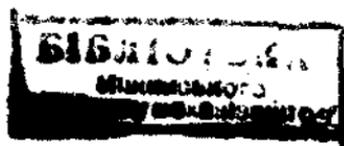


О. О. ЕРДЕДІ,
І. В. АНИКІН,
Ю. О. МЕДВЕДЕВ,
О. С. ЧУЙКОВ

Технічна МЕХАНІКА

Допущено Міністерством вищої
і середньої спеціальної освіти СРСР
як підручник для середніх
спеціальних навчальних закладів



КИЇВ
ГОЛОВНЕ ВИДАВНИЦТВО
ВИДАВНИЧОГО ОБ'ЄДНАННЯ
«ВИЩА ШКОЛА»
1983

У підручнику викладено основи трьох наук: теоретичної механіки, опору матеріалів і деталей машин, які є основою для вивчення багатьох технічних спеціальних предметів. Крім того, у відповідних розділах книжки подано відомості з теорії механізмів і машин.

Хоч книжка за обсягом порівняно невелика, в ній витримано логічність, доказовість, наочність викладу і лише незначну кількість матеріалу подано без точних наукових обґрунтувань.

Це видання підручника перероблено відповідно до нових Державних стандартів СРСР, зокрема стандартів на терміни, означення, позначення, розрахунків геометрії, допуски для зубчастих і черв'ячних передач, розрахунків міцності зубчастих передач, стандартів на редуктори і механічні муфти, підшипники кочення і шліцьові з'єднання, стандартів «Тертя і спрацьовування в машинах», «Балансування обертових тіл» тощо.

У цьому виданні підручника застосовано лише праву систему координат і відповідне правило знаків для моментів сил. Текст, що стосується додаткових тем і питань програми «Технічна механіка», у підручнику набрано петитом.

Розділи I—XVII і теоретичну частину розділів XIX—XXIV написав О. О. Ердеді; розділи XXV, XXVI, приклади розділів XIX—XXIV — доцент Ю. О. Медведєв; розділ XVIII — Ю. О. Медведєв і О. О. Ердеді спільно; розділи XXVII—XXIX, XXXII, XXXIV, XXXVII—XXXX, теоретичну частину розділів XXXVI, XXXVII, XXXXI і приклад розділу XXXI — канд. техн. наук, доцент І. В. Анікін; розділ XXX і теоретичну частину розділів XXXI, XXXIII і XXXV — І. В. Анікін і доцент О. С. Чуйков спільно; приклади розділів XXXIII, XXXVI, XXXVII і XXXXI — О. С. Чуйков.

Частину I підготував до видання О. О. Ердеді, частину II — О. О. Ердеді і Ю. О. Медведєв, частину III — І. В. Анікін і О. О. Ердеді.

Автори висловлюють вдячність науковому редактору частини III підручника канд. техн. наук доценту П. Ф. Дунаєву та рецензенту

Г. М. Іцковичу за ряд слушних зауважень і пропозицій, використаних у процесі роботи над рукописом підручника.

Критичні зауваження і побажання щодо змісту книги просимо надіслати на адресу: 252054, Київ-54, вул. Гоголівська, 7, Головне видавництво видавничого об'єднання «Вища школа», редакція літератури з математики і фізики.

ВСТУП

Механіка — це наука про механічний рух і взаємодію матеріальних тіл. *Теоретична механіка* — це розділ механіки, який вивчає закони руху тіл і загальні властивості цих рухів.

Марксистський філософський матеріалізм твердить, що світ за своєю природою матеріальний. В. І. Ленін у книжці «Матеріалізм і емпіріо-критицизм» дав таке визначення матерії: «...матерія є те, що, діючи на наші органи чуттів, створює відчуття; матерія є об'єктивна реальність, дана нам у відчутті»*.

Основна властивість матерії полягає в тому, що вона завжди перебуває у неперервному русі. Світ — це безмежні в просторі і нескінченні в часі різноманітні форми руху матерії: від механічного переміщення аж до мислення і розвитку суспільства.

Механіка вивчає лише одну форму руху матерії — м е х а н і ч н и й рух, тобто зміну з часом взаємного розміщення у просторі матеріальних тіл або взаємного розміщення частин цього тіла. Спокій — це лише окремий випадок механічного руху, причому поняття спокою і механічного руху відносні. Наприклад, людина, що сидить у вагоні поїзда, який рухається рівномірно і прямолінійно, може вважати себе в стані спокою відносно вагона, хоч відносно Землі вона рухається. Інші форми руху мають у собі механічний рух, але їх не можна пояснити лише законами механіки, і вони є предметом вивчення інших наук, наприклад хімії, біології тощо.

Механіка — одна з найдавніших наук. Термін «механіка» запровадив видатний стародавній філософ Арістотель (384—322 до н. е.). Перші наукові основи вчення про рівновагу тіл знаходимо в працях Архімеда (287—212 до н. е.). На всіх етапах свого розвитку механіка була тісно зв'язана з розвитком продуктивних сил суспільства і сприяла технічному прогресу.

У розвиток механіки значний вклад внесли вітчизняні вчені, у тому числі «батько російської авіації» М. Є. Жуковський (1847—1921) — автор відомого на той час підручника з теоретичної механіки — та І. В. Мещерський (1859—1935), який заклав основи механіки тіл змінної маси; його задачник з теоретичної механіки перевидається і в наші дні.

Радянським ученим, інженерам і технікам, усьому радянському народові належить честь розв'язання таких проблем, як запуск першого штучного супутника Землі, фотографування зворотного боку Місяця

* Ленін В. І. Повне збір. творів, т. 18, с. 136.

і перші польоти людини в космічний простір. Тут треба згадати видатного російського вченого і винахідника К. Е. Ціолковського (1857—1935), який заклав основи теорії реактивного руху і космічних польотів. Мрія людей про підкорення космосу стала реальністю в результаті діяльності видатного радянського вченого академіка С. П. Корольова (1906—1966) — генерального конструктора космічних кораблів «Восток» і «Восход». Першою людиною, яка полетіла в космос, був Ю. О. Гагарін (1934—1968). Це сталося 12 квітня 1961 року. Досягнення радянських учених у галузі механіки дають змогу розв'язувати складні практичні проблеми в галузі техніки і, отже, сприяють виконанню великого завдання побудови комунізму в нашій країні. У рішеннях XXVI з'їзду КПРС значна увага приділяється розвитку фундаментальних наук, до яких належить і механіка.

У першій частині книжки викладено основи теоретичної механіки, яка ґрунтується на законах Ньютона і називається класичною механікою, на відміну від механіки теорії відносності (релятивістської механіки), яка ґрунтується на теорії відносності Ейнштейна, і квантовій механіці, до якої належать рухи тіл атомних розмірів. Теоретична механіка складається з трьох відділів: статички, кінематики і динаміки.

Відділ перший

СТАТИКА

Розділ I

ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ І АКСІОМИ СТАТИКИ

§ 1.1. Основні поняття статички

Статика — це відділ теоретичної механіки, що вивчає умови, за яких тіло перебуває у рівновазі. Рівновагою вважатимемо такий стан, коли тіло перебуває у спокої або рухається прямолінійно і рівномірно. Тіло називають **абсолютно твердим** (або **абсолютно жорстким**), якщо відстань між будь-якими його точками не змінюється під дією на нього інших тіл. Хоч абсолютно твердих тіл у природі немає, проте в багатьох випадках зміни форми і розмірів (деформація) тіл такі малі, що ними можна нехтувати. У теоретичній механіці тіла вважають абсолютно твердими і їх фізико-механічні властивості не враховують (крім випадків, пов'язаних з тертям).

Матеріальною точкою називають точку, яка має масу. Вважатимемо матеріальною точкою не тільки тіло, що має малі розміри, а й будь-яке тіло, розмірами якого в умовах даної задачі можна знехтувати. Наприклад, в астрономії зорі розглядають як матеріальні точки, оскільки розміри зір малі порівняно з відстаннями між ними. Одне й те саме реальне тіло залежно від умови задачі можна розглядати або як матеріальну точку, або як тіло, розміри якого потрібно враховувати. Будь-яке тіло можна вважати сукупністю (системою) взаємно зв'язаних матеріальних точок. Абсолютно тверде тіло є **незмінною системою** матеріальних точок.

Тіло називають вільним, якщо інші тіла не заважають його переміщенню в будь-якому напрямі, у протилежному разі тіло називають невільним або зв'язаним. Прикладом вільного тіла є повітряна куля у польоті. Більшість з навколишніх тіл — це невільні тіла.

У природі тіла по-різному взаємодіють між собою або з навколишнім середовищем. Механічну взаємодію тіл, тобто взаємодію, яка позначається на їх стані спокою або руху (механічний стан), характеризують силами.

Сила — це міра механічної взаємодії тіл. Вона характеризується трьома елементами: числовим значенням, напрямом і точкою прикладання. Отже, сила — величина векторна. Числове значення сили називають модулем вектора сили. Напрямок сили — це напрям того руху, якого під дією цієї сили набула б матеріальна точка, що перебувала в стані спокою. Пряму, по якій напрямлений вектор сили, називають лінією дії сили. З фізики відомо, що Міжнародна система одиниць (СІ) одиницею вимірювання модуля сили встановила ньютон (Н). Ньютон — це така сила, яка надає тілу масою 1 кг прискорення 1 м/с^2 у напрямі дії сили:

$$9,81 \text{ Н} \approx 1 \text{ кгс (у системі МКГСС).}$$

У допустимих наближених розрахунках можна брати $1 \text{ Н} \approx 0,1 \text{ кгс}$, що дає похибку, яка приблизно дорівнює 2 %.

Кратні і частинні одиниці вимірювання сили утворюються множенням або діленням основної одиниці на степінь числа 10. Відповідно до ГОСТу їх назви утворюються доданням десяткових приставок:

мега (М) 10^6	деци (д) 10^{-1}
кіло (к) 10^3	санті (с) 10^{-2}
гекто (г) 10^2	мілі (м) 10^{-3}
деко (де) 10	мікро (мк) 10^{-6}

Наприклад, кілоньютон (кН) = 10^3 Н , меганьютон (МН) = 10^6 Н , міліньютон (мН) = 10^{-3} Н .

Графічно силу зображають відрізком прямої з стрілкою; довжина відрізка в певному масштабі дорівнює модулю вектора сили (рис. 1.1). Масштаб сили показує, скільки одиниць модуля сили містить одиниця довжини її вектора. Одиниця масштабу сили, наприклад,

$$[\mu r] = \text{Н/мм або Н/см.}$$

На рис. 1.1 зображено силу, прикладену в точці А, яка діє по лінії *mn*. Вектор сили позначимо великою латинською жирною літерою **P**, а модуль сили — тією самою літерою, але світлою **P***. Для вектора

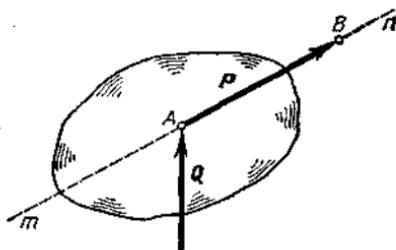


Рис. 1.1

* У деяких книжках вектори позначають латинськими літерами із стрілочкою над ними (\vec{P} та ін.), а модулі — тією самою літерою без стрілочки. Цей спосіб доцільно вастосовувати для написання векторних рівностей на класній дошці.

сили P точку A називатимемо початком, а точку B — кінцем вектора. Часто зручно зображати вектор сили так, щоб стрілка, яка стоїть у кінці вектора, впиралася в точку прикладання сили (сила Q на рис. 1.1).

Сукупність тіл (у тому числі матеріальних точок), будь-яким способом зв'язаних між собою, називають системою тіл. Сили взаємодії між тілами, що входять у дану систему, називають внутрішніми, а сили, з якими діють на дану систему інші тіла, — зовнішніми. Якщо дану систему розрізати на частини і розглядати рівновагу кожної частини окремо, то внутрішні для всієї системи сили, які діють у перерізах, стануть зовнішніми силами для частин системи. Такий метод дає змогу визначити внутрішні сили, які діють у перерізах, і називається «методом перерізів». У технічній механіці його застосовують досить часто. Треба зазначити, що поділ сил на зовнішні і внутрішні умовний і залежить від змісту задачі і навіть методу її розв'язування.

§ 1.2. Основні аксіоми статички

Умови, за яких тіло може перебувати в рівновазі, виводять з кількох основних положень, що їх приймають без доведень, підтверджених дослідженнями. Ці умови називають аксіомами статички. Основні аксіоми статички сформулював англійський учений Ньютон (1642—1727), тому їх назвали його іменем.

Аксіома I (аксіома інерції, або перший закон Ньютон а).

Всяке тіло зберігає свій стан спокою або прямолінійного рівномірного руху, поки якісь сили не виведуть тіло з цього стану.

Здатність матеріального тіла зберігати рух, коли немає діючих сил, або поступово змінювати цей рух, коли на тіло починають діяти сили, називають інерцією або інертністю. Інертність — одна з основних властивостей матерії.

Відповідно до цієї аксіоми станом рівноваги вважають такий стан, коли тіло перебуває у спокої або рухається прямолінійно і рівномірно (тобто з інерції).

Аксіома II (аксіома взаємодії, або третій закон Ньютон а).

Сили взаємодії двох тіл завжди однакові за модулем і протилежно напрямлені по одній прямій.

З третього закону Ньютон а випливає, що одnobічної дії одного тіла на друге не буває, тобто всі сили природи — парні сили.

Сукупність сил, прикладених до тіла (або системи тіл), називають системою сил. Сила дії будь-якого тіла на дане і сила протидії не є системою сил, бо вони прикладені до різних тіл. Якщо будь-яка система сил має таку властивість, що після прикладання до вільного тіла вона не змінює його механічного стану, то таку систему сил називають зрівноваженою.

Аксіома III (умова рівноваги двох сил).

Для рівноваги вільного твердого тіла, яке перебуває під дією двох сил необхідно і достатньо, щоб ці сили дорівнювали одна одній за модулем і діяли по одній прямій у протилежних напрямках.

Умова, сформульована в цій аксіомі, необхідна для рівноваги двох сил. Це означає, що коли система двох сил перебуває у рівновазі, то ці сили мають дорівнювати одна одній за модулем і діяти по одній прямій у протилежних напрямках.

Умова, сформульована у цій аксіомі, достатня для рівноваги двох сил. Це означає справедливність оберненого формулювання аксіоми, а саме: якщо дві сили дорівнюють одна одній за модулем і діють по одній прямій у протилежних напрямках, то така система сил обов'язково перебуває у рівновазі. Далі ознайомимося з умовою рівноваги, необхідною, але недостатньою для рівноваги.

Аксіома IV. Рівновага (як і будь-який інший механічний стан) твердого тіла не порушиться, якщо до нього прикласти або відняти від нього систему зрівноважених сил.

Висновок з аксіом III і IV.

Механічний стан твердого тіла не порушиться, якщо силу перенести вздовж лінії її дії.

Доведемо цей висновок. Нехай на тверде тіло серед інших сил діє сила P , прикладена в точці A і діє по ab (рис. 1.2). У довільно взятій точці B на лінії ab прикладемо дві однакові за модулем і протилежно напрямлені сили P_1 і P_2 , що діють по лінії ab . Відповідно до аксіоми III сили P_1 і P_2 взаємно зрівноважені, а на основі аксіоми IV їх можна прикласти до тіла, не порушивши його механічного стану. Візьмемо сили P_1 і P_2 такими, щоб кожна з них за модулем дорівнювала силі P :

$$P_1 = P_2 = P.$$

Відповідно до аксіоми IV відкинемо сили P і P_2 як такі, що взаємно зрівноважуються. Тоді силу P_1 , яка залишилася, можна розглядати як силу P , перенесену з точки A в точку B вздовж лінії дії; при цьому механічний стан не порушується. Отже, висновок доведено. Підкреслимо, що переносити силу вздовж лінії її дії можна тоді, коли розглядуване тіло абсолютно тверде.

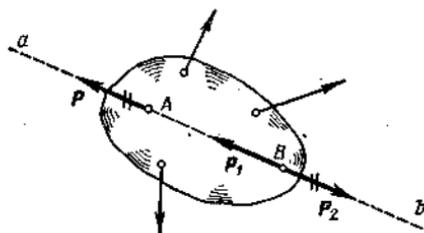


Рис. 1.2

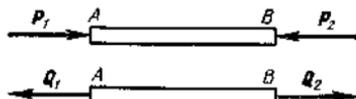


Рис. 1.3

Дві різні системи сил вважають еквівалентними, якщо одну з них можна замінити іншою, не порушивши механічного стану вільного твердого тіла. Треба зазначити, що еквівалентні системи сил можуть спричинювати різні деформації нетвердого тіла. На рис. 1.3 зображено дві системи сил, які незалежно діють на той самий стержень AB, причому $P_1 = P_2$, а $Q_1 = Q_2$. Відповідно до аксіоми III кожна з цих систем не виводить стержень з рівноваги, тобто вони еквівалентні. Але система сил (P_1, P_2) стискає стержень, а система сил (Q_1, Q_2) розтягує його. Еквівалентність систем сил умовимося записувати так:

$$(P_1, P_2) \equiv (Q_1, Q_2).$$

Відповідно до висновку з аксіом III і IV можна сказати, що дві сили еквівалентні, коли вони дорівнюють одна одній за модулем і діють по одній прямій у тому самому напрямі. Два вектори сили (як і два будь-яких однорідних за розмірністю вектори) дорівнюють один одному, якщо вони паралельні, однаково напрямлені і однаково за модулем.

Одну силу, еквівалентну даній системі сил, називають *рівнодіючою*, а сили цієї системи — *складовими рівнодіючої*. Силу, яка зрівноважує дану систему сил, називають *зрівноважувальною* цієї системи. Рівнодіюча і зрівноважувальна сили тієї самої системи дорівнюють одна одній за модулем і діють по одній прямій у протилежних напрямках. Рівнодіюча зрівноваженої системи сил дорівнює нулю, або інакше, *зрівноважена система сил еквівалентна нулю*.

Аксіома V (аксіома паралелограма).

Рівнодіюча двох сил, прикладених до тіла в одній точці, дорівнює за модулем діагоналі паралелограма, побудованого на даних силах, збігається з діагоналлю і прикладена в тій самій точці.

Побудову діагоналі паралелограма (рис. 1.4, а), сторонами якого є задані вектори, називають *векторним або геометричним додаванням*. Отже, можна сказати,

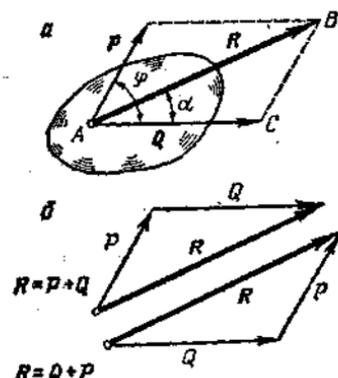


Рис. 1.4

що *рівнодіюча двох сил, прикладених в одній точці, дорівнює їх векторній сумі*

$$R = P + Q$$

і *прикладена в тій самій точці*.

Рівнодіючу двох сил можна знайти, побудувавши замість паралелограма *трикутник сил* (рис. 1.4, б). З рис. 1.4, б видно, що послідовність додавання векторів на величину рівнодіючої не впливає, тобто

$$R = P + Q = Q + P.$$

Модуль і напрям рівнодіючої двох сил, прикладених в одній точці, можна знайти *аналітично*. Для цього розглянемо трикутник *ABC* (рис. 1.4, а). За теоремою косинусів

$$R^2 = P^2 + Q^2 - 2PQ \cos(\pi - \varphi) = P^2 + Q^2 + 2PQ \cos \varphi,$$

звідки модуль рівнодіючої

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ \cos \varphi}.$$

За теоремою синусів

$$\frac{P}{\sin \alpha} = \frac{R}{\sin(\pi - \varphi)} = \frac{R}{\sin \varphi},$$

звідки знайдемо напрям рівнодіючої:

$$\sin \alpha = \frac{P \sin \varphi}{R}.$$

Розглянемо окремі випадки додавання двох сил:

1. $\varphi = 0$, тоді $R = P + Q$.

Рівнодіюча двох сил, що діють по одній прямій в одному напрямі, дорівнює їх сумі і напрямлена по тій самій прямій і в той самий бік.

2. $\varphi = 180^\circ$, тоді $R = P - Q$.

Рівнодіюча двох сил, що діють по одній прямій у протилежних напрямках, дорівнює різниці цих сил і напрямлена по тій самій прямій у бік більшої сили.

3. $\varphi = 90^\circ$, тоді $R = \sqrt{P^2 + Q^2}$.

Рівнодіюча двох сил, що діють під прямим кутом, дорівнює за величиною діагоналі прямокутника, побудованого на цих силах.

§ 1.3. Теорема про рівновагу плоскої системи трьох непаралельних сил

Теорема. Для рівноваги плоскої системи трьох непаралельних сил необхідно, але недостатньо, щоб лінії дії цих сил перетиналися в одній точці.

Нехай дано сили P , Q і F , причому лінії дії сил P і Q перетинаються у точці A (рис. 1.5). За висновком з аксіом III і IV перенесемо сили P і Q вздовж ліній їх дії у точку A і відповідно до аксіоми паралелограма знайдемо рівнодіючу R цих сил. У результаті дістанемо систему двох сил (R, F) , еквівалентну даним трьом силам:

$$(P, Q, F) \equiv (R, F).$$

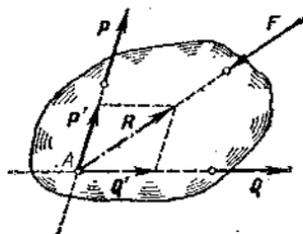


Рис. 1.5

Але відповідно до аксіоми III рівновага можлива, якщо сили R і F лежать на одній прямій, отже, лінія дії сили F також пройде через точку A . Ця теорема дає лише необхідну умову рівноваги, але недостатню, оскільки три сили можуть збігатися в одній точці, але не бути в рівновазі (сили, лінії дії яких перетинаються в одній точці, називають збіжними).

§ 1.4. Розкладання сили на дві складові

Розкласти силу на складові — це значить знайти систему сил, еквівалентну даній силі. У загальному випадку задача розкладання сили на дві складові неозначена і має безліч розв'язків. Щоб задача мала конкретний розв'язок, треба задати дві умови, наприклад напрями або модулі двох складових і т. д. При цьому можливі чотири варіанти розкладання сили R на дві складові P і Q , прикладені в тій самій точці. В усіх випадках розв'я-

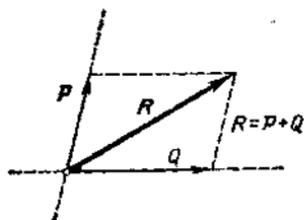


Рис. 1.6

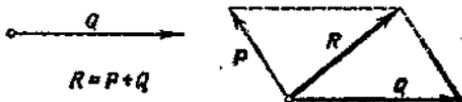


Рис. 1.7

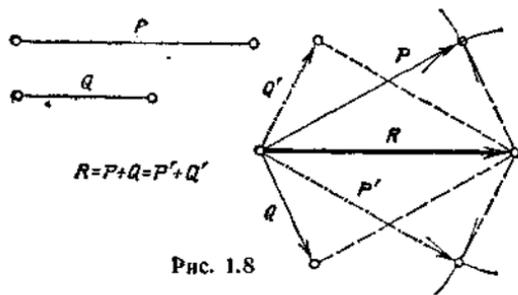


Рис. 1.8

Задача має два розв'язки, коли $P + Q > R$ і $P - Q < R$. Задача не має розв'язків, коли $P + Q < R$ і $P - Q > R$. Задача має один розв'язок, коли $P + Q = R$ і $P - Q = R$.

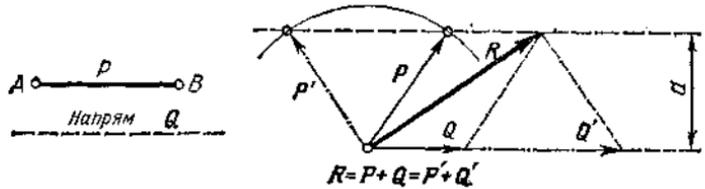


Рис. 1.9

4. Дано напрям складової Q і модуль другої складової P . Задача розв'язується методом засічок (рис. 1.9). Задача має один розв'язок, коли $a = AB$ (тоді кут між векторами P і Q дорівнює 90°). Задача має два розв'язки, коли $a < AB$. Задача не має розв'язків, коли $a > AB$.

З рис. 1.9 видно, що модуль складової залежить від напрямку другої складової.

Приклад 1.1. Сила тиску стружки в напрямі, перпендикулярному до передньої грані різця, дорівнює R . Кут різання різця (кут між передньою гранню і напрямом руху оброблюваної деталі) дорівнює δ . Визначити силу N опору різанню, напрямлену по лінії AB , і перпендикулярну до неї силу S , яка притискує різець до оброблюваної поверхні (рис. 1.10). Тертя не враховувати.

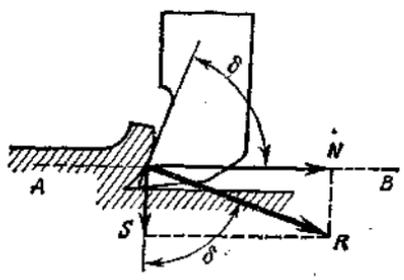


Рис. 1.10

Розв'язання. Розкладемо силу R на дві складові N і S у заданих напрямках. З прямокутного трикутника дістанемо:

$$N = R \sin \delta, \quad S = R \cos \delta.$$

§ 1.5. Зв'язки і реакції зв'язків. Принцип звільнюваності

Зв'язками називають обмеження, які накладаються на розміщення і швидкості точок тіла в просторі. Силу, з якою тіло діє на зв'язок, називають силою тиску; силу, з якою зв'язок діє на тіло, називають силою реакції або просто реакцією. Відповідно до аксіоми взаємодії ці сили за модулем дорівнюють одна одній і діють

у протилежних напрямках по одній прямій. Сили реакції і тисків прикладені до різних тіл і тому не є системою сил.

Сили, які діють на тіло, поділяють на активні і реактивні. Активні сили намагаються переміщувати тіло, до якого вони прикладені, а реактивні сили протидіють цьому переміщенню. Принципова відмінність активних сил від реактивних полягає у тому, що величина реактивних сил, взагалі, залежить від величини активних сил, а не навпаки. Активні сили часто називають навантаженням.

Розв'язуючи більшість задач статички, невільне тіло умовно вважають вільним відповідно до принципу звільнюваності, який формулюють так:

усяке невільне тіло можна розглядати як вільне, якщо відкинути зв'язки і замінити їх реакціями.

Застосовуючи такий принцип, дістаємо вільне від зв'язків тіло, яке перебуває під дією певної системи активних і реактивних сил. Напрямок реакцій визначається тим, в якому напрямі даний зв'язок протидіє переміщенню тіла. Правило для визначення напрямку реакцій можна сформулювати так:

напрямок реакції зв'язку протилежний напрямку переміщення, знищеного даним зв'язком.

Якщо зв'язки вважати ідеально гладенькими, то в багатьох випадках одразу можна вказати напрями їх реакцій. Розглянемо напрям реакцій основних видів зв'язків, що трапляються у різних конструкціях.

1. *Ідеально гладенька площина* (рис. 1.11). У цьому випадку реакція R напрямлена перпендикулярно до опорної площини в бік тіла, оскільки такий зв'язок перешкоджає тілу переміщуватися тільки в напрямі опорної площини і перпендикулярно до неї. Якщо

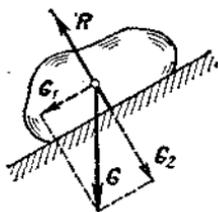
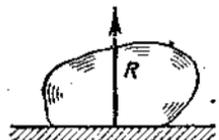


Рис. 1.11

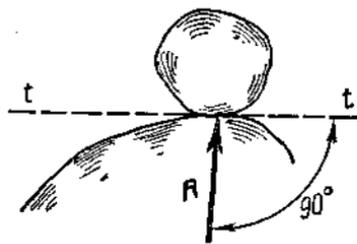


Рис. 1.12

тіло на похилій площині, то, розклавши силу тяжіння G на дві складові G_1 і G_2 , паралельну і перпендикулярну до опорної площини, можна побачити, що складова G_1 рухатиме тіло вздовж площини, а складова G_2 притискуватиме тіло до площини і зрівноважуватиметься реакцією R .

2. *Ідеально гладенька поверхня* (рис. 1.12). У цьому випадку реакція R напрямлена перпендикулярно до дотичної площини $t-t$, тобто по нормалі до опорної поверхні в бік тіла, бо нормаль — єдиний напрям переміщення тіла, якщо даний зв'язок не дозволяє.

3. *Закріплена точка або ребро кута* (рис. 1.13, ребро B). У цьому випадку реакція R_B напрямлена по нормалі до поверхні

ідеально гладенького тіла в бік тіла, бо нормаль до поверхні тіла — єдиний напрям переміщення, якого ці зв'язки не дозволяють.

4. *Гнучкий зв'язок* (рис. 1.13). Реакція T гнучкого зв'язку не дає тілу лише відійти від точки підвісу і тому напрямлена вздовж зв'язку від тіла до точки підвісу. З рис. 1.13 видно, що гнучкий зв'язок, перекинтий через блок, змінює напрям зусилля (натяг нитки), яке передається.

У конструкціях дуже поширені зв'язки, які називають шарнірами. Шарнір — рухоме з'єднання двох тіл, яке допускає обертання тіль-

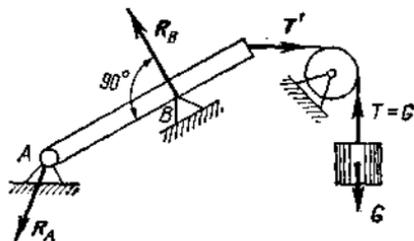


Рис. 1.13

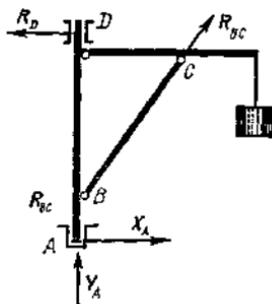


Рис. 1.14

ки навколо спільної осі (циліндричний шарнір) або спільної точки (кульовий шарнір).

5. *Ідеально гладенький циліндричний шарнір* (рис. 1.13, шарнір А; рис. 1.14, підшипник D). У цьому випадку заздалегідь відомо тільки те, що реакція R проходить через вісь шарніра і перпендикулярна до цієї осі, оскільки шарнірне з'єднання допускає обертання навколо осі, але не допускає будь-якого переміщення тіла перпендикулярно до цієї осі.

6. *Ідеально гладенький кульовий шарнір*. У цьому випадку заздалегідь відомо тільки те, що реакція проходить через центр шарніра, оскільки тіло, закріплене в кульовому шарнірі, може повертатися у будь-якому напрямі, але не може переміщуватися у просторі лінійно.

7. *Ідеально гладенький підп'ятник* (рис. 1.14, підп'ятник А). Підп'ятник можна розглядати як поєднання циліндричного шарніра і опорної площини. Тому вважатимемо реакцію підп'ятника такою, що має дві складові: X_A і Y_A . Повна реакція R_A підп'ятника дорівнює векторній сумі цих складових:

$$R_A = X_A + Y_A.$$

8. *Стержень, закріплений двома кінцями в ідеально гладеньких шарнірах і навантажений тільки на кінцях* (рис. 1.14, стержень BC). У цьому випадку реакція стержня, відповідно до аксіоми III, може діяти лише по лінії BC, тобто по прямій, яка сполучає осі цих шарнірів.

Далі часто матимемо справу з елементами різних конструкцій, які називають брусами. Брусом прийнято вважати тверде тіло, в якого

довжина значно більша, ніж поперечні розміри; множину (геометричне місце) центрів ваги усіх поперечних перерізів називають в і с с ю б р у с а. Брус з прямолінійною віссю, покладений на опори і навантажений на згин, називають б а л к о ю.

Приклад 1.2. Визначити напрям реакцій опор балки AB , шарнірно закріпленої на нерухомій опорі A і опорі B , покладеній на котки. Визначити напрям сили тиску балки на опору A (рис. 1.15). Силою тяжіння балки знехтувати.

Розв'язання. Застосувавши принцип звільнюваності, відкинемо зв'язки балки, тобто опори A і B , і замінимо їх реакціями R_A і R_B . Реакція R_B рухомого шарніра перпендикулярна до опори площини, бо це єдиний напрям переміщення, знищений даним зв'язком. Реакція R_A нерухомого шарніра проходить через його вісь, і, відповідно до теореми про рівновагу трьох паралельних сил, лінія дії цієї реакції має проходити через точку M . Реакція R_A буде напрямлена по лінії AM вправо і вгору, бо якщо мислено відкинути опору A , то без реакції кінець A балки виявиться під дією сили P і переміщуватиметься вліво і вниз.

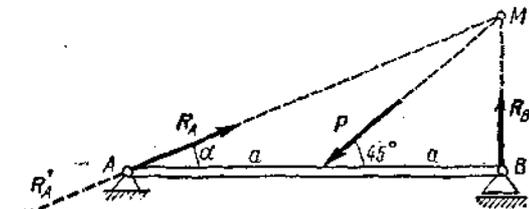


Рис. 1.15

Відповідно до третього закону Ньютона, сила тиску R'_A балки на опору також буде напрямлена по лінії AM , але у протилежному до реакції напрямі. Визначимо кут α :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{BM}{AB} = \frac{a}{2a} = 0,5,$$

звідки

$$\alpha = 26^\circ 30' = 0,46 \text{ рад.}$$

§ 1.6. Розподіл навантаження

Досі йшлося про сили, які умовно вважали прикладеними у точці (насправді вони прикладені до площадки, розмірами якої нехтують); такі сили називають з о с е р е д ж е н и м и. На практиці часто трапляються сили, прикладені по об'єму або поверхні тіла, наприклад сила тяжіння, тиск вітру чи води тощо. Такі сили називають р о з п о д і л е н и м и.

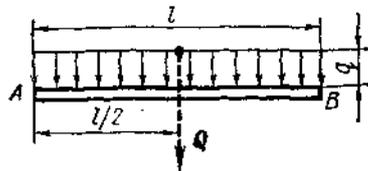


Рис. 1.16

Плоску систему розподілених сил характеризують її інтенсивністю q . Інтенсивність — це величина сили, що припадає на одиницю довжини навантаженої ділянки. У системі СІ інтенсивність виражають у Н/м.

Розподілене навантаження сталої інтенсивності називають рівномірною розподіленим (рис. 1.16).

Розв'язуючи задачі статки, розподілене навантаження замінюють його рівнодіючою. Модуль рівнодіючої рівномірно розподіленого навантаження дорівнює

$$Q = ql.$$

Прикладена рівнодіюча Q до середини відрізка AB .

Розподілене навантаження із змінною інтенсивністю називають нерівномірно розподіленим. Прикладом такого наван-

таження може бути змінний з висотою тиск води на греблю. Навантаження, розподілене по поверхні, характеризується величиною тиску, тобто сили, яка припадає на одиницю площі. У СІ тиск виражають в Н/м^2 , або паскалях (Па).

§ 1.7. Принцип тверднення

Принцип тверднення формулюють так:

механічний стан нетвердого тіла не порушиться, якщо воно стане абсолютно твердим.

Для пояснення цієї аксіоми наведемо приклади. Якщо рідина в посудині перебуває у рівновазі, то рівновага не порушиться й тоді, коли рідина замерзне. Якщо гнучка нитка перебуває у рівновазі під дією двох розтягуючих сил, то рівновага не порушиться, коли нитка стане абсолютно твердою.

Зворотне формулювання принципу в загальному випадку не дійсне. Якщо тверде тіло перебуває у рівновазі, то, перетворившись у нетверде, воно може втратити рівновагу. Це означає, що умови рівноваги твердого тіла необхідні, але недостатні для рівноваги нетвердого тіла; потрібні додаткові умови, які б враховували відповідні фізичні властивості тіл. Наприклад, для розтягування гнучкої невагомої нитки необхідна умова рівноваги двох сил. Проте треба пам'ятати, що нитка може чинити опір розтягуванню, але не може чинити опору стисканню (додаткова умова рівноваги гнучкої нитки).

У ч. II «Опір матеріалів» розглядатимемо рівновагу нетвердих, але вже деформованих тіл. За принципом тверднення вважатимемо ці тіла абсолютно твердими і застосовуватимемо до них будь-які закони статички твердого тіла.

Розділ II

ПЛОСКА СИСТЕМА ЗБІЖНИХ СИЛ

Систему сил, лінії дії яких лежать в одній площині і перетинаються в одній точці, називають плоскою системою збіжних сил.

§ 2.1. Геометричний спосіб визначення рівнодіючої плоскої системи збіжних сил

Теорема. *Плоска система збіжних сил у загальному випадку еквівалентна рівнодіючій, яка дорівнює векторній сумі цих сил; лінія дії рівнодіючої проходить через точку перетину ліній дії складових.*

Нехай дано плоску систему трьох сил P_1 , P_2 і P_3 , лінії дії яких сходяться у точці A . За висновками з аксіом III і IV перенесемо ці сили вздовж ліній їх дії у точку A . Додавши сили P_1 і P_2 за правилом паралелограма, знайдемо їх рівнодіючу R_1 (рис. 2.1, а):

$$R_1 = P_1 + P_2.$$

Застосовуючи ту саму аксіому паралелограма, додамо рівнодіючу R_1 і силу P_3 :

$$R = R_1 + P_3 = P_1 + P_2 + P_3,$$

де R — рівнодіюча даної системи трьох сил.

Такі самі міркування можна застосувати до будь-якої кількості збіжних сил, тоді

$$R = P_1 + P_2 + \dots + P_n.$$

Скорочено це рівняння запишемо так:

$$R = \Sigma P_i,$$

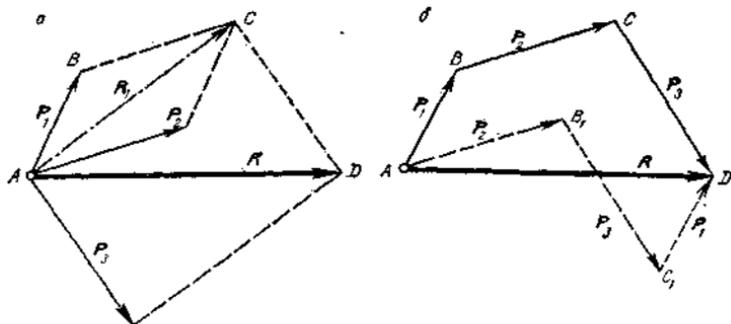


Рис. 2.1

де i — усі цілі числа від 1 до n , а грецька велика літера Σ (сигма) означає суму.

Очевидно, що побудову, як на рис. 2.1, а, можна замінити простою, зображеною на рис. 2.1, б. Многокутник $ABCD$ називають с и л о в и м м н о г о к у т н и к о м. Сторону AD , яка сполучає початок першого з кінцем останнього вектора, називають з а м и к а ю ч о ю с т о р о н о ю. Треба пам'ятати, що стрілки векторів складових сил утворюють певний напрям обходу за контуром силового многокутника, а замикаюча сторона, що визначає модуль і напрям рівнодіючої, має стрілку, напрямлену проти напрямку обходу (рис. 2.1, б).

Якщо рівнодіючу знаходять, застосовуючи геометрію і тригонометрію, то такий спосіб називають г е о м е т р и ч н и м. Якщо у певному масштабі накреслити силовий многокутник, то рівнодіючу можна визначити, вимірявши замикаючу сторону і помноживши її величину на масштаб. Такий спосіб знаходження рівнодіючої називають г р а ф і ч н и м. Порядок додавання векторів за допомогою силового многокутника на величину рівнодіючої не впливає, бо векторна сума від зміни місць доданків не змінюється (рис. 2.1, б, многокутник AB_1C_1D).

§ 2.2. Геометрична умова рівноваги плоскої системи збіжних сил

Під час побудови силового многокутника можливі випадки, коли кінець останнього вектора збігається з початком першого. Тоді замикаючої сторони не буде, і такий многокутник називають з а м к н е н и м.

Очевидно, що рівнодіюча R системи збіжних сил, які утворюють замкнений силувий багатокутник, дорівнює нулю і, отже, ця система еквівалентна нулю, тобто перебуває у рівновазі. Звідси випливає умова, за якої плоска система збіжних сил перебуватиме у рівновазі. Ця умова записується:

$$R = P_1 + P_2 + \dots + P_n = \Sigma P_i = 0$$

і формулюється так:

Для рівноваги плоскої системи збіжних сил необхідно і достатньо, щоб силувий багатокутник був замкнений.

Умови рівноваги, записані у вигляді рівностей, які мають невідомі величини, називають рівняннями рівноваги.

Застосовуючи геометричну умову рівноваги, зручно розв'язувати задачі, в яких на тіло діють три сили, бо тоді силувий багатокутник є трикутником.

Розв'язання більшості задач статички має три етапи:

- 1) вибирають тіло, рівновага якого розглядатиметься;
- 2) відкидають зв'язки, замінюючи їх реакціями, і встановлюють, яка система сил діє на тіло;
- 3) з умов рівноваги знаходять невідомі величини.

Розв'язуючи задачі технічної механіки, треба суворо дотримуватися правила про те, що розмірності й одиниці вимірювання усіх доданків і обох частин рівності мають бути однакові.

Користуючись цим правилом, у сумнівних випадках доцільно перевірити правильність ходу розв'язування задач. Для цього в доданкі рівності потрібно поставити одиниці вимірювання усіх величин, що входять до нього, і, зробивши можливі скорочення, порівняти добуті одиниці вимірювання правої і лівої частин. Перевіримо в такий спосіб наведену в § 1.6 формулу $Q = qf$:

$$[Q] = [q] \cdot [f], \quad N = (N/m) \cdot m = N.$$

Одиниці вимірювання правої і лівої частин рівності однакові, отже, за розмірністю формула правильна. Треба зазначити, що така перевірка нічого не говорить про правильність числових коефіцієнтів, які часто входять у формули.

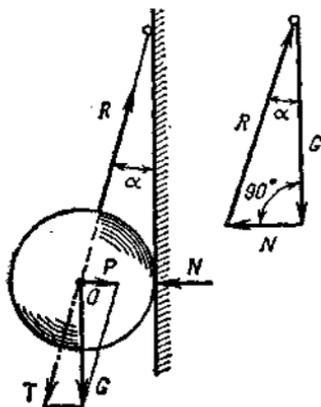


Рис. 2.2

Приклад 2.1. До вертикальної гладенької стіни на вірвовці, яка утворює кут α з стіною, підвішено однорідну кулю (рис. 2.2). Визначити натяг T вірвовки і силу тиску P кулі на стіну, якщо сила тяжіння кулі G .

Розв'язання. Розглянемо рівновагу кулі. Застосовувавши принцип звільнюваності, відкинемо зв'язки і замінимо їх реакціями. Реакція N гладенької стіни перпендикулярна до стіни і проходить через центр кулі. Оскільки куля однорідна, то сила тяжіння G прикладена в його геометричному центрі. Реакція P направлена вздовж вірвовки, і відповідно до теореми про рівновагу трьох непаралельних сил її лінія дії також проходить через центр кулі.

До системи трьох збіжних сил, прикладених до кулі, застосуємо геометричну умову рівноваги

$$\Sigma P_i = 0; \quad G + N + P = 0.$$

Побудуємо замкнений силаний багатокутник, починаючи із зображення в довольній масштабі вектора відомої сили G . Напрямок обходу трикутника (тобто напрямки стрілок) визначається цією силою.

Розглядаючи трикутник, знаходимо:

$$N = G \operatorname{tg} \alpha, \quad R = G / \cos \alpha.$$

Шукана сила тиску P кулі на стіну, відповідно до аксіоми взаємодії, за модулем дорівнює реакції N стіни, але напрямлена протилежно:

$$P = N = G \operatorname{tg} \alpha.$$

Натяг T вірвочки за модулем дорівнює її реакції R :

$$T = R = G / \cos \alpha.$$

Цю ж задачу можна розв'язати, розклавши силу тяжіння G у реальних напрямках (напрямах реакції) на складові P (сила тиску кулі на стіну) і T (натяг вірвочки), причому відповідно до аксіоми взаємодії $T = R$, $P = N$.

З побудованого паралелограма (рис. 2.2) легко знаходимо шукані величини. Такий метод розв'язування задач називають методом розкладання.

§ 2.3. Проекції сили на осі координат

Коли на тіло діє більше, ніж три сили, і невідомі напрямки деяких сил, під час розв'язування задач зручно користуватися не геометричною, а аналітичною умовою рівноваги, яка ґрунтується на методі проєкції.

Проекцією сили на вісь називають відрізок осі, що лежить між двома перпендикулярами, опущеними на вісь з початку і кінця вектора сили.

Нехай дані координати осей x , y , сила P , прикладена в точці A і розміщена в площині координатних осей (рис. 2.3). Проекціями сили P на осі будуть відрізки ab і $a'b'$. Позначимо ці проєкції відповідно P_x і P_y . Тоді

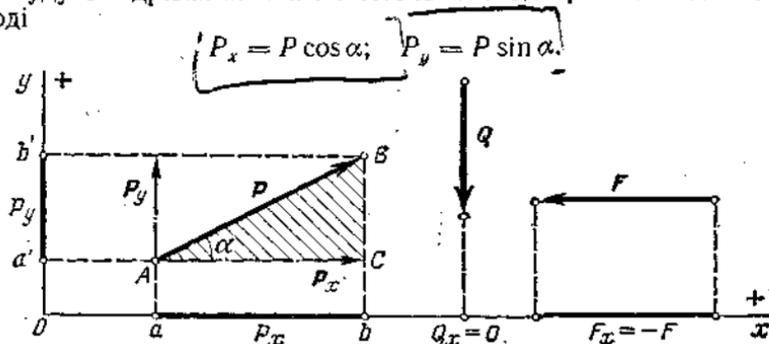


Рис. 2.3

Проекція сили на вісь — це величина алгебраїчна, яка може бути додатною або від'ємною, залежно від напрямку проєкції. За напрям проєкції візьмемо напрям від проєкції початку до проєкції кінця вектора сили. Встановимо таке правило знаків:

якщо напрям проєкції сили на вісь збігається з додатним напрямом осі, то ця проєкція вважається додатною, і навпаки.

Якщо вектор сили паралельний осі, то він проєктується на цю вісь у натуральну величину (рис. 2.3, сила F).

Якщо вектор сили перпендикулярний до осі, то його проєкція на цю вісь дорівнює нулю (рис. 2.3, сила Q).

Знаючи дві проекції P_x і P_y , з трикутника ABC визначаємо модуль і напрям вектора сили P за формулами: модуль сили

$$P = \sqrt{P_x^2 + P_y^2},$$

напрямний тангенс кута між вектором сили P і віссю x

$$\operatorname{tg} \alpha = P_y/P_x.$$

Зазначимо, що силу P можна подати як рівнодіючу двох складових сил P_x і P_y , паралельних осям координат (рис. 2.3). Складові P_x і P_y і проекції P_x і P_y принципово відмінні одна від одної, оскільки складова — величина векторна, а проекція — величина алгебраїчна; але проекції сили на дві взаємно перпендикулярні осі x і y і модулі складових тієї самої сили відповідно чисельно однакові, коли сила розкладається у двох взаємно перпендикулярних напрямках, що паралельні осям x і y .

§ 2.4. Аналітичний спосіб визначення рівнодіючої плоскої системи збіжних сил

Нехай дано плоску систему n збіжних сил

$$(P_1, P_2, P_3, \dots, P_n).$$

Рівнодіюча цієї системи

$$R = \Sigma P_i.$$

У площині дії цієї системи візьмемо вісь координат і спроекуємо дані сили і їх рівнодіючу на цю вісь. З математики відома властивість проєкції векторної суми, на підставі якої можна твердити, що проєкція рівнодіючої на вісь дорівнює алгебраїчній сумі проєкцій складових сил на ту саму вісь, тобто

$$R_x = \Sigma P_{ix}.$$

Праву частину цієї рівності запишуватимемо спрощено, а саме:

$$R_x = \Sigma X.$$

Щоб визначити рівнодіючу будь-якої плоскої системи збіжних сил, спроекуємо їх на осі координат x і y , алгебраїчно додамо проєкції усіх сил і тоді знайдемо проєкції рівнодіючої

$$R_x = \Sigma X, \quad R_y = \Sigma Y.$$

Знаючи проєкції, за формулами, знайденими в § 2.3, визначимо модуль і напрям рівнодіючої: модуль рівнодіючої

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2},$$

напрямний тангенс кута між вектором R і віссю x

$$\operatorname{tg}(R, x) = R_y/R_x.$$

Лінія дії рівнодіючої проходить через точку перетину ліній дії складових сил.

§ 2.5. Аналітичні умови рівноваги плоскої системи збіжних сил

Якщо дана плоска система збіжних сил перебуває у рівновазі, то рівнодіюча R такої системи, а отже, і проєкції рівнодіючої на осі координат дорівнюють нулю:

$$R = 0, \quad R_x = 0, \quad R_y = 0.$$

Враховуючи, що

$$R_x = \Sigma X, \quad R_y = \Sigma Y,$$

знаходимо рівності, що виражають аналітичні умови рівноваги плоскої системи збіжних сил:

$$\Sigma X = 0, \quad \Sigma Y = 0.$$

Формулюються ці умови так:

Для рівноваги плоскої системи збіжних сил необхідно і достатньо, щоб алгебраїчна сума проєкцій цих сил на кожну з двох координатних осей дорівнювала нулю.

За допомогою рівнянь рівноваги можна визначити два невідомі елементи даної системи сил, наприклад модуль і напрям однієї сили або модулі двох сил, напрями яких відомі і т. д. Виведені умови рівноваги дійсні для будь-яких осей координат, але для спрощення розв'язування задач осі координат доцільно вибрати по можливості перпендикулярними до невідомих сил, щоб кожне рівняння рівноваги мало одну невідому.

Коли напрям шуканої сили відомий, то її можна розкласти на дві складові за заданими напрямками, звичайно за напрямками координатних осей; за знайденими двома взаємно перпендикулярними складовими легко визначити невідому силу. Якщо під час аналітичного розв'язування задач шукана реакція виявиться від'ємною, то це означає, що дійсний її напрям протилежний до напрямку, взятого на рисунку.

Приклад 2.2. Однорідну прямокутну пластинку, сила тяжіння якої $G = 5 \text{ Н}$, підвішено так, що вона може вільно обертатися навколо горизонтальної осі, яка проходить вздовж однієї з її сторін. Рівномірний вітер підтримує її під кутом $\alpha = 18^\circ$ до вертикальної площини. Визначити рівнодіючу P тисків, створюваних вітром на пластинку, перпендикулярно до її площини (рис. 2.4).

Розв'язання. Розглянемо рівновагу пластинки. Відкинемо шарнір O . Оскільки пластинка однорідна і прямокутна, то рівнодіюча P тисків вітру і сила тяжіння G перетинаються в геометричному центрі C пластинки; лінія дії реакції R_0 шарніра за теоремою про рівновагу трьох непаралельних сил також пройде через точку C . До системи трьох збіжних сил, що діють на пластинку, застосуємо аналітичну умову рівноваги $\Sigma Y = 0$, вибравши вісь y перпендикулярно до пластинки (щоб реакція R_0 , яку визначати не треба, не входила до рівняння рівноваги). Складемо рівняння рівноваги

$$\Sigma Y = 0; \quad P - G \sin \alpha = 0,$$

звідки

$$P = G \sin \alpha = 5 \sin 18^\circ = 5 \cdot 0,309 \approx 1,55 \text{ Н}.$$

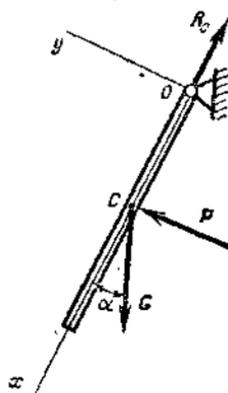


Рис. 2.4

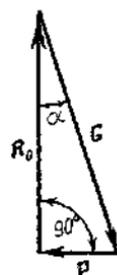


Рис. 2.5

Перевіримо розв'язання задачі за допомогою геометричної умови рівноваги:

$$\Sigma P_i = 0; \quad G + P + R_0 = 0.$$

Побудуємо замкнений трикутник (рис. 2.5). З нього знайдемо

$$P = G \sin \alpha \approx 5 \sin 18^\circ \approx 1,55 \text{ Н.}$$

Розділ III

ПЛОСКА СИСТЕМА ПАРАЛЕЛЬНИХ СИЛ І МОМЕНТ СИЛИ

Систему сил, лінії дії яких паралельні і лежать в одній площині, називають плоскою системою паралельних сил.

§ 3.1. Додавання двох паралельних сил, що діють в одному напрямі

Із шкільного курсу фізики відомо, що (рис. 3.1): *дві паралельні сили, однаково напрямлені, еквівалентні рівнодіючій, яка дорівнює сумі цих сил, паралельна їм і напрямлена в той самий бік; лінія дії рівнодіючої ділить відрізок, який сполучає точки прикладання даних сил, на частини, обернено пропорційні цим силам:*

$$R = P_1 + P_2, \quad P_1/P_2 = BC/AC.$$

Використовуючи похідну пропорцію, можна записати

$$P_1/BC = P_2/AC = (P_1 + P_2)/(BC + AC),$$

тоді

$$P_1/BC = P_2/AC = R/AB.$$

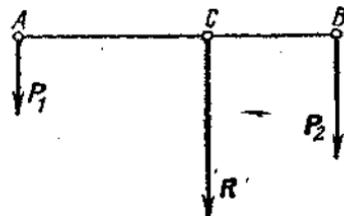


Рис. 3.1

Розкладають дану силу на дві паралельні складові за допомогою формул додавання двох паралельних сил. Розкладання сили на дві паралельні складові — задача невизначена і має безліч розв'язків. Щоб задача мала певний розв'язок, необхідні ще дві додаткові умови, наприклад відомі модулі однієї складової і довжина одного плеча, довжини двох пліч і т. д.

§ 3.2. Додавання двох різних антипаралельних сил

Розглянемо випадок додавання двох різних за модулем антипаралельних сил. Окремим випадком додавання однакових за модулем сил розглянуто в розд. IV.

Теорема. *Дві неоднакові антипаралельні сили еквівалентні рівнодіючій, яка дорівнює різниці цих сил, паралельна їм і напрямлена в бік більшої сили; лінія дії рівнодіючої ділить відрізок, що сполучає точки прикладання цих сил, зовнішнім способом на частини, обернено пропорційні цим силам.*

Розглянемо дві паралельні сили P_1 і P_2 , причому $P_1 > P_2$ (рис. 3.2). Розкладемо силу P_1 на дві паралельні складові R і P_2' так, щоб складова P_2' була прикладена в точці B і $P_2' = P_2$. Тоді за теоремою про додавання двох паралельних сил, напрямлених в один бік, знайдемо:

$$P_1 = R + P_2, \quad P_1/BC = P_2'/AC = R/AB.$$

З цих рівностей знайдемо модуль другої складової R і відстань AC до точки її прикладання (відомо, що $P_1' = P_1$). Дану систему сил (P_1, P_2) замінено системою трьох сил:

$$(P_1, P_2) \equiv (R, P_2', P_2).$$

Відкинувши на підставі аксіоми IV дві взаємно зрівноважені сили P_2 і P_2' , знайдемо, що дана система еквівалентна одній силі, тобто рівнодіючій R :

$$(P_1, P_2) \equiv R.$$

Модуль і точка прикладання рівнодіючої визначаються за формулами

$$R = P_1 - P_2, \quad AC = (P_2/R) AB.$$

Зазначимо, що рівнодіюча двох паралельних сил дорівнює їх алгебраїчній сумі.

Якщо на тіло діє система n паралельних сил, то, послідовно додаючи спочатку дві сили, їх рівнодіючу і третю силу, нову рівнодіючу до четвертої сили і т. д., знаходимо модуль і лінію дії рівнодіючої усієї системи паралельних сил.

Очевидно, що рівнодіюча системи паралельних сил визначиться внаслідок алгебраїчного додавання сил цієї системи:

$$R = P_1 + P_2 + P_3 + \dots + P_n.$$

Отже, рівнодіюча системи паралельних сил дорівнює їх алгебраїчній сумі:

$$R = \Sigma P_i.$$

Напрямок лінії дії рівнодіючої легко знайти за теоремою, доведеною в § 5.3.

§ 3.3. Момент сили відносно точки

Розглянемо гайку, яку затягують гайковим ключем певної довжини, прикладаючи до кінця ключа м'язове зусилля. Якщо взяти довший ключ, то при тому самому зусиллі гайку можна затягнути дужче. З цього випливає, що й та сама сила може спричинювати різну обертальну дію. Обертальна дія сили характеризується моментом сили.

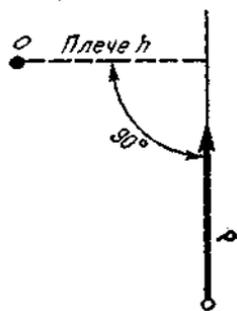


Рис. 3.3

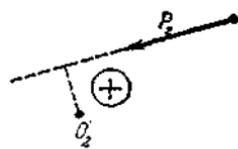
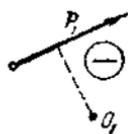
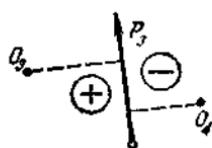


Рис. 3.4



Поняття моменту сили відносно точки запровадив у механіку італійський вчений і художник епохи Відродження Леонардо да Вінчі (1452—1519).

Моментом сили відносно точки називають добуток модуля сили на її плече (рис. 3.3):

$$M_o(P) = Ph.$$

Точку, відносно якої беруть момент сили, називають центром моменту. Плечем сили відносно точки беруть найкоротшу відстань від центра моменту до лінії дії сили.

Одиниця моменту сили:

$$[M] = [P][h] = \text{сила} \times \text{довжина} = \text{ньютон} \times \text{метр} = \text{Н} \cdot \text{м}.$$

Момент сили вважаємо додатним, якщо сила намагається обертати своє плече навколо центра моменту проти годинникової стрілки, і навпаки (рис. 3.4).

Одна й та сама сила відносно різних точок може створювати додатний і від'ємний моменти (рис. 3.4, сила P_2). Момент сили відносно точки, що лежить на лінії дії цієї сили, дорівнює нулю, оскільки плече тут дорівнює нулю.

З рис. 3.5 видно, що момент сили відносно точки не змінюється від перенесення сили вздовж лінії її дії, оскільки модуль сили і плече залишаються незмінними.

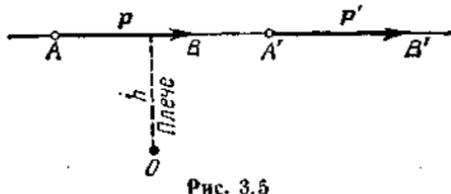


Рис. 3.5

Розділ IV

ПЛОСКА СИСТЕМА ПАР СИЛ

§ 4.1. Пара сил і момент пари

У § 3.2 залишився нерозглянутим випадок додавання двох антипаралельних сил, що дорівнюють одна одній за модулем. Така система сил називається парою сил або просто парою (рис. 4.1).

Поняття пари сил запровадив у механіку на початку XIX ст. французький учений Пуансо (1777—1859), який розробив теорію пар.

Площину, в якій розміщена пара, називають площиною дії пари. Відстань між лініями дії сил — це плече пари. Ефект дії пари полягає у тому, що вона намагається обертати тіло, до якого прикладена. Її обертальна дія визначається моментом пари. Моментом пари називають добуток модуля однієї із сил, що входить до пари, на плече:

$$m(P_1, P_2) = P_1 h = P_2 h.$$

Момент пари має таку саму розмірність, як і мо-

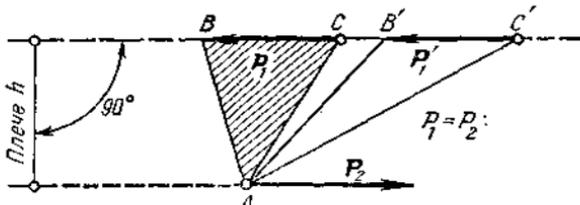


Рис. 4.1

мент сили. Момент пари вважаємо додатним, якщо вона намагається обернути своє плече проти годинникової стрілки, і навпаки.

Момент пари чисельно дорівнює подвоєній площі трикутника, в якого основою є вектор однієї із сил пари, а висотою — плече, помножені на масштаби сили і плеча (рис. 4.1). З рис. 4.1 видно, що момент пари не зміниться, якщо сили перенести вздовж ліній їх дії, оскільки трикутники ABC і $AB'C'$ — рівновеликі.

§ 4.2. Основні властивості пари

Основні властивості пари характеризуються такими трьома теоремами:

Теорема I. Пара сил рівнодіючої не має.

Дано пару (P_1, P_2) з плечем h (рис. 4.2). Припустимо, що $P_2 > P_1$. Тоді рівнодіюча цих сил $R = P_2 - P_1$, а точка її прикладання визначиться з пропорції

$$R/P_1 = h/x, \text{ звідки } x = P_1 h/R.$$

Тепер нехай сила P_2 зменшується і наближається за модулем до сили P_1 , тоді при $P_1 = P_2$

$$R = P_2 - P_1 = 0.$$

Це означає, що коли $P_1 = P_2$, то рівнодіючої немає. З цієї теореми випливає, що пара сил не зрівноважується однією силою; пару сил можна зрівноважити тільки парою.

Теорема II. Алгебраїчна сума моментів сил, що утворюють пару, відносно будь-якої точки площини дії пари є величиною сталою, яка дорівнює моменту пари.

Дано пару (P_1, P_2) з плечем h (рис. 4.3) і моментом $m = P_1 h = P_2 h$. Візьмемо в площині дії пари довільну точку A і приймемо її як центр моментів:

$$\left. \begin{aligned} M_A(P_1) &= -P_1 a, \\ M_A(P_2) &= P_2(a+h). \end{aligned} \right\}$$

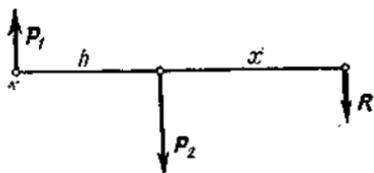


Рис. 4.2

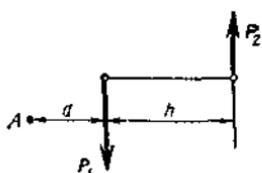


Рис. 4.3

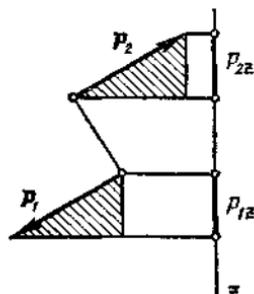


Рис. 4.4

Додамо праві і ліві частини цих рівностей: $M_A(P_1) + M_A(P_2) = -P_1 a + P_2(a+h) = P_2 h$, або $M_A(P_1) + M_A(P_2) = m$; теорема доведена.

З цієї теореми виходить, що при будь-якому центрі моментів пара сил ввійде до рівняння моментів з одним і тим самим знаком і однією і тією самою величиною.

Теорема III. Алгебраїчна сума проєкцій сил пари на вісь завжди дорівнює нулю.

Дано пару (P, P_1) і вісь z , що лежить у площині дії пари (рис. 4.4). Оскільки площі заштрихованих трикутників однакові, то $P_{1z} = P_{2z}$. Проекція P_{1z} — додатна, проекція P_{2z} — від'ємна, отже, їх алгебраїчна сума завжди дорівнює нулю.

З цієї теореми випливає, що пара сил не входить ні в рівняння сил, ні в рівняння проєкцій сил.

§ 4.3. Еквівалентні пари

Дві пари називають еквівалентними, якщо одну з них можна замінити іншою, не порушивши механічного стану вільного твердого тіла.

Теорема про еквівалентні пари формулюється так: якщо моменти двох пар алгебраїчно дорівнюють один одному, то ці пари еквівалентні.

Дано дві пари (P, P_1) і (Q, Q_1) з алгебраїчно однаковими моментами (рис. 4.5), тобто

$$m(P, P_1) = m(Q, Q_1) \text{ або } Pa = Qb.$$

Продовжимо лінії дії сил пари до їх взаємного перетину в точках A і B . Відповідно до аксіоми III і IV перенесемо сили P і P_1 вздовж ліній їх дії у точки A і B . Сполучимо ці точки прямою і розкладемо сили P і P_1 у напрямі AB і вздовж ліній дії сил Q і Q_1 . Оскільки трикутник Akd дорівнює трикутнику Bm , то $T = T_1$ і $S = S_1$.

Сили T і T_1 — це зрівноважена система, оскільки вони рівні між собою за модулем і діють по одній прямій у протилежних напрямках. Відповідно до аксіоми IV таку систему можна відкинути.

Сили S і S_1 — це пара сил з плечем b . Отже, пара $(P, P_1) \equiv \equiv$ парі (S, S_1) . Розглянемо трикутники Amb і AnB . Вони мають спільну основу AB і однакові висоти, тому

$$\text{пл. } \Delta Amb \equiv \text{пл. } \Delta AnB.$$

Але подвійна площа ΔAnB чисельно дорівнює моменту пари (P, P_1) , а подвійна площа ΔAmb чисельно дорівнює моменту пари (S, S_1) , отже, $m(P, P_1) = m(S, S_1)$ або $Pa = Sb$.

За умовою теореми $Pa = Qb$, тому $Sb = Qb$, звідки $S = Q$, $S_1 = Q_1$.

Сили S і Q однакові за модулем, діють по одній прямій в одному напрямі, тому вони еквівалентні одна одній; так само еквівалентні сили, S_1 і Q_1 . Отже, пара $(Q, Q_1) \equiv \equiv$ парі (S, S_1) . Але раніше було доведено, що пара $(P, P_1) \equiv \equiv$ парі (S, S_1) . Через те що кожна з двох пар екві-

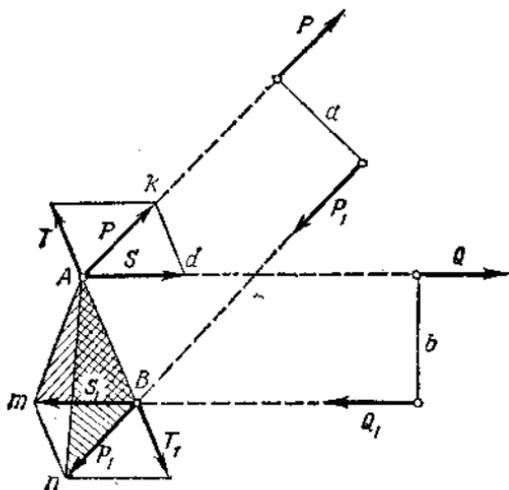


Рис. 4.5

валентна третій парі, то ці пари еквівалентні між собою, тобто

$$\text{пара } (P, P_1) \equiv \text{парі } (Q, Q_1),$$

що й потрібно було довести.

Із доведеної теореми про еквівалентні пари випливають чотири наслідки:

- 1) не змінюючи механічного стану тіла, пару можна переміщувати як завгодно в площині її дії;
- 2) не змінюючи механічного стану тіла, можна змінювати сили і плече пари, але так, щоб її момент залишився незмінним;
- 3) щоб задати пару, досить задати її момент, тому іноді слово «пара» замінюють словом «момент» і умовно зображають його так, як на рис. 4.6;
- 4) умови рівноваги плоскої системи паралельних сил залишаються дійсними, якщо одночасно з цією системою діють і пари сил, оскільки їх можна повернути в площині дії і поставити сили пари паралельно з іншими силами системи.

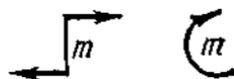


Рис. 4.6

§ 4.4. Теорема про додавання пар

Теорема. Усяка плоска система пар еквівалентна одній результуючій парі, момент якої дорівнює алгебраїчній сумі моментів даних пар.

Нехай дано три пари з моментами m_1, m_2, m_3 , що діють в одній площині (рис. 4.7, а). На підставі висновку з теореми про еквівалентні пари перетворимо ці пари так, щоб їх плечі дорівнювали α , і перенесемо до довільно взятого на площині відрізка AB , що має довжину d .

Тоді замість заданої системи пар матимемо нову систему, еквівалентну даній; при цьому моменти заданих і нових пар рівні між собою:

$$m_1 = -P_2 d, \quad m_2 = F_1 d, \quad m_3 = -Q_1 d.$$

Додавши три сили в точці A , дістанемо рівнодіючу R_1 (рис. 4.7, б), модуль якої

$$R_1 = P_1 + Q_1 - F_1.$$

Додавши три сили в точці B , дістанемо рівнодіючу R_2 , модуль якої

$$R_2 = P_2 + Q_2 - F_2.$$

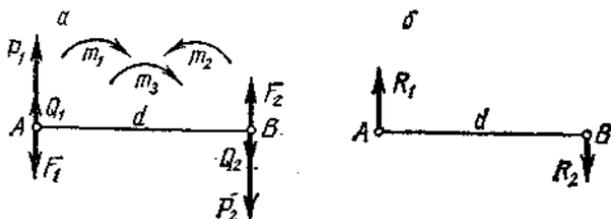


Рис. 4.7

причому очевидно, що сили R_1 і R_2 рівні між собою за модулем, паралельні і протилежно напрямлені. Отже, система (R_1, R_2) є парою з плечем d , еквівалентною даній системі пар.

Момент цієї результуючої пари

$$m = -R_1 d = -(P_1 + Q_1 - F_1) d = -P_1 d - Q_1 d + F_1 d,$$

або

$$m = m_1 + m_2 = m_3.$$

Подібне доведення стосується будь-якої плоскої системи пар, тому в загальному вигляді можна записати

$$m = \Sigma m_i,$$

що й потрібно було довести.

§ 4.5. Умова рівноваги плоскої системи пар

Застосувавши доведену в попередньому параграфі теорему до плоскої системи пар, яка перебуває у стані рівноваги, запишемо

$$m = \Sigma m_i = 0.$$

Тому умову рівноваги плоскої системи пар у загальному вигляді можна записати

$$\Sigma m_i = 0$$

і сформулювати так: *для рівноваги плоскої системи пар необхідно і достатньо, щоб алгебраїчна сума моментів даних пар дорівнювала нулю.*

§ 4.6. Опори і опорні реакції балок

Опори балок за їх будовою можна розподілити на три основних типи (рис. 4.8):

- 1) шарнірно-рухома опора (опора A);
- 2) шарнірно-нерухома опора (опора B);
- 3) жорстке кріплення (опора C).

Застосуємо правило для визначення реакцій зв'язків (див. § 1.5).

Шарнірно-рухома опора допускає поворот навколо осі шарніра і лінійне переміщення паралельно опорній площині. Якщо

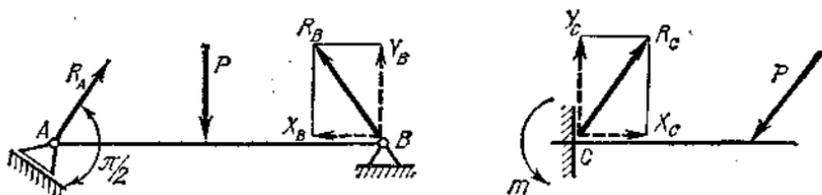


Рис. 4.8

знехтувати тертям на опорі й у шарнірі, то реакція такого зв'язку буде напрямлена перпендикулярно до опорної площини, але невідома за модулем (одне невідоме).

Шарнірно-нерухома опора допускає поворот тільки навколо осі шарніра і не допускає ніяких лінійних переміщень. Реакція такої опори матиме напрям перпендикуляра до осі шарніра; модуль і напрям її завчасно не відомі (два невідомі). Звичайно під час розв'язування задач таку реакцію розкладають на дві взаємно перпендикулярні складові, невідомі за модулем, але з відомими напрямками.

Жорстке кріплення не допускає ні лінійних поворотів, ні поворотів закріпленого кінця балки. Жорстке кріплення замінюють реактивною силою, невідомою за модулем і напрямом, і реактивним

моментом (три невідомі). Реактивну силу невідомого напрямку розкладають на дві взаємно перпендикулярні складові.

Якщо під час розв'язування задачі реактивна сила або реактивний момент виявляється від'ємними, то їх дійсний напрям протилежний взятому на рисунку. Крім названих трьох основних типів опор балок, у конструкціях часто балка вільно опирається на площину (поверхню) або на ребро призми. У цих випадках напрям реакцій визначають за правилами, викладеними в § 1.5.

Приклад 4.1. Горизонтальну балку, яка має довжину $l = 4$ м, закріплено на опорах і навантажено парою сил з моментом $m = 420$ Н · м (рис. 4.9). Не враховуючи сили тяжіння балки, визначити реакції опор A і B .

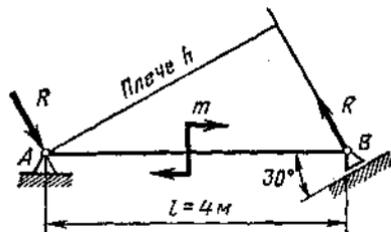


Рис. 4.9

Розв'язання. Відкинемо опори, замінимо їх реакціями і розглянемо рівновагу балки. Оскільки пару сил можна зрівноважити лише парою, то реакції R

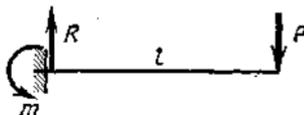


Рис. 4.10

опор A і B утворюватимуть пару сил, при цьому реакція шарнірно-рухомої опори B перпендикулярна до опорної площини.

Застосуємо умову рівноваги плоскої системи пар і складемо рівняння:

$$\sum m_i = 0; \quad -m + Rh = 0,$$

де $h = l \cos 30^\circ$.

Звідси $R = m/h = m/(l \cos 30^\circ) = 420/(4 \cdot 0,866) \approx 120$ Н.

Приклад 4.2. Консольну балку, зображену на рис. 4.10, яка має довжину $l = 2$ м, навантажено на одному кінці силою $P = 3000$ Н. Не враховуючи сили тяжіння балки, визначити реакції закріплення.

Розв'язання. Замінімо закріплення її реакціями і розглянемо рівновагу балки. Реакції закріплення — це реактивна сила R і реактивний момент m . Оскільки реактивний момент m можна зрівноважити лише парою сил, то навантаження P і реакції R утворюватимуть пару, отже,

$$R = P = 3000 \text{ Н.}$$

За умовою рівноваги плоскої системи пар складемо рівняння:

$$\sum m_i = 0; \quad m - Pl = 0,$$

звідки

$$m = Pl = 3000 \cdot 2 = 6000 \text{ Н} \cdot \text{м.}$$

Розділ V

ПЛОСКА СИСТЕМА ДОВІЛЬНО РОЗМІЩЕНИХ СИЛ

§ 5.1. Лема про паралельне перенесення сили

Лема. Механічний стан твердого тіла не порушиться, якщо дану силу перенести паралельно самій собі в довільну точку тіла, додавши при цьому пару, момент якої дорівнює моменту даної сили відносно нової точки прикладання.

Візьмемо тіло, на яке діє певна система сил, до якої входить і сила P , прикладена в точці A (рис. 5.1). Вибіримо довільну точку O , яку назовемо центром зведення, і відповідно до аксіоми IV прикладемо в цій точці дві однакові сили P' і P'' , паралельні даній силі P , причому

$$P' = P'' = P.$$

Систему сил (P , P' , P''), еквівалентну силі P , подамо як силу P , перенесену паралельно самій собі в довільно вибраний центр зведення O , що є новою точкою прикладання сили:

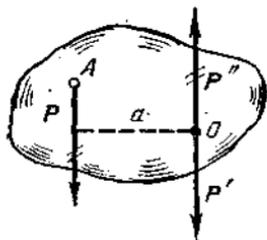


Рис. 5.1

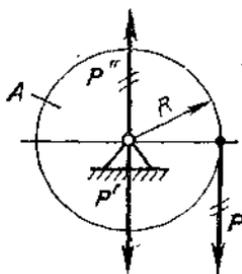


Рис. 5.2

$$m(P, P'') = Pa = M_0(P).$$

Лему доведено.

Описане перенесення сили можна показати на прикладі. Розглянемо колесо A , радіус якого R , що обертається на осі у підшипниках (рис. 5.2). Нехай до обода колеса по дотичній прикладено силу P (таку силу називають коловою).

Щоб визначити дію сили P на колесо і підшипники, застосуємо доведену лему і перенесемо цю силу паралельно самій собі на вісь колеса. У результаті дістанемо силу $P' = P$, яка тисне на підшипники, і пару сил (P , P'') з моментом PR , яка обертає колесо.

§ 5.2. Зведення плоскої системи довільно розміщених сил до даного центра

Теорема. Плоска система довільно розміщених сил у загальному випадку еквівалентна одній силі, прикладеній у центрі зведення, і одній парі.

Нехай дано плоску систему n довільно розміщених сил ($P_1, P_2, P_3, \dots, P_{n-1}, P_n$). Перенесемо паралельно всі сили у довільно вибраний у площині дії сил центр зведення O , додавши при цьому n пар (рис. 5.3). Моменти цих пар $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$ дорівнюють моментам даних сил відносно центра зведення O .

Замість заданої системи n довільно розміщених сил утворилася система n сил, прикладених у центрі зведення, що дорівнюють даним силам за модулем і напрямом, і система n приєднаних пар:

$$P'_1 = P_1, \quad P'_2 = P_2,$$

$$P'_3 = P_3, \quad \dots, \quad P'_n = P_n;$$

$$m_1 = M_0(P_1), \quad m_2 = M_0(P_2),$$

$$m_3 = M_0(P_3), \quad \dots, \quad m_n = M_0(P_n).$$

Ця нова система еквівалентна даній.

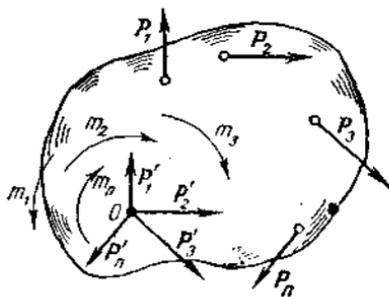


Рис. 5.3

Плоска система сил, прикладених в одній точці, еквівалентна одній силі, яка дорівнює векторній сумі цих сил і прикладена в тій самій точці, отже,

$$P'_1 + P'_2 + P'_3 + \dots + P'_n = P_1 + P_2 + P_3 + \dots + P_n = R,$$

або

$$R = \Sigma P_i.$$

Назвемо цю силу R головним вектором системи.

Головний вектор плоскої системи довільно розміщених сил дорівнює векторній сумі усіх сил системи і прикладений у центрі зведення.

Графічно головний вектор є замикаючою стороною силового многокутника, побудованого на даних силах. Аналітично модуль головного вектора можна обчислити за формулою

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(\Sigma X)^2 + (\Sigma Y)^2},$$

а напрямний косинус — за формулою

$$\cos(R, x) = R_x/R.$$

Плоска система пар еквівалентна одній парі, момент якої дорівнює алгебраїчній сумі моментів даних пар, отже,

$$M = m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_n = M_0(P_1) + M_0(P_2) + \\ + M_0(P_3) + \dots + M_0(P_n),$$

або

$$M = \Sigma M_0(P_i).$$

Цю пару з моментом M назвемо головним моментом заданої системи сил.

Головний момент плоскої системи довільно розміщених сил дорівнює алгебраїчній сумі моментів усіх сил системи відносно центра зведення.

Отже, будь-яка плоска система сил у загальному випадку еквівалентна системі, яка складається з сили і пари сил, отже, теорема доведена. Операція заміни системи сил головним вектором і головним моментом називається зведенням системи сил до даного центра.

§ 5.3. Властивості головного вектора і головного моменту

Властивості головного вектора і головного моменту полягають у тому, що:

1) модуль і напрям головного вектора даної системи не залежать від вибору центра зведення, бо для будь-якого центра зведення силовий многокутник, побудований на даних силах, буде однаковим;

2) величина і знак головного моменту в загальному випадку залежать від центра зведення (крім одного випадку, про який буде сказано в § 5.4), бо від зміни центра зведення змінюються плечі сил, а їх модулі залишаються незмінними;

3) головний вектор і рівнодіюча системи сил векторно дорівнюють, але в загальному випадку не еквівалентні.

Нехай відомі головний вектор R і головний момент M якоїсь плоскої системи сил (рис. 5.4). Визначимо рівнодіючу цієї системи. Користуючись відомою властивістю пари сил, перетворимо головний момент

M так, щоб сили пари R' і R'' були паралельними і за модулем дорівнювали головному вектору R :

$$R' = R'' = R, \quad M = m(R', R''),$$

причому сила R'' протилежна R і прикладена в точці O . Далі систему (R, R'') , як взаємно зрівноважену, відкинемо:

$$(R, M) \equiv (R, R', R'') \equiv R'.$$

У результаті матимемо одну силу R' , еквівалентну головному вектору і головному моменту системи, тобто рівнодіючу системи, причому

$$R = R'.$$

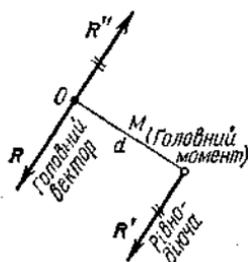


Рис. 5.4

Модуль рівнодіючої

$$R' = R = \sqrt{(\Sigma X)^2 + (\Sigma Y)^2},$$

а лінія дії рівнодіючої визначається плечем d за формулою

$$d = M/R.$$

Отже, можна вважати, що головний вектор і рівнодіюча векторно рівні між собою, але не еквівалентні;

4) головний вектор і рівнодіюча еквівалентні тільки в окремому випадку, коли головний момент системи дорівнює нулю; це можливо тоді, коли центр зведення лежить на лінії дії рівнодіючої.

З рис. 5.4 видно, що момент рівнодіючої R' відносно центра зведення O дорівнює моменту M пари (R', R'') , тобто головному моменту даної системи:

$$M_0(R') = m(R', R'') = M.$$

Оскільки $M = \Sigma M_0(P_i)$, а центром зведення можна взяти будь-яку точку площини дії сил даної системи, то завжди

$$M(R') = \Sigma M(P_i).$$

Добута формула — це математичний вираз теореми про момент рівнодіючої.

Теорема.— Момент рівнодіючої сили відносно будь-якої точки, що лежить у площині дії сил, дорівнює алгебраїчній сумі моментів складових сил відносно тієї самої точки.

Теорему про момент рівнодіючої вперше довів французький учений Вариньон (1654—1722), тому її називають теоремою Вариньона.

Застосуємо цю теорему для визначення лінії дії рівнодіючої R плоскої системи n паралельних сил:

$$(P_1, P_2, P_3, \dots, P_n) \equiv R.$$

Візьмемо будь-яку точку O площини дії сил як центр моментів і за теоремою Вариньона запишемо

$$\Sigma M_0(P_i) = M_0(R) = Rd,$$

де d — плече рівнодіючої R відносно точки O . З останньої рівності визначимо плече d :

$$d = \frac{\Sigma M_0(P_i)}{R} = \frac{\Sigma M_0(P_i)}{\Sigma P_i},$$

бо, відповідно до § 3.2, $R = \Sigma P_i$. Щоб установити, в якому напрямі від точки O треба відкласти на перпендикулярі до ліній дії сил плече d , потрібно врахувати, по-перше, напрям вектора R , по-друге, знак $\Sigma M_0(P_i)$.

§ 5.4. Різні випадки зведення плоскої системи довільно розміщених сил

Вивчивши властивості головного вектора і головного моменту, розглянемо чотири можливих випадки зведення плоскої системи довільно розміщених сил.

1. $R \neq 0$, $M \neq 0$, тобто головний вектор і головний момент не дорівнюють нулю. Тоді система сил еквівалентна рівнодіючій, яка за модулем дорівнює головному вектору, паралельна йому, так само напрямлена, але по іншій лінії дії (див. § 5.3, п. 3).

2. $R \neq 0$, $M = 0$. У цьому випадку система сил еквівалентна рівнодіючій, лінія дії якої проходить через центр зведення і збігається з головним вектором.

3. $R = 0$, $M \neq 0$. Тоді система еквівалентна парі. Оскільки модуль і напрям головного вектора в усіх випадках не залежать від вибору центра зведення, то в розглядуваному випадку величина і знак головного моменту також не залежать від центра зведення, бо одна й та сама система сил не може бути еквівалентною різним парам.

4. $R = 0$, $M = 0$. У цьому випадку система сил еквівалентна нулю, тобто перебуває у рівновазі.

§ 5.5. Аналітичні умови рівноваги плоскої системи довільно розміщених сил

Відповідно до § 5.4, плоска система довільно розміщених сил перебуває у рівновазі, коли головний вектор і головний момент дорівнюють нулю:

$$R = 0, \quad M = 0.$$

Але $R = \Sigma P_i$ і те, що $R = 0$, означає, що силовий многокутник, побудований на силах даної системи, має бути замкненим. Отже, алгебраїчна сума проєкцій сил на кожен з двох осей координат x і y має дорівнювати нулю, тобто

$$\Sigma X = 0, \quad \Sigma Y = 0.$$

Якщо головний момент $M = \Sigma M_0(P_i)$ і $M = 0$, то це означає, що алгебраїчна сума моментів сил даної системи відносно будь-якого центра зведення дорівнює нулю:

$$\Sigma M(P_i) = 0.$$

Отже, для рівноваги плоскої системи довільно розміщених сил необхідно і достатньо, щоб алгебраїчні суми проєкцій усіх сил на осі координат

нат x і y дорівнювали нулю і щоб алгебраїчна сума моментів цих сил відносно будь-якої точки площини також дорівнювала нулю. Спрощено умови рівноваги запишемо у вигляді рівностей

$$\Sigma X = 0, \quad \Sigma Y = 0, \quad \Sigma M = 0.$$

Зазначимо, що знайдені умови рівноваги системи збіжних сил, системи паралельних сил і системи пар є окремими випадками умов рівноваги, розглянутими у цьому параграфі. Під час розв'язування деяких задач буває доцільно замість одного або двох рівнянь проєкцій скласти рівняння моментів.

Якщо одне рівняння проєкцій замінити, то умови рівноваги плоскої системи довільно розміщених сил матимуть вигляд:

$$\Sigma X = 0, \quad \Sigma M_A = 0, \quad \Sigma M_B = 0.$$

Але треба пам'ятати, що ці умови недостатні для рівноваги, якщо центри моментів A і B лежать на одному перпендикулярі до осі x ; у цьому випадку навіть тоді, коли зазначені умови дійсні, система сил може мати рівнодіючу, яка проходить через ці точки, і, отже, не бути у стані рівноваги. Якщо замінити два рівняння проєкцій, то умови рівноваги плоскої системи довільно розміщених сил матимуть вигляд:

$$\Sigma M_A = 0, \quad \Sigma M_B = 0, \quad \Sigma M_C = 0.$$

Проте ці умови недостатні для рівноваги, коли центри моментів A , B і C лежать на одній прямій; у цьому випадку навіть тоді, коли зазначені умови залишаються дійсними, система сил може мати рівнодіючу, яка проходить через ці точки, і не бути у рівновазі.

Умови рівноваги плоскої системи паралельних сил є окремим випадком умов рівноваги, розглянутих у цьому параграфі. Якщо вісь y напрямити паралельно ліній дії системи паралельних сил, то рівняння рівноваги $\Sigma X = 0$ перетвориться на тотожність, а $\Sigma Y = \Sigma P_i$, тобто алгебраїчна сума проєкцій сил системи на вісь y дорівнюватиме алгебраїчній сумі цих сил. Тоді умови рівноваги плоскої системи паралельних сил можна записати:

$$\Sigma P_i = 0, \quad \Sigma M = 0$$

і сформулювати так: для рівноваги плоскої системи паралельних сил необхідно і достатньо, щоб алгебраїчна сума всіх сил дорівнювала нулю і щоб алгебраїчна сума моментів усіх сил відносно будь-якої точки площини також дорівнювала нулю.

Оскільки всі види аналітичних умов рівноваги дійсні для будь-яких прямокутних осей координат, то в процесі розв'язування однієї задачі або під час перевірки розв'язку осі координат можна змінювати, тобто одні рівняння проєкцій сил скласти для однієї системи координат, інші — для нової системи координат. Цей прийом у деяких випадках спрощує розв'язування і перевірку розв'язку задач. При цьому треба пам'ятати, що кількість рівнянь рівноваги, складених для розв'язання (але не для перевірки розв'язку), не може бути більшою від кількості умов рівноваги, що відповідають системі поданих у задачі сил. Під час розв'язування задач статички аналітичним способом доцільно рівняння рівноваги складати так, щоб у кожному була тільки одна невідома величина. У багатьох випадках цього можна домогтися, раціонально вибравши осі координат і центри моментів.

Приклад 5.1. Горизонтальна балка, яка підтримує балкон, зазнає дії рівномірно розподіленого навантаження інтенсивністю $q = 2 \text{ кН/м}$ (рис. 5.5). На вільний кінець C балки передається навантаження колони $P = 2 \text{ кН}$. Відстань від осі колони до стіни $l = 1,5 \text{ м}$. Визначити реакції кріплення A .

Розв'язання. Замінімо кріплення його реакціями і розглянемо рівновагу балки. Реакція стіни — це реактивна сила R і реактивний момент m . Реактивна сила вер-



Рис. 5.5

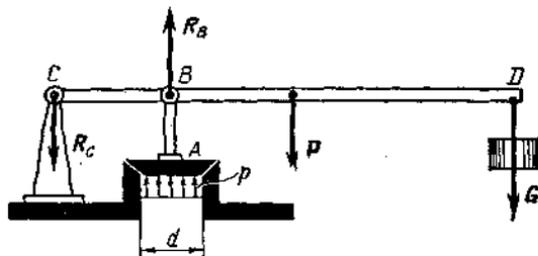


Рис. 5.6

тикальна, оскільки активні сили, які діють на балку, горизонтальних складових не мають. Розподілене навантаження замінімо його рівнодіючою ql .

Застосуємо умови рівноваги плоскої системи паралельних сил і складемо два рівняння рівноваги:

$$\sum P_i = 0; \quad R - ql - P = 0,$$

звідки

$$R = ql + P = 2 \cdot 10^3 \cdot 1,5 + 2 \cdot 10^3 = 5 \cdot 10^3 \text{ Н};$$

$$\sum M_A = 0, \quad +m - ql^2/2 - Pl = 0,$$

звідки $m = Pl + ql^2/2 = 2 \cdot 10^3 \cdot 1,5 + 2 \cdot 10^3 \times \times 2,25/2 = 5,25 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot \text{м}$.

Перевіримо розв'язок, склавши контрольне рівняння моментів відносно точки C :

$$\sum M_C = 0; \quad m - Rl + ql^2/2 = 0.$$

Підставивши значення, дістанемо

$$5,25 \cdot 10^3 - 5 \cdot 10^3 \cdot 1,5 + 2 \cdot 10^3 \cdot 2,25/2 = 0.$$

Ця тожність засвідчує правильність розв'язання.

Приклад 5.2. Залобіжний клапан A парового котла з'єднаний стержнем AB з однорідним важелем CD , який має довжину 50 см , силу тяжіння 10 Н і може обертатися навколо нерухокої осі C ; діаметр клапана $d = 6 \text{ см}$, плече $CB = 7 \text{ м}$ (рис. 5.6). Який вантаж G потрібно підвісити до кінця D важеля, щоб клапан сам відкривався від тиску в котлі $p = = 110 \text{ Н/см}^2$.

Розв'язання. Розглянемо рівновагу важеля CD . Реакція R_B клапана буде напрямлена вгору і дорівнюватиме

$$R_B = p \cdot \pi d^2 / 4 = 110 \cdot 10^4 \cdot \pi \cdot 36 \cdot 10^{-4} / 4 = 3109 \text{ Н}.$$

Через те що реакцію R_C шарніра C визначати не треба, то складемо рівняння моментів відносно точки C :

$$\sum M_C = 0; \quad -G \cdot CD - P \cdot CD/2 + R_B \cdot CB = 0.$$

Підставимо значення і знайдемо G :

$$G = (3109 \cdot 7 \cdot 10^{-2} - 10 \cdot 25 \cdot 10^{-2}) / (50 \cdot 10^{-2}) = 430 \text{ Н}.$$

Приклад 5.3. На рис. 5.7 схематично зображено підйомний кран. У точці D на відстані 5 м від осі AB крана підвішено вантаж $P = 50 \text{ кН}$. Сила тяжіння крана $G = 30 \text{ кН}$. Визначити реакції під'ятника A і підшипника B .

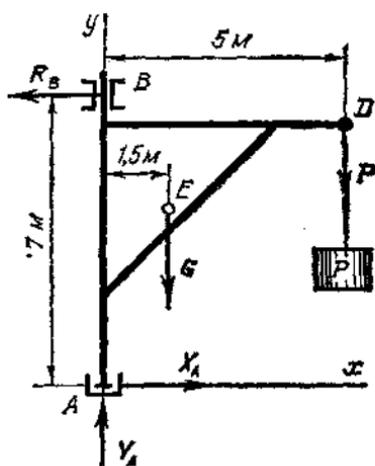


Рис. 5.7

них нерівностей, але зменшиться тиск (на одиницю площі), і опір відносно переміщенню залишиться попереднім:

Другий закон твердить, що коли збільшується нормальна складова зовнішніх сил, які діють на поверхні тіла (інакше кажучи, збільшиться сила нормального тиску або реакції), то в стільки ж разів зросте максимальна сила тертя.

Відношення сили тертя F_T до нормальної складової N зовнішніх сил, які діють на поверхні тіла, називають коефіцієнтом тертя ковзання і позначають f (якщо сила тертя спокою неповна, то це відношення називають коефіцієнтом зчеплення). Отже,

$$f = F_T/N \text{ або } F_T = fN. \quad (6.1)$$

Таким чином, другий закон тертя ковзання можна сформулювати так: сила тертя дорівнює коефіцієнту тертя ковзання, помноженому на силу нормального тиску або реакції. Очевидно, що коефіцієнт тертя ковзання — величина безрозмірна.

Нормальна реакція N опорної поверхні і сила тертя F_T дають рівнодіючу R , яку називають повною реакцією опорної поверхні (рис. 6.1):

$$R = N + F_T.$$

Повна реакція R утворює з нормаллю до опорної поверхні якийсь кут. Максимальне значення цього кута (це буде у момент початку руху) називають кутом тертя і позначають φ . З рис. 6.1 маємо

$$F_T = N \operatorname{tg} \varphi. \quad (6.2)$$

З рівностей (6.1) і (6.2) маємо

$$f = \operatorname{tg} \varphi,$$

тобто коефіцієнт тертя ковзання дорівнює тангенсу кута тертя.

Якщо коефіцієнт тертя ковзання однаковий для усіх напрямів руху, то множина (геометричне місце) повних реакцій утворює круговий конус, який називають конусом тертя (рис. 6.2). Якщо ж для різних напрямів руху коефіцієнт тертя неоднаковий (наприклад, при ковзанні по дереву вздовж і впоперек волокон), то конус тертя буде некруговим). Властивість конуса тертя полягає в тому, що для рівноваги тіла, яке лежить на шорсткій поверхні, рівнодіюча прикладених до нього активних сил має проходити в середині конуса тертя.

Справді, якщо рівнодіючу P активних сил, прикладених до тіла, розкласти на складові P_1 (рушійна сила) і P_2 (сила нормального тиску), то

$$P_1 = P_2 \operatorname{tg} \alpha.$$

За другим законом тертя ковзання

$$F_T = f P_2 = P_2 \operatorname{tg} \varphi.$$

Отже, коли $\alpha < \varphi$, то

$$P_1 < F_T$$

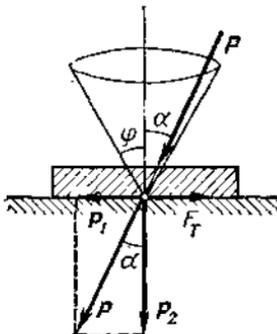


Рис. 6.2

і руху не буде. Відповідно до третього закону коефіцієнт тертя ковзання залежить від матеріалу тертьових тіл, якості обробки поверхонь, виду і температури мастила.

Залежно від того, чи є між тертьовими поверхнями шар мастила, тертя поділяють на три види: тертя без мастила, граничне тертя, рідинне тертя; в останньому випадку тертьові поверхні тіл повністю відділені шаром мастила.

Коефіцієнт тертя ковзання визначають на досліді; його значення для різних умов подано в довідниках. Наведемо орієнтовні значення коефіцієнтів f тертя ковзання (для стану спокою):

Метал по металу насухо	0,15—0,3
Те саме, з мастилом	0,1—0,18
Дерево по дереву насухо	0,4—0,6
Шкіра по чавуну насухо	0,3—0,5
Те саме, з мастилом	0,15
Сталь по льоду	0,02

Коефіцієнт тертя ковзання під час руху звичайно менший, ніж для стану спокою, і в першому наближенні не залежить від швидкості відносного переміщення тіл. Методи розв'язування задач статички для випадків тертя залишаються такими самими, як і без тертя, причому в рівняння рівноваги звичайно вводять максимальні величини сил тертя.

Приклад 6.1. Діаметр шайби колодкового гальма $D = 500$ мм, діаметр барабана $d = 100$ мм, сила $P = 200$ Н, вантаж $G = 1500$ Н, коефіцієнт тертя $f = 0,4$ (рис. 6.3). Визначити відношення розмірів a/b , за якого припиниться рух. Кут ACD — прямий.

Розв'язання. У момент, коли рух припиниться, розділямо уявно дану систему тіл на дві частини і розглянемо спочатку рів-

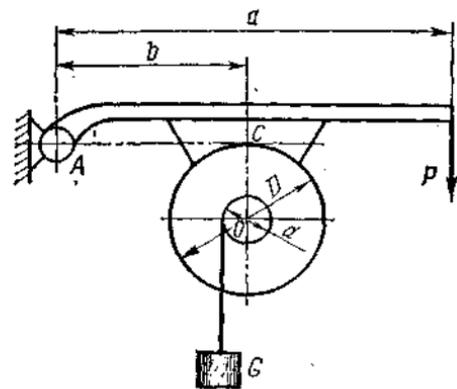


Рис. 6.3

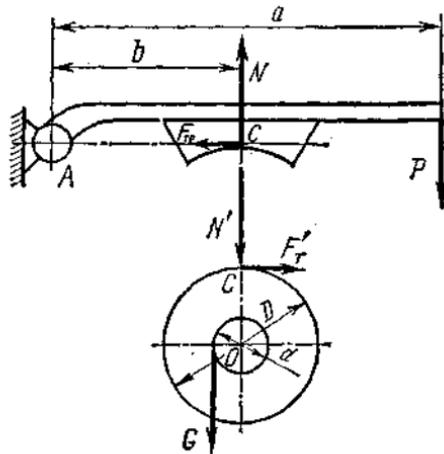


Рис. 6.4

новагу барабана з шайбою, а потім — рівновагу важеля з колодкою (рис. 6.4). Відповідно до аксіоми взаємодії, нормальна реакція $N = N'$, а сила тертя $F_T = F_T'$. За другим законом тертя ковзання рівнодіюча сил тертя колодки і шайби

$$F_T = fN.$$

До обох частин системи застосуємо умову рівноваги і складемо два рівняння: для шайби

$$\sum M_0 = 0; \quad F_T' D/2 - Gd/2 = 0;$$

для важеля

$$\Sigma M_A = 0; \quad -Pa + Nb.$$

Розв'яжемо систему трьох рівнянь. З перших двох рівнянь знайдемо N :

$$F_T' = Gd/D = fN, \quad \text{звідки } N = Gd/(fD).$$

Добутий вираз підставимо в третє рівняння:

$$Pa = Nb = [Gd/(fD)] \cdot b.$$

Звідси визначимо відношення a/b :

$$a/b = Gd/(fDP) = 1500 \cdot 0,1/(0,4 \cdot 0,5 \cdot 200) = 3,75.$$

Це — мінімальний результат. Очевидно, що руху не буде, коли

$$a/b \geq 3,75.$$

§ 6.3. Рівновага тіла на похилій площині

Розглянемо тіло, яке лежить на шорсткій похилій площині, що утворює кут α з горизонтальною площиною (рис. 6.5). Розкладемо силу G на складові G_1 і G_2 , паралельну і перпендикулярну до похилої площини. Модулі цих складових визначимо за формулами:

$$G_1 = G \sin \alpha, \quad G_2 = G \cos \alpha.$$

Складова G_2 зрівноважується реакцією N похилої площини. Тому

$$G_2 = N = G \cos \alpha.$$

Складова G_1 намагається зрушити тіло вздовж похилої площини. Ця складова частково або повністю зрівноважується силою тертя; за другим законом тертя ковзання її максимальне значення

$$F_T = fN = fG \cos \alpha,$$

де f — коефіцієнт тертя ковзання тіла по похилій площині. Щоб тіло на похилій площині було в рівновазі, рушійна сила G_1 має дорівнювати за модулем силі тертя F_T , тобто

$$G \sin \alpha = fG \cos \alpha \quad \text{або} \quad \operatorname{tg} \alpha = f = \operatorname{tg} \varphi,$$

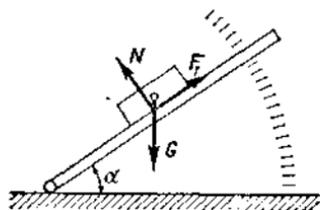
звідки

$$\alpha = \varphi.$$

Якщо кут між похилою площиною і горизонтом дорівнює куту тертя, то тіло, яке лежить на похилій площині, під дією власної сили тяжіння або рівномірно скочатиме вниз, або буде в стані спокою. Щоб тіло, яке лежить на похилій площині, не скочало вниз під дією власної сили тяжіння, має здійснюватись умова

$$\alpha < \varphi.$$

Похилою площиною із змінним кутом нахилу до горизонту користуються для експериментального визначення кута тертя φ і коефіцієнта тертя f (рис. 6.6).



коли $\alpha = \varphi$, $f = \operatorname{tg} \alpha$

Рис. 6.6

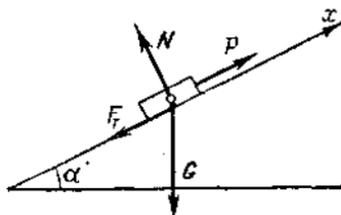


Рис. 6.7

Визначимо модуль сили P , паралельної похилій площині, для випадку рівномірного переміщення тіла вгору по шорсткій похилій площині (рис. 6.7). Для цього спроектуємо сили, які діють на тіло, на вісь x . Складемо рівняння рівноваги:

$$\Sigma X = 0; \quad P - G \sin \alpha - F_T = 0.$$

Оскільки

$$F_T = fG \cos \alpha,$$

то

$$P = G \sin \alpha + fG \cos \alpha.$$

Визначимо модуль горизонтальної сили P , яку можна прикласти до тіла, щоб воно рівномірно переміщувалося вгору по шорсткій похилій площині (рис. 6.8). Використаємо геометричну умову рівноваги плоскої системи збіжних сил (розміри тіла до уваги не беремо) і побудуємо замкнений силівний многокутник, що відповідає рівнянню рівноваги

$$G + P + N + F_T = 0.$$

З трикутника abc маємо

$$P = G \operatorname{tg}(\alpha + \varphi).$$

Такий випадок руху спостерігаємо у взаємному переміщенні гвинта і гайки з прямокутною різьбою, оскільки таку різьбу можна розглядати як похилу площину, кут нахилу якої дорівнює куту підйому гвинтової лінії. Тертя в різьбі трикутного або трапецеїдального профілю подібне до тертя у клинчастому повзуні.

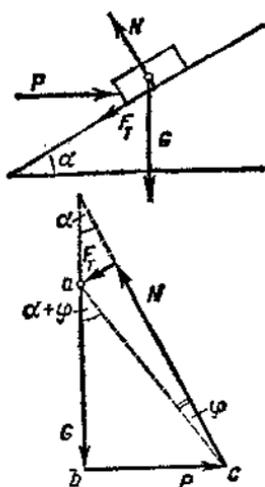


Рис. 6.8

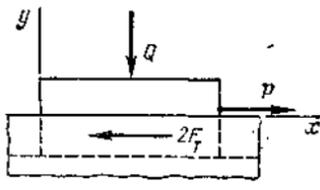
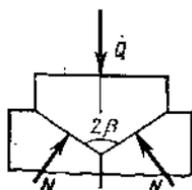


Рис. 6.9

Тому розглянемо клинчастий повзун з кутом загострення 2β , навантажений вертикальною силою Q (рис. 6.9). Визначимо силу P , потрібну для рівномірного переміщення повзуна вздовж горизонтальних напрямних, якщо коефіцієнт тертя ковзання дорівнює f .

Складемо два рівняння рівноваги повзуна:

$$\Sigma X = 0; \quad P - 2F_T = 0;$$

$$\Sigma Y = 0; \quad 2N \sin \beta - Q = 0,$$

де F_T — сила тертя на кожній грані повзуна; N — нормальна реакція напрямної. Розв'язуючи цю систему рівнянь і враховуючи, що $F_T = fN$, дістаємо

$$P = (f/\sin \beta) Q = f'Q,$$

де $f' = f/\sin \beta$ — зведений коефіцієнт тертя. Відповідний йому кут тертя позначимо φ' і назовемо зведеним кутом тертя, тоді

$$f' = \operatorname{tg} \varphi'.$$

Очевидно, що $f' > f$, отже, за інших однакових умов тертя в клинчастому повзуні більше від тертя на площині. Поняття зведеного коефіцієнта тертя умовне, бо його величина змінюється залежно від кута загострення клинчастого повзуна.

Подібно до руху тіла вгору по похилій площині під дією горизонтальної сили для рівномірного переміщення клинчастого повзуна по напрямних, нахилених під кутом α до горизонту, потрібно прикласти горизонтальну силу, яка дорівнює

$$P = Q \operatorname{tg}(\alpha + \varphi').$$

Тертя у кріпильній метричній різьбі подібне до тертя клинчастого повзуна з кутом загострення $2\beta = 120^\circ$, для трапецеїдальної різьби кут $2\beta = 150^\circ$.

Розрахунки з урахуванням тертя у різьбі робитимемо під час вивчення ч. III «Деталі машин».

Найбільший кут, який утворює з горизонтом похила площина силкого тіла, називають кутом природного укосу. Кут природного укосу силкого тіла дорівнює куту тертя між його частинками.

Цей кут треба враховувати, наприклад, під час різних земляних робіт.

§ 6.4 Тертя кочення

Тертям кочення називають тертя руху, за якого швидкості дотичних тіл у точках дотику однакові за величиною і напрямом. Якщо рух двох дотичних тіл відбувається за умов одночасного кочення і ковзання, то виникає тертя кочення з проковзуванням.

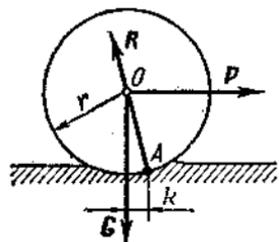


Рис. 6.10

Розглянемо кочення циліндра без ковзання, який має вагу G і радіус r , по горизонтальній опорній площині (рис. 6.10). Під тиском сили G циліндр і опорна площина в місці їх дотикання деформуватимуться. Якщо сила P не діє, то сила G зрівноважуватиметься реакцією R опорної площини і циліндр перебуватиме в стані спокою (реакція R матиме вертикальний напрям).

Якщо до циліндра прикласти невелику силу P , то, як і раніше, він буде в стані спокою. При цьому перерозподіляються тиски на опорну поверхню і повна реакція R пройде через якусь точку A і точку O (відповідно до теореми про рівновагу трьох непаралельних сил).

При якомусь критичному значенні P циліндр почне рухатися, рівномірно перекочуючись по опорній площині, а точка A займе крайнє праве положення. Звідси видно, що сила тертя кочення для стану спокою може змінюватися від нуля до певного максимального значення у момент початку руху. Позначимо k максимальне значення плеча сили G відносно точки A . Тоді для випадку рівномірного перекочування циліндра (тобто рівноваги)

$$\sum M_A(P_i) = 0$$

або

$$-Pr + Gk = 0,$$

причому плече сили P через незначну деформацію тіл дорівнюватиме радіусу r циліндра (сила P — горизонтальна). З останньої рівності визначимо силу, потрібну для рівномірного кочення циліндра:

$$P = kGr.$$

Максимальне значення плеча k називають коефіцієнтом тертя кочення; він має розмірність довжини і виражається в сантиметрах або міліметрах. З добутої формули видно, що зусилля, потрібне для перекочування котка, прямо пропорційне його вазі і обернено пропорційне радіусу котка.

Коефіцієнт тертя кочення визначають дослідом, його значення для різних умов подаються у довідниках. Наводимо орієнтовні значення

коефіцієнт k тертя кочення для котка по площині (см):

М'яка сталь по м'якій сталі	0,005
Загартована сталь по загартованій сталі	0,001
Чавун по чавуну	0,005
Дерево по сталі	0,03—0,04
Дерево по дереву	0,05—0,08
Гумова шина по шосе	0,24

Коефіцієнт тертя кочення практично не залежить від швидкості руху тіла.

У ряді випадків під час розгляду тертя кочення активні і реактивні сили, які діють на коток, зручно зображати інакше (рис. 6.11, а, б).

Розкладемо повну реакцію R опорної поверхні на складові N і F_T , тоді

$$R = N + F_T,$$

де F_T — сила тертя кочення; N — реакція, нормальна до недеформованої опорної площини.

Складемо три рівняння рівноваги котка:

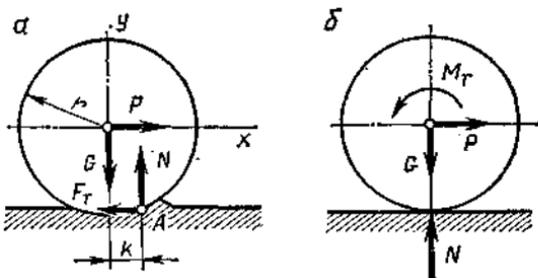


Рис. 6.11

$$\sum X = 0; \quad P - F_T = 0,$$

$$\sum Y = 0; \quad N - G = 0,$$

$$\sum M_A = 0; \quad -Pr + Gk = 0.$$

З цих рівнянь маємо:

$$P = F_T, \quad N = G, \quad Pr = Gk.$$

Позначимо $Pr = M$ — момент кочення, $Gk = M_T$ — момент тертя.

Можливі такі окремі випадки руху котка:

- $M \geq M_T$, але $P < F_T$ — тільки кочення;
- $M < M_T$, але $P > F_T$ — тільки ковзання;
- $M > M_T$, але $P > F_T$ — кочення з проковзуванням;
- $M < M_T$, але $P < F_T$ — стан спокою.

У більшості випадків тертя кочення менше, ніж тертя ковзання, тому замість підшипників ковзання широко застосовують шарикові і роликові підшипники кочення.

У практиці часто поєднується тертя ковзання з тертям кочення, наприклад у зубчастих передачах або в голчастих підшипниках.

§ 6.5. Стійкість проти перекидання

Розглянемо тверде тіло вагою G , яке опирається на площину і може перекидатися навколо якогось ребра під дією горизонтальної сили P (рис. 6.12). Припустимо, що сили P і G лежать в одній площині, яка перетинається з ребром у точці A . У момент початку перекидання на тіло діятимуть також нормальна реакція N_A і сила тертя F_T , прикладені у точці A , причому для випадку рівноваги системи всіх чотирьох сил можна записати два

$$\Sigma Y = 0; \quad N_A - G = 0, \quad \text{звідки } N_A = G;$$

$$\Sigma X = 0; \quad F_T - P = 0, \quad \text{звідки } P = F_T.$$

Отже, в момент початку перекидання на розглядуване тіло діє пара сил $(P; F_T)$, яка намагається перекинути тіло, і пара сил $(G; N_A)$, що протидіє перекиданню.

Очевидно, що тіло не перекидатиметься, коли

$$m(G, N_A) > m(P, F_T) \quad \text{або} \quad Gb > Pa.$$

Добуток Gb дорівнює моменту сили G відносно точки A і називається моментом стійкості. Момент сили P відносно тієї самої точки, який дорівнює добутку Pa , називається перекидним моментом. Умову стійкості проти перекидання можна записати у вигляді нерівності

$$M_{\text{ст}} > M_{\text{п}}$$

і сформулювати так: *для стійкості твердого тіла проти перекидання необхідно і достатньо, щоб момент стійкості був більшим від перекидного моменту.*

Коли на тіло діє кілька сил, які намагаються перекинути його, то перекидний момент дорівнює сумі моментів сил відносно точки, навколо якої може статися перекидання. Те саме стосується і моменту стійкості. Відношення моменту стійкості до перекидного моменту називають коефіцієнтом стійкості:

$$M_{\text{ст}}/M_{\text{п}} = k_{\text{ст}}$$

Очевидно, що для споруд має бути $k_{\text{ст}} > 1$. Розрахунок стійкості особливо важливий для високих споруд, наприклад, димарів, шогл, кранів, високих стін і т. д. Зазначимо, що для випадку, коли $P > F_T$, а перекидний момент менший від моменту стійкості, тіло сквозатиме по опорній площині, якщо конструкція допускає такий рух.

Розділ VII

ПРОСТОРОВА СИСТЕМА СИЛ

Систему сил, лінії дії яких лежать у різних площинах, називають *просторовою системою сил*.

§ 7.1. Просторова система збіжних сил

Просторову систему сил називають *збіжною*, якщо лінії дії сил системи перетинаються в одній точці.

Теорема. *Просторова система збіжних сил еквівалентна рівнодіючій, яка дорівнює векторній сумі цих сил; лінія дії рівнодіючої проходить через точку перетину ліній дії складових сил.*

Нехай дано просторову систему n збіжних сил $(P_1, P_2, P_3, \dots, P_n)$. На підставі висновку з аксіом III і IV перенесемо всі сили системи вздовж ліній дії у точку їх перетину. Потім відповідно до аксіоми паралелограма сил додамо сили P_1 і P_2 . Тоді дістанемо рівнодіючу

$$R_1 = P_1 + P_2.$$

Додавши до цієї рівнодіючої силу P_3 , дістанемо рівнодіючу трьох сил:

$$R_2 = R_1 + P_3 = P_1 + P_2 + P_3.$$

Повторивши таке додавання $n - 1$ разів, знайдемо рівнодіючу системи n сил, яка дорівнюватиме векторній сумі цих сил; лінія дії рівнодіючої проходитьиме через точку перетину ліній дії складових:

$$R = P_1 + P_2 + P_3 + \dots + P_n, \text{ або } R = \Sigma P_i.$$

Силовий многокутник просторової системи сил не лежить в одній площині, тому геометричний і графічний способи знаходження рівнодіючої непридатні. Тут застосовують аналitичний спосіб (метод проєкцій).

§ 7.2. Проекція сили на вісь, коли вісь і сила не лежать в одній площині

Означення проєкції сили на вісь залишається попереднім (див. § 2.3).

Якщо сила і вісь не лежать в одній площині, то проєктуючі перпендикуляри також не лежать в одній площині (рис. 7.1).

Щоб визначити, чому дорівнює проєкція сили P на вісь Ox , треба уявно провести через початок або кінець сили вісь O_1x_1 , паралельну даній осі Ox , тоді $P_x = P \cos \alpha$, бо $P_x = P_{x_1}$.

Правило знаків для проєкцій залишається попереднім.

Якщо вектор сили паралельний осі, то він проєктується на цю вісь у натуральну величину.

Якщо вектор сили лежить у площині, перпендикулярній до осі, то його проєкція на цю вісь дорівнює нулю.

§ 7.3. Розкладання сили на три осі координат

Нехай дано силу P (рис. 7.2). Візьмемо систему координат так, щоб початок координат збігався з початком вектора сили P . З кінця цього вектора опустимо перпендикуляр на площину xy і розкладемо силу P на складові P_{xy} і P_z , а складову P_{xy} — на складові P_x і P_y .

Тоді

$$P = P_x + P_y + P_z.$$

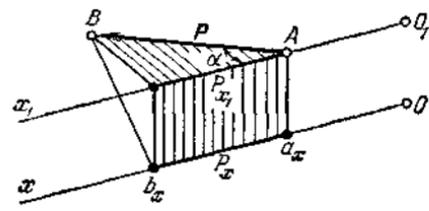


Рис. 7.1

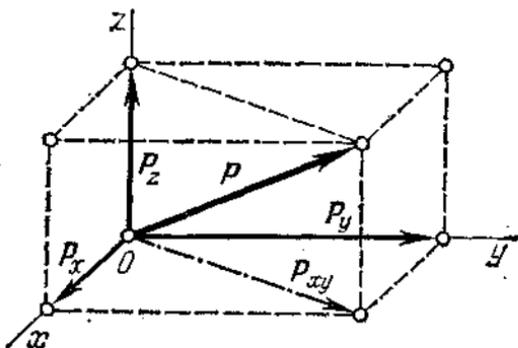


Рис. 7.2

Добудуємо це зображення до паралелепіпеда, в якого складові P_x , P_y , P_z є ребрами, а сила P — діагоналлю.

З викладеного можна зробити висновок: *рівнодіюча трьох взаємно перпендикулярних сил за модулем і напрямом виражається діагоналлю паралелепіпеда, побудованого на цих силах.*

З рис. 7.2 видно, що для випадку розкладання сили P у трьох взаємно перпендикулярних напрямках x , y , z складові P_x , P_y , P_z за модулем дорівнюють проєкціям сили P на ці осі. Позначимо ці проєкції P_x , P_y , P_z . Знаючи проєкції сили на три взаємно перпендикулярні осі координат, можемо визначити модуль і напрям вектора сили за формулами:

модуль сили

$$P = \sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2},$$

напрямні косинуси

$$\cos(P, x) = \frac{P_x}{P}, \quad \cos(P, y) = \frac{P_y}{P}, \quad \cos(P, z) = \frac{P_z}{P}.$$

§ 7.4. Аналітичний спосіб визначення рівнодіючої просторової системи збіжних сил

Дано просторову систему n збіжних сил. Розмістимо початок координат у точці перетину ліній їх дій і розкладемо кожену силу даної системи на три взаємно перпендикулярні складові, напрямлені по осях координат, попередньо перенісши усі сили вздовж ліній їх дій в одну точку.

Замість даної системи n збіжних сил утворилася еквівалентна їй система $3n$ сил, з яких n сил діє по осі x , n сил — по осі y і n сил — по осі z .

Рівнодіюча сил, напрямлених по осі x , дорівнює їх алгебраїчній сумі. Те саме можна сказати про сили, напрямлені по осях y і z . Отже систему $3n$ сил замінимо еквівалентною їй системою трьох сил R_x , R_y , R_z .

Проєкції сили на три взаємно перпендикулярні осі і складові сили, які напрямлені по цих осях, за модулем однакові, тому

$$R_x = P_{1x} + P_{2x} + P_{3x} + \dots + P_{nx} = \Sigma X,$$

$$R_y = P_{1y} + P_{2y} + P_{3y} + \dots + P_{ny} = \Sigma Y,$$

$$R_z = P_{1z} + P_{2z} + P_{3z} + \dots + P_{nz} = \Sigma Z.$$

Рівнодіюча трьох взаємно перпендикулярних сил за модулем і напрямом виражається діагоналлю паралелепіпеда, побудованого на цих силах; за відомими проєкціями рівнодіючої R_x , R_y , R_z можна визначити модуль і напрям вектора рівнодіючої за формулами:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2},$$

$$\cos(R, x) = \frac{R_x}{R}, \quad \cos(R, y) = \frac{R_y}{R}, \quad \cos(R, z) = \frac{R_z}{R},$$

де

$$R_x = \Sigma X, \quad R_y = \Sigma Y, \quad R_z = \Sigma Z.$$

§ 7.5. Аналітичні умови рівноваги просторової системи збіжних сил

Відомо, що просторова система збіжних сил еквівалентна рівнодійчій. Якщо така система в рівновазі, тобто еквівалентна нулю, то рівнодіюча цієї системи дорівнює нулю, тому й проєкції рівнодіючої дорів-

нюють нулю:

$$(P_1, P_2, P_3, \dots, P_n) = 0;$$

$$R = 0; R_x = 0; R_y = 0; P_z = 0.$$

Звідси випливає умова рівноваги просторової системи збіжних сил:

$$\Sigma X = 0, \Sigma Y = 0, \Sigma Z = 0.$$

Ці умови формуються так: *для рівноваги просторової системи збіжних сил необхідно і достатньо, щоб алгебраїчна сума проєкцій усіх сил на кожну з трьох координатних осей дорівнювала нулю.*

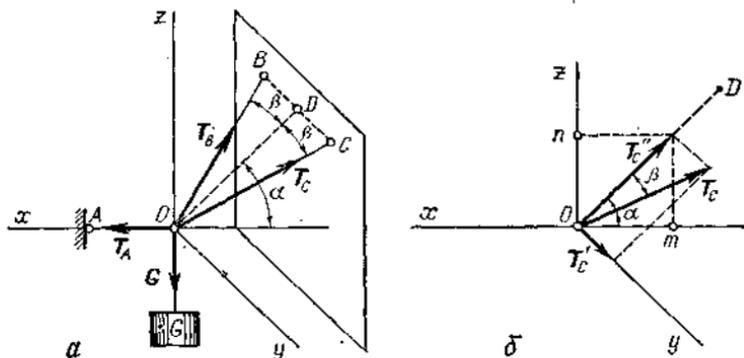


Рис. 7.3

Приклад 7.1. Вантаж $G = 200$ Н утримують у рівновазі горизонтальна вірвочка AO і дві вірвочки BO і CO , площина яких нахилена до горизонтальної площини під кутом $\alpha = 45^\circ$ і утворює з вертикальною площиною, яка проходить через AO , прямий кут (рис. 7.3, а). Вірвочки BO і CO утворюють з цією вертикальною площиною кути $\beta = 30^\circ$. Визначити натяги вірвочок.

Розв'язання. Розглянемо рівновагу вузла O , до якого прикладено чотири сили: G, T_A, T_B, T_C . Застосуємо до просторової системи чотирьох збіжних сил аналітичні умови рівноваги і складемо три рівняння рівноваги:

$$1) \Sigma Y = 0; T_C \sin \beta - T_B \sin \beta = 0,$$

звідки

$$T_C = T_B.$$

Оскільки кути між реакціями T_B, T_C і осями координат x і z невідомі, то для зручності проєктування кожна з цих сил розкладемо на дві складові, як показано на рис. 7.3, б. Тоді

$$T_{Cx} = Om = T'_C \cos \alpha = T_C \cos \beta \cos \alpha,$$

$$T_{Cz} = On = T'_C \sin \alpha = T_C \cos \beta \sin \alpha.$$

Проекції складової T'_C на осі x і z дорівнюють нулю, оскільки ця складова перпендикулярна до вказаних осей;

$$2) \Sigma Z = 0; T_C \cos \beta \sin \alpha + T_B \cos \beta \sin \alpha - G = 0.$$

Враховуючи, що $T_B = T_C$, дістаємо

$$T_B = T_C = \frac{G}{2 \cos \beta \sin \alpha} = \frac{G}{2 \cos 30^\circ \sin 45^\circ} = \frac{200}{2 \cdot 0,866 \cdot 0,707} = 163 \text{ Н};$$

$$3) \Sigma X = 0; T_A - T_C \cos \beta \cos \alpha - T_B \cos \beta \cos \alpha = 0,$$

звідки

$$T_A = 2T_B \cos \beta \cos \alpha = \frac{2G \cos \beta \cos \alpha}{2 \cos \beta \sin \alpha} = G = 200 \text{ Н.}$$

§ 7.6. Момент сили відносно осі

Розглянемо колесо черв'ячної передачі, закріплене на валу, який обертається в підшипниках (рис. 7.4). Черв'як передає черв'ячному колесу зусилля P , що не лежить у площині, перпендикулярній до осі. Розкладемо силу P на три взаємно перпендикулярні складові P_1 , P_2 і P_3 . Складову P_1 назвемо коловим зусиллям, а складову P_2 — осьовим

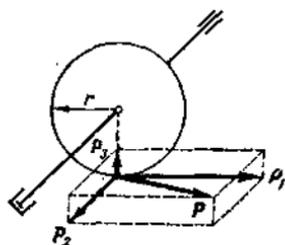


Рис. 7.4

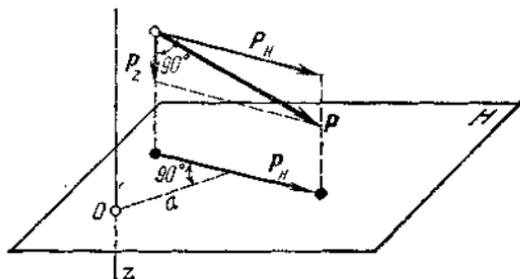


Рис. 7.5

зусиллям, а складову P_3 — радіальним зусиллям. Складову P_1 спричинює обертальну дію, яка вимірюється добутком $P_1 r$; складову P_2 намагається змістити колесо вздовж осі, складову P_3 намагається зігнути вісь колеса, обертальна ж дія цих сил відносно осі дорівнює нулю.

Отже, щоб знайти момент сили відносно осі, треба брати до уваги лише складову P_1 , яка лежить у площині, перпендикулярній до осі, але не перетинає осі. Раніше було встановлено, що проекція вектора сили на вісь є скалярна алгебраїчна величина. На відміну від проекції на вісь, проекція сили на площину є величина векторна, бо ця проекція характеризується не тільки числовим значенням, а й розміщенням на площині, тобто напрямом. Тому моменту сили відносно осі можна дати таке означення: *моментом сили відносно осі називають величину, яка дорівнює моменту проекції цієї сили на площину, перпендикулярну до осі, відносно точки перетину осі з площиною*. Це означення пояснює рис. 7.5. Момент сили відносно осі умовимося записувати так:

$$M_z(P) = P_{Hx}$$

Момент буде додатним, якщо дивитися з додатного кінця осі і сила спричинює обертання проти годинникової стрілки, і навпаки. Момент сили відносно осі не змінюється, якщо силу переміщувати вздовж лінії її дії.

Момент сили відносно осі дорівнює нулю у двох випадках (крім випадків, коли сила дорівнює нулю або діє вздовж осі):

1) якщо вектор сили паралельний осі, оскільки про-

екція сили на площину, перпендикулярну до осі, дорівнює нулю (див. силу P_z на рис. 7.5);

2) якщо лінія дії сили перетинає вісь, бо тоді плече дорівнює нулю (див. силу P_3 на рис. 7.4).

§ 7.7. Аналітичні умови рівноваги просторової системи довільно розміщених сил

Щоб обґрунтувати умови рівноваги просторової системи довільно розміщених сил, потрібно мати відомості з деяких питань, вивчення яких програми технікуму не передбачають, тому прийmemo ці умови без доведення.

Для рівноваги просторової системи довільно розміщених сил необхідно і достатньо, щоб алгебраїчна сума проєкцій усіх сил на кожну з трьох осей координат дорівнювала нулю і щоб алгебраїчна сума моментів усіх сил відносно кожної з цих осей також дорівнювала нулю.

Запишемо умови рівноваги:

$$\Sigma X = 0, \quad \Sigma M_x(P_i) = 0,$$

$$\Sigma Y = 0, \quad \Sigma M_y(P_i) = 0,$$

$$\Sigma Z = 0, \quad \Sigma M_z(P_i) = 0.$$

Пояснимо зміст цих умов. Для цього скористаємось трьома умовами рівноваги плоскої системи довільно розміщених сил:

$$\Sigma X = 0, \quad \Sigma Y = 0, \quad \Sigma M(P_i) = 0.$$

Тіло, яке лежить на площині, має три ступені вільності: можливість переміщуватися в напрямках двох взаємно перпендикулярних осей, що лежать у цій площині, і можливість обертатися навколо осі, перпендикулярної до цієї площини. Якщо до тіла прикладено плоску систему сил за умови, що $\Sigma X = 0$, то воно не переміщуватиметься по осі x , оскільки рівнодіюча системи не має складової, паралельної осі x . За умови, що $\Sigma Y = 0$, тіло не переміщуватиметься і в напрямі осі y , оскільки рівнодіюча системи не має складової, паралельної осі y . І за умови, що $\Sigma M(P_i) = 0$, тобто, що сума моментів відносно будь-якої точки площини дорівнює нулю, тіло не обертатиметься під дією цієї системи сил, бо немає пари сил, яка могла б спричинити це обертання.

Отже, трьом ступеням вільності тіла на площині відповідають три умови рівноваги.

Вільне тіло в просторі має шість ступенів вільності: можливість переміщуватися в напрямках трьох взаємно перпендикулярних осей координат і можливість обертатися навколо цих осей. *Отже, шести ступеням вільності тіла в просторі відповідають шість умов рівноваги.*

Якщо система сил, прикладених до вільного тіла, відповідає усім шести умовам рівноваги, то тіло під дією цієї системи не матиме можливостей трьох переміщень і трьох обертань, воно буде в стані рівноваги.

Неважко показати, що всі виведені тут умови рівноваги для різних систем сил є окремими випадками. Якщо на вільне тіло діє просторова система паралельних сил (наприклад, паралельних осі z), то умови рівноваги цієї системи можна записати так:

$$\Sigma Z = 0, \quad \Sigma M_x(P_i) = 0, \quad \Sigma M_y(P_i) = 0.$$

Решта три умови рівноваги будуть тотожностями, оскільки проекції усіх сил такої системи на осі x і y дорівнюють нулю і моменти усіх сил відносно осі z також дорівнюють нулю.

Через те що умови рівноваги просторової системи сил дійсні для будь-яких прямокутних осей координат, то для розв'язання даної задачі систему координат можна змінювати, тобто частину умов рівноваги скласти для одних осей координат, а частину — для змінених.

Крім того, можна одне, два або усі три рівняння проекцій сил замінити рівняннями моментів сил відносно нових осей координат (див. приклад 7.2). У деяких випадках такі прийоми спростують розв'язання

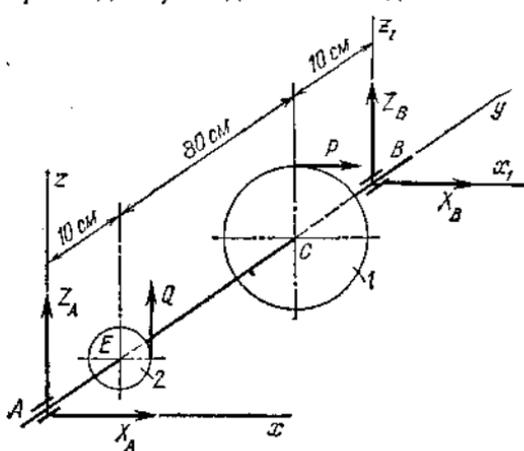


Рис. 7.6

задач. Розв'язуючи задачі, рівняння моментів сил відносно осей у загальному випадку записуватимемо простіше, а саме:

$$\Sigma M_x = 0, \Sigma M_y = 0, \Sigma M_z = 0.$$

Приклад 7.2. На горизонтальний вал AB (рис. 7.6) насаджено зубчасте колесо 1, діаметр якого $D = 2$ м, і шестірню 2, діаметр якої $d = 20$ см. Решту розмірів подано на рисунку. До колеса 1 по дотичній прикладено горизонтальну силу $P = 100$ Н, а до шестірні 2 також по дотичній прикладено вертикальну силу Q . Визначити силу Q і реакції підшипників A і B у стані рівноваги. Масу деталей до уваги не брати.

Розв'язання. Не зважатимемо на підшипники і розглянемо рівновагу вала з зубчастим колесом і шестірнею. Реакції підшипників A і B перпендикулярні до осі вала. Тому розкладемо кожен з цих реакцій на дві взаємно перпендикулярні складові, паралельні осям координат x і z . У результаті вийшло, що до заданої системи тіл прикладено просторову систему шести сил, п'ять з яких, тобто X_A, Z_A, X_B, Z_B, Q , невідомі за модулем.

Застосуємо умови рівноваги просторової системи довільно розміщених сил і складемо п'ять рівнянь рівноваги:

1) $\Sigma M_y = 0; -Qd/2 + PD/2 = 0.$

З цього рівняння

$$Q = PD/d = 100 \cdot 2/0,2 = 1000 \text{ Н} = 1 \text{ кН};$$

2) $\Sigma M_z = 0; -X_B \cdot AB - P \cdot AC = 0.$

З цього рівняння

$$X_B = -P \cdot AC/AB = -100 \cdot 0,9/1,0 = -90 \text{ Н};$$

3) $\Sigma M_x = 0; Q \cdot AE + Z_B \cdot AB = 0.$

З цього рівняння

$$Z_B = -Q \cdot AE/AB = -1000 \cdot 0,1/1,0 = -100 \text{ Н};$$

4) $\Sigma X = 0; X_A + P + X_B = 0.$

З цього рівняння

$$X_A = -P - X_B = -100 - (-90) = -10 \text{ Н};$$

5) $\Sigma Z = 0; Z_A + Q + Z_B = 0.$

З цього рівняння

$$Z_A = -Q - Z_B = -1000 - (-100) = -900 \text{ Н.}$$

Знак мінус перед значеннями реакцій X_A , X_B , Z_A і Z_B показує, що ці реакції мають напрями, протилежні показаним на рисунку. Шоста умова рівноваги $\Sigma Y = 0$ перетворюється на тотожність, бо проекції на вісь y усіх сил розглядуваної системи дорівнюють нулю. Щоб перевірити розв'язок, складемо додаткове, контрольне рівняння моментів відносно осі x_1 , яка проходить через точку B :

$$\Sigma M_{x_1} = 0; \quad -Z_A \cdot AB - Q \cdot BE = 0.$$

Підставивши значення, дістанемо

$$900 \cdot 1,0 - 1000 \cdot 0,9 = 0.$$

Контрольне рівняння перетворюється на тотожність, що й підтверджує правильність знайдених результатів. На цьому прикладі покажемо, що систему координатних осей можна змінити, а рівняння проекцій — замінити рівняннями моментів.

Визначимо реакцію X_A . Для цього, замість рівняння проекцій сил на вісь x , складемо рівняння моментів сил відносно нової осі z_1 , яка проходить через точку B :

$$\Sigma M_{z_1} = 0; \quad X_A \cdot AB + P \cdot CB = 0.$$

З цього рівняння

$$X_A = -P \cdot CB/AB = -100 \cdot 0,1/1,0 = -10 \text{ Н.}$$

Отже, відповідь така сама.

§ 7.8. Теорема про момент рівнодіючої відносно осі (теорема Вариньона)

Теорема. Момент рівнодіючої відносно осі дорівнює алгебраїчній сумі моментів складових сил відносно тієї самої осі.

Нехай дано просторову систему n довільно розміщених сил, прикладених до тіла, і рівнодіючу цієї системи R (рис. 7.7)

$$(P_1, P_2, P_3, \dots, P_n) = R.$$

Прикладемо до тіла іншу систему сил, рівнодіюча якої R' за модулем дорівнює силі R

$$R' = R$$

і напрямлена по тій самій лінії дії у протилежний бік. Сила R' для даної системи є зрівноважувальною силою і разом з даними силами утворює зрівноважену систему

$$(P_1, P_2, P_3, \dots, P_n, R') = 0,$$

також

$$(R, R') = 0.$$

Оскільки обидві записані системи еквівалентні нулю, тобто зрівноважені, то можна застосувати до них будь-яку умову рівноваги, наприклад

$$\Sigma M_x(P_i) = 0.$$

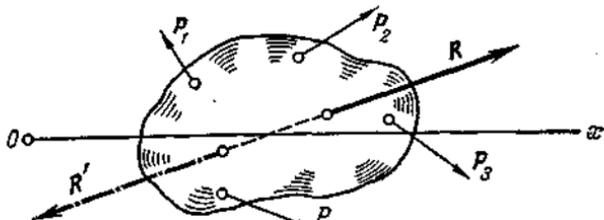


Рис. 7.7

Запишемо цю умову для обох систем:

$$M_x(P_1) + M_x(P_2) + M_x(P_3) + \dots + M_x(P_n) + M_x(R') = 0, \\ M_x(R) + M_x(R') = 0.$$

Оскільки праві частини цих рівностей однакові, то однакові й ліві частини:

$$M_x(P_1) + M_x(P_2) + M_x(P_3) + \dots + M_x(P_n) = M_x(R),$$

бо члени $M_x(R')$ взаємно знищуються. Отже,

$$\Sigma M_x(P_i) = M_x(R).$$

Теорему доведено.

Розділ VIII

ЦЕНТР ВАГИ

§ 8.1. Центр паралельних сил

Центром паралельних сил називають таку точку на лінії дії рівнодіючої системи паралельних сил, через яку проходить рівнодіюча навіть і тоді, коли всі сили системи повернути навколо їх прикладання на такий самий кут, зберігаючи паралельність сил.

Покажемо існування центра паралельних сил на прикладі системи двох сил P_1 і P_2 (рис. 8.1). Відповідно до теореми про додавання двох

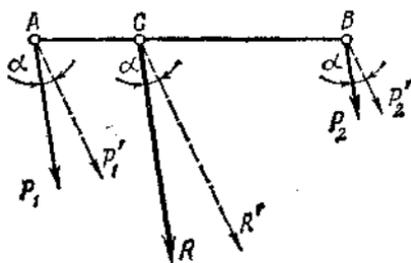


Рис. 8.1

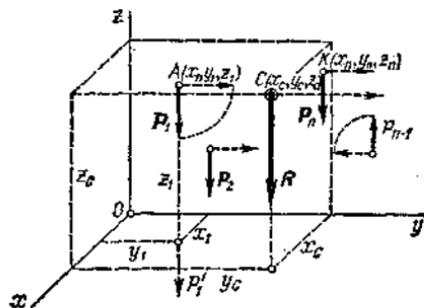


Рис. 8.2

паралельних сил, напрямлених в один бік, знайдемо рівнодіючу R цих сил і лінію її дії:

$$R = P_1 + P_2; \quad P_1/P_2 = BC/AC.$$

Неважко побачити, що точка C , яка лежить на лінії AB , що сполучає точки прикладення даних сил, є центром двох паралельних сил P_1 і P_2 , оскільки від повертання їх на один і той самий кут α відношення пліч BC і CA не зміниться і рівнодіюча також пройде через точку C .

Якщо є система n паралельних сил, то рівнодіючу цієї системи можна знайти, послідовно попарно додаючи усі сили. На лінії дії рівнодіючої системи паралельних сил також буде точка, яка має властивості центра паралельних сил. Знайдемо формули для визначення координат центра системи n паралельних сил.

Нехай дано просторову систему n паралельних сил і рівнодіючу R цієї системи. Візьмемо систему осей координат і відповідно позначимо координати точок прикладання сил даної системи і координати точки прикладання рівнодіючої (рис. 8.2).

Запишемо моменти сил даної системи відносно осі y . Щоб дізнатися, чому дорівнює момент сили відносно осі, треба уявно перенести силу вздовж лінії дії до положення, коли точка прикладання сили буде в площині координатних осей (сила P_1 на рис. 8.2):

$$M_y(P_1) = P_1x_1,$$

$$M_y(P_2) = P_2x_2,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$M_y(P_n) = P_nx_n,$$

$$M_y(R) = Rx_c.$$

Застосуємо доведену в попередньому параграфі теорему про момент рівнодіючої відносно осі. Тоді

$$Rx_c = P_1x_1 + P_2x_2 + P_3x_3 + \dots + P_nx_n,$$

звідки

$$x_c = (P_1x_1 + P_2x_2 + P_3x_3 + \dots + P_nx_n)/R.$$

Записавши моменти сил відносно осі x і знову використавши теорему про момент рівнодіючої, дістанемо

$$y_c = (P_1y_1 + P_2y_2 + P_3y_3 + \dots + P_ny_n)/R.$$

Щоб визначити координату z_c , повернемо всі сили системи навколо їх точок прикладання в один бік так, щоб сили стали паралельними осі y . При цьому точка C не змінить свого місця, бо вона є центром паралельних сил даної системи.

Запишемо моменти усіх сил відносно осі x і застосуємо теорему про момент рівнодіючої, тоді

$$z_c = (P_1z_1 + P_2z_2 + P_3z_3 + \dots + P_nz_n)/R.$$

Рівнодіюча системи паралельних сил дорівнює алгебраїчній сумі їх, тобто $R = \Sigma P_i$. Записуючи скорочено, дістаємо формули для визначення координат центра паралельних сил у такому вигляді:

$$x_c = \Sigma (P_i x_i) / \Sigma P_i,$$

$$y_c = \Sigma (P_i y_i) / \Sigma P_i, \quad z_c = \Sigma (P_i z_i) / \Sigma P_i.$$

Зазначимо, що у цих формулах сили і моменти сил беруть із знаками за вже встановленими правилами.

√ § 8.2. Визначення центра ваги

Силу, з якою тіло притягується до Землі, називають силою тяжіння.

Елементарна частинка тіла — це така мала частинка, розміщення якої у просторі визначається координатами однієї точки. Розглянемо тіло, яке складається з великої кількості елементарних частинок. Сили тяжіння кожної частинки напрямлені до центра Землі і утворюють

систему збіжних сил. Але для малих тіл, порівняно з розмірами Землі, з достатньою точністю можна вважати ці сили системою паралельних сил.

Центром ваги називають центр паралельних сил тяжіння усіх елементарних частинок тіла. Центр ваги — це геометрична точка, яка може лежати й за межами тіла (наприклад, кільце, циліндр з отвором). Координати центра ваги тіла знаходять за тими самими формулами, що й координати центра паралельних сил, а саме:

$$x_C = \Sigma (G_i x_i) / \Sigma G_i, \quad y_C = \Sigma (G_i y_i) / \Sigma G_i, \quad z_C = \Sigma (G_i z_i) / \Sigma G_i,$$

де G_i — сила тяжіння кожної елементарної частинки тіла; x_i, y_i, z_i — координати частинки; ΣG_i — сила тяжіння усього тіла.

Якщо тіла однорідні, то за тими самими формулами можна визначити координати центра ваги об'ємів, площин і ліній. Наприклад, для абсциси x_C матимемо такі формули:

1) сила тяжіння елементарної частинки, виражена через її об'єм V_i , буде

$$G_i = \gamma V_i,$$

де γ — питома сила тяжіння (для однорідного тіла — величина стала). Тоді

$$x_C = \Sigma (G_i x_i) / \Sigma G_i = \gamma \Sigma (V_i x_i) / (\gamma \Sigma V_i),$$

отже, для об'єму

$$x_C = \Sigma (V_i x_i) / \Sigma V_i;$$

2) якщо тіло є однорідною пластинкою завтовшки h , то сила тяжіння елементарної частинки, виражена через площу F_i , буде

$$G_i = \gamma h F_i;$$

тоді

$$x_C = \Sigma (G_i x_i) / \Sigma G_i = \gamma h \Sigma (F_i x_i) / (\gamma h \Sigma F_i),$$

отже, для площі

$$x_C = \Sigma (F_i x_i) / \Sigma F_i;$$

3) якщо тіло є однорідним дротом сталого поперечного перерізу F , то сила тяжіння елементарної частинки, виражена через довжину l_i , буде

$$G_i = \gamma F l_i.$$

Тоді

$$x_C = \Sigma (G_i x_i) / \Sigma G_i = \gamma F \Sigma (l_i x_i) / (\gamma F \Sigma l_i),$$

отже, для лінії

$$x_C = \Sigma (l_i x_i) / \Sigma l_i.$$

8.3. Методи знаходження центра ваги

Розглянемо три методи знаходження центра ваги: метод симетрії, метод розбиття, метод від'ємних мас.

Метод симетрії. Уявимо однорідне тіло, яке має площину симетрії. Візьмемо таку систему координат, щоб осі x і z лежали в площині симетрії (рис. 8.3).

Тоді кожній елементарній частинці з силою тяжіння G_i і абсцисою $y_i = +a$ відповідатиме така сама елементарна частинка з абсцисою $y_i = -a$, тому

$$y_c = \Sigma (G_i y_i) / \Sigma G_i = 0.$$

Звідси випливає висновок: якщо однорідне тіло має площину симетрії, то центр ваги тіла лежить у цій площині. Аналогічно можна довести і такі твердження:

якщо однорідне тіло має вісь симетрії, то центр ваги тіла лежить на цій осі;

якщо однорідне тіло має дві осі симетрії, то його центр ваги лежить у точці їх перетину;

центр ваги однорідного тіла обертання лежить на осі обертання.

Метод розбиття. Цей метод полягає у тому, що тіло розбивають (ділять) на найменшу кількість частин, сили тяжіння і центри ваги яких відомі. Після цього застосовують вже відомі формули.

Припустимо, що тіло, сила тяжіння якого G , розбили на три частини: G' , G'' , G''' . Абсциси центрів ваги цих частин x_c , x_c'' , x_c''' відомі. Використаємо формулу для визначення абсциси центра ваги усього тіла

$$x_c = \Sigma (G_i x_i) / \Sigma G_i$$

і перепишемо її у такому вигляді:

$$x_c \Sigma G_i = \Sigma (G_i x_i) \quad \text{або} \quad G x_c = \Sigma (G_i x_i).$$

Останню рівність запишемо окремо для кожної з трьох частин тіла:

$$G' x_c = \Sigma (G_i x_i); \quad G'' x_c = \Sigma (G_i x_i); \quad G''' x_c = \Sigma (G_i x_i).$$

Додавши праві частини цих трьох рівностей, дістанемо

$$G' x_c + G'' x_c + G''' x_c = \Sigma (G_i x_i) + \Sigma (G_i x_i) + \Sigma (G_i x_i) = \Sigma (G_i x_i).$$

Але права частина цієї рівності є добутком $G x_c$, бо

$$G x_c = \Sigma (G_i x_i),$$

отже,

$$x_c = (G' x_c + G'' x_c + G''' x_c) / G,$$

що й треба було довести. Подібно

$$y_c = (G' y_c + G'' y_c + G''' y_c) / G,$$

$$z_c = (G' z_c + G'' z_c + G''' z_c) / G.$$

Ці формули подібні до формул для визначення координат центрів ваги, знайдених у попередньому параграфі. Тому в початковій формулі можна підставляти не сили тяжіння елементарних частинок G_i , а сили тяжіння кінцевих його частин, координати ж x_i , y_i , z_i можна вважати координатами центрів ваги частин, на які розбито тіло.

Метод вільних мас. Цей метод полягає у тому, що тіло, яке має вільні порожнини, вважають суцільним, масу ж вільних порожнин

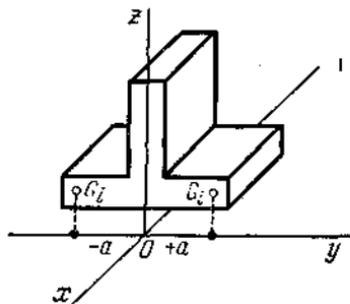


Рис. 8.3

вважають від'ємною. Формули для визначення координат центра ваги тіла залишаються ті самі. Отже, для визначення центра ваги тіла, що має вільні порожнини, треба застосовувати метод розбиття, але масу вільних порожнин вважати від'ємною.

§ 8.4. Центр ваги деяких фігур

Прямокутник. Оскільки прямокутник має дві осі симетрії, то центр ваги його площі лежить у точці перетину цих осей, або інакше, в точці перетину діагоналей прямокутника.

Трикутник. Нехай дано трикутник ABD (рис. 8.4). Розіб'ємо його на елементарні (нескінченно вузькі) смужки, паралельні стороні AD . Центр ваги кожної смужки лежатиме на медіані Bd , отже, на ній лежатиме й центр ваги усієї площі трикутника. Розбивши трикутник на елементарні смужки, паралельні стороні AB , побачимо, що шуканий центр ваги лежить і на медіані aD . А це означає, що центр ваги площі трикутника лежить у точці перетину його медіан. З геометрії відомо, що медіани трикутника перетинаються в одній точці і діляться у відношенні 1 : 2 від основи. З подібності трикутників CNd і BMd знайдемо, що

$$CN = h/3.$$

Отже, центр ваги площі трикутника лежить на відстані третини висоти від кожної основи.

Дуга кола. Візьмемо дугу AB кола радіусом R з центральним кутом 2α (рис. 8.5). Систему координат візьмемо так, щоб початок координат був у центрі кола, а вісь x ділила дугу пополам, тоді

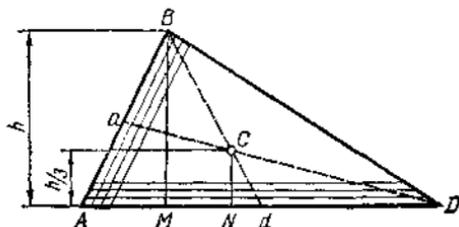


Рис. 8.4

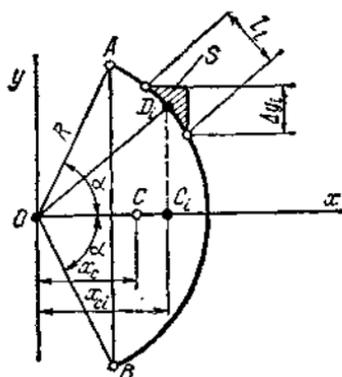


Рис. 8.5

$y_C = 0$, бо дуга симетрична відносно осі x . Визначимо x_C . Розіб'ємо дугу AB на елементарні частинки l_i , одну з яких зображено на рисунку. Тоді, відповідно до § 8.2,

$$x_C = \Sigma (l_i x_{Ci}) / \Sigma l_i.$$

Дугу l_i , як дуже малу, вважатимемо відрізком прямої. З подібності $\Delta OD_i C_i$ й елементарного ΔS (на рисунку заштрихований) знайдемо, що

$$l_i / \Delta y_i = R / x_{Ci} \quad \text{або} \quad l_i x_{Ci} = R \Delta y_i.$$

Тоді

$$x_C = \Sigma (l_i x_{Ci}) / \Sigma l_i = \Sigma (R \Delta y_i) / l = R \Sigma \Delta y_i / l = R \cdot AB / l,$$

оскільки $\Sigma \Delta y_i = AB$, а $\Sigma l_i = l$ — довжина дуги AB . Але $AB = 2R \sin \alpha$, а $l = 2R\alpha$, то

$$x_C = (R \sin \alpha) / \alpha.$$

Коли $\alpha = \pi/2$ рад (півкола), то

$$x_C = 2R/\pi.$$

Круговий сектор. Візьмо сектор радіусом R з центральним кутом 2α (рис. 8.6). Проведемо осі координат, як показано на рисунку, тоді $y_C = 0$. Визначимо x_C . Для цього розіб'ємо сектор на ряд елементарних секторів, кожний з яких має дуже малу дугу l_i і тому може вважатися рівнобедреним трикутником з висотою R . Тоді центр ваги кожного елементарного сектора лежатиме на дузі радіуса $2R/3$ і задача на визначення центра ваги сектора зводиться до визначення центра ваги дуги кола радіуса $2R/3$, отже,

$$x_C = 2R \sin \alpha / (3\alpha).$$

Коли $\alpha = \pi/2$ рад (півкруга), то

$$x_C = 4R / (3\pi).$$

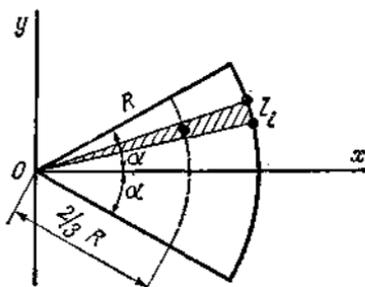


Рис. 8.6

Приклад 8.1. Визначити центр ваги тонкої однорідної пластинки, форму якої і розміри в міліметрах показано на рис. 8.7.

Розв'язання. Візьмо осі координат, як на рис. 8.7. Уявимо, що задана фігура складається з трьох частин: прямокутника 400×500 , півкруга і трикутника, причому площі двох останніх частин вважатимемо від'ємними. Тоді

$$x_C = \frac{F_1 x_1 + F_2 x_2 + F_3 x_3}{F_1 + F_2 + F_3}, \quad y_C = \frac{F_1 y_1 + F_2 y_2 + F_3 y_3}{F_1 + F_2 + F_3},$$

де

$$F_1 = 40 \cdot 50 = 2000 \text{ см}^2; \quad x_1 = 20 \text{ см};$$

$$F_2 = -(\pi/2) \cdot 15^2 = -353 \text{ см}^2; \quad x_2 = (4 \cdot 15)/3\pi = 6,37 \text{ см};$$

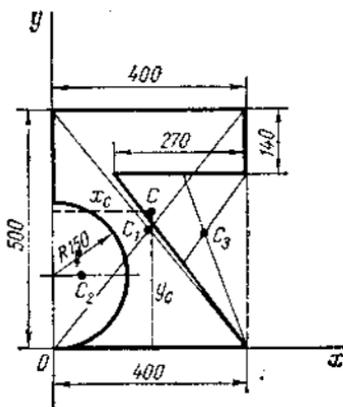


Рис. 8.7

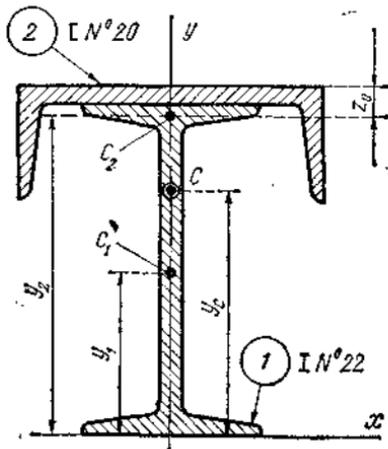


Рис. 8.8

$$F_3 = - (1/3) \cdot 27 \cdot 36 = - 486 \text{ см}^2; \quad x_3 = 13 + (2/3) \cdot 27 = 31 \text{ см};$$

$$y_1 = 25 \text{ см}; \quad y_2 = 15 \text{ см}; \quad y_3 = (2/3) \cdot 36 = 24 \text{ см}.$$

Підставивши значення і зробивши обчислення, дістанемо:

$$x_C = 19,5 \text{ см}, \quad y_C = 28,4 \text{ см}.$$

Приклад 8.2. Визначити центр ваги перерізу, утвореного двотавром № 22 і швелером № 20, як на рис. 8.8.

Розв'язання. З курсу креслення відомо, що номер профілю прокату відповідає найбільшому габаритному розміру його перерізу в сантиметрах.

Оскільки переріз, утворений з двотавра і швелера, є фігура, симетрична відносно осі y , то центр ваги такого перерізу лежить на цій осі, тобто $x_C = 0$. За довідником визначимо площі і координати центрів ваги двотавра 1, швелера 2. Для двотаврового перерізу

$$F_1 = 15,2 \text{ см}^2, \quad y_1 = 22/2 = 11 \text{ см};$$

для швелерного перерізу

$$F_2 = 12 \text{ см}^2; \quad y_2 = 22 + d - z_0 = 22 + 0,32 - 1,25 = 21,07 \text{ см},$$

де d — товщина стінки швелера; z_0 — розмір, який визначає місце центра ваги швелера.

Застосувавши формулу для визначення ординати центра ваги усього перерізу

$$y_C = \frac{\sum (F_i y_i)}{\sum F_i},$$

дістанемо

$$y_C = \frac{F_1 y_1 + F_2 y_2}{F_1 + F_2} = \frac{(15,2 \cdot 11 + 12 \cdot 21,07) 10^{-6}}{(15,2 + 12) 10^{-4}} = 15,4 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 15,4 \text{ см}.$$

Відділ другий

КІНЕМАТИКА

Розділ IX

КІНЕМАТИКА ТОЧКИ

§ 9.1. Основні поняття кінематики і деякі відомості з теорії відносності

К і н е м а т и к а — частина теоретичної механіки, в якій вивчають рух матеріальних тіл без урахування їх мас і діючих на них сил.

Коли в механіці йдеться про рух тіла, то мають на увазі зміну з часом його положення у просторі відносно інших тіл. Звичайно з тілом, відносно якого вивчають рух, зв'язують якусь систему координат, яку разом з вибраним способом вимірювання часу називають **системою відліку**. Коли координати усіх точок тіла у вибраній системі відліку весь час залишаються незмінними, то тіло перебуває у стані спокою. Якщо розглядають рух тіла відносно умовно нерухомої системи відліку, то такий рух називають **абсолютним**; рух тіла відносно рухомої системи відліку називають **відносним**. У навколишньому світі все перебуває в неперервному русі, тому всі рухи є відносними, проте умовно можна уявити собі й абсолютний рух, наприклад рух відносно Землі. Рух тіл відбувається у просторі з плином часу. Простір і час, як і рух, за діалектичним матеріалізмом, суть форми існування матерії.

Класична механіка вважає, що простір і час мають абсолютний, незалежний один від одного характер і що їх властивості не залежать від розподілу і руху матерії.

На початок ХХ ст. знання про властивості матерії значно розширились, внаслідок чого виникли нові уявлення про форми існування матерії, а в 1905—1916 роках Альберт Ейнштейн (1879—1955) створив теорію відносності.

Теорія відносності — це сучасна фізична теорія простору і часу; з нею тісно зв'язані такі поняття, як рух, маса, енергія та ін. В основу теорії відносності покладено принцип сталості швидкості світла, за яким швидкість світла у вакуумі стала і не залежить від швидкості джерела. Теорія відносності, доведена тепер величезною кількістю фактів і застосовувана на практиці, твердить, що простір і час зв'язані між собою в єдину просторово-часову форму існування матерії, що носить абсолютний характер і не залежить від системи відліку. Простір і час окремо — поняття відносні, які залежать від системи відліку, наприклад, від швидкості її руху.

Отже, в теорії відносності поняття довжини тіла і проміжку часу — поняття відносні, що залежать від швидкості руху тіла. Ці залежності визначаються формулами

$$l = l_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}; \quad t = t_0 \sqrt{1 - v^2/c^2},$$

де c — швидкість світла в вакуумі (300 000 км/с); v — швидкість руху тіла; l_0 — поздовжній розмір тіла у стані спокою; t_0 — проміжок часу для стану спокою; l — поздовжній розмір рухомого тіла; t — проміжок часу під час руху тіла за нерухомим годинником.

Виявляється, що в рухомого тіла поздовжні розміри зменшуються, а проміжки часу між двома подіями збільшуються, тобто час уповільнюється. З теорії відносності виходить, що на Землі і на космічній ракеті час плине по-різному, тобто хід будь-якого годинника і перебіг будь-якого біологічного процесу на ракеті відбуваються повільніше, ніж на Землі.

У 1958 р. німецький фізик Месбауер відкрив спосіб виготовлення «ядерного годинника», який вимірював би час з похибкою 10^{-12} с. У 1964 р. професор О. Тулінов (МДУ) відкрив нове фізичне явище, яке назвали «ефект тіней». Якщо до цього відкриття експериментатори вміли вимірювати час з похибкою від 10^{-12} до 10^{-13} с, то за допомогою ефекту тіней можна вимірювати час з похибкою до 10^{-18} с. Досліди показали, що під час швидкого руху хід ядерного годинника дещо уповільнюється.

Проте, з виникненням теорії відносності, класична механіка не втратила свого значення, оскільки для швидкостей руху, значно менших від швидкості світла, результати, які дає класична механіка, майже не відрізняються від результатів механіки теорії відносності і цілком придатні для практики. Класична механіка є окремим (граничним) випадком механіки теорії відносності.

§ 9.2. Основні означення теорії механізмів і машин

Під час вивчення теоретичної механіки, особливо під час розв'язування задач, матимемо справу з новими поняттями, які стосуються теорії механізмів і машин.

Теорія механізмів і машин займається застосуванням законів теоретичної механіки до механізмів і машин.

Теорія механізмів і машин як наука виникла порівняно давно, у XVIII ст. Це і наступне століття ознаменувалися багатьма чудовими винаходами, наприклад парова машина, паровоз, двигун внутрішнього згоряння, літак. Широке використання механізмів і машин у практичній діяльності людини зумовило виникнення нової науки. Основоположником російської школи теорії механізмів і машин був П. Л. Чебишов (1821—1894).

Ознайомимося з основними означеннями теорії механізмів і машин.

Механізмом називають сукупність зв'язаних між собою тіл, які виконують певні рухи. Механізми призначені для передавання або перетворення рухів.

Машина — це механізм або поєднання механізмів, що здійснюють певні цілеспрямовані рухи для перетворення енергії (енергетичні машини), зміни форми, властивостей, стану і місця предмета праці (робочі машини) або для збирання, переробки і використання інформації (інформаційні машини). Отже, будь-яка машина має один або кілька механізмів, проте не всякий механізм є машиною.

Робота механізму чи машини обов'язково супроводжується тим чи іншим рухом її органів; це основний фактор, який відрізняє механізми і машини від споруд — мостів, будинків тощо.

Найпростішою частиною механізму є ланка — тіло або незмінне поєднання тіл. Дві ланки, з'єднані між собою так, що можуть відносно рухатись, називають кінематичною парою. Бувають нижчі і в'їщі кінематичні пари. Ланки нижчих пар дотикаються поверхніми (поступальні, обертальні і гвинтові пари), ланки вищих пар дотикаються лініями і точками (зубчасті пари, підшипники кочення).

Сукупність кінематичних пар називають кінематичним ланцюгом. Кінематичні пари і ланцюги бувають плоскі і просторові. Механізм утворюють з кінематичного ланцюга, закріплюючи одну його ланку. Цю нерухому ланку називають станиною або стояком. Ланку, яка обертається навколо нерухомої осі, називають кривошипом. Ланку, яка коливається навколо нерухомої осі, називають балансиром або коромислом. Ланку, яка робить складні рухи паралельно якійсь площині, називають шатуном. Ланку, яка рухається зворотно-поступально, називають повзунком. Ланку, виготовлену у вигляді рейки з пазом, називають кулісою; у пазу ковзає камінь куліси.

Ланку, якій іззовні надають певного руху, називають ведучою, решту рухомих ланок називають веденими.

Різні ланки і кінематичні пари механізмів мають свої умовні позначення за ГОСТом, які і використано в книжці. Як приклад розглянемо дуже поширений кривошипно-повзунковий механізм, схематично зображений на рис. 9.1. Цей механізм призначений для перетворення обер-

тального руху на зворотно-поступальний (наприклад, у компресорах, поршневих насосах, ексцентрикових і кривошипних пресах) або, навпаки, для перетворення зворотно-поступального руху на обертальний (наприклад, у парових машинах, двигунах внутрішнього згоряння).

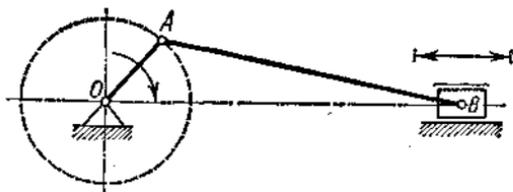


Рис. 9.1

Кривошипно-повзунковий механізм має чотири ланки: кривошип OA , шатун AB , повзун B , станину і чотири кінематичних пари: обертальні пари станина — кривошип, кривошип — шатун, шатун — повзун і поступальну пару повзун — станина. Кривошипно-повзунковий механізм — плоский механізм, його ведучою ланкою є або кривошип, або повзун.

§ 9.3. Способи задання руху точки

Знати закони руху тіла означає знати закони руху кожної його точки, тому вивчення кінематики почнемо з вивчення руху матеріальної точки. Траєкторією точки тіла називають множину (геометричне місце) положень рухомої точки в розглядуваній системі відліку. Залежно від форми траєкторії рух тіла поділяють на прямолінійний і криволінійний. Розглянемо два способи задання руху точки: звичайний і координатний. Звичайний спосіб полягає у тому, що рух точки задають її траєкторією і рівнянням руху по цій траєкторії (законом руху).

Рівняння руху в загальному випадку записують так:

$$s = f(t),$$

де s — відстань точки від початкового положення, що є функцією часу; t — час руху точки від початкового моменту.

Знаючи траєкторію точки і рівняння руху по цій траєкторії, можна визначити положення точки у будь-який момент часу; для цього в рівняння $s = f(t)$ треба підставити час. Рухаючись, точка проходить якийсь шлях, що також є функцією часу. Підкреслимо, що шлях, пройдений точкою, збігається з відстанню від початку відліку тільки тоді, коли точка весь час рухається в одному напрямі і початок її руху збігається з початком відліку.

Координатний спосіб полягає у тому, що рух точки задають рухом її проєкцій вздовж осей координат. Рівняння плоского руху точки у координатному вигляді записують так:

$$x = f(t), \quad y = f_1(t).$$

Знаючи рівняння руху точки, записані у координатному вигляді, і підставляючи в ці рівняння час, можна знайти проєкції точки, а отже, і місце самої точки в будь-який момент часу (рис. 9.2). Щоб за координатним

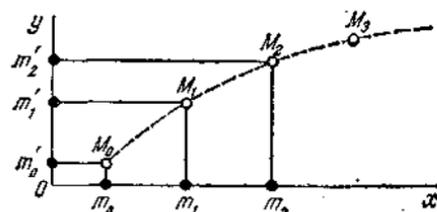


Рис. 9.2

способом задання руху точки визначити рівняння траєкторії $y = f(t)$, з рівнянь руху треба виключити час.

За Міжнародною системою одиниць (СІ) за одиницю довжини беруть метр, а за одиницю часу — секунду.

Приклад 9.1. Кривошип OA обертається навколо нерухомої осі так, що кут $\varphi = 10t$ рад. Довжина $OA = AB = 0,8$ м. Знайти рівняння руху і траєкторію середньої точки M шатуна, а також рівняння руху повзуна B , якщо у початковий момент повзун був у крайньому положенні; осі координат показано на рис. 9.3.

Розв'язання. Визначимо координати точки M залежно від кута φ :

$$x_M = OA \cos \varphi + AM \cos \varphi = 0,8 \cos \varphi + 0,4 \cos \varphi = 1,2 \cos \varphi,$$

$$y_M = MB \sin \varphi = 0,4 \sin \varphi.$$

Отже, рівняння руху точки M можна записати так:

$$x_M = 1,2 \cos 10t, \quad y_M = 0,4 \sin 10t.$$

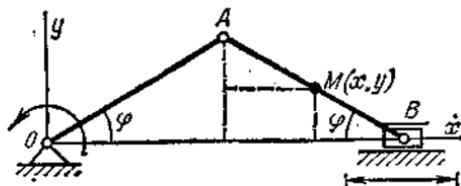


Рис. 9.3

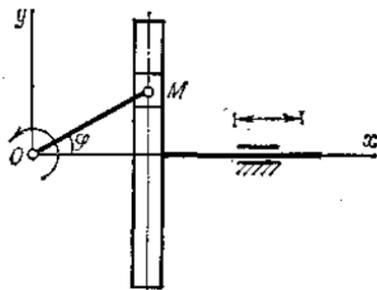


Рис. 9.4

Щоб визначити рівняння траєкторії точки M , виключимо з рівнянь руху час. Перетворимо рівняння руху і піднесемо їх до квадрата:

$$x_M^2/(1,2)^2 = \cos^2 10t, \quad y_M^2/(0,4)^2 = \sin^2 10t.$$

Додавши праві і ліві частини цих рівностей, дістанемо рівняння траєкторії точки M :

$$x_M^2/(1,2)^2 + y_M^2/(0,4)^2 = 1.$$

Точка M рухається по еліпсу з півосями, що мають довжину 1,2 і 1,4 м. Оскільки повзун B рухається прямолінійно вздовж осі x , то

$$y_B = 0.$$

Щоб скласти рівняння руху повзуна, визначимо абсцису точки B залежно від кута φ :

$$x_B = OA \cos \varphi + AB \cos \varphi = 0,8 \cos \varphi + 0,8 \cos \varphi = 1,6 \cos \varphi.$$

Тоді рівняння руху повзуна запишеться:

$$x_B = 1,6 \cos 10t, \text{ м.}$$

Приклад 9.2. Кривошип OM куліси Вольфа рівномірно обертається навколо нерухомої осі O так, що кут $\varphi = (\pi/4)t$ рад (рис. 9.4). Довжина стержня $OM = 0,2$ м. У початковий момент стержень OM утворював з віссю Ox кут $\varphi_0 = 0$. Скласти рівняння руху куліси.

Розв'язання. З конструкції механізму видно, що куліса рухається зворотно-поступально вздовж осі x . Очевидно, що куліса рухатиметься за таким самим законом, за яким рухається проекція точки M на вісь x , отже,

$$x = x_M = OM \cos \varphi = 0,2 \cos (\pi/4)t, \text{ м.}$$

§ 9.4. Швидкість точки

Швидкість — це кінематична міра руху точки, що характеризує бистроту зміни її положення.

Як відомо з фізики, швидкість рівномірного руху вимірюється довжиною шляху, пройденого за одиницю часу:

$$v = s/t = \text{const}$$

(маємо на увазі, що початки відліку шляху і часу збігаються).

Одиниця швидкості

$$[v] = \frac{[s]}{[t]} = \frac{\text{довжина}}{\text{час}} = \text{метр на секунду} = \text{м/с.}$$

Швидкість є величина векторна. Для прямолінійного рівномірного руху швидкість стала як за модулем, так і за напрямом, а її вектор збігається з траєкторією (рис. 9.5, а).

У випадку криволінійного руху швидкість точки за напрямом змінюється. Щоб визначити напрям вектора швидкості для криволінійного руху, розіб'ємо траєкторію на безмежно малі ділянки шляху, які можна вважати (оскільки вони дуже малі) прямолінійними. Тоді на кожній ділянці умовна швидкість v_n такого прямолінійного руху буде напрямлена по хорді. Оскільки Δs прямує до нуля, то хорда збігається з дотичною, тому швидкість у кожний момент часу напрямлена по дотичній до траєкторії в напрямі руху (рис. 9.5, б). Коли точка рухається нерівномірно, то модуль її швидкості змінюється.

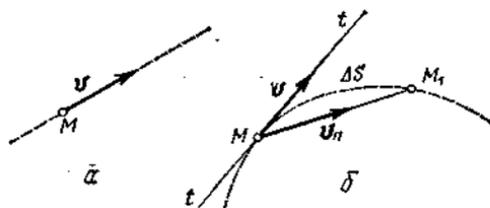


Рис. 9.5

Уявимо точку, рух якої задано звичайним способом рівнянням

$$s = f(t).$$

Якщо за невеликий проміжок часу Δt точка пройшла шлях Δs , то її середня швидкість буде

$$v_c = \Delta s / \Delta t.$$

Але середня швидкість не дає уявлення про дійсну швидкість у кожний момент часу (дійсну швидкість називають миттєвою). Чим менший проміжок часу, за який визначають середню швидкість, тим ближче вона до дійсної.

Дійсна швидкість — це границя, до якої прямує середня швидкість, коли Δt прямує до нуля:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_c = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta s / \Delta t = \frac{ds}{dt}.$$

Отже, числове значення швидкості дорівнює

$$v = \frac{ds}{dt}.$$

Дійсна швидкість для будь-якого руху точки дорівнює першій похідній координати (тобто відстані від початку відліку переміщення) за часом.

Рух, в якому швидкість з часом зростає, називають прискореним; рух, в якому швидкість з часом зменшується, — сповільненим.

Приклад 9.3. Поїзд рухається відповідно до рівняння

$$s = 0,1t^2 + t,$$

де t — в с, s — в м.

Визначити середню швидкість поїзда за проміжок часу між кінцем 10-ї і 20-ї секунд і дійсну швидкість у кінці 20-ї секунди.

Розв'язання. Щоб визначити середню швидкість поїзда, знайдемо приріст часу і шляху за вказаний проміжок часу:

$$\Delta t = t_2 - t_1 = 20 - 10 = 10 \text{ с.}$$

$$\Delta s = s_2 - s_1 = (0,1t_2^2 + t_2) - (0,1t_1^2 + t_1) = 0,1 \cdot 20^2 + 20 - 0,1 \cdot 10^2 - 10 = 40 \text{ м.}$$

Середня швидкість поїзда визначиться так:

$$v_c = \Delta s / \Delta t = 40 / 10 = 4 \text{ м/с.}$$

Щоб знайти дійсну швидкість поїзда, продиференціюємо рівняння руху за часом. У результаті дістанемо формулу, яка виражає залежність дійсної швидкості від часу:

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d(0,1t^2 + t)}{dt} = 0,2t + 1.$$

Підставивши в це рівняння час t_2 , дістанемо значення дійсної швидкості в кінці 20-ї секунди:

$$v_{20} = 0,2t_2 + 1 = 0,2 \cdot 20 + 1 = 5 \text{ м/с.}$$

Нехай точка з положення M , рухаючись нерівномірно, за час Δt перейшла в положення M_1 (рис. 9.5, б). Дугу MM_1 позначимо Δs . Відрізок MM_1 назвемо вектором зміщення точки M . Припустимо, що точка M перейшла за час Δt у положення M_1 , рухаючись по хорді рівномірно, тоді швидкість такого прямолінійного руху буде

$$v_n = MM_1 / \Delta t.$$

Перейдемо до границі, помноживши попередньо чисельник і знаменник правої частини на Δs , і подамо границю добутку як добуток границь:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_n = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{MM_1}{\Delta s} \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t} \right) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{MM_1}{\Delta s} \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Оскільки при Δt , що прямує до нуля, Δs також прямує до нуля, то перша границя (границя відношення хорди до відповідної дуги) дорівнює одиниці. Друга границя дає першу похідну шляху за часом, тобто дійсну швидкість, причому вектор v_n в границі буде напрямлений по дотичній, тобто збігатиметься з вектором дійсної швидкості v . Тому

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_n = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{MM_1}{\Delta t} = v.$$

Отже, границя вектора умовної швидкості v_n , що дорівнює границі відношення вектора зміщення точки до відповідного проміжку часу, якщо останній прямує до нуля, дорівнює вектору дійсної швидкості точки.

Далі, користуючись цим висновком, спрощуватимемо математичну частину доведення деяких теорем.

§ 9.5. Прискорення точки в прямолінійному русі

Прискорення — це кінематична міра зміни вектора швидкості точки. Прискорення — величина векторна. У прямолінійному русі точки вектор швидкості завжди збігається з траєкторією і тому вектор зміни швидкості також збігається з траєкторією. З курсу фізики відомо, що прискорення — це зміна швидкості за одиницю часу. Якщо за невеликий проміжок часу Δt швидкість точки змінилася на Δv , то середнє прискорення

$$a_c = \Delta v / \Delta t.$$

Середнє прискорення не дає уявлення про дійсне прискорення у кожний даний момент часу (дійсне прискорення називають миттєвим). Чим менший проміжок часу, за який визначають середнє прискорення, тим ближче воно до дійсного. Дійсне прискорення — це границя, до якої прямує середнє прискорення при Δt , що прямує до нуля:

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} a_c = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}.$$

Отже, враховуючи, що $v = \frac{ds}{dt}$, дістаємо

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}.$$

Дійсне прискорення в прямолінійному русі дорівнює першій похідній швидкості за часом або другій похідній координати (відстані від початку відліку переміщення) за часом.

Одиниця прискорення

$$[a] = \frac{[v]}{[t]} = \frac{\text{довжина}}{\text{час у квадраті}} = \text{метр на секунду у квадраті} = \text{м/с}^2.$$

Приклад 9.4. Точка рухається прямолінійно за законом $s = t^4 + 2t$ (s — в м, t — в с). Знайти її середнє прискорення у проміжку між моментами $t_1 = 5$ с, $t_2 = 7$ с, а також дійсне значення прискорення в момент $t_3 = 6$ с.

Розв'язання. Спочатку визначимо швидкість точки:

$$v = \frac{ds}{dt} = 4t^3 + 2.$$

Підставляючи сюди замість t його значення $t_1 = 5$ с і $t_2 = 7$ с, знаходимо

$$v_5 = 4 \cdot 5^3 + 2 = 502 \text{ м/с},$$

$$v_7 = 4 \cdot 7^3 + 2 = 1374 \text{ м/с}.$$

Отже, приріст швидкості за даний проміжок часу $\Delta t = 7 - 5 = 2$ с буде

$$\Delta v = v_7 - v_5 = 1374 - 502 = 872 \text{ м/с}.$$

Середнє прискорення точки

$$a_c = \Delta v / \Delta t = 872 / 2 = 436 \text{ м/с}^2.$$

Щоб визначити дійсне прискорення точки, візьмемо похідну від швидкості за часом

$$a = \frac{dv}{dt} = 12t^2.$$

Підставляючи сюди замість t значення $t_3 = 6$ с, дістаємо:

$$a_6 = 12 \cdot 6^2 = 432 \text{ м/с}^2.$$

§ 9.6. Прискорення точки в криволінійному русі

Коли точка рухається по криволінійній траєкторії, то швидкість змінює свій напрям. Уявимо точку M , яка за час Δt , рухаючись по криволінійній траєкторії, перемістилась у положення M_1 (рис. 9.6). Вектор приросту (зміни) швидкості позначимо Δv , тоді

$$\Delta v = v_1 - v.$$

Щоб знайти вектор Δv , перенесемо вектор v_1 у точку M і побудуємо трикутник швидкостей. Знайдемо вектор середнього прискорення:

$$a_c = \frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

Вектор a_c паралельний вектору Δv , оскільки від ділення векторної величини на скалярну напрям вектора не зміниться. Вектор дійсного прискорення — це границя, до якої прямує відношення вектора приросту швидкості до відповідного проміжку часу, коли він прямує до нуля,

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

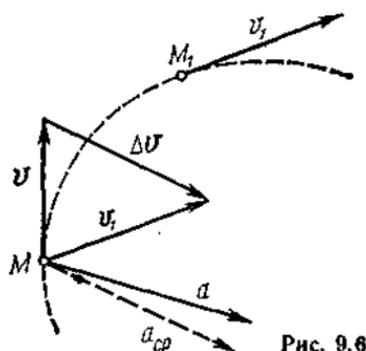


Рис. 9.6

Таку границю називають векторною похідною. Таким чином, дійсне прискорення точки в криволінійному русі дорівнює векторній похідній швидкості за часом. З рис. 9.6 видно, що вектор прискорення в криволінійному русі завжди напрямлений у бік угнутості траєкторії.

Зважаючи на те, що похідну безпосередньо обчислити не можемо, визначатимемо прискорення в криволінійному русі іншим способом. Так, наприклад, якщо рух точки задано звичайним способом, то застосовують теорему про проєкції прискорення на дотичну і нормаль. Цю теорему вивчатимемо, розглянувши спочатку питання про кривизну кривих ліній.

§ 9.7. Відомості про кривизну кривих ліній

Як побачимо в наступному параграфі, прискорення точки в криволінійному русі залежить від ступеня зігнутості її траєкторії, тобто від кривизни траєкторії. Розглянемо криволінійну траєкторію точки M , зображену на рис. 9.7, а. Кут $\Delta\varphi$ між дотичною до кривої у двох сусідніх точках називають кутом суміжності.

Кривизною кривої у даній точці називають границю відношення кута суміжності до відповідної довжини Δs дуги, коли вона прямує до нуля. Позначимо кривизну k , тоді

$$k = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s}.$$

Розглянемо коло радіуса R (рис. 9.7, б). Оскільки

$$\Delta s = R\Delta\varphi,$$

$$k = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{R \Delta \varphi} = \frac{1}{R}.$$

Отже, кривизна кола в усіх точках однакова і дорівнює

$$k = 1/R.$$

Для кожної точки даної кривої можна підібрати таке коло, кривизна якого дорівнює кривизні кривої у даній точці. Радіус ρ такого кола називають **радіусом кривизни** кривої у даній точці, а центр

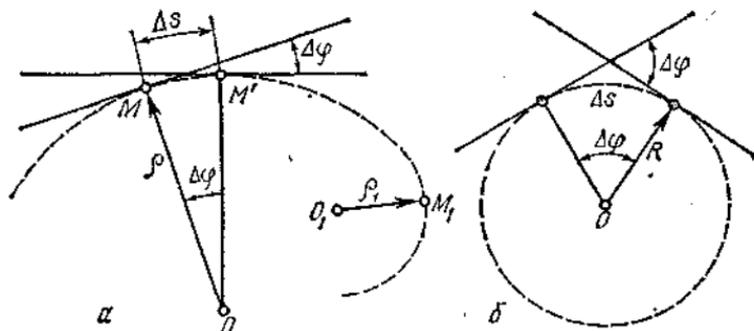


Рис. 9.7

цього кола називають **центром кривизни**. Виходить, що кривизна кривої у даній точці є величина, обернена радіусу кривизни у тій самій точці

$$k = 1/\rho.$$

Очевидно, що кривизна прямої дорівнює нулю, а радіус кривизни дорівнює безмежності:

$$k = 0, \quad \rho = 1/k = \infty.$$

§ 9.8. Теорема про проєкції прискорення на дотичну і нормаль

Проєкцію повного прискорення на нормаль до траєкторії називають **нормальним прискоренням**; проєкцію повного прискорення на дотичну до траєкторії називають **дотичним прискоренням**; його іноді називають ще **тангенціальним**.

Теорема. Нормальне прискорення дорівнює квадрату швидкості, поділеному на радіус кривизни траєкторії у даній точці, дотичне прискорення дорівнює першій похідній швидкості за часом.

Нехай задано плоский рух точки M по траєкторії AB (рис. 9.8). За час Δt точка перемістилась з положення M у положення M_1 і пройшла при цьому шлях $\Delta s = \overset{\frown}{MM_1}$. Вектор приросту швидкості за час Δt дорівнює

$$\Delta v = v_1 - v.$$

Знайдемо вектор середнього прискорення

$$a_c = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

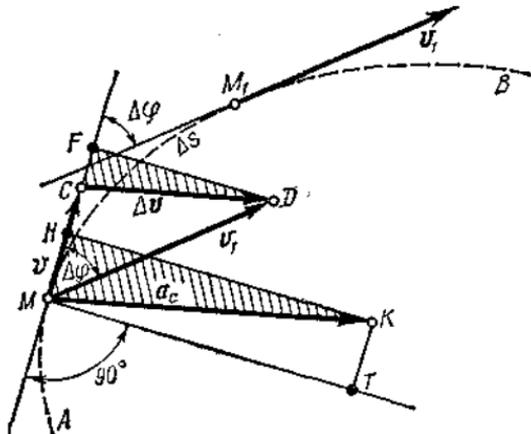


Рис. 9.8

і відкладемо його з точки M паралельно вектору Δv . Спроектуємо вектор a_c на дотичну і нормаль, точку D також спроектуємо на дотичну. Тепер розглянемо подібні трикутники CDF і MKH . З подібності цих трикутників маємо

$$\frac{HK}{FD} = \frac{MH}{CF} = \frac{a_c}{\Delta v} = \frac{\Delta v}{\Delta t \Delta v} = \frac{1}{\Delta t},$$

звідки

$$HK = \frac{FD}{\Delta t}, \quad MH = \frac{CF}{\Delta t}.$$

Перейдемо до границі, коли Δt прямує до нуля (при цьому $\Delta \varphi$ і Δs також прямують до нуля):

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} HK = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{FD}{\Delta t} = a_n \text{ (нормальне прискорення),}$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} MH = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{CF}{\Delta t} = a_t \text{ (дотичне прискорення).}$$

Обчислимо першу границю, коли Δt прямує до нуля:

$$a_n = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{FD}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{v_1 \sin \Delta \varphi}{\Delta t} \right) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(v_1 \frac{\sin \Delta \varphi}{\Delta \varphi} \frac{\Delta \varphi}{\Delta s} \frac{\Delta s}{\Delta t} \right) = \frac{v^2}{\rho},$$

оскільки

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_1 = v, \quad \lim_{\Delta \varphi \rightarrow 0} \frac{\sin \Delta \varphi}{\Delta \varphi} = 1, \quad \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta s} = \frac{1}{\rho}, \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = v.$$

Обчислимо другу границю, коли Δt прямує до нуля:

$$\begin{aligned} a_t &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{CF}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v_1 \cos \Delta \varphi - v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v_1 \left(1 - 2 \sin^2 \frac{\Delta \varphi}{2} \right) - v}{\Delta t} = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{v_1 - v}{\Delta t} - 2 \frac{v_1 \sin^2 \frac{\Delta \varphi}{2}}{\Delta t} \right) = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} - \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(v_1 \frac{\sin \frac{\Delta \varphi}{2}}{\frac{\Delta \varphi}{2}} \cdot \sin \frac{\Delta \varphi}{2} \cdot \frac{\Delta \varphi}{\Delta s} \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t} \right) = \frac{dv}{dt}, \end{aligned}$$

оскільки

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}, \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_1 = v, \quad \lim_{\Delta \varphi \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta \varphi}{2}}{\frac{\Delta \varphi}{2}} = 1,$$

$$\lim_{\Delta \varphi \rightarrow 0} \frac{\sin \Delta \varphi}{2} = 0, \quad \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta s} = \frac{1}{\rho}, \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = v$$

(границя другого доданка дорівнює нулю, бо він є добутком кінцевих величин, помножених на нуль). Отже,

$$a_n = \frac{v^2}{\rho}, \quad a_t = \frac{dv}{dt},$$

і теорему доведено.

Аналізуючи формули дотичного і нормального прискорень, можна побачити, що коли швидкість за модулем не змінюється, то $a_t = \frac{dv}{dt} = 0$; а коли швидкість не змінюється за напрямом (прямолінійний рух), то $a_n = v^2/\infty = 0$. Виходить, що дотичне прискорення характеризує зміну швидкості лише за модулем, а нормальне — лише за напрямом.

Знаючи дотичне і нормальне прискорення, можна визначити модуль і напрям повного прискорення за формулами: модуль прискорення

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2},$$

напрямок прискорення

$$\cos(\alpha, a) = a_t/a.$$

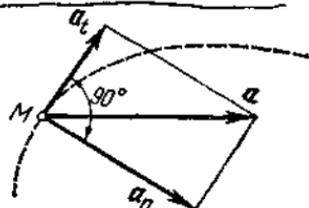


Рис. 9.9

Часто дотичне і нормальне прискорення розглядають не як проекції, а як складові повного прискорення, тобто як векторні величини. З § 2.3 відомо, що коли осі взаємно перпендикулярні, то проекції вектора на ці осі і його складові, напрямлені по цих осях, рівні між собою за модулем. Дотичне, нормальне і повне прискорення показано на рис. 9.9.

Якщо $a_t = \frac{dv}{dt} > 0$, то вектори дотичного прискорення і швидкості напрямлені в один бік і тому рух буде прискореним. А коли $a_t = \frac{dv}{dt} < 0$, то вектор дотичного прискорення має протилежний до швидкості напрям і тому рух буде сповільненим. Вектор нормального прискорення завжди напрямлений до центра кривизни, тому це прискорення називають ще д о ц е н т р о в и м.

Приклад 9.5. Точка обода маховика під час розгону рухається відповідно до рівняння $s = 0,1t^3$ (t — у с; s — у м). Радіус маховика дорівнює 2 м. Визначити нормальне і дотичне прискорення точки в момент, коли її швидкість $v = 30$ м/с.

Р о з в' я з а н н я. Щоб визначити швидкість, обчислимо похідну шляху за часом

$$v = \frac{ds}{dt} = 0,3t^2,$$

звідки

$$t = \sqrt{\frac{v}{0,3}} = \sqrt{\frac{30}{0,3}} = 10 \text{ с.}$$

Для цього моменту потрібно обчислити нормальне і дотичне прискорення точки. Дотичне прискорення знаходимо як похідну швидкості за часом:

$$a_t = \frac{dv}{dt} = 0,6t.$$

Підставимо в вираз для дотичного прискорення значення $t = 10$ с:

$$a_t = 0,6 \cdot 10 = 6 \text{ м/с}^2.$$

Нормальне прискорення точки визначаємо за формулою

$$a_n = v^2/\rho.$$

Для моменту часу $t = 10$ с

$$a_n = 30^2/2 = 450 \text{ м/с}^2.$$

§ 9.9. Види руху точки залежно від прискорень

Аналізуючи знайдені формули дотичного і нормального прискорень, можна зробити такі висновки:

1) $a_t = \frac{dv}{dt} \neq 0$, $a_n = \frac{v^2}{\rho} \neq 0$, рух нерівномірний ($v \neq \text{const}$) криволінійний ($\rho \neq \infty$);

2) $a_t = \frac{dv}{dt} = 0$, $a_n = \frac{v^2}{\rho} \neq 0$, рух рівномірний ($v = \text{const}$) криволінійний ($\rho \neq \infty$);

3) $a_t = \frac{dv}{dt} \neq 0$, $a_n = \frac{v^2}{\rho} = 0$, рух нерівномірний ($v \neq \text{const}$) прямолінійний ($\rho = \infty$);

4) $a_t = \frac{dv}{dt} = \text{const} \neq 0$, рух рівномірний (криволінійний, коли $a_n \neq 0$, прямолінійний, коли $a_n = 0$);

5) $a_t = \frac{dv}{dt} = 0$, $a_n = \frac{v^2}{\rho} = 0$, рух рівномірний прямолінійний — єдиний вид руху без прискорення.

§ 9.10. Формули і графіки рівномірного руху точки

Як уже відомо, під час рівномірного руху дотичне прискорення $a_t = \frac{dv}{dt} = 0$. Отже, модуль швидкості точки в рівномірному русі — величина стала:

$$\frac{ds}{dt} = v = \text{const}.$$

Звідси

$$ds = v \cdot dt.$$

Інтегруючи цей вираз, дістаємо

$$\int_{s_0}^s ds = \int_0^t v \cdot dt, \quad s - s_0 = vt,$$

де s_0 — початкова відстань.

Остаточно формули рівномірного руху точки мають такий вигляд:

$$v = \text{const}, \quad s = s_0 + vt.$$

Графіки швидкості і шляху рівномірного руху показано на рис. 9.10, при цьому мається на

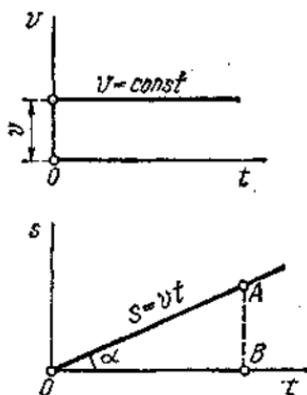


Рис. 9.10

увазі, що $s_0 = 0$. Неважко показати, що швидкість точки під час її рівномірного руху пропорційна тангенсу кута α між прямолінійним графіком цього руху і додатним напрямом осі часу:

$$v = \frac{s}{t} = \frac{\mu_s \cdot AB}{\mu_t \cdot OB} = \frac{\mu_s}{\mu_t} \operatorname{tg} \alpha,$$

де μ_s — масштаб шляху, виражений у м/мм; μ_t — масштаб часу, виражений у с/мм.

Приклад 9.6. Перший штучний супутник, запущений 4 жовтня 1957 р. в СРСР, мав швидкість $v = 8$ км/с і період обертання 1 год 36 хв, або 5760 с. Визначити висоту польоту супутника над поверхнею Землі, вважаючи його орбіту коловою, а рух рівномірним. Радіус Землі взяти $R = 6370$ км.

Розв'язання. Позначимо через r радіус орбіти супутника, проведений із центра Землі; h — шукана висота супутника над поверхнею Землі (рис. 9.11).

Нехай шлях s , який проходить супутник за один період обертання, дорівнює добутку часу T , затраченого на один оберт, на швидкість v руху супутника. З другого боку, той самий шлях дорівнює довжині кола радіуса r .

Тоді

$$s = vT = 2\pi r,$$

звідки

$$r = vT/2\pi = 8 \cdot 10^3 \cdot 5760/2\pi = 7340 \cdot 10^3 \text{ м} = 7340 \text{ км}.$$

Тепер знаходимо висоту польоту:

$$h = r - R = 7340 - 6370 = 970 \text{ км}.$$

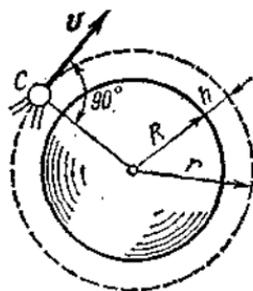


Рис. 9.11

§ 9.11. Формули і графіки рівнозмінного руху точки

Як уже було встановлено, в рівнозмінному русі дотичне прискорення — величина стала:

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = \text{const.}$$

Звідси

$$dv = a_t dt.$$

Інтегруючи цей вираз, дістаємо:

$$\int_{v_0}^v dv = \int_0^t a_t dt, \quad v - v_0 = a_t t,$$

де v_0 — початкова швидкість.

Остаточна формула швидкості

$$v = v_0 + at.$$

Оскільки

$$ds = v dt,$$

то, інтегруючи цей вираз, дістаємо формулу переміщень (відстаней від початкового положення)

$$\int_{s_0}^s ds = \int_0^t (v_0 + at) dt, \quad s - s_0 = v_0 t + at^2/2,$$

де s_0 — початкова відстань. Припускаючи, що $s_0 = 0$, записуємо формули рівнозмінного руху точки:

$$a_t = \text{const}, \quad v = v_0 + a_t t, \quad s = v_0 t + a_t t^2 / 2.$$

Якщо точка рухається криволінійно, то вона має нормальне прискорення

$$a_n = v^2 / \rho,$$

а модуль повного прискорення визначиться за формулою

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}.$$

Коли ж точка рухається прямолінійно, то $a_n = 0$, а повне прискорення дорівнює дотичному: $a = a_t$.

У рівноприскореному русі напрям вектора прискорення збігається з напрямом вектора швидкості; у рівносповільненому русі вектор прискорення напрямлений протилежно до вектора швидкості. Формулу переміщень (відстаней від початку відліку) перетворимо, виключивши з неї час t . Із формули швидкості маємо

$$t = \frac{v - v_0}{a_t},$$

тоді

$$s = v_0 \frac{v - v_0}{a_t} + \frac{a_t}{2} \left(\frac{v - v_0}{a_t} \right)^2.$$

Після перетворень дістанемо

$$s = \frac{v^2 - v_0^2}{2a_t}.$$

У деяких випадках під час розв'язування задач зручно користуватися формулою переміщень рівномірного руху дещо в іншому вигляді. Оскільки

$$s = v_c t, \quad \text{то} \quad s = \frac{v_0 + v}{2} t.$$

Графіки прискорення, швидкості і переміщення точки для прямолінійного рівномірного руху подано на рис. 9.12. Крива переміщень під час рівнозмінного руху є параболою. З вищої математики відомо, що в будь-якій точці графіка функції $y = f(x)$

$$\frac{dy}{dx} = \text{tg } \alpha,$$

де α — кут між дотичною до кривої у даній точці і додатним напрямом осі абсцис.

Застосовуючи це до зображених на рис. 9.12 графіків руху точки і враховуючи масштаби шляху і часу, дістаємо

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{\mu_s}{\mu_t} \text{tg } \alpha_1,$$

де α_1 — кут між дотичною до графіка переміщення і додатним напрямом осі часу; μ_s — масштаб шляху, виражений у м/мм; μ_t — масштаб часу, виражений у с/мм.

З викладеного випливає, що коли дотична до кривої переміщень утворює гострий кут з додатним напрямом осі часу, то в цей момент

швидкість точки додатна; коли ж кут тупий, то швидкість точки в цей момент від'ємна. Якщо дотична в якійсь точці кривої переміщень паралельна осі часу, то швидкість точки в цей момент дорівнює нулю (рис. 9.12).

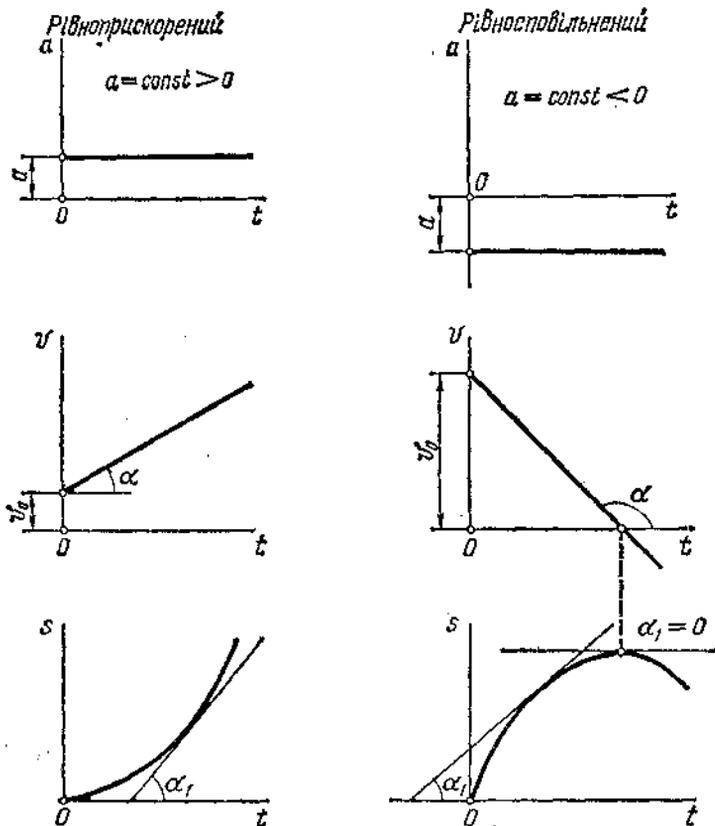


Рис. 9.12

Подібний зв'язок мають графіки швидкості і прискорення прямолінійного руху точки, а саме

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{\mu_v}{\mu_t} \operatorname{tg} \alpha,$$

де α — кут між дотичною до графіка швидкості і додатним напрямом осі часу; μ_p — масштаб швидкості, виражений у (м/с)/мм.

Треба звернути увагу на те, що крива переміщень при рівноприскореному русі має випуклість, напрямлену вниз (друга похідна переміщення за часом додатна), а при рівносповільненому русі — випуклість, напрямлену вгору (друга похідна переміщення за часом від'ємна).

Приклад 9.7. Вагон скочується по похилій площині з прискоренням $a = 0,2 \text{ м/с}^2$. Яку швидкість матиме вагон у кінці похилої, довжина якої 250 м? Початкова швидкість вагона $v_0 = 1 \text{ м/с}$.

Розв'язання. Щоб визначити швидкість руху вагона в кінці похилої площини, візьмемо формулу

$$s = \frac{v^2 - v_0^2}{2a}.$$

З цієї формули знайдемо

$$v^2 = 2as + v_0^2.$$

Підставляючи значення і добуваючи квадратний корінь, дістаємо

$$v = \sqrt{2as + v_0^2} = \sqrt{2 \cdot 0,2 \cdot 250 + 1} = \sqrt{101} = 10,05 \text{ м/с.}$$

§ 9.12. Теорема про проекції швидкості на координатну вісь

Якщо рух точки задано звичайним способом, то її швидкість знаходять як першу похідну переміщення за часом; якщо ж рух точки задано координатним способом, — то за допомогою теореми про проекції швидкості на координатну вісь.

Теорема. *Проекція швидкості на координатну вісь дорівнює першій похідній відповідної координати за часом.*

Нехай плоский рух точки M задано координатним способом рівняннями руху

$$x = f(t), \quad y = f_1(t).$$

За час Δt точка перейшла з положення M у положення M_1 (рис. 9.13). Коли б точка рухалась по хорді рівномірно, то її умовна швидкість дорівнювала б

$$v_n = \frac{MM_1}{\Delta t}.$$

Спроектуємо вектор v_n і точку M на вісь x , тоді

$$\begin{aligned} v_{nx} &= v_n \cos(v_n, x) = \\ &= \frac{MM_1}{\Delta t} \cos(v_n, x). \end{aligned}$$

Оскільки

$$MM_1 \cos(v_n, x) = \Delta x,$$

$$\text{то } v_{nx} = \frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

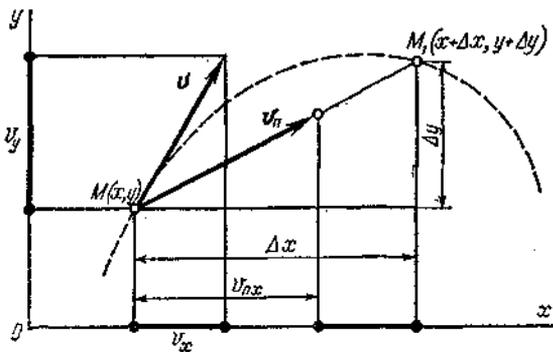


Рис. 9.13

Перейдемо до границі, коли Δt прямує до нуля:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_{nx} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

Через те що швидкість v_n у границі дає дійсну швидкість, то границя, що стоїть у лівій частині рівності, дає проекцію дійсної швидкості на вісь x , а в правій частині є перша похідна від абсциси x за часом, отже,

$$v_x = \frac{dx}{dt}.$$

Теорему доведено. Подібно

$$v_y = \frac{dy}{dt}.$$

Знаючи дві проекції швидкості, можна знайти її модуль і напрям за формулами: модуль швидкості

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2},$$

напрямок швидкості

$$\cos(v, x) = v_x/v.$$

Приклад 9.8. Знайти модуль швидкості середини M шатуна кривошипно-повзункового механізму і швидкості повзуна B , коли $OA = AB = 0,8$ м, а кут $\varphi = \omega t$, де ω — стала величина, а t виражається у секундах (див. рис. 9.3).

Розв'язання. Щоб розв'язати задачу, скористаємось рівняннями руху точки M і повзуна B , знайденими в прикладі 9.1:

$$x_M = 1,2 \cos \varphi = 1,2 \cos \omega t, \text{ м;}$$

$$y_M = 0,4 \sin \varphi = 0,4 \sin \omega t, \text{ м;}$$

$$x_B = 1,6 \cos \varphi = 1,6 \cos \omega t, \text{ м.}$$

Щоб визначити швидкість точки M , використаємо теорему про проекцію швидкості на координатну вісь; тоді матимемо:

$$v_{Mx} = \frac{dx_M}{dt} = -1,2\omega \sin \omega t,$$

$$v_{My} = \frac{dy_M}{dt} = 0,4\omega \cos \omega t.$$

Визначимо модуль швидкості точки M :

$$v_M = \sqrt{v_{Mx}^2 + v_{My}^2} = \sqrt{(1,2\omega \sin \omega t)^2 + (0,4\omega \cos \omega t)^2} = 0,4\omega \sqrt{8 \sin^2 \omega t + 1}, \text{ м/с.}$$

Оскільки повзун B рухається прямолінійно, то для визначення модуля швидкості його руху продиференціюємо рівняння руху за часом. У результаті дістанемо

$$v_B = \frac{dx_B}{dt} = -1,6\omega \sin \omega t, \text{ м/с.}$$

§ 9.13. Теорема про проекцію прискорення на координатну вісь

Якщо рух точки задано звичайним способом, то її прискорення визначають за теоремою про проекцію прискорення на дотичну і нормаль; якщо ж рух точки задано координатним способом, то за допомогою теореми про проекцію прискорення на координатну вісь.

Теорема. *Проекція прискорення на координатну вісь дорівнює другій похідній від відповідної координати за часом.*

З доведеної у попередньому параграфі теоремі видно, що проекція швидкості точки на координатну вісь дорівнює швидкості проекції точки на ту саму вісь.

Ці міркування застосовні й до прискорення точки, тобто проекція прискорення точки на координатну вісь дорівнює прискоренню проекції точки на ту саму вісь. Оскільки проекції точок на осі рухаються прямолінійно, то відповідно до § 9.5

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad a_y = \frac{d^2y}{dt^2}.$$

Знаючи дві проекції прискорення, можна знайти модуль і напрям повного прискорення за формулами: модуль прискорення

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2},$$

напрям прискорення

$$\cos(\alpha, x) = a_x/a.$$

Приклад 9.9. Рух точки визначається рівняннями

$$x = 20t^2 + 5, \quad y = 15t^2 - 3$$

(t — в с; x і y — у м). Знайти модуль і напрям швидкості та прискорення у момент часу $t = 2$ с.

Розв'язання. Щоб знайти модуль і напрям швидкості точки, використаємо теорему про проекцію швидкості на координатну вісь. Продиференціювавши за часом рівняння руху точки, дістанемо

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 40t, \quad v_y = \frac{dy}{dt} = 30t.$$

Модуль швидкості точки визначимо за формулою

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(40t)^2 + (30t)^2} = 50t.$$

Підставивши значення часу $t = 2$ с, дістанемо

$$v_2 = 50 \cdot 2 = 100 \text{ м/с.}$$

Напрямний косинус визначаємо за формулою

$$\cos(v, x) = v_x/v = 40t/(50t) = 0,8.$$

Щоб визначити модуль і напрям прискорення точки, використаємо теорему про проекцію прискорення на координатну вісь. Вдруге продиференціюємо за часом рівняння руху точки, тоді

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = 40, \quad a_y = \frac{d^2y}{dt^2} = 30.$$

Модуль прискорення точки визначимо за формулою

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{40^2 + 30^2} = 50 \text{ м/с}^2.$$

Напрямний косинус визначаємо за формулою

$$\cos(\alpha, x) = a_x/a = 40/50 = 0,8.$$

Кут між векторами v , a і віссю x лежатиме в першій чверті, оскільки

$$\sin(v, x) = \sin(\alpha, x) = 0,6$$

величина додатна. Через те що напрям вектора швидкості в будь-який момент часу залишається незмінним, то рух точки є прямолінійним і повне прискорення її можна визначити за формулою

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d(50t)}{dt} = 50 \text{ м/с}^2.$$

Розділ X

НАЙПРОСТІШІ РУХИ ТВЕРДОГО ТІЛА

Розрізняють два види найпростіших рухів твердого тіла: поступальний і обертальний навколо нерухомої осі.

§ 10.1. Поступальний рух

Рух тіла, під час якого будь-яка пряма, проведена в тілі, залишається паралельною сама собі, називають **поступальним**. Уявленню про поступальний рух можна скласти, спостерігаючи рух вагона трамва на прямолінійній ділянці шляху; поступально рухається стіл поздовж

ньо-стругального верстата, поршень стаціонарного двигуна внутрішнього згоряння тощо.

Теорема. У поступальному русі усі точки твердого тіла мають однакові траєкторії, швидкості і прискорення.

Нехай за час Δt тіло, рухаючись поступально, перемістилося з положення AB у положення A_1B_1 , причому довільна точка A пройшла шлях Δs_A (рис. 10.1), а інша довільна точка B пройшла шлях Δs_B :

$$\sphericalangle AA_1 = \Delta s_A, \quad \sphericalangle BB_1 = \Delta s_B.$$

Сполучимо точки A і A_1 , B і B_1 хордами. Оскільки $AB = A_1B_1$ (тіло тверде) і $AB \parallel A_1B_1$ (рух поступальний), то фігура ABB_1A_1 є паралелограм. Отже, хорда AA_1 дорівнює хорді BB_1 і паралельна їй.

Візьмемо проміжне положення прямої A_2B_2 і сполучимо кінці цього відрізка з точками A і A_1 , B і B_1 , як на рисунку. Подібно можна довести, що вписані ламані AA_2A_1 і BB_2B_1 мають попарно рівні і паралельні сторони. Якщо безмежну кількість разів подвоювати число сторін цих ламаних, то в границі вони дадуть дуги Δs_A і Δs_B . Але через те що ці ламані завжди однакові, то вони однакові й у границі, отже, траєкторії довільних точок A і B будуть однакові:

$$\sphericalangle \Delta s_A = \sphericalangle \Delta s_B.$$

Оскільки точки A і B взято довільно, то траєкторії усіх точок тіла будуть однакові. Доведемо тепер, що швидкості і прискорення точок A і B , а отже, й усіх точок тіла в кожний даний момент часу однакові. Оскільки вектори зміщень точок A і B рівні між собою:

$$AA_1 = BB_1,$$

то, поділивши обидві частини векторної рівності на Δt і перейшовши до границі, коли Δt прямує до нуля, дістанемо

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{AA_1}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{BB_1}{\Delta t}.$$

Відповідно до § 9.4, ці границі дають вектори швидкостей точок, тому

$$v_A = v_B.$$

Перенесемо вектори швидкостей v_{A1} і v_{B1} у точки A і B і знайдемо вектори приросту швидкостей Δv_A і Δv_B . Тепер розглянемо трикутники AMN і BM_1N_1 ; вони конгруентні (рівні), а їх однакові сторони попарно паралельні, тому

$$\Delta v_A = \Delta v_B.$$

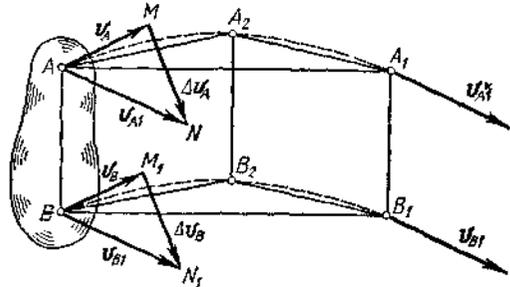


Рис. 10.1

подвійною сумою частин цієї векторної рівності на Δt перенесемо до границі, коли Δt прямує до нуля. Тоді дістанемо

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_A}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_B}{\Delta t}$$

або

$$a_A = a_B.$$

Теорему доведено. Таким чином, *поступальний рух твердого тіла цілком визначається рухом однієї з його точок, а отже, усі формули кінематики точки стосуються тіла, яке рухається поступально.*

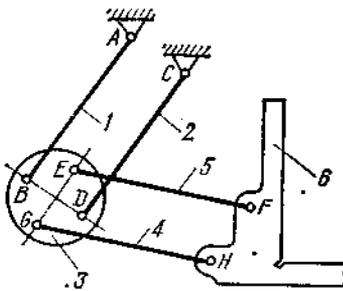


Рис. 10.2

Приклад 10.1. Ланки 1 і 2 механізму креслярського пристрою (10.2) можуть повертатися відносно опор A і C і шарнірно з'єднані з диском 3; диск і лінійка 6 шарнірно з'єднані ланками 4 і 5. Довести, що диск 3 і лінійка 6 можуть рухатися поступально, якщо $AB = CD$, $AC = BD$, $EF = GH$, $EG = FH$.

Розв'язання. Розглянемо чотирикутник $ABCD$. Оскільки його протилежні сторони за умовою попарно однакові, то це паралелограм. Звідси виходить, що при будь-якому переміщенні ланок 1 і 2 сторона BD залишається паралельною нерухомій стороні AC . Тому, відповідно до означення поступального руху, сторона BD і жорстко з'єднані з нею диск можуть переміщуватися лише поступально. Так само поступально може переміщуватися й відрізок EG , жорстко з'єднаний з диском 3.

Далі розглянемо чотирикутник $EFHG$, який за умовою є паралелограмом при будь-якому положенні механізму. Отже, сторона FH рухається так само, як сторона EG , тобто поступально. Очевидно, що й лінійка 6, жорстко з'єднана з стороною FH , також може рухатися лише поступально. У наведеному прикладі вважалося, що ланки механізму є абсолютно твердими тілами.

§ 10.2. Обертання навколо нерухомої осі

Рух, при якому хоча б дві точки твердого тіла чи незмінної системи залишаються нерухомими, називається *обертальним*; пряма, яка сполучає ці дві точки, називається в і с с ю о б е р т а н н я. В означенні обертального руху йдеться про незмінну систему, тому вісь обертання може бути й за межами тіла.

Обертальний рух у техніці — явище дуже поширене. Переважна більшість механізмів і машин мають ланки, які рухаються обертально, наприклад вали, зубчасті колеса, кривошипні тощо. Зазначимо, що поняття обертального руху може стосуватися лише тіла, але не точки; так, наприклад, рух точки по колу — не обертальний рух, а криволінійний.

Розглянемо диск, який обертається навколо осі, перпендикулярної до рисунка 10.3. Точка O — слід цієї осі. Очевидно, що траєкторії точок обертального тіла є кола різних радіусів, розміщені в площинах, перпендикулярних до осі обертання, з центрами, що лежать на цій осі.

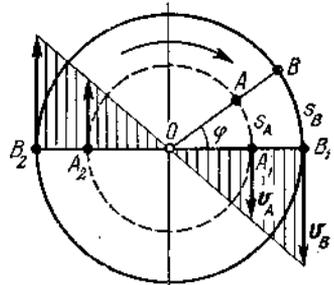


Рис. 10.3

Нехай за час t диск повернувся на кут φ . При цьому точка A пройшла шлях s_A , а точка B — шлях s_B . Оскільки точки, що містяться на різних відстанях від осі обертання, за той самий проміжок часу проходять різні шляхи, то вони мають різні швидкості і прискорення.

Отже, під час обертального руху тіла його точки, що містяться на різних відстанях від осі обертання, мають неоднакові траєкторії, швидкості і прискорення.

Звідси виходить, що лінійне переміщення (шлях), лінійна швидкість і прискорення не можуть характеризувати обертальний рух тіла в цілому. Обертальний рух тіла можна характеризувати кутом φ , на який воно повертається за даний проміжок часу. Цей кут називають кутовим переміщенням тіла. Кутове переміщення виражають у радіанах (рад) або обертах (об); в останньому випадку кутове переміщення позначають N . Щоб установити залежність між кутом φ і N , складемо пропорцію:

$$1 \text{ об} = 2\pi \text{ рад,}$$

$$N \text{ об} = \varphi \text{ рад,}$$

звідки

$$\varphi = 2\pi N \text{ рад,}$$

де N — кількість обертів тіла.

Кутове прискорення тіла є функцією часу, тому закон обертального руху в загальному вигляді можна записати так:

$$\varphi = f(t).$$

З рис. 10.3 видно, що шлях будь-якої точки обертового тіла

$$s = r\varphi,$$

де r — відстань точки від осі обертання.

Швидкість будь-якої точки тіла визначається так:

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d(r\varphi)}{dt} = r \frac{d\varphi}{dt}$$

(r винесли за знак похідної, бо для даної точки твердого тіла ця величина стала). Вираз $\frac{d\varphi}{dt}$ позначимо ω і назовемо кутовою швидкістю.

Кутова швидкість — це кінематична міра руху обертового тіла, яка характеризує швидкість його кутового переміщення:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}.$$

Кутова швидкість дорівнює першій похідній кутового переміщення за часом. Одиниця кутової швидкості

$$[\omega] = \frac{[\varphi]}{[t]} = \frac{\text{плоский кут}}{\text{час}} = \text{радіан на секунду} = \text{рад/с.}$$

Формулу для визначення швидкості будь-якої точки обертового тіла записують так:

$$v = \omega r.$$

Швидкість точки в кожний момент часу прямо пропорційна її відстані від осі обертання, тому графік швидкостей точок, наприклад діаметра

B_1B_2 , матиме вигляд двох трикутників (рис. 10.3). Очевидно, що вектор швидкості точки обертового тіла напрямлений перпендикулярно до радіуса, що з'єднує цю точку з віссю обертання. Якщо точка лежить на поверхні обертового тіла, то її швидкість називають коловою.

У техніці швидкість обертання часто вимірюють в обертах за хвилину, позначають літерою n і називають частотою обертання. Встановимо залежність між кутовою швидкістю і частотою обертання, вираженими відповідно в рад/с і хв⁻¹. Запишемо пропорцію:

$$\begin{aligned} \omega \text{ рад} &= 1 \text{ с}, \\ 2\pi \text{ рад} &= 60 \text{ с}. \end{aligned}$$

З пропорції знайдемо

$$\omega = \pi n / 30 \text{ рад/с},$$

де n — частота обертання тіла, об/хв або хв⁻¹.

Приклад 10.2. Скільки часу (хв) триватиме обточування вала діаметром $d = 180$ мм, завдовжки $l = 1000$ мм, якщо обточування відбувається за один прохід різця; подача різця за один оберт виробу $s_{об} = 0,5$ мм/об, а швидкість різання $v = 135$ м/хв.

Розв'язання. Спочатку визначимо кутову швидкість ω і частоту обертання n вала:

$$\omega = v / (0,5d) = 135 / (0,5 \cdot 0,18 \cdot 60) = 25 \text{ рад/с},$$

$$n = 30\omega / \pi = 30 \cdot 25 / 3,14 = 238 \text{ хв}^{-1}.$$

Тепер знайдемо подачу різця за хвилину:

$$s_{хв} = s_{об} n = 0,5 \cdot 238 = 119 \text{ мм/хв} = 0,119 \text{ м/хв}.$$

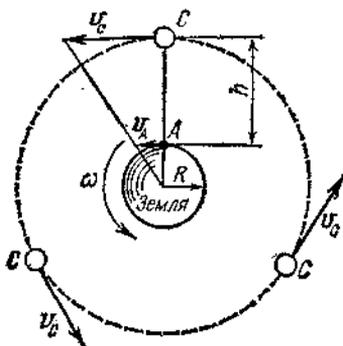


Рис. 10.4

Поділивши довжину оброблюваної поверхні на хвилину подачу різця, знайдемо машинний час, потрібний для обточування вала:

$$t = l / s_{хв} = 1 / 0,119 = 8,4 \text{ хв}.$$

Приклад 10.3. Проект створення світової ретрансляційної системи телебачення ґрунтується на тому, щоб запустити три штучних супутники Землі так, щоб вони утворили рівносторонній трикутник, нерухомий відносно Землі. З якою швидкістю мають рухатись супутники по коловій орбіті, розміщеній у площині екватора, коли відомо, що вони літатимуть на висоті $h = 35\,800$ км? Радіус Землі на екваторі $R = 6370$ км (рис. 10.4). Визначити також колову швидкість точки на екваторі.

Розв'язання. Якщо супутники будуть нерухомими відносно Землі, то можна вважати, що разом з Землею вони складають незмінну систему.

Визначимо колову швидкість v_A точки A , що знаходиться на екваторі Землі, за формулою

$$v_A = \omega R.$$

Кутова швидкість обертання Землі навколо своєї осі

$$\omega = 2\pi / (24 \cdot 60 \cdot 60) = 0,727 \cdot 10^{-4} \text{ рад/с}.$$

Тоді швидкість точки A дорівнюватиме

$$v_A = 0,727 \cdot 10^{-4} \cdot 6370 \cdot 10^3 = 463 \text{ м/с}.$$

Через те що супутники разом з Землею складають незмінну систему, яка обертається навколо земної осі, то швидкості точок цієї системи прямо пропорційні їх відстаням

від осі обертання:

$$v_C/v_A = (R + h)/R.$$

Звідси знаходимо швидкість супутників:

$$v_C = v_A (R + h)/R = 463 (6370 + 35\,800) 10^3 / (6370 \cdot 10^3) = 3060 \text{ м/с}.$$

§ 10.3. Різні види обертального руху

Рівномірний обертальний рух. Якщо тіло обертається навколо нерухомої осі з сталою кутовою швидкістю, то такий рух називають **р і в н о м і р н и м**. Формули рівномірного обертального руху:

$$\omega = \text{const}, \quad \varphi = \omega t.$$

Дотичне, нормальне і повне прискорення будь-якої точки тіла, яке рівномірно обертається, можна записати так:

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d(\omega r)}{dt} = r \frac{d\omega}{dt} = 0,$$

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{\omega^2 r^2}{r} = \omega^2 r,$$

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = a_n = \omega^2 r.$$

Приклад 10.4. Махове колесо обертається рівномірно з кутовою швидкістю 4π рад/с. Скільки обертів зробить колесо за 2 хв?

Розв'язання. Застосуємо формулу рівномірного обертального руху і визначимо кутове прискорення переміщення колеса за час $t = 2 \text{ хв} = 120 \text{ с}$:

$$\varphi = \omega t = 4\pi \cdot 120 = 480\pi \text{ рад}.$$

Тепер знайдемо кількість обертів N тіла за той самий проміжок часу:

$$N = \varphi / (2\pi) = 480\pi / (2\pi) = 240 \text{ об}.$$

Нерівномірний обертальний рух. Якщо кутова швидкість обертового тіла з часом змінюється, то такий рух називають **н е р і в н о м і р н и м**. У загальному вигляді формули нерівномірного обертального руху можна записати так:

$$\varphi = f(t), \quad \omega = \frac{d\varphi}{dt}.$$

Дотичне прискорення будь-якої точки нерівномірного обертального руху тіла визначають так:

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d(\omega r)}{dt} = r \frac{d\omega}{dt}.$$

Вираз $\frac{d\omega}{dt}$ позначають ε і називають **кутовим прискоренням**. Кутове прискорення — це кінематична міра зміни кутової швидкості обертового тіла:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}.$$

Кутове прискорення дорівнює першій похідній кутової швидкості або другій похідній кутового переміщення за часом. Одиниця кутового

прискорення:

$$[\varepsilon] = \frac{[\omega]}{[t]} = \frac{[\varphi]}{[t]^2};$$

$$[\varepsilon] = \frac{\text{плоский кут}}{\text{час у квадраті}} = \text{радіан на секунду в квадраті} = \text{рад/с}^2.$$

Тепер можна записати формулу для визначення дотичного прискорення будь-якої точки нерівномірного руху обертового тіла

$$a_t = \varepsilon r.$$

Нормальне прискорення визначають за такою самою формулою, як і для випадку рівномірного обертання

$$a_n = \omega^2 r.$$

Повне прискорення

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{(\varepsilon r)^2 + (\omega^2 r)^2},$$

звідки

$$a = r \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}.$$

Напрямний тангенс

$$\operatorname{tg}(\alpha, a_n) = a_t/a_n = \varepsilon/\omega^2 r,$$

звідки

$$\operatorname{tg}(\alpha, a_n) = \varepsilon/\omega^2.$$

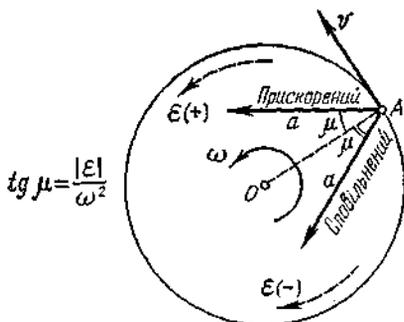


Рис. 10.5

Якщо напрям кутового прискорення збігається з напрямом обертання, то обертальний рух є прискореним, і навпаки (рис. 10.5).

Приклад 10.5. Написати рівняння обертання диска парової турбіни під час пуску, коли відомо, що кут повороту диска пропорційний кубу часу і при $t = 3$ с кутова швидкість дорівнює 27π рад/с.

Розв'язання. Відповідно до умови задачі рівняння обертання диска парової турбіни під час пуску запишемо так:

$$\varphi = bt^3 \text{ рад.}$$

Щоб визначити коефіцієнт пропорційності b , продиференціюємо рівняння обертання диска, в результаті чого дістанемо

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega = \frac{d(bt^3)}{dt} = 3bt^2,$$

звідки

$$b = \omega/(3t^2).$$

Підставивши в це рівняння значення часу і кутової швидкості, матимемо

$$b = 27\pi/(3 \cdot 3^2) = \pi.$$

Отже, рівняння руху диска турбіни має вигляд

$$\varphi = \pi t^3 \text{ рад.}$$

Рівнозмінний обертальний рух. Якщо тіло обертається навколо нерухомої осі з сталим кутовим прискоренням, то такий рух називають рівнозмінним. Формули цього виду обертального руху можна скласти так само, як і для випадку рівнозмінного руху точки, тобто за допомогою інтегрального числення.

Коли тверде тіло обертається навколо нерухомої осі рівномірно, то

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \text{const},$$

звідки

$$d\omega = \varepsilon dt.$$

Інтегруючи цю рівність за t , дістаємо

$$\int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \int_0^t \varepsilon dt,$$

де ω_0 — початкова кутова швидкість. Остаточно формулу кутової швидкості запишемо:

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t.$$

Тепер складемо формулу кутового переміщення. Оскільки за будь-якого обертального руху

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega, \quad d\varphi = \omega dt,$$

то, інтегруючи цю рівність за t , дістаємо

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi = \int_0^t \omega dt = \int_0^t (\omega_0 + \varepsilon t) dt = \int_0^t \omega_0 dt + \int_0^t \varepsilon t dt, \quad \varphi - \varphi_0 = \omega_0 t + \varepsilon t^2/2,$$

де φ_0 — початкове кутове переміщення.

Якщо $\varphi_0 = 0$, то формула кутового переміщення матиме вигляд

$$\varphi = \omega_0 t + \varepsilon t^2/2.$$

Отже, формули рівнозмінного обертального руху твердого тіла запишемо так:

$$\varepsilon = \text{const},$$

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t,$$

$$\varphi = \omega_0 t + \varepsilon t^2/2.$$

З цих формул можна скласти формулу кутового переміщення

$$\varphi = (\omega^2 - \omega_0^2)/2\varepsilon \quad \text{або} \quad \varphi = (\omega_0 + \omega)t/2.$$

Приклад 10.6. В інерційному акумуляторі Уфимцева * маховик обертається в глибокому вакуумі з частотою $20\,000 \text{ хв}^{-1}$. Залишений сам на себе, він продовжує обертатися до повної зупинки протягом двох тижнів. Визначити кутове прискорення маховика, вважаючи його сталим.

Розв'язання. Визначимо початкову кутову швидкість маховика і час обертання:

$$\omega_0 = \pi n/30 = \pi 20\,000/30 \text{ рад/с};$$

$$t = 2 \times 7 \times 86\,400 \text{ с}.$$

* А. Г. Уфимцев (1880—1936), якого О. М. Горький назвав поетом у галузі наукової техніки, побудував у м. Курську вітроелектростанцію з інерційним акумулятором механічної енергії. У лабораторії при кафедрі теоретичної механіки Курського політехнічного інституту в 1973 р було обладнано експериментальний автобус з інерційним акумулятором механічної енергії, що значно економить паливе і зменшує кількість вихлопних газів, які викидаються в атмосферу.

Розділивши початкову кутову швидкість на час, дістанемо кутове прискорення

$$\varepsilon = -\pi \cdot 20\,000 / (30 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 86\,400) = -0,00174 \text{ рад/с}^2.$$

Знак мінус показує, що обертання маховика було сповільненням.

§ 10.4. Порівняння формул кінематики для поступального і обертального рухів

Порівнюючи формули кінематики точки або поступального руху тіла з формулами обертального руху тіла, легко помітити, що основні з цих формул за структурою подібні. Щоб з формул поступального руху дістати формули обертального руху, треба замість лінійного переміщення s підставити кутове переміщення φ , замість лінійної швидкості v — кутову швидкість ω , а замість лінійного прискорення a — кутове прискорення ε .

Формули поступального і обертального рухів зручно порівняти за допомогою табл. 10.1.

Таблиця 10.1

Кінематична міра руху	Характер руху	Вид руху	
		поступальний	обертальний
Переміщення	Нерівномірний Рівномірний Рівнозмінний	$s = f(t)$ $s = vt$ $s = v_0t + at^2/2$	$\varphi = f(t)$ $\varphi = \omega t$ $\varphi = \omega_0t + \varepsilon t^2/2$
Швидкість	Нерівномірний Рівномірний Рівнозмінний	$v = \frac{ds}{dt}$ $v = \text{const}$ $v = v_0 + at$	$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$ $\omega = \text{const}$ $\omega = \omega_0 + \varepsilon t$
Прискорення дотичне	Нерівномірний Рівномірний Рівнозмінний	$a_t = \frac{dv}{dt}$ $a_t = 0$ $a_t = \text{const}$	$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$ $\varepsilon = 0$ $\varepsilon = \text{const}$
Прискорення нормальне		$a_n = v^2/\rho$	$a_n = \omega^2 r$

§ 10.5. Перетворення обертальних рухів

Обертальні рухи перетворюються за допомогою різноманітних механізмів, що їх називають *передачами*.

Найбільш поширеними видами таких механізмів є зубчасті, фрикційні передачі і передачі гнучким зв'язком (наприклад, пасові, канатні, стрічкові, ланцюгові). За допомогою цих механізмів обертальний рух передається від джерела руху (ведучого вала) до приймача руху (веденого вала). Передачі характеризуються *передаточним відношенням* або *передаточним числом*.

Відповідно до ГОСТ 16530—70, передаточним відношенням зубчастої передачі називають відношення кутових швидкостей зубчастих коліс передачі. Передаточне відношення може бути більше, менше від одиниці і дорівнювати одиниці.

Передаточним числом зубчастої передачі називають відношення числа зубів колеса до числа зубів шестірні. Відповідно до ГОСТ передаточне число позначають u .

Оскільки шестірнею називають зубчасте колесо з меншим числом зубів, то передаточне число передачі завжди більше від одиниці або дорівнює їй:

$$u = z_k/z_m \geq 1,$$

де z_k , z_m — числа зубів колеса і шестірні.

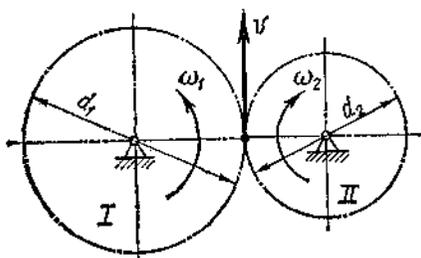


Рис. 10.6

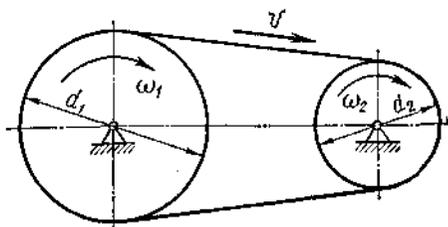


Рис. 10.7

Передаточне число є окремим випадком передаточного відношення, поняття передаточного відношення значно ширше. З метою уніфікації позначень передаточні відношення і передаточні числа всіх передач позначатимемо u , в окремих випадках з подвійним індексом, який відповідає індексам ланок передачі. Отже, передаточне відношення

$$u_{12} = \omega_1/\omega_2 = n_1/n_2; \quad u_{21} = \omega_2/\omega_1 = n_2/n_1.$$

Зазначимо, що індексом 1 позначають ведучу ланку передачі, а індексом 2 — ведену.

Передачу, в якій кутова швидкість веденої ланки менша, ніж кутова швидкість ведучої ланки, називають з н и ж у в а л ь н о ю; у протилежному разі передачу називають п і д в и щ у в а л ь н о ю. У техніці більшого поширення набули зубчасті, пасові і ланцюгові передачі.

Загальні відомості про найпростіші зубчасті передачі, їх основні види, а також про конструктивні елементи зубчастих коліс, рейок і черв'яків подано в курсі креслення. Розглянемо зубчасту передачу, схематично зображену на рис. 10.6.

У місці зачеплення зубчастих коліс I і II швидкості точок першого і другого коліс однакові. Позначивши модуль цієї швидкості v , матимемо

$$v = \omega_1 d_1/2 = \omega_2 d_2/2,$$

отже,

$$u_{12} = \omega_1/\omega_2 = d_2/d_1.$$

З курсу креслення відомо, що діаметр діляльного кола зубчастого колеса дорівнює добутку його модуля на число зубів $d = mz$, тоді для

пари зубчастих коліс

$$u_{12} = \omega_1/\omega_2 = d_2/d_1 = z_2/z_1.$$

Розглянемо пасову передачу, схематично зображену на рис. 10.7. Коли немає проковзування паса по шківу, то

$$v = \omega_1 d_1/2 = \omega_2 d_2/2,$$

тоді для пасової передачі

$$u_{12} = \omega_1/\omega_2 = d_2/d_1.$$

Для ланцюгової передачі

$$u_{12} = \omega_1/\omega_2 = n_1/n_2 = z_2/z_1,$$

де z_1, z_2 — числа зубів ведучої і веденої зірочок передачі.

Різні види передач докладно вивчатимемо в курсі деталей машин.

Приклад 10.7. У механізмі домкрата під час обертання рукоятки *A* обертаються зубчасті колеса 1, 2, 3, 4 і 5, які передають рух до зубчастої рейки *B* домкрата (рис. 10.8). Визначити швидкість рейки, якщо рукоятка *A* робить $n = 30$ хв⁻¹, число зубів коліс: $z_1 = 6, z_2 = 24, z_3 = 8, z_4 = 32$; радіус п'ятого колеса $r = 4$ см.

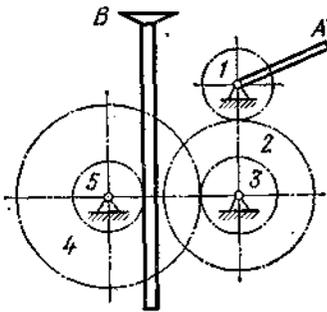


Рис. 10.8

Розв'язання. Для пари зубчастих коліс 1 і 2 передаточне відношення буде

$$u_{12} = \omega_1/\omega_2 = z_2/z_1.$$

Передаточне відношення для пари коліс 3 і 4

$$u_{34} = \omega_3/\omega_4 = z_4/z_3.$$

Перемноживши праві і ліві частини останніх двох рівностей, дістанемо

$$u_{12}u_{34} = (\omega_1/\omega_2)(\omega_3/\omega_4) = (z_2/z_1)(z_4/z_3).$$

Оскільки зубчасті колеса 2 і 3 жорстко насаджені на один вал, то $\omega_2 = \omega_3$ і тому

$$u_{12}u_{34} = \omega_1/\omega_4.$$

Відношення ω_1/ω_4 — це передаточне відношення двох пар зубчастих коліс, зображених на рис. 10.8, а саме

$$u_{14} = u_{12}u_{34} = \omega_1/\omega_4 = (z_2/z_1)(z_4/z_3),$$

тобто *передаточне відношення двох пар зубчастих коліс дорівнює добутку передаточних відношень цих пар коліс.*

Користуючись останньою формулою, визначимо кутову швидкість коліс 4 і 5, що жорстко насаджені на один вал ($\omega_4 = \omega_5$):

$$\omega_4 = \omega_5 = \omega_1 (z_1/z_2)(z_3/z_4).$$

Оскільки $\omega_1 = \pi n/30 = \pi \cdot 30/30 = \pi$ рад/с, то

$$\omega_4 = \omega_5 = \pi (6/24)(8/32) = \pi/16 \text{ рад/с.}$$

Визначимо швидкість рейки *B*:

$$v = \omega_5 r = (\pi/16) 4 \cdot 10^{-2} = 0,78 \cdot 10^{-2} \text{ м/с} = 0,78 \text{ см/с.}$$

§ 11.1. Початкові відомості про складний рух точки

Досі розглядався рух точки відносно однієї системи координат, яку вважали нерухомою. Проте все навколо перебуває у неперервному русі, а нерухомій системі координат насправді не існує. Тому нерідко доводиться розглядати рух точок одночасно відносно двох систем відліку, одну з яких умовно приймають нерухомою, а друга певним способом рухається відносно першої. У такому випадку рух точки називають **складним**.

Рух точки відносно нерухомій системи координат називають **абсолютним**. Рух точки відносно рухомій системи координат називають **відносним**. Рух рухомій системи координат відносно нерухомій називають **переносним**. Абсолютний рух точки складний, він містить у собі відносний і переносний рухи.

Пояснимо це за допомогою рис. 11.1. Нехай xOy — рухома система координат, яка переміщується в площині рисунка рівномірно поступально вздовж осі x ; точка A рівномірно переміщується вгору по осі y . Якщо рух буде лише відносним, то точка перейде з положення A в положення A_1 . Якщо ж рух буде лише переносним, то точка з положення A перейде в положення A_2 . А коли одночасно відбуватимуться від-

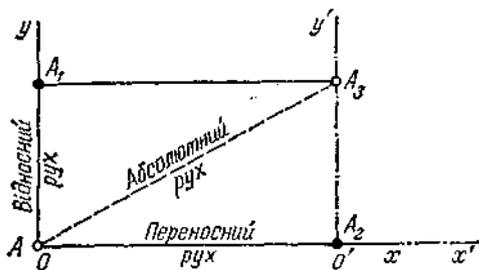


Рис. 11.1

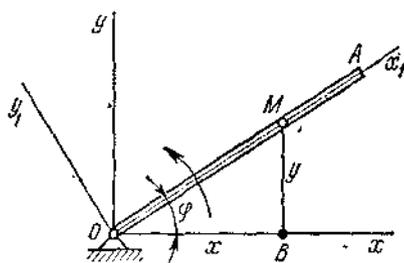


Рис. 11.2

носний і переносний рухи, то точка за той самий проміжок часу перейде з положення A в положення A_3 .

Зважаючи на означення переносного і відносного рухів, а також на розглянутий приклад, можна вибрати такий метод вивчення цих рухів. Якщо треба вивчити відносний рух точки, то потрібно уявно зупинити переносний рух, а коли доводиться вивчати переносний рух, то потрібно уявно зупинити відносний рух.

Приклад 11.1 Стержень OA обертається навколо осі O в площині рисунка за законом $\varphi = bt$; по стержню рухається точка M за законом $OM = at$. Знайти траєкторію абсолютного руху точки M (рис. 11.2)

Розв'язання. Візьмемо нерухома систему координат xOy і рухома систему $x_1O_1y_1$, незмінно зв'язану із стержнем OA . При цьому переносним рухом буде обертання рухомих осей разом з уявно закріпленою на них у кожний момент точкою M навколо точки O а відносним — рух точки M вздовж стержня.

Рівняння переносного обертального руху запишемо так:

$$\varphi = bt.$$

Рівняння відносного руху матиме вигляд

$$x_1 = OM = at.$$

Знайдемо рівняння абсолютного руху точки в координатному вигляді. Для цього координати x і y у нерухомій системі відліку xOy подамо як функції часу t . З рис. 11.2 маємо:

$$x = OB = OM \cos \varphi, \quad y = BM = OM \sin \varphi$$

або, підставляючи значення φ і OM , знаходимо:

$$x = at \cos bt, \quad y = at \sin bt.$$

Щоб скласти рівняння траєкторії абсолютного руху точки, виключимо з рівнянь руху час t . Для цього поділимо друге рівняння на перше:

$$\frac{y}{x} = \frac{at \sin bt}{at \cos bt} = \operatorname{tg} bt, \quad \text{звідки} \quad t = \frac{1}{b} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}.$$

Крім того, підніси до квадрата рівняння руху і додавши їх, дістанемо:

$$x^2 + y^2 = a^2 t^2; \quad x^2 + y^2 = \frac{a^2}{b^2} \operatorname{arctg}^2 \frac{y}{x}.$$

Таке рівняння траєкторії абсолютного руху точки M . Ця траєкторія — архімедова спіраль.

§ 11.2. Теорема про додавання швидкостей

Швидкість точки в абсолютному русі називають а б с о л ю т н о ю. Швидкість точки у відносному русі називають в і д и о с н о ю. Швидкість розглядуваної точки, уявно закріпленої у даний момент на рухомій системі координат, називають переносною. Зв'язок між цими швидкостями визначається теоремою про додавання швидкостей.

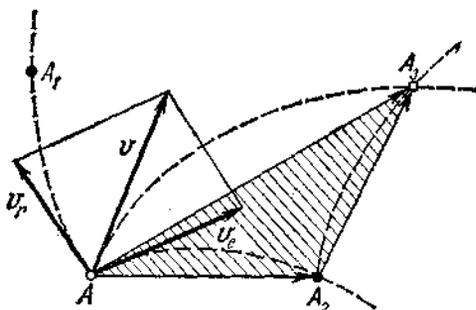


Рис. 11.3

Теорема. Абсолютна швидкість точки дорівнює векторній сумі відносної і переносної швидкостей.

Нехай за час Δt точка перейшла з положення A в положення A_3 , рухаючись по траєкторії абсолютного руху, тобто по дузі AA_3 (рис. 11.3). Коли б рух був лише відносним, то точка перейшла б у положення A_1 ; а коли б рух був лише переносним, то точка перейшла б у положення A_2 .

Можна уявити, що точка з A перейшла в положення A_3 , рухаючись спочатку лише по траєкторії переносного руху (дуга AA_2), а потім лише по траєкторії відносного руху (дуга A_2A_3 , яка дорівнює дузі AA_1).

Сполучивши точки A , A_2 і A_3 хордами, дістанемо таку залежність між векторами зміщень точки A :

$$AA_3 = AA_2 + A_2A_3.$$

Поділимо всі члени рівності на Δt і перейдемо до границі, коли Δt прямує до нуля,

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{AA_3}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{AA_2}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{A_2A_3}{\Delta t},$$

звідси

$$v = v_e + v_r,$$

де v — вектор абсолютної швидкості; v_e — вектор переносної швидкості; v_r — вектор відносної швидкості. Теорему доведено.

Приклад 11.2. Стержень OA (рис. 11.4) обертається у площині рисунка навколо нерухомої точки O за законом $\varphi = t^2$. По стержню рівноприскорено рухається повзун M , віддаляючись від точки O . Рух повзуна визначається рівнянням

$$s = OM = 2 + 2t^2$$

(s — в м, t — в с). Знайти абсолютну швидкість повзуна в момент $t = 1$ с.

Розв'язання. Візьмемо нерухому систему координат xOy ; рухомою системою вважатимемо стержень. Тоді відносним буде рух повзуна M по стержню. Тому відносна швидкість напрямлена вздовж стержня і дорівнює

$$v_r = \frac{ds}{dt} = 4t.$$

У момент $t = 1$ с відносна швидкість за модулем дорівнюватиме $v_{r1} = 4$ м/с.

Переносним буде обертальний рух стержня OA з уявно закріпленим на ньому в даний момент повзунком, тому переносна швидкість v_e повзуна напрямлена перпендикулярно до стержня, а її величина визначається формулою

$$v_e = \omega \cdot OM = \frac{d\varphi}{dt} OM.$$

Оскільки $OM = s = 2 + 2t^2$, а $\frac{d\varphi}{dt} = 2t$, то

$$v_e = 2t(2 + 2t^2).$$

Приймаючи $t = 1$ с, знайдемо $v_{e1} = 8$ м/с. Через те що відносна і переносна швидкості взаємно перпендикулярні, а за теоремою про додавання швидкостей $v = v_r + v_e$, то

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_e^2}.$$

Підставивши значення швидкостей при $t = 1$ с, знайдемо

$$v = \sqrt{v_{r1}^2 + v_{e1}^2} = \sqrt{4^2 + 8^2} = 8,94 \text{ м/с.}$$

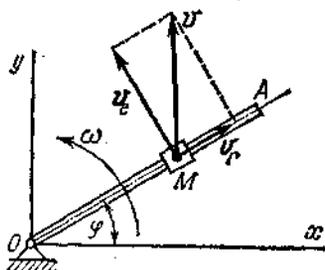


Рис. 11.4

Розділ XII

ПЛОСКОПАРАЛЕЛЬНИЙ РУХ ТВЕРДОГО ТІЛА

§ 12.1. Початкові відомості про плоскопаралельний рух

Плоскопаралельним рухом твердого тіла називають такий рух, в якому всі точки тіла переміщуються в площинах, паралельних якійсь площині, яку називають основою. Прикладами плоскопаралельного руху можуть бути рух колеса на прямолінійній ділянці шляху, рух шатуна кривошипно-повзункового механізму.

З означення плоскопаралельного руху випливає, що будь-яка пряма AB , проведена в тілі перпендикулярно до основної площини, рухається

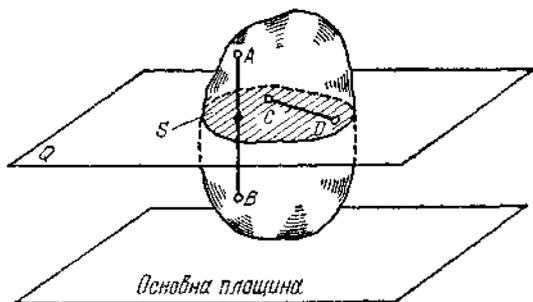


Рис. 12.1

Тому плоскопаралельний рух тіла зводиться до руху відрізка прямої l площини, паралельній основній.

Плоскопаралельний рух вивчають двома методами:

1) методом миттєвих центрів швидкостей і 2) методом розкладання плоскопаралельного руху на поступальний і обертальний.

§ 12.2. Метод миттєвих центрів швидкостей

В основу цього методу покладено таку теорему: *будь-яке плоскопаралельне переміщення твердого тіла можна дістати одним обертанням навколо осі, перпендикулярної до основної площини.*

Нехай відрізок, що визначає плоскопаралельний рух тіла, за скінченний проміжок часу перемістився з положення AB у положення A_1B_1 (рис. 12.2).

Сполучимо точки A і A_1 , B і B_1 прямими і з середин цих відрізків (точок M і N) встановимо перпендикуляри до їх взаємного перетину в точці O . Цю точку сполучимо прямими з кінцями відрізків AB і A_1B_1 і утворимо два конгруентних (рівних) трикутники, що мають спільну вершину O :

$$\triangle AOB = \triangle A_1OB_1.$$

Трикутник AOB суміщається з трикутником A_1OB_1 повертанням на кут φ навколо осі O , яку називають центром кінцевого повороту. Точка O — це слід осі кінцевого повороту, перпендикулярної до основної площини. Отже, відрізок AB , що визначає плоскопаралельний рух тіла, переміщується у будь-яке нове положення одним обертанням навколо осі кінцевого повороту. Теорему доведено.

Це доведення дійсне й для випадку, коли переміщення тіла триватиме нескінченно малий проміжок часу Δt . У границі, коли Δt прямує до нуля, тіло обертатиметься навколо миттєвої осі. Слід миттєвої осі обертання на площині фігури називають миттєвим центром швидкостей. Очевидно, що швидкість точки, яка в даний момент є миттєвим центром швидкостей, дорівнює нулю. Куту швидкість,

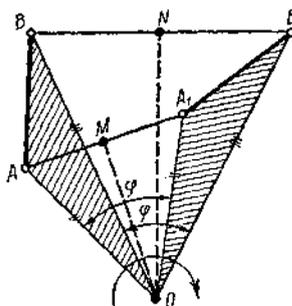


Рис. 12.2

з якою тіло миттєво обертається, називають миттєвою кутовою швидкістю.

Точку нерухомої площини, яка збігається в даний момент з миттєвим центром швидкостей плоскої фігури, називають миттєвим центром обертання. Якщо пряма AB рухається паралельно сама собі, то можна вважати, що тіло обертається навколо нескінченно віддаленої осі, або інакше, поступальний рух можна розглядати як обертальний по колу нескінченно великого радіуса.

Отже, плоскопаралельний рух тіла може відбуватися послідовними миттєвими неперервними поворотами навколо миттєвих осей обертання. Зазначимо, що методом миттєвих центрів швидкостей можна користуватися лише для визначення швидкостей точок плоскої фігури, але не для визначення траєкторій і прискорень цих точок.

§ 12.3. Властивості миттєвого центра швидкостей

Розглядаючи у кожний момент часу складний плоскопаралельний рух як простий — обертальний, можна використовувати для обчислення швидкостей точок твердого тіла всі раніше добуті формули обертального руху. Встановимо такі три властивості миттєвого центра швидкостей, що випливають із закону розподілу швидкостей точок твердого тіла, яке обертається навколо нерухомої осі:

1) швидкість миттєвого центра дорівнює нулю; 2) миттєвий центр лежить на перпендикулярі, опущеному з точки на напрям її швидкості; 3) швидкість точки дорівнює добутку миттєвої кутової швидкості на відстань точки від миттєвого центра швидкостей (рис. 12.3)

$$v_A = \omega \cdot OA.$$

На підставі цих властивостей можна встановити такі п'ять способів визначення положення миттєвого центра швидкостей плоскої фігури:

1. Відомі миттєва кутова швидкість ω і швидкість v_A якоїсь точки A плоскої фігури (рис. 12.3). У цьому випадку миттєвий центр швидкостей O міститься на перпендикулярі, опущеному з точки A на вектор швидкості v_A на відстані $OA = v_A/\omega$.

2. Відомі напрями швидкостей двох точок A і B плоскої фігури (рис. 12.4).

Тоді миттєвий центр O лежить на перетині перпендикулярів, опущених з точок A і B на напрями їх швидкостей, причому

$$\frac{v_A}{v_B} = \frac{\omega \cdot OA}{\omega \cdot OB} = \frac{OA}{OB},$$

тобто швидкості точок плоскої фігури прямо пропорційні їх відстаням від миттєвого центра швидкостей.

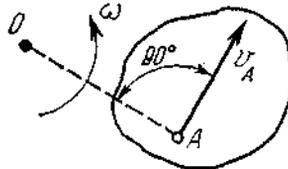


Рис. 12.3

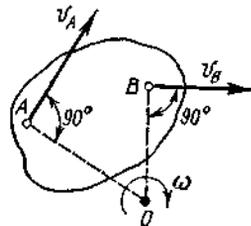


Рис. 12.4

3. Відомо, що швидкості двох точок A і B плоскої фігури паралельні між собою, однаково напрямлені і перпендикулярні до відрізка AB , але різні за модулем (рис. 12.5). Тоді миттєвий центр швидкостей O лежить у точці перетину прямої, яка сполучає початки векторів v_A і v_B з прямою, яка сполучає кінці цих векторів. Якщо вектори швидкостей точок A і B між собою рівні, то миттєвий центр швидкостей у даний момент лежить у нескінченності, миттєва кутова швидкість дорівнює нулю, швидкості усіх точок плоскої фігури будуть однакові і тому рух буде миттєво поступальним.

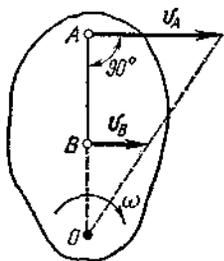


Рис. 12.5

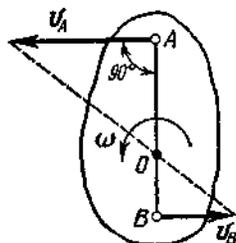


Рис. 12.6

4. Відомо, що швидкості точок A і B плоскої фігури паралельні між собою, мають протилежні напрями і перпендикулярні до відрізка AB (рис. 12.6). У цьому випадку миттєвий центр швидкостей O міститься у точці перетину відрізка AB з прямою, яка сполучає кінці векторів v_A і v_B .

5. Відомо, що плоска фігура котиться без проковзування по нерухомій кривій. Тоді миттєвий центр швидкостей O лежить у точці дотику

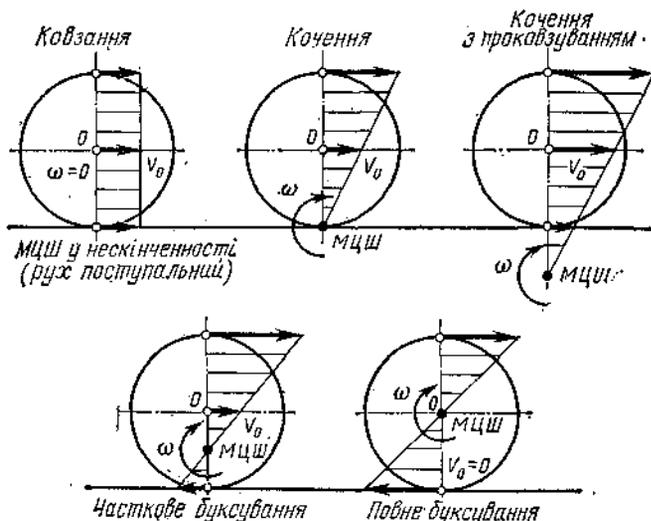


Рис. 12.7

фігури і кривої, оскільки швидкість цієї точки фігури в даний момент дорівнює нулю.

На закінчення розглянемо кочення колеса по прямолінійній рейці за різних умов тертя. На рис. 12.7 показано положення миттєвого центра швидкостей і графіки швидкостей точок вертикального діаметра для випадку тертя ковзання, тертя кочення, тертя кочення з проковзуванням, часткового і повного буксування колеса.

Приклад 12.1. Колесо радіуса R котиться без ковзання по прямолінійній рейці, причому швидкість його центра O дорівнює $v_0 = 2$ м/с (рис. 12.8). Знайти швидкості кінців вертикального і горизонтального діаметрів колеса.

Розв'язання. За умовою колесо котиться без ковзання, тому швидкість точки D дотикання колеса до рейки дорівнює нулю. Отже, точка D є миттєвим центром швидкостей колеса. Знаючи швидкість точки O , знаходимо кутову швидкість ω колеса:

$$\omega = v_0/OD = v_0/R.$$

На підставі властивостей миттєвого центра швидкостей визначаємо модуль швидкостей точок A , B і C колеса:

$$v_A = \omega \cdot AD = \frac{v_0}{R} R \sqrt{2} = 2\sqrt{2} = 2,83 \text{ м/с},$$

$$v_B = \omega \cdot BD = \frac{v_0}{R} 2R = 2 \cdot 2 = 4 \text{ м/с},$$

$$v_C = \omega \cdot CD = \frac{v_0}{R} R \sqrt{2} = 2\sqrt{2} = 2,83 \text{ м/с}.$$

Вектори швидкостей точок A , B і C перпендикулярні до прямих, які сполучають ці точки з миттєвим центром швидкостей.

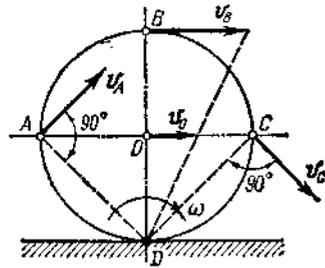


Рис. 12.8

§ 12.4. Розкладання плоскопаралельного руху на поступальний і обертальний

Цей метод ґрунтується на теоремі: *усяке плоскопаралельне переміщення твердого тіла може складатися з одного поступального і одного обертального рухів.*

Нехай за час Δt відрізок AB , що визначає плоскопаралельний рух тіла, перемістився у положення A_1B_1 (рис. 12.9). Припустимо, що відрізок AB спочатку переміщувався лише поступально, причому всі його точки рухалися так само, як точка A . Отже, відрізок перейшов у положення A_1B_2 , після чого його можна перемістити в положення A_1B_1 , рухаючи лише обертально навколо точки A_1 . Звідси видно, що складний плоскопаралельний рух містить у собі два простих рухи: поступальний і обертальний, причому можна вважати, що ці рухи відбуваються одночасно.

Встановимо залежність між векторами швидкостей точок A і B . Для цього сполучимо прямими точки A, A_1 і B, B_1, B_2 . Тоді виявимо таку залежність між векторами зміщень точки B :

$$\vec{BB}_1 = \vec{BB}_2 + \vec{B_2B_1}.$$

Через те що $\vec{BB}_2 = \vec{AA}_1$, можна записати:

$$\vec{BB}_1 = \vec{AA}_1 + \vec{B_2B_1}.$$

Поділимо всі члени рівності на Δt і перейдемо до границі, коли Δt прямує до нуля:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{BB}_1}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{AA}_1}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{B_2B_1}}{\Delta t},$$

тому

$$v = v_A + v_{BA},$$

де v_B — вектор абсолютної швидкості точки B ; v_A — вектор абсолютної швидкості точки A ; v_{BA} — вектор швидкості точки B у відносному обертальному русі відрізка AB навколо точки A , напрямлений перпендикулярно до відрізка AB .

Отже, плоскопаралельний рух тіла може складатися з обертального і поступального рухів, які відбуваються одночасно; поступальний рух можна вважати переносним, а обертальний — відносним. Вектор абсолютної швидкості якоїсь точки B дорівнює вектору абсолютної швидкості будь-якої іншої точки A , доданого до вектора швидкості точки B у відносному обертальному русі відрізка AB навколо точки A .

Точку, навколо якої відбувається відносний обертальний рух, називатимемо полюсом. Якщо замість точки A полюсом взяти точку B , то з подібних міркувань дістанемо

$$v_A = v_B + v_{AB}.$$

Порівнюючи цю векторну рівність з попередньою, бачимо, що вектори відносних швидкостей v_{BA} і v_{AB} за модулем між собою рівні, тобто

$$v_{BA} = v_{AB}.$$

З рис. 12.9 видно, що напрям відносного обертання і кут повороту відрізка AB за якийсь проміжок часу не залежать від вибору полюса, тобто

$$\varphi_{BA} = \varphi_{AB}.$$

Продиференціювавши цю рівність за часом, дістанемо

$$\frac{d\varphi_{BA}}{dt} = \frac{d\varphi_{AB}}{dt}, \text{ або } \omega_{BA} = \omega_{AB}.$$

Отже, відносна кутова швидкість від вибору полюса не залежить. Аналогічно

$$\frac{d\omega_{BA}}{dt} = \frac{d\omega_{AB}}{dt}, \text{ або } \varepsilon_{BA} = \varepsilon_{AB}.$$

Виходить, що й відносне кутове прискорення від вибору полюса не залежить. Із сказаного випливає, що при розкладанні плоскопаралельного руху на поступальний і обертальний *поступальна частина руху в загальному випадку залежить від вибору полюса, обертальна ж частина руху від вибору полюса не залежить*. Оскільки полюсом може бути будь-яка точка площини, у тому числі й миттєвий центр швидкостей, то при розкладанні плоскопаралельного руху на поступальний і обертальний *кутова швидкість відносного обертального руху завжди дорівнює абсолютній кутовій швидкості*.

Якщо векторну рівність $v_A = v_B + v_{AB}$ спроектувати на напрям прямої AB , то

$$\text{пр. } v_A = \text{пр. } v_B,$$

оскільки $\text{пр. } v_{AB} = 0$. Отже, для плоскопаралельного руху *проекції швидкостей двох точок плоскої фігури на пряму, яка сполучає ці точки, рівні між собою*.

Приклад 12.2. Кривошипний механізм шарнірно зв'язаний на середині C шатуна із стержнем CD , а стержень CD — із стержнем DE , який може обертатися навколо точки E . Визначити кутову швидкість ω_{DE} стержня DE у показаному на рис. 12.10 положенні кривошипного механізму, якщо точки B і E містяться на одній вертикалі; кутова швидкість ω кривошипа OA дорівнює 8 рад/с , $OA = 25 \text{ см}$, $DE = 100 \text{ см}$, $\angle CDE = \pi/2 \text{ рад}$, $\angle BED = \pi/6 \text{ рад}$.

Розв'язання. Спочатку визначимо швидкість точки A кривошипа OA

$$v_A = \omega \cdot OA = 8 \cdot 25 \cdot 10^{-2} = 2 \text{ м/с.}$$

За умовою задачі повзун B займає крайнє праве положення і його швидкість у цей момент дорівнює нулю. Тому точка B у даний момент може бути миттєвим центром швидкостей шатуна AB . Оскільки швидкості точок шатуна прямо пропорційні їх відстаням від миттєвого центра швидкостей, то можна записати пропорцію

$$v_C/v_A = CB/AB,$$

з якої знайдемо модуль швидкості точки C :

$$v_C = v_A CB/AB = 2 \cdot 0,5 = 1 \text{ м/с.}$$

Вектор швидкості v_C перпендикулярний до шатуна AB . Вектор швидкості точки D перпендикулярний до стержня DE , тобто напрямлений вздовж стержня DC . Швидкість точки D визначимо, розклавши складний плоскопаралельний рух ланки DC на поступальний і обертальний рухи за формулою

$$v_D = v_C + v_{DC}$$

де вектор відносної швидкості v_{DC} перпендикулярний до ланки DC . Спроектувавши цю векторну рівність на пряму DC , дістанемо

$$v_D = v_C \cos \pi/3 = 1 \cdot 0,5 = 0,5 \text{ м/с.}$$

Записавши швидкість точки D через кутову швидкість стержня DE , дістанемо

$$v_D = \omega_{DE} DE,$$

звідки після підстановки значень

$$\omega_{DE} = v_D/DE = 0,5/1 = 0,5 \text{ рад/с.}$$

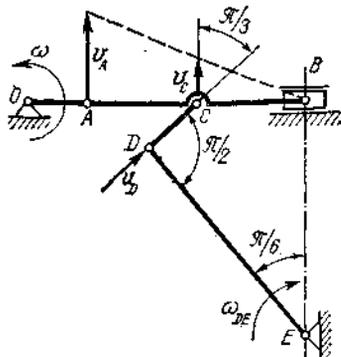


Рис. 12.10

Відділ третій ДИНАМІКА

Розділ XIII

ОСНОВИ ДИНАМІКИ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ

§ 13.1. Аксиоми динаміки. Основне рівняння

Динаміка — це частина теоретичної механіки, яка вивчає механічний рух тіл залежно від сил що, впливають на цей рух.

Встановлення основних законів динаміки почалося з часів італійського вченого Галілея (1564—1642); далі його продовжив Ньютон. Галілей спростував погляд, який панував у науці з часів Арістотеля (IV ст. до н. е.), про те, що з двох падаючих на Землю тіл важче те, яке падає швидше. Галілей виявив, що причиною зміни швидкості є сила, тобто причина виникнення прискорення.

Динаміка ґрунтується на ряді положень, що є аксіомами і називаються законами динаміки. Перед тим, як перейти до вивчення цих законів, введемо поняття ізолюваної матеріальної точки, тобто точки, на яку не діють інші матеріальні точки. Насправді ізолюваних тіл у природі не існує і поняття ізолюваної матеріальної точки цілком умовне.

Перший закон динаміки, який називають аксіомою інерції або першим законом Ньютона, стосовно матеріальної точки формулюється так: *ізолювана матеріальна точка перебуває або у стані спокою, або рухається прямолінійно і рівномірно.*

У кінематиці було встановлено, що прямолінійний рівномірний рух — це єдиний вид руху, в якому прискорення дорівнює нулю. Тому аксіомі інерції можна сформулювати так: *прискорення ізолюваної матеріальної точки дорівнює нулю.*

Отже, ізолювана від впливу навколишніх тіл точка сама собі не може надати прискорення. Цю властивість тіл називають інерцією, або інертністю. Можна сказати, що інерція, або інертність, — це властивість тіла зберігати свою швидкість незмінною за модулем і напрямом (у тому числі і швидкість, яка дорівнює нулю).

Змінити швидкість, тобто надати прискорення, може лише прикладена до тіла сила. Залежність між силою і наданим нею прискоренням виражається другим законом динаміки, або другим законом Ньютона, який формулюється так: *прискорення, якого надає матеріальній точці сила, має напрям сили і пропорційне її модулю.* Якщо сила P_1 надає матеріальній точці прискорення a_1 , а сила P_2 — прискорення a_2 , то за другим законом можна записати

$$P_1/P_2 = a_1/a_2 \quad \text{або} \quad P_1/a_1 = P_2/a_2.$$

Отже, для даної матеріальної точки відношення сили до прискорення є величина стала. Це відношення позначимо m і назвемо масою даної точки:

$$P/a = m = \text{const.}$$

Ця рівність означає, що дві матеріальні точки мають однакові маси, якщо від однієї і тієї самої сили вони набувають однакового прискорення; чим більша маса точки, тим більшу силу треба прикласти, щоб надати їй потрібного прискорення. Маса — одна з основних характеристик будь-якого матеріального об'єкта, що визначає його інертні і гравітаційні властивості. Ньютон називав масою кількість матерії в тілі і вважав масу сталою величиною.

У сучасних поглядах маса тіла (відношення сили до прискорення) — величина змінна, яка залежить від швидкості руху. Так, наприклад, спостереженнями за рухом у прискорювачах заряджених частинок доведено, що інертність частинки, тобто здатність зберігати свою швидкість, зростає із збільшенням її швидкості.

Теорія відносності встановила таку залежність між масою тіла, що перебуває у стані спокою і в русі:

$$m = m_0/\sqrt{1 - v^2/c^2},$$

де m — маса рухомого тіла, m_0 — маса спокою, v — швидкість руху тіла, c — швидкість світла. З цієї формули видно, що чим більша швид-

кість руху тіла, тим більша його маса і тому тим важче надати йому дальшого прискорення.

Спираючись на висновки теорії відносності, сучасна наука дає таке означення маси: *маса — це міра інертності тіла*. Проте маса змінюється помітно лише при дуже великих швидкостях, близьких до швидкості світла, тому далі що зміну звичайно не братимемо до уваги і вважатимемо масу величиною сталою.

Другий закон Ньютона має вигляд

$$P = ma.$$

Його називають основним рівнянням динаміки і формулюють так: *сила — це вектор, що дорівнює добутку маси точки на її прискорення*. Основне рівняння динаміки — це рівняння руху матеріальної точки у векторній формі. З досліду відомо, що під дією притягання Землі тіла падають у пустоті в даному місці з однаковим прискоренням, яке називають прискоренням вільного падіння. Сила тяжіння тіла дорівнює його масі, помноженій на прискорення вільного падіння. Якщо сила тяжіння одного тіла $G_1 = m_1g$, а другого $G_2 = m_2g$, то

$$G_1/G_2 = m_1g/(m_2g) = m_1/m_2,$$

тобто сили тяжіння тіл пропорційні їх масам; це дає змогу порівнювати маси тіл зважуванням.

Прискорення вільного падіння g у різних місцях земної поверхні різне; воно зменшується від полюса до екватора, бо земна куля сплюснута в напрямі полюсів. Іншою причиною зменшення прискорення вільного падіння при переміщенні від полюсів до екватора є відцентрова сила, інерція, про яку буде сказано в § 14.2. Для Москви $g = 9,8156 \text{ м/с}^2$, на полюсах $g = 9,83 \text{ м/с}^2$, на екваторі $g = 9,78 \text{ м/с}^2$. З цього випливає, що сила тяжіння тіла залежить від місця, в якому зважують тіла.

Із другого закону Ньютона виходить, що під впливом сталої сили вільна матеріальна точка, яка була у стані спокою, рухатиметься прямолінійно рівномірно. Рух під дією сталої сили може бути прямолінійним і криволінійним (в останньому випадку матеріальна точка має початкову швидкість, вектор якої не збігається з лінією дії сил, див. § 13.3). Прикладом руху під впливом сталої сили є вільне падіння тіл.

До основних законів динаміки відносять відому із статички аксіому взаємодії, або третій закон Ньютона. Стосовно матеріальної точки закон формулюють так: *сили взаємодії двох матеріальних точок за модулем рівні між собою і мають протилежні напрями*.

§ 13.2. Принцип незалежності дії сил.

Диференціальні рівняння руху матеріальної точки

Принцип незалежності дії сил формулюється так: *коли на матеріальну точку одночасно діє кілька сил, то її прискорення дорівнює векторній сумі прискорень, що їх набувала б ця точка від кожної сили окремо*.

Нехай до матеріальної точки A прикладені сили P_1 і P_2 , рівнодіюча яких P . За аксіомою паралелограма запишемо

$$P_1 + P_2 = P.$$

Поділивши обидві частини рівності на масу точки m , дістанемо

$$P_1/m + P_2/m = P/m, \text{ звідки } a_1 + a_2 = a.$$

Застосовуючи послідовно аксіому паралелограма, можемо сказати, що коли на матеріальну точку одночасно діє кілька сил, то прискорення руху буде таким, якого б надавала рівнодіюча сила

$$P = \Sigma P_i.$$

За принципом незалежності дії сил складемо рівняння руху матеріальної точки в диференціальному вигляді. Нехай матеріальна точка A масою m рухається у площині рисунка під дією сили $P = \Sigma P_i$ з прискоренням a , тоді

$$P = ma.$$

Спроекуємо цю векторну рівність на дві взаємно перпендикулярні осі координат x і y (осі і вектор сили P лежать в одній площині). Тоді запишемо рівняння плоского руху матеріальної точки у координатному вигляді:

$$P_x = \Sigma X = ma_x, \quad P_y = \Sigma Y = ma_y.$$

Застосовуючи теорему про проекцію прискорення на координатну вісь, ці рівняння можемо записати у вигляді диференціальних рівнянь плоского руху матеріальної точки:

$$\Sigma X = m \frac{d^2x}{dt^2}, \quad \Sigma Y = m \frac{d^2y}{dt^2}.$$

У цих рівняннях ΣX і ΣY — алгебраїчні суми проєкцій сил, які діють на точку, на відповідні координатні осі, x і y — біжучі координати точки. За допомогою знайдених рівнянь розв'язують дві основні задачі динаміки:

- 1) за заданим рухом точки визначити сили, які діють на неї;
- 2) знаючи сили, які діють на точку, визначити її рух. Коли під час розв'язування задач маємо справу з невіЛЬНОю матеріальною точкою, треба застосовувати принцип звільнюваності, тобто відкинути зв'язки і замінити їх реакціями, враховуючи їх у рівняннях руху так само, як активні сили, що діють на точку.

Приклад 13.1. Рух тіла, маса якого 0,5 кг, задано рівняннями

$$x = 2t, \quad y = 3 + t - 5t^2,$$

де x і y — у см, t — у с. Визначити силу, яка діє на тіло.

Розв'язання. Цей приклад належить до першої задачі динаміки. Спочатку, користуючись теоремою про проєкцію прискорення на координатну вісь, визначимо проєкції прискорення на осі x і y :

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = 0,$$

$$a_y = \frac{d^2y}{dt^2} = -10 \text{ см/с}^2 = -0,1 \text{ м/с}^2.$$

Підставимо ці значення у рівняння матеріальної точки, тоді

$$X = ma_x = 0,5 \cdot 0 = 0,$$

$$Y = ma_y = 0,5 \cdot (-0,1) = -0,05 \text{ кг} \cdot \text{м/с}^2 = -0,05 \text{ Н}.$$

Із проєкцій сили, яка діє на тіло, видно, що вона паралельна осі ординат, напрямлена в бік від'ємних ординат і за модулем дорівнює

$$P = \sqrt{X^2 + Y^2} = |Y| = 0,05 \text{ Н.}$$

Приклад 13.2. Кривошип OA завдовжки l , обертаючись рівномірно з кутовою швидкістю ω , переміщує кулісу, рухаючи її поступально вздовж напрямних $I - I$ (рис. 13.1). Нехтуючи тертям, знайти, чому дорівнює сила тиску P каменя A на кулісу, якщо сила тяжіння її дорівнює G .

Розв'язання. Цей приклад належить до першої задачі динаміки. Застосуємо принцип звільнюваності, відкинемо зв'язки куліси і замінимо їх реакціями. Реакція N буде перпендикулярною до напрямних куліси, а сила тиску P — перпендикулярна до куліси, бо тертя не враховуємо.

Куліса рухається зворотно-поступально, отже, всі її точки рухаються однаково. Складемо рівняння руху проєкції точки A на вісь x , яке і буде кінематичним рівнянням руху куліси:

$$x = l \cos \varphi = l \cos \omega t.$$

Застосуємо теорему про проєкцію прискорення на координатну вісь і визначимо прискорення куліси:

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = -l\omega^2 \cos \omega t = -\omega^2 x.$$

Складемо рівняння руху куліси у координатному вигляді:

$$\Sigma X = ma_x.$$

Тепер спроекуємо сили, які діють на кулісу, на вісь x і підставимо значення маси і прискорення

$$P_x = -P = -\frac{G}{g} \omega^2 x,$$

звідки

$$P = \frac{G}{g} \omega^2 x.$$

Отже, сила тиску повзуна на кулісу змінюється пропорційно відстані куліси від осі кривошипа.

Приклад 13.3. На матеріальну точку масою 4 кг, яка лежить на гладенькій горизонтальній площині, діє горизонтальна сила $P = 12 \text{ Н}$. З якою швидкістю рухатиметься матеріальна точка через $t = 10 \text{ с}$, якщо до прикладання сили ця точка була в стані спокою?

Розв'язання. Приклад належить до другої задачі динаміки. Оскільки дана матеріальна точка лежить на гладенькій горизонтальній площині, то під дією горизонтальної сили P точка рухатиметься прямиoliniйно рівноприскорено. Напрямамо вісь x вздовж траєкторії точки, тоді

$$\Sigma X = ma_x = ma.$$

Спроекуємо на вісь x сили, які діють на точку, і підставимо в це рівняння значення маси. Тоді прискорення дорівнюватиме

$$a = \Sigma X/m = P/m = 12/4 = 3 \text{ м/с}^2.$$

Застосуємо формулу швидкості рівноприскореного руху

$$v = v_0 + at.$$

Підставивши значення, дістанемо

$$v = at = 3 \cdot 10 = 30 \text{ м/с.}$$

Приклад 13.4. Коли цеглину штовхнули, вона почала ковзати з початковою швидкістю $v_0 = 2 \text{ м/с}$ по нерухомій стрічці конвейера, яка утворює з горизонтом кут $\alpha = \pi/6$ рад. Визначити переміщення s цеглини за час $t = 2 \text{ с}$, якщо коефіцієнт тертя ковзання цеглини і стрічки конвейера $f = 0,4$; цеглину вважати точковою масою (рис. 13.2).

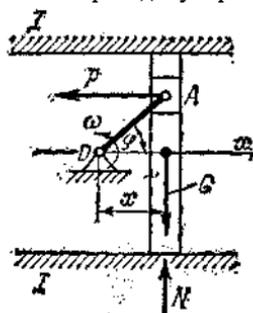


Рис. 13.1

Розв'язання. Цей приклад належить до другої задачі динаміки. Візьмемо систему координат xOy так, щоб початок збігався з початковим положенням тіла, вісь x була напрямлена вздовж стрічки конвейера вниз, а вісь y — перпендикулярно до стрічки конвейера вгору. Застосувавши принцип звільнюваності, розглядатимемо цеглину як матеріальну точку, що рухається вздовж осі x під дією сили тяжіння G , нормальної реакції N і сили тертя F_T .

Складемо рівняння руху матеріальної точки:

$$\Sigma X = ma_x, \quad G \sin \alpha - F_T = \frac{G}{g} a_x; \quad (13.1)$$

$$\Sigma Y = ma_y, \quad N - G \cos \alpha = \frac{G}{g} a_y. \quad (13.2)$$

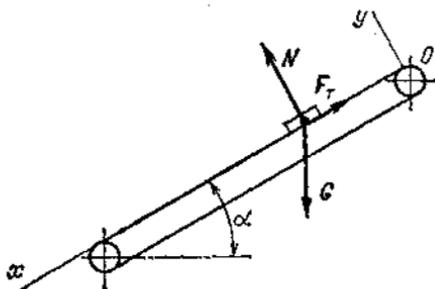


Рис. 13.2

Крім того, за другим законом тертя ковзання можна записати

$$F_T = fN. \quad (13.3)$$

Оскільки матеріальна точка рухається вздовж осі x , то $a_y = 0$, тому з рівняння (13.2) маємо

$$N = G \cos \alpha.$$

Підставимо цей вираз у рівняння (13.3), тоді

$$F_T = fG \cos \alpha.$$

Добутий вираз підставимо в рівняння (13.1):

$$G \sin \alpha - fG \cos \alpha = \frac{G}{g} a_x.$$

Скорочуючи що рівність на G і враховуючи, що $a_x = a$, визначаємо прискорення цеглини

$$a = g \sin \alpha - gf \cos \alpha,$$

або, після винесення $g \cos \alpha$ за дужки,

$$a = g \cos \alpha (\operatorname{tg} \alpha - f).$$

Оскільки в правій частині цієї рівності тільки сталі величини, то прискорення цеглини — величина стала, причому можливі три випадки руху:

- 1) якщо $\operatorname{tg} \alpha > f$, то $a > 0$ і рух буде рівноприскореним,
- 2) якщо $\operatorname{tg} \alpha = f$, то $a = 0$ і рух буде рівномірним,
- 3) якщо $\operatorname{tg} \alpha < f$, то $a < 0$ і рух буде рівносповільненим.

З формули шляху рівнозмінного руху визначимо шлях s , пройдений цеглиною за 2 с:

$$s = v_0 t + at^2/2 = v_0 t + g \cos \alpha (\operatorname{tg} \alpha - f) t^2/2 = 2 \cdot 2 + 9,81 \cdot 0,866 (0,577 - 0,4) 4/2 \approx 7 \text{ м.}$$

За даними умови прикладу $\operatorname{tg} \alpha > f$, тобто $a > 0$, отже, рух цеглини буде рівноприскореним.

§ 13.3. Рух матеріальної точки, кинуті під кутом до горизонту

Розглянемо матеріальну точку M масою m , кинуту з точки O поверхні Землі з початковою v_0 під кутом α до горизонту (рис. 13.3). Визначимо рух точки M , вважаючи, що на неї діє тільки сила тяжіння G (пір повітря не враховуємо). Початок координат візьмемо в точці O , вісь x напрямимо по горизонталі вправо, а вісь y — по вертикалі вгору. Складемо диференціальні рівняння руху точки:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = 0, \quad m \frac{d^2 y}{dt^2} = -mg.$$

Скоротимо ці рівності на m , тоді

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad (13.4)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -g. \quad (13.5)$$

Після інтегрування рівняння (13.4) знаходимо

$$\frac{dx}{dt} = C_1.$$

За теоремою про проекцію швидкості на координатну вісь,

$$v_x = \frac{dx}{dt} = C_1,$$

отже, проекція швидкості точки M на вісь x весь час залишається величиною сталою

$$v_x = v_0 \cos \alpha.$$

З останніх двох рівностей

$$\frac{dx}{dt} = v_0 \cos \alpha.$$

Інтегруючи це рівняння, маємо:

$$x = v_0 t \cos \alpha + C_2.$$

За умовою, коли $t = 0$, то $x = 0$, тому довільна стала $C_2 = 0$. Остаточно

$$x = v_0 t \cos \alpha.$$

Після інтегрування рівняння (13.5) знаходимо

$$v_y = \frac{dy}{dt} = -gt + C_3.$$

Підставимо в це рівняння значення $t = 0$, тоді

$$C_3 = v_y = v_0 \sin \alpha.$$

Отже,

$$\frac{dy}{dt} = v_0 \sin \alpha - gt.$$

Інтегруючи ще раз, дістаємо

$$y = v_0 t \sin \alpha - gt^2/2 + C_4.$$

За умовою, коли $t = 0$, то $y = 0$, тому довільна стала $C_4 = 0$. Остаточно

$$y = v_0 t \sin \alpha - gt^2/2.$$

Отже, матеріальна точка M , кинута з швидкістю v_0 під кутом α до горизонту, рухається відповідно до рівнянь

$$x = v_0 t \cos \alpha,$$

$$y = v_0 t \sin \alpha - gt^2/2.$$

Щоб визначити траєкторію точки M , виключимо з рівнянь руху час. Для цього знайдемо час з першого рівняння руху

$$t = x/(v_0 \cos \alpha)$$

і підставимо його значення у друге рівняння. Тоді рівняння траєкторії запишеться

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - gx^2/(2v_0^2 \cos^2 \alpha).$$

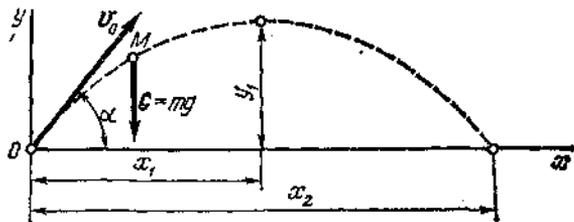


Рис. 13.3

Траекторія точки M — це парабола з вертикальною віссю симетрії. Визначимо час польоту точки M . Для цього в друге рівняння руху підставимо значення $y = 0$. Тоді рівняння набуде вигляду

$$v_0 t \sin \alpha - gt^2/2 = 0.$$

Звідси знаходимо два значення часу, при яких ордината дорівнює нулю:

$$t_0 = 0, \quad t_2 = (2v_0 \sin \alpha)/g.$$

Перше значення часу відповідає початку польоту, друге — кінцеве. Тривалість польоту

$$t_2 - t_0 = t_2 = (2v_0 \sin \alpha)/g.$$

Щоб визначити дальність польоту, в перше рівняння руху підставимо значення часу t_2 :

$$x_2 = v_0 t_2 \cos \alpha = (v_0 \cos \alpha \cdot 2v_0 \sin \alpha)/g$$

або

$$x_2 = (v_0^2 \sin 2\alpha)/g.$$

З цього рівняння видно, що максимальна дальність польоту x_{\max} буде тоді, коли $\sin 2\alpha = 1$, тобто коли $\alpha = \pi/4$ рад: $x_{\max} = v_0^2/g$. Знайдемо найбільшу висоту піднімання точки M , тобто в момент, коли проекція її швидкості на вісь ординат дорівнюватиме нулю:

$$\frac{dy}{dt} = v_y = v_0 \sin \alpha - gt_1 = 0.$$

З цієї рівності знайдемо t_1 :

$$t_1 = (v_0 \sin \alpha)/g = t_2/2.$$

Отже, найвище точка підніметься у середині шляху польоту, коли

$$x_1 = x_2/2.$$

Підставимо значення t_1 у друге рівняння руху

$$y_1 = (v_0 \sin \alpha v_0 \sin \alpha)/g - g(v_0^2 \sin^2 \alpha)/(2g^2),$$

звідси

$$y_1 = (v_0^2 \sin^2 \alpha)/(2g).$$

З цього рівняння видно, що точка досягає максимальної висоти, коли $\sin \alpha = 1$ або $\alpha = \pi/2$ рад, тобто коли точку кинуть вертикально вгору:

$$y_{\max} = v_0^2/2g.$$

Приклад 13.5. Під час аварії обід маховика парової машини розірвався на кілька частин, які відлетіли від місця аварії на різні відстані в площині обертання маховика. Найбільша відстань, на яку відлетіли знайдені куски, 280 м. Діаметр маховика $D = 3,5$ м. Визначити кутову швидкість маховика в момент розриву.

Розв'язання. Для тіла, кинутого під кутом до горизонту, було знайдено формулу, яка визначає максимальну дальність польоту:

$$x_{\max} = v_0^2/g.$$

Знайдемо з цієї формули колову швидкість маховика в момент розриву:

$$v_0 = \sqrt{gx_{\max}} = \sqrt{9,8 \cdot 280} = 52,4 \text{ м/с.}$$

Кутова швидкість у момент розриву

$$\omega = v_0/(0,5D) = 52,4/1,75 \approx 30 \text{ рад/с.}$$

Слід зазначити, що насправді кутова швидкість маховика в момент розриву була дещо більшою, оскільки під час обчислень не враховано опору повітря.

§ 14.1. Метод кінестатики

Нехай матеріальна точка, маса якої m , рухається з прискоренням a під дією якоїсь системи активних і реактивних сил, рівнодіюча яких P . Скористаємось однією з відомих формул (основним рівнянням динаміки), щоб рівняння руху записати у вигляді рівнянь рівноваги (метод кінестатики):

$$P = ma.$$

Перепишемо це рівняння у такому вигляді:

$$P + (-ma) = 0.$$

Вираз у дужках позначимо F^{in} і назовемо силою інерції:

$$F^{in} = -ma.$$

Сила інерції — це вектор, який дорівнює добутку маси точки на її прискорення і має протилежний до прискорення напрям. Тоді

$$P + F^{in} = 0 \quad \text{або} \quad \Sigma(P, F^{in}) = 0.$$

Цю рівність, яка є математичним виразом принципу, що носить ім'я французького вченого д'Аламбера (1717—1783), можна розглядати як рівняння рівноваги матеріальної точки. Підкреслимо, що добуток рівність, хоч і називається рівнянням рівноваги, насправді є видозміненим рівнянням руху матеріальної точки.

Зауважимо, що ще до д'Аламбера над загальним методом, за допомогою якого рівнянням динаміки надають вигляду рівнянь статички, працювали члени Петербурзької Академії наук Я. Герман (1716) і Л. Ейлер (1737).

Принцип д'Аламбера формулюють так: активні і реактивні сили, які діють на матеріальну точку, разом із силами інерції утворюють систему взаємно зрівноважених сил, що відповідає всім умовам рівноваги.

Треба пам'ятати, що сила інерції прикладена до розглядуваної матеріальної точки умовно, але для зв'язку, який спричинює прискорення, вона реальна. Пояснимо це на прикладі (рис. 14.1). Нехай до тіла, яке лежить на горизонтальній площині, прив'язано нитку, яка може витримати силу тяжіння G цього тіла. Якщо до нитки прикласти силу T статично (поступово), то тіло підніметься вгору і нитка не обірветься, а коли силу T прикласти динамічно (раптово, ривком), то нитка обірветься. Це пояснюється так.

Щоб підняти вантаж, йому потрібно надати певного прискорення a . Для визначення натягу нитки застосуємо принцип д'Аламбера і складемо рівняння рівноваги:

$$\Sigma Y = 0; \quad T - G - F^{in} = 0,$$

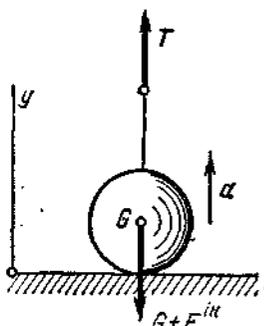


Рис. 14.1

$$T = G + F^{\text{ін}} = G + ma.$$

У першому випадку вантаж набуває невеликого прискорення і сила інерції, що збільшує натяг нитки, невелика; у другому випадку прискорення, яке надається тілу, значне і сила інерції відповідно зростає. В обох випадках сила інерції не збільшує тиску на опору, бо прикладена до тіла умовно. Зазначимо, що вагою тіла називають силу, з якою тіло унаслідок притягання до Землі діє на опору (або підвіс), яка утримує його від вільного падіння. Якщо тіло і опора нерухомі, то вага тіла дорівнює його силі тяжіння.

Приклад 14.1. У кабіні ліфта, який піднімається, зважують на пружинних терезах тіло (сила тяжіння $G = 50$ Н); натяг T пружини терезів (вага тіла) 51 Н. Знайти прискорення кабінки.

Розв'язання. Застосуємо до тіла принцип звільнюваності, відкинемо пружинні терези і замінимо їх реакцію T , яка дорівнює натягу пружини. Щоб розв'язати задачу, застосуємо метод кінестатики, тобто прикладемо до тіла силу інерції $F^{\text{ін}}$. Складемо рівняння рівноваги зважуваного тіла і спроєкуємо всі сили на вертикальну вісь y ; припускаємо, що прискорення a кабінки напрямлене вгору і тому сила інерції напрямлена вниз (вектори сил див. на рис. 14.1):

$$\Sigma Y = 0; \quad T - G - F^{\text{ін}} = 0.$$

Модуль сили інерції визначається з формули

$$F^{\text{ін}} = ma = (G/g) \cdot a.$$

Підставимо цей вираз у рівняння і знайдемо прискорення:

$$a = (T - G) g/G = (51 - 50) \cdot 9,8/50 = 0,196 \text{ м/с}^2.$$

Прискорення додатне, це означає, що воно напрямлене вгору.

§ 14.2. Сили інерції у криволінійному русі

У криволінійному русі точки повне прискорення дорівнює векторній сумі дотичного і нормального прискорень (рис. 14.2).

Дотичне прискорення $a_t = \frac{dv}{dt}$, нормальне прискорення $a_n = v^2/\rho$, повне прискорення $a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$.

Кожному прискоренню відповідає своя сила інерції:

$$F_t^{\text{ін}} = m \frac{dv}{dt} \text{ — дотична, або тангенціальна, сила інерції;}$$

$$F_n^{\text{ін}} = mv^2/\rho \text{ — нормальна, або відцентрова, сила інерції;}$$

$$F^{\text{ін}} = ma \text{ — повна сила інерції.}$$

Як приклад розглянемо рівномірний рух по колу, що лежить у горизонтальній площині, каменя, на який діє сила тяжіння G . Камінь прив'язано до невагомої нитки завдовжки R , яка лежить у тій самій площині (рис. 14.3, а). Щоб нитка залишалась у площині руху каменя, припускаємо, що він ковзає по ідеальній гладенькій горизонтальній площині. Швидкість каменя позначимо v . Тоді $F_n^{\text{ін}} = mv^2/R$ — відцентрова сила інерції (ця сила натягує нитку); $N = mv^2/R$ — доцентрова сила, прикладена до каменя (ця сила утримує камінь на колі).

Відцентрова і доцентрова сили (дія і протидія) за третім законом Ньютона дорівнюють одна одній за модулем і мають протилежні напрями.

Очевидно, що дотична сила інерції F_t^{in} у цьому випадку дорівнює нулю, бо $v = \text{const}$. З досвіду відомо, що при достатній швидкості нитка може розірватись і камінь полетить по дотичній до кола, тобто в напрямі швидкості, яку має камінь у момент розриву нитки. Це свідчить про те, що відцентрова сила інерції є реальною силою для зв'язку, але до тіла вона прикладена умовно.

Всередині тіл, які рухаються з прискоренням, також виникають внутрішні сили інерції, бо для кожної частинки тіла сусідні частинки є зв'язками. Знайдемо, чому дорівнюватиме натяг нитки, коли камінь рухається по колу, яке лежить у вертикальній площині (рис. 14.3, б). Щоб знайти натяг T нитки, застосуємо принцип д'Аламбера, тобто прикла-

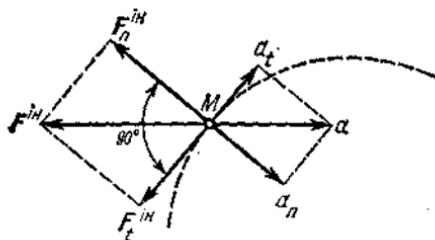


Рис. 14.2

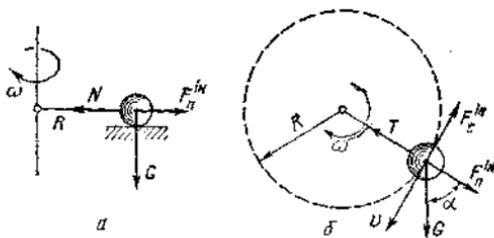


Рис. 14.3

демо до каменя нормальну силу інерції F_n^{in} і дотичну силу інерції F_t^{in} . Спроектуємо всі сили на напрям нитки, тоді

$$T - G \cos \alpha - F_n^{in} = 0,$$

звідки

$$T = F_n^{in} + G \cos \alpha = mv^2/R + G \cos \alpha.$$

Натяг нитки буде максимальним, коли $\alpha = 0$, тобто коли камінь буде в нижньому положенні:

$$T_{\max} = mv^2/R + G.$$

Натяг нитки буде мінімальним, коли $\alpha = \pi$ рад, тобто коли камінь буде вгорі:

$$T_{\min} = mv^2/R - G.$$

Зазначимо, що під впливом сили тяжіння каменя модуль його швидкості v змінюватиметься і досягне найменшого значення у верхньому положенні, а найбільшого — в нижньому. Якщо лінійну швидкість каменя виразити через кутову швидкість нитки

$$v = \omega R,$$

то формулу відцентрової сили інерції можна записати

$$F_n^{in} = m\omega^2 R.$$

Приклад 14.2. Вантаж $G = 10$ Н, підвішений на нитці завдовжки $l = 0,3$ м у перухомій точці O , є конічним маятником, тобто описує коло в горизонтальній площині, причому нитка і вертикаль утворюють кут 60° (рис. 14.4). Визначити швидкість v вантажу і натяг T нитки.

Розв'язання. Оскільки кут між ниткою і вертикаллю сталий, то швидкість вантажу теж стала, дотичне прискорення і дотична сила інерції дорівнюватимуть нулю.

Застосуємо принцип д'Аламбера, тобто прикладемо до вантажу відцентрову силу інерції F_n^{in} , реакцію T нитки і складемо два рівняння рівноваги:

$$\Sigma X = 0; \quad -T \sin 60^\circ + F_n^{in} = 0;$$

$$\Sigma Y = 0; \quad T \cos 60^\circ - G = 0,$$

де

$$F_n^{in} = ma_n = \frac{G}{g} \cdot \frac{v^2}{R} = \frac{G}{g} \cdot \frac{v^2}{l \sin 60^\circ}.$$

З другого рівняння знайдемо

$$T = \frac{G}{\cos 60^\circ} = \frac{10}{0,5} = 20 \text{ Н}$$

і підставимо в перше рівняння:

$$-\frac{G}{\cos 60^\circ} \sin 60^\circ + \frac{G}{g} \cdot \frac{v^2}{l \sin 60^\circ} = 0;$$

звідси

$$v^2 = gl \frac{\sin^2 60^\circ}{\cos 60^\circ} = 9,8 \cdot 0,3 \frac{0,866^2}{0,5}; \quad v = 2,1 \text{ м/с.}$$

Приклад 14.3. Визначити швидкість v штучного супутника Землі, який рухається по коловій орбіті на висоті $h = 230$ км від поверхні Землі. Зміну прискорення вільного падіння і опір повітря не враховувати. Радіус Землі $R = 6370$ км.

Розв'язання. Після того як ракета-носіїв вивела супутник масою m на задану орбіту і надала йому швидкість v , дотичну до орбіти, супутник рухатиметься далі лише під дією сили притягання Землі. Щоб визначити швидкість v супутника, скористаємось принципом д'Аламбера, тобто прикладемо до супутника відцентрову силу інерції і складемо рівняння рівноваги, спроектувавши сили на вісь, яка проходить через супутник і центр Землі:

$$mg - F_n^{in} = 0.$$

Оскільки $F_n^{in} = mv^2/(R+h)$, то $mg - mv^2/(R+h) = 0$.

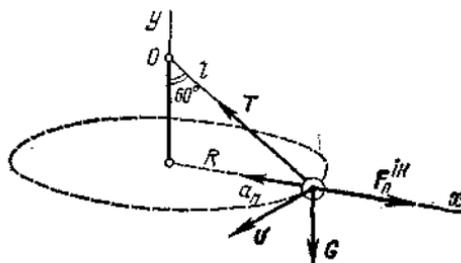


Рис. 14.4

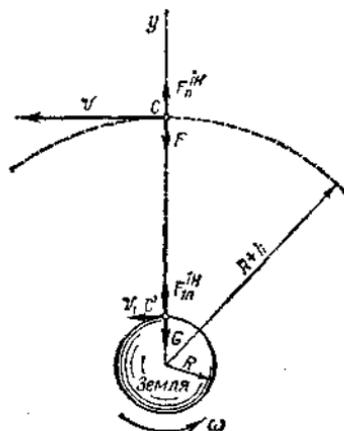


Рис. 14.5

Скоротивши рівняння на m , визначимо швидкість супутника:

$$v = \sqrt{g(R+h)}.$$

Підставивши значення, знайдемо:

$$v = \sqrt{9,81(6370 + 230) 1000} \approx 8000 \text{ м/с} = 8 \text{ км/с.}$$

Цю швидкість, при якій супутник Землі тримається на коловій орбіті на відносно невеликій висоті, називають першою космічною швидкістю.

Приклад 14.4. На яку висоту h потрібно запустити штучний супутник Землі, призначений для наддалеких телепередач, щоб він здавався нерухомим відносно Землі? Орбіту супутника наближено вважають концентричним до екватора колом. Радіус Землі $R = 6370$ км, а кутова швидкість обертання Землі навколо своєї осі $\omega = 0,7 \cdot 10^{-4}$ рад/с (рис. 14.5).

Розв'язання. Зробимо такі позначення: m — маса супутника; G — сила тяжіння супутника на поверхні Землі; M — маса Землі; v — швидкість супутника. За законом всесвітнього тяжіння сила F , з якою супутник притягується до Землі, на висоті h дорівнюватиме

$$F = \gamma m M / (R + h)^2,$$

де γ — гравітаційна стала. Коли $h = 0$, то $F_1 = G = \gamma m M / R^2$. Відцентрова сила інерції $F_n^{\text{ін}}$ супутника на висоті h

$$F_n^{\text{ін}} = m v^2 / (R + h).$$

За принципом д'Аламбера

$$\Sigma Y = 0; \quad F_n^{\text{ін}} - F = 0,$$

отже

$$F_n^{\text{ін}} = F \quad \text{або} \quad m v^2 / (R + h) = \gamma m M / (R + h)^2.$$

Оскільки $v = \omega (R + h)$, то після підстановки і скорочення дістанемо

$$\omega^2 (R + h)^3 = \gamma M. \quad (14.1)$$

Якби супутник летів не високо над поверхнею Землі, то цією висотою можна було б знехтувати і тоді

$$G = F_1$$

або

$$m g = \gamma m M / R^2,$$

звідки

$$g R^2 = \gamma M.$$

(14.2)

З рівностей (14.1) і (14.2) маємо:

$$\omega^2 (R + h)^3 = g R^2,$$

звідки

$$h = \sqrt[3]{\frac{g R^2}{\omega^2}} - R = \sqrt[3]{\frac{9,81 \cdot 6370^2 \cdot 10^6}{(0,7 \cdot 10^{-4})^2}} - 6370 \cdot 10^3 \approx 35 \, 800 \text{ км.}$$

Розділ XV

РОБОТА І ПОТУЖНІСТЬ

3

§ 15.1. Робота сталої сили на прямолінійній ділянці шляху

Розглянемо матеріальну точку M , до якої прикладено серед інших силу P . Нехай точка перемістилася прямолінійно з положення M_0 у положення M_1 і пройшла при цьому шлях s (рис. 15.1).

Щоб визначити кількісну міру дії сили P на шляху s , розкладемо цю силу на складові N і F , напрямлені відповідно перпендикулярно до напрямку переміщення і вздовж його.

Оскільки складова N не може рухати точку або чинити опір її руху в напрямі s , то дію сили P на шляху s можна визначити добутком Fs . Цю величину називають роботою і позначають A . Отже,

$$A = Fs = Ps \cos \alpha,$$

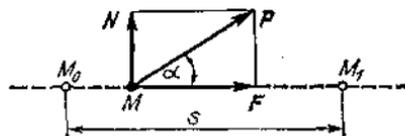


Рис. 15.1

тобто робота сили дорівнює добутку її модуля на шлях і на косинус кута між напрямками сили і переміщення. Отже, робота — це міра дії сили, прикладеної до матеріальної точки під час її переміщення. Робота — величина скалярна. Розглянемо три окремих випадки обчислення роботи: 1) $\alpha = 0$, тоді $A = Ps$; 2) $\alpha = 90^\circ$, тоді $A = 0$; 3) $\alpha = 180^\circ$, тоді $A = -Ps$.

Виходить, що робота буде додатною, якщо напрями сили і переміщення збігаються ($\alpha < 90^\circ$); вона буде від'ємною, коли напрям сили протилежний до напрямку переміщення ($\alpha > 90^\circ$); робота дорівнює нулю, коли напрями сили і переміщення взаємно перпендикулярні. Так, наприклад, коли тіло піднімається вгору, то робота сили тяжіння буде від'ємною, коли тіло рухається вниз — додатною, а коли тіло рухається по горизонтальній поверхні, то робота сили тяжіння дорівнює нулю. Сили, які виконують додатну роботу, називають рушійними силами, а ті, що виконують від'ємну роботу, — силами опору. Одиниця роботи

$$[A] = [P] [s] = \text{сила} \times \text{довжина} = \text{ньютон} \times \text{метр} = \text{джоуль (Дж)}.$$

Джоуль — це робота сили в один ньютон на шляху в один метр (коли напрями сили і переміщення збігаються).

§ 15.2. Робота змінної сили на криволінійній ділянці шляху

На нескінченно малій ділянці ds криволінійний шлях можна вважати прямолінійним, а силу — сталою. Тоді елементарна робота dA на шляху ds дорівнюватиме

$$dA = P ds \cos(P, v).$$

Робота в кінці переміщення дорівнюватиме сумі елементарних робіт:

$$A = \int_0^s P \cos(P, v) ds.$$

Побудуємо графік, який виражає залежність між $P \cos(P, v)$ і пройденим шляхом s (рис. 15.2, а). Площа заштрихованої смуги, яку можна вважати прямокутником, дорівнює елементарній роботі на шляху ds :

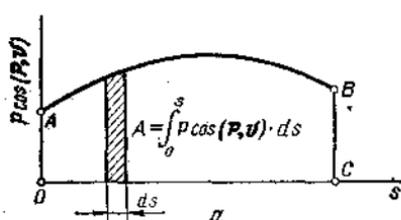
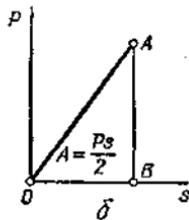


Рис. 15.2



а робота сили P в кінці шляху s графічно виражається площею фігури $OABC$, обмеженою віссю абсцис, двома ординатами

$$dA = P \cos(P, v) ds,$$

а робота сили P в кінці шляху s графічно виражається площею фігури $OABC$, обмеженою віссю абсцис, двома ординатами

і кривою AB , яку називають кривою сил. Якщо сила збігається з напрямом переміщення і зростає від нуля пропорційно шляху, то робота графічно виражається площею трикутника OAB (рис. 15.2, б) і дорівнює половині добутку сили на шлях:

$$A = Ps/2.$$

§ 15.3. Теорема про роботу рівнодіючої

Теорема. Робота рівнодіючої сили на якійсь ділянці шляху дорівнює алгебраїчній сумі робіт складових сил на тій самій ділянці шляху.

Нехай до матеріальної точки M прикладено систему сил $(P_1, P_2, P_3, \dots, P_n)$, рівнодіюча яких дорівнює R (рис. 15.3).

Система сил, прикладених до матеріальної точки, — це система збіжних сил, отже,

$$R = P_1 + P_2 + P_3 + \dots + P_n.$$

Спроектуємо цю векторну рівність на дотичну до траєкторії, тоді

$$R \cos \gamma = P_1 \cos \alpha_1 + P_2 \cos \alpha_2 + P_3 \cos \alpha_3 + \dots + P_n \cos \alpha_n.$$

Помножимо обидві частини рівності на нескінченно мале переміщення ds і проінтегруємо в межах якогось кінцевого переміщення s :

$$\int_0^s R \cos \gamma ds = \int_0^s P_1 \cos \alpha_1 ds + \int_0^s P_2 \cos \alpha_2 ds + \dots + \int_0^s P_n \cos \alpha_n ds,$$

тоді

$$A_R = A_{P_1} + A_{P_2} + \dots + A_{P_n},$$

або скорочено

$$A_R = \Sigma A_{P_i}.$$

Теорему доведено.

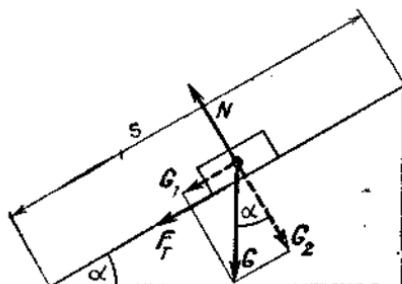


Рис. 15.4

Застосуємо теорему про роботу рівнодіючої, обчислимо шукану роботу як суму робіт сил опору (робота сили G_2 і нормальної реакції N дорівнює нулю, бо ці сили перпендикулярні до напрямку переміщення s):

$$A = G_1 s + F_T s = G s \sin \alpha + f G s \cos \alpha.$$

Підставимо числові значення, тоді

$$A = 200 \cdot 6 \cdot 0,5 + 0,01 \cdot 200 \cdot 6 \cdot 0,866 = 610,4 \text{ Дж.}$$

§ 15.4. Теорема про роботу сили тяжіння

Теорема. Робота сили тяжіння не залежить від виду траєкторії і дорівнює добутку модуля сили на вертикальне переміщення точки її прикладання.

Нехай матеріальна точка M рухається тільки під дією сили тяжіння G і за якийсь проміжок часу переміщується з положення M_1 у положення M_2 і проходить шлях s (рис. 15.5). На траєкторії точки M виділимо нескінченно малу ділянку ds , яку вважатимемо прямолінійною, і з її кінців проведемо прямі, паралельні осям координат, одна з яких

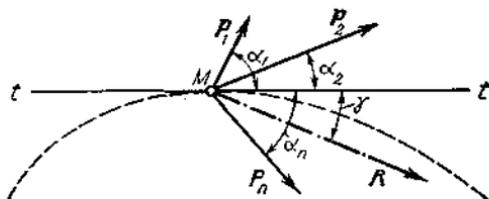


Рис. 15.3

Приклад 15.1. Обчислити роботу рівномірного піднімання вантажу $G = 200 \text{ Н}$ по похилій площині на відстань $s = 6 \text{ м}$, якщо кут, утворений площиною з горизонтом, $\alpha = 30^\circ$, а коефіцієнт тертя ковзання дорівнює $f = 0,01$ (рис. 15.4).

Розв'язання. Розкладемо силу тяжіння G на дві взаємно перпендикулярні складові G_1 і G_2 — відповідно паралельну і перпендикулярну до похилої площини. За другим законом тертя ковзання, сила тертя F_T дорівнюватиме

$$F_T = f G_2 = f G \cos \alpha.$$

Застосуємо теорему про роботу рівнодіючої, обчислимо шукану роботу як суму робіт сил опору (робота сили G_2 і нормальної реакції N дорівнює нулю, бо ці сили перпендикулярні до напрямку переміщення s):

$$A = G_1 s + F_T s = G s \sin \alpha + f G s \cos \alpha.$$

Підставимо числові значення, тоді

$$A = 200 \cdot 6 \cdot 0,5 + 0,01 \cdot 200 \cdot 6 \cdot 0,866 = 610,4 \text{ Дж.}$$

§ 15.4. Теорема про роботу сили тяжіння

Теорема. Робота сили тяжіння не залежить від виду траєкторії і дорівнює добутку модуля сили на вертикальне переміщення точки її прикладання.

Нехай матеріальна точка M рухається тільки під дією сили тяжіння G і за якийсь проміжок часу переміщується з положення M_1 у положення M_2 і проходить шлях s (рис. 15.5). На траєкторії точки M виділимо нескінченно малу ділянку ds , яку вважатимемо прямолінійною, і з її кінців проведемо прямі, паралельні осям координат, одна з яких

вертикальна, друга горизонтальна. Із заштрихованого трикутника маємо

$$dy = ds \cos \alpha.$$

Елементарна робота сили G на шляху ds дорівнює

$$dA = Gds \cos \alpha.$$

Повна робота на шляху s дорівнює

$$A = \int_0^s Gds \cos \alpha = \int_0^h Gdy = G \int_0^h dy = Gh.$$

Отже,

$$A = Gh.$$

Теорему доведено.

Сили, робота яких не залежить від виду траєкторії, називають **потенціальними**. До таких сил належать, наприклад, сила тяжіння, сила всесвітнього притягання, натяг пружини.

Приклад 15.2. Однорідний масив $ABCD$, маса якого $m = 4080$ кг, має розміри як на рис. 15.6. Визначити роботу, яку треба затратити на перекидання масиву навколо ребра D .

Розв'язання. Визначимо силу тяжіння G масиву:

$$G = mg = 4080 \cdot 9,81 = 40 \cdot 10^3 \text{ Н} = 40 \text{ кН}.$$

Робота, яку треба затратити, щоб перекинути масив, дорівнюватиме роботі сили опору, тобто сили тяжіння. Щоб перекинути масив, потрібно його центр ваги O (розміще-

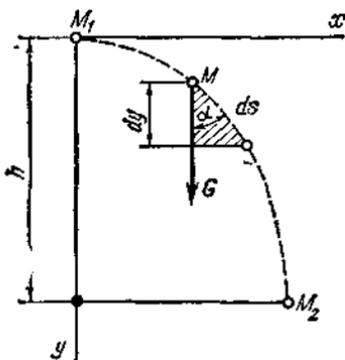


Рис. 15.5

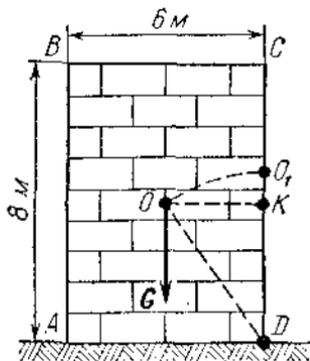


Рис. 15.6

ний у геометричному центрі, оскільки масив однорідний) перемістити в Q_1 , після чого масив перекидатиметься під дією сили тяжіння, яка із сили опору перетвориться в рушійну силу. Шукану роботу визначимо, застосувавши теорему про роботу сили тяжіння:

$$\begin{aligned} A &= G \cdot KO_1 = G(OD - KD) = G(\sqrt{OK^2 + KD^2} - KD) = \\ &= 40 \cdot 10^3 (\sqrt{3^2 + 4^2} - 4) = 40 \cdot 10^3 \text{ Дж} = 40 \text{ кДж}. \end{aligned}$$

§ 15.3. Робота сталої сили, прикладеної до обертового тіла

Уявимо диск, який обертається навколо нерухомої осі під дією сталої сили P (рис. 15.7), точка прикладання якої переміщується разом з диском. Розкладемо силу P на три взаємно перпендикулярні складові:

P_1 — колове зусилля, P_2 — осьове зусилля, P_3 — радіальне зусилля. Під час повертання диска на нескінченно малий кут $d\varphi$ сила P виконує елементарну роботу, яка за теоремою про роботу рівнодіючої дорівнюватиме сумі робіт складових. Але робота складових P_2 і P_3 дорівнює нулю, бо вектори цих сил перпендикулярні до нескінченно малого переміщення Δs точки прикладання M , тому елементарна робота сили P дорівнює роботі складової P_1 :

$$dA = P_1 ds = P_1 R d\varphi.$$

При повертанні диска на кінцевий кут φ робота сили P дорівнюватиме

$$A = \int_0^\varphi P_1 R d\varphi = P_1 R \int_0^\varphi d\varphi = P_1 R \varphi,$$

де кут φ у радіанах. Оскільки моменти складових P_2 і P_3 відносно осі z дорівнюють нулю, то за теоремою Вариньона момент сили P відносно осі z дорівнює

$$M_z(P) = P_1 R.$$

Момент сили, прикладеної до диска, відносно осі обертання називають **обертальним моментом** і відповідно до ГОСТу позначають T :

$$T = M_z(P), \quad \text{отже, } A = T\varphi.$$

Робота сталої сили, прикладеної до обертального тіла, дорівнює добутку обертального моменту на кутове прискорення.

Приклад 15.3. Робітник обертає рукоятку лебідки, прикладаючи зусилля $P = 200$ Н перпендикулярно до радіуса обертання. Знайти роботу, затрачену протягом 25 с, якщо довжина рукоятки $R = 0,4$ м, а кутова швидкість її $\omega = \pi/3$ рад/с.

Розв'язання. Спочатку визначимо кутове переміщення φ рукоятки лебідки за 25 с:

$$\varphi = \omega t = \pi/3 \cdot 25 = 26,18 \text{ рад.}$$

Тепер використаємо формулу для визначення роботи сили під час обертального руху:

$$A = T\varphi = PR\varphi.$$

Підставимо числові значення, тоді

$$A = 200 \cdot 0,4 \cdot 26,18 \approx 2100 \text{ Дж} = 2,1 \text{ кДж.}$$

§ 15.6. Потужність

Робота будь-якої сили може тривати різні проміжки часу. Щоб визначити швидкість виконання роботи, в механіці введено поняття потужності. *Потужністю сили називають роботу, виконану протягом одиниці часу.* Якщо робота відбувається рівномірно, то потужність визначається за формулою

$$N = A/t.$$

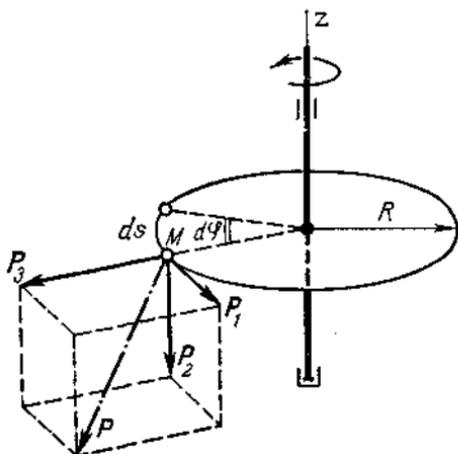


Рис. 15.7

Коли напрями сили і переміщення збігаються, формулу потужності можна записати

$$N = A/t = Ps/t \text{ або } N = Pv.$$

Потужність сили дорівнює добутку модуля сили на швидкість тої прикладання.

Одиниця потужності:

$$\{N\} = \frac{[A]}{[t]} = \frac{\text{робота}}{\text{час}} = \text{джоуль на секунду} = \text{ват (Вт)}.$$

Якщо роботу виконує сила, прикладена до обертового тіла, рухається рівномірно, то потужність обчислюють за формулою

$$N = A/t = T\varphi/t \text{ або } N = T\omega.$$

Потужність сили, прикладеної до обертового тіла, дорівнює добутку обертаючого моменту на кутову швидкість.

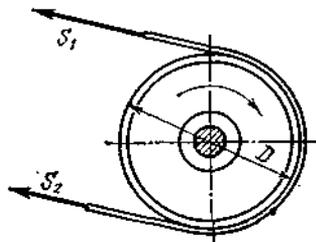


Рис. 15.8

Приклад 15.4. За допомогою паса передається тужність $N = 14,72$ кВт. Діаметр шківів $D = 1000$ кутова швидкість $\omega = 5\pi$ рад/с. Приймаючи натяг ведучої частини паса вдвоє більшим від натягу S_2 іної частини, визначити S_1 і S_2 (рис. 15.8).

Розв'язання. Різниця натягів частин дорівнює силі тертя, яка діє між пасом і шківом цьому випадку коловим зусиллям. Обертаючий момент, що діє на шків, дорівнює

$$T = (S_1 - S_2) D/2 = S_2 D/2.$$

З другого боку, обертаючий момент можна обчислити, знаючи потужність, яка дається, і кутову швидкість:

$$T = N/\omega = 14\,720/(5\pi) = 936 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Тепер можна визначити натяг S_2 веденої частини паса:

$$S_2 = 2T/D = 2 \cdot 936/1 = 1872 \text{ Н}.$$

За умовою, натяг ведучої частини в два рази більший, ніж веденої, тому

$$S_1 = 2S_2 = 2 \cdot 1872 = 3744 \text{ Н}.$$

§ 15.7. Коефіцієнт корисної дії

Здатність тіла виконувати роботу під час переходу від одного стану до іншого називають енергією. Енергія — це загальна міра різних форм руху матерії. Під час передачі або перетворення енергії, а також під час виконання роботи неминучі втрати енергії. У процесі передавання руху або виконання роботи рушійні сили механізмів і машин перемагають сили опору, які поділяють на сили корисного опору і сили шкідливого опору. Втрати на подолання сил шкідливого опору неминучі в усіх механізмах і машинах; вони зумовлюються силами тертя і опору навколишнього середовища.

Відносну кількість енергії, яка використовується в машині за прямим призначенням, характеризують коефіцієнтом корисної дії (ККД) і позначають η .

Коефіцієнтом корисної дії називають відношення корисної роботи (або потужності) до затраченої:

$$\eta = A_k/A_s = N_k/N_s.$$

Якщо коефіцієнт корисної дії враховує тільки механічні втрати то його називають механічним ККД.

ККД — завжди правильний дріб, його іноді подають у процентах

$$\eta = (A_k/A_s) \cdot 100.$$

Чим ближче ККД до одиниці, тим продуктивніша машина. Наведем орієнтовні значення ККД для найпоширеніших механізмів і машин

Металообробні верстати	0,8
Кривошипно-повзунковий механізм	0,95
Черв'язна передача	до 0,92
Теплові двигуни	до 0,40
Турбіни	0,95
Електродвигуни	0,92

Якщо ряд механізмів з'єднано послідовно, тобто кожний наступний механізм рухається ведучою ланкою попереднього механізму, то загальний ККД η дорівнюватиме добутку ККД усіх механізмів:

$$\eta = \eta_1 \eta_2 \eta_3 \dots \eta_n,$$

де $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \dots, \eta_n$ — ККД кожного механізму окремо. Для прикладу визначимо ККД шорсткої похилої площини з кутом нахилу α , якщо тіло силою тяжіння G рівномірно піднімається по цій площині на висоту h під дією горизонтальної сили P . Якщо шлях, пройдений тілом, позначити s , то корисна робота $A_k = Gh = Gs \sin \alpha$, а затрачена робота $A_s = Ps \cos \alpha = G \operatorname{tg}(\alpha + \varphi) s \cos \alpha$ (бо з § 6.3 відомо, що $P = G \operatorname{tg}(\alpha + \varphi)$), тоді

$$\eta = A_k/A_s = Gs \sin \alpha / [G \operatorname{tg}(\alpha + \varphi) s \cos \alpha] = \operatorname{tg} \alpha / \operatorname{tg}(\alpha + \varphi).$$

Отже, ККД похилої площини, коли рушійна сила горизонтальна, дорівнює

$$\eta = \operatorname{tg} \alpha / \operatorname{tg}(\alpha + \varphi),$$

де α — кут між похилою площиною і горизонтом; φ — кут тертя. Неважко побачити, що ККД похилої площини збільшується із збільшенням кута її нахилу. За такою самою формулою визначається ККД роботи гвинта і гайки з прямокутною різьбою (наприклад, у домкраті). ККД гвинтової пари з трапецеїдальною або трикутною різьбою

$$\eta = \operatorname{tg} \psi / \operatorname{tg}(\psi + \varphi'),$$

де ψ — кут підйому гвинтової лінії різьби; φ' — зведений кут тертя.

Розділ XVI

ЗАГАЛЬНІ ТЕОРЕМИ ДИНАМІКИ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ

Загальні теореми динаміки матеріальної точки встановлюють залежність між зміною динамічних мір руху матеріальної точки і мірами дії сил, прикладених до цієї точки.

§ 16.1. Теорема про зміну кількості руху

Кількість руху mv матеріальної точки — це вектор, який дорівнює добутку маси точки на її швидкість і має напрям швидкості. Кількість руху — це динамічна міра руху матеріальної точки.

Одиниця кількості руху

$$[mv] = [m][v] = \text{кг} \cdot \text{м/с}.$$

Імпульсом сталої сили Pt називають вектор, який дорівнює добутку сили на час її дії. Імпульс сили — це міра її дії у часі.

Одиниця імпульсу сили

$$[Pt] = [P][t] = [m][a][t] = (\text{кг} \cdot \text{м/с}^2)/\text{с} = \text{кг} \cdot \text{м/с}.$$

Кількість руху і імпульс сили мають однакові одиниці. Зв'язок між ними встановлює теорема про зміну кількості руху, яка формулюється так: *зміна кількості руху матеріальної точки за якийсь проміжок часу дорівнює імпульсу прикладеної до неї сили за той самий проміжок часу.*

Доведемо цю теорему для випадку прямолінійного руху матеріальної точки під дією сталої сили P . Оскільки такий рух буде рівнозмінним, то його швидкість визначається формулою:

$$v = v_0 + at.$$

Перенесемо v_0 у ліву частину і помножимо обидві частини рівності на масу m матеріальної точки:

$$mv - mv_0 = mat.$$

Але добуток маси точки на її прискорення — це сила, під дією якої точка рухається, тому

$$mv - mv_0 = Pt.$$

У лівій частині рівності маємо зміну кількості руху за час t , а в правій — імпульс сили за той самий проміжок часу, що й треба було довести. Якщо рух сповільнений ($v < v_0$), то вектор сили напрямлений протилежно до вектора швидкості, тому в останню формулу силу треба підставляти з від'ємним знаком.

Для випадку криволінійного руху матеріальної точки під дією змінної за модулем і напрямом сили час t можна розбити на нескінченно малі проміжки, в межах яких вектор сили можна вважати сталим, а шлях — прямолінійним. Тоді імпульс сили за скінченний проміжок часу t дорівнюватиме сумі елементарних імпульсів. При цьому математичний вираз теореми про зміну кількості руху матиме вигляд:

$$mv - mv_0 = \int P dt.$$

Якщо до матеріальної точки прикладено кілька сталих сил, то зміна кількості руху дорівнюватиме сумі (алгебраїчній, коли сили діють по одній прямій, або векторній, коли сили діють під кутом одна до одної) імпульсів даних сил:

$$mv - mv_0 = \Sigma (P_i t).$$

Приклад 16.1. Тіло опускається без початкової швидкості по похилій площині, яка утворює з горизонтом кут $\alpha = 30^\circ$ (рис. 16.1). Знайти час t , протягом якого швидкість руху тіла досягне 13,9 м/с. Коефіцієнт тертя ковзання $f = 0,25$.

Розв'язання. Розглядатимемо тіло як матеріальну точку, яка рухається під дією сили тяжіння G , сили тертя F_T і нормальної реакції N похилої площини. Розкладемо силу тяжіння G на складові G_1 і G_2 , одна з яких перпендикулярна, а друга паралельна до похилої площини, і застосуємо теорему про зміну кількості руху:

$$mv - mv_0 = \Sigma (P_i t).$$

Спроектуємо цю векторну рівність на напрям похилої площини, тоді

$$mv - mv_0 = G_1 t - F_T t.$$

Тепер застосуємо другий закон тертя і підставимо значення

$$Gv/g = (G \sin \alpha - fG \cos \alpha) t,$$

звідки

$$t = v/[g(\sin \alpha - f \cos \alpha)] = 13,9/[9,81(0,5 - 0,25 \cdot 0,866)] = 5 \text{ с.}$$

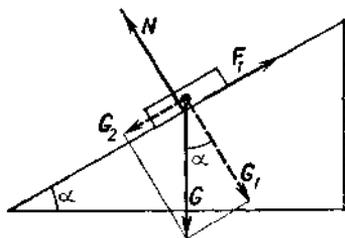


Рис. 16.1

§ 46.2. Теорема про зміну кінетичної енергії

Механічною енергією називають енергію переміщення і взаємодії тіл. Механічну енергію поділяють на кінетичну і потенціальну.

Кінетичною енергією, або енергією руху, називають енергію, яку має будь-яка матеріальна точка під час руху. Кінетична енергія — це динамічна міра руху матеріальної точки.

Кінетична енергія матеріальної точки дорівнює половині добутку маси точки на квадрат її швидкості:

$$K = mv^2/2.$$

Кінетична енергія — величина скалярна і завжди додатна.

Одиниці кінетичної енергії:

$$[K] = [mv^2] = [m] \cdot [v^2] = \text{кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}^2 = (\text{кг} \cdot \text{м}/\text{с}^2) \cdot \text{м} = \text{Н} \cdot \text{м} = \text{Дж}.$$

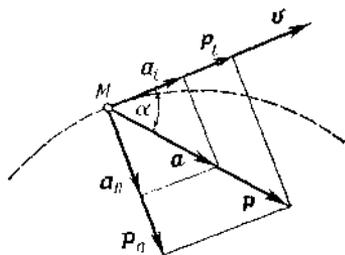


Рис. 16.2

Кінетична енергія має розмірність роботи. Зв'язок між кінетичною енергією і роботою встановлює теорема про зміну кінетичної енергії, яка формулюється так: зміна кінетичної енергії матеріальної точки на якомусь відрізку шляху дорівнює роботі сили, прикладеної до точки на тому самому відрізку шляху.

Доведемо цю теорему для найзагальнішого випадку руху матеріальної точки, тобто для випадку криволінійного руху під дією змінної сили (рис. 16.2). Запишемо для цієї точки основне рівняння динаміки:

$$ma = P,$$

де P — сила, яка діє на точку; a — повне прискорення точки; m — маса точки. Спроектуємо цю векторну рівність на напрям швидкості v

точки:

$$ma \cos \alpha = P_t = P \cos \alpha.$$

Як відомо з кінематики,

$$a \cos \alpha = a_t = \frac{dv}{dt},$$

тому

$$m \frac{dv}{dt} = P \cos \alpha.$$

Помноживши обидві частини рівності на нескінченно мале переміщення ds , дістанемо

$$m \frac{dv}{dt} ds = P \cos \alpha ds.$$

Ліву частину рівності перетворимо так:

$$m \frac{dv}{dt} ds = m dv \frac{ds}{dt} = mv dv,$$

тоді

$$mv dv = P \cos \alpha ds.$$

Проінтегруємо обидві частини цієї рівності в межах для швидкості від v_0 до v і для шляху від 0 до s :

$$m \int_{v_0}^v v dv = \int_0^s P \cos \alpha ds,$$

тоді

$$mv^2/2 - mv_0^2/2 = A,$$

де A — робота сили P на шляху s . Теорему доведено.

Для сповільненого руху ($v < v_0$) складова P_t , яка спричинює допитне прискорення a_t , матиме напрям, протилежний до вектора швидкості v , і тому робота сили P буде від'ємною. Складова P_n , яка спричинює нормальне прискорення a_n , роботи не виконує, оскільки ця складова в кожний момент перпендикулярна до елементарного переміщення точки прикладання сили P . Якщо до матеріальної точки прикладено кілька сил, то зміна кінетичної енергії дорівнюватиме алгебраїчній сумі робіт цих сил:

$$mv^2/2 - mv_0^2/2 = \Sigma A_{P_i}.$$

Приклад 16.2. Основною частиною приладу для випробування матеріалів ударом є важкий сталевий виливок M , прикріплений до стержня, який може обертатися навколо нерухомої горизонтальної осі O майже без тертя (рис. 16.3). Нехтуючи масу стержня, розглядаємо виливок M як матеріальну точку, для якої відстань $MO = 0,981$ м. Визначити швидкість v цієї точки в найнижчому положенні B , якщо точка падає з найвищого положення A з дуже малою початковою швидкістю.

Розв'язання. Позначимо силу тяжіння виливка G . Застосувавши принцип збільнюваності і теорему про зміну кінетичної енергії і прийнявши виливок як матеріальну точку, на яку діють сила тяжіння G і реакція N стержня, напрямлена вздовж стержня, дістанемо:

$$mv^2/2 - mv_0^2/2 = A_G + A_N.$$

Відповідно до теореми про роботу сили тяжіння

$$A_G = G \cdot AB = G \cdot 2MO.$$

Робота реакції N дорівнює нулю, оскільки момент цієї сили відносно осі обертання стержня дорівнює нулю. Силу тертя, за умовою, не враховуємо. Підставимо цей вираз роботи в першу формулу, враховуючи, що $v_0 = 0$:

$$Gv^2/2g = G \cdot 2MO.$$

Тепер скоротимо обидві частини рівності на G і підставимо числові значення:

$$v = \sqrt{2MO \cdot 2g} = 2\sqrt{0,981 \cdot 9,81} = 6,2 \text{ м/с.}$$

Приклад 16.3. По рейках, прокладених на шляху AB , що утворюють далі петлю радіуса R , котиться вагонетка M силою тяжіння G (рис. 16.4). З якої висоти H треба пустити вагонетку без початкової швидкості, щоб вона могла пройти всю петлю?

Розв'язання. Розглянемо вагонетку як матеріальну точку і застосуємо теорему про зміну кінетичної енергії на шляху ABC , тоді

$$mv^2/2 - mv_0^2/2 = A_G + A_N,$$

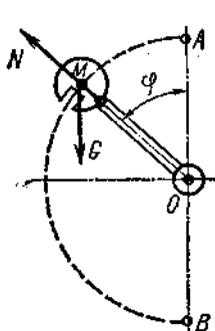


Рис. 16.3

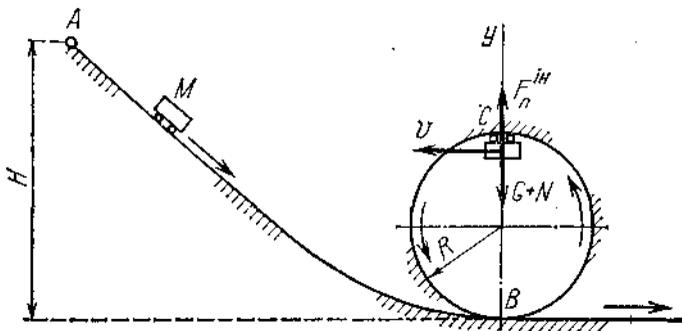


Рис. 16.4

причому робота A_N нормальної реакції N рейок дорівнює нулю. Відповідно до теореми про роботу сили тяжіння

$$A_G = G(H - 2R).$$

Оскільки за умовою $v_0 = 0$, а $m = G/g$, то, підставивши ці вирази в першу формулу, дістанемо

$$Gv^2/2g = (H - 2R)G,$$

відки

$$v^2 = 2g(H - 2R). \quad (16.1)$$

Тепер застосуємо принцип д'Аламбера. Прикладемо до вагонетки відцентрову силу інерції $F_n^{in} = \frac{G}{g} \cdot \frac{v^2}{R}$, спроектуємо сили, які діють на вагонетку, на вісь y і складемо рівняння рівноваги:

$$\Sigma Y = 0; \quad F_n^{in} - G - N = 0,$$

де N — реакція рейок. Очевидно, що найменше значення відцентрової сили F_n^{in} , за якої вагонетка не відриватиметься від рейок, буде за умови $N = 0$. При цьому

$$F_n^{in} - G = 0 \quad \text{або} \quad (G/g)(v^2/R) = G.$$

Звідси

$$v^2 = gR. \quad (16.2)$$

Порівняємо вирази (16.1) і (16.2), тоді

$$2g(H - 2R) = gR,$$

відки $H = 2,5R$.

Очевидно, що значення висоти H , знайдене з цього виразу, буде мінімальним. Треба звернути увагу на те, що тут не брались до уваги сили тертя і опору повітря. Отже, вагонетка зробить мертву петлю, коли

$$H > 2,5R.$$

§ 16.3. Закон збереження механічної енергії

Енергію взаємодії тіл називають потенціальною. Потенціальною енергією мають, наприклад, натягнутий лук із стрілою або стиснута пружина. Будь-яка матеріальна точка, піднята на якусь висоту h , також має певну енергію, яку називають енергією положення; це теж потенціальна енергія. Мірою потенціальної енергії у цьому випадку є робота, яку виконує точка під час вільного падіння. Приймаючи висоту h малою порівняно з розмірами Землі, вважатимемо силу тяжіння G сталою. Тоді потенціальну енергію Π можна записати:

$$\Pi = Gh.$$

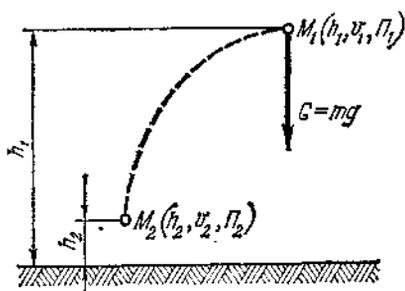


Рис. 16.5

Потенціальна енергія тіла, піднятого на певну висоту, — величина відносна, яка залежить від системи відліку, відносно якої обчислюють цю енергію. Нехай матеріальна точка масою m , падаючи під дією однієї сили тяжіння G , в положенні M_1 була на висоті h_1 , мала швидкість v_1 і потенціальну енергію Π_1 (рис. 16.5).

У положенні M_2 точка була на висоті h_2 , мала швидкість v_2 і потенціальну енергію Π_2 . Під час падіння точки виконувалась робота

$$A = G(h_1 - h_2) = Gh_1 - Gh_2 = \Pi_1 - \Pi_2.$$

Відповідно до теореми, доведеної у попередньому параграфі, ця робота дорівнює зміні кінетичної енергії:

$$A = mv_2^2/2 - mv_1^2/2 = K_2 - K_1,$$

або

$$\Pi_1 - \Pi_2 = K_2 - K_1,$$

отже

$$\Pi_1 + K_1 = \Pi_2 + K_2,$$

або

$$\Pi + K = \text{const.}$$

Ця рівність є математичним виразом закону збереження механічної енергії, який формулюється так: *під час руху матеріальної точки під дією лише сили тяжіння сума потенціальної і кінетичної енергій є величина стала.*

За законом збереження механічної енергії неважко довести, що коли тіло кинути з поверхні Землі вертикально вгору, то його кінетична енергія внизу дорівнюватиме потенціальній енергії у найвищій точці. Цей закон дійсний для руху під дією будь-якої потенціальної сили; під дією непотенціальних сил (наприклад, сили тертя) механічна енергія переходить в інші види енергії.

Закон збереження механічної енергії є окремим випадком загального закону збереження матерії й енергії, висловленого М. В. Ломоносовим (1711—1765). У встановленні цього закону — одна з найбільших заслуг Ломоносова. Він науково довів, що ніяка божя сила не спромож-

на ні створити, ні знищити матерію, що матерія існує сама по собі і не потребує ніякої сторонньої сили. У § 9.1 йшлося про теорію відносності, створену А. Ейнштейном у ХХ ст., яка набула тепер широкого застосування у науці і техніці.

Найважливішим висновком теорії відносності є закон пропорційності енергії і маси тіла, який математично записується так:

$$E = mc^2,$$

де E — повний запас енергії тіла (включаючи механічну, теплову, хімічну, електромагнітну, ядерну енергію, а також енергію частинок, що входять до складу атома); m — маса тіла; c — швидкість світла.

За наведеною рівністю, яка називається формулою Ейнштейна, неважко підрахувати, що одному граму маси відповідає 25 млн. кВт \times год енергії (1 кВт \cdot год = $3,6 \cdot 10^6$ Дж). Формула Ейнштейна має пряме відношення до відкриття і використання ядерної (атомної) енергії. Саме за допомогою цієї формули було виявлено існування величезних запасів нових видів енергії і знайдено шляхи її використання. У 1954 р. у Радянському Союзі було пущено першу в світі електростанцію на атомній енергії потужністю 5000 кВт.

Приклад 16.4. Матеріальну точку кинуть з Землі вертикально вгору з початковою швидкістю v_0 . Нехтуючи опором повітря, визначити: 1) висоту h максимального підняття точки, 2) швидкість v , яку матиме точка на висоті $h/2$ під час падіння.

Розв'язання. Щоб розв'язати першу частину задачі, запишемо кінетичну і потенціальну енергії в момент початку руху

$$K_1 = mv_0^2/2, \quad \Pi_1 = 0$$

і в момент максимального підняття

$$K_2 = 0, \quad \Pi_2 = mgh,$$

де m — маса матеріальної точки.

Відповідно до закону збереження механічної енергії,

$$K_1 + \Pi_1 = K_2 + \Pi_2$$

$$\text{або } mv_0^2/2 = mgh.$$

Скоротивши обидві частини на m , знайдемо висоту

$$h = v_0^2/(2g).$$

Щоб розв'язати другу частину задачі, запишемо кінетичну і потенціальну енергії на висоті $h/2$:

$$K_3 = mv^2/2, \quad \Pi_3 = mgh/2.$$

За законом збереження механічної енергії,

$$K_2 + \Pi_2 = K_3 + \Pi_3$$

$$\text{або } mgh = mv^2/2 + mgh/2.$$

Звідси, скоротивши обидві частини рівності на m і спростивши, знайдемо швидкість:

$$v = \sqrt{gh}.$$

Підставимо знайдене значення h , тоді

$$v = \sqrt{g v_0^2 / (2g)} = v_0 / \sqrt{2}.$$

§ 17.1. Рівняння поступального руху твердого тіла

Механічною системою матеріальних точок називають сукупність матеріальних точок, певним способом зв'язаних між собою. Будь-яке тверде тіло можна вважати незмінною механічною системою матеріальних точок. Сили взаємодії точок даної системи називають внутрішніми; сили, з якими діють на дану систему інші точки, що не належать до цієї системи, — зовнішніми.

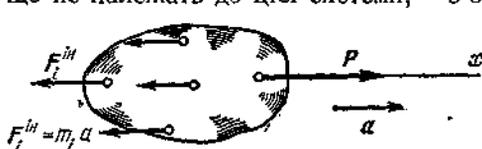


Рис. 17.1

Нехай тверде тіло, маса якого m , під дією сили P рухається поступально з прискоренням a (рис. 17.1). Розіб'ємо тіло на ряд матеріальних точок, що мають маси по m_i кожна, і застосуємо принцип д'Аламбера (зазначимо,

що внутрішні сили до рівняння рівноваги не входять, бо за третім законом Ньютона їх сума для системи в цілому дорівнює нулю). До кожної матеріальної точки прикладемо силу інерції $F_i^{\text{ін}} = -m_i a$ і складемо рівняння рівноваги:

$$\Sigma X = 0; \quad P - \Sigma F_i^{\text{ін}} = 0,$$

звідки

$$P = \Sigma F_i^{\text{ін}} = \Sigma (m_i a).$$

Через те що в поступальному русі всі точки тіла мають однакові прискорення, то a можна винести за знак суми, тобто

$$P = a \Sigma m_i = am.$$

Відповідно до другого закону Ньютона, вектори сили P і прискорення a збігаються за напрямом, тому

$$P = ma.$$

Це є рівняння поступального руху твердого тіла. Воно нічим не відрізняється від основного рівняння динаміки точки, отже, всі формули динаміки точки застосовні до тіла, яке рухається поступально.

§ 17.2. Рівняння обертального руху твердого тіла

Нехай тверде тіло під дією системи сил обертається навколо нерухомої осі z з кутовим прискоренням ε (рис. 17.2). Розіб'ємо це тіло на ряд матеріальних точок, маса кожної з яких m_i , і застосуємо принцип д'Аламбера. До кожної матеріальної точки прикладено дотичну і нормальну сили інерції. Складемо рівняння рівноваги:

$$\Sigma M_z = 0, \quad \Sigma M_z(P_i) - \Sigma M_z(F_{ni}^{\text{ін}}) = 0.$$

Моменти реакцій підшипника, а також сили $F_{ni}^{\text{ін}}$ відносно осі z дорівнюють нулю, бо лінії дії цих сил перетинають вісь. Суму моментів зов-

нішніх сил відносно осі обертання називають обертаючим моментом. Тоді

$$\Sigma M_z(P_i) = T = \Sigma M_z(F_{ii}^{in}) = \Sigma (m_i r_i \varepsilon r_i) = \varepsilon \Sigma (m_i r_i^2).$$

Вираз $\Sigma (m_i r_i^2)$ називають моментом інерції тіла відносно осі і позначають J :

$$J = \Sigma (m_i r_i^2).$$

Момент інерції тіла відносно осі — це сума добутків мас матеріальних точок, які утворюють це тіло, на квадрат відстаней їх до цієї осі.

В результаті маємо формулу

$$T = J\varepsilon,$$

яку називають рівнянням обертального руху твердого тіла. У цій формулі J — момент інерції тіла відносно осі обертання. Пояснимо докладніше нове поняття моменту інерції тіла.

Одиниця моменту інерції:

$$\begin{aligned} [J] &= [mr^2] = [m][r^2] = \\ &= \text{кг} \cdot \text{м}^2. \end{aligned}$$

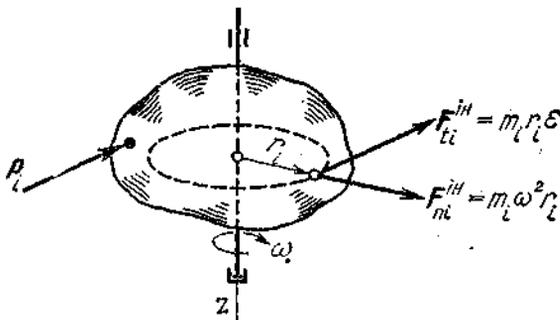


Рис. 17.2

Розглянемо такий приклад. Однаковим кулям, зображеним на рис. 17.3, треба надати однакове кутове прискорення ε . Оскільки $r_1 > r_2$, то $J_1 > J_2$. На досліді і з рівняння обертального руху можна перекоонатися в тому, що для надання цим системам однакового кутового прискорення ε треба прикласти різні обертаючі моменти:

$$T' = J_1 \varepsilon, \quad T'' = J_2 \varepsilon.$$

Розділимо перше рівняння на друге:

$$T'/T'' = J_1/J_2.$$

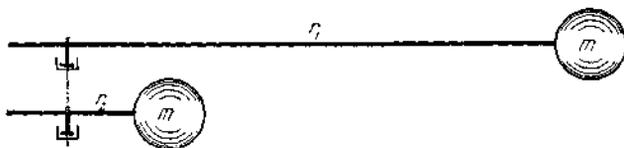


Рис. 17.3

Виходить, чим більший момент інерції тіла, тим більший обертаючий момент треба прикласти, щоб надати тілу задане кутове прискорення. З викладеного видно, що момент інерції для обертального руху має таке саме значення, як маса для поступального руху, отже, *момент інерції — це міра інертності обертального тіла.*

Для прикладу обчислимо момент інерції тонкого однорідного суцільного диска радіусом R , завтовшки s і масою m відносно осі, яка проходить через центр диска O і перпендикулярна до його площини (рис. 17.4). Розіб'ємо диск на елементарні кільця змінного радіуса r , що мають

ширину dr і товщину s . За означенням, момент інерції такого кільця

$$dJ = d\Sigma(m, r^2) = r^2 d\Sigma m_i = r^2 dm = r^2 2\pi r dr s \rho = 2\pi s \rho r^3 dr,$$

де ρ — густина матеріалу диска. Візьмемо суму моментів інерції усіх елементарних кілець, тоді момент інерції диска

$$J = \int_0^R 2\pi s \rho r^3 dr = 2\pi s \rho \int_0^R r^3 dr = 2\pi s \rho \frac{r^4}{4} \Big|_0^R = \pi s \rho \frac{R^4}{2}.$$

Оскільки маса диска $m = \pi R^2 s \rho$, то

$$J = mR^2/2,$$

що й потрібно було довести. Неважко зрозуміти, що момент інерції однорідного суцільного прямого кругового циліндра радіусом R і масою m будь-якої висоти можна обчислити за тією самою формулою. Для цього досить уявно весь циліндр порізати площинами, паралельними основі, на тонкі диски і взяти суму моментів інерції усіх дисків.

Моменти інерції для деяких інших однорідних тіл мають такі вирази, подані тут без доведення:

1) куля, маса якої m і радіус R , відносно діаметра

$$J = \frac{2}{5} mR^2;$$

2) тонкий стержень масою m , завдовжки l відносно осі, яка проходить перпендикулярно до стержня через його кінець,

$$J = ml^2/3;$$

3) тонка сферична оболонка масою m , радіусом R відносно діаметра

$$J = 2mR^2/3;$$

4) порожнистий вал масою m , з зовнішнім радіусом R і радіусом отвору r відносно осі

$$J = m(R^2 + r^2)/2.$$

Момент інерції J_z тіла відносно якоїсь осі z , паралельної центральній (що проходить через центр ваги C тіла), дорівнює центральному моменту інерції J_C , доданому до добутку маси m тіла на квадрат відстані a між цими осями:

$$J_z = J_C + ma^2 \quad (\text{без доведення}).$$

З цієї формули виходить, що з усіх моментів інерції тіла відносно паралельних осей найменшим буде момент інерції відносно центральної осі, тобто центральний момент інерції. Іноді момент інерції визначають за формулою

$$J = mr_i^2,$$

де r_i — радіус інерції тіла;

$$r_i = \sqrt{J/m}.$$

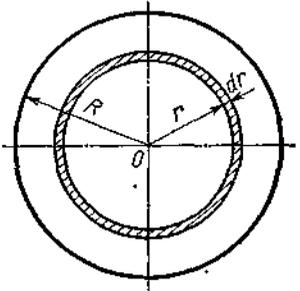


Рис. 17.4

ичний зміст радіуса інерції полягає в такому: якщо масу тіла зосередити в одній точці (таку масу називають зведеною) і розмістити її від осі обертання на відстані, яка дорівнює радіусу інерції, то момент інерції зведеної маси дорівнюватиме моменту інерції даного тіла відносно тієї самої осі. Подвоєний радіус інерції називають діаметром інерції:

$$D_i = 2r_i.$$

На практиці іноді замість моменту інерції користуються поняттям махового моменту GD_i^2 . *Маховим моментом називають добуток сили тяжіння G обертового тіла на квадрат його діаметра інерції.*

Одиниця махового моменту

$$[GD_i^2] = [G] \cdot [D_i^2] = \text{Н} \cdot \text{м}^2.$$

Між маховим моментом і моментом інерції існує проста залежність

$$GD_i^2 = mg (2r_i)^2 = 4gmr_i^2$$

або

$$GD_i^2 = 4gJ = 39,24J.$$

Приклад 17.1. Тонкий однорідний стержень, сила тяжіння якого G і довжина $l = 150$ мм, коливається у вертикальній площині під дією сили тяжіння. Точка підвісу збігається з кіцем стержня (рис. 17.5). Визначити кутове прискорення стержня у момент, коли він утворює з вертикаллю кут $\alpha = \pi/6$ рад.

Розв'язання. За умовою задачі, стержень однорідний, тому його центр ваги посередині. Застосуємо рівняння обертового руху тіла

$$T = J\varepsilon.$$

Обертаючий момент дорівнює моменту сили тяжіння відносно осі обертання стержня:

$$T = (Gl/2) \cdot \sin \alpha.$$

Момент інерції стержня обчислимо за формулою

$$J = ml^2/3 = (G/g) (l^2/3).$$

Підставимо вирази обертаючого моменту і моменту інерції у рівняння обертового руху:

$$(Gl/2) \cdot \sin \alpha = (G/g) (l^2/3) \varepsilon$$

і визначимо кутове прискорення:

$$\varepsilon = 3g \sin \alpha / (2l) = 3 \cdot 9,81 \cdot 0,5 / (2 \cdot 0,15) = 49,05 \text{ рад/с}^2.$$

Приклад 17.2. Маховий момент ротора електродвигуна дорівнює $2,7 \text{ Н} \cdot \text{м}^2$. Обертаючий момент $T = 40 \text{ Н} \cdot \text{м}$. Визначити час розгону, якщо кінцева швидкість обертання ротора $\omega = 30\pi$ рад/с.

Розв'язання. Через те що на ротор діє сталий обертаючий момент, то він рухатиметься рівноприскорено. Запишемо рівняння кутової швидкості цього руху, враховуючи, що $\omega_0 = 0$:

$$\omega = \varepsilon t = 30\pi, \text{ звідки } \varepsilon = 30\pi/t \text{ рад/с}^2.$$

Тепер застосуємо рівняння обертового руху ротора

$$T = J\varepsilon = J \cdot 30\pi/t.$$

З цієї рівності визначимо час розгону, виразивши момент інерції ротора через маховий момент, який дорівнює $4gJ$:

$$t = J \cdot 30\pi / T = [4gJ / (4gT)] 30\pi = [2,7 / (4 \cdot 9,81 \cdot 40)] 30\pi = 0,162 \text{ с}.$$

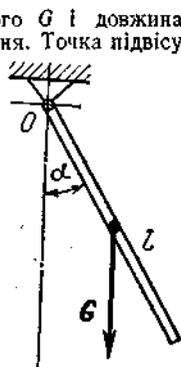


Рис. 17.5

5 17.3. Кінетична енергія твердого тіла

Кінетична енергія твердого тіла дорівнює сумі кінетичних енергій матеріальних точок, які утворюють це тіло:

$$K = \Sigma (m_i v_i^2) / 2.$$

Обчислимо кінетичну енергію твердого тіла для трьох випадків руху.

1. Тіло рухається поступально. Через те що в поступальному русі усі точки тіла мають однакові швидкості, запишемо

$$K_{\text{пост}} = \Sigma (m_i v_i^2) / 2 = (v^2 / 2) \Sigma m_i, \text{ або } K_{\text{пост}} = m v^2 / 2.$$

Тому для випадку поступального руху твердого тіла його кінетична енергія обчислюється за тією самою формулою, що й кінетична енергія матеріальної точки.

2. Тіло обертається навколо нерухомої осі. Тоді

$$K_{\text{об}} = \Sigma (m_i v_i^2) / 2 = \Sigma [m_i (\omega r_i)^2] / 2 = (\omega^2 / 2) \Sigma (m_i r_i^2),$$

або

$$K_{\text{об}} = J \omega^2 / 2.$$

Кінетична енергія твердого тіла, яке обертається навколо нерухомої осі, дорівнює половині добутку моменту інерції тіла відносно осі обертання на квадрат його кутової швидкості.

3. Тіло рухається плоскопаралельно. Як відомо з кінематики, складний плоскопаралельний рух твердого тіла в кожний момент часу можна вважати простим обертальним рухом навколо миттєвої осі (метод миттєвих центрів швидкостей). Припустимо, що швидкість v_C центра ваги відома, тоді миттєва кутова швидкість

$$\omega = v_C / OC,$$

де OC — відстань центра ваги C тіла від миттєвої осі обертання O . Момент інерції J_O відносно миттєвої осі обертання обчислюють за формулою

$$J_O = J_C + m \cdot OC^2,$$

де J_C — момент інерції відносно центральної осі, або центральний момент інерції. Кінетичну енергію тіла, яка рухається плоскопаралельно, визначають так:

$$K_{\text{пл}} = \frac{J_O \omega^2}{2} = (J_C + m \cdot OC^2) \frac{\omega^2}{2} = \frac{J_C \omega^2}{2} + \frac{m OC^2}{2} \cdot \frac{v_C^2}{OC^2},$$

або

$$K_{\text{пл}} = m v_C^2 / 2 + J_C \omega^2 / 2.$$

Кінетична енергія твердого тіла, яке рухається плоскопаралельно, дорівнює сумі кінетичних енергій у поступальному русі разом з центром ваги і обертальному русі навколо центральної осі, перпендикулярної до основної площини.

Сформулюємо тепер теорему про зміну кінетичної енергії системи тіл: зміна кінетичної енергії системи тіл при деякому переміщенні до-

рівнює алгебраїчній сумі робіт усіх зовнішніх (активних і реактивних) і внутрішніх сил, які діяли на систему під час її переміщення:

$$\Sigma K - \Sigma K_0 = \Sigma A.$$

Кінетична енергія системи тіл дорівнює сумі кінетичних енергій кожного тіла окремо. Якщо тіло тверде, то сума робіт його внутрішніх сил дорівнює нулю. Якщо зв'язки вважати ідеально гладенькими, то сума робіт реакцій цих зв'язків також дорівнюватиме нулю.

§ 17.4. Порівняння формул динаміки для поступального і обертального рухів твердого тіла

Порівнюючи формули динаміки точки або поступального руху тіла з формулами обертального руху тіла, легко побачити, що за структурою вони подібні. Щоб з формул поступального руху дістати формули обертального руху, треба замість сили підставити обертаючий момент, замість лінійного переміщення — кутове переміщення, замість лінійної швидкості

Таблиця 17.1

Порівнювані рівняння і динамічні міри	Види руху	
	поступальний	обертальний
Рівняння руху	$P = at$	$T = J\varepsilon$
Робота	$A = Ps$	$A = T\varphi$
Потужність	$N = Pv$	$N = T\dot{\varphi}$
Кінетична енергія	$K = mv^2/2$	$K = J\omega^2/2$

ті — кутову швидкість, замість лінійного прискорення — кутове прискорення, а замість маси — момент інерції тіла відносно осі обертання. Порівняти формули поступального і обертального рухів можна за допомогою табл. 17.1.

Приклад 17.3 Обчислити кінетичну енергію колеса радіусом R , масою m , яке ковтається по прямолінійній рейці без ковзання, коли швидкість центра ваги C колеса дорівнює v_C . Колесо вважати суцільним однорідним циліндром (рис. 17.6).

Розв'язання. Розв'яжемо цей приклад двома способами. Як відомо з кінематики, складний плоскопаралельний рух колеса можна розглядати як простий обертальний рух навколо миттєвої осі O з кутовою швидкістю ω (метод миттєвих центрів швидкостей) або як рух, що складається з поступального руху з швидкістю v_C і відносного обертального руху навколо осі C (метод розкладання плоскопаралельного руху на поступальний і обертальний). Нагадаємо, що абсолютна (миттєва) і відносна кутові швидкості колеса завжди дорівнюють одна одній.

1. Метод миттєвих центрів швидкостей. У цьому випадку кінетичну енергію колеса обчислюють за формулою

$$K = J_0 \omega^2 / 2,$$

де J_0 — момент інерції колеса відносно миттєвої осі обертання O . Момент інерції відносно осі O дорівнює

$$J_0 = J_C + mR^2.$$

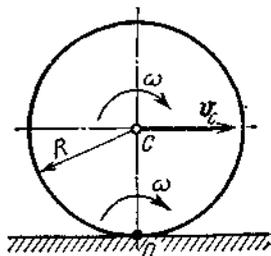


Рис. 17.6

Момент інерції суцільного однорідного циліндра відносно його геометричної обчислюють за формулою

$$J_C = mR^2/2, \text{ отже, } J_0 = \frac{mR^2}{2} + mR^2 = \frac{3}{2} mR^2.$$

Тепер обчислимо кінетичну енергію колеса:

$$K = \frac{J_0 \omega^2}{2} = \frac{3}{2} mR^2 \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{v_0}{R} \right)^2 = \frac{3}{4} m v_C^2.$$

2. Метод розкладання плоскопаралельного руху на поступальний і обертальний. У цьому випадку кінетична енергія колеса дорівнюватиме сумі кінетичних енергій поступального і обертального рухів:

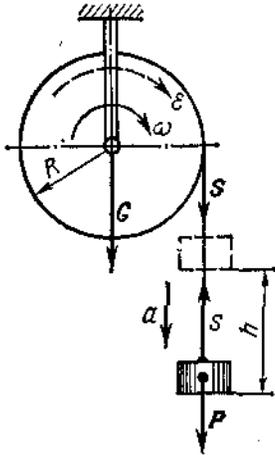


Рис. 17.7

$$K = \frac{m v_C^2}{2} + \frac{J_C \omega^2}{2} = \frac{m v_C^2}{2} + \frac{m R^2}{2} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{v_C}{R} \right)^2 = \frac{3}{4} m v_C^2.$$

Приклад 17.4. Вантаж P , опускаючись, обертає однорідний циліндр, сила тяжіння якого G , а радіус R (рис. 17.7). Нехтуючи тертям на осі циліндра, знайти натяг S нитки, кутову швидкість ω і прискорення ε циліндра, коли вантаж P опуститься на відстань h . Система була у стані спокою.

Розв'язання. Щоб розв'язати задачу, розділимо систему на дві частини і розглянемо окремо поступальний рух вантажу і обертальний рух циліндра. Оскільки на систему діють сталі сили, то вантаж і циліндр рухатимуться із сталим прискоренням a і ε відповідно. Лінійне прискорення a вантажу дорівнює дотичному прискоренню точок, які лежать на поверхні циліндра:

$$a = vR = \text{const},$$

де ε — кутове прискорення циліндра. За умовою початкова швидкість $v_0 = 0$, кінцеву ж швидкість v вантажу, що пройшов шлях h із сталим прискоренням a , визначимо з формули кінематики:

$$h = (v^2 - v_0^2)/2a,$$

звідки

$$v = \sqrt{2ah} = \sqrt{2\varepsilon R h}.$$

Тепер застосуємо до вантажу, який рухається поступально, теорему про зміну кінетичної енергії матеріальної точки

$$m v^2/2 - m v_0^2/2 = A,$$

Підставивши вирази для маси, швидкості і роботи, дістанемо

$$(P/g) (2\varepsilon R h/2) = (P - S) h.$$

Звідси реакція S нитки дорівнюватиме

$$S = P - P\varepsilon R/g.$$

Тепер запишемо рівняння обертального руху циліндра

$$T = J\varepsilon.$$

Обертаючий момент

$$T = SR = (P - P\varepsilon R/g) R,$$

а момент інерції циліндра обчислимо за формулою

$$J = mR^2/2 = GR^2/(2g).$$

Підставивши ці вирази в рівняння обертального руху, дістанемо:

$$(P - P\varepsilon R/g) R = GR^2\varepsilon/(2g).$$

Звідси визначимо кутове прискорення циліндра:

$$v = 2Pg/[R(G + 2P)].$$

Тепер можна визначити кутову швидкість циліндра:

$$\omega = v/R = \sqrt{2\varepsilon R h}/R.$$

Підставивши значення кутового прискорення, дістанемо

$$\omega = \frac{1}{R} = \sqrt{2Rh \frac{2Pg}{R(G + 2P)}}, \text{ звідки } \omega = \frac{2}{R} \sqrt{\frac{Pgh}{G + 2P}}.$$

Нарешті знайдемо кутову швидкість циліндра, скориставшись теоремою про зміну кінетичної енергії системи тіл. Враховуючи, що система була у стані спокою, що робота сили тяжіння циліндра дорівнює нулю (точка її прикладання не переміщується), і нехтуючи тертям, знаходимо

$$K_G + K_P = A_P,$$

де

$$K_G = \frac{J\omega^2}{2} = \frac{GR^2}{g \cdot 2} \cdot \frac{\omega^2}{2}, \quad K_P = \frac{P(\omega R)^2}{g \cdot 2}, \quad A = Ph.$$

Підставивши значення, дістанемо

$$GR^2\omega^2/(4g) + PR^2\omega^2/(2g) = Ph.$$

Звідси

$$\omega = \frac{2}{R} \sqrt{\frac{Pgh}{G + 2P}}.$$

§ 17.5. Балансування обертових тіл

Балансуванням називають зрівноважування мас механізмів, які обертаються або рухаються поступально, з метою знешкодження сил інерції. У цьому параграфі розглядатиметься лише балансування обертових деталей машин. Терміни, які вживаються у цьому параграфі, відповідають ГОСТ 19534—74 «Балансування обертових тіл. Терміни».

Незрівноваженість ротора (який обертається в опорах тіла) називають його стан, який характеризується таким розподілом мас, що під час обертання зумовлює змінні навантаження на опорах. Ці навантаження є причиною струсів і вібрацій, передчасного спрацювання і тому зменшують ККД і продуктивність машин. Незрівноваженість особливо небажана в швидкохідних машинах. Розглянемо випадок статичної незрівноваженості, коли центр ваги тіла не лежить на осі обертання.

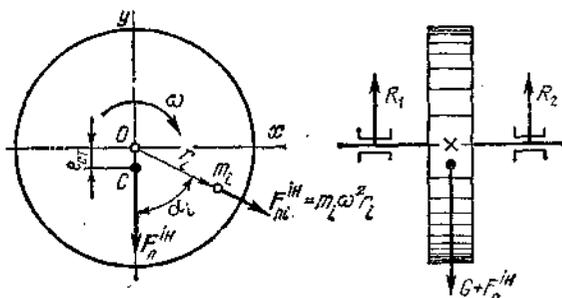


Рис. 17.8

Уявимо собі маховик масою m , який обертається із сталою кутовою швидкістю ω . Припустимо, що центр ваги C маховика не лежить на осі обертання, а зміщений на величину $e_{ст}$, яку називають ексцентриситетом маси (рис. 17.8). Силу тяжіння маховика позначимо G , масу осі до уваги не беремо. Розіб'ємо маховик на ряд матеріальних точок, що мають масу m_i кожна, і знайдемо рівнодіючу відцентрових сил інерції F_{ni}^{in} . Проекція цієї рівнодіючої на вісь x внаслідок симетрії маховика відносно осі y дорівнює нулю, тобто

$$F_{nx}^{in} = \Sigma (F_{ni}^{in} \sin \alpha_i) = 0.$$

Отже, рівнодіюча F_n^{in} сил F_{ni}^{in} проектується на вісь y в натуральну величину. Тоді

$$F_n^{in} = F_{ny}^{in} = \Sigma (F_{ni}^{in} \cos \alpha_i) = \Sigma (m_i \omega^2 r_i \cos \alpha_i) = \omega^2 \Sigma (m_i y_i) = \omega^2 m e_{ct},$$

оскільки із статyki відомо, що

$$\Sigma (m_i y_i) = m y_C = m e_{ct}.$$

Отже, рівнодіюча сил інерції усього маховика направлена по лінії OC і дорівнює

$$F_n^{in} = m \omega^2 e_{ct}$$

($F_t^{in} = 0$, бо $\omega = \text{const}$ і $\varepsilon = 0$).

Застосуємо принцип д'Аламбера і складемо рівняння рівноваги:

$$\Sigma Y = 0; \quad R_1 + R_2 - G - F_n^{in} = 0.$$

Через те що сила інерції F_n^{in} під час обертання змінює своє положення, то сила тиску на підшипники буде максимальною при нижньому положенні центра ваги

$$P_{\max} = R_1 + R_2 = G + F_n^{in}.$$

Визначимо силу тиску P_{\max} на підшипники, коли маса маховика $m = 102$ кг, його частота обертання 3000 хв^{-1} , а ексцентриситет маси $e_{ct} = 1$ мм.

Коли $\omega = \pi n / 30 = \pi 3000 / 30 = 100\pi$ рад/с, то

$$F_n^{in} = m \omega^2 e_{ct} = 102 \cdot (100\pi)^2 \cdot 0,001 \approx 10\,000 \text{ Н};$$

$$P_{\max} = mg + F_n^{in} = 102 \cdot 9,8 + 10\,000 = 11\,000 \text{ Н}.$$

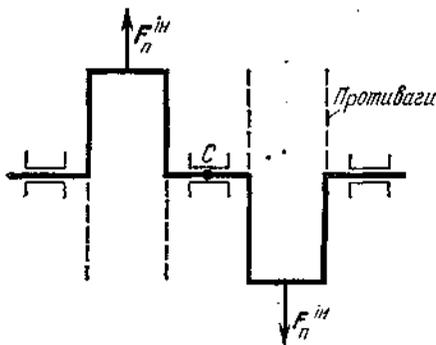


Рис. 17.9

З прикладу видно, що динамічні навантаження можуть бути у багато разів більшими від сили тяжіння рухомих частин машини.

Із викладеного можна зробити такий висновок: для рівноваги обертального тіла необхідно, щоб центр ваги його лежав на осі обертання. Статичну незрівноваженість легко виявити статичним балансуванням на двох горизонтальних паралельних балансувальних ножах. Деталь, яка не має статичної незрівноваженості, на ножах буде в стані індиферентної рівноваги.

Незрівноваженість ротора характеризують величиною дисбалансу. Добуток незрівноваженої маси а її ексцентриситет називають значенням дисбалансу і виражають у г · мм. Але сформульована умова зрівноважування

нерівномірності розподілу матеріалу, деформацією деталей, великими зазорами в обертальних парах тощо. Усувають незрівноваженість, видаляючи (наприклад, висвердлюючи) лишок матеріалу в важчій частині деталі або додаючи коректуючу масу в легшій частині.

Незрівноваженість спричинюється неточністю виготовлення і складання деталей, нерівномірністю розподілу матеріалу, деформацією деталей, великими зазорами в обертальних парах тощо. Усувають незрівноваженість, видаляючи (наприклад, висвердлюючи) лишок матеріалу в важчій частині деталі або додаючи коректуючу масу в легшій частині.

У випадку значної незрівноваженості ставлять *протйваги* (рис. 17.9), маса яких іноді досягає десятків тисяч кілограмів. У машинобудуванні статичне і динамічне балансування проводять на *балансивальних станках*.

Частина II

ОПІР МАТЕРІАЛІВ

Розділ XVIII

ОСНОВНІ ПОЛОЖЕННЯ

§ 18.1. Початкові поняття

Опір матеріалів як наука виник в епоху Відродження, коли розвиток техніки, торгівлі, мореплавства, військової справи вимагав наукових обґрунтувань, потрібних для будівництва великих морських суден, мостів, гідротехнічних споруд та інших складних конструкцій. Засновником цієї науки вважають італійського вченого Галілея (1564—1642). Досвід показує, що всі частини конструкцій під дією навантажень деформуються, тобто змінюють свою форму і розміри, а іноді руйнуються.

Опір матеріалів — це наука про міцність і стійкість проти деформації матеріалів і елементів машин та споруд.

Міцністю називають здатність матеріалу конструкцій і їх елементів чинити опір дії зовнішніх сил не руйнуючись (далі поняття міцності буде уточнено). В опорі матеріалів розглядають методи розрахунку елементів конструкцій на міцність, жорсткість і стійкість.

Розрахунки на міцність дають змогу визначити розміри і форму деталей, що витримують задане навантаження, при найменшій витраті матеріалу. На проблему зниження матеріалоемкості конструкцій велика увага звертається в матеріалах XXVI з'їзду КПРС і п'ятирічних планах розвитку народного господарства нашої країни.

Під жорсткістю розуміють здатність тіла або конструкції протидіяти деформації. Розрахунки на жорсткість гарантують, що зміни форми і розмірів конструкцій і їх елементів не перевищать допустимих норм.

Під стійкістю розуміють здатність конструкції протидіяти зусиллям, які намагаються вивести її з початкового стану рівноваги. Розрахунки на стійкість запобігають можливості раптової втрати стійкості і викривлення довгих або тонких деталей. Прикладом втрати стійкості може бути раптове викривлення довгого прямолінійного стержня від стискання вздовж осі.

На практиці здебільшого доводиться мати справу з конструкціями складної форми, але їх можна уявити складеними з окремих простих елементів, наприклад, брусів, пластин, оболонок і масивів. Основним розрахунковим елементом в опорі матеріалів є брус, тобто тіло, поперечні розміри якого малі порівняно з довжиною. Бруси бувають прямолінійні й криволінійні, сталого і змінного перерізу. Залежно від їх призначення в конструкції бруси називають колонами, балками, стержнями.

Плоский переріз, перпендикулярний до осі бруса, називають поперечним; переріз, паралельний осі бруса (прямолінійного), — поздовжнім, інші плоскі перерізи — похилими. Крім

розрахунку брусів опір матеріалів займається розрахунком пластин і оболонок, тобто тіл, які мають малу товщину порівняно з іншими розмірами (наприклад, резервуари, труби, обшивки кораблів та літаків). Тіла, в яких всі три виміри однакового порядку, називають масивами (наприклад, фундаменти, станини верстатів). Розрахунки пластин, оболонок і масивів у цьому підручнику не розглядають.

У результаті деформації під дією зовнішніх сил всередині тіла виникають сили пружності, які протидіють деформації і намагаються повернути частинки тіла в початкове положення. Сили пружності виникають внаслідок дії внутрішніх сил молекулярної взаємодії.

В опорі матеріалів вивчають деформації тіл і внутрішні сили, що виникають під час деформації. Після припинення дії зовнішніх сил збуджена цими силами деформація може повністю або частково зникнути. Здатність матеріалу усунути деформацію після припинення дії зовнішніх сил називають пружністю. Деформацію, яка зникає після припинення дії зовнішніх сил, називають пружною; деформацію, яка не зникає після припинення дії зовнішніх сил, називають залишковою або пластичною. Здатність матеріалу до значних залишкових деформацій без руйнування називають пластичністю, а самі матеріали називають пластичними. До таких матеріалів належать маловуглецева сталь, алюміній, мідь, латунь та ін.

Підкреслимо, що значні залишкові деформації здебільшого спричиняють порушення нормальної роботи конструкції і тому їх вважають порушенням міцності (як і руйнування).

Матеріали, які мають дуже малу пластичність, називають крихкими. На відміну від пластичних, крихкі матеріали руйнуються без помітних залишкових деформацій. До крихких матеріалів належать чавун, тверді сплави, скло, цегла та ін.

Наука про опір матеріалів ґрунтується на законах теоретичної механіки, в якій тіла вважають абсолютно жорсткими, тобто не здатними до деформації. Користуючись розглянутим у теоретичній механіці принципом тверднення, в опорі матеріалів для визначення реакцій зв'язку і діючих у перерізах деталей внутрішніх сил застосовуватимемо до деформованих тіл умови рівноваги статички. Проте для розрахунків на міцність та жорсткість деякі положення теоретичної механіки виявляються непридатними, зокрема:

1) зовнішні сили, які діють на тіло, не можна замінити їх рівнодіючою або еквівалентною системою сил;

2) силу не можна переносити вздовж лінії її дії;

3) пару сил не можна пересувати в площині дії пари.

Ці правила мають виняток. Так, наприклад, сили, прикладені до великої поверхні тіла, як і в теоретичній механіці, вважатимемо зосередженими, тобто прикладеними до однієї точки; розподілені реактивні сили, прикладені до затиснутого кінця балки, як і раніше, замінюватимемо реактивною силою і реактивним моментом. Такі заміни не вносять суттєвих змін в умови деформації тіла. Це положення має назву принципу Сен-Венана, за ім'ям французького вченого Сен-Венана (1797—1886).

Принцип Сен-Венана можна сформулювати так: *у точках тіла,*

достатньо віддалених від місць прикладання зовнішніх сил, величина внутрішніх сил дуже мало залежить від конкретного способу прикладання сил. Наяді, вивчаючи окремі види деформацій, на підставі принципу Сен-Венана не будемо цікавитися конкретними способами прикладання зовнішніх сил і вважатимемо, що в місці їх прикладання внутрішні сили змінюються стрибкоподібно.

§ 18.2. Основні гіпотези і припущення

Конструкційні матеріали, з яких виготовляють деталі машин і споруд, не є, точно кажучи, неперервними, однорідними в усіх точках і ізотропними (такими, що мають однакові властивості в усіх напрямках).

У процесі виробництва заготовок і виготовлення з них деталей у матеріалі виникають різні поверхневі і внутрішні дефекти, які важко врахувати, наприклад, раковини, тріщини і неоднорідності структури в литих деталях, волосовини в штампованих деталях, початкові внутрішні зусилля, спричинені нерівномірністю охолодження литих і кованих деталей, нерівномірністю висихання і неоднорідністю деревини, нерівномірністю тверднення і неоднорідністю бетону і т. д.

Оскільки закономірності виникнення зазначених явищ встановити неможливо, то в опорі матеріалів приймають ряд гіпотез і припущень, які дають змогу не розглядати ці явища. У результаті об'єктом вивчення в опорі матеріалів стає не саме реальне тіло, а його наближена модель. Експериментальна перевірка висновків, добутих на основі наведених далі гіпотез і припущень, показує, що ці висновки цілком придатні для використання в практиці інженерних розрахунків. Розглянемо основні гіпотези і припущення стосовно фізико-механічних властивостей матеріалів.

1. Гіпотеза про відсутність початкових внутрішніх зусиль. Згідно з цією гіпотезою, припускають, що коли немає причин для деформації тіла (навантаження, зміна температури), то в усіх його точках *внутрішні зусилля дорівнюють нулю*. Отже, сили взаємодії між частинками ненавантаженого тіла до уваги не беруть.

2. Припущення про однорідність матеріалу. Фізико-механічні властивості тіла в різних точках можуть бути неоднаковими. В опорі матеріалів ці відмінності нехтують, припускаючи, що матеріал в усіх точках тіла має *однакові властивості*.

3. Припущення про неперервність матеріалу. Згідно з цим припущенням, матеріал будь-якого тіла має *неперервну будову і є суцільним середовищем*. Припущення про неперервну будову матеріалу дає змогу використовувати під час розрахунків методи вищої математики (диференціальне і інтегральне числення).

4. Припущення про ізотропність матеріалу. Це припущення передбачає, що матеріал тіла має *однакові властивості* в усіх напрямках. Багато матеріалів складається з кристалів, в яких фізико-механічні властивості в різних напрямках істотно відрізняються. Проте, завдяки наявності в тілі великої кількості безладно розміщених кристалів, властивості всієї маси матеріалу в різних напрямках вирівнюються.

§ 18.4. Метод перерізів. Напряга

Для розрахунків деталей машин і споруд на міцність потрібно знати внутрішні сили пружності, які виникають у результаті дії прикладених до деталей зовнішніх сил. З теоретичної механіки вже відомий метод перерізів. Оскільки цей метод широко застосовують в алгебрі матеріалів для визначення внутрішніх сил, розглянемо його докладніше. Нагадаємо, що всяке тіло, в тому числі деталь машини або споруди, можна вважати системою матеріальних точок.

У теоретичній механіці розглядалися незмінні системи; в опорі матеріалів розглянемо змінні (деформовні) системи матеріальних точок.

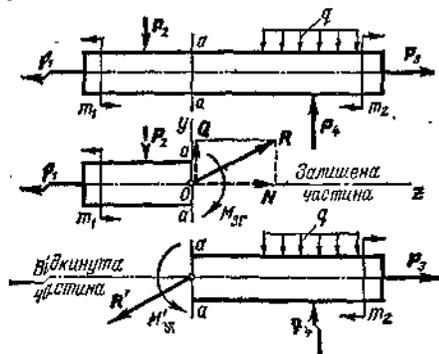


Рис. 18.3

Метод перерізів полягає в тому, що тіло уявно розрізають площиною на дві частини, будь-яку з них відкидають і замість неї до перерізу залишеної частини прикладають внутрішні сили, які діяли до розрізання; залишену частину розглядають як самостійне тіло, яке перебуває в рівновазі під дією зовнішніх і прикладених до перерізу внутрішніх сил.

Очевидно, що за третім законом Ньютона (аксіома взаємодії) внутрішні сили, які діють у перерізі залишеної і відкинutoї частин тіла, однакові за модулем, але протилежні за напрямом. Таким чином, розглядаючи рівновагу будь-якої з двох частин розрізаного тіла, дістанемо одне й те саме значення внутрішніх сил, але зручніше розглядати ту частину тіла, для якої рівняння рівноваги будуть простіші. Згідно з прийнятим припущенням про неперервність матеріалу тіла, можна твердити, що внутрішні сили, які виникають у тілі, рівномірно або нерівномірно розподілені по перерізу.

Застосовуючи до залишеної частини тіла умови рівноваги, не можна знайти закон розподілу внутрішніх сил по перерізу, але можна визначити статичні еквіваленти цих сил. Оскільки основним розрахунковим об'єктом в опорі матеріалів є брус і здебільшого нас цікавлять внутрішні сили в його поперечному перерізі, то розглянемо, якими будуть статичні еквіваленти внутрішніх сил у поперечному перерізі бруса. Зробимо поперечний переріз бруса $a - a$, як на рис. 18.3, і розглянемо рівновагу його лівої частини. Якщо зовнішні сили, які діють на брус, лежать в одній площині, то в загальному випадку статичним еквівалентом внутрішніх сил, що діють у перерізі $a - a$, будуть головний вектор R , прикладений до центра ваги перерізу, і головний момент M_z , що зрівноважують плоску систему зовнішніх сил, прикладених до залишеної частини бруса.

Розкладемо головний вектор R на складову N , напрямлену вздовж осі бруса, і складову Q , перпендикулярну до цієї осі, тобто що лежить у площині поперечного перерізу. Ці складові головного вектора разом з головним моментом називатимемо внутрішніми силами

факторами, які діють у перерізі бруса. Складову N назвемо по з довжньою силою, складову Q — поперечною силою, пару сил M_z — згинаючим моментом. Для визначення трьох внутрішніх силових факторів статика дає три рівняння рівноваги залишеної частини бруса, а саме:

$$\Sigma Z = 0; \quad \Sigma Y = 0; \quad \Sigma M = 0;$$

розкриваючи які, маємо:

$$N + \Sigma P_{iz} = 0; \quad Q + \Sigma P_{iy} = 0; \quad M_z + \Sigma M_o(P_i) = 0,$$

де ΣP_{iz} ; ΣP_{iy} — алгебраїчні суми проекцій на осі z і y зовнішніх сил, прикладених до розглядуваної частини бруса, а $\Sigma M_o(P_i)$ — алгебраїчна сума моментів цих сил відносно центра ваги перерізу (вісь z завжди спрямовуватимемо по осі бруса).

Якщо зовнішні сили, які діють на брус, не лежать в одній площині, тобто є просторовою системою сил, то в загальному випадку в поперечному перерізі бруса виникає шість внутрішніх силових факторів (рис. 18.4), для визначення яких статика дає шість рівнянь рівноваги залишеної частини бруса, а саме:

$$N + \Sigma P_{iz} = 0;$$

$$Q_x + \Sigma P_{ix} = 0; \quad Q_y + \Sigma P_{iy} = 0;$$

$$M_{zx} + \Sigma M_x(P_i) = 0; \quad M_{zy} + \Sigma M_y(P_i) = 0; \quad M_k + \Sigma M_z(P_i) = 0.$$

Шість внутрішніх силових факторів, які виникають у поперечному перерізі бруса в загальному випадку, мають назви: N — позовжня сила, Q_x , Q_y — поперечні сили, M_k — крутний момент, M_{zx} , M_{zy} — згинаючі моменти.

За різних деформацій у поперечному перерізі бруса виникають різні внутрішні силові фактори. Розглянемо окремі випадки:

1. У перерізі виникає лише позовжня сила N . У цьому випадку буває деформація розтягу (якщо сила N напрямлена від перерізу) або деформація стиску (якщо сила N напрямлена до перерізу).

2. У перерізі виникає лише поперечна сила Q . У цьому випадку буває деформація зсуву.

3. У перерізі виникає лише крутний момент M_k . Тоді буває деформація кручення.

4. У перерізі виникає лише згинаючий момент M_z . Тоді буває деформація чистого згину. Якщо в перерізі одночасно виникає згинаючий момент M_z і поперечна сила Q , то згин називають поперечним.

5. Якщо в перерізі одночасно виникає кілька внутрішніх силових факторів (наприклад, згинаючий і крутний моменти або згинаючий момент і позовжня сила), то в цих випадках трапляється поєднання осовних деформацій.

Поряд з поняттям деформації одним з основних понять опору матеріалу є напруга. Напруга характеризує інтенсивність внутрішніх сил, які діють у перерізі.

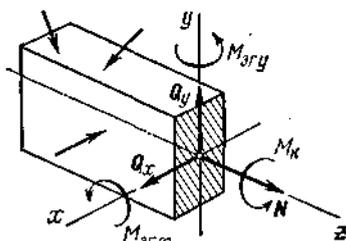


Рис. 18.4

Розглянемо довільно навантажений брус і застосуємо до нього метод перерізів (рис. 18.5). Виділимо в перерізі нескінченно малий елемент площі dF (що маємо право робити, оскільки вважаємо матеріал неперервним). Через малість цього елемента можна вважати, що в його межах внутрішні сили, прикладені до різних точок, однакові за модулем і напрямом і, отже, є системою паралельних сил. Рівнодіючу цієї системи позначимо dR . Поділивши dR на елементарну площину dF , визначимо інтенсивність внутрішніх сил, тобто напругу p в точках елементарної площі dF :

$$p = dR/dF.$$

Отже, напруга — це внутрішня сила, віднесена до одиниці площі перерізу. Напруга — величина в е к т о р н а.

Одиниця напруги:

$$[p] = \frac{[R]}{[F]} = \frac{\text{сила}}{\text{площа}} = \text{ньютон на квадратний метр} = \text{Н/м}^2 = \text{паскаль (Па)}.$$

Оскільки ця одиниця напруги дуже мала, то використовують більшу одиницю, а саме мегапаскаль (МПа):

$$1 \text{ МПа} = 10^6 \text{ Па} = 1 \text{ Н/мм}^2 = 10 \text{ кгс/см}^2 \text{ (у системі МКГСС)}.$$

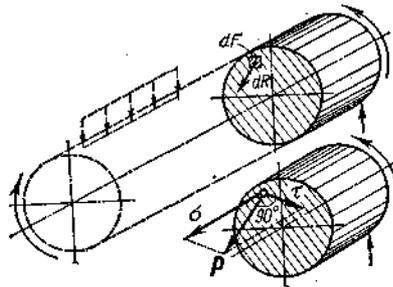


Рис. 18.5

Числові значення напруги, вираженої в МПа і Н/мм², однакові.

Розкладемо вектор напруги p на дві складові: σ — перпендикулярну до площини перерізу і τ — таку, що лежить у площині перерізу (рис. 18.5). Ці складові назвемо: σ — нормальна напруга, τ — дотична напруга.

Оскільки кут між нормальною і дотичною напругами завжди дорівнює 90°, то модуль повної напруги p визначається за формулою

$$p = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}.$$

Розкладання повної напруги на нормальну і дотичну має цілком визначений фізичний зміст. Як побачимо далі, в поперечному перерізі бруса у випадках розтягу, стиску і чистого згину діють *тільки нормальні напруги*, а при зсуві і крученні — *тільки дотичні напруги*.

Нарешті розглянемо гіпотезу, яку називають принципом незалежності дії сил і формулюють так: *коли на тіло діє кілька навантажень, то внутрішні сили, напруги, переміщення і деформації у будь-якому місці можна визначити як суму цих величин, знайдених від кожного навантаження окремо*. Користуючись принципом незалежності дії сил, від вивчення найпростіших основних деформацій, коли в поперечних перерізах бруса діють тільки нормальні або дотичні напруги, перейдемо до вивчення складніших основних деформацій, коли в поперечному перерізі діють і ті й інші навантаження, а потім розглянемо випадки поєднання основних деформацій, що іноді називають складним опором.

Зазначимо, що принцип незалежності дії сил стосується тільки конструкцій, деформації яких малі порівняно з їх розмірами і пропорційні діючим навантаженням.

§ 19.1. Напруги і деформації розтягу і стиску

Розтягом або стиском називають таку деформацію, при якій у будь-якому поперечному перерізі бруса виникає *тільки поздовжня сила*. Бруси з прямолінійною віссю (прямі бруси), які зазнають розтягу або стиску, часто називають *стержнями*.

Розглянемо невагомий, затиснутий лівим кінцем прямий брус, вздовж ої якого діють активні сили P і $2P$ (рис. 19.1). Частини бруса сталого перерізу, що містяться між поперечними площинами, в яких прикладені активні або реактивні сили, називатимемо ділянками. Зображений на рис. 19.1 брус складається з двох ділянок. Застосувавши метод перерізів, визначимо поздовжні сили N_1 і N_2 на ділянках. Зробимо поперечний переріз $I-I$ лівої ділянки бруса.

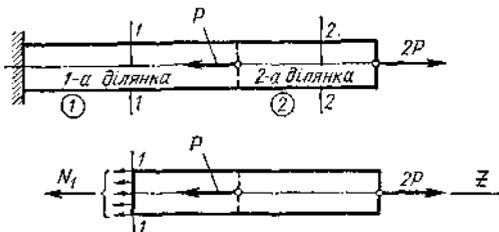


Рис. 19.1

В усіх точках бруса діятимуть внутрішні розподілені сили, рівнодіюча яких визначиться з умови рівноваги однієї з частин бруса (наприклад, від перерізу):

$$\sum Z = 0; \quad 2P - P - N_1 = 0, \quad \text{звідки} \quad N_1 = 2P - P = P.$$

Отже, для рівноваги залишеної частини бруса в перерізі $I-I$ треба прикласти тільки силу N_1 , напрямлену вздовж осі, тобто поздовжню силу.

Поздовжня сила — це рівнодіюча внутрішніх нормальних сил, які виникають у поперечному перерізі бруса. Неважко зрозуміти, що в перерізі $2-2$ на правій ділянці поздовжня сила матиме інше значення: $N_2 = 2P$. Таким чином, *поздовжня сила в поперечному перерізі бруса чисельно дорівнює алгебраїчній сумі зовнішніх сил, розміщених по один бік перерізу* (мають на увазі, що всі сили напрямлені вздовж осі бруса). Очевидно, що в межах однієї ділянки поздовжня сила матиме сталі значення. Треба пам'ятати, що, розглядаючи рівновагу лівої від перерізу частини бруса, потрібно вводити в рівняння рівноваги реакцію затиснутого кінця, визначену через рівновагу всього бруса.

Далі розтягуючі (напрявлені від перерізу) поздовжні сили вважатимемо *додатними*, а стискаючі (напрявлені до перерізу) — *від'ємними*. Інакше кажучи, якщо *рівнодіюча зовнішніх сил, прикладених до лівої частини бруса, напрямлена ліворуч*, а прикладених до правої частини — *праворуч*, то поздовжня сила в цьому перерізі буде *додатною*, і навпаки.

У ряді випадків уявлятимемо бруси складеними з нескінченної кількості волокон, паралельних осі, і припускатимемо, що під час деформації розтягу і стиску *волокна не тиснуть одне на одне* (це припущення називають *гіпотезою про ненадання волокон*). Якщо виготовити прямий брус із гуми (для більшої наочності), нанести на

його поверхню сітку поздовжніх і поперечних ліній і піддати брус деформації розтягу, то можна помітити:

1. Поперечні лінії залишаються у площинах, перпендикулярних до осі, а відстані між ними збільшуються.

2. Поздовжні лінії залишаються прямими, а відстані між ними зменшуються.

З цього досліді можна зробити висновок, що для розтягу справедлива гіпотеза плоских перерізів і, отже, всі волокна бруса видовжуються на одну і таку саму величину.

Все сказане вище дає змогу зробити висновок про те, що під час розтягу і стиску в поперечних перерізах бруса виникають тільки *нормальні напруги*, які *рівномірно розподілені в перерізі*; їх обчислюють за формулою

$$\sigma = N/F,$$

де N — поздовжня сила, а F — площа поперечного перерізу. Очевидно, що для розтягу і стиску форма перерізу на величину напруги не впливає.

У перерізах, близьких до точок прикладання розтягуючих або стискаючих сил, закон розподілу напруг у перерізі буде складнішим, але, користуючись принципом пом'якшення граничних умов, нехтуватимемо цими відхиленнями і вважатимемо, що в усіх перерізах бруса напруги розподілені рівномірно і що в перерізі, де до бруса прикладено вздовж осі зосереджену силу, значення поздовжньої сили і напруг змінюються стрибкоподібно.

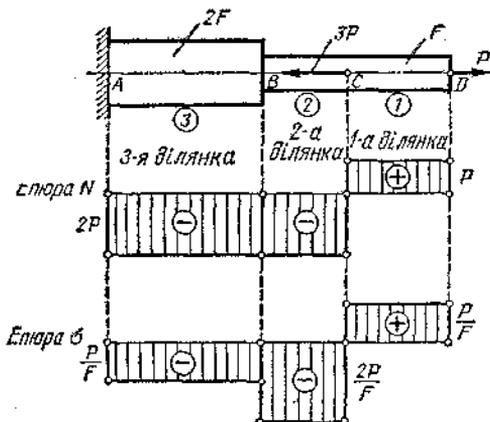


Рис. 19.2

Для побудови епюри поздовжніх сил N під рисунком бруса проведемо вісь або базу епюри, паралельну осі бруса, і штриховими лініями обмежимо його ділянки. Величини поздовжніх сил у довільному масштабі відкладемо перпендикулярно до осі епюри, причому додатні значення N (розтяг) відкладаємо вгору, а від'ємні (стиск) — вниз від осі. Епюру штрихуємо тонкими лініями, перпендикулярними до осі. Лінія штрихування в обратному масштабі (ордината графіка) дає значення зосередженої сили у відповідному поперечному перерізі бруса. У точках прикладання зосереджених сил на епюрі N відбиваються стрибкоподібні зміни, причому величина «стрибка» дорівнює модулю прикладеної в перерізі бруса зовнішньої зосередженої сили.

Перейдемо до побудови епюри N . Застосовуючи метод перерізів, з'ясуємо, що в усіх поперечних перерізах першої ділянки діє поздовжня сила $N_1 = P$. Відкладемо вгору від осі епюри величину P у довільному масштабі і проведемо пряму, паралельну осі

Для наочного зображення розподілу осі бруса поздовжніх сил і нормальних напруг будуть графіки, які називають е п ю р а м и, причому для нормальних напруг застосовують те саме правило знаків, що і для поздовжніх сил.

Приклад 19.1. Побудувати епюри поздовжніх сил і нормальних напруг для ступінчастого бруса, зображеного на рис. 19.2.

Розв'язання. Розділимо брус на ділянки і пронумеруємо їх, як показано на рис. 19.2. Межами ділянок є точки прикладання зовнішніх сил і місця зміни розмірів поперечного перерізу. Даний брус складається з трьох ділянок.

епюри. у точці C бруса прикладено силу $3P$. Застосовуючи метод перерізів, з'ясуємо, що в усіх поперечних перерізах другої і третьої ділянок діє поздовжня сила $N_2 = N_3 = -2P$ і епюра буде горизонтальною лінією, яка проходить на $2P$ нижче від осі епюри. Очевидно, що значення ординати епюри поздовжніх сил під закріпленням дорівнює реакції закріплення. Зазначимо, що за методом перерізу зручніше розглядати рівновагу частини бруса, розміщеної з боку його вільного кінця, у противному разі треба задалегідь визначити і вводити в рівняння рівноваги реакцію закріплення.

Щоб побудувати епюру σ , визначимо нормальні напруги на ділянках бруса, беручи відношення значення поздовжньої сили (з епюри N) до площі поперечного перерізу. Тоді на першій ділянці нормальні напруги будуть $\sigma_1 = P/F$, на другій $\sigma_2 = -2P/F$, на третій $\sigma_3 = -2P/2F = -P/F$. Правила побудови епюри σ такі самі, як і для епюри N , включаючи і правило знаків. У межах кожної ділянки напруги сталі, тому епюра σ на кожній ділянці паралельна осі. Для наочності на епюрах N і σ знаками «+» і «-» помічають додатні і від'ємні значення ділянок епюр. У розрахунках на міцність привертують особливу увагу ті перерізи бруса, в яких напруги за абсолютним значенням максимальні. Ці перерізи можуть бути небезпечними. У цьому прикладі такими є перерізи бруса на другій ділянці.

Перейдемо до розгляду деформацій. Уявимо прямий брус сталого поперечного перерізу F , що має довжину l , жорстко закріплений одним кінцем і навантажений на другому кінці розтягуючою силою P (рис. 19.3). Під дією цієї сили брус видовжиться на деяку величину Δl , яку назовемо абсолютним видовженням. Відношення абсолютного видовження Δl до початкової довжини l назовемо відносним видовженням і позначимо ϵ :

$$\epsilon = \Delta l / l.$$

Відносне видовження ϵ — число абстрактне, іноді його подають у процентах:

$$\epsilon = (\Delta l / l) \cdot 100.$$

Внаслідок деформації поперечні перерізи бруса переміщуються в напрямі осі. Взаємне переміщення двох перерізів дорівнює зміні довжини частини бруса, що лежить між цими перерізами. Отже, деформація розтягу і стиску бруса характеризується абсолютним і відносним видовженням або укороченням.

§ 19.2. Закон Гука для розтягу і стиску

Напруги і деформації розтягу і стиску пов'язані між собою залежністю, яку називають законом Гука, за ім'ям англійського фізика Роберта Гука (1635—1703), що встановив цей закон. Закон Гука для розтягу і стиску справедливий лише у певних межах навантаження і формулюється так: *нормальна напруга прямо пропорційна відносному видовженню або укороченню.*

Математично закон Гука можна записати у вигляді рівності:

$$\sigma = E\epsilon.$$

Коефіцієнт пропорційності E характеризує жорсткість матеріалу, тобто його здатність протидіяти пружним деформаціям розтягу або стиску, і називається модулем поздовжньої пружності або модулем пружності першого роду.

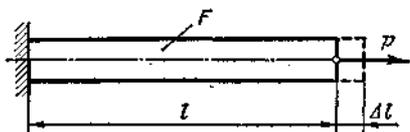


Рис. 19.3

Модуль пружності і напругу виражають в однакових одиницях:

$$[E] = [\sigma]/[\epsilon] = \text{Па.}$$

Наведемо значення E , МПа для деяких матеріалів:

Чавун	$(1,5 \div 1,6) \cdot 10^5$
Сталь	$(1,96 \div 2,16) \cdot 10^5$
Мідь	$(1,0 \div 1,3) \cdot 10^5$
Сплави алюмінію	$(0,69 \div 0,71) \cdot 10^5$
Дерево (вздовж волокон)	$(0,1 \div 0,16) \cdot 10^5$
Текстоліт	$(0,06 \div 0,1) \cdot 10^5$
Капрон	$(0,01 \div 0,02) \cdot 10^5$

Якщо у формулу закону Гука підставити вирази

$$\sigma = N/F, \quad \epsilon = \Delta l/l,$$

то дістанемо

$$\Delta l = Nl/(EF).$$

Добуток EF у знаменнику називають жорсткістю перерізу при розтягу і стиску; він характеризує одночасно фізико-механічні властивості матеріалу і геометричні розміри поперечного перерізу бруса.

Цю формулу читають так: абсолютне видовження або укорочення прямо пропорційне поздовжній силі, довжині і обернено пропорційне жорсткості перерізу бруса. Відношення EF/l називають жорсткістю бруса при розтягу або стиску. Наведені формули закону Гука стосуються лише брусів або їх ділянок сталого поперечного перерізу, виготовлених з одного матеріалу, при сталій поздовжній силі.

Для бруса, що має кілька ділянок, які відрізняються матеріалом, розмірами поперечного перерізу, величиною поздовжньої сили, зміна довжини всього бруса дорівнює алгебраїчній сумі видовжень і укорочень окремих ділянок:

$$\Delta l = \sum (\Delta l_i).$$

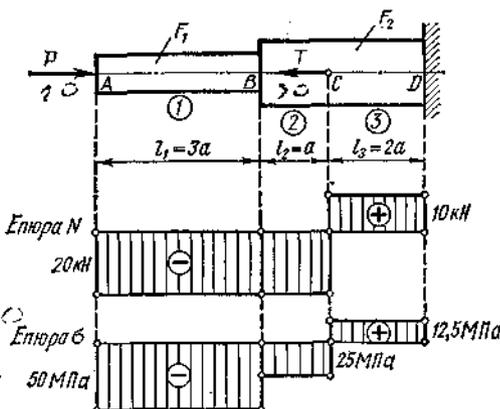


Рис. 19.4

Приклад 19.2. На сталевий ступінчастий брус ($E = 2 \cdot 10^{11}$ Па) діють сили

$P = 20$ кН і $T = 30$ кН. Площі поперечних перерізів відповідно дорівнюють $F_1 = 400$ мм², $F_2 = 800$ мм². Довжини ділянок вказано на рис. 19.4; $a = 0,2$ м. Визначити зміну довжини бруса трьома способами: 1) за допомогою епюри поздовжніх сил; 2) за допомогою принципу незалежності дії сил; 3) за допомогою епюри нормальних напруг.

Розв'язання. 1-й спосіб. Розділимо брус на ділянки і, використовуючи метод перерізів, визначимо значення поздовжніх сил N_1 , N_2 , N_3 на кожному з них: $N_1 = N_2 = -20$ кН (стиск), $N_3 = 10$ кН (розтяг). Побудуємо епюру поздовжніх сил (рис. 19.4).

Використовуючи формулу $\Delta l = \sum (\Delta l_i)$ для обчислення зміни довжини бруса, який складається з кількох ділянок, дістаємо $\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3$, де, за законом Гука, $\Delta l_1 = \frac{N_1 3a}{EF_1}$ — зміна довжини першої ділянки; аналогічно $\Delta l_2 = \frac{N_2 a}{EF_2}$, $\Delta l_3 = \frac{N_3 2a}{EF_2}$ — зміна довжин другої і третьої ділянок.

Отже,

$$\Delta l = N_1 \cdot 3a/(EF_1) + N_2 \cdot a/(EF_2) + N_3 \cdot 2a/(EF_2).$$

Підставивши числові значення, матимемо

$$\Delta l = -20 \cdot 10^3 \cdot 3 \cdot 0,2/(2 \cdot 10^{11} \cdot 400 \cdot 10^{-6}) - 20 \cdot 10^3 \cdot 0,2/(2 \cdot 10^{11} \cdot 800 \cdot 10^{-6}) + \\ + 10 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 0,2/(2 \cdot 10^{11} \cdot 800 \cdot 10^{-6}).$$

Обчисливши, знайдемо:

$$\Delta l_1 = -0,15 \text{ мм}, \quad \Delta l_2 = -0,025 \text{ мм}, \quad \Delta l_3 = -0,025 \text{ мм}.$$

Остаточо

$$\Delta l = -0,15 - 0,025 + 0,025 = -0,15 \text{ мм}.$$

Отже, брус укоротиться на 0,15 мм.

2-й спосіб. Розв'яжемо цей приклад за допомогою принципу незалежності дії сил. Зміна довжини бруса Δl складатиметься з укорочення Δl_P всього бруса під дією сили P і видовження Δl_T ділянки CD під дією сили T :

$$\Delta l = \Delta l_P + \Delta l_T.$$

Обчислимо кожний з цих доданків:

$$\Delta l_P = -Pl_1/(EF_1) - P(l_2 + l_3)/(EF_2).$$

Враховуючи, що $l_1 = 3a$, $l_2 = a$, $l_3 = 2a$, і підставляючи числові значення, знаходимо $\Delta l_P = -0,225$ мм. Аналогічно знаходимо

$$\Delta l_T = Tl_3/(EF_2); \quad \Delta l_T = 0,075 \text{ мм}.$$

Звідси

$$\Delta l = -0,225 + 0,075 = -0,15 \text{ мм}.$$

3-й спосіб. Розв'яжемо той самий приклад за допомогою епюри σ за формулою

$$\Delta l = Pl/(EF) = \sigma l/E.$$

Тут

$$\Delta l = \sigma_1 l_1/E + \sigma_2 l_2/E + \sigma_3 l_3/E.$$

де σ_1 , σ_2 , σ_3 — нормальні напруги відповідно на першій, другій і третій ділянках. Обчислимо їх значення:

$$\sigma_1 = N_1/F_1 = -20 \cdot 10^3/(400 \cdot 10^{-6}) = -50 \cdot 10^6 \text{ Па} = -50 \text{ МПа};$$

$$\sigma_2 = N_2/F_2 = -20 \cdot 10^3/(800 \cdot 10^{-6}) = -25 \cdot 10^6 \text{ Па} = -25 \text{ МПа};$$

$$\sigma_3 = N_3/F_2 = 10 \cdot 10^3/(800 \cdot 10^{-6}) = 12,5 \cdot 10^6 \text{ Па} = 12,5 \text{ МПа}.$$

Побудуємо епюру нормальних напруг (рис. 19.4). Враховуючи, що $a = 0,2$ м, і підставляючи у формулу числові значення, дістаємо

$$\Delta l = -50 \cdot 10^6 \cdot 0,6/(2 \cdot 10^{11}) - 25 \cdot 10^6 \cdot 0,2/(2 \cdot 10^{11}) + \\ + 12,5 \cdot 10^6 \cdot 0,4/(2 \cdot 10^{11}) = -0,15 \cdot 10^{-3} \text{ м} = -0,15 \text{ мм}.$$

Розв'язуючи трьома різними способами, дістаємо один і той самий результат, що стверджує правильність розв'язання.

§ 19.3. Поперечна деформація розтягу і стиску

Описаний раніше дослід з гумовим брусом показує, що поперечні розміри перерізу при розтягу зменшуються, а при стиску збільшуються. Це характерно для розтягу і стиску всіх матеріалів. На дослідях встановлено, що при одноосному розтягуванні або стисканні відношення відносних поперечних і поздовжніх деформацій для даного матеріалу є величина стала. Залежність між відносною поперечною ϵ' і відносною поздовжньою ϵ деформаціями вперше встановив французький вчений

Пуассон (1781—1840). Ця залежність має такий вигляд:

$$|\epsilon'| = \nu |\epsilon|,$$

де ν — коефіцієнт поперечної деформації, або коефіцієнт Пуассона. Зрозуміло, що ν — величина безрозмірна. Коефіцієнт Пуассона як і модуль пружності першого роду, залежить лише від матеріалу і характеризує його пружні властивості. Для розтягу і стиску коефіцієнт Пуассона беруть однаковим. Наведемо значення ν для деяких матеріалів:

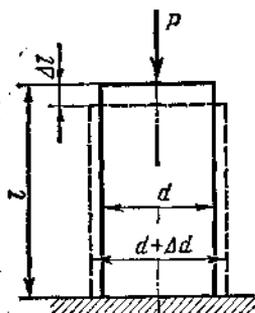


Рис. 19.5

Корок	0,00	Латунь	0,32 — 0,42
Чавун	0,23 — 0,27	Свинець	0,42
Сталь	0,24 — 0,30	Каучук	0,47
Мідь	0,31 — 0,34	Парафін	0,5

Приклад 19.3. Стальний циліндр (рис. 19.5), що має довжину $l = 80$ мм і діаметр $d = 30$ мм, від стискання укорсчується на $\Delta l = 0,064$ мм, а діаметр його збільшується на $\Delta d = 0,0065$ мм. Знайти коефіцієнт Пуассона ν .

Розв'язання. Запишемо основні співвідношення, необхідні для розв'язання задачі:

$$\Delta l/l = |\epsilon|, \quad \Delta d/d = |\epsilon'|, \quad |\epsilon'| = \nu |\epsilon|.$$

Звідси

$$\nu = |\epsilon'/\epsilon| = l\Delta d/(d\Delta l).$$

Підставляючи числові значення, маємо

$$\nu = 80 \cdot 10^{-3} \cdot 0,0065 \cdot 10^{-3} / (30 \cdot 10^{-3} \cdot 0,064 \cdot 10^{-3}) = 0,27.$$

§ 19.4. Діаграма розтягу маловуглецевої сталі

Механічні характеристики матеріалів, тобто величини, які характеризують їх міцність, пластичність, пружність, твердість, а також пружні сталі величини E і ν , потрібні конструктору для вибору матеріалів та розрахунків проєктованих деталей, визначають за допомогою механічних випробувань стандартних зразків, виготовлених з досліджуваного матеріалу.

У встановленні однакових в усьому світі методів випробування матеріалів велика заслуга належить російському професорові Н. А. Белелюбському (1845—1922) — президенту Міжнародного товариства випробування матеріалів. Питання лабораторних випробувань матеріалів тут не розглядаються, їх читач може знайти у спеціальних навчальних посібниках для техніків.

У цьому параграфі докладно розглянемо діаграму, добуту в процес найбільш поширеного і важливого механічного випробування, а саме випробування на розтяг маловуглецевої сталі (наприклад, сталі Ст3 при статичному навантаженні).

У процесі цього випробування спеціальний пристрій випробувальної машини автоматично креслить діаграму, яка показує залежність між розтягуючою силою і абсолютним видовженням, тобто в координатах $(P, \Delta l)$. Для вивчення механічних властивостей матеріалу незалежно від розмірів зразка застосовують діаграму в координатах (σ, ϵ) — відноси

видовження» (σ , ϵ). Ці діаграми відрізняються одна від одної лише масштабами. Діаграму розтягу маловуглецевої сталі подано на рис. 19.6. Ця діаграма має такі характерні точки. Точка A відповідає границі пропорційності. Границею пропорційності $\sigma_{\text{пц}}$ називають таку найбільшу напругу, до якої деформації зростають пропорційно навантаженню, тобто відповідно до закону Гука (для сталі Ст3 $\sigma_{\text{пц}} = 200$ МПа).

Точка A практично відповідає й іншій границі, яку називають границею пружності (Границею пружності $\sigma_{\text{пр}}$ називають таку найбільшу напругу, до якої деформації практично залишаються пружними. Точка C відповідає границі текучості. Границею текучості $\sigma_{\text{т}}$ називають таку напругу, при якій у зразку виникає помітне видовження без збільшення навантаження (для сталі Ст3 $\sigma_{\text{т}} = 240$ МПа).

Коли деформація досягає границі текучості, поверхня зразка стає матовою, бо на ній появляється сітка ліній Людерса — Чернова, нахилених до осі під кутом 45° .

Ці лінії вперше в 1859 р. описали німецький металург Людерс і незалежно від нього в 1884 р. російський металург Д. К. Чернов (1839—1921), який запропонував використовувати їх для експериментального вивчення напруг у складних деталях.

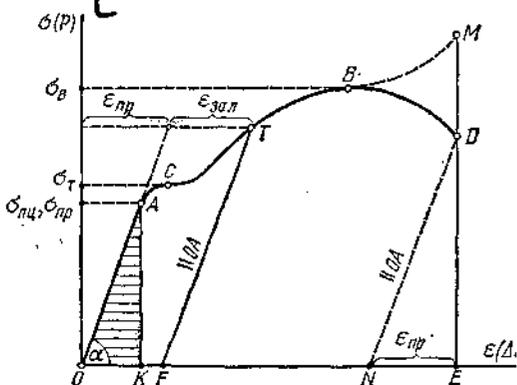


Рис. 19.6

Границя текучості — це основна механічна характеристика для оцінки міцності пластичних матеріалів.

Точка B відповідає тимчасовому опору або границі міцності.

Тимчасовим опором $\sigma_{\text{тм}}$ називають умовну напругу, що дорівнює відношенню максимальної сили, яку витримує зразок, до початкової площі його поперечного перерізу (для сталі Ст3 $\sigma_{\text{тм}} \approx 400$ МПа). Коли деформація досягає тимчасового опору, то на розтягуваному зразку утворюється місцеве звуження — шийка, тобто починається руйнування зразка. В означенні тимчасового опору йдеться про умовну напругу, оскільки в перерізах шийки напруги будуть більшими.

Границею міцності $\sigma_{\text{м}}$ називають тимчасовий опір зразка, який руйнується без утворення шийки. Границя міцності є основною механічною характеристикою для оцінки міцності крихких матеріалів?

Точка D відповідає нарузі, яка виникає у зразку в момент розриву усіх поперечних перерізах, крім перерізу шийки.

Точка M відповідає нарузі, яка виникає у найменшому поперечному перерізі шийки в момент розриву. Цю напругу можна назвати напругою розриву.

За допомогою діаграми розтягу в координатах (σ , ϵ) визначимо модуль пружності першого роду:

$$E = \sigma/\epsilon = AK \cdot \mu_{\sigma}/(OK \cdot \mu_{\epsilon}) = (\mu_{\sigma}/\mu_{\epsilon}) \operatorname{tg} \alpha,$$

де μ_σ — масштаб напруг, μ_ϵ — масштаб відносних видовжень, α — кут, який утворює з віссю абсцис пряма лінія діаграми до границі пропорційності. Для більшості вуглецевих сталей границю пропорційності можна приблизно вважати такою, що дорівнює половині тимчасового опору.

Деформація зразка за границею пружності складається з пружної і залишкової, причому пружна частина деформації підлягає закону Гука й за границею пропорційності (рис. 19.6). Якщо навантаження зняти, то зразок укоротиться відповідно до прямої TF діаграми. При повторному навантаженні того самого зразка його деформація відповідатиме діаграмі $FTBD$. Отже, при повторному розтягуванні зразка, раніше навантаженого більше, ніж границя пружності, механічні властивості матеріалу змінюються, а саме: підвищується міцність (границя пружності і пропорційності) і зменшується пластичність. Це явище називають наклепом.

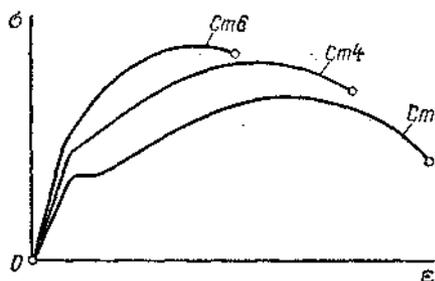


Рис. 19.7

Іноді наклеп небажаний (наприклад, під час пробивання отворів під заклепки збільшується можливість виникнення тріщин біля отворів). В інших випадках наклеп створюють навмисно (наприклад, ланцюги підйомних машин, арматуру залізобетонних конструкцій, проводи, троси попередньо витягують за границю

текучості). Дріт, який витягують волочінням, у результаті наклепу має значно більшу міцність, ніж точений зразок з того самого матеріалу.

Ступінь пластичності матеріалу можна охарактеризувати величиною (в процнтах) залишкового відносного видовження δ і залишкового відносного звуження ψ шийки зразка після розриву:

$$\delta = [(l_p - l_0)/l_0] \cdot 100; \quad \psi = [(F_0 - F_{ш})/F_0] \cdot 100,$$

де l_0 — початкова довжина зразка, l_p — довжина зразка після розриву, F_0 — початкова площа поперечного перерізу зразка, $F_{ш}$ — площа найменшого поперечного перерізу шийки зразка після розриву. Чим більші δ і ψ , тим пластичніший матеріал. Матеріали, які мають дуже малу пластичність, називають крихкими. Діаграма розтягу крихких матеріалів не має переходу текучості, в них при руйнуванні шийка не утворюється.

Діаграма стиску сталі до границі текучості збігається з діаграмою розтягу, причому результати випробування сталі на розтяг і стиск однакові. Результати випробувань на розтяг і стиск чавуну значно відрізняються; границя міцності на розтяг у 3—5 разів менша, ніж на стиск. Інакше кажучи, чавун значно гірше працює на розтяг, ніж на стиск.

Зазначимо, що чітко виражену площадку текучості мають лише діаграми розтягу маловуглецевої сталі і деяких сплавів кольорових металів. На рис. 19.7 показано для порівняння діаграми розтягу сталей з різним вмістом вуглецю; з рисунка видно, що із збільшенням процента вмісту вуглецю зростає міцність сталі і зменшується її пластичність.

Для пластичних матеріалів, діаграми розтягу яких не мають чітко вираженої площадки текучості (середньо- і високовуглецеві, леговані сталі) або зовсім її не мають (мідь, дюралюміній), вводиться поняття умовної границі текучості — напруги, при якій відносно залишкове видовження зразка дорівнює 0,2 %. Умовну границю текучості також позначатимемо σ_T (іноді її позначають $\sigma_{0,2}$).

Треба зазначити, що поділ матеріалів на пластичні і крихкі цілком умовний, оскільки залежно від характеру діючого навантаження крихкий матеріал може набути пластичних властивостей і, навпаки, пластичний матеріал набуває властивостей крихкого. Так, наприклад, деталь з пластичного матеріалу при низькій температурі або при ударному навантаженні руйнується без утворення шийки, як крихка.

§ 19.5. Потенціальна енергія деформації розтягу

У випадку статичного розтягу зразка розтягуюча сила P , яка повільно зростає від нуля до якогось значення, видовжує зразок на величину Δl і при цьому виконує роботу A . Ця робота акумулюється у деформованому зразку як потенціальна енергія деформації U , причому, нехтуючи незначними втратами енергії (наприклад, тепловими), можна вважати, що

$$A = U.$$

Якщо діаграма розтягу побудована в координатах $(P, \Delta l)$, то, як відомо з теоретичної механіки, площа діаграми виражає роботу деформації. До границі пропорційності робота виражається площею трикутника OAK (див. рис. 19.6). Отже, потенціальна енергія пружної деформації стержня, що має довжину l і сталій поперечний переріз F при однаковій в усіх перерізах поздовжній силі $N = P$, дорівнюватиме

$$U = A = P\Delta l/2 = N^2l/(2EF).$$

Повна робота, яка витрачається на руйнування зразка, виражається площею фігури $OABDN$ діаграми розтягу; площа трикутника NDE відповідає роботі пружної деформації, що зникає під час розриву зразка. *Питома потенціальна енергія деформації називають роботу деформації, яка припадає на одиницю об'єму бруса:*

$$u = A/V = A/(Fl) = N^2l/(2EF) : Fl = \sigma^2/(2E).$$

Коли одночасно діє кілька розтягуючих або стискаючих сил і брус має ступінчасто змінні розміри поперечного перерізу, його поділяють на окремі ділянки, що відрізняються величиною напруги; потенціальну енергію деформації всього бруса визначають як суму потенціальних енергій окремих ділянок:

$$U = \sum U_i = \sum \sigma_i^2 V_i / (2E),$$

де σ_i — нормальні напруги в поперечних перерізах на кожній ділянці, V_i — об'єм кожної ділянки бруса.

Потенціальну енергію деформації виражають в одиницях роботи — джоулях (Дж), питому потенціальну енергію — у джоулях на кубічний метр (Дж/м³). Аналізуючи формули потенціальної енергії деформації, можна зробити такі висновки:

1. Потенціальна енергія деформації — величина завжди додатна, оскільки в її вирази входять квадрати напруг або поздовжніх сил.

2. З цієї причини для обчислення потенціальної енергії деформації не можна застосовувати принцип незалежності дії сил (з математики відомо, що квадрат суми не дорівнює сумі квадратів доданків).

§. 49.6. Розрахункова формула для розтягу і стиску

За допомогою механічних випробувань встановлюють граничні напруги, при яких відбувається порушення роботи або руйнування деталей конструкцій. Граничною напругою при статичному навантаженні для пластичних матеріалів є границя текучості, для крихких — границя міцності. Міцність деталей забезпечуватиметься при умові, що напруги, які виникають в деталях у процесі експлуатації, будуть менші від граничних. Відношення граничної напруги до напруги, яка виникає у процесі роботи деталі, називають коефіцієнтом запасу міцності і позначають n :

$$n = \sigma_r / \sigma, \text{ де } \sigma = N/F.$$

Очевидно, що малий коефіцієнт запасу міцності не забезпечить надійності конструкції, а надмірний запас міцності призведе до перевитрат матеріалу і збільшення ваги конструкції. *Переріз, для якого коефіцієнт запасу міцності найменший, називають небезпечним. Мінімально необхідний коефіцієнт запасу міцності називають допустимим і позначають $[n]$.* Допустимий коефіцієнт запасу міцності залежить від властивостей, якості і однорідності матеріалу, можливих навантажень, які діють на конструкцію, важливості конструкції і багатьох інших причин. Для пластичних матеріалів $[n] = 1,2 \div 2,5$, для крихких $[n] = 2 \div 5$, для деревини $[n] = 8 \div 12$.

Відношення граничної напруги до допустимого коефіцієнта запасу міцності називають допустимою напругою і позначають $[\sigma]$:

$$[\sigma] = \sigma_r / [n].$$

Умова міцності деталі конструкції полягає у тому, що найбільша напруга (робоча), яка виникає у ній, не повинна перевищувати допустиму:

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma].$$

Умову міцності можна записати в іншому вигляді:

$$n \geq [n],$$

тобто розрахунковий коефіцієнт запасу міцності не повинен бути меншим від допустимого.

Орієнтовні величини допустимих напруг на розтяг і стиск для деяких матеріалів подано в табл. 19.1.

Якщо допустимі напруги для розтягу і стиску різні, то їх позначають відповідно $[\sigma_p]$ і $[\sigma_c]$. Розрахункова формула для розтягу і стиску має вигляд

$$\sigma = N/F \leq [\sigma];$$

Її читають так: *нормальна напруга в небезпечному перерізі, обчислена за формулою $\sigma = N/F$, не повинна перевищувати допустиму.* У розрахунках конструкцій на міцність трапляються три види задач, які відрізняються формою застосування розрахункової формули:

1) проектний розрахунок, при якому визначають розмір небезпечного перерізу. Його роблять за формулою

$$F = N_{\max} / [\sigma];$$

2) перевірний розрахунок, при якому визначають робочу напругу і порівнюють її з допустимою. Цей розрахунок роблять за формулою

$$\sigma = N/F \leq [\sigma];$$

Таблиця 19.1

Матеріал	[σ] МПа	
	розтяг	стиск
Чавун сірий	28—80	120—150
Сталь вуглецева конструкційна	60—250	
Сталь легована конструкційна	100—400 і більше	
Мідь	30—120	
Латунь	70—140	
Бронза	60—120	
Дюралюміній	80—150	
Текстоліт	30—40	50—90
Дуб (вздовж волокон)	9—13	13—15
Цегляна кладка	До 0,2	0,6—2,5
Бетон	0,1—0,7	1—9

3) визначення допустимого навантаження. Цей розрахунок роблять за формулою

$$[N] = F [\sigma].$$

Приклад 19.4. Визначити розмір квадратного перерізу дерев'яного підкосу BC конструкції, зображеної на рис. 19.8, якщо $P = 5$ кН, $[\sigma] = 6$ МПа, $a = 1$ м. Масаю частин конструкції знехтувати, кріплення у точках A , B і C вважати ідеально гладеньким шарнірами.

Розв'язання. З теоретичної механіки відомо, що коли прямолінійний стержень закріплено шарнірно двома кінцями і навантажено лише на кінцях, то його реакція напрямлена вздовж стержня. Отже, реакція R стержня BC , що підтримує брус AB , напрямлена вздовж стержня. Очевидно, що під дією сили R' (сила тиску бруса AB на стержень BC) у поперечних перерізах стержня виникатимуть тільки поздовжні сили $N = R'$ і він зазнаватиме деформації стиску, причому, згідно з третім законом Ньютона, $R' = R$.

Щоб визначити реакцію R , розглянемо рівновагу бруса AB . Оскільки реакція шарніра A нас не цікавить, то складемо одне рівняння рівноваги, а саме:

$$\Sigma M_A = 0; \quad -P \cdot 2a + Ra \sin 45^\circ = 0.$$

Звідси

$$R = 2P / \sin 45^\circ = 2 \cdot 5 / 0,707 = 14,2 \text{ кН}.$$

Далі скористаємось розрахунковим рівнянням для стиску і визначимо площу F поперечного перерізу підкосу BC :

$$F = N / [\sigma] = 14,2 \cdot 10^3 / (6 \cdot 10^6) = 2370 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2.$$

Оскільки підкос BC має квадратний переріз, то $F = b^2$, отже,

$$b = \sqrt{2370 \cdot 10^{-6}} = 48,6 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 48,6 \text{ мм}, \text{ або } b = 50 \text{ мм}.$$

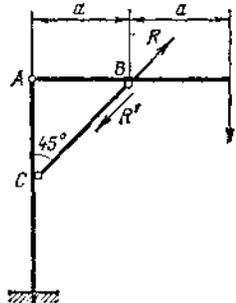


Рис. 19.8

§ 19.7. Розтяг під дією власної ваги

Якщо вісь бруса вертикальна, то власна вага спричинює деформацію розтягу або стиску.

Розглянемо брус сталого перерізу, що має вагу G і довжину l , закріплений верхнім кінцем і навантажений тільки власною вагою (рис. 19.9).

Для визначення напруг в поперечному перерізі на будь-якій відстані z від нижнього кінця застосуємо метод перерізів. Розглянемо рівновагу нижньої частини бруса і складемо рівняння рівноваги:

$$\Sigma Z = 0; \quad N_z - G_z = 0,$$

звідки

$$N_z = G_z = \gamma F z,$$

де γ — питома вага матеріалу бруса, F — площа його поперечного перерізу. Напряга

$$\sigma_z = N_z/F = \gamma F z/F = \gamma z.$$

Нормальні напруги в поперечних перерізах бруса сталого перерізу, що розтягується лише власною вагою, прямо пропорційні відстані перерізу від нижнього кінця і не залежать від площі перерізу. Очевидно, що небезпечний переріз бруса буде в закріпленні:

$$\sigma_{\max} = \gamma l.$$

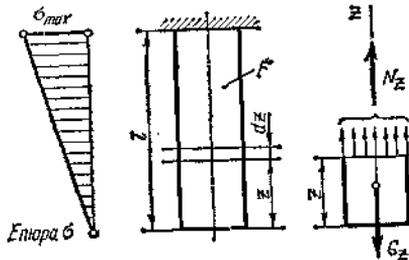


Рис. 19.9

Епюра розподілу нормальних напруг вздовж осі бруса являє собою трикутник (рис. 19.9). Визначимо довжину бруса сталого перерізу, при якій напруга лише від власної ваги досягає допустимої і брус не може нести корисного навантаження. Таку довжину бруса називають граничною:

$$l_r = [\sigma]/\gamma.$$

Якщо σ_{\max} дорівнюватиме границі міцності, то брус зруйнується від власної ваги. Довжину бруса, за якої він руйнується під дією власної ваги, називають критичною:

$$l_k = \sigma_B/\gamma.$$

Як видно з формул, гранична і критична довжини не залежать від площі поперечного перерізу бруса. Обчислимо для прикладу критичну довжину для сталі Ст2, для якої $\sigma_B = 360$ МПа, а питома вага $\gamma = 7,85 \cdot 10^4$ Н/м³:

$$l_k = \sigma_B/\gamma = 360 \cdot 10^6 / (7,85 \cdot 10^4) = 4600 \text{ м.}$$

Визначимо видовження Δl бруса під дією власної ваги; для цього виділимо нескінченно малий елемент завдовжки dz . Оскільки довжина елемента дуже мала, вважатимемо, що в його межах поздовжня сила N_z не змінюється. Застосуємо закон Гука, тоді

$$d(\Delta l) = N_z \cdot dz/(EF) = \gamma F z dz/(EF) = (\gamma/E) z dz.$$

Проінтегрувавши цей вираз у межах від 0 до l , матимемо

$$\Delta l = \int_0^l (\gamma/E) z dz = (\gamma/E) \int_0^l z dz = \gamma l^2/(2E).$$

Оскільки

$$G = \gamma Fl, \quad \text{то} \quad \Delta l = Gl/(2EF).$$

Видовження бруса сталого перерізу під дією власної ваги в два рази менше від видовження при розтягуванні силою, яка дорівнює власній вазі і прикладена до кінця бруса.

§ 19.8. Статично невизначені задачі

Задачі на розрахунок конструкцій, в елементах яких внутрішні сили фактори не можна визначити за допомогою лише рівнянь рівноваги статнки, називають статично невизначеними. Для розв'я-

зання таких задач, крім рівнянь рівноваги, складають рівняння переміщення. Зміна температури деталей зумовлює зміну їх розмірів, внаслідок чого в статично невизначних системах виникають додаткові напруги, які називають температурними.

Розглянемо невагомий стержень, що має довжину l і сталу площу перерізу F , жорстко закріплений на кінцях (рис. 19.10). Від нагрівання у стержні виникають температурні напруги стиску. Визначимо ці напруги. Складемо для стержня рівняння рівноваги:

$$\Sigma Z = 0; \quad R_A - R_B = 0,$$

звідки знайдемо, що реакції R_A і R_B однакові. Застосувавши метод перерізів, встановимо, що поздовжня сила N у перерізах стержня дорівнюватиме невідомим реакціям:

$$N = R_A = R_B.$$

Складемо додаткове рівняння, для чого уявно відкинемо праве закріплення і замінимо його реакцією R_B , тоді додаткове рівняння деформацій матиме вигляд

$$\Delta l_t = \Delta l_{AB}$$

(тобто температурне видовження стержня дорівнює його укороченню під дією реакції R_B , оскільки зв'язки вважаються абсолютно жорсткими).

Температурне видовження $\Delta l_t = \alpha t l$, де α — коефіцієнт лінійного розширення матеріалу стержня; укорочення під дією реакції R_B , $\Delta l_{AB} = R_B l / (EF)$. Прирівняємо праві частини цих рівнянь:

$$\alpha t l = R_B l / (EF), \quad \text{звідки} \quad R_B = \alpha t EF.$$

Визначимо температурні напруги:

$$\sigma_t = R_B / F = \alpha t E.$$

Щоб не виникали температурні напруги, які можуть набувати великих значень, один кінець мостів ставлять на котки; у довгих трубопроводах, що зазнають зміни температури, роблять компенсуючі пристрої і т. д.

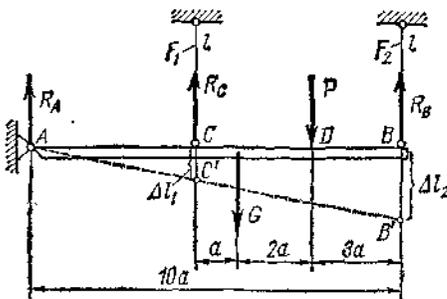


Рис. 19.11

Приклад 19.5. Жорстка балка AB (рис. 19.11), сила тяжіння якої $G = 40$ кН, шарнірно закріплена в стіні і підвішена горизонтально на двох шарнірно закріплених сталевих стержнях, що мають однакову довжину $l = 2$ м. У точці D на балку діє зосереджена сила $P = 20$ кН. Площі поперечних перерізів стержнів дорівнюють відповідно $F_1 = 2 \cdot 10^{-4}$ м² і $F_2 = 4 \cdot 10^{-4}$ м². Модуль пружності матеріалу стержнів $E = 2 \cdot 10^8$ МПа. Визначити зусилля у стержнях, а також напруги, що виникають у них.

Розв'язання. Застосовуючи до балки принцип звільнюваності від зв'язків, дістаємо три невідомі: реакцію R_A шарніра A і реакції R_C і R_B стержнів. Для даної системи можна скласти тільки два рівняння рівноваги: рівняння проєкцій сил на вертикальну вісь і рівняння моментів відносно якоїсь точки; отже, система статично невизначна.

Для розв'язання задачі треба скласти третє, додаткове, рівняння деформацій ементів системи. Для цього зобразимо систему деформованою і безпосередньо за кресленням (геометрично) встановимо залежність між деформаціями різних стержнів системи 3 подібності трикутників ACC' і ABB' дістаємо

$$\Delta l_1 / (4a) = \Delta l_2 / (10a),$$

звідси

$$\Delta l_1 = (2/5) \Delta l_2.$$

Оскільки реакція R_A нас не цікавить, то складемо тільки одне рівняння рівноваги а саме рівняння моментів відносно точки A :

$$\Sigma M_A; + R_C \cdot 4a - G \cdot 5a - P \cdot 7a + R_B \cdot 10a = 0.$$

Спростимо останнє рівняння, тоді

$$4R_C + 10R_B = 5G + 7P.$$

За законом Гука,

$$\Delta l_1 = R_C l / (EF_1), \quad \Delta l_2 = R_B l / (EF_2).$$

Розділимо другу рівність на першу:

$$\Delta l_2 / \Delta l_1 = R_B l EF_1 / (EF_2 R_C l).$$

Оскільки $\Delta l_1 = (2/5) \Delta l_2$, а

$$F_1 / F_2 = 2/4, \quad \text{то} \quad 5/2 = R_B \cdot 2 / (R_C \cdot 4),$$

звідки $R_B = 5R_C$.

Знаходимо R_B і R_C :

$$4R_C + 50R_C = 5G + 7P; \quad 54R_C = 5 \cdot 40 + 7 \cdot 20 = 340.$$

Звідси

$$R_C = 340/54 = 6,3 \text{ кН} \quad \text{і} \quad R_B = 5R_C = 5 \cdot 6,3 = 31,5 \text{ кН}.$$

Обчислюємо напруги σ_1 і σ_2 у стержнях:

$$\sigma_1 = R_C / F_1 = 6,3 \cdot 10^3 / (2 \cdot 10^{-4}) = 31,5 \cdot 10^6 \text{ Па} = 31,5 \text{ МПа}.$$

$$\sigma_2 = R_B / F_2 = 31,5 \cdot 10^3 / (4 \cdot 10^{-4}) = 78,8 \cdot 10^6 \text{ Па} = 78,8 \text{ МПа}.$$

§ 19.9. Зминання

Коли деталі конструкцій, які передають значне стискаюче навантаження, мають невелику площу контакту, то поверхні цих деталей можуть з м и н а т и с я. Щоб не сталося зминання, під гайки і головки болтів,

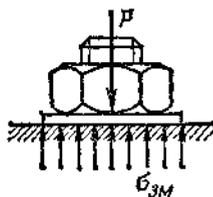


Рис. 19.12

наприклад, підкладають шайби (рис. 19.12). Для спрощення розрахунків вважають, що при площинному контакті виникають нормальні напруги зминання, що рівномірно розподілені по площі контакту. Розрахункове рівняння на зминання має вигляд

$$\sigma_3 = P / F_3 \leq [\sigma_3],$$

де P — стискаюча сила, $[\sigma_3]$ — допустима напруга на зминання; F_3 — площа контакту. Якщо дотичні деталі виготовлені з різних матеріалів, то на зминання перевіряють м'якший матеріал.

Для двох деталей, які контактують циліндричними поверхнями (наприклад, заклепочне з'єднання), закон розподілу напруг зминання по

поверхні контакту складний (рис. 19.13, а). Тому в розрахункову формулу зминання циліндричних отворів підставляють не площу бокової поверхні півциліндра, по якій контактують деталі, а значно меншу площу діаметрального перерізу отвору (умовна площа зминання); тоді

$$F_3 = ds,$$

де d — діаметр отвору; s — товщина з'єднуваної деталі (висота циліндра). Якщо з'єднані деталі мають різну товщину, то в розрахункову формулу підставляють меншу.

У машинобудуванні допустимі напруги на зминання для болтових, штифтових і шпонкових з'єднань з маловуглецевої сталі беруть у межах 100 — 120 МПа, для заклепочних з'єднань 240—320 МПа, для деревини (сосна, дуб) — 2,4—11 МПа залежно від сорту деревини і напрямку стискаючої сили відносно напрямку волокон.

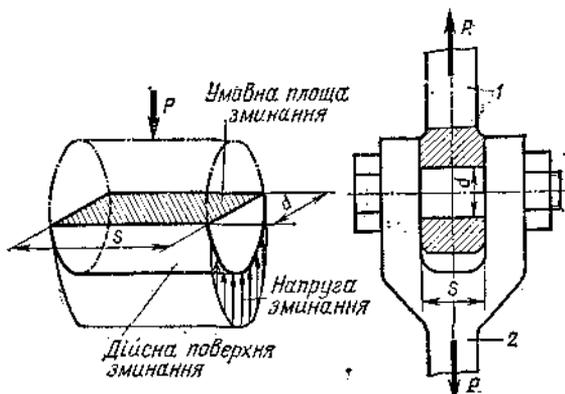


Рис. 19.13

Приклад 19.6. Тяга 1, з'єднана з вилкою 2 за допомогою болта, поставленого без зазора, навантажена, як показано на рис. 19.13, б. Визначити напруги зминання у головці тяги, якщо сила $P = 32$ кН, діаметр болта $d = 20$ мм, а товщина головки тяги $s = 24$ мм.

Розв'язання. Обчислимо умовну площу зминання:

$$F_3 = d \cdot s = 20 \cdot 24 = 480 \text{ мм}^2.$$

Визначимо напруги зминання у головці тяги:

$$\sigma_3 = P/F_3 = 32 \cdot 10^3 / (480 \cdot 10^{-6}) = 67 \cdot 10^6 \text{ Па} = 67 \text{ МПа}.$$

Розділ XX

зсув (зріз)

§ 20.1. Напруги деформації зсуву

Зсувом називають такий вид деформації, за якої у будь-якому поперечному перерізі бруса виникає лише поперечна сила. Деформацію зсуву можна спостерігати, наприклад, під час різання ножицями металевих штаб або прутків (рис. 20.1, а). Розглянемо брус площею поперечного перерізу F , перпендикулярно до осі якого прикладено дві однакові, але протилежно напрямлені сили P , лінії дії їх паралельні і проходять на відносно невеликій відстані одна від одної. Для визначення поперечної сили Q застосуємо метод перерізів (рис. 20.1, б).

В усіх точках поперечного перерізу діятимуть розподілені сили, рівнодіючу яких визначимо з умови рівноваги залишеної частини бруса:

$$\sum Y = 0; \quad P - Q = 0,$$

звідки визначимо поперечну силу Q :

$$Q = P.$$

Поперечна сила — це рівнодіюча внутрішніх дотичних сил, що діють на зсув у поперечному перерізі. Природно вважати, що при зсуві в поперечному перерізі бруса діють тільки дотичні напруги τ . Припускаємо,

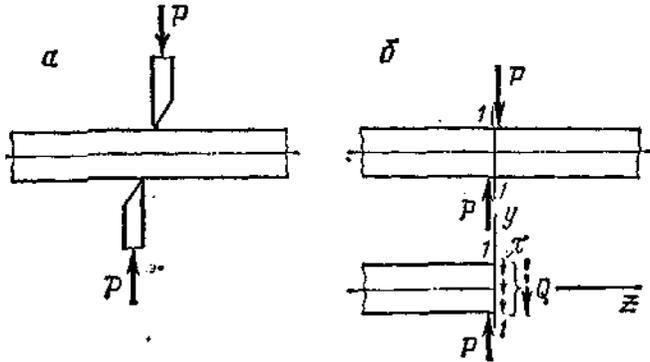


Рис. 20.1

що ці напруги розподілені по перерізу рівномірно і, отже, їх можна обчислити за формулою

$$\tau = Q/F.$$

Очевидно, що при зсуві форма перерізу на величину напруги не впливає.

Примітка. Викладений у цьому параграфі розрахунок дотичних напруг при зсуві — наближений, оскільки лінії дії сил P і Q (рис. 20.1, б) напрямлені не по одній прямій і, точно кажучи, ці сили не утворюють рівноваженої системи, це — пара сил. Проте момент цієї пари невеликий (мале плече) і відповідними їй напругами можна знехтувати.

§ 20.2. Розрахункова формула для зсуву

Умова міцності деталі конструкції полягає у тому, що найбільша напруга (робоча напруга), яка виникає в ній, не повинна бути більшою від допустимої. Розрахункова формула для зсуву

$$\tau = Q/F \leq [\tau].$$

Її читають так: *дотична напруга при зсуві, обчислена за формулою $\tau = Q/F$, не повинна бути більшою від допустимої.*

За цією формулою роблять проектний і перевірний розрахунки і визначають допустиме навантаження.

Деформацію зсуву, доведену до руйнування матеріалу, називають **зрізом** (стосовно металевих деталей) або **сколюванням** (стосовно неметалевих конструкцій). Допустиму напругу на зріз для пластичних матеріалів вибирають залежно від границі текучості. У машинобудуванні для штифтів, болтів, шпонок і т. п. приймають $[\tau_c] = (0,25 \div 0,35) \sigma$.

Для деревини допустимі напруги на сколювання при врубванні коливаються в межах від 0,5 до 1,4 МПа і залежать від сорту деревини і напрямку врубання відносно напрямку волокон. У розрахунках на зріз випадків, коли з'єднання роблять кількома однаковими деталями (болтами, заклепками і т. д.), приймають, що всі вони *навантажені однаково*. Розрахунки з'єднань на зріз звичайно супроводжуються перевіркою міцності цих з'єднань на зминання.

Приклад 20.1. Визначити силу P , потрібну для пробивання круглого отвору діаметром $d = 30$ мм у сталюму листі товщиною $s = 10$ мм, якщо зріз матеріалу листа відбувається при $\tau_B = 360$ МПа (рис. 20.2). Підібрати матеріал пуансона.

Розв'язання. У прикладі потрібно визначити руйнівне навантаження:

$$P_{\text{рн}} \approx \tau_B F_3.$$

Площа зрізу F_3 — це бокова поверхня циліндра діаметром d і висотою s :

$$F_3 = \pi ds = 3,14 \cdot 30 \cdot 10^{-3} \cdot 10 \cdot 10^{-3} = 942 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2.$$

Отже,

$$P_{\text{рн}} = \tau_B F_3 = 360 \cdot 10^6 \cdot 942 \cdot 10^{-6} = 338 \cdot 10^8 \text{ Н}.$$

Визначимо напруги стиску в пуансоні:

$$\sigma_0 = P_{\text{рн}}/F,$$

де F — площа поперечного перерізу пуансона:

$$F = \pi d^2/4 = 3,14 \cdot 30^2 \cdot 10^{-6}/4 = 707 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2,$$

отже,

$$\sigma_0 = P_{\text{рн}}/F = 338 \cdot 10^8/(707 \cdot 10^{-6}) = 478 \cdot 10^6 \text{ Па} = 478 \text{ МПа}.$$

Оскільки напруги стиску при пробиванні отвору великі, як матеріал для пуансона потрібно брати високоміцну леговану сталь, наприклад сталь марки Х12, для якої границя міцності $\sigma_B = 1500$ МПа. Це забезпечить в умовах даного прикладу для пуансона більш ніж потрібний запас міцності.

Приклад 20.2. На рис. 20.3 зображено сталевий циліндричний стержень з головкою висотою h . З'ясувати, чи витримуються умови рівномірності стержня діаметром d на розтяг, його головки діаметром D на зріз і опорної поверхні головки на зминання, якщо $[\sigma_p] = 120$ МПа, $[\tau_s] = 70$ МПа, $[\sigma_{зм}] = 170$ МПа, $D = 32$ мм, $d = 20$ мм, $h = 12$ мм. Визначити також допустиме значення сили $[P]$.

Розв'язання. Обчислимо площі перерізів, які працюють на розтяг, зминання і зріз. У розрахунок на розтяг вийде площа поперечного перерізу стержня

$$F_p = \pi d^2/4 = 3,14 \cdot 20^2 \cdot 10^{-6}/4 = 314 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2.$$

Площа опорної поверхні головки, що працює на зминання, дорівнює

$$F_{зм} = \pi D^2/4 - \pi d^2/4 = \pi (D^2 - d^2)/4 = 3,14 (32^2 - 20^2) \cdot 10^{-6}/4 = 490 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2.$$

Площа зрізу дорівнює площі бокової поверхні циліндра діаметром d і висотою h :

$$F_3 = \pi dh = 3,14 \cdot 20 \cdot 10^{-3} \cdot 12 \cdot 10^{-3} = 754 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2.$$

Використовуючи основні розрахункові рівняння для розтягу, стиску і зрізу, знаходимо допустиме значення $[P]$:

$$[P_p] = [\sigma_p] \cdot F_p = 120 \cdot 10^6 \cdot 314 \cdot 10^{-6} = 37,7 \cdot 10^3 \text{ Н} = 37,7 \text{ кН};$$

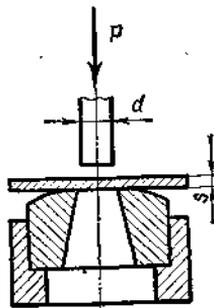


Рис. 20.2

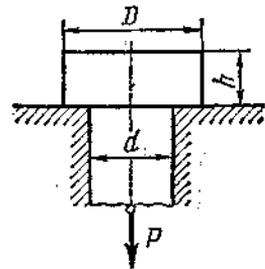


Рис. 20.3

$$[P_{зм}] = [\sigma_{зм}] \cdot F_{зм} = 170 \cdot 10^6 \cdot 490 \cdot 10^{-6} = 83,3 \cdot 10^3 \text{ Н} = 83,3 \text{ кН};$$

$$[P_3] = [\tau_3] \cdot F_3 = 70 \cdot 10^6 \cdot 754 \cdot 10^{-6} = 52,8 \cdot 10^3 \text{ Н} = 52,8 \text{ кН}.$$

Знайдені значення допустимих сил значно відрізняються одне від одного. З цього випливає, що умови рівномірності не витримуються. Як допустиме значення сили $[P]$ візьмемо найменше із знайдених значень, тобто

$$\{P\} = [P_p] = 37,7 \text{ кН}.$$

Приклад 20.3. В умовах прикладу 19.6 визначити напруги зрізу в болті (див. рис. 19.13, б).

Розв'язання. Дотичні напруги зрізу в болті обчислимо за формулою $\tau_3 = P/F_3$. Площа зрізу F_3 — це дві площі поперечного перерізу болта:

$$\begin{aligned} F_3 &= 2\pi d^2/4 = \pi d^2/2, \text{ отже } \tau_3 = P/F_3 = 2P/(\pi d^2) = \\ &= 2 \cdot 32 \cdot 10^3 / (3,14 \cdot 400 \cdot 10^{-6}) = 51 \cdot 10^6 \text{ Па} = 51 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

§ 20.3. Деформація зсуву і закон Гука

Для встановлення параметрів, які характеризують деформацію зсуву, розглянемо елемент бруса, що має вигляд паралелепіпеда $abcd$, на грані якого діятимуть тільки дотичні напруги τ , а протилежну грань паралелепіпеда вважатимемо жорстко закріпленою (рис. 20.4). Деформація зсуву в цьому елементі полягає у перекошуванні прямих кутів паралелепіпеда внаслідок поступального переміщення грані bc відносно пере-

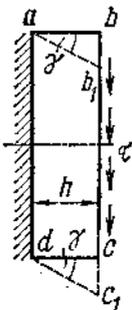


Рис. 20.4

різу, який вважатимемо нерухомим. Деформацію зсуву характеризують кутом γ і називають кутом зсуву або відносним зсувом (оскільки цей параметр не залежить від відстані h , на якій виникає зсув). Величину bb_1 , на яку зміщується рухома грань відносно нерухомої, називають абсолютним зсувом.

Відносний зсув γ виражають у радіанах. Напруги і деформації при зсуві зв'язані між собою залежністю, яку називають законом Гука для зсуву. Закон Гука для зсуву справедливий лише в певних межах навантаження і формулюється так: *дотична напруга прямо пропорційна відносному зсуву*. Математично закон Гука можна записати у вигляді рівності:

$$\tau = G\gamma.$$

Коефіцієнт пропорційності G характеризує жорсткість матеріалу (його здатність протидіяти пружним деформаціям) при зсуві; його називають модулем зсуву або модулем пружності другого роду. Модуль пружності і напругу виражають в однакових одиницях:

$$[G] = [\tau]/[\gamma] = \text{Па}.$$

Значення G , МПа для деяких матеріалів:

Чавун	$4,5 \cdot 10^4$
Сталь	$8,1 \cdot 10^4$
Мідь	$(4,0 \div 4,9) \cdot 10^4$
Латунь	$(3,5 \div 3,7) \cdot 10^4$
Алюміній	$(2,6 \div 2,7) \cdot 10^4$
Дерево	$0,055 \cdot 10^4$

На закінчення цього параграфу зазначимо, що між трьома пружними сталими E , G і ν існує залежність:

$$G = E/[2(1 + \nu)].$$

Прийнявши для сталей $\nu \approx 0,25$, матимемо

$$G_{ст} \approx 0,4E_{ст}.$$

§ 20.4. Закон парності дотичних напруг

Закон парності дотичних напруг формулюють так: *дотичні напруги у двох взаємно перпендикулярних площадках, перпендикулярних до їх спільного ребра, однакові за модулем.*

Всередині тіла біля якоїсь точки виріжемо елементарний паралелепіпед, що має dx , dy , dz (рис. 20.5, а). Нехай на верхній грані цього паралелепіпеда діє дотична напруга τ . Сила, що діє в цій грані, дорівнюватиме

$$dQ = \tau dx dy.$$

Оскільки паралелепіпед перебуває всередині тіла в рівновазі, то $\Sigma X = 0$, отже, на нижній грані паралелепіпеда діятиме така сама сила dQ , але у протилежному напрямі. Пара сил (dQ , dQ) намагатиметься обернути паралелепіпед проти стрілки годинника (рис. 20.5, б). Оскільки паралелепіпед перебуває у рівновазі, то $\Sigma M_y = 0$, тому пара (dQ , dQ) зрівноважуватиметься якоюсь іншою парою з моментом, що дорівнює моменту першої пари. Природно вважати, що другу пару утворюють до-

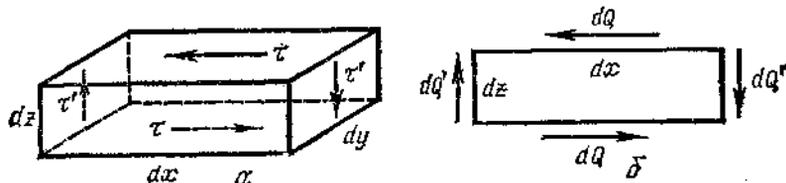


Рис. 20.5

тичні напруги τ' , які діють на бокових (правій і лівій) гранях паралелепіпеда, причому $dQ' = \tau' dy dz$. Отже,

$$m(dQ, dQ) = m(dQ', dQ'),$$

або

$$\tau dx dy dz = \tau' dy dz dx,$$

звідки

$$\tau = \tau'.$$

Звернемо увагу на те, що парні дотичні напруги у двох взаємно перпендикулярних перерізах напрямлені або до лінії перерізу січних площин, або від неї.

§ 20.5. Напруги у похилих перерізах під час розтягу.

Головні напруги

Через усю точку деформованого тіла можна провести безліч січних площин. Розглянемо прямий брус сталого поперечного перерізу F , що розтягується силами P (рис. 20.6, а). Розріжемо брус площиною $I-I$

У деяких деформаціях міцність деталей залежить не тільки від величини площі поперечного перерізу, а й від його форми. Досі вивчалися деформації, у яких напруги залежали тільки від площі поперечного перерізу. Але для вивчення деформацій кручення і згину потрібно знати й деякі інші геометричні характеристики плоских фігур.

§ 21.1. Статичний момент площі

Статичним моментом площі плоскої фігури відносно осі, що лежить у тій самій площині, називають взяту по всій площі суму добутків площ елементарних площадок на відстані їх від цієї осі (рис. 21.2).

Статичний момент площі позначимо S з індексом відповідної осі:

$$S_x = \int_F y dF, \quad S_y = \int_F x dF.$$

У теоретичній механіці було виведено формули для визначення координат центра ваги площі фігури:

$$x_c = \frac{\sum (F_i x_i)}{\sum F_i}, \quad y_c = \frac{\sum (F_i y_i)}{\sum F_i}.$$

Оскільки у цих формулах під F_i можна розуміти площу dF елементарної площадки, то в границі, коли dF прямує до нуля, вирази, які стоять у чисельниках правих частин формул, є статичними моментами площі фігури відносно осей y і x , а $\sum F_i$ — це площа F усієї фігури. Отже,

$$S_y = \int_F x dF = x_c F,$$

$$S_x = \int_F y dF = y_c F.$$

Статичний момент площі фігури відносно осі, що лежить у тій самій площині, дорівнює добутку площі фігури на відстань її центра ваги від цієї осі.

Одиниця статичного моменту площі

$$[S] = [x_c][F] = \text{м} \cdot \text{м}^2 = \text{м}^3.$$

Статичний момент площі фігури може бути величиною додатною, від'ємною і дорівнювати нулю. Очевидно, що статичний момент площі відносно осі, яка проходить через центр ваги площі фігури (центральної осі), у тому числі відносно осі симетрії фігури, дорівнює нулю.

У теоретичній механіці встановлено також, що в формулах для визначення координат центра ваги площі під F_i можна розуміти площі кінцевих частин фігури, а під x_i і y_i — координати центрів ваги цих частин (тобто застосовувати метод розбиття). Звідси випливає, що для визначення статичного моменту площі складної фігури також можна застосовувати метод розбиття, тобто *визначати статичний момент всієї фігури як алгеб-*

раїчну суму статичних моментів окремих її частин:

$$S = \Sigma S_i,$$

де S_i — статичний момент площі кожної частини фігури. Поняття про статичний момент площі буде потрібне для визначення положення центрів ваги перерізів і для визначення дотичних напруг згину.

§ 21.2. Полярний момент інерції

Полярним моментом інерції плоскої фігури відносно полюса, який лежить у тій самій площині, називають взяту по всій площині суму добутків площ елементарних площадок на квадрати їх відстаней від полюса (рис. 21.2). Полярний момент інерції позначатимемо J_p :

$$J_p = \int_F \rho^2 dF.$$

Одиниця полярного моменту інерції

$$[J_p] = [\rho^2] [F] = \text{м}^2 \cdot \text{м}^2 = \text{м}^4.$$

Полярний момент інерції — величина завжди додатна і не дорівнює нулю.

Оскільки поняття полярного моменту інерції буде потрібне для вивчення деформацій кручення круглих валів, виведемо формули полярних моментів інерції круглого суцільного і кільцевого перерізів, приймаючи як полюс центри цих фігур.

1. Круг діаметром d (рис. 21.1).

Нескінченно малу площадку dF виділимо у вигляді кільця шириною $d\rho$, що знаходиться на змінній відстані ρ від полюса; тоді $dF = 2\pi\rho d\rho$. Обчислимо полярний момент інерції:

$$J_p = \int_F \rho^2 dF = \int_0^{d/2} \rho^2 2\pi\rho d\rho = 2\pi \int_0^{d/2} \rho^3 d\rho = \frac{\pi d^4}{32},$$

$$J_p = \frac{\pi d^4}{32} \approx 0,1 d^4.$$

2. Кільце, що має розміри $D \times d$.

$$J_p = \int_F \rho^2 dF = \int_{d/2}^{D/2} \rho^2 2\pi\rho d\rho = 2\pi \int_{d/2}^{D/2} \rho^3 d\rho = \frac{\pi}{32} (D^4 - d^4);$$

$$J_p = (\pi/32) (D^4 - d^4) \approx 0,1 (D^4 - d^4).$$

Полярний момент інерції кільцевого перерізу можна обчислити як різницю полярних моментів інерції великого і малого кругів.

§ 21.3. Осьовий момент інерції

Осьовим моментом інерції плоскої фігури відносно осі, що лежить у тій самій площині, називають взяту по всій площі суму добутків площ елементарних площадок на квадрат їх відстаней від цієї

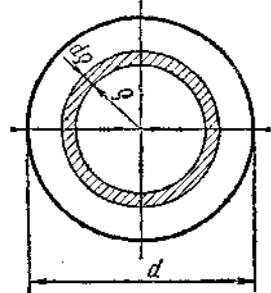


Рис. 21.1

осі (рис. 21.2). Осьовий момент інерції позначатимемо J з індексом, що відповідає осі:

$$J_x = \int_F y^2 dF, \quad J_y = \int_F x^2 dF.$$

Очевидно, що осьовий і полярний моменти інерції виражають в однакових одиницях:

$$[J] = \text{м}^4.$$

Осьовий момент інерції — величина завжди додатна і не дорівнює нулю. Додамо моменти інерції відносно двох взаємно перпендикулярних осей x і y (рис. 21.2):

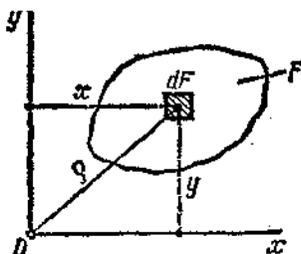


Рис. 21.2

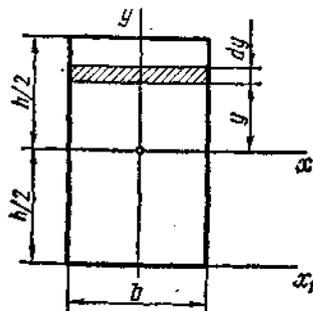


Рис. 21.3

$$\begin{aligned} J_x + J_y &= \int_F y^2 dF + \int_F x^2 dF = \\ &= \int_F (y^2 + x^2) dF = \\ &= \int_F \rho^2 dF = J_\rho, \\ J_x + J_y &= J_\rho. \end{aligned}$$

Сума осьових моментів інерції відносно двох взаємно перпендикулярних осей дорівнює полярному моменту інерції відносно початку координат. Через те що інтеграл суми дорівнює сумі інтегралів, то момент інерції складної фігури можна обчислити як суму моментів інерції простих фігур, на які розбивають складну фігуру. Поняття про осьові моменти інерції потрібне буде для вивчення теорії згину. Обчислимо осьові моменти інерції деяких простих фігур.

1. Прямокутник $b \times h$ (рис. 21.3).

Нескінченно малу площадку dF виділимо у вигляді смужки, що має ширину b і висоту dy , тоді $dF = bdy$:

$$\begin{aligned} J_x &= \int_F y^2 dF = \int_{-h/2}^{+h/2} y^2 b dy = b \int_{-h/2}^{+h/2} y^2 dy = bh^3/12, \\ J_x &= bh^3/12. \end{aligned}$$

Для квадрата із стороною a $J_x = a^2/12$.

2. Круг розміром d відносно діаметрів x і y . Внаслідок симетрії для круга $J_x = J_y$. Оскільки

$$J_x + J_y = J_\rho = \pi d^4/32,$$

то

$$J_x = J_y = J_\rho/2 = \pi d^4/64 \approx 0,05d^4.$$

3. Кільце розміром $D \times d$ відносно діаметрів x і y :

$$J_x = J_y = (\pi/64)(D^4 - d^4) \approx 0,05(D^4 - d^4).$$

§ 21.4. Момент інерції при паралельному перенесенні осей

Осі, які проходять через центр ваги фігури, називають **центральними**. Момент інерції відносно центральної осі називають **центральним моментом інерції**.

Теорема. Момент інерції відносно якої-небудь осі дорівнює центральному моменту інерції відносно осі, паралельної даній, плюс добуток площі фігури на квадрат відстані між осями.

Нехай дано довільну плоску фігуру, площа якої F , центр ваги лежить у точці C , а центральний момент інерції відносно осі x буде J_x . Обчислимо момент інерції фігури відносно осі x_1 , паралельної центральній і віддаленій від неї на відстань a (рис. 21.4):

$$\begin{aligned} J_{x_1} &= \int_F y_1^2 dF = \int_F (y + a)^2 dF = \\ &= \int_F y^2 dF + 2a \int_F y dF + a^2 \int_F dF. \end{aligned}$$

Перший доданок правої частини є моментом інерції фігури відносно осі x , тобто J_x ; другий доданок вміщує статичний момент площі відносно осі x , а він дорівнює нулю, бо вісь x — центральна; третій доданок після інтегрування дорівнюватиме $a^2 F$. У результаті маємо

$$J_{x_1} = J_x + a^2 F,$$

теорему доведено. Треба пам'ятати, що останньою формулою можна користуватися лише тоді, коли одна з паралельних осей — центральна. Аналізуючи виведену формулу, можна зробити висновок, що з ряду паралельних осей **момент інерції буде найменшим відносно центральної осі**. Користуючись доведеною теоремою, введемо формулу для обчислення моменту інерції прямокутника відносно осі x , що проходить через основу (див. рис. 21.3):

$$J_{x_1} = J_x + a^2 F = bh^3/12 + h^2bh/4 = bh^3/3.$$

§ 21.5. Головні осі і головні моменти інерції

Уявимо плоску фігуру, моменти інерції якої відносно осей координат J_x і J_y , а полярний момент інерції відносно початку координат J_p . Як вже було встановлено,

$$J_x + J_y = J_p.$$

Якщо осі координат повертати у своїй площині навколо початку координат, то полярний момент інерції залишиться незмінним, а осьові моменти інерції змінюватимуться, причому

$$J_x + J_y = \text{const.}$$

Якщо сума двох змінних величин залишається сталою, то одна з них зменшується, а друга збільшується. Отже, при якомусь положенні осей один із осьових моментів досягає максимального, а другий — мінімаль-

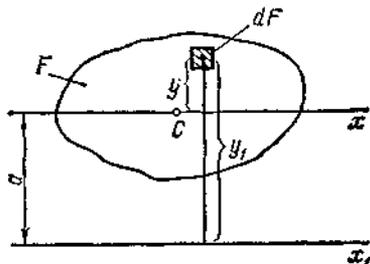


Рис. 21.4

ного значень. Осі, відносно яких моменти інерції мають максимальне і мінімальне значення, називають головними осями інерції. Момент інерції відносно головної осі називають головним моментом інерції.

Якщо головна вісь проходить через центр ваги фігури, то вона називається головною центральною віссю, а момент інерції відносно цієї осі — головним центральним моментом інерції. Особливо важливим є та обставина, що коли фігура має вісь симетрії, то ця вісь завжди буде однією з головних центральних осей.

Введемо ще одну геометричну характеристику плоского перерізу.

Відцентровим моментом інерції плоскої фігури називають взятую по всій площі фігури суму добутоків елементарних площадок на добуток відстаней цих площадок від двох даних взаємно перпендикулярних осей:

$$J_{xy} = \int_F xy dF,$$

де x, y — відстані площадки dF від осей y і x . Відцентровий момент інерції може бути додатним, від'ємним і в окремому випадку дорівнювати нулю. Якщо взаємно перпендикулярні осі x і y або одна з них є віссю симетрії плоскої фігури, то відносно таких осей відцентровий момент інерції дорівнює нулю. Відцентровий момент входить у формули для визначення положення головних осей несиметричних перерізів (розгляд цього питання програма не передбачає).

Приклад 21.1. Для тавра, зображеного на рис. 21.5 (розміри в міліметрах), знайти головні центральні моменти інерції.

Розв'язання. Розіб'ємо тавр на два прямокутники з площами F_1 і F_2 . Позначимо сторони: $b_1 = 120 \cdot 10^{-3}$ м, $h_1 = 10 \cdot 10^{-3}$ м, $b_2 = 10 \cdot 10^{-3}$ м, $h_2 = 50 \cdot 10^{-3}$ м.

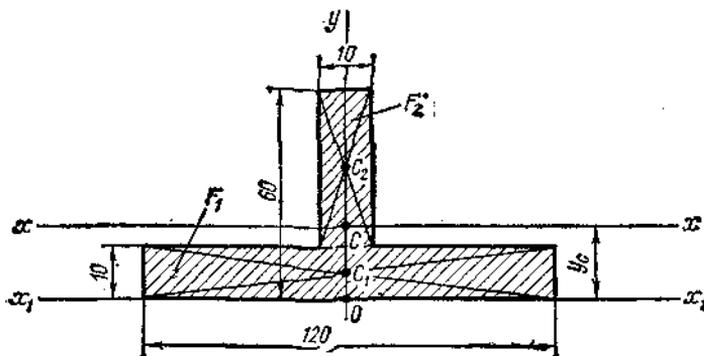


Рис. 21.5

Оскільки вісь y є віссю симетрії, то центр ваги тавра лежатиме на цій осі. Отже, вісь y буде центральною віссю, а абсциса центра ваги $x_C = 0$. Ординату центра ваги обчислимо за формулою

$$y_C = (F_1 y_1 + F_2 y_2) / (F_1 + F_2),$$

де

$$F_1 = b_1 h_1 = 120 \cdot 10^{-3} \cdot 10 \cdot 10^{-3} = 1,2 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2, \quad y_1 = OC_1 = 5 \cdot 10^{-3} \text{ м};$$

$$F_2 = b_2 h_2 = 10 \cdot 10^{-3} \cdot 50 \cdot 10^{-3} = 0,5 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2, \quad y_2 = OC_2 = 35 \cdot 10^{-3} \text{ м}$$

$$y_C = (1,2 \cdot 5 + 0,5 \cdot 35) 10^{-6} / [(1,2 + 0,5) 10^{-3}] = 13,8 \cdot 10^{-3} \text{ м}$$

Застосовуючи метод розбиття і формули моментів інерції прямокутників відносно власних центральних осей, а також теорему про момент інерції відносно осі, паралельної центральній, запишемо:

$$J_x = b_1 h_1^3 / 12 + a_1^2 F_1 + b_2 h_2^3 / 12 + a_2^2 F_2,$$

де $a_1 = C_1 C = 8,8 \cdot 10^{-3} \text{ м}$, $a_2 = C C_2 = 21,2 \cdot 10^{-3} \text{ м}$.

Підставивши значення і обчисливши, матимемо

$$J_x = 0,431 \cdot 10^{-6} \text{ м}^4.$$

Момент інерції J_y обчислимо як суму моментів інерції прямокутників відносно центральної осі:

$$J_y = h_1 b_1^3 / 12 + h_2 b_2^3 / 12; \quad J_y = 1,444 \cdot 10^{-6} \text{ м}^4.$$

Розділ XXII

Кручення

§ 22.1. Відомості про деформацію кручення циліндра

Крученням називають такий вид деформації, при якому в будь-якому поперечному перерізі бруса виникає тільки крутний момент. Деформації кручення виникають, якщо до прямого бруса в площинних, перпендикулярних до осі, прикладено пару сил. Моменти цих

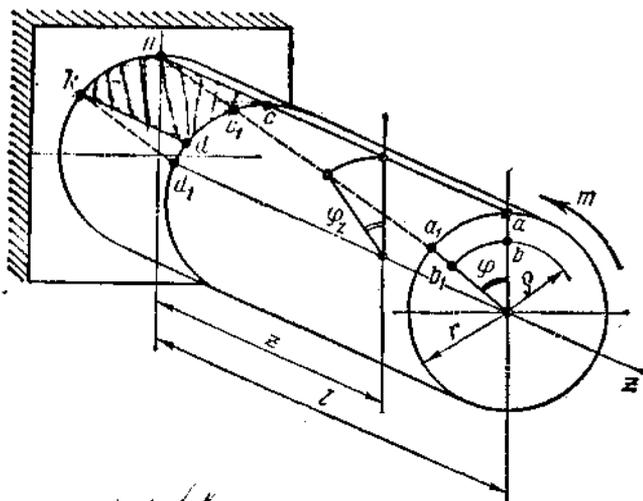


Рис. 22.1

пр називають обертаючими (якщо брус обертається) і скручуючими (якщо брус не обертається). Згідно з ГОСТом, обертаючий момент позначають T .

Оскільки на кручення працюють валі, що звичайно мають круглий, а) кільцевий переріз, то розглянемо кручення круглого циліндра

(рис. 22.1). Виготовимо з гуми (для більшої наочності) прямий круговий циліндричний брус і жорстко затиснемо один його кінець; нанесемо на його поверхню сітку ліній, що складається з твірних і кіл, а потім прикладемо до вільного кінця бруса пару сил, щоб вона діяла в площині, перпендикулярній до осі, тобто піддамо брус деформації кручення. При цьому:

1) вісь циліндра, яку називають віссю кручення, залишиться прямолінійною;

2) діаметри кіл, нанесених на поверхню циліндра до деформації, під час деформації залишаться такими самими і відстань між колами не зміниться;

3) твірні циліндра перетворюються у гвинтові лінії.

З цього можна зробити висновок, що для кручення круглого циліндра справедлива гіпотеза плоских перерізів, а також припустити, що радіуси кіл залишаються під час деформації прямими. Оскільки в поперечних перерізах бруса немає поздовжніх сил, то відстані між перерізами не змінюються. З цього випливає, що деформація кручення круглого циліндра полягає у повертанні поперечних перерізів одного відносно одного навколо осі кручення, причому кути їх повороту прямо пропорційні відстаням від закріпленого перерізу. Кут повороту перерізу дорівнює куту закручування частини циліндра, що знаходиться між даним перерізом і закріпленням. Кут φ повороту кінцевого перерізу називають повним кутом закручування циліндра.

Відносним кутом закручування φ_0 називають відношення кута закручування φ_z до відстані z даного перерізу від закріплення. Якщо брус довжиною l має сталий переріз і навантажений скручуючим моментом на кінці (тобто складається з однієї ділянки), то

$$\varphi_0 = \varphi_z/z = \varphi/l = \text{const.}$$

Розглядаючи тонкий шар матеріалу на поверхні бруса, обмежений будь-якою клітинкою сітки (наприклад, $kncd$ на рис. 22.1), бачимо, що ця клітинка при деформації перекошується, приймаючи положення knc_1d_1 . Подібне спостерігалось під час вивчення деформації зсуву. На цій підставі можна зробити висновок, що при крученні також виникає деформація зсуву, але не за рахунок поступального, а в результаті обертального руху одного поперечного перерізу відносно іншого. Отже, при крученні у поперечних перерізах виникають тільки дотичні внутрішні сили, які утворюють крутний момент. Крутний момент є результируючим моментом відносно осі бруса внутрішніх дотичних сил, які діють у поперечному перерізі.

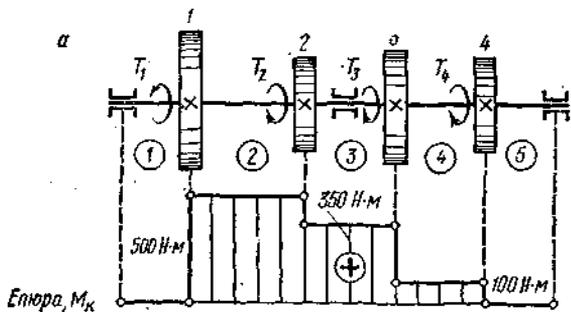
§ 22.2. Епюри крутних моментів

Для наочного зображення розподілу крутних моментів вздовж осі бруса будують епюри крутних моментів. Крутний момент у перерізах бруса визначають за допомогою методу перерізів. Оскільки вал, який рівномірно обертається, як і нерухомий брус, перебуває у рівновазі, то очевидно, що внутрішні сили, які виникають у поперечному перерізі, повинні зрівноважувати зовнішні моменти, які діють на розглядувану частину бруса. Звідси випливає, що крутний момент у будь-якому

поперечному перерізі чисельно дорівнює алгебраїчній сумі зовнішніх моментів, прикладених до бруса справа або зліва від перерізу.

Ігнори крутих моментів дають змогу визначати небезпечні перерізи, зокрема, якщо брус має сталий поперечний переріз, то небезпечними будуть перерізи на ділянці, де виникає найбільший крутний момент.

Крутний момент вважаємо додатним, якщо результуючий момент зовнішніх пар, прикладених до розглядуваної частини бруса, буде напрямлений проти стрілки годинника, коли дивитися з боку перерізу, і навпаки. Користуючись принципом пом'якшення граничних умов, вважаємо, що у поперечному перерізі, де прикладено обертаючий або скручуючий момент, значення крутного моменту змінюється стрибкоподібно.



Приклад 22.1. Побудувати епюру крутих моментів для трансмісійного вала, зображеного на рис. 22.2. Обертаючі моменти дорівнюють: $T_1 = 500 \text{ Н} \cdot \text{м}$, $T_2 = 150 \text{ Н} \cdot \text{м}$, $T_3 = 250 \text{ Н} \cdot \text{м}$, $T_4 = 100 \text{ Н} \cdot \text{м}$.

Розв'язання. Розділимо вал на ділянки, як показано на рис. 22.2, а. Застосуємо метод перерізів і принцип пом'якшення граничних умов. Домоносімо відкладати додатні круті моменти вгору від осі епюри, а від'ємні — вниз. Побудуємо епюру крутих моментів (рис. 22.2, а). На першій, а також на п'ятій ділянках крутний момент дорівнює нулю, оскільки обертаючого моменту на цих ділянках немає. Тому проводимо горизонтальну пряму по осі епюри до шківів 1, де епюра робить «стрибок», що дорівнює величині обертаючого моменту, тобто $500 \text{ Н} \cdot \text{м}$. Потім проводимо горизонтальну пряму до шківів 2, де прикладено обертаючий момент, що дорівнює $150 \text{ Н} \cdot \text{м}$. Тут епюра знову робить «стрибок» униз (пригадаємо правило знаків). Аналогічно будують епюри крутих моментів і на інших ділянках.

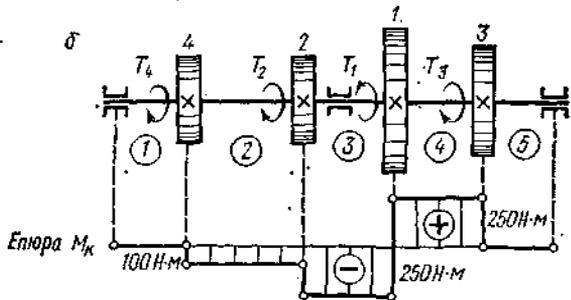


Рис. 22.2

Зуважимо, що «стрибок» на епюрі крутих моментів завжди чисельно дорівнює значенню обертаючого моменту, прикладеного в розглядуваному перерізі. З епюри видно, що найбільший крутний момент буде на другій ділянці:

$$M_{\text{кmax}} = M_{\text{к2}} = 500 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Рациональним розміщенням шківів можна домогтися зменшення значення $M_{\text{кmax}}$. На рис. 22.2, б зображені схема розміщення шківів і відповідна їй епюра $M_{\text{к}}$, з якої видно, що найбільше значення крутного моменту $M_{\text{кmax}} = M_{\text{к3}} = 250 \text{ Н} \cdot \text{м}$, тобто в два рази менше, ніж у першому випадку. Таке розміщення шківів економічно вигідне, оскільки дає можливість передавати задані потужності за допомогою вала меншого діаметра.

Доцільнішим вважають таке розміщення шківів на валу, за якого найбільші додатні і від'ємні значення крутих моментів на ділянках будуть по можливості однаковими (див. епюру $M_{\text{к}}$ на рис. 22.2, б).

§ 22.3. Напруги і деформації кручення

Уявимо, що прямий круговий циліндр, який зазнає деформації кручення, складається з нескінченно великої кількості волокон, паралельних осі. Вважатимемо, що для кручення справедлива гіпотеза про ненависання волокон.

Знаючи, що під час кручення відбувається деформація зсуву, природно вважати, що в точках поперечного перерізу бруса виникають тільки дотичні напруги τ , перпендикулярні до радіуса, що сполучає ці точки з віссю кручення. Існування нормальних напруг у поздовжньому перерізі

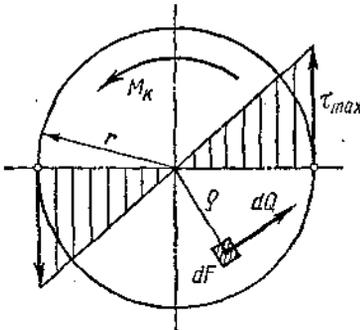


Рис. 22.3

виключається, оскільки справедлива гіпотеза про ненависання волокон; нормальні напруги у поперечному перерізі не виникають, бо немає поздовжньої сили. На рис. 22.1 видно, що абсолютний зсув перерізу волокна a дорівнює дузі aa_1 , а переріз волокна b — дузі bb_1 :

$$\sphericalangle bb_1 = \rho\varphi, \quad \sphericalangle aa_1 = r\varphi,$$

де φ — повний кут закручування, рад; r — радіус циліндра; ρ — відстань волокна b від осі кручення.

Оскільки радіуси перерізу під час кручення залишаються прямими, то величина абсолютного зсуву перерізу волокон прямо пропорційна їх відстані від осі кручення. Відносний зсув перерізу волокна b

$$\gamma_\rho = \rho\varphi/l = \varphi_0\rho.$$

Застосуємо формулу закону Гука для зсуву:

$$\tau_\rho = G\gamma_\rho = G_1\varphi_0\rho.$$

Коли $\rho = 0$, то $\tau = 0$, тобто на осі кручення дотичні напруги дорівнюють нулю. Коли $\rho = r$, то $\tau = \tau_{\max}$, тобто дотичні напруги досягають *максимальних значень* у волокон, що найбільше віддалені від осі кручення:

$$\tau_{\max} = G\varphi_0 r.$$

Оскільки відносний кут закручування φ_0 — величина стала для даного циліндричного бруса, то дотичні напруги при крученні прямо пропорційні відстані точок перерізу від осі кручення. Епюра розподілу напруг вздовж радіуса перерізу має вигляд трикутника (рис. 22.3). Якщо брус складається з однієї ділянки, тобто має сталий переріз і сталий по довжині крутний момент, то дотичні напруги у даному волокні будуть по всій довжині циліндра однакові.

Перейдемо до виведення формул для визначення кута закручування і напруг у поперечному перерізі залежно від крутного моменту. Розріжемо брус, зображений на рис. 22.1, поперечною площиною, що знаходиться на відстані z від закріплення, і розглянемо його переріз (рис. 22.3). Виділимо в перерізі нескінченно малу площадку dF на відстані ρ від осі кручення. Сила dQ , яка діє на цю площадку, буде перпендикулярна до радіуса

дорівнюватиме

$$dQ = \tau_\rho dF.$$

Визначимо момент внутрішніх сил відносно осі кручення, тобто крутний момент:

$$M_\kappa = \int_F dQ\rho = \int_F \tau_\rho dF\rho = \int_F G\varphi_0 \rho dF\rho = G\varphi_0 \int_F \rho^2 dF = G\varphi_0 J_\rho,$$

звідки знайдемо відносний кут закручування:

$$\varphi_0 = M_\kappa / (GJ_\rho), \text{ рад.}$$

Повний кут закручування циліндра довжиною l

$$\varphi = M_\kappa l / (GJ_\rho), \text{ рад.}$$

Добуток GJ_ρ , що стоїть у знаменнику, називають жорсткістю перерізу при крученні.

Таким чином, установлено, що повний кут закручування круглого циліндра прямо пропорційний крутному моменту, довжині циліндра і обернено пропорційний жорсткості перерізу при крученні. Оскільки для виведення останньої формули застосовано закон Гука, то вона дійсна в межах, коли навантаження і деформація прямо пропорційні.

Для циліндричного бруса, який має кілька ділянок, які різняться матеріалом, розмірами поперечного перерізу, величиною крутного моменту, повний кут закручування дорівнює алгебраїчній сумі кутів закручування окремих ділянок

$$\varphi = \sum \varphi_i.$$

Виведемо формулу для визначення напруг:

$$\tau_\rho = G\varphi_0 \rho = GM_\kappa \rho / (GJ_\rho) = M_\kappa \rho / J_\rho.$$

Коли $\rho = r$, то напруги матимуть максимальні значення:

$$\tau_{\max} = M_\kappa r / J_\rho = M_\kappa / (J_\rho / r) = M_\kappa / W_\rho,$$

де $W_\rho = J_\rho / r$ — момент опору крученню (або полярний момент опору). Момент опору крученню дорівнює відношенню полярного моменту інерції до радіуса перерізу.

Одиниця моменту опору крученню

$$[W_\rho] = [J_\rho] / [r] = \text{м}^3.$$

Отже, напруги і деформації кручення круглого циліндра обчислюють за формулами

$$\tau_{\max} = M_\kappa / W_\rho, \quad \varphi = M_\kappa l / (GJ_\rho).$$

Треба звернути увагу на те, що ці формули за структурою аналогічні формулам для обчислення напруг і деформацій розтягу, стиску і застосовні лише для ділянок бруса з однакового матеріалу, що мають сталі поперечний переріз і крутний момент. За законом парності дотичних напруг, останні виникають не тільки у поперечних, а й у поздовжніх перерізах, тому, наприклад, у дерев'яних брусах під час кручення виникають тріщини вздовж волокон (деревина погано працює на сколювання вздовж волокон).

З епюри розподілу дотичних напруг при крученні видно, що внутрішні волокна бруса зазнають невеликих напруг, тому вали іноді роблять порожнистими, чим досягається значний вигреш в матеріалі при незначній втраті міцності. Визначимо момент опору крученню для круглого і кільцевого перерізів.

1. Круг діаметра d :

$$W_p = J_p / (0,5d) = \pi d^3 / (32 \cdot 0,5d) = \pi d^3 / 16 \approx 0,2d^3.$$

2. Кільце, що має розміри $D \times d$:

$$W_p = J_p / (0,5D) = \pi (D^4 - d^4) / (32 \cdot 0,5D) = \pi (D^4 - d^4) / (16D) \approx \approx 0,2 (D^4 - d^4) / D.$$

Зазначимо, що коли полярний момент інерції кільцевого перерізу можна визначити як різницю моментів інерції великого і малого кругів, то момент опору крученню не можна визначати як різницю моментів опорів цих кругів.

Приклад 22.2. Стальну круглу дrottину, що має довжину $l = 1$ м і діаметр $d = 2$ мм, одним кінцем закріплено у затискачі, а на другому кінці до неї прикладено скручуючий момент. При якому куті закручування напруга кручення дорівнюватиме 60 МПа? Модуль пружності другого роду $G = 8,2 \cdot 10^4$ МПа.

Р о з в' я з а н н я. Запишемо формули, необхідні для розв'язання задачі: повний кут закручування круглого циліндра

$$\varphi = M_K l / (G J_p),$$

максимальна напруга кручення

$$\tau_{\max} = M_K / W_p,$$

звідки $M_K = \tau_{\max} W_p$. Враховуючи, що полярний момент інерції

$$J_p = W_p d / 2$$

і підставляючи числові значення, маємо

$$\varphi = \tau_{\max} W_p l \cdot 2 / (G W_p d) = \tau_{\max} l \cdot 2 / (G d) = 60 \cdot 10^6 \cdot 1 \cdot 2 / (8,2 \cdot 10^4 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 10^{-3}) = = 0,732 \text{ рад} \approx 42^\circ.$$

§ 22.4. Розрахункові формули на міцність і жорсткість для кручення

Умова міцності бруса для кручення полягає у тому, що найбільша дотична напруга, яка виникає у ньому, не повинна перевищувати допустиму. Розрахункова формула на міцність для кручення має вигляд

$$\tau = M_K / W_p \leq [\tau_K]$$

і читається так: *дотична напруга у небезпечному перерізі, обчислена за формулою $\tau = M_K / W_p$, не повинна перевищувати допустиму.* Допустиму напругу кручення вибирають залежно від допустимої напруги розтягу, а саме:

для сталей

$$[\tau_K] = (0,55 \div 0,60) [\sigma_p],$$

для чавунів

$$[\tau_K] = (1 \div 1,2) [\sigma_p].$$

Крім міцності до валів ставлять вимогу *жорсткості*, яка полягає у тому, що кут закручування 1 м довжини вала не повинен перевищувати певної величини, щоб не сталось, наприклад, пружинення валів або втрат точності ходових гвинтів токарно-гвинторізних верстатів. Допустимий кут закручування 1 м довжини вала задають в градусах і позначають $[\varphi_0]$; розрахункова формула на жорсткість для кручення має вигляд

$$\varphi_0^\circ = \frac{180^\circ M_k}{\pi G J_p} \leq [\varphi_0].$$

Величини допустимих кутів закручування залежать від призначення вала, їх звичайно беруть у таких межах:

$$[\varphi_0] = 0,25 \div 1 \text{ град/м.}$$

За допомогою виведених формул виконують три види розрахунків конструкцій на міцність і жорсткість для кручення — проектний розрахунок, перевірений розрахунок і визначення допустимого навантаження.

Приклад 22.3. Стальний вал обертається з частотою $n = 980 \text{ хв}^{-1}$ і передає потужність $N = 40 \text{ кВт}$. Визначити діаметр вала, якщо $[\tau_k] = 25 \text{ МПа}$.

Розв'язання. Застосуємо розрахункове рівняння на міцність для кручення

$$\tau_k = M_k / W_p \leq [\tau_k].$$

Обчислимо кутову швидкість:

$$\omega = \pi n / 30 = 3,14 \cdot 980 / 30 = 102,5 \text{ рад/с.}$$

Знайдемо величину крутного моменту $M_k = T = N / \omega$:

$$M_k = N / \omega = 40\,000 / 102,5 \approx 390 \text{ Н} \cdot \text{м.}$$

Визначимо величину моменту опору крученню W_p , що забезпечує міцність вала:

$$W_p = M_k / [\tau_k] = 390 / (25 \cdot 10^6) = 15,6 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

Знаходимо потрібний діаметр вала:

$$d = \sqrt[3]{W_p / 0,2} = \sqrt[3]{15,6 \cdot 10^{-6} / 0,2} = 43 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 43 \text{ мм.}$$

Округлюючи знайдене значення діаметра до найближчого більшого стандартного (див. § 39.3), остаточно приймаємо $d = 45 \text{ мм}$.

Приклад 22.4. Стальний суцільний вал діаметром $d = 70 \text{ мм}$ треба замінити валом кільцевого перерізу, в якого внутрішній діаметр на 10 % менший від зовнішнього. Визначити діаметри порожнистого вала за умови збереження попереднього коефіцієнта запасу міцності. Порівняти маси суцільного і порожнистого валів.

Розв'язання. Позначимо зовнішній діаметр порожнистого вала D , а внутрішній d_0 — за умовою $d_0 = 0,9 D$. З розрахункового рівняння на міцність для кручення випливає, що для збереження попереднього коефіцієнта запасу міцності необхідно, щоб моменти опору порожнистого і суцільного валів були однакові, бо M_k і $[\tau_k]$ вважаються постійними. Обчислимо моменти опору крученню.

Момент опору для круга

$$W_p \approx 0,2 d^3 = 0,2 (70 \cdot 10^{-3})^3 \text{ м}^3.$$

Момент опору для кільця

$$W_p = 0,2 (D^3 - d_0^3) / D = 0,2 D^3 (1 - 0,9^3) / D = 0,2 D^2 (1 - 0,656) = 0,2 D^2 \cdot 0,344.$$

Порівнюючи значення W_p , знаходимо

$$D = \sqrt[3]{0,2 (70 \cdot 10^{-3})^3 / (0,2 \cdot 0,344)} \approx 0,1 \text{ м.}$$

Приймемо $D = 100 \text{ мм}$. Тоді $d_0 = 0,9 D = 0,9 \cdot 100 = 90 \text{ мм}$.

Маса суцільного і порожнистого валів підносяться як площі F_c і $F_{\text{п}}$ їх поперечних перерізів.

Обчислимо ці площі:

$$F_c = \pi d^2/4; \quad F_n = \pi D^2/4 - \pi d_0^2/4 = \pi (D^2 - d_0^2)/4.$$

Знайдемо їх відношення:

$$F_c/F_n = \pi d^2 \cdot 4 / [4\pi (D^2 - d_0^2)] = d^2 / (D^2 - d_0^2) = (70 \cdot 10^{-3})^2 / [(100^2 - 90^2) 10^{-6}] = 2,58,$$

Порожнистий вал легший від суцільного у 2,58 рази.

§ 22.5. Потенціальна енергія деформації кручення

Уявимо круглий циліндричний брус сталого перерізу, жорстко закріплений одним кінцем і навантажений на другому кінці скручуючим моментом, прикладеним статично, тобто таким, що повільно збільшується від нуля до якогось значення m . Вважаємо, що скручуючий момент залишається у межах, коли навантаження і деформація пропорційні, тобто підлягають закону Гука.

Скручуючий момент спричинює в брусі деформацію кручення і при цьому здійснює роботу A , яка акумулюється у вигляді потенціальної енергії деформації U , причому коли не враховувати незначні втрати енергії, то можна вважати, що

$$A = U.$$

Як відомо з теоретичної механіки, робота для випадку статичного навантаження дорівнює

$$A = m\varphi/2,$$

де φ — повний кут закручування бруса. Оскільки $m = M_k$, то

$$U = A = m\varphi/2 = M_k \cdot M_k l / (2GJ_p) = M_k^2 l / (2GJ_p).$$

Коли на брус одночасно діє кілька скручуючих моментів або коли він має ступінчасто змінні розміри поперечного перерізу, то брус розділяють на ділянки і потенціальну енергію деформації всього бруса визначають як суму потенціальних енергій окремих його ділянок:

$$U = \sum U_i.$$

Аналізуючи добуток в цьому параграфі формулу, можна зробити висновки, подібні до висновків § 19.5.

§ 22.6. Розрахунок циліндричних гвинтових пружин

У техніці найбільшого поширення набули циліндричні гвинтові пружини, виготовлені із сталі круглого поперечного перерізу, що працюють на розтяг або стиск. У цьому параграфі розглянемо розрахунок таких пружин, що мають невеликий кут α підйому витків ($\alpha \leq 15^\circ$). Розглянемо циліндричну гвинтову пружину, що має діаметр D гвинтової осі, діаметр d дроту і кількість витків n , яку стискають силою P (рис. 22.4, а). Для визначення внутрішніх силових факторів застосуємо метод перерізів. Розріжемо пружину площиною, яка проходить через вісь, і відкинемо нижню частину пружини (рис. 22.4, б). Зважаючи на те, що кут α підйому витків малий, вважатимемо переріз витка поперечним, тобто кругом, який має діаметр d .

Розглядаючи рівновагу верхньої частини пружини, бачимо, що в поперечному перерізі витка виникають два внутрішні силових фактори: поперечна сила $Q = P$ і крутний момент $M_k = PD/2$. Звідси випливає, що в поперечному перерізі витка діють тільки дотичні напруги зсуву і кручення.

Вважатимемо, що напруги зсуву розподілені по перерізу рівномірно, а напруги кручення визначатимуться, як при крученні прямого кругового циліндра. Епюри розподілення напруг зсуву і кручення, а також епюру сумарних напруг у точках горизонтального діаметра перерізу подано

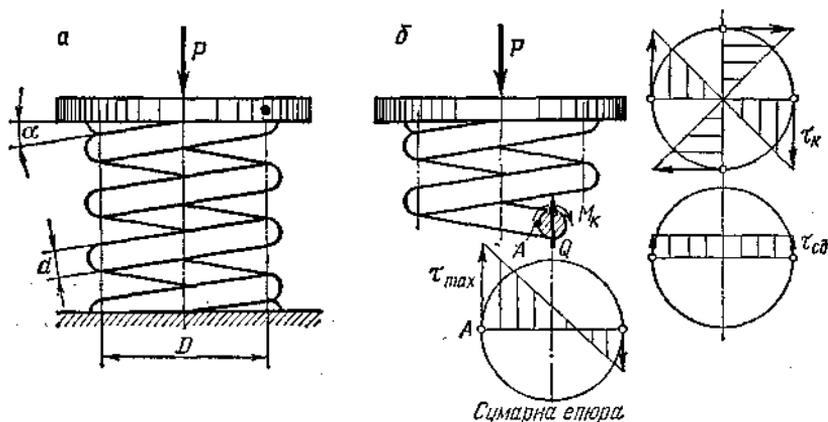


Рис. 22.4

на рис. 22.4, б. З сумарної епюри видно, що найбільші дотичні напруги виникають у точці А, найближчій до осі пружини:

$$\tau_{\max} = \tau_{sc} + \tau_k = \frac{Q}{F} + \frac{M_k}{W_p} = \frac{P}{\pi d^2/4} + \frac{PD/2}{\pi d^3/16};$$

$$\tau_{\max} = \frac{8PD}{\pi d^3} \left(\frac{d}{2D} + 1 \right).$$

Якщо пружина має відносно великий середній діаметр і виготовлена з відносно тонкого дроту, то перший доданок у дужках (що відповідає напрузі зсуву) значно менший від одиниці і ним можна знехтувати; тоді

$$\tau_{\max} \approx 8PD/(\pi d^3).$$

Формула для наближеного розрахунку циліндричних гвинтових пружин має вигляд

$$\tau_{\max} = 8PD/(\pi d^3) \leq [\tau].$$

Оскільки пружини звичайно виготовляють із високоякісної сталі, то допустимі напруги будуть у межах

$$[\tau] = 200 \div 100 \text{ МПа.}$$

Далі виведемо формулу для визначення зменшення висоти (осадки) у пружини. Розділяючи пружину на нескінченно малі ділянки довжиною dl , які, зважаючи на малість довжини, вважатимемо прямолінійними, і

враховуючи тільки потенціальну енергію деформації кручення, маємо

$$U = \int_0^l M_k^2 dl / (2GJ_p) = M_k^2 l / (2GJ_p),$$

де $l = \pi Dn$ — довжина дроту пружини. Робота сили P , прикладеної до пружини статично, дорівнюватиме $A = P\lambda/2$. Оскільки $A = U$, $M_k = PD/2$, $J_p = \pi d^4/32$, то

$$\frac{P\lambda}{2} = \frac{(PD/2)^2 \pi Dn}{2G\pi d^4/32},$$

звідси $\lambda = 8PD^3n/(Gd^4)$. Цю формулу можна записати в такому вигляді:

$$\lambda = P/c,$$

де $c = Gd^4/(8D^3n)$ — коефіцієнт жорсткості пружини.

При $\lambda = 1$ $c = P$, тому коефіцієнт жорсткості чисельно дорівнює силі, яка спричинює осадку, що дорівнює одиниці довжини. Відношення середнього діаметра витків до діаметра дроту позначають c_n і називають і н д е к с о м п р у ж и н и:

$$c_n = D/d.$$

Звичайно індекс пружини буває в межах $c_n = 4 \div 12$.

Приклад 22.5. Визначити діаметр дроту сталюї пружини, якщо під дією сили $P = 1200$ Н вона видовжується на $\lambda = 52$ мм. Індекс пружини $c_n = 6$, число витків $n = 14$. Модуль пружності $G = 8 \cdot 10^4$ МПа.

Розв'язання. Індекс пружини $c_n = \frac{D}{d}$, звідки $D = c_n d$. Підставимо значення D у формулу видовження пружини:

$$\lambda = 8PD^3n/(Gd^4) = 8Pc_n^3d^3n/(Gd^4) = 8Pc_n^3n/(Gd).$$

Звідси знаходимо d і після підставляння числових значень маємо

$$d = \frac{8Pc_n^3n}{\lambda G} = \frac{8 \cdot 1200 \cdot 6^3 \cdot 14}{52 \cdot 10^{-3} \cdot 8 \cdot 10^4 \cdot 10^6} = 7 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 7 \text{ мм}.$$

Розділ XXIII

згин

§ 23.1. Чистий згин прямого бруса

Чистим згином називають такий вид деформації, при якому в будь-якому поперечному перерізі бруса виникає тільки *згинаючий момент*. Деформація чистого згину буде, наприклад, тоді, коли до прямого бруса в площині, яка проходить через вісь, прикласти дві однакові за величиною і протилежні за знаком пари сил. На згин працюють балки, осі, вали й інші деталі конструкцій (означення балки відоме з теоретичної механіки). Надалі майже завжди розглядатимемо такі брус, в яких є хоча б одна площина симетрії і з нею збігається площина дії навантажень. У цьому випадку деформація згину відбувається в площині дії зовнішніх сил і згин називають *прямим*, на відміну від косоного згину, який розглянуто в останньому параграфі цього розділу.

Вивчаючи деформації згину, уявлятимемо, що балка складається з незліченної кількості волокон, паралельних осі. Щоб мати уявлення про деформацію згину, поставимо два досліди:

1. Балку, що вільно лежить на двох опорах і має на верхньому і нижньому боках пази, в які вставлено точно підігнані за розміром пазів бруски, піддамо деформації згину (рис. 23.1). У результаті цього бруски, які містяться на опуклому боці, випадуть з пазів, а бруски, які містяться на вгнутому боці, виявляться затиснутими.

2. На бокову поверхню призматичного гумового (для більшої наочності) бруса прямокутного перерізу нанесемо сітку поздовжніх і поперечних прямих ліній і піддамо цей брус деформації чистого згину (рис. 23.2). У результаті побачимо, що:

а) поперечні прямі лінії під час деформації залишаться прямими, але повернуться назустріч одна одній;

б) поздовжні прямі лінії, а також віль бруса викривляться;

в) перерізи бруса стануть ширшими в поперечному напрямі на вгнутому боці і звужаться на опуклому боці.

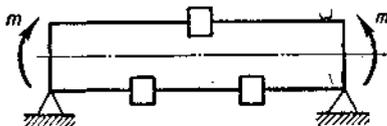


Рис. 23.1

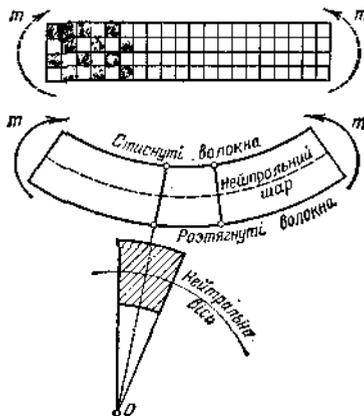


Рис. 23.2

З описаних дослідів можна зробити висновок, що для чистого згину дійсна гіпотеза плоских перерізів; волокна, які лежать на опуклому боці, розтягуються, а ті, що лежать на вгнутому боці — стискаються. На межі між ними лежить нейтральний шар волокон, які тільки викривляються, не змінюючи своєї довжини. Приймаючи дійсною гіпотезу про ненависання волокон, можна стверджувати, що при чистому згині в поперечних перерізах бруса виникають тільки нормальні напруження розтягу і стиску, які нерівномірно розподілені по перерізу.

Викривлення волокон і осі бруса відбувається внаслідок нерівномірного розподілу нормальних напружень по поперечному перерізу. Лінію перетину нейтрального шару з площиною поперечного перерізу називають нейтральною віссю. На нейтральній осі нормальні напруження дорівнюють нулю.

§ 23.2. Згинаючий момент і поперечна сила

Як відомо з теоретичної механіки, опорні реакції балок визначають, складаючи для всієї балки і розв'язуючи рівняння рівноваги статички. Пам'ятатимемо, що при визначенні внутрішніх сил реакції зв'язків враховують поряд з активними зовнішніми силами, які діють на балку. Для визначення внутрішніх силових факторів застосуємо метод перері-

зів, причому зображатимемо балку тільки однією лінією — віссю, до якої прикладено активні і реактивні сили. Розглянемо два випадки:

1. До балки прикладено дві однакові за величиною і протилежні за знаком пари сил (рис. 23.3). Розглядаючи рівновагу лівої або правої частини балки від перерізу $I-I$, бачимо, що в усіх поперечних перерізах виникає тільки згинаючий момент $M_{зг}$, який дорівнює зовнішньому моменту. Таким чином, розглянутий випадок є випадком чистого згину.

Згинаючий момент є результируючим моментом відносно нейтральної осі внутрішніх нормальних сил, які діють у поперечному перерізі балки. Звернемо увагу на те, що згинаючий момент має різний напрям для лівої

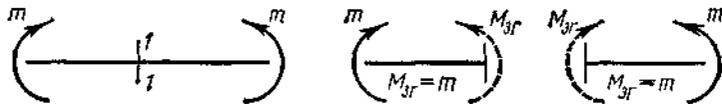


Рис. 23.3

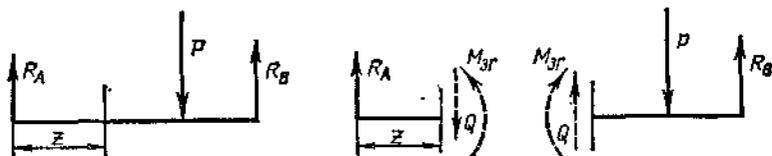


Рис. 23.4

і правої частин балки. Це вказує на *непридатність* правила знаків статки для визначення знака згинаючого моменту.

2. До балки прикладено активні і реактивні сили, перпендикулярні до осі (рис. 23.4). Розглядаючи рівновагу частин балки, розміщених зліва і справа від перерізу, бачимо, що в поперечних перерізах повинні діяти згинаючий момент $M_{зг}$ і поперечна сила Q . З цього випливає, що в розглянутому випадку в точках поперечних перерізів діють не тільки нормальні напружки, які відповідають згинаючому моменту, а й дотичні напружки, які відповідають поперечній силі.

Поперечна сила — це рівнодіюча внутрішніх дотичних сил, які діють у поперечному перерізі балки.

Звернемо увагу на те, що поперечна сила має протилежний напрям для лівої і правої частин балки, що вказує на *непридатність* правила знаків статки для визначення знака поперечної сили. Згин, при якому в поперечному перерізі балки діють згинаючий момент і поперечна сила, називають *п о п е р е ч н и м*.

Неважко побачити, що в загальному випадку при поперечному згині згинаючий момент і поперечна сила в різних перерізах можуть мати неоднакові значення. Для балки, яка перебуває в рівновазі під дією плоскої системи сил, алгебраїчна сума моментів усіх активних і реактивних сил відносно будь-якої точки дорівнює нулю, тому сума моментів зовнішніх сил, які діють на балку зліва від перерізу, чисельно дорівнює сумі моментів усіх зовнішніх сил, які діють на балку справа від перерізу.

Таким чином, згинаючий момент в перерізі балки чисельно дорівнює алгебраїчній сумі моментів відносно центра ваги перерізу всіх зовнішніх сил, які діють справа або зліва від перерізу. Для балки, яка перебуває в

рівновазі під дією плоскої системи сил, перпендикулярних до осі (тобто системи паралельних сил), алгебраїчна сума всіх зовнішніх сил дорівнює нулю; отже, сума зовнішніх сил, які діють на балку зліва від перерізу, чисельно дорівнює сумі сил, які діють на балку справа від перерізу.

Таким чином, *поперечна сила в перерізі балки чисельно дорівнює алгебраїчній сумі всіх зовнішніх сил, які діють справа або зліва від перерізу.* Оскільки правила знаків статички непридатні для встановлення знаків згинаючого моменту і поперечної сили, то встановимо для них інші правила знаків, а саме:

якщо зовнішнє навантаження намагається зігнути балку опуклістю вниз, то *згинаючий момент* у перерізі вважають *додатним*, і навпаки (рис. 23.5);

якщо сума зовнішніх сил, які діють зліва від перерізу, дає рівнодіючу, напрямлену вгору, то *поперечну силу* в перерізі вважають *додатною*,



Рис. 23.5

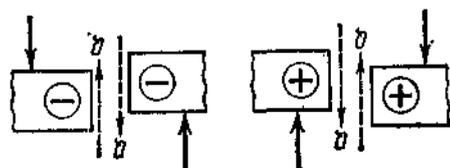


Рис. 23.6

і навпаки; для частини балки, розміщеної справа від перерізу, знаки поперечної сили будуть протилежними (рис. 23.6).

Користуючись цими правилами, треба уявити мислено *переріз балки жорстко закріпленим*, а зв'язки — відкинутими і заміненими реакціями. Підкреслимо, що для визначення опорних реакцій користуються правилами знаків статички; для визначення знаків згинаючого моменту і поперечної сили — правилами знаків опору матеріалів. Правило знаків для згинаючих моментів іноді називають «правилом дощу» (маючи на увазі, що для випадку опуклості вниз утворюється воронка, в якій затримується дощова вода, і навпаки).

§ 23.3. Диференціальні залежності для згину

Між згинаючим моментом, поперечною силою і інтенсивністю розподіленого навантаження існують диференціальні залежності, в основі яких лежить теорема Журавського, названа так за ім'ям визначного російського інженера-мостобудівника Д. І. Журавського (1821—1891). Цю теорему формулюють так: поперечна сила дорівнює першій похідній від згинаючого моменту по абсцисі перерізу балки

Розглянемо балку, зображену на рис. 23.7. Початок координат візьмемо на лівому кінці балки, а вісь z напрямимо вправо (надалі ця обставина матиме важливе значення). На одній з ділянок балки проведемо переріз з поточною координатою z і запишемо рівняння згинаючого

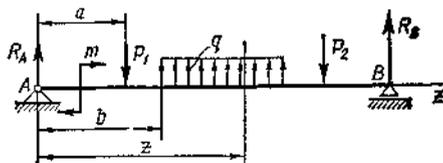


Рис. 23.7

моменту:

$$M_{\text{зг}} = RAz + m - P_1(z - a) + q(z - b)^2/2.$$

Продиференціювавши цей вираз за координатою z , матимемо:

$$\frac{dM_{\text{зг}}}{dz} = RA - P_1 + q(z - b).$$

Вираз, який стоїть у правій частині цієї рівності, — це поперечна сила Q в перерізі z . Таким чином,

$$\frac{dM_{\text{зг}}}{dz} = Q;$$

теорему доведено. Якщо рівняння згинаючих моментів (для ділянок з рівномірно розподіленим навантаженням) продиференціювати вдруге, то матимемо

$$\frac{d^2M}{dz^2} = \frac{dQ}{dz} = q,$$

тобто друга похідна від згинаючого моменту або перша похідна від поперечної сили за абсцисою перерізу балки дорівнює інтенсивності розподіленого навантаження. Як відомо з вищої математики, за законом другої похідної функції можна судити про опуклість або вгнутість кривої; відповідне правило слід використовувати для побудови епюр.

§ 23.4. Епюри поперечних сил і згинаючих моментів

Для наочного зображення розподілу вздовж осі балки поперечних сил і згинаючих моментів будують епюри, які дають змогу визначити можливий небезпечний переріз балки, встановити значення поперечної сили і згинаючого моменту в цьому перерізі. Епюри поперечних сил і згинаючих моментів можна будувати двома способами.

Перший спосіб полягає у тому, що спочатку будують аналітичні вирази поперечних сил і згинаючих моментів для кожної ділянки як функцій поточної координати z поперечного перерізу:

$$Q = f_1(z), \quad M_{\text{зг}} = f_2(z).$$

Потім за добутими рівняннями будують епюри.

Другий спосіб полягає в побудові епюр за характерними точками і значеннями поперечних сил і згинаючих моментів на межах ділянок. Застосовуючи цей спосіб, у більшості випадків можна обійтися без складання рівнянь поперечних сил і згинаючих моментів. Маючи певний досвід, краще користуватись другим способом.

Для побудови епюр треба керуватись такими правилами:

1. Епюру моментів будують на *стиснутому волокні*, тобто додатні моменти (і додатні поперечні сили) відкладають вгору від осі, а від'ємні — вниз.
2. Користуючись принципом пом'якшених граничних умов, вважатимемо, що в перерізі, де прикладено зосереджену силу, значення *поперечної сили* змінюється *стрибокподібно*, причому стрибок дорівнює модулю цієї сили.
3. На тій самій підставі вважатимемо, що в перерізі, де прикладено пару сил (момент), значення *згинаючого моменту* змінюється *стрибокподібно*, причому стрибок дорівнює моменту пари.

4. Правильність побудови епюр треба перевіряти за допомогою теореми Журавського.

Як відомо з математики, коли $M_{gr} = f(z)$, то $\frac{dM_{gr}}{dz} = \text{tg } \alpha$, де α — кут, який утворює дотична до епюри моментів з додатним напрямом осі z . Згідно з теоремою Журавського,

$$Q = \frac{dM_{gr}}{dz} = \text{tg } \alpha$$

(масштаби M_{gr} і z чисельно дорівнюють одиниці), отже, якщо кут α гострий, то $Q > 0$ і згинаючий момент на ділянці збільшується; якщо кут α тупий, то $Q < 0$ і згинаючий момент на ділянці зменшується; якщо $\alpha = 0$ на всій ділянці, то $M_{gr} = \text{const}$, $Q = 0$ і на цій ділянці виникає чистий згин; якщо $\alpha = 0$ в одній точці епюри моментів, то в цьому перерізі $Q = 0$, а згинаючий момент має екстремальне (максимальне або мінімальне) значення. У перерізі, де на епюрі поперечних сил є стрибок, на епюрі згинаючих моментів буде різка зміна напрямку дотичної. Щоб правила знаків для згинаючих моментів і поперечних сил не суперечили знакам, які відповідають теоремі Журавського, для перевірки епюри вісь z треба завжди уявно напрямляти з л і в а н а п р а в о.

5. На ділянці, де нема розподіленого навантаження, епюра моментів, взагалі кажучи, є похилою прямою, а епюра поперечних сил — прямою, паралельною осі.

6. На ділянці, де прикладено рівномірно розподілене навантаження, епюра моментів є параболою, а епюра поперечних сил — похилою прямою.

7. На кінці балки згинаючий момент дорівнює нулю, якщо там не прикладено пару сил.

8. При побудові епюр для консольних балок початок координат зручно брати на кінці консолі, що, нерідко дає змогу обійтися без визначення опорних реакцій. У перерізі, який відповідає закріпленню, поперечна сила дорівнює реактивній силі, а згинаючий момент — реактивному моменту.

Приклад 23.1. Побудувати епюри поперечних сил і згинаючих моментів для балки, шарнірно закріпленої двома кінцями і навантаженої зосередженою силою P , як показано на рис. 23.8.

Розв'язання. Виберемо систему координат з початком на лівому кінці балки.

Значимо, що в загальному випадку межами ділянок балки є кінці балки, опори, початок і кінець розподіленого навантаження, точки прикладання зосереджених сил і зовнішніх моментів. У даному прикладі межами ділянок є точка C , до якої прикладено зосереджену силу P , а також опори A і B . Отже, ця балка складається з двох ділянок

Визначимо опорні реакції R_A і R_B , склавши рівняння моментів відносно опор A і B :

$$\Sigma M_A = 0; \quad -Pa + R_B l = 0, \quad \text{звідки } R_B = Pa/l;$$

$$\Sigma M_B = 0; \quad -R_A l + Pb = 0, \quad \text{отже, } R_A = Pb/l.$$

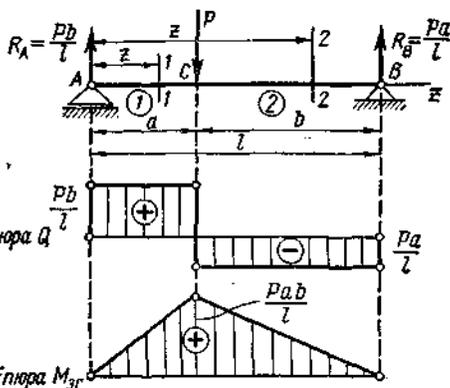


Рис. 23.8

Перевіримо правильність визначення реакцій, склавши рівняння проєкцій на вісь y

$$\Sigma Y = 0; \quad R_A - P + R_B = 0,$$

$$Pb/l - P + Pa/l = P(a+b)/l - P = P - P = 0.$$

Знайдена тотожність $0 = 0$ показує, що реакції визначено правильно. Переходимо до побудови епюр. Побудова епюри поперечних сил. На першій ділянці, між опорою A і точкою C , поперечна сила Q_1 додатна, стала і дорівнює R_A , бо зліва від перерізу $I-I$ інших сил немає.

Відкладаємо вгору від осі епюри в довільному масштабі $Q_1 = R_A = Pb/l$; потім проводимо пряму, паралельну осі епюри. Значення поперечної сили на другій ділянці дорівнює Q_2 , де

$$Q_2 = R_A - P = Pb/l - P = -P(l-b)/l = -Pa/l = -R_B$$

(те саме матимемо, якщо розглянемо частину балки, розміщену справа від перерізу 2-2).

У точці прикладання зосередженої сили P епюра Q має стрибок, який чисельно дорівнює P . Епюру Q показано на рис. 23.8. Побудова епюри згинаючих моментів. У будь-якому перерізі $I-I$ на першій ділянці вираз для згинаючого моменту має вигляд $M_{1зг} = R_A z$, причому z змінюється від 0 до a . Оскільки z у цьому рівнянні в першому степені, то епюра моментів буде прямою лінією.

Щоб побудувати епюру $M_{зг}$, досить знайти значення моментів на межах ділянки, тобто коли $z = 0$ і $z = a$: коли $z = 0$, то $M_{1зг} = 0$; коли $z = a$, то $M_{1зг} = Pba/l$. Щоб визначити згинаючий момент у перерізі 2-2, краще розглянути праву частину балки, на яку діє одна сила:

$$M_{2зг} = R_B(l-z),$$

причому z змінюється від a до l . Епюра моментів на другій ділянці також зобразиться прямою лінією. Знайдемо значення згинаючого моменту на межах ділянки: коли

$$z = a, \quad \text{то } M_{2зг} = Pa(l-a)/l = Pab/l;$$

$$\text{коли } z = l, \quad \text{то } M_{2зг} = Pa(l-l)/l = 0.$$

За добутих значеннями будемо епюру $M_{зг}$ (рис. 23.8). Найбільше значення $M_{зг}$ матиме під зосередженою силою:

$$M_{зг \max} = Pab/l.$$

Цей переріз буде небезпечним. В окремому випадку, коли силу P прикладено до середини балки,

$$a = b = l/2 \quad \text{і} \quad M_{зг \max} = Pl/4.$$

Приклад 23.2 Побудувати епюри поперечних перерізів і згинаючих моментів для балки, шарнірно закріпленої двома кінцями і навантаженої парою сил з моментом m , як показано на рис. 23.9.

Розв'язання. Виберемо систему координат, як і в попередньому прикладі. Напрямо реакцію R_A вниз, а

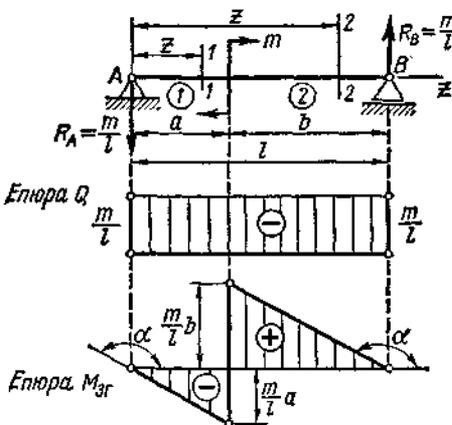


Рис. 23.9

R_B — вгору. Оскільки пару сил можна зрівноважити тільки парою, то

$$R_A = R_B = \frac{m}{l}.$$

Побудова епюри поперечних сил. Для всіх перерізів першої і другої ділянок поперечна сила Q буде сталою, від'ємною і дорівнюватиме $Q = R_A = -\frac{m}{l}$. Тому епюра буде прямою лінією, паралельною осі (рис. 23.9).

Побудова епюри згинаючих моментів. На першій ділянці

$$M_{1зг} = -R_A z,$$

причому $0 \leq z \leq a$; коли $z = 0$, то $M_{1зг} = 0$; коли $z = a$, то $M_{1зг} = -R_A a = -ma/l$.
 На другій ділянці $M_{2зг} = -R_A z + m$, де $a \leq z \leq l$; коли $z = a$, то $M_{2зг} = -R_A a + m = -ma/l + m = mb/l$; коли $z = l$, то $M_{2зг} = -R_A l + m = -(m/l)l + m = m - m = 0$.

Епюру $M_{зг}$ у даному випадку можна будувати, не складаючи рівнянь, тобто за значеннями $M_{зг}$ на межах ділянок. Користуючись раніше наведеними правилами, встановлюємо, що на кінцях балки $M_{зг} = 0$; у перерізах, нескінченно близьких до пари сил зліва і справа від неї, згинаючий момент буде

$$M_{1зг} = -R_A a = -ma/l,$$

$$M_{2зг} = R_B b = mb/l.$$

У точці прикладання пари сил епюра $M_{зг}$ має стрибок, величина якого дорівнює m .

Побудовану за знайденими значеннями епюру $M_{зг}$ показано на рис. 23.9. Зазначимо, що за теоремою Журавського

$$\frac{dM_{зг}}{dz} = Q = \text{tg } \alpha = \text{const},$$

отже, похилі лінії епюри $M_{зг}$ на обох ділянках повинні бути паралельними між собою. Вважаючи $b > a$, знаходимо найбільше значення згинаючого моменту:

$$M_{зг \text{ max}} = mb/l.$$

В окремому випадку, коли зовнішній момент m прикладено до середини прогону балки,

$$a = b = l/2 \quad \text{і} \quad M_{зг \text{ max}} = \pm m/2.$$

Приклад 23.3. Побудувати епюри поперечних сил і згинаючих моментів для балки, яка вільно лежить на двох опорах і навантажена рівномірно розподіленим навантаженням інтенсивності q (рис. 23.10).

Розв'язання. Через те що навантаження розподілене рівномірно по всій довжині балки, опорні реакції однакові:

$$R_A = R_B = ql/2.$$

Побудова епюри поперечних сил. Ця балка має тільки одну ділянку. У будь-якому перерізі поперечна сила

$$Q = R_A - gz = ql/2 - qz.$$

Оскільки z входить у це рівняння в першому степені (лінійна залежність), то для побудови епюри Q досить знати значення поперечної сили в двох точках: коли $z = 0$, то $Q = R_A = ql/2$; коли $z = l$, то $Q = ql/2 - ql = -ql/2 = -R_B$.

На середині прогону балки $Q = 0$. Епюру Q показано на рис. 23.10. Побудова епюри згинаючих моментів. Вираз для згинаючого моменту в будь-якому перерізі балки має вигляд

$$M_{зг} = R_A z - qz \frac{z}{2} = \frac{ql}{2} z - \frac{qz^2}{2}.$$

Це рівняння параболи. Обчислимо значення $M_{зг}$: коли $z = 0$, то $M_{зг} = 0$; коли $z = \frac{l}{2}$, то $M_{зг} = \frac{ql}{2} \frac{l}{2} - \frac{ql}{8} = \frac{ql^2}{8}$. Очевидно, що коли $z = l$, то $M_{зг} = 0$.

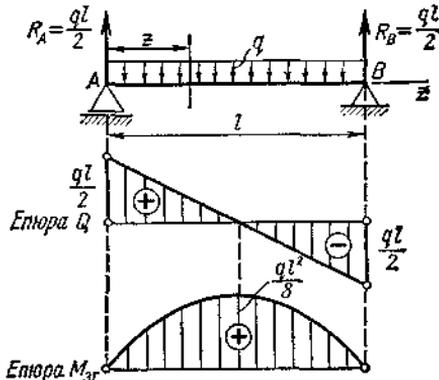


Рис. 23.10

За знайденими значеннями будемо епюру $M_{зг}$, як показано на рис. 23.10. Оскільки $\frac{d^2 M_{зг}}{dz^2} = -q$, тобто менше нуля, то епюра $M_{зг}$ буде опуклістю вгору. Максимальне значення згинаючого моменту буде на середині прогону балки (пригадаємо, що там $Q = 0$):

$$M_{зг \max} = ql^2/8.$$

Приклад 23.4. Побудувати епюри поперечних сил і згинаючих моментів для консольної балки AC , яка вільно лежить на двох опорах і навантажена рівномірно розподіленим навантаженням, інтенсивність якого $q = 200$ Н/м, як показано на рис. 23.11. Визначити також координату z , для якої згинаючий момент матиме найбільше значення.

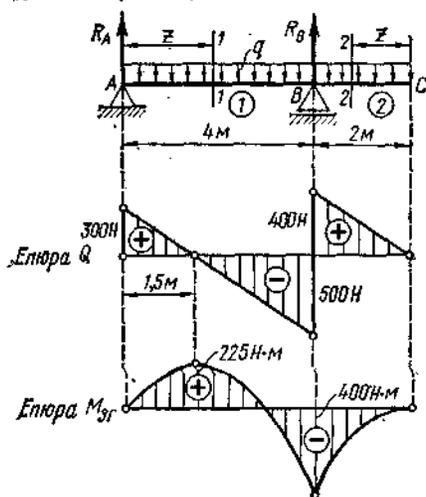


Рис. 23.11

координат візьмемо в точці C і напрямимо вісь z вліво, тоді

$$Q_2 = qz, \text{ причому } 0 \leq z \leq 2;$$

коли $z = 0$, то $Q_2 = 0$;

коли $z = 2$ м, то $Q_2 = 200 \cdot 2 = 400$ Н.

На межі ділянок у точці B епюра Q має стрибок, який за величиною дорівнює опорній реакції $R_B = 900$ Н. Знайдемо точки, в яких епюра Q переходить через нуль. Для цього Q_1 прирівняємо до нуля:

$$Q_1 = R_A - qz = 0; \quad 300 - 200z = 0; \quad z = 1,5 \text{ м.}$$

Відповідно до теореми Журавського в цій точці можна очікувати екстремальне значення згинаючого моменту. Переходимо до побудови епюри $M_{зг}$. На першій ділянці вираз для згинаючого моменту має вигляд

$$M_{1зг} = R_A z - qz^2/2, \text{ причому } 0 \leq z \leq 4.$$

Епюра $M_{зг}$ буде параболою. Обчислимо значення $M_{1зг}$ у трьох точках:

коли $z = 0$, то $M_{1зг} = 0$;

коли $z = 1,5$ м, то $M_{1зг} = 300 \cdot 1,5 - 200 \cdot 1,5^2/2 = 450 - 225 = 225$ Н · м;

коли $z = 4$ м, то $M_{1зг} = 300 \cdot 4 - 200 \cdot 4^2/2 = 1200 - 1600 = -400$ Н · м.

Для другої ділянки, прийнявши початок координат у точці C , матимемо $M_{2зг} = -qz^2/2$, причому $0 \leq z \leq 2$.

Обчислимо $M_{2зг}$ на межах ділянки:

коли $z = 0$, то $M_{2зг} = 0$;

коли $z = 2$ м, то $M_{2зг} = -200 \cdot 2^2/2 = -400$ Н · м.

Розв'язання. З рівнянь рівноваги визначимо опорні реакції R_A і R_B :

$$\Sigma M_A = 0; \quad +R_B \cdot 4 - q \cdot 6 \cdot 3 = 0;$$

$$R_B = 200 \cdot 6 \cdot 3/4 = 900 \text{ Н};$$

$$\Sigma M_B = 0; \quad -R_A \cdot 4 + q \cdot 6 \cdot 1 = 0;$$

$$R_A = 200 \cdot 6/4 = 300 \text{ Н.}$$

Зазначимо, що в випадку консольної балки для побудови епор досить визначити одну реакцію, наприклад R_A , а друга реакція R_B потрібна тільки для перевірки епюри Q .

Переходимо до побудови епюри Q . Балка має дві ділянки: AB і BC .

На першій ділянці поперечна сила

$$Q_1 = R_A - qz, \text{ причому } 0 \leq z \leq 4;$$

коли $z = 0$, то $Q_1 = R_A = 300$ Н;

коли $z = 4$ м, то $Q_1 = 300 - 200 \cdot 4 = = 300 - 800 = -500$ Н. Для спрощення побудови епюри Q на другій ділянці початок

За знайденими значеннями будемо епюру $M_{зг}$. Оскільки в даному прикладі $\frac{d^2 M_{зг}}{dz^2} = -g < 0$, то епюра $M_{зг}$ на обох ділянках буде напрямлена опуклістю вгору. З побудованих епюр видно, що небезпечним буде переріз балки на опорі B .

§ 23.5. Нормальні напруги чистого згину

Як було встановлено раніше, в поперечних перерізах балки у випадку чистого згину виникають тільки нормальні напруги розтягу і стиску. Щоб визначити розподіл цих напруг по поперечному перерізу, треба розглянути деформації волокон балки.

Розглянемо ділянку балки, яка зазнає деформації чистого згину. Двома поперечними перерізами AB і CD виділимо елемент балки нескінченно малої довжини ds (рис. 23.12). Радіус кривизни нейтрального шару позначимо ρ .

Розглянемо шар волокон mn , який знаходиться на відстані y від нейтрального шару NN . Це волокно в результаті деформації згину видовжилось на величину nn_1 . Зважаючи на малість відстані dS , заштриховані трикутники вважатимемо прямокутними; ці трикутники подібні ($n_1F \parallel mE$):

$$\triangle OEF \sim \triangle Enn_1.$$

З подібності трикутників маємо

$$nn_1/dS = y/\rho.$$

Через те що ліва частина цієї рівності є відносним видовженням, тобто $nn_1/dS = \epsilon$, то $y/\rho = \epsilon$.

Застосувавши закон Гука для розтягу і стиску $\sigma = E\epsilon$, матимемо

$$\sigma = Ey/\rho.$$

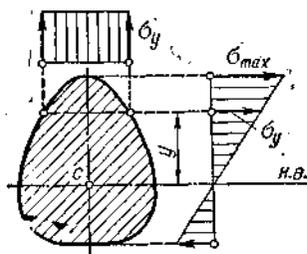


Рис. 23.13

З цієї формули видно, що нормальні напруги деформації згину розподілені по висоті перерізу нерівномірно: *максимальні напруги виникають у волокнах, найбільше віддалених від нейтральної осі*. По ширині перерізу нормальні напруги не змінюються. Закон розподілу нормальних напруг зображено на рис. 23.13.

Ця формула для обчислення нормальних напруг незручна, бо до неї входить радіус кривизни нейтрального шару. Щоб знайти формулу, яка зв'яже нормальні напруги і згинаючий момент, застосуємо метод перерізів і розглянемо рівновагу частини балки, зображеної на рис. 23.14.

У площині поперечного перерізу виділимо нескінченно малу площадку dF , у межах якої вважатимемо нормальні напруги σ сталими; тоді нор-

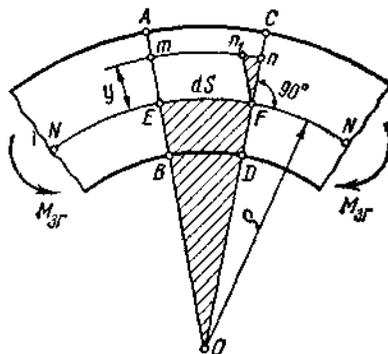


Рис. 23.12

мальна сила dN , яка діє на площадку dF , дорівнюватиме

$$dN = \sigma dF.$$

Складемо два рівняння рівноваги:

$$1) \Sigma Z = 0; \int_F dN = 0$$

або

$$\int_F \sigma dF = \int_F \frac{E y}{\rho} dF = \frac{E}{\rho} \int_F y dF = 0$$

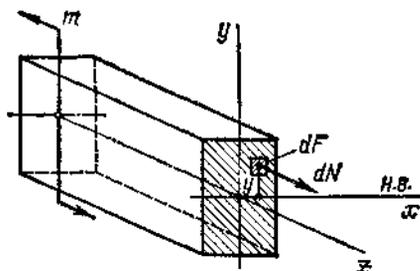


Рис. 23.14

(ρ для даного перерізу є величиною сталою, тому її винесено за знак інтеграла).

Через те що E і ρ не дорівнюють нулю, то

$$\int_F y dF = 0.$$

Цей інтеграл є статичним моментом площі перерізу відносно осі x , тобто нейтральної осі. Те, що статичний момент дорівнює нулю, означає,

що під час згину *нейтральна вісь проходить через центр ваги площі поперечного перерізу*;

$$2) \Sigma M_x = 0; -m + \int_F y dN = 0.$$

Оскільки у випадку чистого згину згинаючий момент дорівнює зовнішньому моменту $M_{зг} = m$, то

$$M_{зг} = \int_F y dN = \int_F y \sigma dF = \int_F y \frac{E y}{\rho} dF = \frac{E}{\rho} \int_F y^2 dF,$$

звідки

$$M_{зг} = EJ/\rho,$$

де $J = \int_F y^2 dF$ — момент інерції поперечного перерізу відносно нейтральної осі, а EJ — жорсткість перерізу при згині.

Оскільки у випадку чистого згину балки сталого перерізу $M_{зг} = \text{const}$ і $J = \text{const}$, то

$$\rho = EJ/M_{зг} = \text{const}.$$

Отже, зігнута вісь такої балки є дугою кола.

Значення радіуса кривизни підставимо в формулу для обчислення нормальних напруг, тоді

$$\sigma = \frac{E y}{\rho} = \frac{E y}{EJ/M_{зг}} = \frac{M_{зг} y}{J}.$$

Максимальні значення нормальних напруг будуть там, де волокна найбільш віддалені від нейтральної осі:

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{M_{зг} y_{\text{max}}}{J} = \frac{M_{зг}}{J/y_{\text{max}}} = \frac{M_{зг}}{W},$$

де $W = J/y_{\max}$ — момент опору деформації згину (або осьовий момент опору).

Момент опору деформації згину є відношення осьового моменту інерції поперечного перерізу відносно нейтральної осі до відстані від цієї осі до найбільш віддаленого волокна.

Одиниця моменту опору деформації згину $[W] = \text{м}^3$.

Отже, найбільші нормальні напруги у випадку чистого згину визначаються формулою

$$\sigma = M_{\text{зг}}/W.$$

Звернемо увагу на ту обставину, що ця формула за структурою подібна до формул для обчислення напруг розтягу, стиску, зсуву і кручення.

§ 23.6. Розрахункова формула на міцність для випадку згину

Умова міцності балки для випадку згину полягає в тому, що максимальна нормальна напруга в небезпечному перерізі не повинна перевищувати допустиму.

Вважаючи, що гіпотеза про ненатискання волокон дійсна не тільки для чистого, а й для поперечного згину, нормальні напруги в поперечному перерізі у випадку поперечного згину можна обчислювати за тією самою формулою, що й у випадку чистого згину. Питання, що стосується перевірки міцності балки на дотичні напруги і розрахунку балок на жорсткість розглядатимуться у наступних параграфах.

Розрахункова формула на міцність у випадку згину має вигляд

$$\sigma = M_{\text{зг max}}/W \leq [\sigma];$$

її читають так: *нормальна напруга в небезпечному перерізі, обчислена за формулою $\sigma = M_{\text{зг max}}/W$, не повинна перевищувати допустиму. Допустиму нормальну напругу для випадку згину беруть такою самою, як для розтягу і стиску.*

Максимальний згинаючий момент визначають з епюр згинаючих моментів або розраховують.

Оскільки момент опору деформації згину W у розрахунковій формулі стоїть у знаменнику, то чим більше W , тим менші розрахункові напруги.

Визначимо моменти опору деформації згину найбільш поширених перерізів.

1. Прямокутник $b \times h$ (рис. 23.15):

$$W_{\text{пр}} = \frac{J}{y_{\max}} = \frac{bh^3}{12} : \frac{h}{2} = \frac{bh^2}{6}.$$

Якщо балку прямокутного перерізу покласти плазом, то $W'_{\text{пр}} = hb^2/6$, тоді

$$\frac{W'_{\text{пр}}}{W_{\text{пр}}} = \frac{bh^2}{6} : \frac{hb^2}{6} = \frac{h}{b} > 1.$$

Отже, за інших однакових умов максимальні нормальні напруги σ' в прямокутній балці, яку покладено плазом, будуть більшими, ніж у тій

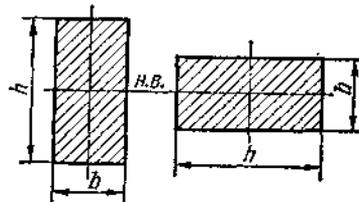


Рис. 23.15

самій балці, коли її найбільший габаритний розмір h вертикальний (мається на увазі, що згин відбувається у вертикальній площині).

Із сказаного випливає правило: для забезпечення максимальної міцності вісь, відносно якої момент інерції максимальний, повинна бути нейтральною.

2. Круг діаметром d :

$$W = \frac{\pi d^3}{64} : \frac{d}{2} = \frac{\pi d^2}{32} \approx 0,1d^2.$$

3. Кільце розміром $D \times d$:

$$W = \frac{\pi}{64} (D^4 - d^4) : \frac{D}{2} = \frac{\pi (D^4 - d^4)}{32D} \approx 0,1 \frac{D^4 - d^4}{D}.$$

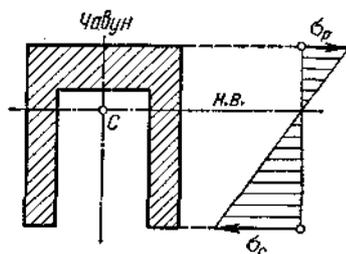


Рис. 23.16

Момент опору кільцевого перерізу не можна обчислювати як різницю моментів опорів великого і малого кругів. Неважко підрахувати, що при однаковій площі поперечного перерізу, тобто однаковій витраті матеріалу, момент опору кільцевого перерізу більший від моменту опору суцільного круглого перерізу.

Оскільки поблизу нейтральної осі матеріал зазнає незначного напруження, то вигідно більше матеріалу розміщувати да-

лі від нейтральної осі. Тому в машинобудуванні рідко використовують металеві балки прямокутного перерізу, але досить широко використовують прокатні профільні балки таврового, двотаврового, кутового, швелерного й інших перерізів. Моменти інерції, моменти опору й інші відомості про прокатні фасонні профілі стандартних розмірів подано у таблицях ГОСТу.

Для балок, матеріал яких не однаковий працює на розтяг і стиск (клад, чавун), доцільно використовувати профілі, несиметричні до нейтральної осі, наприклад таврові або П-подібні. Оскільки у гринного профілю під час згину виникають неоднакові напруги у і стиску, то переріз, наприклад, чавунної балки вигідно розмістити так, щоб менші напруги були в зоні розтягнутих, а більші — в зоні стиснених волокон (рис. 23.16).

Порівняємо щодо економічності за масою балки двотаврового, прямокутного і квадратного перерізів.

Припустимо, що з розрахункового рівняння визначено момент опору деформації згину балки:

$$W = M_{зг \max} / [\sigma] = 1,2 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 1200 \text{ см}^3.$$

За таблицями ГОСТу вибираємо двотавровий профіль № 45, який має площу поперечного перерізу $F_{дв} = 83 \text{ см}^2 = 83 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$.

Визначимо розміри прямокутного перерізу, прийнявши $h = 2$:

$$W = bh^2/6 = b \cdot 4b^2/6 = 2b^3/3 = 1,2 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3.$$

Звідси $b = \sqrt[3]{1,2 \cdot 10^{-3} \cdot 3/2} = 122 \cdot 10^{-3} \text{ м}$; $h = 2b = 244 \cdot 10^{-3} \text{ м}$; $F_{пр} = bh = 122 \cdot 10^{-3} \cdot 244 \cdot 10^{-3} = 297 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$. За інших однакових умов маси балок бу-

дуть пропорційні площам поперечних перерізів:

$$F_{np}/F_{дв} = 297 \cdot 10^{-4} / (83 \cdot 10^{-4}) \approx 3,5.$$

Балка прямокутного перерізу в три з половиною рази важча від балки двотаврового профілю при однаковій міцності й інших однакових умовах.

Визначимо розміри квадратного перерізу з стороною a :

$$W = a^3/6 = 1,2 \cdot 10^{-3}, \text{ звідси } a =$$

$$= \sqrt[3]{1,2 \cdot 10^{-3} \cdot 6} = 194 \cdot 10^{-3} \text{ м};$$

$$F_{кв} = a^2 = 375 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2;$$

$$F_{кв}/F_{дв} = 375 \cdot 10^{-4} / (83 \cdot 10^{-4}) \approx \approx 4,5.$$

Балка квадратного перерізу буде в чотири з половиною рази важча від балки двотаврового профілю при однаковій міцності і інших однакових умовах.

Приклад 23.5. Вважаючи балку двотавровою, визначити номер перерізу з розрахунку на міцність, якщо допустима напруга згину $[\sigma] = 120 \text{ МПа}$, $P = 2000 \text{ Н}$, $q = 2000 \text{ Н/м}$, $l = 1,5 \text{ м}$ (рис. 23.17).

Розв'язання. Початок координат візьмемо на вільному кінці балки і вісь z напрямимо вліво. Для розв'язання задачі досить побудувати одну епюру згинаючих моментів. Оскільки балка має тільки одну ділянку, то вираз для $M_{зг}$ буде

$$M_{зг} = -Pz - qz^2/2.$$

Епюра $M_{зг}$ — дуга параболи.

Обчислимо значення $M_{зг}$ на межах ділянки:

$$\text{коли } z = 0, \text{ то } M_{зг} = 0;$$

$$\text{коли } z = l = 1,5 \text{ м, то } M_{зг} =$$

$$= -2000 \cdot 1,5 - 2000 \cdot 2,25/2 =$$

$$= -3000 - 2250 = -5250 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Максимальне значення згинаючий момент матиме в місці закріплення:

$$M_{зг \text{ max}} = 5250 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Застосуємо розрахункове рівняння на міцність для згину:

$$\sigma_{\text{max}} = M_{зг \text{ max}}/W_x \leq [\sigma], \text{ звідси } W_x \geq 5250/120 \cdot 10^6 = 43,8 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 = 43,8 \text{ см}^3.$$

Знайдемо за таблицями найближче більше значення W_x і візьмемо двотавровий переріз № 12, для якого $W_x = 58,4 \text{ см}^3$. Якщо переріз балки повернути на 90° , тобто розмістити полицьки вертикально, а стінку — горизонтально (рис. 23.17), то для такого випадку потрібний профіль № 27а і балка буде в три рази важча.

Приклад 23.6. Побудувати епюри поперечних сил і згинаючих моментів для балки, яку зображено на рис. 23.18, коли $P = 10 \text{ кН}$, $P_1 = 20 \text{ кН}$, $q = 20 \text{ кН/м}$, $a = 0,8 \text{ м}$. Перевірити балку на міцність, якщо її переріз — двотавр № 20, а $[\sigma] = 150 \text{ МПа}$.

Розв'язання. Визначимо опорні реакції R_B і R_D :

$$\Sigma M_B = 0; \quad P_a - P_1 a + R_D \cdot 3a - qa \cdot 3,5a = 0.$$

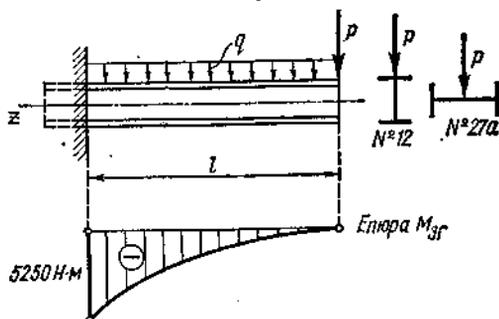


Рис. 23.17

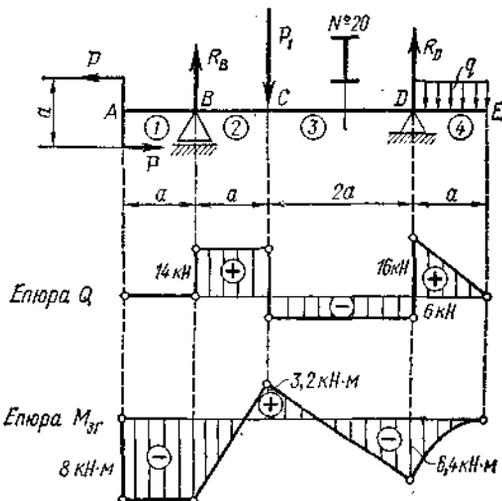


Рис. 23.18

Звідси $R_D = (-P + P_1 + q \cdot 3,5a)/3 = (-10 + 20 + 20 \cdot 3,5 \cdot 0,8) \times 10^3/3 = 22 \times 10^3 \text{ Н} = 22 \text{ кН}$;

$$\Sigma M_D = 0; + P_a + R_B \cdot 3a + P_1 \cdot 2a - qa \cdot 0,5a = 0.$$

Звідси $R_B = (P + 2P_1 - 0,5qa)/3 = (10 + 2 \cdot 20 - 0,5 \cdot 20 \cdot 0,8) \times 10^3/3 = 14 \times 10^3 \text{ Н} = 14 \text{ кН}$.

Перейдемо до побудови епюри Q .

На першій ділянці $Q_1 = 0$, бо алгебраїчна сума сил пари завжди дорівнює нулю.

На другій ділянці $Q_2 = R_B = 14 \text{ кН}$.

На третій ділянці $Q_3 = R_B - P_1 = 14 - 20 = -6 \text{ кН}$.

На цих ділянках епора Q має вигляд горизонтальних ліній, паралельних осі.

Четверту ділянку розглянемо, взявши початок координат на правому кінці балки:

$$Q_4 = qz, \text{ де } 0 \leq z \leq d;$$

коли $z = 0$, то $Q_4 = 0$;

коли $z = a$, то $Q_4 = qa = 20 \cdot 0,8 = 16 \text{ кН}$.

Епора має вигляд похилої прямої лінії.

У точці D епора Q має стрибок, що дорівнює опорній реакції R_D .

Перейдемо до побудови епюри $M_{зг}$.

На першій ділянці

$$M_{1зг} = -Pa = -10 \cdot 0,8 = -8 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

На другій і третій ділянках будемо епюру за значеннями згинаючого моменту на межах ділянок:

у перерізі B

$$M_{2зг} = -Pa = -8 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

у перерізі C

$$M_{2зг} = -Pa + R_B a = -8 + 14 \cdot 0,8 = -8 + 11,2 = 3,2 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

у перерізі D

$$\begin{aligned} M_{2зг} &= -Pa + R_B \cdot 3a - P_1 \cdot 2a = -8 + 14 \cdot 3 \cdot 0,8 - 20 \cdot 2 \cdot 0,8 = \\ &= -8 + 33,6 - 32 = -6,4 \text{ кН} \cdot \text{м}. \end{aligned}$$

На перших трьох ділянках епора $M_{зг}$ має вигляд прямих ліній.

Для побудови епюри $M_{зг}$ на четвертій ділянці початок координат візьмемо на правому кінці балки, тоді

$$M_{4зг} = -qz^2/2, \text{ де } 0 \leq z \leq a;$$

коли $z = 0$, то $M_{4зг} = 0$;

коли $z = a$, то $M_{4зг} = -qa^2/2 = -20 \cdot 0,8^2/2 = -10 \cdot 0,64 = -6,4 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

На четвертій ділянці епора $M_{зг}$ — дуга параболи.

Пропонуємо читачу на прикладі цієї задачі перевірити правильність побудови епор Q і $M_{зг}$ за допомогою диференціальних залежностей

$$\frac{dM_{зг}}{dz} = Q = \text{tg } \alpha \text{ і } \frac{d^2M_{зг}}{dz^2} = q.$$

Перевіримо балку на міцність. Найбільший згинаючий момент для даної балки буде на першій ділянці

$$|M_{зг \text{ max}}| = 8 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Запишемо розрахункову формулу на міцність при згині:

$$\sigma = M_{зг \text{ max}}/W_x \leq [\sigma].$$

За таблицею знаходимо значення моменту опору W_x для двутавра № 20:

$$W_x = 184 \text{ см}^3 = 184 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

Підставляючи значення і враховуючи розмірності, маємо

$$\sigma = \frac{8 \cdot 10^9}{184 \cdot 10^{-6}} \approx 44 \cdot 10^6 \text{ Па} = 44 \text{ МПа} \leq 150 \text{ МПа}.$$

Умову міцності $\sigma < [\sigma]$ виконано. У даному випадку можна стверджувати, що балка працює з великим недонавантаженням, бо максимальна нормальна напруга при згині становить тільки 29,3 % допустимої.

§ 23.7. Дотичні напруги деформації згину

Як було встановлено раніше, в поперечних перерізах балки під час деформації поперечного згину виникають не тільки нормальні, а й дотичні напруги, які спричиняють деформацію зсуву. Відповідно до закону парності такі самі дотичні напруги виникатимуть і в поздовжніх перерізах, паралельних нейтральному шару. Наявність дотичних напруг у поздовжніх перерізах підтверджується появою в дерев'яних балках при поперечному згині поздовжніх тріщин.

Перейдемо до виведення формули для обчислення дотичних напруг поперечного згину балок прямокутного перерізу.

Цю формулу вивів у 1855 р. російський інженер-мостобудівник Д. І. Журавський. Така формула була потрібна в зв'язку з тим, що в минулому столітті для будівництва мостів широко використовували дерев'яні конструкції, а балки з деревини звичайно мають прямокутний переріз і погано працюють на сколювання вздовж волокон.

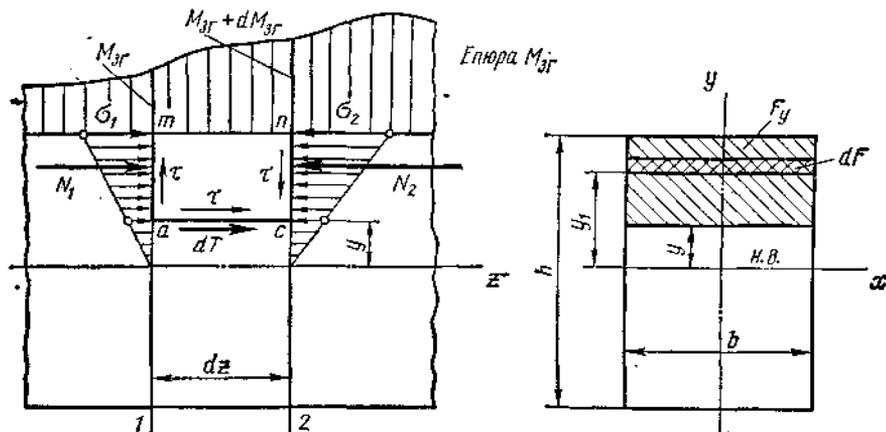


Рис. 23.19

Розглянемо балку прямого перерізу $b \times h$ (рис. 23.19). Нехай у поперечному перерізі 1 діє згинаючий момент M_{zr} , а в перерізі 2, розміщеному на нескінченно близькій відстані dz від першого, — згинаючий момент $M_{zr} + dM_{zr}$. На відстані y від нейтральної осі проведемо поздовжній переріз ac і розглянемо рівновагу елементарного паралелепіпеда $amnc$, що має розміри $b \times dz \times (\frac{h}{2} - y)$.

Рівнодіючу нормальних внутрішніх сил, які діють на грань am , позначимо N_1 , а сил, які діють на грань cn , — N_2 ; змінні нормальні напруги в цих гранях позначимо відповідно σ_1 і σ_2 .

У поперечному перерізі балки виділимо нескінченно вузьку смужку dF , яка знаходиться на змінній відстані y_1 від нейтральної осі, тоді

$$N_1 = \int_{F_y} \sigma_1 dF = \int_{F_y} \frac{M_{3r} y_1}{J} dF = \frac{M_{3r}}{J} \int_{F_y} y_1 dF;$$

$$N_2 = \int_{F_y} \sigma_2 dF = \int_{F_y} \frac{(M_{3r} + dM_{3r}) y_1}{J} dF = \frac{M_{3r} + dM_{3r}}{J} \int_{F_y} y_1 dF.$$

Нехай дотичні напруги в поперечному перерізі прямокутної балки паралельні поперечній силі Q і по ширині перерізу розподілені рівномірно. Приймаючи, що в поздовжньому перерізі дотичні напруги τ також розподілені рівномірно, визначаємо дотичну силу dT , яка діє на грані ac :

$$dT = \tau b dz.$$

Складемо рівняння рівноваги паралелепіпеда $amnc$:

$$\Sigma Z = 0; \quad N_1 + dT - N_2 = 0,$$

звідси

$$dT = N_2 - N_1$$

або

$$\tau b dz = \frac{M_{3r} + dM_{3r}}{J} \int_{F_y} y_1 dF - \frac{M_{3r}}{J} \int_{F_y} y_1 dF.$$

$\int_{F_y} y_1 dF$ позначимо через S ; це статичний момент заштрихованої площі F_y перерізу відносно нейтральної осі; тоді

$$\tau b dz = (S/J) (M_{3r} + dM_{3r} - M_{3r}) = (S/J) dM_{3r},$$

звідки

$$\tau = \frac{dM_{3r} S}{dz J b}.$$

Оскільки за теоремою Журавського $\frac{dM_{3r}}{dz} = Q$, то

$$\tau = QS/(Jb).$$

Цю рівність називають формулою Журавського.

Виведена формула дає значення дотичних напруг у поздовжніх перерізах, але за законом парності у точках поперечного перерізу, які лежать на лінії перетину поздовжньої і поперечної площин, діятимуть такі самі за величиною дотичні напруги.

Формулу Журавського читають так: *дотичні напруги в поперечному перерізі балки дорівнюють добутку поперечної сили Q на статичний момент S відносно нейтральної осі частини перерізу, яка лежить вище від розглядуваного шару волокон, поділеному на момент інерції J всього перерізу відносно нейтральної осі і на ширину b розглядуваного шару волокон.*

Визначимо закон розподілу дотичних напруг для балки прямокутного перерізу (рис. 23.20). Для шару волокон ad

$$S_{adce} = b(h/2 - y) \left(\frac{h/2 - y}{2} + y \right) = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right);$$

$$\tau = \frac{QS}{Jb} = \frac{Q(b/2)(h^2/4 - y^2)}{b \cdot bh^3/12} = \frac{6Q(h^2/4 - y^2)}{bh^3};$$

коли $y = \pm h/2$, то $\tau = 0$;

коли $y = 0$, то $\tau = \tau_{\max} = 3Q/(2bh) = 3Q/(2F) = 3\tau_c/2$.

Таким чином, у верхньому і нижньому шарах волокон дотичні напруги дорівнюють нулю, а в волокнах нейтрального шару вони досягають максимального значення. Закони розподілу дотичних напруг по ширині і висоті прямокутного перерізу показано на рис. 23.20.

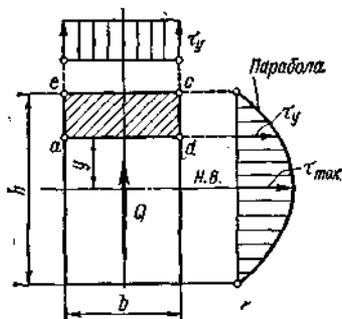


Рис. 23.20

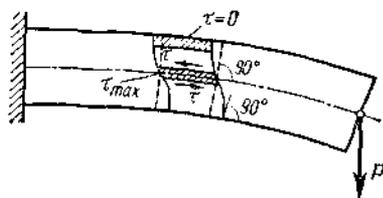


Рис. 23.21

Без виведення наводимо формулу для визначення максимальних дотичних напруг у балці круглого перерізу:

$$\tau_{\max} = 4Q/(3F) = 4\tau_c/3.$$

Дотичні напруги в балках відповідають деформації зсуву, в результаті чого плоскі поперечні перерізи при поперечному згині не залишаються плоскими, як при чистому згині, а викривляються (рис. 23.21).

Більшість балок розраховують тільки за нормальними напругами; три види балок треба перевірити за дотичними напругами, а саме:

- 1) дерев'яні балки, бо деревина погано працює на сколювання;
- 2) вузькі балки (наприклад, двотаврові), бо максимальні дотичні напруги обернено пропорційні ширині нейтрального шару;

3) короткі балки, бо при відносно невеликих згинаючому моменті і нормальних напругах у таких балках можуть виникати значні поперечні сили і дотичні напруги.

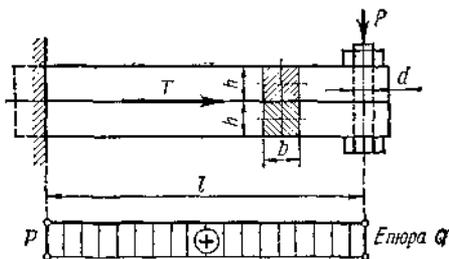


Рис. 23.22

Приклад 23.7. Дві однакові дерев'яні балки покладені одна на одну, затиснуті одним кінцем, а на другому кінці навантажені силою, як показано на рис. 23.22. Вільні кінці балок стягнуті болтом. Чому дорівнюють напруга зсуву τ і сила зсуву T на стику балок? Якого діаметра має бути болт, коли $h = 20$ см, $P = 15$ кН, $l = 4$ м, $b = 20$ см, $[\tau_s] = 80$ МПа?

Розв'язання. У будь-якому перерізі балки поперечна сила $Q = P$. Максимальні дотичні напруги діятимуть у площині стикання балок.

Обчислимо τ_{\max} за формулою Журавського:

$$\tau = QS/(Jb).$$

У цьому прикладі

$$J = b(2h)^3/12, \quad S = hbh/2, \quad Q = P.$$

Підставляючи ці вирази у формулу Журавського, маємо

$$\tau_{\max} = 3P/(4bh).$$

Підставляючи числові значення і враховуючи розмірність, знаходимо

$$\tau_{\max} = 3 \cdot 15\,000 / (4 \cdot 0,2 \cdot 0,2) = 0,282 \cdot 10^6 \text{ Па.}$$

Сила зсуву $T = \tau_{\max} F_{\text{зс}}$, де $F_{\text{зс}}$ — площа зсуву,

$$F_{\text{зс}} = bl.$$

Обчислимо T :

$$T = \tau_{\max} bl = 0,282 \cdot 10^6 \cdot 0,2 \cdot 4 = 226 \cdot 10^3 \text{ Н.}$$

Сила T , яка діє на стику балок, намагається зрізати болт. Знайдемо потрібний діаметр d болта з розрахунку його на зріз:

$$T/F_3 \leq [\tau_3].$$

Тут F_3 — площа зрізу, яка дорівнює площі поперечного перерізу болта

$$F_3 = \pi d^2/4.$$

Підставимо цей вираз у розрахункову формулу, тоді

$$d \geq \sqrt{4T/(\pi [\tau_3])}.$$

Тепер підставимо числові значення

$$d \geq \sqrt{4 \cdot 226 \cdot 10^3 / (3,14 \cdot 80 \cdot 10^6)} = 60 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 60 \text{ мм.}$$

§ 23.8. Пружна лінія балки

Зігнута під дією навантажень вісь балки є плавною кривою, яку називають пружною лінією. Деформацію згину балки характеризують прогином y і кутом повороту поперечного перерізу, який дорівнює куту α нахилу дотичної до пружної лінії відносно осі z балки. Рівняння прогинів і кутів повороту перерізів у загальному вигляді записують так:

$$y = f_1(z), \quad \alpha = f_2(z).$$

З математики відомо, що радіус кривизни кривої $y = f_1(z)$ у будь-якій точці визначається формулою

$$\rho = [1 + (y')^2]^{3/2}/y'', \quad \text{де } y' = \frac{dy}{dz} = \text{tg } \alpha, \quad y'' = \frac{d^2y}{dz^2}.$$

Зважаючи на малість деформацій, $(y')^2$ нехтуємо (бо ця величина значно менша від одиниці), тоді

$$\rho \approx 1/y''.$$

Раніше було виведено формулу $\frac{FJ}{\rho} = M_{\text{зг}}$; підставляючи в цю формулу наближені значення радіуса кривизни, дістаємо диференціальне

рівняння пружної лінії балки

$$EJy'' = M_{gr.}$$

Щоб знайти рівняння $\alpha = f_2(z)$ кутів повороту перерізів, треба це рівняння проінтегрувати один раз, причому, зважаючи на малість деформацій, вважатимемо, що

$$y' = \operatorname{tg} \alpha \approx \alpha, \text{ рад.}$$

Щоб знайти рівняння прогинів $y = f_1(z)$, треба диференціальне рівняння проінтегрувати двічі.

Розглянемо балку сталого перерізу, навантажену моментом m , зосередженою силою P і рівномірно розподіленим навантаженням q , яке дає додатні згинаючі моменти (рис. 23.23).

Початок координат візьмемо на лівому кінці балки, вісь y напрямимо вгору, а вісь z — вправо. Балка має п'ять ділянок, кожній з яких відповідають свої рівняння моментів прогинів і кутів повороту перерізів. Звернемо увагу на те, що пружна лінія балки є плавною кривою, отже, на межах ділянок значення кутів повороту перерізу і прогинів, обчислених з рівнянь сусідніх ділянок, збігатимуться. Інтегруватимемо диференціальні рівняння, не розкриваючи дужок, які стоять у рівняннях моментів, що позначається тільки на значеннях довільних сталих.

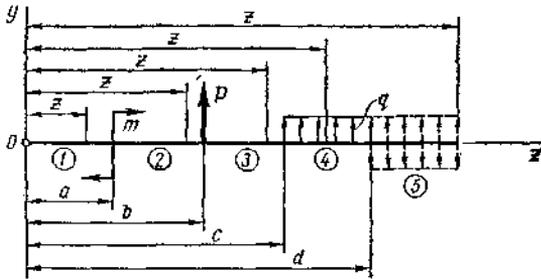


Рис. 23.23

1-ша ділянка:

$$EJy'' = 0, \quad EJy' = C_1, \quad EJy = C_1z + D_1;$$

2-га ділянка:

$$EJy'' = m = m(z - a)^0, \quad EJy' = m(z - a) + C_2, \quad EJy = m \frac{(z - a)^2}{1 \cdot 2} + C_2z + D_2.$$

Підставивши в рівняння першої і другої ділянок значення $z = a$, матимемо

$$C_1 = C_2, \quad D_1 = D_2;$$

3-тя ділянка:

$$EJy'' = m(z - a)^0 + P(z - b), \quad EJy' = m(z - a) + P \frac{(z - b)^2}{1 \cdot 2} + C_3,$$

$$EJy = m \frac{(z - a)^2}{1 \cdot 2} + P \frac{(z - b)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + C_3z + D_3;$$

4-та ділянка:

$$EJy'' = m(z - a)^0 + P(z - b) + q \frac{(z - c)^3}{1 \cdot 2},$$

$$EJy' = m(z - a) + P \frac{(z - b)^2}{1 \cdot 2} + q \frac{(z - c)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + C_4,$$

$$EJy = m \frac{(z - a)^2}{1 \cdot 2} + P \frac{(z - b)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + q \frac{(z - c)^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + C_4z + D_4.$$

Оскільки на межах суміжних ділянок дійсні рівняння і попередньої і наступної ділянок, то

$$C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = C, \quad D_1 = D_2 = D_3 = D_4 = D.$$

Позначивши α_0 кут повороту перерізу на початку координат (в радіанах), а y_0 — прогин на початку координат, коли $z = 0$, матимемо

$$EJ\alpha_0 = C, \quad EJy_0 = D.$$

Через те що кожному окремому навантаженню в рівняннях відповідає окремий доданок, то в загальному вигляді можна записати таке рівняння:

$$EJ\alpha = EJ\alpha_0 + \Sigma m(z-a) + \Sigma P \frac{(z-b)^2}{1 \cdot 2} + \Sigma q \frac{(z-c)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

— це рівняння називають узагальненим рівнянням кутів повороту перерізів;

$$EJy = EJy_0 + EJ\alpha_0 z + \Sigma m \frac{(z-a)^2}{1 \cdot 2} + \Sigma P \frac{(z-b)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \Sigma q \frac{(z-c)^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$$

— це рівняння називають узагальненим рівнянням прогинів.

Якщо рівномірно розподілене навантаження закінчується не на кінці балки, то його треба уявно подовжити до кінця і додати протилежно напрямлене навантаження такої самої інтенсивності (рис. 23.23, ділянка 5). При цьому в узагальнені рівняння кутів повороту і прогинів добавиться ще по одному доданку з від'ємним знаком, відповідно:

$$- \Sigma q \frac{(z-d)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \quad - \Sigma q \frac{(z-d)^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}.$$

Знаки доданків в узагальнених рівняннях встановлюють за правилом знаків для згинаючих моментів.

Додатне значення y є прогин вгору, і навпаки: додатне значення α — поворот перерізу проти стрілки годинника, і навпаки.

Користуючись узагальненими рівняннями, слід пам'ятати, що:

1) для балки, жорстко закріпленої лівим кінцем,

$$\alpha_0 = 0, \quad y_0 = 0;$$

2) для балки, лівий кінець якої лежить на опорі,

$$\alpha_0 \neq 0, \quad y_0 = 0;$$

щоб визначити α_0 , треба скласти рівняння прогинів для другої опори і прирівняти його до нуля;

3) у перерізі з максимальним прогином кут повороту перерізу $\alpha = 0$, бо в цій точці пружної лінії дотична паралельна осі z .

Крім розрахунків на міцність, балки часто перевіряють або розраховують на жорсткість. Умови жорсткості полягають у тому, що максимальний прогин (стріла прогину f) або максимальний кут повороту не повинні перевищувати допустимих величин. Розрахункові рівняння на жорсткість мають вигляд

$$y_{\max} = f \leq [f], \quad \alpha_{\max} \leq [\alpha].$$

Величину допустимої стріли прогину звичайно задають у частинах довжини прольоту l , наприклад, для мостів $[f] = (1/700 \div 1/1000) l$. Допустимий кут повороту перерізу задають у частках радіана.

Приклад 23.8. Визначити прогин y_B вільного кінця консольної балки AB , яку згинає зосереджена сила P (рис. 23.24, а).

Розв'язання. Реакції R_A і m закріплення відповідно дорівнюють:

$$R_A = P, \quad m = Pl.$$

Враховуючи, що $y_0 = 0, \alpha_0 = 0$, з узагальненого рівняння прогинів знаходимо

$$EJy_B = R_A l^3/6 - ml^2/2.$$

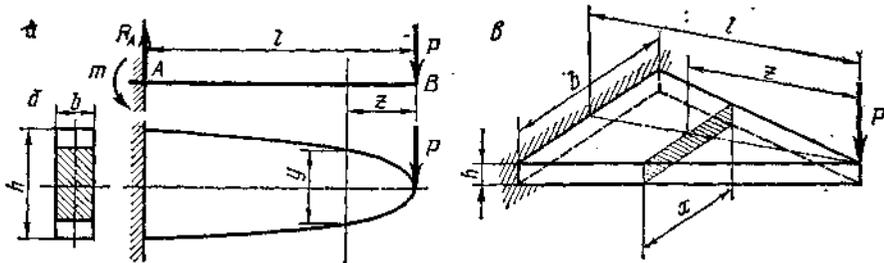


Рис. 23.24

Підставивши значення R_A і m , матимемо

$$y_B = \frac{1}{EJ} \left(\frac{Pl^3}{6} - \frac{Pl^3}{2} \right) = -\frac{Pl^3}{3EJ}.$$

Максимальний прогин двохопорної балки з прольотом l , яку згинає зосереджена сила P , прикладена до середини прольоту (без виведення),

$$f = y_{\max} = -Pl^3/(48EJ).$$

Балки однакового опору згину. Під час деформації згину балок сталого перерізу (за виключенням випадку чистого згину) усі перерізи, крім небезпечного, мають зайвий запас міцності, що означає нераціональне використання матеріалу. Найбільш раціональною буде така форма балки, за якої *напруги в усіх поперечних перерізах дорівнюватимуть допустимій*. Такі балки називають **балками однакового опору згину**.

Розглянемо довільний переріз балки однакового опору згину. Позначимо згинаючий момент, який діє у цьому перерізі, M_{sz} , а момент опору W_z . Тоді має залишатися дійсною умова

$$M_{sz}/W_z = M_{sz \max}/W = [\sigma] = \text{const}.$$

Звідси випливає, що в балках однакового опору згину моменти опору перерізу повинні бути прямо пропорційні згинаючим моментам:

$$M_{sz}/M_{sz \max} = W_z/W.$$

Виготовлення балок однакового опору технологічно складне, тому застосування їх обмежене.

Розглянемо приклад, який ілюструє теорію балок однакового опору згину.

Нехай балку AB прямокутного перерізу жорстко закріплено одним кінцем, а до іншого її кінця прикладено зосереджену силу P , як показано на рис. 23.24, *a*. За умови однакового опору згину по всій довжині встановимо: 1) як змінюватиметься висота h балки при сталій ширині b і 2) як змінюватиметься ширина балки при сталій висоті.

1. *Ширина балки стала.* Згинаючий момент у довільному перерізі на відстані z від вільного кінця

$$M_{згz} = -Pz.$$

Відповідний момент опору

$$W_z = by^2/6.$$

Тут $b = \text{const}$, а y змінюється.

Максимальний згинаючий момент у закріпленні:

$$M_{зг \max} = -Pl.$$

Момент опору згину в закріпленні

$$W = bh^2/6.$$

Запишемо умову пропорційності згинаючих моментів і моментів опору згину:

$$\frac{-Pz}{-Pl} = \frac{by^2/6}{bh^2/6}, \quad \text{звідки } y^2 = h^2z/l.$$

Це рівняння параболи. Зазначимо, що об'єм такої балки однакового опору згину становитиме $\frac{2}{3}$ об'єму балки сталого перерізу $b \times h$, що дає 33 % економії матеріалу (рис. 23.24, *b*).

2. *Висота балки стала.* Позначимо змінну ширину x , ширину балки в закріпленні b , висоту балки h . Як і в попередньому випадку, запишемо

$$\frac{-Pz}{-Pl} = \frac{xh^2/6}{bh^2/6}.$$

звідки

$$x = bz/l.$$

З цього відношення видно, що ширина балки змінюється за лінійним законом. Подібну балку зображено на рис. 23.24, *в*. Порівняно з призматичною балкою сталого перерізу економія матеріалу досягає 50 %.

Порівнюємо прогини балок сталого перерізу і однакового опору згину при однаковій міцності й інших рівних умовах.

Формула для обчислення прогину вільного кінця балки однакового опору згину (без виведення)

$$y_{\max} = -Pl^3/(2EJ).$$

Порівнюючи це значення прогину з величиною прогину вільного кінця балки сталого перерізу

$$y_{\max} = -Pl^3/(3EJ),$$

приходимо до висновку, що найбільший прогин балки однакового опору згину в півтора раза перевищує прогин балки сталого перерізу.

Властивість балок однакового опору згину (із сталою висотою) деформуватися значно більше від балок сталого перерізу (за таких самих навантажень і допустимих напруг) використовується у випадках, коли потрібно пом'якшити дію навантаження, яке змінюється з часом, або ударного навантаження. Зокрема, листові ресори, які широко застосовують на транспорті (вагони, автомашини), — це розрізані на штаби і складені стопом балки однакового опору згину.

§ 23.9. Косий згин

Раніше було розглянуто прямий згин балок, при якому всі навантаження лежали в одній площині, що проходить через одну з головних осей перерізу. За такого згину вісь деформується у площині дії навантажень.

Згин, при якому площина дії навантажень не збігається з однією із головних осей перерізу, називають *к о с и м*.

Розглянемо консольну балку довжиною l прямокутного перерізу, до кінця якої прикладено силу P , що утворює з віссю y кут α (рис. 23.25, а). Розкладемо силу P на дві складові, напрямлені вздовж головних осей перерізу, і, користуючись принципом незалежності дії сил, зведемо косий згин до прямих згинів у двох взаємно перпендикулярних площинах. Очевидно, що небезпечний переріз буде в закріпленні і максимальні згинаючі моменти дорівнюватимуть:

$$M_{згх} = Pl \cos \alpha, \quad M_{згy} = Pl \sin \alpha.$$

Відповідні цим згинаючим моментам нормальні напруги в якійсь точці A небезпечного перерізу обчислюють за формулами

$$\sigma_{1A} = M_{згх}y/J_x, \quad \sigma_{2A} = M_{згy}x/J_y,$$

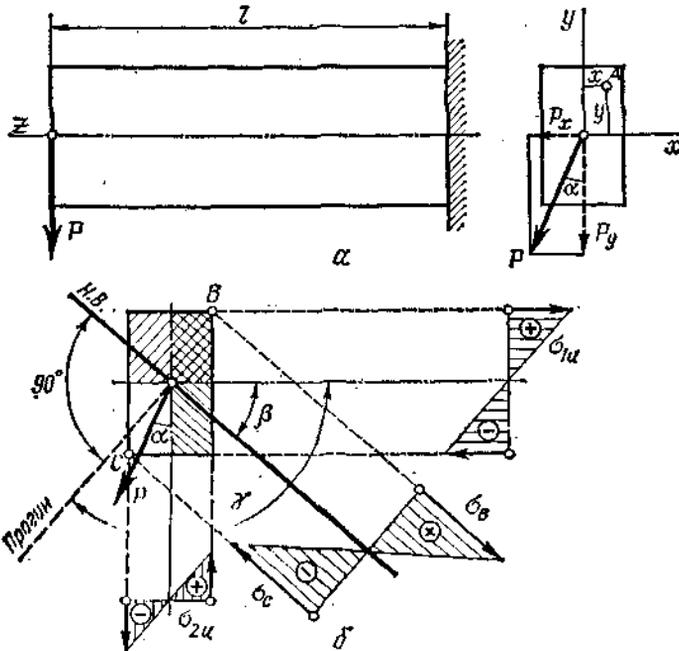


Рис. 23.25

де x, y — поточні координати точки A ; J_x, J_y — моменти інерції перерізу відносно нейтральних осей.

Сумарна нормальна напруга у точці A

$$\sigma_A = \sigma_{1A} + \sigma_{2A} = \frac{M_{згх}y}{J_x} + \frac{M_{згy}x}{J_y} = Pl \left(\frac{y \cos \alpha}{J_x} + \frac{x \sin \alpha}{J_y} \right).$$

Якщо заштрихувати в різних напрямках частини перерізу, в яких діятимуть тільки напруги розтягу $\sigma_{1зг}$ і $\sigma_{2зг}$, то побачимо, що в зоні, заштрихованій в клітинку, діятимуть сумарні напруги розтягу, а в незаштрихованій — сумарні напруги стиску (рис. 23.25, б). Очевидно, що максимальна напруга розтягу виникає у точці B , а максимальна напруга стиску — в точці C небезпечного перерізу. Епюри нормальних напруг показано на тому самому рисунку.

Оскільки на нейтральній осі $\sigma_A = 0$, то її рівняння має вигляд

$$y \cos \alpha / J_x + x \sin \alpha / J_y = 0,$$

де x, y — поточні координати точок нейтральної осі.

З рівняння видно, що нейтральною віссю є пряма лінія, яка проходить через початок координат, тобто через центр ваги перерізу балки. Визначимо кут β , який нейтральна

...сь утворює з віссю x :

$$\operatorname{tg} \beta = y/x = -J_x \sin \alpha / (J_y \cos \alpha) = -(J_x/J_y) \operatorname{tg} \alpha.$$

З цієї рівності видно, що коли $J_x \neq J_y$, то $\beta \neq \alpha$ і нейтральна вісь не перпендикулярна до лінії дії сили P .

Користуючись принципом незалежності дії сил, визначимо напрям прогину балки під дією сили P . Прогин f_x у напрямі осі x

$$\begin{aligned} f_x &= -P \sin \alpha \cdot l^3 / (3EJ_y), \\ \text{Прогин } f_y \text{ в напрямі осі } y & \\ f_y &= -P \cos \alpha \cdot l^3 / (3EJ_x). \end{aligned}$$

Сумарний прогин f визначиться формулою

$$f = \sqrt{f_x^2 + f_y^2}.$$

Позначивши λ кут між напрямом сумарного прогину і віссю x , матимемо

$$\operatorname{ctg} \gamma = f_x/f_y = [-P \sin \alpha l^3 / (3EJ_y)] / [-P \cos \alpha l^3 / (3EJ_x)] \text{ або } \operatorname{ctg} \gamma = (J_x/J_y) \operatorname{tg} \alpha.$$

Порівнюючи цей вираз з формулою для визначення $\operatorname{tg} \beta$, бачимо, що $\operatorname{ctg} \gamma$ і $\operatorname{tg} \beta$ відрізняються тільки знаками, отже, самі кути відрізняються на 90° і сумарний прогин балки лежить у площині, перпендикулярній до нейтральної осі. Звідси випливає, що *при косому згині площина прогину не збігається з площиною дії навантажень*.

Розділ XXIV

ПОЄДНАННЯ ОСНОВНИХ ДЕФОРМАЦІЙ

§ 24.1. Згин і розтяг або стиск

Розглянемо брус довжиною l сталого поперечного перерізу, затиснутий одним кінцем і навантажений на вільному кінці довільно напрямленою силою P , яку прикладено в центрі ваги перерізу (рис. 24.1).

Розкладемо силу P на складові P_x , P_y і P_z . У результаті дії цих складових виникають одночасно деформації розтягу і поперечного згину в двох взаємно перпендикулярних площинах (дотичними напругами згину надалі нехтуватимемо).

Застосуємо принцип незалежності дії сил і визначимо максимальні нормальні напруги в небезпечному перерізі (закріпленні):

$$\sigma_p = P_z/F, \quad \sigma_{13r} = \pm P_y l/W_x, \quad \sigma_{23r} = \pm P_x l/W_y.$$

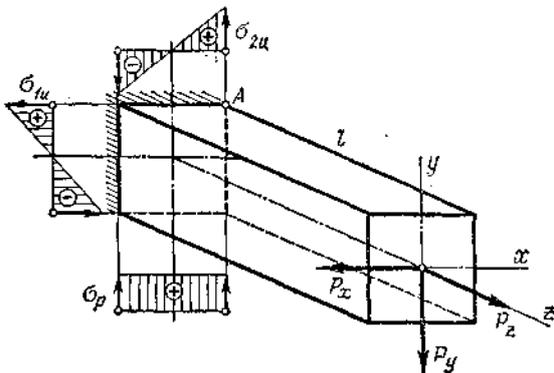


Рис. 24.1

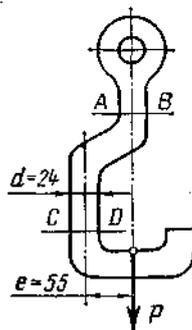


Рис. 24.2

Максимальні сумарні напруги виникнуть у точці A і будуть напругами розтягу

$$\sigma_{\max} = \sigma_A = P_z/F + P_y I/W_x + P_x I/W_y.$$

Епюри нормальних напруг розтягу і згину подано на рис. 24.1.

Деформації розтягу і згину поєднуються, наприклад, у гаках, гвинтах з відігнутою головкою, гвинтах слюсарних лещат тощо.

Приклад 24.1. Визначити напруги в перерізах AB і CD сталюго гака сталого перерізу (рис. 24.2). $P = 3$ кН; розміри подано у міліметрах.

Розв'язання. Використовуючи метод перерізів, бачимо, що в перерізі AB діятиме одна поздовжня сила $N = P$. У цьому перерізі так працює тільки на розтяг. Обчислимо нормальну напругу:

$$\sigma_{AB} = N/F = 4P/(\pi d^2) = 4 \cdot 3 \cdot 10^3 / (3,14 \cdot 24^2 \cdot 10^{-6}) = 6,7 \cdot 10^6 \text{ Па.}$$

У перерізі CD маємо поєднання згину і розтягу; згинаючий момент $M_{зг} = Pe$. Обчислимо максимальну сумарну напругу в перерізі CD . Це буде напруга розтягу:

$$\sigma_{CD} = \sigma_{\max} = N/F + Pe/W.$$

Враховуючи, що $e = 55$ мм, а $W \approx 0,1d^3$, дістаємо

$$\sigma_{CD} = 6,7 \cdot 10^6 + 3 \cdot 10^3 \cdot 55 \cdot 10^{-3} / (0,1 \cdot 24^3 \cdot 10^{-9}) = 125,7 \cdot 10^6 \text{ Па.}$$

Позацентричний стиск. Позацентричним стиском називають такий вид деформації, коли стискаюча сила паралельна осі бруса, але точка її прикладання не збігається з центром ваги перерізу (вивчену раніше деформацію можна назвати центральним стиском).

Розглянемо брус прямокутного перерізу $b \times h$ (рис. 24.3, a), до якого на відстані e від осі прикладено паралельну їй силу P .

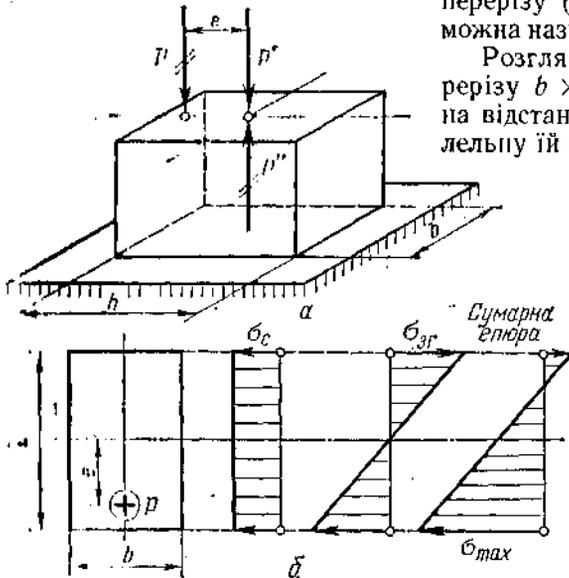


Рис. 24.3

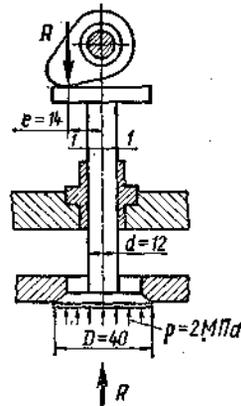


Рис. 24.4

У центрі ваги перерізу вздовж осі прикладемо дві протилежно напрямлені сили, які за модулем дорівнюють силі P . Утворену систему трьох сил розглядатимемо як силу P , прикладену в центрі ваги, і пару сил з моментом $m = Pe$. Користуючись принципом незалежності дії сил, позацентро-

вий стиск розглядатимемо як поєднання центрального стиску і чистого згину, причому відповідні нормальні напруги визначатимемо за формулами

$$\sigma_c = -P/F, \quad \sigma_{зг} = \pm M_{зг}/W,$$

а сумарні напруги — за формулою

$$\sigma = \sigma_c + \sigma_{зг} = -P/F \pm M_{зг}/W.$$

Максимальні сумарні напруги будуть напругами стиску:

$$\sigma_{\max} = -P/F - P_e/W.$$

Епюри нормальних напруг стиску, згину і сумарну епюру подано на рис. 24.3, б.

Щоб у брусі не виникали напруги розтягу (недопустимі, наприклад, у цегляній або кам'яній кладці), має виконуватися нерівність

$$\sigma_c \geq \sigma_{зг} \text{ або } P/F \geq P_e/W, \text{ звідки } e \leq W/F.$$

Для бруса прямокутного перерізу граничне значення ексцентриситету

$$e = \frac{W}{F} = \frac{bh^2}{6} : bh = \frac{h}{6}.$$

У випадку позацентрового розтягу використовують такі ж формули, але з урахуванням знаків напруг.

Приклад 24.2. Обчислити найбільші напруги в перерізі I—I стержня тарілки клапанного механізму в момент відкриття клапана (рис. 24.4, розміри подано в міліметрах). Розв'язання. Максимальну сумарну напругу позацентрового стиску визначимо за формулою

$$\sigma_{\max} = -R/F - Re/W.$$

У цьому прикладі R — сила тиску на дно тарілки клапанного механізму:

$$R = \rho \pi D^2/4 = 2 \cdot 10^6 \pi \cdot 40^2 \cdot 10^{-6}/4 = 800\pi \text{ Н.}$$

Площа поперечного перерізу стержня

$$F = \pi d^2/4 = \pi \cdot 12^2 \cdot 10^{-6}/4 = 36\pi \cdot 10^{-6} \text{ м}^2.$$

Момент опору згину

$$W \approx 0,1d^3 = 0,1 \cdot 12^3 \cdot 10^{-9} = 172,8 \cdot 10^{-9} \text{ м}^3.$$

Підставивши числові значення, обчислимо:

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} &= -800\pi/(36\pi \cdot 10^{-6}) - 800\pi \cdot 14 \cdot 10^{-3}/(172,8 \cdot 10^{-9}) = \\ &= -230 \cdot 10^6 \text{ Па} = -230 \text{ МПа.} \end{aligned}$$

§ 24.2. Гіпотези міцності

Досі розглядалися випадки поєднання основних деформацій, коли в поперечних перерізах бруса виникають тільки нормальні напруги, які в кожній точці можна було додавати алгебраїчно.

Проте часто трапляються і мають велике практичне значення випадки поєднання основних деформацій, коли в поперечних перерізах виникають нормальні і дотичні напруги, розподілені нерівномірно і за різними законами. У таких випадках дослідно визначити величини, що характеризують міцність, неможливо, тому для оцінки міцності деталі доводиться вра-

ховувати механічні характеристики даного матеріалу, добуті з діаграми розтягу.

Як відомо, міцність пластичних матеріалів на розтяг характеризують границею текучості, а крихких — границею міцності; ці напруги вважають граничними і залежно від них обчислюють допустимі напруги.

Гіпотези міцності — це наукові припущення про основні причини настання у матеріалі граничного напруження стану при поєднанні основних деформацій.

Напружені стани при поєднанні основних деформацій і при однобічному розтягу називатимемо рівнонебезпечними або еквівалентними, якщо їх головні напруги відрізняються від граничної для даного матеріалу в однакову кількість разів, інакше кажучи, коефіцієнти запасу міцності для еквівалентних напружених станів однакові.

Еквівалентною напругою називають таку умовну напругу однобічного розтягу, яка рівнонебезпечна заданому випадку поєднання основних деформацій.

Відповідно до гіпотез міцності виводять формули для розрахунку еквівалентної напруги, яку потім зіставляють з допустимою напругою на розтяг. Таким чином, умова міцності для випадку поєднання основних деформацій, коли в поперечних перерізах діють нормальні і дотичні напруги, матиме вигляд

$$\sigma_{\text{екв}} \leq [\sigma_p].$$

Сформулюємо і охарактеризуємо гіпотези міцності і наведемо відповідні формули для обчислення еквівалентних напруг.

Першу теорію міцності, в основі якої лежить гіпотеза найбільших нормальних напруг, і другу теорію міцності, в основі якої лежить гіпотеза найбільших лінійних деформацій, тепер не застосовують, тому їх не розглядатимемо.

Перейдемо до розгляду використовуваних тепер теорій міцності.

1. *Гіпотеза найбільших дотичних напруг* (третя теорія міцності).

Згідно з цією гіпотезою, яку запропоновано в кінці XVIII ст., *небезпечний стан матеріалу настає тоді, коли найбільші дотичні напруги досягають граничної величини.*

У § 20.5 було встановлено, що під час однобічного розтягу бруса максимальна дотична напруга в похилій площині дорівнює половині максимальної напруги. Звідси випливає, що гранична дотична напруга дорівнює половині граничної нормальної:

$$\tau_{\text{гр}} = \sigma_{\text{гр}}/2.$$

З того самого параграфу відомо, що у випадку плоского напруженого стану максимальна дотична напруга дорівнює піврізниці головних напруг:

$$\tau_{\text{max}} = (\sigma_{\text{max}} - \sigma_{\text{min}})/2.$$

Щоб вивести формулу для обчислення еквівалентних напруг за третьою теорією міцності, розглянемо брус, в якого в поперечному перерізі діють нормальні σ і дотичні τ напруги (рис. 24.5, а).

Всередині бруса близько якоїсь точки А виріжемо нескінченно малу призму abc , в якій грань ab збігається з поперечним, грань ac — з похилою перерізом, а грань bc є головною площадкою, на якій діє

головна напруга σ_0 . Відповідно до закону парності дотичних напруг, на грані ac призми також діятимуть дотичні напруги τ (рис. 24.5, б). Оскільки в поздовжньому перерізі бруса нормальних напруг немає, то тут маємо справу з випадком плоского напруженого стану, який називають спрощеним.

Розглянемо рівновагу призми abc . Для цього спроектуємо всі сили, які діють на неї на осі z і y . Площу грані bc позначимо dF :

$$\Sigma Z = 0; \quad \sigma_0 dF \sin \varphi - \tau dF \cos \alpha - \sigma dF \sin \varphi = 0,$$

$$\Sigma Y = 0; \quad \sigma_0 dF \cos \varphi - \tau dF \sin \varphi = 0.$$

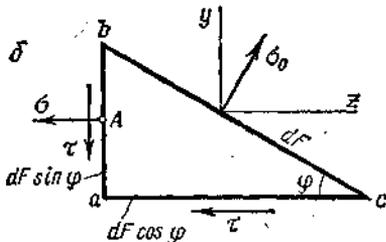
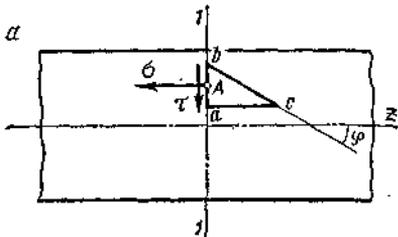


Рис. 24.5

Розділивши обидві частини рівності на dF , дістанемо

$$(\sigma_0 - \sigma) \sin \varphi = \tau \cos \varphi,$$

$$\sigma_0 \cos \varphi = \tau \sin \varphi.$$

Обидві рівності розділимо на $\cos \varphi$, виключивши з них $\tan \varphi$, матимемо

$$\tau / (\sigma_0 - \sigma) = \sigma_0 / \tau,$$

з цього дістанемо квадратне рівняння.

$$\sigma_0^2 - \sigma_0 \cdot \sigma - \tau^2 = 0.$$

Розв'язуючи це рівняння, дістанемо

$$\sigma_0 = \frac{\sigma}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}.$$

Таким чином, головні напруги в похилих площадках у зонах точки A бруса визначають за формулами

$$\sigma_{\max} = \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}, \quad \sigma_{\min} = \frac{\sigma}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}.$$

Отже, максимальні дотичні напруги будуть

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}.$$

Оскільки $\tau_{\text{гр}} = \sigma_{\text{гр}}/2$, а еквівалентна напруга не повинна перевищувати граничної, то, застосовуючи гіпотезу найбільших дотичних напруг, маємо

$$\tau_{\max} = \tau_{\text{гр}} = \sigma_{\text{гр}}/2 = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}/2.$$

У результаті дістаємо формулу для обчислення еквівалентних напруг:

$$\sigma_{\text{екв}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}.$$

Гіпотеза найбільших дотичних напруг добре підтверджується дослідом, особливо для пластичних матеріалів.

2. Гіпотеза Мора (четверта теорія міцності).

К. О. Мор (1835—18) — німецький вчений в галузі опору матеріалів і будівельної механіки. Мор є творцем однієї з теорій міцності, графічних методів визначення напруг для складного напруженого стану (круг Мора) і т. п.

Гіпотезу Мора запропоновано на початку ХХ ст. Згідно з цією гіпотезою *небезпечний стан матеріалу настає тоді, коли на деякій площадці трапляється найбільш несприятлива комбінація нормальної і дотичної напруг.*

Формула для обчислення еквівалентних напруг має вигляд

$$\sigma_{\text{екв}} = \frac{1-k}{2} \sigma + \frac{1+k}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2},$$

де $k = [\sigma_p]/[\sigma_c]$.

Ця формула однаково придатна як для крихких, так і для пластичних матеріалів; коли $k = 1$, вона тотожна з третьою теорією міцності.

3. Енергетична гіпотеза (п'ята, або енергетична, теорія міцності).

Під час деформації елементарної частинки тіла в загальному випадку змінюються її форма і об'єм. Таким чином, повна потенціальна енергія деформації складається з двох частин: енергії зміни форми і енергії зміни об'єму. Енергетична гіпотеза міцності за критерій переходу матеріалу до граничного стану приймає тільки енергію зміни форми.

Згідно з цією гіпотезою, яку запропоновано на початку ХХ ст., *небезпечний стан матеріалу в даній точці настає тоді, коли питома потенціальна енергія зміни форми для цієї точки досягає граничної величини.*

Формула для обчислення еквівалентних напруг має вигляд

$$\sigma_{\text{екв}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}.$$

Цю формулу для пластичних матеріалів добре підтверджують досліди, і тепер вона набула значного поширення.

Зазначимо, що в усіх наведених вище формулах σ і τ є нормальними і дотичними напругами на площадці поперечного перерізу, який проходить через небезпечну або можливо небезпечну точку.

§ 24.3. Згин і кручення

Одночасних деформацій згину і кручення зазнає більшість валів, як звичайно бувають прямими брусами круглого або кільцевого перерізу.

Для розрахунку валів братимемо до уваги тільки крутний і згинаючий моменти, які діють у небезпечному поперечному перерізі, і не братимемо до уваги поперечні сили, оскільки відповідні їм дотичні напруги відносно невеликі.

Максимальні нормальні і дотичні напруги для круглих валів обчислюють за формулами

$$\sigma = W_{зг}/W, \quad \tau = M_{кр}/W_p,$$

причому для круглих валів $W_p = 2W$.

У випадку одночасного згину і кручення небезпечними будуть точки небезпечного поперечного перерізу вала, які найбільше віддалені від нейтральної осі.

Застосувавши третю теорію міцності, дістанемо

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{екв}} &= \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{(M_{зг}/W)^2 + 4(M_{кр}/W_p)^2} = \\ &= \sqrt{(M_{зг}/W)^2 + 4[M_{кр}/(2W)]^2} = \sqrt{M_{зг}^2 + M_{кр}^2}/W. \end{aligned}$$

Вираз, що стоїть у чисельнику, назвемо еквівалентним моментом:

$$M_{\text{екв}} = \sqrt{M_{\text{зг}}^2 + M_{\text{к}}^2}$$

тоді розрахункова формула для круглих валів набуде вигляду

$$\sigma_{\text{екв}} = M_{\text{екв}}/W \leq [\sigma]$$

(вали звичайно виготовляють з матеріалу, в якого $[\sigma_p] = [\sigma_c] = -[\sigma]$).

За цією формулою круглі вали розраховують як на згин, але не за згинаючим, а за еквівалентним моментом.

Застосувавши енергетичну теорію міцності, матимемо

$$\sigma_{\text{екв}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = \sqrt{(M_{\text{зг}}/W)^2 + 3(M_{\text{к}}/(2W))^2} = \sqrt{M_{\text{зг}}^2 + 0,75M_{\text{к}}^2/W^2}$$

тобто за енергетичною теорією міцності

$$M_{\text{екв}} = \sqrt{M_{\text{зг}}^2 + 0,75M_{\text{к}}^2}$$

Приклад 24.3. Перевірити міцність вала зубчастої передачі, виготовленого із сталі Ст 4, границя текучості для якої $\sigma_T = 260$ МПа. Потужність, яка передається, $N = 40$ кВт, $n = 1000$ хв⁻¹, допустимий коефіцієнт запасу міцності $[n] = 3$, діаметр вала

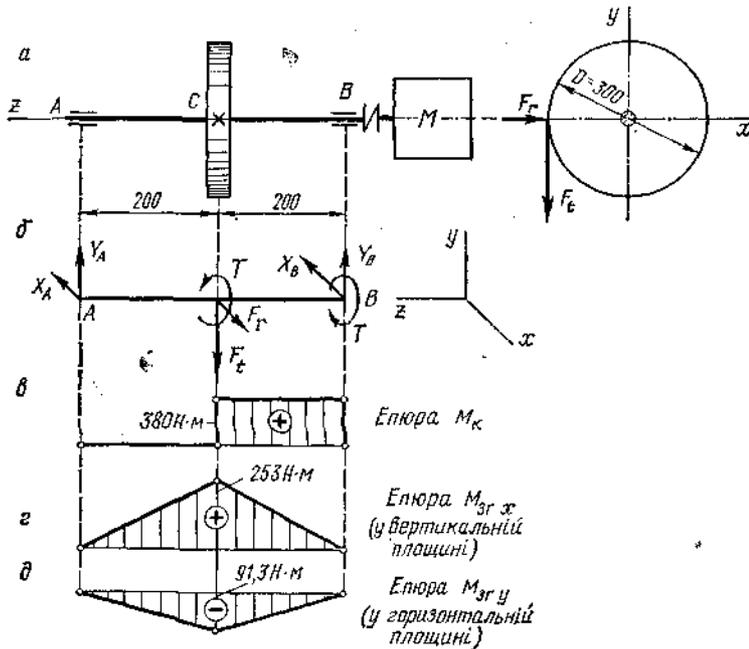


Рис. 24.6

$d = 35$ мм. Для розрахунку застосувати третю теорію міцності (рис. 24.6, а, розміри дано в міліметрах).

Розв'язання. Визначимо обертаючий момент, який передає вал:

$$T = N/\omega, \text{ де } \omega = \pi n/30.$$

Підставляємо числові значення:

$$T = 40\,000 \cdot 30 / (3,14 \cdot 1000) = 380 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Обертальний момент можна подати через колове зусилля F_t :

$$T = F_t D / 2, \text{ звідки } F_t = 2T / D = 2 \cdot 380 / 0,3 = 2530 \text{ Н.}$$

У зубчастих передачах діє також радіальне зусилля F_r , яке визначають із співвідношення

$$F_r = 0,36 F_t.$$

У даному прикладі

$$F_r = 0,36 \cdot 2530 = 913 \text{ Н.}$$

Зобразимо розрахункову схему вала (рис. 24.6, б).

Максимальний згинаючий момент $M_{згх}$, який діє у вертикальній площині

$$M_{згх} = F_t l / 4 = 2530 \cdot 0,4 / 4 = 253 \text{ Н} \cdot \text{м.}$$

Радіальне зусилля F_r згинатиме вал у горизонтальній площині.

Максимальний згинаючий момент від дії сили F_r буде на середині вала; його значення

$$M_{згy} = F_r l / 4 = 913 \cdot 0,4 / 4 = 91,3 \text{ Н} \cdot \text{м.}$$

За знайденими значеннями будемо епюри M_k , $M_{згх}$, $M_{згy}$ і визначаємо положення небезпечного перерізу (рис. 24.6, в, г, д).

З епюр видно, що небезпечний переріз — у місці закріплення зубчастого колеса

Застосуємо третю теорію міцності: $\sigma_{екв} = \sqrt{M_{зг}^2 + M_k^2} / W$; враховуючи, що $M_{зг}^2 = M_{згх}^2 + M_{згy}^2$, $W \approx 0,1 d^3$, $M_k = T$, дістаємо

$$\sigma_{екв} = \sqrt{253^2 + 91,3^2 + 380^2} / (0,1 \cdot 35^3 \cdot 10^{-9}) = 109 \cdot 10^6 \text{ Па} = 109 \text{ МПа.}$$

Визначимо коефіцієнт запасу міцності:

$$n = \sigma_T / \sigma_{екв} = 260 / 109 = 2,38.$$

Порівнюючи знайдене значення n з допустимим коефіцієнтом запасу міцності $[n]$, бачимо, що

$$n < [n],$$

тобто міцність вала недостатня.

Епюри M_k , $M_{згх}$ і $M_{згy}$ часто будують в аксонометрії. Цей метод побудови епюр показано на рис. 24.7.

§ 24.4. Кручення і розтяг або стиск

Одночасних деформацій кручення і розтягу зазнають, наприклад, болти і кріпильні гвинти, а деформацій кручення і стиску — гвинти домкратів і гвинтових пресів, свердла і штифелі свердлильних верстатів. Ці деталі звичайно виготовляють з матеріалів, для яких $[\sigma_p] = [\sigma_{кр}] = [\sigma]$.

Нормальні і максимальні дотичні напруги в цих випадках обчислюють за формулами

$$\sigma = N / F, \quad \tau = M_k / W_p.$$

Застосувавши третю теорію міцності, знайдемо розрахункову формулу

$$\sigma_{екв} = \sqrt{(N/F)^2 + 4 (M_k/W_p)^2} \leq [\sigma].$$

Застосувавши енергетичну теорію міцності, матимемо

$$\sigma_{екв} = \sqrt{(N/F)^2 + 3 (M_k/W_p)^2} \leq [\sigma].$$

РОЗРАХУНОК ВАЛА НА ЗГИН І КРУЧЕННЯ

Дано: $S_1' = 8 \text{ кН}$, $S_1'' = 4 \text{ кН}$,
 $S_2 = 2S_2$
 $D_1 = 300 \text{ мм}$, $D_2 = 600 \text{ мм}$,
 $l = 800 \text{ мм}$.

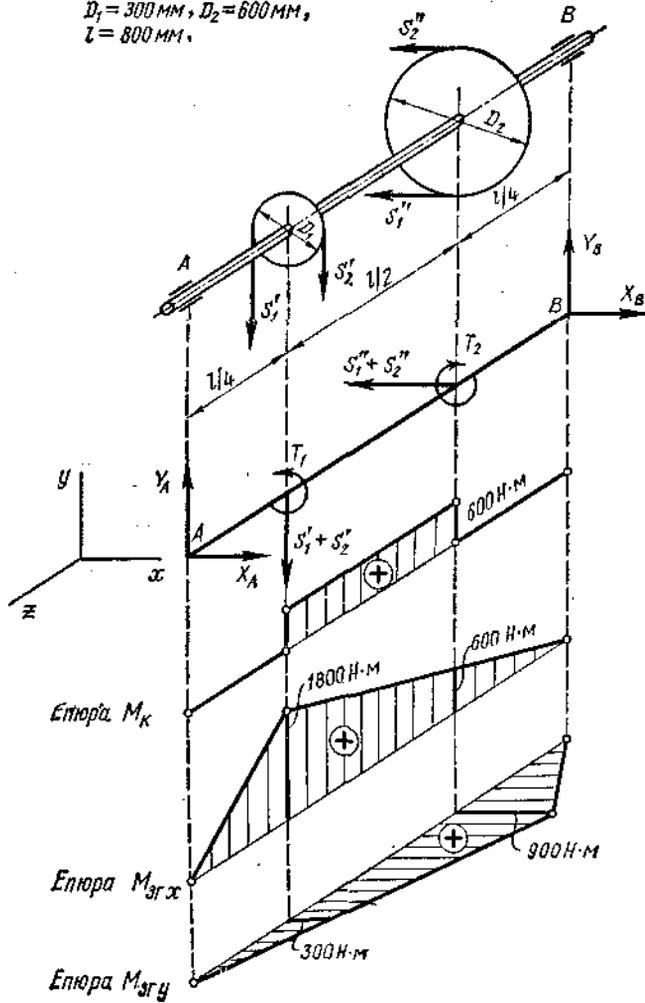


Рис. 24.7

§ 25.1. Відомості про втомленість матеріалів

У попередніх розділах розглядалися розрахунки на міцність при статичному навантаженні елементів конструкцій. Проте багато деталей машин працює у таких умовах, коли напруги, які виникають у них, періодично змінюються за величиною або за величиною і знаком. Опір конструкцій дії навантажень істотно відрізняється від їх опору дії статичного навантаження.

До деталей, які зазнають змінних навантажень, належать, наприклад, обертові осі, вали, штоки поршневих машин тощо. Шток парової машини зазнає змінних навантажень, причому знак напруг у штоці змінюється залежно від напрямку руху поршня (розтяг — стиск); під час обертання осі вагона одні і ті самі волокна бувають то в зоні розтягу, то — стиску.

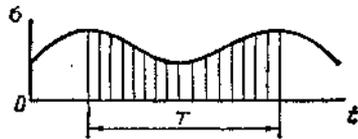


Рис. 25.1

Досліди і аналіз поломок різних деталей машин показує, що матеріали (у тому числі метали), які тривалий час зазнавали дії змінних навантажень, можуть руйнуватися при *н и ж ч и х н а п р у г а х*, ніж границя міцності і навіть границя текучості.

Руйнування при цьому відбувається тому, що після певного числа змін навантаження у розглядуваній деталі виникає *мікротріщина*, яка поступово збільшується, і врешті-решт деталь зруйнується, не виявивши при цьому помітних залишкових деформацій навіть тоді, коли матеріалу деталі властива висока пластичність.

Руйнування матеріалу, спричинене багаторазовою дією змінних напруг, називають *в т о м л е н і с т ю*.

Причини руйнування матеріалу від втомленості поки ще недостатньо вивчені. Мабуть, виникнення мікротріщин здебільшого є результатом неоднорідності будови матеріалів, наявності слідів механічної обробки і пошкоджень поверхні деталі (волосовини, раковини, газові і шлакові включення, подряпини, сліди різця або шліфувального каменя тощо), а також результатом концентрації напруг, про що йтиметься у наступному параграфі.

Здатність матеріалів протистояти втомленості називають *о п о р о м в т о м л е н о с т і*. Вивчення в опорі матеріалів питань втомленості має дуже велике значення, оскільки такі важливі деталі, як колінчасті вали, гребні гвинти, поршневі пальці, клапанні пружини, шатуни двигунів, осі залізничних вагонів і багато інших, виходять з ладу переважно внаслідок руйнувань від втомленості.

Введемо основні потрібні далі означення.

Час однієї зміни напруг називають *п е р і о д о м*. Циклом напруг називають сукупність усіх значень напруг σ (або τ) за час одного періоду T (рис. 25.1).

Змінні напруги можуть мати усталений (стаціонарний) або неусталений (нестационарний) режим. За усталеним режимом кожний новий цикл

є точним повторенням попереднього. За неусталеним режимом характер напруг і їх максимальні значення змінюються від циклу до циклу.

Розглянемо методи розрахунку деталей при змінних напругах з усталеним режимом.

Цикл змінних напруг (рис. 25.2, а) характеризують такими параметрами:

- 1) максимальною напругою σ_{\max} ;
- 2) мінімальною напругою σ_{\min} ;
- 3) середньою напругою $\sigma_m = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2}$;
- 4) амплітудою циклу $\sigma_a = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2}$;
- 5) коефіцієнтом асиметрії циклу $R_\sigma = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}}$.

Зазначимо, що цикли, які мають однаковий коефіцієнт асиметрії, називають подібними.

З наведених формул і рис. 25.2, а випливає, що

$$\sigma_{\max} = \sigma_m + \sigma_a, \quad \sigma_{\min} = \sigma_m - \sigma_a.$$

Коли σ_{\max} і σ_{\min} однакові за абсолютною величиною, тобто коли $\sigma_{\max} = \sigma$ і $\sigma_{\min} = -\sigma$, то маємо симетричний цикл напруг (рис. 25.2, б). При цьому $\sigma_m = 0$, $\sigma_a = \sigma$, $R_\sigma = -1$.

Цикл напруг, який зображено на рис. 25.2, а, є прикладом асиметричного циклу.

На рис. 25.2, в показано віднульовий цикл зміни напруг.

Усі наведені в цьому параграфі означення і співвідношення дійсні й для змінних дотичних напруг, треба тільки в позначеннях і формулах замінити σ на τ . Максимальне значення періодично змінної напруги, при якому матеріал може необмежено довго чинити опір руйнуванню, називають границею витривалості.

Границю витривалості для змінних нормальних напруг при симетричному циклі позначають σ_{-1} , при віднульовому циклі — σ_0 , при циклі з коефіцієнтом асиметрії $R_\sigma = \sigma_R$.

Для визначення границі витривалості зразки випробовують на спеціальних машинах. Найбільшого поширення набули випробування на згин при симетричному циклі навантаження.

Для випробування на витривалість виготовляють серію однакових ретельно відполірованих зразків (як правило, не менше 10), які мають в робочій частині точно циліндричну форму; діаметр зразків 5—10 мм.

Випробування роблять у такій послідовності. Перший зразок навантажують до значної напруги σ_1 , щоб він зруйнувався при порівняно невеликому числі циклів N_1 . Другий зразок випробують при меншій напрузі σ_2 ; руйнування станеться при більшому числі циклів N_2 . Потім випробують решту зразків, поступово зменшуючи напругу; вони руйнуються при більшому числі циклів. За результатами проб будують криву втомленості — криву Вюлера (рис. 25.3), яку названо так за ім'ям німецького інженера А. Вюлера (1819—1914) — засновника систематичних досліджень стійкості металів проти втомленості. На кривій втомленості є ділянка BC , яка наближається до горизонтальної асимптоти. Це означає, що при певній напрузі σ_R зразок, не руйнуючись, може витримати нескінченно велику кількість циклів. Ордината цієї асимптоти і дає значення границі витривалості.

Практика показує, що сталевий зразок, який витримав $N_0 = 10^7$ циклів (це число називають базою випробувань), може витримати і необмежене число циклів. Експериментально встановлено, що при будь-якому асиметричному циклі (наприклад, віднульовому) границя витривалості для того самого матеріалу буде вища, ніж при симетричному циклі. Це означає, що симетричний цикл найбільш небезпечний.

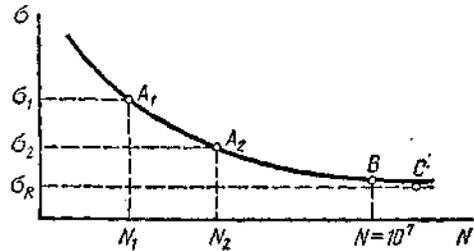


Рис. 25.3

Для кольорових металів границю витривалості визначають, як правило, при базі випробувань $N_0 = 10^7$ або 10^8 .

Границя витривалості значною мірою залежить від виду деформації. Випробування на витривалість проти розтягу — стиску і кручення проводять рідше, оскільки вони вимагають складнішого обладнання, ніж у випадку згину. Тому границі витривалості проти розтягу σ_{-1p} і кручення τ_{-1} визначають з емпіричних формул за відомою границею витривалості σ_{-1} при симетричному циклі згину:

$$\sigma_{-1p} \approx (0,7 \div 0,9) \sigma_{-1}; \quad \tau_{-1} \approx 0,58 \sigma_{-1}.$$

Тестер для багатьох матеріалів границі витривалості визначені і наводяться у довідниках.

Коли немає дослідних даних, границі витривалості для симетричного циклу згину можна обчислити за допомогою характеристик статичної міцності (наприклад, тимчасового опору σ_{Tm}) за такими наближеними емпіричними співвідношеннями:

для вуглецевої сталі

$$\sigma_{-1} \approx 0,43 \sigma_T;$$

для легованої сталі

$$\sigma_{-1} \approx 0,35 \sigma_T + 120 \text{ МПа};$$

для сірого чавуну

$$\sigma_{-1} \approx 0,45 \sigma_T.$$

§ 25.2. Концентрація напруг

Теоретичними і експериментальними дослідженнями встановлено, що напруги розподілені рівномірно по площі поперечного перерізу розтягнутого або стиснутого бруса тільки тоді, коли поперечні перерізи або сталі вздовж бруса, або змінюються дуже повільно. Їх обчислюють за формулою $\sigma = N/F$.

Різкі зміни форми або площі поперечного перерізу деталей (нааявність отворів, виточок, викружок, галтелей, канавок, надрізів тощо) призводять до нерівномірного розподілу напруг, спричиняють *концентрацію напруг*. Причину, яка зумовлює концентрацію напруг (отвір, виточка), називають *концентратором напруг*.

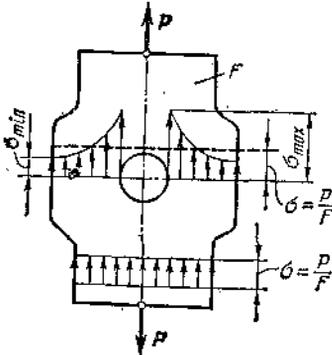


Рис. 25.4

Розглянемо сталю штабу, яку розтягує сила P (рис. 25.4). У поперечному перерізі F штаби діє поздовжня сила $N = P$.

Нормальна напруга, тобто обчислена з припущенням, що концентрації напруг немає, дорівнює

$$\sigma = P/F.$$

Для компенсації послаблення перерізу за рахунок отвору збільшимо ширину штаби, як показано на рис. 25.4, щоб площі поперечного перерізу, проведеного через вісь отвору, дорівнювала F . На цьому самому рисунку подано графік розподілу біля отвору.

Концентрація напруг має місцевий характер, оскільки з віддаленням від концентратора як вздовж деталі, так і поперек напруги дуже швидко спадають, наближаючись до своїх номінальних значень.

Явище концентрації напруг легко зрозуміти за допомогою так званої гідродинамічної аналогії. Теоретичними і експериментальними дослідженнями доведено подібність між розподілом напруг у деталях і швидкостями і напрямками окремих струменів потоку води, що тече по трубі, яка має форму досліджуваної деталі. У прямій трубі із сталим поперечним перерізом швидкість потоку в усіх перерізах і в усіх точках кожного перерізу однакова; сталою залишається і напруга в усіх точках перерізу прямого бруса сталого діаметра.

Будь-яка зміна розмірів поперечного перерізу (отвір, гальтель тощо) впливає на потік. Коли трубу звужувати, то швидкість потоку збільшуватиметься, а коли розширювати — зменшуватиметься. Аналогічно напруги в перерізах прямого бруса збільшуються або зменшуються від зміни розмірів і форми перерізу.

Кількісно концентрацію напруг характеризує теоретичний коефіцієнт концентрації напруг K_{τ} , який дорівнює відношенню найбільшої місцевої напруги біля концентратора напруг σ_{\max} до номінальної напруги σ :

$$K_{\sigma} = \sigma_{\max}/\sigma.$$

У випадку концентрації дотичних напруг за аналогією приймають

$$K_{\tau} = \tau_{\max}/\tau.$$

Концентрація напруг істотно залежить від виду і розмірів концентратора. Докладні відомості про теоретичні коефіцієнти концентрації напруг наведено в довідниках про розрахунки на міцність.

Концентрація напруг по-різному впливає на міцність пластичних і крихких матеріалів. Велике значення при цьому має і характер навантаження. Якщо взяти пластичний матеріал, навантажений статично, то із збільшенням навантаження зростання найбільших місцевих напруг припиняється при досягненні границі текучості внаслідок місцевої текучості матеріалу, а в решті поперечного перерізу напруги зростатимуть. Отже, пластичність матеріалу сприяє вирівнюванню напруг. Коли напруги досягнуть границі текучості по всьому перерізу, то їх розподіл можна вважати рівномірним. Звідси можна зробити висновок про те, що при статичному навантаженні пластичні матеріали малочутливі до концентрації напруг. Вплив концентрації напруг не враховують у випадку статичного навантаження при розрахунках на міцність заклепочних і різьбових з'єднань та інших подібних деталей, виготовлених з пластичних матеріалів.

При навантаженнях, які швидко змінюються з часом, напруги не встигають вирівнюватись, тому концентрацію напруг треба враховувати.

У розрахунках на міцність деталей з крихких матеріалів концентрацію напруг треба враховувати і при статичному навантаженні, оскільки нерівномірність розподілу напруг внаслідок їх концентрації зберігається на всіх стадіях навантаження (пригадаємо відсутність ділянки текучості в діаграмах розтягу крихких матеріалів).

Теоретичний коефіцієнт концентрації K_T відбиває вплив концентратора напруг в умовах, далеких від руйнування деталі.

Міцність при змінних навантаженнях характеризують границею витривалості, тому дійсну оцінку впливу концентратора можна дістати, порівнюючи границі витривалості, визначені з дослідів над гладенькими зразками (σ_{-1}) і над зразками з досліджуванним концентратом (σ_{-1K}) при симетричному циклі.

Відношення цих величин називають ефективним (тобто дійсним) коефіцієнтом концентрації напруг k :

$$k_{\sigma} = \sigma_1 / \sigma_{-1K} \quad \text{і} \quad k_{\tau} = \tau_{-1} / \tau_{-1K}.$$

Порівняння показує, що ефективний коефіцієнт концентрації завжди менший від теоретичного. Для сталевих валів при $\sigma_1 \leq 800$ МПа приймають $k_{\sigma} \approx 1,4 \div 2,5$.

З дослідів встановлено, що границя витривалості залежить від абсолютних розмірів поперечного перерізу зразка: із збільшенням розмірів перерізу границя витривалості зменшується. Ця закономірність дістала назву м а с ш т а б н о г о ф а к т о р а; вона пояснюється тим, що із збільшенням об'єму матеріалу збільшується імовірність неоднорідності його структури (шлакові і газові включення тощо), а це призводить до виникнення осередків концентрації напруг.

Вплив абсолютних розмірів деталі враховують введенням у розрахункові формули коефіцієнта ϵ_{σ} (або ϵ_{τ}), який дорівнює відношенню границі витривалості σ_{-1d} зразка заданого діаметра d до границі витривалості σ_{-1} геометрично подібного лабораторного зразка (здебільшого беруть зразок, діаметр якого 7 мм):

$$\epsilon_{\sigma} = \sigma_{-1d} / \sigma_{-1} \quad \text{або} \quad \epsilon_{\tau} = \tau_{-1d} / \tau_{-1}.$$

Для сталі приймають $\epsilon_\sigma = \epsilon_\tau = \epsilon$, де звичайно $\epsilon = 0,64 \div 1,0$.

На границю витривалості впливають шорсткість і стан поверхні деталі; із збільшенням шорсткості поверхні границя витривалості знижується. Це пояснюється тим, що після виготовлення деталі на її поверхні є риски, подряпини тощо, біля яких спостерігається концентрація напруг.

Відношення граници витривалості σ_{-1r} зразка із заданим станом поверхні до граници витривалості σ_{-1} зразка з полірованою поверхнею називають коефіцієнтом якості поверхні і позначають β :

$$\beta = \sigma_{-1r} / \sigma_{-1}.$$

Звичайно $\beta = 0,25 \div 1,0$. Коли ж застосувати спеціальні методи поверхневого зміцнення деталей (загартування струмами високої частоти, цементація, азотування, обкочування поверхонь деталі роликками, обробка деталей сталним або чавунним дробом), то β може бути і більшим від одиниці.

Значення коефіцієнтів K_T , k , ϵ і β знаходять за таблицями, які є у довідниках для розрахунків на міцність.

Питання, пов'язані з концентрацією напруг, докладно розглянуто в працях видатного радянського вченого Г. М. Савіна.

§ 25.3. Розрахунки на міцність при змінних напругах і концентрації напруг

Розрахунки на міцність при змінних напругах у більшості випадків *п е р е в і р н і*. У результаті дістають фактичні коефіцієнти запасу міцності n , які порівнюють з потрібними (допустимими) для даної конструкції коефіцієнтами запасу міцності $[n]$; при цьому має бути дійсною умова

$$n \geq [n].$$

Звичайно для сталних деталей $[n] = 1,3 \div 3$ і більше залежно від виду і призначення деталі.

При *симетричному* циклі зміни напруг коефіцієнт запасу міцності визначають за формулами:

для розтягу (стиску)

$$n_\sigma = \frac{\sigma_{-1r} \epsilon_\sigma \beta}{k_\sigma \sigma},$$

для кручення

$$n_\tau = \frac{\tau_{-1r} \epsilon_\tau \beta}{k_\tau \tau},$$

для згину

$$n_\sigma = \frac{\sigma_{-1r} \epsilon_\sigma \beta}{k_\sigma \sigma},$$

де σ і τ — номінальні значення максимальних нормальних і дотичних напруг; k_σ , k_τ — ефективні коефіцієнти концентрації напруг; ϵ_σ , ϵ_τ — коефіцієнти, які враховують вплив абсолютних розмірів деталі; β — коефіцієнт якості поверхні.

Для деталей, які працюють в умовах *асиметричного* циклу, коефіцієнти запасу міцності n_σ і n_τ визначають за формулами Серенсена — Кіна-

никають, наприклад, під час невеликого додаткового поперечного навантаження, відповідають малі прогини. При критичному значенні стискаючої сили $P_{кр}$ прямолінійна форма стає нестійкою і після малих збурень стержень набирає нової (стійкої) форми рівноваги, якій відповідає зігнута вісь.

Критичною силою називається найбільше значення стискаючої сили, прикладеної центрально, до якої прямолінійна форма рівноваги стержня є стійкою. Згин, пов'язаний з втратою стійкості стержня прямолінійної форми, називається **поздовжнім згином**.

Розглянемо тонкий сталевий стержень, довжина якого значно більша за поперечні розміри, що стискається силою P , трохи більшою за $P_{кр}$ (рис. 26.1). Застосовуючи метод перерізів, упевнюємось, що внаслідок викривлення осі в поперечних перерізах стержня виникають два внутрішні силові фактори — поздовжня сила $N = P$ і згинаючий момент $M_{зг}$. Отже, викривлений стержень зазнає одночасно деформацій центрального стиску і поперечного згину.

Якщо стискаючі сили хоч трохи перевищують критичне значення, то додаткові напруги згину досягають досить значних величин і безпосередньо загрожують міцності конструкції. Тому критичний стан, який безпосередньо передувє руйнуванню, недопустимий у реальних умовах експлуатації. У зв'язку з цим визначення критичних навантажень є відповідальною частиною розрахунку конструкції і має можливість уникнути втрати стійкості введенням відповідного коефіцієнта запаса стійкості.

Щоб забезпечити стабільність, необхідно, щоб стискаюча сила P , яка діє на стержень, була менша за критичну $P_{кр}$.

Позначимо допустиму стискаючу силу $[P]$, тоді

$$[P] = P_{кр} / [n_{ст}],$$

де $n_{ст}$ — допустимий коефіцієнт запаса стійкості.

Очевидно, що стійкість стержня достатня, якщо $[n_{ст}] > 1$. Значення коефіцієнта запаса стійкості залежить від призначення стержня і його матеріалу. Звичайно для сталей $[n_{ст}] = 1,8 \div 3$; для чавунів $[n_{ст}] = 4 \div 5,5$; для дерева $[n_{ст}] = 2,8 \div 3,2$.

§ 26.2. Формула Ейлера

Для розрахунків стиснених стержнів на стійкість треба знати способи визначення критичної сили $P_{кр}$.

Вперше стійкість стиснених стержнів дослідив академік Петербурзької Академії наук, швейцарець за національністю, Леонард Ейлер (1707—1783). Л. Ейлер, який прожив у Росії близько 30 років, залишив незгладимий слід у механіці і математиці. Радянський академік С. І. Вавилов писав: «Разом з Петром І і Ломоносовим Ейлер став видатним гением нашої Академії, який визначив її славу, її міцність, її продуктивність». Пізніше значну роботу в галузі теоретичного і експериментального дослідження питань стійкості виконав російський учений, професор Петербурзького інституту інженерів

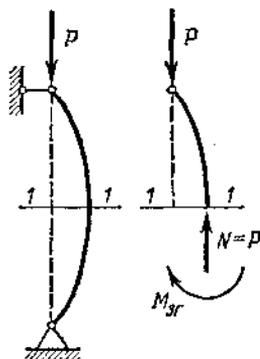


Рис. 26.1

РОЗРАХУНОК ВАЛА НА ЗГИН І КРУЧЕННЯ

Дано: $S_1' = 8 \text{ кН}$, $S_1'' = 4 \text{ кН}$,
 $S_2 = 2S_2$,
 $D_1 = 300 \text{ мм}$, $D_2 = 600 \text{ мм}$,
 $l = 800 \text{ мм}$.

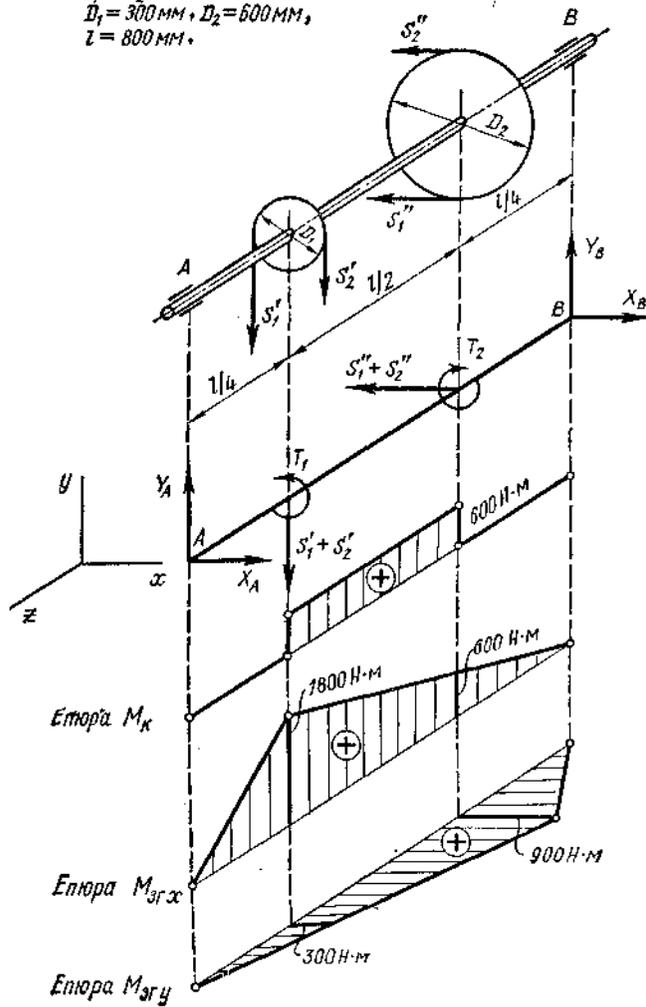


Рис. 24.7

§ 25.1. Відомості про втомленість матеріалів

У попередніх розділах розглядалися розрахунки на міцність при статичному навантаженні елементів конструкцій. Проте багато деталей машин працює у таких умовах, коли напруги, які виникають у них, періодично змінюються за величиною або за величиною і знаком. Опір конструкцій дії навантажень істотно відрізняється від їх опору дії статичного навантаження.

До деталей, які зазнають змінних навантажень, належать, наприклад, обертові осі, вали, штоки поршневих машин тощо. Шток парової машини зазнає змінних навантажень, причому знак напруг у штоці змінюється залежно від напрямку руху поршня (розтяг — стиск); під час обертання осі вагона одні і ті самі волокна бувають то в зоні розтягу, то — стиску.

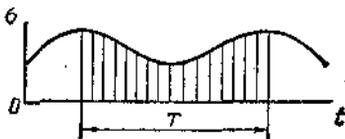


Рис. 25.1

Досліди і аналіз поломок різних деталей машин показує, що матеріали (у тому числі метали), які тривалий час зазнавали дії змінних навантажень, можуть руйнуватися при n і $ж$ ч и х н а п р у г а х, ніж границя міцності і навіть границя текучості.

Руйнування при цьому відбувається тому, що після певного числа змін навантаження у розглядуваній деталі виникає *мікротріщина*, яка поступово збільшується, і врешті-решт деталь зруйнується, не виявивши при цьому помітних залишкових деформацій навіть тоді, коли матеріалу деталі властива висока пластичність.

Руйнування матеріалу, спричинене багаторазовою дією змінних напруг, називають *втомленістю*.

Причини руйнування матеріалу від втомленості поки ще недостатньо вивчені. Мабуть, виникнення мікротріщин здебільшого є результатом неоднорідності будови матеріалів, наявності слідів механічної обробки і пошкоджень поверхні деталі (волосовини, раковини, газові і шлакові включення, подряпини, сліди різця або шліфувального каменя тощо), а також результатом концентрації напруг, про що йтиметься у наступному параграфі.

Здатність матеріалів протистояти втомленості називають *опором втомленості*. Вивчення в опорі матеріалів питань втомленості має дуже велике значення, оскільки такі важливі деталі, як колінчасті вали, гребні гвинти, поршневі пальці, клапанні пружини, шатуни двигунів, осі залізничних вагонів і багато інших, виходять з ладу переважно внаслідок руйнувань від втомленості.

Введемо основні потрібні далі означення.

Час однієї зміни напруг називають *періодом*. Циклом напруг називають сукупність усіх значень напруг σ (або τ) за час одного періоду T (рис. 25.1).

Змінні напруги можуть мати *усталений* (стаціонарний) або *неусталений* (нестационарний) режим. За усталеним режимом кожний новий цикл

гочним повторенням попереднього. За неусталеним режимом характер напруг і їх максимальні значення змінюються від циклу до циклу.

Розглянемо методи розрахунку деталей при змінних напругах з усталеним режимом.

Цикл змінних напруг (рис. 25.2, а) характеризують такими параметрами:

- 1) максимальною напругою σ_{\max} ;
- 2) мінімальною напругою σ_{\min} ;
- 3) середньою напругою $\sigma_m = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2}$;
- 4) амплітудою циклу $\sigma_a = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2}$;
- 5) коефіцієнтом асиметрії циклу $R_\sigma = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}}$.

Зазначимо, що цикли, які мають однаковий коефіцієнт асиметрії, називають подібними.

З наведених формул і рис. 25.2, а випливає, що

$$\sigma_{\max} = \sigma_m + \sigma_a, \quad \sigma_{\min} = \sigma_m - \sigma_a.$$

Коли σ_{\max} і σ_{\min} однакові за абсолютною величиною, тобто коли $\sigma_{\max} = \sigma$ і $\sigma_{\min} = -\sigma$, то маємо симетричний цикл напруг (рис. 25.2, б). При цьому $\sigma_m = 0$, $\sigma_a = \sigma$, $R_\sigma = -1$.

Цикл напруг, який зображено на рис. 25.2, а, є прикладом асиметричного циклу.

На рис. 25.2, в показано віднульовий цикл зміни напруг.

Усі наведені в цьому параграфі означення і співвідношення дійсні й для змінних дотичних напруг, треба тільки в позначеннях і формулах замінити σ на τ . Максимальне значення періодично змінної напруги, при якому матеріал може необмежено довго чинити опір руйнуванню, називають границею витривалості.

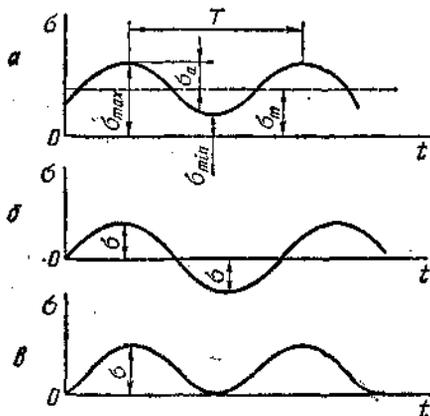


Рис. 25.2

Границю витривалості для змінних нормальних напруг при симетричному циклі позначають σ_{-1} , при віднульовому циклі — σ_0 , при циклі з коефіцієнтом асиметрії R_σ — σ_{R_σ} .

Для визначення границі витривалості зразки випробовують на спеціальних машинах. Найбільшого поширення набули випробування на згин при симетричному циклі навантаження.

Для випробування на витривалість виготовляють серію однакових ретельно відполірованих зразків (як правило, не менше 10), які мають в робочій частині точно циліндричну форму; діаметр зразків 5—10 мм.

Випробування роблять у такій послідовності. Перший зразок навантажують до значної напруги σ_1 , щоб він зруйнувався при порівняно невеликому числі циклів N_1 . Другий зразок випробують при меншій напрузі σ_2 ; руйнування станеться при більшому числі циклів N_2 . Потім випробовують решту зразків, поступово зменшуючи напругу; вони руйнуються при більшому числі циклів. За результатами проб будують криву втомленості — криву Вьолера (рис. 25.3), яку названо так за ім'ям німецького інженера А. Вьолера (1819—1914) — засновника систематичних досліджень стійкості металів проти втомленості. На кривій втомленості є ділянка ВС, яка наближається до горизонтальної асимптоти. Це означає, що при певній напрузі σ_R зразок, не руйнуючись, може витримати нескінченно велику кількість циклів. Ордината цієї асимптоти і дає значення границі витривалості.

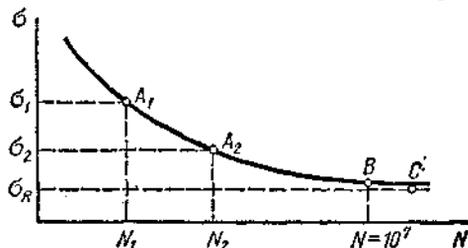


Рис. 25.3

Практика показує, що сталевий зразок, який витримав $N_0 = 10^7$ циклів (це число називають базою випробувань), може витримати і необмежене число циклів. Експериментально встановлено, що при будь-якому асиметричному циклі (наприклад, віднульовому) границя витривалості для того самого матеріалу буде вища, ніж при симетричному циклі. Це означає, що симетричний цикл найбільш небезпечний.

Для кольорових металів границю витривалості визначають, як правило, при базі випробувань $N_0 = 10^7$ або 10^8 .

Границя витривалості значною мірою залежить від виду деформації. Випробування на витривалість проти розтягу — стиску і кручення проводять рідше, оскільки вони вимагають складнішого обладнання, ніж у випадку згину. Тому границі витривалості проти розтягу σ_{-1p} і кручення τ_{-1} визначають з емпіричних формул за відомою границею витривалості σ_{-1} , при симетричному циклі згину:

$$\sigma_{-1p} \approx (0,7 \div 0,9) \sigma_{-1}; \quad \tau_{-1} \approx 0,58 \sigma_{-1}.$$

Тепер для багатьох матеріалів границі витривалості визначені і наводяться у довідниках.

Коли немає дослідних даних, границі витривалості для симетричного циклу згину можна обчислити за допомогою характеристик статичної міцності (наприклад, тимчасового опору $\sigma_{ТМ}$) за такими наближеними емпіричними співвідношеннями:

для вуглецевої сталі

$$\sigma_{-1} \approx 0,43 \sigma_T;$$

для легованої сталі

$$\sigma_{-1} \approx 0,35 \sigma_T + 120 \text{ МПа};$$

для сірого чавуну

$$\sigma_{-1} \approx 0,45 \sigma_T.$$

§ 25.2. Концентрація напруг

Теоретичними і експериментальними дослідженнями встановлено, що напруги розподілені рівномірно по площі поперечного перерізу розтягнутого або стиснутого бруса тільки тоді, коли поперечні перерізи або сталі вздовж бруса, або змінюються дуже повільно. Їх обчислюють за формулою $\sigma = N/F$.

Різкі зміни форми або площі поперечного перерізу деталей (наявність отворів, виточок, викружок, галтелей, канавок, надрізів тощо) призводять до нерівномірного розподілу напруг, спричиняють *концентрацію напруг*. Причину, яка зумовлює концентрацію напруг (отвір, виточка), називають *концентратором напруг*.

Розглянемо сталюу штабу, яку розтягує сила P (рис. 25.4). У поперечному перерізі F штаби діє поздовжня сила $N = P$.

Нормальна напруга, тобто обчислена з припущенням, що концентрації напруг немає, дорівнює

$$\sigma = P/F.$$

Для компенсації послаблення перерізу за рахунок отвору збільшимо ширину штаби, як показано на рис. 25.4, щоб площі поперечного перерізу, проведеного через вісь отвору, дорівнювала F . На цьому самому рисунку подано графік розподілу біля отвору.

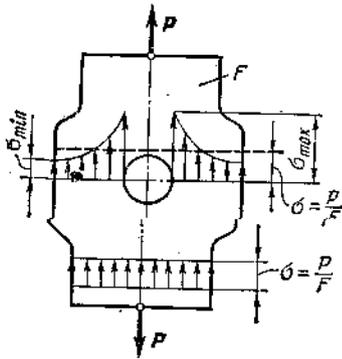


Рис. 25.4

Концентрація напруг має місцевий характер, оскільки з віддаленням від концентратора як вздовж деталі, так і поперек напруги дуже швидко спадають, наближаючись до своїх номінальних значень.

Явище концентрації напруг легко зрозуміти за допомогою так званої гідродинамічної аналогії. Теоретичними і експериментальними дослідженнями доведено подібність між розподілом напруг у деталях і швидкостями і напрямками окремих струменів потоку води, що тече по трубі, яка має форму досліджуваної деталі. У прямій трубі із сталим поперечним перерізом швидкість потоку в усіх перерізах і в усіх точках кожного перерізу однакова; сталою залишається і напруга в усіх точках перерізу прямого бруса сталого діаметра.

Будь-яка зміна розмірів поперечного перерізу (отвір, галтель тощо) впливає на потік. Коли трубу звужувати, то швидкість потоку збільшуватиметься, а коли розширювати — зменшуватиметься. Аналогічно напруги в перерізах прямого бруса збільшуються або зменшуються від зміни розмірів і форми перерізу.

Кількісно концентрацію напруг характеризує теоретичний коефіцієнт концентрації напруг K_{σ} , який дорівнює відношенню найбільшої місцевої напруги біля концентратора напруг σ_{max} до номінальної напруги σ :

$$K_{\sigma} = \sigma_{max}/\sigma.$$

У випадку концентрації дотичних напруг за аналогією приймають

$$K_{\tau} = \tau_{max}/\tau.$$

Концентрація напруг істотно залежить від виду і розмірів концентратора. Докладні відомості про теоретичні коефіцієнти концентрації напруг наведено в довідниках про розрахунки на міцність.

Концентрація напруг по-різному впливає на міцність пластичних і крихких матеріалів. Велике значення при цьому має і характер навантаження. Якщо взяти пластичний матеріал, навантажений статично, то із збільшенням навантаження зростання найбільших місцевих напруг припиняється при досягненні границі текучості внаслідок місцевої текучості матеріалу, а в решті поперечного перерізу напруги зростатимуть. Отже, пластичність матеріалу сприяє вирівнюванню напруг. Коли напруги досягнуть границі текучості по всьому перерізу, то їх розподіл можна вважати рівномірним. Звідси можна зробити висновок про те, що при статичному навантаженні пластичні матеріали малочутливі до концентрації напруг. Вплив концентрації напруг не враховують у випадку статичного навантаження при розрахунках на міцність заклепочних і різьбових з'єднань та інших подібних деталей, виготовлених з пластичних матеріалів.

При навантаженнях, які швидко змінюються з часом, напруги не встигають вирівнюватись, тому концентрацію напруг треба враховувати.

У розрахунках на міцність деталей з крихких матеріалів концентрацію напруг треба враховувати і при статичному навантаженні, оскільки нерівномірність розподілу напруг внаслідок їх концентрації зберігається на всіх стадіях навантаження (пригадаємо відсутність ділянки текучості в діаграмах розтягу крихких матеріалів).

Теоретичний коефіцієнт концентрації K_T відбиває вплив концентратора напруг в умовах, далеких від руйнування деталі.

Міцність при змінних навантаженнях характеризують границею витривалості, тому дійсну оцінку впливу концентратора можна дістати, порівнюючи границі витривалості, визначені з дослідів над гладенькими зразками (σ_{-1}) і над зразками з досліджуванним концентратом (σ_{-1K}) при симетричному циклі.

Відношення цих величин називають ефективним (тобто дійсним) коефіцієнтом концентрації напруг k :

$$k_{\sigma} = \sigma_{-1} / \sigma_{-1K} \quad \text{і} \quad k_{\tau} = \tau_{-1} / \tau_{-1K}.$$

Порівняння показує, що ефективний коефіцієнт концентрації завжди менший від теоретичного. Для сталевих валів при $\sigma_T \leq 800$ МПа приймають $k_{\sigma} \approx 1,4 \div 2,5$.

З дослідів встановлено, що границя витривалості залежить від абсолютних розмірів поперечного перерізу зразка: із збільшенням розмірів перерізу границя витривалості зменшується. Ця закономірність дістала назву м а с ш т а б н о г о ф а к т о р а; вона пояснюється тим, що із збільшенням об'єму матеріалу збільшується імовірність неоднорідності його структури (шлакові і газові включення тощо), а це призводить до виникнення осередків концентрації напруг.

Вплив абсолютних розмірів деталі враховують введенням у розрахункові формули коефіцієнта ϵ_{σ} (або ϵ_{τ}), який дорівнює відношенню границі витривалості σ_{-1d} зразка заданого діаметра d до границі витривалості σ_{-1} геометрично подібного лабораторного зразка (здебільшого беруть зразок, діаметр якого 7 мм):

$$\epsilon_{\sigma} = \sigma_{-1d} / \sigma_{-1} \quad \text{або} \quad \epsilon_{\tau} = \tau_{-1d} / \tau_{-1}.$$

Для сталі приймають $\epsilon_\sigma = \epsilon_\tau = \epsilon$, де звичайно $\epsilon = 0,64 \div 1,0$.

На границю витривалості впливають шорсткість і стан поверхні деталі; із збільшенням шорсткості поверхні границя витривалості знижується. Це пояснюється тим, що після виготовлення деталі на її поверхні є риски, подряпини тощо, біля яких спостерігається концентрація напруг.

Відношення границі витривалості σ_{-1r} зразка із заданим станом поверхні до границі витривалості σ_{-1} зразка з полірованою поверхнею називають коефіцієнтом якості поверхні і позначають β

$$\beta = \sigma_{-1r} / \sigma_{-1}.$$

Звичайно $\beta = 0,25 \div 1,0$. Коли ж застосувати спеціальні методи поверхневого зміцнення деталей (загартування струмами високої частоти, цементація, азотування, обкочування поверхонь деталі роликками, обробка деталей сталним або чавунним дробом), то β може бути і більшим від одиниці.

Значення коефіцієнтів K_τ , k , ϵ і β знаходять за таблицями, які є у довідниках для розрахунків на міцність.

Питання, пов'язані з концентрацією напруг, докладно розглянуто в працях видатного радянського вченого Г. М. Савіна.

§ 25.3. Розрахунки на міцність при змінних напругах і концентрації напруг

Розрахунки на міцність при змінних напругах у більшості випадків *п е р е в і р н і*. У результаті дістають фактичні коефіцієнти запасу міцності n , які порівнюють з потрібними (допустимими) для даної конструкції коефіцієнтами запасу міцності $[n]$; при цьому має бути дійсною умова

$$n \geq [n].$$

Звичайно для сталних деталей $[n] = 1,3 \div 3$ і більше залежно від виду і призначення деталі.

При *симетричному* циклі зміни напруг коефіцієнт запасу міцності визначають за формулами:

для розтягу (стиску)

$$n_\sigma = \frac{\sigma_{-1r} \epsilon_\sigma \beta}{k_\sigma \sigma},$$

для кручення

$$n_\tau = \frac{\tau_{-1r} \epsilon_\tau \beta}{k_\tau \tau},$$

для згину

$$n_\sigma = \frac{\sigma_{-1r} \epsilon_\sigma \beta}{k_\sigma \sigma},$$

де σ і τ — номінальні значення максимальних нормальних і дотичних напруг; k_σ , k_τ — ефективні коефіцієнти концентрації напруг; ϵ_σ , ϵ_τ — коефіцієнти, які враховують вплив абсолютних розмірів деталі; β — коефіцієнт якості поверхні.

Для деталей, які працюють в умовах *асиметричного* циклу, коефіцієнти запасу міцності n_σ і n_τ визначають за формулами Серенсена — Кіна-

сошвілі (Р. С. Кінасошвілі, С. В. Серенсен — видатні радянські вчені):

$$n_{\sigma} = \sigma_{-1} / [(k_{\sigma} / \varepsilon_{\sigma} \beta) \sigma_a + \psi_{\sigma} \sigma_m], \quad n_{\tau} = \tau_{-1} / [(k_{\tau} / \varepsilon_{\tau} \beta) \tau_a + \psi_{\tau} \tau_m],$$

де ψ_{σ} і ψ_{τ} — коефіцієнти зведення асиметричного циклу до рівнонебезпечного симетричного; вони відбивають вплив асиметрії циклу на величину границі витривалості й обчислюються за формулами

$$\psi_{\sigma} = (2\sigma_{-1} - \sigma_0) / \sigma_0, \quad \psi_{\tau} = (2\tau_{-1} - \tau_0) / \tau_0,$$

де σ_0 і τ_0 — границі витривалості при віднульовому циклі зміни напруг; значення ψ_{σ} і ψ_{τ} є у довідниках.

У випадку поєднання основних деформацій (згину і кручення, кручення і розтягу або стиску), тобто для спрощеного плоского напруженого стану, загальний коефіцієнт запасу міцності n визначають з виразу

$$1/n^2 = 1/n_{\sigma}^2 + 1/n_{\tau}^2, \quad \text{звідки} \quad n = n_{\sigma} n_{\tau} \sqrt{n_{\sigma}^2 + n_{\tau}^2}.$$

Тут n_{σ} — коефіцієнт запасу міцності для нормальних напруг; n_{τ} — коефіцієнт запасу міцності для дотичних напруг. Формули для обчислення n_{σ} і n_{τ} наведено вище.

Крім коефіцієнта запасу міцності відносно границі витривалості, обчислюють коефіцієнт запасу міцності за опором пластичним деформаціям, тобто відносно границі текучості σ_T [або τ_T] $\approx (0,55 \div 0,60) \sigma_T$.

Коефіцієнти запасу міцності за опором пластичним деформаціям визначають за формулами

$$n_{\sigma T} = \sigma_T / \sigma_{\max} = \sigma_T / (\sigma_a + \sigma_m), \quad n_{\tau T} = \tau_T / \tau_{\max} = \tau_T / (\tau_a + \tau_m).$$

Загальний коефіцієнт запасу міцності за опором пластичним деформаціям n_T обчислюють за формулою

$$n_T = n_{\sigma T} n_{\tau T} \sqrt{n_{\sigma T}^2 + n_{\tau T}^2}.$$

Знайдені значення n і n_T порівнюють з допустимим значенням коефіцієнта запасу міцності $[n]$. Зазначимо, що із знайдених значень n і n_T у наступних розрахунках беруть до уваги менше значення.

§ 25.4. Задачі динаміки в опорі матеріалів

Розглянемо задачі динаміки, які розв'язують за допомогою опору матеріалів. До них належать розрахунки, пов'язані з силами інерції, розрахунки на ударні навантаження і на коливання конструкцій (останні вивчають у докладніших курсах).

У розрахунках, пов'язаних з силами інерції, використовують відомий з теоретичної механіки принцип д'Аламбера (метод кінестатики), за яким, прикладаючи до рухомої матеріальної точки або рухомого тіла крім активних і реактивних сил ще і сили інерції, розв'язують задачу динаміки методами статички. Пригадаємо, що сила інерції матеріальної точки дорівнює добутку маси точки на її прискорення і напрямлена протилежно прискоренню.

Розглянемо два приклади розрахунків, пов'язаних з силами інерції.

Приклад 25.1. Визначити потрібну площу поперечного перерізу троса, який піднімає вантаж $G = 20$ кН (рис. 25.5, а) з прискоренням $a = 5$ м/с², якщо допустима напруга для троса $[\sigma] = 75$ МПа; масу троса не враховувати.

Розв'язання. Прикладавши до вантажу силу інерції $F^{in} = ma$, можемо за принципом д'Аламбера розглядати систему вантаж — трос як таку, що перебуває в рівновазі. Застосовуючи метод перерізів, уявно відкинемо верхню частину троса і замінимо її дію поздовжньою силою N , яка виникає у поперечному перерізі троса (рис. 25.5, б).

Складемо рівняння рівноваги для залишеної частини:

$$\Sigma Z = 0; \quad N - G - F^{in} = 0,$$

звідки

$$N = G + F^{in} = G + \frac{G}{g} a = G \left(1 + \frac{a}{g} \right).$$

Запишемо умову міцності для троса:

$$\sigma = N/F \leq [\sigma].$$

Обчислимо потрібну площу поперечного перерізу троса:

$$F \geq N/[\sigma] = G(1 + a/g)/[\sigma] = 20 \cdot 10^3 (1 + 5/9,81)/(75 \cdot 10^6) = 400 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2.$$

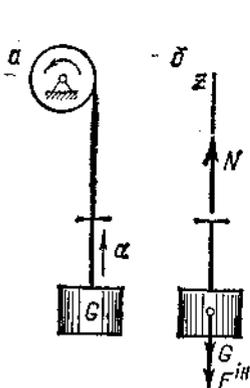


Рис. 25.5

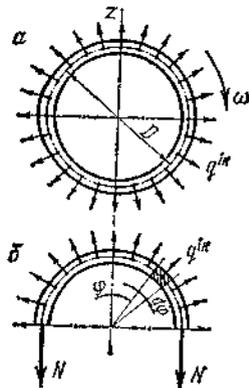


Рис. 25.6

Обчислимо діаметр троса за формулою $F = \pi d^2/4$, звідки

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{4F/\pi} = \\ &= \sqrt{4 \cdot 400 \cdot 10^{-6}/3,14} = \\ &= 23 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 23 \text{ мм}. \end{aligned}$$

Приклад 25.2. Визначити динамічні напруги в поперечному перерізі тонкостінного кільця, яке рівномірно обертається у своїй площині з кутовою швидкістю ω (рис. 25.6, а). Знайти найбільше допустиме значення колової швидкості v точок сталюого кільця, якщо його густина $\rho = 0,8 \cdot 10^4 \text{ кг/м}^3$, $[\sigma_p] = 160 \text{ МПа}$.

Розв'язання. Для рівномірного обертання нормальне прискорення будь-якої точки кільця $a_n = v^2/R = \omega^2 R = D/2$ — відстань точки кільця від осі обертання (D — середній діаметр кільця). Дотичне прискорення $a_t = 0$, бо $\omega = \text{const}$.

За принципом д'Аламбера прикладемо до кожного елемента кільця відцентрову силу інерції. Ці сили розподілені рівномірно по колу кільця і направлені по радіусу від центра. На одиницю довжини кола кільця припадає сила інерції

$$q^{in} = m_1 a_n,$$

де $m_1 = \rho F$ — маса одиниці дуги кільця; F — площа поперечного перерізу.

Підставляючи значення, дістаємо

$$q^{in} = \rho F \cdot v^2/(D/2).$$

Визначимо внутрішні сили, які виникають у поперечних перерізах кільця. Для цього розріжемо його по горизонтальному діаметру і розглянемо рівновагу залишеної частини (рис. 25.6, б).

Оскільки кільце тонке, то можна припустити, що нормальні напруги розподілені по його поперечному перерізу рівномірно, отже, кільце працює на розтяг.

Визначимо поздовжні сили N , які виникають у поперечних перерізах. Для цього спроекуємо всі сили, які діють на залишене півкільце, на вісь z . На елемент кільця, який відповідає елементарному центральному куту $d\phi$, припадає елементарна сила інерції dF_n^{in} , що дорівнює

$$dF_n^{in} = q^{in} (D/2) d\phi.$$

Проекція цієї сили на вісь z дорівнює $dF_n^{in} \cos \phi$. Оскільки елементарні сили інерції направлені по радіусу і нахилені до осі z під різними кутами, рівняння рівноваги треба складати в інтегральній формі (кут ϕ змінюється від $-\pi/2$ до $+\pi/2$):

$$\Sigma Z = 0; \quad \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \rho F v^2 \cos \phi d\phi - 2N = 0.$$

Звідси

$$2N = \rho F v^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \varphi d\varphi = \rho F v^2 \sin \varphi \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = 2\rho F v^2$$

або

$$N = \rho F v^2.$$

Обчислимо нормальну напругу в поперечному перерізі кільця:

$$\sigma = N/F = \rho F v^2 / F = \rho v^2.$$

Зазначимо, що напруги не залежать від площі поперечного перерізу кільця і пропорційні квадрату колісової швидкості.

Запишемо умову міцності:

$$\sigma = \rho v^2 \leq [\sigma_p],$$

звідси визначимо допустиму колову швидкість:

$$[v] = \sqrt{[\sigma_p] / \rho} = \sqrt{160 \cdot 10^6 / (0,8 \cdot 10^4)} = 140 \text{ м/с.}$$

Робота ряду машин (кування, забивання паль) пов'язана з ударними навантаженнями. Іноді ударні навантаження є наслідком конструктивних факторів (зазори в місцях з'єднання деталей тощо).

Наближений розрахунок на дію ударного навантаження роблять з такими припущеннями:

1. Під час удару виникають тільки пружні деформації, тобто після припинення дії ударного навантаження тіло повертає свої початкові форми і розміри.

2. Для ударного навантаження матеріалу розраховуваного елемента конструкції дійсний закон Гука.

3. Удар вважають абсолютно непружним, тобто ударний вантаж після удару не відскакує від пружної системи, а продовжує в процесі її деформації рухатися разом з нею.

4. Маса пружної системи, яка приймає удар, мала порівняно з масою ударного тіла, і тому масою пружної системи можна нехтувати.

5. Робота падаючого (ударного) тіла повністю переходить у потенціальну енергію деформації елемента конструкції, який сприймає дію удару.

З такими припущеннями розглянемо наближений метод визначення напруг і деформації бруса при осьовому ударі.

Вантаж G падає з висоти h на недеформований диск, укріплений на кінці стержня довжиною l (рис. 25.7). Робота, яку виконує вантаж G під час падіння, дорівнює потенціальній енергії U деформації стержня:

$$G(h + \Delta l_d) = \frac{\Delta l_d^2 EF}{2l} \quad \left(\text{бо } U = \frac{N^2 l}{2EF} = \frac{\Delta l_d^2 EF}{2l} \right),$$

див. § 19.5).

Тут E — модуль пружності стержня, Δl_d — його динамічне видовження, F — площа поперечного перерізу стержня.

Одержаний вираз перепишемо так:

$$\Delta l_d^2 - \frac{2Gl}{EF} \Delta l_d - \frac{2Ghl}{EF} = 0.$$

Статичне видовження стержня дорівнює

$$\Delta l_{ст} = Gl / (EF),$$

тоді квадратне рівняння набуває вигляду

$$\Delta l_d^2 - 2\Delta l_{ст} \Delta l_d - 2\Delta l_{ст} h = 0.$$

Розв'язуючи це рівняння, дістаємо

$$\Delta l_d = \Delta l_{ст} + \sqrt{\Delta l_{ст}^2 + 2\Delta l_{ст} h}$$

(другий корінь не беремо, бо він дає від'ємне значення для Δl_d).

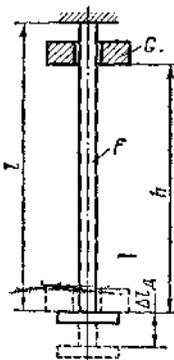


Рис. 25.7

Вираз для Δl перетворимо так:

$$\Delta l_d = \Delta l_{ст} (1 + \sqrt{1 + 2h/\Delta l_{ст}}).$$

Введемо позначення

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + 2h/\Delta l_{ст}},$$

де k_d — динамічний коефіцієнт. Тоді

$$\Delta l_d = k_d \Delta l_{ст}.$$

Звідси випливає висновок про те, що переміщення, яке виникає від дії ударного навантаження, дорівнює добутку динамічного коефіцієнта на переміщення від статично прикладеної сили, що дорівнює силі тяжіння падаючого вантажу.

Згідно з лінійною залежністю між силами і переміщеннями можна записати

$$\sigma_d = k_d \sigma_{ст},$$

де σ_d — динамічна напруга.

Отже, визначення переміщень і напруг при ударі зводиться до визначення переміщень і напруг, спричинених статично прикладеною силою, яка дорівнює силі тяжіння падаючого вантажу, і до обчислення динамічного коефіцієнта.

Зазначимо, що виведені формули дійсні як для випадку поздовжнього (осьового) удару по стержню, так і для випадку поперечного удару по балці.

Розглянемо випадок раптового застосування навантаження, що рівнозначно дії вантажу, який падає з висоти $h = 0$. Тоді з формули для визначення динамічного коефіцієнта випливає, що $k_d = 2$, $\Delta l_d = 2\Delta l_{ст}$ і $\sigma_d = 2\sigma_{ст}$, тобто переміщення і напруги внаслідок дії миттєво прикладеної сили в два рази більші, ніж при статичній дії тієї самої сили.

Якщо висота падіння вантажу h значно перевищує $\Delta l_{ст}$, то динамічний коефіцієнт можна обчислювати за наближеною формулою

$$k_d = \sqrt{2h/\Delta l_{ст}}.$$

З наведених формул видно, що динамічний коефіцієнт k_d зменшується, коли збільшується $\Delta l_{ст}$, тобто із зменшенням жорсткості пружної конструкції. Тому для пом'якшення ударів широко застосовують пружини і ресори, що мають значну податливість (малу жорсткість).

Розділ XXVI

СТІЙКІСТЬ СТИСНЕНИХ СТЕРЖНІВ

§ 26.1. Поздовжній згин

У розрахунках на міцність і жорсткість, наведених у попередніх розділах, припускалося, що під час деформації конструкції між зовнішнім навантаженням і внутрішніми силами пружності була стійка форма рівноваги, тобто така, при якій малим збурюючим діям відповідають малі відхилення статично навантаженої конструкції від початкової форми. Навантаження, при яких втрачається стійкість, називають критичними, а відповідні стани — критичними станами. Небезпека втрати стійкості особливо велика для легких, тонкостінних конструкцій типу гнучких стержнів, пластинок і оболонок. Явища втрати стійкості різноманітні. Найважливіші такі випадки прояву нестійкості: 1) виникнення якісно нових форм рівноваги; 2) зникнення стійких форм рівноваги.

Прикладом може бути центральний стиск прямого пружного стержня. При невеликих значеннях стискаючої сили прямолінійна форма — єдина і притому стійка форма рівноваги; малим збудженням цієї форми, які ви-

никають, наприклад, під час невеликого додаткового поперечного навантаження, відповідають малі прогини. При критичному значенні стискаючої сили $P_{кр}$ прямолінійна форма стає нестійкою і після малих збурень стержень набирає нової (стійкої) форми рівноваги, якій відповідає зігнута вісь.

Критичною силою називається найбільше значення стискаючої сили, прикладеної центрально, до якої прямолінійна форма рівноваги стержня є стійкою. Згин, пов'язаний з втратою стійкості стержня прямолінійної форми, називається позовжнім згином.

Розглянемо тонкий сталевий стержень, довжина якого значно більша за поперечні розміри, що стискається силою P , трохи більшою за $P_{кр}$ (рис. 26.1). Застосовуючи метод перерізів, упевнюємось, що внаслідок викривлення осі в поперечних перерізах стержня виникають два внутрішні силові фактори — позовжня сила $N = P$ і згинаючий момент $M_{зг}$. Отже, викривлений стержень зазнає одночасно деформацій центрального стиску і поперечного згину.]

Якщо стискаючі сили хоч трохи перевищують критичне значення, то додаткові напруги згину досягають досить значних величин і безпосередньо загрожують міцності конструкції. Тому критичний стан, який безпосередньо передуює руйнуванню, недопустимий у реальних умовах експлуатації. У зв'язку з цим визначення критичних навантажень є відповідальною частиною розрахунку конструкції і дає можливість уникнути втрати стійкості введенням відповідного коефіцієнта запасу стійкості.

Щоб забезпечити стійкість, необхідно, щоб стискаюча сила P , яка діє на стержень, була менша за критичну $P_{кр}$.

Позначимо допустиму стискаючу силу $[P]$, тоді

$$[P] = P_{кр}/[n_{ст}],$$

де $n_{ст}$ — допустимий коефіцієнт запасу стійкості.

Очевидно, що стійкість стержня достатня, якщо $[n_{ст}] > 1$. Значення коефіцієнта запасу стійкості залежить від призначення стержня і його матеріалу. Звичайно для сталей $[n_{ст}] = 1,8 \div 3$; для чавунів $[n_{ст}] = 5 \div 5,5$; для дерева $[n_{ст}] = 2,8 \div 3,2$.

§ 26.2. Формула Ейлера

Для розрахунків стиснених стержнів на стійкість треба знати способи визначення критичної сили $P_{кр}$.

Вперше стійкість стиснених стержнів дослідив академік Петербурзької Академії наук, швейцарець за національністю, Леонард Ейлер (1707—1783). Л. Ейлер, який прожив у Росії близько 30 років, залишив незгладимий слід у механіці і математиці. Радянський академік С. І. Вавилов писав: «Разом з Петром I і Ломоносовим Ейлер став видатним генієм нашої Академії, який визначив її славу, її міцність, її продуктивність». Пізніше значну роботу в галузі теоретичного і експериментального дослідження питань стійкості виконав російський учений, професор Петербурзького інституту інженерів

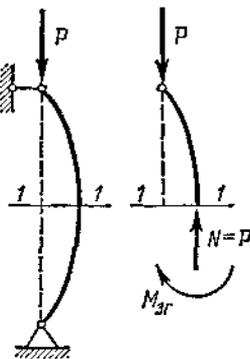


Рис. 26.1

шляхів сполучення Ф. С. Ясинський (1856—1899), який у 1893 р. опублікував велику працю «Досвід розвитку теорії поздовжнього згину».

Л. Ейлер вивів формулу для визначення величини критичної сили $P_{кр}$. Наведемо формулу Ейлера без виведення:

$$P_{кр} = \pi^2 EJ_{\min} / l_{зв}^2.$$

Тут E — модуль пружності першого роду; J_{\min} — найменший з осевих моментів інерції перерізу, оскільки стержень викривляється в площині найменшої жорсткості, в чому легко впевнитись, стискаючи поздовжньою силою слюсарну лінійку; $l_{зв}$ — зведена довжина стержня:

$$l_{зв} = \mu l,$$

де l — довжина стержня, а μ — коефіцієнт зведення довжини, який залежить від способу кріплення кінців стержня; його інакше називають коефіцієнтом кріплення.

На рис. 26.2 зображено способи кріплення кінців стержня, які найчастіше застосовують, і наведено значення μ : 1) обидва кінці стержня закріплені шарнірно і можуть зближуватися (а);

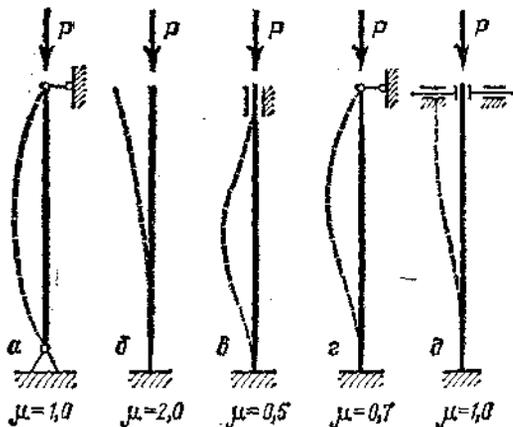


Рис. 26.2

2) нижній кінець жорстко закріплений, верхній вільний (б); 3) обидва кінці жорстко закріплені, але можуть зближуватися (в); 4) нижній кінець закріплений жорстко, верхній — шарнірно, кінці можуть зближуватися (г); 5) нижній кінець закріплений жорстко, верхній має «плаваюче» кріплення (д). Зазначимо, що чим менше μ , тим більша критична сила, а отже, і допустиме стискаюче навантаження. Наприклад, стискаюче навантаження стержня, жорстко закріпленого обома кінцями ($\mu = 0,5$), може бути в 16 раз більше від навантаження стержня, закріпленого одним кінцем ($\mu = 2$). Тому там, де це можливо, треба жорстко кріпити обидва кінці стержня.

Виведення формули Ейлера ґрунтується на законі Гука, який дійсний доти, поки напруга не перевищує границі пропорційності. Тому формулою Ейлера можна користуватися не завжди. Для визначення границь застосовності формули Ейлера знайдемо критичну напругу $\sigma_{кр}$, тобто напругу, яка виникає в поперечному перерізі F стержня під дією критичної сили:

$$\sigma_{кр} = P_{кр} / F = \pi^2 EJ_{\min} / [(\mu l)^2 F].$$

Введемо поняття найменшого радіуса інерції поперечного перерізу стержня i_{\min} :

$$i_{\min} = \sqrt{J_{\min} / F}.$$

Перепишемо формулу для $\sigma_{кр}$ так:

$$\sigma_{кр} = \pi^2 E / (\mu l / i_{\min})^2.$$

Вираз $\mu l / i_{\min}$ називають гнучкістю стержня. Це безрозмірна величина, яка характеризує вплив розмірів стержня і способу закріплення його кінців. Остаточоно

$$\sigma_{кр} = \pi^2 E / \lambda^2.$$

Формулою Ейлера можна користуватися тільки тоді, коли виконується умова

$$\sigma_{кр} = \pi^2 E / \lambda^2 \leq \sigma_{пц},$$

де $\sigma_{пц}$ — границя пропорційності матеріалу стержня. Отже,

$$\lambda \geq \sqrt{\pi^2 E / \sigma_{пц}}.$$

Величину, яка стоїть у правій частині нерівності, називають граничною гнучкістю і позначають $\lambda_{гр}$.

Гранична гнучкість залежить лише від фізико-механічних властивостей матеріалу стержня і стала для даного матеріалу.

За допомогою поняття граничної гнучкості умову застосовності формули Ейлера можна записати у вигляді

$$\lambda \geq \lambda_{гр},$$

тобто формула Ейлера застосовна тільки тоді, коли гнучкість стержня більша або дорівнює граничній гнучкості для матеріалу, з якого його виготовлено.

Обчислимо як приклад значення $\lambda_{гр}$ для маловуглецевої сталі Ст3. Для сталі Ст3 $\sigma_{пц} = 200$ МПа, а $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, тоді

$$\lambda_{гр} = \sqrt{3,14^2 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 / (200 \cdot 10^6)} = 100.$$

Для стержнів з маловуглецевої сталі формула Ейлера застосовна, якщо їх гнучкість $\lambda \geq 100$. Аналогічно можна обчислити значення граничної гнучкості для інших матеріалів. Зокрема, для чавуну $\lambda_{гр} = 80$; для дерева (сосна) $\lambda_{гр} = 110$.

Якщо гнучкість стержнів менша від наведених величин, то формула Ейлера вже не застосовна і в розрахунках користуються формулою Ясинського

$$\sigma_{кр} = a - b\lambda,$$

де a і b — коефіцієнти, які залежать від матеріалу; їх беруть з довідкових таблиць. Зокрема, для сталі Ст3 при гнучкостях від $\lambda = 40 \div 100$ можна брати $a = 310$ МПа, $b = 1,14$ МПа. Якщо гнучкість $\lambda < 40$, стержні можна розраховувати на міцність при простому стисканні, не враховуючи небезпеки поздовжнього згину, тобто за формулою $\sigma = P/F$.

Отже, при малих значеннях λ ($\lambda < 40$) стержні з маловуглецевої сталі розраховують на просте стискання; при середніх значеннях ($40 \leq \lambda <$

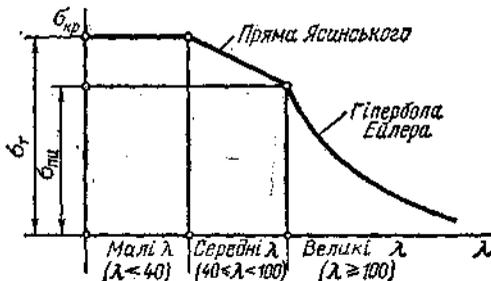


Рис. 26.3

< 100) розраховують за формулою Ясинського, а при великих ($\lambda \geq 100$) — за формулою Ейлера. Графік залежності критичної напруги від гнучкості для стержнів з маловуглецевої сталі зображено на рис. 26.3. Зазначимо, що

- 1) при малих значеннях λ критична напруга $\sigma_{кр}$ дорівнює границі текучості σ_T ;
- 2) при середніх значеннях λ критична напруга менша від границі текучості σ_T , але більша, ніж границя пропорційності ($\sigma_{пл} < \sigma_{кр} < \sigma_T$);
- 3) при великих значеннях λ критична напруга менша від границі пропорційності.

§ 26.3. Розрахунки на стійкість

Залежно від мети розрізняють три види розрахунків на стійкість:

1) перевірний розрахунок, коли визначають коефіцієнт запасу стійкості $n_{ст}$ і порівнюють знайдене значення з допустимим $\{n_{ст}\}$:

$$n_{ст} = P_{кр}/P \geq \{n_{ст}\},$$

де P — діюче навантаження;

2) визначення допустимого навантаження $[P]$:

$$[P] = P_{кр}/\{n_{ст}\};$$

3) проектний розрахунок, коли визначають потрібне значення мінімального моменту інерції поперечного перерізу стержня:

$$J_{min} \geq P \{n_{ст}\} (\mu l)^2 / (\pi^2 E),$$

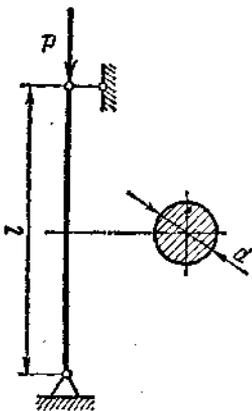


Рис. 26.4

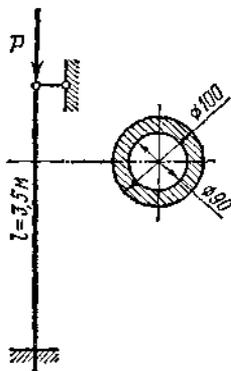


Рис. 26.5

після чого знаходять гнучкість і порівнюють з граничною.

Розрахунок стиснених стержнів на стійкість можна звести за формою до розрахунку на простий стиск. Розраховуючи будівельні конструкції, часто застосовують таку формулу:

$$[P] = \varphi [\sigma_{ск}] F.$$

Тут $[\sigma_{ск}]$ — основна допустима напруга на стиск, а φ — коефіцієнт поздовжнього згибу. Величина φ залежить від гнучкості стержня, його матеріалу; її визначають для сталей з табл. 33.1.

Розрахунки показують, що найвигіднішими під час роботи стержнів на стиск є кільцеві і коробочні тонкостінні перерізи. Доведено, що заміна стиснених стержнів у вигляді кутиків і двотаврів трубчастими стержнями дає економію матеріалу до 20—40 %.

Приклад 26.1. Перевірити на стійкість стоек, зображений на рис. 26.4, якщо $l = 3$ м, $\{n_{ст}\} = 2$, матеріал стійки Ст3, $P = 65$ кН, $d = 60$ мм.

Розв'язання. Для заданого закріплення кінців стійки $\mu = 1$.

Перевіримо застосовність формули Ейлера. Для круга $J_{\min} = J = \pi d^4/64$; $i = \sqrt{J/F}$; $F = \pi d^2/4$, звідки $i = d/4 = 60 \cdot 10^{-3}/4 = 15 \cdot 10^{-3}$ м.

Визначимо гнучкість стояка: $\lambda = \mu/i = 1 \cdot 3/(15 \cdot 10^{-3}) = 200 > 100$, отже, формула Ейлера застосовна. Обчислимо критичну силу:

$$P_{\text{кр}} = \pi^2 EJ_{\min}/(\mu l)^2 = \pi^2 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 10^6 \pi \cdot 60^4 \cdot 10^{-12}/[(1 \cdot 3)^2 \cdot 64] = \\ = 143 \cdot 10^3 \text{ Н} = 143 \text{ кН.}$$

Визначимо коефіцієнт запасу стійкості: $n_{\text{ст}} = P_{\text{кр}}/P = 143/65 = 2,2 > 2$, отже, стійкість стояка достатня.

Приклад 26.2. Знайти критичну силу $P_{\text{кр}}$ і допустиме навантаження $[P]$ для стаяка кільцевого перерізу з сталі Ст3 (рис. 26.5), якщо допустима напруга на стиск $[\sigma_{\text{ск}}] = 140$ МПа. Визначити, з яким коефіцієнтом запасу стійкості $n_{\text{ст}}$ працюватиме стаяк під навантаженням, яке дорівнює допустимому.

Розв'язання. Обчислимо момент інерції кільцевого перерізу:

$$J_{\min} = J = (\pi/64)(D^4 - d^4) = (\pi/64)[(100 \cdot 10^{-3})^4 - (90 \cdot 10^{-3})^4] = 169 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4.$$

Площа поперечного перерізу стаяка

$$F = (\pi/4)(D^2 - d^2) = (\pi/4)[(100 \cdot 10^{-3})^2 - (90 \cdot 10^{-3})^2] = 14,9 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

Знаходимо радіус інерції перерізу:

$$i_{\min} = i = \sqrt{J/F} = \sqrt{169 \cdot 10^{-8}/14,9 \cdot 10^{-4}} = 3,36 \cdot 10^{-2} \text{ м.}$$

Для заданого способу кріплення кінців стаяка коефіцієнт зведення довжини $\mu = 0,7$. Визначаємо гнучкість стаяка:

$\lambda = \mu/i = 0,7 \cdot 3,5/(3,36 \cdot 10^{-2}) = 72,5 < 100$, отже, формула Ейлера незастосовна.

Обчислимо критичну напругу за формулою Ясинського. З довідкових таблиць знаходимо: $a = 310$ МПа, $b = 1,14$ МПа. Тоді

$$\sigma_{\text{кр}} = a - b\lambda = 310 - 1,14 \cdot 72,5 = 227 \text{ МПа.}$$

Визначимо критичну силу:

$$P_{\text{кр}} = \sigma_{\text{кр}} F = 227 \cdot 10^6 \cdot 14,9 \cdot 10^{-4} = 340 \cdot 10^3 \text{ Н} = 340 \text{ кН.}$$

Допустиме навантаження $[P]$ визначимо за допомогою коефіцієнта поздовжнього згину φ за формулою

$$[P] = \varphi [\sigma_{\text{ск}}] F.$$

Для сталі Ст3, коли $\lambda = 72,5$, то $\varphi = 0,795$; тоді

$$[P] = 0,795 \cdot 140 \cdot 10^6 \cdot 14,9 \cdot 10^{-4} \approx 166 \cdot 10^3 \text{ Н} = 166 \text{ кН.}$$

Коефіцієнт запасу стійкості $n_{\text{ст}}$ визначаємо з співвідношення

$$n_{\text{ст}} = P_{\text{кр}}/[P] = 340/166 = 2,05.$$

Частина III

ДЕТАЛІ МАШИН

ВСТУП

У третій частині «Технічної механіки» на основі знань, набутих під час вивчення креслення, технології металів, теоретично: механіки, опору матеріалів та інших дисциплін, ознайомимося з основами розрахунку і раціонального конструювання машин і механізмів.

Питання, викладені в цій частині підручника, зведені в три відділи. У першому розглянуто різні види рознімних і нерознімних з'єднань деталей машин; у другому — механічні передачі і деякі характерні деталі цих передач (наприклад, шків, зубчасті колеса, зірочки); третій відділ присвячений деталям і складальним одиницям передач (вали, осі, підшипники, муфти).

«Деталі машин» як самостійна наука оформилась у другій половині минулого століття, коли розвиток машинобудування вимагав розчленування теорії розрахунку машин на ряд загальнотехнічних і спеціальних дисциплін.

У Росії першу друковану працю під назвою «Деталі машин» випустив у 1881 р. професор В. Л. Кирпичов (1845—1913). Потім теорію розрахунку деталей машин розвинули у своїх працях професори П. К. Худяков (1857—1936), О. І. Сидоров (1866—1931), М. О. Саверін (1891—1952) та інші.

Із праць, написаних зарубіжними авторами, російською мовою перекладено праці Баха і Ретшера, якими широко користувалися.

Тепер під впливом прогресу вітчизняного і зарубіжного машинобудування наука «Деталі машин» безперервно вдосконалюється і розвивається.

Під час конструювання і виготовлення деталей машин велику увагу приділяють стандартизації і уніфікації. Під с т а н д а р т и з а ц і є ю розуміють установлення загальнодержавних точно визначених норм якості, форми і розмірів виробів або їх елементів, обов'язкових для проектувальників, виготовлювачів і споживачів. Під у н і ф і к а ц і є ю розуміють раціональне скорочення типів, видів і розмірів виробів однакового функціонального призначення.

Основна мета стандартизації встановлена ГОСТ 1.0—68 «Державна система стандартизації. Основні положення».

У постанові ЦК КПРС і Ради Міністрів СРСР «Про підвищення ролі стандартів у поліпшенні якості продукції», прийнятій у листопаді 1970 р., і в «Основних напрямках економічного і соціального розвитку СРСР на 1981—1985 роки і на період до 1990 року», прийнятих XXVI з'їздом КПРС, підкреслюється значення стандартизації і уніфікації, як необхідної умови для організації спеціалізованого виробництва, підвищення продуктивності праці і поліпшення якості продукції.

У наші дні стандартизацією охоплені практично всі грані людської діяльності, але найбільше значення вона має у сфері масового виробництва

деталей і вузлів машин. Починаючи з 1972 р. встановлено порядок, за якого стандарти підлягають перегляду через кожні п'ять років.

Радянський Союз є членом Ради Економічної Взаємодопомоги соціалістичних країн (РЕВ), а також членом Міжнародної організації з стандартизації (ІСО). Багато новостворених і переглянутих стандартів СРСР враховують рекомендації РЕВ і ІСО щодо стандартизації.

ГОСТ 1.0—68, який діє з 1 січня 1970 р., встановлює такі категорії стандартів: державні стандарти СРСР (ГОСТ), галузеві стандарти (ОСТ), республіканські стандарти (РСТ), стандарти підприємств (СТП). На нестандартизовану продукцію розробляють технічні умови відповідно до ГОСТ 2.114—70 і 2.115—70. Останніми роками як державні стандарти СРСР вводять також стандарти РЕВ, які позначають СТ СЭВ.

Стосовно деталей машин стандарти введені на всі найбільш поширені деталі, їх елементи, термінологію, позначення і означення. Застосування діючих ГОСТів і СТ СЭВ у проектуванні обов'язкове.

Відділ перший

ЗАГАЛЬНІ ПОЛОЖЕННЯ. З'ЄДНАННЯ ДЕТАЛЕЙ МАШИН

Розділ XXVII

ЗАГАЛЬНІ ПОЛОЖЕННЯ

§ 27.1. Основні поняття

Мета створення машин — підвищення продуктивності і полегшення фізичної і розумової праці людини. Машини допомагають у виконанні роботи і в управлінні виробництвом.

Основними типами машин є робочі (технологічні, транспортні), енергетичні та інформаційні (контрольно-керуючі, логічні і кібернетичні) машини.

Технологічні машини в процесі роботи змінюють форму, розміри і властивості оброблюваних виробів або матеріалів.

Транспортні машини призначені для переміщення різних вантажів.

Технологічні і транспортні машини називають машинами-знаряддями.

Машини-двигуни перетворюють один вид енергії в інший і призначені для приведення в рух технологічних і транспортних машин.

Контрольно-керуючі машини використовують для автоматизації виробництва і керування безперервно змінними процесами.

Логічні і кібернетичні машини дають змогу швидко розв'язувати складні дослідницькі і виробничі завдання, підвищують продуктивність розумової праці.

Складовими частинами машин є механізми, призначені для перетворення одних видів руху в інші.

Будь-яка машина, механізм або прилад складаються з окремих деталей, які об'єднуються в складальні одиниці.

Деталлю називається виріб, виготовлений з однорідного за назвою і маркою матеріалу без застосування складальних операцій; скла-

д а л ь н а о д и н и ц я — виріб, складові частини якого з'єднують між собою на підприємстві-виготовлювачі, застосовуючи складальні операції.

З безлічі деталей можна виділити такі, що є майже в усіх машинах (болти, вали, зубчаті колеса, гайки, шпонки тощо). Ці деталі називають деталями загального призначення; вони є предметом вивчення в курсі «Деталі машин».

Деталі, специфічні для певного типу машин (поршні, гребні гвинти, лопаті турбіни тощо), називають деталями спеціального призначення; їх вивчають у спеціальних предметах.

§ 27.2. Вимоги, які ставлять до конструкції деталей машин

Машинобудування забезпечує своєю продукцією всі галузі народного господарства. Від призначення машини залежать і вимоги, які ставлять до неї.

Досконалість конструкції деталей машин оцінюють за їх роботоздатністю і економічністю. Роботоздатність виробу забезпечується його надійністю, тобто властивістю виконувати задані функції, зберігаючи свої експлуатаційні показники в заданих межах протягом потрібного проміжку часу або потрібного наробітку (тобто тривалості або обсягу роботи). Надійність виробу залежить від його безвідмовності, довговічності частин, ремонтпридатності і зберігання.

Основними критеріями роботоздатності є міцність (статична, втомленісна і контактна), жорсткість, стійкість проти спрацювання і теплостійкість при виконанні робочих функцій протягом заданого строку. Щоб забезпечити ці критерії роботоздатності, треба в процесі проектування деталей машин виконувати відповідні перевірки розрахунки.

Міцність — основний критерій роботоздатності для більшості деталей машин. Деталь не повинна руйнуватися, бо поломки призводять не тільки до матеріального збитку, а й до нещасних випадків. Недопустимі також значні залишкові деформації деталей.

Розміри деталей залежать від величини і характеру діючого навантаження, а також від умов роботи. В розрахунках на міцність особливу увагу приділяють допустимим напругам і вибору запасів міцності.

Жорсткість деталей — це їх здатність чинити опір зміні форми і розмірів під дією навантажень. Для різних деталей, наприклад валів, встановлено норми жорсткості, які забезпечують задовільну роботу підшипників і деталей передач.

Стійкість проти спрацювання — властивість матеріалу чинити опір спрацюванню. Якщо деталі спрацюються, їх міцність може зменшитись внаслідок зменшення перерізів і збільшення динамічних навантажень; можливе також повне механічне спрацювання (наприклад, робочих органів землерийних машин), зростання шуму (у швидкохідних транспортних і технологічних машинах). Стійкість проти спрацювання деталей забезпечується підвищенням твердості, вибором оптимальних параметрів шорсткості поверхні, захистом від забруднення і подаванням мастила до тертьових поверхонь. Стійкість проти спрацювання підшипників ковзання значно підвищується, якщо забезпечено режим рідинного тертя.

Економічність виробів визначається їх вартістю експлуатацій-

ними витратами. Тому основними вимогами до виробів з точки зору економічності є: найменша витрата матеріалу, застосування недефіцитних матеріалів, технологічність конструкції, високий механічний ККД, найменші габаритні розміри, відповідність стандартам і малі затрати під час експлуатації.

Крім поломок, робочі поверхні деталей іноді руйнуються внаслідок так званих **к о н т а к т н и х н а п р у г**. Контактними називають напруги, які виникають у місці дотикання двох деталей, коли площі дотикання малі порівняно з розмірами деталі. При статичному характері навантаження контактні напруги, які перевищують допустимі значення, призводять до виникнення на поверхні деталей вм'ятин і тріщин.

При контакті ділянок деталей, які перекочуються одна по одній, кожна точка їх поверхні навантажується лише в період проходження зони контакту. Внаслідок цього виникають змінні контактні напруги, які спричинюють спрацювання від втоми, тобто виникнення тріщин і відокремлення (відшарування і викришування) частинок матеріалу деталі.

Якщо деталі працюють у маслі, то воно проникає в тріщини. У зоні контакту тріщини закриваються і масло в них зазнає високого тиску, що сприяє збільшенню тріщин. Так повторюється доти, поки частинки металу, які закривають тріщину, не викришаться. Викришування не буде, якщо контактні напруги не перевищують допустимих, установлених практикою.

Контакт дотичних деталей може бути або точковим (наприклад, дві кулі, куля і площина), або лінійним (наприклад, два циліндри з паралельними осями). На рис. 27.1 показано приклад дотикання двох циліндрів з паралельними осями. До прикладання навантаження вони дотикалися по лінії. Під навантаженням дотичні частини циліндрів деформуються і лінійний контакт переходить у контакт по вузькій площадці.

Максимальні нормальні контактні напруги, які виникають при цьому, для тїл з сталі та інших матеріалів з коефіцієнтом Пуассона $\nu = 0,3$ обчислюють за формулою Герца (1857—1894, німецький учений):

$$\sigma_H = 0,418 \sqrt{q E_{зв} / \rho_{зв}}$$

Тут q — питоме навантаження; $E_{зв}$ — зведений модуль пружності; $E_{зв} = 2E_1 E_2 / (E_1 + E_2)$, де E_1 і E_2 — модулі пружності матеріалу циліндрів; $\rho_{зв}$ — зведений радіус кривизни:

$$1/\rho_{зв} = (1/\rho_1) \pm (1/\rho_2), \quad (27.1)$$

де ρ_1 і ρ_2 — радіуси циліндрів.

Знак мінус у формулі (27.1) беруть тоді, коли поверхня одного з циліндрів угнута.

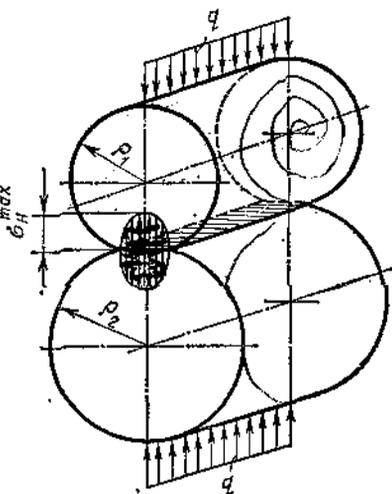


Рис. 27.1

Теплостійкість — це здатність деталей зберігати міцність під час роботи в умовах високих температур. Деталі можуть нагріватися внаслідок припливу тепла ззовні або за рахунок виділення тепла внаслідок тертя в кінетичних парах механізмів. Теплостійкість підвищують, застосовуючи спеціальні матеріали, відведення тепла за допомогою масла, а також застосовуючи повітряне або водяне охолодження.

Розміри деталей визначають з урахуванням згаданих вимог відповідно до проектних розрахунків. Іноді розміри деталей визначають конструктивно або керуючись практичними рекомендаціями. Роботоздатність деталей у цих випадках оцінюють за результатами перевірених розрахунків.

§ 27.3. Вибір матеріалів для виготовлення деталей машин

Вибір матеріалів залежить від призначення машин, призначення деталей, способу їх виготовлення та ряду інших факторів. Правильний вибір матеріалу значною мірою впливає на якість і вартість деталей і машини в цілому.

Вибираючи матеріал деталі, враховують:

- 1) необхідність забезпечення міцності і жорсткості при мінімальній масі;
- 2) відповідність матеріалу умовам експлуатації (наприклад, його антифрикційні властивості, теплостійкість, стійкість проти спрацювання тощо);
- 3) вартість і дефіцитність матеріалу;
- 4) відповідність технологічних властивостей матеріалу способу виготовлення деталі (придатність для штампування, зварюваність, ливарні властивості, оброблюваність на верстатах і т. д.).

Деталі машин виготовляють з металевих і неметалевих матеріалів.

Метали, які застосовують у машинобудуванні, поділяються на чорні і кольорові.

Чорні метали, які поділяють на чавуни і сталі, дуже поширені через їх міцність і жорсткість, а також порівняно низьку вартість.

Сірий чавун — основний ливарний матеріал, який застосовують у машинобудуванні. З нього виллюють різні корпусні деталі, кронштейни, маховики, шківни, важелі тощо. Механічні властивості виллюнок з сірого чавуну деяких марок наведені в табл. 27.1.

Таблиця 27.1

Марка чавуну	Границя міцності (не менше), МПа		Твердість за Брінеллем, НВ
	на розтяг	на згин	
СЧ 12—28	120	280	143—229
СЧ 18—36	180	360	170—229
СЧ 22—44	220	440	170—241
СЧ 32—52	320	520	187—255
СЧ 38—60	380	600	207—269

Ковкий чавун — назва умовна. Заготовки деталей з нього дістають тільки виливанням. Ковкий чавун порівняно з іншими чавунами має підвищену ударну міцність, і його застосовують для виготовлення деталей, що зазнають деякого (випадкового) ударного навантаження.

Білий чавун має високу поверхневу міцність, крихкість, погано обробляється на верстатах. Застосовують його для виготовлення деяких деталей, які працюють в умовах інтенсивного механічного спрацювання і в агресивних середовищах.

Конструкційні сталі поділяють в основному на сталі вуглецеві звичайної якості, вуглецеві якісні, леговані.

Заготовки сталейних деталей виготовляють або обробкою тиском, або виливанням.

Для усунення внутрішніх напруг і підвищення механічних властивостей сталей застосовують термічну обробку: відпалювання, нормалізацію, поліпшення, гартування і відпускання.

Вуглецеві сталі звичайної якості використовують для деталей, які термічно не обробляються. Вуглецеву якісну сталь використовують для деталей, які зазнають термічної обробки. З легованих сталей виготовляють особливо важливі деталі машин, до яких ставлять підвищені вимоги щодо міцності, жароміцності тощо. Сталені виливки використовують для виготовлення деталей складної форми.

Механічні властивості найбільше використовуваних у машинобудуванні марок сталі наведено в табл. 27.2.

Таблиця 27.2

Марка сталі	Термообробка або стан	Твердість		Тимчасовий опір (для розтягу) $\sigma_{тн}$	Границя текучості $\sigma_{т}$	Границя витривалості σ_{-1}
		HB	HRC			
Ст3	Гарячекатана	—	—	380	220	170
Ст5	»	156	—	500	260	220
15	»	143	—	380	230	170
	Цементована, загартована, відпущена	—	56—62	450	250	—
35	Гарячекатана	163—192	—	540	320	220
	Загартована, відпущена	—	30—40	1000	650	—
45	Гарячекатана	235—262	—	610	360	250
	Загартована, відпущена	—	40—45	1200	950	340
65Г	Відпалена	235—262	—	750	440	—
	Загартована, відпущена	—	42—48	1500	1250	590
20X	Цементована, загартована, відпущена	—	56—63	650	400	—
40X	Поліпшена	269—302	—	800	520	340
	Загартована, відпущена	—	45—50	1000	800	550
18ХГТ	Те саме	—	58—63	1150	950	650
30ХГТ	»	—	40—45	1500	1300	950
30ХГСА	»	—	30—35	1100	850	510
35ХГСА	»	—	45—50	1650	1300	960
ШХ15	»	—	58—64	2200	1700	660
38Х2МЮА	Загартована, відпущена, азотована	—	HV850—1050	1050	900	620

Кольорові метали, які використовують у машинобудуванні, поділяють переважно на сплави міді (бронзи, латуні, бабіти) і легкі сплави (сплави алюмінію і магнію).

Бронза — сплав міді з оловом, свинцем, залізом або алюмінієм. Його використовують як антифрикційний матеріал, що добре працює в умовах механічного спрацювання, наприклад, для виготовлення вкладишів підшипників і вінців черв'ячних коліс.

Латунь — сплав міді з цинком. Має добрі ливарні властивості, легко штампується і обробляється на верстатах.

Бабіт — сплав міді, олова, свинцю і сурми. Цей матеріал має високі антифрикційні властивості, його застосовують для заливання вкладишів підшипників ковзання.

Легкі сплави — сплави алюмінію, магнію. Наприклад, ливарний алюмінієвий сплав силумін містить до 14 % кремнію, має добрі ливарні властивості; дюралюміній містить до 5,5 % міді. Сплави магнію з алюмінієм, міддю, нікелем, цинком мають добрі ливарні властивості, малу питому вагу і легко обробляються. З них виготовляють корпусні деталі і малонавантажувані деталі машин і приладів.

До неметалевих матеріалів, які використовують у машинобудуванні, належать дерево, гума, шкіра, азбест, металокераміка, пластмаси.

Тепер особливо широко застосовують пластмаси завдяки їх легкості, міцності, стійкості проти дії агресивних середовищ, фрикційним властивостям. Позитивною властивістю всіх пластмас є їх здатність формуватися при порівняно невисоких температурах, що дає можливість виготовляти вироби складної форми високопродуктивними методами.

Пластмаси, які застосовують у машинобудуванні, поділяють на дві групи. До однієї з них належать пластмаси, які називають термопластичними (термопласти); вони розплавляються при нагріванні і добре заповнюють ливарні форми (наприклад, нейлон, полікарбонат, поліаміди тощо). До другої групи належать так звані термореактивні пластмаси (реактопласти). Вироби з таких пластмас після гарячого формування і полімеризації не плавляться при повторному нагріванні до значних температур. До таких пластмас належать текстоліт, карболіт тощо.

Механічні властивості деяких видів пластмас наведено в табл. 27.3.

Таблиця 27.3

Назва пластмаси	Границя міцності на розтяг σ_M	Границя витривалості σ_{-1}	Модуль пружності E
	МПа		
Нейлон	50—90	21	$(1,05 \div 2,8) \cdot 10^3$
Ацеталь	62—70	35	$(2,6 \div 2,9) \cdot 10^3$
Полікарбонат	63—73	14	$2,7 \cdot 10^3$
Поліамід П-68	50—65	10—15	$1,2 \cdot 10^3$
Текстоліт	100	50	$(6 \div 10) \cdot 10^3$
Полікапроамід (капрон)	60—65	15—17	$(1,0 \div 2,0) \cdot 10^3$
Поліуретан	50—60	12—15	$1,3 \cdot 10^3$
Лігнофоль (ДСП-Г)	120	—	$18 \cdot 10^3$

Заміна металів пластмасами значно зменшує трудомісткість і вартість машинобудівної продукції. З пластмас виготовляють різні порівняно малонавантажувані деталі: корпуси, зубчасті колеса, шківи, вкладиші підшипників, втулки, маховички, рукоятки. Особливо широко пластмаси використовують в електро- і радіотехнічній промисловості для виготовлення панелей, колодок, ізоляторів, баків, труб та багатьох інших деталей.

Негативною властивістю пластмас, яку ще не усунуто, є їх здатність до так званого старіння. Старіння супроводиться поступовою зміною з часом механічних характеристик і навіть розмірів пластмасових деталей.

Розділ XXVIII

РОЗНІМНІ З'ЄДНАННЯ ДЕТАЛЕЙ

З'єднання деталей у машинах поділяють на дві основні групи: рознімні і нерознімні.

Рознімні з'єднання (різьбові, шпонкові, шлицеві та ін.) допускають багаторазове складання і розбирання без руйнування з'єднувальних деталей.

Нерознімні з'єднання (заклепочні, зварні, клейові та ін.) можна розібрати, лише зруйнувавши з'єднувальні елементи — заклепки, зварні шви тощо.

Нерознімні з'єднання описано в розд. XXIX.

§ 28.1. Загальні відомості про різьбові з'єднання

До різьбових з'єднань належать деталі, які скріплюють гвинтами, болтами, гайками, шпильками, стяжками, різьбовими муфтами тощо. Основним скріплюючим елементом такого з'єднання є різьба, параметри якої

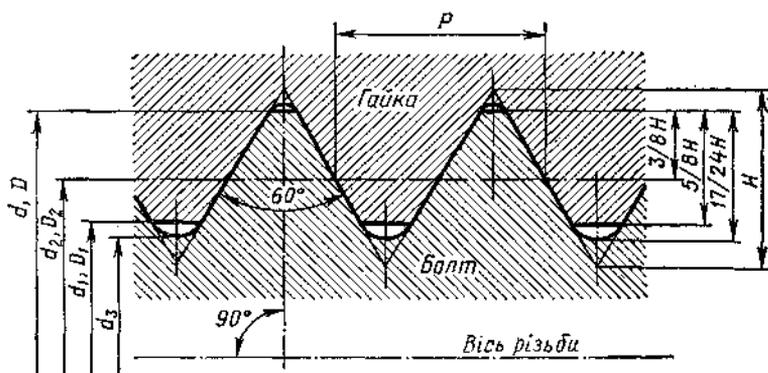


Рис. 28.1

(рис. 28.1): зовнішній діаметр різьби d , внутрішній діаметр d_1 , середній діаметр d_2 ; кут підйому ψ (кут підйому гвинтової лінії різьби на циліндрі діаметром d_2); висота вихідного трикутника H , крок різьби P — відстань між сусідніми однойменними бічними сторонами профілю в

напрямі, паралельному осі різьби; x і d — різьби t — величина відносного осьового переміщення гвинта (гайки) за один оберт; число заходів n , тобто число ниток різьби, що припадає на її хід. Для однієї з ах і д н о і різьби (рис. 28.2, а) крок і хід дорівнюють один одному; для багатозахідної різьби (рис. 28.2, б)

$$t = pn.$$

Кут підйому різьби ψ визначають з розгортки гвинтової лінії на циліндрі діаметром d_2 (див. рис. 28.9, а):

$$\operatorname{tg} \psi = t / (\pi d_2) = pn / (\pi d_2).$$

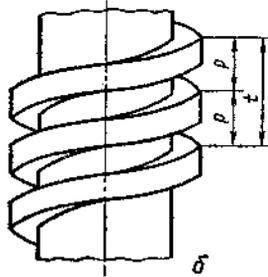
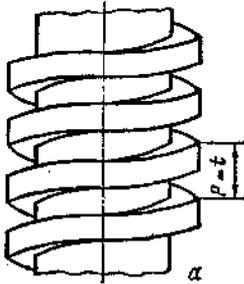


Рис. 28.2

Для однозахідної різьби $n = 1$, тоді

$$\operatorname{tg} \psi = p / (\pi d_2).$$

Різьбу називають правою, якщо гвинтова лінія різьби напрямлена вгору зліва направо.

Діаметр, який умовно характеризує розмір різьби, називають номінальним; він відповідає зовнішньому діаметру різьби.

Стандартні болти, гвинти і гайки загального призначення виготовляють з сталі марок Ст3; 35; 40 та ін., а спеціального — з легованих сталей.

Різьбу можна нарізати вручну мітчиками або плашками, а також на верстатах різцем, спеціальними різьбонарізними головками або фрезами. У масовому виробництві застосовують накатування різьби на різьбонакатних верстатах. Цим високопродуктивним методом виготовляють більшість стандартних кріпильних деталей із зовнішньою різьбою. Зазначимо, що накатана різьба міцніша за різьбу, нарізану різцем, бо при накатуванні волокна металу заготовки болта не перерізаються і зовнішня поверхня різьби наклепується.

За призначенням різьби поділяють на кріпильні, які використовують для скріплення деталей; кріпильно-ущільнювальні, призначені для герметичного скріплення деталей, і різьби, які використовують для передавання руху, наприклад, у передачах гвинт — гайка.

У машинобудуванні і приладобудуванні для різьбових з'єднань застосовують переважно однозахідні кріпильні метричні різьби, що мають трикутний профіль нарізки з кутом при вершині $\alpha = 60^\circ$.

Крім метричної різьби, існує дюймовою різьба, прийнята в ряді західних країн. Ця різьба має трикутний профіль з кутом при вершині $\alpha = 55^\circ$. Усі елементи дюймової різьби вимірюють дюймами (1 дюйм = 25,4 мм), а величину кроку задають числом ниток (витків) на довжині одного дюйма нарізки.

Відповідно до стандарту метричні різьби поділяють на різьби з крупним і дрібним кроками залежно від величини кроку при тому самому зовнішньому діаметрі. Параметри різьби з крупним і дрібним кроками визначаються СТ СЭВ 181—75 і 184—75.

Різьби з дрібним кроком через малу висоту профілю менше ослаблюють нарізану частину стержня, і тому їх застосовують переважно на високо-

напружених валах, а також у точній механіці і в приладобудуванні. Такі різьби мають, крім того, вищу опірність самовідгвинчуванню.

На рис. 28.3 зображено профілі різьб: прямокутної (а), трапецеїдальної (б) і упорної (в), які застосовують для вантажних гвинтів домкратів, ходових гвинтів металорізальних верстатів тощо. Розміри трапецеїдальної і упорної різьб регламентовані стандартами; прямокутна різьба не стандартизована.

На залізничному транспорті, а також для цоколів електричних ламп і в деяких інших випадках застосовують к р у г л у різьбу (рис. 28.3, г).

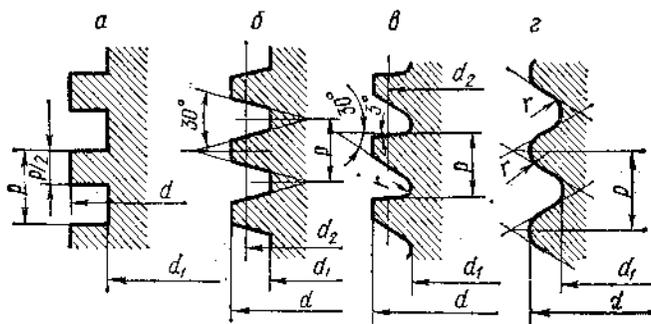


Рис. 28.3

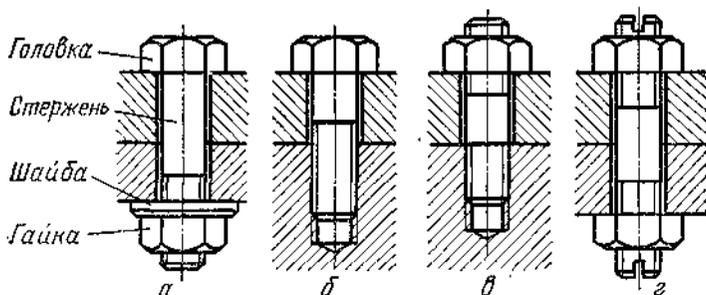


Рис. 28.4

Для з'єднання труб використовують особливу трикутну різьбу з профільним кутом $\alpha = 55^\circ$, яка забезпечує герметичніше з'єднання. Ця різьба стандартизована і називається т р у б н о ю. За номінальний діаметр трубної різьби, яку нарізують на зовнішній поверхні труби, умовно прийнято діаметр її отвору, виміряний у дюймах. Оскільки труби виготовляють з різною товщиною стінок, то діаметр отвору труби не завжди дорівнює номінальному діаметру різьби.

ГОСТ 6211—69 встановлює профіль і розміри конічної т р у б н о ї різьби, що має конусність 1:16. ГОСТ 11709—71 встановлює профіль, основні розміри і допуски на виготовлення метричної різьби на деталях з пластмас.

Найбільш поширеними кріпильними деталями є болт і гайка (рис. 28.4, а). Конструкція їх відома з машинобудівного креслення. Для болтових з'єднань немає потреби нарізувати різьбу в з'єднуваних деталях. Болти входять в отвори або з зазором, або щільно — без зазора.

Для скріплення деталей гвинтом (рис. 28.4, б) один з отворів у з'єднуваних деталях роблять гладеньким наскрізним, а другий — різьбовим.

Шпильки (рис. 28.4, в, г) застосовують тоді, коли гвинти чи болти з конструктивних чи експлуатаційних міркувань встановити не можна або їх встановлення — недоцільне. Шпильки нормальної і підвищеної точності стандартизовані.

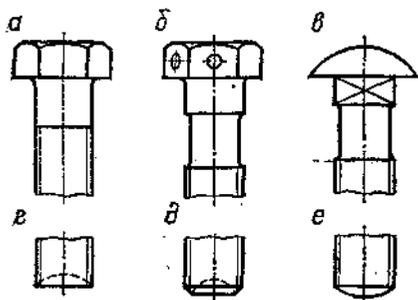


Рис. 28.5

Шпильки і болти використовують тоді, коли в процесі експлуатації з'єднані деталі доводиться багато разів розбирати і знову складати. Гвинтові з'єднання в цих випадках мало придатні, бо різьба в отворах при багаторазовому закручуванні пошкоджується. Під гайку і головку болта або гвинта при потребі підкладають шайби, які збільшують опорну поверхню.

Розрізняють різьбові кріпильні деталі загального призначення і спеціальні. Останні вивчають у спеціальних курсах.

Болти загального призначення за конструкцією і технологією виготовлення поділяють на болти грубої, нормальної і підвищеної точності. Головки болтів загального призначення бувають (рис. 28.5) шестигранні (а), шестигранні з отворами для стопорної дротини (б), напівкруглі з

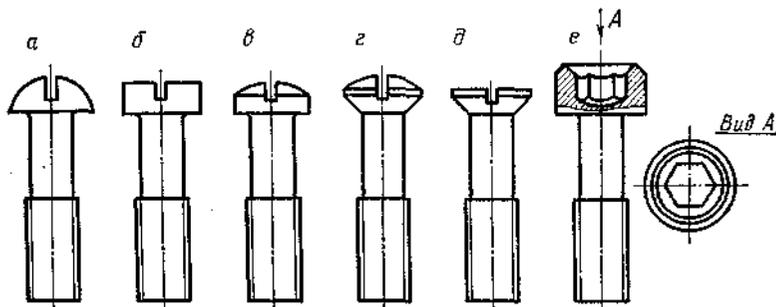


Рис. 28.6

квадратним підголовком (в) тощо. Кінці болтів можуть бути (рис. 28.5) плоскі (г), з конічною фаскою (д) і сферичні (е).

Гвинти загального призначення бувають кріпильні, які використовують для кріплення з'єднуваних деталей (рис. 28.6), і установочні, призначені для запобігання відносному зсуву з'єднуваних деталей (рис. 28.7, а, б).

Головки гвинтів бувають шестигранні (див. рис. 28.4, а, б), а також інших форм (рис. 28.6): напівкруглі (а), циліндричні (б), циліндричні з сферою (в), напівпотайні (г) і потайні (д), циліндричні з шестигранною заглибиною під ключ (е). Кінці кріпильних гвинтів роблять плоскими. Форма кінців установочних гвинтів залежить від їх призначення і може бути різною (рис. 28.7). Кінці болтів, шпильок і гвинтів регламентовані СТ СЭВ 215—75.

Гайки загального призначення стандартизовані і, як і болти, мають грубу, нормальну і підвищену точність. За формою гайки шестигранні з однією або двома фасками (рис. 28.8, а, б), шестигранні прорізні і корончасті (рис. 28.8, в, г) і ін., причому висота їх буває різна.

Шайби загального призначення 1 (без фаски) і 2 (з фаскою) стандартизовані.

Щоб відрізнити деталі з лівою різьбою, на них наносять мітки відповідно до ГОСТ 2904—45 «Мітки на деталь з лівою різьбою».

Силкові співвідношення і умови самогальмування у гвинтовій парі. Для розгляду сил у гвинтовій парі зручно виток прямокутної різьби роз-

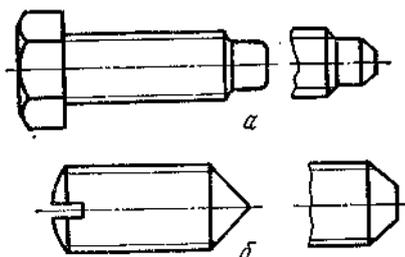


Рис. 28.7

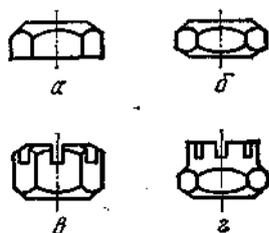


Рис. 28.8

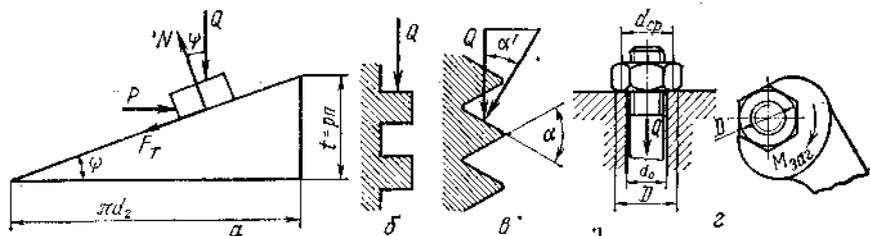


Рис. 28.9

горнути по середньому діаметру d_2 в похилу площину, а гайку замінити повзуном (рис. 28.9, а). Підніманню повзуна по похилій площині відповідає нагвинчування гайки на гвинт.

Визначимо сили тертя і встановимо співвідношення між силами тертя в прямокутній і трикутній різьбах. Для спрощення спочатку вважатимемо, що кут підйому різьби дорівнює нулю. Тоді сила тертя для п р я м о к у т н о ї різьби (рис. 28.9, б)

$$F_T = fQ,$$

де f — коефіцієнт тертя; Q — осьова сила на гвинті (сила затягування).

Сила тертя для т р и к у т н о ї різьби (рис. 28.9, в)

$$F_T = fN = f \frac{Q}{\cos \alpha'} = f'Q,$$

де α' — кут нахилу робочої грані витка; $f' = \frac{1}{\cos \alpha'}$ — зведений коефіцієнт тертя (див. § 6.3).

Оскільки $f' > f$, то тертя в трикутній різьбі більше, ніж у прямокутній.

Тертя відхиляє повну реакцію від нормалі на кут тертя φ . Тому колова сила P у різьбі прямокутного профілю при загвинчуванні гайки (рис. 28.9, а)

$$P = Q \operatorname{tg}(\psi + \varphi), \quad (28.1)$$

де φ — кут тертя; ψ — кут підйому різьби на середньому діаметрі d_2 .

Співвідношення між силами в прямокутній і різьбах іншого профілю аналогічні. Тому для різьби будь-якого профілю колова сила (за аналогії з формулою (28.1))

$$P = Q \operatorname{tg}(\psi + \varphi').$$

Для метричної кріпильної різьби $\alpha' = 30^\circ$, трапецеїдальної $\alpha' = 15^\circ$ а для упорної $\alpha' = 3^\circ$.

Під час відгвинчування гайки напрям сили тертя в різьбі змінюється тоді

$$P_{\text{від}} = Q \operatorname{tg}(\psi - \varphi').$$

Дуже важливо, щоб кріпильна різьба була самогальмівна, щоб гайки болти не самовигвинчувались.

Умова самогальмування різьби $P_{\text{від}} < 0$, тобто щоб відкрутити гайку треба прикласти силу в напрямі, протилежному загвинчуванню. Отже $P_{\text{від}} < 0$, або $\operatorname{tg}(\psi - \varphi') < 0$, або внаслідок малості кутів $\psi < \varphi'$.

Оскільки в кріпильній різьбі кут $\psi \leq 4^\circ$, а зведений кут тертя $\varphi' \geq 8^\circ$, то кріпильна різьба самогальмівна.

Під час затягування болтів робоча сила P_p створює на ключі довжинок L момент загвинчування $M_{\text{заг}} = P_p L$. Цей момент зрівнюється моментом M_p у різьбі і моментом тертя $M_{\text{оп}}$ опорної поверхні гайки або головки болта:

$$M_{\text{заг}} = M_p + M_{\text{оп}}.$$

Очевидно, що момент M_p у різьбі визначається виразом

$$M_p = 0,5d_2 P, \quad \text{або} \quad M_p = 0,5d_2 \operatorname{tg}(\psi + \varphi').$$

Момент тертя $M_{\text{оп}}$ на опорній поверхні гайки або головки болта при їх загвинчуванні визначають за формулою, яка ґрунтується на припущенні, що рівнодіюча сил тертя Qf між торцем гайки і з'єднуваною деталлю прикладена на середньому діаметрі d_c опорної поверхні (рис. 28.9, з)

$$M_{\text{оп}} = Qfd_c/2,$$

де $d_c = 0,5(d_{\text{оп}} + D)$; D — зовнішній діаметр опорної поверхні гайки який дорівнює її розміру під ключ; $d_{\text{оп}}$ — внутрішній діаметр опорної поверхні, який дорівнює діаметру свердління під болт (звичайно $d_{\text{оп}} = d + (1 \div 1,5)$ мм).

Підставляючи значення моментів M_p і $M_{\text{оп}}$ у вираз для моменту $M_{\text{заг}}$ дістаємо

$$M_{\text{заг}} = 0,5Qd_2 [\operatorname{tg}(\psi + \varphi') + fd_c/d_2].$$

Для кріпильної різьби можна брати такі середні значення:

$$\psi \approx 2^\circ 30'; \quad d_2 \approx 0,9d; \quad d_c = 1,4d.$$

Якщо коефіцієнт тертя $f = 0,15$, то

$$M_{\text{заг}} \approx 0,2Qd.$$

Наближено можна вважати, що довжина гайкового ключа L дорівнює $14d$. Коли до ключа прикладено від руки силу, яка дорівнює P_p , то сила затягування Q на гвинті матиме такі значення: коли $f = 0,15$, то $Q \approx 70P_p$; коли $f = 0,1$, то $Q \approx 100P_p$.

Отже, сила затягування Q у 70—100 раз більша від сили P_p , прикладеної до ключа. В розрахунок звичайно беруть силу $P_p = 100 \div 200 \text{ Н}$.

Засоби проти самовідгвинчування гайок. У з'єднаннях, які зазнають вібрацій, ударів і змінних навантажень, можливе самовідгвинчування гайок, вна-

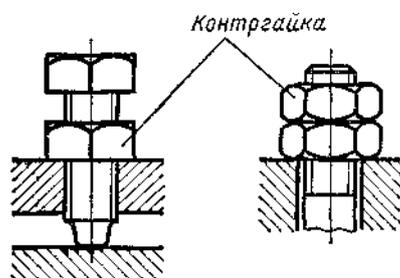


Рис. 28.10

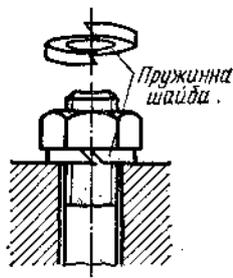


Рис. 28.11

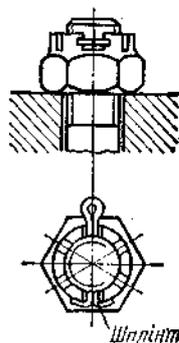


Рис. 28.12

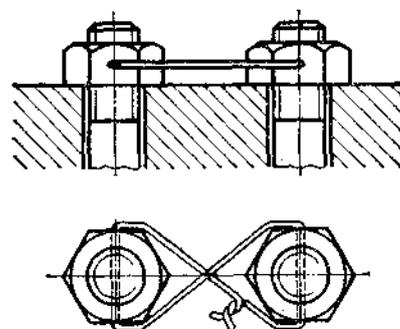


Рис. 28.13

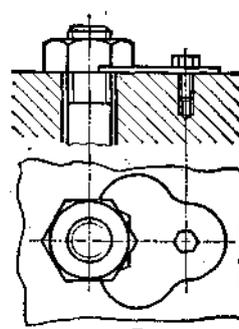
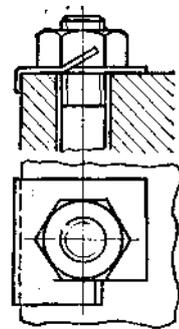


Рис. 28.14

слідок чого порушується з'єднання деталей. Існує багато способів захисту від самовідгвинчування. Найбільше застосовують такі:

1) встановлюють контргайки (рис. 28.10) або пружинні шайби (рис. 28.11), які створюють додатковий натяг і тертя в різьбовому з'єднанні. Пружинна шайба, крім того, зменшує вплив вібрації на тертя в різьбі;

2) жорстке скріплення болта і гайки за допомогою шплінта (рис. 28.12) або дротини (рис. 28.13). Конструкція шплінтів регламентована ГОСТом;

3) жорстке з'єднання гайки з деталлю за допомогою спеціальної шайби (рис. 28.41, а), планки (рис. 28.14, б) тощо.

§ 28.2. Розрахунок різьбових з'єднань

Розраховуючи різьбові з'єднання, визначають діаметр стержня болта або гвинта з умови міцності на розрив, а різьбу перевіряють на зріз і змінація.

Розрахунок різьби. Розподіл навантаження по витках різьби гайки залежить від ряду причин, у тому числі від її конструкції, пружних властивостей матеріалу гайки і болта, від неточностей виготовлення і ступеня спрацювання різьби. Тому міцність різьби перевіряють не справжніми, а умовними напругами, які порівнюють з допустимими.

Визначаючи умовні напруги, вважають, що всі z_n витків різьби навантажені рівномірно.

Умова міцності різьби на зминання має вигляд

$$\sigma_{зм} = Q/F_{зм} \leq [\sigma_{зм}],$$

де $F_{зм}$ — проекція площі зминання витків на площину, перпендикулярну до осі, $F_{зм} = \pi d_2 h z_n$; Q — осьова сила; $z_n = H/p$ — число витків різьби в гайці висотою H , p — крок різьби; h — висота (робоча) профілю різьби; πd_2 — довжина одного витка по середньому діаметру.

Умова міцності різьби на зріз

$$\tau_3 = Q/F_3 \leq [\tau_3],$$

де F_3 — площа зрізу витків нарізки; для гвинта $F_3 = \pi d_1 k H$; для гайки $F_3 = \pi d k H$, тут k — коефіцієнт, який враховує вид різьби і залежить від ширини основи витків нарізки (див. рис. 28.2 і 28.3): для метричної різьби для гвинта $k \approx 0,75$, для гайки $k \approx 0,88$, для трапецеїдальної $k \approx 0,65$, для прямокутної $k = 0,5$.

У стандартних виробках висота сталевих гайок $H = (0,7 \div 0,8) d$. При такій висоті міцність з'єднання визначається не різьбою, а міцністю стержня болта на розтяг. Тому різьбу на зминання і зріз

перевіряють лише для спеціальних виробів.

Розрахунок незатягнутих болтів. Розглянемо як приклад нарізану ділянку вантажного гака (рис. 28.15). Під дією зовнішньої сили Q стержень нарізаної частини працюватиме тільки на розтяг. Небезпечним є переріз ослаблений нарізкою. Площу цього перерізу визначають за розрахунковим діаметром $d_p = d - 0,9p$, де p — крок різьби.

Умова міцності для цього випадку

$$\sigma_p = \frac{Q}{F_p} = \frac{Q}{\pi d_p^2/4} \leq [\sigma_p].$$

З цієї формули можна визначити розрахунковий діаметр різьби:

$$d_p \geq \sqrt{4Q/(\pi [\sigma_p])}.$$

За знайденою величиною d_p визначають усі інші розміри відповідно стандартної різьби. Гайку також добирають за стандартом, але при потребі можна сконструювати спеціальну гайку.

Розрахунок затягнутого болтового з'єднання, не навантаженого зовнішньою силою. Прикладом такого з'єднання може бути кріплення кришки люка (рис. 28.16), яка не зазнає тиску рідини або газу. У розгляданому з'єднанні стержень болта розтягується силою затягування Q , кручується моментом, який дорівнює моменту M_p у різьбі.

Напруга розтягу

$$\sigma_p = \frac{Q}{\pi d_p^2/4}$$

Найбільша напруга кручення

$$\tau_k = M_k/W_p = M_p/W_p,$$

де $W_p = 0,2d_p^2$ — момент опору крученню болта.

Оскільки момент у різьбі $M_p = 0,5Qd_2 \operatorname{tg}(\psi + \varphi')$, то напруга кручення

$$\tau_k = 0,5Qd_2 \operatorname{tg}(\psi + \varphi')/(0,2d_2^3).$$

Еквівалентна напруга (за енергетичною теорією міцності)

$$\sigma_{\text{екв}} = \sqrt{\sigma_p^2 + 3\tau_k^2} \leq [\sigma_p].$$

Кут ψ підйому кріпильної різьби змінюється в межах від $1,5$ до 4° .

Зведений кут тертя $\varphi' = \operatorname{arctg} f'$ залежить від зведеного коефіцієнта

тертя в різьбі $f' = \frac{f}{\cos \alpha'}$, де f лежить у межах від $0,1$ до $0,3$:

Підставляючи середні значення ψ і φ' у формулу для τ_k і потім σ_p і τ_k у формулу для $\sigma_{\text{екв}}$, дістаємо для болтів з стандартною метричною різьбою

$$\sigma_{\text{екв}} \approx 1,3\sigma_p.$$

Тоді

$$\sigma_{\text{екв}} = \frac{1,3Q}{\pi d_p^2/4} = \frac{Q_{\text{розр}}}{\pi d_p^2/4} \leq [\sigma_p].$$

Отже, болт, який працює на розтяг і кручення, можна розраховувати як на розтяг за збільшеною в $1,3$ раза силою затягування: $Q_{\text{розр}} = 1,3Q$.

Розрахунок затягнутого болтового з'єднання, навантаженого зовніш-

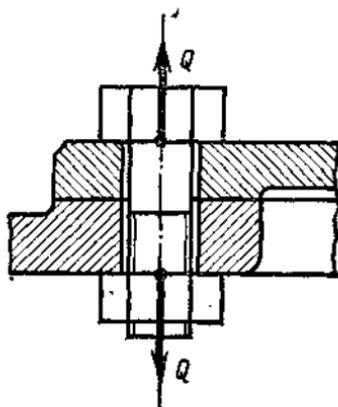


Рис. 28.16

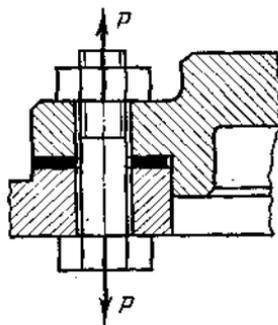


Рис. 28.17

ньою осьювою силою. Розглядуваний випадок болтового з'єднання стосується, наприклад, кріплення болтами чи шпильками фланців або кришок резервуарів, трубопроводів, циліндрів тощо, які працюють під тиском. З'єднання з попереднім затягуванням можуть бути з ущільнювальною прокладкою (рис. 28.17) або без неї. Основна вимога, яка ставиться

до такого з'єднання — не повинно бути зазора під час навантаження (щоб не розкрився стик).

Під час затягування з'єднання болти (або шпильки) видовжуються, а прокладка і фланці стискаються. Болт і з'єднувані деталі при цьому навантажені силою затягування Q . Потім до з'єднання прикладена зовнішня осьова сила P . Під дією цієї сили болт видовжиться. На таку саму величину зменшиться стиск з'єднуваних деталей і відповідно навантаження на болт з боку деталей зменшиться. Тому сумарне навантаження на болт $P_{\Sigma} < Q + P$. Оскільки зміна навантаження на болт з боку деталей пов'язана з силою P , умовились вважати, що частину сили P сприймає болт, решту — стик. Позначимо κ — коефіцієнт зовнішнього навантаження, що показує, яку частину зовнішнього навантаження P сприймає болт. Тоді

$$\kappa P \lambda_b = (1 - \kappa) P \lambda_d, \quad (28.2)$$

де λ_b — піддатливість болта, тобто його видовження під дією сили в 1 Н; λ_d — піддатливість з'єднуваних деталей. З (28.2) дістанемо

$$\kappa = \lambda_d / (\lambda_b + \lambda_d).$$

Якщо металеві деталі з'єднані без прокладок, то $\kappa = 0,2 \div 0,3$, а якщо з пружними прокладками, то $\kappa = 0,4 \div 0,5$.

Сумарна сила, яка розтягує болт,

$$P_{\Sigma} = Q + \kappa P.$$

Тиск у стикі деталей

$$P_{ск} = Q - (1 - \kappa) P.$$

Стик розкривається, коли $P_{ск} = 0$ або $(1 - \kappa) P = Q$. Щоб гарантувати надійність стиків, треба виконати умову

$$Q = \beta (1 - \kappa) P,$$

де β — коефіцієнт запасу: без прокладок при сталому зовнішньому навантаженні $\beta = 1,25 \div 1,5$ і при змінному зовнішньому навантаженні $\beta = 1,5 \div 4$. Щоб в з'єднаннях з прокладками досягти герметичності, коефіцієнт β рекомендується підвищувати до 4.

Вище було показано, що болти з попереднім затягуванням розраховують за збільшеною в 1,3 раза силою затягування Q . Крім того, треба врахувати частину зовнішньої сили P , яку сприймає болт; вона дорівнює κP . Розрахункова сила для болта розглядуваного з'єднання

$$Q_{розр} = 1,3Q + \kappa P,$$

а розрахунковий діаметр різьби болта

$$d_p \geq \sqrt{4Q_{розр} / (\pi [\sigma_p])}.$$

Розрахунок болтового з'єднання, навантаженого поперечною силою. Болтове з'єднання, навантажене поперечною силою, зображено на рис. 28.18. Щоб запобігти відносному зсуву з'єднуваних деталей, у місці стиків затяганням болтів треба створити відповідну силу тертя. Для гарантії сила тертя повинна перевищувати зсувну силу. Умова міцності з'єднання

$$Qzfk = \beta P,$$

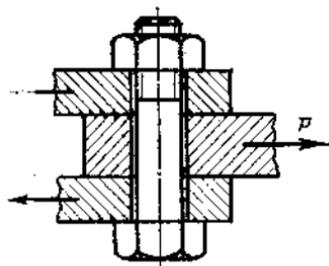


Рис. 28.18

де β — коефіцієнт запасу ($1,2 \div 1,3$); z — число болтів з'єднання; f — коефіцієнт тертя; k — число площин тертя (для схеми за рис. 28.18 $k = 2$). Тоді сила затягування одного болта

$$Q = \beta P / (f z k). \quad (28.3)$$

Розрахунковий діаметр різьби

$$d_p \geq \sqrt{4Q_{\text{розр}} / (\pi [\sigma_p])},$$

де $Q_{\text{розр}} = 1,3Q$.

Із співвідношення (28.3) видно, що сила затягування, потрібна для з'єднання, яке несе поперечне навантаження, значно перевищує зсувну силу P . Тому часто з'єднання розвантажують, встановлюючи шпонки (рис. 28.19) круглого (а) або прямокутного (б) пе-

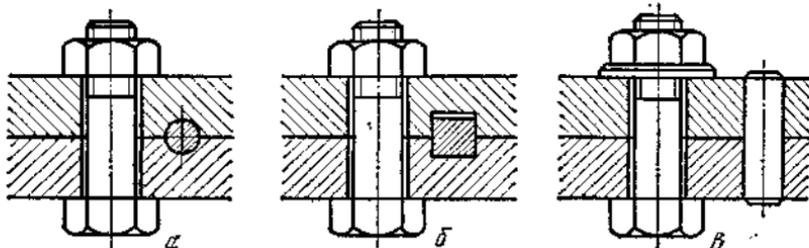


Рис. 28.19

рерізу, а також встановлюючи втулки або штифти, які запресовують у отвори в деталях (в).

Застосовують також болти, які встановлюють без зазора, що працюють на розрив і зминання (рис. 28.20). Умови міцності такого болта такі:

$$\tau_s = 4P / (\pi d_1^2 k) \leq [\tau_s] \quad \text{і} \quad \sigma_{зм} = P / F_{зм} = P / (d_1 s) \leq [\sigma_{зм}],$$

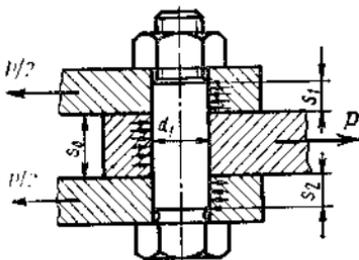


Рис. 28.20

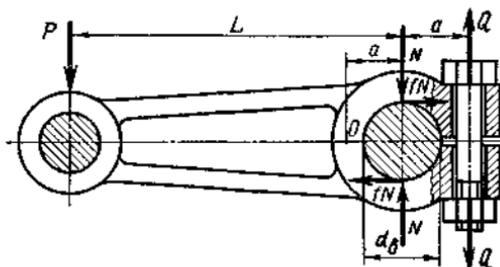


Рис. 28.21

d_1 — діаметр стержня болта; s — товщина однієї із з'єднаних деталей (якщо з двох $s = s_0$ або $s = s_1 + s_2$); k — число площин зрізу (для схеми рис. 28.20 $k = 2$).

Розрахунок клеюваних з'єднань. Клеювані з'єднання (рис. 28.21) застосовують для закріплення на валах або інших циліндричних стержнях кришки, важелів та інших деталей. Перевага клеюваних з'єднань у тому, що тут немає шпонок, а це допускає встановлення деталей у будь-якому

кутовому положенні і на будь-якому місці по довжині вала. Відносно нерухомості деталей клемового з'єднання досягають за рахунок тер деталей на поверхні з'єднання.

Умова передавання зовнішнього моменту від важеля до вала

$$\beta M = M_T,$$

де $M = PL$ — момент зовнішніх сил; β — коефіцієнт запасу, $\beta = 1, 2 \div 1,3$; $M_T = fNd_b$ — момент сил тертя на поверхні вала; f — коефіцієнт тертя, для сталі по чавуну $f = 0,15 \div 0,2$; N — нормальна сила; d_b — діаметр вала.

$$\text{Отже, } \beta M = fNd_b \text{ або } N = \beta M / (fd_b).$$

Припустимо, що половинки маточини клеми з'єднані з важелем напірно в точці O , і складемо для однієї половинки рівняння рівноваги не беручи до уваги тертя:

$$\Sigma M_0 = 0; \quad zQ2a - Na = 0,$$

де z — число болтів. Звідси сила затягування одного болта

$$Q = Na / (2az) = \beta M / (2fd_b z).$$

Оскільки болт при затягуванні силою Q зазнає скручування, то ро рахункове навантаження на болт

$$Q_{\text{розр}} = 1,3Q.$$

Звідси розрахунковий діаметр болта

$$d_p \geq \sqrt{4Q_{\text{розр}} / (\pi [\sigma_p])}.$$

Неважко помітити, що розрахункова форма для болтів, поставлені із зазором, у з'єднаннях усіх видів залишається тією самою.

Допустимі напруги для болтів. Допустимі напруги розтягу визначають залежно від границі текучості матеріалу болтів за формулою

$$[\sigma_p] = \sigma_T / [n],$$

де $[n]$ — допустимий коефіцієнт запасу міцності, який беруть при сталом навантаженні і неконтрольованій затяжці з табл. 28.1.

Таблиця 28.1

Матеріал болта	Діаметр болта		
	M6—M16	M16—M30	M30—M60
Вуглецева сталь	4—3	3—2	2—1,3
Легована сталь	5—4	4—2,5	2,5

Якщо затяжка контрольована, то беруть $[n] = 1,3 \div 2,5$. Допустимі напруги зрізу

$$[\tau_s] = (0,2 \div 0,3) \sigma_T.$$

Допустимі напруги змінання

$$[\sigma_{зм}] = 0,8\sigma_T.$$

Приклад 28.1. Визначити діаметр болтів для кріплення круглої кришки газового резервуара. Діаметр резервуара $D = 0,35$ м. Тиск газу $p = 1,1$ МПа. Болти розміщені по колу. Кількість болтів $z = 18$.

Розв'язання. Сила тиску газу на кришку

$$P = \pi D^2 p / 4 = 3,14 \cdot 0,35^2 \cdot 1,1 \cdot 10^6 / 4 = 106\,000 \text{ Н.}$$

Сила, яка діє на один болт,

$$P_1 = P / z = 106\,000 / 18 = 5880 \text{ Н.}$$

З умови герметичності з'єднання сила затягування одного болта

$$Q = \beta (1 - \kappa) P_1 = 1,5 (1 - 0,3) \cdot 5880 = 6170 \text{ Н,}$$

β — коефіцієнт запасу, $\beta = 1,5$; κ — коефіцієнт зовнішнього навантаження; без провідки беремо $\kappa = 0,3$.

Розрахункове навантаження $Q_{\text{розр}} = 1,3Q + \kappa P_1 = 1,3 \cdot 6170 + 0,3 \cdot 5880 = 9780 \text{ Н}$. Для сталі марки Ст3 з табл. 27.2 границя текучості $\sigma_T = 220 \text{ МПа}$. З табл. 28.1 $[n] = 3,5$, вважаючи, що діаметр болта не перевищує 16 мм. Тоді допустима напруженість

$$[\sigma_p] = \frac{\sigma_T}{[n]} = \frac{220}{3,5} = 60 \text{ МПа.}$$

Розрахунковий діаметр різьби болтів

$$d_p = \sqrt{4Q_{\text{розр}} / (\pi[\sigma_p])} = \sqrt{4 \cdot 9780 / (3,14 \cdot 60 \cdot 10^6)} = 0,0144 \text{ м} = 14,4 \text{ мм.}$$

Відповідно до стандарту беремо різьбу М18 з крутиним кроком $p = 2,5 \text{ мм}$, для якої $18 - 0,9 \cdot 2,5 = 15,75 \text{ мм}$.

§ 28.3. Шпонкові з'єднання

Шпонки призначені для передавання обертаючого моменту від вала до встановлених на ньому деталей (шківів, зубчастих коліс, маховиків, муфт тощо) або навпаки. Шпонки можна поділити на три основні види: приз-

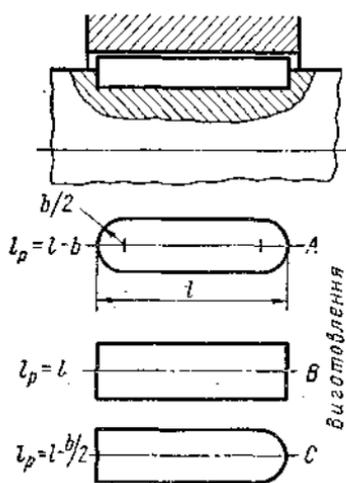
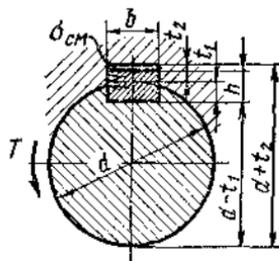


Рис. 28.22



матичні, сегментні і клинові. Розміри шпонок і допуски на їх виготовлення стандартизовані.

Призматичні шпонки за призначенням бувають: *звичайні* (виготовлення А, В і С, рис. 28.22), *призначені для нерухомих з'єднань* маточин з валами; *напрямні* трьох видів (рис. 28.23, а), які застосовують

коли маточини повинні мати можливість переміщатися вздовж вазні (рис. 28.23, б), які переміщуються вздовж вала разом з маточинами. Зміри пазів під шпонки і поперечних перерізів шпонок встановлюють за СТ СЭВ 189—75 залежно від діаметра вала. Довжину шпонки після запуску беруть із стандартного ряду, наведеного в СТ СЭВ 189—75.

Сегментні шпонки (рис. 28.24) встановлюють переважно на кінцевих ділянках валів циліндричної або конічної форми. Розміри сегментних шпонок беруть з таблиць стандарту залежно від діаметра вала. Сегментні шпонки зручні під час складальних робіт, але глибокий шпонковий паз дуже ослаблює вал. З'єднання призматичними і сегментними шпонками належить до ненапружених з'єднань.

Клинові шпонки (рис. 28.25) виготовляють з уклоном $1:100$. Розміри перерізів шпонок і пазів визначають за ГОСТ 8791—68. Клинок

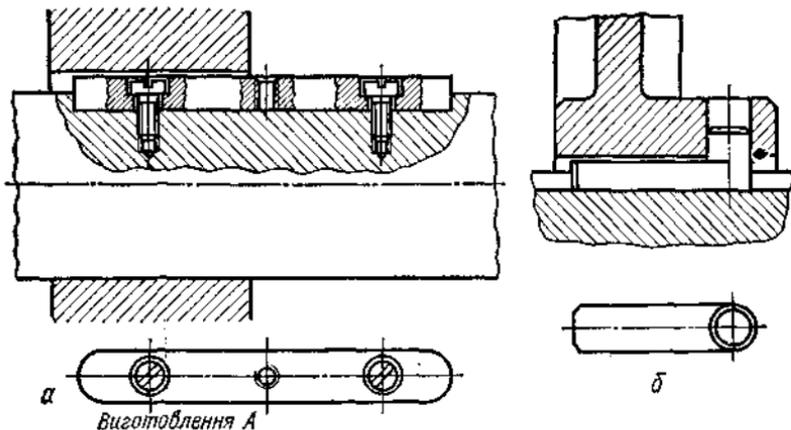


Рис. 28.23

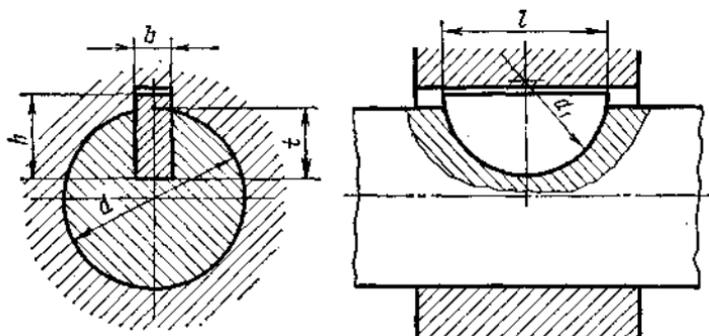


Рис. 28.24

шпонку ударами молотка запресовують між валом і деталлю, яку з нею з'єднують. При цьому утворюється напружене з'єднання, яке перед обертаючим моментом і, крім того, перешкоджає відносному зміщенню деталей уздовж вала. Останнім часом клинові шпонки використовують все менше, бо їх встановлення спричинює зміщення осі маточини шківів і маточини шестірівні відносно осі вала, що може бути причиною виникнення небажаного дисбалансу.

За способом розміщення на валах розрізняють клинові шпонки: врізні, на лисці, фрикційні і тангенціальні. Клинові врізні шпонки встановлюють у канавки (пази), зроблені у з'єднуваних деталях 1 і 2 (рис. 28.25). Клинову шпонку на лисці (рис. 28.26, а) встановлюють на плоскій з

вала — лиску, а паз роблять тільки в маточині деталі. Для фрикційної клинної шпонки на валу лиски не роблять (рис. 28.26, б). Тангенціальні шпонки (рис. 28.26, в) встановлюють широкою стороною дотично до обводу вала.

Іноді застосовують шпонки *круглі* (шпонки-штифти, рис. 28.27). Розміри перерізів стандартних шпонок підібрані відповідно до критерію зрізу, тому ненапружені шпонкові з'єднання перевіряють тільки відповідно до критерію зминання грані, яка виступає з вала. Умова міцності з'єднання має вигляд

$$\sigma_{зм} = F_t / F_{зм} \leq [\sigma_{зм}],$$

причому $F_t = 2T/d$, $F_{зм} = (h - t_1) l_p$.
Тоді

$$\sigma_{зм} = 2T / [d(h - t_1) l_p] \leq [\sigma_{зм}],$$

де F_t — колова сила, яку передає шпонка; T — обертаючий момент на валу; d — діаметр вала; $(h - t_1)$ — висота площадки зминання; l_p — робоча довжина шпонки (без закруглень кінців); $[\sigma_{зм}]$ — допустима напруга зминання менш міцного матеріалу з'єднання.

Для сегментної шпонки $\sigma_{зм} = 2T / [d(h - t) l] \leq [\sigma_{зм}]$.

В особливо важливих конструкціях призматичні і сегментні шпонки перевіряють на зріз за формулою

$$\tau_s = 2T / (dbl) \leq [\tau_s] = 60 \div 90 \text{ МПа}.$$

Якщо при заданій довжині шпонки умова міцності не виконується, то збільшують довжину маточини і відповідно довжину шпонки. Призма-

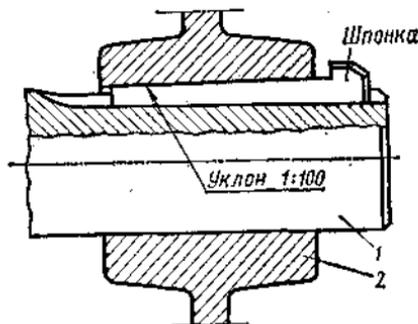


Рис. 28.25

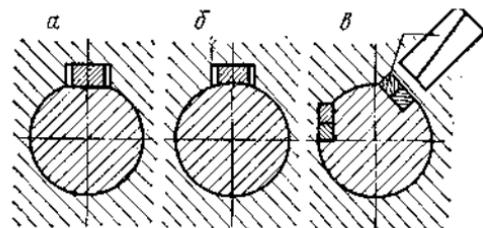


Рис. 28.26

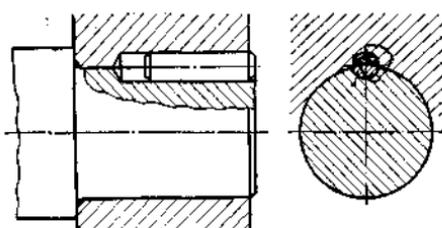


Рис. 28.27

тичні і клинові шпонки виготовляють з чистотягнутих прутків прямокутного перерізу, а сегментні — сегментного перерізу. Матеріалом є конструкційна вуглецева сталь з границею міцності не менше від 600 МПа (сталь 45, 50, Ст6 тощо). Допустимі напруги зминання встановлюють для нерухомих з'єднань при маточинах:

з чавуну $[\sigma_{зм}] = 60 \div 80 \text{ МПа}$;

з сталі $[\sigma_{зм}] = 90 \div 150 \text{ МПа}$.

Приклад 28.2. Підібрати призматичну шпонку для з'єднання зубчастого колеса з валом і перевірити міцність з'єднання. Матеріал колеса — сталь 40Х, матеріал шпонки — сталь 45, нормалізована. Діаметр вала $d = 55 \text{ мм}$. Передаваний момент $T = 300 \text{ Н} \cdot \text{м}$. Довжина маточини 70 мм.

Розв'язання. Два вала діаметром $d = 55$ мм за СТ СЭВ 189—75 вибираємо призматичну шпонку з розмірами: $b = 16$ мм, $h = 10$ мм, $l_1 = 6$ мм (виготовлення А). Довжину шпонки беремо $l = 63$ мм; $l_p = l - b = 63 - 16 = 47$ мм.

Напряга зминання в з'єднанні

$$\begin{aligned}\sigma_{зм} &= 2T/[d(h - l_1)l_p] = 2 \cdot 300/[55 \cdot 10^{-3}(10 - 6)10^{-3} \cdot 47 \cdot 10^{-3}] = 58 \cdot 10^6 \text{ Па} = \\ &= 58 \text{ МПа} \leq [\sigma_{зм}] = 90 \text{ МПа}.\end{aligned}$$

Міцність шпонкового з'єднання забезпечено.

§ 28.4. Шліцьові з'єднання

Шліцьові з'єднання можна уявити як багатошпонкові, в яких шпонки виготовлені як одне ціле з валом. Шліцьові з'єднання порівняно з шпонковими за інших однакових умов можуть передавати значно більші обертаючі моменти, забезпечують краще центрування з'єднуваних деталей і меншу концентрацію напруг у матеріалі вала і маточини. Цей вид з'єднань дуже поширився в автомобільній, тракторній, верстатобудівній та інших галузях промисловості. Залежно від профілю шліців розрізняють три типи з'єднань: прямобічні, евольвентні і трикутні. Перші два типи шліцьових з'єднань стандартизовані.

Прямобічні шліцьові з'єднання стандартизовані трьох серій (легка, середня і важка), які відрізняються висотою і кількістю шліців (від 6 до 20). Маточину по валу центрують за зовнішнім діаметром (рис. 28.28, а), внутрішнім діаметром (б) і бічними поверхнями шліців (в). Центрування за діаметрами забезпечує вищу співвісність вала і маточини. У важких умовах роботи надають перевагу центруванню за бічними поверхнями, що забезпечує рівномірніший розподіл навантаження по шліцах.

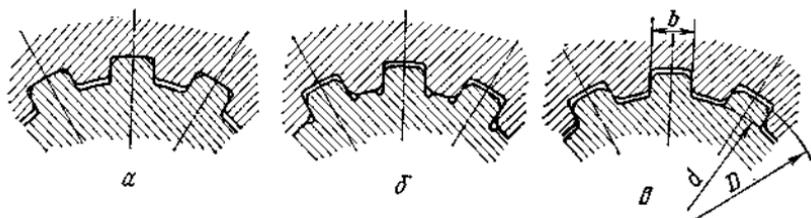


Рис. 28.28

З'єднання з евольвентними шліцями, бічні поверхні яких окреслені евольвентою (рис. 28.29), виконують з центруванням за бічними поверхнями і по зовнішньому діаметру вала. Прямобічні і евольвентні шліці застосовують у рухомих і нерухомих з'єднаннях.

З'єднання з трикутними шліцями (рис. 28.30) застосовують переважно як нерухомі в установках з незначними навантаженнями. Кількість і розміри шліців беруть залежно від діаметра вала.

Розрахунок навантажувальної здатності. Розрахунок прямобічних шліцьових з'єднань регламентований ГОСТ 21425—75 за критеріями зминання і спрацювання. Навантажувальна здатність з'єднання визначається як менше з двох значень, знайдених під час розрахунку на зминання і на спрацювання.

Розрахунок на зминання роблять за формулою

$$\sigma = T/(Sl) \leq [\sigma_{зм}],$$

де σ — середній тиск на робочих поверхнях; T — обертаючий момент, який передає з'єднання; S — питомий сумарний статичний момент площі робочих поверхонь з'єднання відносно осі вала (значення S , мм³, для стандартних прямобічних з'єднань наведені в таблиці згаданого вище ГОСТу); l — робоча довжина з'єднання; $[\sigma_{зм}]$ — допустимий середній тиск з розрахунку на зминання, який визначають залежно від границі текучості матеріалу шліців меншої твердості і коефіцієнтів запасу міцності, концентрації і динамічності навантаження, які беруть з таблиць стандарту.

Розрахунок на спрацювання роблять за такою самою формулою, як і на зминання:

$$\sigma = T/(Sl) \leq [\sigma_{спр}],$$

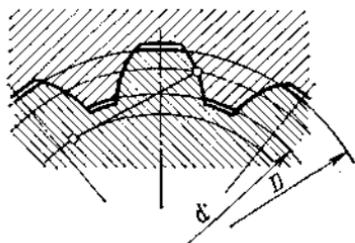


Рис. 28.29

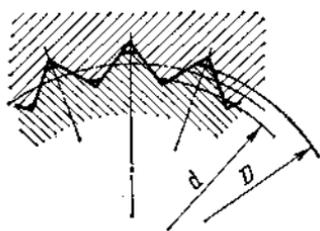


Рис. 28.30

де $\sigma_{спр}$ — допустимий середній тиск з розрахунку на спрацювання, який визначають з таблиць стандарту.

Якщо спрацювання практично не допускається, стандартом передбачений додатковий розрахунок, який враховує роботу без спрацювання при необмежено великій кількості циклів навантаження. Розрахунок навантажувальної здатності евольвентних шліцьових з'єднань не стандартизований; його роблять відповідно до критерію зминання за формулою

$$\sigma = T/(KzF_{зм}r_c) \leq [\sigma_{зм}],$$

де $K \approx 0,7 \div 0,8$ — коефіцієнт, який враховує нерівномірність розподілу навантаження між зубами; z — число зубів; $F_{зм}$ — площа зминання одного зуба; r_c — середній радіус зубів. Площу зминання і середній радіус евольвентних зубів визначають залежно від модуля m шліців, а саме:

$$F_{зм} = ml, \quad r_c = mz/2,$$

де l — робоча довжина з'єднання.

Значення допустимих напруг на зминання $[\sigma_{зм}]$ залежно від характеру з'єднання, режиму роботи, термообробки визначають з таблиць довідників; вони лежать у межах від 5 до 200 МПа.

Розділ XXIX

НЕРОЗНІМНІ З'ЄДНАННЯ ДЕТАЛЕЙ

Нерознімні з'єднання призначені для з'єднання деталей машин, різних металевих або неметалевих виробів машинобудування і приладобудування, а також для виготовлення складних металоконструкцій. До таких з'єднань належать заклепочні, зварні, клейові тощо.

§ 29.1. Заклепочні з'єднання

Заклепочні з'єднання застосовують для скріплення деталей, виготовлених з листового чи штабового матеріалу, або з фасонних прокатних профілів. У зв'язку з розвитком зварювання застосування заклепочних з'єднань значно зменшилось. Навіть такі важливі конструкції, як парові котли, резервуари, ферми підйомних кранів, виготовляють тепер зварними. Але заклепочні з'єднання ще застосовують, бо не для всіх матеріалів розроблено методи надійного зварювання. Заклепки тепер застосовують у літакобудуванні, кораблебудуванні, при будуванні мостів та в інших галузях техніки.

Заклепочне з'єднання утворюють *розклепуванням* стержня заклепки довжиною L і діаметром d , вставленої в отвір діаметром d_0 у з'єднуваних деталях (рис. 29.1), причому $d_0 = d + (0,2 \div 2)$ мм залежно від діаметра і точності складання.

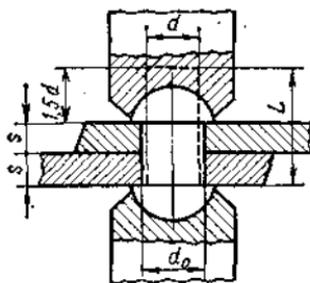


Рис. 29.1

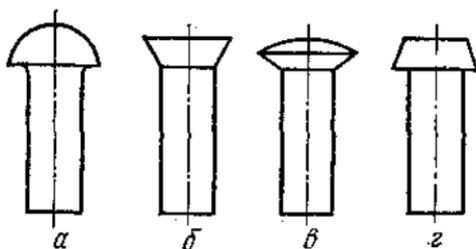


Рис. 29.2

Замикаюча головка заклепки утворюється внаслідок пластичної деформації частини стержня заклепки, яка виступає з отвору.

Отвори в деталях або продавлюють, або просвердлюють. Клепати можна вручну або механізованим способом (п евричними молотками, пресами тощо).

Стальні заклепки малого діаметра (до 12 мм) і заклепки з кольорових металів ставлять без нагрівання. Стальні заклепки з діаметром стержня понад 12 мм ставлять з нагріванням. Нагрівання заклепок перед клепаанням полегшує формування головки і поліпшує якість з'єднання.

Заклепки загального призначення нормальної точності стандартизовані. З них переважне застосування мають заклепки (рис. 29.2) з півкруглою головкою (а), з півпотайною головкою (б), з плоскою головкою (в). Для склепування тонколистових і неметалевих деталей застосовують порожнисті заклепки (рис. 29.3).

Для виготовлення заклепок застосовують маловуглецеву сталь Ст2 і Ст3, мідь, алюміній та інші метали залежно від матеріалів і конструкції склепуваних деталей. За призначенням розрізняють дві основні групи заклепочних з'єднань: міцні, які застосовують у металоконструкціях, і щільні, які застосовують у котлах і резервуарах для рідин і газів під тиском і забезпечують герметичність з'єднання.

Заклепочні з'єднання розрізняють за видом, кількістю робочих (зрізаних) перерізів заклепок і за їх розміщенням.

За видом заклепочні з'єднання бувають (рис. 29.4): напусткові (а), стикові з однією накладкою (б) і стикові з двома накладками (в).

За розміщенням заклепок розрізняють шви (рис. 29.5) однорядні (а) і багаторядні (б і в). У багаторядних швах заклепки можуть розміщуватися рядами або частіше в шаховому порядку. Крок t заклепок одного ряду, відстань e_1 між рядами і відстань e до краю листа вибирають залежно від типу шва і товщини з'єднуваних листів (див. с. 000).

За кількістю перерізів заклепок, які працюють на зріз, шви бувають (див. рис. 29.4) однозрізні (а і б) і двозрізні (в).

За кількістю перерізів заклепок, які працюють на зріз, шви бувають (див. рис. 29.4) однозрізні (а і б) і двозрізні (в).

За кількістю перерізів заклепок, які працюють на зріз, шви бувають (див. рис. 29.4) однозрізні (а і б) і двозрізні (в).

Розрахунок міцних заклепочних швів. Під дією зовнішнього навантаження заклепочний шов може зруйнуватися: може статися зріз заклепок (рис. 29.6, а), зминання листів і заклепок (рис. 29.6, б) або розрив листа в перерізі, ослабленому отворами під заклепки (рис. 29.7).

При склепуванні заклепки стискають листи, тому коли в з'єднанні діє зсувна сила P , то між листами виникає сила тертя. Але визначити силу тертя в заклепочному з'єднанні важко, тому в розрахунках її не беруть до уваги. Вважають, що метал заклепки цілком

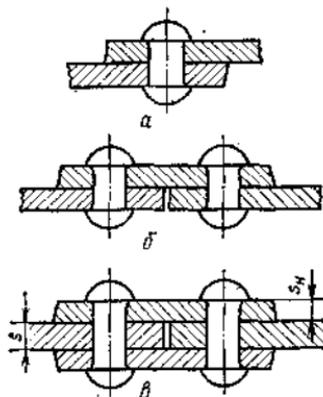


Рис. 29.4

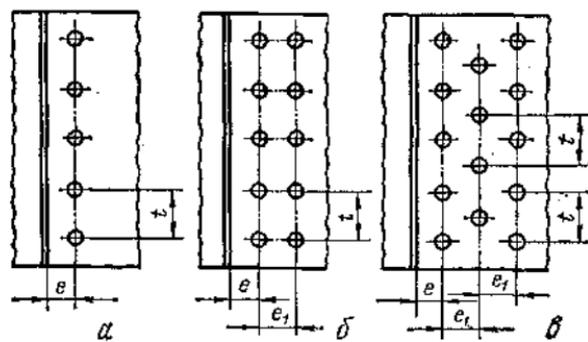


Рис. 29.5

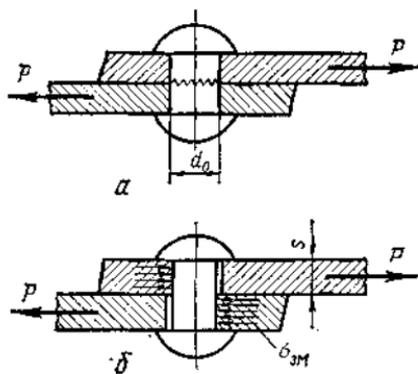


Рис. 29.6

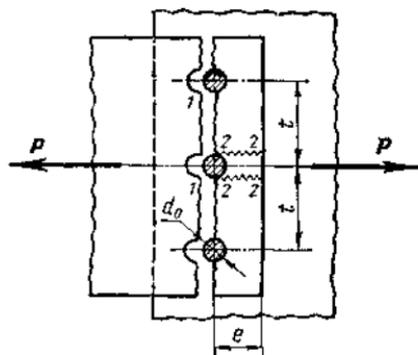


Рис. 29.7

заповнює отвір і перешкоджає відносному зсуву деталей. Вважають також, що зовнішнє навантаження розподіляється між заклепками рівномірно. Тоді умови міцності шва:

а) міцність заклепок на зріз (рис. 29.6, а)

$$\tau_s = P / \left(k \frac{\pi}{4} d_0^2 z \right) \leq [\tau_s],$$

де d_0 — діаметр отвору під заклепку; z — кількість заклепок шва; $[\tau_s]$ — допустима напруга на зріз для матеріалу заклепок; k — кількість площин зрізу заклепок шва;

б) міцність листів на зріз за двома перерізами 2—2 (рис. 29.7):

$$\tau'_s = P / \left[2s_{\min} \left(e - \frac{d_0}{2} \right) z \right] \leq [\tau'_s],$$

де τ'_s — допустима напруга на зріз для листів; e — відстань від осі заклепки до краю листа; s_{\min} — товщина найтоншого із з'єднуваних листів.

Тут довжину зрізу зменшено на $d_0/2$, бо спочатку відбувається зминання матеріалу на довжині $\approx d_0/2$, а потім вже зріз;

в) міцність листів на розрив по небезпечному перерізу I—I (рис. 29.7)

$$\sigma_p = P/[s_{\min}(t - d_0)z] \leq [\sigma_p];$$

г) міцність стінок отворів і заклепок на зминання (див. рис. 29.6, б)

$$\sigma_{зм} = P/(s_{\min}d_0z) \leq [\sigma_{зм}].$$

Величини допустимих напруг при сталому навантаженні можна брати з табл. 29.1.

Вид напруги	Марка сталі	
	Ст0, Ст2	Ст3
Зріз заклепок $[\tau_3]$, МПа	140	140
Зминання заклепок $[\sigma_{зм}]$, МПа	280	320
Розтяг з'єднуваних елементів $[\sigma_p]$, МПа	140	160
Зріз з'єднуваних елементів $[\tau'_3]$, МПа	90	100

Для заклепочних з'єднань з кольорових сплавів беруть:

$$[\sigma_p] = (0,4 \div 0,5) \sigma_T; \quad [\tau_3] = (0,25 \div 0,3) \sigma_T;$$

$$[\sigma_{зм}] = (1,5 \div 2,0) [\sigma_p].$$

Примітка. Якщо отвори продавлюють, то $[\tau_3]$ зменшують на 30 %, а $[\sigma_{зм}]$ — на 15 %.

Відповідно до рекомендацій з проектування заклепочних з'єднань встановлено такі співвідношення між параметрами шва: розрахунковий діаметр заклепок (діаметр отвору) $d_0 = (1,5 \div 1,2) s$; відстань від осевої лінії ряду заклепок до краю листа $e = (1,5 \div 2,0) d_0$; відстань між рядами заклепок дво- і багаторядних швів $e_1 = (2 \div 3) d_0$; крок заклепок $t = (3 \div 6) d_0$; товщина накладок $s_n \approx 0,75 s$ (при одній накладці $s_n = 1,25 s$).

Ослаблення листа отворами під заклепки характеризується коефіцієнтом міцності шва ϕ , який дорівнює відношенню площі перерізу, ослабленого отворами $F_{\text{нетто}}$, до площі перерізу без отворів $F_{\text{брутто}}$:

$$\phi = F_{\text{нетто}}/F_{\text{брутто}} = (t - d_0)s/(ts) = (t - d_0)/t.$$

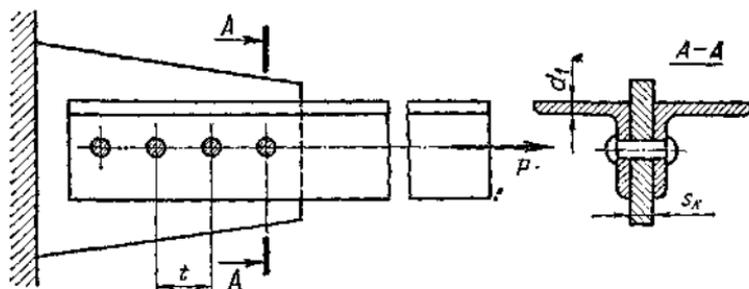


Рис. 29.8

Залежно від типу з'єднання коефіцієнт ϕ коливається в межах від 0,66 до 0,88. Так, наприклад:

для однорядного шва стикового з'єднання з двома накладками $\phi \approx 0,71$;

для дворядного шва стикового з'єднання з двома накладками $\phi \approx 0,83$;

для дворядного шва напусткового з'єднання $\phi \approx 0,75$.

Приклад 29.1. Стержень, який складається з двох рівнобоких кутників (рис. 29.8), навантажений розтягуючою силою $P = 200$ кН. Визначити номер профілю кутників і кількість заклепок. Матеріал стержня і заклепок — сталь Ст3. Отвори сверд-

лені. Навантаження статичне. Допустиме навантаження для матеріалу кутників $[\sigma_p] = 140$ МПа.

Розв'язання. Визначимо площу перерізу кутників:

$$F_{\text{брутто}} \geq P/(\varphi [\sigma_p]),$$

де φ — коефіцієнт міцності шва.

Задаючись спочатку $\varphi = 0,7$, дістаємо

$$F_{\text{брутто}} \geq 200 \cdot 10^3 / (0,7 \cdot 140 \cdot 10^6) = 0,00204 \text{ м}^2 = 20,4 \text{ см}^2.$$

Для одного кутника $F = 10,2 \text{ см}^2$. За ГОСТ 8509—72 беремо кутник 80×80 , в якого $F = 10,8 \text{ см}^2$, $d_t = 7$ мм. Розрахунковий діаметр заклепок $d_0 = 2,2 d_t = 2,2 \cdot 7 = 15,4$ мм. За ГОСТ 10299—68 беремо заклепки з діаметром стержня $d = 16$ мм. Діаметр отвору під заклепку $d_0 = 16,5$ мм.

Визначимо потрібну кількість заклепок з розрахунку на зріз, якщо число зрізів заклепок $k = 2$. Допустима напруга зрізу (табл. 29.1) дорівнює 140 МПа. Кількість заклепок

$$z = \frac{P}{k n d_0 [\tau_s] / 4} = \frac{200 \cdot 10^3}{2 \cdot 3,14 \cdot (16,5 \cdot 10^{-3})^2 \cdot 140 \cdot 10^6 / 4} = 3,3.$$

Беремо $z = 4$. Прийнявши товщину косинки $s_k = 2d_1 = 2 \cdot 7 = 14$ мм, перевіримо з'єднання на зминання:

$$\sigma_{\text{зм}} = P / (s_k d_0 z) = 200 \cdot 10^3 / (14 \cdot 10^{-3} \cdot 16,5 \cdot 10^{-3} \cdot 4) = 216 \cdot 10^6 \text{ Па} = 216 \text{ МПа}.$$

Міцність деталей достатня, бо для сталі Ст3 $[\sigma_{\text{зм}}] = 320$ МПа.

§ 29.2. Зварні з'єднання

Основні поняття, терміни і означення, що стосуються зварювання металів, регламентовані ГОСТ 2601—74.

Зварюванням називають процес виготовлення нерознімних з'єднань за допомогою встановлення міжатомних зв'язків між зварюваними частинами під час їх місцевого чи загального нагрівання або пластичного деформування. Таке з'єднання називають зварним. Зварювання поділяють на два основні види: зварювання плавленням і зварювання тиском.

Зварні з'єднання порівняно із заклепочними мають ряд переваг: економія металу від заміни клепанних конструкцій зварними до 20 % (від заміни лиття зварюванням досягають економії металу до 30 %); менша трудомісткість і можливість механізації технологічного процесу; можливість з'єднання деталей криволінійних обрисів; щільність з'єднань; безшумність технологічного процесу.

Є такі види зварних з'єднань: стикове (рис. 29.9), напусткове (рис. 29.10), кутове (рис. 29.11), таврове (рис. 29.12). Шов стикового з'єднання називають стиковим, шви решти трьох видів з'єднань називають кутовими. Кутові шви напусткового з'єднання (рис. 29.10) називають фланговими (а), якщо вони розміщені паралельно лінії дії прикладеної сили; лобовими (б), якщо вони розміщені перпендикулярно до лінії дії сили; косими (в), розміщеними під непрямым кутом до напрямку сили, і комбінованими (г).

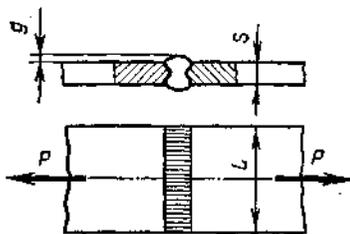


Рис. 29.9

Стикові шви розраховують на розтяг або стиск за номінальним перерізом з'єднаних елементів, не враховуючи підсилення g шва (див. рис. 29.9). Розрахункові формули мають вигляд

$$\sigma'_p = P/(sL) \leq [\sigma'_p] \quad \text{або} \quad \sigma'_{ск} = P/(sL) \leq [\sigma'_{ск}],$$

де P — діюча сила; s — товщина зварюваних деталей; L — розрахункова довжина шва; $[\sigma'_p]$ і $[\sigma'_{ск}]$ — допустимі напруги розтягу і стиску для металу шва.

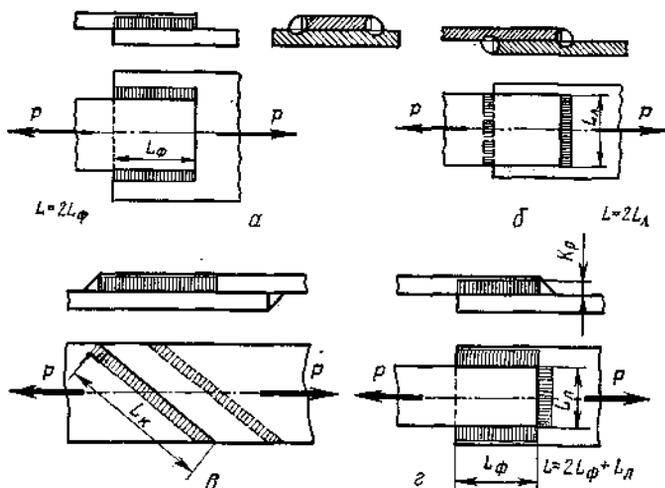


Рис. 29.10

Метал шва має менш однорідну структуру, ніж метал зварюваних деталей. Крім того, в зварних швах виникає концентрація напруг, тому допустимі напруги для розрахунку зварних швів беруть зниженими, у частках допустимих напруг для основного металу. Допустимі напруги (МПа) для основного металу і для матеріалу зварних швів наведено в табл. 29.2 і 29.3.

Таблиця 29.2

Матеріал	$[\sigma_p],$ $[\sigma_{ск}],$ $[\sigma_{sp}]$	$[\tau_3]$	$[\sigma_{зм}]$
Ст0, Ст2	140	90	240
Ст3	160	100	240

Таблиця 29.3

Спосіб зварювання	$[\sigma'_p]$	$[\sigma'_{ск}]$	$[\tau_3]$
Ручний електродом звичайної якості Автоматичний під шаром флюсу і ручний у середовищі захисного газу	$0,9 [\sigma_p]$	$[\sigma_{ск}]$	$0,6 [\sigma_p]$
	$[\sigma_p]$	$[\sigma_{ск}]$	$0,65 [\sigma_p]$

Основною розрахунковою характеристикою кутових швів є розрахунковий катет K_p (рис. 29.10, г; 29.11 і 29.12).

Допустима напруга для сталі Ст3 з табл. 29.2 $[\sigma_p] = 160$ МПа. Для ручного методу зварювання допустима напруга на зріз (з табл. 29.3):

$$[\tau'_3] = 0,6 [\sigma_p] = 0,6 \cdot 160 = 96 \text{ МПа.}$$

Підставивши значення P_1, P_2 $[\tau'_3]$ і беручи $K_p = d = 6$ мм, дістанемо:

$$l_1 = 144 \cdot 10^3 / (2 \cdot 0,7 \cdot 6 \cdot 10^{-3} \cdot 96 \cdot 10^6) = 0,178 \text{ м} = 178 \text{ мм}$$

$$2l = 56 \cdot 10^3 / (2 \cdot 0,7 \cdot 6 \cdot 10^{-3} \cdot 96 \cdot 10^6) = 0,069 \text{ м} = 69 \text{ мм.}$$

Округлюючи, беремо $l_1 = 180$ мм, $l = 35$ мм.

§ 29.3. Клейові з'єднання

У машинобудуванні дедалі частіше застосовують з'єднання металевих і неметалевих деталей різними клеями, виготовленими на основі синтетичних смол.

Клейові з'єднання мають такі переваги: можливість з'єднання деталей малої товщини і з різнорідних матеріалів, забезпечення герметичності і стійкості проти корозії. До недоліків клейових з'єднань належать: порівняно низька теплостійкість, зниження міцності деяких синтетичних матеріалів з часом, а також залежність міцності з'єднання від якості підготовки поверхні і режиму склеювання.

Клеї готують у вигляді спеціальних розчинів фенолформальдегідних, кремнійорганічних, епоксидних та інших синтетичних смол і сполук. Границя міцності клейового шва для випадків зсуву або відриву коливається від 10 до 60 МПа і залежить від конструкції з'єднання, марки клею і температури, при якій працює шов. При склеюванні неметалевих матеріалів звичайно досягають однакової міцності з'єднаних деталей і клейового шва. Але при склеюванні металів клейовий шов завжди значно менш міцний, ніж метал. Найміцнішими є такі з'єднання, які працюють тільки на відрив або тільки на зсув. За конструкцією клейові з'єднання схожі на зварні (рис. 29.14).

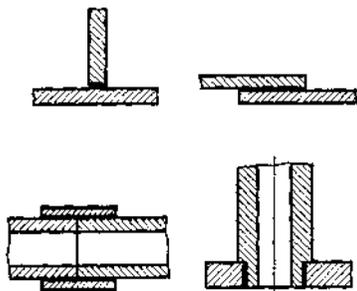


Рис. 29.14

Для клейових з'єднань деталей рекомендують:

епоксидний клей, що являє собою в'язку масу, до якої при склеюванні додають спеціальний порошок — наповнювач (фарфорове борошно або цемент). Клей з наповнювачем застосовують для склеювання легких металів, текстоліту з чавуном або сталями, а без наповнювача — для склеювання силікатного скла, фарфору або кераміки з металами або одного з одним. Поширеніший епоксидний клей марок АМ-1 й ЕД-6;

клей універсальний БФ (фенолополівінілацетальний), який випускають готовим до використання і застосовують для склеювання алюмінієвих і мідних сплавів, сталі, пластмас та інших неметалевих матеріалів у будь-якому їх поєднанні. Клей БФ створює захисний антикорозійний шар.

Поверхні склеюваних деталей повинні бути старанно оброблені, припасовані одна до одної, очищені від жиру і бруду. Щоб поліпшити склеювання, поверхні зачищають наждачною шкуркою, обдувають піском або застосовують інші способи.

Відділ другий

МЕХАНІЧНІ ПЕРЕДАЧІ

Розділ XXX

ПЕРЕДАЧІ В МАШИНАХ І МЕХАНІЗМАХ

Для приведення в рух робочих машин потрібна механічна енергія. Цю енергію від двигуна звичайно передає робочій машині обертовий вал. Слід зазначити, що обертальний рух дуже поширений у техніці. Механізми, які перетворюють обертальний рух у поступальний і в різні види складного руху, порівняно прості за конструкцією і мають відносно високий ККД. Проте безпосереднє з'єднання вала двигуна з валом робочої машини не завжди можливе і доцільне, тому між ними встановлюють проміжні пристрої, які називають *п е р е д а ч а м и*.

Призначення передач. Передачі встановлюють у таких випадках:

- 1) якщо швидкості валів робочої машини і двигуна не збігаються;
- 2) якщо треба періодично змінювати швидкість робочої машини при сталій швидкості двигуна;
- 3) якщо треба перетворити обертальний рух вала двигуна в зворотно-поступальний або інший рух робочого органа машини;
- 4) якщо безпосереднє з'єднання валів двигуна і робочої машини неможливе з міркувань безпеки, зручності обслуговування або з якихось інших причин.

Отже, під *п е р е д а ч а м и* розуміють пристрої, які дають змогу передавати енергію від двигуна до робочих органів машини, як правило,

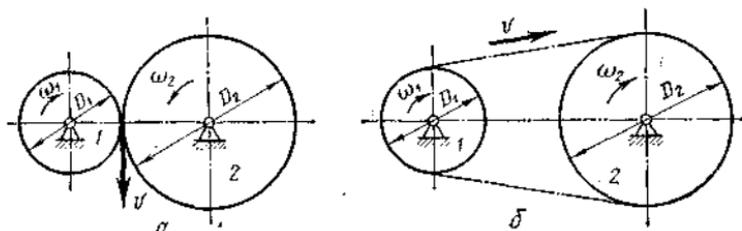


Рис. 30.1

з перетворенням обертаючих моментів, швидкостей, а іноді і характеру руху.

У сучасних машинах застосовують електричні, механічні, гідравлічні і пневматичні передачі. У курсі «Детали машин» розглядаються лише механічні передачі. У всіх механічних передачах вал і насаджені на нього деталі (зубчасті колеса, шків, котки тощо), які передають обертаючий момент (рис. 30.1), називають *в е д у ч и м и* (1), а деталі, які приводяться в рух від ведучих, — *в е д е н и м и*

(2). Між ведучим і веденим валами в багатоступінчастих передачах розміщені проміжні вали.

Класифікація механічних передач. Передачі класифікують за двома ознаками:

1. За способом передавання руху:

а) тертям — фрикційні, пасові, канатні;

б) зачепленням — зубчасті, черв'ячні, гвинтові, ланцюгові.

2. За способом з'єднання ведучої і веденої ланок:

а) безпосереднім стиканням — фрикційні, зубчасті, черв'ячні, гвинтові (рис. 30.1, а);

б) з додатковим зв'язком — пасові, ланцюгові (рис. 30.1, б).

Кожна із згаданих передач має свої характерні особливості і свою галузь застосування. Вибір передачі визначається величинами передаваної потужності, швидкостей, передаточним числом, ККД, відстанню між осями валів, а також габаритами і масою передавального механізму. Передачі виготовляють з сталим і змінним передаточним числом. Зміна передаточного числа може бути ступінчастою і безступінчастою. Передаточне число ступінчасто регулюють за допомогою набору зубчастих коліс або пасових передач із ступінчастими шківками, безступінчасто — за допомогою фрикційних або ланцюгових варіаторів.

Кінематичні і силові співвідношення в передачах. На рис. 30.1 схематично зображено дві механічні передачі із зміною і без зміни напрямку обертання. Якщо рух передається без відносного ковзання, то кутові швидкості коліс 1 і 2 будуть однаковими.

Як відомо з теоретичної механіки, передачі характеризують передаточним відношенням або числом:

$$u = \omega_1/\omega_2 = n_1/n_2 = D_2/D_1,$$

де ω_1 і ω_2 — кутові швидкості ведучого і веденого валів, рад/с; n_1 і n_2 — частота обертання валів, хв⁻¹; D_1 і D_2 — діаметри відповідно ведучої і веденої ланок передачі.

Якщо N_1 — потужність на ведучому валу передачі, N_2 — потужність на веденому валу, то внаслідок неминучих втрат завжди $N_1 > N_2$. Відношення потужності на веденому валу до потужності на ведучому валу називають механічним коефіцієнтом корисної дії (ККД) і позначають η :

$$\eta = N_2/N_1.$$

Механічний ККД передач лежить у межах від 0,25 до 0,98. Відомо, що потужність при обертальному русі

$$N = T\omega,$$

де T — обертаючий момент; ω — кутова швидкість. Оскільки $N_2 = N_1\eta$, то $T_2\omega_2 = T_1\omega_1\eta$ або

$$T_2 = T_1\eta\omega_1/\omega_2 = T_1u\eta.$$

У складних передачах, до яких входить кілька окремих передач, загальне передаточне число визначається як добуток передаточних чисел кожної з передач (кожного ступеня):

$$u = u_1u_2 \dots u_n,$$

де n — число ступенів. З теоретичної механіки відомо, що загальний ККД складної передачі (при послідовному з'єднанні ступенів) визначається за формулою

$$\eta = \eta_1 \eta_2, \dots, \eta_n,$$

де $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ — ККД, які враховують втрати в окремих кінематичних парах складної передачі (в зачелненнях коліс, в опорах валів тощо).

Розділ XXXI

ФРИКЦІЙНІ ПЕРЕДАЧІ

§ 31.1. Загальні відомості

Фрикційна передача складається з двох котків, насаджених на вали і притиснутих один до одного зовнішньою силою Q (рис. 31.1). Рух передається силою тертя F_T , яка виникає між котками і дорівнює коловій силі P :

$$F_T = P.$$

Щоб не було проковзування, стисканням котків створюють силу тертя, більшу від колової сили в k разів, де k — запас зчеплення ($k > 1$). Передачі розраховують за загальною залежністю

$$kP = F_T. \quad (31.1)$$

Перевага фрикційних передач — простота конструкції, плавність роботи, можливість проковзування робочих тіл під час перевантаження, що в аварійних випадках запобігає поломці машини; можливість плавної (безступінчастої) зміни передаточного числа. До недоліків передач належать підвищене спрацьовування робочих тіл, несталість передаточного числа, пов'язана з ковзанням; порівняно низький ККД; велике навантаження на вали і опори; обмежена величина передаваної потужності (до 20 кВт).

Фрикційні передачі застосовують у ковальсько-пресовому устаткуванні (фрикційні молоти і преси), у лебідках з фрикційним приводом, у конвейєрах, приладах, апаратах й у варіаторах різних типів і призначення.

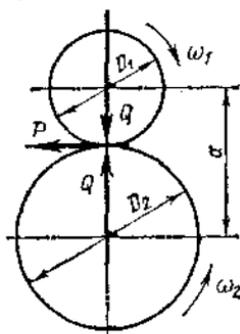


Рис. 31.1

Фрикційні передачі класифікують так:

1) за розміщенням валів: з *паралельними* валами (рис. 31.2, а, б, в), з *перехресними* осями валів (рис. 31.2, г, д, е) і *співвісні* (рис. 31.3);

2) за формою поверхні котків: *циліндричні*, *конічні*, *сферичні* і *тородальні*;

3) за способом передавання колової сили (рис. 31.2): *безпосереднім* *дотиком* (а, б, г—д) і за допомогою *проміжних деталей* (е);

4) за призначенням: з *сталю* або *змінною* кутовою швидкістю веденого вала. В цьому випадку передачі називають *варіаторами* (рис. 31.2, в, д, е, рис. 31.3).

Матеріали котків повинні мати такі властивості: високі стійкість проти спрацювання і поверхневу міцність, високі коефіцієнт тертя і модуль пружності (для зменшення відносного проковзування і втрат під час переміщення котків), мінімальну здатність до поглинання вологи. Для кот-

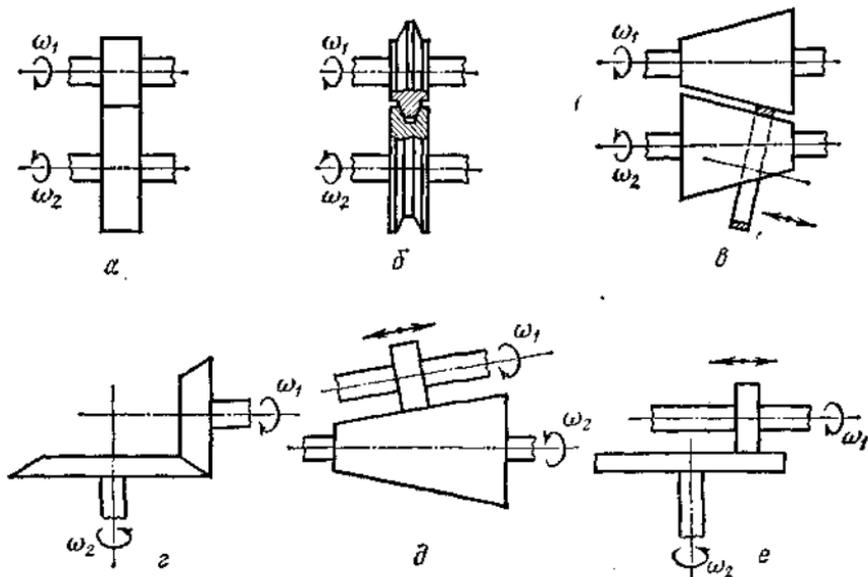


Рис. 31.2

ків фрикційних передач частіше застосовуються у поєднанні такі матеріали:

загартована сталь по загартованій сталі, звичайно сталь типу ШХ15 з термічною обробкою поверхні HRC60; така передача може працювати в масляній ванні або насухо;

чавун по чавуну; така передача може працювати з мастилом і насухо;

текстоліт або фібра по сталі або чавуну; у передачах з котками з цих матеріалів потрібні менші сили натискання завдяки високим значенням коефіцієнта тертя ковзання; такі передачі працюють насухо.

У фрикційних передачах використовують також шкіру, гуму, деревину, прогумовану тканину тощо. Котки з неметалевих матеріалів працюють насухо. Як правило, ведений коток рекомендується виготовляти з більш стійкого проти спрацювання матеріалу, щоб запобігти утворенню на ньому лисок, які виникають під час буксування передачі.

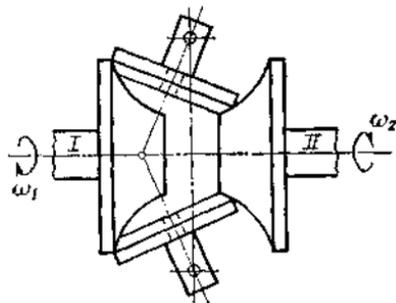


Рис. 31.3

§ 31.2. Циліндричні фрикційні передачі

На рис. 31.4 наведено схему фрикційної передачі з циліндричними котками. Величина сили притискання, потрібна для забезпечення сили тертя між котками, створюється за допомогою пружин.

Кінематика передачі. Під час роботи фрикційних передач неминуче відносне ковзання поверхонь котків і в зв'язку з цим відставання веденого котка від ведучого. Тому в передачах з циліндричними котками передаточне число визначають за формулою

$$u = n_1/n_2 = D_2/[D_1(1 - \varepsilon)],$$

де ε — коефіцієнт ковзання, який залежить від матеріалу котків і умов мащення. Для передач, які працюють насухо, $\varepsilon = 1,01 \div 0,02$, а з мастилом — $\varepsilon = 0,03 \div 0,05$. Величину коефіцієнта ковзання можна обчислити за формулою

$$\varepsilon = (v_1 - v_2)/v_1,$$

де v_1 і v_2 — колові швидкості на периферії ведучого і веденого котків.

Сила притискання котків. Якщо позначити через f коефіцієнт тертя ковзання між котками фрикційної передачі, притиснутими один до одного силою Q , то вираз (31.1) можна записати в такому вигляді:

$$kP = fQ,$$

звідки

$$Q = kP/f,$$

де k — коефіцієнт запасу зчеплення, $k = 1,25 \div 3$; $f = 0,04 \div 0,05$ — сталь по сталі або чавуну з мастилом; $f = 0,1 \div 0,15$ — сталь по сталі або чавуну насухо; $f = 0,2 \div 0,3$ — сталь або чавун по текстоліту насухо.

Колову силу P знаходять за заданим моментом T_1 на ведучому котку:

$$P = 2T_1/D_1.$$

Щоб зменшити силу Q притискання котків, треба брати матеріали з найбільшими коефіцієнтами тертя, маючи при цьому на увазі, що при колій швидкості $v > 7$ м/с робота насухо недопустима через швидке спрацьовування робочих поверхонь котків. ККД циліндричної передачі $\eta = 0,80 \div 0,95$.

Розрахунок передачі на контактну витривалість (для металевих і текстолітових котків). Котки контактують по вузькій площадці (рис. 31.5), розміщеній уздовж твірної робочої поверхні котків. Коли розміри площадки контакту малі порівняно з розмірами самих котків, то при значній силі притискання виникають великі контактні напруги. Як було показано в розд. XXVII, величина контактних напруг залежить від величини

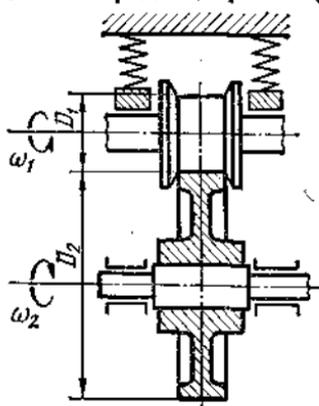


Рис. 31.4

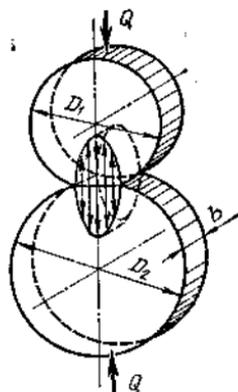


Рис. 31.5

прикладених сил, радіусів стичних котків і модулів пружності E_1 і E_2 матеріалів котків. Текстоліт, на відміну від інших неметалевих матеріалів, підпорядковується закону Гука, тому для текстолітових котків, як і для металевих, застосовують розрахунок на контактну витривалість. Найбільші контактні напруги, за формулою Герца,

$$\sigma_H = 0,418 \sqrt{q E_{зв} / \rho_{зв}} = \sqrt{Q E_{зв} / (b \rho_{зв})}, \quad (31.2)$$

де $q = Q/b$ — навантаження на одиницю довжини контактної лінії, Q — сила притискання котків; b — довжина лінії контакту (ширина котків); $E_{зв} = 2E_1E_2/(E_1 + E_2)$ — зведений модуль пружності матеріалу обох котків; $\rho_{зв}$ — зведений радіус кривизни котків.

Визначивши зведений радіус кривизни через радіуси котків R_1 і R_2 або через діаметр ведучого котка D_1 і передаточне число u , дістанемо

$$\rho_{зв} = (R_1 R_2) / (R_1 + R_2) = R_1 u R_1 / (R_1 + u R_1) = R_1 u / (1 + u) = D_1 u / 2(1 + u).$$

Позначимо міжосьову відстань a .

Тоді

$$a = (D_1 + D_2) / 2 = D_1 (u + 1) / 2,$$

звідки

$$D_1 = 2a / (u + 1).$$

Після підстановки значення D_1 у вираз для $\rho_{зв}$ і у формулу для Q (див. с. 255), в якій силу P визначимо через момент T_1 , дістанемо:

$$\rho_{зв} = au / (u + 1)^2; \quad Q = k T_1 (u + 1) / (fa).$$

Ввівши знайдені вирази в рівняння (31.2), дістанемо

$$\sigma_H = 0,418 \sqrt{E_{зв} k T_1 (u + 1)^3 / (f a^2 b u)} \leq [\sigma_H], \quad (31.3)$$

де T_1 — обертаючий момент на ведучому валу; $[\sigma_H]$ — допустима контактна напруга.

У такому вигляді формулу (31.3) використовують для перевірки розрахунків діючої передачі за певних значень a і b . Проектним розрахунком визначають міжосьову відстань a .

Замінимо у формулі (31.3) фактичну контактну напругу σ_H допустимою напругою $[\sigma_H]$. Щоб позбутися зайвої невідомої, ширину котків b визначимо через a :

$$b = \psi_a a.$$

Розв'язуючи рівність (31.3) відносно міжосьової відстані a , дістаємо

$$a = (u + 1) \sqrt[3]{\left[\frac{0,418}{[\sigma_H]} \right]^2 \frac{F_{зв} k T_1}{f \psi_a u}}, \quad (31.4)$$

де $\psi_a = b/a$ — коефіцієнт ширини котка, його беруть $\psi_a = 0,2 \div 0,4$. Ширина котків повинна бути $b \leq D_1$; цьому відповідає

$$\psi_a \leq 2 / (u + 1).$$

Коефіцієнт запасу зчеплення k треба брати:

для силових передач	1,25—1,5
для кінематичних передач (у приладах)	2,5—3,0

Інші розміри котків визначають за формулами: діаметри $D_1 = 2a(u + 1)$ і $D_2 = D_1u(1 - \epsilon)$; ширина $b = \psi_a a$.

Допустимі контактні напруги $[\sigma_H]$ встановлюють залежно від матеріалу котків, твердості робочих поверхонь і умов роботи передачі:

для загартованих до високої твердості сталевих котків, якщо вони працюють без мащення, $[\sigma_H] = 600 \div 800$ МПа;

для сталевих котків, якщо вони працюють у маслі $[\sigma_H] = (2,45 \div 2,95) H_B$, МПа (для загартованих сталей — більші значення, для незагартованих — менші);

для чавунних котків $[\sigma_H] \approx 1,5 \sigma_{ТМ}$;

для текстолітових котків $[\sigma_H] = 100 \div 120$ МПа.

Передаточне число u для однієї пари котків можна брати:

силові передачі	≤ 7
передачі приладів	≤ 25

Розділ XXXII

ЗУБЧАСТІ ПЕРЕДАЧІ

§ 32.1. Загальні відомості

Зубчасті передачі — найбільш поширений тип механічних передач. Вони призначені для передавання обертального руху, перетворення обертального руху в поступальний або навпаки. Зубчаста передача складається з двох коліс або колеса і рейки, на поверхні яких чергуються западини і виступи — зуби. Умовимось надалі менше зубчасте колесо зчеплюваної пари називати шестірнею, а більше — колесом.

Усі терміни, означення і позначення, які тут і далі застосовуються і стосуються зубчастих передач, відповідають ГОСТ 16530—70 «Передачі зубчасті», ГОСТ 16531—70 «Передачі зубчасті циліндричні» і ГОСТ 19325—73 «Передачі зубчасті конічні».

Основні переваги зубчастих передач: високий коефіцієнт корисної дії (до 0,98), компактність порівняно з фрикційними і пасовими передачами,

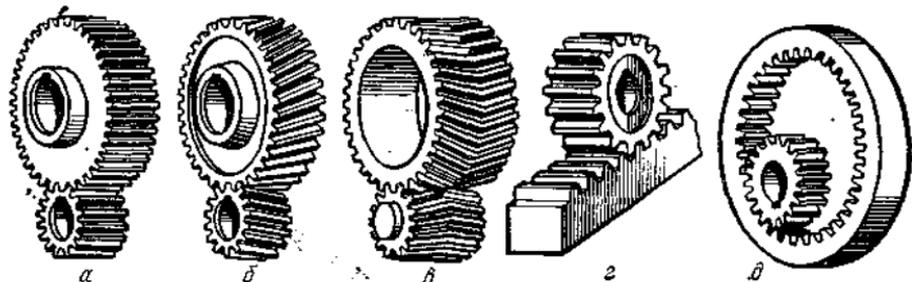


Рис. 32.1

сталість передаточного числа, великий діапазон передаваних потужностей (від десятків часток до десятків тисяч кіловат) при різних частотах обертання, порівняно незначні сили тиску на вали і опори. Недоліком зубчастих передач є шум, особливо при високих кулових швидкостях, спричинений пересполученням зубів, похибками виготовлення і роботою підшипників кочення.

Зубчасті передачі і колеса класифікують:

1. За взаємним розміщенням осей коліс: циліндричні з паралельними осями, причому зачеплення може бути як зовнішнім, так і внутрішнім (рис. 32.1, а, б, в, д); конічні з перехресними осями (рис. 32.2, е); гіпоїдні конічні передачі з перехресними осями (рис. 32.3); рейкові для перетворення обертального руху шестірні в поступальний рух рейки і навпаки (рис. 32.1, г). Крім того, застосовують циліндричні передачі з перехресними осями, які називають гвинтовими (див. рис. 32.19). Зубчаста передача, міжосьовий кут якої дорівнює 90° , називається ортогональною.

2. За розміщенням зубів відносно твірної коліс: прямозубі (рис. 32.1, а і 32.2, а); з гвинтовими зубами — циліндричні

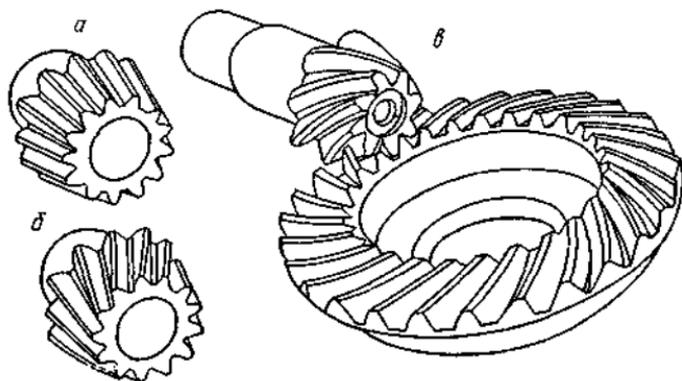


Рис. 32.2

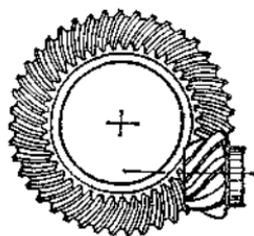


Рис. 33.3

(косозубі — рис. 32.1, б, шевронні — рис. 32.1, в), конічні з косими (рис. 32.2, б) і криволінійними зубами (рис. 32.2, в). При переході від прямозубих передач до непрямозубих підвищується плавність роботи, зменшується шум і збільшується навантажувальна здатність.

3. За формою профілю зубів: евольвентні, циклоїдальні і кругові (зачеплення Новикова).

4. За конструктивним оформленням: відкриті — передачі, не закриті непроникним корпусом, не захищені від пилу і бруду; закриті — передачі, розміщені в спеціальному корпусі, захищеному від проникнення пилу зовні, з постійним змащуванням з масляної ванни корпусу (занурюванням) або з мастилом, яке надходить до місць зачеплення зубів (змащування поливанням).

§ 32.2. Геометрія циліндричної евольвентної зубчастої передачі з прямими зубами

У теорії механізмів і машин доведено основну теорему зубчастого зачеплення, за якою для сталості передаточного числа пари зубчастих коліс їх зуби повинні мати обрис кривих, в яких спільна нормаль, проведена через точку дотику профілів, завжди проходить через одну й ту саму точку на лінії центрів; цю точку називають

поллюсом зачеплення. Цю вимогу задовольняють багато кривих, але поширеніший евольвентний профіль.

Евольвентою називають криву, яку описує будь-яка точка прямої, що перекочується, не ковзаючись, по нерухомому колу. Так, наприклад, точка A прямої MM (рис. 32.4) опише евольвенту. Довжина кола, яку проходить точка її контакту з прямою MM , завжди дорівнює довжині цієї прямої від точки дотику з колом до евольвенти (наприклад, дуга $A_1C_1 = A_2C_2$). Коло діаметра D_B , по якому перекочується пряма MM (твірна пряма), називають основним. Для побудови профілю зуба використовують частину евольвенти.

Евольвентна передача.
Розглянемо передачу, складену з коліс з зубами евольвентного профілю. Схему її зображено на рис. 32.5. Осі обертання коліс проходять через

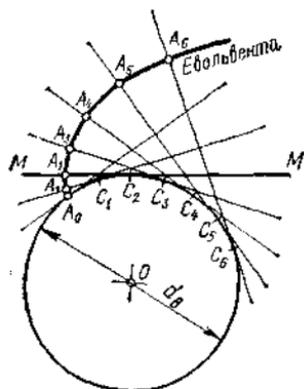


Рис. 32.4

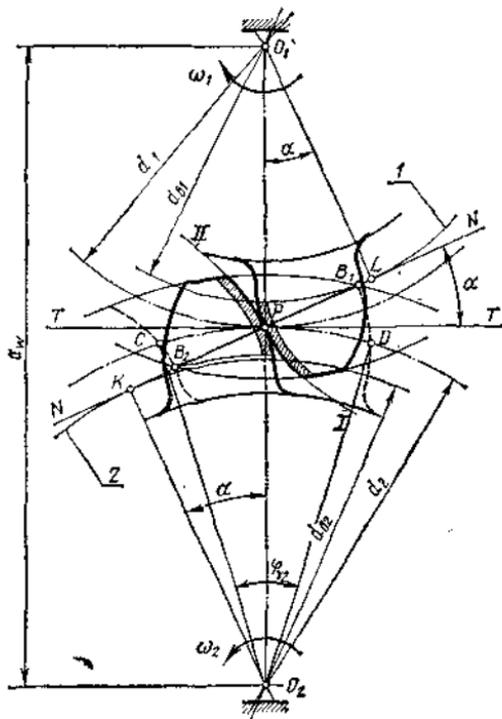


Рис. 32.5

точки O_1 і O_2 . Позначимо на лінії O_1O_2 точку P , через яку проведемо під деяким кутом до лінії центрів пряму NN . З точок O_1 і O_2 опустимо перпендикуляри на лінію NN і знайденими радіусами O_2K і O_1L проведемо кола I і 2 , дотичні до лінії NN . Утворені кола є основними, а пряма NN — твірна. Тоді під час перекошування прямої NN по кожному з основних кіл її точки опишуть евольвенти I і II .

Твірна пряма — NN — це спільна нормаль до обох евольвент у точці їх дотику. Під час обертання основних кіл разом з своїми евольвентами I і II точка дотику цих евольвент переміщується по прямій KL , яку називають лінією зачеплення.

Нормаль KL завжди проходить через ту саму точку P на лінії центрів O_1O_2 , яку називають полюсом зачеплення. У полюсі зачеплення дотикаються одне до одного два кола радіусів O_1P і O_2P , які перекошуються одне по одному без проковзування; ці кола називають початковими. Якщо відстань a_w між осями коліс змінюється, то радіуси почат-

кових кіл також змінюються, бо a_w дорівнює сумі радіусів цих кіл. Для окремо взятого зубчастого колеса поняття початкового кола не має змісту, оскільки початкове коло — поняття кінематичне.

Якщо одне з коліс замінити стандартною зубчастою рейкою (рис. 32.6), то для другого колеса залишиться лише одне коло, яке ковтається по початковій прямій рейки без ковзання; це коло зубчастого колеса називають ділильним. Саме ділильне коло визначає основні параметри зубчастої передачі; його діаметр позначають d . Якщо міжосьова відстань передачі точно дорівнює сумі радіусів ділильних кіл, то початкові і ділильні кола збігаються. Далі розглянуто саме таке зачеплення. Спільна дотична $T—T'$ (див. рис. 32.5) до початкових кіл і лінія зачеплення $K—L$ утворюють кут α , який називають кутом зачеплення; його стандартне значення для евольвентних зачеплень $\alpha = 20^\circ$.

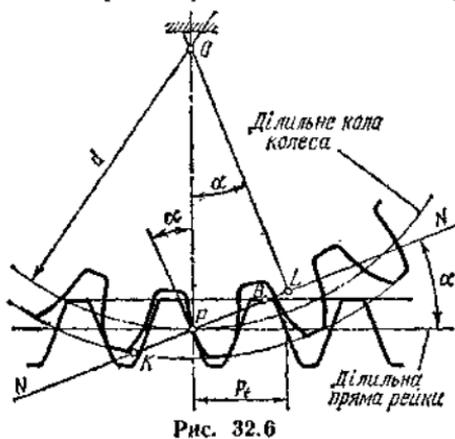


Рис. 32.6

Використовувані ділянки евольвент обмежені колами вершин зубів.

Ділянка лінії зачеплення, яка лежить між цими колами (від точки B_1 до точки B_2), називається активною лінією зачеплення. Якщо побудувати профілі тієї самої пари зубів на початку зачеплення (у точці B_1) і в кінці зачеплення (у точці B_2), то точки B_1 і B_2 визначають нижні точки активних профілів зубів обох коліс. На рис. 32.5 активні профілі зубів заштриховані.

Якщо колеса повертаються на кут, у межах якого точка контакту зубів проходить шлях від початку до кінця зачеплення, то точки початкового кола кожного з коліс опишуть дуги однакової довжини. Кожна така дуга CD відповідає куту повороту колеса від положення входу в зачеплення його зуба до виходу з зачеплення. Такий кут називають кутом перекриття зубчастого колеса передачі; його позначають φ_v (див. рис. 32.5). Центральний кут τ , який дорівнює $2\pi/z$ або $360^\circ/z$, називають кутом одним кроком зубів, де z — кількість зубів колеса (рис. 32.7). Відношення кута перекриття зубчастого колеса передачі до його кутового кроку називають коефіцієнтом перекриття; його позначають ϵ_α :

$$\epsilon_\alpha = \varphi_v / \tau.$$

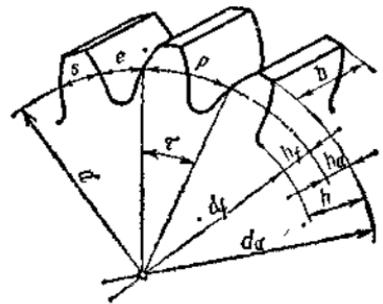


Рис. 32.7

Для безперервності зачеплення необхідно, щоб виконувалась умова $\epsilon_\alpha > 1$ або $\epsilon_v > 1$. Якщо ця умова не виконується, то пара зубів, яка перебуває у зачепленні, вийде з нього раніше, ніж ввійде в зачеплення наступна пара. Це спричинить удари і переривчастість у роботі передачі.

Елементи зубчастого колеса. Окремі елементи зубчастого колеса (рис. 32.7) мають такі назви: коло діаметра d_a називають колом вершин зубів, а коло діаметра d_f — колом западин. Діаметри d_a і d_f відповідно називають діаметром вершин зубів і діаметром западин зубчастого колеса.

Радіальну відстань h між колами вершин зубів і западин зубчастого колеса називають висотою зуба, яку ділять на дві частини; h_a — висота головки і h_f — висота ніжки. Відстань, виміряну по дузі діляльного кола між однойменними точками профілів двох сусідніх зубів колеса, називають коловим кроком зубів і позначають p . Крок зубів складається з колових товщини зуба s і ширини западини e .

Якщо колесо має z зубів і крок дорівнює p , то довжина діляльного кола дорівнює zp . З другого боку, ця довжина дорівнює πd , де d — діаметр діляльного кола колеса. Прирівнявши один до одного ці вирази і розв'язавши відносно d , знайдемо

$$d = zp/\pi.$$

Для зручності визначення основних розмірів зубчастих коліс введено параметр, який називають модулем зубчастого зачеплення і позначають m :

$$m = p/\pi.$$

Модуль m стандартизований; його вимірюють у міліметрах. Значення модуля встановлено СТ СЭВ 310—76, витяги з якого (модулі для циліндричних і конічних передач) наведено в табл. 32.1.

Таблиця 32.1

Модулі, мм			
1-й ряд	2-й ряд	1-й ряд	2-й ряд
1	1,125	5	5,5
1,25	1,375	6	7
1,5	1,75	8	9
2	2,25	10	11
2,5	2,75	12	14
3	3,5	16	18
4	4,5	20	22

Примітка. Залежно від призначення величинам модулів 1-го ряду слід надавати перевагу перед 2-м.

Основні параметри прямозубих коліс виражають через модуль; крок зачеплення $p = \pi m$,

діаметр діляльного кола (рис. 32.7) $d = mz$.

Висоту головок зубів приймають такою, що дорівнює модулю: $h_a = m$, а висоту ніжок $h_f = 1,25m$. Тоді висота зубів h дорівнює

$$h = h_a + h_f = 2,25m.$$

Діаметр вершин зубів

$$d_a = d + 2h_a = mz + 2m = m(z + 2).$$

Діаметр западін

$$d_f = d - 2h_f = mz - 2 \cdot 1,25m = m(z - 2,5).$$

Різниця висот ніжок зубів одного колеса і висот головок зубів іншого потрібна для утворення радіального зазора c :

$$c = h_f - h_a = 0,25m.$$

Товщина зубів s і ширина западін e теоретично дорівнюють одна одній. Практично між зубами, що зачіпляються, є невеликий бічний зазор (він визначається граничними відхиленнями розмірів), який компенсує можливі неточності виготовлення і складання.

Найбільшу відстань між торцями зубів колеса називають шириною вінця і позначають b . Міжосьову відстань циліндричної зубчастієї передачі, яка дорівнює півсумі ділільних діаметрів зубчастих коліс при зовнішньому зачепленні (або піврізниці при внутрішньому), називають ділільною міжосьовою відстанню і позначають a . Міжосьову відстань a двох зчіплюваних прямозубих коліс визначають за формулою

$$a = \frac{d_1}{2} + \frac{d_2}{2} = \frac{mz_1}{2} + \frac{mz_2}{2} = m \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

Передаточне число і ККД передачі. Початкові кола (див. рис. 32.5) обох коліс перекочуються одне по одному без проковзування, тому з умови рівності колових швидкостей точок, які належать початковим колам, можна написати

$$O_1P \cdot \omega_1 = O_2P \cdot \omega_2.$$

Величину передаточного числа можна визначити з такого співвідношення:

$$u = \omega_1/\omega_2 = O_2P/O_1P.$$

Передаточне число можна знайти, користуючись відношенням діаметрів ділільних кіл ($d_1 = mz_1$ і $d_2 = mz_2$):

$$u = d_2/d_1 = z_2/z_1.$$

Отже, щоб визначити передаточне число u зубчастієї передачі, досить знати кількість зубів коліс. Рекомендовані значення передаточних чисел зубчастих коліс наведено в табл. 32.2.

Таблиця 32.2

Тип передачі	Значення	
	часто застосовуване	найбільше
Циліндричними колесами:		
закрита	2—4	6,3
відкрита	4—7	12,5
Конічними колесами:		
закрита	2—3	5
відкрита	3—5	6,3

Щоб мати передачу з передаточним числом, більшим від зазначених норм, застосовують дво- або багатоступінчасті передачі.

Величина ККД зубчастої передачі визначається втратами на тертя в зачепленні, які враховуються коефіцієнтом η_s (табл. 32.3), втратами в опорах (підшипниках), які враховуються коефіцієнтом η_n , і втратами на розбризкування і переміщення масла, що враховуються коефіцієнтом η_p , який вводять, проектуючи редуктори. Загальний ККД передачі

$$\eta = \eta_s \eta_n \eta_p.$$

Втрати на тертя в підшипниках можна брати в межах (для однієї пари підшипників): $\eta_n = 0,96 \div 0,98$ для підшипників ковзання, $\eta_n = 0,99 \div 0,995$ для підшипників кочення. Втрати на перемішування і розбризкування масла в корпусі $\eta_p = 0,98 \div 0,99$.

Таблиця 32.3

Середні значення ККД зубчастих зачеплень η_s

Тип передачі	Закрита в (масляній ванні)	Відкрита
Зубчаста циліндрична	0,97—0,98	0,95
Зубчаста конічна	0,96—0,97	0,94

Стандарт СТ СЭВ 641—77 встановлює для евольвентних прямозубих і косозубих зубчастих коліс і передач 12 ступенів точності; найвищий — перший ступінь. Для кожного ступеня точності зубчастих коліс і передач встановлено норми: кінематичної точності, плавності роботи і контакту зубів.

Норми кінематичної точності колеса встановлюють величину повної похибки кута повороту за один оберт; норми плавності встановлюють величину складових повної похибки кута повороту, які багато разів повторюються за один оберт; норми контакту встановлюють повноту прилягання бічних поверхонь зубів. Незалежно від ступеня точності зубчастих коліс і передач встановлюють шість видів спряжень зубчастих передач, які мають різний гарантований бічний зазор; їх позначають *A, B, C, D, E, H*. Точність виготовлення конічних зубчастих коліс регламентує СТ СЭВ 186—75. Зубчасті передачі загального призначення в основному виготовляють за 5—9-м ступенем точності.

Проектуючи зубчасті передачі, число зубів колеса треба брати не меншим від $z_{\min} = 17$. Для дуже тихохідних і ручних передач (наприклад, для лебідок) допускається $z_{\min} = 10$. У зубчастих передачах загального машинобудування менше колесо беруть із $z = 20 \div 25$ зубами. Кількість зубів дуже впливає на форму зуба і його міцність. Як видно з рис. 32.8, зі зменшенням кількості зубів колеса зменшується товщина зуба біля основи і вершини і збільшується кривизна евольвентного профілю, що приводить до зменшення міцності зуба.

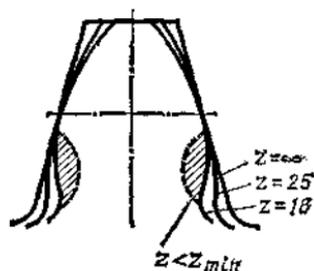


Рис. 32.8

§ 32.3. Циліндричні передачі з косими і шевронними зубами

Для колових швидкостей $v > 2$ м/с доцільно застосовувати косозубі колеса, бо в разі більших швидкостей прямозубі циліндричні колеса працюють задовільно лише при високій точності виготовлення.

Колеса косозубих і шевронних передач (див. рис. 32.1, б, в) мають більшу навантажувальну здатність, ніж прямозубі, менше шумлять і створюють менше додаткових динамічних навантажень. Це пояснюється великою сумарною довжиною контактних ліній зачеплених коліс. У косозубих коліс зуби нахилені відносно осі колеса на деякий кут β (рис. 32.9 і 32.10) і утворюють гвинтові поверхні, причому напрям гвинтових ліній зубів у двох спряжених коліс протилежний.

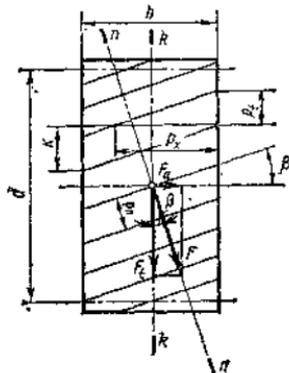


Рис. 32.9

Шевронні колеса виготовляють двох типів: без доріжки (рис. 32.10, а) і з доріжкою (рис. 32.10, б) між вінцями. Зуби коліс без доріжки нарізують або пальцевими фрезами методом копіювання, або спеціальними довбачами методом обкатування. Колеса з доріжкою нарізують звичайними черв'ячними фрезами.

Далі розглядатимемо косозубі колеса, але все, що буде про косозубі колеса, стосується і шевронних, крім деяких питань, про які йтиметься окремо. У косозубих колесах розрізняють (див. рис. 32.9): *к о л о в и й* *к р о к* зубів p_t , який вимірюють по дузі ділильного кола в перерізі,

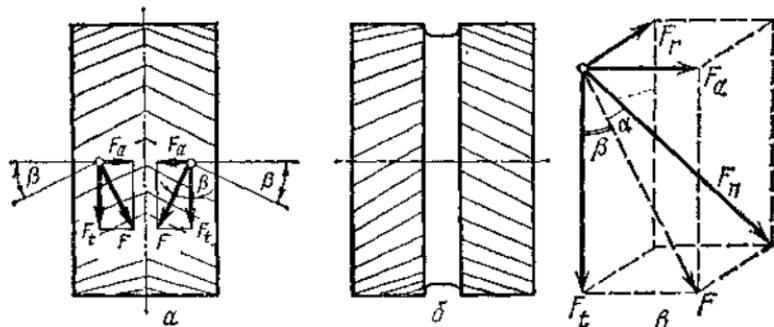


Рис. 32.10

перпендикулярному до осі колеса, наприклад, в перерізі $k - k$; *н о р м а л ь н и й* *к р о к* p_n , який вимірюють по лінії перетину поверхні ділильного циліндра з площиною, нормальною до напрямку зуба, наприклад, $n - n$; *о с ь о в и й* *к р о к* p_x , який вимірюють по твірній ділильного циліндра.

Лінійну величину, у λ разів меншу, ніж відповідний крок, називають *м о д у л ь м* *з у б і в* (коловий модуль m_t , нормальний модуль m_n , осьовий модуль m_x).

Коловий і нормальний крок і модуль пов'язані такими співвідношеннями:

$$p_t = p_n / \cos \beta, \quad m_t = m_n / \cos \beta.$$

Оскільки косозубі колеса нарізують тими самими інструментами, що і прямозубі, то стандартні параметри зачеплення дістають в н о р м а л ь -
 то м у п е р е р і з і. При цьому для косозубих коліс стандартизований
 нормальний модуль m_n ; для шевронних — також m_n , а в деяких випадках
 головний модуль m_t . Висота головки зуба $h_a = m_n$, висота ніжки $h_f =$
 $1,25m_n$, радіальний зазор $c = 0,25m_n$.

Розміри косозубих коліс визначають за такими формулами:

$$\text{ділительний діаметр } d = m_t z = m_n z / \cos \beta;$$

$$\text{діаметр вершин } d_a = d + 2h_a = d + 2m_n;$$

$$\text{діаметр западин } d_f = d - 2h_f = d - 2,5m_n;$$

міжосьова відстань

$$a = m_t (z_1 + z_2) / 2 = m_n (z_1 + z_2) / (2 \cos \beta).$$

Передаточне число u косозубої передачі визначають так само, як і
 прямозубої. Чим більший кут β нахилу зубів, тим плавніше працює пе-
 редача; проте із збільшенням цього кута зростає і осьова сила. Тому, як
 правило, беруть $\beta = 8 \div 15^\circ$. Кут нахилу лінії зубів β для шевронних
 передач беруть у межах від 25 до 35° (рідко до 45°). У косозубих передач
 коефіцієнт перекриття ϵ_v складається з двох частин: коефі-
 цієнта торцевого перекриття ϵ_a і коефіцієнта осьового пе-
 рекриття ϵ_β , причому

$$\epsilon_v = \epsilon_a + \epsilon_\beta,$$

де

$$\epsilon_a = \left[1,88 - 3,2 \left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} \right) \right] \cos \beta, \quad \epsilon_\beta = b/p_x. \quad (32.7)$$

Конструюючи косозубі передачі, треба передбачити коефіцієнт осьо-
 вого перекриття $\epsilon_\beta \geq 1$. Звичайно, ϵ_β беруть так, щоб він дорівнював ці-
 лому числу 1, 2, ... Ширина b вінця косозубого колеса повинна задоволь-
 нити нерівність

$$b \geq p_x = p_n / \sin \beta \quad \text{або} \quad b \geq \pi m_n / \sin \beta.$$

Сумарна довжина контактних ліній під час роботи косозубої передачі
 коливається від $0,95l_\Sigma$ до l_Σ , де

$$l_\Sigma = b \epsilon_a / \cos \beta. \quad (32.8)$$

Еквівалентні колеса. Міцність зуба косозубого колеса визначається
 його розмірами і формою в нормальному перерізі. Щоб використати фор-
 мули, виведені для прямозубих коліс, форму зуба в нормальному перерізі
 визначають через параметри е к в і в а л е н т н о г о колеса (рис. 32.11).

Нормальний до зуба переріз колеса має форму е л і п с а з півосями
 a і c , причому $a = d / (2 \cos \beta)$, $c = d / 2$. Максимальний радіус кривизни
 лінійса (при зачепленні зубів у полюсі)

$$\rho_v = a^2 / c = d / (2 \cos^2 \beta).$$

Тоді діаметр еквівалентного колеса

$$d_v = 2\rho_v = d / \cos^2 \beta.$$

Якщо в цей вираз підставити $d_v = m_n z_v$ і $d = m_n z / \cos \beta$, то дістанемо
 число зубів еквівалентного колеса (еквівалентне число зубів)

$$z_v = z / \cos^3 \beta.$$

Параметри d_0 і z_0 еквівалентного колеса зростають із збільшенням кута нахилу зубів β , що є однією з причин підвищення міцності косозубих коліс.

Сили в зачепленні. Силу нормального тиску F_n в зачепленні косозубих коліс можна розкласти на трискладові — колову F_t , осьову F_a і радіальну F_r :

$$F_t = 2T/d; \quad F_a = F_t \operatorname{tg} \beta; \quad F_r = F_t \operatorname{tg} \alpha = F_t \operatorname{tg} \alpha / \cos \beta \quad (\text{рис. 32.10, в}).$$

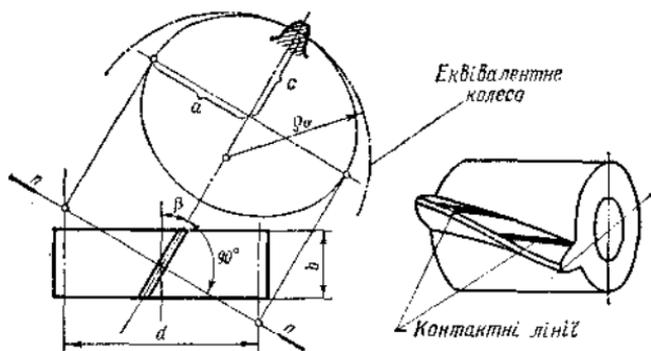


Рис. 32.11

У шевронній передачі (див. рис. 32.10, а) внаслідок протилежного напрямку спіралі зубів осьові сили зрівноважуються в самому колесі. У прямозубих колесах кут нахилу зубів $\beta = 0$, $\operatorname{tg} \beta = 0$ і $\cos \beta = 1$. Тоді, сили в зачепленні: осьова $F_a = 0$, радіальна $F_r = F_t \operatorname{tg} \alpha$.

§ 32.4. Матеріали і термічна обробка зубчастих коліс

Матеріали для виготовлення зубчастих коліс вибирають залежно від вимог, які ставляться до розмірів і маси передачі, а також залежно від потужності, колової швидкості і потрібної точності виготовлення коліс. Основним матеріалом для виготовлення зубчастих коліс більшості машин є сталі:

вуглецеві звичайної якості марок Ст5 і Ст6,

вуглецеві якісні марок 35, 40, 45, 50, 50Г;

леговані конструкційні марок 35ХГС, 40Х, 40ХН, 35ХМА та ін.

Для коліс великих діаметрів (понад 500 мм) застосовують виливки з вуглецевих сталей марок 35Л, 45Л, 55Л при колових швидкостях до 5 м/с і з легуваних сталей марок 40ХНТЛ, 35ГЛ, 35ХГСЛ та інших при швидкостях понад 5 м/с. Сталь для заготовок коліс може бути у вигляді прокату, поковок і сталюого литва. Щоб підвищити міцність і твердість зубів, їх піддають термічній і хіміко-термічній обробці (поліпшенню об'ємному і поверхневому гартуванню, цементації, ціануванню, азотуванню і нітроцементації).

При поліпшенні твердість робочої поверхні зубів $\leq \text{HB } 350$, а при інших видах термічної обробки $> \text{HB } 350$.

Під час термічної обробки відбувається залишкова температурна деформація коліс (так зване жолоблення, поводка), що знижує точності зубчастого вінця. Точність втрачається при об'ємній термічній обробці на 2—3 ступені, при поверхневому гартуванні середньовуглецевих сталей.

з нагріванням СВЧ (струмами високої частоти) — на 1,5—2 ступені, при поверхневому гартуванні, після цементування, азотування або нітроцементзації — на 0,5—1,5 ступеня. При твердості коліс $< HB\ 350$ чистову обробку зубів виконують фрезеруванням, довбанням, шевінгуванням, а при вищій твердості — шліфуванням, тому чистове нарізування зубів поліпшуваних коліс роблять після термічної обробки, що виключає шліфування.

Чавуни застосовують для виготовлення тихохідних, переважно відкритих передач, а також передач з ручним приводом, які працюють при колових швидкостях до 3 м/с. Для виготовлення зубчастих коліс застосовують: сірі чавуни марок СЧ 15—35, СЧ 18—36, СЧ 21—40 та ін.; модифіковані чавуни марок МСЧ 23—43, МСЧ 32—52 та ін.; високоміцні магнієві чавуни з кулястим графітом ВЧ 45—0, ВЧ 50—165 і ін.

Кольорові метали (переважно сплави міді) широко застосовують у приладобудуванні.

Зубчасті колеса з неметалевих матеріалів звичайно використовують у парі з металевими (сталйними або чавунними) в слабконавантажених передачах для забезпечення безшумної роботи, самозмашуваності або хімічної стійкості. Такими матеріалами можуть бути текстоліт, деревношаруваті пластики, капрон або поліформальдегід. З наявних марок текстоліту слід вибрати найміцніші ПТ або ПТК, а з марок деревношаруватих пластиків — ДСП-Г із зірчастим розміщенням шарів шпону, тобто з волокнами кожного шару, зміщеними на кут 25—30°.

Вибираючи матеріали, треба мати на увазі, що число навантажень за одиницю часу зубів малого колеса передачі (шестірні) в n разів більше за число навантажень більшого колеса i , отже, зуби шестірні зазнають більшого числа навантажень. Співвідношення твердості робочих поверхонь зубів шестірні і колеса не можна брати довільно. Якщо твердість робочих поверхонь зубів колеса $\leq HB\ 350$, то з метою вирівнювання довговічності зубів шестірні і колеса, прискорення їх припрацювання і підвищення опірності заїданню твердість поверхонь зубів шестірні завжди беруть більшою за твердість зубів колеса.

Для прямозубих коліс різниця середньої твердості шестірні і колеса повинна становити не менш як 20 одиниць за Брінеллем, тобто

$$HB_{1c} - HB_{2c} \geq 20.$$

Для косозубих передач бажано, щоб твердість робочих поверхонь зубів шестірні була якомога більша. Чим більша твердість зубів шестірні, тим більша несуча здатність передачі, виходячи з критерію контактної витривалості. Для зубчастих передач з твердими робочими поверхнями зубів обох коліс ($\geq HR\ C45$), які не припрацьовуються, різниця твердостей зубів шестірні і колеса не потрібна. Для виготовлення шестірні і колеса рекомендується використовувати сталь однакової марки, але з термічною обробкою до різної твердості.

§ 32.5. Види руйнування зубів

Під час роботи передачі зуби зазнають нормальних навантажень, які діють тривалий час, а також короткочасних статичних чи ударних навантажень. Діючі навантаження спричиняють у перерізі зубів згинальні

напруги, а на робочій поверхні зубів — контактні напруги. За кожний оберт колеса кожний зуб один раз навантажується. Тому і згинальні, і контактні напруги циклічно змінюються від нуля до максимуму. Крім того, під час роботи передачі профілі зубів ковзають один по одному, що впливає з таких міркувань.

Вектори колових швидкостей v_1 і v_2 спільної точки контакту S шестірні і колеса (рис. 32.12), які зачіплюються, мають модулі $v_1 = \omega_1 \cdot O_1S$ і $v_2 = \omega_2 \cdot O_2S$. Проекції v_{N1} і v_{N2} швидкостей v_1 і v_2 на профільну нормаль

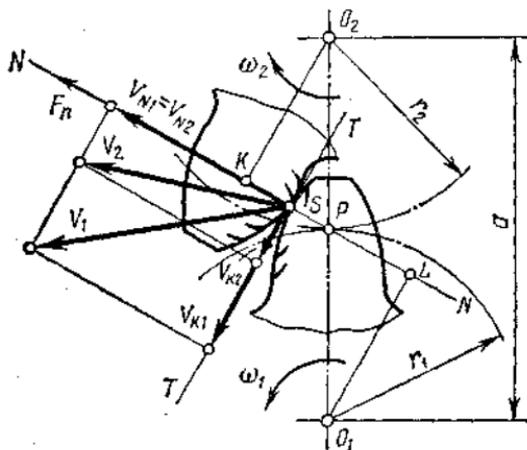


Рис. 32.12

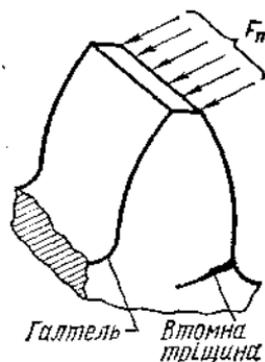


Рис. 32.13

$N - N$ повинні бути однакові за величиною. Коли $v_{N1} \neq v_{N2}$, зачеплення порушується.

Проекції v_{K1} і v_{K2} швидкостей v_1 і v_2 на профільну дотичну $T - T$ до поверхонь зубів різні за величиною. Різницю величин v_{K1} і v_{K2} спричинює відносне ковзання профілів зубів шестірні і колеса. Відносне ковзання поверхонь зубів зумовлює виникнення сили тертя

$$F_T = F_n f,$$

де F_n — сила взаємодії зубів коліс передачі; f — коефіцієнт тертя ковзання.

У зв'язку з викладеним у практиці експлуатації зубчастих передач трапляються такі види руйнування зубів. Від перевантаження статичної або ударної дії: ламання зубів, пошкодження робочих поверхонь зубів (пластична течія поверхневих шарів або крихке їх руйнування). Від змінних згинальних і контактних напруг: ламання зубів від втомленості, викришування робочих поверхонь зубів від втомленості. Крім того, зуби спрацьовуються, їх заїдає.

Якщо зуби ламаються від втомленості, то спочатку біля основи зуба, де волокна розтягнуті, виникає тріщина (рис. 32.13) від втомленості. Ця тріщина від повторної дії навантажень збільшується, а потім зуб ламається.

Викришування від втомленості — найчастіша причина виходу з ладу коліс закритих зубчастих передач, які працюють з багатим змащуванням. Змінні контактні напруги, які перевищують границю витрива-

лості, призводять до утворення на поверхні зубів мікротріщин. На рис. 32.12 показано напрям мікротріщин на поверхні ведучих і ведених зубів. Під час роботи зубчастої передачі в мікротріщини потрапляє масло. Сили, які діють у зачепленні, підвищують тиск масла в тріщині, розміщеній на поверхні ніжки зуба, внаслідок чого розміри її збільшуються і нарешті шматочки металу відшаровуються і викришуються (рис. 32.14, а). У відкритих передачах поверхня зубів від втомленості не викришується, бо вони швидше механічно спрацьовуються.

С п р а ц ю в а н н я зубів коліс внаслідок потрапляння в зачеплення пилю, бруду, дрібною металевою стружкою називають **а б р а з и в н и м**. При цьому початковий евольвентний профіль зубів спотворюється, змен-

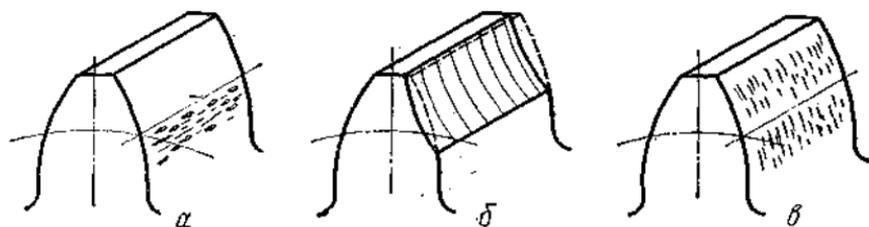


Рис. 32.14

шується їх поперечний переріз (рис. 32.14, б), збільшуються зазори в зачепленні, зростають динамічні навантаження і шум. Якщо спрацьовані зубчасті колеса не замінити новими, то зуби можуть поламатися.

З а ї д а н н я (рис. 32.14, в) трапляється у дуже навантажених передачах. В результаті великого тиску від підвищення температури і зменшення в'язкості масла масляні плівки розриваються і тужавіє метал. При цьому утворюються задири на робочих поверхнях у напрямі ковзання зубів.

Враховуючи можливі види руйнування зубів коліс, їх розраховують на згинальну і контактну витривалість і на статичну згинальну і контактну міцність.

§ 32.6. Розрахункове навантаження

Як розрахункове навантаження для визначення міцності зубчастих передач за ГОСТ 21354—75 беруть питому середню колову силу

$$\omega_t = F_t K_B K_v / b, \quad (32.3)$$

де F_t — колова сила, яку передають колеса; b — ширина колеса; K_B — коефіцієнт нерівномірності розподілу навантаження по довжині зуба; K_v — коефіцієнт динамічності навантаження.

Основні причини нерівномірного навантаження по довжині зуба такі: відхилення від паралельності і перекіс осей обертання валів, похибки в напрямі зубів, нахил під дією навантаження пружної лінії валів під зубчастими колесами, деформація кручення вала-шестірні.

Симетричне розміщення колеса відносно опор вала не дає перекосу зубчастих коліс від прогину валів (рис. 32.15). У випадку несиметричного і консольного розміщення зубчасті колеса перекошуються на деякий кут, що порушує правильність дотикання зубів. Внаслідок пружності зубів

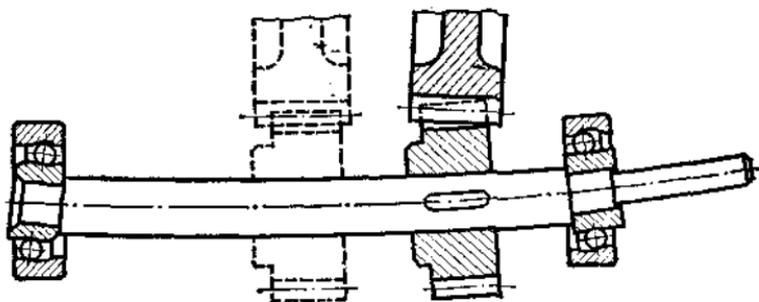


Рис. 32.15

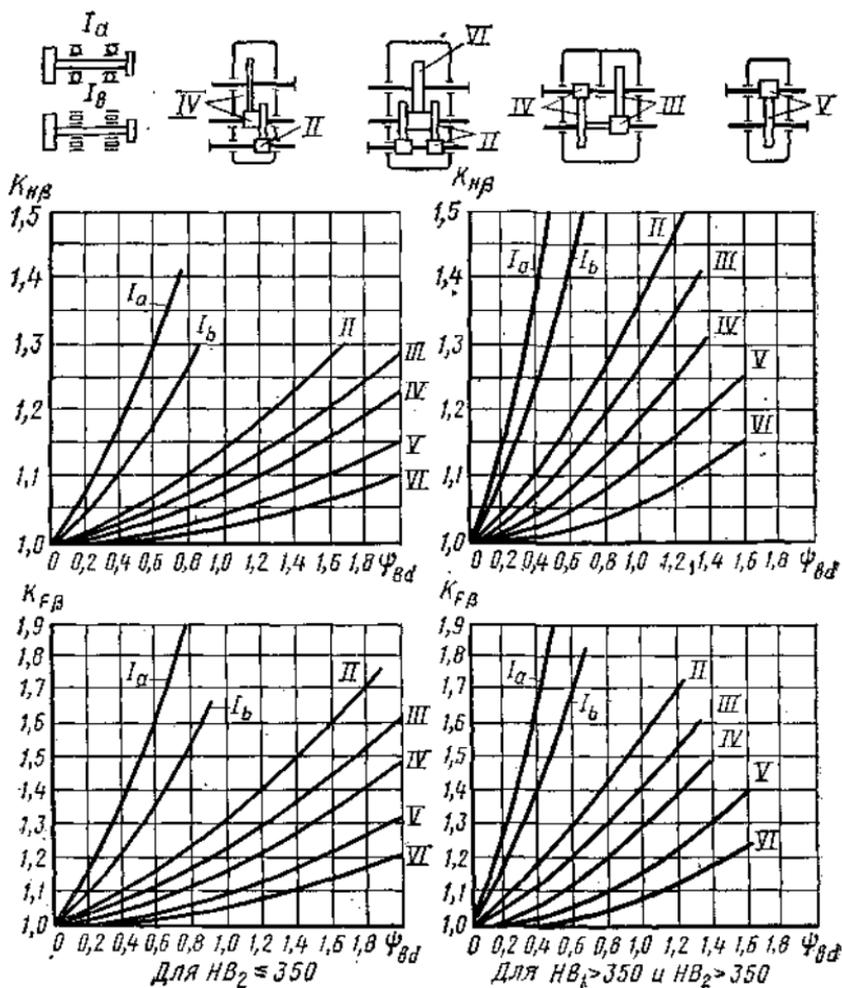


Рис. 32.16

їх контакт звичайно зберігається по всій довжині, але навантаження при цьому розподіляється нерівномірно. Вплив перекосу зубів посилюється із збільшенням ширини зубчастого вінця. Коли твердість матеріалу коліс \leq HB 350, то нерівномірність навантаження з часом зменшується внаслідок припрацьовування зубів. Якщо твердість зубів $>$ HB 350 або коліс швидкості $v > 15$ м/с, то вплив припрацювання зубів проявляється слабо. Для наближеної оцінки коефіцієнта K_B можна скористатися графіками, наведеними на рис. 32.16.

Вплив нерівномірності розподілу навантаження на міцність зубів різних по контактних і згинальних напругах (коефіцієнти $K_{H\beta}$ і $K_{F\beta}$ на рис. 32.16). Кожна з кривих на графіках відповідає певному положенню коліс відносно опор на валах передач, схеми яких показано у верхній частині рис. 32.16. Графіки розроблено для поширеного на практиці режиму роботи із змінним навантаженням і колісовою швидкістю $v < 15$ м/с. Коли навантаження сталі і твердість хоча б одного з коліс \leq HB 350, а швидкість $v < 15$ м/с, то зуби припрацьовуються повністю. Для цього випадку беруть $K_B = 1,0$.

Коефіцієнт динамічності навантаження K_D враховує виникнення в зачепленні коліс додаткових динамічних навантажень. Його величина залежить від похибок зубів коліс, колісової швидкості, приєднаних мас та інших причин.

Значення коефіцієнта K_D для всіх видів зубчастих коліс беруть з табл. 32.4 і 32.5 залежно від точності виготовлення, колісової швидкості і твердості робочих поверхонь зубів. Для конічних прямозубих коліс значення K_D беруть з графі на один ступінь точності грубіше від їх фактичної точності.

Таблиця 32.4

Ступінь точності	Твердість поверхні зубів	Коефіцієнт $K_{H\beta}$ при колісовій швидкості, м/с					
		1	2	4	6	8	10
7	a	1,04/1,02	1,07/1,03	1,14/1,05	1,21/1,06	1,29/1,07	1,36/1,08
	б	1,03/1,00	1,05/1,01	1,09/1,02	1,14/1,03	1,19/1,03	1,24/1,04
8	a	1,04/1,01	1,08/1,02	1,16/1,04	1,24/1,06	1,32/1,07	1,40/1,08
	б	1,03/1,01	1,06/1,01	1,10/1,02	1,16/1,03	1,22/1,04	1,26/1,05
9	a	1,05/1,01	1,10/1,03	1,20/1,05	1,30/1,07	1,40/1,09	1,50/1,12
	б	1,04/1,01	1,07/1,01	1,13/1,02	1,20/1,03	1,26/1,04	1,32/1,05

У табл. 32.4 і 32.5 значення коефіцієнта K_D наведено в чисельнику для прямозубих, а в знаменнику — для косозубих коліс. У графі a — твердість поверхонь зубів колеса \leq HB 350, в графі б — твердість поверхонь зубів шестірні і колеса $>$ HB 350. Наближені значення колісової швид-

Ступінь точності	Твердість поверхні зубів	Коефіцієнт $K_{F\sigma}$ при коліній швидкості, м/с					
		1	2	4	6	8	10
7	a	1,08/1,03	1,16/1,06	1,33/1,11	1,50/1,16	1,62/1,22	1,80/1,27
	б	1,03/1,01	1,05/1,02	1,09/1,03	1,13/1,05	1,17/1,07	1,22/1,08
8	a	1,10/1,03	1,20/1,06	1,38/1,11	1,58/1,17	1,78/1,23	1,96/1,29
	б	1,04/1,01	1,06/1,02	1,12/1,03	1,16/1,05	1,21/1,05	1,26/1,08
9	a	1,13/1,04	1,28/1,07	1,50/1,14	1,72/1,21	1,98/1,28	2,25/1,35
	б	1,04/1,01	1,07/1,02	1,14/1,04	1,21/1,06	1,27/1,08	1,34/1,09

кості v' , м/с, визначають за формулою

$$v' = \pi n_1 d_1 / 60,$$

де n_1 — частота обертання шестірні, хв^{-1} , d_1 — орієнтовний очікуваний діаметр шестірні, м. Якщо потім, після розрахунків передач, виявиться значна розбіжність між наближеним і точним значеннями швидкостей v' і v , в коефіцієнти $K_{H\sigma}$ і $K_{F\sigma}$, а також у результати розрахунку d , a , σ_H і m вносять поправки.

§ 32.7. Розрахунок циліндричних передач на міцність

Розрахунок на міцність прямозубих і косозубих передач стандартизований ГОСТ 21354—75. У підручнику подано основи стандартного розрахунку з деякими спрощеннями, допустимими для більшості випадків.

Розрахунок зубів за контактними напругами. Найбільші контактні напруги виникають у момент контакту зубів у зоні полюса (рис. 32.17). Контактні напруги при цьому визначають за формулою Герца:

$$\sigma_H = 0,418 \sqrt{\frac{q}{\rho_{\text{зв}}} E_{\text{зв}}}. \quad (32.4)$$

Тут q — нормальне навантаження на одиницю довжини контактної лінії, яке визначають за формулою

$$q = \frac{w_{Ht}}{K_{\varepsilon} \varepsilon_{\alpha} \cos \alpha} = \frac{F_t K_{H\beta} K_{H\sigma}}{b K_{\varepsilon} \varepsilon_{\alpha} \cos \alpha},$$

де K_{ε}^* — коефіцієнт, який залежить від сумарної довжини контактних ліній: ε_{α} — коефіцієнт перекриття (для прямозубих передач $K_{\varepsilon} \cdot \varepsilon_{\alpha} = 1$);

* У розрахунках зубчастих передач на міцність у підручнику використано такі позначення основних коефіцієнтів: K — коефіцієнти, спільні для розрахунків на контактну міцність і згин; Z — специфічні коефіцієнти для розрахунків на контактну міцність; Y — специфічні коефіцієнти для розрахунків на згин.

$\rho_{зв}$ — зведений радіус кривизни:

$$\frac{1}{\rho_{зв}} = \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}.$$

У загальному випадку для прямозубих і косозубих циліндричних коліс радіуси кривизни ρ_1 і ρ_2 у точці контакту профілів зубів:

$$\rho_1 = 0,5d_1 \sin \alpha / \cos^2 \beta \quad \text{і} \quad \rho_2 = 0,5d_2 \sin \alpha / \cos^2 \beta.$$

Тоді

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho_{зв}} &= \frac{2\cos^2 \beta}{d_1 \sin \alpha} + \frac{2\cos^2 \beta}{d_2 \sin \alpha} = \\ &= 2(u+1) \cos^2 \beta / (d_1 u \sin \alpha). \end{aligned}$$

Підставивши значення q і $1/\rho_{зв}$ у формулу (32.4) і замінивши $\cos \alpha \sin \alpha$ на $1/2 \sin 2\alpha$, дістанемо

$$\sigma_H = 0,418 \sqrt{\frac{\omega_{Ht}^4 (u+1) \cos^2 \beta E_{зв}}{K_{\epsilon} \epsilon_{\alpha} d_1 u \sin 2\alpha}}.$$

Позначимо $Z = 0,418 \sqrt{4\cos^2 \beta E_{зв}} / (K_{\epsilon} \epsilon_{\alpha} \sin 2\alpha)$ — коефіцієнт, який враховує геометрію передач, властивості матеріалу і коефіцієнт перекриття. Тоді

$$\sigma_H = Z \sqrt{\omega_{Ht} (u+1) / (d_1 u)} \leq [\sigma_H]. \quad (32.5)$$

Формулою (32.5) можна користуватися для перевірих розрахунків, коли розмір d_1 і параметр ω_{Ht} відомі.

Виконуючи проектний розрахунок за заданим обертаючим моментом T_1 і передаточним числом u , треба визначити d_1 або a . Для цього вводять коефіцієнт ширини шестірні відносно її діаметра $\psi_{bd} = b/d_1$. Тоді

$$\frac{\omega_{Ht}}{d_1} = \frac{F_t}{d_1 b} K_{H\beta} K_{H\alpha} = \frac{2T_1}{d_1^3 \psi_{bd}} K_{H\beta} K_{H\alpha}.$$

Підставивши цю величину у формулу (32.5), дістанемо

$$\sigma_H = Z \sqrt{\frac{2T_1}{d_1^3 \psi_{bd}} K_{H\beta} K_{H\alpha} \frac{(u+1)}{u}} \leq [\sigma_H].$$

Звідси ділильний діаметр шестірні

$$d_1 = K_d \sqrt[3]{\frac{T_1 K_{H\beta} K_{H\alpha} (u+1)}{\psi_{bd} [\sigma_H]^2 u}}, \quad (32.6)$$

де $K_d = \sqrt[3]{2Z^2}$.

Щоб визначити міжосьову відстань a , замінимо d_1 на $2a/(u+1)$ і введемо коефіцієнт ширини колеса $\psi_{ba} = b/a$. Після деяких перетворень

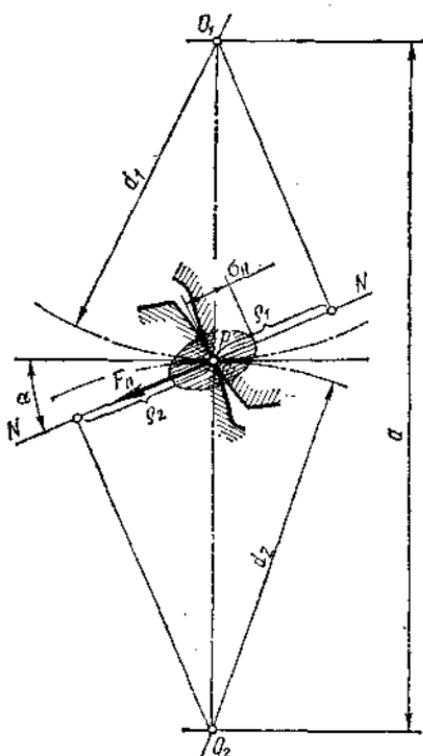


Рис. 32.17

дістаємо

$$a = K_a (u + 1) \sqrt[3]{\frac{T_1 K_{H\beta} K_{H\alpha}}{u [\sigma_H]^2 \psi_{ba}}}, \quad (32.7)$$

де $K_a = \sqrt[3]{0,5Z^2}$.

Для попередніх розрахунків сталених прямозубих коліс беруть

$$K_{H\beta} K_{H\alpha} \approx 1,3, \quad K_d = 7700 \text{ Па}^{1/2}, \quad K_a = 4950 \text{ Па}^{1/2}.$$

Навантажувальна здатність косозубих коліс вища, ніж прямозубих, тому в попередніх розрахунках для сталених косозубих і шевронних коліс можна брати $K_{H\beta} K_{H\alpha} \approx 1,2$, $K_d = 6750 \text{ Па}^{1/2}$ і $K_a = 4300 \text{ Па}^{1/2}$. Значення ψ_{ba} вибирають відповідно до табл. 32.6. Взявши ψ_{ba} , визначаємо ψ_{ba} за формулою

$$\psi_{ba} = 2\psi_{ba}/(u + 1).$$

Таблиця 32.6

Розміщення колеса відносно опор	Твердість робочих поверхонь зубів	
	\leq HB, 350 або HB, 350 і HB,	$>$ HB, 350 і HB,
	ψ_{ba}	
Симетричне	0,8—1,4	0,4—0,9
Несиметричне	0,6—1,2	0,3—0,5
Консольне	0,3—0,4	0,2—0,25

Більші значення — для сталених навантажень і жорстких конструкцій опор і валів.

Розрахунок зубів на згин. Нормальна сила F_n , яка є результатом взаємодії зубів коліс навантаженої передачі, діє в напрямі лінії зачеплення і може бути прикладена в різних точках поверхні зуба. З точки зору міцності на згин найнебезпечніше, коли нормальна сила прикладена до вершини зуба (рис. 32.18).

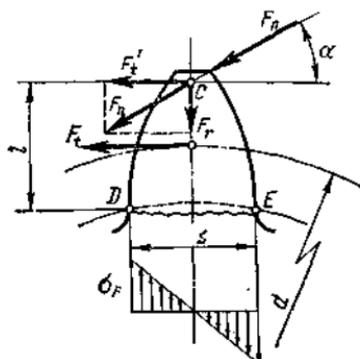


Рис. 32.18

Незалежно від того, скільки пар зубів буває в зачепленні, для надійності розрахунку вважають, що все навантаження F_n сприймається тільки одним зубом. Крім того, нехтують силами тертя, що дає можливість вважати силу F_n напрямленою по спільній нормалі до профілів зубів.

Перенесемо силу F_n вздовж її лінії дії на вісь симетрії зуба в точку C і розкладемо на дві складові: колову F_t і радіальну F_r , тоді

$$F_t = F_n \cos \alpha, \quad F_r = F_n \sin \alpha,$$

де α — кут тиску на вершині зуба (трохи більший, ніж кут зачеплення) Сила F_t згинає зуб, а сила F_r стискає його.

Нехтуючи відносно невеликими напругами від стискання силою F_r ,

складаємо для небезпечного перерізу зуба DE умову міцності на згин:

$$\sigma_F = M_F/W = F'_l l/W \leq [\sigma_F],$$

де l — плече сили F'_l відносно небезпечного перерізу; $W = bs^2/6$ — момент опору згину небезпечного перерізу; s — товщина зуба біля основи (висота небезпечного перерізу); b — довжина зуба (ширина колеса); $[\sigma_F]$ — допустима напруга згину.

Замінивши потім силу F'_l коловою силою $F_t = 2T/d$ (оскільки $F_t > F'_l$, то зроблена заміна лише трохи збільшить запас міцності), дістанемо

$$\sigma_F = \frac{F_t l}{bs^2/6} \leq [\sigma_F].$$

Величини l і s можна записати в частках модуля зачеплення:

$$l = km, \quad s = cm,$$

де k і c — коефіцієнти, які залежать від форми зуба в нормальному перерізі. Тоді умова міцності набере вигляду

$$\sigma_F = \frac{F_t k}{c^2 b m / 6} \leq [\sigma_F].$$

З урахуванням коефіцієнтів розрахункового навантаження $K_{F\beta}$ і $K_{F\alpha}$, коефіцієнта розподілу навантаження між зубами $K_{F\alpha}$ і теоретичного коефіцієнта концентрації напруг K_T здобута формула набере вигляду

$$\sigma_F = \frac{F_t K_{F\alpha} K_{F\beta} K_{F\alpha}}{b m} \cdot \frac{6k K_T}{c^3}.$$

Далі, з урахуванням формули (32.3), вводять параметр

$$\omega_{Ft} = F_t K_{F\alpha} K_{F\beta} K_{F\alpha} / b \quad (32.8)$$

і величину $Y_F = 6k K_T / c^3$ — коефіцієнт форми зуба, який беруть з табл. 32.7 залежно від числа зубів (для косозубої передачі — від еквівалентного числа зубів).

Таблиця 32.7

z	17	20	25	30	40	50	60	і більше
Y_F	4,28	4,09	3,90	3,80	3,70	3,66	3,62	3,60

Для прямозубих передач розрахункова формула матиме вигляд

$$\sigma_F = Y_F \frac{\omega_{Ft}}{m} \leq [\sigma_F]. \quad (32.9)$$

Тут $[\sigma_F]$ — допустима напруга на згин. У косозубих передачах сумарна довжина контактних ліній l_Σ відповідно до формули (32.2) більша за ширину колеса в $K_e \epsilon_\alpha / \cos \beta$ разів, що сприяє зменшенню напруг згину. Тому для косозубих передач

$$\sigma_F = Y_F Y_\beta Y_e Y_{Ft} / m_n \leq [\sigma_F], \quad (32.10)$$

де $Y_\beta = 1 - (\beta/140)$ — коефіцієнт, який враховує нахил зуба; Y_F — коефіцієнт, який враховує форму зуба (див. табл. 32.7); $Y_e = 1/(K_e \epsilon_\alpha)$; $K_e = 0,9 \div 1$ — коефіцієнт, який враховує несталість сумарної довжини контактних ліній (якщо ϵ_β — ціле число, то $K_e = 1$).

Формулу (32.10) використовують для перевірки розрахунків.

Під час проектного розрахунку модуль визначають за емпіричною залежністю з наступною перевіркою зубів на згинальну міцність.

Якщо твердість робочих поверхонь зубів шестірні і колеса $\leq \text{HB}350$, то беруть $m = (0,01 \div 0,02) a$, якщо твердість зубів шестірні $> \text{HRC}45$ і колеса $\leq \text{HB}350$, то беруть $m = (0,0125 \div 0,025) a$, якщо твердість зубів шестірні і колеса $\geq \text{HRC}45$, то $m = (0,016 \div 0,0315) a$, де a — міжосьова відстань.

Точніше модуль передачі визначають за формулою

$$m_a = \frac{K_{F\beta} K_{F\alpha} T_1 Y_F K_{F\alpha} Y_{\beta} (u + 1)}{b_{2a} [\sigma]_F} \quad (32.11)$$

У формулу (32.11) підставляють: для прямозубих коліс $Y_{\beta} = 1$, $K_{F\alpha} = 1$; для косозубих $Y_{\beta} = 0,9$, а для шевронних $Y_{\beta} \approx 0,8$; для косозубих і шевронних коліс $K_{F\alpha} \approx 0,9$.

Відповідно до СТ СЭВ 229—75 міжосьові відстані і номінальні передачі числа повинні відповідати значенням, наведеним у табл. 32.8 і 32.9.

Таблиця 32.8

Передачі числа												
1-й ряд	1,0	—	1,25	—	1,6	—	2,0	—	2,5	—	3,15	—
2-й ряд	—	1,12	—	1,4	—	1,8	—	2,24	—	2,8	—	3,55
1-й ряд	4,0	—	5,0	—	6,3	—	8,0	—	10	—	12,5	—
2-й ряд	—	4,5	—	5,5	—	7,1	—	9,0	—	11,2	—	—

Таблиця 32.9

Міжосьові відстані a , мм														
1-й ряд	44	50	63	80	100	125	—	160	—	200	—	250	—	315
2-й ряд	—	—	—	—	—	—	140	—	180	—	225	—	280	—
1-й ряд	—	400	—	500	—	630	—	800	—	1000	і т.д. до 2500			
2-й ряд	355	—	450	—	560	—	710	—	900	—				

Примітка. У табл. 32.8 і 32.9 треба віддавати перевагу 1-му ряду

Формули, наведені в § 32.7, дають змогу виконувати проектні і перевірки розрахунки циліндричних зубчастих передач. Порядок розрахунку показано в прикладах 32.1 і 32.2.

§ 32.8. Гвинтова зубчаста передача

Гвинтовими називають передачі косозубими колесами, в яких осі валів перехрещуються під деяким кутом (рис. 32.19). Колеса гвинтової передачі, аналогічні розглянутим косозубим, мають однаковий напрям гвин-

гової лінії зубів. Найбільше поширилися гвинтові передачі з міжосьовим кутом, який дорівнює 90° .

У гвинтовій передачі зуби стикаються не по лініях, як у косозубій передачі, а в точках. Ковзання зубів досягає значної величини і, як наслідок, ККД передачі невисокий. Обов'язковою умовою зачеплення є рівність нормальних кроків і модулів. За аналогією з косозубими передачами

$$d = m_t z, \quad m_t = m_n / \cos \beta; \quad m_{n1} = m_{n2}.$$

Передаточне число гвинтової передачі

$$u = n_1 / n_2 = z_2 / z_1 = d_2 \cos \beta_2 / (d_1 \cos \beta_1).$$

Гвинтові передачі звичайно використовують як сповільнюючі переважно в кінематичних колах приладів, металорізальних верстатів тощо.

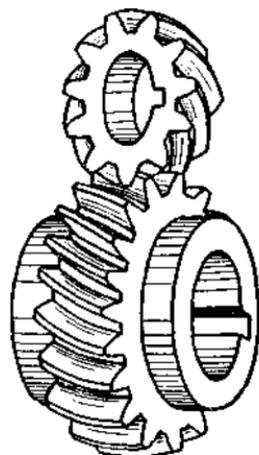


Рис. 32.19

§ 32.9. Конічна зубчаста передача

Конічні зубчасті передачі застосовують для передавання обертального руху між валами з перехресними осями (рис. 32.20). Ширше застосовують ортогональні передачі з міжосьовим кутом $\Sigma = 90^\circ$, але є передачі і з $\Sigma \neq 90^\circ$.

Зуби конічних коліс профілюють по евольвенті так само, як і зуби циліндричних коліс. Але всі точки двох спряжених евольвентних профілів повинні бути на сферичній поверхні з центром у точці O (рис. 32.21). Сферична поверхня не розгортається на площину, і тому зу-

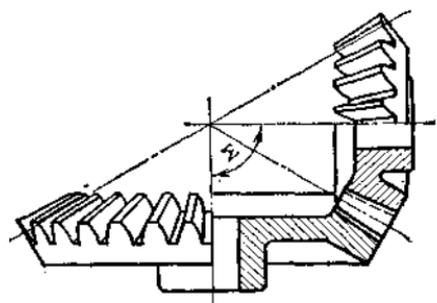


Рис. 32.20

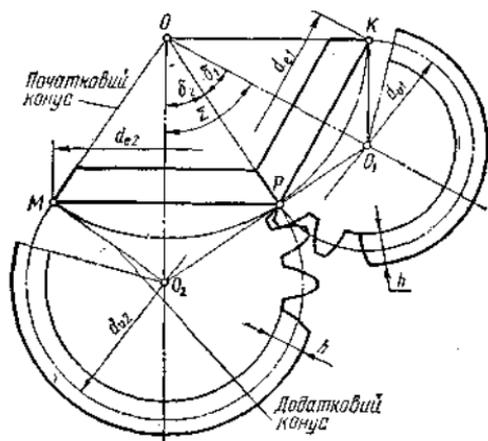


Рис. 32.21

би конічних коліс профілюють на поверхню так званих додаткових конусів.

Додаткові конуси мають твірні O_1P і O_2P , проведені перпендикулярно до твірних OP , OM і OK діляльних конусів. Поверхні додаткових конусів легко розгортаються на площину. При цьому найбільші радіуси розгортки дорівнюють твірним додаткових конусів O_1P і O_2P і є радіусами початкових кіл еквівалентних циліндричних коліс, профілі

зубів яких використовують як профілі зубів конічних коліс. Діаметри еквівалентних коліс

$$d_{v1} = d_{e1}/\cos \delta_1; \quad d_{v2} = d_{e2}/\cos \delta_2,$$

де δ_1 і δ_2 — кути ділільних конусів. Еквівалентні числа зубів прямокутних конічних коліс:

$$z_{v1} = z_1/\cos \delta_1; \quad z_{v2} = z_2/\cos \delta_2.$$

Еквівалентним числом зубів користуються для визначення коефіцієнта форми зуба (див. табл. 32.7). Передаточне число конічної передачі визначають за формулами для циліндричних передач і, крім того, для випадку, коли міжосьовий кут $\Sigma = \delta_1 + \delta_2 = 90^\circ$, за формулою

$$u = \operatorname{ctg} \delta_1 = \operatorname{tg} \delta_2.$$

Геометричний розрахунок передачі. Параметрами конічних коліс є:

середній ділільний діаметр d ;

число зубів меншого колеса, яке дорівнює $z = 18 \div 24$;
кут конуса вершин $\delta_a = \delta + \theta$, де θ — кут ніжки зуба; $\operatorname{tg} \theta = 1,2 m_e/R_e$.

Згідно з стандартом кут головки зуба дорівнює куту ніжки зуба. Це зроблено для

того, щоб твірна конуса вершин зубів одного колеса була паралельна твірній конуса западин парного колеса, тоді радіальний зазор по довжині зуба буде сталим (тому на рис. 32.22 вершина конуса вершин зубів не збігається з вершиною ділільного конуса і конуса западин); кут конуса западин $\delta_i = \delta - \theta$;

зовнішній ділільний діаметр d_e ;

кут ділільного конуса δ (рис. 32.22).

За шириною вінця колеса b модуль зачеплення змінюється. Тому в конічних зубчастих колесах розрізняють два модулі:

а) середній коловий модуль m на передньому ділільному діаметрі;

б) зовнішній коловий модуль m_e , за яким визначають всі розміри зубчастого колеса, причому

$$d = mz, \quad d_e = m_e z.$$

Зовнішній і середній модулі пов'язані між собою залежністю

$$m_e = m R_e / R,$$

де $R_e = d_{e2}/(2 \sin \delta_2)$ або $R_e = 0,5 m_e \sqrt{z_1^2 + z_2^2}$ — зовнішня конусна відстань, $R = R_e - 0,5b$ — середня конусна відстань.

Ширина зубчастого вінця $b = \psi_{Re} R_e$, де ψ_{Re} — коефіцієнт ширини зубчастого вінця. Величиною ψ_{Re} задаються в межах $0,25 \div 0,3$. Звичайно беруть $\psi_{Re} = 0,285$. Кути ділільних конусів: $\operatorname{tg} \delta_1 = z_1/z_2$; $\delta_2 = 90^\circ - \delta_1$.

Модуль m_e називають також в и р о б н и ч и м; його величину беруть за СТ СЭВ 310—76, але це не обов'язково. ГОСТ 13754—68 «Вихідний контур прямозубих конічних коліс» встановлює радіальний зазор $c = 0,2m_e$, тоді зовнішня висота h_{fe} ніжок зубів і h_{ae} головок зубів

$$h_{fe} = 1,2m_e; h_{ae} = m_e;$$

зовнішній діаметр вершин зубів

$$d_{ae} = d_e + 2h_{ae} \cos \delta = m_e (z + 2 \cos \delta).$$

У машинобудуванні в ряді випадків застосовують так звані г і п о ї д н і конічні передачі. Осі коліс такої передачі перехрещуються, але не перетинаються (рис. 32.23). Зуби коліс гіпоїдних передач можуть бути п р я м и м и (а) або к р и в о л і н і й н и м и (б). Перевага цих передач у тому, що вали обох коліс можуть бути виведені за межі передачі в обох напрямках.

Характерним для гіпоїдних передач є підвищене ковзання поверхонь зубів, спри-

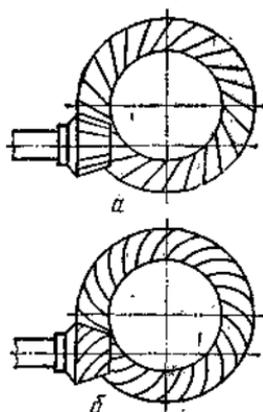


Рис. 32.23

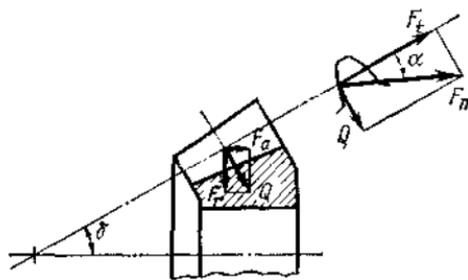


Рис. 32.24

чинене зміщенням осей коліс. Це підвищує небезпеку заїдання. Тому такі передачі змащують спеціальним протизадирним, так званим гіпоїдним маслом. Гіпоїдні передачі широко застосовують в автомобілях, металорізальних верстатах тощо.

Сили, які діють у зачепленні конічних коліс (рис. 32.24).

У зачепленні конічних коліс діють:

а) колова сила $F_t = 2T/d$. Сила F_t напрямлена по дотичній до кола діаметра d ;

б) радіальна сила $F_r = Q \cos \delta = F_t \operatorname{tg} \alpha \cos \delta$, де $Q = F_t \operatorname{tg} \alpha$;

в) осьова сила $F_a = Q \sin \delta = F_t \operatorname{tg} \alpha \sin \delta$.

Для спряженого колеса, яке перебуває в зачепленні з розглядуваним, сила, яка дорівнює F_a , але протилежно напрямлена, є радіальною силою, а сила, яка дорівнює F_r (і також напрямлена протилежно),— осьовою силою.

Розрахунок конічної передачі на контактну витривалість. Контактні напруги в матеріалі зубів конічних коліс визначають за аналогією з формулою (32.5) для циліндричних передач, але з використанням діаметрів еквівалентних коліс і за умови, що рівнодіюча розподілена по довжині зуба навантаження прикладена в середині його довжини.

Формула для перевірного розрахунку конічних передач на контактну витривалість (без виведення) має вигляд

$$\sigma_H = Z \sqrt{\omega_{HT} \sqrt{u^2 + 1} / (0,85 d_1 u)} \leq [\sigma_H], \quad (32.12)$$

де коефіцієнт ω_{HT} обчислюють за формулою $\omega_{HT} = 2T_1 K_{H\beta} K_{H\alpha} / (d_1 b)$; дослідний коефіцієнт 0,85 оцінює зниження навантажувальної здатності конічних передач порівняно з допустимим навантаженням еквівалентних циліндричних передач. Коефіцієнт $Z = 487\,000 \text{ Па}^{1/2}$ для сталевих коліс. Формула для проектного розрахунку для конічної передачі з сталевими колесами така:

$$d_1 = 8120 \sqrt[3]{T_1 K_{H\beta} K_{H\alpha} \sqrt{u^2 + 1} / (0,85 \psi_{bd} [\sigma_H]^2 u)}, \quad (32.13)$$

де $\psi_{bd} = b/d_1$ — коефіцієнт ширини колеса відносно середнього діаметра (для попередніх розрахунків можна брати $K_{H\beta} K_{H\alpha} \approx 1,3$).

Щоб відношення ширини зубчастого вінця до зовнішньої конусної відстані $b/R_e = \psi_{Re}$ було в прийнятих межах, значення коефіцієнта ψ_{bd} обчислюють за формулою

$$\psi_{bd} = 0,5 \psi_{Re} \sqrt{u^2 + 1}.$$

Розрахунок зубів конічної передачі за напругами згину. Після визначення середнього діаметра шестірни d_1 за формулою (32.13) задаються числом зубів $z_1 \geq 17$, знаходять середній модуль m і перевіряють його за напругами згину.

Розміри поперечних перерізів зубів конічного колеса зменшуються з наближенням до вершини діляльного конуса (див. рис. 32.22), тому навантаження розподіляється по довжині зуба нерівномірно і змінюється залежно від деформації зубів у різних перерізах.

За розрахунковий зручно взяти переріз в середній частині довжини зуба. Тоді за аналогією з циліндричною передачею напруги в цьому перерізі визначають за формулою (32.9) з урахуванням коефіцієнта 0,85:

$$\sigma_F = Y_{Ft} \omega_{Ft} / (0,85 m) \leq [\sigma_F]. \quad (32.14)$$

Параметр ω_{Ft} визначають за формулою (32.8) при коловій силі F_t , розрахованій за середнім діаметром: $F_t = 2T_1/d$. Коефіцієнт форми зуба визначають, користуючись табл. 32.7, виходячи з еквівалентного числа зубів.

Якщо розміри передачі визначає не контактна, а згинальна міцність (твердість поверхні зубів $HRC \geq 63$ і відносно м'яка серцевина), розрахунок конічних передач треба розпочинати з визначення середнього модуля за формулою

$$m = K_m \sqrt[3]{T_1 K_{F\beta} K_{F\alpha} V_F / (0,85 z_1^2 \psi_{bd} [\sigma_F])}, \quad (32.15)$$

де $K_m = 1,4$. За величиною m визначають зовнішній модуль m_e . Для попередніх розрахунків можна брати $K_{F\beta} K_{F\alpha} \approx 1,5$.

§ 32.10. Розрахунок допустимих напруг

Допустимі напруги при розрахунку контактної витривалості. Розрахункова формула має вигляд

$$[\sigma_H] = \sigma_{Hlimb} K_{HL} / S_H,$$

де σ_{Hlimb} — базова границя витривалості поверхні зубів, яка відповідає базовому числу циклів зміни напруг N_{H0} ; S_H — коефіцієнт безпеки; K_{HL} — коефіцієнт довговічності.

Величину σ_{Hlimb} беруть з табл. 32.10 залежно від способу термообробки і твердості поверхонь зубів коліс.

Таблиця 32.10

Спосіб термічної або хіміко-термічної обробки	Твердість поверхонь зубів	Сталь	σ_{Hlimb} , МПа	σ_{Flimb} , МПа
Відпалювання, нормалізація або поліпшення	\leq HB350	45, 50, 40X, 45X, 40XH, 35XГСА	$2HB_c + 70$	$1,8HB_c$
Об'ємне загартування	HRC38—50	40X, 35XM, 35XГСА	$18HRC_c + 150$	550—600
Поверхнєве загартування	HRC40—56	40XH, 35XM, 35XГСА	$17HRC_c + 200$	750—850
Цементация і нітроцементация	HRC56—64	20X, 12XH3A, 25XГТ	$23HRC_c$	700—800
Азотування	HV 850—900	40X, 38XMЮА	$1,5 HV_c$	750—850

Коефіцієнт безпеки S_H беруть $S_H = 1,1$ при нормалізації, поліпшенні або об'ємному загартуванні зубів; $S_H = 1,2$ при поверхневому загартуванні і цементации.

Базове число циклів N_{H0} визначають з табл. 32.11 залежно від твердості матеріалу зубів.

Таблиця 32.11

Твердість HB	200	250	300	350	400	450	500
N_{H0} млн. циклів	10	17	25	37	50	65	85

Коефіцієнт довговічності K_{HL} враховує можливість підвищення допустимих напруг для передач, які працюють короткочасно. Для передач, які працюють тривалий час, розрахункове число циклів N_H більше від базового і величина $K_{HL} = 1$. В інших випадках

$$K_{HL} = \sqrt{N_{H0}/N_H} > 1, \text{ але } \leq 2,4.$$

При сталому режимі роботи (з коливаннями не більше $\pm 20\%$) розрахункове навантаження прирівнюють номінальному і розрахункове число циклів зміни напруг дорівнюватиме $N_H = 60nL_h$, де n — частота обертання того з коліс, за матеріалом якого визначають допустиму напругу, $хв^{-1}$; L_h — число годин роботи передачі за розрахунковий строк.

Допустимі напруги під час розрахунку на згинальну витривалість визначають за формулою

$$[\sigma_F] = \sigma_{Flimb} K_{FC} K_{FL} / S_F,$$

де σ_{Flimb} — базова границя витривалості зубів по злому від напруг згину, яку беруть з табл. 32.10; S_F — коефіцієнт безпеки, який дорівнює $S_F = 1,7 \div 2,2$ (верхнє значення — для литих заготовок); K_{FC} — коефіцієнт, який враховує вплив двобічного навантаження ($K_{FC} = 1$ для нереверсив-

них передач, $K_{FC} = 0,7 \div 0,8$ для реверсивних); K_{FL} — коефіцієнт довговічності.

Коли $\leq \text{HB}350$, $K_{FL} = \sqrt[9]{N_{F0}/N_{FE}} \geq 1 \leq 2$, коли $> \text{HB}350$, $K_{FL} = \sqrt[9]{N_{F0}/N_{FE}} \geq 1 \leq 1,6$, де $N_{F0} = 4 \cdot 10^6$ — базове число циклів для всіх сталей; $N_F = 60 nL_n$ — розрахункове число циклів зміни напруг. Коли $N_F > N_{F0}$, $K_{FL} = 1$.

Більші значення σ_{Flimb} з табл. 32.10 беруть для більшої твердості зубів

Приклад 32.1. Розрахувати основні розміри закритої прямозубої одноступінчатої циліндричної передачі, виходячи з таких даних: потужність на ведучому валу $N_1 = 2,6$ кВт, кутова швидкість ведучого вала $\omega_1 = 80$ рад/с, передаточне число $u = 2$ матеріал — сталь 40Х. Строк служби 5 років, тривалість роботи 8 год на добу протягом 300 днів за рік. Передача нереверсивна, навантаження стале.

Розв'язання. Матеріал шестірни після поліпшення (загартування і відпускання на 500°) має твердість $\text{HB}260\text{--}280$. Матеріал колеса після поліпшення (загартування і відпускання до $540\text{--}580^\circ$) має твердість $\text{HB}230\text{--}260$.

1. Визначимо допустимі напруги за формулами

$$[\sigma_H] = \sigma_{Hlimb} K_{HL}/S_H, \quad [\sigma_F] = \sigma_{Flimb} K_{FC} K_{FL}/S_F.$$

З табл. 32.10 $\sigma_{Hlimb} = 2\text{HB}_c + 70 = 2 \cdot 240 + 70 = 550$ МПа. Беремо $S_H = 1,1$. Базове число циклів з табл. 32.11: $N_{H0} = 10 \cdot 10^6$. Число циклів навантажень для колес $N_H = 60nL_n = 60 \cdot 382 \cdot 8 \cdot 300 = 5,5 \cdot 10^7$ при $n_2 = 30\omega_2/\pi = 382 \text{ хв}^{-1}$. Оскільки розрахункове число циклів більше від базового, тобто $N_H > N_{H0}$, то вважаємо: щ $K_{HL} = 1$.

Допустима контактна напруга для матеріалу коліс, що має меншу твердість, $[\sigma_H] = 550/1,1 = 500$ МПа. Допустимі напруги згину беремо з табл. 32.11 для шестірни $\sigma_{Flimb1} = 1,8 \cdot 270 = 486$ МПа, для колеса $\sigma_{Flimb2} = 1,8 \cdot 240 = 432$ МПа. Оскільки $N_F > N_{F0} = 4 \cdot 10^6$, для нереверсивної передачі беремо $K_{FL} = 1$, $S_F = 2$, $K_{FC} = 1$ тоді $[\sigma_{F1}] = 486/2 = 243$ МПа, $[\sigma_{F2}] = 432/2 = 216$ МПа.

2. Попередній розрахунок робимо за формулою

$$d_1 = K_d \sqrt[3]{\frac{T_1 \text{HB} K_{H\psi} (u+1)}{\psi_{bd} [\sigma_H]^2 u}}.$$

Знаходимо $T_1 = N_1/\omega_1 = 2,6 \cdot 10^3/80 = 32,5$ Н·м; беремо $\psi_{bd} = 1$, $K_d = 7700 \text{ Па}^{1/2}$, $K_{H\psi} K_{H\psi} = 1,3$.

Дільний діаметр шестірни

$$d_1 = 7700 \sqrt[3]{\frac{32,5 \cdot 1,3 (2+1)}{1 \cdot 500^2 \cdot 10^{12} \cdot 2}} = 0,048 \text{ м} = 48 \text{ мм}.$$

3. Ширина коліс $b = \psi_{bd} \cdot 48$ мм при $\psi_{bd} = 1$. Беремо $b = 50$ мм. Спочатку визначимо міжосьову відстань: $a = (d_1 + d_2)/2$, де $d_2 = d_1$, $u = 48 \cdot 2 = 96$ мм, тоді $a = (48 + 96)/2 = 72$ мм. За знайденим a визначаємо модуль передачі:

$$m = (0,01 \div 0,02) a = 0,02 \cdot 72 = 1,44 \text{ мм}.$$

Для силових передач рекомендують $m \geq 1,5$ мм, тому беремо $m = 2$ мм. Тоді числа зубів передачі $z_1 = d_1/m = 48/2 = 24 > 17$, $z_2 = z_1$, $u = 24 \cdot 2 = 48$. Дільний діаметр $d_1 = 48$ мм і $d_2 = 96$ мм при міжосьовій відстані $a = 72$ мм.

4. Перевіримо передачу на витривалість за напругами згину за формулою

$$\sigma_F = Y_F \omega_{F1}/m.$$

Коефіцієнти форми зуба беремо за табл. 32.7: для шестірни $Y_{F1} = 3,98$, для колес $Y_{F2} = 3,74$:

$$\omega_{F1} = F_t K_{F\alpha} K_{F\beta} K_{F\psi} / b,$$

$\omega F_t = T_1 \cdot 2/d_1 = 32,5 \cdot 2/(48 \cdot 10^{-3}) = 1354 \text{ Н}$; $K_{F\alpha} = 1$ (для прямозубих передач);
 $K_{F\beta} = 1,1$ (за графіком на рис. 32.16); $K_{Fv} = 1,2$ (для 8-го ступеня точності при коло-
 дній швидкості $v_1 = \omega_1 d_1/2 = 80 \cdot 24 \cdot 10^{-3} = 1,92 \text{ м/с}$ (за табл. 32.5). Тоді

$$\omega_{F1} = 1354 \cdot 1 \cdot 1,1 \cdot 1,2/0,05 = 35,75 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Напруги згину:

$$\sigma_{F1} = Y_{F1} \omega_{F1} / m = 3,98 \cdot 35,75 \cdot 10^3 / (2 \cdot 10^{-3}) = 71,14 \cdot 10^6 \text{ Па} =$$

$$= 71,14 \text{ МПа} < [\sigma_{F1}] = 243 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{F2} = Y_{F2} \omega_{F2} / m = 3,74 \cdot 35,75 \cdot 10^3 / (2 \cdot 10^{-3}) = 66,85 \cdot 10^6 \text{ Па} =$$

$$= 66,85 \text{ МПа} < [\sigma_{F2}] = 216 \text{ МПа}.$$

Запас міцності щодо згинальних напруг достатній.

Приклад 32.2. Розрахувати косозубу циліндричну передачу. Передавана потужність $N = 4,5 \text{ кВт}$, кутова швидкість ведучого вала $\omega_1 = 100 \text{ рад/с}$, передаточне число $u = 2,5$. Умови експлуатації такі самі, що й у прикладі 32.1. Матеріал зубчастих коліс — сталь 12ХНЗА, цементована і загартована до твердості HRC 56—64.

Розв'язання. 1. Визначимо допустимі напруги за формулами

$$[\sigma_H] = \sigma_{Hlimb} K_{HL} / S_H; \quad [\sigma_F] = \sigma_{Flimb} K_{FC} K_{FL} / S_F.$$

З табл. 32.11 беремо $\sigma_{Hlimb} = 23 \text{ HRC}_c = 23 \cdot 60 = 1380 \text{ МПа}$. Візьмемо $K_{HL} = 1$ і $S_H = 1,2$, тоді

$$[\sigma_H] = 1380 \cdot 1/1,2 = 1150 \text{ МПа}.$$

З табл. 32.10 $\sigma_{Flimb} = 750 \text{ МПа}$. Візьмемо $K_{FC} = 1$, $K_{FL} = 1$, $S_F = 1,7$, тоді

$$[\sigma_F] = 750 \cdot 1 \cdot 1/1,7 = 440 \text{ МПа}.$$

2. Знайдемо дільний діаметр шестірни, коли $\psi_{bd} = 0,8$, $K_d = 6750 \text{ Па}^{1/2}$ і $K_{H\beta} K_{H\alpha} = 1,1$. Обертальний момент на шестірни $T_1 = N_1 / \omega_1 = 4,5 \cdot 10^3 / 100 = 45 \text{ Н} \cdot \text{м}$. Дільний діаметр шестірни

$$d_1 = K_d \sqrt[3]{\frac{T_1 K_{H\beta} K_{H\alpha} (u+1)}{\psi_{bd} [\sigma_H]^2 u}} = 6750 \sqrt[3]{\frac{45 \cdot 1,1 (2,5+1)}{0,8 \cdot 1150^2 \cdot 10^{12} \cdot 2,5}} =$$

$$= 27,2 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 27,2 \text{ мм}.$$

Беремо $d_1 = 27 \text{ мм}$; $b = 0,8 \cdot 27 = 21,6 \text{ мм}$; беремо $b = 20 \text{ мм}$. Дільний діаметр колеса $d_2 = d_1 u = 27 \cdot 2,5 = 67,5 \text{ мм}$. Міжосьова відстань передачі $a = (d_1 + d_2)/2 = (27 + 67,5)/2 = 47,3 \text{ мм}$. Нормальний модуль визначаємо за рекомендацією $m_n = (0,016 + 0,0315) a$ або $m_n = 0,03a = 0,03 \cdot 47,3 = 1,419 \text{ мм}$. Беремо $m_n = 1,5 \text{ мм}$.

3. Припустимо, що $\varepsilon_{\beta} = 1$. Тоді кут β нахилу зубів: $\sin \beta = \pi m_n / b = 3,14 \times$
 $\times 1,5/20 = 0,23$, $\beta = 13,628^\circ$. Знаходимо числа зубів шестірни і колеса:

$$z_1 = d_1 \cos \beta / m_n = 27 \cdot 0,97185 / 1,5 = 17,49 > 17.$$

Беремо $z_1 = 20$. Тоді $z_2 = z_1 u = 20 \cdot 2,5 = 50$. Беремо $z_2 = 50$.

4. Уточнимо дільні діаметри:

$$d_1 = 20 \cdot 1,5/0,972 = 30,869 \text{ мм}, \quad d_2 = 50 \cdot 1,5/0,972 = 77,172 \text{ мм}.$$

Знаходимо міжосьову відстань:

$$a = (d_1 + d_2)/2 = (30,869 + 77,172)/2 = 54,021 \text{ мм}.$$

5. Перевірний розрахунок виконаємо за напругами згину. Беремо такі коефіцієнти форми зуба: для шестірни $Y_{F1} = 4,14$, для колеса $Y_{F2} = 3,73$. Знаходимо коефіцієнт перекриття за формулою (32.1): $\varepsilon_{\alpha} = [1,88 - 3,2 (1/20 + 1/50)] 0,97185 = 1,61$. Визначимо коефіцієнти:

$$Y_{\varepsilon} = 1/\varepsilon_{\alpha} = 1/1,61 = 0,62; \quad Y_{\beta} = 1 - \frac{\beta^2}{140} = 1 - \frac{13,628^2}{140} \approx 0,9; \quad K_{F\alpha} = 0,9.$$

За рис. 32.16 знаходимо $K_{F\beta} = 1,08$. Колова швидкість на ободі шестірні $v_1 \Rightarrow = \omega_1 d_1 / 2 = 100 \cdot 30,869 \cdot 10^{-3} / 2 = 1,53$ м/с; колова сила $F_{t1} = 2T_1 / d_1 = 2 \times 45 / (30,869 \cdot 10^{-3}) = 2916$ Н. З табл. 32.5 знайдемо для 8-го ступеня точності $K_{F\alpha} = 1,02$. За формулою (32.8) знайдемо

$$w_{F1p} = F_{t1} K_{F\alpha} K_{F\beta} K_{F\sigma} / b = 2916 \cdot 0,9 \cdot 1,08 \cdot 1,02 / (20 \cdot 10^{-3}) = 145 \cdot 10^3 \text{ Н/м.}$$

Визначимо напруги згину для шестірні і колеса:

$$\sigma_{F1} = Y_{F1} Y_e Y_\beta w_{F1p} / m_n = 4,14 \cdot 0,62 \cdot 0,9 \cdot 145 \cdot 10^3 / (1,5 \cdot 10^{-3}) = 224 \cdot 10^6 \text{ Па} = 224 \text{ МПа} < [\sigma_F] = 440 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{F2} = Y_{F2} Y_e Y_\beta w_{F1p} / m_n = 3,73 \cdot 0,62 \cdot 0,9 \cdot 145 \cdot 10^3 / (1,5 \cdot 10^{-3}) = 202 \cdot 10^6 \text{ Па} = 202 \text{ МПа} < [\sigma_F] = 440 \text{ МПа.}$$

Умови міцності виконуються.

§ 32.11. Передача з зачепленням Новикова

У 1954 р. радянський інженер М. Л. Новиков запропонував зачеплення, зуби якого профілюються по дугах кіл. Пошуки нового виду зачеплення були пов'язані з тим, що навантажувальна здатність евольвентної передачі обмежена через малі значення зведених радіусів кривизни

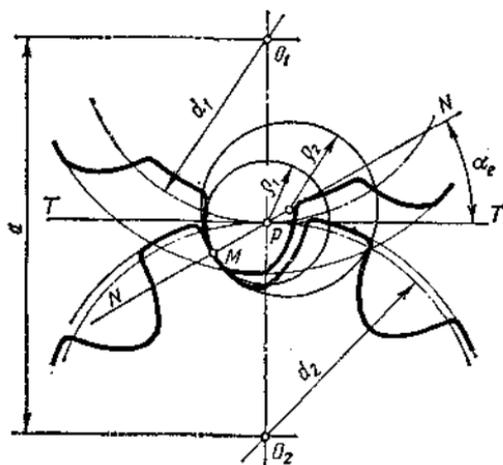


Рис. 32.25

робочих поверхонь зубів і, отже, значних контактних напруг. Зуби коліс у передачі Новикова гвинтові, і профілі їх обрисовуються дугами кіл, близьких за величиною радіусів. Тому робочі поверхні зубів — кругогвинтові.

Опуклий профіль зуба шестірні обрисовується з полюса P (рис. 32.25) як із центра, наприклад, радіусом $\rho_1 = 1,4m_n$, угнутий профіль зуба колеса — дугою кола радіуса $\rho_2 = 1,55m_n$, де m_n — нормальний модуль. Зуби стикаються не в полюсі (передача позаполюсна), а в деякій точці M , що лежить на лінії $N - N$. Якщо різниця між раді-

усами ρ_1 і ρ_2 мала, то після нетривалого припрацювання зуби починають стикатися по поверхні. Це значно зменшує контактні напруги. Лінія дії сили тиску на вгнуті зуби проходить близько їх основи, що збільшує міцність зубів і на згин.

Лінія зачеплення кругогвинтової передачі розміщена паралельно осям коліс, і точка контакту зубів переміщується вздовж цієї лінії, а не по лінії, перпендикулярній до поверхні зубів у торцевій площині, як в евольвентному зачепленні. Тому коефіцієнт торцевого перекриття передач Новикова дорівнює нулю і передачі повинні бути обов'язково к о с о -

зубими. Але оскільки зуби гвинтові (косі), то при зачепленні коліс забезпечується осьове перекриття $\epsilon_\beta \geq 1,1$. Кут тиску, утворений спільною дотичною $T - T$ до початкових кіл і нормально $N - N$, беруть у межах $\alpha_n = 20 \div 30^\circ$.

Передачі із зачепленням Новикова можуть бути циліндричні (рис. 32.26) і конічні (рис. 32.27). Габа-

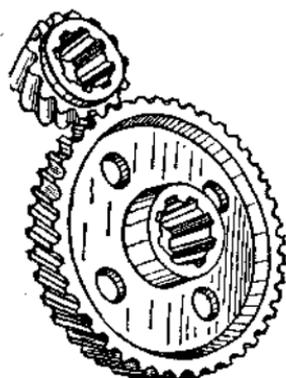


Рис. 32.26

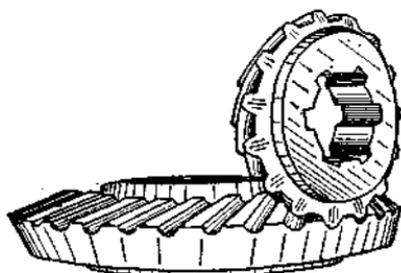


Рис. 32.27

ритні розміри цих передач на 25—30 % менші, ніж у рівноцінних евольвентних, а їх навантажувальна здатність (при однакових розмірах) вища. Розрахунок передач із зачепленням Новикова можна знайти в підручниках з деталей машин та в довідковій літературі.

§ 32.12. Планетарні та хвильові зубчасті передачі

Планетарні передачі. Планетарними називають передачі, які мають зубчасті колеса з рухомими осями. Планетарні передачі складаються з коліс зовнішнього і внутрішнього зачеплення (рис. 32.28); центральне колесо a , яке називають сонячним, перебуває в зовнішньому зачепленні з сателітами b , які обертаються навколо осей,

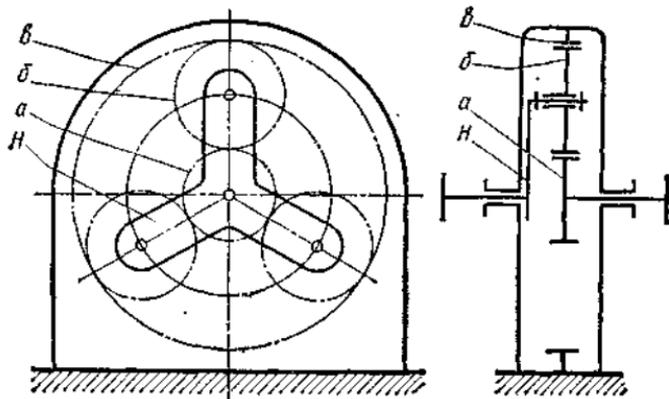


Рис. 32.28

установлених на водилі H . Водило, яке несе сателіт, також обертається. Сателіти перебувають у внутрішньому зачепленні з нерухомим колесом δ і разом з водилом обертаються навколо сонячного колеса.

Ведучою ланкою в планетарній передачі може бути або сонячне колесо, або водило. Це дає можливість при тій самій схемі передачі діставати різні передаточні числа.

Найпростіша планетарна передача, схему якої зображено на рис. 32.28, з нерухомим колесом δ і ведучим сонячним колесом a має передаточне число, яке визначають за

формулою, подаю без виведення:

$$u = \frac{z_b + z_a}{z_u}$$

де z_a — число зубів колеса a ; z_b — число зубів колеса b . Якщо додатково змусити колесо b обертатися, то кутова швидкість водила одночасно залежатиме від кутових швидкостей коліс a і b і передача перетвориться в диференціальну.

Поширеніша диференціальна передача з кінцевими зубчастими колесами, яку називають авт. омобільним диференціалом (рис. 32.29). Сателітом у такій передачі є кінцеве зубчасте колесо 4, яке вільно сидить на осі, закріпленій на обертвовому водилі H . Водило рухається від двигуна через зубчасті колеса 3 і 2. Сателіт 4 (їх може бути два і більше) перебуває в зачепленні одночасно з зубчастими колесами 7 і 6, закріпленими на півосях ведучих коліс 1 і 5 автомобіля.

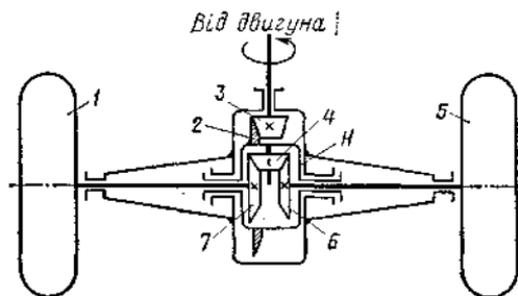


Рис. 32.29

Під час руху автомобіля по прямій, коли кутові швидкості коліс 1 і 5 однакові, сателіт не обертається навколо власної осі, але обертається разом з водилом, захоплюючи в обертання колеса 7 і 6. Якщо автомобіль рухається по кривій, то одне з ведучих коліс, яке котиться по дузі більшого радіуса, обертається швидше, ніж друге. Цей відносний поворот коліс можливий внаслідок обертання сателіта 4 навколо своєї осі. Диференціал у цьому випадку усуває проковзування одного з коліс по ґрунту, яке було б неминучим, коли б колеса 1 і 5 були на суцільній осі.

Планетарні передачі можуть бути одно- і багатоступінчастими і мати передаточні числа до 1000 і більше. Використання планетарних передач дає змогу у багатьох випадках зменшити масу конструкції більше ніж у два рази. Це пояснюється, по-перше, використанням внутрішнього зачеплення і, по-друге, застосуванням кількох сателітів, внаслідок

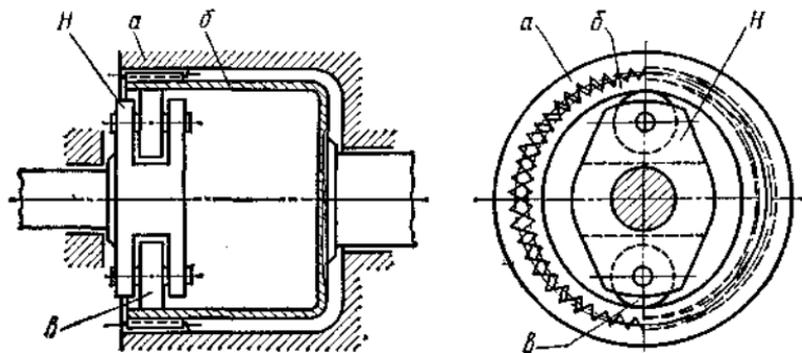


Рис. 32.30

чого передавана потужність розподіляється на кілька потоків. Рівномірне розміщення сателітів на водилі взаємно зрівноважує радіальні складові сил у зачепленнях коліс планетарної передачі.

До недоліків планетарних передач треба віднести підвищені вимоги до точності виготовлення і складання, а також порівняно низький ККД передач з великими передаточними числами.

Колеса планетарних зубчастих передач розраховують не тільки за тими самими формулами, що для простих передач, але з урахуванням деяких особливостей. Так, наприклад, у передачі, показаної на рис. 32.28, модулі всіх трьох коліс однакові, а передача внутрішнього зачеплення завдяки своїй геометрії міцніша, ніж передача зовнішнього зачеплення. Тому при однакових матеріалах коліс досить розрахувати зачеплення соняч-

ного колеса з сателітами. Якщо має різні, то внутрішнє зачеплення розраховують або з метою добору матеріалу колеса, або для перевірки.

Планетарні і диференціальні передачі широко застосовують у верстатно- і приладобудуванні, транспортних і вантажопідіймних машинах тощо.

Хвильові передачі. Схему хвильової передачі зображено на рис. 32.30. В середину жорсткого колеса *a*, яке має внутрішні зуби, вводиться гнучке деформовне колесо *b* із зовнішніми зубами. Гнучке колесо має менше зубів, ніж жорстке. Під час складання гнучке колесо за допомогою роликів *в*, встановлених на генераторі хвиль *H*, розтискається зсередини, деформується, набираючи форми еліпса, і вводиться в зачеплення з зубами жорсткого колеса.

Під час обертання генератора хвиль, який є в е д у ч о ю л а н к о ю передачі, зона зачеплення зубів гнучкого і жорсткого елементів переміщується разом з р і л к а м и. Завдяки різниці кількості зубів за кожний повний оберт генератора хвиль гнучкий елемент повертається відносно жорсткого на деякий кут. Передаточне число хвильової передачі, коли жорстке колесо закріплене, визначають за формулою

$$u = - \frac{\omega_H}{\omega_a} = - \frac{z_b}{z_a - z_b},$$

де z_a — число зубів жорсткого колеса; z_b — число зубів гнучкого колеса.

Для збільшення передаточного числа бажано, щоб різниця чисел зубів z_a і z_b була найменшою. Звичайно її беруть такою, щоб вона дорівнювала або була кратною числу роликів генератора хвиль. Передаточне число хвильової передачі може бути великим — до 1000 в одному ступені. Ці передачі відзначаються високою кінематичною точністю (бо немає зазорів у зачепленні зубів) і при малому габариті можуть передавати значні навантаження. Їх маса в 7—9 раз менша, ніж звичайних передач, при ККД близько 0,8.

Зуби коліс хвильової передачі звичайно трикутного або евольвентного профілю. Матеріалом для виготовлення гнучкого зубчастого колеса є сталь різних марок, а також пластмаси.

Розділ XXXIII

ПЕРЕДАЧА ГВИНТ — ГАЙКА

§ 33.1. Загальні відомості

Передача гвинт — гайка призначена для перетворення обертального руху в поступальний, а іноді навпаки. При цьому як гвинт, так і гайка можуть мати або один з названих рухів, або обидва рухи одночасно.

Переваги передач гвинт — гайка: можливість забезпечення повільного руху при великому виграні в силі, простота конструкції, здатність сприймати великі навантаження, велика точність переміщень. До недоліків слід віднести велике тертя у різьбовій парі, що зумовлює підвищене спрацювання, і низький ККД.

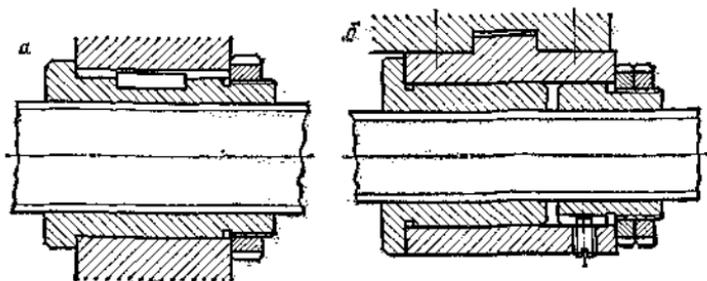


Рис. 33.1

Конструкція деталей передачі. Гвинти в гвинтових передачах поділяють на важні (домкрати, преси) і ходові (призначені для забезпечення точних переміщень у металорізальних верстатах і вимірних вальних приладах). Гвинти мають переважно трапецеїдальну різьбу, а при силах, напрямлених в один бік, — упорну. Прямуютну різьбу, тертя в якій менше, ніж у трапецеїдальній, широко не застосовують, бо її не можна обробляти фрезеруванням і шліфуванням.

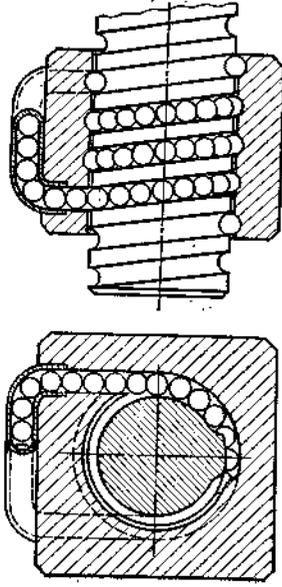


Рис. 33.2

Гайки механізмів, які потребують точних переміщень, виготовляють складеними або розрізними, щоб усувати зазори, які утворюються під час виготовлення і складання або в результаті спрацювання (рис. 33.1, б). Складена гайка має нерухому і рухому частини: остання може переміщатися в осьовому напрямку відносно першої, її можна й закріплювати після усунення зазора в різьбі. У добре відрегульованій передачі з розрізною гайкою витки обох її частин без зазора прилягають до витків нарізки гвинта.

У ряді конструкцій, де треба, щоб втрата на тертя в різьбі зменшувалась, застосовують кулькові гвинтові пари (рис. 33.2), в яких тертя ковзання пари тертям кочення. Кульки переміщуються замкнутим шляхом: пройшовши витки нарізки гайки, вони спеціальним каналом у тлі гайки повертаються до початку першого витка.

Матеріали деталей передачі. Гвинт виготовляють з сталі марок 45, 40Х, 50 тощо. Точні різьби після термічної обробки шліфують. Гайки звичайно виготовляють з антифрикційних матеріалів — злов'язних бронз ОФ10-5, ОЦС-6-6-3, а також з безолов'язних бронз, наприклад, АЖ9-4, і антифрикційних чавунів. Робочі поверхні гвинтів і гайок змащують лустим або рідким мастилом залежно від умов роботи.

Прикладом конструкції вантажного домкрата є простіший вантажопідійомний пристрій (рис. 33.3). Домкрат є одним з найрізноманітніших галузях техніки, у будівництві і на транспорті. Основними деталями домкрата є литий ча-

вунний корпус 1, гвинт 2 і гайка 3, запресована в корпус; обертаючий момент на гвинті створюють рукояткою 5. Сила, прикладена до рукоятки, змушує гвинт обертатися і переміщатися у вертикальному напрямі. Вага вантажу, який піднімають, передається гвинту через чашку 4, устанавлену на верхньому кінці гвинта.

§ 33.2. Силкові співвідношення у гвинтовій парі

Силкові співвідношення в різьбі передачі гвинт — гайка визначаються тими самими формулами, що й для кріпильних різьб (див. розд. XXVIII). Для переміщення гвинта з вантажем Q необхідно прикласти момент

$$M = M_p + M_{оп}$$

де $M_p = 0,5 Qd^2 \operatorname{tg}(\psi + \varphi')$ — момент у різьбі; $M_{оп} = 0,5 Qfd_0$ — момент тертя на опорному торці; $\varphi' = \operatorname{arctg}(f/\cos \alpha')$ — зведений кут тертя, ψ — кут підйому ковзання; d_0 — середній діаметр опорного торця.

Для трапецеїдальної різьби $\alpha' = 15^\circ$, для упорної $\alpha' = 3^\circ$ і для прямих кочення (встановлено упорний підшипник кочення), то беруть $M_{оп} = 0$. Якщо кут ψ підйому гвинтової лінії буде менший від відповідного кута тертя φ або φ' , то гвинтова пара буде самогальмівною.

ККД гвинтової пари. Відношення величини корисної роботи до затраченої за один оберт ланки, яка рухається обертально, визначає ККД η :

$$\eta = A_n/A_s = Ql/(Pld_2) = \operatorname{tg} \psi / \operatorname{tg}(\psi + \varphi'),$$

бо

$$l = \pi d_2 \operatorname{tg} \psi \quad \text{і} \quad P = Q \operatorname{tg}(\psi + \varphi').$$

Водночас зазначимо, що із збільшенням кута підйому різьби ψ ККД зростає, а вираш на силі зменшується.

§ 33.3. Розрахунок передачі гвинт — гайка

Передачі гвинт — гайка розраховують на спрацювання робочих поверхонь, на міцність гвинта і гайки і на поздовжню стійкість гвинта (при тисканні).

Розрахунок на спрацювання. Швидкість відносного ковзання в різьбі звичайно в 10—40 раз більша, ніж швидкість осевого переміщення. Велике відносне ковзання витків гайки і гвинта під навантаженням веде до спрацювання їх робочих поверхонь, що є основною причиною виходу передачі з ладу.

Середній тиск у різьбі (перевірний розрахунок)

$$p_1 = Q/(\pi d_2 h z_0) \leq [p_1], \quad (33.1)$$

де Q — розрахункова осьова сила, яка діє на гвинт; d_2 — середній діаметр різьби; h — робоча висота профілю різьби; z_0 — число витків різьби гайки; $[p_1]$ — допустимий середній тиск у різьбі.

Щоб забезпечити необхідну стійкість передачі до спрацювання, значення $[p_1]$ беруть занижені. Для пари сталь — чавун $[p_1] = 4 \div 5$ МПа, для пари сталь — бронза $[p_1] = 8 \div 12$ МПа. Введемо позначення $\psi_n =$

$= H_r/d_2$, де H_r — висота гайки. Визначимо також число витків z різьби в гайці через її висоту: $z = H_r/p$. Робочу висоту витка залишимо в частках кроку p різьби: $h = \psi_h p$. Підставляючи ці величини в рівняння (33.1) дістаємо формулу для проектного розрахунку

$$d_2 \geq \sqrt[3]{Q/(\pi \psi_H \psi_h [\rho_1])}. \quad (33.2)$$

Значення величини кроку p визначають звичайно кінематичним розрахунком; відносну довжину гайки $\psi_H = H_r/d_2$ беруть у межах 1,2—2,5 для цільних гайок і 2,5—3,5 для рознімних. Більші значення застосовують для різьб менших діаметрів.

Коефіцієнт $\psi_h = 0,5$ для трапецеїдальних різьб і $\psi_h = 0,75$ для упорних.

Обчисливши d_2 , вибирають за ГОСТом найближчий стандартний діаметр гвинта, а для прямокутної різьби (нестандартної) задають співвідношення її параметрів. Звичайно беруть $p = 0,25 d_2$.

Розрахунок гвинта на міцність. Тіло гвинта зазнає одночасно дії освої сили Q , яка розтягує або стискає гвинт, і скручувального моменту M_p . Для дуже навантажених гвинтів **п е р е в і р н и й** розрахунок на міцність роблять за еквівалентною напругою:

$$\sigma_{\text{екв}} = \sqrt{\sigma_p^2 + 4\tau_k^2} \leq [\sigma_p].$$

Тут

$$\sigma_p = 4Q/(\pi d_1^2), \quad \tau_k = M_p/W_p/(0,2d_1^3).$$

Різьба, параметри якої визначено з розрахунку на спрацювання, як правило, має надлишкову міцність на зріз. Тому витки різьби гайки гвинта на зріз звичайно не розраховують.

Розрахунок гвинта на стійкість. Якщо стержень гвинта, що має велику вільну довжину, працює на стиск, то гвинт треба перевірити на стійкість за формулою

$$\sigma = P/(\pi d_1^2/4) \leq \varphi [\sigma]. \quad (33.3)$$

Тут $[\sigma] = \sigma_{\text{тм}}/[n]$, де $[n]$ — допустимий коефіцієнт запасу міцності який беруть $[n] = 2 \div 4$; φ — коефіцієнт поздовжнього згину, який беруть з табл. 33.1 залежно від гнучкості λ .

Таблиця 33.1

λ	30	50	60	80	100	120	140	160
φ	0,91 0,91	0,86 0,83	0,82 0,79	0,70 0,65	0,51 0,43	0,37 0,30	0,29 0,23	0,24 0,19

Нижні значення для сталі підвищеної якості. Гнучкість визначають за формулою

$$\lambda = \mu l/i,$$

де μ — коефіцієнт закріплення. Якщо в місці закріплення гвинта є зазор (шарнірне закріплення кінців), то $\mu = 1$, в інших випадках $\mu = 2$; i — радіус інерції для колового перерізу

$$i = \sqrt{J_{\text{мін}}/F} = d_1/4.$$

Приклад 33.1. Розрахувати параметри гвинтової передачі домкрата (рис. 33.3) вантажністю $Q = 50$ кН з висотою підйому $l_0 = 0,4$ м. Матеріал гвинта — сталь 45; матеріал гайки — бронза АЖ9-4; коефіцієнт тертя ковзання в різьбі $f = 0,1$.

Розв'язання 1. *Розрахунок гвинта.* Беремо трапецеїдальну однозахідну різьбу. Середній діаметр різьби визначаємо спочатку за формулою (33.2), взявши відносну довжину гайки $\psi_H = 1,4$ і допустимий тиск $[\rho_1] = 11$ МПа (сталь по бронзі):

$$d_2 = \sqrt{Q/(\pi\psi_H\psi_H[\rho_1])} = \sqrt{50 \cdot 10^3/\pi \cdot 0,5 \cdot 1,4 \cdot 11 \cdot 10^6} = 0,045 \text{ м} = 45 \text{ мм.}$$

Елементи різьби гвинта (мм) за стандартом: зовнішній діаметр $d = 50$, крок різьби $p = 8$, середній діаметр $d_2 = 46$, внутрішній діаметр $d_1 = 41$.

Перевіримо наявність самогальмування за умовою $\psi < \psi'$. Кут підйому гвинтової лінії

$$\operatorname{tg} \psi = p/\pi d_2 = 8/(3,14 \cdot 46) = 0,0554, \quad \psi = 3^\circ 10'.$$

Зведений кут тертя

$$\psi' = \operatorname{arctg} \frac{f}{\cos \alpha'} = \operatorname{arctg} \frac{0,1}{\cos 15^\circ} = 5^\circ 55'.$$

Кут $\psi < \psi'$, отже, умова самогальмування гвинта виконана. Перевіримо гвинт на стійкість. Радіус інерції стержня гвинта (за внутрішнім діаметром різьби)

$$i = d_1/4 = 41/4 = 10,25 \text{ мм.}$$

Довжина гвинта (при висоті гайки $H_T = 8p = 8 \cdot 8 = 64$ мм): $l = l_0 + H_T/2 + h_1 = 400 + 64/2 + 70 = 502$ мм [бо висота головки $h_1 = (1,4 \div 1,6) d = (1,4 \div 1,6) 50 \approx 70$ мм]. Тоді гнучкість

$$\lambda = \mu/l = 2 \cdot 502/10,25 = 97,95.$$

Відповідно до табл. 33.1, інтерполюючи, знаходимо $\varphi = 0,53$. Підставляємо знайдене значення φ у формулу (33.3) при $[\sigma] = \sigma_T/2 = 360/2 = 180$ МПа:

$$\sigma = 50 \cdot 10^3/(\pi \cdot 0,041^2/4) = 38 \cdot 10^6 \text{ Па} < 0,53 [\sigma] = 0,53 \cdot 180 = 95 \text{ МПа.}$$

Стійкість гвинта забезпечено. Перевіримо гвинт на міцність при спільній дії стискаючої сили Q і моменту в різьбі M_p :

а) напруга стиску

$$\sigma_{ск} = Q/F = 4Q/(\pi d_1^2) = 4 \cdot 50 \cdot 10^3/(3,14 \cdot 41^2 \cdot 10^{-6}) = 38 \cdot 10^6 \text{ Па} = 38 \text{ МПа};$$

б) напруга кручення

$$\tau_{к} = M_p/W_p = M_p/(0,2d_1^3).$$

Визначимо момент у різьбі:

$$M_p = 0,5Qd_2 \operatorname{tg}(\psi + \psi') = 0,5 \cdot 50 \cdot 10^3 \cdot 46 \cdot 10^{-3} \operatorname{tg}(3^\circ 10' + 5^\circ 55') = 184 \text{ Н} \cdot \text{м.}$$

Тоді

$$\tau_{к} = 184/(0,2 \cdot 41^3 \cdot 10^{-9}) = 13,4 \cdot 10^6 \text{ Па} = 13,4 \text{ МПа};$$

в) допустима напруга при $\sigma_T = 360$ МПа (табл. 27.2) і $[n] = 4$

$$[\sigma_p] = \sigma_T/[n] = 360/4 = 90 \text{ МПа};$$

г) еквівалентна напруга

$$\sigma_{екв} = \sqrt{\sigma_{ск}^2 + 4\tau_{к}^2} = \sqrt{38^2 + 4 \cdot 13,4^2} = 46,5 \text{ МПа} < [\sigma_p].$$

Міцність гвинта забезпечена.

2. *Розрахунок гайки.* Визначимо висоту гайки (рис. 33.3):

$$H_T = \psi_H d_2 = 1,4 \cdot 46 = 64,4 \text{ мм; беремо } H_T = 64 \text{ мм.}$$

Число витків різьби в гайці $z_0 = H_T/p = 64/8 = 8$. Визначимо зовнішній діаметр D_1 гайки відповідно до умови міцності на розтяг:

$$\sigma_p = 4\beta Q/[\pi(D_1^2 - d^2)] \leq [\sigma_p].$$

де $\beta = 1,3$ — коефіцієнт, який враховує вплив скручувального моменту; $[\sigma_p] = 40$ МПа.
Звідси

$$D_1 \geq \sqrt{4\beta Q / \pi (\sigma_p) + d^2} = \sqrt{4 \cdot 1,3 \cdot 50 \cdot 10^3 / (3,14 \cdot 40 \cdot 10^6) + 50^2 \cdot 10^{-6}} = 0,068 \text{ м} = 68 \text{ мм}.$$

Беремо $D_1 = 70$ мм.

Розділ XXXIV

ЧЕРВ'ЯЧНІ ПЕРЕДАЧІ

§ 34.1. Загальні відомості

Черв'ячні передачі призначені для передавання обертального руху між валами, осі яких перехрещуються. Кут перехрещування звичайно дорівнює 90° . Можливі й інші кути, але такі передачі трапляються рідко.

Черв'ячна передача (рис. 34.1) складається з обертового гвинта 1, який називають черв'яком, і черв'ячного колеса 2, що має на своєму ободі зуби, які зчіплюються з витками черв'яка. Тому черв'ячні передачі належать до зубчасто-гвинтових. Ведучою ланкою звичайно є черв'як.

Черв'ячні передачі дуже поширилися у різних галузях машинобудування і приладобудування, бо мають ряд переваг: плавність і безшумність роботи, можливість забезпечення великих передаточних чисел при невеликому габариті, точність перемішень, можливість забезпечення самогальмування. До недоліків черв'ячних передач можна віднести:

порівняно низький ККД, невелика порівняно із зубчастими передачами передавана потужність (звичайно не більше 70 кВт), підвищене спрацювання і необхідність застосування дорогих матеріалів (бронзи).

§ 34.2. Короткі відомості про геометрію черв'ячних передач

Усі терміни, означення і позначення, які використано тут і далі стосовно черв'ячних передач, відповідають ГОСТ 18498—73 «Передачі черв'ячні».

Згаданий стандарт встановлює такі види черв'ячних передач: циліндричну — з циліндричним черв'яком (рис. 34.2, а); глобоїдну — з глобоїдним черв'яком (рис. 34.2, б).

Циліндричні черв'яки бувають таких видів (у дужках подано короткі стандартні терміни): конволютний (черв'як ZN); евольвентний (черв'як ZI); архімедів (черв'як ZA); утворений конусом (черв'як ZK); утворений тором (черв'як ZT).

Теоретичний торцевий профіль витків конволютного черв'яка являє собою конволюту (подовжену або вкорочену евольвенту); в евольвентного

черв'яка торцевий профіль витків — евольвента; в архімедового черв'яка — архімедова спіраль. Головні (бічні) поверхні витків цих трьох видів черв'яків являють собою гелікоїд, тобто поверхню, утворену рухом прямої лінії відносно осі черв'яка. Головні поверхні витків черв'яків ZK і ZT являють собою нелінійчасту поверхню. Форма головної поверхні витків цілком залежить від технології виготовлення черв'яків. Далі розглянуто тільки найпоширеніші передачі — з циліндричними архімедовими черв'яками.

Архімедові черв'яки схожі на гвинти з трапецеїдальною нарізкою і мають в осьовому перерізі прямолінійний профіль витків з кутом при вершині, який дорівнює 40° ; осьовий переріз черв'яка ідентичний профілю стандартної зубчастої рейки.

Витки черв'яка нарізають різцем на токарно-гвинторізному верстаті, модульною дисковою фрезою на різьбофрезерному або довбачем на зубо-

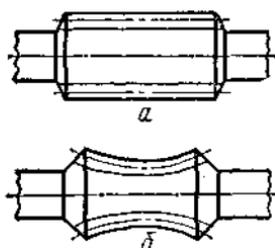


Рис. 34.2

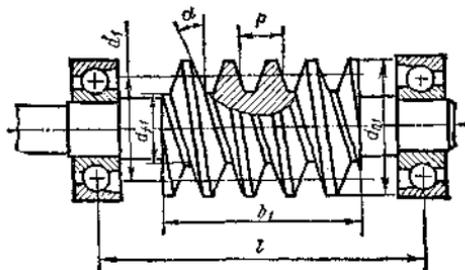


Рис. 34.3

фрезерному верстаті. Після нарізування різьби і термообробки робочі поверхні витків звичайно шліфують і полірують. Оскільки архімедів черв'як у нормальному перерізі витка має криволінійний профіль, то шліфувальний круг для обробки такого черв'яка повинен мати фасонний профіль. Простіше шліфувати конвольютні черв'яки, що мають у нормальному перерізі витків прямолінійний профіль.

Зуби черв'ячного колеса нарізають методом обкатування (обгинання) черв'ячною фрезою, яка є ніби копією черв'яка, але такою, що має різальні кромки. Під час нарізування зубів заготовка колеса і черв'ячна фреза рухаються відносно так само, як під час роботи черв'ячної пари.

Точність виготовлення черв'ячних передач з металевими механічно обробленими колесами, які поєднують з циліндричними черв'яками, визначена СТ СЭВ 311—76. Як і для циліндричних зубчастих коліс, стандарт передбачає 12 ступенів точності. Основні параметри циліндричних черв'ячних передач регламентує ГОСТ 2144—76. Нижче розглянуто тільки черв'ячні передачі з черв'яком і колесом, початкові і ділильні поверхні яких збігаються.

Черв'як. Черв'як (рис. 34.3) як гвинт характеризується осьовим кроком нарізки $p = mt$, а для багатозахідних черв'яків ще й ходом p_z , причому

$$p_z = pz_1,$$

де z_1 — число заходів черв'яка; m — розрахунковий модуль за ГОСТ 19672—74 (СТ СЭВ 267—76).

Число витків черв'яка визначається кількістю витків (ниток) нарізки, які йдуть один від одного на відстані кроку і мають свій початок на торцях нарізаної частини черв'яка. ГОСТ 2144—76 передбачає виготовлення черв'яків з одним, двома і чотирма витками.

Основні параметри поширених черв'яків (рис. 34.3) такі: $\alpha = 20^\circ$ — кут профілю в осьовому перерізі; m — розрахунковий модуль; $h_{a1} = m$ — висота головки витка; $h_{f1} = 1,2m$ — висота ніжки витка; $h_1 = h_{a1} + h_{f1} = 2,2m$ — висота витка.

Ділильний діаметр черв'яка кратний модулю:

$$d_1 = mq,$$

де q — коефіцієнт діаметра черв'яка.

Величини коефіцієнтів діаметра черв'яка q стандартизовані за ГОСТ 19672—74 (СТ СЭВ 267—76); їх беруть з табл. 34.1.

Таблиця 34.1

1-й ряд	8,0	10,0	12,5	16,0	20,0	25,0
2-й ряд	7,1	9,0	11,2	14,0	18,0	22,4

Примітка. Перевага віддається 1-му ряду.

Кут підйому гвинтової лінії черв'яка на ділильному циліндрі

$$\operatorname{tg} \gamma = p_z / (\pi d_1) = \pi m z_1 / (\pi m q) = z_1 / q.$$

Діаметр вершин витків черв'яка

$$d_{a1} = d_1 + 2h_{a1} = qm + 2m = m(q + 2),$$

діаметр западин черв'яка

$$d_{f1} = d_1 - 2h_{f1} = qm - 2 \cdot 1,2m = m(q - 2,4).$$

Довжина b_1 нарізаної частини черв'яка:

коли кількість витків $z_1 = 1 \div 2$,

$$b_1 \geq (11 + 0,060z_2) m, \text{ мм};$$

коли кількість витків $z_1 = 4$,

$$b_1 \geq (12,5 + 0,09z_2) m, \text{ мм}.$$

Тут z_2 — число зубів черв'ячного колеса.

Через можливі спотворення профілю на кінцях черв'яка при вході і виході шліфувального круга шліфовані черв'яки роблять довшими приблизно на 3 m . Шліфування і полірування робочої поверхні витків черв'яка значно підвищує навантажувальну здатність передачі, бо зменшує небезпеку заїдання робочих поверхонь.

Черв'ячне колесо. Переріз черв'яка і черв'ячного колеса площиною, перпендикулярною до осі черв'яка, зображено на рис. 34.4.

Діаметр ділильного кола черв'ячного колеса

$$d_2 = m z_2.$$

Діаметр вершин зубів черв'ячного колеса в середньому перерізі

$$d_{a2} = d_2 + 2h_{a2} = m(z_2 + 2).$$

Діаметр западин черв'ячного колеса в середньому перерізі

$$d_{f2} = d_2 - 2h_{f2} = m(z_2 - 2,4).$$

Зовнішній діаметр черв'ячного колеса (рис. 34.4, б)

$$d_{ам2} = d_{a2} + \frac{6m}{z_1 + 2}.$$

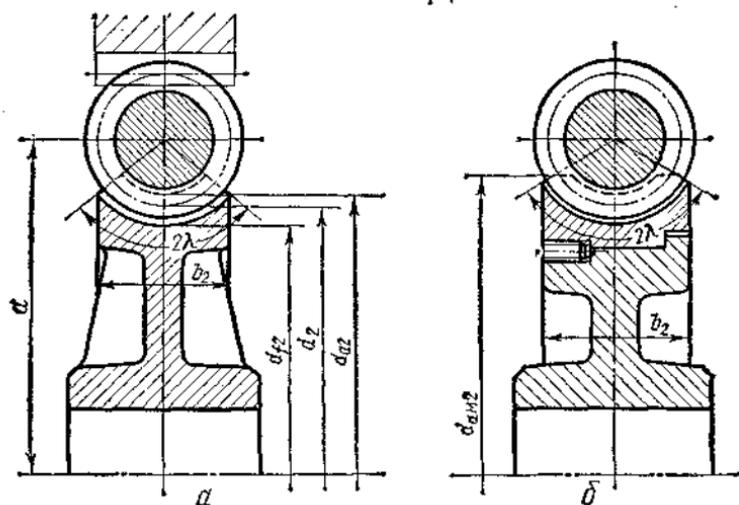


Рис. 34.4

Ширину вінця черв'ячного колеса визначають залежно від діаметра верхніх витків черв'яка (рис. 34.4):

$$\text{коли } z_1 = 1 \div 2, \text{ то } b_2 \leq 0,750 d_{a1},$$

$$\text{коли } z_1 = 4, \text{ то } b_2 \leq 0,67 d_{a1}.$$

Міжосьова відстань черв'ячної передачі

$$a = (d_1 + d_2)/2 = m(q + z_2)/2.$$

Центральний кут дуги обхвату 2λ беруть у межах 90° — 110° . На рис. 34.4, а тонкими лініями зображено циліндричне черв'ячне колесо в зачепленні з черв'яком. Таку конструкцію іноді застосовують у приладобудуванні і в несилових передачах (для такого колеса довжина ліній контакту зубів з витками черв'яка менша).

§ 34.3. Кінематика і ККД черв'ячної передачі

Передаточне число. В осьовому перерізі витки черв'яка являють собою рейку. За один оберт черв'як зміщує колесо на величину ходу нарізки p_z . Колова швидкість на початковому (ділільному) колі черв'ячного колеса дорівнює лінійній швидкості v_1 руху витків черв'яка в осьовому напрямі. Тому за кожний оберт черв'яка черв'ячне колесо повертається на число зубів, яке дорівнює числу витків черв'яка, тобто $v_1 = n_1 \pi m z_1$ і $v_2 = n_2 \pi m z_2$. Коли $v_1 = v_2$, то $n_1 z_1 = n_2 z_2$, або $\omega_1 z_1 = \omega_2 z_2$.

Тоді передаточне число черв'ячної передачі

$$u = \omega_1/\omega_2 = n_1/n_2 = z_2/z_1,$$

де z_1 — число витків черв'яка; z_2 — число зубів черв'ячного колеса.

Отже, передаточне число черв'ячної передачі дорівнює відношенню числа зубів черв'ячного колеса до числа витків черв'яка.

Число витків черв'яка звичайно $z_1 = 1, 2, 4$, а передаточне число $u = 8 \div 80$. Малі значення передаточних чисел ($u = 5 \div 7$), як і дуже великі ($u = 100$ і більше), у силових передачах трапляються рідко. У кінематичних колах металорізальних верстатів і приладів буває $u = 300$ і більше.

Ковзання в зачепленні. Істотна відмінність між черв'ячною і звичайною зубчастою передачами в тому, що коллові швидкості у точках контакту зубів черв'яка і колеса (v_α і v_κ) не збігаються, вони напрямлені одна до

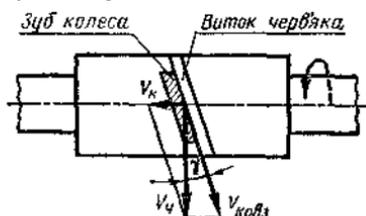


Рис. 34.5

одной під кутом перехреснування (рис. 34.5). Тому під час роботи черв'ячної передачі витки черв'яка ковзають по зубах колеса (як у гвинтовій парі). Швидкість ковзання $v_{\text{ковз}}$ напрямлена по дотичній до витків черв'яка. Величина її визначається через колдову швидкість v_α і кут підйому гвинтової лінії γ :

$$v_{\text{ковз}} = v_\alpha / \cos \gamma = d_1 \omega_1 / 2 \cos \gamma.$$

Велика швидкість ковзання і тертя є причиною низького ККД черв'ячних передач, їх підвищеного спрацювання і можливості заїдання.

ККД черв'ячної передачі. Коефіцієнт корисної дії передачі визначається втратами в зачепленні η_s , в опорах валів черв'яка і колеса η_n , а також втратами на розбризкування і перемішування масла η_p :

$$\eta = \eta_s \eta_n \eta_p.$$

З наведених найбільшими є втрати в зачепленні. Визначають їх, як втрати на тертя у гвинтовій парі, за формулою

$$\eta_s = \operatorname{tg} \gamma / \operatorname{tg} (\gamma + \varphi'),$$

де γ — кут підйому гвинтової лінії; φ' — зведений кут тертя для матеріалів черв'яка і колеса. Величина φ' визначається зведеним коефіцієнтом тертя f' :

$$\varphi' = \operatorname{arctg} f'.$$

Зведений коефіцієнт тертя залежить від матеріалів і чистоти робочих поверхонь черв'яка і черв'ячного колеса, відносної швидкості ковзання, кута профілю нарізки черв'яка і якості змащування. Для сталюого черв'яка і бронзового колеса величину зведеного кута тертя φ' залежно від швидкості ковзання можна брати з табл. 34.2.

Таблиця 34.2

$v_{\text{ковз}}$, м/с	φ'	$v_{\text{ковз}}$, м/с	φ'	$v_{\text{ковз}}$, м/с	φ'
0,01	5°40'—6°50'	1,50	2°20'—2°50'	4,0	1°20'—1°40'
0,10	4°30'—5°10'	2,0	2°00'—2°30'	7,0	1°00'—1°30'
0,50	3°10'—3°40'	2,5	1°40'—2°20'	10,0	0°55'—1°20'
1,0	2°30'—3°10'	3,0	1°30'—2°00'	15,0	0°48'—1°00'

Для попередніх розрахунків, коли розміри передачі ще невідомі, можна брати середні значення ККД:

z_1 1	2	4
η 0,7—0,75	0,75—0,82	0,82—0,92

§ 34.4. Сили, які діють у зачепленні

У черв'ячному зачепленні сила R , з якою витки черв'яка взаємодіють з зубами черв'ячного колеса, відхиляється від нормалі до поверхні витків черв'яка на зведений кут тертя φ' . У плані (рис. 34.6, б) сила R утворить з віссю черв'яка кут $\gamma + \varphi'$, а проекція цієї сили на вертикальну площину

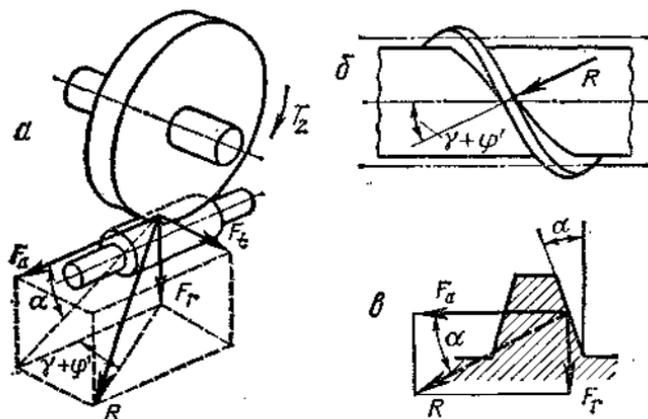


Рис. 34.6

(рис. 34.6, а) утворює з горизонтальною віссю (рис. 34.6, б) кут зачеплення α , який для передач з архімедовим черв'яком беруть 20° . Складовими сили R , які діють у трьох взаємно перпендикулярних напрямках, є три сили: у площині розміщення черв'ячного колеса діють сили F_a і F_r ; перпендикулярно до цих сил діє сила F_t .

Сила F_a — осьова сила для черв'яка (колова сила для черв'ячного колеса):

$$F_a = 2T_2/d_2,$$

де $T_2 = T_1\eta$ — обертаючий момент на валу черв'ячного колеса. Сила F_t — колова сила для черв'яка (осьова сила для черв'ячного колеса):

$$F_t = 2T_1/d_1 \text{ або } F_t = F_a \operatorname{tg}(\gamma + \varphi').$$

(Тут T_1 — обертаючий момент на валу черв'яка). Радіальна сила

$$F_r = F_a \operatorname{tg} \alpha,$$

де α — кут профілю витків черв'яка в осьовому перерізі (кут зачеплення). Сила F_a прагне зсунути черв'як вздовж осі, створюючи осьове навантаження на опори і згинає вал черв'яка моментом $F_a d_1/2$ у вертикальній площині. Сила F_r також згинає вал черв'яка у вертикальній площині, а сила F_t згинає його в горизонтальній площині і створює обертаючий момент $F_t d_1/2$.

§ 34.5. Розрахунок черв'ячної передачі

Черв'ячні передачі, як і зубчасті, розраховують на витривалість зубів до контактних напруг і напруг згину.

Розрахунок передачі на контактну витривалість. Під час проектного розрахунку передачі визначають міжосьову відстань за формулою

$$a = (1 + z_2/q) \sqrt{\left(\frac{171\,000}{[\sigma_H] z_2/q}\right)^2 KT_2},$$

де z_2 — число зубів колеса; $[\sigma_H]$ — допустима напруга; q — коефіцієнт діаметра черв'яка; T_2 — обертаючий момент на валу черв'ячного колеса.

Для проектного розрахунку спочатку беруть $q \approx z_2/4$. Допустиму контактну напругу $[\sigma_H]$ беруть з табл. 34.4 і 34.5.

Коефіцієнт навантаження K враховує вплив на навантажувальну здатність передачі концентрації навантаження по довжині зубів, частоти обертання колеса і здатності черв'ячних коліс припрацьовуватись. Якщо навантаження стале, то беруть $K \approx 1$, а якщо змінне — $K = 1,1 \div 1,3$ залежно від жорсткості черв'яка.

За величиною знайденої міжосьової відстані знаходять модуль

$$m = 2a/(q + z_2).$$

Знайдене значення модуля округляють до наближеного стандартного і уточнюють значення q і міжосьову відстань.

Проектуючи редуктори, призначені для серійного випуску, величини m , q , u , z_1 і a треба узгодити з діючим ГОСТом. Після остаточного уточнення основних параметрів передачі (a , m , q) роблять перевірний розрахунок. При цьому визначають контактні напруги і порівнюють їх з допустимими:

$$\sigma_H = \frac{171\,000}{z_2/q} \sqrt{\left(\frac{1 + z_2/q}{a}\right) KT_2} \leq [\sigma_H].$$

Розрахунок зубів на згин. Зуби черв'ячного колеса перевіряють на витривалість за напругами згину:

$$\sigma_F = 1,54KT_2/(Y_{F2}m^3qz_2) \leq [\sigma_F],$$

де $[\sigma_F]$ — допустима напруга згину (вибирають з табл. 34.6), причому для нереверсивної роботи треба брати $[\sigma_{0F}]$, а для реверсивної — $[\sigma_{-1F}]$; m — розрахунковий модуль; Y_{F2} — коефіцієнт форми зуба колеса, який беруть з табл. 34.3 залежно від еквівалентного числа зубів черв'ячного колеса

$$z_{2v} = z_2/\cos^3 \gamma.$$

Таблиця 34.3

z_{2v}	Y_{2F}	z_{2v}	Y_{2F}	z_{2v}	Y_{2F}	z_{2v}	Y_{2F}
20	0,474	30	0,534	40	0,606	80	0,704
24	0,500	32	0,550	45	0,634	100	0,722
26	0,509	35	0,572	50	0,647	150	0,741
28	0,522	37	0,584	60	0,669	300	0,760

Звичайно розрахункові напруги згину в матеріалі зубів колеса значно нижчі від допустимих.

Перевірка черв'яка на міцність і жорсткість. Під час проектного розрахунку черв'ячної передачі визначають всі геометричні розміри черв'яка. Тому для черв'яка роблять лише перевірний розрахунок на міцність, причому тіло черв'яка розглядають як брус круглого перерізу.

Сили, які діють у зацепленні, спричиняють деформації черв'яка і напруги в його тілі. Сили F_a , F_r і F_t згинають черв'як. Крім того, сила F_a

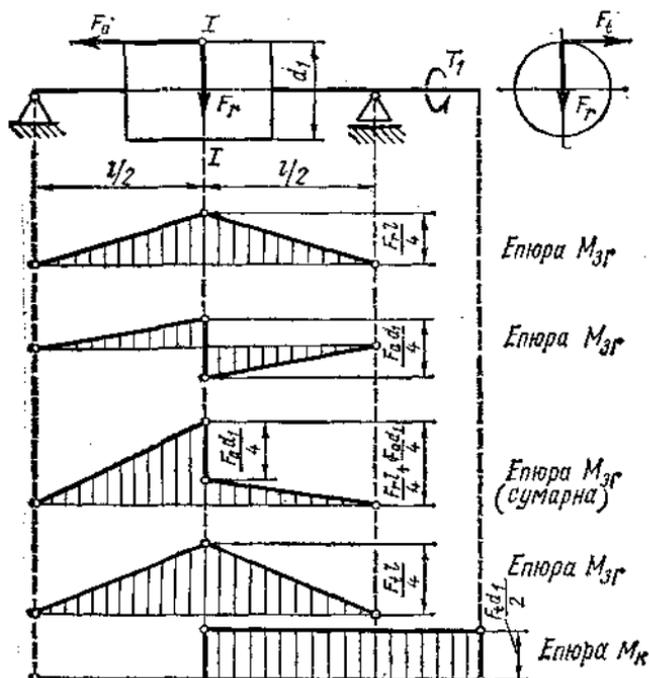


Рис. 34.7

стискає або розтягує його, а сила F_t створює скручувальний момент (рис. 34.6, а). Епюри згинаючих і крутних моментів наведено на рис. 34.7.

Результуючий згинаючий момент у небезпечному перерізі (в середині прольоту l черв'яка) дорівнює

$$M_{зг} = \sqrt{(F_r l/4 + F_a d_1/4)^2 + (F_t l/4)^2}.$$

Напруга згину

$$\sigma_F = M_{зг}/W = M_{зг}/(0,1d_1^3),$$

де d_1 — діаметр западин черв'яка.

Напруга стиску або розтягу

$$\sigma_{ск} = \sigma_p = F_a/F = 4F_a/(\pi d_1^2).$$

Напруга кручення

$$\tau_k = M_k/W_p = T_1/(0,2d_1^3).$$

За V теорією міцності (враховуючи складний напружений стан черв'яка)

$$\sigma_{\text{екв}} = \sqrt{(\sigma_F + \sigma_{\text{ск}})^2 + 3\tau_{\text{н}}^2} \leq [\sigma_{-1F}].$$

Допустиму напругу $[\sigma_{-1F}]$ для матеріалу черв'яка беруть такою, що дорівнює 45—60 МПа (для сталей 45, 40X). Тіло черв'яка перевіряють на жорсткість за формулою

$$f \leq |f| = 0,01m.$$

Розрахункову величину прогину f визначають за формулою

$$f = l^3 \sqrt{F_r^2 + F_d^2} / (48EJ),$$

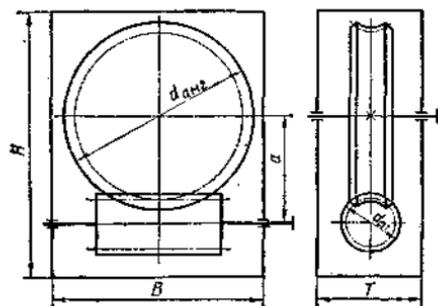


Рис. 34.8

де E — модуль пружності матеріалу черв'яка; $J = \pi d^4 / 64$ — осьовий момент інерції небезпечного перерізу; l — відстань між опорами вала черв'яка беруть або з креслення передачі, або приймають $l \approx (0,8 \div 1,0) d_2$.

Якщо прогин f перевищує допустиму величину, то зменшують k або збільшують коефіцієнт діаметра черв'яка q .

Тепловий розрахунок передачі.

Оскільки ККД черв'ячних передач низький, то для них обов'язково треба враховувати нагрівання. При цьому треба, щоб кількість теплоти, яка виділяється в працюючій передачі, дорівнювала кількості теплоти, що відводиться мастильною рідиною і поверхнею корпусу передачі (редуктора). Якщо відведення виділеної теплоти недостатнє, то передача може перегрітися і вийти з ладу.

Кількість теплоти Q_1 , яка виділилась у працюючій черв'ячній передачі,

$$Q_1 = N(1 - \eta), \text{ Вт},$$

де η — ККД передачі; N — підведена потужність, Вт.

Виділена в редукторі теплота через його стінки передається навколишньому середовищу Q_2 так, що

$$Q_2 = K_r F (t_m - t_0),$$

де K_r — коефіцієнт теплопередавання стінок редуктора, $K_r = 14 \div 17$ Вт/(м² · град), причому більші значення беруть за сприятливих умов циркуляції повітря; F — площа поверхні охолодження корпусу (без днища); t_m — температура всередині редуктора або температура масла; t_0 — температура навколишнього середовища.

Температура масла t_m не повинна перевищувати допустиму $[t_m] = 60 \div 70$ °С. Температура навколишнього середовища (розрахункова) $t_0 = 20$ °С. Площу поверхні охолодження корпусу редуктора (рис. 34.8) визначають за такими співвідношеннями:

$$F = 2H(B + T) + TB,$$

де $H = 2a + 0,4d_{ам2}$; $B = 1,3 d_{ам2}$; $T = 2d_{a1}$ — відповідно висота, довжина і ширина корпусу. Якщо $Q_2 \geq Q_1$, то природного охолодження достатньо.

Щоб збільшити тепловідведення, стінки редуктора роблять ребристими. Тоді, визначаючи площу поверхні відведення теплоти, враховують 50 % площі поверхні ребер. Якщо природного охолодження недостатньо ($Q_2 < Q_1$), то застосовують штучне охолодження за одним із таких способів:

1) за допомогою вентилятора, вмонтованого в корпус, або окремого (рис. 34.9, а); при цьому K_T підвищується до 20—28 Вт/(м² · град.);

2) встановлюючи в корпусі редуктора змішувач з водою (рис. 34.9, б); при цьому K_T підвищується до 70—180 Вт/(м² · град) при швидкості води в трубі до 1 м/с;

3) за допомогою циркуляції мастила в системі з спеціальними холодильниками (рис. 34.9, в).

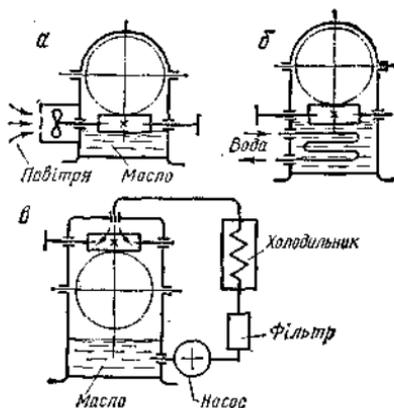


Рис. 34.9

§ 34.6. Матеріали і вибір допустимих напруг

Матеріали для виготовлення черв'яка і черв'ячного колеса беруть такими, щоб втрати на тертя в зачепленні були мінімальними. Черв'яки звичайно виготовляють з вуглецевих або легованих сталей. Для збільшення роботоздатності передачі черв'яки термічно обробляють — загартовують до твердості \geq HRC45 з наступним шліфуванням і поліруванням витків.

Черв'ячні колеса виготовляють з бронзи і чавуну. Чавун застосовують для виготовлення коліс або їх вінців при швидкості ковзання $v \leq 1,5$ м/с і малих навантажень. Звичайно їх застосовують у відкритих передачах. В інших випадках для економії дорогої бронзи черв'ячне колесо виготовляють складеним: вінець (бандаж) — бронзовий, а центр колеса — чавунний (див. рис. 34.4, б) або сталевий.

Таблиця 34.4

Матеріал		[σ_H] МПа, при швидкості ковзання, м/с						
черв'яка	черв'ячного колеса	0,25	0,5	1	2	3	4	6
Сталь 20; 20Х, цементована (> HRC45)	СЧ 15—32, СЧ 18—36	160	130	115	90	—	—	—
Сталь 45, Ст6	СЧ 15—32, СЧ 18—36	140	110	90	70	—	—	—
Сталь загартована	БрАЖ 9-4	—	250	230	210	180	160	120

Допустимі контактні напруги [σ_H] для вінців черв'ячних коліс з чавуну або безолов'яної бронзи беруть з табл. 34.4, а для коліс з олов'яних

бронз (залежно від поєднання матеріалів контактуючих поверхонь і способу виливання) — з табл. 34.5, в якій наведено значення $[\sigma_H]'$, прийнятні для базового числа циклів навантаження $N_0 = 10^7$. Для визначення $[\sigma_H]$ з урахуванням конкретних умов роботи вводять коефіцієнт довговічності K_{HL} , який враховує число циклів навантажень:

$$[\sigma_H] = K_{HL} [\sigma_H]'$$

Тут $K_{HL} = \sqrt[8]{10^7/N}$, коли $N = 60 n L_n$, де N — дійсне число циклів навантажень; n — частота обертання колеса, хв^{-1} ; L_n — строк служби передачі, год.

Таблиця 34.5

Матеріал і спосіб виливання	$[\sigma_H]'$, МПа, при твердості поверхні витків черв'яка HRC	
	< 45	≥ 45
БрОФ10-1, у пісок	130	160
БрОФ10-1, у кокіль	190	225
БрОНФ, відцентрове	210	250

Таблиця 34.6

Матеріал і спосіб виливання	$[\sigma_F]$ при навантаженні, МПа	
	$[\sigma_{0F}]$, нереверсивному	$[\sigma_{-1F}]$, реверсивному
БрОФ10-1, у пісок	40	29
БрОФ10-1, у кокіль	58	42
БрОНФ, відцентрове	65	46
БрАЖ9-4, у пісок	78	64
СЧ 12-28, у пісок	34	21
СЧ 15-32, у пісок	38	24
СЧ 18-36, у пісок	43	27

Допустимі напруги згину для зубів черв'ячного колеса наведено в табл. 34.6 при базовому числі циклів $N_0 = 10^6$. Якщо $N > 10^6$, то табличні значення $[\sigma_F]$ можна помножити на коефіцієнт довговічності $K_{FL} = \sqrt[9]{10^6/N}$. Коли $N \leq 10^6$, то беруть $N = 10^6$; коли $N \geq 25 \cdot 10^7$, беруть $N = 25 \cdot 10^7$. Для чавунних черв'ячних коліс допустимі напруги вибирають незалежно від числа циклів навантаження.

Приклад 34.1. Розрахувати закриту нереверсивну черв'ячну передачу для тривалої роботи, якою $N_2 = 9 \text{ кВт}$, $u = 35$, $\omega_1 = 300 \text{ рад/с}$. Робота передачі спокійна з невеликими коливаннями навантаження.

Розв'язання. Виберемо матеріал для деталей передачі. Для вінця черв'ячного колеса беремо бронзу БрОФ10-1 (виливання в кокіль); матеріал черв'яка — сталі 20Х, цементована, загартована до твердості HRC55, черв'як шліфований. Центральну частину колеса виготовлено з чавуну СЧ 15-35.

Допустимі контактні напруги для зубів черв'ячного колеса беремо з табл. 34.5 при $K_{HL} = 1$ $[\sigma_H] = 225 \text{ МПа}$. Допустима напруга згину для зубів черв'ячного колеса при $K_{FL} = 1$ $[\sigma_{0F}] = 58 \text{ МПа} = 58 \cdot 10^6 \text{ Па}$ (з табл. 34.6). Беремо число витків черв'яка $z_1 = 2$. Кутова швидкість вала колеса $\omega_2 = \omega_1/u = 300/35 = 8,57 \text{ рад/с}$. Число зубів

черв'ячного колеса $z_2 = uz_1 = 35 \cdot 2 = 70$. Визначаємо міжосьову відстань передачі з розрахунку на контактну витривалість:

$$a = (1 + z_2/q) \sqrt[3]{\left(\frac{171\,000}{[\sigma_H] z_1/q}\right)^2 KT_2}.$$

Беремо спочатку $q = 16$ з умови $q \approx z_2/4 = 17,5$. Оскільки передача швидкохідна, беремо $K = 1,3$. Обертальний момент на валу черв'ячного колеса

$$KT_2 = KN_2/\omega_2 = 1,3 \cdot 9 \cdot 10^3/8,57 = 1365 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Підставивши ці величини у формулу для a , дістанемо

$$a = (1 + 70/16) \sqrt[3]{\left(\frac{171\,000}{225 \cdot 10^6 \cdot 70/16}\right)^2 1365} = 0,186 \text{ м} = 186 \text{ мм}.$$

Визначаємо модуль зачеплення:

$$m = \frac{2a}{q + z_2} = 2 \cdot 186/(10 + 70) = 4,32 \text{ мм}.$$

За ГОСТ 19672-74 беремо $m = 5$ мм і $q = 16$. Тоді міжосьова відстань $a = 0,5m(q + z_2) = 0,5 \cdot 5(16 + 70) = 215$ мм.

Визначимо основні розміри деталей черв'ячної пари:

а) черв'як (див. рис. 34.3): дільний діаметр $d_1 = mq = 5 \cdot 16 = 80$ мм, діаметр вершин витків черв'яка $d_{a1} = m(q + 2) = 5(16 + 2) = 90$ мм, діаметр западин черв'яка $d_{f1} = m(q - 2,4) = 5(16 - 2,4) = 68$ мм, довжина нарізаної частини $b_1 \geq (11 + 0,06 z_2) = (11 + 0,06 \cdot 70) = 76$ мм.

Оскільки черв'як шліфований, то остаточно $b_1 = 76 + 25 = 101$ мм. Беремо $b_1 = 100$ мм;

б) черв'ячне колесо (див. рис. 34.4): дільний діаметр $d_2 = mz_2 = 5 \cdot 70 = 350$ мм, діаметр вершин зубів $d_{a2} = m(z_2 + 2) = 5(70 + 2) = 360$ мм, діаметр западин $d_{f2} = m(z_2 - 2,4) = 5(70 - 2,4) = 338$ мм, зовнішній діаметр колеса $d_{am2} = d_{a2} + \frac{6m}{z+2} = 360 + 1,5 \cdot 5 = 367,5$ мм; беремо $d_{am2} = 370$ мм, ширина вінця колеса (при $z_1 = 2$)

$$b \leq 0,75d_{a1} = 0,75 \cdot 90 = 67,5 \text{ мм}.$$

Кут підйому витків черв'яка γ дорівнює

$$\arctg \gamma = \arctg(z_1/q) = \arctg(2/16) = 7^\circ 07'.$$

Швидкість ковзання в зачепленні

$$v_{\text{кова}} = \frac{d_1 \omega_1}{2 \cos \gamma} = \frac{0,08 \cdot 300}{2 \cos 7^\circ 07'} = 12,1 \text{ м/с}.$$

При такій швидкості зведений кут тертя $\varphi' = 1^\circ 20'$ (див. табл. 34.2). Втрати на тертя в зачепленні

$$\eta_z = \frac{\text{tg } \gamma}{\text{tg } (\gamma + \varphi')} = \frac{\text{tg } 7^\circ 07'}{\text{tg } (7^\circ 07' + 1^\circ 20')} = 0,841.$$

Вважаємо, що втрати в опорах валів (підшипниках) $\eta_{\text{п}} = 0,995$, втрати на перемішування і розбрикування масла $\eta_{\text{р}} = 0,98$. Тоді ККД передачі $\eta = 0,841 \cdot 0,995 \cdot 0,98 = 0,820$. Перевіримо передачу на контактну витривалість:

$$\sigma_H = \frac{171\,000}{z_2/q} \sqrt{\left(\frac{1 + z_2/q}{a}\right) KT_2} \leq [\sigma_H].$$

Підставивши величини, дістанемо

$$\begin{aligned} \sigma_H &= \frac{171\,000}{70/16} \sqrt{\left(\frac{1 + 70/16}{215 \cdot 10^{-3}}\right)^3 1365} = 180,4 \cdot 10^6 \text{ Па} = \\ &= 180,4 \text{ МПа} < [\sigma_H] = 225 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

Контактно витривалість забезпечено.

Перевіряємо міцність зубів за напругами згину:

$$\sigma_F = 1,54KT_2/(Y_{2F}m^3qz_2) \leq [\sigma_{0F}],$$

Визначаємо еквівалентне число зубів:

$$z_{2v} = z_2/\cos^3 \gamma = 70/(\cos 7^\circ 07')^3 = 72,$$

в табл. 34.3 інтерполюванням знаходимо коефіцієнт форми зуба $Y_{2F} = 0,69$. Підставивши знайдені значення в розрахункову формулу, дістанемо

$$\sigma_F = \frac{1,54 \cdot 1365}{0,69 \cdot (5 \cdot 10^{-3})^3 \cdot 16 \cdot 70} = 21,8 \cdot 10^6 \text{ Па} = 21,8 \text{ МПа} < [\sigma_{0F}] = 58 \text{ МПа}.$$

Перевіряємо черв'як на міцність в небезпечному перерізі I — I (див. рис. 34.7). Осьова сила черв'яка

$$F_a = 2T_2/d_2 = 2 \cdot 1050/0,350 = 6000 \text{ Н},$$

де $T_2 = N_2/\omega_2 = 9 \cdot 10^3/8,57 = 1050 \text{ Н} \cdot \text{м}$.

Колова сила черв'яка $F_t = 2T_1/d_1 = 2 \cdot 36/0,08 = 900 \text{ Н}$, де $T_1 = T_2/(\omega_1/\omega_2) = 1050/(35 \cdot 0,841) = 36 \text{ Н} \cdot \text{м}$. Радіальна сила черв'яка $F_r = F_a \operatorname{tg} \alpha = 6000 \operatorname{tg} 20^\circ = 2180 \text{ Н}$. Результируючий згинаючий момент у небезпечному перерізі черв'яка

$$M_{зг} = \sqrt{(F_r l/4 + F_a d_1/4)^2 + (F_t l/4)^2} = \\ = \sqrt{(2180 \cdot 35/4 + 6000 \cdot 0,08/4)^2 + (900 \cdot 0,35/4)^2} = 320,57 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Відстань між опорами вала черв'яка $l = d_2 = 0,35 \text{ м}$. Напряга згину

$$\sigma_F = M_{зг}/(0,1d_1^3) = 320,57/(0,1 \cdot 68^3 \cdot 10^{-9}) = 10,2 \cdot 10^6 \text{ Па} = 10,2 \text{ МПа}.$$

Напряга стиску

$$\sigma_{ск} = 4F_a/(\pi d_1^2) = 4 \cdot 6000/(3,14 \cdot 68^2 \cdot 10^{-6}) = 2,42 \cdot 10^6 \text{ Па} = 0,42 \text{ МПа}.$$

Напряга кручення

$$\tau_k = T_1/(0,2d_1^3) = 36/(0,2 \cdot 68^3 \cdot 10^{-9}) = 0,57 \cdot 10^6 \text{ Па} = 0,57 \text{ МПа}.$$

Еквівалентна напряга

$$\sigma_{екв} = \sqrt{(\sigma_F + \sigma_{ск})^2 + 3\tau_k^2} = \sqrt{(10,2 + 2,42)^2 + 3 \cdot 0,57^2} = \\ = 12,64 \text{ МПа} < [\sigma_{0F}] = 58 \text{ МПа}.$$

Міцність черв'яка забезпечено.

Зробимо тепловий розрахунок редуктора. Кількість теплоти, що виділяється в черв'ячній передачі під час роботи,

$$Q_1 = N(1 - \eta) = 9000(1 - 0,82) = 1620 \text{ Вт}.$$

Визначимо поверхню охолодження корпусу редуктора

$$F = 2H(B + T) + TB,$$

де висота корпусу $H = 2a + 0,4 d_{ам2} = 2 \cdot 0,215 + 0,4 \cdot 0,37 = 0,578 \text{ м}$, довжина корпусу $B = 1,3 d_{ам2} = 1,3 \cdot 0,37 = 0,481 \text{ м}$, ширина корпусу $T = 2d_{з1} = 2 \cdot 0,09 = 0,18 \text{ м}$. Підставляючи знайдені значення, знаходимо $F = 2 \cdot 0,578(0,481 + 0,180) + 0,180 \cdot 0,481 = 0,851 \text{ м}^2$.

Кількість теплоти, яка передається через стінки редуктора навколишньому повіттю,

$$Q_2 = K_T F (t_m - t_0),$$

де $K_T = 17 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{град})$ — коефіцієнт теплопередачі; $t_m = 70^\circ \text{C}$ — максимальна температура масла; $t_0 = 20^\circ \text{C}$ — температура навколишнього повітря. Підставивши величини, дістанемо

$$Q_2 = 17 \cdot 0,851(70 - 20) = 723 \text{ Вт} < 1620 \text{ Вт} = Q_1.$$

Оскільки $Q_2 < Q_1$, то стінки редуктора треба брати ребристими і на валу черв'яка встановити вентилятор для обдування корпусу редуктора.

§ 35.1. Загальні відомості

Редуктором називають закриту зубчасту або черв'ячну передачу, призначену для зниження кутової швидкості веденого вала порівняно з ведучим. Зменшення кутової швидкості супроводиться збільшенням обертаючого моменту на веденому валу. Пристрої, які підвищують кутову швидкість, називають прискорювачами або мультиплікаторами. На схемах редукторів позначатимемо: вхідний — швидкохідний вал, до якого приєднують вал двигуна, цифрою 1, а вихідний — тихохідний вал — цифрою 2.

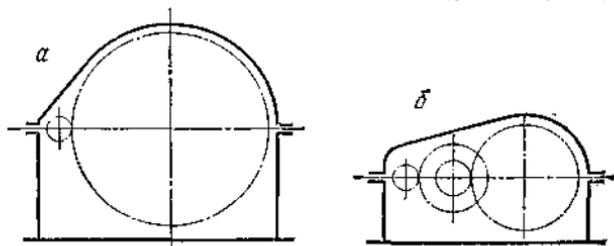


Рис. 35.1

Редуктори бувають одно- і багатоступінчасті. Передаточне число редуктора з одним ступенем у вигляді циліндричної пари коліс звичайно не перевищує $u_{\max} = 8$. Для конічних косозубих передач $u_{\max} = 5 \div 6$. Двоступінчасті редуктори мають великі передаточні числа,

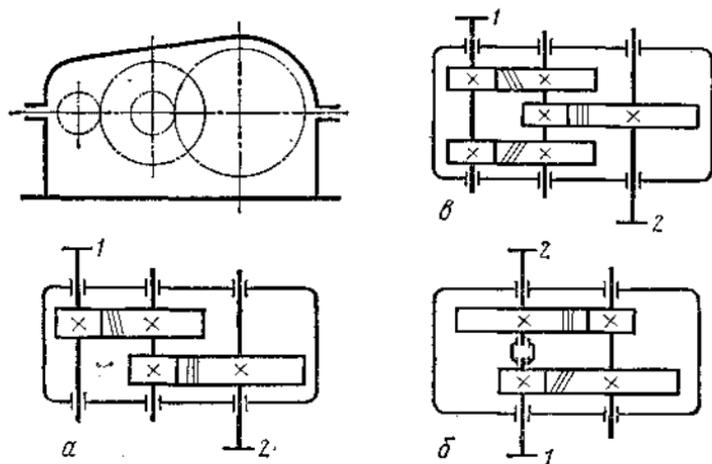


Рис. 35.2

але не більші за $u = 18$. Для u від 31,5 до 400 виготовляють триступінчасті редуктори. Редуктори, які мають більш як три ступені, трапляються рідко. Для великих передаточних чисел застосовують також редуктори: черв'ячні, циліндрично-черв'ячні або черв'ячно-циліндричні, двоступінчасті черв'ячні і планетарні передачі.

Редуктори проектують або спеціально для певної машини, або використовують серійні, призначені для встановлення на різних машинах.

Серійні редуктори добирають за каталогами заводів-виготовлювачів відповідно до передаваного моменту і передаточного числа.

Перевагу слід надавати редукторам з меншим числом ступенів. Проте одноступінчасті редуктори мають більші розміри порівняно з багатоступінчастими, що видно з порівняння схем двох редукторів з передаточним числом $u = 8$ однакового передаваного моменту (рис. 35.1, а, б).

В одноступінчастих редукторах з циліндричними колесами звичайно вали розміщені горизонтально. Колеса можуть бути з прямими, косими або шевронними зубами. Корпуси редукторів найчастіше виготовляють литими чавунними, рідше — зварними сталевими. Вали зубчастих передач редукторів

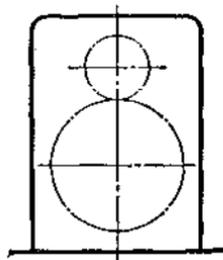
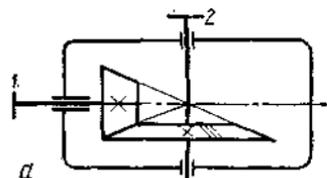
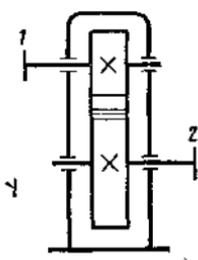
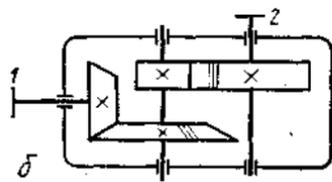


Рис. 35.3

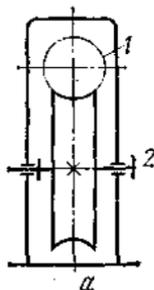


а

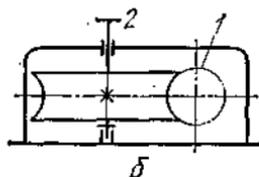


б

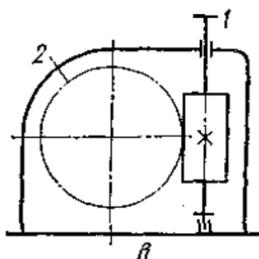
Рис. 35.4



а



б



в

Рис. 35.5

монтують на підшипниках кочення або ковзання. Останні застосовують у редукторах важкого машинобудування.

Двоступінчасті редуктори виготовляють за розгорнутою схемою (рис. 35.2, а, в) або за схемою, яку зображено на рис. 35.2, б. Тут осі вхідного і вихідного валів збігаються, утворюючи одну лінію. Тому такі редуктори називають *співвісними*. Їх перевага — менша довжина порівняно з редукторами, виготовленими за першою схемою.

Несиметричне розміщення зубчастих коліс відносно опор (рис. 35.2, а) призводить до нерівномірного розподілу передаваної сили по довжині зуба. У схемі з роздвоєним ступенем (рис. 35.2, в) більш навантажене тихохідне колесо розміщене відносно опор симетрично. Для рівномірного розподілу навантаження між колесами тихохідного ступеня, які працюють паралельно, гвинтові лінії зубів коліс, установлених на одному валу,

роблять протилежного напрямку. Конструкція опор у цьому разі повинна забезпечувати деяке осьове зміщення одного з двох валів. Редуктори випускають з горизонтальним (див. рис. 35.1), вертикальним (рис. 35.3) або з похилим розміщенням площини осей валів.

Якщо треба передавати обертаючий момент між валами з взаємно перпендикулярним розміщенням осей, застосовують одно- або двоступінчасті конічні редуктори (рис. 35.4, а). Передаточні числа таких редукторів з прямозубими конічними колесами не перевищують $u = 4$, а для косих і криволінійних зубів — не більше $u = 5$ (рідко $u = 6$). При великих передаточних числах застосовують конічно-циліндричні редуктори (рис. 35.4, б).

Черв'ячні редуктори можуть бути з верхнім, бічним, вертикальним (рис. 35.5, а, б, в) або нижнім (див. рис. 34.8, 34.9, а, б) розміщенням черв'яка. Нижнє розміщення застосовують при колових швидкостях черв'яка до 4—5 м/с.

§ 35.2. Конструкція редукторів

Конструкція редуктора (схема розміщення коліс і валів, загальне передаточне число тощо) визначається в кожному окремому випадку його призначенням. На рис. 35.6 зображено конструкцію двоступінчастого редуктора. Корпус редуктора литий чавунний, складається з основи 3 і кришки 2, скріплених між собою болтами. На кришці є оглядовий люк 1, який розміщують звичайно проти зони зачеплення коліс. Вали 4, 5 і 6 розміщені горизонтально і спираються на підшипники кочення.

Масло для змащування зачеплення і підшипників заливають у корпус редуктора з таким розрахунком, щоб зуби і частина вінця колеса занурювались у нього. Під час швидкого обертання коліс масло розбризкується і потрапляє в зачеплення. Стікаючи по стінках і спеціальних каналах у площині рознімання корпусу, масло проникає і в підшипники валів.

Змащування розбризкуванням ефективне, коли колова швидкість зубчастих коліс не менша як 2,5 м/с. При менших швидкостях одне з коліс кожної пари повинно занурюватись у масло. Але якщо колові швидкості перевищують 12 м/с, то змащування зануренням недопустиме, оскільки через бурхливе перемішування масла з дна масляної ванни піднімаються брудні осадки, які, потрапляючи на тертьові поверхні, прискорюють спрацювання зубчастих коліс і підшипників. Щоб запобігти витіканню масла через зазори між валами і кришками, крізь які проходять вали, застосовують у щ і л ь н е н ь я. Рівень масла контролюють за допомогою маслопоказчиків різної конструкції.

Конструкцію конічного зубчастого редуктора показано на рис. 35.7. Його серійно випускають машинобудівні заводи. Корпус редуктора литий чавунний. Конічне колесо, для економії дорогої легованої сталі, складає. Центр колеса виготовлено з порівняно дешевої сталі 45. Конічні підшипники вала шестірні регулюють гайкою, а вал колеса — гвинтами. Осьове положення конічної шестірні регулюють під час складання набором прокладок, а осьове положення колеса — тими самими гвинтами, якими регулюють і підшипники кочення. Щоб запобігти витіканню з редуктора рідкого масла, застосовують торцеві ущільнення.

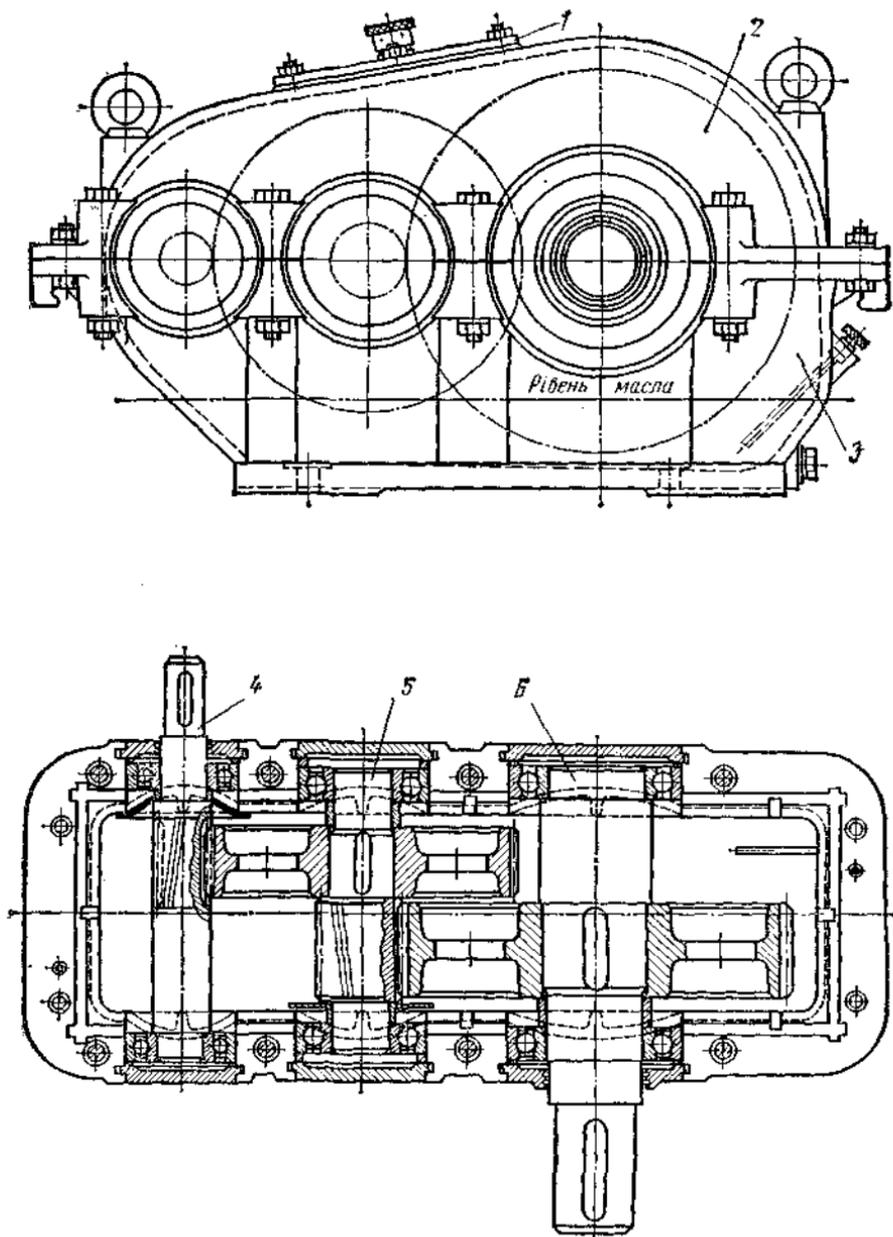


Рис. 35.6

Конструкцію черв'ячного редуктора показано на рис. 35.8. Черв'як редуктора розміщений внизу. Корпус редуктора, як і двох попередніх, литий чавунний, для кращого відведення тепла має ребра, які обдуваються повітрям з вентилятора, насадженого на правий кінець вала черв'яка.

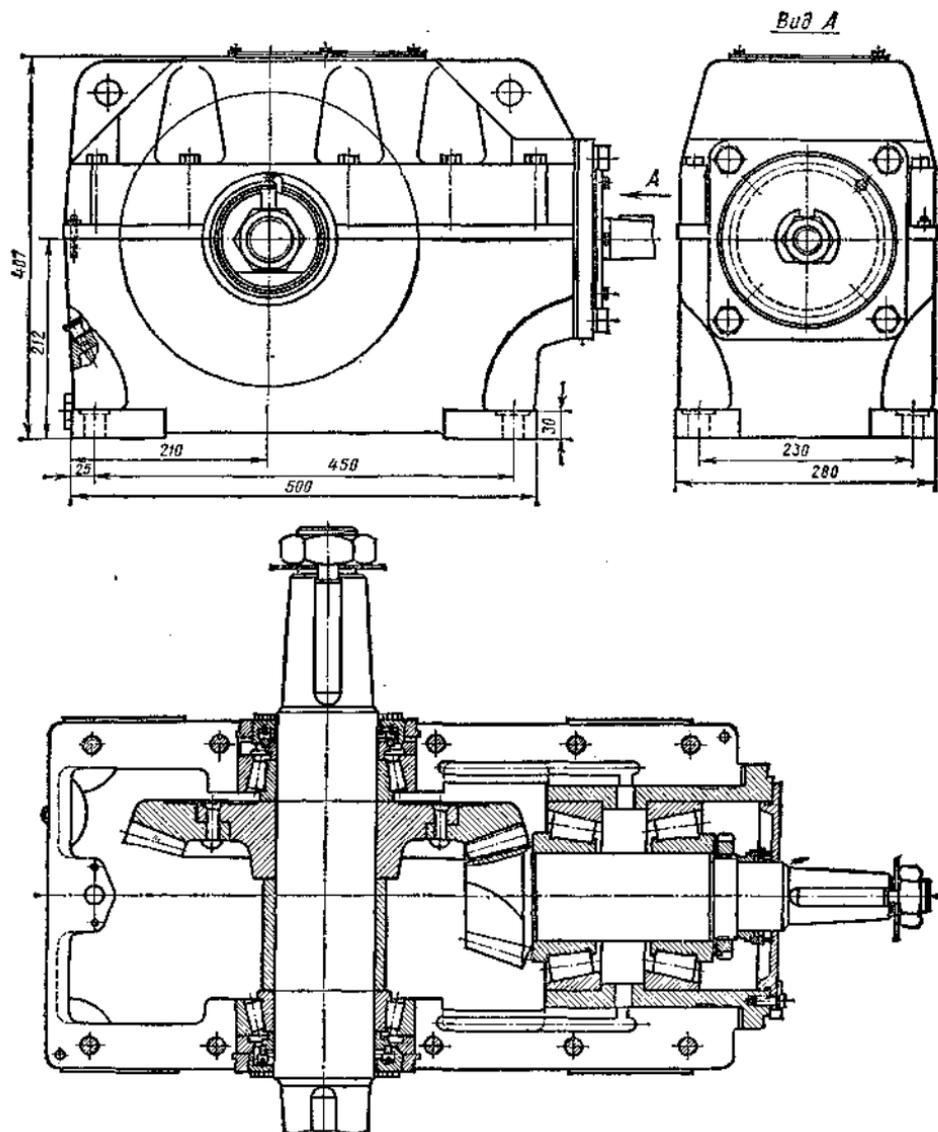


Рис. 35.7

Щоб зменшити втрати на тертя, швидкохідний черв'як розміщують на шарикових підшипниках, а тихохідний вал колеса — на конічних роликових. Підшипники вала колеса, а також осьове положення колеса під час складання регулюють добором прокладок 1 і 4. Конічні роликові підшипники вала колеса змащують пластичним мастилом, яке подають через маслянки (на рисунку не показані), вгвинчені в різьбові отвори 2, 3.

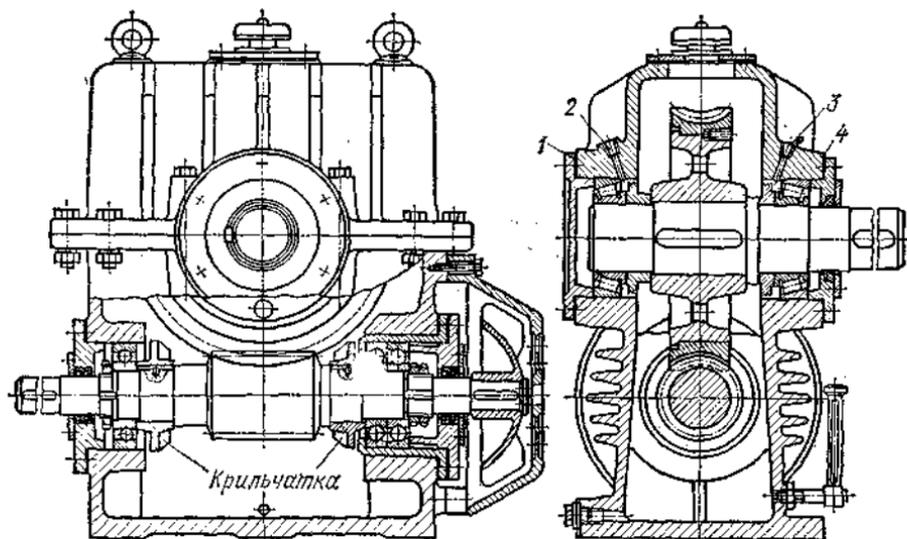


Рис. 35.8

Вибираючи стандартний редуктор, враховують загальне передаточне число, найбільший номінальний момент на вихідному валу, ККД редуктора та умови експлуатації.

Розділ XXXVI

ПАСОВІ ПЕРЕДАЧІ

§ 36.1. Загальні відомості

Пасова передача складається з двох шківів, закріплених на валах, і нескінченного пасу, натягнутого на шківні (рис. 36.1, а). До переваг пасових передач належать: можливість передавання потужності на великі відстані (до 15 м і більше), плавність і безшумність роботи, простота конструкції та експлуатації, здатність без аварій витримувати значні перевантаження. Ці переваги і визначають галузь застосування пасових передач.

Пасові передачі використовують майже в усіх галузях машинобудування; вони є одним з найстаріших видів механічних передач. Потужність сучасних пасових передач звичайно не перевищує 50 кВт, але бувають передачі і більшої потужності. Водночас пасові передачі мають ряд недоліків: порівняно великий габарит, мала довговічність пасів, несталість передаточного числа внаслідок ковзання пасу, підвищені (порівняно із зубчастими передачами) навантаження на вали та їх опори від натягу пасів.

Залежно від форми поперечного перерізу пасу (рис. 36.1) розрізняють передачі: *плоскопасові* (б), *клинопасові* (в), *круглопасові* (г) і *зубчато-пасові* (д). Поширеніші передачі з плоскими і клиновими пасами. Передачі з круг-

лими пасами застосовують для малих потужностей (у побутовій техніці і приладах). Замість передач з кількома клиновими пасами тепер застосовують передачі монолітними *поліклиновими* пасами (рис. 36.1, е), які за-

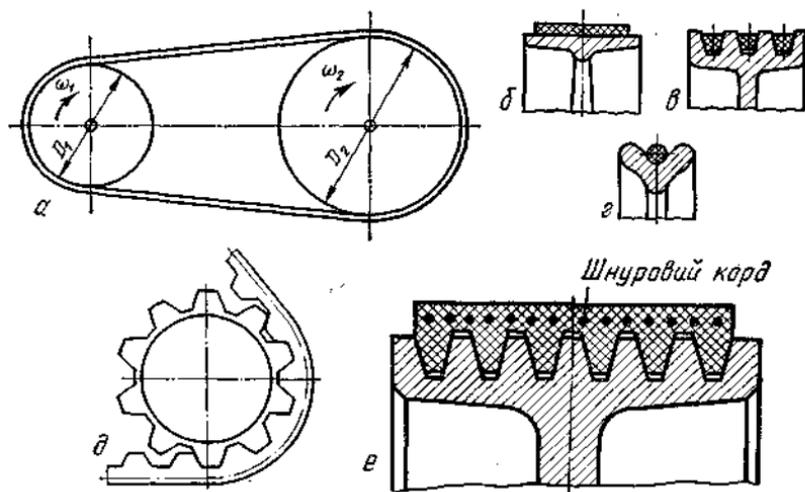


Рис. 36.1

безпечують велику сталість передаточного числа (порівняно з моноклиновими), менші вібрації, передаточні числа до $u = 15$, швидкості до 50 м/с і допускають менші діаметри шківів.

Передача із зубчастим пасом забезпечує сталість передаточного числа ($u \leq 12$), працює безшумно, без проковзування, може працювати в маслі. Принцип роботи такої передачі виключає початковий натяг паса, що зменшує навантаження на опори і вали, підвищує ККД. Зубчасті паси виготовляють з гуми або пластмаси, армованої нескінченними сталевими тросиками, вони можуть працювати з швидкістю до 80 м/с, передаючи потужність до 200 кВт.

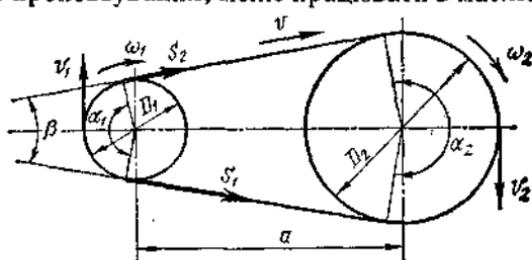


Рис. 36.2

Кінематика пасових передач. Колові швидкості на шківях (рис. 36.2) визначають за формулами

$$v_1 = \omega_1 D_1 / 2 \text{ і } v_2 = \omega_2 D_2 / 2,$$

де v_1 і v_2 — колові швидкості ведучого і веденого шківів; ω_1 і ω_2 — кутові швидкості ведучого і веденого шківів; D_1 і D_2 — діаметри цих шківів.

Під час переміщення паса разом з ободом ведучого шківя на дузі обхвату кожний елемент паса переходить із зони більшого в зону меншого натягу, внаслідок чого елементи паса вкорочуються і пас трохи відстає від шківя. На веденому шківі, навпаки, шків відстає від паса. В результаті колова швидкість веденого шківя буде менша за колову швидкість ве-

лучого шківа. Це явище називають пружним ковзанням*. Пружне ковзання паса характеризують коефіцієнтом ковзання, який показує відносну втрату швидкості на шківах: $\varepsilon = (v_1 - v_2)/v_1$.

В нормальному режимі роботи звичайно $\varepsilon = 0,01 \div 0,03$. Дійсне передаточне число пасової передачі

$$u = \omega_1/\omega_2 = n_1/n_2 = D_2/[D_1(1 - \varepsilon)]. \quad (36.1)$$

Геометрія передач. Під час проектування відкритих пасових передач визначають діаметри шківів D_1 і D_2 , міжосьову відстань a , розрахункову довжину паса L , кут обхвату α на малому шківі. Діаметр малого шківа плоскопасової передачі визначають за формулою Саверіна

$$D_{\min} = (0,052 \div 0,061) \sqrt[3]{N/\omega},$$

де N — у Вт; ω — у рад/с; D — у м.

Діаметр малого шківа клинопасової передачі беруть з табл. 36.4 залежно від вибраного перерізу паса.

Діаметр більшого шківа D_2 як для плоскопасової, так і для клинопасової передачі визначають з формули (36.1). Остаточні діаметри шківів треба узгодити з ГОСТом.

Міжосьова відстань плоскопасової передачі $a \geq 2(D_1 + D_2)$, клинопасової $a \geq 0,55(D_1 + D_2) + h$,

де h — висота перерізу паса. Розрахункову довжину пасів L визначають як суму довжин прямолінійних ділянок і дуг обхвату шківів:

$$L = 2a + \frac{\pi}{2}(D_2 + D_1) + \frac{(D_2 - D_1)^2}{4a}.$$

Для нескінченних пасів L узгоджують з ГОСТом. Якщо довжину паса L встановлено остаточно, то міжосьову відстань уточнюють за формулою

$$a = 0,25[(L - W) + \sqrt{(L - W)^2 - 8y}],$$

де $W = \pi(D_2 + D_1)/2$; $y = [(D_2 - D_1)/2]^2$.

Кут обхвату на малому шківі

$$\alpha_1 = 180^\circ - \frac{D_2 - D_1}{a} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} \approx 180^\circ - \frac{D_2 - D_1}{a} \cdot 60^\circ.$$

Кут β між вітками паса

$$\beta = 180^\circ - \alpha_1.$$

Конструюючи пасові передачі, треба враховувати, що кут обхвату α_1 на малому шківі зменшується із збільшенням передаточного числа і зменшенням міжосьової відстані. Через провисання паса в горизонтальних і похилих передачах збільшується кут обхвату на обох шківах, якщо верхня вітка — ведена, бо вона натягнута слабкіше.

Сили і напруги в пасах. Колову силу P на шківі (корисне навантаження) визначають за формулою

$$P = 2T/D,$$

де T — обертаючий момент на шківі; D — діаметр шківа.

* Пружне ковзання не треба плутати з буксуванням — ковзанням паса відносно шківа по всій дузі обхвату a .

Початковий натяг паса. У пасових передачах корисне навантаження передається силами тертя між пасом і шківками, які створюються попереднім натягом паса. У стані спокою і під час холостого ходу натяги в обох вітках паса однакові і дорівнюють початковому натягу S_0 . Напруга в пасі від початкового натягу (початкова напруга)

$$\sigma_0 = S_0/F,$$

де F — площа поперечного перерізу паса. Для плоских пасів $\sigma_0 = 1,8$ МПа; при наявності автоматичних натяжних пристроїв $\sigma_0 = 2,0$ МПа; для клинових пасів $\sigma_0 = 1,2 \div 1,5$ МПа.

Натяг від робочого навантаження. Якщо передача навантажена, тобто до веденого вала прикладено обертаючий момент сил опору T_2 , а до ведучого — момент рушійних сил T_1 , то натяг ведучої вітки паса зростає до S_1 , а веденої — зменшується до S_2 (рис. 36.2). Різниця цих натягів чисельно дорівнює переданій коліській силі P :

$$P = S_1 - S_2.$$

Натяг віток паса під час роботи передачі $S_1 + S_2 = 2S_0$. З цих рівнянь випливає, що

$$S_1 = S_0 + (P/2) \text{ і } S_2 = S_0 - (P/2).$$

Наведені формули показують перерозподіл початкового натягу паса в його вітках залежно від величини переданої сили P .

Відношення коліскової сили до площі поперечного перерізу паса $k = P/F$ називають **к о р и с н о ю н а п р у г о ю**. Напруги від натягу у ведучій і веденій вітках під час робочого ходу відповідно дорівнюють:

$$\sigma_1 = S_1/F = \sigma_0 + (k/2) \text{ і } \sigma_2 = S_2/F = \sigma_0 - (k/2).$$

Натяг від відцентрових сил. Під час руху паса з швидкістю v у всіх точках його криволінійної траєкторії (на шківках) діють відцентрові сили інерції S_v (див. § 25.4):

$$S_v = \rho F v^2,$$

де ρ — густина матеріалу паса; F — площа поперечного перерізу; v — колова швидкість на ободі шківа.

Сила S_v , відкидаючи пас від шківа, зменшує корисну дію попереднього натягу і тим знижує навантажувальну здатність передачі. Напруга в пасі від відцентрових сил

$$\sigma_v = S_v/F = \rho v^2.$$

Напруга згину. У тій частині паса, яка огинає шків (рис. 36.3), виникають напруги згину. Найбільша напруга згину (наближено вважаємо, що закон Гука справедливий для матеріалу паса) (див. § 23.5)

$$\sigma_F = E\varepsilon = E y_{\max}/\rho = \frac{E\delta/2}{D/2 + \delta/2}.$$

Товщина паса δ мала порівняно з діаметром D шківа, тому можна вважати, що

$$\sigma_F = E\delta/D,$$

де E — модуль пружності матеріалу паса; для шкіряних пасів $E = 100 \div 200$ МПа, для прогумованих і текстильних $E = 200 \div 350$ МПа.

Як видно з формули, напруги згину залежать від діаметра шківів; вони будуть найбільшими на меншому шківі. Найбільші напруги в пасі

$$\sigma_{\max} = \sigma_1 + \sigma_v + \sigma_{F1}.$$

З діаграми розподілу сумарної напруги (рис. 36.4) випливає, що найбільших напруг пас зазнає в місці набігання на ведучий (малий) шків, тобто в точці А.

Розрахунок паса. На практиці користуються розрахунком пасових передач не на міцність за максимальними напругами, а за так званю

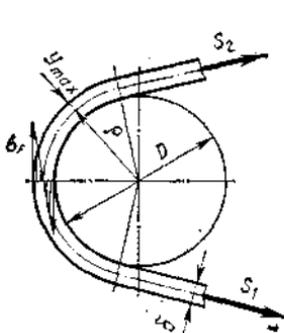


Рис. 36.3

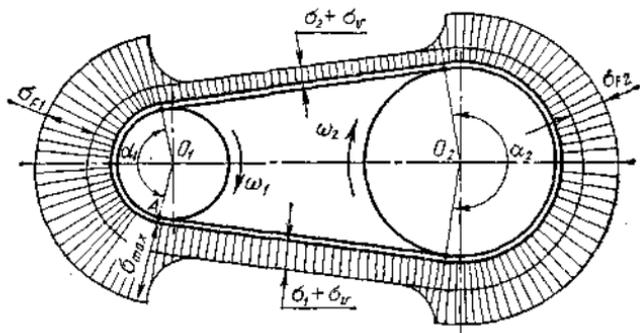


Рис. 36.4

тяговою здатністю, під якою розуміють здатність передавати задане навантаження без буксування, тобто без часткового або повного проковзування паса по шківу. Методику розрахунку розробив ЦНДІТМАШ. Цей розрахунок забезпечує достатню довговічність пасів і високий ККД передачі.

Тягова здатність передачі характеризується експериментальними кривими ковзання (рис. 36.5). Ці криві ілюструють залежність відносного ковзання ϵ і ККД η від ступеня забрудненості передачі. По осі абсцис відкладають коефіцієнт тяги ϕ , що показує, яка частина початкового натягу паса корисно витрачається для передавання колової сили

$$\phi = (S_1 - S_2) / (S_1 + S_2) = P / (2S_0).$$

Звідси колова сила

$$P = 2S_0\phi. \quad (36.2)$$

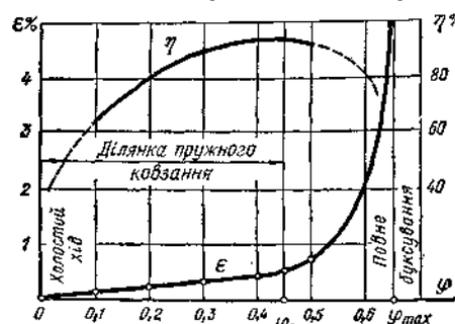


Рис. 36.5

Доцільність визначення навантаження передачі через безрозмірний коефіцієнт ϕ пояснюється тим,

що ковзання і ККД пов'язані саме із ступенем забрудненості передачі, а не з абсолютною величиною навантаження.

На початковій ділянці кривої від 0 до ϕ_0 (рис. 36.5) пас пружно ковзає. Оскільки пружні деформації паса наближено підпорядковані закону Гука, то ця ділянка близька до прямої. Наступне збільшення навантаження веде до часткового проковзування, що спричинює зростання відносного ковзан-

пня ε і збільшення φ до φ_{\max} , при якому настає буксування паса (ковзання по всій дузі обхвату).

Точка, яка відповідає φ_0 , характеризує границю раціонального використання паса. Ділянка кривої від φ_0 до φ_{\max} визначає здатність паса витримувати перевантаження. Поділивши обидві частини рівності (36.2) на площу поперечного перерізу паса F , дістанемо так звану **корисну напругу**:

$$k_0 = P/F = 2\varphi_0 S_0 / F = 2\varphi_0 \sigma_0,$$

де σ_0 — початкова напруга. Зведена корисна напруга k_0 відповідає таким умовам роботи передачі: 1) кут обхвату ведучого шківів $\alpha_1 = 180^\circ$, 2) швидкість паса $v = 10$ м/с, 3) передача відкрита горизонтальна, 4) навантаження рівномірне, спокійне.

Зведену корисну напругу покладено в основу розрахунку плосkopасових і клинопасових передач; значення k_0 подані у відповідних довідкових таблицях. Оскільки методу розрахунку паса на довговічність, який враховував би всі фактори, що впливають на неї, немає, то під час розрахунків обмежуються перевіркою числа пробігів паса за одиницю часу, який визначають за формулою

$$i = v/L \leq [i],$$

де L — довжина паса; v — швидкість паса; $[i]$ — допустиме число пробігів паса, с^{-1} ; $[i] \leq 5$ для плоских і $[i] \leq 10$ для клинових пасів.

Навантаження на вали і паси. Сили натягу віток паса навантажують вали і підшипники (рис. 36.6). Рівнодіюча натягів

$$R = \sqrt{S_1^2 + S_2^2 + 2S_1 S_2 \cos(180^\circ - \alpha_1)} \approx 2S_0 \sin(\alpha_1/2),$$

де α_1 — кут обхвату на малому шківі. Звичайно рівнодіюча R у 2—3 рази більша за колову силу P , що є відчутним недоліком пасових передач.

§ 36.2. Плосkopасові передачі

Плосkopасовим передачам віддають перевагу перед клинопасовими при високих частотах обертання, великих міжосьових відстанях і якщо треба здешевити передачу. Передавана потужність — у діапазоні 0,3—50 кВт, хоч бувають і потужніші передачі.

Різновидності плосkopасових передач. На практиці застосовують передачі плоским пасом, виготовлені за різними схемами (рис. 36.7):

відкриту передачу (а) застосовують для паралельно розміщених валів і однакового напрямку обертання шківів. Швидкість руху пасів від 5—30 м/с у звичайних пасових передачах і до 50—100 м/с у швидкохідних. Передаточне число $u \leq 5$;

перехресну передачу (б) застосовують для паралельно розміщених валів, але з протилежним напрямом їх обертання. Швидкість паса не перевищує 15 м/с, передаточне число $u \leq 6$;

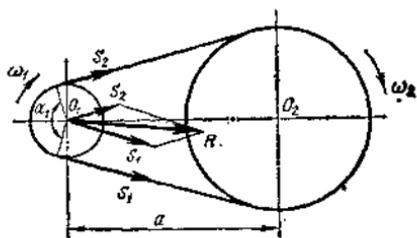


Рис. 36.6

п і в п е р е х р е с н у п е р е д а ч у (а), в якій осі валів перехрещуються під деяким кутом. Максимальна швидкість не перевищує 15 м/с, передаточне число $u \leq 3$. Передача нереверсивна;

передачу під кутом (з), в якій застосовують напрямні ролики. Швидкість паса не перевищує 15 м/с, передаточне число $u \leq 4$;

передачу із ступінчастими шківками (д) застосовують тоді, коли треба регулювати передаточне число;

передачу з холостим шківком (е) застосовують для пускання і зупинки веденого вала при безперервному обертанні ведучого. Ведений вал зупиняють, перевівши пас з робочого шківка на холостий.

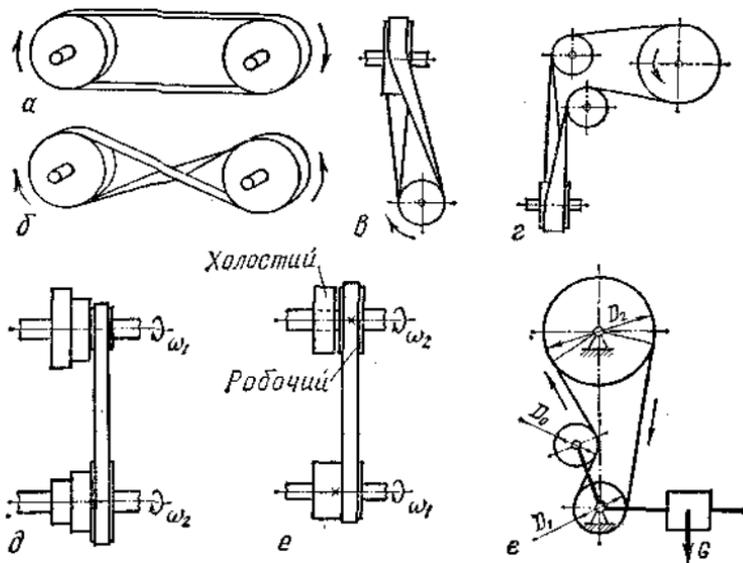


Рис. 36.7

передачу з н а т я ж н и м р о л и к о м (е) застосовують при малих міжосьових відстанях і коли треба збільшити передаточне число ($u \leq 10$). Використання для підтягання ролика вантажу або пружини автоматично забезпечує сталий натяг паса. Швидкість паса може досягати 25 м/с, а в швидкохідних передачах — 50 м/с.

ККД плоскопасової передачі близько 0,97.

Матеріал пасів. Плоскі паси виготовляють: шкіряні, бавовняні (суцільноткані або шті), прогумовані, шерстяні, з синтетичних волокон або пластмасової стрічки.

Шкіряні паси бувають одно- і двошарові; рекомендована найбільша для них швидкість до 45 м/с. Через дефіцитність шкіри і високої її вартості застосування шкіряних пасів обмежене.

Бавовняні суцільноткані паси виготовляють з кількох шарів бавовняного прядива і просочують спеціальною речовиною (бітум, озокерит); застосовують при невеликих навантаженнях. Вони задовільно працюють на шківках порівняно малих діаметрів при швидкостях до 25 м/с; непридатні для роботи в приміщеннях з підвищеною вологістю і парю кислот.

Прогумовані паси складаються з кількох нарізаних або нагорнутих шарів прогумованої технічної тканини (бельтингу). Є кілька різновидів таких пасів, які відрізняються тканинною основою і розміщенням шарів гуми (рис. 36.8, а, б, в).

Нарізні паси типу А (а) рекомендують для шківів малого діаметра при швидкості понад 20 м/с; шарувато загорнуті паси типу Б (б) — для важких умов роботи при швидкості до 20 м/с; спіральньо загорнуті паси типу В (в) — для невеликих навантажень при швидкостях до 15 м/с.

Прогумовані паси всіх типів можуть мати гумові обкладки для роботи в сухих приміщеннях, а також у середовищі, насиченому паром кислот і лугів. Такі паси треба зберігати від потрапляння на них масла, бензину і лугів, які руйнують гуму.

Шерстяні паси складаються з кількох шарів шерстяної тканини основи, прошитих бавовняними нитками. У готовому вигляді їх просочують спеціальними речовинами (сурик на оліфі). Паси придатні для роботи в сухих приміщеннях, а також при ударних навантаженнях. Максимально допустима швидкість для них 30 м/с.

Плівкові паси — новий тип пасів з пластмас на основі поліамідних смол, армованих кордом з капрону, лавсану або енанту. При малій товщині (від 0,4 до 1,2 мм) вони можуть передавати значні потужності (до 15 кВт), працювати при малих діаметрах шківів і при швидкостях паса до 100 м/с.

Розрахунок передач. Під час проектування передач, що працюють в умовах, які відрізняються від експериментальних, розрахунок за тяговою здатністю роблять відповідно до допустимої корисної напруги $[k]$. Від значень k_0 до значень $[k]$ переходять за допомогою поправочних коефіцієнтів, які враховують геометрію, кінематику і режим роботи проектованої передачі:

$$[k] = k_0 k_1 k_2 k_3 k_4,$$

де k_0 — зведена корисна напруга. Значення k_0 подані в табл. 36.1.

Таблиця 36.1

Паси	Мінімальне допустиме відношення D_{\min}/d	D_{\min}/d				
		25	30	40	60	100
		k_0 , МПа				
Прогумовані	30	—	2,1	2,2	2,3	2,35
Шкіряні	25	1,7	1,9	2,1	2,4	2,6
Бавовняні суцільноткані	25	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9
Шерстяні	20	1,2	1,3	1,5	1,6	1,7

Примітка. Коли шківні з пластмас або деревини, то табличні значення k_0 збільшують на 20 %; для роботи в сухих і запиленних приміщеннях — зменшують на 10–30 %.

k_1 — коефіцієнт кута обхвату малого шківa; значення коефіцієнта k_1 подані в табл. 36.2.

Таблиця 36.2

α_1 , град	140	150	160	170	180	200	220
k_1	0,88	0,91	0,94	0,97	1,0	1,1	1,2

k_2 — коефіцієнт навантаження і режиму роботи, його беруть з табл. 36.3.

Таблиця 36.3

Короткочасне перевантаження паса від номінального, %	0	25	50	75	100	150
k_2	1,00	0,875	0,80	0,72	0,67	0,56

k_3 — коефіцієнт, який враховує швидкість паса;

$$k_3 = 1,04 - 0,0004v^2,$$

k_4 — коефіцієнт, який враховує тип передачі і її розміщення:

$k_4 = 0,8 \div 1,0$ (менше значення беруть при великих кутах нахилу передачі до горизонту, бо тоді вага паса погіршує його зчеплення з нижнім шківом); для перехресних передач k_4 додатково зменшують на 15—20 %.

Розраховуючи плоскопасові передачі, визначають потрібну площу поперечного перерізу паса за формулою

$$F = P/[k],$$

де $F = \delta b$ — площа поперечного перерізу паса; b — ширина паса; δ — товщина паса.

Під час попереднього розрахунку, коли D_1 і δ ще не відомі, розмір малого шківa визначають за формулою Саверина.

Діаметр D_2 більшого шківa визначають з формули (36.1). Розрахункові діаметри обох шківів ГОСТ рекомендує вибирати з числа стандартних розмірів: 50, 63, 80, 90, 100, 112, 125, 140, 160, 180, 200, 225, 250, 280, 320, 360, 400, 450, 500, 560, 630, 710, 800, 900, 1000 і т. д. до 4000.

Оцінивши D_1 та орієнтуючись на стандартні розміри паса і величину D_{\min}/δ , вибирають його товщину δ відповідно до табл. 36.1. Потім визначають ширину паса $b = F/\delta$.

Приклад 36.1. Розрахувати горизонтальну передачу плоским пасом від електродвигуна потужністю $N = 7$ кВт і кутовою швидкістю $\omega_1 = 150$ рад/с до шківa токарного верстата з кутовою швидкістю $\omega_2 = 47$ рад/с. Зміна навантаження незначна, робота однозмінна.

Розв'язання. За умовами експлуатації передачі беремо прогумований пас типу В з бельтингу Б-820 за ГОСТ 101—54. Діаметр ведучого шківa (на електродвигуні)

$$\begin{aligned} D_1 &= D_{\min} = (0,052 \div 0,061) \sqrt[3]{N/\omega_{\max}} = \\ &= (0,052 \div 0,061) \sqrt[3]{7 \cdot 10^3/150} = 0,187 \div 0,220 \text{ м.} \end{aligned}$$

За стандартом беремо $D_1 = 200$ мм. Швидкість паса

$$v = \omega_1 D_1 / 2 = 150 \cdot 0,2 / 2 = 15 \text{ м/с.}$$

Знайдемо значення швидкості допустиме для прогумованого паса типу В. Діаметр веденого шківів з урахуванням пружного ковзання паса (беремо $\varepsilon = 0,02$)

$$D_2 = D_1 \frac{\omega_1}{\omega_2} (1 - \varepsilon) = \frac{200 \cdot 150}{47} (1 - 0,02) = 626 \text{ мм.}$$

За стандартом беремо $D_2 = 630$ мм. Тоді фактична кутова швидкість веденого вала

$$\omega_2 = \frac{D_1 \omega_1}{D_2} (1 - \varepsilon) = \frac{0,2 \cdot 150}{0,63} (1 - 0,02) = 46,7 \text{ рад/с,}$$

що прийнятно, оскільки в передачах загального призначення допускається відхилення від заданої кутової швидкості в межах $\Delta\omega = \pm 3 \div 5\%$. Мінімальна міжосьова відстань

$$a_{\min} = (1,5 \div 2,0) (D_1 + D_2) = (1,5 \div 2,0) (0,2 + 0,63) = 1,25 \div 1,66 \text{ м.}$$

Беремо $a = 1,5$ м. Розрахунок довжина паса

$$l = 2a + \frac{\pi}{2} (D_2 + D_1) + \frac{(D_2 - D_1)^2}{4a} = 2 \cdot 1,5 + \frac{3,14}{2} (0,63 + 0,2) + \frac{(0,63 - 0,2)^2}{4 \cdot 1,5} = 4,6 \text{ м.}$$

До цієї довжини треба додати на з'єднання кінців паса відрізок ΔL , розмір якого залежить від способу з'єднання. Кут обхвату на малому шківі

$$\alpha_1 \approx 180^\circ - \frac{D_2 - D_1}{2} 60^\circ = 180^\circ - \frac{0,63 - 0,2}{1,5} 60^\circ = 163^\circ 12' > \alpha_{\min} = 150^\circ.$$

Колова сила

$$P = N/v = 7 \cdot 10^3 / 15 = 467 \text{ Н.}$$

Товщина паса δ при мінімально допустимому співвідношенні $D_{\min}/\delta = 30$ для прогумованих пасів (див. табл. 36.1)

$$\delta \leq D_{\min}/(D_{\min}/\delta) = 200/30 = 6,7 \text{ мм.}$$

Беремо прогумований пас типу В товщиною $\delta = 5$ мм. Тоді фактичне значення

$$D_1/\delta = 200/5 = 40.$$

Потрібна площа поперечного перерізу паса

$$F = P/[k],$$

де $[k] = k_0 k_1 k_2 k_3 k_4$ — допустима корисна напруга:

а) зведену корисну напругу k_0 вибираємо, виходячи з фактичного значення D_1/δ (див. табл. 36.1): $k_0 = 2,2$ МПа;

б) коефіцієнт кута обхвату знаходимо інтерполяванням (див. табл. 36.2): $k_1 = 0,95$;

в) коефіцієнт режиму роботи (див. табл. 36.3) $k_2 = 0,9$;

г) швидкісний коефіцієнт $k_3 = 1,04 - 0,0004v^2 = 1,04 - 0,0004 \cdot 15^2 = 0,95$;

д) коефіцієнт, який враховує тип передачі і її розміщення, $k_4 = 1$.

Допустима корисна напруга $[k] = 2,2 \cdot 10^6 \cdot 0,95 \cdot 0,9 \cdot 0,95 \cdot 1 = 1,78 \cdot 10^6$ МПа.

Площа перерізу паса

$$F = P/[k] = 467/1,78 \cdot 10^6 = 262 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2.$$

Ширина паса

$$b = F/\delta = 262 \cdot 10^{-6}/5 \cdot 10^{-3} = 52,4 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 52,4 \text{ мм.}$$

Беремо згідно з стандартом ширину паса $b = 63$ мм, найближчу велику до розрахункової. Число пробігів за секунду

$$i = v/L = 15/4,6 = 3,26 < [i] = 5 \text{ с}^{-1}.$$

Сила тиску на вала і опори

$$R = 2S_0 \sin \alpha_1/2 = 2\sigma_0 \delta b \sin \alpha_1/2 = 2 \cdot 18 \cdot 10^6 \cdot 5 \cdot 10^{-3} \cdot 63 \cdot 10^{-3} \times \sin (163^\circ 12'/2) = 1060 \text{ Н.}$$

§ 36.3. Клинопасові передачі

Клинопасові передачі добре працюють при малих міжосьових відстанях і великих передаточних числах ($u \leq 8$); мають підвищену тягову здатність і менші габаритні розміри. У цих передачах (див. рис. 36.1, а пас має клиновидний поперечний переріз і розміщується в канавках відповідного профілю; робочими поверхнями паса є його бічні сторони. Так передачі широко використовують в індивідуальних приводах до робочих машин за допомогою привода до 200 кВт.

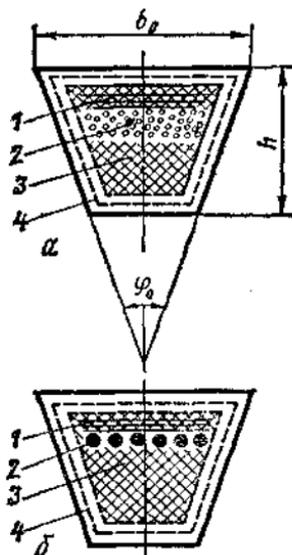


Рис. 36.9

Клинові паси (рис. 36.9) виготовляють двох типів: кордтканинні (а) і кордшнурові (б). Переріз паса складається з гумотканинного шару розтягу 1, прогумованої текстильної кордтканини (або кордшнура) 2, гумового шару стискання 3 і обгортки з прогумованої тканини 4. Середній нейтральний шар з текстильного прогумованого корду несе на собі основне тягове навантаження. Кордову основу пасів у вигляді ниток або шнурів виготовляють з бавовни, льону або синтетичних волокон.

Згідно з ГОСТ 1284—68 для передач загального призначення в СРСР випускають клинові паси семи розмірів поперечного перерізу. Для всіх пасів кут φ_0 однаковий і дорівнює $\varphi_0 = 40 \pm 1^\circ$. Клинові паси виготовляють замкненими. Розрахункова довжина L клинового паса відповідає довжині по нейтральному шару. Допустима максимальна швидкість для стандартних клинових пасів профілів О, А, Б і В до 25 м/с і для профілів Г, Д, і F — до 30 м/с.

Стандартний ряд розрахункових довжин L , мм; 400, 450, 500, 560, 630, 710, 800, 900, 1000, 1120, 1250, 1400, 1600, 1800, 2000, 2240, 2500, 2800, 3150, 3550, 4000, 4500, 5000, 5600, 6300 і т. д. до 18 000.

Клинові паси порівняно з плоскими можуть передавати більшу колову силу за рахунок більшого тертя. Замість коефіцієнта тертя f для плоского паса тут враховують зведений коефіцієнт тертя (аналогічно тертю клинчастого повзуна, див. розд. VI)

$$f' = f / (\sin \varphi / 2),$$

де f — коефіцієнт тертя ковзання; для прогумованої тканини по чавуну $f = 0,3$; φ — кут профілю канавки шківа.

Очевидно, що чим менший кут φ , тим більший f' . Проте кут φ не можна брати дуже малим, щоб уникнути заклинювання пасів у канавках шківів. Для шківів різних діаметрів значення кута профілю канавки лежать у межах від 34 до 40° . При цих величинах кута φ середнє значення зведеного коефіцієнта тертя

$$f' = f / \sin 18,5^\circ \approx f / 0,32 \approx 3f.$$

Отже, за однакових інших умов клинові паси здатні передавати колову силу у три рази більшу, ніж в аналогічній передачі плоским пасом. ККД клинопасової передачі близько 0,96.

приводі. Згідно з додатком до ГОСТ 1284—68 клинові
 з певною здатністю рекомендується розраховувати
 допустимою потужністю N_0 на один пас за формулою

$$N = N_0 K_1 K_2 z,$$

кількість привода; N_0 — потужність, яку передає один пас;
 α — кут обхвату малого шківів; K_2 — коефіцієнт наванта-
 му роботи; z — число пасів.

Наведені значення N_0 при початковій напрузі пасів $\sigma_0 =$
 180° і спокійному режимі роботи привода, розраховані
 допустимою напругою k_0 .

Таблиця 36.4

	Потужність N_0 , кВт, при швидкості в паса, м/с					
	2	5	10	15	20	25
63	0,15	0,36	0,69	1,03	1,26	1,18
71	0,17	0,39	0,78	1,15	1,38	1,26
80	0,20	0,45	0,85	1,21	1,51	1,47
90	0,21	0,49	0,93	1,33	1,67	1,62
90	0,37	0,74	1,33	1,69	1,84	1,69
100	0,37	0,81	1,40	1,87	1,99	1,91
112	0,37	0,81	1,47	2,03	2,41	2,29
125	0,44	0,96	1,69	2,29	2,65	2,65
125	0,59	1,10	2,06	2,88	2,94	2,50
140	0,66	1,25	2,23	3,16	3,60	3,24
160	0,74	1,40	2,50	3,60	4,35	4,35
180	0,81	1,55	2,72	3,82	4,71	4,94
200	1,03	2,14	3,68	5,28	6,25	5,90
224	1,10	2,42	4,27	5,97	7,15	6,70
250	1,25	2,65	4,64	6,34	7,50	7,73
280	1,33	2,88	5,00	7,07	7,80	8,10
315	—	4,71	8,45	11,02	11,90	10,08
355	—	5,15	9,20	12,08	13,72	13,32
400	—	5,59	10,08	13,52	15,72	15,80
450	—	6,10	10,98	14,56	17,00	17,25
500	—	7,35	14,00	18,40	20,46	20,46
560	—	8,45	15,25	20,00	23,60	24,30
600	—	9,43	16,08	22,30	26,50	27,50
710	—	9,80	18,00	24,10	29,00	31,20
800	—	11,75	21,80	31,00	36,80	39,70
900	—	13,10	25,20	34,60	40,60	44,90
1000	—	14,35	27,20	38,20	44,90	49,30

коefficient кута обхвату K_1 беруть з табл. 36.5 (з ГОСТ 1284—68).

Таблиця 36.5

α	170	160	150	140	130	120	110	100	90	80	70
	0,98	0,95	0,92	0,89	0,86	0,83	0,78	0,74	0,63	0,62	0,56

коefficient навантаження і режиму роботи беруть з табл. 36.3.

Через те що паси різняться довжиною і нерівномірним навантаженням, їх кількість у передачі рекомендують обмежувати $z \leq 8$.

Таблиця 36.6

Передавана потужність, кВт	Переріз паса при швидкості, м/с		
	до 5	понад 5 до 10	понад 10
До 1	О, А	О, А	О
1—2,2	О, А, В	О, А	О, А
2—4	А, Б	О, А, Б	О, А
4—7,5	Б, В	А, Б,	А, Б
7,5—15	В	Б, В	Б, В
15—30	—	В	Б, Г
30—60	—	Г, Д	В, Г
60—120	—	Д	Г, Д
120—200	—	Д, Е	Г, Д
Понад 200	—	—	Д, Е

Переріз паса орієнтовно вибирають з табл. 36.6 залежно від передаваної потужності N і передбачуваної швидкості v паса. Для клинопасових передач рекомендують

$$\alpha_1 \geq 120^\circ, \quad u \leq 7; \quad 2(D_2 + D_1) \geq a \geq 0,55(D_2 + D_1) + h,$$

де h — висота перерізу паса.

У зазначених межах міжосьову відстань рекомендують брати залежно від діаметра більшого шківів D_2 і передаточного числа u з табл. 36.7.

Таблиця 36.7

U	1	2	3	4	5	6 і більше
a/D_2	1,5	1,2	1,0	0,95	0,90	0,85

Сила тиску пасів на вали і опори

$$Q \approx 2S_0 \sin \frac{\alpha_1}{2} z.$$

Початковий натяг пасів — за рекомендаціями табл. 36.8.

Таблиця 36.8

Переріз паса	О	А	Б	В	Г	Д	Е
$2 S_0, Н$	110—170	200—300	350—500	600—850	1300—1800	1900—2700	3200—4500

Примітка. Більші значення для більших шківів. Діаметр D_1 малого шківів можна взяти з табл. 36.4, а діаметр D_2 більшого шківів визначають за формулою (36.1). Розрахункові діаметри обох шківів рекомендують вибирати з ряду стандартних розмірів: 63, 71, 80, 90, 100, 112, 125, 140, 160, 180, 200, 225, 250, 280, 315, 355, 400, 450, 500, 560, 630, 710, 800, 900, 1000, 1120, 1250, 1400, 1600 і т. д. до 4000.

Для кожного значення передаваної потужності N можна підібрати два-три типи пасів різного перерізу (див. табл. 36.6). Передачу розраховують паралельно для всіх рекомендованих пасів. Оптимальним буде варі-

ант, що має менші габарити передачі і більшу довговічність. Орієнтуючись на викладені вище рекомендації, визначають число пасів z :

$$z = N/(N_0 K_1 K_2).$$

Приклад 36.2. Розрахувати клинопасову передачу від електродвигуна потужністю $N = 4,5$ кВт з кутовою швидкістю $\omega_1 = 150$ рад/с на шків стрічкового транспортера з кутовою швидкістю $\omega_2 = 42$ рад/с (див. рис. 36.13, б). Навантаження спокійне, робота однозмінна.

Розв'язання. Табл. 36.6 при $N = 4,5$ кВт і передбачуваній швидкості паса від 5 до 10 м/с рекомендує паси перерізів А і Б. Розрахунок зробимо для обох перерізів і результати зведемо в таблицю:

Величини, які треба визначити, і розрахункові формули	Результати розрахунку для пасів перерізів	
	А	Б
Розрахунковий діаметр ведучого шківа D_1 , мм (з табл. 36.4)	125	180
Номинальне передаточне число $u = \omega_1/\omega_2$	3,57	3,57
Розрахунковий діаметр веденого шківа		
$D_2 = D_1 u (1 - \varepsilon)$ (при коефіцієнті ковзання $\varepsilon = 0,02$), мм:		
А. $D_2 = 125 \cdot 3,57 (1 - 0,02)$	437	—
Б. $D_2 = 180 \cdot 3,57 (1 - 0,02)$	—	630
Найближче значення D_2 за стандартом, мм	450	630
Попередню міжосьову відстань, мм, знаходимо з відношення a/D_2 інтерполюванням при передаточному числі $u = 3,57$: $a = 0,97 D_2$	437	610
Розрахункова довжина паса, мм $L = 2a + \frac{\pi}{2} \times (D_2 + D_1) + \frac{(D_2 - D_1)^2}{4a}$:		
А. $L = 2 \cdot 437 + \frac{3,14}{2} (450 + 125) + \frac{(450 - 125)^2}{4 \cdot 437}$	1837	—
Б. $L = 2 \cdot 610 + \frac{2,14}{2} (630 + 180) + \frac{(630 - 180)^2}{4 \cdot 610}$	—	2573
Найближча стандартна довжина L паса, мм	2000	2800
Остаточна міжосьова відстань, мм, $a = 0,25 [(L - W) + \sqrt{(L - W)^2 - 8y}]$, де $W = (\frac{D_2 + D_1}{2}) \pi$; $y = (\frac{D_2 - D_1}{2})^2$:		
А. $W = (\frac{450 + 125}{2}) \cdot 3,14$	903	—
$y = (\frac{450 - 125}{2})^2$	26 500	—
Б. $W = (\frac{630 + 180}{2}) \cdot 3,14$	—	1270
$y = (\frac{630 - 180}{2})^2$	—	50 625
А. $a = 0,25 [(2000 - 903) + \sqrt{(2000 - 903)^2 - 8 \cdot 26 500}]$	523	—
Б. $a = 0,23 [(2800 - 1270) + \sqrt{(2800 - 1270)^2 - 8 \cdot 50 625}]$	—	736
Кут обхвату на малому шкві		
$\alpha_1 = 180^\circ - \frac{D_2 - D_1}{a} \cdot 60^\circ \geq \alpha_{\min} = 120^\circ$		
А. $\alpha_1 = 180^\circ - \frac{450 - 125}{523} \cdot 60^\circ$	142,7	—
Б. $\alpha_1 = 180^\circ - \frac{630 - 180}{736} \cdot 60^\circ$	—	142,3

Величини, які треба визначити, і розрахункові формули	Результати розрахунку для пасів перерізів	
	А	Б
Швидкість паса $v = \omega_1 D_1 / 2$, м/с: А. $v = 150 \cdot 0,125 / 2$ Б. $v = 150 \cdot 0,180 / 2$	9,4 —	— 13,5
Число пасів передачі $z = N / (N_0 K_1 K_2)$: а) потужність N_0 , яку передає один пас, з табл. 36.4 (за шківом меншого діаметра і швидкістю, інтерполюванням), кВт; б) коефіцієнт кута обхвату K_1 (табл. 36.5) знаходимо інтерполюванням; в) коефіцієнт K_2 , який враховує характер навантаження і режим роботи (табл. 36.3): А. $z = 4,5 \cdot 10^3 / (1,6 \cdot 10^3 \cdot 0,9 \cdot 1,0)$ Б. $z = 4,5 \cdot 10^3 / (3,5 \cdot 10^3 \cdot 0,9 \cdot 1,0)$	1,6 0,9 1,0 3,13	3,5 0,9 1,0 —
В результаті беремо кількість пасів z	4	1,43 2
Число пробігів паса за секунду $i = v/L \leq [i] = 10 \text{ с}^{-1}$: А. $i = 9,4/2,0$ Б. $i = 13,5/2,8$	4,7 —	— 4,8
Сила тиску пасів на вали і опори, Н, $R \approx 2S_0 \sin \frac{\alpha_1}{2} z$. З табл. 36.8 $2S_0 = 200 \text{ Н}$ для паса типу А, $2S_0 = 350 \text{ Н}$ для паса типу Б: А. $R = 200 \sin \frac{142,7^\circ}{2} z$ Б. $R = 350 \sin \frac{143,3^\circ}{2} z$	760 —	— 665

Порівняння результатів розрахунку показує, що перший варіант з пасами типу А кращий, бо він компактніший (порівняйте розміри a , D_1 і D_2).

§ 36.4. Деталі пасових передач і натяжні пристрої

Шків. Основними елементами конструкції шківів пасових передач є маточина, обід та шпичі або диск, які їх з'єднують. Шківні звичайно виготовляють чавунними (литими), сталевими (литими або зварними), з легких сплавів і неметалевих матеріалів — пластмас і дерева.

Робочу поверхню одного з шківів плоскостасової передачі виготовляють опуклою 1 або 3 (рис. 36.10, в), що створює стійке положення паса в середній площині шківа. Основні розміри шківів — діаметр D , ширина B (залежно від ширини b паса) і стріла опуклості h — регламентовані ГОСТом. Як вже зазначалось, обід шківа клинопасової передачі роблять з канавками клинової форми (рис. 36.11), в яких розміщують клинові паси. Конструкція і розміри шківів стандартизовані.

Чавунні шківні часто виготовляють з сірого чавуну марки СЧ 15—32 і застосовують при колових швидкостях до 30 м/с. Шківні малих діаметрів (до 300—350 мм) виготовляють суцільними або з отворами для зменшення маси, зручності обробки, монтажу і демонтажу (див. рис. 36.10, а і 36.11, а, б). Шківні великих розмірів виливають з шпичами (рис. 36.10, б і 36.11, в). Переріз шпичі має еліптичну форму.

Стальні зварні шківів бувають дискові (з одним або двома дисками), а також з шпичками з сталених гнутих штаб, труб або спеціально штампованих заготовок. Шківів з легких сплавів (дюралюмінію, силуміну тощо) застосовують при високих швидкостях, оскільки мала густина цих матеріалів зменшує відцентрові навантаження. Шківів з неметалевих матеріалів використовують тоді, коли треба збільшити коефіцієнт тертя і зменшити масу.

Конструюючи обід шківів клинопасової передачі, треба враховувати зміну кута паса φ_0 (рис. 36.12, а) при набіганні на шків. Під час згинання паса зовнішні волокна розтягуються і поперечні розміри перерізу паса в цьому місці зменшуються, а внутрішні волокна стискаються, збільшуючи поперечні розміри перерізу, і кут паса зменшується (рис. 36.12, б). Щоб забезпечити нормальний контакт паса з шківом, кути канавок шківів вибирають залежно від діаметра. Профілі канавок, а також розрахункові діаметри стандартизовані.

Натяжні пристрої. Натяжні пристрої в пасових передачах застосовують для створення початкового натягу S_0 , який забезпечує необхідну силу

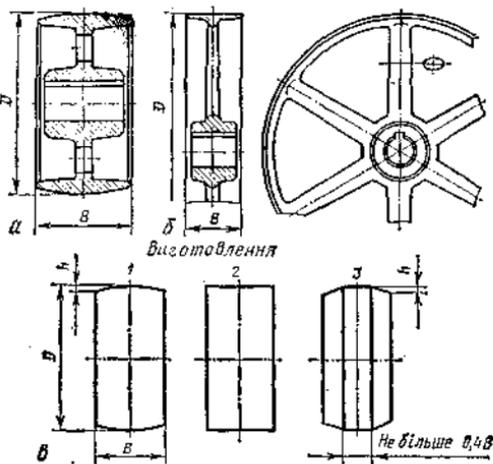


Рис. 36.10

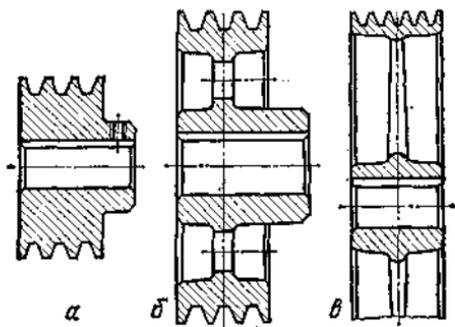


Рис. 36.11

Рис. 36.12

тертя паса об шків, збільшення кута обхвату паса малого шківів і для компенсації збільшення довжини паса внаслідок витягування.

Щоб можна було регулювати натяг паса під час монтажу і в процесі роботи передачі, встановлюють спеціальний натяжний ролик (див. рис. 36.7, е) або створюють можливість зміщення одного з валів. Натяжний ролик беруть діаметром $D_0 = (0,8 \div 1) D_1$, де D_1 — діаметр малого шківів передачі. Сила притягання ролика до паса створюється або пружин-

ною, або важелем з тягарцем. Натяжні ролики встановлюють на ведених вівтках паса нереверсивних передач.

Застосування натяжних роликів дає змогу збільшити передаточне число при малих відстанях між осями шківів, підвищити передавану потужність при тому самому габариті. Але пас при цьому спрацьовується

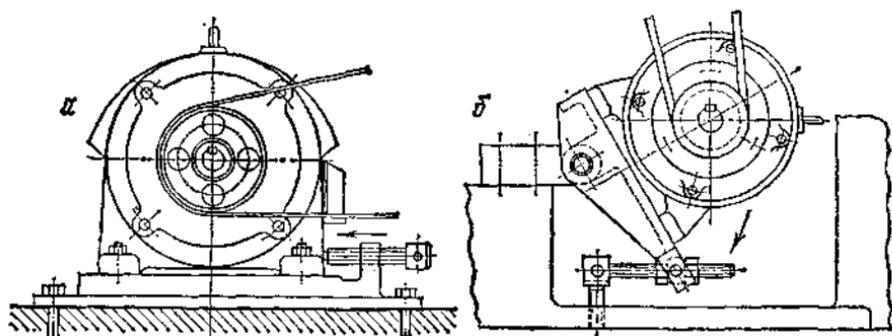


Рис. 36.13

швидше, оскільки під час роботи він згинається в двох напрямках (на робочих шківів — в одному, а на ролик — в іншому).

При інших способах натягу вузол (найчастіше електродвигун), на валу якого закріплений ведучий шків, встановлюють на рухомих напрямних, наприклад на полозках (рис. 36.13, а) або на шарнірно встановленій колійній платформі (рис. 36.13, б). Натяг створюється регульовальними гвинтами, пружинами, тягарцем або електродвигуном.

Розділ XXXVII

ЛАНЦЮГОВІ ПЕРЕДАЧІ

§ 37.1. Загальні відомості

Ланцюгова передача (рис. 37.1) ґрунтується на зачепленні тягового органа, виготовленого у вигляді нескінченного замкненого ланцюга, із зірочками, що являють собою колеса із зубами спеціального профілю. Ланцюг може охоплювати дві зірочки або більше.

Ланцюгову передачу застосовують тоді, коли треба передати обертальний рух без проковзування між валами, розміщеними один від одного на значній відстані (до 8 м). Ланцюгова передача має ряд переваг: компактна порівняно з пасовою передачею; менші навантаження на вали, бо попередній натяг ланцюга невеликий; порівняно високий ККД ($\eta = 0,96 \div 0,98$) і можливість одночасного передавання руху одним ланцюгом кільком валам.

Недоліки передачі: витягування ланцюга внаслідок спрацювання шарнірів; необхідність вищої точності встановлення валів, ніж у пасовій передачі; неста-

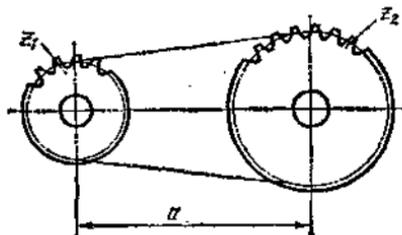


Рис. 37.1

лість швидкостей ланцюга, особливо при малих числах зубів зірочок, що призводить до виникнення додаткових динамічних навантажень.

Ланцюгові передачі широко застосовують у різних машинах, у верстаках для обробки металів і деревини, у хімічному і сільськогосподарському машинобудуванні. Сучасні ланцюгові передачі застосовують у широкому діапазоні передаваних потужностей від часток до кількох тисяч кіловат. Найбільше їх застосовують при потужностях до 100 кВт, бо при більшій потужності різко зростає їх вартість.

Передаточне число ланцюгових передач звичайно не перевищує $u = 10$, а швидкість ланцюга — не більше $v_{\max} = 35$ м/с.

§ 37.2. Деталі ланцюгових передач

Ланцюги. Ланцюги, які застосовують у ланцюгових передачах, на відміну від тягових і вантажних ланцюгів називають **п р и в о д н и м и**. Дуже поширені приводні втулкові, роликіві, зубчасті і фасонноланкові ланцюги.

В т у л к о в и й л а н ц ю г (рис. 37.2) складається із зовнішніх 1 і внутрішніх 2 пластинчатих ланок, з'єднаних між собою шарнірно. Із зовнішніми ланками жорстко зв'язані валики 3. Під час відносного повороту двох спряжених ланок валик повертається у втулці 4, зафіксованій і отворах внутрішніх ланок. За ГОСТ 13568—75 стандартизовані однорядні

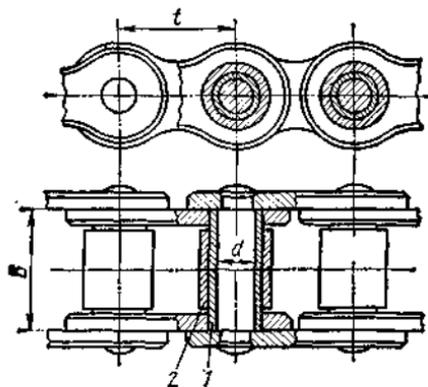


Рис. 37.2

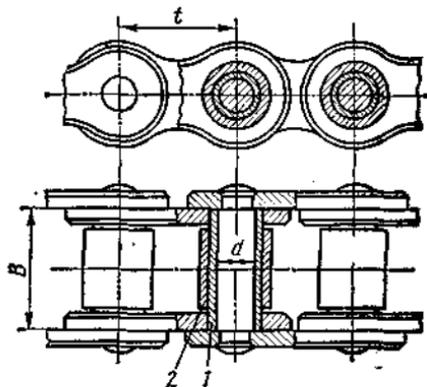


Рис. 37.3

і дворядні 2ПВ приводні втулкові ланцюги; їх застосовують при швидкостях до 10 м/с.

Р о л и к о в и й л а н ц ю г (рис. 37.3) відрізняється конструкцією від втулкового тим, що на його втулках 1 встановлені ролики 2, які вільно обертаються. Це дає змогу частково замінити тертя ковзання між ланцюгом і зубами зірочки тертям кочення.

Роликіві ланцюги ГОСТ 13568—75 поділяє на однорядні легкої серії ПРЛ і нормальної серії ПР, однорядні довголанкові ПРД, однорядні із зігнутими пластинками ПРИ, дво-, три- і чотирирядні нормальної серії 2ПР, 3ПР і 4ПР.

Стійкість проти спрацювання роликіві ланцюгів значно більша, ніж втулкових. Тому роликіві ланцюги застосовують при швидкостях до 20 м/с.

Зубчасті ланцюги (рис. 37.4) у кожній ланці мають набір пластин з двома зубами і за конструкцією відрізняються в основному будовою шарнірів та розміщенням напрямних пластин. Останні призначені для запобігання бічному сповзанню ланцюга із зірочок і розміщені посередині або з боків ланцюга. Якщо напрямні пластини розміщені посередині, то на зірочці роблять напрямний паз. Гранична швидкість ланцюга $v_{\max} = 25$ м/с. Під час роботи зубчасті ланцюги шумлять менше від інших, тому іноді їх називають безшумними.

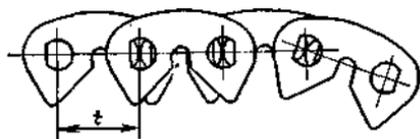


Рис. 37.4

Відповідно до ГОСТ 13552—68 зубчасті ланцюги випускають з шарнірами тертя кочення (рис. 37.4). Для виготовлення пластин ланцюгових

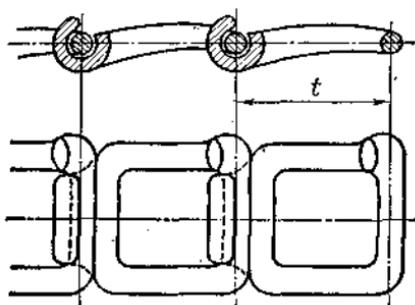


Рис. 37.5

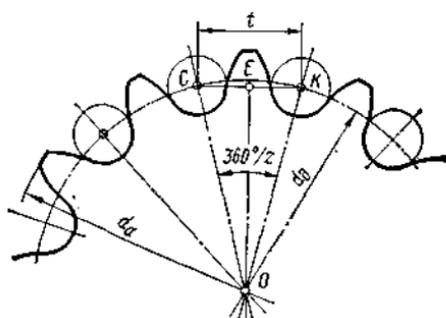


Рис. 37.6

передач застосовують сталь 40 і 40ХН із загартуванням до HRC 40—50; для осей — сталь 15 і 15Х; для втулок і роликів — сталь 15, 20, 20Х та ін.

Фасонноланкові ланцюги застосовують для передавання невеликих потужностей при швидкостях до 3—4 м/с, переважно в сільськогосподарських машинах, наприклад гаковий ланцюг (рис. 37.5). Ланки ланцюгів штампують з штабової сталі 30Г або виливають з ковкого чавуну.

Зірочки. Форма зубів зірочок (рис. 37.6) залежить від конструкції і розмірів ланцюга. Для втулкових і роликів ланцюгів зуби обода описані системою радіусів згідно з даними таблиць стандарту. Обід зірочок зубчастих ланцюгів має зуби прямолінійного (рис. 37.7) або криволінійного профілю. Потрібні дані для побудови профілю зубів цих зірочок наведені в ГОСТі. Зірочки ланцюгових передач виготовляють з чавуну СЧ 18—36, із сталі 15, 15Х, 40 та ін.

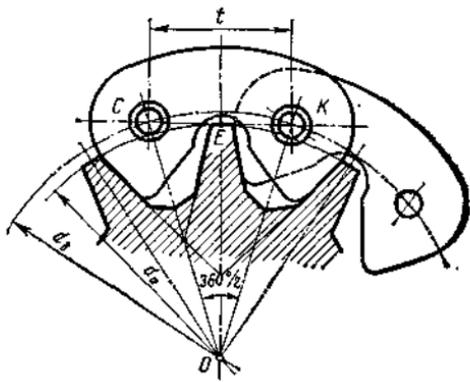


Рис. 37.7

§ 37.3. Основні параметри передач

Мінімальну кількість зубів зірочки беруть у зв'язку з спрацюванням шарнірів, динамічними навантаженнями і шумом передач. Але із зменшенням числа зубів зростають нерівномірність швидкості руху ланцюга і швидкість удару ланцюга об зірочку. У табл. 37.1 наведено рекомендовані числа зубів z_1 зірочки залежно від передаточного числа. Число зубів великої зірочки дорівнює $z_2 = z_1 u$, де u — передаточне число.

Таблиця 37.1

Тип ланцюга	Передаточне число						
	1	2	3	4	5	6	>6
Втулковий і роликівий Зубчастий	31	27	25	23	21	17	14—12
	40	35	31	27	23	19	18—16

Доцільно брати непарні числа зубів зірочки, що в поєднанні з парним числом ланок ланцюга сприяє рівномірнішому його спрацюванню. Для тихохідних передач і малих потужностей практика допускає мінімальне число зубів зірочки зубчастих ланцюгів $z_{\min} = 13$; для втулкових і роликівих $z_{\min} = 7$.

Крок ланцюга t — основний параметр ланцюгової передачі. Статична міцність і площа опорної поверхні шарніра втулкових, роликівих і зубчастих ланцюгів, а отже, і їх навантажувальна здатність зростають із збільшенням кроку. Водночас крок ланцюга треба брати якнайменшим, щоб зменшити динамічні навантаження, які виникають від ударів при набіганні ланцюга на зірочку. Граничні значення кутової швидкості малої зірочки залежно від кроку ланцюга беруть з табл. 37.2.

Таблиця 37.2

Число зубів z_1	ω_{\max} , рад/с, при кроці t , мм							
	12,7	15,875	19,05	25,4	31,75	38,1	44,45	50,8
	Для втулкових і роликівих ланцюгів							
15	240	200	141	120	104	78	68	63
23	262	220	157	131	115	84	78	68
30	272	230	162	136	115	89	78	73
	Для зубчастих ланцюгів							
17—35	346	277	230	173	136	—	—	—

Якщо t — крок взятого ланцюга і z — число зубів зірочки, то з трикутника COE (див. рис. 37.6) дістаємо

$$\frac{t}{2} = \frac{d}{2} \sin \frac{360^\circ}{z},$$

звідки діаметр діляльного кола зірочки

$$d = t / \sin \frac{180^\circ}{z}.$$

Діаметр вершин зубів зірочок:
для роликкових і втулкових ланцюгів

$$d_a = t \left(\operatorname{ctg} \frac{180^\circ}{z} + 0,5 \right);$$

для зубчастих ланцюгів

$$d_a = t \operatorname{ctg} \frac{180^\circ}{z}.$$

Мінімальна міжосьова відстань a передачі без провисання (за умови, що кут обхвату малої зірочки не менш як 120° (див. рис. 37.1),

$$a_{\min} = \frac{d_{a1} + d_{a2}}{2} + (30 \div 50) \cdot 10^{-3} \text{ м},$$

де d_{a1} і d_{a2} — діаметри вершин зубів зірочок.

Оптимальну міжосьову відстань передачі беруть з умови довговічності ланцюга

$$a = (30 \div 50) t.$$

Нижнє значення — для малих передаточних чисел ($u = 1 \div 2$), а верхнє — для великих ($u = 6 \div 7$). Число ланок ланцюга

$$z_n = \frac{2a}{t} + \frac{z_2 + z_1}{2} + \frac{t [(z_2 - z_1)/2\pi]^2}{a},$$

де z_1, z_2 — відповідно числа зубів ведучої і веденої зірочки.

Для знайденого значення z_n величину a уточняють за формулою

$$a = \frac{t}{4} \left[z_n - \frac{z_2 + z_1}{2} + \sqrt{\left(z_n - \frac{z_2 + z_1}{2} \right)^2 - 8 \left(\frac{z_2 - z_1}{2\pi} \right)^2} \right].$$

Довжина ланцюга

$$L = z_n t.$$

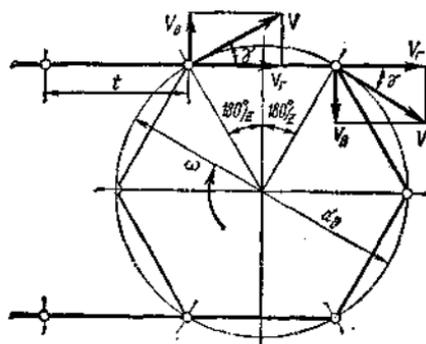


Рис. 37.8

Щоб забезпечити провисання ланцюга, міжосьову відстань зменшують на $(0,002 \div 0,004) a$.

Передаточне число ланцюгової передачі в процесі роботи не є сталим. Швидкість ланцюга весь час змінюється, що легко побачити з схеми ланцюгової передачі, наведеної на рис. 37.8. Швидкість руху ланцюга v_p визначається горизонтальною складовою колової швидкості v обертання зірочки:

$$v_r = v \cos \gamma.$$

Кут γ змінюється при повертанні зірочки на один крок від $-180^\circ/z$ до $+180^\circ/z$. При $\gamma = 180^\circ/z$ швидкість руху ланцюга мінімальна, а при $\gamma = 0$ — максимальна. Вертикальна складова $v_b = v \sin \gamma$ за той самий період змінюється за величиною і напрямом. Це спричинює поперечні коливання ланцюга і удари шарнірів об западини зубів зірочки. Рух ланцюга з нерівномірною швидкістю призводить до нерівномірного обертання веденої зірочки. Тому передаточне число ланцюгової передачі коливається

при кожному повороті ведучої зірочки на один крок t зубів. Коливання кутової швидкості руху ланцюга і передаточного числа зростають із зменшенням числа зубів ведучої зірочки.

Середнє передаточне число ланцюгової передачі

$$u = \omega_1/\omega_2 = z_2/z_1.$$

Середню швидкість ланцюга визначають з умови, що шлях ланцюга за один оберт зірочки дорівнює zt , а шлях зуба зірочки πd_d . Ці шляхи однакові, тому

$$d_d = zt/\pi.$$

Середня швидкість ланцюга

$$v = \omega d_d/2 = zt\omega/2\pi.$$

§ 37.4. Критерії роботоздатності і розрахунок ланцюгових передач

Причинами виходу з ладу ланцюгових передач є спрацювання шарнірів, що призводить до видовження ланцюга і неправильного зачеплення його з зірочками, а також спрацювання зубів зірочок, руйнування пластин і шарнірів. Тому основним критерієм роботоздатності приводних ланцюгів є стійкість проти спрацювання їх шарнірів. Ланцюги, вибрані з умови стійкості проти спрацювання, мають, як правило, достатню міцність.

Розрахунок передачі. В процесі проектного розрахунку втулкового і роликowego ланцюга орієнтовно беруть крок ланцюга з умови забезпечення стійкості проти спрацювання за формулою:

$$t \geq 2,8 \sqrt[3]{T_1 k / (z_1 [p] m)}, \quad (37.1)$$

де T_1 — обертаючий момент на ведучій зірочці (з числом зубів z_1); m — число рядів; $[p]$ — допустимий тиск у шарнірах ланцюга (див. табл. 37.3); k — коефіцієнт експлуатації передачі

$$k = k_1 k_2 k_3 k_4 k_5 k_6,$$

де k_1 — коефіцієнт, який враховує характер навантаження: при спокійному навантаженні $k_1 = 1$, при поштовхах $k_1 = 1,2 \div 1,4$;

Таблиця 37.3

ω_1 , рад/с	$[p]$, МПа, при кроці ланцюга t , мм			
	12,7—15,875	19,05—25,4	31,75—38,1	44,45—50,8
5,2	34,3	34,3	34,3	34,3
21	30,9	29,4	28,1	25,7
42	28,1	25,7	23,7	20,6
63	25,7	22,9	20,6	17,2
84	23,7	20,6	18,1	14,7
105	22,0	18,6	16,3	—
126	20,6	17,2	14,7	—
167	18,1	14,7	—	—
210	16,3	—	—	—
250	14,7	—	—	—
293	13,4	—	—	—
335	—	—	—	—

k_2 — коефіцієнт, який враховує міжосьову відстань: $k_2 = 1$ при $a = (30 \div 50) t$, $k_2 = 1,25$ при $a < 25t$, $k_2 = 0,8$ при $a = (60 \div 80) t$;
 k_3 — коефіцієнт, який враховує спосіб змащування: при безперервному змащуванні $k_3 = 1$, крапельному — $k_3 = 1,3$, періодичному — $k_3 = 1,5$;

k_4 — коефіцієнт, який враховує тривалість робочого дня: при одностійній роботі $k_4 = 1$, двостійній — $k_4 = 1,25$ і тристійній — $k_4 = 1,5$;

k_5 — коефіцієнт, який враховує нахил передачі до горизонту: при нахилі $\leq 60^\circ$ $k_5 = 1$, при нахилі $> 60^\circ$ $k_5 = 1,25$ (у вертикальному положенні передачі збільшується тиск у шарнірах за рахунок ваги ланцюга);

k_6 — коефіцієнт, який враховує спосіб регулювання натягу ланцюга: при регулюванні положення осі однієї із зірочок $k_6 = 1,0$, при регулюванні натискними роликами або відтяжними зірочками $k_6 = 1,1$, для нерегульованої передачі $k_6 = 1,25$.

Після округлення кроку до найближчого стандартного значення треба перевірити, чи допустимий взятий крок при певній кутовій швидкості (див. табл. 37.2).

Перевірний розрахунок ведуть за середнім тиском у шарнірах вибраного ланцюга:

$$p = kP/F \leq [p],$$

де P — колова сила, яку передає ланцюг, $P = N/v$; N — передавана потужність; v — середня швидкість ланцюга; F — проекція опорної поверхні шарніра на площину, паралельну осі валика: для втулкових і роликових ланцюгів $F = dB$, де d — діаметр валика; B — ширина внутрішньої ланки ланцюга (довжина втулки).

Якщо умови перевірки не виконуються, збільшують крок ланцюга.

Розрахунок зубчастих ланцюгів з шарнірами кочення тут не наводимо, оскільки для цих ланцюгів ще немає достатнього досвіду експлуатації і методів розрахунку.

Навантаження на вали. Навантаження R на вали ланцюгової передачі залежить від величини передаваної сили P і від натягу від провисання ланцюга S_f :

$$R = P + S_f,$$

де $S_f = k_f q g a$, q — маса 1 м довжини ланцюга; k_f — коефіцієнт, який враховує розміщення ланцюгової передачі: для горизонтального положення $k_f = 6$; коли кут нахилу до горизонту $\alpha \leq 40^\circ$, то $k_f = 2 \div 6$; коли $\alpha > 40^\circ$, то $k_f = 1 \div 1,5$ (рис. 37.9; чим менший кут α , тим більше провисання ланцюга); a — міжосьова відстань; $g = 9,81$ м/с².

Величини сили R використовують під час розрахунку валів ланцюгової передачі. Напрямок її визначається кутом нахилу передачі.

Приклад 37.1. Розрахувати і вибрати елементи ланцюгової передачі роликового однорядного ланцюга (рис. 37.9). Потужність на ведучому валу $N_1 = 4,5$ кВт, кутова швидкість $\omega_1 = 98$ рад/с, передаточне число $u = 2,8$. Робота в одну зміну, змащування безперервне, робота з помірними поштовхами, кут нахилу до горизонту $\alpha \approx 35^\circ$, регулювання натягу ланцюга зміщенням однієї із зірочок.

Розв'язання. Число зубів меншої зірочки (з табл. 37.1) $z_1 = 25$; тоді

$$z_2 = z_1 u = 25 \cdot 2,8 = 70.$$

Орієнтовний крок ланцюга за формулою (37.1)

$$t = 2,8 \sqrt[3]{T_1 k / (z_1 [\rho] m)}.$$

Значення величин, що входять до формули:

а) розрахунковий коефіцієнт експлуатації передачі

$$k = k_1 k_2 k_3 k_4 k_5 k_6 = 1,2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1,1 = 1,2.$$

Тут $k_1 = 1,2$ (робота з помірними поштовхами);

$k_2 = 1$ [міжосьова відстань $a = (30 \div 50) t$];

$k_3 = 1$ (безперервне змащування); $k_4 = 1$ (однорізна робота);

$k_5 = 1$ (кут нахилу ланцюга $\alpha = 35^\circ$); $k_6 = 1$ (регулювання натягу ланцюга зміщенням однієї із зірочок);

б) допустимий середній тиск $[\rho]$ беремо орієнтовно. Для роликів передачі за табл. 37.3 $[\rho] = 18,6$ МПа;

в) момент на ведучій зірочці

$$T_1 = N_1 \omega_1 = 4,5 \cdot 10^3 / 98 = 46 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Після підставлення взятих величин дістанемо

$$t = 2,8 \sqrt[3]{46 \cdot 1,2 / (25 \cdot 18,6 \cdot 10^3 \cdot 1)} = 0,014 \text{ м} = 14 \text{ мм}.$$

Найближчі стандартні значення кроку t з табл. 37.2 дорівнюють 12,7 і 15,875 мм. Далі розрахунок ведемо для двох варіантів:

Позначення ланцюга	ПР-12,7-1820-1	ПР-15,875-2270-1
Крок ланцюга t , мм	12,7	15,875

Характеристика ланцюга (за ГОСТ 13568—75):

маса 1 м довжини q , кг	0,65	0,8
діаметр валика d , мм	4,45	5,08
ширина ланцюга B , мм	8,90	10,78
(проекція опорної поверхні шарніра $F = Bd$, мм ² (див. «Справочник металлиста», т. 1))	39,6	54,8
рекомендована міжосьова відстань $a = 40t$, мм	508	635
число ланок z_n за формулою		

$$z_n = \frac{2a}{t} + \frac{z_1 + z_2}{2} +$$

$$+ \frac{t [(z_2 - z_1) / (2\pi)]^2}{a} = \frac{2 \cdot 40t}{t} +$$

$$+ \frac{70 + 25}{2} + \frac{t [(70 - 25) / (2\pi)]^2}{40t} \quad 129 \quad 129$$

Допустима кутова швидкість ведучої зірочки ω_1 з табл. 37.2, рад/с

Швидкість ланцюга, м/с, $v =$

$= z_1 t \omega_1 / (2\pi)$

Колова сила, Н, $P = N_1 / v = 4,5 \cdot 10^3 / v$

Середній тиск у шарнірах, МПа, $p =$

$= P / F$

Допустиме значення $[\rho]$ з табл. 37.3 (інтерполюванням), МПа

Довжина ланцюга $L = z_n t$, мм

Натяг від провисання ланцюга (при $k_f = 4$), Н, $S_f = k_f q g a$,

Беремо ланцюг ПР-12,7-1820-1 (ГОСТ 13568—75), при якому передача компактніша.

Уточнюємо міжшову відстань:

$$a = \frac{l}{4} \left[z_1 - \frac{z_2 + z_1}{2} + \sqrt{\left(z_1 - \frac{z_2 + z_1}{2} \right)^2 - 8 \left(\frac{z_2 - z_1}{2\pi} \right)^2} \right] =$$

$$= \frac{12,7 \cdot 10^{-3}}{4} \left[129 - \frac{70 + 25}{2} + \sqrt{\left(129 - \frac{70 + 25}{2} \right)^2 - 8 \left(\frac{70 - 25}{2 \cdot 3,14} \right)^2} \right] =$$

$$= 0,508 \text{ м} = 508 \text{ мм.}$$

Щоб забезпечити провисання ланцюга, знайдену міжшову відстань зменшують на $(0,002 \div 0,004) a$. Отже, монтажна міжшову відстань

$$a_m = \frac{a}{1,002 \div 1,004} = \frac{508}{1,003} = 506,5 \text{ мм.}$$

Розділ XXXVIII

ЗАГАЛЬНІ ВІДОМОСТІ ПРО ДЕЯКІ МЕХАНІЗМИ

У сучасній техніці, у різних машинах та приладах широко використовують прості і складні механізми. Основне призначення механізмів — перетворення одного виду руху в інший. У цьому розділі розглянуто кінематичні схеми ряду механізмів, які перетворюють обертальний рух ведучої ланки у зворотно-поступальний, коливальний або переривчастий рух ведених ланок, а також механізми, які забезпечують рух якої-небудь точки веденої ланки по певній траєкторії.

Основні означення теорії механізмів і машин, використані в цьому розділі, викладені в § 9.2 цієї книжки.

§ 38.1. Шарнірні чотириланкові механізми

Принципову схему шарнірного чотириланкового механізму зображено на рис. 38.1. Залежно від співвідношення довжин ланок 1, 2, 3 і 4 такого механізму характер руху ланок буде різним. Якщо ланка 1 може повертатися відносно нерухомого шарніра O_1 на 360° , то вона називається *кривошипом*. Це можливо, якщо ланка 1 буде найкоротшою, а довжини решти ланок

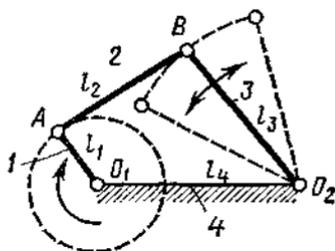


Рис. 38.1

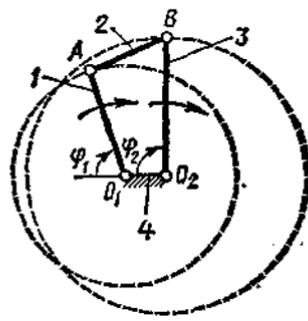


Рис. 38.2

нок задовольняють нерівність $(l_1 + l_4) < (l_2 + l_3)$. Такий механізм називають *однокривошипним*, а його ланки 2 і 3 є *шатуном* і *коромислом*, які здійснюють відповідно складний плоскопаралельний рух і коливальний рух навколо нерухомої осі O_2 .

Якщо з стояком з'єднана найкоротша ланка (рис. 38.2), то механізм перетворюється на двокривошипний і ланки 1 і 3 зможуть повертатися навколо осей O_1 і O_2 на повний оберт. Двокривошипні механізми використовують, наприклад, у металорізальних верстатах для забезпечення нерівномірного обертання ланки 3 при рівномірному обертанні ведучої ланки 1. На рис. 38.3 зображено шарнірний чотириланковик, у якого протилежні ланки мають однакову довжину і утворюють паралелограм. Такий механізм застосовують у локомотивах для

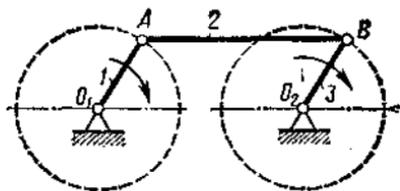


Рис. 38.3

передавання обертання веденим колесам. Ланка 2 в такому механізмі рухається поступально.

Траєкторії точок, зв'язаних із шатуном AB (рис. 38.4), називають *шатунами кривими*. Відповідно добираючи форми і довжини ланок механізму, можна домогтися точного або приблизного відтворення траєкторій точок діючих механізмів, наприклад, для перемішування тіста (рис. 38.4, а), ворушіння сіна (рис. 38.4, б), розміщення кіноплівки (рис. 38.4, в) тощо. В останньому випадку потрібно, щоб крива на певній ділянці $m-n$ переходила в пряму.

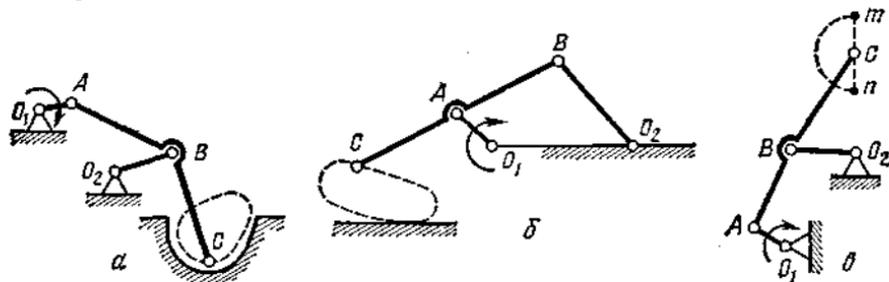


Рис. 38.4

Ланка 3, яка обертається нерівномірно (рис. 38.2), сама може бути виконуючим органом машини: до ланки додатково можна приєднувати ланки 4 і 5 (рис. 38.5) з виконуючим органом у вигляді повзуна або цоршня 5.

Якщо одну з обертових кінематичних пар замінити поступальною. Кривошипно-повзункові механізми широко використовують у різноманітних машинах (у двигунах внутрішнього згорання, у насосах, у металорізальних верстатах і т. д.) для перетворення обертального руху на поступальний і, навпаки, зворотно-поступального руху на обертальний. Якщо вісь обертання кривошипа OA (рис. 38.6, а) — пряма, по якій

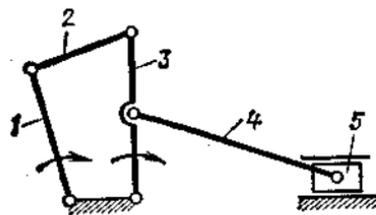


Рис. 38.5

§ 38.2. Кривошипно-повзункові і кулісні механізми

Кривошипно-повзунковий механізм можна утворити з шарнірного чотириланковика, якщо одну з обертових кінематичних пар замінити поступальною. Кривошипно-повзункові механізми широко використовують у різноманітних машинах (у двигунах внутрішнього згорання, у насосах, у металорізальних верстатах і т. д.) для перетворення обертального руху на поступальний і, навпаки, зворотно-поступального руху на обертальний. Якщо вісь обертання кривошипа OA (рис. 38.6, а) — пряма, по якій

переміщується центр шарніра B , то механізм називають *центральним* і м. У центральних (деаксіальних) механізмах (рис. 38.6, б) зміщення I осі O обертання кривошипа OA відносно осі B_0B називають *ексцентриситетом*.

У центральному механізмі тривалість прямого і зворотного ходів повзуна однакова і відповідає куту повороту кривошипа на кут 180° .

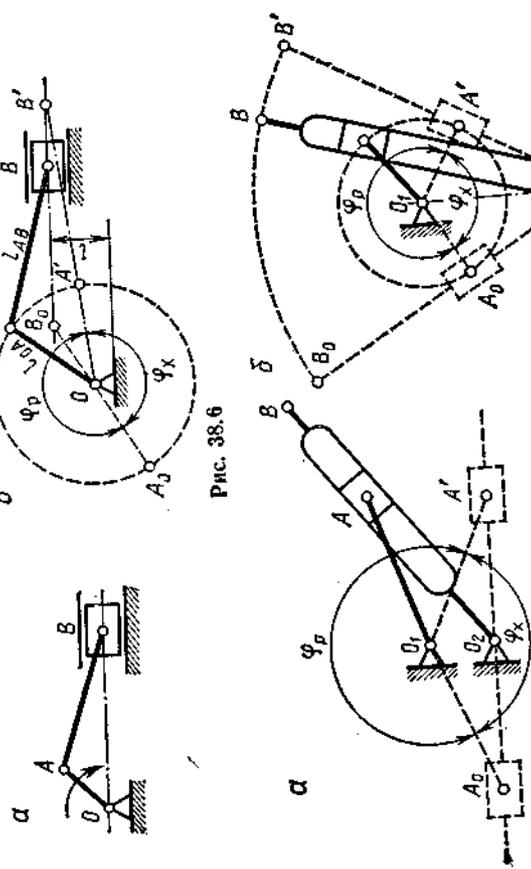


Рис. 38.6

Рис. 38.7

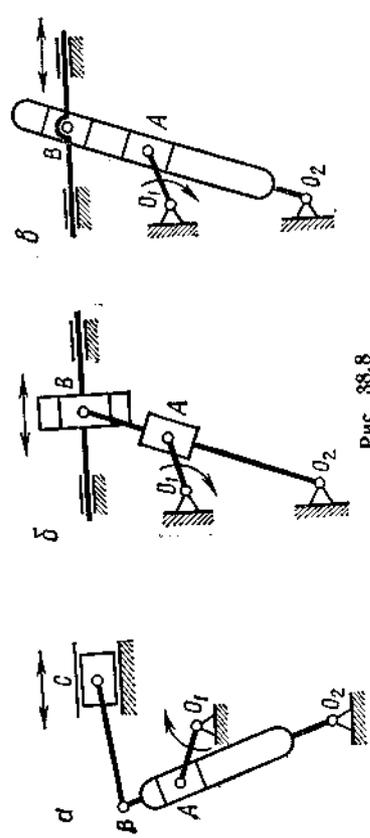


Рис. 38.8

Фазові кути φ_p і φ_x робочого і холостого ходів повзуна в нецентральному механізмі (рис. 38.6, б) відрізняються від 180° звичайно не більше ніж на 30° і їх відношення не більше від 1,5. Умова повертання такого механізму: $l_{AB} > l_{OA} + l$.

Кулісні механізми. Як зазначалося в § 9.2, кулісою називають рухому ланку O_2B (рис. 38.7), що є напрямною для каменя, який рухається по ній. Якщо в кулісному механізмі довжина кривошипа O_1A (рис. 38.7, а)

більша від міжцентрної відстані O_1O_2 , то куліса O_2B може робити повний оберт і тому її називають *обертальною*. У протилежному разі маємо механізм з *коливною* кулісою (рис. 38.7, б).

Механізми з обертальною кулісою перетворюють рівномірний обертальний рух кривошипа на нерівномірне обертання куліси. Кутові швидкості кривошипа і куліси однакові тільки тоді, коли куліса стає перпендикулярно до лінії центрів O_1O_2 ; верхню частину обертуту (поворот на кут φ_p , рис. 38.7, а) куліса робить з меншою кутовою швидкістю, ніж кривошип, а нижню — з більшою.

Механізми з коливною кулісою (рис. 38.7, б) перетворюють нерівне обертання кривошипа O_1A на коливальний рух куліси O_2B з різною тривалістю прямого і зворотного ходів (пропорційною кутам φ_p і φ_x). Різниця інтервалів зростає з наближенням довжини ланки O_1O_2 до O_1A .

У техніці звичайно використовують шестиланкові кулісні механізми; їх виготовляють за однією із схем (а, б, в), показаних на рис. 38.8. Ці механізми мають забезпечити зворотного-поступальний рух повзуна. Різновидом кулісного механізму є механізм з *коливним повзунком*, який використовують, наприклад, у снігозбиральній машині (рис. 38.9, а) або в приводах від гідроциліндра (рис. 38.9, б).

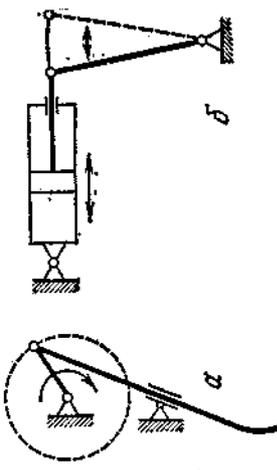


Рис. 38.9

§ 38.3. Кулачкові механізми

У машинах з автоматичним керуванням, що працюють за певним технологічним циклом, широко використовують так звані *кулачкові механізми*, які дають змогу циклічно змінювати напрям і швидкість руху веденої ланки за певним законом. Основні ланки кулачкового механізму — це кулачок 1 (рис. 38.10, а) і штовхач 2. Обертання кулачка 1, виготовленого у вигляді закріпленої на ведучому валу шайби з криволінійним обрисом, зумовлює поступальний рух штовхача 2. Обертання кулачка 1, коливальний рух штовхача 2.

Від штовхача рух передається якомусь виконавчому органу машини чи механізму: плунжеру масляного насоса, різцевому супорту верстата-автомата тощо. Щоб зменшити втрати на тертя і підвищити зносостійкість ланок механізму, штовхач виготовляють з роликком 3 (рис. 38.10, в, г). Якщо кулачок рухається поступально (рис. 38.11), то його називають *коліслом*. Поступальний рух передається кулачком механічно від якоря соленоїда чи від штока гідро- або пневмоциліндра.

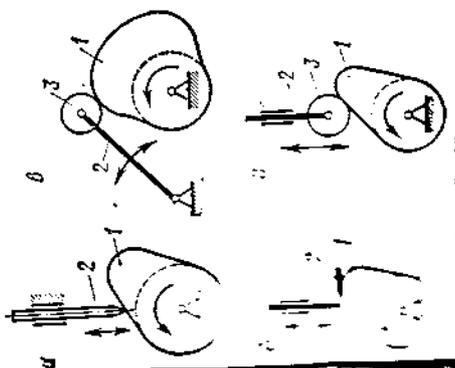


Рис. 38.10

Кулачкові механізми забезпечують рух штовхача практично за будь-яким законом. Переважно застосовують закон руху при сталій швидкості, наприклад в автоматах поздовжнього точіння, і синусоїдний закон для безударної, м'якої роботи штовхача.

Крім плоских кулачкових механізмів (рис. 38.10 і рис. 38.11), у машинах-автоматах часто використовують просторові кулачкові механізми, наприклад, з циліндричним (барабанним) кулачком, як на рис. 38.12.

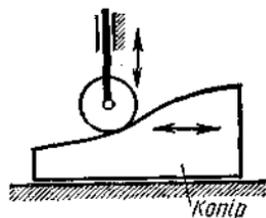


Рис. 38.11

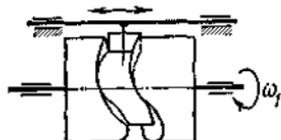


Рис. 38.12

Фази роботи кулачкового механізму. Ділянки криволінійної поверхні кулачка 1 (рис. 38.13), набігаючи на ролик штовхача 2, примушують його рухатися зворотно-поступально. Коли кулачок рухається за годинниковою стрілкою, то під дією ділянки $a-b$ штовхач рухається, віддаляючись від центра кулачка. Поворот кулачка на кут φ_1 відповідає фазі i віддалення (умовно — фази i підйому) штовхача. Обертання кулачка в межах кута φ_2 не зміщує штовхача, бо ділянка $b-c$ циліндрична. Кут φ_2 відповідає фазі дальнього стояння. Наступне повертання кулачка внаслідок дії пружини 3 наближає штовхач до центра ку-

лачка. Кут відповідає фазі i повернення штовхача. Циліндрична ділянка $d-a$ поверхні кулачка в межах кута φ_3 відповідає фазі i ближнього стояння штовхача. Сума фазових кутів $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 = 2\pi$. У реальних конструкціях кулачків кути φ_2 і φ_4 можуть дорівнювати нулю.

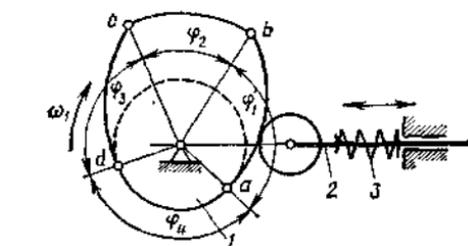


Рис. 38.13

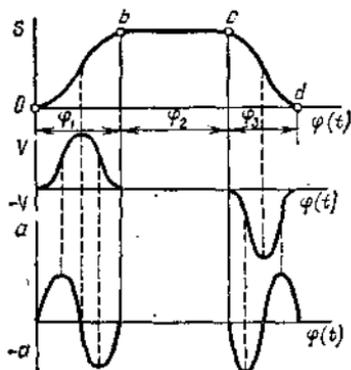


Рис. 38.14

лачка. Кут відповідає фазі i повернення штовхача. Циліндрична ділянка $d-a$ поверхні кулачка в межах кута φ_3 відповідає фазі i ближнього стояння штовхача. Сума фазових кутів $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 = 2\pi$. У реальних конструкціях кулачків кути φ_2 і φ_4 можуть дорівнювати нулю.

На рис. 38.14 показано графіки переміщення, швидкості і прискорення штовхача в межах фазових кутів φ_1 , φ_2 і φ_3 . Суму цих кутів $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = \varphi_p$ називають робочим кутом кулачка.

§ 38.4. Механізми переривчастого руху

У різних машинах і приладах використовують механізми, в яких ведена ланка рухається в одному напрямі з періодичними зупинками. Такі механізми називають механізмами переривчастого

руху. До них належать мальтійські, важільно-крокові і храпові механізми.

Мальтійські механізми широко використовують в автоматобудуванні. Мальтійський механізм складається з ведучого кривошипа 1 (рис. 38.15, а) з пальцем або роликом 2 на кінці і мальтійського хреста 3. Під час обертання кривошипа 1 палець 2 входить у паз мальтійського хреста 3 і повертає його на певний кут. Коли палець виходить із паза, то положення мальтійського хреста фіксується циліндричною ділянкою диска 4; диск прикріплений до кривошипа і входить у відповідної форми вирізи 5. Отже, мальтійський хрест обертається при повертанні кривошипа на кут φ_p і стоїть нерухомо при повертанні кривошипа в межах кута φ_x .

Геометричні параметри мальтійського механізму вибирають так, щоб у момент входу і виходу пальця з паза хреста вектор швидкості центра пальця збігався за напрямом з віссю радіального паза. Мінімумально допустима кількість радіальних пазів мальтійського хреста $z = 3$, максимальна звичайно не більша від $z = 12$. Коли $z = \infty$, то маємо рейковий механізм (рис. 38.15, б).

Важільно-крокові механізми звичайно виготовляють на базі шарнірних чотириланковиків і використовують для переміщення ланок, які рухаються поступально (див. рис. 38.4, в). У таких механізмах шатун робить складні рухи і періодично входить у зачеплення з веденою ланкою, переміщуючи її на один крок завжди в одному напрямі (так, наприклад, рухається плівка в кінокамері).

Храпові механізми. Найбільш типовий храповий механізм складається з ведучої ланки 1 (рис. 38.16, а), на якій на шарнірі встановлено заскочку 2, що впирається в зуби веденої ланки 3, яку називають храповим колесом. При коливальному русі ланки 1 під час робочого ходу (коли ланка 1 обертається проти годинникової стрілки) заскочка 2 повертає храпове колесо, а під час зворотного ходу під дією тертя або додаткової заскочки 4 ведена ланка залишається нерухомою. Якщо радіус храпового колеса нескінченно великий, то воно переходить у рейку (рис. 38.16, б), якій заскочка надає переривчастого поступального руху.

Храпові механізми мають два ступені вільності, тому храпове колесо або рейка можуть вільно переміщуватись, обганяючи ведучу ланку, якщо цьому не перешкоджають передбачені конструктивні пристрої.

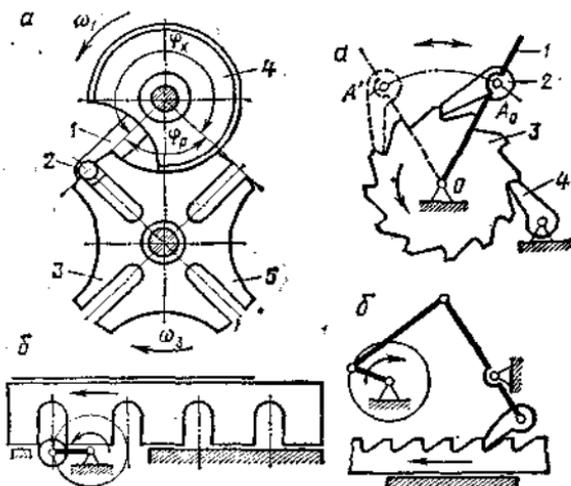


Рис. 38.15

Рис. 38.16

§ 39.1. Призначення, конструкція і матеріали осей і валів

Обертові деталі в машинах і механізмах встановлюють на осях і валах. Осі бувають обертові і нерухомі (рис. 39.1, а, б), причому вони не передають обертаючий момент і тому зазнають лише деформації згину. Вали на відміну від осей призначені для передачі обертаючих моментів (рис. 39.2); під дією прикладених навантажень вали зазнають деформації кручення і згину.

За конструкцією осі і вали поділяють на гладенькі, ступінчасті і фасонні (наприклад, колінчасті), а також на суцільні і порожнисті.

Ступені на валах і осях призначені для закріплення на них деталей, а також для створення поверхонь, якими вали і осі опираються на нерухомі деталі корпусу.

Опорні поверхні осей і валів називають цапфами. Кінцеві цапфи називають шипами, а проміжні — шийками (рис. 39.3). Кінцеву частину

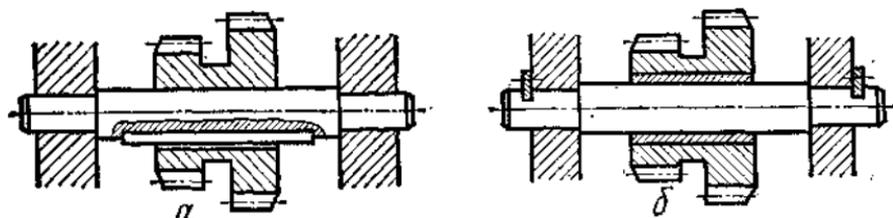


Рис. 39.1

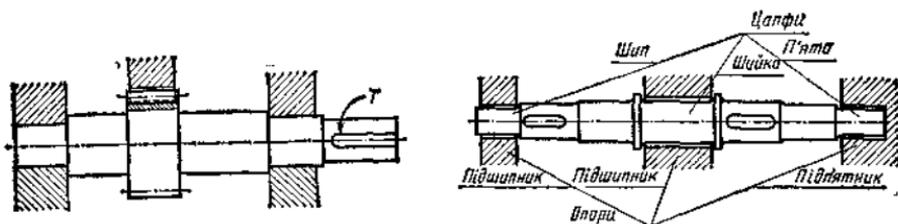


Рис. 39.2

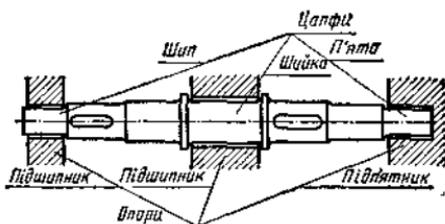


Рис. 39.3

вала, призначену для передавання осьового навантаження нерухомій опорі, називають п'ятою. Проміжні опори, що мають вигляд кільцевих виступів і таке саме призначення, називають заплечиками або гребенями. Посадочні і опорні поверхні валів і осей ретельно обробляють. Порожністими роблять вали, щоб зменшити їх масу.

Для виготовлення осей і валів, які не зазнають термообробки, звичайно беруть сталі Ст5 і Ст6. Для валів беруть переважно термічно оброблені середньовуглецеві і легovanі сталі 45, 40Х, а для сильно навантажуваних валів машин, якщо це треба, — легovanі сталі 40ХН, 30ХГТ, 30ХГСА та

ін. Вали з цих сталей звичайно зміцнюють або піддають поверхневому загартуванню СВЧ. Швидкохідні вали, які обертаються в підшипниках ковзання, виготовляють з цементованих сталей 20Х, 12ХНЗА, 18ХГТ тощо.

§ 39.2. Розрахунок валів і осей

Вали розраховують на міцність, беручи до уваги згинаючі і крутні моменти, які діють під час змінних напруг. Вали несуть навантаження обертаючих моментів, ваги встановлених на них деталей, власної ваги і сил, які виникають під час дії передач.

Проектування валів пов'язане з такими етапами розрахунку: вибір матеріалу і допустимих напруг; попередній (проектний) розрахунок; вибір величин конструктивних елементів вала; визначення опорних реакцій; побудова епюр згинаючих і крутних моментів; визначення еквівалентного моменту в небезпечному перерізі; остаточний (спрощений або уточнений перевірний) розрахунок вала.

Для остаточного розрахунку вала потрібно знати його конструкцію, розміщення опор і місць прикладання навантажень. Все це визначає конструктор після попереднього розрахунку діаметра вала.

Попередній розрахунок вала є проектним лише на кручення за зниженими допустимими напруженнями. Умова міцності має вигляд

$$\tau_k = M_k / (0,2d^3) \leq [\tau_k],$$

звідки

$$d \geq \sqrt[3]{M_k / (0,2[\tau_k])}.$$

Попередньо визначити діаметр вала можна й за тим валом, з яким розраховуваний вал з'єднується. Наприклад, шуканий діаметр вала можна взяти таким, що дорівнює діаметру вихідного кінця вала приєднуваного електродвигуна.

Величини діаметрів валів і осей в тих місцях, де на них насаджують спряжені деталі, округляють до найближчих значень за ГОСТ 6636—69 переважно з ряду R_d 40, в якому в межах від 10 до 125 мм подано такі стандартні значення: 10; 10,5; 11; 11,5; 12; 13; 14; 15; 16; 17; 18; 19; 20; 21; 22; 24; 25; 26; 28; 30; 32; 34; 36; 38; 40; 42; 45; 48; 50; 53; 56; 60; 63; 67; 71; 75; 80; 85; 90; 95; 100; 105; 110; 120; 125.

Через те що промисловість випускає підшипники кочення з діаметром отвору, що дорівнює 35, 55, 65 і 70 мм, дозволяється використовувати для цапф валів ці додаткові розміри.

Остаточний розрахунок вала роблять як перевірний, беручи до уваги одночасну дію моменту згину і крутного моменту.

Коли на вал діє у різних площинах кілька навантажень, то сили звичайно розкладають на взаємно перпендикулярні складові. При цьому одну з площин складових вибирають так, щоб вона збігалася з площиною дії основної сили. Для складових, які діють у перпендикулярних площинах, будують епюри моментів згину і за ними визначають сумарні моменти згину в будь-якому перерізі вала як геометричні суми моментів за формулою

$$M_{зг} = \sqrt{M_{згх}^2 + M_{згy}^2}$$

Одночасна дія крутного моменту M_k і моменту згину $M_{зг}$ визначається величиною еквівалентного моменту за III теорією міцності:

$$M_{екв} = \sqrt{M_{зг}^2 + M_k^2}$$

Внаслідок обертання напруга згину в матеріалі вала навіть при сталій за величиною і напрямом зовнішній силі змінюється за симетричним циклом. Це відбивають відповідні величини допустимих напруг, що їх використовують у розрахунковій формулі:

$$\sigma_{екв} = M_{екв}/(0,1d^3) \leq [\sigma_{-1F}]$$

Розрахункові діаметри вала в небезпечних перерізах визначають за формулою $d \geq \sqrt[3]{M_{екв}/(0,1[\sigma_{-1F}]}$ і порівнюють з раніше встановленими діаметрами.

Наведені формули для перевірного і проектного розрахунків валів використовують також для розрахунку осей. Оскільки осі навантажені лише моментом згину, то для них $M_k = 0$ і $M_{екв} = M_{зг} = \sqrt{M_{згх}^2 + M_{згy}^2}$.

Допустимі навантаження згину $[\sigma_{зг}]$ для осей, які не обертаються і $[\sigma_{-1F}]$ для валів та осей, що обертаються, беруть з табл. 39.1.

Таблиця 39.1

Матеріал	Тимчасовий опір $\sigma_{тм}$, МПа	Допустимі напруги, МПа	
		$[\sigma_F]$	$[\sigma_{-1F}]$
Вуглецева сталь	400	130	40
	500	170	45
	600	200	55
	700	230	65
Легована сталь	800	270	75
	1000	330	90

Діаметри в тих місцях, де є шпонкові канавки, щоб компенсувати ослаблення вала, збільшують порівняно з розрахунковими значеннями на 7—10 %.

На рис. 39.4 показано конструкцію вала-шестірні циліндричної косо-зубої передачі з усіма даними, потрібними для розрахунку вала (сили реакції тощо).

На рис. 39.5, а подано для цього випадку розрахункову схему навантаження вала передаваним обертаючим моментом T , коловою силою на колесі $F_t = 2T/d_1$, осьювою силою $F_a = F_t \tan \beta$ і вертикальною силою $F_r = F_t \tan \alpha / \cos \beta$ (де α — кут зачеплення, β — кут нахилу зубів). На рис. 39.5, б показано сили F_a , F_r і реакції опор Y_A і Y_B , а також момент $m = F_a d_1 / 2$, що діють у вертикальній площині. На рис. 39.5, в показано силу F_t і реакції опор X_A та X_B , які діють у горизонтальній площині. Епюри моментів згину від сил F_r і F_a , які діють у вертикальній площині,

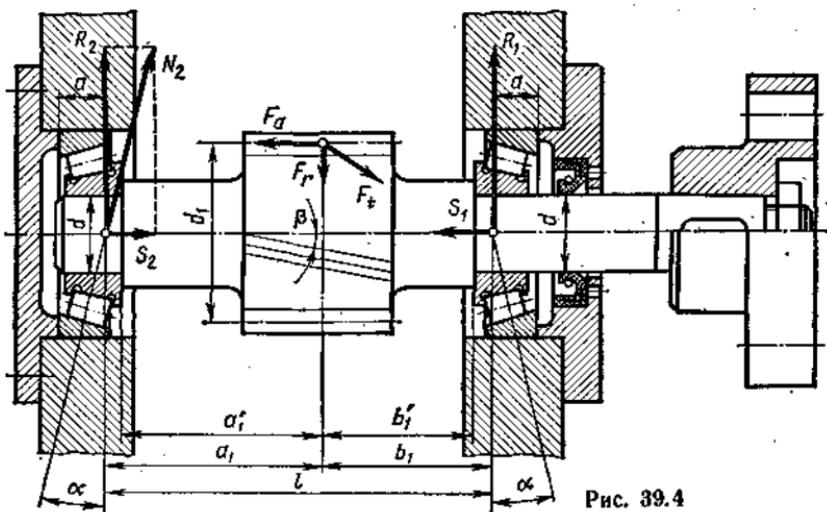


Рис. 39.4

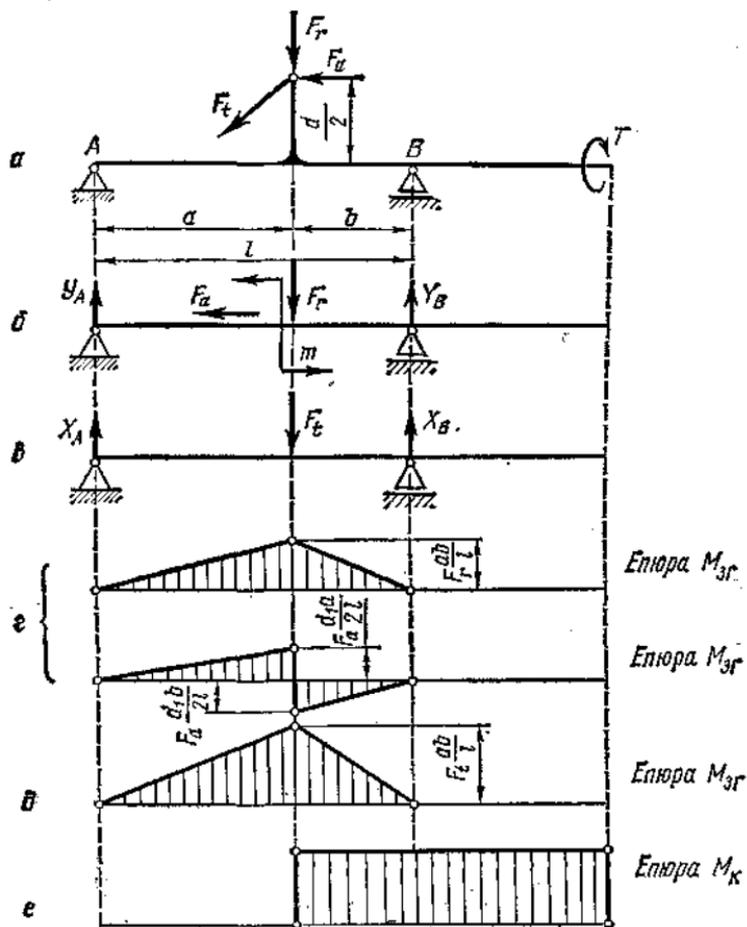


Рис. 39.5

показано на рис. 39.5, *г*; епюру згинаючих моментів від сили F_t , яка діє у горизонтальній площині, — на рис. 39.5, *д*, а епюру від обертаючого моменту — на рис. 39.5, *е*.

Наведений розрахунок вала на витривалість є спрощеним, оскільки пов'язаний з припущенням, що дотичні і нормальні напруги змінюються за симетричним (тобто найнесприятливішим) циклом. Такий розрахунок дає неточність у кілька процентів у бік збільшення запасу міцності вала.

Уточнений розрахунок вала на витривалість роблять як і перевірений; він полягає у визначенні фактичного запасу міцності з урахуванням характеру змін дотичних і нормальних напруг, масштабного фактора, концентрації напруг і стану поверхні (див. § 25.3). Умову міцності можна записати у вигляді $n \geq [n]$.

У більшості випадків можна обмежитись спрощеним перевірним розрахунком вала. За відомою номінальною напругою в небезпечному перерізі легко визначити випадки, коли умови витривалості завчасно враховані. Уточненого розрахунку не потрібно, якщо

$$\sigma_{\text{екв}} \leq \epsilon_{\sigma} \sigma_{-1F} / (k_{\sigma} [n]) = [\sigma_{-1F}],$$

де σ_{-1F} — границя витривалості гладенького зразка на згин при симетричному циклі навантаження; ϵ_{σ} — масштабний фактор; k_{σ} — ефективний коефіцієнт концентрації напруг у небезпечному перерізі; $[n]$ — допустимий коефіцієнт запасу міцності на витривалість; $[n]_{\text{мін}} = 1,3$.

Вали перевіряють також на жорсткість. Від дії прикладених сил вали деформуються — згинаються і скручуються. Допустимі прогини і кути нахилу пружної лінії валів визначаються умовами нормальної роботи деталей передач і підшипників.

Оскільки деформації валів мало позначаються на роботі пасових і ланцюгових передач, то вали таких передач на жорсткість не перевіряють. Деформації валів зубчастих передач спричинюють зміщення зони контактів зубів і концентрацію навантаження на їх кінцях. Збільшення міжосьової відстані при деформації валів особливо негативно позначається на дії передач із зачепленням Новикова.

Нахил пружної лінії вала спричинює в опорі перекис кілець підшипників кочення і нерівномірну концентрацію тиску вздовж вкладки підшипника ковзання. Умова жорсткості валів:

$$\alpha \leq [\alpha]; \quad f \leq [f],$$

де α — кут нахилу пружної лінії вала в опорі або в місці встановлення зубчастих коліс; f — максимальна стріла прогину, мм; $[\alpha]$ і $[f]$ — допустимі значення кута нахилу і стріли прогину вала.

Прогини і кути нахилу пружної лінії вала визначають звичайно методами опору матеріалів. Для зубчастих передач допустимий прогин у місці встановлення зубчастих коліс може бути не більшим від 0,03 модуля зачеплення. Найбільший допустимий кут нахилу вала, розміщеного у підшипнику ковзання, може дорівнювати $[\alpha] = 0,001$ рад; у шарикових радіальних підшипниках $[\alpha] = 0,0012$ рад; у радіальних підшипниках з короткими циліндричними роликами $[\alpha] = 0,0005$ рад; у конічних роликових підшипниках $[\alpha] = 0,0003$ рад; для валів зубчастих передач кут взаємного нахилу осей має бути не більшим від 0,001 рад.

Іноді осі також перевіряють на жорсткість за допустимою стрілою прогину $[f]$:

$$f \leq [f] = (0,001 - 0,002) l,$$

де l — відстань між опорами осі.

Розділ XL

ОПОРИ ОСЕЙ І ВАЛІВ

Опорами валів і обертових осей є підшипники і під'ятники (див. рис. 39.3). Підшипники приймають радіальні і осьові навантаження і передають їх на корпус чи раму машини. Під'ятники приймають осьові навантаження, переважно вертикальні. Опори осей і валів за видом тертя поділяють на опори ковзання і кочення.

§ 40.1. Підшипники ковзання

Підшипники ковзання переважно складаються з двох основних елементів: корпусу і вкладиша, виготовленого з антифрикційного матеріалу. Перевагою підшипників ковзання є те, що вони мають порівняно малі розміри в радіальному напрямі, відзначаються слабкою чутливістю до поштовхів та ударів, значною довговічністю при рідинному терті робочих поверхонь. До їх недоліків можна віднести порівняно низький ККД при нерідинному терті, великі розміри по осі і значну витрату мастила. Залежно від напрямку приймання навантаження підшипники ковзання поділяють на радіальні, які приймають радіальні навантаження; упорні, або під'ятники, які приймають осьові навантаження; радіально-упорні, які приймають одночасно радіальні і осьові навантаження.

Існує багато різних конструкцій підшипників ковзання. Широко застосовують цілі (рис. 40.1) і рознімні (рис. 40.2) підшипники. Підшипники ковзання використовують: для досить швидкохідних валів, де довговічність підшипників кочення недостатня (турбіни); для особливо точного напрямлення валів (високоточні верстати); для опор, які зазнають значних поштовхів і ударів; коли за умовами складання підшипники мають бути рознімними (колінчасті вали); для опор, які вимагають малих діаметрів; для особливих умов, в яких підшипники кочення непридатні (у воді, в агресивних середовищах); для допоміжних тихохідних механізмів.

Нерознімні підшипники використовують переважно в тихохідних механізмах з ручним чи механічним приводом. Конструктивні форми корпусів таких підшипників можуть бути різні (див. рис. 40.1, а, б, в, г, д).

Для приладів і деяких механізмів нерознімні підшипники виготовляють у вигляді бронзової або чавунної втулки, запресованої у стінку корпусу. Рознімний підшипник складається з корпусу 4, кришки 1, болтів і шпильок 2, якими скріплюють кришку з корпусом, і вкладиша 3, що має дві половинки. Через отвір у кришці 1 подається густе або рідке мастило. Спрацювання вкладишів компенсується притискуванням верхньої кришки. Корпус підшипника звичайно виготовляють з чавуну.

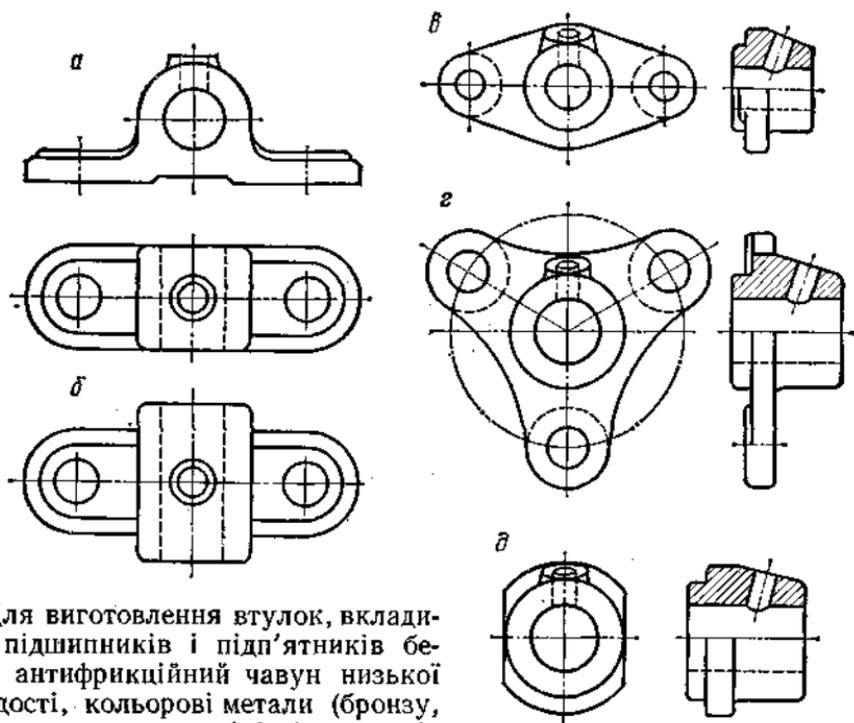


Рис. 40.1

Для виготовлення втулок, вкладишів підшипників і під'ятників беруть антифрикційний чавун низької твердості, кольорові метали (бронзу, бабіт, латунь, алюмінієві сплави); металокерамічні матеріали, які виготовляють з порошків заліза чи бронзи і графіту, пресуючи їх під високим тиском і спікаючи потім при високій температурі. Використовують й інші матеріали (текстоліт, деревню-шаруваті пластики тощо), які у багатьох

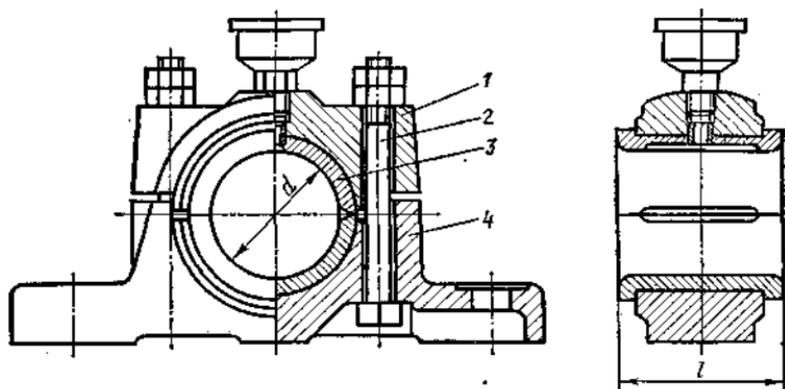


Рис. 40.2

випадках успішно замінюють дефіцитні кольорові метали та їх сплави. Конструкція і розміри різних корпусів підшипників ковзання і чавунних вкладишів до цих корпусів стандартизовано.

Для змащування підшипників швидкохідних валів беруть легкі (менш в'язкі) гатунки масел, наприклад індустриальні И-5А, И-20А та ін. Важкі масла (наприклад, И-100А) або пластичні мастила марок ПВК чи

ГОИ54-П використовують для підшипників тихохідних валів при великих навантаженнях.

У підшипниках ковзання бажано створювати р і д н н е тертя. Воно (на відміну від с у х о г о ч и г р а н и ч н о г о) постійно створює певної товщини шар мастила між тертьовими поверхнями. Для п е р е в і р к и розмірів цапфи підшипника — довжини l і діаметра d (рис. 40.2) — користуються умовним розрахунком, який роблять за допустимим середнім тиском у підшипнику і за добутком тиску на швидкість. Середній тиск p у підшипнику має відповідати умові

$$p = R/(dl) \leq [p],$$

де R — радіальне навантаження на підшипник; d і l — діаметр і довжина цапфи; $[p]$ — допустимий тиск.

Для проектного розрахунку задаються відносною довжиною підшипника $\psi = l/d = 0,4 \div 1,2$. Вибір відносної довжини залежить від конструкції вала, габаритів передачі й умов роботи підшипника. Додатково визначають *добуток середнього тиску p у підшипнику на швидкість ковзання v :*

$$pv \leq [pv],$$

де $[pv]$ — допустиме значення умовної характеристики нагрівання і спрацювання.

Для наближених розрахунків підшипників ковзання можна брати такі середні значення $[p]$, МПа, і $[pv]$, МН/ (м · с):

для сталі по чавуну	$[p] \approx 3,$	$[pv] \approx 3;$
» по бронзі	$[p] \approx 5,$	$[pv] \approx 8;$
» по бабіту	$[p] \approx 6,$	$[pv] \approx 20.$

Докладніші рекомендації щодо вибору значень $[p]$ і $[pv]$ залежно від матеріалу вкладишів підшипників, сорту мастила й умов роботи подано в довідниках.

§ 40.2. Підшипники кочення

Підшипники кочення, що їх випускає промисловість, стандартизовані. Масове виробництво їх має великий діапазон типорозмірів із зовнішнім діаметром від 1,5 мм до 2,6 м і масою від часток грама до кількох тонн.

У більшості випадків підшипники кочення (рис. 40.3) складаються з двох кілець 1 і 2, тіла кочення 4 (шариків чи роликів), сепаратора 3, який утримує тіла кочення на деяких відстанях одне від одного. Деякі підшипники кочення з метою зменшення їх габаритів виготовляють без одного або без обох кілець, а іноді — без сепаратора.

Порівняно з підшипниками ковзання підшипники кочення мають такі позитивні якості: менші моменти сил тертя, порівняно незначне нагрівання, незначна витрата мастила, мала ширина. До недоліків слід віднести: чутливість до ударних навантажень, відносно великі радіальні розміри і значна вартість (великогабаритних підшипників).

Кільця і тіла кочення виготовляють із спеціальної підшипникової сталі ШХ9 і ШХ15 з високим вмістом

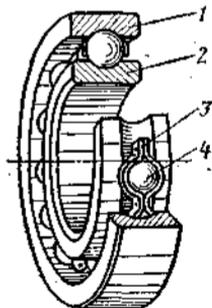


Рис. 40.3

хрому. Сеператори виготовляють з м'якої вуглецевої сталі, латуні, бронзи, дюралюмінію, текстоліту.

За навантаженням, яке вони приймають, підшипники кочення поділяють на радіальні, радіально-упорні, упорно-радіальні і упорні.

Залежно від форми тіл кочення підшипники бувають шарикові і роликові. Ролики бувають: циліндричні короткі, довгі, виті, конічні, бочкоподібні, голчасті, тобто довгі циліндричні малого діаметра. За кількістю рядів тіл кочення підшипники бувають одно-, дво- і багаторядні.

За способом самоустановлення підшипники кочення поділяють на несамоустановні і самоустановні (сферичні). Залежно від вантажопідйомності підшипники кочення поділяють на роз-

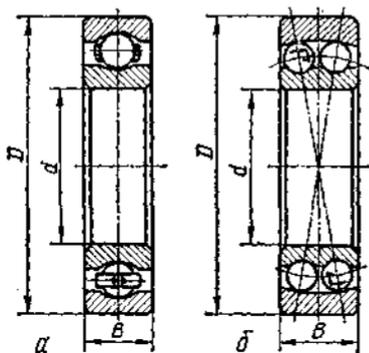


Рис. 40.4

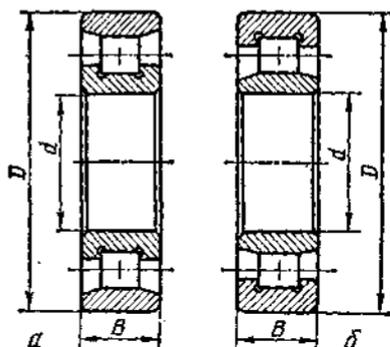


Рис. 40.5

мірні серії: надлегкі, особливо легкі, легкі, середні і важкі, а залежно від ширини — вузькі, нормальні, широкі, особливо широкі. При тому самому діаметрі отвору підшипники різних серій мають різні за розмірами кільця і тіла кочення (шариків або ролики); в особливо легкій серії вони більші, ніж у надлегкої, у легкій більші, ніж в особливо легкій, у середньої більші, ніж у легкій і т. д.

Шарикопідшипники радіальні однорядні (рис. 40.3 і 40.4, а) — найпростіші і найдешевші, дуже поширені в машинобудуванні. Вони призначені для радіального навантаження, але можуть одночасно приймати і деяке осьове навантаження.

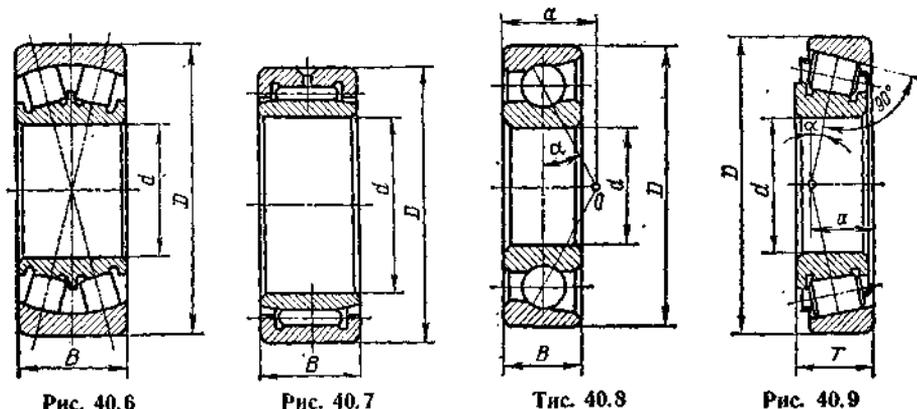
Шарикопідшипники радіальні дворядні сферичні самоустановні (рис. 40.4, б) допускають перекіс кілець до 2° і крім радіального навантаження можуть приймати осьове.

Роликотпідшипники радіальні з короткими циліндричними роликами (рис. 40.5, а, б) допускають значно більші навантаження, ніж однорядні шарикові (в 1,7 раза), але не приймають осьових навантажень.

Роликотпідшипники радіальні дворядні сферичні (рис. 40.6) мають бочкоподібні ролики. Такі підшипники допускають перекіс кілець до 2° і крім радіального навантаження можуть приймати й осьове.

Роликпідшипники голчасті (рис. 40.7) мають малий діаметр зовнішнього кільця. Вони приймають тільки радіальне навантаження.

Шарикопідшипники радіально-упорні (рис. 40.8) і роликпідшипники конічні (рис. 40.9)



приймають і радіальні, і значні осьові навантаження, які діють одночасно. Коли кут контакту $\alpha \geq 45^\circ$ (рис. 40.8 і 40.9), то підшипник називають упорно-радіальним.

Шарикопідшипники упорні однорядні (рис. 40.10) призначені лише для осьових навантажень постійного напрямку, дворядні ж (рис. 40.11) приймають осьові навантаження у двох напрямках. Упорні підшипники беруть для опор вантажних гаків, для ус-

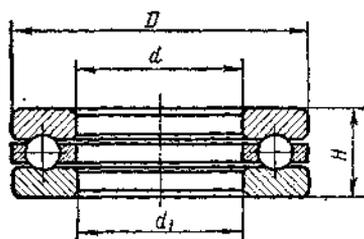


Рис. 40.10

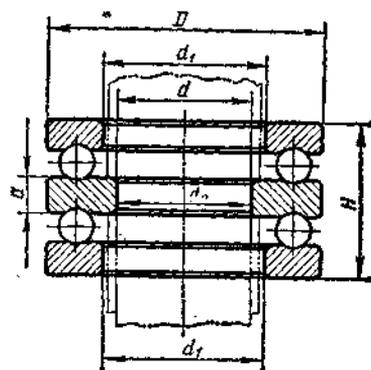


Рис. 40.11

тановок з вертикальними валами, а також використовують у поєднанні з радіальними підшипниками, наприклад, в опорах ведучих валів черв'ячних редукторів. ГОСТ 2.420—69 визначає правила виготовлення спрощених зображень підшипників кочення в осьових перерізах і перерізах на складальних кресленнях.

Значне розширення міжнародних торгових зв'язків нашої країни вимагало переходу на методику розрахунку і вибору підшипників за рекомендаціями міжнародних організацій РІВ і ІСО (Міжнародна організація по стандартизації) щодо стандартів. Перехід на нову методику роз-

ожливість спростити контакти з зарубіжними замовниками вітчизняних підшипників.

Вибір типу і розмірів підшипників залежить від таких основних факторів: характеру навантаження (стале, змінне, ударне), його величини і напрямку; розмірів цапф вала і частоти його обертання; довговічності підшипника, млн. обертів або год; статичної і динамічної вантажопідйомності підшипника.

Методи розрахунку *статичної* вантажопідйомності і еквівалентного статичного навантаження підшипників кочення передбачені ГОСТ 18854—73. Методи розрахунку *динамічної* вантажопідйомності і довговічності підшипників кочення передбачені ГОСТ 18855—73.

Довговічність підшипників — це розрахунковий строк роботи, протягом якого не менше ніж 90 % із даної групи підшипників за однакових умов має працювати без виникнення ознак втомленості.

Статична вантажопідйомність C_0 — це статичне радіальне навантаження, якому відповідає загальна залишкова деформація тіла кочення і кільця у найбільш навантаженій ділянці контакту, що дорівнює 0,0001 діаметра тіла кочення.

Еквівалентне статичне навантаження P_0 — це статичне радіальне навантаження, від якого виникає така сама загальна залишкова деформація у найбільш навантаженій ділянці контакту тіла кочення з кільцями, як і в справжніх умовах навантаження.

Динамічна вантажопідйомність C радіальних і радіально-упорних підшипників — це стале радіальне (для упорних і упорно-радіальних підшипників — центральне осьове) навантаження, яке група подібних підшипників з нерухомим зовнішнім кільцем може витримати протягом розрахункового строку роботи, що становить 1 млн. обертів внутрішнього кільця.

Еквівалентне динамічне навантаження P радіальних і радіально-упорних підшипників — це стале радіальне навантаження, яке, діючи на підшипник з обертовим внутрішнім і нерухомим зовнішнім кільцями, зумовлює такий самий строк роботи, як і в справжніх умовах навантаження.

Підшипники кочення з частотою обертання кільця понад 1 хв⁻¹ добирають за *динамічною вантажопідйомністю* відповідно до умови

$$C_n \leq C,$$

де C_n — потрібна величина динамічної вантажопідйомності, Н; C — динамічна вантажопідйомність за каталогом на підшипники кочення.

Потрібну величину динамічної вантажопідйомності визначають залежно від еквівалентного динамічного навантаження P і необхідної довговічності (L , млн. обертів, або L_n , год) за формулами:

для шарикових підшипників

$$C_n = P \sqrt[3]{L} \quad \text{або} \quad C_n = P \sqrt[3]{60nL_n \cdot 10^{-7}};$$

для роликових підшипників

$$C_n = PL^{0,3} \quad \text{або} \quad C_n = P(60nL_n \cdot 10^{-6})^{0,3},$$

де n — частота обертання кільця підшипника, хв⁻¹.

Для підшипників редукторів потрібну довговічність звичайно задають у годинах і беруть $L_h = (20 \div 36) \cdot 10^3$.

Еквівалентне динамічне навантаження P обчислюють за формулою

$$P = (XV F_r + Y F_a) K_0 K_T, \quad (40.1)$$

де X — коефіцієнт радіального навантаження; Y — коефіцієнт осевого навантаження; V — коефіцієнт обертання (для обертання відносно вектора навантаження внутрішнього кільця $V = 1$, зовнішнього кільця — $V = 1,2$); F_r — радіальне навантаження, Н; F_a — осеве навантаження, Н; K_0 — коефіцієнт безпеки (для редукторів $K_0 = 1,3 \div 1,5$); K_T — температурний коефіцієнт (коли t до 120°C , $K_T = 1$).

Формула (40.1) справджується, коли $F_a/VF_r > e$, де e — допоміжний коефіцієнт. Якщо $F_a/VF_r \leq e$, то розрахунок ведуть за радіальним навантаженням, беручи $X = 1$, $Y = 0$. Тоді $P = VF_r K_0 K_T$.

Користуючись формулою (40.1), треба враховувати, що: для радіальних підшипників з короткими циліндричними роликами $F_a = 0$, $X = 1$; для шарикових і роликових упорних підшипників $F_r = 0$, $Y = 1$; для радіальних і радіально-упорних шарикових підшипників коефіцієнти X і Y беруть з табл. 8 ГОСТ 18855—73; для радіально-упорних роликових підшипників коефіцієнти X і Y беруть з табл. 9 ГОСТ 18855—73.

Визначаючи осеві навантаження F_a , які діють на радіально-упорні підшипники, крім зовнішньої осевої сили A , треба враховувати осеві складові S реакцій підшипників, що виникають під дією радіальних навантажень. Ці складові обчислюють за формулами:

для шарикових радіально-упорних підшипників

$$S = eF_r;$$

для конічних роликових підшипників

$$S = 0,83eF_r,$$

де e — допоміжний коефіцієнт, який для шарикових підшипників визначають залежно від кута контакту α (див. рис. 40.8) і відношення F_a/C_0 , яке беруть з табл. 8 ГОСТ 18855—73; для роликових підшипників — за формулою $e = 1,5 \lg \alpha$, де α — кут контакту (див. рис. 40.9), причому величину e для кожного типорозміру підшипників подано в каталозі.

Примітка. Для шарикових радіально-упорних підшипників з номінальними кутами контакту 12° і 15° враховують зміну робочих величин цих кутів під дією навантажень, і коефіцієнт e (потрібний для визначення F_a) обчислюють за формулами: коли $\alpha = 12^\circ$, то $\lg e = \frac{\lg(F_r/C_0) - 1,144}{4,729}$, коли $\alpha = 15^\circ$, то $\lg e = \frac{\lg(F_r/C_0) - 1,766}{7,363}$.

Щоб визначити сумарні осеві навантаження F_{a1} і F_{a2} , потрібно скористатися табл. 40.1 і рис. 40.12, на якому індексом 2 позначено підшипник, що приймає зовнішню осеву силу A .

Таблиця 40.1

Умови навантаження	Осеві навантаження підшипників
$A + S_1 > S_2$ $A + S_1 < S_2$	$F_{a1} = S_1, F_{a2} = A + S_1$ $F_{a1} = S_2 - A, F_{a2} = S_2$

Радіальну реакцію вважають прикладеною у точці O перетину з віссю вала нормалі до середини контактної ділянки (див. рис. 40.8 і 40.9). Положення точки O для однорядних підшипників визначають за формулою:

для радіально-упорних шарикопідшипників

$$a = 0,5B + [(d + D)/4] \operatorname{tg} \alpha;$$

для конічних роликотпідшипників

$$a = 0,5T + [(d + D)/6] e,$$

де a — відстань від клеймованого торця підшипника до точки прикладання радіальної реакції; B, d, D, T — розміри підшипників, зазначені в каталозі; α — кут контакту підшипника; e — допоміжний коефіцієнт.

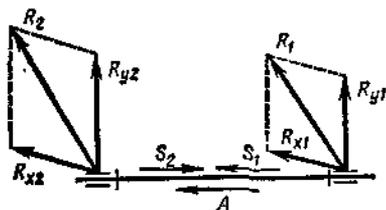


Рис. 40.12

Отже, щоб визначити радіальні складові реакцій радіально-упорних підшипників, спочатку потрібно попередньо вибрати підшипник, потім зробити ескізну компоновку вузла, далі визначити реакції опор; власні осьові складові S від дії радіальних навантажень, сумарні осьові навантаження, що діють на кожну опору, і потім розрахувати підшипник.

Динамічна вантажопідйомність C , навантаження P і ресурс L (млн. обертів) підшипників зв'язані емпіричною залежністю

$$L = (C/P)^\alpha,$$

де $\alpha = 3$ для шарикопідшипників, $\alpha = 3,33$ для роликотпідшипників. Ресурс (год) $L_h = 10^6 L / (60n)$, де n — частота обертання підшипника, хв^{-1} .

Щоб полегшити розрахунки, в довідниках подано (окремо для шарикових і роликотвих підшипників) таблиці, які дають можливість визначити довговічність L_h підшипників залежно від величини відношення динамічної вантажопідйомності до еквівалентного навантаження C/P . За цими самими таблицями легко визначити потрібну величину відношення динамічної вантажопідйомності до еквівалентного навантаження залежно від частоти обертання вала n і заданої довговічності підшипника L_h . Тому потрібну динамічну вантажопідйомність зручно визначати за формулою

$$C_n = (C/P) P,$$

де (C/P) знаходять за таблицями довідників залежно від n і L_h .

§ 40.3. Схеми встановлення і змащування підшипників кочення

Підшипники кочення встановлюють на валах і в корпусах за схемами, поданими на рис. 40.13. Схеми a і b застосовують до відносно довгих валів. У цих схемах один з підшипників закріплюють у корпусі (опорі). Цю опору називають *фіксуною*. Другий підшипник встановлюють так, щоб забезпечувалось осьове зміщення по отвору корпусу. Таку опору називають *плаваючою*.

Схему *в*, яку ще називають схемою *врозпір*, застосовують до відносно коротких валів. Це — найпростіша схема, і тому її особливо широко застосовують у різних конструкціях машин. Недоліком цієї схеми є те, що не виключене защемлення вала в опорах внаслідок його теплового розширення.

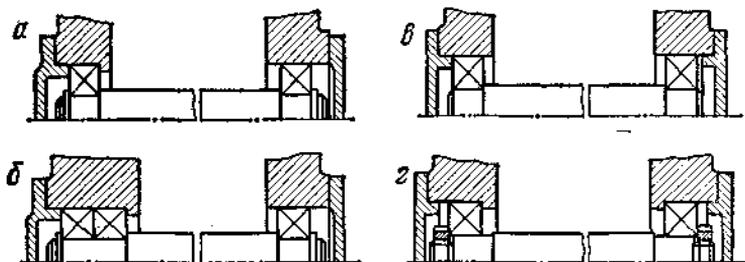


Рис. 40.13

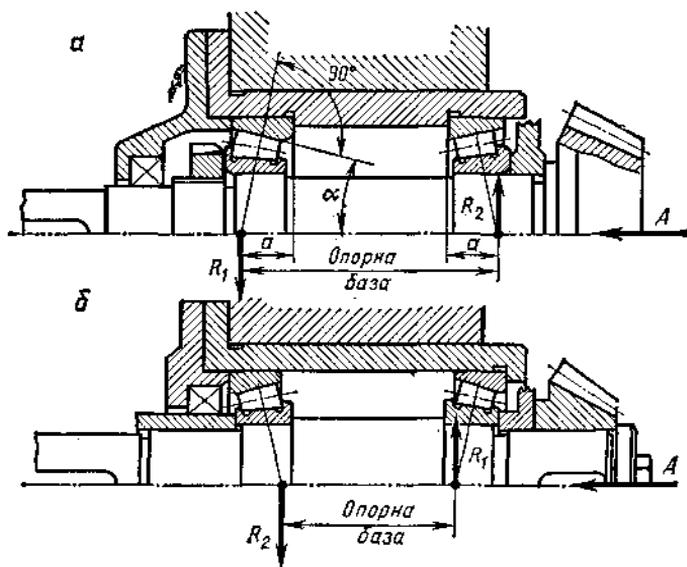


Рис. 40.14

Схему *г*, яку ще називають схемою *врозтяжку*, застосовують також до відносно коротких валів. Її переваги — неможливість защемлення вала в корпусі при його теплому видовженні.

При встановленні радіально-упорних шарикових і роликових підшипників одноіменні торці зовнішніх кілець (широкі, вузькі) мають бути повернуті один до одного. Підшипники вала кінцевої шестірні встановлюють один проти одного широкими торцями зовнішніх кілець (рис. 40.14, *а*). За іншого розміщення підшипників (рис. 40.14, *б*) зменшуються опорна база і кутова жорсткість опор, збільшуються реакції опор. Тому в сучасних виробках у силових передачах підшипники розміщують за рис. 40.14, *б* рідко.

На довговічність підшипників кочення дуже впливає змащування; завдяки йому відводиться теплота, зменшуються втрати на тертя, а підшипники захищаються від корозії. Для задовільної роботи підшипників кочення потрібно небагато мастила. Ефективнішим є рідке мастило (індустріальні масла марок И-5А, И-20А та ін.). Маленькі краплинки масла потрапляють у підшипник у результаті розбризкування швидкохідними зубчастими колесами. Пластичні мастила ПВК, Літол-24 та інші використовують в умовах, коли температура підшипника не

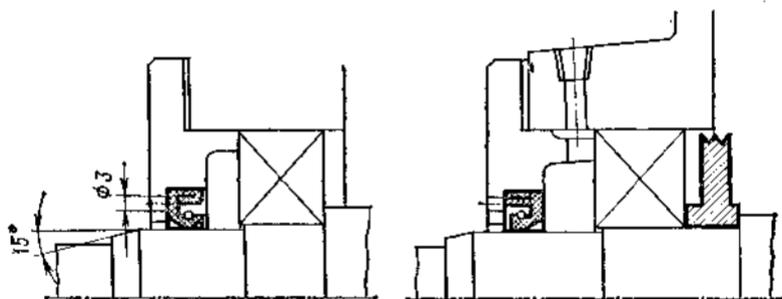


Рис. 40.15

більша від 100°C і конструкція пристрою, в якому працює підшипник, забезпечує зручність розбирання для промивання і заміни мастила.

Щоб захистити підшипники від зовнішнього пилу, бруду і вологи та витікання мастила, застосовують ущільнювачі пристрої. За принципом дії ці пристрої бувають контактні, щілинні, лабиринтні, відцентрові і комбіновані.

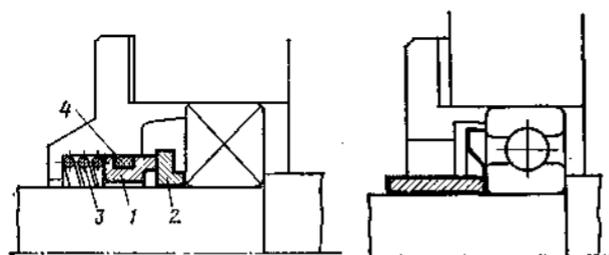


Рис. 40.16

Рис. 40.17

Найбільш поширені контактні ущільнення, в яких ущільнюювальні елементи стикаються з циліндричними або торцевими поверхнями. Їх застосовують у випадках змащування підшипників і пластичним, і рідким мастилом при колесній швидкості вала до 10 м/с . Щілинні ущільнення застосовують переважно для пластичного мастила при колесній швидкості вала до 5 м/с . Лабиринтні ущільнення застосовують при будь-якій частоті обертання вала з пластичним або рідким мастилом. Відцентрові ущільнення застосовують переважно при рідкому змащуванні підшипників і колесній швидкості обертання вала понад 5 м/с .

Кращий ефект дають широко застосовувані комбіновані ущільнення, в яких об'єднано вже розглянуті пристрої. Серед контактних найпоширенішими є манжетні ущільнення (рис. 40.15). Їх розміри стандартизовані і подані у таблицях стандартів і довідників.

Останнім часом набувають поширення більш ефективні торцеві ущільнення. Схему одного з них подано на рис. 40.16. У цьому ущільнен-

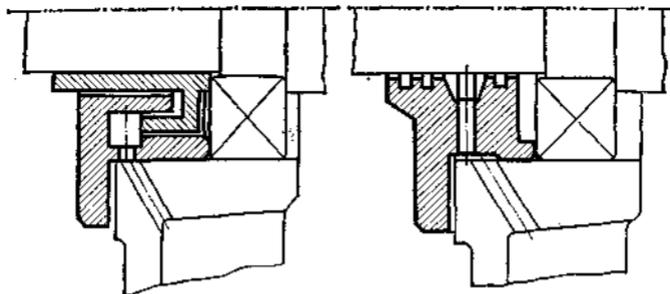


Рис. 40.18

ні кільце 1 виготовляють з антифрикційних матеріалів, таких як фторопласт, випалений і просочений фенолформальдегідною смолою вуглеграфіт та ін. Кільце 2 — із хромистої сталі 40Х, ШХ15 і ін., загартованої до високої твердості. Кільце 1 до кільця 2 притискує пружина 3. Гумове кільце 4 є так званим статичним ущільненням. Ефективне також торцеве ущільнення еластичними сталевими шайбами (рис. 40.17).

Типові конструкції лабіринтного і щілинного ущільнень показано на рис. 40.18, а, б. Зазори цих ущільнень заповнюють пластичним мастилом. Рідке масло, що просочується через можливі щілини, повертається у масляну ванну через дренажні отвори.

Конструкцію відцентрового ущільнення показано на рис. 40.19. Таке ущільнення досить ефективно особливо тоді, коли вал розміщений вище від масляної ванни. Масло, яке просочується, відцентровою силою інерції скидається у кільцеву порожнину, що знаходиться у кришці підшипника. Звідси воно через дренажні твори стікає у масляну ванну.

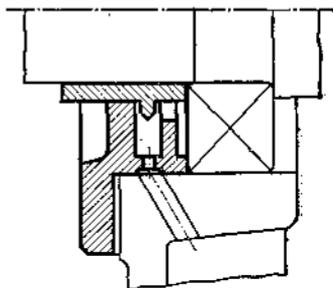


Рис. 40.19

§ 40.4. Під'ятники

Під'ятники — це кінцеві або проміжні опори, переважно вертикальних валів, що приймають осьові навантаження. Під'ятники, конструкція яких ґрунтується на терті ковзання (рис. 40.20), мають робочі поверхні, облицьовані антифрикційними матеріалами — бронзою чи бабітом. Такі під'ятники мають пристрої для рідких або пластичних мастил.

Щоб поліпшити умови змащування, на робочих поверхнях п'ят роблять радіальні канавки і похилі маслозбірні зрізи по їх краях, що збільшує несучу здатність під'ятника. Для рівномірного розподілу тиску по всій робочій поверхні п'яти і під'ятника останній часто виготовляють із сферичним самоустановним вкладишем (рис. 40.20).

Частина опорної поверхні п'яти, що розміщена безпосередньо біля осі вала, перебуває в умовах малих швидкостей ковзання і посиленого тертя, через що можливі заїдання і задири робочих поверхонь. Тому поверхню п'ят, що мають витримувати значні навантаження, роблять кільцевою з отвором у центральній частині (рис. 40.20). При такій конструкції робо-

чі поверхні п'яти і підп'ятника спрацьовуються рівномірніше, ніж при суцільній п'яті.

У випадку великих осьових навантажень, щоб зменшити радіальні розміри, упорні підшипники і підп'ятники роблять *гребінчастими* (рис. 40.21). Тоді осьова сила розподіляється на кілька кільцевих виступів (гребенів). Кількість і розміри гребенів розраховують залежно від

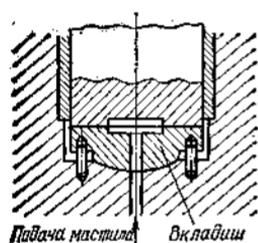


Рис. 40.20

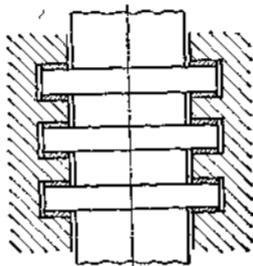


Рис. 40.21

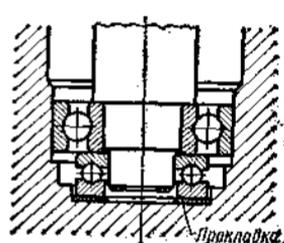


Рис. 40.22

міцності антифрикційного матеріалу підп'ятника, з умовою, щоб не видавлювалося мастило з робочих поверхонь.

Тепер у конструкціях машин різного призначення підп'ятники ковзання заміняють упорними підшипниками кочення.

У конструкціях підп'ятників кочення використовують стандартні шарикові і роликові упорні підшипники, добираючи їх за діаметром п'яти і вантажопідйомністю.

Щоб компенсувати незначні перекося монтажу або перекося, пов'язані з деформацією вала, під упорне кільце кладуть прокладку (з лінолеуму чи м'якого металу; рис. 40.22) або встановлюють упорні підшипники з підкладними сферичними кільцями.

Підп'ятники кочення змащують так само, як і підшипники кочення — рідкими або пластичними мастилами залежно від умов експлуатації машини і кутової швидкості обертання вала.

Приклад 40.1. Підібрати конічні роликопідшипники для ведучого вала зубчастого редуктора з циліндричними косозубими колесами (див. рис. 39.4). Передавана потужність $N = 20$ кВт, частота обертання вала $n = 1450$ хв⁻¹, кут нахилу лінії зуба $\beta = 8^{\circ}06'34''$, діаметр діляного кола шестірни $d_1 = 100$ мм. Потрібна довговічність підшипників $L_h = 25\,000$ год, діаметр цапф під підшипники $d = 35$ мм. Відстань від середини вінця шестірни до внутрішніх торців підшипників: $a_1 = 85$ мм, $b_1 = 45$ мм. Робоча температура підшипників $t < 100$ °С (до 60 °С). Навантаження з помірними поштовхами; обертається внутрішнє кільце.

Розв'язання. Визначимо сили, які діють у зачепленні:

колова сила

$$F_t = 2N/(\omega d_1) = 2 \cdot 20 \cdot 10^3 / (152 \cdot 0.1) = 2620 \text{ Н};$$

радіальна сила

$$F_r = F_t \operatorname{tg} \alpha / \cos \beta = 2620 \operatorname{tg} 20^{\circ} / \cos 8^{\circ}06'34'' = 960 \text{ Н};$$

осьова сила

$$F_a = A = F_t \operatorname{tg} \beta = 2620 \operatorname{tg} 8^{\circ}06'34'' = 370 \text{ Н}.$$

Попередньо приймаємо для швидкохідного вала редуктора конічні однорядні середньої серії 7307 розмірами: $d = 35$ мм, $D = 80$ мм, $T_{\max} = 23$ мм, $e = 0,319$ ($\alpha = 12^{\circ}$). Відстань від торця підшипника до точки прикладання радіальної реакції (див. рис. 40.9)

$$a = 0,57 + [(d + D)/6]e = 0,5 \cdot 23 + [(35 + 80)/6]0,319 = 18 \text{ мм}.$$

Потім знаходимо розміри a_1 і b_1 , які визначають положення точок прикладання радіальних реакцій підшипників (див. рис. 39.4):

$$a_1 = a'_1 + T - a = 85 + 23 - 18 = 90 \text{ мм,}$$

$$b_1 = b'_1 + T - a = 45 + 23 - 18 = 50 \text{ мм.}$$

Визначимо реакцію опор (індексом 2 позначено підшипник, який приймає осьове навантаження $A = F_a = 370$ Н):
у площині zOx

$$R_{x1} = F_r a_1 / l = 2620 \cdot 90 / 140 = 1680 \text{ Н,}$$

$$R_{x2} = F_r b_1 / l = 2620 \cdot 50 / 140 = 940 \text{ Н;}$$

у площині zOy

$$R_{y2} = (F_r b_1 + F_a d_1 / 2) / l = (960 \cdot 50 + 370 \cdot 100 / 2) / 140 = 475 \text{ Н,}$$

$$R_y = F_r - R_{y2} = 960 - 475 = 485 \text{ Н.}$$

Повні радіальні реакції:

$$R_1 = F_{r1} = \sqrt{R_{x1}^2 + R_{y1}^2} = \sqrt{1680^2 + 485^2} = 1750 \text{ Н,}$$

$$R_2 = F_{r2} = \sqrt{R_{x2}^2 + R_{y2}^2} = \sqrt{940^2 + 475^2} = 1055 \text{ Н.}$$

Обчислимо осьові складові S_1 і S_2 реакцій підшипників. Оскільки $e = 0,319$ (ця величина є у каталогах), то

$$S_1 = 0,83e F_{r1} = 0,83 \cdot 0,319 \cdot 1750 = 462 \text{ Н,}$$

$$S_2 = 0,83e F_{r2} = 0,83 \cdot 0,319 \cdot 1055 = 278 \text{ Н.}$$

Осьові навантаження F_{a1} і F_{a2} підшипників визначаємо, користуючись табл. 40.1. Оскільки $S_1 > S_2$ і $A > 0$, то

$$F_{a1} = S_1 = 462 \text{ Н,}$$

$$F_{a2} = S_1 + A = 462 + 370 = 832 \text{ Н.}$$

Визначимо еквівалентні динамічні навантаження P_1 і P_2 підшипників, користуючись табл. 9 ОСТ 18855-73.

Для правого підшипника

$$F_{a1} / (V F_{r1}) = 472 / 1750 = 0,264 < e = 0,319,$$

$$\text{тому } X_1 = 1 \text{ і } Y_1 = 0;$$

для лівого підшипника

$$F_{a2} / (V F_{r2}) = 832 / 1055 = 0,79 > e = 0,319,$$

$$\text{тому } X_2 = 0,4, Y_2 = 0,4 \operatorname{ctg} 12^\circ \approx 1,88.$$

Тоді при $V = 1$, $K_G = 1,5$, $K_T = 1$ матимемо:

$$P_1 = (X_1 V F_{r1} + Y_1 F_{a1}) K_G K_T = 1750 \cdot 1,5 = 2620 \text{ Н,}$$

$$P_2 = (X_2 V F_{r2} + Y_2 F_{a2}) K_G K_T = (0,4 \cdot 1055 + 1,88 \cdot 832) \cdot 1,5 = 2980 \text{ Н.}$$

Потрібну динамічну вантажопідйомність визначаємо для більш навантаженого (лівого) підшипника:

$$C_H = P_2 (60 n L_n \cdot 10^{-6})^{0,3} = 2980 (60 \cdot 1450 \cdot 25 \cdot 10^3 \cdot 10^{-6})^{0,3} \approx 3000 \text{ Н} = 30 \text{ кН.}$$

Порівнюючи потрібну динамічну вантажопідйомність з даними каталога, бачимо, що для даного ва з можна взяти роликотпідшипники кіничні легкої серії 7207, які мають динамічну вантажопідйомність $G = 34,5$ кН.

Габаритні розміри і кут контакту підшипника 7207 відрізняються від відповідних розмірів попередньо взятого підшипника 7307, а саме: $d \approx 35$ мм, $D = 72$ мм, $T_{\max} = 18,5$ мм, $e = 0,369$ ($\alpha \approx 14^\circ$).

Якщо потрібні розрахунки повторити для прийнятого роликопідшипника 7207, то можна переконатися, що від заміни середньої серії легкою еквівалентне динамічне навантаження більш навантаженого підшипника змінилось мало (на 0,16 кН, або приблизно на 5 %). За динамічною вантажопідійомністю, зазначеною в каталозі, і за еквівалентним динамічним навантаженням, обчисленим для підшипника вибраної серії, можна визначити його теоретичну довговічність. Для даного прикладу

$$L_h = \frac{10^6}{60n} \left(\frac{C}{P} \right)^{10/3} = \frac{10^6}{60 \cdot 1450} \left(\frac{3450}{2980} \right)^{10/3} \approx 42\,000 \text{ год.}$$

Порівнюючи теоретичну довговічність підшипника 7207 з заданою, робимо висновок що вибраний підшипник забезпечить потрібний строк роботи з запасом.

Розділ ХІІ

МУФТИ

§ 41.1. Призначення і класифікація муфт

Пристрої, призначені для з'єднання валів та інших обертових деталей і передавання обертаючого моменту без зміни напрямку, називають муфтами.

Поряд з кінематичним і силовим зв'язком окремих частин машини муфти забезпечують і ряд інших функцій, а саме: компенсацію шкідливого впливу зміщення осей з'єднаних валів, зумовленого неточностями виготовлення і складання або деформаціями деталей; пом'якшення поштовхів і ударів, які виникають під час роботи; демпфірування — поглинання енергії коливань і перетворення її у теплоту; захист частин машин від дії перевантажень; зчеплення і розчеплення з'єднаних деталей; полегшення запуску машини; обмеження швидкості та ін.

Відповідно до рекомендацій СЕВ щодо стандартизації муфти поділяють на чотири класи: нерозчіпні, керовані, самодіючі та інші.

Нерозчіпні муфти не допускають роз'єднання деталей під час роботи машини.

Керовані муфти дають змогу зчіплювати і розчіплювати вали як на ходу, так і під час зупинки.

Самодіючі муфти автоматично спрацьовують, коли змінюється режим роботи машини.

Інші муфти віднесені до четвертого класу.

Класи муфт поділяють на групи (механічні, гідродинамічні, електромагнітні), підгрупи (жорсткі, компенсуючі, або самоустановні, пружні, запобіжні, обгінні та ін.), види (фрикційні, рознімні, нерознімні, з елементом, який може або не може руйнуватися, і т. д.) і конструктивні виготовлення (шарикові, зубчасті, кулачкові, фланцеві та ін.).

Розраховують муфти не за номіналом, а за розрахунковим обертаючим моментом:

$$T_p = KT_n,$$

де $T_n = N/\omega$ — номінальний момент на валу; K — коефіцієнт перевантаження, що залежить від типу машини і режиму її роботи; $K = 1 \div 6$ (для фрикційних муфт замість коефіцієнта перевантаження беруть коефіцієнт запасу зчеплення $K = 1,25 \div 1,5$). Допустимі обертаючі моменти для муфт різних конструкцій подано у стандартах, нормалях і каталогах заводів-виготовлювачів.

§ 41.2. Конструкція муфт

Розглянемо основні (переважно охоплені стандартизацією) типи механічних муфт різних класів, що найбільше поширені в сучасному машинобудуванні. У загальному випадку муфта складається з ведучої і веденої частин і з'єднувальних елементів.

Нерозчіпні муфти. У цьому класі найпоширеніші жорсткі муфти, які не допускають відносного зміщення між ведучою і веденою частинами; компенсуючі муфти, що дають змогу з'єднувати вали при незначних неточностях монтажу, пружні муфти, в яких з'єднувальним елементом є пружне тіло.

На рис. 41.1 зображено жорстку втулкову муфту чотирьох конструкцій, у яких обертаючий момент передається призматичними (а) або сегментними (б) шпонками, штифтами (в) чи шліцями (г). Муфта може передавати обертаючий момент від 0,3 до 12 500 Н·м і відзначається малими га-

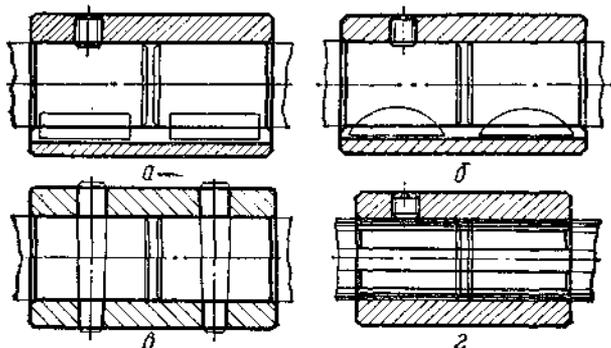


Рис. 41.1

баритами. На основі діючих нормалей машинобудування на втулкові муфти створено ГОСТ. Жорстка поздовжньо-скручувальна муфта (рис. 41.2) має роз'єм у площині, паралельній осі вала. Муфта складається з двох півмуфт, скріплених болтами. Застосовують ці муфти для з'єднання кінців валів з однаковими діаметрами. Обертаючий момент у діапазоні 120—12 500 Н·м передається завдяки тертю на поверхні вала і півмуфти, яке виникає від затягування кріпильних болтів. У великих муфтах додатково встановлюють призматичні шпонки.

Жорстка фланцева муфта (рис. 41.3) має роз'єм у площині, перпендикулярній до осі вала, і являє собою два фланці, що встановлені на кінцях з'єднуваних валів і стягнуті болтами, причому болти ставлять із зазором (виготовлення I) або без зазора (виготовлення II). У першому випадку обертаючий момент передається внаслідок тертя, що виникає на стику півмуфт від затягування болтів, а в другому — безпосередньо через болти, що працюють на зріз і зминання. Діапазон передаваних обертаючих моментів від 8 до 40 000 Н·м. Півмуфти виготовляють із сталі або чавуну відповідно до ГОСТ 20761—75.

Компенсуючу кулачково-дискову муфту (рис. 41.4) застосовують для з'єднання валів при передаванні обертаючого моменту від 16 до 16 000 Н·м, коли кутове зміщення осей валів не більше від 30'. Муфта складається з півмуфт 1 і 2, проміжного диска 3 і кожуха 4. Диск

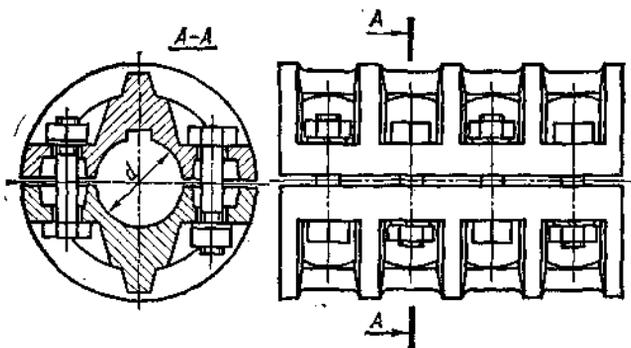


Рис. 41.2

Рис. 41.3

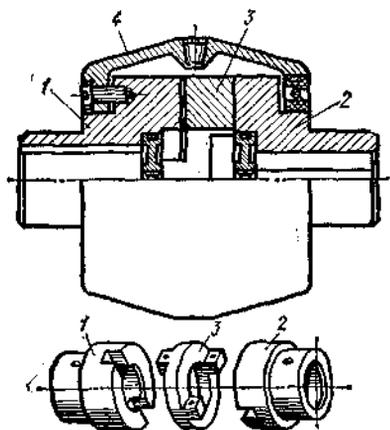


Рис. 41.4

Рис. 41.5

З двома торцевими взаємно перпендикулярними шпипами входить у пази півмуфти; коли осі валів не збігаються, то виступи диска ковзають у пазах півмуфт. Щоб зменшити тертя і спрацювання, муфти періодично змащують. Півмуфти виготовляють двох типів: з циліндричним і конічним посадочним отвором. Півмуфти і диск виготовляють із сталі або чавуну. Основні параметри, приєднувальні габарити кулачково-дискових муфт передбачені ГОСТ 20720—75.

Пружну втулково-пальцьову муфту (МУВП) застосовують для передавання обертаючих моментів від 6,3 до 16 000 Н·м. Її широко використовують у машинобудуванні завдяки простоті і невеликій вартості виготовлення. Муфта (рис. 41.5) складається з півмуфт 1 і 5, насаджених на кінці з'єднаних валів. В отворах півмуфт 1 закріплено кілька сталених пальців 4 з кільцями 2 і пружними втулками 3. Півмуфта 5 має відповідну кількість отворів, у які входять пальці з втулками. Фланці півмуфт не торкаються один одного, тому металевого контакту між ними немає. Це, крім плавної роботи муфти, забезпечує ще й електричну ізоляцію валів. Муфта компенсує також деяке кутове (до 1°) і осьове зміщення валів. Посадочні отвори у півмуфтах можуть бути циліндричними (тип I) або конічними (тип II).

Півмуфти виготовляють із сталі або чавуну. Матеріал пальців — сталь 45, втулок — спеціальна гума. Колова швидкість центрів гумових втулок повинна бути не більше ніж 30 м/с. Основні розміри таких муфт передбачені ГОСТ 21424—75.

Муфта пружна із зірочкою (ГОСТ 14084—76) призначена для з'єднання валів, які

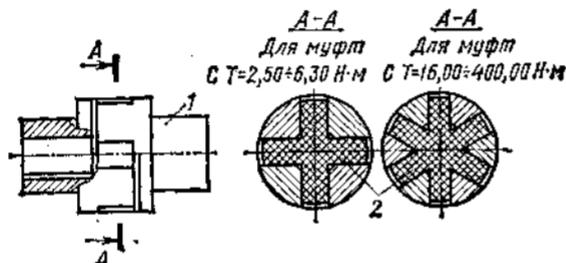


Рис. 41.6

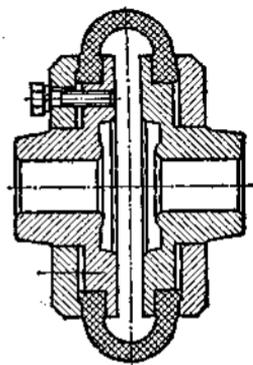


Рис. 41.7

передають обертаючий момент від 2,5 до 400 Н·м. Муфта (рис. 41.6) складається з півмуфт 1, які мають виступи на торцях. Простір між виступами заповнений гумовою зірочкою 2, призначеною для пом'якшення динамічних навантажень і компенсації неточностей монтажу. Залежно від потрібного обертаючого моменту T на зірках роблять чотири або шість виступів. Муфта може працювати в повітряному або масляному середовищі при температурі від -40 до $+50$ °С.

Муфта пружна з тороподібною оболонкою (рис. 41.7) дає змогу з'єднувати вали із зміщеними осями: при кутовому зміщенні до 2° , при радіальному — до 2 мм, при осьовому — до 4 мм. Муфта складається з двох півмуфт, з'єднаних тороподібною гумовою оболонкою. Така муфта проста для виготовлення і надійна в експлуатації. Діапазон передаваних обертаючих моментів від 20 до 40 000 Н·м. Виготовляють муфти відповідно до ГОСТ 20884—75. Посадочні отвори в муфтах роблять циліндричними або конічними.

Керовані муфти. Керовані муфти поділяють на кулачкові і зубчасті, що діють за принципом зачеплення, і фрикційні, в яких використано тертя.

Кулачкові муфти (41.8) мають кулачкові виступи на торцях з'єднуваних деталей (півмуфт). Коли муфту включають, то кулачки 2 шестірні 1, яка вільно сидить на валу, входять у зачеплення з кулачками півмуфти 4, що ковзає по шліцах вала в осьовому напрямі. Вилка механізму керування входить у кільцеву канавку 3. Профіль кулачків (у перерізі циліндрично поверхнею) може бути прямокутним, трапецеїдальним або трикутним. Симетричні трапецеїдальні профілі використовують для реверсивних муфт, а несиметричні — для нереверсивних.

Фрикційні муфти призначені для плавного зчеплення ведучого і веденого валів під навантаженням. У початковий момент муфта пробуксовує, а потім кутові швидкості з'єднуваних валів вирівнюються. За формою і кількістю робочих поверхонь фрикційні муфти поділяють на дискові, багатодискові і конічні.

Умова роботоздатності (без пробуксовування) фрикційних муфт виражається нерівністю

$$KT_n \leq T_T,$$

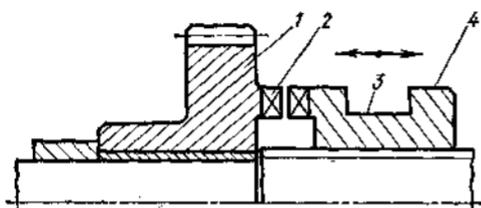


Рис. 41.8

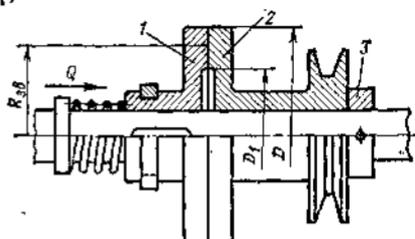


Рис. 41.9

де K — коефіцієнт запасу зчеплення, $K = 1,25 \div 1,5$; T_n — номінальний момент, який передає муфта; T_T — момент тертя на півмуфтах.

Найпростішу дискову фрикційну муфту показано на рис. 41.9. Півмуфта 2 вільно сидить на валу, опираючись на кільце 3, а півмуфта 1 може зміщуватися в осьовому напрямі за допомогою керуючого механізму. Щоб включити муфту, до рухомої півмуфти прикладають силу Q (за допомогою пружини або іншого пристрою). При цьому на кільцевих робочих поверхнях дотикання півмуфт виникають сили тертя, рівнодіючі яких прикладені на зведеному радіусі тертя $R_{зв}$.

З достатньою для практики точністю можна вважати, що

$$R_{зв} \approx R_c = (D + D_1)/4.$$

Тоді момент сил тертя, який обертає ведену півмуфту,

$$T_T = fQR_c.$$

Сила Q , потрібна для включення муфти,

$$Q \geq 4KT_n / [f(D + D_1)].$$

Для малих обертаючих моментів, які їх передає муфта, обидва диски виготовляють з металу. Для більших моментів один із дисків облицьовують фрикційним матеріалом, що дає можливість збільшити тертя робочих поверхонь і, таким способом, зменшити силу, потрібну для включення муфти. До таких матеріалів належить азбестова тканина з добавкою латунного дроту (цей матеріал іноді називають *феродо*).

Диски фрикційних муфт перевіряють на стійкість до спрацювання за умовою

$$p = 4Q / [\pi(D^2 - D_1^2)] \leq [p],$$

де $[p]$ — допустимий тиск на поверхні тертя муфти: для сталі по сталі $[p] = 60 \div 80$ МПа, для чавуну по сталі $[p] = 80 \div 100$ МПа.

Конічні фрикційні муфти (рис. 41.10). Під дією сили Q на поверхні конуса виникає сила нормального тиску, яку умовно показано у вигляді двох діаметрально розміщених сил $N/2$ на колі D_c . З умови рівноваги сил, які діють на півмуфту, маємо:

$$Q = N \sin \alpha. \quad (41.1)$$

Допустиму силу нормального тиску між тертьовими поверхнями визначають з умови стійкості проти спрацювання:

$$[N] = [p] \pi D_c b.$$

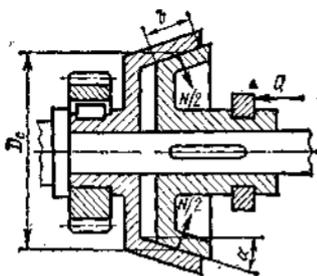


Рис. 41.10

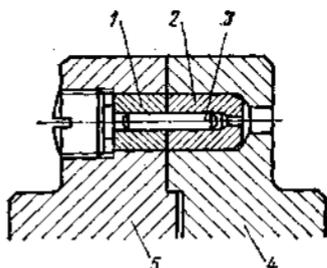


Рис. 41.11

Підставивши у формулу (41.1) замість N допустиму силу нормального тиску $[N]$, знайдемо силу включення:

$$Q = [P] \pi D_c b \sin \alpha,$$

де $[P]$ — допустимий тиск на робочій поверхні півмуфти; b — ширина поверхні контакту півмуфти; α — кут нахилу твірної конуса відносно осі муфти; D_c — середній діаметр конічної поверхні.

Момент тертя на півмуфтах

$$T_r = [N] f D_c / 2 = (Q D_c / 2) (f / \sin \alpha) = (Q D_c / 2) f^1,$$

де $f^1 = f / \sin \alpha$ — зведений коефіцієнт тертя.

Із зменшенням кута α величина передаваного моменту збільшується, а необхідна сила натиску Q зменшується.

Щоб не було заклинювання і щоб полегшити включення муфти, кут α беруть у межах 8 — 15° .

Самодіючі муфти. Самодіючі муфти поділяють на відцентрові, обгінні і запобіжні.

Запобіжні муфти бувають різної конструкції, причому будь-яка фрикційна муфта, відрегульована на передачу граничного моменту, виконує функції запобіжної. Запобіжні кулачкові, кулькові і фрикційні муфти стандартизовані і призначені для передавання обертаючого моменту від 4 до 400 Н·м. Для розрахунку запобіжних муфт, щоб уникнути випадковостей, як розрахунковий беруть момент

$$T_p = 1,25 T_0,$$

де T_0 — максимальний момент, який має передавати запобіжна муфта.

На рис. 41.11 зображено муфту із зрізаними штифтами. Тут штифти 3 зрізаються кромками сталевих загартованих втулок 1 і 2 , встановлених у ведучій і веденій півмуфтах 4 і 5 . Щоб поновити роботу машини, зрізаний штифт замінюють новим.

§ 41.3. Вибір і перевірний розрахунок муфт

Клас муфти (нерозчінна, керована, самодіюча) визначається її призначенням у запроєктованій машині, а конструктивний варіант муфти того чи іншого типу визначається величиною передаваного обертаючого моменту, кутовою швидкістю обертання з'єднаних валів, а також її вартістю, дефіцитністю потрібних для її виготовлення матеріалів.

Найбільш важливі деталі муфти, яку вибрали за каталогом або довідником, піддають перевірному розрахунку. Розрахункові форму-

ли для перевірки міцності або зносостійкості таких деталей є у довідковій літературі.

Як приклад можна взяти перевірний розрахунок найбільш навантажених деталей широко застосовуваної втулково-пальцевої муфти (МУВП). Тут розраховують пальці муфти і гумові кільця (див. рис. 41.5). Стальні пальці муфти перевіряють на міцність за напругою згину в небезпечних перерізах — у місці їх закріплення у півмуфті. Якщо всі з пальців муфти навантажені однаково, то навантаження P на один палець

$$P = 2T_p / (zD_1),$$

де T_p — розрахунковий обертаючий момент, який передає муфта; D_1 — діаметр кола розміщення пальців; орієнтовно $D_1 \approx (0,7 \div 0,8) D$.

Умова міцності пальців на згин.

$$\sigma_F = P0,5l_n / (0,1d_n^3) \leq [\sigma_F],$$

де l_n — довжина пальця; d_n — діаметр пальця; $[\sigma_F]$ — допустима напруга на згин.

Пружні втулки перевіряють на зминання по поверхні стикання пальців з отворами втулок за формулою

$$\sigma_{зм} = P / (l_n d_n) \leq [\sigma_{зм}],$$

де l_n — довжина втулки; $[\sigma_{зм}]$ — допустима напруга зминання; для гумових втулок її приймають від 1,8 до 2,0 МПа.

Приклад 41.1. Пружна втулково-пальцева муфта встановлена на ведучому валу редуктора діаметром $d = 32$ мм (див. рис. 41.5), що обертається з кутовою швидкістю $\omega = 100$ рад/с і передає потужність $N = 15$ кВт. Підібрати муфту, перевірити на міцність пальці із сталі 45 і гумові втулки.

Розв'язання. Відповідно до стандарту (ГОСТ 21424—75) за діаметром вала $d = 32$ мм добираємо муфту МУВП з такою характеристикою: найбільший передаваний момент $[T_p] = 250$ Н·м; найбільша частота обертання $[n_{\max}] = 3800$ хв⁻¹ або $[\omega] = 400$ рад/с; зовнішній діаметр муфти $D = 140$ мм.

Розрахунковий момент

$$T_p = KN / \omega = 1,3 \cdot 15 \cdot 10^3 / 100 = 195 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Діаметр кола розміщення пальців

$$D_1 \approx (0,7 \div 0,8) D = (0,7 \div 0,8) 140 = 100 \text{ мм}.$$

Навантаження P на один палець ($z = 6$)

$$P = 2T_p / (zD_1) = 2 \cdot 195 / (6 \cdot 100 \cdot 10^{-3}) = 650 \text{ Н}.$$

Максимальна напруга згину ($l_n = 33$ мм, $d_n = 14$ мм)

$$\begin{aligned} \sigma_F &= P0,5l_n / (0,1d_n^3) = 650 \cdot 0,5 \cdot 33 \cdot 10^{-3} / (0,1 \cdot 14^3 \cdot 10^{-9}) = \\ &= 39 \cdot 10^6 \text{ Па} = 39 \text{ МПа} < [\sigma_F]. \end{aligned}$$

Для пальців із сталі 45

$$[\sigma_F] = 0,25\sigma_T = 0,25 \cdot 340 = 85 \text{ МПа}.$$

Отже, міцність пальців достатня. Напруга зминання на поверхні отвору втулки ($l_n = 28$ мм)

$$\sigma_{зм} = P / (l_n d_n) = 650 / (28 \cdot 10^{-3} \cdot 14 \cdot 10^{-3}) = 1,66 \cdot 10^6 \text{ Па} = 1,66 \text{ МПа} < [\sigma_{зм}].$$

Для гумових втулок $[\sigma_{зм}] = 1,8 \div 2,0$ МПа, отже, міцність втулки достатня.

Передмова	3	§ 5.3. Властивості головного вектора і головного моменту	31
Частина I		§ 5.4. Різні випадки зведення плоскої системи довільно розміщених сил	33
ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА		§ 5.5. Аналітичні умови рівноваги плоскої системи довільно розміщених сил	33
Вступ	5	<i>Розділ VI. Тертя</i>	
Відділ перший. Статика		§ 6.1. Відомості про тертя	36
<i>Розділ I. Основні поняття і аксіоми статyki</i>		§ 6.2. Тертя ковзання	37
§ 1.1. Основні поняття статyki	6	§ 6.3. Рівновага тіла на похилій площині	40
§ 1.2. Основні аксіоми статyki	8	§ 6.4. Тертя кочення	42
§ 1.3. Теорема про рівновагу плоскої системи трьох непаралельних сил	11	§ 6.5. Стійкість проти перекидання	43
§ 1.4. Розкладання сили на дві складові	11	<i>Розділ VII. Просторова система сил</i>	
§ 1.5. Зв'язки і реакції зв'язків. Принцип звільнюваності	12	§ 7.1. Просторова система збіжних сил	44
§ 1.6. Розподіл навантаження	15	§ 7.2. Проекція сили на вісь, коли вісь і сила не лежать в одній площині	45
§ 1.7. Принцип твердження	16	§ 7.3. Розкладання сили на три осі координат	45
<i>Розділ II. Плоска система збіжних сил</i>		§ 7.4. Аналітичний спосіб визначення рівнодіючої просторової системи збіжних сил	46
§ 2.1. Геометричний спосіб визначення рівнодіючої плоскої системи збіжних сил	16	§ 7.5. Аналітичні умови рівноваги просторової системи збіжних сил	46
§ 2.2. Геометрична умова рівноваги плоскої системи збіжних сил	17	§ 7.6. Момент сили відносно осі	48
§ 2.3. Проекції сили на осі координат	19	§ 7.7. Аналітичні умови рівноваги просторової системи довільно розміщених сил	49
§ 2.4. Аналітичний спосіб визначення рівнодіючої плоскої системи збіжних сил	20	§ 7.8. Теорема про момент рівнодіючої відносно осі (теорема Вариньона)	51
§ 2.5. Аналітичні умови рівноваги плоскої системи збіжних сил	21	<i>Розділ VIII. Центр ваги</i>	
<i>Розділ III. Плоска система паралельних сил і моменти сили</i>		§ 8.1. Центр паралельних сил	52
§ 3.1. Додавання двох паралельних сил, що діють в одному напрямі	22	§ 8.2. Визначення центра ваги	53
§ 3.2. Додавання двох різних антипаралельних сил	22	§ 8.3. Методи знаходження центра ваги	54
§ 3.3. Момент сили відносно точки	23	§ 8.4. Центр ваги деяких фігур	56
<i>Розділ IV. Плоска система пар сил</i>		Відділ другий. Кінематика	
§ 4.1. Пара сил і момент пари	24	<i>Розділ IX. Кінематика точки</i>	
§ 4.2. Основні властивості пари	25	§ 9.1. Основні поняття кінематики і деякі відомості з теорії відносності	58
§ 4.3. Еквівалентні пари	26	§ 9.2. Основні означення теорії механізмів і машин	60
§ 4.4. Теорема про додавання пар	27	§ 9.3. Способи задавання руху точки	61
§ 4.5. Умова рівноваги плоскої системи пар	28	§ 9.4. Швидкість точки	63
§ 4.6. Опори і опорні реакції балок	28	§ 9.5. Прискорення точки в прямолінійному русі	65
<i>Розділ V. Плоска система довільно розміщених сил</i>		§ 9.6. Прискорення точки в криволінійному русі	66
§ 5.1. Лема про паралельне перенесення сили	29	§ 9.7. Відомості про кривизну кривих ліній	66
§ 5.2. Зведення плоскої системи довільно розміщених сил до даного центра	30	§ 9.8. Теорема про проекції прискорення на дотичну і нормаль	67

§ 9.9. Види руху точки залежно від прискорень	70	§ 15.2. Робота змінної сили на криво-лінійній ділянці шляху	108
§ 9.10. Формули і графіки рівномірного руху точки	70	§ 15.3. Теорема про роботу рівнодіючої	108
§ 9.11. Формули і графіки рівнозмінного руху точки	71	§ 15.4. Теорема про роботу сили тяжіння	109
§ 9.12. Теорема про проекції швидкості на координатну вісь	74	§ 15.5. Робота сталої сили, прикладеної до обертового тіла	110
§ 9.13. Теорема про проекції прискорення на координатну вісь	75	§ 15.6. Потужність	111
		§ 15.7. Коефіцієнт корисної дії	112

Розділ X. Найпростіші рухи твердого тіла

§ 10.1. Поступальний рух	76
§ 10.2. Обертання навколо нерухомої осі	78
§ 10.3. Різні види обертального руху	81
§ 10.4. Порівняння формул кінематики для поступального і обертального рухів	84
§ 10.5. Перетворення обертальних рухів	84

Розділ XI. Складний рух точки

§ 11.1. Початкові відомості про складний рух точки	87
§ 11.2. Теорема про додавання швидкостей	88

Розділ XII. Плоскопаралельний рух твердого тіла

§ 12.1. Початкові відомості про плоскопаралельний рух	89
§ 12.2. Метод миттєвих центрів швидкостей	90
§ 12.3. Властивості миттєвого центра швидкостей	91
§ 12.4. Розкладання плоскопаралельного руху на поступальний і обертальний	93

Відділ третій. Динаміка

Розділ XIII. Основи динаміки матеріальної точки

§ 13.1. Аксиоми динаміки. Основне рівняння	95
§ 13.2. Принцип незалежності дії сил. Диференціальні рівняння руху матеріальної точки	97
§ 13.3. Рух матеріальної точки, кинутої під кутом до горизонту	100

Розділ XIV. Основи кінетостатики

§ 14.1. Метод кінетостатики	103
§ 14.2. Сила інерції у криволінійному русі	104

Розділ XV. Робота і потужність

§ 15.1. Робота сталої сили на прямолінійній ділянці шляху	107
---	-----

Розділ XVI. Загальні теореми динаміки матеріальної точки

§ 16.1. Теорема про зміну кількості руху	114
§ 16.2. Теорема про зміну кінетичної енергії	115
§ 16.3. Закон збереження механічної енергії	118

Розділ XVII. Основи динаміки системи матеріальних точок

§ 17.1. Рівняння поступального руху твердого тіла	120
§ 17.2. Рівняння обертального руху твердого тіла	120
§ 17.3. Кінетична енергія твердого тіла	124
§ 17.4. Порівняння формул динаміки для поступального і обертального рухів твердого тіла	125
§ 17.5. Балансування обертових тіл	127

**Частина II
ОПР МАТЕРІАЛІВ**

Розділ XVIII. Основні положення

§ 18.1. Початкові поняття	129
§ 18.2. Основні гіпотези і припущення	131
§ 18.3. Види навантажень і основних деформацій	132
§ 18.4. Метод перерізів. Напряга	134

Розділ XIX. Розтяг і стиск

§ 19.1. Напряги і деформації розтягу і стиску	137
§ 19.2. Закон Гука для розтягу і стиску	139
§ 19.3. Поперечна деформація розтягу і стиску	141
§ 19.4. Діаграма розтягу маловуглецевої сталі	142
§ 19.5. Потенціальна енергія деформації розтягу	145
§ 19.6. Розрахункова формула для розтягу і стиску	146
§ 19.7. Розтяг під дією власної ваги	148
§ 19.8. Статично невизначені задачі	148
§ 19.9. Змінання	150

Розділ XX. Зсув (зріз)

§ 20.1. Напряги деформації зсуву	151
--	-----

§ 32.9. Конічна зубчаста передача	277
§ 32.10. Розрахунок допустимих напруг	280
§ 32.11. Передача з зачепленням Ноникова	284
§ 32.12. Планетарні та хвильові зубчасті передачі	285

Розділ XXXIII. Передача гвинт — гайка

§ 33.1. Загальні відомості	287
§ 33.2. Силлові співвідношення у гвинтовій парі	289
§ 33.3. Розрахунок передачі гвинт—гайка	289

Розділ XXXIV. Черв'ячні передачі

§ 34.1. Загальні відомості	292
§ 34.2. Короткі відомості про геометрію черв'ячних передач	292
§ 34.3. Кінематика і ККД черв'ячної передачі	295
§ 34.4. Сили, які діють у зачепленні	297
§ 34.5. Розрахунок черв'ячної передачі	298
§ 34.6. Матеріали і вибір допустимих напруг	301

Розділ XXXV. Редуктори

§ 35.1. Загальні відомості	305
§ 35.2. Конструкція редукторів	307

Розділ XXXVI. Пасові передачі

§ 36.1. Загальні відомості	310
§ 36.2. Плоскопасові передачі	315
§ 36.3. Клинопасові передачі	320
§ 36.4. Деталі пасових передач і натажні пристрої	324

Розділ XXXVII. Ланцюгові передачі

§ 37.1. Загальні відомості	
§ 37.2. Деталі ланцюгових передач	
§ 37.3. Основні параметри передач	
§ 37.4. Критерії працездатності і розрахунок ланцюгових передач	331

Розділ XXXVIII. Загальні відомості про деякі механізми

§ 38.1. Шарнірні чотириланкові механізми	334
§ 38.2. Кривошипно-повзункові і кулісні механізми	336
§ 38.3. Кулачкові механізми	337
§ 38.4. Механізми переривчастого руху	338

Відділ третій. Деталі і складальні одиниці передач

Розділ XXXIX. Осі і вали

§ 39.1. Призначення, конструкція і матеріали осей і валів	
§ 39.2. Розрахунок валів і осей	

Розділ XL. Опори осей і валів

§ 40.1. Підшипники ковзання	
§ 40.2. Підшипники кочення	
§ 40.3. Схеми встановлення і змащування підшипників кочення	
§ 40.4. Під'ятники	

Розділ XLI. Муфти

§ 41.1. Призначення і класифікація муфт	
§ 41.2. Конструкція муфт	
§ 41.3. Вибір і перевірний розрахунок муфт	364

*Алексей Алексеевич Эрдеди,
Игорь Владимирович Анискин,
Юрий Александрович Медведев,
Александр Степанович Чуйков*

ТЕХНИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Допущено Министерством высшего и среднего специального образования СССР в качестве учебника для средних специальных учебных заведений

Головне видавництво видавничого об'єднання «Вища школа» (252054, Київ-54, ул. Гоголевская, 7)

(На українском языке)

Редактор Г. Г. Рубан. Літературний редактор О. П. Ковальчук. Художній редактор Є. В. Чурій. Оправа художника І. Г. Хорошого. Технічний редактор Л. Ф. Курнишова. Коректор Ф. І. Слобідська,

Інформ. бланк № 7577

Здано до набору 28.06.82. Підп. до друку 07.06.83. Формат 60x90^{1/16}. Папір друк. Л. Літ. гарн. Вис. друк. 23,0 друк. арк. 21 фарб-відб. 25,31 обл.-вид. зрк. Тираж 3000 к. Вид. № 6010. Зам. № 883. Ціна 95 к.

Головне видавництво видавничого об'єднання «Вища школа», 252054, Київ-54, вул. Гоголевська, 7

Надруковано з матриць Головного підприємства республіканського виробничого об'єднання «Поліграфкнига», 252057, Київ-57, вул. Женка, 3 в Білоцерківській книжковій друкарні, 256400, м. Біла Церква, вул. К. Маркса.