



МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

УКРАЇНСЬКА ІНЖЕНЕРНО-ПЕДАГОГІЧНА  
АКАДЕМІЯ

**Кравцов М.К., Неко В.І., Резніченко М.К., Романенко В.П.**

# **ТЕХНІЧНА МЕХАНІКА**

**ЧАСТИНА 2**

**Навчальний посібник  
для студентів інженерно-педагогічних спеціальностей**

ХАРКІВ, 2007

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
УКРАЇНСЬКА ІНЖЕНЕРНО-ПЕДАГОГІЧНА АКАДЕМІЯ**

**Кравцов М.К., Неко В.І., Резніченко М.К. Романенко В.П.**

# **ТЕХНІЧНА МЕХАНІКА**

## **ЧАСТИНА 2 ОПР МАТЕРІАЛІВ**

**Навчальний посібник  
для студентів інженерно-педагогічних спеціальностей**

Рекомендовано Міністерством освіти  
і науки України як навчальний  
посібник для студентів інженерно-  
педагогічних спеціальностей

**Харків, 2007 р.**

УДК 531

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України  
(лист №14/18-F251 від 31 січня 2007 р.)

**Рецензенти:**

Е.Е. Александров, доктор технічних наук, професор, заслужений діяч науки.

Г.М. Жолткевич, доктор технічних наук, професор.

Л.С. Зенкін, доктор технічних наук, професор, Президент асоціації технологів  
машинобудівників України

Кравцов М.К., Неко В.І., Резніченко М.К., Романенко В.П.

Технічна механіка. Частина 2. Опір матеріалів. Навчальний посібник. –Харків:  
2007. - 158 с., іл.

ISBN

У навчальному посібнику викладені у стислій формі основні положення опору матеріалів для студентів інженерно-педагогічних спеціальностей, які вивчають технічну механіку за скороченою програмою.

ISBN

© Кравцов М.К.

© Неко В.І.

© Резніченко М.К.

© Романенко В.П.

# 1. ОСНОВНІ ПОЛОЖЕННЯ

## 1.1. ПРЕДМЕТ І ЗАВДАННЯ ОПОРУ МАТЕРІАЛІВ

Опір металів є одним з розділів механіки реального твердого тіла, здатного деформуватися під впливом прикладених до нього зовнішніх сил (навантажень).

На відміну від теоретичної механіки, в якій тіла вважаються абсолютно твердими, в опорі матеріалів основна увага приділяється вивченню деформацій реальних тіл.

Практика показує, що всі частини конструкцій під дією навантажень деформуються, тобто змінюють свою форму і розміри, а в деяких випадках відбувається руйнування конструкції.

Опір матеріалів є наука про міцність і деформованість матеріалів та елементів машин і споруд.

Міцністю називається здатність матеріалів конструкцій і їх елементів чинити опір зовнішнім силам, не руйнуючись (далі поняття міцності буде уточнене).

На основі теоретичного й експериментального досліджень процесу деформування реальних тіл в опорі матеріалів розглядаються методи розрахунку на міцність, жорсткість і стійкість елементів машин та споруд.

Розрахунки на міцність дають можливість визначити форму і розміри деталей, які витримують задане навантаження при найменшій витраті матеріалів.

Під жорсткістю розуміється здатність тіла або конструкції чинити опір утворенню деформацій.

У багатьох випадках величину деформацій, незважаючи на їх малість, приходиться обмежувати, тому що в супротивному випадку нормальна експлуатація конструкції може стати неможливою. Наприклад, при механічній обробці деталі на станку внаслідок деформації самої деталі і елементів станка може відбутися зниження точності обробки, що не припустимо.

Розрахунки на жорсткість гарантують, що зміни форми і розмірів конструкцій і їх елементів не перевершать допустимих норм.

Під стійкістю розуміється здатність конструкції чинити опір силам, які прагнуть вивести її із початкового стану рівноваги.

Можна сказати, що рівновага елемента стійка, якщо малій зміні навантаження відповідає мала зміна деформації і, навпаки, рівновага нестійка,

якщо обмежений приріст навантаження викликає необмежений приріст деформації.

Ознакою втрати стійкості являється також раптова зміна однієї форми рівноваги іншою. Як приклад наведемо випадок стискання тонкого елемента (наприклад, лінійки) силою, діючою вздовж його осі. До якогось певного (критичного) значення стискаючої сили, яке залежить від матеріалів, розмірів і умов закріплення елемента, він стійко зберігає прямолінійну форму. При досягненні силою критичного значення поряд з прямолінійною становиться можливою і скривлена форма рівноваги, більш небезпечна для елемента.

Розрахунки на стійкість запобігають раптовій втраті стійкості і скривленню довгих або тонких деталей.

При виконанні вказаних розрахунків необхідно прагнути до максимальної економії матеріалів, тобто до достатніх, але не завищених розмірів деталей машин і споруд. Зрозуміло, що для цього необхідно якомога повне і глибоке вивчення властивостей матеріалів, які використовуються, і характеру діючих на розрахункову деталь навантажень. Це досягається всебічними експериментальними дослідженнями і уважним вивченням накопиченого досвіду проектування і експлуатації конструкцій.

На практиці в більшості випадків приходиться мати справу з конструкція – ми складної форми, окремі елементи яких можна звести до наступних найпростіших типів:

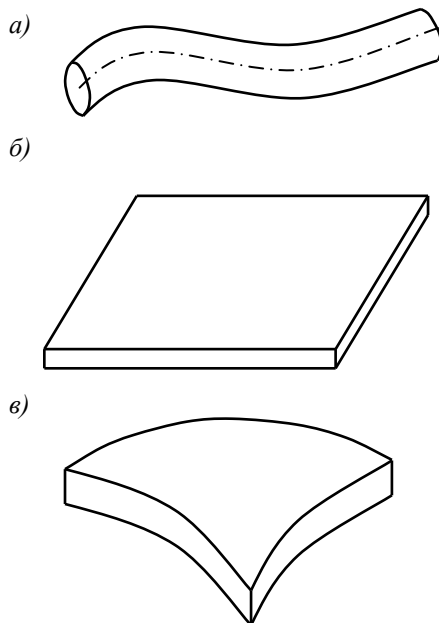


Рис. 1.1.

1. Брус – тіло, у якого два розміри малі в порівнянні з третім (рис.1.1,а). В поодинокому випадку брус може мати постійну площу поперечного перерізу і прямолінійну вісь. Брус з прямолінійною віссю часто називають стержнем. Вісь бруса – це лінія, яка з'єднує центри ваги його поперечних перерізів. Плоска фігура, яка має свій центр ваги на осі і перпендикулярна до неї, називається його поперечним перерізом.

2. Пластика – тіло, обмежене двома плоскими поверхнями, відстань між якими мала у порівнянні з іншими розмірами (рис.1.1,б).

3. Оболонка – тіло, обмежене двома криволінійними поверхнями, відстань між якими мала у порівнянні з іншими розмірами (рис.1.1,в).

4. Масив – тіло, у якого всі три розміри одного порядку.

В опорі матеріалів теоретично і експериментально вивчається дія навантаження переважно на прості елементи, в першу чергу на стержні та прості стержневі системи.

## 1.2. ЗОВНІШНІ СИЛИ (НАВАНТАЖЕННЯ)

Сили, що діють на тверде тіло, поділяються на зовнішні та внутрішні. Зовнішніми силами для даного тіла є сили, викликані дією інших тіл. Зовнішні сили, розподілені по всьому об'єму тіла або по його частині, називаються об'ємними. Зовнішні сили, які прикладені до поверхні тіла, називаються поверхневими.

Систему зовнішніх сил, прикладених до тіла, будемо називати його навантаженням. Навантаження тіла може бути статичним або динамічним.

Статичним називається таке навантаження, при якому немає прискорень тіла чи його частин або прискорення настільки малі, що ними можна знехтувати. Таке навантаження має місце при поступовому і повільному збільшенні прикладеної до тіла сили від нуля до його кінцевого значення.

Динамічним називається навантаження, при якому виникають значні прискорення і зв'язані з ними сили інерції, які необхідно брати до уваги.

Поверхнєве навантаження, діюче на не великій площі, умовно замінюється зосередженою силою, прикладеною в центрі ваги цієї площини і рівній за величиною рівнодіючій. Наприклад, тиск колеса локомотива на рейку зображається у вигляді зосередженої сили, прикладеної в центрі площі контакту колеса з рейкою. Позначення зосередженої сили  $F^*$  - Н (ньютон),  $\kappa H = 10^3 H$  (кілоньютон).

Навантаження, прикладене на значній площі, називається розподіленим. Мірою такого навантаження є її інтенсивність, тобто границя відношення рівнодіючої, яка приходить на дуже малу площину, до величини цієї площини, коли вона прагне до нуля. Якщо інтенсивність у всіх точках площини навантаження однакова, то таке навантаження носить назву рівномірно розподіленого.

Якщо ж інтенсивність різна, то вона називається нерівномірно розподіленою. Позначається  $q - Pa = \frac{H}{m^2}$  (паскаль),  $MPa = 10^6 Pa = 1 \frac{H}{mm^2}$  (мегапаскаль). Прикладом розподіленого навантаження є сніг на даху будинку, власна вага плит перекриття і т.п. В тих випадках, коли площа розподіленого навантаження уявляє собою витягнутий прямокутник, а інтенсивність вздовж короткої сторони  $b$  постійна і змінюється тільки по довгій стороні, таке навантаження умовно замінюють погонним розподіленим навантаженням інтенсивністю  $q = pb = Pa \cdot m = \frac{H}{m}$ .

На конструкції можуть діяти моментні навантаження: у вигляді розподілених моментів по поверхні ( $Pa \cdot m$ ), розподілених погонних моментів ( $Pa \cdot m/m$ ) або зосереджених моментів ( $H \cdot m$ ).

За тривалістю дії зовнішні навантаження діляться на постійні і тимчасові. Постійним називається навантаження, яке діє впродовж всього терміну роботи

---

\* Force (англ.) - сила

конструкції, наприклад, її власна вага. Тимчасовим називається навантаження, яке діє обмежений час, після чого зникає, наприклад, вага снігу на дах, тиск вітру і т.д.

Зовнішні навантаження діляться на нерухомі, що не змінюють свого положення, рухомі, які за невеликий проміжок часу змінюють своє положення, зберігаючи напрямок дії, наприклад, тиск локомотива, що рухається, на міст.

Слід пам'ятати, що в число зовнішніх сил, які приймаються до уваги при розрахунках конструкції, входять не тільки активні сили, але і реакції зв'язків і сили інерції (при наявності значних прискорень).

Про внутрішні сили мова піде пізніше.

### 1.3.ВИДИ ДЕФОРМАЦІЙ

З практики відомо, що в процесі експлуатації елементи конструкції зазнають слідувачі основні деформації:

- 1) розтяг (рис. 1.2,а); цю деформацію зазнають, наприклад, канати, троси, ланцюги;
- 2) стиск (рис. 1.2,б); на стиск працюють, наприклад, колони, цегляна кладка, ніжки стільців;
- 3) зсув (рис.1.2,в); деформацію зсуву зазнають заклепки, болти, шпонки, шви зварних з'єднань;
- 4) кручення (рис.1.2,г); на кручення працюють вали, які передають потужність при обертанні;
- 5) згин (рис.1.2,д); на згин працюють балки, осі, зубці зубчастих коліс та інші елементи конструкцій.

Часто навантаження викликають одночасно дві й більше основних деформацій. Такі випадки називають складним опором, який буде розглянутий в окремому розділі курсу після вивчення основних деформацій.

Деформації тіла можуть бути пружним або залишковими (пластичними). Пружною називається така деформація, яка зникає після припинення дії навантаження; залишковою або пластичною називається та часткова повної деформації, яка залишається після припинення дії навантаження.

Пружність тіла, тобто його здатність поновлювати після припинення дії навантаження початкову форму і об'єм, є однією з основних властивостей твердих тіл, яка використовується при проектуванні елементів машин і споруд.

Поряд з пружними деформаціями в тілах можуть виникати також пластичні деформації. При нормальній експлуатації інженерних конструкцій не можна допускати виникнення пластичних деформацій, при яких розміри і форми елементів конструкцій необернено змінюються. Визначення умов виникнення і зростання пластичних деформацій має велике значення для знаходження величин тих навантажень, які можуть безпечно передаватись на конструкцію.

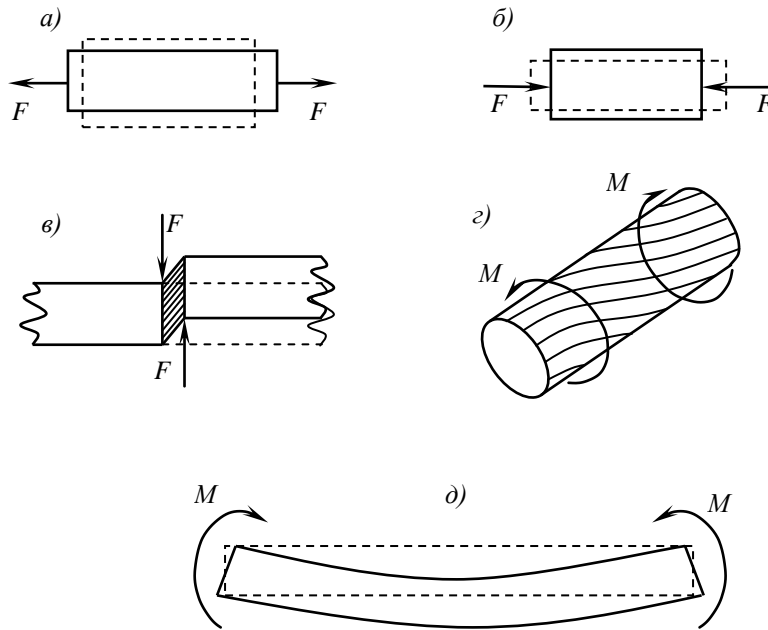


Рис. 1.2.

Пластичністю матеріалу називається його здатність зазнавати без руйнування великих пластичних деформацій.

Як пружні, так і пластичні деформації можуть бути малі або великі порівняно з розмірами тіла. Малі пружні деформації можна розкласти на прості елементи. Для того, щоб виділити елементарні деформації, на які можна розкласти деформації всього тіла, розіб'ємо його уявно на елементарні кубики (рис. 1.3,а). Під час деформації тіла будуть деформуватися також і кубики, з яких воно складається: довжина ребер кубиків подовжиться або скоротиться, а їх взаємно паралельні грані зсунуться відносно себе у напрямі, паралельному граням. Початково прямі кути між гранями перекосяться при цьому і стануть гострими або тупими. Можливе скривлення ребер і граней кубиків не беремо до уваги, оскільки, вважаючи елементарні кубики безмежно малими, ми можемо замінити криві лінії прямими і криві поверхні площинами.

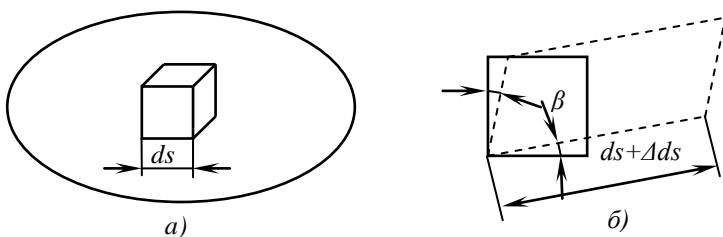


Рис. 1.3.

Таким чином, деформація елементарного кубика буде повністю визначатися двома елементарними деформаціями: лінійною, тобто зміною відстані між двома виділеними точками у тілі, і кутовою деформацією або

деформацією зсуву, тобто взаємним зміщенням двох суміжних паралельних елементарних площин матеріалу у напрямі, паралельному цим площинам.

Нехай довжина ребра елементарного кубика буде  $ds$ , його абсолютне подовження -  $\Delta ds$  (рис.1.3,б). Відношення абсолютного подовження лінійного елемента до його початкової довжини називається відносним подовженням і позначається буквою  $\varepsilon$  :



$$\varepsilon = \Delta \int ds \quad (1.1)$$

Деформація зсуву характеризується кутом зсуву  $\gamma$ , що являє собою зміну кута між двома взаємно перпендикулярними лінійними елементами, які виходять з однієї точки.

Позначаючи  $\alpha$  і  $\beta$  кути, на які повертаються при деформації зсуву грані елементарного кубика (рис. 1.3,б), одержимо для кута зсуву вираз

$$\gamma = \alpha + \beta \quad (1.2)$$

Визначені формулами (1.1) і (1.2) елементарні деформації повністю характеризують будь-яку малу деформацію твердого тіла.

#### 1.4. ВНУТРІШНІ СИЛИ. МЕТОД ПЕРЕРІЗІВ

Внутрішніми силами називаються сили взаємодії між частинками твердого тіла. Слід зауважити, що у будь-якому твердому тілі між його окремими частинками завжди діють сили взаємного притягнення, які зумовлюють існування твердого тіла з його незмінними (у не навантаженому стані і при певній температурі) формою і розмірами. Внаслідок дії прикладеного навантаження у тілі виникають додаткові внутрішні сили, які залежать від форми тіла і характеру навантаження. У науці про опір матеріалів цікавляться саме цими додатковими внутрішніми силами, викликаними дією зовнішніх сил.

Отже, під внутрішніми силами будемо розуміти ті додаткові сили взаємодії між частинками матеріалу, які виникають від дії на тіло зовнішніх сил. Для їх визначення користуються методом перерізів, згідно з яким конструкція (або елемент) умовно розсікається площиною, перпендикулярною до осі елемента, на дві частини I і II (рис. 1.4,а). В обох цих частинах у всіх точках перерізу виникають внутрішні сили взаємодії, які на підставі третього закону Ньютона рівні і протилежні за напрямком (рис. 1.4,б). Отже, кожна окрема частина I і II тіла знаходиться під дією заданих зовнішніх сил  $F_i$  і сил, які замінюють дію другої, відкинутої частини тіла, прикладених до площини проведеного перерізу. Але тепер сили взаємодії для кожної частини I і II перейшли в категорію зовнішніх сил, які можна за теоремою Пуансо привести до однієї сили – головного вектора  $\bar{R}$  і до однієї пари – головного моменту  $M$  (рис. 1.4,в).

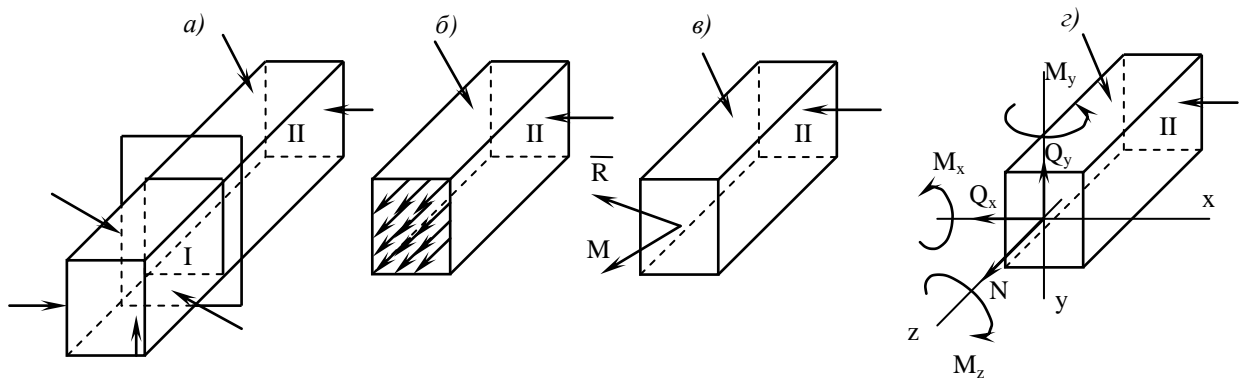


Рис. 1.4.

Вибравши прямокутну систему координат  $oxyz$  для залишеної частини, розкладемо  $\bar{R}$  і  $M$  за відповідними осями. Одержимо шість складових: три сили  $N$ ,  $Q_x$ ,  $Q_y$  і три моменти  $M_x, M_y, M_z$  (рис. 1.4,г).

Сили  $N$ ,  $Q_x$ ,  $Q_y$  і моменти  $M_x, M_y, M_z$ , що виникають у поперечному перерізі тіла, називають внутрішніми силовими факторами (або зусиллями) у цьому перерізі.

Так як тіло до умовного розсікання знаходилося під дією заданої системи сил у рівновазі, то і після поділу його на частини I і II кожна з них також повинна бути у рівновазі, але вже під дією тих сил, що прикладені безпосередньо до цієї частини.

Для залишеної частини (у нашому випадку це частина II) тіла складається шість умов рівноваги статички:

$$\begin{cases} \sum X = 0; \sum M_x = 0; \\ \sum Y = 0; \sum M_y = 0; \\ \sum Z = 0; \sum M_z = 0; \end{cases}$$

з яких і визначаються внутрішні силові фактори.

Метод перерізів дає змогу знайти лише сумарні характеристики внутрішніх сил, проте не дозволяє встановити закон розподілу цих сил перерізом.

Через те, що метод перерізів є основним методом опору матеріалів, ще раз чітко сформулюємо його зміст і вкажемо послідовність усіх п'яти етапів, з яких він складається:

- 1) розсікаємо тіло площиною в тому перерізі, в якому нас цікавлять внутрішні сили;
- 2) відкидаємо одну з частин тіла (доцільніше ту, до якої прикладено менше зовнішніх сил);
- 3) замінюємо дію відкинутої частини на залишену внутрішніми силами;
- 4) складаємо рівняння рівноваги залишеної частини;
- 5) розв'язуємо ці рівняння і знаходимо складові головного вектора і головного моменту внутрішніх сил, що діють у розглядуваному перерізі.

Шість внутрішніх силових факторів, виникаючих у поперечному перерізі тіла в самому загальному випадку, носять такі назви:

$N$  - поздовжня (нормальна) сила;  $Q_x$  і  $Q_y$  - поперечні сили;  $M_z$  - крутний момент, який позначатимемо  $T = M_z$  (Torsion(англ.) - кручення);  $M_x$  і  $M_y$  - згинальні моменти.

При різних деформаціях у поперечних перерізах елемента конструкції виникають різні внутрішні силові фактори. Розглянемо поодинокі випадки:

1. У перерізі виникає тільки поздовжня сила  $N$ . У цьому випадку має місце деформація розтягу (якщо сила  $N$  спрямована від перерізу) або деформація стиску (якщо сила  $N$  спрямована до перерізу).
2. У перерізі виникає тільки поперечна сила  $Q$ . У цьому випадку має місце деформація зсуву.
3. У перерізі виникає тільки крутний момент  $T = M_z$ . У цьому випадку має місце деформація кручення.
4. У перерізі виникає тільки згинальний момент  $M$  ( $M_x$  або  $M_y$ ). У цьому випадку має місце деформація так званого чистого згину (розрізняють ще поперечний згин, коли, крім згинального моменту, у поперечному перерізі бруса не дорівнює нулевій одна з поперечних сил).

## 1.5. ПОНЯТТЯ ПРО НАПРУЖЕННЯ

Ми знаємо, що в поперечних перерізах стержня діють не зосереджені внутрішні сили  $N$ ,  $Q$ ,  $T$  і т.д., а безперервно розподілені сили, інтенсивність яких може бути різною в різних точках перерізу і в різних напрямках. Для оцінки інтенсивності розподілу внутрішніх сил по перерізу запроваджують міру їх, так би мовити, “густину”, що зветься напруженням.

Як же виміряти інтенсивність внутрішніх сил у даній точці даного перерізу, наприклад у точці  $k$  з координатами  $x, y$  (рис. 1.5)?

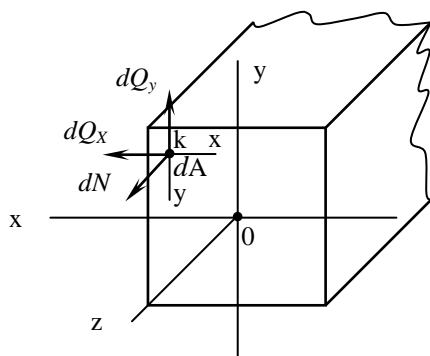


Рис. 1.5.

Виділимо навколо точки  $k$  нескінченно малу площину  $dA$ . Зважаючи на її малість можна вважати, що внутрішні сили розподілені рівномірно, тобто однакові по модулю і за напрямком і, таким чином, являються системою паралельних сил. Рівнодіючу систему позначимо  $dR$ .

Проекціями  $dR$  на осі  $x, y, z$  будуть елементарна поздовжня сила  $dN$  і елементарні поперечні сили  $dQ_x$  і  $dQ_y$ . Оскільки, як було сказано, зусилля на елементарній площині можна вважати розподіленими рівномірно, то, поділивши величини  $dN$ ,  $dQ_x$  і  $dQ_y$  на площу  $dA$ , одержимо величини поздовжніх і поперечних сил, які приходяться на одиницю площі:

$$\sigma = \frac{dN}{dA}; \tau_x = \frac{dQ_x}{dA}; \tau_y = \frac{dQ_y}{dA}. \quad (1.2)$$

Ці величини називаються напруженнями у даній точці  $K$  проведеного перерізу бруса, причому  $\sigma$  - нормальне напруження,  $\tau$  - дотичне напруження. Їх вимірюють в одиницях напруження – паскалях (Па):  $1\text{Па} = 1\text{Н}/\text{м}^2$ .

Таким чином, напруженням називається внутрішня сила, віднесена до одиниці площі у даній точці розглядуваного перерізу.

Іноді крім нормальних  $\sigma$  і дотичних  $\tau_x, \tau_y$  напружень розглядають і повні напруження

$$p = dR/dA \quad (1.3)$$

тобто величину повного зусилля, яке приходить на одиницю площі. Очевидно, що

$$p = \sqrt{\sigma^2 + \tau_x^2 + \tau_y^2} \quad (1.4)$$

Встановимо зв'язок між напруженням і внутрішніми силовими факторами у поперечному перерізі бруса.

Помноживши напруження  $\sigma, \tau_x$  і  $\tau_y$  на площу  $dA$  площини їх дії, одержуємо елементарні внутрішні сили:  $dN = \sigma dA, dQ_x = \tau_x dA, dQ_y = \tau_y dA$  (рис. 1.6).

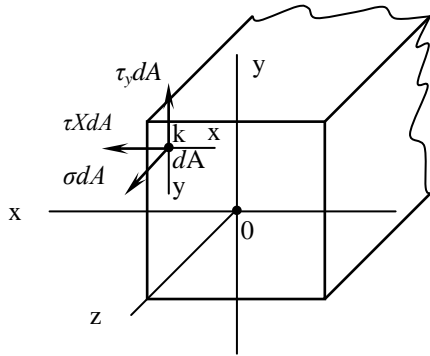


Рис. 1.6.

Сумуючи ці елементарні сили по всій площі перерізу, одержуємо вирази складових головного вектора внутрішніх сил:

$$N = \int_A \sigma dA; \quad (1.5)$$

$$Q_x = \int_A \tau_x dA; \quad (1.6)$$

$$Q_y = \int_A \tau_y dA. \quad (1.7)$$

Якщо кожен з елементарних сил помножимо на відстань її до відповідної осі, одержимо елементарні моменти внутрішніх сил:  $dM_z = \tau_x dA \cdot y - \tau_y dA \cdot x$ ;  $dM_x = \tau_y dA \cdot z$ ;  $dM_y = \tau_x dA \cdot z$ .

Сумуючи елементарні моменти по всій площі перерізу, одержуємо вирази для складових головного моменту внутрішніх сил:

$$M_z = \int_A (\tau_x y - \tau_y x) dA; \quad (1.8)$$

$$M_x = \int_A \tau_y dA; \quad (1.9)$$

$$M_y = \int_A \tau_x dA. \quad (1.10)$$

Звертаємо увагу, що рівняння (1.5) – (1.10) не можуть бути використані для визначення внутрішніх силових факторів; значення останніх визначають за допомогою методу перерізів. Ці вирази можна розглянути як інтегральні рівняння рівноваги. Далі ці вирази будемо використовувати при визначенні напружень за відомими внутрішніми силовими факторами.

Отже, від зовнішніх сил за допомогою методу перерізів до внутрішніх силових факторів, від них на базі інтегральних рівнянь і додаткових гіпотез до напружень – такий в загальних рисах план рішення основної задачі опору матеріалів про визначення напружень, виникаючих у поперечних перерізах бруса при різних видах його навантаження.

## 1.6. ГІПОТЕЗИ НАУКИ ПРО ОПІР МАТЕРІАЛІВ

Реальні матеріали, з яких виготовляють елементи конструкцій, представляють собою досить складні і неоднорідні тверді тіла з різними властивостями. Врахувати всю різноманітність цих властивостей дуже важко, тому в опорі матеріалів використовують не всі характеристики твердих матеріалів, а тільки загальні признаки, притаманні всім тілам. Другими словами, в опорі матеріалів вивчається поведінка конструкцій з ідеалізованого матеріалу, який зберігає головні фізико – механічні характеристики.

Вивчення основ опору матеріалів у даному курсі базується на найбільш простих у математичному відношенні гіпотез і обмежень, які з достатньою ступінню точності для практичних цілей описують поведінку реальних конструкцій. У тих випадках, коли прийняті припущення і обмеження приводять до невірних результатів, будуть зроблені спеціальні уточнення.

1. Припущення про неперервну (суцільну) будову матеріалу. Згідно з цим припущенням приймається, що увесь об'єм елемента конструкції заповнений речовиною без будь-яких пустот, тобто не враховується дійсна дискретна атомістична структура матеріалів. Це припущення дозволяє виділити з будь-якої частини тіла нескінченно малий елемент  $i$ , приписавши йому властивості матеріалу всього тіла, користуватися при дослідженні напружено – деформованого стану математичними методами аналізу нескінченно малих величин.

2. Гіпотеза про ненапружений стан тіла. Згідно з цим у матеріалі елемента до його навантаження немає ніяких напружень, тобто дійсні (початкові) напруження, характер і величина яких залежить від причин виникнення, приймаються рівними нулю.

3. Припущення про однорідність матеріалів. Згідно з цим припущенням матеріал у всіх точках любого об'єму має однакові фізико-механічні властивості.

4. Припущення про ізотропність матеріалу. Згідно з цим припущенням матеріал у будь-якій точці і за всіма напрямками, проведеними через цю точку, має однакові фізико-механічні характеристики.

5. Гіпотеза про ідеальну пружність матеріалу. Згідно з цією гіпотезою вважається, що матеріал володіє властивістю повністю поновлювати після припинення дії навантаження початкову форму і розміри.

6. Гіпотеза про лінійну залежність між напруженням і деформацією. Згідно з цією гіпотезою пружне тіло наділяється найпростішою, тобто лінійною залежністю між напруженнями і деформаціями у даній точці, яка носить назву закону Гука.

7. Припущення про малість переміщень у порівнянні з геометричними розмірами елементів конструкції. Згідно з цим припущенням не враховуються зміни геометричних розмірів елементів і місцезнаходження навантажень від згину, розтягу, стиску і зсуву після прикладання до них зовнішніх сил. Таким чином, реакції і внутрішні силові фактори визначаються по заданій, початковій геометрії, що значно спрощує розрахунки, так як всі рівняння мають лінійний вигляд.

8. Принцип незалежності дії сил або принцип суперпозиції. Згідно з цим можна сказати, що результат дії системи сил на тіло дорівнює сумі результатів окремо взятої кожної сили цієї системи сил. Іншими словами, в опорі матеріалів можна визначати реакції, внутрішні силові фактори, напруження і деформації окремо від кожної діючої на тіло зовнішньої сили і результати алгебраїчно скласти, щоб одержати сумарний ефект дії на тіло даної системи сил.

9. Гіпотеза плоских перерізів (гіпотеза Бернуллі): поперечні перерізи елемента, плоскі і перпендикулярні до його осі до прикладення зовнішніх сил, будуть плоскими і перпендикулярними до осі і після прикладання до елемента навантаження.

10. Гіпотеза Сен-Венана: в достатньо віддалених точках елемента від місця прикладання навантаження внутрішні силові фактори дуже мало залежать від способу прикладання цього навантаження (рис. 1.7,а,б).

За достатню віддаль перерізу можна місце прикладання навантаження можна вважати віддаль порядку поперечного розміру стержня.

Принцип Сен-Венана має загальне значення і використовується не лише для визначення напружень при розтяганні (рис. 1.7), а також і в інших випадках навантаження стержня.

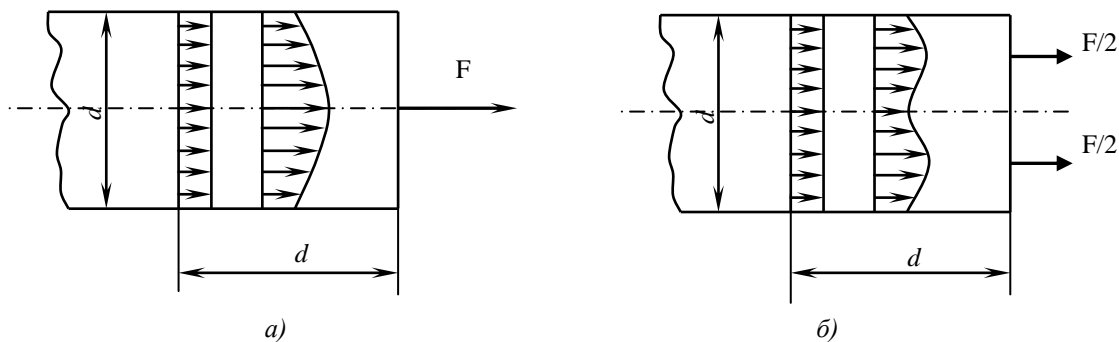


Рис. 1.7.

## 2. РОЗТЯГ І СТИСК

### 2.1. ПОЗДОВЖНЯ СИЛА

Розтягом або стиском називається такий вид деформації, при якому у довільному поперечному перерізі бруса виникає тільки поздовжня сила. Ці види деформації бруса викликаються навантаженням, рівнодійна якого напрямлена уздовж його осі. Найпростіші випадки такого навантаження осьовою силою  $F$  показані на рис. 2.1.

При дії розтягуючої сили (рис. 2.1,а) довжина стержня може бути довільною. Для стискаючої сили на стержень великої довжини і порівняно невеликого поперечного перерізу може викликати явище так званого поздовжнього згину. У цій главі розглядаються лише стиснуті стержні великої жорсткості, для яких небезпеки поздовжнього згину немає. Для цього необхідно, щоб відношення довжини стержня  $\ell$  до найменшого розміру  $d$  його поперечного перерізу було порядку  $\ell \leq 4 \dots 5 d$  (рис. 2.1,б).

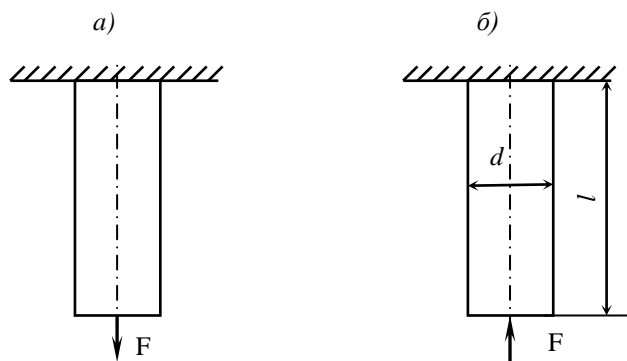


Рис. 2.1.

Для визначення внутрішніх сил, що виникають при розтягу або стисканні стержня, використаємо метод перерізів і покажемо його застосування на прикладі стержня, навантаженого кількома зосередженими осьовими силами (рис. 2.2,а). Власної ваги стержня нехтуємо.

Частини стержня сталого перерізу, розташовані між поперечними площинами, в яких прикладені активні або реактивні сили, будемо називати ділянками. Показаний на рис. 2.2,а стержень складається з трьох ділянок:  $a, b$  і  $c$ .

Вісь стержня суміщаємо з координатною віссю  $Z$  з початком у центрі ваги його лівого кінцевого перерізу. Задавшись напрямом реакції  $R$ , знаходимо її з умови рівноваги сил, прикладених до стержня:

$$\sum Z = 0: \quad -R - F_1 + F_2 + F_3 = 0,$$

звідки

$$R = F_1 - F_2 + F_3.$$

Якщо реакція  $R$  визначиться від'ємною, то її напрям слід буде змінити на протилежний. Бажано вже показати дію реакції замість опори (2.2,б).

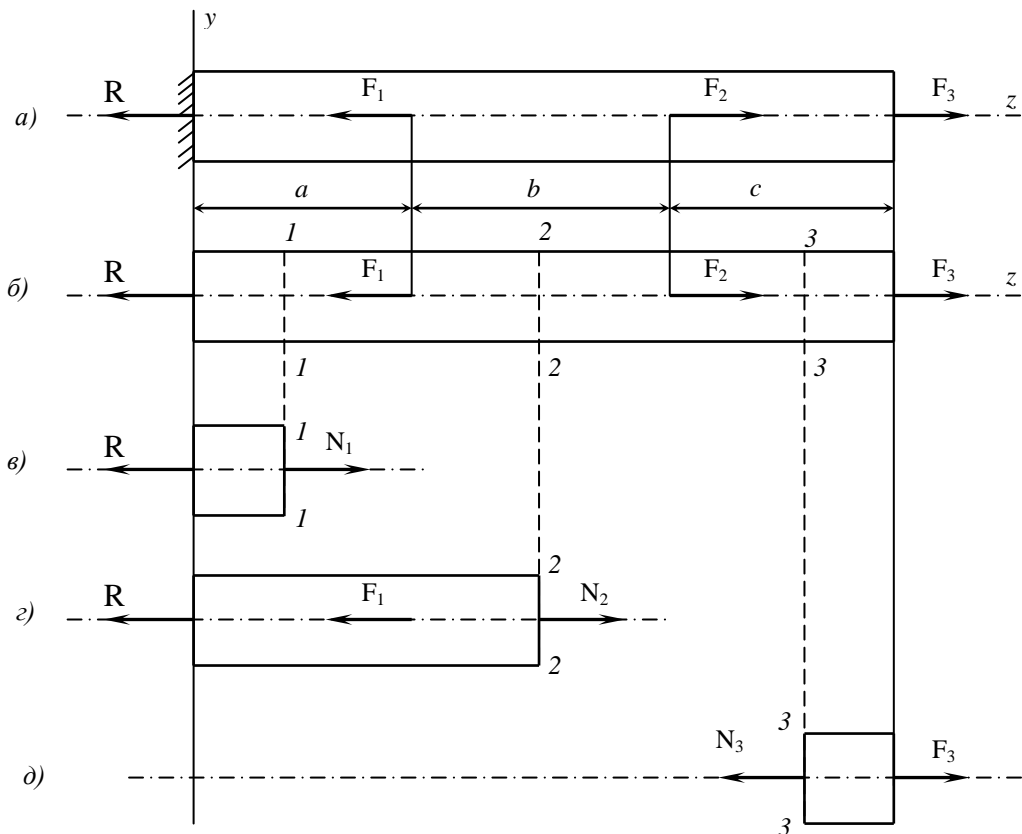


Рис. 2.2.

Для визначення внутрішніх сил у довільному перерізі 1-1 ділянки  $a$  стержня розрізаємо його уявно у цьому ж перерізі і відкидаємо одну з частин стержня, як правило більш навантажену (у даному випадку праву). Дію відкинutoї частини стержня на ліву частину, що залишається, треба замінити внутрішньою силою. Остання називається, як нам уже відомо, поздовжньою силою і позначається  $N$ . Поздовжня сила є рівнодієюю системи сил, що замінює у даному поперечному перерізі дію відкинutoї частини стержня на ту, що залишилась, і напрямлена уздовж осі стержня.

Оскільки напрям поздовжньої сили не завжди відомий, то зручно завжди поздовжню силу в проведеному перерізі показувати розтягуючою, тобто напрямлену від розглядуваного перерізу. Одержавши від'ємне значення поздовжньої сили, будемо знати, що у цьому перерізі діє стискаюча поздовжня сила.

З умови рівноваги сил, прикладених до зоставленої частини стержня, знаходимо (рис.2.2,в):

$$\sum Z = 0; \quad -R + N_1 = 0, \quad \text{і} \quad N_1 = R.$$

Так як переріз 1-1 довільний на ділянці  $a$  то можна зробити висновок, що у всіх перерізах ділянки  $a$  поздовжня сила  $N_a$  буде мати одну і ту ж величину, а саме:  $N_a = N_1 = R = const$ .



Проведемо тепер довільний переріз 2-2 на ділянці  $b$ . Зоставимо ліву частину стержня і все зробимо так, як і раніше (рис.2.2,г):

$$\sum Z = 0; \quad -R - F_1 + N_2 = 0, \quad N_2 = F_1 + R; \quad N_b = N_2 = \text{const}.$$

Аналогічно визначається поздовжня сила у поперечних перерізах ділянки  $c$  (рис.2.2,д):

$$\sum Z = 0; \quad N_3 + F_3 = 0, \quad N_3 = F_3; \quad N_b = N_2 = \text{const}.$$

Таким чином, поздовжня сила  $N$  у довільному поперечному перерізі стержня чисельно дорівнює алгебраїчній сумі проекції на вісь стержня всіх зовнішніх сил, розташованих з одного боку перерізу. Сили розтягу, тобто напрямлені від перерізу, вважаються при цьому додатними, а сили стиску, напрямлені до перерізу, - від'ємними.

Для наочного зображення розподілу внутрішніх сил, у нашому випадку поздовжніх сил, будують їх епюри, тобто графіки, на яких величина обчислених зусиль відкладається в певному масштабі у вигляді відрізків, перпендикулярних до осі стержня.

Як будують епюри, буде показано у наступному параграфі.

## 2.2. НАПРУЖЕННЯ В ПОПЕРЕЧНИХ ПЕРЕРІЗАХ СТЕРЖНЯ

У параграфі 1.5 ми одержали залежність між поздовжньою силою  $N$  і напруженням  $\sigma$  (1.5):

$$N = \int_A \sigma dA$$

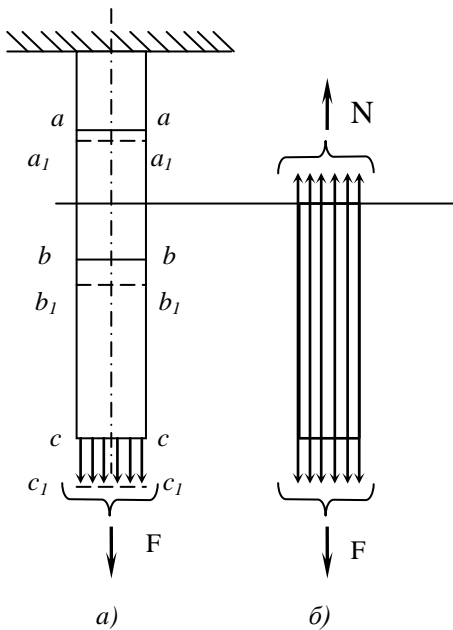


Рис. 2.3.

Але з цього виразу неможливо одержати закон розподілення нормальних напружень  $\sigma$  по площі перерізу, так як одній і тій же силі  $N$  може відповідати нескінченна множина способів розподілення нормальних напружень по поперечному перерізу. Тому для встановлення закону розподілу нормальних напружень  $\sigma$  в поперечних перерізах стержня звернемося до експерименту.

Розглянемо прямий брус сталого поперечного перерізу і нанесемо на його бокову поверхню до навантаження ряд поперечних ліній  $a-a, b-b, c-c$  (рис.2.3,а). Досліди показують, що після навантаження ці лінії зостаються прямими, але зміщеними паралельно самим собі ( $a_1-a_1, b_1-b_1, c_1-c_1$ ). Уявимо, що брус

складається з окремих тонких поздовжніх призматичних елементів площею  $dA$  (рис.2.3,б). Оскільки всі поверхневі поздовжні елементи (їх ще називають волокнами) подовжуються однаково, то можна припустити, що і всі внутрішні волокна також подовжуються однаково. Тоді всякий поперечний переріз бруса переміщується паралельно своєму початковому положенню, тобто переріз, плоский до деформації, зостається плоским і після деформації. Отже, при осьовому розтяганні (стисканні) стержня виконується гіпотеза Бернуллі. Так як однаковим подовженням відповідають однакові напруження (закон Гука), то в усіх точках перерізу стержня нормальні напруження будуть сталими. Тоді при  $\sigma = const$ , зв'язок між  $N$  і  $\sigma$  набуде вигляду:

$$N = \sigma \int_A dA = \sigma A, \quad (2.1)$$

звідки

$$\sigma = N / A \quad (2.2)$$

Отже, у поперечних перерізах стержня при осьовому розтягу або стиску виникають рівномірно розподілені нормальні напруження  $\sigma$ , які дорівнюють відношенню поздовжньої сили до площі поперечного перерізу. Нормальні напруження приймаються додатними при розтяганні, а при стисканні від'ємними.

Доведення про рівномірний розподіл нормальних напружень по поперечному перерізі проводилося при припущенні, що зовнішня сила, прикладена до торця стержня, розподілена рівномірно. Формула (2.2) буде дійсною і в інших випадках навантаження стержнів (наприклад, зосередженою або кількома зосередженими силами), якщо ми візьмемо до уваги принцип Сен-Венана.

Для наочного зображення характеру мінливості нормальних напружень у різних перерізах по довжині бруса будують епюру нормальних напружень  $\sigma$ , тобто графік, віссю якого є вісь бруса, а ординатами є значення інтенсивності нормального напруження в усіх перерізах.

Наведемо приклад будування епюр поздовжніх сил  $N$  та нормальних напружень для стержня, показаного на рис.2.4,а.

Визначаємо реакцію опори так, як про це йшла мова вище:  $\sum Z = 0$ ;  $-R - F_1 + F_2 + F_3 = 0$ ,  $R = F_3 + F_2 - F_1 = 10 + 20 - 40 = -10 \text{ кН}$ . Змінивши напрям  $R$  на протилежний, маємо стержень зі всіма відомими зовнішніми силами, що діють на нього (рис.2.4,б).

Будуємо епюру поздовжніх сил, використовуючи метод перерізів.

Переріз 1-1 на ділянці  $a$  (рис. 2.4,б). Зоставляємо ліву (більш простішу) частину стержня (рис.2.4,в), замінюємо дію відкинutoї частини на неї додатною, тобто напрямленою від перерізу внутрішньою поздовжньою силою  $N_1$ . Складаємо рівняння рівноваги:  $\sum Z = 0; R + N_1 = 0$ , звідки  $N_1 = -R = -10 \text{ кН}$ . Знак "мінус" говорить про те, що маємо деформацію стиску. Переріз 1-1 на ділянці  $a$  був довільним, тому в будь-якому перерізі цієї ділянки будуть такі ж саме поздовжні сили, як і в 1-1, тобто  $N_a = N_1 = -10 \text{ кН}$ .

Проведемо довільний переріз 2-2 на ділянці  $b$  (рис. 2.4,б). Зоставимо ліву частину стержня (рис.2.4,г). Далі поступаємо аналогічно попередньому:  $\sum Z = 0$ ;

$R - F_1 + N_2 = 0$ ,  $N_2 = F_1 - R = 40 - 10 = 30 \text{кН}$ ;  $N_b = N_2 = 30 \text{кН}$ , тобто в кожному перерізі ділянки  $b$  буде розтягання силою  $30 \text{кН}$ .

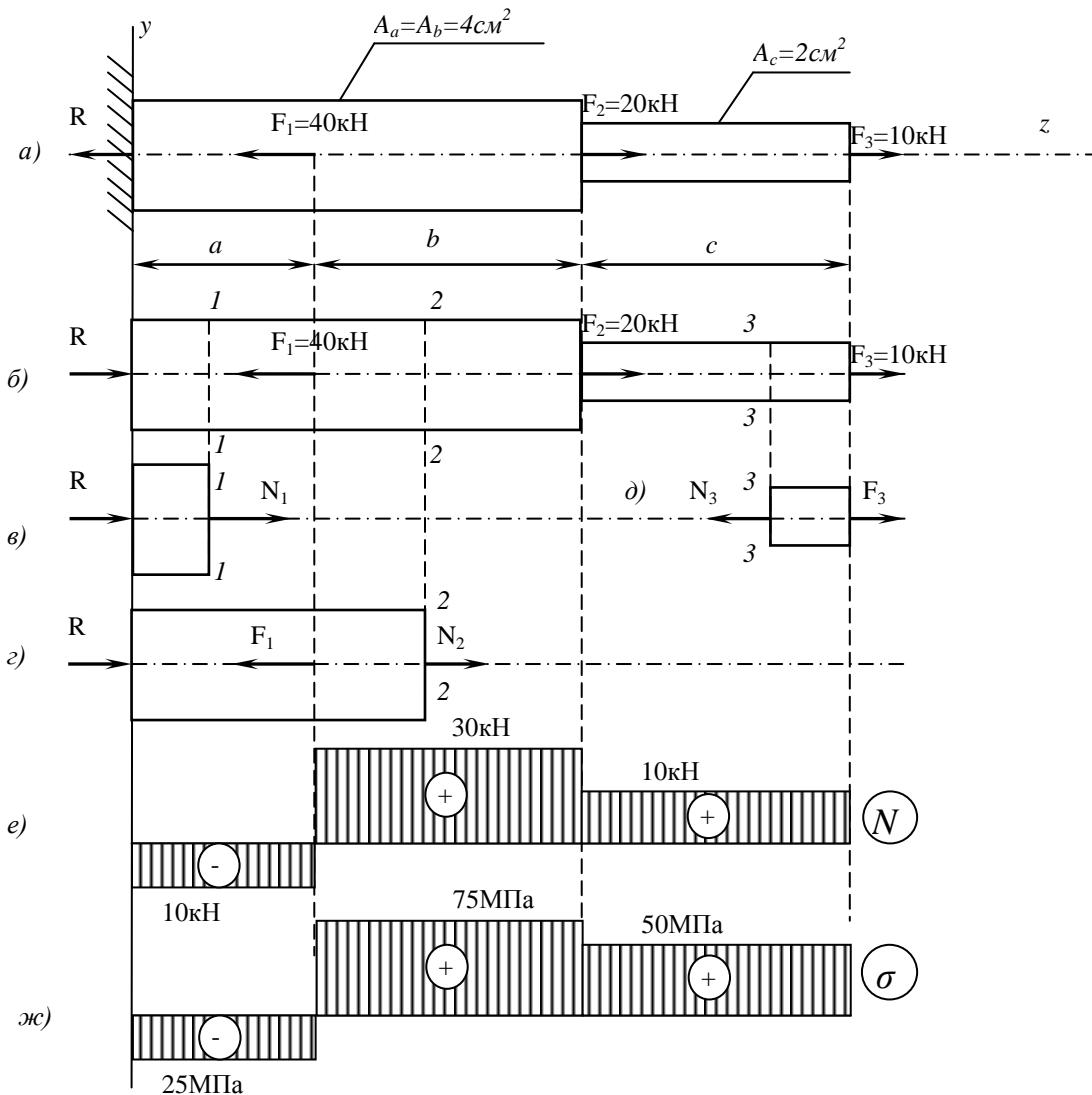


Рис. 2.4.

Переріз 3-3 (рис.2.4,б). Зоставляємо праву частину стержня (рис.2.4,д), а далі аналогічно попереднім рішенням:  $\sum Z = 0$ ;  $-N_3 + F_3 = 0$ ,  $N_3 = F_3 = 10 \text{кН}$ .

Для побудови епюри поздовжніх сил  $N$  під рисунком проводимо вісь або базу епюри, паралельну осі стержня і штриховими лініями обмежуємо його ділянки (граничами ділянок є точки прикладання сил і місця зміни розмірів поперечного перерізу). Одержані величини поздовжніх сил у довільному масштабі відкладаємо перпендикулярно осі епюри, причому додатні значення  $N$  (розтяг) відкладаються вверх, а від'ємні (стиск) – вниз від осі. Епюра штрихується тонкими лініями, перпендикулярними до осі (рис.2.4,е). Штрихова лінія на епюрі у вибраному масштабі (ордината графіка) дає значення поздовжньої сили у відповідному поперечному перерізі стержня. У точках прикладання зосереджених сил на епюрі  $N$  утворюються стрибкоподібні зміни, причому величина “стрибка” дорівнює модулю прикладеної в перерізі стержня зовнішньої зосередженої сили.

Для побудови епюри  $\sigma$  визначимо нормальне напруження на ділянках стержня, використовуючи формулу (2.2). Тоді на ділянці  $a$  нормальне напруження буде:  $\sigma_a = N_a/A_a = -10 \cdot 10^3 / 4 \cdot 10^2 = -25$  МПа, на ділянці  $b$  –  $\sigma_b = N_b/A_b = 30 \cdot 10^3 / 4 \cdot 10^2 = 75$  МПа, на ділянці  $c$  –  $\sigma_c = N_c/A_c = 10 \cdot 10^3 / 2 \cdot 10^2 = 50$  МПа. Правила побудови епюри  $\sigma$  ті ж, що й для епюри  $N$ , включаючи і правило знаків. У межах кожної ділянки напруження сталі, тому епюра  $\sigma$  на кожній ділянці – пряма, паралельна осі (рис.2.4, ж).

Для наочності на епюрах  $N$  і  $\sigma$  знаками  $+$  і  $-$  відмічають додатні і від'ємні значення ділянок епюр.

Для розрахунків на міцність головне значення мають найбільші напруження. Такі перерізи називають небезпечними.

### 2.3. НАПРУЖЕННЯ В НАХИЛЕНИХ ПЕРЕРІЗАХ СТЕРЖНЯ

Для одержання повної картини напружень, які виникають у перерізах, проведених через будь-яку точку стержня, необхідно вивчити напруження в його довільно нахиленому перерізі, що проходить через задану точку  $B$  (рис.2.5, а).

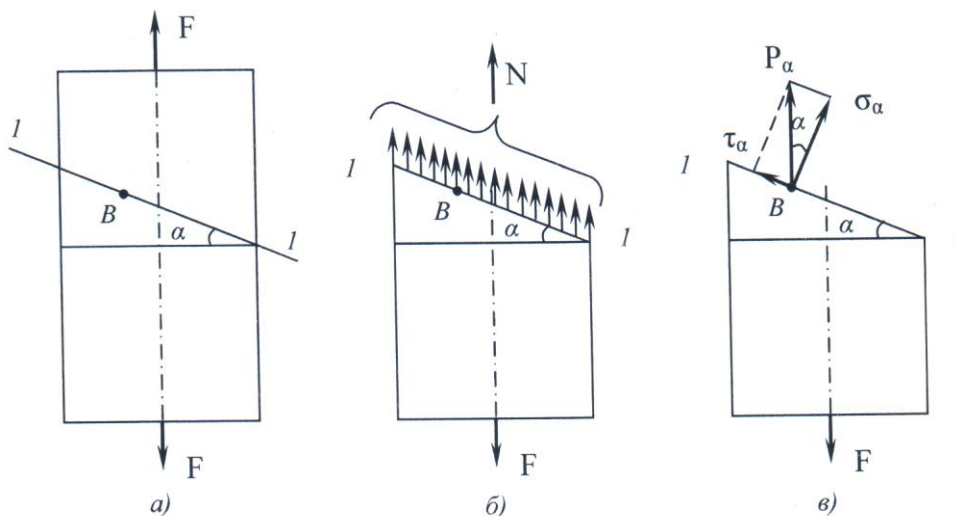


Рис.2.5

Перетнемо стержень площиною 1-1 так, щоб вона пройшла через точку  $B$ , утворюючи з поперечним перерізом кут  $\alpha$ . Відкинемо верхню частину і розглянемо рівновагу нижньої.

Очевидно, що рівнодіюча  $N$  внутрішніх сил, діючих на похилій площині, буде рівною розтягуючій силі  $F$ :  $N=F$ , а напруження  $p_\alpha$ , паралельні осі бруса (рис.2.5,б). Вважаючи, що напруження  $p_\alpha$  розподілені на похилому перерізі рівномірно, одержимо

$$p_\alpha = \frac{N}{A_\alpha},$$

де  $A_\alpha$  - площа нахиленого перерізу.

Так, як  $A_\alpha = \frac{A}{\cos\alpha}$ , то  $p_\alpha = N/(A \cdot \cos\alpha) = \sigma \cdot \cos\alpha$ , тому що  $N/A = \sigma$  - нормальне напруження у поперечному перерізі стержня.

Розкладемо повне напруження  $p_\alpha$  у точці В похилого перерізу на нормальне  $\sigma_\alpha$  і дотичне  $\tau_\alpha$  напруження (рис.2.5, в). Тоді

$$\sigma_\alpha = p_\alpha \cdot \cos\alpha = \sigma \cos^2\alpha, \quad (2.3)$$

$$\tau_\alpha = p_\alpha \cdot \sin\alpha = \sigma \cos\alpha \cdot \sin\alpha = (\sigma/2) \cdot \sin 2\alpha \quad (2.4)$$

Звідси витікає висновок: при розтяганні стержня на похилих перерізах виникають нормальні і дотичні напруження, рівномірно розподілені за перерізом, і відповідні цим напруженням деформації розтягу і зсуву.

Знайдемо значення нормальних і дотичних напружень для деяких характерних положень похилої площини:

а) для  $\alpha = 0$ ,  $\sigma_\alpha = \sigma = \sigma_{\max}$ , і  $\tau_\alpha = 0$

б) для  $\alpha = 90^\circ$ ,  $\sigma_\alpha = 0 = \sigma_{\min}$ , і  $\tau_\alpha = 0$ .

Отже, в перерізах, перпендикулярних до осі стержня і паралельних осі, немає дотичних напружень, а нормальні напруження набувають екстремальних значень.

У перерізі, що утворює з віссю стержня кут  $\alpha = 45^\circ$ , виникає, як видно з формули (2.4), максимальне дотичне напруження

$$\tau_{\max} = \sigma/2 \quad (2.5)$$

Знайдемо зв'язок між дотичними напруженнями на двох взаємно перпендикулярних площинках. Нехай зовнішні нормалі до двох взаємно перпендикулярних площинок утворюють з віссю стержня кути  $\alpha$  і  $\beta$ , причому  $\beta = \alpha + 90^\circ$  (рис.2.6, а).

На першій з цих площинок дотичне напруження визначається за формулою (2.4). застосовуючи цю ж саму формулу для визначення напруження на площині з зовнішньою нормаллю  $n_\beta$ , одержимо

$$\tau_\beta = (\sigma/2) \cdot \sin 2\beta = (\sigma/2) \cdot \sin 2(\alpha + 90^\circ) = -(\sigma/2) \sin 2\alpha,$$

тобто

$$\tau_\beta = -\tau_\alpha \quad (2.6)$$

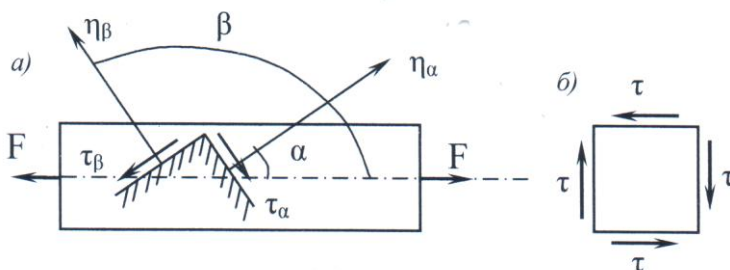


Рис.2.6

Формулою (2.6) виражається закон парності, або взаємності, дотичних напружень: дотичні напруження на двох взаємно перпендикулярних

площинках, перпендикулярні лінії їх перетину, рівні за абсолютною величиною і обернені за законом.

Це означає, що дотичні напруження напрямлені завжди попарно до ребра перетину двох взаємно перпендикулярних площинок або від нього (рис.2.6, б). Закон парності дотичних напружень має загальне значення і діє завжди, коли у тілі з будь-якої причини виникають дотичні напруження.

## 2.4. ДЕФОРМАЦІЇ І ПЕРЕМІЩЕННЯ. ЗАКОН ГУКА

Уявимо собі стержень сталого поперечного перерізу  $A$  довжиною  $l$ , жорстко затиснутого одним кінцем і навантажений на другім кінці розтягуючою силою  $F$  (рис.2.7). Під дією цієї сили стержень подовжується на деяку величину  $\Delta l$ , яку назвемо абсолютним подовженням. У випадку стиску стержня ця величина буде називатися абсолютним його скороченням.

Дослідом легко показати, що при розтяганні стержня відбувається зменшення поперечних його розмірів, а при стисканні – навпаки, збільшення. Величина, на яку змінюється поперечний розмір стержня, буде називатися

абсолютною поперечною деформацією стержня:  $\Delta d = d - d_1$ .

Абсолютні деформації, очевидно залежать від початкових розмірів стержня. Тому більш зручною мірою деформації є відносні деформації: відносна поздовжня деформація

$$\varepsilon = \Delta l / l \quad (2.7)$$

і відносна поперечна

деформація

$$\varepsilon' = \Delta d / d \quad (2.8)$$

Абсолютна величина відношення відносної поперечної деформації до відносної поздовжньої деформації називається коефіцієнтом Пуассона

$$\nu = \left| \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \right|. \quad (2.9)$$

Коефіцієнт Пуассона – безрозмірна величина, стала для даного матеріалу, визначається дослідним шляхом і є фізико-механичною характеристикою матеріалу. Значення коефіцієнта Пуассона для різних матеріалів знаходиться в межах від 0 до 0,5. Найменше значення коефіцієнта Пуассона у пробки ( $\nu = 0$ ); найбільше - у каучука ( $\nu \approx 0,5$ ). Для більшості металів  $\nu = 0,23 \dots 0,35$ .

Напруження і деформації при розтязі і стискові пов'язані між собою залежністю що називається законом Гука (за ім'ям англійського фізика, який вперше експериментально встановив цей закон).

Закон Гука справедливий лише у певних межах навантаження і формулюється так: нормальне напруження прямо пропорційне відносному подовженню або скороченню:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad (2.10)$$

Коефіцієнт пропорційності  $E$  характеризує жорсткість матеріалу, тобто його здатність чинити опір пружним деформаціям розтягання або стискання, і називається модулем поздовжньої пружності або модулем пружності першого роду. З формули (2.10) легко встановити, що модуль пружності  $E$  має розмірність напруження тобто  $[E] = [F / l] = Pa$

Якщо у формулу закону Гука підставити (2.2) і (2.7) то одержимо:

$$\Delta l = Nl / (EA) \quad (2.11)$$

Добуток  $EA$  називається жорсткістю перерізу при розтязі і стискові; він характеризує одночасно фізико-механічні властивості матеріалу і геометричні розміри поперечного перерізу стержня.

Ця формула читається так: абсолютне подовження чи скорочення прямо пропорційне поздовжній силі, довжині і обернено пропорційне жорсткості перерізу стержня.

Відношення  $EA/l$  називається жорсткістю стержня (або ділянки) при розтязі чи стискові.

Наведені вище формули закону Гука можна використовувати для стержнів або їх ділянок сталого поперечного перерізу, виготовлених з одного матеріалу і при постійній повздовжній силі.

Для стержнів що мають декілька ділянок з різних матеріалів, з різними поперечними перерізами і з різними поздовжніми силами, зміна довжини всього стержня дорівнює алгебраїчній сумі подовжень і скорочень окремих ділянок:

$$\Delta l = \Sigma(\Delta l_i) \quad (2.12)$$

Поговоримо тепер про переміщення поперечних перерізів стержня. Переміщенням поперечного перерізу називається зміна початкового положення перерізу від деформації стержня. Переміщення може бути лінійним із-за зміни відстані або кутовим при повороті перерізу.

При центральному розтязі (стискові) на основі гіпотези плоских перерізів поперечні перерізи після деформації стержня займають нові положення, паралельні своїм початковим положенням, переміщуючись уздовж осі за рахунок подовження (скорочення). У цьому випадку кутові переміщення всіх поперечних перерізів дорівнюють нулю. Крім того, переміщення досліджуваного перерізу також залежить від того, відносно якого перерізу визначається переміщення, оскільки величина переміщення являє собою зміну відстані між двома перерізами. Звичайно за переріз, відносно якого вираховуються лінійні (повздовжні) переміщення стержня, приймають переріз, співпадаючий з жорстким затисненням (переміщення якого дорівнює нулю). Переміщення визначається за формулою аналогічною (2.11):

$$\Delta = Nl / EA \quad (2.13)$$

де  $l$  – відстань між досліджуваними перерізами.

Якщо між двома досліджуваними перерізами стержень має ступінчасту зміну поперечних перерізів або навантажений кількома зовнішніми силами, то досліджувана ділянка стержня ділиться на ділянки, в межах яких постійні як внутрішня поздовжня сила  $N_i$ , так і площа поперечного перерізу  $A_i$ .

Переміщення вираховується як алгебраїчна сума подовжень кожної окремої ділянки:

$$\Delta = \sum(N_i l_i / EA_i) \quad (2.14)$$

Результати розрахунків зображують у вигляді епюри поздовжніх переміщень перерізів стержня. Процес побудови епюри переміщень покажемо на прикладі.

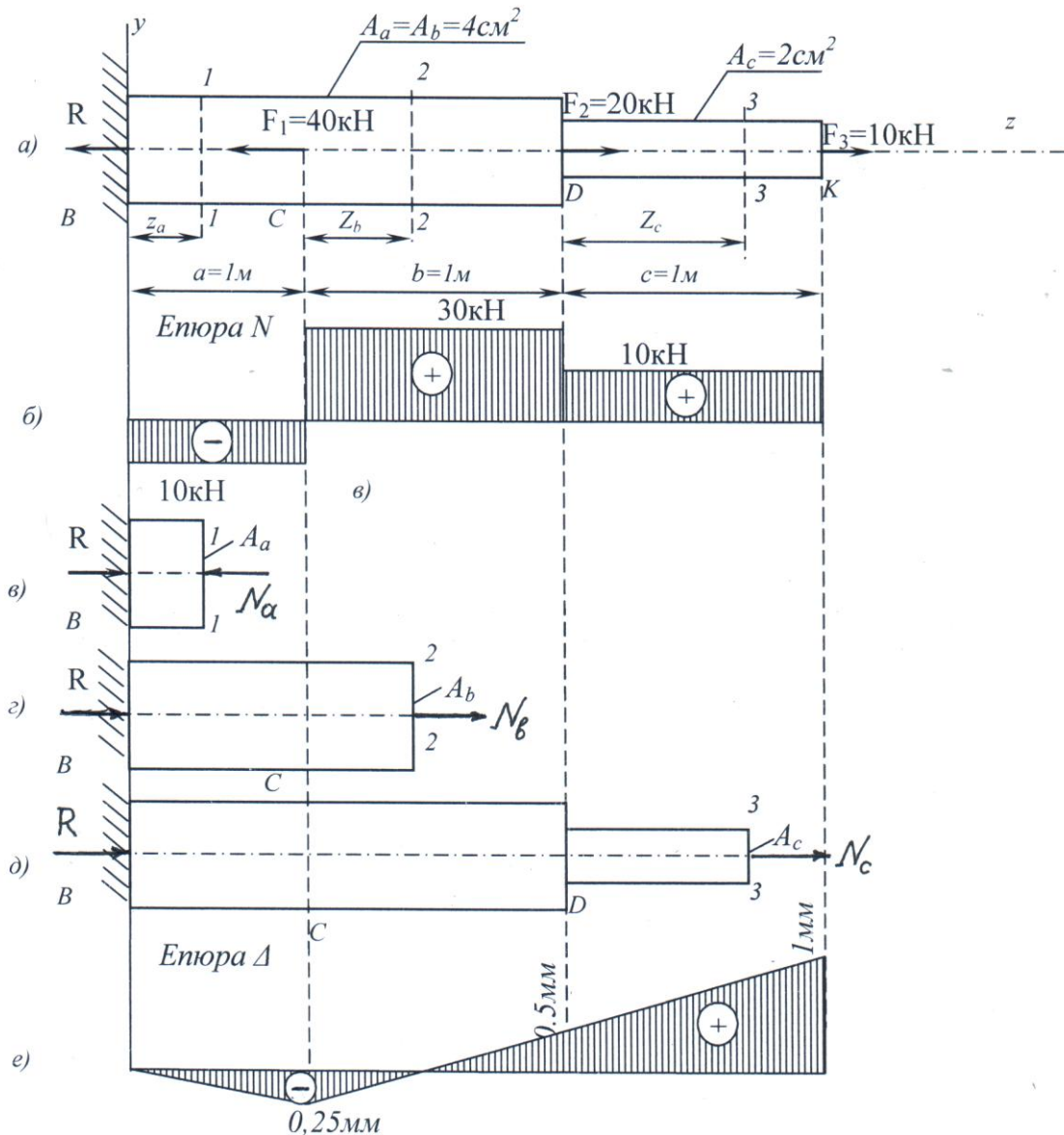


Рис.2.8

Використаємо стержень, що зображений на рис.2.4, а, для якого вже побудовані епюри поздовжніх сил  $N$  і нормальних напружень  $\sigma$  (рис.2.4, е, ж). У готовому вигляді перенесемо це на рис. 2.8 і побудуємо тут же епюру переміщень.



Так як лівий переріз В стержня співпадає з жорстким затисненням опорою, то він не має переміщення. Тому відносно нього будемо вираховувати переміщення решти перерізів стержня.

Спочатку розглянемо ділянку *a* (BC). У довільному перерізі 1-1 його переміщення визначиться скороченням довжини  $z_a$  від повздовжньої сили  $N_a$ , що діє на цій ділянці (рис.2.8, в):

$$\Delta_{1-1} = N_a z_a / (EA_a)$$

З цього виразу встановлюємо, що закон, за яким міняються переміщення перерізів ділянки *a*, буде пряма лінія (перемінна  $z_a$  у першій степені). При  $z_a = 0$ ,  $\Delta_B = 0$ ; при  $z_a = a$ ,  $\Delta_a = N_a \cdot a / (EA_a) = -10 \cdot 10^3 \cdot 1 \cdot 10^3 / (2 \cdot 10^5 \cdot 4 \cdot 10^2) = -0,25$  мм (тут модуль повздовжньої пружності прийнятий  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа). Отже, переміщення переріза С відносно В  $\Delta_{C-B} = \Delta_a = -0,25$  мм.

Ділянка б. Переміщення довільного перерізу 2-2 цієї ділянки (рис.2.8, з):

$$\Delta_{2-2} = \Delta_{C-B} + N_b z_b / (EA_b), z_b \in [0; b]$$

Закон зміни переміщень також лінійний. При  $z_b = 0$ ,  $\Delta_{C-B} = -0,25$  мм; при  $z_b = b$ ,  $\Delta_{D-B} = \Delta_{C-B} + 30 \cdot 10^3 \cdot 1 \cdot 10^3 / (1 \cdot 10^5 \cdot 4 \cdot 10^2) = -0,25 + 0,75 = 0,5$  мм.

Ділянка с. Переміщення довільного переріза 3-3 (рис. 2.8, д) дорівнює переміщенню переріза D плюс переміщення частини ділянки с- $z_c$ :

$$\Delta_{3-3} = \Delta_{D-B} + N_c z_c / (EA_c), z_c \in [0; c]$$

І на цій ділянці переміщення змінюється за лінійним законом: при  $z_c = 0$ ,  $\Delta_{D-B} = 0,5$  мм; при  $z_c = c$ ,  $\Delta_{K-B} = 0,5 + 10 \cdot 10^3 \cdot 1 \cdot 10^3 / (1 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 10^2) = 0,5 + 0,5 = 1$  мм.

За одержаними даними будемо епюру переміщень перерізів стержня відносно його затиснутого кінця В (рис. 2.8 е).

## 2.5. РОЗТЯГ (СТИСК) ПІД ДІЄЮ ВЛАСНОЇ ВАГИ

Якщо вісь стержня вертикальна, то власна вага визиває деформацію розтягу або стиску.

Розглянемо стержень сталого перерізу вагою  $G$ , довжиною  $l$ , закріплений верхнім кінцем і навантажений тільки власною вагою (рис. 2.9, а).

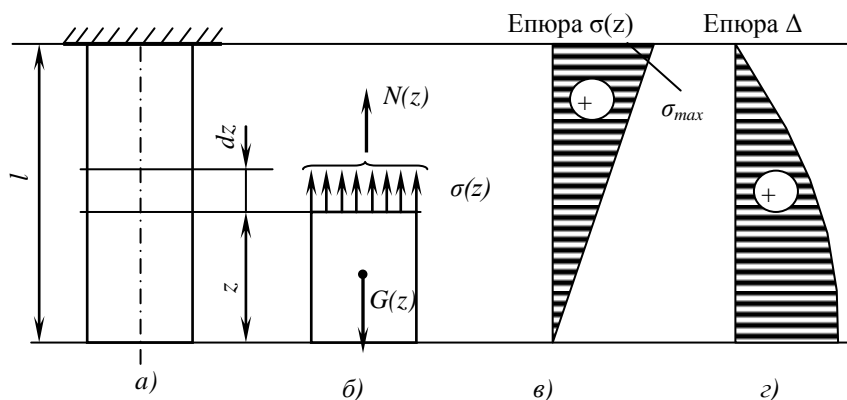


Рис. 2.9.

Для визначення напружень у поперечних перерізах, на змінних відстанях  $z$  від нижнього кінця використаємо метод перерізів. Розглянемо рівновагу нижньої частини стержня (рис.2.9, б) і складемо рівняння рівноваги:

$$\Sigma Z = 0, N(z) - G(z) = 0$$

звідки:  $N(z) = G(z) = \gamma Az,$

де  $\gamma$ - питома вага матеріалу стержня;  $A$  – площа поперечного перерізу.

Напруження

$$\sigma(z) = N(z)/A = \gamma z, \quad Z \in [0; l]. \quad (2.15)$$

Нормальні напруження в поперечних перерізах бруса сталого перерізу, що розтягується лише власною вагою, прямо пропорційне відстані переріза від нижнього кінця і не залежить від площі перерізу.

Очевидно що небезпечний переріз знаходиться в затиснені, тобто при  $Z=l$ :

$$\sigma_{\max} = \sigma(z = l) = \gamma l \quad (2.16)$$

Епюра нормальних напружень  $\sigma(z)$ , як це неважко бачити із (2.15), буде мати вигляд трикутника (рис.2.9, в).

Визначимо подовження  $\Delta l$  стержня під дією власної ваги. Для цього виділимо нескінченно малий елемент довжиною  $dz$  (рис.2.9, а). Внаслідок малості довжини елемента  $dz$  будемо вважати, що в його межах подовження сила  $N(z)$  не змінюється. Застосуємо закон Гука, тоді:

$$d(\Delta l) = \frac{N(z)dz}{EA} = \frac{\gamma Az dz}{EA} = \frac{\gamma}{E} z dz$$

Інтегруємо цей вираз у межах від 0 до  $l$ , одержуємо:

$$\Delta l = \int_0^l \frac{\gamma}{E} z dz = \frac{\gamma}{E} \int_0^l z dz = \frac{\gamma l^2}{2E} \quad (2.17)$$

Помножимо числівник і знаменник (2.17) на  $A$ :

$$\Delta l = \frac{\gamma l^2 A}{2EA} = \frac{\gamma Al \cdot l}{2EA} = \frac{Gl}{2EA} \quad (2.18)$$

де:  $G = \gamma Al$  - власна вага стержня.

Подовження стержня постійного перерізу під дією власної ваги в два рази менше подовження при розтягненні силою, рівною власній вазі і прикладений до кінця стержня.

Згідно з виразом (2.17), переміщення по довжині стержня міняються по квадратичному закону. Епюра подовжніх переміщень показана на рис. 2.9, г.

## 2.6. ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНЕ ВИВЧЕННЯ ВЛАСТИВОСТЕЙ МАТЕРІАЛІВ

Для вивчення механічних властивостей матеріалів їх випробовують під навантаженням. Найбільш поширене випробування матеріалу на розтяг на так званих розривних машинах.

Для цього з матеріалу виробляють зразки згідно з існуючими стандартами. Зразок із сталі, а також з інших металів повинен мати форму колового циліндра, або призми прямокутного поперечного перерізу. Кінці

зразків (голівки) виготовляють такими, щоб він міг бути закріплений у затискачах розривної машини. З метою забезпечення однорідності деформації зразка переходи між робочою частиною і голівками повинні бути плавними (рис.2.10, а, б).

На робочій частині зразка перед випробуванням визначається його розрахункова довжина, в межах якої розподіл нормальних напружень при розтязі можна вважати рівномірним. Для того щоб можна було порівнювати між собою результати випробувань різних зразків, вони повинні бути геометрично подібними. Для циліндричних зразків це буде при однаковому відношенні розрахункової довжини зразка  $l_0$  до його діаметра  $d$ . Для стандартних так званих довгих зразків має бути  $l_0 = 10d$ , для коротких –  $l_0 = 5d$ . У випадку призматичних зразків будуть також  $l_0 = 10d'$  або  $l_0 = 5d'$ , причому  $d'$  означає тут умовний діаметр, обчислений для площі  $A$  поперечного перерізу призматичного зразка, яка приймається рівною площі круга діаметром  $d'$ . При цьому одержимо  $l_0 = 10\sqrt{4A/\pi} = 11.3\sqrt{A}$ , або  $l_0 = 5.66\sqrt{A}$  відповідно для довгого або короткого зразка.

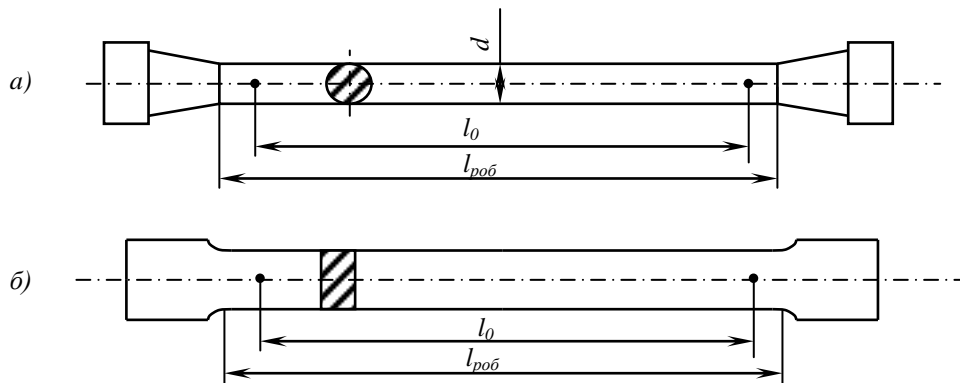


Рис. 2.10.

Коли зразок піддати дії осьової розтягуючої сили, він деформується: довжина зразка збільшується при одночасному зменшенні розмірів поперечного перерізу.

Графік залежності між розтягуючою силою  $F$  і подовженням  $\Delta l$  називається діаграмою розтягу зразка. Залежно від властивостей матеріалу одержуємо різні діаграми розтягу для зразків неоднакових матеріалів. Для геометрично підібраних зразків з однакових матеріалів діаграми розтягу подібні між собою і характеризують властивості матеріалу зразка.

Розглянемо типову діаграму розтягу зразка, виготовленого з м'якої (маловугледевої) сталі типу Ст3 (рис.2.11). Зазначимо на цій діаграмі ряд характерних точок. До точки А, якій відповідає значення сили  $F_{пр}$ , існує лінійна залежність між силою і подовженням зразка, до цієї точки справедливий закон Гука.

До точки В, якій відповідає значення сили  $F_e$  (індекс е від elastic (англ.) – пружний), відбувається лише пружні деформації, а за цією точкою деформації вже будуть складатися з пружних і пластичних (залишкових).

При певному значенні сили  $F_y$  (індекс у від yield (англ.) – текучість), що відповідає точці С ділянки CD діаграми розтягу, подовження зразка зростають при сталій величині навантаження, матеріал неначе ‘тече’: на діаграмі розтягу з'являється горизонтальна ділянка, яку називають площинкою текучості.

Одночасно з появою текучості матеріалу, яка дає початок значним пластичним деформаціям зразка, можна спостерігати на його поверхні (при умові дуже старанної поліровки) сітку тонких ліній, що утворюють з віссю стержня кути близькі до  $45^\circ$  (рис.2.11, б). Ці лінії називають лініями Людерса-Чернова. Близькість ліній Людерса-Чернова до напрямку максимальних дотичних напружень при розтягу пояснюється тим, що вони є слідами зсувів частин матеріалу, викликаних саме максимальним дотичним напруженням і великими пластичними деформаціями матеріалу.

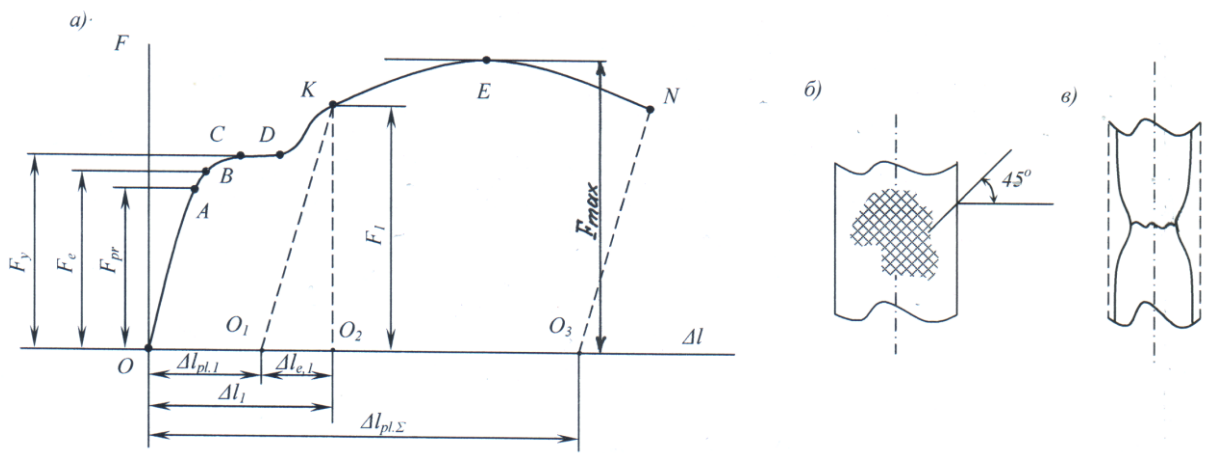


Рис.2.11

Після деякої пластичної деформації зразка, одержаної при сталій величині сили, настає так зване зміщення матеріалу, і для дальшого розтягу зразка треба збільшити величину розтягуючої сили. Прямої пропорційності між розтягуючою силою і подовженням зразка вже немає, діаграма стає криволінійною і досягає найвищої точки, якій відповідає максимальне значення сили  $F_{max}$ .

Одночасно з поздовжніми деформаціями відбуваються поперечні деформації зразка. Спочатку як поздовжні, так і поперечні деформації розподіляються рівномірно по всій довжині зразка, і тому можна вважати, що напружений стан матеріалу є однорідним. Коли ж сила  $F$  досягає значення  $F_{max}$ , то деформації зразка зосереджуються в одному місці, в якому починає утворюватися так звана шийка (рис.2.11, в). Напружений стан матеріалу у шийці стає неоднорідним і дуже складним.

Після досягнення силою величини  $F_{max}$  подальше подовження зразка відбувається в основному за рахунок деформації шийки, а оскільки площа поперечного перерізу зменшується, зменшується також і сила, потрібна для дальшого розтягу зразка. Нарешті, настає його розрив у найвужчому місці шийки.

Відзначимо ще одну характерну особливість поведінки зразка при його розвантаженні після виникнення певних залишкових деформацій. Нехай,

наприклад, сила досягає якоїсь величини  $F_1$  (рис.2.11, а). Цій величині сили відповідає подовження зразка  $\Delta l_1$ . Це подовження складається з пружної і залишкової частин, причому при розвантаженні зразка пружна частина його деформації повинна зникнути. Виявляється, що пружні деформації зразка при його розвантаженні зникають за майже прямолінійним законом, який на діаграмі розтягу зображається прямою, паралельно прямий  $OA$ . Ця пряма відсікає на осі  $\Delta l$  відрізок  $00_1$ , який становить пластичну (залишкову)  $\Delta l_{pl.1}$  деформацію зразка;  $0_10_2$  є його пружною деформацією  $\Delta l_{l.1}$ .

Оскільки в момент розриву зразка його пружне подовження також зникає, очевидно, за законом прямої, на діаграмі розтягу можна одержати залишкове подовження  $\Delta l_{pl.2}$  при розриві зразка у вигляді відрізка  $00_3$ , що відсікається на осі  $\Delta l$  прямою  $N0_3$ , паралельною  $OA$ .

Для того щоб можна було порівняти результати випробувань зразків різних розмірів, виготовлених з однакових матеріалів, діаграму розтягу перебудовують і зображають в іншій системі координат: по осі ординат відкладають значення нормальних напружень у поперечних перерізах зразка  $\sigma = F/A_0$  де  $A_0$  початкова площа перерізу зразка, а по осі абсцис відкладають відносне подовження зразка  $\varepsilon = \Delta l / l_0$ , де  $l_0$  початкова розрахункова довжина зразка.

Цю діаграму називають умовно діаграмою розтягу (або діаграмою умовних напружень), тому що напруження і відносні подовження вираховуються відповідно по відношенню до початкової площі перерізу і початкової довжини зразка. Діаграма, побудована з врахуванням зменшення площі поперечного перерізу зразка, називається дійсною діаграмою напружень при розтягу (на рис.2.12 вона показана пунктирною лінією).

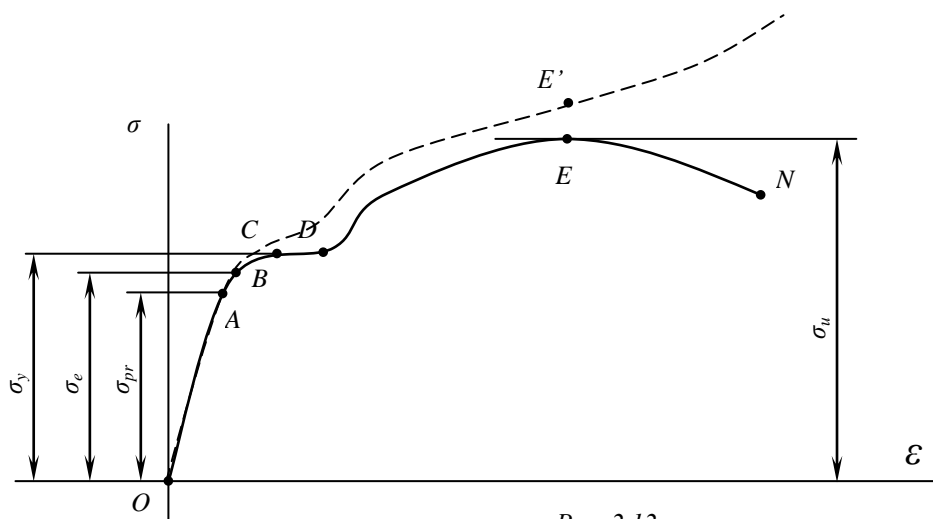


Рис. 2.12.

Різниця між дійсними і умовними напруженнями  $\sigma$  стає значною лише після утворення шийки. До моменту утворення шийки користуються при розв'язанні технічних задач даними, одержаними з умовної діаграми напружень.

Зазначимо на цій діаграмі характерні значення напружень, що відповідають характерним значенням розтягуючої сили, вказаним раніше на діаграмі розтягу.

Найбільше напруження, до якого зберігається лінійна залежність між напруженнями і деформаціями, називається границею пропорціональності матеріалу і позначається через  $\sigma_{pr}$ .

Наступне характерне значення напруження на діаграмі – це границя пружності, що позначається через  $\sigma_e$ . До цієї величини напруження зразок при розтягу зазнає лише пружних подовжень, які зникають після розвантаження зразка. В техніці границя пружності визначається як напруження, при якому залишкові деформації вперше досягають деякої величини, що характеризується певним допуском, який встановлюється технічними умовами (наприклад: 0.001; 0.002; 0.005; 0.03%). Відповідна границя пружності позначається буквою  $\sigma$  з індексом допуску, наприклад  $\sigma_{0.001}$ .

Площини текучості діаграми напружень відповідає напруження, що називається границею текучості матеріалу і позначається через  $\sigma_y$ .

Різко виражену площину текучості мають лише м'які сталі, залізо, деякі бронзи. Для більшості матеріалів діаграма розтягу не має площинки текучості. Для таких матеріалів визначають умовну границю текучості, за яку вважають напруження, що викликає залишкову деформацію певної величини відповідно до прийнятого допуску. Коли допуск окремо не застережений, він вважається рівним 0.2%. Умовна границя текучості позначається відповідним індексом, наприклад  $\sigma_{0.2}$ .

Найвищій точці умовної діаграми напружень при розтягу відповідає напруження, що називається границею міцності або тимчасовим опором і позначається через  $\sigma_u$  (індекс u від ultimate (англ.) – граничний).

Після утворення шийки не можна будувати умовну діаграму напружень, оскільки неврахування зміни площі поперечного перерізу зразка приводить до уявного зменшення напружень  $\sigma$ , в той час коли насправді вони зростають аж до моменту розриву. Зростання напружень після утворення шийки можна показати лише на дійсних діаграмах напружень при розтягу.

Границі пропорційності, пружності, текучості, міцності або тимчасовий опір називаються механічними характеристиками міцності матеріалу.

Крім характеристик міцності, при випробуваннях на розтяг одержують ще механічні характеристики пластичності матеріалу, а саме:

- відносне залишкове подовження зразка при розриві  $\delta_r$  (індекс r від rest (англ.) - залишок):

$$\delta_r = (l_1 - l_0)100\% / l_0,$$

де  $l_0$  – початкова розрахункова довжина зразка;  $l_1$  – розрахункова довжина зразка після розриву (вимірюється після стиковки двох частин розірваного зразка);

- відносне залишкове звуження при розриві

$$\Psi_r = (A_0 - A_1)100\% / A_0,$$

де  $A_0$  – початкова площа поперечного перерізу зразка;  $A_1$  – площа поперечного перерізу у найбільш тонкому місці шийки після розриву.

Випробування маловуглецевої сталі на розтяг вказує на те, що пластичні деформації, які одержує зразок перед руйнуванням, набагато перевищують його пружні деформації. Матеріали, руйнування яких відбувається після великих залишкових (пластичних) деформацій, називаються пластичними. Матеріали, пластичні деформації яких перед руйнуванням не перевищують пружних деформацій, називаються крихкими. Коли ж пластичні деформації при руйнуванні незначно перевищують пружні деформації, тоді матеріали називають напівкрихкими.

Така характеристика матеріалів є до певної міри умовною, тому що властивості матеріалу можуть змінюватися залежно від способу навантаження, температури та інших факторів.

Другим найбільш поширеним способом випробування матеріалів поряд з випробуванням на розтяг є випробування на стиск.

Випробування на стиск застосовується в першу чергу для визначення механічних характеристик крихких і напівкрихких матеріалів.

Для випробування на стиск беруть зразки у формі кубиків або невисоких циліндрів висотою  $h \leq 3d$ , так як при більш довгих зразках може відбутися їх згин.

Застосування дуже коротких зразків також небажано, тому що виникаючі на торцях зразка сили тертя протидіють його розширенню, внаслідок чого зразок набуває бочкоподібної форми (рис. 2.13,а).

Сили тертя на опорних поверхнях зразка впливають не лише на характер його руйнування, але призводять до збільшення руйнівного навантаження, а тим самим до неправильної оцінки міцності матеріалу.

Тертя на торцях зразка можна зменшити різними способами, наприклад змазуванням його опорних поверхонь або застосуванням тонких металевих, зокрема свинцевих, прокладок. При цьому деформації зразка стають більш однорідними по його висоті: наприклад чавунний зразок зберігає свою циліндричну форму до самого руйнування. Зменшення сил тертя на торцях бетонних і цементних зразків призводить до того, що такі зразки руйнуються внаслідок утворення поздовжніх тріщин, паралельних напрямку дії сили (рис. 2.13, в), в той час як без заходів по зменшенню тертя руйнування тих же зразків відбувається зовсім інакше (рис. 2.13, б).

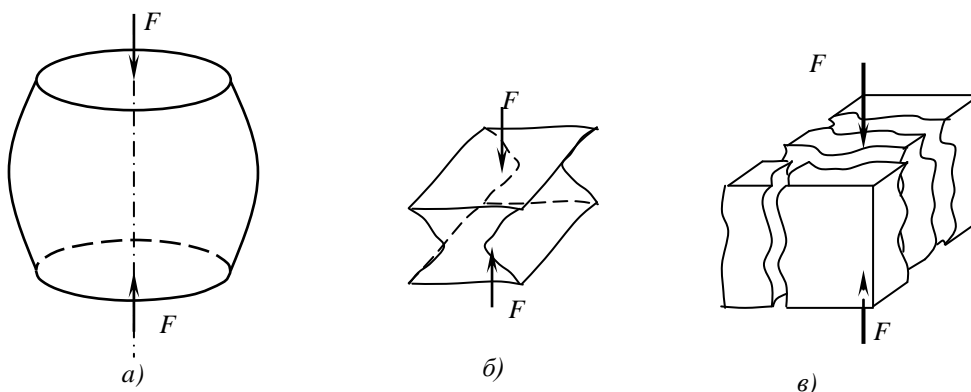


Рис. 2.13.

Діаграма стиску крихкого матеріалу аналогічна діаграмі розтягу. Руйнування відбувається при незначних деформаціях. Випробування дають можливість встановити границю міцності і відносну залишкову деформацію при руйнуванні.

Характерною ознакою всіх крихких матеріалів є значно вища границя міцності матеріалу при стиску  $\sigma_{u,c}$ , порівняно з границею міцності при розтягу  $\sigma_{u,p}$ .

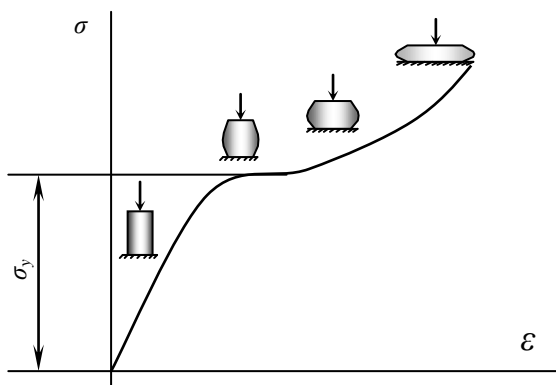


Рис. 2.14.

Типова діаграма стиску пластичного матеріалу (маловуглецева сталь) показана на рис. 2.14. Спочатку діаграма має вигляд, аналогічний діаграмі розтягу. Далі крива йде круто у верх із-за збільшення площі перерізу зразка і зміцнення матеріалу. Руйнування при цьому не відбувається. Зразок просто сплющується, і випробування припиняється.

Внаслідок випробувань визначається границя текучості при стиску. Для пластичних матеріалів границі текучості при розтягу і стиску практично однакові, але площинка текучості при стиску виявлена значно менше, ніж при розтягу.

## 2.7. ПОНЯТТЯ ПРО КОНЦЕНТРАЦІЮ НАПРУЖЕНЬ

Формула (2.2) для обчислення нормального напруження  $\sigma = N/A$  справедлива, строго кажучи, лише для стержня сталого поперечного перерізу. Однак нею можна користуватися для наближеного обчислення нормальних напружень також у стержнях змінного перерізу при умові, що поперечні перерізи змінюються по довжині стержня плавно і порівняно незначно.

Коли ж поперечні перерізи стержня змінюються різко, наприклад внаслідок наявності отворів, виточок, раптової зміни величини перерізу і т.д., у цих місцях виникає так звана концентрація напружень, тобто різке місцеве збільшення напружень.

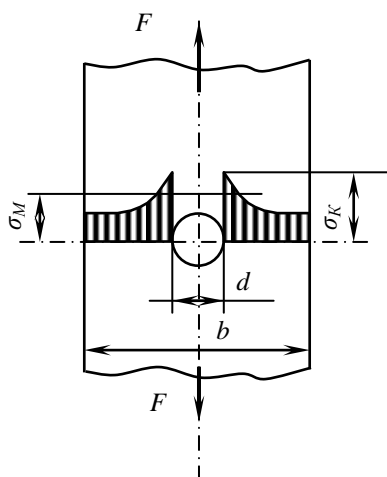


Рис. 2.15.

Елементарними методами неможливо визнати величину напружень у місцях концентрацій, їх обчислюють за формулами, одержаними методами теорії пружності, або визначають експериментально.

Приклад концентрації напружень при осьовій дії сили на стержень у вигляді тонкої пластинки з круглим отвором показаний на рис. 2.15. Середнє нормальне напруження у перерізі, проведеному по діаметру отвору, яке називають



також номінальним напруженням  $\sigma_n$ , обчислене з врахуванням ослаблення перерізу, але без врахування концентрації

$$\sigma_n = N/[t(b-d)],$$

де  $t$  – товщина пластинки;  $b$  – її ширина;  $d$  – діаметр отвору.

Максимальне нормальне напруження  $\sigma_k$ , яке виникає на контурі отвору, може в кілька разів перевищувати номінальне напруження  $\sigma_n$ . Відношення

$$\alpha_k = \sigma_k / \sigma_n \quad (2.19)$$

називається коефіцієнтом концентрації напружень.

У цьому випадку коефіцієнт концентрації залежить від відношення  $b:d$  і набуває значень, близьких, до 3. При інших формах отвору коефіцієнти концентрації будуть іншими, причому їх значення тим більші, чим менший радіус закруглення отвору.

Концентрація напружень дуже швидко згасає в міру віддалення від фактора, який її викликає.

Концентрація напружень завжди небажана. Вона особливо небезпечна у випадку динамічних, зокрема ударних та повторно-змінних (циклічних) навантажень.

Менш небезпечною є концепція напружень при статичному навантаженні пластичних матеріалів. Пояснюється це тим, що у місцях концентрації напружень з'являються місцеві пластичні деформації, які міцності деталі в цілому не загрожують. Коли матеріал має площинку текучості, тоді при поступовому зростанні навантаження пластичні деформації захоплюють дедалі більші зони матеріалу біля фактора концентрації, а напруження деякий час не перевищують границі текучості матеріалу. Лише коли настає текучість на всій площі ослабленого перерізу, тоді стержень не може сприйняти дальшого зростання навантаження. При виникненні текучості на всій площі перерізу поведінка стержня, ослабленого отвором, майже ні чим не відрізняється від поведінки стержня суцільного перерізу. Тому при розрахунках на статичну дію навантажених деталей, виготовлених із пластичних матеріалів, концентрацію можна не враховувати. Тоді нормальні напруження при розтягу або стиску обчислюють за формулою (2.2), підставляючи в неї площу 'нетто' поперечного перерізу  $A_{нт}$ , тобто площу, обчислену з врахуванням ослаблення перерізу.

У випадку напівкрихких і крихких матеріалів концентрацію напружень треба врахувати незалежно від того, як прикладається навантаження: статично чи динамічно.

Разом с тим слід зауважити, що серед крихких матеріалів особливе місце займає чавун, який, як виявляється, не є чутливим до концентрації напружень, викликаної різкою зміною форми деталі. Це пояснюється неоднорідною будовою чавуну: зерна структурного графіту у чавуні діють як фактори концентрації напружень, розподілені по всьому об'єму деталі. Наявність або відсутність зовні факторів концентрації вже не впливає на міцність матеріалу, яка зумовлюється концентрацією напружень, викликаною його структурою.

## 2.8. ДОПУСТИМЕ НАПРУЖЕННЯ. КОЕФІЦІЄНТ ЗАПАСУ МІЦНОСТІ

Відомо, що і фактичне навантаження на деталь, і властивості матеріалів, з яких вона виготовлена, можуть значно відрізнятися від тих, що приймаються для розрахунків. При цьому, фактори, що знижують міцність деталі (перевантаження, неоднорідність матеріалів і т. д.), носять найчастіше випадковий характер і заздалегідь не можуть бути враховані.

Так як деталі і споруди в цілому повинні безпечно працювати і при цих несприятливих умовах, то необхідно прийняти певні міри. З цією метою напруження, які забезпечують безвідмовну роботу (експлуатацію) конструкції, повинні бути меншими від тих граничних напружень, за яких може статися руйнування або виникнуть пластичні деформації.

Таким чином, приймають:

$$\sigma_{adm} = \sigma_{грн} / s_{adm},$$

де  $\sigma_{adm}$  – допустиме напруження (індекс adm від admissible (англ.) – допустимий);  $s_{adm}$  - нормативний (тобто встановлений нормами проектування конструкцій) коефіцієнт запасу міцності;  $\sigma_{грн}$  – граничне напруження матеріалу.

При статичних навантаженнях за граничне напруження для крихких матеріалів приймається границя міцності  $\sigma_u$ , для пластичних матеріалів – границя текучості  $\sigma_y$ , тому що при напруженнях, рівних границі текучості, виникають значні пластичні деформації, які недопустимі.

Таким чином, коефіцієнт запасу міцності вводиться для того, щоб забезпечити безпечну, надійну роботу конструкцій і їх окремих елементів, незважаючи на можливі несприятливі відхилення дійсних умов їх роботи від розрахункових.

Питання про нормативний коефіцієнт запасу міцності  $s_{adm}$  вирішується з врахуванням накопиченого досвіду експлуатації споруд і машин.

Слід зауважити, що в машинобудуванні зараз є тенденція обчислювати коефіцієнт запасу  $s$  як добуток окремих коефіцієнтів:  $s = s_1 \cdot s_2 \cdot s_3 \cdot s_4 \cdot \dots$ , кожен з яких диференційовано враховує фактори, що впливають на міцність деталі. При розрахунках елементів будівельних конструкцій за діючими нормами так само користуються окремими коефіцієнтами, що враховують неоднорідність матеріалу, можливе перевантаження конструкції й умови її роботи.

Таке ділення загального коефіцієнта запасу міцності дозволяє краще врахувати різноманітність конкретних умов роботи елементів конструкцій і проектувати їх з більшою надійністю та економічністю.

В питанні про окремі коефіцієнти і їх значення ще немає єдиної думки. Є рекомендації з використанням одного, трьох, п'яти і навіть десяти окремих коефіцієнтів запасу міцності. У «Довіднику машинобудівника» пропонується користуватися трьома окремими коефіцієнтами:

$$s = s_1 s_2 s_3, \quad (2.21)$$

де  $s_1$  – коефіцієнт, який враховує неточність у визначенні навантаження і напружень. Значення цього коефіцієнта при підвищеній точності визначення діючих напружень може прийматися рівним 1,2...1,5, при меншій точності розрахунку – 2...3;  $s_2$  – коефіцієнт, який враховує неоднорідність матеріалу,

підвищену його чутливість до механічної обробки. Коефіцієнт  $s_2$  у розрахунках по границі текучості при дії статичного навантаження можна приймати по табл. 2.1. (без врахування абсолютних розмірів) в залежності від відношення границі текучості до границі міцності.

Таблиця 2.1

$\sigma_y/\sigma_u$	0.45...0.55	0.55...0.70	0.70...0.90
$s_2$	1.2...1.5	1.4...1.8	1.7...2.2

При розрахунках по границі міцності для малоплостичних і крихких матеріалів величину  $s_2$  приймають: а) для малопластичних матеріалів (високоміцні сталі при низькому от пуску)  $s_2 = 2...3$ ; б) для крихких матеріалів  $s_2 = 3...4$ ; в) для дуже крихких матеріалів  $s_2 = 4...6$ ;  $s_3$  - коефіцієнт, що враховує умови роботи, степінь відповідальності деталі, дорівнює  $1...1.5$ .

## 2.9. ОСНОВНІ ТИПИ ЗАДАЧ ПРИ РОЗРАХУНКАХ НА МІЦНІСТЬ РОЗТЯГНУТИХ (СТИСНУТИХ) СТЕРЖНІВ

Визначивши напруження у небезпечному перерізі розтягнутого (стиснутого) стержня за формулою (2.2) і встановивши допустиме напруження  $\sigma_{adm}$  так, як про це велася мова вище, можна виконати оцінку міцності стержня. Для цього необхідно фактичне напруження у небезпечному перерізі порівняти з доступним:

$$\sigma = N/A < \sigma_{adm} . \quad (2.22)$$

Тут мається на увазі допустиме напруження або на розтяг, або на стиск в залежності від того, з яким випадком ми у даному разі маємо справу – з розтягом чи стиском.

Нерівність (2.22) називається умовою міцності при розтягу (стиску).

Користуючись цією умовою, можна вирішувати такі задачі:

1. Перевірити міцність стержня, тобто визначити по заданому навантаженню і розмірах поперечного перерізу стержня фактичні напруження і порівняти їх з допустимими. Фактичні напруження не повинні відхилятися від допустимих більш ніж  $\pm 5\%$ . Перенапруження більше цього значення недопустиме з точки зору міцності, а недонапруження свідчить про неекономічні витрати матеріалу.

2. Визначити (за відомими навантаженнями і допустимими напруженнями) розміри поперечного перерізу стержня, необхідні за умовою міцності:

$$A \geq N / \sigma_{adm} . \quad (2.23)$$

3. Визначити допустиму повздовжню силу за заданими розмірами поперечного перерізу стержня і відомому допустимому напруженню:

$$N_{adm} \leq A \sigma_{adm} . \quad (2.24)$$

Визначивши допустиму поздовжню силу і встановивши зв'язок між поздовжньою силою і навантаженням (методом перерізів), можна визначити і допустиме навантаження.

## 2.10. СТАТИЧНО НЕВИЗНАЧНІ СИСТЕМИ

Задачі, розв'язання яких неможливе за допомогою одних лише умов рівноваги сил, прикладених до тіла, називаються статично невизначними.

Розглянемо, наприклад, стержень, зображений на рис. 2.16, а. Навантаження  $F$  сприймається частково верхньою опорою і частково нижньою. Для визначення двох реакцій опор можна використати лише одне рівняння рівноваги: рівність нулю суми проекцій всіх сил на вертикальну вісь. Інші два рівняння рівноваги обертаються в тотожності.

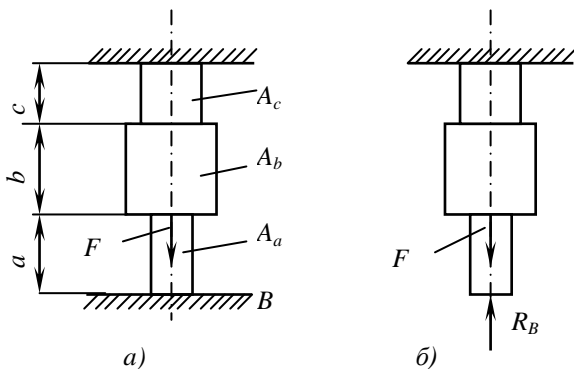


Рис. 2.16.

Так як невідомих два, а рівняння рівноваги одне, то потрібно скласти ще одно додаткове рівняння, розглядаючи деформації стержня або переміщення його перерізів. Такі системи називаються системами один раз статично невизначним.

Системи, які вимагають складання двох додаткових рівнянь, називають два рази статично невизначними і т. д. .

Для рішення розглядуваної задачі поступимо так. Відкинемо одну опору, наприклад нижню, замінивши її дію на стержень невідомою реакцією. (рис. 2.16, б).

В одержаній таким чином системі (звичайно її називають основною системою) прирівнюємо нулю переміщення нижнього перерізу В, тому що в заданій системі цей переріз жорстко затиснений і переміщуватися не може. От дії  $R_B$  переріз В переміщуватися уверх в наслідок скорочення усього стержня, а від дії сили  $F$  - униз за рахунок подовження ділянок  $b$  і  $c$ , тому що при відкинутій опорі В сила  $F$  передається на опору С тільки через ділянки  $b$  і  $c$ .

Для визначення деформацій використовуємо закон Гука. Так як площа поперечних перерізів різна, то деформацію визначаємо частинами:

$$-R_B a / (EA_a) - R_B b / (EA_b) - R_B c / (EA_c) + F b / (EA_b) + F c / (EA_c) = 0 .$$

Із одержаного різниці легко знаходиться  $R_B$ , після чого визначення поздовжніх сил в перерізах виконується за методом перерізів так, як це було показано раніше (§ 2.1).

Розглянутий метод рішення, коли за невідомі приймаються зусилля у відкинутих зв'язках, називається методом сил.

## Визначення зусиль у статично невизначних стрижньових системах.

Розглянемо систему, що складається з абсолютно жорсткого бруса АВ, шарнірно обіпертого у точці А і шарнірно підвішеного на пружних стержнях 1 і 2 (рис. 2.17,а).

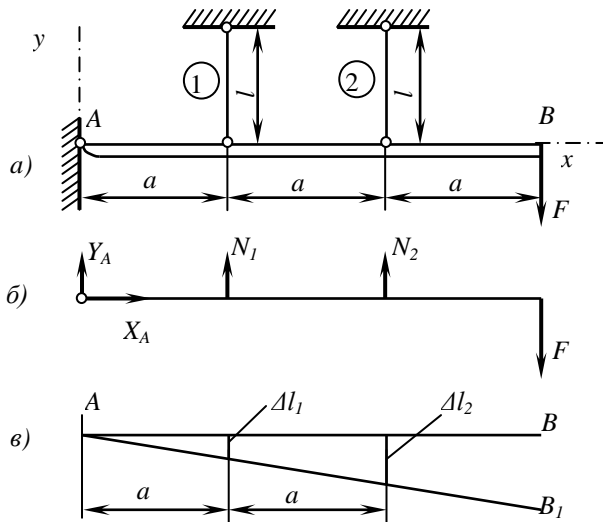


Рис. 2.17.

Уявно відкидаємо опорні зв'язки і замінюємо їх невідомими опорними реакціями  $X_A$ ,  $Y_A$ ,  $N_1$  та  $N_2$  (рис.2.17,б). Рівняння рівноваги сил, прикладених до бруса, мають вигляд

$$\Sigma X = 0: X_A = 0;$$

$$\Sigma Y = 0: Y_A + N_1 + N_2 - F = 0;$$

$$\Sigma M_A = 0: N_1 \cdot a + N_2 \cdot 2a - F \cdot 3a = 0$$

Оскільки для визначення трьох зусиль у нас лише два рівняння статички, задача є один раз статично невизначною. Розв'яжемо її, складаючи ще одне додаткове

рівняння, що називається рівнянням переміщень і записується на основі розгляду деформації системи.

За умовами задачі брус АВ вважається абсолютно жорстким, отже, переміщення у системі можуть відбуватися лише за рахунок деформацій стержнів 1 і 2. При подовженні на величини  $\Delta l_1$  і  $\Delta l_2$  брус, залишаючись прямим, повернеться навколо центра шарніра А і займе положення АВ<sub>1</sub> (рис.2.17,в).

Нехтуючи горизонтальними складовими переміщення точок підвісу бруса як величинами другого порядку малості порівняно з вертикальними складовими цих переміщень, будемо вважати, що ці точки переміщуються вертикально вниз на величину, яка дорівнює подовженню відповідного стержня. Тоді рівняння переміщень запишеться так

$$\Delta l_1 / a = \Delta l_2 / (2a) .$$

Записане рівняння відбиває чисто геометричний зв'язок між елементами деформованої системи. Візьмемо тепер до уваги фізичний зв'язок, виражаючи за формулою закону Гука деформації стержнів через зусилля, що в них виникають:

$$\Delta l_1 = N_1 l_1 / (EA_1); \quad \Delta l_2 = N_2 l_2 / (EA_2),$$

де  $A_1$  і  $A_2$  - площі поперечних перерізів стержнів 1 і 2.

Тоді рівняння переміщень набирає вигляду

$$N_1 l_1 / A_1 = N_2 l_2 / (2A_2).$$

Шукані зусилля визначаються тепер з рівнянь:

$$N_1 = 3F / (1 + 4 \frac{A_2 l_1}{A_1 l_2}); N_2 = 6F / (4 + \frac{A_1 l_2}{A_2 l_1}); Y_A = F - N_1 - N_2.$$

### 3. ОСНОВИ ТЕОРІЇ НАПРУЖЕНОГО І ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ

#### 3.1. ЗАГАЛЬНІ ВІДОМОСТІ ПРО НАПРУЖЕНИЙ СТАН У ТОЧЦІ ТІЛА

Нагадаємо, що напружений стан у даній точці тіла характеризується сукупністю нормальних і дотичних напружень, що виникають на безлічі по-різному орієнтованих у просторі площинок, які можна провести через цю точку.

Уявимо, що навколо досліджуваної точки виділений нескінченно малий елемент, який має форму прямокутного паралелепіпеда, і напруження, виникаючі на його гранях, відомі. Кожне з цих напружень може бути розкладене на три складові, паралельні координатним осям. Таким чином, у загальному випадку на тьох початкових площинках виникають дев'ять складових напружень, показаних на рис.3.1 (напруження на невидимих гранях елемента не показані). Нормальні напруження позначимо індексами осей, у напрямі яких вони діють:  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ . Дотичні напруження позначимо двома індексами: перший з них вказує, якій осі паралельна нормаль до площинки дії розглядуваного напруження, другий індекс показує, якій осі паралельне дане напруження.

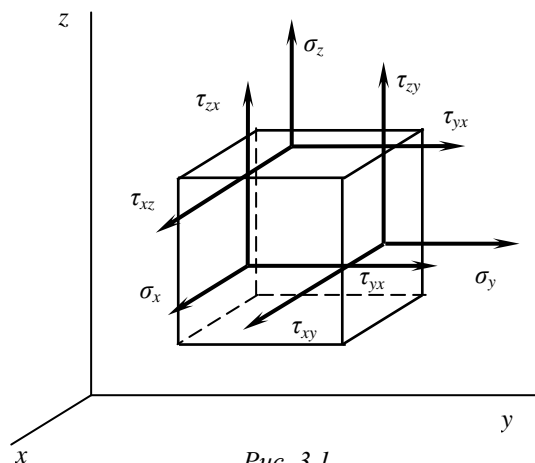


Рис. 3.1.

Таким чином, напружений стан у довільній точці тіла можна зобразити системою дев'яти векторів нормальних і дотичних напружень, які називаються компонентами напруженого стану у даній точці:

$$\begin{aligned} &\sigma_x, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \\ &\tau_{yx}, \sigma_y, \tau_{yz} \\ &\tau_{zx}, \tau_{zy}, \sigma_z \end{aligned} \quad (3.1)$$

На основі закону парності дотичних напружень (див. 2.3) складові дотичних напружень, що виникають на двох взаємо перпендикулярних площинках, рівні між собою:

$$|\tau_{xy}| = |\tau_{yx}|, |\tau_{yz}| = |\tau_{zy}|, |\tau_{xz}| = |\tau_{zx}|.$$

Отже з дев'яти компонентів напружень (3.1) залишається шість різних:  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ . Їх можна записати у таблицю (матрицю), на головній діагоналі якої розташовані нормальні напруження, а точки вказують на те, що дотичні напруження, замість яких вони поставлені, дорівнюють дотичним напруженням, розташованим симетрично відносно головної діагоналі:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \cdot & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \cdot & \cdot & \sigma_z \end{Bmatrix} \quad (3.2)$$

Симетричну квадратну матрицю (3.2) називають тензором напружень. Напружений стан у точці, таким чином, повністю означений, якщо відомий тензор напружень для цієї точки тіла.

### 3.2. ВИДИ НАПРУЖЕНОГО СТАНУ

Вивчаючи напружений стан матеріалу при розтягу або стиску, ми відзначили, що навколо будь-якої точки стержня можна виділити площинки, на яких немає дотичних напружень. Такі площинки називають головними площинками, а нормальні напруження, які на них виникають, – головними напруженнями.

Головні напруження позначають індексами 1, 2 і 3, при чому завжди вважатимемо, що  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ .

Доведено, що в будь-якій точці довільно навантаженого тіла можна завжди вказати три взаємно перпендикулярні головні площинки.

Головні напруження можуть усі не дорівнювати нулеві, або деякі з них можуть йому дорівнювати. Залежно від того, скільки є нерівних нулеві головних напружень, розрізняють три види напруженого стану матеріалу: об'ємний (тривісний), плоский (двовісний) і лінійний (одновісний).

Об'ємним, або тривісним, напруженим станом називають такий напружений стан, при якому всі три головні напруження не дорівнюють нулеві, тобто коли  $\sigma_1 \neq 0, \sigma_2 \neq 0, \sigma_3 \neq 0$  (рис. 3.2,а). При плоскому напруженому стані одне головне напруження дорівнює нулеві (рис. 3.2,б), а при лінійному – два головних напруження дорівнюють нулеві (рис. 3.2,в).

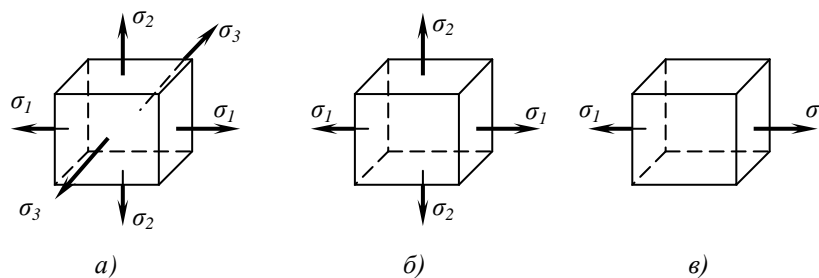


Рис. 3.2.

На рис. 3.2 показані лише розтягуючі головні напруження, однак вони можуть бути як розтягуючими, так і стискуючими і виступати в різних комбінаціях.

Лінійний напружений стан ми вивчили, розглядаючи розтяг або стиск прямого стержня. Зараз перейдемо до вивчення плоского напруженого стану. Слід зауважити, що основні задачі опору матеріалів зводяться до розгляду

плоского напруженого стану. Об'ємний напружений стан вивчають у курсі теорії пружності.

### 3.3. НАПРУЖЕННЯ У СКІСНИХ ПЕРЕРІЗАХ ПРИ ПЛОСКОМУ НАПРУЖЕНОМУ СТАНІ

Розглянемо елементарний кубик, що знаходиться в плоскому напруженому стані під дією розтягуючих головних напружень  $\sigma_1$  і  $\sigma_2$  (рис. 3.3.а).

Визначимо напруження на площині, перпендикулярній до фасадної грані елемента і довільно нахиленої відносно його бокових граней (заштрихованій на рис. 3.3.а).

Нехай зовнішня нормаль  $n_\alpha$  до нахиленої площинки утворює з напрямком напруження  $\sigma_1$  кут  $\alpha$ , що вважається додатним при відкладанні проти ходу стрілки годинника (рис. 3.3,б).

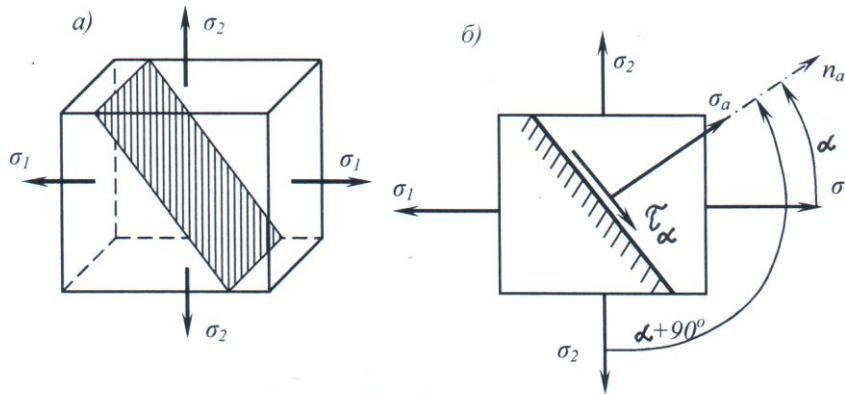


Рис.3.3

Нормальні і дотичні напруження на нахиленій площині визначимо, використовуючи одержані раніше формули для цих же напружень при лінійному напруженому стані (див. 2.3) і застосовуючи принцип незалежності дії сил.

У даному випадку використання цього принципу зведеться до того, що ми спочатку визначимо напруження, викликані дією головного напруження  $\sigma_1$ , а потім дією головного напруження  $\sigma_2$  і результати просумуємо:

Використовуючи формули (2.3) і (2.4), одержимо:

$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \cos^2(\alpha + 90^\circ) = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha \quad (3.3)$$

$$\tau_\alpha = \frac{1}{2} \sigma_1 \sin 2\alpha + \frac{1}{2} \sigma_2 \sin 2(\alpha + 90^\circ) = \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2) \sin 2\alpha \quad (3.4)$$

Із формули (3.4) видно, що максимальні дотичні напруження дорівнюють

$$\tau_{\max} = (\sigma_1 - \sigma_2) / 2 \quad (3.5)$$

і мають місце у перерізах, нахилених під одним і тим же кутом до напрямків  $\sigma_1$  і  $\sigma_2$ , тобто при  $\alpha = 45^\circ$ . Це витікає із умови, що  $\tau_{\max}$  має місце при  $\sin 2\alpha = 1$ .

Перевіримо ще, на яких площинках виникають екстремальні нормальні напруження. З умови  $d\sigma_\alpha / d\alpha = 0$  знайдемо



$$-(\sigma_1 - \sigma_2) \sin 2\alpha = 0, \text{ або } \sin 2\alpha = 0.$$

Як випливає з формули (3.4), ця умова рівнозначна умові  $\tau_\alpha = 0$ . Отже, екстремальні нормальні напруження виникають на площинках, на яких немає дотичних напружень, тобто на головних площинках. У даному випадку маємо: при  $\alpha = 0^\circ$   $\sigma_\alpha = \sigma_1 = \sigma_{\max}$ ; при  $\alpha = 90^\circ$   $\sigma_\alpha = \sigma_2 = \sigma_{\min}$ .

### 3.4. ВИЗНАЧЕННЯ ГОЛОВНИХ НАПРУЖЕНЬ І ПОЛОЖЕННЯ ГОЛОВНИХ ПЛОЩИНОК

Розглянемо обернену задачу. Задані нормальні і дотичні напруження, які діють на гранях елемента (рис.3.4,а). Вимагається визначити положення головних площинок і значення головних напружень. Розглянемо рівновагу виділеної трьохгранної призми DBC (рис. 3.4,б). Прийнемо, що  $\sigma_\alpha > \sigma_\beta$ . Кут  $\varphi$  будемо відраховувати від напрямку більшого напруження до нормалі площинки. За додатній напрямок відрахунків кута  $\varphi$  прийнемо напрямок проти годинникової стрілки. Площу нахиленої грані позначимо  $dA$ . Тоді площа вертикальної грані буде  $dA \sin \varphi$ , а горизонтальної -  $dA \cos \varphi$ .

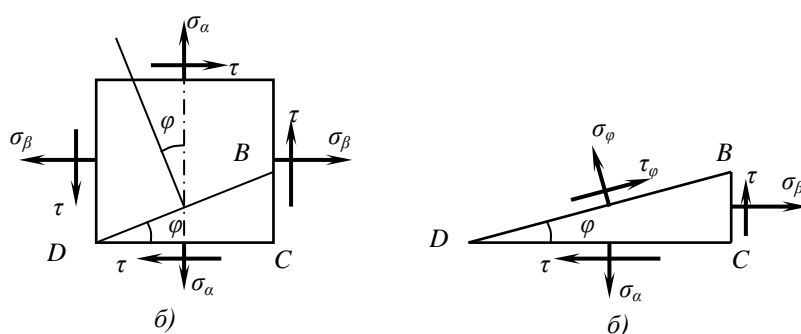


Рис. 3.4.

Проектуючи усі сили на напрямок  $\sigma_\varphi$ , одержимо:

$$\sigma_\varphi dA - (\sigma_\alpha dA \cos \varphi) \cos \varphi + (\tau dA \cos \varphi) \sin \varphi + (\tau dA \sin \varphi) \cos \varphi - (\sigma_\beta dA \sin \varphi) \sin \varphi = 0.$$

Проектуємо тепер усі сили на напрямок  $\tau_\varphi$ :

$$\tau_\varphi dA - (\sigma_\alpha dA \cos \varphi) \sin \varphi - (\tau dA \cos \varphi) \cos \varphi + (\tau dA \sin \varphi) \sin \varphi + (\sigma_\beta dA \sin \varphi) \cos \varphi = 0.$$

Скоротивши на  $dA$ , введемо функції подвійних кутів. Одержуємо:

$$\sigma_\varphi = \sigma_\alpha \cos^2 \varphi + \sigma_\beta \sin^2 \varphi - \tau \sin 2\varphi \quad (3.6)$$

$$\tau_\varphi = 0,5(\sigma_\alpha - \sigma_\beta) \sin 2\varphi + \tau \cos 2\varphi. \quad (3.7)$$

При зміні кута нахилу площинки  $\varphi$  величина  $\sigma_\varphi$  буде неперервно змінюватися.

Щоб знайти положення головних площинок, тобто площинок, на яких діють екстремальні напруження, слід або прирівняти нулеві похідну  $d\sigma_\varphi / d\varphi$ , або прирівняти нулеві дотичні напруження  $\tau_\varphi$ , тому що на головних площинках дотичних напружень немає.

У обох випадках одержуємо:  $0,5(\sigma_\alpha - \sigma_\beta) \sin 2\varphi_0 + \tau \cos 2\varphi_0 = 0$ , або

$$\operatorname{tg} 2\varphi_0 = 2\tau / (\sigma_\beta - \sigma_\alpha). \quad (3.8)$$

Щоб одержати значення екстремальних нормальних напружень, тобто головних напружень, значення кута із формули (3.8) підставимо у формулу (3.6). Попередньо тригонометричні функції у формулі (3.6) слід виразити через тангенс подвійного кута. Для цього використовуємо відомі формули тригонометрії:

$$\operatorname{Sin} 2\varphi_0 = \pm \frac{\operatorname{tg} 2\varphi_0}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\varphi_0}}; \operatorname{Cos} 2\varphi_0 = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\varphi_0}};$$

$$\operatorname{Cos}^2 \varphi_0 = 0,5(1 + \operatorname{cos} 2\varphi_0); \operatorname{Sin}^2 \varphi_0 = 0,5(1 - \operatorname{cos} 2\varphi_0).$$

Після нескладних перетворень одержуємо формулу для визначення головних напружень:

$$\sigma_{\max, \min} = 0,5(\sigma_\alpha + \sigma_\beta) \pm 0,5\sqrt{(\sigma_\alpha - \sigma_\beta)^2 + 4\tau^2}. \quad (3.9)$$

Досліджуючи другу похідну  $d^2\sigma_\varphi/d\varphi^2$ , можна переконатися, що на головній площинці під кутом  $\varphi_0$  при прийнятій умові  $\sigma_\alpha > \sigma_\beta$  діє максимальне головне напруження, а на площинці під кутом  $\varphi_0 + 90^\circ$  діє мінімальне головне напруження. Аналогічно можна знайти екстремальні значення дотичних напружень, прирівнявши нулевій похідну  $d\tau_\varphi/d\varphi = 0$ . Одержимо:

$$\tau_{\max, \min} = \pm 0,5\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}. \quad (3.10)$$

### 3.5. УЗАГАЛЬНЕНИЙ ЗАКОН ГУКА

Визначимо відносні лінійні деформації  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  і  $\varepsilon_3$  ребер елементарного кубика, що знаходиться у стані всебічного розтягу, у напрямку кожного з головних напружень (рис. 3.5).

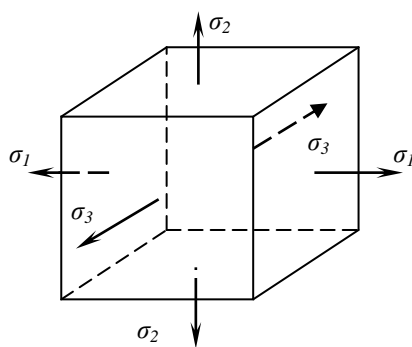


Рис. 3.5.

Використовуючи принцип суперпозиції, зобразимо відносну лінійну деформацію  $\varepsilon_1$  у напрямку головного напруження  $\sigma_1$  як суму деформацій, викликаних дією напружень  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  і  $\sigma_3$ , взятих окремо, тобто як суму деформацій при трьох незалежних від себе лінійних напружених станах. Користуючись формулами  $\sigma = E\varepsilon$  (закон Гука при розтягу і стиску) та  $\nu = |\varepsilon' / \varepsilon|$  (коефіцієнт Пуассона), знайдемо: відносна поздовжня деформація в напрямку напруження  $\sigma_1$  від самого

напруження  $\sigma_1$ :  $\varepsilon_{11} = \sigma_1 / E$ . Дія напруження  $\sigma_2$  визиває зменшення елемента в напрямку напруження  $\sigma_1$ , яке знаходиться за допомогою коефіцієнта Пуассона:  $\varepsilon_{12} = -\nu\sigma_2 / E$ , де  $\sigma_2 / E = \varepsilon_{22}$  - поздовжня деформація елемента у напрямку  $\sigma_2$  від

самого напруження  $\sigma_2$ . Така ж дія буде і напруження  $\sigma_3$  відносно зміни розміру кубика у напрямі напруження  $\sigma_3$ :  $\varepsilon_{13} = -\nu\sigma_3 / E$ .

Сумарна відносна деформація елемента у напрямку головного напруження  $\sigma_1$  буде  $\varepsilon_1 = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{12} + \varepsilon_{13}$ , тобто

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \nu \frac{\sigma_2}{E} - \nu \frac{\sigma_3}{E} = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)].$$

Аналогічно можна знайти відносні лінійні деформації  $\varepsilon_2$  і  $\varepsilon_3$  у напрямках головних напружень  $\sigma_2$  і  $\sigma_3$ . У результаті будемо мати:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{E} [\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)] \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E} [\sigma_2 - \nu(\sigma_1 + \sigma_3)] \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{E} [\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)] \end{aligned} \quad (3.11)$$

Формулами (3.11) виражається узагальнений закон Гука.

В окремому випадку, коли одне з головних напружень дорівнює нулеві, одержимо закон Гука при плоскому напруженому стані. Якщо, наприклад,  $\sigma_3 = 0$ , то матимемо

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{E} (\sigma_1 - \nu\sigma_2) \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E} (\sigma_2 - \nu\sigma_1) \\ \varepsilon_3 &= -\frac{\nu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2) \end{aligned} \quad (3.12)$$

### 3.6. ПОНЯТТЯ ПРО ТЕОРІЇ МІЦНОСТІ І ЇХ ВИКОРИСТАННЯ

У випадку лінійного (одновісного) напруженого стану оцінка міцності у даній точці конструкції виконується шляхом безпосереднього порівнювання виникаючого в ній робочого напруження або з граничним, або з допустимим напруженням. Коефіцієнт запасу міцності дорівнює відношенню граничного напруження до робочого (розрахункового):  $n = \sigma_{gp} / \sigma$ .

Підкреслимо ще раз, що виникнення текучості або признаков крихкого руйнування хоча б в одній точці конструкції розглядається як порушення міцності конструкції в цілому. Розрахунок на міцність, заснований на такому уявленні про небезпечний стан конструкції, називають розрахунком по небезпечній точці або розрахунком за допустимим напруженням. В сучасній розрахунковій практиці використовують також і інші методи розрахунків (по граничним навантаженням або несучій здібності, по розрахунковим граничним станам), засновані на інших уявленнях про небезпечні (граничні) стани конструкції; тут ці методи не розглядаються.

Граничне напруження визначають при механічних випробуваннях даного матеріалу на одновісний розтяг і стиск. Для пластичних матеріалів за граничне напруження приймають границю текучості  $\sigma_y$  (або  $\sigma_{0.2}$  для матеріалів, діаграма

розтягу яких не має чітко вираженої площинки текучості); для малопластичних матеріалів  $\sigma_{0.2t}$  або  $\sigma_{0.2c}$  - умовну границю текучості при розтягу або стиску; для крихких матеріалів  $\sigma_u$  - границя міцності відповідно при розтягу або стиску.

Виникає питання, як підійти до оцінки міцності у загальному випадку складного (об'ємного або плоского) напруженого стану.

Нехай у досліджуваній точці виникає напружений стан, що характеризується визначеними з розрахунку головними напруженнями  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ . Як нам уже відомо, три головних напруження повністю визначають напружений стан у точці тіла. Припустимо далі, що в лабораторних умовах для даного матеріалу здійснений напружений стан, подібний заданому у небезпечній точці деталі. Подібними називають напружені стани, для яких відношення головних напружень однакові, тобто

$$\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 = \sigma'_1 : \sigma'_2 : \sigma'_3.$$

При певному значенні головних напружень  $\sigma_{1cp}, \sigma_{2cp}, \sigma_{3cp}$  напружений стан у деякій точці (точках) зразка стає граничним, тобто або настає текучість, або з'являються ознаки крихкого руйнування. Величина, яка показує, у скільки разів необхідно збільшити виникаючі у досліджуваній точці головні напруження, для того щоб напружений стан став граничним, являє собою коефіцієнт запасу міцності

$$n = \sigma_{1cp} / \sigma_1 = \sigma_{2cp} / \sigma_2 = \sigma_{3cp} / \sigma_3.$$

Підкреслимо, що написаний вираз має сенс лише у випадку, коли граничний напружений стан подібний заданому.

Практично викладений підхід до розрахунку на міцність при складному напруженому стані можливий лише у рідких випадках. Дійсно, різноманітність напружених станів безмежна, дуже велика також номенклатура матеріалів, що використовуються на практиці, і створити кожний з можливих напружених станів, та до того ж для всіх матеріалів у лабораторних умовах неможливо як з технічних, так і економічних причин.

Отже, маючи обмежені експериментальні дані про властивості означеного матеріалу - значеннями граничних напружень при одновісному розтягу і стиску, необхідно мати можливість оцінити його міцність в умовах будь-якого складного напруженого стану. Це стає можливим при застосуванні так званих гіпотез міцності (теорій граничних напружених станів).

Будемо називати два напружених стани рівнонебезпечними або еквівалентними, якщо вони переходять у граничні при збільшенні відповідних їм головних напружень в одне й теж число ( $n$ ) разів. Це означає, що коефіцієнт запасу міцності для еквівалентних напружених станів однакові.

Залишається вирішити питання, що є критерієм (ознакою) рівнонебезпечності різних за характером (неподібних) напружених станів. Припустимо, що рішення цього питання існує (його дають гіпотези міцності). Тоді для розрахунку на міцність у випадку складного напруженого стану слід замінити його рівнонебезпечним (еквівалентним) йому одновісним розтягом і порівняти відповідне напруження з граничним (або з допустимим) для даного

матеріалу. Цей підхід до оцінки міцності при об'ємному або плоскому напруженому стані можна зобразити умовною схемою (рис. 3.6).

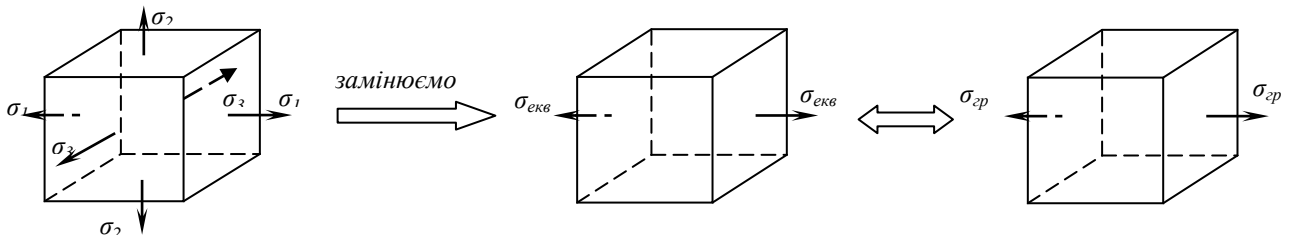


Рис. 3.6.

Напруження при одновісному розтязі, рівнонебезпечне заданому складному напруженому стану, називають еквівалентним напруженням  $\sigma_{екв}$ . З наведених міркувань витікає, що еквівалентне напруження - це лише якась умовна розрахункова величина, а не деяке реально виникаюче напруження. Значення еквівалентного напруження залежить не тільки від заданого напруженого стану (тобто відповідних йому головних напружень), але і від прийнятої для розрахунку ознаки рівнонебезпечності напружених станів.

Гіпотези, що вказують на ознаки рівнонебезпечності (критерії еквівалентності) різних напружених станів, називають гіпотезами міцності. Інші найменування: теорія граничних напружених станів (гіпотези виникнення текучості і гіпотези міцності); гіпотези пластичності і крихкого руйнування; теорії міцності.

Із сказаного виходить, що застосування гіпотез міцності звільняє від необхідності проведення величезної кількості експериментів. Ці експерименти були б неunikними для встановлення граничних напружених станів, відповідних різним комбінаціям, виникаючим у досліджуваній точці деталі головних напружень. Разом з тим самі гіпотези міцності потребують експериментальної перевірки. Той чи інший критерій еквівалентності може бути основою для практичних розрахунків лише за умови, що для ряду окремих випадків він перевірений дослідним шляхом і результати експерименту виявились достатньо близькі до результатів теоретичного розрахунку.

Незалежно від прийнятої гіпотези міцності після визначення еквівалентного напруження умову міцності можна представити у вигляді одної із слідуєчих нерівностей:

$$n = \sigma_{сп} / \sigma_{екв} \geq 1 \quad (3.13)$$

або

$$\sigma_{екв} \leq \sigma_{adm} \quad (3.14)$$

Розглянемо критерії еквівалентності за чотирма теоріями міцності, які найбільш широко застосовуються в сучасній розрахунковій практиці, і наведемо залежності для обчислення еквівалентних напружень.

1. Теорія найбільших нормальних напружень. В основі цієї теорії міцності лежить гіпотеза про те, що матеріал руйнується від найбільших нормальних напружень. Іншими словами, незалежно від складності напруженого стану, руйнування матеріалу відбувається тоді, коли нормальне напруження в якому-

небудь напрямку досягне величини напруження, при якому відбувається руйнування у випадку простого розтягу чи стиску, тобто

$$\sigma_{el} = \sigma_{\max},$$

де  $\sigma_{el}$  - еквівалентне напруження за першою теорією міцності.

Перша теорія міцності найбільш стара (запропонована ще Галілеєм); у період її створення будівельними матеріалами були головним чином крихкі матеріали (чугун, камінь і т.п.). Спостереження за руйнуванням крихких матеріалів навело на думку, що причиною всіх матеріалів є найбільші нормальні напруження. Ця теорія дає достатньо задовільні результати тільки при розрахунках деталей з крихких матеріалів.

2. Теорія найбільших лінійних деформацій. В основі цієї теорії міцності лежить гіпотеза, що матеріал незалежно від складності напруженого стану руйнуються тоді, коли відносне подовження або скорочення у будь-якому напрямку сягає такої величини, при якій відбувається руйнування при простому розтязі чи стискові.

Якщо тіло знаходиться в складному напруженому стані і відомі головні напруження  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  і  $\sigma_3$ , то найбільша лінійна деформація виникає в напрямку одного з головних напружень. Лінійні деформації при складному напруженому стані у напрямку головних напружень визначаються за формулами (3.11). Користуючись цими формулами можна завжди знайти найбільш небезпечну деформацію для даного матеріалу, тобто  $\varepsilon_{\max}$ .

Таким чином, спираючись на узагальнений закон Гука (3.11), за другою теорією міцності еквівалентне напруження визначається так:

$$\begin{aligned} \sigma_{ell} &= \sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3) \\ \sigma_{ell} &= \sigma_2 - \nu(\sigma_1 + \sigma_3) \\ \sigma_{ell} &= \sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2) \end{aligned} \quad (3.15)$$

Отже, при розрахунках за другою теорією міцності визначається найбільше еквівалентне напруження за формулою (3.15), яке не повинно перевищувати допустиме напруження (див. (3.14)).

Друга теорія міцності хоча і враховує усі три головні напруження, але випробуваннями вона недостатньо добре підтверджується, а іноді призводить до протилежних результатів. Так, наприклад, за цією теорією брус, який розтягується у двох взаємо перпендикулярних напрямках, повинен витримувати більше навантаження, ніж при розтяганні в одному напрямку. Експеримент цього не підтверджує.

3. Теорія найбільших дотичних напружень. Згідно з цією теорією, два напружених стани рівнонебезпечні, якщо максимальні дотичні напруження для них однакові. Іншими словами, руйнування матеріалу незалежно від складності напруженого стану настає тоді, коли найбільші дотичні напруження сягають величини, при якій відбувається руйнування у випадку простого розтягу, тобто

$$\tau_{\max} = \tau_{екв}.$$

Для плоского напруженого стану (3.5)

$$\tau_{\max} = \sqrt{\sigma_1 - \sigma_2} / 2.$$

Для об'ємного напруженого стану, використовуючи формулу (3.5), одержимо

$$\tau_{\max} = (\sigma_1 - \sigma_3) / 2. \quad (16)$$

Для еквівалентного лінійного напруженого стану за формулою (2.5) одержуємо:

$$\tau_{\max} = \sigma_{eIII} / 2,$$

тобто, за тетьюю теорією міцності еквівалентне напруження  $\sigma_{eIII}$  визначається за формулою

$$\sigma_{eIII} = \sigma_1 - \sigma_3. \quad (17)$$

Таким чином, згідно з цією теорією міцності небезпечний стан у матеріалі наступить тоді, коли різниця між найбільшим і найменшим нормальним напруженням сягне граничної величини для даного матеріалу.

Очевидним недоліком третьої теорії міцності є те, що не враховується вплив проміжного напруження  $\sigma_2$ .

Ретельно поставлені досліди показали, що для пластичних матеріалів ця теорія дає задовільні результати. Помилка від нехтування впливом  $\sigma_2$  не перевищує 10-15%.

4. У сучасній розрахунковій практиці широке розповсюдження набула четверта теорія міцності для пластичних матеріалів. В основі цієї теорії лежить гіпотеза, що два напружених стани рівнонебезпечні, якщо питома потенціальна енергія зміни форми для них однакова.

Формулу для визначення еквівалентного напруження по цій теорії міцності, подаємо без виведення:

$$\sigma_{eIV} = \sqrt{0.5 [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]}. \quad (18)$$

Ця теорія міцності добре узгоджується з експериментальними даними для пластичних матеріалів. Для них вона точніша, ніж теорія найбільших дотичних напружень.

## 4. ГЕОМЕТРИЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ ПЕРЕРІЗІВ СТЕРЖНІВ

### 4.1. СТАТИЧНИЙ МОМЕНТ ПЛОСКОЇ ФІГУРИ

При вивченні розтягу і стиску прямого стержня ми бачимо, що як напруження, так і деформації залежать від величини площі поперечного перерізу стержня, тобто що ця площа характеризує опір стержня деформації розтягу або стиску. Далі ми будемо вивчати кручення, згин і побачимо, що величина цих деформацій і напружень також залежить від інших геометричних величин. Усі такого роду величини називають “геометричними характеристиками” поперечного перерізу стержня або плоскої фігури, яка цей переріз зображає.

Як першу з таких величин розглянемо статичний момент плоскої фігури.

Візьмемо плоску фігуру з площею  $A$  в системі координат  $oxy$  (рис. 4.1). Статичним моментом плоскої фігури відносно осі  $ox$ , який позначається через  $S_x$ , називається величина

$$S_x = \int_A y dA. \quad (4.1)$$

Статичним моментом цієї ж фігури відносно осі  $oy$  буде

$$S_y = \int_A x dA. \quad (4.2)$$

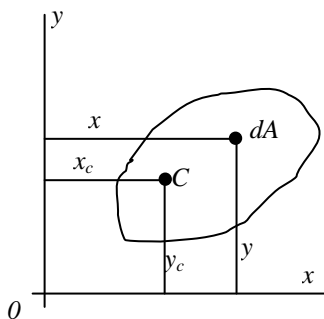


Рис. 4.1.

Якщо ототожнити площу з силою, діючою перпендикулярно площині креслення, то інтеграли (4.1) і (4.2) можна розглянути як суми моментів сил відносно відповідних осей. За відомою із теоретичної механіки теоремою про момент рівнодіючої можна написати:

$$S_x = Ay_c; \quad S_y = Ax_c, \quad (4.3)$$

де  $x_c$  і  $y_c$  - координати центра ваги фігури.

Осі, які проходять через центр ваги фігури, називаються центральними осями. З формул (4.3)

видно, що статичні моменти фігури відносно центральних осей дорівнюють нулеві. Для інших осей статичні моменти можуть бути додатні або від'ємні, залежно від положення центра ваги фігури відносно даної осі.

Розмірністю статичного моменту плоскої фігури є одиниця довжини у третьому степені.

З (4.3) впливають формули для визначення положення центра ваги фігури у прямокутній системі координат  $oxy$ :

$$x_c = S_y / A; \quad y_c = S_x / A. \quad (4.4)$$

Якщо фігуру можна представити у вигляді окремих простих фігур (квадратів, прямокутників, трикутників і т.д.), для яких відомі положення центрів ваги, то в цьому випадку статичний момент всієї фігури можна



одержати як суму статичних моментів цих простих фігур. Це безпосередньо впливає з властивостей означеного інтеграла:

$$S = \sum S_i, \quad (4.5)$$

де  $S_i$ - статичний момент площі кожної окремої простої частини фігури.

Тоді формули (4.3) можна записати так:

$$S_x = \sum A_i y_{ci}; S_y = \sum A_i x_{ci}, \quad (4.6)$$

де  $A_i$ - площа кожної окремої частини фігури;  $x_{ci}, y_{ci}$ - координати центрів ваги цих площ.

Використовуючи формули (4.4), одержимо зручні формули для обчислення центрів ваги складних фігур:

$$x_c = \sum A_i x_{ci} / \sum A_i; y_c = \sum A_i y_{ci} / \sum A_i. \quad (4.7)$$

**Приклад 4.1.** Визначити положення центра ваги перерізу, показаного на рис. 4.2.

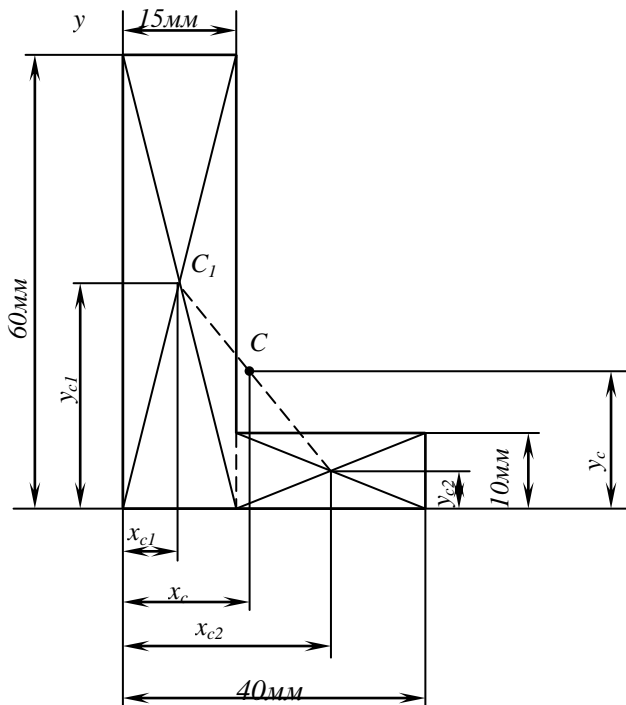


Рис. 4.2.

**Рзв'язання.** Розбиваємо переріз

на два прямокутники:

$$A_1 = 60 \times 15 = 900 \text{ мм}^2 \text{ і } A_2 = 25 \times 10 = 250 \text{ мм}^2.$$

Проводимо осі  $x$  і  $y$ , в яких визначаємо координати центрів ваги окремих прямокутників:

$$x_{c1} = 15 / 2 = 7.5 \text{ мм}; y_{c1} = 60 / 2 = 30 \text{ мм};$$

$$x_{c2} = 15 + 25 / 2 = 27.5 \text{ мм};$$

$$y_{c2} = 10 / 2 = 5 \text{ мм}.$$

За формулами (4.7) маємо:

$$x_c = \sum A_i x_{ci} / \sum A_i = \frac{A_1 x_{c1} + A_2 x_{c2}}{A_1 + A_2} = \frac{900 \cdot 7.5 + 250 \cdot 27.5}{900 + 250} = 11.85 \text{ мм};$$

$$y_c = \sum A_i y_{ci} / \sum A_i = \frac{A_1 y_{c1} + A_2 y_{c2}}{A_1 + A_2} = \frac{900 \cdot 30 + 250 \cdot 5}{900 + 250} = 24.57 \text{ мм}$$

За цими координатами знаходимо точку  $C$ - центр ваги фігури. Вона лежить на лінії, що з'єднує точки  $C_1$  і  $C_2$ .

## 4.2. МОМЕНТИ ІНЕРЦІЇ ПЕРЕРІЗУ

Осьовими або екваторіальними моментами інерції перерізу відносно осей  $x$  і  $y$  (рис. 4.3) називають геометричні характеристики, чисельно рівні інтегралам

$$I_x = \int_A y^2 dA; I_y = \int_A x^2 dA, \quad (4.8)$$

де  $x$  і  $y$ - відстані від елементарної площинки  $dA$  до відповідно осі  $oy$  і  $ox$ .

На основі теореми про середнє значення означеного інтеграла моменти інерції можна зобразити так:

$$I_x = \int_A y^2 dA = y_{cp}^2 \cdot A; I_y = \int_A x^2 dA = x_{cp}^2 \cdot A.$$

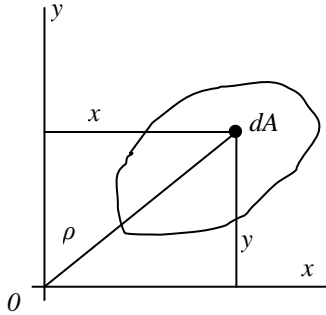


Рис. 4.3.

Середні значення  $x_{cp}$  і  $y_{cp}$  називають радіусами інерції перерізу і звичайно позначають  $i_x$  та  $i_y$ . Таким чином, осьові моменти інерції можна записати так:

$$I_x = i_x^2 A, \quad I_y = i_y^2 A. \quad (4.9)$$

З останніх формул одержимо для радіусів інерції вирази

$$i_x = \sqrt{I_x / A}; i_y = \sqrt{I_y / A}. \quad (4.10)$$

Полярним моментом інерції плоскої фігури відносно точки (полюса)  $O$  (рис. 4.3) називається геометрична характеристика, чисельно рівна інтегралові

$$I_\rho = \int_A \rho^2 dA, \quad (4.11)$$

де  $\rho$  - відстань від елементарної площинки до полюса.

Як полярний, так і осьові моменти інерції можуть бути лише додатних значень. Їх розмірності є одиниця довжини у четвертому степені.

Оскільки між координатами  $\rho$ ,  $y$ ,  $x$  елементарної площинки  $dA$  (рис. 4.3) існує залежність  $\rho^2 = x^2 + y^2$ , то

$$\int_A \rho^2 dA = \int_A x^2 dA + \int_A y^2 dA,$$

тобто

$$I_\rho = I_x + I_y. \quad (4.12)$$

Отже, полярний момент інерції фігури відносно довільного полюса дорівнює сумі осьових моментів інерції відносно взаємо перпендикулярних осей з початком у цьому полюсі.

Відцентровим моментом інерції плоскої фігури називається геометрична характеристика, яка чисельно дорівнює інтегралові

$$I_{xy} = \int_A xy dA. \quad (4.13)$$

Відцентровий момент інерції може бути додатних і від'ємних значень, а при певному положенні осей він може бути рівним нулеві.

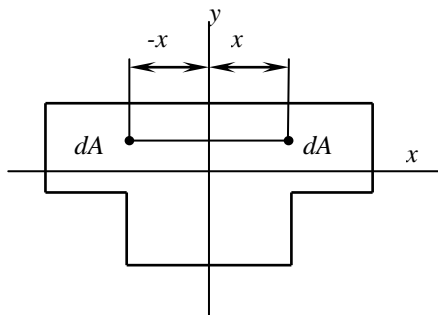


Рис. 4.4.

Якщо взаємо перпендикулярні осі  $x$  і  $y$  або одна з них будуть осями симетрії фігури, то відносно таких осей відцентровий момент інерції дорівнює нулю. Дійсно, для симетричної фігури завжди можна виділити два елементи її площі (рис. 4.4), які мають однакові ординати  $y$  і рівні, але протилежні за знаком абсциси  $x$ . Складаючи суму добутків  $xy dA$  для таких елементів, тобто обчислюючи інтеграл (4.13), одержимо нуль.

### 4.3. ЗАЛЕЖНІСТЬ МІЖ МОМЕНТАМИ ІНЕРЦІЇ ПРИ ПАРАЛЕЛЬНОМУ ПЕРЕНОСІ ОСЕЙ

Розглянемо деякий переріз з площею  $A$ , віднесений до довільної прямокутної системи координат  $O_1x_1y_1$  (рис. 4.4). Через центр ваги  $C$  проведемо центральні осі  $x$  і  $y$ , відповідно паралельні осям  $x_1$  і  $y_1$ . Осьовий момент інерції перерізу відносно осі  $x_1$  можна записати так:

$$I_{x_1} = \int_A y_1^2 dA$$

Враховуючи, що  $y_1 = y + a$  (рис. 4.4), маємо:

$$I_{x_1} = \int_A (y + a)^2 dA = \int_A y^2 dA + 2a \int_A y dA + a^2 \int_A dA$$

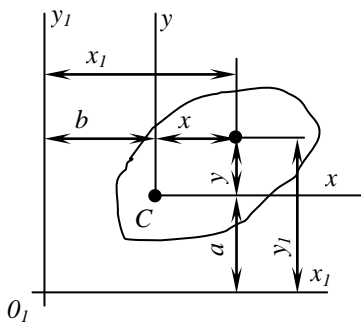


Рис. 4.5.

Так, як  $\int_A y dA = S_x = 0$  (як статичний момент плоскої фігури відносно центральної осі), а  $\int_A dA = A$

$$\text{то } I_{x_1} = I_x + a^2 A \quad (4.14)$$

Аналогічно для моменту інерції відносно осі

$y_1$ :

$$I_{y_1} = I_y + b^2 A \quad (4.15)$$

З одержуваних формул (4.14) і (4.15) випливає, що момент інерції відносно довільної осі дорівнює осьовому моменту інерції відносно центральної осі, паралельної довільній осі, плюс добуток площі перерізу на квадрат відстані між цими осями.

Знайдемо ще залежність між відцентровими моментами інерції відносно взаємно паралельних систем координат, з яких одна система центральна.

Відцентровий момент інерції фігури відносно осей  $x_1$  і  $y_1$

$$I_{x_1 y_1} = \int_A x_1 y_1 dA = \int_A (x + b)(y + a) dA = \int_A xy dA + b \int_A y dA + a \int_A x dA + ab \int_A dA$$

Враховуючи, що  $\int_A xy dA = I_{xy}$ ;  $\int_A y dA = S_x = 0$  і  $\int_A x dA = S_y = 0$  (як статичні

моменти площі відносно центральних осей  $x$  і  $y$ );  $\int_A dA = A$ , одержимо

$$I_{x_1 y_1} = I_{xy} + abA. \quad (4.16)$$

Отже, відцентровий момент інерції відносно системи взаємно перпендикулярних осей, паралельних центральним осям, дорівнює відцентровому моменту інерції відносно центральних осей плюс добуток площі фігури на відстані між осями.

### 4.4. ЗАЛЕЖНІСТЬ МІЖ МОМЕНТАМИ ІНЕРЦІЇ ПРИ ПОВОРОТІ ОСЕЙ

Знайдемо залежність між моментами інерції відносно осей  $x$ ,  $y$  і моментами інерції відносно осей  $x_1$ ,  $y_1$ , повернутих на кут  $\alpha$  (рис. 4.6). Нехай  $I_x > I_y$  і додатний кут  $\alpha$  відліковується від осі  $x$  проти годинникової стрілки.

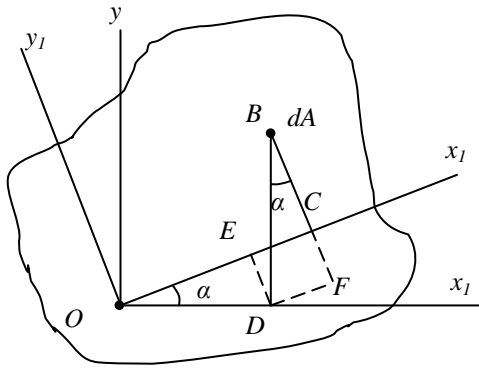


Рис. 4.6.

Для рішення поставленої задачі знайдемо залежності між координатами площини  $dA$  у початкових і повернутих координатних осях.

З креслення маємо:

$$x_1 = OC = OE + EC = OE + DF = OD \cos \alpha + DB \sin \alpha = x \cos \alpha + y \sin \alpha; \quad (4.17)$$

$$y_1 = BC = BF - DE = y \cos \alpha - x \sin \alpha. \quad (4.18)$$

Визначимо момент інерції відносно

осей  $x_1$  і  $y_1$ .

$$I_{x_1} = \int_A y_1^2 dA = \int_A (y \cos \alpha - x \sin \alpha)^2 dA = \int_A y^2 \cos^2 \alpha dA - 2 \int_A xy \sin \alpha \cos \alpha dA + \int_A x^2 \sin^2 \alpha dA,$$

або

$$I_{x_1} = I_x \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha - I_{xy} \sin 2\alpha \quad (4.19)$$

Аналогічно

$$I_{y_1} = \int_A (x \cos \alpha + y \sin \alpha)^2 dA = I_x \sin^2 \alpha + I_y \cos^2 \alpha + I_{xy} \sin 2\alpha; \quad (4.20)$$

$$I_{x_1 y_1} = \int_A (x \cos \alpha + y \sin \alpha)(y \cos \alpha - x \sin \alpha) dA = I_x \sin 2\alpha / 2 - I_y \sin 2\alpha / 2 + I_{xy} \cos 2\alpha.$$

Складаючи (4.19) і (4.20), одержуємо

$$I_{x_1} + I_{y_1} = I_x + I_y = I_p \quad (4.21)$$

З останньої залежності видно, що при поворі координатних осей полярний момент інерції не змінюється, а сума осьових моментів інерції залишається незмінною, тобто

$$I_{x_1} + I_{y_1} = I_x + I_y = \text{const}. \quad (4.22)$$

## 4.5. ГОЛОВНІ МОМЕНТИ ІНЕРЦІЇ

Якщо сума двох змінних величин зостається сталою величиною, що витікає з формули (4.22), то одна з них зменшується, а друга збільшується. Отже, при якомсь положенні осей один з осьових моментів інерції досягне максимального, а другий мінімального значень. Знайдемо значення кута  $\alpha_0$ , при якому осьові моменти інерції  $I_{x_1}$  і  $I_{y_1}$  набувають екстремальних значень. Для цього візьмемо від  $I_{x_1}$  або  $I_{y_1}$  першу похідну по  $\alpha$  і прирівняємо її нулю:

$$dI_{x_1} / d\alpha = -2I_x \cos \alpha_0 \sin \alpha_0 + 2I_y \sin \alpha_0 \cos \alpha_0 - 2I_{xy} \cos 2\alpha_0 = 0,$$

або

$$(I_y + I_{xy}) \sin 2\alpha_0 - 2I_{xy} \cos 2\alpha_0 = 0,$$

звідки

$$\text{tg } 2\alpha_0 = 2I_{xy} / (I_y - I_x) \quad (4.23)$$

Ця формула визначає положення двох осей, відносно однієї з яких осьовий момент інерції максимальний, а відносно другої мінімальний.

Такі осі називаються головними. Моменти інерції відносно головних осей називаються головними моментами інерції. Їх легко визначити за формулами (4.19) і (4.20), якщо підставити  $\alpha = \alpha_0$ , що вираховується за формулою (4.23).

Відносно головних осей відцентровий момент інерції фігури дорівнює нулю. Дійсно, порівнюючи  $I_{x_1y_1}$  за формулою (4.21) нулю, одержуємо

$$(I_x - I_y) / 2 \sin 2\alpha_0 + I_{xy} \cos 2\alpha_0 = 0,$$

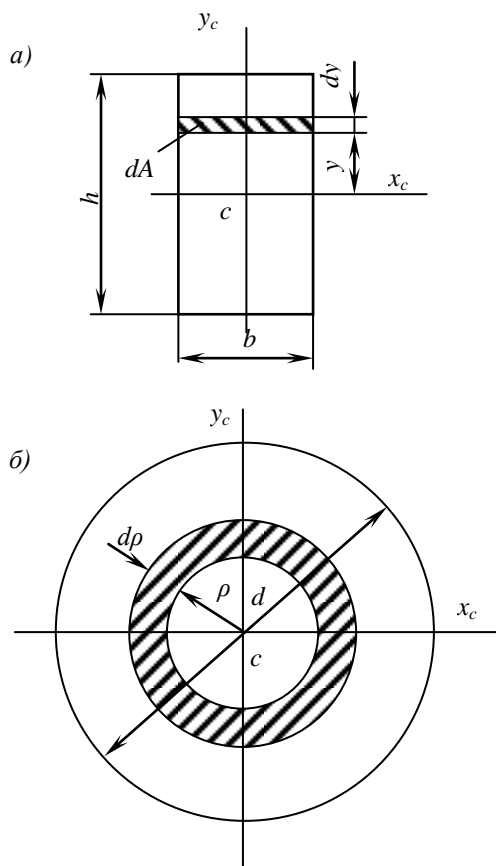
Звідки для  $\tan 2\alpha_0$  знову одержуємо формулу (4.23)

Таким чином, головними осями називають осі, які мають такі властивості:

1. Відцентровий момент інерції відносно цих осей дорівнює нулю.
2. Моменти інерції відносно головних осей мають екстремальні значення.

Якщо головні осі проходять через центр ваги перерізу, то такі осі називаються головними центральними осями, а відносно них осьові моменти інерції називаються головними центральними моментами інерції.

#### 4.6. МОМЕНТИ ІНЕРЦІЇ ДЕЯКИХ ПРОСТИХ І СКЛАДНИХ ПЕРЕРЕЗІВ



Мал. 4.7.

1. Прямокутник (рис. 4.7,а). Вирахуємо момент інерції відносно центральної осі  $x_c$ . За  $dA$  візьмемо площину нескінченно тонкого шару  $dA = bdy$ . Тоді

$$I_{x_c} = \int_A y^2 dA = \int_{-h/2}^{+h/2} y^2 b dy = bh^3 / 12.$$

Отже

$$I_{x_c} = bh^3 / 12. \quad (4.24)$$

Аналогічно одержимо

$$I_{y_1} = hb^3 / 12 \quad (4.25)$$

2. Круг (рис.4.7,б). Спочатку визначимо полярний момент інерції відносно центра круга:

$$I_p = \int_A \rho^2 dA = \int_0^{d/2} 2\pi \rho^3 d\rho = \pi d^4 / 32.$$

Отже

$$I_p = \pi d^4 / 32 \approx 0.1d^4. \quad (4.26)$$

Так як для круга  $I_{x_c} = I_{y_c}$ , то згідно з формулою (4.12)  $I_p = 2I_x = 2I_y$ . Тоді

$$I_{x_c} = I_{y_c} = I_p / 2 = \pi d^4 / 64 \approx 0.05d^4. \quad (4.27)$$

Момент інерції складної фігури дорівнює сумі моментів інерції її складових частин:

$$I_x = I_x^I + I_x^{II} + I_x^{III} + \dots \quad (4.28)$$

Це безпосередньо витікає з властивостей означеного інтегралу:

$$\int_A y^2 dA = \int_{A_1} y^2 dA + \int_{A_2} y^2 dA + \int_{A_3} y^2 dA + \dots,$$

де  $A = A_1 + A_2 + A_3 + \dots$

Таким чином, для визначення моменту інерції складної фігури треба розбити її на ряд простих фігур, обчислити моменти інерції цих фігур і потім просумувати ці моменти інерції.

Указана теорема справедлива також і для відцентрованого момента інерції.

Моменти інерції прокатних перерізів (двотавр, швелер, кутник і т.д.) приводяться в таблицях сортаменту.

## 5. ЗСУВ. РОЗРАХУНКИ НА ЗРІЗ

### 5.1. ВИЗНАЧЕННЯ НАПРУЖЕНЬ

З деформацією зсуву ми зустрічаємося, коли з шести компонентів головного вектора і головного момента внутрішніх сил не дорівнюють нулю лише поперечні сили  $Q_x$  і  $Q_y$ . З достатньою ступінню наближення деформація зсуву або зрізу практично може бути одержана у випадку, коли на брус з протилежних боків на досить близькій відстані одна від одної діють дві однакові за величиною сили, перпендикулярні до осі бруса і напрямлені в протилежні сторони. Прикладом такої дії сил на брус може бути розрізання ножицями прутків, полосок і т.п. (рис. 5.1).

Встановимо формулу, за якою можна вирахувати діючі у поперечних перерізах дотичні напруження. Відоме зовнішнє навантаження, наприклад, у випадку, показаному на рис. 5.1, а. Використовуючи метод перерізів, знаходимо, що на ділянці  $bc$  поперечна сила  $Q_y = F$ . З рівняння (1.7)  $\int_A \tau_y dA = Q_y$ , прийма-

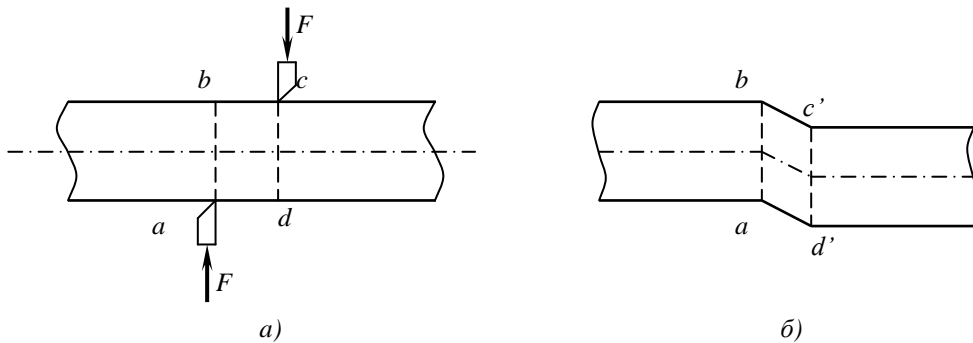


Рис. 5.1

ючи рівномірне розподілення дотичних напружень по площі поперечного перерізу  $A$  (рис.5.2.) і використовуючи наведенні вище рівняння, одержуємо  $Q_y = F = \tau_y A$ . Відкидаючи індекси при  $Q$  і  $\tau$ , матимемо вираз, що зв'язує величину поперечної сили з дотичними напруженнями, які виникають у поперечних перерізах бруса

$$\tau = Q/A = F/A. \tag{5.1}$$

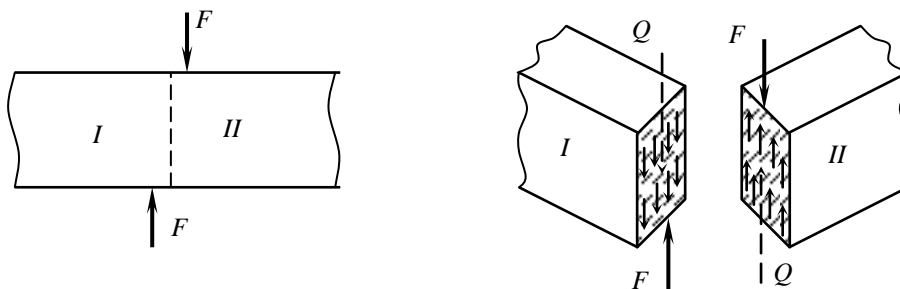


Рис. 5.2

Припущення про рівномірність розподілу дотичних напружень на перерізі вельми умовне. Однак це припущення у багатьох випадках себе виправдовує і тому в інженерній практиці ним широко користуються при розрахунках болтів, заклепок, кнопок, зварних з'єднань та інших деталей.

## 5.2. ЧИСТИЙ ЗСУВ

Чистим зсувом називається окремий випадок плоского напруженого стану, коли на гранях елементарного кубика, виділеного з тіла, виникають лише дотичні напруження  $\tau$  (рис. 5.3, а).

Визначимо величину і напрямки головних напружень при чистому зсуві. Цю задачу можна розв'язати аналогічно, використовуючи формули (3.8) і (3.9). Враховуючи, що при чистому зсуві  $\sigma_\alpha = \sigma_\beta = 0$ , одержуємо:  $\sigma_1 = +\tau, \sigma_3 = -\tau$ . А з формули (3.8) випливає, що головні площинки нахилені під кутом  $45^\circ$  до напрямку площинок чистого зсуву (рис. 5.3, б). Дійсно, при  $\sigma_\alpha = \sigma_\beta = 0$  одержуємо  $\operatorname{tg} 2\varphi_0 = \infty$ , отже,  $2\varphi_0 = 90^\circ$ , тобто  $\varphi_0 = 45^\circ$ . Оскільки кут  $\varphi_0$  додатний, він відкладається від зовнішньої нормалі  $n_x$  проти ходу стрілки годинника.

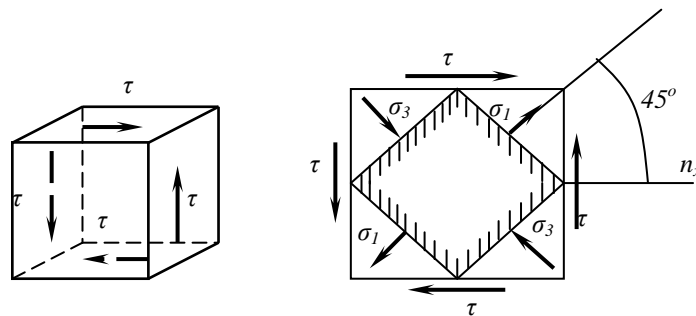


Рис. 5.3

Розглянемо деформацію елемента ABCD (рис. 5.4), для наочності закріпивши одну з його граней (наприклад, AD). Малий кут  $\gamma$ , на який змінюється початковий прямий кут, називається кутом зсуву або відносним зсувом. Величину абсолютного зсуву позначимо  $\Delta S$ . З трикутника CDC<sub>1</sub> маємо:  $\operatorname{tg} \gamma = \Delta S / a$ . Враховуючи малість кута  $\gamma$ , можна записати, що  $\operatorname{tg} \gamma \approx \gamma$ . Тоді

$$\gamma = \Delta S / a. \quad (5.2)$$

Знайдемо подовження діагоналі AC, довжина якої:

$$\Delta l = C_1 C_2 = CC_1 \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right) \approx CC_1 \cos 45^\circ = \Delta S / \sqrt{2}.$$

Тоді відносне подовження діагоналі

$$\epsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{\Delta S}{\sqrt{2} a \sqrt{2}} = \frac{1}{2} \frac{\Delta S}{a} = \frac{\operatorname{tg} \gamma}{2} \approx \frac{\gamma}{2}. \quad (5.3)$$

Тепер використаємо узагальнений закон Гука. Головне напруження  $\sigma_1$  діє у напрямі діагоналі (рис. 5.3, б). Тому відносне подовження  $\epsilon$  діагоналі є не що інше, як головне подовження  $\epsilon_1$  при плоскому напруженому стані з головними напруженнями  $\sigma_1 = \tau$ ,  $\sigma_2 = 0$  і  $\sigma_3 = -\tau$ . Отже, з першої формули (3.11) одержуємо



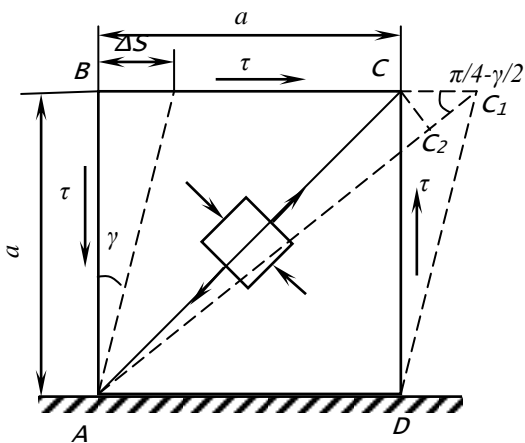


Рис. 5.4

$$\varepsilon = \varepsilon_1 = \tau(1+\nu) / E. \quad (5.4)$$

Порівнюючи (5.3) і (5.4), маємо

$$\tau = E\gamma / [2(1+\nu)] \quad (5.5)$$

Позначимо

$$G = E / [2(1+\nu)], \quad (5.6)$$

тоді

$$\tau = G\gamma. \quad (5.7)$$

Вираз (5.7) називається законом Гука при чистому зсуві, а коефіцієнт пропорційності **G** – модулем зсуву, або модулем другого роду і вимірюється в МПа (або Па).

Якщо підставити в (5.7) вирази (5.1) та (5.2), одержимо

$$\Delta S = \frac{Qa}{GA}. \quad (5.8)$$

Формула (5.8) виражає закон Гука для абсолютного зсуву.

### 5.3. ПРАКТИЧНІ РОЗРАХУНКИ НА ЗРІЗ І ЗІМ'ЯТТЯ

Деталі, які використовуються для з'єднання окремих елементів конструкцій, - заклепки, штифти, болти, шпонки і т.п. – у багатьох випадках сприймають навантаження, перпендикулярні до їх поздовжньої осі.

Поперечне навантаження в указаних деталях виникає, наприклад, при розтягу (стиску) з'єднаних елементів. Відповідні приклади наведені на рис.5.5: а – штифт; б – заклепка; в – болт, щільно вставлений в отвори деталей; г – шпонка.

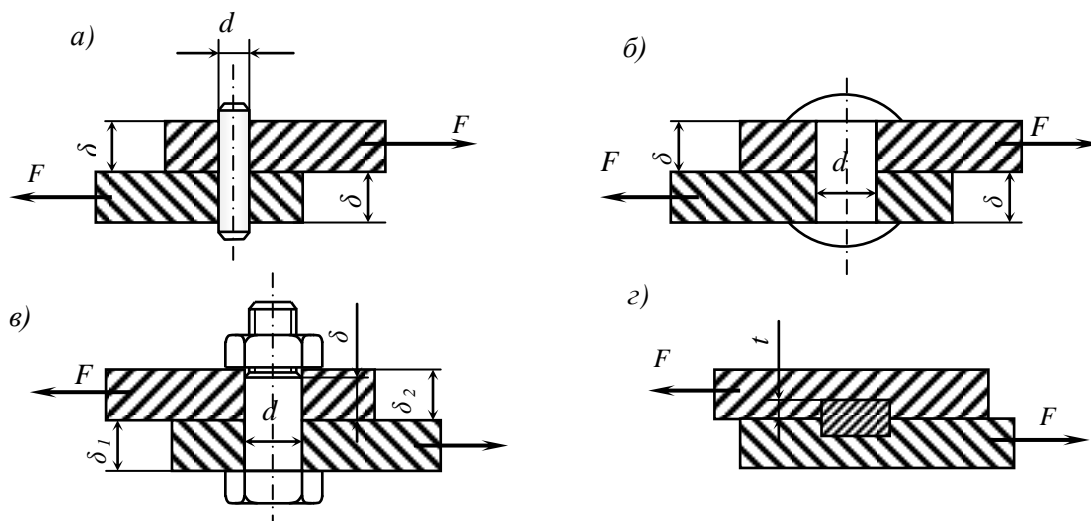


Рис. 5.5

Справжні умови роботи цих деталей складні і багато в чому залежать від технології виготовлення окремих елементів конструкції і її збирання. Практичні розрахунки їх носять вельми умовний характер і базуються на таких основних припущеннях:

1. У поперечних перерізах виникає тільки один внутрішній силовий фактор – поперечна сила  $Q$ ;
2. Дотичні напруження у поперечних перерізах розподіляються рівномірно по його площі;
3. У випадку якщо з'єднання здійснено декількома однаковими деталями (болтами і т.п.), приймається, що всі вони навантажені однаково.

Руйнування з'єднуючих елементів (у випадку недостатньої міцності) відбувається в результаті їх зрізу по площині, співпадаючій з поверхнею співдотуку з'єднаних деталей (рис. 5.6). Тому говорять, що ці елементи працюють на зріз, і виникаючі в їх поперечному перерізі дотичні напруження також називають напруженнями зрізу і позначають  $\tau_{зр}$ . На основі сформульованих вище припущень одержуємо таку умову міцності на зріз:

$$\tau_{зр} = Q / A_{зр} \leq \tau_{adm}^{зр}, \quad (5.9)$$

де  $\tau_{adm}^{зр}$  - допустиме напруження на зріз;  $A_{зр}$  – площа перерізу одного болта, заклепки і т.п.;  $Q$  – поперечна сила на один болт, заклепку і т.п.; при декількох однакових з'єднуючих деталях  $Q = F / i$  ( $F$  – загальне навантаження на з'єднання,  $i$  - число болтів, заклепок і т.п.).

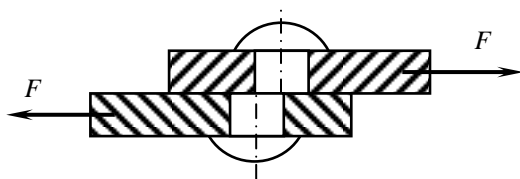


Рис. 5.6

Допустиме напруження залежить від матеріалу з'єднуючих елементів і умов роботи конструкції. В машинобудуванні при розрахунках штифтів, болтів, шпонок і т.д. приймають  $\tau_{adm}^{зр} = (0,25 \dots 0,35) \sigma_y$ , де  $\sigma_y$  - границя текучості матеріалу штифта, болта та ін.

Формула (5.9) служить для перевірочних розрахунків з'єднань. У залежності від умов задачі вона може бути перетворена для визначення допустимого навантаження або потрібної площі перерізу (проектний розрахунок).

Розрахунок на зріз забезпечує міцність з'єднуючих елементів, але не гарантує надійності конструкції в цілому. Якщо товщина з'єднаних елементів недостатня, то стиснення, що виникає між стінками їх отворів і з'єднуючими деталями, стає недопустимо великим. В результаті стінки отворів зминаються і з'єднання становиться ненадійним

Тиск, виникаючий між поверхнями отворів і з'єднувальних деталей, прийнято називати напруженнями зім'яття і позначати  $\sigma_{con}$ . Розподіл напружень зім'яття на поверхні контакту деталей вельми неозначене і в значній мірі залежить від щілини (у ненавантаженому стані між стінками отвору і болтом, заклепкою та ін.).

Розрахунок на зім'яття носить умовний характер і проводиться за припущенням, що сили взаємодії між деталями рівномірно розподілені поверхнею контакту і у всіх точках нормальні до цієї поверхні.

Відповідна розрахункова формула має вигляд

$$\sigma_{con} = F / (iA_{con}) \leq \sigma_{adm}^{con}, \quad (5.10)$$

де  $F/i$  – навантаження на одну з'єднуючу деталь;  $A_{con}$  – розрахункова площа з'єднання;  $\sigma_{adm}^{con}$  – допустиме напруження з'єднання.

В машинобудуванні для болтових, штифтових і шпоночних з'єднань приймають: для деталей з маловуглецевих сталей  $\sigma_{adm}^{con} = 100 \dots 120 \text{ МПа}$ ; для деталей середньовуглецевих сталей  $\sigma_{adm}^{con} = 140 \dots 170 \text{ МПа}$ ; для деталей з чавуну  $\sigma_{adm}^{con} = 60 \dots 80 \text{ МПа}$ . Коли контактуючі деталі виготовлені з різних матеріалів, то в таких випадках при виборі допустимих напружень з'єднання орієнтуються на матеріал тієї деталі, міцність якої менша.

За розрахункову площу з'єднання при контактній площині (див. рис. 5.5, г) приймають дійсну площу співдотику  $A_{con} = tl$ , де  $l$  – розмір шпонки в напрямі, перпендикулярному площині креслення, тобто її довжина; при контактній площині на циліндричній поверхні (див. рис. 5.5, а, б, в) приймають площу проекції поверхні контакту на діаметральну площину, тобто  $A_{con} = d\delta$  (при різній товщині з'єднаних деталей в розрахункову формулу слід підставляти  $\delta_{min}$ ).

У деяких конструкціях з'єднуючі деталі (штифти, шпонки) працюють на зріз по поздовжньому перерізу (див. рис. 5.5, г); методика розрахунку залишається такою ж, як і при зрізі по поперечному перерізі.

Наприклад. Тяги 1 і 2 з'єднані між собою за допомогою штиря 3, встановленого в їх проушини, і навантажені так, як показано на рис. 5.7. Визначити допустиму силу  $F$  при наступних значеннях допустимих напружень: на з'єднання  $\sigma_{adm}^{con} = 100 \text{ МПа}$ , на зріз  $\tau_{adm}^{3p} = 70 \text{ МПа}$ .

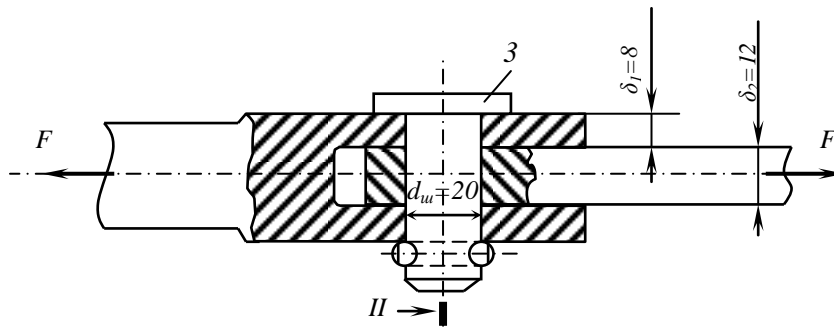


Рис. 5.7.

Розв'язання. 1. Визначаємо допустиме навантаження з умови міцності на з'єднання. Для тяги 1 розрахункова площа з'єднання  $A_{con}^I = 2\delta_1 d = 2 \cdot 8 \cdot 20 = 320 \text{ мм}^2$ , для тяги 2 -  $A_{con}^{II} = \delta_2 d = 12 \cdot 20 = 240 \text{ мм}^2$ . Таким чином, достатньо провести розрахунок для більш навантаженої, тобто меншої площі з'єднання, проушини тяги 2:

$$F_{adm}^{con} = \sigma_{adm}^{con} A_{con}^{II} = 100 \cdot 240 = 24 \cdot 10^3 \text{ Н}.$$

2. Визначаємо допустиме навантаження з умови міцності штиря на зріз. Штир має дві площини зрізу, тому загальна площа зрізу буде:

$$A_{3p} = 2 \cdot \frac{\pi d^2}{4} = 2 \cdot \frac{3.14 \cdot 20^2}{4} = 628 \text{ мм}^2. \text{ Допустиме навантаження } F_{adm}^{3p} = \tau_{adm}^{3p} \cdot A_{3p} = 70 \cdot 628 = 44 \cdot 10^3 \text{ Н}.$$

Таким чином, допустиме навантаження на з'єднання буде  $F_{adm} = F_{adm}^{con} = 24\text{kH}$ .

## 6. КРУЧЕННЯ

### 6.1. КРУТНИЙ МОМЕНТ. ЕПЮРИ КРУТНИХ МОМЕНТІВ

У найпростішому випадку деформація кручення викликається двома протилежно напрямленими парами сил з моментами  $T_e$  (індекс **e** від **external** (англ.) - зовнішній), що діють у площинах, перпендикулярних до осі стержня (рис. 6.1, б).

Для визначення внутрішніх сил, що виникають у поперечних перерізах стержня, застосуємо метод перерізів. Для цього уявно розрізаємо стержень січною площиною, перпендикулярною до його осі, яка розділяє стержень на дві частини: I і II (рис. 6.1, б). Одну з частин, наприклад II, відкидаємо і замінюємо її дію на частину I моментом внутрішніх сил. Цей момент називається крутним моментом і позначається через **T** (рис. 6.1, в).

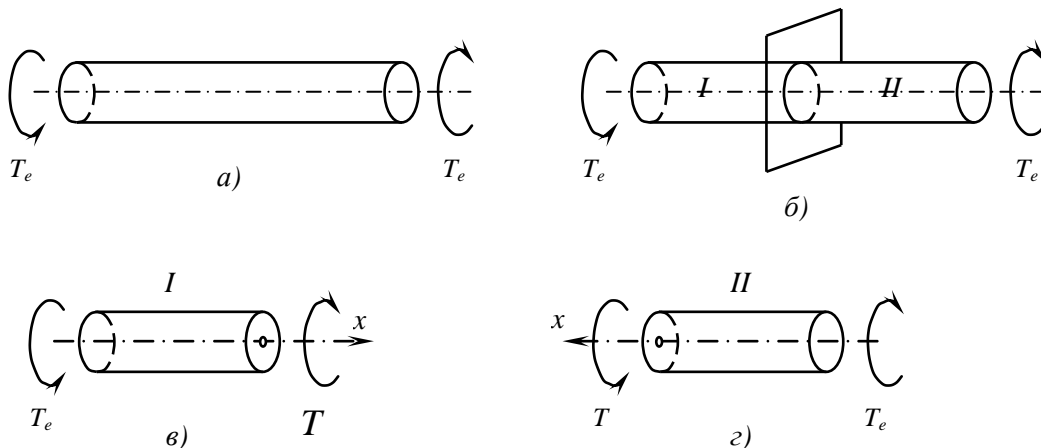


Рис. 6.1

Крутний момент являє собою момент системи сил, що замінює в даному поперечному перерізі дію відкинутої частини стержня на його залишену частину, взятий відносно осі стержня.

З умови рівноваги між зовнішніми і внутрішніми силами впливає правило для вираження крутного моменту через моменти зовнішніх пар сил: крутний момент у довільному поперечному перерізі стержня чисельно дорівнює алгебраїчній сумі моментів відносно осі стержня всіх пар зовнішніх сил, розміщених з одного боку від розглядуваного перерізу. Додатними будемо вважати моменти, що обертають проти ходу стрілки годинника, коли дивитися вздовж зовнішньої нормалі до перерізу.

На рис 6.1, в, г показані додатні крутні моменти при відкиданні частин I або II стержня.

Графік розподілу крутних моментів по довжині стержня називається їх епюрою. Приклад побудови епюри крутних моментів показаний на рис. 6.2. Перерізи стержня, до яких прикладаються моменти зовнішніх пар сил, розділяють його на чотири ділянки, для яких знаходимо: на ділянці *a*:  $T_a = 0$ ; на ділянці *b*:  $T_b = T_{e_1} = 4 \text{кНм}$ ; на ділянці *c*:  $T_c = T_{e_1} - T_{e_2} = -6 \text{кНм}$ ; на ділянці *d*:  $T_d = 0$ .

За одержаними даними побудована епюра крутних моментів.

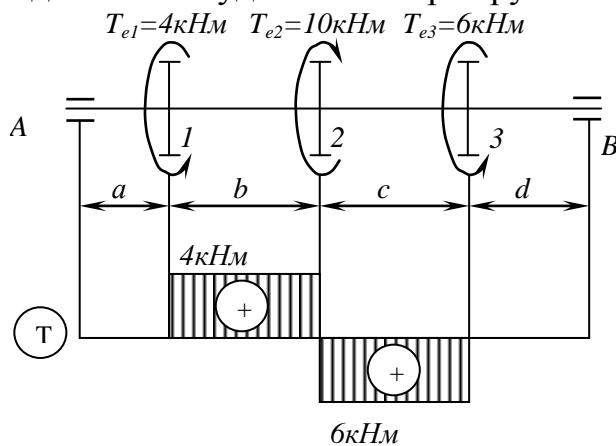


Рис. 6.2

## 6.2. НАПРУЖЕННЯ ПРИ КРУЧЕННІ СТЕРЖНЯ КРУГЛОГО ПОПЕРЕЧНОГО ПЕРЕРІЗУ

У загальному випадку кручення стержня довільного перерізу поперечні перерізи стержня перестають бути плоскими, скривлюються. Ці скривлення називаються депланаціями поперечних перерізів. Лише при крученні стержнів круглого або кільцевого перерізу депланації немає.

Коли депланації однакові в усіх поперечних перерізах стержня і можуть вільно відбуватися або коли їх зовсім немає (круглий переріз), тоді кручення називається чистим.

Відсутність депланації дозволяє розв'язати задачу визначення напружень при крученні круглого стержня елементарним методом, що неможливо для стержнів інших перерізів.

Знайдемо напруження у поперечному перерізі крутного стержня, закрученого двома парами сил з моментами  $T_e$  (рис. 6.3, а).

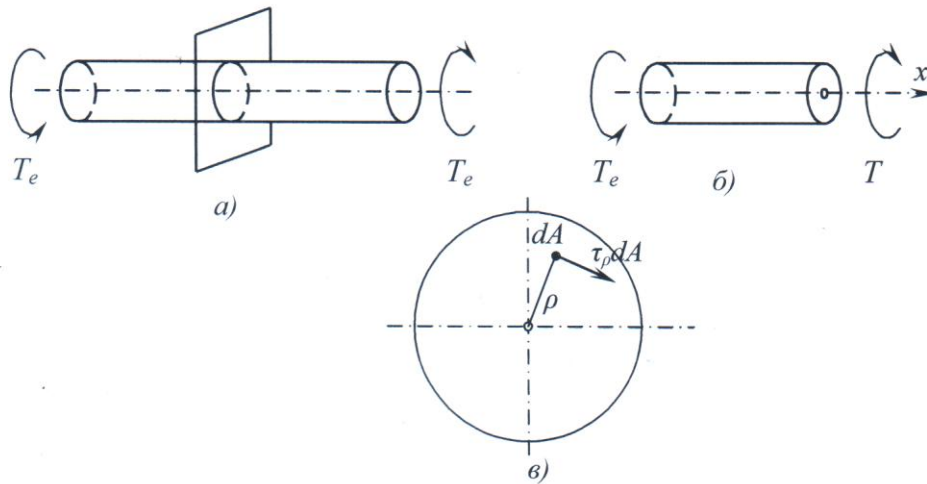


Рис.6.3

Умовно розрізаємо стержень на дві частини, відкидаємо праву частину і замінюємо її дію на залишену ліву частину крутним моментом  $T$  (рис. 6.3, б). Крутний момент  $T$  являє собою сумарний момент елементарних пар внутрішніх зусиль, дотичних до площини перерізу:

$$T = \int_A \rho \tau_\rho dA, \quad (6.1)$$

де  $\tau_\rho$  – дотичне напруження, яке виникає на площині  $dA$  на відстані  $\rho$  від осі стержня (рис. 6.3, в).

Вираз (6.1) дає інтегральну залежність між крутним моментом і дотичними напруженнями у перерізі стержня, яка може задовольнятися при різних законах розподілу напружень. Який із цих законів дійсно має місце при крученні, можна встановити на основі дослідних даних.

Експериментальне вивчення кручення стержня круглого поперечного перерізу дає такі результати: 1) поперечні перерізи стержня, залишаючись плоскими і перпендикулярними до його осі, повертаються один відносно одного на певний кут, що називається кутом закручування  $\varphi$ ; 2) відстані між перерізами не змінюються; 3) радіуси, проведені у поперечних перерізах стержня, залишаються прямими.

На основі цих експериментальних даних можна скласти рівняння переміщень при крученні стержня круглого перерізу.

Для цього виділимо із стержня циліндричний елемент довжиною  $dz$  (рис. 6.4, а, в). При вказаних вище умовах будь які дві твірні  $AB$  і  $CD$ , проведені на поверхні циліндричного елемента, перейдуть у положення  $A_1B_2$  і  $C_1D_2$ , а елемент  $ABCD$  зазнаватиме деформації чистого зсуву.

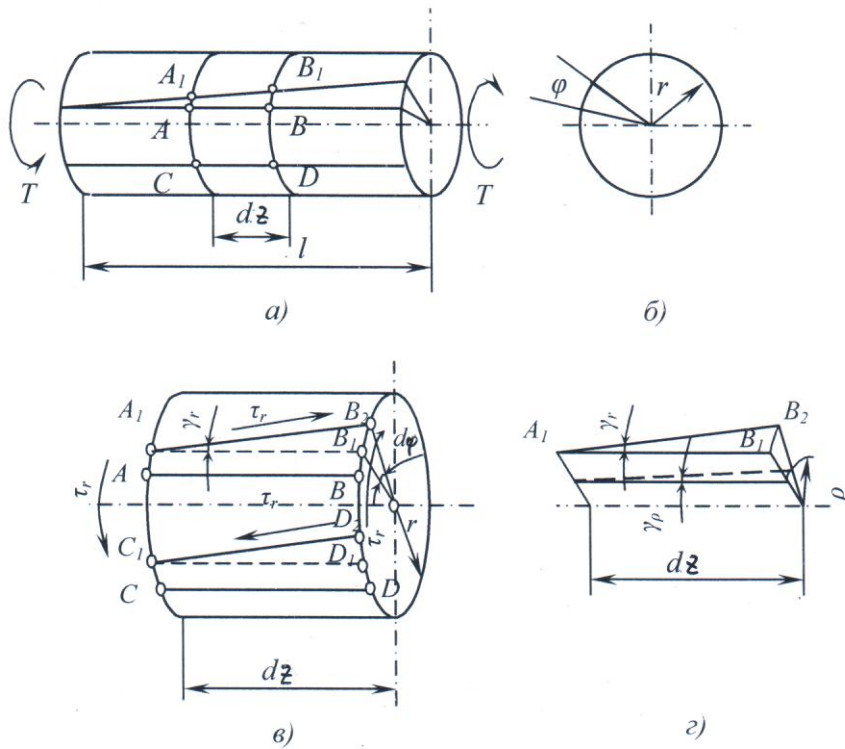


Рис.6.4

Виражаючи дугу  $B_1B_2$  один раз через кут зсуву  $\gamma_r$ , а другий – через елементарний кут закручування  $d\varphi$ , одержуємо

$$\gamma_r dz = r d\varphi,$$

$$\gamma_r = \frac{d\varphi}{dz} r.$$

Позначимо через  $\gamma_\rho$  кут зсуву на циліндричній поверхні радіуса  $\rho$ , проведений в середині елемента (рис. 6.4, г). З рівності відношень  $\gamma_\rho : \gamma_r = \rho : r$  і з останньої формули знаходимо

$$\gamma_\rho = \frac{d\varphi}{dz} \rho.$$

Використовуючи формулу закону Гука при зсуві (5.7), можемо тепер записати дотичне напруження  $\tau_\rho$  через кут зсуву  $\gamma_\rho$ :

$$\tau_\rho G \gamma_\rho = G \frac{d\varphi}{dz} \rho \quad (6.2)$$

Після підстановки останнього виразу у формулу (6.1) одержимо

$$G \frac{d\varphi}{dz} \int_A \rho^2 dA = T,$$

звідси

$$d\varphi = \frac{T dz}{GI_\rho}, \quad (6.3)$$

де  $I_\rho = \int_A \rho^2 dA$  - полярний момент інерції поперечного перерізу стержня (див.(4.11)).

Формулою (6.3) виражається відносний кут закручування двох перерізів стержня на відстані  $dz$  один від одного. При довжині стержня  $l$  кут

закручування  $\varphi$  одного кінцевого перерізу відносно другого одержимо, інтегруючи вираз (6.3) по довжині  $l$ :

$$\varphi = \frac{Tl}{GI_{\rho}}. \quad (6.4)$$

Останню формулу можна розглядати також як вираз закону Гука при крученні. Величина  $GI_{\rho}$  називається жорсткістю при крученні стержня круглого поперечного перерізу.

Нарешті, з формул (6.2) і (6.3) одержуємо формулу для дотичного напруження при крученні стержня круглого перерізу:

$$\tau_{\rho} = T\rho / I_{\rho} \quad (6.5)$$

Епюра дотичних напружень  $\tau_{\rho}$  показана на рис. 6.5.

Максимальне дотичне напруження виникає біля контуру перерізу при  $\rho_{\max} = r$  і дорівнює

$$\tau_{\max} = Tr / I_{\rho},$$

або

$$\tau_{\max} = T / W_{\rho}. \quad (6.6)$$

де  $W_{\rho} = I_{\rho} / \rho_{\max} = I_{\rho} / r$  - геометрична характеристика, що називається полярним моментом опору перерізу стержня.

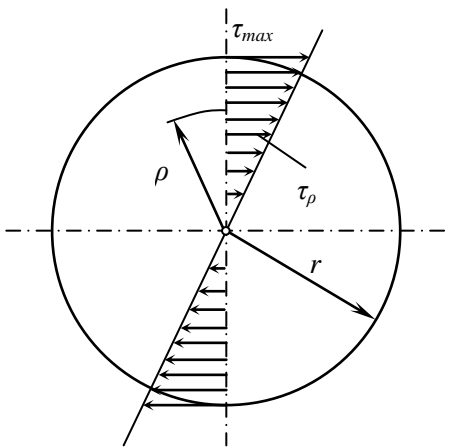


Рис.6.5

### 6.3. РОЗРАХУНКИ НА МІЦНІСТЬ І ЖОРСТКІСТЬ ПРИ КРУЧЕННІ

Міцність бруса, що працює на кручення, вважають забезпеченою, якщо найбільші дотичні напруження у його небезпечному перерізі, не перевершують допустимі:

$$\tau_{\max} \leq \tau_{adm}.$$

Як відомо з попереднього, ці найбільші напруження виникають у найбільш віддалених точках поперечного перерізу і вираховуються за формулою (6.6). Таким чином, одержимо слідувачу умову міцності:

$$\tau_{\max} = T / W_{\rho} \leq \tau_{adm}. \quad (6.7)$$

Ця формула служить для перевірного розрахунку на міцність.

При проектному розрахунку і при вивченні допустимого навантаження (момента) з формули (6.7) відповідно знаходять  $W_{\rho}$  або  $[T]$ :

$$W_{\rho} \geq T / \tau_{adm}; \quad (6.8)$$

$$[T] \leq W_{\rho} \tau_{adm}. \quad (6.9)$$

Крутний момент  $T$ , який входить у наведені розрахункові формули, за допомогою метода перерізів повинен бути виражений через зовнішні (скручувальні) моменти.



Розрахунок ведеться для небезпечного перерізу. Для бруса сталого діаметра небезпечним буде той переріз, у якому виникає найбільший крутний момент. Якщо діаметр бруса не сталий, може статися так. Що найбільші напруження виникають не там, де крутний момент максимальний. Отже, в цьому випадку питання про небезпечний переріз повинен бути досліджений додатково (див. нижче приклад).

Допустиме напруження  $\tau_{adm}$  для пластичних матеріалів назначають в залежності від їх границі текучості при крученні (при зсуві)  $\tau_y$ , тобто

$$\tau_{adm} = \tau_y / [n_y], \quad (6.10)$$

а для крихких – у залежності від границі міцності

$$\tau_{adm} = \tau_u / [n_u]. \quad (6.11)$$

Враховуючи, що за експериментальними даними границя текучості при крученні зв'язана з границею текучості при розтязі залежністю  $\tau_y \approx (0,55 \dots 0,60) \sigma_y$ , приймають для сталі  $\tau_{adm} \approx (0,55 \dots 0,60) \sigma_{adm}$ ; для чавунку  $\tau_{adm} \approx (1,0 \dots 1,2) \sigma_{adm}$ .

У деяких випадках є необхідність крім розрахунку на міцність, зробити ще розрахунок вала на жорсткість. Перевірка жорсткості полягає у порівнянні максимального кута закручування  $\varphi_{max}$ , віднесеного до одиниці довжини вала, з допустимим кутом закручування  $[\varphi]$ :

$$\varphi_{max} \leq [\varphi]. \quad (6.12)$$

Оскільки допустимі кути закручування задаються звичайно в градусах на 1м, а у виразі (6.4) кут обчислюється в радіанах, то цей вираз треба ще помножити на  $180/\pi$ . Тоді умова жорсткості (6.12) набере вигляду

$$\frac{180T}{\pi G I_p} \leq [\varphi]. \quad (6.13)$$

Найбільш поширеними на практиці значеннями допустимих кутів закручування є  $[\varphi] = (0,25 \dots 1,0)$  град/м.

**Приклад.** Ступінчастий сталевий брус круглого поперечного перерізу жорстко закріплений одним кінцем і навантажений, як показано на рис. 6.6,а. Побудувати епюри крутних моментів та дотичних напружень, і перевірити міцність бруса при  $\tau_{adm} = 60 \text{ МПа}$ .

**Розв'язання.** Епюру крутних моментів будуюмо, починаючи з вільного (лівого) кінця, що дозволяє не визначати реактивний момент у затисненні. Провівши довільний переріз 1-1 на ділянці  $l_1$  і склавши для залишеної частини (рис. 6.6,б) рівняння рівноваги  $\sum M_z = 0$ , одержуємо  $T_1 = T_{e1} = 1 \text{ кНм}$ . Згідно з прийнятим правилом знаків вважаємо момент  $T_1$  від'ємним. Крутний момент зберігає стале значення ( $T_1 = -1 \text{ кНм}$ ) у всіх перерізах ділянки  $l_1$ . Якщо проведемо довільний переріз 2-2 на ділянці  $l_2$ , то матимемо той же результат, тобто  $T_2 = T_{e1} = -1 \text{ кНм}$ . Для решти ділянок знаходимо крутні моменти як алгебраїчну суму зовнішніх скручувальних моментів, прикладних по одну сторону (у нашому випадку – по ліву) від проведених перерізів. Відрізані частини окремо не зображуємо. Отже,  $T_3 = -T_{e1} + T_{e2} = 1 \text{ кНм}$ ;  $T_4 = T_3 = 1 \text{ кНм}$ ;  $T_5 = -T_{e1} + T_{e2} - T_{e3} = -3 \text{ кНм}$ . За одержаними даними будуюмо епюру крутних моментів (рис. 6.6,в).

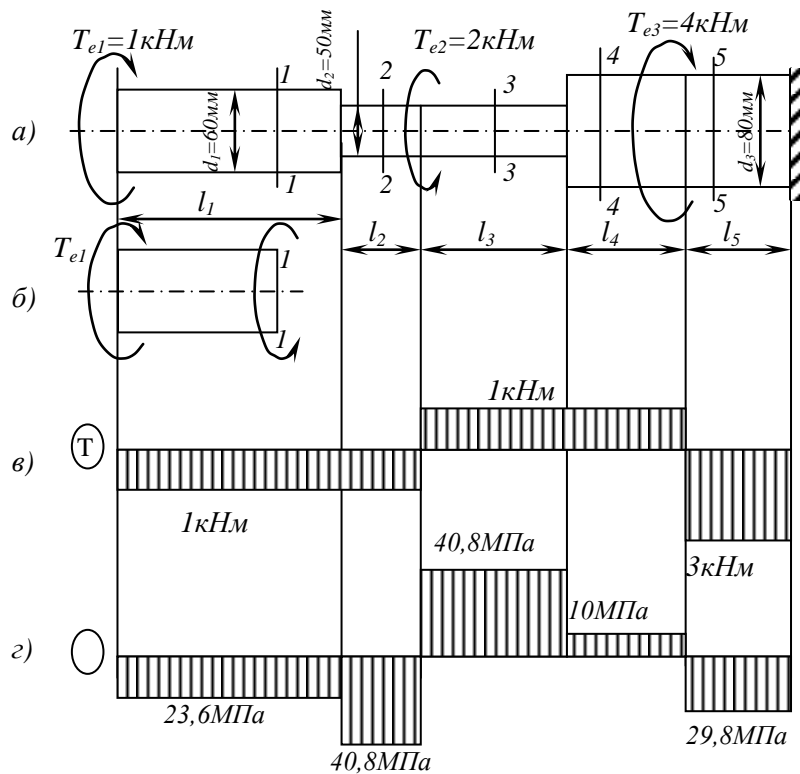


Рис. 6.6

Для знаходження небезпечного перерізу будемо епюру дотичних напружень.

На ділянці  $l_1$ :

$$\tau_1 = \frac{T_1}{W_{p1}} = \frac{1 \cdot 10^6}{42390} = 23,6 \text{ МПа},$$

де  $W_{p1} = \pi d_1^3 / 16 = 3,11 \cdot 60^3 / 16 = 42390 \text{ mm}^3$  - полярний момент опору перерізів ділянки  $l_1$  з діаметром  $d_1=60 \text{ mm}$ .

Аналогічно знаходимо дотичні напруження на решті ділянок і будемо епюру  $\tau$  (рис. 6.6,г) Замітимо, що знак дотичного напруження при розрахунках на міцність ніякого значення не має, і прийнятий напрямок ординат епюри  $\tau$  умовний.

Небезпечними виявились поперечні перерізи на ділянках  $l_2$  і  $l_3$ . Таким чином, небезпечними виявились не ті перерізи, в яких крутний момент максимальний. Умова міцності  $\tau_{\max} < \tau_{\text{adm}}$  виконується. Очевидно, що матеріал бруса використаний іраціонально; навіть у небезпечних перерізах напруження на 32% нижче допустимого. Доцільно буде вибрати такий матеріал, допустиме напруження якого було б близьким до 40 МПа.

## 7. ПРЯМИЙ ЗГИН

### 7.1. ПРЯМИЙ ЗГИН СТАТИЧНО ВИЗНАЧНОЇ БАЛКИ

Стержень з прямою віссю, що працює на згин, прийнято називати балкою. Ознакою деформації згину балки є зміна кривизни її осі. Згин, при якому скривлення осі балки відбувається у її головній площині, тобто у площині, утвореній віссю балки і однією з головних центральних осей її поперечного перерізу, будемо називати прямим згином.

Коли ж скривлення осі балки не відбувається у її головній площині, то згин називається косим.

Обмежимося розглядом прямого згину балки сталого поперечного перерізу, який має принаймні одну вісь симетрії. Сумістимо вісь  $z$  прямокутної системи координат з віссю балки, осі  $x$  і  $y$  – з головними центральними осями її поперечного перерізу, причому будемо вважати, що вертикальна вісь  $y$  є віссю симетрії перерізу (рис.7.1).

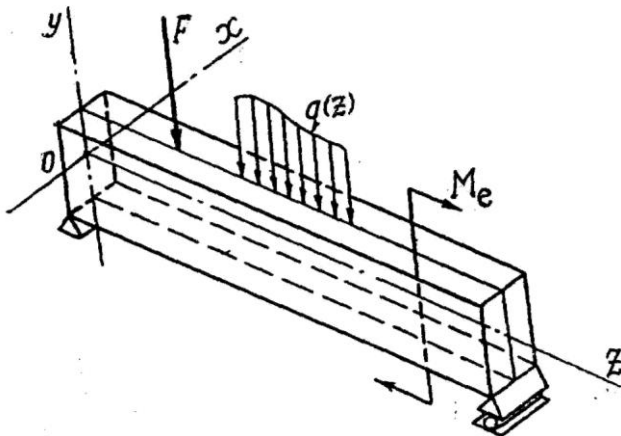


Рис. 7.1

Якщо навантаження діє на балку у її площині симетрії  $oyz$  то, очевидно, вісь балки буде скривлятися у цій же площині і згин буде прямим. Щоб забезпечити нерухомість балки під впливом прикладеного до неї навантаження, слід закріпити її принаймі трьома опорними стержнями, напрямки яких не перетинаються в одній точці.

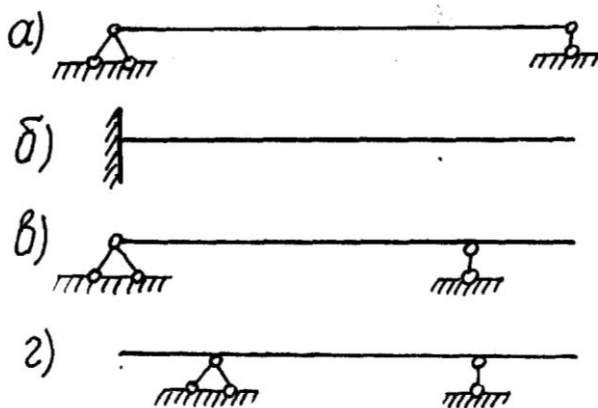


Рис. 7.2

В опорних стержнях балки виникають опорні реакції. Коли ці реакції можна знайти з умов рівноваги сил, прикладених до балки, балка статично визначна. Найпростіші статично визначені балки: 1) проста балка, якою будемо називати балку, вільно обіперту на двох шарнірних опорах (рис.7.2,а); 2) консоль, тобто балка з одним закріпленим і другим вільним кінцями (рис.7.2,б); 3) консольна балка, тобто балка на двох опорах, що має одну або дві консолі (рис.7.2,в,г).

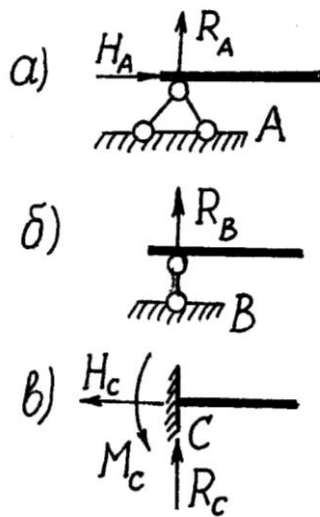


Рис. 7.3

У загальному випадку навантаження простої балки на її опорах можуть виникати такі складові опорних реакцій: на шарнірно-нерухомій опорі – вертикальна  $R$  та горизонтальна  $H$  (рис.7.3,а); на рухомій – лише вертикальне  $R$  (рис.7.3,б). У загальному випадку навантаження консолі у її опорному перерізі можуть виникнути вертикальна  $R$  і горизонтальна  $H$  складові опорної реакції та опорний момент. Якщо опори позначатимемо літерами  $A$  і  $B$ , то відповідно складові опорних реакцій та опорні моменти будуть мати індекси  $A$  або  $B$ :  $R_A$ ,  $R_B$ ,  $H_A$ ,  $H_B$ ,  $M_A$  або  $M_B$ .

Відстань між центрами шарнірів простої балки та вільну довжину консолі називають їх прольотом.

Внаслідок скривлення осі балки при згині довжина її прольоту, а також відстані між прикладеними до балки вертикальними силами зменшується. Однак до балок, деформації яких невеликі порівняно з довжиною прольоту можна застосувати принцип “початкових розмірів” і нехтувати впливом зміни відстанів між силами на величину опорних реакцій і внутрішніх сил у балці.

## 7.2. ЗГИНАЛЬНИЙ МОМЕНТ І ПОПЕРЕЧНА СИЛА

З метою вивчення внутрішніх сил, що виникають у поперечних перерізах балки при її прямому згині, розглянемо просту балку, яка працює на прямий згин у вертикальній площині (рис.7.4,а).

Опорні реакції  $R_A$  і  $R_B$ , викликані прикладеним до балки навантаженням, можна визначити з умов рівноваги, використовуючи рівняння статички абсолютно твердого тіла.

Для з’ясування, які внутрішні сили виникають у довільному поперечному перерізі балки і для визначення їх величини застосуємо метод перерізів: уявно розрізаємо балку січною площиною, перпендикулярно до її осі, на віддалі  $z$  від лівої опори. Січна площина розділяє балку на дві частини, кожна з яких зрівноважується прикладеними до неї зовнішніми і внутрішніми силами.

Відкидаємо одну з частин балки, наприклад, ліву, і поміщаємо у центрі ваги  $C$  перерізу тієї частини балки, що залишається, початок ковзної системи координат, осі  $x$  і  $y$  якої збігаються з головними центральними осями перерізу. Дію відкинутої лівої частини балки на праву частину треба замінити внутрішніми силами, що числено дорівнюють відповідним зовнішнім силам, прикладеним також зліва від перерізу. Ці зовнішні сили можна за правилами механіки звести до сили, направленої вздовж осі  $y$ , і пари сил, що обертає навколо осі  $x$  перерізу. Тому внутрішні сили мусять утворювати також силу і

пару сил. Ці внутрішні сили, позначені на рис.7.4,б відповідно через  $Q(z)$  і  $M(z)$ , називаються поперечною силою і згинальним моментом.

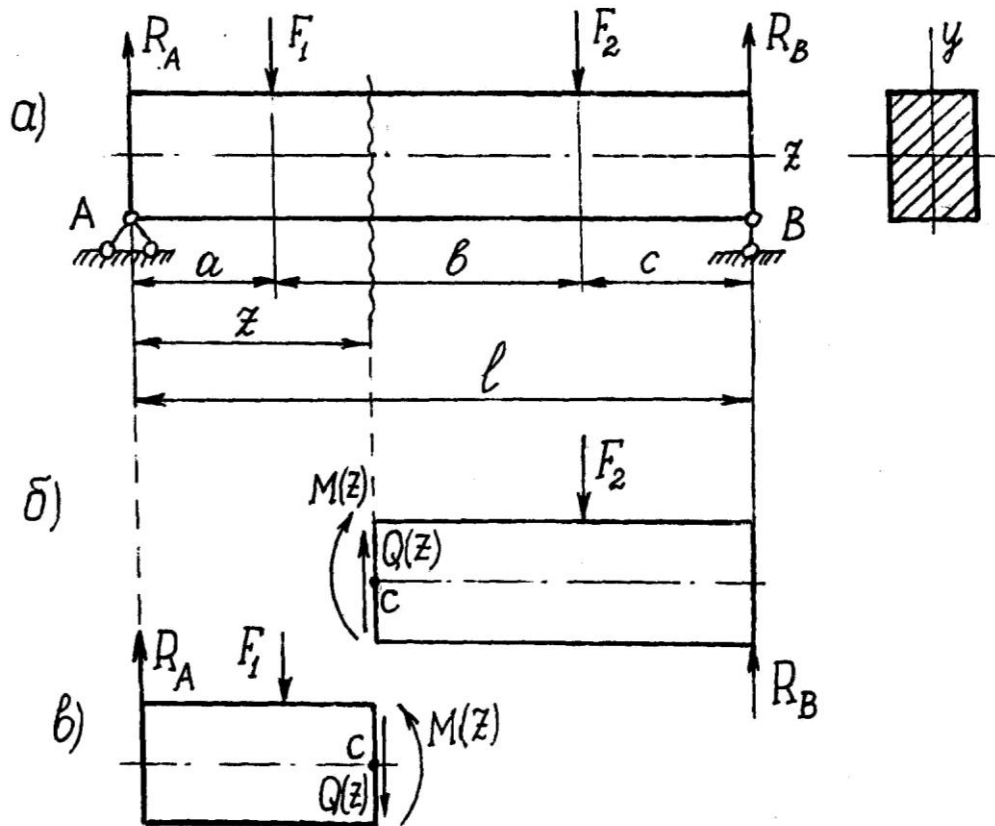


Рис. 7.4

При відкиданні правої частини балки її дію на ліву частину треба замінити на основі третього закону Ньютона зусиллями такої же величини і зворотно напрямленими (рис.7.4, в).

Поперечна сила  $Q(z)$  чисельно дорівнює алгебраїчній сумі проєкцій на вертикальну вісь  $y$  зовнішніх сил, що розміщені з однієї сторони (ліворуч або праворуч) від даного перерізу. Причому додатні вважаються ті сили, які намагаються повернути розглядувану частину балки за годинниковою стрілкою, і від'ємними – які намагаються ту ж саму частину балки повернути проти годинникової стрілки (рис.7.5,а).

Згинальний момент  $M(z)$  у будь-якому поперечному перерізі балки чисельно дорівнює алгебраїчній сумі моментів всіх зовнішніх сил і пар сил, що діють по один бік від розглядуваного перерізу, відносно осі  $x$ , що проходить через центр ваги цього перерізу.

Правило знаків для згинального моменту можна пов'язати з характером деформації балки. Згинальний момент вважають додатнім, якщо балка згинається опуклістю донизу (“дощ збирається”) і від'ємним – при вигині балки опуклістю догори (“вода виливається”) (рис.7.5,б). Отже, при додатньому згинальному моменті розтягнуті волокна розміщуються знизу, а при від'ємному – вгорі.

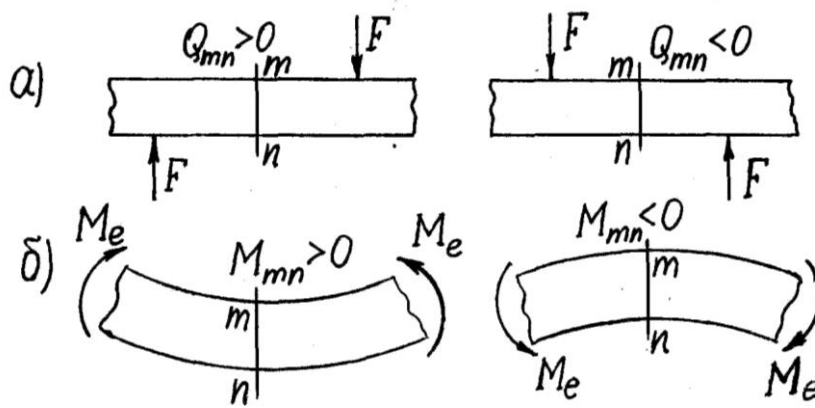


Рис. 7.5

На основі аналітичних виразів для  $Q(z)$  і  $M(z)$  будуть графіки зміни цих величин довжиною балки, що називаються епюрами поперечних сил  $Q(z)$  і згинальних моментів  $M(z)$ .

### 7.3. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ ЗАЛЕЖНОСТІ МІЖ ЗГИНАЛЬНИМИ МОМЕНТАМИ, ПОПЕРЕЧНОЮ СИЛОЮ ТА ІНТЕНСИВНІСТЮ РОЗПОДІЛЕНОГО НАВАНТАЖЕННЯ

Розглянемо балку, навантажену розподіленим навантаженням інтенсивності  $q(z)$  (рис.7.6,а).

Двома безмежно близькими поперечними перерізами виділимо з балки елемент довжиною  $dz$ . На цей елемент діє розподілене навантаження, яке на довжині  $dz$  можна вважати рівномірно розподіленим, та згинальні моменти і поперечні сили, що замінюють собою дію частин балки, розміщених ліворуч і праворуч від виділеного елемента. Приймаючи, що згинальні моменти та поперечні сили додатні, показуємо їх напрямки згідно з прийнятим нами правилом знаків (рис.7.6,б).

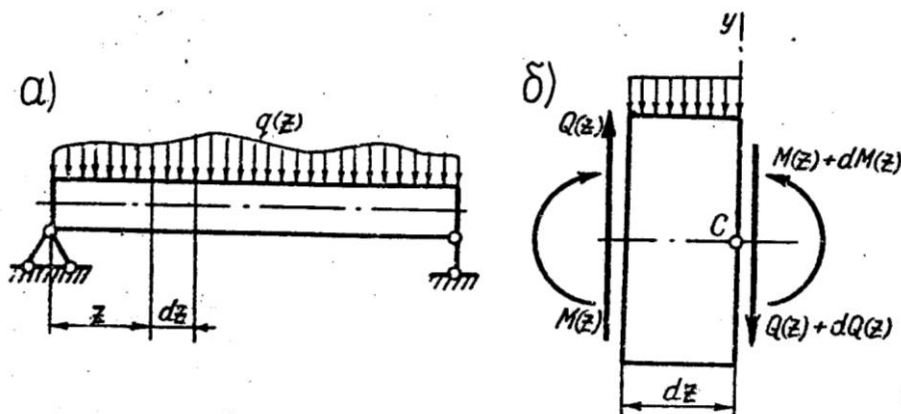


Рис. 7.6

Як згинальні моменти, так і поперечні сили можуть змінюватись при переході від одного перерізу до другого. При безмежно близькій відстані між перерізами згинальні моменти і поперечні сили, що діють праворуч від

елемента, будуть відрізнятися від значень ліворуч від нього на безмежно малі величини  $dM$  і  $dQ$ .

Під дією прикладеного навантаження елемент перебуває у рівновазі. З умов рівноваги одержуємо:

$$\sum Y=0: Q(z) + q(z)dz - Q(z+dz) = 0,$$

звідки

$$q(z) = \frac{dQ(z)}{dz}; \quad (7.1)$$

$$\sum M_c=0: M(z) + Q(z)dz + q(z)\frac{dz^2}{2} - M(z+dz) = 0,$$

звідки після нехтування квадратом малої величини

$$Q(z) = \frac{dM(z)}{dz}. \quad (7.2)$$

Диференціюємо (7.2) ще раз по змінній  $z$ . Враховуючи (7.1), дістанемо при цьому:

$$q(z) = \frac{d^2M(z)}{dz^2}. \quad (7.3)$$

Як видно з одержаних диференціальних залежностей, функції  $M(z)$ ,  $Q(z)$  і  $q(z)$  пов'язані між собою, і вид однієї із них зумовлює вид двох інших. Ці залежності доцільно використовувати при побудові епюр  $M(z)$  і  $Q(z)$ .

У переважній більшості випадків вирази для згинальних моментів і поперечних сил є поліномами. Із залежності (7.1) і (7.2) видно, що степінь полінома для згинального моменту буде на одиницю вищий від степеню поліному для поперечної сили, а для поперечної сили на одиницю вищий від степеню полінома для розподіленого навантаження.

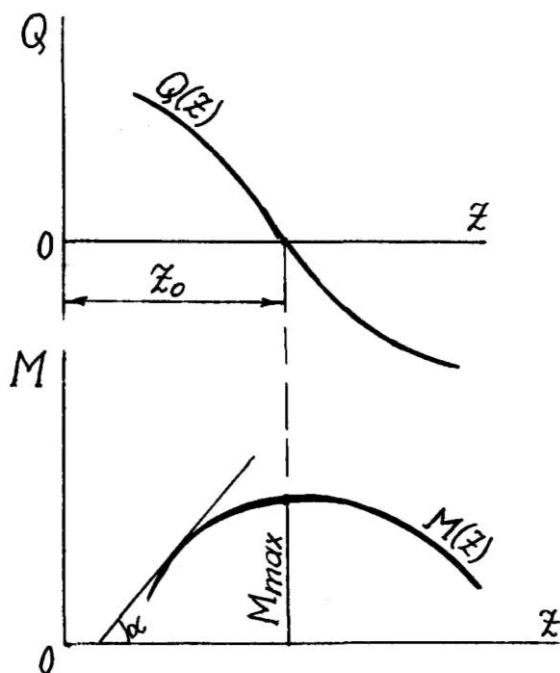


Рис. 7.7

Зокрема, якщо на певному відрізку балки немає розподіленого навантаження, тобто коли  $q=0$ , то на цьому ж відрізку  $Q(z)=\text{const}$ , а  $M(z)$  є лінійною функцією; коли  $q=\text{const}$ , то  $Q(z)$  є лінійною функцією,  $M(z)$  – функцією другого степеня і т.д.

Якщо на певному відрізку балки  $Q(z)>0$ , тобто  $\frac{dM(z)}{dz} = \text{tg}\alpha > 0$  (рис.7.7), то на цьому ж відрізку  $M(z)$  зростає з ростом абсциси  $z$ ; коли ж  $Q(z)<0$ , то на даному відрізку балки  $M(z)$  буде зменшуватись. У точці з абсцисою  $z_0$ , для якої  $Q(z_0)=0$ , згинальний момент набуває екстремального значення:  $M(z_0)=M_{\text{max}}$ . Таким чином, умова  $Q(z)=0$  дає дуже зручний спосіб для визначення того перерізу, у якому

згинальний момент набирає екстремального значення (виняток може бути тоді, коли на балку діють, крім інших навантажень, також і зосереджені пари сил, які викликають розрив функції  $M(z)$ ).

Коли  $Q=0$  не у точці, а на певному відрізку балки, тоді на цьому ж відрізку  $M=\text{const}$ . Це буде випадок так званого чистого згину.

#### 7.4. ЕПЮРИ ЗГИНАЛЬНИХ МОМЕНТІВ І ПОПЕРЕЧНИХ СИЛ

Розглянемо кілька найпростіших прикладів побудови епюр згинальних моментів і поперечних сил. При цьому треба користуватися поданими вище правилами для визначення  $Q(z)$  і  $M(z)$  через зовнішні сили і мати на увазі диференціальні залежності між ними. Зокрема, коли до балки не прикладено розподілених навантажень, як уже вказувалось, епюри згинальних моментів і поперечних сил будуть утворюватися відрізками прямих ліній. Тому для їх побудови досить знайти характерні значення ординат епюр і з'єднати їх прямими відрізками. Це значно спрощує процес побудови і попереджає можливі помилки.

1. Проста балка, навантажена у довільній точці прольоту (рис.7.8,а). Застосовуємо принцип звільнення від зв'язків, замінюючи їх реакціями (рис.7.8,б). Складаємо рівняння рівноваги і знаходимо реакції опор:

$$\sum z=0: H_A = 0;$$

$$\sum M_A = 0: R_B \overbrace{(+b)} = Fa = 0, R_B = \frac{F \cdot a}{\overbrace{(+b)} \overbrace{(+2)}} = \frac{10 \cdot 3}{\overbrace{(+2)}} = 6 \text{кН};$$

$$\sum M_B = 0: -R_A \overbrace{(+b)} = Fb = 0, R_A = \frac{F \cdot b}{\overbrace{(+b)} \overbrace{(+2)}} = \frac{10 \cdot 2}{\overbrace{(+2)}} = 4 \text{кН}.$$

Зробимо перевірку правильності визначення реакцій опор:

$$\sum Y = R_A + R_B - F = 6 + 4 - 10 = 0.$$

Будуємо епюру поперечних сил  $Q$ . На ділянці  $a$  довільно проводимо переріз балки (рис.7.8,б). Розглянемо ліву частину балки  $z_a$  (рис.7.8,в). Як ми вже знаємо, у перерізі будуть діяти поперечна сила  $Q(z_a)$  та згинальний момент  $M(z_a)$ . Складаємо вирази для  $Q$  і  $M$  на ділянці  $a$ :  $Q(z_a) = R_A = 4 \text{кН} = \text{const}$  (сила  $R_A$  взята додатньою, тому що вона намагається повернути розглядовану частину балки відносно перерізу за годинниковою стрілкою);  $M(z_a) = R_A \cdot z_a$ ,  $z_a \in [0; a]$  (момент сили  $R_A$  взятий додатним, тому що вона деформує розглядовану частину балки опуклістю вниз (див.рис.7.8,в), тобто “вода затримується”).  $M(z_a)$  змінюється за лінійним законом, тому достатньо буде врахувати два значення згинального моменту:  $M(z_a=0) = 0$  і  $M(z_a=3) = 4 \cdot 3 = 12 \text{кН} \cdot \text{м}$ . За одержаними розрахунками будуємо епюри  $Q(z_a)$  та  $M(z_a)$  - епюри поперечних сил і згинальних моментів на ділянці  $a$  (рис.7.8,г,д).

Аналогічно діємо при побудові епюри  $Q(z_\epsilon)$  і  $M(z_\epsilon)$ , тобто при побудові епюри поперечних сил та згинальних моментів на ділянці  $\epsilon$ :  $Q(z_\epsilon) = -R_B = -6 \text{кН} = \text{const}$  (величина  $R_B$  від'ємна, тому що намагається розглядовану частину балки довжиною  $z_\epsilon$  повернути проти годинникової стрілки (див.рис.7.8,в));



$M(z_0)=R_B \cdot z_0$ ,  $z_0 \in [0; 6]$  (добуток  $R_B \cdot z_0$  додатний, тому що  $R_B$  як і  $R_A$  у попередньому випадку деформує відрізок балки  $z_0$  опуклістю вниз):  $M(z_0=0)=0$ ,  $M(z_0=2)=6 \cdot 2=12 \text{ кН} \cdot \text{м}$ .

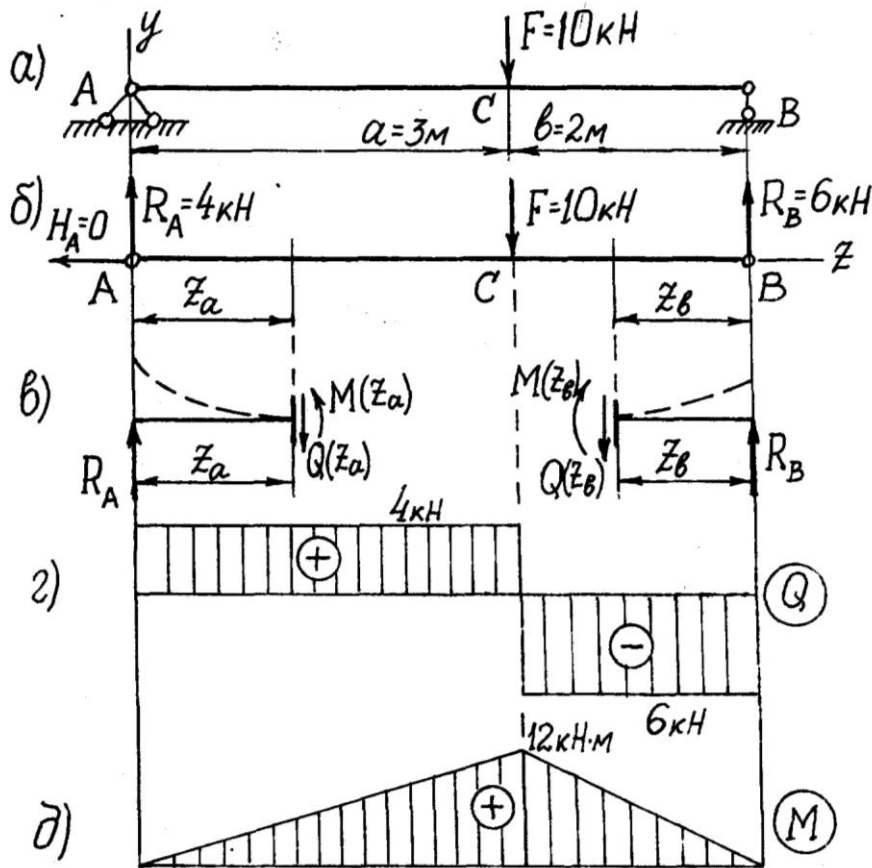


Рис. 7.8

Крім використаних при побудові епюр висновків з диференціальних залежностей підтверджується на даному прикладі й інші висновки: коли рухатися зліва направо, то на ділянці з додатною поперечною силою згинальний момент зростає, на ділянці з від'ємних значень через нульову точку, згинальний момент набуває максимального значення.

Зауважимо ще, що у точках прикладання зосереджених сил (точки А, С і В) поперечна сила змінюється стрибками, рівними величині прикладеної зовнішньої сили. На епюри  $M(z)$  цим точкам відповідають точкам перелому, оскільки раптовій зміні величини відповідає раптова зміна величини тангенса кута нахилу дотичної до кривої  $M(z)$ .

2. Проста балка (рис.7.9,а) навантажена зосередженою парою сил з моментом  $M_e$  (індекс е від external (англ.)-зовнішній).

У цьому прикладі докладні пояснення, щоб не повторюватися, не приводяться.

Реакції опор балки покажемо прямо на заданій схемі, умовно відкинувши опори (див.рис.7.9,а). Напрями  $R_A$  та  $R_B$  довільні; зрозуміло, що горизонтальна складова реакції шарнірно-нерухомої опори А  $H_A=0$ , тому її не показано.

$$\sum M_A = 0: R_B \cdot (+b) + M_e = 0, R_B = \frac{-M_e}{(+b)} = \frac{-10}{(+2)} = -2 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = 0: -R_A \overbrace{(+b)}^{(+b)} + M_e = 0, R_A = \frac{M_e}{\overbrace{(+b)}^{(+b)}} = \frac{10}{\overbrace{(+2)}^{(+2)}} = 2 \text{кН}.$$

У зв'язку з тим, що реакція  $R_B$  одержана з від'ємним знаком, попередній її напрямок треба змінити на протилежний. Розрахункова схема набуває вигляду, показаного на рис.7.9,б.

Будуємо епюри  $M(z)$  і  $Q(z)$ .

На ділянці **a**:

$$Q \overbrace{(+)}^{(+)} = R_A = 2 \text{кН} = \text{const};$$

$$M \overbrace{(+)}^{(+)} = R_A z_a, z_a \in [0, a]; M \overbrace{(+)}^{(+)} = 0, M \overbrace{(+)}^{(+)} = R_A \cdot a = 2 \cdot 3 = 6 \text{кНм}.$$

На ділянці **b**:

$$Q \overbrace{(-)}^{(-)} = R_B = 2 \text{кН} = \text{const}$$

$$M \overbrace{(-)}^{(-)} = -R_B z_b, z_b \in [0, b]; M \overbrace{(-)}^{(-)} = 0, M \overbrace{(-)}^{(-)} = -R_B \cdot b = -2 \cdot 2 = -4 \text{кНм}.$$

За одержаними даними на рис.7.9,в,г побудовані відповідні епюри.

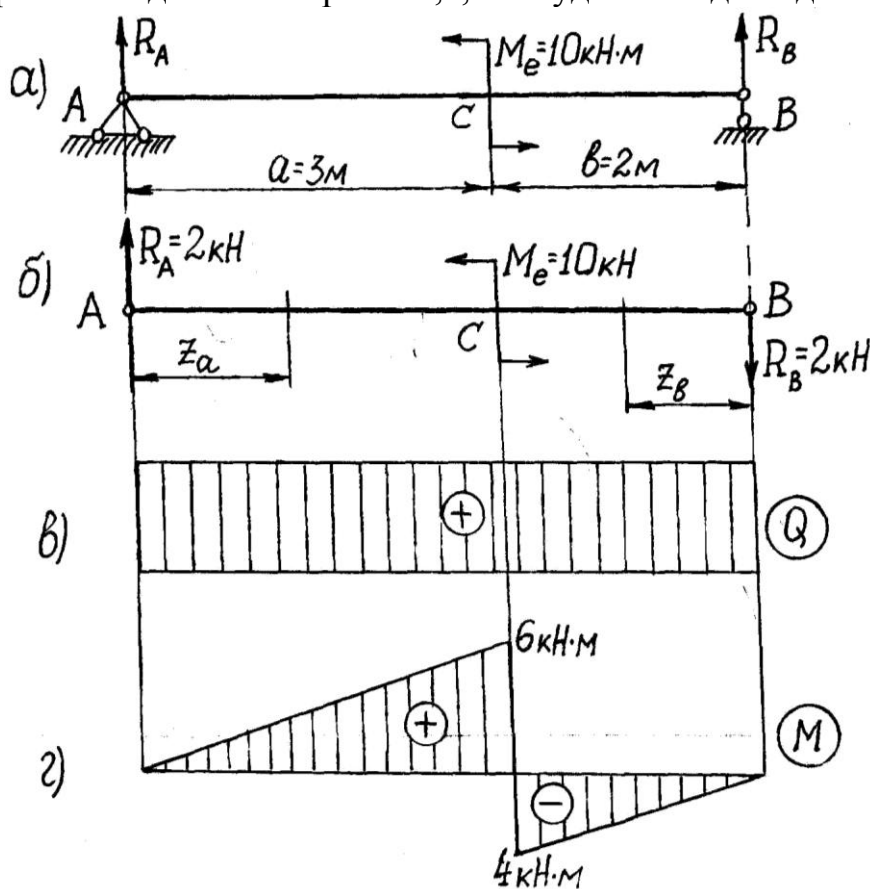


Рис. 7.9

Зауважимо, що на епюрі  $M(z)$  у перерізі  $C$ , де прикладена зосереджена пара сил, виступає стрибок на величину моменту цієї пари.

3. Проста балка з рівномірним розподіленням навантаженням  $q$  (рис.7.10,а).

а) звільняємося від зв'язків, замінивши їх реакціями (рис.7.10,б).

Внаслідок симетричного навантаження  $R_A = R_B = ql/2 = 4 \cdot 5/2 = 10 \text{кН}$ . Проводимо переріз у будь-якому місці балки, відкидаємо праву частину і розглядаємо ліву.

Для складання виразів для  $Q(z)$  та  $M(z)$  розподілене навантаження замінюємо рівнодійною на довжині  $z$ :  $qz$  (рис.7.10,в). Тоді  $Q(z)=R_A-qz$ , а  $M(z)=R_A \cdot z - qz^2/2$ , де  $z \in [0; l]$ .

Поперечна сила змінюється за законом прямої, а згинальний момент – за законом квадратної параболи.

Для побудови епюри  $Q$  достатньо мати два значення:  $Q(z=0)=10\text{кН}$  і  $Q(z=5)=-10\text{кН}$  (рис.7.10,г).

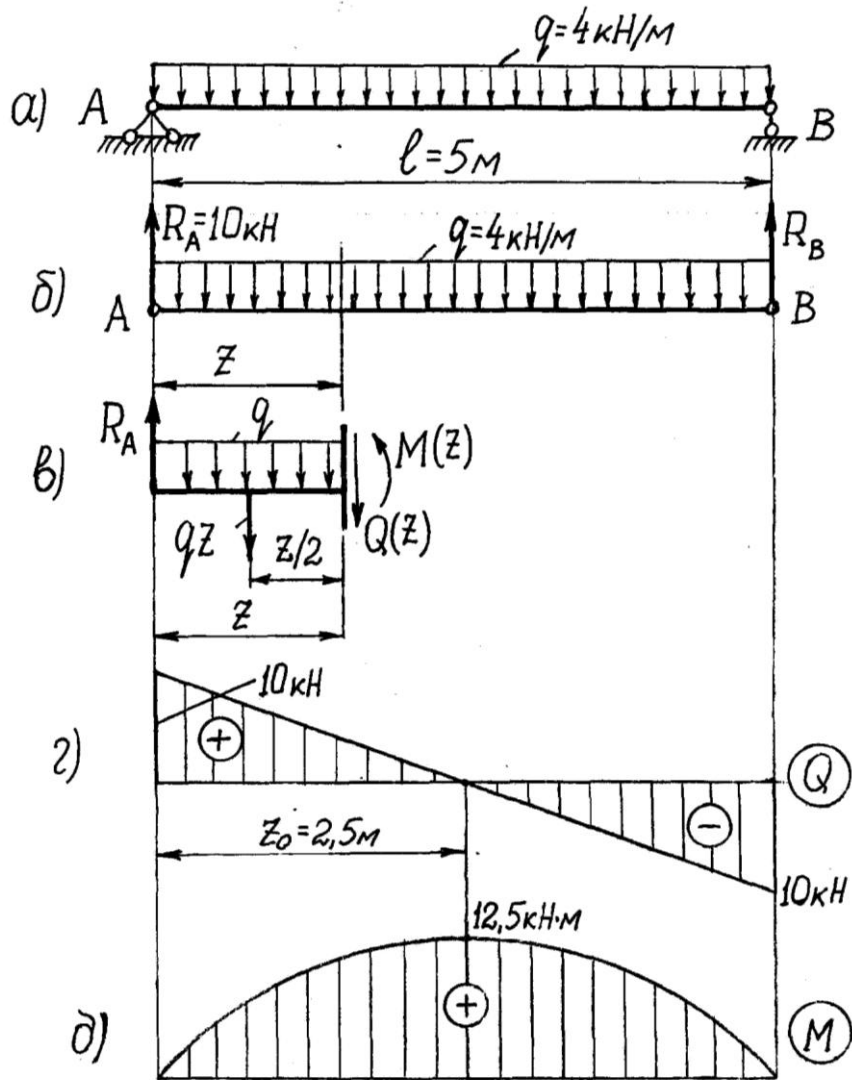


Рис. 7.10

Для побудови епюри  $M$  потрібно принаймні мати три значення функції  $M(z)$ . Тоді, беручи до уваги, що епюра  $Q(z)$  перетинає базову лінію ( $Q=dM(z)/dz=0$ ), знайдемо:  $M(z=0)=0$ ,  $M(z=5)=0$  і  $M(z=z_0)=10 \cdot 2,5 - 4 \cdot 2,5^2/2 = 12,5\text{кНм}$ .

Значення  $z_0$  легко знаходиться, якщо  $Q(z=z_0)=R_A - qz_0=0$ , звідки  $z_0=R_A/q=10/4=2,5\text{м}$ .

4.Консоль з рівномірно розподіленим навантаженням інтенсивності  $q$  (рис.7.11,а). При побудові епюр  $Q$  та  $M$  для консолі можна не визначати опорних реакцій, коли при складанні виразів для внутрішніх сил брати до уваги сили, прикладені зі сторони вільного кінця консолі.

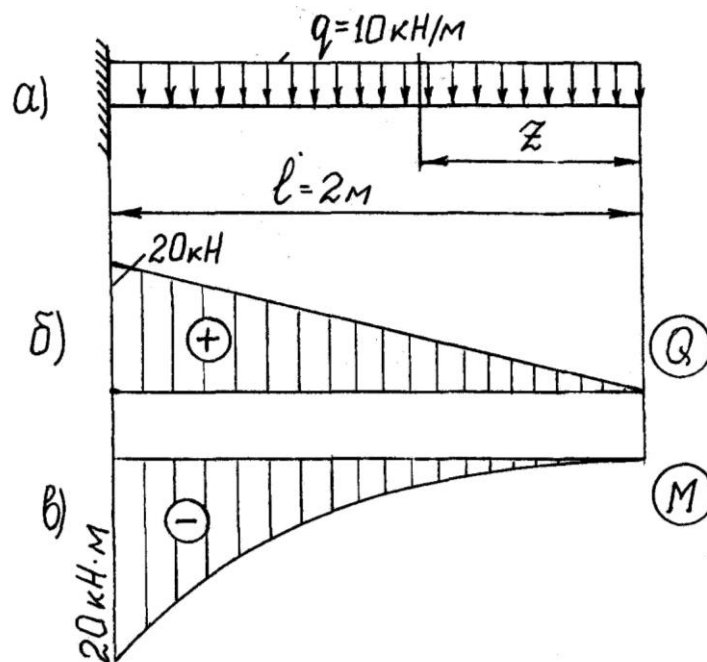


Рис. 7.11

Прийнявши початок осі  $z$  на вільному кінці консолі, для  $z \in [0; l]$  будемо мати:  $Q(z)=qz$ ;  $M(z)=-qz^2/2$ .

Як видно, епюра  $Q(z)$  буде прямою, а  $M(z)$  – квадратною параболою. Характерні значення поперечної сили і згинального моменту:  $Q(z=0)=0$ ,  $Q(z=l)=ql=10 \cdot 2=20 \text{ кН}$ ;  $M(z=0)=0$ ,  $M(z=l)=-ql^2/2=-10 \cdot 2^2=-20 \text{ кНм}$ .

Характер епюри  $Q(z)$  вказує на те, що крива згинальних моментів повинна бути дотичною до осі  $z$  у вільному кінці консолі.

Значення поперечної сили і згинального моменту в опорному перерізі консолі дорівнюють відповідним реакціям:  $R_A=20 \text{ кН}$ ,  $M_A=20 \text{ кНм}$ .

За одержаними даними будуюмо епюри  $Q(z)$  і  $M(z)$  рис.7.11,б,в.

Побудова епюр для більш складних випадків навантаження балки принципово нічим не відрізняється від розглянутих нами побудов для простих навантажень. На ділянках балки, де немає розподілених навантажень, досить знаходити характерні значення ординат епюр і сполучати їх відрізками прямих. Для спрощення запису загальних виразів  $Q(z)$  і  $M(z)$  можна початок відліку і його напрям обирати для окремих ділянок балки по-різному залежно від конкретних умов, тобто використовувати ковзну систему координат. Покажемо це на прикладі консольної балки (рис.7.12,а).

Визначемо реакції опор:

$$\sum M_A = 0: -R_B \overbrace{(\leftarrow + b)} + M_e + \frac{qa^2}{2} = 0, R_B = \frac{M_e + \frac{qa^2}{2}}{\overbrace{(\leftarrow + b)}} = \frac{20 + \frac{8 \cdot 4^2}{2}}{\overbrace{(\leftarrow + 2)}} = 14 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = 0: R_A \overbrace{(\leftarrow + b)} + M_e - qa \left( \frac{a+b}{2} \right) = 0, R_A = \frac{qa \left( \frac{a+b}{2} \right) - M_e}{\overbrace{(\leftarrow + b)}} = \frac{8 \cdot 4 \left( \frac{4}{2} + 2 \right) - 20}{\overbrace{(\leftarrow + 2)}} = 18 \text{ кН};$$

Перевірка:  $\sum Y = R_A + R_B - qa = 18 + 14 - 8 \cdot 4 = 0$ .

Для будь-якого перерізу ділянки  $a$ :

$$Q(z_a) = R_A - qz_a; M(z_a) = R_A z_a - \frac{qz_a^2}{2}, z_a \in [0; a]$$

$Q(z_a)$  - пряма лінія. Отже достатньо знайти її значення при  $z_a=0$  і  $z_a=4$ :

$$Q(z_a=0) = 18 \text{ кН}, Q(z_a=4) = -14 \text{ кН}.$$

епюра  $Q(z_a)$  перетинає нульову лінію на відстані  $z_a^0$ ;  $Q(z_a=z_a^0) = 0 = R_A - qz_a^0$ , звідки  $z_a^0 = R_A/q = 18/8 = 2,25 \text{ м}$ .

Вирахуємо значення  $M$  на ділянці  $a$ :

$$M(z_a=0) = 0; M(z_a=2,25) = 20,25 \text{ кНм}; M(z_a=4) = 8 \text{ кНм}.$$

Проводимо переріз на ділянці  $b$  і будемо розглядати ту частину балки, яка лежить праворуч від цього перерізу, тобто частину балки довжиною  $z_b+c$ :

$$Q(z_b) = -R_B = -14 \text{ кН} = \text{const};$$

$$M(z_b) = -M_e = R_B z_b, z_b \in [0; b]; M(z_b=0) = -20 \text{ кНм}, M(z_b=2) = 8 \text{ кНм}.$$

$$\text{На ділянці } c: Q(z_c) = 0; M(z_c) = M_e = -20 \text{ кНм} = \text{const}.$$

За одержаними даними на рис. 7.12, б, в побудовані відповідні епюри.

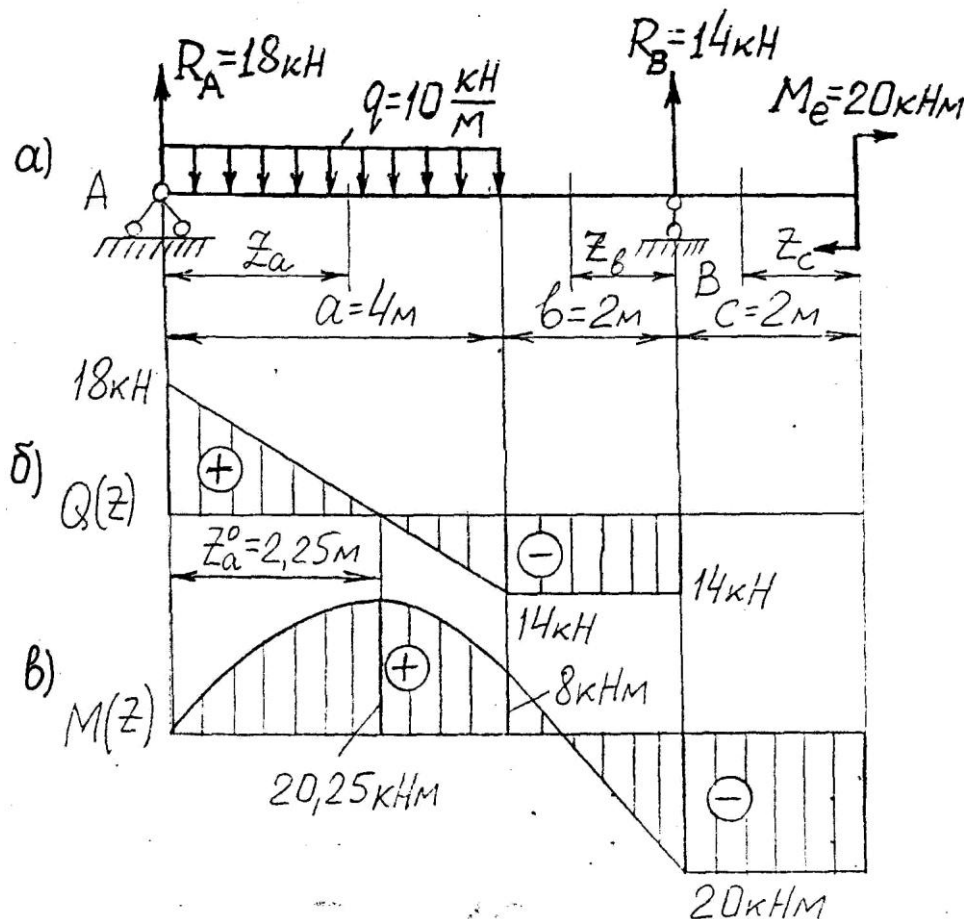


Рис. 7.12

Слід звернути увагу на те, що в перерізі С сходяться дві ділянки (a і b). Тут мають місце однакові значення  $Q$ , тобто тангенси кута нахилу дотичної до  $M(z)$  і прямої на ділянці  $b$  однакові. Тому дотична в точці С до кривої  $M(z_a)$  і пряма співпадають. У відповідності з цим і потрібно будувати епюру  $M(z)$ .

## 7.5. НАПРУЖЕННЯ У ПОПЕРЕЧНИХ ПЕРЕРІЗАХ БАЛКИ ПРИ ПОПЕРЕЧНОМУ ЗГІНІ

Поперечна сила та згинальний момент, які ми при побудові їх епюр виражали через зовнішні сили, але які за своєю природою є рівнодійними відповідних внутрішніх зусиль, можна зобразити через ці зусилля.

Поперечна сила  $Q(z)$ , що виникає у площині поперечного перерізу балки, є рівнодійною елементарних дотичних зусиль  $\tau dA$  (рис.7.13,а):

$$Q(z) = \int_A \tau dA.$$

Згинальний момент  $M(z)$ , що виникає у площині, перпендикулярній до площини поперечного перерізу балки, є рівнодійною моментів елементарних нормальних зусиль  $\sigma dA$  (рис.7.13,б):

$$M(z) = \int_A \sigma dA.$$

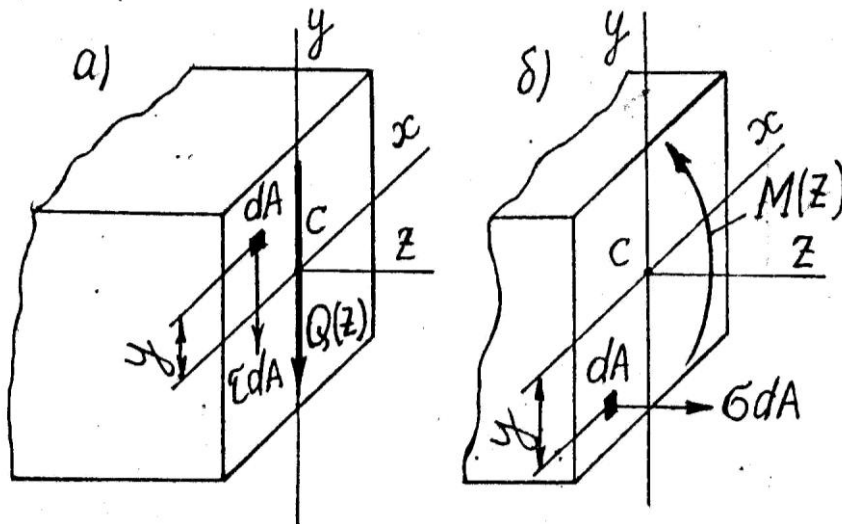


Рис. 7.13

Оскільки ліві сторони виразів (4) і (5) можна передати через зовнішні сили, їх можна розглядати також як умови рівноваги, з яких треба визначити нормальні та дотичні напруження. Ця задача статично невизначна, тому що інтегральні залежності (7.4) і (7.5) можуть задовольнятися при різних законах розподілу напружень у перерізі балки. У загальній постановці задача розв'язується методами теорії пружності. У науці опору матеріалів розбивають розв'язання задачі на два етапи: використовуючи нові гіпотези, знаходять окремо нормальні напруження для випадку, коли поперечних сил і зв'язаних з ними дотичних напружень немає, тобто для чистого згину, і окремо дотичні напруження для поперечного згину.

## 7.6. НОРМАЛЬНІ НАПРУЖЕННЯ ПРИ ЧИСТОМУ ЗГІНІ БАЛКИ

Для визначення нормальних напружень у поперечному перерізі балки при її чистому згині розглянемо один з можливих випадків чистого згину, показаний на рис.7.14,а.

Припускаємо, як і раніше, що поперечний переріз балки симетричний відносно площини дії навантаження.

Застосовуючи метод перерізів, проведемо у довільній точці осі балки січну площину, перпендикулярну до неї. Січна площина розділяє балку на дві частини: ліву, яку залишаємо, і праву, дію якої на ліву частину, що залишилась, замінюємо системою нормальних напружень  $\sigma$ .

У центрі ваги розглядуваного перерізу балки поміщаємо початок прямокутної системи координат, вісь  $z$  якої суміщаємо з віссю балки, а осі  $x$  і  $y$  – з головними центральними осями перерізу (рис.7.14,б).

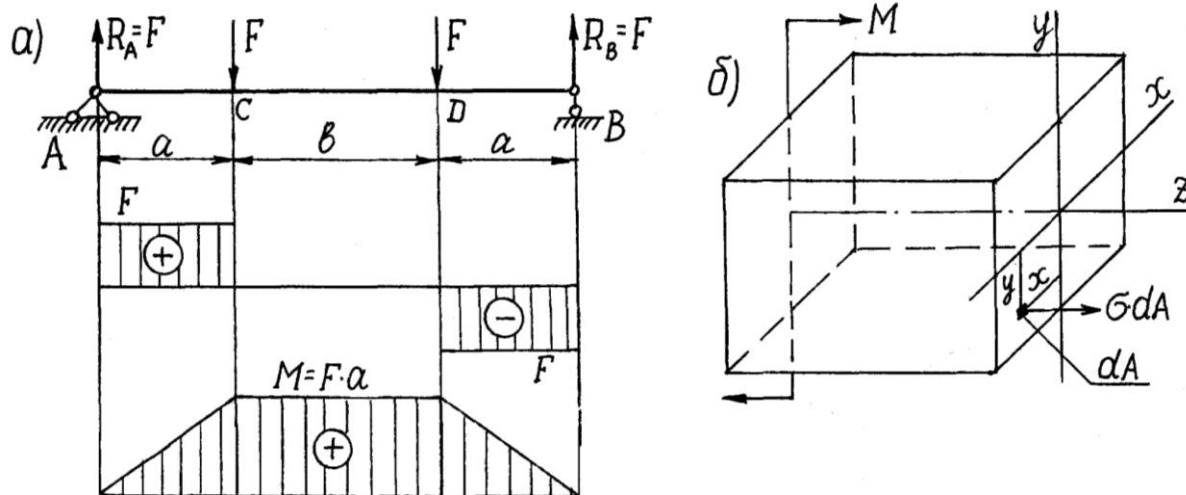


Рис. 7.14

Умови рівноваги внутрішніх і зовнішніх сил, прикладених до тієї частини балки, що залишилась, набирають вигляду:

$$\sum Z = 0: \int_A \sigma dA = 0; \sum X = 0; \sum Y = 0; \sum M_y = 0: \int_A x \sigma dA = 0; \sum M_z = 0; \sum M_x = 0: \int_A y \sigma dA - M = 0.$$

Фактично маємо три рівняння:

$$\int_A \sigma dA = 0; \int_A x \sigma dA = 0; \int_A y \sigma dA = M. \quad (7.6)$$

Дослід показує, що при згині балки її спершу пряма вісь, а також усі її волокна, паралельні осі, скривляються. Одночасно зі скривленням поздовжніх волокон балки відбуваються їх поздовжні деформації: волокна, що лежать на опуклій стороні балки, подовжуються, а ті, що знаходяться на ввігнутій стороні, скорочуються. Особливо чітко можна це спостерігати при згині гумової моделі

балки з нанесеною на бічній стороні сіткою квадратів (рис.7.15,а,б).

Оскільки перехід від подовжених до скорочених волокон плавний, між ними повинен знаходитися шар волокон, що не змінили своєї початкової довжини. Цей шар називається нейтральним шаром. Його положення нам ще не відоме. Прийmemo, що геометрична вісь балки  $CD$  лежить у нейтральному шарі (рис.7.15,а,б).

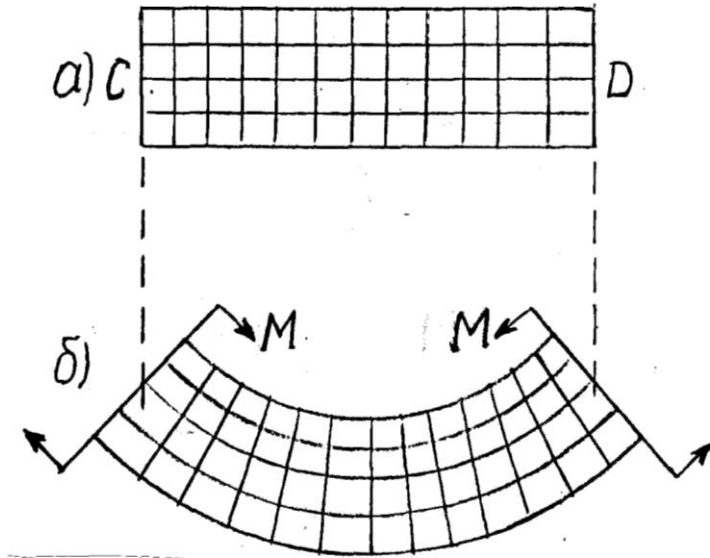


Рис. 7.15

Далі, при згині моделі можна спостерігати, що вертикальні сторони квадратів, нанесених на її бічній поверхні, повертаються одна відносно одної, залишаючись при цьому прямими і перпендикулярними до зігнутої осі (рис.7.15,б). Вважаючи, що матеріал в середині балки поводить себе так само, як на її поверхні, можемо звідси зробити висновок, що її поперечні перерізи при чистому згині залишаються плоскими, нормальними до осі і

повертаються один відносно одного на певний кут.

Таким чином, при розгляді чистого згину використовується знову ж гіпотеза плоских поперечних перерізів, як і при розгляді простого розтягу або стиску прямого стержня та кручення стержня круглого поперечного перерізу. Тут вона також підтверджується як експериментально, так і теоретично, методами теорії пружності.

Застосовуючи гіпотезу плоских поперечних перерізів, можна легко скласти рівняння переміщень, яке разом з одержаним раніше рівнянням статички дає можливість розв'язати задачу чистого згину балки.

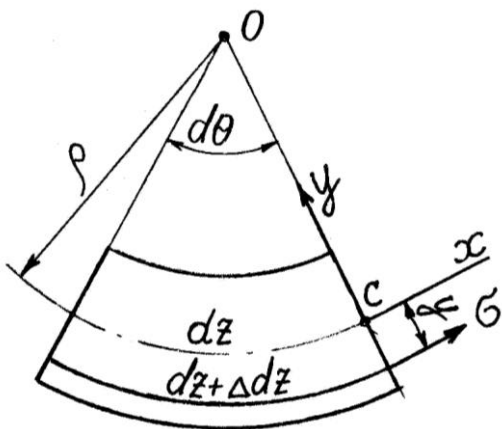


Рис. 7.16

Для цього виділимо з деформованої балки безмежно малий елемент довжиною  $dz$  (рис.7.16). Довжина осі елемента як частина осі балки, що лежить у нейтральному шарі, не змінюється при згині. Коли ж взяти довільне поздовжене волокно балки з ординатою  $y$ , то його довжина буде різнитися від довжини  $dz$  на приріст  $\Delta dz$ . Радіус кривизни нейтрального шару балки позначимо через  $\rho$ , тоді радіус кривизни довільного волокна буде  $\rho + y$ . З

рис.7.16 знаходимо



$$\frac{dz+\Delta dz}{dz} = \frac{\rho+y}{\rho}$$

звідки

$$\frac{\Delta dz}{dz} = \frac{y}{\rho}$$

Враховуючи, що  $\Delta dz/dz$  є відносною лінійною деформацією  $\varepsilon$  довільного волокна балки в напрямку осі  $z$ , можна останню формулу записати так:

$$\varepsilon = \frac{y}{\rho} \quad (7.7)$$

Прийmemo, що при згині балки її волокна вільно деформуються у поперечному напрямку і не тиснуть одне на одне. Тоді можемо для довільного поздовжнього волокна записати зв'язок між його лінійною деформацією і напруженням, що виникає в ньому, за формулою закону Гука для лінійного напруженого стану  $\sigma = E \cdot \varepsilon$ . Підставляючи в цю формулу значення  $\varepsilon$  із (7.7), одержимо:

$$\sigma = E y / \rho \quad (7.8)$$

Остання формула вказує на те, що напруження  $\sigma$  залежить лінійно від координати  $y$  у точці перерізу. При  $y=0$ , тобто на осі  $x$ , нормальні напруження дорівнюють нулевi.

Геометричне місце точок, у яких нормальне напруження у поперечному перерізі балки дорівнюють нулевi, називається нейтральною віссю поперечного перерізу. Нейтральна вісь є лінією перетину нейтрального шару з площиною поперечного перерізу балки.

Для закінчення задачі і встановлення зв'язку між нормальними напруженнями і згинальним моментом залишається ще сумісно розв'язати систему рівнянь статки (7.6) і рівняння (7.8).

Підставляючи значення нормального напруження  $\sigma$  за формулою (7.8) у рівняння статки, дістанемо:

$$\frac{E}{\rho} \int y dA = 0; \quad (7.9)$$

$$\frac{E}{\rho} \int x y dA = 0; \quad (7.10)$$

$$\frac{E}{\rho} \int y^2 dA = 0. \quad (7.11)$$

Таким чином, ми одержали систему трьох рівнянь, у яких невідомою виступає кривизна зігнутої осі балки  $1/\rho$ . Після скорочення на  $E/\rho$  рівняння (7.9) і (7.10) набувають вигляду:

$$\int_A y dA = S_x = 0; \quad \int_A x y dA = I_{xy} = 0.$$

Одержані умови: рівність нулевi статичного моменту інерції вимагають, щоб осі  $x$  і  $y$  були головними центральними осями поперечного перерізу балки.

Кривизна зігнутої осі балки, визначена з рівняння (7.11), виражається формулою, яку можна розглянути також як вираз закону Гука для згину:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI_x} \quad (7.12)$$

де  $I_x = \int_A y^2 dA$  - головний момент інерції поперечного перерізу балки відносно нейтральної осі  $x$ .

Величина  $EI_x$ , що характеризує здатність балки опиратися деформації згину, називається жорсткістю при згині у площині  $Ozy$ .

Нарешті, підставляючи вираз (7.12) для кривизни зігнутої осі балки у формулу (7.8), одержимо формулу для нормальних напружень при чистому згині балки:

$$\sigma = \frac{My}{I_x} \quad (7.13)$$

Користуючись формулою (7.13), підставляють в неї абсолютне значення згинального моменту і координати точки, для якої визначається напруження, і вважають напруження додатними у розтягнутих і від'ємними у стиснутих волокнах балки.

З формули (7.13) видно, що екстремальні нормальні напруження при згині балки виникають у крайніх точках її перерізу, найбільш віддалених від нейтральної осі:

$$\sigma_{\max} = \frac{My_{\max}}{I_x}$$

Величина  $I_x/y_{\max}$  називається осьовим моментом опору перерізу балки і позначається  $W_x$ :

$$W_x = \frac{I_x}{y_{\max}} \quad (7.14)$$

Таким чином,

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W_x} \quad (7.15)$$

Оскільки переріз розглядуваної балки прямокутний, його крайні точки однаково віддалені від нейтральної осі, і за формулою (7.14) одержимо одне значення моменту опору; екстремальні напруження, що визначаються за формулою (7.15), у цьому випадку рівні за абсолютною величиною і відрізняються лише знаком. Епюра нормальних напружень при згині балки прямокутного перерізу показана на рис.7.17,а.

У загальному випадку (рис.7.17,б), коли віддалі крайніх точок перерізу від його нейтральної осі різні, знаходимо за формулою (7.14) два значення осьових моментів опору:

$$W'_x = \frac{I_x}{y'_{\max}}; \quad W''_x = \frac{I_x}{y''_{\max}}.$$

У такому випадку екстремальні нормальні напруження будуть:

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W'_x}; \quad \sigma_{\min} = \frac{-M}{W''_x}.$$

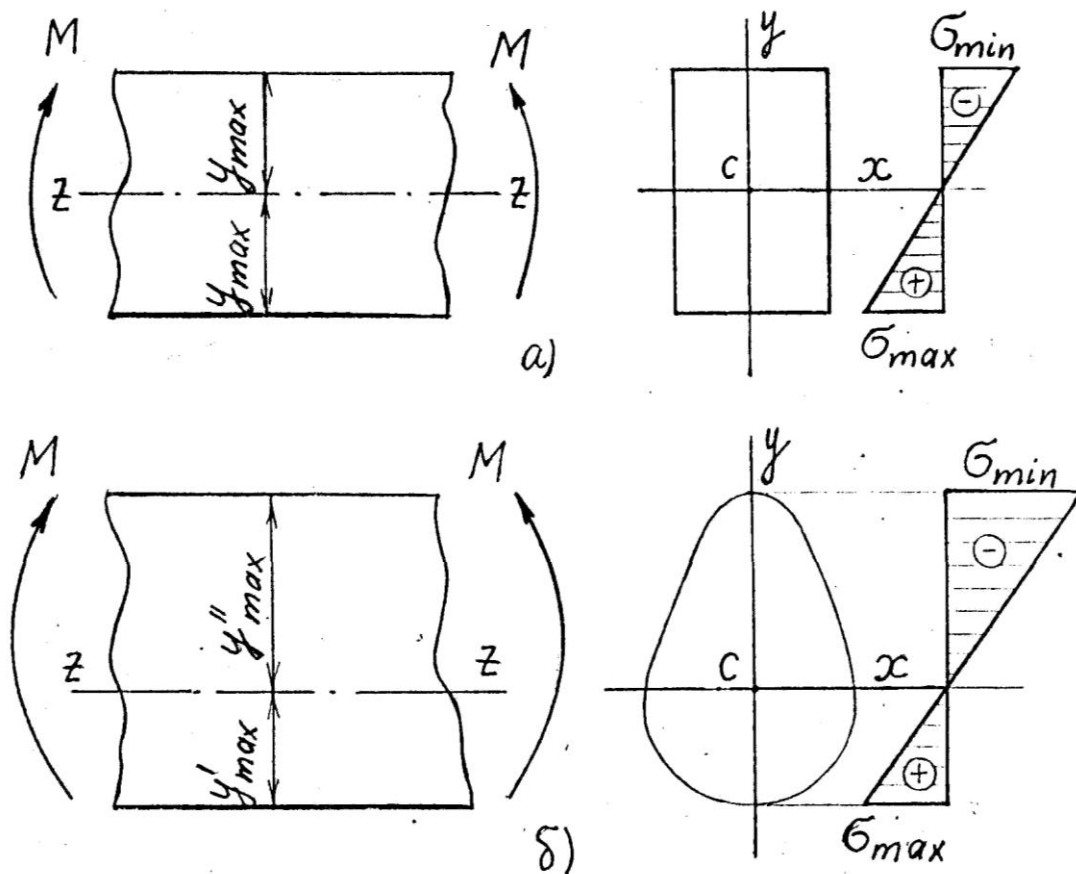


Рис. 7.17

## 7.7. НОРМАЛЬНІ НАПРУЖЕННЯ ПРИ ПОПЕРЕЧНОМУ ЗГИНІ БАЛКИ

При поперечному згині у поперечних перерізах балки, крім згинальних моментів, виникають ще й поперечні сили і зв'язані з ними дотичні напруження. При дії дотичних напружень з'являється деформація зсуву і поперечні перерізи балки скривлюються. Внаслідок цього гіпотеза плоских перерізів не відповідає дійсним деформаціям, і для визначення нормальних напружень у балці треба в кожному конкретному випадку розв'язувати складну задачу теорії пружності.

Як показують розв'язки таких задач, у деяких випадках поперечного згину нормальні напруження такі самі, як і при чистому згині. Це має місце тоді, коли поперечні сили не змінюються по довжині балки. При цьому скривлення поперечних перерізів є однаковими для всіх перерізів і тому не впливають на розподіл і величину нормальних напружень (наприклад, при згині консолі прямокутного перерізу зосередженою силою, прикладеною на її кінці). В інших випадках різниця між напруженнями, обчисленими за формулою для чистоого згину і за формулами для напружень при поперечному згині, одержаними методами теорії пружності, є тим меншою, чим більше відношення довжини прольоту  $l$  до висоти перерізу  $h$ .

Наприклад, при згині рівномірно розподіленим навантаженням простої балки прямокутного перерізу різниця ця для відношення  $l/h=2$  дорівнює 6,7%, а відношення  $l/h=4$  – менше 1,7%.

Крім того, при поперечному згині між поздовжиніми волокнами балки виникають напруження стиску, яких зовсім немає при чистому згині. Ці напруження можуть досягти великих значень, зокрема у місцях прикладання до балки великих зосереджених сил. Однак, згідно з принципом Сен-Венана, величина цих напружень дуже швидко зменшується з віддаленням перерізу від точки прикладання навантаження, і тому ці напруження мають лише місцеві значення. Їх вплив тим менший, чим більше відношення  $l/h$ .

Враховуючи наведені факти, при розрахунках на поперечний згин балок з відношенням довжини прольоту  $l$  до висоти перерізу  $h$  порядку  $l/h \geq 4 \dots 5$  нормальні напруження визначають за формулою (7.13), підставляючи в неї замість сталого згинального моменту змінний згинальний момент  $M(z)$ :

$$\sigma = \frac{M}{I_x} y, \quad (7.16)$$

де  $I_x$  - момент інерції відносно нейтральної осі перерізу.

Внаслідок зміни згинального моменту по довжині прольоту балки нормальні напруження залежать як від положення точки у перерізі, так і від положення самого перерізу. Максимальні нормальні напруження виникають у так званому небезпечному перерізі, в якому виникає максимальний згинальний момент. Для балки з поперечним перерізом, симетричним відносно нейтральної осі, максимальне нормальне напруження у небезпечному перерізі дорівнює:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W}, \quad (7.17)$$

де  $W_x$  - момент опору відносно нейтральної осі перерізу.

При розрахунках балок з відношенням  $l/h < 4$  треба користуватися більш точними формулами теорії пружності.

Елементарна теорія прямого згину балки розроблялась багатьма дослідниками, починаючи з Галілея, який вивчав згин консолі (1638р.). Основні положення теорії згину поступово уточнювались і перевірялись експериментально рядом вчених, у першу чергу Маріотом, Я.Бернуллі та Кулоном, який її остаточно завершив (1773р.). Вчені Нав'є (1824р.) та Сен-Венан (1856р.) застосували до вивчення згину методи теорії пружності і довели правильність основних результатів елементарної теорії.

## 7.8. РОЗРАХУНОК НА МІЦНІСТЬ ПРИ ЗГІНІ. РАЦІОНАЛЬНА ФОРМА ПОПЕРЕЧНОГО ПЕРЕРІЗУ БАЛКИ

У попередніх параграфах ми вивчили нормальні напруження при чистому та поперечному згині балки. Далі ми розглянемо дотичні напруження, які виникають лише при поперечному згині. Виявляється, що у переважній більшості випадків дотичні напруження грають другорядну роль і міцність

балки залежить в першу чергу від величини максимальних нормальних напружень, що виникають у її небезпечному перерізі.

При розрахунку на міцність методом допустимих напружень вважають, що міцність балки буде забезпечена, коли задовільняється умова:

$$\sigma_{\max} \leq \sigma_{adm}. \quad (7.18)$$

Підставляючи  $\sigma_{\max}$  за формулою (7.17), одержимо умову міцності балки з перерізом, симетричним відносно нейтральної осі:

$$\frac{M_{\max}}{W_x} \leq \sigma_{adm}. \quad (7.19)$$

З цієї умови випливає формула для підбору поперечного перерізу такої балки:

$$W_x \geq \frac{M_{\max}}{\sigma_{adm}} \quad (7.20)$$

За одержаним значенням осьового моменту опору підбираємо відповідний стандартний профіль або, виражаючи момент опору через геометричні розміри перерізу, визначаємо з умови (7.20) їх потрібну величину. Наприклад, для прямокутника з висотою  $h$  і шириною  $b$  осьовий момент опору, обчислений за формулою (7.14), дорівнює:

$$W_x = \frac{I_x}{y_{\max}} = \frac{bh^3}{12} \cdot \frac{2}{h} = \frac{bh^2}{6}. \quad (7.21)$$

Для балки круглого перерізу діаметром  $d$  одержимо:

$$W_x = \frac{\pi d^4}{64} \cdot \frac{2}{d} = \frac{\pi d^3}{32} \approx 0,1d^3. \quad (7.22)$$

Для перерізів, несиметричних відносно нейтральної осі за формулою (7.20) визначається менший з двох моментів опору перерізу. У випадку балок, виготовлених з матеріалів, що не однаково працюють на розтяг і стиск, перевірку міцності треба вести окремо для розтягнутих і стиснутих волокон.

З підбором поперечного перерізу балки пов'язане питання його раціональної форми. Оскільки основний вплив на міцність балки при згині мають нормальні напруження, які збільшуються із зростанням віддалі від нейтральної осі, найбільш раціональними є такі перерізи, в яких щонайбільше матеріалу розташовано далеко від нейтральної осі. Прикладом таких перерізів є перерізи типу двотавра.

Для балок, матеріал яких неоднаково працює на розтяг і стиск, раціональні несиметричні перерізи, у яких віддалі крайніх точок від нейтральної осі пропорціональні величині допустимих напружень для розтягу і стиску.

**Приклад 7.1.** Для консольної сталевий балки, яка розглянута в параграфі 7.4 (рис.7.12) підібрати двотавровий, круглий та прямокутний переріз (приймаючи для прямокутника  $h/b=2$ ) і порівняти масу одного метра довжини кожного перерізу. Допустиме напруження для сталі взяти  $\sigma_{adm}=160\text{МПа}$ .

**Розв'язання.** Максимальний згинальний момент  $M_{\max}=20,25\text{кНм}$  (див.рис.7.12,в). Потрібний момент опору:

$$W_x = \frac{M_{\max}}{\sigma_{adm}} = \frac{20,25 \cdot 10^2}{16} = 126,6 \text{см}^3,$$

де  $\sigma_{adm}=160\text{МПа}=16\text{кН/см}^2$ .

Підбираємо:

а) двотавр по ГОСТ 8239-72: № 18 ( $W_x=143\text{см}^3$ ;  $A=23,4\text{см}^2$ );

б) круглий переріз:  $0,1 d^3 \geq 126,6$ ;  $d \geq \sqrt[3]{126,6/0,1} = 10,8\text{см}$ ;

$$A = \pi d^2 / 4 = 3,14 \cdot 10,8^2 / 4 = 91,8\text{см}^2.$$

в) прямокутний переріз:  $b(2b)^2/6 \geq 126,6\text{см}^3$ ;

$$b \geq \sqrt[3]{\frac{126,6 \cdot 6}{4}} = 5,75\text{см}; \quad A = bh = 2b^2 = 2 \cdot 5,75^2 = 66\text{см}^2.$$

Відношення площин поперечних перерізів підібраних балок, а тим самим і маси одного метра дорівнюють:

$$23,4: 66: 91,8 = 1: 2,8: 3,9.$$

Одержані числа вказують, наскільки двотавр легший від балок іншого перерізу.

## 7.9. ВИЗНАЧЕННЯ ДОТИЧНИХ НАПРУЖЕНЬ

У загальному випадку згину (при поперечному згині) у поперечних перерізах балки виникають згинальні моменти та поперечні сили. Наявність згинального моменту зв'язано з виникненням у поперечних перерізах балки нормальних напружень, визначенням яких ми займалися у попередніх параграфах.

Наявність поперечної сили зв'язана з виникненням дотичних напружень у поперечних перерізах балок, а за законом парності дотичних напружень – і у її поздовжніх перерізах (рис.7.18). Для визначення дотичних напружень розглянемо спочатку балку прямокутного перерізу невеликої ширини (рис.7.19). Виріжемо з балки елемент довжиною  $dz$  і шириною  $b$  балки. На цей елемент діють такі сили: на грані 344'3' діють нормальні напруження, які згідно з формулою (7.16) дорівнюють

$$\sigma_1 = \frac{M_1 y}{I_x}, \quad (\text{a})$$

де  $M_1$  - згинальний момент у перерізі 344'3'.

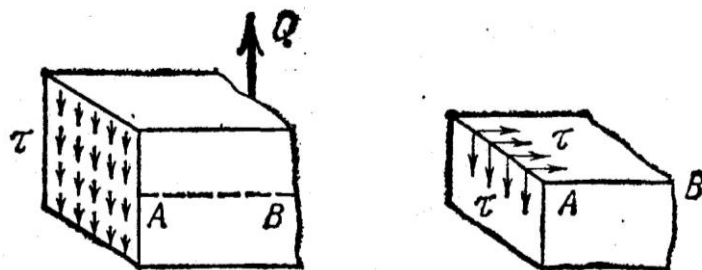


Рис. 7.18

Крім того, в указаному перерізі діють невідомі поки що дотичні напруження  $\tau$ , які завдяки незначній ширині перерізу балки можна вважати

рівномірно розподіленими за шириною перерізу (гіпотеза Журавського); на грані 122'1' діють нормальні напруження

$$\sigma_2 = \frac{M_2 y}{I_x} \quad (б)$$

і дотичні напруження  $\tau$ ; на грані 322'3' діють тільки дотичні напруження, за законом парності рівні дотичним напруженням, що діють на вертикальних гранях.

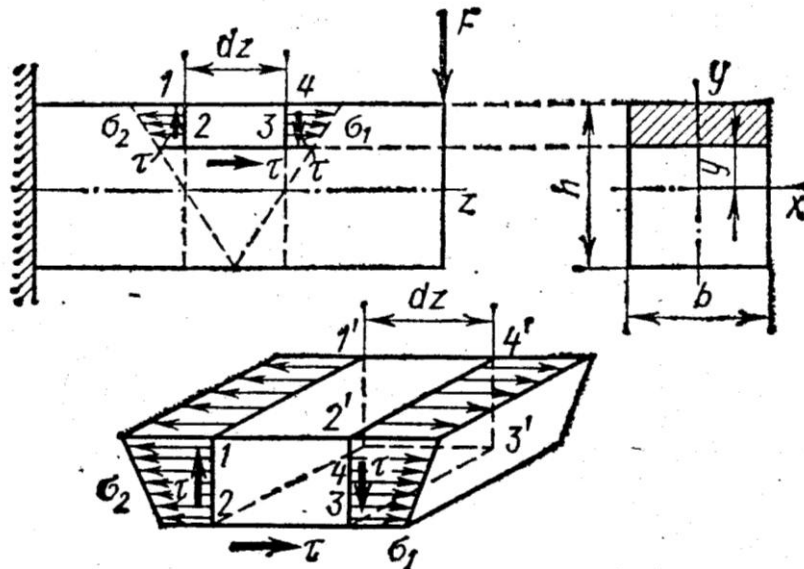


Рис. 7.19

Складемо рівняння рівноваги відтятого елемента балки. Спроекуємо сили, що діють на елемент, на горизонтальну вісь. Очевидно, дотичні зусилля, які діють на вертикальних гранях, у вказане рівняння не увійдуть.

Дотичне зусилля на грані 233'2' спроекується у дійсну величину  $\tau b dz$ . Нормальні зусилля, що діють на грані 344'3', мають рівнодійну

$$N_1 = \int_A \sigma_1 dA.$$

Нормальні зусилля на грані 122'1' мають рівнодійну

$$N_2 = \int_A \sigma_2 dA.$$

Інтеграли повинні бути взяті по площі відтятої частини, тобто по площі граней 122'1' та 344'3'.

Використовуючи рівняння рівноваги  $\sum Z = 0$ , одержуємо

$$-N_2 + N_1 + \tau b dz = 0$$

або

$$-\int_A \sigma_2 dA + \int_A \sigma_1 dA + \tau b dz = 0$$

Враховуючи вирази (а) і (б), маємо

$$-\frac{M_2}{I_x} \int_A y dA + \frac{M_1}{I_x} \int_A y dA + \tau b dz = 0.$$

Вираз  $\int_{A'} y dA = S'_x$  є статичний момент площі відтятої частини перерізу відносно нейтральної осі. Отже

$$\frac{S'_x}{I_x} (M_2 - M_1) = \tau b dz.$$

Але  $M_2 - M_1 = dM(z)$  - приріст згинального моменту на довжині  $dz$ . Тому попередню формулу можна переписати так:

$$\frac{S'_x dM}{I_x} = \tau b dz,$$

звідки

$$\tau = \frac{S'_x dM}{I_x b dz}.$$

Але ж  $dM(z)/dz = Q$  – поперечна сила у даному перерізі. Тоді

$$\tau = \frac{QS'_x}{bI_x}. \quad (7.23)$$

Ця залежність уперше була встановлена Д.І.Журавським і тому носить його ім'я.

Проведемо дослідження закону розподілення по висоті перерізу дотичних напружень для балки прямокутного перерізу (рис.7.20). Цей закон визначається законом зміни  $S'_x$ , так як інші величини для даного перерізу сталі, причому  $I_x = bh^3/12$ .

Статичний момент заштрихованої площі відносно осі  $x$

$$S'_x = b \left( \frac{h}{2} - y \right) \frac{1}{2} \left( \frac{h}{2} + y \right) = \frac{b}{2} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right).$$

Це рівняння параболи.  
Дотичне напруження

$$\tau = \frac{Qb \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right) 12}{2bh^3 \cdot b} = \frac{6Q}{bh^3} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right).$$

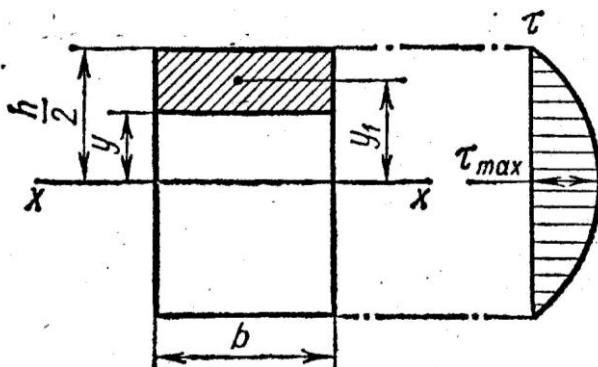


Рис. 7.20

Побудуємо епюру  $\tau$  за двома точками:  $\tau_{y=h/2}=0$ ;  $\tau_{y=0}=3Q(z)/(2A)$ ;  $\tau_{y=-h/2}=0$ . Епюра  $\tau$  показана на рис.7.20. Найбільше дотичне напруження для балки прямокутного перерізу має місце на рівні нейтральної осі

$$\tau_{\max} = \frac{3Q}{2A}, \quad (7.24)$$

тобто у 1,5 разів більше того напруження, яке б було у припущенні рівномірного розподілення дотичних напружень по перерізу.



З відомим наближенням формулу Журавського можна застосувати для обчислення дотичних напружень у балках при поперечних перерізах інших форм (рис.7.21). Більш докладніше про це можна знайти в окремих курсах опору матеріалів.

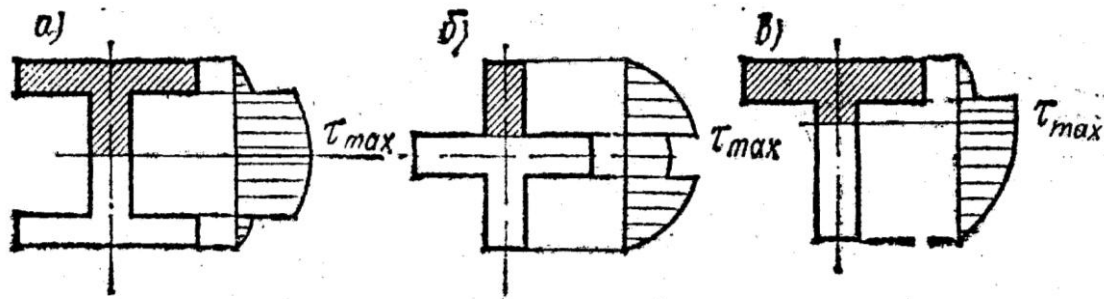


Рис. 7.21

### 7.10. ГОЛОВНІ НАПРУЖЕННЯ ПРИ ПОПЕРЕЧНОМУ ЗГИНІ. ПОВНА ПЕРЕВІРКА МІЦНОСТІ БАЛКИ

Розглянемо консоль прямокутного поперечного перерізу, що згинається у вертикальній площині  $Oyz$ . Епюри нормальних і дотичних напружень у поперечних перерізах консолі мають вигляд, показаний на рис.7.22,а.

Як видно з цих епюр, у верхніх та нижніх контурних точках перерізу дотичних напружень немає і матеріал консолі перебуває в лінійному напруженому стані розтягу або стиску (рис.7.22,б). У нейтральному шарі немає нормальних напружень, натомість виникають максимальні дотичні напруження, і матеріал консолі перебуває в напруженому стані чистого зсуву (рис.7.22,в). У довільних точках перерізу виникають як нормальні, так і дотичні напруження, і матеріал перебуває у плоскому напруженому стані (рис.7.22,г).

Як відомо, при цьому виникають головні напруження, величина і напрямки яких визначаються за відповідними формулами, що в цьому випадку спрощуються і набувають вигляду

$$\sigma_{1,3} = \frac{1}{2} \left( \sigma_z \pm \sqrt{\sigma_z^2 + 4\tau_{yz}^2} \right); \quad (7.25)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{\tau_{yz}}{\sigma_1}. \quad (7.26)$$

Як видно із формули (7.25), одне з головних напружень є розтягуючим, друге – стискуючим.

Знаючи напрямки головних напружень у всіх точках балки, можна побудувати їх траєкторії, тобто лінії, дотичні до яких мають напрямки головних напружень у даній точці. Оскільки головні напруження взаємно перпендикулярні, їх траєкторії утворюють дві сім'ї ортогональних кривих.

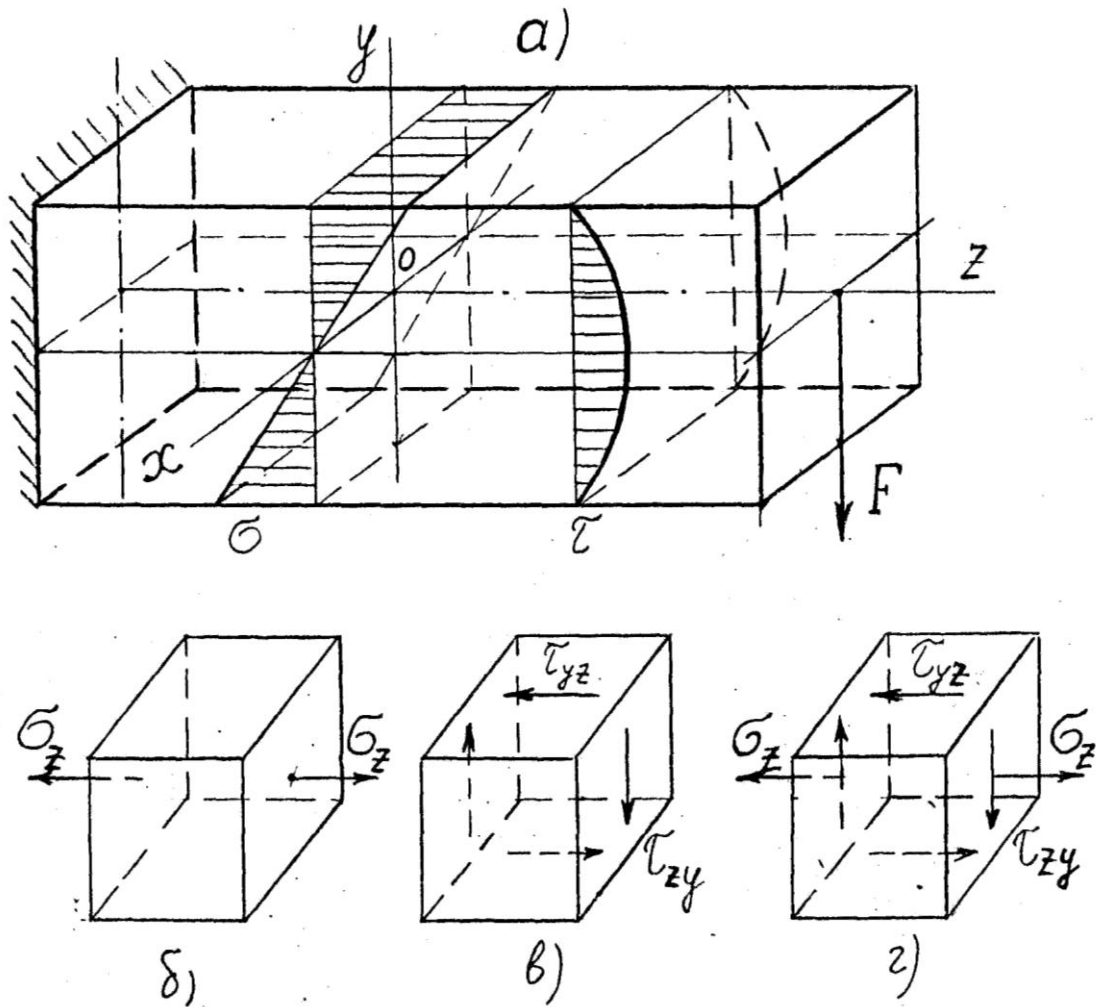


Рис. 7.22

Траекторії головних напружень дають наочну картину напрямків внутрішніх сил у балці. На рис.7.23 показані траекторії головних напружень у простій балці, на яку діє рівномірно розподілене навантаження. Суцільні лінії становлять траекторії розтягу, пунктирні – траекторії стиску.

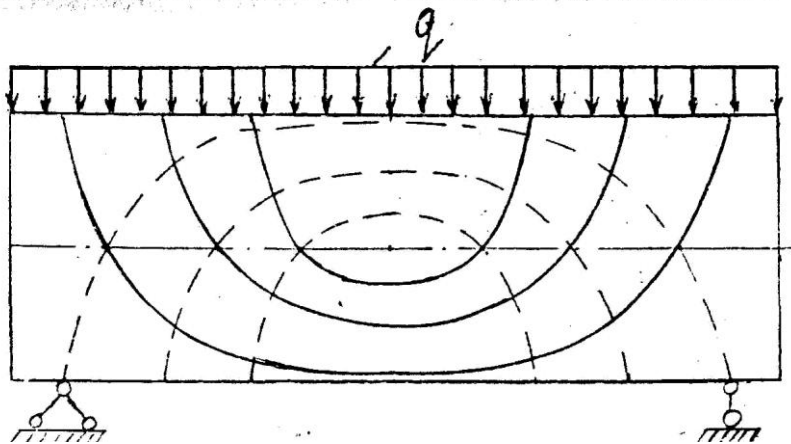


Рис. 7.23

Зупинимось ще раз на перевірці міцності балки при поперечному згині.

Як було вже сказано раніше, міцність балки при поперечному згині залежить в першу чергу від величини максимальних нормальних напружень у її небезпечному перерізі і тому перевірка міцності балки методом допустимих напружень робиться за формулою (7.19).

$$\frac{M_{\max}}{W} \leq \sigma_{adm}.$$

Крім цієї основної перевірки, у деяких випадках, зокрема у тонкостінних балках типу двотавра, треба перевірити також дотичні напруження. Використовуючи для цього формулу Журавського, одержимо умову міцності по дотичних напруженнях в нейтральному шарі перерізу з максимальною поперечною силою (рис.7.24)

$$\frac{Q_{\max} S_{\max}}{d I_x} \leq \tau_{adm}, \quad (7.27)$$

де  $d$  – товщина стінки двотавра.

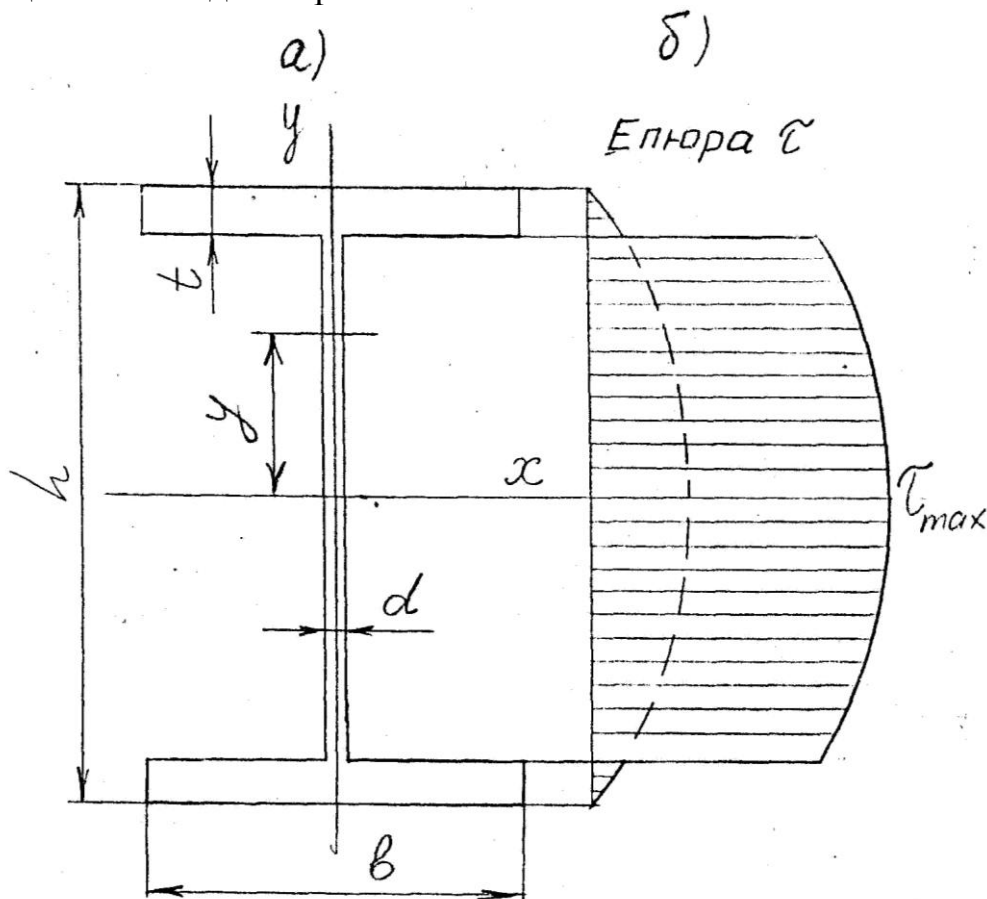


Рис. 7.24

Допустимі дотичні напруження для пластичних матеріалів приймаються рівними  $0,5\sigma_{adm}$ , або  $0,58\sigma_{adm}$ , залежно від застосовуваної теорії міцності.

У балках суцільного перерізу максимальні дотичні напруження завжди менші від максимального нормального напруження, і їх перевірка, як правило, не потрібна.

При розрахунку балок з тонкостінним перерізом може ще стати необхідною перевірка зведених напружень, обчислених за однією з теорій

міцності. Це буває тоді, коли в якомусь перерізі балки виникають одночасно максимальний згинальний момент і максимальна поперечна сила або їх значення близькі до максимальних.

Нехай, наприклад, маємо консоль з рівномірив розподіленим навантаженням (рис.7.25,а). В її опорному перерізі виникає одночасно максимальний згинальний момент і максимальна поперечна сила (рис.7.25,б,в). Епюри нормальних і дотичних напружень у цьому перерізі показані схематично на рис.7.25,г,д.

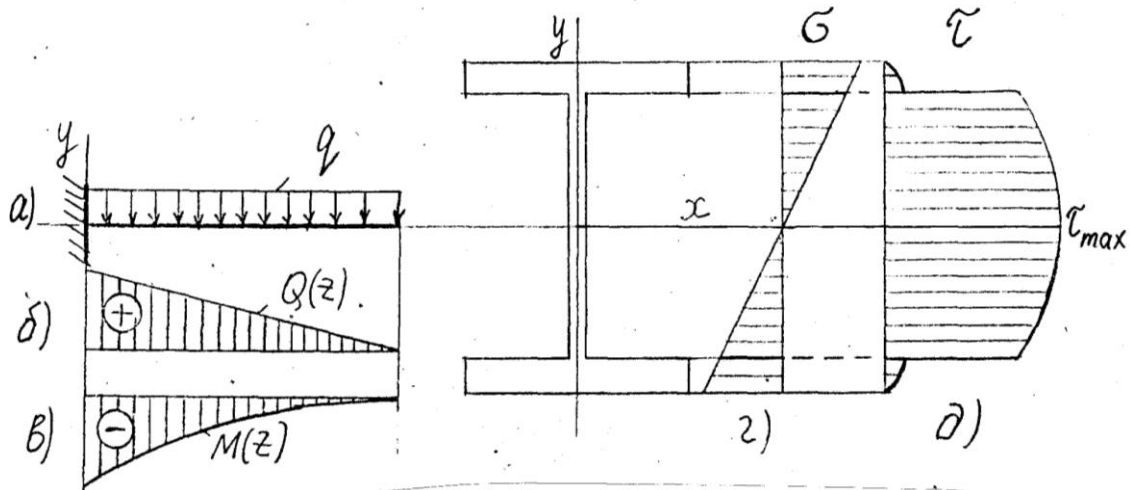


Рис. 7.25

Як видно з цих епюр, небезпечними точками у перерізі є точки на переході від стінки до полицки двотавра, у яких одночасно виникають близькі до максимальних нормальні і дотичні напруження.

При дії цих напружень матеріал балки перебуває у плоскому напруженому стані, і перевірку міцності балки треба виконати за однією з теорій міцності, в залежності від очікуваного характеру руйнування. У випадку статично навантаженої балки з пластичної сталі треба застосувати теорію максимальних дотичних напружень або енергетичну теорію міцності зміни форми.

Підставляючи в умову міцності  $\sigma_1 - \sigma_3 \leq \sigma_{adm}$  теорії максимальних дотичних напружень значення головних напружень (7.25), одержимо

$$\sqrt{\sigma_z^2 + 4\tau_{yz}^2} \leq \sigma_{adm} \quad (7.28)$$

Умова міцності за енергетичною теорією набуде такого вигляду

$$\sqrt{\sigma_z^2 + 3\tau_{yz}^2} \leq \sigma_{adm} \quad (7.29)$$

## 7.11. ЗІГНУТА ВІСЬ БАЛКИ ТА ЇЇ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ РІВНЯННЯ

Зігнута вісь балки при прямому згині є плоскою кривою, площина якої збігається з однією з головних площин балки.

Її називають також пружньою лінією балки. Для пояснення основних понять, що зв'язані з вивченням переміщень при згині, розглянемо приклад згину консолі (рис.7.26).

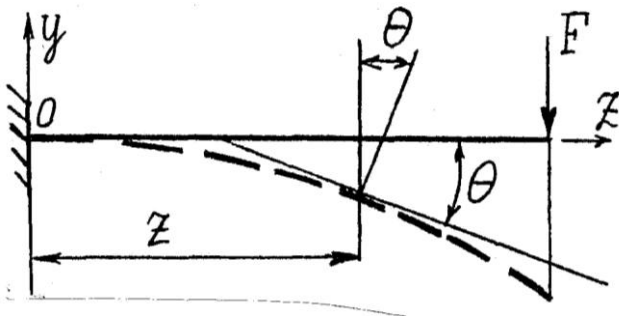


Рис. 7.26

При згині балки її вісь скривлюється, а точки осі переміщуються відносно свого початкового положення. При малих деформаціях можна нехтувати горизонтальними складовими переміщень і брати до уваги лише вертикальні складові переміщень точок осі балки, які називаються її прогинами.

Прогини балки будемо визначати у прямокутній системі координат, вісь Oz якої суміщена з віссю балки, а вісь прогинів Oy напрямлена вгору.

За своєю фізичною суттю лінія прогинів балки  $y(z)$  є неперечною і гладкою кривою, у будь-якій точці якої можна провести лише одну дотичну. Нехай у довільній точці зігнутої осі балки дотична до неї утворює з віссю Oz кут  $\theta$ . Побудувавши у точці дотику нормаль до зігнутої осі, напрямком якої збігається з напрямком повернутого поперечного перерізу балки, ми бачимо, що кут нахилу  $\theta$  дотичної до осі Oz є одночасно кутом повороту перерізу балки при її згині.

Цей кут можна визначити аналітично, використовуючи геометричну інтерпретацію першої похідної функції  $y(z)$ :  $\text{tg}\theta=y'(z)$ . Але при малих деформаціях можна прийняти  $\text{tg}\theta\approx\theta$ , звідки

$$\theta \approx y' \quad (7.30)$$

Кривизна зігнутої осі балки при чистому згині виражається формулою (7.12). При поперечному згині, крім переміщень, викликаних згинальними моментами, виникають ще й переміщення, викликані поперечними силами.

Вплив поперечних сил на переміщення при згині залежить в першу чергу від відношення довжини прольоту балки  $l$  до її висоти  $h$ . Для балок з відношенням порядку  $l/h \geq 10$  впливом поперечних сил на величину прогинів балки можна нехтувати. Маючи на увазі такі порівнянно невисокі балки, ми будемо далі розглядати як у випадку чистого, так і поперечного згину лише переміщення балки, викликані згинальними моментами. Кривизну пружньої лінії виражатимемо формулою (7.12), одержаною для чистого згину, підставляючи в неї замість сталого згинального моменту  $M$  змінний згинальний момент  $M(z)$ ,

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M(z)}{EI_x} \quad (7.31)$$

З іншого боку, як відомо з диференціального числення, кривизну кривої  $y(z)$  виражаємо формулою

$$\frac{1}{\rho} = \pm \frac{y''}{\sqrt{1 + (y')^2}^{3/2}} \quad (7.32)$$

Порівнюючи прві частини формул (40) і (41), одержимо рівняння

$$\frac{y''}{\sqrt{1 + (y')^2}^{3/2}} = \pm \frac{M}{EI_x} \quad (7.33)$$

Це рівняння є точним диференціальним рівнянням зігнутої осі балки. Його треба інтегрувати при визначенні переміщень у дуже гнучких балках.

Здебільшого прогини балки невеликі порівнянно з довжиною її прольоту, і диференціальне рівняння (7.33) можна спростити, нехтуючи величиною  $(y')^2$ , як набагато меншою від одиниці. Тоді одержимо наближене диференціальне рівняння зігнутої осі балки

$$y'' = \pm \frac{M}{EI_x} \quad (7.34)$$

Залишається ще з'ясувати, який з двох знаків слід залишити у правій частині цього рівняння. Знак згинального моменту не залежить від напрямків координатних осей і згинальний момент вважається додатним, якщо опуклість зігнутої осі балки напрямлена вниз, і від'ємним, коли вона напрямлена вгору. У прийнятій нами координатній системі (вісь  $Oy$  напрямлена вгору), знак другої похідної  $y''(z)$  буде додатним при додатному згинальному моменті і від'ємним – при від'ємному (рис.7.27,а,б).

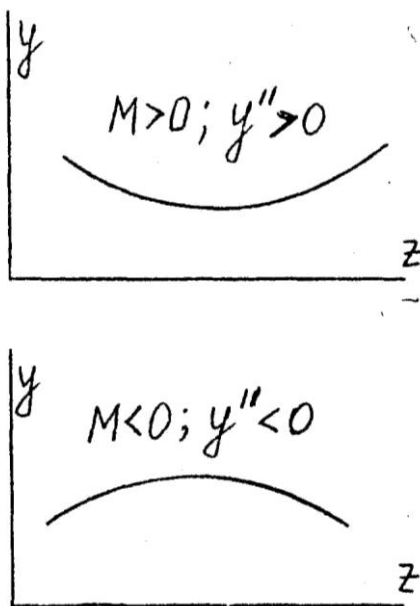


Рис. 7.27

Таким чином, в обох випадках знаки згинальних моментів і другої похідної  $y''(z)$  однакові, і тому у правій частині рівняння (7.34) треба залишити додатний знак

$$y'' = \frac{M}{EI_x} \quad (7.35)$$

Це наближене диференціальне рівняння зігнутої осі балки ми й будемо інтегрувати для визначення переміщень при згині балки.

Зауважимо, що для балок з відношенням  $4 \leq l/h \leq 10$  переміщення від дії поперечних сил можуть бути такого самого порядку, як переміщення, викликані згинальними моментами. При відношеннях порядку  $l/h < 4$  елементарна теорія згину стає непридатною, і як напруження, так і переміщення при згині треба визначати за більш точними методами теорії пружності.

Після інтегрування рівняння (7.35) одержимо рівняння кутів повороту перерізів балки

$$y' = \theta = \frac{1}{EI} [Mz + C], \quad (7.36)$$

де  $C$  – стала інтегрування.

Інтегруємо (7.36) і одержуємо вираз для прогинів

$$y \llcorner \int \frac{1}{EI} [dz \int M \llcorner dz + Cz + D], \quad (7.37)$$

де  $D$  – стала інтегрування.

Сталі інтегрування у виразах (7.36) і (7.37) визначаються із початкових (граничних) умов. Покажемо це на прикладі.

**Приклад 7.2.** Визначити прогін і кут повороту кінця консолі (рис.7.28).

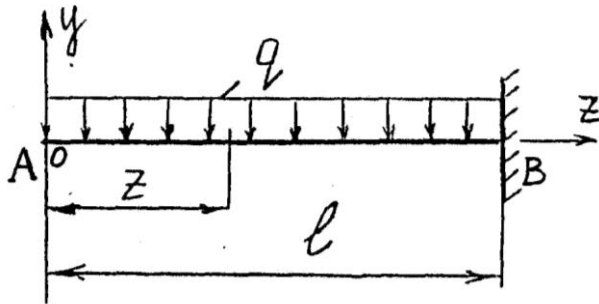


Рис. 7.28

**Розв'язання.** Розташовуємо початок координат  $O$  на початку консолі, тобто в точці  $A$ . Записуємо диференціальне рівняння зігнутої осі балки в загальному вигляді

$$EIy'' \llcorner M \llcorner. \quad (7.38)$$

Складемо рівняння згинальних моментів для довільного перерізу

$$\text{балки: } M \llcorner \frac{-qz^2}{2}$$

Після підстановки його в (7.38)

одержимо таке диференціальне рівняння:

$$EIy'' \llcorner \frac{-qz^2}{2} \quad (7.39)$$

Після інтегрування останнього виразу одержимо рівняння кутів повороту будь-якого перерізу балки:

$$EI\theta' \llcorner EI\theta \llcorner \frac{-qz^3}{6} + C. \quad (7.40)$$

Проінтегрувавши (7.40), маємо вираз для прогинів будь-якого перерізу балки:

$$EIy \llcorner \frac{-qz^4}{24} + Cz + D. \quad (7.41)$$

Для визначення сталих інтегрування використовуємо початкові умови:

а) при  $z=l$   $\theta(z=l)=\theta_B=0$ , тобто  $EI \cdot 0 = -ql^3/6 + C$ , звідки  $C=ql^3/6$ ;

б) при  $z=l$   $y(z=l)=y_B=0$ , тобто  $EI \cdot 0 = -ql^4/24 + Cl + D = -ql^4/24 + l \cdot ql^3/6 + D = ql^4/8 + D$ , звідки  $D=-ql^4/8$ ;

Підставимо знайдені  $C$  і  $D$  у рівняння (7.40) і (7.41):

$$EI\theta \llcorner \frac{-qz^3}{6} + \frac{ql^3}{6};$$

$$EIy \llcorner \frac{-qz^4}{24} + \frac{ql^3z}{6} - \frac{ql^4}{8},$$

або

$$\theta \llcorner \frac{q}{6EI} (l^3 - z^3); \quad (7.42)$$

$$y \llcorner -\frac{q}{24EI} (l^4 - 4l^3z + z^4). \quad (7.43)$$

За одержаними рівняннями (7.42) і (7.43) можна визначити переміщення будь-якого перерізу балки, підставивши відповідне значення  $z$ . У нашому випадку  $z=0$ :

$$\theta_A = \theta(z=0) = \frac{ql^3}{6EI}; \quad y_A = y(z=0) = -\frac{ql^4}{8EI}.$$

Додатний знак кута повороту перерізу А ( $\theta_A$ ) говорить про те, що переріз А повертається проти годинникової стрілки, а від'ємний знак для прогину  $y_A$  говорить про те, що консоль прогинається униз.

## 7.12. УНІВЕРСАЛЬНЕ РІВНЯННЯ ПЕРЕМІЩЕНЬ БАЛОК (МЕТОД ПОЧАТКОВИХ ПАРАМЕТРІВ)

Неважко зрозуміти з приведеного у попередньому параграфі прикладу, що диференціальні рівняння переміщень складаються для кожної ділянки балки. Після інтегрування цих рівнянь одержують удвічі більшу кількість сталих інтегрувань. Тому при двох і більше ділянках балки використання диференціальних рівнянь переміщень балок становиться утрудненим.

Нижче розглянуте визначення лінійних і кутових переміщень при згині балки постійного перерізу методом початкових параметрів. Цей метод не вимагає складання виразів згинальних моментів і інтегрування диференціальних рівнянь зігнутих осей балок. Кількість постійних, що потребують свого визначення, не перевершують двох, незалежно від числа ділянок балки.

Візьмемо балку, затиснену одним кінцем і навантажену змішаним навантаженням (рис.7.29). У даному випадку мають місце всі основні типи навантажень: зосереджений момент, зосереджена сила і розподілене навантаження. Із цих трьох типів силових факторів можна одержати майже всі випадки навантаження, які зустрічаються на практиці. Напрямки навантаження

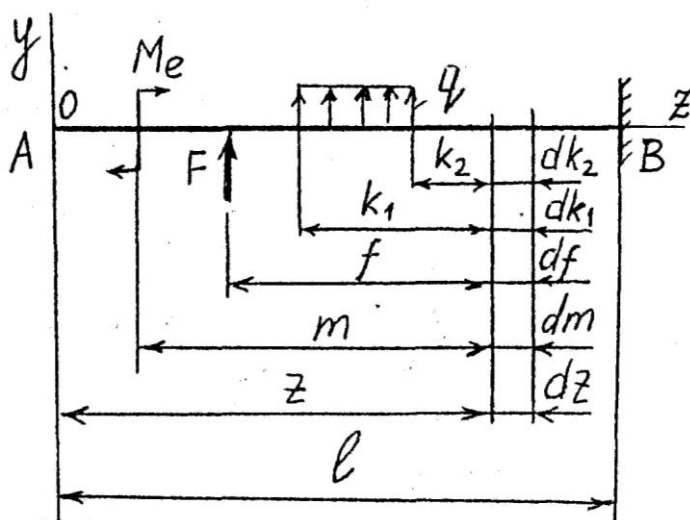


Рис. 7.29

взяті так, що згинальні моменти додатні. Початок координат візьмемо у крайньому лівому перерізі балки. За цієї умови сталі інтегрування, як ми в цьому переконаємося нижче, чисельно являють собою деформації (кут повороту і прогин) на початку координат.

Розглядувану балку уловимося і в подальших випадках (хоча це й не обов'язково) зображувати так, щоб при складанні рівняння згинального моменту користуватися лівою частиною балки,



що зручніше.

Візьмемо на розглядованій балці (рис.7.29) переріз на відстані  $z$  від початку координат. Щоб одержати рівняння деформацій, які можна використати для всієї балки, вибираємо переріз на крайній ділянці так, щоб всі силові фактори, діючи на балку, опинились по одну сторону від перерізу і увійшли до рівняння згинального моменту.

Позначимо відстані від силових факторів до взятого перерізу  $m$ ,  $f$ ,  $k_1$  і  $k_2$ , як показано на рис.7.29. Візьмемо другий переріз на відстані  $dz$  від першого і позначимо прирости відстанів відповідних силових факторів через  $dm$ ,  $df$ ,  $dk_1$  і  $dk_2$ .

Запишемо вираз згинального моменту для перерізу на відстані  $z$  від початку координат:

$$M \curvearrowright M_e + Ff + q \curvearrowright -k_2 \left( k_2 + \frac{k_1 - k_2}{2} \right) = M_e + Ff + q \frac{k_1^2 - k_2^2}{2} \quad (7.44)$$

Підставимо (7.44) в рівняння (7.38):

$$EIy'' \curvearrowright M_e + Ff + q \frac{k_1^2 + k_2^2}{2}. \quad (7.45)$$

Помножимо обидві частини рівняння (7.45) на  $dz$ , маючи на увазі що  $dz=dm=df=dk_1=dk_2$ :

$$EI d \left( \frac{dy}{dz} \right) = M_e dm + F f df + q \frac{k_1^2 dk_1}{2} - q \frac{k_2^2 dk_2}{2}. \quad (7.46)$$

Інтегруємо (7.55):

$$EI \left( \frac{dy}{dz} \right) = C + M_e m + F \frac{f^2}{2} + q \frac{k_1^3}{6} - q \frac{k_2^3}{6}. \quad (7.47)$$

Відомо, що  $dy/dz=Q(z)$ , тобто куту повороту перерізу. Так як на початку координат, тобто при  $z=0$ , зліва від перерізу немає навантажень, то з рівняння (7.47) одержимо  $EI\theta_0=C$  (при інтегруванні диференціального рівняння зігнутої осі балки по ділянках будуть виходити сталі інтегрування  $C_1, C_2, \dots, C_n$ ). Виходячи з рівності кутів повороту в суміжних перерізах (на межах ділянок), можна показати, що ці сталі рівні між собою. Тому достатньо визначити сталу інтегрування на першій ділянці, зокрема можна надати значення  $z=0$ . До аналогічних висновків приходимо і у відношенні до сталих повторного інтегрування  $D_1, D_2, D_3, \dots, D_n$ ). Тоді рівняння (7.47) набуває вигляду:

$$EI\theta \curvearrowright EI\theta_0 + M_e m + F \frac{f^2}{2} + q \frac{k_1^2 + k_2^2}{6}, \quad (7.48)$$

Знову помножимо одержане рівняння (7.57) на  $dz$ , виконавши заміну змінних, і інтегруючи, одержуємо:

$$EIy \curvearrowright D + EI\theta_0 z + M_e \frac{m^2}{2} + F \frac{f^3}{6} + q \frac{k_1^4 - k_2^4}{24}. \quad (7.49)$$

На початку координат при  $z=0$   $D=EIy_0$ .

Тоді рівняння (7.49) набуває вигляду:

$$EIy \curvearrowright EIy_0 + EI\theta_0 z + M_e \frac{m^2}{2} + F \frac{f^3}{6} + q \frac{k_1^4 - k_2^4}{24}. \quad (7.50)$$

Поширюючи рівняння (7.48) і (7.50) на випадок декількох силових факторів кожного типу, одержуємо в закінченому вигляді:

рівняння кутів повороту перерізів:

$$EI\theta \curvearrowright \equiv EI\theta_0 + \sum Mm + \sum \frac{Fl^2}{2} + \sum q \frac{k_1^3 - k_2^3}{6}; \quad (7.51)$$

рівняння прогинів

$$EIy \curvearrowright \equiv EIy_0 + EI\theta_0 z + \sum M \frac{m^2}{2} + \sum F \frac{f^3}{6} + \sum q \frac{k_1^4 - k_2^4}{24}. \quad (7.52)$$

Нагадаємо, що  $\theta_0$  і  $y_0$  - початкові параметри, тобто кут повороту і прогин на початку координат. Вони визначаються з умов закріплення балки. Тільки після визначення початкових параметрів можна користуватися формулами (7.51) і (7.52) для подальших розрахунків балок у відношенні їх деформацій.

Приклад 7.3. Визначити кут повороту перерізу і прогин балки (рис.7.30) в точці А.

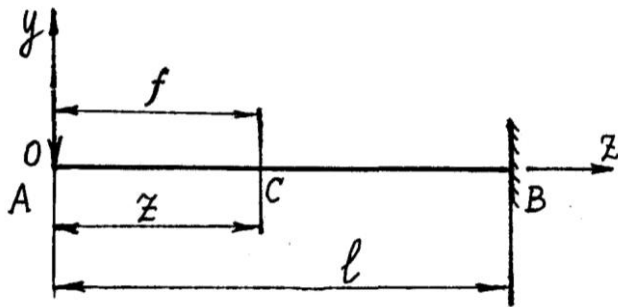


Рис. 7.30

Розв'язання. Рівняння кутів повороту (7.51) у даному випадку (одна сила F, яка надає балці від'ємний згинальний момент, і  $f=z$ ) запишеться так:

$$EI\theta \curvearrowright \equiv EI\theta_0 - \frac{Fz^2}{2}.$$

При  $z=l$   $\theta(z=l)=\theta_B=0$ . Отже  $0=EI\theta_0 - Fl^2/2$ , звідки  $EI\theta_0=Fl^2/2$  і кут повороту в точці А  $\theta_A=\theta_0 Fl^2/(2EI)$ .

Підставивши значення  $EI\theta_0$  у рівняння кутів повороту, одержуємо:  $EI\theta(z)=Fl^2/2 - Fz^2/2$ . За цим рівнянням ми маємо змогу визначити кут повороту будь-якого перерізу розглядової балки.

Рівняння прогинів (7.52) для даного прикладу запишеться так:  $EIy(z)=EIy_0 + EI\theta_0 z - Fz^3/6$ . Підставимо знайдене значення  $EI\theta_0$ :  $EIy(z)=EIy_0 + Fl^2 z/2 - Fz^3/6$ . При  $z=l$   $y(z)=y(z=l)=y_B=0$ . Отже  $0=EIy_0 + Fl^3/2 - Fl^3/6$ , звідки  $EIy_0=-Fl^3/3$ .

Прогин в точці А:  $y_A=y_0=-Fl^3/(3EI)$ .

Підставивши значення  $EIy_0=-Fl^3/3$  в рівняння прогинів, одержуємо:

$$EIy \curvearrowright \equiv \frac{-Fl^3}{3} + \frac{Fl^2 z}{2} - \frac{Fz^3}{6}.$$

За цим рівнянням можна визначити прогин у будь-якому перерізі балки.

Приклад 7.4. Визначити кути повороту опорних перерізів і прогин балки посередині прольоту (рис.7.31).

Розв'язання задачі для балки на двох опорах необхідно завжди починати з вивчення реакцій опор:  $R_A=R_B=ql/2$ .

При прийнятих позначеннях одержимо рівняння кутів повороту перерізів:

$$EI\theta \curvearrowright \equiv EI\theta_0 + \frac{ql}{2} \frac{z^2}{2} - q \frac{z^3}{6}; \quad EI\theta \curvearrowright \equiv EI\theta_0 + q \frac{lz^2}{4} - \frac{qz^3}{6} \quad (a)$$

При тих же умовах рівняння прогинів:

$$EIy \curvearrowright = EIy_0 + EI\theta_0 z + ql \frac{z^3}{12} - q \frac{z^4}{24}. \quad (б)$$

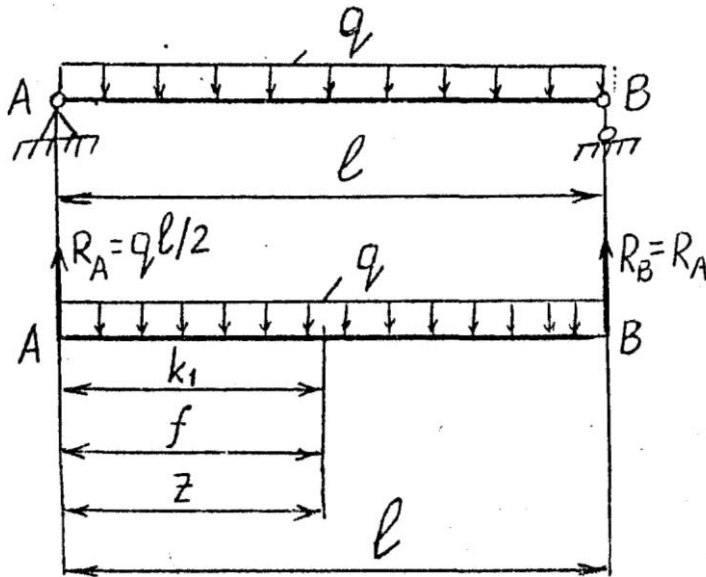


Рис. 7.31

При  $z=0$  з рівняння (б) маємо:  $0=EIy_0$ , при  $z=l$  з того ж рівняння  $0=EI\theta_0 l + ql^4/12 - ql^4/24$ , звідки  $EI\theta_0 = -ql^3/24$ .

Кути повороту в точках А і В:

$$EI\theta_A = EI\theta \curvearrowleft=0 \curvearrowright = \frac{-ql^3}{24};$$

$$EI\theta_B = EI\theta \curvearrowleft=l \curvearrowright = \frac{ql^3}{24}.$$

Підставивши значення  $EIy_0$  і  $EI\theta_0$  у рівняння прогинів (б), одержимо

$$EIy \curvearrowright = \frac{-ql^3 z}{24} + \frac{qlz^3}{12} - \frac{qlz^4}{24}.$$

Це рівняння дає змогу визначити прогин в будь-

якій точці балки. Отже, посередині буде, якщо взяти  $z=l/2$ :

$$EIy \left( z = \frac{l}{2} \right) = -\frac{ql^3}{24} \frac{l}{2} + \frac{ql}{12} \left( \frac{l}{2} \right)^3 - \frac{ql}{24} \left( \frac{l}{2} \right)^4 = -\frac{5ql^4}{384}.$$

Відповіді до прикладу:

$$\theta_A = -\frac{ql^3}{24EI}; \quad \theta_B = \frac{ql^3}{24EI}; \quad y \left( z = \frac{l}{2} \right) = -\frac{5ql^4}{384EI}.$$

Приклад 7.5. Для показаної на рис.7.32 балки визначити прогин в точці С і кут повороту перерізу Д. Жорсткість  $EI$  вважати відомою.

Розв'язання. Визначаємо реакції опор.  $\sum M_A = 0$ :

$$-R_B \cdot 4 + F \cdot 3 + q \cdot 2 \cdot 1 - M_e = 0, R_B = 5,5 \text{ кН}; \quad \sum M_B = 0:$$

$$R_A \cdot 4 - M_e - q \cdot 2 \cdot 3 - F \cdot 1 = 0, R_A = 14,5 \text{ кН};$$

$$\text{перевірка: } \sum Y = R_A + R_B - qb - F = 14,5 + 5,5 - 8 \cdot 2 = 0$$

При прийнятих на рис.7.32 позначеннях рівняння кутів повороту і прогинів будуть мати вигляд:

$$EI\theta \curvearrowright = EIy_0 - M_e z + \frac{R_A f_1^2}{2} - \frac{F f_2^2}{2} - \frac{q}{6} (k_1^3 - k_2^3); \quad (а)$$

$$EIy \curvearrowright = EIy_0 + EI\theta_0 z - \frac{M_e z^2}{2} + \frac{R_A f_1^3}{6} - \frac{F f_2^3}{6} - \frac{q}{24} (k_1^4 - k_2^4). \quad (б)$$

відомо, що на опорах прогини дорівнюють нулеві, тобто можна сказати, що при  $z_a=a$   $y_A=0$  і при  $z=l$   $y_B=0$ . Використовуючи рівняння (б), одержуємо:

$$\text{при } z=a: 0 = EIy_0 + EI\theta_0 - \frac{M_e \cdot l^2}{2};$$

$$EIy_0 + EI\theta_0 = 3; \quad (B)$$

$$\text{при } z=l: 0 = EIy_0 + EI\theta_0 \cdot 5 - \frac{M_e \cdot 5^2}{2} + \frac{R_A \cdot 4^3}{6} - \frac{F \cdot l^3}{6} - \frac{q \cdot (4^4 - 2^4)}{24},$$

$$EIy_0 + 5EI\theta_0 = 1. \quad (Г)$$

Маємо два рівняння з двома невідомими:

$$\begin{cases} EIy_0 + EI\theta_0 = 3 \\ EIy_0 + 5EI\theta_0 = 1 \end{cases} \quad (Д)$$

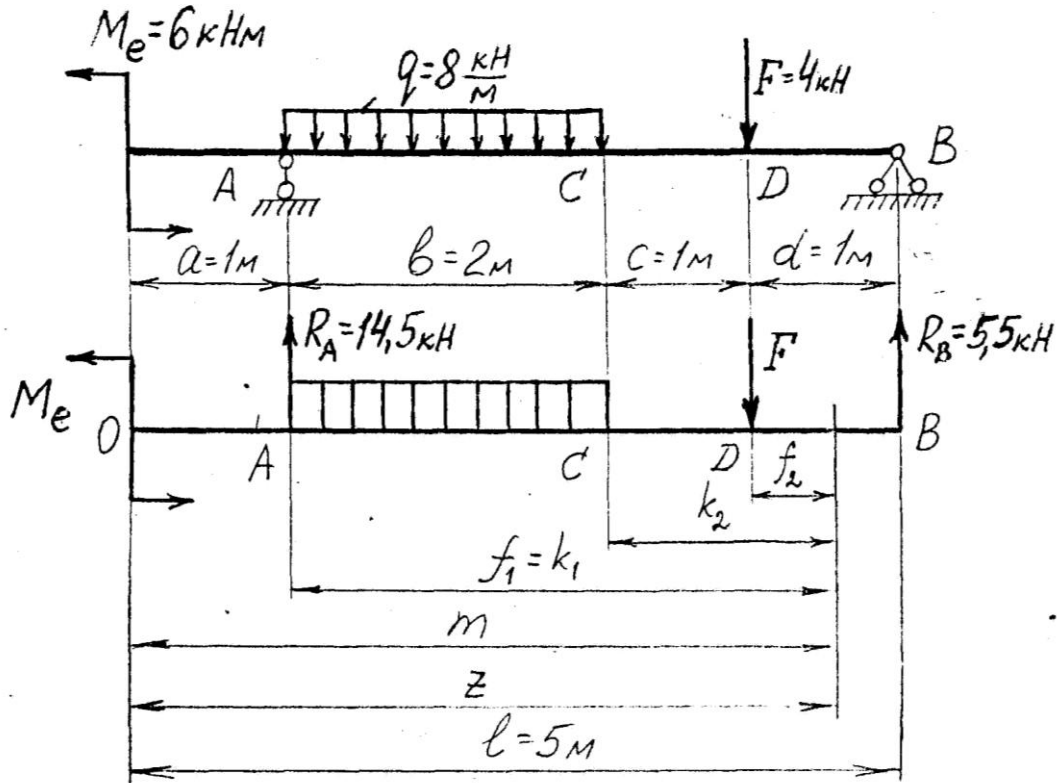


Рис. 7.32

Проведемо рішення системи рівнянь (д) відносно  $EIy_0$  та  $EI\theta_0$  і одержимо:  $EI\theta_0 = -0,5$ ;  $EIy_0 = 3,5$ .

Підставляючи в (а) і (б) відомі величини, одержуємо рівняння кутів повороту і прогину будь-якого перерізу заданої балки:

$$EI\theta(z) = -0,5 - 6z + \frac{14,5f_1^2}{2} - \frac{4f_2^2}{2} - \frac{8(k_1^3 - k_2^3)}{6}. \quad (e)$$

$$EIy(z) = 3,5 - 0,5z - \frac{6z^2}{2} + \frac{14,5f_1^3}{6} - \frac{4f_2^3}{6} - \frac{8(k_1^4 - k_2^4)}{24}. \quad (ж)$$

Використовуючи рівняння (е) при  $z=4$ м, знайдемо кут повороту перерізу Д:

$$EI\theta_D = EI\theta(z=4) = -0,5 - 6 \cdot 4 + \frac{14,5 \cdot 3^2}{2} - \frac{8(3^3 - 1^3)}{6} = 3,08;$$

$$\theta_D = \frac{3,08}{EI}.$$

За формулою (ж), якщо взяти  $z=3$ м, визначимо прогин перерізу С:

$$EIy_C = EIy(z=3) = 3,5 - 0,5 \cdot 3 - \frac{6 \cdot 3^2}{2} + \frac{14,5 \cdot 2^3}{6} - \frac{8(4^4 - 0)}{24} = -11;$$

$$y_c = -\frac{11}{EI}.$$

Додатний знак кута повороту  $\theta_D$  говорить про те, що переріз D повернеться проти годинникової стрілки, а від'ємний знак  $y_C$  вказує на те, що переміщення перерізу С відбудеться вниз.

## 8. СКЛАДНИЙ ОПІР

### 8.1. КОСИЙ ЗГИН

Дотепер ми розглядали прості випадки навантаження стержня, які викликають його осьовий розтяг або стиск, кручення та прямий згин. Опір стержня у цих випадках прийнято називати простим. При сумісній дії кількох простих навантажень виникає так званий складний опір стержня. Одним з випадків складного опору є косий згин.

Косий згин викликається навантаженням, що проходить через центр ваги поперечного перерізу стержня під довільним кутом до його головних центральних осей. На рис.8.1 кут нахилу площини дії навантаження (так званої силової площини)  $mm$  до головної центральної осі  $y$  позначений через  $\varphi$ . Визначимо нормальні напруження у поперечному перерізі стержня при косому згині.

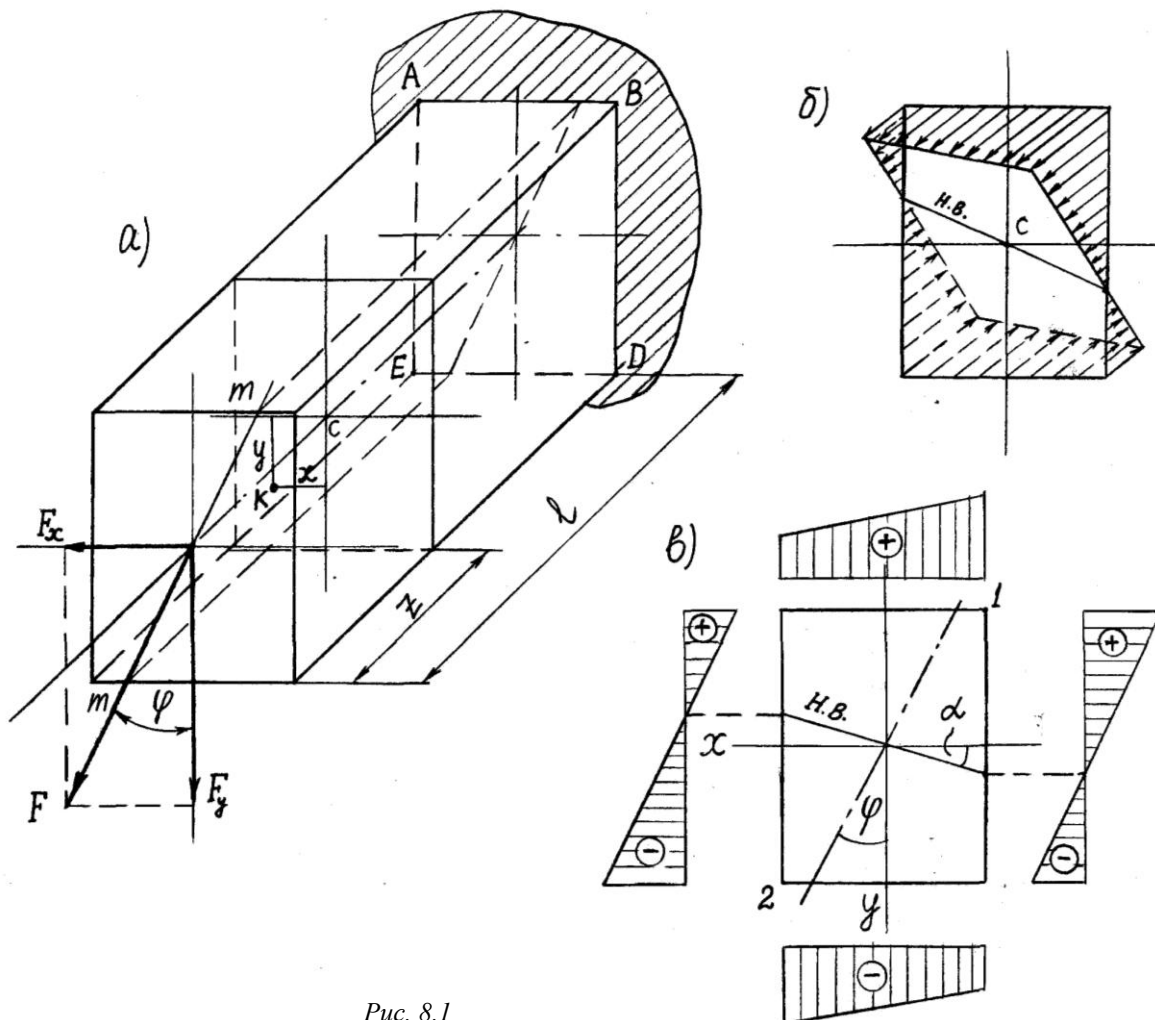


Рис. 8.1

Розклавши сили  $F$  на дві складові  $F_x$  та  $F_y$ , матимемо прямий згин бруса у двох взаємно перпендикулярних головних площинах. У довільному перерізі (на відстані  $z$  від вільного кінця бруса) будуть діяти згинальні моменти  $M_x = -Fz$  і

$M_y = -Fz$ . Використовуючи формулу (7.13), визначимо напруження в будь-якій точці К розглядуваного перерізу: від моменту  $M_x$  -  $\sigma_{Mx} = -M_x y / I_x$ ; від моменту  $M_y$  -  $\sigma_{My} = -M_y x / I_y$ . Згідно з принципом суперпозиції загальне напруження у будь-якій точці довільного перерізу буде дорівнювати

$$\sigma = -\frac{M_x}{I_x} y - \frac{M_y}{I_y} x \quad (8.1)$$

Згинальні моменти легко визначити за відомим значенням кута  $\varphi$ :

$M_x = -F_y z = -F \cos \varphi \cdot z = -M \cos \varphi$ ;  $M_y = -F_x z = -F \sin \varphi \cdot z = -M \sin \varphi$ , де  $M = Fz$  - згинальний момент у даному перерізі бруса. Тоді формула (8.1) набирає вигляду:

$$\sigma = -M \left( \frac{y}{I_x} \cos \varphi + \frac{x}{I_y} \sin \varphi \right). \quad (8.2)$$

Формула (8.2) завжди буде справедливою, якщо систему координат вибирати так, щоб діюча на брус сила лежала у першому квадранті, а координати досліджуваних точок  $(x, y)$  брати зі своїми знаками.

Геометричне місце точок, у яких нормальні напруження дорівнюють нулеві, називається нейтральною лінією. Як видно з формул (8.1) і (8.2), просторова епіюра нормальних напружень при косому згині утворює площину, що проходить через початок координатної системи (рис.8.1,б). Нейтральна лінія, як лінія перетину цієї площини з площиною перерізу, є прямою, що також проходить через початок координатної системи. Її рівняння визначається з умови  $\sigma(x, y) = 0$ , тобто

$$\frac{M_x}{I_x} y + \frac{M_y}{I_y} x = 0,$$

звідки

$$y = -\frac{M_y}{M_x} \frac{I_x}{I_y} x = kx, \quad (8.3)$$

Кут нахилу  $\alpha$  нейтральної лінії до осі  $x$  знаходиться з виразу для кутового коефіцієнта  $k$  прямої (8.3):

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{M_y}{M_x} \frac{I_x}{I_y} = -\operatorname{tg} \varphi \frac{I_x}{I_y}. \quad (8.4)$$

Знаючи положення нейтральної лінії, можна вказати ті точки перерізу стержня, в яких виникають найбільші за абсолютною величиною нормальні напруження: це точки найбільш віддалені від нейтральної лінії. На рис.8.1,в вони позначені цифрами 1 і 2; показана також епіюра нормальних напружень у суміщенні з площиною рисунку.

У прямокутному перерізі, а також в інших перерізах з двома осями симетрії, які вписуються в прямокутник і мають спільні з ним кутові точки, максимальні напруження виникають у кутових точках перерізу і дорівнюють за абсолютною величиною

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y}. \quad (8.5)$$

Як і при прямому згині, міцність балки при косому згині залежить у першу чергу від величини максимальних нормальних напружень, що виникають у її поперечних перерізах. Тому перевірка міцності при косому згині полягає у порівнянні максимального нормального напруження у перерізі з максимальним за абсолютною величиною рівнодійним моментом  $M_{\max}$  з допустимим напруженням  $\sigma_{adm}$ . Так, наприклад, для балки, показаної на рис.8.1,а максимальний згинальний момент буде у перерізі ABDE (в затисненні):  $M_{\max} = -Fl$ . Складові цього моменту:  $M_{x\max}$  і  $M_{y\max}$ . Тоді умова міцності запишеться так

$$\frac{M_{x\max}}{W_x} + \frac{M_{y\max}}{W_y} \leq \sigma_{adm}. \quad (8.6)$$

Переміщення будь-якої точки осі балки визначається як геометрична сума переміщень, викликаних заданим навантаженням у напрямках головних центральних осей перерізу. Наприклад, прогин  $f$  кінця консолі (рис.8.1,а) дорівнюватиме

$$f = \sqrt{f_x^2 + f_y^2}, \quad (8.7)$$

де  $f_x$  і  $f_y$  - складові прогини  $f$  балки від складових сили  $F$ , тобто від  $F_x$  і  $F_y$  (рис.8.2). Визначення  $f_x$  і  $f_y$  може бути здійснено, наприклад, за методом початкових параметрів, або методом інтегрування диференціального рівняння пружної лінії (зігнутої осі) балки.

Скористуємося результатом прикладу 7.3. Маємо

$$f_y = \frac{Fl^3 \cos \varphi}{3EI_x}; \quad f_x = \frac{Fl^3 \sin \varphi}{3EI_y}.$$

Напрямок повного прогину  $f$  утворює з віссю  $y$  кут, тангенс якого

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{f_x}{f_y} = \operatorname{tg} \varphi \frac{I_x}{I_y} \quad (8.8)$$

Як видно, при  $I_x/I_y \neq 1$  кути  $\alpha$  і  $\varphi$  нерівні, отже, у випадку косого згину напрямок дії навантаження і напрямок прогину не збігається. Це розходження тим більше, чим більше відношення  $I_x/I_y$ .

При порівнянні останньої формули з формулою (8.4) видно, що кут нахилу прогину до осі  $y$  дорівнює куту нахилу нейтральної лінії до осі  $x$ , тобто що напрямки прогину і напрямки нейтральної лінії взаємно перпендикулярні (рис.8.2).

**Приклад 8.1.** Перевірити міцність чугунного бруса (рис.8.3,а), якщо допустимі напруження на розтяг  $\sigma_{adm.t} =$

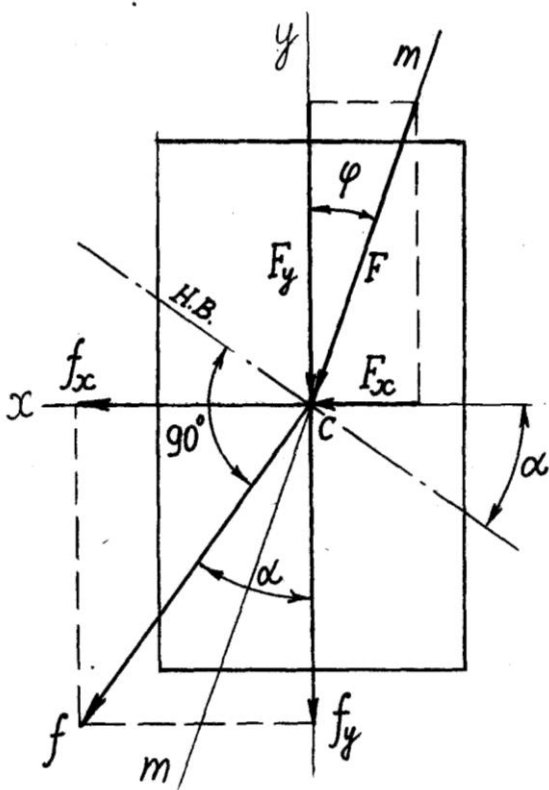


Рис. 8.2



35МПа , на стиск  $\sigma_{adm,c}=130\text{МПа}$ . Побудувати епюру напружень для небезпечного поперечного перерізу бруса.

**Розв'язання.** Брус працює на плоский косий згин. Розкладаємо навантаження на складові за головними осями  $x$  і  $y$  (рис.8.3,б) і одержуємо сполучення двох прямих згинів. Небезпечним є переріз затиску бруса.

$$\max M_x = \frac{q_x l^2}{2} = \frac{q \cos \varphi l^2}{2} = \frac{150 \cdot 0,866 \cdot 1,2^2}{2} = 93,5 \text{ Нм};$$

$$\max M_y = \frac{q_y l^2}{2} = \frac{q \sin \varphi l^2}{2} = \frac{150 \cdot 0,5 \cdot 1,2^2}{2} = 54,1 \text{ Нм}.$$

Не визначаючи величин нормальних напружень від моментів  $M_x$  та  $M_y$ , покажемо характер епюр цих напружень (рис.8.3,в).

Для визначення небезпечної точки перерізу знайдемо положення нульової лінії:

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{M_y I_x}{M_x I_y} = -\operatorname{tg} \varphi \frac{I_x}{I_y},$$

де моменти інерції поперечного перерізу бруса

$$I_x = \frac{\pi d^4}{64} - \frac{bh^3}{12} = \frac{\pi \cdot 16^4}{64} - \frac{7 \cdot 11^4}{12} = 2440 \text{ см}^4; \quad I_y = \frac{\pi d^4}{64} - \frac{hb^3}{12} = \frac{\pi \cdot 16^4}{64} - \frac{11 \cdot 7^3}{12} = 2910 \text{ см}^4.$$

Тоді

$$\operatorname{tg} \alpha = -\operatorname{tg} 30^\circ \frac{2440}{2910} = -0,485; \quad \alpha = -25^\circ 52'$$

Від'ємний кут  $\alpha$  відкладаємо від осі  $x$  за годинниковою стрілкою і проводимо нульову лінію (н.л.).

Для побудови сумарної епюри напружень визначаємо точки перерізу, найбільш віддалені від нульової лінії. Ці точки одержуємо, провівши дві дотичні до перерізу, паралельні нульовій лінії. На рис.8.3,в це точки А і В. З них більш небезпечна точка А (у ній виникають розтягуючі напруження).

Вісь епюри  $\sigma$  перпендикулярна нульовій лінії. Для побудови епюри достатньо обчислити ординату однієї її точки, так як нульова точка вже визначена. Виразимо  $\sigma_A$

$$\sigma_A = \frac{\max M_x y_A}{I_x} + \frac{\max M_y x_A}{I_y} = \frac{93,5 \cdot 10^3}{2440 \cdot 10^4} 72 + \frac{54,1 \cdot 10^3}{2910 \cdot 10^4} 34,9 = 34,1 \text{ МПа},$$

де

$$x_A = \frac{1}{2} d \sin \alpha = \frac{1}{2} 16 \sin 25^\circ 52' = 3,49 \text{ см}; \quad y_A = \frac{1}{2} d \cos \alpha = \frac{1}{2} 16 \cos 25^\circ 52' = 7,2 \text{ см} \quad \text{-координати}$$

точки А. Так як  $\sigma_A < \sigma_{adm,t}$ , то міцність балки забезпечена.

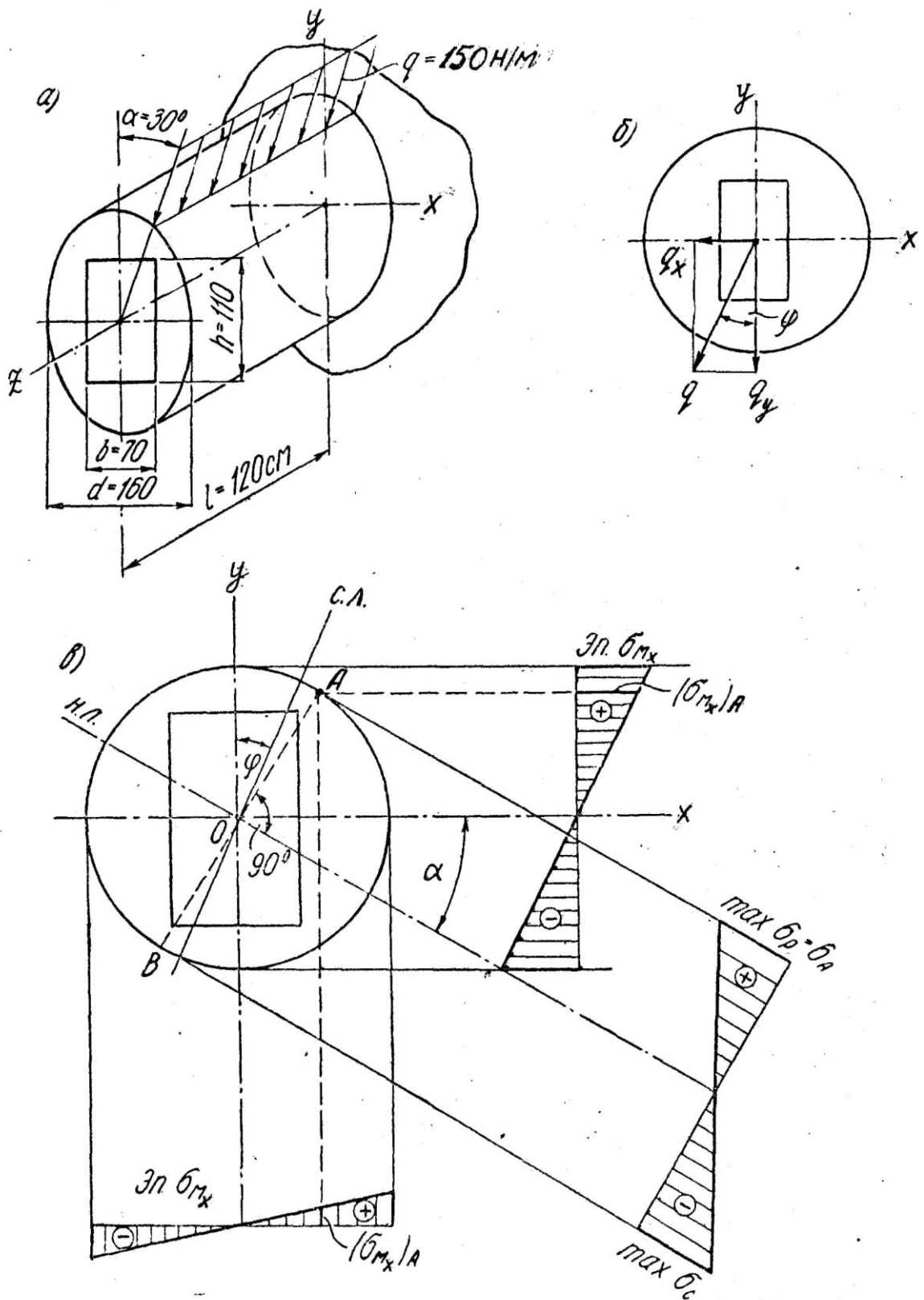


Рис. 8.3

## 8.2. СУМІСНИЙ ЗГИН З КРУЧЕННЯМ.

Нехай на стержень (рис.8.4,а) у кінцевому перерізі діє сила  $F$ , яка визиває прямий його згин, і пара сил  $T_e$ , закручуюча стержень. Епюри згинальних і крутних моментів побудовані на рис.8.4,б,в. Таким чином, розглядуваний стержень водночас працює на згин і кручення. Небезпечним перерізом буде опорний переріз А, де одночасно виникають максимальний згинальний і крутний моменти.

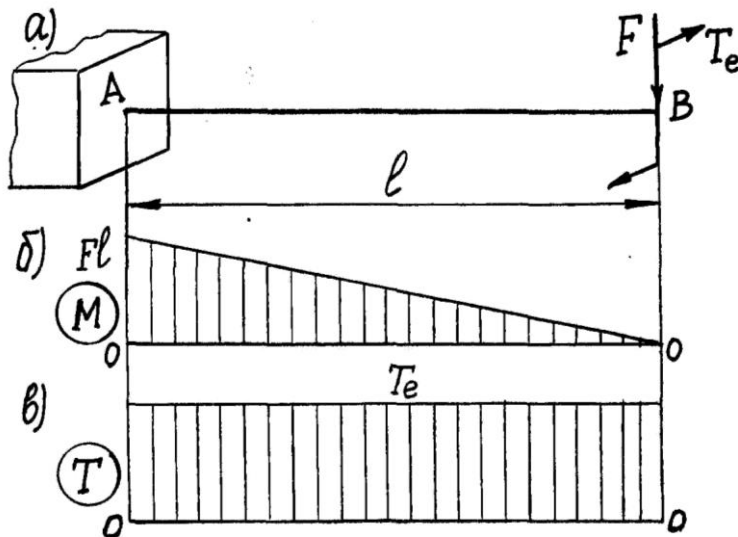


Рис. 8.4

Ми обмежимося лише розглядом стержнів круглого поперечного перерізу. При сумісному поперечному згині і крученні у поперечних перерізах стержня виникають нормальні напруження при дії згинальних моментів і дотичні напруження, зв'язані з поперечними силами і крутними моментами. Однак вплив поперечних сил у круглих перерізах настільки малий, що цими силами нехтують і беруть до уваги лише нормальні

напруження згину і дотичні напруження кручення.

При згині такого стержня у площині  $Oxy$  і крученні навколо осі  $z$  епюри нормальних і дотичних напружень матимуть вигляд, показаний на рис.8.5,а. При сумісній дії цих напружень в околі довільної точки поперечного перерізу (за винятком точок на нейтральній осі  $x$ ) виникатиме плоский напружений стан (рис.8.5,б). Небезпечними точками у перерізі стержня є точки, у яких одночасно виникають максимальні нормальні та дотичні напруження, тобто крайні точки перерізу на осі  $y$ , найбільш віддалені від нейтральної осі. Ці максимальні напруження визначаються за формулами (7.19) і (6.6):  $\sigma = M/W$ ,  $\tau = T/W_p$ .

Міцність стержня при плоскому напруженому стані треба перевірити за однією з теорій міцності, залежно від очікуваного характеру руйнування. Якщо передбачається пластичне руйнування, то, застосовуючи третю теорію (найбільших дотичних напружень), знайдемо еквівалентне напруження за виразом (3.17):  $\sigma_{\text{III}} = \sigma_1 - \sigma_3$ . Для визначення головних напружень використовуємо формулу (3.9)

$$\sigma_{1,3} = \frac{\sigma}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}.$$

Тоді

$$\sigma_{eIII} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}. \quad (8.9)$$

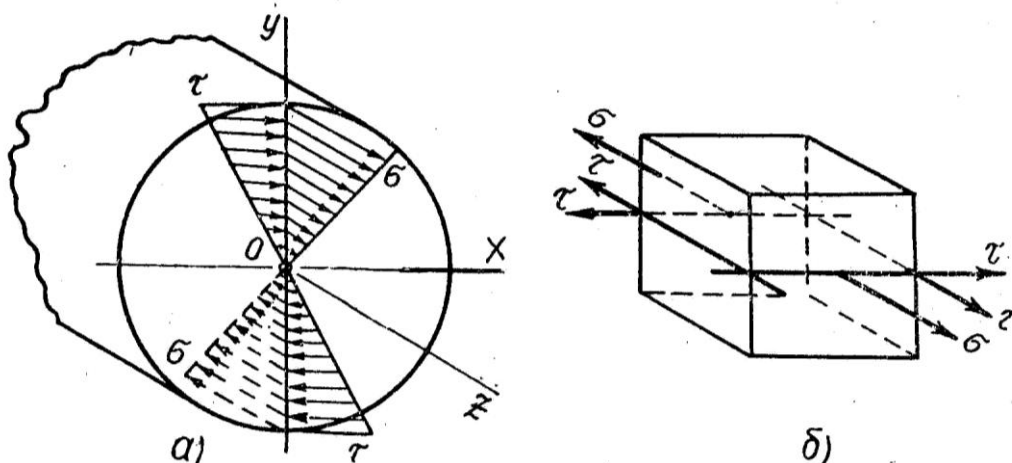


Рис. 8.5

Підставляючи значення  $\sigma$  і  $\tau$ , маємо

$$\sigma_{eIII} = \sqrt{\left(\frac{M}{W}\right)^2 + 4\left(\frac{T}{W_p}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{W}{W}\right)^2 + 4\left[\frac{T}{W}\right]^2} = \frac{\sqrt{M^2 + T^2}}{W}.$$

Вираз, що стоїть у чисельнику, назвемо еквівалентним моментом за третьою теорією міцності

$$M_{eIII} = \sqrt{M^2 + T^2}. \quad (8.10)$$

Використовуючи четверту теорію міцності, одержимо

$$M_{eIV} = \sqrt{M^2 + 0,75T^2} \quad (8.11)$$

Розрахункова формула для круглих стержнів, працюючих при сумісному згині і крученні, буде мати вигляд:

$$\sigma_e = \frac{M_e}{W} \leq \sigma_{adm}. \quad (8.12)$$

Методику розрахунку вала на згин з крученням розглянемо на прикладі.

**Приклад 8.2.** Перевірити міцність вала (рис.8.6,а), який за допомогою пасових передач передає потужність  $P=40$ кВт при частоті обертання  $n=600$  об/хв. Матеріал вала сталь 45 з границею текучості  $\sigma_y=280$ МПа, допустимий коефіцієнт запасу міцності  $S_{adm}=2,5$ , діаметр вала  $d=60$ мм; діаметри шківів  $D_1=0,3$ м і  $D_2=0,5$ м.

**Розв'язання.** Визначаємо скручуючий момент на шківях передач:

$$T_{e1} = T_{e2} = T_e = 9550 \frac{40}{600} = 636,7 \text{ Нм}$$

Прикладаємо знайдені зовнішні моменти  $T_{e1}$  і  $T_{e2}$  (рис.8.6,б) і будуємо епюру крутних моментів. У перерізах ділянки, розташованої між шківями  $T=T_{e1}=T_e=636,7$ Нм = const (рис.8.6,в).

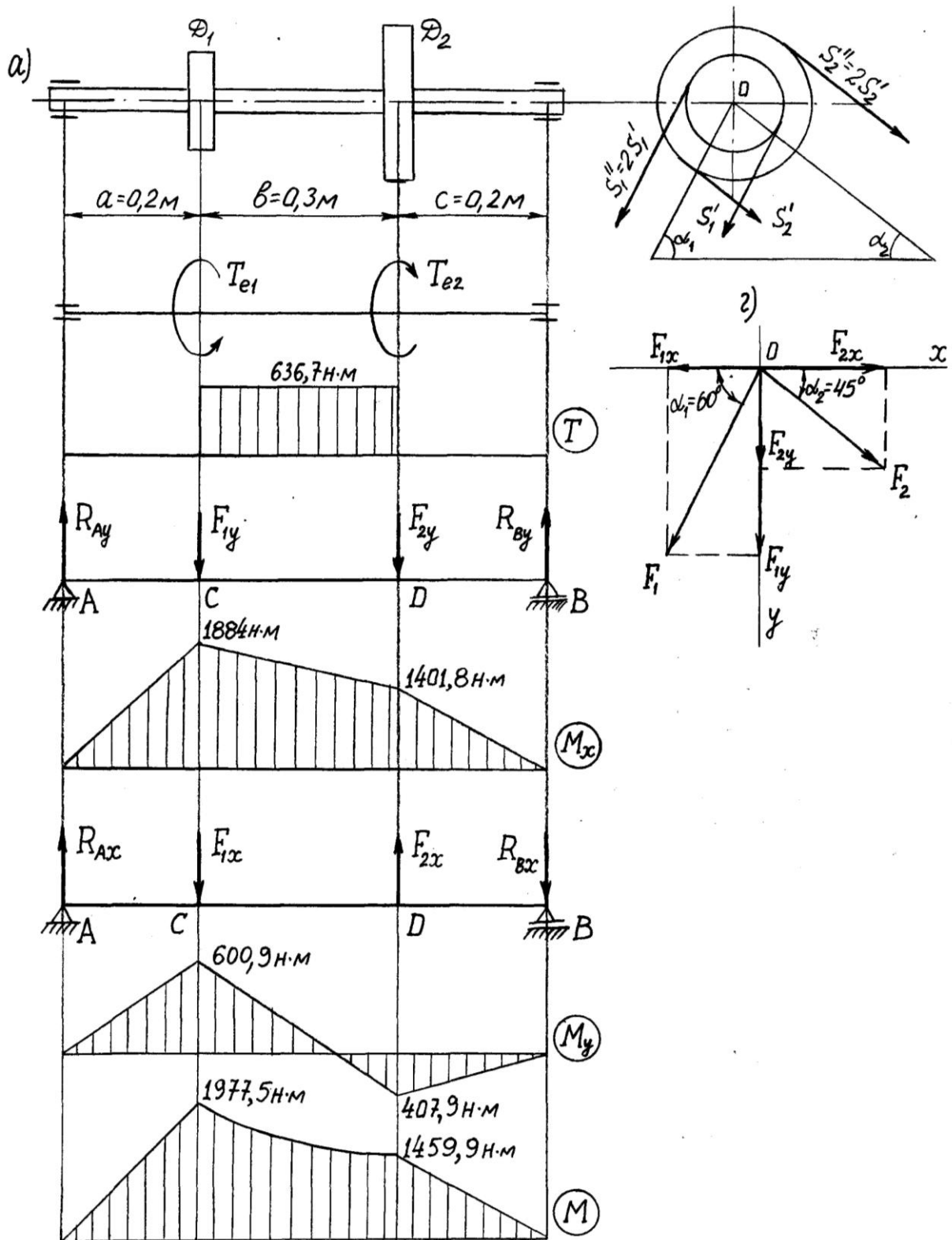


Рис. 8.6

Визначаємо сили, що передаються від шківів на вал. Шків1:

$$\sum M_0 = 0; \quad S_1'' \frac{D_1}{2} - S_1' \frac{D_1}{2} - T_{e1} = 0, \quad S_1'' = 2S_1'; \quad S_1' = \frac{2T_{e1}}{D_1} = \frac{2 \cdot 636.7}{0.3} = 4244.7\text{H};$$

$$S_1'' = 2S_1' = 2 \cdot 4244.7 = 8489.4\text{H}.$$

Шків2:

$$\sum M_0 = 0; \quad S_2'' \frac{D_2}{2} - S_2' \frac{D_2}{2} - T_{e2} = 0;$$

$$S_2'' = \frac{2T_{e2}}{D_2} = \frac{2 \cdot 636,7}{0,5} = 2546,8H; S_2'' = 2S_2' = 2 \cdot 2546,8 = 5093,6H$$

Обчислюємо сумарні сили, що передаються від шківів на вал:

$$F_1 = S_1' + S_1'' = 4244,7 + 8489,4 = 12734,1H; F_2 = S_2' + S_2'' = 5093,6 + 2546,8 = 7640,4H.$$

Визначаємо вертикальні і горизонтальні складові сил, прикладених до вала (рис.8.6,г):

$$F_{1x} = F_1 \cos \alpha_1 = 12734,1 \cdot \cos 60^\circ = 6367H; F_{1y} = F_1 \sin \alpha_1 = 12734,1 \cdot \sin 60^\circ = 11027,7H;$$

$$F_{2x} = F_2 \cos \alpha_2 = 7640,4 \cdot \cos 45^\circ = 5401,8H; F_{2y} = F_2 \sin \alpha_2 = 7640,4 \cdot \sin 45^\circ = 5401,8H.$$

Розглядаємо згин вала у вертикальній площині (рис.8.6,д). Знаходимо реакції опор і будуємо епюру згинальних моментів відносно осі x ( $M_x$ ).

$$\sum M_A = 0: R_{By} \overbrace{(+b+c)} - F_{2y} \overbrace{(+b)} - F_{1y} a = 0; R_{By} = 7009,2H$$

$$\sum M_B = 0: -R_{Ay} \overbrace{(+b+c)} + F_{1y} \overbrace{(+b)} + F_{2y} c = 0; R_{Ay} = 9420,3H$$

$$\text{Перевірка: } \sum Y = R_{Ay} + R_{By} - F_{1y} - F_{2y} = 9420,3 + 7009,2 - 11027,7 - 5401,8 = 0.$$

Згинальні моменти у характерних перерізах:  $M_{xc} = R_{Ay} a = 9420,39 \cdot 0,2 = 1884 \text{ Нм}$ ;  $M_{xD} = R_{By} c = 7009,2 \cdot 0,2 = 1401,8 \text{ Нм}$ . Епюра згинальних моментів  $M_x$  показана на рис.8.6,е.

Розглядаємо згин вала у горизонтальній площині (рис.8.6,е). Звертаємо увагу на те, що напрямки сил  $F_{1x}$  і  $F_{2x}$  не співпадають (див.рис.8.6,г). Визначаємо реакції опор:

$$\sum M_A = 0: -R_{Bx} \overbrace{(+b+c)} + F_{2x} \overbrace{(+b)} - F_{1x} a = 0; R_{Bx} = 2039,3H;$$

$$\sum M_B = 0: -R_{Ax} \overbrace{(+b+c)} + F_{1x} \overbrace{(+b)} - F_{2x} c = 0; R_{Ax} = 9420,3H.$$

$$\text{Перевірка: } \sum X = R_{Ax} - R_{Bx} - F_{1x} + F_{2x} = 30004,5 - 2039,3 - 6367 + 5401,8 = 0.$$

Згинальні моменти:  $M_{yc} = R_{Ax} a = 3004,5 \cdot 0,2 = 600,9 \text{ Нм}$ ;

$$M_{yD} = -R_{Bx} c = -2039,3 \cdot 0,2 = -407,9 \text{ Нм}.$$

Будуємо епюру згинальних моментів  $M_y$  (рис.8.6,ж).

Знаходимо сумарні згинальні моменти у характерних перерізах:

$$M_c = \sqrt{M_{xc}^2 + M_{yc}^2} = \sqrt{1884^2 + 600,9^2} = 1977,5 \text{ Нм};$$

$$M_D = \sqrt{M_{xD}^2 + M_{yD}^2} = \sqrt{1401,8^2 + 407,9^2} = 1459,9 \text{ Нм}.$$

Будуємо епюру сумарних згинальних моментів (рис.8.6,з).

Якщо скористуємося третьою теорією міцності (8.10), то найбільший еквівалентний момент у перерізі С буде дорівнювати

$$M_{eIII} = \sqrt{M_c^2 + T^2} = \sqrt{1977,5^2 + 636,7^2} = 2077,5 \text{ Нм}$$

Найбільші напруження у цьому перерізі

$$\sigma_{kg} = \frac{M_{eIII}}{W} = \frac{2077,5 \cdot 10^3}{21195} = 98 \text{ МПа},$$

де  $W = \frac{\pi d^3}{32} = \frac{3,14 \cdot 60^3}{32} = 21195 \text{ мм}^3$  - осьовий момент опору перерізу вала (круг з діаметром  $d=60 \text{ мм}$ ).

Визначаємо коефіцієнт запасу міцності S:

$$S = \frac{\sigma_y}{\sigma_{кв}} = \frac{280}{98} = 2,86.$$

Порівнюючи знайдений коефіцієнт запасу міцності  $S$  із заданим допустимим  $S_{adm}$ , бачимо, що  $S > S_{adm}$ , тобто міцність вала забезпечена. Недонапруження складає:

$$\frac{|S_{adm} - S|}{S_{adm}} = \frac{|2,5 - 2,86|}{2,5} = 14,4\% > 5\%$$

З економічної точки зору слід вибрати менш якісний матеріал, наприклад сталь з границею текучості  $\sigma_y = 250 \text{ МПа}$ . Тоді коефіцієнт запасу міцності буде дорівнювати  $S = 250/98 = 2,55$ , а недонапруження складе 2%, що цілком прийнятно.

## 9. КОНТАКТНІ НАПРУЖЕННЯ І ДЕФОРМАЦІЇ

### 9.1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ

У багатьох механізмах передача сил від однієї деталі до іншої здійснюється шляхом безпосереднього контакту цих деталей. При цьому у контактуючих деталях виникають місцеві деформації і напруження, які називаються контактними. Незважаючи на те, що у більшості випадків контактні напруження, виникаючі в деталях машин, вельми значні (часто значно перевищують границю текучості матеріалу), вони не впливають на загальну міцність деталей. Це пояснюється тим, що контактні напруження і деформації мають різко виражений місцевий характер, швидко зменшуються по мірі віддалення від зони контакту.

Надійність більшості деталей визначається, як правило, не загальною їх міцністю (наприклад, стосовно зубчастих коліс – не міцністю зубців на згин), а міцністю робочих поверхонь деталей, або, як прийнято говорити, контактною міцністю.

Визначення контактних напружень і деформацій не можна одержати за допомогою методу опору матеріалів. Рішення таких задач можливі лише в теорії пружності, результати яких будуть дані в наступному параграфі. Тут ми лиш зупинимось на самій постановці задачі і припущеннях, покладених в основу її рішення.

При теоретичному розв'язанні цієї задачі розглядаються два тіла, обмежених криволінійними поверхнями і навантажених силами, які притискають ці тіла одне до одного (рис.9.1). При відсутності навантаження співдотик тіл відбувається в одній точці (початковий точковий контакт, рис.9.1)

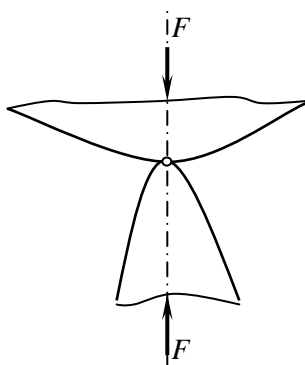


Рис. 9.1.

або по лінії (початковий лінійний контакт, див.нижче рис.9.6,а). Навантаження, нормальне до поверхні контакту, визиває місцеві деформації контактуючих тіл, в результаті яких початковий точковий чи лінійний контакт переходить у контакт по деякій малій площини, яка в загальному випадку має форму еліпса. У деяких поодиноких випадках початкового точкового контакту контактна площина має форму круга; при початковому лінійному контакті, наприклад при контакті циліндрів з паралельними твірними, - форму прямокутної смужки. Тиск, що передається від однієї деталі до другої, розподілений по контактній площині нерівномірно.

Слід підкреслити, що в тих випадках, коли співдотик ненавантажених деталей відбувається по деякій площині кінцевих розмірів, а не в точці і не по лінії, прийнято говорити не про контактні напруження, а про напруження зім'яття і застосовувати відомий вже нам умовний метод розрахунку, викладений у параграфі 5.3.



При розв'язанні контактної задачі визначається форма і розміри контактної площинки, закон розподілення контактної тиску і величина зближення контактуючих тіл. При цьому рішення базується на наступних припущеннях:

- 1) матеріали контактуючих тіл однорідні і ізотропні;
- 2) сили, прикладені до співдотичних тіл, такі, що процес деформації протікає в межах справедливості закону Гука;
- 3) поверхня контакту вельми мала у порівнянні з загальною поверхнею кожного із співдотичних тіл;
- 4) поверхні співдотичних тіл абсолютно гладкі, і, отже, сили тиску, які передаються через поверхню контакту від одного тіла до другого, нормальні до цієї поверхні.

Найбільші по абсолютному значенню нормальні напруження для точок, що належать поверхні контакту можуть розглядатися як відомі, тому що ці напруження чисельно дорівнюють контактному тиску у відповідних точках. Але, як відомо з попереднього, для оцінки міцності при складному напруженому стані недостатньо визначати лише найбільші напруження, треба знати всі три головні напруження.

Про те, що в точках зони контакту виникає об'ємний напружений стан, легко переконатися з найпростіших фізичних міркувань, розглядаючи який-небудь поодинокий випадок контакту деталей, наприклад, контакт колеса з рейкою. Умовно виділивши нескінченно малий паралелепіпед в околі деякої

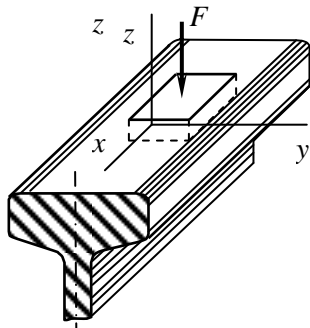


Рис. 9.2.

точки голівки рейки (рис.9.2), робимо висновок, що діючий на верхню грань паралелепіпеда тиск, повинен визвати деформації не тільки у напрямку осі  $z$ , але і в напрямку осей  $x$  та  $y$ . Цим деформаціям чинить перепону матеріал рейки, оточуючий умовно виділений паралелепіпед, і, отже, на його гранях, перпендикулярних до осей  $x$  та  $y$ , виникають напруження стиску. Зрозуміло, що наведені міркування дозволяють одержати лише якісне уявлення про характер напруженого стану; кількісні значення головних напружень одержують за допомогою методів теорії пружності.

## 9.2. КОНТАКТ ТІЛ, ОБМЕЖЕНИХ СФЕРИЧНИМИ І ЦИЛІНДРИЧНИМИ ПОВЕРХНЯМИ

Обмежимося розглядом трьох видів контакту тіл, які мають сферичні поверхні (рис.9.3): а) контакт двох випуклих сферичних поверхнів (рис.9.3,а); б) контакт тіла, яке має випуклу сферичну поверхню, з сферичною впадиною (рис.9.3,б); в) контакт тіла, обмеженого сферичною поверхнею, з площиною (рис.9.3,в).

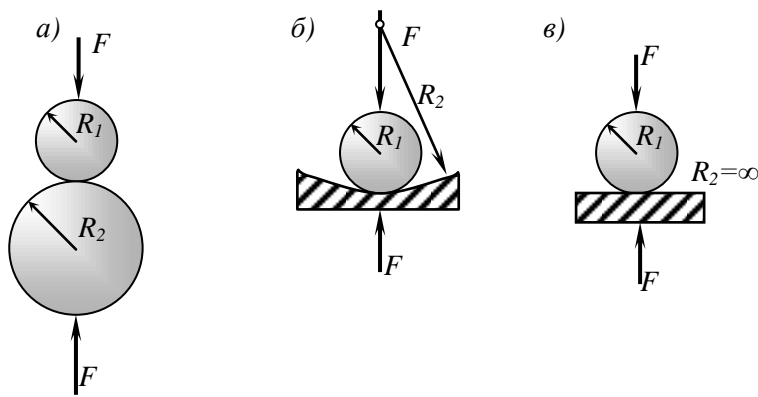


Рис. 9.3.

наприклад площиною  $xOy$ , плоска еюра, показуюча розподіл тиску вздовж любого діаметра контактної площинки, обмежена напівколом радіуса  $\rho_0$  (рис.9.4,б).

Радіус  $a$  контактної площинки, максимальний тиск  $\rho_0$  і зближення  $\delta$  контактуючих тіл визначають за формулами:

$$a = 0,9086 \sqrt[3]{\eta F \rho_{np}}; \quad (9.1)$$

$$\rho_0 = 0,5784 \sqrt[3]{\frac{F}{\eta^2 \rho_{np}^2}}; \quad (9.2)$$

$$\delta = 0,8255 \sqrt[3]{\frac{F}{\rho_{np}}}. \quad (9.3)$$

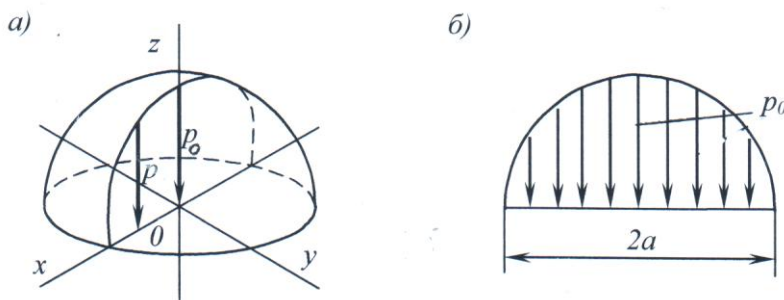


Рис.9.4

пружності  $E_1$  і  $E_2$ , коефіцієнтами Пуассона  $\nu_1$  і  $\nu_2$  залежністю

$$\eta = \frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2}. \quad (9.4)$$

Приведений радіус кривизни у місці контакту  $\rho_{np}$  визначають з формули

$$\frac{1}{\rho_{np}} = \frac{1}{R_1} \pm \frac{1}{R_2}. \quad (9.5)$$

Знак “мінус” перед другою складовою приймають при контакті сфери з сферичною впадиною (див.рис.9.3,б); при контакті сфери з площиною (див.рис.9.3,в)  $R_2 = \infty$ .

Закон розподілення контактного тиску по площині контакту даний на рис.9.4,а у вигляді просторової еюри, на якій  $p$  позначено тиск у довільній точці площинки контакту, а  $\rho_0$  – максимальний тиск, виникаючий у її центрі. У перерізі будь-якою площиною, яка проходить через вісь  $z$ ,

У цих формулах  $\eta$  - комбінована пружня стала матеріалів контактуючих тіл, зв'язана з їх модулем

Для більшості металів та сплавів без великої хиби можна прийняти  $\nu_1=\nu_2=0,30$ ; тоді замість формул (9.1) - (9.3) одержимо:

$$a = 1,1093 \sqrt{\frac{F \rho_{np}}{E_{np}}}; \quad (6.9)$$

$$p_0 = 0,3883 \sqrt{\frac{F E_{np}^2}{\rho_{np}^2}}; \quad (6.7)$$

$$\delta = 1,2313 \sqrt{\left(\frac{F}{E_{np}}\right)^2 \frac{1}{\rho_{np}}}, \quad (9.8)$$

де  $E_{np} = 2E_1E_2/(E_1+E_2)$  - приведений модуль пружності матеріалів контактуючих тіл. Незважаючи на те, що для матеріалів співдотичних тіл справедливий закон Гука, усі розглядувані величини залежать від навантаження (сили  $F$ ) нелінійно. Звідси витікає, що до контактних задач принцип незалежності дії сил непристосований.

Ознайомимося з основними результатами дослідження напруженого стану в точці зони контакту ( $\nu_1=\nu_2=0,30$ ). Для точки в центрі контактної площинки (рис. 9.5) максимальне по абсолютній величині головне напруження  $\sigma_3 = -p_0$  виникає на грані елемента, дотичної до поверхні контакту.

Останні два головні напруження для цієї точки стискаючі і рівні між собою:  $\sigma_1 = \sigma_2 = -0,8p_0$ . В усіх інших точках максимальні за модулем напруження менші від  $p_0$ .

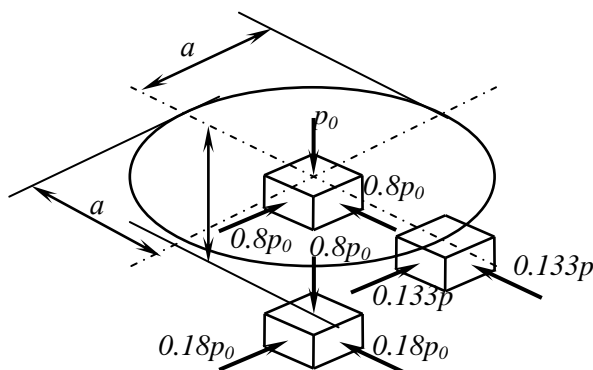


Рис. 9.5.

Найбільші напруження розтягу виникають у будь-якій точці контура контактної площинки (рис.9.5):  $\sigma_1 = 0,133p_0$ ; при цьому  $\sigma_1 = -\sigma_3$  и,  $\sigma_2 = 0$ , тобто тут на відміну від центральної точки не об'ємний, а плоский напружений стан (точніше, його окремий випадок – чистий зсув).

Якщо оцінювати контактну міцність, використовуючи метод розрахунку по небезпечній точці, то треба вибирати ту чи іншу теорію міцності і поставити вимогу, щоб для небезпечної точки виконувалася умова міцності:  $\sigma_e \leq [\sigma]$ .

При цьому виникає запитання, яка конкретна точка зони контакту небезпечна. Або, іншими словами, для якої точки за вибраною теорією міцності еквівалентне напруження максимальне.

Дослідження цього питання на випадок кругової площинки контакту показують, що точка, для якої  $\sigma_{eIII}$  максимальне, лежить на нормалі до центра контактної площини на глибині  $0,48a$  під поверхнею. Значення головних напружень для цієї точки дані на рис.9.5:  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0,18p_0$ ;  $\sigma_3 = -0,80p_0$  і, отже (див.(3.17)),

$$\sigma_{eIII} = \sigma_1 - \sigma_3 = -0,18p_0 - (-0,80p_0) = 0,62p_0$$

За формулою (3.16)

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = 0,31p_0.$$

За четвертою теорією міцності також одержується  $\sigma_{eIV} = 0,62p_0$ .

На випадок контакту циліндрів з паралельними твірними (рис.9.6,а) – початковий лінійний контакт – при рішенні контактної задачі прийняте додаткове припущення: циліндри мають нескінченно велику довжину. Контактна площинка обмежена двома паралельними прямими – контактна смужка; по її ширині тиск розподілений за еліптичним законом. Максимальний тиск діє у точці середньої лінії контактної полоски. Просторова епюра контактного тиску, обмежена поверхнею еліптичного циліндра, показана на рис.9.6,б. Епюра розподілу тиску по ширині полоски дана на рис.9.6,в.

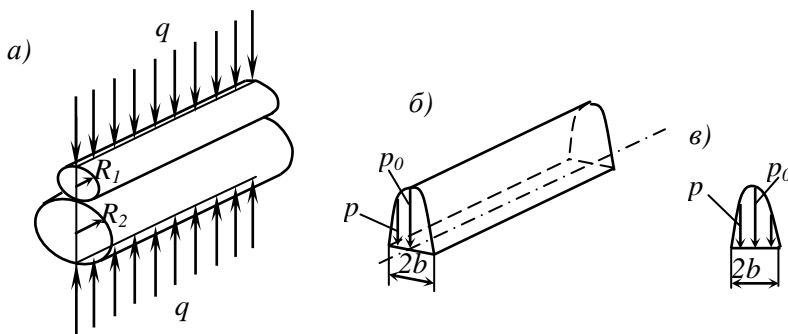


Рис. 9.6.

Напівширина  $b$  контактної площинки і максимальний контактний тиск  $p_0$  при рівномірно розподіленому по довжині циліндрів навантаженні інтенсивності  $q$  (рис.9.6,а) визначаються за формулами Герца:

$$b = 1,128 \sqrt{\eta q \rho_{np}}; \quad (9.9)$$

$$p_0 = 0,5642 \sqrt{\frac{q}{\rho_{np} \eta}}. \quad (9.10)$$

Значення  $\eta$  та  $\rho_{np}$  визначаються за формулами (9.4) і (9.5).

Якщо прийняти  $\nu_1 = \nu_2 = 0,30$ , то матимемо:

$$b = 1,522 \sqrt{\frac{q \rho_{np}}{E_{np}}}; \quad (9.11)$$

$$p_0 = 0,4180 \sqrt{\frac{q E_{np}}{\rho_{np}}}, \quad (9.12)$$

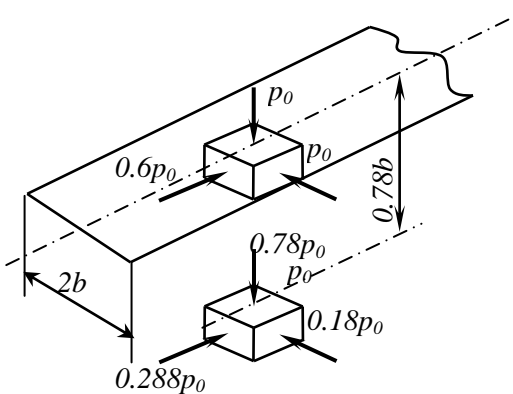


Рис. 9.7.

У точках середньої лінії контактної площинки напружений стан – трьохвісний тиск (рис.9.7), який характеризується головними напруженнями  $\sigma_1 = -0,6p_0$ ;  $\sigma_2 = \sigma_3 = -p_0$ . Значення  $\sigma_1$  відповідає  $\nu_1 = \nu_2 = 0,30$ .

При використанні третьої теорії міцності небезпечна точка лежить на нормалі до середньої лінії контактної площинки на глибині  $0,78b$  від поверхні контакту (рис.9.7). Для цієї точки  $\sigma_1 = -0,180p_0$ ;  $\sigma_2 = -0,288p_0$ ;  $\sigma_3 = -0,780p_0$  і, отже

$$\sigma_{eIII} = -\left(0,78p_0\right) \approx 0,60p_0 ;$$

$$\tau_{\max} = 0,30p_0 .$$

При використанні четвертої теорії міцності глибини небезпечної точки 0,70b, а  $\sigma_{eIV}=0,557p_0$ .

Отже, при контактній площинці у вигляді прямокутної полоски, також як і у випадку кругової площинки контакта, еквівалентне напруження виявляється рівним максимальному тиску  $p_0$ , помноженому на деякий числовий коефіцієнт. Позначивши його буквою С, одержимо умову міцності у вигляді

$$\sigma_e = cp_0 \leq \sigma_{adm} \text{ або } p_0 \leq \frac{\sigma_{adm}}{c} .$$

Таким чином, є можливість вести розрахунок на міцність без обчислення  $\sigma_e$  безпосередньо за величиною  $p_0$ :

$$p_0 \leq p_{0,adm} ,$$

де  $p_{0,adm}$  - допустимий контактний тиск, який встановлюється шляхом експериментальних досліджень контактної міцності і досвідом експлуатації машин та споруд. Практично у більшості випадків при написанні умови контактної міцності прийняті інші позначення, ніж наведені вище. Враховуючи, що  $p_0$  чисельно дорівнює найбільшому за модулем головному напруженню для тієї точки контактної площинки, на яку передається цей тиск, тобто  $p_0 = |\sigma_3|$ , користуються терміном “контактне напруження” і відповідним позначенням  $\sigma_H = p_0$ ,  $|\sigma_3| = \sigma_H$ .

При цьому умова контактної міцності записують у вигляді

$$\sigma_H \leq \sigma_{adm}^H . \tag{9.13}$$

## 10. СТІЙКІСТЬ СТИСНУТИХ СТЕРЖНІВ

### 10.1. ПОНЯТТЯ ПРО СТІЙКІ І НЕСТІЙКІ ФОРМИ РІВНОВАГИ

Поняття стійкої, нестійкої та байдужої рівноваги тіла відомі з механіки абсолютно твердого тіла (рис.10.1,а,б,в).

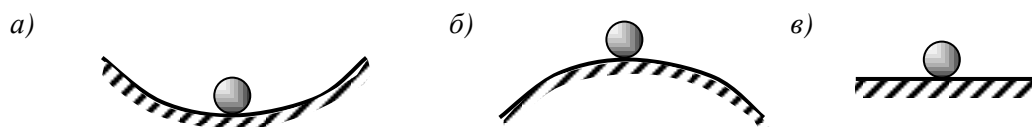


Рис. 10.1.

В опорі матеріалів крім положення рівноваги розглядається рівновага системи у деформованому стані. Так, наприклад, гнучкий прямолінійний стержень при дії на нього невеликої стискуючої осьової сили знаходиться у стані стійкої рівноваги. Якщо цей стержень зігнути якою-небудь поперечною силою, а потім її відкинути, то стержень повернеться до своєї попередньої прямолінійної форми рівноваги (рис.10.2,а). При значенні осьової стискуючої сили, яка перевищує певне значення, прямолінійна форма рівноваги стане нестійкою і замінюється криволінійною (рис.10.2,в). Таким чином, стійкістю називається властивість конструкцій зберігати своє попереднє положення або деяку деформовану форму рівноваги і повертатися до них при малих відхиленнях після того, як відкинути причину, що викликала ці малі відхилення.

Розрізняють стійке положення рівноваги і стійкість форми рівноваги стержня у деформованому стані. Перше відноситься до достатньо “жорстких” конструкцій або їх елементів. Друге – до гнучких конструкцій, виготовлених з пружного матеріалу.

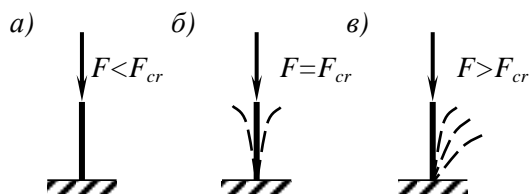


Рис. 10.2.

Вихід конструкції з попереднього стану рівноваги називається втратою стійкості. Навантаження, при невеликому

перевищенні якого можливо існування нової стійкої форми рівноваги, називається критичним навантаженням і позначається  $F_{cr}$ . Критична сила – найменше значення центральної стискуючої сили, при якій стержень втрачає здатність зберігати свою попередню форму рівноваги. Втрата стійкості з якісною зміною деформованої форми рівноваги називається втратою стійкості першого роду або Ейлерової втрати стійкості.

У новій формі рівноваги за рахунок якісної зміни деформованого стану в конструкції (елементі) виникають додаткові напруження, не передбачені звичайним розрахунком на міцність. Ці додаткові напруження можуть привести до руйнування конструкції при менших зовнішніх навантаженнях, одержаних з

розрахунків на міцність за початковою формою рівноваги. Явище втрати стійкості настає раптово, тому його важко упередити в тих конструкціях, де неправильно назначені розміри стиснутих елементів.

Прямолінійний стержень, навантажений осьюою стискуючою силою, меншою від критичної, працює тільки на стиск, а при силі, більшій від критичної, він вже зазнає сумісної дії стиску і згину за рахунок скривлення його осі.

Втрата стійкості першого роду відбувається і в ряді інших випадків. Наприклад, консоль тонкого прямокутного перерізу, яка згинається у вертикальній площині, при критичному значенні сили втрачає початкову форму (рис.10.3,а) і у балці з'являється додатковий згин у горизонтальній площині і кручення (рис.10.3,б).

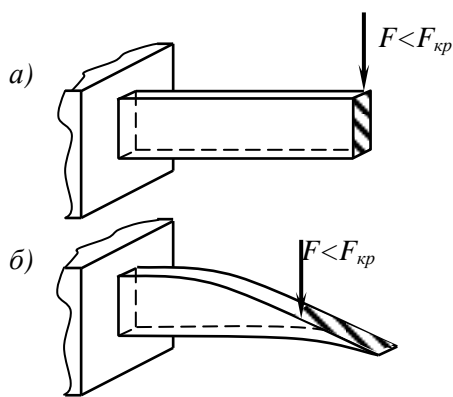


Рис. 10.3.

Істотне значення має той факт, що навіть тоді, коли стискуючі напруження при дії критичної сили набагато менші від границі текучості і границі міцності матеріалу, стержень виходить з ладу через втрату стійкості. Тому незалежно від розрахунку стиснутих стержнів на міцність першорядного значення набуває їх розрахунок на стійкість.

Згин стержня, що відбувається після втрати стійкості його прямої форми під дією осевих стискуючих сил, іноді називають поздовжнім згином прямого стержня.

Як відомо з історії техніки, недооцінка небезпеки втрати стійкості була причиною ряду аварій великих інженерних споруд, наприклад руйнування у 1907 р. моста через річку св. Лаврентія поблизу м. Квебека у Канаді.

Підсумовуючи вище сказане, заключаємо, що навантаження не повинні бути такими, за яких конструкції втрачають стійкість, тобто вони не повинні перевершувати критичних значень. Допустимим навантаженням слід вважати у деяке число разів менше критичне навантаження:

$$F_{adm} = \frac{F_{cr}}{n_s}, \quad (10.1)$$

де  $F_{adm}$  - допустиме навантаження;  $F_{cr}$  - критичне значення сили, яка стискує стержень;  $n_s$  – заданий коефіцієнт запасу стійкості (індекс s від stability (англ.) - стійкість).

Звідси витікає, що для розрахунків на стійкість необхідно вміти визначати критичні сили.

## 10.2 ФОРМУЛА ЕЙЛЕРА ДЛЯ КРИТИЧНОЇ СИЛИ

Задача визначення критичної сили для прямого стиснутого стержня вперше була розв'язана теоретично видатним математиком Л. Ейлером і тому її називають “задачею Ейлера”.

Розглянемо задачу Ейлера для прямого стержня довжиною  $l$  з шарнірними опорами, у яких його кінцеві перерізи можуть вільно повертатися в усіх напрямках. При поздовжньому згині стержень згинатиметься у площині найменшої жорсткості, яку суміщаємо з площиною координатної системи  $Ozy$  (рис. 10.4).

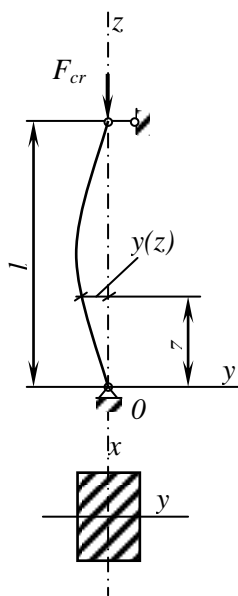


Рис. 10.4.

Нехай осьова стискаюча сила досягає величини критичної сили  $F_{cr}$ , при якій стержень може перебувати вже у злегка зігнутому стані. Тоді, незважаючи на відсутність поперечного навантаження, у поперечних прорізах стержня виникають згинальні моменти, пропорційні його прогинам,  $M=F_{cr}y$ .

Підставляючи значення згинального моменту у диференціальне рівняння зігнутої осі стержня (7.44), одержуємо

$$y'' = -\frac{F_{cr}y}{EI_{\min}}, \quad (10.2)$$

де  $I_{\min}$  – мінімальний момент інерції поперечного перерізу стержня (за рис. 10.4  $I_{\min}=I_x$ ).

Зауважимо, що, незалежно від прийнятого напрямку осі прогинів, знаки прогину  $y$  і кривизни  $y''$  зігнутої осі стержня завжди протилежні і тому обидві частини диференціального рівняння поздовжнього згину мають протилежні знаки.

Вводячи позначення

$$\frac{F_{cr}}{EI_{\min}} = k^2, \quad (10.3)$$

зведемо рівняння (10.2) до вигляду

$$y'' + k^2y = 0. \quad (10.4)$$

Загальний розв'язок цього диференціального рівняння записується, як відомо, так:

$$y = C \sin kz + D \cos kz. \quad (10.5)$$

Для визначення сталих інтегрування  $C$  і  $D$  використаємо граничні умови

$$y \Big|_{z=0} = 0, \quad y \Big|_{z=l} = 0.$$

З першої з цих умов впливає  $D=0$ , і вираз (10.5) спрощується до вигляду

$$y = C \sin kz. \quad (10.6)$$

З другої умови (10.5) одержуємо

$$C \sin kl = 0.$$



Оскільки  $C \neq 0$  (в протилежному разі не було б згину стержня, що суперечить умові задачі),  $\sin kl = 0$  і  $kl = n\pi$ , де  $n$  - довільне ціле число.

Беручи до уваги формулу (10.3), із залежності  $kl = n\pi$  знаходимо

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{l^2} n^2, n = 1, 2, 3, \dots$$

Таким чином, ми одержали безліч значень критичних сил, кожній з яких відповідає своя форма втрати стійкості. Практичне значення має найменша сила, що дістається при підстановці  $n=1$

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{l^2} \quad (10.7)$$

Одержали формулу Ейлера для визначення критичної сили у випадку, коли стержень має шарнірне закріплення його кінців. Їй відповідає зігнута вісь стержня у вигляді півхвилі синусоїди (рис. 10.5,а) з рівнянням

$$y = C \sin\left(\frac{\pi z}{l}\right). \quad (10.8)$$

Стала  $C$  залишилась невизначеною. Однак її фізичний зміст легко з'ясується після підстановки у рівняння (10.8) абсциси середини прольоту стержня  $z=l/2$

$$y\left(\frac{l}{2}\right) = y_{\max} = C.$$

Отже,  $C$  - це прогин посередині довжини стержня, який, згідно з умовами розв'язання задачі Ейлера, повинен бути малим.

Форми рівноваги стержня, що відповідають більш високим значенням сили  $F_{cr}$  (при  $n=2, 3$  і т.д.), є нестійкими і не мають практичного значення (рис. 10.5,б,в).

Розглянутий випадок шарнірного закріплення опорних прорізів стержня будемо далі називати основним випадком. При інших способах закріплення кінців стержня треба, взагалі кажучи, інтегрувати диференціальне рівняння його зігнутої осі при відповідних загальних умовах. Однак критичну силу для деяких інших випадків можна визначити також на основі розгляду форми зігнутої осі стержня і з використанням

формули (10.7) для основного випадку.

Нехай, наприклад, один опорний переріз стержня жорстко затиснутий, а другий вільний. Зігнута вісь такого стержня при дії критичної сили матиме форму, показану на рис.10.6,б. Довжина півхвилі синусоїди зігнутої осі стержня дорівнює подвійній довжині його прольоту, тобто  $2l$ . Зігнута вісь стержня з двома жорстко затиснутими кінцями, у яких його опорні перерізи не можуть повертатись і переміщатись у горизонтальному напрямку, показана на

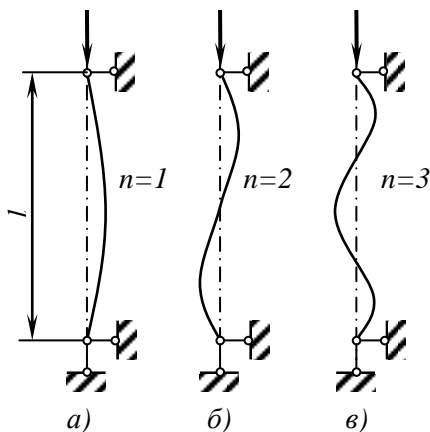


Рис. 10.5.

рис.10.6,в. Півхвиля синусоїди, що відповідає основному випадку, має тут довжину половини прольоту ( $0,5l$ ).

Для стержня з одним жорстко затиснутим і другим шарнірно-обіпертим опорним перерізом (рис.10.6,г) довжина півхвилі синусоїди, що відповідає основному випадку, дорівнює приблизно  $0,7l$ .

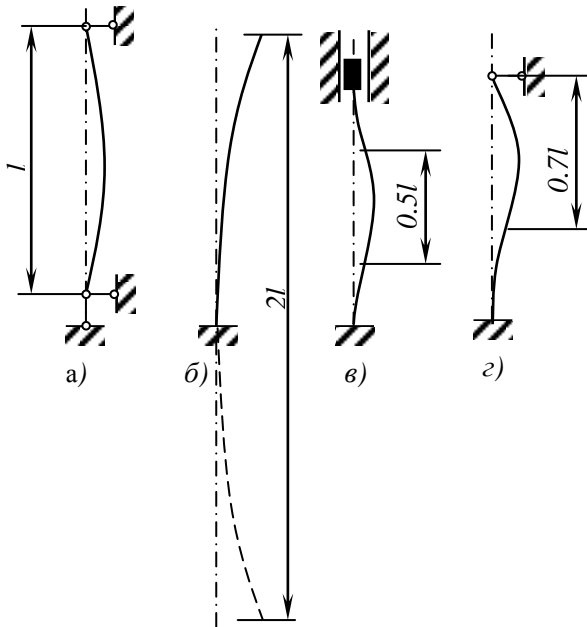


Рис. 10.6.

Введемо поняття приведеної довжини стержня  $\mu l$ , що дорівнює довжині півхвилі синусоїди його зігнутої осі для кожного з розглянутих випадків закріплення кінців стержня, можна критичну силу за Ейлером виразити загальною формулою, яка одержується після підстановки у формулу (10.7) основного випадку замість довжини стержня  $l$  його приведеної довжини  $\mu l$

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(\mu l)^2}. \quad (10.9)$$

Коефіцієнти  $\mu$  набувають залежно від умов на кінцях стержня значень: 1; 2; 0,5; 0,7 (рис. 10.6,а,б,в,г).

На практиці можливі випадки, коли умови закріплення кінців стержня різні у напрямку кожної з головних центральних осей його перерізу. Тоді, підставляючи у формулу (10.9) відповідні значення коефіцієнтів  $\mu$  і головних моментів інерції, одержуємо два значення критичної сили. Стійкість стержня буде визначатися меншою з них.

### 10.3. КРИТИЧНЕ НАПРУЖЕННЯ. МЕЖІ ПРИДАТНОСТІ ФОРМУЛИ ЕЙЛЕРА

Нормальне напруження у поперечному прорізі стиснутого критичною силою стержні називається критичним напруженням:

$$\sigma_{cr} = \frac{F_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(\mu l)^2 A} = \frac{\pi^2 E i_{\min}^2}{(\mu l)^2}, \quad (10.10)$$

де  $i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}}$  - радіус інерції поперечного перерізу стержня (див.(4.10)).

Введемо поняття гнучкості стержня:

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}}. \quad (10.11)$$

Формула (10.10) набуває вигляду

$$\sigma_{cr} = \pi^2 E / \lambda^2. \quad (10.12)$$

У випадку різних умов закріплення в обох головних площинах інерції треба вибрати ту комбінацію величин  $\mu$  та  $i$ , при якій гнучкість буде більшою.

Оскільки величину критичної сили ми визначили в результаті інтегрування диференціального рівняння зігнутої осі стержня, яке справедливе лише в межах дії закону Гука, фізичний зміст мають лише ті значення критичного напруження, які менші від границі пропорційності матеріалу  $\sigma_{pr}$ .

Таким чином, щоб можна було користуватися формулою Ейлера, необхідно задовольнити умові:

$$\sigma_{cr} \leq \sigma_{pr}. \quad (10.13)$$

Використовуючи формулу (10.12), одержуємо

$$\lambda \geq \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{pr}}}. \quad (10.14)$$

З врахування (10.11), умова придатності формули Ейлера запишеться так:

$$\frac{\mu l}{i_{\min}} \geq \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{pr}}}. \quad (10.15)$$

У тих випадках, коли формула Ейлера становиться не придатною, користуються емпіричними формулами, найпростіша з яких формула Тетмайєра-Ясінського

$$\sigma_{cr} = a - b\lambda, \quad (10.16)$$

де  $a$  і  $b$  - коефіцієнти, що залежать від матеріалу. Так, для сталі Ст3 при гнучкості  $\lambda=40\dots100$  коефіцієнт  $a$  і  $b$  можуть бути прийнятими рівними:  $a=350\text{МПа}$ ,  $b=1,14\text{МПа}$ .

Якщо гнучкість стержня виявляється меншою від  $\lambda < 40$ , то його розрахунок обмежується розрахунком на міцність.

#### 10.4. ПРАКТИЧНИЙ РОЗРАХУНОК СТЕРЖНІВ НА СТІЙКІСТЬ

Після встановлення допустимого напруження стійкості перевірку стиснутого стержня на стійкість можна вести за формулою, аналогічною формулі перевірки стержня на міцність при стиску

$$\frac{F}{A} \leq \sigma_{adm}^s, \quad (10.17)$$

де  $\sigma_{adm}^s$  - допустиме напруження стійкості:  $\sigma_{adm}^s = \sigma_{cr} / n_s$ .

Допустиме напруження стійкості доцільно виразити через допустиме напруження на стиск  $\sigma_{adm}^c$ , яке, як відомо, обчислюється за формулою  $\sigma_{adm}^c = \sigma_{неб} / n$ , де  $\sigma_{неб}$  - небезпечне напруження, тобто границя текучості або границя міцності матеріалу;  $n$  – коефіцієнт запасу міцності.

З відношення

$$\frac{\sigma_{adm}^s}{\sigma_{adm}^c} = \frac{\sigma_{cr} n}{\sigma_{неб} n_s}$$

знаходимо

$$\sigma_{adm}^s = \varphi \sigma_{adm}^c, \quad (10.18)$$

де через  $\varphi$  позначений так званий коефіцієнт поздовжнього згину, що дорівнює

$$\varphi = \sigma_{cr} n / (\sigma_{неб} n_s).$$

Коефіцієнт поздовжнього згину менший від одиниці і залежить, як видно з останньої формули, від критичного напруження, яке в свою чергу залежить від матеріалу та гнучкості стержня. Для коефіцієнтів  $\varphi$  складені таблиці (табл.10.1).

Таблиця 10.1

гнучкість $\lambda$	$\varphi$ для				
	Сталей Ст1, Ст2, Ст3, Ст4	Сталі Ст5	сталі підвищеної якості	чавун	деревина
0	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
10	0,99	0,98	0,97	0,97	0,99
20	0,96	0,95	0,95	0,91	0,97
30	0,94	0,92	0,91	0,81	0,93
40	0,92	0,89	0,87	0,69	0,87
50	0,89	0,86	0,83	0,57	0,80
60	0,86	0,82	0,79	0,44	0,71
70	0,81	0,76	0,72	0,34	0,60
80	0,75	0,70	0,65	0,26	0,48
90	0,69	0,62	0,55	0,20	0,38
100	0,60	0,51	0,43	0,16	0,31
110	0,52	0,43	0,35	-	0,25
120	0,45	0,37	0,30	-	0,22
130	0,40	0,33	0,26	-	0,18
140	0,36	0,29	0,23	-	0,16
150	0,32	0,26	0,21	-	0,14
160	0,29	0,24	0,19	-	0,12
170	0,26	0,21	0,17	-	0,11
180	0,23	0,19	0,15	-	0,10
190	0,21	0,17	0,14	-	0,09
200	0,19	0,16	0,13	-	0,08

Використовуючи залежність (10.18), запишемо формулу (10.17) перевірки стійкості в такому вигляді:

$$\frac{F}{\varphi A} \leq \sigma_{adm}^c. \quad (10.19)$$

З формули (10.19) випливає формула підбору поперечного перерізу стиснутого стержня з умови стійкості:

$$A \geq \frac{F}{\varphi \sigma_{adm}^c} \quad (10.20)$$

Оскільки коефіцієнт  $\varphi$  залежить від форми та розмірів поперечного перерізу стержня, які ще не відомі, підбір перерізів стержнів за формулою (10.20) треба вести методом поступових наближень, який розглянемо на конкретному прикладі.

**Приклад 10.1.** Для заданого стояка (рис.10.7) довжиною  $l=4\text{м}$ , навантаженого силою  $F=300\text{кН}$ , підбрати прямокутний переріз  $b \times h=2b^2$ . Матеріал стояка – сталь Ст2, для якої  $\sigma_{adm}^c=150\text{МПа}$ .

**Розв'язання.** Коефіцієнт приведення довжини  $\mu=0,5$ . Площа перерізу  $A=b \times h=2b^2$ . Потрібна площа з умови стійкості (10.20):  $A \geq F/(\varphi \sigma_{adm}^c)$ . Прирівнявши праві частини обох рівнянь, маємо

$$b \geq \sqrt{\frac{F}{2\varphi \sigma_{adm}^c}}$$

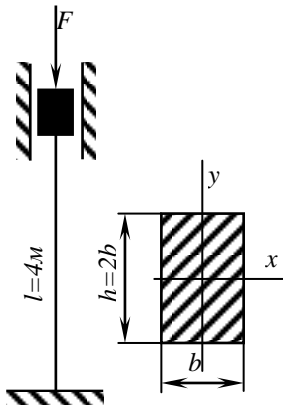


Рис.б

1.Перше наближення.

Задаємося коефіцієнтом  $\varphi_1=0,5$ . Потрібний розмір перерізу.

$$b \geq \sqrt{\frac{300 \cdot 10^3}{2 \cdot 0,5 \cdot 150}} = 44,72\text{мм.}$$

Прийmemo  $b=45\text{мм}$ .

Мінімальний радіус інерції перерізу

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}} = \sqrt{\frac{hb^3}{2bh}} = \frac{b}{\sqrt{12}} = \frac{b}{3,464} = \frac{45}{3,464} = 13\text{мм.}$$

Гнучкість стояка

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}} = \frac{0,5 \cdot 4000}{13} = 153,8$$

Звертаємося до таблиці коефіцієнтів  $\varphi$ : при  $\lambda=150$   $\varphi=0,32$ ; при  $\lambda=160$   $\varphi=0,29$ . Прийм лінійної інтерполяції дає табличне значення коефіцієнта  $\varphi$ , яке відповідає одержаній гнучкості:

$$\varphi_{T.1} = 0,32 - \frac{0,32-0,29}{10} (53,8-150) \approx 0,31.$$

Задалися  $\varphi_1=0,5$ , а одержали, якщо прийняти  $b=45\text{мм}$ ,  $\varphi_{T.1}=0,31$ .

2) Друге наближення.

Приймаємо  $\varphi_2=(\varphi_1+\varphi_{T.1})/2=(0,5+0,31)/2=0,405$ . Розрахунки повторюються, тому пояснення відкинути.

$$b \geq \sqrt{\frac{F}{2\varphi_2 \sigma_{adm}^c}} = \sqrt{\frac{300 \cdot 10^3}{2 \cdot 0,405 \cdot 150}} = 49,7\text{мм.}$$

Приймаємо  $b=50\text{мм}$ :  $i_{\min}=b/3,464=50/3,464=14,43\text{мм}$ ;

$\lambda=\mu l/i_{\min}=0,5 \cdot 4000/14,43=138,6$ .

Користуючись таблицею 10.1, як і у першому наближенні, враховуємо табличне значення коефіцієнта  $\varphi_{T.2}$

$$\varphi_{T.2} = 0,36 + \frac{0,40 - 0,36}{10} (140 - 13806) = 0,366.$$

Визначимо допустиме навантаження, якщо  $b=50\text{мм}$ :

$$F_{adm}^s = \varphi_{T.2} A \sigma_{adm}^c = \varphi_{T.2} 2b^2 \sigma_{adm}^c = 0,366 \cdot 2 \cdot 50^2 \cdot 150 = 274500\text{Н} = 274,5\text{кН}$$

Перенавантаження складе:

$$\frac{(F_{adm}^s - F) 100\%}{F_{adm}^s} = \frac{(74,5 - 300) 100\%}{974,5} = -9,3\% > 5\% ,$$

але результат доволі близький до прийнятного. Тому можна дещо збільшити останній результат розрахунку (наприклад, на 2 мм).

Якщо візьмемо  $b=52\text{мм}$ , то будемо мати такі результати:  $i_{\min}=15\text{мм}$ ;  $\lambda=133,3$ ;  $\varphi_{T.3}=0,374$ ;  $F_{adm}^s=303,3\text{кН}$ . Недонавантаження складе  $\approx 1,1\%$ , що цілком прийнятно (докладні розрахунки останнього варіанту не приводяться).

## 11. ДИНАМІЧНІ ЗАДАЧІ

### 11.1. ЗАГАЛЬНІ ПОНЯТТЯ

Дотепер ми розглядали статичну дію навантажень, основною ознакою якої є відсутність прискорень у навантаженому тілі. Це бува тоді, коли навантаження зростає повільно і безперервно від нуля до свого кінцевого значення і потім не змінюється. Швидкість зростання деформації у тілі невелика, прискорення незначні і ними можна нехтувати. При статичному навантаженні тіла зовнішні сили зрівноважуються реакціями в'язів та внутрішніми силами. Коли ж при навантаженні тіла виникають такі прискорення, якими нехтувати не можливо, навантаження називається динамічним.

Як нам відомо з теоретичної механіки, розв'язання задач динаміки у багатьох випадках на підставі принципу Даламбера можна звести до розв'язання відповідних задач статички. Цей метод називається кінетостатикою. Метод полягає в тому, що задача про рух тіла під дією прикладених до нього сил зводиться до задачі про його рівновагу під дією тих самих сил з приєднанням до них сил інерції. Отже, динамічний розрахунок визначення динамічних реакцій зводиться формально до розрахунку на статичне навантаження.

Якщо прискорення і деформації тіла змінюються за часом, то виникають коливання пружних систем. За певних умов при коливаннях може виникнути явище резонансу, що супроводиться різким зростанням амплітуди коливань і напружень у тілі.

Окремий випадок динамічних навантажень – це так звані ударні навантаження, при яких за короткий проміжок часу виникають дуже великі прискорення.

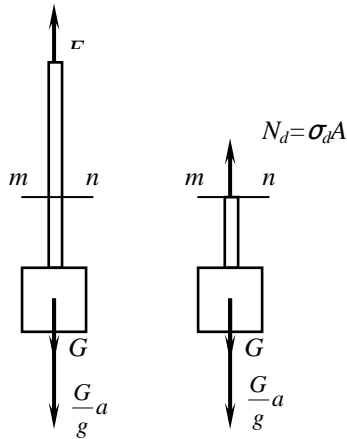


Рис. 11.1.

## 11.2. ВИЗНАЧЕННЯ НАПРУЖЕНЬ ПРИ РІВНОПРИСКОРЕНОМУ РУСІ

У багатьох випадках прискорення, з якими рухаються елементи конструкцій, відомі. Динамічні напруження в цих випадках обчислюються без утруднень. Розглянемо деякі приклади.

**Приклад 11.1.** Вантаж вагою  $G$  піднімається уверх з прискоренням  $a$  (рис.11.1). Визначити напруження в канаті, нехтуючи його вагою.

**Розв’язання.** Прикладаємо до вантажу силу інерції, яка дорівнює  $ma = Ga/g$  і напрямлена униз. Застосовуємо метод перерізів. Робимо переріз  $m-n$  і відкидаємо верхню частину каната. Зусилля у канаті позначимо  $N_d$  (індекс  $d$  від *dynamic* (англ.)-динамічний). Так як напруження при центральному розтязі рівномірно розподілені по перерізу, то можемо прийняти, що  $N_d = \sigma_d A$ , де  $\sigma_d$  - динамічне напруження, яке ми визначаємо;  $A$  – площа поперечного перерізу каната.

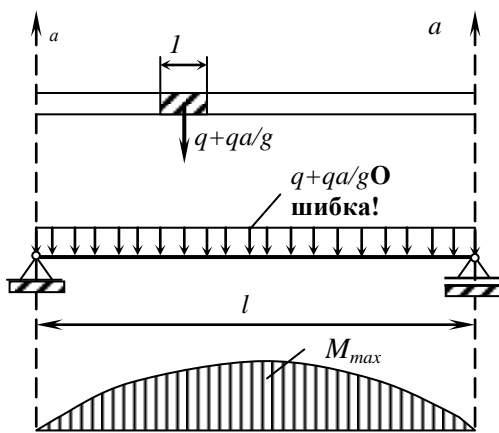


Рис.11.2

Проектуючи усі сили, в тому числі і сили інерції, на вертикальну вісь, одержуємо

$$\sigma_d A - G - G \frac{a}{g} = 0,$$

звідки

$$\sigma_d = \frac{G}{A} \left( 1 + \frac{a}{g} \right) = \sigma_{st} K_d,$$

де  $\sigma_{st} = G/A$  - напруження при статичній дії вантажу (індекс  $st$  від *statical* (англ.)-статичний);  $K_d = 1 + a/g$  - динамічний коефіцієнт.

Таким чином, динамічні напруження у багатьох випадках можуть бути виражені через статичні напруження і динамічний коефіцієнт. Це особливо зручно, так як динамічний коефіцієнт часто приходиться визначати дослідним шляхом.

**Приклад 11.2.** Стержень, вага  $1\text{ м}$  довжини якого дорівнює  $q$ , піднімають за допомогою двох вірвовок, прив’язаних до його кінців (рис.11.2). Рух поступальний з прискоренням  $a$ . Визначити напруження у стержні.

**Розв’язання.** Прикладаємо до кожного елемента стержня довжиною, рівній одиниці, силу інерції  $qa/g$ . Бачимо, що ця задача еквівалентна задачі про просту балку, навантажену рівномірно розподіленим навантаженням інтенсивністю  $q + qa/g$ .

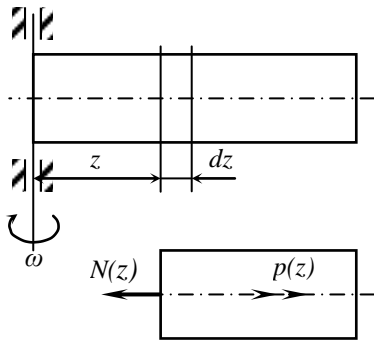


Рис. 11.3

Найбільший згинальний момент буде у перерізі посередині балки:

$$M_d = \frac{\left(q + q \frac{a}{g}\right) l^2}{8} = \frac{q l^2}{8} \left(1 + \frac{a}{g}\right) = M_{st} K_d,$$

де  $M_{st} = q l^2 / 8$  - згинальний момент від статичного рівномірного розподіленого навантаження інтенсивністю  $q$ ;  $K_d = 1 + a/g$  - динамічний коефіцієнт.

Найбільше динамічне напруження визначається за звичайною формулою згину:

$$\sigma_d = \frac{M_d}{W_x} = \sigma_{st} K_d.$$

**Приклад 11.3.** Стержень зі сталю кутового швидкістю  $\omega$  обертається навколо осі, перпендикулярної до осі стержня (рис.11.3). Визначити найбільші динамічні напруження.

**Розв'язання.** При обертвовому русі зі сталю кутового швидкістю точки стержня зазнаватимуть лише доцентрового прискорення  $a_n = \omega^2 z$ , де  $z$  - відстань від осі обертання до даної точки. Інтенсивність рівномірно розподілених сил інерції  $p(z)$  (відцентрових сил) дорівнюватиме:

$$p = \bar{m} a_n = A \rho \omega^2 z,$$

де  $\bar{m} = A \rho$  - маса одиниці довжини стержня;  $A$  - площа поперечного перерізу стержня;  $\rho$  - густина матеріалу стержня.

Поздовжню силу  $N(z)$  від дії сил інерції знаходимо з умови рівноваги сил (рис.11.4,б)

$$N = \int_z^l A \rho \omega^2 z dz = A \rho \omega^2 \int_z^l z dz = \frac{1}{2} A \rho \omega^2 (l^2 - z^2).$$

Як видно з одержаного вище виразу, величина поздовжньої сили змінюється за параболічним законом і досягає максимального значення на осі обертання при  $z=0$ , тобто

$$N_{\max} = N(z=0) = \frac{1}{2} A \rho \omega^2 l^2.$$

У цьому ж перерізі виникає максимальне напруження від дії сил інерції:

$$\sigma_{\max} = \frac{N_{\max}}{A} = \frac{1}{2} \rho \omega^2 l^2.$$

### 11.3. НАПРУЖЕННЯ І ПЕРЕМІЩЕННЯ ПРИ УДАРАХ

Ударним називається навантаження, яке передається на тіло протягом дуже малого проміжку часу і викликає значні прискорення в тілі, що зазнає удару. При співударі двох тіл виникають в області їх контакту місцеві



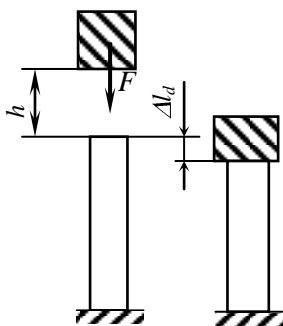


Рис. 11.4.

деформації і напруження. Крім того, в результаті удару деформації швидко поширюються по всьому тілу, що зазнало удару, і викликають його коливання.

Ми будемо розглядати лише дію ударного навантаження на стержньові елементи конструкції, при яких місцеві деформації здебільшого не мають істотного значення і для оцінки ефекту удару досить розглянути напруження і переміщення, пов'язані з деформаціями всієї конструкції. В основу розв'язання цієї задачі покладені такі припущення:

- 1) тіло, що ударяє, рухається разом із стержнем, що зазнає удару до найбільших деформацій останнього (так званий напружений удар);
- 2) деформації, що виникають при ударі, поширюються на увесь стержень, причому сили і відповідні переміщення пов'язані пропорційною залежністю Гука;
- 3) сума кінетичної і потенціальної енергії системи тіло-стержень залишається при ударі сталою. Енергією, затраченою на місцеві деформації, можна нехтувати.

Залежно від способу прикладання навантаження до стержня розрізняють поздовжній, поперечний і крутильний удари.

Розглянемо поздовжній удар. Нехай вантаж  $F$  з масою  $m$  падає з висоти  $h$  на нерухомий стержень (рис. 11.4). Робота, що виконується вагою падаючого вантажу,

$$W = F(\Delta l_d + h),$$

де  $\Delta l_d$  - переміщення в точці удару, яке дорівнює його скороченню від удару.

Потенціальна енергія деформації при стиску

$$U = \frac{EA\Delta l_d^2}{2l}.$$

Порівняємо роботу падаючого вантажу з потенціальною енергією деформації стержня

$$F(\Delta l_d + h) = \frac{EA\Delta l_d^2}{2l},$$

або

$$EA\Delta l_d^2 - 2F\Delta l_d - 2Flh = 0$$

Поділивши обидві частини рівняння на  $EA$ , одержимо

$$\Delta l_d^2 - \frac{Fl}{EA}\Delta l_d - \frac{Fl}{EA}2h = 0.$$

Але  $Fl/EA = \Delta l_{st}$  - укорочення стержня від статично прикладеної сили  $F$ . Тоді

$$\Delta l_d^2 - 2\Delta l_{st}\Delta l_d - 2\Delta l_{st}h = 0$$

Розв'язавши це квадратне рівняння відносно  $\Delta l_d$ , одержуємо

$$\Delta l_d = \Delta l_{st} \pm \sqrt{\Delta l_{st}^2 + 2h\Delta l_{st}}.$$

Зоставляючи знак “плюс” (рішення зі знаком “мінус” перед радикалом суперечить фізичному сенсу задачі), одержуємо остаточно

$$\Delta l_d = \Delta l_{st} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta l_{st}}}\right) = \Delta l_{st} K_d, \quad (11.1)$$

де  $K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta l_{st}}}$  - динамічний коефіцієнт при ударі.

Лінійна залежність між напруженням і деформацією дозволяє записати

$$\sigma_d = \sigma_{st} K_d. \quad (11.2)$$

З одержаних формул видно, що динамічні напруження і переміщення залежать від статичної деформації тіла, що зазнає удару. Чим більше статичні деформації (при інших рівних умовах), тим менші динамічні напруження. Ось чому для пом'якшення удару використовують підкладки (гумові, пружинні), які дають великі деформації.

При стискуючому ударі для запобігання поздовжнього згину динамічні напруження не повинні перевершувати критичних напружень.

Аналогічний вигляд мають формули і на випадок поперечного (згинального) удару, тільки в цьому випадку замість  $\Delta l_{st}$  слід приймати статичний прогин в місці удару  $y_{st}$ , а замість  $\Delta l_d$  динамічний прогин -  $y_d$ . Покажемо це на прикладі.

**Приклад 11.4.** На сталю двотаврову балку N27а прольотом 3м надає посередині прольоту вантаж  $F=1\text{кН}$  з висоти  $h=0,1\text{м}$ . Визначити найбільший прогин балки і максимальне напруження у її поперечному перерізі (рис.11.5,а).

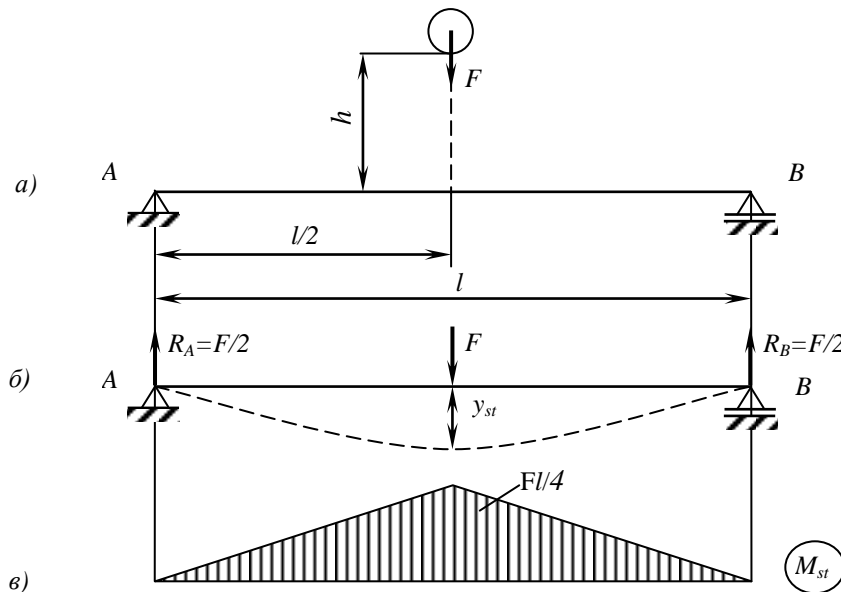


Рис. 11.5

**Розв'язання.** З ГОСТ8239-72 для двотавра N27а маємо:  $I_x=5500\text{см}^4$ ,  $W_x=407\text{см}^3$ . Модуль поздовжньої пружності для такого класа сталей можна прийняти  $E=2 \cdot 10^5 \text{МПа}$ .

Використовуючи метод початкових параметрів, знаходимо статичний прогин балки під вантажем, тобто по середині балки (рис.11.5,б):

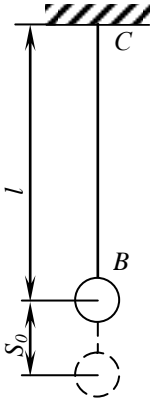
$$y_{st} = \frac{Fl^3}{48EI_x} = \frac{1 \cdot 10^3 \cdot (10^3)^3}{48 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 5500 \cdot 10^4} = 0,048 \text{мм}.$$

Динамічний коефіцієнт

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{y_{st}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 100}{0,048}} = 64..$$

Будуємо епюру статичних згинальних моментів (рис.11.5,в), з якої видно, що найбільшим згинальним моментом буде момент  $M_{\max} = Fl/y = 1000 \cdot 3000/4 = 7,5 \cdot 10^5 \text{ Нмм}$ . Найбільше статичне напруження

$$\sigma_{st} = \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{7,5 \cdot 10^5}{407 \cdot 10^3} = 1,86 \text{ МПа}.$$



Найбільше динамічне напруження буде дорівнювати

$$\sigma_d = \sigma_{st} K_d = 1,86 \cdot 64 = 119 \text{ МПа}.$$

З цього прикладу видно, наскільки небезпечними за своєю дією являються динамічні навантаження. До цього ще й додається те, що допустимі напруження при ударі приймаються меншими, ніж при дії статичних навантажень.

#### 11.4. ВІЛЬНІ КОЛИВАННЯ СИСТЕМИ З ОДНИМ СТУПЕНЕМ ВІЛЬНОСТІ

Рис. 11.6.

Як було вже відмічено, характерною ознакою динамічних навантажень є виникнення коливань конструкції і їх елементів.

При коливаннях внаслідок наявності прискорень виникають сили інерції, які можуть у багато разів перевищувати зусилля, що виникають в елементах конструкцій від дії статичних навантажень. Тому динамічні навантаження значно небезпечніші статичних.

Розглянемо найпростішу задачу теорії коливань – задачу про вільні (або власні) коливання тіл, маса яких зосереджена в одній точці (рис.11.6). Масою стержня (або пружини) нехтуємо, вважаючи її малою порівнянно з масою вантажу, що коливається.

У цьому випадку положення тіла, що коливається, повністю визначається одним параметром – переміщенням  $S$  тіла відносно положення статичної рівноваги.

У цьому і аналогічних випадках говорять, що система має одну ступінь вільності.

Щоб змусити тіло коливатися навколо положення рівноваги, подовжимо стержень ВС на яку небудь величину  $S_0$  і залиavimo його само по собі. Воно почне здійснювати коливальні рухи у вертикальному напрямку.

Такі коливання, які здійснює система, звільнена від зовнішніх силових впливів і надана самій собі, називаються вільними (або власними).

Власні коливання відбуваються до тих пір, поки надана на початку коливального процесу енергія не буде повністю витрачена на роботу проти сил тертя з повітрям і сил внутрішнього тертя в матеріалі.

Колівання називаються вимушеними, якщо вони відбуваються під дією змінних зовнішніх сил, які називаються змушуючими силами.

При складанні рівнянь руху керуються відомим нам принципом Даламбера.

Позначимо відхилення тіла від положення рівноваги через  $S$ . На тіло при коливаннях будуть діяти такі сили:

1) реакція з боку стержня СВ, яка згідно з законом Гука ((2.11), де  $S=\Delta l$ ) дорівнює

$$N = \frac{EAS}{l} = \frac{S}{S_{II}}, \quad (11.2)$$

де  $S_{II}$  - переміщення від сили рівної одиниці, прикладеної в точці кріплення маси,  $S_{II}=l/(EA)$ ;

2) сила інерції, яка дорівнює добутку маси на прискорення:

$$F_i = \frac{md^2S}{dt^2}. \quad (11.3)$$

Сума цих сил повинна дорівнювати нулеві:

$$\frac{md^2S}{dt^2} + \frac{S}{S_{II}} = 0, \quad (11.4)$$

або

$$\frac{d^2S}{dt^2} + \omega^2 S = 0, \quad (11.5)$$

де

$$\omega = \sqrt{1/(mS_{II})} \quad (11.6)$$

кутова частота коливань (число коливань за  $2\pi$  секунд).

Рівняння (11.5) є диференціальне рівняння другого порядку, однорідне, лінійне, зі сталими коефіцієнтами. Загальний інтеграл цього рівняння має вигляд

$$S = B_1 \cos \omega t + B_2 \sin \omega t, \quad (11.7)$$

або

$$S = P \sin(\omega t + \varphi), \quad (11.8)$$

де  $B_1$ ,  $B_2$  і  $P$ ,  $\varphi$  - довільні сталі величини.

Рівняння (11.8) є рівняння гармонічного коливання. У цьому рівнянні величина  $P$  являє собою найбільше відхилення (амплітуду) коливальної маси від положення рівноваги, так як найбільше значення  $\sin(\omega t + \varphi)$  дорівнює одиниці. Аргумент  $\omega t + \varphi$  називається фазою коливань, а величина  $\varphi$  - початковою фазою коливання, тобто значення фази при  $t=0$ .

Швидкість рухомої маси

$$V = \frac{ds}{dt} = P\omega \cos(\omega t + \varphi). \quad (11.9)$$

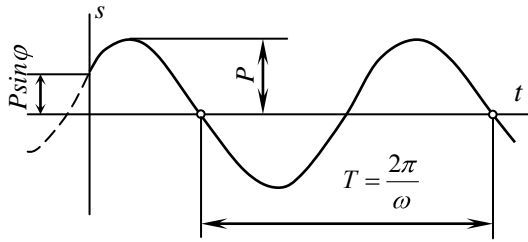


Рис. 11.7

Амплітуда  $A$  і початкова фаза  $\varphi$  визначаються за початковими умовами руху. Якщо у початковий момент при  $t=0$  зміщення маси було  $S=S_0$ , а  $V=V_0$ , то із попередніх рівнянь одержимо:

$$S_0 = P \sin \varphi ; V_0 = B \omega \cos \varphi .$$

Звідси знаходимо

$$P = \sqrt{S_0^2 + \frac{V_0^2}{\omega^2}} ; \operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega S_0}{V_0}, \text{ тобто}$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{\omega S_0}{V_0} .$$

(11.10)

Графік коливань (11.8) представлений на рис.11.7. Знайдемо повний період коливань  $T$ , тобто той проміжок часу, за який коливальна маса повернеться у початкове положення. Так як період синуса та косинуса дорівнює  $2\pi$ , то після закінчення часу  $T$  фаза коливань зросте на  $2\pi$ , тобто на підставі формули (11.8) маємо

$$\omega(t+T) - \omega t - \varphi = 2\pi ,$$

звідси

$$T = \frac{2\pi}{\omega} ,$$

(11.11)

або, підставляючи значення  $\omega$  із формули (11.6), одержимо

$$T = 2\pi \sqrt{m S_{II}} .$$

(11.12)

Так як в цю формулу не входять  $S_0$  і  $V_0$ , то період коливання не залежить від початкових умов руху.

З попередньої формули маємо також

$$\omega = 2\pi / T = \sqrt{1/(m S_{II})} ,$$

(11.13)

тобто колова частота коливань визначає число повних коливань, які робить маса за час  $2\pi$  секунд.

Маючи на увазі, що  $S_{II}=l/(EA)$ , одержуємо

$$\omega = \sqrt{EA/(ml)} ,$$

тобто частота коливань тим більша, чим більша жорсткість стержня (пружини), і зменшується із збільшенням довжини стержня і коливальної маси.

Одержані формули справедливі і на випадок поперечних згинальних коливань стержня за умови, що у цьому випадку  $S_{II}$  буде визначатися як прогин від одиничної сили, прикладеної у точці закріплення коливальної маси.

Колова частота коливань  $\omega$  зв'язана з частотою коливань  $f$ , яка виражає кількість коливань за 1 секунду, залежністю, що впливає з формули (11.11)

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} .$$

(11.14)

## 12. РОЗРАХУНОК НА МІЦНІСТЬ ПРИ ПОВТОРНО-ЗМІННИХ НАПРУЖЕННЯХ

### 12.1. ФІЗИЧНА ПРИРОДА РУЙНУВАННЯ МАТЕРІАЛІВ ПРИ ЗМІННИХ НАПРУЖЕННЯХ

У багатьох деталях машин в процесі їх експлуатації напруження періодично змінюються. Наприклад, вісь вагона працює на згин і обертається разом з колесами, зазнає дію циклічно змінних напружень, хоч зовнішні сили зберігають свої значення і напрямки. Волокна осі опиняються то у розтягнутій зоні, то у стиснутій (рис.12.1).

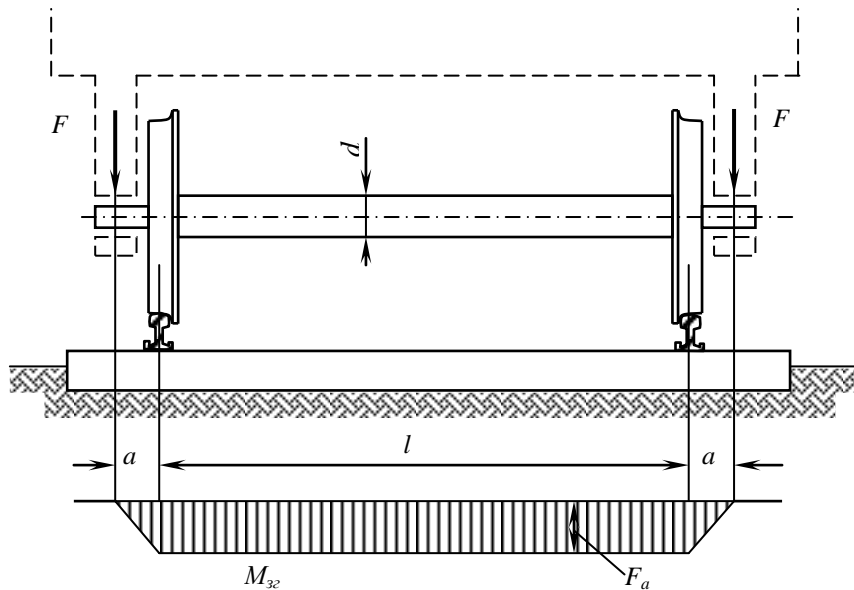


Рис. 12.1

Змінність напруження за часом на рис.12.2 показана кривими в координатах час-напруження. Час  $t$ , протягом якого напруження після безперервної зміни повторює своє найбільше значення, є періодом (рис.12.2,а).

Послідовність значень напружень за один період називається циклом напружень.

З практики відомо, що при напруженнях, які циклічно змінюються, в конструкціях може виникнути процес руйнування, що називається втомним руйнуванням. Суть втомного руйнування полягає в утворенні мікротріщин, які при певних умовах розвиваються в

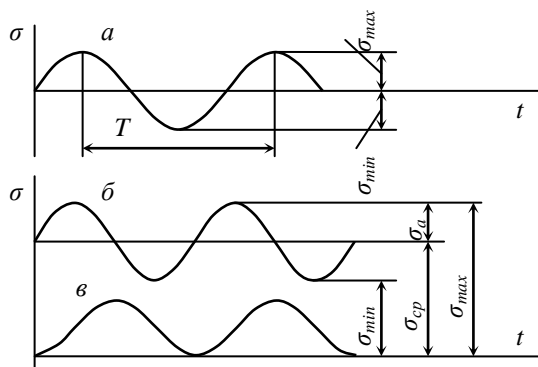


Рис. 12.2.

макротріщину. Остання поступово розростається, і процес закінчується руйнуванням конструкції. У зв'язку з тим, що поблизу гострих країв тріщини виникає тривісний напружений стан зі значними розтягуючими напруженнями, втомне руйнування деталей, виготовлених навіть з пластичних матеріалів, має крихкий характер.

Поверхня втомного руйнування має своєрідний вигляд, відмінний від вигляду поверхні руйнування при монотонному руйнуванні. На поверхні втомного перелому звичайно видно дві характерні зони. На рис.12.3 показані зони руйнування вала при згині з крученням. Зона А відповідає початковій стадії розвитку тріщини, яка, зародившись в деякому мікрооб'ємі біля зовнішнього контура, повільно розвивалась у макротріщину. Зі збільшенням тріщини відбувається ослаблення поперечного перерізу і тріщина росте швидше, а її краї притираються між собою. Перелом цієї частини має вигляд гладкої поверхні. Заключна стадія руйнування відбувається раптово. Зона перелому Б, що відповідає остаточному руйнуванню, має кристалічний характер, властивий крихким руйнуванням.

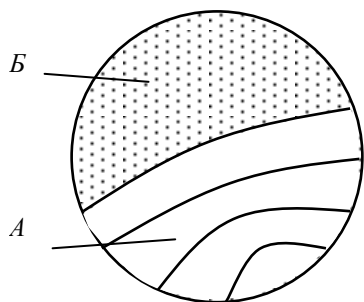


Рис. 12.3.

Втомні руйнування виникають внаслідок неодноріного розподілу деформацій і напружень в окремих мікрооб'ємах. Ці неоднорідності сприяють ослабленню зв'язків між атомами при дії напружень, що циклічно змінюються за часом.

Якщо напруження і деформації циклічно змінюються, то поблизу лінії ковзання, зв'язаних з пластичними деформаціями, відбувається ослаблення зв'язків між атомами

у кристалічній ґратці, що знижує опір деформації і сприяє виникненню мікротріщин. При досить великих змінних напруженнях і досить великій кількості циклів мікротріщин, що з'явилися в областях ослаблення кристалічної ґратки, розвиваються в макротріщини і відбувається втомне руйнування. Досліди показують, що розвиткові мікротріщини в макротріщину сприяють внутрішні дефекти структури, а також зовнішні концентратори напружень.

Таким чином, для того, щоб при повторно-змінних напруженнях із мікротріщини утворилась макротріщина, потрібна достатня величина напружень і значна кількість циклів, яка іноді досягає мільйонів циклів. Втомна міцність матеріалів вивчається експериментально за допомогою спеціальних випробувань відповідних зразків. Найбільшу величину змінного напруження, яка не приводить до втомного руйнування зразка, називають границею втоми або границею витривалості.

## 12.2. ТИПИ ЦИКЛІВ НАПРУЖЕНЬ. ГРАНИЦІ ВИТРИВАЛОСТІ І КРИВІ ВИТРИВАЛОСТІ.

На рис.12.2 показані графічно деякі випадки циклічної зміни напружень. Крива а зображає симетричний цикл, крива б – довільний асиметричний цикл, крива в – віднульовий (пульсуючий) цикл.

Позначимо найбільші напруження циклу  $\sigma_{\max}$ , а найменші -  $\sigma_{\min}$ . Тоді середнє значення цього напруження

$$\sigma_m = (\sigma_{\max} + \sigma_{\min}) / 2. \quad (12.1)$$

Найбільше відхилення від середнього значення напруження називається амплітудою циклу  $\sigma_a$ , що дорівнює

$$\sigma_a = (\sigma_{\max} - \sigma_{\min}) / 2. \quad (12.2)$$

Цикли напружень характеризуються двома величинами  $\sigma_{\max}$  і  $\sigma_{\min}$  або  $\sigma_m$  і  $\sigma_a$ . Легко помітити, що ці величини зв'язані між собою рівностями

$$\sigma_{\max} = \sigma_m + \sigma_a; \quad \sigma_{\min} = \sigma_m - \sigma_a. \quad (12.3)$$

Крім того, для характеристики циклу користуються коефіцієнтом асиметрії циклу  $r$

$$r = \sigma_{\min} / \sigma_{\max}. \quad (12.4)$$

Цикл напружень називається симетричним, якщо  $\sigma_{\min} = -\sigma_{\max}$  (див.рис.12.2,а). У цьому випадку коефіцієнт асиметрії  $r = -1$ . Цикли, для яких  $r \neq -1$ , називаються асиметричними (див.рис.12.2,б). Окремим видом асиметричного циклу є віднульовий (пульсуючий) цикл, для якого  $\sigma_{\min} = 0$  (або  $\sigma_{\max} = 0$ ). Коефіцієнт асиметрії такого циклу напруження  $r = 0$  (див.рис.12.2,в).

Опір матеріалів повторно-змінним напруженням досліджується шляхом випробувань на спеціальних випробувальних машинах. Найбільш поширені випробування на згин з симетричним циклом зміни напружень. Для таких випробувань з досліджуваного матеріалу виготовляється кілька однакових зразків круглого перерізу з полірованою поверхнею і діаметром 8-10мм. Зразок закріплюється в патроні шпінделя машини і обертається з великим числом обертів (3000-6000 об/хв). Кожен оберт відповідає одному циклу напруження.

Перший зразок навантажується так, щоб його руйнування настало після порівнянно невеликого числа циклів  $N_1$  і при найбільшому значенні напруження  $\sigma_1$ . Для другого зразка навантаження знижується, тому його руйнування настає при напруженні  $\sigma_2$ , меншому, ніж у першому випадку, але після більшого числа циклів навантаження  $N_2$ . поступове зниження напружень для послідовних зразків приводить до ще більших чисел циклів, при яких вони руйнуються. В результаті на якомусь рівні напружень ми дійдемо того, що зразок не руйнується навіть після прикладення до нього дуже великого числа циклів. За отриманими даними будується крива витривалості (крива Велера), з якої встановлюється границя витривалості так, як це показано на рис.12.4, де приведена крива витривалості для маловуглецевої сталі.



Найбільше циклічне напруження  $\sigma_r$  (індекс  $r$  – коефіцієнт асиметрії циклу, який є характеристикою циклу), при дії якого зразок не руйнується після дуже великого числа циклів, є границею витривалості для цього типу циклів. Для незагартованої сталі досить визначити неруйнівне напруження при числі циклів  $N_0=10^7$ , тоді при цьому напруженні не буде руйнування й при довільному числі циклів  $N>N_0$ .

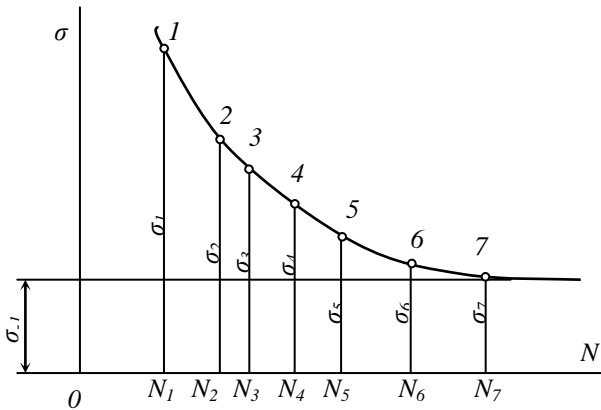


Рис. 12.4.

Для кольорових металів і сплавів крива витривалості поступово наближається до осі абсцис. Тому для цих металів визначають умовну границю витривалості, під якою

розуміють таке найбільше напруження  $\sigma_r$ , яке витримують зразки без руйнування при наперед заданому числі циклів  $N_0$ . Число  $N_0$  називається базою визначення границі витривалості. Для вказаних матеріалів за базу приймають  $N_0=5 \cdot 10^7 \dots 10^8$ .

Зауважимо, що границі витривалості залежать від коефіцієнта асиметрії циклів. Найнижчі границі витривалості одержуються для симетричних циклів, причому границя витривалості при згині  $\sigma_{-1}$  вища від границі витривалості  $\sigma^0_{-1}$  при розтягу-стиску і від границі витривалості  $\tau^t_{-1}$  при крученні.

### 12.3. ФАКТОРИ, ЯКІ ВПЛИВАЮТЬ НА ГРАНИЦЮ ВИТРИВАЛОСТІ.

Досліди показали, що на границю витривалості істотно впливають такі фактори: концентрація напружень, розміри поперечних перерізів деталей, стан поверхні, характер технологічної обробки та ін.

Розглянемо їх більш досконально.

Вплив концентрації напружень. Різкі зміни форми деталей, отвори, виточки, надрізи і т.п. значно знижують границю витривалості в порівнянні з границею витривалості для гладких циліндричних зразків.

Це зниження враховується так званим ефективним коефіцієнтом концентрації напружень, який визначається експериментально. Для цього беруть дві серії однакових зразків (по 10 зразків у кожній), але перші без концентрації напружень, а другі – з концентрацією, і визначають границі витривалості при симетричному циклі для зразків без концентрації напружень  $\sigma_{-1}$  і для зразків з концентрацією напружень  $\sigma_{-1K}$ . Відношення

$$K_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_{-1K}} \quad (12.5)$$

визначає ефективний коефіцієнт концентрації нормальних напружень.

Теоретично визначені коефіцієнти концентрації напружень  $\alpha_\sigma$  відрізняються від ефективних, так як перші враховують тільки форму деталі, а другі – ще й її матеріал.

Аналогічно для дотичних напружень

$$K_\tau = \frac{\tau_{-1}}{\tau_{-1K}}. \quad (12.5')$$

Значення  $K_\sigma$  і  $K_\tau$  приводяться у справочниках, а також у даному посібнику (див. додатки).

Вплив абсолютних розмірів поперечних перерізів деталі. Експериментальні дослідження показують, що чим більші абсолютні розміри поперечного перерізу деталі, тим менша границя витривалості. Відношення границі витривалості деталі діаметром  $d$  до границі витривалості лабораторного зразка діаметром  $d_3=6\dots 10$ мм називають коефіцієнтом впливу абсолютних розмірів поперечного перерізу; для нормальних напружень

$$K_d = \frac{\sigma_{-1d}}{\sigma_{-1d_3}}. \quad (12.6)$$

Аналогічно для дотичних напружень

$$K_\tau = \frac{\tau_{-1d}}{\tau_{-1d_3}}. \quad (12.6')$$

Вплив якості поверхні. Експериментальними дослідженнями встановлено, що втомна міцність деталей значною мірою залежить від стану поверхні, мікрогеометрії і механічних властивостей поверхневих шарів матеріалу. Для оцінки впливу обробки поверхні на величину границі витривалості вводиться коефіцієнт  $K_F$ , який називається коефіцієнтом впливу стану поверхні. Він дорівнює відношенню границі витривалості при симетричному циклі навантаження зразка з певною обробкою поверхні  $(\sigma_{-1})_n$  до границі витривалості полірованого зразка  $\sigma_{-1}$ :

$$K_F = \frac{\sigma_{-1n}}{\sigma_{-1}}. \quad (12.7)$$

Значення вказаних вище коефіцієнтів приводяться у справочниках, а також у даному посібнику (див. додатки).

## 12.4. СПОСОБИ ПІДВИЩЕННЯ ВТОМНОЇ МІЦНОСТІ

При дії повторно-змінних напружень міцність можна підвищити, якщо надати деталі досить плавної форми, яка не викликає концентрації напружень або зменшує її. Крім конструктивних заходів, для підвищення втомної міцності застосовують відповідну обробку поверхневих шарів деталей. Обробка поверхні може бути механічною – шліфування, обкатка роликками, обдування дробом і термохімічною – цементация, азотування, гартування струмами високої частоти, протикорозійні заходи.

Механічна обробка поверхні деталі підвищує втомну міцність лише в тому випадку, коли вона усуває концентратори напружень типу різнорідних шоршкостей та ризок і створює у поверхневому шарі деталі залишкові напруження стиску. Обкатавши поверхню деталі загартованими сталевими роликми, можна одержати зміцнений шар, що сягає в глибину на кілька міліметрів. Границі витривалості гладких сталених зразків після обкатки роликми зростають на 20...30%.

Після обкатки роликми галтелей ступінчастих валів зі сталі 45 спостерігалось підвищення втомної міцності до 44%.

Деталі малих розмірів піддають обдуванню дробом. Суть цього процесу полягає в тому, що деталь у готовому вигляді після механічної і термічної обробки піддається численним ударами дробинки, що рухаються з великою швидкістю. Глибина наклепаного шару в цьому випадку менша, ніж після обкатки роликми. Границі витривалості деталей з конструкційних і пружних сталей вдавалось цим методом підвищити на 20...40%.

## 12.5. РОЗРАХУНКИ НА МІЦНІСТЬ ПРИ ПОВТОРНО-ЗМІННИХ НАПРУЖЕННЯХ

Найбільш поширеним є перевірений розрахунок на втомну міцність запроектованої або наявної деталі. Внаслідок цього розрахунку визначається коефіцієнт запасу міцності деталі  $n$  відносно до втомного руйнування.

Найпростіше цей коефіцієнт визначається для симетричних циклів осьового розтягу та стиску, згину або кручення.

З врахуванням спільного впливу приведених раніше факторів границя витривалості реальної деталі менша границі витривалості лабораторного зразка. Він обчислюється за формулою

$$\sigma_{-1K} = \frac{\sigma_{-1} K_d K_F}{K_\sigma} \quad (12.8)$$

Знаючи максимальне напруження симетричного циклу, при якому повинна працювати дана деталь, можна знайти запас втомної міцності:

$$n_\sigma = \frac{\sigma_{-1K}}{\sigma_{\max}} \quad (12.9)$$

Аналогічно визначається коефіцієнт запасу міцності і при крученні:

$$n_\tau = \frac{\tau_{-1K}}{\tau_{\max}} \quad (12.10)$$

При складному напруженні сталі коефіцієнт запасу втомної міцності обчислюється за такою формулою:

$$n = \frac{n_\sigma n_\tau}{\sqrt{n_\sigma^2 + n_\tau^2}} \quad (12.11)$$

Для розрахунків при несиметричних циклах напружень будують діаграми різних типів. Найбільш поширеними з них є:

- 1) діаграма граничних напружень цикла в координатах  $\sigma_{\max}-\sigma_m$ ;
- 2) діаграма граничних амплітуд цикла в координатах  $\sigma_a-\sigma_m$ .

Розглянемо діаграму першого типу (рис.12.5). За експериментальними даними будується крива  $CAPBD$ . Точка  $P$  відповідає віднульовому циклу, у якого максимальне напруження у два рази більше від середнього. Точка  $D$  лежить одночасно на бісектрис  $OD$  і характеризує значення напруження (границі міцності) для сталого навантаження, у якого  $\sigma_{\max}=\sigma_m$ .

Так як для пластичних матеріалів небезпечним напруженням також є границя текучості  $\sigma_y$ , то на діаграмі наноситься горизонтальна лінія  $KL$ , ордината якої дорівнює  $\sigma_y$ . Отже, діаграма граничних напружень остаточно має вигляд  $CAPKL$ .

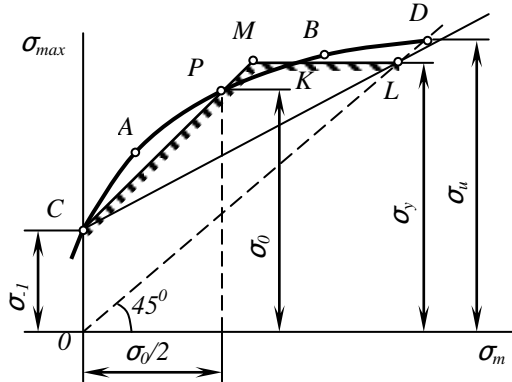


Рис. 12.5.

Звичайно цю діаграму спрощують, замінюючи її двома прямими  $CM$  та  $ML$ , причому пряму  $CM$  проводять через точку  $C$  (відповідно симетричному циклу) і точку  $P$  (відповідно віднульовому циклу).

Вказаний спосіб схематизації діаграми граничних напружень запропонований С.В. Серенсенем і Р.С. Кинасошвілі. У цьому випадку в межах прямої  $CM$  граничне напруження цикла (границя виносливості) виражається рівнянням

$$\sigma_{\max} = \sigma_{-1} + \frac{\sigma_0 - \sigma_{-1}}{\frac{\sigma_0}{2}} \sigma_m = \sigma_{-1} + \psi_{\sigma} \sigma_m, \quad (12.12)$$

або

$$\sigma_a = \sigma_{\max} - \sigma_m = \sigma_{-1} - \psi_{\sigma} \sigma_m, \quad (12.13)$$

де

$$\psi_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1} - \sigma_0}{\sigma_0} \quad (12.14)$$

Коефіцієнт  $\psi_{\sigma}$  називається коефіцієнтом чутливості матеріалу до симетрії циклу. Значення  $\psi_{\sigma}$  і аналогічного коефіцієнта для кручення  $\psi_{\tau} = (2\tau_{-1} - \tau_0) / \tau_0$  приводиться у справочній літературі.

Покажемо окремо спрощену діаграму  $SML$  граничних напружень зразка (рис.12.5). Тут же будемо діаграму граничних напружень для деталі, враховуючи зниження міцності від концентрації напружень, розмірів поперечного перерізу, стану поверхні. При цьому у відповідності з даними експериментів вплив перелічених факторів відноситься тільки перемінної складової циклу, тобто до амплітуди  $\sigma_a$ .

Гранична амплітуда напруження для деталі, згідно зі сказаним вище, дорівнює

$$\sigma_{akd} = \frac{\sigma_a K_d K_F}{K_\sigma} = \frac{\sigma_{-1} - \psi_\sigma \sigma_m}{K_\sigma} K_d K_F. \quad (12.15)$$

Рівняння лінії граничних напружень EN (рис.12.5) для деталі матиме вигляд

$$\sigma'_{Rkd} = \sigma'_{akd} + \sigma'_m = \frac{\sigma_{-1} - \psi_\sigma \sigma'_m}{K_\sigma} \left( \frac{K_d K_F}{K_\sigma} \right) + \sigma'_m. \quad (12.16)$$

Тут штрихами позначені поточні координати.

Обчислимо тепер коефіцієнт міцності деталі при дії змінних напружень  $\sigma_{max}$  і  $\sigma_m$  (точка R діаграми, рис.12.6).

Уявимо, що при збільшенні навантаження на деталь відношення  $\sigma_{max}/\sigma_m = const$ . Таке навантаження називається простим. У цьому випадку

граничною точкою, яка буде відповідати руйнуванню, є точка S. Коефіцієнт запасу міцності дорівнює відношенню відрізків SS' до RR':

$$n_\sigma = \frac{SS'}{RR'} = \frac{\sigma_{Rkd}}{\sigma_{max}} \quad (12.17)$$

Величину  $(\sigma_{Rk})_d$  (ординату точки S) знайдемо в результаті сумісного рішення рівнянь лінії EN і лінії OS. Рівняння лінії OS має вигляд

$$\sigma'_{max} = \frac{\sigma_{max} \sigma'_m}{\sigma_m} \quad (12.18)$$

(штрихами позначені поточні координати).

Порівнюючи праві частини формул (12.16) і (12.18), одержуємо

$$\frac{\sigma_{-1} - \psi_\sigma \sigma'_m}{K_\sigma} \left( \frac{K_d K_F}{K_\sigma} \right) + \sigma'_m = \frac{\sigma_{max} \sigma'_m}{\sigma_m},$$

звідки

$$\sigma'_m = \frac{\sigma_{-1}}{\left( \psi_\sigma \frac{K_\sigma}{K_d K_F} + \frac{\sigma_{max} K_\sigma}{\sigma_m K_d K_F} \right)}.$$

Підставимо значення  $\sigma'_m$  у формулу (12.16) або (12.18), знайдемо ординати точки S:

$$\sigma_{Rkd} = \frac{\sigma_{-1} \sigma_{max}}{\left[ \frac{\sigma_a K_\sigma}{K_d K_F} + \psi_\sigma \sigma_m \right]}. \quad (12.19)$$

Отже, на основі формули (12.17) одержуємо слідуєщу остаточну формулу для визначення коефіцієнта запасу втомної міцності:

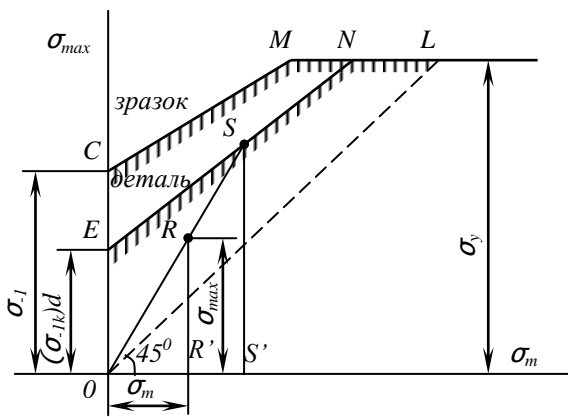


Рис. 12.6.

$$n_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1}}{\left[ \frac{\sigma_a K_{\sigma}}{K_F} + \psi_{\sigma} \sigma_m \right]} \quad (12.20)$$

Аналогічно, при крученні

$$n_{\tau} = \frac{\tau_{-1}}{\left[ \frac{\tau_a K_{\sigma}}{K_F} + \psi_{\tau} \tau_m \right]} \quad (12.21)$$

При складному напруженому стані, виникаючому, наприклад, при згині з крученням, коефіцієнт запасу міцності обчислюють за формулою

$$n = \frac{n_{\sigma} n_{\tau}}{\sqrt{n_{\sigma}^2 + n_{\tau}^2}} \quad (12.22)$$

Крім коефіцієнта запасу втомної міцності необхідно обчислити коефіцієнт запасу з опору пластичним деформаціям, так як точка S може опинитися вище лінії ML. Коефіцієнт запасу міцності з опору пластичним деформаціям вираховуються за формулами

$$n_{\sigma} = \frac{\sigma_y}{\sigma_{\max}} = \frac{\sigma_y}{\sigma_a + \sigma_m}; \quad (12.23)$$

$$n_{\tau} = \frac{\tau_y}{\tau_{\max}} = \frac{\tau_y}{\tau_a + \tau_m} \quad (12.24)$$

Розрахунковим (дійсним) буде менший із коефіцієнтів запасу, вирахованих за формулами (12.20) або (12.23), а при крученні за формулами (12.21) або (12.24). У випадку розрахунку на згин з крученням у формулу (12.22) слід підставляти менші із значень  $n_{\sigma}$  і  $n_{\tau}$ , обчислені так, як про це говорилося вище.

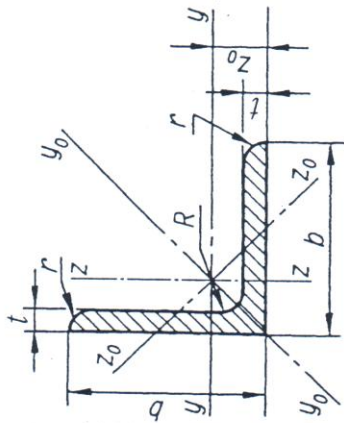
Розрахунки на втоину міцність див. у: Частина IV. Деталі машин, розділ 4.

# ДОДАТКИ

Додаток 1

Сортамент прокатної сталі

Кутники рівнобічні



Позначення:

$b$  — ширина полиці;  $t$  — товщина полиці;  $R$  — радіус внутрішнього заокруглення;  $r$  — радіус заокруглення полиці;  $J$  — момент інерції;  $i$  — радіус інерції;  $z_0$  — відстань від центра ваги до зовнішньої грані полиці;  $J_{yz}$  — відцентровий момент інерції;  $W$  — момент опору

Номер про-філю	Розміри, мм			Площа поперечного перерізу, см <sup>2</sup>	Довідкові значення для осей								Маса, кг	
	$b$	$t$	$r$		$y - y_0$				$z_0 - z_0$					
					$J_y$ , см <sup>4</sup>	$W_y$ , см <sup>3</sup>	$i_y$ , см	$J_{y_0 \max}$ , см <sup>4</sup>	$i_{y_0 \max}$ , см	$J_{z_0 \min}$ , см <sup>4</sup>	$W_{z_0}$ , см <sup>3</sup>	$i_{z_0 \min}$ , см <sup>4</sup>		
2	20	3	1,2	0,40	0,28	0,59	0,63	0,75	0,17	0,20	0,39	0,23	0,60	0,89
		4		0,50	0,37	0,58	0,78	0,73	0,22	0,24	0,38	0,28	0,64	1,15
2,5	25	3	1,2	0,81	0,46	0,75	1,29	0,95	0,34	0,33	0,49	0,47	0,73	1,12
		4		1,03	0,59	0,74	1,62	0,93	0,44	0,41	0,48	0,59	0,76	1,46
	5		2,27	1,22	0,72	0,73	1,91	0,92	0,53	0,47	0,48	0,69	0,80	1,78
2,8	28	3	1,3	1,16	0,58	0,85	1,84	1,07	0,48	0,42	0,55	0,68	0,80	1,27
3	30	3	1,3	1,45	0,67	0,91	2,30	1,15	0,60	0,53	0,59	0,85	0,85	1,36
		4		1,84	0,87	0,90	2,92	1,13	0,77	0,61	0,58	1,08	0,89	1,78
	5		2,78	1,06	0,89	3,47	1,12	0,94	0,71	0,58	1,27	0,93	2,18	
3,2	32	3	1,5	1,77	0,77	0,97	2,80	1,23	0,74	0,59	0,63	1,03	0,89	1,46
		4		2,26	1	0,96	3,58	1,21	0,94	0,71	0,62	1,32	0,94	1,91
3,5	35	3	1,5	2,35	0,93	1,07	3,72	1,35	0,97	0,71	0,69	1,37	0,97	1,60
		4		2,67	1,21	1,06	4,76	1,33	1,25	0,88	0,68	1,75	1,01	2,10
	5		3,28	1,47	1,05	5,71	1,32	1,52	1,02	0,68	2,10	1,05	2,58	

Продовження дод. 1

Номер про- філю	Розміри, мм				Площа попе- речного перері- зу, см <sup>2</sup>	Довідкові значення для осей												Маса, кг			
	b	t	R	r		y — y				y <sub>0</sub> — y <sub>0</sub>				z <sub>0</sub> — z <sub>0</sub>					J <sub>y,z</sub> , см <sup>4</sup>	z <sub>0</sub> , см	
						J <sub>y</sub> , см <sup>4</sup>	W <sub>y</sub> , см <sup>3</sup>	i <sub>y</sub> , см	J <sub>y<sub>0</sub> max</sub> , см <sup>4</sup>	i <sub>y<sub>0</sub> max</sub> , см	J <sub>z<sub>0</sub> min</sub> , см <sup>4</sup>	W <sub>z<sub>0</sub></sub> , см <sup>3</sup>	i <sub>z<sub>0</sub> min</sub> , см <sup>4</sup>	J <sub>y<sub>0</sub> max</sub> , см <sup>4</sup>	i <sub>y<sub>0</sub> max</sub> , см	J <sub>z<sub>0</sub> min</sub> , см <sup>4</sup>	W <sub>z<sub>0</sub></sub> , см <sup>3</sup>				i <sub>z<sub>0</sub> min</sub> , см <sup>4</sup>
4	40	3	5	1,7	3,55	1,22	1,23	5,63	1,55	1,47	0,95	0,79	2,08	1,09	1,85						
		4			4,58	1,60	1,22	7,26	1,53	1,90	1,19	0,78	2,68	1,13	2,42						
		5			5,53	1,95	1,21	8,75	1,52	2,30	1,39	0,78	3,22	1,17	2,98						
		6			6,41	2,30	1,20	10,13	1,50	2,70	1,58	0,78	3,72	1,21	3,52						
4,5	45	3	5	1,7	5,13	1,56	1,39	8,13	1,75	2,12	1,24	0,89	3	2,08							
		4			6,63	2,04	1,38	10,52	1,74	2,74	1,54	0,89	3,89	1,26	2,73						
		5			8,03	2,51	1,37	12,74	1,72	3,33	1,81	0,88	4,71	1,30	3,37						
		6			9,35	2,95	1,36	14,80	1,71	3,90	2,96	0,88	5,45	1,34	3,99						
5	50	3	5,5	1,8	7,11	1,94	1,55	11,27	1,95	2,95	1,57	1	4,16	2,32							
		4			9,21	2,54	1,54	14,63	1,94	3,80	1,95	0,99	5,42	1,38	3,05						
		5			11,20	3,13	1,53	17,77	1,92	4,63	2,30	0,98	6,57	1,42	3,77						
		6			13,07	3,69	1,52	20,72	1,91	5,43	2,63	0,98	7,65	1,46	4,47						
5,6	56	4	6	2	14,84	4,23	1,50	23,47	1,89	6,21	2,93	0,97	8,63	1,50	5,15						
		5			16,51	4,76	1,49	26,03	1,87	6,98	3,22	0,97	9,52	1,53	5,82						
		6			18,86	5,32	1,73	30,79	2,18	8,11	3,26	1,11	10,79	1,52	6,44						
		7			21,06	5,98	1,72	35,36	2,16	9,52	3,87	1,10	12,44	1,57	7,25						
6	60	4	7	2,3	16,21	3,70	1,85	25,69	2,33	6,72	2,93	1,19	9,48	1,62	3,71						
		5			19,79	4,56	1,84	31,40	2,32	8,18	3,49	1,18	11,61	1,66	4,58						
		6			23,21	5,40	1,83	36,81	2,31	9,60	3,99	1,18	13,60	1,70	5,43						
		8			29,55	7	1,81	46,77	2,27	12,34	4,90	1,17	17,22	1,78	7,10						
6,3	63	4	7	2,3	35,32	8,52	1,79	55,64	2,24	15	5,70	1,16	20,32	1,85	8,70						
		5			40,9	10,1	1,95	66,90	2,45	18,86	7,81	1,25	24,44	1,69	10,29						
		6			48,16	11,82	1,94	78,80	2,44	22,30	9,52	1,25	29,70	1,74	11,82						
		8			57,90	14,82	1,93	91,52	2,43	27,06	11,18	1,24	35,60	1,78	13,60						
7	70	4,5	8	2,7	29,04	5,67	2,16	46,03	2,72	12,04	4,53	1,39	17	1,88	4,87						
		5			31,94	6,27	2,16	50,67	2,72	13,22	4,92	1,39	18,70	1,90	5,38						
		6			37,58	7,42	2,15	59,64	2,71	15,52	5,66	1,38	22,10	1,94	6,39						
		8			42,98	8,57	2,14	68,19	2,69	17,77	6,31	1,37	25,20	1,99	7,39						
7,39	73,9	4,5	8	2,7	48,16	9,68	2,12	76,35	2,68	19,97	6,99	1,37	28,20	2,02	8,37						
		5			57,90	11,82	2,10	91,52	2,64	24,27	8,17	1,36	33,60	2,10	10,29						
		6			68,19	14,82	2,10	109,52	2,64	29,70	9,52	1,36	40,90	2,10	11,82						
		8			78,80	18,82	2,10	131,52	2,64	35,60	11,18	1,36	48,16	2,10	13,60						



8	80					1,27	3,33	1,41	4,31	62,63	2,91	16,41	5,74	1,49	23,10	2,02	5,80
	6	8,78	46,57	8,57	2,30	73,87	2,90	19,28	6,62	1,48	27,30	2,06	6,89				
	7	10,15	53,34	9,89	2,29	84,61	2,89	22,07	7,43	1,47	31,20	2,10	7,96				
	8	11,50	59,84	11,18	2,28	94,89	2,87	24,80	8,16	1,47	35	2,15	9,02				
	9	12,83	66,10	12,43	2,27	104,72	2,86	27,48	8,91	1,46	38,60	2,18	10,07				
	5,5	8,63	52,68	9,03	2,47	83,56	3,11	21,80	7,10	1,59	30,90	2,17	6,78				
	6	9,38	56,97	9,80	2,47	90,40	3,11	23,54	7,60	1,58	33,40	2,19	7,36				
	7	10,85	65,31	11,32	2,45	103,66	3,09	26,97	8,55	1,58	38,30	2,23	8,51				
	8	12,30	73,36	12,80	2,44	116,39	3,08	30,32	9,44	1,57	43	2,27	9,65				
	10	15,14	88,58	15,67	2,42	140,31	3,04	36,85	11,09	1,56	56,70	2,35	11,88				
	12	17,90	102,74	18,42	2,40	162,27	3,01	43,21	12,62	1,55	59,50	2,42	14,05				
9	90																
	6	10,61	82,10	12,49	2,78	130	3,50	33,97	9,88	1,79	48,10	2,43	8,33				
	7	12,28	94,30	14,45	2,77	149,67	3,49	38,94	11,15	1,78	55,40	2,47	9,64				
	8	13,92	106,11	16,36	2,76	168,42	3,48	43,80	12,34	1,77	62,30	2,51	10,93				
	9	15,60	118	18,29	2,75	186	3,46	48,60	13,48	1,77	68,00	2,55	12,20				
	10	17,17	128,60	20,07	2,74	203,93	3,45	53,27	14,54	1,76	75,30	2,59	13,48				
	12	20,33	149,67	23,85	2,71	235,88	3,41	62,40	16,53	1,75	86,20	2,67	15,96				
10	100																
	6,5	12,82	122,10	16,69	3,09	193,46	3,89	50,73	13,38	1,99	71,40	2,68	10,06				
	7	13,75	130,59	17,90	3,08	207,01	3,88	54,16	14,13	1,98	76,40	2,71	10,79				
	8	15,60	147,19	20,30	3,07	233,46	3,87	60,92	15,66	1,98	86,30	2,75	12,25				
	10	19,24	178,95	24,97	3,05	283,83	3,84	74,08	18,51	1,96	110	2,83	15,10				
	12	22,80	208,90	29,47	3,03	330,95	3,81	86,84	21,10	1,95	122	2,91	17,90				
	14	26,28	237,15	33,83	3	374,98	3,78	99,32	23,49	1,94	138	2,99	20,63				
	15	27,99	250,68	35,95	2,99	395,87	3,76	105,48	24,62	1,94	145	3,03	21,97				
	16	29,68	263,82	38,04	2,98	416,04	3,74	111,61	25,79	1,94	152	3,06	23,30				
11	110																
	7	15,15	175,61	21,83	3,40	278,54	4,29	72,68	17,36	2,19	106	2,96	11,89				
	8	17,20	198,17	24,77	3,39	314,51	4,28	81,83	19,29	2,18	116	3	13,50				
12	120																
	8	18,80	259,75	29,68	3,72	412,45	4,68	107,04	23,29	2,39	153	3,25	14,76				
	10	23,24	317,16	36,59	3,69	503,79	4,66	130,54	27,72	2,37	187	3,33	18,24				
	12	27,60	371,80	43,30	3,67	590,28	4,62	153,33	31,79	2,36	218	3,41	21,67				
	15	33,99	448,90	52,96	3,63	711,32	4,57	186,48	37,35	2,34	262	3,53	26,68				
12,5	125																
	8	19,69	294,36	32,20	3,87	466,76	4,87	121,96	25,67	2,49	172	3,36	15,46				
	9	22	327,48	36	3,86	520	4,86	135,88	28,26	2,48	192	3,40	17,30				
	10	24,33	359,82	39,74	3,85	571,04	4,84	148,59	30,45	2,47	211	3,45	19,10				
	12	28,89	422,23	47,06	3,82	670,02	4,82	174,43	34,94	2,46	248	3,52	22,68				
	14	33,37	481,76	54,17	3,80	763,90	4,78	199,62	39,10	2,45	282	3,61	26,20				
	16	37,77	538,56	61,09	3,78	852,84	4,75	224,22	43,10	2,44	315	3,68	29,65				
14	140																
	9	24,72	465,72	45,55	4,34	739,42	5,47	192,03	35,92	2,79	274	3,78	19,41				

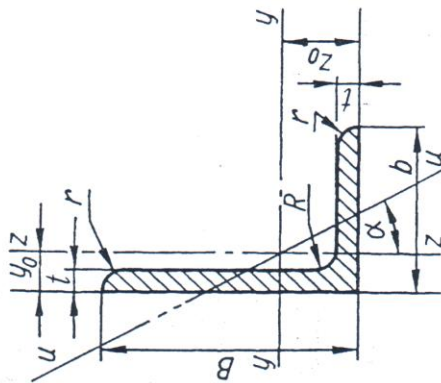
Номер про-філю	Розміри, мм				Площа поперечного перерізу, см <sup>2</sup>	Довідкові значення для осей										Маса, кг	
						y — y					y <sub>0</sub> — y <sub>0</sub>						z <sub>0</sub> — z <sub>0</sub>
	b	t	R	r		J <sub>y</sub> , см <sup>4</sup>	W <sub>y</sub> , см <sup>3</sup>	i <sub>y</sub> , см	J <sub>y<sub>0</sub> max</sub> , см <sup>4</sup>	i <sub>y<sub>0</sub> max</sub> , см	J <sub>z<sub>0</sub> min</sub> , см <sup>4</sup>	W <sub>z<sub>0</sub></sub> , см <sup>3</sup>	i <sub>z<sub>0</sub> min</sub> , см <sup>4</sup>	J <sub>y<sub>z</sub></sub> , см <sup>4</sup>	z <sub>0</sub> , см		Маса, кг
14	10				512,29	50,32	4,33	813,62	5,46	210,96	39,05	2,78	301	3,82	21,45		
	12				602,49	59,66	4,31	956,98	5,43	248,01	44,97	2,76	354	3,90	29,50		
15	10	14	4,6		634,76	58,07	4,65	1008,56	5,86	260,97	45,34	2,98	374	4,07	23,02		
	12				747,48	68,90	4,63	1187,86	5,83	307,09	52,32	2,97	440	4,15	27,39		
	15				908,38	84,66	4,59	1442,60	5,79	374,17	61,96	2,95	534	4,27	33,82		
	18				1060,08	99,86	4,56	1680,92	5,74	439,24	70,91	2,93	621	4,38	40,11		
16	10	16	5,3		774,24	66,19	4,96	1229,10	6,25	319,38	52,52	3,19	455	4,30	24,67		
	11				844,21	72,44	4,95	1340,66	6,24	347,77	56,52	3,18	496	4,35	27,02		
	12				912,89	78,62	4,94	1450	6,23	375,78	60,53	3,17	537	4,39	29,35		
	14				1046,47	90,77	4,92	1662,13	6,20	430,81	68,15	3,16	615	4,47	33,97		
	16				1175,19	102,64	4,89	1865,73	6,17	484,64	75,92	3,14	690	4,55	38,52		
	18				1290,24	114,24	4,87	2061,03	6,13	537,46	82,08	3,13	671	4,63	43,01		
	20				1418,85	125,00	4,85	2248,26	6,10	589,43	90,02	3,12	830	4,70	47,44		
	20				1822,78	124,61	6,22	2896,16	7,84	749,40	98,68	3,99	1073	5,37	36,97		
18	11	16	5,3		1216,44	92,47	5,60	1933,10	7,06	499,78	72,86	3,59	716	4,85	30,47		
	12				1316,62	100,41	5,59	2092,78	7,04	540,45	78,15	3,58	776	4,89	33,12		
	15				1607,36	123,74	5,55	2554,99	7	659,73	93,11	3,56	948	5,01	40,96		
	18				1884,07	146,36	5,51	2992,69	6,95	775,44	106,88	3,54	1108	5,13	48,66		
	20				2061,11	161,07	5,49	3271,31	6,91	850,92	115,71	3,53	1210	5,20	53,72		
	20				1960,77	134,44	6,21	3116,18	7,83	805,35	105,07	3,98	1156	5,42	39,92		
20	12	18	6		1822,78	124,61	6,22	2896,16	7,84	749,40	98,68	3,99	1073	5,37	36,97		
	13				1960,77	134,44	6,21	3116,18	7,83	805,35	105,07	3,98	1156	5,42	39,92		
	14				2097	144,17	6,20	3333	7,81	861	111,50	3,97	1236	5,46	42,80		
	16				2362,57	163,37	6,17	3755,39	7,78	969,74	123,77	3,96	1393	5,54	48,65		
	18				2620,64	182,22	6,15	4164,54	7,75	1076,74	135,48	3,94	1544	5,62	54,40		
	20				2871,47	200,73	6,12	4560,42	7,72	1181,92	146,62	3,93	1689	5,70	60,08		
	24				3350,66	236,77	6,08	5313,59	7,65	1387,73	167,74	3,91	1963	5,85	71,26		
	25				3466,21	245,59	6,06	5494,04	7,63	1438,38	172,68	3,91	2028	5,89	74,02		
	30				4019,60	288,57	6	6351,05	7,55	1698,16	193,06	3,89	2332	6,07	87,56		
	22	220	14	21	7	2814,36	175,18	6,83	4470,15	8,60	1158,56	138,62	4,38	1655	5,91	47,40	
		16			3175,44	198,71	6,80	5045,37	8,58	1305,52	153,34	4,36	1862	6,02	53,83		

25	250	16	24	8	78,40	4717,10	258,43	7,76	7492,10	9,78	1942,09	203,45	4,98	2775	6,75	61,55
		18			87,72	5247,24	288,82	7,73	8336,69	9,75	2157,78	233,39	4,96	3089	6,83	68,86
		20			96,96	5764,87	318,76	7,71	9159,73	9,72	2370,01	242,52	4,94	3395	6,91	76,11
		22			106,12	6270,32	348,26	7,69	9961,60	9,69	2579,04	260,52	4,93	3691	7	83,21
		25			119,71	7006,39	391,72	7,65	1125,52	9,64	2887,26	287,14	4,91	4119	7,11	93,97
		28			133,12	7716,86	434,86	7,61	2243,84	9,59	3189,89	311,98	4,90	4527	7,23	104,50
		30			141,96	8176,51	462,11	7,59	2964,66	9,56	3388,98	327,82	4,89	4788	7,31	111,44

### Кутники нерівнобічні

Позначення:

$B$  — ширина більшої полиці;  $b$  — ширина меншої полиці;  $t$  — товщини полиці;  $R$  — радіус внутрішнього заокруглення;  $r$  — радіус заокруглення полиць;  $J$  — момент інерції;  $i$  — радіус інерції;  $y_0, z_0$  — відстань від центра ваги до зовнішніх граней полиць;  $J_{yz}$  — відцентровий момент інерції

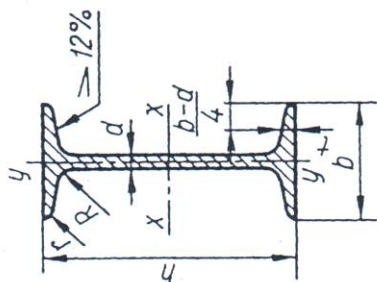


Номер профілю	Розміри, мм				Площа поперечного перерізу, $\text{см}^2$	Довідкові значення для осей										Кут нахилу осі $\text{tg } \alpha$	Маса $I$ М, кг		
	$B$	$b$	$t$	$R$		$y - y$					$z - z$							$y_0$ , $\text{см}$	$z_0$ , $\text{см}$
						$J_{y^2}$ , $\text{см}^4$	$W_{y^2}$ , $\text{см}^3$	$i_{y^2}$ , $\text{см}$	$J_{z^2}$ , $\text{см}^4$	$W_{z^2}$ , $\text{см}^3$	$i_{z^2}$ , $\text{см}$	$J_{u^2}$ , $\text{см}^4$	$W_{u^2}$ , $\text{см}^3$	$i_{u^2}$ , $\text{см}$					
2,5/1,6	25	16	3	3,5	1,16	0,70	0,43	0,78	0,22	0,19	0,44	0,13	0,16	0,34	0,42	0,86	0,22	0,392	0,91
3/2	30	20	3	3,5	1,43	1,27	0,62	0,94	0,45	0,30	0,56	0,26	0,25	0,43	0,51	1,00	0,43	0,427	1,12
3,2/2	32	20	4	3,5	1,86	1,61	0,82	0,93	0,56	0,39	0,55	0,34	0,32	0,43	0,54	1,04	0,54	0,421	1,46
			3		1,49	1,52	0,72	1,01	0,46	0,30	0,55	0,28	0,25	0,43	0,49	1,08	0,47	0,382	1,17
			4		1,94	1,93	0,93	1	0,57	0,39	0,54	0,35	0,33	0,43	0,53	1,12	0,59	0,374	1,52

Номер про-фільо	Розміри, мм				Площа поперечного перерізу, $\text{см}^2$	Довідкові значення для осей												Кут нахилу осі $\text{tg } \alpha$	Маса $\text{I м, кг}$
						y — y				z — z				u — u					
	B	b	t	R		r	$J_y^4$ $\text{см}^4$	$W_y^3$ $\text{см}^3$	$i_y$ , см	$J_z^4$ $\text{см}^4$	$W_z^3$ $\text{см}^3$	$i_z$ , см	$J_u^4$ $\text{см}^4$	$W_u^3$ $\text{см}^3$	$i_u^{\text{min}}$ , см	$y_0$ , см	$z_0$ , см		
4/2,5	40	25	3	4	1,3	3,06	1,14	1,27	0,93	0,49	0,70	0,56	0,41	0,54	0,59	1,32	0,96	0,385	1,48
			4			3,93	1,49	1,26	1,18	0,63	0,69	0,71	0,52	0,54	0,63	1,37	1,22	0,381	1,94
			5			4,73	1,82	1,25	1,41	0,77	0,68	0,86	0,64	0,53	0,66	1,41	1,44	0,374	2,38
4/3	40	30	4	4	1,3	4,18	1,54	1,25	2,01	0,91	0,87	1,09	0,75	0,64	0,78	1,28	1,68	0,544	2,09
			5			5,04	1,88	1,24	2,41	1,11	0,86	1,33	0,91	0,64	0,82	1,32	2	0,539	2,57
4,5/2,8	45	28	3	5	1,7	4,41	1,45	1,43	1,32	0,61	0,79	0,79	0,52	0,61	0,64	1,47	1,38	0,382	1,68
			4			5,68	1,90	1,42	1,60	0,80	0,78	1,02	0,67	0,60	0,68	1,51	1,77	0,379	2,20
5/3,2	50	32	3	5,5	1,8	6,18	1,82	1,60	1,99	0,81	0,91	1,18	0,68	0,70	0,72	1,60	2,01	0,403	1,90
			4			7,98	2,38	1,59	2,56	1,05	0,90	1,52	0,88	0,69	0,76	1,65	2,59	0,401	2,49
5,6/3,6	56	36	4	6	2	11,37	3,01	1,78	3,70	1,34	1,02	2,19	1,13	0,78	0,84	1,82	3,74	0,406	2,81
			5			13,82	3,70	1,77	4,48	1,65	1,01	2,65	1,37	0,78	0,88	1,87	4,50	0,404	3,46
6,3/4	63	40	4	7	2,3	16,33	3,83	2,01	5,16	1,67	1,13	3,07	1,41	0,87	0,91	2,03	5,25	0,397	3,17
			5			19,91	4,72	2	6,26	2,05	1,12	3,73	1,72	0,86	0,95	2,08	6,41	0,396	3,91
			6			23,31	5,58	1,99	7,29	2,42	1,11	4,36	2,02	0,86	0,99	2,12	7,44	0,393	4,63
			8			29,60	7,22	1,96	9,15	3,12	1,09	5,58	2,60	0,85	1,07	2,20	9,27	0,387	6,03
6,5/5	65	50	5	6	2	23,41	5,20	2,05	12,08	3,23	1,47	6,41	2,68	1,07	1,26	2	9,77	0,576	4,36
			6			27,46	6,16	2,04	14,12	3,82	1,46	7,52	3,15	1,07	1,30	2,04	11,46	0,575	5,18
			7			31,32	7,08	2,03	16,05	4,38	1,45	8,60	3,59	1,06	1,34	2,08	12,94	0,571	5,98
			8			35	7,99	2,02	18,88	4,93	1,44	9,65	4,02	1,06	1,37	2,12	13,61	0,570	6,77
7/4,5	70	45	5	7,5	2,5	27,76	5,88	2,23	9,05	2,62	1,27	5,34	2,20	0,98	1,05	2,28	9,12	0,406	4,39
7,5/5	75	50	5	8	2,7	34,81	6,81	2,39	12,47	3,25	1,43	7,24	2,73	1,09	1,17	2,39	12	0,436	4,79
			6			40,92	8,08	2,38	14,60	3,85	1,42	8,48	3,21	1,08	1,21	2,44	14,10	0,435	5,69
			7			46,77	9,31	2,36	16,61	4,43	1,41	9,69	3,69	1,08	1,25	2,48	16,18	0,435	6,57
			8			52,38	10,52	2,35	18,52	4,88	1,40	10,87	4,14	1,07	1,29	2,62	17,80	0,430	7,43
8/5	80	50	5	8	2,7	41,64	7,71	2,56	12,68	3,28	1,41	7,57	2,75	1,09	1,13	2,60	13,20	0,387	4,99
			6			48,98	9,15	2,55	14,85	3,88	1,40	8,88	3,24	1,08	1,17	2,65	15,50	0,386	5,92

8/6	80	60	6	8	2,7	8,15	52,06	9,42	2,53	25,18	5,58	1,76	13,61	4,66	1,29	1,49	2,47	20,98	0,547	6,39
			7			9,42	59,61	10,87	2,52	28,74	6,43	1,75	15,58	5,34	1,29	1,53	2,52	24,01	0,546	7,39
			8			10,67	66,88	12,38	2,50	32,15	7,26	1,74	17,49	5,99	1,28	1,57	2,56	26,83	0,544	8,37
9/5,6	90	56	5,5	9	3	7,86	65,28	10,74	2,88	19,67	4,53	1,58	11,77	3,81	1,22	1,26	2,92	20,54	0,384	6,17
			6			8,54	70,58	11,66	2,88	21,22	4,91	1,58	12,70	4,12	1,22	1,28	2,95	22,23	0,384	6,70
			8			11,18	90,87	15,24	2,85	27,08	6,39	1,39	1,56	16,29	5,32	1,21	1,36	3,04	0,380	8,77
10/6,3	100	63	6	10	3,3	9,58	98,29	14,52	3,20	30,58	6,27	1,79	18,20	5,27	1,38	1,42	3,23	31,50	0,393	7,53
			7			11,09	112,86	16,78	3,19	34,99	7,23	1,78	20,83	6,06	1,37	1,46	3,28	36,10	0,392	8,70
			8			12,57	126,96	19,01	3,18	39,21	8,17	1,77	23,38	6,82	1,36	1,50	3,32	40,50	0,391	9,87
			10			15,47	153,83	23,32	3,15	47,18	9,99	1,75	28,34	8,31	1,35	1,58	3,40	48,60	0,387	12,14
10/6,5	100	65	7	10	3,3	11,23	114,05	16,87	3,19	38,32	7,70	1,85	22,77	6,43	1,41	1,52	3,24	38	0,415	8,81
			8			12,73	138,31	19,11	3,18	42,96	8,70	1,84	25,24	7,26	1,41	1,56	3,28	42,54	0,414	9,99
			10			15,67	155,52	23,45	3,15	51,68	10,64	1,82	30,60	8,83	1,40	1,64	3,37	51,18	0,410	12,30
11/7	110	70	6,5	10	3,3	11,45	142,42	19,11	3,53	45,61	8,42	2	26,94	7,05	1,53	1,58	3,55	46,80	0,402	8,98
			8			13,93	171,54	23,22	3,51	54,64	10,20	1,98	32,31	8,50	1,52	1,64	3,61	55,90	0,400	10,93
12,5/8	125	80	7	11	3,7	14,06	226,53	26,67	4,01	73,73	11,89	2,29	43,40	9,96	1,76	1,80	4,01	74,70	0,407	11,04
			8			15,98	255,62	30,27	4	80,95	13,47	2,28	48,82	11,25	1,75	1,84	4,04	84,10	0,406	12,54
			10			19,70	311,61	37,27	3,98	100,47	16,52	2,26	59,33	13,74	1,74	1,92	4,14	102	0,404	15,47
			12			23,36	364,79	44,03	3,95	116,84	19,46	2,24	69,47	16,11	1,72	2,00	4,22	118	0,400	18,34
14/9	140	90	8	12	4	18	363,68	38,25	4,49	119,79	17,19	2,58	70,27	14,39	1,98	2,03	4,49	121	0,411	14,13
			10			22,24	444,45	47,19	4,47	145,54	21,14	2,56	85,51	17,58	1,96	2,12	4,58	147	0,409	17,46
16/10	160	100	9	13	4,3	22,87	605,97	56,04	5,15	186,03	23,96	2,85	110,40	20,01	2,20	2,24	5,19	194	0,391	17,96
			10			25,28	666,59	61,91	5,13	204,09	26,42	2,84	121,16	22	2,19	2,28	5,23	213	0,390	19,85
			12			30,04	784,22	73,42	5,11	238,75	31,23	2,82	142,14	25,93	2,18	2,36	5,32	249	0,388	23,58
			14			34,72	897,19	84,65	5,08	271,60	35,89	2,80	162,49	29,75	2,16	2,43	5,40	282	0,385	27,26
18/11	180	110	10	14	4,7	28,33	952,28	78,59	5,80	276,37	32,27	3,12	165,44	26,96	2,42	2,44	5,88	295	0,376	22,24
			12			33,69	1122,56	93,33	5,77	324,09	38,20	3,10	194,28	31,83	2,40	2,52	5,97	348	0,374	26,45
20/12,5	200	125	11	14	4,7	34,87	1449,02	107,31	6,45	446,36	45,98	3,58	263,84	38,27	2,75	2,79	6,50	465	0,392	27,37
			12			37,89	1568,19	116,51	6,43	481,93	49,85	3,57	285,04	41,45	2,74	2,83	6,54	503	0,392	29,74
			14			43,87	1800,83	134,64	6,41	550,77	57,43	3,54	326,54	47,57	2,73	2,91	6,62	575	0,390	34,43
			16			49,77	2026,08	152,41	6,38	616,66	64,83	3,52	366,99	53,56	2,72	2,99	6,71	643	0,388	39,07

Балки двотаврові



Позначення:

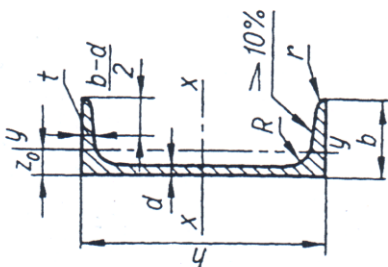
$h$  — висота балки;  $b$  — ширина полиці;  $d$  — товщина стінки;  $t$  — середня товщина полиці;  $J$  — момент інерції;  
 $W$  — момент опору;  $i$  — радіус інерції;  $S$  — статичний момент півперерізу

Номер про-філю	Розміри, мм				Площа перерізу $F$ , см <sup>2</sup>	$J_x$ , см <sup>4</sup>	$W_x$ , см <sup>3</sup>	$i_x$ , см	$S_x$ , см <sup>3</sup>	$J_y$ , см <sup>4</sup>	$W_y$ , см <sup>3</sup>	$i_y$ , см	Маса $l$ м, кг
	$h$	$b$	$d$	$t$									
10	100	55	4,5	7,2	12,0	198	39,7	4,06	23,0	17,9	6,49	1,22	9,46
12	120	64	4,8	7,3	14,7	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38	11,5
14	140	73	4,9	7,5	17,4	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,5	1,55	13,7
16	160	81	5,0	7,8	20,2	873	109	6,57	62,3	58,6	14,5	1,70	15,9
18	180	90	5,1	8,1	23,4	1290	143	7,42	81,4	82,6	18,4	1,88	18,4
18a	180	100	5,1	8,3	25,4	1430	159	7,51	89,8	114	22,8	2,12	19,9
20	200	100	5,2	8,4	26,8	1840	184	8,28	104	115	23,1	2,07	21,0
20a	200	110	5,2	8,6	28,9	2030	203	8,37	114	155	28,2	2,32	22,7
22	220	110	5,4	8,7	30,6	2550	232	9,13	131	157	28,6	2,27	24,0
22a	220	120	5,4	8,9	32,8	2790	254	9,22	143	206	34,3	2,50	25,8
24	240	115	5,6	9,5	34,8	3460	289	9,97	163	198	34,5	2,37	27,3
24a	240	125	5,6	9,8	37,5	3800	317	10,1	178	260	41,6	2,63	29,4
27	270	125	6,0	9,8	40,2	5010	371	11,2	210	260	41,5	2,54	31,5
27a	270	135	6,0	10,2	43,2	5500	407	11,3	229	337	50,0	2,80	33,9
30	300	135	6,5	10,2	46,5	7080	472	12,3	268	337	49,9	2,69	36,5
30a	300	145	6,5	10,7	49,9	7780	518	12,5	292	436	60,1	2,95	39,2
33	330	140	7,0	11,2	53,8	9840	597	13,5	339	419	59,9	2,79	42,2
36	360	145	7,5	12,3	61,9	13380	743	14,7	423	516	71,1	2,89	48,6
40	400	155	8,3	13,0	72,6	19062	953	16,2	545	667	86,1	3,03	57,0
45	450	160	9	14,2	84,7	27696	1231	18,1	708	808	101	3,09	66,5
50	500	170	10	15,2	100	39727	1589	19,9	919	1043	123	3,23	78,5
55	550	180	11	16,5	118	55962	2035	21,8	1181	1356	151	3,39	92,6
60	600	190	12	17,8	138	76806	2560	23,6	1491	1725	182	3,54	108

Швелери з нахилом внутрішніх граней полиць

Позначення:

$h$  — висота швелера;  $b$  — ширина полиці;  $d$  — товщина стінки;  $t$  — середня товщина полиці;  $J$  — момент інерції;  $W$  — момент опору;  $i$  — радіус інерції;  $S$  — статичний момент півперерізу;  $z_0$  — відстань від осі  $y$  до зовнішньої грані стінки



Номер про-фільо	Розміри, мм				Площа перерізу $F$ , $\text{cm}^2$	$J_x$ , $\text{cm}^4$	$W_x$ , $\text{cm}^3$	$i_x$ , $\text{cm}$	$S_x$ , $\text{cm}^3$	$J_y$ , $\text{cm}^4$	$W_y$ , $\text{cm}^3$	$i_y$ , $\text{cm}$	$z_0$ , $\text{cm}$	Маса $M$ , $\text{kg}$
	$h$	$b$	$d$	$t$										
5	50	32	4,4	7,0	6,16	22,8	9,1	1,92	5,59	5,61	2,75	0,954	1,16	4,84
6,5	65	36	4,4	7,2	7,51	48,6	15,0	2,54	9,0	8,7	3,68	1,08	1,24	5,90
8	80	40	4,5	7,4	8,98	89,4	22,4	3,16	13,3	12,8	4,75	1,19	1,31	7,05
10	100	46	4,5	7,6	10,9	174	34,8	3,99	20,4	20,4	6,46	1,37	1,44	8,59
12	120	52	4,8	7,8	13,3	304	50,6	4,78	29,6	31,2	8,52	1,53	1,54	10,4
14	140	58	4,9	8,1	15,6	491	70,2	5,60	40,8	45,4	11,0	1,70	1,67	12,3
14a	140	62	4,9	8,7	17,0	545	77,8	5,66	45,1	57,5	13,3	1,84	1,87	13,3
16	160	64	5,0	8,4	18,1	747	93,4	6,42	54,1	63,6	13,8	1,87	1,80	14,2
16a	160	68	5,0	9,0	19,5	823	103	6,49	59,4	78,8	16,4	2,01	2,00	15,3
18	180	70	5,1	8,7	20,7	1090	121	7,24	69,8	86	17,0	2,04	1,94	16,3
18a	180	74	5,1	9,3	22,2	1190	132	7,32	76,1	105	20,0	2,18	2,13	17,4
20	200	76	5,2	9,0	23,4	1520	152	8,07	87,8	113	20,5	2,20	2,07	18,4
20a	200	80	5,2	9,7	25,2	1670	167	8,15	95,9	139	24,2	2,35	2,28	19,8
22	220	82	5,4	9,5	26,7	2110	192	8,89	110	151	25,1	2,37	2,21	21,0
22a	220	87	5,4	10,2	28,8	2330	212	8,99	121	187	30,0	2,55	2,46	22,6
24	240	90	5,6	10,0	30,6	2900	242	9,73	139	208	31,6	2,60	2,42	24,0
24a	240	95	5,6	10,7	32,9	3180	265	9,84	151	254	37,2	2,78	2,67	25,8
27	270	95	6,0	10,5	35,2	4160	308	10,9	178	262	37,3	2,73	2,47	27,7
30	300	100	6,5	11,0	40,5	5810	387	12,0	224	327	43,6	2,84	2,52	31,8
33	330	105	7,0	11,7	46,5	7980	484	13,1	281	410	51,8	2,97	2,59	36,5
36	360	110	7,5	12,6	53,4	10820	601	14,2	350	513	61,7	3,10	2,68	41,9
40	400	115	8,0	13,5	61,5	15220	761	15,7	444	642	73,4	3,23	2,75	48,3

Додаток 2

Границі міцності  $\sigma_B$ , МПа, деяких матеріалів

Матеріал	Розтягання	Стискання	Матеріал	Розтягання	Стискання
Чавун сірий: звичайний	140...180	600..1000	ялина вздовж волокон	65	35
дрібнозернистий	210...250	до 1400	» поперек »	—	4
Пластмаса:			дуб вздовж волокон	95	50
бакеліт	20...30	80...100	» поперек »	—	15
целулоїд	50...70	—	Камінь:	3	120...260
текстоліт	85...100	130...250	граніт	2	40...150
гетинакс	150...170	150...180	псковик	—	50...150
бакелізована фанера	130	115	вапняк	—	7,4...30
Деревина (при вологості 15 %):			цегла	—	5...35
сосна вздовж волокон	80	40	бетон	—	2,5...9
» поперек »	—	5	кам'яна кладка на розчині	0,2...0,5	

Додаток 3

Механічні характеристики чавуну

Марка чавуну	Границя міцності, МПа, при			Твердість за Брінеллем HB	Границя витривалості, МПа, при	
	розтяганні $\sigma_B$	стисканні $\sigma_B$	згинанні $\sigma_B$		згинанні $\sigma_{-1zg}$	кручені $\tau_{-1}$
СЧ 12	120	500	280	143...229	—	—
СЧ 15	150	650	320	163...229	70	50
СЧ 18	180	700	360	170...229	—	—
СЧ 21	210	750	400	171...241	100	80
СЧ 24	240	850	440	187...217	120	100
СЧ 28	280	1000	480	170...241	140	110
СЧ 32	320	1100	520	187...255	140	110
СЧ 35	350	1200	560	197...269	150	115
СЧ 38	380	1400	600	207...269	150	115
ВЧ 40-10	400	1600...1700	—	156...197	150...170	198
ВЧ 50-1,5	500	1860...2000	—	187...255	230...270	170...210
ВЧ 60-2	600	2040...2290	—	197...269	170...230	150...160

Примітка. Границя текучості  $\sigma_T$  для ВЧ 40-10 становить 300, для ВЧ 50-1,5 — 380 та для ВЧ 60-2 — 420 МПа.



Додаток 4

Механічні характеристики, МПа, вуглецевих конструкційних сталей

Марка сталі	$\sigma_B$	$\sigma_T$	$\tau_T$		Відносне подовження $\delta$ , % при $l = 10d$	Ударна в'язкість $K_{CS}$ , кДж/м <sup>2</sup>	$\sigma_{-1zg}$	$\sigma_{-1p}$	$\tau_{-1kp}$
			не менше						
10	340	210	140	160	31	2400	160...220	120...150	80...120
20	420	250	160	160	25	—	170...220	120...160	100...130
25	460	280	—	—	23	900	190...250	—	—
30	500	300	170	—	21	800	200...270	170...210	110...140
35	540	320	190	—	20	700	220...300	170...220	130...180
40	580	340	—	—	19	600	230...320	180...240	140...190
45	610	360	220	—	16	500	250...340	190...250	150...200
50	640	380	—	—	14	400	270...350	200...260	160...210
55	660	390	—	—	13	—	—	—	—
60	690	410	—	—	12	—	310...380	220...280	180...220
20Г	460	280	—	—	24	—	—	—	—
30Г	550	320	—	—	20	800	220...320	—	—
50Г	660	400	—	—	13	400	290...360	—	—
20Х	800	650	—	—	11	600	380	—	—
40Х	1000	800	—	—	10	600	350...380	250	170...230
45Х	1050	850	—	—	9	500	400...500	—	225
30ХМ	950	750	—	—	11	800	310...410	370	—
35ХМ	1000	850	390	—	12	800	470...510	—	—
40ХН	1000	800	—	—	11	700	400	290	240
50ХН	1100	900	—	—	9	500	550	—	—
40ХФА	900	750	—	—	10	900	380...490	—	—
38ХМЮА	1000	850	—	—	14	900	420...550	—	—
12ХН3А	950	700	400	—	11	900	390...470	270...320	220...260
20ХН3А	950	750	—	—	12	1000	430...450	300...320	245...255
30ХН3А	1000	800	—	—	10	800	520...700	—	320...400
40ХНМА	1000	950	—	—	12	1000	500...700	—	270...380
30ХГСА	1100	850	—	—	10	500	510...540	500...535	220...245

Примітки: 1. Границі витривалості добуто на полірованих зразках. 2. При використанні сталей слід урахувати приблизну відповідність марок:  
 Ст3 відповідає сталі 20;  
 Ст4 » сталі 25;  
 Ст5 » сталі 35;  
 Ст6 » сталі 45.

Додаток 5

Механічні характеристики жароміцних сплавів

Сплави	Марка сплаву	МПа			E	δ	ψ	K <sub>C</sub> , кДж/м <sup>2</sup>
		σ <sub>B</sub>	σ <sub>0,2</sub>	σ <sub>-1</sub>				
Аустенітні сталі	ЭИ734	1000	600	—	172 000	20	25	300
	ЭИ589	918...1020	795	—	211 000	15	15...25	300
	ЭИ590	765...856	336...408	—	—	31...44	40...49	1000
Сталі на нікелевій основі при 20 °С	ХН77ТЮ	1000	600	367	194 000	25	28	800
	ЭИ826	1050	720	388	204 000	10	12	200
	ВЖ98	750	388	310	—	40	—	—
Сталі на залізо-нікелевій основі при 20 °С	ХН35ВТЮ	1350	940	—	223 000	14	15...29	350...700
	ЭП105	950	700	—	190 000	10	13	250
	ХН35ВТР	800	450	—	214 000	20	35	1000
Титанові у відпаленому стані	BT5	770	720	459	107 000	8,5	40	400
	OT4	800	680	388...438	110 000	13	25...50	400
Ніобієві	ВН-2 при T = 20 °С	650...750	530...700	480	112 000	25...30	60...70	2700
	» » T = 1200 °С	180...200	110...120	—	109 000	30...35	100	—
	» » T = 1600 °С	40...50	20	—	107 000	50...60	100	—
Молібденові	ВМ-1 при T = 20 °С	760	500	500	328 000	25	55	20
	» » T = 1200 °С	250	200	—	259 000	22	90	—
	» » T = 1600 °С	60	400	—	212 000	55	100	—
Танталові	Ta + 10 % W при T = 20 °С	600	480...500	—	184 000	36,0	96	—
	Te same при T = 1250 °С	185	100	—	155 000	45,0	94	—
	» » при T = 1500 °С	150	85	—	147 000	50...53	95	—
Вольфрамові	ВВ-2 при T = 1000 °С	200...240	—	—	360 000	45...48	80...90	—
	» » T = 1500 °С	140...150	—	—	340 000	48...58	90...95	—
	» » T = 2000 °С	80...85	—	—	280 000	60...70	95...96	—

Додаток 6

Механічні характеристики, МПа, пружинних сталей

Сталь	Розтягання					Стискання			Границя витривалості $\tau_0$ пружини при віднульовому циклі
	$\sigma_B$	$\sigma_T$	$\sigma_{пл}$	$E \cdot 10^{-5}$	$\tau_B$	$\tau_T$	$G \cdot 10^{-4}$		
Середньовуглецева	1500...1600	1000...1200	750...900	2,1	850...1100	600...800	8,1	500...650	
Високовуглецева	1450...1700	950...1350	800...1000	2,0...2,2	1100...1400	650...900	7,6...8,3	500...700	
Хромованадєва	1600...1750	1500...1600	900...1000	2,01	1700...1300	950...1000	8,0	550...600	
Кремнемарганєва	1600...1700	1400...1500	900...950	2,05	1350	950...1000	7,6	500...550	
Кремневанадєва	1400...1500	950...1050	600...650	2,3	1200...1250	900	8,3	450...500	

Примітка. Границя витривалості пружини дається при симетричному циклі  $\tau_{-1}$ ; діаграма граничних напружень для пружин характеризується коефіцієнтом  $\Psi_T \approx 0,2$ .

Додаток 7

Механічні характеристики деяких кольорових сплавів

Сплави	Матеріал	Марка	$\sigma_T$ , МПа	$\sigma_B$ , МПа	$\delta$ , %	НВ	Галузь застосування
Мідні	Латунь	Л68	91; 520	320; 660	55; 30	55; 150	Труби, дріт, листи
	Латунь алюмінієва	ЛА77-2	140; —	400; 650	55; 12	60; 170	Труби, трубки конденсаторні
	Латунь марганєва	ЛМц58-2	156; —	400; 700	40; 10	85; 175	Прутки, листи
	Бронза олов'яна	БрО10	—	250; —	11; —	80; —	Арматура
	Бронза алюмінієва	БрОФ10-1	140; —	200; 300	—; 3	80; 100	Шестерні, підшипники
Бронза кремнієва	БрА5	160; 500	380; 400	65; 4	60; 200	Стрічки, штаби	
Алюмінієві	Дуралюмін нормальний	Д1	110; 240	210; 420	18; 15	—	Литво
	Дуралюмін підвищеної міцності	Д6	50; 380	180; 500	8; 20	45; 113	Труби, пресовані профілі
	Алюмінієво-магнієвий сплав	АМГ	100; 210	180; 250	6; 23	50; 125	Труби, профілі
						45; 60	Труби, листи

Примітка. Перші цифри дано для м'якого стану матеріалу, другі — для твердого.

Додаток 8  
Механічні характеристики основних видів пластмас

Матеріали	Характеристика	Густина, кг/м <sup>3</sup>	Границя міцності $\sigma_B$ при			E	G	$\frac{\sigma_{-1}}{\sigma_{B,p}}$
			розтяганні	стисканні	згинанні			
МПа								
Склопласти	На основі тканини, ниток, орієнтованих у двох взаємно перпендикулярних напрямках	1400...1850 1700...1900	260...400 300...500	100...300	130...150 230...460	18 000...22 000 24 000...35 000	3500...4000	0,22...0,25 0,25...0,28
Текстоліти	На основі бавовняних тканин	1300...1400 1200...1400	60...110 140...220	130...150 120...155	90...160 165...220	6000...10 000 12 000...34 000	2500 800...2500	0,25...0,30 0,25...0,30
Деревні пластики Гетинакс	На основі деревини На основі паперу, просоченого фенолформальдегідною смолою	1300...1400	70...100	—	80...140	10 000...18 000	800...2500	0,20...0,30
Фібра	На основі спецсортів паперу	1100...1250	65...100	80...140	60...95	7000	—	0,20...0,30
Волокніт	Наповнювачі: бавовняні, пачоси, азболокло, скловолокно	1350...1900	30...130	110...130	40...100	5000...8500	—	0,25...0,30
Прес-порошки термоактивні Скло органічне	Наповнювачі: деревне, кварцове борошно, слюда На основі полімерів метакрилової кислоти	1400...1900	35...60	150...180	50...80	—	—	0,3...0,4
Термопласти	Лінійні полімери	1180 920...2100	71...92 12...80	—	99...153 12...100	2900...4100 150...700	—	0,1...0,16 0,15...0,2
Пінопласти	Неармовані	60...220	0,4...4,2	0,17...4,5	0,7...5,0	37...200	15...19	—
Фторопласт-4	—	2100...2300	14...25	20	11...14	470...850	—	—
Капрон	Литво	1140	35...70	60...80	45...70	1400...2000	450...480	—
»	Полікапролактам	1140	60...80	70...80	90	700...1050	—	—
Поліамід-68	—	1130	45...50	45...50	70...90	1200	—	—
Вініласт	—	1380...1400	40...60	80...160	90	3000...4000	—	—
Поліетилен НД	—	1380...1400	25...35	28...40	30	550...880	—	—
Полістирол блоковий	—	1050...1070	35	100	95...100	1200...3200	—	—

## Додаток 9

## Модулі пружності і коефіцієнти Пуассона для деяких матеріалів

Матеріал	Модуль пружності, МПа		Коефіцієнт Пуассона $\mu$
	$E$	$G$	
Чавун білий, сірий	$(1,15...1,60) \cdot 10^5$	$4,5 \cdot 10^4$	0,23...0,27
» ковкий	$1,55 \cdot 10^5$	—	—
Сталь вуглецева	$(2,0...2,1) \cdot 10^5$	$(8,0...8,1) \cdot 10^4$	0,24...0,28
» легована	$(2,1...2,2) \cdot 10^5$	$(8,0...8,1) \cdot 10^4$	0,25...0,30
Мідь прокатана	$1,1 \cdot 10^5$	$4,0 \cdot 10^4$	0,31...0,34
» холодноотягнута	$1,3 \cdot 10^5$	$4,9 \cdot 10^4$	—
» лита	$0,84 \cdot 10^5$	—	—
Бронза фосфориста катана	$1,15 \cdot 10^5$	$4,2 \cdot 10^4$	0,32...0,35
Бронза марганцевиста катана	$1,1 \cdot 10^5$	$4,0 \cdot 10^4$	0,35
Бронза алюмінієва лита	$1,05 \cdot 10^5$	$4,2 \cdot 10^4$	—
Латунь холодноотягнута	$(0,91...0,99) \cdot 10^5$	$(3,5...3,7) \cdot 10^4$	0,32...0,42
Латунь корабельна катана	$1,0 \cdot 10^5$	—	0,36
Алюміній катаний	$0,69 \cdot 10^5$	$(2,6...2,7) \cdot 10^4$	0,32...0,36
Дріт алюмінієвий тягнутий	$0,7 \cdot 10^5$	—	—
Дуралюмін катаний	$0,71 \cdot 10^5$	$2,7 \cdot 10^4$	—
Цинк катаний	$0,84 \cdot 10^5$	$3,2 \cdot 10^4$	0,27
Свинець	$0,17 \cdot 10^5$	$0,70 \cdot 10^4$	0,42
Лід	$0,1 \cdot 10^5$	$(0,28...0,3) \cdot 10^4$	—
Скло	$0,56 \cdot 10^5$	$2,2 \cdot 10^4$	0,25
Граніт	$0,49 \cdot 10^5$	—	—
Вапняк	$0,42 \cdot 10^5$	—	—
Мрамур	$0,56 \cdot 10^5$	—	—
Пісковик	$0,18 \cdot 10^5$	—	—
Кам'яна кладка з граніту	$(0,09...0,1) \cdot 10^5$	—	—
» » з вапняку	$0,06 \cdot 10^5$	—	—
» » з цегли	$(0,027...0,030) \cdot 10^5$	—	—
Бетон при границі міцності, МПа,			
10	$(0,146...0,196) \cdot 10^5$	—	0,16...0,18
15	$(0,164...0,214) \cdot 10^5$	—	0,16...0,18
20	$(0,182...0,232) \cdot 10^5$	—	0,16...0,18
Деревина вздовж волокон	$(0,1...0,12) \cdot 10^5$	$0,055 \cdot 10^4$	—
» поперек волокон	$(0,005...0,01) \cdot 10^5$	—	—
Каучук	$0,00008 \cdot 10^5$	—	0,47
Текстоліт	$(0,06...0,1) \cdot 10^5$	—	—
Гетинакс	$(0,1...0,17) \cdot 10^5$	—	—
Бакеліт	$(2...3) \cdot 10^3$	—	0,36
Вісхонліт (ИМ-44)	$(40...42) \cdot 10^2$	—	0,37
Целулоїд	$(14,3...27,5) \cdot 10^2$	—	0,33...0,38

## Додаток 10

## Орієнтовні значення основних допустимих напружень на розтяг і стиск

Матеріал	Допустиме напруження, МПа, на	
	розтяг	стиск
Чавун сірий у відливках	28...80	120...150
Сталь Ст2		140
» Ст3		160
» Ст3 у мостах		140
Сталь машинобудівна (конструкційна) вуглецева		60...250

Матеріал	Допустиме напруження, МПа, на	
	розтяг	стиск
Сталь машинобудівна (конструкційна)	100...400 і вище	
легована	30...120	
Мідь	70...140	
Латунь	60...120	
Бронза	30...80	
Алюміній	80...120	
Бронза алюмінієва	80...150	
Дуралюмін	30...40	
Текстоліт	50...70	
Гетинакс	40...50	
Фанера бакелізована	7...10	10...12
Сосна вздовж волокон	—	1,5...2
» поперек волокон	9...13	13...15
Дуб уздовж волокон	—	2...3,5
» поперек волокон	до 0,3	0,5...4
Кам'яна кладка	до 0,2	0,6...2,5
Цегляна кладка	0,1...0,7	1,0...9
Бетон		

## Додаток 11

Допустимі напруження на зріз для заклепочних і зварних з'єднань

Тип з'єднання	Напруження на зріз, МПа
Заклепочне:	
основні елементи із сталі 20	100
заклепка в розсвердлених отворах (клас В)	140
заклепка в продавлених отворах (клас С)	100
Зварне:	
зварювання ручне, електроди з тонкою обмазкою	80
те саме, електроди з товстою обмазкою	110
зварювання автоматичне	110

## СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ТА РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Писаренко Г.С., Квітка О.Л., Уманський Є.С. Опір матеріалів. – К. : Вища шк., 2004. – 654 с.
2. Посацький С.Л. Опір матеріалів. – Видавництво львівського університету., 1973. – 403 с.
3. Степин П.А. Сопротивление материалов. – М. : Высшая шк., 1983. – 303с.
4. Ицкович Г.М. Сопртивление материалов. – М. : Высшая шк., 1986. – 352с.
5. Портаев Л.П., Петраков А.А., Портаев В.Л. Техническая механика. – М. : Стойиздат, 1987. – 464 с.
6. Эрдеди А.А., Аникин И.В., Медведев Ю.А., Чуков А.С. Техническая механика. – М. : Высшая шк., 1980. – 445 с.
7. Миролюбов И.Н. и др. Пособие к решению задач по сопротивлению материалов. – М. : Высшая шк., 1974. – 392 с.
8. Белявский С.М. Руководство к решению задач по сопротивлению материалов. – М. : Высшая шк., 1967. – 378 с.
9. Винокуров Е.Ф. и др. Справочник по сопротивлению материалов. – Минск: Наука и техника, 1988. – 464 с.

## ЗМІСТ

1. Основні положення.....	3
1.1. Предмет і завдання опору матеріалів .....	3
1.2. Зовнішні сили (навантаження) .....	5
1.3. Види деформацій .....	6
1.4. Внутрішні сили. Метод перерізів .....	8
1.5. Поняття про напруження .....	10
1.6. Гіпотези науки про опір матеріалів .....	12
2. Розтяг і стиск .....	14
2.1. Поздовжня сила .....	14
2.2. Напруження в поперечних перерізах стержня .....	16
2.3. Напруження в нахилених перерізах стержня .....	19
2.4. Деформації і переміщення. Закон Гука .....	21
2.5. Розтяг (стиск) під дією власної ваги .....	24
2.6. Експериментальне вивчення властивостей матеріалів .....	25
2.7. Поняття про концентрацію напружень .....	31
2.8. Допустиме напруження. Коефіцієнт запасу міцності .....	33
2.9. Основні типи задач при розрахунках на міцність розтягнутих (стиснути) стержнів .....	34
2.10. Статично невизначні системи .....	35
3. Основи напруженого і деформованого стану .....	37
3.1. Загальні відомості про напружений стан у точці тіла .....	37
3.2. Види напруженого стану .....	38
3.3. Напруження у скісних перерізах при плоскому напруженому стані .....	39
3.4. Визначення головних напружень і положення головних площинок .....	40
3.5. Узагальнений закон Гука .....	41
3.6. Поняття про теорію міцності і їх використання .....	42
4. Геометричні характеристики плоских перерізів стержнів .....	47
4.1. Статичний момент плоскої фігури .....	47
4.2. Моменти інерції перерізу .....	48
4.3. Залежність між моментами інерції при паралельному переносі осей .....	50
4.4. Залежність між моментами інерції при повороті осей .....	50
4.5. Головні моменти інерції .....	51
4.6. Моменти інерції деяких плоских і складних перерізів .....	52
5. Зсув. Розрахунки на зріз .....	54
5.1. Визначення напружень .....	54
5.2. Чистий зсув .....	55
5.3. Практичні розрахунки на зріз і зім'яття .....	56
6. Кручення .....	59
6.1. Крутний момент. Епюри крутних моментів .....	59
6.2. Напруження при крученні стержня круглого поперечного перерізу .....	60
6.3. Розрахунки на міцність і жорсткість при крученні .....	63
7. Прямий згин .....	66
7.1. Прямий згин статично визначної балки .....	66



7.2.Згинальний момент і поперечна сила .....	67
7.3.Диференціальні залежності між згинальним моментом, поперечною силою та інтенсивністю розподілених навантажень .....	69
7.4.Епюри згинальних моментів і поперечних сил .....	71
7.5.напруження у поперечних перерізах балки при поперечному згині .....	77
7.6.Нормальні напруження при чистому згині балки .....	78
7.7.Нормальні напруження при поперечному згині балки .....	82
7.8.Розрахунки на міцність при згині. Раціональна форма поперечного перерізу балки .....	83
7.9.Визначення дотичних напружень .....	85
7.10.Головні напруження при поперечному згині. Повна перевірка міцності балки .....	88
7.11.Зігнута вісь балки та її диференціальне рівняння .....	91
7.12.Універсальне рівняння переміщень балок (метод початкових параметрів) .....	95
8.Складний опір .....	101
8.1.Косий згин .....	101
8.2.Сумісний згин з крученням .....	106
9.Контактні напруження і деформації .....	111
9.1.Основні поняття .....	111
9.2.Контакт тіл, обмежених сферичними і циліндричними поверхнями .....	112
10.Стійкість стиснутих стержнів .....	117
10.1.Поняття про стійкі і нестійкі форми рівноваги .....	119
10.2.Формула Ейлера для критичної сили .....	121
10.3.Критичне напруження. Межі придатності формули Ейлера .....	123
10.4.Практичний розрахунок стержнів на стійкість .....	124
11.Динамічні задачі .....	127
11.1.Загальні поняття .....	127
11.2.Визначення напружень при рівноприскореному русі .....	128
11.3.Напруження і переміщення при ударі .....	129
11.4.Вільні коливання системи з одним ступенем вільності .....	132
12.Розрахунок на міцність при повторно-змінних напруженнях .....	135
12.1.Фізична природа руйнування матеріалів при змінних напруженнях .....	135
12.2.Типи циклів напружень. Границі витривалості і криві витривалості .....	137
12.3.Фактори, які впливають на границю витривалості .....	138
12.4.Способи підвищення втомної міцності .....	139
12.5.Розрахунки на міцність при повторно-змінних напруженнях .....	140
Додатки .....	144

Навчальне видання

Кравцов Марко Костянтинович  
Неко Віктор Іванович  
Резніченко Микола Кирилович  
Романенко Віктор Павлович

**ТЕХНІЧНА МЕХАНІКА**  
ЧАСТИНА 2  
**ОПР МАТЕРІАЛІВ**

Редактор:

Коректор:

Підписано до друку . Формат 60×84 1/16  
Папір офсетний. Ум. друк. арк. 9,87  
Зам. №      Наклад      прим.

ISBN

© Кравцов М.К.  
© Неко В. І.  
© Резніченко М.К.  
© Романенко В.П.  
© УПА, 2007 р.