МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКА НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА

К.А. МАМОНОВ

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

З ДИСЦИПЛІНИ

ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

(для студентів 3 курсу заочної форми навчання
за напрямом підготовки 0501 (6.030509) «Облік і аудит»))

Харків – ХНАМГ – 2009

Конспект лекцій з дисципліни “Економіко-математичне моделювання” (для студентів 3 курсу заочної форми навчання за напрямом підготовки 0501 (6.030509) «Облік і аудит») / Авт. К.А. Мамонов.; Харк. нац. акад. міськ. госп-ва. – Х,: ХНАМГ, 2009. – 86 с.

Автор: К.А. Мамонов

Рецензент: В.В. Димченко

Рекомендовано кафедрою обліку і аудиту,

протокол №8 від 09.01.2009 р.

ЗМІСТ

ВСТУП

В сучасних економічних умовах господарювання України формування фундаментальних засад розвитку підприємств є актуальним завданням. У цьому аспекті виникає необхідність використання інстрементарію, який органічно поєднує математичні методи для вирішення економічних проблем з метою отримання кількісних оцінок і моделей у процесі прийняття управлінських рішень.

Для спеціалістів обліку і аудиту запропонована дисципліна «Економіко-математичне моделювання». В умовах трансформаційних процесів вивчення цієї дисципліни дає можливість заволодити сучасними інструментами й підходами для формування фінансової й економічної політики, зміцнення потенціалу підприємства й виробничої бази.

Метою вивчення курсу є формування системи знань з методології та інструментарію побудови і використання різних типів економіко-математичних моделей.

Завданнями курсу «Економіко-математичне моделювання» є вивчення основних принципів та інструментарію постановки завдань, побудови економіко-математичних моделей, методів їх розв'язування і аналізу з метою використання в економіці.

Предметом курсу виступають методологія та інструментарій побудови й розв'язування детермінованих оптимізаційних задач.

Зміст лекційного курсу дисципліни для студентів заочної форми навчання розкривається в темах:

1. Концептуальні аспекти математичного моделювання економіки – 1 год.
2. Оптимізаційні економіко-математичні моделі – 1 год.
3. Задача лінійного програмування та методи її розв'язування – 1,5 год.
4. Теорія достовірності та аналіз лінійних моделей оптимізаційних задач – 0,5 год.
5. Цілочислове програмування – 1,5 год.
6. Нелінійні оптимізаційні моделі економічних систем – 0,5 год.

7. Аналіз та управління ризиком в економіці – 1год.
8. Система показників кількісного оцінювання ступеня ризику – 1 год.
9. Принципи побудови економетричних моделей. Парна лінійна регресія –1 год.
10. Лінійні моделі множинної регресії – 0,5 год.
11. Узагальнені економетричні моделі – 0,25 год.
12. Економетричні моделі динаміки – 0,25 год.

У результаті вивчення дисципліни студент повинен

Знати:

- ❖ Основні підходи до організації аналітичної роботи на підприємстві.
- ❖ Застосування методики і техніки економіко-математичного моделювання в фінансово-господарській діяльності.
- ❖ Особливості проведення економіко-математичного моделювання на вітчизняних підприємствах в сучасних економічних умовах господарювання.
- ❖ Інформаційно-методичне забезпечення економіко-математичного моделювання.
- ❖ Місце і роль економіко-математичного моделювання в системі управління підприємством.

Вміти:

- ❖ Використовувати інструментарій економіко-математичного моделювання для прийняття управлінських рішень.
- ❖ Застосовувати методи економіко-математичного моделювання в економічних процесах.
- ❖ Проводити економіко-математичне моделювання на підприємстві.
- ❖ Застосовувати результати економіко-математичного моделювання для прийняття управлінських рішень.
- ❖ На основі розроблених економіко-математичних моделей, будувати ефективно діючий організаційно-економічний механізм управління підприємством.

ЛЕКЦІЯ 1

Тема 1. Концептуальні аспекти математичного моделювання економіки.

Тема 2. Оптимізаційні економіко-математичні моделі

Тема 1:

1.1. Визначення економіко-математичного моделювання. Моделювання як метод наукового пізнання.

1.2. Види моделей.

1.3. Економіко-математичне моделювання в процесі прийняття управлінських рішень.

1.4. Основні етапи моделювання.

Тема 2:

2.1. Особливості економіко-математичних моделей оптимізації.

2.2. Модель оптимального планування виробництва.

2.3. Економіко-математичні моделі оптимізації випуску продукції підприємствами.

2.4. Економіко-математичні моделі розподілу фінансових ресурсів.

2.5. Розподіл капітальних вкладень по проектах.

2.6. Задачі безумовно та умовно оптимізації і методи їх розв'язування.

Поняття: Економіко-математичне моделювання; модель; система; імітація; економіко-математичні моделі; оптимізаційна задача; методи математичного програмування; система обмежень в економіко-математичних моделях оптимізації.

Література: 4, 5, 12, 13, 14, 16, 22, 23, 24, 26, 27, 37, 38, 39, 40, 49, 53, 61, 63, 64, 65, 67, 70, 72, 74, 78, 79, 80.

1.1. Економіко-математичне моделювання - це комплекс економічних і математичних дисциплін. Науковою основою його є основні положення діалектики, економіки, теорії складних систем, закони математики.

На ідеї моделювання, по суті, базується будь-який метод наукового пізнання, як теоретичний, так і експериментальний. Термін «модель» походить від лат. «зразок, норма, міра». Поняття моделі засноване на принципі аналогії, деяких суспільних явищ, подібності різних об'єктів.

Прикладом подібності можуть служити макети літаків, машин, споруд та ін. Ці моделі засновані на прямій аналогії. З погляду управління господарськими процесами найбільший інтерес становлять моделі, засновані на схожості поведінки системи, подібності їх реалізації на зміну дій. Саме схожість у поведінці системи при впливі на них діє принцип основи моделювання поведінки складних сист. При цьому слід вказати на те, що ця схожість неповна, а лише за деякими ознаками. Таким чином моделювання припускає, що є дві системи 1) система - оригінал, якими управляємо або повинні управляти; 2) модель цієї системи, її аналог для прийняття управлінських рішень.

Модель є засобом пізнання оригіналу, оскільки реальна система має безліч ознак, явищ, для яких вирішуються відповідні завдання. Для більшості з них важливо забезпечити подібність моделі й оригіналу. Проте немає необхідності, щоб модель відображала всі ознаки оригіналу.

1.2. З поняттям «моделювання економічних систем» (а також математичних та ін.) зв'язано два класи задач:

1) задачі аналізу, коли система піддається глибокому вивченню її властивостей, структури й параметрів, тобто досліджується наочна сфера майбутнього моделювання.

2) Задачі, пов'язані із задачами синтезу.

Модель – це зображення, представлення об'єкта, системи, процесу в деякій формі, відмінній від реального існування. Розрізняють фізичне і математичне моделювання.

Види моделей наступні:

1. Фізичні.
2. Символьні.
3. Словесно-описові.
4. Математичні.
5. Аналітичні.
6. Імітаційні (метод Монте-Карло).
7. Структурні.
8. Формальні.
9. Функціональні.
10. Теоретичні.

1.3. У процесі прийняття управлінських ріщень можна виявити шість етапів:

1) виявлення проблеми;

2) постановка, формулювання проблеми;

3) пошук рішень;

4) прийняття рішень;

5) виконання рішення;

6) оцінка і аналіз отриманих рішень.

На етапі пошуку вирішення проблеми необхідно її структурувати (проаналізувати). Структуризація проблеми визначає п’ять основних логичних елементів:

1) мета, досягнення якої означає, що проблема вирішена;

2) напрямок дій, з допомогою яких досягнута мета;

3) витрати ресурсів, необхідних для кожного напрямку дій;

4) модель (моделі), в яких за допомогою формальної мови (маткматики, логіки) відображаються зв'язки між метою, напрямами дій і законами;

5) критерій, з допомогою якого співставляють метй і витрати й здійснюється пошук найбільш оптимального рішення.

Ступінь структуризації проблеми має чотири рівні:

1) стандартна проблема, пов'язана з одноваріантними розрахунками (розрахунок потреб в матеріальних і трудових ресурсах);

2) високоструктуровані проблеми, що потребують вибору оптимального варіанта з багатьох можливих (найбільш широко використаних методів);

3) низькоструктуровані проблеми, вони пов'язані з розробкою довгострокових напрямів дій, які висвітлюють багато аспектів у діяльності підприємств. У цьому разі важко або майже неможливо описати математичні зв'язки. Ці проблеми вирішуються переважно з використанням методології системного аналізу;

4) неструктуровані проблеми, вони відзначаються невизначеностю як мета діяльності, так і можливими напрямками діяльності. До проблем такого роду відноситься формування наукових планів соціального розвитку і т.п. У цьому разі рішення приймають на основі методів експертних оцінок, інтуїції розробника.

1.4. Основні етапи моделювання:

1) Аналіз економічної системи, її ідентифікація і визначення достатньої структури для моделювання.

2) Синтез і побудова моделі з урахуванням її особливостей та математичної специфікації.

3) Верифікація моделі й уточнення її параметрів.

4) Уточнення всіх параметрів системи і відповідність параметрів моделі, їх необхідне виправлення, коректування.

Етап підгонки моделі багатократний.

2.1. В умовах ринкових відносин, коли ресурси обмежені, виникає питання оптимізації прибутку, собівартості та економії ресурсів. Задача оптимізації полягає у знаходженні оптимального значення цільової функції f(x) на допустимій множині D. Розв’язати оптимізаційну задачу — означає знайти її оптимальне розв’язання або встановити, що розв’язання немає. Методи розв’язання оптимізаційних задач називають методами математичного програмування. Оптимізаційні моделі бувають двох типів: задачі мінімізації і задачі максимізації.

Економіко-математичні моделі оптимізації містять одну цільову функцію, в якій основною є ефективність виробництва, і систему обмежень, куди входять чинники, у сфері яких модель не втрачає своєї практичної цінності. Система обмежень повинна складатися коректно, при цьому можливі чотири випадки:

1) Обмеження моделі несумісні (модель не має негативних рішень).

2) Негативні рішення є, але максимум (мінімум) цільової функції не обмежений. Умови обмежень вибрані невірно.

3) Оптимальне значення цільової функції є кінцевим числом і досягається при єдиному поєднанні змінних системи обмежень.

4) Оптимальне значення цільової функції досягається при багатьох варіантах значень змінних системи обмежень (система обмежень некоректна). У лінійних моделях кількісні змінні x можуть мати різні значення.

Якщо кількість змінних x (наприклад, видів продукції) більше кількості незалежних обмежень і задача має одне рішення, то в оптимальному плані кількість x (видів продукції) буде не менше кількості обмежень. Решта змінних x буде дорівнювати 0.

2.2. Загальна постановка задачі математичного програмування з двома невідомими. Визначити максимум (мінімум) функції

$$f(X_1, X_2) \rightarrow \max\ (\min) \tag{2.1}$$

при обмеженнях

$$g_1(X_1, X_2) \le 0$$
$$\dots$$
$$g_j(X_1, X_2) \le 0,$$
$$j = \overline{1, m},$$
$$X_1 \ge 0,\ X_2 \ge 0. \qquad (2.2)$$

Функція f називається цільовою. Обмеження у вигляді нерівностей називаються спеціальними обмеженнями, невід'ємність змінних у вигляді нерівностей має назву загальних обмежень задачі математичного програмування (ЗМП). Точка (X_1, X_2), яка задовольняє спеціальним і загальним обмеженням, називається допустимим розв'язуванням ЗМП. Множина всіх допустимих розв'язувань називається допустимою множиною ЗМП. Оптимальним розв'язуванням ЗМП називається точка(V, x_2^*), яка задовольняє умовам обмежень і цільовій функції.

2.3. Економіко-математичні моделі оптимізації випуску продукції має наступний вигляд:

Е
М
М

$$\left|\begin{array}{l} F = \sum\limits_{k=1}^{l}\sum\limits_{i=1}^{n} R_{ki}X_{ki} \Rightarrow \max \\ \Omega : \sum\limits_{k=1}^{l}\sum\limits_{i=1}^{n} b_{SKi}x_{ki} \le B_{Si} \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_{ki} = A_k \\ h_{ki} \le x_{ki} \le q_{ki} \\ x_{ki} \ge 0 \end{array}\right| \begin{array}{l} k = \overline{1, l} \\ i = \overline{1, n} \\ s = \overline{1, m} \end{array} \qquad (2.3)$$

i – номер підприємства;

n – кількість підприємств;

k – вид, номер вироблюваної продукції;

l – кількість видів продукції;

s – види ресурсів;

m – кількість видів необхідних ресурсів;

R_{ki} – прибуток від реалізації одиниці продукції k виду на і-му підприємстві;

X_{ki} – обсяг (кількість виробів) k виду на і-му підприємстві;

A_k – план випуску k виду продукції;

$в_{ski}$ – норма споживання S виду ресурсів при виробництві одиниці k виду продукції на і-му підприємстві;

B_{si} – обсяг використаних ресурсів S виду на і-ому підприємстві;

h_{ki}, q_{ki} – верхня і нижня границі, що відповідать виробництвц k виду продукції на і-му підприємстві.

2.4. Економіко-математичні моделі розподілу фінансових ресурсів по оптимізації зростання потужностей підприємства має вигляд:

ЕММ

$$\begin{cases} F = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(C_i + EK_i + t_{ij})\times x_{ij} \Rightarrow \min \\ \Omega : \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le A_i \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = B_j \\ x_{ij} \ge 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} i = \overline{1,m} \\ j = \overline{1,n} \end{array} \tag{2.4}$$

C_i – вартість одиниці продукції і-го постачальника;

K_i – капітальні витрати на одиницю готової продукції при будівлі нового підприємства;

Е – нормуючий коефіцієнт ефективності капітальних вкладень;

t_{ij} – транспортні витрати з перевезення одиниці продукції і-го постачальника j - мупокупцю;

x_{ij} – обсяг поставок продукції і-го постачальника j-му покупцю;

A_i – потужність і-го постачальника;

B_j – попит j-го покупця.

2.5. Розподіл капітальних вкладень за проектами описується наступною економіко-математичною моделлю:

$$
\begin{array}{l|l}
\text{Е} & F = \sum_{j=1}^{S} R_j(x_j) \Rightarrow \max \\
\text{М} & \Omega : \sum_{j=1}^{S} x_j \le N \\
\text{М} & \sum_{j=1}^{S} k_j(x_j) \le M \\
 & x_j = \begin{cases} 1 & \textit{проект} \quad \textit{прийнятий} \\ 0 & \textit{проект} \quad \textit{відхилений} \end{cases}
\end{array}
\qquad j = \overline{1, s} \qquad (2.5)
$$

j – варіант (індекс) проекту капітальних вкладень;

s – загальна кількість проектів;

k_j – обсяг капітальних вкладень за j-м варіантом;

M – загальний річний обсяг капітальних вкладень;

R_j – можливий дохід від реалізації j-го варіанта капітальних вкладень;

N – загальна кількість варіантів капітальних вкладень.

2.6. Задачами безумовної оптимізації називаються такі, в яких задається лише одна цільова функція. У таких задачах не існує обмежень і граничних умов. Моделі безумовної оптимізації мають теоретичний характер, оскільки на практиці граничні умови задаються завжди. У цих задачах поняття оптимуму й екстремуму збігаються, для знаходження оптимуму в них застосовуються методи знаходження екстремуму.

Цільова функція може набувати найбільше чи найменше значення або мати екстремум. Екстремуми графічно подані на рис. 2.1.

Оптимум — ширше поняття, ніж екстремум. Якщо екстремум є не у всіх функцій, то в практичних задачах оптимум існує завжди. Графічно оптимуми представлені на рис. 2.2.

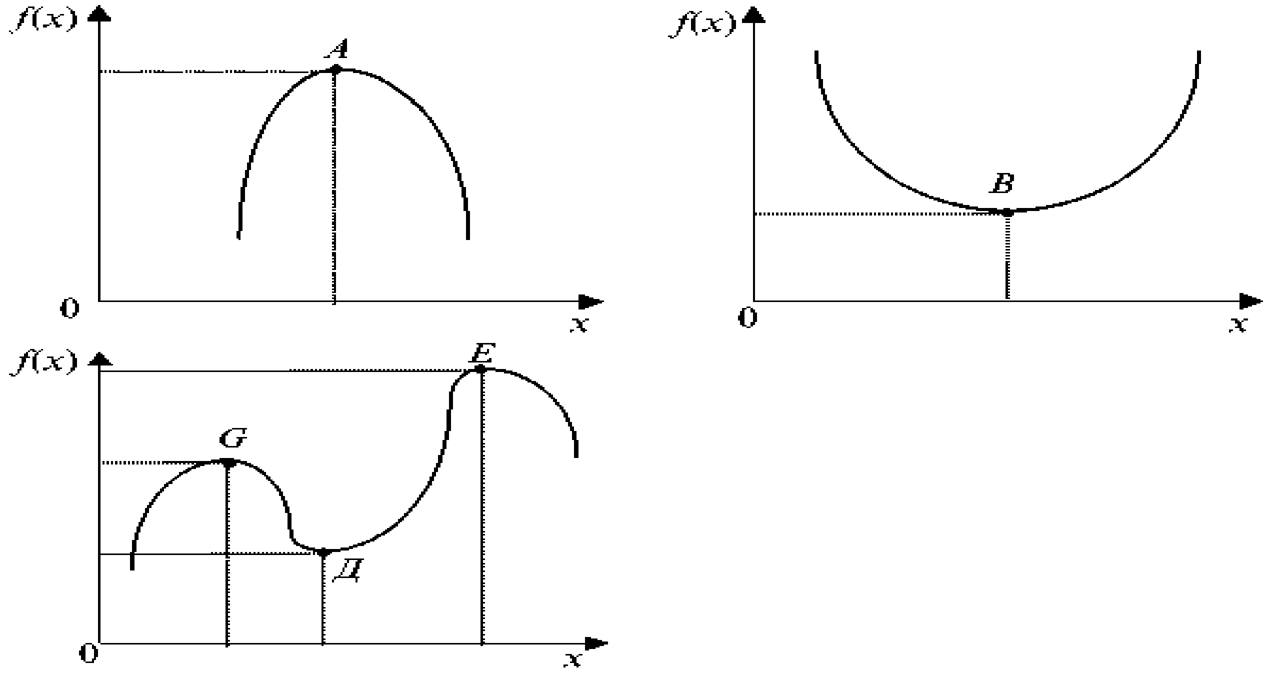


Рис. 2.1 – Естремуми функції

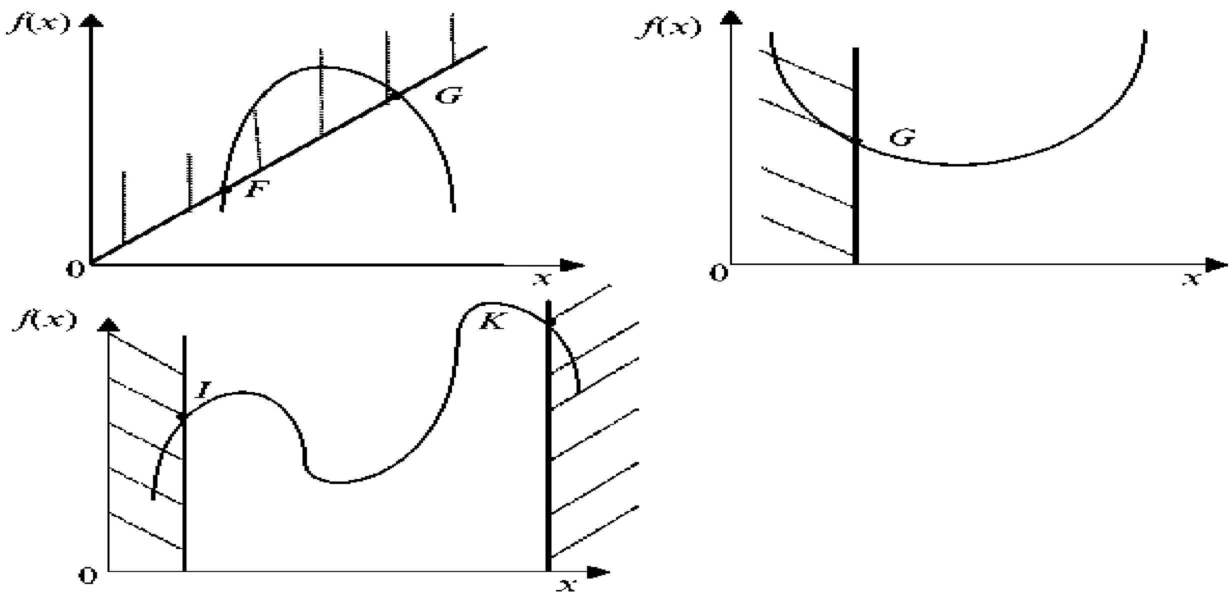


Рис. 2.2 – Оптимуми функції

У більшості економічних задач оптимізації зустрічається локальний оптимум.

Задачі умовної оптимізації включають в себе обмеження і граничні умови, що відповідають існуючим економічним умовам.

Аналітичний метод розв'язування задачі безумовної оптимізації.

Задана функція однієї змінної у — f(x). Щоб визначити екстремум, необхідно:

1. Знайти першу похідну функції.

2. Прирівняти її до нуля.

3. Розв'язати рівняння, визначивши х .

4. Знайти другу похідну функції. Визначити знак цієї похідної. Якщо друга похідна менша за 0, то точка х — максимум функції. Якщо друга похідна більша за 0, то точка х — мінімум функції.

Методи розв'язування задач умовної оптимізації.

f(xj) -* min

1. *Метод штрафних функцій.* Від задачі умовної оптимізації переходять до задачі, в якій мінімізується нова цільова функція, яка містить у собі першу цільову функцію і задані обмеження. Записується: F(х-) -f(x-) + ^{x}P(g(x)) —>min, де W(g(x-)) — штрафна функція.

Метод Лагранжа для розв'язування задач оптимізації на умовний екстремум

Сутність методу полягає у побудові функції виду: L(x_x, x_2, X) =f(x_v x_2) + Xg(x_v x_2), тобто зведення задачі на умовний екстремум двох незалежних змінних до задачі на абсолютний екстремум функції L{xy, x_2, X) трьох незалежних змінних x_1, x_2, X. Функція Лагранжа є сумою цільової функції і функції обмеження, помноженої на нову незалежну зміннуХ (множник Лагранжа), яка має перший порядок.

Для знаходження точок умовного локального екстремуму функції за наявності обмеження слід насамперед знайти критичні точки функції Лагранжа, тобто знайти всі розв’язання системи рівнянь:

$$\frac{\partial L(x_1, x_2, \lambda)}{\partial x_1} = 0; \qquad \frac{\partial L(x_1, x_2, \lambda)}{\partial x_2} = 0; \qquad \frac{\partial L(x_1, x_2, \lambda)}{\partial \lambda} = 0. \tag{2.6}$$

Далі критичні точки функції Лагранжа потрібно скоротити на координати X. Потім кожну одержану скорочену точку необхідно проаналізувати, чи є вона точкою умовного екстремуму функції за даних обмеженнях чи ні.

Задача споживчого вибору подібна до задач на умовний екстремум. Розглянемо модель поведінки споживача як задачу на умовний екстремум:

$$u(x_1, x_2) \to \max \text{ за умови } p_1x_1 + p_2x_2 = R. \tag{2.7}$$

Для розв'язання цієї задачі застосуємо метод Лагранжа. Запишемо функцію Лагранжа:

$$L(x_1, x_2, \lambda) = u(x_1, x_2) + \lambda(p_1x_1 + p_2x_2 - R). \tag{2.8}$$

Знаходимо її перші часткові похідні за змінними x_1, x_2, Χ і прирівнюємо часткові похідні до нуля:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = u'_1 - \lambda p_1 = 0;$$
$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = u'_2 - \lambda p_2 = 0;$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = p_1x_1 + p_2x_2 - R = 0. \tag{2.9}$$

Виключаємо з одержуємо системи трьох рівнянь з трьома невідомими параметр Χ, одержимо систему двох рівнянь з двома невідомими x_1 і x_2:

$$\frac{u'_1}{u'_2} = \frac{p_1}{p_2};$$
$$p_1x_1 + p_2x_2 = R. \tag{2.10}$$

Розв'язуванням цієї системи є "скорочена" критична точка функції Лагранжа.

Підставимо розв'язання в ліву частину першого рівняння

$$\frac{u'_1(x_1, x_2)}{u'_2(x_1, x_2)} = \frac{p_1}{p_2} \tag{2.11}$$

і одержимо відомий факт з курсу "Мікроекономіка", що у точці локальної ринкової рівноваги відношення граничних корисностей продуктів дорівнює відношенню ринкових цін p_1 і p_2 на ці продукти:

$$\frac{u'_1(x_1, x_2)}{u'_2(x_1, x_2)} = \frac{p_1}{p_2}. \tag{2.12}$$

У рівнянні ліворуч — гранична норма заміщення першого продукту іншим (MRTS).

Геометрично розв'язання задачі можна інтерпретувати як точку дотику лінії байдужості функції корисності $u(x_1, x_2)$ з бюджетною прямою $p_1x_1 + p_2x_2 = R$ (рис. 2.3).

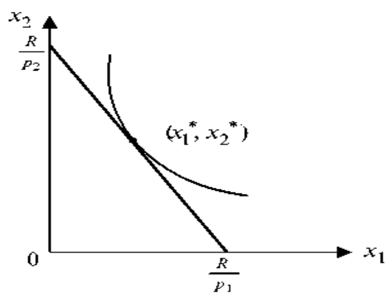


Рис. 2.3 – Оптимум споживача

Відношення $\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{u'_1}{u'_2}$ визначає тангенс кута нахилу лінії рівня функції корисності, а відношення $-_p$ являє собою тангенс кута нахилу бюджетної прямої. В точці споживчого вибору вони дотикаються.

Питання для самоконтролю:

1. Що таке економіко-математичне моделювання?
2. Визначте поняття «Модель», які види моделей Ви можете назвати.
3. Назвіть етапи прийняття управлінських рішень.
4. Назвіть ступені структуризації проблеми?
5. Назвіть основні етапи моделювання?
6. Охарактеризуйте оптимізаційні моделі, назвіть їх види.
7. У чому полягають задачі умовної і безумовної оптимізації.
8. Які методи використовують для вирішення задач умовної і безумовної оптимізації і в чому вони полягають.
9. У чому полягають економіко-математичні моделі оптимізації випуску продукції, розподілу фінансових ресурсів з оптимізації зростання потужностей підприємства, розподілу капітальних вкладень по проектам.

Завдання для самоконтролю:

1. Знайдіть екстремум функції випуску продукції у вигляді y = f(x) аналітичним методом.

2. Знайдіть екстремум функції $y = x_1 + x_2$ за умови $x_1 + x_2 - 1 = 0$ або розв’яжіть задачу на умовний екстремум методом Лагранжа.

ЛЕКЦІЯ 2

Тема 3. Задача лінійного програмування та методи її розв'язування.

Тема 4. Теорія достовірності та аналіз лінійних моделей оптимізаційних задач

Тема 3:

3.1. Сутність лінійного програмування.

3.2. Особливості задач лінійного програмування.

3.3. Основні методи розв'язування задач лінійного програмування.

3.4. Практичні аспекти рішення задач лінійного програмування.

Тема 4:

4.1. Теорія достовірності в економіко-математичному моделюванні

4.2. Аналіз лінійних моделей оптимізаційних задач

Поняття: Лінійне програмування; симплекс-метод; метод внутрішніх точок, достовірність; авторизованість; авторитетність; інформативність; свідомість; кореляційне відношення; середня помилка; міра достовірності результатів моделювання; статистичний критерій Уілкоксона; статистичний критерій χ^2 - Пірсона; статистичний критерій Колмогорова-Смирнова; метод відношення правдоподібності; метод сценаріїв; модифікований критерій Колмогорова-Смірнова і Мізеса; статистична несуперечність; область допустимих рішень; критерій оптимальності

Література: 2, 4, 7, 12, 14, 18, 26, 29, 30, 43, 47, 50, 52, 55, 56, 60, 61, 63, 64, 66, 67, 75 80, 91.

3.1. Лінійне програмування – це напрямок, який включає математичний інструментарій, що базується на теорії і методах вирішення задач про екстремуми лінійних функцій на множинах n-мірного векторного простору, що задається системами лінійних рівнянь.

Лінійне програмування є одним з напрямів випуклого програмування, яке, в свою чергу, витупає одним з напрямів математичного програмування. Одначасно воно є основою декількох методів вирішення задач цілочислового і нелінійного програмування.

Більшість ознак задач лінійного програмування можна інтерпретувати також як ознаки багатокутників і таким чином геометрично формулювати і доводити їх.

Термін «програмування» необхідно розуміти як «планування». Він був запропонований в середині 40-х років Джорджем Данцигом, одним із засновників лінійного програмування, ще до того, як комп’ютери були використані для вирішення лінійних задач оптимізації.

3.2. Серед безлічі оптимізаційних задач існують особливі задачі, які називають задачами лінійного програмування. Задачам лінійного програмування властиві наступні особливості:

1. Цільова функція є зваженою лінійною сумою від невідомих змінних x_i вигляду

$$J = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i = \max(\min) \tag{3.1}$$

де c_i – коефіцієнти цільової функції. Таку цільову функцію часто називають лінійною формою і позначають буквою L.

2. Обмеження, що накладаються на область можливих рішень, мають вид лінійної рівності або нерівності:

$$\sum_{j=1}^{k} a_{ij} x_j \le b_i, \quad i = 1, 2, \dots, k \tag{3.2}$$

де a_{ij}, b_i – значення показників цільової функції, причому величини a_{ij}, x_i, b_i позитивні.

3.3. Самим відомим і широко вживаним на практиці методом для вирішення задачі лінійного програмування (ЛП) є симплекс-метод. Незважаючи на те, що симплекс-метод є достатньо ефективним алгоритмом, що показав відповідні результати при вирішенні прикладних задач ЛП, він є алгоритмом з експоненціальною складністю. Причина цього полягає в комбінаторному характері симплекс-методу, що послідовно перебирає вершини багатокутника допустимих рішень при пошуку оптимального рішення.

Симплексний метод використовують для вирішення будь-якої задачі лінійного програмування. З геометричного значення задачі лінійного програмування виходить, що для її вирішення необхідно обчислити координати всіх вершин багатокутника обмежень і значення лінійної форми в них. Вирішити задачі лінійного програмування можна методом перебору. Дійсно, перебором всіх вершин можна знайти таку вершину, де функція L має екстремальне значення. При цьому можливі дві труднощі: оскільки при n > m система обмежень лінійно залежна, то для побудови багатокутника необхідно виділення всіх лінійно незалежних систем рівнянь і їх рішення; число вершин багатокутника різко зростає із збільшенням n > m, такий метод перебору всіх вершин може виявитися дуже трудомістким (n - число невідомих, m - число обмежень). Симплексний метод забезпечує більш раціональне вирішення задачі, ніж метод перебору. Його сутність полягає в тому, що, відправляючись з деякої довільної вершини багатокутника обмежень, переходять до обчислення тільки такої вершини, в якій значення лінійної форми буде більше, ніж в попередній. Решту варіантів не обчислюють. Тоді при кінцевому порівняно малому числі кроків може бути знайдений оптимальний план. Таким чином, проводиться впорядкований перебір вершин, при якому відбувається постійне збільшення лінійної форми. Тому симплексний метод називають ще методом послідовного поліпшення плану. Вирішення задачі симплексним методом включає два етапи. Перший полягає в знаходженні однієї довільної вершини багатокутника обмежень, координати якого визначають початковий опорний план. Другий етап полягає в послідовному впорядкованому переході від однієї вершини багатокутника до іншого, суміжного значення. Оскільки прилеглих вершин багато, то кожного разу вибирають таку вершину, при переході до якої забезпечується найбільше зростання лінійної форми. На кожному кроці процесу поліпшення плану проводять перевірку на оптимальність. Очевидно, що план буде оптимальним, якщо серед вершин, прилеглих до змінної, немає такої, при переході до якої відбувається зростання лінійної форми.

Розглянемо алгоритм використання симплексного методу. Обчислювальний процес знаходження оптимального плану має ітераційний характер. Кожна ітерація складається з двох етапів. Перший етап полягає в дослідженні базисного рішення на оптимальність. Якщо даний план задовольняє умовам оптимальності, то задача вирішена, в іншому випадку переходять до другого етапу.

На другому етапі визначають вектор $\vec{A}_k$, який повинен бути введений в базис, і вектор $\vec{A}_r$, який повинен бути виключений з нього, тобто виходить новий базисний план з великим значенням лінійної форми. Щоб знайти вектори $\vec{A}_k$ і $\vec{A}_r$, заміна яких забезпечує найбільше зростання лінійної форми, виразимо всі вектори, що не входять в базис, через базисні вектори:

$$\vec{A}_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\vec{A}_i, \tag{3.3}$$

де a_{ij} - проекції вектора $\vec{A}_j$ на вектор $\vec{A}_i$. Запишемо систему обмежень у векторній формі в наступному вигляді:

$$\sum_{i=1}^{m} x_i\vec{A}_i - \theta\vec{A}_k + \theta\vec{A}_k = \vec{B}. \tag{3.4}$$

Оскільки $\vec{A}_k = \sum_{i=1}^{m} a_{ik}\cdot\vec{A}_i,$

то

$$\sum_{i=1}^{m} (x_i - \theta a_{ik})\vec{A}_i + \theta\vec{A}_k = \vec{B}. \tag{3.5}$$

Співвідношення (3.5) дає рішення тільки в тому випадку, коли коефіцієнти при векторах $\vec{A}_i$ і $\vec{A}_k$ нового базису будуть ненегативними, тобто

$$x_i' = x_i - \theta a_{ik} \ge 0 \quad \text{і} \quad \theta \ge 0. \tag{3.6}$$

Відповідне нове значення лінійної форми набуває вигляд

$$L_1 = \sum_{i=1}^{m} (x_i - \theta a_{ik})c_i + \theta c_k = \sum_{i=1}^{m} x_i c_i + \theta\left(c_k - \sum_{i=1}^{m} a_{ik}c_i\right). \tag{3.7}$$

Позначимо

$$d_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ik} c_i - c_j. \tag{3.8}$$

Тоді значення лінійної форми в новій вершині багатокутника рішення можна знайти з рівняння

$$L_1(\vec{X}) = L(\vec{X}) - \theta d_j. \tag{3.9}$$

Величину dj називають оцінкою плану. В симплексному методі параметри dj відіграють важливу роль: їх знаки дозволяють визначити, чи є опорний план оптимальним. Якщо dj $\rangle 0$ для всіх j, то даний опорний план є оптимальним, оскільки на підставі (3.9) і зважаючи на $\theta \geq 0$ перехід до будь-якої нової вершини веде до убування лінійної форми. Якщо опорний план неоптимальний, то можливі два випадки:

1. Є хоча б один індекс $j = k$ для якого $d_k < 0$ і всі відповідні компоненти $a_{ik} \leq 0 \ (i = \overline{1, m})$. У цьому випадку лінійна форма не обмежена зверху і задача нерозв'язна.

2. Для деяких j $d_j < 0$ і для кожного такого j, принаймні, одна з проекцій $a_{ij} > 0$. Тоді при переході до наступної вершини лінійна форма згідно з (3.9) зростає і план поліпшується. Для найшвидшого зростання L необхідно в базис включити той вектор $\vec{A}_k$, для якого оцінка $d_k < 0$ і максимальна за модулем, а вектор $\vec{A}_r$, для якого значення позитивно і мінімально, виключити.

Власне алгоритм симплексного методу складається з таких етапів:

1. Обчислити елементи рядка оцінки плану $d[0{:}n]$.

2. Знайти номер k до $\vec{A}_k$ вектора, що має максимальну за абсолютною величиною негативну оцінку плану. Якщо всі оцінки плану позитивні, то план оптимальний.

Обчислити стовпець значень θ у вигляді елементів матриці

$$T[i] = \begin{cases} a[i,0] / a[i,k], если\, a[i,k] > 0; \\ M, если\, a[i,k] = 0; \\ -1, если\, a[i,k] < 0. \end{cases} \tag{3.10}$$

3. Знайти рядок з номером r, де $\theta = \min T[i]$ для всіх $T[i] > 0$.

4. Замінити у векторі $\vec{h} = [1:m]$ номер r на k, а у векторі $\vec{c}_i = [1:m]$ значення $cj[r]$ на $cj[k]$.

Перетворити матрицю $|a[1:m, 0:n]|$ за наступними формулами:

- елементи стовпця з номером k

$$a'[i,k] = \begin{cases} 1, \text{ если } h[i] = k; \\ 0 - \text{в противном случае}; \end{cases} \tag{3.11}$$

- елементи рядка з номером r

$$a'[i,j] = \frac{a[r,j]}{a[r,k]}; \tag{3.12}$$

- решта елементів матриці ($i \neq r$, $j \neq k$)

$$a'[i,j] = a[i,j] - \frac{a[i,k]a[r,j]}{a[r,k]} \tag{3.13}$$

Якщо виконуються всі умови, то слід перейти до п.1, тобто до наступної ітерації.

5. Видати на друк оптимальний план.

- вектор $\vec{h} = [1:m]$- номери змінних x_i, які входять в оптимальне рішення;
- стовпець $a = [1:m,0]$- значення змінних x_i;
- значення линійної форми L = d[0].

6. Видати на друк інформацію про невирішеність задачі, якщо $d_k < 0$.

Методом, що використовується при вирішенні задач лінійного програмування, є метод еліпсоїдів, який був запропонований в 1979 р.

радянським математиком Л.Хачіяном. Метод еліпсоїдів має абсолютно іншу, некомбінаторну, природу, ніж симплекс-метод. Проте в обчислювальному плані цей метод виявився неперспективним. Проте сам факт поліноміальної складності задач привів до створення цілого класу ефективних алгоритмів ЛП - методів внутрішньої точки, першим з яких був алгоритм Н. Кармаркара, запропонований в 1984 р. Алгоритми цього типу використовують безперервне трактування задачі ЛП, коли замість перебору вершин багатокутника вирішень задачі ЛП здійснюється пошук уздовж траєкторій у просторі змінних задачі, що не проходять через вершини багатокутника. Метод внутрішніх крапок, який, на відміну від симплекс-методу, обходить точки з внутрішньої частини області допустимих значень, використовує методи логарифмічних бар'єрних функцій нелінійного програмування.

3.4. Розглянемо деякі практичні аспекти вирішення задач лінійного програмування. Фірма виробляє дві моделі А і В збірних книжкових полиць. Їх виробництво обмежено наявністю сировини (високоякісних дощок) і часом машинної обробки. Для кожного виробу моделі А потрібен 3 $м^2$ дощок, а для моделі В - 4 $м^2$. Фірма може одержувати від своїх постачальників до 1700 $м^2$ дощок за тиждень. Для кожного виробу моделі А потрібно 12 хв. машинного часу, а для виробу моделі В - 30 хв. У тиждень можна використовувати 160 годин машинного часу. Скільки виробів кожної моделі слід випускати фірмі за тиждень, якщо кожний виріб моделі А приносить 2 грн. прибутку, а кожний виріб моделі В - 4 грн. прибутку?

Побудова математичної моделі:

Нехай x_1 - кількість випущених за тиждень полиць моделі А, а x_2 - кількість випущених полиць моделі В.

Тоді: $3x_1$ - кількість дощок, необхідних на тиждень для виготовлення полиць моделі А,

$4x_2$- кількість дощок, необхідних на тиждень для виготовлення полиць моделі В, 3x1 + 4x2- кількість дощок, потрібних на тиждень для виготовлення книжкових полиць двох моделей, за умовами задачі це число не повинно перевищувати 1700 $м^2$, отже одержуємо перше обмеження:

$$3x_1+ 4x_2<=1700$$

Знайдемо обмеження на використання машинного часу.

12 хв. складають 0,2 години, а 30 хв. - 0,5 години, таким чином:

$0,2x_1$ - кількість часу, що потрібна на тиждень для виробництва полиць моделі А;

$0,5x_2$ - кількість часу, що потрібна на тиждень для виробництва полиць моделі В;

$0,2x_1 + 0,5x_2$ - кількість часу, необхідного на тиждень для виробництва двох моделей, а за умовою задачі це число не повинно перевищувати 160 годин, отже, одержуємо друге обмеження:

$$0,2x1 + 0,5x2<=160 \text{ або } 2x1 + 5x2<=1600$$

Крім того, оскільки x_1 і x_2 виражають щотижневий обсяг виробів, що випускаються, то вони не можуть бути негативними, тобто

$$x_1>=0, x_2>=0$$

Ця задача полягає в тому, щоб знайти такі значення x_1 і x_2, при яких щотижневий прибуток буде максимальним. Складемо вираз для щотижневого прибутку:

$2x_1$ - щотижневий прибуток, одержаний від продажу полиць моделі А.

$4x_2$ - щотижневий прибуток, який одержаний від продажу полиць моделі В

Тоді $F=2x_1 + 4x_2$ - щотижневий прибуток, який повинен бути максимальним. Таким чином, маємо наступну математичну модель для даної задачі:

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \le 1700 \\ 2x_1 + 5x_2 \le 1600 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$$F=2x_1 + 4x_2->max$$

Отримана модель є задачею лінійного програмування. Функція F - це цільова функція, вона є лінійною функцією своїх змінних(x_1 і x_2). Обмеження на ці змінні (1) і (2) теж є лінійними. Виконана умова позитивності для змінних x_1 і x_2.

Необхідно знайти значення змінних x_1 і x_2, при яких дана функція F приймає максимальне значення, при дотриманні обмежень, що накладаються на ці змінні.

Рішення, що задовольняють системі обмежень і вимозі, позитивності, є допустимими, а рішення, що задовольняють одночасно і вимозі мінімізації (максимізації) функції, в цілому є оптимальними.

4.1. Для розуміння теоретичних аспектів і прикладних напрямів використання теорії достовірності важливе значення має встановлення поняття «достовірність».

Термін «*достовірність*» використовують в теорії ймовірності, логіці, гносеології та праві й визначають як характеристику обґрунтованого, доказового, безперечного, як синонім істини. Слід зазначити, що достовірність також може розглядатись як події, що підтверджені експериментально (практично).

Існують ще декілька визначень поняття «достовірність».

Достовірність – це форма існування істини, яка обґрунтована будь-яким способом [91]. У словнику термінів з логіки *достовірність* визначається як обґрунтованість, доказовість, безпорність знання.

З позиції теорії ймовірності *достовірність* визначається як поняття, що відображає впевненість суб'єкта в правильності своєї оцінки ймовірності настання тієї або іншої події [55].

Теорія достовірності спрямована на вирішення проблеми визначення достовірності проведеного дослідження для подальшого використання його результатів в економічних процесах.

При оцінці достовірності результатів дослідження необхідно враховувати те, що достовірним можна вважати результат, допустима похибка якого не виходить за різницю між розрахунковим значенням моделі і отриманим значенням, в результаті розрахунків економічних показників:

$$\left|\hat{y} - y_i\right| \le \varepsilon , \tag{4.1}$$

де $\hat{y}$ - розрахункове значення моделі;

y_i - вихідне значення економічного показника моделі;

ε - величина допустимої похибки.

Саме виникнення значної похибки результатів дослідження призводить до зниження достовірності результатів моделювання. У цілому похибка виникає у зв’язку з:

- неадекватністю моделі;
- помилками розрахунку показників і параметрів моделі;
- низькою якістю інформації, що використовується для моделювання та ін.

Для визначення факту наявності або відсутності помилок використовують спосіб, який полягає в порівнянні їх з аналітичними рішеннями. Цей спосіб використовують при наявності значної кількості різних аналітичних рішень. Проте екстраполювати результати оцінки одного порівняння на всі можливі рішення й параметри моделі досить небезпечно, оскільки в кожному конкретному випадку можуть виникати відхилення, особливо при зміні параметрів.

Часто використовують спосіб, коли розрахунок одного і того ж параметра відбувається декількома способами. Цей спосіб дає можливість визначити похибки практично для всіх комбінацій параметрів моделі.

Слід вказати, що для визначення ступеня достовірності результатів економіко-математичного дослідження необхідно для кожної відносної або середньої величини розрахувати відповідну *середню помилку*.

Середня помилка дозволяє визначити межі, в яких з відповідною ймовірністю може знаходиться значення показників розробленої моделі. При оцінці достовірності визначається і середня помилка різниці між двома середніми або відносними величинами:

$$M_{рр і зниці} = \sqrt{M_i^2 + M_2^2}, \tag{4.2}$$

де M_i^2, M_2^2 - квадрати середніх помилок.

Для дослідження достовірності результатів моделювання використовують *методи сценаріїв*, по яких є виборки. Причому сценарій складають таким чином, щоб умови здійснення кожної ймовірносної події в моделі співпадали з умовами, в яких проводились дослідження.

Для оцінки достоврінocті результатів моделювання за малою вибіркою може бути використана методика перевірки подібності теоретичної і емпіричної функцій розподілу, який заснований на використанні *модифікованих критеріїв Колмогорова-Смирнова і Мізеса* [60].

Для перевірки достовірності результатів моделювання економічних процесів можна використати *перевірку на статистичну еквівалентність моделей елементарних подій*. Метод дозволяє оцінити достовірність результатів елементарних подій моделі за статистикою, яка отримана за спеціальними моделями елементарних подій. Ці моделі розробляють, наприклад, в науково-дослідних установах [60].

4.2. Аналіз лінійних моделей оптимізаційних задач спрямований на прийняття оптимального рішення. Лінійна оптимізаційна модель включає систему обмежень, цільову функцію, області допустимих рішень, критерії оптимальності.

Цільова функція в загальному вигляді складається з трьох елементів:

- змінних, що управляються;
- змінних, що не управляються;
- форми функції (виду залежності між змінними).

Область допустимих рішень – це область, в межах якої здійснюється вибір рішень В економічних задачах вона обмежена наявними ресурсами і умовами, які записуються у вигляді системи обмежень, що складаються з рівнянь.

Критерії оптимальності – це економічний показник, що визначається за допомогою цільової функції через інші економічні показники. Одному і тому ж критерію оптимальності можуть відповідати декілька різних, але еквівалентних цільових функцій. Моделі з однією і тією ж системою обмежень можуть мати різні критерії оптимальності й різні цільові функції.

Для здійснення аналізу лінійних моделей необхідно побудувати економіко-математичну модель, методика розробки якої полягає в тому, щоб економічну сутність задачі представити математично, використовуючи різні символи, змінні й постійні величини, індекси та інші символи.

При аналізі лінійних оптимізаційних моделей важливим етапом є *інтепретація* отриманих економічних результатів. Саме на цьому етапі проявляється кваліфікація спеціаліста з напряму «Економіка і підприємництво». Інтепретація полягає в тому, що на базі розробленої лінійної оптимізаційної моделі визначають зв'язки між економічними показниками, оптимізаційні рішення економічних проблем, пропонують управлінські рішення щодо трансформаційних процесів переходу на підприємстві від економіки стагнації або, взагалі, падіння до економіки розвитку.

Питання для самоконтролю:

1. У чому сутність задач лінійного програмування?
2. Які особливості задач лінійного програмування Ви можете виділити?
3. Розкрийте сутність симплексного методу?
4. Розкрийте алгоритм використання симплексного методу при вирішенні задач лінійного програмування.
5. Які ще методи використовують при вирішенні задач лінійного програмування.
6. У чому сутність задач лінійного програмування?
7. Які особливості задач лінійного програмування Ви можете виділити?
8. Розкрийте сутність симплексного методу?

9. Розкрийте алгоритм використання симплексного методу при вирішенні задач лінійного програмування.
10. Які ще методи використовують при вирішенні задач лінійного програмування.
11. Розкрийте змістовну постановку транспортної задачі.
12. Сформулюйте математичну модель транспортної задачі?
13. Встановіть особливості вирішення закритої транспортної задачі.
14. Охарактеризуйте алгоритм визначення початкового опорного плану в транспортній задачі методом північно-західного кута.
15. Визначте напрями формування оптимального опорного плану транспортної задачі?
16. Назвіть види транспортних задач і охарактеризуйте їх.
17. Охарактеризуйте поняття «достовірність».
18. Назвіть напрями оцінки достовірності.
19. За якими напрямами відбувається аналіз лінійних моделей оптимізаційних задач.
20. Охарактеризуйте область допустимих рішень і критерій оптимальності.
21. У чому полягає інтепретація отриманих економічних результатів, отриманих на основі лінійних оптимізаційних моделей.

Завдання для самоконтролю:

1. Підприємство випускає протягом планового періоду два види продукції -столи і стільці. При їх виробництві використовуються три виду ресурсів. Дані по їх витратах на випуск одного виробу, запаси ресурсів, а також прибуток від реалізації одиниці продукції наведено в табл. 3.1.

Таблиця 3.1 – Дані по витратах на випуск одного виробу, запасів ресурсів, прибутку від реалізації одиниці продукції

	Столи	**Стільці**	**Запас ресурсів**
	4	6	24
	3	2	12
Ресурс 1	1	1	8
Прибуток	4	5	

Необхідно спланувати кількість вироблюваних столів і стільців таким чином, щоб при цих умовах виробництва прибуток був максимальним.

2. Припустимо, що в денний раціон тварин повинні входити поживні речовини двох видів у кількості, анведеній в табл. 3.2. Є можливість складати раціон з кормів двох видів, для яких задано вмістпоживних речовин в одиниці корму і ціна однієї одиниці кожного з видів кормів.

Таблиця 3.2 – Дані про поживні речовини і ціна кормів на підприємстві

	Корм 1	**Корм 2**	**Поживчі речовини в раціоні**
Поживна речовина 1	2	1	12
Поживна речовина 2	6	4	30
Ціна корму	5	2	

При задоволенні умов з необхідного вмісту поживних речовин в цьому раціоні треба досягти його мінімальної вартості.

3. Фірма виробляє дві моделі А і В збірних книжкових полиць. Їх виробництво обмежено наявністю сировини (високоякісних дощок) і часом машинної обробки. Для кожного виробу моделі А потрібно 2 м^2 дощок, а для моделі В - 5 м^2. Фірма може одержувати від своїх постачальників до 1300 м^2 дощок за тиждень. Для кожного виробу моделі А потрібно 15 хв. машинного часу, а для виробу моделі В - 30 хв. За тиждень можна використовувати 180 годин машинного часу. Скільки виробів кожної моделі слід випускати фірмі в тиждень, якщо кожний виріб моделі А приносить 4 грн. прибутку, а кожний виріб моделі В - 2 грн. прибутку?

4. Встановіть достовірність розрахунків моделі:

$$\frac{K^{'}}{K} = 0{,}12 + 0{,}21 x Кобз + 0{,}06 x Кобдз, \tag{4.3}$$

де $Кобз$ - коефіцієнт оборотності матеріальних запасів;

$Кобдз$ - коефіцієнт оборотності дебіторської заборгованості.

на основі встановленої похибки. Вихідні статистичні дані визначених економічних показників подано в табл. 3.3.

Таблиця 3.3 – Вихідні статистичні дані економічних показників моделі (4.3)

№ спостереження	$\frac{K'}{K}$	*Кобз*	*Кобдз*
1	0,661	2,25	1,16
2	0,595	1,96	1,06
3	0,587	1,93	1,05
4	0,576	1,87	1,07
5	0,527	1,63	1,09
6	0,523	1,61	1,10
7	0,525	1,62	1,09
8	0,574	1,86	1,07
9	0,577	1,87	1,07
10	0,424	1,12	1,14
11	0,469	1,34	1,13
12	0,487	1,43	1,12
13	0,495	1,47	1,11
14	0,503	1,51	1,11
15	0,507	1,53	1,10
16	0,515	1,57	1,11
17	0,515	1,57	1,11
18	0,519	1,59	1,09
19	0,520	1,60	1,09
20	0,526	1,63	1,07
21	0,523	1,62	1,07
22	0,559	1,79	1,06
23	0,561	1,80	1,05

ЛЕКЦІЯ 3

Тема 5. Цілочислове програмування.

Тема 6. Нелінійні оптимізаційні моделі економічних систем

Тема 5:

5.1. Основні поняття і сутність цілочислового програмування.

5.2. Алгоритм розв’язування задач цілочислового програмування.

5.3. Метод Гомори.

5.4. Метод віток і меж.

Тема 6:

6.1. Сутність нелінійних зв’язків в економічних системах.

6.2. Методи розробки нелінійних оптимізаційних моделей економічних систем.

Поняття: Цілочислове програмування; методи відтикання; комбінаторні методи; метод Р. Гомори; метод віток і меж; велика ітерація; мала ітерація, система; емерджентність, детермінована система; стохастична система; динамічна система; нелінійність; траєкторія; аттрактор; біфуркація; нелінійне програмування; цільова функція; оптимальний план; фрактал; графічний метод; метод Лагранжа.

Література: 4, 5, 7, 14, 23, 26, 29, 31, 49, 51, 61, 63.

5.1. Цілочисельне програмування - різновид лінійного програмування, в якому отримані значення повинні бути цілими числами.

При розгляді цілого ряду економічних задач необхідно враховувати вимогу цілочисельності використаних змінних. Такі задачі називаються задачами цілочисельного програмування. Під задачею цілочисельного програмування розуміється задача, в якій всі або деякі змінні повинні приймати цілі значення. У тому випадку, коли обмеження і цільова функція задачі є лінійною залежністю, задачу називають цілочисельною задачею лінійного програмування. В іншому випадку, коли хоча б одна залежність буде нелінійною, це буде цілочисельною задачею нелінійного програмування.

Особливий інтерес до задач цілочисельного програмування викликаний тим, що в багатьох практичних задачах необхідно знаходити цілочисельне рішення, зважаючи на дискретність ряду значень шуканих змінних.

Цілочисельне програмування виникло в 50-60-ті роки минулого століття з потреб практики - головним чином в роботах американських математиків Дж.Данцига і Р.Гомори. Спочатку цілочисельне програмування розвивалося незалежно від геометрії чисел на основі теорії і методів математичної оптимізації, насамперед лінійного програмування. Проте, в останні час дослідження в цьому напрямі все частіше проводяться засобами математики цілих чисел. Задачі такого типу вельми актуальні, оскільки до їх вирішення зводиться аналіз різноманітних ситуацій, що виникають в економіці, техніці, військовій справі та інших областях. З появою ЕОМ, зростанням їх продуктивності підвищився інтерес до задач такого типу і до математики в цілому.

Задачу цілочислового програмування записують так :

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max(\min), \tag{5.1}$$

за умов

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \begin{Bmatrix} \le \\ = \\ \ge \end{Bmatrix} b_i \quad (i = \overline{1,m}) \tag{5.2}$$

$$x_j \ge 0 \qquad (j = \overline{1,n}) \tag{5.3}$$

$$x_j - цілі \qquad (j = \overline{1,n}) \tag{5.4}$$

Для знаходження оптимального розв'язку цілочислових задач застосовують спеціальні методи. Найпростішим методом розв'язання цілочислової задачі є знаходження її оптимального розв'язку як задачі, що має тільки неперервні змінні, з подальшим округленням останніх. Такий підхід часто є виправданим.

Для знаходження оптимальних планів задач цілочислової програмування застосовують дві групи методів:

— методи відтинання;

— комбінаторні методи.

Основою методів відтинання є ідея поступового «звуження» області допустимих розв'язків розглядуваної задачі. Пошук цілочислового оптимуму починається з розв'язування задачі з так званими послабленими обмеженнями, тобто без урахування вимог цілочисловості змінних. Далі введенням у модель спеціальних додаткових обмежень, що враховують цілочисловість змінних, многокутник допустимих розв'язків послабленої задачі поступово зменшуємо доти, доки змінні оптимального розв'язку не набудуть цілочислових значень. До цієї групи належать:

- методи розв'язання повністю цілочислових задач (дробовий алгоритм Гомори);
- методи розв'язання частково цілочислових задач (другий алгоритм Гомори, або змішаний алгоритм цілочислового програмування).

Комбінаторні методи цілочислової оптимізації базуються на повному переборі всіх допустимих цілочислових розв'язків, тобто вони реалізують процедуру цілеспрямованого перебору, під час якої розглядають лише частина розв'язків (досить невелика), а решта враховують одним зі спеціальних методів. Найпоширенішим у цій групі методів є метод віток і меж.

Рекомендації з формулювання і вирішення задач цілочислового програмування:

1. Кількість цілочисельних змінних слід зменшувати наскільки можливо. Наприклад, цілочисельні змінні, значення яких повинно бути не менше 20, можна розглядати як безперервні.

2. На відміну від загальних задач лінійного програмування, додавання нових обмежень, особливо що включають цілочисельні змінні, звичайно зменшує час вирішення задач цілочислового програмування.

3. Якщо немає необхідності в знаходженні точного оптимального цілочисельного рішення, відмінного від безперервного рішення, наприклад 3%. Тоді реалізацію методу гілок і меж для задачі максимізації можна закінчувати,

якщо відношення різниці між верхньої і нижньої межами до верхньої межі менше 0,03.

5.2. Алгоритм розв’язування задач цілочислового програмування наступний:

1. Розв'язують задачу лінійного програмування без обмежень на цілочисельність, наприклад, симплекс-методом.
2. Якщо оптимальне рішення задачи лінійного програмування нецілочисельне, то проводять «велику ітерацію». Будують лінійне обмеження, якому задовольняє будь-яке цілочисельне вирішення задачі і не задовольняє отримане оптимальне нецілочисельне значення. Геометрично це означає - провести перетин (гіперплощина), який відсікав би нецілочисельну вершину, не зачіпаючи решту цілочисельних точок. Такий перетин називають правильним. Правильний перетин повинен задовольняти наступним умовам:

1) умова відсікання: оптимальне вирішення задаі лінійного програмування не задовольняє умові відсікання;
2) умова правильності:всі цілочисельні вирішення задачі задовольняють умові відсікання.

Оскільки для початкової задачі додаткове обмеження (відсікання) даватиме неприпустиме базисне рішення, необхідно провести «малі ітерації» для отримання оптимального рішення. Якщо отримане оптимальне рішення нецілочисельне, то проводять наступне відсікання. В іншому випадку пошук завершений.

Р. Гоморі запропонував ідею формування додаткових обмежень, яка приводить до вирішення задач цілочислового програмування за кінцеве число кроків.

5.3. Перший алгоритм Р. Гоморі:

Нехай задана повністю цілочисельна лінійна задача:

$$\min z(\overline{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j, \quad j = 1,\dots n, \tag{5.5}$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1,\dots m, \\ x_j \geq 0, \\ x_j \in Z. \end{cases} \tag{5.6}$$

Нехай в результаті лінійних операцій над рівняннями системи (5.6) отримано нове лінійне рівняння:

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j = b, \tag{5.7}$$

Цілою частиною числа a називається найбільше ціле число $[a]$, що не перевищує a. Наприклад $[2{,}25] = 2$; $[-2{,}25] = -3$.

Дробовою частиною числа a називається число $\{a\} = a - [a]$. Дробова частина числа - це завжди від'ємний дріб.

Замінивши в рівнянні (5.7) всі коефіцієнти a_j їх цілими частинами, отримаємо:

$$\sum_{j=1}^{n} [a_j] x_j \le b, \tag{5.8}$$

Якщо всі x_k є цілочисельними, то ліва частина рівняння (5.8) теж цілочисельна. Рівняння (5.8) можна посилити таким чином:

$$\sum_{j=1}^{n} [a_j] x_k \le [b], \tag{5.9}$$

Це обмеження-нерівність (5.9) можна перетворити в обмеження-рівняння шляхом введення додаткової цілочисельної і ненегативної змінної x:

$$\sum_{j=1}^{n} [a_j] x_k + x = [b]. \tag{5.10}$$

Віднімемо (5.7) з (5.10). Враховуючи, що $a = [a] + \{a\}$ отримаємо:

$$x = -\{b\} - (\sum_{j=1}^{n} - \{a_j\} x_j). \tag{5.11}$$

У першому методі Гомори всі обмеження формуються відповідно до рівнянь (5.11) - це і є відсікання нецілочисельних точок.

Фактично (5.11) - рівняння відсікаючої гіперплощини. Після вирішення задачі лінійного програмування одержуємо деяке базисне рішення, в якому деякі змінні можуть бути цілочисельними, а інші - нецілочисельними. Для нецілочисельних базисних змінних будуємо відсікання за першим алгоритмом Гомори, послідовно для кожної з них. Якщо нецілочисельних змінних декілька, то краще вибрати ту, в якої більше дробова частина. Якщо рівняння вибраної базисної змінної має вигляд

$$x_{баз} = b_i - (\sum a_{ij} x_j), \tag{5.12}$$

то рівняння додаткового обмеження-відсікання виглядає таким чином:

$$x = -\{b_i\} - \left(\sum -\{a_{ij}\} x_j\right). \tag{5.13}$$

Побудова відсікання - «велика ітерація». Далі для звуженої області проводимо «малі ітерації».

Вирішення задач цілочислового лінійного програмування можуть бути відсутні, якщо

1) цільова функція є необмеженою знизу, тобто як початкова нецілочисельна, так і цілочисельна задачі лінійного програмування не мають рішення;

2) початкова задача лінійного програмування має рішення, а цілочисельна не має. У симплекс-таблиці це видно таким чином: у стовпці вільних членів в деякому рядку стоїть неціле число, а вся решта коефіцієнтів цього рядка - цілі числа.

Збіжність даного алгоритму досить повільна. Для задачі з 10-ма змінними необхідно провести порядку 1000 ітерацій.

Перебір можливих цілих точок допустимої області не зменшує обчислень, оскільки їх звичайно досить багато.

Округлення нецілочисельного рішення до найближчого цілого може дати точку, що не належить області.

Другий алгоритм Р. Гомори:

Застосовують для вирішення як повністю, так і не повністю цілочисельних задач. Багато індексів I при змінних x_j розбивають на дві неперекресні підмножини I_1 і I_2 так, що:

при $j \in I_1$, $x_j \in Z$ (x_j - цілочисельні);

при $j \in I_2$, $x_j \in R$ (x_j - нецілочисельні).

Як і в першому алгоритмі Гомори, спочатку знаходять рішення задачиілінійного програмування без обмежень на цілочисельність, і далі проводяться відсікання за допомогою введення додаткових обмежень.

Припустимо, що після розв'язання задачі лінійного програмування отримана деяка базисна змінна, яка повинна бути цілочисельною:

$$x_5 = b_i - (\sum_j a_{ij} x_j), \tag{5.14}$$

де $-x_j$ вільна змінна.

Тоді за другим алгоритмом Гоморі відсікання будуємо таким чином:

$$x_5 = -\{b_i\} - (\sum_j -\alpha_{ij} x_j), \tag{5.15}$$

де

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} \left.\begin{array}{ll} a_{ij}, & a_{ij} \ge 0 \\ \dfrac{\{b_i\}}{1-\{b_i\}} |a_{ij}|, & a_{ij} < 0 \end{array}\right\} x_j \in R; \\ \\ \left.\begin{array}{ll} \{a_{ij}\}, & \{a_{ij}\} \le \{b_i\} \\ \dfrac{\{b_i\}}{1-\{b_i\}} (1-\{a_{ij}\}), & \{a_{ij}\} > \{b_i\} \end{array}\right\} x_j \in Z. \end{cases} \tag{5.16}$$

5.4. Метод віток і меж:

Використовують як до повністю цілочисельних задач, так і до частково цілочисельних задач.

Спочатку розв'язуємо ослаблену задачу без обмежень на цілочисельність:

$$x_k = b_k - (\sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j). \tag{5.17}$$

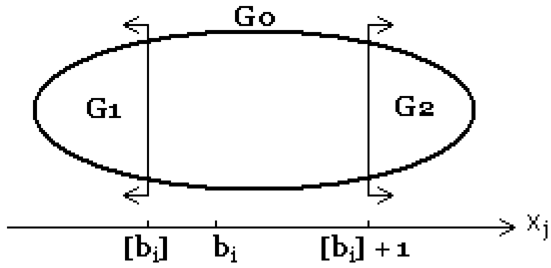
x_k повинна бути цілочисельною .

Тоді сферу допустимих рішень G_0 розбиваємо на дві підмножини G_1 і G_2 таким чином, що:

$$G_1: \; x_j \le [b_i],$$

$$G_2: \; x_j \ge [b_i] + 1. \tag{5.18}$$

Таким чином виключається інтервал $[b_i]+1 > x_j > [b_i]$, який не містить цілочисельних точок.



Початкову задачу розбиваємо на дві підзадачі. У кожній з областей G_1, G_2 знаходяться оптимальні точки, і якщо вони не задовольняють умові цілочисельності, знову здійснюємо розгалуження. Якщо отриманий оптимум виявляється допустимим (цілочисельним) для даної задачі, його фіксуємо і наголошуємо як найкращий. При цьому немає необхідності продовжувати розгалуження цієї підзадачі, оскільки поліпшити це рішення не вдасться.

Як тільки отримане допустиме (цілочисельне) рішення іншої підзадачі виявляється краще, воно фіксується замість попереднього.

Процес розгалуження продовжується до тих пір, поки кожна підзадача не призведе до цілочисельного рішення, або не буде встановлена неможливість поліпшення наявного рішення. Висновок про необхідність подальшого розбиття задачі робимо на основі введення межі. Як межу використовуємо значення цільової функції отриманого допустимого цілочисельного рішення. Якщо будь-яке оптимальне рішення підзадачі забезпечує гірше значення цільової функції, ніж наявне рішення (прийняте як межа), то цю підзадачу розглядати далі не слід.

Алгоритм методу віток і меж є ітеративним.

t - номер ітерації; z_t - оцінка (для задачі мінімізації $z_0 = \infty$).

При використанні алгоритму потрібне вирішення послідовності задач лінійного програмування без обмежень на цілочисельність. Послідовність задач, що підлягають вирішенню, називається основним списком.

1. Якщо основний список порожній - закінчення алгоритму, інакше - вибирають задачу з основного списку і знаходять її оптимальне рішення.

2. Якщо вибрана задача не має рішення, або її оптимальне рішення гірше прийнятої оцінки, то виключаємо цю задачу із списку і переходимо до п. 1, інакше - до п. 3.

3. Якщо отримане рішення цілочисельне - сформуємо нову оцінку z_{t+1}, яка відповідає якнайкращому оптимальному вирішенню поточної задачі. Перехід до п. 1. Якщо рішення поточної задачі нецілочисельне, то оцінку залишаємо у наступному вигляді: $z_{t+1} = z_t$.

4. Вибираємо одну із змінних x_k, яка за умовою повинна бути цілочисельною. Проводимо розгалуження, тобто в основний список додається дві підзадачі, для яких зберігаються ті ж обмеження, але для однієї:

$$x_k \le [b_k], \tag{5.19}$$

а для іншої:

$$x_k \ge [b_k] + 1. \tag{5.20}$$

Перехід до п. 1.

Слід зазначити, що вибір змінної може бути довільним (за збільшенням номерів) або визначатися таким чином:

1) наведена змінна представляє важливе рішення, що приймається в рамках розробленої моделі;

2) коефіцієнт в цільовій функції істотно перевершує всі інші.

6.1. Найбільший інтерес з погляду управління мають закономірності поведінки складних динамічних систем. Системи, що мають розгалужену структуру і велику кількість взаємозв'язаних і взаємодіючих елементів, що забезпечують виконання будь-якої складної функції, називаються *складними*. Одна з важливих властивостей складних систем - *нелінійність*. Якщо розглядаємо нестійкий режим системи, то порушивши його малим обуренням, отримаємо деяке відхилення від початкового положення. Відхилення наростатиме до тих пір, поки не вступить в дію механізм нелінійного обмеження процесу наростання обурення. З фізичного погляду це можна пояснити так: наростання амплітуди не може відбуватися до безконечності, через обмеженість енергетичних ресурсів системи це наростання повинно припинитися або змінитися зменшенням амплітуди відхилення. Будь-який новий режим повинен мати кінцеву амплітуду, управляють цими процесами нелінійні закони. Властивості нелінійної системи безпосередньо залежать від її стану.

При проведенні аналізу нелінійних динамічних систем необхідно враховувати поняття «фазовий простір» і «траєкторія». Багато станів динамічної системи називають *фазовим простором*, а траєкторію руху в цьому просторі з деякого початкового стану – *фазовою траєкторією*. Найважливіша характеристика цього простору – його розмірність – число величин, які необхідно задати для визначення стану системи.

При вивченні нелінійних об’єктів треба враховувати поняття *фракталу*. Будь-який нелінійний процес призводить до розгалуження, до розвилки на шляху, в якій система може вибрати ту чи іншу гілку. Будь-яка найменша неточність у початкових умовах може пізніше сильно вплинути на подальший рух. У кожний окремий момент причинний зв'язок зберігається, але після декількох розгалужень його вже не видно. Поняття *фрактала* спочатку розробляв Бенуа Б. Мандельброт як альтернативу евклідовій геометрії, що претендувала на найбільш відповідний опис об'єктів природи. Їх істотною межею була невичерпність найдрібніших деталей і самоподібність в різних масштабах вимірювання. Найсильнішим твердженням теорії фракталів є те, як багато процесів, що відповідають за формування економічних об'єктів, прагнуть стати хаотичними і що хаотичні аттрактори є фрактальними об'єктами.

6.2. Для розробки нелінійних оптимізаційних моделей економічних систем вирішують задачі нелінійного програмування.

Нелінійне програмування - математичні методи визначення максимуму або мінімуму функції за наявності обмежень у вигляді нерівностей або рівнянь. Максимізувавши або мінімізувавши функція є прийнятим критерієм ефективності вирішення задачі, відповідним поставленій меті. У цьому випадку цей критерій має назву *цільової функції*.

Цільова функція задач нелінійного програмування полягає в тому, щоб знайти умови, що обертають цільову функцію в мінімум або максимум. Рішення, що задовольняє умові задачі і відповідне наміченій меті, називається *оптимальним планом*. Нелінійне програмування служить для вибору найкращого плану розподілу обмежених ресурсів для вирішення поставленої задачі. В загальному вигляді постановка задачі нелінійного програмування зводиться до наступного. Умови задачі представляють за допомогою системи нелінійних рівнянь або нерівностей, що виражають обмеження, які накладають на використання наявних ресурсів.

У загальному вигляді математична модель задачі нелінійного програмування формулюється наступним чином:

$$f=(x_1,x_2,\dots,x_n)\rightarrow min\ (max). \tag{6.1}$$

При цьому ці змінні повинні задовольняти обмеженням:

$$\begin{cases} g_1(x_1,x_2,\dots,x_n)\le b_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ g_m(x_1,x_2,\dots,x_n)\le b_m, \\ g_{m+1}(x_1,x_2,\dots,x_n)\ge b_{m+1}, \\ \\ g_k(x_1,x_2,\dots,x_n)\ge b_k, \\ g_{k+1}(x_1,x_2,\dots,x_n)=b_{k+1}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ g_p(x_1,x_2,\dots,x_n)=b_p. \end{cases} \quad \dots\dots\dots\ \dots\dots\dots\dots\dots(6.2)$$

$x_1,x_2,\dots,x_n\ge 0,$ де одна з функцій f, g_i нелінійна.

Для задач нелінійного програмування немає єдиного методу вирішення. Залежно від виду цільової функції і системи обмежень розроблені спеціальні методи вирішення, до яких відносяться метод множників Лагранжа, градієнтні методи, наближені методи вирішення, графічний метод. Розглянемо деякі з них. Основні ідеї графічного методу: максимум і мінімум досягається в точках дотику лінії рівня з областю допустимих рішень, яка задається системою обмежень. Наприклад, якщо лінії рівня - прямі, то точки дотику можна визначити, використовуючи геометричне значення похідної.

Питання для самоконтролю:

1. Охарактеризуйте сутність цілочислового програмування.
2. Розкрийте напрями формулювання і вирішення задач цілочислового програмування:
3. Які методи використовують при вирішенні задач цілечислового лінійного програмування. Охарактеризуйте їх.
4. Представте алгоритм вирішення задач цілочислового програмування.
5. У чому полягає метод Гомори, представте алгоритм вирішення задач цілочислового програмування цим методом.
6. У чому полягає метод віток і меж, представте алгоритм вирішення задач цілочислового програмування цим методом.
7. Назвіть і охарактеризуйте основні поняття, пов'язані з нелінійними зв'язками в економічних системах.
8. Визначте поняття нелінійного програмування й сутність вирішення задач нелінійного програмування.
9. Охарактеризуйте графічний метод вирішення задач нелінійного програмування при формуванні нелінійних оптимізаційних моделей.
10. Охарактеризуйте метод Лагранжа вирішення задач нелінійного програмування при формуванні нелінійних оптимізаційних моделей.

Завдання для самоконтролю:

1. Знайти оптимальний цілочисловий план задачі $Z(X) = x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 - max$ за умови:

$x_1+x_2+x_3 =15$

$2x_1+ 3x_3+x_4=8,$

$x_j, > 0,$ x_j — цілі числа, $j = 1, 2, 3, 4.$

2. Отримати цілочисловий оптимальний план задачі Z(X) $x_1 — 4x_2 — 2x_3 + 3x_4$ —> max за умови

$3x_1+x_2+8x_3+x_4=35$

$x_1+x_3+x_4\leq 6$

$x_j\geq 0$, x_j — цілі числа, j = 1, 2, 3, 4.

3. Контейнер обсягом 5 м^3 розташований на контейнеровозі вантажністю 12 т. Контейнер необхідно заповнити вантажем двох найменувань. Маса одниці вантажу m_j (в тонах), обсяг одиниці вантажу V_j (в м^3), вартості Cj (в умовних грошових одиницях) наведені в табл. 5.1.

Таблиця 5.1 - Маса одиниці вантажу m_j (в тонах), обсяг одиниці вантажу V_j (в м^3), ціна Cj (в умовних грошових одиницях)

Вид вантажу у	m_j	V_j	C_j
1	3	1	10
2	1	2	12

Необхідно завантажити контейнер таким чином, щоб вартість вантажу, який перевозиться, була максимальною.

6. Загальні витрати виробництва задані функцією T=0,8x^2+0,7xy+0,6y^2+800x+500y+1600, де *x* і *y* відповідно кількість товарів *A* і *B*. Загальна кількість виробленої продукції повинна дорівнювати 400 одиниць. Скільки одиниць товару *A* і *B* потрібно виробити, щоб витрати на їх виготовлення були мінімальними?

ЛЕКЦІЯ 4

Тема 7. Аналіз та управління ризиком в економіці

Тема 8. Система показників кількісного оцінювання ступеня ризику

Тема 7:

7.1. Поняття, сутність і зміст невизначеності й ризику

7.2. Підходи до управління ризиком

7.3. Етапи процесу управління ризиком

7.4. Аналіз управління ризиком в економіці

Тема 8:

8.1. Напрями кількісного оцінювання ступеня ризику

8.2. Оцінка ризику в абсолютному вираженні

8.3. Оцінка ризику у відносному ризику

8.4. Допустимий і критичний ризик

8.5. Оцінка ризику ліквідності

Поняття: Ризик; управління ризиком; невизначеність; ступінь невизначеності; кількісне оцінювання ризику; математичне сподівання; допустимий ризик; критичний ризик.

Література: 1, 6, 8, 9, 10, 11, 21, 32, 41, 42, 57, 58, 62, 68, 69, 71, 76, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89.

7.1. Різноманіття джерел невизначеності є елементом об'єктивної дійсності. Визначення джерел невизначеності для кожного підприємства має індивідуальний характер. Невизначеність початкових даних веде до невизначеності кінцевих оцінок.

Останнім часом найпопулярнішим поняттям є поняття «невизначеність». Причому не в значенні незнання, а що розуміється як постійна мінливість умов, поведінки (зокрема, виникнення нових зв'язків), швидка і гнучка переорієнтація виробництва і збуту. Невизначеність є не тільки умовою, але і атрибутом, внутрішньо властива будь-якому рішенню і включає як об'єктивні, так і суб'єктивні моменти. Виділяють такі типи невизначеності в задачах ухвалення управлінських рішень:

- об'єктивна невизначеність («невизначеність природи»);
- невизначеність, викликана відсутністю гідної релевантної інформації;
- стратегічна невизначеність, викликана залежністю від дій інших осіб (партнерів, супротивників, організацій і т.п.);
- невизначеність, породжена низькоструктурованими проблемами;
- невизначеність, викликана нечіткістю, розпливчатістю як процесів і явищ, так і інформацією, що їх описує. j-

Ухвалення рішень в умовах невизначеності є по суті вибором тієї або іншої можливості з їх різноманіття, а сам процес ухвалення рішень нерозривно пов'язаний з перетворенням невизначеності у визначеність.

Невизначеність обумовлюється неповнотою, несвоєчасністю, невірогідністю інформації, випадковістю, протидією. Невизначеність виступає середовищем появи ризику.

Чим більше невизначеність економічної ситуації, тим вище ступінь ризику, тим більше, відповідно, діапазон між максимальним і мінімальним доходом (збитком) при рівній ймовірності їх отримання.

Багато західних дослідників вважають, що прибуток і втрати організації підприємця є слідством ризику й невизначеності.

Ризик - категорія об'єктивна, невід'ємний елемент функціональної структури системи управління організацією, виявляється як безліч окремих відособлених ризиків.

З іншого боку, ризик як чинник досягнення мети організації формуючий поведінковий простір індивіда завжди суб'єктивний, оскільки зміст ризикованої поведінки суб'єктивний. Ризик сприймається суто індивідуально.

Суб'єктами ризику можуть бути індивіди, малі й великі групи, організації і соціальні інститути, суспільство в цілому.

Існуючі в літературі визначення поняття ризику можуть бути з'єднаний в наступні групи.

Ризик - це загроза, небезпека виникнення збитку потенційно можливої вірогідної втрати ресурсів, недоотримання доходів або поява додаткових витрат в результаті здійснення певної виробничої і фінансової діяльності; подія або група споріднених випадкових подій, що завдають збиток об'єкту.

Ризик - це не збиток, що наноситься реалізацією рішення, а можливість відхилення від мети, для досягнення якої ухвалювалося рішення; вірогідність помилки або успіху того або іншого вибору в ситуації з деякими альтернативами; це ситуативна характеристика діяльності, що полягає в невизначеності її результату в можливих несприятливих наслідках у разі «неуспіху»; рівень невизначеності в прогнозі результату.

Ризик - вибір управляючих параметрів (управляючих дій), що не гарантує виконання поставленої мети у зв'язку з невизначеністю (характером вірогідності) умов господарювання.

Ризик - це діяльність, пов'язана з подоланням невизначеності в ситуації неминучого вибору, в процесі якої є можливість кількісно і якісно оцінити вірогідність досягнення передбачуваного результату невдачі й відхилення від мети.

Сутність ризику полягає у співвідношенні мети й результату діяльності, дозволяючи судити про неспівпадання між ними. Міра цього неспівпадання і є мірою ризику. Якщо спостерігається єдність мети і результату, в цьому випадку ризику немає, тобто ризик дорівнює нулю, якщо ні – ризик спостерігається.

7.2. Управління ризиком - це складний процес, який охоплює багато чинників, наприклад фінансових і економічних. Управління ризиком включає декілька блоків. Перший блок - це порівняльна характеристика ризику. Суть його полягає в розрахунку кількісних показників, в якому показники ризику порівнюються із стандартними величинами ризику, інформацією нормативних документів або порівнянними показниками ризиків. У другому блоці визначається, наскільки значний наявний ризик. У третьому блоці відбуваються моніторинг ризику й здійснення управлінських дій щодо його зниження. У четвертому блоці здійснюється контроль за ризиком і розповсюдження інформації про його рівень.

7.3. Управління ризиком є важливим і постійно присутнім елементом управління в підприємницьких структурах, що випливає із загальної концепції ризику, яка склалася, у цього елемента дві сторони:

-перша - «оборонна», пасивна, що реалізується за допомогою страхування і відокремлення від ризику;

-друга - «наступальна», активна, реалізовувана в ході зростання, оновлення, накопичення тієї інформації, яка необхідна для скорочення області невизначеності й ризику.

Виділяють наступні етапи управління ризиком:

1 етап – формування цілей у відповідній сфери діяльності підприємства.

2 етап – визначення критеріїв оцінки різних заходів з управління ризиком.

3 етап – вибір і аналіз заходів з досягнення визначених цілей.

4 етап – вибір найбільш адекватних заходів і контроль результатів їх виконання.

На першому етапі визначають масштаб рівня ризику, суб’єктів і об’єктів ризикам, спрямованість заходів щодо зниження ризиків, формують задачі.

На другому етапі вибирають оптимальні заходи щодо скорочення або запобігання ризиків, які б були спрямовані на їх досягнення. До початку вибору заходів з управління ризиком потрібно вирішити, за допомогою яких критеріїв оцінювати вибирані заходи. Необхідною умовою вибору переважної більшості заходів щодо управління ризиком є їх технологічна і економічна здійсненість.

На третьому етапі аналізують заходи щодо управління ризиком.

На четвертому етапі проводять постійний контроль виконання різних етапів робіт. При проведенні контролю результатів робіт треба враховувати:

- відповідність вибраних показників контролю меті й завданням здійснюваних заходів;
- проведення контролю результатів робіт через певний проміжок часу;
- проведення контролю всіх аспектів проведення заходів (експозиції, ризику, економічних показників і т.п.);
- використання показників відповідного масштабу.

7.4. Аналіз заходів з управління ризиком у процесі постійної перевірки їх здійснення і ефективності спрямований на досягненні поставленої мети. Щоб почати цей процес, члени робочої групи можуть використовувати показники зниження ризику або “стратегії запобігання появі ризику” з набору “інструментів” підходу до управління ризиком. Запропоновані заходи можна потім аналізувати в ході роботи, щоб оцінити переваги різних стратегій.

Найефективніші заходи можна потім більш ретельно проаналізувати, щоб вибрати найприйнятніші з них. На цьому етапі особливо важливо залучення широкого кола зацікавлених сторін, щоб вибрані стратегії не викликали негативного відношення у когось із залучених учасників (наприклад, громадськості, приватного сектора, платників податків і т. Ін..) Ефективним може бути підхід залучення в цей процес членів робочої групи до обговорення за круглим столом різних підходів з управління ризиком.

8.1. Кількісне оцінювання рівня ризику – це важливий етап процесу управління, який має включати оцінювання реального (фактичного) ризику, а також встановлення меж допустимого ризику для окремих господарських операцій, організаційних підрозділів і фінансових установ. Водночас потрібно оцінити й ризики освоєння нових ринків, продуктів і напрямів діяльності. Ризик економічних рішень оцінюють сподіваними втратами, що є наслідками цього рішення. Ступінь ризику вимірюється втратами (збитками), яких можна очікувати в разі реалізації цього ризику, а також ймовірністю, з якою ці втрати можуть статися. Коли ймовірність втрат висока, а розмір їх малий або навпаки – збитки малоймовірні, хоча й оцінюються як суттєві, то ризик вважається невисоким (малим). Отже, методи оцінки ризику, які формалізують процес вимірювання та розрахунків, мають визначати три компоненти ризику:

- розмір (величина) – сума можливих втрат;
- ймовірність настання негативної події;
- тривалість періоду впливу ризику.

Ймовірність настання певної події визначається за допомогою об'єктивних і суб'єктивних методів. Об'єктивні методи визначення ймовірності ґрунтуються на обчисленні частоти, з якою в минулому відбувалася ця подія. Це методи теорії ймовірностей, економічної статистики, теорії ігор та інші математичні методи.

Суб'єктивні методи спираються на використання оцінок і критеріїв, сформованих на підставі припущень, власних міркувань і досвіду менеджера, оцінок експертів, суджень консультантів, порад консалтингової фірми та ін. Суб'єктивні методи застосовують тоді, коли ризики не піддаються кількісному вимірюванню – квантифікації.

Для оцінки величини фінансових ризиків використовують три групи показників:

- статистичні величини (стандартне відхилення, варіація, дисперсія, коефіцієнт бета);
- непрямі показники ризиковості діяльності, обчислені звичайно у формі фінансових коефіцієнтів за даними публічної звітності;
- аналітичні показники (індикатори), призначені для оцінки конкретного виду ризику (валютного, відсоткового, кредитного, інвестиційного, незбалансованої ліквідності та ін.) у процесі внутрішнього аналізу діяльності підприємницьких структур.

8.2. Система кількісних оцінок ризику в абсолютному вираженні складається з таких:

- у випадку, коли рішення є альтернативним, тобто можливі лише два наслідки його реалізації, показники ризику розраховують за такою залежністю:

$$R = Xн \times Pн, \tag{8.1}$$

де Хн – величина збитків у разі настання негативного наслідку рішення;

Рн – ймовірність настання негативного наслідку.

- у випадку, якщо рішення мають декілька (безліч) наслідків реалізації, використовують показники:

- математичне сподівання. Математичне сподівання дискреційної величини представляє собою суму добутків можливих варіантів цієї величини на їх імовірність:

$$M(x)= \sum_{i=1}^{n} Xi \cdot Pi, \tag{8.2}$$

причому основною умовою використання цієї формули є

$$\sum_{i=1}^{n} Pi = 1. \tag{8.3}$$

Математичне сподівання для неперервної величини

$$M(x)= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx; \tag{8.4}$$

- показник дисперсії характеризує ступінь мінливості реальних даних деякої випадкової величини навколо математичного сподівання. Визначається як математичне сподівання квадратів відхилень індивідуальних значень випадкової величини від її математичного сподівання:

$$\sigma^2=M(x – M(x))2. \tag{8.5}$$

Для дисперсійної величини формула дисперсії має вигляд

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i - M(x))^2 \cdot Pi \quad (8.6)$$

,

для безперервної величини:

$$\sigma 2 = \int_{-\infty}^{+\infty} M(x - M(x))^2 f(x)dx \quad (8.7)$$

.

- середньоквадратичне відхилення:

$$\sigma = \sqrt{M(x - M(x))^2}, \quad (8.8)$$

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - M(x))^2 \cdot p_i} \quad (8.9)$$

.

Іноді для оцінки величини ризику в абсолютному вираженні використовують ймовірність настання небажаних наслідків, тобто величини Р.

8.3. Іноді для оцінки ризику при обґрунтуванні рішення не достатньо абсолютних показників. У такому разі здійснюють розрахунок відносних показників.

У відносному вираженні ризик визначається: коефіцієнтом ризику, який встановлюється як відношення величини максимальних втрат від даного виду діяльності до деякої бази порівнянь (за таку базу можна приймати обсяг власних ресурсів підприємства, загальні величини втрати з даного виду діяльності або сподіваний дохід від даного виду діяльності):

$$Кр = Х/К, \quad (8.10)$$

де Х – величина максимально можливих втрат;

К – база порівнянь.

Цей показник, як правило, завершує проведення дисперсійного аналізу ризику і використовується при наявності масиву статистичної інформації. При цьому, чим більший цей показник, тим більшим є ризик, пов’язаний з даним проектом.

8.4. Для більш глибокого інтервального оцінювання ризикованого проекту будують криві щільності розподілу ймовірності випадкових збитків, визначають зони ризику.

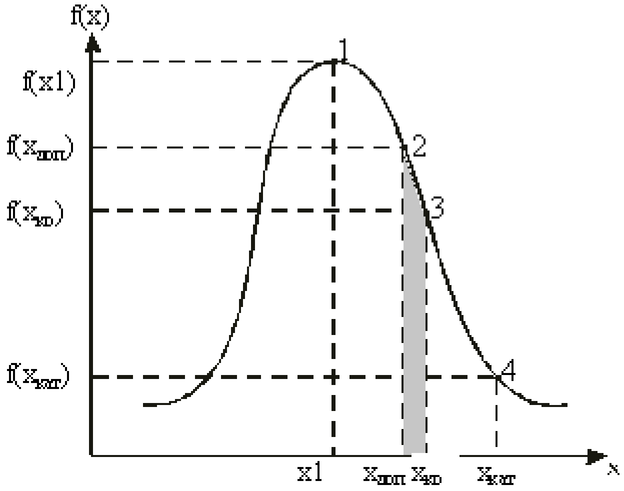


Рис. 8.1 – Типова крива щільності розподілу ймовірностей випадкових втрат

точка 1 – характеризує найбільш ймовірні збитки по проекту і сподівану або середню віддачу цього проекту;
точка 2 – відповідає точці допустимого ризику, в якій збитки матимуть величину, що дорівнює загальній величині прибутку від проекту. Ця точка є верхньою межею зони допустимого ризику.

Ймовірність допустимого ризику визначають за залежністю

$$F(x) = \int_{0}^{X_{доп}} f(x)dx \quad (8.11)$$

Під зоною допустимого ризику розуміють область, у межах якої відповідний вид підприємницької діяльності зберігає свою економічну доцільність, тобто випадкові збитки не перевищують очікуваного підприємницького ризику від проекту;
точка 3 – характеризує ступінь гранично допустимого критичного ризику, тобто ризику втрат, які сягають величини розрахункової виручки від проекту.

Ймовірність критичних ризиків визначають за залежністю

$$F(x) = \int_{X_{доп}}^{X_{кр}} f(x)dx \quad (8.12)$$

Під зоною критичного ризику розуміють область випадкових збитків, розміри яких перевищують величину очікуваного підприємницького збитку і сягають величини розрахованої виручки;
точка 4 – характеризує ступінь гранично-катастрофічного ризику, тобто ризику втрат, які сягають розміру всього майна підприємства.

Ймовірність катастрофічного ризику визначають шляхом інтегрування:

$$F(x) = \int_{X_{кр}}^{X_{кат}} f(x)dx \quad (8.13)$$

Зона катастрофічного ризику – це область можливих втрат, які перевищують величину розрахованої виручки і можуть сягати вартості майна підприємця.

Катастрофічний ризик може призвести підприємство до банкрутства, крім того до катастрофічних відносяться всі ризики пов’язані із загрозою для життя людей, оточуючого середовища, тощо.

Частіше всього під час прийняття економічних рішень підприємця цікавить не стільки ймовірність певного рівня втрат, скільки ймовірність, що його втрати не перевищать певної позначки.

$$W(x) = 1 – F(x), \quad (8.14)$$

Тут W(x) – це функція розподілу ймовірностей перевищення певного рівня випадкових збитків.

Показники ризику:

1) показник допустимого ризику – це ймовірність того, що втрати виявляться більшими за гранично допустимий рівень (таким рівнем є прибуток від проекту);

2). показник критичного ризику – це ймовірність того, що втрати виявляться більшими за допустимий критичний рівень (розрахункова виручка);

3). показник катастрофічного ризику – це ймовірність того, що втрати по проекту виявляться більшими за граничний катастрофічний рівень (вартість майна підприємця).

Розрахунок вказаних показників дає змогу зробити судження про різні стадії ризикованості проекту й захистити рішення на кожному етапі реалізації проекту.

Але для обґрунтування рішення недостатньо тільки здійснити розрахунок зазначених показників, необхідно також встановити їх граничні величини. Такі граничні значення називають критеріями відповідно допустимого, критичного і катастрофічного ризиків.

У господарській практиці можна орієнтуватися на такі критерії:

- критерії допустимого ризику Кд=0,1;
- критерії критичного ризику Ккр=0,01;
- критерії катастрофічного ризику Ккат=0,001.

Критерії ризику означають, що на угоду не варто йти, якщо:

- у 10 випадках з 100 можна втратити весь прибуток від угоди;
- в 1 випадку зі 100 можна втратити всю розрахункову виручку;
- в 1 випадку із 1000 можна втратити майно.

Приймаючи рішення, підприємець на підставі попередніх розрахунків повинен орієнтуватись на такі умови:

- показник допустимого ризику не повинен перевищувати 0,1;
- показник критичного ризику не повинен перевищувати 0,01;
- показник катастрофічного ризику не повинен перевищувати 0,001.

8.5. Потреба в оцінці ризику ліквідності виникає під час змін стратегії й тактики інвестиційної діяльності, оскільки на підприємстві такі зміни відбуваються постійно відповідно і контроль за зміною цього ризику повинен здійснюватися постійно.

Ризик ліквідності – це специфічна форма ризику, що визначається як ймовірність того, що підприємство не здатне буде виконувати свої фінансові зобов’язання. Він може бути викликаний як низькою віддачею об’єктів інвестування підприємства, так і великим періодом інвестиційного процесу.

Для оцінки ризику ліквідності використовують два критерії:

- час трансформації інвестицій у грошові кошти;
  - обсяг фінансових втрат інвестора, пов’язаний з такою трансформацією;

За часом трансформації інвестицій у грошові засоби всі об’єкти інвестування можна поділити на:

- терміноволіквідні з незначним ризиком (час трансформації до 7 днів);
- високоліквідні інвестиції з низьким ризиком (час трансформації від 7 до 30 днів);
- середньоліквідні із середнім ризиком (час трансформації від 1 до 3 місяців);
- малоліквідні об’єкти з високим ризиком (час трансформації більше 3 місяців).

Виходячи з цього, для оцінки ризику ліквідності інвестиційного портфелю підприємства за критерієм часу розраховують такі показники:

1). частка терміново ліквідних інвестицій в їх реальному обсязі:

$$Пл = \frac{Вт}{В}, \quad (8.15)$$

де В – вартість усіх його активів (інвестицій);

2) показник ризику ліквідності

$$Крл = \frac{Вт + Вв}{Вс + Вн}, \quad (8.16)$$

де Вm – вартість терміноволіквідних активів;

Вв – вартість високоліквідних активів;

Вс – вартість середньоліквідних активів;

Вн – вартість низьколіквідних активів.

Чим більшим є показник ризику ліквідності, тим меншим є ризик ліквідності.

- Оцінку ліквідності інвестицій за рівнем фінансових витрат здійснюється на основі розрахунку процентного співвідношення величини можливих втрат до обсягів інвестицій, які прагнуть реалізувати. За цим критерієм всі об'єкти інвестування оцінюють як:
  - з дуже високим ризиком (витрати перевищують 20%);
  - з високим ризиком (11-20%);
  - із середнім ризиком (6-10%);
  - з низьким ризиком (до 5%).

Показники ризику ліквідності за критерієм часу й рівнем фінансових витрат знаходяться між собою в оберненій залежності: інвестор згоден на більший рівень фінансових втрат під час реалізації проекту, якщо при цьому він швидше його реалізує, і навпаки.

Питання для самоконтролю:

1. Назвіть типи невизначеності в задачах ухвалення управлінських рішень.
2. Визначте категорію «ризик» в аспекті розвитку сучасних економічних відносин.
3. Охарактеризуйте аспекти управління ризиком.
4. Назвіть і охарактеризуйте етапи управління ризиком.
5. Назвіть основні напрями аналізу при здійсненні управління ризиком.
6. У чому полягає кількісна оцінка ризику.
7. Які показники використовують для кількісної оцінки ризику.
8. Охарактеризуйте систему кількісних оцінок ризику в абсолютному вираженні.
9. Охарактеризуйте систему показників визначення ризику у відносному вираженні.
10. Визначте напрями оцінки допустимого і критичного ризику.
11. Охарактеризуйти напрями оцінки ризику ліквідності.

Завдання для самоконтролю:

1. Емігрант з України включається в гру на фондовій біржі після того як отримав роботу і має стабільний дохід. Заощадивши власні 10000 доларів, він взяв у борг ще 40000 доларів під 10%-річних і вклав всі 50000 доларів в акції однієї з компаній, розраховуючи на річне зростання курсу 20%. Але фактичний курс почав падати з ряду причин і коли він знизився на 40%, емігрант вирішив позбутися ненадійних акцій, в результаті чого збитки привели його до банкрутства. Його знайомий американець також вклав власні 50000 доларів в акції тієї ж фірми, а потім продав їх, проте американцю вдалося уникнути банкрутства. Чому збанкрутував емігрант?

2. Необхідно інвестувати тимчасово вільні грошові кошти строком на 2 роки з тим, щоб в кінці отримати суму 1260000 грн. На ринку доступні два види фінансових інструментів - дисконтні облігації терміном оберта 1 рік і 3 роки (номінальна вартість 126 грн.). Поточна ціна річних облігацій складає 100.8 грн., трирічних - 64.5 грн. Прибутковість як одного, так і іншого виду облігацій становить 25 %.

Визначити необхідну суму інвестицій при незмінності ставок прибутковості протягом всього терміну інвестування.

Розглянути також випадки: зниження ставок прибутковості через рік до 20 % річних, підвищення ставок прибутковості через рік до 30 % річних.

Зробити висновки і пропозиції з вибору фінансових інструментів інвестування.

ЛЕКЦІЯ 5

Тема 9. Принципи побудови економетричних моделей. Парна лінійна регресія

Тема 10. Лінійні моделі множинної регресії.

Тема 11. Узагальнені економетричні моделі.

Тема 12. Економетричні моделі динаміки

Тема 9:

9.1. Принципи побудови економетричних моделей

9.2. Критерії адекватності економетричної моделі

9.3. Сутність мультиколінеарності, напрями її виявлення

9.4. Парна лінійна регресія

Тема 10:

10.1. Кількісна регресійна модель множинної регресії

10.2. Етапи побудови лінійної моделі множинної регресії

10.3. t-критерій Ст’юдента і F-критерій Фішера в множинному регресійному аналізі

10.4. Тест Дарбіна-Уотсона для оцінки адекватності економетричної моделі

10.5. Інтепретація економетричної моделі

Тема 11:

11.1. Узагальнені економетричні моделі в економіко-математичному моделюванні

11.2. Види узагальнених економетричних моделей

Тема 12:

12.1. Сутність динамічних процесів в економіці

12.2. Аналіз часових рядів економічних показників і побудова економетричних моделей динаміки

12.3. Авторегресійні моделі і аналізі динаміки економетричних процесів і їх прогнозуванні

Поняття: Випадковий член; парний регресійний аналіз; F-теста; t-критерій Ст'юдента; мультиколінеарність; гомоскедастичність; гетероскедастичність; тест Дарбіна-Уотсона; критерій Спірмена; коефіцієнт парної кореляції; коефіцієнт множинної кореляції, узагальнена економетрична модель; узагальнена лінійна економетрична модель; узагальнена нелінійна економетрична модель, динамічний ряд; часовий ряд; рівень рядів; похідні ряди; довжина часового ряду, тренд; трендова модель; сезонні коливання; циклічні скдадові, авторегресія

Література: 17, 18, 19, 20, 22, 28, 34, 35, 36, 44, 45, 46, 50, 59, 63, 80.

9.1. Важливим питання при розробці модели парної лінейної регресії є питання наявності випадкого члена. Випадковий член існує з декількох причин:

1. Невключення пояснювальних змінних. Співвідношення між у і х завжди є досить великим спрощенням. У дійсності існують інші фактори, які здійснюють вплив на у і які не включені у формулу (9.1).
2. Агрегування змінних. У багатьох випадках залежність, що розглядається – це спроба об'єднати разом деяке число мікроекономічних співвідношень. Наприклад, функція сумарного споживання – це спроба загального вираження сукупності рішень окремих індивидів про витрати. Оскільки окремі співвідношення, ймовірно, мають різні параметри, будь-яка спроба визначити співвідношення між сукупними витратами і доходами є апроксимацією. Тому, спостережувані розходження при цьому приписують наявності випадкового члена.
3. Помилковий опис структури моделі. Структура моделі може бути описана помилково. Наприклад, якщо залежність відноситься до даних часових рядів, то значення у може залежати не від фактичного значення х, а від значення, яке очікувалось у минулому періоді. Якщо очікуванє й фактичне значення тісно зв'язані, то буде здаватися, що

між у і х існує залежність, проте це буде тільки апроксимацією, і розходження знову буде пов'язано з наявністю випадкого члена.

4. Помилкова функціональна специфікація. Функціональне співвідношення між у і х математично може бути визначено помилково. Наприклад, визначена залежність може бути не лінійною, а мати більш складний зв'язок.
5. Помилки вимірювання. Якщо у вимірюванні однієї або більш взаємозв'язаних змінних є помилки, то спостережувані значення не відповідатимуть точному співвідношенню і існуючі розходження будуть вносити вклад у залишковий член.

У парному регресійному аналізі важливе значення має визначення регресії. Аналітично регресію визначають за допомогою коефіцієнта регресії. Коефіцієнт регресії, який розраховується методом найменших квадратів, - це особлива форма випадкової величини, якості якої залежать від якостей залишкового члена в рівнянні.

Тому важливим кроком в регресійному аналізі є визначення залишків для кожного спостереження.

Принципове зачення при побудові економетричної моделі має перевірка розробленої моделі на адекватність шляхом використання відповідних критеріїв.

9.2. Основними напрямками оцінки адекватності економетричної моделі є:

1. Перевірка за допомогою F-теста (F-критерій Фішера);
2. Використання t-розподілу Стьюдента для оцінки надійності коефіцієнта кореляції;
3. Перевірка моделі на гомо-гетескедастичність;
4. Перевірка факторів економетричної моделі на мультиколінеарність.

F-тест використовують для оцінки того, чи важливе пояснення, яке дає рівняння в цілому. Тобто в регресійному аналізі побудова F-статистики здійснюється шляхом відношення дисперсії залежної змінної на “пояснювальні” й “непояснювальні” складові:

$$F = (ESS / k) / RSS / (n\text{-}k\text{-}1), \qquad (9.2)$$

де ESS - пояснювальна сума квадратів відхилень;

RSS – залишкова (непояснювальна) сума квадратів;

к – кількість ступенів свободи;

n – кількість значень факторів моделі.

При здійсненні F-теста для рівняння перевіряється, чи перевищує r^2 те значення, яке може бути отримано випадково. Для розрахунку F-статистики для рівняння в цілому формулу (9.2) можна трасформувати шляхом ділення чисельника і знеменника рівняння на TSS (загальну суму квадратів), відмічаючи, що ESS/TSS дорівнює r^2, а RSS/TSS дорівнює $(1 - r^2)$. У результаті отримуємо наступне рівняння:

$$F= r^2 / к / (1 - r^2) / (n – k - 1). \qquad (9.3)$$

Розрахунковий F-критерій визначається при відповідному рівні значущості й ступенях свободи і порівнюють з критичним F-критерієм Фішера. Значення останнього критерія наведені у спеціальних таблицях. Якщо розрахунковий F-критерій перевищує його критичне значення, то можна стверджувати, що пояснення, яке дає рівняння, в цілому важливе, а економетрична модель адекватна. У протилежному разі модель вважається неадекватною, а пояснення неважливим.

Іншим важливим статистичним параметром для перевірки адекватності економетричної моделі є t-розподіл Стьюдента. Він використовується для оцінки надійності коефіцієнта кореляції. У цьому випадку t-статистику для r розраховують наступним чином:

$$t = \sqrt{n\text{-}2/1\text{-}r^2}. \qquad (9.4)$$

Вибравши рівень значущості в 5% дослідним, знаходять критчне значення t з (n - 2) ступенями свободи. Якщо значення t перевищує його критичне значення (позитивна або негативна сторона), то нульову гипотезу відхиляють про те, що коефіцієнт кореляції дорівнює нулю. У цьому випадку роблять висновок про лінійний зв'язок (позитивний або негативний).

Слід зазначити, що коли нульова гипотеза підтверджується, то значення t буде перевищувати його критичне значення (в позитивну або негативну сторону) тільки в 5% випадках. Це означає, що при виконанні перевірки ймовірності допущення помилки, що відхиляє нульову гипотезу, коли вона фактично правільна, складає 5%.

Ймовірно, що ризик допущення такої помилки в 5% випадків досить великий для дослідника. Тоді він може скоротити ступінь ризику, здійснюючи розрахунки при рівні значущості в 1%. Критичне значення t зараз буде вище, ніж до цих пір, тому необхідна більш висока (позитивна або негативна) t-статистика для відхилення нульової гипотези, а це означає, що потрібне більш вище значення коефіцієнта кореляції.

Наступним етапом оцінки адекватності економетричної моделі є перевірка її на гетеро або гомоскедастичність. Гомоскедастичність означає однаковий розподіл фактичних значень вибірки змінних. Тобто фактичні значення спостережень іноді будуть позитивними, іноді негативними, іноді – відносно близькими до нуля, проте в апріорі відсутні причини появи великих відхилень між спостереженнями.

Разом з тим для деяких виборок, можливо, більш доцільно припустити, що теоретичний розподіл випадкового члена є різним для різних спостережень. Це не означає, що випадковий член обов'язково матиме особливо більші (позитивні або негативні) значення в кінці виборки, але це означає, що апріорна йомовірність отримання більш відхилених значень буде відносно висока. Це є прикладом гетероскедастичності, що означає "неоднаковий розподіл".

Гетероскедастичність стає проблемою, коли значення змінних, які включаються в рівняння регресії, значно відрізняються в різних спостереженнях. Якщо залежність може буде описана рівнянням, в якому економічні показники змінюють свій масштаб одночасно, то зміна значень невключених змінних і помилок виміру, впливаючи разом на випадковий член, роблять його порівняно незначними при незначних y і x і порівняно великими – при великих y і x.

Досить часто можно виявити проблему гетероскедастичності. У таких умовах можна виконавши відповідні дії з виключення цього ефекту на етапі специфікації моделі регресії, це дозволить зменшити або, можливо, усунути необхідність формальної перевірки. У даний запропоновано значне число тестів (і, відповідно, критеріїв для них). Найбільш поширеними тестами є: тест рангової кореляції Спірмена, тест Голфреда-Квандта і тест Глейзера.

При виконання теста рангової кореляції Спірмена припускається, що дисперсія випадкового члена буде або збільшуватися, або зменшуватися відповідно до збільшення змінної x, тому в регресії, абсолютні значення залишків і значення x будуть корельовані. Дані по x і залишки впорядковуються і коефіцієнт рангової кореляції визначається як

$$r_{x,e} = 1 – (6\Sigma D^2_i/n(n^2 - 1)), \qquad (9.5)$$

де D_i – різниця між рангом x і рангом помилки e;

e – залишки.

Коли припускати, що відповідний коефіцієнт кореляції для генеральної сукупності дорівнює нулю, то коефіцієнт рангової кореляції має нормальний розподіл з математичним очікуванням 0 і дисперсією 1/(n - 1) в більших виборках. Таким чином, відповідна тестова статистика дорівнює $r_{x,e}\sqrt{n-1}$, і при використанні двобокового критерія нульова гипотеза про відсутність гетероскедастичності буде відхилена при рівні значущості в 5%, якщо вона перевищує 1,96, і при рівні значущості в 1%, якщо вона перевищує 2,58. Якщо в моделі регресії знаходиться більш є однієї пояснювальної змінної, то перевірка гіпотези може здійснюватися з використанням іншої з них.

Ймовірно, найбільш відомим формальним критерієм є критерій, запропонований С. Голдфелдом і Р. Квандтом. При проведенні перевірки за цим критерієм слід припускати, що стандартне відхилення (σ_i) розподілу ймовірностей U_i пропорційне значенню x в цьому спостереженні.

Запропоновано також, що випадковий член розподілений нормально і не піддається автокореляції.

Всі n спостережень у виборці впорядковуються за значенням x, після чого оцінюються окремі регресії для перших n' і для останніх n' спостережень; середні $(n - 2n')$ спостережень відхиляються. Якщо припущення відносно природи гетероскедастичності доцільне, то дисперсія U і в останніх n' спостереженнях буде більшою, між в перших n', і це буде відображено в сумі квадратів залишків у двох вказаних "часткових" регресіях. Визначаємо суми квадратів залишків в регресіях для перших n' і останніх n' спостережень відповідно через RSS_1 і RSS_2. Розраховуємо відношення RSS_2/RSS_1, яке має F-розподіл з $(n' – к - 1)$ і $(n' – к - 1)$ ступенями свободи, де к – число пояснювальних змінних в регресійному рівнянні. Потужність критерія залежить від вибору n' по відношенню до n. Грунтуючись на результатах деяких проведених експериментів, С. Голдфелд і Р. Кванд стверджують, що n' повинно складати порядок 11, коли n = 30, і порядком 22, коли n = 60. Якщо в моделі знаходиться більш однієї пояснювальної змінної, то спостереження повинні впорядковуватися по тій з них, яка пов'язана з σ_i і n' повинна бути більше, ніж к + 1 (де к – число пояснювальних змінних).

Метод Голдфелда-Квандта може бути також використаний для перевірки на гетероскедастичність при припущенні, що σ_i обернено пропорційне x_i. При цьому використовується подібна процедура, що й розглянута вище, проте тестова статистика тепер є показником RSS_1/RSS_2, який знову має F-розподіл з $(n' – к - 1)$ і $(n' – к - 1)$ ступенями свободи.

Тест Глейзера дозволяє більш ретельно розглянути характер гетероскедастичності. Він грунтується на тому, що знімається припущення, що σ_i пропорційна x_i, а перевіряється лише більш подібна функціональна форма.

Для того, щоб використовувати цей метод, необхідно оцінити регресійну залежність у від x за допомогою методу найменших квадратів, а потім розрахувати абсолютні значення залишків е, оцінивши їх регресію. У кожному випадку нульова гіпотеза про відсутність гетероскедастичності буде відхилена, якщо оцінка регресії відрізняється від нуля. Якщо при оцінюванні більше однієї функції, то орієнтиром при визначенні характера гетероскедастичності може служити найкраща з них.

9.3. Мультиколлінеарність – це поняття, що використовується для опису проблеми, коли нестрога лінійна залежність між пояснювальними змінними призводить до отримання ненадійних оцінок регресії. Проте, така залежність, зовсім необов’язково дає незадовільні оцінки. Якщо всі інші умови задовільні, тобто якщо кількість спостережень і вибіркові дисперсії пояснювальних змінних великі, а дисперсія випадкого члена мала, то в результаті можно отримати досить позитивні оцінки.

Мультиколлінеарність повинна виникати за рахунок сполучення нестрогої залежності однією (або більше) незадовільних умов, і це є питання ступеня визначенності явища, а не його виду. Оцінки регресії будуть незадовільні від неї у відповідному ступені, коли тільки всі незалежні змінні будуть абсолютно некорельовані. Розгляд цієї проблеми починається тільки тоді, коли вона досить суттєво впливає на результати оцінки регресії.

Ця проблема є звичною для регресій часовий рядів, тобто коли значення показників складаються з рядів спостережень протягом визначеного періоду часу. Якщо дві або більше незалежних змінних мають часовий тренд, то між ними буде існувати кореляція, і це може призвести до мультиколлінеарності.

Існують різні методи для зменшення мультиколлінеарності. Вони діляться на дві категорії: до першої категорії відносяться методи, спрямовані на виконання умов, що забезпечують надійність оцінок регресії; до других відносяться використання зовнішньої інформації. Якщо з початку використовувати можливі значення показників, то, звичайно, було б важливим збільшити кількість спостережень. Якщо, наприклад, використовують часові ряди, то це можно зробити шляхом скорочення терміну кожного періоду часу. Якщо використовують дані перехресної виборки і дослідник знаходиться на стадії планування дослідження, то можна збільшити точність оцінок регресії і послабити проблему мультиколлінеарності за рахунок більших витрат коштів на збільшення розміру вибірки та ін. методи.

9.4. Парний регресійний аналіз полягає у визначенні ступеня зв’язку між змінними і яким чином вони пов’язані. Слід зазначити, що не слід очікувати отримання точного співвідношення між будь-якими економічними показниками, крім випадків, коли воно існує за визначенням. У підручниках з економічної теорії ця проблема вирішується шляхом приведення співвідношення, як коли б воно було точним, і попередження в тому, що це апроксимація. У статистичному аналізі факт неточності співвідношення визнається шляхом включення в нього випадкого фактора, який називається випадковим залишкоим членом.

В економетричному аналізі модель парної лінійної регресії може мати вигляд

$$y = \alpha + \beta x + U. \tag{9.1}$$

Показник y розглядається як залежна змінна і має дві складові: 1) невипадкова складова $\alpha + \beta x$, де x виступає як пояснювальна (або незалежна) змінна, а постійні показники α і β – як параметри рівняння;

2) випадковий член U.

10.1. Кількісний регресійний аналіз є розвитком парного регресійного аналізу стосовно випадків, коли залежна змінна гіпотетично зв’язана з двома або більше незалежних змінних. Більша частина аналізу пов’язана з розширенням парної регресійної моделі. Проте в кількісному аналізі виникають дві проблеми: по-перше, для оцінки впливу незалежних змінних на залежну змінну вирішується проблема розподілу ее впливу та впливу інших незалежних змінних. По-друге, необхідно вирішити проблему специфікації моделі. Часто стверджується, що декілька змінних можуть здійснювати вплив на залежну змінну, а з іншого боку, деякі змінні можуть не підходити для моделі. Тому треба вирішити, які з них необхідно включити в рівняння регресії, а які – виключити з нього.

Наприклад, кількісна регресійна модель може мати вигляд

$$y = \alpha + \beta_1 x + \beta_2 p + u, \qquad (10.1)$$

де y – загальна величина витрат на харчування (залежна змінна);

x - особистий дохід (незалежна змінна);

p – ціна продуктів харчування;

α, β_1, β_2 – параметри рівняння.

У кількісному регресійному аналізі визначають коефіцієнт регресії, який необхідний для забезпечення найкращої відповідності спостереженням і отримання оптимальних оцінок невідомих значень параметрів моделей.

У цілому кількісна регресійна модель має вигляд

$$y = \alpha + \beta_1 x_1 + \ldots + \beta_к x_к + u. \qquad (10.2)$$

Кількісний регресійний аналіз дозволяє розмежовувати вплив незалежних змінних, допускаючи при цьому можливість їх корельованості.

10.2. Для побудови багатофакторної моделі використовують статистичну інформацію про діяльність підприємства і здійснюють такі етапи: математико-статистичний аналіз, побудова багатофакторної регресійної моделі, перевірка побудованої моделі на адекватність, аналіз отриманих результатів.

На етапі математико-статистичного аналізу перевіряють основні припущення класичного регресійного аналізу, крім того, здійснюють найважливішу процедуру багатофакторного аналізу – перевірку факторів на мультиколінеарність. Термін “мультиколінеарність” означає, що в багатофакторній регресійній моделі дві або більше незалежних змінних (факторів) пов’язані між собою лінійною залежністю або, іншими словами, мають високий ступінь кореляції ($r_{xixj} \to 1$, $i \neq j$).

Для здійснення математико-статистичного аналізу будують матрицю коефіцієнтів парної кореляції, яка показує ступінь зв’язку між факторами економетричної моделі. Потім аналізують коефіцієнти парної кореляції між факторами. Результатом етапу математико-статистичного аналізу є знаходження множини основних незалежних між собою факторів, що є базою для побудови регресійної моделі.

На другому етапі для побудови багатофакторної моделі широке використання отримали «покроковий» метод і метод “виключень”. Сутність «покрокового» методу полягає в тому, що фактори по черзі включають в модель доти, поки вона не стане задовільною. Порядок включення вибирається за допомогою коефіцієнта кореляції як міри важливості факторів (незалежних змінних), які ще не включені в модель. Цей метод передбачає розрахунок часткових F-критеріїв для факторів, що здійснювали значний вплив на результативний показник. Далі визначають показники, які здійснювали найбільший вплив на результативний показник, значення часткових F-критеріїв перевищують нормативні значення.

Метод “виключень” полягає в тому, що вибирають набір факторів, які ймовірно можуть впливати на результативний показник. Потім, по черзі виключають ті фактори, в яких найменший коефіцієнт кореляції (згідно з матрицею статистики), а значення часткових F-критеріїв неперевищують нормативні значення. Таким чином, залишаться тільки ті змінні, які відповідають розглянутим вище умовам.

Слід сказати, що на цьому етапі розраховують коефіцієнт множиної кореляції, який показує загальний вплив незалежних факторів на результуючий показник економетричної моделі. Він знаходиться у проміжку між 0 і 1. Чим більше вплив факторів, тим більше коефіцієнт множинної кореляції наближається до 1. Але він не може перевищувати значення останньої.

На наступному етапі аналізу перевіряють адекватність моделі за допомогою використанням F-критерію Фішера і t-критерію Стьюдента. При перевірці на адекватність економетричної моделі також використовують тест Дарбіна-Уотсона, що допомагає перевірити модель на гомо- або гетероскедастичність.

На останньому етапі отриману модель аналізують і інтерпретують.

10.3. Статистичну оцінку надійності коефіцієнта регресії здійснюють за допомогою t-критерію Стьюдента. Він застосовується для оцінки тісноти зв'язку між незалежною змінною x і залежною y. При використанні цього критерію формулюють нульову гіпотезу. Потім отримане значення t-розподілу Стьюдента порівнюють з критичним. Якщо фактичне значення t-розподілу Стьюдента перевищує критичне, то спростовують нульову гіпотезу і зв'язок між змінними x і y вважається щільним. Якщо ні, то приймають нульову гіпотезу, а фактори моделі вважаються статистично неадекватними і виключаються з моделі при встановленому рівні значущості в 5 і 1%.

F-тест використовують для оцінки того, чи важливе ли пояснення, яке дає рівняння в цілому. Якщо фактичне значення F-критерія вище нормативного, то модель адекватна, а її фактори залишаються у рівнянні.

10.4. Для перевірки адекватності економетричної моделі використовують тест Дарбіна-Уотсона, який спрямований для перевірки кореляції між залишками. Він включає такі етапи:

1. Розраховують d-статистики для аналізованої вибірки даних. Як відомо з теорії, значення d-статистики лежать у межах від 0 до 4.
2. Порівнюють отримані d-статистики з табличними d-статистиками при рівні значущості $\alpha = 0,05$, кількості факторів k, що присутні в моделі, і кількості спостережень n. Якщо розраховане значення d-статистики знаходиться в проміжку від 0 до d_L ($0 < d < d_L$), то це свідчить про наявність позитивної автокореляції. Якщо значення d потрапляє в зону невизначеності, тобто набуває значення $d_L \le d \le d_U$, або $4 - d_U \le d \le 4 - d_L$, то ми можемо зробити висновки ні про наявність, ні про відсутність автокореляції. Якщо $4 - d_L < d < 4$, то маємо негативну автокореляцію. Нарешті, якщо $d_U < d < 4 - d_U$, то автокореляції немає.

Для оцінки адекватності моделі важливе значення має перевірка її на гомо або гетероскедастичність. Суть цього явища полягає в тому, що варіація кожної ε_i навколо її математичного сподівання не залежить від значення х. Дисперсія кожної ε_i зберігається сталою незалежно від малих чи великих значень факторів: σ_ε^2 не є функцією x_{ij}, тобто $\sigma_\varepsilon^2 \neq f(x_{1i}, x_{2i},\ldots, x_{pi})$.

Якщо σ_ε^2 не є сталою, а її значення залежать від значень х, можемо записати $\sigma_\varepsilon^2 = f(x_{1i}, x_{2i},\ldots, x_{pi})$. У цьому разі маємо справу з гетероскедастичністю. Оцінка моделі на наявність гетероскедастичності полягає в тому, що на першому етапі здійснюється тестування моделі на наявність гетероскедастичності. І якщо підтверджується гіпотеза про її наявність, то на другому етапі модель виключається.

Тестування моделі на гетероскедастичність здійснюється на підставі тесту рангової кореляції Спірмена. Значущість отриманого коефіцієнта рангової кореляції Спірмена перевіряється за допомогою t-критерія Стьюдента при (n-2) кількості ступенів свободи.

Фактичне значення t-критерію Стьюдента зіставляється з $t_{кр}$. Якщо $t_ф >$ $t_{кр}$, то підтверджується гіпотеза про наявність гетероскедастичності. А, якщо $t_ф < t_{кр}$, то приймається гіпотеза про гомоскедастичність.

10.5. На етапі аналізу отриманих результатів здійснюється економічна інтерпритація отриманої економетричної моделі. На цьому етапі обгрунтовується економічна доцільність отриманих результатів.

Розглянемо, наприклад, економічний зміст моделі залежності суми капіталу і середньооблікової чисельності працівників ($Ч$), співвідношення власного і позикового капіталів ($\frac{ВК}{ПК}$), відношення витрат інвестованого капіталу на оплату праці й матеріали ($\frac{Воп}{Вм}$).

$$Кпор = -2355{,}39 + 28{,}7 \times Ч + 1795{,}24 \times \frac{ВК}{ПК} + 8{,}95 \times \frac{Воп}{Вм}. \qquad (10.3)$$

Економетрична багатофакторна модель (10.3) показує, що 82% коливань нового капіталу (коефіцієнт детермінації – 82%) обумовлюється трьома факторами: середньообліковою чисельністю працівників, співвідношенням власного й позикового капіталу, а також відношенням витрат інвестованого капіталу на оплату праці й матеріали. Статистичні характеристики моделі адекватні. Фактичні значення t-статистик більші ніж критичні; $F_ф = 69 > F_{0,05;24} = 3,01$; значення критерію Дарбіна-Уотсона свідчить про відсутність автокореляції залишків: $1,65 < d_ф = 2,14 < 2,35$; величина критерію Спірмена ($r_s = 0,124$) свідчить про гомоскедастичність, оскільки отримане значення t-статистики нижче його критичного значення ($t_ф = 0,628 < t_{кр} = 1,706$).

Економічна інтерпретація моделі (10.3) полягає в тому, що між середньообліковою чисельністю працівників і новим капіталом зв'язок лінійний. Зростання середньооблікової чисельності на одного працівника призведе до збільшення обсягу нового капіталу на 28,7 тис. грн. Між новим капіталом і чинниками: співвідношенням власного й позикового капіталу, відношенням витрат інвестованого капіталу на оплату праці й матеріалів також існує лінійний зв'язок. Збільшення співвідношення власного й позикового капіталу на 10 $\frac{коп.}{грн.}$ приведе до зростання обсягів нового капіталу на 179,52 грн. Збільшення відношення витрат інвестованого капіталу на оплату праці й матеріали на 10 $\frac{коп.}{грн.}$ призведе до зростання нового капіталу на 0,9грн.

Питання для самоконтролю:

1. Назвіть основні принципи при побудові економетричних моделей?
2. Охарактеризуйте основні критерії оцінки адекватності економетричних моделей?
3. Що таке мультиколінеарність? Назвіть причини її виникнення.
4. У чому полягає парний регресійний аналіз?
5. У чому полягає кількісний регресійний аналіз? Який вигляд має кількісна регресійна модель?
6. Охарактеризуйте етапи побудови багатофакторної економетричної моделі?

7. Охарактеризуйте t-критерій Ст'юдента і F-критерій Фішера для оцінки адекватності багатофакторної економетричної моделі.
8. Охарактеризуйте тест Дарбіна-Уотсона для оцінки адекватності багатофакторної економетричної моделі.
9. Проінтепретуйте отримані результати на основі розробленої багатофакторної економетричної моделі.
10. Охарактеризуйте узагальнені економетричні моделі.
11. Назвіть види узагальнених економетричних моделей і охарактеризуйте їх.
12. Назвіть основні поняття і визначіть сутність динамічних процесів в економіці.
13. Що таке часовий ряд, назвіть напрями його оцінки.
14. Що таке авто регресія, як будуються авторегресійні моделі.
15. Назвіть статистичні критерії оцінки автокорельованості залишків, як вони визначаються.

Завдання для самоконтролю:

1. За статистичними даними 10 підприємств розробити рівняння регресії рівня витрат на виробництво продукції (Рв) від фондоозброєності праці робітників (Фп):

1) побудувати поле кореляції і за ним визначити характер й обґрунтувати математичну форму рівняння регресії;
2) визначити коефіцієнти регресії a_0 і a_1, їх економічний зміст, записати рівняння регресії;
3) визначити коефіцієнти кореляції;
4) визначити з ймовірністю 0,95 довірчі границі помилки апроксимації, записати рівняння регресії в остаточному вигляді;
5) обґрунтувати економічну сутність отриманих результатів.

Статистичні дані:

j	**Рв, коп./грн.**	**Фв, тис.грн./чол.**	**j**	**Рв, коп./грн.**	**Фв, тис.грн./чол.**
1	93,7	1,5	6	89,8	6,9
2	93,2	1,7	7	92,7	2,4
3	89,7	6,4	8	91,8	2,9
4	90,2	4,7	9	88,7	7,3
5	91,2	4,2	10	91,1	5,6

2. За статистичними даними 10 підприємств розробити рівняння регресії рівня витрат на виробництво продукції (Рв) від кооперування виробництва (Кв):

1) побудувати поле кореляції і за ним визначити характер й обґрунтувати математичну форму рівняння регресії;
2) визначити коефіцієнти регресії a_0 і a_1, їх економічний зміст, записати рівняння регресії;
3) визначити коефіцієнти кореляції;
4) визначити з ймовірністю 0,95 довірчі границі помилки апроксимації, записати рівняння регресії в остаточному вигляді;
5) обґрунтування економічної сутності отриманих результатів.

Статистичні дані:

j	**Рв, коп./грн.**	**Кв, %**	**j**	**Рв, коп./грн.**	**Кв, %**
1	93,7	46	6	89,8	64
2	93,2	49	7	92,7	51
3	89,7	68	8	91,8	68
4	90,2	71	9	88,7	79
5	91,2	54	10	91,1	72

3. За статистичними даними 10 підприємств розробити рівняння регресії рентабельності реалізації продукції (Рр) від плинності робітників (Пр):

1) побудувати поле кореляції і за ним визначити характер й обґрунтувати математичну форму рівняння регресії;

2) визначити коефіцієнти регресії a_0 і a_1, їх економічний зміст, записати рівняння регресії;
3) визначити коефіцієнти кореляції;
4) визначити з ймовірністю 0,95 довірчі границі помилки апроксимації, записати рівняння регресії в остаточному вигляді;
5) обґрунтування економічної сутності отриманих результатів.

Статистичні дані:

j	Рр, коп./грн.	Пр, %	j	Рр, коп./грн.	Пр, %
1	6,3	33	6	10,2	7
2	6,8	27	7	7,3	24
3	10,3	12	8	8,2	21
4	9,8	11	9	11,3	7
5	8,8	25	10	8,9	19

4. Наведені статистичні дані собівартості пасажироперевезень міським електричним транспортом, (табл. 10.4), вирівняти за ковзною середньою, побудувати графік й обґрунтувати тенденції зміни собівартості пасажироперевезень.

Таблиця 10.4 - Статистичні дані собівартості пасажироперевезень по депо

Період t	Собівартість С, коп.
1	89,9
2	90,9
3	87,6
4	87,5
5	88,2
6	89,9
7	90,5
8	92,8
9	92,1
10	92,8
11	91,8
12	93,1

5. На основі даних динаміки статистичних показників поданих в табл. 10.5 виявіть загальну тенденцію їх зміни, побудуйте економетричну модель динаміки і розрахуйте прогноз на два наступних роки.

Таблиця 10.5 - Динаміка статистичних показників

Роки	**t**	**Значення показника, С, коп.**	**Квартал**			
			I	**II**	**III**	**IV**
2002	1	68,59	72,4	65,88	69,53	66,54
2003	2	69,95	72,8	67,34	71,21	68,44
2004	3	75,37	74,53	77,49	72,88	76,59
2005	4	75,49	79,22	73,21	73,34	76,19
2006	5	82,34	77,34	82,29	85,45	87,29
2007	6	91,80	88,92	90,72	93,19	94,39

6. Щомісячний пробіг рухомого складу міського електротранспорту на 1000 пасажирів представлений в табл. 10.6. Розрахуйте параметри авторегресійної моделі і складіть прогноз на наступні два місяці.

Таблиця 10.6 - Щомісячний пробіг рухомого складу міського електротранспорту на 1000 пасажирів

Період (t)	**Щомісячний пробіг рухомого складу міського електротранспорту на 1000 пасажирів (X_t), км.**
1	167,1
2	163,3
3	168,4
4	158,9
5	160,4
6	160,5
7	177,3
8	171,6
9	173,9
10	174,2
11	174,8
12	171,3
13	169,7

Продовження табл. 10.6

14	170,2
15	173,2
16	185,5

7. Щомісячна реалізація покрівельних матеріалів (в тисячах штук) заводом за 18 місяців подана в табл. 10.7. Треба скласти авторегресійну економетричну модель і спрогнозувати місячну потребу в покрівельних матеріалах на два наступні місяці.

Таблиця 10.7 – Щомісячна реалізація покрівельних матеріалів (в тисячах штук) заводом

Період (t)	**Щомісячна реалізація покрівельних матеріалів (X_t), тис. штук**
1	32
2	36
3	33
4	37
5	32
6	29
7	31
8	38
9	35
10	39
11	27
12	33
13	37
14	43
15	46
16	49
17	51
18	54

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Альгин А.П. Грани экономического риска. - М., 1991.
2. Ашманов С. А. Введення в математичну економіку. - М.: Наука 1984.
3. Балабанов И.Т. Риск-менеджмент. - М.: Финансы и статистика, 1996.
4. Банди Б. Основы линейного программирования. – М.: Радио и Связь, 1989.
5. Бережная Е.В. Математические методы моделирования экономических систем. – М.: Финансы и статистика, 2001.
6. Бернстайн П. Против Богов. Укрощение риска. Пер. с англ. - М.: ЗАО «Олимп-бизнес», 2006.
7. Бирман И. Оптимальное программирование. - М.: Радио и Связь, 1976.
8. Булинская Е.В. Теория риска и перестрахование. Ч. 1. - М., МГУ, 2001.
9. Буянов В. П., Кирсанов К. А., Михайлов Л. А. Рискология. Управление рисками. - М., 2002.
10. Вітлінський В.В., Наконечний С.І. Ризик у менеджменті. – К. Тов. “Борисфен-М”. – 1996. – 336 с.
11. Воробьёв Ю.Л. Малинецкий Г.Г. Махутов Н.А. Управление риском и устойчивое развитие. Человеческое измерение // Общественные науки и современность, №6, 2000.
12. Высшая математика для экономистов / Под ред. Н.Ш. Кремера. – М.: ЮНИТИ, 2003.
13. Горчаков А.А., Орлова И.В. Компьютерные экономико-математические модели. – М.: Компьютер, ЮНИТИ, 1995.
14. Горчаков А.А., Орлова И.В., Половников В.А. Методы экономико-математического моделирования и прогнозирования в новых хозяйственных условиях хозяйствования. – М.: ВЗФЭИ, 1991.
15. Грубер Й. Економетрія: Посібник для студ. екон. спец., т. 2. / Пер. – К.: ЗАТ «Нічлава», 1998. – 295 с.
16. Демченков В.С., Милета В.И. Системный анализ деятельности

предприятий: М: Финансы и статистика, 1990. - 182 с.

17. Джонстон Д.Ж. Эконометрические методы. – М.: Финансы и статистика, 1980.
18. Доля В.Т. Економетрія. Методичний посібник з вивчення дисципліни (для студентів за напрямами підготовки 0501 “Економіка”, 0592 “Менеджмент”).
19. Дрейпер Н., Смит Г. Прикладной регрессионный анализ. - М.: Статистика, 1973.
20. Доугерти К. Введение в економетрику / Пер. с англ. – М.: ИНФРА-М, 2001.- 402 с.
21. Дубров А.М. и др. Моделирование рисковых ситуаций в экономике и бизнесе. - М.: «Финансы и статистика», 2001.
22. Жданов С. Экономические модели и методы управления. М.Эльта 1998.
23. Замков О.О., Толстонятенко А.В., Черемных Ю.Н. Математические методы в экономике. - М. ДНСС: 1997.
24. Ефимова М.Р., Петрова Е.В., Румянцев В.Н. Общая теория статистики: Учебник. – М.: ИНФРА-М, 1998. – 416 с.
25. Интрилигатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория. - М.: Прогресс, 2003.
26. Карасев А.И., Кремер Н.Ш., Савельева Т.Н. Математические методы и модели в планировании. - М. Экономика, 1987.
27. Кенэ Ф. Избранные экономические произведения / Пер. с франц. – М.: Соцэкгиз, 1960. – 551 с.
28. Конспект лекцій з дисципліни «Економетрія» (для студентів 3 курсу, напряму 0305 «Економіка і підприємництво») / Укл.: Скоков Б.Г., Мамонов К.А. – Х: ХНАМГ, 2008. – 59 с.
29. Конюховский П. Математические методы исследования в экономике. – СПб.: Питер, 2000. – 208 с.

30.Кремер Н.Ш., Путко Б.А., Тришин И.М., Фридман М.Н.; под ред. Проф. Н.Ш.Кремера: Исследование операций в экономике; Уч. пособие для вузов.
31.Лагоша Б.А. Оптимальное управление в экономике. - М.: Финстат, 2003.
32.Лапуста М. Г., Шаршукова Л. Г. Риски в предпринимательской деятельности. - М.: Инфра-М, 1996.
33.Ларичев О.И. Теория и методы принятия решений. М.: Логос, 2000.
34.Лещинський О.Л., Рязанцева В.В., Юнькова О.О. Економетрія: Навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. – Л.: МАУП, 2003.-208 с.
35.Лук’яненко І. Г., Краснікова Л. І. Економетрика: Підручник. – К.: Т-во “Знання”, КОО, 1998. – 494 с.
36.Лук’яненко І.Г., Городніченко Ю.О. Сучасні економетричні методи у фінансах. Навчальний посібник.-К.: Літера ЛТД, 2002.-352 с.
37.Ляшенко І. М. Економіко-математичні методи та моделі сталого розвитку. — К.: Вища шк., 1999.
38.Малыхин В.И. Математическое моделирование экономики. - М. Изд-во УРАО, 1998.
39.Малыхин В.И. Финансовая математика. – М.: ЮНИТИ, 2002.
40.Малиш Н. А. Моделювання еколого-економічних систем агропромислового комплексу на території радіоактивно забрудненого регіону. Дис. на здоб. вч. ступ. к. е. н. КНУ ім. Тараса Шевченка, 1993.
41.Макаревич Л.М. Управление предпринимательскими рисками. - М.: Изд-во «Дело и Сервис», 2006.
42.Малинецкий Г.Г. Управление риском и редкие катастрофические события // Математическое моделирование, т.14. - №8. - 2002.
43.Мерков А.М., Поляков Л.Е. Санитарная статистика: / Пособие для врачей. - М.: Медицина. – 1976. – 384 с.
44.Методичні вказівки для вивчення курсу “Економетрія” / Укл. Скоков Б.Г. – Х.: ХНАМГ, 2002. – 39 с.

45. Методичні вказівки до виконання практичних завдань і самостійної роботи з дисципліни «Економетрія» (для студентів 3 курсу денної форми навчання спец. 7.050201 «Менеджмент організацій») / Укл. Мамонов К.А. – Х.: ХНАМГ, 2006. – 27 с.
46. Методичні вказівки «Використання пакету програм «Statistica» в економетричних дослідженнях» (для студентів 3 курсу денної форми навчання, спец. 6.050200 «Менеджмент організацій») / Укл. Скоков Б.Г., Мамонов К.А. – Х.: ХНАМГ, 2007. – 51 с.
47. Методические указания к самостоятельному изучению курса «Экономико-математические методы и модели в планировании и управлении», проведению практических занятий и выполнению контрольных работ (для студентов 4, 5 курсов всех форм обучения, специальности 1722) / Составитель Скоков Б.Г. – Х.: Харьковское межвузовское полиграфическое предприятие, 1988. – 58 с.
48. Методична розробка практичного заняття із студентами 4 – 5 курсів з теми: «Оцінка достовірності результатів дослідження» / Укл. Таралло В.Л., Зубович А.П., Ясинська Е.Ц. – Чернівці, 2001. – 6 с.
49. Миксюк С.Ф., Комкова В.Н. Экономико-математические методы и модели – Мн.: БГЭУ, 2006.
50. Мішура Ю.С., Пархоменко В.М., Ядренко М.Й. Теоретично-ймовірнісні та статистичні методи в економетриці та фінансовій математиці. – К. Інформтехніка. – 1995. – 380 с.
51. Монахов А. Математические методы анализа экономики. – СПб.: Питер, 2002. – 176 с.
52. Егоров А.А. Об оценке достоверности результатов моделирования боевых действий (операции) объединения ВВС. – Военная теория и практика. С. 60-65.
53. Петі У. «Політична арифметика». – Кембрідж: Юниверситі Прес, 1899.

54. Петров Е. Г., Новожилова М. В.. Методи і засоби прийняття рішень у соціально – економічних системах: Навч. посібник./ За ред. Е. Г. Петрова. – К.: Техніка, 2004. – 256с.
55. Ракитов А.И. Принципы научного мышления. - М.: Политиздат, 1975. – 143 с.
56. Рао С.Р. Линейные статистические методы и их применение. - М.: Наука, 1968.
57. Райзберг Б.А. Предпринимательство и риск. – "Знание". Новое в жизни, науке и технике. – 1992. – № 4.
58. Риски в современном бизнесе. / П.Г. Грабовый, С.Н. Петрова, С.И. Полтавцев и др. - М.: Алане, 1994.
59. Робоча програма і короткий конспект лекцій до самостійного вивчення курсу «Економетрія» (для студентів денної і заочної форм навчання спеціальностей «Менеджмент організацій», «Облік і аудит» та «Економіка підприємства») / Укл. Скоков Б.Г., Мамонов К.А. – Х.: ХНАМГ, 2006. – 105 с.
60. Руденко А.В. Переход от вероятности к достоверности в доказывании по уголовным делам / Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата юридических наук. – Краснодар, 2001. – 24 с.
61. Самойленко М.І., Скоков Б.Г. Дослідження операцій (Математичне програмування. Теорія масового обслуговування): Навч. посібник. – Харків: ХНАМГ, 2005. – 176 с.
62. Сергеев М. Предпринимательский риск и стратегии предпринимателя (http://www.fact.ru/archiv/ num01/serg.html).
63. Сивый В.Б., Скоков Б.Г. Математические методы и модели в планировании и управлении жилищно-коммунальным хозяйством: Учеб. пособие для вузов. – Х.: Изд-во «Основа» при Харьковском государственном университете, 1991. – 208 с.
64. Скурихин Н.П. Математическое моделирование. М. Высшая школа 1989.

65. Сытник В.Ф. Каратодава Е.А. Математические модели в планировании и управлении предприятиями. - К. Вища школа, 1985.
66. Схрейвер А. Теория линейного и целочисленного программирования: в 2-х томах. / Пер. с английского. – М. 1991. - 360 с.
67. Терехов Л.Л. Экономико- математические методы. - М. Статистика 1988.
68. Тони Райс, Брайан Койли. Финансовые инвестиции и риск / Пер. с англ. – Торгово-издательское бюро BHV, 1995. – 592 с.
69. Уткин Э. А. Риск-менеджмент: Учебник. - М.: Тандем, 1998.
70. Федосеев В.В. Экономико-математические методы и модели в маркетинге. – М.: Финстатинформ, 1996.
71. Чернов В. А. Анализ коммерческого риска. - М.: Финансы и статистика, 1998.
72. Чернышевский Н.Г. Полное собрание сочинений: в 16 т. – М.: 1939 – 1953.
73. Четыркин Е.М. Статистические методи прогнозирования. – М.: Финансы и статистика, 1979.
74. Хазанова Л. Математическое моделирование в экономике. - М.1998.
75. Химмельблау Д. Анализ процессов статистическими методами. - М.: Наука, 1978.
76. Хохлов Н.В. Управление риском: Уч. пособие для вузов - М.: ЮНИТИ-ДАНА, 1999.
77. Ху Т. Целочисленное программирование и потоки в сетях.; перевод с английского. – М., 1974.
78. Шелобаев С. И. Математические методы и модели в экономике, финансах, бизнесе: Уч. пособие для вузов. — М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2000.
79. Шрейдер Ю.А., Шаров А.А. Системы и модели. - М.: Радио и Связь, 1982.

80. Экономико-математические методы и прикладные модели: Уч. пособие для вузов / В. В. Федосеев, А. Н. Гармаш, Д. М. Дайитбегов и др. – М.: ЮНИТИ, 1999. – 391 с.
81. Ястремський О.І. Моделювання економічного ризику. – К.: Либідь, 1992. – 176 с.
82. Ястремський О.І. Основи теорії економічного ризику: Навч. посібник для студентів економічних спеціальностей вищих навчальних закладів. – К.: "АртЕк", 1997. – 248 с.
83. Daenzer B. J. Fact-Finding Techniques in Risk Analysis. - AMA, 1970. -P. 63-67.
84. Hayes R. И., Wheelwright S. C., Clark К. В. Dynamic Manufacturing: Creating Learning Organization. The Free Press, NY, 1988.
85. Head G., Horn S. Essentials of Risk Management. V. 1, IIA, 1991. - P. 136.
86. Merril William C., Fox Karl A. Introduction to Economic statistics.- John. Wiley&Sans.- 1970.-658.
87. Robert N. Charette. Applications Strategies for Risk Analisis. McGraw-Hill Book Cjmpany, 1990. New York, N-Y 10020. – ISBN 0-07-010888-9.
88. Simon J. D. Political Risk Assessment. - «Columbia Journal of World Business». - 17, no. 3. - 1982.
89. V.Lofti, C. Pegels. Decision Support System for Production and Operations Managament (DSSPOW). IRWIN, 1991.-359 c.
90. http://www.ur.freecopy.ru.
91. ttp://www.vseslova.ru.

Навчальне видання

Конспект лекцій з дисципліни "Економіко-математичне моделювання" (для студентів 3 курсу заочної форми навчання за напрямом підготовки 0501 (6.030509) «Облік і аудит»))

Автор: Костянтин Анатолійович Мамонов

Редактор: М.З. Аляб'єв

План 2009, поз. 145Л

Підп. до друку 25.06.2009р.	Формат 60x84/16	Папір офісний.
Друк на ризографі	Умовн.– друк. арк. 3,8	Обл.- вид. арк. 4,3
Замовл. №	Тираж 100 прим.	

61002, Харків, ХНАМГ, вул. Революції, 12

Сектор оперативної поліграфії ЦНІТ ХНАМГ

61002, Харків, вул. Революції, 12