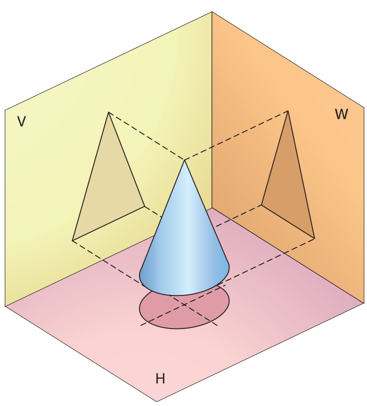
М. І. Бурда, Н. А. Тарасенкова

ГЕОМЕТРІЯ

Підручник для 10 класу
загальноосвітніх навчальних закладів

Академічний рівень

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України



Київ
«Зодіак-ЕКО»
2010

ББК 22.151я721
Б91

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
(наказ Міністерства освіти і науки України від 3 березня 2010 р., № 177)

Видано за рахунок державних коштів. Продаж заборонено

Наукову експертизу проводив ***Інститут математики Національної академії наук України***;
психолого-педагогічна експертизу проводив ***Інститут педагогіки Національної академії педагогічних наук***;
експерти, які здійснювали експертизу:
Г. А. Губа — вчитель-методист ЗОШ I — III ступенів № 6, м. Ясинувата, Донецька область;
І. І. Дзюба — методист Куликівського РМК, Чернігівська область;
С. І. Остапенко — вчитель-методист Володимирецького районного колегіуму, Рівненська область;
В. І. Тоточенко — доцент кафедри алгебри, геометрії та математичного аналізу Херсонського державного університету, кандидат педагогічних наук

ТВОРЧА ГРУПА РОЗРОБНИКІВ ПІДРУЧНИКА

Юрій КУЗНЕЦОВ – керівник проекту, розробник концепцій: дизайну, художнього оформлення;
Михайло БУРДА, Ніна ТАРАСЕНКОВА – автори тексту і методичного апарату;
Олена ПОПОВИЧ – редактор-організатор;
Андрій ВІКСЕНКО – макет, художнє оформлення;
Валентина МАКСИМОВСЬКА – організатор виробничого процесу;
Галина КУЗНЄЦОВА – економічний супровід проекту;
Роман КОСТЕНКО – маркетингові дослідження підручника;
Андрій КУЗНЕЦОВ – моніторинг апробації підручника

ISBN 978-966-7090-72-2

ЗМІСТ

Дорогі учні!

Ви розпочинаєте вивчення стереометрії – розділу геометрії про властивості фігур у просторі. У 9 класі ви ознайомилися з деякими властивостями таких фігур. Знаєте, яке взаємне розміщення у просторі прямих і площин, як знаходити поверхні та об'єми окремих видів многогранників і тіл обертання.

Тепер ви розширите і поглибите свої знання зі стереометрії. Дізнаєтесь про аксіоми стереометрії та наслідки з них, про властивості паралельних та перпендикулярних прямої і площини, двох площин та про їх ознаки, як обчислювати у просторі відстані й кути. Виробите вміння застосовувати вивчені поняття, властивості й ознаки під час розв'язування задач та на практиці. Ви переконаєтесь, що знання і вміння зі стереометрії потрібні багатьом спеціалістам – архітекторам, будівельникам, конструкторам, токарям, фрезерувальникам та ін.

Як успішно вивчати геометрію за цим підручником? Увесь матеріал поділено на три розділи, а розділи – на параграфи. У кожному параграфі є теоретичний матеріал і задачі. Вивчаючи теорію, особливу увагу звертайте на текст, обведений рамкою. Це – найважливіші означення і властивості геометричних фігур. Їх потрібно зрозуміти, запам'ятати і вміти застосовувати під час розв'язування задач. Інші важливі відомості надруковано **жирним** шрифтом. *Курсивом* виділено терміни (наукові назви) понять.

Перевірити, як засвоєно матеріал параграфа, повторити його допоможуть запитання рубрики «Згадайте головне», які є після кожного параграфа. А після кожного розділу вміщено контрольні запитання і тестові завдання, за якими можна перевірити, як засвоєно тему.

Ознайомтеся з порадами до розв'язування задач, із розв'язаною типовою задачею.

Задачі підручника мають чотири рівні складності.

Номери задач початкового рівня складності позначено штрихом ('). Це підготовчі вправи для тих, хто не впевнений, що добре зрозумів теоретичний матеріал. Номери з кружечком (°) позначають задачі середнього рівня складності. Усім треба вміти їх розв'язувати, щоб мати змогу вивчати геометрію далі. Номери задач достатнього рівня складності не мають позначок біля номера. Навчившись розв'язувати їх, ви зможете впевнено демонструвати достатній рівень навчальних досягнень. Зірочкою (*) позначено задачі високого рівня. Якщо не зможете відразу їх розв'язати, не засмучуйтесь, а виявіть терпіння і наполегливість. Радість від розв'язання складної задачі буде вам нагородою.

Розв'язавши задачі, виділені жирним шрифтом, запам'ятайте їх формулювання. Ці геометричні твердження можна застосовувати до розв'язування інших задач.

Скориставшись рубрикою «Дізнайтеся більше», ви зможете поглибити свої знання.

У підручнику використано спеціальні позначки (піктограми). Вони допоможуть краще зорієнтуватися в навчальному матеріалі.

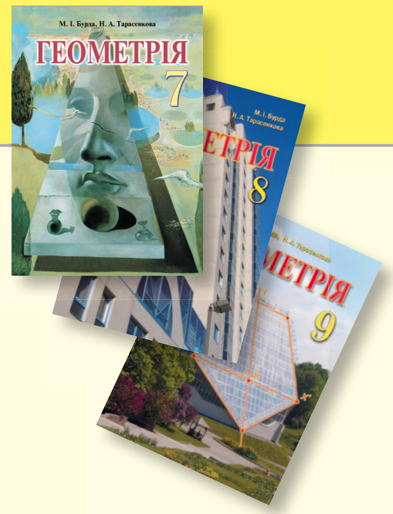
Прочитайте — **Як записати**

Поміркуйте — **Як діяти**

Запам'ятайте — **Типова задача**

Бажаємо вам успіхів у пізнанні нового і задоволення від навчання!

ПОВТОРЕННЯ КУРСУ ПЛАНІМЕТРІЇ



У розділі повторите:

- основні поняття планіметрії;
- аксіоми – твердження, істинність яких приймають без доведень;
- основні властивості геометричних фігур та їх ознаки;
- методи розв'язування геометричних задач

ОПОРНІ ФАКТИ ПЛАНІМЕТРІЇ

Ви знаєте, що в планіметрії *основними фігурами* є точка і пряма, а *основними відношеннями* – «належати», «лежати між», «накладання». Вони вводяться без означень. Використовуючи ці поняття, ми даємо означення іншим фігурам (променю, відрізку, куту тощо) та відношенням (рівності, подібності, паралельності тощо). Так само, кілька перших тверджень приймають як істинні без доведень. Їх називають *аксіомами*. Всі інші твердження доводять, спираючись на аксіоми, означення понять та раніше доведені теореми.

АКСІОМИ ПЛАНІМЕТРІЇ

1. Існують точки, що лежать на прямій, і точки, що їй не належать.

2. Через будь-які дві точки можна провести пряму і тільки одну.

3. З трьох точок прямої одна і тільки одна лежить між двома іншими.

4. Будь-яка фігура F накладанням суміщається сама із собою.

5. Якщо фігура F_1 накладанням суміщається з фігурою F_2, то і фігура F_2 накладанням суміщається з фігурою F_1.

6. Якщо фігура F_1 накладанням суміщається з фігурою F_2, а фігура F_2 – з фігурою F_3, то фігура F_1 накладанням суміщається з фігурою F_3.

→ **7.** $\dfrac{\text{Довжина}}{\text{Градусна міра}}$ кожного $\dfrac{\text{відрізка}}{\text{кута}}$ більша за нуль.

→ **8.** $\dfrac{\text{На промені від його початку}}{\text{Від променя по один бік від нього}}$ можна відкласти тільки один $\dfrac{\text{відрізок даної довжини}}{\text{кут даної градусної міри}}$.

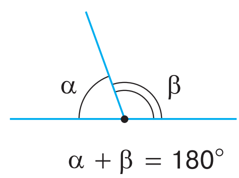
→ **9.** $\dfrac{\text{Довжина відрізка}}{\text{Градусна міра кута}}$ дорівнює сумі $\dfrac{\text{довжина відрізків}}{\text{градусних мір кутів}}$, на які він розбивається $\dfrac{\text{будь-якою його точкою}}{\text{будь-яким променем, що проходить між сторонами кута}}$.

→ **10.** *(Аксіома паралельних прямих)*. Через будь-яку точку, що не лежить на даній прямій, можна провести тільки одну пряму, паралельну даній.

Для спрощення викладу планіметрії деякі аксіоми ми не формулювали у підручниках з геометрії для 7 – 9 класів, але ними користувалися.

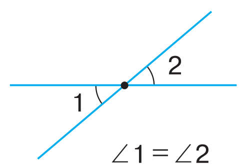
КУТИ І ПАРАЛЕЛЬНІ ПРЯМІ

Два кути називаються *суміжними*, якщо в них одна сторона спільна, а дві інші сторони є доповняльними променями (мал. 1). Сума суміжних кутів дорівнює 180°.



Мал. 1

Два кути називаються *вертикальними*, якщо сторони одного кута є доповняльними променями сторін другого (мал. 2). Вертикальні кути рівні.



Мал. 2

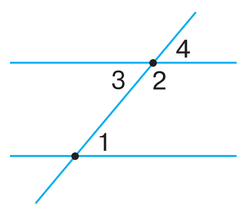
Властивості паралельних прямих. Якщо дві паралельні прямі перетинає третя (мал. 3), то:

1) сума внутрішніх односторонніх кутів дорівнює 180°:

$\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$;

2) внутрішні різносторонні кути рівні: $\angle 1 = \angle 3$;

3) відповідні кути рівні: $\angle 1 = \angle 4$.

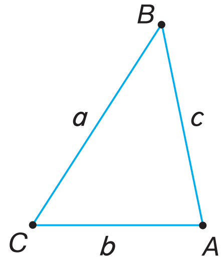


Мал. 3

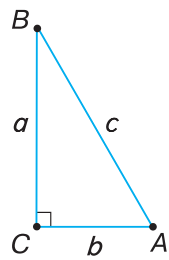
Твердження, обернені до тверджень 1) – 3), – це *ознаки паралельності прямих*. Сформулюйте їх самостійно.

ТРИКУТНИКИ. КОЛО

Залежно від міри кутів, трикутники поділяють на гострокутні, тупокутні й прямокутні, а залежно від довжин сторін – на різносторонні, рівнобедрені й рівносторонні.



Мал. 4



Мал. 5

У будь-якому трикутнику ABC (мал. 4):

1) $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$ (теорема про суму кутів трикутника);

2) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$ (теорема косинусів);

3) $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$ (теорема синусів), де R – радіус описаного кола.

У прямокутному трикутнику ABC (мал. 5):

1) $\angle A + \angle B = 90^\circ$;

2) $c^2 = a^2 + b^2$ (теорема Піфагора);

3) $a = c \sin A = c \cos B = b \operatorname{tg} A$.

Периметр трикутника дорівнює сумі довжин його сторін.

Площу трикутника можна обчислити за формулами:

1) $S = \dfrac{1}{2} ah_a$, де h_a – висота, проведена до сторони a;

2) $S = \dfrac{1}{2} bc \sin A$;

3) $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, де p – півпериметр (формула Герона);

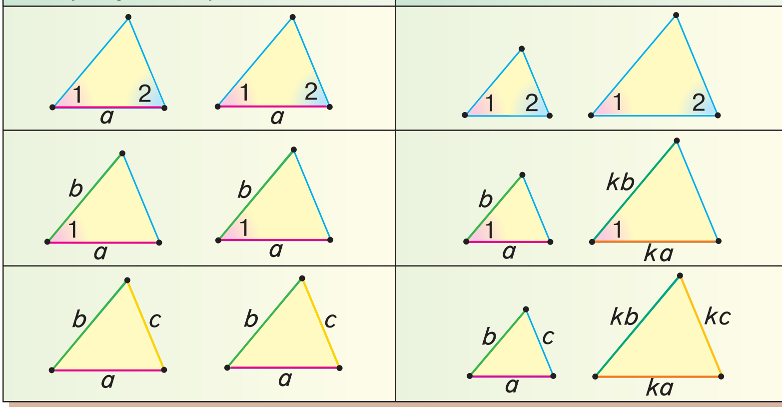
4) $S = pr$, де p – півпериметр, r – радіус вписаного кола;

5) $S = \dfrac{abc}{4R}$, де R – радіус описаного кола.

У таблиці 1 подано ознаки рівності й ознаки подібності трикутників. Сформулюйте їх попарно. У чому їх відмінність?

Таблиця 1

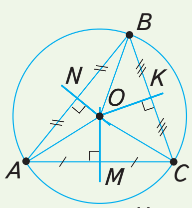
Трикутники рівні, якщо:	Трикутники подібні, якщо:



Спираючись на таблицю 2, сформулюйте означення вписаних і описаних трикутників та їх властивості.

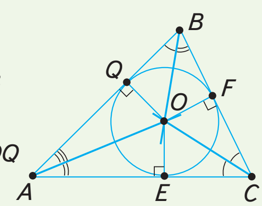
Таблиця 2

КОЛО, ОПИСАНЕ НАВКОЛО ТРИКУТНИКА	КОЛО, ВПИСАНЕ У ТРИКУТНИК



Центр *O* кола — точка перетину

серединних перпендикулярів	*бісектрис кутів*
$R = OA = OB = OC$	$r = OE = OF = OQ$



Навколо будь-якого трикутника / У будь-який трикутник можна описати / вписати коло і до того ж тільки одне

Довжину кола і площу круга можна обчислити за формулами: $C = 2\pi R = \pi D$, $S = \pi R^2 = \frac{\pi D^2}{4}$, де R – радіус кола, D – його діаметр.

ЧОТИРИКУТНИКИ

Спираючись на малюнки та скорочені записи, сформулюйте означення й властивості відомих вам чотирикутників.

Паралелограм *ABCD* (мал. 6):

1) $AD \parallel BC$, $AB \parallel DC$;

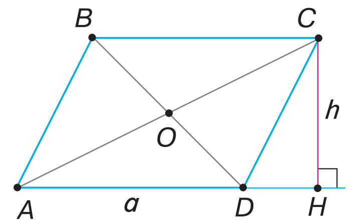
2) $AD = BC$, $AB = DC$;

3) $\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$;

4) $AO = OC$, $BO = OD$;

5) $\angle A + \angle B = 180°$, $\angle A + \angle D = 180°$.

Площа паралелограма: $S = ah$.



Мал. 6

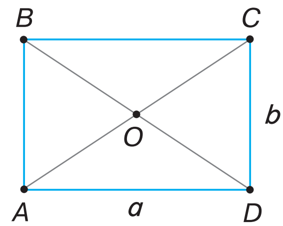
Прямокутник *ABCD* (мал. 7):

1) усі властивості паралелограма;

2) $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90°$;

3) $AC = BD$.

Площа прямокутника: $S = ab$.



Мал. 7

Ромб *ABCD* (мал. 8):

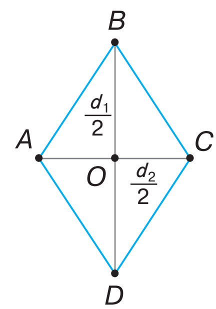
1) усі властивості паралелограма;

2) $AB = BC = CD = DA$;

3) $AC \perp BD$;

4) $\angle ABD = \angle CBD$, $\angle BAC = \angle DAC$.

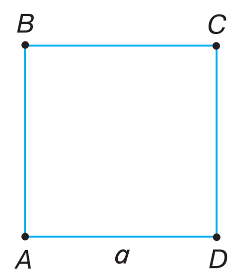
Площа ромба: $S = \frac{1}{2} d_1 d_2$.



Мал. 8

Квадрат *ABCD* (мал. 9): усі властивості паралелограма, прямокутника, ромба.

Площа квадрата: $S = a^2$.



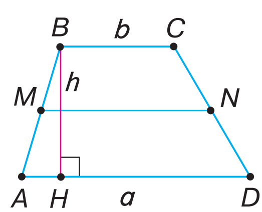
Мал. 9

Трапеція *ABCD* (мал. 10):

1) $AD \parallel BC$;

2) $MN \parallel AD$, $MN \parallel BC$, $MN = \frac{AD + BC}{2}$, де MN – середня лінія.

Площа трапеції: $S = \frac{(a + b)h}{2}$.



Мал. 10

Властивості вписаних і описаних чотирикутників:

1) у вписаному чотирикутнику $MNKP$ (мал. 11): $\angle M + \angle P = 180°$, $\angle N + \angle K = 180°$;

2) в описаному чотирикутнику $ABCD$ (мал. 11): $AB + CD = AD + BC$.

МНОГОКУТНИКИ

Вписані й описані многокутники

Пригадайте означення вписаного многокутника та означення описаного многокутника. Порівняйте ці означення з наведеними у підручнику.

Многокутник називається $\dfrac{\text{вписаним у коло}}{\text{описаним навколо кола}}$,

якщо всі його $\dfrac{\text{вершини лежать на колі}}{\text{сторони дотикаються до кола}}$.

Правильні многокутники

Спираючись на малюнок 12 та скорочені записи, сформулюйте означення та властивості правильних n-кутників.

1) $AB = BC = \ldots = AF$ і $\angle A = \angle B = \ldots = \angle F$;

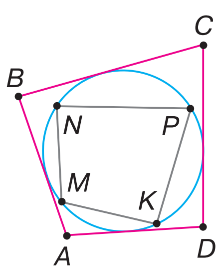
2) точка O є центром описаного кола і вписаного кола;

3) $\angle AOF = \dfrac{360^\circ}{n}$;

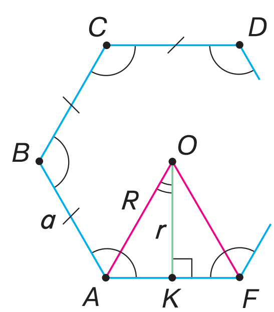
4) $\angle A + \angle B + \ldots + \angle F = 180^\circ\,(n-2)$;

5) $r = \dfrac{AK}{\operatorname{tg}\angle AOK} = \dfrac{a}{2\operatorname{tg}\dfrac{180^\circ}{n}}$;

6) $R = \dfrac{AK}{\sin\angle AOK} = \dfrac{a}{2\sin\dfrac{180^\circ}{n}}$.



Мал. 11



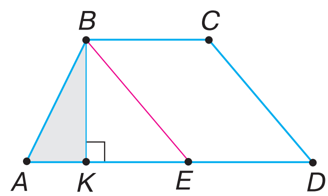
Мал. 12

МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ПЛАНІМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧ

1. ВИКОРИСТАННЯ ВЛАСТИВОСТЕЙ ДОПОМІЖНИХ ТРИКУТНИКІВ.

Трикутник або кілька нерівних трикутників

Задача. Знайдіть висоту трапеції, якщо її основи дорівнюють a і c ($a > c$), а прилеглі до основи a кути дорівнюють α і β.



Мал. 13

Розв'язання. Нехай $ABCD$ — трапеція з основами $AD = a$, $BC = c$ і $\angle A = \alpha$, $\angle D = \beta$ (мал. 13). Проведемо пряму $BE \parallel CD$. У $\triangle ABE$ $AE = a - c$, $\angle BAE = \alpha$, $\angle BEA = \angle CDA = \beta$.

За теоремою синусів знаходимо AB: $\dfrac{AB}{\sin\beta} = \dfrac{AE}{\sin(180^\circ - (\alpha+\beta))}$,

звідки $\quad AB = \dfrac{(a-c)\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}. \qquad (1)$

Проведемо висоту BK трапеції. ΔABK — прямокутний.

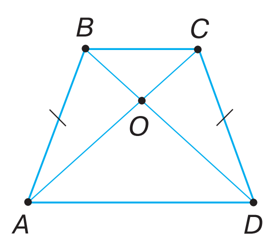
Тоді $\quad BK = AB \cdot \sin\alpha. \qquad (2)$

Підставивши рівність (1) у (2), дістанемо: $BK = \dfrac{(a-c)\sin\beta\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$.

Розв'язуючи геометричні задачі, дотримуйтесь такого плану:
1) відшукайте на малюнку трикутник (або утворіть його, провівши потрібні відрізки), який можна розв'язати (у нашій задачі — це ΔABE);
2) задача буде розв'язаною, якщо знайдений елемент (сторона AB) трикутника задовольняє умову задачі;
3) якщо ні, то, враховуючи знайдений елемент, відшукайте на малюнку другий трикутник (ΔABK). Якщо задачу задовольняє знайдений елемент другого трикутника (висота BK), — вона розв'язана. В іншому випадку розгляньте третій трикутник і т. д. доти, поки не дістанете такий трикутник, сторона чи кут якого дає розв'язок задачі.

Рівні трикутники

Задача. Доведіть, що діагоналі рівнобічної трапеції рівні.



Мал. 14

Розв'язання. Нехай $ABCD$ — рівнобічна трапеція (мал. 14). У трикутників ABD і DCA: AD — спільна сторона, $AB = CD$ за означенням рівнобічної трапеції, $\angle A = \angle D$ за властивістю рівнобічної трапеції. Отже, $\Delta ABD = \Delta DCA$ за двома сторонами і кутом між ними. З рівності трикутників випливає, що $AC = BD$.

Пам'ятайте:

— щоб довести рівність двох відрізків (кутів):

1) виділіть на малюнку два трикутники, сторонами яких є ці відрізки (кути);

2) доведіть, що ці трикутники рівні;

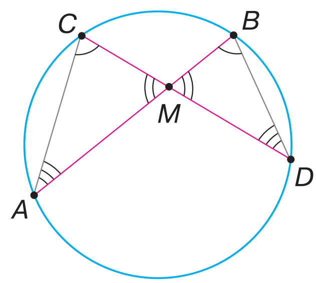
3) зробіть висновок: відрізки (кути) рівні як відповідні сторони (кути) рівних трикутників.

— якщо в задачі треба знайти певний відрізок (кут), то його корисно розглянути як сторону (кут) одного з двох рівних трикутників.

Подібні трикутники

Подібні трикутники використовуються під час доведення рівностей, які містять добутки довжин двох пар відрізків.

Задача. Якщо хорди AB і CD кола перетинаються в точці M, то $AM \cdot BM = CM \cdot DM$. Доведіть.



Мал. 15

Розв'язання. Проведемо аналіз (мал. 15). Припустимо, що рівність, яку треба довести, справджується. Запишемо її у вигляді пропорції $\frac{AM}{CM} = \frac{DM}{BM}$. З пропорції випливає, що трикутники із сторонами AM і CM, DM і BM мають бути подібними. Справді, у них $\angle AMC = \angle DMB$ як вертикальні, $\angle ACM = \angle DBM$ як вписані, що спираються на дугу AD. Отже, $\Delta AMC \sim \Delta DMB$ за двома кутами.

Міркуючи у зворотному напрямі, дістанемо, що $\Delta AMC \sim \Delta DMB$. З подібності цих трикутників випливає пропорційність їх сторін: $\frac{AM}{CM} = \frac{DM}{BM}$. Звідси $AM \cdot BM = CM \cdot DM$.

Пам'ятайте:

— щоб довести рівність добутків двох пар відрізків:

1) припустіть правильність рівності, яку доводите;

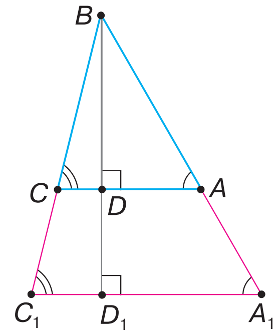
2) запишіть її у вигляді пропорції;

3) відшукайте на малюнку (або побудуйте) трикутники, довжини сторін яких є членами утвореної пропорції;

4) обґрунтуйте подібність цих трикутників.

— якщо в задачі треба знайти певний відрізок, то його корисно розглянути як сторону одного з двох подібних трикутників і скласти відповідну пропорцію.

2. МЕТОД ПОДІБНОСТІ



Мал. 16

Метод подібності часто застосовують у розв'язуванні задач на побудову.

Задача. Побудуйте трикутник за двома кутами A і C та висотою h, проведеною з вершини кута B.

Розв'язання. Знаючи кути A і C, спочатку будуємо який-небудь трикутник A_1BC_1, подібний шуканому, взявши довільно відрізок A_1C_1 (мал. 16). Потім будуємо висоту BD_1 цього трикутника. На промені BD_1 відкладаємо відрізок $BD = h$ і через точку D проводимо $AC \parallel A_1C_1$. ΔABC — шуканий.

Справді, $AC \parallel A_1C_1$, тому $\angle A = \angle A_1$, $\angle C = \angle C_1$ і, отже, два кути трикутника ABC дорівнюють даним кутам. За побудовою, висота $BD = h$. Таким чином, побудований трикутник ABC задовольняє всі вимоги задачі.

Розв'язуючи задачі на побудову методом подібності:

1) виділіть з умови задачі ті дані, які визначають форму шуканого трикутника (відношення відрізків і кути);

2) побудуйте за цими даними допоміжний трикутник, подібний шуканому;

3) побудуйте шуканий трикутник, використавши ті дані умови, які визначають його розміри (довжини відрізків).

3. МЕТОД ГЕОМЕТРИЧНИХ МІСЦЬ

Задача. Побудуйте точку в середині кута ABC, яка рівновіддалена від його сторін і розміщується на відстані d від точки M.

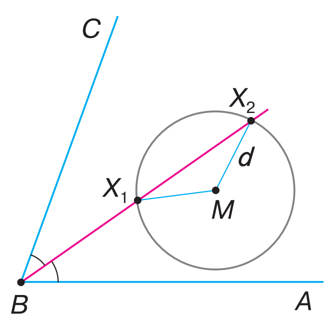
Розв'язання.

Аналіз (мал. 17). Шукана точка X має задовольняти дві вимоги:

1) бути рівновіддаленою від сторін $\angle ABC$;

2) лежати на відстані d від точки M.

Геометричним місцем точок, що задовольняють першу вимогу, є бісектриса $\angle ABC$, а геометричним місцем точок, що задовольняють другу вимогу, є коло з центром M і радіусом d. Шукана точка X лежить на перетині цих геометричних місць.



Мал. 17

Побудова. Будуємо: бісектрису $\angle ABC$; коло з центром M і радіусом d; X — точку перетину бісектриси і кола. Таких точок може бути або дві — X_1 і X_2 (мал. 17), або одна, або жодної.

Розв'язуючи задачі методом геометричних місць:

1) проаналізуйте умову задачі та виділіть шукану точку;

2) з'ясуйте, які дві вимоги вона задовольняє;

3) знайдіть геометричне місце точок, що задовольняють: першу вимогу; другу вимогу;

4) зробіть висновок: шукана точка — точка перетину знайдених геометричних місць.

4. МЕТОД КООРДИНАТ

Розв'язуючи задачу методом координат, дану фігуру слід розміщувати відносно осей координат так, щоб якнайбільше координат потрібних точок дорівнювали нулю, а також одному і тому самому числу. Наприклад, координати вершин прямокутника $ABCD$ доцільно взяти такі: $A\ (0;\ 0)$, $B\ (0;\ b)$, $C\ (a;\ b)$, $D\ (a;\ 0)$.

Задача. Доведіть, що коли в паралелограма діагоналі рівні, то він — прямокутник.

Розв'язання. *Перший крок.* Записуємо задачу мовою координат. Розміщуємо систему координат відносно паралелограма так, щоб його вершини мали координати: $A\ (0;\ 0)$, $B\ (b;\ c)$, $C\ (a + b;\ c)$, $D\ (a;\ 0)$ (мал. 18).

За умовою $AC = BD$. Подаємо відстані між точками A і C, B і D через їх координати:

$$\sqrt{(a+b-0)^2+(c-0)^2}=\sqrt{(a-b)^2+(0-c)^2},$$

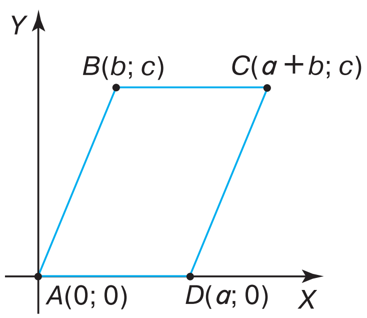
$$(a+b)^2+c^2=(a-b)^2+c^2.$$

Другий крок. Перетворюємо одержану рівність:

$a^2 + 2ab + b^2 + c^2 = a^2 - 2ab + b^2 + c^2$,

звідси $4ab = 0$.

Третій крок. З останньої рівності випливає: оскільки $a > 0$, то $b = 0$. Це означає, що точка $B\,(b;\ c)$ лежить на осі OY. Тому кут BAD прямий, а звідси паралелограм $ABCD$ — прямокутник.



Мал. 18

Розв'язуючи задачу координатним методом, виконайте три кроки:

1) запишіть геометричну задачу мовою координат;

2) перетворіть алгебраїчний вираз;

3) перекладіть знайдений результат мовою геометрії.

5. АЛГЕБРАЇЧНИЙ МЕТОД

Задача. Периметр ромба дорівнює $2p$, сума його діагоналей m. Знайдіть площу ромба.

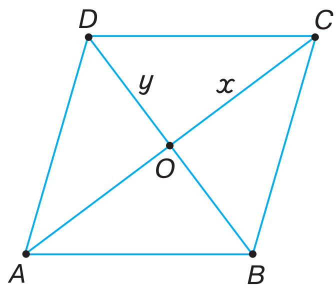
Розв'язання. Позначимо діагоналі ромба через x і y (мал. 19). Тоді, за умовою задачі, матимемо: $x + y = m$.

З прямокутного трикутника AOD: $\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2$, оскільки сторона ромба дорівнює одній четвертій його периметра, $a = \frac{2p}{4} = \frac{p}{2}$. Помноживши обидві частини другого рівняння на 4, дістанемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x + y = m, \\ x^2 + y^2 = p^2. \end{cases}$$

З цієї системи рівнянь визначимо добуток xy. Для цього піднесемо перше рівняння до квадрата і віднімемо від нього друге рівняння, матимемо: $2xy = m^2 - p^2$, звідки $xy = \frac{m^2 - p^2}{2}$.

Площа ромба дорівнює половині добутку діагоналей, отже, $S = \frac{1}{2}xy = \frac{m^2 - p^2}{4}$.



Мал. 19

Розв'язуючи задачі алгебраїчним методом, дотримуйтесь таких етапів:

1) введіть позначення (буквами x, y, z … найчастіше позначаємо шукані величини);

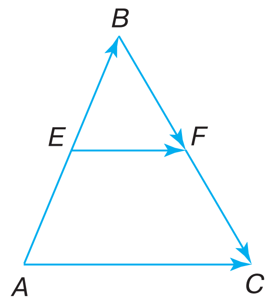
2) складіть рівняння або систему рівнянь, використовуючи відомі геометричні співвідношення між шуканими і даними величинами;

3) розв'яжіть складене рівняння або систему рівнянь. Якщо є потреба, то дослідіть знайдені розв'язки.

ДІЗНАЙТЕСЯ БІЛЬШЕ

МЕТОД ВЕКТОРІВ

Задача. Доведіть, що середня лінія трикутника паралельна стороні й дорівнює її половині.


Мал. 20

Розв'язання. Нехай EF — середня лінія трикутника ABC (мал. 20). Доведемо, що $EF \parallel AC$ і $EF = \frac{1}{2}AC$.

Перший крок. Сформулюємо вимогу задачі мовою векторів: позначимо на малюнку вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BF}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{EF}$.

Тоді вимогу задачі запишемо так: $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

Другий крок. За правилом трикутника, $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BF}$.

Перетворимо цю векторну рівність, враховуючи, що

$$\overrightarrow{EB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{BF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \quad \text{і} \quad \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

Дістанемо:

$$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.$$

Третій крок. З останньої векторної рівності $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ випливає:

1) вектори $\overrightarrow{EF}$ і $\overrightarrow{AC}$ колінеарні і, отже, відрізки EF і AC паралельні;

2) $|\overrightarrow{EF}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}|$, або $EF = \frac{1}{2}AC$.

Щоб застосувати вектори до розв'язування задачі, виконайте три кроки:

1) сформулюйте задачу мовою векторів. Для цього спочатку розгляньте деякі дані у задачі відрізки як вектори. Потім складіть векторну рівність;

2) перетворіть векторну рівність, користуючись законами дій над векторами і відомими векторними рівностями;

3) перекладіть знайдений результат мовою геометрії.

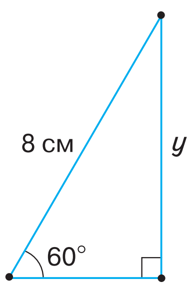
ЗГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

1. Назвіть основні фігури та основні відношення в планіметрії.
2. Сформулюйте аксіоми планіметрії.
3. Які кути називаються суміжними; вертикальними? Які їх властивості?
4. Сформулюйте властивості й ознаки паралельних прямих.

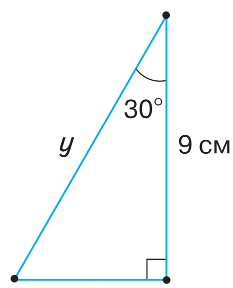
5. Назвіть основні співвідношення між сторонами і кутами довільного трикутника; прямокутного трикутника.
6. За якими формулами можна обчислити площу трикутника?
7. Які є ознаки рівності трикутників? А подібності?
8. Дайте означення паралелограма, прямокутника, ромба, квадрата, трапеції. Які їх властивості?
9. Який многокутник називається вписаним у коло? Описаним навколо кола?
10. Які властивості трикутника, вписаного у коло, і трикутника, описаного навколо кола? А чотирикутника?
11. Що таке правильний многокутник та які його властивості?
12. Як використовують під час розв'язування задач допоміжні трикутники (один або кілька нерівних трикутників, рівні трикутники, подібні трикутники)?
13. У чому полягає суть методу подібності? Методу геометричних місць?
14. Назвіть кроки розв'язування задач методом координат.
15. Поясніть суть етапів алгебраїчного методу розв'язування задач.

РОЗВ'ЯЖІТЬ ЗАДАЧІ

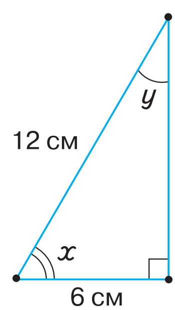
1'. За даними на малюнках 21 — 23, знайдіть x і y.



Мал. 21

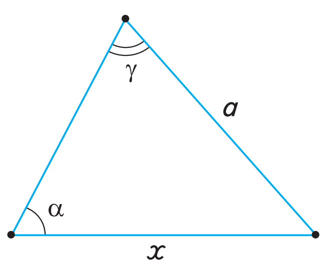


Мал. 22

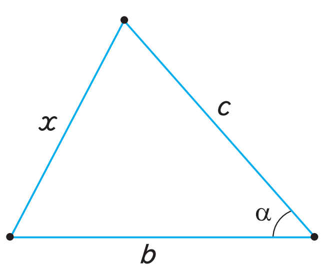


Мал. 23

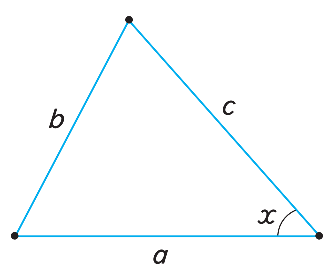
2'. За даними, наведеним на малюнках 24 — 26, запишіть формули для обчислення елемента x трикутника.



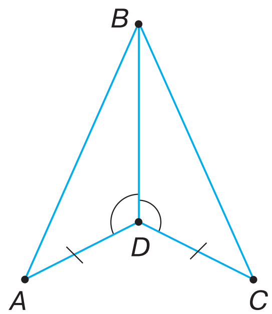
Мал. 24



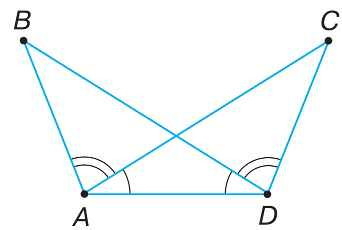
Мал. 25



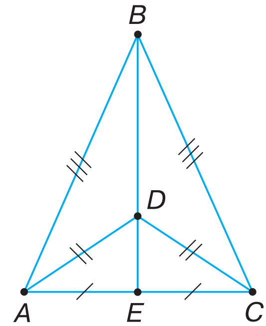
Мал. 26



Мал. 27



Мал. 28



Мал. 29

Розв'язуючи задачі 3 — 19, використайте допоміжні трикутники.

3'. Знайдіть на малюнках 27 — 29 рівні трикутники. Поясніть, чому вони рівні.

4'. Сторони одного трикутника дорівнюють a, b, і c. У подібного трикутника найменша сторона дорівнює d. Знайдіть його сторони, якщо:
1) $a = 6$ см, $b = 9$ см, $c = 12$ см, $d = 18$ см;
2) $a = 13$ см, $b = 7$ см, $c = 15$ см, $d = 14$ см;
3) $a = 9$ см, $b = 6$ см, $c = 5$ см, $d = 10$ см.

5°. Знайдіть кут між діагоналями і більшою стороною прямокутника, якщо його сторони дорівнюють:
1) 5 см і 12 см; 2) 6 см і 8 см; 3) 8 см і 15 см.

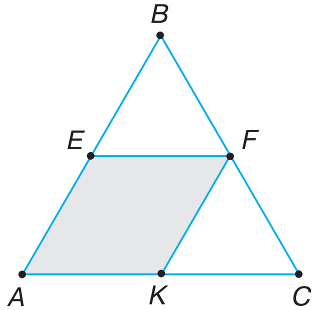
6°. У паралелограма діагональ d, сторона a, а кут між ними α. Знайдіть невідомі діагональ, сторону і кути паралелограма, якщо:
1) $d = 10$ см, $a = 6$ см, $\alpha = 20°$;
2) $d = 12$ см, $a = 5$ см, $\alpha = 35°$;
3) $d = a = 5$ см, $\alpha = 32°$.

7°. Відрізки AB і CD перетинаються в точці O, яка є серединою кожного з них.
Знайдіть: 1) відрізок BC, якщо $AD = 7$ см;
2) кут ABC, якщо $\angle BAD = 72°$.

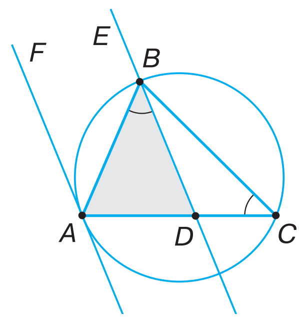
8°. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює b, а бічна сторона — a. У подібного трикутника основа дорівнює c. Знайдіть його периметр, якщо:
1) $a = 18$ см, $b = 12$ см, $c = 6$ см;
2) $a = 5$ см, $b = 8$ см, $c = 12$ см;
3) $a = 25$ см, $b = 14$ см, $c = 28$ см.

9. У рівнобічній трапеції діагональ є бісектрисою гострого кута, а основи дорівнюють a і b. Знайдіть периметр трапеції, якщо:
1) $a = 5$ см, $b = 9$ см;
2) $a = 8$ см, $b = 4$ см.

10. **Доведіть, що коли діагоналі рівнобічної трапеції взаємно перпендикулярні, то середня лінія трапеції дорівнює її висоті.**



Мал. 30



Мал. 31

11. Висота ромба, проведена з вершини тупого кута, ділить сторону навпіл, а менша його діагональ дорівнює 12 см.
Знайдіть:
1) кути ромба;
2) периметр ромба.

12. Через точку O перетину діагоналей паралелограма $ABCD$ проведено пряму, яка перетинає сторони BC і AD у точках M і N.
1) Доведіть, що $OM = ON$;
2) знайдіть сторони AD і BC паралелограма, якщо $BM = 4$ см, $AN = 6$ см.

13. Доведіть, що в рівнобедреному трикутнику:
1) бісектриси, проведені з вершин при основі, рівні;
2) медіани, проведені з цих самих вершин, також рівні.

14. У рівносторонній трикутник вписано ромб, який має з ним спільний кут (мал. 30).
1) Доведіть, що сторона ромба дорівнює половині сторони трикутника;
2) знайдіть периметр ромба, якщо периметр трикутника дорівнює 18 см.

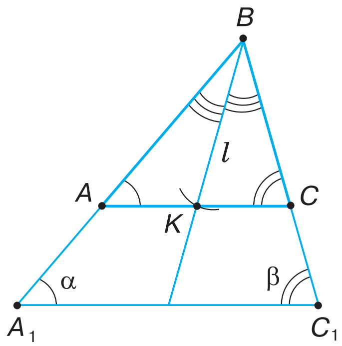
15. **Якщо з точки M поза колом проведено дві січні, що перетинають коло відповідно в точках A, B, C і D, то $AM \cdot BM = CM \cdot DM$.**
Доведіть.

16. **Якщо з точки M поза колом проведено січну, що перетинає коло в точках A і B, та дотичну, що дотикається до кола в точці C, то $CM^2 = AM \cdot BM$.**
Доведіть.

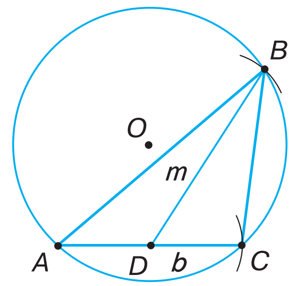
17. Сума кутів при одній з основ трапеції дорівнює 90°. Доведіть, що висота трапеції є середнім пропорційним між проекціями її бічних сторін на основу.

18*. Доведіть, що медіана трикутника ABC, проведена з вершини A, менша від півсуми сторін AB і AC.

19*. Трикутник ABC вписаний у коло (мал. 31). Через вершину A проведено дотичну до кола, через B — пряму, паралельну дотичній і яка перетинає сторону AC чи її продовження в точці D. Доведіть, що $AB^2 = AC \cdot AD$.



Мал. 32



Мал. 33

Розв'яжіть задачі 20 – 26 методом подібності.

20'. Побудуйте відрізок, який є середнім пропорційним між двома відрізками довжиною:
1) 9 см і 1 см;
2) 2 см і 8 см;
3) 4 см і 4 см.

21°. Побудуйте трикутник за такими даними:
1) $\angle A = 60°$, $\angle B = 70°$, $l_c = 4$ см;
2) $\angle A = 50°$, $\angle C = 80°$, $h_b = 3$ см;
3) $\angle B = 40°$, $\angle C = 75°$, $l_a = 5$ см.

22. Побудуйте трикутник за двома кутами α і β та бісектрисою l третього кута. За малюнком 32 складіть план побудови.

23. Побудуйте трикутник за двома кутами і медіаною, проведеною з вершини третього кута.

24. Побудуйте трикутник за кутом, відношенням сторін цього кута і проведеною до третьої сторони:
1) медіаною;
2) висотою.

25. Побудуйте прямокутний трикутник:
1) за відношенням катетів і гіпотенузою;
2) за відношенням катета до гіпотенузи і другим катетом.

26*. Побудуйте паралелограм за відношенням діагоналей, кутом між діагоналями і стороною.

Розв'яжіть задачі 27 – 33 методом геометричних місць.

27'. На прямій *a*, яка перетинає сторони даного кута *A*, знайдіть точку, рівновіддалену від його сторін.

28°. Побудуйте точку, рівновіддалену від сторін кута *ABC* і точок *M* і *K*.

29. **Знайдіть точку, яка знаходиться на відстані *n* від прямої *a* і на відстані *m* від точки *M*. Скільки може бути таких точок?**

30. Побудуйте коло, що проходить через точку *A* і дотикається до прямої *a* в точці *B*.

31. Побудуйте трикутник за стороною *b*, медіаною *m*, проведеною до цієї сторони, і радіусом *R* описаного кола. За малюнком 33 складіть план побудови.

32. Побудуйте рівнобедрений трикутник за основою *a* і радіусом *R* описаного кола.

33*. Побудуйте трикутник за стороною *a*, проведеною до неї медіаною *m* та висотою *h*, проведеною до другої сторони.

Розв'яжіть задачі 34 – 38 методом координат.

34'. Знайдіть довжину відрізка з кінцями в точках:
1) $A(4; -2)$, $B(-2; 6)$;
2) $A(4; -2)$, $B(1; 2)$;
3) $O(0; 0)$, $D(5; 12)$.

35°. CH – висота рівнобедреного трикутника ABC, проведена до основи AB. Знайдіть довжину медіани, проведеної до бічної сторони, якщо:
1) $AB = 12$ см, $CH = 4$ см;
2) $AB = 4$ см, $CH = 6$ см.

36. Доведіть, що середина гіпотенузи прямокутного трикутника рівновіддалена від його вершин.

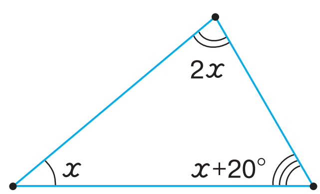
37. Якщо чотирикутник $ABCD$ – прямокутник, то для будь-якої точки M площини справджується рівність: $MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$.
Доведіть.

38. Доведіть, що сума квадратів діагоналей паралелограма дорівнює сумі квадратів його сторін.

39*. Доведіть, що сума квадратів діагоналей трапеції дорівнює сумі квадратів бічних сторін, доданій до подвоєного добутку основ.

Розв'яжіть задачі 40 – 45 алгебраїчним методом.

40'. За даними, наведеними на малюнку 34, знайдіть кути трикутника.



Мал. 34

41°. Одна сторона трикутника удвічі більша за другу, а третя сторона дорівнює *a*. Периметр трикутника дорівнює *P*.
Знайдіть невідомі сторони трикутника, якщо:
1) $a = 5$ см, $P = 35$ см;
2) $a = 7$ см, $P = 43$ см;
3) $a = 8$ см, $P = 29$ см.

42. Сторони прямокутника відносяться, як $m : n$. Складіть формули для знаходження сторін прямокутника, якщо:
1) площа дорівнює S;
2) периметр дорівнює P.

43. Знайдіть сторони чотирикутника, якщо його периметр дорівнює 66 см, одна сторона більша за другу на 8 см і на стільки ж менша від третьої, а четверта сторона — в три рази більша за другу.

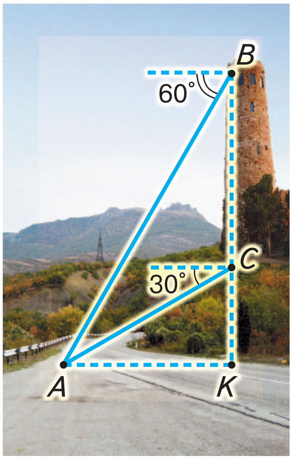
44. **З точки до прямої проведено дві похилі, які дорівнюють 10 см і 17 см, а їх проекції відносяться, як 2 : 5.**
Знайдіть:
1) проекції похилих;
2) відстань від точки до прямої.

45*. Сума діагоналей ромба дорівнює m, а його площа S.
Знайдіть діагоналі ромба, якщо:
1) $m = 10$ см, $S = 8$ см^2;
2) $m = 26$ см, $S = 72$ см^2.

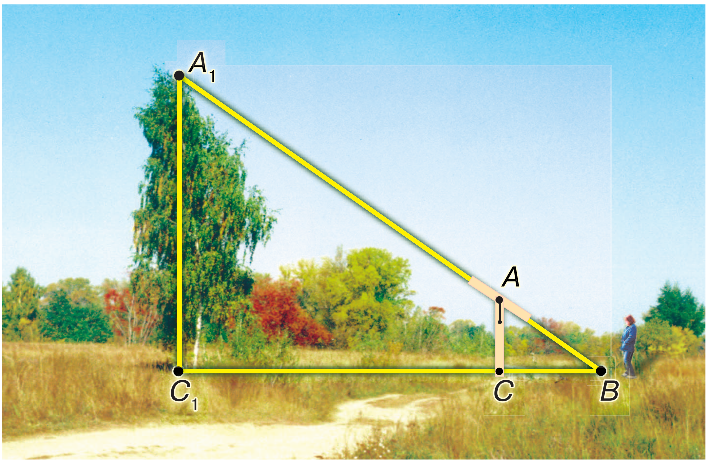
ЗАСТОСУЙТЕ НА ПРАКТИЦІ

46. На горі знаходиться башта висотою 70 м (мал. 35). Деякий предмет (точка A) на підошві гори видно з вершини башти (точка B) під кутом 60° до горизонту, а з її основи (точка C) — під кутом 30° до горизонту.
Знайдіть висоту гори.

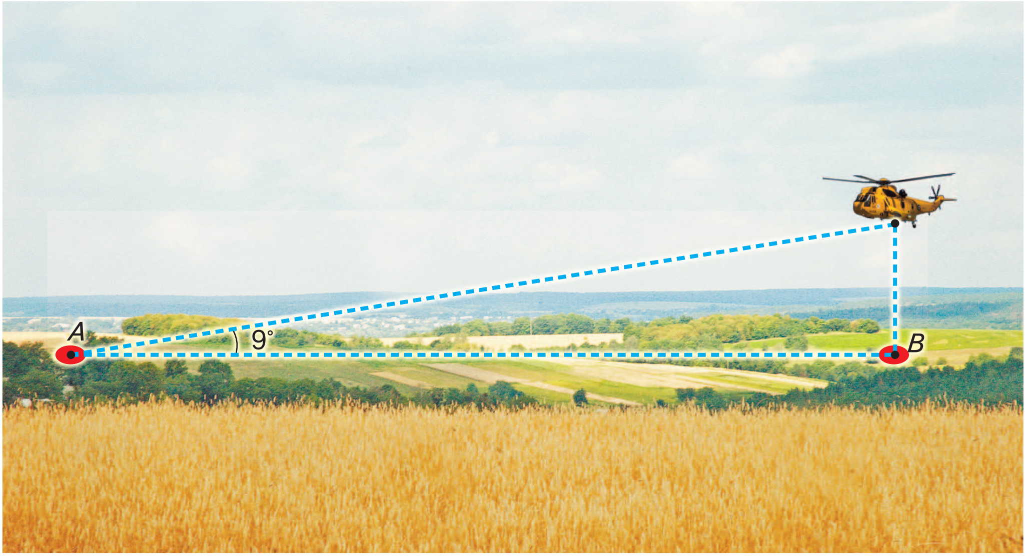
47. На малюнку 36 показано, як можна виміряти висоту дерева, користуючись віхою з планкою.
Поясніть вимірювання.



Мал. 35



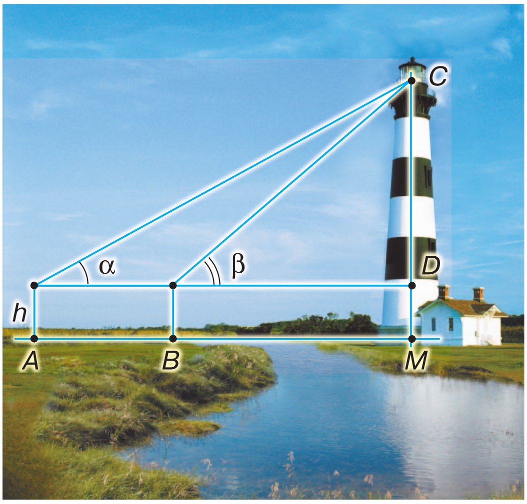
Мал. 36



Мал. 37

48. Спостерігачам, які знаходяться у пункті A, повідомили, що вертоліт знаходиться над об'єктом B на висоті 500 м (мал. 37). Вертоліт видно з пункту A під кутом 9°. Знайдіть відстань від пункту A до об'єкта B.

49. Основа щогли недоступна (мал. 38). Знайдіть висоту щогли, якщо $AB = 10$ м, $\alpha = 45°$, $\beta = 50°$ і висота h приладу, яким вимірювали кути, дорівнює 1,5 м.



Мал. 38

ТЕСТОВЕ ЗАВДАННЯ

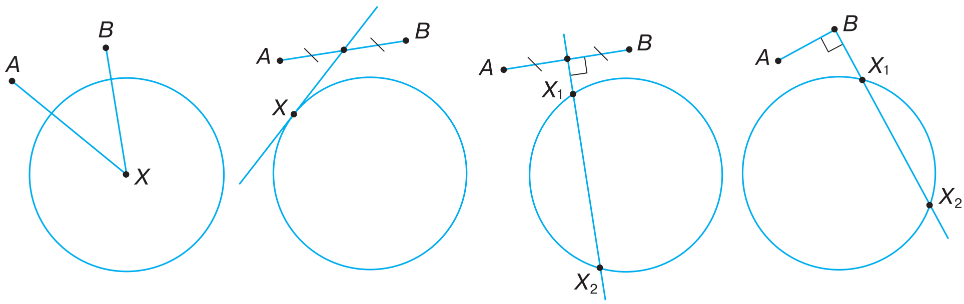
Уважно прочитайте задачі і знайдіть серед запропонованих відповідей правильну. Для виконання тестового завдання потрібно 10 – 15 хв.

1° Відрізки *AB* і *CD* перетинаються в точці *O*, яка є серединою кожного з них. З рівності яких трикутників випливає, що $BC = AD$?

А. ΔBOC і ΔBOD. **Б.** ΔBOC і ΔAOC. **В.** ΔABD і ΔACD. **Г.** ΔBOC і ΔAOD.

2° На даному колі потрібно знайти точку, рівновіддалену від точок *A* і *B*. Яка з побудов правильна?

А. **Б.** **В.** **Г.**



3° З точки кола проведено перпендикуляр до діаметра. Знайдіть довжину перпендикуляра, якщо його основа ділить діаметр на відрізки 4 см і 9 см.

А. 13 см. **Б.** 6 см. **В.** 36 см. **Г.** $\sqrt{13}$ см.

4 Знайдіть довжину медіани *AM* трикутника з вершинами у точках $A(-1; 4)$, $B(2; 3)$, $C(2; -3)$.

А. 3. **Б.** 5. **В.** $\sqrt{17}$. **Г.** $3\sqrt{2}$ см.

5* У прямокутній трапеції *ABCD* ($\angle A = 90°$) основи *AD* і *BC* відповідно дорівнюють 10 см і 3 см, а висота дорівнює 4 см. Знайдіть відстань від середини більшої основи до вершини *C*.

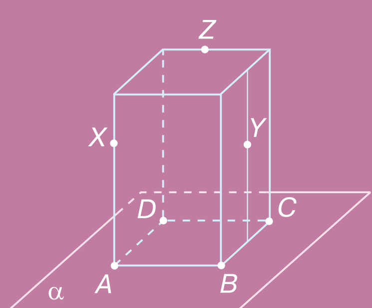
А. 5 см. **Б.** 4 см. **В.** $\sqrt{5}$ см. **Г.** $2\sqrt{5}$ см.

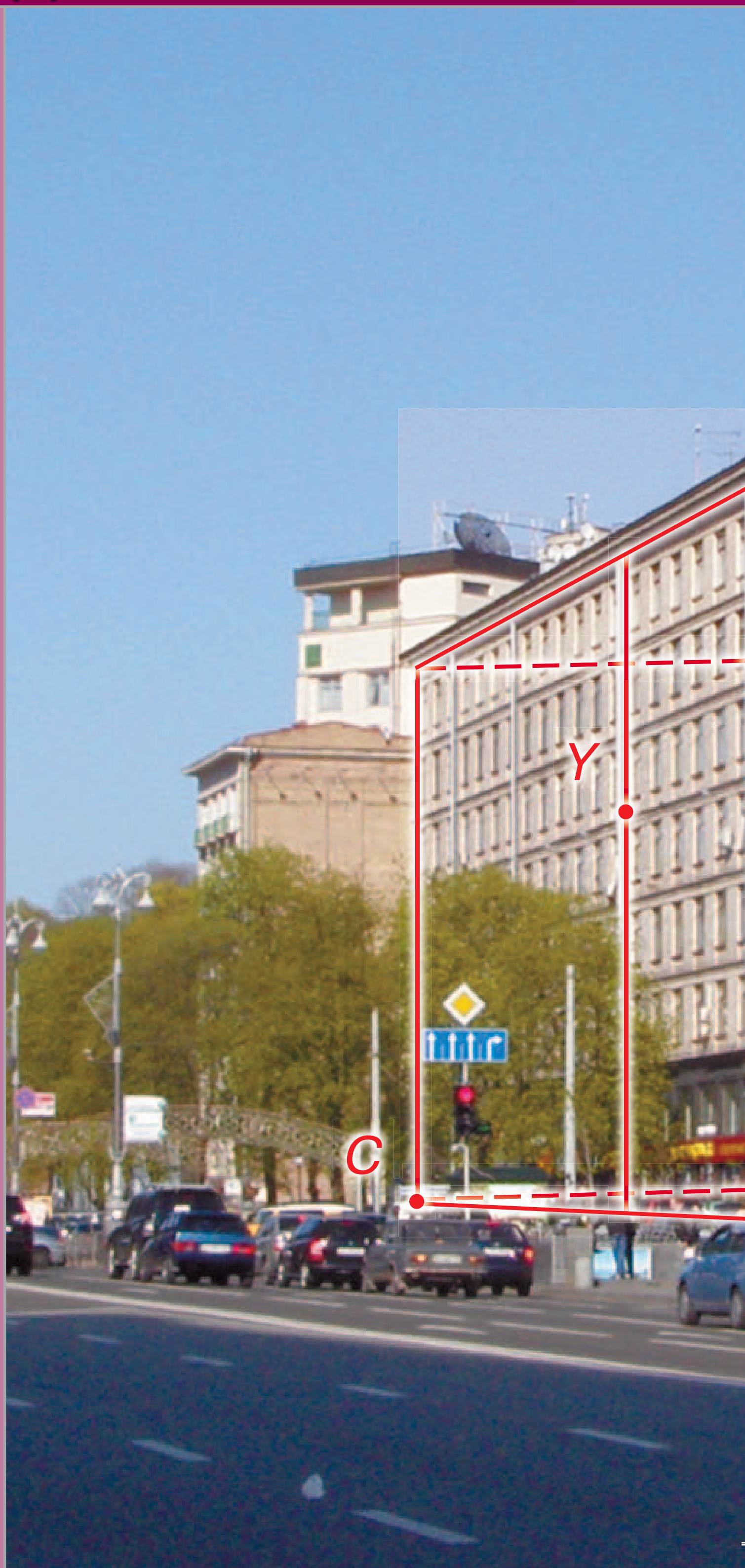
РОЗДІЛ 1

ВСТУП ДО СТЕРЕОМЕТРІЇ

У розділі дізнаєтесь:

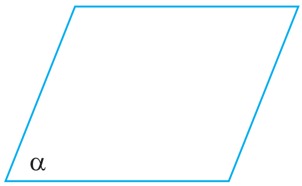
- що вивчає стереометрія;
- які фігури та відношення вважають основними в стереометрії;
- про аксіоми стереометрії та наслідки з них;
- що таке переріз прямої призми (піраміди) та як його побудувати;
- як застосувати вивчені властивості на практиці та у розв'язуванні задач






Z
X
D
B
A

§ 1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТА АКСІОМИ СТЕРЕОМЕТРІЇ



Мал. 39

Ви вже знаєте, що у *стереометрії* вивчають властивості фігур у просторі. Для цього, як і в планіметрії, використовують *аксіоматичний метод*. Спочатку обирають *основні поняття* – *основні фігури* та *основні відношення*. Їх тлумачать через приклади, не даючи означень. Також приймають без доведення вихідні істинні твердження – *аксіоми*. Всі інші поняття визначають, а всі інші твердження доводять.

Основними фігурами у просторі є *точка*, *пряма* і *площина*, а основними відношеннями – відношення «*належати*», «*лежати між*» і «*накладання*». Площину зображають здебільшого у вигляді паралелограма (мал. 39).

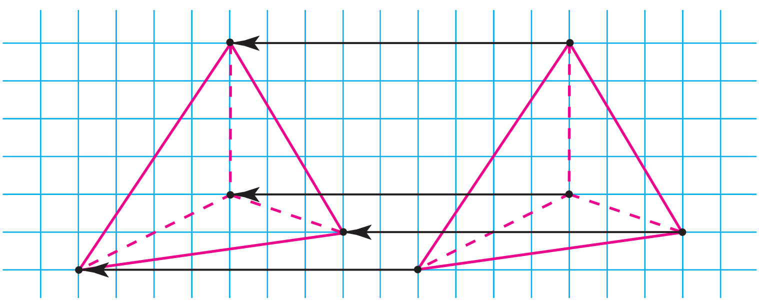
Як і в планіметрії, точки позначають великими латинськими буквами A, B, C, ... , прямі – малими латинськими буквами a, b, c, ... Площини позначають малими грецькими буквами α (альфа), β (бета), γ (гамма) ... .

Введення у просторі нової геометричної фігури – площини – потребує уточнення основних відношень та розширення системи аксіом планіметрії.

Відношення «належати» розглядають не лише для точки і прямої – точка *лежить на* прямій, але й для точки і площини та прямої і площини – точка (пряма) *лежить у* площині.

Відношення «лежати між» для трьох будь-яких точок прямої не залежить від її розміщення в просторі, тому це відношення є основним і в стереометрії.

Відношення «накладання» у просторі розуміють як суміщення фігур відповідно всіма своїми точками (мал. 40).



Мал. 40

Система аксіом стереометрії складається з двох частин. Перша з них включає всі аксіоми планіметрії. Вони виконуються в кожній площині простору.

Пам'ятайте:

1) властивості всіх фігур, які ви вивчали в планіметрії, справджуються в кожній площині простору;

2) якщо йдеться про дві точки (прямі), то ці точки (прямі) є різними, тобто вони не збігаються.

Друга частина системи аксіом стереометрії включає аксіоми, що характеризують взаємне розміщення точок, прямих і площин. Коротко називатимемо їх *аксіомами стереометрії*. Сформулюємо ці аксіоми.

Аксіома 1 (належності точки площині).
Існують точки, що лежать у даній площині, і точки, що не лежать у ній.

На малюнку 41 ви бачите, що точка A лежить у площині α, а точка B не належить їй.

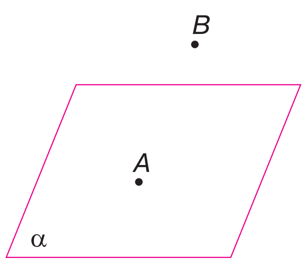
Коротко записуємо: $A \in \alpha$, $B \notin \alpha$.

Аксіома 2 (існування і єдиності площини).
Через будь-які три точки, що не лежать на одній прямій, можна провести площину і до того ж тільки одну.

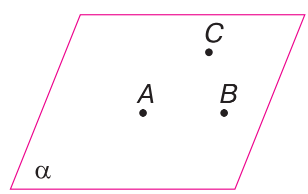
Завдяки цій властивості площину можна позначати трьома її точками. Наприклад, на малюнку 42 площина ABC – це площина α.

Аксіома 3 (належності прямої площині).
Якщо дві точки прямої лежать у площині, то й кожна точка цієї прямої лежить у даній площині.

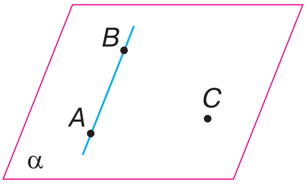
Записуємо: якщо $A \in \alpha$ і $B \in \alpha$, то AB лежить в α.



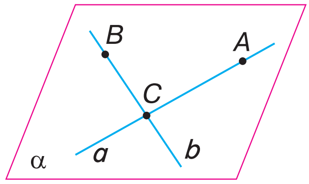
Мал. 41



Мал. 42



Мал. 43



Мал. 44

З наведених аксіом випливають такі наслідки.

Наслідок 1.

Через пряму і точку, що не лежить на ній, можна провести площину і до того ж тільки одну.

Справді, будь-які дві точки даної прямої разом з даною точкою (мал. 43) утворюють три точки, що не лежать на одній прямій. За аксіомою 2, через них проходить площина і до того ж тільки одна. За аксіомою 3, дана пряма лежить у цій площині.

Наслідок 2.

Через дві прямі, що перетинаються, можна провести площину і до того ж тільки одну.

Справді, якщо на кожній з даних прямих взяти по одній точці, відмінній від точки перетину даних прямих, та точку перетину (мал. 44), то утвориться три точки, що не лежать на одній прямій. За аксіомою 2, через них проходить площина і до того ж тільки одна. За аксіомою 3, кожна з даних прямих лежить у цій площині.

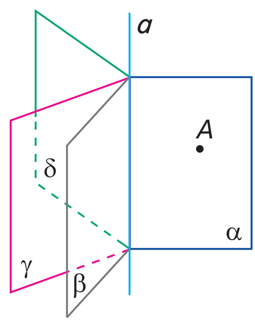
Пам'ятайте, що площину можна задати:
1) трьома точками, які не лежать на одній прямій;
2) прямою і точкою, яка не лежить на ній;
3) двома прямими, що перетинаються.

Аксіома 4 (про перетин двох площин).
Якщо дві площини мають спільну точку, то вони перетинаються по прямій, яка проходить через цю точку.

Наслідок 3.

Через будь-яку пряму в просторі можна провести безліч площин.

Справді, через пряму a і точку A, що не лежить на ній, можна провести площину і до того ж тільки одну. Позначимо її α (мал. 45). Але, за аксіомою 1, у просторі існує безліч точок, що не лежать у площині α. Через



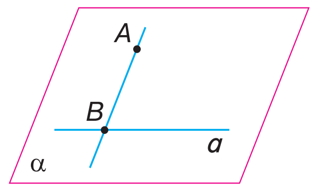
Мал. 45

кожну із цих точок і дану пряму можна провести площину, відмінну від площини α. Тому таких площин безліч.

На малюнку 45 ви бачите, що через пряму a проходять площини α, β, γ і δ.

Задача. Дано пряму a і точку A, що не лежить на ній. Доведіть, що всі прямі, які проходять через точку A і перетинають пряму a, лежать в одній площині.

Розв'язання. Через дані точку A і пряму a, за наслідком 1 з аксіом стереометрії, проходить площина і до того ж тільки одна. Позначимо її α (мал. 46). Через точку A проведемо довільну пряму так, щоб вона перетинала пряму a. Позначимо точку їх перетину B. Точки A і B лежать у площині α. Тоді, за аксіомою 3, пряма AB лежить у площині α. Аналогічно можна довести, що будь-яка інша пряма, що проходить через точку A і перетинає пряму a, лежить у площині α.



Мал. 46

ДІЗНАЙТЕСЯ БІЛЬШЕ

1. Термін «стереометрія» походить від грецьких слів στερεοξ — просторовий і μετρεο — вимірювати. Його автором вважають давньогрецького вченого Платона (427 — 347 до н. е.) — засновника філософської школи в Афінах, яка мала назву «Академія». Головною заслугою Платона в історії математики вважають те, що він вперше висунув і всіляко відстоював ідею про необхідність знання математики кожною освіченою людиною. На дверях його Академії був напис: «Нехай не входить сюди той, хто не знає геометрії».

2. Ви вже знаєте, що площину можна задати або трьома точками, що не лежать на одній прямій (твердження 1), або прямою і точкою, що не лежить на цій прямій (твердження 2), або двома прямими, що перетинаються (твердження 3). У підручнику перше твердження було прийнято як аксіома, а два інші доведені. Виявляється, що будь-яке із цих тверджень можна обрати за аксіому. Тоді два інших твердження можна довести, спираючись на обрану аксіому.

Наприклад, нехай аксіомою є твердження 3: «Через дві прямі, що перетинаються, можна провести єдину


Рафаель Санті Леонардо да Вінчі в образі Платона

площину». Доведемо, що через три точки, які не лежать на одній прямій, можна провести єдину площину (твердження 1).

Доведення. Нехай точки *A*, *B* і *C* не лежать на одній прямій. Проведемо прямі *AB* і *BC*. Ці прямі перетинаються в точці *B*. За прийнятою нами аксіомою, через прямі *AB* і *BC* можна провести єдину площину. Цій площині належать дані точки *A*, *B* і *C*.

Твердження 2 спробуйте довести самостійно.

3. Якщо з першого твердження випливає друге, а з другого перше, то такі твердження називаються *рівносильними*. Ми довели рівносильність тверджень 1 і 3. Взагалі, рівносильними є всі три наведені твердження. Доведіть це самостійно.

Щоб коротко записати, що деякі твердження рівносильні, їх позначають великими латинськими літерами. Якщо перше з розглянутих тверджень позначити T_1, друге — T_2, а третє — T_3, тоді коротко можна записати: $T_1 \Leftrightarrow T_2 \Leftrightarrow T_3$. Знак $\Leftrightarrow$ заміняє слово «рівносильне».

ЗГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

1. Що вивчає стереометрія?
2. Назвіть основні геометричні фігури у просторі. Як їх позначають?
3. Які відношення вважають основними у стереометрії?
4. Сформулюйте аксіоми стереометрії.
5. Сформулюйте наслідки з аксіом стереометрії.

РОЗВ'ЯЖІТЬ ЗАДАЧІ

50'. Які поняття вводять без означень у стереометрії?

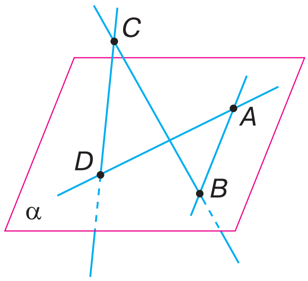
51'. Що таке аксіома? Теорема? Наведіть приклади.

52'. Які з наведених фігур є основними в стереометрії:

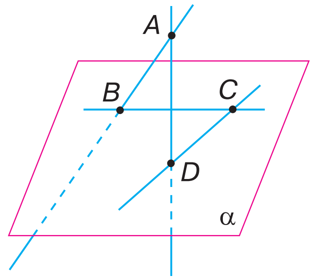
1) точка;	2) відрізок;
3) промінь;	4) пряма;
5) кут;	6) трикутник;
7) коло;	8) ромб;
9) куб;	10) куля;
11) площина;	12) призма?

53'. Які з наведених відношень є основними в стереометрії:

1) належати;
2) перетинати;
3) лежати між;
4) дорівнювати;
5) бути подібним;
6) накладання?



Мал. 47



Мал. 48

54'. На малюнках 47, 48 зображено площину α і прямі *AB*, *BC*, *AD* і *CD*.

1) Які з точок *A*, *B*, *C* і *D* лежать у площині α?

2) Яку іншу назву можна дати площині α?

3) Які з прямих лежать у площині α?

55'. За даними на малюнках 49, 50 з’ясуйте:

1) які спільні точки мають площини α і β;

2) по якій прямій перетинаються площини α і β.

56°. Назвіть неозначувані поняття стереометрії.

57°. Які з наведених аксіом планіметрії справджуються у просторі:

1) через будь-які дві точки можна провести єдину пряму;

2) з будь-яких трьох точок прямої лише одна з них лежить між двома іншими;

3) через будь-яку точку, що не лежить на даній прямій, можна провести тільки одну пряму, паралельну даній;

4) на будь-якому промені від його початку можна відкласти відрізок заданої довжини і тільки один;

5) кожен відрізок має певну довжину, більшу за нуль;

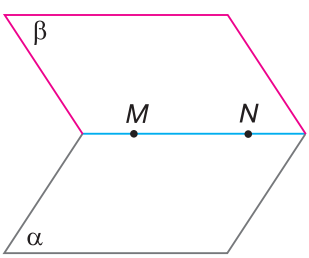
6) довжина відрізка дорівнює сумі довжин його частин;

7) від будь-якого променя по один бік від нього можна відкласти кут заданої градусної міри і тільки один;

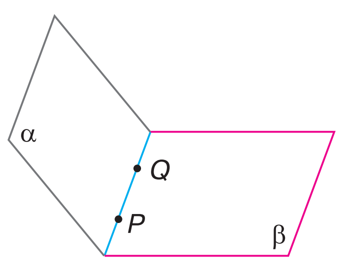
8) кожен кут має градусну міру, більшу за нуль і меншу від 180°;

9) градусна міра розгорнутого кута дорівнює 180°;

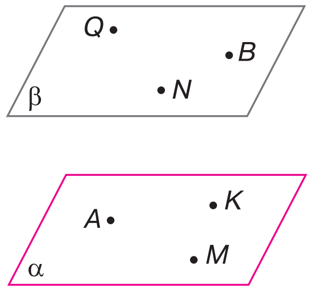
10) градусна міра кута дорівнює сумі градусних мір кутів, на які він розбивається променем, що проходить між його сторонами?



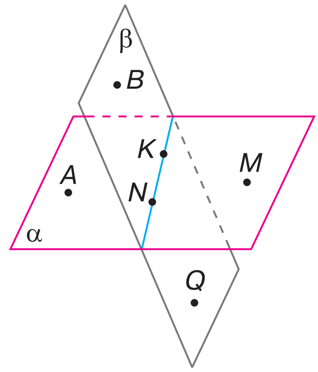
Мал. 49



Мал. 50



Мал. 51



Мал. 52

58°. Сформулюйте аксіоми планіметрії, які справджуються у просторі.

59°. За даними на малюнках 51, 52 визначте точки:

1) які лежать у площині α;
2) не лежать у площині β;
3) через які не проходить площина α;
4) через які проходить площина β.

Зробіть відповідний запис.

60°. У площині α позначте точки *A*, *B*, *C* і *D*, а поза нею – точки *M* і *N*. Чи можна дати площині α таку іншу назву:

1) *AN*; 2) *ADB*;
3) *BCDM*; 4) *ACD*;
5) *BAC*; 6) *CNB*;
7) *DAB*; 8) *MDC*;
9) *CAD*?

61°. Проведіть площину α. Позначте:

1) точки *B* і *C*, які лежать у площині α, і точку *A*, що не лежить у цій площині;
2) точки *A* і *C*, які лежать у площині α, і точку *B*, що не лежить у цій площині.

Проведіть прямі *AC*, *AB*, *BC*. Які з цих прямих лежать у площині α?
Зробіть відповідний запис.

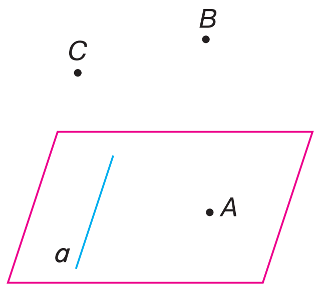
62°. Чи можуть пряма і площина мати тільки дві спільні точки? Чому?

63°. Пряма *a* і точка *A* лежать у площині α (мал. 53). Точки *B* і *C* не лежать у даній площині.

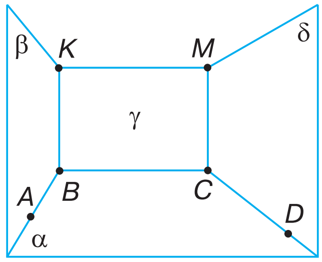
Чи визначають площину, відмінну від площини α:

1) пряма *a* і точка *B*;
2) пряма *a* і точка *C*;
3) прямі *AB* і *AC*;
4) прямі *AB* і *BC*?

Відповідь поясніть.



Мал. 53



Мал. 54

64°. За даними на малюнку 54 заповніть таблицю 3 за зразком, наведеним у другому її стовпчику.

Таблиця 3

Площини	α і β	α і γ	α і δ	β і γ	γ і δ
Спільні точки	A і B				
Спільна пряма	AB				

65°. Проведіть площини α і β, що перетинаються. Позначте точки, які лежать:
1) тільки у площині α;
2) тільки у площині β;
3) у площинах α і β.
Зробіть відповідний запис.

66. **Чи завжди можна провести площину через три довільні точки простору? А через чотири? Відповідь поясніть.**

67. Якщо три точки кола лежать у площині α, то й усі точки кола лежать у даній площині. Доведіть.

68. **Чи лежать в одній площині всі прямі, що перетинають сторони даного кута? Відповідь поясніть.**

69. Дано два відрізки, що перетинаються:
1) AC і BD; 2) AB і CD.
Чи лежать в одній площині прямі BA, DC, DB і CA?
Відповідь поясніть.

70. **Доведіть, що через пряму можна провести принаймні дві різні площини.**

71. Площини α і β перетинаються по прямій a. Пряма b лежить у площині α. Ці прямі перетинаються в точці B. Чи лежить точка B на прямій a? Відповідь поясніть.

72*. Доведіть, що існують точки поза даною прямою на площині, в якій лежить дана пряма.

73*. Дано чотири точки, що не лежать в одній площині. Скільки площин можна провести через:
1) усі дані точки;
2) трійки даних точок;
3) пари даних точок?
Відповідь обґрунтуйте.

74*. Три площини попарно перетинаються по прямих *a*, *b* і *c*. Доведіть, що коли ці площини мають спільну точку *A*, то прямі *a*, *b* і *c* перетинаються в точці *A*.

75*. Площина γ перетинає площини α і β по прямих *a* і *b*. Доведіть, що коли прямі *a* і *b* перетинаються, то точка їх перетину лежить на лінії перетину площин α і β.

76*. Дано промені зі спільним початком. Ніякі три з них не лежать в одній площині. Скільки різних площин можна провести так, щоб в кожній площині лежало по два з даних променів, якщо всього променів:
1) три;
2) чотири;
3) *n*?

ЗАСТОСУЙТЕ НА ПРАКТИЦІ

77. Чому штативи багатьох приладів (фотоапарата, теодоліта тощо) виготовляють у формі триноги?

78. Щоб перевірити, чи є дана поверхня плоскою, до неї прикладають лінійку в різних напрямах. Край лінійки, дотикаючись до поверхні у двох точках, повинен повністю лежати в ній. На чому ґрунтується така перевірка?

79. Перевіряючи, чи лежать кінці чотирьох ніжок стільця в одній площині, тесля користується двома нитками. Як він робить це?