення

*x*

1

* *a*



2

 ... 

*n*

*x*

*п*

* *a*



2

*x*1  *x*2  ...  *xn n*

  .

Як визначити середнє арифметичне виду

*y*  *f* *x*1 

*f* *x*2  ... 

##### n

*f* *xп* ,

якщо числа належать?

*х*1 ,

*х*2 , ... , *хп*

невідомі, але відомий відрізок, якому вони

Значення *y* можна, очевидно, знайти лише наближено.

Замінимо функцію точці *а* :

*f* *x*  *T* (*x*)  *f* 

2

*а*

*f* 



*а*

*f* 



*а*

1!

*x* 

*а*

2!

*x*  *а*

2

Тоді

*f* *x*

на многочлен Тейлора другого порядку в

. **(2.32)**

*у*  1

*п*  *f* *а*  *f* *а**x*  *а*  *f* *а**x*  *а*2  

#### 

*п* 

*і*1  1!

*п*



#### 2! 

 1 *п f* *а* *f* *а* 1 *п x*  1 *па*   1

*f* *а* *x*  *а*2

*п*  *п*  *і п*

 2*п*

 *і* .

Оскільки

маємо:

 *і*1

1 *n*



2*n i*1

*xi*



 *a*2

 1  2 ,

#### 2

*і*1

(2.33)

**Приклад 2.17.** Для додатних чисел *х*1 , *х*2 , ... , *хп* відоме середнє

*y*  *f* *а* 1 *f*  *а* 2 .

2

арифметичне *а* і середнє квадратичне відхилення  . Знайти наближено

середнє геометричне .

*x*1 *x*2 ...*xn*

Середнє геометричне можна подати у вигляді:

*n x*1 *x*2 ...*xn*

1 ln *x*1ln *x*2 ...ln *xn* 

 *en* .

Використовуючи формулу (2.22) для функції

#### 1

*f* (*x*)  ln *x* , одержимо

 2

*n* (ln *x*1  ln *x*2  ...  ln *x*2 )  ln *a*  2*a* 2 .

Отже, середнє геометричне дорівнює

 *ae*

*n x*1 *x*2 ...*xn*

  2

2*a*2 .

**Приклад 2.18.** Нехай *pi і* -

го року, *k*  *pi*

*i*

*p*

*i*1

*k*1 , *k*2 , ... , *kп*

середнє арифметичне

*a*  10

відхилення   1. Визначити відносну зміну споживчих цін з 1 січня *і* -го

року по 1 січня *і*  10 -го року.

Згідно з формулою (8) знаходимо

10 *k*1*k*2 ...*k*10

 *e* 0,005 .

Далі маємо:

*p*10 *p*0

 *k*1*k*2

...*k*10

 (*e* 0,005 )10

 *e* 0,05

####  0,95 .

Отже, ціни за 10 років зросли приблизно на 5%.

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ ДО РОЗДІЛУ 2

1. Як формулюються теорема Ферма?
2. Який геометричний зміст теореми Ферма?
3. Як формулюються теорема Ролля?
4. Який геометричний зміст теореми Ролля?
5. Як формулюються теорема Коші?
6. Як формулюються теорема Лагранжа?
7. Який економічний зміст теореми Лагранжа?
8. Як формулюються правило Лопіталя?
9. Як записується формула Тейлора?
10. Що називається залишковим членом формули Тейлора?
11. Які існують форми залишкового члена у формулі Тейлора?
12. Як розкладають основні елементарні функції в ряд Тейлора?
13. Яке застосування формули Тейлора?
14. Яке застосування формули Тейлора в економічних задачах?

РОЗДІЛ 3. ЗАСТОСУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЙ

**§ 3.1. МОНОТОННІСТЬ ФУНКЦІЇ**

Інтервали монотонності функції можуть відділятися один від одного

точками, де похідна дорівнює нулю *f* *x*  0 (їх називають стаціонарними

точками), або точками, де похідна не існує. Точки, в яких похідна дорівнює

нулю *f* *x*  0 або не існує, називаються критичними.

ПРАВИЛО 3.1 (знаходження інтервалів монотонності функції

1. Знайти область визначення функції.
2. Знайти похідну *f* *x* даної функції.

*y*  *f* *x***):**

1. Знайти критичні точки з рівняння існує.

*f* *x*  0

та з умови, що

*f* *x* не

1. Розділити критичними точками область визначення функції на

інтервали і в кожному з них визначити знак похідної (досить визначити знак

похідної в одній довільній внутрішній точці кожного інтервалу). На інтервалах, де

*f* *x*  0 – функція *y*  *f* *x* зростає,

*f* *x*  0 – функція *y*  *f* *x* спадає.

**Приклад 3.1.** Знайти інтервали монотонності функції

*y*  3*x*2  5 .

*x*

1. Область визначення заданої функції: *х* 0;  .
2. Похідна даної функції:

*y*  3*x*2  5   3*x*2  5  *x*   6*x* 

*x*

 3*x*2  5 1 

#### 2

*x*

*x*

*x*

2 *x*

2 *x*

2 *x*

2 *x*

.

 6*x*  2

*x*

####  3*x*2  5  12*x*2  3*x*2  5  15*x*2  5  53*x*2 1

1. Знайдемо критичні точки з рівняння не існує:

*f* *x*  0

та з умови, що

*f* *x*

53*x*2 1

2 *x*

####  0,

3*x*2 1  0;

 *x*  0,



*x*2

####  



 1 ;

#### 3 

*x*   1 ;

#### 

3



*x*  0, *x*  0.

В точках

*x*1  

і *x*2 

– похідна дорівнює нулю, а в точці

*х*3  0 –

похідна не існує. Оскільки точка

3

3

3

1

1

1

1

*x*1  

не належить області визначення,

то критичні точки:

*x*2  ,

*х*3  0.

1. Розділивши критичними точками область визначення функції на інтервали, в кожному з них визначаємо знак похідної (рис. 3.1):

3

 

*у*

0,1

0

5  3 0,12 1

2 0,1

*y**x*



1

3

Рис. 3.1

*y**x**х*

 

 7,67  0;

*у*

1

#### 5  3 12

2 1

 1

 5  0 .

Маємо:



 *x*  0;

#### 



 *у**x*  0 

#### 

1

3

:



##### функція

*спадає*;

 *x* 



#### 

;: *у**x*  0  *функція*

#### 

1

3



##### зростає .

Завдання для аудиторної роботи

* + 1. Знайти інтервали монотонності функції
    2. Знайти інтервали монотонності функції
    3. Знайти інтервали монотонності функції
    4. Знайти інтервали монотонності функції
    5. Знайти інтервали монотонності функції

*y*  *arcctgx* .

*y*  *x*4  8*x*2  1.

*y*  *x* ln *x*  5*x* .

*y*  sin 2*x*  3  *x* .

*y*  *x*  arcsin *x* .

Завдання для самостійної роботи

**3.1.1с.** Знайти інтервали монотонності функції **3.1.2с.** Знайти інтервали монотонності функції **3.1.3с.** Знайти інтервали монотонності функції

* + 1. **с.** Знайти інтервали монотонності функції
    2. **с.** Знайти інтервали монотонності функції

*y*  *arctgx* .

*y*  *x*3  3*x*  5 .

*y*  *x*  ln*x*  2.

*y*  2 sin *x*  cos 2*x* .

*y*  *x*  2 cos *x* .

§ 3.2. ЛОКАЛЬНИЙ ЕКСТРЕМУМ ФУНКЦІЇ

Точка *x*  *x*0 називається ***точкою локального максимуму* (*мінімуму*)**

функції *у*  *f* *x*, якщо існує такий -окіл *x*0 : 0  *x*  *x*0   , який

належить області визначення функції, і для всіх *х* з цього околу

виконується

*f* *x* 

*f* *x*0 

(рис. 3.2)

 *f* *x* 

#### 



*f* *x*0 

#### 





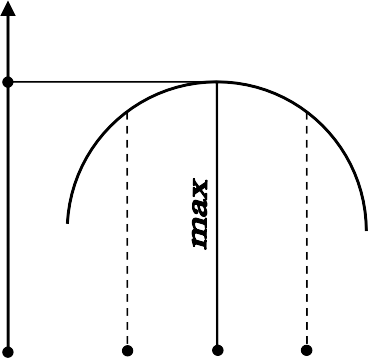
(рис. 3.3). Точки

локального максимуму і локального мінімуму називаються точками

***локального екстремуму***, а значення функції в цих точках *у*0  *f* *x*0  –

***локальним максимумом* (*мінімумом*) *або локальним екстремумом.***

*у у*



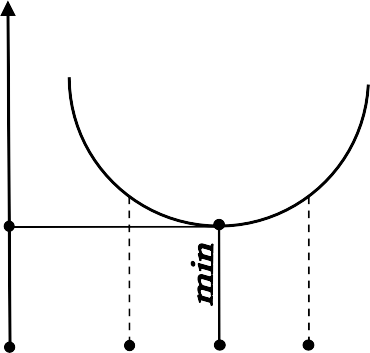
*у*  *f* *x*

0

*x*0  

*x*0 *x*0  

*x*



*у*  *f* *x*

0

*x*0  

*x*0 *x*0  

*x*

*у*0

*у*0

Рис. 3.2 Рис. 3.3

ПРАВИЛО 3.2 (дослідження функції на екстремум):

1. Знайти область визначення функції.
2. Знайти критичні точки функції *у*  *f* *x*. Для цього слід розв’язати

рівняння *f* *x*  0 і серед його розв’язків вибрати тільки ті дійсні корені, які

є внутрішніми точками області визначення функції; знайти точки, в яких

похідна *f* *x* не існує.

1. Якщо критичних точок функція не має, то вона не має і екстремумів. Якщо критичні точки є, то розділити цими критичними точками область визначення функції на інтервали і в кожному з них визначити знак похідної.
2. За першою достатньою умовою існування локального

**екстремуму**: якщо при переході зліва направо через критичну точку *x*0

похідна *f* *x* змінює знак

з плюса на мінус, то

*x*0 – точка локального ***максимуму***  *f* *x*0  

*у*max ;

з мінуса на плюс, то

*x*0 – точка локального ***мінімуму***

 *f* *x*0  

*у*min ;

не змінює знак, то в точці

*x*0 екстремум відсутній.

**Приклад 3.2.** Знайти локальні екстремуми функції

*f* *x*  .

*х*

*ех*

1. Область визначення заданої функції:
2. Похідна заданої функції:

*х*  ;0 0;  .

*f* *x* 

*ех*   *x*  *ех*  *х*

*х*2

 *ех*  *x*  *ех*

*х*2

*ех*  *x*  1

.



*х*2

Розв’язуємо рівняння

*f* *x*  0:

*х*  

*ех*  0,

*не має*

*розв*' язку,

*е*  *x*  1

*х*2

####  0, 

*x*  1  0,

*х*  0;





 *x*  1,

*х*  0.





Отже,

*x*  1

* стаціонарна точка. Похідна не існує в точці

*х*  0 , але

дана точка не входить в область визначення функції. Тому маємо одну

критичну точку *x*  1.

Розділимо критичною точкою

*x*  1

область визначення функції на

інтервали і в кожному з них визначимо знак похідної (рис. 3.4):

*f* 1 

 

*е*1  11

12 

*е*0,1  0,11

####  2  0,74  0 ,

e

*f* 0,1

*f* 1,1

 0,12

*е*1,1  1,11

 1,12

*f* *x*

####  99,47  0 ,

 0,25  0.

0 1

min

Рис. 3.4

*х*

*f* *x*

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *х* |  ;1 | 1 | 1;  |
| *f* *x* | – | 0 | + |
| *f* *x* |  | *е* |  |

min

Отже,

*x*  1 – точка локального мінімуму,

*у*min 

*f* 1  *e*

#### 1

1

 *e* .

Друга достатня умова існування локального екстремуму: якщо в

околі стаціонарної точки *x*0 функції *f* *x* (тобто *f* *x*0   0 ) існує

неперервна друга похідна (причому *f*  *x*0   0 ). Якщо

, то

*f*  *x*0   0

*f*  *x*0   0

, то

*x*0 – точка локального ***мінімуму***;

*x*0 – точка локального ***максимуму***.

**Приклад 3.3.** Знайти локальні екстремуми функції *f* *x*  *x*2*ех* .

1. Область визначення заданої функції: *х*  ;  .
2. Похідна даної функції: *f* *x*  2*xех*  *х*2*ех*  *ех* 2*х*  *х*2 .

Розв’язуємо рівняння *f* *x*  0:

*хех* 2  *х*  0

 *х*  0;  *х*1  0;

#### 2  *х*  0,   2.



*х*

 2

Отже, стаціонарні точки: *х*1  0; *х*2  2. Точок, в яких похідна

*f* *x*

не існує, не має. Отже, стаціонарні точки є єдиними критичними точками даної функції, тому можна знайти екстремуми за другою достатньою умовою.

Знаходимо другу похідну:

*f*  *x*  *ех* 2*х*  *х*2  *ех* 2  2*х*  *ех* *х*2  4*x*  2.

Оскільки

*f*  0  *е*0 02  4  0  2  2  0 , то *х*  0 – точка локального

1

мінімуму,

*у*min 

*f* 0  02  *е*0

 0;

*f*   2  *е*2  22

 4   2  2  2

*е*2

 0 , то

*х*2  2

– точка

локального максимуму,

*у*max 

*f*  2   22  *е*2  4 .

*е*2

Завдання для аудиторної роботи

* + 1. Знайти локальні екстремуми функції *f* *x*  3*x*2  *х*3  1.
    2. Знайти локальні екстремуми функції

*f* *x*  4  2*х*  33

*x*2 .

* + 1. Знайти локальні екстремуми функції

*f* *x*  3 *x*2  42 .

* + 1. Знайти локальні екстремуми функції

*f* *x*  *х*2  *е*2*х* .

* + 1. Знайти локальні екстремуми функції

*f* *x* 

*х*3  4

*х*2 .

Завдання для самостійної роботи

* + 1. **с.** Знайти локальні екстремуми функції *f* *x*  2*x*2  2*х*3  1.
    2. **с.** Знайти локальні екстремуми функції

*f* *x*  5  6*х*  33

*x*2 .

* + 1. **с.** Знайти локальні екстремуми функції

*f* *x*  3 *x*2  92 .

* + 1. **с.** Знайти локальні екстремуми функції

*f* *x*  *х*2  *е*2*х* .

* + 1. **с.** Знайти локальні екстремуми функції

*f* *x* 

*х*3  8

*х*2 .

§ 3.3. НАЙБІЛЬШЕ І НАЙМЕНШЕ ЗНАЧЕННЯ ФУНКЦІЇ

**Теорема 3.1.** Якщо функція *f* *x* неперервна на відрізку *a*,*b*, то вона

досягає на цьому відрізку своїх найбільшого

*М*  max

*a* *x**b*

*f* *x*

і найменшого

*m*  min

*a* *x**b*

*f* *x* значень.

ПРАВИЛО 3.3 (знаходження найбільшого і найменшого значення функції на відрізку):

1. Знайти область визначення функції.
2. Знайти критичні точки функції *f* *x*, які належать інтервалу *a*;*b*.
3. Обчислити значення функції *f* *x* у знайдених критичних точках і в

точках *x*  *a* та *x*  *b* і серед цих значень вибрати найбільше і найменше.

**Приклад 3.4.** Знайти найбільше і найменше значення функції

*f* *x*  *x*3  27*х* на відрізку 0;4.

1. Область визначення заданої функції:

*х*  ;  .

1. Знаходимо критичні точки функції. Похідна даної функції:

*f* *x*  3*x*2  27  3*х*2  9.

Розв’язуємо рівняння *f* *x*  0: 3*х*2  9  0 .

Маємо *х*1  3; *х*2  3. Точка

*х*1  3

не належить інтервалу 0;4,

тому маємо єдину критичну точку *х*2  3.

1. Обчислюємо значення функції в критичній точці

*х*2  3

і на кінцях

відрізка

*x*  0 та

*x*  4:

*f* 3  33  27  3  27  81  54 ,

*f* 0  03  27  0  0,

###### *f* 4  43  27  4  64 108  44 .

Отже,

*М*  max

0 *x*4

*f* *x*  0 ,

*m*  min

0 *x*4

*f* *x*  54 .

Завдання для аудиторної роботи

* + 1. Знайти найбільше і найменше значення функції

*f* *x*  2*x*3  3*х*2  12*х*  1 на відрізку  4; 0.

* + 1. Знайти найбільше і найменше значення функції

*f* *x*  *х*  4  1 на відрізку 1; 9.

*х*

* + 1. Знайти найбільше і найменше значення функції відрізку 1; 3.

*f* *x*  *х*  4 на

*х*2

* + 1. Число 48 розкласти на два доданки так, щоб їх добуток був найбільшим.
    2. Число 16 розкласти на два доданки так, щоб сума їх квадратів була найменшою.

Завдання для самостійної роботи

* + 1. **с.** Знайти найбільше і найменше значення функції

відрізку 0; 2.

*f* *x* 

*х* на

###### 1  *х*2

* + 1. **с.** Знайти найбільше і найменше значення функції

*f* *x*  sin 2*x*  *x*

на відрізку

  ;   .

####  2 2 

* + 1. **с.** Число 30 розкласти на два доданки так, щоб сума їх кубів була найменшою.
    2. **с.** Якими мають бути розміри ящика з кришкою місткістю

*V*  1764

см3, якщо сторони основи відносяться, як

3 : 4 , щоб на його

виготовлення пішло найменше матеріалу?

* + 1. **с.** Довжина відкритого басейну об'ємом *V*

####  288 м3

вдвічі більша

за ширину. якими мають бути розміри басейну, щоб на його облицювання пішло найменше матеріалу?

§ 3.4. ОПУКЛІСТЬ І ВГНУТІСТЬ КРИВИХ. ТОЧКИ ПЕРЕГИНУ

***Критичні точки другого роду*** – це точки, в яких друга похідна

дорівнює нулю *f*  *x*  0 або не існує.

Крива називається ***опуклою* (*вгнутою*)** на інтервалі, якщо всі її точки, крім точки дотику, лежать нижче (вище) довільної її дотичної на цьому інтервалі.

***Точкою перегину*** називаються така точка кривої, які відділяє її опуклу частину від вгнутої.

ПРАВИЛО 3.4 (знаходження інтервалів опуклості, вгнутості, точок перегину):

1. знайти область визначення функції;
2. знайти критичні точки другого роду з рівняння що *f*  *x* не існує;

*f*  *x*  0

та з умови,

1. розділити критичними точками другого роду область визначення

функції на інтервали і в кожному з них визначити знак похідної Якщо на інтервалі *a*;*b* :

*f*  *x*.

*f*  *x*  0 для всіх *x*  *a*;*b*, то крива *y*  *f* *x* опукла на *a*;*b*;

*f*  *x*  0 для всіх *x*  *a*;*b*, то крива *y*  *f* *x* вгнута на *a*;*b*;

1. якщо при переході через точку *x*  *x*0 похідна *f*  *x* змінює знак, то

точка *х*0 , *f* *х*0  є точкою перегину кривої *y*  *f* *x*.

**Приклад 3.5.** Знайти інтервали опуклості, вгнутості та точки перегину

функції *f* *x*  *x*4  2*x*3  6*x* .

1. Область визначення заданої функції: *х*  ;  .
2. Перша похідна функції: *f* *x*  4*x*3  6*x*2

 6.

Знаходимо другу похідну функції:

*f*  *x*  12*x*2 12*x*  12*x**x* 1.

Розв’язуємо рівняння *f* *x*  0 :

12*x**x* 1  0

 *х*  0;  *х*1  0;

#### *х* 1  0,   1.



*х*

 2

Отже, стаціонарні точки другого роду: *х*1  0; *х*2  1. Точок, в яких

похідна *f* *x* не існує, не має. Отже, стаціонарні точки другого роду є

єдиними критичними точками другого роду даної функції.

1. Розділяємо критичними точками

*х*1  0;

*х*2  1

область визначення

функції на інтервали і в кожному з них визначити знак другої похідної

*f* *x*

(рис. 3.5):

*f*  1  12  111  24  0 ,

*f*  0,1  12  0,1 0,11  1,08  0 ,

*f*  1,1  12 1,1 1,1 1  1,32  0 .

0 1 *х* 

*f*  *x*



min *f x*

Рис. 3.5

 *x*  ;0: *f* *x*  0 

##### крива вгнута;

 *x* 0;1: *f* *x*  0  *крива опукла*;

 *x*  1;  : *f* *x*  0  *крива вгнута*.

1. При переході через точки *х*1  0; *х*2  1 похідна

*f*  *x* змінює знак,

тому маємо дві точки перегину кривої. Оскільки

*х*1  0 : *f* 0  0  2  0  6  0  0 , то точка 0;0

4 3

* точка перегину

кривої;

*х*2

кривої.

 1:

*f* 1  14

 2 13  6 1  5, то точка 1;5

* точка перегину

Завдання для аудиторної роботи

* + 1. Знайти інтервали опуклості, вгнутості та точки перегину функції

*f* *x*  *x*3  3*x*2  6*x* .

* + 1. Знайти інтервали опуклості, вгнутості та точки перегину функції

*f* *x*  *x*5  3*x*  5.

* + 1. Знайти інтервали опуклості, вгнутості та точки перегину функції

*f* *x*  2*x*3  *x*4  36*x*2  100.

* + 1. Знайти інтервали опуклості, вгнутості та точки перегину функції

*f* *x*  3  .

3 *х*  2

* + 1. Знайти інтервали опуклості, вгнутості та точки перегину функції

 

*f* *x*  ln 4  *x*2 .

Завдання для самостійної роботи

* + 1. **с.** Знайти інтервали опуклості, вгнутості та точки перегину функції

*f* *x*  *x*5  5*x*  7 .

* + 1. **с.** Знайти інтервали опуклості, вгнутості та точки перегину функції

*f* *x*  *x*4  4*x*3  18*x*2  2*x*  1.

* + 1. **с.** Знайти інтервали опуклості, вгнутості та точки перегину функції

*f* *x*  2  .

3 *х*  55

* + 1. **с.** Знайти інтервали опуклості, вгнутості та точки перегину функції

*f* *x*  1  .

3 *х*  45

* + 1. **с.** Знайти інтервали опуклості, вгнутості та точки перегину функції

*f* *x*  1  *x* *ех*1.

§ 3.5. АСИМПТОТИ КРИВОЇ

Пряма *l* називається ***асимптотою*** кривої, якщо відстань від змінної точки *М* кривої до цієї прямої прямує до нуля, коли точка *М* , рухаючись по кривій, віддаляється на нескінченність.

Пряма

* + **вертикальна асимптота**, якщо

. **(3.1)**

*x*  *a*

lim *f* *x*  

*x**a*

Пряма

Пряма

– **похила асимптота**, де

,

*k*  lim *f* *x*

*x*

*x*

*b*  lim  *f* *x*  *kx*

*x*

*y*  *kx*  *b*

* + горизонтальна асимптота, де

*y*  *b*

. **(3.2)**

. **(3.3)**

*b*  lim *f* *x*

*x*

 Горизонтальна асимптота є частинним випадком похилої асимптоти

**при** *k*  0 **.**

  3*х* 2

**Приклад 3.6.** Знайти асимптоти функції *f*

*x*  *x*  2 .

Дослідимо, чи існує в задано функції горизонтальна асимптота. Задана

функція не існує в точці *x*  2 , коли знаменник в дробі перетворюється на нуль.

Знайдемо вертикальну асимптоту за формулою (3.1):

3*х*2

#### 3 22  12 

lim

####     



  .

*x*2 *x*  2

#### 2  2 

 0 

Отже, пряма *x*  2 – вертикальна асимптота.

Дослідимо, чи існує в задано функції похила асимптота формулами (3.2).

*y*  *kx*  *b* за

3*х*2

*x*  2

3*х*2

3*х*2

####  3 2

 

*k*  lim

####  lim

 lim 2

####   2     

*x*  *x*

*x* *x*  *x*  2

*x* *х*

* 2*x*

####   2  



ділимо на х в найбільшому степені

#### 

lim

3*х*2

*х*2

2

####  lim

 

#### 3  3 



2  2 



#### 3  3

 3.

Отже, *k*



####  3 .

*x*

*х*  2*x*

*х*2 *х*2

*x* 1 

*х*

#### 1  

  

#### 1  0 1

Знайдемо *b* за формулою (3.2):

 3*х*2 

 3*х*2  3*x**x*  2

 3*х*2  3*x*2  6*x* 

*b*  lim 

 3*x*  

#### lim 

  lim   

*x*  *x*  2

 *x*

*x*  2

 *x*

*x*  2 

####  lim

6*x*   6  

ділимо на х в

   найбільшому степені

#### lim

6*х*

#### *х*  lim 6 

*x* *x*  2

####   2 

 

*x* *х* 2

*x* 2

####  

 6 



####  2 



#### 6



1  0

####   

 6  6.

#### 1

 1 

*х х х*

#### 1  

  

Отже, *b*  6 .

Пряма *y*  3*x*  6 – похила асимптота.

Горизонтальної асимптоти не має, оскільки *k*

####  3  0 .

**Приклад 3.7**. Знайти асимптоти функції

*f* *x* 

3*х* .

*x*  2

Дослідимо, чи існує в задано функції горизонтальна асимптота. Задана

функція не існує в точці *x*  2 , коли знаменник в дробі перетворюється на нуль.

Знайдемо вертикальну асимптоту за формулою (3.1):

#### lim 3*х*

  3 2

####   6    .

   

*x*2 *x*  2

#### 2  2 

0 

Отже, пряма *x*  2 – вертикальна асимптота.

Дослідимо, чи існує в задано функції похила асимптота формулами (3.2).

*y*  *kx*  *b* за

*k*  lim

3*х*

*x*  2 

#### lim

3*х* 

#### lim

3   3    3   0 .

####    

*x*

Отже, *k*

*x*

 0.

*x* *x*  *x*  2

*x* *х*  2

####   2 



Оскільки

*k*  0, то маємо частинний випадок похилої асимптоти,

тобто горизонтальну асимптоту.

Знайдемо *b* за формулою (3.3):

ділимо на х в 3*х*

*b*  lim

3*х*   3 

   найбільшому степені

lim

*х*  lim 3 

*x*  *x*  2

####   2 

 

*x* *х* 2

*x* 2

####    

 

####  1 

*х х х*

####  3 



 2 

3

#### 1  0



 3  3.

#### 1

1  

####   

Отже, *b*  3.

Тому пряма *e*  3 – горизонтальна асимптота.

Завдання для аудиторної роботи

* + 1. Знайти асимптоти функції
    2. Знайти асимптоти функції

*f* *x* 

*f* *x* 

2

*x*2  4 .

2 .

*x*2  5*x*  6

  2*x*2  3

* + 1. Знайти асимптоти функції *f x*  .

#### *x*2  5

2

  *x*  2

* + 1. Знайти асимптоти функції *f x* 

*x*  1 .

* + 1. Знайти асимптоти функції

*f* *x*  3 .

Завдання для самостійної роботи

*x*2  1

* + 1. **с.** Знайти асимптоти функції
    2. **с.** Знайти асимптоти функції

*f* *x* 

*f* *x* 

4

*x*2  9 .

3 .

*x*2  6*x*  8

* + 1. **с.** Знайти асимптоти функції *f* *x*

**с**  

*x*2  4

*x*2  2

*x*2  9 .



#### *x*2  2

* + 1. **.** Знайти асимптоти функції *f x* 

*x*  1 .

* + 1. **с.** Знайти асимптоти функції

*f* *x*  2 .

§ 3. 6. СХЕМА ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЇ ТА ПОБУДОВИ ГРАФІКА ФУНКЦІЇ

**ПРАВИЛО 3.5 (схема дослідження функції та побудови графіка функції):**

1. знайти область визначення функції;
2. знайти точки перетину графіка з координатними осями;
3. інтервали знакосталості функції;
4. дослідити функцію на періодичність,
5. дослідити функцію на парність і непарність;
6. знайти точки розриву та дослідити їх;
7. знайти інтервали монотонності, точки локальних екстремумів та значення функції в цих точках;
8. знайти інтервали опуклості, вгнутості та точки перегину;
9. знайти асимптоти кривої;
10. побудувати графік функції.

**Приклад 3.8.** Дослідити функцію

*y*  2*x* 1  *x*2

та побудувати її графік.

1. **Область визначення заданої функції записується з умови існування** дробу:

#### 1 *x*2  0  *x*2  1  *x*  1.

Висновок:

*D**y*   ; 1  1;1 1;  .

1. **Точка перетину графіка з віссю** *Ох* *y*  0:





1

2*x*  0

 2*x*  0,

 *x*  0,

 *x*  0,

#### 1  *x*2

  *x*2

####  0;

*x*2

####  1;

*x*  1.

Отже, точка перетину графіка з віссю *Ох* : 0, 0 .

**Точка перетину графіка з віссю** *Оу* *х*  0:

*y*0 

#### 2  0

1  02

 0 .

Отже, точка перетину графіка з віссю *Оу* : 0, 0 .

**Висновок**: графік перетинається з осями *Ох* та *Оу* в єдиній точці

0, 0.

1. Знайдемо інтервал, де

*y*  0 **:**

2*x*  0, *x*  0,

2*x*  0 



#### 1  *x*2

* 0;



####  

2  1;

#### 

*x*

1  *x*2

2*x*  0,

*x*  0,

#### 

1  *x*2

####  0;



#### *x*2

* 1;

*x*  0,

#### 

 

####  1;



*x*

*х* 0; 1,

#### 

*x*  0,

*х*  ; 1.

#### 

 *x*



#### 1;

Знайдемо інтервал, де

*y*  0**:**

2*x*  0, *x*  0,

#### 2*x*  0 



#### 1  *x*2

 0;



####  

2  1;

#### 

*x*

1  *x*2

2*x*  0,

*x*  0,

#### 

1  *x*2

*x*  0,

#### 0;



*x*2

####  1;



####  

* + 1;

#### 

*x*

*х*  1;  ,

#### 

*x*  0, *х*  1; 0.

Висновок:



#### 

*y*  0 :

*y*  0:

####  1;

*х*  ; 1  0;1;

*x*

*х* 1;0 1;  .

1. Дослідимо функцію на періодичність:

*y**x*  *Т*   2*x*  *Т*   2*х*  2*Т* .

1  *x*  *Т* 2 1  *х*2  2*хТ*  *Т* 2

Отримали

*y**x*  *Т*   *у**х*.

Висновок:

*у**х* – не періодична.

1. Дослідимо функцію на парність і непарність:

*y* *x*  2 *х*   2*x* .

Отримали

*y* *x*   *y**x*.

1   *x*2

1  *x*2

**Висновок**: *у**х* – непарна, тому її графік симетричний відносно

початку координат 0, 0. В подальшому дослідженні функції можна

розглядати лише

*х*  0 .

1. З області визначення функції, маємо точки розриву:

*x*  1.

Дослідимо точку розриву: *x*  1.

#### lim *y*(*x*)  lim 2*x*

  2 1

####    2

  ,

#### 2  2   



*x*1 *x* 1

1  *x*

*x*1 *x* 1

#### 1 1   0

lim *y*(*x*)  lim 2*x*

####   2 1

   2

####   .

2  2   



*x*1 *x*1

1 *x*

*x*1 *x*1

#### 11 

 0

Дослідимо точку розриву: *x*  1.

#### lim *y*(*x*)  lim 2*x*   2   1    2  ,

2  2   

1  *x*

*x*1 *x*1

*x*1 *x*1

1   1   0

#### lim

*y*( *x*) 

#### lim

2*x*   2   1

####    2   .

*x* 1

*x* 11  *x*2 

 2 

####  0 

*x* 1

*x* 1

#### 1   1   

Висновок:

*x*  1 – точки розриву 2-го роду.

1. Знайдемо інтервали монотонності.

Похідна заданої функції:

 21  *x*2  2*x*   2*x* 2  2*x*2

 4*x*2

2*x*2  2

*y* (*x*) 

1  *x*2 2

 1  *x*2 2

 1  *x*2 2 .

Знаходимо стаціонарні точки з рівняння

*у**x*  0 :

#### 2*x*2  2

2*x*2  2  0,

#### 2*x*2  2,

1  *x*2 2

####  0,

 1  *x*2 2  0;

 

#### 1  *x*2



####  0;

*x*2



 *x*2



####  1, 

 1;

*не має*

*x*  1;



*розв*' язку,

 *не має*

*розв*' язку.

Отже, *у**x*  0 *х*  *D**y*.

Розглянемо умову

*у**x*  : похідна не існує в точках

*x*  1, але дані

точки не входить в область визначення функції, тому критичних точок не має.

Розділимо область визначення функції на інтервали і в кожному з них визначимо знак похідної (рис. 3.6):

 2   22  2

1 1

Рис. 3.6

*y**x*

*х*

*y**x*

*у*  2 

1  22 2

####  1,11  0 ,

*у*0 

*у*2 

#### 2  02  2

1 02 2

#### 2  22  2

1 22 2

####  2  0 ,

 1,11  0 .

Висновок:

*у**x* – зростає.

 *x*  ; 1 1; 1 1;  : *у**x*  0 

функція

Оскільки функція не має критичних точок, то точок локальних екстремумів дана функція також не має.

1. Знайдемо інтервали опуклості, вгнутості та точки перегину.

4*х*  1  *x*2 2  2*x*2  2 2  1  *x*2   2*х*



*y* (*x*) 

1 

*x*2 2 2

 4*х*  1  2*х*2  *х*4  4*х* 2*x*4  2  4*х*  8*х*3  4*х*5  8*х*5  8*х* 

1  *x*2 4 1  *x*2 4

 12*х*  8*х*3  4*х*5  4*х*  3  2*х*2  *х*4   4*х*  *х*2  3 *х*2 1 

1  *x*2 4

1  *x*2 4

1  *x*2 4

  4*х*  *х* 2  3

*x* 2 13 .

Знаходимо критичні точки другого роду з рівняння

*у**x*  0 та

умови *у**x* :

 4*х*  *х* 2  3

####  0,

 4*х*  *х* 2  3 0,

####  

 4*х*  0,

####  *х* 2  3  0, 

1  *x* 2 3

*х*  0,

1  *x* 2 3  0;

*х*  0,



1  *x* 2



####  0;

  3, 

*х*2





*не має розв*' *язку*, 

*х*  0,

*x*  1.

*x*  1; *x*  1; 







Отже,

*х*  0,

*x*  1

– критичні точки другого роду, але точки

*x*  1

не входить в область визначення функції, тому, маємо одну критичну точку:

*х*  0.

Розділяємо критичною точкою *х*  0 область визначення функції на

інтервали і в кожному з них визначити знак другої похідної *у* *x* (рис. 3.7):

*у*  2 

 4   2  22

1   22 3

 3  56

#### 27

* 0 ,

*у*  0,5 

 4   0,5  0,52  3

1  0,52 3

####  15,4  0 ,

*у* 0,5 

 4  0,5  0,52  3

1 0,52 3

####  15,4  0 ,

*у* 2 

####  4  2  22  3

1 22 3

#### 1

  56

#### 27

 0.

0 1

*у* *x*

*х*

*у**x*

Рис. 3.7

Висновок:

 *x*  ; 1 0; 1: *f* *x*  0  *крива вгнута*;

 *x* 1;0 1;  : *f* *x*  0  *крива опукла*.

При переході через критичну точку *х*  0 похідна тому маємо точку перегину кривої.

*f*  *x*

змінює знак,

*х*  0:

*y*0 

#### 2  0

1  02

 0 , тому точка 0;0 – точка перегину кривої.

1. Знайдемо асимптоти кривої.

Точки розриву: *x*  1, тому

*x*  1

– вертикальні асимптоти,

оскільки

lim

*x*1

*f* *x*   .

Дослідимо чи має задана функція похилу асимптоту

*y*  *kx*  *b* , де

*k*  lim

*y*(*x*) 

2*x*

#### lim 1  *x*2

 lim 2

2

 lim *x*2

####  0  0 ,

*x* *x*

*x* *x*

*x* 1  *x*2

*x* 1  1  1

*x*2

#### 2

*b*  lim *у**x*  *kx* 

lim 2*x*

####  lim

*x*  0

 0 .

*x*

*x* 1  *x*2

*x* 1  1  1

*x*2

Отже, пряма

*y*  0

* горизонтальна асимптота.

1. **Побудуємо графік функції** (рис. 3.8 ).

*у*

5

4

3

2

1

 5  4  3

 2 1

0

1

2

3

4 5

*х*

1

 2

 3

 4

 5

Рис. 3.8

Завдання для аудиторної роботи

* + 1. Дослідити функцію
    2. Дослідити функцію
    3. Дослідити функцію

*y*  *x*

1  *x* 2

*y*  1

1  *x* 2

*y*   *x*

1  *x* 2

* *x* 2

та побудувати її графік. та побудувати її графік. та побудувати її графік.

* + 1. Дослідити функцію

*y*  1  *x* 2

та побудувати її графік.

* + 1. Дослідити функцію

2*х* 1

*y*  1  *x*2

та побудувати її графік.

Завдання для самостійної роботи

*x*2

* + 1. **с.** Дослідити функцію

*y*  2*x*

 1

та побудувати її графік.

* + 1. **с.** Дослідити функцію

*х* 2  2*х*

*y*  *х* 1

*х* 2  2

та побудувати її графік.

* + 1. **с.** Дослідити функцію **3.6.4с.** Дослідити функцію **3.6.5с.** Дослідити функцію

*y*  *х* 1

*х* 2  4

*y* 

*х* 2  4

*х* 4

*y* 

#### *х*3 1

та побудувати її графік. та побудувати її графік. та побудувати її графік.

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ ДО РОЗДІЛУ 3

1. Сформулювати достатні умови сталості функції на інтервалі.
2. Сформулювати достатні строгої монотонності функції на інтервалі.
3. Які точки називають стаціонарними?
4. Які точки називаються критичними першого роду?
5. Сформулювати правило знаходження інтервалів монотонності.
6. Що називають локальною точкою мінімуму та локальним мінімумом функції? Чому "локальним"?
7. Що називають локальною точкою максимуму та локальним максимумом функції? Чому "локальним"?
8. Сформулювати необхідні умови локального екстремуму.
9. Сформулювати першу достатню умову локального екстремуму. Навести приклади.
10. Сформулювати другу достатню умову локального екстремуму. екстремуму. Навести приклади.
11. Як знайти найбільше та найменше значення функції на відрізку?
12. Яка крива називається опуклою на інтервалі?
13. Яка крива називається вгнутою на інтервалі?
14. Що називається точкою перегину?
15. Які точки називаються критичними другого роду?
16. Чи всяка точка перегину є критичною точкою другого роду? А навпаки? Навести приклади.
17. Сформулювати достатню умову опуклості (вгнутості) кривої.
18. Сформулювати правило знаходження інтервалів опуклості (вгнутості) та точки перегину.
19. Що називається асимптотою кривої?
20. Як знайти вертикальну асимптоту?
21. Як знайти похилу асимптоту?
22. Як знайти горизонтальну асимптоту?
23. Сформулюйте загальну схему дослідження функції.

РОЗДІЛ 4. ЗАСТОСУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ ДО ЗАДАЧ ТЕОРІЇ НАБЛИЖЕНЬ ТА ІНТЕРПОЛЯЦІЇ

**§ 4.1. НАБЛИЖЕНЕ РОЗВ’ЯЗУВАННЯ РІВНЯНЬ**

Алгебраїчні рівняння першого та другого степенів розв’язуються за формулами, які відомі зі шкільного курсу математики. Для знаходження коренів рівняння третього степеня існують формули Кардано. Для знаходження коренів рівняння четвертого степеня існує метод Феррарі.

Якщо існують формули, які дають змогу виразити корені рівняння через його коефіцієнти за допомогою скінченого числа операцій додавання, віднімання, множення, ділення і добування кореня, то кажуть, що таке ***рівняння розв’язується в радикалах***.

Рівняння п’ятого степеня вчені майже 300 років намагалися розв’язати в радикалах і лише в першій половині 19 ст. Н. Абель і Е. Галуа довели, що рівняння вище четвертого степеня в загальному випадку в радикалах не розв’язується. Для розв’язування таких рівнянь застосовують наближені методи.

Нехай потрібно розв’язати рівняння

*f* *x*  0 .

(4.1)

Перед тим як заходити корені рівняння (4.1), потрібно їх відділити, тобто визначити такі проміжки (їх називають ***проміжками ізоляції кореня***), які містять тільки один корінь.

Найпростішим **методом ізоляції коренів є *графічний***. Точки перетину

графіка функції *у*  *f* *x* з віссю *Ох* будуть коренями рівняння (4.1). Якщо

рівняння (4.1) можна зобразити у вигляді різниці двох функцій:

*f* *x*  *f*1*x* *f*2 *x*  0 ,

то *f*1*x*  *f*2 *x*, тому коренями рівняння (4.1) будуть абсциси точок

перетину кривих *у*  *f*1 *x* і *у*  *f*2 *x*.

Сформулюємо теореми, які лежать в основі алгоритму знаходження проміжків ізоляції.

**Теорема 4.1 (перша теорема Больцано-Коші).** Якщо функція *f* *x*

неперервна на відрізку *a*; *b* і на кінцях відрізка набуває значень різних

знаків, то в середині відрізка *a*; *b* знайдеться хоча б одна точка *х*  *с* , в

якій функція дорівнює нулю: *f* *с*  0 , *а*  *c*  *b* .

**Теорема 4.2 (друга теорема Больцано-Коші).** Якщо функція *f* *x*

неперервна на відрізку *a*; *b* і на кінцях відрізка набуває значень різних

значень *f* *а*  *А* та *f* *b*  *B* , то яке б не було число *C* , що лежить між *A*

і *B* , знайдеться точка *х*  *с* , *а*  *c*  *b* , в якій *f* *с*  *C* .

ПРАВИЛО 4.1 (алгоритм знаходження проміжків ізоляції):

Припустимо, що на відрізку *a*; *b* виконуються такі умови:

1. функція *f* *x* та її похідні *f* *x* та *f* *x* неперервні;
2. значення функції на кінцях відрізка мають різні знаки;
3. похідні *f* *x* та *f* *x* зберігають свої знаки на відрізку *a*; *b*.

Тоді рівняння (4.1) на *a*; *b* має лише корінь *х*0 , тобто *a*; *b* –

проміжок ізоляції кореня *х*0 . Далі задачу можна розв’язувати одним з таких

наближених методів з наперед заданою точністю  .

* + 1. МЕТОД ПОДІЛУ ВІДРІЗКА ПОПОЛАМ

Сформульована теорема лежить в основі даного методу. Той кінець відрізка, на якому значення функції додатне, позначимо індексом “+”, а де від’ємне – індексом “–“, середина цього відрізка –

*xn*  *n n*

*a*  *b*

2

. **(4.2)**

Обчислення припиняємо, коли на *n* -му кроці отримаємо відрізок, половина довжини якого менша за наперед задану точність  .

За наближене значення кореня приймаємо середину цього відрізка.

**Приклад 4.1.** Відокремити корені аналітично і уточнити один з них

методом поділу відрізка пополам з точністю до

0,01:

*x*3  27*x*  2  0 .

Нехай *f* *x*  *x*3  27*x*  2 . Знайдемо похідну

*f* *x*  3*x*2  27 .

Прирівняємо похідну до нуля

*f* *x*  0:

#### 3*x*2  27  0

 3*x*2  27 

*x*2  9

 *x*1  3,

####   3.

*x*

 2

На проміжку  3; 3 похідна *f* *x*  0 , отже функція тут спадна, а на

проміжках  ; 3 та 3;  похідна *f* *x*  0 і тому функція зростаюча.

Складемо таблицю знаків функції

*f* *x*, обчисливши її значення в

критичних точках

*f*  3   33  27 3 2  56,

#### *f* 3  33  27  3  2  52

та при досить великих *x* (таблиця 4.1.):

Таблиця 4.1

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *х* |   |  3 | 3 |   |
| sign *f* *x* | — | + | — | + |

Оскільки функція тричі змінює знак, то дане рівняння має три дійсні корені. На відрізку  3; 3 знаходиться один з них. Щоб звузити проміжок,

на якому знаходиться корінь, обчислимо значення функції в кількох точках:

#### *f* 0  03  27  0  2  2  0 , *f* 1  13  27 1  2  24  0 .

Отже, на відрізку 0; 1 задане рівняння має єдиний корінь. Уточнимо його методом поділу відрізка пополам з точністю до 0,01. Той кінець відрізка, на якому значення функції додатне, позначимо індексом “+”, а де

*a*  *b*

від’ємне, то індексом “–“, середина цього відрізка дорівнює

Результати обчислень заносимо в таблицю 4.2.

*x*  *n n* .

*n* 2

Таблиця 4.2

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *n* | *a*   *n* | *b*  *n* | *xn* | *a*   *b*  *n n*  2 | *f* *xn*  |
| 0 | 0 | 1 | 0,5 | 0,5 | -11,375 |
| 1 | 0 | 0,5 | 0,25 | 0,25 | -4,7344 |
| 2 | 0 | 0,25 | 0,125 | 0,125 | -1,373 |
| 3 | 0 | 0,125 | 0,0625 | 0,0625 | 0,31274 |
| 4 | 0,0625 | 0,125 | 0,09375 | 0,03125 | -0,53043 |
| 5 | 0,0625 | 0,09375 | 0,078125 | 0,015625 | -0,10890 |
| 6 | 0,0625 | 0,078125 | **0,0703125** | 0,0078125 |  |

Обчислення припиняємо, коли на *n* -му кроці отримаємо відрізок, половина довжини якого менша за 0,01. За наближене значення кореня

приймаємо середину цього відрізка:

#### *х*6  0,0703125 .

* + 1. МЕТОД ХОРД

Припустимо, що *f* *a*  0 , *f* *b*  0 і  *x* *a*;*b*:

*f* *x*  0 . Точку

перетину хорди *AB* з віссю *Ox* позначимо через

*x*1 ,

*x*1  *a*; *x*0  (рис. 4.1).

Через точку

*x*1 проводимо пряму, паралельну осі *Oу* , до перетину з

кривою в точці

*А*1 . Сполучивши точки

*А*1 та *В* хордою, дістанемо точку

*x*2 ,

*x*2  *x*1; *x*0  і т. д.

*у*

*В*

0

*a*

*x*1 *x*2 *x*0

*А*

*А*

*b*

*x*

2

*А* 1

Рис. 4.1

Можна довести, що послідовність наближених значень

*хп*   *х*1 , *х*2 , ... , *хп* , ... прямує до кореня *х*0 .

Обчислення припиняємо, коли для двох послідовних наближень маємо

*xn*  *xn* 1

  . **(4.3)**

Можливі випадки: на *a*; *b*, то

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **а) якщо** | *f* *b* |  *f*  | *х*  0 | |  | |
| *x*0  *a*, | *x* | *n*1 |  *xn*  | *f* *xn*   *f* *b* *f* *xn*  | | *b*  *xn*  |

; **(4.4)**

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **б) якщо** | *f* *a* |  *f* |  *х*  0 | | **на** *a*; *b***, то** | |
| *x*0  *b*, | *x* | *n*1 |  *xn*  | *f* *xn*   *f* *xn*  *f* *а* | | *xn*  *a* |

(4.5)

**Приклад 4.2.** Відокремити корені графічно і уточнити додатний корінь

методом хорд з точністю до

0,001:

*x*2  cos *x*  0.

Побудуємо графіки функцій *y*1  *x*2 та

*y*2  cos *x* склавши таблицю їх

значень на відрізку  1; 1 (таблиця 4.3):

Таблиця 4.3

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *х* | -1 | -0,5 | 0 | 0,5 | 1 |
| *y*1 | 1 | 0,25 | 0 | 0,25 | 1 |
| *y*2 | 0,54 | 0,88 | 1 | 0,88 | 0,54 |

Рис. 4.2

*у*

1

0,8

0,6

0,4

0,2

1

 0,5

0

0,5

1

*х*

З таблиці 4.3 і з рис. 4.2 видно, що додатній корінь рівняння

знаходиться на проміжку 0,8; 1. Визначимо знаки функції

*f* *x*  *x*2  cos *x*

на кінцях цього відрізка:

#### *f* 0,8  0,82  cos 0,8  0,06  0 ,

*f* 1  12  cos1  0,46  0 .

Визначимо знак її другої похідної на цьому відрізку:

*f* *x*  2*x*  sin *x*  *f*  *x*  2  cos *x*  0 при всіх

*x* 0,8;

1,

оскільки cos *x*

 1.

Оскільки

*f* *b* *f*  *х*  0 то для розрахунків використовуємо формулу:

*x*  0,8,

*b*  1,

*x*  *x*

* + *h*, *h* 

*f* *xn* 

*b*  *x* .

0 *n*1 *n*

*f* *b*

*f* *xn* 

Результати розрахунків заносимо у таблицю 4.4:

*n*

Таблиця 4.4

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *n* | *xn* | *b*  *xn* | *f* *xn*  | *f* *b*  *f* *xn*  | *h* | *xn*  *xn* 1 |
| 0 | 0,8 | 0,2 | -0,05671 | 0,516404 | -0,0219621 |  |
| 1 | 0,8219621 | 0,178038 | -0,00516 | 0,464861 | -0,0019776 | 0,021962 |
| 2 | 0,8239397 | 0,17606 | -0,00046 | 0,460156 | -0,0001755 | 0,001978 |
| 3 | **0,8241152** | 0,175885 | -4,1E-05 | 0,459738 | -1,556E-05 | 0,000176 |

Обчислення припиняємо, коли для двох послідовних наближень маємо

*xn*  *xn* 1  0,001.

За наближене значення кореня приймаємо

#### *х*3  0,8241152.

* + 1. МЕТОД ДОТИЧНИХ (МЕТОД НЬЮТОНА)

Припустимо, що *f* *a*  0 , *f* *b*  0 і  *x* *a*;*b*:

*f* *x*  0 ,

*f* *x*  0 . Точку перетину дотичної до графіка функції *f* *х* в точці *B* з

віссю *Ox* позначимо через *x*1 , *x*1  *x*0 ;*b* (якщо провести дотичну в точці

*А*, то точка 4.3).

*x*1 не наближається до кореня

*х*0 , а віддаляється від нього (рис.

Через точку *x*1 проводимо пряму, паралельну осі *Oу* , до перетину з

кривою в точці *B*1 . Точку перетину дотичної до графіка функції

*f* *х* в

точці *B*1 з віссю *Ox* позначимо через *x*2 , *x*2  *x*0 ; *x*1  і т. д.

*у*

*В*

*В*1

*В*2

0

*a*

*x*0 *x*2

*x*1 *b*

*x*

*А*

Рис. 4.3

Можна довести, що послідовність наближених значень

*хп*   *х*1 , *х*2 , ... , *хп* , ... прямує до кореня *х*0 .

Обчислення припиняємо, коли для двох послідовних наближень маємо

*xn*  *xn* 1  

. **(4.6)**

Формула для обчислення кореня рівняння

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | *x*  *x*  *f* *xn*   *n*1 *n f* *x*   *n* | |
| *f* *а* *f*  *х*  0 | | **на** *a*; *b***;**  **на** *a*; *b***.** |
| *f* *b* *f*  *х*  0 | |

, **(4.7)**

де , якщо

*x*0  *b*

*x*0  *a*

**, якщо**

 Дотичну слід проводити через ту точку, в якій функція і друга похідна мають однакові знаки.

**Приклад 4.3.** Відокремити корінь рівняння

*x*4  2*х*3  40*x*  10 та

уточнити його методом дотичних з точністю до 0,001.

Відокремимо додатний корінь даного рівняння методом проб.

Для цього обчислимо значення функції *f* *x*  *x*4  2*х*3  40*x*  10 у

довільній точці, наприклад *x*  0 , і обчислюємо

#### *f* 0  04  2  03  40  0  10  10  0.

Обчислимо значення функції в іншій довільній точці, наприклад

#### *f* 1  14  2 13  40 1  10  8  0.

*x*  1:

Оскільки значення *f* 0 і *f* 1 одного знаку, то про існування кореня

на відрізку 0; 1 нічого конкретного сказати не можна.

Потрібно підібрати точку *x*  *b* так, щоб *f* *b*  0 .

Візьмемо, наприклад, *x*  3:

#### *f* 3  34  2  33  40  3  10  5  0.

Оскільки на кінцях відрізка 0; 3

відрізку 0; 3 є корінь.

функція має різні знаки, то на

Якщо похідна функції не змінює знак на цьому відрізку, то корінь єдиний, а якщо похідна функції змінює знак, то коренів може бути кілька і тоді відрізок звузимо:

*f* *x*  4*x*3  6*х*2  40.

#### *f* 0  4  03  6  02  40  40  0.

*f* 3  4  33  6  32  40  122  0 .

Похідна змінює знак. Звузимо відрізок, вибравши точку

#### *f* 2  24  2  23  40  2  10  58  0 .

Отже, на відрізку 2; 3є корінь.

*x*  2 :

Оскільки

*f* 3  122  0 , а для всіх *x*  3 похідна зростає, то на

відрізку 2; 3 вона залишається додатною. Таким чином, на відрізку

2; 3знаходиться один корінь заданого рівняння. Знайдемо другу похідну і її знак на відрізку:

*f*  *x*  12*x*2  12*х*  0 для всіх

*x* 2; 3.

Оскільки, в даному випадку формулу

0

*f* 3 *f*  *х*  0 то для розрахунків маємо

*x*  *x*  *h* ,

*h*  *f* *xn*  , де *x*

 3.

*n*1 *n*

*f* *xn* 

Результати обчислень заносимо в таблицю 4.5:

Таблиця 4.5

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *n* | *xn* | *f* *xn*  | *f* *xn*  | *h* | *xn*  *xn* 1 |
| 0 | 4 | 214 | 312 | 0,685897 |  |
| 1 | 3,314103 | 50,86765 | 171,4985 | 0,296607 | 0,685897 |
| 2 | 3,017496 | 7,156569 | 124,5322 | 0,057468 | 0,296607 |
| 3 | 2,960028 | 0,237555 | 116,3109 | 0,002042 | 0,057468 |
| 4 | **2,95799** | 0,000293 | 116,0238 | 2,53E-06 | 0,002042 |

Обчислення припиняємо, коли

*xn*  *xn* 1

 0,001. В даному випадку

за наближене значення кореня приймаємо:

#### *х*4  2,95799 .

* + 1. КОМБІНОВАНИЙ МЕТОД (ХОРД І ДОТИЧНИХ)

Застосовуючи на відрізку *a*; *b*

одночасно метод хорд і дотичних,

знаходимо дві точки *x*1 та *x*1 , що лежать по різні боки від кореня *х*0 ,

*x*0 *x*1; *x*1 . Далі знову застосовуємо метод хорд і дотичних, але тепер на відрізку *x* ; *x*  і т. д.

1 1

Можливі випадки:

*f* *a* *f*  *х*  0

**а) якщо**

б) якщо

**на** *a*; *b***, то ,**

*x*  *x* 

*f* *х* 

*п*

*n*1

*n*

*f* *х* 

,

*п*

**на** *a*; *b***, то ,**

*х*  *х* 

*n*1

*n*

*f* *х*  *f* *х* 

*f* *хп* 

*х*  *x* 

*n n*

*п*

*п*

*f* *b* *f*  *х*  0

*х*  *х* 

*n*1

*n*

*f* *х*  *f* *х* 

*f* *хп* 

*х*  *x* 

*n n*

*п*

*п*

*x*  *x* 

*n*1

*n*

*f* *х* 

*f* *х* 

*п*

*п*

*x*0  *a*

*x*0  *a*

.

,

**(4.8)**

*х*0  *b*

*х*0  *b*

; **(4.9)**

,

, **(4.10)**

(4.11)

Обчислення припиняємо, коли для двох послідовних наближень

*xn*  *xn*   . **(4.12)**

**Приклад 4.4.** Комбінованим методом хорд і дотичних знайти один з

коренів рівняння

*x*4  6*x*2  11*x*  4  0

з точністю до 0,001.

Нехай

*f* *x*  *x*4  6*x*2  11*x*  4 . Відокремимо додатний корінь

даного рівняння методом проб: *f* 0  04  6  02  11 0  4  4  0 , а

*f* 1  14  6 12  111  4  14  0, тому на відрізку 0; 1 є корінь даного рівняння.

Похідна *f* *x*  4*x*3  12*x*  11 на цьому відрізку зберігає знак:

*f* 0  4  03  12  0  11  11  0 , *f* 1  4 13  12 1  11  27  0 , отже, корінь тут один.

Друга похідна *f*  *x*  12*x*2  12  0 для всіх *x* .

Маємо випадок *f* 1 *f*  *x*  0, тому для розрахунків використовуємо формули:

*n*

*n*

0

*х*  *х*

* + *h* , де

*h*  *f* *хп* 

*п*

*х*  *x* ,

*x*  0 .

*n*1 *n* 1

1 *f* *х*  

*f* *хп* 

*x*  *x*  *h* , де

*h*  *f* *хп*  ,

*п*

*x*  1.

*n*1 *n* 2

2 *f* *х*  0

Обчислення закінчуємо, коли

*xn*  *xn*

 2

 0,002 , а за наближене

значення кореня беремо тоді середину цього відрізка:

*с*  *xn*

* *xn* .

#### 2

Результати обчислень зручно зберігати у таблиці 4.6.

Таблиця 4.6

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *n* | *xn* | *xn*  *xn* | *f* *xn*  | *f* *xn*  | *f* *xn*   *f* *xn*  | *h*1 | |
| *xn* | *f* *xn*  | *h*2 | |
| 0 | 0 | 1 | -4 | 27 | 18 | -0,2222222 | |
| 1 | 14 | 0,5185185 | |
| 1 | 0,222222 | 0,259259 | -1,25682 | 17,22425 | 3,99780597 | -0,0815053 | |
| 0,481481 | 2,740985 | 0,1591352 | |
| 2 | 0,303728 | 0,018619 | -0,09698 | 15,00213 | 0,27703303 | -0,0065181 | |
| 0,322346 | 0,180048 | 0,0120015 | |
| 3 | **0,310246** | 9,91E-05 |  | *с*  *х*3  *х*3  0,310295194 2 | | |  |
| **0,310345** |

Завдання для аудиторної роботи

* + 1. Відокремити корені аналітично і уточнити один з них методом

поділу відрізка пополам з точністю до 0,01:

*x*3  2*x*  13  0 .

* + 1. Відокремити корені аналітично і уточнити один з них методом

поділу відрізка пополам з точністю до 0,01:

*x*3  *x*  5  0.

* + 1. Відокремити корені графічно і уточнити один з них методом хорд з точністю до 0,001: 3*x*  lg *x*  6  0 .
    2. Відокремити корінь і уточнити з точністю до

#### 0,001

методом

дотичних:

*x*3  3*x*2  6*x*  2  0.

* + 1. Комбінованим методом хорд і дотичних знайти один з коренів

рівняння з точністю до

0,001:

*x*3  3*x*2  1  0.

Завдання для самостійної роботи

* + 1. **с.** Відокремити корені аналітично і уточнити один з них методом

поділу відрізка пополам з точністю до 0,01:

*x*3  3*x*  10  0 .

* + 1. **с.** Відокремити корені аналітично і уточнити один з них методом

поділу відрізка пополам з точністю до 0,01:

*x*3  2*x*  4  0 .

* + 1. **с.** Відокремити корені графічно і уточнити один з них методом хорд з точністю до 0,001: 3*x*  cos *x*  1  0.
    2. **с.** Відокремити корінь і уточнити з точністю до

#### 0,001

методом

дотичних:

*x*3  3*x*2  16*x*  2  0.

* + 1. **с.** Комбінованим методом хорд і дотичних знайти один з коренів

рівняння з точністю до

0,001:

*x*3  8*x*2  3  0 .

§ 4.2. ІНТЕРПОЛЯЦІЯ ФУНКЦІЙ

Нехай при вивченні деякого явища встановлено, що існує залежність

між змінними величинами *х* та *у* . Функція *у*  *f* *х* не відома, але

внаслідок експерименту встановлено значення цієї функції

*у*0 ,

*у*1 ,

*у*2 , ... , *уп*

при відповідних значеннях аргументу

*х*0 ,

*х*1 ,

*х*2 , ... , *хп* .

**Задача інтерполяції**: знайти многочлен, який би наближено зображав

би функцію *у*  *f* *х*.

Нехай на відрізку *a*; *b* задані значення функції *у*  *f* *х* в точках

*а*  *х*0  *х*1  *х*2  ...  *хп*  *b* :

*f* *х*0  

*y*0 ,

*f* *х*1  

*y*1 , … ,

*f* *хn*  

*yn* .

Потрібно знайти ***інтерполяційний многочлен*** *n* ***-го степеня***

*P* *x*  *a x*  *a x*  ...  *a x*  *a*

*n*

*n*

1

*n*

0

1

*n*1

*n*

, **(4.13)**

значення якого в ***вузлах інтерполяції*** *х*0 ,

*х*1 ,

*х*2 , ... , *хп*

збігаються зі

значеннями функції *у*  *f* *х* (рис.4.4), тобто

*Pn* *xi*  

*f* *xi*  

*yi* ,

*i*  0, *n* .

*у f* *х*

*Pn* *x*

0 *a*  *x*0 *x*1

*x*2

Рис. 4.4

*xn*  *b x*

Вважаючи інтерполяційний многочлен

*Pn* *x* наближеним

аналітичним виразом для функції *у*  *f* *х*, тобто *f* *х*  *Pn* *x*, ми можемо

знаходити наближені значення функції *f* *х* в точках *х* , що лежать між вузлами.

Задача інтерполяції має єдиний розв'язок, причому інтерполяційний

многочлен має вигляд

*P* (*x*)  *y*

*x*  *x*1 *x*  *x*2 ...*x*  *xп*   *y*

## 

*x*

*x*  *x*0 *x*  *x*1 ...*x*  *xп* 

####  ... 

*n* 0

1

0

* *x*1

*x*0

* *x*2

...*x*0

* *xп* 

1 *x*

* *x*0

*x*1

* *x*2

...*x*1

* *xп* 

*x*  *x*0 *x*  *x*1 ...*x*  *xп*1  .

* *yп* 

*xп*  *x*0 *xп*  *x*1 ...*xп*  *xп*1 

(4.14)

Формула (4.14) називається ***інтерполяційною формулою* (*інтерполяційним многочленом*) *Лагранжа***. Формулу (4.14) можна записати так

. **(4.15)**

*P* (*x*)   *y*

*n*

(*x*  *x*0 )(*x*  *x*1 )…(*x*  *xi*1 )(*x*  *xi*1 )…(*x*  *xn* )

*n*

*i*0

*i* (*x*  *x* )(*x*  *x* )…(*x*  *x* )(*x*  *x*

*i* 0 *i* 1

*i i*1 *i i*1

)…(*x*  *x* )

*i n*

4.7:

При обчисленні коефіцієнтів Лагранжа різниці розмістити у таблиці

Таблиця 4.7

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *x*  *x*0 | *x*0  *x*1 | *x*0  *x*2 | … | *x*0  *xп* |
| *x*1  *x*0 | *x*  *x*1 | *x*1  *x*2 | … | *x*1  *xп* |
| *x*2  *x*0 | *x*2  *x*1 | *x*  *x*2 | … | *x*2  *xп* |
| … | … | … | … | … |
| *xп*  *x*0 | *xп*  *x*1 | *xп*  *x*2 | … | *x*  *xп* |

Якщо позначити добуток елементів *і* -го рядка через *Pі і*  0, *п* , а

добуток елементів головної діагоналі – через *Dn*1 *x*, то формула Лагранжа (4.15) набуде вигляду:

*P* *x*  *D*

*n*

*n*1

*x*

*n*

*yi*

*i*0

*P*

*i*

. **(4.16)**

Формулу Лагранжа застосовують в **задачі чисельного**

**диференціювання**: за відомою таблицею значень невідомої функції *f* *х*

знайти значення *f* *х*.

Її ***наближено задачу чисельного диференціювання*** можна розв’язати

так: за формулою (4.16) замінити функцію *f* *х* інтерполяційним многочленом і знайти похідну від нього.

**Приклад 4.5.** В точка *x*0  1, *x*1  3, *x*2  6 відомі значення функції

*y*  *f* *х*: *y*0  2 , *y*1  3, *y*2  5. Обчислити наближено

*f* 5.

Використаємо формулу (4.14) і отримаємо

*f* ( *x*)  *P* ( *x*)  *y*

*x*  *x*1 *x*  *x*2   *y*

*x*  *x*0 *x*  *x*2   *y*

*x*  *x*0 *x*  *x*1  .

2 0 *x*

0

1

2

* + *x*1

*x*0

 *x*2 

1 *x*

* + *x*0

*x*1

 *x*2 

2 *x*

* *x*0

*x*2

 *x*1 

Підставимо задані значення

*f* ( *x*)  2 *x*  3*x*  6  3 *x*  1*x*  6  5 *x*  1*x*  3 

1  31  6 3  13  6 6  16  3

 2 *x*  3*x*  6  3 *x*  1*x*  6  5 *x*  1*x*  3 

 2  5

2   3

#### 5  3

 *x*  3*x*  6  *x*  1*x*  6  *x*  1*x*  3 

#### 5 2 3

 1 *x*2  9*x*  18 1 *x*2  7*x*  6 1 *x*2  4*x*  3

#### 5 2 3

 *x*2

 9*x*  18  *x*2

 7*x*  *x*2

 4*x*  1 

###### 5 5 5 2 2 3 3



3

 6*x*2  15*x*2  10*x*2  9  6*x*  15  7*x*  10  4*x*  18  5  4 

######  31*x*2

30

###### 5  2  3

 199*x*

###### 30

 38 .

###### 5

5  2  3

  31*x*2

5

199*x* 38

Отже, функція має вигляд *f x* 

  .

#### 30 30 5

Знайдемо похідну

*f* *x*  31 2*x*  199  31*x*  199 .

#### 30 30 15 30

Знайдемо значення похідної в точці *x*  5.

#### *f* 5  31 5  199  31  199  3110  199  111  3 21  3 7

 3,7 .

#### 15 30

3 30

#### 30 30

30 10

Завдання для аудиторної роботи

* + 1. В точка *x*0  2 , *x*1  3, *x*2  5 відомі значення функції

*y*  *f* *х*:

*y*0  1, *y*1  3, *y*2  5. Обчислити наближено

*f* 1.

* + 1. В точка *x*0  2 ,

*x*1  4, *x*2  6 відомі значення функції

*y*  *f* *х*: *y*0  1, *y*1  2 , *y*2  5. Обчислити наближено

*f* 2.

* + 1. В точка *x*0  1, *x*1  3, *x*2  4 відомі значення функції

*y*  *f* *х*:

*y*0  2 , *y*1  3, *y*2  6 . Обчислити наближено *f* 3.

* + 1. В точка *x*0  1, *x*1  4 , *x*2  5 відомі значення функції

*y*  *f* *х*:

*y*0  2 , *y*1  4 , *y*2  5. Обчислити наближено *f* 4.

* + 1. В точка *x*0  3,

*x*1  4 , *x*2  6 відомі значення функції

*y*  *f* *х*: *y*0  2 , *y*1  3,

*y*2  7 . Обчислити наближено

*f* 5.

Завдання для самостійної роботи

* + 1. **с.** В точка *x*0  2 , *x*1  3, *x*2  7 відомі значення функції

*y*  *f* *х*: *y*0  1, *y*1  3,

*y*2  5. Обчислити наближено

*f* 6.

* + 1. **с.** В точка *x*0  4 ,

*x*1  5, *x*2  6 відомі значення функції

*y*  *f* *х*: *y*0  2 , *y*1  5 ,

*y*2  8. Обчислити наближено

*f* 7.

* + 1. **с.** В точка *x*0  3,

*x*1  5, *x*2  6 відомі значення функції

*y*  *f* *х*: *y*0  2 , *y*1  6,

*y*2  9 . Обчислити наближено

*f* 8.

* + 1. **с.** В точка *x*0  2 ,

*x*1  3, *x*2  8 відомі значення функції

*y*  *f* *х*: *y*0  2 , *y*1  7, *y*2  10 . Обчислити наближено

*f* 9.

* + 1. **с.** В точка *x*0  1, *x*1  3, *x*2  8 відомі значення функції

*y*  *f* *х*:

*y*0  2 , *y*1  8 , *y*2  9 . Обчислити наближено

*f* 10.

§ 4.3. ДИФЕРЕНЦІАЛ ДОВЖИНИ ДУГИ

Нехай крива *L* (рис. 4.5) є графіком функції *y*  *f* *x*, заданої на

деякому відрізку *a*;*b*. Визначимо довжину дуги кривої. Візьмемо на кривій

*L* точки

*М* 0 ,

*М*1 ,

*М* 2 , …,

*Мп*1 , *М п*

і сполучимо їх відрізками. Дістанемо

ламану лінію

*М* 0 *М*1 *М* 2 *Мп*1 *Мп* , яка вписана в дугу *L* . Позначимо

периметр цієї ламаної через

*Рп* .

Якщо існує і не залежить від способу вписування ламаної скінчена границя периметра ламаної і коли найбільший відрізок ламаної прямує до нуля, то крива *L* називається спрямною, а величина цієї границі називається ***довжиною дуги*** і позначається

*l*  lim

max *Mi Mi* 1 0

*Pn* .

Зафіксуємо на кривій (рис. 4.6) точку *М* 0 *х*0 , *у*0 , точку



*М* *х*, *у*

вважатимемо змінно. Тоді довжина дуги *М* 0*М* залежить від положення



точки *М* і тому є деякою функцією *l* *x* абсциси цієї точки: Розв'яжемо задачу про знаходження похідної *l**x*.

*М* 0*М*

 *l**x*.

*у у* *l М*

*М* 2

*Мп*1

*Мп*

*М*1

*М* 0

0

*a*

*b*

*x*

1

*М* *y*

*x*

*l*

*М* 0

Рис. 4.5

0 *х*0

*х*

Рис. 4.6

*х*  *х x*

Нехай функція

*y*  *f* *x* та її похідна

*f* *x* неперервні на *a*;*b*. Тоді в

кожній точці кривої *L* можна провести дотичну. Такі криві *L* називається

гладкими.

**Геометричний факт**: довжини нескінченно малої гладкої дуги і хорди, що стягує цю дугу, є еквівалентними нескінченно малими величинами, тоді

*l**x*

 lim *l*

####  lim

*MM*1

####  lim

 lim 

*x*2  *y*2

*x*2  *y*2

*x*2

*x*0 *x*

1  

 *y* 2

 *x* 



####  lim

*x*0

Отже,

*x*0

*x* *x*0 *x*

 1  *y*2 .

*l**x* 

1 *y*2

*x*0

. **(4.17)**

Для диференціала дуги маємо

*dl*  *l**x* *dx* 

 *dx* , тобто

**диференціал дуги** обчислюється за формулою

1 *y*2

*dl*  1  *y*2  *dx*

або

(4.18)

. **(4.19)**

*dl*  *dx*2  *dy*2

**Геометричний зміст диференціала дуги** (рис. 4.7): , тобто

*dl*  *МТ*

диференціал дуги дорівнює довжині відповідного відрізка дотичної до кривої в її початкові точці.

*у Т*

*dl*

*dy*

##### М

0 *х*

*dx*

Рис. 4.7

*х*  *х x*

 Формула (4.19) справедлива лише тоді, коли

*dx*2  *dy*2

*х*  0**, а якщо**

*х*  0 **,**

**то** *dl*  

. Тому в загальному випадку

. **(4.20)**

*dl*  *dx*2  *dy*2

**Приклад 4.6.** Знайти диференціал дуги лінії *y*  ln1  *x*2 . Для цього обчислюємо похідну функції

*y*  ln1  *x*2   1  1  *x*2   1   2*x*   2*x* .

#### 1  *x*2

1  *x*2

1  *x*2

Підставимо знайдене значення у формулу (4.19) і отримаємо

*dl* 

#### 

 *dx* 

 *dx* 

1  

  2*x* 2

1  *x*2 



1  2*x*2  *x*4

1  *x*2 2

1  *x*2 2

1  *x*2 2

 *dx* 

#### 1  *x*2

4*x*2

1 

1  *x*2 2

1  2*x*2  *x*4  4*x*2

1  *x*2 2

 *dx*  1  *x*2  *dx* .

 *dx* 

Якщо крива задана параметрично:

*x*  *x**t* ,

 *y*  *y**t* ,



то

*dx*  *x**t*  *dt*,

*dy*  *y**t*  *dt*,



тоді диференціал дуги обчислюється за формулою

*dl*  *x*   *y*  *dt*



2



2

*t*

*t*

. **(4.21)**

**Приклад 4.7.** Знайти диференціал дуги лінії, яка задана параметрично

*x*  *а*  *t*  sin *t* ,

 *y*  *а*  1  cos *t* .



Для цього обчислюємо похідні

*xt*  *а*  1  cos *t* , *yt*  *а*  sin *t*.

Отримані значення похідних підставляємо в формулу (4.21)

*dl* 



*а*  1  cos *t* 2  *а*  sin *t* 2  *dt* 

*а*2  1  2 cos *t*  cos2 *t*  sin2 *t*  *dt*  *а*

*а*2  1  cos *t* 2  *а*2  sin2 *t*

2  2 cos *t*

 *dt* 

 *dt* 

 *а*  *dt*  *а*

2  1  cos *t* 



2 1  cos *t*

 *dt*  *а* 2

#### 2 sin2

*t*  *dt* 

#### 2

 *а*  *dt*  *а*

2 2 sin 2

*t*

2

sin *t*

#### 2



2 2

 *dt*  2*а* sin *t*

#### 2

 *dt*.

Завдання для аудиторної роботи

* + 1. Знайти диференціал дуги лінії
    2. Знайти диференціал дуги лінії
    3. Знайти диференціал дуги лінії
    4. Знайти диференціал дуги лінії
    5. Знайти диференціал дуги лінії

*y*  log2 1  *x*2 .

*y*  sin1  *x*. *y*  cos2  *x*2 .

*x*  1  *t*2,

 *y*  cos *t*.



*x*  sin *t*,

 *y*  *t*2.



Завдання для самостійної роботи

* + 1. **с.** Знайти диференціал дуги лінії
    2. **с.** Знайти диференціал дуги лінії

*y*  *e*1*x*2 .

*y*  *tgx*2 .

* + 1. **с.** Знайти диференціал дуги лінії *y*  1  *x*2 .
    2. **с.** Знайти диференціал дуги лінії
    3. **с.** Знайти диференціал дуги лінії

*x*  *t*3,

 *y*  *tgt*.



*x*  *ctgt*,

 *y*  *t*4.



§ 4.4. КРИВИНА ПЛОСКОЇ ЛІНІЇ

Однією з особливостей плоскої кривої лінії є її відхилення від прямої, тобто викривлення лінії. Ступінь відхилення кривої від прямої або міру викривлення лінії встановлює її ***кривина***.

Розглянемо гладку криву *L* . Кут  між дотичними до *L* в точках *A* та

*B* називається ***кутом суміжності дуги*** *AB* (рис. 4.8).

*L*

*В*



*А*

Рис. 4.8

 Якщо дуги однакової довжини, то більше викривлена та, в якої кут суміжності більший (рис. 4.9).







Рис. 4.9

 Якщо дуги різної довжини, то один і той самий кут суміжності може бути у дуг з різним викривленням (рис. 4.10).





Рис. 4.10

**Для характеристики викривлення лінії** кут суміжності дуги розраховують на одиницю її довжини.

***Середньою кривиною*** називається відношення кута суміжності дуги до її довжини і позначають

 В формулі (4.22) невід’ємна.

. **(4.22)**

0     **, тому середня кривина завжди**

*K*

*ср*

 



*A*

*B*

Кривиною K кривої

*y*  *f* *x*

***в точці*** *A* називається границя

(скінченна або нескінченна) середньої кривини при прямуванні кінцевої точки *В* до початкової точки *A*:



або

*K*  lim *Kср*

*B A*



 lim 

*B* *A AB*

. **(4.23)**

*K*  *y*  *y*

1  *y*2 

3

2

3 1  *y*2 2

*x*  *x**t* ,



Якщо рівняння лінії задано в параметричній формі

 *y*  *y**t*  , то

. **(4.24)**

*K*  *yt**t*  *xt*  *yt*  *xt**t*

*x* 2  *yt*

*t*

  

3



*yt**t*  *xt*  *yt*  *xt**t*



2

2

3



*x*   *y*  

*t*



2

*t*



2

2

**Приклад 4.8.** Знайти кривину прямої лінії точці.

Знайдемо похідні:

*y*  *ax*  *b*

в будь-якій

*y*  *ax*  *b*  *a*  0  *a* ,

*y*  *a*  0 .

Підставимо значення похідних в формулу (4.23):

*K*    0 .

0

 

1 *а* 

3

2

2

0

3 1  *а* 2 2

**Приклад 4.9.** Знайти кривину параболи *y*  *x*2

Знайдемо похідні:

в її вершині *O*0; 0.

*y*  *x*2   2*x* .

*y*  2*x*  2.

Підставимо значення похідних в формулу (4.23):

*K*   .

2



1  2*x*



 

3

2

2

2

3 1  4*x*2 2

*K*  – це кривина заданої параболи

2

3 1  4*x*2 2

*y*  *x*2

в довільній

точці.

Підставимо координати вершини параболи, тобто

*x*  0 :

*K*     2 .

2

3 1  4  02 2

2

3 1  02

2

1

***Радіусом*** *R* ***кривини в точці*** *A* називається величина, обернена до кривини:

, 0  *K*  . **(4.25)**

*R*  1

*K*

***Центром кривини кривої в точці*** *A* (рис. 4.11) називається точка *С* ,

що лежить на нормалі до кривої *L* в точці *A* на відстані вгнутості *L* .

*CA*  *R*  1

*K*

в бік

Координати  та  центра кривини

*C*  ;  

кривої

*y*  *f* *x* в

точці

*A**x*; *y* знаходять за формулою:

, . **(4.26)**

  *x* 

*y*  

1  *y*  



2

*y*

  *y*

 1  *y*2

*y*

***Колом кривини*** називається коло радіусом *R* і центром в точці *С* .

*L*

*С*



*А*

Рис. 4.11

Геометричне місце  центрів *С* кривини плоскої кривої *L* називається її ***еволютою***. Сама крива *L* відносно своєї еволюти називається ***евольвентою*** або ***розгорткою*** (від evolvo – розгортати).

Знаючи рівняння

*y*  *f* *x*

кривої *L* , за формулами (4.26) можна

знайти координати центра кривини залежно від абсциси *х* , тобто можна

дістати параметричні рівняння еволюти  :    *x*,   *x*.

*x*2

**Приклад 4.10.** Знайти рівняння еволюти параболи

*O*0; 0.

Знайдемо похідні:

*y*  в її вершині

#### 4

######  *х*2  1  1 *х*

*у*   

######  4 

  *х*2 

###### 4

  2*х* 

###### 4 2

      *х*   1     1   1

*у у*  2  2 *х* 2 1 2

####  

*x*2

Підставимо знайдені значення похідних та

дістанемо параметричні рівняння еволюти

*y*  у формули (4.26),

#### 4

*х*   *х* 2 

####  1    

  *x*  2 

*х*



*х*

*х*

####  2 

1



####   *х*  2 



####  1 

2  3

  *х*  *х* 

  *х*3

#### 2

 *х* 2

#### 2  4  4 4

*х*2 1   2  *х*2

4





  *х* 2  *х*2

*х*2 3*х*2

  

####   

 2  1  

####   

 2  2 

####  2 

4 1

#### 2

Тобто

####   2   4 4 4

   *х*3

#### 4

  2

 3*х*2

#### 4

Виключимо з цих рівнянь параметр *х* . Для цього виразимо кожного рівняння:

*x*6 з

   *x*3 

#### 4

*x*3  4 

*x*3 2

  4 2 

*x*6  16 2 .

  2

 3*x*2

#### 4

 3*x*2

#### 4

   2

 3*x*

2 2

 4  2 

2 4  2

 2 3

 4  23

6 64  23

*x*  

#### 3

*x*  

#### 

  *x*  .

####  27

3

Прирівняємо і отримаємо

16 2

 64  23

#### 27

  2 

*x*2

64  23

#### 27 16

  2

4  23

.



#### 27

Отже, еволютою параболи

*y*  є напівкубічна парабола

#### 4

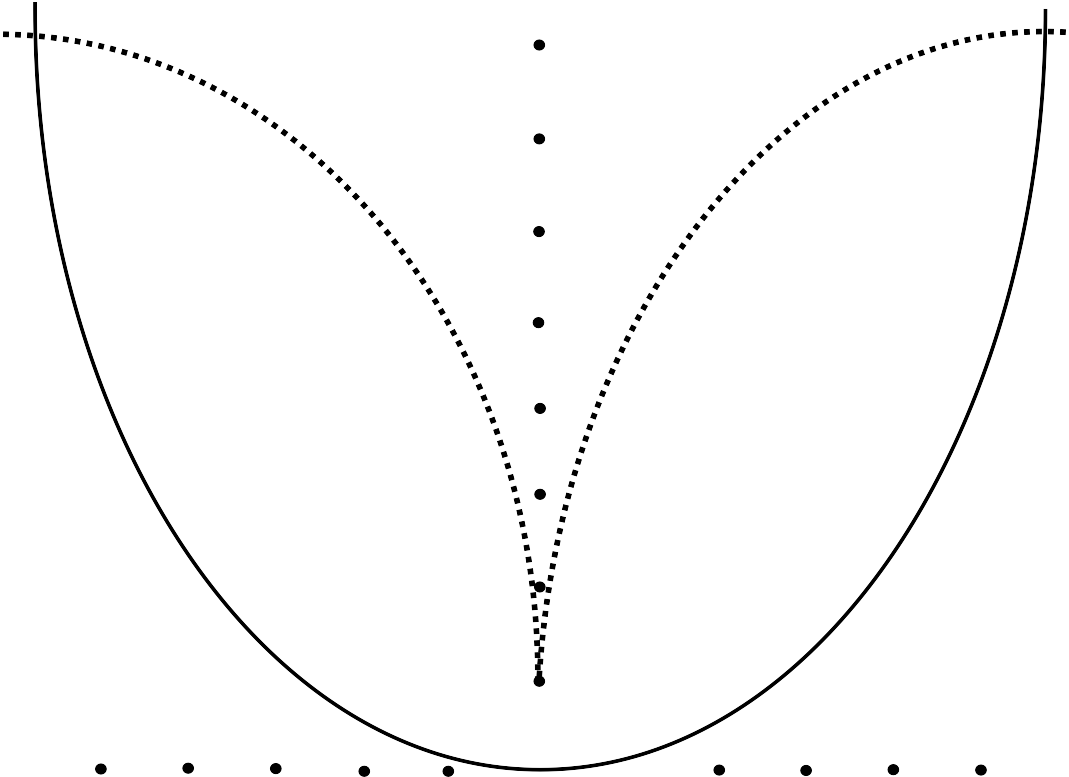
*x*2 

4*y*  23

.

#### 27

 5  4  3



*у*

*х* 

2

8

4*у*  23

27

7

*у* 

4

*х*2

6

5

4

3

2

1

####  2  1

0 1

Рис. 4.12

#### 2 3 4 5 *x*

Завдання для аудиторної роботи

* + 1. Знайти кривину лінії

*x*  1.

* + 1. Знайти кривину лінії

*y*  *x*3  5*x*2  4*x*  18 в точці з абсцисою

*y*  ln1  2*x*2  в початку координат.

* + 1. Знайти радіус кривини лінії

*xy*  2 в точці з абсцисою

*x*  1.

* + 1. Знайти радіус кривини лінії

*y*2  2*x*

в точці з абсцисою

*x*  2 .

* + 1. Знайти координати центра кривини і рівняння еволюти для лінії

*y*  *x*4 .

Завдання для самостійної роботи

* + 1. **с.** Знайти кривину лінії

*y*  *x*4  3*x*3  5*x*2  2*x*  2

в точці з

абсцисою *x*  1.

* + 1. **с.** Знайти кривину лінії

*y*  lncos *x*

в початку координат.

* + 1. **с.** Знайти радіус кривини лінії

*xy*  4

в точці з абсцисою

*x*  1.

* + 1. **с.** Знайти радіус кривини лінії

*y*2  5*x*

в точці з абсцисою

*x*  5.

* + 1. **с.** Знайти координати центра кривини і рівняння еволюти для лінії

*y*  *x*5 .

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ ДО РОЗДІЛУ 4

1. Коли кажуть, що рівняння розв’язується в радикалах?
2. Що називають проміжками ізоляції кореня?
3. Яка суть графічного методу ізоляції кореня?
4. Сформулюйте першу теорему Больцано-Коші.
5. Сформулюйте другу теорему Больцано-Коші.
6. Сформулюйте алгоритм знаходження проміжків ізоляції.
7. В чому полягає суть методу поділу відрізка пополам?
8. В чому полягає суть методу хорд?
9. В чому полягає суть методу дотичних (метод Ньютона)?
10. В чому полягає суть методу комбінований метод (хорд і дотичних)?
11. В чому полягає суть задачі інтерполяції?
12. Як записується інтерполяційний многочлен *n* -го степеня?
13. Що називають вузлами інтерполяції?
14. Що називається інтерполяційною формулою (інтерполяційним многочленом) Лагранжа?
15. В чому полягає суть задачі чисельного диференціювання?
16. Яка крива називається спрямною?
17. Що називається довжиною дуги?
18. Які криві називається гладкими?
19. За якою формулою обчислюється диференціал дуги явно заданої функції?
20. Який геометричний зміст диференціала дуги?
21. За якою формулою обчислюється диференціал дуги пареметрично заданої функції?
22. Що називається кривиною дуги?
23. Що називається кутом суміжності дуги



*AB* ?

1. Що використовують для характеристики викривлення лінії?
2. Що називається середньою кривиною лінії?
3. Що називається кривиною *K* кривої *y*  *f* *x* в точці *A*?
4. Що називається радіусом *R* кривини кривої в точці *A*?
5. Що називається центром кривини кривої в точці *A*?
6. Що називається колом кривини?
7. Що називається еволютою?
8. Що називається евольвентою?

РОЗДІЛ 5. ЗАСТОСУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ В ЕКОНОМІЦІ

**§ 5.1. МАРГІНАЛЬНИЙ АНАЛІЗ ЕКОНОМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ. ЕКОНОМІЧНИЙ ЗМІСТ ПОХІДНОЇ**

В економічному розрахунку остаточне рішення залежить від співвідношення витрат і вигоди, яку суб'єкт господарювання одержить від своєї діяльності. Чи буде потенційний інвестор робити нові вкладення визначається не тим, який прибуток дали попередні інвестиції, а тим, який прибуток передбачається одержати від нових інвестицій. Наприклад, підприємство, приймаючи на роботу нового працівника, завжди розраховує на той додатковий внесок у загальну справу, який зробить цей працівник.

Користь, яку одержує суб'єкт господарювання від додаткових інвестиційних вкладень, називається ***граничною*** або ***маргінальною користю***.

Дохід, що одержує підприємство від продажу додаткової одиниці товару, зробленого завдяки цим інвестиціям, називається ***граничним*** або ***маргінальним доходом***.

Продуктивність, досягнута за рахунок додаткових витрат інвестиційних ресурсів, називається ***граничною*** або ***маргінальною продуктивністю***.

Додатковий продукт, зроблений ще одним новим працівником у результаті розширення підприємства, називається ***граничним*** або маргі***н***альний ***продуктом***. Ці додаткові споживчі блага, доходи підприємств і продуктивність додаткових ресурсів порівнюються з граничними або маргінальним витратами, що зумовлені додатковими витратами чи відмовою від будь-яких благ.

***Граничні*** або ***маргінальні витрати*** – це додаткові витрати підприємства на виробництво однієї додаткової одиниці продукції.

Позначимо через *D**x*, *V* *x*, *P**x* – дохід, витрати і прибуток

підприємства на виробництво *x* одиниць продукції за ціною *р**х*. Кожна з

цих величин є певною функцією кількості одиниць *x* виробленої продукції і залежність між ними:

Дохід:

*D**x*  *р**х* *х*

**Прибуток**:

. **(5.1)**

. **(5.2)**

*P**x*  *D**x**V* *x*

Якщо підприємство збільшує випуск продукції на функції набувають приросту:

*D**x*  *D**x*   *x*  *D**x*;

*V* *x*  *V* *x*   *x**V* *x*;

*P**x*  *P**x*   *x* *P**x*.

 *x* одиниць, то ці

Відношення приросту функції до приросту аргументу  *x*

характеризує приріст відповідної функції на одиницю приросту продукції, а

границя цього відношення при  *x*  0 стає маргінальною.

**Економічний зміст похідної**: похідні *D**x*,

*V* *x*,

*P**x*

дорівнюють маргінальним доходу, витратам та прибутку відповідно:

* маргінальний дохід:

*D**x* 

lim  *D**x* 

lim

*D**x*   *x*  *D**x*

; **(5.3)**

* маргінальні витрати:

 *x*0  *x*

 *x*0

 *x*

; **(5.4)**

*V* *x*  lim *V* *x*  lim *V* *x*   *x*  *V* *x*

 *x*0

 *x*

 *x*0

 *x*

* маргінальний прибуток:

*P**x*  lim  *P* *x*  lim *P**x*   *x*  *P**x*

 *x*0

 *x*

 *x*0

 *x*

; **(5.5)**

Отже, граничні характеристики визначають **швидкість зміни економічного процесу**.

**Середній дохід** – це дохід від продажу одиниці продукції:

*D*

*сер*

 *D**x*

*x*

. **(5.6)**

**Середні витрати** – це витрати на випуск одиниці продукції:

*V*

*сер*

 *V* *x*

*x*

. **(5.7)**

**Середній прибуток** – це прибуток від одиниці продукції:

*Р*

*сер*

 *Р**x*

*x*

Середня продуктивність праці:

**(5.8)**

. **(5.9)**

*Z*

сер

 *U* *t* 

*t*

**Приклад 5.1.** Функція витрат фірми на виробництво продукції має

вигляд *у**х*  5*х*3  3*х*2  4*х*  50 (гр. од.). Знайти середні та граничні

(маргінальні) витрати фірми на виробництво продукції та обчислити їх

значення при *х*  40.

Обчислимо середні витрати за формулою (5.7):

  5*х*3  3*х*2

####  4*х*  50 2 50

*усер х* 

 5*х*

##### х

 3*х*  4  .

##### х

Обчислимо значення середніх витрат при

*х*  40:

*усер*

40  5  402

######  3  40  4  50

40

 8000  120  4  1,25  8117,25 (гр.од.).

Обчислимо граничні (маргінальні) витрати:

*у**х*  5  3*х*2  3  2*х*  4  15*х*2

 6*х*  4 .

Обчислимо значення граничних (маргінальних) витрат при

*х*  40:

*у*40  15  402  6  40  4  24236 (гр. од.).

Отже, на даному рівні виробництва (кількості продукції 40 од., що випускається) середні витрати на виробництво однієї одиниці продукції складають 8117,25 гр. од., а збільшення об’єму на одну одиницю продукції буде коштувати фірмі 24236 гр. од.

**Приклад 5.2.** Фірма мінімізує середні витрати, які дорівнюють 50 грн./од. Чому при цьому дорівнюють граничні (маргінальні) витрати?

З формули (5.7) маємо:

*V* *x*  *Vсер*  *x*  *V* *x*  50  *x* .

За формулою (5.4) граничні (маргінальні) витрати – це похідна від функції витрат:

*V* *x*  50  *x*  50 .

Нехай *х* – **національний дохід**, *С**х* – **функція споживання** (частина

доходу, що споживається), *S* *х* – **функція заощадження** (частина доходу, що заощаджується), тоді

*x*  *С**х*  *S* *х*

. **(5.10)**

Диференціюємо обидві частини (5.10), маємо

*С**х*  *S**х*  1

, **(5.11)**

де *С**х* – **гранична схильність до споживання**;

*S* *х* – **гранична схильність до заощадження**.

**Висновок**. Сума граничної схильності до споживання та граничної схильності до заощаджень дорівнює одиниці.

**Приклад 5.3.** Функція споживання деякої країни має вигляд

*С**х*  15  2*х*  8*х*2 , де *х* – національний дохід (гр. од.).

Знайти: а) граничну схильність до споживання; б) граничну схильність до заощадження, якщо національний дохід складає 90 млрд. гр. од.

а) знайдемо граничну схильність до споживання, як похідну від функції споживання:

*С**х*  2 16*х* .

Значення граничної схильності до споживання, якщо національний дохід складає 90 млрд. гр. од.:

*С* 90  2 16  90  1442 (млрд. гр. од.).

б) функцію заощадження знайдемо з формули (5.10):

*S* *х*  *x*  *С**х*.

Отже, *S* *х*  *x*  *С**х*  *х* 15  2*х*  8*х*2  15  *х*  8*х*2 .

Гранична схильність до заощадження обчислюється як похідна від функції заощадження, або використовуючи формулу (5.11), отримуємо

*S* *х*  1 *С**х*  1 2 16*х*  116*х* .

Значення граничної схильності до заощадження, якщо національний дохід складає 90 млрд. гр. од.:

*S* 90  1  16  90  1441 (млрд. гр. од.).

Нехай функція *u**t*  описує обсяг виробленої продукції за час *t* .

***Продуктивність праці*** *z**t*  – це похідна від обсягу *u**t*  виробленої продукції по часу *t* :

*z**t*   *u**t* 

. **(5.12)**

***Швидкість зміни продуктивності праці*** – похідна від

продуктивності праці по часу *t* , тобто друга похідна від обсягу *u**t* 

виробленої продукції по часу *t* :

*v**t*   *z**t*   *u**t* 

. **(5.13)**

***Темп зміни продуктивності праці*** – логарифмічна похідна від продуктивності праці:

*T* *t*   *z**t* 

*z*

*z**t* 

. **(5.14)**

**Приклад 5.4.** Об’єм виробництва техніки фірмою виражається

формулою *u**t*   3 *t* 4  2 *t*3  1 *t* 2  3*t*  125

(од.), де *t* – календарний

#### 4 3 2

місяць року.

Обчислити продуктивність праці, швидкість і темп її зміни:

**а)** на початку року *t*  0 ; **б)** в першому кварталі *t*  3 ; **в)** в другому

кварталі *t*  6 ; **г)** в третьому кварталі *t*  9 ; **д)** наприкінці року *t*  12.

Продуктивність праці обчислюємо за формулою (5.12):

*z**t*   *u**t*   3*t* 3  2*t* 2  *t*  3 (од./міс.)

Швидкість зміни продуктивності праці обчислюємо за формулою (5.13):

*v**t*   *z**t*   9*t* 2  4*t*  1 (од./міс.)

Темп зміни продуктивності праці обчислюємо за формулою (5.14):

*z**t*  9*t* 2  4*t*  1

*Tz* *t*  

**а)** на початку року *t*  0 :

продуктивність праці:

*z**t* 



3*t* 3  2*t* 2

 *t*  3 .

#### *z*0  3  03  2  02

 0  3  3

(од./міс.);

швидкість зміни продуктивності праці:

*v*0  *z*0  9  02  4  0  1  1 (од./міс.2);

темп зміни продуктивності праці:

*z*0 1 1

*Tz* 0  *z*0 

####    0,333 .

3 3

**б)** в першому кварталі *t*  3 :

продуктивність праці:

#### *z*3  3  33  2  32

 3  3  99

(од./міс.);

швидкість зміни продуктивності праці:

*v*3  *z*3  9  32  4  3  1  92

(од./міс.2);

темп зміни продуктивності праці:

*T* 3  *z*3

*z*  

*z* 3

**в)** в другому кварталі *t*  6 :

продуктивність праці:

####  92  0,929.

99

#### *z*6  3  63  2  62

 6  3  717 (од./міс.);

швидкість зміни продуктивності праці:

*v*6  *z*6  9  62  4  6 1  347

(од./міс.2);

темп зміни продуктивності праці:

*z*6

#### 347 15

*Tz* 6  *z*6

**г)** в третьому кварталі *t*  9 :

продуктивність праці:



#### 717

  0,484 .

#### 31

*z*9  3  93  2  92

 9  3  2343 (од./міс.);

швидкість зміни продуктивності праці:

*v*9  *z*9  9  92  4  9  1  764 (од./міс.2);

темп зміни продуктивності праці:

*z*9

#### 764 15

*Tz* 9  *z*9

**д)** наприкінці року *t*  12:

продуктивність праці:

 

#### 2343

 0,326 .

#### 46

*z*12  3 123  2 122

 12  3  5463 (од./міс.);

швидкість зміни продуктивності праці:

#### *v*12  *z*12  9 122  4 12 1  1343

темп зміни продуктивності праці:

(од./міс.2);

*T* 12  *z*12 

*z*  

*z* 12

#### 1343

5463

####  15

61

####  0,246 .

Завдання для аудиторної роботи

* + 1. Функція витрат фірми на виробництво продукції має вигляд

*y**x*  4*x*3  2*x*2  5*x*  2 (гр. од.).

Знайти середні та граничні (маргінальні) витрати фірми на

виробництво продукції та обчислити їх значення при *x*  20 .

* + 1. Нехай витрати виробництва є функцією кількості випущеної

продукції *y**x*  50*x*  0,05*x*3 . Знайти середні і граничні витрати

виробництва за обсягу випущеної продукції, що дорівнює 10 грошовим одиницям.

* + 1. Обсяг виготовленої продукції у (ум. од.) цеху протягом робочого

дня виражається такою функцією *y**t*   *t*3  5*t*2  75*t*  425, де *t* –

кількість годин роботи. Знайти обсяг випуску продукції через 2 години після початку робочого дня.

* + 1. Об’єм виробництва продукції фірмою виражається формулою

*u**t*   2 *t*3  1 *t*2  2*t*  4

(од.), де *t* – календарний місяць року. Обчислити

#### 3 2

продуктивність праці, швидкість і темп її зміни: а) на початку року в першому кварталі *t*  3.

*t*  0 ; б)

* + 1. Фірма мінімізує середні витрати, які дорівнюють 100 грн./од. Чому при цьому дорівнюють граничні (маргінальні) витрати?

Завдання для самостійної роботи

* + 1. **с.** Функція витрат фірми на виробництво продукції має вигляд

*y**x*  3*x*3  4*x*2  6*x*  8 (гр. од.).

Знайти середні та граничні (маргінальні) витрати фірми на

виробництво продукції та обчислити їх значення при *x*  10.

* + 1. **с.** Нехай витрати виробництва є функцією кількості випущеної

продукції *y**x*  40*x*  0,04*x*3 . Знайти середні і граничні витрати

виробництва за обсягу випущеної продукції, що дорівнює 20 грошовим одиницям.

* + 1. **с.** Обсяг виготовленої продукції у (ум. од.) цеху протягом

робочого дня виражається такою функцією *y**t*   *t*4  2*t*3  *t*2  3*t*  4 , де *t*

– кількість годин роботи. Знайти обсяг випуску продукції через 3 години після початку робочого дня.

* + 1. **с.** Об’єм виробництва продукції фірмою виражається формулою

*u**t*   5 *t*3  3 *t*2  4*t*  8

(од.), де *t* – календарний місяць року. Обчислити

#### 3 2

продуктивність праці, швидкість і темп її зміни: а) на початку року в другому кварталі *t*  6 .

*t*  0 ; б)

* + 1. **с.** Фірма мінімізує середні витрати, які дорівнюють 1000 грн./од.

Чому при цьому дорівнюють граничні (маргінальні) витрати?

§ 5.2. ЗАДАЧІ ОПТИМІЗАЦІЇ

***Оптимальним значенням виробництва*** для виробника є те значення

*x* одиниць продукції, при якому прибуток *P**x* є найбільшим. Тому для

визначення величини оптимального значення виробництва, необхідно розв’язати задачу про максимальне значення функції.

**Приклад 5.5.** Визначити оптимальне для виробника значення випуску

одиниць товару

*x*0 , за умови, що весь товар реалізується за фіксованою

ціною *p*  50 за одиницю товару і відома функція витрат

*V* *x*  *x*3  2*х*  5. Знайти значення прибутку для оптимального значення

випуску одиниць товару

*x*0 .

Дохід виробника можна знайти як добуток ціни на кількість товару:

*D**x*  50  *х* .

За формулою (5.2) прибуток дорівнює:

*P**x*  *D**x*  *V* *x*  50*x*  *x*3  2*х*  5  48*x*  *x*3  5 .

Оптимальне значення випуску – це значення, при якому прибуток є найбільшим.

Розв’яжемо задачу про максимальне значення функції. Знайдемо похідну:

Розв’яжемо рівняння

*P**x*  48  3*x*2 .

*P*'*x*  0 :

#### 48  3*x* 2  0

 3*x* 2  48 

*x*2  16.

Отже, стаціонарні точки:

*x*1,2

 4 .

Розглянемо умову

*х*  ;  .

*P*'*x*  : похідна існує для будь - яких значень

Отже, критичні точки:

*x*1,2

 4 .

За умовою задачі зрозуміло, що сенс мають лише додатні значення

*x*1  4 .

Використаємо другу достатню умову існування локального екстремуму. Знаходимо

Оскільки

*P* *x*  6*x* .

*Р**x*1   *Р*4  6  4  24  0, то

*x*1  4

– точка

локального максимуму.

Отже, оптимальне значення випуску

*x*0  4 , тобто при виробництві 4-х

одиниць товару прибуток виробника буде найбільшим.

Значення прибутку для оптимального значення випуску товару

#### *P*4  48  4  43  5  192  64  5  123.

*x*0  4 :

**Приклад 5.6.** При виробництві підприємством *x* одиниць товару ціна

за одиницю товару визначається за формулою *p**x*  10  8 . Визначити

*x*

оптимальне для підприємства значення випуску

*x*0 (за умови, що весь

вироблений товар реалізується), якщо функція витрат має вигляд:

*V* *x*  *x*

2

#### 2

 3*х*  20 .

Дохід виробника можна знайти як добуток ціни на кількість товару:

*D**x*  10  8 *x*  *х*  10*х*  8*х* .

*x*

За формулою (5.2) прибуток дорівнює:

*x*2 *x*2

*P**x*  *D*(*x*)  *V* (*x*)  10*х*  8*х*

*x*

*x*

  3*х*  20  13*х*  8*х* 2

 20  .

#### 2

Розв’яжемо задачу про максимальне значення функції. Для цього обчислимо похідну:



#### 

*x*



3

  *x*2   3 2 1

*x*

2

2

*P* *x*  13*х*  8*х*

#### 

 13  12

*х*

####  20  

2 

* *х*.

 13*х*  8*х*

#### 

 20  

#### 2 

 13  8  *х*

#### 2

* + *х* 

Розв’яжемо рівняння

#### 13  12

*P*'*x*  0 :

 *х*  0

*х*

 *х*  12

####  13  0 .

Щоб розв’язати це рівняння, зробимо заміну змінних:

*х*

 *t* 

*x*

*t* 2  12*t*  13  0 

*t*1

*t*

####  13;

 1.

 2

Зрозуміло, що нас цікавить лише додатні значення *t* , тому

*x*  *t* 2  169.

1

Отже, оптимальне значення випуску

*x*0  169.

Завдання для аудиторної роботи

* + 1. Визначити оптимальне для виробника значення випуску одиниць

товару *x*0 , за умови, що весь товар реалізується за фіксованою ціною

*p*  10

за одиницю товару і відома функція витрат

*V* *x*  2*x*2  5*х*  2 . Знайти

значення прибутку для оптимального значення випуску одиниць товару

*x*0 .

* + 1. Визначити оптимальне для виробника значення випуску одиниць

товару *x*0 , за умови, що весь товар реалізується за фіксованою ціною

*p*  20

за одиницю товару і відома функція витрат

*V* *x*  3*x*3  3*x*2  2*х*  5.

Знайти значення прибутку для оптимального значення випуску одиниць

товару

*x*0 .

* + 1. При виробництві підприємством *x* одиниць товару ціна за

одиницю товару визначається за формулою *p**x*  5  2 . Визначити

*x*

оптимальне для підприємства значення випуску

*x*0 (за умови, що весь

вироблений товар реалізується), якщо функція витрат має вигляд

*V* *x* 

3*x* 2

#### 2

 4*х*  5 .

* + 1. При виробництві підприємством *x* одиниць товару ціна за

одиницю товару визначається за формулою *p**x*  8  4 . Визначити

*x*

оптимальне для підприємства значення випуску

*x*0 (за умови, що весь

вироблений товар реалізується), якщо функція витрат має вигляд

   5*x* 2 

*x*

*V*

6*х*

#### 2

 8.

* + 1. При виробництві підприємством *x* одиниць товару ціна за

одиницю товару визначається за формулою *p**x*  5  3*x* . Визначити

оптимальне для підприємства значення випуску

*x*0 (за умови, що весь

вироблений товар реалізується), якщо функція витрат має вигляд

*V* *x*  *x*2  3*х*  4 .

Завдання для самостійної роботи

* + 1. **с.** Визначити оптимальне для виробника значення випуску

одиниць товару

*x*0 , за умови, що весь товар реалізується за фіксованою

ціною *p*  30

за одиницю товару і відома функція витрат

*V* *x*  3*x*3  3*х*  5. Знайти значення прибутку для оптимального значення

випуску одиниць товару

*x*0 .

* + 1. **с.** Визначити оптимальне для виробника значення випуску

одиниць товару

*x*0 , за умови, що весь товар реалізується за фіксованою

ціною *p*  40

за одиницю товару і відома функція витрат

*V* *x*  *x*3  *x*2  3*х*  4. Знайти значення прибутку для оптимального

значення випуску одиниць товару

*x*0 .

* + 1. **с.** При виробництві підприємством *x* одиниць товару ціна за

одиницю товару визначається за формулою *p**x*  2  5 . Визначити

*x*

оптимальне для підприємства значення випуску

*x*0 (за умови, що весь

вироблений товар реалізується), якщо функція витрат має вигляд

*V* *x* 

3*x* 2

#### 2

 2*х*  3 .

* + 1. **с.** При виробництві підприємством *x* одиниць товару ціна за

одиницю товару визначається за формулою *p**x*  5  6 . Визначити

*x*

оптимальне для підприємства значення випуску

*x*0 (за умови, що весь

вироблений товар реалізується), якщо функція витрат має вигляд

*V* *x* 

7*x* 2

#### 2

 8*х*  9 .

* + 1. **с.** При виробництві підприємством *x* одиниць товару ціна за

одиницю товару визначається за формулою *p**x*  9  7*x* . Визначити

оптимальне для підприємства значення випуску

*x*0 (за умови, що весь

вироблений товар реалізується), якщо функція витрат має вигляд:

*V* *x*  2*x*2  5*х*  4 .

§ 5.3. ЗАСТОСУВАННЯ ПОХІДНОЇ ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ ДИНАМІКИ ФУНКЦІЇ

В економіці розглядають такі **функціональні залежності**:

* між попитом *Qp* на даний товар та його ціною *p* : *Qp*  *f* *p*;
* між попитом *Qp*

на даний товар та доходом *r* від його реалізації (при

умові, що фактори, від яких залежить попит на товар, не змінюються):

*Qp*  *f* *r*;

* між пропозицією *Qs*

на деякий товар та його ціною *p* : *Qs* 

*f*  *p*;

* між витратами виробництва *K* та обсягом продукції *Q* :
* між виторгом *V* від продажу товару та попитом *q* : *V* 

*K* 

*f* *q*;

*f* *Q*;

* між фінансовими нагромадженнями підприємства *A* та обсягом випуску

продукції *Q* : *A*  *f* *Q*.

Особливістю запропонованої системи задач є те, що в них, як правило, задана функціональна залежність між величинами в економічних, фінансових ситуаціях. Вимагається дослідити цю залежність при виконанні певних вимог.

Розглянемо **задачі двох видів**:

1. на дослідження зміни функціональної залежності (зростає або спадає) при виконанні певних вимог;
2. на дослідження динаміки зміни цієї залежності (зростає або спадає повільніше чи швидше).

**Приклад 5.7.** Підприємство виробляє за місяць *х* одиниць продукції. Залежність фінансових нагромаджень підприємства від обсягу випуску

продукції виражається формулою

    2*x* 3 

#### 3

*x*

*f*

500000*х*

 5000 . При

яких значеннях *х* одиниць продукції фінансові нагромадження підприємства зменшаться?

Знайдемо похідну:

#### *f* *x*   2  3 *x*2  500000  2  *x*2  500000.

3

Для того, щоб функція *f* *x* зменшувалася (спадала), необхідно і

достатньо, щоб її похідна була менша нуля:

*f* *x*  0   2  *x*2  500000  0  2*x*2  500000  0 

#### 2*x*2  500000  *x*2  250000 

*x*  500  *x*  500,

#### 

*x*  500.

Отже, якщо випуск продукції перевищує 500 одиниць, фінансові нагромадження підприємства зменшуються.

**Приклад 5.8.** На підприємстві змінні витрати місячного обсягу ( *х* тонн) випуску продукції визначаються функцією

*f* *x* 

5*x* 3

#### 3

 50*х*2

* 600*х*  80 . Як змінюються витрати залежно від

випуску продукції щомісяця?

Знайдемо похідну:

*f* *x*  5  3 *x*2  50  2  *х*  600  5*x*2  100*х*  600 .

#### 3

Оскільки дискримінант *D*  1002  4  5  600  10000  12000  2000  0 ,

то похідна *f* *x*  0 для будь-якого *х* .

Обчислимо другу похідну:

*f*  *x*  5  2  *x*  100  10*x*  100.

Отримаємо, *f*  *x*  10*x*  100 . Знайдемо проміжки, де друга похідна

менша і більша нуля.

*f*  *x*  0 :

*f*  *x*  0 :

#### 10*x*  100  0 

10*x*  100  0 

#### 10*x*  100 

10*x*  100 

*x*  10;

*x*  10 .

Отже, якщо випуск продукції не перевищує 10 т на місяць, то змінні витрати зростають повільніше; якщо місячний випуск перевищує 10 т, то змінні витрати зростають, швидше.

**Приклад 5.9.** Витрати виробництва

*V* *x*

залежать від обсягу

продукції *х* за формулою *V* *x*   1

#### 30

*х*3  6250*x* 100 . При яких значеннях

*х* витрати виробництва почнуть спадати?

Знайдемо похідну *V* *x*  0,1*х*2  6250 .

Витрати спадають, коли *V* *x*  0:

 0,1*х* 2

####  6250  0

 0,1*х* 2  6250  0

 *х* 2  62500

 *x*  250 

*x*  250,

*x*  250.



За умовою задачі *x*  0 не може бути розв’язком. Отже, витрати

виробництва починають спадати при обсягах

*x*  250.

Завдання для аудиторної роботи

* + 1. Підприємство виробляє за місяць *х* одиниць продукції. Залежність фінансових нагромаджень підприємства від обсягу випуску

продукції виражається формулою

*f* *x*   1 *х*3  400000*x*  4000. При

#### 3

яких значеннях *х* одиниць продукції фінансові нагромадження підприємства зменшаться?

* + 1. Підприємство виробляє за місяць *х* одиниць продукції. Залежність фінансових нагромаджень підприємства від обсягу випуску

продукції виражається формулою

*f* *x*   4 *х*3  200000*x*  2000. При

#### 3

яких значеннях *х* одиниць продукції фінансові нагромадження підприємства зменшаться?

* + 1. На підприємстві змінні витрати місячного обсягу ( *х* тонн)

випуску продукції визначаються функцією

*f* *x*  4 *х*3  40*x*2  700*x*  90.

#### 3

Як змінюються витрати залежно від випуску продукції щомісяця?

* + 1. На підприємстві змінні витрати місячного обсягу ( *х* тонн)

випуску продукції визначаються функцією

*f* *x*  5 *х*3  60*x*2  800*x*  100 .

#### 3

Як змінюються витрати залежно від випуску продукції щомісяця?

* + 1. Витрати виробництва

*V* *x*

залежать від обсягу продукції *х* за

формулою

*V* *x*   2

#### 30

*х*3  7000*x*  90 . При яких значеннях *х* витрати

виробництва почнуть спадати?

Завдання для самостійної роботи

* + 1. **с.** Підприємство виробляє за місяць *х* одиниць продукції. Залежність фінансових нагромаджень підприємства від обсягу випуску

продукції виражається формулою

*f* *x*   5 *х*3  600000*x*  6000 . При

#### 3

яких значеннях *х* одиниць продукції фінансові нагромадження підприємства зменшаться?

* + 1. **с.** Підприємство виробляє за місяць *х* одиниць продукції. Залежність фінансових нагромаджень підприємства від обсягу випуску

продукції виражається формулою

*f* *x*   2 *х*3  400000*x*  4000. При

#### 3

яких значеннях *х* одиниць продукції фінансові нагромадження підприємства зменшаться?

* + 1. **с.** На підприємстві змінні витрати місячного обсягу ( *х* тонн)

випуску продукції визначаються функцією

*f* *x*  1 *х*3  60*x*2  800*x*  50 .

#### 3

Як змінюються витрати залежно від випуску продукції щомісяця?

* + 1. **с.** На підприємстві змінні витрати місячного обсягу ( *х* тонн) випуску продукції визначаються функцією

*f* *x*  7 *х*3  70*x*2  700*x*  400. Як змінюються витрати залежно від

#### 3

випуску продукції щомісяця?

* + 1. **с.** Витрати виробництва *V* *x* залежать від обсягу продукції *х* за

формулою

*V* *x*   4

#### 30

*х*3  6000*x*  40 . При яких значеннях *х* витрати

виробництва почнуть спадати?

§ 5.4. ЕКОНОМІЧНЕ ЗАСТОСУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛА. МУЛЬТИПЛІКАТОР І АКСЕЛЕРАТОР

Термін *мультиплікатор* був введений в 1931 році Р. Каном і набув подальшого розвитку в кейнсіанській моделі визначення рівня рівноваги прибутку. Ефект мульплікатора було розглянуто в галузі зайнятості.

Основне *положення Р. Кана* полягало в наступному: якщо прийняти, що схильність до споживання, а також деякі інші умови в різних гіпотетичних обставинах є заданими, і якщо уявити собі, що монетарні органи або будь-які інші державні органи приймуть заходи, спрямовані на стимулювання або уповільнення інвестицій, то зміни у величині зайнятості виявляться функцією від змін в сумі чистих інвестицій.

Розглянемо найпростішу **модель, яка описує динаміку зростання прибутку залежно від інвестицій**:

, **(5.15)**

*Y*  *C*  *I*

де *Y* – прибуток, *C* – споживання, *I* – інвестиції.

Нехай *C*  *C**Y* , *Y*  *Y* *I* . Як впливає зміна інвестицій *dI* на прибуток?

Нехай *dY*  *Y* *I*  *dI* . Із рівняння *Y*  *C**Y* *I*   *I* знайдемо

залежність між інвестиціями і швидкістю зростання прибутку:

*Y* *I*   *dC Y* *I*   1,

*dY*

тобто

або, у диференціалах

*Y* *I*  

1 ,

1  *dC*

##### dY

. **(5.16)**

*dY* 

1

1  *C*

 *dI*    *dI*

***Мультиплікатором*** називається вираз

 

1

1  *C*

. **(5.17)**

**Мультиплікатор** – це числовий коефіцієнт, який показує, у скільки разів сума приросту або скорочення прибутку перевищує початкову суму інвестицій.

У розглядуваній моделі маємо:

якщо

0  *dC*

##### dY

 *C**Y*   1, то

  1.

Отже, додаткові інвестиції посилюватимуть прибуток.

Ефект мультиплікатора знаходить своє продовження в принципі акселерації.

ПРИНЦИП АКСЕЛЕРАЦІЇ – ПРИНЦИП ПРИСКОРЕННЯ

Нехай технологія виробництва не змінилася, причому основні фонди використовуються повністю, *K* – розміри основних виробничих фондів у період *t* , *Q* – обсяг виробництва предметів споживання з використанням

цих фондів.

Залежність розміру основних фондів від обсягу виробництва предметів споживання:

*K* *t*     *Q**t* ,   0.

Закон зміни приросту основних фондів за одиницю часу:

*dK*    *dQ*

*dt*

*dt*

. **(5.18)**

З економіки відомо, що приріст основних фондів за одиницю часу є інвестиціями:

. **(5.19)**

*I*  *dK*

*dt*

Залежність інвестицій у період *t* від обсягу виробництва:

*I*    *dQ*

*dt*

. **(5.20)**

Подамо **математичний аналіз принципу акселерації** у таблиці 5.1.

Таблиця 5.1

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Показник | Період часу | | |
| 0  *t*  *t*1 | *t*  *t*1 | *t*  *t*1 |
| **1.** Обсяг виробництва предметів споживання  *K* *t*  | Зростає швидше | Зростає сталим темпом | Зростає повільно |
| **2.** Приріст випуску предметів споживання *dQ*  *dt* | *dQ*  0,  *dt*  *d* 2*Q*   *dt* 2 0. | *dQ*  0,  *dt*  *d* 2*Q*   *dt* 2 0. | *dQ*  0,  *dt*  *d* 2*Q*   *dt* 2 0 . |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **3.** Похідна інвестицій  *dI*    *d* 2*Q*  *dt dt* 2 | *dI*  0  *dt* | *dI*  0  *dt* | *dI*  0  *dt* |
| **4.** Інвестиції | Зростають | Утримуються на рівні *I* *t*1  | Спадають |
| **Висновки** | Якщо попит на предмет споживання зростає, то  зростають і  інвестиції *I* , тобто зростає попит на засоби виробництва. | Утримати інвестиції на рівні, що досягається в момент *t*1, можна, якщо попит на предмет споживання зростає сталим темпом. | Якщо попит на предмет споживання починає зростати повільніше, то  зменшуються і  інвестиції *I* , тобто спадає  попит на засоби виробництва. |

Під ***акселератором*** розуміють показник, який вимірює зв'язок між приростом національного доходу (або кінцевої продукції) і сумою викликаних ним капіталовкладень (інвестицій). Вчені стверджують, що за **допомогою акселератора можна** визначити ефект прискорення розвитку національної економіки, тобто ***акселерації***, кількісне значення якого можна розрахувати за наступною формулою:

, **(5.21)**

*a* 

*It*

*Yt* 1  *Yt*  2

де *a* – акселератор; *It* – капіталовкладення (інвестиції в основний

капітал) за період *t* ; *Yt*1 – валовий національний дохід за рік *t*  1; *Yt* 2 –

валовий національний дохід за рік *t*  2.

**За допомогою акселератора**, якщо відомий абсолютний обсяг капіталовкладень даного року, можна визначити величину приросту національного доходу (або кінцевої продукції) у наступному році:

*Y* 

*t* 1

 *It*

*а*

. **(5.22)**

При формуванні рішень з метою отримання певного приросту національного доходу, **за допомогою акселератора**, можна визначити необхідний обсяг капіталовкладень або величину приросту фондів. Враховуючи ці аспекти, акселератор також називають ***коефіцієнтом приросту фондомісткості***.

*Модель акселератора дозволяє стверджувати*, що капіталовкладення національного господарства зростають при збільшенні обсягу випусків валового внутрішнього продукту та зменшуються – при його зниженні.

Це припущення уявляється доцільним, оскільки підвищення попиту на товари та послуги спонукає національну економіку збільшувати обсяги виробництва і породжує у суб'єктів господарювання надії щодо зростання попиту на товари і послуги в майбутньому.

Збільшення обсягів випуску продукції підвищує співвідношення між обсягами випуску і використаними виробничим потужностями. Очікування подальшого підвищення попиту примушує суб'єктів господарювання припускати, що наявність у них додаткового капітального устаткування має бути для них вигідним.

Необхідно зазначити, що **модель акселератора має такі достоїнства**:

* простота розрахунків;
* мінімальність початкової бази даних;
* можливість уніфікації та зіставлення результатів досліджень на різних рівнях агрегації – від міського, районного до загальнодержавного.

Ці аспекти дозволяють застосовувати дану модель для оцінки розвитку системи національної економіки.

Також моделі акселераторного типу допомагають емпірично пояснити коливання, як в обсяг капіталовкладень в основний капітал, так і зміни в обсягах інвестицій у товароматеріальні запаси та незавершене виробництво.

У теорії Дж. М. Кейнса ключовою є теза про вирішальні роль капіталовкладень у визначенні загального показника зайнятості. Зростання капіталу приводить до збільшення національного доходу, залучає до виробництва додаткових робочих, збільшує зайнятість населення і покращує соціально-економічний стан у державі. Такий ефект в економічній теорії має назву ***ефект мультиплікатора***: збільшення капіталовкладень приводить до збільшення національного доходу суспільства на величину більшу, ніж первинне зростання капіталовкладень.

Математично **мультиплікатор** ще можна записати так:

  *Y*

*I*

, **(5.23)**

 – мультиплікатор (множник Дж. М. Кейнса);

*Y* – зміна сукупного доходу;

*I* – приріст капіталу (інвестицій).

Дж. М. Кейнс вважав, що чим більша гранична схильність до споживання, тим більша величина мультиплікатора та як наслідок – більше зрушення в зайнятості, які викликані відповідною зміною у розмірах капіталу.

Таким чином, **мультиплікатор можна використати** як показник сукупного збільшення зайнятості, яке спричиняє розширення виробництва в підсистемах національного господарства, як наслідок – збільшення валового регіонального продукту областей, що у свою чергу приводить до збільшення валового продукту всієї держави.

Якщо дія мультиплікатора в моделях економічного зростання інтерпретується як приріст попиту на продукцію у декілька разів більший, ніж розміри використаних у тому ж періоді інвестицій, то ефект акселератора – як потреба в інвестиціях у період *t* на певний приріст

виробництва в періоді *t*  1, який у *k* раз менший цього приросту.

**Мультиплікатор показує** позитивну дію капіталовкладень на всі інші галузі. Враховуючи економічну сутність мультиплікатора, Дж. М. Кейнс пропонував регулювати не тільки капіталовкладення, але й національний дохід. Засобом для цього він вважав податки, вимагаючи їх підвищення з метою вилучення заощаджень для збільшення державних капіталовкладень.

 Таким чином, ефект мультиплікатора відображає взаємозв'язок між збільшенням капіталовкладень і зростанням рівня економічної активності в одному і тому ж році *t* , а ефект акселератора пов'язує масштаби капіталовкладень у даному році зі зміною рівня

**економічної активності у минулих періодах** *t*  1 **і** *t*  2**.**

§ 5.5. ЕЛАСТИЧНІСТЬ ФУНКЦІЇ

* + 1. **ПОНЯТТЯ ЕЛАСТИЧНОСТІ ФУНКЦІЇ Еластичність** – це міра реагування однієї величини на зміну другої.

***Еластичністю функції*** *у*  *f* *x* називається границя відношення

відносного приросту функції до відносного приросту аргументу *x* при

 *x*  0 :

*y*

*Е* *у*  lim *y* 

lim *y*  *x* 

*x*  lim *y*  *x*  *y* .

*х* *x*0 *x*

##### x

.

,

*Ех* *у*  *х* *Т у*

*у*

*х*

*Е* *у*  *х*  *у*

*x*0 *x y*

*y* *x*0 *x y*

або

**Еластичність функції обчислюється** за формулою:

(5.24)

де

*Т у* – ***відносна швидкість***

, **(5.25)**

***зміни* (*темп*) *функції*** (логарифмічна

*Т у*  *y*

*y*

похідна функції *у* ):

*Т*  ln *y* 

1  *y*  *y* .

##### y y

*у*

**Приклад 5.10.** Знайти темп зростання функції, якщо відомо *y*  0,47 .

##### y

Якщо

*y*  0,47 , то темп зростання функції становить 47 %.

##### y

Нехай витрати на виробництво х одиниць продукції подаються у

вигляді *V* *x* за ціною *р**х*. За якої умови прибуток підприємства буде

максимальний?

Якщо відомі ціна та кількість продукції, то дохід

*D**x* 

*р**х* *х* .

Прибуток подається у вигляді:

*P**x*  *D**x**V* *x*.

Прибуток максимальний, якщо *Р**x*  0 i *Р**x*  0. Звідси випливає,

що *D**x* *V* *x*  0 або

*D**x*  *V* *x*

.

Отже, підприємство може одержати максимальний прибуток за такого

обсягу х виробництва, при якому граничний дохід дорівнює граничним витратам.

З умови *Р**x*  0 випливає, що *D**x*  *V*  *x*  0 або

*D**x*  *V*  *x*. Оскільки

*D**x*  *V* *x*, то

*D* *x*  *V*  *x*

або

*D**x* *V* *x*

ln *D*  ln*V*  .

Це означає, що підприємство отримує максимальний прибуток, коли

темп зростання граничного доходу менший за темп зростання граничних витрат.

Еластичність функції показує наближено, на скільки відсотків

**зміниться функція** *у*  *f* *x* **в результаті зміни незалежної змінної** *x* **на**

1 %:

*y*  *E*

*х x*

*y* *x* .

##### x

Якщо

*Ex* *у*  1, то функція називається ***нееластичною*** (відносний

приріст спадає).

Якщо *Ex* *у*  1, то функція називається ***еластичною*** (відносний

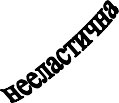
приріст зростає).

Якщо *Ех* *у*

 1, то функція називається ***нейтральною***.

Геометрична ілюстрація еластичності функції

*у*



*у*

*у*  *f* *x*

*у*

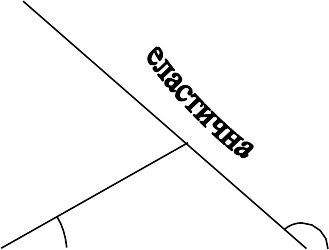


0

*x*

*x*





*у*  *f* *x*



0

*x*

*x*



*у*

Рис. 5.1

*E* *у*  *x*  *у* 

Рис. 5.2

*у*  tg .

*x*

Функція **нееластична**:

*у у* tg

##### x

*Ex*  *f* (*x*)  1  tg

 tg

   

(рис. 5.1).

Функція **еластична**:

*Ex* ( *f* (*x*))  1 

tg

* tg

   

(рис. 5.2).

Властивості:

|  |  |
| --- | --- |
| *Ex* ( *f* (*x*)  *g*(*x*))  | *f* (*x*)  *Ex*  *f* (*x*)  *g*(*x*)  *Ex* *g*(*x*) |
| *f* (*x*)  *g*(*x*) |

**1. .**

**2.** *Ex* ( *f* (*x*)  *g*(*x*))  *Ex*  *f* (*x*) *Ex* *g*(*x*)**.**

**3.** *E*  *f* (*x*)   *E* ( *f* (*x*))  *E* (*g*(*x*)) **.**

*x*





*g*(*x*)





*x*

*x*

ЕЛАСТИЧНІСТЬ ЕЛЕМЕНТАРНИХ ФУНКЦІЙ

1. Еластичність **степеневої функції**

степеня :

*E* 

*x*   



*x*

*y*  *x*

стала і дорівнює показнику

. **(5.26)**

1. Еластичність **показникової функції**

*y*  *ax*

пропорційна до *х* :

1. Еластичність **лінійної функції**

*E* 

*a*  *x* ln *a*

*x*

*x*

. **(5.27)**

*y*  *ax*  *b* :

. **(5.28)**

*E* *ax*  *b* 

*x*

*ax*

*ax*  *b*

Якщо графік лінійної функції має від’ємний нахил ( *а*  0 ), то

еластичність функції змінюється від *0* в точці

*y*0 перетину графіком функції

осі *Oy* до –  в точці перетину осі *Oх* , проходячи через значення (– 1) у середній точці.

Отже, хоча пряма має сталий нахил, її еластичність залежить не лише

від нахилу, а й від того, в якій точці х ми цю еластичність визначаємо (рис. 5.3).

##### у

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *уm*  *уm*  2 | *Ex* *y*  0  1  *Ex* *y*  0  *Ex* *y*  1 | |
|  |    *Ex* *y*  *Ex* *y*  |

0 *xm*



#### 2

*xm* 

Рис. 5.3

 1



##### x

Функція з нескінченною еластичністю в усіх точках називається ***цілком еластичною***, а з нульовою еластичністю в усіх точках – ***цілком нееластичною***.

* + 1. ЗАСТОСУВАННЯ ЕЛАСТИЧНОСТІ В ЕКОНОМІЧНОМУ АНАЛІЗІ

Нехай *р* – ціна, *q* – попит, *I* – дохід, населення на товар.

*U*  *pq*

– загальні витрати

В економіці розглядають кілька видів еластичності.

* + - 1. **Еластичність попиту за ціною** (пряма).

Оскільки *U*  *pq* – загальні витрати населення на товар, то граничний виторг

*U*   *q*  *q**p* 

  *p*  *q* .

#### *q*1 

 *q* 

***Еластичність попиту щодо ціни*** подається у вигляді

*Eр*  

*p q*. *q*

Підставивши значення *Eр* у формулу для *U* , дістанемо вираз

*U*   *q*1  *Eр* , з якого випливають такі висновки.

Якщо 0  *Ec*  1, то *U*   0 .

*E* *q*  *dq* : *dp*  *dq*  *p*

або

##### p q p dp q

, **(5.29)**

*E* *q*  *p*  *q*

*p*

*q*

*p*

що виражає відносну зміну (у відсотках) розміру попиту на будь-яке благо при зміні ціни цього блага на 1% і характеризує чутливість споживачів до зміни цін на продукцію.

Якщо

 Отже,

, то *U*   0 , тоді ***попит*** називають ***еластичним***.

у разі еластичного попиту з підвищенням ціни

*Ep* *q*  1

Якщо Якщо

виторг від продажу товару знижується.

, то ***попит*** називають ***цілком еластичним***.

|  |  |
| --- | --- |
| *Ep* *q*   | |
| *Ep* *q*  1 | , |

то *U*   0 , тоді ***попит*** називають ***нееластичним***.

 Якщо попит нееластичний, то з підвищенням ціни виторг зростає.

Якщо то ***попит*** називають ***цілком нееластичним***.

|  |  |
| --- | --- |
| *Ep* *q*  0 | , |
| *Ep* *q*  1 | |

Якщо

, то

*U*   0

*U*  const

, тоді попит називають

***нейтральним* (*попит з одиничною еластичністю***), тому виторг від

продажу даного товару не залежить від зміни ціни (*U*  *qp*  *c* , звідки

*q*  *c*, де

*c*  *const* ).

 Отже, за нейтрального попиту його розміри обернено пропорційні до ціни.

Схему, що ілюструє зазначену закономірність, зображено на рис. 5.4.

Попит еластичний Попит нееластичний Попит еластичний

  1

0 1

Рис.5.4

 

*p*

*E*

*q*

* + - 1. **Еластичність попиту за доходом:**

*Е* *q*  *dq* : *dI*

 *dq*  *I*

або

##### І q I

*dI q*

, **(5.30)**

*Е* *q*  *I*  *q*

*І*

*q*

*I*

***що виражає відносну зміну (у відсотках) розміру попиту на будь-яке благо в разі зміни доходу споживачів цього блага на 1%.***

 **Додатна еластичність попиту за доходом характеризує нормальні**

**(*якісні*) товари, а від’ємна — малоцінні (*низькоякісні*) товари.**

Наприклад, високий додатний коефіцієнт попиту за доходом у галузі означає, що її внесок у економічне зростання більший, ніж частка у

структурі економіки, і вона має шанси на розширення й розвиток у майбутньому. Навпаки, якщо коефіцієнт еластичності попиту на продукцію галузі за доходом має невелике додатне чи від’ємне значення, то на неї очікує застій і перспектива скорочення виробництва.

* + - 1. Перехресна еластичність попиту за ціною:

*Ep q* 





*dq*

*i*

*dp*

*j j*

*q p dp q*

/

*j*



*dq p*

*i i*



*i*

*j*

*j j*

, **(5.31)**

***що характеризує відносну зміну (у відсотках) розміру попиту на одне благо в разі зміни ціни на інше благо (яке заміщує або доповнює його у споживанні) на 1%.***

 Додатна перехресна еластичність попиту за ціною свідчить про

***заміщуваність* благ, а від’ємна – про *доповнюваність*.**

**Приклад 5.10.** Залежність між собівартістю одиниці продукції *y* (тис.

грош. од.) та випуском продукції *x* (млрд грош. од.) виражається функцією

*y**x*  0,4  60 . Знайти еластичність собівартості за умови випуску

продукції в розмірі 50 млрд грош. од.

Знайдемо еластичність собівартості за формулою:

*Е* *у* 

lim  *y*  *x*  

*x*  lim  *y*  



*x*  *y*

*х*    

Отримаємо

*x*0 *y*

*x*  *y*

*x*0 *x*  *y*

*Ех* *у* 

*x*

 0,4*х*  60

  0,4*х*  60 

*x*

###  0,4*х*  60

  0,4 

 0,4*x*

###  0,4*х*  60

або

*Ex* *y* 

0,4*x* .

0,4*x*  60

При

*x*  50:

*E*50

*y*  0,4  50 

#### 0,4  50  60

20

#### 20  60

 0,5.

Тобто, при виробництві продукції в розмірі 50 млн грош. од., збільшення її на 1% викличе зменшення собівартості на 0,5%.

**Приклад 5.11.** Відомі функції попиту

*q*  10 *p*  20

*p* 1

і пропозиції

*s*  *p*  8 , де *q* і *s* – кількість товару, що купується і пропонується на продаж відповідно на одиницю часу, *p* – ціна товару. Знайти:

**а)** рівноважну ціну, тобто ціну за якої попит та пропозиція врівноважується;

**б)** еластичність попиту та пропозиції;

**в)** зміну прибутку у разі збільшення ціни на 15% від ціни рівноваги.

**а)** рівноважна ціна визначається з умови

*q*  *s* , тобто

#### 10 *p*  20 

*p*  1

*p*  8;

10 *p*  20   *p*  8 *p* 1;

 *p* 1  0, 



10 *p*  20 

 *p*  1,



*p*2  9 *p*  8;



 *p* 2  *p*  12  0;

 *p*  1.



За теоремою Вієта:

*р*1  4,

*р*2  3 (не має сенсу).

Отже, рівноважна ціна *р*  4

(гр. од.).

**б)** знайдемо еластичність попиту:

*Е* *q*  *p*  *q*

 *p* *p*  1

 10   *p*  1  1 10 *p*  20  

 10 *p* .

*p q p*

10 *p*  20

 *p*  12

10 *p*  20 *p*  1

Для рівноважної ціни

*р*  4 :

*Еp* *q*

*p*4

###### 10  4

 10  4  204 1

######   40

60  5

######   2

15

 0,13.

Знайдемо еластичність пропозиції:

*Е* *s*  *p*  *s* 

*p* 1  *p* .

*p s p*

Для рівноважної ціни *р*  4 :

*p*  8 *p*  8

*Еp* *s*

*p*4

####  4  4

4  8 12

####  1  0,33.

3

**Висновок**. Отримані значення еластичності (за абсолютним значенням) не перевищують одиниці, тому попит і пропозиція даного товару при рівноважній (ринковій) ціні нееластичні відносно ціни. Це означає, що зміна ціни не приведе до різкої зміни попиту і пропозиції.

Так, при збільшенні ціни на 1% попит зменшиться на 0,13%, а пропозиція збільшиться на 0,33%.

**в)** при збільшенні ціни на 15% від рівноважної:

попит зменшиться на 15  2

#### 15

 2%,

пропозиція зросте на 15  1  5%.

#### 3

Завдання для аудиторної роботи

* + 1. Знайти еластичність функції

*y*  *x*3  2

і знайти значення

показника еластичності для

*x*  5.

* + 1. Знайти еластичність функції

*y*  *e*5*x*

і знайти значення показника

еластичності для

*x*  1.

* + 1. Знайти еластичність функції

*y*  4 ln *x*

і знайти значення

показника еластичності для *x*  *e* .

* + 1. Знайти еластичність функції

*y*  4*x*  8

і знайти значення

показника еластичності для

*x*  10.

* + 1. Знайти еластичність функції

*y*  *xe*5*x*2

і знайти значення

показника еластичності для

*x*  1.

Завдання для самостійної роботи

* + 1. **с.** Знайти еластичність функції

*y*  *x*4  2*x*3

і знайти значення

показника еластичності для

*x*  2 .

* + 1. **с.** Знайти еластичність функції *y*  *e*3*x*

і знайти значення

показника еластичності для *x*  3.

* + 1. **с.** Знайти еластичність функції

*y*  5ln *x*

і знайти значення

показника еластичності для *x*  *e* .

* + 1. **с.** Знайти еластичність функції

*y*  3*x*  9

і знайти значення

показника еластичності для

*x*  4 .

* + 1. **с.** Знайти еластичність функції

*y*  *xe*2*x*2

і знайти значення

показника еластичності для

*x*  1.

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ ДО РОЗДІЛУ 5

1. Що називається граничною або маргінальною користю?
2. Що називається граничним або маргінальним доходом?
3. Що називається граничною або маргінальною продуктивністю?
4. Що називається граничним або маргінальний продуктом?
5. Що називається граничними або маргінальними витратами?
6. Який економічний зміст похідної?
7. Що називається середнім доходом?
8. Що називається середніми витратами?
9. Що називається середнім прибутком?
10. Що називається продуктивністю праці?
11. Що називається середньою продуктивністю праці?
12. Що називається темпом зміни продуктивності праці?
13. Сформулюйте оптимізаційну задачу виробництва.
14. Яке економічне застосування диференціала?
15. Що називається мультиплікатором?
16. Дайте визначення поняття акселератора в економіці.
17. Який механізм дії принципу акселерації?
18. Що таке ефект мультиплікатора?
19. Що показує мультиплікатор?
20. Якою є ключова теза теорії Кейнса щодо впливу мультиплікатора?
21. Як впливає приріст капіталу на приріст випуску продукції?
22. Що називається еластичністю?
23. Що називається еластичністю функції?
24. Що таке темп зростання функції?
25. Що показує еластичність функції?
26. Яка функція називається еластичною?
27. Яка функція називається нееластичною?
28. Яка функція називається нейтральною?
29. Як обчислюється еластичність елементарних функцій?
30. Яка функція називається цілком еластичною?
31. Яка функція називається цілком нееластичною?
32. Що таке еластичність попиту за ціною?
33. Який попит називають еластичним?
34. Який попит називають цілком еластичним.
35. Який попит називають нееластичним.
36. Який попит називають цілком нееластичним.

ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

**ЗАДАЧА 1. Знайти похідну** *y*

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **1.** | **.** *y*  5*х*6  5  3 *х*7  7 | **2.** *y*  4  5 *х*2  4*х*3  4 **.**  *х х*2 | | |
| **3.** | *y*  4*х* 4  3 *х*5  2  4 **.** | **4.** | *y*  5 *х*  2  3*х*3  4 **.**  *х*5 *х* | |
| **5.** | *y*  5*х*  5  7 *х*4  6 **.** | **6.** | *y*  3*х*2  3 *х*4  4  5 **.**  *х*3 *х* | |
| **7.** | *y*  6*х*5  3  *х*3  10 **.** | **8.** | *y*  4 *х*7  3  4*х*6  4 **.**  *х х*5 | |
| **9.** | *y*  8*х*2  3 *х*4  6  2 **.** | **10.** | *у*  3*х*5  4  1  3 *х* **.**  *х*3 *х* | |
| **11.** | *y*  3 *х*3  7  3*х*2  2 **.** | **12.** | *y*  5*х*3  3  5 *х*2  6 **.**  *х х*2 | |
| **13.** | *y*  4*х*3  8  4 *х*  1 **.** | **14.** | *y*  6  3 *х*4  2  5*х*4 **.**  *х*3 *х* | |
| **15.** | *y*  1  9  5 *х*2  7*х*3 **.** | **16.** | *y*  9  3  4 | *х*3  2*х*7 **.** |
| **17.** | *y*  6*х*2  4  3 *х*7  2*х*6 **.** | **18.** | *y*  *х*2  3 *х*5  4  5 **.**  *х х*4 | |
| **19.** | *y*  4 *х*5  3  4  3*х*3 **.** | **20.** | *y*  2*х*3  5  7  3 *х*7 **.**  *х х*4 | |
| **21.** | *y*  5 *х*  4  3 *х*2  7 **.** | **22.** | *y*  3 *х*3  2  4  5*х*3 **.**  *х х*5 | |
| **23.** | *y*  7*х*2  3  5 *х*4  8 **.** | **24.** | *y*  8*х*3  4  7  7 *х*2 **.**  *х х*4 | |
| **25.** | *y*  6*х*  5  1  5 *х*4 **.** | **26.** | *y*  24 *х*3  5  4  3*х* **.**  *х х*5 | |
| **27.** | *y*  5*х*3  3  3 *х*5  2 **.** | **28.** | *y*  3*х*5  5   *х* | *х*3  2 **.**  *х*3 |
| **29.** | *y*  3  4  5 *х*3  2*х*6 **.** | **30.** | *y*  3  3  3*х*3  *х*7 **.**  *х*4 *х* | |

ЗАДАЧА 2. Знайти похідну *y*

1. *y* 

**3.** *y* 

 *х*  44

####  5

3 3*х*2  4*х*  5

*х*  35

4

. 2.

**. 4.**

*y*  *х*  13 

*y* 

5 2*х*2  3*х*  5

5

**.**

####  5 **.**

8*х*  3  *х*2

2*х*2  *х*  12

4 4*х*2  *х*  5

4*х*4  2*х*3  *х*

3

4

*х*  13

**5.** *y* 

 *х*  54

**. 6.** *y* 

 *х*  23 **.**

**7.** *y* 

 5

4*х*2  3*х*  5

3 *х*  45

5*х*2  4*х*  3

3

**. 8.** *y* 

 2 **.**

2*х*2  3*х*  7

5 *х*  26

4*х*2  3*х*  4

2

**9.** *y* 

*х*  27 

**. 10.** *y* 

 *х*  35 **.**

**11.** *y* 

 3

2*х*33*х*  1

3 *х*  44

. 12.

*y*  23

3*х*4  2*х*  5 

4

*х*  25 **.**

**13.** *y* 

**15.** *y* 

 *х*  52

####  5

3 5*х*4  2*х*  1

4 *х*  15

4

. 14.

**. 16.**

*y*  *х*  25  **.**

*y*   3 **.**

7 5*х*  7*х*2  3

5 *х*  56

4

#### 7*х*2  3*х*  2 7*х*3  *х*2  4

3 4  3*х*  *х*4

4

3

17.

*y*  *х*  42 

. 18.

*y*  *х*  13

 8 **.**

6*х*2  3*х*  7

**19.** *y* 

**21.** *y* 

**23.** *y* 

 *х*  34

 *х*  52

1  5*х*  2*х*2

3 5*х*2  4*х*  1

6

3

####  9

*х*  47

**. 20.** *y* 

**. 22.** *y* 

**. 24.** *y* 

 *х*  13 **.**

 *х*  75 **.**

3 4  4*х*  *х*2

5 5  7*х*  *х*2

5

4

####  2 **.**

3 *х*  64

7*х*2  5*х*  8 1  3*х*  4*х*2

6 2*х*2  3*х*  15

25.

**27.**

*y*  5 

4*х*  3*х*2  1

3 3*х*2  *х*  14

*y*  4 

*х*  73

5

. 26.

**. 28.**

*х*  15

*y*  4 

*х*  4

*y* 

*х*  57

**.**

10

 **.**

3*х*2  5*х*  1

8  5*х*  2*х*2

29.

*y*  *х*  25 

**. 30.** *y* 

 5 **.**

2*х*2 4*х*  7

3 *х*  25

ЗАДАЧА 3. Знайти похідну *y*

|  |  |
| --- | --- |
| **1.** *y*  tg4 2*x*  arcsin *x*5**.** | **2.** *y*  cos3 3*x*  tg4*x*  13 **.** |
| **3.** *у*  5*x*2  arccos 2*x*5 **.** | **4.** *y*  arcsin4 2*x*  ctg7*x*4 **.** |
| **5.** *y*  ctg3*x*  arccos 3*x*2 **.** | **6.** *y*  arccos5 4*x*  ln*x*  3**.** |
| **7.** *y*  ln4 *x*  arctg7*x*4 **.** | **8.** *y*  arctg2 4*x*  3sin *x* **.** |
| **9.** *y*  4cos *x*  arcctg5*x*3**.** | **10.** *y*  2*x*  ln5*x*  2**.** |
| **11.** *y*  3tg2*x*  arcsin 7*x*4 **.** | **12.** *y*  tg3*x*  arcsin 6*x*5 *y*  **.** |
| **13.** *y*  sin6 5*x*  arctg2*x*3 **.** | **14.** *y*  cos5 4*x*  arcctg *x* **.** |
| **15.** *y*  sin4 3*x*  cos8*x*5 **.** | **16.** *y*  ctg5*x*  arccos 2*x*3**.** |
| **17.** *y*  *e*3sin *x*tg7*x*6. | **18.** *y*  *e*cos *x*ctg5*x*3 **.** |
| **19.** *y*  cos3 *x*  arccos 4*x* **.** | **20.** *y*  sin2 7*x*  arcctg5*x*2 |
| **21.** *y*  sin2 4*x*  arcctg3*x*5 **.** | **22.** *y*  cos 4 *x*  arctg*x*4 **.** |
| **23.** *y*  tg32*x*  cos 7*x*2 **.** | **24.** *y*  ctg35*x*  arcsin *x* **.** |
| **25.** *y*  ctg(3/*x*)  arccos *x*4 **.** | **26.** *y*  tg 3*x*  arcctg3*x*5 **.** |
| **27.** *y*  tg34*x*  arccos 2*x*3**.** | **28.** *y*  5tg*x* arctg53*x* **.** |
| **29.** *y*  sin2 3*x*  arctg *x* **.** | **30.** *y*  cos2 3*x*  arcsin 3*x*2 **.** |

**ЗАДАЧА 4. Знайти похідну** *y*

|  |  |
| --- | --- |
| **1.** *y*  4*x*3 arctg2*x*5**.** | **2.** *y*  arctg52*x*  ln*x*  5**.** |
| **3.** *y*  log4 *x*  5arccos 3*x* **.** | **4.** *y*  arccos 6*x*  3*x* **.** |
| **5.** *y*  tg23*x*  arctg3*x*2 **.** | **6.** *y*  4*x*2 arcsin 3*x*3**.** |
| **7.** *y*  arctg3*x*  log2 *x*  3**.** | **8.** *y*  arccos3 *x*  ln*x*3  *x*  1**.** |
| **9.** *y*  *e*2*x*  arcsin2 5*x* **.** | **10.** *y*  log4 *x* 1 arcsin4 *x* **.** |
| **11.** *y*  *x*  35  arcctg3*x*2 **.** | **12.** *y*  ctg35*x*  arctg2*x*3**.** |
| **13.** *y*  *e*3cos *x*arctg7*x*5 **.** | **14.** *y*  *x*  42 arccos 3*x*4 **.** |
| **15.** *y*  4sin *x* arcctg*x*4 **.** | **16.** *y*  arcctg6 5*x*  ln*x*  3**.** |
| **17.** *y*  5cos *x* arcsin2 3*x* **.** | **18.** *y*  ln*x*  5 arccos2 4*x* **.** |
| **19.** *y*  lg*x*  5arcsin5 *x* | **20.** *y*  log3 *x*  7arctg57*x* **.** |
| **21.** *y*  ln*x*  3arcctg32*x* **.** | **22.** *y*  lg*x*  3arcsin2 3*x*. |

|  |  |
| --- | --- |
| **23.** *y*  3sin *x* arctg3*x* **.** | **24.** *y*  5cos *x* arcctg3*x*. |
| **25.** *y*  lg*x*  2arcsin2 5*x* **.** | **26.** *y*  log2 *x*  2arccos2 *x* **.** |
| **27.** *y*  6*x* arctg34*x* **.** | **28.** *y*  ln*x*  7arcctg43*x* **.** |
| **29.** *y*  lg*x*  7arcctg43*x* **.** | **30.** *y*  log5 *x*  8arctg2*x*3**.** |

ЗАДАЧА 5. Знайти похідну *y*

**1.** *y*  *x*  67arcctg7*x*3 **. 2.**

*y*  4*x*3  arctg7*x*4 **.**

**3.** *y*  log2 *x*  4arctg **. 4.**

*x*

*y*  *x*  55arcctg3*x*5 **.**

**5.** *y*  5cos *x* ln*x*2  3*x*  7**. 6.**

*y*  *x*  74 arcsin 5*x*4 **.**

**7.** *y*  arccos3 2*x*  tg*x*4.

**9.** *y*  arccos *x*6  ctg7*x*3.

**8.**

10.

*y*  tg53*x*  arcsin 2*x*3 **.**

*y*  2*x*2 arccos 5*x*4 **.**

11.

**13.**

*y*  arctg3*x*  cos 7*x*4 **. 12.**

*y*  *x*  62 arccos3 5*x* **. 14.**

*x*

*y*  3*x*  76 arcsin 3*x*5**.**

*y*  5sin *x* arcsin3 2*x* **.**

15.

*y*  *x*  87 arccos

. 16.

*y*  *x*  35 arcsin 7*x*4 **.**

17.

3 *x*  6

*y*  ln*x*  7arccos 3*x*4 **. 18.** *y*  log2 *x*  5arctg34*x* **.**

19.

*y*  *x*  74 arcctg2 7*x* **. 20.** *y* 

#### arccos4 2*x*.

**21.** *y* 

3 *x*  5

3 *x*  52

arcsin4 5*x* **. 22.**

*y*  *x*  35 arccos 4*x*6**.**

**23.** *y* 

*x*  55

arcsin 2*x*3 **. 24.** *y* 

arccos 3*x* **.**

25.

*y*  tg4*x*  arcctg3*x* **. 26.** *y* 

*x*  33arctg7*x*  1**.**

**27.** *y* 

5 *x*  32

*x*  73

arcsin 7*x*2 **. 28.**

*y*  arcsin3 8*x*  ctg3*x* **.**

29.

*y*  *e*cos *x* arcsin 7*x*.

**30.** *y* 

arccos4 *x* **.**

ЗАДАЧА 6. Знайти похідну *y*

**1.** *y*  (arccos 2*x*)ln *x* .

**3.** *y*  (sin 3*x*)arccos3*x*.

**2.** *y*  (sin 5*x*)arctg( *x*  2) .

1. *y*  (tg6*x*)arcsin( *x* 1) .
2. *y*  (sin( *x*  4))arcsin 2*x* . **6.** *y*  (cos 3*x*)arctg *x* .

**7.** *y*  (

4*x*  2)arcctg3*x* .

1. *y*  (ln( *x*  2))sin *x* .
2. *y*  (log ( *x*  5))ctg7*x* .

2

*y*  (ctg2*x*)arcsin *x* .

13.

**15.**

*y*  (cos 6*x*)ctg(1/ *x*). *y*  (cos( *x*  4))ln *x* . *y*  (ln( *x*  3))ctg2*x* .

14.

**16.**

*y*  (arcsin 6*x*)tg *y*  (arctg3*x*)sin *x* . *y*  (ctg(5*x*  4))

*x* .

*x* 3 .

17.

*y*  (tg

*x*  2)arctg2 *x* .

**18.**

*y*  (ctg(3/*x*))arcsin 7*x* .

19.

*y*  (cos( *x*  6))arcsin3*x* .

**20.**

*y*  (

*x*  4)arccos 3*x* .

21.

*y*  (sin 5*x*)arctg 1 .

**22.**

*y*  (tg

5*x*4)

*x*3 .

23.

*x*

*y*  (ctg4*x*3 )sin *x* .

**24.**

*y*  (tg2*x*5)

*x* 2 .

25.

*y*  (arccos 3*x*)

cos *x* .

**26.**

*y*  (ctg3*x*)sin(*x*3) .

27.

*y*  (sin 4*x*)arctg( *x* 2) .

**28.**

*y*  (arctg6*x*)tg(3*x*1) .

29.

*y*  (ctg

3*x* )sin( *x* 3) .

**30.**

*y*  (sin 6*x*)arcctg2*x* .

ЗАДАЧА 7. Знайти похідну *y*

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **1.** *y*  (arccos( *x*  3))tg3*x* . | | **2.** *y*  (arcsin 7*x*)ctg(*x*1). | |
| **3.** *y*  (arctg( *x*  4))cos2*x* . | | **4.** *y*  (arcctg( *x*  4))sin 4*x* . | |
| **5.** *y*  (ctg(5*x*  2))arcsin 3*x* . | | **6.** *y*  (tg(5*x*  3))arccos 2*x* . | |
| **7.** *y*  (cos(5*x*  2))arctg5*x* . | | **8.** *y*  (sin(9*x*  4))arcctg*x* . | |
| **9.** *y*  (arcsin 3*x*)ln(*x*3). | | **10.** *y*  (arccos 5*x*)lg(5*x*1). | |
| **11.** *y*  (arctg4*x*)log2( *x* 4). | | **12.** *y*  (arctg2*x*)lg(*x*1). | |
| **13.** | arcsin *x* | **14.** | *y*  (log (5*x*  2))arccos *x* .  5 |
| **15.** *y*  (lg(2*x*  5))arctg2*x* . | | **16.** *y*  (ln(7*x*  4))arcctg*x* . | |
| **17.** | arcsin 2 *x* | **18.** *y*  (lg(4*x*  5))arccos 4*x* . | |
| **19.** *y*  (ln(4*x*  3))arctg5*x* . | | **20.** *y*  (log (3*x*  5))arctg*x* .  5 | |
| **21.** | *y*  (sin(8*x*  3))ctg(*x*3). | **22.** | *y*  (cos(3*x*  5))tg(*x*7). |
| **23.** | *y*  (tg(3*x*  2))cos(2*x*1). | **24.** *y*  (ctg(3*x*  5))sin3*x* . | |
| **25.** | *y*  (sin(4*x*  7))cos(*x*4). | **26.** | *y*  (cos(4*x*  3))tg(*x*5). |
| **27.** | *y*  (tg(7*x*  6))sin(*x*2). | **28.** | *y*  (cos(5*x*  2))cos(*x*4). |
| **29.** | *y*  (ln(3*x*  4))tg*x* . | **30.** | *y*  (lg(7*x*  3))tg5*x* . |

**ЗАДАЧА 8. Знайти похідну** *y*

|  |  |
| --- | --- |
| (2*x*  5)4 (7*x*  2)5  **1.** *y*  .  3 (3*x*  4)2 | (5*x*  2)(4*x*  7)4  **2.** *y*  .  3 (5*x*  1)4 |
| (5*x*  2)3 (2*x*  1)5  **3** *y*  .  (3*x*  4)2 | (5*x* 3)5 (5*x*  2)2  **4.** *y*  .  (3*x*  1)7 |
| (5*x*  2)7 (4*x*  3)3  **5.** *y*  .  (3*x*  1)5 | 5*x*  7 (2*x*  3)4  **6.** *y*  .  (3*x*  2)5 |
| (4*x*  3)2 3*x*  4  **7.** *y*  .  (5*x*  2)7 | (5*x*  7)10 3*x*  1  **8.** *y*  .  (4*x*  3)5 |
| (6*x*  1)8(2*x*  3)2  **9.** *y*  .  (5*x*  2)5 | ( *x*  4)5(3*x*  2)3  **10.** *y*  .  (4*x*  1)3 |
| 5 (6*x*  4)3  **11.** *y*  .  (5*x*  1)2 (4*x*  3)5 | 3 (4*x*  1)7  **12.** *y*  .  (3*x*  1)5(4*x*  5)3 |
| (5*x*  2)3 (2*x*  1)4  **13.** *y*  .  (5*x*  2)7 | 3 (7*x*  2)5 (4*x*  3)2  **14.** *y*  .  (2*x*  7)3 |
| 4 2*x*  1(5*x*  2)6  **15.** *y*  .  (2*x*  1)5 | 5 *x*  1(4*x*  3)7  **16.** *y*  .  (5*x*  8)3 |
| 7 (3*x*  2)4  **17.** *y*  .  ( *x*  1)2 (7*x*  6)5 | 5 (2*x*  1)2  **18.** *y*  .  (2*x*  3)4 (5*x*  4)3 |
| *x*2  2*x*  3  **19.** *y*  .  ( *x*  3)7(5*x*  4)2 | 3 (3*x*2  2)4  **20.** *y*  .  (2*x*  5)(4*x*  1)7 |
| (2*x*2  4)3 (5*x*  2)4  **21.** *y*  .  3 ( *x*2  2)5 | (5*x*  1)6 ( *x*5  2)3  **22.** *y*  .  5 (4*x*3  3)2 |
| (3*x*2  *x*  1)4 (2*x*  7)2  **23.** *y*  .  3 (3*x*  2)5 | (4*x*2  7)2 (2*x*  3)5  **24.** *y*  .  *x*2  3*x*  1 |
| 3 *x*  3 (3*x*2  7)5  **25.** *y*  .  (5*x*  4)2 | 4*x* 2  1 (3*x*  8)3  **26.** *y*  .  (4*x* 1)5 |

|  |  |
| --- | --- |
| 5 ( *x* 2  9)3(2*x* 1)7  **27.** *y*  .  (5*x* 2  3)4 | 4 (6*x*  1)3 ( *x*3  2)5  **28.** *y*  .  (5*x* 2  3)2 |
| 6 (5*x*  1)5  **29.** *y*  .  ( *x*3  2)4 (2*x*4  5)7 | 5 (4*x*4  2)3  **30.** *y*  .  (2*x*  1)4 (5*x*3  3 5  ) |

**ЗАДАЧА 9. Знайти** *y* **і** *y*

|  |  |
| --- | --- |
| **1.** *x*2 *y*2  7*x*  3*y*  0. | **2.** 2*x*  3*y*  6 sin *y*. |
| **3.** 2 *y*  3*x*  arctg*y*. | **4.** 2*x*3  4*xy*  *y*3  1. |
| **5.** 2 *y*2  5*x*  *y* cos 2*x*. | **6.** arctg*y*  5*x*2  4 *y*. |
| **7.** tg*y*  6*x*  *y*2. | **8.** 4*x*2  5 *y*2  4. |
| **9.** *y*  6*e*2 *y*  *x*2. | **10.** 8 ln *y*  3*y* / *x*  2. |
| **11.** *y*3  5*xy*. | **12.** 3*xy*2  3*y*4  2*x*  1. |
| **13.** 4*x*  *y*  3. | **14.** *y*2  4*x*  *y* .  *x*  6 *y* |
| **15.** sin2(6*x*  *y*2 )  1. | **16.** ctg(4*x*  *y*)  2*x*. |
| **17.** *x* / *y*  cos2(4*x*  *y*). | **18.** *x*4  5*xy*2  *y*3  1. |
| **19.** *ey*  3*x*  4 *y*. | **20.** tg2(5*x*  2 *y*)  4*x*  3*y*. |
| **21.** 3*x*3  2 *y*3  *xy*. | **22.** 4 *y*2  6 *y*  *x* / *y*2. |
| **23.** 6*x* / *y*  *x*2  *y*2. | **24.** ln(4 *y*  7*x*2 )  *y* / *x*. |
| **25.** arcsin(2*x*  *y*)  2*x*  3*y*. | **26.** cos2(3*x*  5 *y*)  *x*2  *y*. |
| **27.** 4*x*2  sin( *x* / *y*)  *y*2. | **28.** *x*  cos(3*x*  *y*)  2*xy*. |
| **29.** 5*x*  *y*  *x*2  *y*2. | **30.** *y*  tg(5*x*  *y*)  2. |

**ЗАДАЧА 10. Знайти** *y* **і** *y*.

|  |  |
| --- | --- |
|  *x*  3 *t* ,  **1.**  *y*  43 *t*.   | *x*  54*t* ,  **2.**  *y*  53*t*.   |
|  *x*  cos3 *t*,  **3.**  *y*  3sin3 *t*.   |  *x*  1/(*t*  4),  **4.**  *y*  [2*t* /(*t*  4)]2.   |

|  |  |
| --- | --- |
| *x*  5cos2 *t*,  **5.**  *y*  6 sin2 *t*.   | *x*  (*t*  2) cos *t*,  **6.**  *y*  4*t*2.   |
|  *x*  *t* /(*t*3  1),  **7.**  2 2   *y*  5*t* /(*t*  1). |  *x*  5*t*2  1,  **8.**  *y*  (*t*  6) *t*2  1.   |
|  *x*  3*t*  *t*2,  **9.**  *y*  5*t*3  *t*2.   | *x*  (ln 2*t*) / *t*,  **10.**  *y*  4*t* ln *t*.   |
| *x*  2*et* cos *t*,  **11.**  *y*  5*et* sin *t*.   |  *x*  *t*5,  **12.**  *y*  6*t* ln *t*.   |
| *x*  3cos 2*t*,  **13.**  *y*  5sin 2*t*.   |  *x*  8sin2 *t*,  **14.**  *y*  7 cos2 *t*.   |
|  *x*  5arctg*t*,  **15.**  *y*  6 ln(*t*2  1).   |  *x*  3 1  *t*2 ,  **16.**  *y*  4 arcsin *t*.   |
|  *x*  7(*t*  sin *t*),  **17.**  *y*  7(1  cos *t*).   |  *x*  4(sin *t*  *t* cos *t*),  **18.**  *y*  4(cos *t*  *t* sin *t*).   |
|  *x*  4 sin 2*t*,  **19.**  *y*  3cos2 *t*.   |  *x*  *e*3*t* ,  **20.**  *y*  *e*4*t*.   |
| *x*  (ln *t*) / *t*,  **21.**  *y*  4*t*2 ln *t*.   |  *x*  1  4*t*2 ,  **22.**  *y*  3arccos 2*t*.   |
| *x*  arcsin 3*t*,  **23.**  *y*  1  4*t*2 .   |  *x*  *te*7*t* ,  **24.**  *y*  5*t* / *e*3*t*.   |
| *x*  (*t*  3)3 ,  **25.**    *y*  *t*  3. |  *x*  ln3 *t*,  **26.**    *y*  7(*t*  ln *t*). |
|  *x*  4 ln *t*,  **27.**  *y*  arcsin *t*.   | *x*  6 ln(*t*2  1),  **28.**  *y*  7arcctg *t*.   |
|  *x*  *t*  5,  **29.**  *y*  45 *t*  5.   |  *x*  8 ln *t*,  **30.**  *y*  3arctg*t*.   |

ЗАДАЧА 11. Задано закон зміни шляху матеріальної точки *s*(*t*) .

**Знайти значення швидкості та прискорення точки в момент часу**

*t*0 **.**

**1.** *s*(*t*)  4*x*4  7*x*3  2*x*  8, *t*0  1.

**2.** *s*(*t*)  3*x* 4  *x*3  *x* 2  1, *t*0  2.

**3.** *s*(*t*)  4*x*4  3*x*3  2*x*2  1, *t*0  1.

**4.** *s*(*t*)  4*x* 4  3*x* 2  *x*  2 , *t*0  2.

**5.** *s*(*t*)  6*x*4  2*x*2  *x*  5, *t*0  2.

**6.** *s*(*t*)  7*x* 4  3*x*3  2*x* 1, *t*0  1.

**7.** *s*(*t*)  5*x*4  6*x*2  5*x*  7 , *t*0  2.

**8.** *s*(*t*)  2*x*4  11*x*2  2*x*  1, *t*0  1.

**9.** *s*(*t*)  7*x*4  3*x*3  *x*2  1, *t*0  2.

10.

*s*(*t*)  5*x*4  *x*3  2*x*2  8,

*t*0  1.

**11.** *s*(*t*)  6*x*4  2*x*3  7*x*  5, *t*0  2.

12.

*s*(*t*)  4*x*4  4*x*3  2*x*2  1, *s*(*t*)  3*x*4  2*x*3  7*x*2  2 , *s*(*t*)  9*x*4  2*x*3  7*x*  1,

*t*0  1. *t*0  2. *t*0  1.

*s*(*t*)  8*x* 4  2*x*3  9*x* 2 1,

*t*0  2.

*s*(*t*)  7*x*4  9*x*3  *x*  18, *s*(*t*)  5*x*4  2*x*2  8*x*  1, *s*(*t*)  3*x*4  3*x*3  3*x*2  4 , *s*(*t*)  8*x*4  6*x*2  2*x*  7 ,

*t*0  1. *t*0  2. *t*0  1. *t*0  2.

*s*(*t*)  6*x* 4  11*x* 2  2*x* 2 1,

#### *s*(*t*)  5*x*4  *x*3  *x*2  21,

*t*0  1.

*t*0  2.

*s*(*t*)  4*x*4  *x*2  2*x*  8, *s*(*t*)  3*x*4  5*x*3  8*x*2  1, *s*(*t*)  8*x*4  5*x*3  2*x*2  1, *s*(*t*)  7*х*4  2*x*3  8*x*  9 , *s*(*t*)  5*x*4  *x*3  2*x*2  1,

*t*0  1. *t*0  2. *t*0  1. *t*0  2. *t*0  1.

*s*(*t*)  7*x* 4  2*x*3  9*x* 2 1,

*t*0  2.

*s*(*t*)  9*x*4  9*x*3  *x*  18,

*t*0  1.

*s*(*t*)  2*x* 4  2*x* 2  8*x* 1,

*s*(*t*)  6*x* 4  3*x*3  3*x* 2  4 ,

*t*0  2.

*t*0  1.

ЗАДАЧА 12. Знайти похідні вищих порядків

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **1.** *y*  *x* 2  3*x*  2, | *y*  ? | *y*0  ? |
| **2.** *y*  1  *x*2  *x*4, | *y*  ? | *y* 1  ? |
| **3.** *у*  *x*  54 , | *y*  ? | *y*0  ? |
| **4.** *у*  *x*6  4*x*3  4, | *y*  ? | *y* 1  ? |
| **5.** *y*  *x*2  53, | *y*  ? | *y*0  ? |
| **6.** *y*  cos3 *x*, | *y*  ? | *y*    ? |
| **7.** *у*  *e*4 *x* 5, | *y*  ? | *y*0  ? |
| **8.** *у*  arctg *x*, | *y*  ? | *y* 1  ? |

**9.** *у* 

1 ,

4  *x*

*y*  ?

*y*3  ?

10.

*y*  *x*2 ln *x*,

*y*  ?

*y* 1  ?

11.

*у*  7 ,

*x*4

*y*  ?

*y*2  ?

12.

*у*  sin 2*х*,

#### *y*  ?

*y*     ?

#### 4

 

 

13.

*y*  5  *x* ,

5  *x*

*y*  ?

*y* 1  ?

14.

3

*xe* ,

*y*  *x*

*y*  ?

*y* 1  ?

15.

*y*  1 ,

2  *x* 4

*y*  ?

*y*1  ?

16.

*y*  1  *x* 2 arctg *x*,

*y*  ?

*y*  1  ?

**17.** *y* 

#### 25  *x*2 ,

*y*  ?

*y*0  ?

18.

*y*  *xx* ,

*y*  ?

*y* 1  ?

19.

*y*  ln*x* 

3  *x*2 ,

*y*  ?

*y*0  ?

**20.** *y* 1 ,



#### 2  *x*

*y*  ?

*y* 1  ?

21.

*y*  *e x* ,

*y*  ?

*y*0  ?

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **22.** *y*  1  *x*2 arcsin *x*, | *y*  ? | *y* 1  ? |
| **23.** *y*  arcsin5sin *x*, | *y*  ? | *y*0  ? |
| **24.** *y*  5sin 5*x*, | *y*  ? | *y* 1  ? |
| **25.** *y*  *x*3  4*x*  5, | *y*  ? | *y*0  ? |
| **26.** *y*  4  5*x*2  6*x*7, | *y*  ? | *y* 1  ? |
| **27.** *у*  *x*  22, | *y*  ? | *y*0  ? |
| **28.** *у*  *x*3  6*x*4  4, | *y*  ? | *y* 1  ? |

29.

*y*  7  *x* ,

8  *x*

*y*  ?

*y* 1  ?

30.

*y*  5*xe*8*x* ,

*y*  ?

*y* 1  ?

ЗАДАЧА 13. Використовуючи формулу Лейбніца, знайти похідні функцій

**1.** *y*  *x* 2  1sin *x* ;

*y*10  ?

**2.** *y*  *x*4  3*x*2 *ex* ;

*y* 20  ?

**3.** *y*  *ex* sin *x* **;**

*y* 20  ?

**4.** *y*  *x*3  2*x*ln *x* ;

*y* 30  ?

**5.** *y*  *x*3  4cos *x* ;

*y*10  ?

**6.** *y*  *x*3  4*x*2 *tgx* ;

*y* 20  ?

1. *y*  *ex* 5*x* **;**

*y* 20  ?

1. *y*  *ctgx* ln *x* ;

*y* 30  ?

1. *y*  arcsin *x* sin *x* ;

*y*10  ?

*y*  *tgxex* ;

*y* 20  ?

1. *y*  *ex* arccos *x* ;

*y* 20  ?

*y*  2*x*3  5*x**cgtx* ;

*y* 30  ?

**13.** *y*  *x*2  1log3 *x* ;

*y*10  ?

**14.**

*y*  *x*4  3*x*2 6*x* ;

*y* 20  ?

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **15.**  **17.** | *y*  *exctgx* **;**  *y*  *x* sin *x* ; | *y* 20  ?  *y*10  ? | **16.**  **18.** | *y*  7*x*4  *x*log2 *x* ;  *y*  *x*2  3*x*4 2*x* ; | *y* 30  ?  *y* 20  ? |
| **19.** | *y*  *ex* 3*x* **;** | *y* 20  ? | **20.** | *y*  4 *x*3 ln *x* ; | *y* 30  ? |
| **21.** | *y*  log5 *x* sin *x* ; | *y*10  ? | **22.** | *y*  *x*5  6*x*7 arcsin *x* ; | *y* 20  ? |
| **23.**  **25.**  **27.**  **29.** | *y*  *ex* 5 *x* 2 **;**  *y*  *x*3  4arccos *x* ;  *y*  *ex* log8 *x* ;  *y*  5*x*4  7*arcctgx* ; | *y* 20  ? *y*10  ? *y* 20  ?  *y*10  ? | **24.**  **26.**  **28.**  **30.** | *y*  *x*3  2*x*ln *x* ; *y*  ln *x ex* ;  *y*  4*x*3  2*x*2 *arctgx* ;  *y*  *arctgx ex* ; | *y* 30  ? *y* 20  ? *y* 30  ?  *y* 20  ? |

ЗАДАЧА 14. Знайти диференціали функцій

**1.** *y*  *x*6*x*1 .

1. *y*  ln tg 

#### 

 7

 *x* .

#### 

8 

1. *y*  *x*arccos 2 *x* .

**5.** y  tg2*x*.

**7.** *y*  ln *x*sin6*x*.

**4.** *y*  5  6*x*  7*x*2 3.

**6.** *y*  2ln tg *x*.

1. *y*  8cos *x* .

3  *x* 2

5arcsin *x*

##### y

5*x*3  7

#### 6*x*3  7 .



1. *y* 

 1

* arctg *x*6.

*y*  9 arcsin *x*  6 arccos *x*.

*y*  4

*x* 2  5*x*3  6 *x*.

*у*  7 . 6  *х*2

#### 2  *x*

1. *y*  sin 7*x*tg *x*.

 1

*y*  arcsin *tgx* 

.

#### cos *x*

1. *y*  8 cos *x* .
2. *y* 

25*x*2  1

###### arcsin

1

*x*  5

######  5.

**18.** *y*  9*x**e*2 *x* .

**19.** *y*  cos(5*x*  1)  7*x*3.

**20.**

*y*  *x* arcsin 2*х* 

4  *x*2 .

2  1  *x*

**21.** *y*  cos

3*x*  arcsin( *x*  3).

**22.** *y*   5*x*2  .

1. *y* 

######  8*x*.

4  *x*



1. *y* 

3 4*x*  72



*x*  62

.

1. *y*

 ctg2 8*x* 

#### 3

ln(3*x*

####  4).

*y*  *x*2 

*x*  4

*x*  .

**27.** *y*  1  sin 3*x*  cos( *x*  7).

*x*

###### sin *x*

1. *y*  tg *x*  cos *x*  ln( *х*  4).

###### 3

**28.** *y*  1  3*x*3  1  3*x*2

1. *y*  *x*arcsin 3*x* .

1  3*x*.

ЗАДАЧА 15. Знайти наближено, використовуючи рівність

*y*  *dy*

**1.** . **2.**

3 67

**3.** sin 58. **4.**

**5.** tg 58. **6.**

**7.** arctg 1,03. **8.**

.

cos 62 . ctg 28. arctg 0,98 .

5 241

**9.** lg11. **10.** arcsin 0,48.

**11.** *e*0,01. **12**sin 31

13.

**15.**

17.

**19.**

. **14.**

tg 62. **16.**

3 63

arctg 0,97 . **18.**

lg 9 . **20.**

cos 59. ctg 32. arctg 1,08.

### arcsin 0,99.

**21.** *e*0,01. **22.**sin 46

**23.** sin 63. **24.** cos 63 .

25.

**27.**

29.

tg 62. **26.**

arctg0,98. **28.**

lg12 . **30.**

### ctg 33. arctg 0,95.

arcsin 0,45.

**ЗАДАЧА 16. Знайти границі, використовуючи правило Лопіталя**

1  cos *x*2

**2.** lim

tg*x*  *x* .

**1.** lim .

*x*0 *x*  sin *x*

4 *x*  4

2 2

*x*  0 2 sin *x*  *x*

#### lim

*x* 

ln( *x*  3) .

#### lim

*x* 1

5ln *x*  *x x*  1 .

#### lim

tg5*x* .

#### lim 1  cos *x*ctg*x*.

*x*   / 2 tg7*x*

*x* 

#### lim

*x*0

lg *x*  *x* .

#### 1  4 sin2 (*x* / 6)

1. lim 2 .

*x*  sin *x*

*x*  1 1  *x*

#### lim

tg8*x* .

*x*3  2*x*2  *x*  2

*x*   / 2 tg5*x*

lim

*x* 1

*x*3  7*x*  6 .

**11.** lim (71/ *x*  1)*x*.

*x*



.





**12.**

lim (

*x*  

### 2arctg*x*) ln *x*.

**13.** lim arcsin *x*  3  ctg( *x*  3).

**14.**

lim 1 *x* 

*x*  3 3

*x* 1 ln *x*

ln *x* 

*e*1/ *x* 2  1

sec2 *x*  2tg*x*

**15.**

lim .

*x*   2arctg *x*  

2

**16.**

lim

*x*   / 4

1  cos 4*x* .

lim *x* cos *x*  sin *x* . *ex*

17.

4

*x*0 *x*3

**18.**

#### lim .

*x* *x*

5 *x*

19.

lim 1  *x* .

*x*  11  sin*x* / 2

**20.**

lim

*x*  

ln *x* .

21.

lim

sin *x* .

**22.**

lim  / *x* .

*x*  0 1  cos *x*

*x*0 ctg*x* / 2

23.

lim

*x* / 4

#### (1/ cos2 *x*)  2tg*x*

1  cos 4*x* .

**24.**

lim

*x*  0

#### ln(sin 6*x*) . ln(sin *x*)

25.

lim 1  *x*tg*x* / 2.

*x*  1

**26.**

lim

*x*  

*x* sin7 / *x*.

* 1 lim *x* cos *x*  sin *x* .

3 1  2*x*

**27.**

#### lim .

*x*1

2  *x*  *x*

**28.**

*x*0 *x*3

29.

lim

1  *x* .

**30.**

lim

tg*x*  sin *x* .

*x*11  sin*x* / 2

*x*  0 4*x*  sin *x*

ЗАДАЧА 17. Знайти границі, використовуючи правило Лопіталя

1. lim 1  cos8*x* .

*x*01  cos6*x*

**3.** *ex*  1  *x*3

#### lim

*x*   / 4

1. lim

#### 1  2 sin *x* . cos 2*x*

1  sin 2*x* .

lim

*x*0

sin2 6*x* .

*x*   / 2 4*x*   2

#### lim 1  cos8*x* .

1. lim

#### *x*4 sin 3 .

*x*0 tg2 2*x*

*x* 

 *x* 

#### lim ln *x*  ln( *x*  2).

1. lim

 

ln *x* .

*x* 2

**9.** lim 1 1 

1  *x*

1  3 *x*



.





10.

*x* 1 ctg*x*

*e*2 *x*  *e*3*x*

lim .

*x* 1 

*x*0 sin *x*

11.

lim

*e*2*x*  1

.

12.

lim

*e x*  1

.

sin 5*x*

*x*0 ln1  2*x*

*x*0

13.

lim

 *x*   

**14.**

lim 

 *x* tg *x* .

 .  

*x*   / 2 ctg*x*

2 cos *x* 

*x* 

 2 

15.

lim*x* ln *x*.

*x*0

**16** lim

*x*

ln*x*  8.**.**

17.

lim

3*x*  1

*x* .

18.

5 *x*  4

lim

*x*1

ln *x*

3

.

*x* 0 5  1

1  *x*

19.

lim

*x*  5 .

**20.**

*ex*  1

*x* 5

*x*3  53

lim .

*x* 0 sin 2*x*

21.

lim 1 

5 .

**22.**

lim 1

 1 .



*x* 3 *x*  3

*x*2  *x*  6 



*x* 0 *x* sin *x*



*x*2 

23.



lim

 / *x* .

**24.**

lim

4*x*  7*x*

.

*x* 1  *x*2

*x*  0 ctg5*x* / 2

ln1  *x*2 

*x*0

*ex*

25.

lim

*x* 0 cos 3*x*  *e*

* *x* .

**26.**

#### lim .

*x* *x*

6

27.

lim 1  cos 2*x*ctg4*x*.

**28.**

lim  *x*2 sin 3 .

*x* 0

 

*x*  

*x*

**29.**

#### lim

*x*  arctg*x* .

**30.**

lim 1  *e*2*x*  ctg*x*.

*x* 0 *x*3

*x*0

ЗАДАЧА 18. Знайти границі, використовуючи правило Лопіталя

|  |  |
| --- | --- |
| **1.** lim *x*  sin 5 .  *x* 6*x* | *x*4  24  **2.** lim 3 3 .  *x* 2 *x*  2 |
| 2  *ex*  1  **3.** lim .  *x* 0 cos *x*  1 | **4.** lim*x*  3*x* 3.  *x*3 |
| **6.** lim ln1  *x* tg*x* / 2.  *x*  1 ctg*x* |
| **5.** lim lncos *x* .  *x*0 *x* |
| **7.** lim tg*x*tg2 *x* . *x*  / 4 | **8.** lim 1 .  *x*  1 cos*x* / 2ln1  *x* |
| 2  cos(*ex*  1)  **9.** lim .  *x*  0 cos *x* 1 | *e*2*x*  cos 2*x*  **10.** lim 3*x* .  *x*0 *e*  cos 3*x* |
| *e*tg*x* 1  **11.** lim .  *x* 0 tg*x*  *x* | **12.** lim arcsin 7*x* .  *x*0 3  3*e*5*x* |
| **13.** lim 3tg4*x* 12tg*x* .  *x* 0 3sin 4*x* 12 sin *x* | **14.** lim tg*x* 1 .  *x*  / 4 2 sin2 *x* 1 |
| **15.** lim1  *x*log2 *x* . *x*1 | **16.** lim arcsin 4*x*  4 arcsin *x* .  *x*0 *x*3 |
| 3*x*  3sin *x*  **17.** lim 3 .  *x*0 *x* | **18.** lim cos *x*  ln( *x*  5) .  *x*5 ln(*ex*  *e*5) |
| lncos 5*x*  **19.** lim .  *x*0 lncos 6*x* | 3 *tgx*  1  **20.** lim .  *x* 2 sin2 *x*  1  4 |
| **21.** lim 1  1 .       *x*0 *x ex*  1 | **22.** lim *x*2  *e*0,02 *x* . *x* |
| ln(1  *xex* )  **23.** lim .  *x*  0 ln( *x*  1  *x*2 ) | *x*(*ex*  1)  2(*ex* 1)  **24.** lim 3 .  *x*  0 *x* |
| 4  *ex* 2  1  **25.** lim 2 .  *x* 2*arctgx*   | **26.** lim ln 5*x*  ln5*x*  1.  *x*  1/ 5 |
| **27.** lim  *x*  1 .       *x*  1/ 2 3*x* 1 ln 3*x*  | **28.** lim arcsin *x*  *tgx*.  *x*0 |
| **29.** lim *x*4*e**x*. *x* | *ex*  *x* 1  ( *x*2 / 2)  **30.** lim 2 .  *x*  0 cos *x* 1  ( *x* / 2) |

**ЗАДАЧА 19. Записати розклад многочлена**

*f* *x* **за степенями**

*x*  *x*0

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **1.** *f* *x*  4*x*4  5*x*3  3*x*2  5*x*  6 , | *x*0 |  1. |
| **2.** *f* *x*  5*х*4  4*х*3  *х*2  6*х*  1, | *x*0 |  1. |
| **3.** *f* *x*  *х*4  4*х*3  *х*2  6*х*  7 , | *x*0 |  2 . |
| **4.** *f* *x*  2*х*4  4*х*3  *х*2  6*х*  8 , | *x*0 |  2 . |
| **5.** *f* *x*  3*х*4  4*х*3  *х*2  6*х*  7 , | *x*0 |  3. |
| **6.** *f* *x*  4*х*4  4*х*3  3*х*2  6*х*  1, | *x*0 |  3. |
| **7.** *f* *x*  5*х*4  4*х*3  4*х*2  6*х*  2 , | *x*0 |  4 . |
| **8.** *f* *x*  6*х*4  4*х*3  5*х*2  6*х*  3 , | *x*0 |  4 . |
| **9.** *f* *x*  7*х*4  4*х*3  3*х*2  6*х*  7 , | *x*0 |  5. |
| **10.** *f* *x*  8*х*4  4*х*3  2*х*2  6*х*  3, | *x*0 |  5. |
| **11.** *f* *x*  5*х*4  4*х*3  *х*2  6*х*  7 , | *x*0 |  6 . |
| **12.** *f* *x*  5*х*4  4*х*3  *х*2  6*х*  4 , | *x*0 |  6 . |
| **13.** *f* *x*  5*х*4  2*х*3  2*х*2  6*х*  7 , | *x*0 |  7 . |
| **14.** *f* *x*  5*х*4  *х*3  *х*2  6*х*  4 , | *x*0 |  7 . |
| **15.** *f* *x*  5*х*4  4*х*3  2*х*2  6*х*  2 , | *x*0 |  8 . |
| **16.** *f* *x*  5*х*4  4*х*3  3*х*2  6*х*  7 , | *x*0 |  8 . |
| **17.** *f* *x*  5*х*4  4*х*3  4*х*2  6*х*  2 , | *x*0 |  9 . |
| **18.** *f* *x*  5*х*4  4*х*3  5*х*2  5*х*  7 , | *x*0 |  9 . |
| **19.** *f* *x*  5*х*4  4*х*3  6*х*2  6*х*  6 , | *x*0 |  10. |
| **20.** *f* *x*  5*х*4  *х*3  *х*2  *х*  1, | *x*0 |  10 . |
| **21.** *f* *x*  5*х*4  4*х*3  2*х*2  4*х*  1, | *x*0 |  11. |
| **22.** *f* *x*  9*х*4  4*х*3  *х*2  6*х*  3, | *x*0 |  11. |

23.

*f* *x*  8*х*4  4*х*3  6*х*2  6*х*  4 ,

*x*0  12 .

24.

*f* *x*  5*х*4  4*х*3  *х*2  6*х*  17 ,

*x*0  12 .

25.

*f* *x*  4*х*4  4*х*3  4*х*2  7*х*  10 ,

*x*0  13.

26.

*f* *x*  6*х*4  4*х*3  6*х*2  2*х*  10 ,

*x*0  13.

27.

*f* *x*  7*х*4  4*х*3  7*х*2  7*х*  12,

*x*0  14 .

28.

*f* *x*  8*х*4  4*х*3  8*х*2  6*х*  9 ,

*x*0  14 .

29.

*f* *x*  4*х*4  7*х*3  *х*2  6*х*  8,

*x*0  15.

30.

*f* *x*  3*х*4  4*х*3  *х*2  5*х*  6 ,

*x*0  15.

ЗАДАЧА 20. За допомогою формули Маклорена наближено обчислити

**1.** . **2.** 5 1020 .

3 127

**3.** sin 57. **4.**

**5.** tg 57. **6.**

**7.** arctg 1,08. **8.**

cos 61 . ctg 27. arctg 0,96 .

**9.** lg15. **10.** arcsin 0,47 .

**11.** *e*0,05 . **12**sin 33

13.

**15.**

17.

**19.**

. **14.**

tg 64. **16.**

3 123

arctg 0,95. **18.**

lg 6 . **20.**

cos 59. ctg 35. arctg 1,07 .

### arcsin 0,09.

**21.** *e*0,08 . **22.**sin 48

**23.** sin 64. **24.** cos 68 .

25.

**27.**

29.

tg 66. **26.**

arctg 0,08 . **28.**

lg14 . **30.**

### ctg 37. arctg 0,05. arcsin1,06 .

ЗАДАЧА 21. Записати розклад функції до *n* -го члена

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **1.** *y*  *х*arcctg*х* , | | | | | | *n*  4. | **2.** | *y*  *х* ln1  *х*, | | | *n*  4 . |
| **3.** *y*  *x* arcsin *x* , | | | | | | *n*  5 . | **4.** | *y*  *x* arccos *x*, | | | *n*  3 . |
| **5.** *y*  *x*1  *x*2 , | | | | | | *n*  3. | **6.** | *y*  *x*1  *x*, | | | *n*  5 . |
| **7.** *y*  *x* arccos *x* , | | | | | | *n*  4 . | **8.** | *y*  *x* cos *x* , | | | *n*  4 . |
| **9.** | *y*  | *x*  1  *x* | | , | | *n*  5 . | **10.** | *y*  | *x*  1  *x* | , | *n*  4 . |
| **11.** | *y*  *x* 1  *x* , | | | | | *n*  5. | **12.** | *y*  *xex* , | | | *n*  4 . |
| **13.** | *y*  *x* sin *x* , | | | | | *n*  4 . | **14.** | *y*  *х* ln1  *х*, | | | *n*  5 . |
| **15.** | *y*  *х*2arcctg*х* , | | | | | *n*  4. | **16.** | *y*  *х*2 ln1  *х*, | | | *n*  4 . |
| **17.** | *y*  *x* 2 arcsin *x* , | | | | | *n*  5 . | **18.** | *y*  *x*3 arccos *x*, | | | *n*  3 . |
| **19.** | *y*  *x*51  *x*2 , | | | | | *n*  3. | **20.** | *y*  *x*2 1  *x*, | | | *n*  5 . |
| **21.** | *y*  *x*4 arccos *х* , | | | | | *n*  4 . | **22.** | *y*  *x* 2 cos *x* , | | | *n*  4 . |
| **23.** | *y*  | | *x*3  1  *x* | | , | *n*  5 . | **24.** | *y*  | *x*2  1  *x* | , | *n*  4 . |
| **25.** | *y*  *x*3 1  *x* , | | | | | *n*  5. | **26.** *y*  *x* 2*ex* , | | | | *n*  4 . |
| **27.** | *y*  *x*3 sin *x* , | | | | | *n*  4 . | **28.** *y*  *х*2 ln1  *х*, | | | | *n*  5 . |
| **29.** | *y*  *х*3arcctg*х* , | | | | | *n*  4. | **30.** *y*  *х*3 ln1  *х*, | | | | *n*  4 . |

**ЗАДАЧА 22. Дослідити функцію на локальні екстремуми**

|  |  |
| --- | --- |
| *x*2  2*x*  2  **1.** *y*  .  *x*  1 | **2.** *y*  *x*  3 .  ( *x*  1)2 |
| 1  **3.** *y*  *e*5 *х* . | **4.** *y*  *x* .  4  *х* |
| 4*x*  *x*2  6  **5.** *y*  .  *x* | *x*2  **6.** *y*  .  5*x*2  2 |
| **7.** *y*  ln *x* .  *x* | **8.** *y*  2*x*  ln *x* .  *x* |

**9.** *y*  4*x*  ln(1  *x*2 ).

10.

4*x*2

*y*  *x*2  *x*  1.

**11.** *y*  *x*2  5ln *x*.

*x*2  *x*  1

**12.**

*y*  *x*3*e**x*2 .

( *x*  5)2

**13.** *y* 

*x*2  5*x* .

**14.**

*y*  .

*x*  1

15.

*y*   ln 3  *x* .

3  *x*

**16.**

*y*  ln( *x*2  5).

17.

*x*2  1

*y*  *x*2  3 .

3*x* 6

**18.**

*y*  4*x* ln *x*.

*x*2  3*x*  3

19.

*y*  ( *x*  5)*e* .

**20.** *y* 

*x*  5 .

21.

**23.**

*y*  2*x*  9 .

( *x*  5)2

#### ( *x*3  2)

*y*  *x*2 .

*x*2

22.

**24.**

*x*5

*y*  *x*7  1.

*y*  1 *х*( *x*  8).

#### 3

( *x*  5)

25.

*y*  ( *x*4  1) .

**26.** *y*  .

*ex*

27.

*y*  *x*5  1 .

*x*6

28.

*x*4  9

*y*  .

*x*

29.

*y*  4  5*x* .

#### 1  *x*2

**30.**

*y*  7*x* . 1  *x*2

ЗАДАЧА 23. Знайти найменше та найбільше значення функції

*y*  *f* ( *x*)

*x*

**на відрізку** [*a*; *b*]

*x*4  8

**1.** *y*  ( *x*  4)*e* , [2; 1].

**2.** *y*  *х*7

###### , [3;  1].

**3.** *y*  2*x*  1 ,

*x*  13

2

###### [1; 0].

**4.** *y*  ( *x*  5)*e*1*x* ,

*x*3

###### [2; 2].

1. *y*  ln( *x*

 3*x*),

###### [1; 2].

1. *y* 

*x* 2  *x*  4 ,

###### [1; 1].

1. *y* 

*x*  1 ,

*х*4

###### [1; 2].

1. *y* 

4*x*  *x*3 ,

#### [0; 1].

**9.** *y*  6  *e**x* ,

###### [0; 1].

10.

6*x*3  7

*y*  *x*5 ,

###### [1; 2].

11.

*y*  5*xex* ,

###### [2; 0].

**12.**

*y*  ln( *x*2  2*x*),

###### [0; 3].

13.

*y*  ( *x*  5)*e**x* ,

###### [0; 3].

**14.**

*y*  *x* , 7  *x*2

###### [2; 2].

15.

*y*  1  ln *x* ,

1 ; *e*.

16.

*y*  *e*5*x*  *x*2 ,

#### [1; 3].

*х* *е* 

17.

*y*  7*x* ,

*x* 2  4

[0; 5].

18.

*e*4*x*  6

*y*  *ex* ,

#### [1; 2].

19.

*y*  *x*2 ln *x*,

*е*; *e*2  .

**20.**

*y*  *x*4*ex*2,

[4; 0].

21.

*x*2  2*x*  5

*y*  *x*  4 ,

###### [1; 3].

**22.**

*y*  ( *x*  3)

#### , [4; 3].

23.

*y*  *ex* 3*x* 2 ,

#### [3; 3].

**24.**

*y*  ln *х* ,

*х*

3 *x*2

#### [1; 4].

25.

*y*  6*x*4  2*x*3  7,

[3; 1].

**26.**

*y*  2*x*5  3*x*4  2,

###### [1; 2].

27.

**29.**

*y*  (6  *x*)*e**x* ,

*y*  256*x*  *x*4,

###### [0; 5].

[1; 4].

**28.**

30.

*y*  1  2 cos *x*, 2

*y*  *x*4  6*x*3  7,

[0;  / 2].

###### [0; 4].

ЗАДАЧА 24. Дослідити функцію на опуклість і вгнутість кривих.

**Точки перегину**

**1.** *y*  *ex**x*2 .

#### *x*3  5

**2.** *y*  ln( *x*2  7).

2

1. *y* 

*x*2

1. *y*  5*x* ln *x*.
2. *y* 

4*ex*2  7

*ex* .

 *x* 2

**6.** *y*  *x*2*e* 7 .

**7.** *y*  *xe*3*х*.

#### (1  3*x*)3

**8.** *y*  2  5*x* .

( *x*  3)2

7 *x*

**9.** *y*  (5*x*  2)2 .

4

1. *y*  5*xe* .

*x*2

1. *y*  *x*2*eх* .

**12.** *y*  *x*  23 .

|  |  |
| --- | --- |
| **13.** *y*  ( *x*  4)*e*6*x*. | **14.** *y*  ln 7*x* .  *x* |
|  *x*  3 2  **15.** *y*   *x*  7  .    | *x*6  **16.** *y*  . 4  *x*2 |
| **17.** *y*  ( *x*  5)*e*3*x*. | **18.** *y*  6*x* .  6  *x*2 |
| 4  **19.** *y*  *x* .  *x*3  1 | **20.** *y*  ln(*x*2  2*x*  6). |
| **21.** *y*  ln 4  1 .   *x*2     | **22.** *y*  *x*5*ex*3. |
| **23.** *y*  *x*  ln(4  *x*2 ). | **24.** *y*  6  ln3 *x*. |
| **25.** *y*  ( *x*  3)*ex*2. | *x*2  4  4*x*  **26.** *y*  .  2  3*x* |
| **27.** *y*  3*x* ln2 *x*. | **28.** *y*  *x*4  2 ln *x*. |
| 1  **29.** *y*  *e*2 *х* 3 . | **30.** *y*  ln(9  *x*2 ). |

ЗАДАЧА 25. Провести повне дослідження функцій і побудувати їх графіки

**1.а)** *y*  2*x*3 

3 *ex*

; **б)** *y* . **2.а)** *y* 



*x* 3*x*

* *x* 2

4( *x*  1)2

*x*  5 .

#### 6  *x*3

**б)** *y*  *x*3

 *e**x*2 .

**3.а)** *y* 

5 *x*2

 5*x* ; **б)** *y*  6*x*  *e*

5 . **4.а)** *y*  ; **б)** *y*  *x*4  *e**x* .

*x*2

3*x*2

**5.а)** *y*  ; **б)** *y*  *x*

*x*  2

2  *e*4 *x*

. **6.а)** *y* 

*x*3  6

4*x*2

; **б)** *y* 

*e*2 *x* 3

.

*x*  4

7.а) *y*

*x* 2  5

 5*x* 2  3 ; **б)** *y*

 2*xe*

4 *x*

*x*  22

. **8.а)** *y*



3*x*

; **б)** *y*

 2*x*

* ln*x*

 3.

**9.а)** *y* 

4*x* ; **б)** *y*  7*x*  ln *x* . **10.а)** *y*  2*x*  14 ; **б)** *y*  5*x*  arctg *x* .

5  *x* 2 *x*

6*x*

*x*

5*x e*4*х*

**11.а)** *y*  7  *x*2 ; **б)** *y*  3*x*  arctg *x* . **12.а)** *y*  *x*2  4 ;**б)** *y*  3*x*  1 .

13.а)

3*x*2  4

*y* 

*x*

6*x*7

; **б)** *y*  5*x*  arctg *x* . **14.а)** *y*  1  3*x*3 ; **б)** *y*  *e*

4 *x*  *x* 2 .

15.а) *y*

 *x*

 6

*x* ; **б)** *y*

 3*x*

* *e*5*x*

. **16.а)** *y*

*x*  53

 *x*  22 ; **б)** *y*

 4 

*x*2 

*e* *x*2 .

8*x*3

**17.а)** *y*  *x*  32 ; **б)** *y* 

4*x*  5

*ex*

*x*2  5

. **18.а)** *y* 

*x*  6

; **б)** *y*  ln 3*x* .

*x*  4

**19.а)** *y* 

*x*3  4*x*  2

##### x

5*x* 2

; **б)** *y*  ln 5*x* . **20.а)** *y* 

*x*  7

3*x*

*x*  82

*x*2

4

; **б)** *y*  2 ln

*x*  9 .

#### 3

**21.а)** *y* 

*x*  52

; **б)** *y*  ln

*x*  7

. **22.а)** *y*  *x* 5  *x*  73 ;**б)** *y*  *x*  *e*9*x* .

*x*  52 2

4*x* 3  *x*

**23.а)** *y*  *x*  12; **б)** *y*  ln*x*

 9. **24.а)** *y*   ; **б)** *y*  *x*  4 *e* .

#### 1  *x*2

**25.а)** *y*  2*x*3 ; **б)**  

2 *y* ln *x*

#### 16  *x*

2  . **26.а)** *y*  2*x*3 ; **б)**

*x*  4*x*

5 2

*ex* 1

*y*  .

##### x

ЗАДАЧА 26. Відокремити корені аналітично і уточнити один з них методом поділу відрізка пополам з точністю до 0,01

|  |  |
| --- | --- |
| **1.** 2*x* 4  *x* 2 10  0 .  **2.** *x*3  3*x*  1  0.  **3.** 2*x* 4  *x* 2 10  0 .  **4.** 3*x* 4  8*x*3  6*x* 2 10  0 .  **5.** *x* 4 18*x* 2  6  0.  **6.** *x* 4  4*x*3  8*x* 2 17  0 .  **7.** *x*4  *x*3  2*x*2  3*x*  3  0 .  **8.** *x*3  2*x* 2 11  0.  **9.** 3*x* 4  8*x*3 18*x* 2  2  0 .  **10.** *x*3  2*x* 2 11  0.  **11.** *x*5  5*x*  1  0.  **12.** *x* 4  6*x* 2  12*x*  8  0 .  **13.** *x*3  3*x* 2  6*x* 1  0 .  **14.** *x*5  18*x*3  34  0.  **15.** *x*3  2*x* 13  0. | **16.** *x*3  2*x*2  3*x*  5  0 .  **17.** *x*3  3*x* 2 10  0 .  **18.** *x* 4  *x* 1  0.  **19.** *x* 4  4*x*3  8*x* 2  1  0 .  **20.** 3*x* 4  4*x*3 12*x*2  5  0 .  **21.** *x* 4  *x* 1  0.  **22.** *x* 4  3*x*  3  0.  **23.** 3*x* 4  8*x*3  6*x* 2 10  0 .  **24.** *x*3  *x*  5  0 .  **25.** 2*x*4  8*x*3  8*x*2 1  0 .  **26.** *x*3  3*x*2  12*x* 12  0 .  **27.** *x*3  0,1*x* 2  0,4*x* 1,5  0.  **28.** *x*4  *x*3  2*x*2  3*x*  3  0 .  **29.** 3*x*4  4*x*3 12*x*2  1  0 .  **30.** *x*3  3*x* 2 10  0 . |

**ЗАДАЧА 27. Відокремити корені графічно і уточнити один з них методом хорд з точністю до 0,001**

|  |  |
| --- | --- |
| **1.** *x*  sin *x*  0,5 .  **2.** *x*  cos 0,7*x*  0.  **3.** lg *x*  5  0 .  *x*  6  **4.** 3*x*  cos *x*  2  0 .  **5.** tg(0,3*x*  0,3)  *x*2 . | **16.** *x*  lg *x*  0,85.  **17.** ctg(1,5*x*)  *x*2  0 .  **18.** *x* lg *x*  1,3  0 .  **19.** 2*x*2  sin10*x*  0 .  **20.** ctg*x*  *x*  0 .  7 |
| **6.** *x*2  5sin *x*  0.  **7.** 2*x*  lg *x*  8  0.  **8.** tg2*x*  *x*  1.  **9.** ( *x*  2) cos *x*  1.  **10.** ( *x*  2)2 lg(*x*  12)  1.  **11.** tg(0,6*x*  0,1)  *x*2 .  **12.** ctg*x*  *x*  0 .  7  **13.** cos( *x*  0,6)  *x*3.  **14.** *x*2 cos 3*x*  1.  **15**. *x*2  30 sin *x*  0 . | **21.** 5*x*  cos *x*  1  0.  **22.** 3sin *x*  *x*  1.  **23.** 2 lg *x*  *x*  2  0 .  2  **24.** *x* lg(*x*  3)  2 .  **25.** sin( *x*  2)  0,8*x* .  **26.** 5sin *x*  *x*  0,6.  **27.** *x*2  8sin *x*  0 .  **28.** 5lg *x*  *x*  8  0 .  2  **29.** cos( *x*  0,8)  *x*3 .  **30.** 4*x*  5*x*  6  0 . |

ЗАДАЧА 28. Відокремити корінь і уточнити з точністю до 0,001 методом дотичних

|  |  |
| --- | --- |
| **1.** *x*3  3*x*2  9*x*  6  0 .  **2.** *x*3  6*x*  7  0 .  **3.** *x*3  3*x*2  6*x*  2  0.  **4.** *x*3  *x*2  4*x*  5  0.  **5.** *x*3  3*x*2  9*x*  1  0 .  **6.** *x*3  *x*  4  0.  **7.** *x*3  2*x*2  5*x*  12  0.  **8.** *x*3  3*x*  10  0.  **9.** *x*3  2*x*2  5*x*  20  0 .  **10.** *x*3  3*x*2  12*x*  8  0.  **11.** *x*3  2*x*2  3*x*  12  0.  **12.** *x*3  3*x*2  6*x*  8  0. | **16.** *x*3  4*x*  8  0 .  **17.** *x*3  2*x*2  5*x*  8  0 .  **18.** *x*3  3*x*2  12*x*  10  0 .  **19.** *x*3  2*x*2  3*x*  12  0.  **20.** *x*3  2*x*  6  0.  **21.** *x*3  2*x*2  5*x*  14  0.  **22.** *x*3  3*x*2  6*x*  7  0 .  **23.** *x*3  *x*2  4*x*  10  0 .  **24.** *x*3  2*x*2  5*x*  5  0 .  **25.** *x*3  3*x*2  2*x*  5  0 .  **26.** *x*3  *x*2  4*x*  7  0.  **27.** *x*3  2*x*2  4*x*  14  0. |

**13.**

14.

**15.**

*x*3  *x*2  4*x*  15  0. *x*3  3*x*2  6*x*  10  0 . *x*3  *x*2  4*x*  12  0.

**28.**

29.

**30.**

*x*3  4*x*2  6*x*  16  0 .

*x*3  2*x*  5  0 .

*x*3  2*x*2  5*x*  4  0 .

ЗАДАЧА 29. Комбінованим методом хорд і дотичних знайти один з коренів рівняння з точністю до 0,001

**1.** 2*x*3  3*x*2  12*x*  3  0.

**2.** *x*3  3*x*2  5  0.

**3.** *x*3  3*x*2  24*x*  12  0.

**4.** 2*x*3  9*x*2  20  0.

**5.** *x*3  3*x*2  3  0.

**16.**

17.

**18.**

19.

**20.**

*x*3  3*x*2  24*x*  5  0.

#### *x*3  12*x*  7  0.

2*x*3  3*x*2  12*x*  8  0.

#### *x*3  3*x*2  4  0.

*x*3  3*x*2  5  0.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **6.** *x*3  3*x*2  24*x*  11  0. | **21.** *x*3  3*x*2  24*x*  7  0. | |
| **7.** 2*x*3  9*x*2  11  0. | **22.** | *x*3  12*x*  11  0. |
| **8.** *x*3  3*x*2  4  0. | **23.** | 2*x*3  3*x*2  12*x*  2  0. |
| **9.** *x*3  3*x*2  24*x*  6  0. | **24.** | *x*3  4*x*2  3  0. |
| **10.** *x*3  12*x*  7  0. | **25.** | *x*3  3*x*2  24*x*  2  0. |
| **11.** 2*x*3  3*x*2  12*x*  10  0. | **26.** | 2*x*3  9*x*2  5  0. |
| **12.** *x*3  3*x*2  3  0. | **27.** | *x*3  3*x*2  24*x*  12  0. |
| **13.** *x*3  3*x*2  24*x*  4  0. | **28.** | *x*3  12*x*  8  0. |
| **14.** 2*x*3  9*x*2  6  0. | **29.** | 2*x*3  3*x*2  12*x*  10  0. |
| **15.** *x*3  3*x*2  2  0. | **30.** | *x*3  3*x*2  4  0. |

ЗАДАЧА 30. В точка *xi* відомі значення функції

*уi* 

*f* *xi* **.**

Обчислити наближено значення

*f* *x*0 **.**

ТАБЛИЦЯ 1 ТАБЛИЦЯ 2

|  |  |
| --- | --- |
| *xi* | *уi* |
| 0,44 | 1,61 |
| 0,48 | 1,73 |
| 0,56 | 1,87 |
| 0,62 | 2,03 |
| 0,71 | 2,22 |
| 0,75 | 2,35 |

|  |  |
| --- | --- |
| Варіант | *x*0 |
| 1 | 0,71 |
| 7 | 0,51 |
| 13 | 0,64 |
| 19 | 0,73 |
| 25 | 0,61 |

|  |  |
| --- | --- |
| *xi* | *уi* |
| 0,02 | 1,02 |
| 0,08 | 1,09 |
| 0,12 | 1,14 |
| 0,17 | 1,21 |
| 0,23 | 1,31 |
| 0,30 | 1,41 |

|  |  |
| --- | --- |
| Варіант | *x*0 |
| 2 | 0,11 |
| 8 | 0,12 |
| 14 | 0,13 |
| 20 | 0,21 |
| 26 | 0,15 |

**ТАБЛИЦЯ 3 ТАБЛИЦЯ 4**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *xi* | *уi* |  | Варіант | *x*0 |  | *xi* | *уi* |  | Варіант | *x*0 |
| 0,35  0,41  0,47  0,51  0,56  0,64 | 2,73  2,31  1,86  1,78  1,59  1,34 | 3  9  15  21  27 | 0,52  0,45  0,48  0,55  0,43 | 0,41  0,44  0,52  0,65  0,68  0,72 | 2,57  2,32  2,09  1,86  1,74  1,62 | 4  10  16  22  28 | 0,61  0,47  0,66  0,53  0,67 |

ТАБЛИЦЯ 5 ТАБЛИЦЯ 6

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *xi* | *уi* |  | Варіант | *x*0 |  | *xi* | *уi* |  | Варіант | *x*0 |
| 0,68  0,75  0,81  0,88  0,92  0,99 | 0,81  0,89  1,02  1,21  1,34  1,52 | 5  11  17  23  29 | 0,89  0,81  0,77  0,95  0,71 | 0,12  0,15  0,22  0,29  0,32  0,41 | 9,05  6,61  4,69  3,32  2,73  2,36 | 6  12  18  24  30 | 0,31  0,23  0,33  0,27  0,18 |

**ЗАДАЧА 31. Знайти еластичності функцій в точці** *x* **, яка відповідає** **номеру варіанту**

**1.** *y* 

1

*x*  3

. **2.**

*y*  *x*  5 .

*x*

**3.** *y*  2*x*  1. **4.**

*x*  1

*y*  3  2*x* .

#### 1  *x*

**5.** *y* 

**7.** *y* 

3*x*  2 . **6.**

*x*  1

2  3*x* . **8.**

#### 1  *x*

*y*  2  3*x* .

#### 1  *x*

*y*  .

*x* 2  3*x*  2

**9.** *y*  . **10.** *y*  .

9  *x*2

4*x*  *x* 2  5

**11.** *y* 

**13.** *y* 

. **12.** *y* 

 1  *x* . **14.** *y* 

*x*2  1

*x*  1

*x* 1

*x*  1 .

1 .

1  *x*  1  *x*

1. *y* 

*x*  1 . **16.** *y* 

*x*  1

2*x* 1 .

*x*  1

17.

*y*  1

*x*2  2*x*  8

. **18.**

*y*  1 .

4*x*  *x*2  5

19.

*y*  1

*x*2  2*x*  3

. **20.** *y* 

1 .

log2 *x*

21.

*y*  1 log1

2

. **22.**

##### x

*y*  log 1 .

3 *x*

23.

*y*  log1

3

1 . **24.** *y*  log

*x* 2

log2 *x* .

25.

*y*  log1 log2 *x* . **26.**

2

*y*  log2 log1 *x* .

2

27.

*y*  log

1  *x* . **28.**

#### 2 1  *x*

2

*y*  log2 *x* .

#### *x*2  1

2

29.

*y*  log3 *x* ( *x*

 1) . **30.** *y*  .

#### 5

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

* 1. Валєєв К. Г. Вища математика: Навч. посібник: У 2-х ч. / К. Г. Валєєв, І. А. Джалладова – К.: КНЕУ, 2001. – Ч. 1. – 546 с.
  2. Вища математика: Навч.-метод. посібник для самостійного вивчення дисципліни / К. Г. Валєєв, І. А. Джалладова та ін. – К.: КНЕУ, 1996. – 396 с.
  3. Вища математика для економістів: навч. посібник: у 4-х ч. / В. М. Долгіх / Суми: ДВНЗ “УАБС НБУ”, 2008. – Ч. 2: Вступ до маематичного аналізу. Диференціальне числення. − 78 с.
  4. Высшая математика для экономистов / Под ред. проф. Н. Ш. Кремера.

− М.: Банки и биржи, ЮНИТИ, 1997. − 439 с.

* 1. Диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної. Практикум. (І курс І семестр) / Уклад.: І. В. Алєксєєва, В. О. Гайдей, О. О. Диховичний, Л. Б. Федорова. — К: НТУУ «КПІ», 2013. — 252 с.
  2. Дубовик В.П. Вища математика: Навчальний посібник / В.П. Дубовик, І.І. Юрик. – К.: А.С.К., 2005. – 648 с.
  3. Дюженкова Л. І. Вища математика. Приклади і задачі / Л. І. Дюженкова, О. Ю. Дюженкова, Г. О. Михалін : посібник. − К.: Академія, 2002. − 624 с.
  4. Замков О. О., Толстопятенко А. В., Черемных Ю. Н. Математические методы в экономике. – М.: Изд-во МГУ, 1998. – 368 с.
  5. Лиман Ф. М. Вища математика / Ф. М. Лиман, С. В. Петренко, О. О. Одинцова: навч. посібник. − Суми: СумДПУ ім. А.С. Макаренка, 2002. – Ч. 1. − 224 с.
  6. Математика в экономике: В 2 ч. / А. С. Солодовников, В. А. Батайцев и др. – М.: Финансы и статистика, 1989. – Ч. 1. – 376 с.; Ч. 2. – 380 с.
  7. Минорский В. П. Сборник задач по высшей математике. – М.: Наука, 1971. – 336 с.
  8. Овчинников П. Ф. Высшая математика / П. Ф. Овчинников, Ф. П. Яремчук, В. М. Михайленко. – К.: Вища шк., Головное изд-во, 1987.

− 552 с.

* 1. Овчинников П.Ф. Высшая математика / П.Ф. Овчинников, Б.М. Лисицын, В.М. Михайленко. – К.: Вища шк. Головное изд-во, 1989. – 679 с.
  2. Пастушенко С. М. Вища математика. Основні поняття, формули, зразки розв’язування задач / С. М. Пастушенко, Ю. П. Підченко: навч. посібник. – К.: Діал, 2000. – 160 с.
  3. Тевяшев А. Д. Вища математика. Загальний курс: Збірник задач та вправ. 2-е вид. доп. і доопр. / А. Д. Тевяшев, О. Г. Литвин. – X .: Рубікон, 1999.

– 320 с.

* 1. Тестові завдання з вищої математики: Навчальний посібник / С.І. Гургула, В.М. Мойсишин, В.О. Воробйова та ін.; За ред. С.І. Гургули, В.М. Мойсишина. – Івано - Франківськ: Факел, 2008. – 737 с.
  2. Шкіль М.І. Вища математика / М.І. Шкіль, Т.В. Колесник. – К.: Вища шк. Головное изд-во, 1986. – 512 с.

Формат: 60×84/16 Ум. друк. арк. 9,3 Папір офсетний. Друк ризографічний Наклад 100 прим.

Віддруковано з оригінал-макетів замовника. Видавець і виготовлювач ПП Лисенко М. М.

16600, м. Ніжин Чернігівської обл., вул. Шевченка, 20.

Тел.: (067) 4412124. E-mail: [vidavec.lisenko@gmail.com](mailto:vidavec.lisenko@gmail.com)

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру видавців, виготовлювачів і розповсюджувачів видавничої продукції: серія ДК № 2776 від 26.02.2007 р.