**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ,
МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ**

**ХАРКІВСЬКА НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ
МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА**

А. В. Якунін

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ З ДИСЦИПЛІНИ

# ВИЩА
# МАТЕМАТИКА II

(*для практичних занять та самостійної роботи студентів заочної форми навчання за напрямом підготовки 6.030509 "Облік і аудит"*)

**Харків
ХНАМГ
2012**

**Методичні вказівки з дисципліни “Вища математика II”** (для практичних занять та самостійної роботи студентів заочної форми навчання за напрямом підготовки 6.030509 “Облік і аудит”) / Харк. нац. акад. міськ. госп-ва; уклад.: А. В. Якунін. − Х.: ХНАМГ, 2012. − 107 с.

Викладені короткі теоретичні відомості з теорії функціональних рядів, інтегрального числення функцій багатьох змінних та чисельних методів. Наведені зразки розв’язання типових задач, а також завдання для практичних аудиторних занять та модульної контрольної роботи.

Укладач: *А. В. Якунін*

Рецензент: *к. ф.-м. н., доц. О. С. Архіпова*

*Затверджено на засіданні кафедри вищої математики, протокол № 3 від 26.10.2011 р.*

## Передмова

Методичні вказівки з навчальної дисципліни “Вища математика ІІ” призначені для студентів заочної форми навчання за напрямом підготовки 6.030509 “Облік і аудит”. Крім загальних рекомендацій щодо роботи над засвоєнням курсу, вони містять короткі теоретичні відомості з теорії степеневих рядів і рядів Фур’є, кратних і криволінійних інтегралів, чисельних методів. Для сприяння в опануванні практичної частини даного курсу наведені приклади розв’язання типових задач, які не тільки ілюструють відповідні теоретичні питання програми, але й служать зразками розв’язання й оформлення задач модульної контрольної роботи. Методичні вказівки доповнено завданнями для практичних аудиторних занять та модульної контрольної роботи. У кінці наведено орієнтовний список літератури.

Критичні зауваження і пропозиції щодо запропонованих методичних вказівок надсилайте на кафедру вищої математики за адресою:

61002, Україна, Харків, вул. Революції, 12, ХНАМГ,
каф. ВМ;
e-mail: vm_kolosov@ksame.kharkov.ua

## Загальні рекомендації

При заочній формі основним видом навчання служить самостійна робота студента над навчальним матеріалом, що полягає в опрацюванні теоретичних положень та їх застосувань за підручниками та посібниками, розв’язуванні різнопланових задач, що розкривають суть і застосування теоретичних відомостей, самоконтролі ступеня засвоєння понять, законів, правил і алгоритмів, виконанні контрольних робіт, здійсненні їх аналізу та, при необхідності, їх доробка після рецензування. Завершальним етапом вивчення курсу “Вища математика II” є захист контрольної роботи і складання заліку відповідно до навчального плану.

Робота з навчальною літературою. Вивчаючи навчальний матеріал за книгою, треба проводити на папері всі необхідні обчислення (також і ті, що для стислості пропущені у книзі) і відтворювати всі наведені креслення. Переходити до наступного питання слід тільки після вірного розуміння попереднього,

Особливу увагу треба зосереджувати на визначеннях основних понять. Заочник повинен ретельно розбирати приклади, що пояснюють такі означення і знаходити аналогічні приклади самостійно.

При вивчені теорем корисно складати схеми їх доведення. Вірному розумінню багатьох теорем сприяє розгляд прикладів математичних об’єктів, для яких справджуються і не справджуються умови теореми.

Вивчаючи навчальний матеріал за книгою, треба вести конспект, в який рекомендується записувати означення, формулювання теорем, формули, рівняння і т.п. Поля конспекту служать для поміток. На них записують питання, призначені для одержання письмової чи усної консультації викладача.

Записи в конспекті повинні вестись чисто, акуратно і розміщуватися в певному порядку. Якісне зовнішнє оформлення конспекту не тільки привчає до необхідного в роботі порядку, а й дозволяє уникнути численних помилок, що виникають через неохайність і безладність записів.

Результуючі формули рекомендується виділяти певним тоном чи рамкою, щоб при перечитуванні конспекту вони краще запам’ятовувалися. Багатьом заочникам допомагає складання таблиць найважливіших і часто вживаних формул, що можуть слугувати довідниками з відповідних розділів.

Розв’язування задач. Читання навчальних книг повинно супроводжуватися розв’язуванням задач, для чого рекомендується вести спеціальний зошит.

Розв’язуючи задачу, треба обґрунтовувати кожний етап, спираючись на теоретичні положення. Коли проглядається декілька шляхів розв’язування, то треба порівняти їх і вибрати найкращий. Корисно перед початком розрахунків скласти короткий план.

Розв’язання задач і прикладів треба записувати докладно, в строгому порядку, відділяючи допоміжні обчислення від основних розрахунків. Креслення можна виконувати від руки, проте акуратно й у відповідності з заданими умовами. Розв’язування кожної задачі треба доводити до відповіді, що вимагається в її умові, по можливості в загальному вигляді. Потім в одержану формулу підставити конкретні числові дані, якщо вони вказані. У проміжних обчисленнях не треба вводити наближенні значення коренів, логарифмів і т.п. Одержану відповідь треба перевіряти способами, що випливають з суті даної задачі. При можливості розв’язати задачу декількома способами корисно порівняти одержані результати.

Розв’язування задач певного типу треба продовжувати до набуття твердих навичок.

Самоперевірка. Після вивчення певного змістового модулю за книгами і розв’язування достатньої кількості задач рекомендується відтворити по пам’яті означення, формулювання теорем запис формул і т.п. При необхідності треба ще раз розібратися з начальним матеріалом, розв’язати ряд задач.

Інколи недостатність засвоєння того чи іншого питання стає очевидною лише при вивченні подальших розділів курсу. Тоді треба повернутися назад і повторити погано засвоєний матеріал.

Важливим критерієм засвоєння теоретичних положень є вміння розв’язувати задачі. Проте вдале розв’язування задач само по собі не гарантує якості засвоєння теорії, оскільки часто правильне розв’язання задачі одержується в результаті застосування механічно завчених формул, без розуміння їх суті.

Контрольні роботи. У процесі вивчення дисципліни “Вища математика ІІ” заочник повинен виконати модульну контрольну роботу (КР) за варіантом, номер якого співпадає з останньою цифрою номеру залікової книжки (цифра 0 відповідає варіанту №10).

Не рекомендується розпочинати виконання чергового завдання КР, не розв’язавши достатньої кількості типових задач, що йому відповідають.

Контрольна робота повинна виконуватися самостійно. Невиконання цієї вимоги призводить до поганого засвоєння навчального матеріалу, у результаті чого студент не набуде необхідних знань і виявиться неготовим до складання заліку.

Виконана КР передається на рецензію викладачеві.

При її оформленні необхідно дотримуватися наступних правил:

роботу виконують в окремому зошиті у клітинку, залишаючи на кожній сторінці широке поле (не менше 3 см) для поміток рецензента;

на титульній сторінці повинно бути чітко написане прізвище студента і його ініціали, номер залікової книжки і відповідного варіанту, дата подання роботи, звичайна поштова й електронна адреси для зв’язку зі студентом;

задачі, їх умови і розв’язання варто розташовувати у тому ж порядку, в якому вони наведені у завданні, зберігаючи їх нумерацію; перед розв’язанням кожної задачі треба повністю привести її умову; коли задача має загальне формулювання, треба при записі її умови замінити загальні дані конкретними з відповідного варіанту; не допускається заміна задач свого варіанту на інші;

перехід від умови задачі до її розв’язання виділяється словом “Розв’язання”; розв’язання задачі повинне супроводжуватися необхідними поясненнями і посиланнями на теоретичні положення; формули, що використовуються, потрібно приводити у загальному вигляді з поясненням використаних позначень; розв’язання треба викладати докладно й акуратно, приводити необхідні креслення; наближені обчислення треба виконувати, дотримуючись відповідних правил;

у кінці КР через один порожній рядок привести список використаної літератури (для кожного джерела вказати авторів, назву, місто, видавництво, рік видання, кількість сторінок).

Одержавши прорецензовану КР (як допущену до захисту, так і ні), студент повинен у найкоротший термін виправити вказані рецензентом помилки і недоліки (наприклад, рецензент пропонує переробити в роботі ті чи інші задачі чи надати більш докладне розв’язання), якщо такі є, виконати всі його пропозиції й повернути КР викладачеві. Якщо в роботі наявні лише окремі недоліки, то потріб-

ні виправлення слід робити у кінці того ж зошита після запису “Робота над помилками”. У випадку наявності позначки ”Не допущена до захисту” вся КР повинна бути виконана заново. Повторну роботу треба подати у новому зошиті з додатковими приписами на титульній сторінці ”Повторна” і ”Не допущена до захисту рецензентом ______________________”. При поданні виправленої роботи разом з нею
(*прізвище рецензента*)
повинна знаходитися прорецензована раніше робота.

Без наявності прорецензованої КР, що має позначку ”Допущена до захисту”, заочника не допускають до її захисту і складання заліку.

<u>Захист контрольної роботи</u> проводиться у вигляді співбесіди. У процесі захисту заочник повинен підтвердити самостійність виконання КР. Після успішного захисту контрольна робота вважається зарахованою і студент допускається до складання заліку. Під час співбесіди перевіряється самостійність виконання КР, вияснється знання основних теоретичних положень курсу, що відображені у завданнях КР, вміння розв’язувати подібні задачі. Тому до співбесіди рекомендується детально розібрати методи розв’язування задач і повторити відповідний теоретичний матеріал, основні формули. При позитивному результаті співбесіди КР зараховується і на обкладинці зошита викладач робить відповідний запис. Зараховані роботи відбираються і не повертаються.

<u>Залік</u> з дисципліни “Вища математика ІІ”, як правило, проводиться у письмовій формі. На заліку вияснється достатність засвоєння всіх теоретичних і практичних питань програми і вміння застосовувати одержані знання до розв’язування задач. Визначення, теореми, правила повинні формулюватися точно і з розумінням суті справи. Розв’язування задач у найпростіших випадках повинно виконуватися без помилок і впевнено. Письмові завдання повинні бути виконанні акуратно і чітко.

При підготовці до заліку рекомендується: повторити навчальний матеріал за книгами і конспектом; розібрати розв’язування типових задач; розібрати розв’язування задач з інших варіантів КР.

**Змістовий модуль 1.**

# ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ. ФУНКЦІОНАЛЬНІ РЯДИ

## 1.1. Кратні інтеграли

### 1.1.1. Подвійний інтеграл

***Подвійний інтеграл від функції*** $f(x,y)$ ***по області*** $D$ визначається як *границя інтегральної суми за формулою*

$$\boxed{\iint\limits_D f(x,y)\,dS = \lim_{\max d_i \to 0} \sum\nolimits_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\,\Delta S_i},$$

де $x$ і $y$ – ***змінні інтегрування***; $f(x,y)$ – ***підінтегральна функція***; $dS$ – ***елемент*** (***диференціал***) ***площі***; $f(x,y)\,dS$ – ***підінтегральний вираз***; $D$ – ***область інтегрування***.

Геометричний зміст: якщо функція $z = f(x,y)$ невід'ємна, то подвійний інтеграл від неї чисельно дорівнює об'єму $V$ циліндричного тіла, нижньою основою якого є область $D$, верхньою – частина поверхні $z = f(x,y) \ge 0$, що проектується в $D$, а бічна поверхня – циліндрична з твірними, паралельними осі $Oz$, і напрямною $L$ – межею області $D$: $\boxed{V = \iint_D f(x,y)\,dS}$.

У декартовій прямокутній системі координат $Oxy$ диференціал площі набуває вигляду $\boxed{dS = dxdy}$ і подвійний інтеграл можна подати у формі $\boxed{\iint_D f(x,y)\,dxdy}$.

Якщо область інтегрування $D$ – правильна в напрямі осі $Oy$ (рис. 1) і може бути подана у вигляді

$$D:\left\{(x,y)\middle|\; y_1(x) \le y \le y_2(x),\; x \in [a;b],\; D \xrightarrow{Oy} [a;b]\right\},$$

то подвійний інтеграл зводиться до двократного повторного інтеграла за формулою

$$\boxed{\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy}. \qquad (1)$$

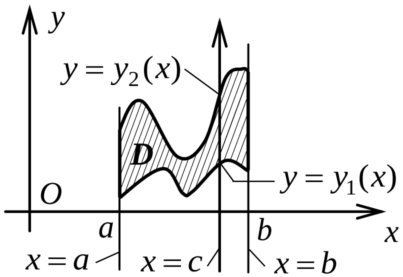


Рис. 1

Якщо область $D$ – правильна в напрямі осі $Ox$ (рис. 2) і може бути подана у вигляді

$$D: \left\{(x,y)\middle|\ x_1(y) \le x \le x_2(y),\right.$$

$$\left. y \in [c;d],\ D \xrightarrow{Ox} [c;d]\right\},$$

то подвійний інтеграл зводиться до двократного повторного інтеграла за формулою (змінні $x$ і $y$ міняються ролями)

$$\boxed{\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,dx}. \qquad (2)$$

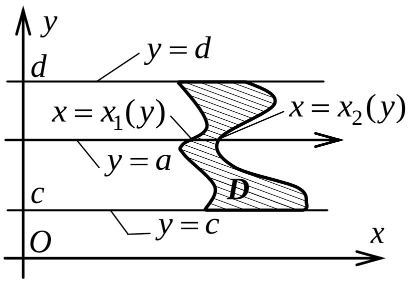


Рис. 2

<u>Зауваження 1</u>. Спочатку обчислюється ***внутрішній інтеграл*** $\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$ за ***внутрішньою змінною*** $y$ в припущенні, що ***зовнішня змінна*** $x$ фіксована. У результаті обчислення внутрішнього інтеграла в межах від $y_1(x)$ до $y_2(x)$ одержуємо певну функцію $S(x)$ однієї змінної $x$.

<u>Зауваження 2</u>. Якщо область $D$ правильна в напрямах обох осей $Ox$ і $Oy$, то подвійний інтеграл можна звести до повторного будь-яким з указаних способів. *Значення подвійного інтеграла не залежить від порядку інтегрування*:

$$\boxed{\int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,dx}.$$

Перехід від лівої частини цього співвідношення до правої і навпаки називається ***зміною порядку інтегрування***.

Зауваження 3. Якщо область $D$ неправильна, то вона розбивається на правильні частини. Для цього, звичайно, застосовують прямі, що паралельні координатним осям.

Приклад 1. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D \frac{x^3\,dxdy}{1+y^2}$, де $D$ – квадрат $0 \le x \le 1,\ \ 0 \le y \le 1$.

□ Область $D$ (рис. 3) є правильною у напрямі як осі $Oy$, так і осі $Ox$. Тому для обчислення даного інтеграла можна користуватись як формулою (1), так і формулою (2).

За формулою (1) маємо:

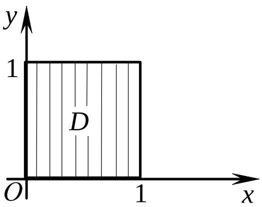


Рис. 3

$$\iint\limits_D \frac{x^3\,dxdy}{1+y^2} = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 \frac{x^3}{1+y^2}\,dy =$$

$$= \int\limits_0^1 x^3 dx \int\limits_0^1 \frac{dy}{1+y^2} = \int\limits_0^1 x^3 arctg\, y\Big|_0^1 dx =$$

$$= \frac{\pi}{4} \cdot (x^4/4)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{16}.$$

За формулою (2) маємо:

$$\iint\limits_D \frac{x^3\,dxdy}{1+y^2} = \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^1 \frac{x^3}{1+y^2}\,dx = \int\limits_0^1 \frac{dy}{1+y^2} \int\limits_0^1 x^3 dx = \int\limits_0^1 \frac{1}{1+y^2} \left(\frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^1 dy =$$

$$= (1/4) \cdot arctg\, y\Big|_0^1 = \pi/16.$$

Зауважимо, що у цьому прикладі при обох способах переходу до повторного інтеграла внутрішній інтеграл має сталі межі інтегрування і тому дорівнює сталій величині. У такому випадку подвійний інтеграл перетворюється на добуток двох визначених інтегралів. ■

Приклад 2. Знайти межі інтегрування для подвійного інтеграла

$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$, якщо область $D$ є трикутник, обмежений лініями: $y=0,\ \ y=2-x,\ \ x=0$.

□ Область $D$ (рис. 3) є правильною у напрямі як осі $Oy$, так і осі $Ox$.

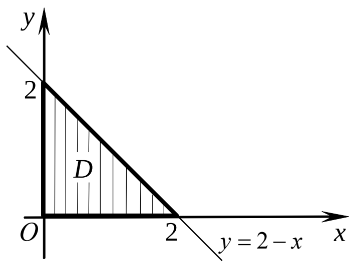


Рис. 4

За формулою (1) маємо:

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{2-x} f(x,y)\,dy.$$

За формулою (2) маємо:

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_0^2 dy \int\limits_0^{2-y} f(x,y)\,dx. \ \blacksquare$$

<u>Приклад 3</u>. Змінити порядок інтегрування у повторному інтегралі

$$I = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{\sqrt{x}}^{2-x} f(x,y)\,dy.$$

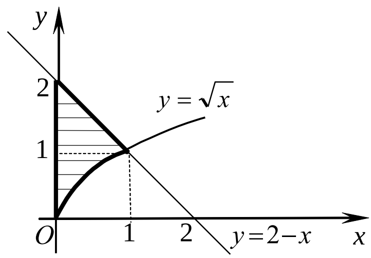


Рис. 5

□ Область інтегрування $D$ (рис. 5) обмежена лініями $x=0$, $x=1,\ \ y=\sqrt{x},\ \ y=2-x$. З останніх двох рівнянь маємо: $x=y^2$, $x=2-y$.

Область $D$ є неправильною у напрямі осі $Ox$. Пряма $y=1$ розбиває її на дві правильні у напрямі осі $Ox$ частини $D_1$ і $D_2$, де

$$D_1:\ 0\le y\le 1,\quad 0\le x\le y^2,\quad D_2:\ 1\le y\le 2,\ \ 0\le x\le 2-y.$$

Тоді $\quad I = \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{y^2} f(x,y)\,dx + \int\limits_1^2 dy \int\limits_0^{2-y} f(x,y)\,dx. \ \blacksquare$

<u>Приклад 4</u>. Обчислити повторний інтеграл $I = \int\limits_1^2 x\,dx \int\limits_0^x y^2 dy$.

$\square\ I=\int\limits_1^2 x\,dx\int\limits_0^x y^2dy=\int\limits_1^2 x\cdot\frac{y^3}{3}\Bigg|_0^x dx=\frac{1}{3}\int\limits_1^2 x^4dx=\frac{1}{3}\cdot\frac{x^5}{3}\Bigg|_1^2=\frac{31}{15}.\ \blacksquare$

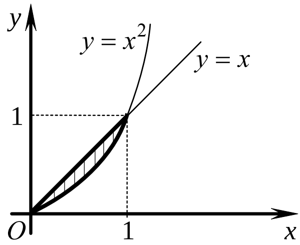

Рис. 6

Приклад 5. Обчислити подвійний інтеграл

$$I=\iint\limits_D(5x+3y^2)\,dx\,dy,$$

де область $D$ обмежена лініями $x=0,\ x=1,\ y=x^2,\ y=x$.

$\square$ Область $D$ зображена на рис. 6. Вона правильна у напрямі як осі $Oy$, так і осі $Ox$.

За формулою (1) маємо:

$$I=\int\limits_0^1 dx\int\limits_{x^2}^x(5x+3y^2)\,dy=\int\limits_0^1\left(5x\int\limits_{x^2}^x dy+3\int\limits_{x^2}^x y^2\,dy\right)dx=$$

$$=\int\limits_0^1\left(5x\,y\Big|_{x^2}^{x}+\ y^3\Big|_{x^2}^{x}\right)dx=\int\limits_0^1\left(5x^2-5x^3+x^3-x^6\right)dx=$$

$$=\int\limits_0^1\left(5x^2-4x^3-x^6\right)dx=(5x^3/3-x^4-x^7/7)\Big|_0^1=11/21.\ \blacksquare$$

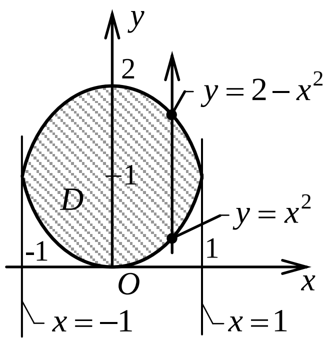

Рис. 7

Приклад 6. Обчислити подвійний інтеграл $I=\iint_D(x^2+1)\,dxdy$, де область інтегрування $D$ обмежена лініями $y=x^2$ і $y=2-x^2$.

$\square$ Область $D$ (рис. 7) є правильною у напрямі осі $Oy$. За формулою (1) маємо:

$$I=\int\limits_{-1}^{1}(x^2+1)\,dx\int\limits_{x^2}^{2-x^2}dy=$$

$$= \int_{-1}^{1} (x^2+1)\cdot y\Big|_{x^2}^{2-x^2} dx = 2\int_{-1}^{1} (x^2+1)(1-x^2)\,dx = 2\int_{-1}^{1} (1-x^4)\,dx =$$

$$= 2(x - x^5/5)\Big|_{-1}^{1} = 16/5. \quad \blacksquare$$

### 1.1.2. Потрійний інтеграл

Нехай $V$ – деяка замкнена обмежена просторова область (просторове тіло), а плоска область $D_{xy}$ - її проекція паралельно осі $Oz$ на координатну площину $Oxy$ (рис. 8). Область $V$ називається ***правильною*** (***стандартною***) ***в напрямі осі*** $Oz$, якщо виконуються наступні умови: 1) межа $L$ проекції $D_{xy}$ складається зі скінченного числа неперервних кривих; 2) довільна пробна пряма, що проходить хоча б через одну внутрішню точку області $V$ паралельно осі $Oz$ і в тому ж напрямі, перетинає її межу тільки у двох точках – по одній на ближній ***поверхні входу*** $\sigma_1$ і дальній ***поверхні виходу*** $\sigma_2$; 3) рівняння кожної з поверхонь $\sigma_1$ і $\sigma_2$ задається в явному вигляді, розв'язаному відносно $z$, причому тільки однією формулою відповідно $z = z_1(x, y)$ і $z = z_2(x, y)$, де функції $z_1(x, y)$, $z_2(x, y)$ неперервні в $D_{xy}$ і $z_1(x, y) \le z_2(x, y)$.

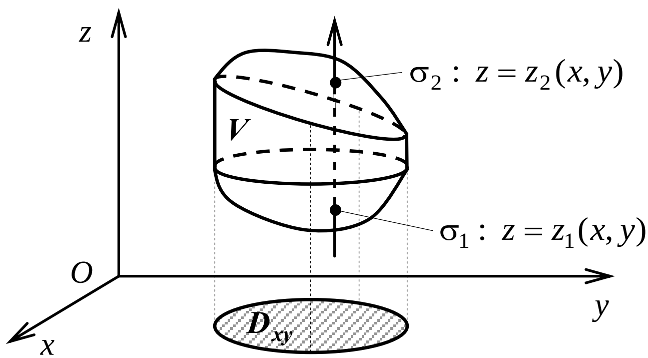


Рис. 8

Така просторова область $V$ має вигляд вертикального циліндричного тіла. Як множину точок її можна подати у вигляді

$$\boxed{V:\left\{(x,y,z)\middle|\ z_1(x,y)\le z\le z_2(x,y),\ (x,y)\in D_{xy},\ V\xrightarrow{Oz}D_{xy}\right\}}.$$

Аналогічно вводиться означення просторової області $V$, що ***правильна*** (***стандартна***) ***в напрямі осі*** $Ox$ ***чи*** $Oy$, відповідно

$$\boxed{V:\left\{(x,y,z)\middle|\ x_1(y,z)\le x\le x_2(y,z),\ (y,z)\in D_{yz},\ V\xrightarrow{Ox}D_{yz}\right\}}$$

і

$$\boxed{V:\left\{(x,y,z)\middle|\ y_1(x,z)\le y\le y_2(x,z),\ (x,z)\in D_{xz},\ V\xrightarrow{Oy}D_{xz}\right\}}.$$

***Потрійний інтеграл від функції*** $f(x,y,z)$ ***по області*** $V$ визначається як *границя інтегральної суми за формулою*

$$\boxed{\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz=\lim_{\max d_i\to 0}\sum\nolimits_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i)\Delta V_i}, \qquad (3)$$

де $x$, $y$ і $z$ – ***змінні інтегрування***; $f(x,y,z)$ – ***підінтегральна функція***; $dV=dxdydz$ – ***елемент*** (***диференціал***) ***об'єму***; $f(x,y,z)dxdydz$ – ***підінтегральний вираз***; $V$ – ***область інтегрування***.

Нехай просторова область $V$ – правильна в напрямі осі $Oz$ (є вертикальним циліндричним тілом, зображеним на рис. 8), і може бути подана у вигляді

$$V:\left\{(x,y,z)\middle|\ z_1(x,y)\le z\le z_2(x,y),\ (x,y)\in D_{xy},\ V\xrightarrow{Oz}D_{xy}\right\},$$

причому її проекція $D_{xy}$ на площину $Oxy$ є правильною в напрямі осі $Oy$ плоскою областю (рис. 1) і може бути подана у вигляді

$$D_{xy}:\left\{(x,y)\middle|\ y_1(x)\le y\le y_2(x),\ x\in[a;b],\ D\xrightarrow{Oy}[a;b]\right\},$$

Тоді справедлива формула

$$\boxed{\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz=\int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}dy\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}f(x,y,z)\,dz},$$

яка зводить потрійний інтеграл до трикратного повторного інтеграла.

Зауваження 1. За цією формулою спочатку обчислюється самий внутрішній інтеграл по внутрішній змінній $z$ при фіксованих зовнішніх змінних $x$ і $y$. Потім знаходиться проміжний інтеграл по $y$ при фіксованому $x$. В останню чергу обчислюється зовнішній інтеграл по $x$.

Зауваження 2. Можна одержати повторний інтеграл з іншим порядком інтегрування. Його доцільність залежить як від розташування області $V$ відносно прийнятої системи координат $Oxyz$ та її форми, так і від вигляду підінтегральної функції $f(x,y,z)$.

Приклад 1. Обчислити потрійний інтеграл, що поданий як трикратний повторний інтеграл

$$I=\iiint\limits_V xyz\,dxdydz=\int_0^1 x\,dx\int_0^x y\,dy\int_0^{\sqrt{x^2+y^2}} z\,dz\,.$$

$$\square\ I=\int_0^1 x\,dx\int_0^x y\,dy\int_0^{\sqrt{x^2+y^2}} z\,dz=\int_0^1 x\,dx\int_0^x y\cdot(z^2/2)\Big|_0^{\sqrt{x^2+y^2}}\,dy=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 x\,dx\int_0^x (x^2y+y^3)\,dy=\frac{1}{2}\int_0^1 x\left(x^2y^2/2+y^4/4\right)\Big|_0^x\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 (x^4/2+x^4/4)x\,dx=\frac{3}{8}\int_0^1 x^5\,dx=\frac{3}{8}\cdot(x^6/6)\Big|_0^1=\frac{1}{16}.\ \blacksquare$$

Приклад 2. Обчислити потрійний інтеграл $I=\iiint\limits_V x^2dxdydz$, де $V$ – трикутна піраміда, що обмежена координатними площинами та площиною $2x+2y+z-6=0$.

□ Піраміда $V$ – правильна в напрямі осі $Oz$ просторова область (рис. 9), що обмежена знизу поверхнею входу – площиною $z=0$, а зверху поверхнею виходу – площиною $z=6-2x-2y$. Проекцією $D$ тіла $V$ на площину $Oxy$ служить $\Delta AOB$ – правильна в напрямі осі $Oy$ плоска область (рис. 10), для якої $x\in[0;3]$ і $y$ змінюється від лінії входу $y=0$ до лінії виходу $y=3-x$.

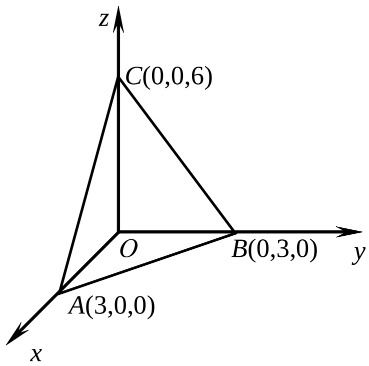


Рис. 9

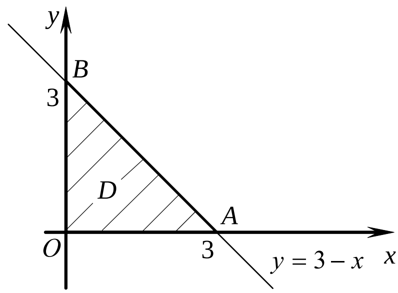


Рис. 10

Тоді

$$I = \int_0^3 x^2 dx \int_0^{3-x} dy \int_0^{6-2x-2y} dz = \int_0^3 x^2 dx \int_0^{3-x} z\,\Big|_0^{6-2x-2y} dy =$$

$$= \int_0^3 x^2 dx \int_0^{3-x} (6-2x-2y)\,dy = \int_0^3 x^2 (6y - 2xy - y^2)\Big|_0^{3-x} dx =$$

$$= \int_0^3 x^2 (6(3-x) - 2x(3-x) - (3-x)^2)\,dx = \int_0^3 x^2 (18 - 6x -$$

$$- 6x + 2x^2 - 9 + 6x - x^2)\,dx = \int_0^3 (9x^2 - 6x^3 + x^4)\,dx =$$

$$= (3x^3 - 3x^4/2 + x^5/5)\Big|_0^3 = 81 - 243/2 + 243/5 = 81/10. \quad ■$$

<u>Приклад 3</u>. Обчислити потрійний інтеграл від функції $f(x,y,z) = x(y+z)$ по просторовій області $V$, що обмежена параболічним циліндром $x^2 = 2y$ і площинами $z = 0$, $2y + z - 4 = 0$.

□ Просторова область $V$ є правильною в напрямі осі $Oz$ (рис. 11). Вона обмежена знизу поверхнею входу – площиною $z = 0$, а зверху поверхнею виходу – площиною $z = 4 - 2y$. Проекцією $D$ тіла $V$ на площину $Oxy$ служить параболічний сегмент – правильна в напрямі осі $Oy$ плоска область (рис. 12), для якої

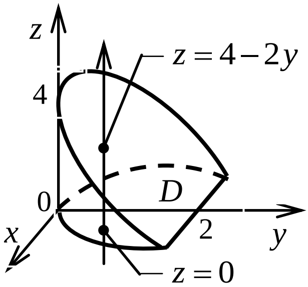

Рис. 11

$x \in [-2;2]$ і $y$ змінюється від лінії входу $y = x^2/2$ до лінії виходу $y = 2$.

Тоді

$$I = \iiint_V x(y+z)\,dxdydz =$$

$$= \int_{-2}^{2} x\,dx \int_{x^2/2}^{2} dy \int_{0}^{4-2y} (y+z)\,dz =$$

$$= \int_{-2}^{2} x\,dx \int_{x^2/2}^{2} (yz + z^2/2)\Big|_0^{4-2y} dy =$$

$$= \int_{-2}^{2} xdx \int_{x^2/2}^{2} \big(y(4-2y) + (4-2\times$$

$$\times y)^2/2\big)dy = \int_{-2}^{2} x\,dx \int_{x^2/2}^{2} (8-4y)dy =$$

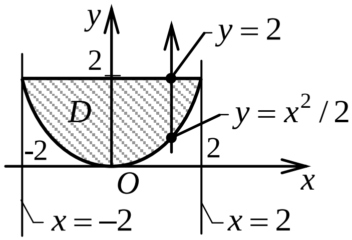

Рис. 12

$$= \int_{-2}^{2} x(8y - 2y^2)\Big|_{x^2/2}^{2} dx = \int_{-2}^{2} x(16 - 8 - 4x^2 + x^4/2)\,dx =$$

$$= \int_{x^2/2}^{2} (x^5/2 - 4x^3 + 8x)\,dx = (x^6/12 - x^4 + 4x^2)\Big|_{-2}^{2} = 0. \quad \blacksquare$$

### 1.1.3. Застосування кратних інтегралів

Площа плоскої фігури. Якщо в подвійному інтегралі $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ підінтегральну функцію прийняти тотожно рівною одиниці $f(x,y) \equiv 1$, то його значення чисельно дорівнюватиме площі області інтегрування $D$: $\boxed{S = \iint_D dx\,dy}$.

Приклад 1. За допомогою подвійного інтеграла обчислити площу плоскої області $D$, що обмежена параболою $y = x^2 - 2x$ і

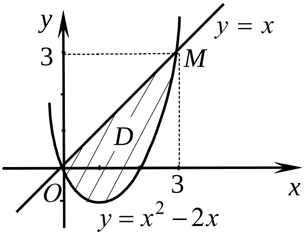


Рис. 13

прямою $x - y = 0$.

□ Розв'язуючи систему рівнянь

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x; \\ x - y = 0, \end{cases}$$

знаходимо точки перетину ліній, що обмежують область: $O(0,0)$ і $M(3,3)$. Зображення області $D$ подано на рис. 13. Вона є правильною в напрямі осі $Oy$: $D: 0 \le x \le 3,\ x^2 - 2x \le y \le x$.

Тоді $\quad S = \iint\limits_D dxdy = \int\limits_0^3 dx \int\limits_{x^2-2x}^{x} dy = \int\limits_0^3 y\Big|_{x^2-2x}^{x} dx =$

$$= \int\limits_0^3 (x - x^2 + 2x)\,dx = (3x^2/2 - x^3/3)\Big|_0^3 = 9/2\ \frac{9}{2}\quad \text{(кв. од.).}\ \blacksquare$$

<u>Приклад 2</u>. За допомогою подвійного інтеграла обчислити площу плоскої області $D$, що обмежена параболою $y = x^2$, півколом $x = \sqrt{2 - y^2}$ і віссю $Ox$.

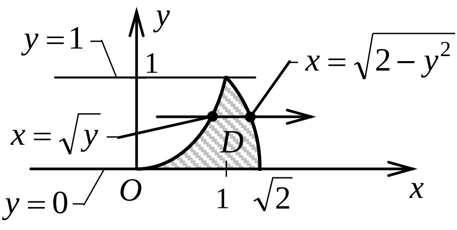


Рис. 14

□ На рис. 14 область $D$ подана як правильна в напрямі осі $Ox$. Тоді

$$S = \iint\limits_D dxdy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{\sqrt{y}}^{\sqrt{2-y^2}} dx =$$

$$= \int\limits_0^1 x\Big|_{\sqrt{y}}^{\sqrt{2-y^2}} dy =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(\sqrt{2-y^2} - \sqrt{y}\right)dy = \int\limits_0^1 \sqrt{2-y^2}\,dy - \int\limits_0^1 y^{1/2}\,dy = \Big|\ y = \sin u;$$

$$dx = \sqrt{2}\cos u\,du;\ \sqrt{2-y^2} = \sqrt{2}\cos u;\ \ u = \arcsin\left(y/\sqrt{2}\right);$$

$$u_1 = \arcsin 0 = 0;\ u_2 = \arcsin\left(\sqrt{2}/2\right) = \pi/4 \Big| = \int_0^{\pi/4} 2\cos^2 u\,du -$$

$$-(2/3)y^{3/2}\Big|_0^1 = \int_0^{\pi/4}(1+\cos 2u)\,du - \frac{2}{3} = \left(u + (1/2)\sin 2u\right)\Big|_0^{\pi/4} - \frac{2}{3} =$$

$$= \pi/4 + 1/2 - 2/3 = (3\pi - 2)/12 \ \text{(кв. од.)}. \ \blacksquare$$

<u>Об'єм тіла</u>. Нехай правильне у напрямі осі $Oz$ просторове тіло $V$, яке обмежене знизу і зверху поверхнями входу $z = z_1(x, y)$ і виходу $z = z_2(x, y)$, проектується на площину $Oxy$ в область $D_{xy}$. Тоді його об'єм обчислюється за формулою

$$\boxed{V = \iint_{D_{xy}} \left(z_2(x,y) - z_1(x,y)\right) dxdy}.$$

<u>Зауваження 1</u>. Якщо тіло $V$ – правильне в напрямі осі $Ox$ чи $Oy$, то його об'єм обчислюється за аналогічними формулами. При цьому змінні $x$, $y$ і $z$ міняються ролями.

<u>Приклад 3</u>. За допомогою подвійного інтеграла обчислити об'єм тіла $V$, що задане системою нерівностей:

$$0 \le z \le 4 - x^2 - y^2; \qquad 0 \le x \le 2y - y^2 .$$

□ На рис. 15 тіло $V$ подане як правильне в напрямі осі $Oz$. Воно обмежене знизу координатною площиною $z = 0$, зверху – параболоїдом обертання $z = 4 - x^2 - y^2$, спереду – параболічним циліндром $x = 2y - y^2$, ззаду – координатною площиною $x = 0$. Його проекцією на площину $Oxy$ служить область $D$ – параболічний сегмент, обмежений параболою $x = 2y - y^2$ і віссю $Oy$. На рис. 16 область $D$ зображена як правильна в напрямі осі $Ox$. Тоді

$$V = \iint_D \left(z_2(x,y) - z_1(x,y)\right) dxdy = \iint_D (4 - x^2 - y^2)\,dxdy =$$

$$= \int_0^2 dy \int_0^{2y-y^2} (4 - x^2 - y^2)\,dx = \int_0^2 (4x - x^3/3 - y^2 x)\Big|_0^{2y-y^2} dy =$$

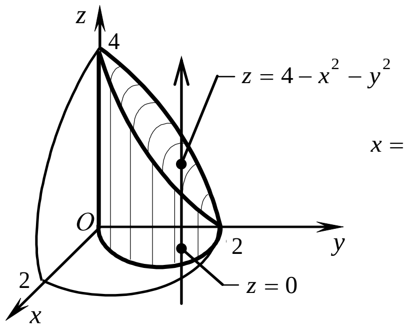


Рис. 15

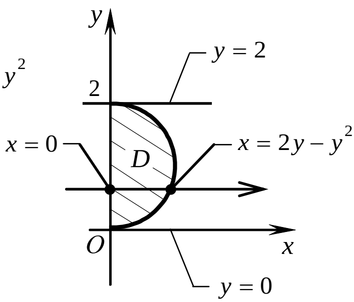


Рис. 16

$$= \int_0^2 (8y - 4y^2 - (8/3)y^3 + 4y^4 - 2y^5 + (1/3)y^6 - 2y^3 + y^4)\,dy =$$

$$= \int_0^2 \Big((1/3)y^6 - 2y^5 + 5y^4 - (14/3)y^3 - 4y^2 + 8y\Big)\,dy =$$

$$= \left(\frac{1}{21}y^7 - \frac{1}{3}y^6 + y^5 - \frac{7}{6}y^4 - \frac{4}{3}y^3 + 4y^2\right)\Bigg|_0^2 = \frac{1}{21}\cdot 128 - \frac{1}{3}\cdot 64 +$$

$$+ 32 - (7/6)\cdot 16 - (4/3)\cdot 8 + 4\cdot 4 = 24/7 \text{ (куб. од.).} \quad \blacksquare$$

Зауваження 2. Згідно геометричного змісту потрійного інтеграла об’єм просторової області $V$ також можна обчислити за формулою $\boxed{V = \iiint_V dV = \iiint_V dxdydz}$.

Приклад 4. За допомогою потрійного інтеграла обчислити об’єм тіла $V$, що обмежене знизу координатною площиною $z = 0$, зверху – параболоїдом обертання $2z = x^2 + y^2$, а збоку – круговим циліндром $x^2 + y^2 = 4$.

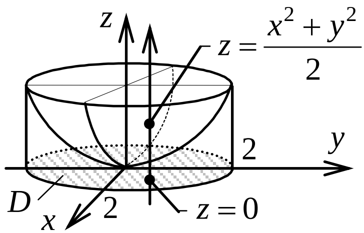


Рис. 17

□ На рис. 17 тіло $V$ подане як правильне в напрямі осі $Oz$. Його проекцією на площину $Oxy$ служить область $D$ – круг, обмежений колом $x^2 + y^2 = 4$. На рис. 18 область $D$ зображена як правильна в напрямі осі $Oy$. Тоді

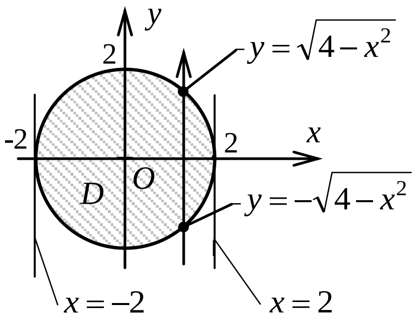


Рис. 18

$$V=\iiint_V dxdydz=$$

$$=\int_{-2}^{2}dx\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}dy\int_{0}^{(x^2+y^2)/2}dz=$$

$$=\int_{-2}^{2}dx\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}z\Big|_0^{(x^2+y^2)/2}dy=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}dx\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}(x^2+y^2)\,dy=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}(x^2y+y^3/3)\Big|_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}dx=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}\Big(2x^2\sqrt{4-x^2}+(2/3)(4-x^2)\times$$

$$\times\sqrt{4-x^2}\Big)dx=\frac{2}{3}\int_{-2}^{2}(x^2+2)\sqrt{4-x^2}\;dx=\left|\begin{array}{l}x=2\sin u;\\ dx=2\cos u\,du;\end{array}\right.$$

$$\sqrt{4-x^2}=2\cos u;\quad u=\arcsin(x/2);\ u_1=\arcsin(-1)=\pi/2;$$

$$u_2=\arcsin 1=\pi/2\Big|=\frac{2}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(4\sin^2u+2)2\cos u\cdot 2\cos u\,du=\frac{8}{3}\times$$

$$\times\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(1-\cos 2u+1)(1+\cos 2u)\,du=\frac{8}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(2-\cos^2 2u+\cos 2u)\,du=$$

$$=\frac{16}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}du-\frac{4}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(1+\cos 4u)\,du+\frac{8}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos 2u\,du=\frac{16}{3}\cdot u\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}-$$

$$-\frac{4}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}du-\frac{4}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos 4u\,du+\frac{4}{3}\cdot\sin 2u\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}=\frac{16\pi}{3}-\frac{4}{3}\cdot u\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}-$$

$$-\frac{1}{3}\cdot\sin 4u\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}=\frac{16\pi}{3}-\frac{4\pi}{3}=4\pi\ \text{(куб. од.)}.\quad\blacksquare$$

## 1.2. Криволінійні інтеграли

### 1.2.1. Криволінійний інтеграл за довжиною

***Криволінійний інтеграл за довжиною*** (***першого роду***) ***від функції*** $f(x, y)$ ***по плоскій дузі*** $L_{AB}$ визначається як *границя інтегральної суми за формулою*

$$\boxed{\int\limits_{L_{AB}} f(x,y)\,dl = \lim_{\max \Delta l_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i, \bar{y}_i)\,\Delta l_i},$$

де $dl$ – ***диференціал*** (***елемент***) ***довжини дуги***.

Якщо покласти $f(x,y) \equiv 1$, то криволінійний інтеграл $\int_{L_{AB}} f(x,y)\,dl$ чисельно дорівнює довжині $l$ дуги $L_{AB}$: $\boxed{l = \int_{L_{AB}} dl}$ (геометричний зміст криволінійного інтеграла за довжиною).

Зауваження 1. При $f(x,y) \geq 0$ криволінійний інтеграл $\int_{L_{AB}} f(x,y)\,dl$ чисельно дорівнює площі $S_c$ частини вертикальної циліндричної поверхні (рис. 19) з напрямною $L_{AB}$ і паралельними осі $Oz$ твірними, що розміщена між координатною площиною $z = 0$ і поверхнею $z = f(x,y)$:

$$\boxed{S_c = \int_{L_{AB}} f(x,y)\,dl}.$$

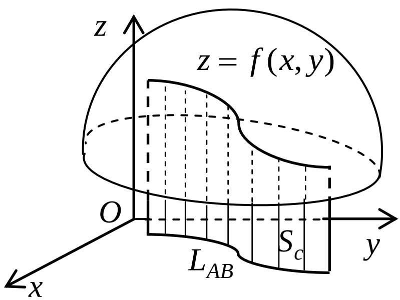

Рис. 19

Зауваження 2. Криволінійний інтеграл за довжиною не залежить від напряму руху по дузі:

$$\boxed{\int_{L_{BA}} f(x,y)\,dl = \int_{L_{AB}} f(x,y)\,dl}.$$

Інші *властивості цього інтеграла аналогічні властивостям звичайного одновимірного інтеграла*.

Зауваження 3. Поняття криволінійного інтеграла за довжиною поширюється на випадок дуги $L_{AB}$ просторової лінії $L$, розміщеної в просторовому скалярному полі $u = f(x,y,z)$:

$$\boxed{\int_{L_{AB}} f(x,y,z)\,dl = \lim_{\max\Delta l_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i)\,\Delta l_i}.$$

Обчислення криволінійного інтеграла за довжиною здійснюється зведенням його до одновимірного інтеграла методом заміни змінної. Розглянемо найбільш важливі випадки задання кривої $L$ і відповідний перехід до визначеного інтеграла.

<u>Випадок 1</u>. Нехай плоска дуга $L_{AB}$ задана в параметричній формі: $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ $\alpha \le t \le \beta$. Тоді

$$\boxed{\int\limits_{L_{AB}} f(x,y)\,dl = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x(t),y(t))\,\sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}\,dt}.$$

<u>Приклад 1</u>. Обчислити $I = \int_L x\sqrt{x^2 + 16y^2}\,dl$, якщо $L$ – дуга еліпса, розміщена в першій чверті: $x = 4\cos t$; $y = 2\sin t$; $0 \le t \le \pi/2$.

□ Обчислимо: $x' = -4\sin t$; $y' = 2\cos t$;

$$dl = \sqrt{(-4\sin t)^2 + (2\cos t)^2}\,dt = 2\sqrt{4\sin^2 t + \cos^2 t}\,dt.$$

Підставимо в інтеграл:

$$I = \int\limits_0^{\pi/2} 4\cos t\sqrt{(4\cos t)^2 + 16(2\sin t)^2}\cdot 2\sqrt{4\sin^2 t + \cos^2 t}\,dt =$$

$$= 32\int\limits_0^{\pi/2} \cos t\,(4\sin^2 t + \cos^2 t)\,dt = \left|\begin{matrix} u = \sin t; & u_1 = \sin 0 = 0; \\ du = \cos t\,dt; & u_2 = \sin(\pi/2) = 1 \end{matrix}\right| =$$

$$= 32\int\limits_0^1 (4u^2 + 1 - u^2)\,du = 32\int\limits_0^1 (3u^2 + 1)\,du = 32\cdot(u^3 + u)\Big|_0^1 = 64. \quad ■$$

<u>Випадок 2</u>. Нехай плоска дуга $L_{AB}$ задана в прямокутних координатах в явному вигляді: $y = y(x)$, $a \le x \le b$. Тоді

$$\boxed{\int\limits_{L_{AB}} f(x,y)\,dl = \int\limits_a^b f(x,y(x))\,\sqrt{1 + \left(y'(x)\right)^2}\,dx}.$$

Приклад 2. Обчислити інтеграл $I=\int_L xe^y dl$, де $L$ – дуга плоскої кривої $y=\ln x$ при $1\le x\le 2$.

□ Знайдемо диференціал довжини дуги

$$y'=1/x;\quad dl=\sqrt{1+(y')^2}\,dx=\sqrt{1+1/x^2}\;dx;$$

Тоді $I=\int\limits_1^2 x e^{\ln x}\sqrt{1+1/x^2}\,dx=\int\limits_1^2\sqrt{x^2+1}\;x\,dx=$

$$=\begin{vmatrix} u=x^2+1;\ u_1=\sqrt{2}; \\ du=2x\,dx;\ u_2=\sqrt{5} \end{vmatrix}=\frac{1}{2}\int\limits_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}}u^{1/2}\,du=\frac{1}{3}\,u^{3/2}\Big|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}}=\frac{5\sqrt{5}-2\sqrt{2}}{3}.\ ■$$

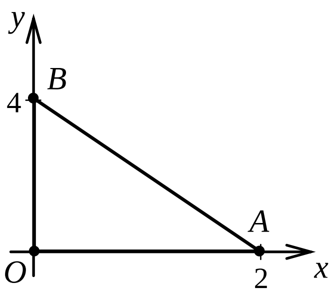

Рис. 20

Приклад 3. Обчислити інтеграл $I=\int_L (2x-y+4)\,dl$, де $L$ – контур трикутника $ABO$: $A(2;0)$, $B(0;4)$, $O(0;0)$ (рис. 20).

□ $I=\int_L (2x-y+4)\,dl=$

$$=\int_{AB}(2x-y+4)\,dl+\int_{BO}(2x-y+4)\,dl+\int_{OA}(2x-y+4)\,dl.$$

Обчислимо кожний інтеграл окремо:

а) $AB$: $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$; $\dfrac{x-2}{0-2}=\dfrac{y-0}{4-0}$; $y=-2x+4$; $y'=-2$;

$$dl=\sqrt{1+(y')^2}\,dx=\sqrt{1+(-2)^2}\;dx=\sqrt{5}\;dx;\quad x_1=0;\quad x_2=2;$$

$$I_{AB}=\int_{AB}(2x-y+4)\,dl=\int\limits_0^2(2x-(-2x+4)+4)\sqrt{5}\,dx=4\sqrt{5}\times$$

$$\times\int\limits_0^2 x\,dx=2\sqrt{5}\;x^2\Big|_0^2=8\sqrt{5};$$

б) $BO$: $x=0$; $x'=0$; $dl=\sqrt{1+(x')^2}\,dy=\sqrt{1+0^2}\;dy=dy$;

$$y_1=0;\ \ y_2=4;\ \ I_{BO}=\int_{BO}(2x-y+4)\,dl=\int_0^4(2\cdot 0-y+4)\,dy=$$

$$=(-y^2/2+4y)\Big|_0^4=-8+16=8;$$

в) $OA$: $y=0$; $y'=0$; $dl=\sqrt{1+(y')^2}\,dx=\sqrt{1+0^2}\,dx=dx$;

$$x_1=0;\ \ x_2=2;\ \ I_{OA}=\int_{OA}(2x-y+4)\,dl=\int_0^2(2x-0+4)\,dx=$$

$$=(x^2+4x)\Big|_0^2=4+8=12.$$

Отже $I=\int_L(2x-y+4)\,dl=8\sqrt{5}+8+12=8\sqrt{5}+20$. ■

<u>Випадок 3</u>. Нехай просторова дуга $L_{AB}$ задана параметричними рівняннями $x=x(t)$; $y=y(t)$; $z=z(t)$, $\alpha\le t\le\beta$. Тоді

$$\boxed{\int_{L_{AB}} f(x,y,z)\,dl=\int_\alpha^\beta f\big(x(t),y(t),z(t)\big)\sqrt{\big(x'(t)\big)^2+\big(y'(t)\big)^2+\big(z'(t)\big)^2}\,dt}.$$

<u>Приклад 4</u>. Обчислити інтеграл $I=\int_L(2x-3y+2z-1)\,dl$, де $L$ – відрізок прямої між точками $M_1(3;-1;-2)$ і $M_2(5;-3;-1)$.

□ Знайдемо параметричні рівняння прямої $M_1M_2$:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1};\quad \frac{x-3}{5-3}=\frac{y+1}{-3+1}=\frac{z+2}{-1+2}=t;$$

$$\frac{x-3}{2}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z+2}{1}=t;\ \ x=2t+3;\ \ y=-2t-1;\ \ z=t-2.$$

Тоді

$$x'=2;\ \ y'=-2;\ \ z'=1;\ \ dl=\sqrt{\big(x'(t)\big)^2+\big(y'(t)\big)^2+\big(z'(t)\big)^2}\,dt=$$

$$=\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}\,dt=3dt;\ \ x_1=3\Rightarrow 2t+3=3\Rightarrow t_1=0;$$

$x_2 = 5 \Rightarrow 2t+3=5 \Rightarrow t_2 = 1;\; I = \int_L (2x-3y+2z-1)\,dl =$

$= \int\limits_0^1 (2\cdot(2t+3) - 3\cdot(-2t-1) + 2\cdot(t-2) - 1)\cdot 3dt = 3\int\limits_0^4 (4t+6+6t+$

$+3+2t-4-1)\cdot 3dt = 3\int\limits_0^1 (12t+4)\,dt = 3\cdot(6t^2+4t)\Big|_0^1 = 30.$ ■

Приклад 5. Обчислити інтеграл $I = \int\limits_L \dfrac{y\,dl}{\sqrt{x^2+y^2+4}}$, де $L$ – перший виток конічної гвинтової лінії: $x = t\cos t$; $y = t\sin t$; $z = \sqrt{3}t$, $0 \le t \le 2\pi$.

□ Оскільки $x' = \cos t - t\sin t$, $y' = \sin t + t\cos t$, $z' = \sqrt{3}$, то $dl = \sqrt{(\cos t - t\sin t)^2 + (\sin t + t\cos t)^2 + 3}\,dt = \sqrt{t^2+4}\;dt$. Тоді

$$I = \int\limits_0^{2\pi} \frac{t\sin t\sqrt{t^2+4}\;dt}{\sqrt{(t\cos t)^2 + (t\sin t)^2 + 4}} = \int\limits_0^{2\pi} t\sin t\;dt = \left| \begin{array}{c} u = t; \\ dv = \sin t\,dt; \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{c} du = dt; \\ v = -\cos t \end{array} \right| = -t\cos t\Big|_0^{2\pi} + \int\limits_0^{2\pi} \cos t\,dt = -2\pi + \sin t\Big|_0^{2\pi} = -2\pi. \quad ■$$

### 1.2.2. Криволінійний інтеграл за координатами. Формула Гріна

***Криволінійний інтеграл за координатами*** (***другого роду***) ***від вектор-функції*** $\vec{F}(x,y) = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$ ***по плоскій дузі*** $L_{AB}$ визначається як *границя інтегральної суми за формулою*

$$\boxed{\int_{L_{AB}} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy =}$$

$$\boxed{= \lim_{\max\Delta l_i \to 0} \sum\nolimits_{i=1}^{n} \left( P(\bar{x}_i, \bar{y}_i)\cdot\Delta x_i + Q(\bar{x}_i, \bar{y}_i)\cdot\Delta y_i \right)}.$$

Криволінійний інтеграл другого роду також називають ***циркуляцією вектора*** $\vec{F}$ ***по дузі*** $L_{AB}$ і позначають

$$\boxed{\int_{L_{AB}} \vec{F}(x,y)\,d\vec{l} = \lim_{\max \Delta l_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \vec{F}(\bar{x}_i,\bar{y}_i)\cdot \Delta \vec{l}_i}$$, де $d\vec{l} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j}$ – ***вектор диференціала (елемента) довжини плоскої дуги***.

Якщо лінія $L$ замкнена, то інтеграл по ній записується так

$$\boxed{\oint_L \vec{F}(x,y)\,d\vec{l} = \oint_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy}.$$

Зауваження 1. Поняття криволінійного інтеграла за координатами поширюється на просторовий випадок:

$$\boxed{\oint_{L_{AB}} \vec{F}(x,y,z)\,d\vec{l} = \oint_{L_{AB}} P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz},$$

де $d\vec{l} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k}$ – вектор диференціала (елемента) довжини просторової дуги.

Зауваження 2. *При зміні напрямку інтегрування криволінійний інтеграл за координатами тільки змінює знак*

$$\boxed{\int_{L_{BA}} \vec{F}\,d\vec{l} = -\int_{L_{AB}} \vec{F}\,d\vec{l}}.$$

Інші властивості криволінійного інтеграла за координатами аналогічні властивостям звичайного визначеного інтеграла.

Обчислення криволінійного інтеграла за координатами здійснюється зведенням його до одновимірного інтеграла методом заміни змінної. Розглянемо найбільш важливі випадки задання кривої $L$ і відповідний перехід до визначеного інтеграла.

Випадок 1. Нехай $\vec{F} = P(x,y)\,\vec{i} + Q(x,y)\,\vec{j}$ і $L_{AB}$ – плоска дуга, що задана в прямокутній системі координат параметричними рівняннями: $x = x(t)$; $y = y(t)$, причому початку дуги $A$ відповідає значення параметра $\alpha$, а кінцю дуги $B$ – значення параметра $\beta$. Тоді $dx = x'(t)\,dt$; $dy = y'(t)\,dt$. У криволінійному інтегралі робимо заміну змінної й отримуємо:

$$\boxed{\int_{L_{AB}} \vec{F}(x,y)\,d\vec{l} = \int_{L_{AB}} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy =}$$

$$\boxed{= \int_{\alpha}^{\beta} \left[P\big(x(t),y(t)\big)x'(t) + Q\big(x(t),y(t)\big)y'(t)\right]dt}.$$

Приклад 1. Обчислити інтеграл $I=\int_{L_{AB}} xy^{1/3}dx+5x^2dy$ по дузі кривої $L_{AB}:\ x=3\cos t;\ \ y=\sin^3 t,\ \ \pi/6\le t\le\pi/2$.

□ $dx=-3\sin t\,dt;\ \ dy=3\sin^2 t\cos t\,dt;\ \ I=\int_{L_{AB}} xy^{1/3}dx+5x^2dy=$

$$=\int_{\pi/6}^{\pi/2}(3\cos t\cdot(\sin^3 t)^{1/3}\cdot(-3\sin t)+5(3\cos t)^2\cdot 3\sin^2 t\cos t)\,dt=$$

$$=-9\int_{\pi/6}^{\pi/2}\sin^2 t\cos t\,dt+135\int_{\pi/6}^{\pi/2}\sin^2 t\cos^2 t\cos t\,dt=\Big|\,u=\sin t;$$

$$du=\cos t\,dt;\ \cos^2 t=1-\sin^2 t=1-u^2;\ u_1=\sin(\pi/6)=1/2;$$

$$u_2=\sin(\pi/2)=1\Big|=-9\int_{1/2}^{1}u^2\,du+135\int_{1/2}^{1}u^2(1-u^2)\,du=$$

$$=-3u^3\Big|_{1/2}^{1}+(45u^3-27u^5)\Big|_{1/2}^{1}=10\frac{19}{32}.\quad ■$$

Випадок 2. Нехай $\vec F=P(x,y)\vec i+Q(x,y)\vec j$ і $L_{AB}$ – плоска дуга, що задана в прямокутній системі координат в явному вигляді: $y=y(x)$, $a\le x\le b$, причому коли $x$ змінюється на відрізку $[a;b]$, біжуча точка $(x;y)$ на кривій $L$ рухається від точки $A$ до точки $B$. Можна використати попередній спосіб, записавши рівняння дуги у параметричній формі

$$\begin{cases} y=y(x) \\ x=x \end{cases} a\le x\le b.\ \text{Тоді}\ \begin{cases} dy=y'(x)\,dx \\ dx=dx \end{cases}\ \text{і маємо}$$

$$\boxed{\int_{L_{AB}}\vec F(x,y)\,d\vec l=\int_{L_{AB}}P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=}$$

$$\boxed{=\int_a^b\left[P\big(x,y(x)\big)+Q\big(x,y(x)\big)y'(x)\right]dx}.$$

Приклад 2. Обчислити циркуляцію плоского векторного поля $\vec F=4x^3y\vec i+(x/y^3)\vec j$ по дузі гіперболи $L_{AB}:y=1/x$ від точки $A(1;1)$ до точки $B(2;1/2)$.

□ $L_{AB}:y=1/x=x^{-1},\ 1\le x\le 2;\ \ y'=-x^{-2};\ \ dy=-x^{-2}dx;$

$$\int_{L_{AB}} \vec{F}\,d\vec{l} = \int_{L_{AB}} 4x^3ydx + (x/y^3)\,dy = \int_1^2 \left[4x^3\cdot(1/x) + \right.$$

$$\left. + x/(x^{-1})^3\cdot(-x^{-2})\right]dx = 3\int_1^2 x^2\,dx = x^3\Big|_1^2 = 7\,. \quad ■$$

<u>Приклад 3</u>. Обчислити інтеграл $I = \int_L (y/x)\,dx + xe^{-y}dy$ по дузі $L: y = \ln x$ від точки $A(1;0)$ до точки $B(e;1)$.

□ $L: y = \ln x$; $1 \le x \le e$; $y' = 1/x$;

$$I = \int_1^e \left(\frac{\ln x}{x} + xe^{-\ln x}\frac{1}{x}\right)dx = \int_1^e \frac{\ln x}{x}dx + \int_1^e \frac{dx}{x} = \frac{1}{2}\ln^2 x\Big|_1^e + \ln x\Big|_1^e = \frac{3}{2}\,.■$$

<u>Випадок 3</u>. Розглянемо просторове векторне поле $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$. Нехай просторова дуга $L_{AB}$ задана в параметричній формі $x = x(t)$; $y = y(t)$; $z = z(t)$, $\alpha \le t \le \beta$, причому початку дуги $A$ відповідає значення параметра $\alpha$, а кінцю дуги $B$ – значення параметра $\beta$. . Тоді $dx = x'(t)\,dt$; $dy = y'(t)\,dt$; $dz = z'(t)\,dt$. У криволінійному інтегралі робимо заміну змінної і дістаємо:

$$\boxed{\int_{L_{AB}} \vec{F}(x,y,z)\,d\vec{l} = \int_{L_{AB}} P\,(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy +}$$

$$\boxed{+ R(x,y,z)\,dz = \int_\alpha^\beta \left[P\big(x(t),y(t),z(t)\big)x'(t) + \right.}$$

$$\boxed{\left. + Q\big(x(t),y(t),z(t)\big)y'(t) + R\big(x(t),y(t),z(t)\big)z'(t)\right]dt}.$$

<u>Приклад 4</u>. Обчислити циркуляцію просторового векторного поля $\vec{F} = xz\,\vec{i} - yz\,\vec{j} + (x - y - 2z)\,\vec{k}$ по дузі гвинтової лінії $L_{AB}$: $x = 3\cos t$; $y = 3\sin t$; $z = 4t$, $0 \le t \le \pi/2$.

□ $x' = -3\sin t$, $y' = 3\cos t$, $z' = 4$. Тоді

$$I = \int_{L_{AB}} \vec{F}(x,y,z)\,d\vec{l} = \int_{L_{AB}} xz\,dx - yz\,dy + (x - y - 2z)\,dz =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \big(3\cos t\cdot 4t\cdot(-3\sin t) - 3\sin t\cdot 4t\cdot 3\cos t + (3\cos t - 3\sin t -$$

$$-2t)\cdot 4\big)dt=-72\int_0^{\pi/2} t\sin t\cos t\;dt+12\int_0^{\pi/2}\cos t\;dt-12\int_0^{\pi/2}\sin t\;dt-$$

$$-8\int_0^{\pi/2} t\,dt=-36\int_0^{\pi/2} t\sin 2t\,dt+12\cdot\sin t\Big|_0^{\pi/2}+12\cdot\cos t\Big|_0^{\pi/2}-4\cdot t^2\Big|_0^{\pi/2}=$$

$$=\big|\,u=t;\;dv=\sin 2t\,dt;\;du=dt;\;v=-(1/2)\cos 2t\,\big|=$$

$$=-36\left(t\cdot(-1/2)\cos 2t\Big|_0^{\pi/2}-\int_0^{\pi/2}(-1/2)\cos 2t\,dt\right)+12\,\big(\sin(\pi/2)-$$

$$-\sin 0\big)+12\big(\cos(\pi/2)-\cos 0\big)-4(\pi/2)^2=-36\,\big((-\pi/4)\cos\pi+$$

$$+(1/4)\sin 2t\Big|_0^{\pi/2}\big)+12-12-\pi^2=-9\pi-\pi^2.\ \blacksquare$$

Зв'язок між подвійним інтегралом по плоскій області $D$ та криволінійним інтегралом по межі $L$ цієї області відображається ***формулою Гріна***:

$$\boxed{\oint_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\iint_D\left(\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\right)dxdy}.$$

Зауваження 3. З формули Гріна випливає наступне співвідношення для площі $S_D$ плоскої області $D$, що обмежена контуром $L$: $\boxed{S_D=(1/2)\oint_L -y\,dx+x\,dy}$.

Приклад 5. Знайти площу області $D$, що обмежена еліпсом $L$: $x^2/16+y^2/9=1$, користуючись криволінійним інтегралом за координатами.

□ Перейдемо до параметричних рівнянь еліпса $L$: $x=4\cos t$; $y=3\sin t$ $\quad x=a\cos t; y=b\sin t$. Додатному обходу контуру $L$ відповідає зміна параметра $t$ від $0$ до $2\pi$. Тоді

$$x'=-4\sin t;\quad y'=3\cos t;\quad S_D=(1/2)\oint_L -y\,dx+x\,dy=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\big(-3\sin t\cdot(-4\sin t)+4\cos t\cdot 3\cos t\big)dt=6\int_0^{2\pi}dt=6\cdot\ t\Big|_0^{2\pi}=12\pi.\ \blacksquare$$

## 1.3. Степеневі ряди

### 1.3.1. Степеневі ряди та їх збіжність

***Степеневим рядом*** за степенями двочлена $x - x_0$ називають функціональний ряд вигляду:

$$\boxed{\sum\nolimits_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1 (x - x_0) + \ldots + a_n (x - x_0)^n + \ldots},$$

де $x$ – дійсна змінна (***аргумент***); $x_0$ – дійсне фіксоване число (***центр розвинення*** або ***опорна точка***); $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ – дійсні сталі (***коефіцієнти***).

Теорема Абеля. а) *Якщо степеневий ряд* $\sum\nolimits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *збігається при деякому* $x = x_1 \neq 0$*, то він абсолютно збігається при всіх значеннях* $x$*, для яких* $|x| < |x_1|$*. б) Якщо степеневий ряд* $\sum\nolimits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *розбігається при деякому* $x = x_2$*, то він розбігається при всіх значеннях* $x$*, для яких* $|x| > |x_2|$.

Існує таке невід'ємне число $R$, яке називають ***радіусом збіжності*** степеневого ряду $\sum\nolimits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, що при $|x| < R$ ряд абсолютно збіжний, а при $|x| > R$ – розбіжний (рис. 27). Симетричний інтервал $(-R; R)$ називають ***інтервалом збіжності*** цього степеневого ряду.

Зауваження 1. На кінцях інтервалу збіжності, тобто при $x = \pm R$, питання про збіжність розв'язується окремо для кожного конкретного ряду. Таким чином, ***область збіжності*** степеневого ряду $\sum\nolimits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ може відрізнятись від інтервалу $(-R; R)$ не більше ніж двома точками $x = \pm R$.

Зауваження 2. Інтервал збіжності степеневого ряду можна знайти безпосередньо за ознакою Даламбера або за радикальною ознакою Коші, застосовуючи їх до ряду, складеного з модулів членів даного ряду. Для дослідження кінців інтервалу використовуються більш "сильні" ознаки.

Зауваження 3. Степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ можна почленно диференціювати та інтегрувати в інтервалі збіжності $(-R;R)$. Одержаний ряд має той самий інтервал збіжності. Але при цьому може змінитися збіжність ряду на кінцях цього інтервалу.

Приклад. Знайти інтервал і область збіжності даного степеневого ряду:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^{5n}\, 32^n}{\sqrt{2n-1}}; \qquad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-3)^{2n}}{n^{n^2}};$$

$$\text{в) } \sum_{n=6}^{\infty} \frac{(2n)!\,(x-1)^{n+2}}{3^n\, n^2}; \quad \text{г) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{(4n-1)\ln(4n-1)}.$$

□ а) Для даного ряду скористаємося ознакою Даламбера:

$$u_n = \frac{(x+1)^{5n}\, 32^n}{\sqrt{2n-1}}; \;\; u_{n+1} = \frac{(x+1)^{5(n+1)}\, 32^{n+1}}{\sqrt{2(n+1)-1}} = \frac{(x+1)^{5n+5} 32^{n+1}}{\sqrt{2n+1}};$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x+1)^{5n+5} 32^{n+1}}{\sqrt{2n+1}} : \frac{(x+1)^{5n}\, 32^n}{\sqrt{2n-1}}\right| = 32\,|x+1|^5 \times$$

$$\times \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n-1}}{\sqrt{2n+1}} = 32\,|x+1|^5 \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2-1/n}}{\sqrt{2+1/n}} = 32\,|x+1|^5;$$

$$32\,|x+1|^5 < 1; \;\; |x+1|^5 < 1/32; \;\; |x+1| < 1/2; \;\; -1/2 < x+1 < 1/2;$$
$$-3/2 < x < -1/2.$$

Таким чином, $(-3/2;-1/2)$ – інтервал збіжності даного ряду і $R = (-1/2-(-3/2))/2 = 1/2$ – його радіус збіжності.

Дослідимо збіжність цього ряду на кінцях одержаного інтервалу. При $x = -3/2$ маємо знакопочерговий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(-3/2) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3/2+1)^{5n}\, 32^n}{\sqrt{2n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{5n}}{\sqrt{2n-1}}.$$

Ряд з модулів його членів $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2n-1}}$ дослідимо за допомогою граничної ознаки порівняння:

$|u_n(-3/2)| = \frac{1}{\sqrt{2n-1}} \sim \frac{1}{\sqrt{2n}} \sim \frac{1}{n^{1/2}} = v_n$ – розбіжний узагальнений гармонічний ряд; $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|u_n(-3/2)|}{v_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^{1/2}}{\sqrt{2n-1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0, \infty$. Ряд з модулів розбіжний.

Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} |u_n(-3/2)| = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2n-1}} = 0$, то ряд є умовно збіжним за ознакою Лейбниця.

При $x = -1/2$ дістаємо знакододатний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(-1/2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1/2+1)^{5n}\, 32^n}{\sqrt{2n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2n-1}},$$

який співпадає з рядом з модулів при $x = -3/2$, що розбігається.

Отже, областю збіжності даного ряду є півінтервал $[-3/2; -1/2)$.

б) Для даного ряду скористаємося радикальною ознакою:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left| \frac{(-1)^n (x-3)^{2n}}{n^{n^2}} \right|} = |x-3| \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^n} = 0$$

Оскільки $0 < 1$ при всіх дійсних значеннях $x$, то інтервалом і областю збіжності ряду є вся числова пряма $(-\infty; +\infty)$ і його радіус збіжності $R = +\infty$.

в) До даного ряду застосуємо ознаку Даламбера:

$$u_n = \frac{(2n)!\,(x-1)^{n+2}}{3^n\, n^2}; \quad u_{n+1} = \frac{(2n+2)!\,(x-1)^{n+3}}{3^{n+1}(n+1)^2}; \quad \lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(2n)!(2n+1)(2n+2)\,(x-1)^{n+3}}{3^{n+1}(n+1)^2} : \frac{(2n)!\,(x-1)^{n+2}}{3^n\, n^2} \right| =$$

$$= \frac{2|x-1|}{3} \lim_{n\to\infty} \frac{n^2(2n+1)}{n+1} = \begin{cases} 0 \ \ при \ x = 1; \\ +\infty \ \ при \ x \neq 1. \end{cases}$$

Отже, інтервалом і областю збіжності ряду є тільки одна точка $x=1$ і його радіус збіжності $R=0$.

г) Для даного ряду скористаємося ознакою Даламбера:

$$u_n=\frac{(x-2)^n}{(4n-1)\ln(4n-1)};\quad u_{n+1}=\frac{(x-2)^{n+1}}{(4n+3)\ln(4n+3)};\quad \lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-2)^{n+1}}{(4n+3)\ln(4n+3)}:\frac{(x-2)^n}{(4n-1)\ln(4n-1)}\right|=|x-2|\times$$

$$\times\lim_{n\to\infty}\frac{4n+3}{4n-1}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(4n+3)}{\ln(4n-1)}=\left|\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(4n+3)}{\ln(4n-1)}=\right.$$

$$\left.=\lim_{x\to\infty}\frac{(\ln(4x+3))'}{(\ln(4x-1))'}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x+1}{4x+3}=1\right|=|x-2|;$$

$$|x-2|<1;\quad -1<x-2<1;\quad 1<x<3.$$

Таким чином, $(1;3)$ – інтервал збіжності даного ряду і $R=(3-1)/2=1$ – його радіус збіжності.

Дослідимо збіжність цього ряду на кінцях одержаного інтервалу. При $x=1$ маємо знакопочерговий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(1)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-2)^n}{(4n-1)\ln(4n-1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(4n-1)\ln(4n-1)}.$$

Ряд з модулів його членів $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n-1)\ln(4n-1)}$ дослідимо за допомогою інтегральної ознаки Коші:

$$f(x)=\frac{1}{(4x-1)\ln(4x-1)};\quad \int_1^{+\infty}f(x)\,dx=\int_1^{+\infty}\frac{dx}{(4x-1)\ln(4x-1)}=$$

$$=\left|u=\ln(4x-1);\ du=\frac{4\,dx}{4x-1};\ u_1=\ln 3;\ u_2=\ln(+\infty)=+\infty\right|=$$

$$=\frac{1}{4}\int_{\ln 3}^{+\infty}\frac{du}{u}=\frac{1}{4}\cdot\ln|u|\Big|_{\ln 3}^{+\infty}=+\infty$$ . Ряд з модулів розбігається.

Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n(1)| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{(4n-1)\ln(4n-1)} = 0$, то ряд є умовно збіжним за ознакою Лейбниця.

При $x = 3$ дістаємо знакододатний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(3) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3-2)^n}{(4n-1)\ln(4n-1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-1)\ln(4n-1)},$$

який співпадає з рядом з модулів при $x = 1$, що розбігається.

Отже, областю збіжності даного ряду є півінтервал $[1;3)$. ■

### 1.3.2. Ряди Тейлора і Маклорена. Застосування степеневих рядів до наближених обчислень

Нехай функція $f(x)$ визначена в околі деякої точки $x_0$ і в цій точці нескінченне число разів диференційовна. ***Ряд Тейлора*** для даної функції $f(x)$ має вигляд:

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) +}$$
$$\boxed{+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \ldots}\,.$$

Якщо в ряді Тейлора покласти $x_0 = 0$, то отримаємо ***ряд Маклорена*** для даної функції $f(x)$:

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots}\,.$$

Розвинення функцій в степеневі ряди в загальному випадку ґрунтується на використанні рядів Тейлора чи Маклорена. На практиці найчастіше для цього застосовують ***спосіб формальних перетворень*** – без знаходження виразів для похідних довільного порядку, а за допомогою формальних перетворень ***стандартних*** (уже відомих) ***розвинень***. Тоді залишається обґрунтувати збіжність і саме до даної функції отриманого розкладу на певному проміжку.

Приклад 1. Розкласти в ряд Тейлора функцію $f(x)=\dfrac{1}{3x-4}$ за степенями двочлена $x-2$ та знайти область збіжності отриманих рядів.

□ Спочатку подамо функцію $f(x)=1/(3x-4)$ через нову змінну $z=x-2$ – відхилення від центру розвинення $x=x_0=2$:

$$x=z+2;\quad f(x)=\frac{1}{3(z+2)-4}=\frac{1}{3z+2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+3z/2}.$$

Скористаємося рядом

$$1/(1+x)=1-x+...+(-1)^n x^n+...=\sum\nolimits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n\,,\quad x\in(-1;1)\,,$$

в який замість $x$ підставимо $3z/2$. Отримаємо:

$$f(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+3z/2}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(3z/2)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 3^n z^n}{2^{n+1}}.$$

Поклавши $z=x-2$, повернемося до початкової змінної $x$ і дістанемо шукане розвинення $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n 3^n (x-2)^n}{2^{n+1}}$.

Дослідження отриманого ряду на збіжність здійснимо за ознакою Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}3^{n+1}(x-2)^{n+1}}{2^{n+2}}:\frac{(-1)^n 3^n (x-2)^n}{2^{n+1}}\right|=$$

$$=(3/2)\,|\,x-2\,|<1;\ \ -3/2<x-2<3/2;\ \ 1/2<x<7/2.$$

На кінцях інтервалу збіжності $(1/2;7/2)$ маємо ряди $\sum\limits_{n=0}^{\infty}u_n(1/2)=(1/2)\sum\limits_{n=0}^{\infty}1$ і $\sum\limits_{n=0}^{\infty}u_n(7/2)=(1/2)\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n$, що розбігаються, оскільки для них не виконується необхідна ознака збіжності. Отже, $(1/2;7/2)$ – область збіжності одержаного ряду. ■

Степеневі ряди широко застосовують у наближених обчисленнях, зокрема, для: обчислення значень функцій; обчислення інтегралів; розв’язування диференціальних рівнянь.

Приклад 2. Обчислити наближено визначений інтеграл $I=\int\limits_0^{1/2}\frac{\cos\sqrt{x}-1}{x}dx$ з точністю до $\varepsilon=0{,}000001$.

□ Розвинемо підінтегральну функцію в степеневий ряд, використовуючи стандартний розклад (у ряд Маклорена) косинусу

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!},\ x\in R,$$

де замість $x$ підставимо $\sqrt{x}$, потім віднімемо 1 і почленно поділимо на $x$:

$$\frac{\cos\sqrt{x}-1}{x}=\frac{1}{x}\left(1-\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{4!}-\ldots+\frac{(-1)^n x^n}{(2n)!}+\ldots-1\right)=$$

$$=-\frac{1}{2!}+\frac{x}{4!}-\ldots+\frac{(-1)^n x^{n-1}}{(2n)!}+\ldots,\quad x\in(-\infty;+\infty).$$

Оскільки проміжок інтегрування $[0;1/2]$ лежить в інтервалі збіжності $(-\infty;+\infty)$, то цей степеневий ряд можна почленно проінтегрувати на $[0;1/2]$. Дістанемо:

$$I=\int\limits_0^{1/2}\left(-\frac{1}{2!}+\frac{x}{4!}-\ldots+\frac{(-1)^n x^{n-1}}{(2n)!}+\ldots\right)dx=$$

$$=\left(-\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{4!\cdot 2}-\frac{x^3}{6!\cdot 3}+\ldots+\frac{(-1)^n x^n}{(2n)!\cdot n}+\ldots\right)\Bigg|_0^{1/2}=-1\big/(2!\cdot 2)+$$

$$+1\big/(4!\cdot 2\cdot 2^2)-1\big/(6!\cdot 3\cdot 2^3)+\ldots+1\big/\left((2n)!\cdot n\cdot 2^n\right)+\ldots.$$

Шуканий інтеграл дорівнює сумі збіжного знакопочергового ряду. З'ясуємо, скільки перших членів отриманого ряду треба взяти, щоб виконувалася задана точність $\varepsilon=0{,}000001$.

Для заданої точності $\varepsilon=0{,}0001$ наближення маємо

$$\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon/2=0{,}000001/2=0{,}0000005.$$

З ознаки Лейбниця дістанемо оцінку модулю $n$-го залишку:

$$|R_n| \le |u_{n+1}| = 1\Big/\Big((2(n+1))! \cdot (n+1) \cdot 2^{n+1}\Big) =$$

$$= 1\Big/\Big((2n+2))! \cdot (n+1) \cdot 2^{n+1}\Big).$$

Підберемо $n$ так, щоб виконувалася умова

$$R_n \le 1\Big/\Big((2n+2))! \cdot (n+1) \cdot 2^{n+1}\Big) \le \varepsilon_1 = 0{,}0000005:$$

$$n = 2: \;\; R_2 \le 1\Big/\Big(6! \cdot 3 \cdot 2^3\Big) = 0{,}00006 > \varepsilon_1 = 0{,}0000005;$$

$$n = 3: \;\; R_3 \le 1\Big/\Big(8! \cdot 4 \cdot 2^4\Big) = 0{,}0000004 < \varepsilon_1 = 0{,}0000005.$$

Отже, досить взяти три перших члени ряду.

Тепер визначимо кількість $k$ вірних десяткових знаків, які повинні мати залишені члени ряду після округлення:

$$0{,}5 \cdot 10^{-k} \cdot n = 0{,}5 \cdot 10^{-k} \cdot 3 \le \varepsilon_2 = 0{,}0000005;\; 10^{-k} \le 0{,}00000033;$$

$$-k \le \lg 0{,}00000033; \;\; -k \le \lg 33 - 8; \quad k \ge 8 - \lg 33; \; k = 7.$$

Таким чином $\quad I \approx S_3 = -\dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{4! 2 \cdot 2^2} - \dfrac{1}{6! 3 \cdot 2^3} =$

$$= -0{,}5000000 + 0{,}0052083 - 0{,}0000579 = -0{,}4948496.$$

Остаточно $I \approx -0{,}494850$. ■

<u>Приклад 3</u>. Обчислити наближено визначений інтеграл $I = \int\limits_0^{3/4} \dfrac{1 - \sqrt{1 - x^3}}{x^3}\, dx$ з точністю до $\varepsilon = 0{,}0001$.

□ Розвинемо підінтегральну функцію в степеневий ряд, взявши за основу стандартний розклад для бінома

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \ldots$$

при $\alpha = 1/2$:

$$(1+x)^{1/2} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right)\frac{x^2}{2!} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right)\left(\frac{1}{2} - 2\right)\frac{x^3}{3!} + \ldots +$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right)\ldots\left(\frac{1}{2} - n + 1\right)\frac{x^n}{n!} + \ldots = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2! \cdot 2^2} + \frac{1 \cdot 3 x^3}{3! \cdot 2^3} -$$

$$-\frac{1\cdot 3\cdot 5x^4}{4!\cdot 2^4}+\ldots+\frac{(-1)^{n+1}\cdot 1\cdot 3\cdot 5\ldots\cdot(2n-3)\,x^n}{n!\cdot 2^n}+\ldots.$$ Тут $x\in(-1;1)$.

В одержане розвинення замість $x$ підставимо $-x^3$, потім віднімемо його від 1 і почленно поділимо на $x^3$:

$$\frac{1-\sqrt{1-x^3}}{x^3}=\frac{1-(1-x^3)^{1/2}}{x^3}=\frac{1}{x^3}\left(1-1+\frac{x^3}{2}+\frac{x^6}{2!\cdot 2^2}+\frac{1\cdot 3x^9}{3!\cdot 2^3}+\right.$$

$$\left.+\frac{1\cdot 3\cdot 5x^{12}}{4!\cdot 2^4}+\ldots+\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots\cdot(2n-3)\,x^{3n}}{n!\cdot 2^n}+\ldots\right)=\frac{1}{2}+\frac{x^3}{2!\cdot 2^2}+$$

$$+\frac{1\cdot 3x^6}{3!\cdot 2^3}+\frac{1\cdot 3\cdot 5x^9}{4!\cdot 2^4}+\ldots+\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots\cdot(2n-3)\,x^{3n-3}}{n!\cdot 2^n}+\ldots,$$

де $x\in(-1;1)$.

Оскільки $[0;1/4]\subseteq(-1;1)$, то цей степеневий ряд можна проінтегрувати почленно на $[0;1/4]$. Дістанемо:

$$I=\int_0^{3/4}\frac{1-\sqrt{1-x^3}}{x^3}dx=\int_0^{3/4}\left(\frac{1}{2}+\frac{x^3}{2!\cdot 2^2}+\frac{1\cdot 3x^6}{3!\cdot 2^3}+\frac{1\cdot 3\cdot 5x^9}{4!\cdot 2^4}+\ldots+\right.$$

$$\left.+\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots\cdot(2n-3)\,x^{3n-3}}{n!\cdot 2^n}+\ldots\right)dx=\left(\frac{x}{2}+\frac{x^4}{2!\cdot 2^2\cdot 4}+\frac{1\cdot 3x^7}{3!\cdot 2^3\cdot 7}+\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1\cdot 3\cdot 5x^{10}}{4!\cdot 2^4\cdot 10}+\ldots+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-3)\,x^{3n-2}}{n!\cdot 2^n\cdot(3n-2)}+\ldots\right)\right|_0^{3/4}=\frac{3}{2\cdot 4}+$$

$$+\frac{3^4}{2!\cdot 2^2\cdot 4\cdot 4^4}+\frac{1\cdot 3\cdot 3^7}{3!\cdot 2^3\cdot 7\cdot 4^7}+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 3^{10}}{4!\cdot 2^4\cdot 10\cdot 4^{10}}+\ldots+$$

$$+\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots\cdot(2n-3)\cdot 3^{3n-2}}{n!\cdot 2^n\cdot(3n-2)\cdot 4^{3n-2}}+\ldots.$$

Таким чином, шуканий інтеграл дорівнює сумі збіжного знакододатного ряду. З'ясуємо, скільки перших членів отриманого ряду треба взяти, щоб виконувалася задана точність $\varepsilon = 0{,}0001$.

Для заданої точності $\varepsilon = 0{,}0001$ наближення маємо

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon / 2 = 0{,}0001 / 2 = 0{,}00005.$$

Спочатку оцінимо $n$-й залишок:

$$R_n = \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots\cdot(2(n+1)-3)\cdot 3^{3(n+1)-2}}{(n+1)!\cdot 2^{n+1}\cdot(3(n+1)-2)\cdot 4^{3(n+1)-2}} +$$

$$+\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots\cdot(2(n+2)-3)\cdot 3^{3(n+2)-2}}{(n+2)!\cdot 2^{n+2}\cdot(3(n+2)-2)\cdot 4^{3(n+2)-2}} + \ldots =$$

$$= \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots\cdot(2n-1)\cdot 3^{3n+1}}{(n+1)!\cdot 2^{n+1}\cdot 4^{3n+1}}\left(\frac{1}{3n+1} + \frac{(2n+1)\cdot 3^3}{(n+2)\cdot 2\cdot(3n+4)\cdot 4^3} +\right.$$

$$\left. + \frac{(2n+1)(2n+3)\cdot 3^6}{(n+2)(n+3)\cdot 2^2\cdot(3n+7)\cdot 4^6} + \ldots\right) < \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots\cdot(2n-1)\cdot 3^{3n+1}}{(n+1)!\cdot 2^{n+1}\cdot 4^{3n+1}} \times$$

$$\times\left(\frac{1}{3n+1} + \frac{3^3}{(3n+1)\cdot 4^3} + \frac{3^6}{(3n+1)\cdot 4^6} + \ldots\right) =$$

$$= \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots\cdot(2n-1)\cdot 3^{3n+1}}{(n+1)!\cdot 2^{n+1}\cdot(3n+1)\cdot 4^{3n+1}}\left(1 + \left(\frac{3}{4}\right)^3 + \left(\frac{3}{4}\right)^6 + \ldots\right) =$$

$$= \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots\cdot(2n-1)\cdot 3^{3n+1}}{(n+1)!\cdot 2^{n+1}\cdot(3n+1)\cdot 4^{3n+1}} \times \frac{1}{1-(3/4)^3} =$$

$$= \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots\cdot(2n-1)\cdot 3^{3n+1}}{(n+1)!\cdot 2^{n+1}\cdot(3n+1)\cdot 4^{3n-2}\cdot 37}.$$

Тут у кінці скористалися формулою суми нескінченно спадної геометричної прогресії зі знаменником $q = (3/4)^3$.

Підберемо $n$ так, щоб виконувалася умова

$$R_n < \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots\cdot(2n-1)\cdot 3^{3n+1}}{(n+1)!\cdot 2^{n+1}\cdot(3n+1)\cdot 4^{3n-2}\cdot 37} \le \varepsilon_1 = 0{,}00005:$$

$$n=3:\quad R_3<\frac{1\cdot3\cdot5\cdot3^{10}}{4!\cdot2^4\cdot10\cdot4^7\cdot37}=0{,}0004>\varepsilon_1=0{,}00005;$$

$$n=4:\quad R_4<\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot3^{13}}{5!\cdot2^5\cdot13\cdot4^{10}\cdot37}=0{,}00009>\varepsilon_1=0{,}00005;$$

$$n=5:\quad R_5<\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9\cdot3^{16}}{6!\cdot2^6\cdot16\cdot4^{13}\cdot37}=0{,}00002<\varepsilon_1=0{,}00005.$$

Отже, досить взяти часткову суму до п’ятого члена включно.

Тепер визначимо кількість $k$ вірних десяткових знаків, які повинні мати залишені члени ряду після округлення:

$$0{,}5\cdot10^{-k}\cdot n=0{,}5\cdot10^{-k}\cdot5\le\varepsilon_2=0{,}00005;\ 10^{-k}\le0{,}00002;$$

$$-k\le\lg0{,}00002;\ -k\le\lg2-5;\quad k\ge5-\lg2;\ k=5.$$

$$0{,}5\cdot10^{-k}\cdot2\le\varepsilon_2=0{,}00005;\ 10^{-k}\le0{,}00005;\ k\ge\lg20000;\ k=5.$$

Таким чином

$$I\approx S_5=\frac{3}{2\cdot4}+\frac{3^4}{2!\cdot2^2\cdot4\cdot4^4}+\frac{1\cdot3\cdot3^7}{3!\cdot2^3\cdot7\cdot4^7}+\frac{1\cdot3\cdot5\cdot3^{10}}{4!\cdot2^4\cdot10\cdot4^{10}}+$$

$$+\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot3^{13}}{5!\cdot2^5\cdot13\cdot4^{13}}=0{,}37500+0{,}00989+0{,}00119+0{,}00022+$$

$$+0{,}00005=0{,}38635.\quad \text{Остаточно}\quad I\approx0{,}3864.\qquad\blacksquare$$

<u>Приклад 4</u>. Знайти у вигляді степеневого ряду до перших п’яти членів включно частинний розв’язок диференціального рівняння $y'=y^3-y\ln x$, що задовольняє початковій умові $y(1)=-1$.

□ Шукаємо розв’язок $y=y(x)$ у вигляді ряду Тейлора з центром розвинення у початковій точці $x=1$:

$$y(x)=y(1)+\frac{y'(1)}{1!}(x-1)+\frac{y''(1)}{2!}(x-1)^2+$$

$$+\frac{y'''(1)}{3!}(x-1)^3+\frac{y^{(4)}(1)}{4!}(x-1)^4+\dots,$$

де згідно умови задачі явно виписані перші п’ять членів.

За умовою $y(1)=-1$. Підставляючи $x=1$ і $y=y(1)=-1$ у диференціальне рівняння, знаходимо

$$y'(1)=(-1)^3\sqrt{4}-4\ln 1=-1.$$

Далі диференціюємо послідовно диференціальне рівняння по $x$ і в отримані вирази підставляємо відомі на даному кроці величини. Одержуємо похідні $y''(1)$, $y'''(1)$ і $y^{(4)}(1)$:

$$y''=3y^2y'-y'\ln x-\frac{y}{x};\quad y''(1)=3(-1)^2(-1)-(-1)\ln 1-\frac{-1}{1}=-2;$$

$$y'''=3(2y(y')^2+y^2y'')-y''\ln x-\frac{y'}{x}-\frac{y'x-y}{x^2}=6y(y')^2+$$

$$+3y^2y''-y''\ln x-\frac{2y'x-y}{x^2};\quad y'''(1)=6(-1)(-1)^2+3(-1)^2(-2)-$$

$$-(-2)\cdot\ln 1-\frac{2\cdot(-1)\cdot 1-(-1)}{1^2}=-11;$$

$$y^{(4)}=6((y')^3+y\cdot 2y'y'')+3(2yy'y''+y^2y''')-y'''\ln x-\frac{y''}{x}-$$

$$-\frac{(2y''x+y')x^2-2x(2y'x-y)}{x^4}=6(y')^3+18yy'y''+3y^2y'''-$$

$$-y'''\ln x-\frac{3y''x^2-3y'x+2y}{x^3};\quad y^{(4)}(1)=6(-1)^3+18(-1)(-1)\times$$

$$\times(-2)+3(-1)^2(-11)-(-11)\ln 1-\frac{3(-2)1^2-3(-1)1+2(-1)}{1^3}=-58.$$

Отже, $$y(x)=-1+\frac{-1}{1!}(x-1)+\frac{-2}{2!}(x-1)^2+\frac{-11}{3!}(x-1)^3+$$

$$+\frac{-58}{4!}(x-1)^4+\ldots=$$

$$=-1-(x-1)-(x-1)^2-\frac{11}{6}(x-1)^3-\frac{29}{12}(x-1)^4+\ldots.\quad\blacksquare$$

## 1.4. Ряди Фур’є

### 1.4.1. Розкладання періодичних функцій у ряди Фур'є. Достатні умови збіжності ряду Фур'є

Функції $f(x)$ і $g(x)$, що неперервні на відрізку $[a;b]$, називають ***ортогональними*** на цьому відрізку, якщо виконується умова

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = 0.$$

Скінченну чи нескінченну систему функцій $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, …, $\varphi_n(x)$, …, які неперервні на відрізку $[a;b]$ і не дорівнюють тотожно нулю, називають ***ортогональною*** на цьому відрізку, якщо всі зазначені функції попарно ортогональні, тобто

$$\int_a^b \varphi_m(x)\varphi_n(x)\,dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ A_n \neq 0, & m = n \end{cases} \quad (m = 0,1,\ldots;\ n = 0,1,\ldots).$$

Оскільки базисні тригонометричні функції мають спільний період $T = 2\pi$, то сума ряду теж періодична з періодом $T = 2\pi$.

Нехай $f(x)$ – задана періодична функція з періодом $T = 2\pi$. Тригонометричний ряд

$$\boxed{f(x) = a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)},$$

де $a_0$, $a_n$, $b_n$ $(n = 1,2,\ldots)$ – ***коефіцієнти Фур’є***, які обчислюються за формулами

$$\boxed{a_0 = (1/\pi)\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx}; \quad \boxed{a_n = (1/\pi)\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx,\quad n = 1,2,\ldots;}$$

$$\boxed{b_n = (1/\pi)\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx,\quad n = 1,2,\ldots},$$

називають ***рядом Фур’є*** функції $f(x)$.

Зауваження 1. Інтеграли у формулах для коефіцієнтів Фур’є можна обчислювати на довільному проміжку $[a;a+2\pi]$, довжина якого дорівнює періоду $T = 2\pi$ функції $f(x)$.

Теорема Діріхле (***достатня ознака розвинення функції в ряд Фур'є***). *Якщо функція* $f(x)$ *має період* $T = 2\pi$ *і на відрізку* $[-\pi;\pi]$ *неперервна або має скінченне число точок розриву першого роду і відрізок* $[-\pi;\pi]$ *можна розбити на скінченне число частин так, що всередині кожної з них функція монотонна, то її ряд Фур'є збігається на всій числовій осі, причому сума ряду* $S(x)$ *в точках неперервності функції* $f(x)$ *дорівнює їй самій* $S(x) = f(x)$, *а у кожній точці розриву* $x_0$ *функції* $f(x)$ *– середньому арифметичному односторонніх границь при* $x \to x_0$ *зліва та справа*

$$S(x_0) = (1/2)\left(\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) + \lim_{x \to x_0 + 0} f(x)\right).$$

*При цьому збіжність ряду Фур'є рівномірна на будь-якому відрізку, що належить інтервалу неперервності функції* $f(x)$.

Приклад 1. Розвинути в ряд Фур'є $2\pi$-періодичну функцію

$$f(x) = \begin{cases} x, & -\pi < x < 0; \\ x^2/\pi, & 0 \le x \le \pi. \end{cases}$$

□ Задана функція задовольняє умовам теореми Діріхле (рис. 21), тому її можна розкласти в ряд Фур'є. Отже, задача зводиться до знаходження коефіцієнтів Фур'є:

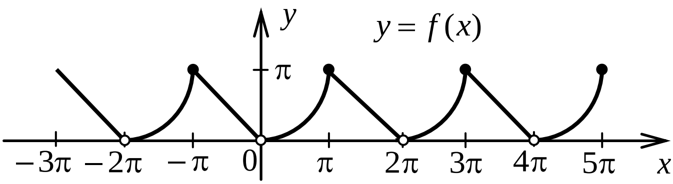


Рис. 21

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} x\,dx + \int_{0}^{\pi} (x^2/\pi)\,dx\right) = \frac{1}{\pi}\, x\Big|_{-\pi}^{0} +$$

$$+ (1/\pi^2)(x^3/3)\Big|_{0}^{\pi} = 4\pi/3; \quad a_n = (1/\pi)\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx =$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} x\cdot\cos nx\,dx+\int_{0}^{\pi}(x^2/\pi)\cos nx\,dx\right)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} x\cdot\cos nx\,dx+$$

$$+\left|\begin{matrix} u=x; \quad dv=\cos nx\,dx; \\ du=dx\,; \;\; v=(1/n)\sin nx \end{matrix}\right|+\frac{1}{\pi^2}\int_0^{\pi} x^2\cos nx\,dx=\left|\begin{matrix} u=x^2; \\ dv=\cos nx\,dx\,; \end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix} du=2xdx\,; \\ v=(1/n)\sin nx \end{matrix}\right|=\frac{1}{\pi}\left(\frac{x}{n}\sin nx\Big|_{-\pi}^{0}-\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{0}\sin nxdx\right)+\frac{1}{\pi^2}\left(\frac{x^2}{n}\sin nx\Big|_{0}^{\pi}-\right.$$

$$\left.-\frac{2}{n}\int_0^{\pi} x\sin nxdx\right)=-\frac{1}{\pi n}\int_{-\pi}^{0}\sin nx\,dx-\frac{2}{\pi^2 n}\int_0^{\pi} x\sin nx\,dx=\left|\begin{matrix} u-x; \\ du=dx; \end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix} dv=\sin nx\,dx; \\ v=-(1/n)\cos nx \end{matrix}\right|=\frac{\cos nx}{\pi n^2}\Big|_{-\pi}^{0}-\frac{2}{\pi^2 n}\left(-x\frac{\cos nx}{n}\Big|_{0}^{\pi}+\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nx\,dx\right)=$$

$$=\frac{1-(-1)^n}{\pi n^2}-\frac{2}{\pi^2 n}\left(-\pi(-1)^n/n+(1/n^2)\sin nx\,\Big|_0^{\pi}\right)=\frac{1+(-1)^n}{\pi n^2}\,;$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} x\cdot\sin nx\,dx+\int_0^{\pi}(x^2/\pi)\sin nx\,dx\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} x\sin nx\,dx+\left|\begin{matrix} u=x; \quad dv=\sin nx\,dx; \\ du=dx\,; \;\; v=-(1/n)\cos nx \end{matrix}\right|+\frac{1}{\pi^2}\int_0^{\pi} x^2\sin nx\,dx=$$

$$=\left|\begin{matrix} u=x^2; \quad\quad du=2xdx\,; \\ dv=\sin nx\,dx; \;\; v=-(1/n)\cos nx \end{matrix}\right|=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{x}{n}\cos nx\Big|_{-\pi}^{0}-\frac{1}{n}\times\right.$$

$$\left.\times\int_{-\pi}^{0}\cos nxdx\right)+\frac{1}{\pi^2}\left(-\frac{x^2}{n}\cos nx\Big|_{0}^{\pi}+\frac{2}{n}\int_0^{\pi} x\cos nx\,dx\right)=-\frac{(-1)^n}{n}-$$

$$-\frac{(-1)^n}{n}+\frac{2}{\pi^2 n}\int_0^{\pi} x\cos nx\,dx=\left|\begin{matrix} u=x\,; \; dv=\cos nx\,dx; \\ du=dx\,; \; v=(1/n)\sin nx \end{matrix}\right|=$$

$$= -\frac{(-1)^n 2}{n} + \frac{2}{\pi^2 n}\left( x\frac{\sin nx}{n}\Bigg|_0^{\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin nx\,dx \right) = -\frac{(-1)^n 2}{n} + \frac{2}{\pi^2 n^2}\times$$

$$\times \frac{1}{n}\cos nx\Bigg|_0^{\pi} = -\frac{2(-1)^n}{n} + \frac{2((-1)^n - 1)}{\pi^2 n^3} = \frac{2((-1)^n - 1) - 2(-1)^n \pi^2 n^2}{\pi^2 n^3}.$$

Розвинення заданої функції має вигляд

$$f(x) = \frac{2\pi}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\left( \frac{1+(-1)^n}{\pi n^2}\cos nx + \right.$$

$$\left. + \frac{2((-1)^n - 1) - 2(-1)^n \pi^2 n^2}{\pi^2 n^3}\sin nx \right). \blacksquare$$

Зауваження 2. Ряд Фур'є для $2\pi$-періодичної парної функції $f(x)$ набуває вигляду ***ряду косинусів***:

$\boxed{f(x) = a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx}$, де $\boxed{a_n = (2/\pi)\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx}$.

Аналогічно, ряд Фур'є для $2\pi$-періодичної непарної функції $f(x)$ набуває вигляду ***ряду синусів***:

$\boxed{f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx}$, де $\boxed{b_n = (2/\pi)\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx}$.

Приклад 2. Розвинути в ряд Фур'є $2\pi$-періодичну непарну функцію $f(x) = \begin{cases} \pi - x, & -\pi \le x < 0; \\ -\pi - x, & 0 \le x < \pi. \end{cases}$

□ Задана функція задовольняє умовам теореми Діріхле, тому може бути розвинена в ряд Фур’є. Графік функції подано на рис. 22. Оскільки ця функція непарна, то одержимо ряд синусів. Обчислимо його коефіцієнти і запишемо шуканий ряд:

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nxdx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - x)\sin nxdx = \left| \begin{array}{l} u = \pi - x; \\ dv = \sin nx\,dx; \end{array}\right.$$

$$\left. \begin{array}{l} du = -dx; \\ v = -(1/n)\cos nx \end{array} \right| = \frac{2}{\pi}\left( -\frac{\pi - x}{n}\cos nx\Bigg|_0^{\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nx\,dx \right) = \frac{2}{n} -$$

$$= \frac{2}{n} - \frac{2}{\pi n^2} \sin nx \Big|_0^{\pi} = \frac{2}{n}; \qquad f(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}. \quad \blacksquare$$

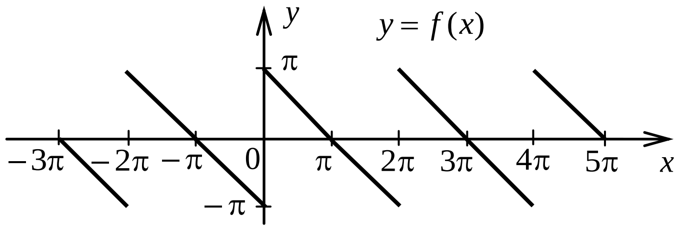


Рис. 22

Зауваження 3. Нехай функція $f(x)$ є періодичною з довільним періодом $T = 2l$, $l > 0$ і на цьому відрізку задовольняє умовам теореми Діріхле. Розвинення цієї функції в ряд Фур'є має вигляд:

$$\boxed{f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right)},$$

де

$$\boxed{a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x)dx; \; a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx; \; b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx}.$$

Зокрема, розвинення парних та непарних періодичних функцій з періодом $T = 2l$, $l > 0$ відповідно у ряди косинусів і синусів набувають наступного вигляду:

а) для парної $2l$-періодичної функції $f(x)$:

$$\boxed{f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l}};$$

$$\boxed{a_0 = \frac{2}{l} \int_{0}^{l} f(x)dx; \quad a_n = \frac{2}{l} \int_{0}^{l} f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, \quad n = 1, 2, \ldots;}$$

б) для непарної $2l$-періодичної функції $f(x)$:

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l}; \; b_n = \frac{2}{l} \int_{0}^{l} f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, \; n = 1, 2, \ldots}.$$

Приклад 3. Розвинути в ряд Фур'є періодичну функцію $f(x)$, що задана на відповідному відрізку $[-l;l]$ довжиною в період $T=2l$, $l>0$. Знайти значення суми ряду $S(0)$ і $S(l/2)$:

$$f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi/2<x<0;\\ \cos x, & 0<x<\pi/2.\end{cases}$$

□ Задана функція задовольняє умовам теореми Діріхле, тому може бути розвинена в ряд Фур'є. Графік функції подано на рис. 23.

Знайдемо коефіцієнти Фур'є і запишемо шуканий ряд:

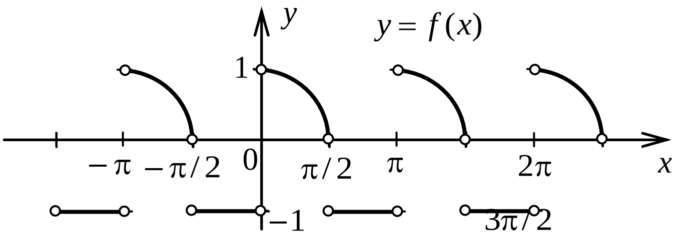


Рис. 23

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)dx=\frac{1}{\pi/2}\left(\int_{-\pi/2}^{0}(-1)\,dx+\int_{0}^{\pi/2}\cos x\,dx\right)=-\frac{2}{\pi}x\Big|_{-\pi/2}^{0}+$$

$$+\frac{2}{\pi}\sin x\Big|_{0}^{\pi/2}=-1+\frac{2}{\pi}=\frac{2-\pi}{\pi};\ a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx=\frac{1}{\pi/2}\times$$

$$\times\left(\int_{-\pi/2}^{0}(-1)\cos\frac{n\pi x}{\pi/2}dx+\int_{0}^{\pi/2}\cos x\cos\frac{n\pi x}{\pi/2}dx\right)=-\frac{2}{\pi}\times$$

$$\times\int_{-\pi/2}^{0}\cos 2nx\,dx+\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi/2}\cos x\cos 2nx\,dx=-\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{2n}\cdot\sin 2nx\Big|_{-\pi/2}^{0}+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi/2}\big(\cos(1+2n)x+\cos(1-2n)x\big)\,dx=0+\frac{1}{\pi(1+2n)}\times$$

$$\times\sin(1+2n)x\Big|_{0}^{\pi/2}+\frac{1}{\pi(1-2n)}\cdot\sin(1-2n)x\Big|_{0}^{\pi/2}=$$

$$=\frac{\sin(\pi/2+n\pi)-\sin 0}{\pi(1+2n)}+\frac{\sin(\pi/2-n\pi)-\sin 0}{\pi(1-2n)}=\frac{(-1)^n}{\pi(1+2n)}+$$

$$+\frac{(-1)^n}{\pi(1-2n)}=\frac{2(-1)^n}{\pi(1-4n^2)};\quad b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx=\frac{1}{\pi/2}\times$$

$$\times\left(\int_{-\pi/2}^{0}(-1)\sin\frac{n\pi x}{\pi/2}dx+\int_{0}^{\pi/2}\cos x\sin\frac{n\pi x}{\pi/2}dx\right)=-\frac{2}{\pi}\times$$

$$\times\int_{-\pi/2}^{0}\sin 2nx\,dx+\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi/2}\cos x\sin 2nx\,dx=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{2n}\cdot\cos 2nx\Big|_{-\pi/2}^{0}+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi/2}\big(\sin(2n+1)x+\sin(2n-1)x\big)\,dx=\frac{\cos 0-\cos(-n\pi)}{n\pi}-$$

$$-\frac{1}{\pi(2n+1)}\cdot\cos(2n+1)x\Big|_{0}^{\pi/2}-\frac{1}{\pi(2n-1)}\cdot\cos(2n-1)x\Big|_{0}^{\pi/2}=$$

$$=\frac{1-(-1)^n}{n\pi}-\frac{\cos(n\pi+\pi/2)-\cos 0}{\pi(2n+1)}-\frac{\cos(n\pi-\pi/2)-\cos 0}{\pi(2n-1)}=$$

$$=\frac{1-(-1)^n}{n\pi}+\frac{1}{\pi(2n+1)}+\frac{1}{\pi(2n-1)}=\frac{1-(-1)^n}{n\pi}+\frac{2}{\pi(1-4n^2)};$$

$$f(x)=\frac{2-\pi}{2\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2(-1)^n}{\pi(1-4n^2)}\cos 2nx+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1-(-1)^n}{n\pi}+\frac{2}{\pi(1-4n^2)}\right)\cos 2nx\right).$$

При $x=0$ дана функція $f(x)$ має скінченний стрибок, тому

$$S(0)=(1/2)\left(\lim_{x\to -0}(-1)+\lim_{x\to +0}\cos x\right)=(1/2)(-1+1)=0.$$

У точці $x=l/2=\pi/4$ дана функція $f(x)$ неперервна, тому

$$S(\pi/4)=f(\pi/4)=\cos(\pi/4)=\sqrt{2}/2.\quad ■$$

### 1.4.2. Розвинення в ряд Фур'є неперіодичних функцій

Для розвинення в ряд Фур'є неперіодичної функції $f(x)$, що задана на скінченному проміжку $[a;b]$, треба її продовжити періодичним способом на всю числову вісь, потім отриману періодичну функцію подати рядом Фур'є, сума якого на відрізку $[a;b]$ співпадає з даною функцією $f(x)$ у всіх її точках неперервності, а в точках розриву всередині проміжку $[a;b]$ і на його кінцях вона дорівнює півсумі односторонніх границь функції $f(x)$.

У поширеному випадку, коли неперіодична функція $f(x)$ задана на відрізку $[0;l]$, $l>0$, найчастіше використовують парне чи непарне продовження функції $f(x)$, $x\in[0;l]$ на проміжок $[-l;0]$, яке потім періодично продовжують на всю числову пряму з періодом $T=2l$. У результаті одержують неповний ряд Фур'є, а саме:

а) при парному продовженні – ряд косинусів:

$$\boxed{f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l},\ x\in[0;l]},$$

де $$\boxed{a_0=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx;\quad a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx,\ n=1,2,...};$$

б) при непарному продовженні – ряд синусів:

$$\boxed{f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{l},\ x\in[0;l]},$$

де $$\boxed{b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx,\ n=1,2,...}.$$

Приклад. Дану функцію $f(x)$, визначену на відповідному відрізку $[0;l]$, розвинути: а) в ряд косинусів і б) ряд синусів. Для цього спочатку продовжити її відповідним чином на симетричний відрізок $[-l;l]$, а потім довизначити до періодичної функції з періодом $T=2l$. Побудувати на окремих рисунках в одному масштабі графіки продовжених періодичних парної та непарної функцій на відрізку $[-l;3l]$.

$$f(x)=\begin{cases}2-x, & 0<x<3;\\ -1, & 3\le x<4.\end{cases}$$

□ Задана функція задовольняє умовам теореми Діріхле, тому може бути розвинена в ряд Фур'є. Маємо $l=4$.

а) При парному продовженні дана функція $f(x)$ розкладається в ряд косинусів:

$$a_0=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx=\frac{2}{4}\left(\int_0^3(2-x)\,dx+\int_3^4(-1)\,dx\right)=\frac{1}{2}(2x-x^2/2)\Big|_0^3-$$

$$-x\Big|_3^4=-\frac{1}{4};\ \ a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx=\frac{2}{4}\left(\int_0^3(2-x)\cos\frac{n\pi x}{4}dx+\right.$$

$$\left.+\int_3^4(-1)\cos\frac{n\pi x}{4}dx\right)=\left|\begin{matrix}u=2-x; & dv=\cos(n\pi x/4)\,dx;\\ du=-dx; & v=(4/n\pi)\sin(n\pi x/4)\end{matrix}\right|=\frac{1}{2}\times$$

$$\times\left(\frac{(2-x)4}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{4}\Big|_0^3+\frac{4}{n\pi}\int_0^3\sin\frac{n\pi x}{4}dx\right)-\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{4}\Big|_3^4=-\frac{2}{n\pi}\times$$

$$\times\sin\frac{3n\pi}{4}-\frac{8}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{4}\Big|_0^3+\frac{2}{n\pi}\sin\frac{3n\pi}{4}=\frac{8}{n^2\pi^2}\left(1-\cos\frac{3n\pi}{4}\right);$$

$$f(x)=-\frac{1}{8}+\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left(1-\cos\frac{3n\pi}{4}\right)\cos\frac{n\pi x}{4},\ \ x\in[0;4].$$

Графік парного продовження подано на рис. 24.

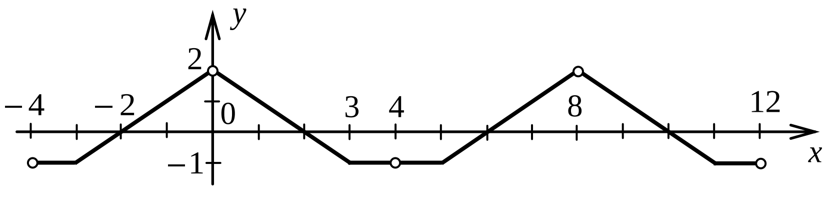


Рис. 24

б) При непарному продовженні дана функція $f(x)$ розкладається в ряд синусів:

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx = \frac{2}{4}\left(\int_0^3 (2-x)\sin\frac{n\pi x}{4}\,dx + \right.$$

$$\left. + \int_3^4 (-1)\sin\frac{n\pi x}{4}\,dx\right) = \left| \begin{matrix} u = 2-x; & dv = \sin(n\pi x/4)\,dx; \\ du = -dx; & v = -(4/n\pi)\cos(n\pi x/4) \end{matrix} \right| = \frac{1}{2}\times$$

$$\times\left( -\frac{(2-x)4}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{4}\Big|_0^3 - \frac{4}{n\pi}\int_0^3 \cos\frac{n\pi x}{4}\,dx\right) + \frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{4}\Big|_3^4 = \frac{2}{n\pi}\times$$

$$\times\cos\frac{3n\pi}{4} - \frac{4}{n\pi} - \frac{8}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{4}\Big|_0^3 + \frac{2}{n\pi}(-1)^n - \frac{2}{n\pi}\cos\frac{3n\pi}{4} =$$

$$= \frac{2}{n\pi}(-1)^n - \frac{8}{n^2\pi^2}\sin\frac{3n\pi}{4};$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2(-1)^n}{n\pi} - \frac{8}{n^2\pi^2}\sin\frac{3n\pi}{4}\right)\sin\frac{n\pi x}{4}, \quad x\in[0;4].$$

Графік непарного продовження зображено на рис. 25. ■

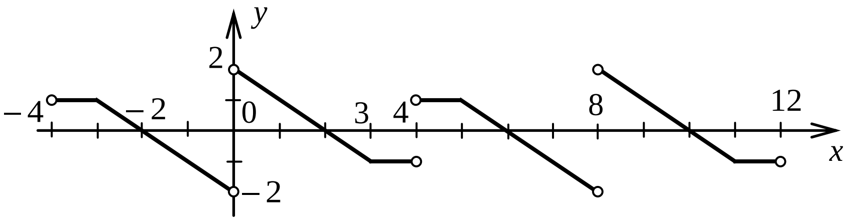


Рис. 25

<u>Зауваження</u>. Розвинення однієї й тієї ж заданої функції $f(x)$, $x\in[0;l]$ при різних продовженнях можуть мати різні характеристики, наприклад, щодо швидкості спадання модулів коефіцієнтів. У наведеному вище прикладі парне продовження, на відміну від непарного, має лише усувні розриви, тому ряд косинусів збігається швидше, ніж ряд синусів.

**Змістовий модуль 2.**

# ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ В ЕКОНОМІЧНИХ ДОСЛІДЖЕННЯХ

## 2.1. Наближені числа. Похибки та їх обчислення

### 2.1.1. Наближені числа. Абсолютна та відносна похибки. Форми запису наближених даних

***Наближеним числом*** $x$ називається таке, що несуттєво відрізняється від точного числа $X$ і замінює останнє в обчисленнях.

Нехай $X$ – точне значення деякої величини, а $x$ – її відоме наближене значення.

Під ***похибкою*** наближеного числа $x$ розуміють величину, що характеризує точність наближення і дорівнює різниці між відповідним точним числом $X$ та його наближенням $x$: $\Delta x = X - x$.

У більшості випадків знак похибки $\Delta x$ невідомий, тому вводиться поняття ***абсолютної похибки*** $\Delta_x$ як модуля похибки $\Delta x$: $\Delta_x = |\Delta x| = |X - x|$.

Як правило, точне значення $X$ невідоме й абсолютну похибку $\Delta_x$ знайти неможливо. Тому для оцінки зверху $\Delta_x$ використовується поняття ***граничної абсолютної похибки*** $\Delta_x^*$, яка визначається з нерівності $\Delta_x \le \Delta_x^*$.

Нехай $X \ne 0$. Важливою характеристикою точності наближення є абсолютна похибка, що припадає на одиницю величини числа $X$, – ***відносна похибка*** $\delta_x$. Вона дорівнює відношенню абсолютної похибки $\Delta_x$ до модуля точного числа $X$: $\delta_x = \Delta_x / |X|$.

Верхньою оцінкою для $\delta_x$ служить ***гранична відносна похибка*** $\delta_x^*$, що визначається з нерівності $\delta_x \le \delta_x^*$.

Звідси $\Delta_x / |X| \le \delta_x^*$; $\Delta_x \le |X|\, \delta_x^*$. Отже, можна покласти $\Delta_x^* = |X|\, \delta_x^*$. Оскільки $X = x$ з достатньою для практики точністю, то звичайно приймають $\boxed{\Delta_x^* = |x|\, \delta_x^*}$. Аналогічно $\boxed{\Delta_x = |x|\, \delta_x}$.

На практиці звичайно користуються формулою $\boxed{\delta_x^* = \Delta_x^* / |x|}$. Аналогічно $\boxed{\delta_x = \Delta_x / |x|}$.

***Значущими цифрами*** наближеного числа

$$x = \alpha_1 \cdot 10^m + \alpha_2 \cdot 10^{m-1} + \alpha_3 \cdot 10^{m-2} + \ldots + \alpha_n \cdot 10^{m-n+1} + \ldots$$

називаються всі цифри в його запису, починаючи з першої ненульової зліва, включаючи всі нулі справа, що є представниками збережених розрядів. Решта нулів, що входять у його запис та служать лише для позначення його десяткових розрядів, не зараховуються до значущих цифр.

Наприклад, у числах $\underline{12{,}709314}$, $0{,}000\underline{93217}$, $0{,}00\underline{610426000}$, $\underline{8410000}$, $0{,}\underline{502300} \cdot 10^7$ тільки підкреслені цифри є значущими.

Точність подання наближеного числа $x$ залежить від кількості його значущих цифр.

Значуща цифра $\alpha_i$ називається ***вірною*** (***правильною***) (у вузькому сенсі), якщо абсолютна похибка $\Delta_x^*$ числа $x$ не перевищує половини одиниці ($m - i + 1$)-го розряду, що відповідає цій цифрі. У противному разі цифра $\alpha_i$ називається ***сумнівною***.

Якщо цифра $\alpha_n$ вірна, то усі попередні до неї цифри теж вірні. Отже, при умові $\boxed{0{,}5 \cdot 10^{m-n} < \Delta_x^* \le 0{,}5 \cdot 10^{m-n+1}}$, за визначенням, перші $n$ значущих цифр $\alpha_i$, $i = \overline{1, n}$ є вірними, а всі інші – сумнівними. При цьому можна покласти $\boxed{\Delta_x^* = 0{,}5 \cdot 10^{m-n+1}}$.

Точне число $X$ через його наближення $x$ можна записати у різному вигляді:

– з використанням межових значень $x_1 \le X \le x_2$, де $x_1 = x - \Delta_x^*$ і $x_2 = x + \Delta_x^*$, наприклад, $21{,}372 \le X \le 21{,}380$;

– з використанням абсолютної похибки $X = x \pm \Delta_x^*$, наприклад, $X = 21{,}376 \pm 0{,}004$, тобто

$$21{,}376 - 0{,}004 \le X \le 21{,}376 + 0{,}004;$$

– з використанням відносної похибки $X = x(1 \pm \delta_x^*)$, наприклад, $X = 21{,}376(1 \pm 0{,}0002)$ або $X = 21{,}376(1 \pm 0{,}02\%)$.

Приклад. Скільки вірних значущих цифр має дане число $x$, якщо:

а) $x = 274{,}58190$ і $\Delta_x^* = 0{,}008$; б) $x = 48{,}3882401$ і $\Delta_x^* = 4 \cdot 10^{-5}$;

в) $x = 0{,}009317243$ і $\Delta_x^* = 0{,}0007$; г) $x = 213{,}8494(1 \pm 0{,}000008$.

□ а) Маємо $0{,}5 \cdot 10^{-2} < \Delta_x^* = 0{,}8 \cdot 10^{-2} \leq 0{,}5 \cdot 10^{-1}$. Отже, у числа $x$ вірними є чотири значущі цифри $2,7,4,5$, а цифри $8,1,9,0$ – сумнівні.

б) Оскільки $0{,}5 \cdot 10^{-7} < \Delta_x^* = 0{,}4 \cdot 10^{-4} \leq 0{,}5 \cdot 10^{-4}$, то $x$ має вірні чотири значущі цифри після коми, тобто вірними будуть шість значущих цифр $4,8,3,8,8,2$, а цифри $4,0,1$ – сумнівні.

в) Маємо $0{,}5 \cdot 10^{-3} < \Delta_x^* = 0{,}7 \cdot 10^{-3} \leq 0{,}5 \cdot 10^{-2}$. Отже, у числа $x$ немає ні однієї вірної значущої цифри, всі вони сумнівні.

Гранична відносна похибка $\delta_x^* = 0{,}000008$, тоді гранична абсолютна похибка $\Delta_x^* = |x|\,\delta_x^* = 213{,}8494 \cdot 0{,}000008 = 0{,}0017$. Оскільки $0{,}5 \cdot 10^{-3} < \Delta_x^* = 0{,}17 \cdot 10^{-2} \leq 0{,}5 \cdot 10^{-2}$, то $x$ має п'ять вірних значущих цифр $2,1,3,8,4$, а цифри $9,4$ – сумнівні. ■

### 2.1.2. Похибки округлення

***Заокруглюванням*** називається заміна числа наближеним числом з меншою кількістю значущих цифр. При цьому виникає ***похибка округлення***. Щоб вона була мінімальною, треба застосовувати наступне правило симетричного заокруглювання:

*якщо цифра старшого розряду, що відкидається, менше 5, то попередня до нього цифра не змінюється*;

*якщо цифра старшого розряду, що відкидається, дорівнює або більше 5, то попередня до нього цифра збільшується на 1*.

При використанні цього правила ***абсолютна похибка округлення*** $\Delta_{x\,окр}$ числа

$$x = \alpha_1 \cdot 10^m + \alpha_2 \cdot 10^{m-1} + \alpha_3 \cdot 10^{m-2} + \ldots + \alpha_n \cdot 10^{m-n+1} + \ldots$$

до $p$ значущих цифр не перевищує половини одиниці розряду останньої залишеної цифри $\alpha_p$, тобто за ***граничну абсолютну похибку округлення*** $\Delta^*_{x\,окр}$ можна взяти $\Delta^*_{x\,окр} = 0{,}5 \cdot 10^{m-p+1}$.

Під час заокруглювання наближеного числа $x_1$ отримуємо нове наближене число $x_2$, абсолютна похибка $\Delta_{x_2}$ якого визначається за формулою: $\boxed{\Delta_{x_2} = \Delta_{x_1} + \Delta_{x_2\,окр}}$, де $\Delta_{x_1}$ – абсолютна похибка числа $x_1$; $\Delta_{x_2\,окр} = | x_1 - x_2 |$ – абсолютна похибка округлення числа $x_2$.

Аналогічною формулою зв'язані граничні значення цих похибок: $\boxed{\Delta^*_{x_2} = \Delta^*_{x_1} + \Delta^*_{x_2\,окр}}$.

Приклад 1. Нехай задані числа

а) $x_1 = 617{,}349571021$ і б) $x_1 = 7531{,}9532657$.

Заокруглити ці числа, відкидаючи $t$ ($t = 1, 2, 3, \ldots, 10$) останні цифри.

□ Відповідно дістанемо:

$t = 1$: а) $x_2 = 617{,}34957102$ і б) $x_2 = 7531{,}953266$;

$t = 2$: а) $x_2 = 617{,}3495710$ і б) $x_2 = 7531{,}95327$;

$t = 3$: а) $x_2 = 617{,}349571$ і б) $x_2 = 7531{,}9533$;

$t = 4$: а) $x_2 = 617{,}34957$ і б) $x_2 = 7531{,}953$;

$t = 5$: а) $x_2 = 617{,}3496$ і б) $x_2 = 7531{,}95$;

$t = 6$: а) $x_2 = 617{,}3540$ і б) $x_2 = 7532{,}0$; $t = 7$: а) $x_2 = 617{,}35$ і б) $x_2 = 7532$; $t = 8$: а) $x_2 = 617$ і б) $x_2 = 753 \cdot 10^1$;

$t = 9$: а) $x_2 = 62 \cdot 10^1$ і б) $x_2 = 75 \cdot 10^2$;

$t = 10$: а) $x_2 = 6 \cdot 10^2$ і б) $x_2 = 8 \cdot 10^3$. ■

Приклад 2. Округлити сумнівні цифри даного числа $x_1$ і знайти абсолютну $\Delta_{x_2}$ і відносну $\delta_{x_2}$ похибки результату $x_2$:

а) $x_1 = 538{,}369 \pm 0{,}00082$; б) $x_1 = 274{,}563(1 \pm 0{,}000013)$.

а) $x_1 = 34{,}124 \pm 0{,}021$; б) $x_1 = 91{,}735(1 \pm 0{,}0000082)$.

□ а) Наближене число $x_1$ має п'ять вірних цифр: 5, 3, 8, 3, 6, тому що $0{,}0005 < \Delta_{x_1} = 0{,}00082 \le 0{,}005$. Використовуючи правило заокруглювання, знайдемо наближене значення $x_2$, зберігаючи вірні десяткові знаки: $x_2 = 538{,}37$. Обчислимо похибку округлення $\Delta_{x_2\,окр}$, абсолютну $\Delta_{x_2}$ і відносну $\delta_{x_2}$ похибки числа $x_2$:

$$\Delta_{x_2\,окр} = |\,x_1 - x_2\,| = |\,538{,}369 - 538{,}37| = 0{,}001;$$

$$\Delta_{x_2} = \Delta_{x_1} + \Delta_{x_2\,окр} = 0{,}00082 + 0{,}001 = 0{,}0018;$$

$$\delta_{x_2} = \Delta_{x_2} / |\,x_2\,| = 0{,}0018/|\,538{,}37\,| = 0{,}0000033.$$

Оскільки $0{,}0005 < \Delta_{x_2} = 0{,}0018 \le 0{,}005$, то всі значущі цифри числа $x_2$ вірні. Отже, $X = 538{,}37 \pm 0{,}0018$.

б) Оскільки відносна похибка $\delta_{x_1} = 0{,}000013$, то абсолютна похибка $\Delta_{x_1} = |\,x_1\,|\,\delta_{x_1} = 274{,}563 \cdot 0{,}000013 = 0{,}0036$. Значить, число $x_1 = 274{,}563$ має п'ять вірних значущих цифр: 2, 7, 4, 5, 6, тому що $0{,}5 \cdot 10^{-3} < \Delta_{x_1} = 0{,}0036 \le 0{,}5 \cdot 10^{-2}$. Знайдемо наближене значення $x_2$ з п'ятьма десятковими знаками, використовуючи правило заокруглювання: $x_2 = 274{,}56$. Обчислимо похибку округлення $\Delta_{x_2\,окр}$, абсолютну $\Delta_{x_2}$ і відносну $\delta_{x_2}$ похибки числа $x_2$:

$$\Delta_{x_2\,окр} = |\,x_1 - x_2\,| = |\,274{,}563 - 274{,}56\,| = 0{,}003;$$

$$\Delta_{x_2} = \Delta_{x_1} + \Delta_{x_2\,окр} = 0{,}0036 + 0{,}003 = 0{,}0066;$$

$$\delta_{x_2} = \Delta_{x_2} / |\,x_2\,| = 0{,}0066/|\,274{,}56\,| = 0{,}24 \cdot 10^{-4}.$$

Оскільки $0{,}5\cdot 10^{-2} < \Delta_{x_2} = 0{,}0066 \le 0{,}5\cdot 10^{-1}$, то вірними значущими цифрами числа $x_2$ є тільки перші чотири 2, 7, 4, 5, а остання цифра 6 – сумнівна. Отже, $x_2 = 274{,}56 \pm 0{,}0066$. ■

### 2.1.3. Похибка функції. Похибки арифметичних операцій

За наближене значення функції $Y = f(X)$ можна взяти $\boxed{y = f(x)}$. При цьому абсолютну похибку $\Delta_y$ можна розглядати як модуль її приросту, викликаного приростом аргументу $\pm\Delta_x$. З достатньою точністю можна використовувати ***лінійні оцінки***:

$$\boxed{\Delta_y = |f'(x)|\cdot\Delta_x} \text{ і } \boxed{\Delta_y^* = |f'(x)|\cdot\Delta_x^*}.$$

Ці формули безпосередньо узагальнюються на випадок функції $n$ змінних $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$: $\boxed{y = f(x_1, x_2, ..., x_n)}$;

$$\boxed{\Delta_y = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f(x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial x_i} \right| \cdot \Delta_{x_i}}; \quad \boxed{\Delta_y^* = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f(x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial x_i} \right| \cdot \Delta_{x_i}^*}.$$

На основі одержаного наближеного значення функції та лінійної оцінки її абсолютної похибки дістанемо лінійні оцінки відносної похибки $\delta_y$ та її граничного значення $\delta_y^*$.

а) У випадку функції однієї змінної $y = f(x)$:

$$\boxed{\delta_y = \left| x \frac{d \ln f(x)}{dx} \right| \delta_x} \text{ і } \boxed{\delta_y^* = \left| x \frac{d \ln f(x)}{dx} \right| \delta_y^*}.$$

б) У випадку функції $n$ змінних $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$:

$$\boxed{\delta_y = \sum_{i=1}^{n} \left| x_i \frac{\partial \ln f(x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial x_i} \right| \delta_{x_i}}$$

$$\text{і } \boxed{\delta_y^* = \sum_{i=1}^{n} \left| x_i \frac{\partial \ln f(x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial x_i} \right| \delta_{x_i}^*}.$$

Використовуючи одержані формули, можна визначити лінійні оцінки похибок результатів арифметичних операцій як окремих випадків функції двох змінних.

а) Похибка суми. Нехай $y = f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$. Оскільки $\partial f(x_1, x_2)/\partial x_i = 1$ і $\partial \ln f(x_1, x_2)/\partial x_i = 1/(x_1 + x_2)$, $i = 1, 2$, то дістанемо

$$\Delta_y = \Delta_{x_1} + \Delta_{x_2} \quad \text{і} \quad \delta_y = \left| \frac{x_1}{x_1 + x_2} \right| \delta_{x_1} + \left| \frac{x_2}{x_1 + x_2} \right| \delta_{x_2} \; .$$

*Абсолютна похибка суми дорівнює сумі абсолютних похибок доданків.*

Аналогічно знаходяться похибки для інших результатів арифметичних операцій.

б) Похибка різниці. $y = f(x_1, x_2) = x_1 - x_2$.

$$\Delta_y = \Delta_{x_1} + \Delta_{x_2} \quad \text{і} \quad \delta_y = \left| \frac{x_1}{x_1 - x_2} \right| \delta_{x_1} + \left| \frac{x_2}{x_1 - x_2} \right| \delta_{x_2} \; .$$

*Абсолютна похибка різниці дорівнює сумі абсолютних похибок зменшуваного і від'ємника.*

в) Похибка добутку. $y = f(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$.

$$\Delta_y = | x_2 | \Delta_{x_1} + | x_1 | \Delta_{x_2} \quad \text{і} \quad \delta_y = \delta_{x_1} + \delta_{x_2} \; .$$

*Відносна похибка добутку дорівнює сумі відносних похибок співмножників.*

г) Похибка частки. $y = f(x_1, x_2) = x_1 / x_2$.

$$\Delta_y = \frac{| x_2 | \Delta_{x_1} + | x_1 | \Delta_{x_2}}{(x_2)^2} \quad \text{і} \quad \delta_y = \delta_{x_1} + \delta_{x_2} \; .$$

*Відносна похибка частки дорівнює сумі відносних похибок діленого і дільника.*

Правила підрахунку цифр:

1) *При знаходженні суми й різниці наближених чисел у результаті слід зберігати стільки десяткових знаків, скільки їх моє компонент операції з найменшим числом десяткових знаків.*

2) *При знаходженні добутку й частки наближених чисел у результаті слід зберігати стільки значущих цифр, скільки їх моє компонент операції з найменшим числом значущих цифр*.

Приклад 1. Знайти абсолютну $\Delta_u$ і відносну $\delta_u$ похибки обчислення значення функції $u = x^3 z / y^2$, якщо $x = 0{,}43 \pm 0{,}005$, $y = 3{,}17 \pm 0{,}01$, $z = 2{,}36 \pm 0{,}008$.

□ За формулою для лінійної оцінки абсолютної похибки результату отримаємо:

$$\Delta_u = \left|\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial x}\right|\Delta_x + \left|\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial y}\right|\Delta_y + \left|\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial z}\right|\Delta_z =$$

$$= \left|\frac{3x^2 z}{y^2}\right|\Delta_x + \left|\frac{2x^3 z}{y^3}\right|\Delta_y + \left|\frac{x^3}{y^2}\right|\Delta_z = \frac{3\cdot 0{,}43^2\cdot 2{,}36}{3{,}17^2}\cdot 0{,}005 +$$

$$+ \frac{2\cdot 0{,}43^3\cdot 2{,}36}{3{,}17^3}\cdot 0{,}01 + \frac{0{,}43^3}{3{,}17^2}\cdot 0{,}008 = 0{,}0006514 +$$

$$+ 0{,}000118 + 0{,}0000633 = 0{,}00083 = 0{,}83\cdot 10^{-3}.$$

Знайдемо наближене значення функції:

$$u = 0{,}43^3\cdot 2{,}36 / 3{,}17^2 = 0{,}0187 = 0{,}019.$$

Тоді $\delta_u = \Delta_u / |\,u\,| = 0{,}83\cdot 10^{-3} / 0{,}0187 = 0{,}044$. ■

Приклад 2. Твірна $l$ та радіус основи $R$ конуса виміряні з точністю до $0{,}03\%$. Яка відносна похибка при обчисленні бокової поверхні $S$ конуса, якщо взято $\pi = 3{,}142$?

□ $S = \pi R l$. Для числа $\pi$ більш точне значення $\pi = 3{,}14159265$. Тоді $\Delta_\pi = |\,3{,}14159265 - 3{,}142\,| = 0{,}41\cdot 10^{-3}$, а $\delta_\pi = 0{,}16\cdot 10^{-2} / 3{,}14 = 0{,}13\cdot 10^{-3} = 0{,}013\%$. За формулою відносної похибки добутку дістанемо:

$$\delta_S = \delta_\pi + \delta_R + \delta_h = 0{,}013\% + 0{,}03\% + 0{,}03\% = 0{,}07\%. \quad ■$$

## 2.2. Чисельні методи знаходження дійсних коренів скінченних рівнянь

***Рівнянням*** з однією змінною $x$ називається рівність

$$\boxed{f(x)=0},$$

яка справджується при певних значеннях $x$, що називаються ***коренями*** рівняння. Вважають, що корінь $x^*$ має кратність $k$, якщо

$$f(x^*)=f'(x^*)=f''(x^*)=...=f^{(k-1)}(x^*)=0, \text{ але } f^{(k)}(x^*)\neq 0.$$

Розв'язування рівняння полягає в знаходженні його коренів.

### 2.2.1. Дослідження рівняння і відокремлення коренів

Наближене обчислення кожного з дійсних коренів складається з наступних етапів:

а) дослідження кількості й розташування коренів на числовій прямій, з'ясування їх кратності; виділення області пошуку $D$ коренів, яка відповідає умовам поставленої задачі;

б) ***відокремлення*** (***ізоляція***, ***локалізація***) кореня $x^*$, тобто знаходження як можна меншого відрізку $[a;b]$ з області пошуку $D$, в межах якого лежить один і тільки один цей корінь, і вибір його початкового наближення $x_0$;

в) ***уточнення*** значення кореня $x^*$, тобто обчислення його з необхідною точністю.

Найчастіше відокремлення коренів здійснюється аналітичним чи графічним способами.

При ***аналітичному способі*** формують таблицю, в яку заносять послідовно розміщенні на осі $Ox$ точки $x_i$, $i=1,2,...$ з досить малим кроком $\Delta x_i = x_{i+1}-x_i$ і обчислені в них значення $f(x_i)$ лівої частини рівняння $f(x)=0$. Потім у таблиці вибирають ті пари сусідніх значень аргументу $x_i$ і $x_{i+1}$, між якими функція $f(x)$ змінює знак.

При ***графічному способі*** будують графік функції $y=f(x)$ і приблизно виявляють ділянки його перетину з віссю $Ox$. Або, перетворивши вхідне рівняння $f(x)=0$ до вигляду $f_1(x)=f_2(x)$, будують графіки двох функцій $y=f_1(x)$ та $y=f_2(x)$ і приблизно визначають проміжки, яким належать абсциси їх точок перетину між собою.

Приклад 1. Графічно знайти проміжки ізоляції коренів рівняння $e^x(2-x^2)-1=0$.

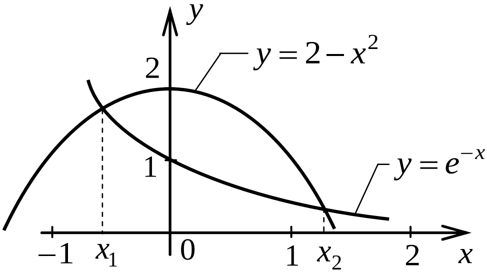

Рис. 26

□ Областю допустимих значень є промінь $(-\infty;+\infty)$. Подамо рівняння у вигляді $2-x^2=e^{-x}$. Тоді корені можуть бути знайдені як абсциси точок перетину параболи $y=2-x^2$ і експоненти $y=e^{-x}$. Побудуємо ці графіки (рис. 26) і за ними визначимо кількість коренів та інтервали їх ізоляції.

З рис. 26 видно, що коренів два: $x_1$ знаходиться на відрізку $[-1;0]$, а $x_2$ – на відрізку $[1;2]$.

Якщо взяти по осі $Ox$ менший крок, то і проміжок локалізації можна знайти точніше. ■

Приклад 2. Для рівняння $x^3-2x^2-x+2-1{,}5\,e^{-x}=0$ знайти інтервали ізоляції його коренів, що лежать на проміжку $[-2;3]$, аналітичним способом, а потім проконтролювати результат графічним методом.

□ Побудуємо таблицю значень функції $y=f(x)$, де

$$f(x)=x^3-2x^2-x+2-1{,}5\,e^{-x}.$$

| $x$ | - 2 | - 1,5 | - 1 | - 0,5 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | - 23,1 | - 11,1 | - 4,1 | - 0,6 | 0,5 |

| $x$ | 0,5 | 1 | 1,5 | 2 | 2,5 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 0,2 | - 0,6 | - 1,0 | - 0,2 | 2,5 | 7,9 |

З таблиці значень видно, що відрізку $[-2;3]$ функція $y = f(x)$ тричі змінює знак, тому можна припустити, що рівняння має три корені, проміжки локалізації яких $[-0{,}5;0]$, $[0{,}5;1]$ і $[2;2{,}5]$.

Для контролю розв'яжемо задачу графічно. Подамо рівняння у вигляді $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 1{,}5\,e^{-x}$ і побудуємо графіки лівої $y = x^3 - 2x^2 - x + 2$ та правої $y = 1{,}5\,e^{-x}$ частин (рис. 27). Перетин графіків на рис. 27 показує, що коренів три і вони розміщені на відрізках $[-0{,}5;0]$, $[0{,}5;1]$ і $[2;2{,}5]$. ■

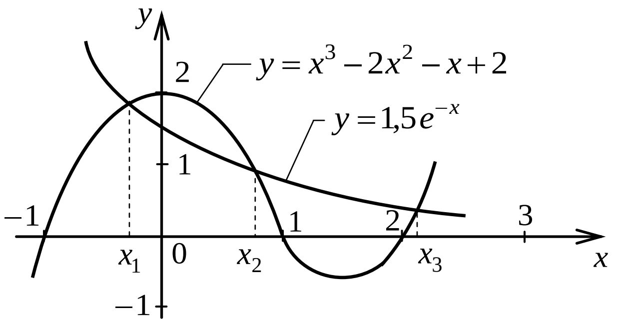


Рис. 27

### 2.2.2. Методи уточнення наближених значень коренів. Метод поділу навпіл. Метод простих ітерацій. Метод Ньютона

На етапі уточнення кореня $x^*$ рівняння $f(x) = 0$ обчислюють його наближене значення з заданою точністю.

Для цього використовують різні ітераційні методи (методи послідовних наближень), суть яких полягає у послідовному обчисленні, виходячи з початкового наближення $x_0$, за однією й тією ж схемою (за допомогою відповідного рекурентного співвідношення

$$x_k = \varphi_k(x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}),\ k = 1, 2, \ldots)$$

значень $x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots$, що наближаються до кореня $x^*$:

$\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x^*$ (це забезпечується вибором $\varphi_k$).

***Критеріями закінчення*** ітераційного процесу служать:

а) досягнення заданої точності за аргументом: $\left|x_k - x^*\right| < \delta$, де $\delta > 0$ – задана гранична абсолютна похибка знаходження наближеного значення $x_k$ кореня $x^*$;

б) досягнення заданої точності за функцією: $\left|f(x_k)\right| < \varepsilon$, де $\varepsilon > 0$ – задана гранична абсолютна похибка знаходження наближеного нульового значення $f(x_k)$ функції $f(x)$;

в) досягнення заданого максимально допустимого числа ітерацій $k_{\max}$: $k = k_{\max}$.

Далі наведемо розрахункові схеми деяких найпоширеніших ітераційних методів уточнення наближеного значення кореня:

а) ***Метод дихотомії*** (***бісекції, поділу навпіл***):

$$\boxed{x_k = (a_{k-1} + b_{k-1})/2; \quad f(a_{k-1})\ f(b_{k-1}) < 0, \quad k = 1, 2, \ldots},$$

де $x_k$ – наближення до шуканого кореня $x^*$; $[a_{k-1}; b_{k-1}]$ – попередній проміжок ізоляції кореня. Якщо $f(x_k) = 0$, то покласти $x^* = x_k$ і закінчити обчислення. Якщо $f(x_k) \cdot f(a_{k-1}) > 0$, то покласти $a_k = x_k$; $b_k = b_{k-1}$, інакше – $a_k = a_{k-1}$; $b_k = x_k$. Далі присвоїти $k := k + 1$ і продовжити обчислення.

б) ***Модифікований метод простих ітерацій***:

$$\boxed{x_k = x_{k-1} + \alpha\, f(x_{k-1}), \quad k = 1, 2, \ldots},$$

де $\alpha$ – параметр, значення якого підбирається експериментально так, щоб справджувалася умова збіжності $|1 + \alpha\, f'(x)| < 1$ (звичайно, з діапазону $|\alpha| = 0{,}1 \div 1$). За початкове наближення кореня $x_0$ можна прийняти довільне значення $x$ з проміжку ізоляції $[a_0; b_0]$ (зокрема, за $x_0$ можна взяти середину $(a_0 + b_0)/2$ проміжку локалізації $[a_0; b_0]$ або один з його кінців $a_0$ чи $b_0$).

в) ***Модифікований метод Ньютона*** (***дотичних*** або ***лінеари-***

***зації***): $\boxed{x_k = x_{k-1} - \alpha\, f(x_{k-1})/f'(x_{k-1}),\ k = 1,2,...}$,

де $\alpha$ – параметр, значення якого підбирається експериментально (звичайно, з діапазону $\alpha = 0{,}1 \div 1$). За початкове наближення кореня $x_0$ прийняти довільне значення $x$ з проміжку ізоляції $[a_0;b_0]$, для якого виконується умова $f(x_0)\cdot f''(x_0) > 0$ (зокрема, за $x_0$ можна прийняти один з кінців відрізка локалізації $[a_0;b_0]$, де додержується вказана умова).

<u>Приклад</u>. Дано рівняння $f(x) = 0$. Виконати наступне:

1. Подати задане рівняння у вигляді $f_1(x) = f_2(x)$. Знайти найменший за модулем дійсний корінь $x^*$ рівняння наближено графічно як абсцису $x_g$ найближчої до осі $Oy$ точки перетину графіків $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ і вказати проміжок ізоляції $[a_0; b_0]$ цього кореня, де $f(a_0)\cdot f(b_0) < 0$.

2. Уточнити найменший за модулем корінь рівняння $f(x) = 0$ вказаним далі методом. Задано точність (за аргументом) $\delta$ обчислення кореня: $|x_k - x_{k-1}| < \delta$. Задано точність (за функцією) $\varepsilon$ обчислення кореня: $|f(x_k)| < \varepsilon$. Виконати $k_{\max}$ ітерацій. Знайти наближене значення $x_{k_{\max}}$ цього кореня та досягнуті характеристики його точності $\delta_{k_{\max}} = |x_{k_{\max}} - x_{k_{\max}-1}|$ і $\varepsilon_{k_{\max}} = |f(x_{k_{\max}})|$. Якщо обидві задані характеристики точності $\delta$ і $\varepsilon$ досягнуті, то вказати найменшу достатню для цього кількість ітерацій $k_{дост}$.

а) Методом поділу навпіл. б) Модифікованим методом простих ітерацій. в) Модифікованим методом Ньютона.

$$f(x) = 2 - 0{,}5\,x^3 - \ln(1 + x^2);\ \ \delta = 0{,}01;\ \ \varepsilon = 0{,}01;\ \ k_{\max} = 10.$$

<u>Вказівки</u>. 1. Усі проміжні обчислення проводити з точністю не менше шести десяткових знаків після коми. 2. Проміжок локалізації $[a_0;b_0]$ шуканого кореня $x^*$ визначити так, що його кінці $a_0$ і $b_0$ – цілі числа, причому $b_0 - a_0 = 1$ і $f(a_0)\ f(b_0) < 0$. 3. У модифіка-

ціях методу простих ітерацій і методу Ньютона за значення параметра спочатку взяти відповідно $\alpha = -\mathrm{sgn}(f(b_0) - f(a_0))$ і $\alpha = 1$, де $\mathrm{sgn}\, x = \{-1 \textit{ при } x < 0,\ 0 \textit{ при } x = 0,\ 1 \textit{ при } x > 0\}$. Якщо при цьому ітераційний процес розбігається, то способом проб, послідовно зменшуючи за модулем значення $\alpha$ з кроком $\Delta\alpha = 0{,}1$, знайти достатнє для збіжності відмінне від нуля значення параметра $\alpha$.

□ 1. Подамо дане рівняння у вигляді $2 - 0{,}5\, x^3 = \ln(1 + x^2)$. Дослідимо перетин графіків $y = 2 - 0{,}5\, x^3$ і $y = \ln(1 + x^2)$ (рис. 28). У результаті одержимо, що найменший за модулем дійсний корінь $x^*$ (у даному випадку він єдиний) лежить на відрізку $[1; 2]$.

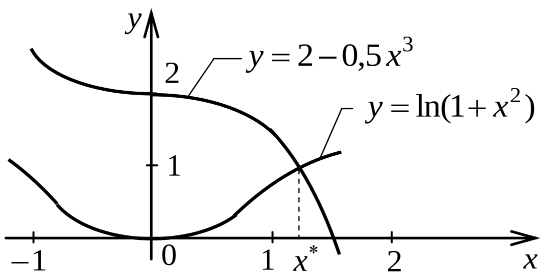


Рис. 28

Судячи з графіків, за наближене значення цього кореня можна прийняти $x_g = 1{,}2$. На кінцях відрізка $f(1) = 0{,}806853 > 0$ і $f(2) = -3{,}609438 < 0$.

2. Уточнимо найменший за модулем корінь рівняння.

а) Метод поділу навпіл. Результати обчислень наведені у наступній таблиці. Наближене значення кореня $x_{k_{\max}} = 1{,}27$.

Досягнуті характеристики його точності

$$\delta_{k_{\max}} = 0{,}98 \cdot 10^{-3} < \delta = 0{,}01 \text{ і } \varepsilon_{k_{\max}} = 0{,}34 \cdot 10^{-3} < \varepsilon = 0{,}01.$$

Достатня для досягнення заданих характеристик точності $\delta = 0{,}01$ і $\varepsilon = 0{,}01$ кількість ітерацій $k_{дост} = 7$.

| $k$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $x_k$ | | 1,500000 | 1,250000 | 1,375000 |
| $f(x_k)$ | | -0,866155 | 0,082454 | -0,361277 |
| $\delta_k = \lvert x_k - x_{k-1} \rvert$ | | | 0,250000 | 0,125000 |
| $a_k$ | 1,000000 | 1,000000 | 1,250000 | 1,250000 |
| $b_k$ | 2,000000 | 1,500000 | 1,500000 | 1,375000 |
| $f(a_k)$ | 0,806853 | 0,806853 | 0,082454 | 0,082454 |
| $f(b_k)$ | -3,609438 | -0,866155 | -0,866155 | -0,361277 |

| $k$ | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|
| $x_k$ | 1,312500 | 1,281250 | 1,265625 | 1,273438 |
| $f(x_k)$ | -0,132101 | -0,023036 | 0,030151 | 0,003668 |
| $\delta_k = \lvert x_k - x_{k-1} \rvert$ | 0,062500 | 0,031250 | 0,015625 | 0,007813 |
| $a_k$ | 1,250000 | 1,250000 | 1,265625 | 1,273438 |
| $b_k$ | 1,312500 | 1,281250 | 1,281250 | 1,281250 |
| $f(a_k)$ | 0,082454 | 0,082454 | 0,030151 | 0,003668 |
| $f(b_k)$ | -0,132101 | -0,023036 | -0,023036 | -0,023036 |

| $k$ | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|
| $x_k$ | 1,277344 | 1,275391 | 1,274414 |
| $f(x_k)$ | -0,009656 | -0,002987 | 0,000342 |
| $\delta_k = \lvert x_k - x_{k-1} \rvert$ | 0,003906 | 0,001953 | 0,000977 |
| $a_k$ | 1,273438 | 1,273438 | 1,274414 |
| $b_k$ | 1,277344 | 1,275391 | 1,275391 |
| $f(a_k)$ | 0,003668 | 0,003668 | 0,000342 |
| $f(b_k)$ | -0,009656 | -0,002987 | -0,002987 |

б) Модифікований метод простих ітерацій. За початкове наближення кореня взято $x_0 = (a_0 + b_0)/2 = 1{,}5$. За початкове значення параметра прийнято $\alpha = -\mathrm{sgn}(f(b_0) - f(a_0)) = 1$. Способом підбору знайдено достатнє для збіжності значення параметра $\alpha = 0{,}4$. Результати обчислень наведені у наступній таблиці, де $\varphi(x) = x + \alpha f(x)$. Наближене значення кореня $x_{k_{\max}} = 1{,}27$. Досягнуті характеристики його точності $\delta_{k_{\max}} = 0{,}40 \cdot 10^{-4} < \delta = 0{,}01$ і $\varepsilon_{k_{\max}} = 0{,}36 \cdot 10^{-4} < \varepsilon = 0{,}01$. Достатня для досягнення заданих характеристик точності $\delta = 0{,}01$ і $\varepsilon = 0{,}01$ кількість ітерацій $k_{дост} = 5$.

| $k$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $x_k$ | 1,500000 | 1,153538 | 1,308088 | 1,261495 |
| $f(x_k)$ | -0,866155 | 0,386375 | -0,116484 | 0,044062 |
| $\varphi(x_k)$ | 1,153538 | 1,308088 | 1,261495 | 1,279120 |
| $\delta_k = \lvert x_k - x_{k-1} \rvert$ | | 0,346462 | 0,154550 | 0,046593 |

| $k$ | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|
| $x_k$ | 1,279120 | 1,272827 | 1,275125 | 1,274292 |
| $f(x_k)$ | -0,015732 | 0,005746 | -0,002082 | 0,000757 |
| $\varphi(x_k)$ | 1,272827 | 1,275125 | 1,274292 | 1,274595 |
| $\delta_k = \lvert x_k - x_{k-1} \rvert$ | 0,017625 | 0,006293 | 0,002299 | 0,000833 |

| $k$ | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|
| $x_k$ | 1,274595 | 1,274485 | 1,274525 |
| $f(x_k)$ | -0,000275 | 0,000100 | -0,000036 |
| $\varphi(x_k)$ | 1,274485 | 1,274525 | 1,274511 |
| $\delta_k = \lvert x_k - x_{k-1} \rvert$ | 0,000303 | 0,000110 | 0,000040 |

в) Модифікований метод Ньютона. На відрізку локалізації $[1;2]$ справджується нерівність $f'(x) = -1{,}5\,x^2 - 2x/(1+x^2) < 0$, тобто похідна $f'(x)$ зберігає знак. Тому на цьому проміжку функція $f(x)$ монотонна (спадна) і рівняння має єдиний корінь. Друга похідна $f''(x) = -3x - 2(1-x^2)/(1+x^2)^2$. Оскільки виконується умова $f(1{,}5)\,f''(1{,}5) > 0$, то взято $x_0 = 1{,}5$. За початкове значення параметра прийнято $\alpha = 1$, яке не змінюється, оскільки забезпечує збіжність ітераційного процесу. Результати обчислень наведені у наступній таблиці.

| $k$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $x_k$ | 1,500000 | 1,298478 | 1,274817 | 1,274515 |
| $f(x_k)$ | -0,866155 | -0,082718 | -0,001031 | 0,000000 |
| $f'(x_k)$ | -4,298077 | -3,495902 | -3,408969 | -3,407866 |
| $\delta_k = \lvert x_k - x_{k-1}\rvert$ | | 0,201522 | 0,023661 | 0,000303 |

| $k$ | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|
| $x_k$ | 1,274515 | 1,274515 | 1,274515 | 1,274515 |
| $f(x_k)$ | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 |
| $f'(x_k)$ | -3,407866 | -3,407866 | -3,407866 | -3,407866 |
| $\delta_k = \lvert x_k - x_{k-1}\rvert$ | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 |

| $k$ | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|
| $x_k$ | 1,274515 | 1,274515 | 1,274515 |
| $f(x_k)$ | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 |
| $f'(x_k)$ | -3,407866 | -3,407866 | -3,407866 |
| $\delta_k = \lvert x_k - x_{k-1}\rvert$ | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 |

Наближене значення кореня $x_{k_{\max}} = 1{,}27$. Досягнуті характеристики його точності

$$\delta_{k_{\max}} < 10^{-15} < \delta = 0{,}01 \quad \text{і} \quad \varepsilon_{k_{\max}} < 10^{-15} < \varepsilon = 0{,}01.$$

Достатня для досягнення заданих характеристик точності $\delta = 0{,}01$ і $\varepsilon = 0{,}01$ кількість ітерацій $k_{дост} = 3$.

Отже, шукане значення кореня $x^* = 1{,}27 \pm 0{,}01$. ■

## 2.3. Апроксимація функцій

Задача ***апроксимації*** (наближення) функцій полягає у тому, щоб для заданої функції $y = f(x)$ побудувати ***апроксимуючу*** (наближену) функцію (модель) $y = F(x)$, значення якої достатньо близькі до значень даної функції. ***Відхилення*** $R(x) = f(x) - F(x)$ характеризує якість наближення.

### 2.3.1. Інтерполяційний многочлен Лагранжа

Нехай досліджувана функція $f(x)$ задана на відрізку $[a;b]$ своїми значеннями в $n+1$ (у загальному випадку, нерівновіддалених) вузлах $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ і $y_k = f(x_k)$, $k = \overline{0,n}$. Розглядається <u>інтерполяційна задача</u>: побудувати многочлен $L_n(x)$ (степеня не вище за $n$), значення якого в $n+1$ точках $x_0, x_1, ..., x_n$ співпадали би зі значеннями в них функції $f(x)$:

$$P_n(x_k) = y_k, \quad \text{де} \quad y_k = f(x_k), \quad k = \overline{0,n}.$$

Інтерполяційний многочлен $L_n(x)$ можна подати у формі:

$$\boxed{L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k \frac{(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})...(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)...(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})...(x_k-x_n)}},$$

яку називають ***інтерполяційним многочленом*** (***формулою***) ***Лагранжа***. Інтерполяційний многочлен $L_n(x)$ можна записати у стислому вигляді:

$$\boxed{L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k \prod_{j \neq k} \frac{x - x_j}{x_k - x_j}}.$$

Приклад. Для функції $y = f(x)$, що задана таблицею

| $k$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $x_k$ | -4 | -2 | 1 | 2 |
| $y_k$ | -2 | 0,5 | 1,5 | 3 |

знайти інтерполяційний многочлен Лагранжа $y = L_n(x)$. Обчислити значення цього інтерполяційного многочлена на відрізку $[-4;4]$ з кроком $h = 0{,}5$, скласти відповідну таблицю і побудувати його графік.

Вказівка. Усі проміжні обчислення проводити з точністю не менше шести десяткових знаків після коми. Значення коефіцієнтів Лагранжа подати з округленням до чотирьох десяткових знаків після коми.

□ Степінь многочлена Лагранжа при $n+1$ вузлах дорівнює $n$. Для нашого прикладу $n = 3$, тобто многочлен Лагранжа має третій порядок. Конкретизуємо формулу $L_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} y_k \prod\limits_{j \neq k} \frac{x - x_j}{x_k - x_j}$:

$$L_3(x) = \frac{y_0(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} + \frac{y_1(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} +$$

$$+ \frac{y_2(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} + \frac{y_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}.$$

Підставимо значення з таблиці в отриману формулу:

$$L_3(x) = \frac{-2\cdot(x+2)(x-1)(x-2)}{(-4+2)(-4-1)(-4-2)} + \frac{0{,}5\cdot(x+4)(x-1)(x-2)}{(-2+4)(-2-1)(-2-2)} +$$

$$+ \frac{1{,}5\cdot(x+4)(x+2)(x-2)}{(1+4)(1+2)(1-2)} + \frac{3\cdot(x+4)(x+2)(x-1)}{(2+4)(2+2)(2-1)} =$$

$$= (1/30)(x^2-4)(x-1) + (1/48)((x+4)(x^2-3x+2) - (1/10)\times$$

$$\times(x+4)(x^2-4) + (1/8)(x+4)(x^2+x-2) = (1/30)(x^3 - x^2 - 4x +$$

$$+4) + (1/48)(x^3 + x^2 - 10x + 8) - (1/10)(x^3 + 4x^2 - 4x - 16) +$$

$$+(1/8)(x^3+5x^2+2x-8)=(0{,}033333+0{,}020833-0{,}100000+$$

$$+0{,}125000)x^3+(-0{,}033333+0{,}020833-0{,}400000+0{,}625000)\times$$

$$\times x^2+(-0{,}133333-0{,}208333+0{,}400000+0{,}250000)x+$$

$$+(0{,}133333+0{,}166667+1{,}600000-1{,}000000)=0{,}079166x^3+$$

$$+0{,}212500x^2+0{,}308334x+0{,}900000=$$

$$=0{,}0792x^3+0{,}2125x^2+0{,}3083x+0{,}9000. \ \blacksquare$$

Складемо таблицю значень $y=L_3(x)$:

| $k$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_k$ | -4 | -3,5 | -3 | -2,5 | -2 | -1,5 | -1 | -0,5 | 0 |
| $L_3(x_k)$ | -2,00 | -0,96 | -0,24 | 0,23 | 0,50 | 0,65 | 0,73 | 0,79 | 0,90 |

| $k$ | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_k$ | 0,5 | 1 | 1,5 | 2 | 2,5 | 3 | 3,5 | 4 |
| $L_3(x_k)$ | 1,12 | 1,50 | 2,11 | 3,00 | 4,24 | 5,87 | 7,97 | 10,60 |

Графік інтерполяційного полінома Лагранжа $y=L_3(x)$ зображено на рис. 29.

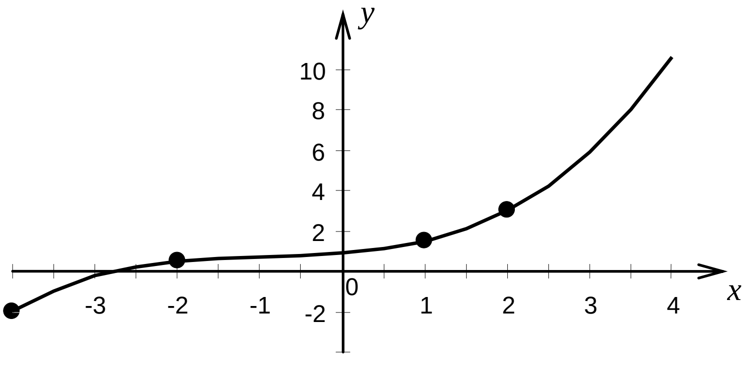


Рис. 29

### 2.3.2. Апроксимація за методом найменших квадратів

Нехай вхідна функція $y = f(x)$ задана таблицею значень $y_k = f(x_k)$, $k = \overline{0,n}$ для скінченної множини точок $x_0, x_1, ..., x_n$. Припускаємо, що значення функції $y_k$, $k = \overline{0,n}$ відомі з похибками.

У цьому випадку використання інтерполяційної формули невиправдане, оскільки призведе до відтворення апроксимуючою функцією $y = F(x)$ всіх цих похибок і спотвореного ними характеру поведінки вхідної функції $y = f(x)$. Більш обґрунтованим є застосування апроксимації за методом найменших квадратів (МНК).

При цьому на практиці за апроксимуючу функцію часто приймають звичайний алгебраїчний многочлен $m$-го степеня

$$F(x) = P_m(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_m x^m,$$

де $a_0, a_1, ..., a_m$ – невідомі коефіцієнти.

Найпростішою (при $m = 1$) є залежність $\boxed{F(x) = a_0 + a_1 x}$ – ***лінійна регресія***. Близькість експериментального розподілу точок $M_0(x_0; y_0)$, $M_1(x_1; y_1)$, …, $M_n(x_n; y_n)$ до ***лінії регресії*** – прямої $y = a_0 + a_1 x$ легко проглядається після їх побудови в одній прямокутній системі координат.

Оптимальні МНК-оцінки коефіцієнтів $a_0$ і $a_1$ визначаються як розв'язки системи

$$\boxed{\begin{cases} a_0(n+1) + a_1 \sum_{k=0}^{n} x_k = \sum_{k=0}^{n} f(x_k); \\ a_0 \sum_{k=0}^{n} x_k + a_1 \sum_{k=0}^{n} x_k^2 = \sum_{k=0}^{n} x_k f(x_k). \end{cases}}$$

Точність лінійної апроксимації за МНК оцінюється на основі досягнутого мінімального значення ***суми квадратів відхилень*** (***нев'язок***) $\rho_2(a_0, a_1) = \sum_{k=0}^{n} \left( f(x_k) - a_0 + a_1 x_k \right)^2$ або відповідного ***середньоквадратичного відхилення***

$$\boxed{\Delta y_s = \sqrt{\left(1/(n+1)\right) \sum_{k=0}^{n} (y_k - a_0 - a_1 x_k)^2}}.$$

Приклад. Функція $f(x)$ задана таблицею

| $k$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $x_k$ | -3 | -1 | 1 | 2 |
| $y_k = f(x_k)$ | -2 | 1 | 1 | 2 |

Знайти апроксимацію цієї функції $f(x)$ лінійною регресією $F(x) = a_0 + a_1 x$ за методом найменших квадратів. Обчислити значення отриманої лінійної регресії $y = a_0 + a_1 x$ на кінцях відрізка $[-4;4]$, скласти відповідну таблицю і побудувати графік. Знайти середньоквадратичне відхилення $\Delta y_s$ лінійної регресії від заданих значень вхідної функції.

Вказівка. Усі проміжні обчислення проводити з точністю не менше шести десяткових знаків після коми. Значення коефіцієнтів лінійної регресії подати з округленням до чотирьох десяткових знаків після коми.

□ Застосуємо лінійну апроксимацію $F(x) = a_0 + a_1 x$. Проведемо попередні обчислення і заповнимо таблицю

| $k$ | $x_k$ | $f(x_k)$ | $x_k^2$ | $x_k f(x_k)$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | -3 | -2 | 9 | 6 |
| 1 | -1 | 1 | 1 | -1 |
| 2 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 3 | 2 | 2 | 4 | 4 |
| $\sum$ | -1 | 2 | 15 | 10 |

Складемо і розв’яжемо (за формулами Крамера) систему для знаходження невідомих коефіцієнтів:

$$\begin{cases} a_0(3+1) + a_1 \cdot (-1) = 2; \\ a_0 \cdot (-1) + a_1 \cdot 15 = 10; \end{cases} \quad \begin{cases} 4a_0 - a_1 = 2; \\ -a_0 + 15a_1 = 10; \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 15 \end{vmatrix} = 59; \quad \Delta^{(1)} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 10 & 15 \end{vmatrix} = 40; \quad \Delta^{(2)} = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 10 \end{vmatrix} = 42;$$

$$a_0 = \Delta^{(1)}/\Delta = 40/59 = 0{,}6780; \quad a_1 = \Delta^{(2)}/\Delta = 42/59 = 0{,}7119.$$

Отже, $y = 0{,}6780 + 0{,}7119x$ – шукана лінійна регресія.

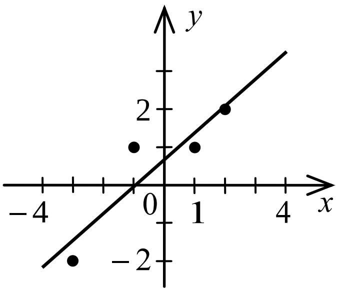

Рис. 30

Обчислимо значення отриманої лінійної апроксимації та складемо відповідну таблицю:

| $x$ | -4 | 4 |
|---|---|---|
| $y = a_0 + a_1 x$ | -2,17 | 3,53 |

Побудуємо графік – лінію регресії $y = 0{,}6780 + 0{,}7119x$ (рис. 30).

Знайдемо середньоквадратичне відхилення $\Delta y_s$:

$$\Delta y_s = \sqrt{\big(1/(n+1)\big)\sum\nolimits_{k=0}^{n} (y_k - a_0 - a_1 x_k)^2} = (1/2)\cdot\Big((-2+1{,}4577)^2 +$$

$$+ (1+0{,}0339)^2 + (1-1{,}3899)^2 + (2-2{,}1018)^2\Big)^{1/2} = 1{,}0775. \quad \blacksquare$$

## 2.4. Чисельне диференціювання та інтегрування функцій

### 2.4.1. Чисельне диференціювання

Нехай на сітці $\{x_k : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_k < \ldots < x_n = b\}$ з рівномірним кроком $h = x_k - x_{k-1} = const$, $k = \overline{1,n}$ у всіх вузлах $x_k$, $k = \overline{0,n}$ відомі значення $y_k = f(x_k)$, $k = \overline{0,n}$ вхідної функції $y = f(x)$. Використовуючи інтерполяцію многочленом Лагранжа другого порядку (за ***шаблоном*** з трьох вузлів $x_{k-1}$, $x_k$ і $x_{k+1}$), дістанемо формулу:

$$\boxed{f'(x_k) = F'(x_k, h) + R'_2(x_k, h)},$$

де $\boxed{F'(x_k, h) = (-y_{k-1} + y_{k+1})/(2h)}$ – ***апроксимація похідної за допомогою центральної різниці***; $\boxed{R'_2(x_k, h) = -(h^2/6) f'''(c_k)}$ – ***похибка*** цієї ***апроксимації***, що має ***порядок точності*** $r = 2$ відносно $h$ ($R'_2(x_k,h)=O(h^r)$); $c_k$ – деяка невідома точка з інтервалу $(x_{k-1};x_{k+1})$.

За ***методом Рунге*** (***методом подвоєння кроку***) можна оцінити абсолютну похибку апроксимації похідної $\Delta_1 = |R'(x,h)|$:

$$\boxed{\Delta_1 \approx \left|F'(x,h)-F'(x,2h)\right| \Big/ (2^r-1)}$$ (***перша формула Рунге***)

і знайти уточнене значення похідної з підвищеним порядком точності $r+1$:

$$\boxed{f'(x)=F'(x,h)+\left(F'(x,h)-F'(x,2h)\right)\Big/(2^r-1)+O(h^{r+1})}$$

(***друга формула Рунге***).

Приклад. Функція $y=f(x)$ задана на відрізку $[a;b]$, де $a=-1$ і $b=1{,}8$, наступною таблицею значень $y_k=f(x_k)$, $k=\overline{0,n}$ ($n=8$) у рівновіддалених вузлах $x_k$, $k=\overline{0,n}$ з кроком $h=(b-a)/n=0{,}35$:

| $k$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_k$ | -1 | -0,65 | -0,3 | 0,05 | 0,4 | 0,75 | 1,1 | 1,45 | 1,8 |
| $y_k$ | -1,2 | -0,95 | -0,6 | -0,4 | -0,15 | 0,55 | 0,8 | 1,15 | 1,45 |

Знайти наближене значення $f'(x_5)$ похідної $f'(x)$ у вузлі $x_5$ за формулою $f'(x_k)\approx F'(x_k,h)=(-y_{k-1}+y_{k+1})/(2h)$, що має порядок точності $r=2$, з кроком $h=0{,}35$. Користуючись методом Рунге (подвоєнням кроку), оцінити абсолютну похибку апроксимації $\Delta_1$ та уточнити значення похідної $f'(x_5)$.

Вказівка. Усі проміжні обчислення проводити з точністю не менше шести десяткових знаків після коми. Уточнене значення похідної подати з округленням до двох десяткових знаків після коми.

□ При кроці $h=0{,}35$ маємо:

$$f'(x_5)\approx F'(x_5,h)=(-y_4+y_6)/(2h)=1{,}357143=1{,}36.$$

Згідно з методом Рунге обчислимо наближене значення $f'(x_5)$ за тією ж формулою при подвоєному кроці $2h=0{,}7$:

$$f'(x_5) \approx F'(x_5, 2h) = (-y_7 + y_3)/(4h) = 1{,}107143.$$

Далі знайдемо оцінку абсолютної похибки $\Delta_1$ і уточнене значення похідної:

$$\Delta_1 = |R'(x_5, h)| \approx \left| \left(F'(x_5, h) - F'(x_5, 2h)\right) / (2^r - 1) \right| =$$

$$= \left| (1{,}357143 - 1{,}107143) / (2^2 - 1) \right| = 0{,}083333 = 0{,}08;$$

$$f'(x_5) \approx F'(x_5, h) + \left(F'(x_5, h) - F'(x_5, 2h)\right) / (2^r - 1) =$$

$$= 1{,}357143 + 0{,}083333 = 1{,}440476 = 1{,}44. \quad \blacksquare$$

### 2.4.2. Чисельне інтегрування функцій. Метод прямокутників. Метод трапецій. Метод Симпсона

Нехай необхідно знайти наближене значення $I_n(f)$ визначеного інтеграла $I(f) = \int_a^b f(x)\,dx$, де підінтегральна функція $f(x)$ задана своїми значеннями $y_k = f(x_k)$, $k = \overline{0, n}$ у вузлах рівномірної сітки $\{x_k : a = x_0 < \ldots < x_k < \ldots < x_n = b\}$ зі сталим кроком $h$.

Наведемо найпростіші ***квадратурні формули*** знаходження наближення $I_n(f)$ у вигляді лінійної комбінації значень підінтегральної функції у вузлах $x_k$, $k = \overline{0, n}$:

а) ***Метод прямокутників***:

***формула лівих прямокутників***

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = ((b-a)/n)(y_0 + y_1 + \ldots + y_{n-1}) + R_n}$$, де $R_n$ – похибка;

***формула правих прямокутників***

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = ((b-a)/n)(y_1 + y_2 + \ldots + y_n) + R_n}$$, де $R_n$ – похибка.

Абсолютну похибку $\Delta_n = |R_n|$ обчислення інтеграла за цими формулами можна оцінити граничною абсолютною похибкою $\Delta_n^*$

за допомогою співвідношення:

$$\boxed{\Delta_n = |R_n| \le \Delta_n^* = ((b-a)^2/(2n))M_1}, \text{ де } M_1 = \max_{x\in[a;b]} |f'(x)|.$$

Тобто, формули прямокутників характеризуються першим порядком точності: $\Delta_n^* = O(h^r)$, де $r = 1$.

б) ***Метод трапецій***:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = ((b-a)/n)\cdot(y_0/2 + y_1 + ... + y_{n-1} + y_n/2) + R_n},$$

де $R_n$ – похибка. Абсолютну похибку $\Delta_n = |R_n|$ обчислення інтеграла за формулою трапецій можна оцінити граничною абсолютною похибкою $\Delta_n^*$ за допомогою співвідношення:

$$\boxed{\Delta_n = |R_n| \le \Delta_n^* = ((b-a)^3/(12n^2))M_2}, \text{ де } M_2 = \max_{x\in[a;b]} |f''(x)|.$$

Тобто, формула трапецій характеризується другим порядком точності: $\Delta_n^* = O(h^r)$, де $r = 2$.

в) ***Метод Симпсона*** (***парабол***):

$$\boxed{\begin{aligned}&\int_a^b f(x)\,dx = ((b-a)/(3n))\cdot(y_0 + y_n + 4(y_1 + y_3 + ... + y_{n-1}) + \\ &+ 2(y_2 + y_4 + ... + y_{n-2})) + R_n, \text{ де } R_n \text{ – похибка; } n \text{ – парне.}\end{aligned}}$$

Абсолютна похибка $\Delta_n = |R_n|$ обчислення інтеграла за формулою парабол оцінюється граничною абсолютною похибкою $\Delta_n^*$ так:

$$\boxed{\Delta_n = |R_n| \le \Delta_n^* = ((b-a)^5/(180n^4))M_4}, \text{ де } M_4 = \max_{x\in[a;b]} |f^{IV}(x)|.$$

Тобто, формула Симпсона характеризується четвертим порядком точності: $\Delta_n^* = O(h^r)$, де $r = 4$.

<u>Зауваження</u>. Згідно з методом подвоєння кроку за першою формулою Рунге можна оцінити граничну абсолютну похибку:

$\boxed{\Delta_n^* \approx |I_h - I_{2h}|/(2^r - 1)}$, а за другою формулою Рунге можна уточнити значення інтеграла: $\boxed{I_{ут} \approx I_h + (I_h - I_{2h})/(2^r - 1)}$. Тут $I_h$ і $I_{2h}$ – наближені значення інтеграла, обчислені за вибраною квадратурною формулою відповідно при кроці $h$ і $2h$; $r$ – порядок точності цієї квадратурної формули ($r = 1$ – для формул лівих і правих прямокутників, $r = 2$ – для формули трапецій, $r = 4$ – для формули Симпсона).

Приклад. Дано визначений інтеграл $I = \int\limits_1^4 \frac{\ln(16x - 1)}{x^{3/2}} dx$.

Виконати наступне:

1. Обчислити заданий інтеграл аналітично. Прийняти результат аналітичного розрахунку $I_a$ за точне значення інтеграла.
2. Розбити відрізок інтегрування $[a;b] = [1;4]$ на $n = 12$ рівних частин з кроком $h = (b - a)/n = 0{,}25$ точками $x_k$, $k = \overline{0,n}$. Обчислити відповідні значення $y_k = f(x_k)$, $k = \overline{0,n}$ підінтегральної функції $f(x) = (1/x^{3/2})\ln(16x - 1)$, скласти відповідну таблицю і побудувати графік цієї функції.
3. Обчислити наближено заданий інтеграл, застосовуючи при $n = 12$ формули: а) лівих прямокутників, б) правих прямокутників, в) трапецій, г) Симпсона. Користуючись методом Рунге (подвоєнням кроку), для кожної вказаної квадратурної формули оцінити граничну абсолютну похибку $\Delta_n^*$ одержаного наближення $I_h$ і знайти уточнене наближене значення інтеграла $I_{ут}$. Для кожного методу знайти відносну похибку $\delta_{ут} = \left|(I_{ут} - I_a)/I_a\right| \cdot 100\%$ уточненого наближення інтеграла $I_{ут}$ порівняно з точним $I_a$.

Вказівка. Усі проміжні обчислення проводити з точністю не менше шести десяткових знаків після коми. Уточнені наближені значення інтеграла подати з округленням до чотирьох десяткових знаків після коми.

□ 1. Обчислимо заданий інтеграл аналітично:

$$I_a=\int_1^4\frac{\ln(16x-1)}{x^{3/2}}dx=\left|u=\ln(16x-1);\ dv=\frac{dx}{x^{3/2}};\ du=\frac{16dx}{16x-1};\right.$$

$$\left.v=-\frac{2\,dx}{x^{1/2}}\right|=\left(-\frac{2\ln(16x-1)}{x^{1/2}}\Bigg|_1^4+32\int_1^4\frac{dx}{x^{1/2}(16x-1)}\right)=-\ln 63+$$

$$+2\ln 15+\left|\begin{matrix}x=u^2; & u_1=1;\\ dx=2udu; & u_2=2\end{matrix}\right|+32\int_1^2\frac{2u\,du}{u(16u^2-1)}=\ln\frac{25}{7}+$$

$$+4\int_1^2\frac{du}{u^2-1/16}=\ln\frac{25}{7}+4\cdot\frac{1}{2\cdot(1/4)}\ln\left|\frac{u-1/4}{u+1/4}\right|\Bigg|_1^2=\ln(25/7)+$$

$$+8\big(\ln(7/9)-\ln(3/5)\big)=\ln(25/7)+8\ln(35/27)=3{,}3490552\,.$$

2. Розіб’ємо відрізок інтегрування $[a;b]=[1;4]$ на $n=12$ рівних частин з кроком $h=(b-a)/n=0{,}25$ точками $x_k$, $k=\overline{0,n}$ і обчислимо відповідні значення $y_k=f(x_k)$, $k=\overline{0,n}$ підінтегральної функції $f(x)=(1/x^{3/2})\ln(16x-1)$. Складемо таблицю:

| $k$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_k$ | 0 | 0,25 | 0,5 | 0,75 | 1 | 1,25 | 1,5 |
| $y_k$ | 2,708050 | 2,106869 | 1,706747 | 1,423668 | 1,214098 | 1,053436 | 0,926816 |

| $k$ | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_k$ | 1,75 | 2 | 2,25 | 2,5 | 2,75 | 3 |
| $y_k$ | 0,824760 | 0,740961 | 0,671072 | 0,612003 | 0,561502 | 0,517892 |

і побудуємо графік підінтегральної функції $y=f(x)$ (рис. 31).

3. Обчислимо наближено заданий інтеграл, застосовуючи при $n=12$ вказані квадратурні формули. Для кожного методу знайдемо відповідні характеристики точності.

а) Знайдемо наближені значення інтеграла $I_h$ і $I_{2h}$ за формулою лівих прямокутників:

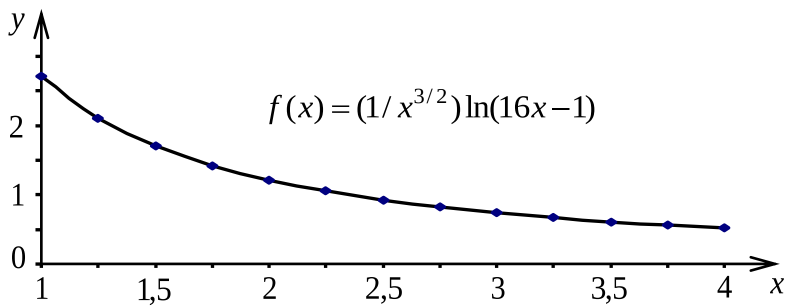


Рис. 31

$$I_h = h\cdot(y_0 + y_1 + ... + y_{11}) = 3{,}637495;$$

$$I_{2h} = 2h\cdot(y_0 + y_2 + y_4 + ... + y_{10}) = 3{,}954337.$$

Тоді за першою формулою Рунге

$$\Delta_h^* \approx |I_h - I_{2h}| / (2^1 - 1) = 0{,}316842.$$

Знайдемо уточнене значення інтеграла $I_{ym}$ за другою формулою Рунге: $I_{ym} \approx I_h + (I_h - I_{2h}) / (2^1 - 1) = 3{,}320653 = 3{,}3207$.

Обчислимо відносну похибку $\delta_{ym}$ уточненого наближеного значення інтеграла $I_{ym}$ порівняно з точним $I_a$:

$$\delta_{ym} = \left| (I_{ym} - I_a) / I_a \right| \cdot 100\% = 0{,}8481\%.$$

б) Знайдемо наближені значення інтеграла $I_h$ і $I_{2h}$ за формулою правих прямокутників:

$$I_h = h\cdot(y_1 + y_2 + ... + y_{12}) = 3{,}089956;$$

$$I_{2h} = 2h\cdot(y_2 + y_4 + y_6 + ... + y_{12}) = 2{,}859258.$$

Тоді за першою формулою Рунге

$$\Delta_h^* \approx |I_h - I_{2h}| / (2^1 - 1) = 0{,}230698.$$

Знайдемо уточнене значення інтеграла $I_{ym}$ за другою формулою Рунге: $I_{ym} \approx I_h + (I_h - I_{2h}) / (2^1 - 1) = 3{,}320653 = 3{,}3207$.

Обчислимо відносну похибку $\delta_{ут}$ уточненого наближеного значення інтеграла $I_{ут}$ порівняно з точним $I_a$:

$$\delta_{ут} = \left| \left( I_{ут} - I_a \right) / I_a \right| \cdot 100\% = 0{,}8481\% .$$

в) Знайдемо наближені значення інтеграла $I_h$ і $I_{2h}$ за формулою трапецій:

$$I_h = h \cdot (y_0 / 2 + y_1 + y_2 + ... + y_{11} + y_{12} / 2) = 3{,}363726 ;$$

$$I_{2h} = 2h \cdot (y_0 / 2 + y_2 + y_4 + ... + y_{10} + y_{12} / 2) = 3{,}406798 .$$

Тоді за першою формулою Рунге

$$\Delta_h^* \approx \left| I_h - I_{2h} \right| / (2^2 - 1) = 0{,}014357 .$$

Знайдемо уточнене значення інтеграла $I_{ут}$ за другою формулою Рунге: $I_{ут} \approx I_h + \left( I_h - I_{2h} \right) / (2^2 - 1) = 3{,}349368 = 3{,}3494$.

Обчислимо відносну похибку $\delta_{ут}$ уточненого наближеного значення інтеграла $I_{ут}$ порівняно з точним $I_a$:

$$\delta_{ут} = \left| \left( I_{ут} - I_a \right) / I_a \right| \cdot 100\% = 0{,}0093\% .$$

г) Знайдемо наближені значення інтеграла $I_h$ і $I_{2h}$ за формулою Симпсона:

$$I_h = (h/3) \cdot \big( y_0 + y_{12} + 4(y_1 + y_3 + ... + y_{11}) +$$
$$+ 2(y_2 + y_4 + ... + y_{10}) \big) = 3{,}349368 ; \quad I_{2h} = (2h/3) \cdot \big( y_0 + y_{12} +$$
$$+ 4(y_2 + y_4 + ... + y_{10}) + 2(y_4 + y_8) \big) = 3{,}353054 .$$

Тоді за першою формулою Рунге

$$\Delta_h^* \approx \left| I_h - I_{2h} \right| / (2^4 - 1) = 0{,}000246 .$$

Знайдемо уточнене значення інтеграла $I_{ут}$ за другою формулою Рунге: $I_{ут} \approx I_h + \left( I_h - I_{2h} \right) / (2^4 - 1) = 3{,}349122 = 3{,}3491$.

Обчислимо відносну похибку $\delta_{ут}$ уточненого наближеного значення інтеграла $I_{ym}$ порівняно з точним $I_a$:

$$\delta_{ym} = \left| \left( I_{ym} - I_a \right) / I_a \right| \cdot 100\% = 0{,}0020\% . \ \blacksquare$$

## 2.5. Чисельні методи розв'язування задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь

### 2.5.1. Загальні поняття про чисельні методи розв'язування задачі Коші

Нехай ***звичайне диференціальне рівняння першого порядку*** $F(x, y(x), y'(x)) = 0$ можна подати у ***нормальній формі***

$$y'(x) = f(x, y(x)) .$$

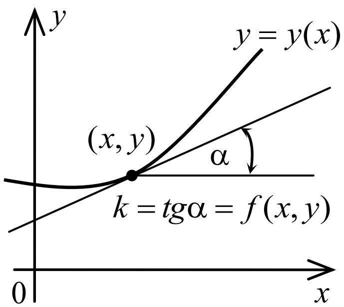


Рис. 32

Його ***розв'язком*** є диференційовна функція $y(x)$, що при підстановці в рівняння перетворює його у вірну тотожність. На рис. 32 наведено графік розв'язку диференціального рівняння, який називається ***інтегральною кривою***.

***Задача Коші*** полягає у тому, щоб відшукати функцію $y = y(x)$, яка задовольняє рівнянню $y'(x) = f(x, y(x))$ і початковій умові $y(x_0) = y_0$. Геометричний зміст цієї задачі: знайти інтегральну криву $y = y(x)$, що проходить через задану точку $M(x_0, y_0)$. Звичайно визначають розв'язок задачі Коші на відрізку, який розташований праворуч від початкового значення $x_0$, тобто для $x \in [x_0, X]$, де $X > x_0$.

Чисельні методи розв'язування задачі Коші діляться на: ***однокрокові*** та ***багатокрокові***, ***явні*** та ***неявні***.

***Однокроковий метод*** використовує дані про розв'язок $y(x)$ тільки в одній попередній точці. Проте деякі з них передбачають обчислення значень правої частини $f(x, y)$ у проміжних точках.

А $m$***-кроковий метод*** для обчислення поточного значення розв'язку $y_k$ потребує даних про розв'язок у $m$ попередніх точках $x_{k-i}$, $i=1,2,...,m$, $m \ge 1$.

В ***явних методах*** поточне значення розв'язку виражається в явній формі і знаходиться безпосередньо через його відомі значення на попередніх кроках за допомогою скінченного числа операцій. (Ці методи не потребують ітерацій).

У ***неявних методах*** знаходження поточного значення розв'язку зводиться до наближеного розв'язування скінченного рівняння. Звичайно, для цього застосовують метод простих ітерацій або метод Ньютона.

Нехай $y(x)$ – точний розв'язок задачі Коші, а $y_k$, $k=0,1,...,n$ – її наближений чисельний розв'язок. ***Глобальною похибкою*** (або просто ***похибкою***) чисельного методу називають сіткову функцію $R_k = y(x_k) - y_k$, $k=\overline{0,n}$, задану у вузлах $x_k$ сітки $\omega_n$, $k=\overline{0,n}$. За ***абсолютну похибку*** приймають величину $\Delta_n = \max\limits_{1\le k\le n} |R_k|$. ***Локальною похибкою*** на $k$-му кроці ***однокрокового методу*** називають $l_k = \tilde{y}_k - y(x_k)$, де $\tilde{y}_k$ – чисельний розв'язок, отриманий при умові, що за наближення $y_{k-1}$ до розв'язку на попередньому кроці взято його точне значення: $y_{k-1} = y(x_{k-1})$. ***Локальною похибкою*** на $k$-му кроці $m$***-крокового методу*** називають величину $l_k = \tilde{y}_k - y(x_k)$, де $\tilde{y}_k$ – чисельний розв'язок, одержаний при умові, що за наближення $y_{k-i}, i=1,2,...,m$ до розв'язку на $m$ попередніх кроках взято його точні значення: $y_{k-i} = y(x_{k-i})$, $i=1,2,...,m$.

Для оцінки якості наближення на відрізку $[x_0; x_n]$ також використовується ***середньоквадратичне відхилення*** $\sigma_n$ наближених значень $y_k$ розв'язку від точних $y(x_k)$, яке обчислюється за формулою $\boxed{\sigma_n = \sqrt{(1/n)\sum_{k=1}^{n} (y(x_k) - y_k)^2}}$.

Чисельний метод має $r$***-й порядок точності*** ($r > 0$), якщо для абсолютної похибки $\Delta_n$ справджується оцінка $\Delta_n \le Ch^r$, де $C$

– деяка додатна стала.

Зауваження. Похибка наближеного розв'язку тим чи іншим чисельним методом виражається через похідні шуканого розв'язку, які наперед невідомі. На практиці у випадку рівномірної сітки двічі проводять розрахунки за однією й тією ж схемою $r$-го порядку точності при кроках $h$ і $2h$. Як результат отримують відповідно два наближення $y(x,h)$ і $y(x,2h)$ до точного розв'язку $y(x)$. Використовуючи першу формулу Рунге, для оцінки граничної абсолютної похибки $\Delta_n^*$ наближеного розв'язку $y(x,h)$ на густішій сітці можна дістати співвідношення

$$\boxed{\Delta_n^* \approx \left(1/(2^r-1)\right)\max_x |\, y(x,h) - y(x,2h)\,|},$$

де максимум береться за всіма співпадаючими вузлами $x$ обох сіток.

### 2.5.2. Явні однокрокові методи Ейлера і Рунге – Кутта

Нехай треба розв'язати задачу Коші $y' = f(x,y)$, $y(x_0) = y_0$ на відрізку $x \in [x_0, X]$, де $X > x_0$. Візьмемо сталий крок $h = (X - x_0)/n$ і побудуємо рівномірну сітку з вузлами $x_k = x_0 + kh,\ \ k = 0,1,2,...,n$.

У кожному вузлі $x_{k-1}$, $k = 1,...,n$ замінимо похідну $y'$ скінченною різницею вперед $y'_{k-1} \approx (y_k - y_{k-1})/h$, а праву частину $f(x,y)$ обчислимо в точці $(x_{k-1}, y_{k-1})$. Отримаємо $y_k = y_{k-1} + h\, f(x_{k-1}, y_{k-1})$ $(k = 1,...,n)$ – ***різницеве рівняння***, що служить наближенням даного диференціального рівняння з локальною похибкою другого порядку: $l_k = O(h^2)$. Абсолютна похибка має перший порядок: $\Delta_n = O(h)$.

Додаючи початкову умову $y_0 = y(x_0)$, одержимо ***різницеву задачу Коші***, що апроксимує відповідну диференціальну задачу.

***Явний однокроковий метод Ейлера*** задається розрахунковими формулами:

$$\boxed{y_k = y_{k-1} + \Delta y_k\,,\ \Delta y_k = h\,f\,(x_{k-1}, y_{k-1})\,,\ \ k = 1,\ldots,n}$$

і забезпечує перший порядок точності ($r = 1$).

Серед методів високої точності одним з найпоширеніших є ***метод Рунге – Кутта***. Він базується на розвиненні шуканого розв'язку $y(x)$ в ряд Тейлора в околі точки $x = x_k$ до членів $r$-го порядку включно. Розрахункові формули ***явного однокрокового методу Рунге – Кутта четвертого порядку точності*** ($r = 4$) для випадку сталого кроку інтегрування мають вигляд:

$$\boxed{\begin{gathered} y_k = y_{k-1} + \Delta y_k\,,\ \ \Delta y_k = (K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)/6\,; \\ K_1 = h\,f\,(x_{k-1}, y_{k-1})\,;\ \ K_2 = h\,f\,(x_{k-1} + h/2, y_{k-1} + K_1/2)\,; \\ K_3 = h\,f\,(x_{k-1} + h/2, y_{k-1} + K_2/2)\,; \\ K_4 = h\,f\,(x_{k-1} + h, y_{k-1} + K_3)\,,\ \ k = 1, 2, 3, \ldots. \end{gathered}}$$

### 2.5.3. Явний чотирикроковий метод Адамса. Метод прогнозування і корекції Хеммінга

Замінюючи праву частину диференціального рівняння $y' = f\,(x, y)$ інтерполяційним многочленом третього порядку, можна одержати розрахункові формули ***явного чотирикрокового методу Адамса***

$$\boxed{\begin{gathered} y_k = y_{k-1} + \Delta y_k\,;\quad \Delta y_k = (h/24)\big(55\,f\,(x_{k-1}, y_{k-1}) - 59\,\times \\ \times\,f\,(x_{k-2}, y_{k-2}) + 37\,f\,(x_{k-3}, y_{k-3}) - 9\,f\,(x_{k-4}, y_{k-4})\big),\ k = 4, 5, \ldots, \end{gathered}}$$

що має четвертий порядок точності.

У методах ***прогнозування та корекції*** (***предиктор*** – ***коректор***) кожний крок розбивається на два етапи: спочатку явним методом (***предиктор***) знаходять його грубе наближення $y_k^{(0)}$ в новому $k$-му вузлі (***прогнозування***), а потім неявним методом (***коректор***), ітераційно уточнюють отримане значення $y_k^{(1)}$, $y_k^{(2)}$, ... (***корекція***).

На практиці часто застосовують ***чотирикроковий метод прогнозування і корекції Хеммінга***:

$$\boxed{\begin{array}{c} y_k^{(0)} = y_{k-4} + (4h/3)\left(2f(x_{k-1}, y_{k-1}) - f(x_{k-2}, y_{k-2}) + \right. \\ \left. + 2f(x_{k-3}, y_{k-3})\right); \qquad y_k = (1/8)(9y_{k-1} - y_{k-3}) + (3h/8) \times \\ \times\left(f(x_k, y_k^{(0)}) + 2f(x_{k-1}, y_{k-1}) - f(x_{k-2}, y_{k-2})\right); \quad k = 4,5,6,\ldots, \end{array}}$$

де корекція обмежується однією ітерацією. Він має четвертий порядок точності.

<u>Зауваження</u>. Для запуску багатокрокових методів Адамса і Хеммінга потрібно додатково визначити $y_1$, $y_2$ і $y_3$, наприклад, тим же методом Рунге – Кутта.

<u>Приклад</u>. Поставлено задачу Коші: знайти частинний розв'язок диференціального рівняння $y' = f(x, y)$, який задовольняє початковій умові $y(1) = y_0$. Виконати наступне:

1. Розв'язати дану задачу Коші аналітично. Прийняти результат аналітичного розрахунку $y = y(x)$ за точний розв'язок. Обчислити значення $y(x_k)$ отриманого аналітичного розв'язку на відрізку $[1;2]$ у $n = 10$ рівновіддалених вузлах $x_k = x_{k-1} + h$, $x_0 = 1$, $k = 1,2,\ldots,n$ з кроком $h = 0{,}1$. Скласти відповідну таблицю і побудувати графік цього розв'язку $y = y(x)$.
2. Чисельно розв'язати задачу Коші на відрізку $[1;2]$ з кроком $h = 0{,}1$ вказаним далі способом: а) методом Ейлера; б) методом Рунге – Кутта; в) методом Адамса; г) методом Хеммінга. Для кожного способу отримані наближені значення $y_k$; $k = 0,1,\ldots,n$ занести у відповідну таблицю і побудувати графік наближеного розв'язку $y = y(x)$. Користуючись методом подвоєння кроку, знайти оцінку $\Delta_n^* \approx \left(1/(2^r - 1)\right) \max\limits_x |y(x,h) - y(x,2h)|$ граничної абсолютної похибки $\Delta_n^*$ одержаного наближеного розв'язку $y = y(x,h)$ на густішій сітці. Знайти $\sigma_n = \sqrt{(1/n)\sum_{k=1}^{n}(y(x_k) - y_k)^2}$ – середньоквадратичне відхилення наближених значень $y_k$ розв'язку від точних $y(x_k)$.

$$f(x,y)=2y/x-3/x^2; \quad y_0=2.$$

Вказівка. 1. Усі проміжні обчислення проводити з точністю не менше шести десяткових знаків після коми. Наближені значення розв’язку подати з округленням до шести десяткових знаків після коми. 2. Необхідні для запуску чотирикрокових методів Адамса та Хеммінга, окрім початкової умови $y_0=y(1)$, ще три значення $y_1$, $y_2$ і $y_3$ попередньо знайти за допомогою однокрокового методу Рунге – Кутта (використати результати пункту 2.б).

□ 1. Розв’яжемо дану задачу Коші аналітично:

$y'=2y/x-3/x^2$ – лінійне рівняння; $y=uv$ – підстановка Бернуллі; $y'=u'v+uv'$; $u'v+uv'-2uv/x=-3/x^2$;

$$u'v+u(v'-2v/x)=-3/x^2; \quad v'-2v/x=0; \quad \int\frac{dv}{v}=2\int\frac{dx}{x};$$

$$\ln v=2\ln x; \quad v=x^2; \quad u'x^2=-3/x^2; \quad u=-3\int x^{-4}dx=x^{-3}+C;$$

$y=uv=(x^{-3}+C)x^2$ – загальний розв’язок;

$y(1)=2$: $(1^{-3}+C)\cdot 1^2=2$; $C=1$; $y=(x^{-3}+1)x^2=1/x+x^2$ – розв’язок задачі Коші.

Розіб’ємо заданий відрізок $[1;2]$ на $n=10$ рівних частин з кроком $h=0{,}1$ точками $x_k$, $k=\overline{0,n}$ і обчислимо відповідні значення $y_k=f(x_k)$, $k=\overline{0,n}$ аналітичного розв’язку $y=1/x+x^2$. Складемо таблицю:

| $k$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_k$ | 1 | 1,1 | 1,2 | 1,3 | 1,4 | 1,5 |
| $y(x_k)$ | 2,000000 | 2,119091 | 2,273333 | 2,459231 | 2,674286 | 2,916667 |

| $k$ | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_k$ | 1,6 | 1,7 | 1,8 | 1,9 | 2 |
| $y(x_k)$ | 3,185000 | 3,478235 | 3,795556 | 4,136316 | 4,500000 |

і побудуємо графік цього розв'язку $y = y(x)$ (рис. 33).

2. Розв'яжемо задачу Коші наближено на відрізку $[1;2]$ з кроком $h = 0{,}1$ вказаним далі способом. Для кожного методу знайдемо відповідні характеристики точності отриманого чисельного розв'язку.

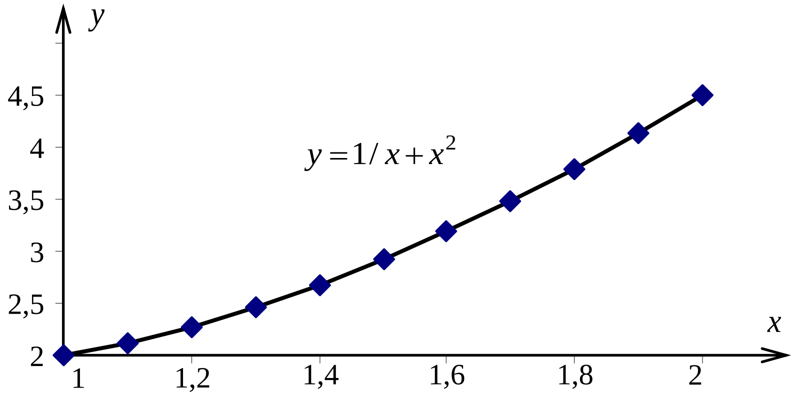


Рис. 33

а) Проведемо обчислення за методом Ейлера й отримані значення запишемо у таблицю:

| $k$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_k$ | 1 | 1,1 | 1,2 | 1,3 | 1,4 | 1,5 |
| $y_k$ | 2,000000 | 2,100000 | 2,233884 | 2,397865 | 2,589253 | 2,806085 |

| $k$ | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_k$ | 1,6 | 1,7 | 1,8 | 1,9 | 2 |
| $y_k$ | 3,046896 | 3,310570 | 3,596243 | 3,903233 | 4,230997 |

Аналогічно провівши розрахунки наближеного розв'язку з подвоєним кроком $2h = 0{,}2$, за формулою Рунге дістанемо оцінку граничної абсолютної похибки $\Delta_n^* = 2{,}27 \cdot 10^{-1}$.

Знайдемо середньоквадратичне відхилення $\sigma_n$ наближених значень $y_k$ розв'язку $y = y(x)$ від точних $y(x_k)$, які візьмемо з пункту 1. Дістанемо $\sigma_n = 1{,}55 \cdot 10^{-1}$.

б) Проведемо обчислення за методом Рунге – Кутта й отримані значення запишемо у таблицю:

| $k$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_k$ | 1 | 1,1 | 1,2 | 1,3 | 1,4 | 1,5 |
| $y_k$ | 2,000000 | 2,119085 | 2,273322 | 2,459215 | 2,674266 | 2,916643 |

| $k$ | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_k$ | 1,6 | 1,7 | 1,8 | 1,9 | 2 |
| $y_k$ | 3,184972 | 3,478203 | 3,795518 | 4,136274 | 4,499953 |

Аналогічно провівши розрахунки наближеного розв'язку з подвоєним кроком $2h = 0{,}2$, за формулою Рунге дістанемо оцінку граничної абсолютної похибки $\Delta_n^* = 8{,}76 \cdot 10^{-2}$.

Знайдемо середньоквадратичне відхилення $\sigma_n$ наближених значень $y_k$ розв'язку $y = y(x)$ від точних $y(x_k)$, які візьмемо з пункту 1. Дістанемо $\sigma_n = 2{,}93 \cdot 10^{-5}$.

в) З умови задачі $y_0 = 2$, а з пункту 2.б додатково маємо ще три значення $y_1 = 2{,}119085$, $y_2 = 2{,}273322$ і $y_3 = 2{,}459215$, одержані за методом Рунге – Кутта.

Далі проведемо обчислення за розрахунковими формулами методу Адамса й отримані значення занесемо у таблицю:

| $k$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_k$ | 1 | 1,1 | 1,2 | 1,3 | 1,4 | 1,5 |
| $y_k$ | 2,000000 | 2,119085 | 2,273322 | 2,459215 | 2,674418 | 2,916938 |

| $k$ | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_k$ | 1,6 | 1,7 | 1,8 | 1,9 | 2 |
| $y_k$ | 3,185364 | 3,478683 | 3,796087 | 4,136928 | 4,500692 |

Аналогічно провівши розрахунки наближеного розв'язку з подвоєним кроком $2h = 0{,}2$, за формулою Рунге дістанемо оцінку граничної абсолютної похибки $\Delta_n^* = 8{,}79 \cdot 10^{-2}$.

Знайдемо середньоквадратичне відхилення $\sigma_n$ наближених значень $y_k$ розв'язку $y = y(x)$ від точних $y(x_k)$, які візьмемо з пункту 1. Дістанемо $\sigma_n = 3{,}95 \cdot 10^{-4}$.

г) З умови задачі $y_0 = 2$, а з пункту 2.б додатково маємо ще три значення $y_1 = 2{,}119085$, $y_2 = 2{,}273322$ і $y_3 = 2{,}459215$, одержані за методом Рунге – Кутта.

Далі проведемо обчислення за розрахунковими формулами методу прогнозування і корекції Хеммінга й отримані значення запишемо у таблицю:

| $k$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_k$ | 1 | 1,1 | 1,2 | 1,3 | 1,4 | 1,5 |
| $y_k$ | 2,000000 | 2,119085 | 2,273322 | 2,459215 | 2,674268 | 2,916645 |

| $k$ | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_k$ | 1,6 | 1,7 | 1,8 | 1,9 | 2 |
| $y_k$ | 3,184975 | 3,478207 | 3,795523 | 4,136279 | 4,499959 |

Аналогічно провівши розрахунки наближеного розв'язку з подвоєним кроком $2h = 0{,}2$, за формулою Рунге дістанемо оцінку граничної абсолютної похибки $\Delta_n^* = 8{,}76 \cdot 10^{-2}$.

Знайдемо середньоквадратичне відхилення $\sigma_n$ наближених значень $y_k$ розв'язку $y = y(x)$ від точних $y(x_k)$, які візьмемо з пункту 1. Дістанемо $\sigma_n = 2{,}59 \cdot 10^{-5}$. ■

## Завдання для практичних занять і модульної контрольної роботи

**Завдання 1**. Для подвійного інтеграла $\iint_D f(x,y)\,dxdy$ вказано підінтегральну функцію $f(x,y)$ і область інтегрування $D$, яка задана рівняннями ліній, що її обмежують, або системою нерівностей. Необхідно:

1. Зобразити область інтегрування $D$ у прямокутній системі координат $Oxy$.

2. Подати область інтегрування $D$ як правильну в напрямі осі $Oy$, при необхідності розбиваючи її на частини, і зробити відповідний рисунок. Обчислити даний подвійний інтеграл переходом до двократного повторного інтеграла із зовнішнім інтегруванням за змінною $x$ і внутрішнім інтегруванням за змінною $y$.

3. Подати область інтегрування $D$ як правильну в напрямі осі $Ox$, при необхідності розбиваючи її на частини, і зробити відповідний рисунок. Обчислити даний подвійний інтеграл переходом до двократного повторного інтеграла із зовнішнім інтегруванням за змінною $y$ і внутрішнім інтегруванням за змінною $x$.

| № в-та | Завдання |
|---|---|
| 1 | $f(x,y)=2x^2y$; $D$: $4x-y^2=0,\ x-9=0$ |
| 2 | $f(x,y)=6x/y^4$; $D$: $xy=1,\ y=x,\ x=3$ |
| 3 | $f(x,y)=6xy$; $D$: $\sqrt{2-x^2}+y=0,\ x^2+y=0$ |
| 4 | $f(x,y)=2x^3-xy$; $D$: $y-3=-x^2,\ y+5=x^2$ |
| 5 | $f(x,y)=3x^2y$; $D$: $y=x^3,\ x+y-2=0, y=0$ |
| 6 | $f(x,y)=x+4y^3$; $D$: $xy=1,\ y=\sqrt{x},\ x=4$ |
| 7 | $f(x,y)=3x^2y$; $D$: $y^2+x-3=0,\ y^2=x+1$ |
| 8 | $f(x,y)=6xy$; $D$: $x^2+y^2\le 9,\ y\ge 2x/3+3$ |
| 9 | $f(x,y)=x^2y$; $D$: $y=x^3,\ y=8,\ x=0$ |

| | |
|---|---|
| 10 | $f(x,y)=2x-y$; $D: y=x^3,\ y=-2x^3,\ x=1$ |
| 11 | $f(x,y)=6x-yx^3$; $D:\ 2x-y-1=0,\ x^2+y-2=0$ |
| 12 | $f(x,y)=6y/x^2$; $D:\ y=x,\ xy=4,\ x=4$ |

**Завдання 2**. Обчислити вказаний криволінійний інтеграл за довжиною $I=\int_L f(x,y)\,dl$ по заданій дузі $L$.

| № в-та | Завдання |
|---|---|
| 1 | $\int\limits_L (x^2-2y)\,dl$, $L$ – дуга кола $x=3\cos t$, $y=3\sin t$, $0\le t\le\dfrac{\pi}{2}$ |
| 2 | $\int\limits_L x^4y^{-1}dl$, $L$ – дуга гіперболи $y=1/x$, $\sqrt{3}\big/2\le x\le 2\big/\sqrt{3}$ |
| 3 | $\int\limits_L \dfrac{y^3\,dl}{\sqrt{1+x^2}}$, $L$ – дуга логарифма $y=\ln x$, $1\le x\le e^2$ |
| 4 | $\int\limits_L \dfrac{y\cos^2 x\,dl}{\sqrt{1+\cos^2 x}}$, $L$ – дуга синусоїди $y=\sin x$, $0\le x\le\pi/2$ |
| 5 | $\int\limits_L y\,dl$, $L$ – дуга циклоїди $x=t-\sin t$, $y=1-\cos t$, $0\le t\le\dfrac{\pi}{2}$ |
| 6 | $\int\limits_L \dfrac{xy}{\sqrt{1+4y}}dl$, $L$ – дуга параболи $y=x^2$, $0\le x\le 1$ |
| 7 | $\int\limits_L \dfrac{x\ln y}{\sqrt{1+y^2}}dl$, $L$ – дуга експоненти $y=e^x$, $0\le x\le 1$ |
| 8 | $\int\limits_L \dfrac{y^3\sin x\,dl}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$, $L$ – дуга косинусоїди $y=\cos x$, $0\le x\le\pi/2$ |
| 9 | $\int\limits_L (2x^{1/3}-y^{1/3})\,dl$, $L$ – дуга астроїди $x=\cos^3 t$, $y=\sin^3 t$, $0\le t\le\pi/2$ |

| | |
|---|---|
| 10 | $\int_L \frac{y\,dl}{1+9xy}$, $L$ – дуга кубічної параболи $y = x^3$, $0 \le x \le 1/2$ |
| 11 | $\int_L \frac{xy^2\,dl}{\sqrt{x^2+16y^2}}$, $L$ – дуга еліпса $x = 2\cos t$, $y = \sin t$, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$ |
| 12 | $\int_L e^{-x}\sqrt{1+y^2}\,dl$, $L$ – дуга експоненти $y = e^x$, $0 \le x \le 1$ |

**Завдання 3**. Обчислити вказаний криволінійний інтеграл за координатами $\int_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ по заданій дузі $L$.

| № в-та | Завдання |
|---|---|
| 1 | $\int_L (x^2 - y^2)\,dx + xy\,dy$, $L$ – дуга параболи $y^2 = 2 - x$, $0 \le x \le 1$ |
| 2 | $\int_L x(x^2 + y^2)\,dx + x^2 y dy$, $L$ – дуга кола $x = \cos t$, $y = \sin t$, $0 \le t \le \pi/2$ |
| 3 | $\int_L \frac{y\,dx + 2x\,dy}{\sqrt{1-x^2}}$, $L$ – дуга арксинуса $y = \arcsin x$, $0 \le x \le 1/2$ |
| 4 | $\int_L 2y\,dx + (\cos^2 x + y^2)\,dy$, $L$ – дуга синусоїди $y = \sin x$, $0 \le x \le \pi/2$ |
| 5 | $\int_L \sqrt{1+y^2}\sin x\,dx - y\cos x\,dy$, $L$ – дуга тангенсоїди $y = tg\,x$, $\pi/6 \le x \le \pi/4$ |
| 6 | $\int_L (x^{2/3} + y^{2/3})\,dx - dy$, $L$ – дуга астроїди $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$, $0 \le t \le \pi/2$ |
| 7 | $\int_L \frac{x(x^2+4y^2)\,dx + xy\,dy}{x^2+4y^2}$, $L$ – дуга еліпса $x = 2\cos t$, $y = \sin t$, $0 \le t \le \pi/2$ |

| | |
|---|---|
| 8 | $\int\limits_L \frac{y^2dx}{x} + y^2 \ln x\, dy$, $L$ – дуга логарифма $y = \ln x$, $1 \le x \le e^2$ |
| 9 | $\int\limits_L \frac{y\,dx - 2x\,dy}{x^2+1}$, $L$ – дуга арктангенса $y = arctg\, x$, $0 \le x \le 1$ |
| 10 | $\int\limits_L (2x^2 + \ln^2 y)\,dx + (x/y)\,dy$, $L$ – дуга експоненти $y = e^x$, $0 \le x \le 1$ |
| 11 | $\int\limits_L xy\,dx - xy(x^2+4y^2)\,dy$, $L$ – дуга еліпса $x = 2\cos t$, $y = \sin t$, $0 \le t \le \pi/2$ |
| 12 | $\int\limits_L 2y^3 \sin x\,dx + y^2 \cos x\,dy$, $L$ – дуга косинусоїди $y = \cos x$, $0 \le x \le \pi/2$ |

**Завдання 4**. Знайти радіус, інтервал і область збіжності степеневого ряду.

| № в-та | Ряд | № в-та | Ряд |
|---|---|---|---|
| 1 | $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^{2n} x^{2n-1}}{n(n+4)}$ | 7 | $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4^{2n}(x-3)^n}{\sqrt{n^2+4}}$ |
| 2 | $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^{3n}}{8^n(n+4)}$ | 8 | $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{n\,16^n}$ |
| 3 | $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{5n}}{(3n+4)^{2n}}$ | 9 | $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^{2n+3}}{4^n n^3}$ |
| 4 | $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{2^n + 3^{2n}}$ | 10 | $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5^n(x-2)^n}{\sqrt[4]{n^3}}$ |
| 5 | $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (n^2+1)^n x^n$ | 11 | $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{9^n(x+1)^{2n}}{n^3+1}$ |
| 6 | $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-4)^{3n-1}}{2^{3n}\sqrt[3]{n}}$ | 12 | $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2(x+2)^{3n}}{27^n}$ |

**Завдання 5**. Наближено обчислити даний визначений інтеграл з граничною абсолютною похибкою $\varepsilon = 0{,}0001$, розкладаючи підінтегральну функцію в степеневий ряд і потім інтегруючи його почленно.

| № в-та | Інтеграл | № в-та | Інтеграл |
|---|---|---|---|
| 1 | $\int_0^1 \frac{e^{-\sqrt{x}}-1}{\sqrt{x}}dx$ | 7 | $\int_0^{0,5} \frac{\sqrt{1+x^4}-1}{x^2}dx$ |
| 2 | $\int_0^{0,5} \frac{arctg\, x^4}{x}dx$ | 8 | $\int_0^1 \frac{e^{-x^2}-1}{x}dx$ |
| 3 | $\int_0^1 \frac{1-\cos x^3}{x^2}dx$ | 9 | $\int_0^1 \frac{\sin x^2}{x}dx$ |
| 4 | $\int_0^{0,5} \frac{\ln(1+x^4)}{x}dx$ | 10 | $\int_0^{0,5} \frac{arctg\, x^6}{x^2}dx$ |
| 5 | $\int_0^{0,5} \frac{\cos\sqrt{x}-1}{x}dx$ | 11 | $\int_0^1 \frac{e^{-x^3}-1}{x^2}dx$ |
| 6 | $\int_0^1 \frac{\sin x^3}{x^2}dx$ | 12 | $\int_0^{0,5} \frac{\ln(1+x^6)}{x^2}dx$ |

**Завдання 6**. Розвинути в ряд Фур'є періодичну функцію $y = f(x)$, що задана на відрізку $[-\pi;\pi]$ довжиною в період $T = 2\pi$. Побудувати на окремих рисунках в одному масштабі графік даної функції $y = f(x)$ і графік суми $y = S(x)$ одержаного її розвинення на відрізку $[-3\pi;3\pi]$.

| № в-та | Функція $f(x)$ | № в-та | Функція $f(x)$ |
|---|---|---|---|
| 1 | $\begin{cases} \pi, & -\pi < x < 0; \\ 3x-2\pi, & 0 < x < \pi \end{cases}$ | 7 | $\begin{cases} 2x+\pi, & -\pi < x < 0; \\ \pi, & 0 < x < \pi \end{cases}$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 2 | $\lvert \pi-2x \rvert,\ x\in(-\pi;\pi)$ | 8 | $\lvert x \rvert-2x,\quad -\pi<x<\pi$ |
| 3 | $\begin{cases} x+\pi, & -\pi<x<0; \\ x-2\pi, & 0<x<\pi \end{cases}$ | 9 | $\begin{cases} -2\pi, & -\pi<x\le 0; \\ 2x, & 0<x<\pi \end{cases}$ |
| 4 | $\begin{cases} \pi\cos(x/2), & -\pi<x<0; \\ \pi, & 0\le x<\pi \end{cases}$ | 10 | $\begin{cases} \pi\sin(x/2), & -\pi<x<0; \\ \pi, & 0<x<\pi \end{cases}$ |
| 5 | $\begin{cases} x+2\pi, & -\pi<x\le 0; \\ \pi-x, & 0<x<\pi \end{cases}$ | 11 | $\begin{cases} x-\pi, & -\pi<x<0; \\ \pi, & 0<x<\pi \end{cases}$ |
| 6 | $\begin{cases} x+3\pi, & -\pi<x<0; \\ \pi, & 0<x<\pi \end{cases}$ | 12 | $\begin{cases} x, & -\pi<x<0; \\ 4\pi-3x, & 0<x<\pi \end{cases}$ |

**Завдання 7**. Для заданої функції $u=f(x,y,z)$ вказані значеннях її аргументів $X=x\pm\Delta_x$, $Y=y\pm\Delta_y$, $Z=z\pm\Delta_z$. Знайти наближене значення $u$ цієї функції, а також лінійні оцінки його абсолютної $\Delta_u$ і відносної $\delta_u$ похибок.

| № в-та | Завдання | № в-та | Завдання |
|---|---|---|---|
| 1 | $u=(x^4-z)/y^2$, $x=1{,}543\pm0{,}0005$, $y=1{,}87\pm0{,}02$, $z=2{,}14\pm0{,}006$ | 7 | $u=(x^2+yz)/y^3$, $x=2{,}15\pm0{,}03$, $y=1{,}593\pm0{,}005$, $z=0{,}27\pm0{,}008$ |
| 2 | $u=xz^3-y^2/x^2$, $x=5{,}391\pm0{,}007$, $y=3{,}72\pm0{,}005$, $z=1{,}68\pm0{,}02$ | 8 | $u=y^3/z^2+xz^3$, $x=1{,}48\pm0{,}03$, $y=0{,}9326\pm0{,}0005$, $z=1{,}24\pm0{,}008$ |
| 3 | $u=xz^4-x^2/y^2$, $x=3{,}629\pm0{,}004$, $y=2{,}13\pm0{,}009$, $z=1{,}97\pm0{,}05$ | 9 | $u=yz^2-x^2/y^3$, $x=4{,}16\pm0{,}02$, $y=2{,}39\pm0{,}005$, $z=0{,}7182\pm0{,}0006$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 4 | $u = y^2/(xz) + x^2 z$,<br>$x = 4{,}153 \pm 0{,}006$,<br>$y = 2{,}274 \pm 0{,}0005$,<br>$z = 1{,}24 \pm 0{,}03$ | 10 | $u = y^3/(xz) - x z^2$,<br>$x = 1{,}26 \pm 0{,}02$,<br>$y = 0{,}8514 \pm 0{,}0005$,<br>$z = 1{,}39 \pm 0{,}008$ |
| 5 | $u = y^2/(x + z^2) - x z$,<br>$x = 0{,}4839 \pm 0{,}0007$,<br>$y = 1{,}62 \pm 0{,}05$,<br>$z = 0{,}826 \pm 0{,}003$ | 11 | $u = z^2/(xy + z) - y z$,<br>$x = 0{,}8716 \pm 0{,}0003$,<br>$y = 1{,}59 \pm 0{,}06$,<br>$z = 1{,}63 \pm 0{,}005$ |
| 6 | $u = (xy + z^4)/y^2$,<br>$x = 3{,}157 \pm 0{,}005$,<br>$y = 2{,}38 \pm 0{,}007$,<br>$z = 1{,}75 \pm 0{,}04$ | 12 | $u = xy^2 + z^4/y$,<br>$x = 0{,}825 \pm 0{,}003$,<br>$y = 1{,}89 \pm 0{,}08$,<br>$z = 0{,}78 \pm 0{,}005$ |

**Завдання 8**. Дано рівняння $f(x) = 0$. Виконати наступне:

1. Подати задане рівняння у вигляді $f_1(x) = f_2(x)$. Знайти найменший за модулем дійсний корінь $x^*$ рівняння наближено графічно як абсцису $x_g$ найближчої до осі $Oy$ точки перетину графіків $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ і вказати проміжок ізоляції $[a_0 ; b_0]$ цього кореня, де $f(a_0) \cdot f(b_0) < 0$.

2. Уточнити найменший за модулем корінь рівняння $f(x) = 0$ вказаним далі методом. Задано точність (за аргументом) $\delta$ обчислення кореня: $|x_k - x_{k-1}| < \delta = 0{,}01$. Задано точність (за функцією) $\varepsilon$ обчислення кореня: $|f(x_k)| < \varepsilon = 0{,}01$. Виконати $k_{\max}$ ітерацій. Знайти наближене значення $x_{k_{\max}}$ цього кореня та досягнуті характеристики його точності $\delta_{k_{\max}} = |x_{k_{\max}} - x_{k_{\max}-1}|$ і $\varepsilon_{k_{\max}} = |f(x_{k_{\max}})|$. Якщо обидві задані характеристики точності $\delta$ і $\varepsilon$ досягнуті, то вказати найменшу достатню для цього кількість ітерацій $k_{\partial ocm}$.

а) Методом поділу навпіл. б) Модифікованим методом простих ітерацій. в) Модифікованим методом Ньютона.

Вказівки. 1. Усі проміжні обчислення проводити з точністю не менше шести десяткових знаків після коми. 2. Проміжок локалізації $[a_0;b_0]$ шуканого кореня $x^*$ визначити так, що його кінці $a_0$ і $b_0$ – цілі числа, причому $b_0 - a_0 = 1$ і $f(a_0)\ f(b_0) < 0$. 3. У модифікаціях методу простих ітерацій і методу Ньютона за значення параметра спочатку взяти відповідно $\alpha = -\mathrm{sgn}(f(b_0) - f(a_0))$ і $\alpha = 1$, де $\mathrm{sgn}\, x = \{-1\ \textit{при}\ x < 0,\ 0\ \textit{при}\ x = 0,\ 1\ \textit{при}\ x > 0\}$. Якщо при цьому ітераційний процес розбігається, то способом проб, послідовно зменшуючи за модулем значення $\alpha$ з кроком $\Delta\alpha = 0{,}1$, знайти достатнє для збіжності відмінне від нуля значення параметра $\alpha$.

| № в-та | Рівняння | № в-та | Рівняння |
|---|---|---|---|
| 1 | $0{,}3 - 0{,}1x\cos x - 0{,}5x^3 = 0$ | 7 | $0{,}2 + 0{,}1\cos x - 0{,}6x^3 = 0$ |
| 2 | $0{,}2 - 0{,}1x\sin x - 0{,}5x^3 = 0$ | 8 | $0{,}3 - 0{,}1\sin x - 0{,}6x^3 = 0$ |
| 3 | $0{,}4 - 0{,}1x\sin x - 0{,}5x = 0$ | 9 | $0{,}4 - 0{,}1\cdot 2^x - 0{,}5x = 0$ |
| 4 | $0{,}2 - 0{,}1\sin x - 0{,}5x^3 = 0$ | 10 | $0{,}2 - 0{,}1x\cos x - 0{,}4x = 0$ |
| 5 | $0{,}3 - 0{,}1\cdot 2^x - 0{,}6x^3 = 0$ | 11 | $0{,}4 + 0{,}1\cdot 2^{-x} - 0{,}6x = 0$ |
| 6 | $0{,}3 - 0{,}1\sin x - 0{,}5x = 0$ | 12 | $0{,}2 - 0{,}1x\sin x - 0{,}4x^3 = 0$ |

**Завдання 9**. Досліджувана функція $f(x)$ задана своїми значеннями в $n+1$ вузлах $a = x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = b$ згідно поданої таблиці, де $n = 3$. У прямокутній системі координат $Oxy$ зобразити наведені в таблиці точки $(x_k, y_k)$, $y_k = f(x_k)$, $k = \overline{0,n}$. Виконати наступне:

1. Знайти для заданої функції $f(x)$ інтерполяційний многочлен Лагранжа $y = L_3(x)$. Обчислити значення цього інтерполяційного многочлена на відрізку $[-4;4]$ з кроком $h = 0{,}5$, скласти відповідну таблицю і побудувати його графік.

2. Знайти апроксимацію цієї функції $f(x)$ лінійною регресією $F(x) = a_0 + a_1 x$ за методом найменших квадратів. Обчислити значення отриманої лінійної регресії $y = a_0 + a_1 x$ на кінцях відрізка $[-4;4]$, скласти відповідну таблицю і побудувати графік. Знайти середньоквадратичне відхилення $\Delta y_s$ лінійної регресії від заданих значень вхідної функції.

<u>Вказівка</u>. 1. Усі проміжні обчислення проводити з точністю не менше шести десяткових знаків після коми. Значення коефіцієнтів інтерполяційного многочлена і лінійної регресії подати з округленням до чотирьох десяткових знаків після коми. 2. Усі графіки побудувати в одній системі координат $Oxy$.

| № в-та | $k$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $x_k$ | -2 | 0 | 1 | 4 |
| | $y_k$ | -2,5 | -1,3 | 2,5 | 1,5 |
| 2 | $x_k$ | -3 | -1 | 2 | 3 |
| | $y_k$ | -1,5 | -2,5 | 1,7 | 2,2 |
| 3 | $x_k$ | -4 | -3 | 0 | 2 |
| | $y_k$ | -2,1 | -1,5 | 1,4 | 2,6 |
| 4 | $x_k$ | -2 | 0 | 3 | 4 |
| | $y_k$ | 1,5 | 2,3 | -2,1 | 1,2 |
| 5 | $x_k$ | -3 | -2 | 1 | 3 |
| | $y_k$ | 2,5 | 1,4 | -2,5 | 0,6 |
| 6 | $x_k$ | -4 | -3 | 0 | 3 |
| | $y_k$ | -1,5 | -2,5 | 1,8 | -1,2 |
| 7 | $x_k$ | -2 | -1 | 2 | 4 |
| | $y_k$ | 1,5 | -2,1 | -1,4 | 1,7 |
| 8 | $x_k$ | -3 | -1 | 2 | 3 |
| | $y_k$ | -2,5 | -1,5 | 1,3 | 2,3 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 9 | $x_k$ | -4 | -3 | 0 | 2 |
| | $y_k$ | -2,3 | -1,8 | 0,5 | 1,2 |
| 10 | $x_k$ | -2 | 1 | 3 | 4 |
| | $y_k$ | -1,8 | 0,7 | 1,3 | 2,1 |
| 11 | $x_k$ | -3 | -1 | 2 | 3 |
| | $y_k$ | -0,8 | -1,5 | 1,7 | 2,1 |
| 12 | $x_k$ | -4 | -3 | 0 | 2 |
| | $y_k$ | -2,4 | -1,7 | 1,3 | 2,2 |

**Завдання 10**. Функція $y = f(x)$ задана на відрізку $[x_0; x_n]$ таблицею значень $y_k = f(x_k)$, $k = \overline{0,n}$ ($n = 5$) у рівновіддалених вузлах $x_0$, $x_k = x_{k-1} + h$, $k = \overline{1,n}$ зі сталим кроком $h = (b-a)/n$. Знайти наближене значення $f'(x_3)$ похідної $f'(x)$ у вузлі $x_3$ за формулою $f'(x_k) \approx F'(x_k, h) = (-y_{k-1} + y_{k+1})/(2h)$, що має порядок точності $r = 2$, з кроком $h$. Користуючись методом Рунге (подвоєнням кроку), оцінити абсолютну похибку апроксимації $\Delta_1$ та уточнити значення похідної $f'(x_3)$.

Вказівка. Усі проміжні обчислення проводити з точністю не менше шести десяткових знаків після коми. Уточнене значення похідної подати з округленням до двох десяткових знаків після коми.

| № в-та | $k$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $x_k$ | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,6 |
| 1 | $y_k$ | 1,24 | 0,95 | 0,62 | 0,47 | 0,35 | 0,23 |
| 2 | $y_k$ | 1,13 | 0,87 | 0,72 | 0,53 | 0,38 | 0,25 |
| 3 | $y_k$ | 1,37 | 1,45 | 1,67 | 1,89 | 2,15 | 2,28 |
| 4 | $y_k$ | 3,14 | 2,75 | 2,36 | 2,17 | 1,85 | 1,62 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | $y_k$ | 2,93 | 2,71 | 2,38 | 2,04 | 1,92 | 1,54 |
| 6 | $y_k$ | 2,83 | 2,64 | 2,32 | 2,01 | 1,87 | 1,68 |
| 7 | $y_k$ | 2,75 | 2,36 | 2,18 | 1,97 | 1,52 | 1,34 |
| 8 | $y_k$ | 3,12 | 2,96 | 2,59 | 2,34 | 2,05 | 1,87 |
| 9 | $y_k$ | 2,79 | 2,55 | 2,31 | 2,07 | 1,85 | 1,56 |
| 10 | $y_k$ | 0,85 | 1,15 | 1,36 | 1,52 | 1,83 | 2,04 |
| 11 | $y_k$ | 0,36 | 0,58 | 0,84 | 1,03 | 1,25 | 1,38 |
| 12 | $y_k$ | 1,53 | 1,37 | 1,18 | 1,07 | 0,85 | 0,63 |

**Завдання 11**. Дано визначений інтеграл $I(f)=\int_a^b f(x)\,dx$.

Виконати наступне:

1. Обчислити заданий інтеграл аналітично. Прийняти результат аналітичного розрахунку $I_a$ за точне значення інтеграла.
2. Розбити відрізок інтегрування $[a;b]$ на $n=12$ рівних частин з кроком $h=(b-a)/n$ точками $x_k$, $k=\overline{0,n}$. Обчислити відповідні значення $y_k=f(x_k)$, $k=\overline{0,n}$ підінтегральної функції $y=f(x)$, скласти відповідну таблицю і побудувати графік цієї функції.
3. Обчислити наближено заданий інтеграл, застосовуючи при $n=12$ формули: а) лівих прямокутників, б) правих прямокутників, в) трапецій, г) Симпсона. Користуючись методом Рунге (подвоєнням кроку), для кожної вказаної квадратурної формули оцінити граничну абсолютну похибку $\Delta_n^*$ одержаного наближення $I_h$ і знайти уточнене наближене значення інтеграла $I_{ym}$. Для кожного методу знайти відносну похибку $\delta_{ym}=\left|\left(I_{ym}-I_a\right)/I_a\right|\cdot 100\%$ уточненого наближення інтеграла $I_{ym}$ порівняно з точним $I_a$.

Вказівка. Усі проміжні обчислення проводити з точністю не менше шести десяткових знаків після коми. Уточнені наближені значення інтеграла подати з округленням до чотирьох десяткових знаків після коми.

| № в-та | Інтеграл | № в-та | Інтеграл |
|---|---|---|---|
| 1 | $I=\int_1^4 \frac{arctg\, x}{x^2}dx$ | 7 | $I=\int_1^4 \frac{\sqrt{25+x^2}}{x^2}dx$ |
| 2 | $I=\int_1^4 \frac{\sqrt{x}+9}{x^2+4x}dx$ | 8 | $I=\int_1^4 \frac{\sqrt[3]{x}+16}{\sqrt[3]{x^2}+1}dx$ |
| 3 | $I=\int_1^4 arctg\,\sqrt{x}\,dx$ | 9 | $I=\int_1^4 x^2 arctg\,x\,dx$ |
| 4 | $I=\int_1^4 \frac{\ln(25+x^2)}{x^3}dx$ | 10 | $I=\int_1^4 \frac{\ln(9+x^2)}{x^2}dx$ |
| 5 | $I=\int_1^4 \frac{\sqrt{x}+8}{(x+1)\sqrt{x}}dx$ | 11 | $I=\int_1^4 \frac{\sqrt{25-x^2}}{x^2}dx$ |
| 6 | $I=\int_1^4 \frac{\sqrt{4x^2-1}}{x^2}dx$ | 12 | $I=\int_1^4 \frac{\ln(25+\sqrt{x})}{x^2}dx$ |

**Завдання 12**. Поставлено задачу Коші: знайти частинний розв’язок диференціального рівняння $y'=f(x,y)$, який задовольняє початковій умові $y(1)=y_0$. Виконати наступне:

1. Розв’язати дану задачу Коші аналітично. Прийняти результат аналітичного розрахунку $y=y(x)$ за точний розв’язок. Обчислити значення $y(x_k)$ отриманого аналітичного розв’язку на відрізку $[1;2]$ у $n=10$ рівновіддалених вузлах $x_k=x_{k-1}+h$, $x_0=1$, $k=1,2,...,n$ з кроком $h=0{,}1$. Скласти відповідну таблицю і побудувати графік цього розв’язку $y=y(x)$.
2. Чисельно розв’язати задачу Коші на відрізку $[1;2]$ з кроком $h=0{,}1$ вказаним далі способом: а) методом Ейлера; б) методом Рунге – Кутта; в) методом Адамса; г) методом Хеммінга. Для кожного способу отримані наближені значення $y_k$; $k=0,1,\dots,n$ занес-

ти у відповідну таблицю і побудувати графік наближеного розв'язку $y = y(x)$. Користуючись методом подвоєння кроку, знайти оцінку граничної абсолютної похибки $\Delta_n^*$ одержаного наближеного розв'язку $y = y(x, h)$ на густішій сітці. Знайти середньоквадратичне відхилення $\sigma_n$ наближених значень $y_k$ розв'язку від точних $y(x_k)$.

Вказівка. 1. Усі проміжні обчислення проводити з точністю не менше шести десяткових знаків після коми. Наближені значення розв'язку подати з округленням до шести десяткових знаків після коми. 2. Необхідні для запуску чотирикрокових методів Адамса та Хеммінга, окрім початкової умови $y_0 = y(1)$, ще три значення $y_1$, $y_2$ і $y_3$ попередньо знайти за допомогою однокрокового методу Рунге – Кутта (використати результати пункту 2.б).

| № в-та | Завдання | № в-та | Завдання |
|---|---|---|---|
| 1 | $y' = -\dfrac{2xy}{x^2+1}$ ; $y(1) = 1/2$ | 7 | $y' = \dfrac{y^4}{(x+2)^2}$ ; $y(1) = 1$ |
| 2 | $y' = x^2 y^4$; $y(1) = -1$ | 8 | $y' = \dfrac{x\sqrt{y}}{\sqrt{x^2+3}}$ ; $y(1) = 1$ |
| 3 | $y' + \dfrac{y}{x} = 5\sqrt{x}$; $y(1) = 2$ | 9 | $y' = \dfrac{y}{x} - \dfrac{2}{x^2}$; $y(1) = 2$ |
| 4 | $y' = \dfrac{y}{x} - \dfrac{y^2}{x^2}$; $y(1) = 1$ | 10 | $y' = -\dfrac{\sqrt{y^3}}{2\sqrt{x+3}}$ ; $y(1) = 1$ |
| 5 | $y' = \dfrac{y^3+1}{3y^2(x+1)}$; $y(1) = 1$ | 11 | $y' = \dfrac{y}{x} + \dfrac{y^2}{2x^2} - \dfrac{1}{2}$; $y(1) = 1{,}2$ |
| 6 | $y' = -\dfrac{xy^2}{\sqrt{x^2+3}}$ ; $y(1) = \dfrac{1}{2}$ | 12 | $y' = \dfrac{y}{2x} - \dfrac{1}{x}$; $y(1) = 1$ |

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ


1. Бермант А.Ф., Араманович И.Г. Краткий курс математического анализа. – СПб.: Лань, 2003. – 736 с.

2. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. – М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2001. – 632с.

3. Валєєв К.Г., Джалладова І.А. Вища математика: У 2 ч. Ч.2. – К.: КНЕУ, 2002. – 451 с.

4. Вища математика. Основні означення, приклади, задачі. У 2 кн. / За ред. Г.Л. Кулініча. – К.: Либідь, 2003. Кн.2. Спеціальні розділи. – 368 с.

5. Данилович В.П. Чисельні методи в задачах і вправах. – К.: ІСДО, 1995.–248 с.

6. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2-х ч. Ч.2. – М.: Высш. шк., 1997. – 416 с.

7. Киреев В.И., Пантелеев А.В. Численные методы в примерах и задачах. – М.: Высш. шк., 2006. – 480 с.

8. Колосов А.І., Якунін А.В., Ситникова Ю.В. Збірник тестових завдань з вищої математики. Частина третя: Функціональні ряди. – Х.: ХНАМГ, 2007. – 132 с.

9. Колосов А.І., Якунін А.В., Ситникова Ю.В. Збірник тестових завдань з вищої математики. Частина четверта: Кратні та криволінійні інтеграли. – Х.: ХНАМГ, 2008. – 152 с.

10. Ляшенко М.Я., Головань М.С. Чисельні методи. – К.: Либідь, 1996. – 288 с.

11. Орвис В.Д. Excel для ученых, инженеров и студентов. – К.: Юниор, 1999. – 528 с.

12. Пастушенко С.М., Підченко Ю.П. Вища математика: Довідник. – К.: Діал, 2003. – 461 с.

13. Печеніжський Ю.Є., Станішевський С.О. Посібник для розв’язування задач з вищої математики, – Х.: ХДАМГ, 2003. – 100 с.

14. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. В 2 т. – М.: Наука, 1985. Т.2. – 560 с.

15. Станішевський С.О. Вища математика. – Х.: ХНАМГ, 2005.–270 с.

16. Фадеев М.А. Элементарная обработка результатов эксперимента. – СПб.: Лань, 2008. – 128 с.

## З М І С Т

Передмова . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 3
Загальні рекомендації . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 4

Змістовий модуль 1.
ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ
БАГАТЬОХ ЗМІННИХ. ФУНКЦІОНАЛЬНІ РЯДИ . . . . . 8
1.1. Кратні інтеграли . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 8
1.1.1. Подвійний інтеграл . . . . . . . . . . . . . . . . . 8
1.1.2. Потрійний інтеграл . . . . . . . . . . . . . . . . . 13
1.1.3. Застосування кратних інтегралів . . . . . . . . . . . 17
1.2. Криволінійні інтеграли . . . . . . . . . . . . . . . . 22
1.2.1. Криволінійний інтеграл за довжиною . . . . . . . . . 22
1.2.2. Криволінійний інтеграл за координатами.
Формула Гріна . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 26
1.3. Степеневі ряди . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 31
1.3.1. Степеневі ряди та їх збіжність . . . . . . . . . . . 31
1.3.2. Ряди Тейлора і Маклорена. Застосування
степеневих рядів до наближених обчислень . . . . . . . . . 35
1.4. Ряди Фур’є . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 43
1.4.1. Розкладання періодичних функцій у ряди Фур'є.
Достатні умови збіжності ряду Фур'є . . . . . . . . . . . . 43
1.4.2. Розвинення в ряд Фур'є неперіодичних функцій . . . . 50

Змістовий модуль 2.
ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ
В ЕКОНОМІЧНИХ ДОСЛІДЖЕННЯХ . . . . . . . . . . . . . 53
2.1. Наближені числа. Похибки та їх обчислення . . . . . . . 53
2.1.1. Наближені числа. Абсолютна та відносна
похибки. Форми запису наближених даних . . . . . . . . . . 53
2.1.2. Похибки округлення . . . . . . . . . . . . . . . . . 55
2.1.3. Похибка функції.
Похибки арифметичних операцій . . . . . . . . . . . . . . 58

2.2. Чисельні методи знаходження
дійсних коренів скінченних рівнянь . . . . . . . . . . . . . . 61
2.2.1. Дослідження рівняння і відокремлення коренів . . . . 61
2.2.2. Методи уточнення наближених значень коренів.
Метод поділу навпіл. Метод простих ітерацій.
Метод Ньютона . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 63

2.3. Апроксимація функцій . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 70
2.3.1. Інтерполяційний многочлен Лагранжа . . . . . . . . . 70
2.3.2. Апроксимація за методом найменших квадратів . . . 73

2.4. Чисельне диференціювання та інтегрування функцій . . 75
2.4.1. Чисельне диференціювання . . . . . . . . . . . . . . . . 75
2.4.2. Чисельне інтегрування функцій. Метод
прямокутників. Метод трапецій. Метод Симпсона . . . . . 77

2.5. Чисельні методи розв’язування задачі Коші
для звичайних диференціальних рівнянь . . . . . . . . . . . 83
2.5.1. Загальні поняття про чисельні методи
розв’язування задачі Коші . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 83
2.5.2. Явні однокрокові методи Ейлера і Рунге – Кутта . . . 85
2.5.3. Явний чотирикроковий метод Адамса.
Метод прогнозування і корекції Хеммінга . . . . . . . . . . 86

Завдання для практичних занять
і модульної контрольної роботи . . . . . . . . . . . . . . . . 92

Список літератури . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .105

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

**ЯКУНІН** Анатолій Вікторович

# МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ З ДИСЦИПЛІНИ
# ВИЩА МАТЕМАТИКА ІІ

(для практичних занять та самостійної роботи
студентів заочної форми навчання за напрямом підготовки
6.030509 "Облік і аудит")


Відповідальний за випуск *Л. Б. Коваленко*
Редактор *З. І. Зайцева*
Комп'ютерне верстання *І. В. Волосожарова*

План 2011, поз. 156М

Підп. до друку 11.01.2012 Формат 60x84 1/16
Друк на ризографі Ум. друк. арк. 6,0
Тираж 100 пр. Зам. №

Видавець і виготовлювач:
Харківська національна академія міського господарства,
вул. Революції, 12, Харків, 61002
Електронна адреса: rectorat@ksame.kharkov.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
ДК № 4064 від 12.05.2011