КАБІНЕТ МІНІСТРІВ УКРАЇНИ
МІНІСТЕРСТВО АГРАРНОЇ ПОЛІТИКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ АГРАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

**В.М. Булгаков, О.І. Литвинов, В.І. Васьков,
І.В. Головач, Д.Г. Войтюк**

ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА

КУРС ЛЕКЦІЙ

ЧАСТИНА II

*РЕКОМЕНДОВАНО
МІНІСТЕРСТВОМ АГРАРНОЇ ПОЛІТИКИ УКРАЇНИ
ЯК ПІДРУЧНИК ДЛЯ СТУДЕНТІВ ВИЩИХ
НАВЧАЛЬНИХ ЗАКЛАДІВ ТЕХНІЧНОГО ПРОФІЛЮ
3-4 РІВНІВ АКРЕДИТАЦІЇ*

**Київ
2004**

ББК 22.21Я 73
Т33
УДК 531.01

Булгаков В.М., Литвинов О.І., Васьков В.І., Головач І.В., Войтюк Д.Г.

Теоретична механіка. Курс лекцій. Частина ІІ. – Київ: Видавничий центр НАУ, 2004. – 342 с.
Іл. 104

Друга частина курсу лекцій з теоретичної механіки присвячена висвітленню основних питань динаміки, яка традиційно вважається головним розділом.
Матеріал викладено з урахуванням вимог до майбутньої спеціальності студентів, акцентовано увагу на застосуванні теоретичного матеріалу для розв'язання прикладних задач.
Курс містить багато прикладів розв'язання задач, зміст яких тісно переплітається з задачами землеробської механіки та механізації сільського господарства, а також питання для самоконтролю, що допоможе ґрунтовному засвоєнню матеріалу.
Підручник призначений для студентів очної та заочної форм навчання на факультетах механізації сільського господарства зі спеціальності 7.091902.

Р е ц е н з е н т и:

доктор фізико-математичних наук, професор **О.О. Горошко**
(*Київський національний університет ім. Т. Шевченка*),

доктор технічних наук, професор **І.А. Цурпал**
(*Національний аграрний університет*)

ISBN 966-7906-06-XII

__50__-річчю кафедри механіки і ТММ
Національного аграрного університету
П Р И С В Я Ч У Є Т Ь С Я

ПЕРЕДМОВА

Курс лекцій з теоретичної механіки написаний на основі досвіду викладання цього предмету протягом багатьох років на кафедрі механіки і теорії механізмів і машин Національного аграрного університету. Він відповідає програмі курсу з теоретичної механіки для спеціальності 7.091902 "Механізація сільського господарства". Автори намагались поєднати ємність матеріалу з лаконічністю викладення. Частина лекцій призначена для самостійного опрацювання. Курс лекцій може бути використаний студентами та викладачами навчальних закладів технічного профілю 3-4 рівнів акредитації.

РОБОЧА ПРОГРАМА КУРСУ ТЕОРЕТИЧНОЇ МЕХАНІКИ

1. Вступ. Механічний рух як одна з форм руху матерії. Теоретична механіка та її місце серед природничих наук. Механіка як теоретична база ряду областей сучасної техніки. Об'єктивний характер законів механіки. Основні історичні етапи розвитку механіки.

2. Вступ до статики. Основні поняття та аксіоми статики. Предмет статики. Абсолютно тверде тіло, матеріальна точка, сила, еквівалентні та зрівноважені системи сил, рівнодійна, сили зовнішні та внутрішні. Аксіоми статики. В'язі та реакції в'язей. Основні види в'язей та їх реакції.

3. Система збіжних сил. Геометричний спосіб додавання системи збіжних сил. Многокутник сил. Умова рівноваги тіла під дією системи збіжних сил у геометричній формі. Теорема про рівновагу трьох непаралельних сил, що лежать в одній площині. Проекція сили на вісь та на площину. Визначення сили за її проекціями. Теорема про проекцію рівнодійної сили на вісь. Аналітичний спосіб додавання збіжних сил. Умова рівноваги тіла під дією системи збіжних сил.

4. Теорія пар сил. Додавання двох паралельних сил, напрямлених в один бік. Додавання двох паралельних сил, напрямлених протилежно. Момент сили відносно точки (центра). Момент сили як вектор. Теорема Варіньона про момент рівнодійної системи збіжних сил. Момент пари сил. Властивості пар у площині. Умова рівноваги системи пар у площині.

5. Система сил, що довільно розміщені у площині. Теорема про паралельне перенесення сили. Зведення довільної системи сил до даного центра. Головний вектор, головний момент системи сил. Окремі випадки

зведення плоскої системи сил. Умови та рівняння рівноваги плоскої системи довільних сил. Три форми рівнянь рівноваги. Рівновага плоскої системи паралельних сил.

6. Зосереджені сили та розподілені навантаження, приклади розподілення навантажень, реакція жорсткого закріплення. Рівновага системи тіл. Сили зовнішні та внутрішні. Статично означені та неозначені системи. Метод розчленування системи тіл для визначення внутрішніх сил.

7. Розрахунок плоских ферм. Поняття про ферму. Аналітичні методи розрахунку ферми. Метод вирізання вузлів, метод перетинів (метод Ріттера).

8. Рівновага тіл з урахуванням сил тертя. Тертя ковзання. Кут та конус тертя. Рівновага тіл на похилій площині. Тертя кочення. Тертя нитки об циліндричну поверхню.

9. Система довільних сил у просторі. Момент сили відносно осі. Залежність між моментом сили відносно центра та відносно осі, що проходить через цей центр. Формули для обчислення моментів сили відносно координатних осей. Пари сил у просторі. Теорема про перенесення пари у паралельну площину. Умови еквівалентності пар у просторі. Додавання пар, довільно розміщених у просторі. Умови рівноваги системи пар у просторі.

10. Зведення просторової системи сил до даного центра. Обчислення головного вектора та головного моменту просторової системи сил. Окремі випадки зведення довільної системи сил, динамічний гвинт. Аналітичні умови рівноваги системи сил, довільно розміщених у просторі, випадок паралельних сил. Теорема Варіньона про момент рівнодійної сили відносно осі.

11. Центр паралельних сил та центр ваги. Зведення системи паралельних сил до рівнодійної. Центр паралельних сил. Центр ваги тіла,

об'єму, площі, лінії. Статичний момент площі плоскої фігури відносно осі. Способи визначення положення центрів ваги тіл. Центр ваги деяких однорідних тіл: дуга кола, сектор, трикутник.

12. Кінематика матеріальної точки. Предмет кінематики. Способи задання руху точки. Векторний спосіб. Швидкість та прискорення точки при векторному способі. Координатний спосіб. Швидкість та прискорення точки при координатному способі. Натуральний спосіб задання руху точки. Закон руху і швидкість руху точки. Натуральний тригранник. Кривизна кривої. Прискорення точки. Дотична і нормальна складові прискорення.

13. Кінематика твердого тіла. Поступальний рух. Теорема о траєкторіях, швидкостях і прискореннях точок твердого тіла при поступальному русі. Обертальний рух тіла навколо нерухомої осі. Закон руху, кутова швидкість і кутове прискорення. Швидкість та прискорення точок обертового тіла. Швидкість точки як векторний добуток. Плоскопаралельний рух твердого тіла. Швидкість точок плоскої фігури. Миттєвий центр швидкостей, його визначення. План швидкостей. Прискорення точок фігури. План прискорень. Методика побудови планів швидкостей та прискорень плоского механізму. Сферичний рух.

14. Складний рух матеріальної точки. Теореми про додавання швидкостей та прискорень точки в складному русі. Прискорення Коріоліса. Методика розв’язування задач на складний рух точки.

15. Складний рух твердого тіла. Додавання обертальних рухів навколо паралельних осей. Додавання обертальних рухів навколо осей, що перетинаються. Гвинтовий рух твердого тіла.

16. Динаміка матеріальної точки. Предмет динаміки. Закони динаміки. Диференціальні рівняння руху матеріальної точки в декартових і натуральних координатах. Дві основні задачі динаміки точки. Схема і

послідовність розв'язування першої і другої задач. Приклади і методика розв'язування задач, коли сили залежать від часу, швидкості і переміщення.

17. Вступ до динаміки механічної системи. Механічна система. Маса і центр мас. Класифікація сил. Диференціальні рівняння руху механічної системи. Теорема про рух центра мас. Закон збереження руху центра мас.

18. Загальні теореми динаміки. Кількість руху матеріальної точки і системи. Імпульс сили. Теорема про зміну кількостей руху точки і системи. Закон про збереження кількості руху системи. Моменти інерції маси тіла. Теорема Гюйгенса – Штейнера про моменти інерції відносно паралельних осей. Приклади обчислення моментів інерції простих тіл. Центральні моменти інерції. Головні осі та головні моменти інерції.

19. Момент кількості руху матеріальної точки і кінетичний момент системи. Теореми про зміну моменту кількості руху точки і кінетичного моменту системи. Закон збереження кінетичного моменту системи.

20. Динаміка твердого тіла. Диференціальні рівняння поступального руху твердого тіла, обертального руху тіла навколо нерухомої осі. Фізичний маятник. Диференціальні рівняння плоского руху тіла.

21. Робота і потужність сили. Елементарна робота сили. Повна робота сили на кінцевому переміщенні. Робота сили ваги, сили пружності. Робота сили, яка прикладена до тіла, яке обертається навколо осі. Теорема про роботу рівнодійної сили. Потужність сили. Коефіцієнт корисної дії.

22. Кінетична і потенціальна енергія. Кінетична енергія матеріальної точки і механічної системи. Кінетична енергія тіла при поступальному, обертальному та плоскопаралельному рухах. Теорема про зміну кінетичної енергії точки і системи. Потенціальне силове поле, потенціальна енергія. Силова функція і силове поле. Закон збереження механічної енергії.

23. Сили інерції. Принцип Д'Аламбера. Сила інерції матеріальної

точки. Принцип Д'Аламбера для матеріальної точки і механічної системи. Визначення динамічних реакцій підшипників при обертанні тіла навколо нерухомої осі. Поняття про статичне і динамічне балансування. Зведення сил інерції. Головний вектор і головний момент сил інерції. Кінетостатичне дослідження плоского механізму.

24. Елементи аналітичної механіки. Класифікація в'язей. Ідеальні в'язі. Можливі переміщення. Принцип можливих переміщень. Застосування принципу можливих переміщень для розв'язування задач. Загальне рівняння динаміки і методика розв'язування задач. Узагальнені координати, швидкості і сили. Рівняння Лагранжа другого роду і методика розв'язування задач.

25. Основи теорії коливань. Кінематика коливань, вільні коливання. Згасаючі коливання і їх декремент. Змушені коливання без і при наявності сил опору. Резонанс. Поняття про стійкість рівноваги. Малі коливання системи.

26. Динаміка відносного руху матеріальної точки. Диференціальні рівняння відносного руху матеріальної точки. Принцип відносності у класичній механіці. Відносний спокій. Рух тіла по поверхні землі.

27. Теорія удару. Явище удару, ударний імпульс, основна теорема теорії удару. Прямий центральний удар тіла об нерухому поверхню. Коефіцієнт відновлення. Прямий центральний удар двох тіл. Втрати кінетичної енергії при ударі двох тіл. Теорема Карно. Удар по обертовому тілу. Центр удару.

28. Наближена теорія гіроскопа. Основні поняття. Властивості гіроскопа. Теорема Резаля. Основне рівняння наближеної теорії гіроскопа. Гіроскопічний момент.

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. *Павловський М.А.* Теоретична механіка. – К.: Техніка, 2002. – 510 с.
2. *Тарг С.М.* Краткий курс теоретической механики. – М.: Наука, 1986. – 416 с.
3. *Яблонский А.А., Никифорова В.М.* Курс теоретической механики. Часть 1. Статика. Кинематика. – М.: Высшая школа, 1972. – 436 с.
4. *Мещерский И.В.* Сборник задач по теоретической механике. – М.: Наука, 1972. – 258 с.
5. *Савин Г.Н.*, *Путята Т.В.*, *Фрадлин Б.Н.* Теоретическая механика. – К.: Вища школа, 1971. – 359 с.
6. *Никитин Н.Н.* Курс теоретической механики. – М.: Высшая школа, 1974. – 607 с.
7. *Павловський М.А.*, *Акинфиева Л.Ю.*, *Бойчук О.Ф.* Теоретична механіка. – К.: Вища школа, 1990. – 480 с.
8. *Каплунова А.В., Михаловський В.А. та ін.* Методика та приклади розв'язування задач з теоретичної механіки. – К.: Держсільгоспосвіта, 1961. – 365 с.

РОЗДІЛ ІІІ. ДИНАМІКА

ЛЕКЦІЯ 1

ВСТУП ДО ДИНАМІКИ

1.1. Етапи розвитку динаміки

Пізнання законів руху тіл людством було дуже повільним і не завжди вдалим. Навіть великий Аристотель (IV в. до н.е.) вважав, що тіло раптово припинить рух, якщо перестане діяти сила. Правильно сформульовані закони рухів, що відбуваються в природі, були відкриті внаслідок тривалих спостережень.

Основи динаміки були розроблені в XVI-XVII ст., коли практика суспільного виробництва поставила перед людиною низку важливих проблем у військовій справі, судноплавстві, виробництві товарів.

Відкриття М. Коперніком (XVI ст.) геліоцентричної системи світу, а Й. Кеплером (XVII ст.) – законів руху планет відіграло важливу роль у розвитку динаміки.

Леонардо да Вінчі, Г. Галілей, Р. Декарт, Х. Гюйгенс (XVI-XVII ст.) – з цими іменами пов’язаний підготовчий період становлення динаміки. Л. да Вінчі досліджував рух тіла по похилій площині, тертя, питання теорії механізмів, ввів поняття моменту сили.

Г. Галілей експериментально довів закон падіння тіл у пустоті, досліджував рух тіла, кинутого під кутом до горизонту, встановив закон пропорційності між вагою і масою тіла, сформулював принцип відносності класичної механіки.

Р. Декарт ввів поняття про кількість руху, як міру механічного руху, відкрив закон збереження кількості руху, його ідеї виявилися плідними для розвитку динаміки.

Й. Гюйгенс досліджував фізичний маятник, уперше використав вирази осьового моменту інерції тіла і кінетичної енергії.

Засновником динаміки є І. Ньютон (XVII ст.). Він систематизував і узагальнив дослідження, що пов'язані з динамікою, і показав шляхи її подальшого розвитку. Ньютон вперше сформулював основні закони динаміки, ввів поняття маси і узагальнив поняття сили. Він відкрив закон всесвітнього тяжіння, як основу сучасної механіки і фізики. Систематичне викладення класичної механіки подано Ньютоном у творі "Математичні начала натуральної філософії" (1687 р.).

Вперше аналітично виклав динаміку Л. Ейлер (XVIII ст.), академік Петербурзької Академії наук. Він довів важливу теорему динаміки – теорему про зміну кінетичного моменту, створив теорію моментів інерції, механіку суцільних середовищ, теорію стійкості, ввів поняття потенціального силового поля.

В цей же час М.В. Ломоносов відкрив загальний закон природи – закон збереження матерії та руху. На базі цього закону всі закони збереження механіки та фізики є конкретними окремими випадками закону Ломоносова, який є природничо-науковою основою матеріалізму.

Подальший розвиток динаміки пов'язаний з працями Ж. Лагранжа, Л. Пуансо, С.В. Ковалевської, О.М. Ляпунова, М.Є. Жуковського, С.О. Чаплигіна, О.М. Крилова та ін.

Механіка тіл змінної маси заснована І.В. Мещерським. Цей розділ механіки став основою теорії реактивного руху і міжпланетних польотів, яку створив К.Е. Ціолковський, подальший розвиток її і практичне втілення – у працях творця ракетної і космічної техніки С.П. Корольова.

У другій половині XX ст. з'явився новий напрям науки – робототехніка. Особливістю її є те, що вона синтезує й об'єднує такі науки, як механіка суцільного середовища (теорія пружності, теорія пластичності, гідроаеродинаміка). Дослідження вітчизняних учених Г.М. Савіна, О.М. Кільчевського, О.М. Гузя, В.Т. Грінченка є провідними в світовій науці.

1.2. Предмет динаміки і основні задачі

Динаміка – розділ теоретичної механіки, в якому вивчаються закони руху матеріальних об'єктів: точок, системи точок і твердого тіла з урахуванням мас і сил, що до них прикладені.

Термін "Динаміка", – від грецького слова *"dinamic"* – сила, було введено Лейбніцем (1690 р.).

Основою теоретичної механіки є декілька гіпотез, пов'язаних з уявленнями про простір і час, поняттями інерціальності системи відліку, сили та маси, а також систематизовані спостереження за звичайними рухами тіл макросвіту: закони Галілея – Ньютона.

Динаміка досліджує загальні властивості механічного руху, як теорію достатньо повільних переміщень одних макроскопічних тіл відносно інших.

Теоретична або класична механіка є науковою основою, на якій побудована теорія відносності, механіка великих швидкостей, що пов'язана з іншими просторово-часовими уявленнями.

У динаміці розглядають дві основні задачі. Перша або пряма задача механіки полягає у тому, що за заданими масою і законом руху тіла визначають рівнодійну силу, під дією якої цей рух відбувається.

Друга або обернена задача динаміки полягає у тому, що за заданими силами, прикладеними до тіла, масою і початковими умовами визначають закон руху, який вони обумовлюють.

Динаміку поділяють на динаміку матеріальної точки, динаміку твердого тіла, динаміку матеріальної системи.

1.3. Закони Галілея-Ньютона

Основою динаміки є закони, які для матеріальної точки сформульовані І. Ньютоном в "Математичних началах натуральної філософії".

Закони динаміки є об'єктивними законами природи, які встановлені на основі багаточисленних дослідів і спостережень Ньютона і його попередників.

За уявленнями класичної механіки простір і час, де відбувається рух, вважається об'єктивною реальністю, але абсолютним і однорідним. Абсолютність простору допускає незалежність механічного руху від властивостей простору в різних його точках і в різних напрямках, тобто його однорідність і ізотропність. Це геометричний трьохмірний Евклідів простір.

В класичній механіці постулюється існування такого годинника, тривалість періоду якого не змінюється при довільних переміщеннях. Цей постулат еквівалентний твердженню про те, що величина даного часового проміжку відносно різних систем відліку, які рухаються довільно, однакова.

Згідно уявлень про час можна встановити одночасність двох подій на різних об'єктах незалежно від швидкості їх руху відносно Землі, що характеризує абсолютність часу. Однорідність часу передбачає довільний вибір початку відліку і вимір інтервалів між окремими моментами часу.

Незалежність властивостей абсолютних простору і часу від руху матеріальних об’єктів пов’язана з гіпотезою про миттєву передачу взаємодії між тілами через деякий порожній простір. За сучасними уявленнями миттєвих взаємодій в макросвіті не існує, вони здійснюються за допомогою силових полів, які є одними із видів матерії.

Можна вважати, що взаємодія передається з кінцевою швидкістю – зі швидкістю світла, а сукупність тіл і полів є єдиною матеріальною субстанцією. Під впливом взаємодії тіла можуть змінювати своє відносне розташування, тобто переміщуватись у просторі. До того ж зміна відносного розташування характеризується тривалістю, яка виражається деякою функцією від часу.

Простір і час суть загальні форми існування матеріальних об’єктів. Створення теорії відносності підтвердило правильність такого уявлення про простір і час. На думку Ейнштейна, "якщо б зникла матерія, то зникли б і простір, і час".

Таким чином, класична механіка вивчає такі переміщення тіл у просторі і часі, при яких процес передачі взаємодії тіл можна вважати практично миттєвим, а самі процеси, які при цьому відбуваються у фізичних полях, можна не розглядати.

Таке уявлення про простір – час дає можливість ввести відносну систему відліку, як сукупність системи координат, жорстко пов’язаної з тілом відліку, і відмітника часу (годинника), який встановлений на цьому тілі.

При цьому система відліку повинна бути такою, в якій ізольована матеріальна точка може безмежно довго перебувати у стані спокою чи рівномірного і прямолінійного руху – це інерціальна галілеєва система відліку.

З достатньою ступінню точності за нерухому інерціальну систему можна вибрати геліоцентричну систему відліку Коперніка з початком в центрі мас Сонячної системи і осями координат в напрямку "нерухомих" зірок. Називати їх "нерухомими" правомірно, тому що, наприклад, річне кутове зміщення більшості зірок складає, приблизно, 0,01 с. Звідки система відліку Сонце–зірки може бути прийнято за тверде тіло для порівняно довгих проміжків часу.

Не слід думати, що неправильне розуміння Ньютоном абсолютного простору призводить до хибності його законів. Для умов Землі і "нешвидких" рухів вони досить точно відображають реальну земну картину.

Перший закон Галілея-Ньютона, закон інерції. *Ізольована матеріальна точка зберігає стан спокою або рівномірного і прямолінійного руху доти, поки прикладені сили не примусять її змінити цей стан.*

Закон інерції – один із фундаментальних законів природи. Він встановлює нерозривний зв'язок між матерією і рухом, характеризує намагання тіл зберегти той механічний рух, який тіло набуло раніше. Останнє називається властивістю інертності, що в перекладі з латинської означає "лінощі", "рутинність". Отож, з закону випливає, що самовільно матеріальна точка не може змінити свій стан руху чи спокою, як окремого виду руху. Тобто, рух матеріальної точки змінюється тільки в результаті її взаємодії з іншими тілами. Якщо рух відхиляється від рівномірного і прямолінійного – виникає прискорення по відношенню до інерціальної системи відліку.

Відмінність від нуля абсолютного прискорення матеріальної точки свідчить про вплив на неї інших тіл з певною інтенсивністю і спрямованістю, що характеризує в класичній механіці сили.

<u>Основний закон динаміки</u>. *Прискорення матеріальної точки пропорційно прикладеній до неї силі і спрямоване вздовж вектора сили.*

Якщо сили або рівнодійну декількох сил, прикладених до точки, позначити через $\overline{F}$, прискорення – через $\overline{a}$, масу матеріальної точки – через m і вважати її згідно уявлень класичної механіки сталою, то закон матиме вираз:

$$m\overline{a} = \overline{F}\,, \qquad (1.1)$$

де сила може бути рівнодійною n сил: $\overline{F} = \sum_{K=1}^{n} \overline{F}_K$.

Співвідношення (1.1), яке встановлює зв'язок між силою, масою та прискоренням, є найважливіше у класичній механіці і називається *основним рівнянням динаміки*.

Наведемо коротку характеристику сили і маси. Сила – це векторно-кількісна міра фізико-механічної дії на матеріальну точку з боку інших тіл.

За сучасними уявленнями в основі механічних взаємодій полягають гравітаційні і електромагнітні сили – сили тяжіння, сили пружності, сили тертя, сили опору середовища ….

За проявом сили можуть давати статичний або динамічний ефект. Перший викликає деформацію тіла, другий – зміну швидкостей точок тіла, тобто прискорення. Наприклад, ефект від сили тяжіння тіла, яке вільно рухається у повітрі – зміна величини і напрямку вектора початкової швидкості, а, слід, і зміна траєкторії від прямої до параболи.

Другий закон динаміки надає кількісні співвідношення між чинниками в момент механічної взаємодії тіл, тому він є основою цього фундаментального узагальнення класичної механіки.

З іншої сторони, якщо сили в розділі "Статика" розглядались сталими за величиною і напрямом, то "Динаміка" оперує зі змінними силами, які, взагалі, є функцією часу, відстані (координат) і швидкості

$$\overline{F} = \overline{F}(t, \overline{r}, \overline{v}).$$

Сили можуть залежати від окремих кінематичних параметрів. Наприклад, сила гравітаційної взаємодії на підставі закону всесвітнього тяжіння визначається

$$\overline{F} = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^3} \overline{r},$$

де m_1 і m_2 - маси тіл; γ - гравітаційна стала, $\overline{r} = \overline{r}_1 - \overline{r}_2$ - відносна відстань ($\overline{r}_1$ і $\overline{r}_2$ - радіус-вектори мас в інерціальній системі відліку).

При описанні руху тіла в середовищі (повітря, рідина) сила опору, як встановлено експериментально, є функцією від швидкості

$$\overline{F}_{on} = -\alpha \overline{v},$$

де α – коефіцієнт в’язкого тертя, який залежить від форми тіла і властивостей середовища. Коли швидкість збільшується, то сила опору стає пропорційною квадрату швидкості.

Масою матеріальної точки називається фізична величина, яка є мірою її інертних і гравітаційних властивостей. Під інертними розуміють опір тіла у відповідь на зміну вектора швидкості, під гравітаційними – взаємне тяжіння тіла в залежності від положення відносно земної поверхні. Тому не можна вважати масу коефіцієнтом пропорційності між силою і прискоренням (1.1), а визначити її методами, які відображають вище вказані властивості.

Перший метод пов’язаний з гравітаційними властивостями матерії. Експериментально встановлено, що відношення ваги тіла до прискорення вільного падіння в пустоті у всіх точках земної кулі є сталою величиною. Це відношення визначає вагому масу

$$m_Г = \frac{P}{g}, \tag{1.2}$$

де P – вага тіла, g – прискорення вільного падіння у вакуумі.

Із формули (1.2) випливає, що маси тіл і їх вага пропорційні. Тому можна одну з мас взяти за еталон одиниці маси і визначати інші маси зважуванням.

Другий спосіб, динамічний, пов'язаний з інертними властивостями тіл. Якщо одна і та ж сила діє на тіла з різною вагою, то вона викликає різні прискорення. Тоді з (1.1) маємо:

$$m_1 \cdot \overline{a}_1 = m_2 \cdot \overline{a}_2,$$

звідки $m_1 = m_2 \dfrac{a_2}{a_1}$. Якщо вибрати одну з мас за еталон, можна визначити другу масу, яку називають інертною.

Дослідами І. Ньютона і Б. Бесселя встановлюється тотожність гравітаційної і інертної маси з точністю до 10^{-10} значень, що покладено А. Ейнштейном в основу побудови загальної теорії відносності.

В другій половині XIX сторіччя з'являється **нове формулювання другого закону Ньютона:** *перша похідна за часом від вектора кількості руху матеріальної точки дорівнює за величиною і напрямком вектору прикладеної до точки сили.*

$$\frac{d}{dt}\left(m\overline{v}\right) = \overline{F}, \tag{1.3}$$

де $m\overline{v}$ – кількість руху матеріальної точки, як добуток маси на вектор швидкості.

А значно раніше (1736 р.) академік Л. Ейлер в трактаті "Механіка" записав закон Ньютона в аналітичній формі диференціальних рівнянь руху в проекціях на нерухомі декартові осі координат

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_x; \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = F_y; \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = F_z,$$

де $\frac{d^2x}{dt^2} = a_x, \ldots$ – проекції прискорень на осі координат,

F_x, F_y, F_z – проекції рівнодійної сили на ті ж самі осі.

Таким чином, проекції сил визначають другі похідні від координат матеріальної точки за часом. Ці аналітичні вирази зводять задачі динаміки точки до розв'язання за певним алгоритмом звичайних диференціальних рівнянь руху при відомих початкових умовах.

Слід відмітити, що закон інерції можна одержати з другого закону (1.3), якщо покласти $\overline{F} = 0$ і $m = const$. Тоді $\overline{v} = const$, тобто, швидкість зберігається за весь час руху.

Другий закон динаміки в формі (1.1) дозволяє вибрати основні одиниці механічних величин – довжини, маси і часу. За одиницю маси в міжнародній системі одиниць SI прийнятий кілограм, як маса еталона, прототипу кілограма.

За одиницю довжини прийнятий метр (м), за одиницю часу – секунда (с). Одиниця сили є похідною. Один Ньютон (Н) є такою силою, яка тілу масою 1 кг надає прискорення 1 м/с^2 у напрямі вектора сили.

Таким чином, одиниці маси, довжини, сили і часу повинні визначатись з урахуванням основного закону динаміки, тому що ці категорії пов'язані між собою функціонально. Три з них в офіційній системі SI є незалежними, для них існують еталони, одиниця сили – похідна.

Третій закон Ньютона, принцип рівності дії і протидії. *Кожній дії одного тіла завжди відповідає рівна їй за модулем і протилежна за напрямом протидія другого тіла. Коротко – дія дорівнює протидії.*

При цьому слід враховувати: фізична взаємодія двох тіл, наслідком якої є механічний рух, хоча і викликає рівні за величиною, протилежні за напрямом дві сили, що діють по одній прямій, але вони не зрівноважуються, тому, що дія і протидія прикладені не до одного, а до різних тіл.

Якщо, наприклад, буксирний катер тягне канатом баржу, то і баржа тягне назад катер з рівною силою. В цьому неважко переконатися, якщо з'єднати катер і баржу канатом через два динамометри, які закріплені на катері і баржі. Показники на двох динамометрах будуть завжди однакові, навіть при русі з прискоренням. Чому ж система рухається у напрямку сили тяги катера? Тому, що катер відштовхується від води за допомогою лопатів гребного гвинта. Тут також сили, які прикладені з боку води на лопаті гвинта і з боку гвинта на воду, завжди однакові і протилежні за напрямом. Останні також не зрівноважуються тому, що прикладені до різних тіл.

Третій закон Ньютона виконується і в неінерціальній системі відліку – він не містить кінематичних характеристик матеріальних об'єктів.

Четвертий закон Ньютона – закон незалежності дії сил (принцип суперпозиції). *Прискорення, яке отримує матеріальна точка від дії системи сил, дорівнює геометричній сумі прискорень, які б отримувала точка від дії кожної сили окремо.*

Цей закон випливає з аксіоми про паралелограм сил.

Закони Ньютона є лише першим наближенням до дійсності, добре узгоджуються з нею при "малих" швидкостях. Це спричиняється тим, що властивості матеріальних об'єктів вважають незалежними від властивостей простору і часу.

Насправді ж простір і час є атрибутами рухомої матерії. Проте, у межах своєї застосованості теоретична механіка має велике значення при дослідженні механічних процесів, що зустрічаються на практиці.

Закони Ньютона мають і велике методологічне значення. Дійсно, перший закон Ньютона відбиває в динаміці принцип незнищуваності матерії і руху. Другий закон встановлює пропорційність між силою і прискоренням, дає змогу розв'язувати конкретні задачі механіки, збагачує поняття сили. Третій закон Ньютона дозволяє глибше розкрити суть поняття сили, двосторонньої дії і протидії, як взаємодії між двома матеріальними об'єктами, створюючи перехід до матеріальної системи.

Таким чином, сила, як матеріальна категорія, має джерелами фізичні тіла, між якими відбувається взаємодія, наслідком якої є перенесення механічного руху з одного тіла на інші або перетворення енергії в рух.

1.4. Диференціальні рівняння руху вільної матеріальної точки

З розділу "Кінематика" відомо три способи завдання руху матеріальної точки. Нагадаємо, що це – векторний, координатний та натуральний способи завдання руху точки. Відповідно до цього мають місце і форми складання диференціальних рівнянь руху матеріальної точки. Проте в основу цих рівнянь покладено основний закон динаміки (1.1): $m\bar{a} = \bar{F}$.

1. Диференціальне рівняння у векторній формі.

Оскільки в цьому разі прискорення матеріальної точки дорівнює

$\overline{a} = \dfrac{d^2\overline{r}}{dt^2}$, то диференціальне рівняння руху буде мати такий вигляд

$$m\frac{d^2\overline{r}}{dt^2} = \sum_{i=1}^{n}\overline{F}_i\,. \tag{1.4}$$

2. Диференціальні рівняння у координатній формі.

Прискорення матеріальної точки в цьому разі визначається у його проекціях на три відповідні осі координат, тобто

$$a_x = \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2};\quad a_y = \ddot{y} = \frac{d^2y}{dt^2};\quad a_z = \ddot{z} = \frac{d^2z}{dt^2}, \tag{1.5}$$

а тому диференціальні рівняння руху матеріальної точки теж визначають у проекціях на ці ж осі і відповідно з основним законом динаміки (1.1) вони мають такий вигляд

$$m\ddot{x} = \sum_{i=1}^{n}F_{ix};\quad m\ddot{y} = \sum_{i=1}^{n}F_{iy};\quad m\ddot{z} = \sum_{i=1}^{n}F_{iz}, \tag{1.6}$$

де $\sum\limits_{i=1}^{n}F_{ix}$, $\sum\limits_{i=1}^{n}F_{iy}$, і $\sum\limits_{i=1}^{n}F_{iz}$ – алгебраїчні суми проекцій усіх сил на осі x, y та z.

3. Диференціальні рівняння у натуральній формі.

Прискорення матеріальної точки в цьому разі визначаються у проекціях на дотичну $\overline{\tau}$ та нормаль $\overline{n}$ і дорівнюють

$$a^{\tau} = \frac{dv}{dt};$$
$$a^{n} = \frac{v^2}{\rho}.$$

де v – швидкість матеріальної точки; ρ – радіус кривизни кривої, по якій рухається точка.

Проекція прискорення точки на бінормаль відсутня $a^b = 0$.

Тоді диференціальні рівняння руху матеріальної точки мають такий вигляд

$$\begin{aligned} m\frac{dv}{dt} &= \sum_{i=1}^{n} F_i^{\tau} \\ m\frac{v^2}{\rho} &= \sum_{i=1}^{n} F_i^{n}, \\ 0 &= \sum_{i=1}^{n} F_i^{b}, \end{aligned} \qquad (1.7)$$

де останнє рівняння, в проекції на бінормаль, є, фактично, рівнянням статики.

1.4.1. Диференціальні рівняння руху невільної матеріальної точки

Невільна точка – це така матеріальна точка, рух якої у просторі або на площині обмежений іншими умовами або тілами, які називають в'язями. Вивчаючи рух невільної точки, використовують принцип звільнення від в'язей. Він дозволяє вважати точку вільною, якщо прикласти до неї реакції в'язей. Тому диференціальне рівняння в векторній формі має вигляд:

$$m\overline{a} = \overline{F} + \overline{R}, \tag{1.8}$$

де $\overline{F}$ – рівнодійна активних сил, $\overline{R}$ – рівнодійна реакцій в'язей.

В проекціях на декартові і натуральні осі маємо

$$\begin{aligned} & m\frac{d^2x}{dt^2} = F_x + R_x, && m\frac{dv}{dt} = F_\tau + R_\tau, \\ & m\frac{d^2y}{dt^2} = F_y + R_y, && m\frac{v^2}{\rho} = F_n + R_n,. \\ & m\frac{d^2z}{dt^2} = F_z + R_z, && 0 = F_b + R_b \end{aligned} \tag{1.9}$$

1.5. Дві основні задачі динаміки матеріальної точки

Оскільки основний закон динаміки матеріальної точки (1.1) та складені за його допомогою диференціальні рівняння руху мають у лівій частині прискорення, тобто кінематичну характеристику руху, а у правій частині – геометричну суму сил, які діють на точку, тобто силові характеристики руху, то у залежності від того, яка характеристика руху потребує визначення, формулюються дві основні задачі динаміки матеріальної точки.

1.5.1. Перша задача динаміки

Перша задача динаміки формулюється таким чином: *"По заданим масі матеріальної точки та закону її руху визначити силу, яка діє на матеріальну точку або рівнодійну силу"*.

В цьому випадку розв'язок задачі зводиться до диференціювання рівнянь руху матеріальної точки.

Розглянемо приклад розв'язування першої задачі динаміки матеріальної точки.

Приклад 1.1.

Умова: матеріальна точка рухається згідно таких рівнянь

$$\begin{cases} x = at, \\ y = bt - ct^2, \end{cases}$$

де a, b, c – $const$.

Треба визначити рівнодійну силу, яка діє на цю матеріальну точку.

Розв'язання.

Знайдемо проекції швидкості на координатні осі x та y

$$v_x = \dot{x} = \frac{dx}{dt} = a;$$

$$v_y = \dot{y} = \frac{dy}{dt} = b - 2ct.$$

Знайдемо проекції прискорення матеріальної точки на ці осі координат

$$a_x = \ddot{x} = \frac{dv_x}{dt} = 0;$$

$$a_y = \ddot{y} = \frac{dv_y}{dt} = -2c.$$

Тоді проекції рівнодійної сили на координатні осі дорівнюють

$$F_x = ma_x = 0,$$

$$F_y = ma_y = -2mc.$$

Рівнодійна сила, яка діє на матеріальну точку, дорівнює

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = 2mc.$$

Ця сила діє паралельно осі Oy і спрямована у бік, протилежний від напрямку даної осі.

1.5.2. Друга задача динаміки

Сформулюємо другу задачу динаміки *"Згідно заданим силам, які діють на матеріальну точку, визначити закон її руху"*.

Таким чином, друга задача динаміки матеріальної точки зводиться до інтегрування диференціальних рівнянь руху. При цьому повинні бути заданими початкові умови руху матеріальної точки: положення і швидкості точки у початковий момент часу.

Якщо розглядається рух вільної матеріальної точки, то існує така послідовність розв'язку основної задачі динаміки матеріальної точки:

– зображують точку у довільному положенні її руху та показують усі сили, які діють на точку;

– вибирають систему координат;

– записують початкові умови руху матеріальної точки;

– складають диференціальні рівняння руху точки;

– методом інтегрування диференціальних рівнянь руху знаходять рівняння її руху і, виходячи з початкових умов, визначають сталі інтегрування;

– аналізують отриманий розв'язок та визначають невідомі величини.

При розв'язанні другої задачі відомими є сили, які діють на точку певної маси, координати і швидкість в початковий момент часу. Необхідно знайти кінематичні рівняння руху точки (закон руху). Розв'язання цієї задачі зводиться до інтегрування диференціальних рівнянь руху матеріальної точки (1.6) або (1.7). Визначивши проекції сил на осі координат F_x, F_y, F_z і підставивши їх в праву частину рівнянь, інтегруємо систему. Розв'язком цієї системи рівнянь буде функція часу і шість сталих інтегрування $C_1, C_2, ..., C_6$:

$$\begin{aligned} x &= x(t, C_1, C_2, ..., C_6) , \\ y &= y(t, C_1, C_2, ..., C_6) , \\ z &= z(t, C_1, C_2, ..., C_6) . \end{aligned} \tag{1.10}$$

Для визначення сталих інтегрування необхідні початкові умови – координати і швидкості в початковий момент:

$$\begin{aligned} &x(t_0) = x_0; \quad y(t_0) = y_0; \quad z(t_0) = z_0; \\ &\dot{x}(t_0) = \dot{x}_0; \quad \dot{y}(t_0) = \dot{y}_0; \quad \dot{z}(t_0) = \dot{z}_0. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Тоді, остаточно, розв'язок має вираз

$$\begin{aligned} x &= x(t, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0) , \\ y &= y(t, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0) , \\ z &= z(t, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0) . \end{aligned} \tag{1.12}$$

Вирази (1.12) називають загальним розв'язком диференціальних рівнянь руху точки.

Розглядаючи рух в натуральній формі, для розв'язання основної задачі застосовують диференціальні рівняння (1.7). Початковими умовами руху є значення дугової координати при $t = 0$: $s(t_o)$ і початкова швидкість $v(t_0) = \dot{s}_0$.

1.6. Інтегрування диференціальних рівнянь руху точки у простих випадках

Інтегрування диференціальних рівнянь в значній мірі залежить від виду функції сили, яку підставляють в праву частину рівняння. У загальному визначенні сила є функцією одночасно трьох кінематичних параметрів: часу, переміщення і швидкості $\overline{F} = \overline{F}(t, s, v)$. Інтегрування в цьому випадку є складною задачею. Проте, у техніці і природі часто зустрічаються сили, які залежать від одного кінематичного параметра. Так, сили, що мають місце при досліджені роботи різного роду механізмів і машин, явно залежать від часу.

До позиційних сил, що залежать від положення точки (переміщення), належать сили пружності, які виникають у пружних тілах при їх деформації, а також сили тяжіння або відштовхування, що виникають при взаємодії тіл, які мають електромагнітні заряди.

Сили, що залежать від швидкості, зустрічаються при дослідженні руху тіл у в'язкому середовищі (рідкому, газоподібному).

Надамо методику і приклади розв'язування другої задачі динаміки у випадках, якщо сили є сталими за величиною і напрямом і коли змінюються в залежності від часу, переміщення і швидкості.

1.6.1. Прямолінійний рух

Матеріальна точка рухається прямолінійно, вісь x - направимо в сторону руху точки. Тоді

$$\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow F_y = 0; \quad F_z = 0.$$

Рушійна сила спрямована вздовж осі: $F_x = F$. Проте, ця умова необхідна, але недостатня. Потрібно, щоб і початкова швидкість була спрямована вздовж осі $v_0 = v_{0x}$.

а) Рух точки під дією сили, яка є сталою величиною

Приклад 1.2.

Матеріальна точка масою m рухається вздовж осі x під дією сили $Q = const$. Визначити закон руху точки, якщо в початковий момент її координата була $x = x_0$, а початкова швидкість $v(t_o) = v_0$.

Розрахункова схема (рис. 1.1):

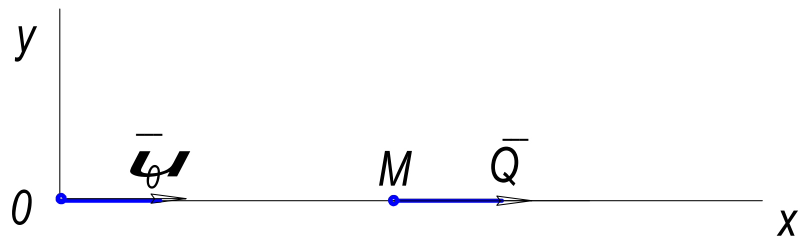


Рис. 1.1

Розв'язання.

Запишемо диференціальне рівняння в проекції на вісь x (1.6):

$$m\ddot{x} = \sum F_{kx} . \qquad \text{(a)}$$

Підставимо в праву частину (а) проекції сили (рис. 1.1)

$$m\ddot{x} = Q_x = Q; \quad \ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}; \quad m\frac{dv_x}{dt} = Q;$$

розділимо змінні: $$dv_x = \frac{Q}{m}t .$$

Інтегруємо ліву і праву частини

$$\int dv_x = \frac{Q}{m}\int dt + C_1 \Rightarrow v_x = \frac{Q}{m}t + C_1; \qquad \text{(б)}$$

підставимо $v_x = \dfrac{dx}{dt}$; $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{Q}{m}t + C_1$; розділимо змінні і інтегруємо ще один раз:

$$\int dx = \frac{Q}{m}\int t dt + C_1 \int dt; \quad x = \frac{Q}{m}\frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2. \tag{в}$$

Для визначення сталих інтегрування C_1 і C_2 підставимо в рівняння (б) і (в) початкові умови

при $t = t_0 = 0$: $\quad x = x_0; \quad v(t_0) = v_0;$

$$v_0 = \frac{Q}{m} t \cdot 0 + C_1 \Rightarrow C_1 = v_0;$$

$$x_0 = \frac{Q}{m}\frac{0}{2} + v_0 0 + C_2 \Rightarrow C_2 = x_0.$$

Остаточно закон руху точки

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{Q}{m}\frac{t^2}{2}. \tag{г}$$

Аналіз виразу (г) показує, що матеріальна точка під дією сталої сили рухається рівнозмінно з прискоренням, яке дорівнює $a_\tau = \dfrac{Q}{m}$.

б) Рух точки під дією сили, яка залежить від часу

Приклад 1.3.

Трактор вагою P рухається по прямій лінії і під час розгону його сила тяги збільшується по закону $F = kt$, де t – час у секундах, k - сталий коефіцієнт. Визначити закон руху трактора під час розгону.

Розв'язання.

Маса трактора рухається поступально, тому його можна вважати точкою. Направимо вісь x в напрямку руху, а початок відліку помістимо в нерухомій точці, де трактор був при $t_0 = 0$, тоді $x = x_0 = 0$.

Диференціальне рівняння:

$$m\ddot{x} = \sum F_{kx}\,; \quad m\frac{dv_x}{dt} = F_x = kt\,; \quad m = \frac{P}{g}\,. \tag{а}$$

Розділимо змінні в (а), помножуючи на dt ліву і праву частини:

$$\int dv_x = \frac{k}{m}\int tdt + C_1\,.$$

Інтегруємо:

$$v_x = \frac{k}{m}\frac{t^2}{2} + C_1\,. \tag{б}$$

Підставимо в (б) $v_x = \dfrac{dx}{dt}$ і розділяємо змінні:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{k}{m}\frac{t^2}{2} + C_1\,; \quad \int dx = \frac{k}{m}\int\frac{t^2}{2}dt + C_1\int dt + C_2\,.$$

Інтегруємо:

$$x = \frac{k}{m}\frac{t^3}{6} + C_1 t + C_2\,. \tag{в}$$

Для визначення сталих інтегрування в рівняннях (б) і (в) підставимо початкові умови при $t = t_0 = 0$:

$$x = x_0 = 0\,; \quad v_x = v_{0x} = 0\,;$$

$$0 = \frac{k}{m}\frac{0}{2} + C_1 \Rightarrow C_1 = 0\,;$$

$$0 = \frac{k}{m}\frac{0}{2} + 0\cdot C_1 + C_2 \Rightarrow C_2 = 0.$$

Остаточно закон руху має вигляд

$$x = \frac{kg}{P}\frac{t^3}{6} \text{ (м).}$$

в) Рух точки під дією сили, яка залежить від швидкості

Приклад 1.4.

Тіло M вагою $\overline{G}$ падає донизу без початкової швидкості із точки O, яка прийнята за початок координат (рис. 1.2). Опір повітря пропорційний швидкості $\overline{R} = \alpha\ \overline{v}$, де α - коефіцієнт пропорційності.

Визначимо закон руху тіла:

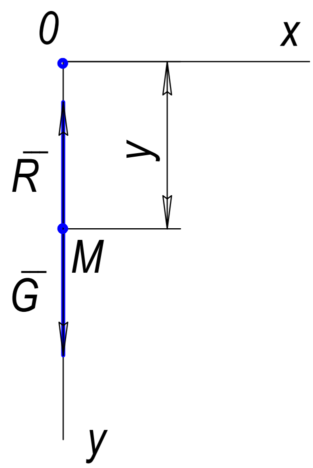


Рис. 1.2

Розв'язання.

Складемо диференціальне рівняння руху тіла під дією сили тяжіння $\overline{G}$ і сили опору повітря $\overline{R}$ в проекції на вісь y:

$$m\ddot{y} = \sum F_{ky}\ ;$$

$$m\ddot{y} = G_y - R_y = mg - \alpha\ v\ . \qquad (a)$$

Знизимо порядок рівняння (а), переходячи $\ddot{y} = \frac{dv}{dt}$, і поділимо рівняння на масу m, позначаючи $\frac{\alpha}{m} = k$:

$$\frac{dv}{dt} = g - kv, \text{ або } dv = (g - kv)dt.$$

Розділимо змінні: $$\frac{dv}{g - kv} = dt.$$

Введемо нову змінну $u = g - kv$, тоді $du = -kdv$ і $dv = -\frac{du}{k}$, отримаємо рівняння $\frac{du}{u} = -kdt$.

Після інтегрування маємо:

$$\ln u = -kt + C_1, \text{ або } \ln(g - kv) = -kt + C_1 \qquad (б)$$

Із рівняння (б) визначимо значення C_1, підставивши початкові умови при $t = t_0 = 0$; $v = v_0 = 0$:

$$\ln(g - k \cdot 0) = -k \cdot 0 + C_1 \Rightarrow C_1 = \ln g.$$

Підставимо значення C_1 в рівняння і визначимо швидкість v:

$$\ln(g - kv) = -kt + \ln g; \quad \ln\left(\frac{g - kv}{g}\right) = -kt. \qquad (в)$$

Потенціюємо вираз (в)

$$\frac{g - kv}{g} = e^{-kt}; \quad v = \frac{g}{k}\left(1 - e^{-kt}\right). \qquad (г)$$

Аналіз виразу (г) показує, що при $t \to \infty$ маємо $e^{-kt} \to 0$, $v \to \frac{g}{k}$, тобто максимальна швидкість буде $v_{\max} = \dfrac{g}{k}$, а рух стає рівномірним.

Представимо рівняння (г) у вигляді

$$v = \frac{dy}{dt} = \frac{g}{k}\left(1 - e^{-kt}\right),$$

або

$$dy = \frac{g}{k}\left(1 - e^{-kt}\right)dt. \qquad (д)$$

Інтегруємо рівняння(д):

$$y = \frac{g}{k}t + \frac{g}{k^2}e^{-kt} + C_2. \qquad (е)$$

Для визначення C_2 підставимо в (е) початкові умови $t = t_0 = 0$, $y = y_0 = 0$:

$$0 = \frac{g}{k^2} + C_2 \Rightarrow C_2 = -\frac{g}{k^2}.$$

Підставимо значення C_2 в (е), отримаємо рівняння руху тіла, що падає, долаючи опір повітря:

$$y = \frac{g}{k}t - \frac{g}{k^2}\left(1 - e^{-kt}\right).$$

г) Рух точки під дією сили, яка залежить від переміщення

Приклад 1.5.

Матеріальна точка M масою m рухається вздовж осі x під дією сили, яка пропорційна відстані $F = kmx$, де $k = 4$. На початку руху при $t = t_0 = 0$: $x_0 = 5$ $м$; $v_0 = 2$ $м/с$. Визначити закон руху точки (рис 1.3).

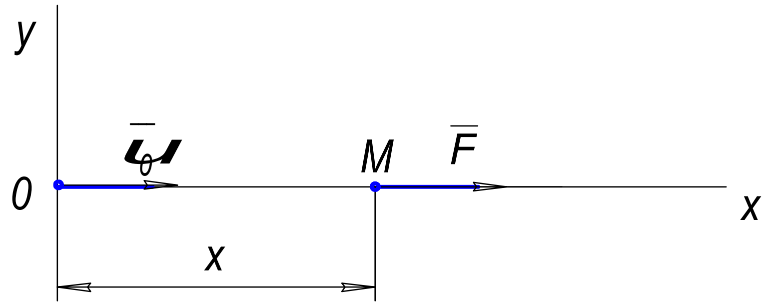


Рис. 1.3

Розв'язання.

Складаємо диференціальне рівняння руху в проекції на вісь x:

$$m\ddot{x} = \sum F_{kx}\,; \quad m\ddot{x} = F_x = kmx\,;$$

$$\ddot{x} - 4x = 0\,. \qquad \text{(а)}$$

Рівняння (а) є однорідним лінійним диференціальним рівнянням другого порядку зі сталим коефіцієнтом. Розв'язок його шукаємо в формі

$$x = Ae^{ut} \qquad \text{(б)}$$

Взявши першу $\dot{x}$ та другу $\ddot{x}$ похідні за часом від виразу (б), підставимо в (а) і після скорочень отримаємо характеристичне рівняння

$$u^2 = 4 = 0\,,$$

корні якого дорівнюють: $u_1 = 2\,;\ u_2 = -2\,.$

Тоді загальний розв'язок диференціального рівняння буде:

$$x = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-2t}\,. \qquad \text{(г)}$$

Для визначення двох сталих інтегрування C_1 і C_2 необхідне друге рівняння, яке отримаємо, взявши похідну за часом від (г):

$$v = \frac{dx}{dt} = 2C_1 e^{2t} - 2C_2 e^{-2t}\,. \qquad \text{(д)}$$

Підставимо в (г) і (д) початкові умови, отримаємо алгебраїчні рівняння, з яких і визначимо сталі інтегрування:

$$\begin{cases} 5 = C_1 + C_2; \\ 2 = 2C_1 - 2C_2. \end{cases}$$

Звідки $C_1 = 3$; $C_2 = 2$.

Остаточно матимемо закон руху точки, підставивши в (г) $C_1 = 3$; $C_2 = 2$:

$$x = 3e^{2t} + 2e^{-2t} \ (м).$$

1.6.2. Криволінійний рух точки

Приклад 1.6.

Розглянемо рух матеріальної точки, яка кинута під кутом α до горизонту з початковою швидкістю v_0 і на яку діє тільки сила тяжіння mg (рис. 1.4).

Треба знайти рівняння руху $x(t)$, $y(t)$, рівняння траєкторії $f(x;y)$, час польоту t_1, дальність польоту L і висоту польоту H.

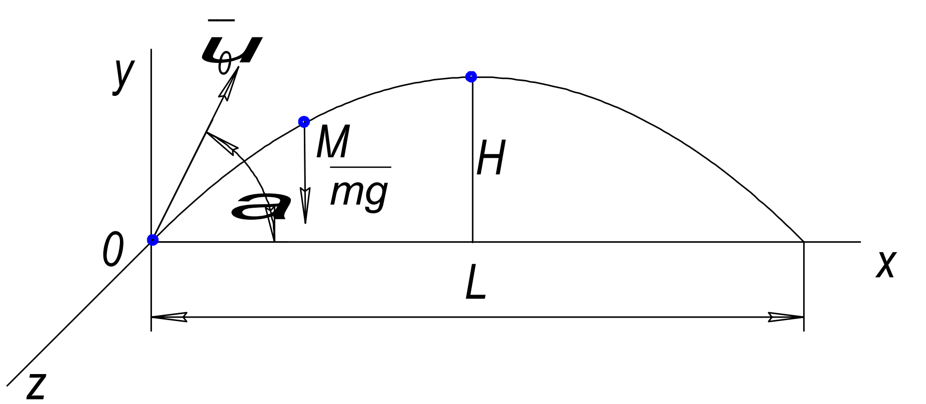


Рис. 1.4

Розв'язання.

Складемо диференціальні рівняння руху:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = 0; \\ m\ddot{y} = -mg. \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} \ddot{x} = 0; \\ \ddot{y} = -g. \end{cases} \tag{а}$$

Початкові умови при $t = 0$: $x_0 = 0$; $v_{x0} = \dot{x}_0 = v_0 \cos\alpha$; $y_0 = 0$; $v_{y0} = \dot{y}_0 = v_0 \sin\alpha$.

Інтегруємо диференціальні рівняння (а):

$$\begin{cases} \dot{x} = C_1 \\ \dot{y} = -gt + C_2. \end{cases} \tag{б}$$

Після другого інтегрування (б) маємо:

$$\begin{cases} x = C_1 t + C_3; \\ y = -\dfrac{gt^2}{2} + C_2 t + C_4. \end{cases} \tag{в}$$

Враховуючи початкові умови, визначаємо сталі інтегрування $C_1, \ldots, C_4$:

$$C_3 = 0; \qquad C_1 = v_0 \cos\alpha;$$
$$C_4 = 0; \qquad C_2 = v_0 \sin\alpha,$$

підставивши сталі інтегрування в (в), отримаємо:

$$\begin{cases} \dot{x} = v_0 \cos\alpha \;; \\ \dot{y} = -gt + v_0 \sin\alpha \;; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \left(v_0 \cos\alpha\right) \cdot t \;; \\ y = \left(v_0 \sin\alpha\right) \cdot t - \dfrac{gt^2}{2}. \end{cases} \tag{г}$$

Для визначення траєкторії руху точки виключимо параметр t з останніх рівнянь руху (г)

$$t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha}; \qquad y = \frac{(v_0 \sin\alpha)x}{v_0 \cos\alpha} - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2\alpha} = (tg\alpha)x - \frac{g(1+tg^2\alpha)}{2v_0}x^2. \qquad \text{(д)}$$

Отримана крива (д), яка визначає траєкторію руху, є параболою.

Визначаємо час польоту t_1 в момент падіння точки на землю ($y = 0$):

$$(v_0 \sin\alpha)t_1 - \frac{gt_1^2}{2} = 0; \qquad v_0 \sin\alpha = \frac{gt_1}{2}; \qquad t_1 = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}.$$

Дальність польоту:

$$L = x(t_1) = (v_0 \cos\alpha)t_1 = \frac{v_0 \cos\alpha \cdot 2v_0 \sin\alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g};$$

Висота польоту, це $y(t_2)$, де $t_2 = \dfrac{v_0 \sin\alpha}{g}$;

$$H = y_{\max} = (v_0 \sin\alpha)\ t_2 - \frac{gt_2^2}{2} = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{g} - \frac{g(v_0^2 \sin^2\alpha)}{2g^2} = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}.$$

Запитання для самоконтролю:

1. Що вивчає динаміка? Її основні задачі.
2. Сформулюйте основні закони динаміки.
3. Напишіть диференціальні рівняння руху точки в координатній і натуральній формах.
4. Напишіть диференціальні рівняння руху невільної точки.
5. Як формулюється і розв’язується перша задача динаміки?
6. Як формулюється і розв’язується друга задача динаміки?
7. Що таке початкові умови руху точки?
8. Як визначаються сталі інтегрування диференціальних рівнянь?

ЛЕКЦІЯ 2

МЕХАНІЧНА СИСТЕМА МАТЕРІАЛЬНИХ ТОЧОК. ТЕОРЕМА ПРО РУХ ЦЕНТРА МАС

Як вже було зазначено, механічна система матеріальних точок (далі – механічна система) – це така сукупність точок, положення і рух яких є взаємопов'язаними. Класичним прикладом механічної системи є сонячна система.

Виникає питання: які існують закони, які б дозволяли досліджувати рух саме механічної системи? Такі закони розглядаються нижче.

2.1. Маса механічної системи. Центр мас механічної системи

Нехай існує механічна система, яка складається із n матеріальних точок, маси яких $m_1, m_2, m_3, ..., m_n$. Положення кожної точки системи відносно фіксованої у просторі точки O визначається її радіусом–вектором $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{r}_3, ..., \bar{r}_n$. Тоді маса механічної системи дорівнює арифметичній сумі мас окремих точок, які входять до складу системи

$$M = \sum_{k=1}^{n} m_k . \tag{2.1}$$

Центр мас механічної системи визначається відповідно до положення центра ваги тіла. Центр мас системи є геометричною точкою, радіус-вектор якої визначається виразом:

$$\bar{r}_c = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k \bar{r}_k}{M}, \tag{2.2}$$

де M – маса механічної системи; $\bar{r}_k$ – радіус-вектор k-тої точки системи.

Якщо через центр мас провести осі просторової системи координат x, y, z, то вираз (2.2) у проекціях на дані осі координат дає такі вирази для координат центра мас механічної системи:

$$x_c = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k x_k}{M},$$

$$y_c = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k y_k}{M}, \tag{2.3}$$

$$z_c = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k z_k}{M},$$

де x_k, y_k, z_k – координати окремих матеріальних точок механічної системи.

У однорідному силовому полі Землі центр мас механічної системи співпадає з його центром ваги.

2.2. Класифікація сил, які діють на механічну систему

Сили, які діють на механічну систему, поділяються на *внутрішні* та *зовнішні*. Сформулюємо визначення даних сил:

– *внутрішні сили* – це сили взаємодії між точками самої механічної системи;

– *зовнішні сили* – це сили, які діють на точки системи з боку точок, які не належать даній механічній системі.

Внутрішні сили позначаються $\overline{F}_k^{in}$, зовнішні – $\overline{F}_k^{e}$.

Внутрішні сили мають такі властивості:

– внутрішні сили діють на механічну систему попарно, як дія і протидія $(\overline{F}_1^{in} = -\overline{F}_2^{in})$;

– геометрична сума внутрішніх сил або головний вектор внутрішніх сил дорівнює нулю

$$\sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k^{in} = 0; \tag{2.4}$$

– геометрична сума моментів усіх внутрішніх сил відносно будь–якого центра або головний момент внутрішніх сил і алгебраїчна сума сил відносно осі дорівнюють нулю

$$\sum_{k=1}^{n} \overline{m}_o\left(\overline{F}_k^{in}\right) = 0; \qquad \sum_{k=1}^{n} \overline{m}_z\left(\overline{F}_k^{in}\right) = 0. \tag{2.5}$$

2.3. Диференціальні рівняння руху механічної системи

Розглянемо деяку механічну систему, яка складається з n матеріальних точок, маси яких

$$m_1, m_2, m_3, ..., m_n;$$

положення кожної точки відносно якого–небудь центра визначається її радіус-вектором

$$\overline{r}_1, \overline{r}_2, \overline{r}_3, ..., \overline{r}_n;$$

до кожної точки системи прикладена рівнодійна внутрішніх сил

$$\overline{F}_1^{in}, \overline{F}_2^{in}, \overline{F}_3^{in}, ..., \overline{F}_n^{in};$$

а також і зовнішніх сил

$$\overline{F}_1^{e}, \overline{F}_2^{e}, \overline{F}_3^{e}, ..., \overline{F}_n^{e}.$$

Для кожної точки даної механічної системи у векторній формі можна скласти такі рівняння руху

$$m_k \frac{d^2 \overline{r}_k}{dt^2} = \overline{F}_k^{in} + \overline{F}_k^{e}, \quad k = 1, 2, ..., n. \tag{2.6}$$

Система отриманих рівнянь і є системою диференціальних рівнянь руху механічної системи у векторній формі.

В проекціях на координатні осі рівняння (2.6) матимуть такий вигляд

$$\begin{aligned} m_k \frac{d^2 x_k}{dt^2} &= \overline{F}_{kx}^{in} + \overline{F}_{kx}^{e}; \\ m_k \frac{d^2 y_k}{dt^2} &= \overline{F}_{ky}^{in} + \overline{F}_{ky}^{e}; \\ m_k \frac{d^2 z_k}{dt^2} &= \overline{F}_{kz}^{in} + \overline{F}_{kz}^{e}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Таким чином, якщо система складається із n матеріальних точок, то необхідно скласти $3n$ диференціальних рівнянь другого порядку (2.7).

2.4. Теорема про рух центра мас механічної системи

Характер руху механічної системи іноді можна визначити по закону руху центра мас механічної системи.

Для механічної системи, яка складається з n матеріальних точок, запишемо диференціальні рівняння у формі (2.6) і підсумуємо почленно по всіх точках:

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \frac{d^2 \overline{r}_k}{dt^2} = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k^{in} + \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k^{e}. \tag{2.8}$$

Згідно наведених вище властивостей внутрішніх сил $\sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k^{in} = 0$, отже другий доданок у рівнянні (2.8) зникає і воно матиме такий вигляд

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \frac{d^2\bar{r}_k}{dt^2} = \sum_{k=1}^{n} \bar{F}_k^e . \qquad (2.9)$$

Із виразу (2.2) можна записати:

$$M\bar{r}_c = \sum_{k=1}^{n} m_k \bar{r}_k . \qquad (2.10)$$

Візьмемо другу похідну за часом від лівої та правої частин виразу (2.10):

$$M\frac{d^2\bar{r}_c}{dt^2} = \sum_{k=1}^{n} m_k \frac{d^2\bar{r}_k}{dt^2} . \qquad (2.11)$$

З отриманого виразу (2.11) випливає, що його права частина співпадає з лівою частиною виразу (2.9), тому, остаточно, можна записати:

$$M\frac{d^2\bar{r}_c}{dt^2} = \sum_{k=1}^{n} \bar{F}_k^e , \qquad (2.12)$$

або $$M\frac{d\bar{v}_c}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \bar{F}_k^e ; \mathrm{M}\bar{a}_c = \sum_{k=1}^{n} \bar{F}_k^e$$

Сформулюємо тепер теорему про рух центра мас механічної системи:

Добуток маси механічної системи на прискорення її центра мас дорівнює геометричній сумі усіх зовнішніх сил, які діють на дану механічну систему.

Цю теорему можна сформулювати інакше:

Центр мас механічної системи рухається, як матеріальна точка, маса якої дорівнює масі усієї системи і на яку діють усі зовнішні сили системи.

Рівнянню (2.12) відповідає три рівняння в проекціях:

$$M\frac{d^2x_c}{dt^2}=\sum F_{kx}^e;$$
$$M\frac{d^2y_c}{dt^2}=\sum F_{ky}^e; \qquad (2.13)$$
$$M\frac{d^2z_c}{dt^2}=\sum F_{kz}^e.$$

З цієї теореми випливає, що рух центра мас системи залежить тільки від зовнішніх сил, які діють на механічну систему, внутрішні сили не змінюють положення центра мас.

Проте, внутрішні сили можуть здійснювати не прямий вплив на рух центра мас, а лише через зовнішні сили. Наприклад, в автомобілі внутрішні сили, що розвиває двигун, впливають на рух його центра мас лише через сили тертя коліс з дорогою.

Зазначимо, що пара сил, яка прикладена до тіла, не може змінити характер руху його центра мас, бо головний вектор пари сил дорівнює нулю. Пара сил може спричинити лише обертання тіла навколо центра мас.

2.5. Закон збереження руху центра мас

В деяких випадках можуть скластись такі обставини, що сума зовнішніх сил, які діють на механічну систему, буде дорівнювати нулю $\sum_{k=1}^{n}\overline{F}_k^e=0$, тому у виразі (2.12) $\frac{d^2\overline{r}_c}{dt^2}=0$.

З цього випливає, що $\overline{v}_c=\frac{d\overline{r}_c}{dt}=const$. Ці обставини дають можливість сформулювати закон збереження руху центра мас механічної системи:

Якщо геометрична сума зовнішніх сил, яка діє на механічну систему, дорівнює нулю, то її центр мас рухається з постійною за величиною та напрямком швидкістю.

Але може статися, що лише $\sum_{k=1}^{n} F_{kx}^{e} = 0$. Тоді $\frac{d^2 x_c}{dt^2} = 0$; $\frac{dx_c}{dt} = v_{cx} = const$, тобто центр мас рухається вздовж осі $0x$ зі сталою швидкістю.

Якщо одна із проекцій головного вектора зовнішніх сил на вісь нерухомої системи координат дорівнює нулю, то проекція швидкості центра мас на цю вісь не змінюється.

Цей висновок випливає безпосередньо з рівнянь (2.13). Крім того, необхідно зазначити, що коли швидкість центра мас або проекція швидкості на вісь на початку руху дорівнювала нулю, то за законом зберігається незмінним положення центра мас (радіус-вектор $\bar{r}_c = const$; $x_c = const$):

$$\bar{v}_c = \frac{d\bar{r}_c}{dt} = 0 \Rightarrow r_c = const; \; v_{cx} = \frac{dx_c}{dt} = 0 \Rightarrow x_c = const .$$

У випадку, якщо має місце закон збереження руху центра мас, теорема про рух центра мас дозволяє по переміщенню однієї частини системи знайти переміщення другої її частини.

Нехай $m_1, m_2, ..., m_n$ – маси точок системи і початкові їх координати $x_{10}, x_{20}, ..., x_{n0}$ під дією внутрішніх сил отримали переміщення $\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n$, тоді їх координати будуть

$$x_{10} + \Delta x_1; \quad x_{20} + \Delta x_2; \quad \ldots; \quad x_{n0} + \Delta x_n .$$

Координата центра мас на початку:

$$x_{c0} = \frac{m_1 x_{10} + m_2 x_{20} + ... + m_n x_{n0}}{M}.$$

Координата центра мас в кінцевому положенні:

$$x_{c1} = \frac{m_1(x_{10} + \Delta x_1) + m_2(x_{20} + \Delta x_2) + ... + m_n(x_{n0} + \Delta x_n)}{M}.$$

Але $x_c = const; \Rightarrow x_{c0} = x_{c1}$ – координата системи зберігається.

Звідкіля після скорочення буде

$$m_1 \Delta x_1 + m_2 \Delta x_2 + ... + m_n \Delta x_n = 0. \qquad (2.14)$$

або

$$G_1 \Delta x_1 + G_2 \Delta x_2 + ... + G_n \Delta x_n = 0 \qquad (2.15)$$

$G_k = g \cdot m_k$ – вага k-тої точки.

Рівняння (2.14), (2.15) використовуються при розв’язанні задач про рух системи під дією внутрішніх сил.

Приклад 2.1.

Кузов автомобіля вагою $\overline{P}$ здійснює на ресорах вертикальні гармонічні коливання з амплітудою A і періодом T навколо положення рівноваги C (центр мас) (рис.2.1). Визначити реакції ресор.

C – центр мас кузова;

y_c – поточне зміщення вздовж вертикалі центра мас;

$\overline{N}$ – шукана реакція ресори (кузов має дві ресори).

Розв’язання.

Закон гармонічних коливань можна уявити згідно умови таким:

$$y_c = A \sin \frac{2\pi}{T} t. \qquad (a)$$

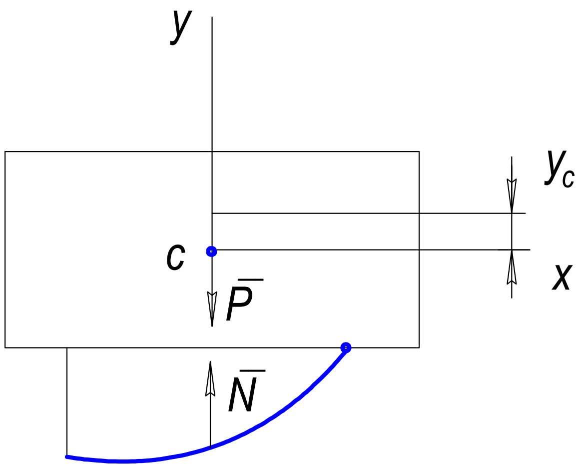


Рис. 2.1

Запишемо теорему про рух центра мас в проекції на вісь y:

$$M\frac{d^2y_c}{dt^2} = 2N - P \tag{б}$$

Для визначення реакції N необхідно підставити в ліву частину (б) прискорення $a_{cy} = \dfrac{d^2y_c}{dt^2}$, яке визначимо, взявши двічі похідну за часом від виразу (а):

$$\frac{dy_c}{dt} = A\frac{2\pi}{T}\cos\frac{2\pi}{T}t\,;$$

$$\frac{d^2y_c}{dt^2} = -\frac{4\pi^2}{T^2}A\sin\frac{2\pi}{T}t\,. \tag{с}$$

Підставимо закон зміни прискорення (с) в вираз (б), враховуючи, що маса $M = \dfrac{P}{g}$:

$$-\frac{P}{g}\cdot\frac{4\pi^2}{T^2}A\sin\frac{2\pi}{T}t = 2N - P;$$

$$N = \frac{P}{2} - \frac{P}{g}\cdot\frac{2\pi^2}{T^2}A\sin\frac{2\pi}{T}t;$$

Звідки, приймаючи, що при максимальному і мінімальному значеннях синус дорівнює одиниці, отримаємо відповідь:

$$N_{\max} = \frac{P}{2}\left(1 + \frac{4\pi^2}{gT^2}A\right);$$

$$N_{\min} = \frac{P}{2}\left(1 - \frac{4\pi^2}{gT^2}A\right).$$

Запитання для самоконтролю:

1. Що таке центр мас і як визначаються його координати?
2. Які властивості внутрішніх сил ви знаєте?
3. Запишіть диференціальне рівняння руху механічної системи в векторній і координатній формах.
4. Напишіть алгебраїчний вираз і сформулюйте теорему про рух центра мас механічної системи.
5. Чи можуть внутрішні сили змінити положення центра мас?

ЛЕКЦІЯ 3

ЗАГАЛЬНІ ТЕОРЕМИ ДИНАМІКИ

Існує багато задач динаміки, розв'язання яких не потребує повної інформації про всі властивості досліджуваного руху системи, які містяться у диференціальних рівняннях (2.7). Це задачі, які пов'язані з визначенням зовнішніх сил, що діють на матеріальні точки системи або з визначенням руху центра мас і мір механічного руху системи: головного вектора кількості руху, головного моменту кількості руху, кінетичної енергії. До ефективних методів розв'язування цих задач належать загальні теореми динаміки, що встановлюють співвідношення між мірами механічного руху системи матеріальних точок або однієї точки і силами, що характеризують динамічний ефект дії оточуючих тіл на кожну матеріальну точку системи.

Загальні теореми динаміки характеризують окремі властивості механічного руху і надають часткову інформацію про цей рух.

Для розв'язання задач динаміки матеріальної точки та динаміки механічної системи широко застосовуються загальні теореми динаміки, до яких належать: теорема про зміну кількості руху, теорема про зміну моменту кількості руху і теорема про зміну кінетичної енергії, які випливають з основного закону динаміки матеріальної точки.

Загальні теореми динаміки дозволяють уникнути складних операцій інтегрування диференціальних рівнянь руху матеріальної точки і механічної системи, що значно спрощує розв'язання ряду задач динаміки.

3.1.Міри механічного руху і міри дії сил

До основних мір руху належать кількість руху і кінетична енергія. До мір дії сил належать імпульс сили і робота сили.

Із диференціальних рівнянь руху випливають співвідношення між зміною протягом часу сумарних мір руху системи і мір дії сил – загальні теореми динаміки, які називають загальними інтегралами диференціальних рівнянь руху. Міри руху є основою для встановлення загальних теорем динаміки.

Цікава дискусія точилася в XVII-XVIII століттях між прихильниками Р.Декарта і Г.Лейбніца про те, яка з мір механічного руху – кількість руху або кінетична енергія – визначає динамічні властивості тіл. Вона закінчилась безрезультатно. Тільки в XIX ст. вчені прийшли до висновку, що обидві міри руху мають право на існування одночасно в кожному тілі. Перша характеризує здатність механічного руху тіла переходити до другого тіла в формі самого механічного руху. Друга міра, кінетична енергія, характеризує здатність механічного руху тіла перетворюватись в еквівалентну кількість потенціальної, теплової і інших видів енергії. Тільки релятивістська механіка (XX ст.) об'єднала ці дві міри руху в одну – тензор енергії (імпульс).

3.2. Кількість руху матеріальної точки і механічної системи

Однією з динамічних характеристик руху матеріальної точки і механічної системи є кількість руху.

Кількість руху матеріальної точки є векторною величиною, яка є добутком маси точки на вектор її швидкості

$$\overline{q}=m\overline{v}\,. \tag{3.1}$$

Напрямок вектора кількості руху $\bar{q}$ співпадає з напрямком вектора швидкості $\bar{v}$. За одиницю вимірювання кількості руху приймається 1 [кг·м/с].

Кількість руху механічної системи є також векторною величиною, яка є геометричною сумою векторів кількостей руху окремих точок системи:

$$\overline{Q}=\sum_{k=1}^{n}\bar{q}_k=\sum_{k=1}^{n}m_k\bar{v}_k, \tag{3.2}$$

З іншого боку є можливість визначити вектор кількості руху через швидкість центра мас. Згадаємо, як був визначений радіус-вектор центра мас механічної системи:

$$\bar{r}_c=\frac{\sum_{k=1}^{n}m_k\bar{r}_k}{M}, \tag{3.3}$$

де $M=\sum_{k=1}^{n}m_k$ – маса механічної системи.

Зведемо вираз (3.3) до спільного знаменника

$$M\cdot\bar{r}_c=\sum_{k=1}^{n}m_k\bar{r}_k, \tag{3.4}$$

і візьмемо похідну за часом:

$$M\frac{d\bar{r}_c}{dt}=\sum_{k=1}^{n}m_k\frac{d\bar{r}_k}{dt}. \tag{3.5}$$

Оскільки $\frac{d\bar{r}_c}{dt}=\bar{v}_c$, а $\frac{d\bar{r}_k}{dt}=\bar{v}_k$, то остаточно маємо:

$$M\bar{v}_c=\sum_{k=1}^{n}m_k\bar{v}_k=\overline{Q}. \tag{3.6}$$

Таким чином, *вектор кількості руху механічної системи або головний вектор системи дорівнює добутку маси усієї системи на вектор швидкості її центра мас.*

Проекції кількості руху механічної системи на осі прямокутної системи координат запишуться так:

$$Q_x=\sum_{k=1}^{n} m_k v_{kx}=M v_{cx},$$
$$Q_y=\sum_{k=1}^{n} m_k v_{ky}=M v_{cy}, \qquad (3.7)$$
$$Q_z=\sum_{k=1}^{n} m_k v_{kz}=M v_{cz}.$$

Звідкіля головний вектор механічної системи дорівнює:

модуль $Q=\sqrt{Q_x^2+Q_y^2+Q_z^2}$;

напрямок $\cos\left(\overline{Q},\hat{x}\right)=\dfrac{Q_x}{Q}$; $\cos\left(\overline{Q},\hat{y}\right)=\dfrac{Q_y}{Q}$; $\cos\left(\overline{Q},\hat{z}\right)=\dfrac{Q_z}{Q}$.

3.3. Імпульс сили

Ефект дії сили на матеріальну точку або механічну систему залежить не тільки від модуля сили і маси точки або системи, а і від тривалості дії сили. Для характеристики дії сили на тіло за певний проміжок часу вводиться поняття елементарного імпульсу сили та імпульсу сили за кінцевий проміжок часу. Визначимо ці поняття.

Елементарний імпульс $\overline{dS}$ *сили* $\overline{F}$ *– це векторна величина, яка дорівнює добутку вектора сили на елементарний проміжок часу її дії*

$$\overline{dS}=\overline{F}\cdot dt. \qquad (3.8)$$

Напрямок елементарного імпульсу сили співпадає з напрямком вектора сили. За одиницю вимірювання імпульсу сили приймається $1\left[H\cdot c\right]=1\left[\frac{кг\,м}{c^2}\cdot c\right]=1\left[кг\cdot м/c\right]$.

Імпульс сили за кінцевий проміжок часу дорівнює інтегралу від елементарного імпульсу сили за проміжок часу від 0 до t_1

$$\overline{S}=\int_0^{t_1} d\overline{S}=\int_0^{t_1}\overline{F}dt\,. \tag{3.9}$$

Для обчислення імпульсу сили використовують його проекції на відповідні осі координат

$$\begin{aligned} S_x&=\int_0^{t_1} dS_x=\int_0^{t_1} F_x dt,\\ S_y&=\int_0^{t_1} dS_y=\int_0^{t_1} F_y dt,\\ S_z&=\int_0^{t_1} dS_z=\int_0^{t_1} F_z dt. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Повний імпульс дорівнюватиме:

$$S=\sqrt{S_x^2+S_y^2+S_z^2}$$

Якщо сила є сталою величиною, то імпульс сили дорівнює:

$$\overline{S}=\overline{F}t\,. \tag{3.11}$$

3.4. Теорема про зміну кількості руху матеріальної точки

Запишемо основний закон динаміки матеріальної точки в формі, коли маса m вважається сталою:

$$m\bar{a}=\sum_{k=1}^{n}\bar{F}_k, \tag{3.12}$$

Але більш загальний вираз закону може бути записаний так:

$$\frac{d}{dt}(m\cdot\bar{v})=\sum_{k=1}^{n}\bar{F}_k\,. \tag{3.13}$$

У лівій частині в дужках є кількість руху матеріальної точки, яка визначалась виразом (3.1): $\bar{q}=m\bar{v}$. Перепишемо (3.13) так:

$$\frac{d}{dt}(\bar{q})=\sum_{k=1}^{n}\bar{F}_k\,. \tag{3.14}$$

Помноживши ліву і праву частини (3.13) на dt, маємо:

$$d(m\bar{v})=\sum_{k=1}^{n}\bar{F}_k\cdot dt\,. \tag{3.15}$$

Вираз (3.15) і є теоремою про зміну кількості руху матеріальної точки у диференціальній формі: *диференціал від кількості руху матеріальної точки дорівнює геометричній сумі імпульсів всіх сил, які діють на точку.*

Інтегруємо почленно ліву та праву частини виразу (3.15). Використаємо означені інтеграли, які беремо в границях, що відповідають швидкостям від v_0 до v_1 і моментам часу від 0 до t_1. Матимемо

$$\int_{V_0}^{V_1} d(m\bar{v})=\int_0^{t_1}\sum_{k=1}^{n}\bar{F}_k dt=\sum_{k=1}^{n}\int_0^{t_1}\bar{F}_k dt\,. \tag{3.16}$$

Права частина виразу (3.16) є сумою імпульсів сил за кінцевий проміжок часу. Після інтегрування одержимо:

$$m\bar{v}_1-m\bar{v}_0=\sum_{k=1}^{n}\bar{S}_k\,. \tag{3.17}$$

Таким чином, теорему про зміну кількості руху матеріальної точки можна сформулювати так: *зміна кількості руху матеріальної точки за певний проміжок часу дорівнює геометричній сумі імпульсів сил, які діють на точку, за цей час.*

Вираз (3.17) у проекціях на осі координат x, y, та z буде мати такий вигляд:

$$\left.\begin{aligned} mv_{1x} - mv_{0x} &= \sum_{k=1}^{n} S_{kx}, \\ mv_{1y} - mv_{0y} &= \sum_{k=1}^{n} S_{ky}, \\ mv_{1z} - mv_{0z} &= \sum_{k=1}^{n} S_{kz}. \end{aligned}\right\} \tag{3.18}$$

Приклад 3.1.

Автомобіль масою $m = 1000$ $кг$ рухається по горизонтальній дорозі зі швидкістю $v_0 = 5м/с$. Далі протягом $10\,с$ сила тяги автомобіля збільшується на 150 H за кожну секунду. Визначити швидкість автомобіля v_1 після десятої секунди розгону.

Розв'язання.

Вважаємо рух автомобіля поступальним, тоді приймаємо його за матеріальну точку. На підставі (3.18) запишемо вираз теореми про зміну кількості руху матеріальної точки:

$$mv_{1x} - mv_{0x} = \sum S_{kx}\,. \tag{a}$$

Оскільки рух по прямій, то можна записати

$$v_{1x} = v_1; \quad v_{0x} = v_0; \quad S_x = S\,.$$

Визначимо імпульс сили тяги, враховуючи умову і вираз (3.10):

$$F = 150t; \quad S = \int_0^{t_1} F dt;$$

$$S = \int_0^{t_1} 150t dt = 150\int_0^{10} t dt = 150\frac{t^2}{2}\Big|_0^{10} = \frac{150 \cdot 10^2}{2} = 7500\left(Hc\right).$$

Підставимо імпульс $S = 7500\left(Hc\right)$ в праву частину (а):

$$m(v_1 - v_0) = 7500 .$$

Звідки

$$v_1 = \frac{S + mv_0}{m} = \frac{7500 + 1000 \cdot 5}{1000} = 12{,}5 \ м/c .$$

Відповідь: $v_1 = 12{,}5 \ м/c$.

3.5. Теорема про зміну кількості руху механічної системи

Для механічної системи, яка складається з n матеріальних точок, на підставі теореми про рух її центра мас можна записати

$$M\frac{d\overline{v}_c}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k^e ,$$

якщо далі внести M – масу механічної системи, яка вважається сталою величиною, під знак похідної, то матимемо

$$\frac{d(M\overline{v}_c)}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k^e , \tag{3.19}$$

але бачимо, що у лівій частині у дужках, згідно виразу (3.6), $M\overline{v}_c = \overline{Q}$ – кількість руху механічної системи, отже перепишемо (3.19) так:

$$\frac{d\overline{Q}}{dt}=\sum_{k=1}^{n}\overline{F}_k^e\ . \qquad (3.20)$$

Отже формула (3.20) і є теоремою про зміну кількості руху механічної системи у диференціальній формі: *похідна за часом від вектора кількості руху механічної системи дорівнює геометричній сумі усіх зовнішніх сил, які діють на механічну систему.*

Помножимо ліву і праву частину (3.20) на dt, поділивши змінні,

$$d\overline{Q}=\sum_{k=1}^{n}\overline{F}_k^e\cdot dt\ . \qquad (3.21)$$

Інтегруємо почленно ліву та праву частини (3.21). Використаємо означені інтеграли, які беремо в границях, що відповідають кількості руху від Q_0 до Q_1 і моментам часу від 0 до t_1:

$$\int_{Q_0}^{Q_1}d\overline{Q}=\int_0^{t_1}\sum_{k=1}^{n}\overline{F}_k^e\cdot dt=\sum_{k=1}^{n}\int_0^{t_1}\overline{F}_k^e dt\ . \qquad (3.21)$$

Після інтегрування, якщо врахувати те, що у правій частині отриманого виразу є сума імпульсів зовнішніх сил, які діють на механічну систему, матимемо:

$$\overline{Q}_1-\overline{Q}_0=\sum_{k=1}^{n}\overline{S}_k^e\ . \qquad (3.22)$$

Отже, *зміна вектора кількості руху механічної системи за певний проміжок часу дорівнює геометричній сумі імпульсів усіх зовнішніх сил, які діють на дану систему.*

Вираз (3.22) у проекціях на осі координат $x, y,$ та z має вигляд:

$$Q_{1x} - Q_{0x} = \sum_{k=1}^{n} S_{kx}^{e},$$
$$Q_{1y} - Q_{0y} = \sum_{k=1}^{n} S_{ky}^{e}, \qquad (3.23)$$
$$Q_{1z} - Q_{0z} = \sum_{k=1}^{n} S_{kz}^{e}.$$

3.6. Закон збереження кількості руху механічної системи

Якщо геометрична сума усіх зовнішніх сил, які діють на механічну систему, буде дорівнювати нулю, то у виразі (3.20) $\frac{d\overline{Q}}{dt} = 0$, тому

$$\overline{Q} = const, \qquad (3.24)$$

тобто, *якщо геометрична сума усіх зовнішніх сил, які діють на механічну систему, дорівнює нулю, то кількість руху системи залишається незмінною.*

Якщо сума проекцій імпульсів зовнішніх сил на будь- яку вісь дорівнює нулю, наприклад $\sum_{k=1}^{n} S_{kx}^{e} = 0$, то з рівняння (3.23) випливає, що $Q_{1x} = Q_{0x}$, тобто проекція кількості руху на вісь Ox залишається незмінною.

Запитання для самоконтролю:

1. Що таке кількість руху матеріальної точки і системи, яка її розмірність?

2. Які міри руху існують в тілі, що рухається?
3. Як визначити імпульс змінної і сталої сили?
4. Сформулюйте теорему про зміну кількості руху матеріальної точки і системи.
5. Напишіть теорему про зміну кількості руху точки в диференціальній формі.
6. Сформулюйте закон збереження кількості руху матеріальної системи.

ЛЕКЦІЯ 4

4.1. Геометрія мас. Моменти інерції маси тіла

Положення центра мас тіла недостатньо повно характеризує розподіл мас по об'єму. Якщо маси усіх точок змістити на однакову відстань від центра мас, то положення центра мас не зміниться, але на рух тіла, особливо обертальний, це суттєво вплине. Тому у механіці введена ще одна характеристика розподілу мас по об'єму – моменти інерції маси тіла. Розрізняють моменти інерції осьові, полярні, відцентрові.

Осьовий момент інерції маси тіла (системи матеріальних точок) відносно осі "z" – це скалярна величина, котра дорівнює сумі добутків мас окремих точок на квадрати їх відстаней до осі z.

$$I_z = \sum_{k=1}^{n} m_k r_{kz}^2, \qquad k = 1,...,n. \tag{4.1}$$

Осьовий момент інерції маси тіла є завжди додатною величиною. Осьовий момент характеризує міру інертності тіла при обертальному русі. Тому тіло, у якого осьовий момент інерції більший, важче розкрутити, а якщо тіло уже обертається - важче зупинити.

Одиниця виміру осьового моменту інерції маси тіла:

Система CI: 1 *кг·м*^{2}.

Якщо тіло суцільне або має неперервний розподіл маси, то момент інерції твердого тіла визначається інтегралом, поширеним на всю масу:

$$I_z = \int_{(M)} r^2 dm. \tag{4.2}$$

Покажемо, як визначити осьові і полярні моменти тіла (рис. 4.1).

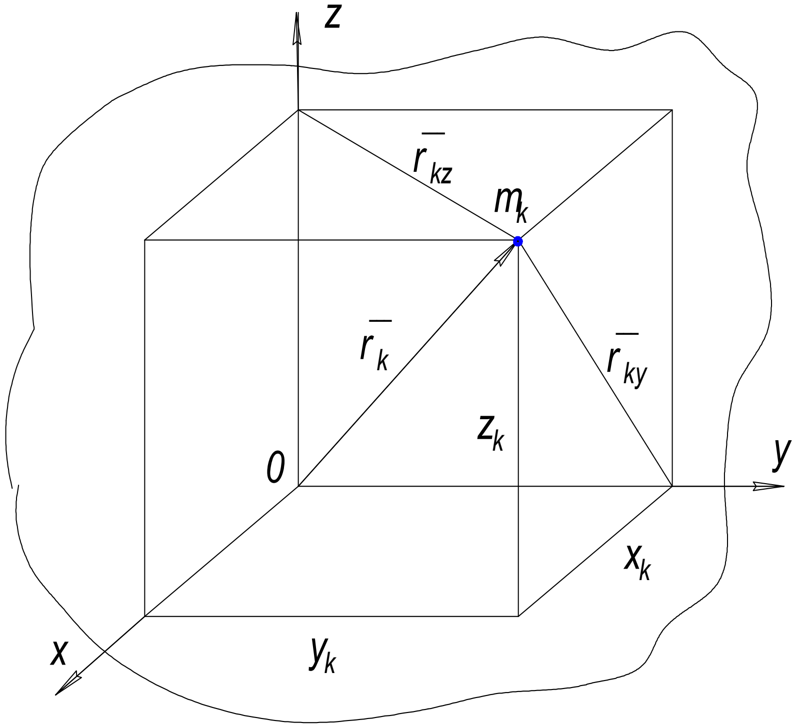


Рис. 4.1

Якщо відомі координати окремих точок тіла, то осьові моменти інерції маси тіла можна обчислювати за формулами:

$$I_z = \Sigma m_k r_{kz}^2 = \Sigma m_k \left(x_k^2 + y_k^2\right),$$

$$I_y = \Sigma m_k r_{ky}^2 = \Sigma m_k \left(x_k^2 + z_k^2\right), \tag{4.3}$$

$$I_x = \Sigma m_k r_{kx}^2 = \Sigma m_k \left(y_k^2 + z_k^2\right).$$

Якщо додати три осьових моменти інерції, то отримуємо:

$$I_x + I_y + I_z = 2\Sigma m_k \left(x_k^2 + y_k^2 + z_k^2\right) = 2\Sigma m_k r_k^2 = 2I_0,$$

де r_k – діагональ показаного на схемі паралелепіпеда, радіус-вектор k-тої точки.

$$I_0 = \Sigma m_k r_k^2, \tag{4.4}$$

$$r_k^2 = x_k^2 + y_k^2 + z_k^2,$$

де I_0 – полярний момент інерції, як сума добутків мас точок тіла на квадрати їх відстаней до полюса O.

4.2. Радіус інерції тіла

Радіус інерції ρ маси тіла – це відстань, на квадрат якої потрібно помножити масу тіла, щоб отримати осьовий момент інерції маси тіла.

$$I_z = M \cdot \rho^2, \tag{4.5}$$

де M – маса тіла.

З виразу (4.5) випливає співвідношення для визначення радіуса інерції

$$\rho = \sqrt{\frac{I_z}{M}}.$$

Геометрично радіус інерції тіла можна інтерпретувати, як радіус умовного нескінченно тонкого колового циліндра, маса і момент інерції якого дорівнюють масі і моменту інерції тіла.

4.3. Теорема Гюйгенса – Штейнера про моменти інерції маси тіла відносно паралельних осей

Припустимо, що маємо тіло, центр мас якого відомий і через нього проведена система центральних осей координат. Доведемо, чому дорівнює момент інерції маси тіла відносно осі, яка паралельна даній центральній осі і розміщена на відстані a від неї.

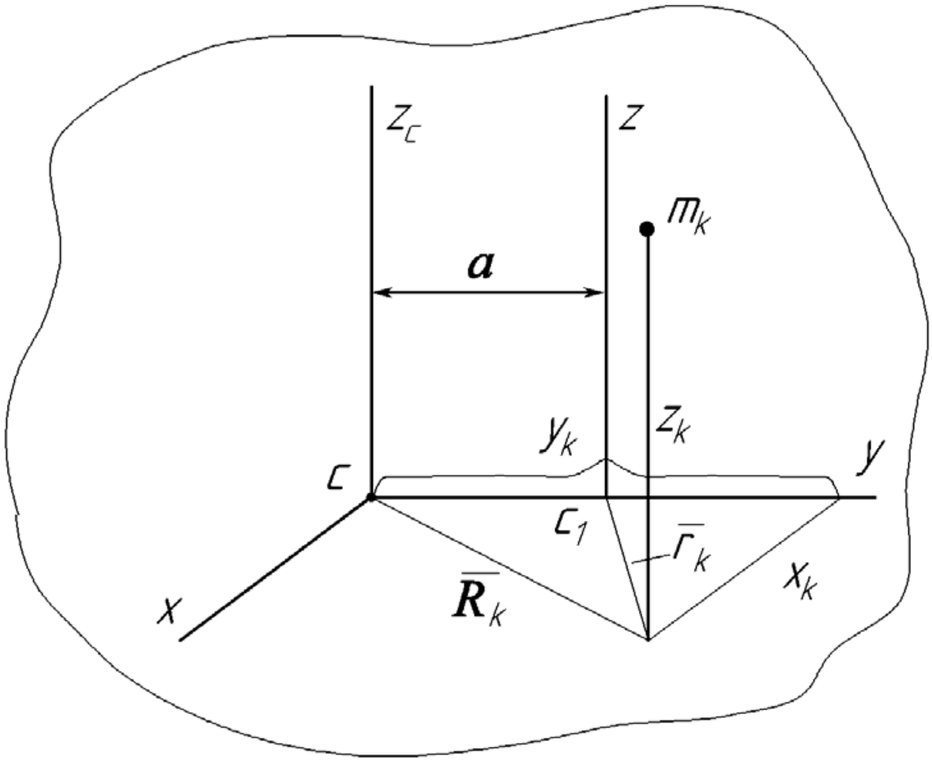


Рис. 4.2

M – маса тіла; C – центр мас; z_c – вісь, яка проходить через центр мас; z – вісь, яка паралельна осі z_c; a – відстань між осями.

Сформулюємо теорему Гюйгенса-Штейнера.

Момент інерції маси тіла відносно осі z дорівнює моменту інерції маси тіла відносно паралельної осі, яка проходить через центр мас, доданим до добутку маси тіла на квадрат відстані між осями (рис.4.2).

Для доведення розглянемо довільну точку m_k с координатами x_k, y_k, z_k відносно центральної осі. Відстані її до осей z_c і z дорівнюють відповідно R_k і r_k. Визначимо момент інерції маси тіла відносно осі, як суму добутків мас на квадрати їх відстаней до осі z:

$$I_z = \sum_{k=1}^{n} m_k r_k^2 = \Sigma m_k \left[(y_k - a)^2 + x_k^2 \right] = \Sigma m_k \left(y_k^2 + x_k^2 \right) + a^2 \Sigma m_k - 2a \Sigma m_k y_k .$$

Проаналізуємо три доданки: $\Sigma m_k \left(y_k^2 + x_k^2\right) = \Sigma m_k R_k^2 = I_{z_c}$ – момент інерції тіла відносно центральної осі z_c. $\Sigma m_k = M$ – маса тіла, доданок $\Sigma m_k y_k = M \cdot y_c = 0$ дорівнює нулю, оскільки координата центра мас $y_c = 0$ відносно центральної осі.

Остаточно:

$$I_z = I_{z_c} + M \cdot a^2. \tag{4.6}$$

Теорему доведено.

4.4. Приклади обчислювання моментів інерції тіл простої форми

1) Однорідний тонкий стержень масою M обертається навколо осі z, яка проходить через кінець стержня (рис. 4.3).

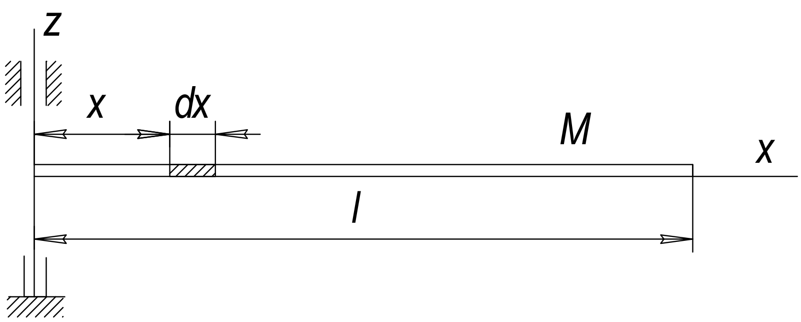


Рис. 4.3

$I_z = \int dm \cdot r^2$, як для суцільного тіла; $r = x$; елементарна маса для тонкого стержня (лінії) дорівнюватиме

$$dm = \mu \cdot dx,$$

де $\mu = \dfrac{M}{l}$ – маса одиниці довжини стержня.

Тоді осьовий момент інерції дорівнює:

$$I_z = \int_0^l dm \cdot x^2 = \int_0^l \mu dx \cdot x^2 = \mu \int_0^l x^2 dx = \left.\frac{\mu x^3}{3}\right|_0^l = \frac{\mu l^3}{3} = \frac{\mathrm{M} \cdot l^3}{l \cdot 3} = \frac{\mathrm{M} \cdot l^2}{3};$$
$$I_z = \frac{Ml^2}{3}. \qquad (4.6)$$

2) Однорідний стержень масою M і довжиною l обертається навколо осі, яка проходить через його середину (рис. 4.4).

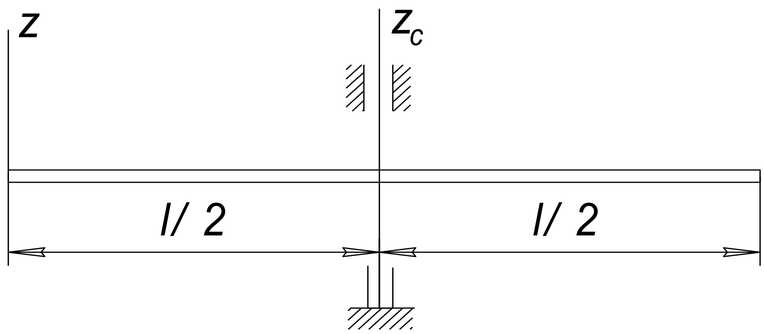


Рис. 4.4

Згідно з теоремою Гюйгенса – Штейнера $I_z = I_{zc} + M\left(\dfrac{l}{2}\right)^2$, звідкіля

$$I_{zc} = I_z - \frac{Ml^2}{4} = \frac{Ml^2}{3} - \frac{Ml^2}{4} = \frac{Ml^2}{12};$$

$$I_z = \frac{Ml^2}{12}. \qquad (4.7)$$

3) Однорідне тонке кільце радіуса R. Вісь z перпендикулярна площині кільця.

Усі точки кільця розташовані на однаковій відстані R від осі z, тому момент інерції маси кільця дорівнює $I_z = MR^2$. Для двох інших взаємоперпендикулярних осей момент інерції вдвічі менше.

4) Кругла однорідна пластина або однорідний циліндр радіуса R (рис.4.5).

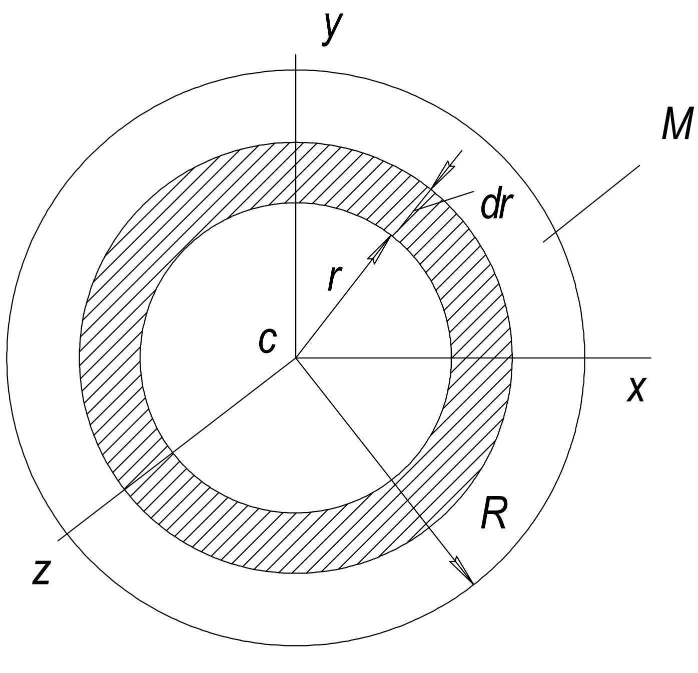


Рис. 4.5

Враховуючи, що $\mu = \dfrac{M}{\pi R^2}$ – маса, яка припадає на одиницю площі круга, то елементарна маса буде дорівнювати:

$$dm = \mu \cdot ds = \mu \cdot 2\pi r \cdot dr\,,$$

тоді

$$I_z = \int_0^R dm \cdot r^2 = \int_0^R \mu \cdot 2\pi r \cdot dr \cdot r^2 = 2\pi\mu \int_0^R r^3 dr = \frac{\mu\pi R^4}{2} = \frac{\mathrm{M}\pi R^4}{2\pi R^2} = \frac{\mathrm{M}R^2}{2};$$

$$I_z = \frac{MR^2}{2}; \tag{4.8}$$

$$I_x = I_y = \frac{\mathrm{M}R^2}{4}.$$

5) Прямий коловий однорідний конус масою M і радіусом основи R

$$I_z = 0.3MR^2,$$

де z – вісь, яка проходить крізь вершину і центр кола основи.

6) Однорідна куля радіуса R

$$I_z = I_x = I_y = 0.4\mathrm{M}R^2.$$

4.5. Відцентрові моменти інерції маси тіла

Осьові моменти інерції маси тіла не повністю характеризують розподіл маси по об'єму тіла. Для характеристики асиметричного розподілу мас в механіці введені, так звані, відцентрові моменти інерції.

$$I_{xy} = \sum m_k x_k y_k\,;\; I_{xz} = \sum m_k y_k z_k\,;\; I_{xz} = \sum m_k x_k z_k \tag{4.9}$$

Для суцільного тіла знак суми замінюється інтегралом

$$I_{xy} = \int_M dm \cdot x \cdot y.$$

Таким чином, відцентровий момент інерції дорівнює сумі добутків мас точок на їх відстані до двох координатних осей.

Величини відцентрових моментів інерції залежать від напрямку координатних осей і вибору початку координат. Тому, говорячи про відцентровий момент у даній точці, розуміють, що початок координат збігається з цією точкою. Відцентрові моменти інерції можуть дорівнювати нулю і мати додатний або від'ємний знак.

4.6. Осьовий момент інерції маси тіла відносно осі довільного спрямування

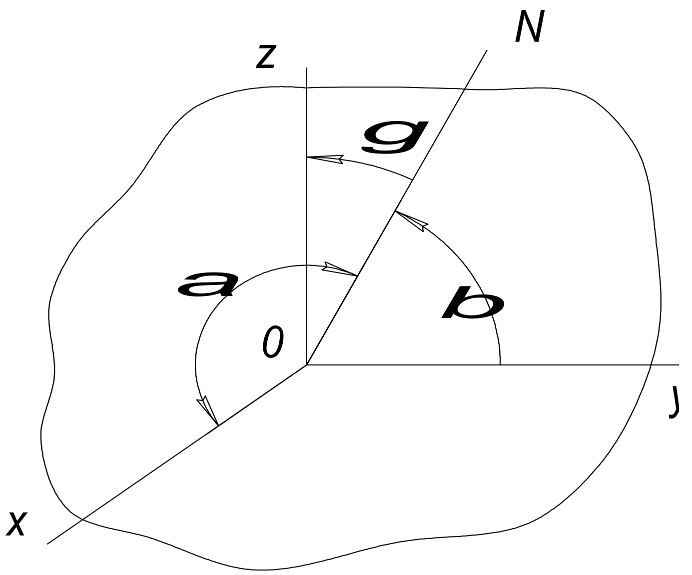


Рис. 4.6.

Припустимо, що напрямок довільної осі N заданий кутами α, β, γ з відповідними осями x, y, z (рис.4.6). Відомі також осьові і відцентрові моменти інерції тіла $I_x, I_y, I_z, I_{xy}, I_{xz}, I_{yz}$. Тоді залежність між моментом інерції твердого тіла (матеріальної системи) відносно довільної осі ON, що проходить через початок координат, і моментами інерції відносно координатних осей Ox, Oy, Oz має такий вигляд:

$$I_N = I_x \cos^2\alpha + I_y \cos^2\beta + I_z \cos^2\gamma - \\ - 2I_{xy}\cos\alpha\cos\beta - 2I_{yz}\cos\beta\cos\gamma - 2I_{xz}\cos\alpha\cos\gamma \, .$$

4.7. Головні осі та головні моменти інерції тіла

Нехай вісь Oz – вісь симетрії тіла. Тоді в тілі завжди знайдуться точки з симетричними координатами по одну і другу сторону від осі:

$$\begin{cases} x_k;\ y_k;\ z_k; \\ -x_k;\ -y_k;\ z_k. \end{cases}$$

Асиметрія відсутня і моменти інерції тіла, що характеризують асиметрію – відцентрові моменти інерції – повинні дорівнювати нулю:

$$\begin{cases} \sum m_k x_k z_k = 0 \\ \sum m_k y_k z_k = 0 \end{cases}, \qquad \text{тобто} \qquad \begin{cases} I_{xz} = 0 \\ I_{yz} = 0. \end{cases}$$

Вісь Oz, для якої відцентрові моменти інерції дорівнюють нулю, $I_{xz} = 0,\ I_{yz} = 0$, є головною віссю інерції тіла.

Таким чином, якщо тіло має вісь симетрії, то вона є головною віссю інерції. Якщо усі відцентрові моменти інерції дорівнюють нулю, тобто

$I_{xy} = 0$; $I_{xz} = 0$; $I_{yz} = 0$, то кожна з координатних осей є головною віссю інерції даного тіла для точки O початку координат.

Моменти інерції тіла відносно головних осей інерції є головними моментами інерції.

Через довільну точку будь-якого тіла завжди можна провести хоч би одну систему трьох взаємно перпендикулярних осей, для котрих відцентрові моменти інерції дорівнюють нулю, тоді кожна з цих осей буде головною віссю інерції тіла.

Довільна вісь, яка проходить через центр мас тіла, називається центральною. Головна вісь інерції, яка проходить через центр мас, є головною центральною віссю інерції.

Моменти інерції маси тіла відносно цих осей – головні центральні моменти інерції тіла.

Запитання для самоконтролю:

1. Які моменти інерції маси тіла Вам відомі?
2. В яких одиницях вимірюється момент інерції тіла і що він характеризує?
3. Що таке радіус інерції тіла?
4. Сформулюйте теорему Гюйгенса – Штейнера для паралельних осей?
5. Як обчислити моменти інерції стержня, суцільного і трубчастого циліндра, кулі, конуса?
6. Що таке відцентрові моменти інерції тіла і як вони характеризують розподіл маси тіла?
7. Як визначити момент інерції тіла відносно довільної осі?
8. Які осі в тілі є головними, центральними осями?

ЛЕКЦІЯ 5

ТЕОРЕМИ ПРО ЗМІНУ КІНЕТИЧНОГО МОМЕНТУ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ І СИСТЕМИ

5.1. Момент кількості руху матеріальної точки відносно центра і осі

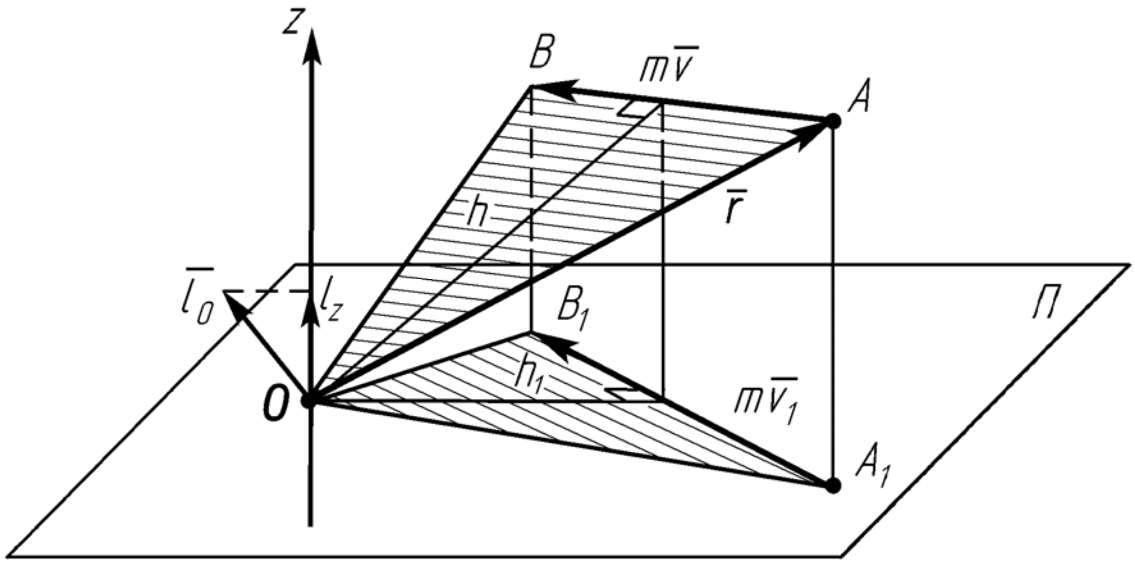


Рис. 5.1

Поняття моменту відносно центра і осі можуть бути застосовані до будь-яких векторів, зокрема і до вектора сили або кількості руху матеріальної точки.

За аналогією з моментом сили момент кількості руху $(m\bar{v})$ *матеріальної точки відносно центра O (рис.5.1) є вектор* $\bar{l}_o$*, який перпендикулярний до площини* OAB*, яку утворюють вектор* $(m\bar{v})$ *і центр*

O, і спрямований у той бік, звідки здається, що вектор $(m\bar{v})$ намагається повернути площину відносно центра O проти ходу годинникової стрілки (правило свердлика).

Модуль моменту кількості руху точки відносно центра O дорівнює добутку модуля кількості руху точки на плече h – найкоротшу відстань від центра моменту до прямої лінії, на який розташований вектор $(m\bar{v})$

$$l_0 = mv \cdot h = 2S\Delta OAB. \tag{5.1}$$

Момент кількості руху матеріальної точки відносно центра O може бути записаний у вигляді векторного добутку радіус-вектора $\bar{r}$ рухомої точки A відносно центра O на вектор кількості руху точки

$$\bar{l}_o = \bar{r} \times m\bar{v}. \tag{5.2}$$

Момент кількості руху матеріальної точки відносно осі z дорівнює моменту проекції $m\bar{v}_1$ кількості руху точки на площину Π, яка перпендикулярна до осі z, відносно точки O перетину осі з площиною Π.

$$l_z = m_z(m\bar{v}) = \pm np_{\Pi}(m\bar{v}) \cdot h_1 = mv_1 \cdot h_1 = 2S\Delta OA_1B_1. \tag{5.3}$$

Момент кількості руху відносно центра може бути виражений через визначник

$$\bar{l}_0 = \bar{r} \times m\bar{v} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x & y & z \\ mv_x & mv_y & mv_z \end{vmatrix} =$$
$$= \bar{i}(ymv_z - zmv_y) + \bar{j}(zmv_x - xmv_z) + \bar{k}(xmv_y - ymv_x).$$

Вектор $\bar{l}_0$ можна уявити через його проекції на осі координат

$$\bar{l}_0 = \bar{i}l_x + \bar{j}l_y + \bar{k}l_z.$$

Порівнюючи вирази, можна записати:

$$l_x = ymv_z - zmv_y; \quad l_y = zmv_x - xmv_z; \quad l_z = xmv_y - ymv_x,$$

де x, y, z – координати точки A; $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ – орти координатних осей; mv_x, mv_y, mv_z – проекції вектора $m\bar{v}$ на осі.

5.2. Теорема про зміну моменту кількості руху точки

Припустимо, що рух точки M вздовж траєкторії відбувається зі швидкістю $\bar{v}$ і прискоренням $\bar{a}$ під дією сили $\bar{P}$ (рис. 5.2). Тоді момент кількості руху точки і момент сили $\bar{P}$ відносно центра O дорівнюють:

$$\bar{l}_o = \overline{m}_o(m\bar{v}) = \bar{r} \times m\bar{v}, \; \overline{M}_0 = \overline{m}_0(\overline{P}) = \bar{r} \times \overline{P},$$

де $\bar{r}$ і $(m\bar{v})$ – змінні вектори; $\bar{r}$ – радіус-вектор точки M відносно центра O.

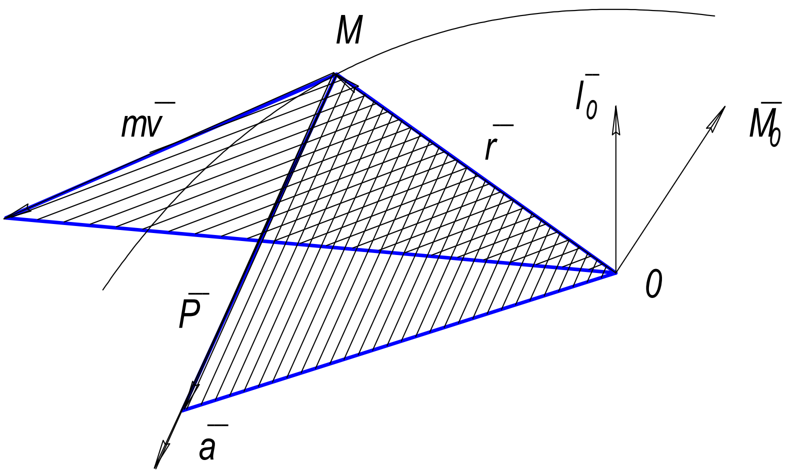


Рис. 5.2

Візьмемо похідну за часом від вектора моменту кількості руху матеріальної точки:

$$\frac{d\bar{l}_o}{dt} = \frac{d\bar{r}}{dt} \times (m\bar{v}) + \bar{r} \times \frac{d(m\bar{v})}{dt},$$

але $\frac{d\bar{r}}{dt} \times m\bar{v} = \bar{v} \times m\bar{v} = 0$, оскільки вектори паралельні,

$$\frac{d(m\bar{v})}{dt} = m\frac{d\bar{v}}{dt} = m\bar{a} = \bar{P},$$

де $\bar{P}$ – рівнодійна сила, яка діє на точку,

тоді $$\bar{r} \times \frac{d(m\bar{v})}{dt} = \bar{r} \times \bar{P} = \bar{m}_o(\bar{P}) = \bar{M}_0.$$

Остаточно будемо мати:

$$\frac{d\bar{l}_o}{dt} = \frac{d}{dt}(\bar{m}_0(m\bar{v})) = \bar{m}_0(\bar{P}) = \bar{M}_0 \tag{5.4}$$

Похідна за часом від моменту кількості руху матеріальної точки відносно довільного центра O дорівнює моменту рівнодійної сили відносно того ж центра O.

Проектуючи останній вираз на осі, отримаємо

$$\frac{dl_z}{dt} = \frac{d}{dt} m_z(m\bar{v}) = m_z(P); \quad \frac{dl_x}{dt} = m_x(P); \quad \frac{dl_y}{dt} = m_y(P). \tag{5.5}$$

Похідна за часом від моменту кількості руху точки відносно будь-якої нерухомої осі дорівнює моменту рівнодійної сили відносно цієї осі.

5.3. Закон збереження моменту кількості руху точки відносно центра і осі

Якщо $\bar{m}_o(\bar{P}) = 0$, то $\frac{d\bar{l}_o}{dt} = 0 \Rightarrow \bar{l}_o = \bar{m}_o(m\bar{v}) = const$.

Якщо момент рівнодійної сили відносно будь-якого центра дорівнює нулю, то момент кількості руху точки відносно даного центра залишається сталим.

Якщо $m_z(\overline{P}) = 0$, то $\frac{dl_z}{dt} = 0 \Rightarrow l_z = const$.

Якщо момент рівнодійної сили, яка діє на матеріальну точку, відносно будь-якої осі z дорівнює нулю, то момент кількості руху даної точки відносно цієї осі залишається сталим.

5.4. Головний момент кількості руху механічної системи або кінетичний момент відносно центра і осі

Головним або кінетичним моментом механічної системи відносно будь-якого центра є вектор $\overline{L}_o$, який дорівнює геометричній сумі векторів $\bar{l}_{ok}$ моментів кількості руху усіх точок системи відносно цього центра.

$$\overline{L}_o = \sum \bar{l}_{ok} = \sum \overline{m}_o(m_k \bar{v}_k) = \sum (\bar{r}_k \times m_k \bar{v}_k). \tag{5.6}$$

Кінетичним або головним моментом кількості руху механічної системи відносно будь-якої осі z є алгебраїчна сума моментів l_{zk} кількості руху усіх точок системи відносно осі z.

$$L_z = \sum l_{zk} = \sum m_z(m_k \bar{v}_k).$$

5.5. Кінетичний момент твердого тіла відносно осі обертання

Тіло обертається навколо нерухомої осі z (рис.5.3).

Запишемо для кожної точки m_k тіла момент кількості руху відносно осі обертання:

$$l_{zk} = m_z(m_k \bar{v}_k) = m_k v_k \cdot r_k = m_k \omega r_k^2; \qquad v_k = \omega \cdot r_k .$$

Тоді кінетичний момент твердого тіла відносно осі z після підсумування по всіх точках буде мати вираз:

$$L_z = \sum l_{zk} = \sum m_k \omega r_k^2 = \omega \sum m_k r_k^2 = I_z \cdot \omega;$$

$$L_z = I_z \cdot \omega . \tag{5.7}$$

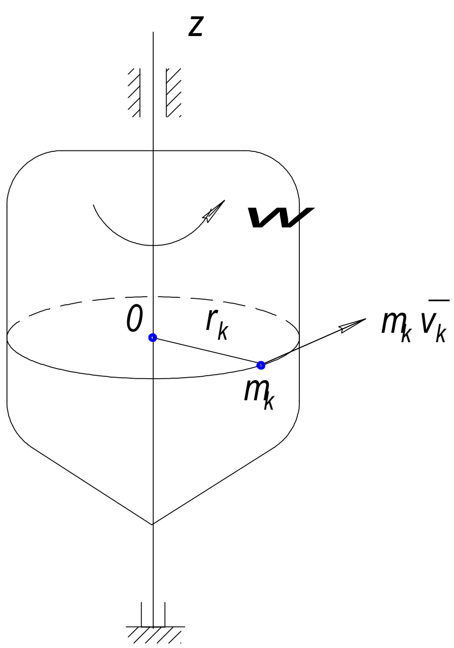


Рис. 5.3

Кінетичний момент твердого тіла відносно осі обертання z дорівнює добутку осьового моменту інерції маси тіла відносно осі на кутову швидкість тіла.

5.6. Теорема про зміну кінетичного моменту механічної системи

Нехай механічна система складається з n матеріальних точок з відповідними масами, на які діють рівнодійні зовнішніх $\overline{F}_k^e$ та внутрішніх $\overline{F}_k^{in}$ сил:

$m_1, m_2, \ldots, m_n$ – маси точок матеріальної системи;

$\overline{F}_1^e, \overline{F}_2^e, \ldots, \overline{F}_n^e$ – зовнішні сили, які прикладені до точок;

$\overline{F}_1^{in}, \overline{F}_2^{in}, \ldots, \overline{F}_n^{in}$ – внутрішні сили взаємодії між точками;

$\bar{l}_{10} \quad \bar{l}_{20} \ldots \bar{l}_{n0}$ – моменти кількості руху точок відносно центра O.

Для кожної точки застосуємо теорему про зміну моменту кількості руху:

$$\frac{d\bar{l}_{ok}}{dt} = \overline{m}_o\left(\overline{F}_k^e\right) + \overline{m}_o\left(\overline{F}_k^{in}\right), \qquad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Просумуємо останній вираз по всіх точках системи:

$$\sum \frac{d\bar{l}_{ok}}{dt} = \sum \overline{m}_o\left(\overline{F}_k^e\right) + \sum \overline{m}_o\left(\overline{F}_k^{in}\right),$$

або
$$\frac{d}{dt}\sum \bar{l}_{ok} = \sum \overline{m}_o\left(\overline{F}_k^e\right) + \sum \overline{m}_o\left(\overline{F}_k^{in}\right).$$

Але $\sum \bar{l}_{ok} = \overline{L}_o$ – кінетичний момент системи,

$\sum \overline{m}_o\left(\overline{F}_k^{in}\right) = 0$ – властивість внутрішніх сил.

Тоді остаточно маємо:

$$\frac{d\overline{L}_o}{dt} = \sum \overline{m}_o\left(\overline{F}_k^e\right) \tag{5.8}$$

Похідна за часом від кінетичного моменту $\overline{L}_0$ *механічної системи відносно будь-якого центра* O *дорівнює головному моменту усіх зовнішніх сил відносно того ж центра.*

Проектуючи останній вираз на осі координат, отримаємо:

$$\frac{dL_z}{dt} = \sum m_z\left(\overline{F}_k^e\right); \quad \frac{dL_x}{dt} = \sum m_x\left(\overline{F}_k^e\right); \quad \frac{dL_y}{dt} = \sum m_y\left(\overline{F}_k^e\right). \qquad (5.9)$$

Похідна за часом від кінетичного моменту механічної системи відносно нерухомої осі дорівнює алгебраїчній сумі моментів усіх зовнішніх сил, що діють на систему, відносно цієї осі.

5.7. Закон збереження кінетичного моменту механічної системи

Може статися, що $\sum \overline{m}_o\left(\overline{F}_k^e\right) = 0$. Тоді $\overline{L}_o = \sum \overline{m}_o\left(m_k \overline{v}_k\right) = const$.

Якщо головний момент зовнішніх сил, які діють на систему, відносно будь-якого центра O *дорівнює нулю, то кінетичний момент механічної системи відносно цього центра зберігає своє значення.*

Може статися випадок, коли $\sum m_z\left(F_k^e\right) = 0$, то $L_z = \sum m_z\left(m_k v_k\right) = const$.

Якщо алгебраїчна сума моментів усіх зовнішніх сил відносно будь-якої осі z дорівнює нулю, то кінетичний момент цієї системи відносно осі z зберігає свою величину.

Для твердого тіла, яке обертається навколо осі z з кутовою швидкістю ω, кінетичний момент теж зберігає своє значення $L_z = I_z \cdot \omega = const$, а це означає, що коли, наприклад, зменшується осьовий момент інерції маси тіла I_z, то кутова швидкість повинна збільшуватись, щоб зберегти добуток незмінним:

$$I_{z_1} \cdot \omega_1 = I_{z_2} \cdot \omega_2 = \ldots = const.$$

Цей закон добре демонструє лава Жуковського, яку розкручують навколо вертикальної осі. І якщо в цей момент людина, яка стоїть на лаві, різко підніме руки в сторони, збільшуючи свій момент інерції навколо вертикальної осі, то кутова швидкість дуже помітно знизиться.

Запитання для самоконтролю:

1. Визначити поняття моменту кількості руху матеріальної точки і системи.
2. Сформулюйте теорему про зміну моменту кількості руху матеріальної точки.
3. Сформулюйте теорему про зміну кінетичного моменту матеріальної системи.
4. Як визначити кінетичний момент твердого тіла відносно осі обертання?
5. Як за допомогою визначника обчислюється момент кількості руху матеріальної точки?
6. Сформулюйте закон збереження кінетичного моменту матеріальної системи.
7. Наведіть приклади із побиту, як працює закон збереження кінетичного моменту системи.

ЛЕКЦІЯ 6

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ РУХУ ТВЕРДОГО ТІЛА

6.1. Поступальний рух твердого тіла

При поступальному русі твердого тіла усі його точки рухаються однаково, як і його центр мас. Тому диференціальні рівняння руху центра мас тіла і є диференціальними рівняннями поступального руху твердого тіла.

$$\begin{cases} M\ddot{x}_c = \sum F_{kx}^e, \\ M\ddot{y}_c = \sum F_{ky}^e, \\ M\ddot{z}_c = \sum F_{kz}^e, \end{cases} \tag{6.1}$$

де m – маса тіла, x_c, y_c, z_c – координати центра мас, F_{kx}^e, F_{ky}^e, F_{kz}^e – проекції зовнішньої k-тої сили на осі координат.

Таким чином, вивчення поступального руху твердого тіла зводиться до вивчення руху окремої точки, наприклад, центра ваги або центра мас, маса якої дорівнює масі всього тіла.

6.2. Диференціальні рівняння обертального руху твердого тіла відносно нерухомої осі

Нехай тверде тіло (рис. 6.1) під дією прикладених до нього сил $\overline{P}_1^e, \overline{P}_2^e, ..., \overline{P}_n^e$ обертається навколо нерухомої осі z з кутовою швидкістю

ω. Згідно з теоремою про зміну кінетичного моменту системи маємо:

$$\frac{dL_z}{dt} = \sum m_z(\overline{P}_k).$$

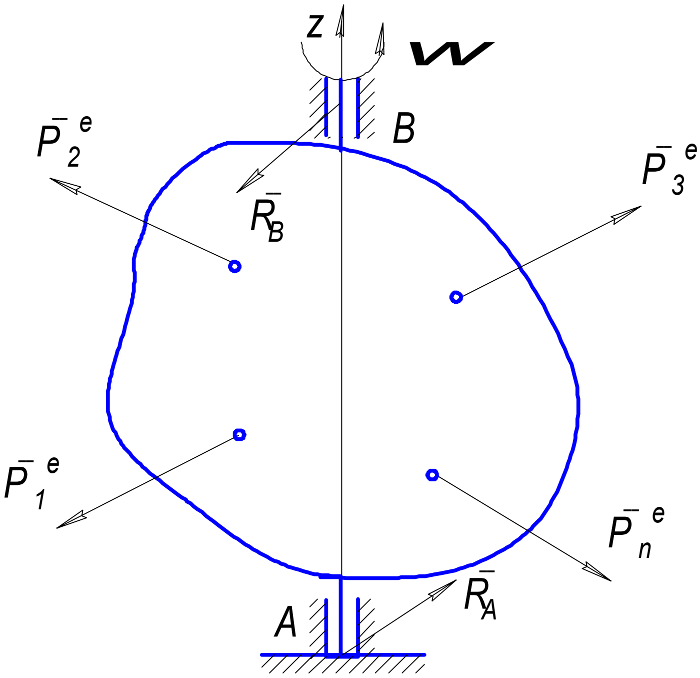


Рис. 6.1

Але кінетичний момент твердого тіла відносно осі обертання z дорівнює

$$L_z = I_z \cdot \omega,$$

де $I_z = const$ – осьовий момент інерції маси тіла; ω – кутова швидкість.

Тоді $I_z \dfrac{d\omega}{dt} = \sum m_z\left(\overline{P}_k^e\right)$, але відомо, що $\dfrac{d\omega}{dt} = \varepsilon = \dfrac{d^2\varphi}{dt^2}$ – кутове прискорення.

Таким чином, диференціальне рівняння обертального руху твердого тіла може бути записане у варіантах:

$$I_z \cdot \varepsilon = \sum m_z\left(\overline{P}_k^e\right);$$

$$I_z \cdot \frac{d\omega}{dt} = \sum m_z\left(\overline{P}_k^e\right); \tag{6.2}$$

$$I_z \cdot \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \sum m_z\left(\overline{P}_k^e\right).$$

Добуток осьового моменту інерції маси тіла відносно осі обертання на кутове прискорення дорівнює алгебраїчній сумі моментів усіх зовнішніх сил відносно цієї ж осі.

При вивченні обертального руху тіла за додатний приймають напрямок обертання. Тоді моменти рушійних сил, які рухають і спрямовані в напрямку обертання, мають завжди додатні значення, а моменти сил опору, які спрямовані протилежно напряму обертання – від’ємні.

Якщо $\sum m_z\left(\overline{P}_k^e\right) > 0$, то $\varepsilon = \ddot{\varphi} > 0$ – обертальний рух прискорений.

Якщо $\sum m_z\left(\overline{P}_k^e\right) < 0$, то $\varepsilon = \ddot{\varphi} < 0$ – обертальний рух сповільнений.

Якщо $\sum m_z\left(\overline{P}_k^e\right) = 0$, то $\varepsilon = \ddot{\varphi} = 0$ – обертання рівномірне ($\omega = const$).

Приклад 6.1.

Колесо масою M і радіусом R обертається навколо осі Oz з кутовою швидкістю ω_0. Визначити час гальмування t_1 і кут повороту φ_1 до зупинки, якщо сила тиску, яка прикладена до колодки, дорівнює T, а коефіцієнт тертя ковзання дорівнює f (рис. 6.3).

M – маса колеса (розподілена по ободу);

ω_0 – початкова кутова швидкість;

T – сила, яка притискує гальмівну колодку до колеса;

f – коефіцієнт тертя ковзання;

R – радіус колеса;

$\omega_1 = 0$ – кінцева кутова швидкість.

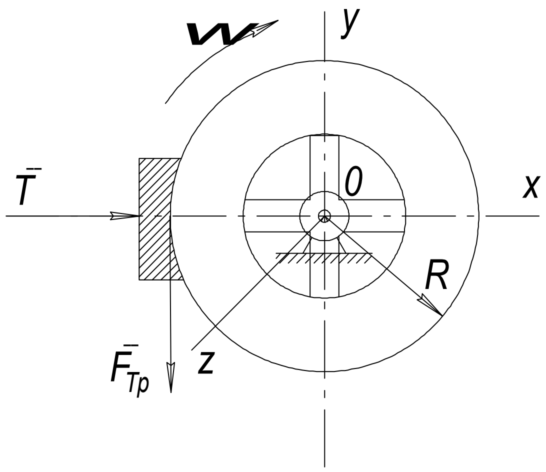


Рис. 6.3

Розв'язання.

Диференціальне рівняння обертального руху колеса:

$$I_{oz}\frac{d\omega}{dt} = -F_{mp}\cdot R = -f\cdot T\cdot R\,; \qquad \frac{d\omega}{dt} = -\frac{fTR}{I_{oz}}\,.$$

Після розділення змінних і інтегрування маємо:

$$\omega = -\frac{fTR}{I_{oz}}\cdot t + c_1;\ \text{при} \quad t=0:\ \omega=\omega_0 \Rightarrow c_1=\omega_0;\ \omega=\omega_0-\frac{fTR}{I_{oz}}\cdot t \qquad \text{(а)}$$

При зупинці колеса $\omega = 0$ і із виразу (а) маємо:

$$\omega_0 = \frac{fTR}{I_{oz}}\cdot t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{\omega_0 I_{oz}}{fTR}\,. \qquad \text{(б)}$$

Визначимо кут повороту колеса:

$$\varphi = \int\omega\cdot dt = \int\left(\omega_0 - \frac{fTR}{I_{oz}}\cdot t\right)\cdot dt = \omega_0 t - \frac{fTR}{2I_{oz}}t^2 + c_2\,.$$

При $t = 0$: $\varphi = 0$, тоді $c_2 = 0$ і остаточно:

$$\varphi_1 = \omega_0 t_1 - \frac{fTRt_1^2}{2I_{oz}} = \frac{fTRt_1^2}{2I_{oz}}. \qquad \text{(в)}$$

Обчислимо за умовою момент інерції колеса I_{oz}:

$$I_{oz} = MR^2.$$

Підставимо його значення в рівняння (б) і (в) і отримаємо відповідь:

$$t_1 = \frac{M\omega_0 R}{fT}; \quad \varphi_1 = \frac{fTt_1^2}{2MR}.$$

6.3. Фізичний маятник

Фізичним маятником називають тверде тіло, що має горизонтальну вісь обертання, яка не проходить через центр ваги тіла.

Маятник може обертатися навколо горизонтальної осі під дією тільки сили ваги.

Положення маятника визначається кутом φ (рис. 6.2). Диференціальне рівняння обертального руху маятника буде мати вираз

$$I_z \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \sum m_z\left(\overline{P}_k^e\right),$$

$$\sum m_z\left(\overline{P}_k^e\right) = -G \cdot h = -G \cdot r_c \sin\varphi,$$

тобто

$$I_z \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -Gr_c \sin\varphi.$$

Для малих кутів відхилення тіла від стану рівноваги $\sin\varphi \approx \varphi$.

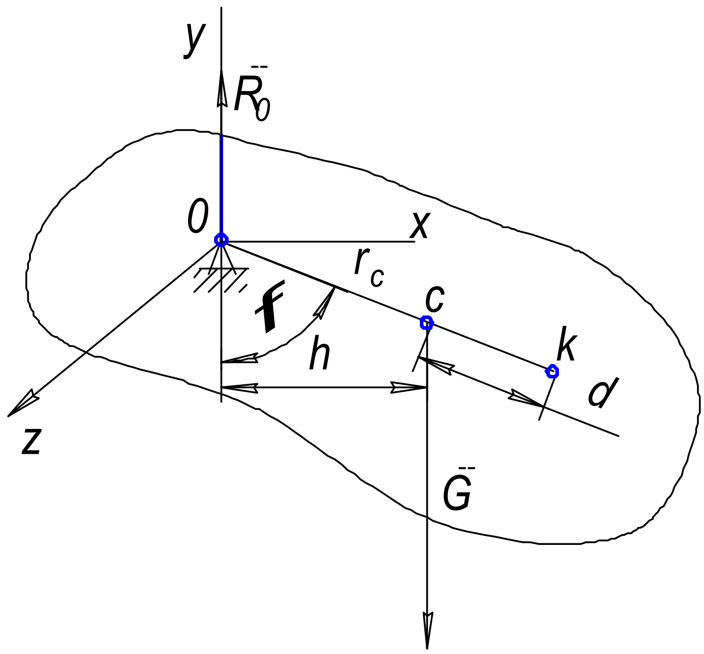


Рис. 6.2

Тоді $$I_z \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -Gr_c \cdot \varphi, \quad \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{Gr_c}{I_z} \cdot \varphi .$$

Позначимо $$k^2 = \frac{G \cdot r_c}{I_z}; \quad k = \sqrt{\frac{G \cdot r_c}{I_z}} .$$

Тоді $$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + k^2\varphi = 0 . \tag{6.3}$$

Рівняння (6.3) – однорідне диференціальне рівняння другого порядку, характеристичне рівняння якого виглядає так:

$$r^2 + k^2 = 0 .$$

Корені характеристичного рівняння

$$r_{1,2} = \pm ki,$$

де $i = \sqrt{-1}$.

Загальний розв'язок рівняння (6.3) має вигляд:

$$\varphi = c_1 \sin kt + c_2 \cos kt, \tag{6.4}$$

початкові умови при $t = 0$: $\omega_0 = 0$; $\varphi = \varphi_0$, похідна за часом від (6.4):

$$\omega = c_1 k \cos kt - c_2 k \sin kt. \tag{6.5}$$

Звідки з (6.4) і (6.5): $c_1 = 0$; $c_2 = \varphi_0$.

Остаточно маємо закон малих коливань фізичного маятника:

$$\varphi = \varphi_0 \cos kt, \tag{6.6}$$

де k – кругова (колова) частота (*рад/с*).

Період коливань маятника

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \sqrt{\frac{I_z}{G \cdot r_c}}. \tag{6.7}$$

Формула (6.7) використовується для визначення осьового моменту інерції маси тіла відносно осі обертання I_z і відносно центральної осі I_{zc}.

$$I_z = \frac{T^2 G \cdot r_c}{4\pi^2}, \tag{6.8}$$

$$I_{zc} = I_z - \frac{G}{g} r_c^2. \tag{6.9}$$

6.4. Зведена довжина фізичного маятника

Зведеною довжиною фізичного маятника називають довжину такого математичного маятника, у якого період коливань дорівнює періоду коливань фізичного маятника.

$T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$ – період коливань математичного маятника,

$T = 2\pi\sqrt{\dfrac{I_z}{G \cdot r_c}}$ – період коливань фізичного маятника.

Прирівняємо періоди і знайдемо зведену довжину фізичного маятника:

$$2\pi\sqrt{\frac{l_{зв}}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{I_z}{G \cdot r_c}}, \qquad l_{зв} = \frac{I_z \cdot g}{G \cdot r_c} = \frac{I_z}{m \cdot r_c}.$$

Застосуємо теорему Штейнера: $I_z = I_{zc} + mr_c^2$,

$$l_{зв} = \frac{I_{zc} + mr_c^2}{mr_c} = r_c + \frac{I_{zc}}{mr_c}, \qquad l_{зв} = r_c + d; \qquad d = \frac{I_{zc}}{mr_c}.$$

Точка K – центр коливання фізичного маятника. До неї прикладена рівнодійна усіх сил інерції точок тіла при його коливанні навколо осі. Центр коливання має властивість взаємності з точкою підвішування 0: якщо тіло підвісити в точці K, то центром коливання стає точка 0.

6.5. Диференціальні рівняння плоского руху твердого тіла

Відомо, що плоский або плоскопаралельний рух твердого тіла можна уявити, як суму двох найпростіших рухів: поступального разом з полюсом і обертального відносно полюса. Якщо обрати за полюс центр мас тіла точку *C,* то поступальна частина руху буде визначатись рівнянням:

$$m\overline{a}_c = \sum \overline{P}_k^e. \qquad (6.10)$$

Обертальний рух відносно полюса визначається рівнянням:

$$I_{zc} \cdot \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \sum m_z\left(\overline{P}_k^e\right). \tag{6.11}$$

У координатній формі диференціальні рівняння плоского руху тіла набувають вигляду:

$$\begin{cases} M \cdot \ddot{x}_c = \sum P_{kx}, \\ M \cdot \ddot{y}_c = \sum P_{ky}, \\ I_{zc} \cdot \ddot{\varphi} = \sum m_z\left(\overline{P}_k^e\right). \end{cases} \tag{6.12}$$

Приклад 6.2.

Суцільний однорідний круглий циліндр радіуса R скочується з похилої площини без ковзання. Визначити величину прискорення центра циліндра $\overline{a}_c$ і силу $\overline{F}$, яка утримує циліндр від ковзання (рис. 6.3).

M – маса циліндра,

$G = m \cdot g$ – вага циліндра,

R – радіус циліндра,

ε – кутове прискорення циліндра.

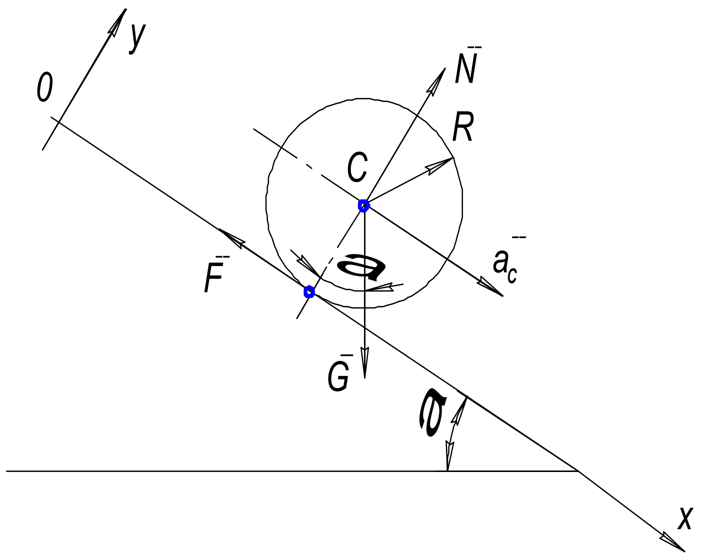


Рис. 6.3

Розв'язання.

Диференціальні рівняння плоского руху:

$$\begin{cases} M \cdot a_c = G\sin\alpha - F, & (a) \\ I_{zc} \cdot \varepsilon = F \cdot R, & (б) \end{cases}$$

$\varepsilon = \dfrac{a_c}{R}$ – підставимо в рівняння (*б*):

$$I_{zc} \cdot \frac{a_c}{R} = F \cdot R,$$

звідки $F = \dfrac{I_{zc} \cdot a_c}{R^2}$. Тоді рівняння (*а*) буде мати вигляд:

$$M \cdot a_c = Mg\sin\alpha - \frac{I_{zc} \cdot a_c}{R^2};$$

$$I_{zc} = \frac{MR^2}{2}; \; Ma_c = Mg\sin\alpha - \frac{Ma_c}{2}.$$

Після скорочення на M маємо:

$$\frac{3}{2}a_c = g\sin\alpha; \; a_c = \frac{2}{3}g\sin\alpha;$$

$$F = \frac{I_{zc} \cdot a_c}{R^2} = \frac{MR^2 \cdot a_c}{2R^2} = \frac{1}{3}Mg\sin\alpha = \frac{1}{3}G\sin\alpha.$$

Відповідь: $a_c = \dfrac{2}{3}g\sin\alpha$; $F = \dfrac{1}{3}G\sin\alpha$.

Запитання для самоконтролю:

1. Чому динаміка поступального руху тіла може бути зведена до динаміки точки?

2. Чому дорівнює кінетичний момент твердого тіла відносно осі обертання?
3. Напишіть формулу і сформулюйте словами вираз диференціального рівняння обертального руху тіла відносно осі.
4. В яких випадках дії сил обертальний рух тіла буде рівномірним, прискореним чи сповільненим?
5. Напишіть закон коливань фізичного маятника, чому дорівнює період коливань?
6. Що таке зведена довжина фізичного маятника і як вона визначається?
7. Скільки диференціальних рівнянь визначають динаміку плоского руху твердого тіла і який вигляд вони мають?

ЛЕКЦІЯ 7

РОБОТА І ПОТУЖНІСТЬ СИЛИ

7.1. Елементарна робота сили

Робота сили на нескінченно малому переміщенні її точки прикладення називається елементарною роботою сили. На рис. 7.1 τ – дотична до траєкторії точки *M*.

$$dA = \overline{P} \cdot d\overline{r}\,, \tag{7.1}$$

$$dA = \overline{P} \cdot \left| d\overline{r} \right| \cos\left(\overline{P}, \widehat{\ } d\overline{r} \right),$$

де $\left| d\overline{r} \right| = ds$ – елементарне переміщення точки *M* вздовж траєкторії.

$$dA = P \cdot ds \cdot \cos\left(\overline{P}, \widehat{\ } \overline{v} \right), \tag{7.2}$$

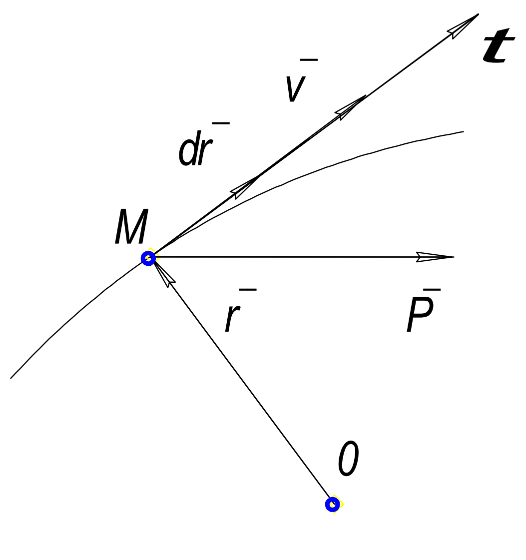


Рис. 7.1

$$P\cos\left(\widehat{\overline{P},\overline{v}}\right) = P_\tau,$$

$$dA = P_\tau \cdot ds. \tag{7.3}$$

Згідно (7.2) елементарна робота сили дорівнює добутку сили на елементарне переміщення точки прикладення сили вздовж траєкторії і на косинус кута між силою і напрямком руху (напрямком швидкості).

Якщо $\left(\widehat{\overline{P},\overline{v}}\right) < 90^0$; – робота додатна,

Якщо $\left(\widehat{\overline{P},\overline{v}}\right) = 0^0$; $dA = P \cdot ds$ – робота має максимум,

Якщо $\left(\widehat{\overline{P},\overline{v}}\right) > 90^0$; – робота від'ємна,

Якщо $\left(\widehat{\overline{P},\overline{v}}\right) = 90^0$; $dA = 0$ – робота дорівнює нулю.

Елементарна робота сили на переміщенні, яке перпендикулярне до напрямку руху точки, дорівнює нулю.

Елементарну роботу сили $dA = \overline{P} \cdot d\overline{r}$ можна виразити в аналітичній формі. Для цього уявимо силу $\overline{P}$ і переміщення $d\overline{r}$ через їх проекції на осі координат.

$$\overline{P} = \overline{i}P_x + \overline{j}P_y + \overline{k}P_z,\ \overline{r} = \overline{i}x + \overline{j}y + \overline{k}z,\ d\overline{r} = \overline{i}dx + \overline{j}dy + \overline{k}dz,$$

і підставимо у вираз роботи (7.1):

$$dA = \left(\overline{i}P_x + \overline{j}P_y + \overline{k}P_z\right)\cdot\left(\overline{i}dx + \overline{j}dy + \overline{k}dz\right),$$

звідки остаточно маємо:

$$dA = P_x dx + P_y dy + P_z dz. \tag{7.4}$$

Елементарна робота сили дорівнює сумі добутків проекцій сили на варіації відповідних координат точки прикладення сили.

7.2. Робота сили на кінцевому переміщенні

Припустимо, що точка M перемістилась з положення M_1 до положення M_2 (рис. 7.2). Треба визначити роботу сили $\overline{P}$ на цьому переміщенні: робота дорівнює інтегралу від елементарної роботи, взятому вздовж цього переміщення

$$A = \int_{M_1}^{M_2} dA . \tag{7.5}$$

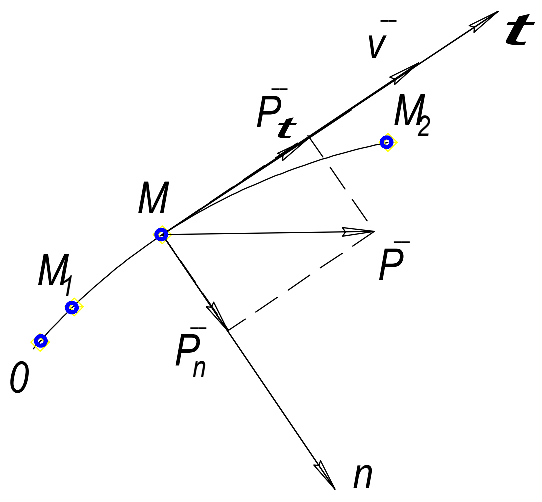


Рис. 7.2

В залежності від того, в якій формі записана елементарна робота, маємо різні формули роботи сили на кінцевому переміщенні.

$$A = \int_{M_1}^{M_2} P \cdot \cos\left(\overline{P}, \hat{\ } \overline{v}\right) \cdot ds , \tag{7.6}$$

$$A = \int_{M_1}^{M_2} P_\tau \cdot ds , \tag{7.7}$$

$$A = \int_{M_1}^{M_2} \left(P_x \cdot dx + P_y \cdot dy + P_z \cdot dz \right). \qquad (7.8)$$

Якщо вектор сили є сталою величиною $\overline{P} = const$, тобто величина сили і напрям сили не змінюються (рис. 7.3), то $P_\tau = P \cdot \cos\left(\overline{P}, \hat{\ } \overline{v}\right) = const$ і тоді

$$A = P_\tau \cdot S = P \cdot S \cdot \cos\left(\overline{P}, \hat{\ } \overline{v}\right).$$

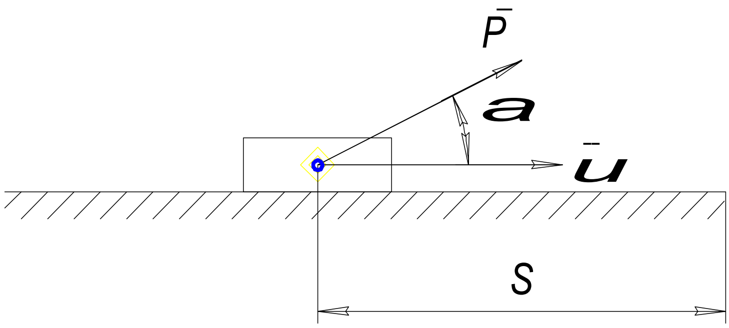


Рис. 7.3

Робота сталої сили на прямолінійному переміщенні її точки прикладення дорівнює добутку модуля сили на величину переміщення і на косинус кута між вектором сили і напрямком руху (швидкістю).

Розмірність роботи в системі СІ: $A = 1H \cdot 1м = 1Дж$,

7.3. Графічний спосіб обчислення роботи

Робота сили може бути обчислена аналітично за допомогою формули (7.8) або графічно на підставі формули (7.7).

Для графічного обчислення роботи використовують графік зміни сили в функції переміщення, наприклад, $P_\tau = f(S)$ (рис. 7.4). Вздовж осі абсцис цього графіка відкладають у деякому масштабі значення дугової координати S, а вздовж осі ординат відповідні значення проекції сили на дотичну P_τ.

$$P_\tau = f(S); \quad dA = P_\tau \cdot dS';$$

$$A = \int_A^B P_\tau \cdot dS = \text{пл}\, ABCD \cdot \mu_P \cdot \mu_S\,, \tag{7.9}$$

де μ_P, μ_S – масштабні коефіцієнти сили і переміщення.

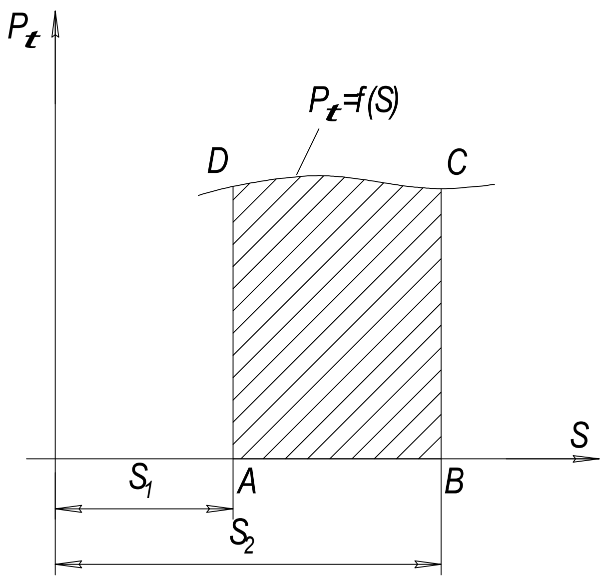


Рис. 7.4

Робота сили на переміщенні її точки прикладення обчислюється площею фігури, обмеженою віссю абсцис, кривою $P_\tau = f(S)$ і двома ординатами, які відповідають початковому і кінцевому положенню рухомої точки.

7.4. Теорема про роботу рівнодійної сили

Робота рівнодійної сили на деякому шляху дорівнює алгебраїчній сумі робіт складових сил на тому ж шляху.

Проекція рівнодійної сили $\overline{R}$ на вісь τ дорівнює алгебраїчній сумі проекцій всіх сил на вісь τ. (рис. 7.5)

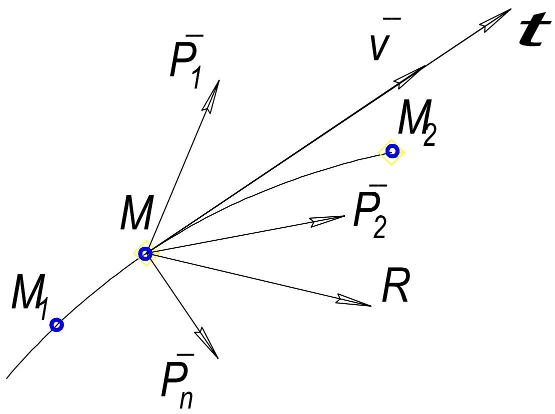


Рис. 7.5

$$\overline{R}\cdot\cos\left(\overline{R},\hat{\overline{v}}\right)=\overline{P_1}\cdot\cos R\left(\overline{P_1},\hat{\overline{v}}\right)+\overline{P_2}\cdot\cos\left(\overline{P_2},\hat{\overline{v}}\right)+\ldots+\overline{P_n}\cdot\cos\left(\overline{P_n},\hat{\overline{v}}\right) \quad (7.10)$$

Помножимо почленно рівняння (7.10) на dS і, інтегруючи від точки M_1 до точки M_2, одержимо:

$$\int_{M_1}^{M_2} R\cos\left(\overline{R},\hat{\overline{v}}\right)\cdot ds=\int_{M_1}^{M_2} P_1\cos\left(\overline{P_1},\hat{\overline{v}}\right)\cdot ds+$$
$$, \quad (7.11)$$
$$+\int_{M_1}^{M_2} P_2\cos\left(\overline{P_2},\hat{\overline{v}}\right)\cdot ds+\ldots+\int_{M_1}^{M_2} \overline{P_n}\cos\left(\overline{P_n},\hat{\overline{v}}\right)\cdot ds\,.$$

$$A_R=A_1+A_2+\ldots+A_n\,. \quad (7.12)$$

7.5. Потужність сили

Потужність сили – це величина, яка характеризує змінення роботи сили за одиницю часу.

$$N = \frac{dA}{dt}; \qquad dA = \overline{P} \cdot d\overline{r};$$

$$N = \frac{\overline{P} \cdot d\overline{r}}{dt} = \overline{P} \cdot \overline{v} = P \cdot v \cdot \cos\left(\overline{P}, \overline{v}\right). \qquad (7.13)$$

Якщо $dA = P_\tau \cdot ds' \quad \Rightarrow \quad N = \frac{dA}{dt} = \frac{P_\tau ds}{dt} = P_\tau \cdot v.$

Потужність сили в даний момент часу дорівнює добутку тангенціальної складової сили на швидкість точки прикладення сили.

Якщо $\left(\overline{P}, \overline{v}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad N = P \cdot v$.

Визначимо розмірність потужності:

система СІ: $N = \frac{1 Дж}{1 с} = 1 Вт; \quad 1 кВт = 1000 Вт.$

система МкГС: $N = \frac{1 кГм}{1 с} = 1 \frac{кГм}{с}; \quad 1 к.с. = 75 \frac{кГм}{с}; \quad 1 кВт = 1.36 к.с.$

7.6. Робота сили тяжіння

Нехай матеріальна точка M рухається з положення $M_1(x_1, y_1, z_1)$ в положення $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Вага точки дорівнює,

$$G = mg, \qquad (7.14)$$

де m – маса точки; g – прискорення вільного падіння.

Обчислимо роботу сили $\overline{G}$ на переміщенні точки M_1M_2, величина якого мала порівняно з радіусом Землі. Оберемо систему координат так, щоб вісь z була паралельна вертикалі (рис. 7.6).

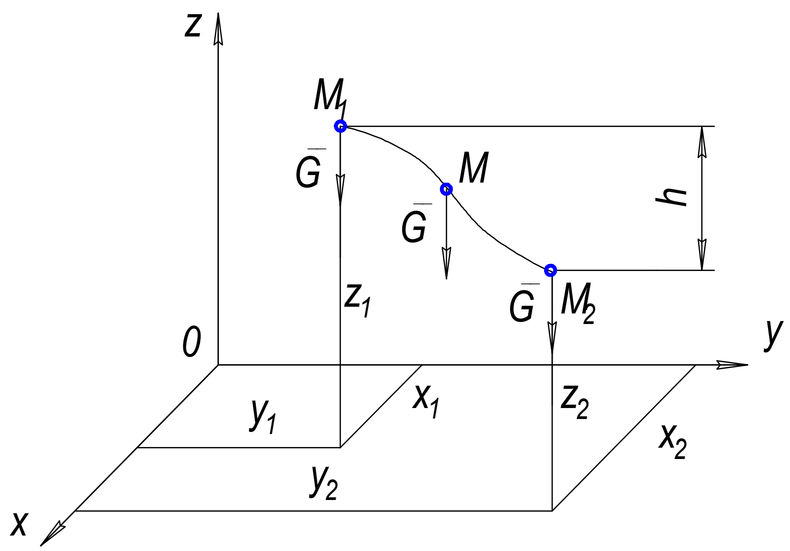


Рис. 7.6

Проекції сили $\overline{G}$ на координатній осі:

$$\begin{cases} G_x = 0, \\ G_y = 0, \\ G_z = -mg. \end{cases} \tag{7.15}$$

Використовуємо аналітичний вираз елементарної роботи (7.4):

$$dA = G_x dx + G_y dy + G_z dz = -mgdz\,. \tag{7.16}$$

Тоді робота сили $\overline{G}$ на переміщенні точки з положення M_1 в положення M_2 буде:

$$\begin{gathered} A = \int\limits_{M_2}^{M_1} dA = \int\limits_{z_1}^{z_2} - mgdz = -mg\int\limits_{z_1}^{z_2} dz = -mgz\Big|_{z_1}^{z_2} = \\ = -mg(z_2 - z_1) = mg(z_1 - z_2) = mgh, \end{gathered} \tag{7.17}$$

де $h = z_1 - z_2$ - величина вертикального переміщення точки M .

Якщо $z_1 > z_2$, тобто точка M_1 розташована вище за точку M_2, робота сили тяжіння додатна.

Якщо $z_1 < z_2$, тобто точка M_1 розташована нижче точки M_2, робота сили тяжіння від'ємна.

Таким чином робота сили тяжіння дорівнює:

$$A = \pm mgh, \tag{7.18}$$

де знак плюс відповідає переміщенню точки до низу, а знак мінус – переміщенню точки вгору.

Вираз (17.8) показує, що робота сили тяжіння дорівнює взятому зі знаком плюс або мінус добутку сили тяжіння на вертикальне переміщення точки її прикладення.

Робота сили тяжіння не залежить від виду траєкторії, по якій рухається точка, а залежить тільки від відстані по вертикалі між положеннями точки, від рівнями над поверхнею Землі. Робота сили тяжіння тіла на замкнутому переміщенні його центра ваги дорівнює нулю.

7.7. Робота сили пружності

Основною характеристикою пружного елементу є коефіцієнт жорсткості c. Коефіцієнт жорсткості – це відношення сили, яка діє на пружний елемент, до величини деформації пружного елементу (рис. 7.7):

$$c = \frac{F_1}{\Delta l} \left[\frac{H}{м} \right], \tag{7.19}$$

звідки

$$F_1 = c \cdot \Delta l. \tag{7.20}$$

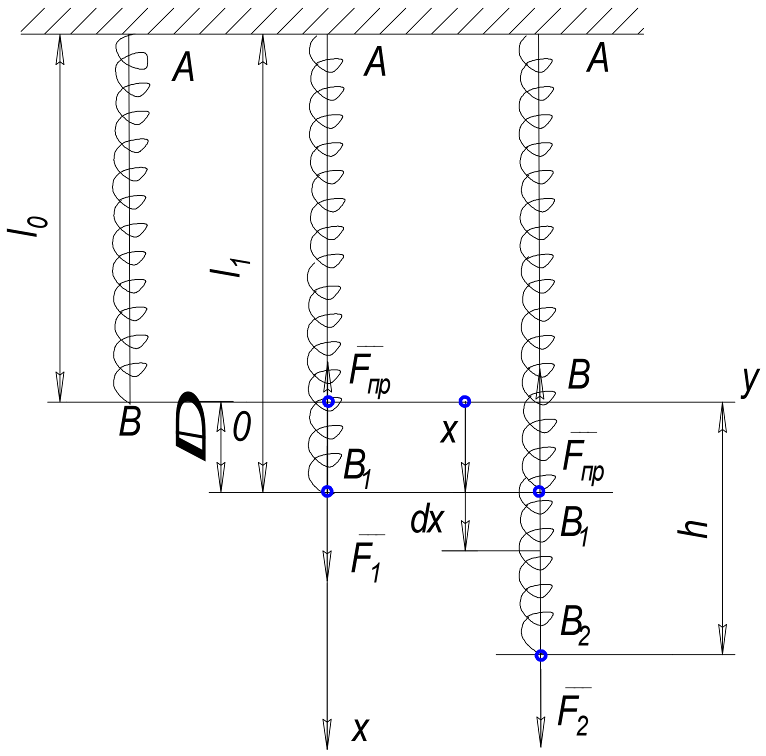


Рис. 7.7

Якщо сила $\overline{F_1}$ розтягнула пружину на відстань Δl і точка B перейшла в положення B_1, то на кінець пружини буде діяти в протилежний бік сила пружності: $\left|F_{пр}\right| = c \cdot \Delta l$.

Якщо обрати вісь x вздовж пружини (рис. 7.7), а початок координат - в положенні недеформованої пружини, довжина якої l_0, то:

$$F_{пр} = -cx, \tag{7.21}$$

де x – деформація пружного елементу.

Знак мінус показує, що сила спрямована у бік, що є протилежним переміщенню точки *B*.

Елементарна робота сили пружності дорівнює:

$$dA = -F_{пр}dx = -cxdx. \tag{7.22}$$

При переміщенні точки прикладення сили з положення B у положення B_2, тобто на величину h, сила пружності виконує роботу:

$$A = \int_{B}^{B_2} dA = \int_{0}^{h} -F_{np} dx = -c\int_{0}^{h} x \cdot dx = -\frac{cx^2}{2}\Bigg|_0^h = -\frac{ch^2}{2}. \qquad (7.23)$$

Робота сили пружності, коли вона підкоряється закону Гука ($F_{np} = cx$), дорівнює половині добутку коефіцієнта пружності на квадрат переміщення її точки прикладення, яке відраховується від положення недеформованого стану .

Робота сили пружності від'ємна тому, що вектор сили пружності завжди спрямований протилежно переміщенню її точки прикладення.

7.8. Робота і потужність сили, яка прикладена до тіла, що обертається навколо осі

Нехай до твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі z, прикладена в точці М на відстані r від осі довільно розміщена у просторі сила $\overline{P}$ (рис. 7.8). Визначимо роботу цієї сили. Для цього проведемо через точку М перпендикулярно до осі площину П. Розкладемо вектор сили $\overline{P}$ на вертикальну складову $\overline{P}_2$, яка паралельна осі z, і складову $\overline{P}_1$, яка розташована у площині П. Тоді складова $\overline{P}_2$ роботу не виконує, оскільки її напрямок перпендикулярний вектору швидкості v і згідно з формулою (7.2) її робота дорівнює нулю. Тоді елементарна робота сили $\overline{P}$ дорівнює:

$$dA = P_1 \cdot ds \cdot \cos\left(\overline{P}_1 \,\widehat{,}\, \overline{v}\right), \qquad ds = r \cdot d\varphi,$$

де $d\varphi$ – елементарний кут повороту тіла.

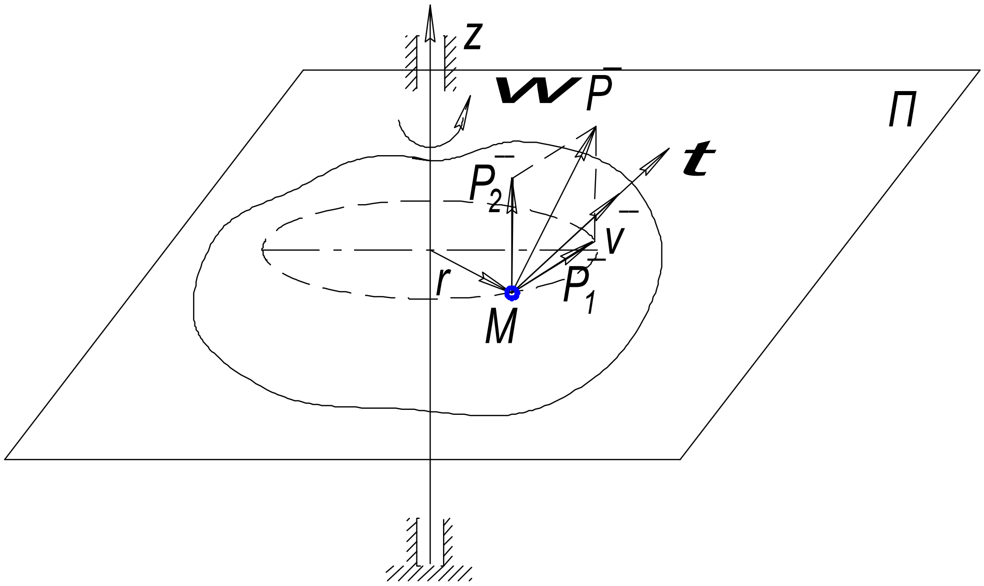


Рис. 7.8

$$dA = P_1 r \cdot \cos\left(\overline{P_1} \hat{,} \overline{v}\right) \cdot d\varphi,$$

але $P_1 r \cdot \cos\left(\overline{P_1} \hat{,} \overline{v}\right) = M_{об}$ – обертальний момент сили $\overline{P}$ відносно осі z. Тоді:

$$dA = m_z(\overline{P}) \cdot d\varphi = M_{об} \cdot d\varphi,$$

$$A = \int_0^{\varphi} M_{об} \cdot d\varphi. \qquad (7.24)$$

Елементарна робота сили, яка прикладена до тіла, що обертається відносно осі z, дорівнює добутку моменту цієї сили відносно осі z на елементарний кут повороту тіла.

Якщо обертальний момент є сталою величиною $M_{об} = const$, то

$$A = M_{об} \cdot \varphi. \qquad (7.25)$$

Потужність сили, що прикладена до обертового тіла:

$$N = \frac{dA}{dt} = \frac{M_{об} d\varphi}{dt} = M_{об} \cdot \omega \,. \tag{7.26}$$

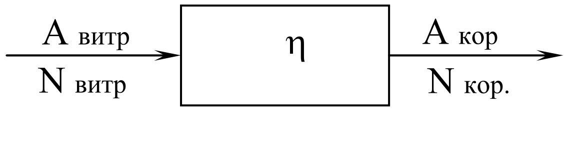
Потужність сили, яка прикладена до тіла, що обертається відносно нерухомої осі, дорівнює добутку моменту цієї сили відносно осі на кутову швидкість тіла.

7.9. Коефіцієнт корисної дії (ККД)

Сили, що прикладені до тіл механічної системи, можна поділити на рушійні, робота яких є додатною, і сили опору, робота яких від'ємна. У свою чергу, сили опору складаються із сил корисного опору, для подолання яких призначений механізм або машина, і сил шкідливого опору. До останніх можна віднести сили тертя у шарнірах, сили гідравлічних і повітряних опорів тощо.

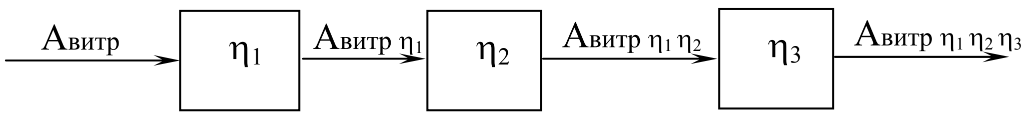
Коефіцієнтом корисної дії є відношення роботи сил корисного технологічного опору $A_{кор}$ *до повної витраченої роботи рушійних сил* $A_{витр}$.

Оскільки сили шкідливого опору займають значне місце в повній роботі, то, безумовно, механічний ККД завжди суттєво менший від одиниці.



$$\eta = \frac{A_{кор}}{A_{витр}} = \frac{N_{кор}}{N_{витр}} < 1 \tag{7.27}$$

Об'єкти з'єднанні послідовно:



Загальний ККД:

$$\eta = \frac{A_{витр}\eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \eta_3}{A_{витр}} = \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \eta_3 \qquad (7.28)$$

При послідовному з'єднанні елементів (об'єктів) механічної системи загальний ККД дорівнює добутку ККД окремих об'єктів.

Запитання для самоконтролю:

1. Що таке елементарна робота сили?
2. Як впливає кут між векторами сили і швидкості на величину і знак елементарної роботи?
3. Як визначити роботу сили на кінцевому переміщенні?
4. Напишіть формулу роботи сталої сили.
5. Як визначити роботу рівнодійної сили?
6. Визначте роботу сили тяжіння, сили пружності.
7. Як визначається робота і потужність сили, що прикладена до обертового тіла?
8. Що таке коефіцієнт корисної дії і як він визначається?
9. Як визначається потужність сили, що прикладена до тіла, яке рухається поступально?
10. Визначити ККД окремих механізмів, які з'єднані послідовно.

ЛЕКЦІЯ 8

КІНЕТИЧНА ЕНЕРГІЯ ТОЧКИ І МЕХАНІЧНОЇ АБО МАТЕРІАЛЬНОЇ СИСТЕМИ

Кінетична енергія характеризує здатність механічного руху перетворюватись в еквівалентну кількість іншої форми руху (потенціальна енергія, теплота тощо)

Кінетична енергія тіла – це одна із мір механічного руху, яка обумовлена рухом тіла.

8.1. Теорема про зміну кінетичної енергії матеріальної точки

Матеріальна точка масою m рухається вздовж криволінійної траєкторії із положення M_1 в положення M_2 під дією рівнодійної сили P.

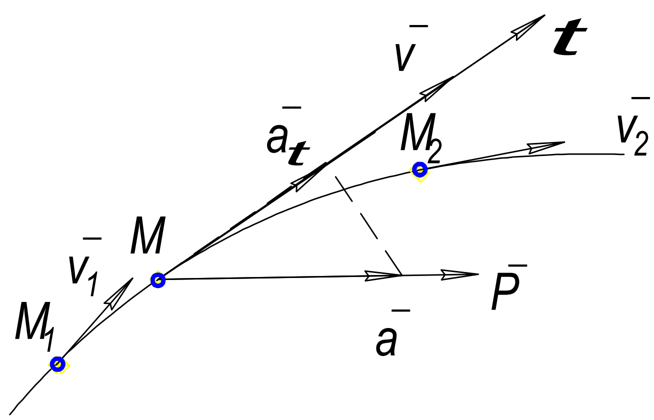


Рис. 8.1

Згідно з основним законом динаміки Ньютона запишемо:

$$m \cdot \overline{a} = \overline{P}, \tag{8.1}$$

де m – маса точки, $\overline{a}$ – вектор прискорення точки, $\overline{P}$ – рівнодійна усіх сил, що діють на точку (рис. 8.1).

Спроектуємо рівняння (8.1) на дотичну:

$$m \cdot a_\tau = P \cdot \cos\left(\overline{P} \,\widehat{,}\, \overline{v}\right), \tag{8.2}$$

де $a_\tau = \dfrac{dv}{dt}$ – тангенціальне прискорення.

Тоді

$$m \cdot \frac{dv}{dt} = P \cdot \cos\left(\overline{P} \,\widehat{,}\, \overline{v}\right). \tag{8.3}$$

Рівняння (8.3) помножимо на елементарне переміщення точки *ds*.

$$m \cdot \frac{dv}{dt} \cdot ds = P \cdot ds \cdot \cos\left(\overline{P} \,\widehat{,}\, \overline{v}\right), \tag{8.4}$$

але $P \cdot ds \cdot \cos\left(\overline{P} \,\widehat{,}\, \overline{v}\right)$ – елементарна робота сили *P,*

$$\frac{ds}{dt} = v.$$

Тоді

$$mv \cdot dv = dA \Rightarrow d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = dA \tag{8.5}$$

– математичний вираз теореми в диференціальній формі.

Припустимо, що в момент t_1 швидкість точки дорівнювала v_1, а в момент t_2 – v_2:

$$\int_{v_1}^{v_2} mv \cdot dv = \int_{M_1}^{M_2} dA. \tag{8.6}$$

Після інтегрування отримаємо:

$$\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = A \tag{8.7}$$

– вираз теореми в кінцевій формі.

Скалярну величину $\frac{mv^2}{2}$*, котра дорівнює половині добутку маси точки на квадрат швидкості, називають кінетичною енергією точки. Кінетична енергія точки є величиною додатною.*

<u>**Висновок**</u>**:** *Зміна кінетичної енергії точки на деякому її переміщенні дорівнює роботі рівнодійної сили на цьому переміщенні.*

Розмірність кінетичної енергії

Система одиниць СІ:

$$\left[\frac{mv^2}{2}\right] = 1кг \cdot 1\frac{м^2}{с^2} = 1\frac{кг \cdot м^2}{с^2} = 1\frac{кг \cdot м}{с^2}м = 1Н \cdot м = 1Дж.$$

8.2. Кінетична енергія механічної системи

Кінетична енергія механічної системи – це скалярна величина, котра дорівнює арифметичній сумі кінетичних енергій окремих точок, що складають систему:

$$T = \sum \frac{m_k v_k^2}{2}. \tag{8.8}$$

Для механічної системи, яка складається з декількох тіл, кінетична енергія дорівнює сумі кінетичних енергій окремих тіл:

$$T = \sum T_k \,. \tag{8.9}$$

Кінетична енергія системи не залежить від напрямку руху окремих її частин. На зміну кінетичної енергії механічної системи впливають як зовнішні, так і внутрішні сили.

8.3. Обчислення кінетичної енергії твердого тіла у різних випадках його руху

а) тіло рухається поступально

Тіло масою M рухається поступально зі швидкістю v. Його можна розглядати, як систему матеріальних точок, сума мас яких дорівнює масі тіла M:

$$M = \sum m_k \,. \tag{8.10}$$

При поступальному русі швидкості усіх точок однакові і дорівнюють v:

$$T = \sum \frac{m_k v_k^2}{2} = \sum \frac{m_k v^2}{2} = \frac{v^2}{2} \sum m_k = \frac{M v^2}{2}. \tag{8.11}$$

Кінетична енергія тіла, яке рухається поступально, дорівнює половині добутку маси тіла на квадрат швидкості довільної точки або центра мас.

б) тіло обертається відносно нерухомої осі

Швидкість кожної точки тіла $v_k = \omega \cdot r_k$, де r_k – відстань точки від осі обертання, тоді кінетична енергія тіла дорівнює:

$$T = \sum \frac{m_k v_k^2}{2} = \sum \frac{m_k \omega^2 r_k^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum m_k r_k^2 = \frac{I_z \cdot \omega^2}{2}.$$

$$T = \frac{I_z \cdot \omega^2}{2}, \tag{8.12}$$

де $I_z = \sum m_k r_k^2$ – осьовий момент інерції маси тіла, міра інертності тіла при обертальному русі.

Кінетична енергія тіла, яке обертається навколо нерухомої осі з кутовою швидкістю ω, дорівнює половині добутку моменту інерції маси тіла відносно осі обертання на квадрат кутової швидкості.

в) тіло рухається плоскопаралельно

Плоскопаралельний рух тіла можна вважати у даний момент часу, як обертальний рух навколо миттєвого центра швидкостей – точки P (рис. 8.2).

C – центр мас тіла;

v_c – швидкість центра мас тіла;

I_{zc} – осьовий момент інерції маси тіла відносно осі z, яка проходить через центр мас C перпендикулярно до площини руху;

I_{zp} – осьовий момент інерції маси тіла відносно осі z, яка проходить через точку P.

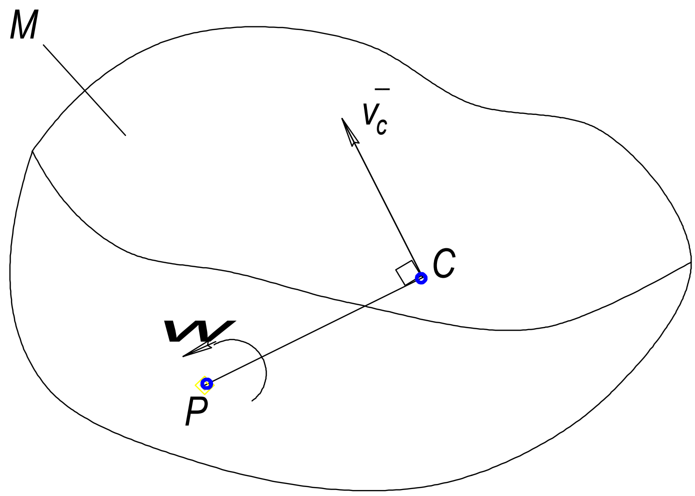


Рис. 8.2

Тоді $v_c = \omega \cdot PC$ і кінетична енергія дорівнює:

$$T = \frac{I_{zc} \cdot \omega^2}{2} = \frac{\left(I_{zc} + M \cdot (PC)^2\right) \cdot \omega^2}{2} = \frac{I_{zc}\omega^2}{2} + \frac{Mv_c^2}{2};$$

$$T = \frac{Mv_c^2}{2} + \frac{I_{zc}\omega^2}{2}. \qquad (8.13)$$

Кінетична енергія тіла, яке рухається плоскопаралельно, дорівнює сумі енергій поступального руху зі швидкістю центра мас і обертального руху навколо центра мас.

8.4. Теорема про зміну кінетичної енергії механічної системи

Припустимо, що матеріальна система складається з n матеріальних точок:

$m_1,\ m_2,\ ...,\ m_n$ – маси матеріальних точок;

$v_{10},\ v_{20},\ ...,\ v_{n0}$ – початкові швидкості кожної точки;

$v_1,\ v_2,\ ...,\ v_n$ – кінцеві швидкості кожної точки;

$\overline{F}_1^e,\ \overline{F}_2^e,\ ...,\ \overline{F}_n^e$ – рівнодійні зовнішніх сил, що діють на кожну точку;

$\overline{F}_1^{in},\ \overline{F}_2^{in},\ ...,\ \overline{F}_n^{in}$ – рівнодійні внутрішніх сил, як сили взаємодії між точками.

Для кожної точки системи можна записати теорему про зміну кінетичної енергії:

$$\frac{m_k v_k^2}{2} - \frac{m_k v_{k0}^2}{2} = A_k^e + A_k^{in}, \qquad k = 1,2,...,n, \tag{8.14}$$

де A_k^e – робота рівнодійної зовнішніх сил, які діють на k-ту точку; A_k^{in} – робота рівнодійної внутрішніх сил, які діють на k-ту точку.

Просумуємо рівняння (8.14) по всіх точках системи:

$$\sum \frac{m_k v_k^2}{2} - \sum \frac{m_k v_{k0}^2}{2} = \sum A_k^e + \sum A_k^{in}. \tag{8.15}$$

Запишемо (8.15) більш компактно, позначивши:

$\sum \frac{m_k v_k^2}{2} = T$ – кінцева кінетична енергія механічної системи;

$\sum \frac{m_k v_{k0}^2}{2} = T_0$ – початкова кінетична енергія механічної системи;

$\sum A_k^e$ – сума робіт зовнішніх сил, що діють на систему;

$\sum A_k^{in}$ – сума робіт внутрішніх сил, які діють на систему.

Остаточно вираз теореми має вигляд:

$$T - T_0 = \sum A_k^e + \sum A_k^{in}. \tag{8.16}$$

Зміна кінетичної енергії механічної системи на деякому переміщенні дорівнює алгебраїчній сумі робіт на цьому переміщенні зовнішніх і внутрішніх сил.

Для незмінних механічних систем (деформації яких можна не враховувати) сума робіт внутрішніх сил дорівнює нулю: $\sum A_k^{in} = 0$.

Тоді вираз (8.16) спрощується:

$$T - T_0 = \sum A_k^e . \quad (8.17)$$

Приклад 8.1. Задача №38.24

(И.В. Мещерский. "Сборник задач по теоретической механике")

На рисунке 8.3 изображен подъемный механизм лебедки. Груз A весом $\overline{P}_1$ поднимается посредством троса, переброшенного через блок C и навитого на барабан B радиусом r_2 и весом $\overline{P}_2$. К барабану приложен вращающий момент, который с момента включения пропорционален квадрату угла поворота φ барабана: $M_{об} = k\varphi^2$, где k – постоянный коэффициент. Определить скорость груза A в момент, когда он поднимается на высоту h_1. Массу барабана B считать равномерно распределенной по его ободу. Блок C – сплошной диск весом $\overline{P}_3$. Массой троса пренебречь. В начальный момент система находилась в покое.

Розв'язання.

Дана задача розв'язується за допомогою теореми про зміну кінетичної енергії матеріальної системи:

$T - T_0 = \sum A_k^e$. Але на початку система перебувала у стані спокою, тому $T_0 = 0$ і рівняння буде мати вигляд:

$$T = \sum A_k^e . \quad (a)$$

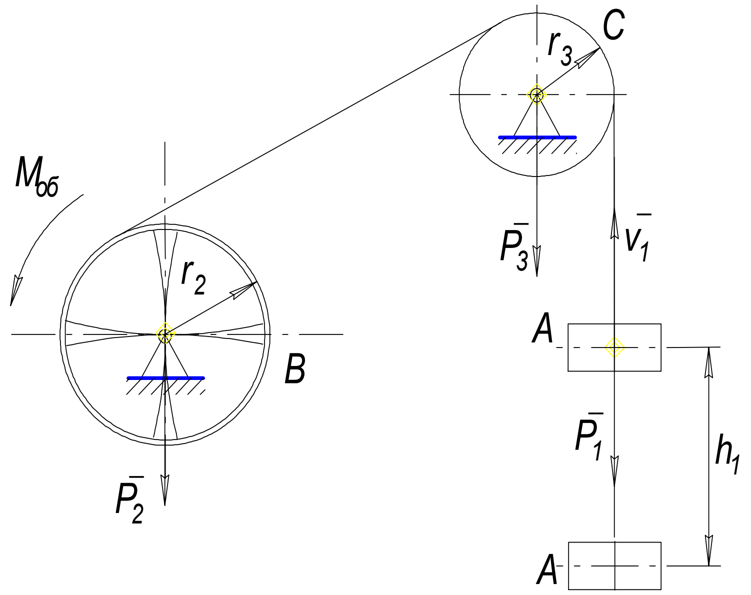


Рис. 8.3

P_1 – вага вантажу; P_2 – вага барабана; r_2 – радіус барабана; P_3 – вага блока (суцільний диск); r_3 – радіус блока; $M_{об} = k\varphi^2$ – обертальний момент на барабані; h_1 – висота підйому вантажу; $v_0 = 0$ – стан спокою.

Кінетична енергія матеріальної системи дорівнює сумі енергій тіл, що складають систему:

$$T = T_A + T_B + T_c . \qquad (б)$$

Визначимо кінетичну енергію кожного тіла, виразимо її через задані параметри і шукану швидкість.

$T_A = \dfrac{m_1 v_1^2}{2} = \dfrac{P_1 v_1^2}{2g}$ – тіло рухається поступально;

$T_B = \dfrac{I_2 \omega_2^2}{2}$ – тіло обертається навколо нерухомої осі;

$I_2 = m_2 r_2^2 = \dfrac{P_2 r_2^2}{g}$ – осьовий момент інерції тіла;

$\omega_2 = \dfrac{v_1}{r_2}$ – кутова швидкість, виражена через шукану швидкість v_1.

$$T_B = \frac{P_2 r_2^2 v_1^2}{2g \cdot r_2^2} = \frac{P_2 v_1^2}{2g}.$$

Аналогічно і для обертового тіла C:

$$T_C = \frac{I_3 \omega_3^2}{2};\;\; I_3 = \frac{m_3 r_3^2}{2} = \frac{P_3 r_3^2}{2g};\;\; \omega_3 = \frac{v_1}{r_3};\;\; T_C = \frac{P_3 r_3^2 \cdot v_1^2}{2 \cdot 2g \cdot r_3^2} = \frac{P_3 \cdot v_1^2}{4g}.$$

Підставимо значення кінетичної енергії в вираз (б):

$$T = T_A + T_B + T_C = \frac{P_1 v_1^2}{2g} + \frac{P_2 v_1^2}{2g} + \frac{P_3 v_1^2}{4g} = \frac{v_1^2}{4g}\left(2P_1 + 2P_2 + P_3\right).$$

Далі визначаємо праву частину виразу (а) – роботу діючих сил і моментів:

$$\sum A_k^e = A(P_1) + A(M_{об}), \tag{c}$$

де $A(P_1) = -P_1 h_1$ – (знак мінус показує, що це робота сили опору, коли напрям сили і швидкості протилежні);

$$A(M_{об}) = \int_0^{\varphi} M_{об} \cdot d\varphi = \int_0^{\varphi} k\varphi^2 \cdot d\varphi = \frac{k\varphi^3}{3};\;\; \varphi = \frac{h_1}{r_2}.$$

Підставимо роботу у вираз (c):

$$\sum A_k^e = \frac{k\varphi^3}{3} - P_1 h_1 = \frac{k h_1^3}{3 r_2^3} - P_1 h_1 = \frac{h_1\left(k h_1^2 - 3 P_1 r_2^3\right)}{3 r_2^3}.$$

Підставимо сумарну кінетичну енергію і сумарну роботу у вираз (а):

$$\frac{v_1^2}{4g}\left(2P_1 + 2P_2 + P_3\right) = \frac{h_1\left(k h_1^2 - 3 P_1 r_2^3\right)}{3 r_2^3}.$$

Звідки шукана швидкість дорівнює:

$$v_1 = \frac{2}{r_2}\sqrt{\frac{gh_1\left(kh^2 - 3P_1 r_2^3\right)}{3r_2\left(2P_1 + 2P_2 + P_3\right)}}\,.$$

Запитання для самоконтролю:

1. Запишіть вираз кінетичної енергії точки і системи.
2. Як обчислюється кінетична енергія тіл, що рухаються поступально, плоскопаралельно і обертаються?
3. Сформулюйте теорему про зміну кінетичної енергії точки і напишіть її вираз у диференціальній і кінцевій формах.
4. Яка розмірність кінетичної енергії?
5. Як формулюється теорема про зміну кінетичної енергії системи?
6. Запишіть теорему про зміну кінетичної енергії для деформованої системи.
7. Запишіть теорему для незмінної системи.

ЛЕКЦІЯ 9

ТЕОРІЯ ПОТЕНЦІАЛЬНОГО СИЛОВОГО ПОЛЯ

9.1. Силове поле. Потенціальне силове поле і силова функція

Існуючі у природі сили, що діють на матеріальні точки механічної системи, можуть бути у загальному випадку функцією кінематичних параметрів руху точки: координати, швидкості, час.

Проте, значно поширеними є сили, котрі залежать лише від координат матеріальних точок, що рухаються. До таких сил можна віднести сили гравітації, сили пружності, сили електромагнітних полів тощо.

Силовим полем називають частину фізичного простору, в якому на матеріальні точки системи, що рухаються в ньому, діють сили, які є функціями координат і часу. Це нестаціонарне силове поле.

$$\overline{P}_k = \overline{P}_k\left(t, x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots, x_n, y_n, z_n\right). \tag{9.1}$$

Силове поле, в якому сила явно не залежить від часу, називають стаціонарним.

$$\overline{P}_k = \overline{P}_k\left(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots, x_n, y_n, z_n\right). \tag{9.2}$$

Стаціонарне силове поле називають потенціальним, якщо робота сил поля, які діють на матеріальну точку, що рухається, не залежить від форми її траєкторії, а є однозначною функцією координат початкового і *кінцевого положень точки.*

При цьому кожній точці відповідає деяка величина роботи, яку здійснюють сили поля під час переходу матеріальної точки із одного положення в інше.

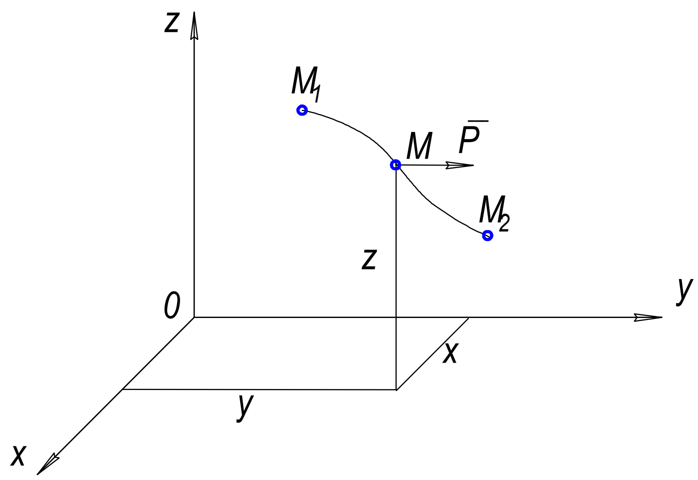


Рис. 9.1

Робота на переміщенні $M_1\ M_2$ сили $\overline{P}$, прикладеної до тіла в точці M, визначається згідно виразу (рис. 9.1):

$$A = \int_{M_1}^{M_2} dA = \int_{M_1}^{M_2} \left(P_x \cdot dx + P_y \cdot dy + P_z \cdot dz \right). \tag{9.3}$$

Цю роботу можна обчислити безпосередньо, якщо сила залежить від координат точки:

$$\begin{aligned} P_x &= f_1(x; y; z)\ , \\ P_y &= f_2(x; y; z)\ , \\ P_z &= f_3(x; y; z)\ . \end{aligned} \tag{9.4}$$

Крім цього, потрібно знати рівняння траєкторії руху точки:

$$\begin{aligned} y &= f_4(x), \\ z &= f_5(x). \end{aligned} \tag{9.5}$$

В загальному випадку робота (9.3) залежить від виду траєкторії, вздовж якої переміщується точка прикладення сили. Проте, якщо вираз у дужках рівняння (9.3) є повним диференціалом деякої функції $U(x;y;z)$, тобто

$$dA = dU(x;y;z),$$

або

$$P_x \cdot dx + P_y \cdot dy + P_z \cdot dz = dU(x;y;z),$$

то робота може бути обчислена без врахування траєкторії (9.5):

$$A_{(M_1\ M_2)} = \int_{M_1}^{M} dU(x;y;z) = U_2(x;y;z) - U_1(x;y;z). \tag{9.6}$$

Функцію U від координат x, y, z, диференціал якої дорівнює елементарній роботі, називають силовою функцією.

Силове поле, для котрого існує силова функція, називають потенціальним силовим полем, а сили, які діють в цьому полі, називають потенціальними силами.

Тоді, згідно з виразом (9.6) маємо основну властивість потенціального силового поля: робота потенціальної сили дорівнює різниці значень силової функції в кінцевому і початковому положеннях точки її переміщення і не залежить від виду траєкторії руху точки.

При переміщенні точки по замкнутій траєкторії $U_2 = U_1$: робота потенціальної сили дорівнює нулю.

Сили, робота яких залежить від виду траєкторії або від закону руху точки прикладення сили, називають непотенціальними (сили тертя, опір середовища). Якщо відомо, що $dA = dU(x; y; z)$, то силова функція визначається з рівності:

$$U = \int dA + C,$$

або

$$U = \int (Pxdx + Pydy + Pzdz) + C\,, \tag{9.7}$$

де C – довільна стала, котра визначається через “нульову точку”, в якій $U = 0$.

9.2. Вираз проекції сили через силову функцію

Знаючи силову функцію $U(x; y; z)$, можна визначати силу у будь-якій точці поля. Відомо, що:

$$dU(x; y; z) = P_x \cdot dx + P_y \cdot dy + P_z \cdot dz\,.$$

Але з іншого боку

$$dU(x; y; z) = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz\,.$$

Порівнюючи два останніх вирази, маємо

$$P_x = \frac{\partial U}{\partial x};\; P_y = \frac{\partial U}{\partial y};\; P_z = \frac{\partial U}{\partial z}\,. \tag{9.8}$$

Висновок: *у потенціальному силовому полі проекції сили на координатні осі дорівнюють частинним похідним від силової функції за відповідними координатами.*

Вектор $\overline{P}$ є градієнтом силової функції

$$\overline{P} = P_x \cdot \overline{i} + P_y \cdot \overline{j} + P_z \cdot \overline{k} = \frac{\partial U}{\partial x} \cdot \overline{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \cdot \overline{j} + \frac{\partial U}{\partial z} U \overline{k} = \overline{grad}\ U . \qquad (9.9)$$

З рівняння (9.8) випливає:

$$\frac{\partial P_x}{\partial y} = \frac{\partial P_y}{\partial x}; \ \frac{\partial P_z}{\partial x} = \frac{\partial P_x}{\partial z}; \ \frac{\partial P_y}{\partial z} = \frac{\partial P_z}{\partial y}. \qquad (9.10)$$

За допомогою рівняння (9.10) встановлюють, чи є поле потенціальним, коли сили задані в функції координат $P_x = f_1(x; y; z)$, $P_y = f_2(x; y; z)$, $P_z = f_3(x; y; z)$.

9.3. Потенціальна енергія

Для характеристики властивостей механічного руху в потенціальному силовому полі вводять поняття потенціальної енергії, яка оцінює "запас роботи", що має матеріальна точка у даному пункті силового поля.

Потенціальною енергією матеріальної точки у даному положенні М називають скалярну величину П, котра дорівнює тій роботі, яку виконують сили поля при переміщенні точки із положення М в нульове.

З цього випливає, що

$$П = П(x; y; z).$$

Але у нульовому положенні *U і П* співпадають

$$П(x; y; z) = A_{MM_0} = U_0 - U = -U .$$

Тобто $$П(x; y; z) = -U(x; y; z). \qquad (9.11)$$

Потенціальна енергія в довільній точці силового поля дорівнює значенню силової функції в цій точці з протилежним знаком:

$$P_x = \frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{\partial \Pi}{\partial x};$$
$$P_y = \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial \Pi}{\partial y};$$
$$P_z = \frac{\partial U}{\partial z} = -\frac{\partial \Pi}{\partial z}.$$

9.4. Поверхні рівного потенціалу

По заданій силовій функції $U(x; y; z)$ легко дати геометричну характеристику залежності потенціальної енергії точки від її положення у просторі.

Геометричне місце точок простору, у якій потенціальна енергія матеріальної точки має одне і теж значення, визначається з рівняння

$$U(x; y; z) = C. \tag{9.12}$$

Рівняння (9.12) визначає деяку поверхню у просторі, яка називається поверхнею рівного потенціалу або еквіпотенціальною поверхнею.

Надаючи параметру С досить близькі значення, можна отримати скільки завгодно еквіпотенціальних поверхонь, поділених тонкими шарами.

Через кожну точку простору проходить тільки одна еквіпотенціальна поверхня. Сила $\overline{P}$ спрямована завжди по нормалі до еквіпотенціальної поверхні у бік зменшення значень потенціальної енергії.

9.5. Робота сили на кінцевому переміщенні точки у потенціальному силовому полі

$$A = U_2 - U_1 = \Pi_1 - \Pi_2,$$

де $U_2; U_1$ – значення силової функції відповідно у кінцевому і початковому положеннях точки; $\Pi_2; \Pi_1$ – значення потенціальної енергії відповідно у кінцевому і початковому положеннях.

Висновок: *робота потенціальної сили дорівнює різниці значень потенціальної енергії рухомої точки у початковому і кінцевому положеннях.*

Закон збереження механічної енергії

Припустимо, що на кожну точку механічної системи діють потенціальні зовнішні та внутрішні сили.

Для к-тої точки можна записати

$$A_K = \Pi_{KO} - \Pi_{K1}.$$

Для всієї системи просумуємо по всіх точках:

$$A = \sum \Pi_{KO} - \sum \Pi_{K1} = \Pi_0 - \Pi_1.$$

Але $A = T_1 - T_0$ – різниця кінетичних енергій.

Тоді $$T_1 - T_0 = \Pi_0 - \Pi_1.$$

Або $$T_1 + \Pi_1 = T_0 + \Pi_0 = const. \tag{9.13}$$

Висновок: *при русі механічної системи під дією потенціальних сил сума кінетичної і потенціальної енергій системи у кожному її положенні залишається величиною незмінною.*

9.6. Приклади потенціальних силових полів

1. Однорідне поле сили ваги (тяжіння).

Сила ваги, робота якої не залежить від траєкторії точки її прикладення, є прикладом сили, яка має потенціал. Розглянемо в цьому потенціальному полі рух однієї матеріальної точки вагою G (рис. 9.2) і визначимо потенціальну енергію точки M, яка залежить тільки від координати.

$$G_x = 0; \;\; G_y = 0;$$

$$G_z = -\frac{\partial \Pi}{\partial z} = -G = -mg;$$

$$dA = G_x \cdot dx + G_y \cdot dy + G_z \cdot dz = -mg \cdot dz;$$

$$dA = dU = -d\Pi;$$

$$d\Pi = mg \cdot dz.$$

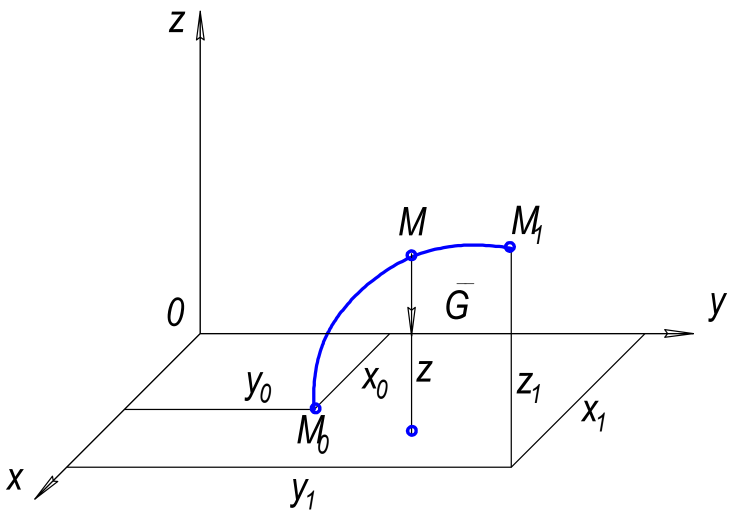


Рис. 9.2

Інтегруючи, отримаємо:

$$\Pi = \int_0^Z d\Pi = \int_0^Z mgdz = mgz + c\,.$$

Припустимо, що потенціальна енергія точки дорівнює нулю при z=0, тобто за нульову еквіпотенціальну поверхню приймаємо координатну площину *Oxy*. Тоді *C = 0* і потенціальна енергія точки дорівнює:

$$\Pi = Gz = mgz\,.$$

Рівняння еквіпотенціальних поверхонь матимуть вигляд:

$$mgz = const \quad \text{або} \quad z = const\,,$$

тобто еквіпотенціальні поверхні поля сили тяжіння є горизонтальними площинами.

Звичайно, еквіпотенціальними поверхнями поля можна вважати площини лише на порівняно невеликому протязі, де можна нехтувати кривизною поверхні Землі.

Сила тяжіння спрямована по перпендикуляру до цих еквіпотенціальних поверхонь у бік зменшення значень потенціальної енергії. Робота на переміщенні точки з положення M_1 в положення M_2, коли $z_1 - z_2 = h$, дорівнює:

$$A = mgh.$$

Розглянемо механічну систему, де m_1, m_2, ..., m_n - маси окремих точок. Тоді потенціальна енергія системи буде:

$$\Pi = m_1 g z_1 + m_2 g z_2 + ... + m_n g z_n = \sum m_K g z_K\,,$$

але $z_c = \dfrac{\sum m_K g z_K}{G}$ - вертикальна координата центра ваги.

$$\sum m_K g z_K = G \cdot z_c .$$

Звідки $$\Pi = G \cdot z_c .$$

<u>Висновок</u>. *Потенціальна енергія механічної системи, яка перебуває під дією сил тяжіння, дорівнює добутку ваги системи на висоту її центра ваги над нульовою еквіпотенціальною поверхнею.*

2. Поле центральної притягальної сили

Припустимо, що на матеріальну точку M масою m (рис. 9.3) діє центральна притягальна сила $\overline{P}$, яка спрямована до центра O і дорівнює:

$$P = k\frac{m}{r^2} .$$

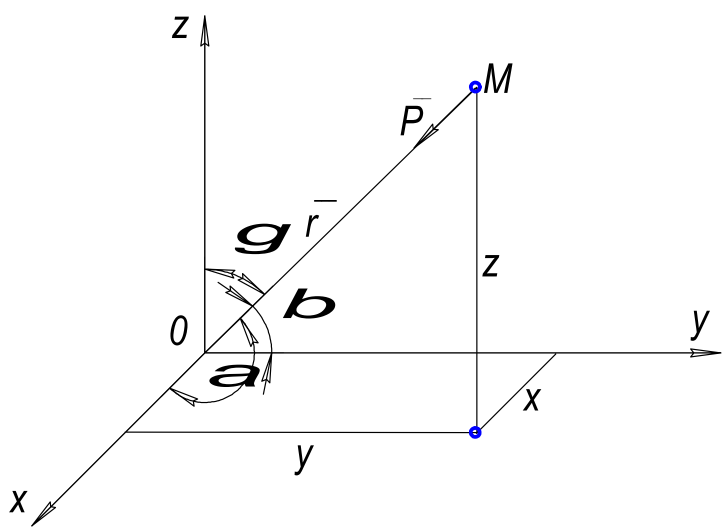


Рис. 9.3

Проведемо через точку O координатні осі $x, y, z,$ позначивши кути, які утворює радіус-вектор $\overline{r}$ з осями, через α, β, γ .

Визначимо проекції сили $\overline{P}$ на осі координат:

$$P_x = -P\cos\alpha = -\frac{km}{r^2}\cdot\frac{x}{r} = -\frac{km}{r^3}\cdot x;$$

$$P_y = -P\cdot\cos\beta = -\frac{km}{r^2}\cdot\frac{y}{r} = -\frac{km}{r^3}\cdot y;$$

$$P_z = -P\cdot\cos\gamma = -\frac{km}{r^2}\cdot\frac{z}{r} = -\frac{km}{r^3}\cdot z;$$

$$dA = dU = -d\Pi;$$

$$dA = P_x\cdot dx + P_y\cdot dy + P_z\cdot dz = -\frac{km}{r^3}\cdot x\cdot dx - \frac{km}{r^3}\cdot y\cdot dy - \frac{km}{r^3}\cdot z\cdot dz =$$

$$= -\frac{km}{r^3}\left(x\cdot dx + y\cdot dy + zdz\right).$$

Але $$x^2 + y^2 + z^2 = r^2;$$

$$x\cdot dx + y\cdot dy + z\cdot dz = r\cdot dr.$$

Тоді $$d\Pi = -dA = \frac{km}{r^3}\cdot r\cdot dr = \frac{km}{r^2}dr;$$

$$\Pi = \int\frac{km}{r^2}\cdot dr = -\frac{km}{r} + C.$$

Потенціальна енергія залежить від відстані r.

Припустимо, що $\Pi=0$ при $r=\infty$, тоді $C=0$.

І остаточно потенціальна енергія дорівнює: $\Pi = -\frac{km}{r}$; $\Pi = const$ при $r = const$.

Висновок: *еквіпотенціальні поверхні поля центральної притягальної сили є сферичними поверхнями з центром у точці O.*

Притягальна сила $\overline{P}$ спрямована по нормалі до еквіпотенціальної поверхні, яка перетинає точку O.

Запитання для самоконтролю:

1. Які сили називають потенціальними?
2. Що таке силова функція?
3. Як визначається потенціальна енергія, як вона пов'язана із силовою функцією?
4. Як обчислити роботу сили в потенціальному полі?
5. Що таке еквіпотенціальні поверхні, їх властивості?
6. Як виражається вектор сили і проекції сили через потенціальну енергію?
7. Сформулюйте закон збереження механічної енергії.

ЛЕКЦІЯ 10

МЕТОД КІНЕТОСТАТИКИ. ПРИНЦИП Д'АЛАМБЕРА

Закони Ньютона стосуються руху тільки вільної матеріальної точки. На невільну точку накладені обмеження у вигляді умов в'язі, які реалізуються за допомогою сил реакцій в'язей. Аксіома про звільненість від в'язей дає можливість звести будь-яку невільну точку до вільної, якщо включити до числа активних сил і реакції відповідних в'язей.

Тому метод кінетостатики еквівалентний основному закону динаміки і аксіомі про звільненість від в'язей. Цей метод ефективно використовується для розв'язування першої задачі динаміки невільної матеріальної точки, коли заданий закон її руху, а треба визначити шукану силу або реакцію в'язі, що обмежує рух точки в певному напрямі.

10.1. Сила інерції матеріальної точки

Припустимо, що людина штовхає возик масою m з силою $\overline{F}$ в напрямку руху (рис. 10.1) і возик одержує прискорення $\overline{a}$. Тоді, згідно третьому закону механіки про дію і протидію, возик діє на руку людини з силою $\overline{\Phi}$, яка дорівнює $\overline{F}$, але протилежна за напрямом прискоренню возика $\overline{a}$.

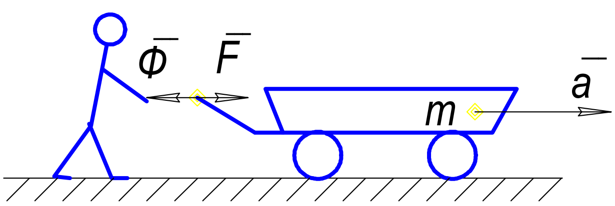


Рис. 10.1

m – маса возика; $\overline{a}$ – прискорення возика; $m \cdot \overline{a} = \overline{F}$ – рівнодійна усіх сил, що діють на возик;

$$\overline{\Phi} = -m\overline{a} \tag{10.1}$$

– сила інерції возика, що прикладена до рук людини.

Силою інерції матеріальної точки називають вектор $\overline{\Phi}$, який дорівнює за модулем добутку маси точки на її прискорення і який спрямований протилежно вектору прискорення "$\overline{a}$".

Сила інерції матеріальної точки до самої точки не прикладена, а прикладена до тих тіл, які надають точці прискорення.

Якщо рух точки заданий координатним способом, то сила інерції дорівнює:

$$\overline{\Phi} = -m\overline{a} = -\left(m\ddot{x} \cdot \overline{i} + m\ddot{y} \cdot \overline{j} + m\ddot{z} \cdot \overline{k}\right), \tag{10.2}$$

де $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}$ – проекції прискорення точки на відповідні осі координат.

Якщо рух точки заданий натуральним способом, то сила інерції має вираз:

$$\overline{\Phi} = -m\overline{a} = -\left(m\frac{dv}{dt}\overline{\tau} + m\frac{v^2}{\rho} \cdot \overline{n}\right), \tag{10.3}$$

де $a_\tau = \dfrac{dv}{dt}$ – дотична складова прискорення; $a_n = \dfrac{v^2}{\rho}$ – нормальна складова прискорення; ρ – радіус кривизни траєкторії точки.

Або $\quad \overline{\Phi} = \overline{\Phi}_\tau + \overline{\Phi}_n; \quad \overline{\Phi}_\tau = -m\overline{a}_\tau; \quad \overline{\Phi}_n = -m\overline{a}_n.$

$\overline{\Phi}_\tau$ – тангенціальна складова сили інерції точки;

$\overline{\Phi}_n$ – нормальна складова сили інерції точки або відцентрова сила.

Припустимо, що точка M масою m розміщена на обертовому тілі і обертається разом з тілом (рис. 10.2) на відстані r від осі O.

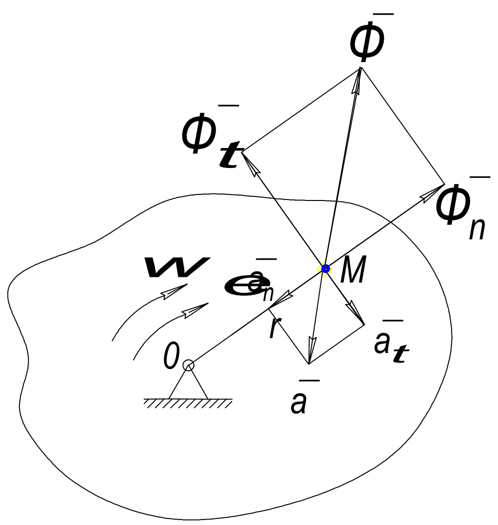


Рис. 10.2

Тоді сила інерції точки визначається:

$\left|\overline{\Phi}_\tau\right| = ma_\tau = mr\varepsilon$ – тангенціальна складова сили інерції;

$\left|\overline{\Phi}_n\right| = ma_n = m\omega^2 r$ – нормальна складова сили інерції точки або відцентрова сила інерції точки *M*.

Модуль повної сили інерції матеріальної точки дорівнює:

$$\left|\overline{\Phi}\right| = \sqrt{\left|\overline{\Phi}_\tau\right|^2 + \left|\overline{\Phi}_n\right|^2} = mr\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}\ .$$

10.2. Принцип Д’Аламбера для матеріальної точки

Нехай на матеріальну точку діє активна сила $\overline{P}$ і реакція в’язі $\overline{R}$.

Запишемо в векторній формі диференціальне рівняння руху невільної матеріальної точки:

$$m \cdot \overline{a} = \overline{P} + \overline{R}\ ,$$

де $\overline{P}$ – рівнодійна активних сил, які не залежать від в’язей; $\overline{R}$ – рівнодійна реакцій в’язей.

$$\overline{P} + \overline{R} + \left(-m \cdot \overline{a}\right) = 0,$$

$$\overline{P} + \overline{R} + \overline{\Phi} = 0, \tag{10.4}$$

де $\overline{\Phi} = -m\overline{a}$.

У будь який момент руху матеріальної точки активні сили і реакції в’язей зрівноважуються силою інерції, яка умовно прикладається до даної точки.

В цьому полягає ідея метода кінетостатики. Задача динаміки зводиться по формі до задачі статики, тобто до розгляду рівноваги точки, але в дійсності в задачах динаміки ніякої рівноваги не існує, в той же час математично тут все вірно.

Необхідно зауважити, що поняття “сила інерції” є фіктивним і не пов’язане з реальними силами природи, які характеризують кількісну міру взаємодії між тілами. Рівність (10.4) не є умовою рівноваги цих сил, оскільки вони прикладені до різних тіл: активна сила і реакція в’язі прикладена до матеріальної точки або тіла, а сила інерції – до тіл, що зумовлюють прискорення точки відносно абсолютної системи координат.

Метод кінетостатики – це не закон, а формально-математичний спосіб зведення рівнянь динаміки до рівнянь статики, але він дає математично точні і прості співвідношення для розв’язання задач динаміки.

Векторному рівнянню (10.4) відповідає три аналітичних рівняння в проекціях:

$$\begin{aligned} P_x + R_x + \Phi_x &= 0, \\ P_y + R_y + \Phi_y &= 0, \\ P_z + R_z + \Phi_z &= 0. \end{aligned} \tag{10.4*}$$

Приклад 10.1.

Платформа з вантажем опускається до низу з прискоренням $\bar{a}$, m – маса вантажу (рис.10.3).

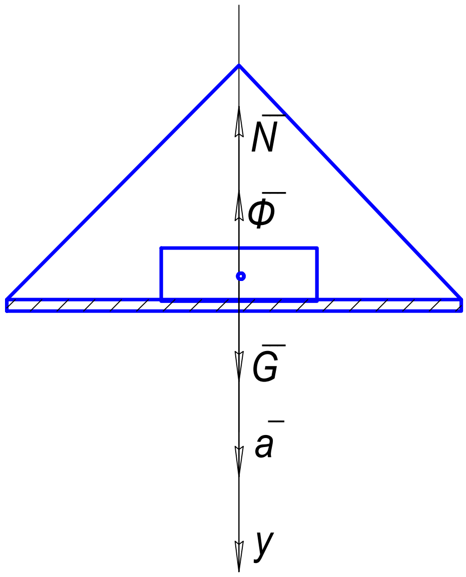


Рис. 10.3

Визначити реакцію платформи або точки вантажу на платформу $\bar{N}$.

Розв'язання.

$\left|\bar{\Phi}\right| = ma$ – сила інерції вантажу,

$G = mg$ – вага вантажу.

Умовно до вантажу прикладаємо його силу інерції і записуємо рівняння рівноваги, як суму проекцій сил на вісь y:

$$\sum P_{ky} = 0; \qquad G - \Phi - N = 0,$$

$$N = G - \Phi = mg - ma = m(g - a) = G(1 - a/g).$$

Якщо прискорення $a = g$, то $N = 0$ (умова невагомості).

10.3. Принцип Д'Аламбера для механічної системи

Припустимо, що механічна система складається з n матеріальних точок:

$m_1,\ m_2,...,m_n$ – маси точок; $\bar{r}_1,\ \bar{r}_2,...,\bar{r}_n$ – радіус-вектори точок;

$\bar{P}_1,\ \bar{P}_2,...,\bar{P}_n$ – рівнодійні активних сил, прикладених до кожної точки,

$\bar{R}_1,\ \bar{R}_2,...,\bar{R}_n$ – рівнодійні реакцій в'язей,

$\bar{a}_1,\ \bar{a}_2,...,\bar{a}_n$ – прискорення кожної точки,

$\bar{\Phi}_1 = -m_1\bar{a}_1,\ \bar{\Phi}_2 = -m_2\bar{a}_2,...,\bar{\Phi}_n = -m_n\bar{a}_n$ – сили інерції кожної точки.

Для k-тої точки застосовуємо принцип Д'Аламбера (10.4):

$$\bar{P}_k + \bar{R}_k + \bar{\Phi}_k = 0. \tag{10.5}$$

Додавши почленно рівняння (10.5) по всіх точках, отримаємо:

$$\sum \bar{P}_k + \sum \bar{R}_k + \sum \bar{\Phi}_k = 0, \tag{10.6}$$

де $\sum \bar{P}_k = \bar{P}$ – головний вектор активних сил механічної системи,

$\sum \bar{R}_k = \bar{R}$ – головний вектор реакцій в'язей механічної системи,

$\sum \bar{\Phi}_k = \bar{\Phi}$ – головний вектор сил інерції механічної системи.

Тоді $$\bar{P} + \bar{R} + \bar{\Phi} = 0. \tag{10.6*}$$

В будь який момент часу головний вектор активних сил, головний вектор реакцій в'язей і головний вектор сил інерції складають зрівноважену систему сил.

Або: *активні сили і реакції в'язей механічної системи зрівноважуються силами інерції, умовно прикладеними до точок системи.*

Обираємо довільно полюс O за центр зведення сил, які діють на механічну систему. Кожна точка системи відносно полюса O буде мати свій радіус-вектор: $\bar{r}_1,\ \bar{r}_2,...,\bar{r}_n$. Рівняння (10.5) помножимо векторно на $\bar{r}_k$, а потім просумуємо по всіх точках системи:

$$\bar{r}_k \times \overline{P}_k + \bar{r}_k \times \overline{R}_k + \bar{r}_k \times \overline{\Phi}_k = 0,$$

$$\sum \bar{r}_k \times \overline{P}_k + \sum \bar{r}_k \times \overline{R}_k + \sum \bar{r}_k \times \overline{\Phi}_k = 0,$$

де $\sum \bar{r}_k \times \overline{P}_k = \overline{M}_0^P$ - головний момент активних сил механічної системи;

$\sum \bar{r}_k \times \overline{R}_k = \overline{M}_0^R$ - головний момент реакцій в'язей механічної системи;

$\sum \bar{r}_k \times \overline{\Phi}_k = \overline{M}_0^\Phi$ - головний момент сил інерції механічної системи.

Тоді отримаємо:

$$\overline{M}_0^P + \overline{M}_0^R + \overline{M}_0^\Phi = 0 \qquad (10.7)$$

В будь який момент часу сума головного моменту активних сил, головного моменту реакцій в'язей і головного моменту сил інерції для механічної системи дорівнює нулю.

Рівнянням (10.6*) і (10.7) відповідають рівняння в проекціях на декартові осі координат:

$$P_x + R_x + \Phi_x = 0,$$

$$P_y + R_y + \Phi_y = 0,$$

$$P_z + R_z + \Phi_z = 0,$$

$$M_x^P + M_x^R + M_x^\Phi = 0, \qquad (10.7^*)$$

$$M_y^P + M_y^R + M_y^\Phi = 0,$$

$$M_z^P + M_z^R + M_z^\Phi = 0.$$

Можна показати, що головний вектор сили інерції дорівнює похідній за часом від кількості руху системи:

$$\overline{\Phi} = \sum \overline{\Phi}_k = -\sum m_k \overline{a}_k = -\frac{d}{dt}\sum m_k \overline{v}_k = -\frac{d\overline{K}}{dt}. \qquad (10.8)$$

А як відомо, $\overline{K} = M\overline{v}_c$. Тоді за допомогою кількості руху системи і виразу (10.8) можна визначити головний вектор сил інерції системи.

Головний момент сил інерції дорівнює похідній за часом від моменту кількості руху системи відносно центра O:

$$\begin{aligned}\overline{M}_0^{\phi} &= \sum \overline{r}_k \times \overline{\Phi}_k = -\sum \overline{r}_k \times m\overline{a}_k = \\ &= -\sum \overline{r}_k \times m_k \frac{d\overline{v}_k}{dt} = -\frac{d}{dt}\sum\left(\overline{r}_k \times m\overline{v}_k\right) = -\frac{d\overline{L}_0}{dt},\end{aligned} \qquad (10.9)$$

оскільки $\quad \dfrac{d}{dt}\left(\overline{r}_k \times m\overline{v}_k\right) = \dfrac{d\overline{r}_k}{dt} \times \overline{v}_k + \overline{r}_k \times \dfrac{md\overline{v}_k}{dt} = \overline{r}_k \times m\dfrac{d\overline{v}_k}{dt}.$

За допомогою виразу (10.9) можна визначити головний момент сил інерції системи.

Підставивши (10.8) у рівняння (10.6*), отримаємо $\dfrac{d\overline{K}}{dt} = \overline{P} + \overline{R}$, а це – теорема про зміну кількості руху невільної механічної системи.

Все це дає право стверджувати, що всі без виключення задачі динаміки можна розв’язувати без застосування метода кінетостатики, не користуючись навіть поняттям “сила інерції”.

Проте, метод кінетостатики внаслідок своєї простоти і наочності широко застосовується в інженерній практиці для розв’язування задач динаміки. Особливо цей метод зручний при визначенні реакцій в’язей механічної системи. Цей метод, звичайно, можна використовувати для визначення прискорень тіл механічної системи.

10.4. Зведення сил інерції точок тіла, що обертається відносно нерухомої осі

Тіло обертається навколо вертикальної осі з кутовою швидкістю ω і кутовим прискоренням ε (рис. 10.4).

Довільна точка масою m_k описує коло радіуса r_k і має тангенціальне прискорення $\overline{a}_k^{\tau}$. Кожна точка буде мати тангенціальну складову сили інерції:

$$\overline{\Phi}_k^{\tau} = -m_k \overline{a}_k^{\tau} = -m_k \varepsilon \cdot r_k$$

і нормальну (або відцентрову) силу інерції:

$$\overline{\Phi}_k^{n} = -m_k \overline{a}_n^{\tau} = -m_k \omega^2 r_k ,$$

яка не дає моменту відносно осі обертання, тому що вона перетинає цю вісь.

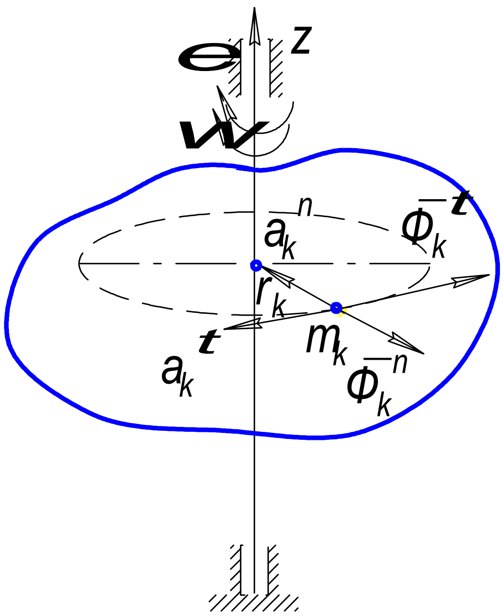


Рис. 10.4

Тільки тангенціальні сили інерції створюють моменти відносно осі обертання z:

$$M_z^{\Phi} = \sum \Phi_k^{\tau} \cdot r_k = -\sum m_k \varepsilon \cdot r_k^2 = -\varepsilon \sum m_k r_k^2 = -I_z \cdot \varepsilon ,$$

$$M_z^{\Phi} = -I_z \cdot \varepsilon . \qquad (10.10)$$

Момент сил інерції тіла, яке обертається навколо нерухомої осі з кутовим прискоренням, дорівнює добутку осьового моменту інерції маси тіла відносно осі обертання на кутове прискорення і спрямований у протилежний бік кутовому прискоренню.

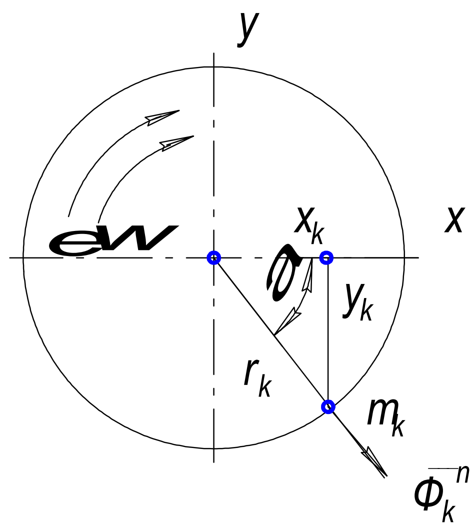


Рис. 10.5

Помітимо, що момент сил інерції тіла виникає тільки в період розгону або гальмування (перехідні режими). В період усталеного руху (рівномірне обертання) момент сил інерції дорівнює нулю.

Зведемо далі відцентрові сили інерції точок всього тіла (рис. 10.5).

Для кожної точки m_k маємо нормальну (відцентрову) силу інерції:

$$\Phi_k^n = m_k \omega^2 r_k .$$

Підсумкову силу інерції визначимо через проекції на осі координат:

$$\Phi^n = \sqrt{\left(\Phi_x^n\right)^2 + \left(\Phi_y^n\right)^2} \,. \qquad (10.11)$$

$$\Phi_x^n = \sum \Phi_{xk}^n = \sum m_k \omega^2 r_k \cos\alpha = \omega^2 \sum m_k x_k \,.$$

$\sum m_k x_k = M x_c$ (формула для координати x_c центра мас).

$$\Phi_x^n = \omega^2 \cdot M x_c \,, \qquad (10.12)$$

де M – маса тіла.

Аналогічно визначимо проекцію на вісь y:

$$\Phi_y^n = \omega^2 \cdot M y_c \,. \qquad (10.13)$$

Підставляючи (10.12) і (10.13) в (10.11), отримаємо:

$$\Phi^n = M\omega^2 \sqrt{x_c^2 + y_c^2} = M\omega^2 r_c = M \cdot a_c^n \,, \qquad (10.14)$$

де r_c – радіус-вектор центра мас тіла, $a_c^n = \omega^2 r_c$ – нормальне, доцентрове прискорення центра мас.

Аналіз виразу відцентрової сили інерції показує, що ця сила завжди має місце при обертанні і досить небезпечна, отже вона пропорційна квадрату кутової швидкості.

Відцентрова сила дорівнює нулю, коли $r_c = 0$, тобто центр мас розміщений на осі обертання. Це досягається методом балансування.

$$r_c = 0 \Rightarrow a_c^n = \omega^2 r_c = 0 \Rightarrow \Phi^n = 0 \,.$$

Приклад 10.2.

Визначити прискорення тіл і динамічні реакції при русі механічної системи (рис. 10.6).

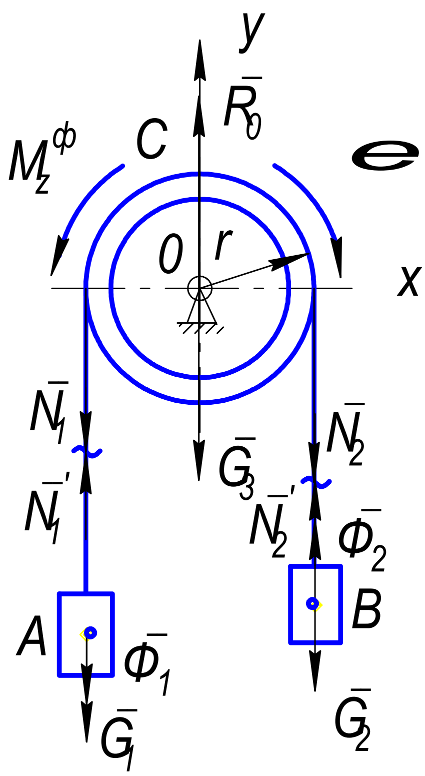


Рис. 10.6

$m_2 > m_1$,

m_1 - маса тіла A,

m_2 - маса тіла B,

m_3 - маса тіла C.

Маса шківа розподілена по ободу радіуса r,

r - радіус шківа.

<u>Визначити:</u>

a - прискорення вантажів,

N_1 - натяг тросу ліворуч,

N_2 - натяг тросу праворуч,

R_0 - реакція опори шківа.

Розв'язання.

$G_1 = m_1 g$ - вага вантажу А,

$G_2 = m_2 g$ - вага вантажу В,

$G_3 = m_3 g$ - вага шківа,

$I_z = m_3 r^2$ - осьовий момент інерції маси шківа,

$\left|\overline{\Phi}_1\right| = m_1 a$ - сила інерції вантажу А,

$\left|\overline{\Phi}_2\right| = m_2 a$ - сила інерції вантажу В,

$\left|M_z^{\phi}\right| = I_z \varepsilon = I_z \cdot \frac{a}{r} = m_3 r^2 \frac{a}{r} = m_3 ra$ - момент сил інерції шківа.

Якщо умовно прикласти до вантажів їх сили інерції, а до шківа момент сил інерції M_3^{ϕ}, то система буде в рівновазі і можна скласти рівняння рівноваги системи у вигляді суми моментів сил відносно точки O, виключивши сили $\overline{N}_1$ і $\overline{N}_2$, як внутрішні:

$$\sum m_0\left(\overline{\Phi}_k\right) + \sum m_0\left(\overline{P}_k\right) + \sum m_0\left(\overline{R}_k\right) = 0,$$

$$\Phi_1 r + G_1 r + \Phi_2 r - G_2 r + M_3^{\phi} = 0,$$

або
$$m_1 ar + m_1 gr + m_2 ar - m_2 gr + m_3 ra = 0,$$

звідки, скоротивши на r, маємо:

$$m_1 a + m_2 a + m_3 a = m_2 g - m_1 g,$$

$$a = \frac{g(m_2 - m_1)}{m_1 + m_2 + m_3} \text{ (прискорення вантажів).}$$

Натяг тросу ліворуч:

$$N_1' = G_1 + \Phi_1 = m_1 g + m_1 a = m_1(g + a).$$

Натяг тросу праворуч:

$$N_2' = G_2 - \Phi_2 = m_2 g - m_2 a = m_2 (g - a).$$

Реакція опори шківа:

$$R_0 = N_1 + N_2 + G_3 = m_1 (g + a) + m_2 (g - a) + m_3 g = G_1 + G_2 + G_3 - a(m_2 - m_1).$$

Запитання для самоконтролю:

1. Визначте поняття “сили інерції”.
2. Як виражається сила інерції точки в декартових і натуральних осях?
3. Як формулюється принцип Д’Аламбера для матеріальної точки?
4. Якою є умова невагомості?
5. Який зв’язок між основними теоремами динаміки і силами інерції, а також моментами сил інерції тіла?
6. Напишіть формулу зведеного моменту сил інерції тіла, що обертається навколо нерухомої осі?
7. Чому сили інерції вважаються фіктивними, а принцип Д’Аламбера - формальним?

ЛЕКЦІЯ 11

11.1. Зведення сил інерції точок твердого тіла до центра. Головний вектор і головний момент сил інерції

Тверде тіло – це механічна система матеріальних точок, у якій взаємне розташування точок не змінюється.

Головний вектор системи сил інерції окремих точок не залежить від вибору центра зведення і може бути обчислений заздалегідь:

$\overline{\Phi_к} = -m_k \overline{a}_k$ – сила інерції к-тої точки.

$$\overline{\Phi} = \sum - m_k \overline{a}_k = -\sum m_k \overline{a}_k = -M \cdot \overline{a}_c \ ; \qquad (11.1)$$

де M – маса тіла (системи), $\overline{a}_c$ – прискорення центра мас системи або центра ваги тіла.

$$\overline{a}_c = \overline{a}_c^{\tau} + \overline{a}_c^{n} .$$

Тоді $\overline{\Phi} = -M\left(\overline{a}_c^{\tau} + \overline{a}_c^{n}\right) = -M \cdot \overline{a}_c^{\tau} - M \cdot \overline{a}_c^{n} = \overline{\Phi}^{\tau} + \overline{\Phi}^{n}$.

Головний вектор сил інерції тіла, яке рухається довільно, дорівнює добутку маси тіла на прискорення його центра мас і спрямований протилежно вектору прискорення.

Головний момент сил інерції залежить від вибору центра зведення і визначається для окремих випадків руху твердого тіла.

а) Поступальний рух тіла

При поступальному русі тіла відсутнє обертання тіла навколо центра ваги (центра мас), тобто сума головного моменту активних сил і головного моменту реакцій в'язей відносно центра ваги (центра мас системи) дорівнює нулю:

$$M_c^P + M_c^R = 0 .$$

Але відомо, що згідно принципу Д'Аламбера, можна записати:

$$M_c^P + M_c^R + M_c^{\Phi} = 0 .$$

Оскільки $M_c^{\Phi} = 0$ при поступальному русі тіла, тобто головний момент сил інерції відсутній, то головний вектор сил інерції є рівнодійною сил інерції.

б) Обертальний рух тіла навколо нерухомої осі

Якщо тіло обертається навколо осі, то нормальні (відцентрові) сили інерції не створюють моментів відносно осі (вони перетинають вісь обертання), а тангенціальні сили інерції створюють сумарний момент.

Як відомо, кожна точка m_k обертового тіла, яка розміщена на деякій відстані r_k, створює елементарну тангенціальну складову сили інерції $\overline{\Phi_k} = -m_k \varepsilon \bar{r}_k$, як добуток маси на тангенціальне прискорення.

Просумуємо цю силу по всіх точках тіла і отримаємо сумарну тангенціальну силу інерції:

$$\overline{\Phi}^{\tau} = \sum \overline{\Phi}_k^{\tau} = -\sum m_k \varepsilon \bar{r}_k = -\varepsilon \sum m_k \bar{r}_k = -\varepsilon \cdot M \cdot \bar{r}_c = -M \bar{a}_c^{\tau} . \qquad (11.2)$$

Тангенціальна сила інерції тіла прикладена в центрі мас тіла і спрямована протилежно тангенціальному прискоренню центра мас, що і підкреслює знак мінус у виразі (11.2).

Крім того, тангенціальні сили інерції точок створюють моменти відносно осі обертового тіла, оскільки вони перпендикулярні радіусам обертання, а тому радіус r_k є плечем кожної сили. Просумуємо ці моменти по всіх точках тіла:

$$M_z^{\phi} = \sum M_z\left(\Phi_k^{\tau}\right) = \sum \Phi_k^{\tau} \cdot r_k = -\sum m_k \varepsilon r_k \cdot r_k = -\varepsilon \sum m_k r_k^2 = -\varepsilon I_z \,.$$

$$M_z^{\phi} = -I_z \cdot \varepsilon\,, \tag{11.3}$$

де I_z – осьовий момент інерції маси тіла відносно осі обертання, ε – кутове прискорення.

Момент сил інерції обертового тіла дорівнює добутку моменту інерції маси тіла відносно осі обертання на кутове прискорення тіла. Напрямок моменту інерціальних сил – протилежний напрямку кутового прискореня.

Головний момент сил інерції (11.3) виникає, як і головний вектор тангенціальних сил (11.2), тільки у перехідних режимах руху (розгін, гальмування).

В деяких випадках головний вектор сил інерції і головний момент сил інерції можна замінити однією силою – рівнодійною, прикладеною в центрі коливання k (рис. 11.1).

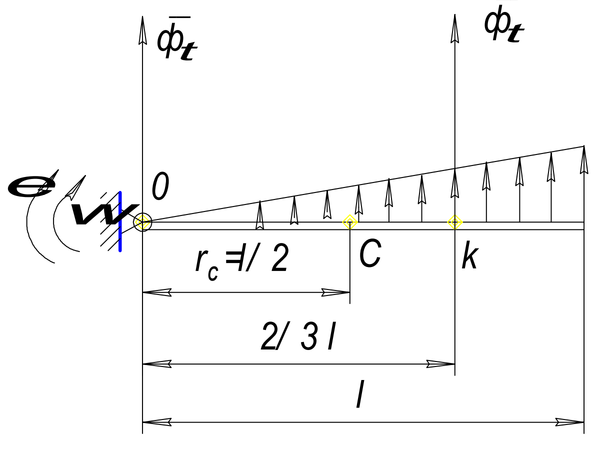


Рис. 11.1

Приклад 11.1.

Стержень масою m і довжиною l обертається з кутовим прискоренням ε навколо осі z в точці O, яка перпендикулярна площині рисунка.

Розв'язання.

Тангенціальна сила інерції дорівнює:

$$\left|\overline{\Phi}_{\tau}\right| = ma_c^{\tau} = m \cdot \varepsilon \cdot r_c = m\varepsilon \frac{l}{2}.$$

Момент сил інерції:

$$\left|M_{z0}^{\phi}\right| = I_{z0} \cdot \varepsilon = \frac{ml^2}{3} \cdot \varepsilon.$$

Тоді відстань від точки О до точки k, де прикладається сумарна сила, виражається величиною

$$b = \frac{\left|M_{z0}^{\phi}\right|}{\left|\Phi_{\tau}\right|} = \frac{ml^2 \cdot \varepsilon \cdot 2}{3 \cdot m \cdot \varepsilon \cdot l} = \frac{2}{3} l.$$

в) Плоскопаралельний рух тіла

Плоскопаралельний рух твердого тіла може бути розкладений на суму двох рухів: поступальний разом з полюсом і обертальний відносно полюса. За полюс, як правило, обирають центр мас точку C (рис. 11.2).

Припустимо що, стержень АВ масою m рухається у площині малюнка. Центр „С" має прискорення $\overline{a}_c$, кутове прискорення стержня - ε. Тоді головний вектор сил інерції і головний момент сил інерції відповідно дорівнюють:

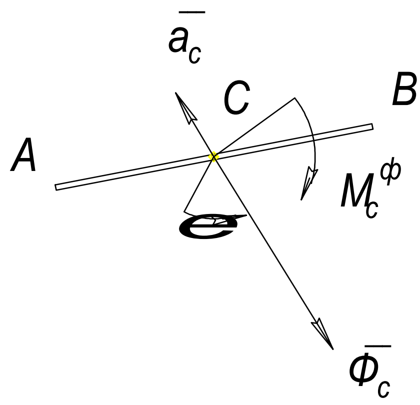


Рис. 11.2

$$\overline{\Phi_c} = -m\overline{a}_c ,$$

$$M_c^{\Phi} = -I_{zc} \cdot \varepsilon , \qquad (11.4)$$

де I_{zc} – осьовий момент інерції маси стержня відносно осі z, яка перпендикулярна до площини руху і проходить через центр мас.

11.2. Кінетостатичне дослідження плоского механізму

Попереду кінетостатичного дослідження механізму (рис. 11.3) проводять його кінематичне дослідження, тобто будують план швидкостей (рис. 11.3, а) і план прискорень (рис. 11.3, б), знаходять прискорення усіх необхідних точок механізму і кутові прискорення його ланок.

$$\overline{v}_B = \overline{v}_A + \overline{v}_{BA}; \qquad \overline{a}_B = \overline{a}_A + \overline{a}_{BA}^{\tau} + \overline{a}_{BA}^{n}; \qquad a_B = P'b' \cdot \mu_a; \qquad a'n = \frac{a_{BA}^n}{\mu_a};$$

$$\overline{v}_B = Pb \cdot \mu_v; \qquad a_{BA}^n = \frac{v_{BA}^2}{l_{AB}}; \qquad \varepsilon_{BA} = \frac{a_{BA}^{\tau}}{l_{AB}} = \varepsilon_2;$$

$$\frac{bc'_2}{c_2 a'} = \frac{BC_2}{AC_2}; \qquad \overline{v}_{BA} = ab \cdot \mu_v; \qquad a_{BA}^{\tau} = nb' \cdot \mu_a; \qquad a_{c2} = P'c_2 \cdot \mu_a .$$

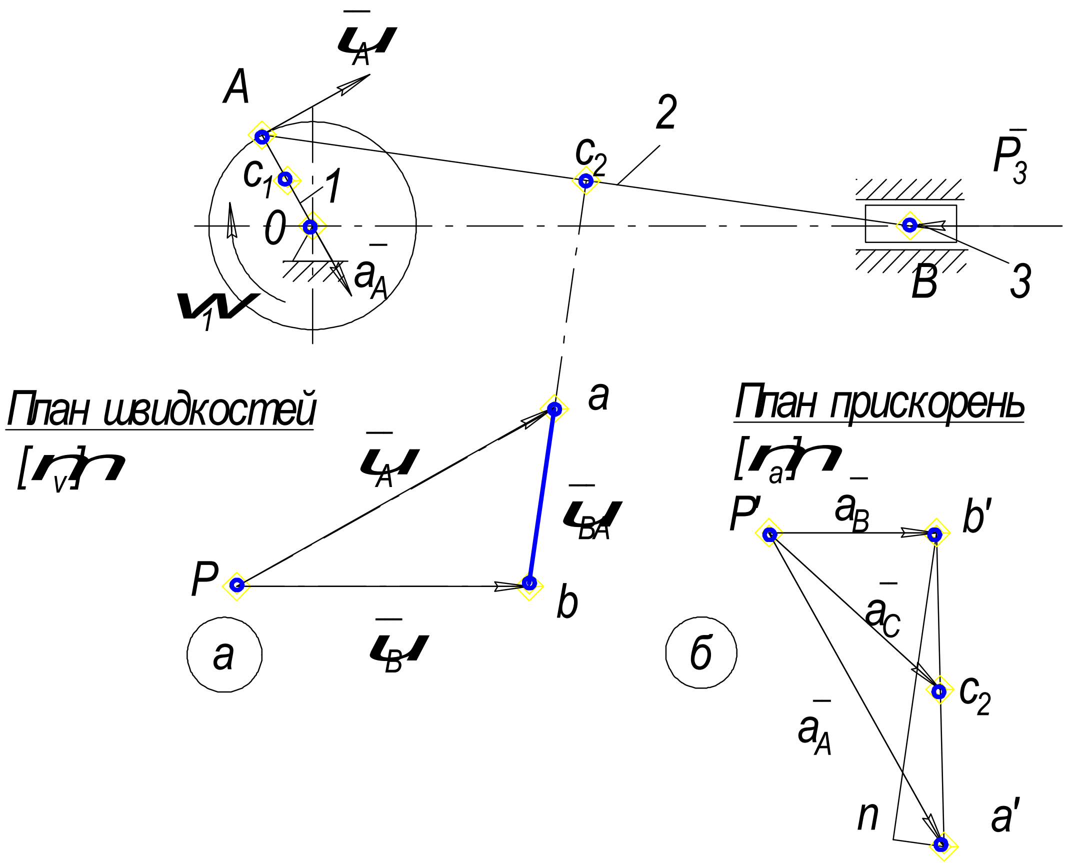


Рис. 11.3

Нехай кривошипно-повзунний механізм по пресуванню соломи заданий у певному положенні, що визначається кутом φ_1 повороту ведучої ланки кривошипа (рис. 11.3):

m_1 - маса кривошипа ОА;

m_2 - маса шатуна АВ;

m_3 - маса повзуна В.

Кривошип обертається за годинниковою стрілкою зі сталою кутовою швидкістю, $\omega_1 = const$, на повзун В діє сила технологічного опору $\overline{P}_3$,

$G_1 = m_1 g$ - вага кривошипа ОА;

$G_1 = m_1 g$ - вага шатуна АВ;

$G_1 = m_1 g$ - вага повзуна.

Побудуємо план швидкостей: швидкість точки A дорівнює $v_A = \omega \cdot OA$, в певному масштабі μ_v її вектор відкладається з полюса P і будується план швидкостей механізму за відомою методикою (рис. 11.3, а).

Потім будують план прискорень у певному масштабі μ_a. Прискорення точки A дорівнює $a_A = \omega^2 \cdot OA$, точка A має тільки нормальне прискорення. Прискорення точки B знаходиться згідно виразу:

$\overline{a}_B = \overline{a}_A + \overline{a}_{BA}^{\tau} + \overline{a}_{BA}^{n}$, як показано на малюнку (рис. 11.3, б).

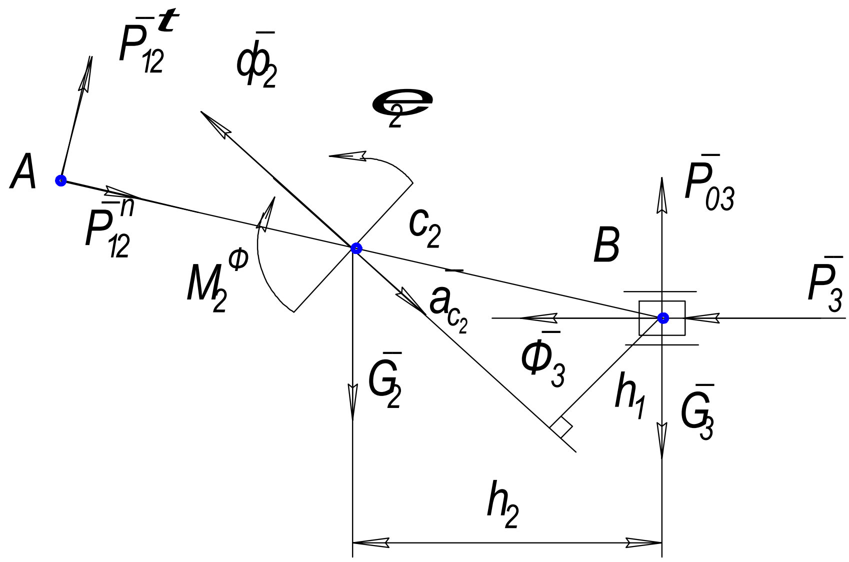


Рис. 11.4

Кінетостатичне дослідження починають з найбільш віддаленої від ведучої ланки, так званої, групи Ассура, яка складається з шатуна і повзуна (рис. 11.4). На цю групу діють такі сили:

активні: вага шатуна $\overline{G}_2$, вага повзуна $\overline{G}_3$, сила технологічного опору повзуна $\overline{P}_3$;

реакції в'язей: в точці A діє $\overline{P}_{12}$, яка розкладена на дві складові вздовж шатуна $\overline{P}_{12}^n$ і по перпендикуляру до шатуна $\overline{P}_{12}^\tau$; в точці B діє реакція напрямної опори $\overline{P}_{03}$. Усі реакції в'язей невідомі і потребують визначення, що і однією із основних задач кінетостатичного аналізу .

Визначимо сили інерції і моменти сил інерції: сила інерції шатуна дорівнює $\overline{\Phi}_2 = -m_2\overline{a}_{c2}$, вона спрямована протилежно прискоренню $\overline{a}_{c2}$; момент сил інерції шатуна $M_2^\phi = -I_{c2} \cdot \varepsilon_2$, який спрямований протилежно кутовому прискоренню ε_2; сила інерції повзуна $\overline{\Phi}_3 = -m_3\overline{a}_B$, яка спрямована протилежно прискоренню повзуна (точка B).

Таким чином, ця група Ассура (шатун і повзун) перебувають умовно в рівновазі під дією плоскої системи довільних сил: $\overline{P}_{12}^n$, $\overline{P}_{12}^\tau$, $\overline{G}_2$, $\overline{G}_3$, $\overline{\Phi}_2$, $\overline{\Phi}_3$, $\overline{P}_3$, $\overline{P}_{03}$ і моменту сил інерції шатуна M_2^ϕ.

Невідомі реакції $\overline{P}_{12}^n$, $\overline{P}_{12}^\tau$ і $\overline{P}_{03}$ знаходяться таким чином. Спочатку складають рівняння рівноваги групи, як суму моментів сил відносно точки B:

$$G_2 \cdot h_2 - \Phi_2 \cdot h_1 - M_2^\phi - P_{12}^\tau \cdot AB = 0.$$

З цього рівняння знаходимо одне невідоме – дотичну складову реакції $\overline{P}_{12}^\tau$.

Потім будують силовий многокутник усіх сил, який за умовами рівноваги повинен бути замкнутим, і знаходять невідомі $\overline{P}_{12}^n$ і $\overline{P}_{03}$. Для цього відкладають послідовно у певному масштабі відомі сили: $\overline{P}_{12}^\tau$, $\overline{G}_2$, $\overline{G}_3$, $\overline{\Phi}_2$, $\overline{\Phi}_3$, $\overline{P}_3$. Через початок сили $\overline{P}_{12}^\tau$ проводять пряму, яка паралельна напрямку шуканої сили $\overline{P}_{12}^n$, а через кінець сили $\overline{P}_3$ проводять пряму, яка паралельна напрямку вектора реакції $\overline{P}_{03}$ до перетину напрямів цих невідомих. Отримують замкнутий многокутник, з якого обчислюють $\overline{P}_{12}^{n}$ і $\overline{P}_{03}$, помножаючи довжину відрізку зі схеми на відповідний масштабний коефіцієнт сили (рис. 11.5).

Силовий многокутник (план сил)

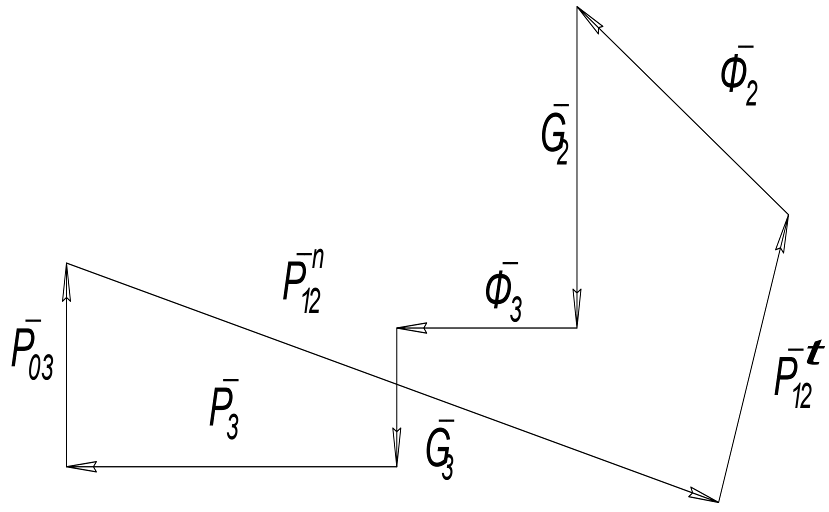


Рис. 11.5

Після цього розглядають рівновагу ведучої ланки – кривошипа 1 під дією прикладених сил (рис. 11.6):

вага $G_1 = m_1 g$,

зрівноважувальний момент $M_{зр}$,

реакції в'язей – в точці A: $\overline{P}_{21}^{n} = -\overline{P}_{12}^{n}$, $\overline{P}_{21}^{\tau} = -\overline{P}_{12}^{\tau}$;

в точці О: $\overline{x}_0$ та $\overline{y}_0$.

Сила інерції кривошипа $\overline{\Phi}_1 = -m_1 \overline{a}_{c1}$. Невідомими є зрівноважувальний момент $M_{зр}$ і реакції $\overline{x}_0$ та $\overline{y}_0$. Для цієї плоскої системи довільних сил складають три рівняння рівноваги, на підставі таких умов рівноваги:

$$\sum F_{kx} = 0\,,$$
$$\sum F_{ky} = 0\,,$$
$$\sum m_0\left(\overline{F}_k\right) = 0\,.$$

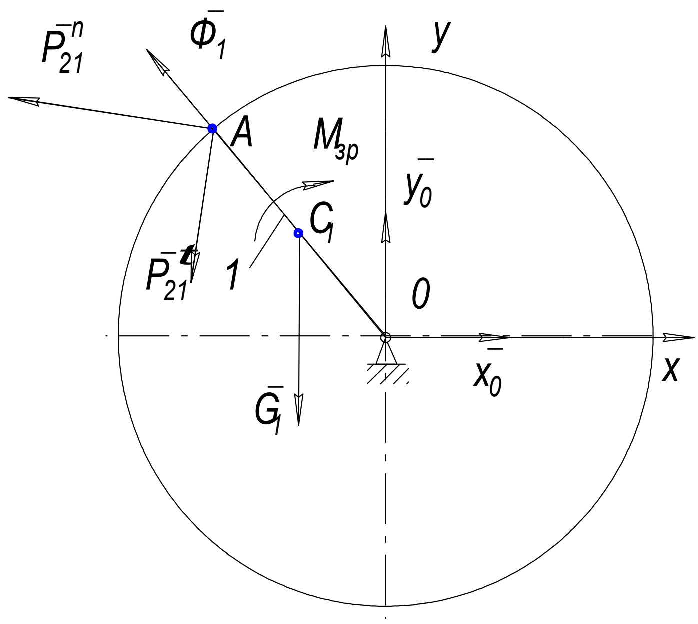


Рис. 11.6

Можна застосувати і другий більш простий метод. Спочатку необхідно скласти суму моментів усіх сил відносно центра 0: $\sum m_0\left(\overline{F}_k\right) = 0$. В це рівняння не потрапляють дві інші невідомі $\overline{x}_0$ і $\overline{y}_0$, тому маємо рівняння з одним невідомим і знаходимо зрівноважувальний момент $M_{зр}$. Потім складаємо векторне рівняння рівноваги сил ведучої ланки 1:

$$\overline{P}_{21}^{n} + \overline{P}_{21}^{\tau} + \overline{\Phi}_1 + \overline{G}_1 + \overline{y}_0 + \overline{x}_0 = 0\,.$$

Далі будуємо в масштабі многокутник сил, що діють на ведучу ланку 1 (аналогічно многокутнику на рис. 11.5), знаходимо величину і напрямки реакцій $\overline{x}_0$ і $\overline{y}_0$. Задача кінетостатичного аналізу механізму розв'язана.

11.3. Визначення динамічних реакцій підшипників при обертанні твердого тіла відносно нерухомої осі

Припустимо, що тіло обертається навколо нерухомої осі z зі сталою кутовою швидкістю ω. Визначимо динамічні реакції від сил інерції тіла. Якщо до кожної точки тіла прикласти силу інерції $\overline{\Phi}_k$, то тіло умовно буде перебувати у стані рівноваги під дією просторової системи довільних сил. (рис. 11.7).

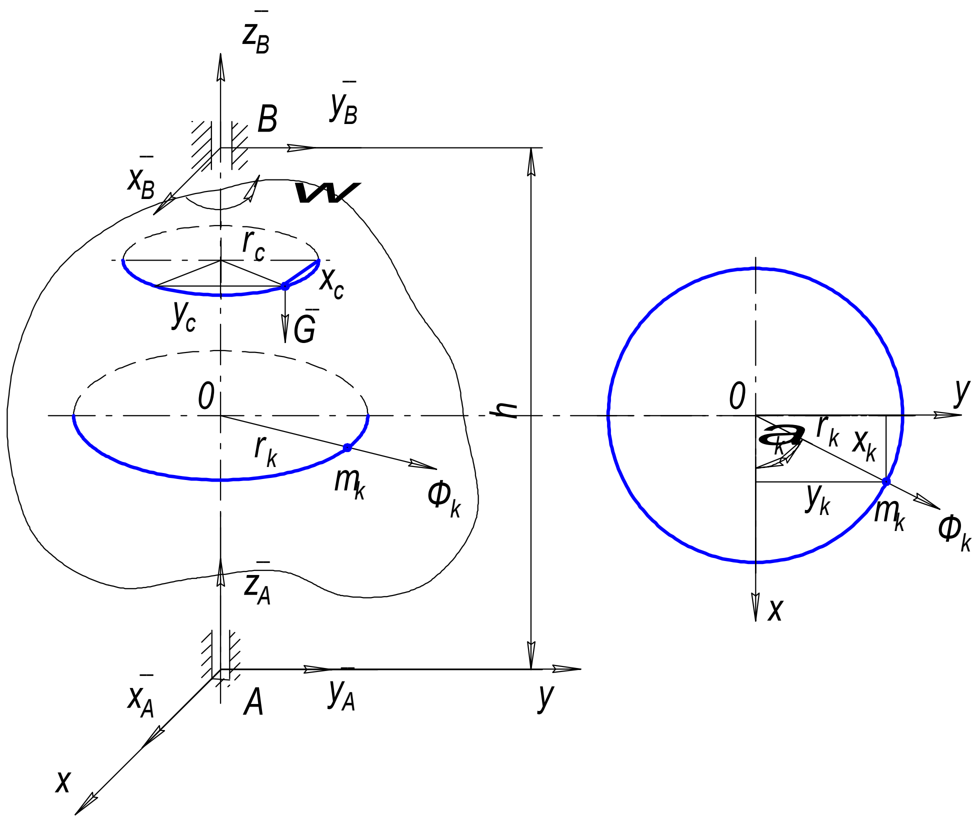


Рис. 11.7

$\omega = \text{const}$; $G = Mg$ - вага тіла; M - маса тіла; C - центр мас тіла, де прикладена сила ваги; h - відстань між опорами A і B; $\overline{\Phi}_k$ - сила інерції k-ої точки; x_c, y_c - координати центра мас;

$$\cos\alpha_k = \frac{x_k}{r_k},\ \sin\alpha_k = \frac{y_k}{r_k},\ \left|\overline{\Phi}_k\right| = m_k\omega^2 r_k .$$

Складемо шість рівнянь рівноваги на підставі принципу Д’Аламбера:

$$\begin{array}{lll}
1.\ \sum F_{kx} = 0 & x_A + x_B + \sum \Phi_{kx} = 0, & \\
2.\ \sum F_{ky} = 0 & y_A + y_B + \sum \Phi_{kxy} = 0, & \\
3.\ \sum F_{kz} = 0 & z_A - G = 0, & (11.5) \\
4.\ \sum m_x\left(\overline{F}_k\right) = 0 & -G\cdot y_C - y_B\cdot h - \sum m_x\left(\overline{\Phi}_{ky}\right) = 0, & \\
5.\ \sum m_y\left(\overline{F}_k\right) = 0 & G\cdot x_C + x_B\cdot h + \sum m_y\left(\overline{\Phi}_{kx}\right) = 0. & \\
6.\ \sum m_z\left(\overline{F}_k\right) = 0 & &
\end{array}$$

В шостому рівнянні сума моментів тотожньо дорівнює нулю, тому що всі реакції і сили інерції перетинають вісь обертання.

Визначимо проекцію головного вектора сил інерції на вісь x:

$$\begin{aligned}\sum \Phi_{kx} &= \sum m_k\omega^2 r_k \cos\alpha_k = \\ &= \sum m_k\omega^2 r_k \frac{x_k}{r_k} = \sum m_k\omega^2 x_k = \omega^2 \sum m_k x_k = \omega^2 M\cdot x_c\end{aligned} \qquad (11.6)$$

Аналогічно і на вісь y:

$$\sum \Phi_{ky} = \omega^2 M\cdot y_c .$$

Визначимо моменти від сил інерції відносно осей x і y:

$$\sum m_x\left(\overline{\Phi}_{ky}\right) = -\sum m_k\omega^2 y_k z_k = -\omega^2 \sum m_k y_k z_k = -\omega^2\cdot I_{yz},$$

$$\sum m_y\left(\overline{\Phi}_{kx}\right) = \sum \Phi_{kx}\cdot z_k = \sum m_k\omega^2 x_k z_k = \omega^2 \sum m_k x_k z_k = \omega^2 I_{xz}, \qquad (11.7)$$

де I_{xz}, I_{yz} – відцентрові моменти інерції маси тіла.

Остаточно, після підстановки визначених сил інерції і моментів інерційних сил рівняння для динамічних реакцій набувають вигляду:

$$
\begin{aligned}
&1.\ x_A + x_B + \omega^2 M x_c = 0,\\
&2.\ y_A + y_B + \omega^2 M y_c = 0,\\
&3.\ z_A - G = 0,\\
&4.\ -G \cdot y_C - y_B \cdot h + \omega^2 I_{yz} = 0,\\
&5.\ G \cdot x_C + x_B \cdot h + \omega^2 I_{xz} = 0.
\end{aligned}
\tag{11.8}
$$

З рівнянь (11.8), взагалі, можна визначити динамічні реакції, якщо відомі x_C, y_C, I_{xz}, I_{yz}, і ці реакції, як можна побачити, залежать від квадрату кутової швидкості ω^2. Статичними реакціями є ті, що залишаються, коли $\omega = 0$ (спокій).

Динамічні реакції можуть бути значно більші, ніж статичні, і це залежить не тільки від значення ω, але і від величин x_c, y_c, I_{xz}, I_{yz}, які характеризують розподіл мас тіла по відношенню до осі обертання z.

З рівнянь (11.8) випливає, що динамічні реакції опор, які виражаються останніми доданками в рівняннях 1, 2, 4, 5, будуть дорівнювати нулю, якщо виконуються умови:

$$x_C = 0,\ y_C = 0,\ I_{xz} = 0,\ I_{yz} = 0. \tag{11.9}$$

Перші дві умови (11.9) означають, що центр ваги повинен бути розташований на осі обертання, а останні дві умови свідчать про те, що вісь z повинна бути головною віссю інерції. Таким чином, щоб динамічні реакції були відсутні, тобто щоб на опори не було додаткового динамічного тиску, необхідно, щоб вісь обертання була головною центральною віссю інерції тіла для початку координат.

Сили інерції усіх точок при цьому зрівноважуються, а вісь обертання буде вільною віссю обертання. Тіла, які обертаються навколо осі і у яких реакції опор не залежать від величини кутової швидкості і кутового прискорення, називаються динамічно зрівноваженими.

11.4. Поняття про статичне і динамічне балансування

Тіло, що має вісь обертання, вважається статично збалансованим, якщо головний вектор сил інерції дорівнює нулю, а це є наслідком того, що координати центра ваги дорівнюють нулю: $x_C = 0$ і $y_C = 0$, і вісь обертання проходить через центр ваги тіла. При обертанні таке тіло (ротор, барабан) зупиняється кожен раз у байдужому положенні.

При статичному зрівноважуванні (збалансуванні), коли центральна вісь паралельна осі обертання, досить до тіла додати деяку масу на певному радіусі, або висвердлити її і вісь обертання буде центральною віссю.

Але для повного збалансування необхідно виконати і другу пару умов (11.9) . Відцентрові моменти інерції I_{xz} і I_{yz}, якщо тіло обертається відносно осі z, характеризують асиметрію тіла навколо осі обертання.

Якщо тіло статично збалансоване ($x_c = 0;\ y_c = 0$), але посаджене на вал з перекосом, тобто площина його симетрії не перпендикулярна до осі обертання, то тіло не буде динамічно збалансованим. Якщо тіло зрівноважене статично, то динамічно воно може бути і не зрівноваженим. І тільки тоді, коли тіло зрівноважене динамічно ($I_{xz} = 0; I_{yz} = 0$), воно збалансоване і статично (повне зрівноважування). Останнє означає, що динамічні додатки реакцій опор дорівнюють нулю.

Якщо тіло динамічно або моментно не збалансоване, то осі A_x, A_y і A_z не будуть головними осями інерції. Це призводить до того, що в опорах створюється пара сил реакцій, реактивний момент якої необхідно зрівноважити. А пару сил можна зрівноважити тільки парою. Тому в спеціально підібраних площинах корекції необхідно додати дві маси. Але все це робиться на спеціальних балансувальних верстатах, про що детально розповідається в курсах теорії механізмів і машин.

Запитання для самоконтролю:

1. Як звести до рівнодійної сили інерції точок тіла, яке рухається поступально?
2. Як звести до відповідних силових факторів сили інерції точок тіла, що обертається навколо осі, рухається плоскопаралельно?
3. На підставі якого принципу відбувається кінетостатичне дослідження механізму?
4. Який порядок приймається при дослідженні механізму?
5. Як визначаються динамічні реакції підшипників?
6. Назвіть умови статичної і динамічної зрівноваженості обертового тіла?
7. Що таке статичне і динамічне балансування обертових тіл?

ЛЕКЦІЯ 12

ОСНОВИ АНАЛІТИЧНОЇ МЕХАНІКИ

Основи аналітичної механіки, як науки, створені видатним вченим Ж.Лагранжем, який опублікував у 1788 році двотомний твір “Аналітична механіка.” Він спирався на дослідження динаміки невільної системи і загальних принципів механіки Д. Бернуллі, Л.Ейлера, Ж.Д’Аламбера. Подальший розвиток аналітичних методів теоретичної механіки в XIX ст. пов’язаний з працями М.Остроградського, К.Якобі, С.Пуассона, У.Гамільтона.

На думку Лагранжа, аналітичний розділ механіки є сукупністю загальних аналітичних методів розв’язування задач механіки вільних і невільних матеріальних систем, що не ґрунтуються на геометричних, векторних уявленнях Ньютона.

В сучасних умовах таке протиставлення позбавлене змісту, тому що зараз аналітичні методи і геометричні образи настільки взаємопов’язані, що їх важко відокремити.

Численні застосування в техніці мають теорії стійкості руху і малих коливань механічних систем. Їх розвиток – у працях П.Діріхле, Е.Рауса, М.Є.Жуковського, А.Пуанкаре. Визначальний внесок у розвиток теорії стійкості надав О.М.Ляпунов (кінець XIX ст.).

Основоположними поняттями цього розділу є уявлення про в’язі і їх класифікацію, про ідеальні в’язі, поняття про дійсні і можливі або віртуальні переміщення системи.

12.1. Механічні в'язі і їх рівняння. Класифікація в'язей

Механічна система, як відомо, є сукупністю матеріальних точок, положення і рух яких взаємопов'язані і взаємообумовлені. Класичним прикладом механічної системи є сонячна система. Механічною або матеріальною системою є будь-який механізм, машина.

Якщо кожна точка механічної системи може займати у просторі довільне положення і мати будь-яку швидкість, то така система називається вільною.

Якщо положення і рух окремих точок системи обмежені, тобто точки системи не можуть займати довільні положення і мати довільні швидкості, то таку систему називають невільною.

Обмеження або умови, які накладені на систему, називаються в'язями. В'язі накладають обмеження на зміну координат точок і їх швидкостей.

Нехай система складається з n матеріальних точок. Декартові координати k-тої точки будуть $x_k,\ y_k,\ z_k$, проекції швидкості k-тої точки на осі координат - $\dot{x}_k,\ \dot{y}_k,\ \dot{z}_k$. Якщо на систему накладена в'язь, то аналітично її можна записати у вигляді:

$$\begin{aligned} &f\left(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots x_n, y_n, z_n, \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \dot{x}_2, \dot{y}_2, \dot{z}_2, \ldots \dot{x}_n, \dot{y}_n, \dot{z}_n, t\right) \le 0, \\ &f\left(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots x_n, y_n, z_n, \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \dot{x}_2, \dot{y}_2, \dot{z}_2, \ldots \dot{x}_n, \dot{y}_n, \dot{z}_n, t\right) \ge 0. \end{aligned}, \quad (12.1)$$

а) Якщо функція, яка описує в'язь, дорівнює нулю $f\left(x_k,\ y_k,\ z_k,\ \dot{x}_k,\ \dot{y}_k,\ \dot{z}_k,\ t\right) = 0$, то в'язь називають утримувальною, двобічною.

Якщо функція в'язі більше нуля $f\left(x_k,\ y_k,\ z_k,\ \dot{x}_k,\ \dot{y}_k,\ \dot{z}_k,\ t\right) > 0$ або менше нуля $f < 0$, то в'язь є неутримувальною, однобічною.

б) Якщо в рівняння або нерівність в'язі (12.1) не входить час t, тобто в'язь не залежить від часу, то така в'язь називається стаціонарною, а якщо час входить – нестаціонарною.

в) Якщо в рівняння або нерівність в'язі (12.1) не входять проекції швидкостей точок ($\dot{x}_k$, $\dot{y}_k$, $\dot{z}_k$), тобто в'язь не залежить від швидкостей точок, то вона називається голономною (геометричною) в'яззю, а якщо залежить від швидкостей точок, то – неголономною (кінематичною).

Приклади в'язей.

1) Дві точки з координатами $M_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$ і $M_2(x_2,\ y_2,\ z_2)$ з'єднані жорстким стержнем довжиною l. Написати рівняння в'язі (рис.12.1).

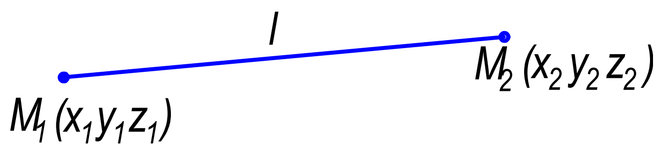


Рис. 12.1

Умова збереження відстані між двома точками може бути записана так:

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - l^2 = 0 \qquad (12.2)$$

Дана в'язь згідно рівняння (12.2) є утримувальною, стаціонарною, голономною (геометричною).

2) Дві точки з координатами M_1 (x_1, y_1, z_1) і M_2 (x_2, y_2, z_2) з'єднані гнучкою ниткою довжиною l (рис. 12.2).

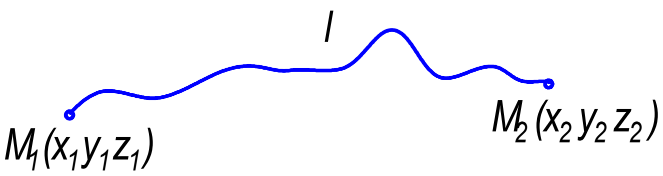


Рис. 12.2

Відстань між точками не може бути більшою, ніж довжина нитки. Ця умова виражається нерівністю:

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - l^2 \le 0 \qquad (12.3)$$

Дана в’язь є неутримувальною, стаціонарною, голономною.

3) Дві точки з’єднані пружиною, яка одягнута на стержень, довжина пружини змінюється по закону $l = l_1 + l_0 \sin kt$ (рис. 12.3).

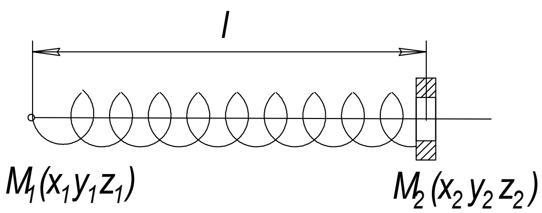


Рис. 12.3

Рівняння в’язі

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - (l_1 + l_0 \sin kt)^2 = 0 \qquad (12.4)$$

Дана в’язь є утримувальною, нестаціонарною, голономною.

4) Кривошипно-повзунний механізм (рис. 12.4).

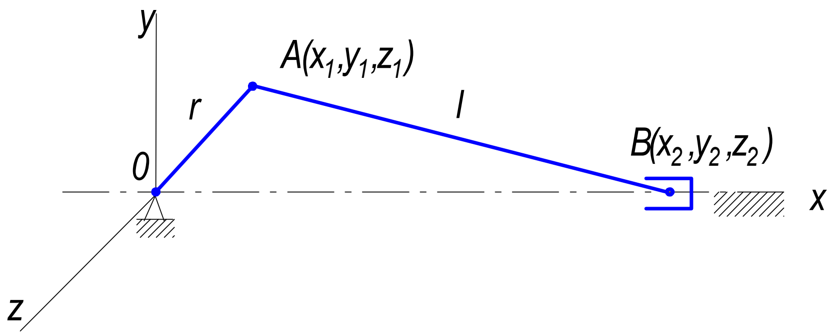


Рис. 12.4

Запишемо рівняння в'язей:

$z_1 = 0$; $z_2 = 0$ - механізм є плоским, бо всі його точки рухаються в площині $x0y$;

- $y_2 = 0$ - повзун B рухається вздовж осі x;

- $x_1^2 + y_2^2 + r^2 = 0$ - в'язь показує, що відстань $OA = l$ зберігається і точка рухається по колу радіуса r;

- $(x_2 - x_1)^2 + y_1^2 - l^2 = 0$ - в'язь характеризує незмінність відстані $AB = l$.

Наведені в'язі є утримувальними, стаціонарними, голономними.

12.2. Можливі або віртуальні переміщення системи. Степінь вільності механічної системи

Можливими або віртуальними переміщеннями системи називають сукупність таких уявних нескінченно малих переміщень точок системи, які не суперечать в'язям, що накладені на систему, і відбуваються миттєво, у даний момент часу.

Позначаються можливі переміщення $\delta\,\bar{r}_k$, вони спрямовані у бік переміщення, вздовж векторів можливих швидкостей.

Можливі переміщення повинні задовольняти двом умовам:

1) Вони повинні бути нескінченно малими, щоб не порушувались умови рівноваги;

2) Щоб не руйнувались в'язі, які накладені на систему.

Дійсні переміщення, які відбуваються під дією прикладених сил за деякий елементарний проміжок часу, можуть співпадати з можливими. У випадку стаціонарних в'язей дійсне переміщення співпадає з одним із можливих переміщень. Дійсні переміщення відповідають реальному закону руху системи.

На відміну від дійсних, можливі переміщення розглядаються незалежно від діючих сил, закону руху системи і є сукупністю уявних одночасних переміщень точок системи, сумісних із в'язями. Можливі переміщення – це деякий геометричний образ, не пов'язаний ні з рухом, ні зі зміною в'язі, серед яких навіть нестаціонарні в'язі вважаються "зупиненими".

Дійсні переміщення $d\bar{r}$ характеризуються елементарними приростами радіус-векторів $\bar{r}_k = \bar{r}_k(x_k, y_k, z_k, t)$ точок системи протягом часу із точністю до малих другого порядку мализни і визначаються диференціалами:

$$d\bar{r} = \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial x_k} dx_k + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial y_k} dy_k + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial z_k} dz_k + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial t} dt\,.$$

Можливі переміщення – це елементарні прирости радіус-вектора точки, які спричинені зміненням координат x_k, y_k, z_k незалежно від фіксованого часу t і які називаються ізохорними варіаціями

$$\delta\ \bar{r}_k = \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial x_k}\delta\ x_k + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial y_k}\delta\ y_k + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial z_k}\delta\ z_k\,.$$

На відміну від дійсних при можливих переміщеннях варіація часу дорівнює нулю ($\delta t = 0$).

У випадку нестаціонарних в'язей дійсні переміщення системи не відносяться до числа її можливих переміщень.

В загальному випадку для точок і тіл механічної системи може існувати безліч різних можливих переміщень. Проте, для кожної системи, в залежності від характеру накладених в'язей, можна вказати певне число таких незалежних між собою можливих переміщень, що усяке інше можливе переміщення можна однозначно виразити через ці незалежні.

Число незалежних між собою можливих переміщень системи, які можна надати її точкам у фіксований момент часу, називається числом степенів вільності цієї системи.

Для систем із голономними (геометричними) в'язями можна навести такі обчислення:

- одна вільна матеріальна точка у просторі має три степені вільності: три незалежних можливих переміщення вздовж трьох взаємноперпендикулярних осей ($H = 3$).

Тоді для системи n матеріальних точок кількість степенів вільності визначається:

$$H = 3n - S\,,$$

де S – число умов в'язей.

Три точки (рис. 12.5), які пов'язані трьома відрізками (жорстка система) : $H = 3 \cdot 3 - 3 = 6$.

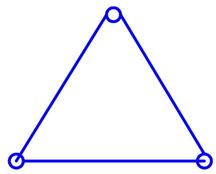


Рис. 12.5

Тверде тіло, як сукупність матеріальних точок, взаємне розташування яких не змінюється, має 6 степенів вільності: три лінійних переміщення вздовж трьох координатних осей і три кутових переміщення (елементарні повороти) відносно цих осей.

12.3. Ідеальні в’язі

Усі сили, які діють на невільну матеріальну точку або невільну механічну систему, поділяються на активні сили і сили реакцій в’язей. Активні сили намагаються викликати певний рух точки або системи.

Реакції в’язей виникають у відповідь на дію активних сил і обумовлені механічною дією з боку в’язей, які обмежують рух механічної системи або чинять опір цьому рухові.

В’язі вважаються ідеальними, якщо алгебраїчна сума елементарних робіт реакцій в’язей на будь-яких можливих переміщеннях точок прикладення реакцій дорівнює нулю.

Математично критерії ідеальних в’язей системи можуть бути записані виразом, який є умовою визначення ідеальної в’язі:

$$\sum \delta\ A(N_k) = \sum \overline{N}_k \cdot \delta\ \bar{r}_k = 0, \qquad (12.5)$$

де $\overline{N}_k$ – реакція k-тої ідеальної в’язі без врахування тертя, коли $\overline{N}_k \perp \delta\ \bar{r}_k$.

Наприклад, для гладенької поверхні реакція її завжди спрямована по нормалі, а можливе переміщення – по дотичній до поверхні. Кут між ними 90^0, тому добуток, який виражає елементарну роботу, дорівнює нулю (рис.12.6).

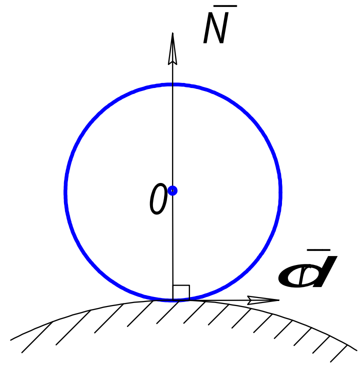


Рис. 12.6.

А як бути у випадку реальних в’язей, у більшості з яких має місце тертя? Для цього існує простий метод перетворення реальної в’язі в ідеальну: повну реакцію реальної в’язі, яка відхилена від вертикалі на кут тертя φ, розкладають на дві складові (рис. 12.7):

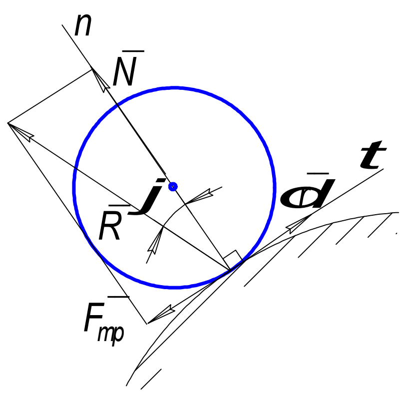


Рис. 12.7.

нормальну $\overline{N}$ і тангенціальну $\overline{F}_{mp}$ (сила тертя), вздовж нормалі n і дотичної τ. Тоді елементарна робота нормальної реакції $\overline{N} \perp \delta \overline{r}$ дорівнює нулю, а силу тертя $\overline{F}_{mp}$ включають в систему активних сил і оперують з нею, як зі звичайною активною силою. Таким чином, можна будь-яку реальну в'язь звести до ідеальної.

12.4. Принцип можливих переміщень

Розглянемо стаціонарну систему n матеріальних точок з ідеальними в'язями, яка під дією активних сил і сил реакцій в'язей $\overline{R}_k$ перебуває в рівновазі.

На кожну точку діють сили $\overline{P}_k$ і $\overline{R}_k$, які зрівноважуються.

$$\overline{P}_k + \overline{R}_k = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{12.6}$$

$\overline{P}_k$ – рівнодійна активних сил, прикладених до к-тої точки.

$\overline{R}_k$ – рівнодійна реакцій ідеальних в'язей, прикладених до k-тої точки.

Рівність (12.6) скалярно помножимо на $\delta \overline{r}_k$:

$$\overline{P}_k \cdot \delta\, \overline{r}_k + \overline{R}_k \cdot \delta\, \overline{r}_k = 0. \tag{12.7}$$

Рівність (12.7) просумуємо по всіх точках:

$$\sum \overline{P}_k \cdot \delta\, \overline{r}_k + \sum \overline{R}_k \cdot \delta\, \overline{r}_k = 0; \tag{12.8}$$

$$\sum \delta\, A\left(\overline{P}_k\right) + \sum \delta\, A\left(\overline{R}_k\right) = 0, \tag{12.9}$$

де $\sum \delta\, A\left(\overline{P}_k\right)$ – сума елементарних робіт активних сил;

$\sum \delta\, A\left(\overline{R}_k\right)$ – сума елементарних робіт реакцій ідеальних в'язей.

Але якщо в'язі ідеальні, то робота ідеальних в'язей дорівнює нулю $\sum \delta\ A(\overline{R}_k) = 0$ і рівність (12.9) набуває вигляду

$$\sum \delta\ A(\overline{P}_k) = 0, \tag{12.10}$$

або
$$\sum P \cdot \delta\ S_k \cdot \cos(\overline{P}_k, \hat{\delta}\ \overline{S}_k) = 0. \tag{12.11}$$

Для рівноваги матеріальної системи з ідеальними стаціонарними в'язями необхідно і достатньо, щоб сума елементарних робіт усіх діючих активних сил на можливих переміщеннях системи дорівнювала нулю.

Рівняння (12.11) в аналітичній формі має вигляд

$$\sum P_{kx} \cdot \delta\ x_k + \sum P_{ky} \cdot \delta\ y_k + \sum P_{kz} \cdot \delta\ z_k = 0. \tag{12.12}$$

Принцип можливих переміщень дає умову рівноваги системи, виключивши реакції ідеальних в'язей. Якщо в системі є реальні в'язі і необхідно враховувати тертя, то реакцію реальної в'язі (рис. 12.7) розкладають на нормальну і силу тертя, а останню включають у суму елементарних робіт.

12.5. Застосування принципу можливих переміщень

Принцип можливих переміщень широко застосовується у різних технічних розрахунках. Розглянемо деякі випадки на прикладах.

а) Визначення реакцій в'язей.

Якщо, наприклад, треба визначити реакцію в опорі *B* балки *ABD*, яка складається з двох частин, з'єднаних шарніром в точці *C* (рис. 12.8), то можна використати принцип можливих переміщень.

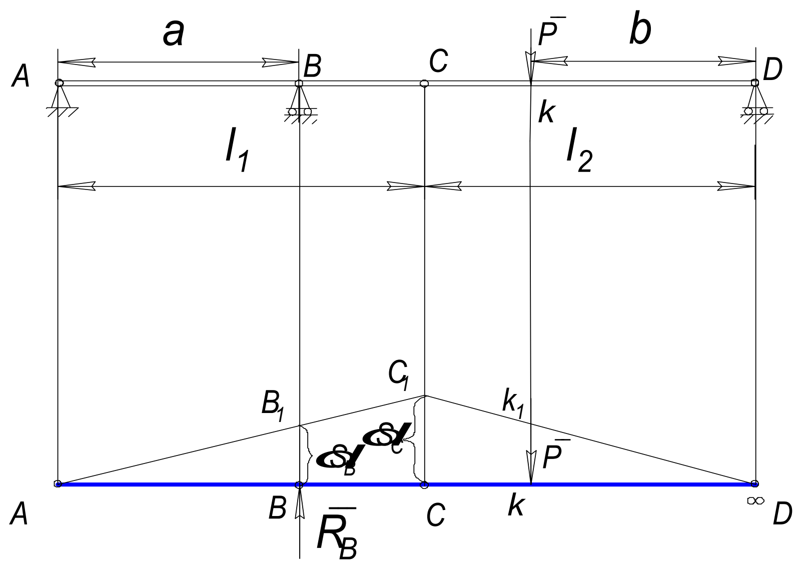


Рис. 12.8

Звільнимось у точці B від в'язі, замінивши її реакцією $\overline{R}_B$ і надамо балці можливе переміщення. Тоді точки B, C і K змістяться відповідно на $\delta\ S_B$, $\delta\ S_C$ і $\delta\ S_K$. Складемо суму елементарних робіт сил на можливих переміщеннях точок їх прикладення (12.11):

$$R_B \cdot \delta\ S_B - P \cdot \delta\ S_K = 0,$$

звідки
$$R_B = P\frac{\delta\ S_k}{\delta\ S_B}. \qquad (12.13)$$

Розглянемо подібні трикутники $\Delta ABB_1 \sim \Delta ACC_1$, тоді $\frac{BB_1}{CC_1} = \frac{AB}{AC}$ або

$$\frac{\delta\ S_B}{\delta\ S_C} = \frac{a}{l_1}; \qquad (12.14)$$

$$\Delta DKK_1 \sim \Delta DCC_1; \quad \text{тоді} \quad \frac{KK_1}{CC_1} = \frac{DK}{DC} \quad \text{або} \quad \frac{\delta\, S_K}{\delta\, S_C} = \frac{b}{l_2}; \qquad (12.15)$$

Рівність (12.15) можна почленно поділити на рівність (12.14):

$$\frac{\delta\, S_K}{\delta\, S_B} = \frac{bl_1}{al_2}. \qquad (12.16)$$

Підставимо значення $\delta\, S_B$ і $\delta\, S_K$ із виразу (12.16) в (12.13) і маємо відповідь:

$$R_B = P\frac{\delta\, S_K}{\delta\, S_B} = P\frac{bl_1}{al_2}.$$

б) Поліспаст.

Визначити залежність між силами P і Q за допомогою принципа можливих переміщень (рис. 12.9).

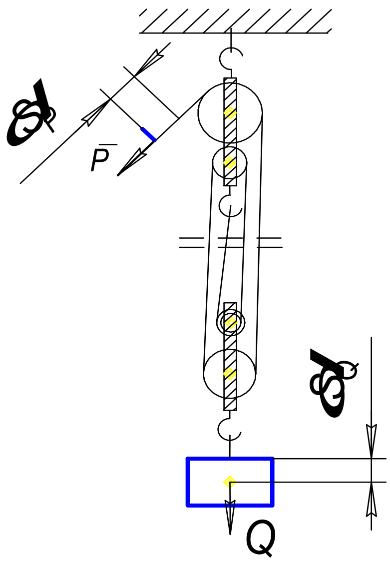


Рис. 12.9

Поліспаст складається з двох систем блоків, кожна з яких розташована в спільній обоймі. Одна обойма закріплена нерухомо, а друга рухається з вантажем Q. Рушійна сила P прикладена до кінця тросу. Надамо системі можливе переміщення, яке співпадає з дійсним переміщенням при підніманні вантажу Q. Якщо вантаж підніметься на відстань $\delta\ S_Q$, то кожна з чотирьох гілок тросу між блоками зменшиться на $\delta\ S_Q$, а точка прикладення сили P зміститься на $4\delta\ S_Q$.

Запишемо рівняння елементарних робіт:

$$P \cdot \delta\ S_P - Q \cdot \delta\ S_Q = 0,$$

звідки:

$$P = Q \frac{\delta\ S_Q}{\delta\ Sp} = \frac{Q}{4}.$$

Тобто, рушійна сила P менша, ніж вага вантажу у стільки разів, скільки рухомих блоків має поліпаст, або скільки ниток між обоймами поліспаста.

в) Домкрат.

Знайти залежність між силами P і Q у домкрата (рис. 12.10), деталі котрого розміщені у коробці D.

Відомо, що за один оберт рукоятки AB ($AB = l$) платформа домкрата зміщується на величину h.

Надаємо рукоятці AB можливе переміщення $\delta\ \varphi$, тоді платформа домкрата зміститься на величину $\delta\ S_Q$.

Запишемо рівняння елементарних робіт

$$M \cdot \delta\ \varphi - Q \cdot \delta\ S_Q = 0. \qquad \text{(a)}$$

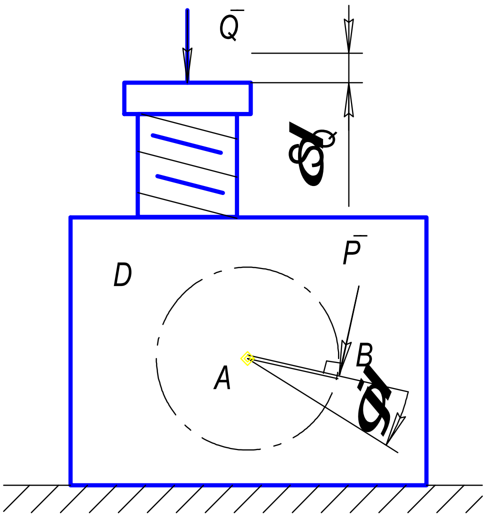


Рис. 12.10

Підставимо $M = P \cdot AB = P \cdot l$ - момент сили P в рівняння(а):

$$Pl \cdot \delta\ \varphi = Q\delta\ S_Q,$$

звідки
$$P = \frac{Q}{l} \cdot \frac{\delta\ S_Q}{\delta\ \varphi} \tag{б}$$

Складаємо пропорцію:елементарний кут $\delta\ \varphi$ так відноситься до повного оберту 2π, як елементарне переміщення $\delta\ S_Q$ відноситься до кроку гвинта h:

$$\frac{\delta\ \varphi}{2\pi} = \frac{\delta_{S_Q}}{h} \tag{с}$$

Із виразу (с) отримаємо: $\dfrac{\delta\ S_Q}{\delta\ \varphi} = \dfrac{h}{2\pi}$ і підставимо в рівняння (б).

Відповідь: $$P = \frac{h}{2\pi\ l} Q.$$

12.6. Загальне рівняння динаміки

Принцип можливих переміщень Лагранжа можна використовувати не тільки при рівновазі, не тільки для розв'язування задач статики. Цим принципом можна користуватися і при розв'язанні задач динаміки, якщо поєднати його з принципом Д'Аламбера.

На основі принципу Д'Аламбера активні сили, реакції в'язей і сили інерції усіх точок системи умовно складають зрівноважену систему сил.

Згідно з принципом можливих переміщень, якщо система перебуває у рівновазі, то сума елементарних робіт усіх сил, які діють на систему, на можливому переміщенні системи дорівнює нулю:

$$\sum\left(\overline{P}_k \cdot \delta\,\overline{r}_k + \overline{R}_k \cdot \delta\,\overline{r}_k + \overline{\Phi}_k \cdot \delta\,\overline{r}_k\right) = 0. \qquad (12.17)$$

Будемо вважати в'язі, які накладені на систему, ідеальними, тоді сума робіт реакцій в'язей дорівнює нулю $\sum \overline{R}_k \cdot \delta\,\overline{r}_k = 0$ і, остаточно, отримаємо

$$\sum \overline{P}_k \cdot \delta\,\overline{r}_k + \sum \overline{\Phi}_k \cdot \delta \overline{r}_k = 0. \qquad (12.18)$$

Загальне рівняння динаміки виражає принцип Д'Аламбера-Лагранжа.

При русі матеріальної системи з ідеальними утримувальними в'язями сума елементарних робіт активних сил і сил інерції, умовно прикладених до самих точок, на будь-якому можливому переміщенні системи дорівнює нулю.

Загальне рівняння динаміки у скалярній формі має вигляд

$$\sum P_k \cdot \delta\,\overline{r}_k \cdot \cos\left(\overline{P}_k ;\hat{\delta}\,\overline{S}\right) + \sum \Phi_k \cdot \delta\,\overline{r}_k \cdot \cos\left(\overline{\Phi}_K ;\hat{\delta}\,\overline{S}_K\right) = 0. \qquad (12.19)$$

При складанні загальних рівнянь динаміки слід пам'ятати, що робота сил опору і сил інерції є від'ємними величинами.

Запишемо другу скалярну форму загального рівняння динаміки:

$$\sum_{k=1}^{n}\Big(\left(F_{kx}-m_k\ddot{x}_k\right)\delta\ x_k+\left(F_{ky}-m_k\ddot{y}_k\right)\delta\ y_k+\left(F_{kz}-m_k\ddot{z}_k\right)\delta\ z_k\Big)=0, \quad (12.20)$$

де F_{kx}, F_{ky}, F_{kz} - проекції активних сил на осі декартових координат;

$\ddot{x}_k, \ddot{y}_k, \ddot{z}_k$ - проекції прискорення к-тої точки системи;

$\delta\ x_k, \delta\ y_k, \delta\ z_k$ - проекції можливих переміщень на ті ж самі осі координат.

Назва даного рівняння обумовлена тим, що на його основі можна виводити загальні теореми динаміки. Від принципу можливих переміщень загальне рівняння динаміки відрізняється наявністю сил інерції.

Загальне рівняння динаміки зручно використовувати для розв'язування задач динаміки.

Приведемо деякі приклади.

Приклад 12.1.

1. Два вантажі масою m_1 і m_2 розташовані на трикутній призмі, бокові грані якої утворюють з горизонтом кути α і β. Вантажі з'єднані невагомою ниткою, прекинутою через блок *C*. Коефіцієнт тертя ковзання вантажів по призмі – f. Визначити прискорення вантажів, нехтуючи вагою блока *C* (рис 12.11).

Розв'язання.

Шукане прискорення вантажів – a.

Вага вантажів: $G_1 = m_1 g$; $G_2 = m_2 g$.

Сили тертя: $F_{1тр} = f \cdot N_1 = fG_1 \cos\alpha = fm_1 g \cos\alpha$,

$$F_{2тр} = f \cdot N_2 = fG_2 \cos\beta = fm_2 g \cos\beta .$$

Сили інерції вантажів: $|\Phi_1| = m_1 a;\ |\Phi_2| = m_2 a$.

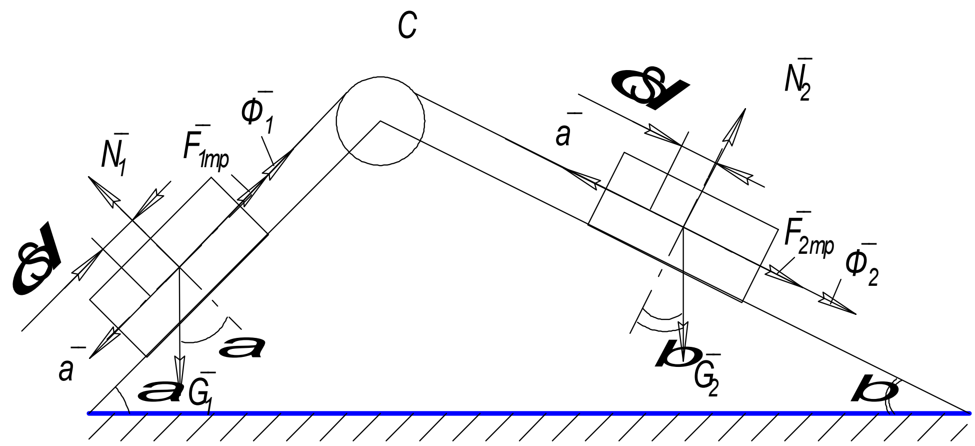


Рис. 12.11

Надамо системі можливе переміщення δS і запишемо загальне рівняння динаміки (12.18)

$$G_1 \sin\alpha \cdot \delta S - F_{1тр} \cdot \delta S - \Phi_1 \cdot \delta S - G_2 \sin\beta \cdot \delta S - F_{2тр} \cdot \delta S - \Phi_2 \cdot \delta S = 0 . \qquad (а)$$

У виразі (а) винесемо δS за дужки. Оскільки $\delta S \neq 0$, то вираз у дужках дорівнює нулю. Підставимо значення сил:

$$m_1 g \sin\alpha - fm_1 g \cos\alpha - m_1 a - m_2 g \sin\beta - fm_2 g \cos\beta - m_2 a = 0 .$$

звідки:

$$a = g \cdot \frac{m_1(\sin\alpha - f\cos\alpha) - m_2(\sin\beta + f\cos\beta)}{m_1 + m_2} .$$

Приклад 12.2.

Вантажі масою m_1 і m_2 висять на тросах, які намотані на шківи з радіусами r_3 і r_4 та масами m_3 і m_4, рівномірно розподіленими по перерізу шківів. Шківи з'єднані жорстко. Визначити їх кутове прискорення ε (рис.12.12).

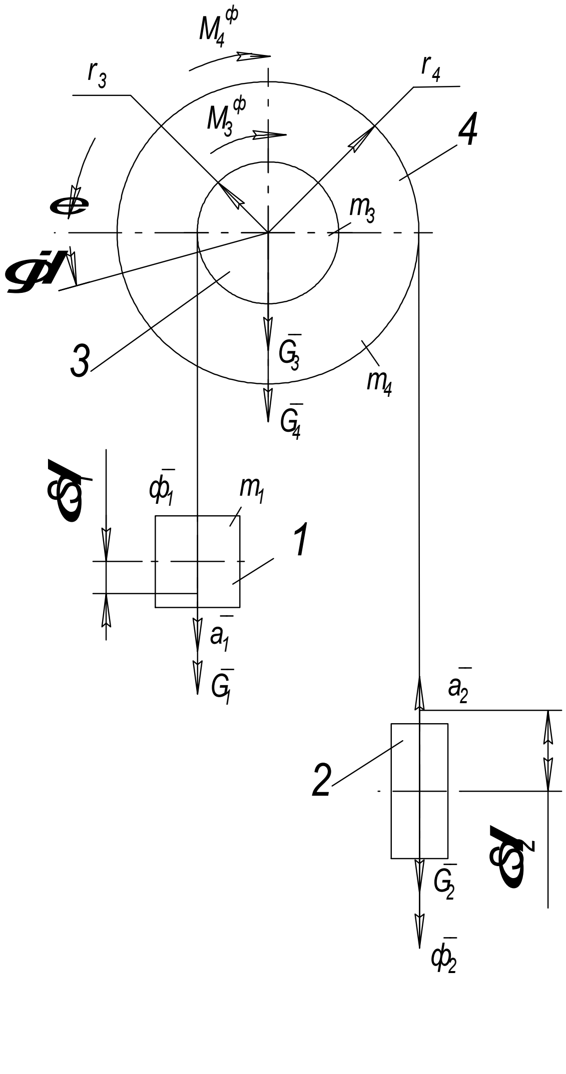


Рис. 12.12

Розв'язання.

Вага вантажів: $G_1 = m_1 g;\ G_2 = m_2 g.$

Вага шківів: $G_3 = m_3 g;\ G_4 = m_4 g.$

Осьові моменти інерції мас шківів: $I_{z3} = m_3 r_3^2$; $I_{z4} = m_4 r_4^2$.

Сили інерції вантажів: $|\Phi_1| = m_1 a_1 = m_1 \varepsilon \cdot r_3$; $|\Phi_2| = m_2 a_2 = m_2 \varepsilon \cdot r_4$.

Моменти інерційних сил шківів: $|M_3^{\Phi}| = I_{z3}\varepsilon = m_3 r_3^2 \varepsilon$; $|M_4^{\Phi}| = I_{z4}\varepsilon = m_4 r_4^2 \varepsilon$.

Надамо системі можливе кутове переміщення $\delta\varphi$, тоді визначимо лінійні елементарні переміщення сил:

$$\delta S_1 = r_3 \cdot \delta\varphi; \qquad \delta S_2 = r_4 \cdot \delta\varphi;$$

Запишемо загальне рівняння динаміки (12.18):

$$G_1 \cdot \delta S_1 - \Phi_1 \cdot \delta S_1 - M_3^{\Phi} \cdot \delta\varphi - M_4^{\Phi} \cdot \delta\varphi - G_2 \cdot \delta S_2 - \Phi_2 \cdot \delta S_2 = 0. \qquad \text{(а)}$$

Підставимо можливі переміщення δS_1 і δS_2, які виражені через $\delta\varphi$.

$$G_1 r_3 \delta\varphi - \Phi_1 r_3 \delta\varphi - M_3^{\phi} \delta\varphi - M_4^{\phi} \delta\varphi - G_2 r_4 \delta\varphi - \Phi_2 r_4 \delta\varphi = 0. \qquad \text{(б)}$$

В виразі (б) елементарний кут повороту $\delta\varphi$ можна винести за дужки. Оскільки $\delta\varphi \neq 0$, то вираз у дужках буде дорівнювати нулю:

$$G_1 r_3 - \Phi_1 r_3 - M_3^{\phi} - M_4^{\phi} - G_2 r_4 - \Phi_2 r_4 = 0. \qquad \text{(в)}$$

Підставимо в рівняння (в) значення сил G_1; Φ_1; M_3^{ϕ}; M_4^{ϕ}; G_2; Φ_2:

$$m_1 g r_3 - m_1 \varepsilon\, r_3^2 - m_3 \varepsilon\, r_3^2 - m_4 \varepsilon\, r_4^2 - m_2 g r_4 - m_2 \varepsilon\, r_4^2 = 0,$$

звідки визначаємо ε:

$$m_1 g r_3 - m_2 g r_4 = \varepsilon \left[r_3^2 (m_1 + m_3) + r_4^2 (m_2 + m_4) \right].$$

Відповідь: $$\varepsilon = \frac{g(m_1 r_3 - m_2 r_4)}{r_3^2 (m_1 + m_3) + r_4^2 (m_2 + m_4)}.$$

Запитання для самоконтролю:

1. Як класифікуються механічні в’язі? Напишіть рівняння деяких в’язей.
2. Що таке можливі переміщення і яким умовам вони задовольняють?
3. Як розуміють поняття про степені вільності системи?
4. Які в’язі є ідеальними?
5. Сформулюйте принцип можливих переміщень і напишіть його математичний вираз.
6. До яких систем застосовується принцип можливих переміщень?
7. Запишіть загальне рівняння динаміки.
8. Які принципи суміщає основне рівняння динаміки?

ЛЕКЦІЯ 13

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ РУХУ СИСТЕМИ В УЗАГАЛЬНЕНИХ КООРДИНАТАХ

13.1. Узагальнені координати системи. Узагальнені швидкості

Будемо розглядати механічні системи з голономними (геометричними) в’язями, які накладають обмеження лише на положення (координати) точок системи у просторі, але не накладають обмежень на швидкості точок.

Геометричні в’язі зменшують на одну і ту ж кількість одиниць і число незалежних можливих переміщень системи і число незалежних між собою координат, які визначають положення цієї системи.

Якщо дві вільні точки з’єднати стержнем довжиною l, то число незалежних координат зменшиться на одиницю, стане рівним п’яти, зменшиться на одиницю число незалежних можливих переміщень.

Виявляється, що число незалежних координат, які визначають положення механічної системи з геометричними в’язями, дорівнює числу степенів вільності цієї системи.

За незалежні координати, кількість яких дорівнює числу степенів вільності системи, можна обирати параметри, які мають будь-яку розмірність і будь-який фізичний зміст (прямі, дуги, кути, площі, об’єми ...).

Незалежні між собою параметри будь-якої розмірності, кількість яких дорівнює кількості степенів вільності системи і які однозначно визначають положення цієї системи, називаються узагальненими координатами.

Позначаються узагальнені координати літерою q і якщо кількість ступенів вільності системи дорівнює H, то q_1, q_2, ... q_H – узагальнені координати системи.

Оскільки узагальнені координати між собою незалежні, то елементарні зміни цих координат: δq_1, δq_2, ..., δq_H теж будуть між собою незалежні, при цьому кожна зміна цих координат визначає відповідне, незалежне від інших можливе переміщення системи.

Координати будь-якої точки $M(x_k,\ y_k,\ z_k)$ можна виразити через узагальнені координати:

$$\begin{aligned} x_k &= x_k(q_1,\ q_2,\ ...,q_H), \\ y_k &= y_k(q_1,\ q_2,\ ...,q_H), \\ z_k &= z_k(q_1,\ q_2,\ ...,q_H). \end{aligned} \tag{13.1}$$

Радіус-вектор $\bar{r}_k$ теж виражається через узагальнені координати:

$$\bar{r}_k = x_k \cdot \bar{i} + y_k \cdot \bar{j} + z_k \cdot \bar{k},$$

$$\bar{r}_k = \bar{r}_k(q_1,\ q_2,\ ...,q_H). \tag{13.2}$$

Приклад 13.1.

На схемі заданий кривошипно-повзунний механізм (рис. 13.1), виразимо координати точок через узагальнену координату механізму, яка в даному випадку одна (H = 1).

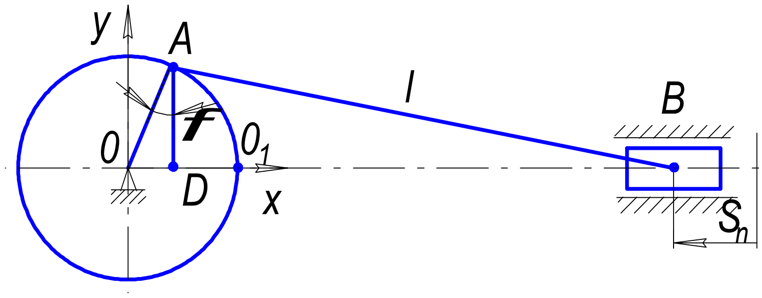


Рис. 13.1

За узагальнену координату можна обрати кут φ, дугу, яку описує точка A, площу сектора OO_1A, але не можна обирати відстань S_n, тому що вона однозначно визначає положення механізму.

Якщо обрати за узагальнену координату кут φ, $q=\varphi$, $OA=r$, $AB=l$,то

$$x_A = r\cdot\cos\varphi;\ x_B = OD + DB = r\cos\varphi + \sqrt{l^2 - r^2\sin^2\varphi};$$

$$y_A = r\cdot\sin\varphi;\ y_B = 0.$$

Приклад 13.2.

Подвійний плоский маятник (рис.13.2) має два степені вільності, за узагальнені координати оберемо кути φ і ψ:

$$q_1 = \varphi;$$

$$q_2 = \psi.$$

Зазначені кути незалежні між собою, тобто можна змінювати кут φ, залишаючи незмінним кут ψ.

Декартові координати точок A і B можна виразити через узагальнені координати φ і ψ:

$$\begin{cases} x_A = l_1 \sin\varphi\,, \\ y_A = l_1 \cos\varphi\,, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_B = l_1 \sin\varphi + l_2 \sin(\varphi + \psi), \\ y_B = l_1 \cos\varphi + l_2 \cos(\varphi + \psi). \end{cases}$$

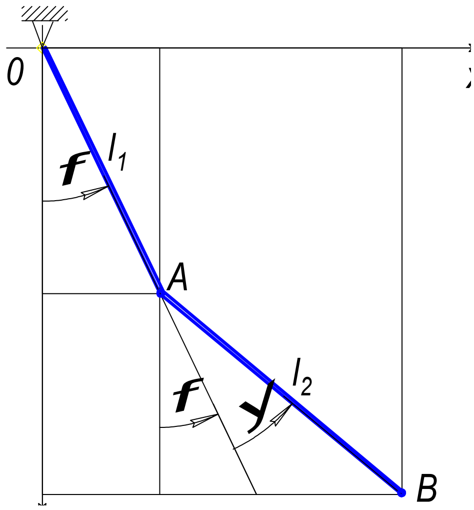


Рис. 13.2

Для просторово-часової характеристики узагальненої координати вводиться поняття узагальненої швидкості.

Коли механічна система рухається, то будуть змінюватись протягом часу і узагальнені координати. Якщо узагальнені координати задати, як функції часу:

$$q_1 = f_1(t),\;\; q_2 = f_2(t),\;\; \ldots\;, q_H = f_H(t), \tag{13.3}$$

то це означає, що закон руху заданий в узагальнених координатах.

Похідні за часом від узагальнених координат є узагальненими швидкостями системи:

$$\dot{q}_1,\;\; \dot{q}_2,\;\; \ldots\;, \dot{q}_H$$

де
$$\dot{q}_1 = \frac{dq_1}{dt}, \ \dot{q}_1 = \frac{dq_2}{dt}, \ \dot{q}_H = \frac{dq_H}{dt}. \tag{13.4}$$

Розмірність узагальненої швидкості залежить від розмірності відповідної узагальненої координати. Узагальнена швидкість охоплює усі уявлення про швидкість, вона є просторово-часовою характеристикою системи.

Якщо q - лінійна величина (м), то $\dot{q}$ - лінійна швидкість (м/с);

Якщо q - кут повороту (рад), то $\dot{q}$ - кутова швидкість (рад/с);

Якщо q - площа (м^2), то $\dot{q}$ - секторна швидкість (м^2/с).

13.2. Узагальнені сили і їх обчислення

Нехай механічна система складається з n матеріальних точок з масами: $m_1, \ m_2, \ \ldots \ , m_n$, на кожну точку якої діють сили: $\overline{P}_1, \ \overline{P}_2, \ \ldots \ , \overline{P}_n$.

Припустимо, що система має H степенів вільності, тоді кількість узагальнених координат дорівнює $q_1, q_2, \ldots, q_H$.

Після обрання узагальнених координат радіус-вектори точок можна виразити через ці узагальнені координати: $\bar{r}_1(q_1, \ldots, q_n), \ \bar{r}_2(q_1, \ldots, q_n), \ \ldots,$ $\bar{r}_n(q_1, \ldots, q_n)$.

Надамо системі можливе переміщення, при якому координата q_1 отримує приріст δq_1, а всі інші координати не зміняться.

Тоді кожен з радіус-векторів $\bar{r}_k$ одержить елементарний приріст $(\delta \ \bar{r}_k)_1$. Індекс "одиниця" означає, що змінюється тільки перша координата.

Радіус-вектор $\bar{r}_k$ є функцією узагальнених координат, тому елементарний приріст його буде обчислюватись, як частинний диференціал, тобто

$$\left(\delta\ \bar{r}_k\right)_1 = \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_1}\cdot\delta\ q_1 .$$

$$\left(\delta\ \bar{r}_1\right)_1 = \frac{\partial \bar{r}_1}{\partial q_1}\cdot\delta\ q_1;\ \left(\delta\ \bar{r}_2\right)_1 = \frac{\partial \bar{r}_2}{\partial q_1}\cdot\delta\ q_1;\ \left(\delta\ \bar{r}_n\right)_1 = \frac{\partial \bar{r}_n}{\partial q_1}\cdot\delta\ q_1 . \qquad (13.5)$$

Обчислимо суму елементарних робіт усіх сил на даному можливому переміщенні, коли надається приріст лише першій узагальненій координаті:

$$\delta\ A_1 = P_1\left(\delta\ \bar{r}_1\right)_1 + P_2\left(\delta\ \bar{r}_2\right)_1 + \ ...\ + P_n\left(\delta\ \bar{r}_n\right)_1 =$$

$$= \bar{P}_1\frac{\partial \bar{r}_1}{\partial q_1}\delta\ q_1 + \bar{P}_2\frac{\partial \bar{r}_2}{\partial q_1}\delta\ q_1 + ... + \bar{P}_n\frac{\partial \bar{r}_n}{\partial q_1}\delta\ q_1 =$$

$$= \delta\ q_1\left(\bar{P}_1\frac{\partial \bar{r}_1}{\partial q_1} + \bar{P}_2\frac{\partial \bar{r}_2}{\partial q_1} + ... + \bar{P}_n\frac{\partial \bar{r}_n}{\partial q_1}\right) = \qquad (13.6)$$

$$= \delta\ q_1\sum \bar{P}_k\frac{\partial \bar{r}_1}{\partial q_1} = \delta\ q_1 Q_1 ,$$

де $Q_1 = \sum \bar{P}_k\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_1}$ і дорівнює $Q_1 = \frac{\delta\ A_1}{\delta\ q_1}$ – це узагальнена сила, яка відповідає узагальненій координаті q_1.

<u>Висновок</u>: *узагальнена сила – це коефіцієнт в виразі елементарної роботи усіх сил на можливому переміщені системи, яка відповідає елементарному приросту тільки однієї узагальненої координати.*

Якщо системі надати друге незалежне можливе переміщення, коли змінюється тільки координата q_2, отримаємо вираз елементарної роботи

$$\delta\ A_2 = Q_2\cdot\delta\ q_2 , \qquad (13.7)$$

де $Q_2 = \sum \bar{P}_k\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_2}$ – узагальнена сила, яка відповідає узагальненій координаті q_2.

Зрозуміло, якщо системі надати таке можливе переміщення, при якому одночасно змінюються усі узагальнені координати, то сума елементарних робіт прикладених сил на цьому переміщенні визначається рівністю

$$\sum \delta\ A_k = Q_1 \delta\ q_1 + Q_2 \delta\ q_2 + \ldots + Q_H \delta\ q_H\ . \tag{13.8}$$

З цього виразу випливає **<u>висновок</u>:** *узагальнені сили – це величини, які дорівнюють коефіцієнтам при приростах узагальнених координат у виразах повної елементарної роботи сил, які діють на систему.*

Можна навести ще одне, як кажуть, технічне визначення узагальненої сили. *Узагальнена сила системи – це така умовна еквівалентна сила, елементарна робота якої дорівнює сумі елементарних робіт всіх діючих сил на відповідних можливих переміщеннях.*

Розмірність узагальненої сили залежить від розмірності відповідної узагальненої координати:

$[Q] = \dfrac{[A]}{[q]}$ – розмірність узагальненої сили дорівнює відношенню розмірності роботи до розмірності узагальненої координати.

У системі СІ робота вимірюється у джоулях, тоді, якщо узагальнена координата – кут повороту, який вимірюється у радіанах, то узагальнена сила буде моментом і вимірюється у $H \cdot м$, а якщо узагальнена координата q – лінійна величина (м), то узагальнена сила буде вимірюватись у Ньютонах.

13.3. Методика і приклади обчислення узагальнених сил

Обчислення узагальнених сил зводиться до обчислення елементарної роботи прикладених сил на можливих переміщеннях точок системи.

Спочатку визначають кількість H степенів вільності системи, обирають узагальнені координати q_k і зображують на малюнку активні сили і сили тертя (які відносять до активних сил, якщо в’язі не є ідеальними). Потім для визначення сили Q_1 надають системі можливе переміщення, яке відповідає зміні тільки однієї узагальненої координати q_1, обчислюють суму елементарних робіт усіх сил і цю суму робіт ділять на приріст узагальненої координати.

Аналогічно обчислюють Q_2, Q_3, ..., Q_H.

Приклад 13.3.

Важіль AB може обертатись навколо горизонтальної осі, яка проходить через точку O перепендикулярно до площини малюнка (рис.13.3). До кінців важеля прикладені вертикальні сили $\overline{P_1}$ і $\overline{P_2}$, $OA = a$, $OB = b$.

За узагальнену координату приймаємо кут повороту φ, який однозначно визначає положення важеля.

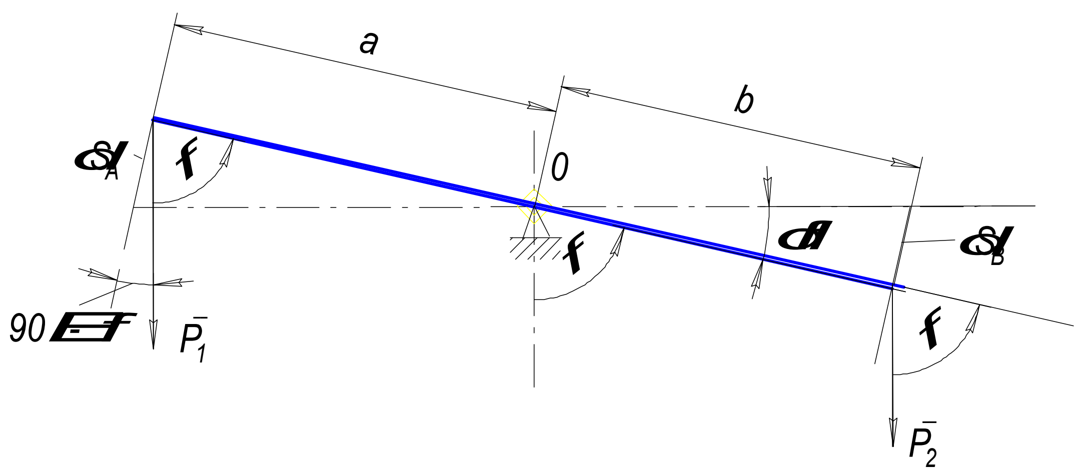


Рис. 13.3

Визначимо узагальнену силу, яка відповідає обраній узагальненій координаті $q = \varphi$.

Розв'язання.

Для визначення узагальненої сили Q_φ, яка відповідає узагальненій координаті φ, надамо координаті φ приріст $\delta\ \varphi$, що і є єдиним можливим переміщенням важеля AB. Елементарні переміщення точок A і B, точок прикладення сил $\overline{P}_1$ і $\overline{P}_2$, спрямовані по перпендикуляру до відрізків OA і OB і будуть дорівнювати:

$$\delta\ S_A = a \cdot \delta\ \varphi,$$

$$\delta\ S_B = b \cdot \delta\ \varphi.$$

Складемо суму елементарних робіт сил $\overline{P}_1$ і $\overline{P}_2$ на переміщеннях $\delta\ S_A$ і $\delta\ S_B$:

$$\begin{aligned}\delta\ A_\varphi &= (P_1 \sin\varphi)\cdot \delta\ S_A - (P_2 \sin\varphi)\delta\ S_B = \\ &= (P_1 \sin\varphi)a\delta\ \varphi - (P_2 \sin\varphi)b\delta\ \varphi = \\ &= (P_1 a - P_2 b)\sin\varphi\delta\varphi.\end{aligned}$$

Тоді $Q_\varphi = \dfrac{\delta\ A_\varphi}{\delta\ \varphi} = (P_1 a - P_2 b)\sin\varphi$ – це сума моментів сил $\overline{P}_1$ і $\overline{P}_2$ відносно центра O.

Відповідь: $\qquad Q_\varphi = \sum M_0 = (P_1 a - P_2 b)\sin\varphi$.

Приклад 13.4.

Однорідний стержень (рис.13.4) AB має довжину l і масу m_1, його вага $P_1 = m_1 g$ прикладена посередині в центрі ваги C стержня. Стержень може обертатись у вертикальній площині відносно осі в точці A. Кулька M масою m_2 надіта на стержень AB і утримується на ньому за допомогою пружини, яка в ненапруженому стані має довжину a, коефіцієнт жорсткості пружини дорівнює c. Вага кульки M дорівнює $P_2 = m_2 g$, на кульку діє сила пружності пружини за модулем $\left|\bar{F}\right| = cx$.

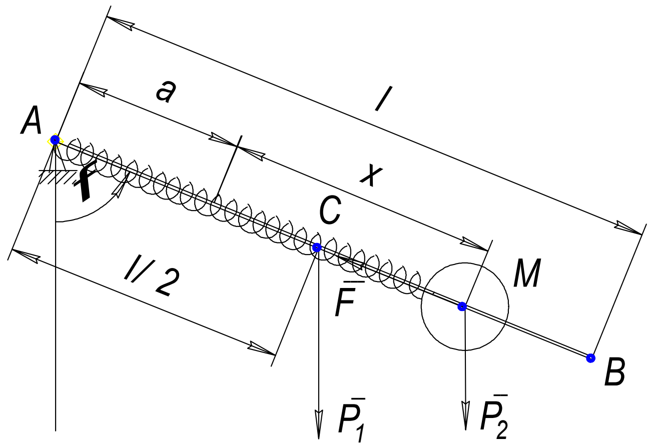


Рис. 13.4

Визначити узагальнені сили системи. Система має два степені вільності: $H = 2$ (незалежними є переміщення кульки відносно стержня AB і поворот стержня відносно осі в точці A).

Розв'язання.

Оберемо узагальнені координати:

$q_1 = \varphi$ – кут повороту стержня AB (рад);

$q_2 = x$ – переміщення кульки вздовж осі від кінця ненапруженої пружини (м).

Напрям узагальнених координат зображений на рис. 13.4.

Надамо системі можливе переміщення, яке відповідає приросту узагальненої координати φ, тобто $\delta\ \varphi\ \left(\delta\ \varphi > 0\right)$, $x = const$.

Підрахуємо суму елементарних робіт сил $\overline{P_1}$ і $\overline{P_2}$ на цьому можливому переміщенні:

$$\delta\ A_1 = \left[-P_1 \cdot \frac{l}{2}\sin\varphi - P_2 \cdot (a+x)\sin\varphi\right]\delta\ \varphi,$$

звідки:

$$Q_1 = \frac{\delta\ A_1}{\delta\ \varphi} = -\left[P_1\frac{l}{2} + P_2(a+x)\right]\sin\varphi = -\left[m_1 g\frac{l}{2} + m_2 g(a+x)\right]\sin\varphi.$$

Узагальнена сила Q_1 має розмірність моменту (*Нм*).

Після цього надаємо системі можливе переміщення, яке відповідає приросту узагальненої координати x, тобто $\delta\ x(\delta\ x > 0)$, а кут не змінюється $\varphi\ = const$.

На цьому можливому переміщенні роботу виконують сила $\overline{P_2}$ і сила пружності $\overline{F}$.

Елементарна робота цих сил на можливому переміщені $\delta\, x$ дорівнює:

$$\delta\ A_2 = P_2\cos\varphi \cdot \delta\ x - cx \cdot \delta\ x = (P_2\cos\varphi - cx)\delta\ x,$$

звідки

$$Q_2 = \frac{\delta\ A_2}{\delta\ x} = P_2\cos\varphi - cx.$$

Узагальнена сила Q_2 має розмірність звичайної сили (Н).

13.4. Випадок потенціальних сил

Якщо сили, які діють на механічну систему, є потенціальними, то для системи існує така силова функція U, яка залежить від координат x_k, y_k, z_k точок системи, що сума елементарних робіт усіх діючих сил дорівнює повному диференціалу цієї функції:

$$\sum \delta A_k = dU . \tag{13.9}$$

При переході до узагальнених координат q_1, q_2, ..., q_H всі координати точок x_k, y_k, z_k можна виразити через узагальнені координати і тоді силова функція U буде функцією узагальнених координат:

$$U = U(q_1,\ q_2,\ \dots\ ,\ q_H). \tag{13.10}$$

Обчислимо dU, як повний диференціал від функції $U(q_1,\ q_2,\ \dots\ ,\ q_H)$:

$$dU = \sum \delta\ A_k = \frac{\partial U}{\partial q_1} \cdot \delta\ q_1 + \frac{\partial U}{\partial q_2} \cdot \delta\ q_2 + \dots + \frac{\partial U}{\partial q_H} \cdot \delta\ q_H , \tag{13.11}$$

або, враховуючи, що $П = -U$, знаходимо:

$$Q_1 = -\frac{\partial П}{\partial q_1},\ Q_2 = -\frac{\partial П}{\partial q_2},\ \dots,\ Q_H = -\frac{\partial П}{\partial q_H}. \tag{13.12}$$

Висновок: *якщо усі сили, які діють на систему, потенціальні, то узагальнені сили дорівнюють частинним похідним від силової функції (або взятим зі знаком мінус частинним похідним від потенціальної енергії системи) за відповідними узагальненими координатами.*

13.5. Умови рівноваги системи в узагальнених координатах

Згідно з принципом можливих переміщень необхідною і достатньою умовою рівноваги системи є рівність нулю суми елементарних робіт усіх активних сил і сил тертя, віднесених до активних сил, на будь-якому можливому переміщенні системи.

Тобто, виконується умова $\sum \delta A_k = 0$, а це в узагальнених координатах набуває вигляду:

$$Q_1 \cdot \delta q_1 + Q_2 \cdot \delta q_2 + ... + Q_H \cdot \delta q_H = 0. \qquad (13.13)$$

Оскільки величини δq_1, δq_2, ..., δq_H незалежні між собою і не дорівнюють нулю, то ця рівність виконується, якщо всі узагальнені сили дорівнюють нулю

$$Q_1 = 0,\ Q_2 = 0,\ ...,\ Q_H = 0. \qquad (13.14)$$

Висновок: *для рівноваги механічної системи необхідно і достатньо, щоб усі узагальнені сили, які відповідають узагальненим координатам, дорівнювали нулю. Кількість умов рівноваги дорівнює числу узагальнених координат, тобто числу степенів вільності системи.*

Так, для системи в прикладі 13.2 для умов рівноваги $Q_1 = 0$ і $Q_2 = 0$ можна отримати результати:

$$\varphi = 0, \quad x = \frac{P_2}{c} = \lambda_{cm}.$$

У випадку, якщо на механічну систему діють потенціальні сили, то умови рівноваги системи набувають вигляду:

$$\frac{\partial U}{\partial q_1} = 0, \ \frac{\partial U}{\partial q_2} = 0, \ ..., \ \frac{\partial U}{\partial q_H} = 0; \tag{13.15}$$

або

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_1} = 0, \ \frac{\partial \Pi}{\partial q_2} = 0, \ ..., \ \frac{\partial \Pi}{\partial q_H} = 0. \tag{13.16}$$

Звідки **висновок:** *при рівновазі механічної системи під дією потенціальних сил повний диференціал силової функції або потенціальної енергії системи дорівнює нулю.*

$$dU(q_1, \ q_2, \ ..., \ q_H) = 0, \tag{13.17}$$

або

$$d\Pi(q_1, \ q_2, \ ..., \ q_H) = 0. \tag{13.18}$$

Висновок: *система, на яку діють потенціальні сили, перебуває у рівновазі у тих положеннях, в яких силова функція або потенціальна енергія системи мають екстремум (мінімум або максимум).*

Запитання для самоконтролю:

1. Які параметри називають узагальненими координатами системи?
2. Що таке узагальнені швидкості системи?
3. Що таке узагальнені сили і яким способом їх визначають?
4. Назвіть розмірності узагальнених координат, узагальнених сил.
5. Які умови рівноваги системи в узагальнених координатах?
6. Як визначаються узагальнені сили в консервативних системах?

ЛЕКЦІЯ 14

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ РУХУ СИСТЕМИ В УЗАГАЛЬНЕНИХ КООРДИНАТАХ (РІВНЯННЯ ЛАГРАНЖА ДРУГОГО РОДУ)

Припустимо, що механічна система є голономною або геометричною з ідеальними в'язями і складається з n матеріальних точок, маси яких $m_1,\ m_2,\ ...,\ m_n$, вона має H степенів вільності. Обираємо узагальнені координати $q_1,\ q_2,\ ...,\ q_H$, як незалежні параметри, що визначають положення системи у просторі.

Визначимо радіус-вектор будь-якої точки системи через узагальнені координати і час:

$$\bar{r}_k = \bar{r}\left(q_1,\ q_2,\ ...,\ q_H,\ t\right).$$

Як відомо, узагальнена координата є також і функцією часу t.

Тоді швидкість будь якої точки системи визначиться:

$$\bar{v}_k = \frac{d\bar{r}_k}{dt} = \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_2}\dot{q}_2 + ... + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_H}\dot{q}_H + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial t} = \sum_{i=1}^{H}\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial qi}\dot{q}_i + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial t}. \qquad (14.1)$$

Якщо в'язі, які накладені на систему, стаціонарні, то $\dfrac{\partial \bar{r}_k}{\partial t} = 0$.

Якщо з виразу (14.1) візьмемо частинну похідну за узагальненою швидкістю, то отримаємо:

$$\frac{\partial \bar{v}_k}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i}. \qquad (14.2)$$

Кінетична енергія механічної системи складається з суми кінетичних енергій окремих точок:

$$T=\sum\frac{m_k v_k^2}{2}=\frac{1}{2}\sum m_k v_k^2=\frac{1}{2}\sum m_k \bar{v}_k \bar{v}_k\ . \qquad (14.3)$$

Кінетична енергія механічної системи, як і швидкість окремих точок, є функцією узагальнених координат, узагальнених швидкостей і часу, тобто

$$T=T\left(q_1,\ q_2,\ ...,q_H,\ \dot{q}_1,\ \dot{q}_2,\ ...,\dot{q}_H,\ t\right). \qquad (14.4)$$

Визначимо частинну похідну від кінетичної енергії (14.3) за узагальненою координатою:

$$\frac{\partial T}{\partial q_i}=\sum m_k \bar{v}_k\,\frac{\partial \bar{v}_k}{\partial q_i}\,. \qquad (14.5)$$

Визначимо частинну похідну від кінетичної енергії (14.3) за узагальненою швидкістю:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}=\sum m_k \bar{v}_k\,\frac{\partial \bar{v}_k}{\partial \dot{q}_i}\,. \qquad (14.6)$$

Останній вираз (14.6) перетворимо, використавши вираз (14.2):

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}=\sum m_k \bar{v}_k\,\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i},\quad i=1,\ 2,\ ...,\ H. \qquad (14.7)$$

Від виразу (14.7) візьмемо похідну за часом:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)=\frac{d}{dt}\left(\sum m_k \bar{v}_k\cdot\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i}\right)=\sum m_k\,\frac{d\bar{v}_k}{dt}\cdot\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i}+\sum m_k \bar{v}_k\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i}\right). \qquad (14.8)$$

Перший доданок рівняння (14.8) можна спростити:

$$\sum m_k\,\frac{d\bar{v}_k}{dt}\cdot\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i}=\sum m_k \bar{a}_k\,\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i}=\sum\left(\bar{P}_k+\bar{R}_k\right)\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i}=Q_i^T+Q_i^R\ , \qquad (14.9)$$

де $\overline{a}_k$ – прискорення к-тої точки,

$$m_k \overline{a}_k = \overline{P}_k + \overline{R}_k .$$

Для стаціонарних ідеальних в'язей робота кожної реакції дорівнює нулю

$$Q_i^R = 0.$$

Таким чином, перший доданок виразу (14.8) набуває вигляду:

$$\sum m_k \frac{d\overline{v}_k}{dt} \cdot \frac{\partial \overline{r}_k}{\partial qi} = Q_i \text{ – узагальнена сила.} \tag{14.10}$$

Розглянемо множник у другому доданку виразу (14.8), враховуючи вираз (14.1):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \overline{r}_k}{\partial q_i}\right) = \frac{\partial^2 \overline{r}_k}{\partial q_i \partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial^2 \overline{r}_k}{\partial q_i \partial q_2}\dot{q}_2 + ... + \frac{\partial^2 \overline{r}_k}{\partial q_i \partial q_H}\dot{q}_H + \frac{\partial^2 \overline{r}_k}{\partial q_i \partial t}, \tag{14.11}$$

$i = 1,\ 2,\ ...,\ H.$

Якщо візьмемо від виразу (14.1) частинну похідну за узагальненою координатою, то отримаємо:

$$\frac{\partial \overline{v}_k}{\partial q_i} = \frac{\partial^2 \overline{r}_k}{\partial q_i \partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial^2 \overline{r}_k}{\partial q_i \partial q_2}\dot{q}_2 + ... + \frac{\partial^2 \overline{r}_k}{\partial q_i \partial q_H}\dot{q}_H + \frac{\partial^2 \overline{r}_k}{\partial q_i \partial t}, \tag{14.12}$$

$i = 1,\ 2,\ ...,\ H.$

Вирази (14.11) і (14.12) мають однакові праві частини, тому

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \overline{r}_k}{\partial q_i}\right) = \frac{\partial v_k}{\partial q_i}, \quad i = 1,\ 2,\ ...,\ H. \tag{14.13}$$

Другий доданок виразу (14.8) набуває вигляду:

$$\sum m_k \overline{v}_k \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \overline{r}_k}{\partial q_i}\right) = \sum m_k \overline{v}_k \frac{\partial \overline{v}_k}{\partial q_i} = \frac{\partial T}{\partial q_i}. \tag{14.14}$$

Враховуючи вирази (14.10) і (14.14) отримаємо рівняння (14.8) у вигляді:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) = Q_i + \frac{\partial T}{\partial q_i}, \quad i = 1,\ 2,\ ...,\ H,$$

або

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i, \quad i = 1,\ 2,\ ...,\ H. \qquad (14.15)$$

Вираз (14.15) і є рівнянням Лагранжа другого роду. Кількість рівнянь Лагранжа другого роду дорівнює кількості степенів вільності механічної системи. В рівняння не входять реакції в'язей, а невідомими є лише параметри $q_i(t)$, що визначають закон руху системи.

Методика розв'язування задач за допомогою рівняння Лагранжа другого роду

1. Для заданої механічної системи з голономними стаціонарними в'язями визначають кількість степенів вільності і обирають відповідну систему узагальнених координат.

2. Визначають узагальнені сили, які відповідають узагальненим координатам.

3. Визначають кінетичну енергію системи, як функцію узагальнених координат і узагальнених швидкостей.

4. Складають рівняння Лагранжа другого роду для кожної узагальненої координати.

5. Інтегрують диференціальні рівняння Лагранжа другого роду, отримують закон руху системи і визначають сталі інтегрування за

допомогою початкових умов.

6. Досліджують отриманий розв'язок.

Приклад 14.1.

Лебідка має шестерню масою m_1 і радіусом r_1, колесо масою m_2 і радіусом r_2, барабан масою m_3 і радіусом r_3. Визначити прискорення вантажу масою m_4, якщо до шестерні прикладений обертальний момент M. Шестерня і колесо є суцільними дисками, маса барабана розподілена по ободу (рис. 14.1).

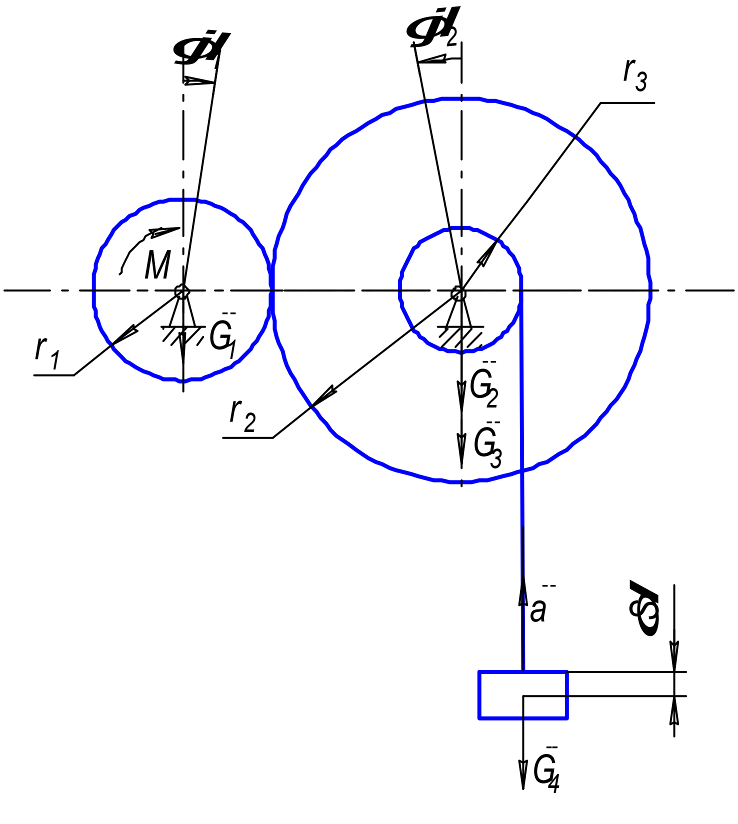


Рис. 14.1

$G_1 = m_1 g$ - вага шестерні, $G_2 = m_2 g$ - вага колеса,

$G_3 = m_3 g$ - вага барабана, $G_4 = m_4 g$ - вага вантажу,

$u = \frac{r_2}{r_1}$ - передаточне відношення між шестернею і колесом,

$I_{z1} = \frac{m_1 r_1^2}{2}$ - осьовий момент інерції маси шестерні,

$I_{z2} = \frac{m_2 r_2^2}{2}$ - осьовий момент інерції маси колеса,

$I_{z3} = m_3 r_3^2$ - осьовий момент інерції маси барабана.

Розв'язання.

Механічна система має один степінь вільності, $H = 1$.

Обираємо за узагальнену координату кут повороту шестерні φ_1, тоді:

$\dot{\varphi}_1 = \omega_1$ - кутова швидкість шестерні, узагальнена швидкість системи,

$\ddot{\varphi}_1 = \varepsilon_1$ - кутове прискорення шестерні.

Складемо диференціальне рівняння Лагранжа другого роду для даної системи:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi_1} = Q_{\varphi_1}. \qquad \text{(a)}$$

Надамо системі можливе переміщення $\delta\varphi_1$, як приріст узагальненої координати φ_1, тоді:

$\delta\varphi_2 = \frac{\delta\varphi_1}{u} = \delta\varphi_1 \frac{r_1}{r_2}$ - можливе переміщення колеса,

$\delta\varphi_3 = \delta\varphi_2$ - можливе переміщення барабана,

$\delta S = \delta\varphi_2 r_3 = \delta\varphi_1 \frac{r_1}{r_2} r_3$ - можливе переміщення вантажу.

На можливому переміщенні системи роботу виконують: обертальний момент M і сила тяжіння вантажу G_4.

Сума елементарних робіт активних сил на можливому переміщенні системи дорівнює:

$$\delta A = M\delta\varphi_1 - G_4\delta S = M\delta\varphi_1 - G_4\frac{r_1}{r_2}r_3\delta\varphi_1 = \left(M - G_4\frac{r_1}{r_2}r_3\right)\delta\varphi_1 .$$

Узагальнена сила дорівнює:

$$Q_{\varphi_1} = M - G_4\frac{r_1}{r_2}r_3 \qquad (б).$$

Кінетична енергія системи складається з кінетичної енергії шестерні T_1, кінетичної енергії колеса T_2, кінетичної енергії барабана T_3 і кінетичної енергії вантажу T_4:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 .$$

Визначимо кінетичну енергію кожного тіла, виразимо її через узагальнену швидкість, враховуючи, що залежність між швидкостями та ж сама, що і між переміщеннями:

$\omega_2 = \omega_1\frac{r_1}{r_2}$ - кутова швидкість колеса,

$\omega_3 = \omega_2 = \omega_1\frac{r_1}{r_2}$ - кутова швидкість барабана,

$v = \omega_1\frac{r_1}{r_2}r_3$ - швидкість вантажу.

Тоді: $T_1 = \dfrac{I_{z1}\omega_1^2}{2} = \dfrac{m_1 r_1^2}{4}\omega_1^2$, $T_2 = \dfrac{I_{z2}\cdot\omega_2^2}{2} = \dfrac{m_2 r_2^2}{2}\dfrac{\omega_1^2 r_1^2}{r_2^2\cdot 2} = \dfrac{m_2 r_1^2}{4}\omega_1^2$

$$T_3 = \frac{I_{z3}\cdot\omega_3^2}{2} = \frac{m_3 r_3^2}{2}\omega_1^2\frac{r_1^2}{r_2^2} = \frac{m_3 r_1^2 r_3^2}{2r_2^2}\omega_1^2, \qquad T_4 = \frac{m_4 v^2}{2} = \frac{m_4 r_1^2 r_3^2}{2\cdot r_2^2}\omega_1^2 .$$

Повна кінетична енергія системи дорівнює:

$$T = \frac{m_1 r_1^2}{4}\omega_1^2 + \frac{m_2 r_1^2}{4}\omega_1^2 + \frac{m_3 r_1^2 r_3^2}{2r_2^2}\omega_1^2 + \frac{m_4 r_1^2 r_3^2}{2r_2^2}\omega_1^2 =$$

$$= \frac{\omega_1^2 r_1^2}{4}\left(m_1 + m_2 + m_3\frac{2r_3^2}{r_2^2} + m_4\frac{2r_3^2}{r_2^2} \right).$$

Позначимо $\left(m_1 + m_2 + m_3\frac{2r_3^2}{r_2^2} + m_4\frac{2r_3^2}{r_2^2} \right) = B = const$. Величину B можна обчислити, якщо підставити задані параметри.

Тоді $T = \frac{\omega_1^2 r_1^2}{4}B$. Візьмемо частинні похідні від виразу кінетичної енергії за узагальненою координатою, швидкістю і часом:

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi_1} = 0, \qquad \text{(в)}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} = \frac{\partial T}{\partial \omega_1} = \omega_1\frac{r_1^2 B}{2},$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \omega_1} \right) = \frac{d\omega_1}{dt}\cdot\frac{r_1^2 B}{2} = \varepsilon_1\frac{r_1^2 B}{2}. \qquad \text{(г)}$$

Значення (б), (в) і (г) підставляємо в рівняння (а):

$$\varepsilon_1\frac{r_1^2 B}{2} = M - G_4\frac{r_1}{r_2}r_3,$$

звідки
$$\varepsilon_1 = \frac{2\left(M - G_4\frac{r_1}{r_2}r_3 \right)}{r_1^2 B}.$$

Шукане прискорення вантажу дорівнює:

$$a = \varepsilon_1\frac{r_1}{r_2}r_3 = \frac{2r_3\left(M - G_4\frac{r_1}{r_2}r_3 \right)}{r_1 r_2 B}.$$

Кінетичний потенціал. Рівняння Лагранжа другого роду для консервативних систем

Розв’язання задачі складання та інтегрування диференціальних рівнянь руху системи матеріальних точок спрощується, якщо на матеріальні точки діють лише консервативні сили, що мають потенціал.

Встановимо вигляд рівняння Лагранжа другого роду для цього випадку. Якщо всі сили, які діють на систему, потенціальні, то узагальнена сила дорівнює:

$Q_i = -\dfrac{\partial П}{\partial q_i}$, де $П$ - потенціальна енергія системи, яка залежить тільки від узагальнених координат.

Тоді диференціальні рівняння Лагранжа можна уявити у вигляді:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial П}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1,\ 2,\ \ldots\ H, \tag{14.16}$$

або, оскільки потенціальна енергія системи не залежить від узагальнених швидкостей, то

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial (T - П)}{\partial \dot{q}_i}\right] - \frac{\partial (T - П)}{\partial \overline{q}_i} = 0, \quad i = 1,\ 2,\ \ldots\ H.$$

Введемо функцію $L = T - П$, котра дорівнює різниці між кінетичною і потенціальною енергіями системи, яку назвали функцією Лагранжа або кінетичним потенціалом.

Тоді у випадку потенціальних сил (консервативні системи) рівняння Лагранжа приймає вигляд:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0\,,\qquad i=1,\ 2,\ \dots\ H\,. \tag{14.17}$$

Висновок: *стан механічної системи, на яку діють потенціальні сили, визначається тільки однією функцією Лагранжа* L, *оскільки, знаючи цю функцію, можна складати диференціальні рівняння руху системи.*

Приклад 14.2.

Скласти методом Лагранжа диференціальне рівняння коливань фізичного маятника (рис. 14.2).

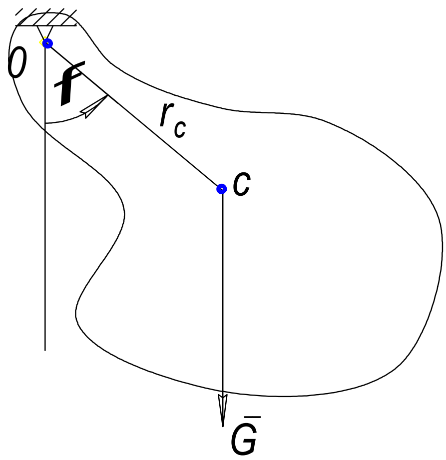


Рис. 14.2

Розв'язання.

Маятник має один степінь вільності, $H=1$, його положення цілком і повністю визначається кутом φ, який приймаємо за узагальнену координату.

$q=\varphi$ - узагальнена координата, кут повороту,

$\dot{q}=\dot{\varphi}=\omega$ - узагальнена швидкість (кутова швидкість тіла).

Тоді кінетична енергія дорівнює: $T = \frac{1}{2} I_{zo} \cdot \omega^2 = \frac{1}{2} I_{zo} \dot{\varphi}^2$,

потенціальна енергія: $\Pi = -G r_c \cos\varphi$,

звідки $L = T - \Pi = \frac{1}{2} I_{zo} \dot{\varphi}^2 + G r_c \cos\varphi$.

Визначимо похідні за кутовою швидкістю і за кутом повороту від функції Лагранжа:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = I_{zo} \dot{\varphi}; \qquad \frac{\partial L}{\partial \varphi} = -G r_c \sin\varphi .$$

Запишемо рівняння Лагранжа і підставимо в нього визначені відповідні похідні:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0,$$

$$I_{zo} \ddot{\varphi} - G r_c \sin\varphi = 0 .$$

Запитання для самоконтролю:

1. Для яких механічних систем складається рівняння Лагранжа другого роду?
2. Входять чи не входять у рівняння Лагранжа другого роду реакції ідеальних в’язей? Якщо ні, то чому?
3. Скільки рівнянь Лагранжа треба скласти для даної системи?
4. Що ви знаєте про методику розв’язування задач за рівнянням Лагранжа другого роду?
5. Що визначає узагальнена сила і як її знаходять?
6. Як записати рівняння Лагранжа для консервативної системи?
7. Як ви розумієте функцію Лагранжа?

ЛЕКЦІЯ 15

ОСНОВИ ТЕОРІЇ КОЛИВАНЬ

Вступ. Коливальний рух – це рух, при якому деякі параметри цього руху періодично змінюються, повторюються. Якщо параметри коливального руху змінюється по закону синуса або косинуса, то він називається *гармонічним коливальним рухом*. Наука про коливання складає основу ряду областей фізики і техніки. Коливання, які розглядаються у різних галузях, відрізняються по фізичній суті (механіка, радіотехніка, акустика тощо), але основні закони цих коливань залишаються однаковими. Тому вивчення механічних коливань є важливим не тільки для техніки, результати цих досліджень можуть бути використані і в інших галузях.

15.1. Кінематика гармонічних коливань

Якщо точка M рухається по колу радіуса R рівномірно (рис. 15.1) зі сталою швидкістю, то радіус точки M, відрізок OM, обертається рівномірно навколо осі в точці O зі сталою кутовою швидкістю $\omega = const$. M_0 – початкове положення точки на траєкторії, яке визначається кутом α.

Точка M_1, проекція точки M на вісь x, рухається по закону:

$$x = OM_1 = OM \cdot \cos(\omega t + \alpha) = R \cdot \cos(\varpi t + \alpha). \qquad (15.1)$$

Аналогічно, точка M_2, проекція точки M на вісь y, має такий закон руху:

$$y = OM_2 = OM \cdot \sin(\omega t + \alpha) = R \cdot \sin(\omega t + \alpha). \qquad (15.2)$$

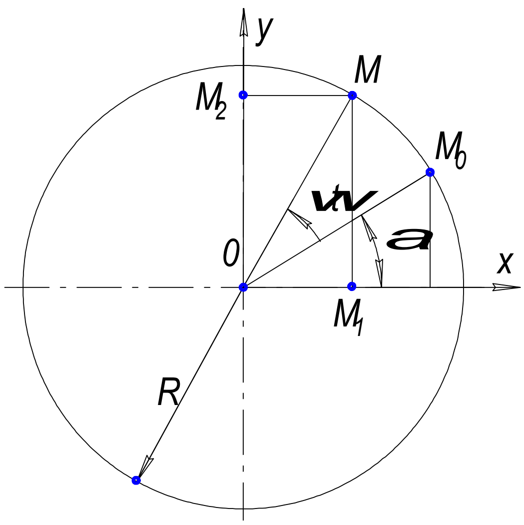


Рис. 15.1

Точку M по відношенню до точок M_1 і M_2 називають допоміжною.

Таким чином, коли допоміжна точка M рухається рівномірно по колу радіуса R, її проекції на координатні осі x і y здійснюють гармонічні коливання. Величина, що стоїть множником перед синусом або косинусом є амплітудою коливань. У даному випадку R – амплітуда коливань, це максимальне відхилення точок M_1 і M_2 від точки O, положення рівноваги.

Величина ω для точок M_1 і M_2 є коловою або циклічною частотою, це кутова швидкість радіуса допоміжної точки M.

Колова частота вимірюється в $[рад/c]$, $\left[\frac{1}{c}\right]$, $\left[c^{-1}\right]$,

$(\omega t+\alpha)$ - фаза коливань;

α - початкова фаза коливань, якщо $t=0$.

Повне коливання точок M_1 і M_2 відбудеться тоді, коли кожна з точок двічі пройде через одне і те ж положення, тобто, якщо допоміжна точка M здійснить один повний оберт.

Час, за який відбувається одне повне коливання, називається періодом коливань T (с).

Очевидно, що $\omega \cdot T = 2\pi$, звідки $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$, або $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$. (15.3)

Кількість коливань за одиницю часу ($1c$) називається частотою коливань і вимірюється в Герцах.

$$f = \frac{1}{T}; \;\; f = \frac{\omega}{2\pi} \;\; [Гц]. \qquad (15.4)$$

15.2. Види коливань

Коливальний рух матеріальної точки відбувається за умови, якщо на точку M, що відхиляється від положення спокою або рівноваги (точка 0), діє сила $\overline{P}$, яка намагається повернути точку в попереднє положення рівноваги. Така сила називається відновлювальною (рис. 15.2).

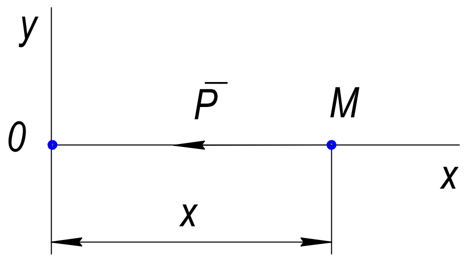


Рис. 15.2

Практично важливими є випадки, коли відновлювальна сила пропорційна величині відхилення:

$$P = c \cdot OM,$$

де c – коефіцієнт пропорційності. Прикладом такої сили є сила пружності пружини, коефіцієнт пропорційності у цьому разі називають коефіцієнтом жорсткості, який дорівнює силі, що припадає на одиницю переміщення (деформації).

Коливання можуть відбуватись і під дією сил, що підпорядковані іншим законам.

Прямолінійні коливання матеріальної точки поділяються на чотири основні види:

1. вільні або власні коливання під дією однієї відновлювальної сили;
2. вільні згасаючі коливання під дією відновлювальної сили і сили опору;
3. змушені коливання без опору під дією відновлювальної сили і збуреної сили;
4. змушені коливання з опором під дією відновлювальної сили, сили опору і збуреної сили.

15.3. Динаміка коливань. Вільні або власні коливання матеріальної точки

Вільні або власні коливання точки (рис.15.3) відбуваються під дією відновлювальної сили, яка є лінійною функцією переміщення точки від положення рівноваги і завжди спрямована в напрямку до положення рівноваги, де б точка в даний момент не розміщувалась.

Розглянемо коливання вантажу на пружині. Довжина пружини у недеформованому стані дорівнює l_0.

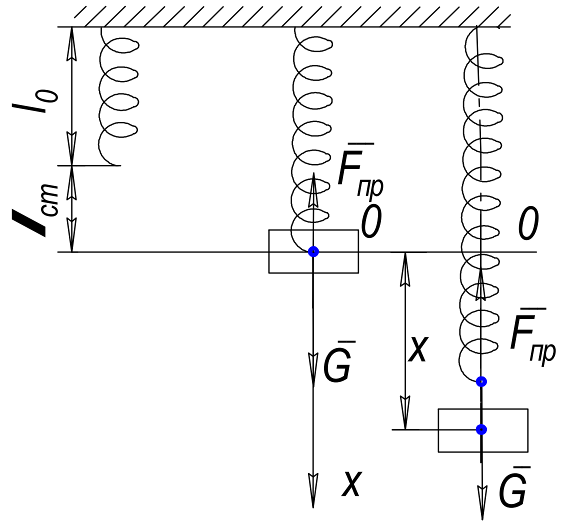


Рис. 15.3

Жорсткість пружини c - відношення ваги вантажу до деформації λ_{cm}, якщо система пружина-вантаж перебуває у стані рівноваги, $\left[\frac{H}{м}\right]$.

$$c = \frac{G}{\lambda_{cm}}; \quad \text{звідки } G = c \cdot \lambda_{cm}.$$

В стані рівноваги сила пружності $F_{np} = G = c \cdot \lambda_{cm}$.

Коливання вантажу масою m відбувається навколо положення рівноваги $O - O$.

Якщо вантаж перебуває нижче положення $O - O$, то на нього діють: сила ваги і сила пружності пружини:

$$G = mg = c \cdot \lambda_{cm}; \; F_{np} = c \cdot \Delta l = c(\lambda_{cm} + x).$$

Диференціальне рівняння руху вантажу набуває вигляду:

$$m\ddot{x} = G - F_{np},$$

$$m\ddot{x} = c \cdot \lambda_{cm} - c(\lambda_{cm} + x),$$

$$m\ddot{x} = -c \cdot x.$$

$(c \cdot x)$ - відновлювальна сила, рівнодійна двох сил: сили ваги і сили пружності пружини.

Тоді $$\ddot{x} + \frac{c}{m} x = 0$$

Позначимо $\frac{c}{m} = k^2$, тобто $k = \sqrt{\frac{c}{m}}$

$$\ddot{x} + k^2 x = 0 . \qquad (15.5)$$

Вираз (15.5) – диференціальне рівняння вільних коливань точки (при відсутності опору).

Розв'язок рівняння (15.5) шукають у вигляді $x = e^{nt}$ і для визначення n складають характеристичне рівняння, підставляючи розв'язок і його другу похідну в рівняння:

$$n^2 + k^2 = 0$$

$n_{1,2} = \pm ik$,   де $i = \sqrt{-1}$ – уявна одиниця.

Тоді загальний розв'язок однорідного диференціального рівняння другого порядку (15.5) набуває вигляду:

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt . \qquad (15.6)$$

Сталі інтегрування C_1 і C_2 розв'язку (15.6) знаходимо з допомогою початкових умов:

при $t = 0$ $$\begin{cases} x = x_0 , \\ \dot{x} = \dot{x}_0 = v_0 . \end{cases}$$

Оскільки невідомих два, то знайдемо спочатку друге рівняння, вираз для швидкості, взявши похідну $v = \dot{x}(t)$ від (15.6)

$$\dot{x} = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt . \qquad (15.7)$$

В рівності (15.6) і (15.7) підставимо початкові умови x_0 і y_0 при $t=0$:

$$\begin{cases} x_0 = C_1 \\ C_2 k = v_0 \end{cases},$$

$$\left. \begin{array}{l} C_1 = x_0 \\ C_2 = \dfrac{v_0}{k} \end{array} \right\}. \qquad (15.8)$$

Значення сталих (15.8) підставимо в рівність (15.6):

$$x = x_0 \cos kt + \frac{v_0}{k} \sin kt. \qquad (15.9)$$

Вираз (15.9) є загальним розв'язком диференціального рівняння (15.6), його можна подати у іншому вигляді, з однією гармонікою.

Позначимо:

$$\left. \begin{array}{l} x_0 = A \sin\alpha \\ \dfrac{v_0}{k} = A \cos\alpha \end{array} \right\}. \qquad (15.10)$$

Враховуючи позначення (15.10), розв'язок (15.9) можна записати у вигляді:

$$x = A\sin\alpha \cdot \cos kt + A\cos\alpha \cdot \sin kt = A\sin(kt + \alpha). \qquad (15.11)$$

Сталі A і α знаходимо з рівнянь (15.10), якщо ліві і праві частини піднести до квадрату.

$$\left. \begin{array}{l} x_0^2 = A^2 \sin^2\alpha \\ \dfrac{v_0^2}{k} = A^0 \cos^2\alpha \end{array} \right\}. \qquad (15.12)$$

Якщо рівності (15.12) почленно додати, то отримаємо:

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{k^2}}\,. \tag{15.13}$$

Якщо в рівності (15.10) поділити перше рівняння на друге, то отримаємо:

$$tg\alpha = \frac{x_0 k}{v_0}, \tag{15.14}$$

$$\alpha = arctg\,\frac{x_0 k}{v_0}\,. \tag{15.15}$$

Закон руху (15.11) інформує, що точка здійснює гармонічні коливання, амплітуда яких (15.13) залежить від початкових умов, від початкових умов залежить і початкова фаза коливань (15.15).

$k = \sqrt{\dfrac{c}{m}}$ – колова або циклічна частота вільних коливань.

Період вільних коливань визначається за формулою

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{c}}\,. \tag{15.16}$$

Період вільних коливань можна визначити за наближеною формулою:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{c}} = 2\pi\sqrt{\frac{\pi^2 G\cdot\lambda_{\subset m}}{g\cdot G}} = 2\sqrt{\lambda_{cm}}\,, \tag{15.17}$$

де λ_{cm} – статична деформація, вимірюється в метрах; T – період (секунд).

Необхідно зазначити, що вільні гармонічні коливання в дійсності не існують, тому що завжди має місце реальний опір, який веде до згасання коливань. Тому це теоретична модель. Проте при згасанні може зменшуватись лише фаза коливань, але частота коливань залишається незмінною. Частота вільних коливань є „динамічною індивідуальністю” системи і залежить тільки від характеристик самої системи в цілому. Для простих коливальних систем частота залежить від маси і жорсткості пружних елементів. Це загальна закономірність. Підвищуємо масу – знижається, підвищуємо жорсткість – збільшується власна частота. Вільні коливання мають фундаментальне значення. Знаючи характеристики вільних коливань, можна передбачити поведінку механічної системи під дією різних збурених сил.

Приклад 15.1.

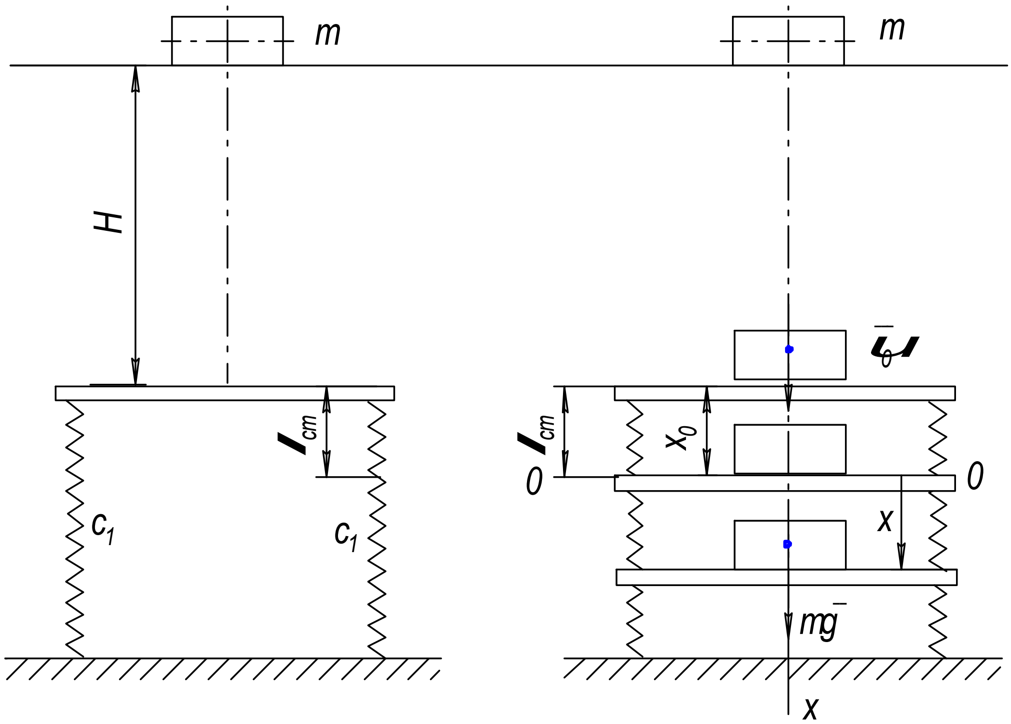


Рис. 15.4

Вантаж масою $m = 2\ кг$ падає з висоти $H = 40\ см$ на середину твердої квадратної плити, яка закріплена на чотирьох симетрично розташованих пружинах (рис.15.4). Коефіцієнт жорсткості пружини

$c_1 = 2 \;\; H/см$. При дотиканні вантажу до плити він заклинюється і далі рухається разом з плитою. Визначити закон коливального руху вантажу разом з плитою, нехтуючи масою плити.

$m = 2 \;\; кг$,

$H = 40 \;\; см = 0.4 м$,

$c_1 = 2 \;\; H/см = 200\, H/м$.

$x = x(t) - ?$

Розв'язання.

Спрямуємо вісь x вертикально до низу, початок осі буде в точці статичної рівноваги, де деформація пружини дорівнює статичній деформації:

$$\Delta l = \lambda_{ст}.$$

Сумарний коефіцієнт жорсткості пружин, з'єднаних паралельно, дорівнює:

$$c = 4c_1 = 800\, H/м.$$

Початкова швидкість вантажу в момент торкання пластини визначається:

$$v_0 = \sqrt{2gH} = \sqrt{2 \cdot 9.8 \cdot 0.4} = 2.8\, м/с;$$

тоді початкові умови руху вантажу на пружинах дорівнюють:

$$x_0 = -\lambda_{ст} = -\frac{mg}{c} = -\frac{2 \cdot 9.8}{800} = -0.0245 м,$$

$$\dot{x}_0 = v_0 = 2.8\, м/с.$$

Вантаж здійснює вільні коливання з коловою частотою:

$$k = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{800}{2}} = 20\frac{1}{c}.$$

Закон руху вільних коливань має такий вигляд:

$$x = A\sin(kt + \alpha),$$

де A – амплітуда коливань, яку визначимо з виразу (15.13)

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{k^2}} = \sqrt{(0,0245)^2 + \frac{2,8^2}{20^2}} = 0,142\,м\,;$$

де α – початкова фаза коливань.

$$tg\alpha = \frac{x_0 \cdot k}{v_0} = \frac{(-0,0245)\cdot 20}{2,8} = -0,175\,,$$

$$\alpha = -0,1754\,рад\,.$$

Остаточно, закон руху вантажу має вигляд:

$$x = 0,142\sin(20t - 0,1754) \text{ (м)}.$$

15.4. Згасаючі коливання матеріальної точки

Розглянуті вище вільні коливання матеріальної точки в реальних умовах поступово згасають, оскільки на коливання впливає середовище, чиниться опір цим коливанням. Розглянемо випадок, коли сила опору пропорційна першому степеню швидкості:

$$\overline{R} = -\mu\overline{\upsilon}\,,$$

де μ – коефіцієнт пропорційності.

Знак "мінус" показує, що сила спрямована у протилежний бік вектору швидкості, протилежно руху точки.

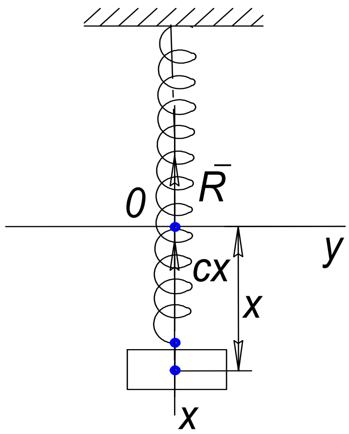


Рис 15.5

x – відхилення точки від положення статичної рівноваги (рис. 15.5).

На точку під час її руху будуть діяти відновлювальна сила $-cx$ (рівнодійна сили ваги і сили пружності пружини) і сила опору

$$\overline{R} = -\mu\overline{\upsilon}\,; \qquad R_x = -\mu\ \dot{x}\,. \tag{15.18}$$

Диференціальне рівняння руху точки набуває вигляду

$$m\ddot{x} = -cx - \mu\dot{x}\,; \tag{15.19}$$

або

$$m\ddot{x} + \mu\ \dot{x} + cx = 0\,. \tag{15.20}$$

Рівняння (15.20) поділимо на масу m і введемо позначення (15.22):

$$\ddot{x} + \frac{\mu}{m}\dot{x} + \frac{c}{m}x = 0\,; \tag{15.21}$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\mu}{m} = 2n; n = \dfrac{\mu}{2m} \\ \dfrac{c}{m} = k^2; k = \sqrt{\dfrac{c}{m}} \end{array}\right\}, \tag{15.22}$$

де n - коефіцієнт згасання, k - колова, циклічна частота.

n і k мають однакову розмірність, їх можна порівнювати.

Рівняння руху набуває вигляду

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2 x = 0. \tag{15.23}$$

Рівняння (15.23) – однорідне лінійне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

Характеристичне рівняння має вигляд:

$$r^2 + 2nr + k^2 = 0. \tag{15.24}$$

Корені рівняння (15.24) мають значення:

$$r_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - k^2}. \tag{15.25}$$

Якщо корені (15.25) будуть дійсні і різні чи дійсні і рівні

$$n^2 - k^2 \geq 0$$

або $n \geq k$, тобто опір більший порівняно з відновлювальною силою, то відбувається аперіодичний рух, закон якого має вигляд:

при $\quad n > k \quad \Rightarrow \quad x = C_1 e^{\left(-n+\sqrt{n^2-k^2}\right)t} + C_2 e^{\left(-n-\sqrt{n^2-k^2}\right)t};$ (15.26)

при $\quad n = k \quad \Rightarrow \quad x = C_1 e^{-nt} + C_2 t e^{-nt}.$ (15.27)

Оскільки e^{-nt} – функція, яка монотонно зменшується до нуля, то точка протягом коливань поступово буде наближатись до стану рівноваги, де $x = 0$. Наближений графік аперіодичного руху приведений на рис (15.6). Крива 1 відповідає початковій швидкості, яка більше нуля $v_{x0} > 0$, крива 2 – при швидкості, яка менша нуля $v_{x0} < 0$.

Якщо $k > n$, тобто опір малий порівняно з відновлювальною силою, то корені характеристичного рівняння (15.25) будуть комплексними

$$r_{1,2} = -n \pm i\sqrt{k^2 - n^2}, \tag{15.28}$$

де $i = \sqrt{-1}$.

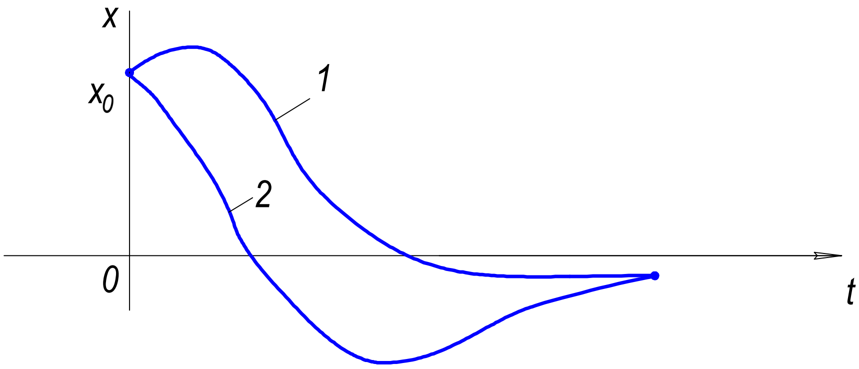


Рис 15.6

Тоді загальний розв’язок рівняння (15.23) набуває вигляду

$$x = e^{-nt}\left(C_1 \cos\sqrt{k^2 - n^2}\,t + C_2 \sin\sqrt{k^2 - n^2}\,t\right). \tag{15.29}$$

Сталі інтегрування C_1 і C_2 визначимо із початкових умов

при $t = 0$:
$$x = x_0,$$
$$\dot{x} = \dot{x}_0 = v_0.$$

Оскільки сталих інтегрування дві, то необхідно два рівняння. Друге рівняння знайдемо, як похідну за часом від (15.29):

$$\dot{x} = -ne^{-nt}\left(C_1 \cos\sqrt{k^2 - n^2}\,t + C_2 \sin\sqrt{k^2 - n_2}\,t\right) +$$
$$+ e^{-nt}\left(-C_1\sqrt{k^2 - n^2}\sin\sqrt{k^2 - n^2}\,t + C_2\sqrt{k^2 - n^2}\cos\sqrt{k^2 - n^2}\,t\right). \tag{15.30}$$

Підставимо сталі інтегрування $x = x_0$ і $\dot{x}_0 = v_0$ при $t = 0$ в рівняння (15.29) і (15.30) і визначимо сталі інтегрування:

$$C_1 = x_0$$
$$C_2 = \frac{v_0 + nC_1}{\sqrt{k^2 - n^2}} = \frac{v_0 + nx_0}{\sqrt{k^2 - n^2}}\,. \tag{15.31}$$

Підставивши значення C_1 і C_2 в рівняння (15.29) остаточно отримаємо закон згасаючих коливань.

$$x = e^{-nt}\left(x_0 \cos\sqrt{k^2 - n^2}\,t + \frac{v_0 + nx_0}{\sqrt{k^2 - n^2}} \sin\sqrt{k^2 - n^2}\,t \right). \qquad (15.32)$$

Переміщення x у виразі закону згасаючих коливань (15.29) може набути іншого вигляду, якщо ввести позначення:

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= B\sin\beta \\ \frac{v_0 + nx_0}{\sqrt{k^2 - n^2}} &= B\cos\beta \end{aligned}\right\}. \qquad (15.33)$$

Тоді

$$x = e^{-nt}\sin\left(B\sin\beta\cos\sqrt{k^2 - n^2}\,t + B\cos\beta\sin\sqrt{k^2 - n^2}\,t \right);$$

або
$$x = Be^{-nt}\sin\left(\sqrt{k^2 - n^2}\,t + \beta \right). \qquad (15.34)$$

Величини B і β визначаються з рівнянь (15.33). Якщо обидва рівняння піднести до квадрату і додати, отримаємо:

$$x_0^2 + \frac{(v_0 + nx_0)^2}{k^2 - n^2} = B^2\left(\sin^2\beta + \cos^2\beta \right),$$

звідки
$$B = \sqrt{x_0^2 + \frac{(v_0 + nx_0)^2}{k^2 - n^2}}. \qquad (15.35)$$

Якщо поділити перше рівняння на друге в системі (15.33), то отримаємо

$$tg\beta = \frac{x_0\sqrt{k^2 - n^2}}{v_0 + nx_0}. \qquad (15.36)$$

Коливання, які відбуваються по закону (15.34), називаються гармонічними згасаючими коливаннями. Амплітуда Be^{-nt} завдяки множнику e^{-nt} з часом зменшується, наближаючись до нуля.

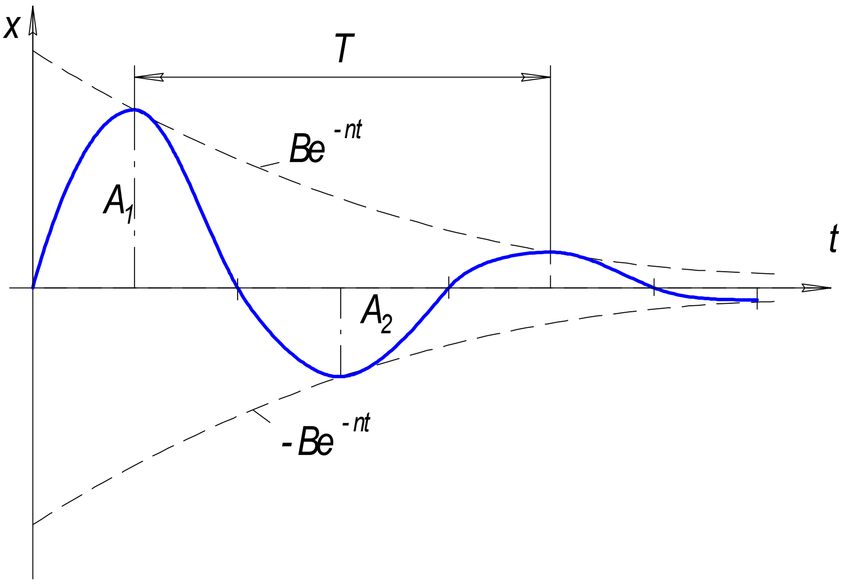


Рис. 15.7

Графік цих коливань показаний на рис. 15.7, де він розташований між пунктирними кривими:

$x_1 = Be^{-nt}$

$x_2 = -Be^{-nt}$, $\sin\sqrt{k^2 - n^2}\,t$ - не може бути більш, ніж одиниця.

Проміжок часу T, який дорівнює періоду функції $\sin\left(\sqrt{k^2 - n^2}\,t + \beta\right)$, називають періодом згасаючих коливань:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - n^2}}, \tag{15.37}$$

де $\sqrt{k^2 - n^2}$ – колова частота згасаючих коливань, β – початкова фаза коливань.

Для характеристики процесу згасання вводять поняття декременту згасаючих коливань, як відношення двох сусідніх амплітуд

$$q = \frac{A_{i+1}}{A_i} = \frac{A_2}{A_1} = \frac{Be^{-n\left(\tau + \frac{T}{2}\right)}}{Be^{-n\tau}} = e^{-\frac{nT}{2}}, \tag{15.38}$$

$$q^{-1} = e^{\frac{nT}{2}}.$$

Логарифмічний декремент згасаючих коливань дорівнює:

$$\ln\left(q^{-1}\right) = \frac{nT}{2}. \tag{15.39}$$

Приклад 15.2.

Для визначення опору води при русі моделі судна при дуже малих швидкостях модель опустили в посудину, прив'язавши ніс і корму за допомогою двох однакових пружин A і B, сили натягу яких пропорційні деформаціям пружин (рис. 15.8). Результати спостережень показали, що відхилення моделі від положення рівноваги після кожного розмаху зменшується, складаючи геометричну прогресію, знаменник якої дорівнює 0,9, а тривалість кожного розмаху дорівнює 0,5 с. Визначити силу опору води, яка припадає на одиницю маси моделі, коли швидкість моделі дорівнює $1 м/с$. Вважати, що опір води пропорційний першому степеню швидкості.

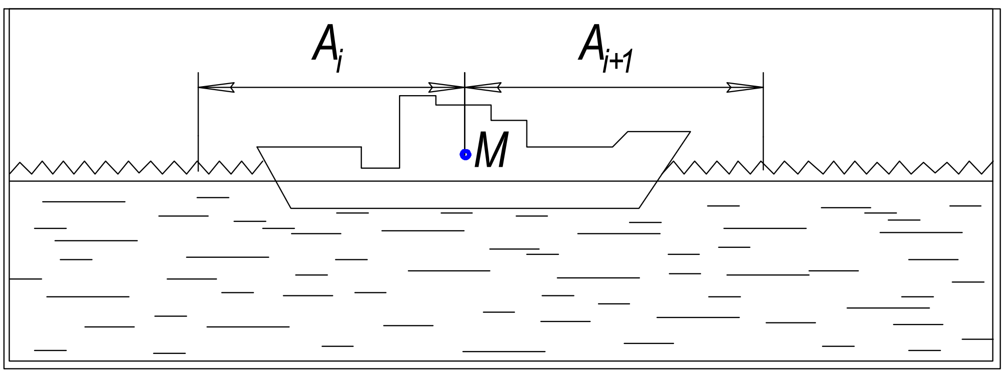


Рис. 15.8

$\dfrac{A_{i+1}}{A_i} = 0{,}9$,

$\dfrac{T}{2} = 0{,}5\,c$, де T – період коливань, $T = 1\,c$,

$R = \mu \upsilon$, де μ – коефіцієнт пропорційності,

$v = 1\, м/c$.

$\dfrac{R}{m} - ?$.

Розв'язання.

Амплітуда затухаючих коливань визначається за формулою $A = Be^{-nt}$, де $n = \dfrac{\mu}{2m}$.

Тоді $$A_i = Be^{-nti},$$

$$A_{i+1} = Be^{-n\left(t_i + \frac{T}{2}\right)}.$$

Визначимо відношення амплітуд:

$$\frac{A_{i+1}}{A_i} = \frac{Be^{-n\left(t_i + \frac{T}{2}\right)}}{Be^{-nt_i}} = e^{-\frac{nT}{2}} = 0{,}9. \qquad (a)$$

З виразу (а) визначимо коефіцієнт згасання n:

$$-\frac{nT}{2} = \ln\frac{9}{10},$$

$$\frac{nT}{2} = \ln\frac{10}{9},$$

$$n = \frac{2}{T}\ln\frac{10}{9}, \quad \text{але} \quad n = \frac{\mu}{2m}. \qquad (б)$$

З виразу (б) визначимо коефіцієнт пропорційності сили опору:

$$\frac{\mu}{2m} = \frac{2}{T}\ln\frac{10}{9},$$

$$\mu = \frac{4m}{T}\ln\frac{10}{9}.$$

Сила опору дорівнює

$$R = \mu v = \frac{4mv}{T}\ln\frac{10}{9}. \qquad \text{(в)}$$

З виразу (в) визначимо питому силу опору води, яка припадає на одиницю маси:

$$\frac{R}{m} = \frac{4v}{T}\ln\frac{10}{9} = \frac{4\cdot 1}{1}\cdot 0{,}1044 = 0{,}42\frac{Н}{кг}.$$

Відповідь: $$\frac{R}{m} = 0{,}42\ \left(\frac{Н}{кг}\right).$$

Запитання для самоконтролю:

1. Що таке фаза коливань, колова частота, період коливань?
2. Як визначається колова частота вільних коливань, від яких параметрів вона залежить?
3. Напишіть закон вільних коливань.
4. Що таке аперіодичні коливання?
5. Чому дорівнює частота згасаючих коливань?
6. За якою функцією зменшуються амплітуди згасаючих коливань?
7. Що таке декремент згасаючих коливань, логарифмічний декремент?

ЛЕКЦІЯ 16

16.1. Змушені без опору коливання точки від гармонічної збурювальної сили

На матеріальну точку крім відновлювальної сили $\overline{F} = -c\overline{x}$ (рівнодійна сили ваги і сили пружності) діє ще сила, яка періодично змінюється і називається збурювальною силою

$$Q = Q_0 \sin pt,$$

де Q_0 – амплітудне, максимальне значення збурювальної сили (H); p – колова частота збурювальної сили ($рад/с$); t – час (c).

Сила Q – збурювальна гармонічна сила. Коливання, які виникають під дією збурювальної сили, називаються змушеними.

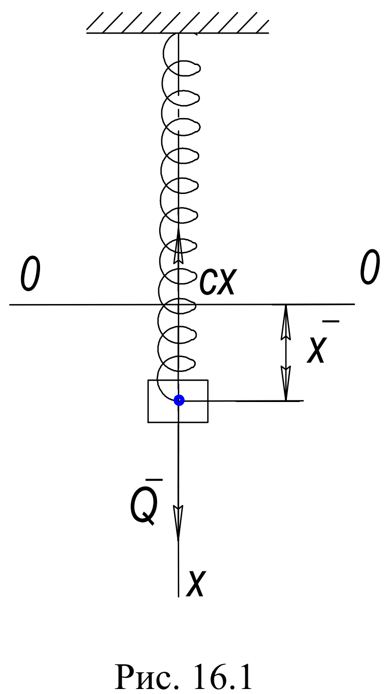


Рис. 16.1

Запишемо диференціальне рівняння зазначеного руху точки (рис. 16.1):

$$m\ddot{x} = -cx + Q_0 \sin pt\,, \tag{16.1}$$

або
$$\ddot{x} = -\frac{c}{m}x + \frac{Q_0}{m}\sin pt\,.$$

Позначимо

$$\left.\begin{aligned} &\frac{c}{m} = k^2, \quad k = \sqrt{\frac{c}{m}} \\ &\frac{Q_0}{m} = a_0. \end{aligned}\right\}. \tag{16.2}$$

Тоді диференціальне рівняння руху точки (16.1) набуває вигляду:

$$\ddot{x} + k^2 x = a_0 \sin pt\,. \tag{16.3}$$

Вираз (16.3) - неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

Розв’язок рівняння (16.3) складається з двох частин:

$$x = x_1 + x_2\,, \tag{16.4}$$

де x_1 – загальний розв’язок однорідного диференціального рівняння $\ddot{x} + k^2 x = 0$; x_2 – частинний розв’язок неоднорідного рівняння (16.3).

Загальний розв’язок однорідного рівняння має вигляд (15.11):

$$x_1 = A\sin(kt + \alpha), \tag{16.5}$$

де A – амплітуда вільних коливань $A = \sqrt{x_0^2 + \dfrac{\upsilon_0^2}{k^2}}$, яка залежить від початкових умов; $\alpha = arctg\dfrac{x_0 k}{\upsilon_0}$ – початкова фаза (див. лекцію 15).

Частинний розв’язок рівняння (16.3) шукаємо у вигляді:

$$x_2 = C \sin p\ t . \tag{16.6}$$

Для підстановки розв'язку в рівняння (16.3) визначимо похідні від виразу (16.6) за часом:

$$\dot{x}_2 = Cp\ \cos p\ t , \tag{16.7}$$

$$\ddot{x}_2 = -Cp^2 \sin p\ t . \tag{16.8}$$

Підставимо значення (16.6), (16.7) і (16.8) в рівняння (16.3):

$$-Cp^2 \sin p\ t + k^2 C \sin p\ t = a_0 \sin p\ t , \tag{16.9}$$

$$C\left(k^2 - p^2\right)\sin p\ t = a_0 \sin p\ t . \tag{16.10}$$

Прирівняємо коефіцієнти при синусах, вони повинні бути однакові

$$C\left(k^2 - p^2\right) = a_0 , \tag{16.11}$$

звідки

$$C = \frac{a_0}{k^2 - p^2} . \tag{16.12}$$

Частинний розв'язок отримаємо, підставивши визначену амплітуду C у рівняння (16.6):

$$x_2 = \frac{a_0}{k^2 - p^2} \sin p\ t . \tag{16.13}$$

Загальний розв'язок рівняння (16.3) набуває вигляду:

$$x = A \sin(kt + \alpha) + \frac{a_0}{k^2 - p^2} \sin p\ t . \tag{16.14}$$

Другий доданок розв'язку або друга гармоніка в рівнянні (16.14) характеризує змушені коливання, колова частота яких дорівнює коловій частоті збурювальної сили.

Амплітуда змушених коливань може бути уявлена у вигляді:

$$C = \frac{a_0}{k^2 - p^2} = \frac{\frac{a_0}{k^2}}{1 - \frac{p^2}{k^2}} = \frac{\frac{Q_0 m}{mc}}{1 - \frac{p^2}{k^2}} = \frac{\frac{Q_0}{c}}{1 - \frac{p^2}{k^2}} = \frac{\lambda_{cm}}{1 - \frac{p^2}{k^2}}, \tag{16.15}$$

де $\lambda_{cm} = \frac{Q_0}{c}$ – деформація пружного елементу під дією амплітудного значення сили Q_0, яка прикладається статично.

Визначимо відношення динамічної амплітуди до статичної:

$$\eta = \frac{C}{\lambda_{cm}} = \frac{1}{1 - \frac{p^2}{k^2}}, \text{ коли } p < k, \text{ (низькочастотні коливання)}, \tag{16.16}$$

$$\eta = \frac{C}{\lambda_{cm}} = \frac{1}{1 - \frac{p^2}{k^2}}, \text{ коли } p > k. \text{ (високочастотні коливання)}, \tag{16.17}$$

де η – коефіцієнт динамічності.

Коефіцієнт динамічності η показує, в скільки разів амплітуда змушених коливань C більша, ніж статична деформація пружного елементу λ_{cm} під дією амплітудного значення сили Q_0.

Графік залежності коефіцієнта динамічності від співвідношення частот збурювальної сили і вільних коливань показана на рис 16.2.

При $p = k$, тобто $\frac{p}{k} = 1$, як можна побачити з рис. 16.2, коефіцієнт динамічності необмежено зростає, що видно і з виразу (16.16), тут має місце, так званий, резонанс. При механічному резонансі амплітуди змушених коливань необмежено зростають.

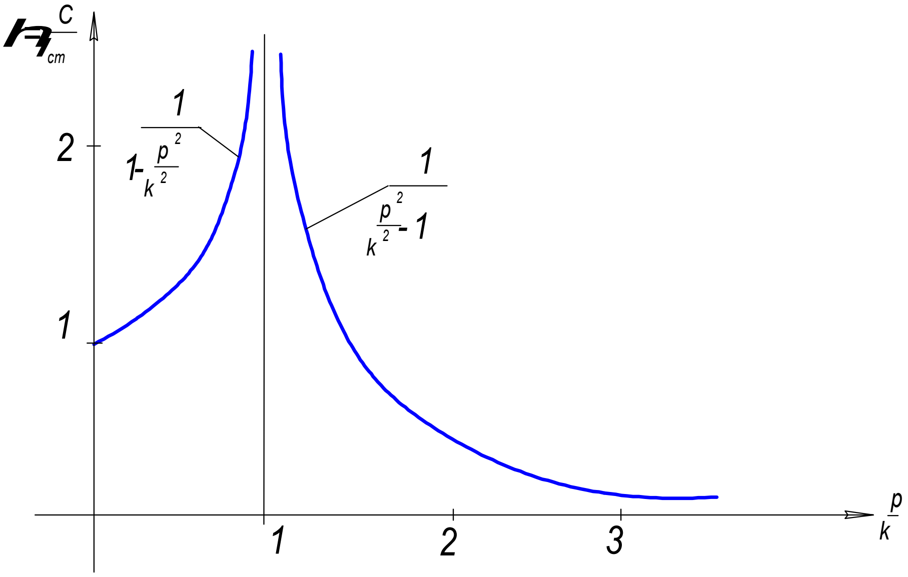


Рис. 16.2

16.2. Явище резонансу

Характер коливань різко змінюється, коли колова частота збурювальної сили збігається з коловою частотою вільних (власних) коливань $p = k$. В механіці це явище називають механічним резонансом. Амплітуди змушених коливань з часом необмежено зростають і можуть досягати недопустимо великих, небезпечних для механічної системи значень.

Запишемо диференціальне рівняння резонансних коливань, замінюючи в правій частині (16.3) p на k:

$$\dot{x} + k^2 x = a_0 \sin kt .$$

Розв'язок однорідного рівняння не відрізняється від розв'язку для вільних коливань (15.11)

$$x_1 = A\sin(kt + \alpha).$$

Частинний розв'язок x_2 шукаємо у формі, яка є лінійно незалежною від x_1:

$$x_2 = Ct\cos kt.$$

Для підстановки даного розв'язку в диференціальне рівняння резонансних коливань знайдемо другу похідну за часом:

$$\ddot{x}_2 = -Ck\sin kt - Ck\sin kt + Ck^2 t\cos kt.$$

Підставимо $\ddot{x}_2$ і x_2 в диференціальне рівняння і після скорочення маємо:

$$-2Ck\sin kt = a_0\sin kt,$$

звідки

$$C = -\frac{a_0}{2k}.$$

Тоді загальний розв'язок набуває вигляду:

$$x = x_1 + x_2 = A\sin(kt+\alpha) - \frac{a_0}{2k}t\cos kt.$$

Перша гармоніка у формулі резонансних коливань характеризує вільні коливання, друга – змушені коливання, амплітуда яких дорівнює $\frac{a_0}{2k}t$, вона збільшується пропорційно часу і при $t \to \infty$ необмежено зростає. Закон змінення амплітуди змушених коливань показано на рис. 16.3, де штриховими лініями зображено графіки функцій $x_2' = \left|\frac{a_0}{2k}\right|t$ і $x_2'' = -\left|\frac{a_0}{2k}\right|t$ (амплітудні лінії).

Крім того, із загального розв'язку можна побачити, що при резонансі в частинному розв'язку фаза коливань косинуса відстає на - $\frac{\pi}{2}$ порівняно до фази коливань збурювальної сили (16.14).

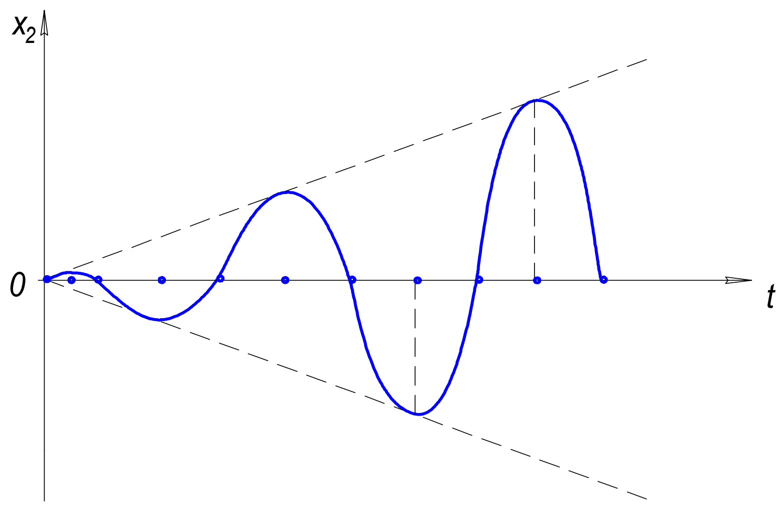


Рис. 16.3

В реальних конструкціях через різного роду тертя і нелінійні фактори амплітуда змушених коливань зростає повільніше, ніж тут показано за теоретичною моделлю, але також може досягати небезпечних величин.

16.3. Змушені коливання точки від гармонічної збурювальної сили з опором типу в'язкого тертя

Розглянемо коливання точки (рис. 16.4), на яку діють відновлювальна сила $\overline{F} = -c\overline{x}$, сила опору, що пропорційна швидкості $\overline{R} = -\mu\overline{\upsilon}$ і збурювальна гармонічна сила $Q = Q_0 \sin pt$. Проекція сили опору на вісь дорівнює: $R_x = -\mu\ \dot{x}$.

Диференціальне рівняння руху точки має вигляд:

$$m\ddot{x} = -cx - \mu\dot{x} + Q_0 \sin pt. \tag{16.18}$$

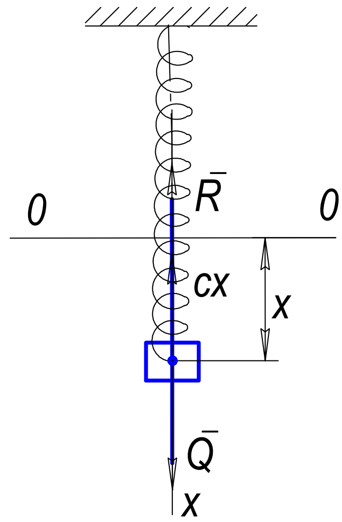


Рис. 16.4

Поділимо рівняння (16.18) на масу точки і введемо позначення:

$$\ddot{x} = -\frac{c}{m}x - \frac{\mu}{m}\dot{x} + \frac{Q_0}{m}\sin pt\,; \tag{16.19}$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{c}{m} = k^2; k = \sqrt{\dfrac{c}{m}}; \\ \dfrac{\mu}{m} = 2n; n = \dfrac{\mu}{2m}; \\ \dfrac{Q_0}{m} = a_0\ . \end{array}\right\} \tag{16.20}$$

З урахуванням (16.20) диференціальне рівняння руху точки набуває вигляду:

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2 x = a_0 \sin pt\,. \tag{16.21}$$

Вираз (16.1) є диференціальним рівнянням змушених коливань точки при наявності сил опору. Це лінійне неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Його розв’язок складається з двох доданків

$$x = x_1 + x_2\,, \qquad (16.22)$$

де x_1 – загальний розв'язок однорідного рівняння $\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2 x = 0$.

Якщо $k > n$, розв'язок x_1 набуває вигляду (див. лекцію 15):

$$x_1 = Be^{-nt}\sin(\sqrt{k^2 - n^2}\,t + \beta)\,; \qquad (16.23)$$

де $$B = \sqrt{x_0^2 + \frac{(v_0 + nx_0)^2}{k^2 - n^2}}\,; \qquad tg\beta = \frac{x_0\sqrt{k^2 - n^2}}{v_0 + nx_0}\,.$$

Але гармоніка x_1 досить швидко згасає, нею, як правило нехтують. Доданок x_2 – частинний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння (16.21).

Розв'язок x_2 шукаємо у вигляді:

$$x_2 = D\sin(pt - \gamma). \qquad (16.24)$$

Тоді похідні за часом будуть:

$$\dot{x}_2 = Dp\cos(pt - \gamma), \qquad (16.25)$$

$$\ddot{x}_2 = -Dp^2\sin(pt - \gamma). \qquad (16.26)$$

Значення (16.24), (16.25) і (16.26) підставимо в рівняння (16.21):

$$-Dp^2\sin(pt - \gamma) + 2nDp\cos(pt - \gamma) + k^2 D\sin(pt - \gamma) = a_0 \sin pt\,. \qquad (16.27)$$

Позначимо $\qquad pt - \gamma = \varphi\,, \qquad pt = \varphi + \gamma\,.$

$$\sin pt = \sin(\varphi + \gamma) = \sin\varphi\cos\gamma + \cos\varphi\sin\gamma\,.$$

Тоді рівняння (16.27) набуває вигляду:

$$-D(k^2 - p^2)\sin\varphi + 2nDp\cos\varphi = a_0 \sin\varphi\cos\gamma + a_0\cos\varphi\sin\gamma\,. \qquad (16.28)$$

Для того, щоб вираз (16.28) був тотожністю, необхідно, щоб коефіцієнти при $\sin\varphi$ і $\cos\varphi$ ліворуч і праворуч були однакові, тобто

$$\left.\begin{array}{l} D\left(k^2 - p^2\right) = a_0 \cos\gamma, \\ 2Dnp = a_0 \sin\gamma\,. \end{array}\right\} \tag{16.29}$$

Якщо поділимо друге рівняння (16.29) почленно на перше, то отримаємо:

$$tg\gamma = \frac{2np}{k^2 - p^2}; \tag{16.30}$$

$$\gamma = arctg\frac{2np}{k^2 - p^2}\,.$$

Якщо обидва рівняння (16.29) піднесемо до квадрату і потім почленно додамо, то отримаємо вираз для визначення амплітуди D:

$$D^2\left[\left(k^2 - p^2\right)^2 + 4n^2p^2\right] = a_0^2, \tag{16.31}$$

звідки
$$D = \frac{a_0}{\sqrt{\left(k^2 - p^2\right)^2 + 4n^2p^2}} = \frac{\dfrac{a_0}{k^2}}{\sqrt{\left(1 - \dfrac{p^2}{k^2}\right)^2 + 4\dfrac{n^2}{k^2}\cdot\dfrac{p^2}{k^2}}}\,. \tag{16.32}$$

Якщо зробити перетворення, підставивши значення величин $\frac{a_0}{k^2} = \frac{Q_0 \cdot m}{m \cdot c} = \frac{Q_0}{c} = \lambda_{cm}$ - деформація пружного елементу під дією сили Q_0, і позначити $\frac{n^2}{k^2} = h^2$, тобто $h = \frac{n}{k}$, то амплітуда змушених коливань набуває вигляду:

$$D = \frac{\lambda_{cm}}{\sqrt{\left(1 - \dfrac{p^2}{k^2}\right)^2 + 4h^2\dfrac{p^2}{k^2}}}, \tag{16.33}$$

і змушені коливання відбуваються за законом:

$$x = \frac{\lambda_{cm}}{\sqrt{\left(1-\frac{p^2}{k^2}\right)^2 + 4h^2\frac{p^2}{k^2}}}\sin(pt-\gamma), \qquad (16.34)$$

де $\lambda_{cm} = \frac{Q_0}{c}$; c - коефіцієнт жорсткості пружного елементу (*Н/м*);

p - колова частота збурювальної сили,

$k^2 = \frac{c}{m}$; m - маса вантажу, k - колова частота вільних коливань,

$h^2 = \frac{n^2}{k^2}$; $n = \frac{\mu}{2m}$; μ - коефіцієнт пропорційності у виразі сили опору,

n - коефіцієнт згасання,

h - коефіцієнт демпфірування,

$\gamma = arctg\frac{2np}{k^2 - p^2}$ - кут зсуву за фазою.

Розглянемо амплітуду змушених коливань (16.33).

а) Якщо частота збурювальної сили значно менша, ніж частота власних коливань $p << k$, то амплітуда змушених коливань наближається до статичного значення $D \to \lambda_{cm}$, і коливання відбуваються з амплітудою, яка дорівнює статичній деформації пружного елементу.

б) Якщо $p >> k$ (тобто частота збуреної сили значно більша, ніж частота власних коливань), то $D \to \frac{\lambda_{cm}}{\frac{p^2}{k^2}} = \frac{\lambda_{cm} \cdot k^2}{p^2} = \frac{\frac{Q_0}{c}\cdot\frac{c}{m}}{p^2} = \frac{\frac{Q_0}{m}}{p^2} = \frac{a_0}{p^2}$.

З останнього виразу випливає, що величину амплітуди D можна отримати будь-якою малою. Це важливий випадок для практики.

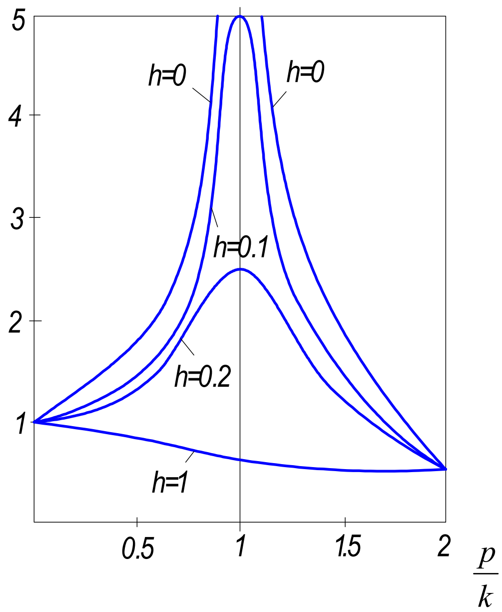


Рис. 16.5

в) Якщо $p = k$, частота збуреної сили дорівнює частоті власних коливань. У цьому випадку амплітуда D досягає максимальних значень. Наступає явище механічного резонансу. Максимум амплітуди залежить від коефіцієнта демпфірування $h = \frac{n}{k}$.

На рис. 16.5 показано змінювання коефіцієнта динамічності $\frac{D}{\lambda_{cm}}$ від відношення частот $\frac{p}{k}$ при різних значеннях h

Загальні властивості змушених коливань:

1) амплітуда змушених коливань не залежить від початкових умов;

2) змушені коливання і при наявності сил опору не згасають;

3) частота змушених коливань дорівнює частоті збурювальної сили і від характеристик системи не залежить;

4) навіть при великих значеннях збурювальної сили можна досягти

технічними засобами, щоб змушені коливання були досить малими, якщо частота збурювальної сили значно відрізняється від частоти власних коливань;

5) навіть при малій збурювальній силі можна отримати інтенсивні змушені коливання, якщо опір малий, а частота збурювальної сили наближається до частоти власних коливань (механічний резонанс).

Приклад 16.1.

Вантаж масою $m = 0{,}4\ кг$ підвішений на пружині, яка розтягується на $10\ см$ при силі $40H$ (рис.16.6). Верхній кінець пружини здійснює гармонічні коливання по вертикальній прямій за законом:

$$O_1C = b\sin pt \ ,$$

де $b = 0{,}02\ м$ – амплітуда, $p = 7 \cdot \frac{1}{c}$ – колова частота.

Визначити закон змушених коливань вантажу $x = f(t)$.

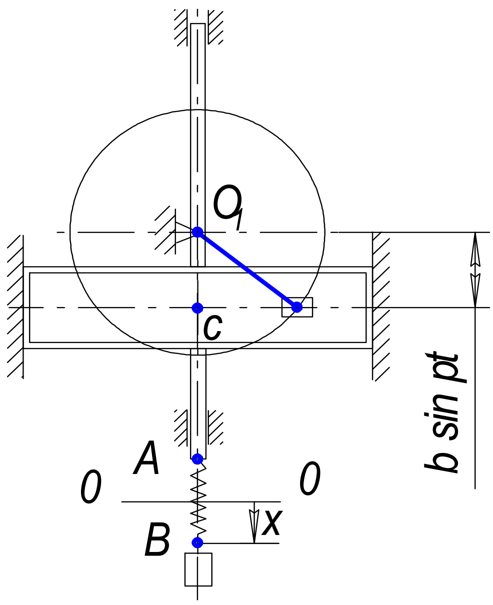


Рис. 16.6

Дано: $O_1C = b\sin pt = 0{,}02\sin 7t$,

$m = 0{,}4кг$,

$F = 40H$,

$\Delta l = 10\ \ см$,

$b = 0.02м$,

$p = 7\dfrac{1}{c}$.

$x = f(t) - ?$

Розв'язання.

Збурювальна сила, яка діє на кінець пружини:

$$Q = c \cdot b\sin pt,$$

де c – коефіцієнт жорсткості пружного елементу:

$$c = \frac{F}{\Delta l} = \frac{40}{10 \cdot 10^{-2}} = 400\ \left(\frac{H}{м}\right).$$

Тоді $\qquad Q = c \cdot b\sin pt = 400 \cdot 0.02 \cdot \sin 7t = 8\sin 7t\ \ (H)$.

$Q_0 = 8\ \ (H)$ - амплітудне значення сили;

$a_0 = \dfrac{Q_0}{m} = \dfrac{8}{0.4} = 20\left(\dfrac{м}{c^2}\right)$ - амплітудне значення прискорення,

$$k^2 = \frac{c}{m} = \frac{400}{0.4} = 1000\left(\frac{1}{c^2}\right); \qquad p^2 = 7^2 = 49\left(\frac{1}{c^2}\right).$$

Змушені коливання відбуваються за законом:

$$x = \frac{a_0}{k^2 - p^2}\sin pt = \frac{20}{1000 - 49}\sin 7t = 0.02\sin 7t\ \ (м).$$

Відповідь: $\qquad x = 0.02\sin 7t\ \ (м)$.

Запитання для самоконтролю:

1. Чим відрізняються диференціальні рівняння вільних коливань і змушених коливань без опору?
2. Скільки доданків має закон змушених коливань? Проаналізуйте їх.
3. Що таке коефіцієнт динамічності і як він визначається?
4. Які умови виникнення механічного резонансу і як змінюється амплітуда коливань при резонансі?
5. Які доданки входять у диференціальне рівняння змушених коливань з опором? Зробіть аналіз цих доданків.
6. Назвіть основні властивості змушених коливань з опором.
7. Що таке коефіцієнт згасання і чому він дорівнює?
8. Які коливання називають низькочастотними (дорезонансними) і високочастотними (післярезонансними)?

ЛЕКЦІЯ 17

МАЛІ КОЛИВАННЯ МЕХАНІЧНОЇ СИСТЕМИ

17.1. Поняття про стійкість рівноваги

При визначенні умов рівноваги механічної системи виникає питання: чи буде рівновага стійкою?

Для консервативної системи, коли повна механічна енергія, яка складається з суми кінетичної і потенціальної, залишається сталою величиною, існує загальний критерій стійкості рівноваги згідно з теоремою Лагранжа – Діріхле:

якщо потенціальна енергія консервативної системи має строгий мінімум, то рівновага системи в цьому положенні є стійкою.

Для доведення цієї теореми використаємо такі міркування. Для консервативної системи має місце закон збереження повної механічної енергії:

$$T + \varPi = const\,, \tag{17.1}$$

де T – кінетична енергія системи; $\varPi$ – потенціальна енергія системи.

Якщо в положенні рівноваги $\varPi = \varPi_{\min}$, тобто, коли система після малого збурення прийде в рух і буде відхилятися від положення рівноваги, то значення потенціальної енергії $\varPi$ повинно зростати, а значення кінетичної енергії T – зменшуватися. Але при зростанні потенціальна енергія $\varPi$ не може стати більше деякої величини $\varPi_1 = \varPi_{\min} + \Delta\varPi$, котру отримують, коли кінетична енергія T прийме нульове значення.

Враховуючи це, можна початкові збурення, а з ними і значення $\Delta\Pi$ задати скільки завгодно малими, менше будь-якої заданої малої величини. Звідки випливає, що положення рівноваги буде стійким.

Теорема Лагранжа-Діріхле дає тільки достатню умову рівноваги, але не дає необхідну умову стійкої рівноваги, тобто не дозволяє судити про те, що буде, якщо у положенні рівноваги потенціальна енергія не має мінімуму.

Розглянемо окремо випадок рівноваги консервативної системи, яка має один степінь вільності.

Нехай положення системи визначається узагальненою координатою q, яку обрали так, що при рівновазі системи $q = 0$. Але у положенні рівноваги узагальнена сила дорівнює нулю:

$$Q_0 = \left(\frac{\partial \Pi}{\partial q}\right)_0 = 0 \cdot$$

Крім того, якщо $\Pi(q)$ має при $q = 0$ мінімум, то друга похідна від потенціальної енергії буде більше нуля:

$$\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^2}\right)_0 > 0 \cdot$$

Таким чином, при виконанні наступних умов (достатніх, але не необхідних):

$$\left.\begin{aligned} &\left(\frac{\partial \Pi}{\partial q}\right)_0 = 0 \\ &\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^2}\right)_0 > 0 \end{aligned}\right\}, \qquad (17.2)$$

рівновага системи у даному положенні $(q = 0)$ буде стійкою.

При розв'язуванні задач, вважаючи q малим, достатньо визначити $\Pi(q)$ з точністю до q^2, оскільки члени з q^3 і вище в умови (17.2) не ввійдуть (при $q = 0$ перетворюються в нуль).

Приклад 17.1.

Визначити умови стійкості рівноваги стержня AB у вертикальному положенні, якщо маса стержня дорівнює m, а довжина – l. В точці B до. стержня приєднані дві пружини, коефіцієнти жорсткості яких дорівнюють відповідно c_1 і c_2. Пружини в початковий момент стиснуті на величини λ_{1_0} і λ_{2_0} (рис. 17.1).

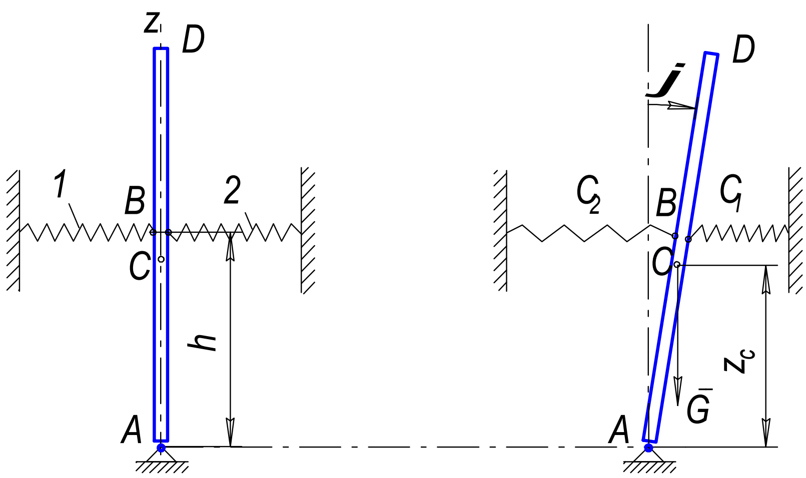


Рис. 17.1

Розв'язання.

За узагальнену координату обираємо кут φ відхилення стержня від вертикалі. Вважаємо кут φ малим і обчислимо потенціальну енергію системи.

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2, \tag{1}$$

$\Pi_1 = G \cdot z_c = mg \cdot \frac{l}{2} \cdot \cos\varphi$ – потенціальна енергія стержня. (2)

$\Pi_2 = \frac{c_1\left(\lambda_{1_0} + h\varphi\right)^2}{2} + \frac{c_2\left(\lambda_{2_0} + h\varphi\right)^2}{2}$ – потенціальна енергія пружини. (3)

При обчисленні потенціальної енергії пружин вважається, що точка B рухається горизонтально і її переміщення дорівнює $h\varphi$, стиск пружини 1 збільшується, а пружини 2 – зменшується.

Розкладемо $\cos\varphi$ в ряд

$$\cos\varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2} + \ldots \tag{4}$$

Підставимо значення (2), (3), (4) в рівняння (1):

$$\Pi = \Pi_0 - \frac{mgl}{4}\varphi^2 + \left(c_1\lambda_{10} - c_2\lambda_{20}\right)h\varphi + \frac{\left(c_1 + c_2\right)h^2}{2}\varphi^2 .$$

Визначаємо першу частинну похідну за узагальненою координатою φ:

$$\frac{\partial\Pi}{\partial\varphi} = -\frac{mgl}{2}\varphi + \left(c_1\lambda_{10} - c_2\lambda_{20}\right)h + \left(c_1 + c_2\right)h^2\varphi . \tag{5}$$

Для того, щоб стержень був у рівновазі, перша похідна при $\varphi = 0$ повинна дорівнювати нулю:

$$\left(c_1\lambda_{10} - c_2\lambda_{20}\right)h = 0 ,$$

звідки

$$c_1\lambda_{10} = c_2\lambda_{20} . \tag{6}$$

Визначаємо другу частинну похідну за узагальненою координатою φ:

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2} = -\frac{mgl}{2} + (c_1 + c_2)h^2 . \tag{7}$$

Для стійкої рівноваги необхідно, щоб $\frac{mgl}{2h^2} > 0$, тобто

$$(c_1 + c_2) > \frac{mgl}{2h^2} . \tag{8}$$

Вирази (6) і (8) складають умови стійкості рівноваги стержня у вертикальному положенні.

17.2. Малі коливання механічної системи з одним степенем вільності відносно положення стійкої рівноваги

У багатьох галузях техніки досить часто приходиться розглядати коливальний рух механічної системи, при якому точки системи переміщуються послідовно то в один бік, то в другий навколо середнього положення рівноваги. Сюди відносяться коливання і вібрації машин і їх деталей (автомобілі, трактори, електричні машини, судна, літаки і т.п.).

Коливальний рух механічних систем зручно описувати рівняннями Лагранжа другого роду в узагальнених координатах. При складанні рівнянь узагальнені координати відліковуються від положення стійкої рівноваги, відносно якої і відбуваються коливання механічної системи.

У більшості випадків ці рівняння нелінійні і їх інтегрування пов’язане з серйозними труднощами. У багатьох технічних задачах ці рівняння лінеаризують. Коливання, які описуються лінеаризованими рівняннями при даному виборі початку відліку, повинні бути тільки малими коливаннями навколо положення рівноваги.

Механічні системи, як правило, є консервативними, тобто їх коливання відбуваються у потенціальному силовому полі, тому рівняння Лагранжа другого роду зручно приймати в формі:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right)-\frac{\partial T}{\partial q}=-\frac{\partial \Pi}{\partial q}, \tag{17.3}$$

де $-\frac{\partial \Pi}{\partial q}=Q$ - узагальнена сила;

$T=\frac{1}{2}a\dot{q}^2$ - кінетична енергія системи в узагальнених швидкостях;

$\Pi=\frac{1}{2}cq^2$ - потенціальна енергія системи в узагальнених координатах;

a - коефіцієнт інерції;

c - узагальнений коефіцієнт жорсткості.

Тоді: $\frac{\partial T}{\partial q}=0;\quad \frac{\partial T}{\partial \dot{q}}=a\dot{q};\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right)=a\ddot{q};\quad \frac{\partial \Pi}{\partial q}=cq.$

Звідки рівняння (17.3) набуває вигляду

$$a\ddot{q}+cq=0,$$

або

$$\ddot{q}+k^2q=0, \tag{17.4}$$

де $k^2=\frac{c}{a}$.

Розв'язок однорідного диференціального рівняння (17.4) має вигляд:

$$q=A\sin(kt+\alpha), \tag{17.5}$$

де

$$A=\sqrt{q_0^2+\frac{\dot{q}_0^2}{k}};$$

$$tg\alpha=\frac{kq_0}{\dot{q}_0}. \tag{17.6}$$

Період коливань дорівнює:

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{a}{c}}\,. \tag{17.7}$$

У положенні стійкої рівноваги потенціальна енергія системи повинна бути мінімальною, тобто виконуються умови:

$$\left(\frac{\partial \Pi}{\partial q}\right)_{q=0} = 0; \quad \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^2}\right)_{q=0} > 0. \tag{17.8}$$

Приклад 17.2.

Чутливий елемент приладу для реєстрації вертикальних коливань фундаментів схематично зображений на рис. 17.2 (вертикальна площина).

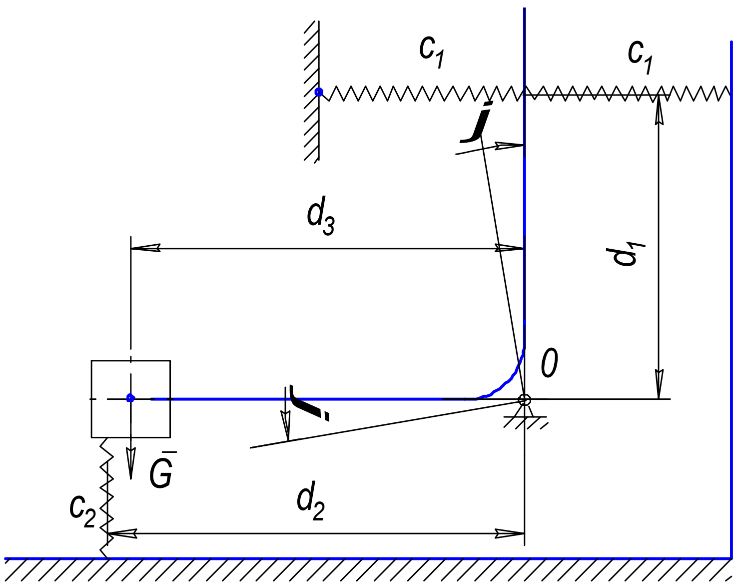


Рис. 17.2

Дві горизонтальні пружини, коефіцієнт жорсткості яких дорівнює c_1, у положенні рівноваги не деформовані. Осьовий момент інерції маси важеля з вантажем вагою G дорівнює I_z. Коефіцієнт жорсткості вертикальної пружини дорівнює c_2.

Розв’язання задачі полягає у тому, щоб скласти диференціальне рівняння руху механічної системи і знайти період коливань.

Розв’язання.

Система має один степінь вільності. За узагальнену координату обираємо кут повороту системи φ .

Кінетична енергія системи дорівнює:

$$T = \frac{1}{2} I_z \dot{\varphi}^2 .$$

Потенціальна енергія системи:

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 ,$$

де Π_1 - потенціальна енергія вантажу вагою G; Π_2 - потенціальна енергія трьох пружин; λ_{cm} - статична деформація вертикальної пружини з коефіцієнтом жорсткості c_2.

$$\Pi_2 = \frac{1}{2}(2c_1)\cdot(d_1 \cdot \varphi)^2 + \frac{1}{2}c_2(\lambda_{cm} + d_2 \cdot \varphi)^2 - \frac{1}{2}c_2\lambda_{cm}^2 =$$

$$= c_1 \cdot d_1^2 \cdot \varphi^2 + \frac{1}{2}c_2\lambda_{cm}^2 + c_2\lambda_{cm} \cdot d_2 \cdot \varphi + \frac{1}{2}c_2 d_2^2 \cdot \varphi^2 - \frac{1}{2}c_2\lambda_{cm}^2 =$$

$$= c_1 d_1^2 \varphi^2 + c_2\lambda_{cm} \cdot d_2 \cdot \varphi + \frac{1}{2}c_2 d_2^2 \cdot \varphi^2;$$

Тоді

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 =$$

$$= -G \cdot d_3 \cdot \varphi + c_1 d_1^2 \cdot \varphi^2 + c_2\lambda_{cm} \cdot d_2 \cdot \varphi + \frac{1}{2}c_2 d_2^2 \cdot \varphi^2 =$$

$$= (-G \cdot d_3 + c_2\lambda_{cm} \cdot d_2)\varphi + \left(c_1 d_1^2 + \frac{1}{2}c_2 d_2^2\right)\varphi^2;$$

$$\left(\frac{\partial \Pi}{\partial q}\right)_{\varphi=0} = 0\,; \; \left(\frac{\partial \Pi}{\partial q}\right)_0 = -Gd_3 + c_2\lambda_{cm}d_2 = 0 \;,$$

Тоді $$\Pi = \frac{1}{2}\left(2c_1d_1^2 + c_2d_2^2\right)\varphi^2;$$

Диференціальне рівняння руху системи набуває вигляду:

$$I_z\ddot{\varphi} + \left(2c_1d_1^2 + c_2d_2^2\right)\varphi = 0\,.$$

Звідки колова частота вільних коливань дорівнює:

$$k = \sqrt{\frac{2c_1d_1^2 + c_2d_2^2}{I_z}}\,.$$

Період коливань дорівнює:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_z}{2c_1d_1^2 + c_2d_2^2}}\,.$$

Запитання для самоконтролю:

1. Які існують умови стійкості положення рівноваги?
2. Як формулюється теорема про достатні умови стійкості рівноваги?
3. Як визначаються необхідні умови стійкості рівноваги?
4. Яким рівнянням зручно описувати малі коливання механічних систем і опишіть методику їх складання?
5. Як визначається узагальнена сила у потенціальному силовому полі консервативних систем?
6. Визначте кінетичну енергію системи в узагальнених координатах і швидкостях.
7. Визначте потенціальну енергію в узагальнених координатах.

ЛЕКЦІЯ 18

ЕЛЕМЕНТАРНА ТЕОРІЯ УДАРУ

18.1. Явище удару, ударний імпульс

Рух твердого тіла у звичайних обставинах під дією звичайних сил характеризується безперервною повільною зміною модулів і напрямів швидкостей точок. Проте, зустрічаються випадки, коли швидкості, а, внаслідок цього, і кількість руху твердого тіла за дуже малий проміжок часу одержують значні прирости.

Явище, при якому за дуже малий проміжок часу τ *(частка секунди) швидкості точок тіла змінюється на кінцеві величини, називається ударом.*

Приклади: удар молота по ковадлу, удар рухомої маси копра по палі, удар м’яча по штанзі, удар більярдних куль і т.п.

Оскільки модулі сил взаємодії при ударі досить великі і швидкозмінні, то в теорії удару за міру взаємодії приймають ударний імпульс.

Імпульс сил при ударі є кінцевою величиною:

$$\overline{S}_{уд} = \int_0^{\tau} \overline{P}_{уд} dt = \overline{P}_{уд}^{ср} \cdot \tau, \qquad (18.1)$$

де $\overline{S}_{уд}$ - ударний імпульс; $\overline{P}_{уд}^{ср}$ - середнє значення сили за час удару; τ - час удару.

18.2. Дія ударної сили на матеріальну точку. Основна теорема теорії удару

Розглянемо матеріальну точку M, яка рухається по траєкторії AB під дією звичайної сили $\overline{P}$ (рис. 18.1). Далі, в положенні M_1 в момент t_1 на точку почала діяти ударна сила $\overline{P}_{уд}$ протягом часу τ. Траєкторія руху точки різко змінюється, замість подальшого руху по кривій M_1B, точка буде рухатись по кривій M_1B_1. Позначимо імпульс сили $\overline{F}$ через $\overline{S}$, а ударної сили $\overline{P}_{уд}$ - через $\overline{S}_{уд}$. Тоді за теоремою про зміну кількості руху точки запишемо:

$$m\overline{v}_2 - m\overline{v}_1 = \overline{S}_{уд} + \overline{S},$$

де $\overline{F}$ - рівнодійна активних сил, прикладених до рухомої точки; t_1 - час, коли точка прийшла у положення M_1, де була прикладена ударна сила $\overline{P}_{уд}$; $\overline{P}_{уд}$ - ударна сила; τ - час удару; $\overline{S}_{уд}$ - ударний імпульс; $\overline{S}$ - імпульс звичайної сили $\overline{P}$ за час удару; $\overline{u}$ - швидкість точки після удару $v_2 = u$.

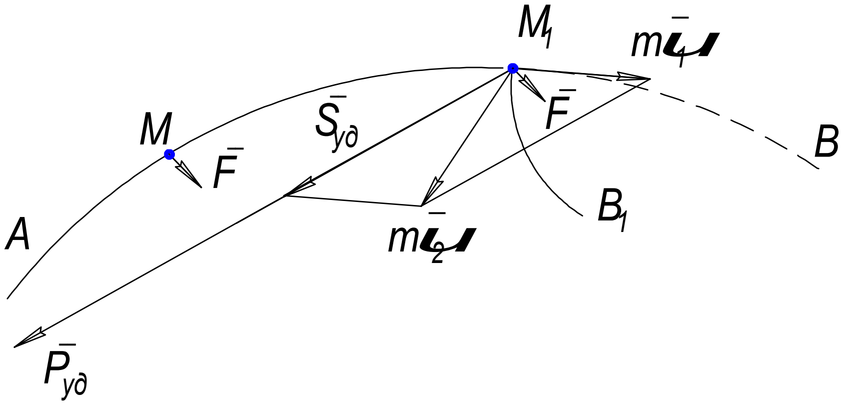


Рис. 18.1

Імпульс $\overline{S}$ звичайної сили $\overline{P}$ за дуже малий час τ (0,1 ... 0,001с) є величиною другого порядку мализни, тому ним можна знехтувати.

Основне рівняння теорії удару має вигляд:

$$m\overline{u} - m\overline{v} = \overline{S}_{уд}, \tag{18.2}$$

де $\overline{v}$ - швидкість точки до удару.

Відмітимо, що переміщення точки під час удару є досить малою величиною, $S = v_{cp}\tau$, тому ним можна нехтувати. В точці M_1 відбувається миттєва зміна траєкторії. Після припинення дії ударної сили точка буде рухатись, як і раніше, під дією сили $\overline{P}$ вздовж нової траєкторії.

<u>Висновки:</u>

- дією неударних сил під час удару можна нехтувати;

- переміщення точки під час удару дуже мале, його можна не враховувати;

- результат дії ударної сили на матеріальну точку виражається зміною вектора швидкості з основного рівняння теорії удару (18.2):

$$\overline{u} - \overline{\upsilon} = \frac{S_{уд}}{m}. \tag{18.3}$$

18.3. Загальні теореми теорії удару

Механічна система складається з n матеріальних точок. Обираємо точку M_k з масою m_k, на яку діють ударні імпульси, які поділяємо на зовнішні з рівнодійною $\overline{S}_k^e$ і внутрішні з рівнодійною $\overline{S}_k^{in}$.

Позначимо:

$\overline{u}_k$ – швидкість точки після дії ударних імпульсів;

$\overline{\upsilon}_k$ – швидкість точки M_k до дії ударних імпульсів.

1. Згідно з виразом (18.2) основна теорема теорії удару для *k*-тої точки системи може бути записана так:

$$m_k\left(\overline{u}_k - \overline{\upsilon}_k\right) = \overline{S}_k^e - \overline{S}_k^{in}; \quad k = 1,2...n. \tag{18.4}$$

Просумуємо вираз (18.4) по всіх точках:

$$\sum m_k\overline{u}_k - \sum m_k\overline{\upsilon}_k = \sum \overline{S}_k^e + \sum \overline{S}_k^{in}, \tag{18.5}$$

де $\sum m_k\overline{u}_k = \overline{K}$ - кількість руху механічної системи після удару;

$\sum m_k\overline{\upsilon} = \overline{K}_0$ - кількість руху механічної системи до удару;

$\sum \overline{S}_k^e$ - геометрична сума зовнішніх ударних імпульсів;

$\sum \overline{S}_k^{in} = 0$ - геометрична сума внутрішніх ударних імпульсів (вони входять до системи попарно, як дія та протидія, тому ця сума дорівнює нулю).

Враховуючи останні позначення, можна рівняння (18.5) записати у такому вигляді:

$$\overline{K} - \overline{K}_0 = \sum \overline{S}_k^e. \tag{18.6}$$

Рівняння (18.6) є математичним виразом теореми про зміну кількості руху механічної системи при ударі:

Зміна кількості руху механічної системи під час удару дорівнює геометричній сумі усіх зовнішніх ударних імпульсів, прикладених до точок системи.

Рівняння (18.6) в проекціях на координатні осі має вигляд:

$$\begin{cases} K_x - K_{ox} = \sum S_{kx}^e; \\ K_y - K_{oy} = \sum S_{ky}^e; \\ K_z - K_{oz} = \sum S_{kz}^e. \end{cases} \tag{18.7}$$

Зміна проекції кількості руху системи на будь яку вісь дорівнює сумі проекцій на ту ж саму вісь усіх зовнішніх ударних імпульсів, прикладених до системи.

Врахуємо, що кількість руху механічної системи дорівнює добутку маси системи на швидкість її центра мас:

$$\overline{K} = M \cdot \overline{u}_c , \quad \overline{K}_0 = M \cdot \overline{\upsilon}_c . \tag{18.8}$$

де M - маса системи; $\overline{u}_c$ - вектор швидкості центра мас системи після удару; $\overline{\upsilon}_c$ - вектор швидкості центра мас системи до удару.

Враховуючи вирази (18.8), рівняння (18.6) і (18.7) набувають вигляду:

$$M \cdot \overline{u}_c - M \cdot \overline{\upsilon}_c = \sum \overline{S}_k^e , \tag{18.9}$$

$$\begin{cases} M \cdot u_{cx} - M \cdot \upsilon_{cx} = \sum S_{kx}^e ; \\ M \cdot u_{cy} - M \cdot \upsilon_{cy} = \sum S_{ky}^e ; \\ M \cdot u_{cz} - M \cdot \upsilon_{cz} = \sum S_{kz}^e . \end{cases} \tag{18.10}$$

При відсутності зовнішніх ударних імпульсів $\sum \overline{S}_k^e = 0$ кількість руху і швидкість центра мас зберігають свої значення:

$$\overline{K} = \overline{K}_0 ;$$

$$\overline{u}_c = \overline{\upsilon}_c . \tag{18.11}$$

При дії на механічну систему лише внутрішніх ударних імпульсів кількість руху системи зберігається, внаслідок чого швидкість центра мас системи буде величиною сталою.

2. Як можна побачити, в лівій частині виразу (18.4) – вектори кількості руху довільної точки після удару і на початку удару. Справа – імпульси сил. Візьмемо момент цих векторів відносно якого-небудь центра O за теоремою Варіньона. Додаючи такі вирази по всіх точках системи, отримаємо:

$$\sum \overline{m}_0\left(m_k\overline{u}_k\right)-\sum \overline{m}_0\left(m_k\overline{v}_k\right)=\sum \overline{m}_0\left(S_k^e\right)+\sum m_0\left(S_k^{in}\right).$$

Суми, що зліва, є головними моментами кількості руху системи відносно точки O в кінці і на початку удару, які позначимо $\overline{L}_1$ і $\overline{L}_o$. Суми, що справа – моменти зовнішніх і внутрішніх ударних імпульсів, остання сума дорівнює нулю згідно властивостей внутрішніх сил і ударних імпульсів.

Остаточно теорема про зміну моменту кількості руху системи під час удару має вигляд:

$$\overline{L}_1-\overline{L}_0=\sum \overline{m}_0\left(\overline{S}_k^e\right). \tag{18.12}$$

В проекціях на осі координат маємо:

$$L_{1x}-L_{0x}=\sum m_x\left(S_k^e\right),$$
$$L_{1y}-L_{0y}=\sum m_y\left(S_k^e\right),$$
$$L_{1z}-L_{0z}=\sum m_z\left(S_k^e\right).$$

Зміна під час удару головного моменту кількості руху системи відносно довільного центра або осі дорівнює сумі моментів діючих на систему зовнішніх ударних імпульсів відносно того ж центра або осі.

З рівняння (18.12) випливає, якщо $\sum \overline{m}_0\left(S_k^e\right)=0$, то головний момент кількості руху або його проекція на вісь зберігають свої значення:

$$\overline{L}_1=\overline{L}_0; \qquad L_{1x}=L_{0x}.$$

18.4. Коефіцієнт відновлювання при ударі

Величина ударного імпульсу в момент удару двох тіл залежить не тільки від мас і швидкостей, але і від пружних властивостей матеріалів, з яких виготовлені ці тіла, що враховується, так званим, коефіцієнтом відновлювання при ударі.

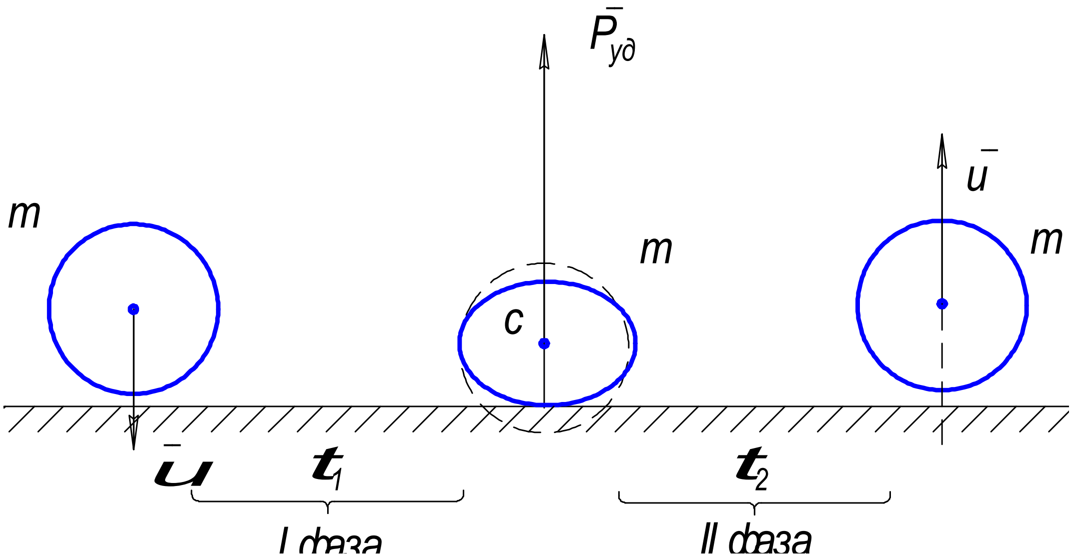


Рис. 18.2

$\bar{\upsilon}$ – швидкість тіла до удару; $\bar{u}$ – швидкість тіла після удару

Розрізняють дві фази удару (рис. 18.2):

I фаза тривалістю τ_1, коли швидкість тіла змінюється від початкової швидкості $\bar{\upsilon}$ до нуля (кінетична енергія перетворюється у потенціальну, тіло отримує пружні деформації);

II фаза тривалістю τ_2, коли швидкість тіла відновлюється від нуля до $\bar{u}$ (потенціальна енергія знову перетворюється у кінетичну, тіло під дією сил пружності (сил міжмолекулярної взаємодії) майже повністю відновлює свою форму).

Зазначимо, що повна механічна енергія тіла $T + П$ повністю не відновлюється, оскільки частково втрачається на залишкові деформації і розсіювання тепла у зовнішній простір ($\bar{u} < \bar{v}$).

Величина відношення модуля швидкості тіла після удару до модуля швидкості тіла до удару називається коефіцієнтом відновлювання при ударі.

$$k = \frac{u}{\upsilon}. \tag{18.13}$$

Наведемо значення коефіцієнту відновлювання для деяких матеріалів:

для деревини – $k = \frac{1}{2}$; для слонової кістки – $k = \frac{8}{9}$;

для сталі – $k = \frac{5}{9}$; для скла – $k = \frac{15}{16}$.

Зміна кількості руху за кожну фазу удару характеризується відповідним імпульсом ударної сили:

$$m\upsilon = S_I,$$

$$mu = S_{II}.$$

Тоді
$$k = \frac{u}{\upsilon} = \frac{mu}{m\upsilon} = \frac{S_I}{S_{II}}. \tag{18.14}$$

При $k \approx 1$; $S_{II} \approx S_I$ і $u \approx \upsilon$ – тобто при гіпотетичному абсолютно пружному ударі кінетична енергія зберігається, а коефіцієнт відновлювання дорівнює відношенню ударних імпульсів за I і II фазу.

Коефіцієнт відновлювання характеризує пружні властивості тіл, що взаємовдаряються. Коефіцієнт відновлювання визначається за допомогою експерименту (рис.18.3): виготовляють кульку і плиту з одного матеріалу, потім кулька вільно падає на плиту з певної висоти H, яку попередньо вимірюють за допомогою вертикальної рейки зі шкалою, і визначають висоту h, на яку кулька піднялась після удару.

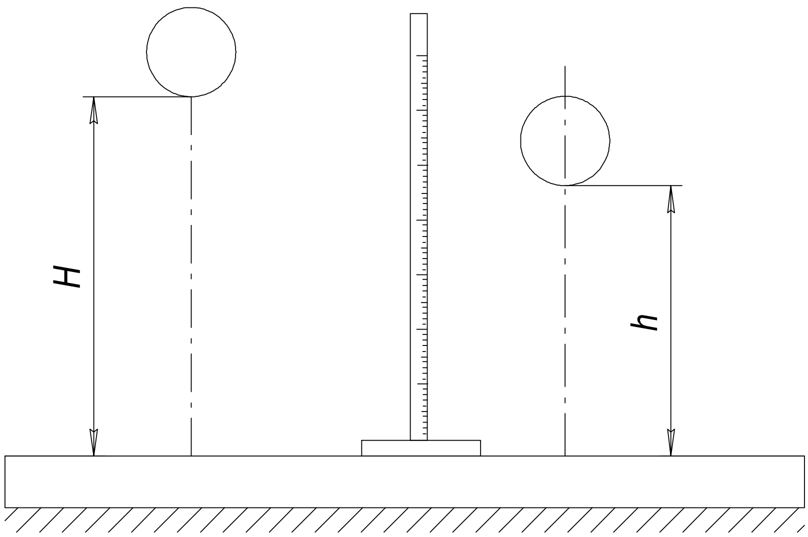


Рис. 18.3

За формулою Галілея виражають швидкості кульки до і після удару через висоти H і h:

$$\left.\begin{aligned} \upsilon &= \sqrt{2gH} \\ u &= \sqrt{2gh} \end{aligned}\right\}, \tag{18.15}$$

$$k = \frac{u}{\upsilon} = \sqrt{\frac{h}{H}}. \tag{18.16}$$

Теоретично можна виділити два граничних випадки:

якщо k дорівнює 1, то удар вважається абсолютно пружним,

якщо $k = 0$, то удар називається абсолютно непружним.

В реальних умовах $0 < k < 1$. В розрахунках, як правило, вважають, що k залежить тільки від матеріалу тіл. В дійсності k, *коефіцієнт* *відновлювання,* незначно залежить і від форми тіл, і від співвідношення мас тіл, що взаємовдаряються.

18.5. Удар тіла об нерухому плиту

Розглянемо тіло (кулю) масою M, яке падає на нерухому плиту (рис.18.4). Ударною силою, що діє на тіло, буде реакція плити, імпульс якої позначимо через $\overline{S}$. Нехай нормаль до поверхні тіла в точці його дотику з плитою перетинає центр мас тіла – такий удар називається центральним. Якщо вектор швидкості $\overline{v}$ центра мас тіла на початку удару спрямований по нормалі до плити, то такий удар називається прямим ($\alpha = 0^0$). А якщо кут буде інший, тоді це – косий удар.

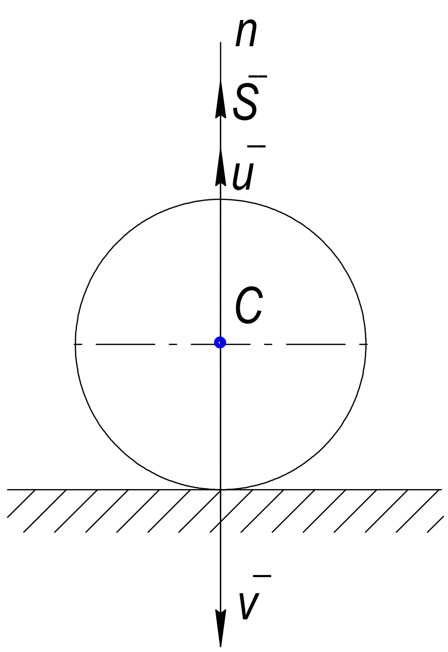


Рис. 18.4

Розглянемо прямий центральний удар. Запишемо основне рівняння теорії удару:

$$M\left(\bar{u}-\bar{v}\right)=\bar{S}.$$

Спроектуємо його на нормаль: $M\left(u_n - v_n\right) = S_n$, але $u_n = u$; $v_n = -v$; $S_n = S \Rightarrow M\left(u+v\right)=S$; $u = kv$ і остаточно маємо:

$$Mv\left(k+1\right)=S. \qquad (18.17)$$

Знаючи M, v, k, можна із виразу (18.17) визначити ударний імпульс:

$$S = M\left(k+1\right)v.$$

Як можна бачити, ударний імпульс буде тим більший, чим більший коефіцієнт відновлювання.

Приклад 18.1.

При падінні сталевої кульки вагою $10H$ з висоти $H = 3м$ на сталеву плиту ($k = 5/9$) визначити ударний імпульс і середню ударну реакцію, якщо $\tau = 0{,}0005\ c$.

Розв'язання.

Запишемо вираз (18.17): $S = Mv\left(k+1\right)$.

Швидкість до удару: $v = \sqrt{2gH} = \sqrt{2\cdot g\cdot 3} = 7{,}7\ \ м/c$.

Ударний імпульс: $S = Mv\left(k+1\right) = \dfrac{10}{g}\left(5/9+1\right) = 12\ \ Hc$.

Середня реакція під час удару: $N_{cp} = \dfrac{S}{\tau} = \dfrac{12}{0{,}0005} = 24000\ \ H = 24\ \ kH$.

Відповідь: $S = 12\ \ Hc$;

$N_{cp} = 24\ \ kH$.

18.6. Прямий центральний удар двох тіл

Якщо два тіла взаємовдаряються, то удар називається *прямим*, якщо загальна нормаль до поверхонь тіл в точці дотику проходить через їх центри мас і центральним, якщо швидкості центрів мас на початку удару спрямовані по цій загальній нормалі.

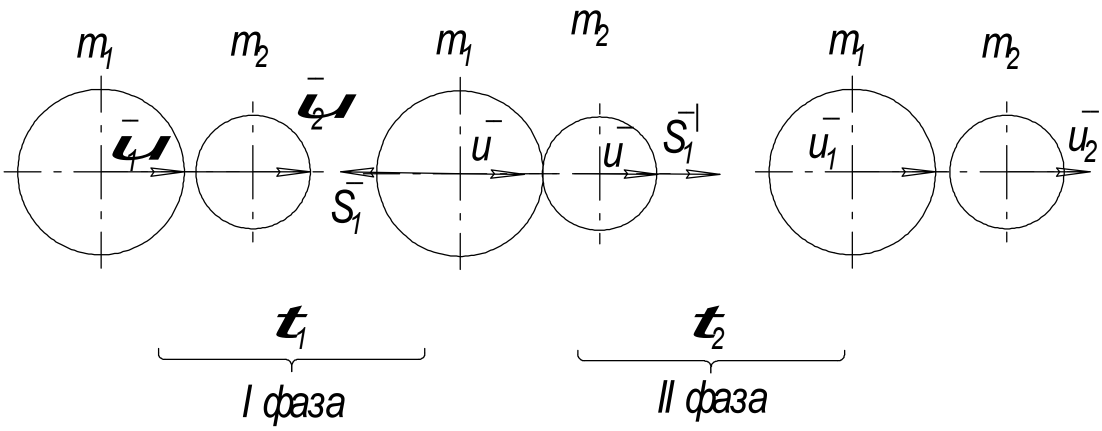


Рис. 18.5

Нехай маси тіл дорівнюють m_1 і m_2. Швидкості тіл на початку удару відповідно дорівнюють v_1 і v_2. Для того, щоб удар відбувся, необхідно $\bar{v}_1 > \bar{v}_2$. Перша фаза удару – від моменту дотику до тих пір, поки швидкості тіл не зрівняються. Друга фаза удару – від моменту, коли швидкості обох тіл зрівнялись, до моменту, коли тіла роз'єднуються або рухаються разом $\bar{u}_1 \leq \bar{u}_2$.

Задача полягає в тому, щоб при відомому коефіцієнті відновлювання k обчислити швидкості тіл після удару u_1 і u_2. У даному випадку на систему діють лише внутрішні ударні імпульси, причому вони дорівнюють за модулем $\left|\overline{S}_1\right| = \left|\overline{S}'_1\right|$, як дія і протидія.

На підставі закону про збереження, кількість руху системи за І фазу удару залишається сталою:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2)u ,$$

звідки
$$u = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}, \tag{18.18}$$

де u – швидкість обох тіл наприкінці І фази удару.

Визначимо ударні імпульси, які діють на маси m_1 і m_2 за І фазу удару:

$$\left.\begin{array}{l} m_1 u - m_1 v_1 = -S_I \\ m_2 u - m_2 v_2 = S_I' \end{array}\right\}. \tag{18.19}$$

В друге рівняння (18.19) підставимо значення швидкості u згідно з виразом (18.18):

$$S_I = m_2 u - m_2 v_2 = m_2\left(\frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} - v_2\right) = \frac{m_1 m_2 (v_1 - v_2)}{m_1 + m_2}. \tag{18.20}$$

Враховуючи, що $S_{II} = k \cdot S_I$ (18.14), визначимо повний ударний імпульс S:

$$S = S_I + S_{II} = (1 + k)\frac{m_1 m_2 (v_1 - v_2)}{m_1 + m_2}. \tag{18.21}$$

Для другої фази удару, коли швидкості стали відповідно u_1 і u_2, можна записати:

$$\left.\begin{array}{l} m_1 u_1 - m_1 u = -S_{II} \\ m_2 u_2 - m_2 u = S_{II}' \end{array}\right\},$$

або
$$\left.\begin{array}{l} m_1 u_1 - m_1 u = -kS \\ m_2 u_2 - m_2 u = kS_I' \end{array}\right\}. \tag{18.22}$$

Поділимо рівняння (18.21) на рівняння (18.18):

$$\frac{u_1 - u}{u - v_1} = k; \qquad \frac{u_2 - u}{u - v_2} = k.$$

З першого рівняння: $u_1 = u + ku - kv_1 = u(1 + k) - kv_1$,

З другого рівняння: $u_2 = u + ku - kv_2 = u(1 + k) - kv_2$.

$$\left.\begin{aligned} u_1 = u + ku - kv_1 = u(1 + k) - kv_1, \\ u_2 = u + ku - kv_2 = u(1 + k) - kv_{21}. \end{aligned}\right\} \qquad (18.23)$$

Якщо рівняння (18.23) почленно відняти, то отримаємо:

$$u_2 - u_1 = k(v_1 - v_2),$$

звідки

$$k = \frac{u_2 - u_1}{v_1 - v_2}. \qquad (18.24)$$

<u>**Висновок**</u>**:** *коефіцієнт відновлювання при ударі двох тіл дорівнює відношенню відносної швидкості тіл після удару до відносної швидкості тіл до удару.*

Для визначення швидкості u_1 і u_2 розглянемо систему двох рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{u_2 - u_1}{v_1 - v_2} = k, \\ m_1 u_1 + m_2 u_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2. \end{cases} \qquad (18.25)$$

Останнє рівняння (18.25) вказує на те, що зберігається кількість руху системи при ударі, оскільки відсутні зовнішні ударні імпульси.

Систему (18.24) можна записати у вигляді:

$$\begin{cases} u_2 - u_1 = kv_1 - kv_2, \\ m_1 u_1 + m_2 u_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2. \end{cases} \qquad (18.26)$$

Перше рівняння системи (18.25) помножимо на m_1, а до другого додамо і віднімемо добуток $m_1 v_2$:

$$\begin{cases} m_1 u_2 - m_1 u_1 = m_1 k v_1 - m_1 k v_2 \ , \\ m_1 u_1 + m_2 u_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2 + m_1 v_2 - m_1 v_2 \ . \end{cases} \tag{18.27}$$

Якщо рівняння (18.27) почленно додати, то отримаємо:

$$u_2 \left(m_1 + m_2 \right) = m_1 v_1 (1 + k) - m_1 v_2 (1 + k) + v_2 \left(m_1 + m_2 \right),$$

або

$$u_2 \left(m_1 + m_2 \right) = (1 + k) m_1 \left(v_1 - v_2 \right) + v_2 \left(m_1 + m_2 \right),$$

звідки

$$u_2 = v_2 + \frac{(1 + k) m_1}{m_1 + m_2} \left(v_1 + v_2 \right). \tag{18.28}$$

Якщо в системі (18.25) перше рівняння помножити на $\left(- m_2 \right)$, а до другого додати і відняти $\left(m_2 v_1 \right)$, то аналогічно отримаємо:

$$u_1 = v_1 - \frac{(1 + k) m_2}{m_1 + m_2} \left(v_1 + v_2 \right). \tag{18.29}$$

Таким чином, швидкість другого тіла після удару збільшилась, а першого тіла – зменшилась.

Якщо удар двох тіл абсолютно непружний, $k = 0$, то швидкості тіл після удару дорівнюють $u_1 = u_2 = u = \dfrac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$ і ударний імпульс має величину

$$S = \frac{m_1 m_2 \left(v_2 - v_1 \right)}{m_1 + m_2}.$$

Якщо удар двох тіл абсолютно пружний, $k = 1$, то швидкості тіл після удару дорівнюють відповідно:

$$u_1 = v_1 - \frac{2m_2}{m_1 + m_2}\left(v_1 - v_2\right),$$

$$u_2 = v_2 - \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\left(v_1 - v_2\right),$$

і ударний імпульс дорівнює:

$$S = \frac{2m_1 \cdot m_2\left(v_1 - v_2\right)}{m_1 + m_2}.$$

Запитання для самоконтролю:

1. Яке явище називається ударом?
2. Які допущення приймають при вивченні удару?
3. Напишіть основне рівняння теорії удару.
4. Що характеризує коефіцієнт відновлювання при ударі? Як його визначають?
5. Як визначити швидкості після удару двох тіл?
6. Як визначити ударний імпульс після удару двох тіл?
7. Що створює ударний імпульс при падінні тіла на нерухому плиту?

ЛЕКЦІЯ 19

19.1. Втрата кінетичної енергії при ударі двох тіл. Теорема Карно

Розглянемо абсолютно непружний (пластичний) удар двох тіл, маси яких m_1 і m_2, коли швидкості тіл після удару залишаються рівними u, а коефіцієнт відновлювання дорівнює нулю $k = 0$ (рис. 19.1.).

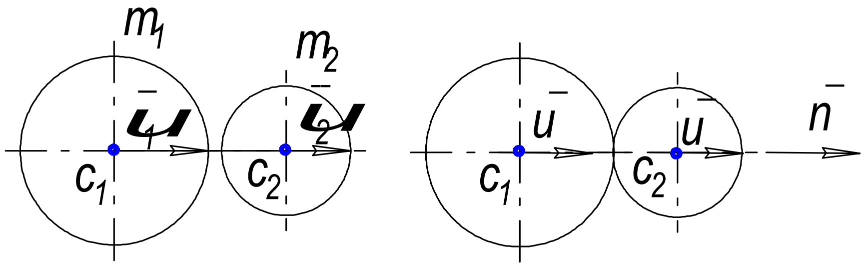


Рис. 19.1

Швидкості тіл до удару v_1 і v_2 ($v_1 > v_2$). Вісь $\bar{n}$ – спільна нормаль до поверхні тіл в точці стикання.

Кінетична енергія тіл до удару дорівнює:

$$T_0 = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}. \tag{19.1}$$

Кінетична енергія тіл після удару:

$$T_1 = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2} = \frac{(m_1 + m_2)u^2}{2}. \tag{19.2}$$

Втрата кінетичної енергії при ударі:

$$\Delta T = T_0 - T_1 = T_0 - 2T_1 + T_1. \tag{19.3}$$

При ударі двох тіл відсутні зовнішні ударні імпульси, тому кількість руху зберігається:

$$(m_1 + m_2)\cdot u = m_1 v_1 + m_2 v_2 . \qquad (19.4)$$

Помножимо рівняння (19.4) на спільну швидкість тіла після удару u і з урахуванням рівняння (19.2) отримаємо:

$$(m_1 + m_2)\cdot u^2 = (m_1 v_1 + m_2 v_2)\cdot u = 2T_1 . \qquad (19.5)$$

Враховуючи рівняння (19.5), втрата кінетичної енергії згідно виразу (19.3) дорівнює:

$$\begin{aligned}\Delta T = T_0 - T_1 &= \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} - u(m_1 v_1 + m_2 v_2) + \frac{m_1 u^2}{2} + \frac{m_2 u^2}{2} = \\ &= \frac{1}{2}\left[\left(v_1^2 - 2v_1 u + u^2\right)m_1 + \left(v_2^2 - 2v_2 u + u^2\right)m_2\right] = \qquad (19.6)\\ &= \frac{1}{2}\left[m_1(v_1 - u)^2 + m_2(v_2 - u)^2\right],\end{aligned}$$

де $\left.\begin{matrix} v_1 - u \\ v_2 - u \end{matrix}\right\}$ – втрачені швидкості тіла під час удару;

$\dfrac{m_1(v_1 - u)^2}{2}$ – кінетична енергія першого тіла, яка відповідає його втраченій швидкості;

$\dfrac{m_2(v_2 - u)^2}{2}$ – кінетична енергія другого тіла, яка відповідає його втраченій швидкості.

Звідсіля теорема Карно (19.6) формулюється так:

Втрата кінетичної енергії системи тіл при абсолютно непружному ударі дорівнює сумі кінетичних енергій тіл, що відповідають втраченим швидкостям цих тіл.

Розглянемо окремий випадок непружного удару, коли друге тіло до удару перебувало у стані спокою $(v_2 = 0)$, тоді із рівняння(19.4) швидкість тіла після удару дорівнює $u = \dfrac{m_1 v_1}{m_1 + m_2}$

Кінетична енергія системи тіл після удару дорівнюватиме:

$$T_1 = \frac{(m_1 + m_2)u^2}{2} = \frac{(m_1 + m_2)\cdot m_1^2 v_1^2}{2(m_1 + m_2)^2} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\cdot T_0, \qquad (19.7)$$

де $T_0 = \dfrac{m_1 v_1^2}{2}$ – кінетична енергія до удару.

Втрата кінетичної енергії дорівнює:

$$\Delta T = T_0 - T_1 = T_0 - \frac{m_1}{m_1 + m_2}T_0 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}T_0. \qquad (19.8)$$

При куванні, коли втрачена енергія – це корисна енергія процесу кування, коефіцієнт корисної дії згідно рівняння (19.7) буде дорівнювати:

$$\eta = \frac{\Delta T}{T_0} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}. \qquad (19.9)$$

ККД наближається до 1, коли масою m_1 можна знехтувати, тобто $m_2 >> m_1$ (у 50...60 разів). Щоб вся енергія при куванні втрачалась на деформацію матеріалу, необхідно, щоб маса ковадла значно перевищувала масу штовхача (молота).

При забиванні палі або цвяха необхідно, щоб їхня швидкість після удару була максимальною, тоді втрата кінетичної енергії при ударі зведеться до мінімуму.

Коефіцієнт корисної дії при забиванні палі (цвяха) згідно рівняння (19.7) буде дорівнювати:

$$\eta = \frac{T_1}{T_0} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}. \tag{19.10}$$

ККД наближається до одиниці, коли $m_1 >> m_2$, тобто маса штовхача (молота) повинна значно (у 30...50 разів) перевищувати масу палі (цвяха), тоді паля (цвях) при забиванні не буде деформуватися.

Якщо удар не є абсолютно непружним (реальні тіла) і коефіцієнт відновлювання $k \neq 0$, то втрачена під час удару кінетична енергія дорівнює:

$$\Delta T = T_0 - T_1 = \frac{1-k}{1+k}\left[\frac{m_1(v_1 - u_1)^2}{2} + \frac{m_2(v_2 - u_2)^2}{2}\right]. \tag{19.11}$$

При абсолютно пружному ударі ($k = 1$) із виразу (19.11) видно, що $\Delta T = 0$ – тобто кінетична енергія під час абсолютно пружного удару зберігається.

Приклад 19.1.

Визначити коефіцієнт корисної дії молота масою $m_1 = 4m$, який падає з висоти $2м$ на ковадло масою $m_2 = 36m$ (удар вважати абсолютно непружним – процес кування).

$$m_1 = 4m;\ m_2 = 36m;\ k = 0.$$

Запишемо вираз ККД (19.7) для випадку кування:

$$\eta = \frac{T_0 - T_1}{T_0} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} = \frac{36}{4 + 36} = 0{,}9.$$

У даному випадку маса ковадла перевищувала масу молота у 9 разів, а якщо б у 50 разів, то коефіцієнт корисної дії процесу кування дорівнюватиме при цих параметрах 0,98.

19.2. Удар по обертовому тілу

Розглянемо тіло, яке обертається навколо осі z (рис.19.2). Нехай в деякий момент часу на тіло, яке закріплено в точці B за допомогою циліндричного шарніра, а в точці A – за допомогою підп'ятника, діє ударний імпульс $\overline{S}$. Під час удару в опорах A і B виникають реакції, котрі також мають характер ударних сил. При значному ударному імпульсі $\overline{S}$ величини реакцій опор можуть досягати небезпечних значень з точки зору міцності підшипникових вузлів.

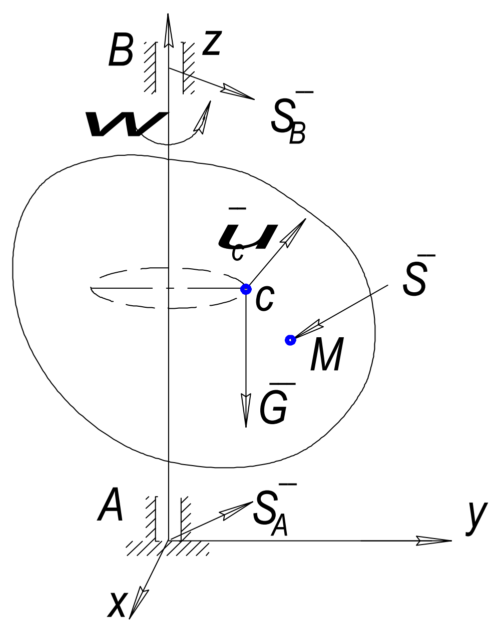


Рис. 19.2

Виникає задача визначення ударних імпульсних реакцій, якщо задані динамічні характеристики тіла (маса, моменти інерції) і коли відомий ударний імпульс.

<u>Позначимо</u>:

$\overline{S}$ - ударний імпульс; ω_1 - кутова швидкість тіла до удару; ω_2 - кутова швидкість тіла після удару; I_z - осьовий момент інерції маси тіла; v_{c_1} - швидкість центра мас (центра ваги) до удару; v_{c_2} - швидкість центра мас після удару; G - вага тіла; m - маса тіла.

Якщо $\overline{K}_1 = m\overline{v}_{c_1}$ - кількість руху тіла до удару; $\overline{K}_2 = m\overline{v}_{c_2}$ - кількість руху тіла після удару, то, згідно з теоремою про зміну кількості руху тіла, можна записати:

$$\overline{K}_2 - \overline{K}_1 = \overline{S}_{уд}, \tag{19.12}$$

або

$$m\overline{v}_{c_2} - m\overline{v}_{c_1} = \overline{S}_{уд}.$$

Рівняння динаміки обертального руху тіла у цьому випадку можна записати:

$$I_z \cdot \frac{d\omega}{dt} = m_z\left(\overline{F}_{уд}\right),$$

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} I_z d\omega = \int_0^{\tau} m_z\left(\overline{F}_{уд}\right)dt,$$

де τ – час удару. Після інтегрування останнього виразу маємо:

$$I_z\left(\omega_2 - \omega_1\right) = m_z\left(\overline{S}\right), \tag{19.13}$$

або

$$L_2 - L_1 = m_z\left(\overline{S}\right). \tag{19.14}$$

Зміна кінетичного моменту тіла, яке обертається навколо нерухомої осі, під час удару дорівнює моменту від ударного імпульсу відносно осі обертання.

З рівняння (19.13) випливає:

$$\omega_2 - \omega_1 = \frac{m_z(\overline{S})}{I_z}. \tag{19.15}$$

Зміна кутової швидкості тіла під час удару дорівнює відношенню моменту від ударного імпульсу відносно осі до моменту інерції маси тіла відносно осі обертання.

Тоді кінцева кутова швидкість тіла після удару дорівнюватиме:

$$\omega_2 = \omega_1 + \frac{m_z(\overline{S})}{I_z}. \tag{19.16}$$

19.3. Дія удару на вісь обертання тіла. Визначення імпульсних реакцій. Центр удару

Розглянемо тіло масою M, яке може обертатися навколо горизонтальної осі в точці O і на яке діє ударний імпульс $\overline{S}_{уд}$ на відстані l від осі обертання. Ударний імпульс $\overline{S}_{уд}$ спрямований перпендикулярно до площини, яка проходить через вісь обертання z і центр ваги тіла C. (рис. 19.3.)

Позначимо:

$\overline{v}_{c_1} = 0$ - швидкість центра мас тіла до удару;

$\overline{v}_{c_2}$ - швидкість центра мас після удару;

$\overline{S}_{уд}$ - ударний імпульс на відстані l від осі обертання;

$\overline{S}_{уд}^{R}$ - реактивний ударний імпульс в опорі O;

I_z - осьовий момент інерції маси тіла відносно осі z;

$\omega_1 = 0$ - кутова швидкість тіла до удару;

ω_2 - кутова швидкість тіла після удару.

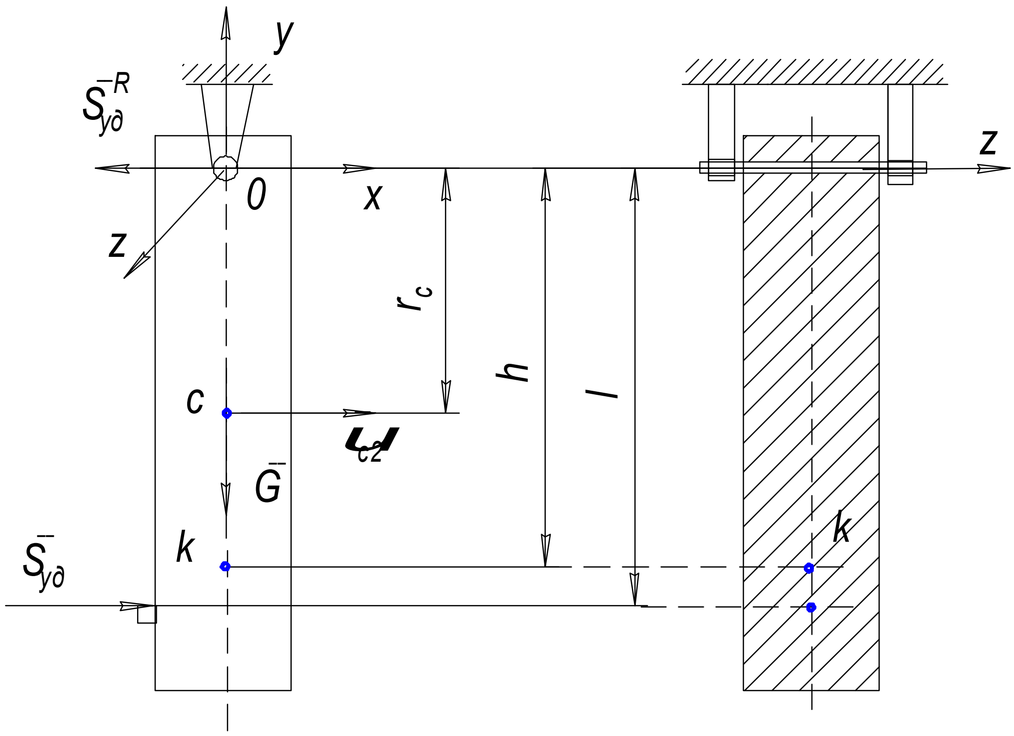


Рис. 19.3

Зміна кількості руху системи дорівнює сумі імпульсів (теорема імпульсів):

$$M\bar{v}_{c_2} - M\bar{v}_{c_1} = \bar{S}_{уд} - \bar{S}^R_{уд}. \qquad (19.17)$$

Враховуючи, що $\bar{v}_{c_2} = \omega_2 r_c$, $\bar{v}_{c_1} = 0$, рівність (19.17) набуває вигляду:

$$M\omega_2 r_c = S_{уд} - S^R_{уд}, \qquad (19.18)$$

де r_c – відстань центра мас тіла від осі обертання.

Враховуючи вираз (19.13) і те, що $\omega_1 = 0$, $m_z\left(\bar{S}^R_{уд}\right) = 0$, рівність набуває вигляду:

$$I_z \omega_2 = S_{уд} l ,$$

звідки:

$$S_{уд} = \frac{I_z \omega_2}{l} . \tag{19.19}$$

Підставимо вираз (19.19) у рівняння (19.18):

$$S_{уд}^R = S_{уд} - M\omega_2 r_c = \frac{I_z \omega_2}{l} - M\omega_2 r = \omega_2 \left(\frac{I_z}{l} - Mr_c \right). \tag{19.20}$$

Вираз (19.20) використовується для визначення імпульсної (ударної) реакції опори в точці O.

Виникає питання: чи можна нанести удар по обертовому тілу так, щоб імпульсна реакція $\overline{S}_{уд}^R$ дорівнювало нулю, тобто, щоб не виникали імпульсні реакції в опорах (підшипниках)?

Якщо $\overline{S}_{уд}^R = 0$, то вираз у дужках рівняння (19.20) повинен дорівнювати нулю:

$$\frac{I_z}{l} - Mr_c = 0 ,$$

звідки

$$l = \frac{I_z}{Mr_c} = h . \tag{19.21}$$

Точка К, до якої прикладений ударний імпульс, який не викликає ударних реакцій в опорах, називається центром удару.

Відстань h від центра удару до осі обертання визначається за формулою (19.21).

Аналогічно визначається і зведена довжина фізичного маятника. Таким чином, *для того, щоб під час удару по обертовому тілу не виникали імпульсні реакції в опорах, необхідно виконувати наступні умови:*

- удар повинен бути спрямований по перпендикуляру до площини, яка проходить через вісь обертання і центр ваги тіла;

- лінія дії ударного імпульсу має бути віддалена від осі обертання на відстань $h = \frac{I_z}{Mr_c}$ згідно умови (19.21) (рис. 19.5).

- площина xOy (рис. 19.5), що містить ударний імпульс і яка перпендикулярна до осі обертання, має перетинатися з віссю z в точці O, для якої вісь обертання є головною віссю інерції.

Якщо вісь обертання перетинає центр мас, то $r_c = 0$ і $h = \infty$, тобто будь-який удар буде передаватись на вісь обертання.

Приклади:

19.2. Під час роботи треба ручний молот тримати за держака в тому місці, в якому точка, де відбувається удар, була б відносно руки центром удару, інакше держак буде "обпалювати" руку.

19.3. Щоб руку не "обпалити" під час удару стержня об нерухому опору (рис. 19.4), необхідно, щоб місце удару k по відношенню до руки було центром удару (рука прикладається в точці A).

Визначимо положення точки k на стержні.

Центр мас стержня $r_c = \frac{l}{2}$.

Момент інерції відносно осі, що проходить через точку A: $I_z = \frac{ml^2}{3}$.

Тоді на підставі формули (19.21): $AK = h = \frac{I_z}{mr_c} = \frac{ml^2 2}{3ml} = \frac{2}{3} l$.

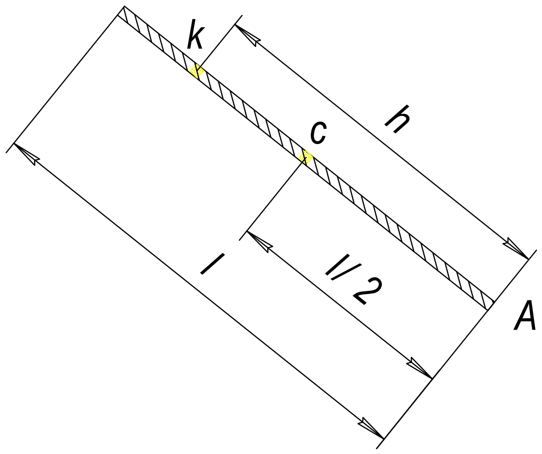


Рис. 19.4

19.4. Прямокутна пластина (двері) шириною b, закріплена в точці A за допомогою підп'ятника, а в точці B – за допомогою підшипника (рис. 19.5.). Визначити положення центра удару на пластині, якщо вона відкривається під дією ударного імпульсу.

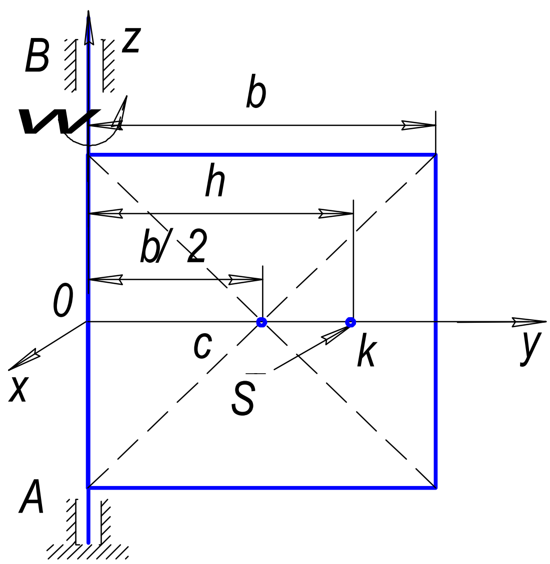


Рис. 19 5

Умови, при яких ударний імпульс не передається на опори:

1. Ударний імпульс $\overline{S}$ повинен бути перпендикулярний до площини пластини, що проходить через вісь обертання z і центр мас C.

2. Відстань $OK = h$ до центра удару визначається за формулою (19.21):

$$h = \frac{I_z}{My_c},$$

де $I_z = \frac{Mb^2}{3}$ - осьовий момент інерції маси дверей; M - маса дверей; $y_c = OC = \frac{b}{2} = r_c$ - координата центра мас.

Тоді

$$h = \frac{Mb^2 2}{M3b} = \frac{2}{3}b.$$

Будь який за величиною ударний імпульс, лінія дії якого перпендикулярна площині пластини і яка проходить через центр удару в точці K *на відстані від осі* $h = \frac{2}{3}b$, *не передається на опори: підп'ятник A і підшипник B захищені від ударних навантажень.*

Запитання для самоконтролю:

1. Сформулюйте теорему Карно про втрату кінетичної енергії для абсолютно непружних тіл.
2. Що таке втрачені швидкості і відповідна їм кінетична енергія?
3. Проведіть порівняльний аналіз втрат кінетичної енергії для абсолютно непружних і реальних тіл.

4. Чим суттєво відрізняється ситуація з точки зору ККД при забиванні палі або цвяха і куванні металу? Як збільшити ККД?
5. Як змінюється кутова швидкість при ударі по тілу, що обертається?
6. Що таке центр удару на обертовому тілі і як визначити положення цієї точки?
7. Сформулюйте умови, при яких ударний імпульс не передається на опори обертового тіла.

ЛЕКЦІЯ 20

ЕЛЕМЕНТАРНА ТЕОРІЯ ГІРОСКОПА

Гіроскопом називають тверде тіло, яке досить швидко (десятки тисяч обертів за хвилину) обертається навколо осі матеріальної симетрії чи осі власного обертання, головної осі. Тіло має одну нерухому точку, яку називають точкою підвішування.

Рух тіла відносно нерухомої точки називається сферичним рухом. Положення тіла у просторі при сферичному русі характеризується трьома кутами Ейлера: φ, ψ і θ (рис. 20.1).

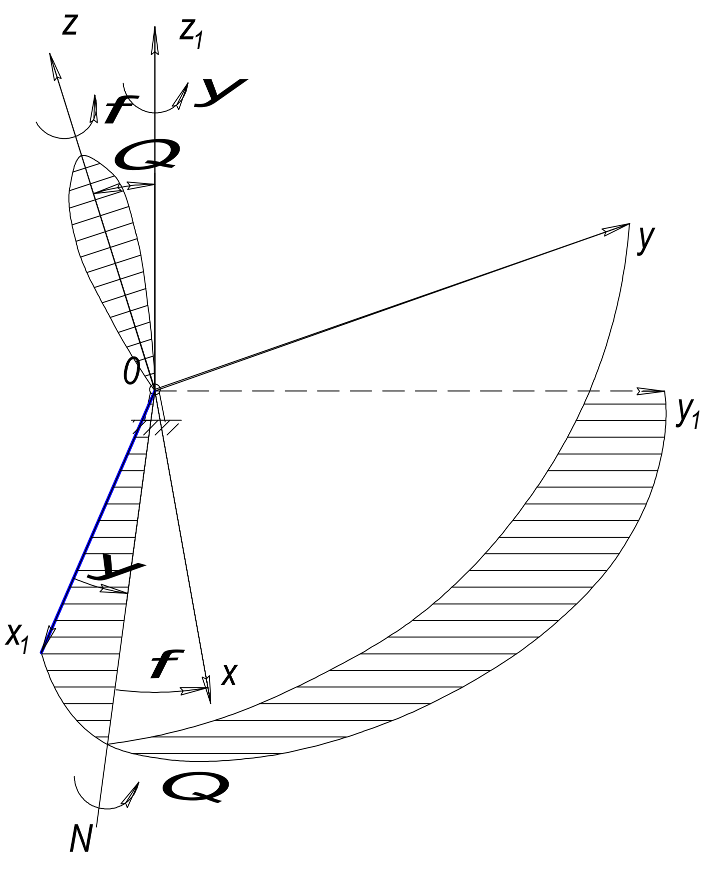


Рис. 20.1

ON - лінія вузлів або вісь нутації, лінія перетину площин xOy і x_1Oy_1; $\angle\psi$ - кут прецесії, розташований у площин x_1Oy_1, що перпендикулярна до осі z_1, яку називають віссю прецесії; $\angle\theta$ - кут нутації, розташований у площині, котра перпендикулярна лінії вузлів ON; $\angle\varphi$ - кут власного обертання, розташований у площині xOy, що перпендикулярна осі Oz, яку називають віссю власного обертання.

Як можна побачити, тіло гіроскопа має три степеня вільності. За узагальнені координати приймають кути Ейлера, зміна яких з часом і є кінематичними рівняннями сферичного руху твердого тіла.

$$\psi = \psi(t),$$
$$\theta = \theta(t),$$
$$\varphi = \varphi(t).$$

Тіло, що зображене на рис. 20.1, буде гіроскопом, якщо кутова швидкість обертання $\dot{\varphi}$ набагато більша, ніж $\dot{\psi}$ і $\dot{\theta}$ ($\dot{\varphi} \approx 5000...6000$ $рад/с$, $\dot{\psi}$, $\dot{\theta} \approx 1$ $рад/с$). Точку O, навколо якої обертається гіроскоп, називають точкою підвішування.

У техніці точка підвішування O гіроскопа реалізується за допомогою карданових або безконтактних силових підвісів. На рис. 20.2 схематично зображений гіроскоп з трьома степенями вільності і зовнішнім кардановим підвісом, який складається із двох кілець (рамок): 1 – внутрішнє кільце, 2 – зовнішнє кільце. Якщо в цьому гіроскопі закріпити зовнішнє кільце 2, то він матиме два степеня вільності.

Кільця гіроскопа слугують забезпеченню кінематичної можливості тіла обертатися навколо трьох осей 3, 4, 5, що перетинаються в одній точці O.

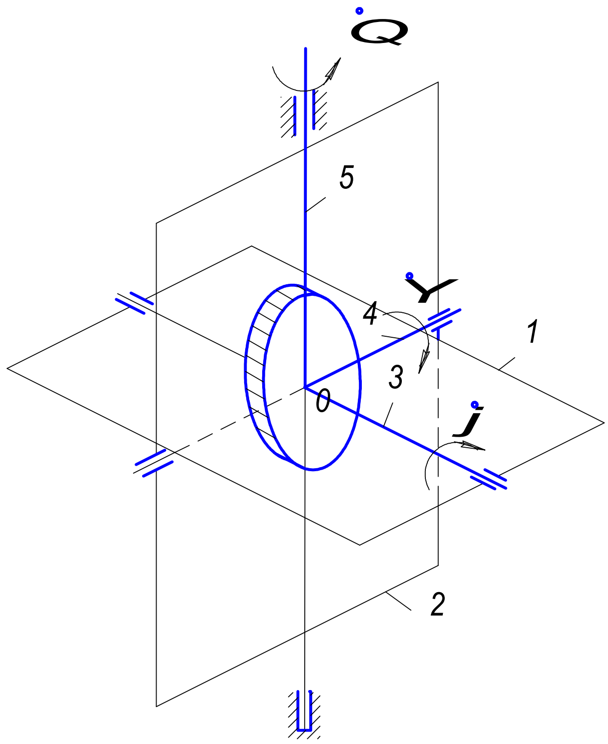


Рис. 20.2

Якщо головний момент зовнішніх сил, що діють на гіроскоп, дорівнює нулю, то такий гіроскоп називають вільним.

Якщо до точок осі симетрії гіроскопа прикласти сили, які прагнуть змінити напрям цієї осі, то виникають явища, котрі описуються досить точно наближеною теорією гіроскопа.

20.1. Основні припущення наближеної теорії гіроскопа

Розглянемо обертання гіроскопа навколо нерухомої осі Oz (рис. 20.1) з кутовою швидкістю $\overline{\omega}_1$. У свою чергу вісь симетрії Oz обертається навколо вертикальної осі Oz_1 з кутовою швидкістю $\overline{\omega}_2$, котра дуже мала порівняно з кутовою швидкістю $\overline{\omega}_1$. Для того, щоб вивчити рух гіроскопа, треба знати його кінетичний момент відносно нерухомої точки

O. Кут нутації Θ дуже повільно змінюється з часом і його наближено можна вважати сталим, тоді похідна від нього за часом дорівнює нулю:

$$\omega_3 = \dot{\Theta} = 0 .$$

Кутова швидкість прецесії $\omega_2 = \dot{\psi}$ теж дуже мала порівняно з кутовою швидкістю власного обертання $\omega_1 = \dot{\varphi}$

$$\omega_2 << \omega_1 .$$

Миттєва кутова швидкість гіроскопа дорівнює (рис. 20.3):

$$\overline{\omega} = \overline{\omega}_1 + \overline{\omega}_2 .$$

Наближено можна вважати, що $\overline{\omega} \approx \overline{\omega}_1$, нехтуючи кутовою швидкістю прецесії. Тоді кінетичний момент гіроскопа можна спрямувати по напрямку вектора $\overline{\omega}_1$ і вважати рівним

$$\overline{L}_0 = I_z \cdot \overline{\omega}_1 ; \tag{20.1}$$

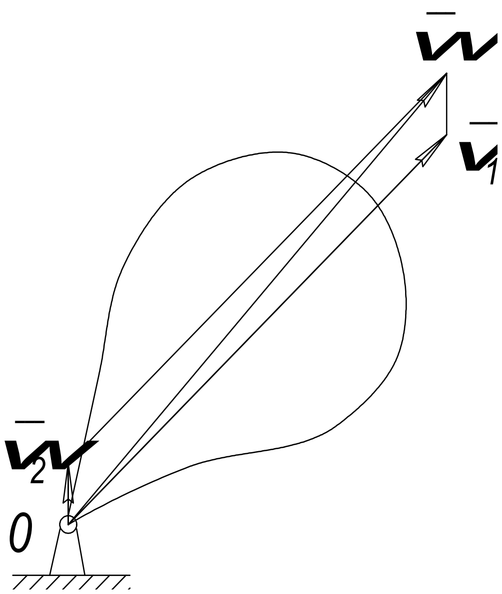


Рис. 20.3

Таким чином, у наближеній теорії гіроскопа прецесію осі гіроскопа вважають регулярною, тобто вісь Oz рівномірно обертається навколо вертикальної осі Oz_1 з кутовою швидкістю ω_2, утворюючи, як твірна, поверхню кругового конуса.

20.2. Теорема Резаля

Швидкість кінця k вектора кінетичного моменту (головного моменту кількості руху гіроскопа) відносно нерухомої точки O дорівнює головному моменту усіх зовнішніх сил відносно тієї самої точки.

Із кінематики відомо, що перша похідна за часом від будь-якого вектора є швидкістю кінця цього вектора (рис. 20.4) і спрямована по дотичній до годографа точки k.

$$\frac{d\bar{L}_0}{dt} = \bar{u}_k. \qquad (20.2)$$

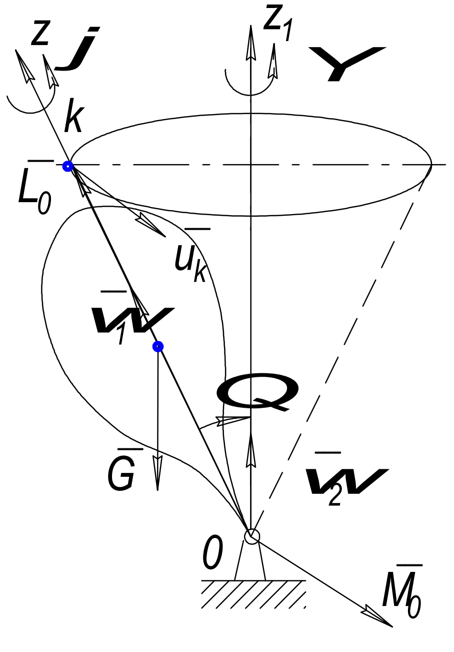


Рис. 20.4

Але відомо, що похідна за часом від кінетичного моменту механічної системи дорівнює головному моменту зовнішніх сил (формула 5.8):

$$\frac{d\overline{L}_0}{dt} = \overline{M}_o^e. \tag{20.3}$$

Порівнюючи вирази (20.2) і (20.3), можна записати:

$$\overline{u}_k = \frac{d\overline{L}_0}{dt} = \overline{M}_0^e, \tag{20.4}$$

де $\overline{u}_k$ - швидкість кінця k вектора кінетичного моменту $\overline{L}_0$; $\overline{M}_0^e$ - головний момент зовнішніх сил відносно нерухомої точки O.

Дві основні властивості гіроскопа:

1. Властивість вектора кінетичного моменту вільного гіроскопа зберігати свій напрямок незмінним в інерціальній системі координат. Дійсно, оскільки $\overline{M}_o^e = 0$, то за теоремою про зміну кінетичного моменту $\frac{d\overline{L}_0}{dt} = 0 \Rightarrow \overline{L}_0 = const$.

2. Якщо до гіроскопа (рис. 20.2) із зовнішнім кардановим підвісом прикласти момент відносно осі 4 обертання внутрішньої рамки 1, то його головна вісь буде обертатися („прецесіювати”) навколо осі 5 обертання зовнішньої рамки 2 карданового підвісу. Ця властивість випливає безпосередньо з теореми Резаля (20.4) і кінетичний момент практично дорівнює $\overline{L}_0 = I_z \cdot \omega_1$ і спрямований вздовж осі z.

20.3. Основне рівняння наближеної теорії гіроскопа

Основне рівняння наближеної теорії гіроскопа отримаємо, якщо застосуємо теорему Резаля (20.4):

$$\overline{u}_k = \overline{M}_0^e .$$

Вектор кінетичного моменту $\overline{L}_0$ з припущеннями наближеної теорії гіроскопа обертається навколо нерухомої осі Oz_1 (рис. 20.4) з кутовою швидкістю $\overline{\omega}_2$. Внаслідок цього можна записати:

$$\overline{u}_k = \overline{\omega}_2 \times \overline{L}_0 . \qquad (20.5)$$

Враховуючи вираз (20.1), маємо:

$$\overline{u}_k = I_z \cdot \overline{\omega}_2 \times \overline{\omega}_1 . \qquad (20.6)$$

Порівнюючи вираз (20.6) з виразом (20.4), можна записати:

$$\overline{M}_o^e = I_z \cdot \overline{\omega}_2 \times \overline{\omega}_1 . \qquad (20.7)$$

Вираз (20.7) є основним рівнянням наближеної теорії гіроскопа.

Головний момент зовнішніх сил $\overline{M}_o^e$ спрямований по перпендикуляру до площини, яку утворюють вектори $\overline{\omega}_1$ і $\overline{\omega}_2$.

Модуль вектора головного моменту зовнішніх сил має значення:

$$M_o^e = I_z \cdot \omega_1 \cdot \omega_2 \cdot \sin\Theta , \qquad (20.8)$$

де Θ - кут прецесії, кут між векторами $\overline{\omega}_1$ і $\overline{\omega}_2$.

20.4. Закон прецесії

Нехай на гіроскоп (дзигу) діє сила тяжіння $\overline{G}$, яка прикладена в центрі мас (інерції) точці C. Крім того, діє реакція опори в точці O і сили опору повітря, якими нехтуємо. Головний момент зовнішніх сил у даному випадку дорівнює моменту сили $\overline{G}$ відносно точки O. (рис. 20.5).

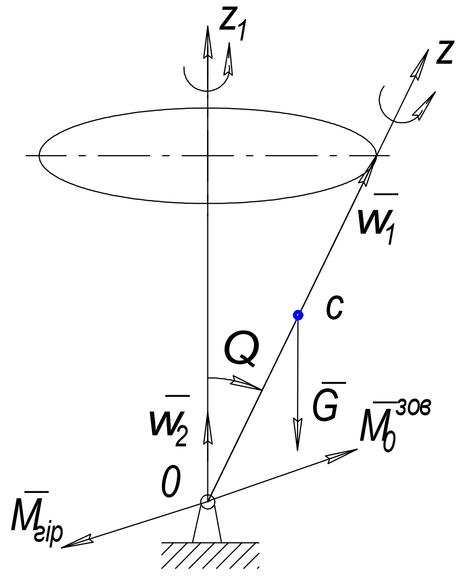


Рис. 20.5

$$M_o^e = G \cdot OC \cdot \sin\Theta . \qquad (20.9)$$

Але, згідно з виразом (20.8):

$$M_o^e = I_z \cdot \omega_1 \cdot \omega_2 \cdot \sin\Theta ,$$

тоді $$I_z \omega_1 \cdot \omega_2 \sin\Theta = G \cdot OC \cdot \sin\Theta ,$$

звідки кутова швидкість регулярної прецесії дорівнює:

$$\omega_2 = \frac{G \cdot OC}{I_z \cdot \omega_1}. \qquad (20.10)$$

З формули (20.10) видно, що кутова швидкість прецесії ω_2 тоді менша, коли кутова швидкість власного обертання ω_1 більша, а також, якщо більша величина моменту інерції маси гіроскопа відносно осі Oz.

20.5. Гіроскопічний момент

Застосуємо принцип Д'Аламбера до вивчення регулярної прецесії. Для цього до точок гіроскопа прикладемо сили інерції.

Головний момент коріолісових сил інерції відносно нерухомої точки O в наближеній теорії гіроскопа називають гіроскопічним моментом.

Переносними силами інерції у наближеній теорії гіроскопа нехтують у зв'язку з малою величиною ω_2.

Згідно з принципом Д'Аламбера будемо розглядати рівновагу гіроскопа з однією нерухомою точкою під дією двох моментів: головного моменту зовнішніх сил $\overline{M}_0$ і гіроскопічного моменту $\overline{M}_г$.

$$\overline{M}_o^e + \overline{M}_г = 0, \qquad (20.11)$$

або $\overline{M}_г = -\overline{M}_o^e$ і, враховуючи рівняння (20.7), можемо записати:

$$\overline{M}_г = -I_z \overline{\omega}_2 \times \overline{\omega}_1$$

або

$$\overline{M}_г = I_z \overline{\omega}_1 \times \overline{\omega}_2. \qquad (20.12)$$

За модулем гіроскопічний момент дорівнює:

$$M_г = I_z \omega_1 \cdot \omega_2 \cdot \sin\Theta. \qquad (20.13)$$

З рівняння (20.12) можна зробити висновок, що гіроскопічний момент спрямований по перпендикуляру до площини, в якій розташовані вектори $\overline{\omega}_1$ і $\overline{\omega}_2$.

Напрям гіроскопічного моменту визначається за правилом Жуковського: гіроскопічний момент намагається повернути гіроскоп паралельно осі прецесіонного обертання. Цю властивість гіроскопічного моменту називають гіроскопічним ефектом.

20.6. Визначення гіроскопічних реакцій

При розв'язанні задач на визначення гіроскопічних реакцій опор додержуються такої послідовності.

1. Визначають нерухому точку гіроскопа (перетин осей відносного і переносного обертань, наприклад, точка O на рис. 20.6).

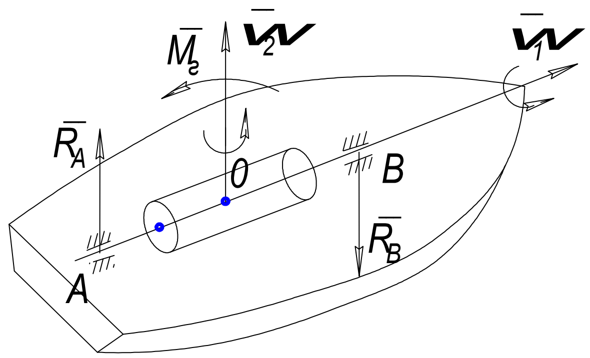


Рис. 20.6

2. Вздовж осі відносного обертання, в бік $\overline{\omega}_1$ відкладають вектор $\overline{L}_0 = I_z \cdot \overline{\omega}_1$.

3. За напрямом переносного обертання $\overline{\omega}_2$ (прецесія) визначають напрямок швидкості $\overline{u}$ кінця вектора $\overline{L}_0$.

4. Визначають величину і напрямок головного моменту M_o^e зовнішніх сил.

$$\overline{M}_o^e = \overline{u}_k,$$

$$M_o^e = I_z \cdot \overline{\omega}_1 \cdot \overline{\omega}_2 \cdot \sin\left(\widehat{\overline{\omega}_1;\overline{\omega}_2}\right).$$

5. Опорні реакції утворюють пару сил з моментом M_o^e. Опорна реакція дорівнює M_o^e, поділеному на плече пари (відстань між опорами).

Приклад 20.1.

Турбіна, що встановлена на човні в підшипниках A і B, обертається з кутовою швидкістю ω_1, а човен в даний момент повертається з кутовою швидкістю ω_2. Визначити в цей момент реакції опор. Відстань між опорами $AB = l$ (рис. 20.6).

Розв'язання.

Гіроскопічний момент за модулем дорівнює:

$$M_г = I_z \cdot \omega_1 \cdot \omega_2 \cdot \sin\Theta.$$

Оскільки кут нутації $\Theta = 90^0$, то для реакції опор маємо:

$$R_A = R_B = \frac{M_г}{AB} = \frac{I_z\omega_1\omega_2}{l}.$$

Запитання для самоконтролю:

1. Що таке гіроскоп, який вид руху здійснює тіло гіроскопа?
2. Охарактеризуйте кути Ейлера, напишіть рівняння руху гіроскопа.

3. Як реалізується точка підвішування гіроскопа в техніці?
4. Які основні припущення наближеної теорії гіроскопа?
5. Сформулюйте теорему Резаля.
6. Напишіть основне рівняння наближеної теорії гіроскопа.
7. За якою формулою визначається кутова швидкість регулярної прецесії?
8. Як визначається модуль і напрям гіроскопічного моменту?
9. Який порядок визначення гіроскопічних реакцій опор?
10. В яких галузях техніки застосовуються гіроскопи?

ЛЕКЦІЯ 21

ДИНАМІКА ВІДНОСНОГО РУХУ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ

Основний закон динаміки $m\overline{a} = \sum \overline{F}_k$ справедливий тільки в інерціальних системах відліку. Інерціальною системою називається така система відліку, для якої справедливий перший закон динаміки – принцип інерції. Але є багато систем, у яких не справджується перший закон динаміки, а закон руху матеріальної точки необхідно шукати в цих неінерціальлних системах. До неінерціальних систем відліку відноситься і поверхня Землі. Неінерціальність геоцентричної системи відліку можна спостерігати за допомогою досить тонких експериментів: відхилення тіла при вільному падінні на схід і поворот площини коливання маятника (досліди Фуко). Але похибка тут невелика і у більшості прикладних задач системи відліку, які пов’язані з Землею, наближено вважаються інерціальними.

Якщо пов’язати систему відліку, наприклад, з автомобілем, який рухається прискорено або з ротором турбіни, який швидко обертається, то неіненрціальність буде досить значною і основне рівняння динаміки буде невірним, невірні і наслідки з цього рівняння.

Тому необхідно вивчати рух точки і в неінерціальних системах відліку. Розв’язання численних задач техніки потребує дослідження об’єктів відносно рухомої системи координат, наприклад, це стосується теорії складного руху точки.

21.1. Диференціальні рівняння відносного руху матеріальної точки

Уявимо, що відомі сили, які діють на вільну матеріальну точку, а також заданий рух рухомої системи координат, зв'язаної з деяким тілом, відносно інерціальної системи відліку, яку вважаємо за нерухому систему (рис. 21.1).

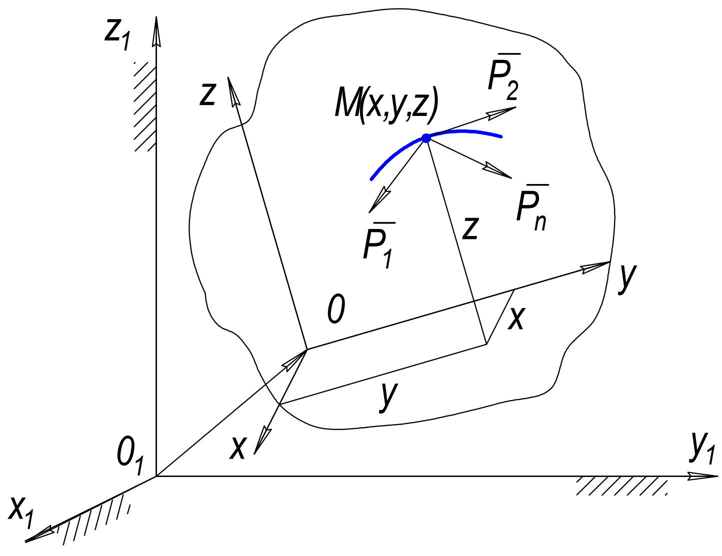


Рис. 21.1

Система $O_1x_1y_1z_1$ - умовно нерухома інерціальна система;

Система $Oxyz$ - рухома неінерціальна система відліку.

Рух точки M відносно системи $O_1x_1y_1z_1$ - абсолютний рух;

Рух точки M відносно рухомої системи $Oxyz$ - відносний рух.

Переносний рух – рух тіла, з яким жорстко пов'язана система відліку.

Будемо шукати рівняння динаміки відносного руху точки, якщо відомі сили $\overline{P}_1, \overline{P}_2, ..., \overline{P}_n$, які діють на точку.

Основне рівняння динаміки вільної матеріальної точки для абсолютного руху має вигляд:

$$m\overline{a} = \sum \overline{P}_k \,, \tag{21.1}$$

де m - маса точки; $\overline{a}$ - абсолютне прискорення точки; $\sum \overline{P}_k$ - геометрична сума прикладених сил.

Використаємо теорему Коріоліса і визначимо абсолютне прискорення точки через відносне, переносне і прискорення Коріоліса.

$$\overline{a} = \overline{a}_r + \overline{a}_e + \overline{a}_k \,. \tag{21.2}$$

Підставимо вираз (21.2) у рівняння (21.1):

$$m\overline{a}_r + m\overline{a}_e + m\overline{a}_k = \sum \overline{P}_k \,,$$

або

$$m\overline{a}_r = \sum \overline{P}_k + \left(-m\overline{a}_e\right) + \left(-m\overline{a}_k\right). \tag{21.3}$$

Але $-m\overline{a}_e = \overline{\Phi}_e$ - переносна сила інерції точки;

$-m\overline{a}_k = \overline{\Phi}_k$ - коріолісова сила інерції.

І остаточно рівняння (21.3) набуває вигляду:

$$m\overline{a}_r = \sum \overline{P}_k + \overline{\Phi}_e + \overline{\Phi}_k \,. \tag{21.4}$$

Вектори переносної $\overline{\Phi}_e$ і коріолісової $\overline{\Phi}_k$ сил інерції – це поправки на неінерціальність рухомої системи координат. Ці сили фіктивні, оскільки вони не є силами взаємодії між тілами.

Вираз (21.4) називається основним рівнянням динаміки відносного руху точки. Рівняння (21.4) у координатній формі в проекціях на рухомі осі координат має вигляд:

$$m\ddot{x} = \sum P_{kx} + \varPhi_{ex} + \varPhi_{kx},$$
$$m\ddot{y} = \sum P_{ky} + \varPhi_{ey} + \varPhi_{ky}, \qquad (21.5)$$
$$m\ddot{z} = \sum P_{kz} + \varPhi_{ez} + \varPhi_{kz}.$$

У випадку непоступального переносного руху рухомої системи відліку відносний рух матеріальної точки можна розглядати як абсолютний, якщо до діючих на точку сил приєднати переносну і коріолісову сили інерції точки.

Для обчислення переносної і коріолісової сил інерції потрібно визначити спочатку переносне прискорення Коріоліса.

Якщо переносний рух, як рух рухомої системи, є обертальним рухом з кутовою швидкістю ω і кутовим прискоренням ε, то:

$$\overline{a}_e = \overline{a}_e^{\tau} + \overline{a}_e^{n},$$

де $\overline{a}_e^{\tau}$ - тангенціальне прискорення точки M у переносному русі; $\overline{a}_e^{n}$ - нормальне прискорення точки M у переносному русі.

Тоді $$\overline{\varPhi}_e = -m\overline{a}_e = -m\overline{a}_e^{\tau} - m\overline{a}_e^{n},$$

або $$\overline{\varPhi}_e = \overline{\varPhi}_e^{\tau} + \overline{\varPhi}_e^{n}. \qquad (21.6)$$

Якщо врахувати рівність (21.6), то рівняння (21.5) набуває вигляду:

$$m\overline{a}_r = \sum \overline{P}_k + \overline{\varPhi}_e^{\tau} + \overline{\varPhi}_e^{n} + \overline{\varPhi}_k \qquad (21.7)$$

Прискорення Коріоліса визначається виразом:

$$a_k = 2\omega_e v_r \sin\left(\widehat{\overline{\omega}_e, \overline{v}_r}\right).$$

Тоді сила інерції Коріоліса за модулем дорівнює:

$$\left|\varPhi_k\right| = 2m\omega_e v_r \sin\left(\widehat{\overline{\omega}_e, \overline{v}_r}\right). \qquad (21.8)$$

Можуть бути різні випадки відносного руху точки в залежності від виду переносного руху рухомої системи, а також від накладених на точку в'язей. Так, для невільної матеріальної точки рівняння відносного руху має вигляд:

$$m\overline{a}_r = \sum \overline{P}_k + \overline{\Phi}_e + \overline{\Phi}_k + \overline{R}\,,$$

де $\overline{R}$ – реакція в'язі.

21.2. Принцип відносності класичної механіки

Якщо переносний рух рухомої системи поступальний, рівномірний і прямолінійний, то переносне прискорення і прискорення Коріоліса дорівнюють нулю.

$$\overline{a}_e = 0 \quad \text{і} \quad \overline{a}_k = 0\,.$$

Тоді із (2.14) маємо:

$$m\overline{a}_r = \sum \overline{P}_k\,. \tag{21.9}$$

Тобто, рівняння (21.9) відносного руху не відрізняється від рівняння абсолютного руху (21.1), оскільки $\overline{a}_r = \overline{a}$, і відносний рух не відрізняється від абсолютного.

Таким чином, відносний рух матеріальної точки по відношенню до рухомої системи відліку, що рухається поступально рівномірно і прямолінійно, відбувається так само, як і по відношенню до нерухомої системи відліку.

Усі такі рухомі системи відліку, які рухаються відносно інерціальної системи прямолінійно, поступально і рівномірно, також є інерціальними системами відліку і рух матеріальної точки відносно таких систем можна розглядати, як абсолютний рух.

Звідки випливає принцип відносності Галілея:

Ніякими механічними дослідами в середині системи, яка рухається поступально рівномірно і прямолінійно, не можна виявити, що вона рухається.

Цей принцип Галілея, відкритий у 1630 р., розповсюджується і на фізичні явища. Він складає основу теорії відносності Ейнштейна. Принцип відносності Ейнштейна стверджує, що всі фізичні явища в інерціальних системах відліку відбуваються однаково.

21.3. Окремі випадки відносного руху точки

21.3.1. Відносний спокій матеріальної точки

З рівняння (21.4) випливає умова відносного спокою.

При відносному спокої відносна швидкість $\overline{v}_r$ і відносне прискорення $\overline{a}_r$ дорівнюють нулю (відсутні), внаслідок чого відсутня і коріолісова сила інерції, тому рівняння (21.4) набуває вигляду:

$$\sum \overline{P}_k + \overline{\Phi}_e = 0 . \qquad (21.10)$$

З виразу (21.10) випливають умови відносного спокою точки:

Геометрична сума прикладених до точки активних сил і переносної сили інерції дорівнює нулю.

Приклад 21.1.

Розглянемо випадок, коли точка перебуває в стані відносного спокою на поверхні Землі (рис. 21.2).

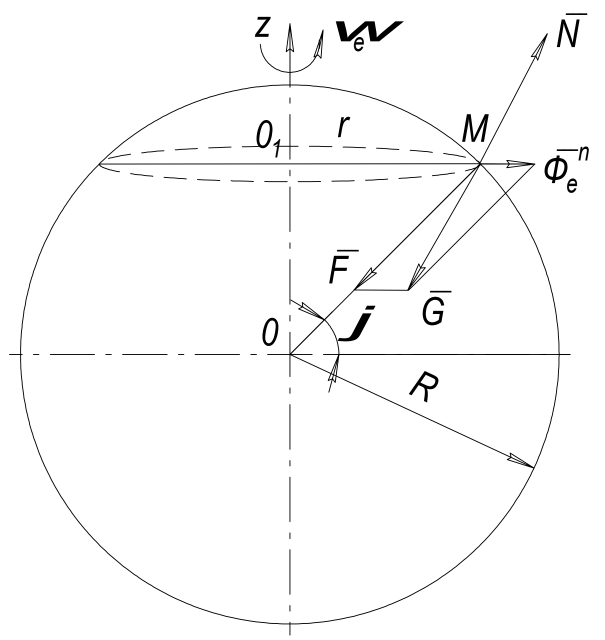


Рис. 21.2

$m = 5.98 \cdot 10^{24}$ $кг$ - маса Землі;

$R = 6.38 \cdot 10^{6}$ $м$ - радіус Землі;

$\omega_e = 0.0000727 \dfrac{1}{c}$ - кутова швидкість Землі;

$\varphi \approx 55^0$ - широта міста Київ;

m_1 - маса тіла на поверхні Землі;

$G = m_1 g$ - вага тіла, що приймається за точку;

$O_1M = r$ - радіус обертання точки навколо осі;

$\overline{F}$ - сила тяжіння (притягання) Землі, що спрямована до центра О:

$$F = f \frac{m \cdot m_1}{R^2} \qquad (21.11)$$

де $f = 6.67 \cdot 10^{-11} \dfrac{м^3}{кг \cdot c^2}$ - гравітаційна стала;

N - реакція опори (поверхні Землі).

Розв'язання.

Умова відносного спокою точки M:

$$\overline{F} + \overline{N} + \overline{\Phi}_e^n = 0, \qquad (21.12)$$

де $\overline{\Phi}_e^n$ - переносна сила інерції, котра внаслідок рівномірного обертання Землі є відцентровою силою інерції.

Модуль переносної сили інерції Φ_e^n дорівнює:

$$\Phi_e^n = m_1 \cdot a_e^n = m_1 \cdot r \cdot \omega_e^2, \qquad (21.13)$$

$$r = R \cdot \cos\varphi,$$

$$\Phi_e^n = m_1 \cdot R \cdot \omega_e^2 \cdot \cos\varphi. \qquad (21.14)$$

Сила $\overline{G}$ – рівнодійна сила тяжіння Землі $\overline{F}$ і переносної сили інерції $\overline{\Phi}_e^n$ – і є вагою тіла. Напрям сили $\overline{G}$ визначає напрям вертикалі в даній точці земної поверхні, а площина, яка перпендикулярна до напрямку сили $\overline{G}$ – є горизонтальною площинною. За модулем сила інерції $\overline{\Phi}_e^n$ є малою порівняно до ваги $\overline{G}$:

$$\frac{\Phi_e^n}{G} = \frac{m_1 R \omega_e^2 \cos\varphi}{m_1 g} = \frac{R\omega_e^2 \cos\varphi}{g},$$

де $g = 9.81\ {}^{м}\!/\!{}_{c^2}$ - прискорення вільного падіння на широті 55^0.

Відношення $\dfrac{\Phi_e^n}{G}$ має максимальне значення на екваторі:

$$\varphi = 0; \quad R = 6380\ км; \quad g = 9.78\ {}^{м}\!/\!{}_{c^2};$$

$$\frac{\Phi_e^n}{G} = 0.00346 = \frac{1}{290}.$$

З останнього випливає, що вага тіла $\overline{G}$ мало відрізняється від сили тяжіння Землі $\overline{F}$ і напрям вертикалі складає з напрямком сили $\overline{F}$ дуже малий кут.

Найбільшу вагу тіла мають на полюсі, а найменшу – на екваторі за двома причинами.

1. Сила тяжіння $\overline{F}$ на полюсах має найбільшу величину (Земля сплюснута).

2. Переносна сила інерції $\overline{\Phi}_e^n$ на полюсі дорівнює нулю, а на екваторі – максимальна.

Тому прискорення вільного падіння тіла на полюсі: $g = 9{,}83\,\frac{м}{с^2}$, на екваторі: $g = 9{,}78\,\frac{м}{с^2}$.

21.3.2. Рух тіла по поверхні Землі

Якщо матеріальна точка (тіло) рухається по меридіану північної півкулі з півночі на південь, то коріолісове прискорення $\overline{a}_k$ спрямовано на схід, а коріолісова сила інерції $\overline{\Phi}_k$ – на захід. Коли рух точки відбувається з півдня на північ, то прискорення Коріоліса $\overline{a}_k$ спрямовано на захід, а коріоліслова сила інерції – на схід. Але в обох випадках точка внаслідок обертання Землі завжди відхиляється праворуч від напрямку її руху.

Звідси випливає висновок, що у північній півкулі матеріальна точка завжди відхиляється праворуч від напрямку руху, у північній півкулі – ліворуч.

Цим пояснюється те, що річки північної півкулі мають підмитий, стрімкий правий берег (закон Бера), а річки південної півкулі – лівий. Дуже цікавим є і такий природний факт, пов’язаний з силами інерції

Коріоліса. Якщо річка тече вздовж паралелі, то прискорення Коріоліса частинок води спрямоване вздовж радіуса Землі у напрямку до центра. Протилежна прискоренню сила інерції трохи підносить маси води і підтримує їх в деякій силовій “напівциліндричній оболонці” вище берегів. Тому такі відомі річки, як Амазонка, Амур, Дунай, Хуанхе, Янцзи не мають практично берегів, часто змінюють своє русло, розливаються під час повені і затоплюють великі території. Сили інерції Коріоліса спричиняють і відхилення вітрів від свого сталого напрямку (пасати), і відхилення морських течій.

21.3.3. Відхилення тіл при вертикальному падінні

Відомо, що всі тіла, які вільно падають, відхиляються на схід у зв’язку з обертанням землі. Розглянемо відносний рух тіла (рис. 21.3).

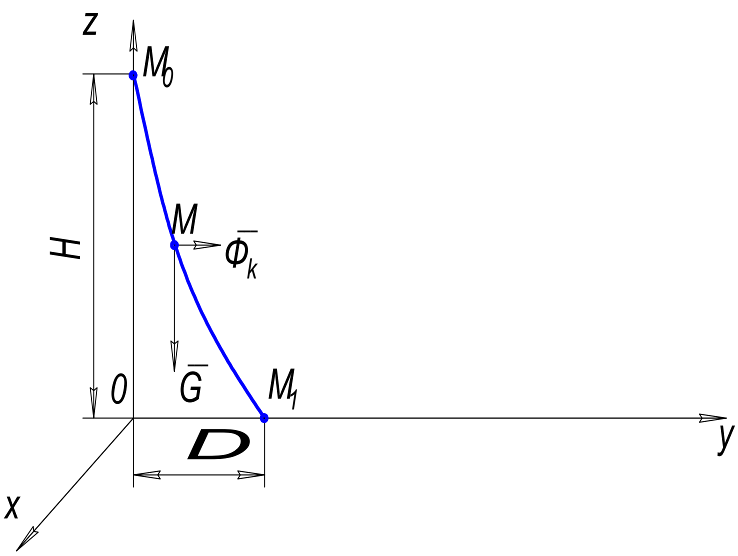


Рис. 21.3

Система координат жорстко пов’язана з земною кулею і обертається разом з нею. Тіло M падає паралельно осі z без початкової швидкості. Вісь z проходить через початкове положення тіла M_0 і центр Землі O, вісь Ox - по дотичній до меридіану, вісь Oy - на схід перпендикулярно площині меридіану xOz.

Щоб визначити напрямок коріолісової сили інерції у випадку вільного падіння малого тіла, треба врахувати напрям відносної швидкості точки M. Будемо наближено вважати, що це вертикальна лінія M_0O. Тоді прискорення Коріоліса буде спрямоване на захід (вліво, рис.21.3), а сила інерції $\overline{\Phi}_k$ - протилежно, на схід (в напрямку осі y).

Таким чином, точка при вільному падінні з висоти H відхиляється від вертикалі під дією сили інерції Коріоліса на схід.

Щоб визначити це відхилення, необхідно розв'язати диференціальне рівняння руху точки в проекції на вісь y:

$$m\ddot{y} = \sum P_{ky} = \Phi_k = 2m\omega_e v_r \cos\varphi, \qquad (21.15)$$

де m - маса; ω_e - кутова швидкість переносного обертання Землі; v_r - відносна швидкість падіння точки; φ - широта місцевості, де перебуває точка.

Двічі інтегруючи (21.15), враховуючи, що $v_r = gt$ і нульові початкові умови, отримаємо закон руху

$$y = \frac{1}{3}\omega_e g t^3 \cos\varphi. \qquad (21.16)$$

Підставляючи в (21.16) час падіння $t_1 = \sqrt{\dfrac{2H}{g}}$, остаточно визначаємо відхилення на схід точки (тіла)

$$y_{\max} = \Delta = \frac{2}{3} H\omega_e \sqrt{\frac{2H}{g}} \cos\varphi. \qquad (21.17)$$

Вираз (21.17) дає можливість визначити відхилення для будь-якої місцевості Землі. Так, для Києва, $\varphi \approx 55^0$ відхилення при падінні з висоти $H = 100\,м$ складає приблизно $\Delta \approx 1\ \ см$.

Тіло, яке кидають вертикально вверх, відхиляється не на схід, а на захід, оскільки сила інерції Коріоліса у цьому випадку має протилежний знак – вона спрямована перпендикулярно до площині меридіану zOx у напрямку заходу.

Запитання для самоконтролю:

1. Що таке інерціальна система відліку?
2. Які досліди доводять, що геоцентрична система відліку не є інерціальною?
3. Запишіть основне рівняння динаміки відносного руху точки у векторній і координатній формах.
4. Що таке сила інерції Коріоліса, як її визначити і як вона впливає на природні явища ?
5. Сформулюйте принцип відносності Галілея.
6. Які ви знаєте умови відносного спокою точки?
7. Чим і наскільки відрізняється вага тіла і сила, що притягує його до центра землі?
8. Чому праві береги річок північної півкулі, що течуть вздовж меридіану, стрімкі?
9. Які береги мають річки, що течуть вздовж паралелі?
10. За рахунок чого відхиляється тіло на схід при вільному падінні і який порядок величини відхилення?

ЛЕКЦІЯ 22

ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ СТІЙКОСТІ РУХУ МЕХАНІЧНОЇ СИСТЕМИ

Теорія стійкості руху має важливе практичне значення для багатьох галузей техніки. Вона широко застосовується в наукових дослідженнях і при розрахунках та конструюванні систем автоматичного регулювання, навігаційних приладів, літаків, космічних апаратів, різного роду двигунів тощо. Без відповідної стійкості руху ракета не може виводити супутник на розрахункову траєкторію, а машина не може якісно виконувати технологічний процес, корабель і літак – стійко зберігати заданий курс, гірокомпас – стійко показувати напрямок географічного меридіану.

З середини XIX століття в науці і техніці виникли проблеми, які змусили поставити загальну задачу про стійкість не тільки рівноваги але і руху. Перш за все – це криза у двигунобудуванні, коли конструкторам довго не вдавалося стійко зберігати задану частоту обертання двигунів (двигун йшов у “розліт”).

У працях Д.К. Максвелла, І.А. Вишнеградського, Е. Рауса, М.Є. Жуковського розглянуто ряд загальних питань про стійкість руху. Неоціненні плідні результати містить робота О.М. Ляпунова “Загальна задача про стійкість руху”, яка була опублікована в 1892 році. Ляпунов надав точне визначення стійкості руху, одержав повний розв’язок задачі для усталеного руху, запропонував два методи дослідження стійкості руху, що характеризуються простотою і ефективністю.

В наш час методи Ляпунова поглиблюються, виникають нові прикладні напрями, в яких створюються загальні методи дослідження стійкості руху окремих широких класів систем: системи автоматичного регулювання, керовані системи тощо. Бурхливий розвиток отримала теорія автоматичного керування і технічна кібернетика, де створення методів дослідження і забезпечення стійкості руху систем є однією з головних задач цих наук.

22.1. Стійкість положення рівноваги

Розглянемо спочатку більш просте поняття про стійкість рівноваги. З фізичної точки зору положення рівноваги називається стійким, якщо при достатньо малих початкових відхиленнях і швидкостях система протягом руху не виходить за межі як завгодно малого околу положення рівноваги, маючи при цьому як завгодно малі швидкості.

Аналізуючи деякі найпростіші рухи з погляду заданого визначення, можна стверджувати, що кулька на вгнутій сферичній поверхні є стійкою системою, тому що вона при русі під дією достатньо малих збурювальних сил намагається знову повернутись у своє вихідне найнижче положення. У той же час кулька на опуклій поверхні в стані рівноваги не має стійкого положення, навіть при як завгодно малих відхиленнях вона не повернеться до стану рівноваги. Байдуже положення має кулька на горизонтальній поверхні.

Візьмемо другий приклад – фізичний маятник. У нижньому вертикальному положенні він має стійку рівновагу (після ряду коливань він повертається у вихідне положення спокою). У верхньому вертикальному положенні фізичний маятник посідає нестійку рівновагу: при як завгодно малому відхиленні він почне рухатись, прямуючи до стійкого нижнього положення.

Достатні умови стійкості рівноваги системи дає теорема Лагранжа-Діріхле:

"Якщо в положенні рівноваги потенціальна енергія голономної стаціонарної системи, що перебуває в полі консервативних сил, має ізольований мінімум, то таке положення рівноваги є стійким".

Для консервативної системи діє закон збереження механічної енергії:

$$T_0 + \Pi_0 = T + \Pi\,, \tag{22.1}$$

де T_0, Π_0, T, Π – кінетична і потенціальна енергія в стані рівноваги і при збуренні. Оскільки завжди $T \geq 0$, то із виразу (22.1) маємо

$$T = T_0 + \Pi_0 - \Pi \geq 0\,, \tag{22.2}$$

звідки

$$\Pi \leq T_0 + \Pi_0\,. \tag{22.3}$$

Нерівності (22.2) і (22.3) показують, що рух системи після відхилення її від положення рівноваги відбувається в околі положення рівноваги. Зростання потенціальної енергії обмежене нерівністю (22.3) настільки, що вона буде одним із значень потенціальної енергії в околі положення рівноваги. На основі (22.2) можна вважати, що за вказаних початкових умов швидкості всіх точок системи обмежені за модулем: із зменшенням T_0 і Π_0 до нуля, T і Π також наближаються до нуля. Теорема доведена.

Теорема Лагранжа-Діріхле має лише достатні умови стійкості стану рівноваги. Вирішення питання про нестійкість рівноваги консервативної системи ґрунтується на двох теоремах О.М. Ляпунова про нестійкість рівноваги.

Суть теорем Ляпунова про нестійкість рівноваги полягає в тому, що нестійкість має місце, якщо:

1) потенціальна енергія не має мінімуму, що можна встановити за членами другого порядку в розкладенні потенціальної енергії в ряд Маклорена;

2) потенціальна енергія має максимум і це можна встановити за членами нищого порядку мализни, що входять у ряд Маклорена.

Як відомо з аналітичних курсів механіки, вираз потенціальної енергії для голономної стаціонарної системи можна отримати у вигляді квадратичної форми в функції узагальнених координат

$$\Pi = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} C_{kj} q_k q_j \,, \tag{22.4}$$

де C_{kj} - узагальнені коефіцієнти жорсткості (коефіцієнти ряду Маклорена); $q_1, ..., q_N$ - узагальнені координати системи.

У виразі (22.4) враховано, що узагальнені координати і потенціальна енергія в положенні рівноваги дорівнюють нулю ($q_j = 0$; $\Pi(0) = 0$). Крім того, узагальнені сили в положенні рівноваги також дорівнюють нулю:

$$\left(\frac{\partial \Pi}{\partial q_1}\right)_0 = \left(\frac{\partial \Pi}{\partial q_2}\right)_0 = 0 \,.$$

Оскільки в положенні рівноваги потенціальна енергія дорівнює нулю ($\Pi(0) = 0$), то вона має мінімум у цьому положенні, якщо $\Pi(\overline{q})$ буде явно додатною функцією. Знак квадратичної форми визначається теоремою Сільвестра.

Для додатно-визначеності квадратичної форми необхідно і достатньо, щоб усі головні діагональні мінори матриці квадратичної форми були додатні.

Випишемо матрицю коефіцієнтів виразу (22.4):

$$\begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & ... & C_{1N} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & ... & C_{2N} \\ C_{31} & C_{23} & C_{33} & ... & C_{3N} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ C_{N1} & C_{N2} & C_{N3} & ... & C_{NN} \end{vmatrix} \qquad (22.5)$$

Складемо головні діагональні мінори матриці (22.5):

$$\Delta_1 = C_{11}, \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{vmatrix}, \ \Delta_3 = \begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{vmatrix}, ..., \ \Delta_N = \begin{vmatrix} C_{11} & ... & C_{N1} \\ ... & ... & ... \\ C_{N1} & ... & C_{NN} \end{vmatrix}.$$

Згідно критерію Сільвестра квадратична форма є додатно-визначеною, а звідси і буде мінімум потенціальної енергії в положенні рівноваги, якщо головні діагональні мінори матриці коефіцієнтів додатні:

$$\Delta_1 > 0, \ \Delta_2 > 0, \ ..., \ \Delta_N > 0; \qquad (22.6)$$

22.2. Стійкість руху системи

Стійкість руху механічної системи, наприклад, машини, літака, снаряда тощо, залежить від діючих сил і початкових умов руху (координат і швидкостей точок системи в момент початку руху).

Знаючи сили і початкові умови, можна теоретично розрахувати, як буде рухатись система. Рух, який відповідає розрахунку, називається незбуреним.

У зв’язку з деякою неточністю виміру початкових умов, їх дійсні значення, як правило, відрізняються від розрахункових. Крім того, механічна система під час руху може підпадати під випадкові пливи різних сил, що також еквівалентно змінює початкові умови. Відхилення початкових умов, що виникають із різних причин, називають початковими збуреннями, а рух, який система при цьому здійснює при наявності збурень – збуреним рухом. Як підсумок вищесказаного можна дати таке визначення.

Якщо при достатньо малих початкових збуреннях яка-небудь із характеристик руху протягом всього часу мало відрізняється від того значення, що вона повинна мати при незбуреному русі, то рух системи по відношенню до цієї характеристики називається стійким. Умови, при котрих рух механічної системи є стійким, називаються критеріями стійкості.

Розрізняють такі види стійкості:

- стійкість положення рівноваги;
- стійкість руху;
- технічна стійкість руху.

22.3.1. Задача про стійкість руху і означення стійкості

Припустимо, що рух об'єкта дослідження описаний нормальною у формі Коші системою диференціальних рівнянь

$$\frac{dy_k}{dt} = Y_k\left(t,\ y_1,\ y_2,\ ...,\ y_n\right),\ k = 1,\ 2,\ ...,\ n, \tag{22.7}$$

де y_k - деякі параметри, які пов'язані з рухом, наприклад, координати, проекції швидкостей, з початковими умовами при $t = 0$:

$$y_k\left(t_0\right) = y_{k0},\quad k = 1,\ 2,\ ...,\ n. \tag{22.8}$$

Нехай деяким фіксованим початковим умовам (22.8) відповідає певний розв'язок системи (22.7):

$$y_k = f_k(t), \quad k = 1,\ 2,\ ...,\ n, \tag{22.9}$$

котрий описує заданий рух, але цей рух ми можемо і не знати за неможливістю інтегрування.

Розв'язок (22.9), який задовольняє початковим умовам (22.8) і описує заданий рух, називають незбуреним рухом системи.

Надамо далі початковим умовам y_{ko} деякі невеликі за модулем прирости δ_k, $k = 1,2,...,n$, які називають початковими збуреннями. Нехай новим початковим значенням $y_{k_1} = y_{k_0} + \delta_k$ відповідає новий частинний розв'язок системи (22.7)

$$y_k = \varphi_k(t), \ k = 1,2,...,n. \tag{22.10}$$

Розв'язок (22.10), який отриманий з урахуванням початкових збурень δ_k, і відповідний йому рух системи називають збуреним рухом.

Виходячи із розв'язків (22.9) і (22.10), визначимо їх прирости:

$$\delta_{yk} = \varphi_k(t) - f_k(t) = u_k(t), \quad k = 1,2,...,n, \tag{22.11}$$

які називають варіаціями параметрів руху.

Розглянемо рух в координатах $u_1, u_2, ..., u_n$. Простір $(u_1, u_2, ..., u_n)$ в теорії стійкості називають фазовим простором, координати u_k – фазовими координатами, а їх сукупність, яка визначає деякий стан системи, що досліджується – фазою системи.

Будь-який незбурений рух зображується у системі координат $(u_1, u_2, ..., u_n)$ фіксованою точкою M_0 (0,...,0), яка співпадає з початком координат (усі $u_k \equiv 0$). Точка M_0 називається точкою рівноваги системи.

Сукупність значень $(u_1(t), ..., u_n(t))$ в довільний момент часу t визначає відповідний фазовий стан або фазу системи. Геометрично зміна фазових координат визначає фазову траєкторію L_k зображувальної точки M_k в n-вимірному просторі u_k з початком у точці M_0, яка відповідає початку координат при незбуреному русі.

Виходячи з викладених міркувань, означимо стійкість руху за Ляпуновим.

Якщо довільно заданому додатному числу ε, яким малим воно б не було, можна поставити у відповідність друге додатне число $\delta = \delta(\varepsilon)$, таке, що при будь-яких початкових збуреннях

$$\delta_1 = u_1(t_0),\ \delta_2 = u_2(t_0),\ ..., \delta_n = u_n(t_0),$$

які задовольняють при $t = t_0$ нерівностям

$$|u_1(t_0)| \le \delta,\ |u_2(t_0)| \le \delta,\ ...,|u_n(t_0)| \le \delta\ ,$$

для всіх $t = t_0$ виконуються нерівності

$$|u_1(t_0)| < \varepsilon,\ |u_2(t_0)| < \varepsilon,\ ...,|u_n(t_0)| < \varepsilon\ ,$$

то незбурений рух називається стійким.

У плоскому фазовому підпросторі (u_1, u_2) даному означенню можна дати геометричну інтерпретацію (рис. 22.1). Фазова траєкторія L_1 точки M_1 належить стійкому руху.

Окрему групу стійких рухів утворюють асимптотично стійкі рухи, які можна визначити таким чином.

Якщо незбурений рух системи є стійким і при цьому будь-який збурений рух при достатньо малих початкових збуреннях прямує до незбуреного руху, тобто якщо

$$\lim_{t\to\infty}\sum_{k=1}^{n} u_k^2(t) = 0\ , \qquad (22.12)$$

то такий незбурений рух називається асимптотично стійким рухом (траєкторія L_3 точки M_3 на рис. 22.1).

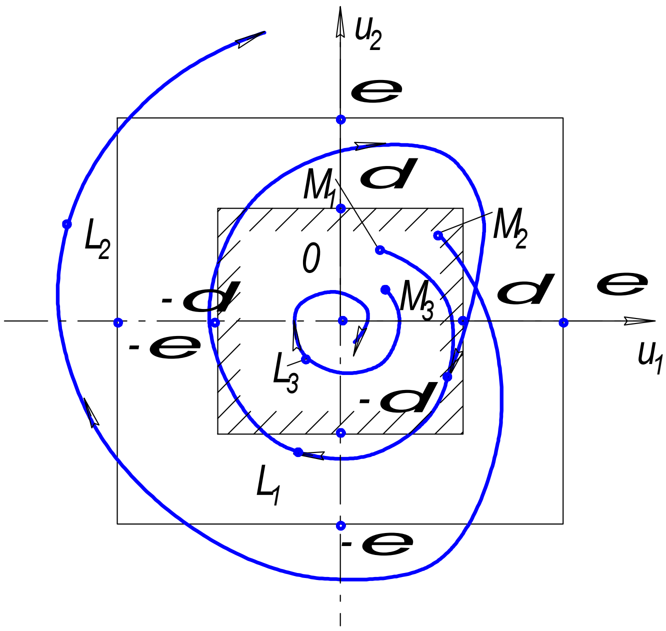


Рис. 22.1

У виразі (22.12) за міру відхилень збуреного руху від незбуреного прийнята сума квадратів фазових координат u_k. Якщо параметри руху системи не задовольняють даним означенням, то такий рух є нестійким (фазова траєкторія L_2 точки M_2 на (рис.22.1)).

Умови (22.12) з геометричної точки зору розуміють таким чином: при асимптотичній стійкості зображувальна точка M фазової траєкторії повинна, не виходячи за межі сфери радіуса ε, необмежено наближатись до початку координат 0 (лінія L_3 точки M_3 на рис. 22.1). Це означає, що фізична система, рух якої досліджується, намагається повернутися у свій вихідний зрівноважений стан.

Особливості визначення стійкості руху за Ляпуновим:

- збурення вважаються малими;
- збуренням підлягають лише початкові умови, тобто в деякий момент часу має місце миттєва зміна параметрів руху системи, після чого її збурений рух відбувається під дією попередніх сил.
- стійкість руху розглядається на нескінченному проміжку часу.

22.3.2. Диференціальні рівняння збуреного руху

Для дослідження збуреного руху у відповідності до його означення в системі фазових координат $u_1, u_2, ..., u_n$ доцільно диференціальні рівняння (22.7) звести до нових змінних $\delta_{y_k}(t) = u_k(t)$, де $k = 1,...,n$. Підставивши у рівняння (22.7) параметри збуреного руху $\varphi_k = f_k + u_k$, дістанемо нову систему рівнянь:

$$\begin{aligned} \dot{u}_k &= Y_k(t, \varphi_1, ..., \varphi_n) - Y_k(t, f_1, ..., f_n) = \\ &= Y_k(t, f_1 + u_1, ..., f_n + u_n) - Y_k(t, f_1, ..., f_n) = \\ &= U_k(t, u_1, ..., u_n), \quad k = 1,...,n. \end{aligned} \tag{22.13}$$

Рівняння (22.13) в теорії стійкості руху називають диференціальними рівняннями збуреного руху.

Кожному збуреному руху досліджуваного об’єкту відповідає деякий частинний розв’язок системи (22.13). Відомо, що будь-якому незбуреному руху відповідають нульові значення фазових координат $u_k(t)$, тобто тривіальний розв’язок $u_1 = u_2 = ... = u_n = 0$ системи (22.13), який вона повинна мати. Для цього необхідно, щоб функції $U_k(t, u_1, ..., u_n)$ перетворювались в нуль при $u_1 = u_2 = ... = u_n = 0$.

Таким чином, дослідження на стійкість будь-якого незбуреного руху можна звести до дослідження на стійкість тривіального розв'язку системи (22.13). Фізичний сенс системи (22.13) полягає у тому, що вона визначає вектор швидкості руху зображувальної точки M вздовж фазової траєкторії L:

$$\overline{u}_M = \{u_1, u_2, ..., u_n\} = \{U_1, U_2, ..., U_n\}.$$

Рівності $U_k = U_k(t)$ можна розглядати, як параметричні рівняння руху точки.

Система (22.13), в якій праві частини рівнянь залежать від часу ($U_k = U_k(t)$), називається нестаціонарною або неавтономною, як і сама фізична система, рух якої дана система рівнянь описує. Відповідний рух фізичної системи є неусталеним.

Проте, у багатьох випадках праві частини рівнянь збуреного руху не залежать явно від часу:

$$\dot{u}_k = U_k(u_1, ..., u_n), \qquad k = 1, 2, ..., n\,. \tag{22.14}$$

Система (22.14) називається стаціонарною або автономною, а її рух – усталеним. Ці системи в подальшому і розглядаються.

Припускаючи, що праві частини рівнянь (22.14) розкладаються в ряд Тейлора (Маклорена) по степенях $u_k(t)$, запишемо:

$$\dot{u}_k = p_{k1}u_1 + p_{k2}u_2 + ... + p_{kn}u_n + \overset{*}{U}_k(t, u_1, ..., u_n), \;\; k = 1, 2, ..., n\,, \tag{22.15}$$

де коефіцієнти $p_{ki} = p_{ki}(t) = \left(\dfrac{\partial U_k}{\partial u_j}\right)_0$ у загальному випадку є функціями часу t (для автономних систем - сталі);

$\overset{*}{U}_k$ – сукупність всіх членів розкладання вищих порядків мализни (починаючи з другого) відносно U_k.

Нехтуючи в рівняннях (22.15) членами вищих порядків, отримаємо лінійну однорідну систему

$$\dot{u}_k = p_{k1}u_1 + p_{k2}u_2 + ... + p_{kn}u_n, \quad k = 1, ..., n. \tag{22.16}$$

Приклади складання диференціальних рівнянь збуреного руху:

Приклад 22.1.

Коток масою m і радіусом R котиться без ковзання по горизонталі. До його центра закріплена пружина жорсткістю C. Момент інерції маси котка відносно осі дорівнює I_o. Скласти диференціальне рівняння збуреного руху (рис. 22.2).

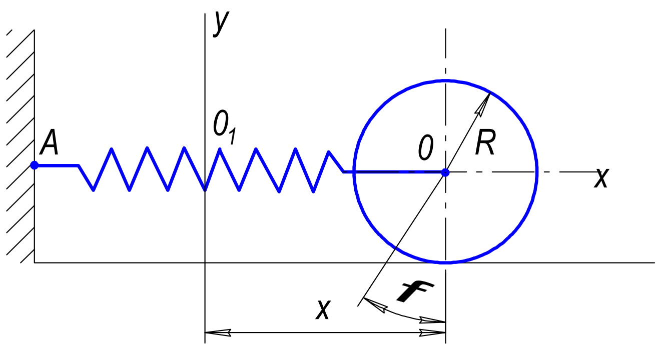


Рис. 22.2

Розв'язання.

Приймемо за узагальнену координату відстань x від положення рівноваги O_1. Тоді кінетична енергія котка дорівнює

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}I_0\dot{\varphi}^2. \tag{a}$$

Потенціальна енергія пружини

$$\Pi = \frac{1}{2}cx^2. \qquad (б)$$

Рівняння Лагранжа другого роду для цієї системи має вигляд:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_x. \qquad (в)$$

Підставимо у вираз (в) відповідні похідні, а узагальнена сила при діючих потенціальних силах дорівнює $Q_x = -\frac{\partial \Pi}{\partial x} = -cx$.

Зведемо кінетичну енергію до однієї узагальненої координати, оскільки $\varphi = \frac{x}{R}$. Тоді формула (а) матиме вигляд:

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}I_0\frac{\dot{x}^2}{R^2} = \frac{1}{2}\dot{x}^2\left(m + \frac{I_0}{R^2}\right). \qquad (г)$$

Частинні похідні від виразу (г):

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = \left(m + \frac{I_0}{R^2}\right)\dot{x}. \qquad (д)$$

Похідна за часом від (д):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) = \left(m + \frac{I_0}{R^2}\right)\ddot{x}.$$

Підставимо визначені похідні у вираз (в):

$$\left(m + \frac{I_0}{R^2}\right)\ddot{x} + cx = 0. \qquad (е)$$

Подамо диференціальне рівняння у нормальній формі Коші:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = \frac{-c}{\frac{I}{R^2} + m} x_1. \qquad (к)$$

Система (к) і є диференціальним рівнянням збуреного руху.

Приклад 22.2.

Скласти диференціальне рівняння збуреного руху симетричної причіпної сільськогосподарської машини масою m, яка рухається зі сталою поступальною швидкістю v_0 під дією сили сумарного опору $\overline{R}$, яка проходить вздовж осі симетрії і прикладена у центрі ваги *О*. Сила $\overline{R}$ збігається з напрямом сили тяги трактора $\overline{P}$, що прикладена в точці причепу $D(x_1, y_1)$ (рис. 22.3). Момент інерції машини відносно центра ваги I_o.

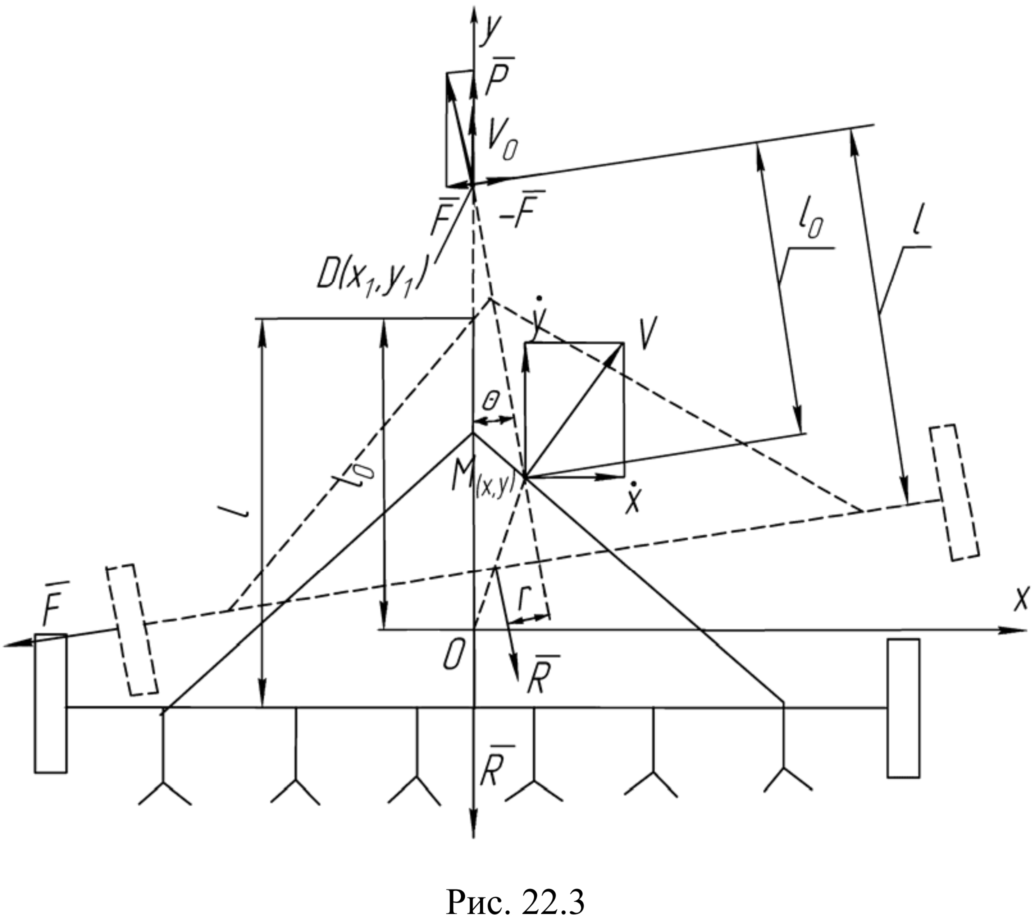


Рис. 22.3

Розв'язання.

Внаслідок випадкових бокових сил сумарний опір $\overline{R}$ машини змістився, виникла пара сил, під дією якої агрегат повертається проти годинникової стрілки. Частково пара компенсується реактивною парою ($\overline{F}, -\overline{F}$), що виникає від бокового опору коліс і робочих органів.

Машина перебуває під дією сумарного збуреного моменту:

$$M = R \cdot r - F \cdot l\,, \tag{а}$$

де r - зміщення сили $\overline{R}$ від лінії симетрії; l - плече реактивної пари $\overline{F}, -\overline{F}$.

Обмежуючись малим кутом Θ, який приймемо за узагальнену координату, будемо вважати

$$F = Rtg\Theta \approx R\Theta\,.$$

Тому рівняння (а) буде мати вигляд:

$$M = R(r - l\Theta). \tag{б}$$

Запишемо рівняння в'язі, як відстань, що завжди зберігається між точкою причепа $D(x_1, y_1)$ і центром ваги $M(x, y)$, l_0 - відстань між вказаними точками:

$$(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 = l_0^2\,. \tag{в}$$

Оскільки $x_1 = 0$, $y_1 = v_0 t + l$, то рівняння (в) зміниться:

$$x^2 + (v_0 t + l_0 - y)^2 = l_0^2\,. \tag{г}$$

Декартові координати центра ваги через узагальнену координату Θ дорівнюють:

$$x = l_0 \sin\Theta\,,$$

$$y = v_0 t + l_0(1 - \cos\Theta). \tag{д}$$

Взявши похідну за часом від виразу (д), маємо:

$$\dot{x} = l_0 \dot{\Theta} \cos\Theta ; \quad \dot{y}_0 = v_0 + l_0 \dot{\Theta} \sin\Theta . \tag{е}$$

Машина є системою з одним степенем вільності, тому рівняння Лагранжа можна записати так:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\Theta}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \Theta} = Q_\Theta , \tag{ж}$$

де T - кінетична енергія, Q_Θ- узагальнена сила, $\dot{\Theta}$ - узагальнена швидкість.

Визначимо кінетичну енергію машини:

$$T = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I_0 \dot{\Theta}^2 = \frac{1}{2} m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) + \frac{1}{2} I_0 \dot{\Theta}^2 . \tag{з}$$

Підставляючи в (з) вираз (е), маємо:

$$T = \frac{1}{2} m\left(l_0^2 \dot{\Theta}^2 + v_0^2 + 2 v_0 l_0 \dot{\Theta} \sin\Theta\right) + \frac{1}{2} I_0 \dot{\Theta}^2 . \tag{к}$$

Знайдемо частинні похідні з виразу (к):

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\Theta}} = \left(m l_0^2 + I_0\right)\dot{\Theta} + m v_0 l_0 \sin\Theta; \quad \frac{\partial T}{\partial \Theta} = m v_0 l_0 \cos\Theta \cdot \dot{\Theta} .$$

Для визначення узагальненої сили Q_Θ запишемо вираз елементарної роботи прикладених сил на можливих переміщеннях точок системи:

$$\delta\ A = M \delta\ \Theta = R\left(r - l\Theta\right)\delta\ \Theta , \quad \text{звідки} \quad Q_\Theta = R\left(r - l\Theta\right).$$

Підставляючи у вираз (ж) всі знайдені величини, маємо:

$$\left(m l_0^2 + I_0\right)\ddot{\Theta} = R\left(r - l\Theta\right),$$

$$\ddot{\Theta} + \lambda^2 \Theta = \lambda^2 k , \tag{и}$$

де $\lambda = \sqrt{\dfrac{Rl}{ml_0^2 + I_0}}$; $k = \dfrac{r}{l}$.

Рівняння (и) і є диференціальним рівнянням збуреного руху причіпної машини. Зведемо його до нормальної форми Коші:

$$\dot{x}_1 = x_2;$$

$$\dot{x}_2 = -\lambda^2 x_1 + \lambda^2 k.$$

22.4. Методи дослідження стійкості руху системи

Якщо диференціальне рівняння руху інтегрується у замкнутому вигляді, то дослідження руху на стійкість відбувається без ускладнень. Але такі випадки практично бувають дуже рідко.

Попередники Ляпунова користувались звичайно методом лінеаризації рівнянь руху. Зміст його полягає у заміні рівнянь (22.13) досліджуваної системи на лінійну систему (22.16). Розв'язання задачі суттєво спрощувалось, особливо для автономних систем, рівняння руху яких інтегруються у замкненому вигляді і при сталих коефіцієнтах $p_{kj} = a_{kj} = const$ буде мати вигляд:

$$\dot{u}_k = a_{k_1} u_1 + a_{k_2} u_2 + ... + a_{k_n} u_n, \quad k = 1, ..., n. \qquad (22.17)$$

Проте, подібна заміна означає заміну однієї задачі іншою. Хоча дослідження за лінійним, або першим наближеним, іноді і вірно розв'язує задачу, в інших випадках цей метод веде до невірних висновків.

Які ж умови достовірності відповіді, отриманої на підставі дослідження стійкості руху за першим наближенням?

Вперше відповідь на це запитання дав Ляпунов. Він отримав повний розв'язок задачі для усталених і періодичних, а також для широкого класу неусталених рухів. Він розглянув також деякі основні випадки, коли першим наближенням обмежуватись не можна.

Всі методи дослідження руху на стійкість Ляпунов поділив на дві категорії:

- перший метод, який стосується систем, рух яких описується нелінійними диференціальними рівняннями, побудований на дослідженні лінеаризованих рівнянь збуреного руху або диференціальних рівнянь першого наближення;
- другий (прямий) метод, пов'язаний із побудовою спеціальних функцій Ляпунова, які мають властивості, на основі яких можна скласти висновок про стійкість руху без розв'язування диференціальних рівнянь.

22.5. Дослідження стійкості руху по першому наближенні. Теореми Ляпунова

Розглянемо лінеаризовану систему першого наближення (22.17) у розгорнутому вигляді, замінюючи $u_k = x_k$:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= \frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n, \\
\dot{x}_2 &= \frac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n, \\
&\ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\
\dot{x}_n &= \frac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n.
\end{aligned} \tag{22.18}$$

Нагадаємо, що для автономної системи, яка тут розглядається, всі коефіцієнти рівнянь (22.18) a_k – сталі числа. Як відомо, частинний розв'язок лінійних систем шукають у вигляді:

$$x_1 = A_1 e^{\lambda t}, \quad x_2 = A_2 e^{\lambda t}, \ \dots \ , \quad x_n = A_n e^{\lambda t}. \tag{22.19}$$

Підставимо розв'язок (22.19) у рівняння (22.18) і після групування членів матимемо:

$$\begin{array}{l} (a_{11} - \lambda)A_1 + a_{12}A_2 + \dots + a_{1n}A_n = 0 \ ; \\ a_{21}A_1 + (a_{22} - \lambda)A_2 + \dots + a_{2n}A_n = 0 \ ; \\ \dots \ \dots \ \dots \ \dots \ \dots \ \dots \ \dots \ \dots \ \dots \ \dots \\ a_{n1}A_1 + a_{n2}A_2 + \dots + (a_{nn} - \lambda)A_n = 0 \ . \end{array} \tag{22.20}$$

Для того, щоб система алгебраїчних рівнянь (22.20) мала розв'язок, який відмінний від нуля, необхідно, щоб її визначник дорівнював нулю:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{22.21}$$

Визначник (22.21), який складений для системи (22.18), називається характеристичним.

Розкриваючи цей визначник за елементами першого рядка, отримаємо рівняння відносно λ, яке називається характеристичним і містить невідоме λ в степені n, маючи корені

$$\lambda_1, \ \lambda_2, \ \dots, \ \lambda_n.$$

Сформулюємо основні умови на підставі теорем Ляпунова про стійкість по першому наближенню:

1. Якщо дійсні частини всіх коренів характеристичного рівняння від'ємні, то незбурений рух асимптотично стійкий.

2. Якщо серед коренів характеристичного рівняння є хоча б один, дійсна частина якого додатна, то незбурений рух є нестійким.

3. Якщо дійсні частини деяких коренів характеристичного рівняння дорівнюють нулю, а дійсні частини інших коренів від'ємні, то незбурений рух є стійким, але не асимптотично стійким.

Наведені теореми Ляпунова про стійкість руху по першому наближенню повністю розв'язують задачу про стійкість руху.

22.5.1. Критерій Гурвіца

Із вищесказаного зрозуміло, що для висновку про стійкість руху системи велике значення має питання про знак дійсних частин коренів характеристичного рівняння. Тобто, важливо знати необхідні і достатні умови, при яких корені рівняння мають від'ємні дійсні частини. Такі умови повинні задовольняти критерію Гурвіца.

Розкриємо визначник (22.21), групуючи члени за степенями λ:

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + ... + a_{n-1}\lambda + a_n = 0. \qquad (22.22)$$

Для визначення стійкості руху за рівняннями першого наближення необхідно наперед знати, коли дійсні частини усіх коренів характеристичного рівняння будуть від'ємними, не розв'язуючи характеристичного рівняння, не обчислюючи його корені. Для цього будують із коренів характеристичного рівняння a_o, a_1, ..., a_n (22.22) матрицю Гурвіца

$$\begin{Vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{Vmatrix}. \qquad (22.23)$$

Складемо із матриці (22.23) головні діагональні мінори:

$$\Delta_1 = a_1; \;\; \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix}; \; \dots \; ; \;\; \Delta_n = a_n \Delta_{n-1}. \qquad (22.24)$$

Для того, щоб всі корені характеристичного рівняння (22.22) мали від'ємні дійсні частини, необхідно і достатньо, щоб всі головні діагональні мінори (22.24) були додатними, тобто:

$$\Delta_1 > 0, \;\; \Delta_2 > 0, \;\; \dots, \;\; \Delta_{n-1} > 0, \;\; \Delta_n > 0. \qquad (22.25)$$

Приклад 22.3.

Скласти рівняння першого наближення математичного маятника довжиною l, кут відхилу від вертикалі φ (рис. 22.4)

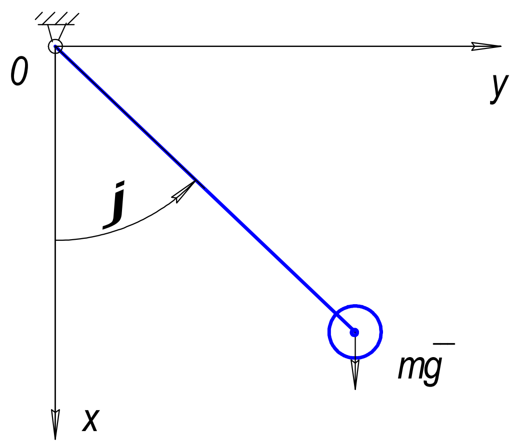


Рис. 22.4

Розв'язання.

Коливання математичного маятника описуються диференціальним рівнянням:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\varphi. \tag{а}$$

Початкові умови: $\varphi(0) = \alpha$;

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_0 = 0. \tag{б}$$

Частинний розв’язок рівняння (а) шукаємо у формі

$$\varphi = f(t), \tag{в}$$

де $f(t)$ – деяка періодична функція.

Тоді незбурений рух має вираз

$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin f(t). \tag{г}$$

Збурений рух характеризується кутом

$$\varphi = f(t) + x. \tag{д}$$

Підставимо (д) в вираз (а)

$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} + \frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\left(f(t) + x\right).$$

Диференціальне рівняння збуреного руху

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\left(f(t) + x\right) + \frac{g}{l}\sin f(t). \tag{е}$$

Розкладемо рівняння (е) в ряд по степенях x:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{g}{l}x\cos f(t) + \frac{g}{2l}x^2\sin f(t) + \ldots \qquad \text{(ж)}$$

Відкидаючи нелінійні члени, отримаємо із (ж) рівняння першого наближення

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{g}{l}x\cos f(t). \qquad \text{(з)}$$

Запишемо рівняння (з) в вигляді системи двох рівнянь в формі Коші:

$$\dot{x}_1 = x_2;$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{g}{l}x_1\cos f(t).$$

22.6. Прямий метод Ляпунова. Функції Ляпунова. Дослідження стійкості автономних систем

Прямий або другий метод Ляпунова характеризується тим, що при його застосуванні не потрібно інтегрувати диференціальні рівняння збуреного руху. Цей метод пов'язаний з пошуком деяких функцій V змінних збурення t, x_1, x_2, ..., x_N, де ($x_j = y_j - f_j(t)$) - збурення, y_j - частинний розв'язок збуреного руху, $f_j(t)$ - частинний розв'язок незбуреного запрограмованого руху (основного). Метод пов'язаний також з вивченням властивостей цих функцій, які називаються функціями Ляпунова, і властивостей їх похідних.

Розглянемо лише усталений (стаціонарний) рух (автономні системи), для яких $V = V(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_N)$ в околі $|x_j| < h(j = 1,\ 2,\ \ldots,\ N)$, де h -

достатньо мале додатне число, вважаючи ці функції безперервно диференційованими, однозначними і такими, що перетворюються на нуль на початку координат $x_{1o} = x_{2o} = ... = x_{No} = 0$.

В теорії стійкості прямий метод вважається основним. Він є якісним методом, оскільки не потребує отримання розв’язку рівнянь руху, а розглядає властивості „пробних” функцій, тобто функцій Ляпунова.

Найпростішим прикладом „пробної” функції може слугувати вираз потенціальної енергії системи, за допомогою якого можна встановити стійкість або нестійкість рівноваги.

Похідна функції Ляпунова визначається з виразу:

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial V}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial t}. \tag{22.26}$$

Крім цього, функції Ляпунова можуть мати спеціальні властивості.

Функцію V називають додатно-визначеною в околі $\left| x_j \right| < h$, якщо в будь-якій точці цього околу, крім початку координат (де функція V дорівнює нулю), виконується умова $V > 0$.

Якщо $V < 0$, то функція V називається від’ємно-визначеною. У цих двох випадках функція V називається знаковизначеною.

Якщо в цьому околі $\left| x_j \right| < h$ функція V набуває значення тільки одного знака ($V \geq 0$ або $V \leq 0$), але може перетворюватись на нуль не тільки на початку координат, то вона називається знакосталою (додатною чи від’ємною); якщо ж функція V набуває як додатного, так і від’ємного значень, то вона називається знакозмінною в цьому околі.

Наприклад, функція $V = x_1^2 - x_2^2$ при $N = 2$ - знакозмінна, а функція $V = x_1^2 + x_2^2$ - додатно-визначена, функція $V = x_1^2$ - знакостала, бо вона перетворюється на нуль на осі Ox_2, а поза межами цієї осі вона додатна.

Отже, якщо V є квадратичною формою, то знаковизначеність можна встановити за допомогою критерію Сильвестра (§22.1.). Якщо V - форма непарного степеня, то зрозуміло, вона є знакозмінною функцією.

Таким чином, функціями Ляпунова називаються функції змінних $x_1,\ x_2,\ ...,x_N$, *кожна з яких в деякій* n*-вимірній області, що містить початок координат простору, є знаковизначеною, знакосталою або знакозмінною і має в цій області неперервні частинні похідні першого порядку за змінними* $x_1,\ x_2,\ ...,x_N$, *тобто має повний диференціал.*

Питання про стійкість незбуреного руху розв'язується на підставі дослідження поведінки функції $V(x_1,\ x_2,\ ...,x_N)$ і їх похідних за часом. При цьому необхідно враховувати, що змінні $x_1,\ x_2,\ ...,x_N$ є розв'язками диференціальних рівнянь збуреного руху. Вивчення поведінки функції V вздовж траєкторії руху системи дозволяє зробити висновок про поведінку траєкторій механічної системи, яка досліджується, тобто розв'язати питання про стійкість або нестійкість руху.

Оскільки питання про знаковизначеність квадратичної форми розв'язується досить просто (критерій Сильвестра (22.6)), то при побудові функцій Ляпунова за основу вибирають знаковизначену квадратичну форму і при необхідності додають форми вищих порядків. Отримана функція матиме ті ж властивості знаковизначеності, що і вихідна квадратична форма.

Приклад 22.4.

Розглянемо функцію:

$$V = 1 + \sin^2 x_1 - \cos(x_1 - x_2).$$

Розкладемо цю функцію в ряд по степенях x_1 і x_2:

$$\sin^2 x_1 = x_1^2 + \ldots; \quad \cos(x_1 - x_2) = 1 - \frac{1}{2}(x_1 - x_2)^2 + \ldots,$$

де точками позначені члени, які містять x_1 і x_2 у степені вище другої. Вносячи ці розкладання у функцію V, отримаємо:

$$V = 1 + x_1^2 - 1 + \frac{1}{2}(x_1 - x_2)^2 + \ldots ,$$

$$V = \frac{1}{2}\left(3x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2\right) + \ldots .$$

Складемо матрицю коефіцієнтів квадратичної частини функції V (вздовж головної діагоналі розташовані коефіцієнти при квадратах змінних), елементи C_{12} і C_{21} дорівнюють половині коефіцієнта при добутку x_1x_2.

$$\begin{Vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Обчислимо головні діагональні мінори:

$$\Delta_1 = 3, \quad \Delta_2 = 3 - 1 = 2 .$$

Оскільки $\Delta_k > 0$, тоді, згідно критерію Сільвестра (22.6), функція V є додатно-визначеною.

22.6.1. Теореми Ляпунова для прямого методу

Теорема про стійкість руху.

Якщо для системи диференціальних рівнянь збуреного руху існує така знаковизначена в області $x_j < h$ *функція* $V(x_1,\ x_2,\ \ldots, x_N)$, *що її* *повна похідна за часом* $\dot{V}$ *на основі цих рівнянь є знакосталою протилежного з функцією* V *знака, або тотожно рівною нулю, то незбурений основний рух є стійким.*

Нехай функція $V\left(x_1,\ x_2,\ ...,x_N\right)$ є знаковизначеною додатною, а, виходячи з умов теореми, повна похідна від функції V за часом, яка взята на основі рівнянь збуреного руху, є знакосталою і від'ємною, то основний незбурений рух є стійким.

$$\frac{dV}{dt}=\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial V}{\partial x_j}\frac{dx_j}{dt}\le 0\,.$$

Теорема про асимптотичну стійкість руху.

Якщо диференціальні рівняння збуреного руху такі, що існує знаковизначена функція $V\left(x_1,\ x_2,\ ...,x_N\right)$, *похідна якої* $\dot{V}$ *на основі цих рівнянь є знаковизначеною функцією протилежного із* V *знака, то незбурений (основний) рух є асимптотично стійким.*

Перша теорема Ляпунова про нестійкість руху.

Якщо для диференціальних рівнянь збуреного руху існує така функція $V\left(x_1,\ x_2,\ ...,x_N\right)$, *похідна від якої на основі цих рівнянь є знакосталою функцією, а сама функція* V *не є знакосталою протилежного знака, то незбурений (основний) рух є нестійким.*

Друга теорема Ляпунова про нестійкість руху.

Якщо для диференціальних рівнянь збуреного руху існує така функція V, *що її похідна* $\dot{V}$ *на основі цих рівнянь може бути подана у формі:*

$$\dot{V}=\alpha V+W\,,$$

де α *- додатна стала* $(\alpha>0)$, *а* W *- тотожно перетворюється на нуль* *або є знакосталою функцією, і якщо в останньому випадку функція V не є знакосталою, протилежною із W знаком, то незбурений рух є нестійким.*

Приклад 22.5.

Дослідимо прямим методом Ляпунова стійкість руху моделі автомобіля масою m і моментом інерції відносно поперечної осі, що проходить через центр мас - mr^2, де r - радіус інерції кузова, $C_П$, $C_З$ - коефіцієнти жорсткості передніх і задніх ресор (рис. 22.5).

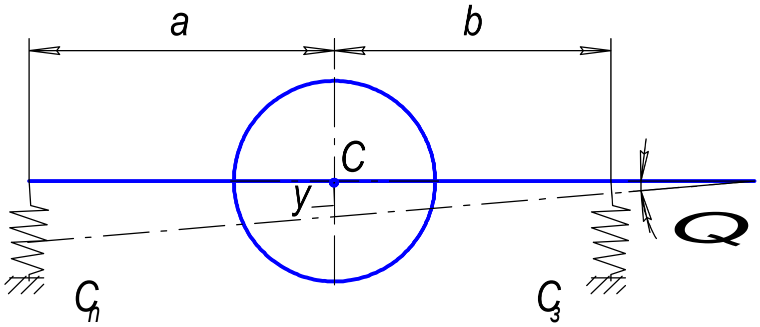


Рис. 22.5

Розв'язання.

Розглянемо повздовжні коливання автомобіля. В процесі коливань його положення визначається двома узагальненими координатами: вертикальним переміщенням y центра ваги (точки C) і кутом повороту рами Θ.

Кінетична енергія автомобіля

$$T = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{1}{2}I_c\dot{\Theta}^2 = \frac{1}{2}m\left(\dot{y}^2 + r^2\dot{\Theta}^2\right).$$

Потенціальна енергія деформації ресор

$$П = C_n\left(y + a\Theta\right)^2 + C_З\left(y - b\Theta\right)^2.$$

Рівняння Лагранжа другого роду:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}}\right)-\frac{\partial T}{\partial y}=-\frac{\partial \Pi}{\partial y};$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\Theta}}\right)-\frac{\partial T}{\partial \Theta}=-\frac{\partial \Pi}{\partial \Theta}.$$

Підставляючи в рівняння похідну від T і Π, отримаємо диференціальні рівняння коливального руху автомобіля

$$m\ddot{y}+2C_n\left(y+a\Theta\right)+2C_3\left(y-b\Theta\right)=0;$$

$$mr^2\ddot{\Theta}+2C_n\left(y+a\Theta\right)a+2C_3\left(y-b\Theta\right)b=0.$$

Подамо диференціальні рівняння у нормальній формі Коші

$$\dot{x}_1=x_2;\;\; \dot{x}_2=-\frac{1}{m}\left(2C_n\left(x_1+ax_3\right)+2C_3\left(x_1-bx_3\right)\right);$$

$$\dot{x}_3=x_4;\;\; \dot{x}_4=-\frac{1}{mr^2}\left(2C_n\left(x_1+ax_3\right)a+2C_3\left(x_1-bx_3\right)b\right).$$

Це диференціальні рівняння збуреного руху автомобіля.

Виберемо функцію Ляпунова у формі повної механічної енергії

$$V=T+\Pi=\frac{1}{2}m\left(\dot{y}^2+r^2\dot{\Theta}^2\right)+C_n\left(y+a\Theta\right)^2+C_3\left(y-b\Theta\right)^2.$$

Запишемо функцію Ляпунова в нових змінних

$$V=\frac{1}{2}m\left(x_2^2+r^2x_4^2\right)+C_n\left(x_1+ax_3\right)^2+C_3\left(x_1-bx_3\right)^2.$$

Візьмемо повну похідну від функції Ляпунова за часом:

$$\frac{dV}{dt}=\frac{\partial V}{\partial x_1}\dot{x}_1+\frac{\partial V}{\partial x_2}\dot{x}_2+\frac{\partial V}{\partial x_3}\dot{x}_3+\frac{\partial V}{\partial x_4}\dot{x}_4.$$

В силу рівнянь збуреного руху маємо $\frac{dV}{dt} = 0$ (рух стійкий).

Запитання для самоконтролю:

1. Сформулюйте теорему Лагранжа-Діріхле про достатні умови стану рівноваги.
2. Сформулюйте теорему Ляпунова про нестійкість рівноваги.
3. Що визначає критерій Сільвестра?
4. Як визначається стійкість руху за Ляпуновим?
5. Що таке збурений рух?
6. Що таке асимптотично збурений рух?
7. У чому суть теореми Ляпунова про стійкість руху по першому наближенні?
8. Що визначає критерій Гурвіца?
9. Охарактеризуйте прямий метод Ляпунова.
10. Що таке функції Ляпунова, охарактеризуйте їх властивості.
11. Який порядок дослідження стійкості руху автономних систем?

ЛІТЕРАТУРА

1. Павловський М.А. Теоретична механіка. – К.: Техніка, 2002. – 510 с.
2. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. – М.: Наука, 1986. – 416 с.
3. Яблонский А.А., Никифорова В.М. Курс теоретической механики. Часть 1. Статика. Кинематика. – М.: Высшая школа, 1972. – 436 с.
4. Каплунова А.В., Михаловський В.А. та ін. Методика та приклади розв'язування задач з теоретичної механіки. – К.: Держсільгоспосвіта, 1961. – 365 с.
5. Савин Г.Н., Путята Т.В., Фрадлин Б.Н. Теоретическая механика. – К.: Вища школа, 1971. – 359 с.
6. Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике. – М.: Наука, 1972. – 258 с.
7. Дроннік Ю.М., Кучеренко С.І., Тіщенко А.М. Теоретична механіка. Курс лекцій. – Харків: Око, 2002. – 456 с.
8. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике / Под общ. ред. проф. А.А. Яблонского. – М.: Высшая школа, 1978. – 326 с.
9. Булгаков В.М., Головач І.В. Теоретична механіка. Кінематика. Навчальний посібник і завдання для виконання розрахунково-графічних робіт. – К.: НАУ, 2002. – 181 с.
10. Булгаков В.М., Литвинов О.І., Васьков В.І., Головач І.В., Войтюк Д.Г. Теоретична механіка. Курс лекцій. Частина І. – К.: НАУ, 2003. – 368 с.

ДОДАТКИ

І. Формули обчислення похідних

1. $y = C$; $\dot{y} = 0$; (C – стала величина).

2. $y = x$; $\dot{y} = 1$.

3. $y = x^n$; $\dot{y} = n \cdot x^{n-1}$.

4. $y = \sqrt{x}$; $\dot{y} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

5. $y = \dfrac{1}{x}$; $\dot{y} = -\dfrac{1}{x^2}$.

6. $y = a^x$; $\dot{y} = a^x \cdot ln\, a$.

7. $y = e^x$; $\dot{y} = e^x$.

8. $y = log_a x$; $\dot{y} = \dfrac{log_a e}{x} = \dfrac{1}{x \cdot ln\, a}$.

9. $y = ln\, x$; $\dot{y} = \dfrac{1}{x}$.

10. $y = sin\, x$; $\dot{y} = cos\, x$.

11. $y = cos\, x$; $\dot{y} = -sin\, x$.

12. $y = tgx$; $\dot{y} = \dfrac{1}{cos^2 x} = sec^2 x$.

13. $y = ctgx$; $\dot{y} = -\dfrac{1}{sin^2 x} = -csc^2 x$.

14.	$y = arcsin\, x$;	$\dot{y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
15.	$y = arccos\, x$;	$\dot{y} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
16.	$y = arctg\, x$;	$\dot{y} = \frac{1}{1+x^2}$.
17.	$y = arcctg\, x$;	$\dot{y} = -\frac{1}{1+x^2}$.
18.	$y = \frac{1}{sin\, x}$;	$\dot{y} = -\frac{cos\, x}{sin^2 x}$.
19.	$y = \frac{1}{cos\, x}$;	$\dot{y} = -\frac{sin\, x}{cos^2 x}$.

II. Правила обчислення похідних u, v – функції незалежної змінної

1.	$y = Cu$;	$\dot{y} = C\dot{u}$; (C – стала величина).
2.	$y = u \pm v$;	$\dot{y} = \dot{u} \pm \dot{v}$.
3.	$y = u \cdot v$;	$\dot{y} = \dot{u}v + u\dot{v}$.
4.	$y = \frac{u}{v}$;	$\dot{y} = \frac{\dot{u}v - u\dot{v}}{v^2}$.
5.	$y = \frac{C}{u}$;	$\dot{y} = -\frac{C}{u^2} \cdot \dot{u}$; ($C$ – стала величина).
6.	$y = u^n$;	$\dot{y} = nu^{n-1} \cdot \dot{u}$.

III. Таблиця простих інтегралів

1. $\int 0 \cdot dx = C$; (C – довільна стала).

2. $\int 1 \cdot dx = \int dx = x + C$.

3. $\int x^n \cdot dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$; $(n \neq -1)$.

4. $\int \dfrac{1}{x} \cdot dx = \int \dfrac{dx}{x} = ln|x| + C$.

5. $\int a^x \cdot dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$; $(a > 0;\ a \neq 1)$.

6. $\int e^x \cdot dx = e^x + C$.

7. $\int \dfrac{1}{1+x^2} \cdot dx = \int \dfrac{dx}{1+x^2} = arctg\, x + C$.

8. $\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx = \int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = arcsin\, x + C$.

9. $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$.

10. $\int \cos x\, dx = \sin x + C$.

11. $\int \dfrac{1}{sin^2\, x} \cdot dx = \int \dfrac{dx}{sin^2\, x} = -ctg\, x + C$.

12. $$\int \frac{1}{cos^2 x} \cdot dx = \int \frac{dx}{cos^2 x} = tg\, x + C.$$

13. $$\int \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot dx = \int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C.$$

14. $$\int \frac{1}{1-x^2} \cdot dx = \int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C.$$

15. $$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+n}} \cdot dx = ln \left| x + \sqrt{x^2+n} \right| + C.$$

IV. Правила інтегрування

$\int a\, f(x) dx = a \int f(x) dx$; ($a \neq 0$ – стала величина).

$$\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx.$$

ЗМІСТ

Булгаков Володимир Михайлович
Литвинов Олег Іванович
Васьков Василь Іванович
Головач Іван Володимирович
Войтюк Дмитро Григорович

ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА

КУРС ЛЕКЦІЙ

ЧАСТИНА II

Рекомендовано
Міністерством аграрної політики України
як підручник для студентів вищих
навчальних закладів технічного профілю
3-4 рівнів акредитації

Видавничий центр Національного аграрного університету
Свідоцтво про державну реєстрацію
сер. КВ № 2465 від 12.03.1997 р.

Редактор ***Талюта Т.І.***
Макетування ***Березовий М.Г.***

Здано для склад. 19.12.2004. Підп. до друку 28.12.2004.
Формат 60×84/16. Папір офсет. №1. Офс. друк.
Ум. друк. арк. 21,13. Обл.-вид. арк. 22,5. Наклад 500 прим.
Ціна 28 грн.
Замовлення _______
ИБ № _______

Видавництво Національного аграрного університету
вул. Героїв оборони, 15, м. Київ, 03041, Україна

Видавничий центр Національного аграрного університету
03041, м. Київ, Сільськогосподарський пров., 4
Тел. (044)267-8434, 267-8155