Державний вищий навчальний заклад
“Українська академія банківської справи
Національного банку України”
Кафедра вищої математики та інформатики

В.М. Долгіх

ВИЩА МАТЕМАТИКА ДЛЯ ЕКОНОМІСТІВ

Частина 1
Лінійна алгебра та аналітична геометрія

Навчальний посібник
У 4-х частинах

Для студентів економічних спеціальностей
вищих навчальних закладів

Суми
ДВНЗ “УАБС НБУ”
2008

УДК 512.64:514.124](075.8)
Д64

Рекомендовано до видання методичною радою обліково-фінансового факультету Державного вищого навчального закладу “Українська академія банківської справи Національного банку України”, протокол № 7 від 11.04.2008.
Розглянуто і схвалено на засіданні кафедри вищої математики та інформатики, протокол № 7 від 25.03.2008.

Автор-укладач
кандидат фізико-математичних наук, доцент
В.М. Долгіх

Рецензенти:
кандидат фізико-математичних наук, доцент
Т.І. Малютіна;
кандидат технічних наук, доцент
С.В. Кунцев

Відповідальний за випуск
кандидат технічних наук, доцент
В.В. Яценко

Долгіх В.М.

Д64 Вища математика для економістів [Текст] : навч. посібник : у 4-х ч. / В. М. Долгіх ; Державний вищий навчальний заклад “Українська академія банківської справи Національного банку України”. – Суми : ДВНЗ “УАБС НБУ”, 2008. – Ч. 1 : Лінійна алгебра та аналітична геометрія. – 103 с.

До першої частини посібника включено теоретичні відомості з лінійної алгебри та аналітичної геометрії, приклади розв’язання основних типів задач, питання для самоперевірки, задачі для самостійного розв’язування.

Призначений для студентів економічних спеціальностей вищих навчальних закладів.

УДК 512.64:514.124](075.8)

ЗМІСТ

ВСТУП

Посібник з курсу вищої математики для студентів економічних спеціальностей у 4-х частинах відповідає програмі курсу “Математика для економістів” і написаний з урахуванням сучасних вимог до рівня математичної підготовки фахівців з економіки та посилення її прикладної спрямованості.

Перша частина посібника містить п’ять розділів:

1. Матриці й визначники.
2. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь.
3. Елементи векторної алгебри.
4. Аналітична геометрія на площині.
5. Аналітична геометрія у просторі.

У першому розділі наведені основні відомості з теорії матриць і визначників, дано поняття оберненої матриці, рангу матриці.

У другому розділі вивчаються методи дослідження й розв’язування довільних систем лінійних алгебраїчних рівнянь, дані поняття власних чисел та власних векторів матриці, наведені приклади лінійних економічних моделей (модель міжнародної торгівлі, балансова модель Леонтьєва багатогалузевої економіки).

У третьому розділі вивчаються вектори та дії над ними у звичайному та n-вимірному просторі. Векторна алгебра широко використовується в четвертому та п’ятому розділах, присвячених аналітичній геометрії.

У четвертому розділі вивчаються системи координат на площині, пряма та алгебраїчні лінії другого порядку.

У п’ятому розділі розглядаються пряма й площина у трьохвимірному просторі, а також алгебраїчні поверхні другого порядку.

Усі розділи мають однакову структуру. Насамперед викладено основний теоретичний матеріал (означення, твердження, теореми і т.п.), пропонуються приклади розв’язування типових задач теоретичного й економічного характеру. В завершення теми наведені питання для самоперевірки засвоєння матеріалу, задачі для самостійного розв’язування.

Знаками ► і ■ позначаються початок і кінець розв’язання прикладу, а знаками ▷ і □ – початок і кінець доведення теореми або твердження.

1. МАТРИЦІ Й ВИЗНАЧНИКИ

Переважна кількість задач з економіки моделюється за допомогою систем лінійних алгебраїчних рівнянь (наприклад, балансова модель Леонтьєва “витрати-випуск”), із якими тісно пов’язані матриці й визначники. Уперше на можливість застосування таблиць чисел (матриць) для аналізу економічних проблем указав французький економіст Франсуа Кене (1694-1774). Поняття матриці дозволяє подати і далі оперувати в компактній формі з таблицями даних (матрицями витрат ресурсів, виробленої продукції та ін.).

1.1. МАТРИЦІ. ВИДИ МАТРИЦЬ

Матрицею порядку (розміру) $m \times n$ називається прямокутна таблиця чисел, що містить m рядків і n стовпців. Матриці позначаються великими літерами, наприклад, A, B, а елементи матриць – відповідними малими літерами з двома індексами: a_{ij}, b_{ij}. Перший індекс указує номер рядка, другий – номер стовпця, на перетині яких знаходиться елемент у матриці. Записується матриця за однією із форм:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix}. \quad (1.1)$$

Використовуються і скорочені позначення: $A_{m \times n}$, $[a_{ij}]$, $\|a_{ij}\|$ $(i = \overline{1,m},\quad j = \overline{1,n})$.

Елементи a_{ii} матриці, в яких номер рядка дорівнює номеру стовпця, називаються *діагональними* та утворюють *головну діагональ.*

Види матриць

1. Матриця порядку $n \times n$ називається квадратною матрицею n-го порядку.
2. Діагональною називається квадратна матриця, в якій всі елементи, що не належать головній діагоналі, дорівнюють нулю.
3. Діагональна матриця, в якій всі елементи головної діагоналі дорівнюють одиниці, називається одиничною матрицею і позначається літерою E.
4. Матриця будь-якого розміру називається нульовою, якщо всі її елементи дорівнюють нулю.

5. Матриця, що складається з одного рядка, називається *матрицею* (*вектором*)-*рядком*, а з одного стовпця – *матрицею* (*вектором*)-*стовпцем.*
6. Квадратна матриця, в якій всі елементи під (над) головною діагоналлю дорівнюють нулю, називається *верхньою* (*нижньою*) *трикутною матрицею*.

$$\begin{pmatrix}1&6&8\\3&9&5\\7&2&4\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&0\\0&0&8\end{pmatrix},\ E=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\ O=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\\0&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&0&3&5\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&2&3\\0&7&9\\0&0&5\end{pmatrix}$$

а)	б)	в)	г)	ґ)	д)	е)
квадратна матриця	діагональна матриця	одинична матриця	нульова матриця	матриця-стовпець	матриця-рядок	верхня трикутна

1.2. ОПЕРАЦІЇ НАД МАТРИЦЯМИ

1. **Рівність матриць.** Дві матриці A і B однакового розміру називаються *рівними* ($A_{m\times n} = B_{m\times n}$), якщо $a_{ij} = b_{ij}$ для будь-яких i, j.
2. **Множення матриці на число.** Добутком матриці $A_{m\times n}$ на число λ називається матриця $B_{m\times n} = \lambda A_{m\times n}$, кожний елемент якої дорівнює добутку відповідного елемента матриці A на число λ ($b_{ij} = \lambda a_{ij}$).
3. **Додавання (віднімання) матриць.** Сумою (різницею) матриць A і B однакового розміру $m\times n$ називається матриця $C_{m\times n} = A_{m\times n} \pm B_{m\times n}$, елементи якої дорівнюють сумам (різницям) відповідних елементів матриць A і B ($c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$). Наприклад,

$$A\pm B=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\end{pmatrix}\pm\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}a_{11}\pm b_{11}&a_{12}\pm b_{12}&a_{13}\pm b_{13}\\a_{21}\pm b_{21}&a_{22}\pm b_{22}&a_{23}\pm b_{23}\end{pmatrix}.$$

4. **Множення матриць.** Операція множення матриць визначена тільки тоді, коли кількість *стовпців* першої матриці дорівнює кількості *рядків* другої. Добутком матриць $A_{m\times k}$ і $B_{k\times n}$ називається матриця $C_{m\times n} = A_{m\times k}\cdot B_{k\times n}$, кожний елемент якої, що стоїть на перетині i-го рядка та j-го стовпця, дорівнює сумі добутків елементів i-го рядка матриці A на відповідні елементи j-го стовпця матриці B:

$$c_{\text{ij}}=\sum_{l=1}^{k}a_{il}b_{lj}\qquad (i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n}).\tag{1.2}$$

Зауваження. Кількість рядків матриці $C_{m\times n} = A_{m\times k} \cdot B_{k\times n}$ дорівнює кількості рядків матриці A, а кількість стовпців – кількості стовпців матриці B.

Приклад 1.1. Знайти AB і BA, якщо $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 8 & -1 \\ 9 & 7 \end{pmatrix}$.

► $A_{2\times3} \cdot B_{3\times2} = C_{2\times2} = \begin{pmatrix} 1\cdot(-2)+2\cdot8+3\cdot9 & 1\cdot0+2\cdot(-1)+3\cdot7 \\ 4\cdot(-2)+5\cdot8+6\cdot9 & 4\cdot0+5\cdot(-1)+6\cdot7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 41 & 19 \\ 86 & 37 \end{pmatrix}$,

$$B_{3\times2} \cdot A_{2\times3} = D_{3\times3} = \begin{pmatrix} -2\cdot1+0\cdot4 & -2\cdot2+0\cdot5 & -2\cdot3+0\cdot6 \\ 8\cdot1+(-1)\cdot4 & 8\cdot2+(-1)\cdot5 & 8\cdot3+(-1)\cdot6 \\ 9\cdot1+7\cdot4 & 9\cdot2+7\cdot5 & 9\cdot3+7\cdot6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -4 & -6 \\ 4 & 11 & 18 \\ 37 & 53 & 69 \end{pmatrix}. \blacksquare$$

Деякі властивості добутку матриць

1) добуток матриць *не комутативний* $AB \neq BA$. Якщо $AB = BA$, то матриці A і B називаються *комутативними;*
2) добуток діагональних матриць є діагональною матрицею;
3) добуток одиничної матриці E на матрицю A дорівнює матриці A: $EA = A$;
4) добуток *квадратних* матриць *асоціативний*, тобто $(AB)C = A(BC)$.

5. **Піднесення до степеня.** Цілим додатним степенем A^m називається добуток m матриць, що дорівнюють A: $A^m = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{m}$.

6. **Транспонування матриці** – перехід від матриці $A_{m\times n}$ до матриці $A^T_{n\times m}$, в якій рядки й стовпці помінялися місцями зі збереженням порядку, наприклад, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \text{ то } A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Властивості транспонування матриці

1) $(A + B)^T = A^T + B^T$;
2) $(\lambda A)^T = \lambda A^T$;
3) $(AB)^T = B^T A^T$;
4) $(A^T)^T = A$.

Приклад 1.2. Нехай підприємство випускає вироби n видів: P_1, P_2, …, P_n і при цьому використовує m видів сировини: S_1, S_2, … , S_m. Позначимо b_i (i = 1, 2,…, m) – запас сировини S_i; d_i (i = 1, 2,…, m) – вартість одиниці сировини S_i; x_j (j = 1, 2,…, n) – кількість одиниць продукції P_j, яка запланована до виробництва; a_{ij} – кількість одиниць сировини S_i, яка потрібна для виготовлення *одиниці* продукції P_j; C_j – прибуток від реалізації одиниці продукції P_j.

Вид сировини	**Кількість сировини, що затрачається на виробництво одиниці продукції P_j**				**Запаси сировини**
	P_1	P_2	…	P_n	
S_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}	b_1
S_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}	b_2
…	…	…	…	…	…
S_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}	b_m
Прибуток від реалізації одиниці продукції P_j	C_1	C_2	…	C_n	

Введемо матриці:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}; \quad D = \begin{pmatrix} d_1 \\ \dots \\ d_m \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}; \quad C = (c_1\ c_2\ \dots c_n).$$

Якщо задано план виробництва (матриця X), то кількість сировини, що затрачається на виробництво усіх видів продукції, обчислюється за формулою: $B = A \cdot X$. Загальна вартість сировини: $V = D^T \cdot B$. Сумарний прибуток від реалізації продукції:

$$F = C_1 x_1 + C_2 x_2 + \dots + C_n x_n = C \cdot X.$$

1.3. ВИЗНАЧНИКИ

Квадратній матриці $A_{n\times n}$ можна поставити у відповідність *числову характеристику*, яка називається *визначником* (*детермінантом*) n-го порядку. Визначник позначають так: $|A|$, $\Delta(A)$, Δ, Δ_n, $\det(A)$ і записують у вигляді

$$\Delta(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. \qquad (1.3)$$

Мінором M_{ik} елемента a_{ik} називається *визначник* (n – 1)-го порядку, отриманий з визначника n-го порядку викреслюванням i-го рядка та k-го стовпця. Величина $A_{ik} = (-1)^{i+k}M_{ik}$ називається *алгебраїчним доповненням* елемента a_{ik}.

Приклад 1.3. Для матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ маємо: $\Delta(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$,

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix},\quad M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix},\quad \begin{matrix} A_{11} = (-1)^{1+1}M_{11} = M_{11}, \\ A_{23} = (-1)^{2+3}M_{23} = -M_{23}. \end{matrix}$$

***Теорема Лапласа**: визначник дорівнює сумі добутків елементів будь-якого рядка чи стовпця на їх алгебраїчні доповнення*

- $\Delta(A) = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$ – розклад визначника за елементами i-го рядка;
- $\Delta(A) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$ – розклад визначника за елементами j-го стовпця.

Визначник першого порядку: $\Delta_1(A) = |\, a_{11} \,| = a_{11}$.

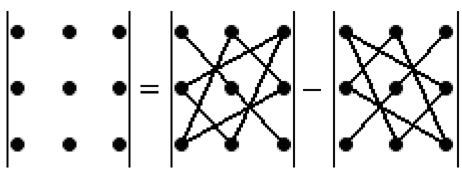
Визначник другого порядку:

$$\Delta_2(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}. \qquad (1.4)$$

Визначник третього порядку:

$$\Delta_3(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{matrix} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - \\ -(a_{31}a_{22}a_{13} + a_{21}a_{12}a_{33} + a_{32}a_{23}a_{11}). \end{matrix} \qquad (1.5)$$

Формулу (1.5) можна записати символічно у вигляді правила трикутника (правила Саррюса):



Властивості визначників

1. При транспонуванні матриці її визначник не змінюється.
2. Якщо всі елементи деякого рядка (стовпця) визначника дорівнюють 0, то $\det(A) = 0$.
3. Якщо всі елементи деякого рядка (стовпця) визначника помножити на число λ, то і визначник помножиться на це число.

Наслідок: спільний множник усіх елементів рядка (стовпця) можна виносити за знак визначника.

4. При перестановці двох рядків (стовпців) визначник змінює знак.

▷ Припустимо спочатку, що переставлено два сусідні рядки визначника: i-й та $(i+1)$-й. Розкладемо даний визначник Δ за елементами i-го рядка, а визначник із переставленими рядками Δ' – за елементами $(i+1)$-го рядка. Розкладання відрізнятимуться тільки знаком, тому що елементи рядків однакові, а алгебраїчні доповнення елементів матимуть протилежний знак (множники $(-1)^{i+j}$ зміняться на множники $(-1)^{i+1+j}$), тому $\Delta' = -\Delta$.

Перестановку i-го і $(i+k)$-го рядків можна представити як послідовний зсув i-го рядка на k рядків вниз (при цьому щоразу знак визначника змінюється), а $(i+k)$-го рядка на $(k-1)$ рядків вгору, що теж супроводжується $(k-1)$ зміною знака, тобто знак змінюється непарне число $(2k-1)$ разів: $\Delta' = -\Delta$. □

5. Визначник, що має однакові рядки (стовпці), дорівнює 0.

▷ Якщо переставити однакові рядки, то у визначнику нічого не зміниться, але за властивістю 4 він змінить знак, тобто $\Delta = -\Delta$, звідки $\Delta = 0$. □

6. Визначник, що має пропорційні рядки (стовпці), дорівнює 0.
7. Сума добутків елементів будь-якого рядка (стовпця) визначника на алгебраїчні доповнення елементів іншого рядка (стовпця) дорівнює 0:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{jk} = 0 \qquad (i \neq j).$$

▷ Розглянемо визначник Δ', отриманий з визначника Δ заміною j-го рядка на i-й:

$$\Delta' = \begin{array}{c} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ n \end{array}.$$

Цей визначник має два однакові рядки, отже, за властивістю (5) він дорівнює нулю. Розкладаючи його за елементами j-го рядка, одержуємо

$$\Delta' = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{jk} = 0 \qquad (i \neq j). \ \square$$

8. Визначник не зміниться, якщо до елементів будь-якого рядка (стовпця) додати елементи іншого рядка (стовпця), помножені на одне і те саме число.

   ▷ Додамо до елементів i-го рядка визначника елементи j-го рядка ($i \neq j$), помножені на число λ. В результаті i-й рядок набуде вигляду:

$$(a_{i1} + \lambda a_{j1})\,(a_{i2} + \lambda a_{j2})\,...\,(a_{in} + \lambda a_{jn}).$$

   Розкладемо отриманий визначник за елементами i-го рядка:

$$\Delta^* = \sum_{k=1}^{n}(a_{ik} + \lambda a_{jk})A_{ik} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik} + \lambda \sum_{k=1}^{n} a_{jk}A_{ik} = \Delta.$$

   Друга сума дорівнює нулю за властивістю (7). □

9. Визначник добутку двох квадратних матриць дорівнює добутку їх визначників: $C = A \cdot B \;\Rightarrow\; |C| = |A| \cdot |B|$.
10. Визначник діагональної чи трикутної матриці дорівнює добутку елементів головної діагоналі.

Зауваження 1. З теореми Лапласа та властивості (7) випливає рівність:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = \begin{cases} |A| & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}.$$

Зауваження 2. При обчисленні визначника доцільно перетворити його так, щоб одержати в рядку (стовпці) значну кількість нулів, а потім розкласти визначник за елементами цього рядка (стовпця) або перетворити визначник до трикутного вигляду і застосувати властивість (10).

Зауваження 3. Для полегшення розуміння виду перетворень визначника, введемо позначення: e_i – i-й рядок, d_j – j-й стовпець визначника. Тоді запис $e_1/2$ означає ділення кожного елемента другого рядка на 2 (при цьому за знак визначника виноситься множник 2), запис $e_2 - 2e_1$ означає, що з кожного елемента 2-го рядка необхідно відняти відповідні елементи 1-го рядка, помножені на 2.

Приклад 1.4. Обчислити визначник 3-го порядку: $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 0 & 4 \\ -2 & 2 & 8 \end{vmatrix}$.

► Обчислимо визначник чотирма способами:

1) за формулою (1.5) (за правилом трикутника):

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 0 & 4 \\ -2 & 2 & 8 \end{vmatrix} = 2\cdot 0\cdot 8 + 4\cdot 4\cdot(-2) + 8\cdot 2\cdot 6 - \left(6\cdot 0\cdot(-2) + 4\cdot 8\cdot 8 + 4\cdot 2\cdot 2\right) = 64 - 272 = -208;$$

2) розкладом за елементами 2-го стовпця, що містить 0:

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 0 & 4 \\ -2 & 2 & 8 \end{vmatrix} = 4\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 8 & 4 \\ -2 & 8 \end{vmatrix} + 0\cdot(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -2 & 8 \end{vmatrix} + 2\cdot(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} = -4(64+8) - 2(8-48) = -208;$$

3) розкладом за елементами 1-го стовпця з одержанням у ньому нулів:

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 0 & 4 \\ -2 & 2 & 8 \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} e_1/2 \\ e_2/4 \\ e_3/2 \end{Bmatrix} = 2\cdot 4\cdot 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} \\ e_2 - 2e_1 \\ e_3 + e_1 \end{Bmatrix} = 16\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -5 \\ 0 & 3 & 7 \end{vmatrix} = 16\cdot 1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -4 & -5 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} =$$

$$= 16(-28+15) = 16(-13) = -208;$$

4) зведенням визначника до трикутного вигляду:

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 0 & 4 \\ -2 & 2 & 8 \end{vmatrix} = \{\text{див. спосіб 3}\} = 16\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -5 \\ 0 & 3 & 7 \end{vmatrix} = \{e_2/(-1)\} = -16\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & 7 \end{vmatrix} = \{e_2 - e_3\} =$$

$$= -16\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 7 \end{vmatrix} = \{e_3 - 3e_2\} = -16\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 13 \end{vmatrix} =$$

$$= \{\text{за властивістю 10}\} = -16\cdot 1\cdot 1\cdot 13 = -208. \blacksquare$$

Зауваження. Правило трикутника (1.5) застосовується лише для обчислення визначників *третього* порядку, а способи 2-4 – для обчислення визначників *будь-якого* порядку. Спосіб 2 дозволяє звести обчислення *одного* визначника n-го порядку до обчислення n визначників $(n-1)$-го порядку, а спосіб 3 – до обчислення *одного* визначника $(n-1)$-го порядку. Найбільш економічним для обчислення визначників порядку $n > 3$ є спосіб 4.

1.4. ОБЕРНЕНА МАТРИЦЯ

Матриця A називається *виродженою*, якщо $\det(A) = 0$, і *невиродженою*, якщо $\det(A) \neq 0$.

Матриця A^{-1} називається *оберненою* до матриці A, якщо

$$A^{-1}\cdot A = A\cdot A^{-1} = E. \qquad (1.6)$$

Теорема (необхідна й достатня умова існування оберненої матриці). *Обернена матриця A^{-1} існує і єдина тільки тоді, коли матриця A невироджена*

$\triangleright$ *Необхідність*. Нехай матриця A має обернену матрицю A^{-1}, тоді $A \cdot A^{-1} = E$, $\left|A \cdot A^{-1}\right| = |E| = 1$. З іншого боку, за властивістю (9) визначників маємо $\left|A \cdot A^{-1}\right| = |A| \cdot \left|A^{-1}\right|$. Звідси $|A| \neq 0$, $\left|A^{-1}\right| \neq 0$, тобто матриця A невироджена.

Достатність. Нехай матриця A невироджена, тобто $|A| \neq 0$. Складемо матрицю з алгебраїчних доповнень (така матриця називається *приєднаною*):

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Помножимо матрицю $\widetilde{A}$ на матрицю A: $\widetilde{A} \cdot A = B$. Елементи добутку матриць визначаються за правилом множення матриць:

$$b_{ij} = \sum_{l=1}^{n} A_{li} a_{lj} = \begin{cases} |A|, & \text{якщо } i = j \\ 0, & \text{якщо } i \neq j \end{cases} \Leftrightarrow B = \begin{pmatrix} |A| & 0 & \dots & 0 \\ 0 & |A| & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & |A| \end{pmatrix} = |\,A\,| \cdot E.$$

Звідси випливає, що якщо $|A| \neq 0$, то обернену матрицю можна обчислити за формулою:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \widetilde{A} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}, \quad \left(|A| \neq 0\right), \qquad (1.7)$$

де A_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, n$) – алгебраїчні доповнення елементів a_{ij} матриці A. □

Зауваження. Алгебраїчне доповнення A_{ij} елемента a_{ij}, розташованого в матриці A на перетині i-го рядка і j-го стовпця, в оберненій матриці розміщується на перетині j-го рядка й i-го стовпця.

Приклад 1.5. Обчислити матрицю, обернену до матриці

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&2\\2&1&-1\\3&2&-2\end{pmatrix}.$$

► Обчислимо визначник Δ й алгебраїчні доповнення A_{ik} елементів a_{ik}:

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&-1&2\\2&1&-1\\3&2&-2\end{vmatrix}=1\cdot1\cdot(-2)+(-1)\cdot(-1)\cdot3+2\cdot2\cdot2-(2\cdot1\cdot3+(-1)\cdot2\cdot(-2)+(-1)\cdot2\cdot1)=1.$$

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1&-1\\2&-2\end{vmatrix}=-2+2=0,\quad A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}-1&2\\2&-2\end{vmatrix}=2,\quad A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}-1&2\\1&-1\end{vmatrix}=-1,$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}2&-1\\3&-2\end{vmatrix}=-(-4+3)=1,\quad A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1&2\\3&-2\end{vmatrix}=-8,\quad A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1&2\\2&-1\end{vmatrix}=5,$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}2&1\\3&2\end{vmatrix}=4-3=1,\quad A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1&-1\\3&2\end{vmatrix}=-5,\quad A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1&-1\\2&1\end{vmatrix}=3.$$

За формулою (1.7) знайдемо обернену матрицю:

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}0&2&-1\\1&-8&5\\1&-5&3\end{pmatrix}.$$

Перевірка.

$$A^{-1}\cdot A=\begin{pmatrix}0&2&-1\\1&-8&5\\1&-5&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&-1&2\\2&1&-1\\3&2&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0+4-3&0+2-2&0-2+2\\1-16+15&-1-8+10&2+8-10\\1-10+9&-1-5+6&2+5-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=E.$$ ■

Обчислення оберненої матриці методом елементарних перетворень

Елементарними називаються такі перетворення матриці:

1) транспонування матриці;
2) переставлення місцями двох рядків (стовпців);
3) множення рядка (стовпця) на відмінне від нуля число;
4) додавання до елементів рядка (стовпця) відповідних елементів іншого рядка (стовпця), помножених на одне і те саме число;
5) викреслювання нульового рядка (стовпця).

Матриці A і B, одержані одна з іншої у результаті елементарних перетворень, називають *еквівалентними* і позначають так: $A \sim B$.

Для обчислення оберненої матриці введемо допоміжну матрицю $\Gamma_A = (A|E)$ розміром $n\times 2n$, приписавши праворуч до матриці A одиничну матрицю E. Далі, виконуючи елементарні перетворення *рядків* матриці Γ_A, перетворимо її до вигляду $(E|B)$. Якщо A невироджена, то $B = A^{-1}$.

Приклад. 1.6. Методом елементарних перетворень обчислити матрицю, обернену до матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

► Припишемо праворуч до матриці A одиничну матрицю E і перетворимо одержану матрицю $\Gamma_A = (A|E)$ до вигляду $(E|A^{-1})$:

$$\Gamma_A = \left(A|E\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} e_2 - 2e_1 \\ \sim \\ e_3 - 3e_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -8 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \sim \\ e_3 - e_2 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) e_2 - e_3 \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} e_1 + e_2 \\ \sim \\ e_3 - 2e_2 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -5 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ e_2 + 2e_3 \\ \sim \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -8 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -5 & 3 \end{array}\right) = \left(E\middle|A^{-1}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & -8 & 5 \\ 1 & -5 & 3 \end{pmatrix}. \blacksquare$$

1.5. РАНГ МАТРИЦІ

Виділимо в матриці $A_{m\times n}$ k довільно обраних рядків і k стовпців. Визначник k-го порядку, складений з елементів, розташованих на перетині виділених рядків і стовпців, називають *мінором k-го порядку* і позначають M_k.

Рангом матриці A називається *найбільший порядок* відмінного від нуля мінору матриці. Ранг матриці A позначається $rang(A)$, $rg(A)$, $r(A)$.

Якщо $r(A) = r$, то знайдеться хоча б один мінор порядку r, відмінний від нуля, а *всі* мінори порядку, більшого ніж r, дорівнюють нулю.

Зауваження 1. Ранг матриці визначається *кількістю рядків* ненульового мінору, а не його значенням.

Зауваження 2. Ранги еквівалентних матриць співпадають.

Приклад 1.7. Обчислити ранг матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & 5 & 2 & 3 \\ 2 & 8 & 6 & 4 & 10 \end{pmatrix}$.

► Оскільки третій рядок пропорційний першому ($e_3 = 2e_1$), то будь-який мінор 3-го порядку $M_3 = 0$ (за властивістю 6 визначників).

Мінор 2-го порядку

$$M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 4 = 4 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad r(A) = 2. \ ■$$

Нехай ранг матриці A дорівнює r. Тоді будь-який, *відмінний від нуля*, *мінор порядку* r називають *базисним*. Рядки й стовпці матриці A, на перетині яких розташовані елементи базисного мінору, називають *базисними*. Матриця може мати кілька базисних мінорів.

Зауваження. Обчислити ранг перебором усіх мінорів складно. Існує інший спосіб – *спосіб елементарних перетворень матриці*.

Обчислення рангу матриць методом елементарних перетворень

Елементарними перетвореннями можна звести матрицю A до еквівалентної трапецієподібної матриці:

$$A \sim \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1r} & ... & a_{1k} \\ 0 & a_{22} & ... & a_{2r} & ... & a_{2k} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & a_{rr} & ... & a_{rk} \end{pmatrix}, \text{ де } a_{ii} \neq 0 \ (i = 1, 2, \ldots, r).$$

Ранг такої матриці дорівнює *кількості ненульових рядків*, а оскільки ранги еквівалентних матриць співпадають, то $r(A) = r$.

Приклад 1.8. Знайти ранг матриці методом елементарних перетворень.

$$► \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \sim \\ e_2 - 2e_1 \\ e_3 - 5e_1 \\ e_4 - 7e_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & -7 & -13 & 6 \\ 0 & -14 & -26 & 12 \\ 0 & -14 & -26 & 8 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \sim \\ e_3 - 2e_2 \\ e_4 - e_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & -7 & -13 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim\{\text{викреслюємо } e_3\}\sim\begin{pmatrix}1 & 3 & 5 & -1\\ 0 & -7 & -13 & 6\\ 0 & 0 & 0 & -4\end{pmatrix}\underset{d_3\leftrightarrow d_4}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 3 & -1 & 5\\ 0 & -7 & 6 & -13\\ 0 & 0 & -4 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow r=3.\ ■$$

Поняття про лінійну залежність і незалежність рядків матриці

Рядки матриці e_1, e_2, …, e_n називаються *лінійно незалежними*, якщо рівність $c_1e_1 + c_2e_2 + \ldots + c_ne_n = 0$ виконується лише при $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$. Якщо ця рівність виконується при відмінних від нуля коефіцієнтах, то рядки називаються *лінійно залежними*.

Приклад 1.9. Перевірити лінійну залежність рядків матриці

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 0 & 8 & 6\\ 2 & 12 & 10\end{pmatrix}.$$

► $e_3 = 2e_1 + e_2 \Leftrightarrow 2e_1 + e_2 - e_3 = 0$ – рядки лінійно залежні. ■

Приклад 1.10. Довести лінійну незалежність рядків матриці $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$.

► $c_1e_1 + c_2e_2 = 0 \Rightarrow c_1(1\ \ 2) + c_2(3\ \ 4) = (0\ \ 0) \Rightarrow \begin{cases} c_1 + 3c_2 = 0 \\ 2c_1 + 4c_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = -3c_2 \\ -2c_2 = 0 \end{cases}$, $c_1 = c_2 = 0 \Rightarrow$ рядки e_1, e_2 лінійно незалежні. ■

Кажуть, що рядок e_1 виражається у вигляді лінійної комбінації рядків e_2,…, e_n, якщо виконується рівність $e_1 = \sum_{i=2}^{n} c_ie_i \quad (\sum_{i=2}^{n} c_i^2 \neq 0)$.

Якщо рядки (стовпці) матриці A лінійно залежні, то хоча б один із них можна представити у вигляді лінійної комбінації інших рядків (стовпців).

> ***Теорема про базисний мінор**. Якщо ранг матриці дорівнює r, то r базисних рядків лінійно незалежні, а останні рядки виражаються у вигляді лінійної комбінації базисних рядків*

Наслідок. Для того щоб визначник квадратної матриці дорівнював нулю, необхідно й достатньо, щоб його рядки (стовпці) були лінійно залежні.

Питання для самоперевірки

1. Відомий визначник матриці A. Чому дорівнює визначник матриці A^T?
2. Дано матриці $A_{2\times4}$, $B_{4\times4}$. Чи існує визначник матриці AB?
3. При якому λ буде виродженою матриця AB, якщо
$$A=\begin{pmatrix}1 & \lambda\\ 2 & -1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 1 & -5\end{pmatrix}?$$
4. Чи можна звести елементарними перетвореннями матрицю
$$\begin{pmatrix}4 & 3 & 2\\ 5 & 4 & 3\\ 6 & 5 & 4\end{pmatrix}$$ до одиничної матриці?
5. Ранг матриці п'ятого порядку дорівнює 3. Чи може її визначник дорівнювати 1?
6. Визначники матриць A і B дорівнюють відповідно 2 і 3. Чому дорівнює визначник матриці $(AB)^T$?

Задачі

1. Знайдіть матрицю $2A-3B$, якщо $A=\begin{pmatrix}4 & 1 & -2\\ 0 & -1 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 2 & 1\\ -1 & 1 & 4\end{pmatrix}$.
2. Знайдіть AB і BA, якщо:

   а) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5\\ -4\\ 1\end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 3 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5 & 2\\ 1 & 0\\ 4 & 3\end{pmatrix}$;

   в) $A=\begin{pmatrix}0 & -2 & -3\\ 1 & 4 & 5\\ 3 & 0 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & -2 & 3\\ 0 & 4 & 1\\ -2 & 1 & 3\end{pmatrix}$.
3. Перевірте, що $(AB)^T=B^TA^T$, якщо $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -3\\ 2 & 1 & 4\\ 2 & 5 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 2 & -4\\ 3 & 1 & -1\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$.
4. Обчисліть визначники:

   а) $\Delta=\begin{vmatrix}2 & -3 & 1\\ 1 & 5 & -4\\ 4 & 1 & -3\end{vmatrix}$, б) $\Delta=\begin{vmatrix}2 & 3 & -1\\ 4 & 5 & -2\\ 2 & 1 & -1\end{vmatrix}$, в) $\Delta=\begin{vmatrix}2 & 3 & 2 & 5\\ 1 & 1 & 1 & 2\\ 2 & 1 & -3 & 2\\ 1 & 1 & -3 & 4\end{vmatrix}$, г) $\Delta=\begin{vmatrix}1 & 2 & 0 & 3\\ 3 & -2 & 4 & -2\\ 0 & 1 & 0 & 5\\ -2 & 1 & 6 & 1\end{vmatrix}$.
5. Чи є комутативними матриці $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ -4 & 0 & 5\\ -3 & 0 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 3\\ 2 & -5 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}$?

   Перевірте, що $\Delta_{AB}=\Delta_{BA}=\Delta_A\,\Delta_B$.

6. Чи мають дані матриці обернені? Якщо мають, знайдіть їх:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 6 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

7. Елементарними перетвореннями знайдіть матрицю, обернену до матриці A:

$$\text{а) } A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix},\quad \text{б) } A=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

8. Перевірте, що $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, якщо

$$\text{а) } A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix};\qquad \text{б) } A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

9. Знайдіть матрицю X, що задовольняє рівняння $AX = B$, якщо

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

10. Знайдіть матрицю X, що задовольняє рівняння $XA = B$, якщо

$$A=\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} -8 & 3 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -2 & 15 & 0 \end{pmatrix}.$$

11. Знайдіть ранги матриць

$$A=\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 & 1 \\ 12 & -1 & -1 & 0 \\ -11 & -7 & 3 & 5 \\ -2 & -3 & 1 & 2 \\ 8 & -7 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

2. СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ

2.1. ОСНОВНІ ОЗНАЧЕННЯ

Система m лінійних алгебраїчних рівнянь із n невідомими $x_1, x_2, \ldots, x_n$ має вигляд:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}, \tag{2.1}$$

де a_{ij} – задані коефіцієнти при невідомих;
b_i – вільні члени системи.

Систему (2.1) можна записати у матричній формі:

$$A \cdot X = B, \tag{2.2}$$

де A – матриця коефіцієнтів при невідомих;
X – матриця-стовпець невідомих;
B – матриця-стовпець вільних членів:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}. \tag{2.3}$$

Розв'язком системи (2.1) називається впорядкована сукупність чисел x_1, x_2, …, x_n, які перетворюють у правильну рівність кожне рівняння системи.

Система називається *сумісною*, якщо вона має хоча б один розв'язок, і *несумісною*, якщо вона не має жодного розв'язку.

Сумісна система називається *визначеною*, якщо вона має лише один розв'язок і *невизначеною*, якщо вона має безліч розв'язків.

2.2. СХЕМА ДОСЛІДЖЕННЯ СИСТЕМ. ТЕОРЕМА КРОНЕКЕРА-КАПЕЛЛІ

Випишемо матрицю A і розширену матрицю $\overline{A}$ системи (2.1)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \overline{A} = (A \mid B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right). \tag{2.4}$$

Теорема Кронекера-Капеллі: *для того щоб система (2.1) була сумісною, необхідно й достатньо, щоб ранг матриці A дорівнював рангу розширеної матриці $\overline{A}$, тобто $r(A) = r(\overline{A})$*

Схема дослідження систем

1) якщо $r(A) \neq r(\overline{A})$ – система несумісна;
2) якщо $r(A) = r(\overline{A}) = r$ – система сумісна, причому:
   при $r = n$ (ранг дорівнює кількості невідомих) система має *єдиний* розв'язок;
   при $r < n$ система має безліч розв'язків. Базисні невідомі, коефіцієнти при яких увійшли в базисний мінор, виражаються лінійно через інші невідомі, котрі називаються *вільними* невідомими.

2.3. МЕТОД ГАУССА
(метод послідовного виключення невідомих)

Метод Гаусса поєднує процес дослідження сумісності системи з процесом її розв'язання. Метод складається з прямого й зворотного ходу.

1. Прямий хід. Якщо $a_{11} \neq 0$, то з першого рівняння системи виражають змінну x_1 через інші змінні і підставляють у 2, 3,…, m-те рівняння. У результаті змінна x_1 виключається з усіх рівнянь, крім першого.

Потім із другого рівняння виражають змінну x_2 через $x_3, x_4, \ldots, x_n$ і підставляють у 3, 4,…, m-те рівняння. У результаті змінна x_2 виключається з усіх рівнянь, крім першого та другого.

Аналогічно виключають змінну x_3 із 4, 5, …, m-го рівнянь і т.д.

У процесі виключення змінних можуть з'явитися рівняння вигляду:

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = 0. \qquad (2.5)$$

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = b_k, \quad (b_k \neq 0). \qquad (2.6)$$

Рівняння (2.5) слід відкинути, тому що його задовольняє будь-який набір невідомих. Рівняння (2.6) свідчить про несумісність системи, тому що жоден набір невідомих не задовольняє таке рівняння.

Якщо в процесі послідовного виключення невідомих не зустрінеться рівняння вигляду (2.6), то система сумісна. При цьому отримаємо еквівалентну систему трикутного (2.7) чи трапецієподібного (2.8) вигляду.

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad x_n = b_n. \end{cases} \qquad (2.7)$$

$$\begin{cases} x_1 + & a_{12}x_2 + & \ldots & + a_{1r}x_r + & a_{1r+1}x_{r+1} + & \ldots & + a_{1n}x_n & = b_1, \\ & x_2 + & \ldots & + a_{2r}x_r + & a_{2r+1}x_{r+1} + & \ldots & + a_{2n}x_n & = b_2, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ & & & x_r + & a_{rr+1}x_{r+1} + & \ldots & + a_{rn}x_n & = b_r. \end{cases} \qquad (2.8)$$

Система (2.7) має *єдиний розв'язок*, а система (2.8) – *безліч розв'язків*, які знаходяться у процесі зворотного ходу методу Гаусса.

2. Зворотний хід. З останнього рівняння системи (2.7) визначається x_n і підставляється в 1, 2, ..., $(n - 1)$ рівняння. Потім із передостаннього рівняння визначається x_{n-1} і підставляється в 1, 2, ..., $(n - 2)$ рівняння і т.д.

У системі (2.8) базисні невідомі $x_1, x_2, \ldots, x_r$ визначаються через вільні невідомі $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$, які можна задавати довільно.

Частинним розв'язком системи рівнянь називається розв'язок, в якому всім вільним невідомім задані конкретні числові значення.

Базисним розв'язком системи рівнянь називається розв'язок, в якому всі вільні невідомі дорівнюють нулю.

Зауваження. При розв'язанні систем методом Гаусса елементарним перетворенням підлягають *рядки* розширеної матриці. У процесі *прямого ходу* обертають у нуль елементи матриці, розташовані *під головною діагоналлю* (спочатку по першому стовпцю, потім – по другому і т.д.). У процесі *зворотного ходу* обертають у нуль елементи, розташовані *над головною діагоналлю*, починаючи *з останнього* стовпця для системи (2.7) і зі стовпця з номером r для системи (2.8). Потім обертають у нуль елементи *над головною діагоналлю* в попередньому стовпці і т.д.

Наведемо кілька прикладів розв'язування систем методом Гаусса.

Приклад 2.1. Методом Гаусса розв'язати систему:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 5 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1 \end{cases}.$$

► Перетворюємо розширену матрицю системи:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} e_2 - 2e_1 \\ \sim \\ e_3 - 3e_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & -5 & -9 \\ 0 & 5 & -8 & -14 \end{array}\right) \begin{array}{c} e_2 / 3 \\ \sim \\ \end{array}$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 2 & 5\\ 0 & 1 & -5/3 & -3\\ 0 & 5 & -8 & -14\end{array}\right)\begin{array}{c}\\ \sim\\ e_3-5e_2\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 2 & 5\\ 0 & 1 & -5/3 & -3\\ 0 & 0 & 1/3 & 1\end{array}\right)\begin{array}{c}\\ \sim\\ 3e_3\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 2 & 5\\ 0 & 1 & -5/3 & -3\\ 0 & 0 & 1 & 3\end{array}\right)\sim$$

Прямий хід завершений. Матриця зведена до трикутного вигляду. Система має єдиний розв'язок, який знаходимо в результаті зворотного ходу.

$$\begin{array}{c}e_1-2e_3\\ \sim\\ e_2+(5/3)e_3\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 3\end{array}\right)\begin{array}{c}e_1+e_2\\ \sim\\ \\ \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 3\end{array}\right)\Rightarrow\begin{cases}x_1=1\\ x_2=2\\ x_3=3\end{cases}. \blacksquare$$

Приклад 2.2. Методом Гаусса розв'язати систему: $\begin{cases}x_1-4x_2=-1\\ 3x_1+2x_2=4\\ 7x_1+10x_2=12\end{cases}.$

$$\blacktriangleright\ \overline{A}=\left(\begin{array}{cc|c}1 & -4 & -1\\ 3 & 2 & 4\\ 7 & 10 & 12\end{array}\right)\begin{array}{c}e_2-3e_1\\ \sim\\ e_3-7e_1\end{array}\left(\begin{array}{cc|c}1 & -4 & -1\\ 0 & 14 & 7\\ 0 & 38 & 19\end{array}\right)\begin{array}{c}e_2/7\\ \sim\\ e_3/19\end{array}\left(\begin{array}{cc|c}1 & -4 & -1\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 2 & 1\end{array}\right)\begin{array}{c}\\ \sim\\ e_3-e_2\end{array}$$

$$\sim\left(\begin{array}{cc|c}1 & -4 & -1\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right)\begin{array}{c}e_2/2\\ \sim\\ \\ \end{array}\left(\begin{array}{cc|c}1 & -4 & -1\\ 0 & 1 & 1/2\end{array}\right)\begin{array}{c}e_1+4e_2\\ \sim\end{array}\left(\begin{array}{cc|c}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1/2\end{array}\right)\Rightarrow\begin{cases}x_1=1\\ x_2=1/2\end{cases}. \blacksquare$$

Приклад 2.3. Методом Гаусса розв'язати систему: $\begin{cases}x_1+2x_2+x_3=4\\ 2x_1+4x_2+2x_3=3\end{cases}.$

$$\blacktriangleright\ \overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 1 & 4\\ 2 & 4 & 2 & 3\end{array}\right)\begin{array}{c}\sim\\ e_2-2e_1\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 1 & 4\\ 0 & 0 & 0 & -5\end{array}\right)$$ – система несумісна. $\blacksquare$

Приклад 2.4. Методом Гаусса розв'язати систему:

$$\begin{cases}x_1+2x_2+4x_3-x_4-3x_5=7\\ 2x_1+\quad 9x_3+\qquad x_5=4\\ \qquad x_2+\qquad 2x_4-x_5=6\end{cases}.$$

$$\blacktriangleright\ \overline{A}=\left(\begin{array}{ccccc|c}1 & 2 & 4 & -1 & -3 & 7\\ 2 & 0 & 9 & 0 & 1 & 4\\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 6\end{array}\right)\begin{array}{c}e_2-2e_1\\ \sim\\ \\ \end{array}\left(\begin{array}{ccccc|c}1 & 2 & 4 & -1 & -3 & 7\\ 0 & -4 & 1 & 2 & 7 & -10\\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 6\end{array}\right)\begin{array}{c}\\ \sim\\ e_2\leftrightarrow e_3\end{array}$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 4 & -1 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & -4 & 1 & 2 & 7 & -10 \end{array}\right)_{e_3+4e_2} \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 4 & -1 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 10 & 3 & 14 \end{array}\right)^{e_1-4e_3} \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & -41 & -15 & -49 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 10 & 3 & 14 \end{array}\right)^{e_1-2e_2} \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -45 & -13 & -61 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 10 & 3 & 14 \end{array}\right).$$

Запишемо і розв'яжемо систему рівнянь, що відповідає останній матриці

$$\begin{cases} x_1 + 0\cdot x_2 + 0\cdot x_3 - 45x_4 - 13x_5 = -61 \\ 0\cdot x_1 + x_2 + 0\cdot x_3 + 2x_4 - x_5 = 6 \\ 0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + x_3 + 10x_4 + 3x_5 = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -61 + 45x_4 + 13x_5 \\ x_2 = 6 - 2x_4 + x_5 \\ x_3 = 14 - 10x_4 - 3x_5 \end{cases}$$

Система має безліч розв'язків. Змінні x_1, x_2, x_3 – базисні, x_4, x_5 – вільні. Отриманий розв'язок системи можна записати у вигляді: $x_1 = -61 + 45c_4 + 13c_5$, $x_2 = 6 - 2c_4 + c_5$, $x_3 = 14 - 10c_4 - 3c_5$, $x_4 = c_4$, $x_5 = c_5$, де c_4, c_5 – довільні сталі. ■

2.4. МЕТОД ЖОРДАНА-ГАУССА (метод повного виключення невідомих)

У методі Гаусса змінна x_1 виключалася з усіх рівнянь, крім першого, змінна x_2 – з усіх рівнянь, крім першого й другого, змінна x_3 виключалася з 4-го, 5-го,…, m-го рівнянь і т.д. У результаті елементи розширеної матриці, що лежать *нижче* головної діагоналі, обертались в нуль. Елементи, розташовані над головною діагоналлю, оберталися в нуль у процесі зворотного ходу.

У методі Жордана-Гаусса змінна x_1 виключається *з усіх* рівнянь, крім 1-го, змінна x_2 виключається *з усіх* рівнянь, крім 2-го, змінна x_3 виключається *з усіх* рівнянь, крім 3-го і т.д. У результаті в розширеній матриці *одночасно* обертаються в нуль елементи, розташовані *над і під* головною діагоналлю.

Як і в методі Гаусса, рівняння (2.5) (нульові рядки розширеної матриці) слід відкинути, а рівняння вигляду (2.6) свідчать про несумісність системи.

Приклад 2.5. Методом Жордана-Гаусса розв'язати систему:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 5 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1 \end{cases}.$$

$$\blacktriangleright\ \overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&2&5\\2&1&-1&1\\3&2&-2&1\end{array}\right)\begin{array}{c}e_2-2e_1\\ \sim\\ e_3-3e_1\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&2&5\\0&3&-5&-9\\0&5&-8&-14\end{array}\right)\begin{array}{c}e_2/3\\ \sim\\ \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&2&5\\0&1&-5/3&-3\\0&5&-8&-14\end{array}\right)\sim$$

$$\begin{array}{c}e_1+e_2\\ \sim\\ e_3-5e_2\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1/3&2\\0&1&-5/3&-3\\0&0&1/3&1\end{array}\right)\begin{array}{c}\\ \sim\\ e_3\cdot 3\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1/3&2\\0&1&-5/3&-3\\0&0&1&3\end{array}\right)\begin{array}{c}e_1-\frac{1}{3}e_3\\ \sim\\ e_2+\frac{5}{3}e_3\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&1\\0&1&0&2\\0&0&1&3\end{array}\right)\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=1\\x_2=2.\\x_3=3\end{cases}\blacksquare$$

2.5. СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ ОДНОРІДНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ

Система називається *однорідною*, якщо усі вільні члени дорівнюють 0:

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}=0,\\ a_{12}x_1+a_{22}x_2+...+a_{2n}=0,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+...+a_{mn}=0.\end{cases}\qquad(2.9)$$

Однорідні системи *завжди сумісні*, оскільки завжди існує так званий *тривіальний* розв'язок $x_1 = x_2 =\ldots= x_n = 0$. Якщо в однорідній системі кількість лінійно незалежних рівнянь менше кількості невідомих, то така система, крім тривіального розв'язку, має безліч нетривіальних розв'язків. Однорідні системи можна розв'язувати методами Гаусса й Жордана-Гаусса.

Приклад 2.6. Розв'язати методом Гаусса систему:

$$\begin{cases}x_1+2x_2+x_3=0\\ -2x_1+3x_2+2x_3=0.\\ -x_1+5x_2+3x_3=0\end{cases}$$

$$\blacktriangleright\ \overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&1&0\\-2&3&2&0\\-1&5&3&0\end{array}\right)\begin{array}{c}e_2+2e_1\\ \sim\\ e_3+e_1\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&1&0\\0&7&4&0\\0&7&4&0\end{array}\right)\begin{array}{c}\\ \sim\\ e_3-e_2\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&1&0\\0&7&4&0\\0&0&0&0\end{array}\right)\begin{array}{c}e_2/7\\ \sim\\ \end{array}$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&1&0\\0&1&4/7&0\end{array}\right)\begin{array}{c}e_1-2e_2\\ \sim\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-1/7&0\\0&1&4/7&0\end{array}\right)\Rightarrow\begin{cases}x_1=x_3/7,\\ x_2=-4x_3/7.\end{cases}\blacksquare$$

Велике практичне значення мають однорідні системи розміру $n\times n$.

> ***Теорема***. *Для того щоб існував нетривіальний розв'язок однорідної системи (2.9) при m = n, необхідно й достатньо, щоб визначник Δ(A) = 0*

2.6. СИСТЕМИ *n* ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ ІЗ *n* НЕВІДОМИМИ

Методами Гаусса й Жордана-Гаусса можна розв'язувати *довільні* системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Розглянемо методи, придатні лише для розв'язання лінійних систем n-го порядку (n рівнянь із n невідомими):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ \quad .... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{2.10}$$

Систему (2.10) запишемо також у матричному вигляді:

$$A \cdot X = B, \tag{2.11}$$

де A – матриця коефіцієнтів при невідомих;
X – матриця-стовпець невідомих;
B – матриця-стовпець вільних членів:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix}.$$

2.6.1. Матричний метод розв'язування систем (метод оберненої матриці)

Нехай матриця A *невироджена* ($\det A \neq 0$), тоді існує обернена матриця A^{-1}. Домножимо ліву і праву частини рівняння (2.11) *зліва* на обернену матрицю A^{-1}:

$$(A^{-1}A)X = A^{-1}B \Leftrightarrow EX = A^{-1}B.$$

Оскільки $EX = X$, розв'язок системи (2.11) набуде вигляду:

$$X = A^{-1}B. \tag{2.12}$$

Приклад 2.7. Методом оберненої матриці розв'язати систему:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 5 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1 \end{cases}.$$

► Позначимо: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Для матриці A обернена матриця знайдена в прикладі (1.5):

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & -8 & 5 \\ 1 & -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

За формулою (2.12) знаходимо розв'язок системи:

$$X = A^{-1}B, \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & -8 & 5 \\ 1 & -5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\cdot 5 + 2\cdot 1 - 1\cdot 1 \\ 1\cdot 5 - 8\cdot 1 + 5\cdot 1 \\ 1\cdot 5 - 5\cdot 1 + 3\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2. \\ x_3 = 3 \end{cases} \blacksquare$$

Зауваження. Метод оберненої матриці зручно застосовувати для багаторазового розв'язування систем з однією і тією ж матрицею A і різними матрицями вільних членів B.

2.6.2. Розв'язування систем методом Крамера

Теорема Крамера. *Нехай Δ – визначник матриці A системи (2.10), Δ_j – визначник, отриманий з визначника Δ заміною j-го стовпця стовпцем вільних членів. Тоді при $\Delta \neq 0$ система має єдиний розв'язок:*

$$x_j = \Delta_j/\Delta \quad (j = 1, 2, \ldots, n). \tag{2.13}$$

▷ За формулою (2.12) маємо

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \ldots & A_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{1n} & A_{2n} & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \ldots + A_{n1}b_n \\ A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + \ldots + A_{n2}b_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \ldots + A_{nn}b_n \end{pmatrix}.$$

Звідси $x_1 = \dfrac{1}{\Delta}\left(A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \ldots + A_{n1}b_n\right) = \dfrac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_n & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}$ і т.д. □

Зауваження.

- при $\Delta \neq 0$ система (2.10) має єдиний розв'язок, що визначається формулами Крамера (2.13);
- якщо $\Delta = 0$, а хоча б один із визначників $\Delta_j \neq 0$, то система несумісна;
- при $\Delta = \Delta_1 = \ldots = \Delta_n = 0$ система або несумісна, або має безліч розв'язків.

Приклад 2.8. Розв'язати методом Крамера систему

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 5 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1 \end{cases}.$$

► Визначник $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ – система має єдиний розв'язок.

Обчислимо визначники Δ_1, Δ_2, Δ_3 і знайдемо розв'язок за формулами (2.13):

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 2, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3,$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 1, \quad x_1 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 2, \quad x_1 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 3. \ ■$$

Приклад 2.9. Розв'язати методом Крамера систему:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = -1 \end{cases}.$$

► Визначник $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$. Оскільки $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 21 \neq 0$, то система несумісна. ■

Приклад 2.10. Розв'язати методом Крамера систему:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 5 \\ 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 1. \\ 3x_1 - 3x_2 + 6x_3 = 6 \end{cases}$$

► Третє рівняння системи дорівнює сумі першого та другого рівнянь, отже, усі визначники третього порядку дорівнюють нулю: $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$. Однак перше рівняння несумісне з другим. Система несумісна. ■

Приклад 2.11. Розв'язати методом Крамера систему:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1. \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$$

► Третє рівняння системи дорівнює сумі першого та другого рівнянь, отже, усі визначники третього порядку дорівнюють нулю: $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$. Оскільки мінор другого порядку, складений з коефіцієнтів при x_1, x_2 першого та другого рівнянь системи, $M_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 5 \neq 0,$ то ранг системи дорівнює 2, отже, система має лише два лінійно незалежні рівняння і три невідомі. Така система має безліч розв'язків. Базисні змінні x_1, x_2 можна виразити через вільну змінну x_3. Залишимо в системі лише два перші лінійно незалежні рівняння та запишемо її у вигляді:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 2 - 2x_3 \\ 2x_1 + 3x_2 = 1 + x_3 \end{cases}.$$

Знайдемо розв'язок за формулами Крамера (2.13):

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 5, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 - 2x_3 & -1 \\ 1 + x_3 & 3 \end{vmatrix} = 7 - 5x_3, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 - 2x_3 \\ 2 & 1 + x_3 \end{vmatrix} = 5x_3 - 3,$$

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = \dfrac{7}{5} - x_3 \\ x_2 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = x_3 - \dfrac{3}{5} \end{cases} \text{ або } \begin{cases} x_1 = 1{,}4 - c \\ x_2 = c - 0{,}6, \\ x_3 = c \end{cases}$$ де c – довільна стала. ■

Зауваження. При розв'язуванні методом Крамера систем вище 3-го порядку доводиться виконувати значно більшу кількість арифметичних операцій, ніж у методах Гаусса й Жордана-Гаусса.

2.7. ВЛАСНІ ВЕКТОРИ ТА ВЛАСНІ ЧИСЛА МАТРИЦІ

Нехай маємо квадратну матрицю A і матрицю (вектор)-стовпець X:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Ненульовий вектор X називається *власним вектором* матриці A, якщо існує таке число λ (власне число матриці), що

$$AX = \lambda X. \qquad (2.14)$$

Матричне рівняння (2.14) запишемо у вигляді

$$(A-\lambda E)X=0 \tag{2.15}$$

або у розгорнутому вигляді

$$\begin{cases}(a_{11}-\lambda)x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & 0,\\ a_{21}x_1 & + & (a_{22}-\lambda)x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & 0,\\ \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \ldots & + & (a_{nn}-\lambda)x_n & = & 0.\end{cases} \tag{2.16}$$

Для того, щоб однорідна система (2.16) мала ненульовий розв'язок, необхідно й достатньо, щоб її визначник дорівнював нулю:

$$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix}(a_{11}-\lambda) & a_{12} & \ldots & a_{1n}\\ a_{21} & (a_{22}-\lambda) & \ldots & a_{2n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & (a_{nn}-\lambda)\end{vmatrix}=0. \tag{2.17}$$

Визначник $\det(A-\lambda E)$ є многочленом степеня n відносно λ. Він називається *характеристичним многочленом матриці A*, рівняння (2.17) – *характеристичним рівнянням*, а його корені – *власними числами* матриці A. Всього існує n власних чисел, серед котрих можуть бути рівні. Кожному власному числу відповідає свій власний вектор, який можна знайти із системи (2.16) з точністю до довільного ненульового множника, котрий можна підібрати так, щоб норма вектора (сума квадратів його компонент) дорівнювала одиниці.

Зауваження. Можна показати, що визначник матриці A дорівнює добутку її власних чисел, тобто

$$\det A=\lambda_1\cdot\lambda_2\cdot\ldots\cdot\lambda_n. \tag{2.18}$$

Звідси випливає, що матриця є особливою (виродженою), якщо вона має нульове власне число.

Приклад 2.12. Знайти власні числа і власні вектори матриці $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$.

► Запишемо характеристичне рівняння і знайдемо його корені:

$$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix}(1-\lambda) & 2\\ 2 & (1-\lambda)\end{vmatrix}=(1-\lambda)^2-4=0,\ \Rightarrow\ \lambda_1=-1,\quad \lambda_2=3.$$

При $\lambda_1 = -1$ система (2.16) має вигляд

$$\begin{cases}(1-\lambda_1)x_1^{(1)} + 2x_2^{(1)} = 0 \\ 2x_1^{(1)} + (1-\lambda_1)x_2^{(1)} = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2x_1^{(1)} + 2x_2^{(1)} = 0 \\ 2x_1^{(1)} + 2x_2^{(1)} = 0\end{cases} \Rightarrow x_2^{(1)} = -x_1^{(1)} \Rightarrow X^{(1)} = \begin{pmatrix} t_1 \\ -t_1 \end{pmatrix}.$$

При $\lambda_2 = 3$ система (2.16) має вигляд

$$\begin{cases}(1-\lambda_2)x_1^{(2)} + 2x_2^{(2)} = 0 \\ 2x_1^{(2)} + (1-\lambda_2)x_2^{(2)} = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-2x_1^{(2)} + 2x_2^{(2)} = 0 \\ 2x_1^{(2)} - 2x_2^{(2)} = 0\end{cases} \Rightarrow x_2^{(2)} = x_1^{(2)} \Rightarrow X^{(2)} = \begin{pmatrix} t_2 \\ t_2 \end{pmatrix}.$$

Величини t_1, t_2 можна підібрати так, щоб норми власних векторів (сума квадратів компонент вектора) дорівнювали одиниці: $t_1^2+(-t_1)^2=1 \Rightarrow t_1 = 1/\sqrt{2}$, аналогічно знаходимо $t_2 = 1/\sqrt{2}$. ■

2.8. ЛІНІЙНА МОДЕЛЬ МІЖНАРОДНОЇ ТОРГІВЛІ

Розглянемо *лінійну модель міжнародної торгівлі,* яка приводить до поняття власного вектора і власного значення матриці.

Нехай є n країн $S_1, S_2,..., S_n$ із національними доходами $x_1, x_2,..., x_n$ відповідно. Частку національного доходу, що країна S_j витрачає на закупівлю товарів у країни S_i, позначимо a_{ij}. Введемо *структурну матрицю торгівлі* A і вектор національних доходів країн X:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Вважаємо, що весь національний дохід витрачається на закупівлю товарів або всередині країни, або на імпорт з інших країн, тоді сума елементів будь-якого стовпця матриці A дорівнює 1:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1 \quad (j = \overline{1,n}). \tag{2.19}$$

Виторг від внутрішньої і зовнішньої торгівлі країни S_i складе:

$$p_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n \quad (i = \overline{1,n}).$$

Для збалансованої торгівлі необхідна бездефіцитність торгівлі кожної країни S_i, тобто виторг від торгівлі кожної країни повинний бути не менше її національного доходу:

$$p_i \ge x_i \quad (i = 1, 2,..., n).$$

При $p_i > x_i$ (i = 1, 2, ..., n) одержуємо систему нерівностей

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n > x_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n > x_2 \\ .... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n > x_n \end{cases}. \tag{2.20}$$

Склавши всі нерівності системи (2.20), одержимо:

$$x_1(a_{11}+a_{21}+...+a_{n1})+x_2(a_{12}+a_{22}+...+a_{n2})+\ldots+(a_{1n}+a_{2n}+...+a_{nn})x_n > x_1 + x_2 +\ldots+x_n.$$

З огляду на (2.19), вирази в дужках дорівнюють одиниці, і ми приходимо до суперечливої нерівності $x_1 + x_2 +\ldots+x_n > x_1 + x_2 +\ldots+x_n$. Таким чином, нерівність $p_i > x_i$ (i = 1, 2,..., n) неможлива, і умова $p_i \geq x_i$ набуде вигляду $p_i = x_i$ (i = 1, 2,..., n). З економічної точки зору це означає, що всі країни не можуть одночасно отримувати прибуток.

У матричному вигляді одержимо рівняння

$$AX = X, \tag{2.21}$$

тобто задача звелася до знаходження власного вектора матриці A, що відповідає власному значенню $\lambda = 1$.

Приклад 2.13. Структурна матриця торгівлі трьох країн має вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/4 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Знайти національні доходи країн для збалансованої торгівлі.

► Знаходимо власний вектор X, що відповідає власному значенню $\lambda = 1$, розв'язавши методом Гаусса рівняння $(A - E)X = 0$ чи систему

$$\begin{pmatrix} -2/3 & 1/4 & 1/2 \\ 1/3 & -1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 1/4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (3/2)c \\ 2c \\ c \end{pmatrix}.$$

Збалансованість торгівлі трьох країн досягається при співвідношенні національних доходів країн 3/2:2:1 чи 3:4:2. ■

2.9. МОДЕЛЬ ЛЕОНТЬЄВА БАГАТОГАЛУЗЕВОЇ ЕКОНОМІКИ

2.9.1. Балансовий метод

Балансові моделі широко застосовуються при математичному моделюванні економічних систем і процесів. В основі цих моделей лежить балансовий метод, тобто метод взаємного зіставлення наявних матеріальних, трудових і фінансових ресурсів і потреб у них. Під балансовою моделлю мається на увазі система рівнянь, кожне з яких виражає вимогу балансу між виробленою окремими економічними об'єктами кількістю продукції і сукупною потребою в ній. Мета балансового аналізу багатогалузевої економіки – відповісти на запитання: яким повинний бути обсяг виробництва кожної з n галузей, щоб задовольнити всі потреби в продукції цієї галузі? При цьому кожна галузь є і виробником деякої продукції, і споживачем продукції (своєї і виробленої іншими галузями). Зв'язок між галузями подається в таблицях міжгалузевого балансу, а математична модель, що дозволяє їх аналізувати, розроблена в 1936 р. американським економістом Василем Леонтьєвим.

2.9.2. Економіко-математична модель міжгалузевого балансу

Нехай є n галузей виробництва, кожна з яких виробляє свою продукцію. Частина продукції йде на внутрішнє споживання даною галуззю й іншими галузями, а інша частина призначена для цілей кінцевого (поза сферою матеріального виробництва) особистого й суспільного споживання.

Розглянемо процес виробництва за деякий період часу (наприклад, рік).

Введемо позначення:

x_i – загальний (валовий) обсяг продукції, виробленої у i-й галузі $(i = \overline{1,n})$;

x_{ij} – обсяг продукції i-ї галузі, що споживається в j-й галузі $(i, j = \overline{1,n})$;

y_i – обсяг кінцевого (товарного) продукту i-ї галузі, що споживається *у невиробничій сфері* (для створення запасів, експорту, інвестицій і т.п.).

Розподіл продукції між зазначеними галузями подамо у вигляді таблиці:

Виробничі галузі	**Загальний (валовий) обсяг продукції**	**Обсяг продукції, що споживається в *j*-й галузі**				**Обсяг кінцевого (товарного) продукту**
		1	**2**	**...**	***n***	
1	x_1	x_{11}	x_{12}	…	x_{1n}	y_1
2	x_2	x_{21}	x_{22}	…	x_{2n}	y_2
…	…	…	…	…	…	…
n	x_n	x_{n1}	x_{n2}	…	x_{nn}	y_n

Валова продукція галузі дорівнює сумі матеріальних витрат споживаючих її продукцію галузей і кінцевої продукції даної галузі:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + y_i, \quad (i = \overline{1,n}). \tag{2.22}$$

Рівняння (2.22) називаються *балансовими рівняннями*.

Нехай a_{ij} – кількість продукції i-ї галузі, що споживається *на виробництво одиниці продукції j*-ї галузі, тоді

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j} \quad (i, j = \overline{1,n}). \tag{2.23}$$

Величини a_{ij} називаються *коефіцієнтами прямих матеріальних витрат*. Якщо в деякому проміжку часу коефіцієнти a_{ij} будуть сталими, то залежність матеріальних витрат від валового випуску буде лінійною:

$$x_{ij} = a_{ij} x_j, \quad (i, j = \overline{1,n}). \tag{2.24}$$

З урахуванням (2.24) балансові рівняння (2.22) набудуть вигляду:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + y_i \quad (i, j = \overline{1,n}). \tag{2.25}$$

Якщо ввести матрицю коефіцієнтів прямих матеріальних витрат A, вектор-стовпець валової продукції X і вектор-стовпець кінцевої продукції Y:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix},$$

то система рівнянь (2.25) у матричній формі набуде вигляду

$$X = AX + Y. \tag{2.26}$$

Система рівнянь (2.25) або в матричній формі (2.26), називається *економіко-математичною моделлю міжгалузевого балансу* (моделлю Леонтьєва, моделлю “витрати – випуск”).

Зауваження. Матриця A дає інформацію про структуру міжгалузевих зв’язків і про технологію виробництва і називається *технологічною чи структурною матрицею*.

Якщо коефіцієнти прямих витрат відомі, то за допомогою балансових рівнянь (2.25)-(2.26) можна виконувати *три варіанти розрахунків*:

1. Якщо задати величини валової продукції кожної галузі (x_i), то можна визначити обсяги кінцевої продукції кожної галузі (y_i):

$$Y = (E - A)X, \tag{2.27}$$

де E – одинична матриця порядку n.

2. Якщо задати величини кінцевої продукції всіх галузей (y_i), можна визначити величини валової продукції кожної галузі (x_i). Для цього систему рівнянь міжгалузевого балансу (2.26) зводять до вигляду:

$$(E - A)X = Y. \tag{2.28}$$

Систему лінійних рівнянь (2.28) можна розв'язувати будь-яким відомим методом, наприклад методом Гауссса. Якщо визначник матриці ($E - A$) не дорівнює нулю, то існує обернена до неї матриця $B = (E - A)^{-1}$, за допомогою якої розв'язок системи (2.28) можна подати у вигляді

$$X = (E - A)^{-1} Y = BY. \tag{2.29}$$

3. Якщо задати для ряду галузей величини валової продукції, а для інших галузей – обсяги кінцевої продукції, можна із системи (2.25) знайти величини кінцевої продукції перших галузей і обсяги валової продукції інших. Ця задача має практичне значення, оскільки доцільно заздалегідь задавати валові випуски продукції по головних видах виробництва (наприклад, енергетиці, важкій промисловості, машинобудуванню), а по галузях, що задовольняють суспільні й особисті споживання, – кінцеве споживання.

Зауваження 1. Матриця $B = (E - A)^{-1}$ називається *матрицею повних матеріальних витрат*, її елементи b_{ij} називаються *коефіцієнтами повних матеріальних витрат* і показують, скільки потрібно виробити продукції i-ї галузі, щоб одержати одиницю кінцевої продукції j-ї галузі.

Зауваження 2. Міжгалузевий баланс можна розглядати і *в натуральному виразі*, в якому розглядаються не галузі, а продукти матеріального виробництва. Такі баланси називаються *міжпродуктовими*, чи *натуральними*. При цьому x_i означає обсяг i-ї продукції за певний проміжок часу. Для кожної продукції застосовуються свої одиниці виміру (наприклад, вугілля, сталь вимірюються в тис. тонн, електроенергія – у кіловат-годинах і т.д.).

Зауваження 3. Міжгалузевий баланс можна розглядати й *у вартісному виразі.* При цьому обсяг продукції замінюють на її вартість. Вартісний міжгалузевий баланс дозволяє об'єднувати ті чи інші галузі у групи або підрозділи, що полегшує складання балансів продукції.

2.9.3. Проблема продуктивності моделі Леонтьєва

Матриця прямих витрат A і вектор валової продукції X складаються з невід'ємних компонентів, тобто $A \geq 0$ і $X \geq 0$. Питання: за яких умов існуватиме невід'ємний кінцевий випуск $Y \geq 0$ по всіх галузях? Відповідь на це питання зв'язана з поняттям продуктивності матриці.

Невід'ємна матриця $A \geq 0$ називається *продуктивною*, якщо існує такий невід'ємний вектор $X \geq 0$, що

$$X > AX. \tag{2.30}$$

Для моделі міжгалузевого балансу (2.26) умова (2.30) означає існування додатного вектора кінцевої продукції $Y > 0$, тобто існування хоча б одного режиму роботи галузей, при якому кожного продукту випускається більше, ніж затрачається на його виробництво. У цьому випадку модель Леонтьєва називається *продуктивною.*

Наведемо кілька критеріїв продуктивності невід'ємної матриці $A \geq 0$. Найбільш простими є *достатні ознаки продуктивності.*

Матриця $A \geq 0$ продуктивна, якщо виконується одна з умов:

1) *найбільша із сум елементів стовпців* матриці (норма матриці A) строго менше одиниці;
2) максимум сум елементів *стовпців* матриці не перевищує одиниці, причому хоча б для одного зі стовпців сума елементів строго менше одиниці.

Зауваження. Матриця A може бути продуктивною й тоді, коли достатні умови не виконуються. У цьому випадку використовують інші критерії.

Для того щоб невід'ємна матриця A була продуктивною, *необхідно й достатньо*, щоб виконувалась одна з умов:

1) існує невід'ємна обернена матриця $(E - A)^{-1} \geq 0$;
2) найбільше власне значення λ матриці A (розв'язок характеристичного рівняння $|\lambda E - A| = 0$) строго менше одиниці;
3) усі головні мінори матриці $(E - A)$ порядку від 1 до n додатні.

Зауваження. Головними мінорами матриці $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

називаються такі визначники:

$$M_1 = a_{11}, \quad M_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad M_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \ldots, M_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Приклад 2.14. Для трьох галузей задана матриця коефіцієнтів прямих витрат і вектор кінцевої продукції:

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}40 & 0{,}20 & 0{,}30 \\ 0{,}15 & 0{,}25 & 0{,}10 \\ 0{,}10 & 0{,}15 & 0{,}20 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 60 \\ 30 \\ 20 \end{pmatrix}.$$

Потрібно знайти матрицю коефіцієнтів *повних* матеріальних витрат, вектор-план валової продукції $X = (x_1, x_2, x_3)^T$, міжгалузеві потоки.

► Матриця $A \geq 0$ і задовольняє критерію продуктивності:

$$max\{0{,}4 + 0{,}15 + 0{,}1;\ 0{,}2 + 0{,}25 + 0{,}15;\ 0{,}3 + 0{,}1 + 0{,}2\} =$$
$$= max\{0{,}65;\ 0{,}6;\ 0{,}6\} = 0{,}65 < 1.$$

Для будь-якого вектора кінцевого продукту Y можна за формулою (2.29) знайти необхідний обсяг валового випуску X.

Визначимо матрицю коефіцієнтів повних матеріальних витрат за формулою: $B = (E - A)^{-1}$. Знаходимо матрицю $(E - A)$:

$$E - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0{,}40 & 0{,}20 & 0{,}30 \\ 0{,}15 & 0{,}25 & 0{,}10 \\ 0{,}10 & 0{,}15 & 0{,}20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}60 & -0{,}20 & -0{,}30 \\ -0{,}15 & 0{,}75 & -0{,}10 \\ -0{,}10 & -0{,}15 & 0{,}80 \end{pmatrix}.$$

За допомогою функції МОБР (*масив*) програми EXCEL знаходимо обернену матрицю – матрицю коефіцієнтів повних матеріальних витрат:

$$B = (E - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1{,}978022 & 0{,}693153 & 0{,}828402 \\ 0{,}43956 & 1{,}521555 & 0{,}35503 \\ 0{,}32967 & 0{,}371936 & 1{,}420118 \end{pmatrix}.$$

Помноживши матрицю $B = (E - A)^{-1}$ на вектор-стовпець Y кінцевих продуктів, дістанемо вектор-план валової продукції галузей

$$X = BY = \begin{pmatrix} 1{,}978022 & 0{,}693153 & 0{,}828402 \\ 0{,}43956 & 1{,}521555 & 0{,}35503 \\ 0{,}32967 & 0{,}371936 & 1{,}420118 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 60 \\ 30 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 156{,}044 \\ 79{,}12088 \\ 59{,}34066 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 156{,}04 \\ 79{,}12 \\ 59{,}34 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, для того щоб одержати обсяги кінцевих продуктів $y_1 = 60$, $y_2 = 30$, $y_3 = 20$, необхідно запланувати такі обсяги виробництва: $x_1 = 156{,}04$, $x_2 = 79{,}12$, $x_3 = 59{,}34$.

Міжгалузеві потоки обчислюємо за формулою: $x_{ij} = a_{ij}x_j$.

$x_{11} = a_{11}x_1 = 0{,}40 \cdot 156{,}04 = 62{,}416$, $x_{12} = a_{12}x_2 = 0{,}20 \cdot 79{,}12 = 15{,}824$,
$x_{13} = a_{13}x_3 = 0{,}30 \cdot 59{,}34 = 17{,}802$, $x_{21} = a_{21}x_1 = 0{,}15 \cdot 156{,}04 = 23{,}406$,
$x_{22} = a_{22}x_2 = 0{,}25 \cdot 79{,}12 = 19{,}78$, $x_{23} = a_{23}x_3 = 0{,}10 \cdot 59{,}34 = 5{,}934$,
$x_{31} = a_{31}x_1 = 0{,}10 \cdot 156{,}04 = 15{,}604$, $x_{32} = a_{32}x_2 = 0{,}15 \cdot 79{,}12 = 11{,}868$,
$x_{33} = a_{33}x_3 = 0{,}20 \cdot 59{,}34 = 11{,}868$. ■

Питання для самоперевірки

1. В якому випадку систему лінійних рівнянь можна розв’язувати:
   а) методом Крамера;
   б) методом оберненої матриці?
2. Як при розв’язуванні методом Крамера системи n рівнянь із n невідомими можна довести:
   а) несумісність системи;
   б) існування єдиного розв’язку?
3. Чи може система n рівнянь із n невідомими мати:
   а) рівно n розв’язків;
   б) менш ніж n розв’язків; в) більш ніж n розв’язків?
4. В якому випадку *неоднорідна* система n рівнянь із n невідомими:
   а) має єдиний розв’язок;
   б) має безліч розв’язків;
   в) не має розв’язків?
5. В якому випадку *однорідна* система n рівнянь із n невідомими:
   а) має єдиний розв’язок;
   б) має безліч розв’язків;
   в) не має розв’язків?
6. Чи може система трьох рівнянь із п’ятьма невідомими:
   а) мати єдиний розв’язок;
   б) не мати розв’язків?
7. Чим відрізняється алгоритм Жордана-Гаусса від алгоритму Гаусса?
8. Як при розв’язуванні системи лінійних рівнянь методом Гаусса можна визначити:
   а) несумісність системи;
   б) існування єдиного розв’язку?

Задачі

1. Розв’яжіть системи рівнянь двома способами:
   а) за формулами Крамера; б) методом оберненої матриці:

1) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 6, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 3, \\ 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 4, \\ 2x_1 - x_3 + 5x_4 = 6, \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$

2. Розв'яжіть системи рівнянь двома способами:

а) методом Гаусса; б) методом Жордана-Гаусса.

1) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 1, \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 8. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 5, \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 3, \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 + 8x_4 = 1, \\ 5x_1 + 18x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 12. \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 11x_3 + 5x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -3, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -3. \end{cases}$

3. Дослідіть системи рівнянь на сумісність. Для сумісних систем знайдіть загальний розв'язок.

а) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -3, \\ 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 \quad + 7x_3 - 4x_4 = -10. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 7x_3 - x_4 = 5, \\ x_1 - 7x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 3. \end{cases}$

в) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 4, \\ x_1 + 5x_2 + 5x_3 - 4x_4 = -4, \\ x_1 + 8x_2 + 7x_3 - 7x_4 = -8. \end{cases}$ г) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \qquad - 3x_4 + 2x_5 = 1, \\ x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 - 3x_5 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 + 2x_5 = 7, \\ 9x_1 - 9x_2 + 6x_3 - 16x_4 + 2x_5 = 25. \end{cases}$

4. Знайдіть загальний розв'язок систем однорідних рівнянь:

а) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 4x_3 = 0, \\ -x_1 + 5x_2 - x_4 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_4 = 0. \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 8x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 - 5x_4 = 0, \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$

5. Визначте значення параметра *a*, при якому система рівнянь має ненульові розв'язки, і знайдіть їх.

а) $\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + ax_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + ax_3 = 1. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0, \\ 4x_1 - x_2 + 7x_3 = 0, \\ x_1 + ax_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$

3. ЕЛЕМЕНТИ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ

Вектор – одне з основних понять, що застосовується в математиці та математичній економіці. Нижче розглядаються вектори у звичайному просторі, які можна зобразити графічно, а також n-вимірні вектори.

3.1. ОСНОВНІ ОЗНАЧЕННЯ

Вектор $\overrightarrow{AB}$ – це напрямлений відрізок із початком у точці A і кінцем у точці B. Вектори позначаються як двома великими літерами, так і однією малою зі стрілкою, наприклад, $\overrightarrow{AB}, \vec{a}$ (рис. 3.1).

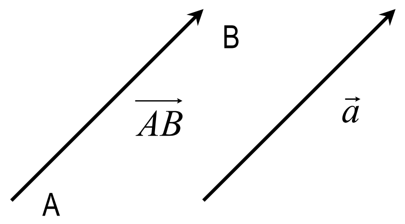


Рис. 3.1. Зображення й позначення векторів

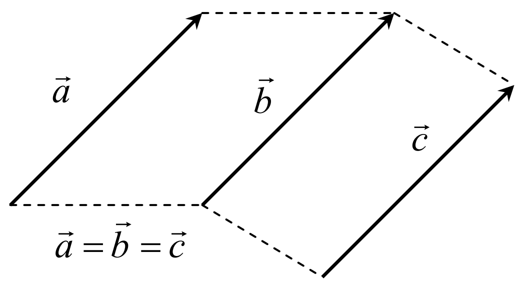


Рис. 3.2. Рівні вектори

Довжиною (*модулем*) вектора $\overrightarrow{AB}$ називається довжина відрізка AB (позначається $|\overrightarrow{AB}|$). Якщо початок вектора збігається з його кінцем, то вектор називається *нульовим* і позначається $\vec{0}$. Напрям нульового вектора невизначений.

Вектор одиничної довжини називається *одиничним* вектором, або *ортом.*

Вектори, які лежать на одній прямій або на паралельних прямих, називаються *колінеарними.*

Колінеарність позначають символом ||: $\vec{a} \| \vec{b}$.

Вектори, які паралельні одній площині, називаються *компланарними*.

Вектори називаються *рівними*, якщо вони колінеарні, мають однакові довжини та однакові напрями (рис. 3.2).

3.2. ЛІНІЙНІ ОПЕРАЦІЇ НАД ВЕКТОРАМИ В ГЕОМЕТРИЧНІЙ ФОРМІ

Під лінійними операціями над векторами мають на увазі операцію множення вектора на число й операцію додавання векторів.

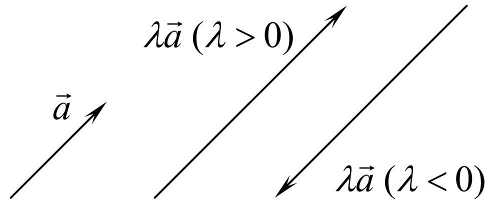


Рис. 3.3. Множення вектора на скаляр

Добутком вектора $\vec{a}$ *на число* λ називається вектор $\vec{b} = \lambda\vec{a}$ з довжиною $|\vec{b}| = |\lambda||\vec{a}|$ і напрямом, який збігається з напрямом вектора $\vec{a}$ при λ > 0, і протилежним напряму $\vec{a}$ при λ < 0 (рис. 3.3).

Властивості операції множення вектора на число

1) $(\lambda + \beta)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \beta\vec{a}$ (дистрибутивна властивість);

2) $\lambda(\beta\vec{a}) = (\lambda\beta)\vec{a}$ (асоціативна властивість).

Сумою векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається вектор $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, початок якого збігається з початком вектора $\vec{a}$, а кінець – з кінцем вектора $\vec{b}$ за умови, що початок вектора $\vec{b}$ збігається з кінцем вектора $\vec{a}$ (правило трикутника (рис. 3.4)). Вектор $\vec{c}$ у цьому випадку є діагоналлю паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (правило паралелограма). Додавання кількох векторів здійснюється за правилом замикання ланцюжка векторів (правило многокутника (рис. 3.5)).

Правило паралелограма **Правило трикутника**

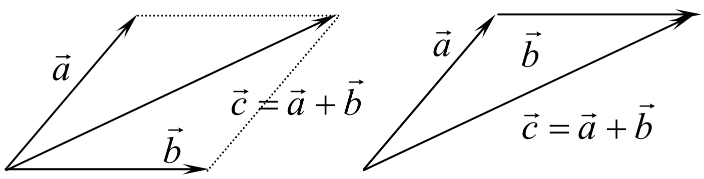


Рис. 3.4. Додавання двох векторів

Правило многокутника

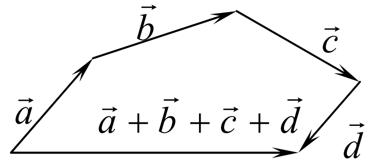


Рис. 3.5. Додавання кількох векторів

Різницею двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається сума вектора $\vec{a}$ й вектора $(-\vec{b})$, протилежного вектору $\vec{b}$ (рис. 3.6):

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}). \qquad (3.1)$$

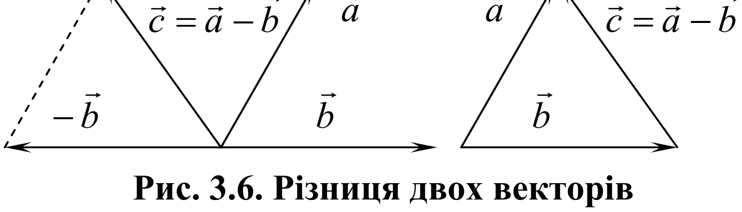


Рис. 3.6. Різниця двох векторів

Властивості операції додавання векторів

1) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (комутативна властивість);

2) $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ (асоціативна властивість);

3) $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$;

4) $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$.

3.3. ЛІНІЙНА НЕЗАЛЕЖНІСТЬ ВЕКТОРІВ

Вираз виду $c_1\vec{a}_1+c_2\vec{a}_2+...+c_n\vec{a}_n$, де $c_1, c_2, ..., c_n$ – числа, називається *лінійною комбінацією векторів* $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$.

Вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ називаються *лінійно незалежними*, якщо їх лінійна комбінація дорівнює нулю тільки тоді, коли $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$:

$$c_1\vec{a}_1+c_2\vec{a}_2+...+c_n\vec{a}_n=\vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad c_1=c_2=...=c_n=0. \tag{3.2}$$

Якщо в (3.2) хоча б одне із чисел $c_k \neq 0$, то вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ називаються *лінійно залежними*. У цьому випадку принаймні один із векторів можна подати у вигляді лінійної комбінації інших, наприклад, якщо $c_1 \neq 0$, то:

$$\vec{a}_1=\lambda_2\vec{a}_2+...+\lambda_n\vec{a}_n, \quad \lambda_i=-c_i/c_1 \quad (i=2,3,...,n). \tag{3.3}$$

Максимальна кількість лінійно незалежних векторів простору називається *розмірністю простору*.

Істинні такі твердження:

1. Будь-які два колінеарні вектори лінійно залежні (рис. 3.7).
2. Будь-які три компланарні вектори лінійно залежні (рис. 3.8).
3. Будь-які чотири вектори у трьохвимірному просторі лінійно залежні.

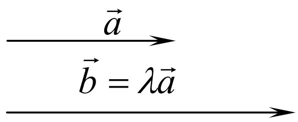


Рис. 3.7

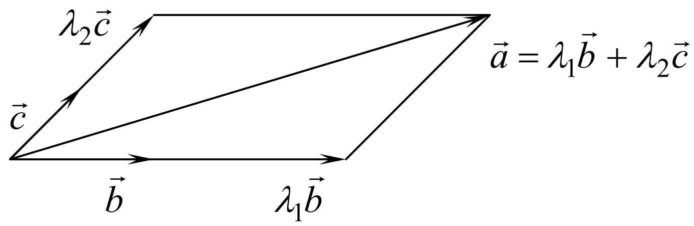


Рис. 3.8

3.4. БАЗИС. РОЗКЛАДАННЯ ВЕКТОРА ЗА БАЗИСОМ

Упорядкована сукупність n лінійно незалежних векторів n-вимірного простору утворює його *базис*.

Базисом на прямій (у R^1) називається будь-який ненульовий вектор.

Базисом на площині (у R^2) називаються два неколінеарні вектори, взяті у визначеному порядку.

Базисом у трьохвимірному просторі (у R^3) називаються три некомпланарні вектори, взяті у визначеному порядку.

Якщо кути між базисними векторами довільні, базис називають *довільним* і позначають базисні вектори $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. Якщо базисні вектори взаємно перпендикулярні (ортогональні), базис називають *ортогональним*.

Якщо вектор $\vec{a}$ поданий у вигляді лінійної комбінації базисних векторів:

$$\vec{a} = c_1\vec{e}_1 + c_2\vec{e}_2 + c_3\vec{e}_3, \tag{3.4}$$

то кажуть, що він розкладений за базисом $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. Вектори $c_1\vec{e}_1, c_2\vec{e}_2, c_3\vec{e}_3$ називають *складовими* (*компонентами*) вектора $\vec{a}$, а числа c_1, c_2, c_3 – його *координатами* в базисі $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. Звичайно пишуть так: $\vec{a} = (c_1, c_2, c_3)$.

На рис. 3.9 наведено приклад розкладу вектора $\vec{a}$ за базисом $\vec{e}_1, \vec{e}_2$. Координатами вектора $\vec{a}$ є числа (3, 2), а складовими – вектори $3\vec{e}_1$ і $2\vec{e}_2$.

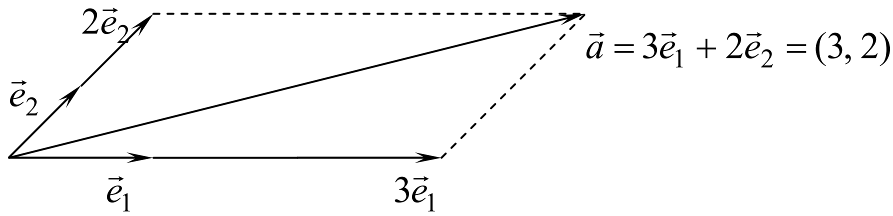


Рис. 3.9. Розклад вектора $\vec{a}$ за базисом $\vec{e}_1, \vec{e}_2$

Лінійні операції над векторами в координатній формі

Нехай у базисі $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ дані вектори:

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3 = (a_1, a_2, a_3), \quad \vec{b} = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3 = (b_1, b_2, b_3).$$

Тоді лінійні операції визначаються так:

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (a_1 \pm b_1)\vec{e}_1 + (a_2 \pm b_2)\vec{e}_2 + (a_3 \pm b_3)\vec{e}_3 = (a_1 \pm b_1, a_2 \pm b_2, a_3 \pm b_3),$$

$$\lambda\vec{a} = \lambda a_1\vec{e}_1 + \lambda a_2\vec{e}_2 + \lambda a_3\vec{e}_3 = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3). \tag{3.5}$$

Приклад 3.1. Визначити, чи є лінійно залежними вектори:

$$\vec{a} = (2, -1, 2),\ \vec{b} = (1, 2, -3),\ \vec{c} = (3, -4, 7).$$

► Вектори лінійно залежні, якщо існують такі одночасно не рівні нулю числа c_1, c_2, c_3, що $c_1\vec{a} + c_2\vec{b} + c_3\vec{c} = \vec{0}$. Виконаємо операції над векторами:

$$c_1(2,-1, 2) + c_2(1, 2, -3) + c_3(3, -4, 7) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2c_1 + c_2 + 3c_3, -c_1 + 2c_2 - 4c_3, 2c_1 - 3c_2 + 7c_3) = (0, 0, 0).$$

З останньої рівності отримаємо систему лінійних однорідних рівнянь:

$$\begin{cases} 2c_1 + c_2 + 3c_3 = 0, \\ -c_1 + 2c_2 - 4c_3 = 0, \\ 2c_1 - 3c_2 + 7c_3 = 0. \end{cases} \Rightarrow \Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & -4 \\ 2 & -3 & 7 \end{vmatrix} = 28 - 8 + 9 - (12 - 7 + 24) = 0.$$

Однорідна система має ненульові розв'язки, якщо її визначник дорівнює нулю. Отже, вектори лінійно залежні. ■

Приклад 3.2. Показати, що вектори $\vec{a} = (1, 2, 2)$, $\vec{b} = (-2, 1, 0)$, $\vec{c} = (-3, -1, -1)$ утворюють базис у R^3 і знайти координати вектора $\vec{d} =$ $= (-2, 1, 1)$ у цьому базисі.

► Вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ утворюють базис, якщо вони лінійно незалежні, тобто якщо рівність $c_1\vec{a} + c_2\vec{b} + c_3\vec{c} = \vec{0}$ можлива лише при $c_1 = c_2 =$ $= c_3 = 0$.

У даному випадку приходимо до системи лінійних однорідних рівнянь:

$$\begin{cases} c_1 - 2c_2 - 3c_3 = 0, \\ 2c_1 + c_2 - c_3 = 0, \\ 2c_1 + 0c_2 - c_3 = 0, \end{cases} \quad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0.$$

Оскільки визначник не дорівнює нулю − система має лише нульовий розв'язок, вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ лінійно незалежні й утворюють базис у просторі R^3.

Розкладемо вектор $\vec{d}$ за базисом $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$: $\vec{d} = x_1\vec{a} + x_2\vec{b} + x_3\vec{c} \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 = -2, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ 2x_1 + 0x_2 - x_3 = 1. \end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \sim e_2 - 2e_1 \sim \\ e_3 - 2e_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -8 & -3 & -2 \\ 0 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & 4 & 5 & 5 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim e_2/5 \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -8 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 5 & 5 \end{array}\right) \begin{array}{c} e_1 + 8e_2 \\ \sim \quad\quad \sim \\ e_3 - 4e_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} e_1 - 5e_3 \\ \sim e_2 - e_3 \sim \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 1 \Rightarrow \vec{d} = \vec{a} + 0\vec{b} + \vec{c}.$$ ■

3.5. АФІННА СИСТЕМА КООРДИНАТ

Афінна система координат у просторі визначається завданням базису $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ і деякої точки O, яка називається початком координат.

Вектор $\overrightarrow{OM} = \alpha\vec{e}_1 + \beta\vec{e}_2 + \gamma\vec{e}_3$ називають *радіусом-вектором* точки M, а числа α, β, γ – *афінними координатами* точки M і записують це так: $M(\alpha, \beta, \gamma)$.

Якщо в базисі $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ дано точки $M_1(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ і $M_2(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$, то для того, щоб знайти координати вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$, необхідно від координат кінця вектора відняти координати його початку:

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1} = (\alpha_2 - \alpha_1, \beta_2 - \beta_1, \gamma_2 - \gamma_1). \qquad (3.6)$$

3.6. ПРОЕКЦІЯ ВЕКТОРА НА ВІСЬ

Проекцією точки A на вісь L називається основа перпендикуляра (точка A_1), опущеного з точки A на дану вісь (рис. 3.10).

Проекцією вектора $\overrightarrow{AB}$ на вісь L називається число, яке дорівнює різниці координат ($x_B - x_A$) проекцій на вісь L кінця й початку вектора (рис. 3.11).

Проекція вектора $\overrightarrow{AB}$ на вісь L дорівнює добутку довжини вектора на косинус кута φ між вектором та віссю:

$$Пр_L \overrightarrow{AB} = x_B - x_A = \left|\overrightarrow{AB}\right| \cos\varphi, \qquad 0 \le \varphi \le \pi. \qquad (3.7)$$

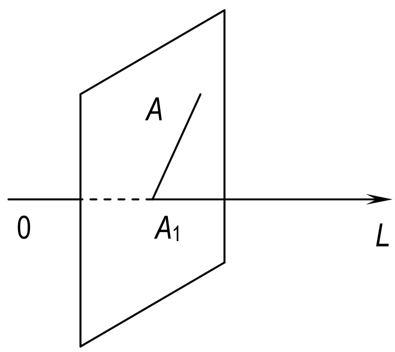


Рис. 3.10. Точка A_1 – проекція точки A на вісь L

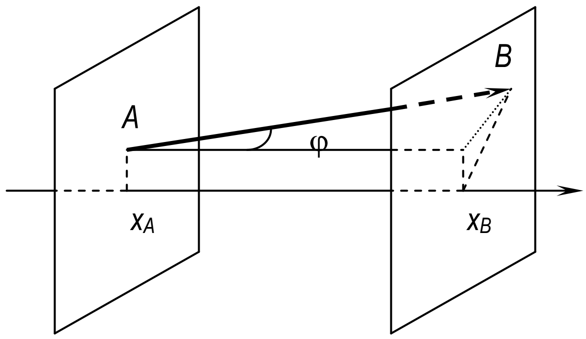


Рис. 3.11. Проекція вектора $\overrightarrow{AB}$ на вісь L

Властивості проекції вектора на вісь

1) $Пр_L(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = Пр_L\vec{a} + Пр_L\vec{b} + Пр_L\vec{c}$;

2) $Пр_L \lambda\vec{a} = \lambda Пр_L \vec{a}$.

Складовою вектора $\overrightarrow{AB}$ на вісь L називається вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$, де A_1, B_1 – проекції точок A і B на вісь L.

3.7. ВЕКТОРИ В ОРТОНОРМОВАНОМУ БАЗИСІ. ДЕКАРТОВА ПРЯМОКУТНА СИСТЕМА КООРДИНАТ

Базис, утворений трійкою взаємно перпендикулярних одиничних векторів, називається *ортонормованим базисом*. Афінна система координат, що пов'язана з ортонормованим базисом, називається *декартовою прямокутною системою координат*. Її базисні вектори, що пов'язані з осями Ox, Oy, Oz, позначають відповідно так: $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Якщо a_x, a_y, a_z – координати вектора $\vec{a}$ в базисі $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, то:

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} = (a_x, a_y, a_z). \qquad (3.8)$$

Нехай в базисі $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ задані координати початку й кінця вектора $\overrightarrow{AB}$: $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ (рис. 3.12), тоді

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1), \qquad (3.9)$$

тобто, для того щоб знайти координати вектора $\overrightarrow{AB}$, необхідно від координат кінця вектора відняти відповідні координати його початку.

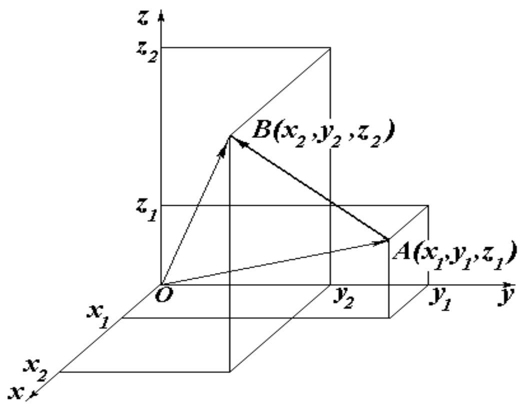


Рис. 3.12. Розкладання вектора $\overrightarrow{AB}$ за базисом $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$

Оскільки $Пр_x\overrightarrow{AB} = x_2 - x_1$, $Пр_y\overrightarrow{AB} = y_2 - y_1$, $Пр_z\overrightarrow{AB} = z_2 - z_1$, то з (3.9) випливає, що в ортонормованому базисі проекції вектора на осі співпадають з його координатами.

Лінійні операції над векторами в базисі $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$

Лінійні операції над векторами $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k} = (b_x, b_y, b_z)$ визначаються так:

$$\lambda\vec{a} = \lambda a_x\vec{i} + \lambda a_y\vec{j} + \lambda a_z\vec{k} = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z), \qquad (3.10)$$

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \pm b_x)\vec{i} + (a_y \pm b_y)\vec{j} + (a_z \pm b_z)\vec{k} = (a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z). \qquad (3.11)$$

3.8. НАПРЯМНІ КОСИНУСИ ВЕКТОРА

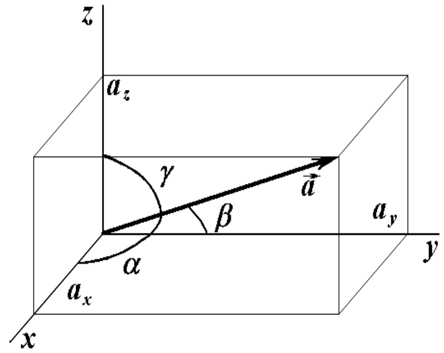


Рис. 3.13

Напрямними косинусами вектора $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$ називаються косинуси кутів α, β, γ, які утворює вектор з координатними осями (рис. 3.13):

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{|\vec{a}|},\quad \cos\beta=\frac{a_y}{|\vec{a}|},\quad \cos\gamma=\frac{a_z}{|\vec{a}|}. \quad (3.12)$$

Напрямні косинуси задовольняють умову:

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1. \quad (3.13)$$

Координати одиничного вектора (орта) є його напрямними косинусами:

$$\vec{a}_0=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\left(\frac{a_x}{|\vec{a}|},\frac{a_y}{|\vec{a}|},\frac{a_z}{|\vec{a}|}\right)=\left(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\right). \quad (3.14)$$

3.9. ПОДІЛ ВІДРІЗКА В ЗАДАНОМУ ВІДНОШЕННІ

Визначимо координати точки $M(x, y, z)$, яка поділяє відрізок M_1M_2 у відношенні $\lambda = M_1M/MM_2$, якщо $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ (рис. 3.14).

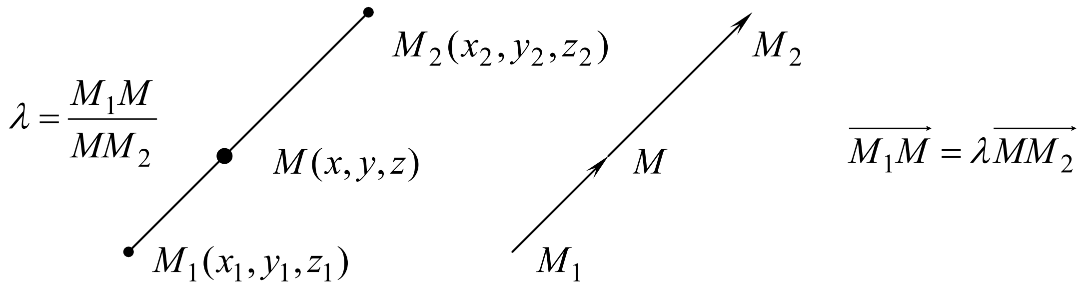


Рис. 3.14. Поділ відрізка в заданому відношенні

Вектори $\overrightarrow{M_1M}$ и $\overrightarrow{MM_2}$ колінеарні. За умовою $\overrightarrow{M_1M}=\lambda\overrightarrow{MM_2}$, тобто

$$(x-x_1,\ y-y_1,\ z-z_1)=\lambda(x_2-x,\ y_2-y,\ z_2-z).$$

Прирівнявши відповідні координати, знаходимо:

$$x-x_1=\lambda(x_2-x),\quad y-y_1=\lambda(y_2-y),\quad z-z_1=\lambda(z_2-z).$$

Звідси знаходимо координати точки M:

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\quad z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}. \quad (3.15)$$

З формул (3.15) при $\lambda = 1$ знайдемо *координати середини відрізка* M_1M_2:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}. \qquad (3.16)$$

Приклад 3.3. Знайти координати точки перетину медіан трикутника з вершинами $A(x_A, y_A, z_A), B(x_B, y_B, z_B), C(x_C, y_C, z_C)$.

► Знайдемо координати точки D – середини відрізка BC:

$$x_D = \frac{x_B + x_C}{2}, \quad y_D = \frac{y_B + y_C}{2}, \quad z_D = \frac{z_B + z_C}{2}.$$

Медіани трикутника перетинаються в точці M, яка поділяє відрізок AD у відношенні $\lambda = AM/MD = 2/1$. Знаходимо координати точки M:

$$x_M = \frac{x_A + \lambda x_D}{1+\lambda} = \frac{x_A + 2x_D}{1+2} = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \; y_M = \frac{y_A + \lambda y_D}{1+\lambda} = \frac{y_A + y_B + y_C}{3},$$

$$z_M = \frac{z_A + \lambda z_D}{1+\lambda} = \frac{z_A + z_B + z_C}{3}. \blacksquare$$

3.10. СКАЛЯРНИЙ ДОБУТОК ВЕКТОРІВ

Скалярним добутком $\vec{a} \cdot \vec{b}$ двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається число, що дорівнює добутку довжин векторів на косинус кута φ між ними:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi \quad (0 \le \varphi \le \pi). \qquad (3.17)$$

Алгебраїчні властивості скалярного добутку

1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ (комутативна властивість);
2) $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$ (дистрибутивна властивість);
3) $(\lambda\vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})$ (асоціативна властивість);
4) $\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2 \ge 0$ – скалярний квадрат вектора ($\vec{a} \cdot \vec{a} = 0$ тільки при $|\vec{a}| = 0$).

Геометричні властивості скалярного добутку

1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$ (умова перпендикулярності векторів);
2) $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0 \Leftrightarrow \varphi$ – гострий кут;
3) $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0 \Leftrightarrow \varphi$ – тупий кут.

Скалярний добуток в ортонормованому базисі

У базисі $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ скалярний добуток векторів

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} = (a_x, a_y, a_z), \quad \vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k} = (b_x, b_y, b_z)$$

дорівнює сумі добутків їх відповідних координат:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \tag{3.18}$$

▷ Виразимо скалярний добуток через координати векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, використовуючи алгебраїчні властивості 1-4:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}) \cdot (b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}) = a_x b_x \vec{i} \cdot \vec{i} + a_x b_y \vec{i} \cdot \vec{j} + a_x b_z \vec{i} \cdot \vec{k} +$$

$$+ a_y b_x \vec{j} \cdot \vec{i} + a_y b_y \vec{j} \cdot \vec{j} + a_y b_z \vec{j} \cdot \vec{k} + a_z b_x \vec{k} \cdot \vec{i} + a_z b_y \vec{k} \cdot \vec{j} + a_z b_z \vec{k} \cdot \vec{k} =$$

$$= \{\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1 \cdot 1 \cdot \cos 0^\circ = 1, \quad \vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 1 \cdot 1 \cdot \cos 90^\circ = 0\} =$$

$$= a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \ \square$$

Деякі важливі формули

- довжина вектора $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\,; \tag{3.19}$$

- відстань між двома точками $A(x_1, y_1, z_1)$ і $B(x_2, y_2, z_2)$:

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\,; \tag{3.20}$$

- косинус кута між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}\,; \tag{3.21}$$

- необхідна й достатня умова перпендикулярності двох векторів:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}\,; \tag{3.22}$$

- проекція вектора $\vec{b}$ на вектор $\vec{a}$ (рис. 3.15):

$$Пр_{\vec{a}}\vec{b} = |\vec{b}|\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|} = \vec{b} \cdot \vec{a}_0 =$$

$$= \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}, \quad \vec{a}_0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}. \tag{3.23}$$

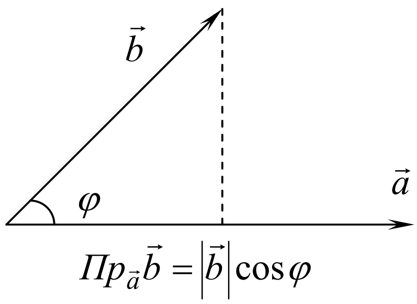


Рис. 3.15

Приклад 3.4. Дано вершини трикутника $A(-1, -2, 4)$; $B(-4, -2, 0)$; $C(3, -2, 1)$. Визначити його внутрішній кут φ при вершині B.

► Знайдемо вектори $\overrightarrow{BA} = (3, 0, 4)$, $\overrightarrow{BC} = (7, 0, 1)$ та їх довжини:

$$\left|\overrightarrow{BA}\right| = \sqrt{3^2 + 0^2 + 4^2} = 5, \quad \left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{7^2 + 0^2 + 1^2} = 5\sqrt{2}.$$

За формулою (3.21) обчислимо косинус кута φ між векторами

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}|} = \frac{3 \cdot 7 + 0 + 4 \cdot 1}{5 \cdot 5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad \varphi = 45^\circ. \blacksquare$$

Приклад 3.5. Дано три вектори $\vec{a} = (1, -3, 4)$, $\vec{b} = (3, -4, 2)$, $\vec{c} = (-1, 1, 4)$. Знайти $Пр_{\vec{b}+\vec{c}}\vec{a}$.

► Введемо вектор $\vec{d} = \vec{b} + \vec{c} = (2, -3, 6)$ та обчислимо його довжину $|\vec{d}| = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 6^2} = 7$ і орт $\vec{d}_0 = \frac{\vec{d}}{|\vec{d}|} = \left(\frac{2}{7}, -\frac{3}{7}, \frac{6}{7}\right)$.

За формулою (3.23) знайдемо проекцію вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{d} = \vec{b} + \vec{c}$:

$$Пр_{\vec{b}+\vec{c}}\vec{a} = Пр_{\vec{d}}\vec{a} = \vec{a} \cdot \vec{d}_0 = 1 \cdot \frac{2}{7} + (-3) \cdot \left(-\frac{3}{7}\right) + 4 \cdot \frac{6}{7} = \frac{35}{7} = 5. \blacksquare$$

Приклад 3.6. При якому m вектори $\vec{a} = (m, -3, 4)$, $\vec{b} = (4, -4, 2m)$ взаємно перпендикулярні?

► Необхідна й достатня умова перпендикулярності двох векторів: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 4m + 12 + 8m = 12m + 12 = 0 \Rightarrow m = -1. \blacksquare$$

3.11. ВЕКТОРНИЙ ДОБУТОК ВЕКТОРІВ

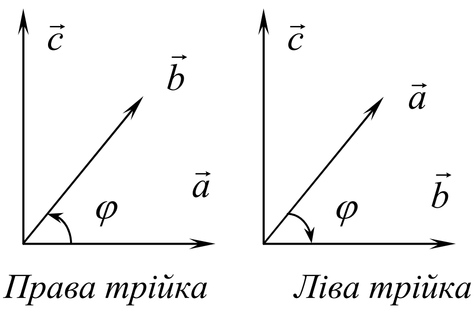


Рис. 3.16. Права і ліва трійки

Впорядкована трійка некомпланарних векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ називається *правою* (*лівою*), якщо після зведення до спільного початку найкоротший поворот від вектора $\vec{a}$ до вектора $\vec{b}$, що спостерігається з кінця вектора $\vec{c}$, здійснюється проти обертання стрілки годинника (за стрілкою годинника) (рис. 3.16).

Декартова система координат, що пов'язана з трійкою $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, є правою.

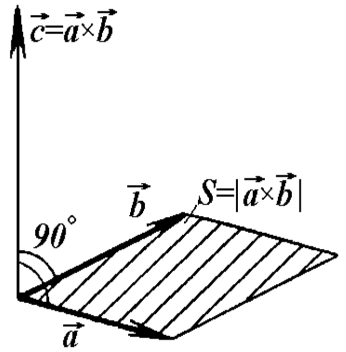


Рис. 3.17. Векторний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$

Векторним добутком векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається *вектор* $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$, що задовольняє таким умовам (рис. 3.17):

1) довжина вектора $\vec{c}$ дорівнює добутку довжин векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ на синус кута між ними, тобто $|\vec{c}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi$;
2) вектор $\vec{c}$ перпендикулярний кожному із векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, тобто $\vec{c}\perp\vec{a},\ \vec{c}\perp\vec{b}$;
3) вектор $\vec{c}$ напрямлений так, що вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ утворюють праву трійку

Алгебраїчні властивості векторного добутку

1) $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$ (антикомутативна властивість);
2) $\lambda(\vec{a}\times\vec{b})=(\lambda\vec{a})\times\vec{b}=\vec{a}\times(\lambda\vec{b})$ (асоціативна властивість);
3) $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$ (дистрибутивна властивість);
4) $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$.

Геометричні властивості векторного добутку

1. Необхідною й достатньою умовою колінеарності двох ненульових векторів є рівність нулю їхнього векторного добутку:
$$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}\Leftrightarrow\vec{a}\parallel\vec{b}. \tag{3.24}$$
2. *Модуль векторного добутку* векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ дорівнює *площі паралелограма*, побудованого на цих векторах (див. рис. 3.17):
$$S=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|. \tag{3.25}$$
3. *Площа трикутника*, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$:
$$S_\Delta=\frac{1}{2}\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|. \tag{3.26}$$

Векторний добуток в ортонормованому базисі

В базисі $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ векторний добуток векторів
$$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}=(a_x,a_y,a_z),\quad \vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}=(b_x,b_y,b_z),$$
обчислюється за формулою:
$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=\left(a_yb_z-a_zb_y\right)\vec{i}+\left(a_zb_x-a_xb_z\right)\vec{j}+\left(a_xb_y-a_yb_x\right)\vec{k}. \tag{3.27}$$

$\triangleright$ Використаємо алгебраїчні властивості 1-4:

$$\vec{a}\times\vec{b}=(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k})\times(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k})=a_xb_x\vec{i}\times\vec{i}+a_xb_y\vec{i}\times\vec{j}+a_xb_z\vec{i}\times\vec{k}+$$

$$+a_yb_x\vec{j}\times\vec{i}+a_yb_y\vec{j}\times\vec{j}+a_yb_z\vec{j}\times\vec{k}+a_zb_x\vec{k}\times\vec{i}+a_zb_y\vec{k}\times\vec{j}+a_zb_z\vec{k}\times\vec{k}=$$

$$=\{\vec{i}\times\vec{i}=\vec{j}\times\vec{j}=\vec{k}\times\vec{k}=\vec{0},\ \vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}=-\vec{j}\times\vec{i},\ \vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j}=\vec{k}\times\vec{i},$$

$$\vec{j}\times\vec{k}=\vec{i}=-\vec{k}\times\vec{j}\}=\left(a_yb_z-a_zb_y\right)\vec{i}+\left(a_zb_x-a_xb_z\right)\vec{j}+\left(a_xb_y-a_yb_x\right)\vec{k}.\ \square$$

Наслідок. Вектори $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$ і $\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$ колінеарні тоді і тільки тоді, коли їх координати пропорційні, тобто:

$$\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}\ \Leftrightarrow\ \vec{a}\parallel\vec{b}. \tag{3.28}$$

Приклад 3.7. Знайти площу трикутника з вершинами $A(1,\ -1,\ 2)$, $B(5,\ -6,\ 2)$, $C(1,\ 3,\ -1)$ та довжину висоти h, опущеної з вершини B на сторону AC.

► Площа трикутника дорівнює половині модуля векторного добутку векторів $\overrightarrow{AB}=\left(4,\ -5,\ 0\right)$ і $\overrightarrow{AC}=\left(0,\ 4,-3\right)$.

Оскільки $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 4 & -5 & 0\\ 0 & 4 & -3\end{vmatrix}=15\vec{i}+12\vec{j}+16\vec{k},$ то

$$S_\Delta=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{15^2+12^2+16^2}=\frac{\sqrt{625}}{2}=\frac{25}{2}\ (\text{од.}^2).$$

З іншого боку, площу трикутника можна обчислити за формулою $S_\Delta=\left|\overrightarrow{AC}\right|h/2$, звідки знаходимо висоту трикутника:

$$h=\frac{2S_\Delta}{\left|\overrightarrow{AC}\right|}=\frac{25}{\sqrt{0^2+4^2+(-3)^2}}=5.\ \blacksquare$$

3.12. МІШАНИЙ ДОБУТОК ВЕКТОРІВ

Мішаним добутком трьох векторів називається *число*, яке дорівнює векторному добутку $\vec{a}\times\vec{b}$, помноженому скалярно на вектор $\vec{c}$: $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}$.

Основна алгебраїчна властивість мішаного добутку

Циклічна перестановка трьох множників мішаного добутку не змінює його значення; перестановка двох сусідніх множників змінює знак добутку:

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\cdot\vec{a}=\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)\cdot\vec{b}=-\left(\vec{b}\times\vec{a}\right)\cdot\vec{c}=-\left(\vec{c}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{a}=-\left(\vec{a}\times\vec{c}\right)\cdot\vec{b}. \tag{3.29}$$

Геометричні властивості мішаного добутку

1. Мішаний добуток некомпланарних векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на цих векторах, взятому зі знаком плюс, якщо трійка векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ права, і зі знаком мінус, якщо трійка $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ліва.

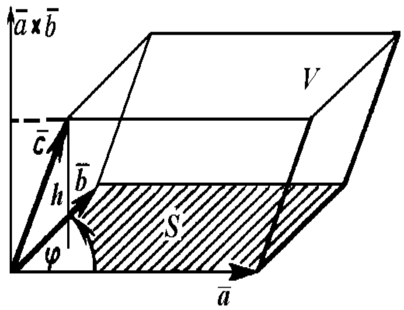


Рис. 3.18

▷ Нехай $\vec{e}$ – орт векторного добутку векторів $\vec{a}\times\vec{b}$, тоді

$$\vec{a}\times\vec{b} = S\cdot\vec{e} \Rightarrow (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = S\cdot\vec{e}\cdot\vec{c} =$$
$$= S\cdot Пр_{\vec{e}}\vec{c} = \pm S\cdot h = \pm V. \qquad \square$$

Об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ (рис. 3.18):

$$V = \left|\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}\right|. \qquad (3.30)$$

2. Об'єм чотирикутної піраміди:

$$V = \frac{1}{3}\left|\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}\right|. \qquad (3.31)$$

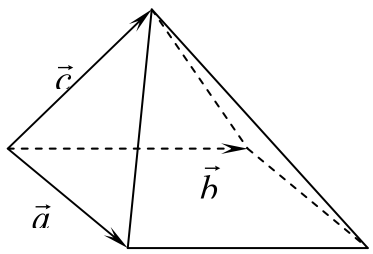


Рис. 3.19.
Чотирикутна піраміда

3. Об'єм трикутної піраміди:

$$V = \frac{1}{6}\left|\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}\right|. \qquad (3.32)$$

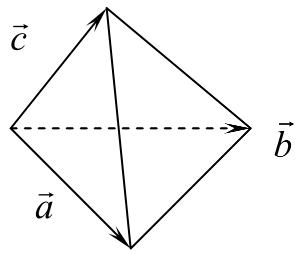


Рис. 3.20.
Трикутна піраміда

4. Необхідною й достатньою умовою компланарності трьох векторів є рівність нулю їх мішаного добутку:

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c} = 0 \Leftrightarrow \text{вектори } \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ компланарні.} \qquad (3.33)$$

5. Якщо $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c} > 0$ – трійка векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ права; (3.34)
$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c} < 0$ – трійка векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ліва.

Мішаний добуток в ортонормованому базисі

У базисі $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ мішаний добуток векторів $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, $\vec{c} = (c_x, c_y, c_z)$ дорівнює визначнику, що складається з координат цих векторів:

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \tag{3.35}$$

Необхідна й достатня умова компланарності трьох векторів:

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}=0. \tag{3.36}$$

Приклад 3.8. Чи є компланарними вектори $\vec{a}=(2,-1,3)$, $\vec{b}=(-2,3,2)$, $\vec{c}=(0,2,5)$?

► Три вектори компланарні, якщо їх мішаний добуток дорівнює нулю:

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}=\{e_2+e_1\}=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}=0$$ – вектори компланарні. ■

Приклад 3.9. З'ясувати, яку трійку (праву чи ліву) утворюють вектори $\vec{a}=(1, 1, 2)$, $\vec{b}=(-1, 3, 2)$, $\vec{c}=(2, 8, 1)$ і знайти об'єм трикутної піраміди, побудованої на цих векторах.

► За формулою (3.35) обчислимо мішаний добуток векторів:

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 8 & 1 \end{vmatrix}=\left\{\begin{matrix} \\ e_2+e_1 \\ e_3-2e_1 \end{matrix}\right\}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 6 & -3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 6 & -3 \end{vmatrix}=-36.$$

Оскільки мішаний добуток від'ємний – трійка векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ ліва.

Об'єм трикутної піраміди обчислюємо за формулою (3.32):

$$V=\frac{1}{6}\left|\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}\right|=\frac{1}{6}|-36|=6\ (\text{од.}^3).$$ ■

3.13. ВЕКТОРИ В *n*-ВИМІРНОМУ ПРОСТОРІ

3.13.1. Поняття про n-вимірний векторний простір

Множина впорядкованих сукупностей n чисел $(x_1, x_2,\ldots, x_n)$ називається *n-вимірним координатним* простором A^n.

Кожну сукупність $(x_1, x_2,\ldots, x_n)$ називають *точкою* цього простору і позначають $M(x_1, x_2,\ldots, x_n)$.

Точка $O(0, 0, ..., 0)$ називається *початком координат* в A^n.

Вектор $\overrightarrow{OM} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ називається *радіусом-вектором* точки M. Його компоненти збігаються з координатами точки M. Таким чином, *n-вимірний вектор* – впорядкована сукупність n чисел (компонент вектора).

Зауваження. Компоненти вектора можуть мати неоднакові одиниці виміру. Це дозволяє поєднати в одній векторній величині декілька скалярних величин і далі оперувати з цим набором як з векторною величиною. Наприклад, норми витрат ресурсів на випуск одиниці продукції характеризуються кількістю одиниць відповідного ресурсу (сировини різних видів, устаткування, робочої сили, палива і т.д.), які виражаються в різних одиницях.

Вектор $\vec{0} = (0, 0, ..., 0)$ називається *нульовим*.

Вектори $\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ і $\vec{y} = (y_1, y_2, ..., y_n)$ вважаються *рівними*, якщо рівні їх відповідні компоненти, тобто $\vec{x} = \vec{y} \Leftrightarrow x_i = y_i \ (i = \overline{1, n})$.

Лінійні операції над векторами

Добутком вектора $\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ *на число* λ називається вектор

$$\lambda\vec{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n). \tag{3.37}$$

Сумою векторів $\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ і $\vec{y} = (y_1, y_2, ..., y_n)$ називається вектор

$$\vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n). \tag{3.38}$$

Різницею векторів $\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ і $\vec{y} = (y_1, y_2, ..., y_n)$ називається вектор

$$\vec{x} - \vec{y} = \vec{x} + (-1)\vec{y} = (x_1 - y_1, x_2 - y_2, ..., x_n - y_n). \tag{3.39}$$

Множина всіх n-вимірних векторів, для яких введені операції додавання й множення на дійсне число, називається *n-вимірним лінійним векторним простором* і позначається R^n.

3.13.2. Лінійна незалежність векторів. Базис і координати

Означення лінійно незалежної системи векторів дано у розділі 3.3. Доведемо лінійну незалежність системи векторів:

$$\vec{e}_1 = (1, 0, ..., 0), \ \vec{e}_2 = (0, 1, ..., 0), \ ..., \ \vec{e}_n = (0, 0, ..., 1). \tag{3.40}$$

▷ Для цього покажемо, що їх лінійна комбінація дорівнює нулю тільки при нульових коефіцієнтах, тобто:

$$c_1\vec{e}_1 + c_2\vec{e}_2 + ... + c_n\vec{e}_n = \vec{0} \Leftrightarrow c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0.$$

$$c_1(1, 0, \ldots, 0) + c_2(0, 1, \ldots, 0) + \ldots + c_n(0, 0, \ldots, 1) = (0, 0, \ldots, 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (c_1, 0,\ldots, 0)+(0, c_2,\ldots, 0)+\ldots+(0, 0,\ldots, c_n) = (0, 0,\ldots, 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (c_1, c_2,\ldots, c_n) = (0, 0,\ldots, 0) \Rightarrow c_1 = c_2\ldots= c_n = 0.$$

Таким чином, система векторів (3.40) лінійно незалежна. □

Максимальна кількість лінійно незалежних векторів простору називається *розмірністю простору*. Покажемо, що R^n – *n-вимірний* простір.

▷ Вектори $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, ..., $\vec{e}_n$ лінійно незалежні, а система векторів $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, ..., $\vec{e}_n$, $\vec{x} = (x_1, x_2,\ldots, x_n)$ уже лінійно залежна, оскільки вектор $\vec{x}$ можна представити у вигляді лінійної комбінації інших векторів: $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 +\ldots+ x_n\vec{e}_n$. Таким чином, розмірність простору R^n дорівнює n. □

Базисом n-вимірного простору називається будь-яка впорядкована сукупність n лінійно незалежних (базисних) векторів. Одним із базисів простору R^n є сукупність векторів (3.40). Крім цього базису, в *n-вимірному* просторі існує незліченна безліч інших базисів.

Будь-який вектор $\vec{x}$ n-вимірного простору може бути розкладений по лінійно незалежних векторах $\vec{q}_1, \vec{q}_2,\ldots, \vec{q}_n$:

$$\vec{x} = \lambda_1\vec{q}_1 + \lambda_2\vec{q}_2 +\ldots+ \lambda_n\vec{q}_n. \tag{3.41}$$

Числа $\lambda_1, \lambda_2,\ldots, \lambda_n$ називаються *координатами* вектора $\vec{x}$ у даному базисі.

Зауваження. Для вектора $\vec{x} = (x_1, x_2,\ldots, x_n)$ числа $x_1, x_2,\ldots, x_n$ є координатами у базисі $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, ..., $\vec{e}_n$.

3.13.3. Евклідів n-вимірний простір E^n

Нехай у базисі $\vec{e}_1 = (1, 0,\ldots, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1,\ldots, 0)$,…, $\vec{e}_n = (0, 0,\ldots, 1)$ простору R^n задані вектори $\vec{x} = (x_1, x_2,\ldots, x_n)$ і $\vec{y} = (y_1, y_2,\ldots, y_n)$.

Скалярним добутком векторів $\vec{x}$ і $\vec{y}$ називається число

$$(\vec{x}, \vec{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 +\ldots+ x_ny_n. \tag{3.42}$$

Алгебраїчні властивості скалярного добутку

1) $(\vec{x},\vec{y})=(\vec{y},\vec{x})$ (комутативна властивість);
2) $(\vec{x}+\vec{y},\vec{z})=(\vec{x},\vec{z})+(\vec{y},\vec{z})$ (дистрибутивна властивість);
3) $(\lambda\vec{x},\vec{y})=(\vec{x},\lambda\vec{y})=\lambda(\vec{x},\vec{y})$ (асоціативна властивість);
4) $(\vec{x},\vec{x}) \ge 0$, причому $(\vec{x},\vec{x})=0$ лише при $\vec{x}=\vec{0}$.

Лінійний векторний простір R^n, в якому визначений скалярний добуток із властивостями 1-4, називають *n-вимірним евклідовим простором* $\boldsymbol{E^n}$.

Нормою (довжиною) вектора $\vec{x}$ називається величина

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{(\vec{x},\vec{x})} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}. \tag{3.43}$$

Вектор $\vec{x}$ називається *нормованим*, якщо $\|\vec{x}\| = 1$.

Будь-який вектор $\vec{x}$ можна нормувати. Для цього необхідно поділити вектор (кожну координату вектора) на його норму.

Відстань між двома точками $A(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ і $B(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ обчислюється за формулою:

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + \ldots + (b_n - a_n)^2}. \qquad (3.44)$$

Нерівність Коші-Буняковського

Теорема. *Для довільних векторів $\vec{x}$ і $\vec{y}$ виконується нерівність:*

$$|(\vec{x}, \vec{y})| \le \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| \qquad (3.45)$$

▷ За властивістю 4 скалярного добутку, для будь-якого λ виконується нерівність:

$$(\vec{x} + \lambda\vec{y}, \vec{x} + \lambda\vec{y}) \ge 0 \Rightarrow (\vec{x}, \vec{x}) + (\lambda\vec{y}, \vec{x}) + (\vec{x}, \lambda\vec{y}) + (\lambda\vec{y}, \lambda\vec{y}) \ge 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|\vec{x}\|^2 + 2\lambda(\vec{x}, \vec{y}) + \lambda^2\|\vec{y}\|^2 \ge 0.$$

Квадратний тричлен відносно λ невід'ємний, отже, його графік лежить вище осі λ, а це може бути лише у випадку, коли його дискримінант менше нуля, тобто $(\vec{x}, \vec{y})^2 - \|\vec{x}\|^2\|\vec{y}\|^2 \le 0$, звідси $|(\vec{x}, \vec{y})| \le \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|$. □

Нерівність трикутника (нерівність Мінковського)

Теорема. *Для довільних векторів $\vec{x}$ і $\vec{y}$ виконується нерівність:*

$$\|\vec{x} + \vec{y}\| \le \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\| \qquad (3.46)$$

▷ Обчислимо квадрат норми суми векторів з урахуванням нерівності Коші-Буняковського (3.45):

$$\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 = (\vec{x} + \vec{y}, \vec{x} + \vec{y}) = (\vec{x}, \vec{x}) + 2(\vec{x}, \vec{y}) + (\vec{y}, \vec{y}) \le$$

$$\le \|\vec{x}\|^2 + 2\|\vec{x}\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 = (\|\vec{x}\| + \|y\|)^2 \Rightarrow \|\vec{x} + \vec{y}\| \le \|\vec{x}\| + \|y\|. \ \square$$

Кут між векторами в евклідовому просторі E^n

Косинус кута φ між векторами $\vec{x}$ і $\vec{y}$ визначається за формулою:

$$\cos\varphi = \frac{(\vec{x}, \vec{y})}{\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|}, \quad 0 \le \varphi \le \pi. \qquad (3.47)$$

Формула (3.47) є коректною, тому що за нерівністю Коші-Буняковського права частина за абсолютною величиною не перевищує 1.

Якщо $(\vec{x}, \vec{y}) = 0$, то $\varphi=\pi/2$ і вектори $\vec{x}$, $\vec{y}$ називають *ортогональними* (перпендикулярними).

Нульовий вектор вважається ортогональним до будь-якого вектора.

Приклад 3.10. Знайти кут між векторами $\vec{x} = (-3, 15, 1, -5)$ і $\vec{y} = (1, -5, -2, 10)$.

► Знайдемо норми векторів:

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2} = \sqrt{(-3)^2 + 15^2 + 1^2 + (-5)^2} = \sqrt{260},$$

$$\|\vec{y}\| = \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2} = \sqrt{1^2 + (-5)^2 + (-2)^2 + 10^2} = \sqrt{130}.$$

За формулою (3.47) знайдемо косинус кута φ між векторами:

$$\cos\varphi = \frac{(\vec{x}, \vec{y})}{\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|} = \frac{(-3)\cdot 1 + 15\cdot(-5) + 1\cdot(-2) + (-5)\cdot 10}{\sqrt{260}\sqrt{130}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \varphi = \frac{3}{4}\pi. \ ■$$

> ***Теорема Піфагора.*** *Якщо вектори $\vec{x}$ і $\vec{y}$ ортогональні, то*
> $$\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|y\|^2 \qquad (3.48)$$

▷ Обчислимо квадрат норми суми векторів з урахуванням умови ортогональності $(\vec{x}, \vec{y}) = 0$:

$$\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 = (\vec{x} + \vec{y}, \vec{x} + \vec{y}) = (\vec{x}, \vec{x}) + 2(\vec{x}, \vec{y}) + (\vec{y}, \vec{y}) = \|\vec{x}\|^2 + \|y\|^2 . \square$$

Система векторів $\vec{q}_1, \vec{q}_2, \ldots, \vec{q}_n$ називається *ортогональною*, якщо $(\vec{q}_i, \vec{q}_k) = 0$ при $i \neq k$ і $(\vec{q}_i, \vec{q}_k) \neq 0$ при $i = k$.

Система векторів $\vec{q}_1, \vec{q}_2, \ldots, \vec{q}_n$ називається *ортонормованою*, якщо:

$$(\vec{q}_i, \vec{q}_k) = \begin{cases} 0 & i \neq k \\ 1 & i = k \end{cases}. \qquad (3.49)$$

Приклад ортонормованого базису: $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$.

Питання для самоперевірки

1. Чи може належати до базису нульовий вектор?
2. Із скількох векторів складається базис:
   а) на прямій;
   б) на площині;
   в) у просторі R^3?
3. Чи є лінійно незалежними три вектори:
   а) на площині;
   б) у просторі R^3?

4. Чи може проекція вектора на вісь бути від'ємною?
5. Чому дорівнюють скалярний і векторний добутки:
   а) колінеарних векторів;
   б) перпендикулярних векторів?
6. Як можна знайти вектор, перпендикулярний до двох заданих векторів?
7. Як визначити правою чи лівою є трійка векторів?
8. Чому дорівнює мішаний добуток компланарних векторів?
9. На трьох векторах побудовані:
   а) трикутна призма;
   б) трикутна піраміда.

   Чому дорівнюють їх об'єми?
10. Сформулюйте означення лінійної залежності і лінійної незалежності трьох векторів у просторі R^3 за допомогою мішаного добутку цих векторів.
11. Як зміниться кут між ненульовими векторами в просторі E^n, якщо один із векторів помножити:
    а) на додатне число;
    б) на від'ємне число?

4. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ НА ПЛОЩИНІ

Аналітична геометрія вивчає властивості геометричних об'єктів (точок, ліній, поверхонь, фігур) засобами алгебри на основі методу координат, запропонованого французьким математиком Рене Декартом (1596-1650). Згідно з цим методом положення точки на площині щодо заданої системи координат визначається за допомогою двох чисел – координат точки. Лінія на площині розглядається як множина точок, що задовольняють певним умовам, які записуються у вигляді рівняння, що зв'язує координати цих точок.

В аналітичній геометрії розв'язуються дві основні задачі:

1) скласти рівняння лінії, якщо відомі її геометричні властивості;
2) дослідити форму й властивості лінії, якщо відоме її рівняння.

Нижче розглядаються лінії на площині, задані рівняннями в декартовій формі, параметрично, а також у полярних координатах.

4.1. СИСТЕМИ КООРДИНАТ НА ПЛОЩИНІ

4.1.1. Декартова прямокутна система координат

Декартова прямокутна система координат задається двома взаємно перпендикулярними координатними прямими – осями координат Ox (вісь абсцис) і Oy (вісь ординат), які перетинаються у точці O (початку координат).

Координатами точки M в декартовій системі координат називають координати її радіуса-вектора $\overline{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} = (x; y)$, і записують це так: $M(x; y)$ (рис. 4.1). Число x називається *абсцисою*, а число y – *ординатою* точки M.

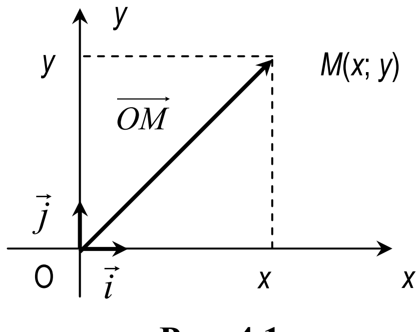


Рис. 4.1

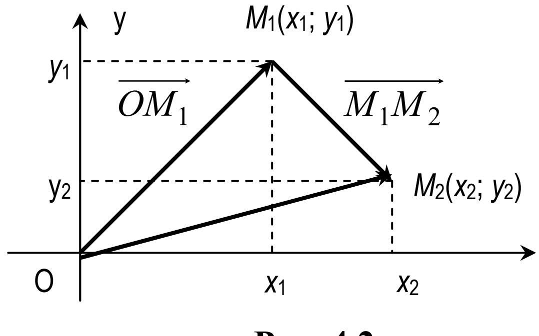


Рис. 4.2

Відстань між точками $M_1(x_1; y_1)$ і $M_2(x_2; y_2)$ обчислюється за формулою (рис. 4.2):

$$d = \left|\overline{M_1M_2}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \qquad (4.1)$$

4.1.2. Полярна система координат

Полярна система координат задається точкою O (полюсом) і променем Op (полярною віссю), що виходить із цієї точки. Полярними координатами точки M є пара чисел (ρ; φ), де ρ – відстань від полюса O до точки M, φ – кут між віссю Op і вектором $\overrightarrow{OM}$ (рис. 4.3). Число ρ називається *полярним радіусом*, φ – *полярним кутом* точки M.

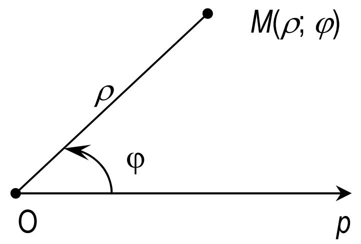


Рис. 4.3. Полярна система координат

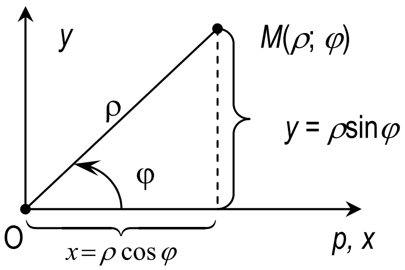


Рис. 4.4. Зв'язок між декартовими та полярними координатами точки

Зауваження. Поворот навколо точки O проти годинникової стрілки вважається додатним. Полярний кут точки має нескінченну множину значень, що відрізняються між собою на величину $2\pi n$, де $n \in Z$. Для *головного* значення полярного кута $0 \le \varphi < 2\pi$ (або $-\pi \le \varphi < \pi$) полярна система встановлює взаємно однозначну відповідність між точками площини й парами чисел (ρ; φ), за винятком точки O, для якої $\rho = 0$, а кут φ невизначений.

Зв'язок між полярними та прямокутними декартовими координатами точки

Нехай початок декартової прямокутної системи координат є одночасно і полюсом O' полярної системи, а напрям полярної осі $O'p$ збігається з напрямом осі Ox (рис. 4.4). Тоді точка M має два набори координат (x; y) та (ρ, φ), що пов'язані формулами:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases} \quad \text{і навпаки} \quad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ tg\varphi = \dfrac{y}{x}. \end{cases} \tag{4.2}$$

4.1.3. Перетворення системи координат

Нехай у системі координат xOy точка M має координати (x; y).

Паралельне перенесення осей

Якщо нова система координат $x'O'y'$ одержана паралельним перенесом початку старої системи в точку $O'(a;\, b)$ (рис. 4.5), то нові координати точки $M(x';\, y')$ зв'язані зі старими формулами:

$$\begin{cases} x' = x - a, \\ y' = y - b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' + a, \\ y = y' + b. \end{cases} \tag{4.3}$$

Поворот осей на кут α

Якщо нова система $x'O'y'$ одержана поворотом старої системи на кут α (рис. 4.6), то нові координати точки $M(x'; y')$ зв'язані зі старими формулами:

$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha, \\ y' = -x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha, \\ y' = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha. \end{cases} \quad (4.4)$$

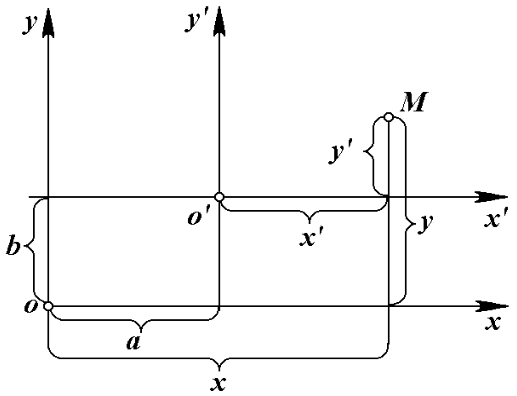


Рис. 4.5. Паралельне перенесення осей

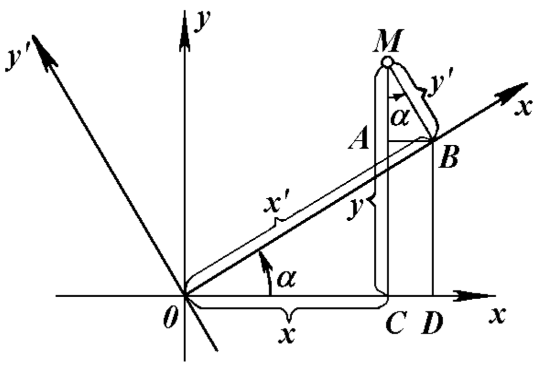


Рис. 4.6. Поворот осей на кут α

Паралельне перенесення й поворот осей на кут α

Якщо нова система координат $x'O'y'$ одержана переносом початку старої системи в точку $O'(a; b)$ і поворотом осей на кут α (проти годинникової стрілки), то нові координати точки $M(x'; y')$ зв'язані зі старими формулами:

$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha - a, \\ y' = -x\sin\alpha + y\cos\alpha - b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha + a, \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha + b. \end{cases} \quad (4.5)$$

4.2. ЛІНІЯ НА ПЛОЩИНІ. ОСНОВНІ ОЗНАЧЕННЯ

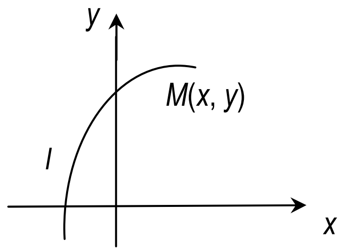


Рис. 4.7

В системі координат xOy рівняння

$$F(x, y) = 0 \quad (4.6)$$

називається рівнянням лінії l, якщо координати будь-якої точки $M(x, y) \in l$ задовольняють це рівняння, а координати точок, що не належать лінії l, це рівняння не задовольняють.

Приклад 4.1. $F(x, y) = y - x = 0 \Rightarrow y = x$ – пряма (рис. 4.8).

Приклад 4.2. $F(x, y) = y^2 - x^2 = 0 \Rightarrow y = \pm x$ – пара прямих (див. рис. 4.8).

Приклад 4.3. $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ – коло (рис. 4.9).

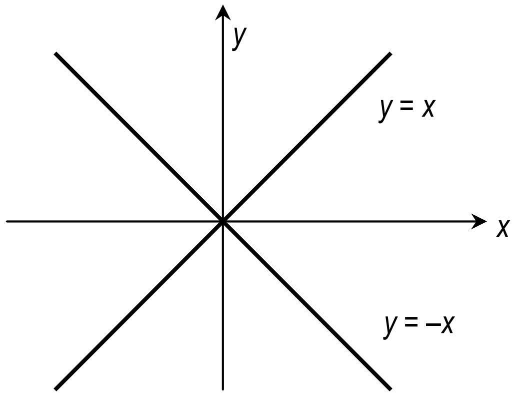


Рис. 4.8

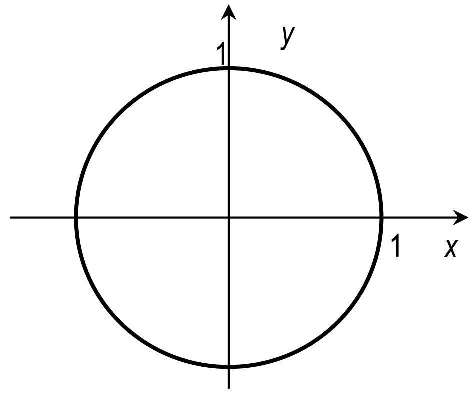


Рис. 4.9

Якщо $F(x, y)$ у рівнянні (4.6) є многочленом від x та y степеня n, то кажуть, що воно задає *алгебраїчну лінію n-го порядку*. Далі розглядатимемо алгебраїчні лінії першого та другого порядків, які задаються відповідно рівняннями

$$Ax + By + D = 0, \tag{4.7}$$

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + K = 0. \tag{4.8}$$

Алгебраїчна лінія першого порядку – це пряма, а алгебраїчна лінія другого порядку може бути еліпсом, гіперболою, параболою, парою паралельних чи непаралельних прямих або точкою.

Параметричні рівняння лінії

Кажуть, що на площині лінія задана *в параметричній формі*, якщо координати x і y довільної точки $M(x, y)$ лінії виражені через змінну t (параметр):

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \qquad \alpha \le t \le \beta. \tag{4.9}$$

Щоб від рівнянь (4.9) перейти до рівняння (4.6), потрібно виключити параметр t. Але такий перехід не завжди можливий і доцільний.

Приклад 4.4. $\begin{cases} x = 2t \\ y = 6t \end{cases}$ $(-\infty < t < +\infty)$. Якщо виразити параметр t через x і підставити в друге рівняння, отримаємо рівняння прямої $y = 3x$.

Приклад 4.5. $\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \end{cases}$ $(0 \le t \le 2\pi)$. Якщо піднести до квадрата рівняння і просумувати їх, то отримаємо рівняння кола:

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Для побудови параметрично заданої лінії надають певного значення параметру t, за формулами (4.9) знаходять відповідні значення x і y, які відкладають на площині xOy.

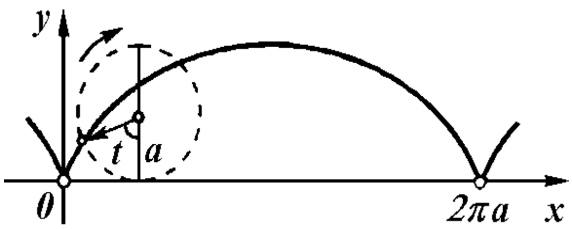


Рис. 4.10. Циклоїда

На рис. 4.10 зображена *циклоїда* – лінія, яку описує точка кола радіуса $r = a$ під час його кочення без ковзання уздовж осі Ox. Якщо t – кут повороту колеса, то параметричні рівняння першої арки циклоїди:

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases} \quad 0 \le t \le 2\pi. \quad (4.10)$$

На рис. 4.11 зображена *астроїда* – лінія, яку описує точка кола радіуса $r = a/4$ під час його кочення без ковзання по внутрішній стороні кола радіуса $R = a$. Рівняння астроїди в декартовій і параметричній формах:

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t, \end{cases} \quad 0 \le t \le 2\pi. \quad (4.11)$$

Лінія в полярних координатах

Рівняння $F(\rho;\ \varphi) = 0$ називається рівнянням лінії l *у полярній системі координат*, якщо координати будь-якої точки $M(\rho;\ \varphi) \in l$ задовольняють це рівняння, а координати точок, що не належать l, це рівняння не задовольняють.

Для побудови кривої у полярній системі координат надають певних значень φ і знаходять відповідні значення ρ. Результати обчислень заносять у таблицю. Побудувавши відповідні точки, отримають графік кривої.

На рис. 4.12 зображена *кардіоїда* – крива, що описується точкою кола з радіусом $a/2$, яке котиться без ковзання по колу з таким самим радіусом. Рівняння кардіоїди в полярній системі координат:

$$\rho = a(1 + \cos\varphi). \quad (4.12)$$

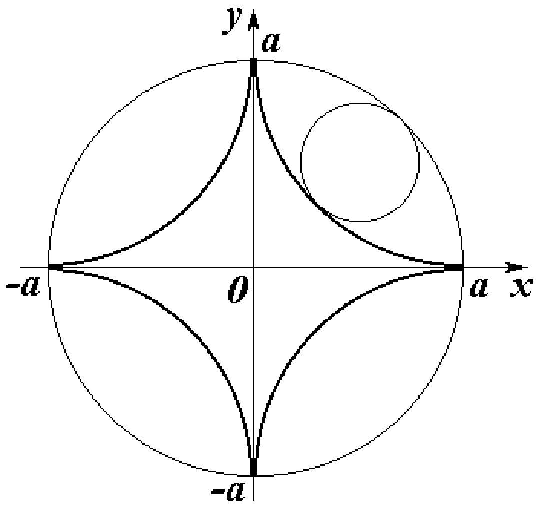


Рис. 4.11. Астроїда

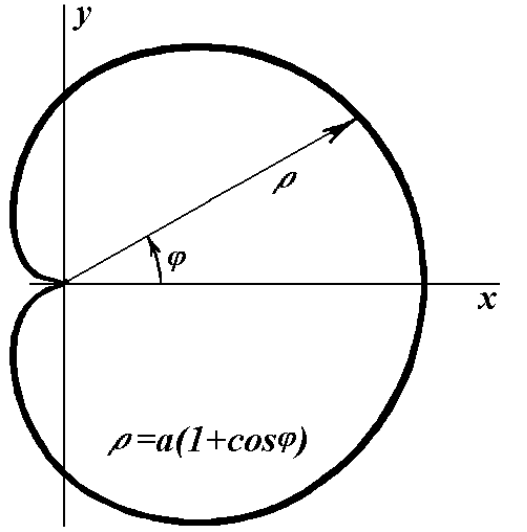


Рис. 4.12. Кардіоїда

4.3. ПРЯМА НА ПЛОЩИНІ

Пряма на площині фіксується, якщо відомі:
1) точка на прямій і вектор, перпендикулярний до прямої;
2) точка на прямій і вектор, паралельний прямій;
3) точка на прямій і кутовий коефіцієнт прямої;
4) дві точки на прямій.

4.3.1. Рівняння прямої, що проходить через задану точку перпендикулярно до заданого вектора. Загальне рівняння прямої

Нехай пряма проходить через задану точку $M_0(x_0, y_0)$ перпендикулярно до вектора нормалі $\vec{n} = (A, B)$ (рис. 4.13). Виберемо на прямій змінну точку $M(x, y)$ і запишемо умову перпендикулярності векторів $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0)$ і $\vec{n} = (A, B)$ у векторній (4.13) і координатній (4.14) формах:

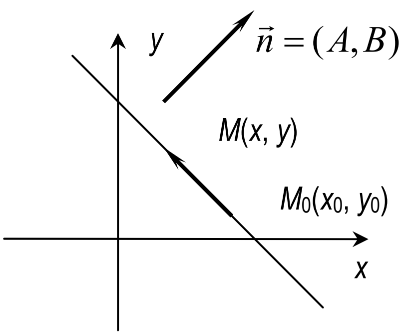


Рис. 4.13

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0, \tag{4.13}$$

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0. \tag{4.14}$$

Рівняння (4.14) описує пряму, що проходить через задану точку $M_0(x_0, y_0)$ перпендикулярно до заданого вектора $\vec{n} = (A, B)$.

Окремі випадки рівняння (4.14):
1) при $x_0 = y_0 = 0$ пряма проходить через початок координат. Її рівняння:

$$Ax + By = 0; \tag{4.15}$$

2) при $B = 0$, $A \neq 0$ одержуємо рівняння *вертикальної* прямої: $x = x_0$;
3) при $A = 0$, $B \neq 0$ одержуємо рівняння *горизонтальної* прямої: $y = y_0$.

З рівняння (4.14) одержимо *загальне рівняння прямої*

$$Ax + By + D = 0. \qquad (4.16)$$

З (4.16) випливає, що пряма є алгебраїчною лінією першого порядку.

Зауваження. Коефіцієнти A і B при змінних x, y у загальному рівнянні прямої є координатами вектора нормалі до прямої.

4.3.2. Рівняння прямої, що проходить через задану точку паралельно заданому вектору

Нехай пряма проходить через задану точку $M_0(x_0, y_0)$ паралельно заданому вектору $\vec{a} = (l, m)$. Виберемо на прямій змінну точку $M(x, y)$ і запишемо умову колінеарності векторів $\vec{a} = (l, m)$ і $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0)$ (рис. 4.14):

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}. \qquad (4.17)$$

Рівняння (4.17) описує пряму, що проходить через задану точку $M_0(x_0, y_0)$ паралельно заданому вектору $\vec{a} = (l, m)$.

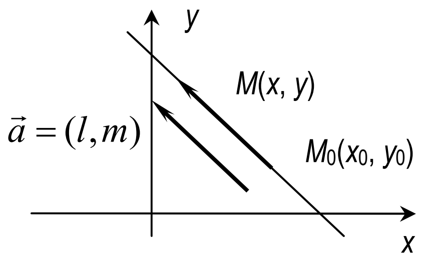


Рис. 4.14

4.3.3. Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки

Нехай на прямій задані 2 фіксовані точки $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$. Виберемо на прямій змінну точку $M(x, y)$ і запишемо умову колінеарності векторів $\overrightarrow{M_1M} = (x - x_1, y - y_1)$ і $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ (рис. 4.15):

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \; - \qquad (4.18)$$

рівняння прямої, що проходить через дві задані точки $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$.

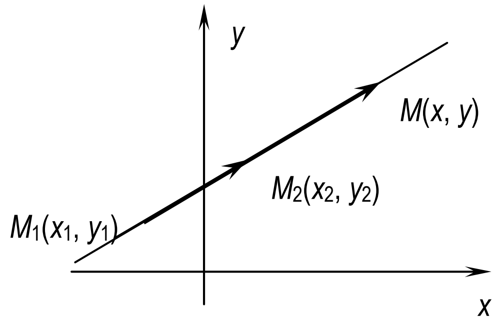


Рис. 4.15

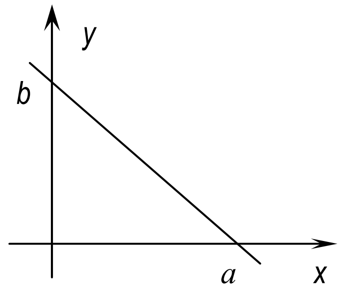


Рис. 4.16

4.3.4. Рівняння прямої у відрізках на осях

Нехай пряма відтинає на осях Ox, Oy не рівні нулю відрізки a, b (рис. 4.16). Підставляючи в рівняння (4.18) координати точок перетину прямої з осями $M_1(a, 0)$, $M_2(0, b)$, одержуємо рівняння прямої у відрізках на осях:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \tag{4.19}$$

4.3.5. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом

Нехай пряма складає з віссю Ox кут $\alpha \neq \pi/2$ (рис. 4.17). Число $k = \operatorname{tg}\alpha$ називається *кутовим коефіцієнтом прямої*.

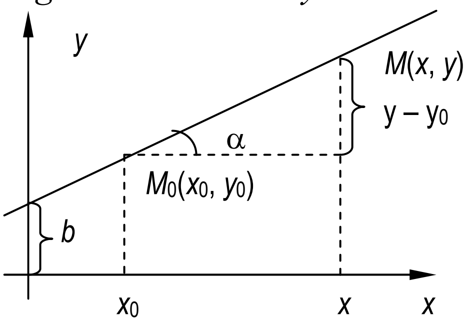


Рис. 4.17

Виберемо на прямій змінну точку $M(x, y)$ і запишемо співвідношення:

$$k = tg\alpha = \frac{y - y_0}{x - x_0}. \tag{4.20}$$

З (4.20) одержуємо рівняння прямої, що проходить через задану точку $M_0(x_0, y_0)$ і має заданий кутовий коефіцієнт k:

$$y - y_0 = k(x - x_0). \tag{4.21}$$

Звідси при $x_0 = 0$ одержимо рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом:

$$y = kx + b, \tag{4.22}$$

де $b = y_0$ – відрізок, що відтинається прямою на осі Oy (рис. 4.17).

Зауваження. Загальне рівняння прямої (4.16) і рівняння з кутовим коефіцієнтом (4.22) є “стандартними” формами запису рівнянь прямої, в яких вона задається або до яких зводяться інші рівняння прямої.

4.3.6. Кут між двома прямими. Умови паралельності й перпендикулярності двох прямих

1) прямі задані загальними рівняннями:

$$\begin{aligned} &A_1x + B_1y + D_1 = 0, \Rightarrow \vec{n}_1 = (A_1, B_1); \\ &A_2x + B_2y + D_2 = 0, \Rightarrow \vec{n}_2 = (A_2, B_2). \end{aligned} \tag{4.23}$$

Косинус *гострого* кута α між прямими:

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}; \tag{4.24}$$

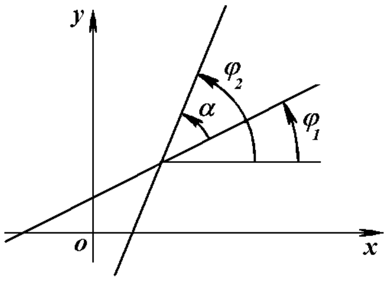


Рис. 4.18

2) прямі задані рівняннями:

$$y = k_1 x + b_1, \qquad y = k_2 x + b_2 . \qquad (4.25)$$

Тангенс кута α між прямими (рис. 4.18):

$$tg\alpha = tg(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{tg\varphi_2 - tg\varphi_1}{1 + tg\varphi_1 tg\varphi_2} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}. \quad (4.26)$$

Умови паралельності й перпендикулярності двох прямих

Умови паралельності прямих, що задані рівняннями (4.23), (4.25):

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}, \qquad k_1 = k_2 . \qquad (4.27)$$

Умови перпендикулярності двох прямих:

$$A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 = 0, \qquad k_2 = -1/k_1 . \qquad (4.28)$$

4.3.7. Нормальне рівняння прямої

Нехай p – відстань від початку координат до прямої, $\overrightarrow{n_0} = (\cos\alpha, \sin\alpha)$ – одиничний вектор нормалі (рис. 4.19). Тоді проекція вектора $\overrightarrow{OM} = (x, y)$ на вектор нормалі $\vec{n}$ дорівнює відстані p:

$$p = Пр_{\vec{n}} \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM} \cdot \vec{n}_0 = x\cos\alpha + y\sin\alpha.$$

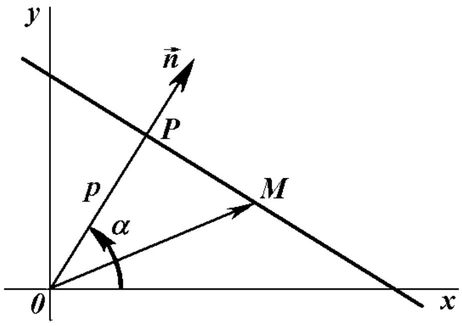


Рис. 4.19

Звідси одержуємо нормальне рівняння прямої:

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0. \qquad (4.29)$$

Ознаки нормального рівняння:

1) вільний член від'ємний або дорівнює нулю;
2) сума квадратів коефіцієнтів при x, y (довжина вектора нормалі) дорівнює 1.

Зведення загального рівняння прямої до нормального вигляду

Для того щоб звести до нормального вигляду загальне рівняння прямої $Ax + By + D = 0$, необхідно поділити його на $\pm\sqrt{A^2 + B^2}$ (знак кореня вибирається протилежним знаку D):

$$\frac{A}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} x + \frac{B}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} y + \frac{D}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = 0 . \qquad (4.30)$$

4.3.8. Відстань від точки до прямої

Нехай p – відстань від початку координат до прямої, $\overrightarrow{n_0}$ = (cosα, sinα) – одиничний вектор нормалі. Знайдемо відстань від точки $K(x_1, y_1)$ до прямої (рис. 4.20). Обчислимо різницю:

$$d = ON - OP = Пр_{\vec{n}}\overrightarrow{OK} - p = \overrightarrow{OK}\cdot\vec{n}_0 - p.$$

$$d = x_1\cos\alpha + y_1\sin\alpha - p\,. \qquad (4.31)$$

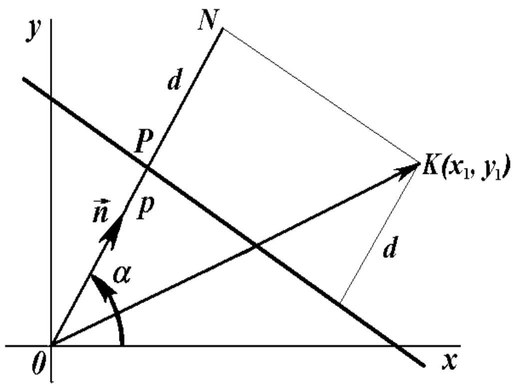


Рис. 4.20

Величина d називається *відхиленням* точки $K(x_1, y_1)$ від прямої. Якщо точка й початок координат знаходяться з одного боку від прямої, то $d < 0$, а якщо по різні боки, то $d > 0$.

З (4.31) випливає, що для того, щоб знайти відхилення точки $K(x_1, y_1)$ від прямої, яка задана нормальним рівнянням (4.29), слід підставити в рівняння координати точки x_1, y_1 замість координат x, y.

Відстань від точки $K(x_1, y_1)$ до прямої дорівнює модулю відхилення й обчислюється за такими формулами:

- пряма задана нормальним рівнянням (4.29)

$$|d| = |x_1\cos\alpha + y_1\sin\alpha - p|; \qquad (4.32)$$

- пряма задана загальним рівнянням (4.16)

$$|d| = \frac{|Ax_1 + By_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \qquad (4.33)$$

4.3.9. Приклади розв'язування задач

Приклад 4.6. Знайти відхилення і відстань від точки $M_0(1, 2)$ до прямої $2x - 3y - 5 = 0$.

► Зведемо рівняння прямої до нормального вигляду. Для цього поділимо рівняння на $\sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$:

$$\frac{2}{\sqrt{13}}x - \frac{3}{\sqrt{13}}y - \frac{5}{\sqrt{13}} = 0.$$

Підставляючи в це рівняння координати точки $M_0(1, 2)$, знайдемо відхилення точки від прямої:

$$d = \frac{2}{\sqrt{13}}1 - \frac{3}{\sqrt{13}}2 - \frac{5}{\sqrt{13}} = -\frac{9}{\sqrt{13}}.$$

Оскільки $d < 0$ – точка $M_0(1, 2)$ і початок координат знаходяться з одного боку від прямої. Відстань від точки $M_0(1, 2)$ до прямої: $|d| = 9/\sqrt{13}$. ■

Приклад 4.7. Скласти рівняння прямої, що проходить через точки $M_1(2, 3)$ і $M_2(3, 5)$.

► Скористаємося формулою (4.18):

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}, \quad \frac{x-2}{3-2} = \frac{y-3}{5-3} \;\Rightarrow\; 2(x-2) = y - 3 \;\Rightarrow$$

$\Rightarrow 2x - y - 1 = 0$ – *загальне рівняння прямої*. Вектор нормалі $\vec{n} = (2, -1)$.

Запишемо рівняння у двох інших формах:

$\dfrac{x}{1/2} + \dfrac{y}{-1} = 1$ – *рівняння прямої у відрізках на осях* ($a = 1/2$, $b = -1$);

$y = 2x - 1$ – *рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом* ($k = 2$, $b = -1$). ■

Приклад 4.8. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(2, -3)$ перпендикулярно до прямої $x + 2y + 3 = 0$.

► *1-й спосіб*. Дану пряму представимо у вигляді: $y = -\dfrac{1}{2}x - \dfrac{3}{2}$ ($k_1 = -1/2$). Рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(2, -3)$ і має кутовий коефіцієнт k_2: $y + 3 = k_2(x - 2)$. З умови перпендикулярності прямих маємо $k_1 k_2 = -1 \;\Rightarrow\; k_2 = 2$. Звідси $y + 3 = 2(x - 2) \;\Rightarrow$ $\Rightarrow 2x - y - 7 = 0$.

2-й спосіб. Шукана пряма проходить через точку $M_0(2, -3)$ паралельно вектору нормалі до даної прямої $\vec{n} = (1, 2) = \vec{a} = (l, m)$, її рівняння має вигляд:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}, \qquad \frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{2}, \qquad 2x - y - 7 = 0. \;■$$

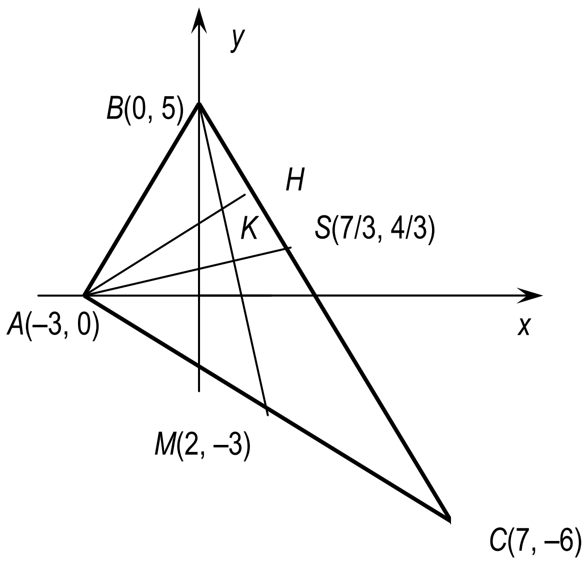


Рис. 4.21

Приклад 4.9. Дані вершини трикутника $A(-3,\ 0)$, $B(0,\ 5)$, $C(7,\ -6)$. Скласти рівняння сторін трикутника, медіани BM, висоти AH і бісектриси AS. Знайти координати точки K, в якій перетинаються медіана BM і бісектриса AS (рис. 4.21).

►а) рівняння сторін знайдемо за формулою (4.18):

$$AB:\ \frac{x-x_A}{x_B-x_A}=\frac{y-y_A}{y_B-y_A},$$

$$\frac{x+3}{0+3}=\frac{y-0}{5-0},\quad 5x-3y+15=0;$$

$$BC:\ \frac{x-x_B}{x_C-x_B}=\frac{y-y_B}{y_C-y_B},\quad \frac{x-0}{7-0}=\frac{y-5}{-6-5},\quad 11x+7y-35=0;$$

$$AC:\ \frac{x-x_A}{x_C-x_A}=\frac{y-y_A}{y_C-y_A},\quad \frac{x+3}{7+3}=\frac{y-0}{-6-0},\quad 3x+5y+9=0;$$

б) точка M поділяє сторону AC навпіл, тому її координати

$$x_M=(x_A+x_C)/2=(-3+7)/2=2,\quad y_M=(y_A+y_C)/2=-6/2=-3.$$

Рівняння медіани BM:

$$\frac{x-x_B}{x_M-x_B}=\frac{y-y_B}{y_M-y_B},\quad \frac{x-0}{2-0}=\frac{y-5}{-3-5},\quad 4x+y-5=0;$$

в) висота AH проходить через точку $A(-3,0)$ перпендикулярно до прямої BC (див. рис. 4.21), тобто паралельно вектору $\vec{a}_{AH}=\vec{n}_{BC}=(11,7)$. Її рівняння:

$$\frac{x-(-3)}{11}=\frac{y-0}{7}\quad\Rightarrow\quad 7x-11y+21=0;$$

г) бісектриса AS поділяє сторону BC у відношенні

$$\lambda=\frac{BS}{SC}=\frac{AB}{AC}=\frac{\sqrt{(0+3)^2+(5-0)^2}}{\sqrt{(7+3)^2+(-6-0)^2}}=\frac{1}{2}.$$

Координати точки S:

$$x_S=\frac{x_B+\lambda x_C}{1+\lambda}=\frac{0+(1/2)7}{3/2}=\frac{7}{3},\quad y_S=\frac{y_B+\lambda y_C}{1+\lambda}=\frac{5+(1/2)(-6)}{3/2}=\frac{4}{3}.$$

Рівняння бісектриси AS:

$$\frac{x-x_A}{x_S-x_A}=\frac{y-y_A}{y_S-y_A},\quad \frac{x+3}{(7/3)+3}=\frac{y-0}{(4/3)-0},\quad x-4y+3=0;$$

ґ) знайдемо координати точки K, в якій перетинаються медіана BM і бісектриса AS. Для цього розв'яжемо систему:

$$\begin{cases}4x+y-5=0\\ x-4y+3=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_K=1\\ y_K=1\end{cases}.\ ■$$

Приклад 4.10. Протилежні вершини квадрата лежать у точках $A(-2, 3)$ і $C(2, 5)$ (рис. 4.22). Скласти рівняння сторін і діагоналей квадрата.

►а) складемо рівняння діагоналей. Діагональ AC:

$$\frac{x-x_A}{x_C-x_A}=\frac{y-y_A}{y_C-y_A},\quad \frac{x+2}{4}=\frac{y-3}{2},\quad x-2y+8=0.$$

Діагональ BD квадрата перпендикулярна до діагоналі AC і проходить через її середину – точку K із координатами

$$x_K=(x_A+x_C)/2=(-2+2)/2=0,$$
$$y_K=(y_A+y_C)/2=(3+5)/2=4.$$

Кутовий коефіцієнт AC: $k_{AC}=1/2$, $BD\perp AC$, отже, кутовий коефіцієнт BD: $k_{BD}=-1/k_{AC}=-2$.

Рівняння діагоналі BD:

$$y-y_K=k_{BD}(x-x_K),\quad y-4=-2x,\quad 2x+y-4=0;$$

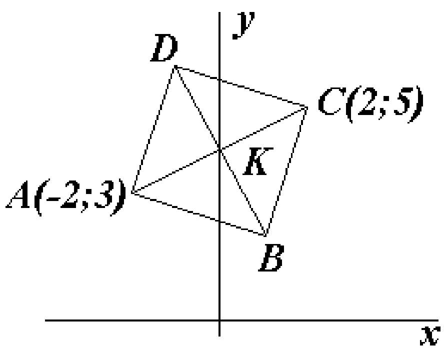


Рис. 4.22

б) складемо рівняння сторін. Нехай k_{AB} – кутовий коефіцієнт сторони AB. Кут $\angle DAC=\varphi=45°$. Оскільки $tg\varphi=$ $=tg45°=1$, $k_{AC}=1/2$, то

$$tg\varphi=\frac{k_{AD}-k_{AC}}{1+k_{AD}k_{AC}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1=\frac{k_{AD}-1/2}{1+(1/2)k_{AD}}\Rightarrow k_{AD}=3.$$

Рівняння сторони AD:

$$y-y_A=k_{AD}(x-x_A),\quad y-3=3(x+2),\quad y=3x+9.$$

Рівняння сторони BC, що проходить через точку C паралельно AD:

$$y-y_C=k_{BC}(x-x_C),\ (k_{BC}=k_{AD}=3),\quad y-5=3(x-2),\quad y=3x-1.$$

З умови перпендикулярності сторін AB і BC знаходимо: $k_{AB}=-1/k_{BC} = -1/3$. Сторони DC і AB паралельні: $k_{DC} = k_{AB} = -1/3$. Рівняння сторін AB і DC:

AB: $y - y_A = k_{AB}(x - x_A)$, $\quad y - 3 = -(1/3)(x + 2)$, $\quad x + 3y - 7 = 0$;

DC: $y - y_C = k_{DC}(x - x_C)$, $\quad y - 5 = -(1/3)(x - 2)$, $\quad x + 3y - 17 = 0$. ■

4.3.10. Приклади використання лінійної залежності в економіці

1. Нехай k – тариф на перевезення вантажу на одиницю відстані, b – витрати під час перевезення вантажу, що не залежать від відстані, тоді загальну вартість y перевезення вантажу на відстань x можна обчислити за формулою $y = k\,x + b$.

2. Нехай p – бюджет сім'ї, який витрачається на придбання товару двох видів: A – за ціною a грош. од. за одиницю і B – за ціною b грош. од. за одиницю. В якій кількості можна придбати ці товари?

► Позначимо через x – кількість товару A, а через y – кількість товару B, який планується закупити. Тоді отримаємо рівняння так званої *бюджетної* прямої: $ax + by = p$. ■

Питання для самоперевірки

1. Запишіть такі рівняння прямих і поясніть зміст усіх величин у цих рівняннях:
   - векторне й канонічне рівняння прямої;
   - загальне рівняння прямої;
   - рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом;
   - рівняння прямої, що проходить через дві дані точки;
   - рівняння прямої у відрізках;
   - нормальне рівняння прямої.
2. Як знайти кут між двома прямими?
3. Сформулюйте умови паралельності й перпендикулярності 2-х прямих.
4. Як обчислити відстань від точки до прямої?

Задачі

1. Знайдіть рівняння прямої, що проходить через точку перетину прямих $x + 2y + 3 = 0$, $2x + 3y + 4 = 0$ паралельно прямій $5x + 8y = 0$.
2. Дано сторони трикутника ABC: $x - y = 0$ (AB), $x + y - 2 = 0$ (BC), $y = 0$ (AC). Знайдіть рівняння висоти, що проходить через вершину A.
3. Дано вершини трикутника ABC: $A(1; 2)$, $B(2; -2)$, $C(6; 1)$. Напишіть рівняння сторони AB, рівняння висоти CD й обчисліть її довжину.

4. Дано сторону прямокутника $3x - 4y + 5 = 0$ та дві його вершини $A(1;-3)$, $C(1; 2)$. Знайдіть рівняння решти сторін прямокутника.
5. Знайдіть точку B, симетричну точці $A(-2; 4)$ відносно прямої: $3x + y - 8 = 0$.
6. Знайдіть точку перетину висот трикутника ABC, якщо $A(-8; 3)$, $B(8; 5)$, $C(8; -5)$.
7. Знайдіть рівняння прямої:
   1) що має кутовий коефіцієнт 1/2 і відтинає на осі ординат відрізок 3;
   2) що проходить через точку (1; 3) та кутовий коефіцієнт якої дорівнює –2;
   3) що проходить через точку (–1; 2) і утворює з віссю Ox кут $\pi/3$.
8. Знайдіть рівняння прямої:
   1) яка відтинає на осях Ox й Oy відрізки, що відповідно дорівнюють 3 і –4;
   2) яка проходить через точку (3; 1) і відтинає на осях Ox та Oy відрізки однакової довжини.
9. Знайдіть рівняння прямої, що проходить через точку (2; 2) та відтинає від координатного кута трикутник, площа якого дорівнює 1 од.^{2}.
10. Знайдіть відстань d між паралельними прямими:
    1) $x - 2y + 4 = 0$, $2x - 4y + 5 = 0$;
    2) $2x - 3y - 1 = 0$, $-6x + 9y - 5 = 0$.
11. Через точку (–2; 2) проведіть прямі, відстань до кожної з яких від точки (2; 5) дорівнює 3.
12. Точки $A(1; 2)$, $B(-1; -1)$, $C(2; 1)$ – вершини трикутника. Знайдіть рівняння бісектриси внутрішнього кута трикутника при вершині B.
13. Дані вершини трикутника $A(1; -1)$, $B(-2; 1)$, $C(3; 5)$. Знайдіть рівняння перпендикуляра, опущеного з вершини A на медіану, що проведена з вершини B.
14. Дано рівняння двох сторін трикутника: $4x + 3y - 5 = 0$, $x - 3y + 10 = 0$. Його медіани перетинаються в точці (2; 2). Знайдіть рівняння третьої сторони.
15. Витрати на перевезення вантажу двома видами транспорту задані функціями: $y_1 = 50x + 150$ і $y_2 = 25x + 250$, де x – відстань перевезень, км; y – транспортні витрати, грош. од. При яких відстанях доцільно скористатися першим видом транспорту?
16. Перевезення вантажу від даного міста в перший пункт, що знаходиться на відстані 100 км, коштує 200 грош. од., а в інший, що знаходиться на відстані 400 км, – 350 грош. од. Установіть лінійну залежність вартості перевезення y від відстані x.

4.4. АЛГЕБРАЇЧНІ ЛІНІЇ ДРУГОГО ПОРЯДКУ НА ПЛОЩИНІ

4.4.1. Основні поняття

Нехай дане загальне рівняння лінії другого порядку:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + K = 0, \tag{4.34}$$

де коефіцієнти A, B, C одночасно не дорівнюють нулю. Тип лінії, заданої цим рівнянням, можна визначити за знаком дискримінанта $\Delta = B^2 - AC$:

- якщо дискримінант $\Delta < 0$, то рівняння має *еліптичний тип* і визначає або еліпс, або точку ($x^2 + y^2 = 0$), або уявну криву (наприклад, $x^2 + y^2 + 1 = 0$);
- якщо дискримінант $\Delta > 0$, то рівняння має *гіперболічний тип* і визначає або гіперболу, або пару прямих, що перетинаються ($a^2x^2 - b^2y^2 = 0$);
- якщо дискримінант $\Delta = 0$, то рівняння має *параболічний тип* і визначає або параболу, або пару паралельних прямих (наприклад, $x^2 - a^2 = 0$), або уявну криву (наприклад, $x^2 + a^2 = 0$).

Лінія другого порядку називається *виродженою*, якщо рівняння (4.34) визначає на площині порожню множину, точку, пряму, пару прямих.

Розглянемо невироджені лінії другого порядку.

4.4.2. Еліпс. Коло

Еліпсом називається множина точок площини, сума відстаней від кожної з яких до двох фіксованих точок, що називаються фокусами, є сталою величиною, більшою за відстань між фокусами.

Нехай фокуси еліпса розташовані на осі Ox у точках $F_1(c, 0)$, $F_2(-c, 0)$, $M(x, y)$ – довільна точка еліпса. Тоді за означенням еліпса

$$F_1M + F_2M = 2a. \tag{4.35}$$

Відстані $r_1 = F_1M$ і $r_2 = F_2M$ від довільної точки $M(x, y)$ еліпса до фокусів називаються *фокальними радіусами* точки M. Оскільки

$$F_2M = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}, \ \ F_1M = \sqrt{(x-c)^2 + y^2},$$

рівняння (4.35) набуде вигляду

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a \text{ або}$$
$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Перетворимо останнє рівняння:

$$x^2+2cx+c^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+x^2-2cx+c^2+y^2,$$

$$a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a^2-cx,\quad a^2(x^2-2cx+c^2+y^2)=a^4-2a^2cx+c^2x^2,$$

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2).$$

Оскільки $a > c$, то можна ввести позначення $b^2=a^2-c^2>0$ і записати *рівняння еліпса у канонічному вигляді*:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,. \tag{4.36}$$

Дослідження форми еліпса

Осі координат є осями симетрії еліпса, оскільки рівняння (4.36) не змінюється при заміні x на $-x$ і y на $-y$, тому, якщо точка (x, y) належить еліпсу, то йому також належать точки $(-x, y)$, $(x, -y)$, $(-x, -y)$.

Точки перетину еліпса з осями координат $(\pm a,\ 0)$, $(0,\ \pm b)$ називаються *вершинами еліпса* (рис. 4.25), а параметри a, b – його півосями.

З рівняння (4.36) випливає, що сума невід’ємних величин дорівнює одиниці, це можливо лише у випадку, коли кожний з доданків не перевищує одиниці, тобто $x^2/a^2 \le 1$ і $y^2/b^2 \le 1$ або $-a \le x \le a$, $-b \le y \le b$. Це означає, що усі точки еліпса знаходяться у прямокутнику, обмеженому прямими $x = \pm a$, $y= \pm b$. Крім того, при зростанні одного з доданків, наприклад $|x|$, другий доданок $|y|$ зменшується.

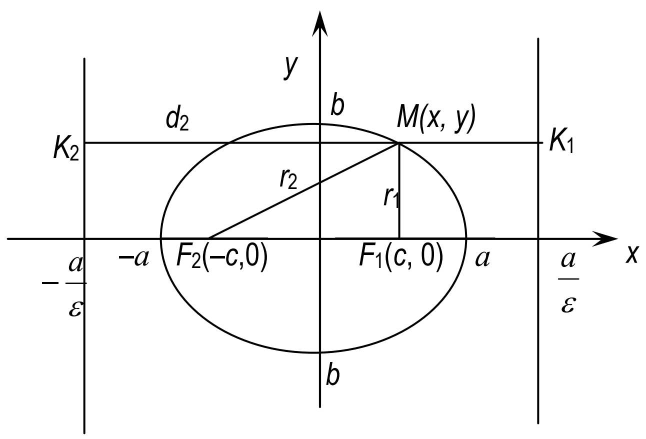


Рис. 4.25. Еліпс *(a ≥ b)*

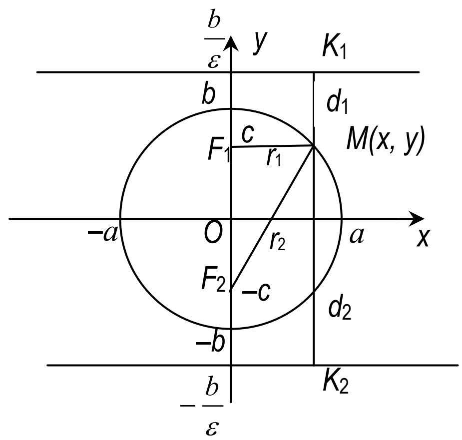


Рис. 4.26. Еліпс *(a ≤ b)*

Форма еліпса характеризується *ексцентриситетом* $\varepsilon = c/a$ $(0 \le \varepsilon < 1)$. При $a = b = R$ еліпс перетворюється в *коло* з центром у початку координат і радіусом R (рис. 4.27). Його канонічне рівняння:

$$x^2+y^2=R^2. \tag{4.37}$$

Коло – множина точок площини, рівновіддалених від фіксованої точки (*центра* кола). Ексцентриситет кола $\varepsilon = 0$, фокуси F_1 і F_2 збігаються з центром кола. Рівняння кола з центром у точці $M_0(x_0, y_0)$ і радіусом R (рис. 4.28):

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2. \tag{4.38}$$

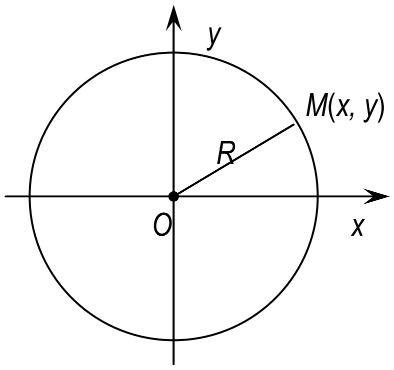


Рис. 4.27. Коло $x^2 + y^2 = R^2$

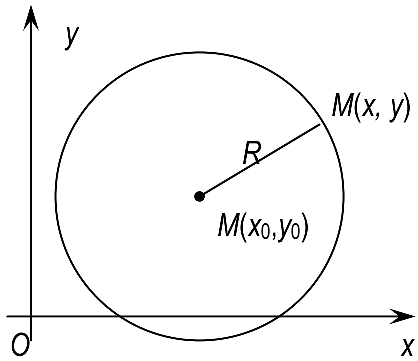


Рис. 4.28. Коло $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$

При $\varepsilon \to 1$ еліпс вироджується у відрізок $[-a, a]$.

Прямі $x = \pm a/\varepsilon$ називаються *директрисами* еліпса.

> ***Теорема (директоріальна властивість еліпса).*** *Якщо r – відстань від точки M до фокуса еліпса, d – відстань від точки M до однобічної з цим фокусом директриси, то відношення $r/d = \varepsilon$*

▷ З рис. 4.25 знаходимо відстані від точки M до директрис:

$$d_1 = \frac{a}{\varepsilon} - x, \quad d_2 = -\frac{a}{\varepsilon} + x.$$

Виразимо фокальні радіуси r_1, r_2 через ексцентриситет:

$$r_2 = F_2M = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + 2cx + c^2 + y^2} =$$

$$= \sqrt{x^2 + 2cx + (a^2 - b^2) + (b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2)} = \sqrt{\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)x^2 + 2cx + a^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{c^2}{a^2}x^2 + 2cx + a^2} = \sqrt{\left(\frac{c}{a}x + a\right)^2} = \sqrt{(\varepsilon x + a)^2} = \varepsilon x + a.$$

Аналогічно $r_1 = F_1M = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a - \varepsilon x.$

Відношення фокальних радіусів r_1, r_2 до відстаней d_1, d_2:

$$\frac{r_1}{d_1}=\frac{a-\varepsilon x}{(a/\varepsilon)-x}=\varepsilon,\quad \frac{r_2}{d_2}=\frac{a+\varepsilon x}{(a/\varepsilon)+x}=\varepsilon.\ \square$$

Зауваження 1. Якщо задані півосі еліпса a, b, причому $a \geq b$, то його фокуси розташовані на осі Ox в точках $F_1(c,\ 0)$, $F_2(-c,\ 0)$, де $c=\sqrt{a^2-b^2}$ (див. рис. 4.25).

Зауваження 2. Якщо $a < b$ і $c=\sqrt{b^2-a^2}$, то фокуси еліпса: $F_2(0,\ -c)$, $F_1(0,\ c)$, ексцентриситет $\varepsilon = c/b$, директриси еліпса $y = \pm\ b/\varepsilon$ (рис. 4.26).

Зауваження 3. Відомо, що фокальні радіуси F_1M і F_2M перетинають дотичну до еліпса в точці M під однаковими кутами. Отже, промінь світла, або звукова хвиля, що виходить із фокуса F_1, відбившись від еліпса, потрапить у фокус F_2 (*оптична властивість еліпса*).

Зауваження 4. Рівняння еліпса в параметричній формі мають вигляд:

$$\begin{cases} x=a\cos t\ \ (a>0) \\ y=b\sin t\ \ (b>0) \end{cases}\qquad 0\le t<2\pi. \tag{4.39}$$

Зауваження 5. Рівняння еліпса, осі якого паралельні координатним осям, а центр знаходиться у точці $M_0(x_0,\ y_0)$, має вигляд:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1. \tag{4.40}$$

Приклад 4.11. Звести до канонічного вигляду рівняння $4x^2 + 9y^2 + 8x - 36y + 4 = 0$. Визначити тип кривої.

► Виділимо в рівнянні лінії повні квадрати:

$$4(x^2+2x+1)-4+9(y^2-4y+4)-36+4=0,\quad 4(x+1)^2+9(y-2)^2=36,$$

$$\frac{x'^2}{3^2}+\frac{y'^2}{2^2}=1,\quad \text{де}\ \begin{cases} x'=x+1, \\ y'=y-2. \end{cases}$$

В системі координат $x'O'y'$ отримане канонічне рівняння еліпса з центром у точці $O'(-1,\ 2)$. Півосі еліпса $a = 3$, $b = 2$. $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{5}$, $\varepsilon = c/a = \sqrt{5}/3$. ■

Приклад 4.12. Два підприємства A і B виробляють продукцію з однією і тією ж ціною m за один виріб. Однак транспортні витрати на перевезення одного виробу на 1 км для підприємства A складають

10 грош. од., а для підприємства B – 20 грош. од. Відстань між підприємствами – 300 км. Як територіально повинний бути поділений ринок збуту між цими підприємствами для того, щоб витрати споживача були мінімальними?

► Позначимо S_1, S_2 – відстані від пунктів A і B до ринку. Тоді витрати споживачів на товари з пунктів A і B: $f(A) = m + 10S_1$, $f(B) = m + 20S_2$. Знайдемо множину точок, для яких $f(A) = f(B)$. Нехай підприємство A знаходиться у початку координат, а підприємство B – у точці $B(300, 0)$, тоді $S_1 = \sqrt{x^2 + y^2}$, $S_2 = \sqrt{(300-x)^2 + y^2}$. З умови $f(A) = f(B)$ знайдемо $S_1 = 2S_2$ чи

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 2\sqrt{(300-x)^2 + y^2} \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 360000 - 2400x + 4x^2 + 4y^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-400)^2 + y^2 = 200^2.$$

Одержали рівняння кола з центром у точці $O'(400, 0)$ і радіусом 200 км. З геометричної точки зору, для споживачів, що знаходяться усередині кола, вигідніше купувати вироби підприємства B, а поза колом – вироби підприємства A. ■

4.4.3. Гіпербола

Гіперболою називається множина точок площини, модуль різниці відстаней від кожної з яких до двох фіксованих точок (фокусів) є величиною сталою, меншою за відстань між фокусами.

Нехай $M(x, y)$ – довільна точка гіперболи, фокуси якої розташовані на осі Ox у точках $F_1(c, 0)$, $F_2(-c, 0)$. Тоді за означенням гіперболи

$$|F_1M - F_2M| = 2a \Leftrightarrow F_1M - F_2M = \pm 2a. \qquad (4.41)$$

Відстані $r_1 = F_1M$ і $r_2 = F_2M$ від довільної точки $M(x, y)$ гіперболи до фокусів називаються *фокальними радіусами* точки M. Оскільки

$$F_1M = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}, \quad F_2M = \sqrt{(x-c)^2 + y^2},$$

то рівняння (4.41) набуде вигляду:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a.$$

Після його перетворення отримаємо *канонічне рівняння гіперболи*:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad (4.42)$$

де $b^2 = a^2 + c^2$.

Дослідження форми гіперболи

Гіпербола симетрична відносно осей координат, оскільки рівняння (4.42) не змінюється при заміні x на $-x$ і y на $-y$.

Точки перетину гіперболи з віссю Ox $(-a, 0)$ і $(a, 0)$ називаються *вершинами гіперболи*. Гіпербола не перетинає вісь Oy. Параметр a називається дійсною піввіссю, а b – уявною піввіссю гіперболи.

З рівняння (4.42) випливає, що $x^2/a^2 \geq 1$ або $|x| \geq a$, тобто точки гіперболи розташовані справа від прямої $x = a$ і зліва від прямої $x = -a$. При зростанні $|x|$ величина $|y|$ також зростає (рис. 4.29).

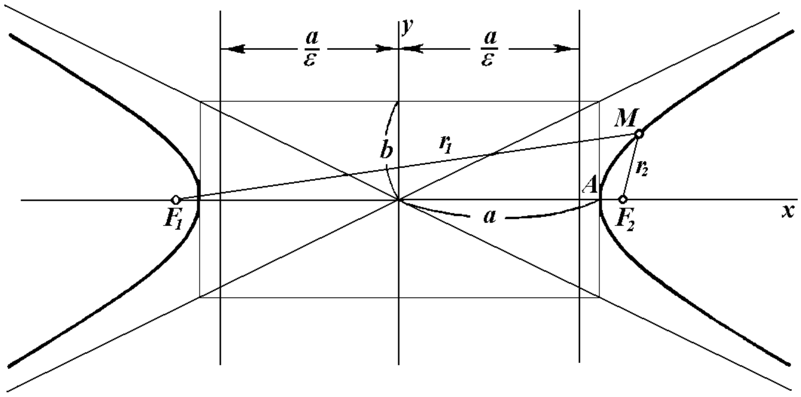


Рис. 4.29. Гіпербола

Прямі $y = \pm(b/a)x$, що проходять через діагоналі прямокутника розміру $2a\times2b$, називаються *асимптотами* гіперболи. *Властивість асимптот*: при необмеженому віддаленні від початку координат гіпербола наближається до асимптот, не перетинаючи їх.

Величина $\varepsilon = c/a$ ($c = \sqrt{a^2 + b^2}$) називається *ексцентриситетом* гіперболи ($\varepsilon > 1$), а прямі $x = \pm\, a/\varepsilon$ – її *директрисами*.

> ***Теорема (директоріальна властивість гіперболи).*** *Якщо r – відстань від точки M до фокуса гіперболи, d – відстань від точки M до однобічної з цим фокусом директриси, то відношення $r/d = \varepsilon$*

Зауваження 1. При $a = b$ гіпербола називається *рівнобічною*. Її канонічне рівняння:

$$x^2 - y^2 = a^2. \qquad (4.43)$$

Асимптоти $y = \pm x$ є бісектрисами координатних кутів. Якщо повернути систему координат xOy на кут $\alpha = -\pi/4$ (рис. 4.30), то рівняння рівнобічної гіперболи в системі координат $x'Oy'$:

$$y' = k/x'. \qquad (4.44)$$

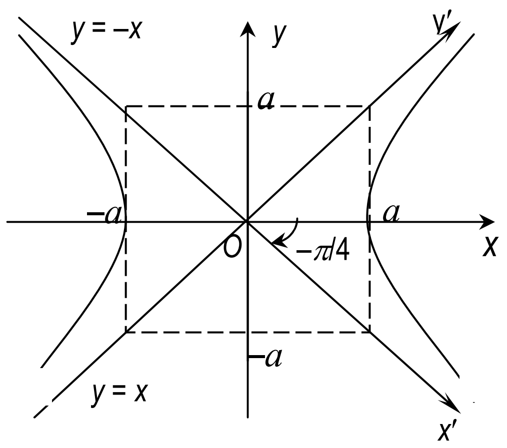


Рис. 4.30. Рівнобічна гіпербола

Зауваження 2. Якщо фокуси гіперболи розташовані на осі Oy у точках $F_1(0, -c)$, $F_2(0, c)$, де $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, то її рівняння має вигляд:

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad (4.45)$$

ексцентриситет $\varepsilon = c/b$, директриси: $y = \pm\, b/\varepsilon$.

Зауваження 3. *Оптична властивість гіперболи*: промінь світла, що виходить із одного з фокусів гіперболи, після відбиття від гіперболи рухається так, начебто він виходить з іншого фокуса.

Зауваження 4. Параметричні рівняння гіперболи мають вигляд:

$$\begin{cases} x = \pm a\,\mathrm{ch}t = \pm a(e^t + e^{-t})/2, & (a > 0) \\ y = b\,\mathrm{sh}t = b(e^t - e^{-t})/2, & (b > 0) \end{cases} \quad -\infty < t < \infty. \qquad (4.46)$$

Зауваження 5. Рівняння гіперболи, осі якої паралельні координатним осям, а центр знаходиться у точці $M_0(x_0, y_0)$, має вигляд:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1. \qquad (4.47)$$

Приклад 4.13. Звести до канонічного вигляду рівняння гіперболи

$$9x^2 - 4y^2 + 16y - 18x - 43 = 0.$$

► Виділимо в рівнянні гіперболи повні квадрати.

$$9(x^2 - 2x + 1) - 9 - 4(y^2 - 4y + 4) + 16 - 43 = 0,$$

$$9(x - 1)^2 - 4(y - 2)^2 = 36, \quad \frac{x'^2}{2^2} - \frac{y'^2}{3^2} = 1, \text{ де } \begin{cases} x' = x - 1, \\ y' = y - 2. \end{cases}$$

У системі координат $O'x'y'$ отримане канонічне рівняння гіперболи. Центр гіперболи – точка $O'(1, 2)$. Півосі гіперболи $a = 2$, $b = 3$. ■

4.4.4. Парабола

Параболою називається множина точок площини, кожна з яких рівновіддалена від даної точки (фокуса) і даної прямої (директриси).

Відстань p від фокуса до директриси називається *параметром параболи*.

Нехай $M(x, y)$ – довільна точка параболи, фокус якої міститься в точці $F(p/2, 0)$, а директриса перпендикулярна до осі Ox і має рівняння $x = -p/2$.

Відрізок FM називається *фокальним радіусом* точки M.

Проведемо відрізок KM перпендикулярно до директриси (рис. 4.31). Тоді за означенням параболи $FM = KM$. Оскільки

$$FM = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2}, \quad KM = \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2},$$

то $\sqrt{x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2} = \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2} \Rightarrow x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4}.$

Звідси одержимо *канонічне рівняння параболи*:

$$y^2 = 2px, \quad (p > 0). \tag{4.48}$$

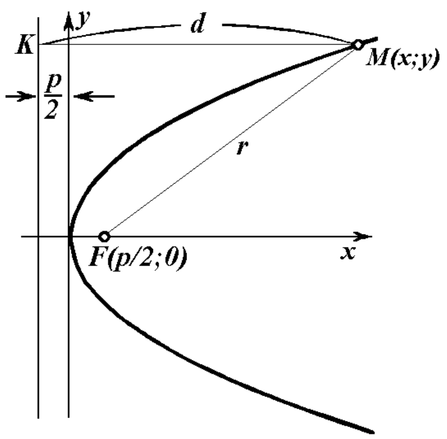


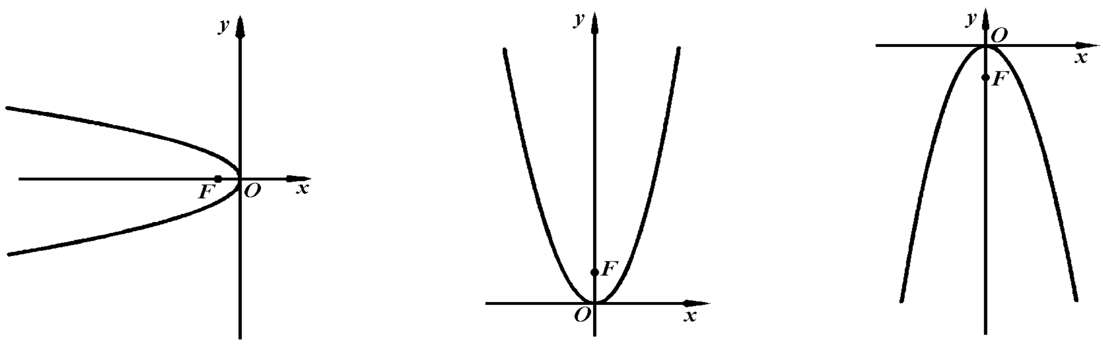
Рис. 4.31. Парабола $y^2 = 2px, (p > 0)$

Дослідження форми параболи

Парабола симетрична відносно осі Ox, оскільки рівняння (4.48) не змінюється при заміні y на $-y$. Точка $O(0, 0)$ перетину параболи з віссю симетрії називається її *вершиною*.

Оскільки $p > 0$, то з рівняння (4.48) випливає, що $x \geq 0$, тобто парабола розташована справа від осі Oy. При зростанні x модуль y також зростає.

Зауваження 1. Рівняння $y^2 = -2px$, $x^2 = \pm 2py$ $(p > 0)$ також визначають параболи (рис. 4.32).



$y^2 = -2px$ $\quad$ $x^2 = 2py$ $\quad$ $x^2 = -2py$

Рис. 4.32. Параболи *(p > 0)*

Зауваження 2. Якщо вершина параболи знаходиться у точці $M_0(x_0, y_0)$, а вісь симетрії паралельна координатній осі, то рівняння параболи має вигляд:

$$(y-y_0)^2=\pm 2p(x-x_0) \text{ або } (x-x_0)^2=\pm 2p(y-y_0).$$

Зауваження 3. *Оптична властивість параболи*: усі промені, що виходять із фокуса параболи, після відбиття від параболи направлені паралельно її осі. Ця властивість параболи використовується в прожекторах, ліхтарях, локаторах.

Приклад 4.14. Звести до канонічного вигляду рівняння параболи

$$x^2 - 2x - 8y + 17 = 0.$$

► Запишемо рівняння параболи у вигляді:

$$(x-1)^2 = 8(y-2), \quad (x')^2 = 8y', \text{ де } x' = x-1,\ y' = y-2.$$

Вершина параболи – точка $O'(1, 2)$. Канонічна система координат $x'O'y'$. Параметр $p = 4$. ■

4.4.5. Криві другого порядку. Узагальнення. Конічні перерізи

Враховуючи директоріальні властивості еліпса, гіперболи, параболи, можна дати узагальнене означення кривої другого порядку: *кривою другого порядку* називається множина точок площини, відношення відстаней кожної з яких від фіксованої точки F (*фокуса*) і від деякої прямої (*директриси*) є величиною сталою, яка позначається ε і називається *ексцентриситетом кривої* (рис. 4.33).

$$\boxed{\frac{r}{d}=\varepsilon=const}$$

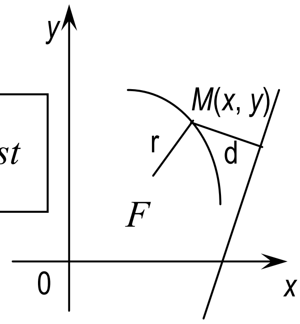


Рис. 4.33

Залежно від величини ε крива другого порядку є:

1) еліпсом, якщо $\varepsilon < 1$;
2) параболою, якщо $\varepsilon = 1$;
3) гіперболою, якщо $\varepsilon > 1$.

Крива другого порядку визначається рівнянням (4.34). При переході від однієї системи координат до іншої рівняння кривої змінюватиметься. Найбільш просте рівняння крива має в *канонічній системі координат*, одна з осей якої спрямована уздовж перпендикуляра, опущеного з фокуса F на директрису, а інша – паралельно директрисі. Рівняння кривої у канонічній системі координат називається *канонічним рівнянням кривої*. Будь-яке рівняння (4.34) можна звести до канонічного вигляду за допомогою паралельного переносу й повороту системи координат на кут α, що визначається з рівняння $tg 2\alpha = 2B/(A-C)$ при $A \neq C$ і на кут $\alpha = 45°$ при $A = C$.

Конічні перерізи

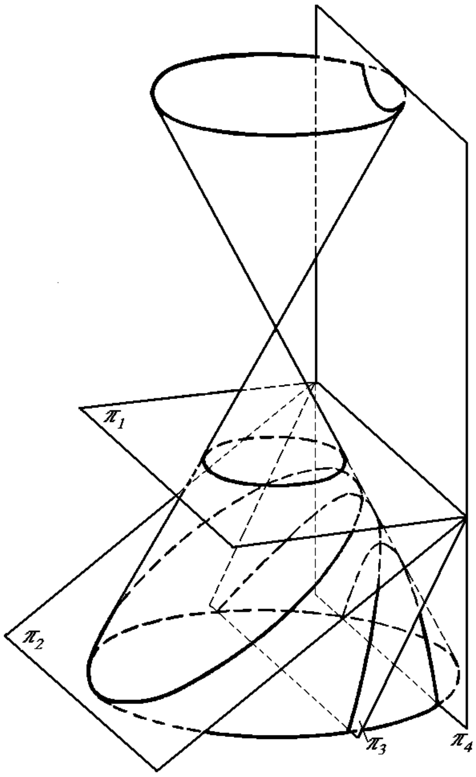


Рис. 4.34. Конічні перерізи

Еліпс, гіперболу, параболу можна одержати як лінії перетину прямого кругового конуса з площиною, що не проходить через його вершину (рис. 4.34). Тому їх часто називають конічними перерізами.

Якщо площина π_1 перпендикулярна до осі конуса, то у перерізі утворюється *коло*.

Якщо площина π_2 перетинає всі твірні конуса, у перерізі утворюється *еліпс*.

Якщо площина π_3 паралельна твірній, то у перерізі утворюється *парабола*.

Якщо площина π_4 паралельна двом твірним, то у перерізі утворюється *гіпербола*.

Якщо площина проходить через вершину конуса, то у перерізі утворюється точка, пряма або пара прямих.

Питання для самоперевірки

1. Як можна визначити тип лінії, заданої загальним рівнянням другого порядку?
2. Яка лінія називається кривою другого порядку? Скільки типів кривих другого порядку існує? Як визначається тип кривої за ексцентриситетом?
3. Яка система координат називається канонічною?
4. Намалюйте еліпси, задані рівняннями $4x^2 + 9y^2 = 36$ і $9x^2 + y^2 = 36$. Знайдіть їх фокуси, ексцентриситети й директриси.
5. Намалюйте гіперболи, задані рівняннями $4x^2 - 9y^2 = 36$ і $-4x^2 + 9y^2 = 36$. Знайдіть їх фокуси, ексцентриситети, директриси й асимптоти.
6. Намалюйте параболи $y^2 = 4x$, $y^2 = -4x$, $x^2 = 4y$, $x^2 = -4y$. Знайдіть їх фокуси й директриси.

Задачі

1. Знайдіть геометричне місце точок, для яких сума відстаней до двох даних точок $F_1(-3; 0)$ та $F_2(3; 0)$ є величиною сталою, яка дорівнює 10.
2. Знайдіть геометричне місце точок, для яких відношення відстаней до даної точки $F(-4; 0)$ і даної прямої $4x + 25 = 0$ дорівнює 4/5.

3. Знайдіть геометричне місце точок, які розташовані від точки $A(3; 0)$ удвічі ближче, ніж від прямої $x = 12$.
4. Складіть рівняння кривої, сума квадратів відстаней від кожної точки якої до точок $M_1(-3; 0)$ та $M_2(3; 0)$ дорівнює 50.
5. Складіть рівняння еліпса, фокуси якого розташовані на осі абсцис симетрично відносно початку координат, знаючи, що:
   1) його півосі дорівнюють 3 та 2;
   2) його велика вісь дорівнює 10, а відстань між фокусами $2c = 8$;
   3) його мала вісь дорівнює 20, а відстань між фокусами $2c = 10$;
   4) відстань між фокусами $2c = 6$ та ексцентриситет $\varepsilon = 3/5$;
   5) його велика вісь дорівнює 20, а ексцентриситет $\varepsilon = 3/5$.
6. Знайти геометричне місце точок, для яких модуль різниці відстаней від двох даних точок $F_1(-5; 0)$ і $F_2(5; 0)$ є величиною сталою, яка дорівнює 6.
7. Складіть рівняння геометричного місця точок, для яких відношення відстаней до даної точки $F(-5; 0)$ і даної прямої $5x + 16 = 0$ дорівнює 5/4.
8. Складіть рівняння геометричного місця точок, для яких відстань від точки $F(0; 6)$ у півтора разу більша за відстань від прямої $y = 8/3$.
9. Знайдіть геометричне місце точок, рівновіддалених від точки $M(2; 0)$ та від кола $x^2 + 4x + y^2 = 0$.
10. Складіть рівняння гіперболи, фокуси якої розташовані на осі абсцис, симетрично відносно початку координат, якщо:
    1) відстань між фокусами $2c = 6$, ексцентриситет $\varepsilon = 3/2$;
    2) рівняння асимптот $y = \pm 4x/3$ та відстань між фокусами $2c = 20$;
    3) відстань між директрисами 68/3, відстань між фокусами $2c = 26$;
    4) ексцентриситет $\varepsilon = 3/2$ та відстань між директрисами дорівнює 8/3.
11. Дано гіперболу $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$:
    1) знайдіть координати фокусів і ексцентриситет;
    2) напишіть рівняння асимптот і директрис;
    3) складіть рівняння спряженої гіперболи та обчисліть її ексцентриситет.
12. Дано гіперболу $16x^2 - 9y^2 = 144$. Знайдіть півосі a та b, фокуси, ексцентриситет, рівняння асимптот та директрис.
13. Знайдіть геометричне місце точок, для яких відстань до даної точки $F(3; 0)$ дорівнює відстані до даної прямої $x + 3 = 0$.
14. Складіть рівняння геометричного місця точок, відстані яких до даного кола $(x - 5)^2 + y^2 = 9$ і даної прямої $x + 2 = 0$ рівні між собою.

15. Знайдіть геометричне місце центрів кіл, які дотикаються до осі Ox і проходять через точку (3; 4).
16. Знайдіть геометричне місце точок, для кожної з яких відстані від осі Ox та від точки $F(2; 2)$ рівні.
17. Визначте параметр p та розташування відносно координатних осей таких парабол:
    1) $y^2 = 6x$;
    2) $x^2 = 5y$;
    3) $y^2 = -4x$;
    4) $x^2 = -y$.
18. Складіть рівняння параболи, вершина якої знаходиться у початку координат, знаючи, що парабола розташована симетрично:
    1) відносно осі Ox і проходить через точку $A(9; 6)$;
    2) відносно осі Oy і проходить через точку $C(1; 1)$.

5. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ У ПРОСТОРІ

Нижче розглядаються пряма й площина у просторі R^3, а також алгебраїчні поверхні другого порядку.

5.1. ПЛОЩИНА У ПРОСТОРІ R^3

Площина в просторі фіксується, якщо відомі:
1) точка на площині й вектор, перпендикулярний до площини;
2) три точки на площині, що не належать одній прямій.

5.1.1. Векторне й загальне рівняння площини

Нехай відомі вектор нормалі до площини $\vec{n} = (A, B, C)$ і фіксована точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Виберемо на площині довільну точку $M(x, y, z)$ і позначимо $\vec{r}_0$, $\vec{r}$ – радіуси-вектори точок $M_0(x_0, y_0, z_0)$ і $M(x, y, z)$ (рис. 5.1).

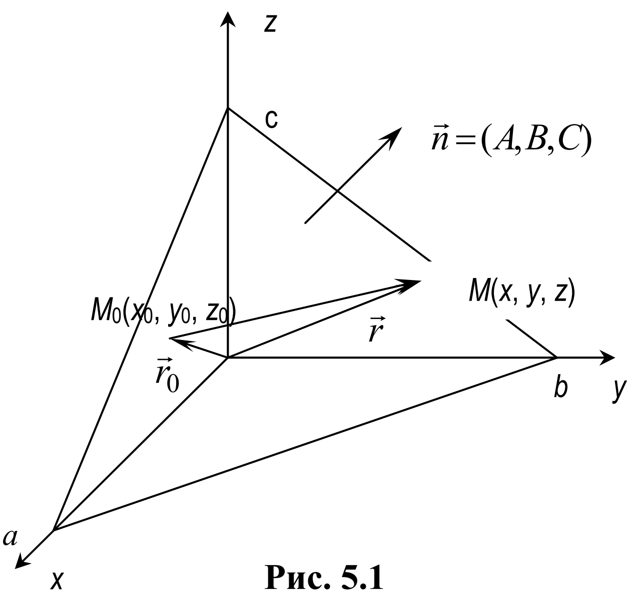


Рис. 5.1

З умови перпендикулярності векторів $\vec{n}$ і $\overrightarrow{M_0M} = \vec{r} - \vec{r}_0$ знайдемо *векторне* (5.1) і *скалярне* (5.2) *рівняння площини*, що проходить через задану точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно до вектора $\vec{n} = (A, B, C)$:

$$\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0, \tag{5.1}$$

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \tag{5.2}$$

З рівняння (5.2) одержимо *загальне рівняння* площини

$$Ax + By + Cz + D = 0. \tag{5.3}$$

Окремі випадки рівняння (5.3):
1) $Ax + By + Cz = 0$ – рівняння площини, що проходить через початок координат;
2) $Ax + By + D = 0$ – рівняння площини, паралельної осі Oz;

3) $Ax + By = 0$ – рівняння площини, що проходить через вісь Oz;
4) $Ax + D = 0$ або $x = -D/A = x_0$ – рівняння площини, паралельної площині yOz;
5) $x = 0$ – рівняння площини yOz.

5.1.2. Рівняння площини, що проходить через три задані точки. Рівняння площини у відрізках на осях

Нехай на площині дані три фіксовані точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$, що не лежать на одній прямій. Виберемо на площині довільну точку $M(x, y, z)$ і з умови компланарності векторів $\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1M_3}$ (рис. 5.2) отримаємо рівняння площини, що проходить через три задані точки:

$$\left(\overrightarrow{M_1M} \times \overrightarrow{M_1M_2}\right) \cdot \overrightarrow{M_1M_3} = \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (5.4)$$

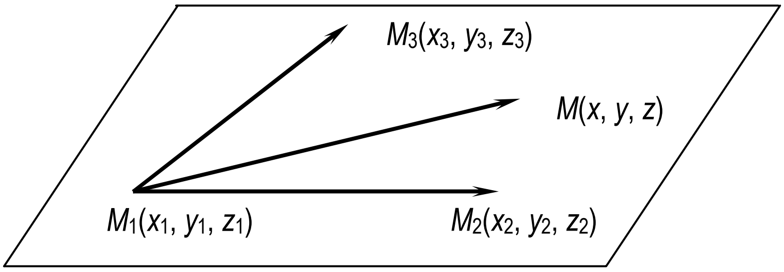


Рис. 5.2

Нехай площина відтинає на координатних осях Ox, Oy, Oz не рівні нулю відрізки a, b, c (див. рис. 5.1). Підставляючи в рівняння (5.4) координати точок перетину площини з осями координат $M_1(a, 0, 0)$, $M_2(0, b, 0)$, $M_3(0, 0, c)$, отримаємо *рівняння площини у відрізках на осях*:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \qquad (5.5)$$

5.1.3. Нормальне рівняння площини

Нехай p – відстань від початку координат до площини, $\vec{n}_0 =$ (cosα, cosβ, cosγ) – одиничний вектор нормалі, $M(x, y, z)$ – змінна точка площини. Тоді проекція вектора $\overrightarrow{OM}$ на вектор нормалі $\vec{n}$ дорівнює p (рис. 5.3):

$$p = Пр_{\vec{n}_0} \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM} \cdot \vec{n}_0 = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma.$$

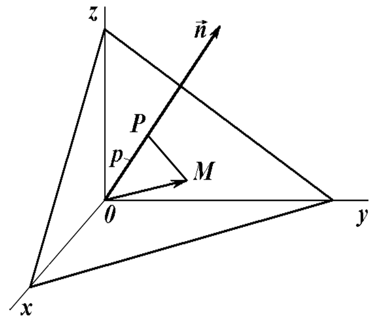


Рис. 5.3

Звідси одержуємо нормальне рівняння площини:

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0. \qquad (5.6)$$

Ознаки нормального рівняння:

1) вільний член від'ємний або дорівнює нулю;
2) сума квадратів коефіцієнтів при x, y, z дорівнює 1.

Зведення загального рівняння площини до нормального вигляду

Для того, щоб звести загальне рівняння площини (5.3) до нормального вигляду (5.6), необхідно поділити всі його члени на $\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$ (знак кореня обирається протилежним знаку вільного члена D):

$$\frac{Ax + By + Cz + D}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0. \qquad (5.7)$$

5.1.4. Відхилення та відстань точки від площини

Відхилення d точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ від площини (рис. 5.4), заданої нормальним рівнянням (5.6), обчислюється за формулою:

$$d = Пр_{\vec{n}}\overrightarrow{OM_1} - p = x_1\cos\alpha + y_1\cos\beta + z_1\cos\gamma - p. \qquad (5.8)$$

Якщо точка й початок координат лежать по один бік від площини, то $d < 0$, а якщо по різні боки, то $d > 0$.

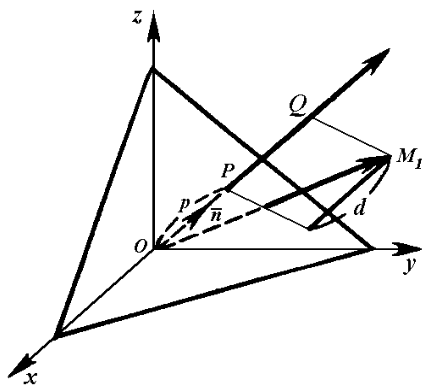


Рис. 5.4

Відстань від точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ до площини дорівнює $|d|$ і обчислюється за формулами:

- площина задана нормальним рівнянням (5.6):

$$|d| = |x_1\cos\alpha + y_1\cos\beta + z_1\cos\gamma - p|; \qquad (5.9)$$

- площина задана загальним рівнянням (5.3):

$$|d| = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \qquad (5.10)$$

5.1.5. Кут між двома площинами. Умови паралельності та перпендикулярності двох площин

Нехай задані дві площини:

$$\begin{aligned} A_1x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \Rightarrow \vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1); \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \Rightarrow \vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2). \end{aligned} \qquad (5.11)$$

Двогранний кут між площинами дорівнює куту між їх нормальними векторами. Косинус *гострого* кута φ між площинами обчислюється за формулою:

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \qquad (5.12)$$

Умови паралельності й перпендикулярності площин одержимо з умов колінеарності й перпендикулярності векторів нормалей до цих площин.

Умови паралельності площин, заданих загальними рівняннями (5.11):

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}. \qquad (5.13)$$

Умова перпендикулярності площин:

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0. \qquad (5.14)$$

5.2. ПРЯМА В ПРОСТОРІ R^3

Пряма в просторі фіксується, якщо відомі:
1) точка на прямій і вектор, паралельний прямій;
2) дві точки на прямій;
3) дві непаралельні площини, що містять дану пряму.

5.2.1. Рівняння прямої, що проходить через задану точку паралельно заданому вектору

Нехай пряма проходить через задану точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ паралельно заданому вектору $\vec{a} = (l, m, n)$. Вектор $\vec{a}$ називається *напрямним вектором* прямої. Виберемо на прямій довільну точку $M(x, y, z)$ і запишемо умову колінеарності векторів $\overrightarrow{M_0M} = \vec{r} - \vec{r}_0 = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ і $\vec{a}$ (рис. 5.5):

$$\vec{r} - \vec{r}_0 = t\vec{a}, \quad -\infty < t < +\infty, \qquad (5.15)$$

де t – скалярний множник (параметр). Рівняння (5.15) називається *векторним рівнянням прямої* у просторі.

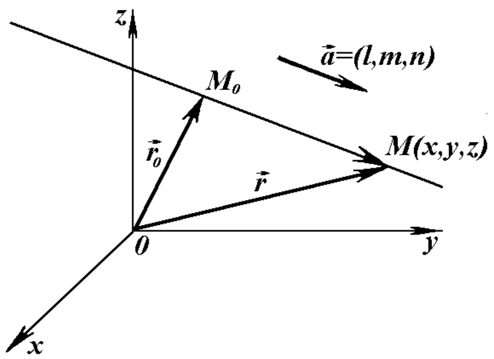


Рис. 5.5

З рівняння (5.15) одержимо:

1) параметричні рівняння прямої

$$\begin{cases} x - x_0 = lt, \\ y - y_0 = mt, \quad -\infty < t < +\infty; \\ z - z_0 = nt, \end{cases} \quad (5.16)$$

2) канонічні рівняння прямої:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}. \quad (5.17)$$

5.2.2. Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки

Нехай пряма проходить через дві задані точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Напрямним вектором прямої оберемо вектор $\vec{a} = \overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$. Тоді з (5.17) отримаємо рівняння прямої, що проходить через дві задані точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \quad (5.18)$$

Зауваження. У рівняннях (5.17), (5.18) одна або дві координати напрямного вектора можуть дорівнювати нулю. Це означає, що пряма перпендикулярна до відповідної осі координат або до координатної площини.

Приклад 5.1. Рівняння $\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{0} = \frac{z}{5}$ задають пряму, що проходить через точку $M_0(1; -3; 0)$ паралельно вектору $\vec{a} = (2; 0; 5)$.

Приклад 5.2. Рівняння $\frac{x+1}{0} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{0}$ задають пряму, що проходить через точку $M_0(-1; -2; 3)$ паралельно вектору $\vec{a} = (0; 1; 0)$ (паралельно осі Oy).

5.2.3. Пряма як лінія перетину двох площин. Загальні рівняння прямої

Пряму у просторі можна задати як лінію перетину двох площин. Розглянемо систему, складену із рівнянь двох площин:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \quad (5.19)$$

Якщо площини непаралельні (координати векторів нормалей $\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$, $\vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ непропорційні), то систему рівнянь (5.19) називають *загальними рівняннями прямої.*

Для того щоб перейти від загальних рівнянь (5.19) до канонічних рівнянь прямої (5.17), необхідно знайти точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, що належить прямій і напрямний вектор $\vec{a}$ прямої, або знайти дві точки на прямій і скористатися рівняннями (5.18). Для знаходження точки на прямій можна довільно задати одну із її координат, наприклад, задати $z = z_0$, а дві інші координати x_0, y_0 знайти із системи (5.19). Напрямний вектор $\vec{a}$ повинен бути перпендикулярним до векторів нормалей площин $\vec{n}_1, \vec{n}_2$, отже, можна прийняти $\vec{a} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$.

Приклад 5.3. Пряма задана рівняннями

$$\begin{cases} x + 2y - z + 1 = 0, \\ -x + y + 2z - 1 = 0. \end{cases} \tag{5.20}$$

Потрібно записати її канонічні рівняння.

► Із системи рівнянь (5.20) при $z = z_0 = 1$ знаходимо $x_0 = 2/3$, $y_0 = -1/3$. Знаходимо напрямний вектор прямої і записуємо її канонічні рівняння:

$$\vec{a} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 5\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}, \qquad \frac{x - 2/3}{5} = \frac{y + 1/3}{1} = \frac{z - 1}{3}. \ ■$$

5.2.4. Кут між двома прямими в просторі. Умови паралельності й перпендикулярності двох прямих

Нехай дані дві прямі з напрямними векторами $\vec{a}_1 = (l_1, m_1, n_1)$, $\vec{a}_2 = (l_2, m_2, n_2)$. Косинус гострого кута φ між прямими:

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2|}{|\vec{a}_1| \cdot |\vec{a}_2|} = \frac{|l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2|}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2}\sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}. \tag{5.21}$$

Умови паралельності й перпендикулярності двох прямих одержимо з умов колінеарності й перпендикулярності їх напрямних векторів.

Умови паралельності прямих:

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}. \tag{5.22}$$

Умова перпендикулярності прямих:

$$l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0. \tag{5.23}$$

5.2.5. Кут між прямою та площиною. Умови паралельності й перпендикулярності прямої і площини

Нехай дані пряма

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n} \quad \Rightarrow \quad \vec{a}=(l,m,n) \qquad (5.24)$$

і площина

$$Ax+By+Cz+D=0 \quad \Rightarrow \quad \vec{n}=(A,B,C). \qquad (5.25)$$

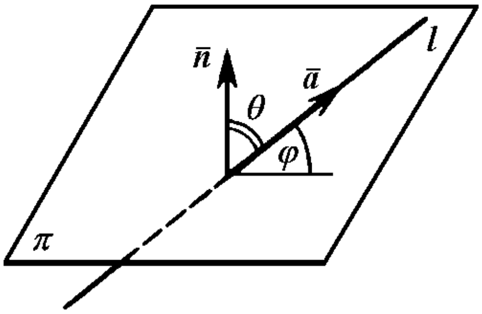


Рис. 5.6

Синус гострого кута φ між прямою й площиною дорівнює косинусу кута θ між напрямним вектором $\vec{a}$ прямої і вектором нормалі $\vec{n}$ до площини (рис. 5.6):

$$\sin\varphi=\cos\theta=\frac{|\vec{n}\cdot\vec{a}|}{|\vec{n}|\cdot|\vec{a}|}=$$

$$=\frac{|Al+Bm+Cn|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{l^2+m^2+n^2}}. \qquad (5.26)$$

Умови паралельності й перпендикулярності прямої і площини

Умова паралельності прямої (5.24) і площини (5.25):

$$Al+Bm+Cn=0. \qquad (5.27)$$

Умови перпендикулярності прямої (5.24) і площини (5.25):

$$\frac{A}{l}=\frac{B}{m}=\frac{C}{n}. \qquad (5.28)$$

Зауваження. Щоб знайти точку перетину прямої (5.24) з площиною (5.25), необхідно розв'язати систему, складену із рівнянь (5.24), (5.25).

Приклад 5.4. Знайти точку перетину прямої $\frac{x-12}{4}=\frac{y-9}{3}=\frac{z-1}{1}$ з площиною $3x+5y-z-2=0$.

► Перетворимо канонічні рівняння прямої у параметричні $x=4t+12,\ y=3t+9,\ z=t+1$ і підставимо їх у рівняння площини:

$$3(4t+12)+5(3t+9)-(t+1)-2=0 \quad \Rightarrow \quad t=3.$$

Координати точки перетину прямої з площиною:

$$x=4t+12=24,\ y=3t+9=18,\ z=t+1=4. \ ■$$

Питання для самоперевірки

1. Запишіть рівняння і поясніть зміст усіх величин у них:
   - векторне й загальне рівняння площини;
   - рівняння площини, що проходить через три задані точки;
   - рівняння площини у відрізках на осях.
2. Як знайти кут між двома площинами?
3. Сформулюйте умови паралельності й перпендикулярності 2-х площин.
4. Як обчислити відстань від точки до площини?
5. Запишіть рівняння прямої у R^3 і поясніть зміст усіх величин у цих рівняннях:
   - векторне рівняння прямої;
   - канонічні рівняння прямої;
   - параметричні рівняння прямої;
   - рівняння прямої, що проходить через дві задані точки;
   - рівняння прямої як лінії перетину 2-х площин.
6. Як знайти кут між двома прямими у просторі R^3?
7. Сформулюйте умови паралельності й перпендикулярності 2-х прямих у просторі R^3.
8. Як знайти кут між прямою й площиною?
9. Запишіть умови паралельності й перпендикулярності прямої та площини.
10. Що являє собою рівняння $2x + 3y = 6$:
    а) на площині xOy;
    б) у просторі?
    Зробіть креслення.
11. Задані загальні рівняння двох площин. За якої умови ці площини перетинатимуться?
12. Задані канонічні рівняння двох непаралельних прямих у просторі. Необхідно скласти канонічні рівняння прямої, перпендикулярної одночасно до двох даних прямих.
13. Задані канонічні рівняння двох прямих у просторі. За якої умови ці прямі перетинатимуться?
14. Складіть рівняння площини, що проходить через дану пряму перпендикулярно до даної площини.

5.3. АЛГЕБРАЇЧНІ ПОВЕРХНІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

5.3.1. Загальне рівняння поверхні другого порядку

Поверхнею другого порядку називається множина точок простору R^3, координати котрих задовольняють алгебраїчне рівняння другого степеня

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Eyz + 2Fxz + 2Gx + 2Hy + 2Kz + L = 0, \quad (5.29)$$

де хоча б один з коефіцієнтів A, B, C, D, E, F відмінний від нуля.

Це рівняння може визначати сферу, еліпсоїд, гіперболоїд (однопорожнинний або двопорожнинний), параболоїд (еліптичний або гіперболічний), конус, циліндр (еліптичний, гіперболічний або параболічний), а також вироджену поверхню другого порядку (порожню множину, точку, площину, пару площин).

За допомогою паралельного переносу й повороту системи координат рівняння (5.29) можна звести до канонічного вигляду.

Форму та розташування поверхонь вивчають методом перерізів. Для цього перетинають поверхню площинами, паралельними координатним площинам, і визначають тип кривої, що виходить при цьому перетині.

5.3.2. Еліпсоїд. Сфера

Канонічне рівняння еліпсоїда з півосями a, b, c:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad (a, b, c > 0). \quad (5.30)$$

Поверхня симетрична відносно координатних осей і координатних площин. Центр симетрії знаходиться у початку координат.

Для з'ясування форми поверхні використовуємо метод перерізів. Розсічемо поверхню площиною $x = h$ (рис. 5.7): $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{h^2}{a^2}$.

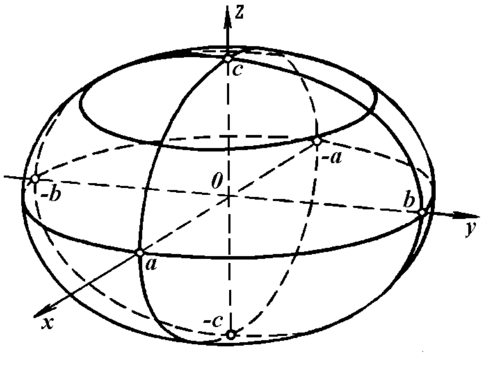


Рис. 5.7. Еліпсоїд

1) при $|h| < a$ маємо $1 - h^2 / a^2 = H^2 > 0$ – у перерізі вийде еліпс із півосями Hb, Hc;
2) при $h = \pm a$ одержимо дві точки $(a, 0, 0)$, $(-a, 0, 0)$;
3) при $|h| > a$ вираз $1 - h^2 / a^2 < 0$ – площина й поверхня не перетинаються.

При $a = b = c = R$ рівняння (5.30) перетворюється в рівняння сфери з центром у початку координат і радіусом R:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2. \qquad (5.31)$$

Рівняння сфери з центром у точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$ і радіусом $R > 0$ має вигляд:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2. \qquad (5.32)$$

5.3.3. Однопорожнинний гіперболоїд

Канонічне рівняння однопорожнинного гіперболоїда

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad (a, b, c > 0). \qquad (5.33)$$

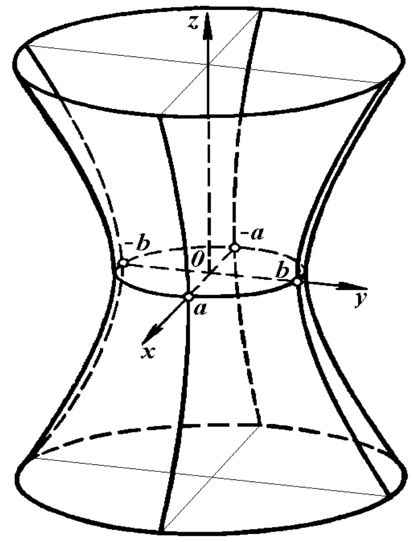


Рис. 5.8. Однопорожнинний гіперболоїд

Поверхня симетрична відносно координатних площин xOz і yOz. Початок координат є центром симетрії (рис. 5.8).

Перерізи поверхні (5.33) площинами $x = 0$, $y = 0$ є гіперболами:

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Переріз поверхні площиною $z = h$ є еліпсом

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{h^2}{c^2} = H^2 \Rightarrow \frac{x^2}{(aH)^2} + \frac{y^2}{(bH)^2} = 1.$$

Однопорожнинний гіперболоїд належить до лінійчатих поверхонь. Він може бути побудований за допомогою двох систем прямих ліній.

5.3.4. Двопорожнинний гіперболоїд

Канонічне рівняння двопорожнинного гіперболоїда:

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad (a, b, c > 0). \qquad (5.34)$$

Поверхня симетрична відносно координатних осей і координатних площин. Центр симетрії знаходиться в початку координат (рис. 5.9).

Перерізи поверхні площинами $x = 0$ і $y = 0$ є гіперболами:

$$-\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (b, c > 0); \qquad -\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (a, c > 0).$$

Розглянемо перерізи поверхні площиною $z = h$: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{h^2}{c^2}-1$.

1) $|h| < c$ – переріз є порожньою множиною;
2) $|h| = c$ – у перерізі маємо дві точки: $(0, 0, c)$, $(0, 0, -c)$;
3) $|h| > c$ – перерізи є еліпсами: $\frac{x^2}{(aH)^2}+\frac{y^2}{(bH)^2}=1 \quad (H^2=\frac{h^2}{c^2}-1)$.

5.3.5. Конус другого порядку

Конічною поверхнею називається поверхня, яку описує пряма (твірна), що проходить через фіксовану точку S (вершину конуса) і змінну точку M, яка рухається уздовж кривої (напрямної конічної поверхні). Якщо напрямною конічної поверхні є крива другого порядку, то поверхня називається конусом другого порядку.

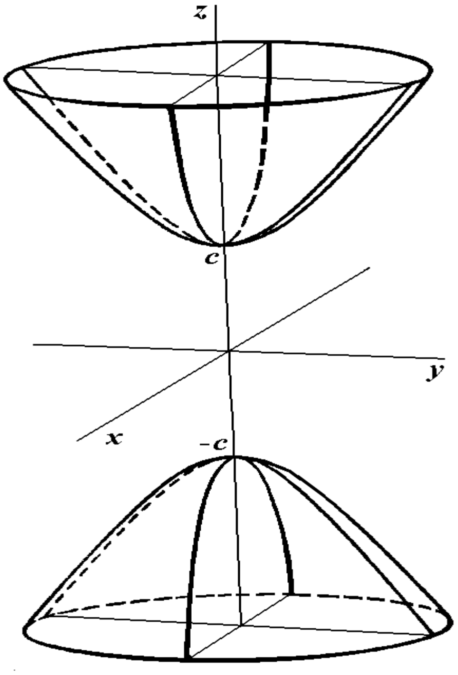


Рис. 5.9. Двопорожнинний гіперболоїд

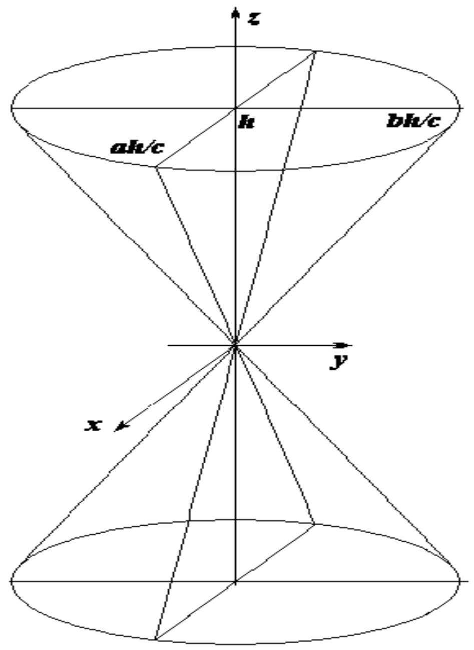


Рис. 5.10. Еліптичний конус другого порядку

Канонічне рівняння еліптичного конуса другого порядку:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0 \qquad (a, b, c > 0). \qquad (5.35)$$

Поверхня симетрична відносно координатних осей і координатних площин. Центр симетрії знаходиться в початку координат (рис. 5.10).

Перерізи конуса площинами $x = 0$ і $y = 0$ є прямими, що перетинаються: $y = \pm bz / c$, $x = \pm az / c$.

Перерізи поверхні площинами $z = h$ є еліпсами:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{h^2}{c^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{(aH)^2}+\frac{y^2}{(bH)^2}=1 \qquad (H^2=\frac{h^2}{c^2}).$$

Рівняння еліптичних конічних поверхонь другого порядку, осі яких співпадають з осями Ox, Oy, мають вигляд:

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0 \quad (a,b,c>0), \quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0 \quad (a,b,c>0). \quad (5.36)$$

5.3.6. Еліптичний параболоїд

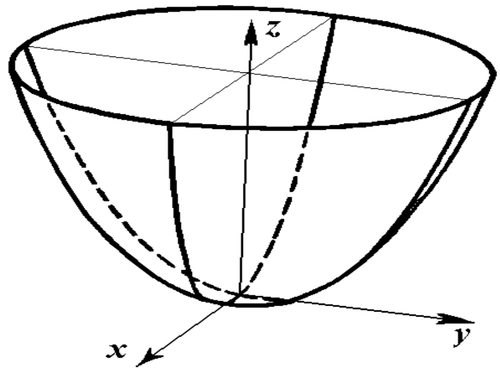


Рис. 5.11. Еліптичний параболоїд

Канонічне рівняння еліптичного параболоїда:

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z \qquad (p,q>0). \quad (5.37)$$

Поверхня симетрична відносно координатних площин xOz, yOz і вісі Oz (рис. 5.11).

Перерізи поверхні площинами $x = 0$, $y = 0$ є параболами:

$$y^2 = 2qz, \quad x^2 = 2pz.$$

Перерізи поверхні площинами $z = h > 0$ є еліпсами:

$$\frac{x^2}{\left(\sqrt{2ph}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\sqrt{2qh}\right)^2}=1.$$

5.3.7. Гіперболічний параболоїд

Рівняння гіперболічного параболоїда:

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z \qquad (p,q>0). \quad (5.38)$$

Поверхня симетрична відносно координатних площин xOz, yOz (рис. 5.12).

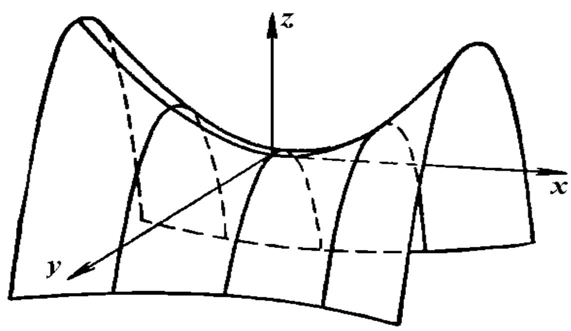


Рис. 5.12. Гіперболічний параболоїд

1. У перерізі поверхні площиною $x = 0$ одержуємо параболу: $y^2 = -2qz$. Вітки параболи направлені вниз.
2. У перерізі поверхні площиною $y = 0$ одержуємо параболу: $x^2 = 2pz$. Вітки параболи направлені нагору.
3. У перерізі поверхні площиною $z = h$ одержуємо гіперболу: $\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2h$. При $h > 0$ вітки гіперболи перетинають вісь Ox, а при $h < 0$ – вісь Oy. При $h = 0$ одержуємо дві прямі, що перетинаються у початку координат.

5.3.8. Циліндри

Циліндричною поверхнею називається поверхня, описана прямою (твірною), що рухається паралельно самій собі вздовж заданої лінії (напрямної циліндра). Якщо напрямна циліндра лежить у площині xOy, а твірна паралельна осі Oz, то рівняння циліндра має вигляд: $F(x, y) = 0$ або $y = f(x)$. Аналогічно, $F(x, z) = 0$ або $z = f(x)$ – рівняння циліндричної поверхні, твірна якої паралельна осі Oy; $F(y, z) = 0$ або $z = f(y)$ – рівняння циліндричної поверхні, твірна якої паралельна осі Ox.

Якщо напрямною циліндричної поверхні є крива другого порядку, то поверхню називають циліндричною поверхнею другого порядку.

За типом кривої, що виходить у перерізі циліндра з площиною, перпендикулярної твірній, розрізняють такі циліндри другого порядку:

$x^2 + y^2 = R^2$ – круговий, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ – еліптичний,

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ – гіперболічний, $x^2 = 2py$ – параболічний.

Аналогічно можна записати рівняння циліндричних поверхонь другого порядку, твірна яких паралельна осям Ox, Oy.

Питання для самоперевірки

1. Яка поверхня називається поверхнею другого порядку?
2. Скільки типів поверхонь другого порядку існує?
3. Як можна виявити форму та розташування поверхні другого порядку?
4. Запишіть канонічні рівняння:
   - сфери;
   - еліпсоїда;
   - однопорожнинного гіперболоїда;
   - двопорожнинного гіперболоїда;

- конуса другого порядку;
- еліптичного параболоїда;
- гіперболічного параболоїда;
- циліндрів (кругового, еліптичного, гіперболічного, параболічного).

5. Нехай вісь Ox є віссю симетрії поверхні. Запишіть канонічні рівняння:
   - однопорожнинного гіперболоїда;
   - двопорожнинного гіперболоїда;
   - конуса другого порядку;
   - еліптичного параболоїда.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Валєєв К. Г. Вища математика [Текст] : навч. посібник : у 2-х ч. / К. Г. Валєєв, І. А. Джалладова. – К. : КНЕУ, 2001. – Ч. 1. – 546 с.
2. Валєєв К. Г. Математичний практикум [Текст] / К. Г. Валєєв, І. А. Джалладова : навч. посібник. – К. : КНЕУ, 2004. – 682 с.
3. Высшая математика для экономистов [Текст] / Под ред. проф. Н. Ш. Кремера. – М. : Банки и биржи, ЮНИТИ, 1997. – 439 с.
4. Гетманцев В. Д. Лінійна алгебра і лінійне програмування [Текст] / В. Д. Гетманцев : навч. посібник. – К. : Либідь, 2001. – 256 с.
5. Дюженкова Л. І. Вища математика. Приклади і задачі [Текст] / Л. І. Дюженкова, О. Ю. Дюженкова, Г. О. Михалін : посібник. – К.: Академія, 2002. – 624 с.
6. Збірник задач з лінійної алгебри та аналітичної геометрії [Текст] / В. І. Діскант, Л. Р. Береза, О. П. Грижук, Л. М. Захаренко. – К. : Вища шк., 2001. – 303 с.
7. Збірник задач з лінійної алгебри та аналітичної геометрії [Текст] / За редакцією Ю. К. Рудавського. – Львів : Бескид БіТ, 2002. – 256 с.
8. Клетеник Д. В. Сборник задач по аналитической геометрии [Текст] / Д. В. Клетеник. – М. : Наука, 1972. – 240 с.
9. Лиман Ф. М. Вища математика [Текст] / Ф. М. Лиман, С. В. Петренко, О. О. Одинцова : навч. посібник. – Суми : СумДПУ ім. А.С. Макаренка, 2002. – Ч. 1.– 224 с.
10. Навієв Е. Х. Лінійна алгебра та аналітична геометрія [Текст] / Е. Х. Навієв, В. М. Владіміров, О. А. Миронець : навч. посібник. – К. : Либідь, 1997. – 152 с.
11. Овчинников П. Ф. Высшая математика [Текст] / П. Ф. Овчинников, Ф. П. Яремчук, В. М. Михайленко. – К. : Вища шк., Головное изд-во, 1987. – 552 с.
12. Пастушенко С. М. Вища математика. Основні поняття, формули, зразки розв’язування задач [Текст] / С. М. Пастушенко, Ю. П. Підченко : навч. посібник. – К. : Діал, 2000. – 160 с.
13. Рудавський Ю. К. Лінійна алгебра та аналітична геометрія [Текст] : навч. підручник / Ю. К. Рудавський, П. П. Костробій, Х. П. Луник, Д. В. Уханська. – Львів : Бескид БіТ, 2002. – 262 с.
14. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике [Текст] : учеб. пособие : в 3-х ч. / Под общей редакцией А. П. Рябушко. – Минск : Вышэйшая школа, 1990. – Ч. 1. – 270 с.

Навчальне видання

Долгіх Володимир Миколайович

ВИЩА МАТЕМАТИКА ДЛЯ ЕКОНОМІСТІВ

Частина 1
Лінійна алгебра та аналітична геометрія

Навчальний посібник

У 4-х частинах

Редактор *І.О. Кругляк*

Комп'ютерна верстка *Н.А. Височанська*

Підписано до друку 10.09.2008. Формат 60х90/16. Гарнітура Times.
Обл.-вид. арк. 3,95. Умов. друк. арк. 6,63. Тираж 105 пр. Зам. № 818

Державний вищий навчальний заклад
"Українська академія банківської справи Національного банку України"
40030, м. Суми, вул. Петропавлівська, 57
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру видавців, виготівників
і розповсюджувачів видавничої продукції: серія ДК, № 3160 від 10.04.2008

Надруковано на обладнанні Державного вищого навчального закладу
"Українська академія банківської справи Національного банку України"
40030, м. Суми, вул. Петропавлівська, 57