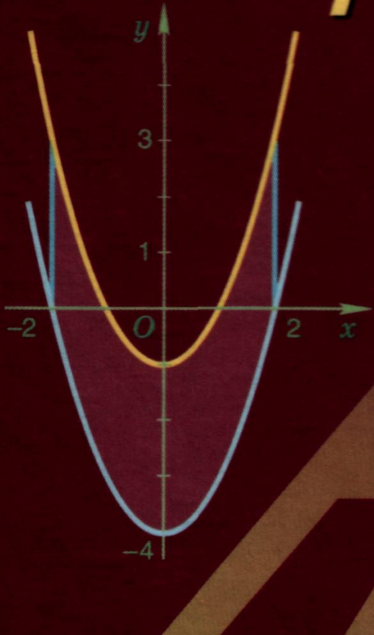
ВИДАВНИЦТВО ОСВІТА

Г. П. БЕВЗ

Алгебра і початки аналізу 10–11



Г.П.БЕВЗ

Алгебра

Підручник для 10-11 класу
загальноосвітніх
навчальних закладів

*Рекомендовано Міністерством освіти
і науки України*

КИЇВ
«ОСВІТА»
2005

ББК 22.14я721
Б36

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
(Лист Міністерства освіти і науки України
№ 1/11—1601 від 21.05.2002)

Рецензенти:

В. О. Грищенко — кандидат фізико-математичних наук, старший науковий співробітник Київського національного торговельно-економічного університету

Н. В. Журбенко — методист Інституту змісту і методів навчання

І. І. Дровозюк — вчитель-методист СШ № 47 м. Києва

Бевз Г. П.

Б36 Алгебра і початки аналізу: Підруч. для 10—11 кл. загальноосвіт. навч. закл.— К.: Освіта, 2005.— 255 с.:іл.

ISBN 966-04-0590-1.

ББК 22.14я721

ISBN 966-04-0590-1

ВІД АВТОРА

Алгебра і початки аналізу — навчальний предмет, який розкриває найважливіші теми з алгебри, математичного аналізу, теорії функцій і теорії ймовірностей. У ньому розглядаються алгебраїчні й деякі неалгебраїчні вирази, функції, рівняння, нерівності та найважливіші поняття математичного аналізу: похідна, первісна та інтеграл.

Підручник адресовано учням класів, у яких на вивчення алгебри і початків аналізу відводиться 2 години на тиждень.

У кожному параграфі підручника викладено теоретичні відомості і вміщено задачі на їх засвоєння. Задачі обов'язкового рівня, які мають уміти розв'язувати всі учні, позначено нуликом (°), а порівняно важкі — зірочкою (*). У кінці книжки є задачі для повторення. Їх можна розв'язувати паралельно з опрацюванням нових тем або наприкінці навчального року під час повторення. Для учнів, які цікавляться математикою, вміщено добірку задач підвищеної складності.

Є в підручнику також завдання для самостійних робіт. З них два перших варіанти легші від наступних, що дає змогу диференціювати навчання. Їх можна використати і для контрольних робіт.

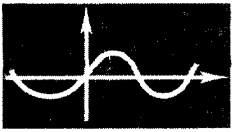
У кінці кожного розділу наведено історичні відомості й короткі довідки про найвідоміших творців математики.

Користуватися цим підручником можна так само, як і підручниками з математики для 7, 8 і 9 класів: структурно вони побудовані однаково. Однак корисно спочатку продивитися зміст і останню частину книжки, щоб з'ясувати, які є довідкові матеріали: таблиці, формули, предметний покажчик тощо.

Сподіваюся, що вивчення алгебри і початків аналізу за цим підручником буде для учнів цікавим і нескладним.

10 КЛАС

Розділ 1



ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ФУНКЦІЇ

§ 1. СИНУС, КОСИНУС, ТАНГЕНС І КОТАНГЕНС КУТА

У житті ми часто стикаємося з процесами, які відбуваються з певною періодичністю. Скажімо, на зміну зимі приходить весна, на зміну весні — літо, на зміну літу — осінь, на зміну осені — зима, знову весна і все повторюється з року в рік. Так само змінюються ранок, день, вечір і ніч. Періодичні процеси відбуваються у багатьох механізмах (рух поршня, маятника) і в живих організмах (пульсація серця, дихання).

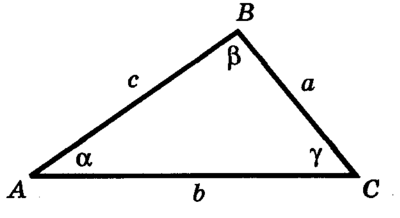
Мати справу з процесами, які *періодично повторюються*, доводиться багатьом спеціалістам. Моделювати такі процеси найзручніше за допомогою синуса, косинуса, тангенса і котангенса.

Дещо про ці функції ви вже знаєте з уроків геометрії. Згадаймо, наприклад, теореми косинусів і синусів: якщо сторони трикутника a, b, c, а протилежні їм кути α, β, γ (мал. 1), то:

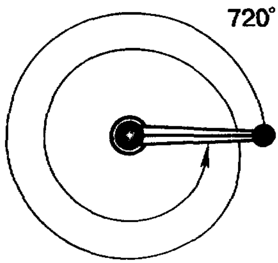
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \text{ (теорема косинусів);}$$

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} \text{ (теорема синусів).}$$

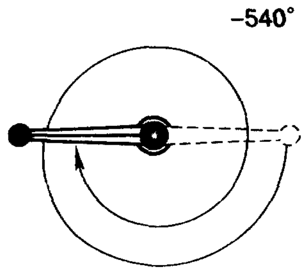
Зверніть увагу: в геометрії розглядають $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$ за умови, що α — кут трикутника або опуклого многокутника, тобто коли $0^\circ < \alpha < 180^\circ$. Досліджуючи ж періодичні



Мал. 1



Мал. 2



Мал. 3

процеси, під α розуміють кут повороту (обертання). А він може бути і як завгодно великим, і від'ємним. Повороти в напрямі руху годинникової стрілки домовилися вважати від'ємними, а в протилежному напрямі — додатними. Наприклад, повернути корбу на 720°, на -540° — це означає повернути її, як показано на малюнках 2 і 3.

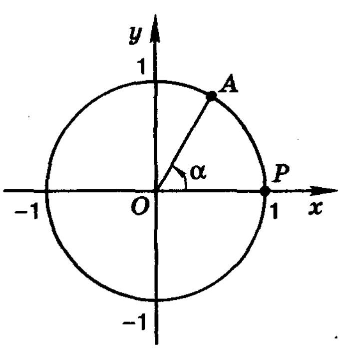
Одному, двом, трьом, ... , n обертам відповідають кути 360°, 720°, 1080°, ... , $360^\circ \cdot n$.

Введемо поняття синуса, косинуса, тангенса і котангенса будь-якого кута. Зробимо це за допомогою *одиничного кола* — такого кола, радіус якого дорівнює 1.

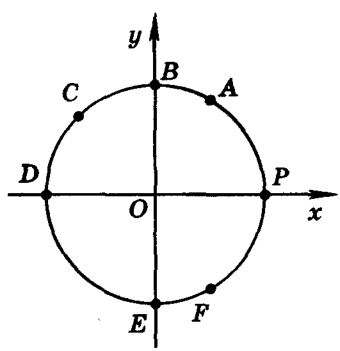
Нехай на координатній площині дано одиничне коло і його початковий радіус OP (мал. 4). Говорять, що точка A одиничного кола відповідає куту α, якщо $\angle POA = \alpha$. Зображені на малюнку 5 точки P, A, B, C, D, E, F відповідають кутам 0°, 60°, 90°, 135°, 180°, 270°, 300°.

Синусом кута **α називається ордината точки одиничного кола, яка відповідає куту α.**

Косинусом кута **α називається абсциса точки одиничного кола, яка відповідає куту α.**



Мал. 4



Мал. 5

Тангенсом кута **α називається відношення синуса кута α до його косинуса.**

Котангенсом кута **α називається відношення косинуса кута α до його синуса.**

Синус, косинус, тангенс і котангенс кута α позначають відповідно символами $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\mathrm{tg}\,\alpha$, $\mathrm{ctg}\,\alpha$.

П р и к л а д и.

1. Куту 135° на одиничному колі відповідає точка C з абсцисою $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ і ординатою $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (мал. 5). Тому

$$\cos 135^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sin 135^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2},$$
$$\mathrm{tg}\,135^\circ = -1, \quad \mathrm{ctg}\,135^\circ = -1.$$

2. Куту -90° на одиничному колі відповідає точка E (0; –1). Тому

$$\cos(-90^\circ) = 0, \quad \sin(-90^\circ) = -1,$$
$$\mathrm{ctg}\,(-90^\circ) = 0, \ \mathrm{tg}\,(-90^\circ) \text{ не існує.}$$

Тангенс кута α має значення (тобто існує) тоді і тільки тоді, коли $\cos\alpha \neq 0$, адже ділити на 0 не можна. Котангенс кута α має значення тільки за умови, що $\sin\alpha \neq 0$.

Значення $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\mathrm{tg}\,\alpha$, $\mathrm{ctg}\,\alpha$ деяких кутів α наведено в таблиці.

α	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\mathrm{tg}\,\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	—
$\mathrm{ctg}\,\alpha$	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

Наближені значення тригонометричних функцій можна знаходити за допомогою мікрокалькулятора.

1°. На скільки градусів повертається хвилинна стрілка протягом півдоби? А годинна стрілка?

2°. Накресліть одиничне коло і позначте на ньому точки, які відповідають кутам: 30°, 90°, 120°, 180°, 270°, 360°, -30°, -300°.

3. Куту α на одиничному колі відповідає точка $M\left(\frac{1}{3};\ \frac{\sqrt{8}}{3}\right)$.

Чому дорівнюють значення $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$?

4. Куту β на одиничному колі відповідає точка з абсцисою 0,6. Чому дорівнюють значення $\sin\beta$, $\cos\beta$, $\operatorname{tg}\beta$, $\operatorname{ctg}\beta$?

5°. Як змінюється $\sin\alpha$, якщо α збільшується від 0° до 360°?

6°. Що більше:

а) $\sin 20^\circ$ чи $\sin 50^\circ$; б) $\sin 10^\circ$ чи $\cos 10^\circ$;
в) $\sin 20^\circ$ чи $\sin 160^\circ$; г) $\sin 10^\circ$ чи $\cos 100^\circ$?

7°. Обчисліть:

а) $\sin 30^\circ + \cos 30^\circ$; б) $\cos 60^\circ - \sin 45^\circ$;
в) $\sin 45^\circ \cdot \cos 45^\circ$; г) $2\sin 60^\circ \cdot \cos 60^\circ$.

8. Знайдіть значення виразу:

а) $\cos\alpha + 3\sin\alpha$, якщо $\alpha = 45^\circ$;
б) $\sin\beta + \sin 2\beta + \sin 3\beta$, якщо $\beta = 60^\circ$;
в) $\sin\gamma + 2\cos\gamma + 3\operatorname{tg}\gamma$, якщо $\gamma = 30^\circ$;
г) $\sin\alpha + \cos(\alpha - \beta)$, якщо $\alpha = 90^\circ$ і $\beta = 30^\circ$.

9°. Яке найбільше і найменше значення може мати вираз:

а) $3\sin x$; б) $-\frac{1}{2}\cos x$; в) $1 + \sin x$; г) $\sin x - 1$?

10. Чи може синус або косинус кута дорівнювати:

а) $\sqrt{2}$; б) $2 - \sqrt{2}$; в) $\frac{\sqrt{5}}{2}$; г) $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$?

11°. Користуючись мікрокалькулятором, обчисліть:

а) $\sin 17^\circ$; б) $\cos 35{,}7^\circ$; в) $\sin 110^\circ$;
г) $\operatorname{tg} 39{,}8^\circ$; ґ) $3\cos 25^\circ$; д) $10\operatorname{tg} 38^\circ$;
е) $2 + \cos 49^\circ$; є) $3 + \sin 47^\circ$.

12. Користуючись мікрокалькулятором, обчисліть $\operatorname{ctg} 42^\circ 13'$.
Розв'язання.

$\boxed{1}\boxed{3}\boxed{\div}\boxed{6}\boxed{0}\boxed{+}\boxed{4}\boxed{2}\boxed{=}\boxed{F}\boxed{\operatorname{tg}}\boxed{F}\boxed{\frac{1}{x}}\boxed{=}$ 1,1022016.

Відповідь. $\operatorname{ctg} 42^\circ 13' \approx 1{,}1022$.

13. Обчисліть:

а) $\operatorname{ctg} 37{,}8^\circ$; б) $2{,}7\operatorname{ctg} 63{,}7^\circ$; в) $2 : \sin 36{,}3^\circ$.

14. Користуючись таблицею (див. с. 239), знайдіть:

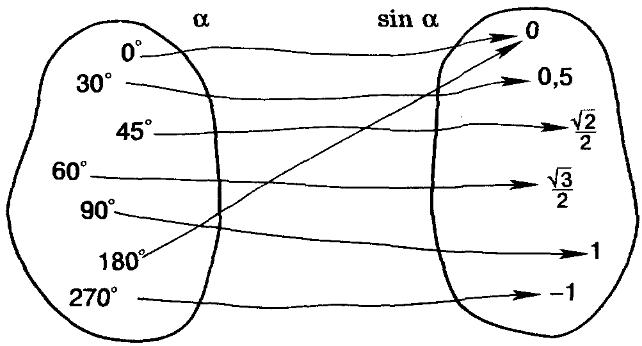
а) $1 + \sin 25^\circ$; б) $\sin 20^\circ - \cos 70^\circ$; в) $2\sin 15^\circ \cos 15^\circ$.

15. Знайдіть міру гострого кута x, якщо:

а) $\sin x = 0{,}5$; б) $2\cos x = \sqrt{3}$.

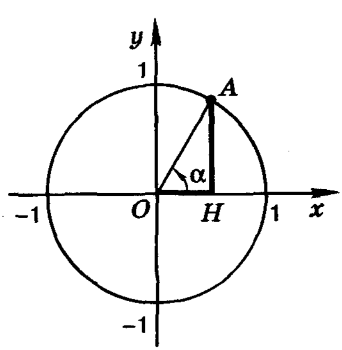
§ 2. ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ФУНКЦІЇ КУТІВ

Кожному значенню кута α відповідає єдине значення $\sin \alpha$ (мал. 6). Значення $\sin \alpha$ залежить від значення α. Тому $\sin \alpha$ — функція від α. Функціями від α є також $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{ctg} \alpha$. Усі ці чотири функції називають *тригонометричними функціями*. Детальніше ми розглянемо їх далі, а тут звернемо увагу тільки на найважливіші властивості цих функцій.



Мал. 6

Нагадаємо, що $\sin \alpha$ — це ордината точки A одиничного кола, яка відповідає куту α (мал. 7). Якщо AH — перпендикуляр, опущений з точки A на вісь x, то відрізок AH називають *лінією синуса*, а OH — *лінією косинуса*. Якщо точка A знаходиться у I або II координатній чверті, то $\sin \alpha = AH$; якщо точка A — в III або IV чверті, то $\sin \alpha = -AH$. Говорять, що у I і II чвертях синус кута додатний, а в III і IV чвертях від'ємний.

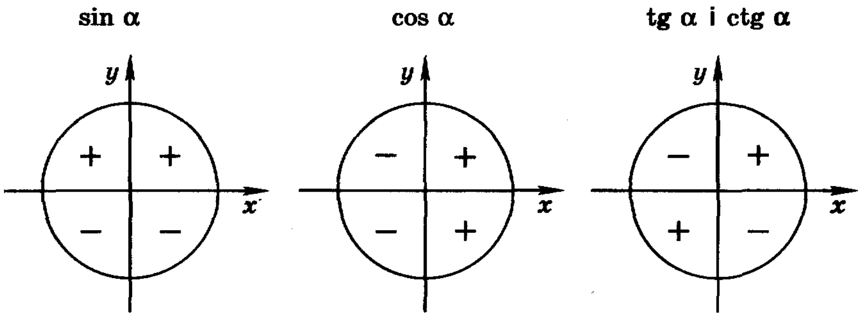


Мал. 7

Знаки тригонометричних функцій кутів різних координатних чвертей показано на малюнку 8.

Якщо кут α збільшується від 0° до 90°, то значення $\sin \alpha$ збільшується від 0 до 1. Якщо α збільшується від 90° до 180°, то значення $\sin \alpha$ зменшується від 1 до 0. Якщо α збільшується від 180° до 270°, то значення $\sin \alpha$ зменшується від 0 до -1. Якщо α збільшується від 270° до 360°, то

Знаки



Мал. 8

значення sin α збільшується від −1 до 0. Для будь-якого значення α $-1 \le \sin\alpha \le 1$ і $-1 \le \cos\alpha \le 1$.

Якщо кут α продовжувати збільшувати, то все повториться: завжди

$$\sin\alpha = \sin(\alpha + 360^\circ) = \sin(\alpha - 360^\circ) = \sin(\alpha + 720^\circ) = \ldots$$

Взагалі, яким би не був кут α і ціле число n,

$$\sin(\alpha + 360^\circ \cdot n) = \sin\alpha; \quad \cos(\alpha + 360^\circ \cdot n) = \cos\alpha;$$

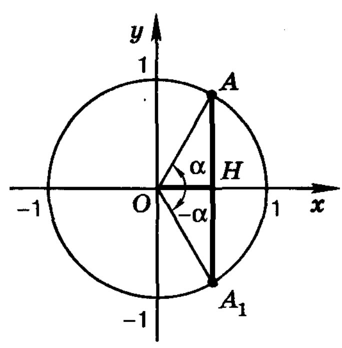
$$\operatorname{tg}(\alpha + 360^\circ \cdot n) = \operatorname{tg}\alpha; \quad \operatorname{ctg}(\alpha + 360^\circ \cdot n) = \operatorname{ctg}\alpha.$$

Ці співвідношення дають можливість звести знаходження значень синуса, косинуса, тангенса і котангенса будь-якого кута до знаходження їх значень для невід'ємного кута, меншого від 360°. Наприклад, треба обчислити cos 1860°. Поділивши 1860 на 360, дістанемо частку 5 і остачу 60. Отже,

$$\cos 1860^\circ = \cos(360^\circ \cdot 5 + 60^\circ) = \cos 60^\circ = 0{,}5.$$

Як видно з малюнка 9, лінії косинусів для кутів 60° і −60° збігаються, бо точки A і A_1 симетричні відносно осі x. Тому $\cos(-60^\circ) = \cos 60^\circ$. І взагалі, лінії косинусів для кутів α і − α завжди збігаються. Тому, який би не був кут α, завжди $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$.

Лінії синусів AH і A_1H мають однакові довжини, але розміщені з різних боків від осі x, тому їх знаки різні. Отже, $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ для кожного значення α.



Мал. 9

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\operatorname{tg}\alpha,$$

$$\operatorname{ctg}(-\alpha) = \frac{\cos(-\alpha)}{\sin(-\alpha)} = \frac{\cos\alpha}{-\sin\alpha} = -\operatorname{ctg}\alpha.$$

Таким чином, правильні тотожності:

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha, \quad \sin(-\alpha) = -\sin\alpha,$$

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha, \quad \operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha.$$

Користуючись ними, можна порівняно легко обчислювати значення тригонометричних функцій від'ємних кутів.

Приклади.

1. $\sin(-30^\circ) = -\sin 30^\circ = -0{,}5$;
2. $\cos(-405^\circ) = \cos 405^\circ = \cos(45^\circ + 360^\circ) = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$;
3. $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}(-\alpha) = \operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha = 0$.

Оскільки $\sin\alpha$ і $\cos\alpha$ — ордината і абсциса деякої точки одиничного кола, рівняння якого $x^2 + y^2 = 1$, то завжди

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

З означень тангенса і котангенса випливають також тотожності:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \quad \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1.$$

Три останні формули правильні тільки за умови, що $\operatorname{tg}\alpha$ чи $\operatorname{ctg}\alpha$ існують (мають значення). $\operatorname{tg}\alpha$ існує, якщо $\cos\alpha \neq 0$, тобто якщо $\alpha \neq 90^\circ(2n + 1)$; $\operatorname{ctg}\alpha$ існує, якщо $\sin\alpha \neq 0$, тобто коли $\alpha \neq 180^\circ n$, де n — довільне ціле число.

Усі ці чотири формули називають *співвідношеннями між тригонометричними функціями одного аргументу*, а $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ — *основною тригонометричною тотожністю*. Користуючись ними, можна значення будь-якої тригонометричної функції виразити через відповідне значення іншої тригонометричної функції.

Приклади.

1. Знайдемо $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ і $\operatorname{ctg}\alpha$, знаючи, що $\cos\alpha = 0{,}8$ і $0^\circ < \alpha < 90^\circ$.

Оскільки $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, то $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - 0{,}64 = 0{,}36$. Синус кута у I чверті додатний, тому $\sin\alpha = \sqrt{0{,}36} = 0{,}6$.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{0{,}6}{0{,}8} = \frac{3}{4}, \quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{4}{3}.$$

2. Знайдемо $\cos\beta$, знаючи, що $\operatorname{tg}\beta = 3$ і $180^\circ < \beta < 270^\circ$.

У III чверті $\sin\beta < 0$ і $\cos\beta < 0$. Нехай $\cos\beta = x$, тоді $\sin\beta = -\sqrt{1 - \cos^2\beta} = -\sqrt{1 - x^2}$.

$$\frac{-\sqrt{1-x^2}}{x} = 3, \quad \left(\frac{-\sqrt{1-x^2}}{x}\right)^2 = 9, \quad \frac{1-x^2}{x^2} = 9, \quad 1 - x^2 = 9x^2, \quad x^2 = \frac{1}{10}.$$

Оскільки $\cos\beta < 0$, то $x = -\frac{1}{\sqrt{10}}$, $\cos\beta = -\frac{1}{\sqrt{10}}$.

16°. Користуючись одиничним колом, дослідіть, як змінюється значення $\cos\alpha$, якщо кут α збільшується від 0° до 360°.

17*. Користуючись рівністю $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, дослідіть, як змінюється значення $\operatorname{tg}\alpha$ із збільшенням кута α від 0° до 180°.

18. Покажіть на одиничному колі, що:

а) $\cos(-17^\circ) = \cos 17^\circ$; б) $\cos(-80^\circ) = \cos 80^\circ$;
в) $\sin(-20^\circ) = -\sin 20^\circ$; г) $\sin 390^\circ = \sin 30^\circ$.

19°. Відомо, що кут α гострий. Обчисліть значення:

а) $\cos\alpha$, якщо $\sin\alpha = \frac{1}{3}$; б) $\sin\alpha$, якщо $\cos\alpha = \frac{2}{3}$;
в) $\operatorname{tg}\alpha$, якщо $\cos\alpha = \frac{2}{5}$; г) $\operatorname{ctg}\alpha$, якщо $\operatorname{tg}\alpha = 4$.

20. Знайдіть значення:

а) $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, якщо $\cos\alpha = -\frac{1}{4}$ і $90^\circ < \alpha < 180^\circ$;
б) $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, якщо $\sin\alpha = -0{,}8$ і $180^\circ < \alpha < 270^\circ$;
в) $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, якщо $\operatorname{tg}\alpha = -1$ і $270^\circ < \alpha < 360^\circ$.

21. Доведіть тотожність:

а) $\operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$; б) $\operatorname{ctg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2\alpha}$.

Р о з в' я з а н н я.

а) $\operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} + 1 = \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha}$, якщо $\cos\alpha \neq 0$;

б) $\operatorname{ctg}^2\alpha + 1 = \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} + 1 = \frac{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha}$, якщо $\sin\alpha \neq 0$.

Спростіть вираз (22—24).

22°. а) $1 - \sin^2\alpha$; б) $(1 - \cos\alpha)(1 + \cos\alpha)$;
в) $2 - \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$; г) $(\cos x - 1)(2 + 2\cos x)$;
ґ) $\sin\alpha\cos\alpha\operatorname{tg}\alpha$; д) $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha - \cos^2\alpha$.

23°. а) $\frac{1-\sin^2\alpha}{1-\cos^2\alpha}$; б) $\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha-1}$; в) $\frac{\sin^2 x}{1-\sin^2 x}\cdot\operatorname{ctg}x$;
г) $\frac{\cos^2\alpha}{1-\cos^2\alpha}\cdot\operatorname{tg}^2\alpha$; ґ) $\frac{\cos^2\alpha-\cos^4\alpha}{\sin^2\alpha-\sin^4\alpha}$; д) $\frac{\sin^4\beta-\sin^6\beta}{\cos^4\beta-\cos^6\beta}$.

24. а) $\frac{\cos x}{1-\sin x}+\frac{\cos x}{1+\sin x}$; б) $\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}+\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$;

в) $\frac{\cos\beta}{1-\sin\beta}-\operatorname{tg}\beta$; г) $\frac{\sin\gamma}{1+\cos\gamma}+\operatorname{ctg}\gamma$;

ґ) $\frac{\sin^2\alpha+\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^4\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}$; д) $\frac{1}{\sin^4 x+\sin^2 x\cos^2 x+\cos^2 x}$.

25°. Доведіть тотожність:

а) $\sin^4\alpha-\cos^4\alpha=\sin^2\alpha-\cos^2\alpha$;

б) $\sin^2\alpha-\sin^2\beta=\cos^2\beta-\cos^2\alpha$;

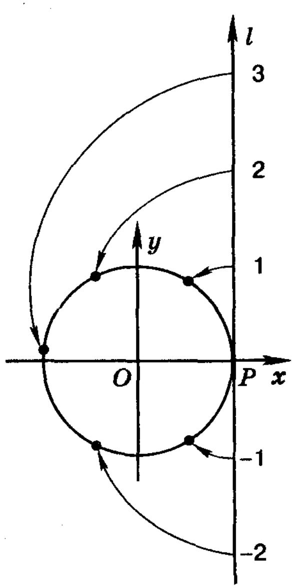
в) $\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$; г) $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{ctg}^2\alpha-1}$.

26. Знайдіть найбільший кут трикутника, сторони якого дорівнюють 3, 6 і $3\sqrt{7}$.

27. Знайдіть кути паралелограма, якщо його сторони дорівнюють 12 см і 25 см, а площа 292 см^2.

28. Накресліть на міліметровому папері чверть кола радіуса 10 см, поділіть його на 30 рівних частин і складіть таблицю наближених значень синуса і косинуса кутів 3°, 6°, ..., 90°.

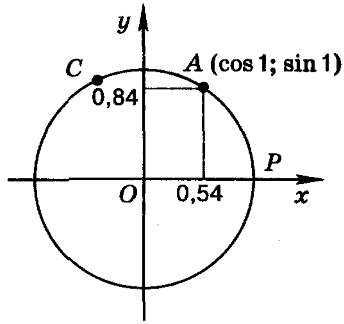
§ 3. ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ФУНКЦІЇ ЧИСЛОВИХ АРГУМЕНТІВ



Мал. 10

Досі ми розглядали тригонометричні функції кутів. При цьому вирази $x+\sin x$, $\cos x^2$ не мали змісту. Бо не можна до градусної міри кута додавати число. Не має змісту і квадрат міри кута. А розв'язування багатьох задач приводить до аналізу подібних виразів. Тому математики часто мають справу з виразами $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, де α — не міра кута, а абстрактне число. Що ж розуміють під синусом, косинусом, тангенсом і котангенсом дійсного числа?

Накреслимо одиничне коло з початковим радіусом OP і проведемо через P перпендикулярно до OP координатну пряму l, одиничний відрізок якої дорівнює OP (мал. 10). Уявімо, що координатна пряма l намотується на одиничне коло. При цьому кожна точка координатної прямої l відобраниться на деяку точку одиничного кола: на кожну точку кола — безліч точок координатної прямої. Таким способом кожному дійсному числу α можна поставити у відповідність певну точку одиничного кола. Ця точка одиничного кола відповідає числу α.



Мал. 11

Синусом числа **α називається ордината точки одиничного кола, яка відповідає числу α.**

Косинусом числа **α називається абсциса точки одиничного кола, яка відповідає числу α.**

Тангенсом числа **α називається відношення синуса числа α до його косинуса.**

Котангенсом числа **α називається відношення косинуса числа α до його синуса.**

П р и к л а д и.

1. Числу 1 відповідає така точка A одиничного кола, що довжина дуги PA дорівнює довжині радіуса OP (мал. 11). Абсциса і ордината точки A дорівнюють наближено 0,54 і 0,84. Отже, $\cos 1 \approx 0{,}54$, $\sin 1 \approx 0{,}84$.

2. Числу 2 відповідає така точка C одиничного кола, що довжина дуги PC дорівнює $2 \cdot OP$. Абсциса і ордината точки C дорівнюють відповідно $-0{,}42$ і $0{,}91$ (теж наближено). Тому $\cos 2 \approx -0{,}42$, $\sin 2 \approx 0{,}91$.

3. Числу $\frac{\pi}{2}$ на одиничному колі відповідає точка з координатами 0 і 1, а числу π — точка з координатами -1 і 0, бо довжина кола радіуса 1 дорівнює 2π. Тому $\cos\frac{\pi}{2} = 0$, $\sin\frac{\pi}{2} = 1$, $\cos\pi = -1$, $\sin\pi = 0$.

Кути вимірюють не тільки градусами, а й *радіанами*. Кутом в 1 радіан називають центральний кут, якому відповідає довжина дуги, що дорівнює довжині радіуса кола. Розглянуті вище кути POA і POC дорівнюють відповідно 1 і 2 радіанам. 1 радіан $\approx 57^\circ 18'$. Тому можна вважати, що синус, косинус, тангенс, котангенс числа α дорівнюють відповідно синусу, косинусу, тангенсу, котангенсу кута α радіанів. Отже, кожне твердження про тригонометричні функції числа α рівнозначне твердженню про тригонометричні функції кута α радіанів і навпаки. Зокрема формули

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1, \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},$$

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$$

правильні для кожного (допустимого) значення α.

Для $\operatorname{tg}\alpha$ допустимі всі дійсні значення α, крім $\alpha = \frac{\pi}{2}(2n+1)$, а для $\operatorname{ctg}\alpha$ — всі дійсні значення α, крім $\alpha = \pi n$, де $n \in Z$.

Градусна і радіанна міри кутів пов'язані такими залежностями:

$$180^\circ = \pi \text{ радіан}, \qquad n^\circ = \frac{\pi n}{180} \text{ радіан}.$$

Відповідність між деякими радіанними і градусними мірами кутів бажано пам'ятати:

$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$
30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°

Значення кожної тригонометричної функції числа з верхнього рядка таблиці дорівнює значенню тієї самої функції від відповідної градусної міри кута і навпаки. Наприклад,

$$\sin\frac{\pi}{4} = \sin 45^\circ, \qquad \cos\frac{2\pi}{3} = \cos 120^\circ,$$

$$\operatorname{tg}\pi = \operatorname{tg} 180^\circ, \qquad \sin 60^\circ = \sin\frac{\pi}{3}.$$

Зазначимо, що позначення градуса не можна пропускати у запису, а позначення радіана опускають.

За допомогою мікрокалькулятора значення тригонометричної функції числа знаходять так само, як і значення відповідної тригонометричної функції кута. Тільки перемикач «Г—Р» треба поставити проти «Р» (радіани).

29°. Позначте на одиничному колі точки, які відповідають числам: 1, 2, 3, –1, –2, π, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{3\pi}{4}$, 2π, $-\frac{\pi}{6}$, $-\frac{\pi}{3}$, $-\frac{\pi}{2}$.

30°. Що більше:

а) $\sin 1$ чи $\cos 1$; б) $\sin 1$ чи $\sin 3$?

31. Що більше:

а) $\sin 50^\circ$ чи $\sin 1$; б) $\cos 70^\circ$ чи $\cos 2$?

32°. Які з чисел від'ємні: $\sin\pi$, $\cos\pi$, $\operatorname{tg}\pi$, $\sin\frac{3\pi}{2}$, $\cos\frac{3\pi}{2}$, $\cos 4$?

33. Заповніть таблицю.

α	$0{,}5\pi$	π	$1{,}5\pi$	2π	$2{,}5\pi$	3π	$3{,}5\pi$
$\sin\alpha$							
$\cos\alpha$							
$\operatorname{tg}\alpha$							

34. Розмістіть у порядку зростання числа:
$\sin 0$, $\cos 0$, $\sin 1$, $\cos 1$, $\sin 2$, $\cos 2$, $\sin 3$, $\cos 3$.

35°. Який знак має:
$\sin 3$; $\sin 3{,}1$; $\sin 3{,}5$; $\sin 7{,}2$; $\sin(-2)$, $\cos 7$?

36°. Обчисліть за допомогою мікрокалькулятора (з точністю до тисячних):
$\sin 2$; $\operatorname{tg} 0{,}5$; $\cos 0{,}5$; $\sin 3{,}14$; $\sin\pi$; $\sin\frac{\pi}{5}$; $\operatorname{tg}\sqrt{2}$.

37. Чи правильно, що при будь-якому значенні x:
$\sin x = \sqrt{1-\cos^2 x}$, $\quad \cos x = \sqrt{1-\sin^2 x}$?

Розв'язання. Якщо $\pi < x < 2\pi$, то $\sin x < 0$. У цих випадках $\sin x = -\sqrt{1-\cos^2 x}$. Якщо $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$, то $\cos x < 0$ і отже, $\cos x = -\sqrt{1-\sin^2 x}$. Тому наведені в задачі рівності правильні не завжди.

38. Обчисліть:

а) $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, якщо $\sin\alpha = 0{,}8$ і $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$;

б) $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, якщо $\cos\alpha = -\frac{2}{3}$ і $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

в) $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, якщо $\operatorname{tg}\alpha = 1$ і $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

39. Знайдіть значення виразу (з точністю до тисячних):

а) $\sin\alpha + \cos\alpha$, якщо $\alpha = 2$; $\alpha = 0{,}3$; $\alpha = \sqrt{2}$;

б) $2\sin\alpha\cos\alpha$, якщо $\alpha = 1$; $\alpha = 2{,}7$; $\alpha = 13$;

в) $1 + \operatorname{tg}^2\alpha$, якщо $\alpha = 0{,}7$; $\alpha = 12{,}5$; $\alpha = \sqrt{3}$.

Обчисліть значення виразу (40—47).

40°. $2\cos\frac{\pi}{2} - 2\cos\frac{3\pi}{2} + 3\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} - \operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}$.

41. $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) - 3\cos\frac{\pi}{3} - \operatorname{tg}\frac{\pi}{6} + \operatorname{ctg}\frac{\pi}{3}$.

42°. $\cos\frac{\pi}{4} + 3\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{6} - \mathrm{tg}\,\pi + \mathrm{ctg}\left(-\frac{3\pi}{2}\right).$

43. $2\sin\frac{\pi}{6} + 3\,\mathrm{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) - 4\,\mathrm{tg}\,0 - 2\,\mathrm{ctg}\,\frac{\pi}{4}.$

44°. а) $\sin^2\frac{\pi}{2} - \cos^2\pi$; б) $\sin^2\frac{\pi}{4} + \sin^2\frac{\pi}{3}$.

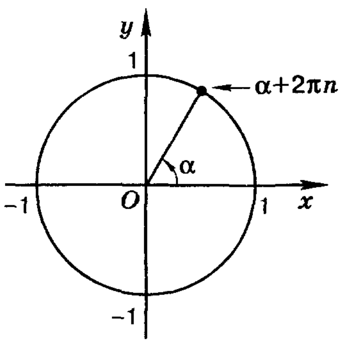
45°. а) $\cos^2\frac{\pi}{6} - \cos^2\frac{\pi}{4}$; б) $\mathrm{tg}^2\frac{\pi}{4} - \mathrm{ctg}^2\frac{\pi}{3}$.

46. а) $\sin^2\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{3}\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{3}$; б) $\sin\frac{\pi}{3}\cos^2\frac{\pi}{6}\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{6}$.

47. а) $\sin 2{,}5\pi + \cos 2{,}5\pi$; б) $\mathrm{tg}\,4\pi + \sin 3\pi$.

48. Чи правильно, що при будь-якому цілому n і дійсному α:

а) $\sin(2\pi n + \alpha) = \sin\alpha$; б) $\cos(2\pi n + \alpha) = \cos\alpha$;
в) $\mathrm{tg}\,(2\pi n + \alpha) = \mathrm{tg}\,\alpha$; г) $\mathrm{ctg}\,(2\pi n + \alpha) = \mathrm{ctg}\,\alpha$?



Мал. 12

Р о з в ' я з а н н я. Якщо n — число ціле, то кутам α і $2\pi n + \alpha$ на одиничному колі відповідає одна й та сама точка (мал. 12). Тому кожна з наведених рівностей правильна.

Доведіть тотожність (49—53).

49°. а) $(1 - \sin^2\alpha)\,\mathrm{tg}^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$;
б) $\mathrm{tg}^2\alpha - \sin^2\alpha = \mathrm{tg}^2\alpha\sin^2\alpha$.

50°. а) $(\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{ctg}\,\alpha)\cos^2\alpha = \mathrm{ctg}\,\alpha$;
б) $\sin^4\alpha - \cos^4\alpha = \sin^2\alpha - \cos^2\alpha$.

51. $1 + \sin\alpha + \cos\alpha + \mathrm{tg}\,\alpha = (1 + \cos\alpha)(1 + \mathrm{tg}\,\alpha)$.

52. $(\sin\alpha + \mathrm{tg}\,\alpha)(\cos\alpha + \mathrm{ctg}\,\alpha) = (1 + \sin\alpha)(1 + \cos\alpha)$.

53. $\sin^3\alpha\,(1 + \mathrm{ctg}\,\alpha) + \cos^3\alpha\,(1 + \mathrm{tg}\,\alpha) = \sin\alpha + \cos\alpha$.

Спростіть вираз (54—57).

54°. а) $1 - \cos^2\alpha + \sin^2\alpha$; б) $1 - \sin^2\alpha + \sin^2\alpha\,\mathrm{ctg}^2\alpha$.

55°. а) $(1 + \mathrm{tg}^2\alpha)\cos^2\alpha$; б) $(\mathrm{tg}\,\beta\cos\beta)^2 + (\mathrm{ctg}\,\beta\sin\beta)^2$.

56°. а) $(\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{ctg}\,\alpha)\cos^2\alpha$; б) $1 - \sin\beta\cos\beta\,\mathrm{tg}\,\beta$.

57. а) $\cos^4\alpha + \sin^2\alpha\cos^2\alpha$; б) $(\mathrm{tg}\,\varphi + \mathrm{ctg}\,\varphi)\sin\varphi\cos\varphi$.

58. Знайдіть найменший невід'ємний корінь рівняння:

а) $2\cos x = 1$; б) $3\,\mathrm{tg}\,x = \sqrt{3}$.

4. ФОРМУЛИ ЗВЕДЕННЯ

Кожну тригонометричну функцію кутів $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$, $\pi \pm \alpha$, $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$, $2\pi \pm \alpha$ можна виразити через тригонометричну функцію кута α. Покажемо це спочатку для синусів і косинусів.

Нехай α — довільний кут, виражений у радіанах. На одиничному колі йому відповідає певна точка A, а куту $\frac{\pi}{2} - \alpha$ — точка B (мал. 13). Опустивши перпендикуляри AK на вісь x і BL на вісь y, дістанемо два рівних трикутники AOK і BOL (бо $\angle AOK = \angle BOL$ і $OA = OB$). Тому $OL = OK$ і $BL = AK$, тобто

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = OL = OK = \cos\alpha,$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = BL = AK = \sin\alpha.$$

Кутам $\frac{\pi}{2} + \alpha$ і $\frac{\pi}{2} - \alpha$ на одиничному колі відповідають точки, симетричні відносно осі y (мал. 14). Їх ординати рівні, абсциси протилежні. Тому

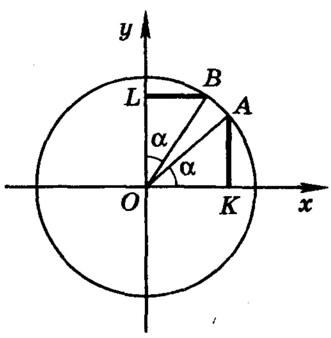
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha,$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = -\sin\alpha.$$

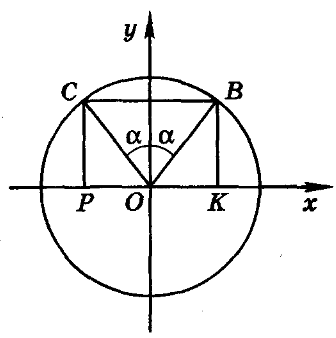
Кутам $\pi - \alpha$ і α також відповідають точки одиничного кола, симетричні відносно осі y (мал. 15). Тому

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha, \quad \cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha.$$

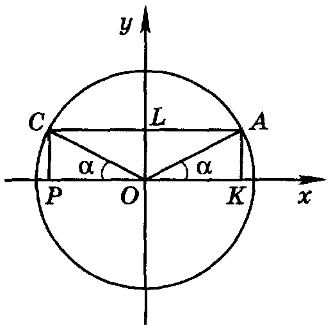
Кутам $\pi + \alpha$ і α (а також $\frac{3\pi}{2} - \alpha$ і $\frac{\pi}{2} - \alpha$, $\frac{3\pi}{2} + \alpha$ і $\frac{\pi}{2} + \alpha$) відповідають точки одиничного кола, симетричні відносно



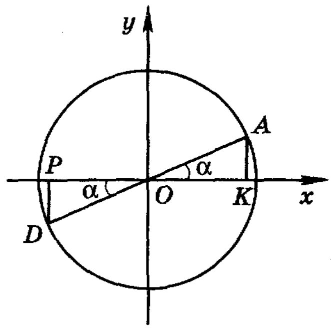
Мал. 13



Мал. 14



Мал. 15



Мал. 16

початку координат (мал. 16). Їх ординати протилежні і абсциси протилежні. Тому

$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha,\ \cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha,$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos\alpha\ ,$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = -\sin\alpha\ ,$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\cos\alpha\ ,$$

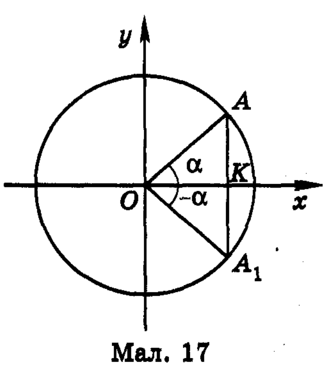
$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \sin\alpha\ .$$

Кутам $2\pi - \alpha$ і α відповідають точки одиничного кола, симетричні відносно осі x (мал. 17). Їх абсциси рівні, а ординати протилежні. Тому

$$\sin(2\pi - \alpha) = -\sin\alpha,\ \ \cos(2\pi - \alpha) = \cos\alpha.$$

Кутам $2\pi + \alpha$ і α відповідає одна й та сама точка одиничного кола, тому

$$\sin(2\pi + \alpha) = \sin\alpha,\ \ \cos(2\pi + \alpha) = \cos\alpha.$$



Мал. 17

З попередніх міркувань маємо 16 формул.

Ще 16 подібних формул можна довести для тангенса і котангенса:

$$\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) : \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) =$$

$$= \cos\alpha : \sin\alpha = \mathrm{ctg}\,\alpha,$$

$$\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) : \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) =$$

$$= \sin\alpha : \cos\alpha = \mathrm{tg}\,\alpha \text{ і т. д.}$$

Отже,

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\operatorname{ctg}\alpha\ , \quad \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\operatorname{tg}\alpha\ , \ldots$$

Усі ці 32 формули називають *формулами зведення*, бо вони дають можливість кожну тригонометричну функцію довільного кута (а отже — і числа) звести до тригонометричної функції гострого кута. Запам'ятовувати кожну з цих формул немає потреби, краще користуватись загальним правилом.

Щоб зрозуміліше сформулювати правило, домовимось синус вважати кофункцією косинуса і навпаки, а тангенс — кофункцією котангенса і навпаки. Говоритимемо також, що кут зводжуваної функції відкладається від горизонтального діаметра, якщо він має вигляд $\pi \pm \alpha$ або $2\pi \pm \alpha$, чи від вертикального діаметра, якщо він має вигляд $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$ або $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$.

Правило зведення можна сформулювати так: *Якщо кут зводжуваної тригонометричної функції відкладається від вертикального діаметра, то її замінюють кофункцією, якщо ж — від горизонтального діаметра, то її назву не змінюють. Знак ставимо такий, який має значення зводжуваної функції за умови, що кут α гострий.*

П р и к л а д. Нехай треба спростити вираз $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$. Перед результатом треба поставити знак мінус, бо коли кут α гострий, то кут $\frac{3\pi}{2}-\alpha$ належить третій чверті і його косинус від'ємний. Кут $\frac{3\pi}{2}-\alpha$ відкладається від вертикального діаметра, тому назву функції cos треба замінити на sin. Отже,

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\sin\alpha\ .$$

З а у в а ж е н н я. Користуючись правилом зведення, ми тільки для зручності приймаємо, що кут α гострий. Насправді ж у кожній з формул зведення під змінною α можна розуміти і міру довільного кута, зокрема й від'ємного, і будь-яке дійсне число.

До формул зведення можна віднести також тотожності:

$$\cos(-\alpha)=\cos\alpha, \quad \sin(-\alpha)=-\sin\alpha,$$
$$\operatorname{tg}(-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha, \quad \operatorname{ctg}(-\alpha)=-\operatorname{ctg}\alpha.$$

Для значень α, виражених у градусах, ці формули пояснено на с. 9.

Покажіть самостійно, що вони правильні при кожному (дві останні при кожному допустимому) значенні α.

59. Користуючись правилом зведення, запишіть усі 32 формули зведення.

Спростіть вираз (60—70).

60°. а) $\sin(90^\circ+\alpha)$; б) $\cos(90^\circ+\alpha)$; в) $\mathrm{tg}(90^\circ+\alpha)$; г) $\mathrm{ctg}(90^\circ+\alpha)$.

61°. а) $\sin(180^\circ-\alpha)$; б) $\cos(180^\circ-\alpha)$; в) $\mathrm{tg}(180^\circ-\alpha)$; г) $\mathrm{ctg}(180^\circ-\alpha)$.

62°. а) $\sin(360^\circ-\alpha)$; б) $\mathrm{tg}(360^\circ-\alpha)$; в) $\cos(270^\circ+\alpha)$; г) $\mathrm{tg}(270^\circ-\alpha)$.

63°. а) $\sin(270^\circ-\alpha)$; б) $\cos(270^\circ-\alpha)$; в) $\cos(360^\circ+\alpha)$; г) $\mathrm{ctg}(360^\circ-\alpha)$.

64°. а) $\sin(90^\circ-2\alpha)$; б) $\cos(90^\circ+3\alpha)$; в) $\mathrm{tg}(180^\circ-2x)$; г) $\mathrm{ctg}(180^\circ+3x)$.

65°. а) $\sin\left(90^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)$; б) $\cos\left(90^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)$; в) $\mathrm{tg}\left(90^\circ+\frac{\alpha}{3}\right)$; г) $\mathrm{ctg}\left(270^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)$.

66. а) $\sin(\alpha+90^\circ)$; б) $\cos(\alpha+90^\circ)$; в) $\mathrm{tg}(\alpha+180^\circ)$; г) $\mathrm{ctg}(\alpha+270^\circ)$.

67. а) $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)$; б) $\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$; в) $\mathrm{tg}(\varphi-\pi)$; г) $\mathrm{ctg}\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)$.

68. а) $\sin\left(2\alpha-\frac{\pi}{2}\right)$; б) $\cos(3\alpha-\pi)$; в) $\cos\left(\pi-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$; г) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha-\beta\right)$.

69. а) $\sin(-\alpha)+\sin\alpha$; б) $\cos\alpha+\cos(-\alpha)$; в) $\mathrm{tg}(-\alpha)-\mathrm{tg}\,\alpha$; г) $\mathrm{ctg}\,x+\mathrm{ctg}(-x)$.

70. а) $\sin(\alpha-\beta):\sin(\beta-\alpha)$; б) $\cos(x-\alpha):\cos(\alpha-x)$; в) $\mathrm{tg}(1-\alpha):\mathrm{tg}(\alpha-1)$; г) $\mathrm{ctg}(1-2x):\mathrm{ctg}(2x-1)$.

Доведіть тотожність (71—75).

71°. а) $\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$; б) $\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$.

72°. а) $\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$; б) $\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$.

73. а) $\sin\left(\frac{5\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$; б) $\sin(\alpha-\pi)=\sin(\alpha+\pi)$.

Розв'язання.

а) $\sin\left(\frac{5\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\left(2\pi+\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$;

б) $\sin(\alpha-\pi)=\sin(\alpha-\pi+2\pi)=\sin(\alpha+\pi)$.

74. а) $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=-\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)$; б) $\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)$.

75. $\sin\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\sin(\pi-\alpha)+\operatorname{ctg}\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)=\operatorname{tg}\alpha$.

Знайдіть значення виразу (76—81).

76°. а) $\sin 300^\circ$; б) $\cos 240^\circ$; в) $\operatorname{tg} 225^\circ$; г) $\operatorname{ctg} 330^\circ$.

77°. а) $\sin(-210^\circ)$; б) $\cos(-225^\circ)$;
в) $\operatorname{tg}(-240^\circ)$; г) $\operatorname{ctg}(-315^\circ)$.

78°. а) $\sin 405^\circ$; б) $\cos 720^\circ$; в) $\operatorname{tg} 750^\circ$; г) $\operatorname{ctg} 1110^\circ$.

79. а) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-3\right)$; б) $\cos\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$;
в) $\cos\left(\frac{\pi}{2}+2\right)$; г) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\right)$.

80. а) $\sin(3\pi+2)$; б) $\cos(5\pi-3)$;
в) $\operatorname{tg}(0{,}5\pi+1)$; г) $\operatorname{ctg}(\pi-4)$.

81. а) $\sin 3{,}5\pi$; б) $\cos 2{,}5\pi$; в) $\operatorname{tg} 0{,}3\pi$; г) $\operatorname{ctg} 1{,}4\pi$.

82. Доведіть, що коли α, β, γ — кути трикутника, то:
а) $\sin\frac{\alpha+\beta}{2}=\cos\frac{\gamma}{2}$; б) $\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}=\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$.

Спростіть вираз (83—87).

83°. а) $1-\sin^2(\pi+\alpha)$; б) $1-\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$.

84°. а) $1+\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$; б) $1+\operatorname{ctg}^2\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$.

85°. а) $\sin^2(\pi-x)+\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$; б) $\cos^2(\pi+x)+\cos^2\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$.

86. а) $\operatorname{ctg}^2(2\pi-x)+\sin^2\frac{5\pi}{2}$; б) $\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\cos^2 7\pi$.

87. а) $\frac{\operatorname{tg}(\pi-\alpha)}{\cos(\pi+\alpha)}\cdot\frac{\sin(1{,}5\pi+\alpha)}{\operatorname{tg}(1{,}5\pi+\alpha)}$; б) $\frac{\sin(\alpha-\pi)}{\operatorname{tg}(\alpha+\pi)}\cdot\frac{\operatorname{ctg}(\alpha-0{,}5\pi)}{\operatorname{tg}(\alpha+0{,}5\pi)}$.

88*. Знайдіть найменший невід'ємний розв'язок рівняння:

а) $\sin(270^\circ - x) - 2\cos x = 3$;

б) $\sin(180^\circ - x) = \sin(x - 90^\circ)$;

в) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos(\pi + x) = 0$;

г) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{tg}(x + \pi)$.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Варіант 1

1. Обчисліть:

а) $\sin 60^\circ + \cos 30^\circ$; б) $2\sin\frac{\pi}{6}\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$.

2. Спростіть вираз:

а) $1 - \sin\alpha\cos\alpha\operatorname{tg}\alpha$; б) $(\sin\alpha - \cos\alpha)^2 + 2\sin\alpha\cos\alpha$.

3. Знайдіть значення $\operatorname{tg}\beta$, якщо $\cos\beta = 0{,}96$ і $1{,}5\pi < \beta < 2\pi$.

4. Чи правильна рівність $\sin 7{,}5\pi = \cos 9\pi$?

5. Доведіть тотожність:

а) $(\operatorname{tg}^2\alpha - \sin^2\alpha)\cos^2\alpha = \sin^4\alpha$;

б) $\sin(1{,}5\pi + \beta) = \sin(\beta - 0{,}5\pi)$.

Варіант 2

1. Обчисліть:

а) $\cos 60^\circ + \sqrt{3}\sin 60^\circ$; б) $2\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{6}$.

2. Спростіть вираз:

а) $1 - \operatorname{tg}^2 x\cos^2 x$; б) $(1 - \operatorname{tg}\alpha\cos\alpha)^2 + 2\sin\alpha$.

3. Знайдіть значення $\operatorname{tg}\alpha$, якщо $\cos\alpha = -0{,}8$ і $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

4. Чи правильна рівність $\cos 8{,}5\pi = \sin 9\pi$?

5. Доведіть тотожність:

а) $(1 + \operatorname{tg}^2\alpha)\cos^2\alpha - \cos^2\alpha = \sin^2\alpha$;

б) $\cos(1{,}5\pi + \beta) = \sin(4\pi + \beta)$.

Варіант 3

1. Обчисліть:

а) $\sqrt{3}\operatorname{tg} 60^\circ - \sin 30^\circ$; б) $\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{2}$.

2. Спростіть вираз:

а) $\operatorname{tg}^2\alpha\operatorname{ctg}^2\alpha - \sin^2\alpha$; б) $(\operatorname{tg}\beta + \operatorname{ctg}\beta)^2\sin^2\beta$.

3. Знайдіть значення виразу $\text{tg}\,(4\pi + \alpha)$, якщо $\sin\alpha = 0{,}5$ і $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

4. Чи правильна рівність $\text{tg}\,7\pi = \cos 5{,}5\pi$?

5. Доведіть тотожність:

а) $(1 - \text{tg}^2\alpha)\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = \cos^2\alpha$;
б) $\sin(3{,}5\pi - \alpha) = \cos(\alpha - \pi)$.

Варіант 4

1. Обчисліть:

а) $\sin 30^\circ\,\text{tg}\,45^\circ - \sqrt{3}\cos 60^\circ$; б) $\sqrt{6}\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{3}$.

2. Спростіть вираз:

а) $\sin\beta\cos\beta\,\text{tg}\,\beta - 1$; б) $(\text{tg}\,\alpha + \text{ctg}\,\alpha)^2\sin^2\alpha - 1$.

3. Знайдіть значення виразу $\text{tg}\,(3\pi + x)$, якщо $\cos x = \frac{12}{13}$ і $1{,}5\pi < x < 2\pi$.

4. Чи правильна рівність $\sin 7{,}5\pi = \text{tg}\,1{,}25\pi$?

5. Доведіть тотожність:

а) $(\cos^2\alpha - \text{tg}^2\alpha)\cos^2\alpha = \cos^4\alpha - \sin^2\alpha$;
б) $\cos(5{,}5\pi - \beta) = \sin(6\pi - \alpha)$.

§ 5. ФОРМУЛИ ДОДАВАННЯ

Теорема. ***Які б не були кути або числа α і β, завжди***

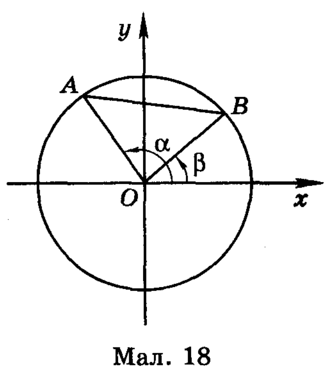
$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.$$

Доведення. Нехай α і β — довільні кути. На одиничному колі їм відповідають точки $A(\cos\alpha; \sin\alpha)$ і $B(\cos\beta; \sin\beta)$ (мал. 18). Виразимо квадрат відстані між точками A і B двома способами. Якщо $\angle AOB = \alpha - \beta$, де $0 < \alpha - \beta < \pi$, то за теоремою косинусів

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2\cdot OA\cdot OB\cos(\alpha - \beta) = 2 - 2\cos(\alpha - \beta).$$

А згідно з теоремою про квадрат відстані між двома точками

$$AB^2 = (\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\sin\alpha - \sin\beta)^2 = \cos^2\alpha - 2\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\beta + \sin^2\alpha - 2\sin\alpha\sin\beta + \sin^2\beta = 2 - 2(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta).$$



Мал. 18

Отже, $2-2\cos(\alpha-\beta)=2-2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)$, звідки

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta.$$

Ми розглянули випадок, коли $\angle AOB=\alpha-\beta$, де $0<\alpha-\beta<\pi$. В інших випадках кут AOB може дорівнювати $\alpha-\beta+2\pi n$ або $\beta-\alpha+2\pi n$, де $n\in N$ (мал. 19). Косинус кожного з таких кутів дорівнює $\cos(\alpha-\beta)$. Тому доводжувана теорема правильна для будь-яких кутів α і β, а отже, і для довільних дійсних чисел α і β.

На основі доведеної теореми і формул зведення можна вивести подібні формули для перетворення виразів $\cos(\alpha+\beta)$ і $\sin(\alpha\pm\beta)$.

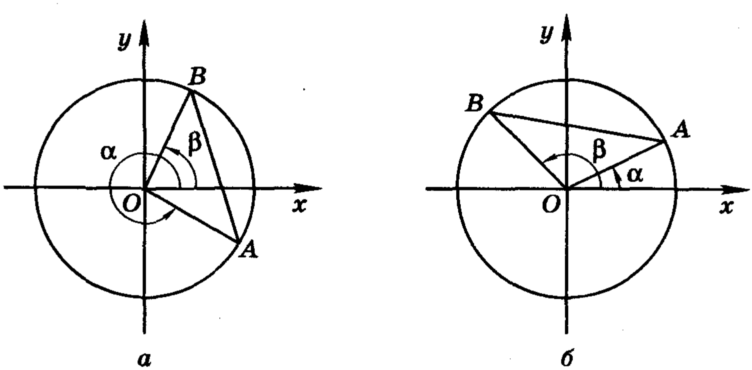
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos(\alpha-(-\beta))=\cos\alpha\cos(-\beta)+$$
$$+\sin\alpha\sin(-\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta.$$

$$\sin(\alpha+\beta)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right)=$$
$$=\cos\left(\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta+$$
$$+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\beta=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta.$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin(\alpha+(-\beta))=\sin\alpha\cos(-\beta)+$$
$$+\cos\alpha\sin(-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta.$$

Доведемо ще формули для перетворення виразів $\operatorname{tg}(\alpha\pm\beta)$.

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}=$$
$$=\frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}+\dfrac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}-\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$



Мал. 19

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\operatorname{tg}(\alpha+(-\beta))=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}(-\beta)}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}(-\beta)}=$$
$$=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

Отже, маємо 6 формул:

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta,$$
$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta,$$
$$\operatorname{tg}(\alpha\pm\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha\pm\operatorname{tg}\beta}{1\mp\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

Це — *формули додавання.* Чотири перші з них правильні для будь-яких кутів або чисел α і β, дві останні — для будь-яких допустимих значень α і β (коли всі тангенси в формулі мають значення).

89°. За допомогою формул додавання перетворіть вираз:

а) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$; б) $\cos(\pi+\alpha)$; в) $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$; г) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$.

90. Обчисліть значення $\sin 75°$.

Р о з в' я з а н н я. $\sin 75°=\sin(30°+45°)=$

$$=\sin 30°\cos 45°+\cos 30°\sin 45°=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}\left(1+\sqrt{3}\right).$$

В і д п о в і д ь. $\sin 75°=\frac{\sqrt{2}}{4}\left(1+\sqrt{3}\right)$.

91°. *Обчисліть значення $\cos 75°$, $\operatorname{tg} 75°$, $\operatorname{ctg} 75°$.*

Обчисліть значення виразу (92—96).

92°. а) $\sin 15°$; б) $\cos 15°$; в) $\operatorname{tg} 15°$; г) $\operatorname{ctg} 15°$.

93°. а) $\sin 105°$; б) $\cos 105°$; в) $\operatorname{tg} 105°$; г) $\operatorname{ctg} 105°$.

94. а) $\sin\frac{\pi}{12}$; б) $\cos\frac{7\pi}{12}$; в) $\operatorname{tg}\frac{7\pi}{12}$; г) $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{12}$.

95. а) $\sin\frac{5\pi}{12}$; б) $\cos\frac{5\pi}{12}$; в) $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{12}$; г) $\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{12}$.

96°. а) $\sin 15°\cos 15°-0{,}25$; б) $\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}+0{,}75$.

Спростіть вираз (97—103).

97°. а) $\sin\alpha\cos x+\cos\alpha\sin x$; б) $\cos\beta\sin\alpha-\cos\alpha\sin\beta$.

98°. а) $\sin\alpha\sin\beta-\cos\alpha\cos\beta$; б) $\sin\alpha\sin\frac{\pi}{5}+\cos\alpha\cos\frac{\pi}{5}$.

99. а) $\sin(\alpha+\beta)-\sin\alpha\cos\beta$; б) $\sin\alpha\sin\beta+\cos(\alpha+\beta)$.

100. а) $\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\cos\alpha$; б) $\sqrt{2}\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)-\sin\alpha$.

101. а) $\sqrt{3}\cos\alpha-2\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)$; б) $2\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)-\sqrt{3}\sin\alpha$.

102. а) $0{,}5\sin x-\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$; б) $2\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\sqrt{2}\sin x$.

103. а) $\frac{\sin(\alpha+\beta)-\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\cos(\alpha-\beta)}$; б) $\frac{\cos(\alpha-\beta)-\sin\alpha\sin\beta}{\cos(\alpha+\beta)+\sin\alpha\sin\beta}$.

Доведіть тотожність (104—108).

104°. $\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta$.

105°. $\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)=2\sin\alpha\sin\beta$.

106. $\sin\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)+\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)=\cos\alpha$.

107. $\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)-\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)=\sqrt{3}\sin\alpha$.

108. $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)=\sin^2\alpha-\sin^2\beta$.

Обчисліть значення виразу (109—114).

109. $\cos 35^\circ\cos 25^\circ-\sin 35^\circ\sin 25^\circ$.

Р о з в' я з а н н я.

$\cos 35^\circ\cos 25^\circ-\sin 35^\circ\sin 25^\circ=\cos(35^\circ+25^\circ)=\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$.

110°. $\cos 57^\circ\cos 27^\circ+\sin 57^\circ\sin 27^\circ$.

111°. $\cos 51^\circ\sin 21^\circ-\cos 21^\circ\sin 51^\circ$.

112. $\cos 58^\circ\cos 32^\circ-\sin 58^\circ\sin 32^\circ$.

113. $\sin 64^\circ\sin 19^\circ+\cos 64^\circ\cos 19^\circ$.

114. $(\mathrm{tg}\,36^\circ+\mathrm{tg}\,24^\circ):(1-\mathrm{tg}\,36^\circ\,\mathrm{tg}\,24^\circ)$.

115. Знайдіть $\mathrm{tg}(\alpha+\beta)$ і $\mathrm{tg}(\alpha-\beta)$, якщо $\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{4}{3}$, $\mathrm{tg}\,\beta=\frac{1}{4}$.

116. Знаючи, що $\sin\alpha=\frac{8}{17}$ і $\cos\beta=\frac{4}{5}$, причому $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$, обчисліть значення:

а) $\sin(\alpha+\beta)$; б) $\cos(\alpha+\beta)$; в) $\cos(\alpha-\beta)$.

117. Доведіть тотожність:

а) $\mathrm{ctg}(\alpha+\beta)=\frac{\mathrm{ctg}\,\alpha\,\mathrm{ctg}\,\beta-1}{\mathrm{ctg}\,\alpha+\mathrm{ctg}\,\beta}$; б) $\mathrm{ctg}(\alpha-\beta)=\frac{\mathrm{ctg}\,\alpha\,\mathrm{ctg}\,\beta+1}{\mathrm{ctg}\,\beta-\mathrm{ctg}\,\alpha}$.

118. Доведіть, що для будь-яких кутів α, β, γ трикутника $\sin\gamma = \sin\alpha\,\cos\beta + \cos\alpha\,\sin\beta$.

§ 6. ФОРМУЛИ ПОДВІЙНИХ КУТІВ

Якщо в формулах додавання:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\,\cos\beta + \cos\alpha\,\sin\beta,$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\,\cos\beta - \sin\alpha\,\sin\beta,$$
$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\,\operatorname{tg}\beta}$$

замість змінної β підставити α, дістанемо тотожності:

$$\mathbf{\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\,\cos\alpha,}$$
$$\mathbf{\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha,}$$
$$\mathbf{\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}.}$$

Це — *формули подвійних кутів*. Вони правильні при будь-яких значеннях α (остання — за умови, що $\operatorname{tg}\alpha$ і $\operatorname{tg} 2\alpha$ існують; див. задачу 128). Формули подвійних кутів часто використовують для перетворень тригонометричних виразів. Наприклад,

$$\cos 2\alpha + 2\sin^2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha + 2\sin^2\alpha =$$
$$= \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1,$$
$$(1-\operatorname{tg}^2\alpha)\cdot\operatorname{tg} 2\alpha = (1-\operatorname{tg}^2\alpha)\cdot\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} = 2\operatorname{tg}\alpha.$$

Зверніть увагу на вирази $1+\cos 2\alpha$ і $1-\cos 2\alpha$.

$$1+\cos 2\alpha = 1+\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha,$$
$$1-\cos 2\alpha = 1-(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = 2\sin^2\alpha.$$

Отже,

$$\mathbf{\sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha),\ \cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha).}$$

Ці тотожності називають *формулами пониження степеня*. Замінивши в них α на $\frac{\alpha}{2}$, дістанемо *формули половинних кутів*:

$$\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}},\quad \left|\cos\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}},\quad \left|\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}.$$

Для прикладу обчислимо $\operatorname{tg} 15^\circ$. Оскільки $\operatorname{tg} 15^\circ > 0$, то

$$\operatorname{tg} 15^\circ = \sqrt{\frac{1-\cos 30^\circ}{1+\cos 30^\circ}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}} = \sqrt{(2-\sqrt{3})^2} = 2-\sqrt{3}.$$

Отже, $\operatorname{tg} 15^\circ = 2-\sqrt{3}$.

З а у в а ж е н н я. Іноді кут α доцільно розглядати як подвійний відносно кута $\frac{\alpha}{2}$ або половинний відносно 2α. Наприклад,

$$\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}, \quad \cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2},$$
$$\sin 4\alpha = 2\sin 2\alpha\cos 2\alpha .$$

119°. Обчисліть значення виразу:

а) $2\sin 15^\circ \cos 15^\circ$; б) $\cos^2\frac{\pi}{8} - \sin^2\frac{\pi}{8}$; в) $\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}$;

г) $1 - 2\sin^2 15^\circ$; ґ) $2\cos^2\frac{\pi}{8} - 1$; д) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{8} : \left(1 - \operatorname{tg}^2\frac{\pi}{8}\right)$.

Спростіть вираз (120—128).

120°. а) $2\sin^2\alpha + \cos 2\alpha$; б) $2\cos^2\alpha - \cos 2\alpha$.

121°. а) $\sin 2x - (\sin x + \cos x)^2$; б) $\cos^2\beta\,(1 - \operatorname{tg}^2\beta)$.

122. а) $2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} - \sin\alpha$; б) $\cos\frac{2}{3}\alpha - \cos^2\frac{\alpha}{3} + \sin^2\frac{\alpha}{3}$.

Р о з в' я з а н н я: а) $2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} - \sin\alpha = \sin\alpha - \sin\alpha = 0$; б) $\cos\frac{2\alpha}{3} - \left(\cos^2\frac{\alpha}{3} - \sin^2\frac{\alpha}{3}\right) = \cos 2\frac{\alpha}{3} - \cos 2\frac{\alpha}{3} = 0$.

123. а) $2\cos\frac{\pi-\alpha}{2}\sin\frac{\pi-\alpha}{2}$; б) $\cos^2\left(\pi - \frac{\alpha}{2}\right) - \sin^2\left(\pi - \frac{\alpha}{2}\right)$.

124°. а) $\frac{\sin 2x}{\operatorname{ctg} x \sin^2 x}$; б) $\frac{2\cos^2 x \operatorname{tg} x}{\cos^2 x - \sin^2 x}$.

125°. а) $\frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}$; б) $\frac{1 - \cos 4x}{2\sin 2x}$.

126. а) $\frac{1 + \cos 2\beta}{1 - \cos 2\beta}$; б) $\frac{1 - \sin 2\alpha}{1 + \sin 2\alpha}$.

127. а) $\frac{\cos^4 x - \sin^4 x}{1 + \cos 4x}$; б) $\frac{1 + \cos 6x}{\sin 3x}$;

в) $(1 - \operatorname{tg}^2\alpha)\operatorname{tg} 2\alpha$; г) $(1 - \operatorname{tg}^2\alpha) : 2\operatorname{tg}\alpha$.

128*. Доведіть, що формула $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}$ правильна за умови, коли $\alpha \neq \frac{\pi}{4}n$, де n — ціле число, яке не ділиться на 4.

Доведіть тотожність (129—135).

129°. а) $\cos 2x + \sin^2 x = \cos^2 x$; б) $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos 2x$.

130°. а) $2\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos\alpha=1$; б) $2\cos^2\alpha-\cos 2\alpha=1$.

131°. а) $(1+\mathrm{ctg}^2\alpha)\sin 2\alpha=2\,\mathrm{ctg}\,\alpha$;

б) $(\mathrm{tg}\,\alpha+\mathrm{ctg}\,\alpha)\cos 2\alpha=\mathrm{ctg}\,\alpha-\mathrm{tg}\,\alpha$.

132. а) $\sin 4\alpha=4\sin\alpha\cos^3\alpha-4\sin^3\alpha\cos\alpha$;

б) $\sin 2\alpha-\mathrm{tg}\,\alpha=\cos 2\alpha\,\mathrm{tg}\,\alpha$.

133. а) $1+\sin 2\alpha=2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$; б) $1-\sin 2\alpha=2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$.

134°. а) $\sin\alpha-\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}=\cos\alpha\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$;

б) $2\sin^2\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{ctg}\,\alpha+\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}=\sin\alpha$.

135. а) $\frac{\cos 2\alpha}{1-\sin 2\alpha}=\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$; б) $\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}=\mathrm{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$.

136. Доведіть тотожність $\mathrm{ctg}\,\alpha-\mathrm{tg}\,\alpha=2\,\mathrm{ctg}\,2\alpha$.

137. Доведіть, що:

а) $\sin 35°\sin 55°=\frac{1}{2}\cos 20°$; б) $\cos 65°\cos 25°=\frac{1}{2}\cos 40°$;

в) $\sin^4\frac{3\pi}{8}-\cos^4\frac{3\pi}{8}=\frac{\sqrt{2}}{2}$; г) $\cos^4\frac{\pi}{12}-\sin^4\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

138. Знайдіть найменший невід'ємний розв'язок рівняння:

а) $2\sin x\cos x=1$; б) $4\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=1$;

в) $\cos^2 x-\sin^2 x=0$; г) $\sin^2 2x-\cos^2 2x=0$;

ґ) $\cos^4 x=\sin^4 x$; д) $\cos^4 x-1=\sin^4 x$.

Р о з в' я з а н н я. д) Дане рівняння рівносильне рівнянню $\cos^4 x-\sin^4 x=1$, або $(\cos^2 x+\sin^2 x)(\cos^2 x-\sin^2 x)=1$, звідки $\cos 2x=1$, $2x=0$, $x=0$.

139. Обчисліть значення $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\mathrm{tg}\,2\alpha$, якщо $\mathrm{tg}\,\alpha=0{,}4$.

140. Доведіть, що:

а) $\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$;

б) $\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$.

§ 7. ПЕРЕТВОРЕННЯ СУМИ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ

Виведемо формулу, за якою суму $\sin\alpha+\sin\beta$ можна перетворити в добуток. Для цього припустимо, що $\alpha=x+y$ і $\beta=x-y$.

$$\sin\alpha+\sin\beta=\sin(x+y)+\sin(x-y)=$$
$$=\sin x\cos y+\cos x\sin y+\sin x\cos y-\cos x\sin y=$$
$$=2\sin x\cos y.$$

З рівностей $\alpha = x + y$ і $\beta = x - y$ знаходимо, що

$$x = \frac{\alpha+\beta}{2}, \quad y = \frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Тому

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Цю тотожність називають *формулою суми синусів двох кутів*.

Виведемо ще кілька подібних формул.

$$\sin\alpha - \sin\beta = \sin\alpha + \sin(-\beta) = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2},$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) =$$

$$= 2\sin\frac{\pi-\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\beta-\alpha}{2} = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) =$$

$$= 2\sin\frac{\beta-\alpha}{2}\cos\frac{\pi-\alpha-\beta}{2} = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2},$$

$$\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \pm \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{\sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta} = \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}.$$

Отже, маємо 6 формул:

$$\mathbf{\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha\pm\beta}{2}\cos\frac{\alpha\mp\beta}{2}},$$

$$\mathbf{\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}},$$

$$\mathbf{\cos\alpha - \cos\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2}},$$

$$\mathbf{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}}.$$

Усі ці тотожності називають *формулами перетворення суми тригонометричних функцій у добуток* (різницю вважають окремим видом суми). Дві останні формули правильні тільки за умови, що $\operatorname{tg}\alpha$ і $\operatorname{tg}\beta$ мають значення. Зверніть увагу і на те, що в формулі різниці косинусів останній множник $\sin\frac{\beta-\alpha}{2}$. Оскільки завжди $\sin\frac{\beta-\alpha}{2} = -\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$, то цю формулу можна записати й так:

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Словами прочитати, наприклад, першу з розглядуваних формул можна так: сума синусів двох кутів дорівнює подвоєному добутку синуса півсуми цих кутів на косинус їх півріжниці. Аналогічно можна читати й інші формули. Слово «кутів» у всіх випадках можна замінити словом «чисел».

Покажемо для прикладу, як можна спрощувати тригонометричні вирази $\sin 20^\circ + \sin 40^\circ$ і $\sin x + \cos x$, користуючись формулою суми синусів.

а) $\sin 20^\circ + \sin 40^\circ = 2\sin\frac{20^\circ + 40^\circ}{2}\cos\frac{20^\circ - 40^\circ}{2} =$

$= 2\sin 30^\circ \cos(-10^\circ) = \cos 10^\circ$;

б) $\sin x + \cos x = \sin x + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 2\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) =$

$= \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

141°. Спростіть вираз:

а) $\sin 50^\circ + \sin 10^\circ$; б) $\cos 50^\circ + \cos 10^\circ$;
в) $\sin 50^\circ - \sin 10^\circ$; г) $\cos 50^\circ - \cos 10^\circ$.

Запишіть у вигляді добутку вираз (142—145).

142°. а) $\sin 5\alpha + \sin\alpha$; б) $\sin 5\beta - \sin\beta$;
в) $\cos x - \cos 3x$; г) $\cos\gamma + \cos 7\gamma$.

143°. а) $\sin\frac{\pi}{5} + \sin\frac{2\pi}{5}$; б) $\cos\frac{3\pi}{4} + \cos\frac{11\pi}{12}$;
в) $\cos\alpha + \cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)$; г) $\sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) - \sin\alpha$.

144°. а) $\operatorname{tg} 2\beta + \operatorname{tg}\beta$; б) $\operatorname{tg} 3x - \operatorname{tg} x$;
в) $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) + \operatorname{tg}(\alpha - \beta)$; г) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) + \operatorname{tg}\alpha$.

145. а) $\cos\alpha + \sin\alpha$; б) $\sin 3\alpha - \cos 2\alpha$;
в) $\sin\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{3}$; г) $\cos^2\alpha - \cos^2\beta$.

146°. Спростіть вираз:

а) $\cos(60^\circ + \alpha) + \cos(60^\circ - \alpha)$;
б) $\sin(60^\circ + x) + \sin(60^\circ - x)$;
в) $\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$;
г) $\cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right) - \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$.

Доведіть тотожність (147, 148).

147. а) $\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$; б) $\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta = \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}$.

148. а) $(\cos 2\alpha + \cos 6\alpha)\operatorname{tg} 4\alpha = \sin 2\alpha + \sin 6\alpha$;
б) $(\cos\alpha + \cos 5\alpha)\operatorname{tg} 3\alpha = \sin\alpha + \sin 5\alpha$.

149. Запишіть у вигляді добутку вираз $1 - 2\cos\alpha$.

Р о з в' я з а н н я. $1 - 2\cos\alpha = 2\left(\frac{1}{2} - \cos\alpha\right) =$

$= 2\left(\cos\frac{\pi}{3} - \cos\alpha\right) = 2\cdot 2\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{6}\right) =$

$= 4\sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{6}\right)$.

В і д п о в і д ь. $1 - 2\cos\alpha = 4\sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{6}\right)\cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{6}\right)$.

Запишіть у вигляді добутку вираз (150, 151).

150°. а) $0{,}5 + \sin\alpha$; б) $0{,}5 - \sin x$; в) $\sqrt{2} + 2\cos\varphi$;
г) $\sqrt{2} - 2\cos x$; ґ) $2\sin\alpha - \sqrt{3}$; д) $\sqrt{3} - 2\cos\alpha$.

151. а) $\cos x + \cos 2x + \cos 5x$;
б) $\sin\alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha$;
в) $\sin\alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha + \sin 4\alpha$;
г) $\cos 2x - \cos 4x - \cos 6x + \cos 8x$.

152. Доведіть тотожності Л. Ейлера:
а) $\sin(30^\circ + z) = \cos z - \sin(30^\circ - z)$;
б) $\cos(30^\circ + z) = \cos(30^\circ - z) - \sin z$.

153. Доведіть тотожності Ф. Вієта:
а) $\cos mx = 2\cos x\cos(m-1)x - \cos(m-2)x$;
б) $\sin mx = 2\cos x\sin(m-1)x - \sin(m-2)x$.

154. Доведіть тотожність:

а) $\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta))$;

б) $\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta))$;

в) $\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta))$.

Р о з в' я з а н н я. а) Перетворимо праву частину тотожності за формулою суми косинусів:

$$\frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)) = \frac{1}{2}\cdot 2\cos\frac{\alpha+\beta+\alpha-\beta}{2}\times$$
$$\times\cos\frac{\alpha+\beta-\alpha+\beta}{2} = \cos\alpha\cos\beta.$$

Отже, рівність правильна при будь-яких значеннях α і β.

155. Обчисліть:

а) $\sin 75^\circ\sin 105^\circ$; б) $\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{12}$; в) $\sin\frac{\pi}{24}\cos\frac{5\pi}{24}$.

156. Знайдіть найменший невід'ємний розв'язок рівняння:

а) $\cos\left(\frac{\pi}{3}+x\right)+\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=0$;

б) $\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)-\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=0$;

в) $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=0$.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Варіант 1

1. Обчисліть: а) $\sin 210°$; б) $\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}$.

2. Спростіть вираз:

а) $\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)+\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$;

б) $(\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x)\sin 2x-2\cos^2 x$.

3. Доведіть тотожність:

а) $\left(1+\operatorname{tg}^2\alpha+\frac{1}{\sin^2\alpha}\right)\cdot\sin^2\alpha\cos^2\alpha=1$;

б) $\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}=\sqrt{2}$.

Варіант 2

1. Обчисліть: а) $\cos 210°$; б) $\cos^2\frac{\pi}{12}-\sin^2\frac{\pi}{12}$.

2. Спростіть вираз:

а) $\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)-\cos\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)$; б) $2\cos 2\alpha:(\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha)$.

3. Доведіть тотожність:

а) $(1-\cos^2 x)(1+\operatorname{ctg}^2 x)=1$; б) $\frac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\operatorname{tg}\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)}=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$.

Варіант 3

1. Обчисліть: а) $\sin 240°$; б) $\sin^2\frac{\pi}{8}-\cos^2\frac{\pi}{8}$.

2. Спростіть вираз:

а) $\cos\left(\frac{\pi}{3}+\beta\right)+\sin\left(\frac{\pi}{3}-\beta\right)$; б) $2\cos\beta:\left(\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}-\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\right)$.

3. Доведіть тотожність:

а) $(1+\cos 2x)(1+\mathrm{tg}^2 x)=2$; б) $\dfrac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}=\mathrm{tg}^2\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\alpha}{2}\right)$.

В а р і а н т 4

1. Обчисліть: а) $\cos 240^\circ$; б) $2\cos^2\dfrac{\pi}{12}-1$.

2. Спростіть вираз:

а) $\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}+\alpha\right)-\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}-\alpha\right)$; б) $\dfrac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}-\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$.

3. Доведіть тотожність:

а) $(1-\cos 2x)(1+\mathrm{ctg}^2 x)=2$; б) $\dfrac{1-\sin 2\alpha}{\mathrm{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)}=\cos 2\alpha$.

§ 8. ГРАФІКИ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ

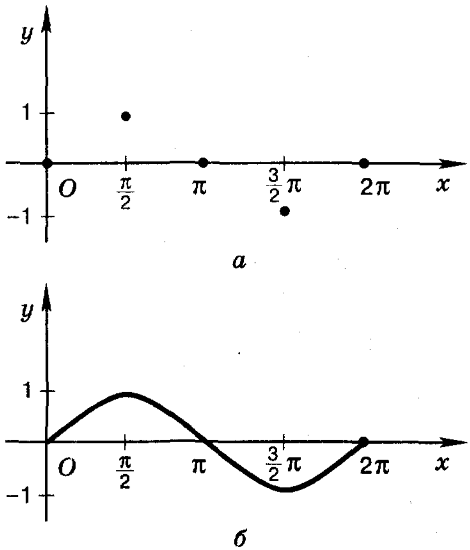
Функція $y=\sin x$. Синус числа x — ордината точки одиничного кола, яка відповідає числу x (див. § 3). Оскільки кожному дійсному числу x відповідає єдине значення $\sin x$, то $y=\sin x$ — функція, визначена на множині всіх дійсних чисел $\boldsymbol{R}$. Щоб виявити важливіші властивості цієї функції, побудуємо її графік. Спочатку — тільки на проміжку $[0;\ 2\pi]$.

Складемо таблицю значень:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
y	0	1	0	–1	0

Точки з відповідними координатами нанесемо на координатну площину (мал. 20, *а*). Якщо обчислити значення $\sin x$ для всіх дійсних значень x і позначити на координатній площині усі відповідні їм точки, то дістанемо криву, зображену на малюнку 20, *б*. Це — графік функції $y=\sin x$ на $[0;\ 2\pi]$. (Значення $\sin x$ можна не обчислювати, а визначати вимірюванням відповідних ліній синуса одиничного кола.)

На побудованому графіку показано, як змінюється ордината точки одиничного кола, здійснюючи о д и н повний обхід цього кола. На другому, третьому і наступних обходах усе повторюється. Це випливає також з тотожності $\sin(x+2\pi n)=\sin x$ (див. задачу 48). Тому, якщо криву, зображену на малюнку 20, *б*, перенести на кожний з проміжків $[2n\pi;\ 2(n+1)\pi]$, де n — числа цілі, дістанемо весь графік



Мал. 20

функції $y = \sin x$ (мал. 21). Це — нескінченна вліво і вправо хвиляста крива. Називають її *синусоїдою*.

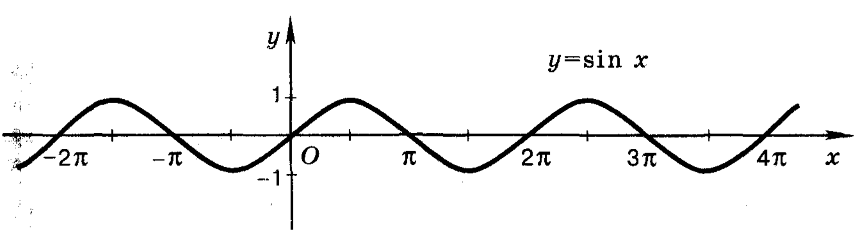
Найхарактерніша властивість функції $y = \sin x$ — періодичність.

Функцію $y = f(x)$ називають *періодичною*, якщо існує таке дійсне число $T \neq 0$, що для всіх значень x з області її визначення

$$f(x - T) = f(x) = f(x + T).$$

Число T називають *періодом* даної функції. Якщо T — період деякої функції, то nT, де $n \in \mathbf{Z}$ і $n \neq 0$, також її період. Графік такої функції паралельним перенесенням вздовж осі x на T, $2T$, ..., nT одиниць вліво чи вправо відображається на себе.

Функція $y = \sin x$ періодична з найменшим додатним періодом 2π. Це видно на графіку функції (мал. 21). Можна



Мал. 21

міркувати й інакше. Оскільки завжди $\sin(x - 2\pi) = \sin x = \sin(x + 2\pi)$, то 2π — період функції $y = \sin x$. А коли б ця функція мала додатний період $l < 2\pi$, тоді правильною була б рівність $\sin\frac{\pi}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{2} + l\right)$. А за умови, що $0 < l < 2\pi$, ця рівність неправильна (переконайтесь у цьому за допомогою одиничного кола). Отже, найменший додатний період функції $y = \sin x$ дорівнює 2π.

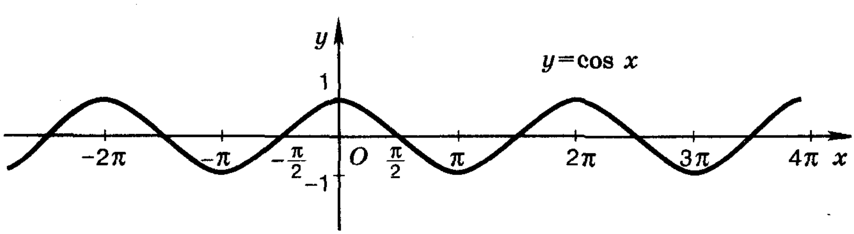
Кожне дійсне число з проміжку $[-1; 1]$ — значення функції $y = \sin x$ для деякого значення x. Тому область значень цієї функції — відрізок $[-1; 1]$. Графік функції $y = \sin x$ симетричний відносно початку координат. Отже, дана функція непарна.

Функцію $y = f(x)$ називають *непарною*, якщо її область визначення симетрична відносно початку координат і для кожного x з області визначення $f(-x) = -f(x)$.

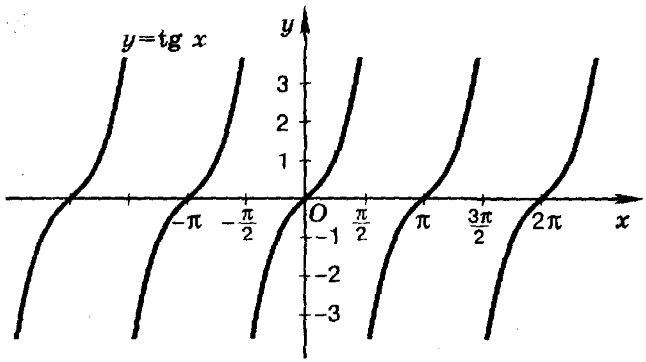
Функція $y = \cos x$. Оскільки при кожному дійсному x $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, то графік функції $y = \cos x$ такий самий, як і графік функції $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$. Останній можна дістати, перенісши графік функції $y = \sin x$ на $\frac{\pi}{2}$ у від'ємному напрямі осі x (мал. 22).

Графік функції $y = \cos x$ — синусоїда, та сама крива, яка є і графіком функції $y = \sin x$, тільки інакше розміщена відносно системи координат. Враховуючи це розміщення, іноді її називають *косинусоїдою*. Можна довести (зробіть це самостійно), що функція $y = \cos x$ періодична з найменшим додатним періодом 2π.

Функції $y = \sin x$ і $y = \cos x$ мають багато спільного: однакові їх області визначення і області значень, кожна з них періодична з найменшим додатним періодом 2π. Тільки перша з цих функцій непарна, а друга парна, адже при кожному дійсному x $\cos(-x) = \cos x$.



Мал. 22



Мал. 23

Функцію $y = f(x)$ називають *парною*, якщо її область визначення симетрична відносно початку координат і для кожного x з області визначення $f(-x) = f(x)$.

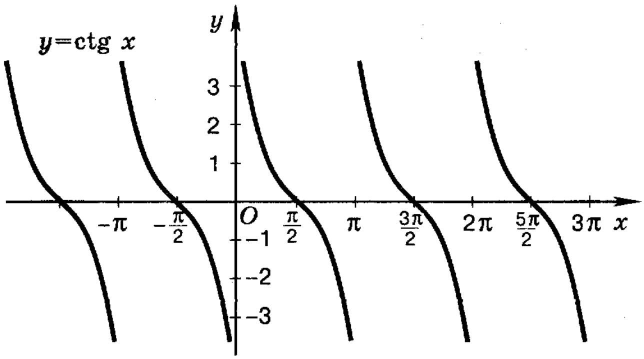
Графік функції $y = \cos x$ симетричний відносно осі y.

Функція $y = \mathrm{tg}\, x$. Її область визначення — множина всіх дійсних чисел, за винятком чисел $\frac{\pi n}{2}$, де $n \in \boldsymbol{Z}$. Область значень — множина всіх дійсних чисел $\boldsymbol{R}$.

Якщо x збільшувати від $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$, то значення y збільшується від $-\infty$ до ∞. При збільшенні x від $\frac{\pi}{2}$ до $\frac{3\pi}{2}$ все повторюється, бо при кожному x з області визначення і будь- якому цілому n $\mathrm{tg}\, x = \mathrm{tg}\,(x + \pi n)$. Можна довести, що функція $y = \mathrm{tg}\, x$ періодична з найменшим додатним періодом π. Ця функція непарна, бо для кожного x з області визначення $\mathrm{tg}\,(-x) = -\mathrm{tg}\, x$. Графік функції $y = \mathrm{tg}\, x$ називають *тангенсоїдою*, він складається з безлічі окремих віток. Кожна з цих віток — нескінченна крива, яку паралельним перенесенням можна відобразити на будь-яку іншу вітку даної тангенсоїди (мал. 23).

Функція $y = \mathrm{ctg}\, x$. Графік функції $y = \mathrm{ctg}\, x$ зображено на малюнку 24. Її область значень — множина $\boldsymbol{R}$, а область визначення — множина $\boldsymbol{R}$, за винятком чисел πn, де $n \in \boldsymbol{Z}$. Функція $y = \mathrm{ctg}\, x$ також непарна.

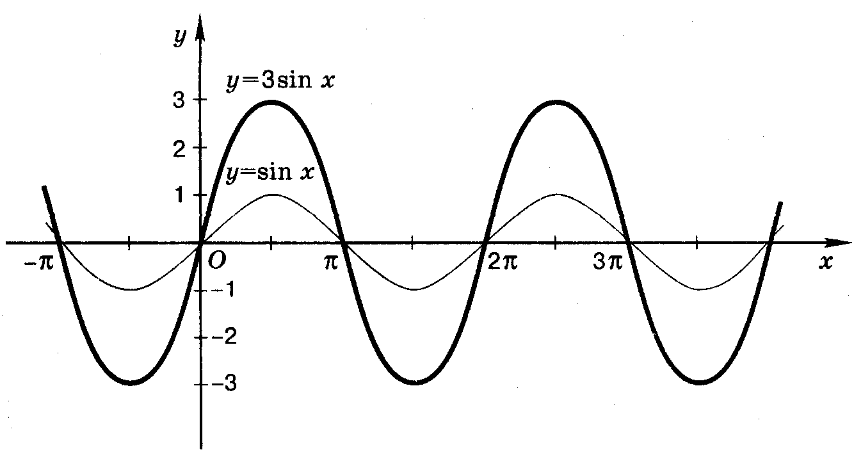
Досі йшлося про графіки найпростіших тригонометричних функцій. А як побудувати, наприклад, графіки функцій $y = 3 \sin x$, $y = \sin 2x$, $y = \sin(x + 2)$? Згадайте, як перетворювали графіки функцій у 9 класі.



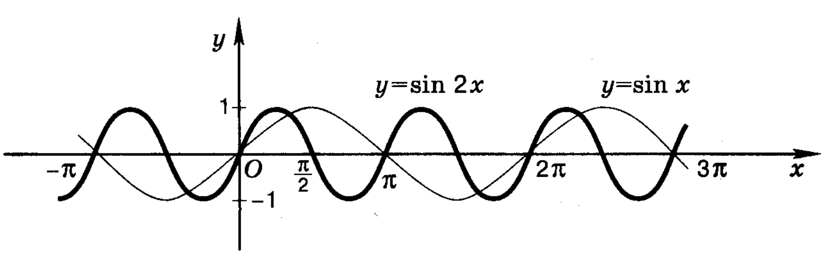
Мал. 24

Щоб побудувати графік функції $y = 3\sin x$, треба графік функції $y = \sin x$ «розтягнути» від осі x у 3 рази (мал. 25). Чому?

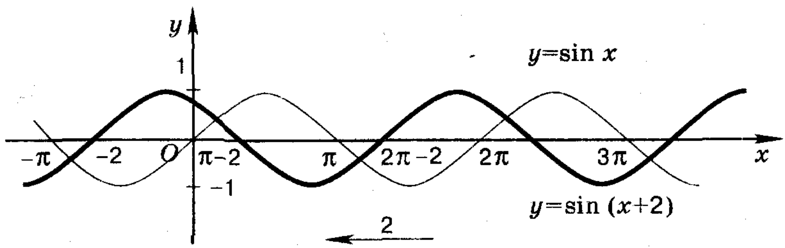
Щоб побудувати графік функції $y = \sin 2x$, треба графік функції $y = \sin x$ «стиснути» до осі y вдвічі (мал. 26). Чому?



Мал. 25



Мал. 26



Мал. 27

Щоб побудувати графік функції $y = \sin(x + 2)$, треба графік функції $y = \sin x$ перенести на 2 одиниці вліво (мал. 27).

Так само можна перетворювати й інші графіки тригонометричних функцій. Поясніть ці перетворення самостійно.

157°. Опишіть усно, як змінюється значення функції $y = \sin x$ при збільшенні її аргументу x від 0 до 2π.

Як змінюється значення функції $y = \cos x$ при збільшенні її аргументу x від 0 до 2π?

158. Як змінюється значення функції $y = \operatorname{tg} x$ при збільшенні її аргументу x від 0 до 2π?

159°. Чи можна вважати парною функцію $y = \cos x$, задану на множині $(0; \infty)$? А на множині $[-\pi; \pi]$?

160. Чи можна вважати непарною функцію $y = \sin x$, задану на множині $[-2\pi; 2\pi]$? А на множині $[0; \infty]$?

161. Чи можна вважати непарною функцію $y = \cos(x - 1)$, задану на $[0; 20\pi]$? А на $[-20\pi; 20\pi]$?

Побудуйте графік функції (162—169).

162°. $y = \sin x$ на $[-\pi; \pi]$.

163°. $y = 1 + \cos x$ на $[0; 2\pi]$.

164°. $y = \operatorname{tg} x$ на $(0; 2\pi)$.

165. $y = \sin(x + 1)$ на $[-\pi; \pi]$.

166°. $y = 4\sin x$ на $[-\pi; \pi]$.

167. $y = -0{,}5\cos x$ на $[-\pi; \pi]$.

168. $y = \sin 3x$ на $[-3; 3]$.

169. $y = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ на $[0; 2\pi]$.

170°. Знайдіть область визначення функції:

а) $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$; б) $y = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$;

в) $y = \operatorname{tg} 3x$.

171°. Знайдіть область значень функції:

а) $y = 2\sin x$; б) $y = -\sqrt{3}\cos x$;

в) $y = 1 - \frac{1}{2}\sin x$.

172. Чим відрізняється графік функції $y = \operatorname{tg} x$, заданої на $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, від графіка функції $y = x^3$?

173°. Знайдіть абсциси точок перетину графіка функції $y = \sin\frac{x}{2}$ з віссю x.

174. Знайдіть абсциси точок перетину графіків функцій $y = \cos 2x$ і $y = 0{,}5$.

175. Парною чи непарною є функція:

а) $y = \sin 2x$; б) $y = 3\cos x$;

в) $y = -\operatorname{tg} x$; г) $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$;

ґ) $y = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$; д) $y = \operatorname{ctg}\frac{x}{2}$?

176. Як можна побудувати графік функції:

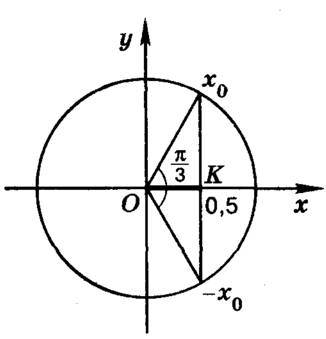
а) $y = \sin x \cos x$; б) $y = \cos^2 x - \sin^2 x$?

177*. Побудуйте графік функції:

а) $y = |\sin x|$; б) $y = \sin|x|$;

в) $y = |\operatorname{tg} x|$; г) $y = |1 + \sin x|$.

§ 9. ТРИГОНОМЕТРИЧНІ РІВНЯННЯ



Мал. 28

Рівняння називається *тригонометричним*, якщо його невідомі містяться під знаками тригонометричних функцій. Такі рівняння ми вже розглядали у вправах 58, 88, 138, 156, але досі знаходили тільки окремі їх розв'язки. Тепер з'ясуємо, як знаходити множину всіх розв'язків тригонометричного рівняння. Почнемо з найпростіших прикладів.

Рівняння $\cos x = 0{,}5$ задовольняють значення $x = \frac{\pi}{3}$ і $x = -\frac{\pi}{3}$ (мал. 28).

А оскільки для кожного дійсного значення x і цілого n завжди $\cos x = \cos(x + 2\pi n)$, то коренями даного рівняння $\cos x = 0{,}5$ є не тільки числа $\frac{\pi}{3}$ і $-\frac{\pi}{3}$, а й $\frac{\pi}{3} + 2\pi n$ і $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, де n — будь-яке ціле число. Відповідь записують так:

$$x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Можна розв'язати рівняння $\cos x = 0{,}5$ і графічно, якщо побудувати в одній системі координат графіки функцій $y = \cos x$ і $y = 0{,}5$. Зробіть це самостійно.

Рівняння $\cos x = 0{,}6$ можна розв'язати за допомогою калькулятора:

$$0{,}6 \ \boxed{\text{F}}\,\boxed{\text{arc}}\,\boxed{\text{cos}} \approx 0{,}927.$$

Отже, маємо множину наближених розв'язків:

$$x \approx \pm 0{,}927 + 2\pi n, \ n \in \mathbf{Z}.$$

А як знайти множину точних розв'язків такого рівняння?

Нехай $|a| \le 1$. ***Арккосинусом*** **числа** $\boldsymbol{a}$ **називають кут або число з проміжку $[0; \pi]$, косинус якого дорівнює** $\boldsymbol{a}$. Наприклад,

$$\arccos 1 = 0, \ \arccos 0{,}5 = \frac{\pi}{3}, \ \arccos 0 = \frac{\pi}{2},$$
$$\arccos(-1) = \pi.$$

Множину розв'язків рівняння $\cos x = 0{,}6$ можна записати так:

$$x = \pm\arccos 0{,}6 + 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Взагалі, рівняння $\cos x = a$ при $|a| > 1$ розв'язків не має, а при $|a| \le 1$ множина його розв'язків

$$x = \pm\arccos a + 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

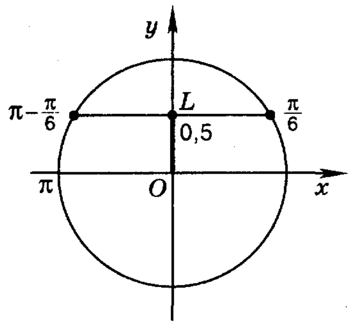
Подібно до арккосинуса означають арксинус і арктангенс.

Нехай $|a| \le 1$. ***Арксинусом*** **числа** $\boldsymbol{a}$ **називають кут або число з проміжку** $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, **синус якого дорівнює** $\boldsymbol{a}$. Наприклад,

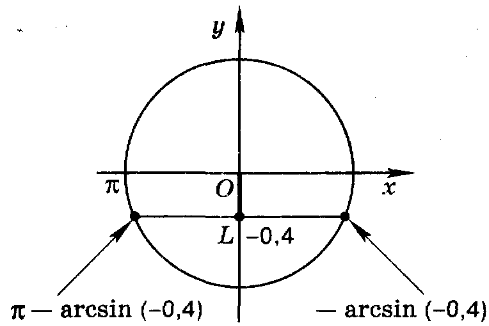
$$\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}, \ \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}, \ \arcsin 0 = 0,$$
$$\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}.$$

Рівняння $\sin x = 0{,}5$ має розв'язки $x = \frac{\pi}{6}$ і $x = \pi - \frac{\pi}{6}$ (мал. 29). Оскільки функція $\sin x$ періодична з найменшим додатним періодом 2π, то дане рівняння має дві серії розв'язків: $x = \frac{\pi}{6} + 2n\pi$ і $x = \frac{5\pi}{6} + 2n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$.

Розв'яжемо ще рівняння $\sin x = -0{,}4$. Два його розв'язки: $x = \arcsin(-0{,}4)$ і $x = \pi - \arcsin(-0{,}4)$ (мал. 30). Усі розв'язки:



Мал. 29



Мал. 30

$$x_1 = \arcsin(-0{,}4) + 2\pi n \text{ і}$$

$$x_2 = \pi - \arcsin(-0{,}4) + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}.$$

Взагалі рівняння $\sin x = a$ не має розв'язків, якщо $|a| > 1$; якщо $|a| \le 1$, то множина його розв'язків складається з двох серій:

$$x_1 = \arcsin a + 2\pi n \text{ і } x_2 = \pi - \arcsin a + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}.$$

З а у в а ж е н н я. Дві останні формули можна об'єднати в одну.

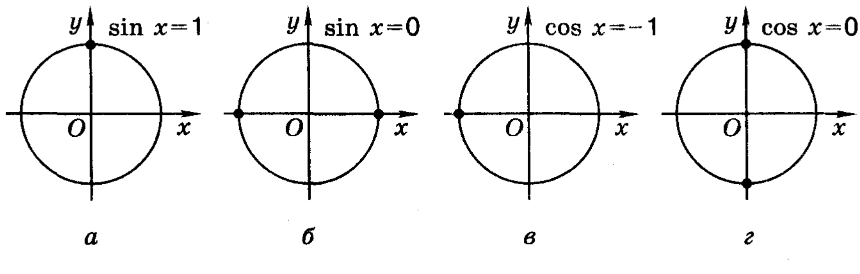
$$x_1 = \arcsin a + \pi \cdot 2n,\ x_2 = -\arcsin a + \pi(2n+1).$$

Отже, коли множник при π парний чи непарний, то $\arcsin a$ береться відповідно з плюсом чи мінусом. Ці випадки об'єднує рівність

$$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}.$$

Така загальна формула розв'язків рівняння $\sin x = a$, якщо $|a| \le 1$.

Рівняння $\sin x = a$ і $\cos x = a$, якщо a дорівнює 0, 1 або −1, можна розв'язувати і за загальними формулами, але зручніше — уявляючи одиничне коло (мал. 31). Наприклад, рівняння



Мал. 31

$\sin x = 1$ має множину розв'язків $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$;

$\cos x = 0$ має множину розв'язків $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$.

Тут і далі в подібних рівностях n — довільне ціле число.

Арктангенсом **числа** a **називають кут або число з проміжку** $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, **тангенс якого дорівнює** a. Позначають його $\operatorname{arctg} a$.

Рівняння $\operatorname{tg} x = a$ має розв'язки при будь-якому дійсному a. Один його розв'язок $x = \operatorname{arctg} a$. Оскільки функція $\operatorname{tg} x$ періодична з найменшим додатним періодом π, то множина всіх розв'язків даного рівняння

$$x = \operatorname{arctg} a + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}.$$

Корисно пам'ятати такі формули коренів тригонометричних рівнянь:

$$\cos x = a,\quad x = \pm \arccos a + 2\pi n;$$
$$\sin x = a,\quad x = (-1)^n \arcsin a + \pi n;$$
$$\operatorname{tg} x = a,\quad x = \operatorname{arctg} a + \pi n;\quad n \in \mathbf{Z}.$$

Рівняння $\operatorname{ctg} x = a$ при $a = 0$ має множину розв'язків $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$. У всіх інших випадках воно рівносильне рівнянню $\operatorname{tg} x = \frac{1}{a}$.

Розв'язуючи складніші тригонометричні рівняння, зводять їх до простіших, як це звичайно роблять при розв'язуванні алгебраїчних рівнянь. Деякі тригонометричні рівняння зводять до квадратних.

П р и к л а д. Розв'яжіть рівняння $2\cos^2 x + 3\cos x - 2 = 0$.

Р о з в' я з а н н я. Нехай $\cos x = y$. Рівняння $2y^2 + 3y - 2 = 0$ має два корені: $y = -2$ і $y = 0{,}5$. Значення косинуса не може дорівнювати -2. Отже, $\cos x = 0{,}5$, звідки $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$.

В і д п о в і д ь. $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, де $n \in \mathbf{Z}$.

Розв'яжіть рівняння (178—200).

178°. а) $\cos x = 0$; б) $\cos x = -1$; в) $\cos x = 1$; г) $\sin x = 1$; ґ) $\sin x = -1$; д) $\sin y = 0$.

179. а) $\cos x = 0{,}43$; б) $\sin x = 0{,}8$; в) $\operatorname{tg} z = -2{,}5$.

180°. а) $2\cos x = \sqrt{3}$; б) $3\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$; в) $\sqrt{2}\cos\varphi = 1$.

181. а) $\sin 2x = -1$; б) $\cos 3\varphi = -1$; в) $\operatorname{ctg} 2x = 1$.

Р о з в' я з а н н я. а) $2x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$;

б) $3\varphi = \pi + 2\pi n = \pi(2n+1)$, $\varphi = \frac{1}{3}\pi(2n+1), n \in Z$.

182°. а) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 1$; б) $\sin\left(\varphi - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$; в) $\operatorname{tg}\frac{x-2\pi}{3} = 1$.

183°. а) $\cos(x-2) = 0$; б) $\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$;

в) $\operatorname{tg} 2(\varphi - 1) = 0$.

184°. а) $\sin^2 x = 1$; б) $2\cos^2\varphi = 1$; в) $\operatorname{tg}^2(x-2) = 1$.

185°. а) $\sin x \cos x = -0{,}5$; б) $\sin^2 x - \cos^2 x = 1$.

186°. а) $2\sin^2 x - \sin x = 0$; б) $\cos^2 x - 2\cos x = 0$.

187°. а) $\sin^2 t + 2\sin t = 3$; б) $\cos^2\varphi + 2 = 3\cos\varphi$.

188°. а) $2\sin^2 x - \cos x = 1$; б) $2\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1$.

189°. а) $\sin x - \operatorname{tg} x = 0$; б) $\cos y + \cos 2y = 0$.

190. а) $\sin\frac{x}{2} + \cos x = 1$; б) $\cos 2t - \sin t = 0$.

191. а) $\cos 2x = 2\sin^2 x$; б) $2\operatorname{tg}\varphi + 3\operatorname{ctg}\varphi = 5$.

192. а) $\operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} x = 0$; б) $\operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} x = 0$.

193. а) $\sin 6x - \sin 4x = 0$; б) $\cos 4x + \cos x = 0$.

194°. а) $\cos x + \cos 3x = \cos 2x$;
б) $\sin 3x + \sin x = \sin 2x$;
в) $\cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$;
г) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$.

195. а) $\sin x \cos 2x + \cos x \sin 2x = 1$;
б) $\sin^3 x \cos x + \cos^3 x \sin x = 1$;
в) $4\sin^2 x + \sin^2 2x = 3$;
г) $\cos x + 2\sin x \operatorname{tg} x = 1$.

196. $\sqrt{3}\sin^2 x - 2\sin x\cos x - \sqrt{3}\cos^2 x = 0$.

Р о з в' я з а н н я. Оскільки корені рівняння $\cos x = 0$ не є коренями даного рівняння (бо при $\cos x = 0$ $\sin x = \pm\sqrt{1-0} = \pm 1$), то можна вважати, що $\cos x \neq 0$. Тому обидві частини даного рівняння можна поділити на $\cos^2 x$. Дістанемо:

$$\sqrt{3}\operatorname{tg}^2 x - 2\operatorname{tg} x - \sqrt{3} = 0.$$

Це — квадратне рівняння відносно $\operatorname{tg} x$. Його корені $\operatorname{tg} x_1 = \sqrt{3}$, звідки $x_1 = \frac{\pi}{3} + \pi n$ і $\operatorname{tg} x_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, звідки $x_2 = -\frac{\pi}{6} + \pi n$.

В і д п о в і д ь. $x_1 = \frac{\pi}{3} + \pi n$, $x_2 = -\frac{\pi}{6} + \pi n$, де $n \in \mathbf{Z}$.

197. а) $\sin^2 x - 2\sin x \cos x = 8\cos^2 x$;
б) $3\cos^2 x = 2\sin 2x - \sin^2 x$;
в) $2\sin^2 x - 4\sin x \cos x + 1 = 0$;
г) $5\sin^2 x + 3\cos^2 x = 4\sin 2x$.

198*. а) $5\sin 2x - 12\cos 2x = 13$; б) $4\sin 2x + 5\cos 2x = 6$;
в) $5\sin x - 12\cos x = 13$; г) $\sin x + 2\cos x = \sqrt{2}$.

199*. а) $\frac{\sin 2x}{\operatorname{tg} 0{,}5x} = 0$; б) $\frac{\cos 2x}{1 - \operatorname{tg} x} = 0$.

200*. а) $\frac{1+\cos 2x}{2\cos x} = \frac{\sin 2x}{1-\cos 2x}$; б) $\frac{1-\cos 2x}{2\sin x} = \frac{\sin 2x}{1+\cos 2x}$.

201. Розв'яжіть систему рівнянь:

а) $\begin{cases} \sin x + 2\cos y = 2, \\ \sin x - 2\cos y = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \sin x + \sin y = 1, \\ x + y = \pi. \end{cases}$

Р о з в' я з а н н я. а) Додамо почленно рівняння системи:

$$2\sin x = 2, \quad \sin x = 1, \quad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n.$$

Віднімемо друге рівняння системи від першого:

$$4\cos y = 2, \quad \cos y = \frac{1}{2}, \quad y = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n_1.$$

В і д п о в і д ь. $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $y = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n_1$, де $n \in \mathbf{Z}$ і $n_1 \in \mathbf{Z}$.

б) $y = \pi - x$, $\sin x + \sin(\pi - x) = 1$, $\sin x + \sin x = 1$, $\sin x = \frac{1}{2}$,

$$x_1 = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, \quad y_1 = \pi - x_1 = \frac{5\pi}{6} - 2\pi n;$$
$$x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, \quad y_2 = \pi - x_2 = \frac{\pi}{6} - 2\pi n.$$

В і д п о в і д ь. $x_1 = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $y_1 = \frac{5\pi}{6} - 2\pi n$; $x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $y_2 = \frac{\pi}{6} - 2\pi n$, де $n \in \mathbf{Z}$.

З а у в а ж е н н я. У відповіді до вправи а) числа n і n_1 можуть бути різними. Записавши відповідь у вигляді $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $y = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, втратили б безліч розв'язків. А відповідь $x_1 = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $y_1 = \frac{5\pi}{6} - 2\pi n_1$ до вправи б) була б неправильною, бо ці значення при $n \neq n_1$ дану систему не задовольняють.

202°. Розв'яжіть систему рівнянь:

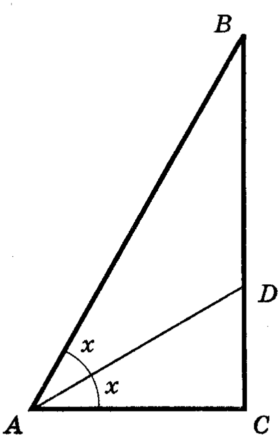
а) $\begin{cases} \cos x - \sin y = 0, \\ \cos^2 x + \sin^2 y = 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \sin x + \cos y = 1, \\ \sin^2 x - \cos^2 y = 1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \sin x \cos y = 0{,}5, \\ x - y = 30^\circ; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 6 \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = 1, \\ 4x + 4y = \pi. \end{cases}$

203. Знайдіть кути рівнобедреного трикутника, бічна сторона якого дорівнює 6 см, а площа 9 см^2.

204. Знайдіть найбільший кут трикутника, сторони якого 4, 5 і 6.

205. Знайдіть кути прямокутного трикутника, якщо бісектриса його гострого кута відноситься до гіпотенузи, як $1:\sqrt{3}$.



Мал. 32

Р о з в' я з а н н я. Нехай у $\triangle ABC$ $\angle C = 90^\circ$, $\angle CAD = \angle DAB = x$ і $AD:AB = 1:\sqrt{3}$ (мал. 32). Тоді $\angle B = 90^\circ - 2x$, $\angle ADB = 90^\circ + x$. За теоремою синусів $DA:BA = \sin(90^\circ - 2x):\sin(90^\circ + x) = \cos 2x : \cos x$,

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos x},$$

$$\cos x = \sqrt{3}\,(2\cos^2 x - 1),$$

звідки

$$2\sqrt{3}\cos^2 x - \cos x - \sqrt{3} = 0,$$

$$\cos x = \frac{1 \pm 5}{4\sqrt{3}}.$$

За змістом задачі $\cos x > 0$, тому $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $x = 30^\circ$.

В і д п о в і д ь. 30°, 60°, 90°.

206. Паралельні площини відітнули від двох прямих відрізки, довжини яких відносяться, як $1:\sqrt{3}$. Під якими кутами вони нахилені до площин, коли один з цих кутів удвічі більший від другого?

207. MA — перпендикуляр до площини трикутника ABC, $\angle AMB = \angle ACM$. Знайдіть ці кути, якщо $AB:AC = 1:3$.

§ 10. НАЙПРОСТІШІ ТРИГОНОМЕТРИЧНІ НЕРІВНОСТІ

Як розв'язати, наприклад, нерівність $\sin x > \frac{1}{2}$?

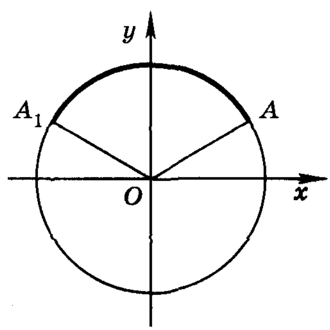
Подивимось на одиничне коло (мал. 33). Усі його точки, ординати яких більші від $\frac{1}{2}$, лежать на виділеній дузі AA_1. Точка A відповідає куту або числу $\frac{\pi}{6}$, а точка A_1 — куту або числу $\frac{5\pi}{6}$. Отже, на проміжку $[0;\ 2\pi]$ нерівність $\sin x > \frac{1}{2}$ задовольняє кожне з чисел проміжку $\left(\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right)$. Проте це не вся множина розв'язків. Оскільки при кожному значенні x і цілому n $\sin(x + 2\pi n) = \sin x$, то дану нерівність задовольняють усі числа безлічі проміжків:

$$\ldots, \left(\frac{\pi}{6} - 2\pi; \frac{5\pi}{6} - 2\pi\right), \left(\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right),$$

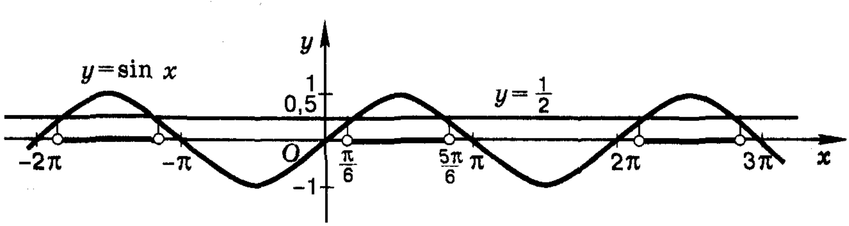
$$\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi; \frac{5\pi}{6} + 2\pi\right), \left(\frac{\pi}{6} + 4\pi; \frac{5\pi}{6} + 4\pi\right), \ldots$$

Відповідь прийнято записувати так: $\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi n\right)$, де $n \in \mathbf{Z}$.

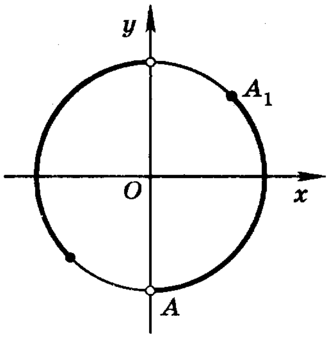
Дану нерівність $\sin x > \frac{1}{2}$ можна розв'язати і графічно. Для цього треба побудувати в одній системі координат графіки функцій $y = \sin x$ і $y = \frac{1}{2}$ (мал. 34). Ті значення x, при яких значення $\sin x$ більші за $\frac{1}{2}$, утворюють безліч проміжків. Вони і складають відповідь.



Мал. 33



Мал. 34



Мал. 35

Нерівності $\sin x > 1$, $\sin x < -1$, $\cos x > 1$, $\cos x < -1$ розв'язків не мають. Чому?

Кожну з нерівностей $\sin x \geq -1$, $\sin x \leq 1$, $\cos x \geq -1$, $\cos x \leq 1$ задовольняє будь-яке дійсне число і будь-який кут. Чому?

Нерівності $\operatorname{tg} x \leq a$ і $\operatorname{tg} x \geq a$ мають розв'язки при будь-яких a.

Для прикладу розв'яжемо нерівність $\operatorname{tg} x \leq 1$.

Оскільки на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ тангенс зростає і дорівнює 1 при $x = \frac{\pi}{4}$, то на цьому проміжку нерівність має множину розв'язків $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{4}\right]$ (мал. 35). А оскільки $\operatorname{tg}(x + \pi n) = \operatorname{tg} x$ для кожного значення x з області визначення і будь-якого цілого n, то загальною множиною розв'язків даної нерівності є $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{4} + \pi n\right]$, де $n \in \mathbf{Z}$.

Спробуйте розв'язати нерівність $\operatorname{tg} x \leq 1$ графічно.

Розв'яжіть нерівність (208—217).

208°. а) $\sin x > \frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\cos x \geq 0{,}5$; в) $\operatorname{tg} x < \sqrt{3}$.

209°. а) $\cos x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\sin x < \frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $\operatorname{tg} x \geq \frac{1}{\sqrt{3}}$.

210°. а) $\sin x < 1$; б) $\cos x > -1$; в) $\operatorname{tg} x > 1$.

211°. а) $2\cos x < 1$; б) $2\sin x > -\sqrt{2}$; в) $\sqrt{3}\operatorname{tg} x < 1$.

212. а) $\sin 3x > \frac{1}{2}$; б) $2\cos 6x < 1$.

Р о з в' я з а н н я. а) Позначимо: $3x = y$. Тоді $\sin y > \frac{1}{2}$,

$$\frac{\pi}{6} + 2\pi n < 3x < \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, \quad \frac{\pi}{18} + \frac{2}{3}\pi n < x < \frac{5\pi}{18} + \frac{2}{3}\pi n.$$

В і д п о в і д ь. $\left(\frac{\pi}{18} + \frac{2}{3}\pi n; \frac{5\pi}{18} + \frac{2}{3}\pi n\right)$, де $n \in \mathbf{Z}$.

213. а) $2\sin\frac{x}{3} \leq -\sqrt{3}$; б) $2\cos\frac{x}{6} \geq -\sqrt{3}$.

214. а) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+4x\right) \le -1$; б) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}+4x\right) \ge 1$.

215. а) $2\sin\left(\frac{\pi}{6}-2x\right) \ge \operatorname{tg}\frac{3\pi}{4}$; б) $2\cos\left(\frac{\pi}{6}-3x\right) \le \operatorname{tg}\frac{2\pi}{3}$.

216. а) $\sin x < \cos x$; б) $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x > 0$.

217. а) $|\sin x - 1| < 0{,}5$; б) $|1 + \cos x| \le 1{,}5$.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Варіант 1

1. Розв'яжіть рівняння:

а) $4\sin x\cos x = 1$; б) $4 + 2\cos^2 x = 3\cos x$.

2. Розв'яжіть нерівність $2\cos x < -1$.

3. Побудуйте графік функції $y = 1 + \sin x$ на $[-\pi; \pi]$.

Варіант 2

1. Розв'яжіть рівняння:

а) $\sin^2 x - \cos^2 x = \frac{1}{2}$; б) $2 - 5\sin x = 2\sin^2 x$.

2. Розв'яжіть нерівність $3\sin x < 0$.

3. Побудуйте графік функції $y = 2 + \cos x$ на $[-\pi; \pi]$.

Варіант 3

1. Розв'яжіть рівняння:

а) $2\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$; б) $3\sin x = 2\cos^2 x$.

2. Розв'яжіть нерівність $\operatorname{tg} x \le 1$.

3. Побудуйте графік функції $y = \cos 2x$ на $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Варіант 4

1. Розв'яжіть рівняння:

а) $2\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$; б) $2(1 + \cos^2 x) = 7\sin x$.

2. Розв'яжіть нерівність $\operatorname{tg} x \ge -1$.

3. Побудуйте графік функції $y = 1 - \sin x$ на $[-\pi; \pi]$.

Контрольні запитання і завдання

1. Що таке синус, косинус, тангенс, котангенс кута?

2. Що таке радіан? Скільки радіанів має прямий кут?

3. Що таке синус, косинус, тангенс, котангенс числа?

4. Які знаки мають тригонометричні функції кута в різних чвертях?

5. Сформулюйте і доведіть основну тригонометричну тотожність.

6. Сформулюйте і доведіть формули зведення для кутів $\frac{\pi}{2}+\alpha$.

7. Сформулюйте загальне правило зведення. Наведіть приклади.

8. Сформулюйте і доведіть формулу додавання для $\cos(\alpha-\beta)$.

9. Напишіть формули додавання для тригонометричних функцій.

10. Напишіть і доведіть формули подвійних кутів.

11. Виведіть формули пониження степеня для $\sin^2 x$ і $\cos^2 x$.

12. Виведіть формули половинних кутів.

13. Напишіть формули перетворення суми тригонометричних функцій.

14. Доведіть формулу перетворення суми синусів двох кутів.

15. Які рівняння називають тригонометричними?

16. Як розв'язують найпростіші тригонометричні рівняння?

17. Сформулюйте основні властивості функцій $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\operatorname{tg} x$.

18. Як називають графіки функцій $y=\sin x$, $y=\operatorname{tg} x$?

19. Як розв'язують рівняння виду $\sin(kx+b)=a$ і $a\sin^2 x+b\sin x+c=0$?

20. Як розв'язують найпростіші тригонометричні нерівності?

Історичні відомості

Термін «тригонометричні функції» вперше з'явився тільки наприкінці XVIII ст. Але саме поняття під іншими назвами було відоме набагато раніше. Давньогрецький математик і астроном Гіппарх ще в II ст. до н. д. склав таблиці, за допомо-

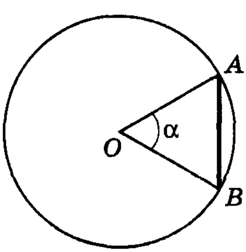
РЕГІОМОНТАН
(1436—1476)

Німецький математик і астроном. Справжнє ім'я — Йоганн Мюллер. Зробив значний внесок у розвиток тригонометрії. Склав семизначні таблиці синусів і тангенсів. Брав участь у вдосконаленні календаря.

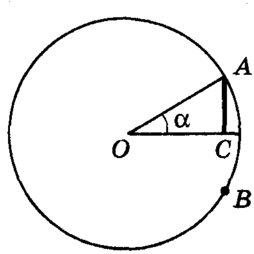
гою яких визначив відстань від Землі до Місяця, розв'язав багато інших подібних задач. Такі задачі розв'язували також Менелай (I—II ст.), К. Птолемей (II ст.) та інші вчені. Щоправда, в ті далекі часи вони користувалися не таблицями синусів, а досить схожими на них таблицями хорд, в яких кожній мірі центрального кута α при певному радіусі кола ставилась у відповідність довжина хорди (мал. 36).

Індійський учений Аріабхата в VI ст. перший перейшов від хорд до синусів. Він мірі кута α ставив у відповідність довжину половини хорди AB (мал. 37), називаючи її словом «ардхаджива» (половина тятиви лука). Згодом цю назву скоротили до «джива», а при перекладі спочатку на арабську, потім на латинську мову в Європі її замінили на «синус» (латинське sinus — вигин, кривизна).

Слово «косинус» виникло в результаті скорочення латинського complementi sinus — доповняльний синус. Поняття тангенса і котангенса ввів у X ст. арабський математик Абу-л-Вафа. В Європі поняття тангенса з'явилося тільки в XVI ст. Назва походить від латинського tangens — той, що дотикається, бо лінія тангенсів дотична до кола.



Мал. 36



Мал. 37

ВІЄТ ФРАНСУА
(1540—1603)

Французький математик, «батько алгебри» (за освітою юрист). Позначав буквами не тільки невідомі, а й коефіцієнти рівнянь, розробив основи теорії алгебраїчних рівнянь. Довів важливі тригонометричні формули, зокрема такі, що дають можливість розкладати $\sin nx$ і $\cos nx$ за степенями $\sin x$ і $\cos x$. У книзі «Математичний канон» (1579) дав таблиці значення функцій $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, $\sec x$, $\operatorname{cosec} x$.

Розгадав секретний шифр, яким користувалися іспанці, ведучи війну з Францією. Був першим радником короля.

Крім синуса, косинуса, тангенса і котангенса раніше розглядали також секанс, косеканс і синус-верзус $\left(\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha},\ \operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha},\ \sin\operatorname{vers}\alpha = 1 - \cos\alpha\right)$. Тепер використовувати ці функції немає потреби.

У 1461 р. Регіомонтан написав працю «П'ять книг про трикутники всіх видів», яка була опублікована лише у 1533 р. і вперше в Європі трактувала тригонометрію як самостійну науку. У ній синус, косинус і тангенс розглядалися тільки у зв'язку з розв'язуванням трикутників, сучасних символічних позначень не було.

Математичні символи входили поступово, різні в різних авторів. Наприклад, теперішню рівність $\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha}$ англійський математик Д. Валліс (1616—1703) записував так: $S = V : 1 - \Sigma^2$. До речі, він перший розібрався в знаках синуса в усіх чотирьох чвертях.

Теореми додавання (для хорд) були відомі ще К. Птолемею, використовував він і співвідношення, що відповідає сучасній тотожності $\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}(1-\cos\alpha)$. Індійські математики знали теореми додавання для синуса, а також співвідношення $\sin^2\alpha + \sin\operatorname{vers}^2\alpha = \left(2\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2$.

Абу-л-Вафа вивів формулу $\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$. Формули тангенса подвійного кута вивели кілька європейських математиків XVII ст.

ЕЙЛЕР ЛЕОНАРД
(1707—1783)

Один із найвизначніших математиків світу. За походженням швейцарець, багато років працював у Росії. Шістнадцятирічним склав екзамен на ступінь магістра мистецтв. Написав понад 800 теоретичних праць з математики, фізики, астрономії, навігації, філософії, музики — близько 80 томів. Увів сучасні позначення π, e, i, $f(x)$, sin, cos, tg, ctg та ін. Його ім'ям названі десятки найважливіших теорем, формул, функцій, рівнянь, інтегралів та ін.

«Ейлер повів за собою наступні покоління...»

М. В. Остроградський

Про періодичність синуса і косинуса знав і Ф. Вієт. Він також розглянув усі випадки розв'язування трикутників за трьома даними елементами, вмів розкладати $\sin nx$ і $\cos nx$ за степенями $\sin x$ і $\cos x$.

Для розвитку тригонометрії багато зробив Л. Ейлер. До нього під синусом, косинусом і т. ін. розуміли не абстрактні числа, а довжини відрізків, і пов'язували їх тільки з трикутниками та колом. Радіус кола називали повним синусом. Ейлер перший ввів позначення $\sin \alpha$ і $\cos \alpha$, розуміючи під ними відношення довжин відповідних відрізків, розглядав їх при довільних значеннях кута α. Він перший вивів усі формули зведення.

Перший графік функції синус побудував Д. Валліс для двох обертів, зауваживши, що таких обертів може бути багато. Він будував також графік секанса, але неправильно. Перші графіки функцій косинус і тангенс для кутів першої чверті будував англійський математик І. Барроу (1630—1677), учитель І. Ньютона.

Розділ 2

$$\sqrt[3]{x^{-\frac{m}{n}}}$$

СТЕПЕНІ І СТЕПЕНЕВІ ФУНКЦІЇ

§ 11. СТЕПЕНІ З ЦІЛИМИ ПОКАЗНИКАМИ

Повторимо і дещо розширимо відомості про степені.

1. ***Степенем числа а з натуральним показником*** $n > 1$ **називають добуток** n **множників, кожний з яких дорівнює** a, тобто

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ разів}}.$$

2. ***Степенем числа а з показником*** **1 називають число** a.

3. **Будь-яке відмінне від нуля число в степені 0 дорівнює 1, тобто якщо** $a \neq 0$, **то** $a^0 = 1$.

4. **Якщо** n **— довільне натуральне число, а** $a \neq 0$ **— дійсне, то**

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Ці означення повністю розкривають зміст поняття ***степеня з цілим показником***. Наприклад,

$$\left(\sqrt{2}\right)^0 = 1, \quad 3^{-1} = \frac{1}{3}, \quad a^{-3} = \frac{1}{a^3}, \quad (2x)^{-4} = \frac{1}{(2x)^4}.$$

Степінь a^n має зміст при кожному цілому n і дійсному $a \neq 0$. А, наприклад, вирази 0^0, 0^{-1}, 0^{-2} і т. п. не мають змісту, це не числа.

Властивості степенів з цілими показниками схожі на властивості степенів з натуральними показниками, а саме:

1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$;

2) $a^m : a^n = a^{m-n}$;

3) $(a^m)^n = a^{mn}$;

4) $(ab)^n = a^n n^n$;

5) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$.

Тут показники степенів m і n — довільні цілі числа, а основи степенів a і b — довільні дійсні числа, відмінні від нуля.

Доведемо першу з цих рівностей (її називають *основною властивістю степеня*).

Якщо числа m і n натуральні, то рівність $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ відома.

Якщо m і n — цілі від'ємні числа, то $m = -m_1$, $n = -n_1$, де m_1 і n_1 — числа натуральні. У цьому випадку

$$a^m \cdot a^n = a^{-m_1} \cdot a^{-n_1} = \frac{1}{a^{m_1}} \cdot \frac{1}{a^{n_1}} = \frac{1}{a^{m_1+n_1}} =$$

$$= a^{-m_1-n_1} = a^{m+n}.$$

Якщо один з показників степеня, наприклад n,— число натуральне, а m — ціле від'ємне число, то $m = -m_1$, де $m_1 \in N$ і

$$a^m \cdot a^n = a^{-m_1} \cdot a^n = \frac{a^n}{a^{m_1}} = a^{n-m_1} = a^{n+m} = a^{m+n}.$$

Якщо $m = 0$, а n — довільне ціле число, то

$$a^m \cdot a^n = 1 \cdot a^n = a^n = a^{0+n} = a^{m+n}.$$

Отже, рівність 1 правильна при будь-яких цілих показниках степенів m і n і дійсному $a \neq 0$. Аналогічно можна довести й інші властивості степенів з цілими показниками. З них випливає, що *дії над степенями з цілими показниками можна виконувати за такими самими правилами, як і над степенями з натуральними показниками.*

Приклади.

1. $2x^{-2}y^5 \cdot 3x^{-3}y^{-4} = 2 \cdot 3 \cdot x^{-2} \cdot x^{-3} \cdot y^5 \cdot y^{-4} = 6x^{-5}y$;
2. $(3a^4x^{-5})^{-2} = 3^{-2} \cdot (a^4)^{-2} \cdot (x^{-5})^{-2} = \frac{1}{9}a^{-8}x^{10}$.

Піднесення до степеня з натуральним показником n — дія однозначна. Тобто, ***для будь-яких дійсних чисел a і b,***

якщо $a = b$, то $a^n = b^n$.

Чи правильне обернене твердження? Ні. Якщо $a^n = b^n$, то числа a і b можуть відрізнятись знаками.

Наприклад, $(-3)^4 = 3^4$, але $-3 \neq 3$. Завжди правильне твердження:

якщо $a^n = b^n$, то $|a| = |b|$. (*)

Адже коли $|a| \neq |b|$, то $a^n \neq b^n$.

З твердження (*) випливають важливі наслідки:

1) ***якщо числа a, b невід'ємні і $a^n = b^n$, то $a = b$;***

2) ***якщо число n непарне і $a^n = b^n$, то $a = b$.***

Обчисліть значення виразу (218—222).

218°. а) $2^7 \cdot 2^{-3}$; б) $3^{-5} \cdot 3$; в) $25 \cdot 5^{-4}$;
г) $3^4 : 3^{-2}$; ґ) $2^{-15} : 2^{-12}$; д) $6{,}25 \cdot 5^{-4}$.

219°. а) $0{,}2^{-3} \cdot 0{,}2^5$; б) $(2^{-3})^2$; в) $(2^3)^{-2} \cdot 32$;
г) $\left(\frac{1}{2}\right)^3 : \left(\frac{1}{2}\right)^5$; ґ) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2$; д) $(0{,}1)^{-2} : 1^{-3}$.

220°. а) $(\sqrt{2})^{-2} : 2^{-4}$; б) $(\sqrt{3})^0 \cdot (\sqrt{3})^{-1}$; в) $2^{-5} : (-5)^0$.

221°. а) $8^{-2} \cdot 4^3$; б) $16^0 : 6^{-2}$; в) $9^{-6} : 27^5$.

222. а) $\frac{(2^3)^5 \cdot (2^{-6})^2}{24}$; б) $\frac{9^4 \cdot (3^{-3})^2}{(3^{-2})^{-3}}$; в) $\frac{(\sqrt{10})^4 \cdot \pi^0}{(\sqrt{3})^2 \cdot 0{,}3^{-1}}$.

Спростіть вираз (223—229).

223°. а) $a^{-2}b \cdot a^3b^{-2}$; б) $x^{-1}y^{-2} \cdot 13xy^2$.

224°. а) $0{,}75m^{-4}n^{-2} \cdot 8m^{12}n^3$; б) $0{,}5p^{-1}q^{-3} \cdot 3{,}2p^2q^{-5}$.

225. а) $\sqrt{2}x^5y^{-18} \cdot \sqrt{8}y^{20}x^{-1}$; б) $3\frac{1}{3}c^5x^{-7} \cdot 0{,}3c^{-4}x^{10}$.

226°. а) $(a^3b^{-1})^2 \cdot 0{,}7^0$; б) $\left(\frac{1}{3}x^{-2}y^2\right)^{-3} \cdot x^0$.

227°. а) $\left(\frac{1}{8}p^{-6}x\right)^{-1} + 8^0$; б) $(-0{,}5a^{-5}y^4)^{-2} : 0{,}5^0$.

228. а) $\frac{x^{-1}y^3}{3} \cdot \frac{6x^6}{y^{-2}}$; б) $\frac{25m^6}{64c^{-8}} \cdot \frac{16m^{-1}c^2}{5}$.

229. а) $\left(\frac{1}{4}a^{-4}c^{-3}\right)^2 \cdot \left(\frac{a^{-3}}{4c}\right)^{-3}$; б) $\left(\frac{x^{-4}}{10^5a^2}\right)^{-2} \cdot (5ax^3)^{-2}$.

230. Чи є геометричною прогресією послідовність степенів
$5^3, 5^2, 5, 5^0, 5^{-1}, 5^{-2}, 5^{-3}, 5^{-4}, 5^{-5}, 5^{-6}, 5^{-7}$?

231. Чи правильні сформульовані вище твердження про рівності $a = b$ і $a^n = b^n$ для довільних цілих значень n?

232. Доведіть властивості 2)—5) степенів з цілими показниками.

233°. Запишіть у стандартному вигляді (тобто у вигляді добутку $a \cdot 10^n$, де $1 \le a < 10$ і $n \in Z$) число: а) 0,0000453 б) $325 \cdot 10^{-7}$; в) $0{,}64 \cdot 10^8$.

234°. Виразіть у грамах: а) $1{,}8 \cdot 10^5$ кг; б) $3{,}47 \cdot 10^{-4}$ т.

235°. Виразіть у метрах: а) $3{,}5 \cdot 10^8$ см; б) $2{,}94 \cdot 10^{-5}$ км.

236. Знайдіть суму, добуток і частку чисел $4{,}2 \cdot 10^{-11}$ і $2{,}94 \cdot 10^{-8}$.

237. Розв'яжіть рівняння $x^{-2} - 6x^{-1} + 5 = 0$.

Розв'язання. Дане рівняння рівносильне рівнянню $\frac{1}{x^2} - \frac{6}{x} + 5 = 0$, або $5x^2 - 6x + 1 = 0$. Корені цього квадратного рівняння: 1 і 0,2.

Відповідь. 1 і 0,2.

Можна розв'язати рівняння і способом заміни, замінивши x^{-1} на y.

238°. Розв'яжіть рівняння:

а) $x^{-2} + 2x^{-1} = 0$;   б) $16x^{-3} - 81x = 0$;
в) $4x^{-4} - 5x^{-2} + 1 = 0$;   г) $(x-3)^{-1} + 2{,}5x^{-1} = 1$.

239. Розв'яжіть систему рівнянь:

а) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 8, \\ x^{-2} + y^{-2} = 0{,}5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2y + xy^2 = 30, \\ 6(x^{-1} + y^{-1}) = 5. \end{cases}$

240. Розв'яжіть нерівність:

а) $x^{-2} + x^{-1} < 0$;   б) $x^{-2} + 7x^{-1} \le -6$.

241. Побудуйте графік функції:

а) $y = x^{-1}$;   б) $y = 6x^{-1}$.

242*. Побудуйте графік функції:

а) $y = \sin^{-1} x$;   б) $y = \cos^{-1} x$.

§ 12. СТЕПЕНІ З РАЦІОНАЛЬНИМИ ПОКАЗНИКАМИ

Розглянемо спочатку степені виду $a^{\frac{1}{n}}$, де число a додатне, а n — натуральне. За цих умов ***степенем*** $a^{\frac{1}{n}}$ **називають додатне число, *n*-й степінь якого дорівнює *a*.**

Отже, при $a > 0$ і натуральному n завжди

$$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a.$$

Приклади. $32^{\frac{1}{5}} = 2$, бо $2^5 = 32$; $0{,}09^{\frac{1}{2}} = 0{,}3$, бо $0{,}3^2 = 0{,}09$.

Основою степеня з показником $\frac{1}{n}$ може бути степінь a^m. Вважають, що коли $a > 0$, $m \in Z$ і $n \in N$, завжди

$$(a^m)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{m}{n}}.$$

Наприклад, $4^{\frac{3}{2}} = (4^3)^{\frac{1}{2}} = 64^{\frac{1}{2}} = 8$; $4^{-\frac{3}{2}} = (4^{-3})^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{64}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{8}$.

Якщо $a > 0$, $m \in \boldsymbol{Z}$ і $n \in \boldsymbol{N}$, то правильні рівності:

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n = a^m \quad \text{і} \quad a^{-\frac{m}{n}} = \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{m}{n}},$$

бо $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n = \left((a^m)^{\frac{1}{n}}\right)^n = a^m$ і $a^{-\frac{m}{n}} = (a^{-m})^{\frac{1}{n}} = \left(\left(\frac{1}{a}\right)^m\right)^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{m}{n}}$.

Для степенів додатних чисел a, b з дробовими (раціональними) показниками r і s справджуються такі **властивості**, як і для степенів з цілими показниками:

1) $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$; 4) $(ab)^r = a^r b^r$;

2) $a^r : a^s = a^{r-s}$; 5) $\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$.

3) $(a^r)^s = a^{rs}$;

Доведемо першу з них. Дробові числа r і s завжди можна подати у вигляді дробів з рівними знаменниками: $r = \frac{m}{n}$, $s = \frac{k}{n}$. Отже, досить показати, що коли $a > 0$, $m \in \boldsymbol{Z}$, $k \in \boldsymbol{Z}$, $n \in \boldsymbol{N}$, то

$$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{k}{n}} = a^{\frac{m}{n} + \frac{k}{n}}.$$

В обох частинах цієї рівності числа додатні. Їх n-ні степені рівні, бо

$$\left(a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{k}{n}}\right)^n = \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n \cdot \left(a^{\frac{k}{n}}\right)^n = a^m \cdot a^k;$$

$$\left(a^{\frac{m}{n} + \frac{k}{n}}\right)^n = \left(a^{\frac{m+k}{n}}\right)^n = a^{m+k} = a^m \cdot a^k.$$

Тому доводжувана рівність правильна.

Аналогічно можна довести решту властивостей. З них випливає, що *вирази з дробовими показниками степенів і додатними основами можна перетворювати, як і вирази з цілими показниками*. Наприклад,

$$a^{\frac{1}{2}} + a = a^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}\left(1 + a^{\frac{1}{2}}\right);$$

$$\left(x^{\frac{3}{2}} - c\right)\left(x^{\frac{3}{2}} + c\right) = \left(x^{\frac{3}{2}}\right)^2 - c^2 = x^3 - c^2.$$

Така трактовка степеня з дробовим показником відповідає введеному раніше поняттю степеня з цілим показником. Тому їх можна об'єднати і говорити про *степені з раціональними показниками*.

Обчислюючи степені з раціональними показниками, можна користуватися тотожністю $a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m$ і скорочувати дробові показники. Наприклад,

$$32^{\frac{4}{5}} = \left(32^{\frac{1}{5}}\right)^4 = 2^4 = 16;\ 2^{\frac{9}{3}} = 2^3 = 8.$$

При будь-яких додатних основах значення степенів з дробовими показниками (здебільшого наближені) можна обчислювати, користуючись мікрокалькулятором. Степені з від'ємними основами і дробовими показниками не розглядаються.

Знайдіть значення виразу (243—248).

243°. а) $16^{\frac{1}{4}}$; б) $27^{\frac{1}{3}}$; в) $625^{\frac{1}{4}}$.

244°. а) $27^{\frac{2}{3}}$; б) $9^{-\frac{3}{2}}$; в) $0{,}001^{-\frac{2}{3}}$.

245°. а) $8^{\frac{2}{3}} \cdot 7^0$; б) $81^{-\frac{4}{3}} \cdot 3^4$; в) $49^{\frac{3}{2}} \cdot 49^0$.

246. а) $2^{\frac{1}{2}} \cdot 8^{\frac{5}{3}} \cdot 4^{-2}$; б) $3^{0,5} \cdot 9^{\frac{3}{4}} \cdot 3^{-3}$; в) $0{,}4^{-\frac{2}{3}} \cdot 0{,}4^{-\frac{1}{3}} \cdot 0{,}4$.

247°. а) $8^{\frac{7}{3}} : 81^{1,75}$; б) $100^{\frac{1}{3}} \cdot 0{,}2^{\frac{5}{3}} \cdot \left(\sqrt{2}\right)^{\frac{8}{3}}$.

248. а) $\left(\frac{1}{125}\right)^{-\frac{1}{3}} + 81^{-0,75} - \left(\frac{1}{32}\right)^{-\frac{3}{5}}$; б) $\left(\frac{1}{16}\right)^{-0,75} + 27^{\frac{2}{3}} - 25^{0,5}$.

249. Яке з чисел більше:

а) $\left(64^{\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{3}{4}}$ чи $\left(0{,}64^{-\frac{3}{4}}\right)^{\frac{2}{3}}$; б) $\left(32^{\frac{4}{5}}\right)^{-\frac{1}{4}}$ чи $\left(\sqrt{2}\right)^{-2}$?

250°. Обчисліть за допомогою мікрокалькулятора:

а) $3{,}2^{0,2}$; б) $0{,}52^{-1,3}$; в) $13^{2,7} \cdot 2{,}5$; г) $3{,}5^{-4} \cdot 6^{2,3}$.

251. Доведіть, що для раціональних r, s і додатних a і b справджуються рівності:

а) $a^r : a^s = a^{r-s}$; б) $(a^r)^s = a^{rs}$;

в) $(ab)^r = a^r \cdot b^r$; г) $\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$.

252. Розкладіть на множники:

а) $x - x^{\frac{1}{2}}$; б) $(ac)^{\frac{1}{3}} + (ax)^{\frac{1}{3}}$;

в) $a^{0,5} - a^{0,25}$; г) $a + x^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}$.

Спростіть вираз (253—261).

253°. а) $\left(3^{\frac{1}{2}}-1\right)\left(3^{\frac{1}{2}}+1\right)$; б) $\left(3^{\frac{1}{2}}+2^{\frac{1}{2}}\right)\left(3^{\frac{1}{2}}+2^{\frac{1}{2}}\right)$.

254°. а) $(a-x^{0,5})(a+x^{0,5})$; б) $\left(c^{\frac{1}{2}}-p^{\frac{1}{4}}\right)\left(c^{\frac{1}{2}}+p^{\frac{1}{4}}\right)$.

255°. а) $(a-b):\left(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}\right)$; б) $(x-4):(x^{0,5}+2)$.

256. а) $\left(x^{\frac{1}{3}}-1\right)\left(x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}+1\right)$; б) $\left(n^{\frac{1}{3}}+2\right)\left(n^{\frac{2}{3}}-2n^{\frac{1}{3}}+4\right)$.

257°. а) $(a-8):\left(a^{\frac{1}{3}}-2\right)$; б) $(1-x):\left(1+x^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{2}{3}}\right)$.

258°. а) $\dfrac{a-1}{a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}+1}$; б) $\dfrac{x+c}{x^{\frac{2}{3}}-(xc)^{\frac{1}{3}}+c^{\frac{2}{3}}}$.

259. а) $\dfrac{c-x}{(cx)^{0,5}+x}$; б) $\dfrac{a^{1,3}x+a^{0,3}}{ax^{1,3}+x^{0,3}}$.

260. а) $\dfrac{a-1}{a^{0,75}+a^{0,5}}\cdot\dfrac{a^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{4}}}{a^{\frac{1}{2}}+1}$; б) $\left(a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}-\dfrac{ab}{a+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)$.

261. а) $\dfrac{c-1}{c+\sqrt{c}+1}:\dfrac{c^{0,5}+1}{c^{1,5}-1}+2c^{\frac{1}{2}}$; б) $\dfrac{2(x^{0,25}-y^{0,25})}{x^{-\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{4}}-x^{-\frac{1}{4}}y^{-\frac{1}{2}}}-x-y$.

§ 13. СТЕПЕНІ З ДІЙСНИМИ ПОКАЗНИКАМИ І СТЕПЕНЕВІ ФУНКЦІЇ

Введемо поняття *степеня з ірраціональним показником*. Нехай

$$1{,}4;\ 1{,}41;\ 1{,}414;\ 1{,}4142;\ 1{,}41421;\ \dots \qquad (*)$$

нескінченна послідовність раціональних наближень числа $\sqrt{2}$ з точністю до десятих, сотих, тисячних і т. д. Тобто це послідовність раціональних чисел, які досить близько підходять до $\sqrt{2}$. Тоді

$$3^{1,4};\ 3^{1,41};\ 3^{1,414};\ 3^{1,4142};\ 3^{1,41421};\ \dots \qquad (**)$$

послідовність чисел (степенів з раціональними показниками), які як завгодно близько підходять до деякого дійсного числа. Це дійсне число і прийнято вважати точним значенням степеня $3^{\sqrt{2}}$.

З а у в а ж е н н я. Таке пояснення з погляду математики не зовсім коректне, бо в ньому вжито нематематичне поняття «близько підходять». У математиці йому відповідає поняття *границя послідовності*. Число a називають границею нескінченної послідовності a_1, a_2, a_3, ... , a_n, ... , якщо для будь-якого додатного числа ε знайдеться таке натуральне число N, що для всіх $n > N$ виконується нерівність $|a - a_n| < \varepsilon$. Тому правильніше було б сказати, що коли границею послідовності (*) є число $\sqrt{2}$, то границею послідовності (**) є число $3^{\sqrt{2}}$.

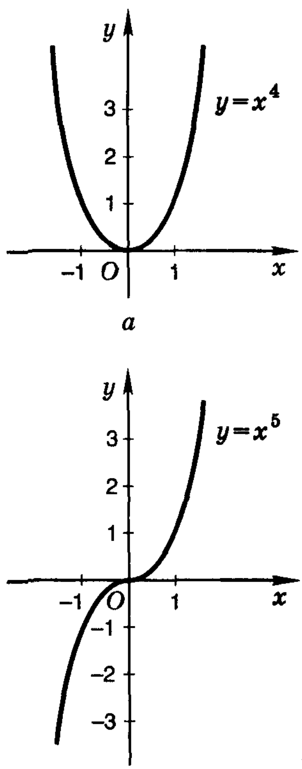
Взагалі, якщо $a > 0$ — число дійсне, а α — ірраціональне, то під степенем a^α розуміють границю нескінченної послідовності a^{α_1}, a^{α_2}, ... , a^{α_n}, ... , де α_1, α_2, ... , α_n, ...— нескінченна послідовність, границею якої є число α. Коректність такого означення обґрунтовано в строгих курсах математичного аналізу. Тут ми сформулюємо тільки висновки з цієї досить громіздкої теорії.

Якими б не були дійсні числа $a > 0$ і α, завжди має зміст, тобто дорівнює деякому дійсному числу, і степінь a^α. Для таких степенів справджуються в л а с т и в о с т і:

1) $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$; 4) $(ab)^r = a^r b^r$;

2) $a^r : a^s = a^{r-s}$; 5) $\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$.

3) $(a^r)^s = a^{rs}$;



а

б

Мал. 38

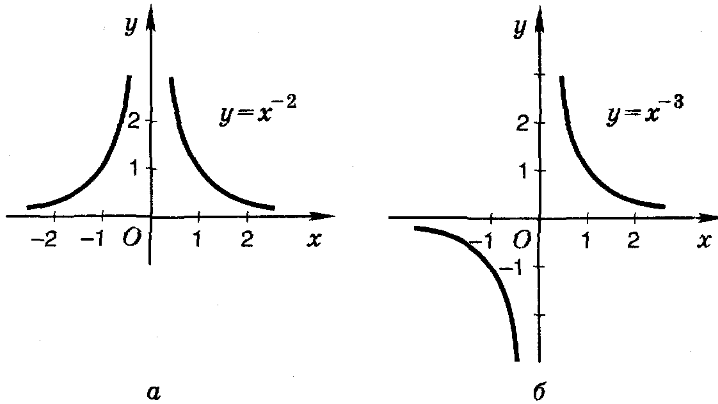
Отже, *вирази з будь-якими дійсними показниками степенів і додатними основами можна перетворювати так само, як з раціональними показниками.* Наприклад,

$$\frac{49^{\sqrt{2}} - a^{\frac{2}{\pi}}}{7^{\sqrt{2}} + a^{\frac{1}{\pi}}} = \frac{(7^{\sqrt{2}})^2 - \left(a^{\frac{1}{\pi}}\right)^2}{7^{\sqrt{2}} + a^{\frac{1}{\pi}}} =$$

$$= \frac{\left(7^{\sqrt{2}} - a^{\frac{1}{\pi}}\right)\left(7^{\sqrt{2}} + a^{\frac{1}{\pi}}\right)}{7^{\sqrt{2}} + a^{\frac{1}{\pi}}} = 7^{\sqrt{2}} - a^{\frac{1}{\pi}}.$$

Функція, задана рівністю $y = x^\alpha$, називається *степеневою*. Тут x — аргумент, а стале число α — показник степеня.

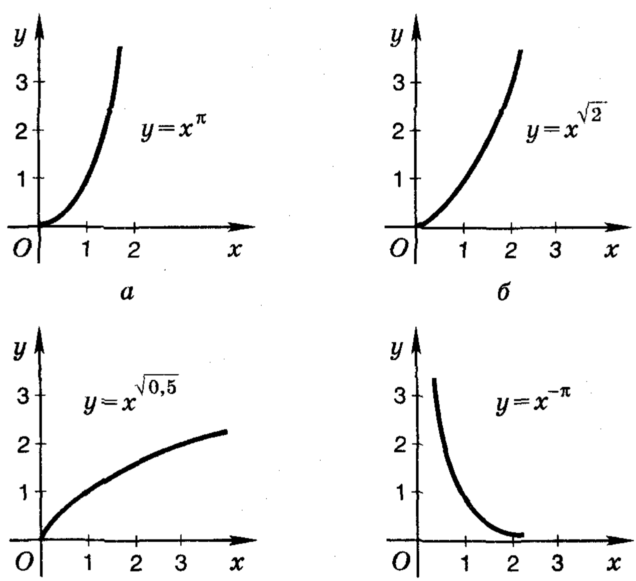
При кожному дійсному α степенева функція x^α визначена на проміжку $(0; \infty)$. Для окремих значень α ця функція може розглядатись і на ширшій області визначення. Зокрема при натуральних α вона визначена на множині $\boldsymbol{R}$ (мал. 38);



Мал. 39

при цілих від'ємних — на $(-\infty;\ 0) \cup (0;\ \infty)$ (мал. 39). У цих випадках при парних значеннях α функція x^α парна, а при непарних α — *непарна*.

Якщо α — додатне ірраціональне число, то функція x^α визначена тільки на $[0;\ \infty)$; така ж і множина її значень. Якщо ж ірраціональне число α від'ємне, то областю визначення і областю значень функції x^α є проміжок $(0;\ \infty)$. Кілька графіків таких функцій зображено на малюнку 40.



Мал. 40

Обчисліть, користуючись мікрокалькулятором (262—265).

262°. а) 2^{π}; б) $3{,}8^{\pi}$; в) $5^{\sqrt{2}}$.

263°. а) $8^{\pi+1}$; б) $0{,}5^{2\pi}$; в) $2{,}9^{\frac{\pi}{2}}$.

264. а) $(\sqrt{3})^{\sqrt{2}}$; б) $(\sqrt{2})^{\sqrt{3}}$; в) $\pi^{\sqrt{5}}$.

265. а) $(2+\pi)^{\pi}$; б) $(\sqrt{2}-1)^{\pi}$; в) $(3\sqrt{2})^{\pi}$.

Спростіть вираз (266—268).

266°. а) $(2^{\sqrt{2}-1}+2^{\sqrt{2}+1}):2{,}5$; б) $(3^{\pi}+3^{\pi-2}):3^{\pi}$.

267. а) $((\sqrt{2})^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}+8^{\sqrt{2}}:2^{3\sqrt{2}}$; б) $a^{\sqrt{3}}\cdot\left(\frac{1}{a}\right)^{\sqrt{3-1}}-a^{\pi}:a^{\pi-2}$.

268. а) $\frac{(x^{2\sqrt{3}}-1)(x^{2\sqrt{3}}+x^{\sqrt{3}}+x^{3\sqrt{3}})}{x^{4\sqrt{3}}-x^{\sqrt{3}}}$; б) $\left((x^{\pi}+a^{\pi})^2-\left(4^{\frac{1}{\pi}}xa\right)^{\pi}\right)^{0{,}5}$.

269. Доведіть, що графік кожної степеневої функції проходить через точку A (1; 1).

270. Чи проходить графік функції $y=x^{0{,}75}$ через точку M (16; 8)?

Р о з в' я з а н н я. Якщо $x=16$, то $y=16^{0{,}75}=16^{\frac{3}{4}}=8$.
В і д п о в і д ь. Проходить.

271°. Відомо, що графік функції $y=x^{\alpha}$ проходить через точку $P\left(2;\frac{1}{4}\right)$. Чому дорівнює α?

272. При якому значенні α графік функції $y=x^{\alpha}$ проходить через точку $K\left(-2;\frac{1}{4}\right)$?

273. Побудуйте схематично графік функції:

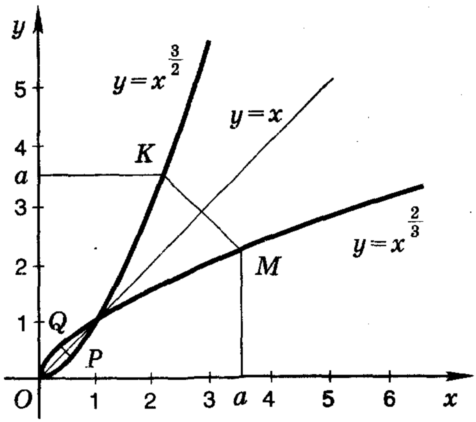
а) $y=x^{\sqrt{3}}$; б) $y=x^{\sqrt{0{,}3}}$; в) $y=x^{\pi-1}$;

г) $y=x^{1-\sqrt{3}}$; ґ) $y=x^2\cdot x^{\sqrt{2}}$; д) $y=x^{\pi-2}+3$.

274. Доведіть, що графіки функцій $y=x^{\frac{2}{3}}$ і $y=x^{\frac{3}{2}}$, задані на $[0;\infty)$, симетричні відносно прямої $y=x$.

Р о з в' я з а н н я. Симетричні відносно прямої $y=x$ тільки такі точки, що абсциса однієї дорівнює ординаті другої і абсциса другої дорівнює ординаті першої: A (a; b) і B (b; a).

Якщо точка з абсцисою a лежить на графіку функції $y = x^{\frac{2}{3}}$, то її ордината дорівнює $a^{\frac{2}{3}}$; це точка $M\left(a; a^{\frac{2}{3}}\right)$. А симетрична їй відносно прямої $y = x$ точка $K\left(a^{\frac{2}{3}}; a\right)$ лежить на графіку функції $y = x^{\frac{3}{2}}$, бо $y = \left(a^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} = a$. Аналогічно можна показати, що кожна точка $P\left(c; c^{\frac{3}{2}}\right)$ графіка функції $y = x^{\frac{3}{2}}$ симетрична точці $Q\left(c^{\frac{3}{2}}; c\right)$ графіка функції $y = x^{\frac{2}{3}}$ (мал. 41).



Мал. 41

275. Узагальніть задачу 274 на функції $y = x^{\frac{m}{n}}$ і $y = x^{\frac{n}{m}}$.

276. Обчисліть на мікрокалькуляторі значення п'яти перших членів послідовності (**) § 13. Який висновок?

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Варіант 1

1. Обчисліть: а) $9^{-5} \cdot 27^4$; б) $\left(27^{\frac{2}{3}} - 4^{0,5}\right) \cdot (\sqrt{7})^{-2}$.

2. Спростіть вираз:

а) $(x-4):(x^{0,5}+2)+2$; б) $(a^{\sqrt{2}} - a^{\sqrt{2}-1}):a^{\sqrt{2}-2}$.

3. Розв'яжіть рівняння $\frac{1}{2}x - x^{\frac{1}{2}} = 0$.

4. Побудуйте графік функції $y = x^{\frac{1}{3}} + 1$.

Варіант 2

1. Обчисліть: а) $16^5 \cdot 8^{-6}$; б) $\left(81^{\frac{3}{4}} + 25^{0,5}\right) \cdot 8^{-\frac{5}{3}}$.

2. Спростіть вираз:

а) $(a - b) : \left(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}\right) - a^{\frac{1}{2}}$; б) $(x^{\sqrt{3}} - x^{\sqrt{3}-2}) \cdot x^{3-\sqrt{3}}$.

3. Розв'яжіть рівняння $2x^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{2}{3}} = 0$.

4. Побудуйте графік функції $y = 1 + x^{\pi}$.

Варіант 3

1. Обчисліть: а) $18^3 \cdot 4^5 \cdot 12^{-6}$; б) $\left(64^{\frac{2}{3}} - (\sqrt{2})^6\right)^{\frac{1}{3}} : (0,25)^{-2}$.

2. Спростіть вираз:

а) $(a + 8) : \left(a^{\frac{1}{3}} + 2\right) + 2a^{\frac{1}{3}}$; б) $(c^{\pi} - 2c^{\pi-3}) \cdot c^{2-\pi}$.

3. Розв'яжіть рівняння $x + 4 = 5x^{\frac{1}{2}}$.

4. Побудуйте графік функції $y = x^{-2} + 1$.

Варіант 4

1. Обчисліть: а) $50^9 \cdot 20^{-4} \cdot 25^{-7}$; б) $\left((0,25)^{-3} - 32^{\frac{2}{5}}\right) \cdot (\sqrt{5})^{-4}$.

2. Спростіть вираз:

а) $(x - 27) : \left(x^{\frac{1}{3}} - 3\right) - x^{\frac{2}{3}}$; б) $(a^{2\pi} - a^{\pi-2}) : (a^{\pi-3} - a^{-1})$.

3. Розв'яжіть рівняння $2,5x^{\frac{1}{2}} = x + 1$.

4. Побудуйте графік функції $y = x^{\frac{1}{2}} - 2$.

§ 14. ІРРАЦІОНАЛЬНІ ВИРАЗИ

Вирази з дробовими показниками степенів $a^{\frac{1}{2}}, a^{\frac{1}{3}}, a^{\frac{1}{4}}, \ldots, a^{\frac{1}{n}}$, де $n \in N$, можна записувати в іншій формі: $\sqrt{a}$, $\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[4]{a}$, ..., $\sqrt[n]{a}$. При кожному додатному значенні a і натуральному n записи $a^{\frac{1}{n}}$ і $\sqrt[n]{a}$ позначають одне й те саме.

Вираз $\sqrt[n]{a}$ називають *коренем n-го степеня* з числа a. Тут *a — підкореневий вираз, $\sqrt{\ }$ — знак кореня, n — показник кореня.* Залежно від показників корені бувають другого, третього і вищих степенів. Показник кореня — завжди число натуральне; замість $\sqrt[2]{a}$ пишуть $\sqrt{a}$.

Якщо число n непарне, то вираз $\sqrt[n]{a}$ має зміст при будь-якому дійсному a; знак виразу $\sqrt[n]{a}$ такий самий, як і знак числа a.

Якщо число n парне, то корінь $\sqrt[n]{a}$ (його називають ще *арифметичним коренем n-го степеня*) має зміст тільки коли $a \geq 0$. Значення $\sqrt[n]{a}$ в цьому випадку також невід'ємні.

З а у в а ж е н н я. Якщо натуральне число n парне, то вирази $a^{\frac{1}{n}}$ і $\sqrt[n]{a}$ визначені тільки для невід'ємних значень a і позначають одне й те саме. Якщо ж натуральне число n непарне, то вираз $a^{\frac{1}{n}}$ визначений на $[0; \infty)$, а $\sqrt[n]{a}$ — на множині всіх дійсних чисел. Наочно це видно на графіках функцій $y = x^{\frac{1}{3}}$ і $y = \sqrt[3]{x}$ (мал. 42).

Для додатних підкореневих виразів і довільних показників коренів справджуються властивості, подібні до властивостей квадратних коренів:

1) $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$;

2) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$;

3) $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$;

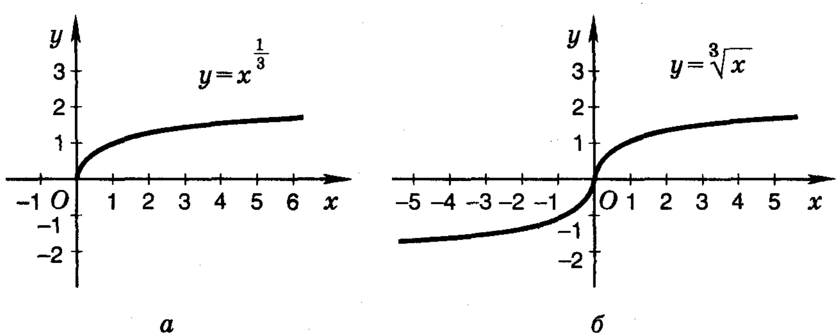
4) $\sqrt[n]{a} = \sqrt[nk]{a^k}$;

5) $\sqrt[n]{a^k} = (\sqrt[n]{a})^k$.

Усі ці властивості безпосередньо випливають з властивостей степенів з дробовими показниками. Якщо $a > 0$, $m \in \mathbf{Z}$ і $n \in N$, також завжди

$$a^{\frac{m}{n}} = (a^m)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, \qquad a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}.$$

Якщо підкореневий вираз — число від'ємне або степінь від'ємного числа, то для нього наведені властивості коренів



Мал. 42

можуть не справджуватись. Перетворювати корені з такими підкореневими виразами бажано обережно, розглядаючи всі можливі випадки.

Приклади.

1. Спрощуючи вираз $\sqrt[8]{(5-x)^6}$, не можна формально скоротити показники степеня і кореня і замінити його виразом $\sqrt[4]{(5-x)^3}$. Адже перший з цих виразів визначений при всіх дійсних значеннях x, а другий — тільки при $x \le 5$. Треба писати $\sqrt[8]{(5-x)^6} = \sqrt[4]{|5-x|^3}$.

2. Нехай у виразі $\frac{x}{c^2}\sqrt[4]{\frac{c}{x}}$ треба внести під знак кореня множник, що стоїть перед ним. Вважається, що даний вираз має зміст, тому можливі два випадки.

1) Якщо $x > 0$ і $c > 0$, то даний вираз додатний, отже,

$$\frac{x}{c^2}\sqrt[4]{\frac{c}{x}} = \sqrt[4]{\frac{x^4}{c^8}\cdot\frac{c}{x}} = \sqrt[4]{\frac{x^3}{c^7}}.$$

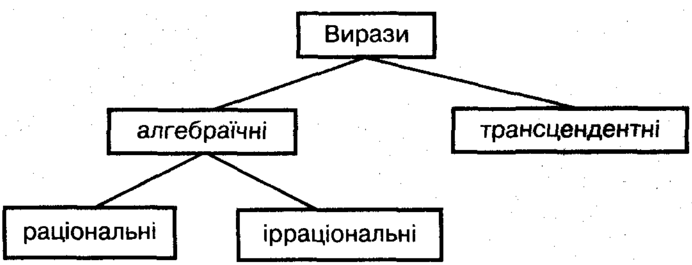
2) Якщо $x < 0$ і $c < 0$, то даний вираз від'ємний, тому

$$\frac{x}{c^2}\sqrt[4]{\frac{c}{x}} = -\sqrt[4]{\frac{x^4}{c^8}\cdot\frac{c}{x}} = -\sqrt[4]{\frac{x^3}{c^7}}.$$

Введемо кілька назв для розглядуваних виразів. Якщо вираз, крім чисел, змінних, дужок і знаків дій додавання, віднімання, множення, ділення і піднесення до степеня з раціональним показником або добування кореня, не містить нічого іншого, його називають *алгебраїчним виразом*. Алгебраїчний вираз, який містить корені або степені з дробовими показниками, називається *ірраціональним виразом*. Всі інші алгебраїчні вирази — *раціональні*.

Вирази з числами або змінними, які не є алгебраїчними, називаються *трансцендентними*.

Зв'язки між названими видами виразів показано на схемі:



277°. Запишіть за допомогою коренів вираз:

а) $x^{\frac{1}{5}}$; б) $(x-3)^{\frac{1}{3}}$; в) $ac^{\frac{4}{3}}$;

г) $(c-2)^{\frac{3}{4}}$; ґ) $(x^2-x+5)^{\frac{3}{2}}$; д) $c(1-b)^{-\frac{2}{3}}$.

278°. Запишіть без знаків кореня вираз:

а) $\sqrt[7]{x}$; б) $\sqrt[5]{(a-2)}$; в) $a^2\sqrt{x-a}$;

г) $\sqrt[4]{3a^2+c^2}$; ґ) $3:\sqrt[5]{x+2}$; д) $\sqrt[4]{x+\sqrt{x}}$.

Обчисліть (279—287).

279°. а) $\sqrt[3]{27}$; б) $\sqrt[4]{0{,}0016}$; в) $3\sqrt[5]{32}$.

280°. а) $\sqrt[3]{-125}$; б) $\sqrt[5]{32^{-5}}$; в) $-\sqrt[3]{-0{,}008}$.

281. а) $\sqrt[5]{100}$; б) $\sqrt[4]{125}$; в) $\sqrt[5]{-1000}$.

282°. а) $\sqrt[3]{-\frac{1}{8}}$; б) $\sqrt[3]{-\frac{27}{8}}$; в) $\sqrt[5]{-0{,}00001}$.

283°. а) $\sqrt[3]{3\frac{3}{8}}$; б) $\sqrt[4]{5\frac{1}{16}}$; в) $\sqrt[5]{-7\frac{19}{32}}$.

284°. а) $(\sqrt[3]{12})^3$; б) $\sqrt[6]{7^6}$; в) $\sqrt[8]{9^4}$.

285°. а) $(-\sqrt{13})^2$; б) $-\sqrt[4]{9^4}$; в) $\sqrt[4]{(-9)^4}$.

286. а) $\sqrt[5]{32}+\sqrt[4]{81}$; б) $\sqrt[4]{625}-\sqrt[3]{-27}$; в) $5\sqrt[4]{16}-\sqrt[4]{(-2)^4}$.

287. а) $\sqrt{81^3}+0{,}5^{-2}$; б) $\sqrt[4]{(-7)^0}+(\sqrt[3]{7})^{-3}$; в) $\sqrt[3]{7}\cdot(7^{-2})^{\frac{1}{6}}$.

Спростіть вираз (288—294).

288°. а) $\sqrt[3]{\sqrt{5}}$; б) $\sqrt{\sqrt[3]{7}}$; в) $\sqrt{2\sqrt[3]{5}}$.

289°. а) $\sqrt[3]{(-2)^6}$; б) $\sqrt[3]{(-4)^9}$; в) $(\sqrt[3]{12})^{\frac{2}{3}}$.

290. а) $(1+\sqrt[3]{2})^2-\sqrt[3]{4}$; б) $(2-\sqrt[4]{3})^2+4\sqrt[4]{3}$; в) $(\sqrt[4]{25}-1)^2-6$.

291°. а) $\frac{1}{2+\sqrt{3}}$; б) $\frac{1}{2-\sqrt{3}}$; в) $\frac{4}{3-\sqrt{5}}$.

292. а) $\frac{2}{\sqrt[4]{9}-1}$; б) $\frac{5}{\sqrt[6]{27}+1}$; в) $\frac{5}{2-\sqrt[3]{3}}$.

293°. а) $(2+\sqrt[3]{3})^2+(2-\sqrt[3]{3})^2$; б) $(\sqrt{5}-1)^3-(\sqrt{5}+1)^3$.

294. а) $\left(\sqrt{7+2\sqrt{10}}+\sqrt{7-2\sqrt{10}}\right)^2$; б) $\left(\sqrt{4-\sqrt[6]{8}}-\sqrt{4+\sqrt[6]{8}}\right)^2$.

295. Задача Ньютона: Перемножте вирази $\frac{2ax}{c}-\sqrt{\frac{a^3}{c}}$ і $3a+\sqrt{\frac{ab^2}{c}}$.

296. Задача Пачіолі. Обчисліть значення виразу:

а) $(\sqrt[4]{27}+\sqrt[4]{3})(\sqrt[4]{27}+\sqrt[4]{3})$; б) $\left(\sqrt{\sqrt{40+6}}+\sqrt{\sqrt{40-6}}\right)^2$.

297. Задача Штіфеля. Доведіть, що

$$\sqrt{16}+\sqrt[3]{8}=\sqrt{\sqrt[3]{4096}}+\sqrt{\sqrt[3]{64}}.$$

Спростіть вираз (298—306).

298°. $\frac{a^{0,5}}{a^{0,5}b^{0,5}+b}-\frac{b^{0,5}}{a^{0,5}b^{0,5}+a}$.

299°. $\frac{a-x}{a^{0,5}-x^{0,5}}-\frac{a^{1,5}-x^{1,5}}{a-x}$.

300. $\frac{x^{0,5}}{x^{0,5}-6}-\frac{3}{x^{0,5}+6}+\frac{x}{36-x}$.

301. $\frac{1-c^{-0,5}}{1+\sqrt{c}}-\frac{\sqrt{c}+c^{-0,5}}{c-1}$.

302°. $(\sqrt{1-x^2}+1):\left(\frac{1}{\sqrt{1+x}}+\sqrt{1-x}\right)$.

303. $\frac{a^{1,5}-1}{a^{0,5}+1}\cdot\frac{a-1}{a+a^{0,5}+1}+2a^{0,5}$.

304. $\left(\frac{1}{a-(xy)^{0,5}}+\frac{1}{a+(xy)^{0,5}}\right):\frac{a^2+ax+x^2}{a^3-x^3}$.

305. $\frac{a-x}{a^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{2}}}-\frac{a+a^{\frac{1}{4}}x^{\frac{3}{4}}}{a^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{4}}x^{\frac{1}{4}}}+(ax)^{\frac{1}{4}}$.

306. $\left(\frac{1+x\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x}}{1-\sqrt[3]{x^2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)\cdot\left(\frac{1+x}{1+\sqrt[3]{x}}-x^{\frac{2}{3}}\right)$.

307. V, S і d — об'єм, площа поверхні і діагональ куба. Виразіть кожну з цих величин через кожну з інших.

§ 15. ІРРАЦІОНАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Рівняння називається *алгебраїчним*, якщо обидві його частини — алгебраїчні вирази.

Алгебраїчне рівняння називається *ірраціональним*, якщо воно містить змінні під знаком кореня або в основі степеня з дробовим показником.

Приклади ірраціональних рівнянь:

$$x - 5x^{\frac{1}{2}} + 4 = 0, \quad \sqrt{x-1} = 3 - x, \quad \sqrt[4]{97 - x} + \sqrt[4]{x} = 5.$$

Деякі з таких рівнянь можна розв'язувати способом заміни. Так, замінивши в першому рівнянні $x^{\frac{1}{2}}$ на y, дістанемо квадратне рівняння $y^2 - 5y + 4 = 0$, корені якого $y_1 = 1$, $y_2 = 4$. Отже, $x^{\frac{1}{2}} = 1$ або $x^{\frac{1}{2}} = 4$, звідки $x_1 = 1$, $x_2 = 16$.

Рівняння $\sqrt{x-1} = 3 - x$ можна подати у вигляді $(x-1) + \sqrt{x-1} - 2 = 0$, а потім, замінивши $\sqrt{x-1}$ на y, звести його до квадратного. Неважко розв'язати його і графічним способом (мал. 43).

Більшість ірраціональних рівнянь розв'язують піднесенням обох їх частин до степеня з тим самим натуральним показником. При цьому можуть з'явитися сторонні розв'язки, їх відкидають у результаті перевірки.

П р и к л а д. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{3x^2 + x + 11} = 2x + 1$.

Р о з в' я з а н н я. Піднесемо обидві частини рівняння до квадрата:

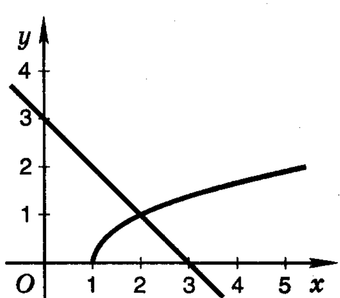
$$3x^2 + x + 11 = 4x^2 + 4x + 1, \text{ або } x^2 + 3x - 10 = 0.$$

Корені утвореного квадратного рівняння: -5 і 2.

Якщо $x = -5$, то $\sqrt{75 - 5 + 11} = -10 + 1$, але $\sqrt{81} \neq -9$;

якщо $x = 2$, то $\sqrt{12 + 2 + 11} = 4 + 1$, $\sqrt{25} = 5$.

В і д п о в і д ь. $x = 2$.



Мал. 43

Чи завжди при піднесенні обох частин рівняння до того самого степеня з'являються сторонні розв'язки? Ні.

Т е о р е м а. ***Рівняння $f(x) = \varphi(x)$ і $f^n(x) = \varphi^n(x)$ рівносильні, якщо натуральне число n непарне або функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ можуть приймати тільки невід'ємні значення.***

Д о в е д е н н я. Якщо при деякому значенні x виконується рівність $f(x) = \varphi(x)$, то за однозначністю дії піднесення до степеня і $f^n(x) = \varphi^n(x)$. Це означає, що кожний розв'язок першого рівняння є також розв'язком другого рівняння.

Якщо вирази $f(x)$ і $\varphi(x)$ можуть приймати тільки невід'ємні значення або якщо число n непарне, то, як показано у § 11, з рівності $f^n(x) = \varphi^n(x)$ завжди випливає рівність $f(x) = \varphi(x)$. А це означає, що при зазначених умовах кожний розв'язок рівняння $f^n(x) = \varphi^n(x)$ є також розв'язком рівняння $f(x) = \varphi(x)$. Отже, множини розв'язків розглядуваних рівнянь збігаються, тому ці рівняння рівносильні.

308. Які з рівнянь алгебраїчні, які ірраціональні:

а) $\sqrt{x} = \operatorname{tg} x$; б) $\sqrt[5]{2} = x - 3$;

в) $\sqrt{x-3} = x^{\frac{1}{3}}$; г) $x + \sqrt{x} = \sqrt[3]{x}$;

ґ) $\sqrt[4]{(x-2)^4} = 3$; д) $\dfrac{x}{x-2} = \sqrt{8}$?

Розв'яжіть рівняння (309—326).

309°. а) $\sqrt{x} = 9$; б) $\sqrt[3]{x} = 2$; в) $\sqrt[3]{x} = -2$.

310°. а) $x^{\frac{2}{3}} = 4$; б) $y^{\frac{3}{2}} = 8$; в) $z^{\frac{1}{5}} = -3$.

311°. а) $x^{-1,5} = 8$; б) $y^{-\frac{2}{3}} = 0,25$; в) $z^{-0,5} = 0,5$.

312°. а) $(x^2+19)^{\frac{1}{2}} = 10$; б) $(x^2-28)^{\frac{1}{3}} = 2$; в) $(9-x^2)^{0,5} = \sqrt{5}$.

313°. а) $x - 5\sqrt{x} + 6 = 0$; б) $y + 6 = 5x^{\frac{1}{2}}$; в) $x^{\frac{2}{3}} = 2x^{\frac{1}{3}} + 3$.

314. а) $z + 5\sqrt{z} + 4 = 0$; б) $\sqrt[3]{x^2} - 3 = 2\sqrt[3]{x}$; в) $\sqrt[4]{x} + \sqrt{x} = 6$.

315. а) $\dfrac{x-1}{x^{0,5}+1} = 1$; б) $\dfrac{x^3-1}{x^{1,5}-1} = 9$; в) $\dfrac{\sqrt{x^2-2}}{\sqrt{x}} = 1$.

316. а) $y - 1 = 3(y^{0,5}+1)$; б) $t - 4 = 5(t^{0,5} - 2)$.

317. а) $2 + \sqrt{2x-1} = x$; б) $\sqrt{3y+1} = y - 3$.

318°. а) $\sqrt{x^2-x-3} = \sqrt{x}$; б) $\sqrt{2z-3} - \sqrt{z+2} = 0$.

319. а) $2 + \sqrt[3]{x^2-8} = x$; б) $\sqrt[3]{y^3-y^2-6y+8} = y$.

320°. а) $\sqrt{x+1} \cdot \sqrt{x+6} = 6$; б) $x\sqrt{x-2} = 2x^{\frac{3}{2}}$.

321. а) $\frac{z+6}{\sqrt{z-2}} = \sqrt{3z+2}$; б) $\frac{y+1}{\sqrt{2y-1}} = \sqrt{y-1}$.

322°. а) $\sqrt{5+\sqrt[3]{x+3}} = 3$; б) $\sqrt{18-\sqrt[3]{t+10}} = 4$.

323. а) $(x+2)^{0,5} = 2+(x-6)^{0,5}$; б) $1+(n-4)^{\frac{1}{2}} = (n-3)^{\frac{1}{2}}$.

324. а) $(x-3)^{\frac{1}{2}} = 6+(x-3)^{\frac{1}{4}}$; б) $3(x^2-3)^{0,1}+(x^2-3)^{0,2} = 4$.

325. а) $\sqrt{x+5}+\sqrt{4x-7} = 6$; б) $(3x+7)^{0,5}-(x+1)^{0,5} = 2$.

326. а) $\sqrt[3]{x-4}+\sqrt{x+1} = 1$; б) $(x^2-4\sqrt{x+1})^{0,5} = x+2$.

327. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x^{\frac{1}{3}} - y^{\frac{1}{3}} = 1, \\ x - y = 7. \end{cases}$

Розв'язання. Нехай $x^{\frac{1}{3}} = u$ і $y^{\frac{1}{3}} = v$, тоді $u - v = 1$ і $u^3 - v^3 = 7$. З першого рівняння знаходимо: $u = v + 1$. Підставивши у друге рівняння $v + 1$ замість u, дістанемо: $v^3 + 3v^2 + 3v + 1 - v^3 = 7$, або $v^2 + v - 2 = 0$.

Корені утвореного квадратного рівняння: -2 і 1. Отже, $y^{\frac{1}{3}} = -2$ або $y^{\frac{1}{3}} = 1$, звідки $y = -8$ або $y = 1$. Відповідні значення x: -1 і 8.

Відповідь. Два розв'язки: $x_1 = -1$, $y_1 = -8$ і $x_2 = 8$, $y_2 = 1$.

Розв'яжіть систему рівнянь (328—332).

328°. а) $\begin{cases} x^{\frac{1}{3}} - y^{\frac{1}{3}} = 1, \\ x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}} = 3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = 8, \\ x^{\frac{1}{2}} - 2y^{\frac{1}{2}} = 5. \end{cases}$

329°. а) $\begin{cases} 2x^{\frac{1}{2}} - y = 5, \\ x^{\frac{1}{2}}y = 3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + 3\sqrt{z} = 10, \\ x\sqrt{z} = 8. \end{cases}$

330. а) $\begin{cases} x - y = 16, \\ x^{0,5} + y^{0,5} = 8; \end{cases}$ б) $\begin{cases} (5x+1)^{\frac{1}{2}} + 2(y-2)^{\frac{1}{2}} = 8, \\ 2(5x+1)^{\frac{1}{2}} - 3(y-2)^{\frac{1}{2}} = 2. \end{cases}$

331. а) $\begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 4, \\ x + y = 28; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} = 2, \\ xy = 27. \end{cases}$

332. а) $\begin{cases}\sqrt{\frac{x}{y}}-\sqrt{\frac{y}{x}}=\frac{3}{2},\\ x+y+xy=9;\end{cases}$ б) $\begin{cases}\sqrt{2x}-\sqrt{3y}=5,\\ \sqrt[4]{2x}-\sqrt[4]{3y}=1.\end{cases}$

333°. Знайдіть катети прямокутного трикутника, якщо його гіпотенуза дорівнює 13 см, а периметр 30 см.

334°. Периметр прямокутника дорівнює 158 см, а діагональ 65 см. Знайдіть його сторони.

335. Знайдіть катети прямокутного трикутника, якщо один з них на 7 більший від другого, а радіус вписаного кола дорівнює 3.

336. При якому значенні x значення функції $y=\sqrt{x-1}$ дорівнює значенню функції $y=\sqrt{2}-\sqrt{x-1}$?

337. При якому значенні x значення функції $y=\sqrt{x+3}$ на 1 менше від значення функції $y=0{,}5\,(x+3)^{0,5}$?

338. Яка точка графіка функції $y=x^{\frac{1}{2}}$ віддалена від початку координат у 6 раз далі, ніж точка A (1; 1)?

§ 16. ІРРАЦІОНАЛЬНІ НЕРІВНОСТІ

Ірраціональною **називають нерівність, яка містить змінну під знаком кореня або в основі степеня з дробовим показником.** Приклади:

1. $\sqrt{x-1}<10$; 2. $\sqrt[3]{x^2+2}\ge 3$; 3. $(x^2+9)^{\frac{1}{2}}\le 3$.

Розв'язувати такі нерівності можна на основі властивостей відповідних степеневих функцій.

1. Оскільки функція $y=\sqrt{x}$ зростає на всій множині невід'ємних чисел і $10=\sqrt{100}$, то нерівність $\sqrt{x-1}<10$ рівносильна подвійній нерівності $0\le x-1<100$, звідки $1\le x<101$, $x\in[1;\,101)$.

2. Функція $y=\sqrt[3]{x}$ зростає на $\boldsymbol{R}$ і $3=\sqrt[3]{27}$. Тому $x^2+2\ge 27$, $x^2\ge 25$, звідки $x\ge 5$ або $x\le -5$. Отже, $x\in(-\infty;\,-5]\cup[5;\,\infty)$.

3. Значення виразу $(x^2+9)^{\frac{1}{2}}$ не менше за 3. Тому нерівність $(x^2+9)^{\frac{1}{2}}\le 3$ задовольняє тільки одне значення: $x=0$.

Нерівність $\sqrt{g(x)}<f(x)$ задовольняють тільки такі значення x, при яких: 1) $g(x)\ge 0$, бо підкореневий вираз не може бути від'ємним; 2) $f(x)>0$, бо невід'ємне число не може бути меншим за від'ємне; 3) $g(x) < (f(x))^2$, бо якщо обидві частини нерівності невід'ємні, то їх можна підносити до квадрату. Отже, *нерівність* $\sqrt{g(x)} < f(x)$ *рівносильна системі нерівностей*:

$$\begin{cases} g(x) \ge 0, \\ f(x) > 0, \\ g(x) < (f(x))^2. \end{cases}$$

Подібним способом можна переконатись, що *нерівність* $\sqrt{g(x)} > f(x)$ *рівносильна сукупності двох систем*:

$$\begin{cases} g(x) \ge 0, \\ f(x) < 0 \end{cases} \text{ і } \begin{cases} f(x) \ge 0, \\ g(x) > (f(x))^2. \end{cases}$$

Розв'яжіть нерівність (339—348).

339°. а) $\sqrt{x} < 3$; б) $\sqrt{x} \le 5$;
в) $\sqrt{x} > 7$; г) $\sqrt{x} > -2$.

340°. а) $\sqrt{x-2} < 1$; б) $\sqrt{x+5} < 5$;
в) $(x-1)^{0,5} < 4$; г) $(x+4)^{0,5} > 1$.

341°. а) $\sqrt[3]{x+2} < 3$; б) $\sqrt[3]{7-x} > 2$;
в) $(1+x)^{\frac{1}{3}} \le -1$; г) $(2-x)^{\frac{1}{3}} \ge -3$.

342. а) $\sqrt{2x+8} < \sqrt{6}$; б) $\sqrt[3]{5-4x} < \sqrt[3]{7}$;
в) $\left(\frac{x}{2}-1\right)^{0,5} < \frac{1}{2}$; г) $\left(2-\frac{3x}{2}\right)^3 > 1$.

343. а) $\sqrt{x-1} < x$; б) $\sqrt{2x} < x$;
в) $\sqrt[3]{2x} > x$; г) $\sqrt[3]{1-x} \le x$.

344. а) $2x < \sqrt{x^2-1}$; б) $3x \ge \sqrt{1-x}$;
в) $5-x > \sqrt{5-x}$; г) $x < \sqrt{1+x^2}$.

345. а) $\sqrt{3x-1} < 3-x$; б) $\sqrt{x+6} \ge x-1$.

346. а) $\sqrt{5-2x} > 4x-1$; б) $\sqrt{3x+1} \le 5-2x$.

347*. а) $\sqrt{x^2-x-2} \ge 6+2x$; б) $2-x \le \sqrt{2x^2-x-1}$.

348*. а) $\sqrt{x^2-5x+6} > \sqrt{4x-x^2-4}$; б) $\sqrt{4x-4x^2-1} > \sqrt{x^2+x+1}$.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Варіант 1

1. Спростіть вираз $\left(\sqrt{4-x^2}+1\right):\left(\sqrt{2-x}+\dfrac{1}{\sqrt{2+x}}\right)$.

2. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{2x+1}=x-1$.

3. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x^{\frac{1}{2}}+2y^{\frac{1}{2}}=6, \\ 3x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}=11. \end{cases}$

4. Розв'яжіть нерівність $\sqrt{2x+1}<3$.

Варіант 2

1. Спростіть вираз $\left(1-\sqrt{9-a^2}\right)\cdot\left(\sqrt{3-a}-\dfrac{1}{\sqrt{3+a}}\right)^{-1}$.

2. Розв'яжіть рівняння $6+\sqrt{8-x}=x$.

3. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} \sqrt{x}-2\sqrt{y}=2, \\ 3\sqrt{x}+\sqrt{y}=13. \end{cases}$

4. Розв'яжіть нерівність $\sqrt{3x-1}<2$.

Варіант 3

1. Спростіть вираз $\left(\dfrac{1}{a-\sqrt{ac}}+\dfrac{1}{a+\sqrt{ac}}\right):\left(1-\dfrac{c}{a}\right)^{-1}$.

2. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{x+3}-\sqrt{x-2}=1$.

3. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} \sqrt{x+3}-\sqrt{x-2}=1, \\ 2\sqrt{x+3}-\sqrt{y+1}=4. \end{cases}$

4. Розв'яжіть нерівність $\sqrt{x^2-5x}<\sqrt{14}$.

Варіант 4

1. Спростіть вираз $\dfrac{\sqrt{a^3}-1}{\sqrt{a}+1}\cdot\dfrac{a-1}{a+\sqrt{a}+1}+4\sqrt{a}$.

2. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{x-3}+\sqrt{2x+1}=4$.

3. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x + y = 26, \\ x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}} = 2. \end{cases}$

4. Розв'яжіть нерівність $\sqrt{x^2 - 9} > 4$.

Контрольні запитання і завдання

1. Що розуміють під степенем з натуральним показником?

2. Чому дорівнює a^0, якщо $a \neq 0$?

3. Що розуміють під степенем з цілим показником?

4. Сформулюйте основну властивість степеня з цілим показником.

5. Чи завжди правильне твердження «якщо $a = b$, то $a^n = b^n$»?

6. За яких умов правильне твердження «якщо $a^n = b^n$, то $a = b$»?

7. За якої умови має зміст вираз $a^{\frac{1}{n}}$?

8. Що розуміють під степенем з дробовим показником?

9. За яких умов має зміст вираз $a^{\frac{m}{n}}$?

10. Чи завжди правильна рівність $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a$?

11. За яких умов правильна рівність $(a^m)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{m}{n}}$?

12. Сформулюйте означення кореня n-го степеня.

13. Які вирази називають раціональними, ірраціональними, алгебраїчними, трансцендентними?

14. Що розуміють під степенем з ірраціональним показником?

15. Які властивості мають степені з дійсними показниками?

16. Які функції називають степеневими?

17. Назвіть важливіші властивості степеневих функцій.

18. Які рівняння називають ірраціональними?

19. За яких умов рівняння $f(x) = \varphi(x)$ і $f^n(x) = \varphi^n(x)$ рівносильні?

20. Наведіть приклади ірраціональних нерівностей. Як їх розв'язують?

Історичні відомості

Поняття степеня з натуральним показником було відоме ще вченим Вавилона і Греції. Проте у широкий вжиток воно увійшло тільки після введення коренів. Європейські математики у XIII ст. позначали корені словом Radix. Пізніше поступово запроваджувались різні символи. Наприклад, замість теперішнього $\sqrt{12}$ писали $R^2\,12$, $\sqrt{②}\,12$ і т. п. Ще пізніше з'явилися знаки коренів $\sqrt[2]{}$, $\sqrt[3]{}$, $\sqrt[4]{}$. При цьому над підкореневим виразом ставили риску, наприклад $\sqrt[3]{a+b}$, Р. Декарт (1596—1650) перший почав сполучати цю риску із знаком кореня. Сучасні позначення кореня утвердилися тільки у XVIII ст.

Степені з дробовими показниками ввів у XIV ст. французький математик Н. Орем; степені з нульовим показником використовували в XV ст. самаркандський учений ал-Каші і французький учений Н. Шюке. Останній розглядав також степені з від'ємними показниками. Систематично їх використовував І. Ньютон. Він писав: «Як алгебраїсти замість AA, AAA і т. д. пишуть A^2, A^3, ..., так і я замість $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{a^3}$, ... пишу a^{-1}, a^{-2}, a^{-3} і т. д.»

Графіки простіших степеневих функцій, насамперед $y = x^2$ та $y = x^3$, будували Декарт, Ферма та інші французькі математики для графічного розв'язування рівнянь.

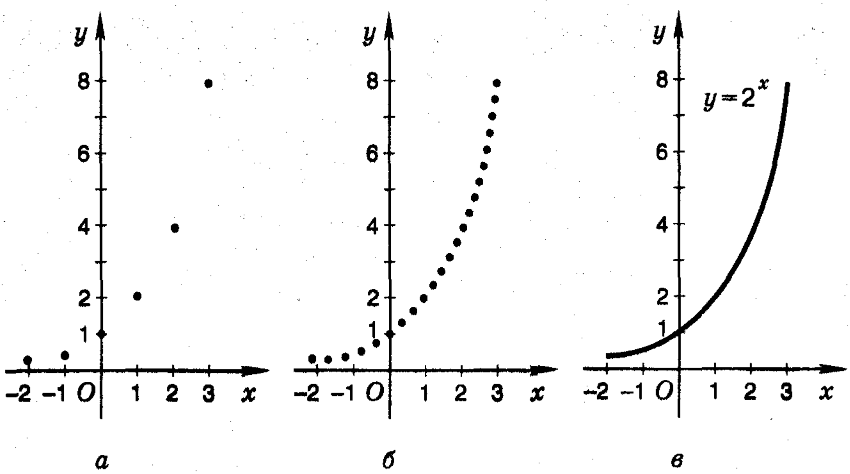
ПОКАЗНИКОВА І ЛОГАРИФМІЧНА ФУНКЦІЇ

§ 17. ПОКАЗНИКОВА ФУНКЦІЯ

Розглянемо функцію, задану рівністю $y = 2^x$. Складемо таблицю її значень для кількох значень аргументу:

x	-2	-1	0	1	2	3
y	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

На малюнку 44, *а* позначено точки, координати яких відповідають цій таблиці. Коли б на цій самій координатній площині позначити більше точок з координатами x, y, що задовольняють рівність $y = 2^x$, вони розмістились би, як показано на малюнку 44, *б*. А якщо для кожного дійсного значення x обчислити відповідне значення y і позначити на



Мал. 44

координатній площині точки з координатами x і y, вони розмістяться на одній нескінченній кривій (мал. 44, *в*). Ця крива — графік функції $y = 2^x$.

Графік функції $y = 2^x$ розміщений у I і II координатних чвертях. Коли $x \to -\infty$, він все ближче, як завгодно близько, підходить до осі x, але спільних точок з нею не має. Говорять, що графік функції $y = 2^x$ асимптотично наближається до осі x, що вісь x — *асимптота* цього графіка. Коли $x \to \infty$, він все далі відходить від осі x. Як бачимо, функція $y = 2^x$ визначена на множині всіх дійсних чисел, її область значень — проміжок $(0; \infty)$. На всій області визначення функція зростає; вона ні парна, ні непарна, ні періодична.

Розглянута функція $y = 2^x$ — приклад показникової функції, а саме — показникова функція з основою 2.

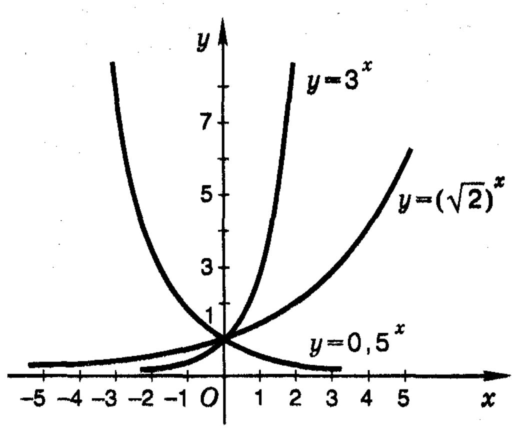
Показниковою функцією **називається функція, задана формулою $y = a^x$, де $a > 0$ і $a \neq 1$.**

Приклади інших показникових функцій: $y = 3^x$, $y = 0{,}5^x$, $y = \left(\sqrt{2}\right)^x$. Їх графіки зображені на малюнку 45.

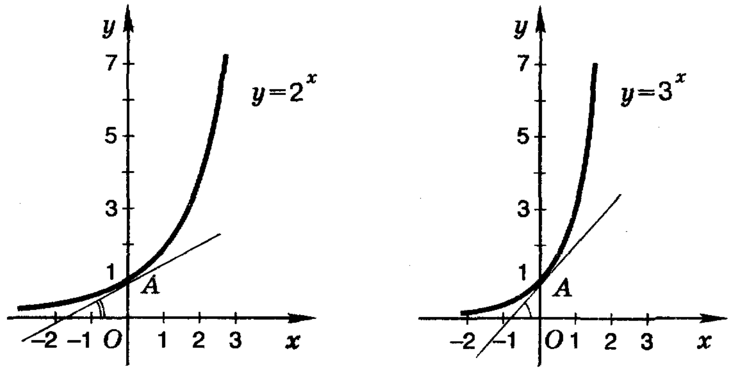
Відмітимо основні властивості показникової функції.

1) *Область визначення функції $y = a^x$ — множина $\mathbf{R}$.* Бо при кожному додатному a і дійсному x вираз a^x має числове значення.

2) *Функція $y = a^x$ набуває тільки додатних значень.* Бо якщо основа a степеня додатна, то додатний і степінь a^x.



Мал. 45



а *б*

Мал. 46

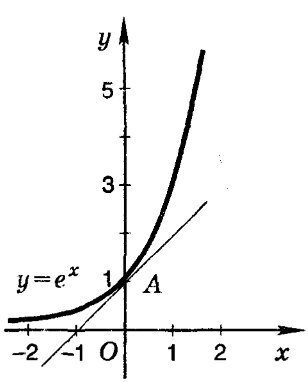
3) *Якщо* $a > 1$, *функція* $y = a^x$ *зростає, а якщо* $0 < a < 1$ — *спадає*. Цю властивість добре видно на графіках функцій, строге її доведення розглянемо в § 29.

4) *Функція* $y = a^x$ *кожного свого значення набуває тільки один раз*. Тобто пряму, паралельну осі x, графік показникової функції може перетнути тільки в одній точці. Це випливає з властивості 3.

5) *Функція* $y = a^x$ *ні парна, ні непарна, ні періодична*. Оскільки кожного свого значення вона набуває тільки один раз, то не може бути парною або періодичною. Не може вона бути і непарною, бо не набуває ні від'ємних, ні нульових значень.

6) *Графік кожної показникової функції проходить через точку* A (0; 1). Бо якщо $a \neq 0$, то $a^0 = 1$.

Придивіться до графіків показникових функцій $y = 2^x$ і $y = 3^x$ (мал. 46). Кутовий коефіцієнт дотичної, проведеної в точці A (0; 1) до графіка функції $y = 2^x$, менший від 1, а до графіка функції $y = 3^x$ більший від 1. А чи існує така показникова функція, що кутовий коефіцієнт дотичної до її графіка в точці A (0; 1) дорівнює 1? Існує (мал. 47). Основа цієї показникової функції — ірраціональне число 2,71828..., яке прийнято позначати буквою e. Показникова функція $y = e^x$ в математиці і багатьох прикладних науках трапляється досить часто, її називають *експонентою* (від лат. exponens — виставляти напоказ).



Мал. 47

349°. Обчисліть координати кількох точок графіка функції $y = 1{,}5^x$ і нанесіть їх на координатну площину.

350°. Побудуйте графік функції: а) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$; б) $y = \left(\sqrt{2}\right)^x$.

351°. Опишіть властивості функції: а) $y = \left(\frac{3}{2}\right)^x$; б) $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$.

352. За допомогою калькулятора знайдіть з точністю до 10^{-4} значення функції $y = 1{,}7^x$, якщо: а) $x = 0{,}5$; б) $x = 1{,}3$; в) $x = \sqrt{3}$.

353. Заповніть таблицю з точністю до 10^{-5}.

x	$-3{,}5$	$-2{,}5$	$-1{,}5$	$1{,}5$	$2{,}5$	3
2^x						
$0{,}5^x$						

354°. Знайдіть основу показникової функції, якщо її графік проходить через точку: а) A (5; 32); б) B (–1; 2); в) C (–2; 4).

355. Чи існує показникова функція, графік якої проходить через точку: а) A (1; 5); б) B (2; 1); в) O (0; 0); г) C (0; 7)?

356°. Побудуйте графік функції:

а) $y = 2^x - 3$; б) $y = 2 + 2^x$; в) $y = 2^{x-3}$;
г) $y = 2 \cdot 2^x$; ґ) $y = 2^x : 4$; д) $y = 2^{2x}$.

357. Знайдіть область значень функції:

а) $y = 3^x - 2$; б) $y = 0{,}5^x + 1$; в) $y = 2^{0{,}5x}$.

358. Чи можуть перетинатись графіки функцій $y = 2^x$ і $y = 2^{x+1}$?

359. Функція $f(x) = 0{,}5^x$ задана на $[-2; 3]$. Знайдіть її найменше і найбільше значення.

Р о з в' я з а н н я. Оскільки $0{,}5 < 1$, то дана функція спадна. Тому її найменше і найбільше значення:

$f(3) = 0{,}5^3 = 0{,}125$; $f(-2) = 0{,}5^{-2} = 4$.

В і д п о в і д ь. 0,125 і 4.

360. Знайдіть найменше і найбільше значення функції $f(x) = 2{,}5^x$ на $\left[-\frac{3}{4}; \frac{3}{4}\right]$.

361°. Розв'яжіть графічно рівняння:

а) $3^x = 4 - x$; б) $4^x + x = 5$; в) $2^{x+2} = 3x + 5$;
г) $0{,}5^x = \sqrt{x+5}$; ґ) $e^x = \sqrt{1-x}$; д) $\pi^x + x^{0{,}5} = 1$.

362°. Розв'яжіть графічно нерівність:

а) $2^x > 4$; б) $0{,}5^x \geq 8$; в) $(\sqrt{2})^x < 0{,}5$.

§ 18. ЛОГАРИФМИ ТА ЇХ ВЛАСТИВОСТІ

Нехай числа a і α дійсні, $a > 0$ і $a \neq 1$. Якщо $a^\alpha = b$, то число α називають логарифмом числа b за основою a.

Логарифмом числа b за основою a **називають показник степеня, до якого треба піднести число *a*, щоб дістати *b*.**

Логарифм числа b за основою a позначають символом $\log_a b$.

Приклади: $\log_2 8 = 3$, бо $2^3 = 8$;

$$\log_{\frac{1}{3}} 9 = -2, \text{ бо } \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = 9;$$

$$\log_{\sqrt{2}} 4 = 4, \text{ бо } (\sqrt{2})^4 = 4.$$

Основою логарифма може бути довільне додатне число, крім одиниці. Як відомо, коли $a > 0$ і $a \neq 1$, то область визначення показникової функції $y = a^x$ — множина всіх дійсних чисел $\boldsymbol{R}$. Тому при таких значеннях a для будь-якого додатного числа b знайдеться таке α, що $a^\alpha = b$. Іншими словами: при будь-якій основі a, де $a > 0$ і $a \neq 1$, існує логарифм кожного додатного числа. ***Логарифм від'ємного числа не існує.***

Корисно пам'ятати, що для кожного $a > 0$ і $a \neq 1$

$$\log_a 1 = 0 \text{ і } \log_a a = 1 \text{ (чому?).}$$

Згідно з означенням логарифма, якщо $a^\alpha = b$, то $\alpha = \log_a b$. Це — різні записи тієї самої залежності. З них випливає рівність

$$a^{\log_a b} = b,$$

яку називають ***основною логарифмічною тотожністю***. Вона правильна для будь-яких додатних a, b і $a \neq 1$.

Доведемо ще кілька важливих властивостей логарифмів (при додатних x, y, a, $a \neq 1$ і $p \in \boldsymbol{R}$):

$$1)\ \log_a xy = \log_a x + \log_a y;$$

$$2)\ \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y;$$

$$3)\ \log_a x^p = p \cdot \log_a x.$$

1) За основною логарифмічною тотожністю і основною властивістю степеня

$$xy = a^{\log_a x} \cdot a^{\log_a y} = a^{\log_a x + \log_a y}.$$

Отже, $\log_a x + \log_a y$ — показник, до якого треба піднести число a, щоб дістати xy; тобто

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y .$$

Формулу можна узагальнити на три і більше множників:

$$\log_a xyz = \log_a x + \log_a y + \log_a z .$$

Коротко говорять: ***логарифм добутку дорівнює сумі логарифмів множників.***

2) Доведення аналогічне до попереднього:

$$\frac{x}{y} = a^{\log_a x} : a^{\log_a y} = a^{\log_a x - \log_a y} ,$$

звідки

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y .$$

Коротко говорять: ***логарифм частки дорівнює різниці логарифмів діленого і дільника.***

3) Піднесемо обидві частини тотожності $x = a^{\log_a x}$ до степеня p:

$$x^p = (a^{\log_a x})^p = a^{p \log_a x} .$$

Отже,

$$\log_a x^p = p \log_a x .$$

Доведені формули можна використовувати і справа наліво, наприклад:

$$\log_{12} 3 + \log_{12} 4 = \log_{12} 3 \cdot 4 = \log_{12} 12 = 1 ,$$

$$\log_5 50 - \log_5 2 = \log_5 \frac{50}{2} = \log_5 25 = \log_5 5^2 = 2 .$$

Переходити від логарифмів однієї основи до іншої можна за *формулою переходу*

$$\log_a x = \frac{1}{\log_b a} \cdot \log_b x ,$$

де $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$, $x > 0$.

Доведемо цю формулу. Оскільки додатні числа x і $a^{\log_a x}$ рівні, то рівні і їх логарифми за основою b. Тому

$$\log_b x = \log_b (a^{\log_a x}) = \log_a x \cdot \log_b a ,$$

звідки й випливає доводжувана формула.

П р и к л а д. Знайдіть $\log_5 a$, якщо $\log_{25} a = m$.

Р о з в' я з а н н я. За формулою переходу

$$\log_5 a = \frac{1}{\log_{25} 5} \cdot \log_{25} a = \frac{1}{\log_{25} 25^{0,5}} \cdot m = 2m .$$

Особливо часто використовують логарифми за основами 10 і e, їх називають *десятковими* і *натуральними логарифмами.* Замість $\log_{10} a$ і $\log_e a$ пишуть відповідно $\lg a$ і $\ln a$.

363°. Покажіть, що:

а) $\log_2 16 = 4$; б) $\log_5 125 = 3$; в) $\log_{\sqrt{3}} 81 = 8$.

364°. Запишіть за допомогою логарифмів співвідношення:

а) $5^4 = 625$; б) $9^{0,5} = 3$; в) $4^{1,5} = 8$;
г) $6^0 = 1$; ґ) $10^{-3} = 0,001$; д) $a^{3x} = c$.

365°. Запишіть за допомогою показника степеня співвідношення:

а) $\log_3 81 = 4$; б) $\log_2 64 = 6$; в) $\log_{64} 2 = \frac{1}{6}$;
г) $\log_4 x = 3$; ґ) $\log_5 2x = 2$; д) $\log_x 49 = 2$.

366°. Чи правильна рівність:

а) $\log_{\sqrt{3}} 9 = 4$; б) $\log_{0,5} 4 = -2$; в) $\log_9 \sqrt{3} = 0,25$?

367. За якою основою логарифм числа 729 дорівнює 6?

368. Знаючи, що $\log_a b = 8$, обчисліть:

а) $\log_a ab$; б) $\log_a \frac{a}{b}$; в) $\log_a \frac{b}{a}$;
г) $\log_a (a^2b)$; ґ) $\log_a \sqrt{ab}$; д) $\log_a (ab)^{\frac{2}{3}}$.

369. Обчисліть значення виразу:

а) $5^{\log_5 4}$; б) $1,2^{\log_{1,2} 7}$; в) $0,3^{\log_{0,3} 0,3}$;
г) $\log_{15} 3 + \log_{15} 5$; ґ) $\lg 300 - \lg 3$; д) $\ln 3e - \ln 3$.

370. Обчисліть, користуючись мікрокалькулятором:

а) $\lg 23$; б) $\ln 48$; в) $\lg 0,378$;
г) $\ln \sqrt{10,27}$; ґ) $\log_4 329$; д) $\log_{0,7} 53,8$.

371. Спростіть вираз:

а) $2^{4\log_2 3}$; б) $9^{\log_3 5}$; в) $8^{\log_2 7}$;
г) $5^{-\log_5 4}$; ґ) $10^{1-\lg 5}$; д) $e^{2-\ln 2}$.

372°. Розв'яжіть рівняння:

а) $\log_2 x = 3$; б) $\log_{0,5} x = -2$; в) $\lg x = 3$;
г) $\lg x = -2$; ґ) $\log_x 81 = 4$; д) $\log_x 343 = -3$.

373°. При яких значеннях змінної має зміст вираз:

а) $\log_2 (3 - 5x)$; б) $\lg (9 - x^2)$; в) $\ln (x^2 - 2x)$;
г) $\lg \frac{2x+5}{x-1}$; ґ) $\log_3 |x|$; д) $\log_x (4 - x^2)$?

374. Доведіть, що, коли $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$, то:

а) $\log_a b \cdot \log_b a = 1$; б) $\log_{a^n} b^n = \log_a b$;
в) $a^{\lg b} = b^{\lg a}$; г) $\frac{\lg a}{\lg b} = \frac{\ln a}{\ln b}$.

375*. Доведіть, що:

а) $3^{\log_2 5} = 5^{\log_2 3}$; б) $7^{\log_5 4} = 4^{\log_5 7}$;

в) $\log_3 7 + \log_7 3 > 2$; г) $7^{\log_{\frac{1}{7}} 5} = \frac{1}{5}$.

376. Знайдіть x, якщо:

а) $\log_7 x = 3\log_7 2 + 0{,}5\log_7 25 - 2\log_7 2$;

б) $\ln x = 2\ln 5a + \ln b - 0{,}5\ln c - \ln a^2$.

§ 19. ЛОГАРИФМІЧНА ФУНКЦІЯ

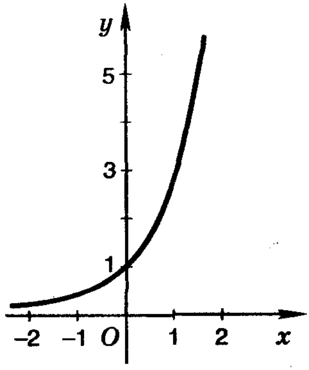
Як уже відомо, коли $a > 0$ і $a \neq 1$, то кожному додатному значенню x відповідає одне певне значення $\log_a x$. Тому рівність $y = \log_a x$ задає деяку функцію з областю визначення $(0; \infty)$.

Функцію, задану формулою $y = \log_a x$, називають *логарифмічною функцією з основою a*.

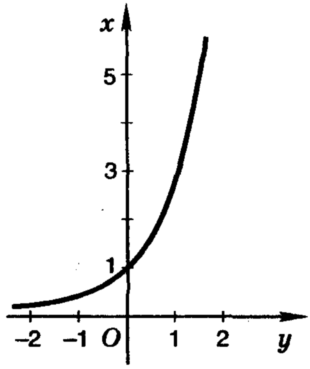
П р и к л а д и логарифмічних функцій: $y = \log_2 x$, $y = \lg x$, $y = \ln x$.

Як пов'язані між собою функції $y = \log_a x$ і $y = a^x$?

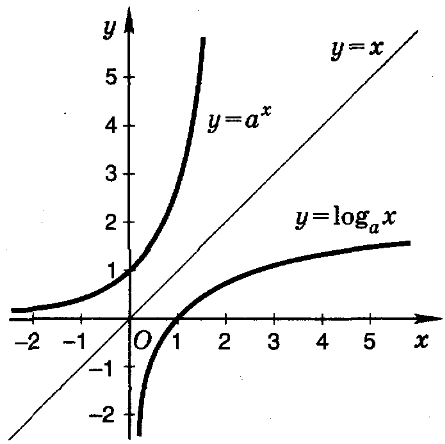
Рівність $y = a^x$ виражає ту саму залежність між x і y, що й $x = \log_a y$; цим двом рівностям відповідає один і той самий графік (мал. 48). Щоб від рівності $x = \log_a y$ перейти до $y = \log_a x$, треба поміняти місцями змінні x і y. Тому й на графіку слід поміняти місцями осі x і y (мал. 49). Цей малюнок — графік функції $y = \log_a x$, тільки його осі розміщені не так, як прийнято. Щоб зобразити графік функції $y = \log_a x$ при звичайному розміщенні координатних осей, треба весь малюнок відобразити симетрично відносно прямої $y = x$ (мал. 50).



Мал. 48



Мал. 49



Мал. 50

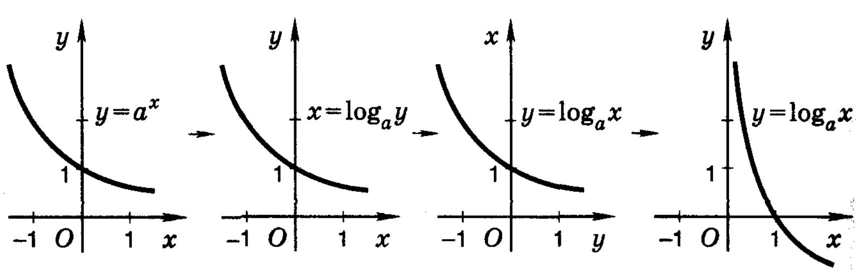
Отже, *графіки функцій* $y = a^x$ і $y = \log_a x$, *побудовані в одній системі координат, симетричні відносно прямої* $y = x$.

Схематично послідовність описаних перетворень розглядуваних функцій (якщо $0 < a < 1$) зображено на малюнку 51. Подібним способом можна перейти від функції $y = x^3$ до $y = x^{\frac{1}{3}}$ (мал. 52), від функції $y = 2x + 3$ до $y = \frac{x-3}{2}$ і т. д.

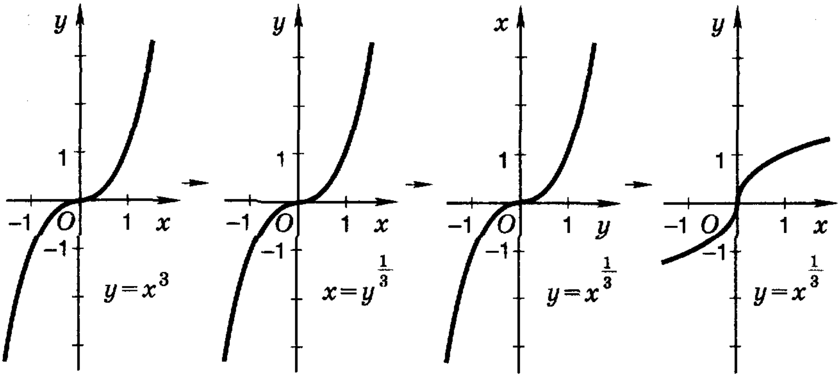
Функції, графіки яких симетричні відносно прямої $y = x$, називають *взаємно оберненими*. Зокрема, функція $y = \log_a x$ обернена до $y = a^x$, функція $y = x^{\frac{1}{3}}$ обернена до $y = x^3$ і навпаки.

Якщо дві функції взаємно обернені, то область визначення однієї з них є областю значень другої і навпаки.

Варто звернути увагу й на таке. *Якщо одна з двох взаємно обернених функцій на всій області визначення зростає, то і друга зростає.* Наприклад, якщо функція $y = a^x$ зростає, то більшому значенню x відповідає більше значення y, а більшо-



Мал. 51



Мал. 52

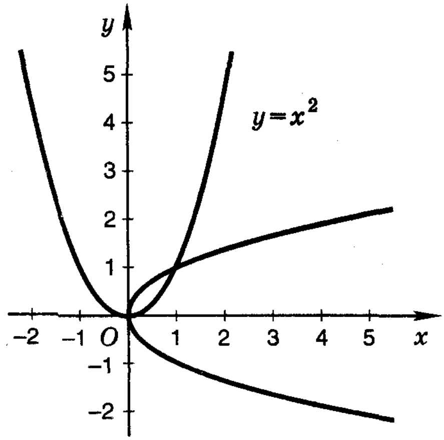
му значенню y — більше значення x. Тоді і в співвідношеннях $x = \log_a y$ та $y = \log_a x$ більшому значенню x відповідає більше значення y, тобто функція $y = \log_a x$ також зростає. А, наприклад, для функції $y = x^2$, яка на $\boldsymbol{R}$ спочатку спадає, а потім зростає, обернена функція не існує. Бо парабола, симетрична відносно прямої $y = x$ графіку функції $y = x^2$, не є графіком функції (мал. 53).

Із усього сказаного випливають такі **властивості логарифмічної функції**.

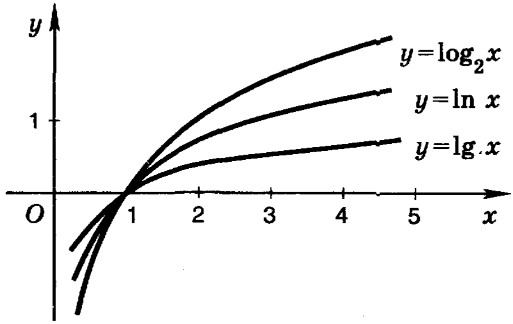
1) *Область визначення функції* $y = \log_a x$ — *проміжок* $(0; \infty)$.

2) *Область значень — множина* $\boldsymbol{R}$.

3) ***Функція зростає на всій області визначення, якщо*** $a > 1$, *а коли* $0 < a < 1$ — *спадає.*



Мал. 53



Мал. 54

4) *Функція ні парна, ні непарна, ні періодична.*

5) *Графік кожної логарифмічної функції проходить через точку* $A(1;\ 0)$.

Кілька графіків логарифмічних функцій зображено на малюнку 54.

Показникові і логарифмічні функції досить зручні для моделювання процесів, пов'язаних із зростанням населення, капіталу, розмноженням бактерій, зміною атмосферного тиску, радіоактивним розпадом і т. п. Тому їх часто використовують під час розв'язування прикладних задач.

377°. Чи можна назвати логарифмічною функцію:

а) $y = \log_{\sqrt{3}} x$; б) $y = \log_2 \sqrt{x}$; в) $y = \log_\pi x$;

г) $y = \log_3 \frac{1}{x}$; ґ) $y = \lg x^2$; д) $z = \ln t$?

378°. Побудуйте графік функції $y = 3^x$ і оберненої до неї.

379°. Побудуйте графік функції:

а) $y = \log_4 x$; б) $y = \lg x$; в) $y = \ln x$.

380. Опишіть властивості функції:

а) $y = \log_{2,5} x$; б) $y = \log_{0,5} x$.

381°. Чи проходить графік функції $y = \log_{\sqrt{3}} x$ через точку:

а) $A\ (6;\ 27)$; б) $B\ (27;\ 6)$; в) $C\ (\sqrt{3};\ 1)$?

382. Яке з чисел більше:

а) $\log_3 2{,}7$ чи $\log_3 2{,}5$; б) $\log_{0,5} 4$ чи $\log_{0,5} 5$;

в) $\ln 3$ чи $\lg \pi$; г) $\log_{\frac{1}{7}} 8$ чи $\log_7 \frac{1}{8}$?

383. Знайдіть область визначення функції:

а) $y = \lg(2 + x - x^2)$; б) $y = \ln \frac{3}{x-5}$;

в) $y = \log_2 \frac{x-1}{2-x}$; г) $y = \log_x (x - 0{,}5)$.

Р о з в' я з а н н я. а) Область визначення логарифмічної функції $(0; \infty)$, тому $2 + x - x^2 > 0$ або $x^2 - x - 2 < 0$. Корені рівняння $x^2 - x - 2 = 0$ дорівнюють -1 і 2, тому множина розв'язків нерівності $-1 < x < 2$.

В і д п о в і д ь. $(-1; 2)$.

384°. Побудуйте графік функції:

а) $y = \log_3(x - 2)$; б) $y = \log_3 x - 2$;

в) $y = \log_3 x - \log_3 2$; г) $y = \log_3(2 - x)$.

385°. Розв'яжіть графічно рівняння:

а) $\log_3 x = 1 - x$; б) $x - 1 = 3\log_4 x$;

в) $\log_2 x = \sqrt{3 - x}$; г) $\log_{0,5} x = -\frac{2}{x}$.

386. Розв'яжіть графічно нерівність:

а) $\log_2 x < 3 - x$; б) $\ln x < x^3 + 1$;

в) $\log_4 x > \frac{x}{3} - \frac{1}{3}$; г) $x < 11 - \lg x$.

387. Побудуйте графік функції:

а) $y = |\ln x|$; б) $y = \lg|x|$.

388. Знайдіть $f(-4)$, якщо $\log_2 f(x) = 3 + x$.

389*. Знайдіть найбільше і найменше значення функції $f(x)$ на проміжку I:

а) $f(x) = \log_8 x$, $I = \left[\frac{1}{8}; 8\right]$;

б) $f(x) = \log_{0,5} x$, $I = \left[\frac{1}{4}; 1\right]$;

в) $f(x) = \log_2(1 + x^2)$, $I = [-1; 2]$;

г) $f(x) = \log_2(x^2 - 4x)$, $I = [1; 4]$.

§ 20. ПОКАЗНИКОВІ ТА ЛОГАРИФМІЧНІ РІВНЯННЯ

Рівняння називається *показниковим*, якщо його невідомі входять лише до показників степенів.

П р и к л а д и.

$$9^x = \sqrt{3},\ 4^x + 2^{x+1} = 3,\ \left(\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}\right)^x - \left(\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}\right)^x = 2.$$

Рівняння називається *логарифмічним*, якщо його невідомі входять лише під знаки логарифмів.

Приклади.

$$\log_3 x = 2,\ \lg x + \log 4 = 2,\ \ln(3x - 2) = 1 - \ln x.$$

Простіші показникові рівняння розв'язують на основі такого твердження. *Якщо два степені з рівними основами, що не дорівнюють* 0, 1 *або* −1, *рівні, то рівні і їх показники степенів*. Наприклад, рівняння $9^x = \sqrt{3}$ можна розв'язати так:

$$3^{2x} = 3^{0,5},\quad 2x = 0,5,\quad x = 0,25.$$

Показникове рівняння $a^x = b$, якщо $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, має один розв'язок: $x = \log_a b$. Наприклад, рівняння $2^x = 3$ має розв'язок $x = \log_2 3$. Це — відповідь. Якщо ж пропонується її «довести до числа», тобто записати у вигляді десяткового дробу, то можна скористатись калькулятором. Для цього треба спочатку перейти до десяткових чи натуральних логарифмів за формулою переходу:

$$x = \log_2 3 = \frac{1}{\lg 2} \lg 3 = 1,58496.$$

Обчислюємо за програмою:

$\boxed{3}\ \boxed{F}\ \boxed{\lg}\ \boxed{\div}\ \boxed{2}\ \boxed{F}\ \boxed{\lg}\ \boxed{=}$

Щоб розв'язати рівняння $a^{f(x)} = b$, коли $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, досить розв'язати рівносильне йому рівняння $f(x) = \log_a b$. Якщо ж деякі з перелічених умов не виконуються, проводять додаткові дослідження. Наприклад, якщо $a > 0$ і $b \leq 0$, то дане рівняння розв'язків не має.

Розв'язуючи логарифмічні рівняння, здебільшого від логарифмів переходять до степенів. Наприклад, рівняння $\log_2 x = 3$ розв'язують так: $x = 2^3$, $x = 8$.

Багато показникових і логарифмічних рівнянь заміною $a^{f(x)} = y$ або $\log_a f(x) = y$ можна звести до алгебраїчного рівняння з невідомим y.

Приклад. Розв'яжіть рівняння

$(\lg x - 6)^{-1} + 5(\lg x + 2)^{-1} = 1.$

Розв'язання. Замінивши $\lg x$ на y, дістанемо рівняння

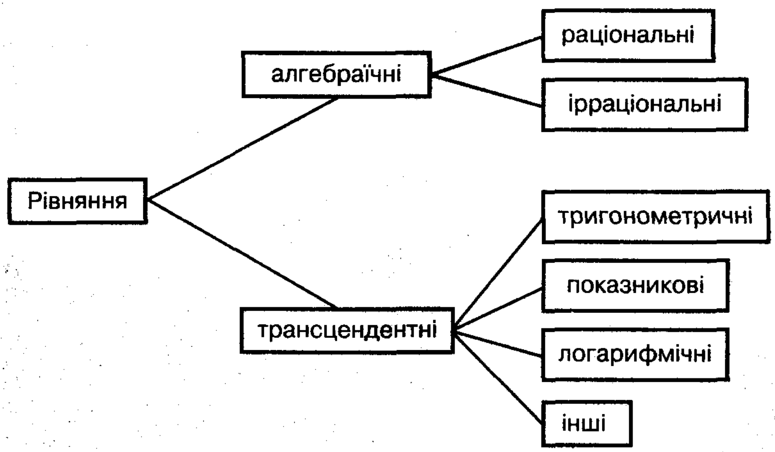
$$\frac{1}{y-6} + \frac{5}{y+2} = 1,$$

корені якого: $y_1 = 2$, $y_2 = 8$. Отже, $\lg x_1 = 2$ або $\lg x_2 = 8$, звідки $x_1 = 100$, $x_2 = 10^8$.

Перевірка показує, що обидва значення задовольняють рівняння.

Відповідь. $x_1 = 100$, $x_2 = 10^8$.

Показникові і логарифмічні рівняння — окремі види *трансцендентних рівнянь*. Латинське слово transcendentis — той, що виходить за межі. Йдеться про межі алгебри. Трансцендентні рівняння — це рівняння, які не є алгебраїчними (див. схему):



До «інших» відносяться, наприклад, такі рівняння:

$$2^x = x + 5,\ x^{x+1} = x^2,\ \lg x = \sin x.$$

Тільки для деяких із подібних рівнянь можна вказати точні розв'язки. Їх наближені корені знаходять здебільшого графічним способом.

390. Які з рівнянь показникові, логарифмічні, трансцендентні:

а) $(\sqrt{3})^x = 5$; б) $4 = \sqrt[3]{5^x}$; в) $(x + 1)^x = 64$;

г) $2 - \lg x = 4^{\frac{1}{3}}$; ґ) $2^{\sin x} = \ln x$; д) $\lg x \cdot \lg (x - 1) = 1$?

391. Знайдіть корені рівнянь з точністю до 10^{-4}:

а) $10^x = 3$; б) $6^x = 5$; в) $e^x = 4{,}7$;

г) $0{,}2^x = 0{,}4$; ґ) $\pi^x = 5$; д) $1{,}3^x = e$.

Розв'яжіть рівняння (392—404).

392°. а) $4^{x-2} = 2$; б) $9^{3-x} = \sqrt{3}$.

393°. а) $8^{2x-1} = 2\sqrt{2}$; б) $0{,}4^{2x+1} = 0{,}16$.

394. а) $\left(\frac{3}{2}\right)^x \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^x = \frac{64}{27}$; б) $\left(\frac{27}{8}\right)^x = \frac{2187}{128}$.

395°. а) $3^{2x} + 8 \cdot 9^x - 9 = 0$; б) $3 \cdot 2^{4x} - 16^x - 32 = 0$.

396. а) $5^{x+1} + 5^x = 150$; б) $2\cdot 3^{x+1} - 3^x = 15$.

Р о з в' я з а н н я. б) $3^x(2\cdot 3 - 1) = 15$,
$3^x\cdot 5 = 15$, $3^x = 3$.

В і д п о в і д ь. $x = 1$.

397. а) $3^{x+1} - 2\cdot 3^{x-2} = 75$; б) $5\cdot 0{,}5^{x-3} + 0{,}5^{x+1} = 162$.

398°. а) $8^{x+1} = 5^{x+1}$; б) $13^{x-3} - 11^{3-x} = 0$.

399°. а) $6^{2x} - 4\cdot 6^x - 12 = 0$; б) $49^x - 8\cdot 7^x + 7 = 0$.

400. а) $9^x - 8\cdot 3^x = 9$; б) $7^{2x} + 7 = 8\cdot 7^x$.

401. а) $2^{-x} - (2^x + 3)^{-1} = 0{,}3$; б) $3^x + 3^{-x} = 5{,}2$.

402. а) $4^{\sqrt{x-2}} + 16 = 10\cdot 2^{\sqrt{x-2}}$; б) $8 + 2^{1+\sqrt{x}} = 4^{\sqrt{x}}$.

403. а) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-1} + 3 = 10\cdot 3^{-x}$; б) $6 + 5\cdot 6^{-x} = \left(\frac{1}{36}\right)^x$.

404. а) $4^{\sqrt{x+1}} - 2^{2+\sqrt{x+1}} = 0$; б) $(2^x + 10)\cdot 2^{x-2} = 36$.

405. Знайдіть з точністю до 10^{-4} корені рівняння:

а) $\lg x = 0{,}4$; б) $\lg x = -1{,}5$; в) $\ln x = 3{,}7$;
г) $\log_3 x = 2{,}5$; ґ) $\log_{0,5} x = 3$; д) $\log_{\sqrt{2}} x = \sqrt{3}$.

Розв'яжіть рівняння (406—415).

406°. а) $\log_2 (x - 3) = 4$; б) $\lg (x + 5) = 2$; в) $\ln (2 - x) = -1$

407°. а) $\lg 2x = 4$; б) $\lg x^2 = 4$; в) $\lg \frac{x}{2} = 3$.

408°. а) $\lg^2 x = 1$; б) $\ln^2 x = 4$; в) $\log_2^2 x = 9$.

409°. а) $\log_{0,5} (3x - 1) = 3$; б) $\log_{\frac{1}{7}}(4z + 1) = -2$.

410. а) $\lg (2x - 1) + \lg (x - 9) = 2$;
б) $\ln (x - 8) + \ln (1 - x) = 1$.

Р о з в' я з а н н я. а) Перетворимо дане рівняння:
$\lg (2x - 1)(x - 9) = \lg 100$, $(2x - 1)(x - 9) = 100$,
звідки $2x^2 - 19x - 91 = 0$. Корені цього квадратного рі
няння: 13 і $-\frac{7}{2}$. Перший з них дане рівняння задовольняє, б

$\lg (2\cdot 13 - 1) + \lg (13 - 9) = \lg 25 + \lg 4 = \lg 100 = 2$.
Число $-\frac{7}{2}$ не є коренем даного рівняння, бо при таком
значенні його ліва частина не має змісту.

В і д п о в і д ь. $x = 13$.

б) Щоб мали зміст $\ln(x-8)$ і $\ln(1-x)$, треба, щоб одночасно виконувались нерівності $x-8>0$ і $1-x>0$. Система цих нерівностей розв'язку не має.

Відповідь. Рівняння не має розв'язків.

411°. а) $\ln(x^2+2x-7)=0$; б) $\lg(3c^2+12c+19)=1$.

412. а) $\lg^2 x-\lg x-2=0$; б) $\ln^2 x-2\ln x=3$.

413. а) $\frac{1}{1+\lg z}+\frac{6}{5+\lg z}=1$; б) $\frac{2\lg x}{\lg(5x-4)}=1$.

414. а) $\log_3 x-2\log_{\frac{1}{3}} x=6$; б) $4-\lg z=3\sqrt{\lg z}$.

415. а) $\log_{0,5}\log_8\frac{x^2-2x}{x-3}=0$; б) $\log_x 2+\log_2 x=2,5$.

416. Розв'яжіть систему рівнянь:

а) $\begin{cases}3^{x+y}=27,\\4^{x-y}=0,25;\end{cases}$ б) $\begin{cases}3^{2x-y}=3,\\2^x+2^y=12;\end{cases}$ в) $\begin{cases}6^{3x-y}=\sqrt{6},\\2^{y-2x}=\sqrt{2^{-1}};\end{cases}$

г) $\begin{cases}x+y=5,\\4^x+4^y=80;\end{cases}$ ґ) $\begin{cases}\lg(x+y)=2,\\\lg(x-y)=1;\end{cases}$ д) $\begin{cases}\lg x+\lg y=\lg 2,\\x^2+y^2=5.\end{cases}$

417*. Розв'яжіть рівняння:

а) $\log_2|x+2|+\log_2|x+5|=1$;

б) $\lg|x^2-5x+6|-\lg|x^2-3x|=1$.

§ 21. ПОКАЗНИКОВІ ТА ЛОГАРИФМІЧНІ НЕРІВНОСТІ

Якщо в показниковому чи логарифмічному рівнянні знак рівності замінити знаком нерівності, дістанемо відповідно показникову чи логарифмічну нерівність. Простіші з таких нерівностей можна розв'язувати на основі властивостей відповідних функцій.

Приклади.

1. Розв'яжіть нерівність $3^x>9$.

Розв'язання. $3^x>3^2$. Функція $y=3^x$ на всій множині $\boldsymbol{R}$ зростає, тому більшому степеню відповідає і більший показник степеня.

Відповідь. $x>2$.

2. Розв'яжіть нерівність $\log_{0,5}x>3$.

Розв'язання. $\log_{0,5}x>\log_{0,5}0,5^3$. Функція $y=\log_{0,5}x$ на всій області визначення $(0;\ \infty)$ спадає, бо $0,5<1$. Тому $x<0,5^3$.

Відповідь. $0<x<0,125$.

3. Розв'яжіть нерівність

$$3^{2x+4} - 2 \cdot 3^{x+2} \le 3.$$

Розв'язання. Нехай $3^{x+2} = y$, тоді $3^{2x+4} = y^2$. Маємо квадратну нерівність $y^2 - 2y - 3 \le 0$, множина розв'язків якої $[-1; 3]$. До того ж $y > 0$, отже, $0 < 3^{x+2} \le 3$, звідки $x + 2 \le 1$, $x \le -1$.

Відповідь. $(-\infty; -1]$.

4. Розв'яжіть нерівність

$$\lg (x - 1) + \lg (8 - x) < 1.$$

Розв'язання. Знайдемо спочатку область допустимих значень x. Система нерівностей $x - 1 > 0$ і $8 - x > 0$ має множину розв'язків $(1; 8)$. На цій множині дана нерівність рівносильна нерівності $\lg (x - 1)(8 - x) < 1$, або $(x - 1)(8 - x) < 10$, $x^2 - 9x + 18 > 0$.

Множина розв'язків утвореної квадратної нерівності: $(-\infty; 3) \cup (6; \infty)$. Враховуючи, що $x \in (1; 8)$, дістанемо відповідь: $(1; 3) \cup (6; 8)$.

Розв'яжіть нерівність (418—432).

418°. а) $2^x < 32$; б) $0{,}2^x > 0{,}008$; в) $10^x < 5$.

419°. а) $\lg x < 3$; б) $\log_4 x \le 2$; в) $\ln x < 1$.

420. а) $5^{2x} < 5^{x+1}$; б) $0{,}1^{3x} < 0{,}1^{2x-3}$; в) $\pi^x < e^x$.

421°. а) $5^{4x} - 25^{x+3} < 0$; б) $0{,}2^{x-5} - 0{,}04^x > 0$.

422. а) $3^{x+2} - 3^x < 8$; б) $3^{x+2} + 3^{x-1} < 28$.

423. а) $\log_4 (x - 2) < 2$; б) $\log_{\frac{1}{3}}(3 - 2x) > -1$.

424. а) $3^{4x+3} - 9^{2x} < 26$; б) $\left(\frac{2}{3}\right)^x + \left(\frac{2}{3}\right)^{x+1} > 2{,}5$.

425. а) $\lg (2x - 3) > \lg (x + 1)$; б) $\ln (x + 1) \le \ln (3x - 7)$.

426. а) $2^{2x} - 2^x + 40 < 0$; б) $3^{-2x} - 3^{-x} + 6 < 0$.

427. а) $4^x - 2^{x+1} - 8 > 0$; б) $0{,}25^x - 0{,}5^{x+1} - 3 < 0$.

428. а) $\lg x + \lg (x - 1) < \lg 6$; б) $\log_5 x + \log_5 (x - 2) < \log_5 125$.

429. а) $\log_2^2 x - 9 < 0$; б) $\log_{0,5}^2 x - 4 \ge 0$.

Розв'язання. б) Нехай $\log_{0,5} x = y$, тоді $y^2 - 4 \ge 0$. Утворену нерівність задовольняють значення $y \ge 2$, а також $y \le -2$. Отже, $\log_{0,5} x \ge 2$, звідки $\log_{0,5} x \ge \log_{0,5} 0{,}5^2$, $0 < x \le 0{,}25$ і $\log_{0,5} x \le -2$, звідки $\log_{0,5} x \le \log_{0,5} 0{,}5^{-2}$, $x \ge 4$.

В і д п о в і д ь. $(0;\ 0{,}25] \cup [4;\ \infty)$.

430. а) $\lg^2 x - \lg x \le 6$; б) $\ln^2 x - \ln x > 2$.

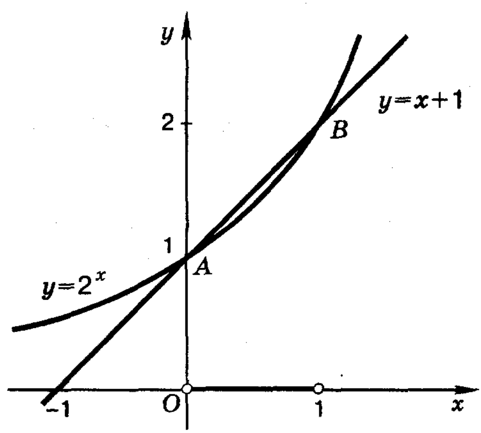
431. а) $|\log_2 x - 3| < 2$; б) $|1 - 3\lg x| < 2$.

432. а) $\lg(\sin x) < -1$; б) $\log_{0,5}(\cos 2x) > 1$.

433. Розв'яжіть графічно нерівність $2^x < x + 1$.

Р о з в' я з а н н я. Побудуємо в одній системі координат графіки функцій $y = 2^x$ і $y = x + 1$ (мал. 55). Вони перетинаються в точках $A\ (0;\ 1)$ і $B\ (1;\ 2)$. Значення 2^x менші за відповідні значення $x + 1$, якщо $0 < x < 1$.

В і д п о в і д ь. $(0;\ 1)$.



Мал. 55

Розв'яжіть графічно нерівність (434—439).

434°. а) $2^x \le \frac{2}{x}$; б) $0{,}5^x \ge x + 3$.

435°. а) $3x + x > 4$; б) $(x - 1)^2 + 2^x > 2$.

436. а) $0{,}3^x \ge x^3 + 1$; б) $x + \lg x > 1$.

437°. а) $x + \log_2 x < 3$; б) $x - \log_{0,5} \le 1$.

438. а) $e^x + 1 > \sin x$; б) $3^{x-1} < x^{-1}$.

439. а) $1 + \lg x < x^{-1}$; б) $e^x \ge ex^{-1}$.

440. Знайдіть цілі розв'язки нерівності:

а) $\log_2(3x - 4) < 3$; б) $0{,}1 < 2^{x+3} < 10$;

в) $0{,}1 < \pi^x < 10$; г) $0{,}1 \le e^x < 10$.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Варіант 1

1. Побудуйте графік функції:

а) $y = \log_3 x$; б) $y = \lg (x - 2)$.

2. Розв'яжіть рівняння:

а) $4^{x+1} - 4^{x-1} = 60$; б) $\lg (3x + 4) + \lg x = 1$.

3. Розв'яжіть нерівність:

а) $3^{4x} - 9^{x+2} < 0$; б) $\log_2 4x \le 3$.

Варіант 2

1. Побудуйте графік функції:

а) $y = \log_{0,5} x$; б) $y = \ln (x + 1)$.

2. Розв'яжіть рівняння:

а) $6^x - 6^{x-2} = 210$; б) $\lg (2x + 4) = 1 - \lg (x - 2)$.

3. Розв'яжіть нерівність:

а) $2^{4x} - 4^{x-2} > 0$; б) $\log_{0,6} 3x \ge 2$.

Варіант 3

1. Побудуйте графік функції:

а) $y = \lg x^2$; б) $y = 1 + \log_3 x$.

2. Розв'яжіть рівняння:

а) $4^x + 8 = 9 \cdot 2^x$; б) $\log_2^2 x = 3 + 2\log_2 x$.

3. Розв'яжіть нерівність:

а) $9^x - 3^{x+1} > 18$; б) $\lg (x + 2) \ge \lg (6 - x)$.

Варіант 4

1. Побудуйте графік функції:

а) $y = \ln x^2$; б) $y = \log_2 (x - 3)$.

2. Розв'яжіть рівняння:

а) $0,9 (9^{x-1} + 1) = 3^x$; б) $\log_2 x + \sqrt{\log_2 x} = 6$.

3. Розв'яжіть нерівність:

а) $4^x - 2^{x+2} < 32$; б) $\ln (3x + 1) < \ln (9 - x)$.

Контрольні запитання і завдання

1. Сформулюйте означення показникової функції.
2. Назвіть основні властивості показникової функції.

3. За якої умови показникова функція зростає, спадає?

4. Чи задає рівність $y = 1^x$ функцію? Який її графік? Чи є ця функція показниковою?

5. Що таке експонента? Накресліть її графік.

6. Що таке логарифм числа? Наведіть приклади.

7. Які логарифми називають десятковими, натуральними?

8. Сформулюйте основні властивості логарифмів.

9. Напишіть основну логарифмічну тотожність.

10. Які функції називають логарифмічними?

11. Назвіть основні властивості логарифмічної функції.

12. За якої умови логарифмічна функція зростає, спадає?

13. Які функції називають взаємно оберненими? Наведіть приклади.

14. Які рівняння називають показниковими, логарифмічними?

15. Як розв'язують показникові та логарифмічні рівняння?

16. Як розв'язують показникові та логарифмічні нерівності?

17. Які рівняння або нерівності називають трансцендентними?

Історичні відомості

Степені з дробовими і від'ємними показниками окремі математики розглядали ще в XV ст. Вчення про логарифми розроблене в основному в XVI ст., але в практику воно ввійшло тільки після створення таблиць логарифмів. Перші такі таблиці склав шотландський математик Д. Непер (1550—1617). За основу логарифмів він узяв число $\frac{1}{e}$. Непер ввів і термін «логарифм» (від грецьких слів λόγοζ — відношення, αριθμόζ — число).

Перші таблиці десяткових логарифмів створив у 1617 р. Г. Брігс, а натуральних — у 1619 р. Дж. Спейдель. Обидва — англійські математики.

До середини XX ст. логарифмічні таблиці і логарифмічні лінійки були найкращими засобами обчислень. Із поширенням електронних засобів, особливо мікрокалькуляторів, логарифмічні обчислення відійшли у минуле.

Показникові і логарифмічні функції ґрунтовно досліджував Л. Ейлер, називаючи їх «показниковими і логарифмічними кількостями».

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ (ПІДСУМКОВОЇ)

Варіант 1

1. Обчисліть значення виразу $\cos 945^\circ + \sin(-750^\circ)$.
2. Спростіть вираз $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 + (\sin\alpha - \cos\alpha)^2$.
3. Розв'яжіть рівняння $\sin x + \cos 2x = 0$.
4. Побудуйте графік функції $y = 2^{-x} + 1$.
5. Розв'яжіть нерівність $\log_2 x < 3$.

Варіант 2

1. Обчисліть значення виразу
$\sin 810^\circ - \cos 495^\circ + \text{tg}(-750^\circ)$.
2. Доведіть тотожність
$(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 - (\sin\alpha - \cos\alpha)^2 = 2\sin 2\alpha$.
3. Розв'яжіть рівняння $\cos x + \sin 2x = 0$.
4. Побудуйте графік функції $y = \log_2(x - 3)$.
5. Розв'яжіть нерівність $2^{3-x} > \sqrt{2}$.

Варіант 3

1. Обчисліть значення виразу $\sin\frac{2\pi}{3} - \cos\left(-\frac{5\pi}{4}\right) + \text{tg}\,\frac{7\pi}{3}$.
2. Доведіть тотожність
$$\left(\sin\alpha + \cos\frac{\alpha}{2}\right)^2 + \left(\cos\alpha - \sin\frac{\alpha}{2}\right)^2 = 2\left(1 + \sin^3\frac{\alpha}{2}\right).$$
3. Розв'яжіть рівняння $2\cos^2 x = \sqrt{3}\sin 2x$.
4. Побудуйте графік функції $y = 3 - 2^x$.
5. Розв'яжіть нерівність $\log_{0,5} x > 2$.

Варіант 4

1. Обчисліть значення виразу $\cos\frac{5\pi}{4} - \sin\left(-\frac{7\pi}{3}\right)\cdot\text{tg}\,\frac{4\pi}{3}$.
2. Спростіть вираз $8\sin^2\alpha\,\sin^2\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) - 1$.
3. Розв'яжіть рівняння $\sin^2 x - \sin 2x = 3\cos^2 x$.
4. Побудуйте графік функції $y = 3 + \log_{0,5} x$.
5. Розв'яжіть нерівність $0,5^{2-x} < 4$.

11 КЛАС

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

ПОХІДНА ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ

§ 22. ОСНОВНІ ВЛАСТИВОСТІ ФУНКЦІЙ

Спочатку повторимо найважливіші відомості про функцію.

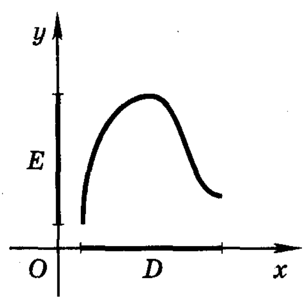
Функцією **з областю визначення D називають відповідність, при якій кожному значенню x з множини D співставляється за яким-небудь правилом деяке число y.** Записують: $y = f(x)$. Тут x — незалежна змінна або аргумент функції, y — значення функції, f — правило відповідності.

Якщо змінна x «пробігає» область визначення функції, то відповідні значення змінної y «пробігають» множину E, яку називають *областю значень* даної функції (мал. 56).

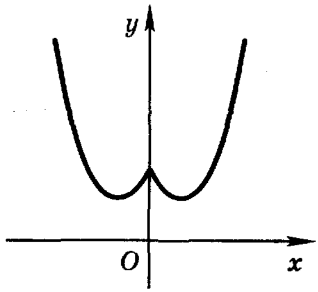
Дві функції вважаються різними, якщо в них різні області визначення або правила відповідності. Наприклад, функція $y = x^2$, задана на проміжку $[-3; 3]$, і функція $y = x^2$, задана на R, різні. А задані на R функції $y = \sin 2x$ і $y = 2 \sin x \cos x$ однакові, бо вирази $\sin 2x$ і $2 \sin x \cos x$ тотожно рівні.

Щоб задати функцію, досить зазначити її область визначення і правило відповідності. Якщо область визначення не вказують, то вважають, що вона така сама, як і область допустимих значень формули, якою задається функція.

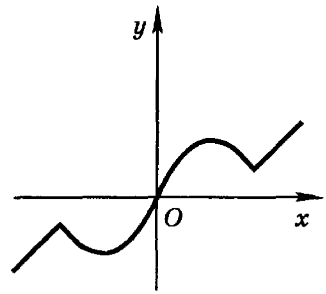
Функція називається *парною* (або *непарною*), якщо область її визначення симетрична відносно числа 0 і для кожного значення x з області визначення $f(-x) = f(x)$ (або відповідно $f(-x) = -f(x)$). Графік парної функції симетричний відносно осі y (мал. 57), а непарної — симетричний відносно початку координат (мал. 58).



Мал. 56



Мал. 57



Мал. 58

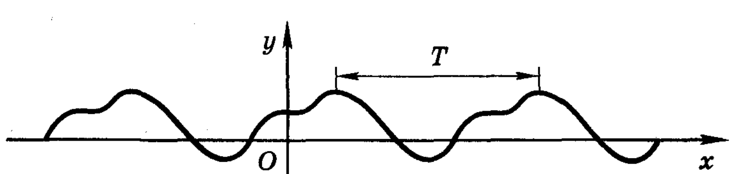
Наприклад, з функцій, заданих на R, $y = x^2$, $y = \cos x$, $y = |x|$ — парні, $y = x^3$, $y = \sin x$ — непарні, а $y = 2x + 3$, $y = x^2 + x$ — ні парні, ні непарні.

Функція $y = f(x)$ називається *періодичною* з періодом $T \neq 0$, якщо для будь-якого x з області її визначення $f(x) = f(x - T) = f(x + T)$. Графік періодичної функції з періодом T паралельним перенесенням на відстань T вздовж осі x відображається на себе (мал. 59). Функції $y = \sin x$ і $y = \cos x$ періодичні з найменшим додатним періодом 2π, а функції $y = \mathrm{tg}\, x$ і $y = \mathrm{ctg}\, x$ — з найменшим додатним періодом π.

Функція $y = f(x)$ *зростає* (*спадає*) на деякому проміжку, якщо для будь-яких двох значень аргументу x з цього проміжку більшому значенню x відповідає більше (менше) значення y. Наприклад, функція $y = x^2$ на проміжку $[0; \infty)$ зростає, а на $(-\infty; 0]$ спадає. Функція $y = x^3$ зростає на всій області визначення R.

Область визначення періодичної функції — уся числова пряма R або нескінченна з обох боків множина числових проміжків.

Функція $y = f(x)$ називається *раціональною*, якщо $f(x)$ — раціональний вираз відносно змінної x. Такими, зокрема, лінійні, квадратичні і степеневі функції з цілими показниками. З усіх раціональних функцій тільки функція $y = c$ може бути періодичною. Усі інші раціональні, а також степеневі, показникові і логарифмічні функції — не періодичні.



Мал. 59

441°. Функція $y = x^2$ задана на проміжку $[-2; 5]$. Знайдіть її область значень.

442°. Знайдіть область визначення функції $y = x^3$, якщо її область значень $[-8; 27]$.

443. Якою може бути область визначення функції $y = x^2$, якщо її область значень $[0; 49]$?

444. Задайте функцію, область визначення якої R, а область значень — проміжок $[-2; 2]$.

445°. Які з функцій $y = x^2$, $y = \cos x$, $y = \sin x$, $y = 2x^2 + 3$, $y = \sqrt{x}$ парні, які непарні?

446. Доведіть, що функції $y = x^2 - 7$ і $y = 3\cos x$ парні, а функції $y = x^3 - x$ і $y = 2\,\mathrm{tg}\,x$ непарні.

447. Чи може одна й та сама функція бути парною і непарною?

448°. Які з функцій $y = \sin 2x$, $y = -\cos x$, $y = \frac{1}{x}$ періодичні?

449. Учень говорить: «Якщо для двох деяких значень аргументу x більшому значенню x відповідає більше значення функції, то така функція зростає на $(a; b)$». Чи це правильно?

450. На малюнку 60 зображено графік функції $y = |\sin x|$, заданої на $[-\pi; 2\pi]$. Запишіть проміжки, на яких вона зростає, на яких — спадає.

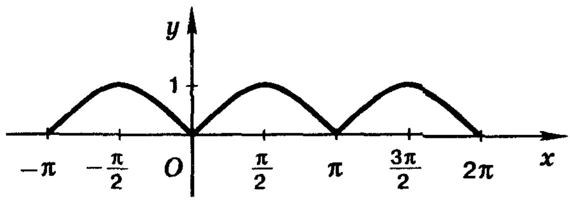
451°. Знайдіть проміжки зростання і спадання функції:

а) $y = x^2 + 3$; б) $y = 2x - x^2$; в) $y = \cos\frac{x}{2}$.

452°. Знайдіть проміжки, на яких набуває додатних значень функція:

а) $y = 3x - x^2$; б) $y = (x - 3)^2$; в) $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.

453. Доведіть, що функція $f(x) = x^2 + 2x$ на проміжку $(0; \infty)$ зростає.



Мал. 60

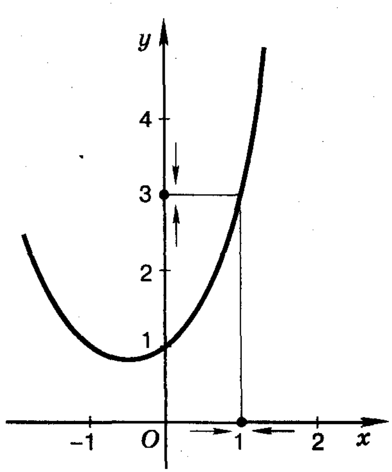
§ 23. ГРАНИЦЯ І НЕПЕРЕРВНІСТЬ ФУНКЦІЇ

Часто говорять про значення функції в точці, границю функції в точці, приріст функції в точці, неперервність функції в точці. Про які точки йдеться? Про точки осі абсцис — значення аргументу.

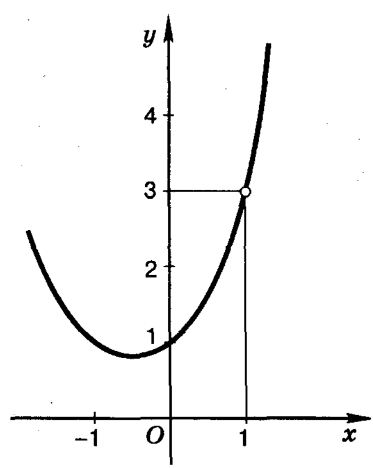
Значення функції в точці. Нехай задано, наприклад, функцію $f(x) = x^2 + x + 1$. Якщо $x = 1$, то відповідне значення функції дорівнює 3. Кажуть, що в точці $x = 1$ значення функції $f(x)$ дорівнює 3. У точці $x = 0$ її значення дорівнює 1, у точці $x = 10$ значення функції $f(x)$ дорівнює 111. Пишуть: $f(1) =$ $f(0) = 1$, $f(10) = 111$.

Границя функції в точці. Розглянемо ту саму функцію $f(x) = x^2 + x + 1$. Якщо значення її аргументу x досить близько і з будь-якого боку наближаються до 1, то відповідні значення функції як завгодно близько наближаються до числа 3 (мал. 61). Іншими словами: різниця $|f(x) - 3|$ може стати і залишатись як завгодно малою, якщо різниця $|x - 1|$ буде досить малою. У цьому випадку кажуть, що границя функції $f(x)$ у точці $x = 1$ дорівнює 3. Пишуть: якщо $x \to 1$, то $f(x) \to 3$, або $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 3$.

Істотна деталь: функція може мати границю навіть у такій точці, в якій вона не визначена. Наприклад, функція $\varphi(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$ у точці $x = 1$ не має значення, бо знаменник не може дорівнювати нулю. В усіх інших точках функція $\varphi(x)$ має такі самі



Мал. 61



Мал. 62

значення, як і функція $f(x)$, бо $(x^3 - 1) : (x - 1) = x^2 + x + 1$. Графік функції $\varphi(x)$ зображено на малюнку 62. Хоч значення функції $\varphi(x)$ у точці $x = 1$ не існує, а її границя у цій точці існує і дорівнює 3.

Означення границі функції можна сформулювати так. **Число b називається *границею функції* $f(x)$ у точці $x = a$, якщо для будь-якого додатного числа ε можна вказати таке додатне число δ, що для всіх значень x з проміжку $(a - \delta; a + \delta)$, крім, можливо, самої точки $x = a$, справджується нерівність $|f(x) - b| < \varepsilon$.** Пишуть так: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$.

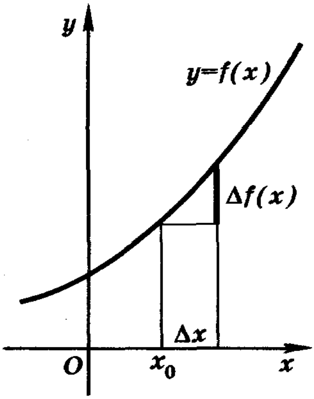
Можна довести такі теореми. Якщо c — число, то $\lim\limits_{x \to a} c = c$.

Границя суми (різниці, добутку) функцій дорівнює сумі (різниці, добутку) границь даних функцій. Границя відношення двох функцій дорівнює відношенню їх границь, якщо границя дільника не дорівнює нулю. Докладно теорію *границь функцій розглядають в курсі вищої математики.*

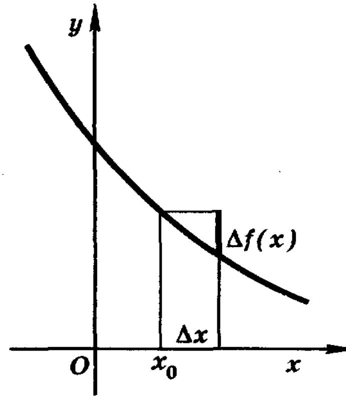
Приріст аргументу і функції. Нехай дано, наприклад, функцію $f(x) = x^2$. У точці $x_0 = 2$ її значення $f(2) = 4$. Збільшимо значення аргументу на 0,01, тобто, нехай $x = 2{,}01$. Відповідне значення функції $f(2{,}01) = 4{,}0401$. Порівняно з попереднім значенням воно збільшилось на 0,0401. Тут 0,01 — *приріст аргументу*, а 0,0401 — відповідний *приріст функції*, а саме: приріст функції $f(x) = x^2$ на проміжку $[2; 2{,}01]$. Приростом аргументу в точці $x_0 = a$ називають різницю $x - a$, де x — довільне число, яке мало відрізняється від a. Він може бути додатним або від'ємним. Відповідний приріст функції $f(x)$ — різниця $f(x) - f(a)$.

Приріст аргументу x позначають символом Δx, а приріст функції Δf, Δy (читають: дельта ікс, дельта еф, дельта ігрек). Ці записи не означають добутків. Так, у розглянутому прикладі $\Delta x = 0{,}01$, $\Delta f = 0{,}0401$. Геометричний зміст цих понять видно на малюнку 63. Якщо функція $f(x)$ спадна і $\Delta x > 0$, то Δf — число від'ємне (мал. 64).

Неперервність функції. Як пов'язані між собою прирости аргументу x і функції $f(x) = x^2$ в точці $x_0 = 2$? Якщо $\Delta x = 0{,}01$, то $\Delta f = 0{,}0401$; якщо $\Delta x = 0{,}001$, то $\Delta f = 0{,}004001$ і т. д. Взагалі, якщо $\Delta x \to 0$, то і $\Delta f \to 0$, тобто приріст функції прямує до нуля, коли прямує до нуля приріст аргументу (зліва або справа). У такому випадку говорять, що функція $f(x)$ неперервна в точці $x_0 = 2$.



Мал. 63



Мал. 64

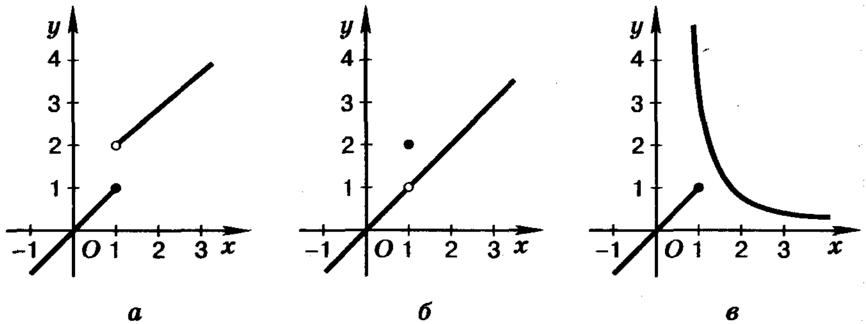
Функція $f(x)$ називається *неперервною* в точці x_0, якщо в цій точці досить малим за модулем приростам аргументу відповідають як завгодно малі за модулем прирости функції. Якщо функція $f(x)$ неперервна в точці a, то

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Функція називається *неперервною на проміжку*, якщо вона неперервна в кожній його точці. Графік такої функції — неперервна крива (її можна провести, не відриваючи олівець від паперу).

На малюнку 65 зображено графіки функцій, які мають розриви у точці $x = 1$, вони не неперервні в цій точці.

Усі раціональні, показникові, логарифмічні, тригонометричні функції, а також функції, утворені з них за допомогою чотирьох арифметичних дій, належать до класу *елементарних функцій*. А кожна елементарна функція неперервна в кожній точці області її визначення.



Мал. 65

454°. Знайдіть значення функції $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ у точці: а) $x = 5$; б) $x = -\frac{1}{2}$.

455°. Порівняйте значення функції $f(x) = \frac{1}{x} + x$ у точках $x = -2$ і $x = -0,5$.

456°. Дано функції $f(x) = x^2 - x + 1$ і $\varphi(x) = \frac{x^3+1}{x+1}$. Заповніть таблицю.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$							
$\varphi(x)$							

457. Дано функцію $f(x) = 1 - 2x$. Знайдіть її приріст у точці $x_0 = 3$, який відповідає приросту аргументу $\Delta x = 0,2$.

458. Дано функцію $f(x) = x^2$. Знайдіть її приріст у точках $x_0 = -2$ і $x_0 = 3$, якщо $\Delta x = 0,01$.

459°. Побудуйте графік функції $f(x) = \frac{4-x^2}{2-x}$. Чи неперервна вона у точці $x_0 = -1$? А в точці $x_0 = 2$?

460°. Чи визначена функція $f(x) = \frac{9-x^2}{x+3}$ у точці $x = -3$? Чи існує границя даної функції в цій точці? Якщо так, то чому вона дорівнює?

461. Чи має функція $f(x) = \frac{5}{x}$ границю в точці: а) $x_0 = 2$; б) $x_0 = -10$?

462. Чи є зображена на малюнку 66 крива графіком неперервної функції?

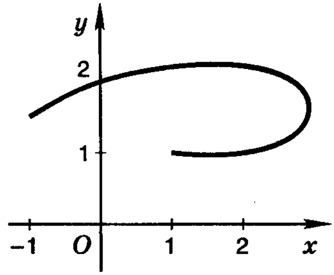
463°. Обчисліть границю функції:

а) $f(x) = 2x^2 - 3$ у точці $x = 5$;

б) $\varphi(x) = \sqrt{1 + x}$ у точці $x = 0,5$;

в) $\varphi(x) = x + \frac{1}{x^2}$ у точці: $x = -2$; $x = \frac{1}{2}$;

г) $f(x) = \sin x + \cos x$ у точці: $x = \frac{\pi}{2}$; $x = 35\pi$.



Мал. 66

464. Обчисліть границю функції $f(x)$ у тій точці, в якій функція не визначена, якщо:

а) $f(x) = \frac{x^2-16}{x+4}$; б) $f(x) = \frac{4x^2-1}{2x-1}$; в) $f(x) = \frac{x^2-2x+1}{x-1}$;

г) $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$; ґ) $f(x) = \frac{4-x}{\sqrt{4+x}}$; д) $f(x) = \frac{1-x}{1+\sqrt{x}}$.

465. Зобразіть графік будь-якої функції, яка не є неперервною в точці $x = 3$.

466. Чи має функція $f(x) = \sqrt{x}$ границю в точці: а) $x_0 = 4$; б) $x_0 = 5$?

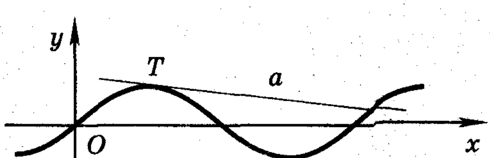
§ 24. ДОТИЧНА ДО ГРАФІКА ФУНКЦІЇ

Ви вже знаєте, яку пряму називають дотичною до кола. А що розуміють, наприклад, під дотичною до синусоїди? Пряма a може бути дотичною до синусоїди в якійсь її точці T і перетинати цю синусоїду в інших точках (мал. 67). Що ж розуміють під дотичною до графіка функції?

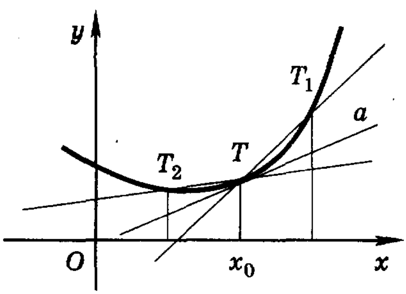
Нехай дано графік функції $y = f(x)$ і на ньому точку T, яка не є кінцем графіка (мал. 68). Позначимо на даному графіку по різні боки від T довільні точки T_1 і T_2. Прямі TT_1 і TT_2, взагалі кажучи,— січні. Якщо ж точки T_1 і T_2, рухаючись по графіку, наближати досить близько до T, то січні TT_1 і TT_2 як завгодно близько наближатимуться до деякої прямої a. Таку пряму a (якщо вона існує) називають *дотичною до графіка функції $y = f(x)$ у точці T*.

Якщо графік функції такий, як показано на малюнку 69, то при необмеженому наближенні точок T_1 і T_2 до T граничні положення січних TT_1 і TT_2 не збігатимуться. Говорять, що в точці T дотичної до графіка не існує. І якщо T — кінцева точка графіка, то дотичної до нього в точці T не існує.

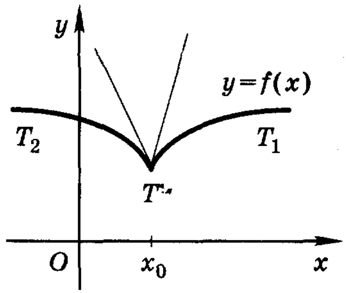
Досі йшлося про дотичні до криволінійних графіків. Але ж графіком функції може бути і пряма або частина прямої. Тому для загальності міркувань домовляються дотичною до прямої у будь-якій її точці вважати цю саму пряму. Дотичною до відрізка чи променя в будь-якій його внутрішній точці вважають пряму, якій належить цей відрізок чи промінь.



Мал. 67



Мал. 68

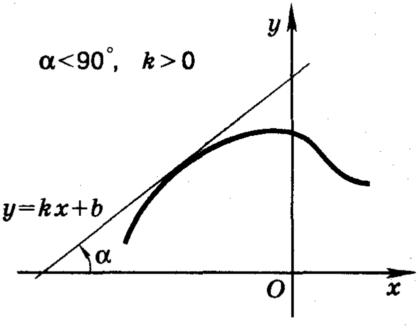


Мал. 69

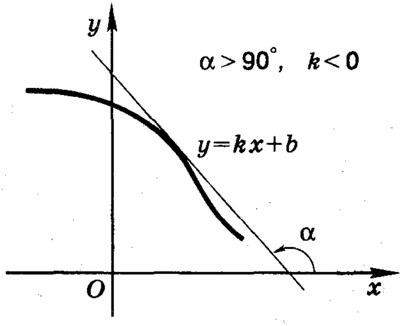
Поняття дотичної до графіка часто використовують для дослідження функцій. Розглянемо це питання спочатку в загальних рисах.

Дотична — це пряма. Її рівняння має вигляд $y = kx + b$, де k — *кутовий коефіцієнт* — тангенс кута між променем дотичної, розміщеним вище від осі x, і додатним напрямом цієї осі. Зверніть увагу на кутовий коефіцієнт k дотичної, проведеної до графіка якої-небудь функції в його точці з абсцисою x. Якщо число x належить проміжку зростання функції, то відповідне значення k додатне (мал. 70). Якщо x належить проміжку спадання функції, то відповідне значення k від'ємне (мал. 71). І навпаки: якщо кожному значенню x з деякого проміжку $(a; b)$ відповідає додатне значення k, то на $(a; b)$ дана функція зростає; якщо кожному значенню x з деякого проміжку $(c; d)$ відповідає від'ємне значення k, то на $(c; d)$ функція спадає. Заслуговують на увагу і ті точки графіка функції, в яких дотична не існує, і в яких вона паралельна осі x, тобто коли її кутовий коефіцієнт дорівнює 0.

Отже, знаючи кутові коефіцієнти дотичних до графіка функції в тих чи інших точках, можна зробити висновок,



Мал. 70



Мал. 71

чи зростає дана функція в цих точках, чи спадає, а також ві
повісти на багато інших важливих питань.

467°. Запишіть рівняння прямої, кутовий коефіцієнт якої дорівнює 3 і яка проходить через точку A (2; 5).

468°. Знайдіть кутовий коефіцієнт прямої, заданої рівнянням:

а) $y - x + 5 = 0$; б) $x + 2y + 3 = 0$; в) $3x - 5y = 1$.

469. Знайдіть кутовий коефіцієнт прямої, яка проходить через точки A (–3; 3) і B (2; 5).

Р о з в' я з а н н я. Проведемо прямі AK і BK, паралельні осям координат (мал. 72). Трикутник ABK прямокутний, $AK = 5$, $BK = 2$. Кутовий коефіцієнт k прямої AB дорівнює тангенсу кута BAK:

$$k = \frac{BK}{AK} = \frac{2}{5} = 0{,}4.$$

В і д п о в і д ь. $k = 0{,}4$.

470°. Знайдіть кутовий коефіцієнт прямої, яка проходить через точки:

а) O (0; 0) і A (5; 3); б) K (0; 5) і P (4; 3).

471. На графіку функції $y = 0{,}5x^2$ позначте точки T_1, T_2, T_3 з абсцисами 0, 1, 2 і знайдіть кутові коефіцієнти січних T_1T_2, T_1T_3, T_2T_3.

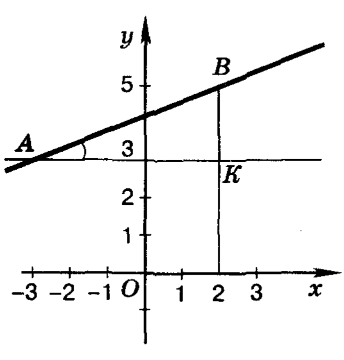
472. Побудуйте графік функції $y = \frac{4}{x}$ і проведіть до нього дотичну в точці T (2; 2). Знайдіть кутовий коефіцієнт цієї дотичної.

473°. Чи можна через початок координат провести дотичну до графіка функції $y = \frac{4}{x}$?

474°. Проведіть дотичну до графіка функції $y = x^2$ через його точку з абсцисою $x = 2$. Прикиньте, чому дорівнює її кутовий коефіцієнт.

475. Знайдіть кутовий коефіцієнт прямої, яка проходить через точки графіка функції $y = -\frac{6}{x}$ з абсцисами 2 і 3.

476. Через точку O (0; 0) і довільну точку T графіка функції $y = x^2$ проведено січну. Знайдіть граничне положення цієї січної, якщо $T \to 0$.



Мал. 72

477. На графіку функції $y = \sqrt{4 - x^2}$ дано точки з абсцисами $\sqrt{2}$ і $-\sqrt{2}$. Знайдіть кутові коефіцієнти дотичних до графіка в цих точках.

478. Функцію $y = f(x)$ задано на проміжку $(-3; 5)$. Кутовий коефіцієнт дотичної до її графіка в кожній точці проміжку $(-3; 2)$ додатний, а в кожній точці проміжку $(2; 5)$ від'ємний. Знайдіть проміжки зростання і спадання даної функції.

§ 25. ПОХІДНА

Для дослідження функції важливо вміти визначати кутовий коефіцієнт дотичної до її графіка. Цей кутовий коефіцієнт дотичної називають *похідною*. Поняття похідної часто використовують і при розв'язуванні багатьох інших задач. Тому розглянемо його детальніше.

Нехай дано графік функції $y = f(x)$ і на ньому точку A, в якій існує дотична до графіка (мал. 73). Якщо абсциса точки A дорівнює x_0, то її ордината $f(x_0)$. Надамо значенню аргументу x_0 приріст Δx. Нарощеному значенню аргументу $x_0 + \Delta x$ на графіку функції відповідає точка T з абсцисою $x_0 + \Delta x$ і ординатою $f(x_0 + \Delta x)$.

Через точки A і T проведемо прямі AK і TK, паралельні осям абсцис і ординат; вони перетнуться в деякій точці K. Тоді $AK = \Delta x$ — приріст аргументу, а $TK = \Delta y$ — приріст функції на $[x_0; x_0 + \Delta x]$.

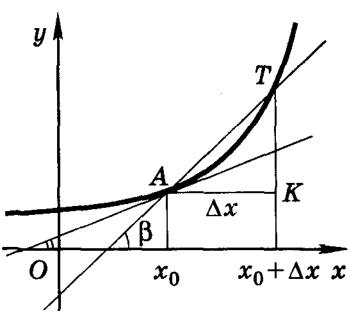
Кутовий коефіцієнт січної AT дорівнює тангенсу кута β, тобто відношенню Δy до Δx.

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Якщо $\Delta x \to 0$, то січна AT, повертаючись навколо точки A, наближається до дотичної, проведеної в точці A до графіка даної функції. Тобто, якщо k — кутовий коефіцієнт цієї дотичної і $\Delta x \to 0$, то

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \to k.$$

Це число k — похідна функції $f(x)$ в точці x_0.



Мал. 73

Похідною функції $f(x)$ в точці x_0 **називається число k, до якого прямує дріб $\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$, коли $\Delta x \to 0$.**

Похідну функції $f(x)$ в точці x_0 позначають $f'(x_0)$. Її означення записують також у вигляді рівності:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}, \quad \text{або} \quad f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

П р и к л а д. Знайдіть похідну функції $f(x) = x^2$ в точці $x = 3$.

Р о з в' я з а н н я. Надамо аргументу $x = 3$ приріст Δx. Відповідний приріст функції $\Delta y = (3 + \Delta x)^2 - 3^2 = 6\,\Delta x + (\Delta x)^2$. Тому

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{6\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 6 + \Delta x.$$

Якщо $\Delta x \to 0$, то $\frac{\Delta y}{\Delta x} \to 6$.

В і д п о в і д ь. $f'(3) = 6$.

Так розв'язують задачу, користуючись означенням похідної функції в точці.

Досі йшлося про похідну функції в точці. А можна розглядати похідну функції і як функцію. Нехай, наприклад, дано функцію $y = x^2$. Знайдемо її похідну в довільній точці x. Для цього надамо значенню x приріст Δx. Відповідний йому приріст функції

$$\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2.$$

Тому $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x$.

Якщо $\Delta x \to 0$, то $\frac{\Delta y}{\Delta x} \to 2x$.

Отже, похідна функції x^2 в кожній її точці x дорівнює $2x$. Пишуть: $(x^2)' = 2x$, або якщо $y = x^2$, то $y' = 2x$.

Зверніть увагу. Похідна функції в точці — це число. Коли ж говорять про похідну, не вказуючи «в точці», мають на увазі похідну як функцію: похідною функції $y = x^2$ є функція $y' = 2x$, похідною функції $y = x^3$ є функція $y' = 3x^2$ і т. д.

Знаючи це, похідну функції в точці можна обчислювати простіше, ніж за означенням похідної функції в точці.

П р и к л а д. Дано функцію $f(x) = x^2$. Знайдіть $f'(3)$, $f'(0)$, $f'(-2)$.

Р о з в' я з а н н я. Похідною функції $f(x) = x^2$ є функція $f'(x) = 2x$. Тому $f'(3) = 2 \cdot 3 = 6$; $f'(0) = 2 \cdot 0 = 0$; $f'(-2) = 2 \cdot (-2) = -4$.

Знаходження похідної називається *диференціюванням*. Функція, яка має похідну в точці x_0, називається *диференційовною в точці* x_0. Функція, диференційовна в кожній точці деякого проміжку, називається *диференційовною на цьому проміжку*.

Доведемо, наприклад, що *лінійна функція* $y = ax + b$ *диференційовна в кожній точці* x. Справді, приросту Δx її аргументу x відповідає приріст функції $\Delta y = a(x + \Delta x) + b - (ax + b) = a\Delta x$. Тому $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a\Delta x}{\Delta x} = a$; і якщо $\Delta x \to 0$, то $\frac{\Delta y}{\Delta x} \to a$. А це й означає, що в кожній точці x функція $y = ax + b$ має похідну $y' = a$. Пишуть $(ax + b)' = a$. Зокрема: $x' = 1$, $b' = 0$. *Похідна сталої дорівнює нулю.*

Одержаний результат має очевидний геометричний зміст: дотична до прямої — графіка функції $y = ax + b$ — ця сама пряма, її кутовий коефіцієнт дорівнює a.

479. Користуючись означенням похідної функції в точці, обчисліть:

а) $f'(2)$, якщо $f(x) = x^2$; б) $f'(-3)$, якщо $f(x) = 5x^2$;

в) $f'(4)$, якщо $f(x) = \frac{1}{x}$; г) $f'(1)$, якщо $f(x) = x^3$.

480°. Знаючи, що $(x^2)' = 2x$, обчисліть похідну функції $y = x^2$ в точках: а) $x = -2$; б) $x = 3$; в) $x = 0{,}7$; г) $x = -2{,}8$.

481. Доведіть, що для функції $y = x^3$ похідною є функція $y' = 3x^2$.

Р о з в' я з а н н я. $\Delta y = (x+\Delta x)^3 - x^3 = 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$; $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2 + 3x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2$. Якщо $\Delta x \to 0$, то $\frac{\Delta y}{\Delta x} \to 3x^2$. А це й означає, що похідною функції $y = x^3$ є функція $y' = 3x^2$.

482°. Знайдіть похідну функції $y = x^3$ в точці: а) $x = 1$; б) $x = 0$.

483. Знайдіть кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції $y = x^2$ у точці: а) $x = 2{,}5$; б) $x = -2{,}5$; в) $x = \sqrt{5}$.

484. Напишіть рівняння дотичної до графіка функції $y = x^2$ у його точці з абсцисою $x = 5$.

Р о з в' я з а н н я. Рівняння дотичної має вигляд $y = kx + b$. Кутовий коефіцієнт k дорівнює значенню похідної функції $y = x^2$ в точці $x = 5$. $(x^2)' = 2x$, $k = 2 \cdot 5 = 10$. Отже, рівняння дотичної $y = 10x + b$. Координати точки дотику $x = 5$, $y = 25$. Точка з такими координатами лежить на дотичній, тому $25 = 10 \cdot 5 + b$, звідки $b = -25$.

Відповідь. $y = 10x - 25$.

485. Напишіть рівняння дотичної до графіка функції $y = x^3$ в його точці з абсцисою: а) $x = 1$; б) $x = -2$; в) $x = 0$.

486. Доведіть, що рівняння дотичної до графіка функції $y = f(x)$ в його точці з абсцисою x_0 має вигляд $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

487. Знайдіть координати точки дотику дотичної до графіка функції $y = x^2$, якщо кутовий коефіцієнт цієї дотичної дорівнює 6.

488*. Дотична до графіка функції $y = x^2$ проходить через точку A (4; 7). Знайдіть координати точки дотику.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Варіант 1

1. Побудуйте графік функції $y = x^2 - 4$. Знайдіть проміжки, на яких дана функція: а) зростає; б) спадає; в) має додатні значення.

2. Проведіть пряму через точки A (2; 2) і B (−4; −1). Знайдіть її кутовий коефіцієнт. Запишіть рівняння цієї прямої.

3. Доведіть, що для функції $y = 3x^2$ похідною є функція $y' = 6x$.

4. Напишіть рівняння дотичної до графіка функції $y = x^2$ у його точці з абсцисою $x = 4$.

Варіант 2

1. Побудуйте графік функції $y = 4 - x^2$. Знайдіть проміжки, на яких дана функція: а) зростає; б) спадає; в) має від'ємні значення.

2. Проведіть пряму через точки K (2; 4) і P (−2; 2). Знайдіть її кутовий коефіцієнт. Запишіть рівняння цієї прямої.

3. Доведіть, що для функції $y = 4x^2$ похідною є функція $y' = 8x$.

4. Напишіть рівняння дотичної до графіка функції $y = x^2$ у його точці з абсцисою $x = 3$.

Варіант 3

1. Побудуйте графік функції $y = x^2 + 3x$. Знайдіть проміжки, на яких дана функція: а) зростає; б) спадає; в) має додатні значення.

2. Проведіть пряму через точки C (4; −1) і T (2; 2). Знайдіть її кутовий коефіцієнт. Запишіть рівняння цієї прямої.

3. Доведіть, що для функції $y = 2x^2$ похідною є функція $y' = 4x$.

4. Напишіть рівняння дотичної до графіка функції $y = x^2$ у його точці з абсцисою $x = -2$.

Варіант 4

1. Побудуйте графік функції $y = 3x - x^2$. Знайдіть проміжки, на яких дана функція: а) зростає; б) спадає; в) має від'ємні значення.

2. Проведіть пряму через точки A (4; 0) і C (2; 2). Знайдіть її кутовий коефіцієнт. Запишіть рівняння цієї прямої.

3. Доведіть, що для функції $y = 2x^3$ похідною є функція $y' = 6x^2$.

4. Напишіть рівняння дотичної до графіка функції $y = x^2$ у його точці з абсцисою $x = -3$.

§ 26. ТЕХНІКА ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ

У цьому параграфі для спрощення записів замість $u\,(x)$, $u'(x)$, $v\,(x)$, ... писатимемо також u, u', v.

Теорема (про похідну суми). ***Якщо функції u і v диференційовні в точці x, то в цій точці*** $(u + v)' = u' + v'$.

Доведення. Знайдемо приріст $\Delta(u + v)$ суми даних функцій на $[x;\ x + \Delta x]$:

$$\Delta(u + v) = u\,(x + \Delta x) + v\,(x + \Delta x) - u\,(x) - v\,(x) =$$
$$= (u\,(x + \Delta x) - u\,(x)) + (v\,(x + \Delta x) - v\,(x)) =$$
$$= \Delta u + \Delta v.$$

Отже,

$$\frac{\Delta(u+v)}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

Якщо $\Delta x \to 0$, то $\frac{\Delta u}{\Delta x} \to u'$ і $\frac{\Delta v}{\Delta x} \to v'$, тому $(u + v)' = u' + v'$.

Аналогічно можна довести, що $(u - v)' = u' - v'$.

Теорема правильна також для трьох і більше функцій. Наприклад,

$$(u + v - w)' = ((u + v) - w)' = (u + v)' - w' =$$
$$= u' + v' - w'.$$

Теорема (про похідну добутку). ***Якщо функції u і v диференційовні в точці x, то*** $(uv)' = u'v + uv'$.

Д о в е д е н н я. Знайдемо приріст $\Delta(uv)$ добутку даних функцій на $[x; x + \Delta x]$, врахувавши, що

$$u(x + \Delta x) = u(x) + \Delta u \text{ і } v(x + \Delta x) = v(x) + \Delta v:$$

$$\Delta(uv) = u(x + \Delta x)\cdot v(x + \Delta x) - u(x)\cdot v(x) =$$
$$= (u(x) + \Delta u)(v(x) + \Delta v) - u(x)\cdot v(x) =$$
$$= \Delta u\cdot v(x) + u(x)\cdot\Delta v + \Delta u\cdot\Delta v.$$

Отже,

$$\frac{\Delta(uv)}{\Delta x} = \frac{\Delta u\cdot v(x)}{\Delta x} + \frac{u(x)\cdot\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta u\cdot\Delta v}{\Delta x}.$$

Якщо $\Delta x \to 0$, то $\frac{\Delta u}{\Delta x} \to u'$, $\frac{\Delta v}{\Delta x} \to v'$, $\frac{\Delta u\cdot\Delta v}{\Delta x} \to 0$, бо $\Delta v \to 0$.

Отже,

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

Н а с л і д о к. *Сталий множник можна виносити за знак похідної.* Адже якщо $u = C$, де C — сталий множник, то $u' = 0$ і за теоремою про похідну добутку $(Cv)' = C'v + Cv' = Cv'$, тобто $(Cv)' = Cv'$.

Т е о р е м а (про похідну частки). ***Якщо u і v — функції від x, диференційовні в точці x, причому в цій точці $v \neq 0$, то***

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Д о в е д е н н я теореми можна провести аналогічно до двох попередніх. А саму формулу похідної частки можна вивести простіше.

Нехай $\frac{u}{v} = w$. Тоді $u = vw$ і за теоремою про похідну добутку $u' = v'w + vw'$. Виразимо звідси w':

$$w' = \frac{u' - v'w}{v} = \frac{u' - v'\cdot\frac{u}{v}}{v} = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Отже,

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Т е о р е м а (про похідну степеня). ***Якщо n — число натуральне, то***

$$(x^n)' = nx^{n-1}.$$

Д о в е д е н н я. При $n = 1$ теорема правильна, бо $x' = 1$. Далі скористаємось теоремою про похідну добутку:

$$(x^2)' = (x\cdot x)' = x'\cdot x + x\cdot x' = 1\cdot x + x\cdot 1 = 2x;$$
$$(x^3)' = (x^2\cdot x)' = (x^2)'x + x^2\cdot x' = 2x^2 + x^2 = 3x^2.$$

Як бачимо, $(x^2)' = 2x^{2-1}$, $(x^3)' = 3x^{3-1}$, тобто доводжувана формула правильна при n, що дорівнює 2 і 3. Покажемо, що вона правильна і для кожного натурального $n > 3$.

Припустимо, що при деякому натуральному k $(x^k)' = kx^{k-1}$. Тоді

$$(x^{k+1})' = (x^k \cdot x)' = (x^k)' \cdot x + x^k \cdot x' = kx^{k-1}x + x^k = (k+1)\, x^k.$$

Отже, якщо теорема правильна для $n = 3$, то вона правильна і для $n = 4$, а якщо правильна для $n = 4$, то правильна і для $n = 5$ і т. д. Зрозуміло, що при цих умовах теорема правильна для кожного натурального значення n.

Пізніше буде показано, що доводжувана формула правильна не тільки для натуральних значень n, а й для будь-яких дійсних.

Приклади.

1. Якщо $y = x^8$, то $y' = 8x^7$.

2. Якщо $y = 5x^4$, то $y' = 5 \cdot (x^4)' = 5 \cdot 4x^3 = 20\,x^3$.

3. Якщо $y = 2x^5 + 3x - 7$, то за теоремою про похідну суми $y' = (2x^5)' + (3x)' - 7' = 10x^4 + 3$.

4. Якщо $y = \frac{3x^2}{x-2}$, то за теоремою про похідну дробу $y' = \frac{6x(x-2) - 3x^2}{(x-2)^2} = \frac{3x^2 - 12x}{(x-2)^2}$.

З доведених теорем випливає, що **кожна функція $y = f(x)$, де $f(x)$ — многочлен, диференційовна на всій множині R. Тому кожний графік такої функції — гладенька лінія без розривів і зламів.** Бо коли б графік функції у якійсь точці мав розрив чи злам, то в цій точці функція не мала б похідної, тобто не була б диференційовною. Дробово-раціональна функція від x диференційовна в кожній точці x її області визначення.

Знайдіть похідну функції (489—496).

489°. а) $y = x^6$; б) $y = x^{10}$.

490°. а) $y = 3x^2$; б) $y = -7x^8$.

491°. а) $y = x^2 + x^3$; б) $y = x^7 - x^3$.

492°. а) $y = 4x^5 - 2$; б) $y = -5x^3 + 4$.

493°. а) $y = 3x^2 - 5x + 7$; б) $y = 2 - 3x - 8x^2$.

494°. а) $y = x^4 + 3x^3 - 5x + 4$; б) $y = 5 - 2x + 7x^2 - 3x^3$.

495. а) $y = 3x^2(5 - x^3)$; б) $y = -7x\,(x^2 - 4)$.

496. а) $y = 5\,(x + 3)^2$; б) $y = (2x - 7)^2$.

Визначте двома способами похідну функції (497, 498).

497. а) $y = x^2(x^3 - 5)$; б) $y = x^3(3x^2 - 1)$.

498. а) $y = (x - 2)(x + 3)$; б) $y = (x - 3)(x^2 - 2x + 4)$.

Обчисліть значення похідної в даних точках (499—501).

499°. $f(x) = x^2 - 5x$, $x = 1$; $x = 0$; $x = -2$.

500. $f(x) = 3x^4 + 2x - 10$, $x = -2$; $x = 0$; $x = \sqrt{2}$.

501°. $f(x) = -8x + 3$, $x = -2$; $x = 0$; $x = \pi$.

502. Розв'яжіть рівняння $f'(x) = 0$, якщо

а) $f(x) = x - 12x^3$; б) $f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + x^2 + 12$.

503. Розв'яжіть нерівність $f'(x) < 0$, якщо

а) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x$; б) $f(x) = 12x - x^3$.

504*. Знайдіть функцію $y = f(x)$, якщо її похідна $f'(x) = 2x + 3$. Скільки розв'язків має задача?

Напишіть рівняння дотичної до графіка даної функції в його точці з абсцисою x_0 (505—507).

505. $y = x^2 - 2x$, $x_0 = 3$; $x_0 = -2$.

506. $y = x^2 + 1$, $x_0 = 0$; $x_0 = -4$.

507. $y = 3x^4 + 2x$, $x_0 = -2$; $x_0 = 0$.

Знайдіть абсцису точки, дотична в якій до графіка функції $f(x)$ паралельна осі x (508, 509).

508. а) $f(x) = 3x^4 - 6x^2 + 2$; б) $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

509. а) $f(x) = x^2(2x - 9)$; б) $f(x) = 2x(3 - 8x^3)$.

Знайдіть похідну функції (510—513).

510°. а) $y = \frac{2}{x}$; б) $y = \frac{x-3}{x}$.

511. а) $y = \frac{2x+1}{5x-3}$; б) $y = \frac{x^2}{5-x}$.

512°. а) $y = \frac{2}{x} + 3x$; б) $y = 5 - \frac{3}{x^2}$.

513. а) $y = \frac{2(x-5)}{3x}$; б) $y = \left(x - \frac{1}{2}\right)\left(2x - \frac{3}{x}\right)$.

514. Напишіть рівняння дотичної, проведеної до графіка функції:

а) $y = \frac{6}{x}$ в точці $x_0 = 2$; б) $y = 1 + \frac{1}{x^2}$ в точці $x_0 = -1$.

§ 27. ПОХІДНІ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ

Щоб довести формулу похідної синуса, треба знати таке твердження:

Якщо число $\alpha \to 0$, ***то*** $\frac{\sin\alpha}{\alpha} \to 1$.

Доведемо його. Розглянемо коло радіуса r і його гострий центральний кут AOP в α радіанів (мал. 74). Якщо $AH \perp OP$ і $TP \perp OP$, то $AH = r\sin\alpha$, $TP = r\,\mathrm{tg}\,\alpha$. Нехай S_1, S_2, S_c — площі трикутників AOP, TOP і сектора AOP. Тоді $S_1 = \frac{1}{2}r^2\sin\alpha$, $S_2 = \frac{1}{2}r^2\,\mathrm{tg}\,\alpha$, $S_c = \frac{1}{2}r^2\alpha$. Оскільки $S_1 < S_c < S_2$, то $\frac{1}{2}r^2\sin\alpha < \frac{1}{2}r^2\alpha < \frac{1}{2}r^2\,\mathrm{tg}\,\alpha$, або $\sin\alpha < \alpha < \mathrm{tg}\,\alpha$.

Нехай $\alpha > 0$. Тоді і $\sin\alpha > 0$, бо йдеться про гострі кути. Поділивши всі члени нерівності $\sin\alpha < \alpha < \mathrm{tg}\,\alpha$ на $\sin\alpha$, дістанемо:

$$1 < \frac{\alpha}{\sin\alpha} < \frac{1}{\cos\alpha}, \quad \text{або} \quad \cos\alpha < \frac{\sin\alpha}{\alpha} < 1.$$

Останню нерівність доведено для $\alpha > 0$. А тому, що функції $\cos\alpha$ і $\frac{\sin\alpha}{\alpha}$ парні, то вона правильна і при $\alpha < 0$. З неї випливає: якщо $\alpha \to 0$, то $\cos\alpha \to 1$ і тому $\frac{\sin\alpha}{\alpha} \to 1$.

Т е о р е м а (про похідну синуса). *Для кожного дійсного* x

$$(\sin x)' = \cos x.$$

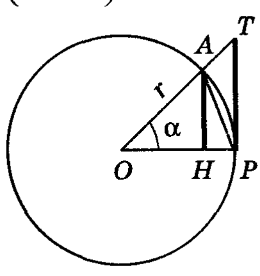
Д о в е д е н н я. Знайдемо приріст функції $\sin x$ на проміжку $[x;\ x+\Delta x]$:

$$\Delta\sin x = \sin(x+\Delta x) - \sin x = 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right).$$

Тому

$$\frac{\Delta\sin x}{\Delta x} = \frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right).$$

Якщо $\Delta x \to 0$, то й $\frac{\Delta x}{2} \to 0$ і, як показано вище, $\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \to 1$. Відомо також, що функція $\cos x$ неперервна на $\boldsymbol{R}$. Тому якщо $\frac{\Delta x}{2} \to 0$, то і $\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right) \to \cos x$.



Мал. 74

Отже, якщо $\Delta x \to 0$, то $\frac{\Delta \sin x}{\Delta x} \to \cos x$ для довільного x. Тобто, завжди

$$(\sin x)' = \cos x.$$

Т е о р е м а (про похідну косинуса). ***Для кожного дійсного x***

$$(\cos x)' = -\sin x.$$

Д о в е д е н н я. $\Delta \cos x = \cos(x + \Delta x) - \cos x =$
$= -2\sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}$,

$$\frac{\Delta \cos}{\Delta x} = -\sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}.$$

Якщо $\Delta x \to 0$, то й $\frac{\Delta x}{2} \to 0$ і $\sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \to \sin x$, оскільки функція $\sin x$ неперервна на $\boldsymbol{R}$. Отже, при кожному дійсному x, якщо $\Delta x \to 0$, то $\frac{\Delta \cos x}{\Delta x} \to -\sin x$, тобто $(\cos x)' = -\sin x$.

Формули похідних тангенса і котангенса можна вивести на основі теореми про похідну частки:

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - (\cos x)'\sin x}{\cos^2 x} =$$
$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x};$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{(\cos x)'\sin x - (\sin x)'\cos x}{\sin^2 x} =$$
$$= \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Отже, в кожній точці x області визначення функції:

$$(\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x,$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Знайдіть похідну функції (515—523).

515°. а) $y = 3\sin x$; б) $y = -5\cos x$.

516°. а) $y = 2 + \cos x$; б) $y = \sqrt{3} - \sin x$.

517°. а) $y = 0{,}5\cos x + \operatorname{tg} x$; б) $y = -4\sin x + \operatorname{tg} x$.

518°. а) $y = x\sin x$; б) $y = x\,\mathrm{tg}\,x$.

519. а) $y = x^3\sin x$; б) $y = x^2\,\mathrm{ctg}\,x$.

520°. а) $y = \frac{2x}{\sin x}$; б) $y = \frac{\cos x}{x-5}$.

521. а) $y = \frac{\cos x}{x^2+1}$; б) $y = \frac{x^2-1}{\sin x}$.

522. а) $y = \sin x\cos x$; б) $y = \sin 2x$.

523. а) $y = \sin^2 x + \cos^2 x$; б) $y = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}$.

524. Обчисліть $f'(0)$, $f'(\pi)$, $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $f'(3)$, якщо $f(x) = x\cos x$.

525*. Знайдіть функцію $y = f(x)$, якщо $f'(x) = \sin x$ і $f(\pi) = 2$.

§ 28. ПОХІДНА СКЛАДЕНОЇ ФУНКЦІЇ

Досі розглядались похідні функцій, аргументами яких є змінна x, наприклад $y = x^n$, $y = \sin x$. А як знаходити похідні функцій $y = (2x+1)^{10}$, $y = \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right)$? Кожну з них можна розглядати як функцію $y = f(u)$, де $u = h(x)$, тобто $y = f(h(x))$. Таку функцію називають *складеною*, а $u = h(x)$ — її *проміжною* функцією.

Розглядаючи у функції $y = f(u)$ змінну u як аргумент, можна знайти і похідну цієї функції по u. Її ми позначатимемо знаком y'_u. Похідні функцій по x, як і раніше, позначатимемо символами y', u'.

Нехай дано функцію $y = f(u)$, де $u = h(x)$. Якщо в якійсь точці x існують похідні u' і y'_u, то існує також похідна y', причому $y' = y'_u \cdot u'$.

Строге доведення цієї теореми важке, тому обмежимося тільки його схемою. Похідна y' дорівнює границі відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, коли $\Delta x \to 0$. Вважаючи, що $\Delta u \neq 0$, помножимо чисельник і знаменник цього відношення на Δu:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}. \qquad (*)$$

Якщо $\Delta x \to 0$, то і $\Delta u \to 0$, бо йдеться про функцію $u = h(x)$, диференційовну в точці x. Тому якщо $\Delta x \to 0$, то

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \to y',\quad \frac{\Delta y}{\Delta u} \to y'_u,\quad \frac{\Delta u}{\Delta x} \to u'$$

і з рівності (*) випливає доводжувана рівність $y' = y'_u \cdot u'$.

Досі йшлося про похідну y' в якійсь фіксованій точці x. Якщо ж дана складена функція $y = f(h(x))$ диференційовна в кожній точці x деякого проміжку, то рівність $y' = y'_u \cdot u'$ справджується для всього проміжку. Отже, користуючись цією рівністю, можна знаходити похідну даної функції і як функцію, задану на цьому проміжку.

Приклад. Знайдемо похідну функції $y = (2x+1)^{10}$. Це функція $y = u^{10}$, де $u = 2x + 1$. Ці функції диференційовні на $\boldsymbol{R}$, $y'_u = 10u^9$, $u' = 2$.

Отже, $y' = 10u^9 \cdot 2 = 20u^9 = 20(2x+1)^9$.

Не обов'язково, розв'язуючи такі вправи, вводити змінну u. Її можна тільки уявляти і відразу писати, наприклад:

$$(\sin 3x)' = \cos 3x \cdot (3x)' = 3\cos 3x;$$
$$(\sin^2 x)' = 2\sin x \cdot (\sin x)' = 2\sin x \cdot \cos x = \sin 2x.$$

Виведемо ще формулу для обчислення похідної функції $y = \sqrt{u}$.

З даної рівності маємо $u = y^2$, $u' = 2y \cdot y'$, звідки

$$y' = \frac{u'}{2y} = \frac{u'}{2\sqrt{u}}.$$

Зокрема, якщо $u = x$, то $u' = 1$, отже, $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Знайдіть похідну функції (526—535).

526°. а) $y = (x+3)^{20}$; б) $y = (2-x)^7$;
в) $y = 5(1-2x)^7$; г) $y = (3+x^2)^9$.

527°. а) $y = \sin 4x$; б) $y = \sin \frac{x}{3}$;
в) $y = \operatorname{tg} \frac{3x}{4}$; г) $y = \operatorname{ctg} 2x$.

528. а) $y = 2 + \sin 3x$; б) $y = 1 + \operatorname{tg} 3x$;
в) $y = \sin x + \sin 2x$; г) $y = \cos x - \cos 2x$.

529°. а) $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$; б) $y = \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$;
в) $y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$; г) $y = \operatorname{tg}(3x+1)$.

530. а) $y = x\sin 2x$; б) $y = x\cos 3x$;
в) $y = x \operatorname{tg} \frac{x}{2}$; г) $y = x \operatorname{ctg} \frac{x}{3}$.

531. а) $y = \sin x \cos 2x$; б) $y = \cos x \sin 3x$;

в) $y = \sin x \cos \frac{x}{2}$; г) $y = \cos x \cos \frac{x}{3}$.

532. а) $y = \sin^4 x$; б) $y = 5\operatorname{tg}^3 x$;

в) $y = \sqrt{\sin x}$; г) $y = \sqrt{\operatorname{tg} x}$.

533. а) $y = \frac{\cos 2x}{x-1}$; б) $y = \frac{\cos 2x}{1-\sin x}$.

534°. а) $y = \sqrt{x^2 - 5}$; б) $y = \sqrt{x+3} - \sqrt{3x}$.

535. а) $y = \sqrt{(x-1)(x+2)}$; б) $y = x + \sqrt{x^2 - 5x + 6}$.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Варіант 1

1. Знайдіть похідну функції:

а) $y = x^4 - 5x^3 - 2$; б) $y = \frac{3}{x} - 2x$;

в) $y = (x-2)(x+5)$; г) $y = \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$.

2. Дано функцію $f(x) = x^2 \cos x$. Обчисліть: $f'(0)$, $f'(\pi)$, $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

3. Напишіть рівняння дотичної, проведеної до графіка функції $y = \frac{8}{x} + 3$ в точці $x_0 = 2$.

4. На яких проміжках значень x похідна функції $y = x^3 - 12x$ додатна, на яких — від'ємна?

Варіант 2

1. Знайдіть похідну функції:

а) $y = x^5 - 3x^4 - 2x^3$; б) $y = 4x - \frac{3}{x}$;

в) $y = (x+4)(x-7)$; г) $y = \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$.

2. Дано функцію $f(x) = x^2 \sin x$. Обчисліть: $f'(0)$, $f'(\pi)$, $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

3. Напишіть рівняння дотичної, проведеної до графіка функції $y = 3 - \frac{6}{x}$ в точці $x_0 = 3$.

4. На яких проміжках значень x похідна функції $y = 2x^3 - 6x$ додатна, на яких — від'ємна?

Варіант 3

1. Знайдіть похідну функції:

а) $y = 3x^4 - 5x^3 - 7x$; б) $y = \frac{2-x}{x+3}$;

в) $y = (2x - 1)(3 - x)$; г) $y = \sin\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right)$.

2. Дано функцію $f(x) = 2\sin^3 x$. Обчисліть: $f'(0)$, $f'(\pi)$, $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

3. Напишіть рівняння дотичної, проведеної до графіка функції $y = \sqrt{x^2 - 3}$ в точці $x_0 = 2$.

4. На яких проміжках значень x похідна функції $y = x^3 - 6x^2$ додатна, на яких — від'ємна?

Варіант 4

1. Знайдіть похідну функції:

а) $y = 2x^5 - 3x^4 + 8x + 1$; б) $y = \frac{2x-3}{5-x}$;

в) $y = (3x - 1)^2(3 - 2x)$; г) $y = 2\sin\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right)$.

2. Дано функцію $f(x) = x\cos^2 x$. Обчисліть: $f'(0)$, $f'(\pi)$, $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

3. Напишіть рівняння дотичної, проведеної до графіка функції $y = \sqrt{x^2 + x - 6}$ в точці $x_0 = 6$.

4. При яких значеннях x похідна функції $y = 3x^2 - x$ додатна, при яких — від'ємна, при яких — дорівнює нулю?

§ 29. ПОХІДНІ ПОКАЗНИКОВОЇ І ЛОГАРИФМІЧНОЇ ФУНКЦІЙ

Доведемо такі формули похідних:

1) $(e^x)' = e^x$; 2) $(a^x)' = a^x \ln a$;

3) $(\ln x)' = \frac{1}{x}$; 4) $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$.

1. Нехай дано функцію $y = e^x$. Зафіксуємо довільне значення x її аргументу і надамо йому приріст Δx. Тоді приріст функції

$$\Delta y = e^{x+\Delta x} - e^x = (e^{\Delta x} - 1)e^x.$$

Отже, $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} \cdot e^x.$$

Якщо $\Delta x \to 0$, то $\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x} \to 1$. Це випливає з того, що кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції $y = e^x$ в точці $A\ (0;\ 1)$

дорівнює 1 (див. § 17, мал. 47).* Якщо значення x зафіксовано, то коли $\Delta x \to 0$, значення e^x не змінюється. Отже, якщо $\Delta x \to 0$, то $\frac{\Delta y}{\Delta x} \to e^x$. Це й означає, що функція $y = e^x$ диференційовна в кожній точці $x \in \boldsymbol{R}$ і що

$$(e^x)' = e^x.$$

2. Як відомо, при кожному $a > 0$ виконується рівність $a = e^{\ln a}$. Тому

$$a^x = (e^{\ln a})^x = e^{x \ln a}.$$

За теоремою про похідну складеної функції

$$(a^x)' = (e^{x\ln a})' = e^{x\ln a} \ln a = a^x \ln a.$$

Отже, формула 2 доведена.

3. Якщо $x > 0$, то $e^{\ln x} = x$ і

$$(e^{\ln x})' = x' = 1.$$

А за теоремою про похідну складеної функції

$$(e^{\ln x})' = e^{\ln x} (\ln x)' = x (\ln x)'.$$

Отже, $1 = x(\ln x)'$, звідки $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

4. При кожному $x > 0$ за формулою переходу

$$\log_a x = \frac{1}{\ln a} \cdot \ln x.$$

Отже,

$$(\log_a x)' = \left(\frac{1}{\ln a} \cdot \ln x\right)' = \frac{1}{\ln a} (\ln x)' = \frac{1}{x \ln a}.$$

За доведеними формулами можна знаходити похідні будь-яких показникових чи логарифмічних функцій, а отже, і досліджувати ці функції. Зокрема з формул 2 і 4 випливає, що ***коли $a > 1$, то показникова і логарифмічна функції зростають на всій області визначення, а коли $0 < a < 1$ — спадають.*** Адже коли $a > 1$, то $\ln a > 0$ і похідна кожної з цих функцій додатна, а коли $0 < a < 1$, то їх похідні від'ємні, бо $\ln a < 0$.

Тепер можна вивести також формулу похідної степеневої функції $y = x^\alpha$, де α — довільне дійсне число.

Якщо $x > 0$, то $x = e^{\ln x}$ і $x^\alpha = (e^{\ln x})^\alpha = e^{\alpha \ln x}$. Тому

$$(x^\alpha)' = (e^{\alpha \ln x})' = e^{\alpha \ln x} (\alpha \ln x)' = x^\alpha \alpha \frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha - 1}.$$

---

* У математичному аналізі доводять таке твердження: якщо $x \to 0$, то $\frac{e^x - 1}{x} \to 1$.

Отже, формула $(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$, доведена раніше тільки для натурального показника степеня α, правильна для будь-якого дійсного α і додатного x. З неї, зокрема, випливає, що ***на** $(0; \infty)$ **функція** $y = x^{\alpha}$ **зростає, якщо** $\alpha > 0$, **і спадає, якщо** $\alpha < 0$.*

Знайдіть похідну функції (536—550).

536°. а) $y = x^3$; б) $y = 5x^2$; в) $y = 3x^4 + x$.

537. а) $y = 3\sin x$; б) $y = x^2 \operatorname{tg} x$; в) $y = \frac{2x+3}{\cos x}$.

538. а) $y = \cos(3x+2)$; б) $y = \sqrt{x \operatorname{tg} x}$; в) $y = x^{-1} \sin x$.

539°. а) $y = 3e^x$; б) $y = e^{-x}$; в) $y = xe^x$.

540. а) $y = e^{x+2}$; б) $y = e^{\sin x}$; в) $y = e^{x+\sin x}$.

Р о з в' я з а н н я. а) $y' = e^{x+2}(x+2)' = e^{x+2}$;

в) $y' = e^{x+\sin x}(x + \sin x)' = (1 + \cos x)e^{x+\sin x}$.

541°. а) $y = (7e)^x$; б) $y = 3^x$; в) $y = \pi^x$.

542. а) $y = \left(\sqrt{2}\right)^x$; б) $y = 4^x - x$; в) $y = 0{,}5^x + 0{,}5$.

543. а) $y = 8 \ln x$; б) $y = -\ln x$; в) $y = \ln x^3$.

Р о з в' я з а н н я. в) $y' = \frac{3x^2}{x^3} = \frac{3}{x}$, або $y' = (3 \ln x)' = \frac{3}{x}$.

544°. а) $y = \log_2 x$; б) $y = \lg(x + 3)$; в) $y = 3 - \lg x$.

545. а) $y = \sqrt{2^x}$; б) $y = 1{,}5^{\sin x}$; в) $y = 3^x : \ln 3$.

546°. а) $y = x^{0,5}$; б) $y = x^{1,7}$; в) $y = x^{\sqrt{3}}$.

547. а) $y = 3x^{\frac{2}{3}}$; б) $y = -2x^{\frac{3}{2}}$; в) $y = x \cdot x^{\frac{1}{3}}$.

548. а) $y = \sqrt[4]{x}$; б) $y = 2\sqrt[3]{x}$; в) $y = \sqrt[5]{x+2}$.

549. а) $y = e^x + x^e$; б) $y = x^2 \ln x$; в) $y = x \log_2 x$.

550. а) $y = e^{-x} + x^2 e$; б) $y = e^{\sqrt{x}} \cos 2x$; в) $y = e^x x^n$.

551. Напишіть рівняння дотичної до графіка функції $f(x)$ у його точці з абсцисою x_0:

а) $f(x) = 2^x$, $x_0 = 1$; б) $f(x) = e^{-x}$, $x_0 = 0$;
в) $f(x) = 2 \ln x$, $x_0 = e$; г) $f(x) = \log_2(x - 1)$, $x_0 = 2$.

552. Знайдіть похідну функції:

а) $f(x) = xe^x$; б) $f(x) = x^2 \cdot 2^{-x}$; в) $f(x) = e^x + \ln x$;
г) $f(x) = x \ln x$; ґ) $f(x) = 2x : \ln x$; д) $f(x) = x^{-1} + \ln x$.

§ 30. ЗАСТОСУВАННЯ ПОХІДНОЇ ДО ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЙ

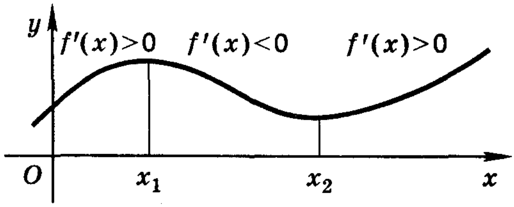
***Дослідити функцію* — це означає виявити її властивості:** вказати її область визначення і область значень, проміжки зростання і спадання, проміжки, на яких функція набуває додатних значень, на яких — від'ємних, з'ясувати, чи не є дана функція парною або непарною і т. ін.

Одне з важливих завдань дослідження функції — визначення проміжків її зростання і спадання. Як зазначалося в § 24, у тих точках, в яких функція зростає, її похідна (кутовий коефіцієнт дотичної) додатна, а в точках спадання функції її похідна від'ємна (мал. 75). Правильне й таке твердження.

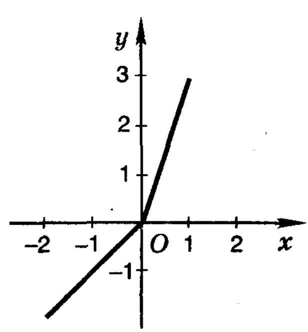
Якщо похідна функції в кожній точці деякого проміжку додатна, то функція на цьому проміжку зростає; якщо похідна в кожній точці проміжку від'ємна, то на цьому проміжку функція спадає.

Строге доведення цього твердження досить громіздке, тому ми його не наводимо. Зауважимо тільки, що в ньому виражається д о с т а т н я ознака зростання чи спадання функції, але не необхідна. Бо функція може зростати і на проміжку, в деяких точках якого вона не має похідної. Наприклад, функція $y = 2x + |x|$ зростає на $\boldsymbol{R}$, хоч у точці $x = 0$ її похідна не існує (мал. 76).

Із сказаного випливає, що два сусідні проміжки, на одному з яких функція зростає, а на другому спадає, можуть розділятись тільки такою точкою, в якій похідна функції дорівнює нулю або не існує.



Мал. 75



Мал. 76

Внутрішні точки області визначення функції, в яких її похідна дорівнює нулю або не існує, називають *критичними точками функції*. Отже, *щоб визначити проміжки зростання чи спадання функції, треба знайти всі її критичні точки, розбити ними область визначення функції на проміжки, а далі досліджувати, на яких із них функція зростає, а на яких спадає.*

Приклади.

1. Знайдіть проміжки зростання і спадання функції $y = x^3 - 3x^2 + 2$.

Розв'язання. $y' = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$.

Рівняння $3x(x - 2) = 0$ має корені $x = 0$ і $x = 2$. Це — критичні точки. Область визначення даної функції, множину $\boldsymbol{R}$, вони розбивають на три проміжки: $(-\infty; 0)$, $(0; 2)$, $(2; \infty)$. Похідна функції на цих проміжках має відповідно такі знаки: $+$, $-$, $+$. Отже, дана функція на проміжках $(-\infty; 0)$ і $(2; \infty)$ зростає, а на $(0; 2)$ спадає.

Зауваження. Якщо функція неперервна в якому-небудь кінці проміжку зростання чи спадання, то цю точку можна приєднати до розглядуваного проміжку. Оскільки функція $y = x^2 - 3x^2 + 2$ в точках 0 і 2 неперервна, то можна стверджувати, що вона зростає на проміжках $(-\infty; 0]$ і $[2; \infty)$, а на $[0; 2]$ спадає.

2. Знайдіть проміжки спадання функції $y = \frac{2x^2}{x-3}$.

Розв'язання. Область визначення даної функції: $(-\infty; 3) \cup (3; \infty)$.

$$y' = \frac{4x(x-3)-2x^2}{(x-3)^2} = \frac{2x^2-12x}{(x-3)^2} = \frac{2x(x-6)}{(x-3)^2}.$$

Критичні точки: $x = 0$ і $x = 6$. Вони всю область визначення функції розбивають на проміжки: $(-\infty; 0)$, $(0; 3)$, $(3; 6)$, $(6; \infty)$. Похідна y' на цих проміжках має відповідно такі знаки: $+$, $-$, $-$, $+$. Отже, функція спадає на $(0; 3)$ і $(3; 6)$. Оскільки в точках $x = 0$ і $x = 6$ дана функція неперервна, то відповідь можна записати і так: $[0; 3) \cup (3; 6]$.

Знаходити проміжки зростання або спадання функції доводиться при розв'язуванні багатьох задач, зокрема при відшуканні наближених коренів рівнянь. Наприклад, якщо з'ясуємо, що неперервна функція $y = f(x)$ зростає на проміжку $[a; b]$, а на його кінцях набуває числових значень різних знаків, це означає, що на $[a; b]$ графік функції перетинає вісь x в одній точці. Отже, на $[a; b]$ рівняння $f(x) = 0$ має один корінь.

8. Чи має рівняння $x^4 - 4x - 9 = 0$ корені на $[2; 3]$?

Р о з в' я з а н н я. Розглянемо функцію $f(x) = x^4 - 4x - 9$. Її похідна $f'(x) = 4x^3 - 4 = 4(x^3 - 1)$. Критична точка одна: $x = 1$.

Якщо $x > 1$, то $f'(x) > 0$, тому на проміжку $[1; \infty)$, а отже, і на $[2; 3]$, функція $f(x)$ зростає.

$f(2) = -1$, $f(3) = 60$ — на кінцях проміжку $[2; 3]$ значення функції $f(x)$ мають різні знаки.

В і д п о в і д ь. На проміжку $[2; 3]$ дане рівняння має 1 корінь.

553°. Знайдіть критичні точки функції:

а) $f(x) = 2x^2 - 12x + 5$; б) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x$;

в) $f(x) = x - 2\sin x$; г) $f(x) = 3x^5 + 6x$.

554°. Назвіть критичні точки функції, графік якої зображено на малюнку 77.

Знайдіть проміжки зростання і спадання функції (555—560).

555°. а) $f(x) = 3 - 2x^2$; б) $f(x) = 2x - x^2$.

556°. а) $f(x) = x^4 - 2x^2$; б) $f(x) = x^2(x + 5)$.

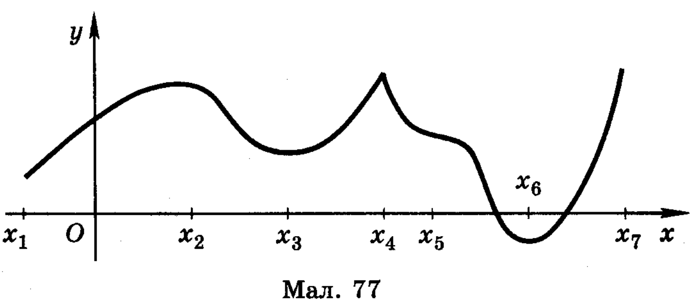
557°. а) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - 1$; б) $f(x) = 8 - 6x^2 - x^4$.

558. а) $f(x) = \frac{x-3}{x}$; б) $f(x) = \frac{3}{x^2}$.

559. а) $f(x) = \frac{5x^2}{x+4}$; б) $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$.

560°. а) $f(x) = 5 + \sin 3x$; б) $f(x) = 7 - \cos\frac{x}{2}$.

561. Доведіть, що функція $y = x^3 + 2x$ зростає на $\boldsymbol{R}$.



Мал. 77

Р о з в' я з а н н я. $y' = 3x^2 + 2$. При будь-якому значенні x вираз $3x^2 + 2$ має додатне значення. Отже, дана функція зростає на всій області визначення, тобто на множині $\boldsymbol{R}$.

562. Яка з даних функцій зростає на всій області визначення:

а) $f(x) = x^5 + 2x^3$; б) $f(x) = \sqrt{x - x^2}$;

в) $f(x) = x + \sin x$; г) $f(x) = -2x - \cos x$?

563. Скільки коренів має рівняння:

а) $x^3 - 3x^2 + 1 = 0$ на $[2; 3]$; б) $x^4 + 6x - 8 = 0$ на $[1; 2]$;

в) $x^4 + 6x - 8 = 0$ на $[2; 5]$?

564. Доведіть, що при кожному дійсному значенні a рівняння $x + \sin x = a$ і $\cos x - 4x = a$ мають по одному кореню.

§ 31. ЕКСТРЕМУМИ ФУНКЦІЇ

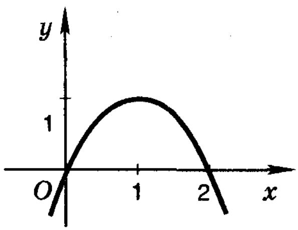
Введемо спочатку кілька нових понять.

Околом точки x_0 називається будь-який проміжок, для якого x_0 є внутрішньою точкою.

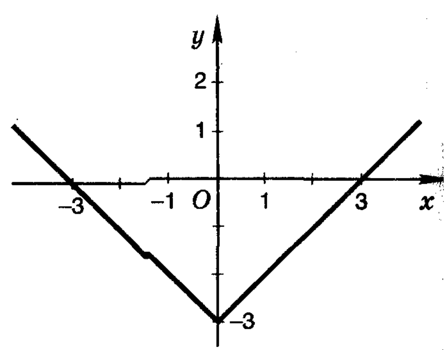
Точка x_0 називається *точкою мінімуму* (або *максимуму*) функції $y = f(x)$, якщо для всіх x з деякого околу x_0 виконується нерівність $f(x_0) < f(x)$ (або відповідно $f(x_0) > f(x)$). Значення функції в точці мінімуму називається *мінімумом функції*, а в точці максимуму — *максимумом функції*. Позначають їх символами $y_{\min}$, $y_{\max}$.

Точки мінімуму і максимуму функції разом називають *точками екстремуму* (лат. extremum — край, кінець). Значення функції в точках її екстремуму — її *екстремальні значення*.

Наприклад, для функції $y = 2x - x^2$ точка $x = 1$ є точкою максимуму (мал. 78). Її максимум: $y_{\max} = 2 \cdot 1 - 1^2 = 1$.

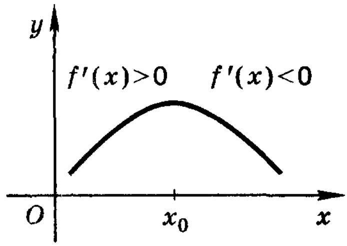


Мал. 78



Мал. 79

Для функції $y = |x| - 3$ точка $x = 0$ є точкою мінімуму (мал. 79). Її мінімум: $y_{min} = 0 - 3 = -3$.



Мал. 80

Функція, графік якої зображено на малюнку 77, має чотири екстремальні точки: x_2 і x_4 — точки максимуму і x_3, x_6 — точки мінімуму.

Точка екстремуму функції не може належати проміжку, на якому ця функція зростає або спадає (чому?). Отже, ті точки, в яких похідна функції додатна або від'ємна, не можуть бути точками її екстремуму. Всі інші точки області визначення функції є її критичними точками. Тому *точками екстремуму функції можуть бути тільки її критичні точки.* Це — необхідна умова існування екстремуму.

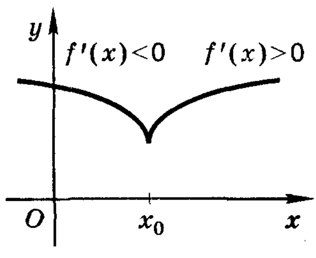
Вибрати з критичних точок функції точки екстремуму дає можливість така достатня умова існування екстремуму.

Точка, при переході через яку в напрямі зростання аргументу похідна змінює знак з «плюса» на «мінус», є точкою максимуму, а точка, при переході через яку похідна змінює знак з «мінуса» на «плюс» — точка мінімуму.

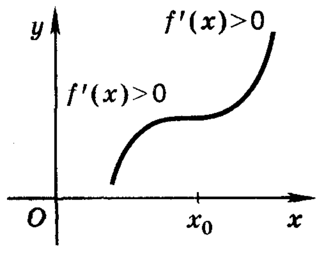
Справді, якщо похідна функції $f(x)$ на проміжку $(a; x_0)$ додатна, а на проміжку $(x_0; b)$ від'ємна, то при переході через точку x_0 зростання функції змінюється на спадання (мал. 80). У цьому випадку x_0 — точка максимуму. Якщо ж при переході через точку x_0 спадання функції змінюється на зростання, то x_0 — точка мінімуму (мал. 81).

Якщо ж похідна функції в точці x_0 дорівнює нулю, а зліва і справа від x_0 похідна функції додатна (мал. 82) або зліва і справа від'ємна, то x_0 не є точкою екстремуму.

Приклад. Знайдіть точки екстремуму і екстремальні значення функції $y = 2x^3 + 6x^2 - 5$.



Мал. 81



Мал. 82

Р о з в' я з а н н я. $y' = 6x^2 + 12x = 6x(x+2)$.

Критичні точки функції: $x_1 = -2$ і $x_2 = 0$. При переході через точку $x_1 = -2$ похідна змінює знак з + на −, тому це — точка максимуму. При переході через точку $x_2 = 0$ похідна змінює знак з − на +, тому це — точка мінімуму.

$$y_{\max} = 2\cdot(-2)^3 + 6\cdot(-2)^2 - 5 = 3,$$
$$y_{\min} = 2\cdot 0^3 + 6\cdot 0^2 - 5 = -5.$$

В і д п о в і д ь. $x_1 = -2$ — точка максимуму, $y_{\max} = 3$; $x_2 = 0$ — точка мінімуму, $y_{\min} = -5$.

Знаходження екстремумів функції можна оформляти вигляді таблички. Особливо це зручно при загальному дослідженні функції, коли виявляють не тільки її екстремуми а й інші властивості.

П р и к л а д. Дослідіть функцію $f(x) = \frac{x^2+3}{x+1}$.

Р о з в' я з а н н я. Область визначення функції — всі дійсні числа, крім $x = -1$. З такою областю визначення функція не може бути парною, непарною чи періодичною.

$$f'(x) = \frac{2x(x+1)-(x^2+3)\cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2} = \frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}.$$

Критичні точки: $x_1 = -3$, $x_2 = 1$.

x	$(-\infty;-3)$	-3	$(-3;-1)$	-1	$(-1;1)$	1	$(1;\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	не існ.	−	0	+
$f(x)$	↗	−6 max	↘	не існ.	↘	2 min	↗

На проміжках $(-\infty; -3]$ і $[1; \infty)$ функція зростає, на проміжках $[-3; -1)$ і $(-1; 1]$ функція спадає.

$x_1 = -3$ — точка максимуму, $f(-3) = -6$;

$x_2 = 1$ — точка мінімуму, $f(1) = 2$.

Область значень функції: $(-\infty; -6) \cup (2; \infty)$.

Рівняння $\frac{x^2+3}{x+1} = 0$ не має розв'язків, тому графік функції не перетинає вісь x. Вісь y він перетинає в точці з ординатою $f(0) = 3$.

Графік даної функції зображено на малюнку 83.

565. Які з проміжків $(1; 3)$, $(0; 4)$, $(-3; 3)$, $(2; 3)$, $[2; 3]$ є околами точки $x = 2$?

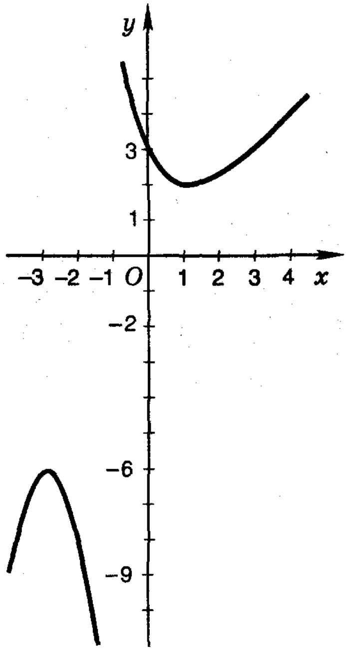
566. Назвіть точки екстремуму функції, графік якої зображено на малюнку 84.

567. Функція визначена і зростає на проміжку [−7; 7]. Чи може точка її екстремуму належати цьому проміжку? Чому?

568. Доведіть, що функція $y = x^2 - 4x + 1$ в точці $x = 2$ має мінімум. Чи має вона максимум?

569. Як, користуючись похідною, знайти абсцису вершини параболи — графіка функції $y = ax^2 + bx + c$?

Р о з в' я з а н н я. $y' = 2ax + b$, $2ax + b = 0$, $x = -\frac{b}{2a}$.



Мал. 83

Знайдіть точки екстремуму і екстремальні значення функції (570—576).

570°. а) $f(x) = 7x^2 - 2x + 4$; б) $f(x) = x^2 + x + 1$.

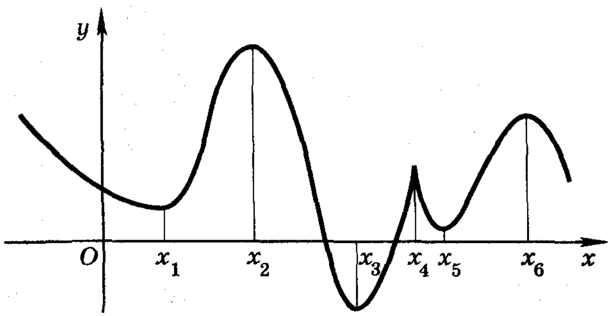
571°. а) $f(x) = x^3 - 3x + 5$; б) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 1$.

572°. а) $f(x) = 8 - 12x - x^3$; б) $f(x) = 1 + 8x^2 - x^4$.

573. а) $f(x) = x + \frac{4}{x^2}$; б) $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$.

574. а) $f(x) = x - 2\cos x$; б) $f(x) = x + 2\sin x$.

575. а) $f(x) = \cos^2 x - \sin^2 x$; б) $f(x) = 10\cos x - 5x$.



Мал. 84

576. а) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$; б) $f(x) = x + \sqrt{1 - x^2}$.

577. Чи існують такі числа a і b, при яких функції $f(x) = (x - a)^3 + b$ має екстремум?

Р о з в' я з а н н я. При будь-яких дійсних значеннях a і b $f'(x) = 3(x - a)^2$. В кожній точці x похідна даної функції невід'ємна. Функція $f(x)$ зростає на R, тому не може мати екстремумів.

В і д п о в і д ь. Не існують.

578. Доведіть, що не має екстремумів функція:

а) $f(x) = 2x + \sin x$; б) $f(x) = -3x - \cos x$.

579. Доведіть, що при $a > 0$ і $b^2 < 3ac$ функція $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ не має екстремумів.

580. Знайдіть точки екстремуму і екстремальні значення функції:

а) $y = |x - 5|$; б) $y = |2x - 3|$; в) $y = |3x + 6| + 1$.

581. Скільки точок екстремуму може мати функція $y = f(x)$, де $f(x)$ — многочлен третього, четвертого чи п'ятого степеня?

Дослідіть функцію і побудуйте її графік (582—590).

582°. а) $f(x) = x^2 - 2x + 4$; б) $f(x) = 4 + 5x - x^2$.

583°. а) $f(x) = x^3 + 3x + 2$; б) $f(x) = 3x - x^3$.

584°. а) $f(x) = \frac{x^4}{4} + 8x + 5$; б) $f(x) = \frac{x^2}{4} + \frac{x}{16} + \frac{1}{4}$.

585°. а) $f(x) = 4x^2 - x^4$; б) $f(x) = 5x^3 - 3x^5$.

586. а) $f(x) = \frac{2x}{1-x^2}$; б) $f(x) = \frac{3x}{1+x^2}$.

587. а) $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$; б) $f(x) = \frac{x}{x-1}$.

588. а) $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$; б) $f(x) = \sqrt{3 - 2x - x^2}$.

589. а) $f(x) = x\sqrt{3 - x}$; б) $f(x) = x^2\sqrt{x + 2}$.

590. а) $f(x) = \sin^2 x + \sin x$; б) $f(x) = \cos x - \cos^2 x$.

591. Функція $f(x)$ парна і має максимум у точці $x = 2$, а в точці $x = 5$ — мінімум. Чи має ця функція інші екстремуми? Які та в яких точках?

592. Функція $\varphi(x)$ непарна і в точці $x = -3$ має мінімум, а в точці $x = -2$ — максимум. Чи має ця функція інші екстремуми? Які та в яких точках?

593. Чи може непарна функція мати екстремум в точці $x = 0$? А парна функція?

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Варіант 1

1. Знайдіть проміжки зростання і спадання функції $y = x^3 - 3x^2$.

2. Знайдіть точки екстремуму і екстремальні значення функції $y = x + \frac{1}{x}$.

3. Доведіть, що функція $y = 2x - \cos x$ зростає на $\boldsymbol{R}$.

4. Дослідіть функцію $y = x^3 - 3x$ і побудуйте її графік.

Варіант 2

1. Знайдіть проміжки зростання і спадання функції $y = 3x^4 - x^3$.

2. Знайдіть точки екстремуму і екстремальні значення функції $y = x + \frac{4}{x}$.

3. Доведіть, що функція $y = \sin x - 2x$ спадає на $\boldsymbol{R}$.

4. Дослідіть функцію $y = \frac{1}{3}x^3 - 4x$ і побудуйте її графік.

Варіант 3

1. Знайдіть проміжки зростання і спадання функції $y = x^4 - x^3$.

2. Знайдіть точки екстремуму і екстремальні значення функції $y = 4x + \frac{1}{x}$.

3. Доведіть, що функція $y = \cos^2 x - 1{,}5x$ спадає на $\boldsymbol{R}$.

4. Дослідіть функцію $y = x^3 - 3x + 2$ і побудуйте її графік.

Варіант 4

1. Знайдіть проміжки зростання і спадання функції $y = x^3 - 3x^4$.

2. Знайдіть критичні точки і екстремальні значення функції $y = \frac{1}{x} + x + 2$.

3. Доведіть, що функція $y = x + \cos x$ не має екстремумів.

4. Дослідіть функцію $y = x^4 - 2x^2 - 2$ і побудуйте її графік.

§ 32. НАЙБІЛЬШІ І НАЙМЕНШІ ЗНАЧЕННЯ ФУНКЦІЇ

Від максимумів і мінімумів функції слід відрізняти її *найбільше* і *найменше значення* на проміжку. Наприклад, функція $f(x) = x^2$, задана на проміжку $[-1; 2]$, має найменше значення $f(0) = 0$ і найбільше значення $f(2) = 4$ (мал. 85).

Найбільше і найменше значення функції тісно пов'язані з її областю значень. Якщо область значень неперервної функції — проміжок $[m; M]$, то m — найменше значення даної функції, а M — найбільше значення.

Щоб знайти найбільше і найменше значення неперервної функції $f(x)$ на проміжку $[a; b]$, треба обчислити її значення $f(a)$, $f(b)$ на кінцях даного проміжку і в критичних точках, що належать цьому проміжку, і вибрати з них найбільше і найменше.

П р и к л а д. Знайдіть найбільше і найменше значення функції $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 10$ на проміжку $[-4; 4]$.

Р о з в' я з а н н я. $f'(x) = 3x^2 + 6x - 9 = 3(x+3)(x-1)$.

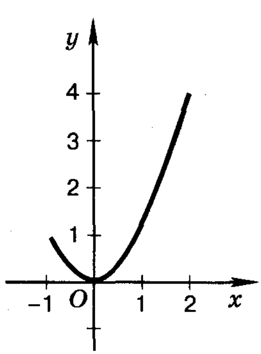
Критичні точки: $x_1 = -3$, $x_2 = 1$.

x	-4	$(-4; -3)$	-3	$(-3; 1)$	1	$(1; 4)$	4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	10	$\nearrow$	17 max	$\searrow$	-15 min	$\nearrow$	66

$f(-4) = 10$, $f(-3) = 17$, $f(1) = -15$, $f(4) = 66$.

З чотирьох цих значень функції найменше -15, а найбільше 66.

В і д п о в і д ь. $\max\limits_{[-4;\,4]} f(x) = 66$, $\min\limits_{[-4;\,4]} f(x) = -15$.

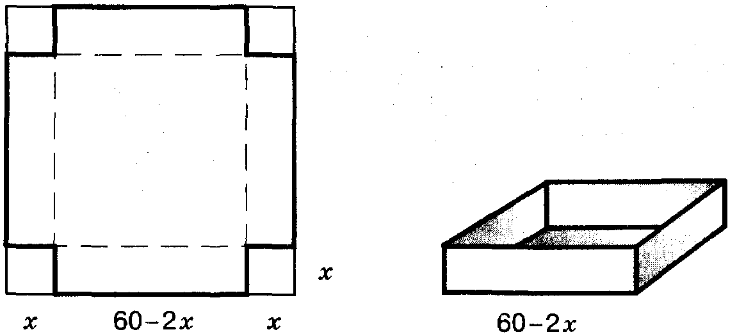


Мал. 85

До знаходження найбільшого або найменшого значення функції зводиться розв'язання багатьох прикладних задач.

П р и к л а д. Є квадратний лист жерсті зі стороною 60 см. Знайдіть розміри квадратів, які треба вирізати в кутах даного листа, щоб з одержаної заготовки зробити коробку найбільшого об'єму (мал. 86).

Р о з в' я з а н н я. Щоб одержати коробку (у формі прямокутного паралелепіпеда), квадрати в кутах листа треба вирізати рівні. Нехай x — довжина сторони такого квадрата. Тоді висота ко-



Мал. 86

робки дорівнює x, а сторона основи $60 - 2x$. Об'єм коробки $V(x) = (60 - 2x)^2 x$ — функція від x.

Маємо дослідити математичну модель задачі: при якому значенні x функція $V(x) = (60 - 2x)^2 x$ на проміжку $[0; 30]$ набуває найбільшого значення.

$$V(x) = (60 - 2x)^2 x = 3600x - 240x^2 + 4x^3,$$

$$V'(x) = 3600 - 480x + 12x^2,$$

$$3600 - 480x + 12x^2 = 0,$$

$$x^2 - 40x + 300 = 0,$$

$$x_1 = 10,\ x_2 = 30.$$

Оскільки при $x < 10$ $V'(x) > 0$, а при $x > 10$ $V'(x) < 0$, то $x = 10$ — точка максимуму.

Відповідь. Треба вирізати квадрати, сторони яких дорівнюють 10 см.

Знайдіть найбільше і найменше значення функції (594—599).

594°. $f(x) = x^2 - 4x$ на проміжку $[-3; 3]$.

595°. $f(x) = 5x^3 - 3x^5$ на $[-2; 2]$.

596°. $f(x) = x^4 - 8x^2 - 3$ на $[-3; 1]$.

597. $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$ на $[-2; 2]$.

598. $f(x) = x + \frac{4}{x}$ на $[1; 3]$.

599. $f(x) = 2\sin\frac{x-\pi}{3}$ на $[0; 2\pi]$.

600°. Знайдіть найменше значення функції

$$f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - 2 \text{ на } \boldsymbol{R}.$$

601. Чи має найбільше або найменше значення на $\boldsymbol{R}$ функція:

а) $f(x) = x^3 - 5x + 2$; б) $f(x) = 3 - 2x^2 - x^5$?

602. Знайдіть область значень функції:

а) $y = x^6 - 3x^4 + 2$; б) $y = 2 - x^2 - x^4$;

в) $y = \sqrt{4 - x - x^2}$; г) $y = x + \frac{1}{x}$.

603°. Яке число в сумі з його квадратом має найменше значення?

604. Треба відгородити два пасовища у формі рівних прямокутників зі спільною стороною, щоб сума їх площ дорівнювала 6 га. Знайдіть найменшу можливу довжину огорожі.

605. Довжина відрізка AB дорівнює 6, точка M — його середина. Знайдіть на відрізку AB таку точку X, щоб добуток довжин XA, XB, XM був найбільший.

606°. Який з прямокутників, вписаних у дане коло, має найбільшу площу? Розв'яжіть задачу двома способами.

607°. Який з прямокутників, вписаних у дане коло, має найбільший периметр?

608. З пунктів A і B прямолінійними дорогами AO і BO виїхали одночасно два велосипедисти зі швидкостями 12 км/год і 15 км/год. Коли відстань між велосипедистами буде найменша, якщо $AO = BO = 60$ км, $\angle AOB = 60°$?

609. У трапеції $ABCD$ $AB = BC = CD = a$, $AD > BC$. Яким повинен бути кут BAD, щоб площа трапеції була найбільша?

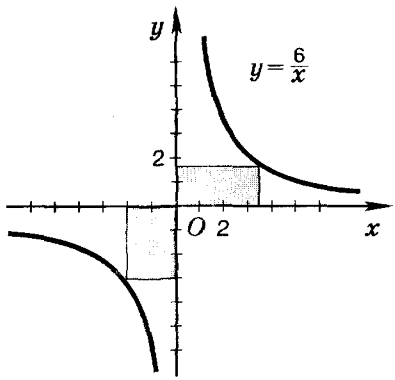
610°. Якими повинні бути розміри басейну об'ємом 32 м^3 з квадратним дном і вертикальними стінками, щоб на його облицювання пішло найменше плиток?

611. Розгляньте всі можливі прямокутники, дві сторони яких лежать на осях координат, а одна з вершин — на графіку функції $y = \frac{6}{x}$ (мал. 87). Який з них має найбільшу площу? Найменший периметр?

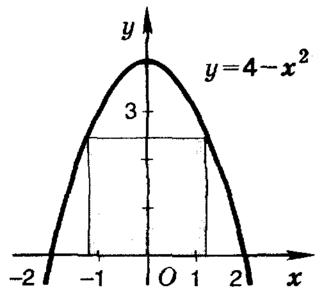
612. Фігура обмежена віссю x, графіком функції $y = \sqrt{x}$ і прямою $x = 27$. Знайдіть сторони прямокутника, вписаного в цю фігуру, який має найбільшу площу.

613. Яку найбільшу площу може мати прямокутник, вписаний у фігуру, обмежену віссю x і графіком функції $y = 4 - x^2$ (мал. 88).

614. Знайдіть найкоротшу відстань від точки A (10; 2) до графіка функції $y = x^2$.



Мал. 87



Мал. 88

Р о з в' я з а н н я. Нехай найближча до A точка графіка функції M має абсцису x, її ордината дорівнює x^2 (мал. 89). Знайдемо квадрат відстані між точками M $(x;\ x^2)$ і A (10; 2):

$$MA^2 = (x-10)^2 + (x^2-2)^2 = x^4 - 3x^2 - 20x + 104.$$

Довжина відстані MA найменша, коли її квадрат найменший. Отже, знайдемо мінімальне значення функції $f(x) = x^4 - 3x^2 - 20x + 104$.

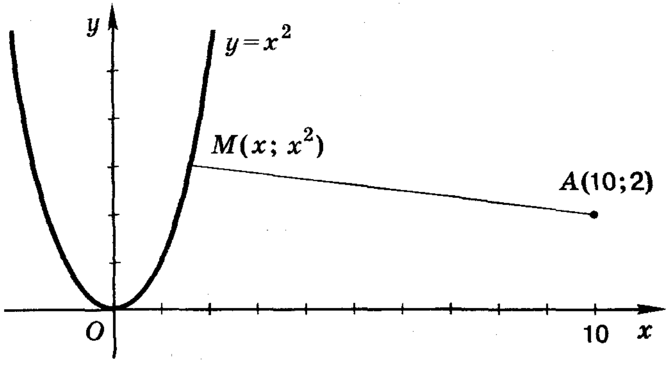
$$f'(x) = 4x^3 - 6x - 20 = 2(x-2)(2x^2+4x+5).$$

Рівняння $2x^2 + 4x + 5 = 0$ дійсних коренів не має, тому функція $f(x)$ має одну критичну точку $x = 2$. Якщо $x < 2$, то $f'(x) < 0$, якщо $x > 2$, то $f'(x) > 0$. Отже, $x = 2$ — точка мінімуму.

Мінімальне значення квадрата відстані

$$MA^2 = (2-10)^2 + (2^2-2)^2 = 68,\ MA = \sqrt{68}.$$

В і д п о в і д ь. $\sqrt{68}$.



Мал. 89

615. Знайдіть координати точки на графіку функції $y = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, найменш віддаленої від початку координат.

616*. Якими слід робити літрові консервні банки циліндричної форми, щоб на їх виготовлення йшло найменше жерсті? Допусками на шви можна нехтувати.

§ 33. ПОХІДНА ЯК ШВИДКІСТЬ

Досі ми мали справу з геометричним змістом похідної, тобто розуміли під похідною кутовий коефіцієнт до тичної, проведеної до графіка функції. Не менш важливо зрозуміти і фізичний зміст похідної. Похідна функції — це швидкість її зміни, швидкість протікання процесу, який описується даною функцією.

Нехай тіло рухається по прямій із змінною швидкістю. Відстань s, пройдена тілом за час t, залежить від t. Ця залежність $s = f(t)$ — закон руху даного тіла. Знайдемо його миттєву швидкість $v(t_0)$ в момент t_0.

За час від t_0 до $t_0 + \Delta t$ тіло проходить відстань $\Delta s = f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)$. За цей проміжок часу Δt тіло рухається з середньою швидкістю $\frac{\Delta s}{\Delta t}$. Якщо $\Delta t \to 0$, то $\frac{\Delta s}{\Delta t} \to v(t_0)$, де $v(t_0)$ — швидкість руху тіла в момент t_0. З другого боку — якщо при $\Delta t \to 0$ $\frac{\Delta s}{\Delta t} \to v(t_0)$, то $v(t_0)$ — похідна функції s у точці t_0. Отже, якщо $s = f(t)$ — закон руху, то похідна цієї функції — швидкість руху в момент t.

Розглянемо конкретний приклад. Як відомо, вільне падіння тіла відбувається за законом $s = \frac{g}{2}t^2$, де стала $g \approx 9{,}8$ м/с^2 — його прискорення. З якою швидкістю тіло падає в момент t після початку падіння?

Розв'язувати задачу можна так. За час від t до $t + \Delta t$ тіло проходить відстань

$$\Delta s = \frac{g}{2}(t + \Delta t)^2 - \frac{g}{2}t^2 = \frac{g}{2}(2t \cdot \Delta t + (\Delta t)^2)$$

з середньою швидкістю $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{g}{2}(2t + \Delta t)$.

Якщо $\Delta t \to 0$, то $\frac{\Delta s}{\Delta t} \to gt$, тобто $v(t) = gt$.

Дістали результат, добре відомий з фізики.

Такий спосіб розв'язування задачі нераціональний, так змушені міркувати ті, хто не знає похідної і її фізичного змісту. Якщо ж ми знаємо, що швидкість прямолінійного руху — це похідна функції, яка виражає закон цього руху, то задачу можна розв'язати простіше:

$$v(t) = \left(\frac{g}{2}t^2\right)' = \frac{g}{2}\cdot 2t = gt\,.$$

Так можна знаходити не тільки швидкість прямолінійного руху, а й швидкість протікання багатьох процесів: хімічної реакції, радіоактивного розпаду, нагрівання тіла, танення криги, плавлення металу, розмноження бактерій тощо. Взагалі, *якщо який-небудь процес відбувається за законом $y = f(t)$, то швидкість протікання цього процесу в момент t можна визначити за формулою $v(t) = f'(t)$.*

Коротко говорять: *похідна — це швидкість.*

Швидкість руху також може змінюватись. Швидкість зміни швидкості прямолінійного руху — його прискорення. Отже, прискорення — похідна швидкості. Якщо, наприклад, швидкість руху виражається формулою $v(t) = gt$, то його прискорення $a(t) = (gt)' = g$.

Інший приклад. Якщо якийсь процес відбувається за законом

$$s(t) = 2t^3 - 5t^2 + 3\,,$$

то швидкість його протікання в момент t $v(t) = s'(t) = 6t^2 - 10t$, а його прискорення в цей самий момент $a(t) = v'(t) = 12t - 10$.

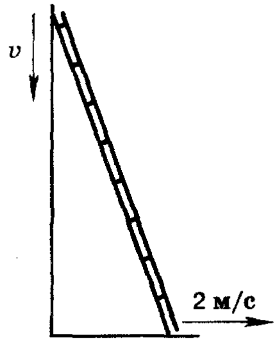
617°. Тіло рухається прямолінійно за законом $s(t) = 6t - t^2$ (шлях s — в метрах, час t — в секундах). Знайдіть миттєву швидкість цього тіла в моменти: $t_1 = 1$ с, $t_2 = 2$ с, $t_3 = 4$ с.

618°. Тіло рухається прямолінійно за законом $s(t) = t^3 + 3t^2$ (шлях s — в метрах, час t — в секундах). Знайдіть прискорення його руху в момент $t = 5$ с.

619°. Тіло рухається прямолінійно за законом $s(t) = 6t - 2t^2 - \frac{2}{3}t^3$ (шлях s — в метрах, час t — в секундах). Коли його швидкість стане найбільшою?

620. Тіло рухається прямолінійно за законом $s(t) = \sqrt{t}$. Доведіть, що його прискорення пропорційне кубу швидкості.

621°. Точка обертається навколо осі за законом $\varphi(t) = 3t^2 - 4t + 2$ (час t — в секундах, кут повороту $\varphi(t)$ — в радіанах). Знайдіть кутову швидкість точки: а) в довільний момент t; б) в момент $t = 4$ с.



Мал. 90

622. Маховик, затримуваний гальмом, обертається за законом $\varphi(t) = 4t - 0{,}3t^2$ (час — у секундах, кут — у радіанах). В який момент він зупиниться?

623. Колесо обертається так, що кут його повороту пропорційний квадрату часу. Перший оберт воно зробило за 8 с. Знайдіть його кутову швидкість через 48 с після початку обертання.

624. Під час нагрівання тіла його температура T з часом змінюється за законом $T = 0{,}4t^2$, де T — температура в градусах, t — час в секундах. Знайдіть швидкість зміни температури в момент $t = 5$ с.

625. Маса кристалів у розчині змінюється за законом $m = \sqrt{t^2 + 5t}$, де m — маса кристалів у грамах, t — час у годинах. Знайдіть швидкість зростання маси кристалів через 4 год після початку кристалізації.

626. Кулька коливається за законом $x(t) = 2\sin 3t$. Доведіть, що її прискорення пропорційне координаті x. При яких значеннях t прискорення кульки додатне?

627. Тіло кинули вертикально вгору з початковою швидкістю 40 м/с. Коли і на якій відстані від землі воно досягне найвищої точки?

628. Драбина завдовжки 5 м стояла вертикально. Потім її нижній кінець став переміщатись по підлозі зі сталою швидкістю 2 м/с (мал. 90). З якою швидкістю в момент t опускався верхній кінець драбини?

§ 34. ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЙ ТА РОЗВ'ЯЗУВАННЯ РІВНЯНЬ І НЕРІВНОСТЕЙ

Дослідження функцій здійснюють при розв'язуванні багатьох видів важливих задач. Розглянемо, як за допомогою дослідження функцій можна розв'язувати рівняння і нерівності.

П р и к л а д и.

1. Розв'яжіть рівняння $x^5 + 2x^3 + x - 7 = 0$.

Р о з в' я з а н н я. Дослідимо функцію $f(x) = x^5 + 2x^3 + x - 7$. Її область визначення — множина дійсних чисел $\boldsymbol{R}$. Похідна

$f'(x) = 5x^4 + 6x^2 + 1$ додатна при всіх значеннях x. Отже, на всій області визначення функція $f(x)$ зростає, $f(0) = -7$, $f(2) > 0$. Це означає, що її графік обов'язково перетинає вісь x і до того ж — тільки в одній точці. Висновок: дане рівняння має один дійсний корінь. Оскільки $f(1) = -3$, а $f(2) = 43$, то точка перетину графіка функції з віссю x знаходиться на проміжку (1; 2) (мал. 91). Отже, шуканий корінь рівняння $x \approx 1$.

Щоб знайти точніше значення кореня, звужують межі проміжку:

$$f(1{,}1) = -1{,}7\,, \quad f(1{,}2) \approx 0{,}14\,.$$

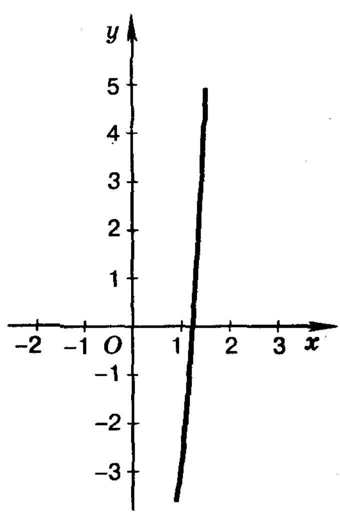
Отже, $x \approx 1{,}2$.

Подібним способом наближене значення кореня можна знайти з будь-якою точністю.

2. Розв'яжіть нерівність $x^5 + 2x^3 + x - 7 > 0$.

Р о з в' я з а н н я. Дивлячись на малюнок 91, відразу робимо висновок. Множина розв'язків даної нерівності — проміжок $(\alpha\,;\,\infty)$, де α — корінь розглянутого вище рівняння. Така відповідь — наближена. Але якщо, наприклад, потрібно знайти цілі розв'язки даної нерівності, то відповідь можна дати точну: $x \geq 2$, де $x \in N$.

Розглянуті способи розв'язування рівнянь і нерівностей ґрунтуються на такій в л а с т и в о с т і неперервних функцій. *Якщо функція $f(x)$ неперервна і не дорівнює нулю ні в одній точці проміжку $(a\,;b)$, то вона на цьому проміжку зберігає знак*. Тобто, її значення на всьому проміжку тільки додатні або тільки від'ємні. Доведення цієї властивості є в курсах математичного аналізу. Ми ж обмежимося тільки наочним поясненням. Якщо графік неперервної функції на проміжку $(a\,;b)$ не перетинає вісь x, то весь він на цьому проміжку знаходиться вище від осі x або нижче від неї.



Мал. 91

На цій властивості неперервних функцій ґрунтується і *метод інтервалів*, яким зручно розв'язувати нерівності.

3. Розв'яжіть нерівність

$$(x-2)(x+3)(x+5) < 0.$$

Р о з в' я з а н н я. Функція $f(x) = (x-2)(x+3)(x+5)$ визначена на $\boldsymbol{R}$.

Мал. 92

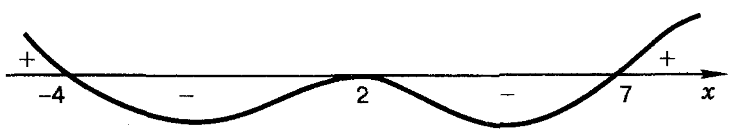
Її значення дорівнюють нулю в трьох точках: $x = -5$, $x = -3$ і $x = 2$. Ці точки числову вісь $\boldsymbol{R}$ розбивають на 4 проміжки: $(-\infty; -5)$, $(-5; -3)$, $(-3; 2)$, $(2; \infty)$. У кожному з цих проміжків значення функції $f(x)$ не дорівнює 0, тому на кожному з цих проміжків функція $f(x)$ зберігає знак. Які саме знаки, неважко визначити й усно: $f(-10) < 0$, $f(-4) > 0$, $f(0) < 0$, $f(10) > 0$. Отже, схематично графік функції $y = f(x)$ можна зобразити, як показано на малюнку 92. Дивлячись на малюнок, відразу можна написати відповідь $(-\infty; -5) \cup (-3; 2)$.

Методом інтервалів можна розв'язувати і дробово-раціональні нерівності. Адже, наприклад, нерівність

$$\frac{(x-2)(x+3)}{x+5} < 0$$

рівносильна розглянутій вище, тому має таку саму множину розв'язків.

З а у в а ж е н н я. Не треба думати, що знаки неперервної функції $f(x)$ в суміжних проміжках завжди різні. Наприклад, графік функції $\varphi(x) = (x-7)(x+4)(x-2)^2$ схематично можна зобразити, як показано на малюнку 93. У суміжних проміжках $(-4; 2)$ і $(2; 7)$ знаки функції однакові. Подібне трапляється, коли функція містить парні степені множників чи їх модулі. Адже вони невід'ємні і на знак функції не впливають.



Мал. 93

629. Знайдіть з точністю до 0,1 корені рівняння:

а) $4x^3 + 3x - 10 = 0$; б) $2x^7 + 3x^3 - 2 = 0$;

в) $3x^3 - 3x^2 + 5x + 1 = 0$; г) $0{,}2x^5 - x^3 + 7x + 5 = 0$.

630. Скільки коренів має рівняння $x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 7 = 0$?

Р о з в' я з а н н я. Розглянемо функцію $f(x) = x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 7$.

$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 - 16x = 4x(x^2 - 3x - 4) = 4x(x+1)(x-4)$.

Критичні точки: $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 4$.

x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 0)$	0	$(0; 4)$	4	$(4; \infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	4 min	$\nearrow$	7 max	$\searrow$	-121 min	$\nearrow$

Оскільки при $x \to \infty$ і $f(x) \to \infty$, то графік функції $f(x)$ перетинає вісь x один раз на проміжку $[0;\ 4]$ і один раз на проміжку $[4;\ \infty)$. Отже, дане рівняння має два дійсних корені.

631°. Скільки коренів має рівняння:
а) $x^4 + x^3 = 10$; б) $x^3 - 3x^2 - 9x = 1$;
в) $12x^4 - 12x^3 - 3x^2 = 5$?

Розв'яжіть методом інтервалів нерівність (632—638).

632°. а) $(x-4)(x+7) < 0$; б) $(x+5)(x-0{,}5) > 0$.

633°. а) $(x-2)(x+3)(x+8) < 0$; б) $(x-4)(x-5)(x-6) \geq 0$.

634. а) $x(x-3)(x+2)^2 < 0$; б) $x(x+4)(x^2+2) < 0$.

635°. а) $(2x-3)(3x-5)(x+6) \leq 0$; б) $(3x-4)(2x+3)(x-7) \geq 0$.

636°. а) $\frac{(x-3)(x+2)}{x-6} < 0$; б) $\frac{(x-2)(x+7)}{x+8} \geq 0$.

637. а) $\frac{x^2-5x+6}{x^2+4x+4} < 0$; б) $\frac{x^2+6x+5}{x^2-4x+4} \geq 0$.

638. а) $\frac{1}{x^2-6x+8} < \frac{1}{8}$; б) $\frac{x^2+5x+4}{2x^2+5x} \leq 1$.

639*. Дослідіть функцію $y = |x-1| + |x-3|$ і розв'яжіть рівняння:
а) $|x-1| + |x-3| = 1$; б) $|x-1| + |x-3| = 2$;
в) $|x-1| + |x-3| = 4$; г) $|x-1| + |x-3| = 10$.

640*. Розв'яжіть подвійну нерівність $4 < |x-1| + |x-3| \leq 6$.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Варіант 1

1. Знайдіть найбільше і найменше значення функції $y = x + \frac{9}{x} - 4$ на проміжку $[2;\ 5]$.

2. Знайдіть відстань від точки M (5; –1) до прямої $y = 2x$.

3. Тіло рухається прямолінійно за законом $s(t) = \frac{1}{3}t^3 - t^2 +$ (шлях s — у метрах, час t — в секундах). Знайдіть швидкість і прискорення його руху в момент $t = 4$ с.

4. Розв'яжіть нерівність $(x - 3)(x + 1)(x - 2)^2 < 0$.

Варіант 2

1. Знайдіть найбільше і найменше значення функції $y = x + \frac{4}{x} - 3$ на проміжку [1; 4].

2. Знайдіть відстань від точки K (6; 1) до прямої $y = 3x$.

3. Тіло рухається прямолінійно за законом $s(t) = t^3 - t^2 + 3$. Знайдіть швидкість і прискорення його руху в момент $t = 5$ с.

4. Розв'яжіть нерівність $(x + 2)(x - 1)(x - 3)^2 > 0$.

Варіант 3

1. Знайдіть найбільше і найменше значення функції $y = 2x + \frac{18}{x} + 7$ на проміжку [–4; –2].

2. Знайдіть відстань від точки A (5; 3) до прямої $y = -2x$.

3. Тіло рухається прямолінійно за законом $s(t) = t^3 - \frac{1}{2}t^2 + 4$. Знайдіть швидкість і прискорення його руху в момент $t = 6$ с.

4. Розв'яжіть нерівність $(x - 2)\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right)^4 < 0$.

Варіант 4

1. Знайдіть найбільше і найменше значення функції $y = 3x + \frac{12}{x} + 13$ на проміжку [–5; –1].

2. Знайдіть відстань від точки B (3; –5) до прямої $y = 2x - 1$.

3. Тіло рухається прямолінійно за законом $s(t) = t^3 - t^2 + t$. Знайдіть швидкість і прискорення його руху в момент $t = 7$ с.

4. Розв'яжіть нерівність $(x - \sqrt{2})^2(x + 1)(2x + 1) > 0$.

Контрольні запитання і завдання

1. Що таке функція, область визначення, область значень?

2. Які функції називають парними, непарними, зростаючими?

3. Що розуміють під границею функції в точці?

4. Що таке приріст аргументу, приріст функції на $[x; x+\Delta x]$?

5. Яку функцію називають неперервною в точці, на проміжку?

6. Що розуміють під дотичною до графіка функції?

7. Що таке кутовий коефіцієнт дотичної? Чому він дорівнює?

8. Сформулюйте означення похідної функції в точці.

9. Що таке диференціювання? Наведіть приклади.

10. Яку функцію називають диференційовною в точці, на проміжку?

11. Сформулюйте і доведіть теорему про похідну суми функцій.

12. Сформулюйте теореми про похідну добутку, дробу, степеня.

13. Чому дорівнює похідна синуса, косинуса, тангенса, котангенса?

14. Що означає дослідити функцію?

15. Що називають критичними точками функції?

16. Що таке точка максимуму, мінімуму, екстремуму?

17. Що таке максимум, мінімум функції?

18. Що розуміють під екстремальним значенням функції?

19. Сформулюйте необхідну умову існування екстремуму функції.

20. Сформулюйте достатню умову існування екстремуму функції.

21. Що таке найбільше, найменше значення функції?

22. Розкрийте геометричний зміст похідної.

23. Розкрийте фізичний зміст похідної.

Історичні відомості

Поняття функції введено в математичну науку в XVII ст. Цьому сприяли праці багатьох європейських математиків, насамперед П. Ферма, Р. Декарта, І. Ньютона, Г. Лейбніца. Термін «функція» запропонував у 1673 р. Г. Лейбніц. Потім Й. Бернуллі, Л. Ейлер, Г. Лопіталь, К. Гаусс, М. І. Лобачевський, П. Діріхле та інші математики неодноразово уточнювали і узагальнювали це поняття.

Сучасне загальне означення функції дали математики першої половини XX ст., які друкували свої праці під спільним псевдонімом Нікола Бурбакі.

ФЕРМА П'ЄР
(1601—1665)

Видатний французький математик. Юрист, радник парламенту. Математикою займався у вільний від роботи час. Творець теорії чисел, один з основоположників аналітичної геометрії, диференціального числення і теорії ймовірностей.

«Ферма зробив більше для розвитку теорії чисел, ніж будь-який інший учений протягом більш як тисячі років».

Д. Сміт

Основні властивості числових функцій, у тому числі їх парність, непарність, періодичність, неперервність тощо, розглянуто у двотомній праці Л. Ейлера «Вступ до аналізу нескінченно малих» (1748).

Похідна в математику ввійшла майже водночас з поняттям функції, хоч матеріал, що підводив до цих понять, накопичувався протягом багатьох віків. Ще Архімед розв'язував задачі, які тепер розв'язують за допомогою похідної: досліджував, як побудувати дотичну до спіралі, як знайти найбільше значення добутку $x^2(a - x)$ тощо.

П. Ферма по суті вмів знаходити похідну довільного многочлена від однієї змінної. Користуючись цим, він показав, як

ЛЕЙБНІЦ ГОТФРІД ВІЛЬГЕЛЬМ
(1646—1716)

Видатний німецький вчений. За освітою юрист, працював бібліотекарем, історіографом, організував Берлінську Академію Наук, досліджував проблеми політичної економії, мовознавства, хімії, геології, конструював обчислювальні машини. Основоположник символічної логіки, один з творців математичного аналізу. Ввів терміни: «функція», «абсциса», «ордината», логічну символіку, знаки множення і ділення (крапку і двокрапку) та ін.

«Після Лейбніца, мабуть, уже не було людини, яка повністю охоплювала б усе інтелектуальне життя свого часу».

Н. Вінер

НЬЮТОН ІСААК
(1643—1727)

Видатний англійський фізик, астроном, математик. Сформулював основні закони *механіки, закон всесвітнього тяжіння.* Незалежно від Лейбніца започаткував математичний аналіз.

«При вивченні наук приклади корисніші від правил».

І. Ньютон

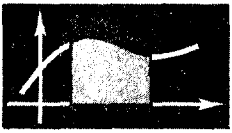
розв'язувати екстремальні задачі, в тому числі — про вписування в дану кулю конуса найбільшого об'єму, циліндра найбільшої площі поверхні тощо. Але самого поняття похідної він не вичленив.

До поняття похідної прийшли майже одночасно і різними шляхами І. Ньютон і Г. Лейбніц. І. Ньютон виходив з потреб фізики, розглядав фізичний зміст похідної. Функцію він називав флюентою (від лат. fluere — текти), а похідну — флюксією, функції позначав буквами u, x, y, z, а їх похідні — тими самими буквами з крапками зверху: $\dot{u}$, $\dot{x}$, і т. д.

Г. Лейбніц розглядав геометричний зміст похідної: знаходив кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції. При цьому він користувався не похідною, а *диференціалом* і відношенням диференціалів. Замість відомих вам символів Δx, Δy він писав dx і dy. Тут d — перша буква латинського слова differentia — різниця, бо ж приріст аргументу і приріст функції — різниці їх значень. Звідси і пішла назва «диференціальне числення». Поняття диференціала і символи dx, $\frac{dx}{dx}$ широко використовуються в сучасній математиці.

І. Ньютон ввів поняття флюксії в 1665 р., набагато раніше, ніж Г. Лейбніц — поняття диференціала, але Лейбніц опублікував свої роботи раніше, в 1684 р. До того ж ішли вони різними шляхами, незалежно один від одного. Тому їх обох вважають основоположниками диференціального числення. Їх дослідження успішно продовжили Й. Бернуллі, А. Лопіталь, Л. Ейлер, Б. Тейлор, Ж. Лагранж та ін. Не всі їх міркування були строгі, деякі навіть містили помилки, бо на той час не були розроблені логічні основи математичного аналізу. Але вчених закликали: «Рухайтесь вперед, віра в правильність результатів прийде згодом!»

Розділ 5



ПЕРВІСНА ТА ІНТЕГРАЛ

§ 35. ПЕРВІСНА

Раніше ви ознайомились з операцією *диференціювання.* Не менш важливою є і обернена до неї операція — *інтегрування.* Її ми і вивчатимемо у цьому розділі.

Нехай дано функцію $F(x)$ таку, що в кожній точці x деякого проміжку I $F'(x) = f(x)$. У цьому випадку функцію $f(x)$ називають похідною функції $F(x)$, а $F(x)$ — первісною для $f(x)$.

Функція $F(x)$ називається *первісною* для функції $f(x)$ на проміжку I, якщо для кожного значення x з цього проміжку $F'(x) = f(x)$.

Наприклад, на всій числовій осі (тобто на R) функція x^2 є первісною для $2x$, бо $(x^2)' = 2x$; $\sin x$ є первісною для $\cos x$, бо $(\sin x)' = \cos x$.

Функція $F(x) = x^{-1}$ є первісною для $f(x) = -x^{-2}$, наприклад на $[1; 5]$. Але не на R, оскільки $F'(0)$ не існує, і не на $(-\infty; 0) \cup (0; \infty)$, бо це не проміжок.

Чи одна тільки функція x^2 є первісною для $2x$? Ні. Адже і $(x^2 + 3)' = 2x$ і $(x^2 - 7)' = 2x$ і т. д. Яке б не було число (довільна стала) C, то функція $x^2 + C$ — первісна для $2x$, бо $(x^2 + C)' = 2x$.

Чи існують інші функції, відмінні від $x^2 + C$, первісні для $2x$? Ні.

Теорема. (*Основна властивість первісних.*) ***Кожна первісна для функції $f(x)$ має вигляд $F(x) + C$, де $F(x)$ — одна з цих первісних, а C — довільна стала.***

$F(x) + C$ — *загальний вигляд первісних* для функції $f(x)$

Доведення. 1. Нехай $F(x)$ — одна з первісних для функції $f(x)$ на проміжку I, тобто для кожного $x \in I$ $F'(x) = f(x)$.

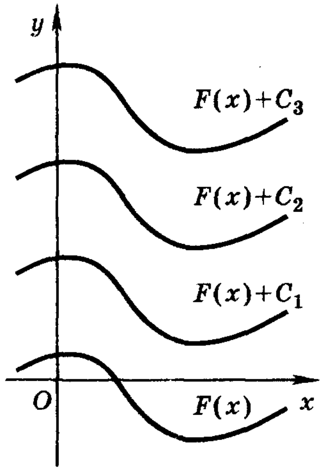
За правилом знаходження похідної суми

$$(F(x) + C)' = F'(x) + C' = f(x) + 0 = f(x).$$

Цим доведено, що яка б не була стала C, то коли $F(x)$ — первісна для $f(x)$, то й $F(x) + C$ — первісна для $f(x)$.

2. Нехай $\Phi(x)$ і $F(x)$ — дві будь-які первісні для функції $f(x)$ на проміжку I, тобто $\Phi'(x) = f(x)$ і $F'(x) = f(x)$ для кожного $x \in I$. Тоді

$$(\Phi(x) - F(x))' = \Phi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$



Мал. 94

Як бачимо, функція $\Phi(x) - F(x)$ така, що в кожній точці $x \in I$ її похідна дорівнює 0. Таку властивість має тільки визначена на I функція, яка ніде ні зростає, ні спадає. Адже коли б на деякій частині проміжку I ця функція зростала або спадала, то там її похідна була б відповідно додатна або від'ємна. (Детальніше обґрунтування цього факту дається в строгих курсах математичного аналізу.) Отже, $\Phi(x) - F(x) = C$, де C — стала, тобто $\Phi(x) = F(x) + C$.

Цим доведено, що коли $F(x)$ — одна з первісних для функції $f(x)$, то кожна з функцій $F(x) + C$ також її первісна й інших первісних для $f(x)$ не існує. Геометрично це означає, що графіки будь-яких двох первісних для функції $f(x)$ такі, що їх можна сумістити паралельним перенесенням уздовж осі ординат (мал. 94).

Кожна первісна розглядається на якомусь проміжку. Якщо ж для стислості викладу його не зазначають, то мають на увазі проміжок найбільшої можливої довжини. Зокрема, якщо функція $f(x)$ визначена на $\boldsymbol{R}$ і проміжок не зазначено, то йдеться про її первісну $F(x)$ також на $\boldsymbol{R}$.

Операцію знаходження похідної даної функції називають *диференціюванням*. Обернена до неї операція — знаходження первісної — називається *інтегруванням*.

641°. Доведіть, що функція x^4 — первісна для функції $4x^3$.

642°. Чи є функція $x^4 - 5$ первісною для функції $4x^3$?

643°. Знайдіть чотири довільні первісні для функції $4x^3$.

644°. Доведіть, що функція $0{,}5x^2$ — первісна для функції x.

645°. Який загальний вигляд мають первісні для функції x?

646°. Доведіть, що функція $\cos x$ — первісна для функції $-\sin x$.

647. Доведіть, що функція $2\sqrt{x}$ — одна з первісних для функції $\frac{1}{\sqrt{x}}$.

648. Доведіть, що функція $\operatorname{tg} x$ — одна з первісних для функції $\frac{1}{\cos^2 x}$ на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$.

649. Доведіть, що функція $\operatorname{ctg} x$ — одна з первісних для функції $-\frac{1}{\sin^2 x}$ на проміжку $(\pi n;\ \pi(n+1))$, де n — ціле число.

650. Чи є функція $\frac{1}{x}$ первісною для $-\frac{1}{x^2}$ на проміжку: а) $(0;\ \infty)$; б) $(-\infty;\ 0)$; в) $[-3;\ 3]$?

651. Знайдіть для функції x таку первісну, щоб її графік проходив через точку $P\ (2;\ 5)$.

Р о з в' я з а н н я. $\left(\frac{1}{2}x^2\right)' = \frac{1}{2}\cdot 2x = x$, тому $F(x) = \frac{1}{2}x^2$ — одна з первісних для функції x на $\boldsymbol{R}$. Загальний вигляд усіх таких первісних $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + C$. Оскільки графік шуканої первісної проходить через точку $P\ (2;\ 5)$, то $5 = \frac{1}{2}\cdot 4 + C$, звідки $C = 3$.

В і д п о в і д ь. $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3$.

652°. Знайдіть для функції $4x^3$ первісну, графік якої проходить через точку: а) $A\ (1;\ 3)$; б) $B\ (-5;\ 2)$; в) $P\ (-1;\ 3)$.

653*. Для функції $2\sqrt{x}$ знайдіть таку первісну на проміжку $[1;\ 5]$, щоб її графік проходив через точку $K\ (4;\ 7)$. Побудуйте схематичні графіки даної функції і її первісної.

654*. Знайдіть загальний вигляд первісних для функції x^n, де n — довільне натуральне число.

§ 36. ЗНАХОДЖЕННЯ ПЕРВІСНИХ

Радимо запам'ятати таку таблицю первісних:

Дана функція	k (стала)	x^n, $n \neq -1$	$\frac{1}{x}$	a^x
Її первісна	$kx + C$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$\ln\lvert x\rvert + C$	$\frac{a^x}{\ln a} + C$
Дана функція	$\sin x$	$\cos x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\frac{1}{\sin^2 x}$
Її первісна	$-\cos x + C$	$\sin x + C$	$\operatorname{tg} x + C$	$-\operatorname{ctg} x + C$

Обґрунтувати цю таблицю можна диференціюванням функції, що є в її другому рядку. Користуючись таблицею, можна відразу писати, що, наприклад, для функції x^8 первісною є $\frac{1}{9}x^9 + C$ і т. ін.

Виведемо ще кілька правил, подібних до правил диференціювання, які полегшують знаходження первісних.

I. Якщо $F(x)$ і $G(x)$ — первісні для функцій $f(x)$ і $g(x)$, то $F(x) + G(x)$ — первісна для функції $f(x) + g(x)$.

Справді, якщо $F'(x) = f(x)$ і $G'(x) = g(x)$, то

$(F(x) + G(x))' = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x)$.

II. Якщо $F(x)$ — первісна для функції $f(x)$, а k — довільне число, то $kF(x)$ — первісна для функції $kf(x)$.

Адже $(kF(x))' = kF'(x) = kf(x)$.

III. Якщо $F(x)$ — первісна для функції $f(x)$, а k, b — довільні числа ($k \neq 0$), то $\frac{1}{k}F(kx+b)$ — первісна для функції $f(kx + b)$.

Адже

$$\left(\frac{1}{k}F(kx+b)\right)' = \frac{1}{k}\cdot F'(kx+b) =$$
$$= \frac{1}{k}\cdot kf(kx+b) = f(kx+b).$$

П р и к л а д и. Знайдіть первісну для функції:

а) $x^4 + \cos x$; б) $5 \sin x$; в) $(7x + 2)^3$.

Р о з в' я з а н н я. а) Для функцій x^4 і $\cos x$ первісними є відповідно $\frac{x^5}{5}$ і $\sin x$. Тому для суми даних функцій загальний вигляд первісних

$$F(x) = \frac{1}{5}x^5 + \sin x + C.$$

б) За правилом II $F(x) = -5 \cos x + C$.

в) Одна з первісних для функції $(7x + 2)^3$ згідно з правилом III є функція $\frac{1}{7}\cdot\frac{(7x+2)^4}{4}$. Загальний вигляд первісних для даної функції

$$F(x) = \frac{1}{28}(7x+2)^4 + C.$$

До знаходження первісних зводяться насамперед задачі, обернені до тих, що розв'язуються за допомогою похідної. Розглянемо приклад.

Якщо відомий закон прямолінійного руху тіла $s = s(t)$, то для знаходження його швидкості в момент t треба знайти похідну: $v(t) = s'(t)$. Тут дано закон руху і вимагається знайти його швидкість. Для механіки не менш важливо вміти розв'язувати *обернену задачу*: за даною в кожний момент швидкістю визначати закон руху.

З а д а ч а. Точка рухається прямолінійно зі змінною швидкістю $v = 10t$ м/с; за перші 4 с вона пройшла 80 м. Знайдіть закон руху точки.

Р о з в' я з а н н я. Шуканий закон руху виражається такою функцією $s = s(t)$, що $s'(t) = 10t$. Тут $s(t)$ — первісна для функції $v = 10t$. Загальний вигляд усіх таких первісних $s(t) = 5t^2 + C$. Оскільки за 4 с точка пройшла 80 м, то $80 = 5 \cdot 16 + C$, звідки $C = 0$.

В і д п о в і д ь. Шуканий закон руху точки $s(t) = 5t^2$, де t — час у секундах, $s(t)$ — відстань у метрах.

Приклади інших застосувань первісної розглянемо в наступних параграфах.

Знайдіть загальний вигляд первісної для функції (655—664).

655°. а) $f(x) = 3$; б) $f(x) = 0$.

656°. а) $f(x) = 3x^2$; б) $f(x) = 4x^3$.

657°. а) $f(x) = -5x^4$; б) $f(x) = -2x$.

658°. а) $f(x) = x^3$; б) $f(x) = -x^5$.

659°. а) $f(x) = x^3 + 2x$; б) $f(x) = x^6 - 4$.

660°. а) $f(x) = 2 + \cos x$; б) $f(x) = 3 - \sin x$.

661. а) $f(x) = -\frac{1}{x^2}$ на $(0; \infty)$; б) $f(x) = \frac{2}{x^2}$ на $(-\infty; 0)$.

662. а) $f(x) = 4 - \frac{1}{x^2}$ на $(0; \infty)$; б) $f(x) = \frac{1}{x^2} + \sqrt{3}$ на $(-\infty; 0)$.

663. а) $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}}$ на $(0; \infty)$; б) $f(x) = -\sqrt{\frac{3}{x}}$ на $(0; \infty)$.

664. а) $f(x) = \frac{2{,}7}{\cos^2 x}$ на $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$; б) $f(x) = -\frac{0{,}5}{\sin^2 x}$ на $(0; \pi)$;

в) $f(x) = \sin x + \frac{1}{\cos^2 x}$ на $[-1; 1]$;

г) $f(x) = \cos x - \frac{1}{\sin^2 x}$ на $(0; 3]$.

665. Доведіть, що функція $F(x)$ є первісною для $f(x)$, якщо:

а) $F(x) = x + 5 + \frac{1}{x}$, $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{x^2}$, $x \in (0; \infty)$;

б) $F(x) = 2 \sin 3x$, $f(x) = 6 \cos 3x$, $x \in \boldsymbol{R}$;

в) $F(x) = 4 + \operatorname{tg} 3x$, $f(x) = \frac{3}{\cos^2 3x}$, $x \in \left(-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right)$.

666. Знайдіть первісну для функції:

а) $f(x) = 8e^x$; б) $f(x) = e^{2-3x}$;

в) $f(x) = 3 \cdot 2^x$; г) $f(x) = 3^{-5x}$.

667. Чи правильно, що функція $F(x)$ — первісна для $f(x)$, якщо:

а) $F(x) = x^2 + \frac{2}{x}$, $f(x) = 2\left(x - \frac{1}{x^2} + C\right)$, $x \in (0; \infty)$;

б) $F(x) = 3 - x^4$; $f(x) = 3x - 0{,}2x^5 + C$, $x \in \boldsymbol{R}$;

в) $F(x) = \frac{1}{x^2} + 7$, $f(x) = -\frac{1}{2x^3}$, $x \in (-\infty; 0)$?

668°. Для якої функції первісною є функція: а) $3x^5$; б) $2 \cos x$?

669. Для функції $f(x)$ знайдіть таку первісну, щоб її графік проходив через дану точку P, якщо:

а) $f(x) = 1 + x^2$, $P(-3; 9)$; б) $f(x) = x + \frac{1}{\cos^2 x}$, $P(0; -3)$.

670°. Для функції $f(x)$ знайдіть таку первісну $F(x)$, що:

а) $f(x) = x^3$, $F(-1) = 2$; б) $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $F(2) = 3$;

в) $f(x) = \sin x$, $F\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1$; г) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $F(4) = 2$.

671. Тіло рухається прямолінійно з прискоренням $a(t) = 2$ м/с^2. Визначте швидкість даного руху як функцію від часу t, якщо в момент $t = 0$ вона дорівнювала 3 м/с.

Р о з в' я з а н н я. Прискорення — похідна швидкості. Тому якщо $v(t)$ — шукана швидкість, то $v'(t) = 2$. Отже, $v(t)$ — первісна для функції 2 (сталої), тому $v(t) = 2t + C$. Оскільки $v(0) = 3$, то $3 = 2 \cdot 0 + C$, $C = 3$.

В і д п о в і д ь. $v(t) = 2t + 3$.

672. Тіло рухається прямолінійно з прискоренням $a(t)$, причому в момент t_0 координата і швидкість тіла дорівнювали відповідно x_0 і v_0. Визначте закон руху, якщо:

а) $a(t) = 6t$, $t_0 = 0$, $x_0 = 3$, $v_0 = 1$;

б) $a(t) = -2t$, $t_0 = 1$, $x_0 = 4$, $v_0 = 2$;

в) $a(t) = \cos t$, $t_0 = \pi$, $x_0 = 1$, $v_0 = 0$.

§ 37. ПЕРВІСНА І ПЛОЩА ПІДГРАФІКА

Нехай на координатній площині дано графік неперервної функції $y = f(x)$, яка на проміжку $[a; b]$ набуває тільки невід'ємних значень. Фігуру, обмежену таким графіком, віссю абсцис і прямими $x = a$ та $x = b$, називають *підграфіком функції* $f(x)$ на $[a; b]$. Підграфіки функцій часто називають також *криволінійними трапеціями*.

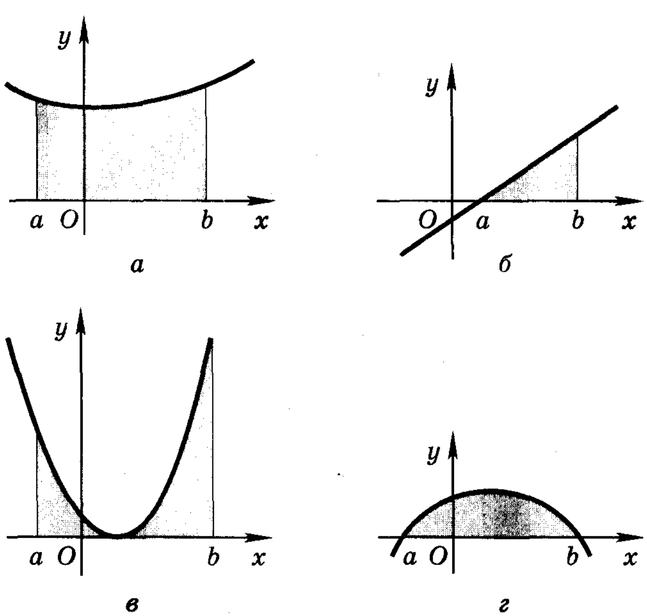
Кілька підграфіків зображено на малюнку 95.

Кожний підграфік функції має певну площу (це доведено в строгих курсах математичного аналізу). Площі підграфіків можна знаходити за допомогою первісних.

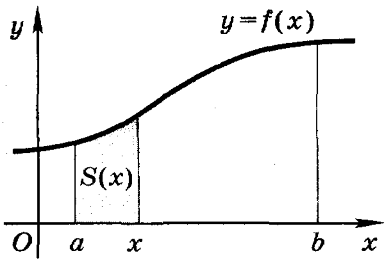
Т е о р е м а. ***Площа підграфіка функції $f(x)$ на проміжку $[a; b]$ дорівнює $F(b) - F(a)$, де $F(x)$ — первісна для функції $f(x)$ на $[a; b]$.***

Д о в е д е н н я. Розглянемо довільний підграфік функції $f(x)$ на $[a; b]$ (мал. 96). Нехай x — довільна точка відрізка $[a; b]$, а $S(x)$ — площа підграфіка функції $f(x)$ на $[a; x]$. Зрозуміло, що $S(x)$ — функція від x. Доведемо, що $S'(x) = f(x)$ для кожного $x \in [a; b]$.

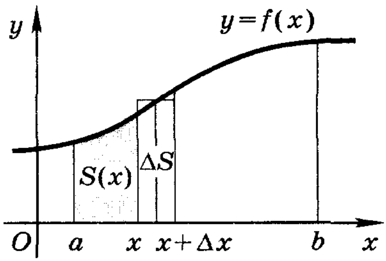
Надамо змінній x приріст Δx (мал. 97), від чого функція $S(x)$ набуде приросту $\Delta S = S(x + \Delta x) - S(x)$. Це — площа підграфіка функції $f(x)$ на проміжку $[x; x + \Delta x]$, вона дорівнює



Мал. 95



Мал. 96



Мал. 97

площі прямокутника, в якого основа Δx, а висота $f(t)$, де t — деяке число з проміжку $[x; x+\Delta x]$. Оскільки функція $f(x)$ неперервна, таке число t обов'язково знайдеться. Отже, $\Delta S = f(t)\cdot\Delta x$, звідки

$$\frac{\Delta S}{\Delta x} = f(t).$$

Якщо $\Delta x \to 0$, то $t \to x$ і $f(t) \to f(x)$, бо функція $f(x)$ неперервна. Тому якщо $\Delta x \to 0$, то $\frac{\Delta S}{\Delta t} \to f(x)$, тобто $S'(x) = f(x)$.

Як бачимо, функція $S(x)$ — первісна для $f(x)$ на $[a; b]$. Тому якщо $F(x)$ — яка-небудь інша первісна для $f(x)$ на $[a; b]$, то, як показано в § 35, $S(x) = F(x) + C$, де C — стала. Щоб визначити C, врахуємо, що $S(a) = 0$, бо при $x = a$ підграфік функції $f(x)$ на $[a; x]$ вироджується у відрізок, його площа дорівнює 0. Маємо: $0 = F(a) + C$, звідки $C = -F(a)$. Отже,

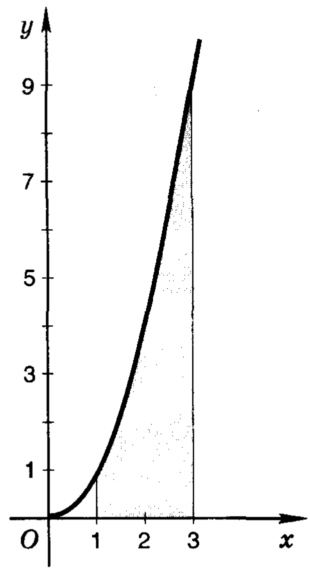
$$S(x) = F(x) - F(a).$$

Якщо в цю рівність підставимо значення $x = b$, то дістанемо площу підграфіка функції $f(x)$ на $[a; b]$: $S = F(b) - F(a)$.

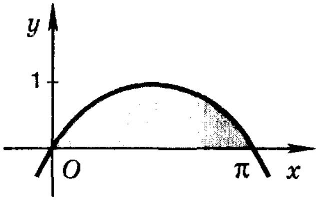
Значення виразу $F(b) - F(a)$ доводиться обчислювати часто, тому для зручності його записують ще й так: $F(x)\big|_a^b$.

З а д а ч а 1. Знайдіть площу підграфіка функції x^2 на проміжку $[1; 3]$.

Р о з в' я з а н н я. Для функції x^2 первісною є $F(x) = \frac{x^3}{3}$ (мал. 98). Тому шукана площа $S = \frac{x^3}{3}\Big|_1^3 = 9 - \frac{1}{3} = 8\frac{2}{3}$ (кв. од.).



Мал. 98



Мал. 99

З а д а ч а 2. Знайдіть площу фігури, обмеженої однією аркою синусоїди і віссю абсцис (мал. 99).

Р о з в' я з а н н я. Треба знайти площу підграфіка функції $\sin x$ на проміжку $[0; \pi]$. Для функції $\sin x$ первісною є функція $F(x) = -\cos x$. Отже, шукана площа

$$S = -\cos x \Big|_0^{\pi} = 1 - (-1) = 2.$$

В і д п о в і д ь. 2 кв. од.

673°. Зобразіть на малюнку підграфік функції:

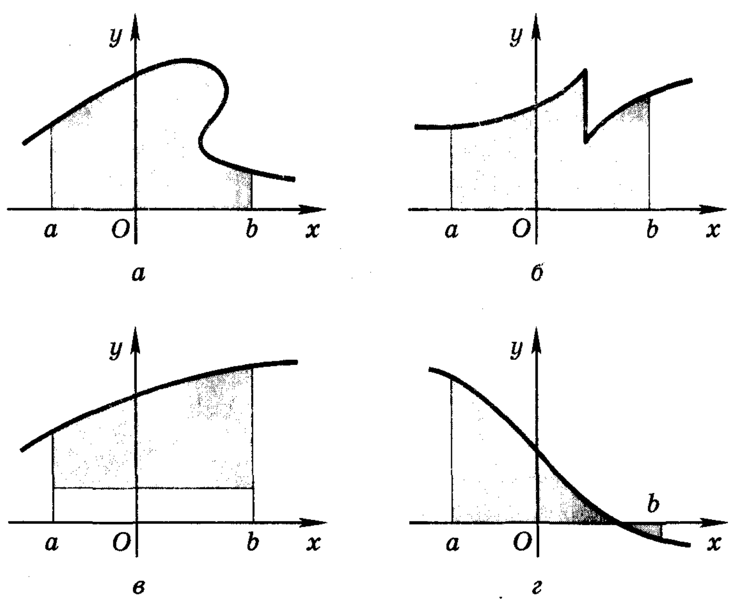
а) $f(x) = x^2$ на $[1; 2]$; б) $f(x) = 0{,}2x^3$ на $[0; 3]$;

в) $f(x) = \sin x$ на $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$; г) $f(x) = \operatorname{tg} x$ на $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.

674. Які із зафарбованих на малюнку 100 фігур є підграфіками функції $y = f(x)$?

Знайдіть площу підграфіка функції (675—679).

675°. $f(x) = x^2 + 3$: а) на $[0; 2]$; б) на $[-2; 0]$.



Мал. 100

676°. $f(x) = \cos x$: а) на $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$; б) на $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

677. $f(x) = x^3 + 1$: а) на $[0; 2]$; б) на $[-1; 1]$.

678. $f(x) = 1 + 2\sin x$: а) на $[0; \pi]$; б) на $\left[-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right]$.

679. $f(x) = (x + 2)^4$: а) на $[-2; 0]$; б) на $[-1; 0]$.

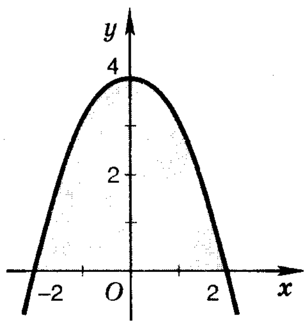
680°. Обчисліть двома способами площу підграфіка функції $y = 3 + \frac{x}{2}$ на $[2; 6]$.

681. Знайдіть площу фігури, обмеженої графіком функції $y = 4 - x^2$ і віссю абсцис.

Р о з в' я з а н н я. Знайдемо абсциси точок перетину графіка даної функції з віссю x. У цих точках ордината функції дорівнює нулю: $0 = 4 - x^2$, звідки $x_1 = -2$, $x_2 = 2$ (мал. 101). Отже, треба знайти площу підграфіка функції $4 - x^2$ на $[-2; 2]$. Одна з первісних для даної функції $F(x) = 4x - \frac{x^3}{3}$. Тому шукана площа

$$S = \left(4x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-2}^{2} = 8 - \frac{8}{3} + 8 - \frac{8}{3} = 10\frac{2}{3}.$$

В і д п о в і д ь. $10\frac{2}{3}$ кв. од.



Мал. 101

682°. Знайдіть площу фігури, обмеженої графіком функції $y = 3 + 2x - x^2$ і віссю абсцис.

683°. Знайдіть площу фігури, обмеженої лініями:

а) $y = -(x - 1)^3$, $y = 0$ і $x = 0$;

б) $y = 1 + \frac{1}{2}\cos x$, $y = 0$, $x = -\frac{\pi}{2}$ і $x = \frac{\pi}{2}$.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

В а р і а н т 1

1. Знайдіть загальний вигляд первісної для функції:

а) $f(x) = x^2 - 5x + 6$; б) $f(x) = 2 - \frac{1}{x^2}$ на $(0; \infty)$.

2. Для функції $f(x) = \sin x$ знайдіть первісну F таку, що $F(\pi) = 0$.

3. Знайдіть площу підграфіка функції $f(x) = \frac{1}{3}x^2 + 1$ на $[0;\ 3]$.

Варіант 2

1. Знайдіть загальний вигляд первісної для функції:

а) $f(x) = x^2 + 3x - 5$; б) $f(x) = \frac{1}{x^2} + 3$ на $(0\,;\infty)$.

2. Для функції $f(x) = \cos x$ знайдіть первісну F таку, що $F(\pi) = 2$.

3. Знайдіть площу підграфіка функції $f(x) = \frac{1}{3}x^2 + 2$ на $[1;\ 3]$.

Варіант 3

1. Знайдіть загальний вигляд первісної для функції:

а) $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} + 3x$ на $(0\,;\infty)$; б) $f(x) = x^2 - \frac{1}{x^2}$ на $(0\,;\infty)$.

2. Для функції $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ знайдіть первісну F таку, що $F(0) = 3$.

3. Знайдіть площу підграфіка функції $f(x) = 5 + x^2$ на $[-2;\ 2]$.

Варіант 4

1. Знайдіть загальний вигляд первісної для функції:

а) $f(x) = 2 - \sqrt{\frac{2}{x}}$ на $(0\,;\infty)$; б) $f(x) = 3 - \frac{1}{\sin^2 x}$ на $(0\,;\pi)$.

2. Для функції $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2}$ знайдіть первісну F таку, що $F(1) = 2$.

3. Знайдіть площу підграфіка функції $f(x) = 3 + \frac{1}{3}x^2$ на $[-3;\ 1]$

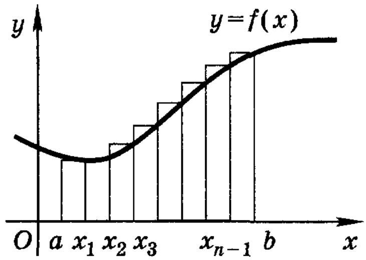
§ 38. ІНТЕГРАЛ

Розглянемо інший підхід до визначення площі підграфіка.

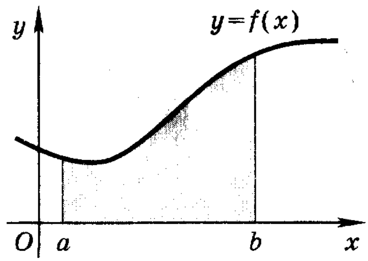
Нехай дано підграфік функції $f(x)$ на $[a;\ b]$ (мал. 102) Розіб'ємо відрізок $[a;\ b]$ точками $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}$ на n рівних відрізків: $[a\,;x_1], [x_1\,;x_2], \ldots, [x_{n-1}\,;b]$.

Побудуємо на першому з цих відрізків прямокутник висоти $f(x_1)$, на другому — прямокутник висоти $f(x_2)$, ..., на n-му — прямокутник висоти $f(b)$. У результаті дістанемо східчастий многокутник, складений з n прямокутників. Нехай основа кожного з побудованих прямокутників дорівнює Δx, тоді площа усього східчастого многокутника

$$S_n = \Delta x \cdot f(x_1) + \Delta x \cdot f(x_2) + \ldots + \Delta x \cdot f(b).$$



Мал. 102



Мал. 103

Суми такого вигляду називають *інтегральними сумами*. Одержану інтегральну суму можна вважати наближеним значенням площі S підграфіка функції $f(x)$ на $[a;\ b]$. При цьому якщо $n \to \infty$, то $S_n \to S$ (мал. 103). Пишуть: $S = \lim\limits_{n \to \infty} S_n$.

Не тільки задача про знаходження площі підграфіка, а й багато інших важливих прикладних задач приводять до обчислення границь подібних інтегральних сум. Тому для цього поняття введено спеціальну назву і позначення.

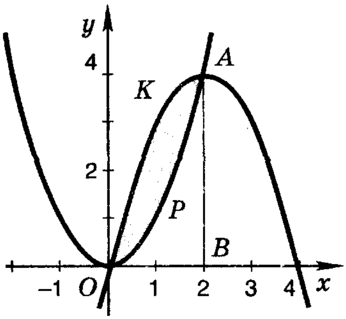
Границю інтегральної суми $\Delta x \cdot f(x_1) + \Delta x \cdot f(x_2) + \ldots + \Delta x \times \times f(x_n)$, якщо $n \to \infty$, називають *інтегралом* функції $f(x)$ від a до b. Її позначають символом $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ (читають: інтеграл від a до b еф від ікс де ікс). Тут числа a і b — *межі інтегрування*, $\int$ — *знак інтеграла*, $f(x)$ — *підінтегральна функція*, x — *змінна інтегрування*.

З усього сказаного випливає, що площа підграфіка функції $f(x)$ на $[a;\ b]$ дорівнює $\int\limits_a^b f(x)\,dx$. Як доведено в попередньому параграфі, ця площа дорівнює $F(b) - F(a)$, де $F(x)$ — первісна для функції $f(x)$. Тому

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Це — *формула Ньютона—Лейбніца*, основна формула математичного аналізу. Вона дає можливість розв'язувати багато важливих задач не обчисленням границь інтегральних сум, що досить важко, а за допомогою первісної. Раціоналізувати обчислення часто допомагає така властивість інтеграла:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx - \int\limits_a^b g(x)\,dx = \int\limits_a^b (f(x) - g(x))\,dx.$$



Мал. 104

Справедливість цієї формули випливає з таких перетворень:

$$\int_a^b (f(x) - g(x))\,dx =$$
$$= (F(b) - G(b)) - (F(a) - G(a)) =$$
$$= (F(b) - F(a)) - (G(b) - G(a)) =$$
$$= \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx.$$

З а д а ч а. Знайдіть площу фігури, обмеженої графіками функцій $y = x^2$ і $y = 4x - x^2$.

Р о з в' я з а н н я. Побудуємо графіки даних функцій (мал. 104). Треба знайти площу зафарбованої фігури. Вона дорівнює різниці площ підграфіків *OBAK* і *OBAP*. Межі інтегрування — абсциси точок O і A, в яких перетинаються графіки функцій, тобто значення x, що задовольняють систему рівнянь $y = x^2$ і $y = 4x - x^2$. З цієї системи випливає рівняння $x^2 = 4x - x^2$, корені якого $x_1 = 0$ і $x_2 = 2$.

Отже, шукана площа

$$S = \int_0^2 (4x - x^2)\,dx - \int_0^2 x^2\,dx = \int_0^2 (4x - 2x^2)\,dx =$$
$$= \left(2x^2 - \frac{2}{3}x^3\right)\Big|_0^2 = 8 - 5\frac{1}{3} = 2\frac{2}{3}.$$

В і д п о в і д ь. $2\frac{2}{3}$ кв. од.

З а у в а ж е н н я. Те поняття, яке в цьому підручнику названо інтегралом, у повніших курсах математичного аналізу називається *визначеним інтегралом*. Бо там розглядається ще й *невизначений інтеграл* $\int f(x)\,dx$, під яким розуміють загальний вигляд усіх первісних для функції $f(x)$:

якщо $F'(x) = f(x)$, то $\int f(x)\,dx = F(x) + C$.

Ось чому операцію знаходження первісної називають також інтегруванням.

Обчисліть інтеграл (684—690).

684°. а) $\int_0^1 x\,dx$; б) $\int_{-1}^2 x^2\,dx$; в) $\int_0^{1,5} 3x^3\,dx$.

685°. а) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \cos x\,dx$; б) $\int\limits_0^{\pi} \sin x\,dx$; в) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos^2 x}$.

686°. а) $\int\limits_0^{2} \frac{x^3}{6}\,dx$; б) $\int\limits_{-1}^{1} (4 - x^2)\,dx$; в) $\int\limits_{-2}^{0} (3x^2 + 1)\,dx$.

687. *а)* $\int\limits_0^{2\pi} \sin\frac{x}{3}\,dx$; *б)* $\int\limits_{-3}^{-1} (2 + x)^2\,dx$; *в)* $\int\limits_{-2}^{4} \frac{dx}{\sqrt{x+3}}$.

688. а) $\int\limits_0^{1} e^{3x}\,dx$; б) $\int\limits_0^{1} 2^x\,dx$.

689. а) $\int\limits_1^{e} 2x^{-1}\,dx$; б) $\int\limits_{16}^{81} 5x^{\frac{1}{4}}\,dx$.

690. а) $\int\limits_0^{2} \frac{dx}{3x+1}$; б) $\int\limits_{-1}^{1} \left(1 + \sqrt[3]{x}\right)dx$.

Знайдіть площу підграфіка функції (691, 692).

691°. а) $f(x) = x^3$ на $[1; 2]$; б) $f(x) = \cos 2x$ на $\left[-\frac{\pi}{4}; 0\right]$.

692. а) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3+x}}$ на $[1; 6]$; б) $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$ на $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$.

Знайдіть площу фігури, обмеженої лініями (693—697).

693°. $y = x^2$ і $y = 2x$.

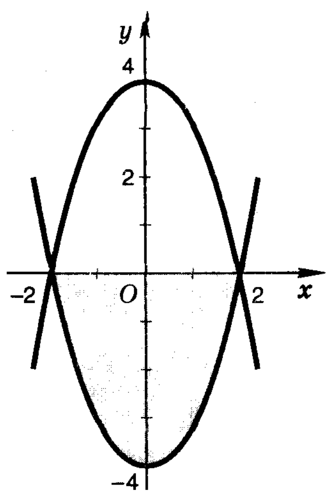
694°. $y = 6 + x - x^2$ і $y = 6 - 2x$.

695°. $y = 4x - x^2$ і $y = 4 - x$.

696. $y = x^3$, $y = 8$ і $x = 1$.

697. $y = x^2 - 4$ і $y = 0$.

Р о з в' я з а н н я. Фігура, про яку йдеться в задачі, розміщена нижче від осі x (мал. 105), тому не відповідає означенню підграфіка функції. Проте вона симетрична відносно осі x підграфіку функції $y = 4 - x^2$ на проміжку $[-2; 2]$. Площі цих фігур рівні, тому



Мал. 105

$$S = \int_{-2}^{2}(4 - x^2)\,dx = \left(4x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-2}^{2} = \left(8 - \frac{8}{3}\right) - \left(-8 + \frac{8}{3}\right) = 10\frac{2}{3}.$$

Відповідь. $10\frac{2}{3}$ кв. од.

698. Знайдіть площу фігури, обмеженої лініями $y = x^2 - 4$, $y = x^2 - 1$, $x = -2$, $x = 2$.

Розв'язання. Дана фігура розміщена по різні боки від осі x (мал. 106, *а*). Перенесемо її паралельно на 4 одиниці в напрямі осі y (мал. 106, *б*). Утворена фігура обмежена лініями $y = x^2$, $y = x^2 + 3$, $x = -2$ і $x = 2$. Її площа, а отже, і площа даної фігури

$$S = \int_{-2}^{2}(x^2 + 3)\,dx - \int_{-2}^{2}x^2\,dx = \int_{-2}^{2}3\,dx = 3x\Big|_{-2}^{2} = 12.$$

Відповідь. 12 кв. од.

699. Знайдіть площу фігури, обмеженої лініями:

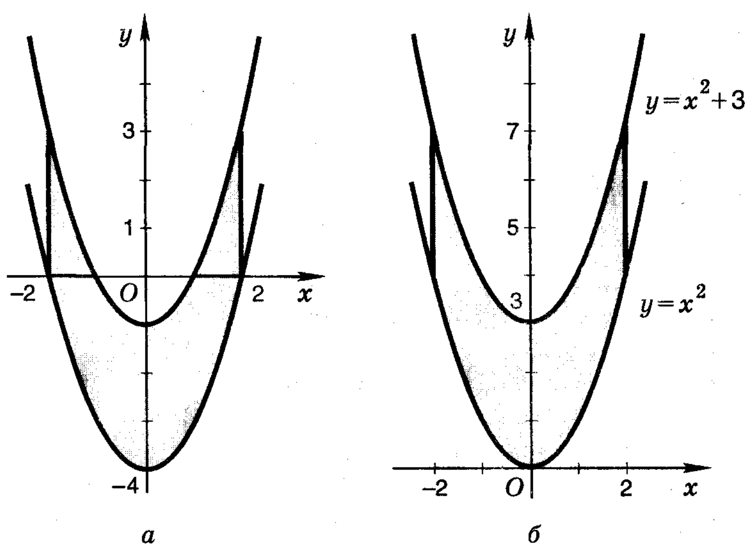
а) $y = x^2 + 4x$, $y = x^2 + 4x + 3$, $x = -2$, $x = 0$;

б) $y = x^2 - 4x$, $y = x^2 - 4x + 3$, $x = 0$, $x = 4$.

Знайдіть площу підграфіка функції (700, 701).

700°. а) $y = e^x$ на $[0; 1]$; б) $y = 2^x$ на $[-1; 2]$.

701. а) $y = \frac{4}{x} + 3$ на $[2; 6]$; б) $y = 4 - \frac{1}{x}$ на $[-6; -3]$.



Мал. 106

Знайдіть площу фігури, обмеженої лініями (702—705).

702°. $y = 0{,}5^x$, $y = 1$, $x = -2$.

703°. $y = 3^{-x}$, $y = 3$, $x = 1$.

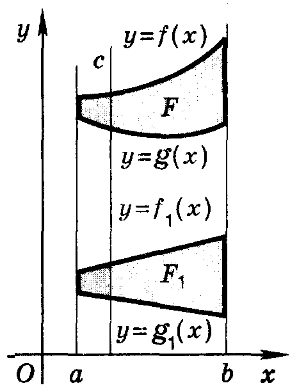
704. $y = e^x$, $y = e^{-x}$, $x = e$.

705. $y = x^{\sqrt{3}}$, $y = x^{-1}$, $x = 0{,}5$.

706. Чи при кожному дійсному $t > 1$ справджується рівність

$$\int_1^t \frac{1}{x}dx = \ln t\,?$$

Проілюструйте її геометрично.



Мал. 107

707. Доведіть, що коли при кожному $x \in [a;\, b]$ $f(x) > g(x)$, то фігура, обмежена лініями $x = a$, $x = b$, $y = f(x)$, $y = g(x)$, має площу $S = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$.

708. Доведіть твердження К а в а л ь є р і. Якщо дві фігури можна розмістити на площині так, що кожна січна, паралельна даній прямій, перетинаючи одну з них, перетинає і другу по відрізку такої самої довжини, то площі цих фігур рівні.

Р о з в' я з а н н я. Нехай фігуру F обмежують лінії $x = a$, $x = b$, $y = f(x)$ і $y = g(x)$, а фігуру F_1 — лінії $x = a$, $x = b$, $y = f_1(x)$ і $y = g_1(x)$ (мал. 107). Якщо кожна січна c, паралельна осі y, перетинає фігури F і F_1 по відрізках рівної довжини, то $f(x) - g(x) = f_1(x) - g_1(x)$ для кожного $x \in [a;\, b]$. Тоді

$$\int_a^b (f(x) - g(x))dx = \int_a^b (f_1(x) - g_1(x))dx,$$

тобто площі фігур F і F_1 рівні.

709. Доведіть, що:

а) $\int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx = \int_a^b (f(x) + g(x))dx$;

б) $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$ для кожного $k > 0$;

в) $\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$ для $a < c < b$.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Варіант 1

1. Обчисліть інтеграл:

а) $\int\limits_0^2 3x^2dx$; б) $\int\limits_0^2 (5 - x^2)dx$; в) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0} 2\cos x\,dx$.

2. Знайдіть площу фігури, обмеженої лініями $y = 0{,}5x^2$, $y = 0$, $x = 3$.

Варіант 2

1. Обчисліть інтеграл:

а) $\int\limits_0^4 1{,}5x^2dx$; б) $\int\limits_0^2 (6 - x^2)dx$; в) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} 3\sin x\,dx$.

2. Знайдіть площу фігури, обмеженої лініями $y = 0{,}4x^3$, $y = 0$, $x = 3$.

Варіант 3

1. Обчисліть інтеграл:

а) $\int\limits_0^2 15x^4dx$; б) $\int\limits_{-3}^{0} (3 + x)^2dx$; в) $\int\limits_{\pi}^{2\pi} \sin\frac{x}{4}dx$.

2. Знайдіть площу фігури, обмеженої лініями $y = 4x - x^2$, $y = 4 - x$.

Варіант 4

1. Обчисліть інтеграл:

а) $\int\limits_0^3 (1 + 4x^3)dx$; б) $\int\limits_{-2}^{2} (3 - x)^2dx$; в) $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin^2 x}dx$.

2. Знайдіть площу фігури, обмеженої лініями $y = \frac{4}{x^2}$, $y = 7 - 3x$.

§ 39. ЗАСТОСУВАННЯ ІНТЕГРАЛІВ

За допомогою інтегралів можна визначати не тільки площ фігур, а й багато інших величин, наближені значення яки виражаються інтегральними сумами, тобто сумами вид $\Delta x \cdot f(x_1) + \Delta x \cdot f(x_2) + \ldots + \Delta x \cdot f(x_n)$. Підграфік функції $f(x)$ – математична модель кожної такої величини, тому обчислюв ти границі цих сум також можна за формулою Ньютона – Лейбніца. Розглянемо два приклади таких задач.

1. Робота змінної сили. Якщо в результаті дії сталої сили F тіло переміщається в напрямі її дії на відстань s, то при цьому виконується робота $A = Fs$. А якщо на тіло діє сила не стала, а змінна?

Наприклад, щоб розтягнути пружину на 1 см, на 2 см і т. д., треба прикладати все більшу й більшу силу. Згідно із законом Гука, сила $f(x)$, яку треба прикласти, щоб розтягнути пружину на відстань x, пропорційна цій відстані (для допустимих значень x), тобто $f(x) = kx$. Коефіцієнт k різний для різних пружин. Наприклад, якщо для розтягнення пружини на 1 м треба прикласти силу в 50 Н, то $k = 50$.

Яку виконують роботу, розтягуючи таку пружину на відстань $l = 2$ м?

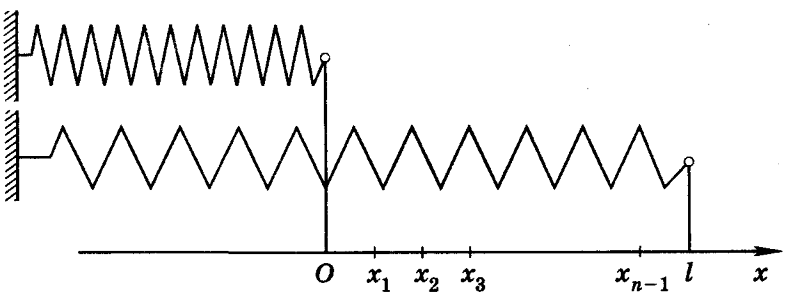
Поділимо відрізок $[0; l]$, на який розтягується пружина, точками $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}$ на n рівних частин (мал. 108). Нехай $l = x_n$, а Δx — довжина кожної частини. Щоб розтягнути пружину на відстань $[0; x_1]$, тобто перемістити її кінець з точки 0 в x_1, треба прикласти силу $f(x_1)$. При цьому виконана робота наближено дорівнюватиме $\Delta x \cdot f(x_1)$. Щоб розтягнути пружину на відстань $[x_1; x_2]$, треба прикласти силу $f(x_2)$ і виконати роботу, яка наближено дорівнює $\Delta x \cdot f(x_2)$ і т. д. Отже, щоб розтягнути пружину на відстань $[0; l]$, треба виконати роботу, наближене значення якої дорівнює інтегральній сумі

$$A_n = \Delta x \cdot f(x_1) + \Delta x \cdot f(x_2) + \ldots + \Delta x \cdot f(x_n).$$

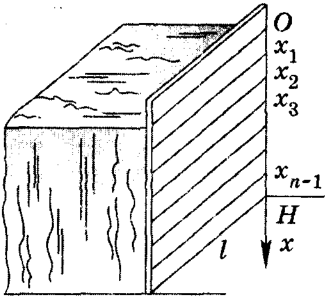
Значення A_n із збільшенням n (і відповідним зменшенням Δx) все менше відрізнятиметься від точного значення шуканої роботи A, тобто якщо $n \to \infty$, то $A_n \to A$. Отже,

$$A = \int_0^l f(x)\,dx = \int_0^l kx\,dx = \frac{1}{2}kl^2.$$

Якщо $k = 50$, $l = 2$ м, то $A = 100$ Дж.



Мал. 108



Мал. 109

2. Сила тиску рідини. Нехай різниця рівнів води з обох боків від воріт шлюзу дорівнює 8 м. Ворота прямокутної форми, їх ширина $l = 20$ м (мал. 109). Чому дорівнює сила тиску води на ворота?

Відомо, що із збільшенням глибини тиск води збільшується. Він виражається формулою $p(x) = 9{,}8x$, де x — глибина в метрах, $p(x)$ — тиск води в кілопаскалях. Нехай $OH = 8$ м — різниця рівнів води. Розіб'ємо цей відрізок точками $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}$ на n рівних частин і через них уявно проведемо горизонтальні прямі, які поділять ворота шлюзу на n рівних смуг. Якщо $OH : n = \Delta x$, то площа кожної смуги дорівнює $l\Delta x$. Сила тиску на першу, другу, третю і т. д. смуги наближено дорівнює відповідно $F(x_1)$, $F(x_2)$, ..., $F(x_n)$. Тому загальна сила тиску води на ворота шлюзу наближено дорівнює сумі

$$l \cdot \Delta x \cdot F(x_1) + l \cdot \Delta x \cdot F(x_2) + \ldots + l \cdot \Delta x \cdot F(x_n),$$

або

$$l(\Delta x \cdot F(x_1) + \Delta x \cdot F(x_2) + \ldots + \Delta x \cdot F(x_n)).$$

Одержаний добуток ширини воріт l на інтегральну суму — наближене значення сили тиску води на ворота. Точне її значення

$$F = l \cdot \int_0^8 9{,}8x\,dx = 20 \cdot 9{,}8\int_0^8 x\,dx = 196 \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_0^8 \approx 6300 \text{ (Н)}.$$

710°. Яку роботу треба виконати, щоб розтягнути пружину на 5 см, якщо сила в 1 Н розтягує її на 1 см?

711°. Для стиску пружини на 1 см треба прикласти силу 9,8 Н. Яку роботу треба виконати, щоб стиснути пружину на 4 см?

712*. Електричні заряди e_1 і e_2 відштовхуються із силою $F = k \cdot \frac{e_1 e_2}{r^2}$, де k — сталий коефіцієнт, r — відстань між зарядами. Яку роботу треба виконати, щоб відстань між зарядами з $r = a$ зменшилась до $r = b$?

713*. Яку роботу виконують, запускаючи ракету масою m з поверхні Землі на висоту h, якщо радіус Землі R?

714. З якою силою тисне вода на вертикальну греблю прямокутної форми, якщо її основа дорівнює 10 м, а висота 6 м?

715. Бак у формі куба заповнений бензином. Знайдіть відношення сил тиску бензину на дно бака і на його бічну стінку.

§ 40. ПРО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Розв'язування багатьох прикладних задач приводять до рівностей, які пов'язують невідомі функції з їх похідними. Такі рівності називають *диференціальними рівняннями*. Приклади: $y' = 2y$, $yy' + 2x = 0$.

Розглянемо деякі з таких задач.

Задача про розмноження бактерій. Маса бактерій у середовищі змінюється з часом. За сприятливих умов у кожний момент швидкість розмноження бактерій пропорційна їх масі. Треба визначити функцію, що виражає залежність маси бактерій від часу.

Розв'язання. Нехай $y = m(t)$ — шукана функція. Її похідна $y' = m'(t)$ — швидкість розмноження бактерій. Оскільки вона в кожний момент t пропорційна масі бактерій, то $y' = ky$. За змістом задачі тут $y > 0$ при кожному t, коефіцієнт k сталий для даного виду бактерій. Рівність $y' = ky$ — диференціальне рівняння. Розв'яжемо його.

$$\frac{y'}{y} = k, \ (\ln y)' = k, \ \ln y = kt + C_1,$$

звідки

$$y = e^{kt+C_1} = e^{C_1}e^{kt} = Ce^{kt}.$$

Тут C — довільна додатна стала, бо e^{C_1} стала при сталій C_1.

Функція $y = Ce^{kt}$ — *загальний розв'язок* рівняння $y' = ky$. Підставляючи замість C різні дійсні числа, можна дістати безліч його *частинних розв'язків*.

Як бачимо, складене за умовою задачі одне диференціальне рівняння не дає можливості дістати однозначну відповідь. Якщо задачу доповнити «початковими даними», наприклад, зазначити, що в момент t_0 маса бактерій дорівнювала m_0, то можна визначити сталу C:

$$m_0 = Ce^{kt_0}, \text{ звідки } C = m_0 : e^{kt_0} = m_0e^{-kt_0}.$$

Тому $y = Ce^{kt} = m_0e^{-kt_0}e^{kt} = m_0e^{k(t-t_0)}$.

$y = m_0e^{k(t-t_0)}$ — конкретний частинний розв'язок задачі.

Відшукання розв'язку диференціального рівняння, що задовольняє початкові дані, називають *задачею Коші*.

Задача про радіоактивний розпад. Відомо, що швидкість зменшення маси радіоактивної речовини в кожний момент часу t пропорційна її масі. Як залежить маса ізотопу стронцію (^{90}Sr) від часу, якщо для нього коефіцієнт пропорційності (стала розпаду) $k \approx 0{,}025$ і якщо в момент $t = 0$ його маса дорівнювала 10 г?

Р о з в' я з а н н я. Нехай шукана функція $y = m(t)$. Швидкість її зміни $y' = m'(t)$. Згідно з умовою задачі $y' = -ky$ (перед k ставимо мінус, бо маса речовини зменшується). Для ізотопу стронцію маємо диференціальне рівняння $y' = -0{,}025y$. Його загальний розв'язок $y = Ce^{-0{,}025t}$.

Визначимо сталу C за початковими даними задачі. Оскільки при $t = 0$ маса стронцію дорівнювала 10 г, то $10 = Ce^{-0{,}025 \cdot 0}$, звідки $C = 10$.

В і д п о в і д ь. $y = 10e^{-0{,}025t}$.

Диференціальне рівняння може містити другу похідну, третю і т. д. Другою похідною y'' функції y називають похідну від її похідної, третьою похідною y''' — похідну від її другої похідної:

$$y'' = (y')',\ y''' = (y'')',\ y^{\mathrm{IV}} = (y''')' \text{ і т. д.}$$

Прикладом диференціального рівняння з другою похідною є $y'' = \omega^2 y$. Його загальний розв'язок $y = A\cos(\omega t + \varphi)$ містить дві сталі: A і φ. Це рівняння — математична модель багатьох задач про коливні процеси, тому його називають *рівнянням гармонійного коливання.*

Різних видів диференціальних рівнянь дуже багато. Ми не маємо змоги говорити про них докладно, ця тема виходить далеко за межі шкільної програми. Зазначимо тільки, що з усіх математичних дисциплін найважливішу роль у математиці і прикладних науках відіграє математичний аналіз, а з усіх розділів математичного аналізу — теорія диференціальних рівнянь.

716°. Покажіть, що функція y є розв'язком даного диференціального рівняння:

а) $y' = 3y$, $y = 4e^{3x}$; б) $y' = -2y$, $y = 5e^{-2x}$;
в) $y' + 2y = 0$, $y = 0{,}5e^{-2t}$.

717. Чи є функція $y = -e^{2t}$ розв'язком рівняння:

а) $y' = 2y$; б) $y' + y = 0$; в) $y' = y^{-1}$?

718°. Яка з функцій $y = e^x$, $y = e^x + 2$, $y = e^x + 2x$ є розв'язком диференціального рівняння $y' - y + 2 = 0$?

719°. Знайдіть будь-який розв'язок диференціального рівняння $y' = y$.

720°. *Знайдіть функцію, яка задовольняє рівняння $y' = y$ і* графік якої проходить через точку K (0; 2).

721. Знайдіть функцію, яка задовольняє рівняння $y' = 2y$ і графік якої проходить через точку P (0; 0,5).

722°. Чи є функція $y = \sin t$ розв'язком диференціального рівняння $y'' + y = 0$? А функція $y = \cos t$?

723. Які з функцій $y = 3\cos t$, $y = -\cos t$, $y = 2\cos(t+1)$ є розв'язками диференціального рівняння $y'' + y = 0$?

724°. Яка функція $f(x)$ задовольняє умови:

а) $f'(x) = x^2$ і $f(2) = 1$; б) $f'(x) = \sin x$ і $f(0) = 2$?

725. Знайдіть загальний розв'язок диференціального рівняння:

а) $y' = 3y$; б) $y' + y = 0$; в) $2y' = 5y$.

726. Точка рухається прямолінійно зі змінною швидкістю $v = 0{,}1t^3$ м/с. Яку відстань вона пройде за перші 10 с?

Р о з в' я з а н н я. Пройдена точкою відстань s залежить від часу: $s = s(t)$. Швидкість руху точки — похідна цієї функції: $s'(t) = 0{,}1t^3$. Розв'язок утвореного диференціального рівняння — первісна для функції $0{,}1t^3$, тому $s(t) = 0{,}1\frac{t^4}{4} + C$.

За змістом задачі при $t = 0$ $s(t) = 0$, тому $0 = 0{,}1\cdot\frac{0}{4} + C$, звідки $C = 0$.

Отже, $s(t) = 0{,}025t^4$, $s(10) = 0{,}025\cdot 10^4 = 250$.

В і д п о в і д ь. 250 м.

727. Тіло кинули з землі вертикально вгору з початковою швидкістю 40 м/с. На якій висоті це тіло буде через 3, 4, 5, 8 секунд?

728. Стала розпаду ізотопу стронцію $k \approx 0{,}025$. Знайдіть його період піврозпаду.

Р о з в' я з а н н я. Нехай шуканий період піврозпаду дорівнює T. Тоді $0{,}5m_0 = m_0e^{-0{,}025T}$, звідки $2 = e^{0{,}025T}$, $0{,}025T = \ln 2$, $T = \frac{\ln 2}{0{,}025}$.

В і д п о в і д ь. $T \approx 28$ років.

729. Для ізотопу кадмію період піврозпаду $T \approx 164$ доби. Через скільки діб його маса зменшиться в 10 раз?

730. Для ізотопу полонію період піврозпаду $T = 138$ діб. Знайдіть його сталу розпаду k. Виведіть формулу залежності маси полонію від часу.

731. Від m міліграмів радію через t хвилин залишилось у р зультаті його розпаду n міліграмів. Знайдіть період пі розпаду радію.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Варіант 1

1. Обчисліть інтеграл: а) $\int_0^3 e^{2x}dx$; б) $\int_1^e \frac{3}{x}\,dx$.

2. Чи є функція $y = e^{2t}$ розв'язком диференціального рі няння $y' - 2y = 0$? А функція $y = -e^{2t}$?

3. Знайдіть функцію $f(x)$, знаючи, що $f'(x) = \sin x$ і $f(0) = 0,$

Варіант 2

1. Обчисліть інтеграл: а) $\int_{-1}^2 e^{-x}dx$; б) $\int_0^e 4x^{-1}dx$.

2. Чи є функція $y = e^{5t}$ розв'язком диференціального рі няння $y' - 5y = 0$? А функція $y = 4e^{5t}$?

3. Знайдіть функцію $f(x)$, знаючи, що $f'(x) = \cos x$ і $f(\pi) =$

Варіант 3

1. Обчисліть інтеграл: а) $\int_0^3 3^x dx$; б) $\int_e^{2e} \frac{dx}{2x+e}$.

2. Чи є функція $y = 2e^{-4t}$ розв'язком диференціального рі няння $y' + 4y = 0$? А функція $y = 3e^{-4t}$?

3. Знайдіть загальний розв'язок диференціального рівня ня $y' = 0{,}5y$.

Варіант 4

1. Обчисліть інтеграл: а) $\int_{-1}^3 2^{-x}dx$; б) $\int_e^{2e} \frac{dx}{e-3x}$.

2. Чи є функція $y = e^{-1{,}5t}$ розв'язком диференціального рі няння $2y' + 3y = 0$? А функція $y = e^{-1{,}5(t+2)}$?

3. Знайдіть загальний розв'язок диференціального рівня ня $2y' + y = 0$.

Контрольні запитання і завдання

1. Сформулюйте означення первісної. Наведіть приклади
2. Сформулюйте і доведіть основну властивість первісних

АРХІМЕД
(бл. 287—212 до н. д.)

Давньогрецький вчений, винахідник, конструктор. Показав, як можна обчислювати площі параболічного сегмента, об'єми різних тіл обертання, як знаходити суми членів геометричної прогресії, суми квадратів натуральних чисел і багато таких задач, які тепер розв'язують інтегруванням. Важливіші праці Архімеда: «Про квадратуру параболи», «Про спіралі», «Метод», «Про вимірювання круга», «Книга лем», «Про коноїди і сфероїди», «Про число піщинок», «Про плаваючі тіла». В останній обґрунтовано закон Архімеда.

3. Сформулюйте і доведіть три правила знаходження первісних.

4. Чому дорівнюють первісні функцій: x^n, $\sin x$, $\cos x$, e^x, a^x, $\ln x$?

5. Що таке підграфік функції? Наведіть приклади.

6. Як знаходять площу підграфіка функції?

7. Що таке інтегральна сума, інтеграл?

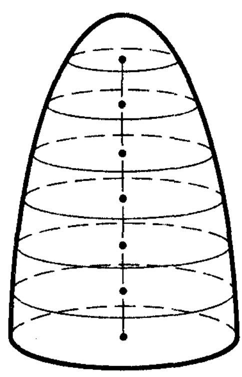
8. Напишіть і прокоментуйте формулу Ньютона—Лейбніца.

9. Наведіть приклади диференціальних рівнянь.

10. Покажіть на прикладі $y' = y$, що таке загальний і частинний розв'язки диференціального рівняння.

Історичні відомості

Введенню поняття *інтеграл* передувала велика робота багатьох математиків. Ще Архімед (III ст. до н. д.) знаходив площі і об'єми геометричних фігур методами, схожими до обчислень інтегральних сум. Наприклад, щоб знайти об'єм тіла, яке тепер ми називаємо фігурою, утвореною обертанням навколо осі x підграфіка функції $y = x^2$ на $[0; h]$, Архімед розбивав це тіло на n шарів однакової товщини (мал. 110). Далі розглядав суми об'ємів циліндрів, описаних навколо кожного з цих шарів і вписаних в них,



Мал. 110

КАВАЛЬЄРІ БОНАВЕНТУРА (1598—1647)

Італійський математик, викладач Болонського університету, автор «Геометрії», в якій викладено метод неподільних. По суті він умів розв'язувати задачі, які тепер розв'язують, обчислюючи інтеграли $\int_a^b x^n dx$ при натуральних $n < 10$. Інші його праці: «Сто різних задач...», «Тригонометрія плоска і сферична, лінійна і логарифмічна».

показував, що різниця цих сум при збільшенні n стає як завгодно малою. Нарешті, знаходив об'єм розглядуваного тіла як спільну границю цих сум (хоч, зрозуміло, чіткого поняття границі в нього ще не було). Так Архімед розв'язав багато задач, які тепер розв'язують за допомогою інтегралів

$$\int_0^a x dx, \quad \int_0^a x^2 dx, \quad \int_0^a (x^2 + bx) dx, \quad \int_0^\pi \sin \varphi d\varphi, \quad \int_0^a \sin \varphi d\varphi.$$

Подібними методами користувався і німецький астроном і математик Й. Кеплер (1571—1630). Зокрема, вважаючи, що кожне тіло обертання складається з безлічі «найтонших кружечків», він визначив об'єми 92 таких тіл. Ще далі пішов італійський математик Б. Кавальєрі. Уявляючи кожну фігуру як таку, що складена з «неподільних» — плоска фігура з відрізків, а тіло з плоских фігур, — він сформулював свої принципи (див. задачу 708; аналогічне твердження правильне і для об'ємів тіл). Сам Кавальєрі вважав ці твердження очевидними, приймав їх без доведення, як принципи (лат. principium — початок, основа, те саме, що й аксіома). Методами сучасної математики їх можна довести як теореми.

Для розвитку інтегрального числення багато зробили П. Ферма, Б. Паскаль, І. Барроу, а особливо І. Ньютон і Г. Лейбніц. Працювали вони незалежно один від одного, один в Англії, другий в Німеччині, йшли різними шляхами, а прийшли до одного й того самого відкриття, яке тепер називають основною теоремою математичного аналізу або формулою Ньютона — Лейбніца. Встановивши зв'язок між інтегруванням і диференціюванням, вони тим самим створили дуже ефективний метод розв'язування багатьох важливих задач. Створення цього методу спеціалісти вважають найбільшим відкриттям XVII століття.

ОСТРОГРАДСЬКИЙ МИХАЙЛО ВАСИЛЬОВИЧ (1801—1862)

Всесвітньо відомий український математик, член Петербурзької, Туринської, Римської, Американської, Французької академій наук. Народився в с. Пашенна (Полтавська обл.). Досліджував проблеми математичного аналізу, математичної фізики, теоретичної механіки, алгебри, теорії ймовірностей. Приятелював з Т. Г. Шевченком.

Простежимо, як поступово змінювалася система понять і позначень, пов'язаних з інтегралами. Кавальєрі, називаючи відрізки лініями, площу плоскої фігури вважав сумою всіх *ліній*. Лейбніц *зауважив: «доцільніше писати знак* $\int$ *замість всі* і $\int l$ замість *всі лінії»*. Останнє позначення згодом він замінив на $\int y$, а ще пізніше — на $\int ydx$. Л. Ейлер писав і границі інтегрування:

$$\int pdx\begin{bmatrix} ab\ x = a \\ ad\ x = b \end{bmatrix}.$$

Тут латинські слова *ab* і *ad* означають *від* і *до*. Сучасне позначення інтеграла запропонував французький математик Ж. Фур'є (1768—1830).

Термін інтеграл (лат. integer — цілий) ввів у 1690 р. Й. Бернуллі. Поняття первісної, яку спочатку називали примітивною (primitivus — початковий), ввів у 1797 р. Ж. Лагранж.

З учених Російської імперії найбільший внесок у розвиток інтегрального числення внесли М. В. Остроградський і В. Я. Буняковський. Обидва народилися в Україні, навчались у Парижі — найвідомішому в ті часи центрі математичної науки, обидва працювали в Петербурзі і були найвідомішими математиками Росії. Крім іншого, Остроградський розробив загальний метод інтегрування раціональних функцій, обґрунтував важливе правило Остроградського і формулу Остроградського. Буняковський перший довів важливу нерівність

$$\left(\int_a^b f(x)\cdot\varphi(x)\,dx\right)^2 \le \int_a^b f^2(x)\,dx\cdot\int_a^b \varphi^2(x)\,dx,$$

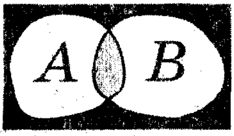
яку тепер називають нерівністю Буняковського.

БУНЯКОВСЬКИЙ ВІКТОР ЯКОВИЧ (1804—1889)

Український математик (народився в м. Бар на Вінниччині). Написав 168 наукових праць, з яких найбільшу роль відіграли «Основи математичної теорії ймовірностей», «Лексикон чистої і прикладної математики», «Арифметика». Головний експерт Росії з питань статистики і страхування, почесний член усіх російських університетів, віце-президент Академії Наук.

Термін «диференціальне рівняння» ввів Г. Лейбніц. За допомогою диференціальних рівнянь можна розв'язувати найважливіші прикладні задачі з природознавства і техніки, тому розробкою теорії таких рівнянь займалось багато провідних математиків. У XVIII ст. теорія диференціальних рівнянь відокремилася від математичного аналізу у великий розділ сучасної математики. З українських математиків у цій галузі найрезультативніше працювали Й. З. Штокало, Ю. Д. Соколов, Ю. М. Березанський, М. Г. Крейн, Ю. О. Митропольський та ряд інших учених.

Розділ 6



ЕЛЕМЕНТИ КОМБІНАТОРИКИ

§ 41. МНОЖИНИ І ПІДМНОЖИНИ

Ви знаєте, що таке бригада, табун, рій, набір, комплект тощо. У математиці будь-які сукупності називають одним словом: *множина*. Можна говорити, наприклад, про множини планет, держав, пісень, партій, рівнянь, функцій, точок, чисел, фігур тощо. Об'єкти, які входять до множини, називають її *елементами*. Якщо a — елемент множини M, то пишуть $a \in M$. Запис $b \notin M$ означає, що b — не є елементом множини M. Множини часто записують за допомогою фігурних дужок. Наприклад,

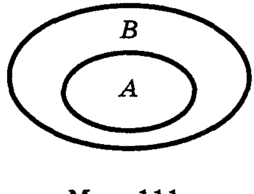
{△, □, ○} — множина фігур △, □, ○;

$\{0, 1, 2, 3\}$ — множина цифр 0, 1, 2, 3.

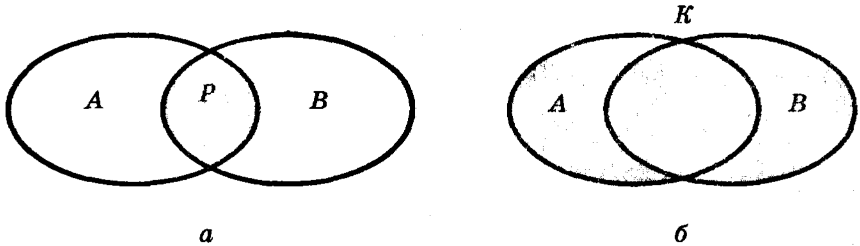
Це — приклади *скінченних множин*. Якщо множина має нескінченну кількість елементів, її називають *нескінченною множиною*. Нескінченними є, наприклад, множини натуральних, цілих, раціональних, дійсних чисел. Їх позначають відповідно буквами ***N, Z, Q, R***. Нескінченними є також множини точок на прямій чи відрізку, множини дійсних чисел на проміжках $[2; 3]$, $(-6; \infty)$ та ін.

Вважають, що всі елементи множини різні. Дві множини називають *рівними*, якщо вони складаються з тих самих елементів. $\{1; 3; 5\}$ і $\{3; 1; 5\}$ — різні записи однієї й тієї самої множини.

У математиці нерідко розглядаються і такі множини, які мають тільки один елемент, або й зовсім не мають елементів. Наприклад, можна говорити про множину коренів рівняння $3x + 5 = 17$ або множину розв'язків нерівності $x^2 + 3 < 0$. Якщо множина не містить жодного елемента, її називають *порожньою множиною* і позначають символом $\varnothing$.



Мал. 111



Мал. 112

Якщо A — частина множини B, то її називають *підмножиною* множини B і записують $A \subset B$. Наочно це зображають за допомогою діаграми Ейлера (мал. 111). Зокрема, правильні співвідношення:

$\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{Z}$, $\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{Z} \subset \boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{Z} \subset \boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{Q} \subset \boldsymbol{R}$.

Трапляється, що множини A і B мають спільні елементи. Якщо множина P містить усі спільні елементи множин A і B і тільки їх, то множину P називають *перерізом множин* A і B. Записують це так: $A \cap B = P$, діаграмою Ейлера зображають, як показано на малюнку 112, *а*. Множина, яка містить кожний елемент кожної з множин A і B і тільки ці елементи, називається *об'єднанням множин* A і B. Якщо K — об'єднання множин A і B, то пишуть $A \cup B = K$ (мал. 112, *б*).

Різницею множин A і B називають множину, яка складається з усіх елементів множини A, які не належать множині B. Її позначають $A \setminus B$. Наприклад, якщо $A = \{1;\ 2;\ 3;\ 4\}$, $B = \{1;\ 4;\ 5;\ 7;\ 8\}$, то $A \cap B = \{1;\ 4\}$, $A \cup B = \{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 7;\ 8\}$, $A \setminus B = \{2;\ 3\}$.

732. Як називають множину: а) корів; б) птахів; в) риб?

733. Запишіть множину голосних звуків українського алфавіту.

734. Напишіть множину таких цілих чисел, які:
а) більші за 3 і менші за 13;
б) не більші за 12 і не менші за −2.

735. Позначте на координатній прямій множину точок, яким відповідають числа: −3, −1, 2, 3, 4, 5.

736. Запишіть множину натуральних дільників числа: а) 60; б) 73.

737. Напишіть множину спільних дільників чисел 120 і 150.

738. Запишіть множину розв'язків рівняння:
а) $x(x^2 - 4) = 0$; б) $x^2 + 6 = 0$; в) $x^2 = \sqrt{x}$.

739. Запишіть множину розв'язків нерівності:

а) $2x - 1 < 7$; б) $x^2 - 2x \le 0$; в) $|x - 3| < 2$.

740. Які з висловлень правильні:

а) $7 \in Q$; б) $-5 \in R$; в) $\sqrt{3} \in Q$; г) $2\frac{1}{3} \in Z$?

741. Знайдіть множину значень функції:

а) $y = x^2$, заданої на проміжку $[-2; 7]$;

б) $y = 1^x$, якщо $x \in [1; 8]$.

742. Дано множини $K = \{a, b, c, 2\}$ і $P = \{1, 2, a, c, x\}$. Знайдіть їх переріз, об'єднання і різницю.

743. Чи є множина голубів підмножиною множини птахів? Зобразіть це діаграмою Ейлера.

744. Дано множину $\{\triangle, \square, \bigcirc\}$. Складіть усі її двоелементні підмножини. Скільки їх?

745*. Дано множину $A = \{a, b, c, d\}$. Складіть усі триелементні підмножини множини A. Скільки їх?

746. A і B — множини розв'язків рівнянь $2x + 3y = 5$ і $x - 5y = 9$. Запишіть множину $A \cap B$. Що є елементом цієї множини?

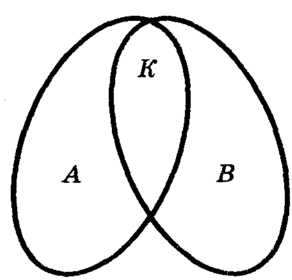
747. A — множина чисел, кратних 2, B — множина чисел, кратних 3. Якою є множина $A \cap B$? Скільки елементів вона має?

748. A — множина парних натуральних чисел, B — множина непарних натуральних чисел. Якими є множини $A \cap B$, $A \cup B$ і $A \setminus B$?

749. На малюнку 113 зображені: A — множина прямокутників, B — множина ромбів, $K = A \cap B$. Опишіть множину K. Чи правильно, що $K \cap A = K$, $K \cup A = A$? Опишіть множини $A \setminus B$ і $B \setminus A$.

750. Нехай A — множина всіх квадратних рівнянь, а B — множина рівнянь, які мають два корені. Чи рівні ці множини? Зобразіть їх діаграмою Ейлера.

751*. Покажіть, що кожна п'ятиелементна множина має стільки триелементних підмножин, скільки і двоелементних.



Мал. 113

§ 42. КОМБІНАТОРИКА І ПРАВИЛО ДОБУТКУ

Говорячи «множина», «підмножина», на порядок розміщення їх елементів не зважають. Кажуть, що вони не впорядковані. Крім них, нерідко розглядають і *впорядковані множини*. Так називають множини з фіксованим порядком елементів. Їх позначають не фігурними, а круглими дужками. Наприклад, з елементів множини $\{a, b, c\}$ можна утворити 6 триелементних упорядкованих множин:

(a, b, c), (a, c, b), (b, a, c), (b, c, a), (c, a, b), (c, b, a).

Як множини, усі вони рівні, як впорядковані множини — різні.

Існують задачі, в яких треба визначити, скільки різних підмножин або упорядкованих підмножин можна утворити з елементів даної множини. Їх називають *комбінаторними задачами*. А розділ математики про розв'язування комбінаторних задач називають *комбінаторикою*.

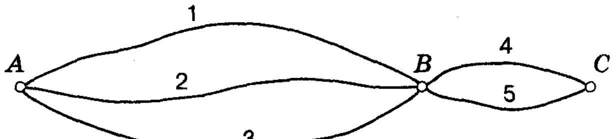
З а д а ч а. Від пункту A до B ведуть три стежки, а від B до C — дві. Скількома маршрутами можна пройти від A до C?

Р о з в' я з а н н я. Щоб пройти від A до B, треба вибрати одну з трьох стежок: 1, 2 або 3 (мал. 114). Після того слід вибрати одну з двох інших стежок: 4 чи 5. Всього від A до C ведуть 6 маршрутів, бо $3 \cdot 2 = 6$. Усі ці маршрути можна позначити за допомогою пар:

$(1; 4)$, $(1; 5)$, $(2; 4)$, $(2; 5)$, $(3; 4)$, $(3; 5)$.

Узагальнимо описану ситуацію. ***Якщо перший компонент пари можна вибрати m способами, а другий — n способами, то таку пару можна вибрати mn способами.*** Це — *правило добутку*, його часто називають *основним правилом комбінаторики*. Зверніть увагу: йдеться про впорядковані пари, складені з різних компонентів.

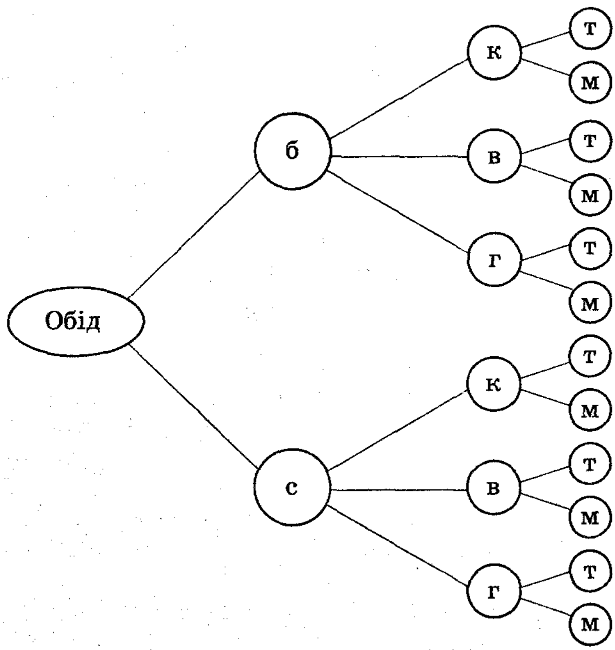
Правило добутку поширюється і на впорядковані трійки, четвірки та будь-які інші впорядковані скінченні множини. Зокрема, ***якщо перший компонент упорядкованої трійки можна вибрати m способами, другий — n способами, третій — k способами, то таку впорядковану трійку можна вибрати mnk способами.*** Наприклад, якщо їдальня на обід



Мал. 114

приготувала 2 перші страви — борщ (б) і суп (с), 3 другі — котлети (к), вареники (в), голубці (г) і 2 десертні — тістечка (т) і морозиво (м), то всього із трьох страв їдальня може запропонувати 12 різних наборів, бо $2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$.

Описаній ситуації відповідає діаграма, зображена на малюнку 115. Такі діаграми називають *деревами*.



Мал. 115

З а д а ч а. Скільки різних поїздів можна скласти з 6 вагонів, якщо кожний з вагонів можна поставити на будь- якому місці?

Р о з в' я з а н н я. Першим можна поставити будь-який з 6 вагонів. Маємо 6 виборів. Другий вагон можна вибрати з решти 5 вагонів. Тому згідно правила множення два перших вагони можна вибрати $6 \cdot 5$ способами. Третій вагон можна вибрати з 4 вагонів, що залишились. Тому три перших вагони можна вибрати $6 \cdot 5 \cdot 4$ способами. Продовжуючи подібні міркування, приходимо до відповіді: всього можна скласти $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$ різних поїздів.

Зверніть увагу на розв'язання останньої задачі. Воно звелось до обчислення добутку усіх натуральних чисел від 1 до 6. В комбінаториці подібні добутки обчислюють часто. **Добуток**

усіх натуральних чисел від 1 до n називають *n факторіалом* **позначають $n!$** Наприклад,

$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$, $7! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 5040$.

Домовились вважати, що $1! = 1$ і $0! = 1$.

---

752. Обчисліть: а) $8!$; б) $50! : 49!$; в) $100! : 98!$.

753. Спростіть вираз:

а) $n! : (n-1)!$; б) $(n-1)! \cdot n$; в) $(n+1)! : (n-1)!$.

754. Скількома способами можна посадити чотирьох дітей на лавці?

755. На вершину гори ведуть 4 стежки. Скількома маршрутами турист може піднятись на гору і спуститись з неї?

756. Їдальня приготувала на обід 3 перші страви (A, B, C), три другі (a, b, c) і 3 треті (α, β, γ). Скільки різних наборів із трьох страв можна вибрати на обід? Складіть відповідну діаграму-дерево.

757. Скільки різних «кортежів» може створити хлопчик з чотирьох іграшкових автомобілів: білого, жовтого, синього і червоного? Складіть відповідну діаграму-дерево.

758. Скількома способами 5 осіб можуть утворити чергу до каси?

759. Скільки різних речень можна написати словами «ми», «любимо», «грати»? А словами «ми», «дуже», «любимо», «грати»?

760. Скількома способами дівчинка може нанизати на нитку 8 різних намистин?

761. Знайдіть значення n, якщо:

а) $n! = (n-1)! \cdot 8$; б) $(n+2)! = 132 \cdot n!$

762. Скільки різних упорядкованих трійок можна утворити: а) з чотирьох елементів a, b, c, d; б) з п'яти елементів a, b, c, d, e?

43. РОЗМІЩЕННЯ І ПЕРЕСТАНОВКИ

З а д а ч а. Скількома способами збори з 20 осіб можуть обрати голову і секретаря?

Р о з в' я з а н н я. Голову можна обрати 20-ма способами, секретаря — з решти 19 осіб — 19-ма способами. За правилом добутку голову і секретаря збори можуть обрати $20 \cdot 19 = 380$ способами.

Узагальнимо задачу. Скільки упорядкованих k-елементних підмножин можна скласти з n різних елементів? На перше місце можна поставити будь-який з даних n елементів. На друге місце — будь-який з решти $n-1$ елементів і т. д. На останнє k-те місце можна поставити будь-який з решти $n-k+1$ елементів. За правилом добутку виходить, що з даних n елементів можна утворити $n(n-1)(n-2)...(n-k+1)$ k-елементних упорядкованих підмножин. Наприклад, з 4 елементів a, b, c, d упорядкованих двоелементних підмножин можна утворити всього $4 \cdot 3 = 12$:

$(a; b)$, $(a; c)$, $(a; d)$, $(b; a)$, $(b; c)$, $(b; d)$, $(c; a)$, $(c; b)$, $(c; d)$, $(d; a)$, $(d; b)$, $(d; c)$.

Упорядковану k-елементну підмножину n-елементної множини називають *розміщенням з k елементів по n*. Їх число позначають A_n^k. Із попередніх міркувань випливає, що $A_4^2 = 12$ і що для будь-яких натуральних n і k $(n \geq k)$

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1).$$

У правій частині цієї рівності k множників. Тому результат можна сформулювати у вигляді такої теореми.

Число розміщень з n елементів по k дорівнює добутку k послідовних натуральних чисел, найбільше з яких n.

Приклади. $A_7^4 = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$; $A_{10}^3 = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$.

Задача. Скількома способами можна скласти денний розклад з п'яти різних уроків, якщо клас вивчає 10 різних предметів?

Розв'язання. Ідеться про впорядковані 5-елементні підмножини з 10 елементів. Це — розміщення. $A_{10}^5 = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 30240$.

Відповідь. 30 240 способами.

Розміщення з n елементів по n називають *перестановками* з n елементів. Їх число позначають P_n. Підставивши у формулу числа розміщень $k = n$, дістанемо, що $P_n = n!$.

Задача. Скількома способами можна скласти список з 10 прізвищ?

Розв'язання. $P_{10} = 10! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 3\,628\,800$.

Відповідь. 3628800 способами.

763. Складіть усі можливі перестановки з елементів A, B, C.

764. Обчисліть P_n, якщо n дорівнює 6, 7, 8, 9.

765. Скількома способами 6 учнів можуть сісти за трьома двохмісними партами?

766. На тарілці є 7 груш. 5 дітей беруть з неї по одній груші. Скількома способами це можна зробити?

767. Скільки різних трицифрових чисел можна написати цифрами 6, 7 і 8 так, щоб усі цифри кожного числа були різні?

768. Скільки різних чотирицифрових чисел можна написати цифрами 0, 1, 2, 3 так, щоб усі цифри кожного числа були різні?

769. Випишіть усі розміщення з букв A, B, C, D по 2.

770. Скількома способами можна розсадити 5 учнів на 10 місцях?

771. Обчисліть: а) A_5^3; б) A_8^4; в) A_9^8; г) A_{50}^2.

772. Скільки існує трицифрових чисел, усі цифри яких різні?

773. Скільки існує чотирицифрових чисел, усі цифри яких різні?

774. Скільки існує таких трицифрових чисел, у яких кожна цифра не менша за 5 і цифри у кожному числі не повторюються?

775. Скільки словників треба мати, щоб безпосередньо перекладати з п'яти різних мов на кожну з них?

776. Скількома способами можна пошити трикольоровий прапор з трьох горизонтальних смуг однакової ширини, якщо є тканина 5 різних кольорів?

777. Доведіть, що при кожному натуральному n $P_{n+1} = nP_n$.

778. Знайдіть n, якщо: а) $P_n = 42 \cdot P_{n-2}$; б) $P_n = 720 \cdot P_{n-3}$.

779. Яке число менше і у скільки разів: а) A_8^5 чи P_8; б) A_9^8 чи P_9?

780. Доведіть, що: а) $A_m^{m-1} = P_m$; б) $A_n^k = nA_{n-1}^{k-1}$.

781. Розв'яжіть рівняння:

а) $A_x^4 = 56 \cdot A_x^2$; б) $A_x^5 = 72 \cdot A_{x-2}^3$.

§ 44. КОМБІНАЦІЇ

Нехай дано множину з трьох елементів: $\{a, b, c\}$. Її двоелементних підмножин (не впорядкованих) існує всього три: $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$. Говорять, що існує 3 комбінації з трьох елементів по два. Пишуть: $C_3^2 = 3$.

Комбінацією **з n елементів по k називають будь-яку k-елементну підмножину n-елементної множини.** Число комбінацій з n елементів по k позначають C_n^k. На відміну від розміщень, комбінації — підмножини не впорядковані.

Порівняйте: $C_3^2 = 3$, а $A_3^2 = 6$. За тих самих значень n і k значення C_n^k менше від A_n^k. Можна навіть вказати, у скільки разів менше. Кожну n-елементну комбінацію можна впорядкувати P_n способами. В результаті з однієї комбінації дістають P_n розміщень (впорядкованих підмножин) з тих самих елементів. Отже,

число n-елементних комбінацій у P_n разів менше за число розміщень з тих самих n елементів.

Тобто, $C_m^n = A_m^n : P_n$, звідки

$$C_m^n = \frac{m!}{(m-n)!\,n!}, \text{ або } C_m^n = \frac{m(m-1)...(m-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 ... n}.$$

Приклади. Обчисліть: а) C_7^3; б) C_{20}^{18}.

Розв'язання.

а) $C_7^3 = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 35$; б) $C_{20}^{18} = \frac{20!}{2! \cdot 18!} = \frac{18! \cdot 19 \cdot 20}{2! \cdot 18!} = 190$.

Зверніть увагу: $C_m^m = 1, C_m^1 = m$. Вважають також, що $C_m^0 = 1$ для будь-якого $m \in N$.

Задача. Скількома способами з 25 учнів можна вибрати на конференцію двох делегатів?

Розв'язання. Тут $m = 25$, $n = 2$, порядок не має значення.

$$C_{25}^2 = \frac{25 \cdot 24}{1 \cdot 2} = 300.$$

Відповідь. 300 способами.

---

782. На полиці є 20 книг. Скількома способами можна вибрати дві з них?

783. У класі 32 учні. Скількома способами можна вибрати з них двох чергових?

784. Скільки різних правильних дробів можна написати так, щоб одне з чисел 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 було чисельником, а друге — знаменником?

785. Скільки існує відрізків, кінцями яких є n даних точок?

786. Скільки діагоналей має опуклий 10-кутник; n-кутник?

787. Скільки існує трикутників, вершинами яких є вершини даного правильного 8-кутника; правильного n-кутника?

788*. У скількох точках можуть перетинатися діагоналі опуклого 10-кутника?

789. Скількома способами можна розподілити 4 однакових путівки між 20 робітниками? А якщо всі путівки різні?

790. Обчисліть:

а) C_9^3; б) C_{10}^7; в) $C_{12}^{10} : P_3$; г) $A_{10}^2 - C_{10}^2$.

791. Розв'яжіть рівняння:

а) $C_x^2 = 21$; б) $C_x^2 = 20 + x$; в) $C_x^2 + C_x^3 = 15(x - 1)$.

792. Що більше: а) C_{20}^2 чи C_{20}^3; б) C_{30}^2 чи C_{30}^{28}?

793. Доведіть, що коли числа m, n натуральні і $m > n$, то:

а) $C_m^n = C_m^{m-n}$; б) $C_m^n + C_m^{n-1} = C_{m+1}^n$.

794*. Скількома способами можна роздати 28 пластинок доміно чотирьом гравцям, щоб кожному дісталось 7 пластинок?

795. Скількома способами можна заповнити картку «Спортлото»: закреслити 6 номерів із 49?

796. Коли гравець має більше шансів виграти:

а) вгадати 1 число з шести чи 2 числа з чотирьох;

б) вгадати 3 числа з двадцяти чи 2 — із сорока?

797. Скількома способами можна розбити групу з 12 туристів: а) на підгрупи по 3 туристи в кожній; б) на підгрупи по 2 туристи?

798. Є 20 лотерейних квитків, занумерованих номерами від 1 до 20. Скількома способами з них можна вибрати 3 квитки так, щоб номер хоч одного з них був більшим за 15?

§ 45. БІНОМ НЬЮТОНА

Пригадайте формулу квадрата двочлена: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Помноживши $a^2 + 2ab + b^2$ на $a + b$ і на $a^2 + 2ab + b^2$, дістанемо формули:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$
$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.$$

Ці три формули можна записати і так:

$$(a + b)^2 = a^2 + C_2^1ab + b^2,$$
$$(a + b)^3 = a^3 + C_3^1a^2b + C_3^2ab^2 + b^3,$$
$$(a + b)^4 = a^4 + C_4^1a^3b + C_4^2a^2b^2 + C_4^3ab^3 + b^4.$$

Виявляється, для кожного натурального значення n правильна і загальна формула:

$$(a + b)^n = a^n + C_n^1a^{n-1}b + C_n^2a^{n-2}b^2 + \ldots + C_n^{n-1}ab^{n-1} + b^n.$$

Цю тотожність називають *формулою бінома Ньютона*, а її праву частину — *розкладом бінома Ньютона*. *Біном* — латинська назва двочлена. Користуючись цією формулою, піднесемо, наприклад, двочлен $a + b$ до п'ятого степеня. Оскільки $C_5^1 = 5$, $C_5^2 = 10$, $C_5^3 = 10$, $C_5^4 = 5$, то

$$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5.$$

Довести формулу бінома Ньютона можна методом математичної індукції. Припустивши, що формула правильна для деякого довільного показника степеня n, треба показати, що тоді вона правильна і для показника степеня $n + 1$. Продовжувати міркування можна як при доведенні теореми про похідну добутку (с. 115).

Обчислювати коефіцієнти розкладу бінома Ньютона можна не за формулою числа комбінацій, а користуючись *числовим трикутником Паскаля* — своєрідним способом обчислення коефіцієнтів розкладу бінома Ньютона $C_n^0, C_n^1, C_n^2, \ldots, C_n^{n-1}, C_n^n$:

$$\begin{array}{c} 1 \\ 1\ 1 \\ 1\ 2\ 1 \\ 1\ 3\ 3\ 1 \\ 1\ 4\ 6\ 4\ 1 \\ 1\ 5\ 10\ 10\ 5\ 1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Трикутник Паскаля можна продовжувати як завгодно далеко*. Його крайні числа — одиниці, а кожне інше дорівнює сумі двох найближчих до нього чисел зверху. Наприклад, додаючи число п'ятого рядка (для $n = 5$), дістанемо числа наступного рядка (для $n = 6$): 1, 6, 15, 20, 15, 6, 1. Отже,

$$(a + b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6.$$

799. Запишіть у вигляді многочлена вирази:

а) $(x + c)^4$; б) $(a + 1)^5$; в) $(2 + c)^5$.

800. Складіть трикутник Паскаля для $n = 7$ і $n = 8$.

801. Запишіть у вигляді многочлена вирази: а) $(a + x)^7$; б) $(x + y)^8$.

* Це випливає з тотожності $C_m^{n-1} + C_m^n = C_{m+1}^n$ (див. задачу 793).

802. Запишіть у вигляді степеня двочлена:

а) $a^5 + 5a^4 + 10a^3 + 10a^2 + 5a + 1$;

б) $1 + 6x + 15x^2 + 20x^3 + 15x^4 + 6x^5 + x^6$.

803. Запишіть у вигляді многочлена добуток:

а) $(a + 1)(a + 1)^3$; б) $(x + y)^2(x + y)^3$.

804. Запишіть 3 перших і 3 останніх члени розкладу бінома Ньютона:

а) $(c + x)^7$; б) $(1 + ax)^6$; в) $\left(\frac{1}{2} + m\right)^8$.

805. Доведіть тотожність

$(a - b)^5 = a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5$.

Зробіть узагальнення.

Розв'язання. $(a - b)^5 = (a + (-b))^5 = a^5 + 5a^4 \cdot (-b) + 10a^3 \cdot (-b)^2 + 10a^2 \cdot (-b)^3 + 5a^3 \cdot (-b)^4 + (-b)^5 = a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5a^3b^4 - b^5$.

Усі члени розкладу бінома Ньютона $(a - b)^n$ такі самі, як і члени розкладу бінома $(a + b)^n$, тільки їх члени з парними номерами мають протилежні знаки.

806. Запишіть у вигляді многочлена вираз:

а) $(x - c)^6$; б) $(1 - \alpha)^7$; в) $(nx - 1)^5$.

807. Яким є середній член розкладу бінома $\left(a - \frac{1}{a}\right)^8$?

808. Скільки членів має розклад бінома:

а) $(a - 3)^6$; б) $(x - m)^n$?

809. За якої умови розклад бінома $(a + b)^n$ має парне число членів, за якої — непарне число членів?

810. Подайте у вигляді многочлена вираз:

а) $(x + 1)^4 + (x - 1)^4$; б) $(m + n)^5 - (m - n)^5$.

811. Доведіть, що для досить малих значень α істинна нерівність $(1 + \alpha)^n \approx 1 + n\alpha$. Користуючись нею, усно знайдіть наближені значення:

а) $1{,}01^4$; б) $1{,}02^5$; в) $0{,}99^5$; г) $0{,}98^6$.

812. Напишіть такий член розкладу бінома $\left(a + \frac{2}{a}\right)^{10}$, який:

а) містить a^6; б) містить a^{-8}; в) не містить a.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Варіант 1

1. Випишіть усі двоелементні підмножини множини $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$. Скільки їх?

2. Зобразіть діаграмою Ейлера співвідношення між множинами чотирикутників і трапецій.

3. Обчисліть: а) P_6; б) A_5^3; в) C_{30}^{28}; г) $50! : P_{48}$.

4. Скількома способами можна вибрати 3 яблука з десяти?

5. Подайте у вигляді многочлена вираз:

а) $(x + y)^5$; б) $(a + 1)^4 - (a - 1)^4$.

Варіант 2

1. Випишіть усі двоелементні підмножини множини $\{\tau, \varphi, \psi, \omega\}$. Скільки їх?

2. Зобразіть діаграмою Ейлера співвідношення між множинами паралелограмів і прямокутників.

3. Обчисліть: а) P_5; б) A_7^3; в) C_{40}^{38}; г) $P_{40} : 38!$.

4. Скількома способами можна утворити состав поїзда з дев'яти вагонів?

5. Подайте у вигляді многочлена вираз:

а) $(a + b)^4$; б) $(x + y)^5 - (x - y)^5$.

Варіант 3

1. Випишіть усі триелементні підмножини множини $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon\}$. Скільки їх?

2. Зобразіть діаграмою Ейлера співвідношення між множинами паралелограмів і правильних многокутників.

3. Обчисліть: а) P_8; б) A_8^4; в) C_{100}^{97}; г) $A_{30}^6 : C_{30}^6$.

4. Скількома способами можна розподілити 3 однакових путівки між 25 студентами? А якщо путівки різні?

5. Подайте у вигляді многочлена вираз:

а) $(a + c^2)^5$; б) $(x + 3)^4 - (x - 3)^4$.

Варіант 4

1. Випишіть усі триелементні підмножини множини $\{\sigma, \tau, \varphi, \psi, \omega\}$. Скільки їх?

2. Зобразіть діаграмою Ейлера співвідношення між множинами арифметичних і геометричних прогресій.

3. Обчисліть: а) $7!$; б) A_9^4; в) C_{50}^{47}; г) $A_{30}^8 : C_{29}^8$.

4. Скільки існує чотирицифрових чисел, усі цифри яких різні?

5. Подайте у вигляді многочлена вираз:

а) $(a + 2x)^5$; б) $(n + c^2)^4 - (n - c^2)^4$.

Контрольні запитання і завдання

1. Наведіть приклади множин, підмножин.
2. Що означають символи $\in$, $\notin$, $\cup$, $\cap$, $\varnothing$, $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{Z}$, $\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{R}$?
3. Що таке об'єднання множин, переріз множин?
4. Сформулюйте основне правило комбінаторики.
5. Що таке n факторіал? Як його позначають?
6. Що розуміють під перестановками з n елементів?
7. Напишіть формулу числа перестановок з n елементів.
8. Що розуміють під розміщеннями з n елементів по k?
9. Як обчислюють число розміщень з n елементів по k?
10. Що розуміють під комбінаціями з n елементів по k?
11. Як обчислюють число комбінацій з n елементів по k?
12. Напишіть формулу бінома Ньютона.

Історичні відомості

Найпростіші комбінаторні задачі вчені Стародавньої Греції розв'язували ще в IV ст. до н. д. Окремі індійські математики вміли знаходити число комбінацій з n елементів по k ще в II ст. до н. д., знали вони навіть співвідношення, яке тепер записують у вигляді рівності

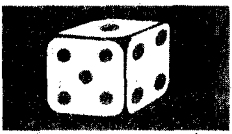
$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n.$$

Починаючи з XVII ст., європейські математики цікавилися комбінаторикою у зв'язку з розвитком теорії ймовірностей. Термін «комбінаторика» набув поширення після опублікування праці Г. Лейбніца «Міркування про комбінаторне мистецтво» (1666 р.). Терміни і символи комбінаторики встановлювалися не відразу. Добуток n перших натуральних чисел спочатку називали *факультативом* і позначали знаком $1^n/_1$. Тільки наприкінці XVIII ст. його стали називати факторіалом і позначати символом $n!$. Знаки P_n і C_m^n з'явилися тільки в XIX ст. Ейлер число комбінацій з m елементів по n позначав знаком $\left(\frac{m}{n}\right)$. Деякі математики і тепер користуються таким позначенням.

Фо́рмулу для розкладу бінома $(a + b)^n$ деякі вчені-араби знали ще в X ст. Опублікував її Насіреддін Тусі в XIII ст. Арабські вчені знали також, що $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$. З цієї рівності випливає істинність трикутника Паскаля для всіх натуральних значень n. Отже, формула, яку тепер називають біномом Ньютона, була відома задовго до народження великого вченого. Ньютон тільки поширив її на випадки від'ємних і дробових показників степеня n.

В окрему математичну дисципліну комбінаторика оформилася після XVIII ст. За її допомогою вчені розшифрували багато різних кодів, прочитали крито-мікенські ієрогліфи, розгадали структуру дезоксирибонуклеїнової кислоти (ДНК) тощо. У даному підручнику розглянуто тільки найпростіші комбінаторні задачі і способи їх розв'язання; у повніших курсах є багато інших формул і розв'язуються набагато важчі і цікавіші задачі.

Розділ



ПОЧАТКИ СТОХАСТИКИ

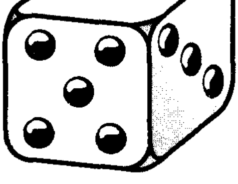
§ 46. ІМОВІРНІСТЬ ПОДІЇ

Одним із найважливіших розділів сучасної математики є теорія ймовірностей. Основне її поняття — *ймовірність* (або *імовірність*) події. Подіями в теорії ймовірностей називають результати (наслідки) випробувань чи спостережень.

Спостереження	Подія
1. Падає монета	впала догори гербом
2. Грають команди *A, B, C*	виграла команда *C*
3. Людина чекає ранку	ранок настав
4. Падає гральний кубик	випало 7 очок

Остання подія неможлива, бо на гранях грального кубика (мал. 116) немає сімки. Подія 3 достовірна, бо після ночі завжди настає ранок. Події 1 і 2 випадкові. Подію називають *неможливою*, якщо вона ніколи не може відбутись, *достовірною* — якщо завжди відбувається. Якщо подія може відбутися або не відбутися, її називають *випадковою*.

Сказати наперед, відбудеться випадкова подія чи не відбудеться, не можна. Якщо ж ця подія масова, виконується багато разів, то ймовірність її виконання можна характеризувати числом.



Мал. 116

Розглянемо приклад. Якщо кидати гральний кубик, то всього може трапитись 6 подій (наслідків): 1) випаде одне очко; 2) випаде два очки; 3) випаде три очки; ... 6) випаде шість очок. Ці шість подій охоплюють, вичерпують усі можливі випадки, тому говорять, що вони утворюють *повну групу подій.* Ці події *попарно несумісні*, бо кожного разу випадає тільки одне число очок, а не два чи більше. Усі шість подій *однаково можливі* (рівноможливі), бо йдеться про однорідний кубик правильної форми і спритність гравця виключається. Кожна з цих подій *елементарна*, бо не зводиться до простіших подій.

Приклад неелементарної події — поява пластинки доміно з 8 очками. Ця подія зводиться до трьох елементарних: 1) поява пластинки $\frac{2}{6}$; 2) поява пластинки $\frac{3}{5}$; 3) поява пластинки $\frac{4}{4}$.

Якщо повна група подій складається з n рівноможливих елементарних подій, то ймовірність кожної з них дорівнює $\frac{1}{n}$. Наприклад, імовірність того, що на підкинутому гральному кубику випаде 5 очок, дорівнює $\frac{1}{6}$. А ймовірність того, що підкинута монета впаде догори гербом, дорівнює $\frac{1}{2}$. Імовірність події A позначають символом $P(A)$. Тому якщо першу з розглянутих подій позначити буквою A, а другу — B, то

$$P(A) = \frac{1}{6},\ P(B) = \frac{1}{2}.$$

Якщо подія C неможлива, а D — достовірна, то $P(C) = 0$, $P(D) = 1$.

Тепер прийнято вважати, що неможлива і достовірна події — окремі випадки випадкової події. Тому якщо подія X випадкова, то $0 \le P(X) \le 1$. Сума ймовірностей усіх рівноможливих елементарних подій, які утворюють повну групу, дорівнює 1.

Якщо подія A не елементарна, то її здійсненню можуть сприяти кілька елементарних подій. У цьому випадку $P(A)$ дорівнює сумі ймовірностей усіх елементарних подій, які сприяють події A. ***Ймовірністю* випадкової події A називають відношення числа m сприятливих для події A елементарних подій до числа n усіх рівноможливих і попарно несумісних елементарних подій, які утворюють повну групу.** Це — класичне означення ймовірності.

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Задача. З перевернутих 28 пластинок доміно навмання беруть одну. Яка ймовірність того, що на ній виявиться всього: а) 2 очки (подія A); б) 4 очки (подія B); в) 11 очок (подія C)?

Розв'язання. Існує 2 пластинки доміно з двома очками $\left(\frac{0}{2} \text{ і } \frac{1}{1}\right)$, 3 пластинки з чотирма очками $\left(\frac{0}{4}, \frac{1}{3} \text{ і } \frac{2}{2}\right)$, 1 пластинка з 11 очками $\left(\frac{5}{6}\right)$ (мал. 117). А всього вибору можливостей 28, бо взяти можна будь-яку з 28 пластинок. Отже,

$$P(A) = \frac{2}{28} = \frac{1}{14},\ P(B) = \frac{3}{28},\ P(C) = \frac{1}{28}.$$

813°. Яка ймовірність того, що кинутий гральний кубик впаде догори гранню з трьома очками? з шістьма очками?

814°. Яка ймовірність того, що кинутий гральний кубик впаде догори гранню з парним числом очок; з числом очок, кратним 3?

815°. Знайдіть імовірність того, що ваш товариш народився в неділю.

816°. Набираючи номер телефону, абонент забув останню цифру і набрав її навмання. Яка ймовірність того, що потрібний номер він набрав правильно?

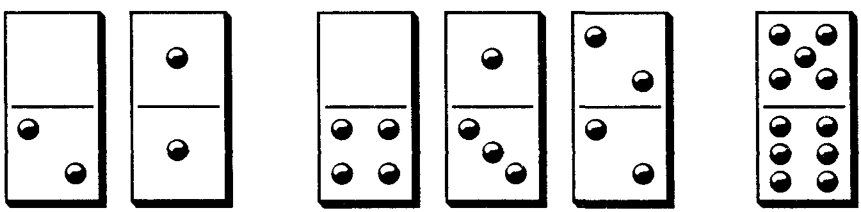
817. Офарбований з усіх боків дерев'яний кубик розпиляли на 125 рівних кубиків і зсипали їх у торбу. Яка ймовірність того, що беручи з торби кубик навмання, візьмете такий, у якого офарбована тільки одна грань; тільки дві грані; три грані?

818°. З букв, написаних на окремих картках, склали слово *МАТЕМАТИКА*. Потім ці картки перевернули, перетасували і взяли навмання одну з них. Яка ймовірність того, що на ній виявиться: а) буква *А*; б) буква *М*?

819. У торбині 5 білих і 7 чорних куль. Яка ймовірність того, що, беручи навмання, виймуть з неї: а) білу кулю; б) чорну кулю?

820°. У кульку́ 10 згорнутих папірців. На двох із них написано «ні», а на решті — «так». Яка ймовірність того, що на взятому навмання папірці виявиться слово «так»?

821. У ящику a червоних і b жовтих куль. З нього вийняли одну кулю червоного кольору і відклали вбік. Після



Мал. 117

цього з ящика беруть ще одну кулю навмання. Яка ймовірність того, що вона виявиться жовтою?

822. У змаганнях беруть участь 25 учнів однієї школи, 15 — другої і 10 — третьої. Яка ймовірність того, що першим виступатиме учень з першої школи?

823°. Пасажир чекає трамвай № 1 або № 3 біля зупинки, на якій зупиняються трамваї № 1, 3, 4 і 9. Вважаючи, що всі трамваї підходять однаково часто, знайдіть імовірність того, що першим прийде до зупинки трамвай, якого чекає пасажир.

824. На 1000 білетів лотереї припадає 1 виграш 5000 грн., 10 виграшів по 1000 грн., 50 — по 200 грн., 100 — по 50 грн. Решта білетів невиграшні. Знайдіть імовірність виграшу на один білет, не меншого від 200 грн.

Р о з в' я з а н н я. Білетів, на які припадають виграші, не менші від 200 грн., всього $1 + 10 + 50 = 61$. Загальна кількість білетів 1000. Тому шукана ймовірність $61 : 1000 = 0{,}061$.

825. У партії зі 100 деталей 75 деталей першого сорту, 15 — другого, 8 — третього і 2 деталі браковані. Яка ймовірність того, що взята навмання деталь виявиться першого або другого сорту?

826. Із 100 карток, занумерованих числами від 1 до 100, виймають одну. Яка ймовірність того, що її номер виявиться меншим за 50 і більшим за 40?

827. В урні є жетони з номерами від 1 до 100. Яка ймовірність того, що перший витягнутий з урни навмання жетон не міститиме цифри 6?

828. З 85 карток, занумерованих числами від 1 до 85, виймають одну. Яка ймовірність того, що номер вийнятої картки виявиться: а) кратним 36; б) кратним 4?

829°. Із 100 студентів-першокурсників 60 вивчають англійську мову, 30 — німецьку, 10 — французьку. Знайдіть імовірність того, що вибраний навмання студент цього факультету вивчає німецьку або французьку мову.

830. Із 120 науковців установи англійською мовою володіють 80, 70 — німецькою, 50 — обома цими мовами. Знайдіть імовірність того, що вибраний навмання науковець з цієї установи: а) володіє англійською або німецькою мовою; б) не знає ні англійської, ні німецької мови.

831. Підкидають два гральні кубики. Яка ймовірність появи хоча б однієї шістки?

832. Беруть навмання пластинку доміно. Яка ймовірність того, що на ній є: а) всього 9 очок; б) більше 9 очок; в) менше 9 очок?

833. Беруть навмання пластинку доміно. Яка ймовірність того, що вона: а) дубль; б) не дубль?

834*. Беруть навмання пластинку доміно. Знайдіть імовірність того, що другу пластинку, взяту також навмання, можна прикласти до першої. Розгляньте два випадки.

835. На кожній з трьох карток написане одне з чисел: 1, 2, 3. Яка ймовірність того, що перевернувши і перемішавши їх, ви першою візьмете картку з числом 1, а другою — з числом 2?

836. У магазин надходять лампи з двох заводів: 30 % — з одного і 70 % — з другого. З ламп від першого заводу стандартних 85 %, а від другого — 75 %. Яка ймовірність того, що куплена в цьому магазині лампа виявиться стандартною?

837. Знайдіть імовірність того, що вибраний навмання член послідовності $a_n = 3n + 2$, де $n \le 100$, ділиться на 5. А якщо $n \le 1000$?

§ 47. ОБЧИСЛЕННЯ ІМОВІРНОСТЕЙ ЗА ДОПОМОГОЮ ФОРМУЛ КОМБІНАТОРИКИ

Обчислювати імовірності подій часто допомагають правила і формули комбінаторики.

З а д а ч а 1. На вершину гори ведуть 4 однаково зручні стежки. Яка ймовірність того, що ви підніметесь на гору і спуститесь з неї тим самим маршрутом, яким проходив тут колись ваш товариш?

Р о з в' я з а н н я. Всього існує $4 \cdot 4 = 16$ різних маршрутів. Оскільки усі вони однаково зручні, то ймовірність пройтись по одному з них дорівнює $\frac{1}{16}$.

З а д а ч а 2. Учень цифрами 1, 2, 3, 4, 5 написав невідоме вам п'ятицифрове число. Яка ймовірність того, що ви відразу відгадаєте це число?

Р о з в' я з а н н я. Всього таких чисел є $P_5 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$. Ймовірність вгадати одне з них дорівнює $\frac{1}{120}$.

З а д а ч а 3. У кошику є 20 яблук, однакових на вигляд, 15 з них — солодких, а 5 — кислих. Яка ймовірність того, що взяті навмання два яблука виявляться кислими?

Р о з в' я з а н н я. Вибрати пару з усіх 20 яблук можна C_{20}^2 способами, а з 5 яблук — C_5^2 способами.

$$C_{20}^2 = \frac{20 \cdot 19}{1 \cdot 2} = 190, \qquad C_5^2 = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10.$$

Отже, шукана ймовірність $P = \frac{10}{190} = \frac{1}{19}$.

Задача 4. Є картки з цифрами 3, 4, 5, 6, 7. Три з них вибирають навмання. Яка ймовірність того, що з них можна скласти арифметичну прогресію?

Розв'язання. Три картки з п'яти можна вибрати $C_5^3 = 10$ способами. Арифметичні прогресії можна скласти тільки з таких наборів: (3, 4, 5), (4, 5, 6), (5, 6, 7) і (3, 5, 7). Усього цих наборів 4. Отже, шукана ймовірність $P = \frac{4}{10} = 0{,}4$.

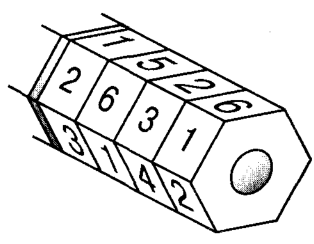
838. Їдальня на обід приготувала 3 перші страви: борщ, суп, капусняк; 4 другі: вареники, голубці, котлети, рагу і 2 десертні: морозиво і тістечка. Яка ймовірність того, що хтось, не знаючи смаків товариша, замовить для нього борщ, котлети і морозиво?

839. Замок із «секретом» містить 4 шестикутні призми, що можуть повертатися незалежно одна від одної навколо спільної осі (мал. 118). На кожній бічній грані призми написано цифру від 1 до 6. Повертаючи призми, у прорізі замка можна встановити будь-яке чотирицифрове число, записане такими цифрами. Замок відкривається тільки тоді, коли буде набране число, яке становить «секрет» замка. Яка ймовірність того, що людина, яка не знає цього «секрету», відкриє замок за один набір числа навмання?

840. На полицю навмання ставлять чотиритомний словник. Яка ймовірність того, що книги поставлено в належній послідовності?

841. Дівчинка хотіла нанизати на нитку 7 різних намистин. Це зробив її братик. Яка ймовірність того, що він зробив саме так, як хотіла дівчинка?

842. На столі лежать 5 перевернутих і перетасованих карток, на кожній з яких написана одна з букв *A*, *E*, *O*, *P*, *T*. Яка ймовірність того, що:
а) першою буде взято картку з буквою *O*, другою — з буквою *P*, третьою — з буквою *T*;
б) з трьох взятих навмання карток можна буде скласти слово *OPT*?



Мал. 118

843. З 32 карток із буквами українського алфавіту беруть навмання 4 картки. Яка ймовірність того, що з них можна скласти слово *РОМБ*?

844. Студент прийшов на екзамен, знаючи відповіді лише на 20 з 25 запитань програми. Знайдіть імовірність того, що він із трьох запропонованих запитань знатиме відповіді принаймні на два.

Р о з в' я з а н н я. Всього варіантів трійок запитань C_{25}^3. З них C_{20}^3 трійок таких, на які він може відповісти повністю. Може він відповісти і на C_{20}^2 пар запитань. Якщо до кожної такої пари запитань приєднати одне з 5 запитань, яких він не знає, дістанемо ще $5 \cdot C_{20}^2$ трійок. Отже, шукана ймовірність

$$P = \left(C_{20}^3 + 5 \cdot C_{20}^2\right) : C_{25}^3 = (1140 + 950) : 2300 = \frac{209}{230}.$$

845. Із 10 металевих конструкцій дві — високої якості. Знайдіть імовірність того, що серед взятих навмання п'яти конструкцій тільки одна високої якості.

846°. У класі 10 учнів вивчають англійську мову, 8 — німецьку, 6 — французьку. Навмання складено групу з 3 учнів. Знайдіть імовірність того, що: а) усі 3 учні групи вивчають різні іноземні мови; б) усі 3 учні вивчають англійську мову; в) усі 3 учні вивчають одну з названих мов.

847. Серед 100 деталей виявлено 2 браковані. З них навмання вибирають 6 деталей. Знайдіть імовірність того, що серед вибраних 6 деталей рівно 2 деталі виявляться бракованими.

848. Студент прийшов на екзамен, знаючи відповіді тільки на 45 запитань із 60. До кожного білета включено 2 запитання з 60. Студент взяв білет навмання. Знайдіть імовірність того, що він знає відповідь: а) на обидва запитання; б) тільки на одне запитання.

849. У шаховому турнірі беруть участь 20 шахістів, серед них 6 майстрів спорту. Шляхом жеребкування їх розділили на дві групи по 10 шахістів у кожній. Яка ймовірність того, що: а) всі 6 майстрів спорту попадуть в одну групу; б) 2 майстри спорту потраплять до однієї групи, а 4 — до іншої?

850. В урні m білих і n чорних куль. Знайдіть імовірність того, що дві вийняті навмання кулі виявляться: а) білими; б) різних кольорів.

851. Із 10 лотерейних білетів виграшних 2. Знайдіть імовірність того, що серед взятих навмання 5 білетів виграшним виявиться тільки 1.

852. Учасник спортлото має назвати шість чисел із запропонованих 45. Він виграє, якщо вгадає 3, 4, 5 або 6 чисел. Знайдіть імовірності вгадати ці кількості чисел.

853. Що ймовірніше вгадати:

а) 3 числа з 49 чи 4 числа з 36;
б) 7 чисел з 15 чи 8 чисел з 15;
в) 3 числа з 15 чи 13 чисел з 15?

854. На n картках написані числа від 1 до n. Беруть дві з них по черзі. Яка ймовірність того, що взяте друге число виявиться більшим за перше?

855. На кількох картках написані різні одночлени із трьох множників. На кожній картці — одне з чисел 2, 3, 4, одна з букв a, b, c і одна з букв x, y, z. Яка ймовірність того, що на взятій навмання картці виявиться одночлен $3ay$?

856. Із п'яти відрізків завдовжки 2, 3, 7, 8 і 9 см навмання вибирають три. Яка ймовірність того, що з них можна скласти трикутник?

857*. n екскурсантів незнайомий їм офіціант навмання розсаджує за круглим столом. Знайдіть імовірність того, що A і B сидітимуть поруч.

858. На полицю поставили навмання 10 книжок, 3 з них — історичні романи. Знайдіть імовірність того, що ці три романи стоятимуть поруч.

859. Абонент забув три останні цифри номера, але пам'ятає, що вони різні. Яка ймовірність того, що він навмання набере потрібні цифри?

860. Чотири білети в театр розігрують 4 хлопці і 3 дівчини. Яка ймовірність того, що білети дістануться:

а) двом хлопцям і двом дівчатам;
б) хлопцям A, B і дівчатам K, P?

§ 48. ПЕРШІ ВІДОМОСТІ ПРО СТАТИСТИКУ

Статистика — це наука, яка займається збиранням, обробкою і вивченням різних даних, пов'язаних з масовими явищами, процесами та подіями. Статистичні відомості про якусь велику сукупність об'єктів (генеральну сукупність) одержують здебільшого в результаті аналізу тільки незначної її частини — *вибірки*. Щоб дізнатися, наприклад, про найпоширеніші розміри чоловічого взуття, досить опитати кілька десятків чоловіків. Припустимо, що, опитавши 60 чоловіків, одержали результати, показані в таблиці:

Розмір взуття	25	25,5	26	26,5	27	27,5	28	28,5	29	29,5	30	30,5
Кількість чолов.	1	2	3	7	10	9	8	8	6	4	1	1

Це — *частотна таблиця*, в ній числа другого рядка — *частоти*. Наприклад, частота взуття розміру 29 дорівнює 6. Відносна частота цього розміру

$$6 : 60 = 0,1 = 10\ \%.$$

Проаналізувавши таку вибірку, роблять загальний висновок: приблизно 10 % чоловічого взуття треба робити 29 розміру, а розміру 26 — удвічі менше. Це — наближені відношення, але для практики таких наближень буває досить.

Математичним аналізом різних вибірок займається *математична статистика*. Її основне завдання — розробляти ефективні методи вивчення великих сукупностей об'єктів на основі порівняно невеликих вибірок.

Кожний елемент вибірки називають її *варіантою*. Вибірка, одержана в результаті спостережень, буває невпорядкованою. Упорядкувавши її, дістають *варіаційний ряд*. Різниця між крайніми членами варіаційного ряду — *розмах вибірки*. Нехай дано вибірку

$$4,\ 3,\ 7,\ 9,\ 6,\ 8,\ 2,\ 6,\ 1,\ 7,\ 7,\ 3,\ 2,\ 5.$$

Упорядкувавши її за зростанням варіант, матимемо варіаційний ряд:

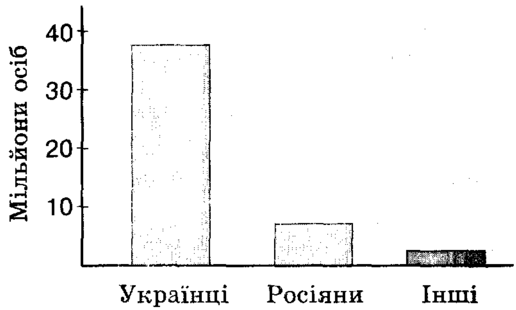
$$1,\ 2,\ 2,\ 3,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 6,\ 7,\ 7,\ 7,\ 8,\ 9.$$

Розмах даної вибірки $r = 9 - 1 = 8$.

Мода вибірки — її варіанта з найбільшою частотою. *Медіана вибірки* — число, яке «поділяє» відповідний варіаційний ряд навпіл. Розглядувана вибірка має моду 7, а медіану — 5,5, бо $\frac{1}{2}(5 + 6) = 5{,}5$.

Наочно зображати статистичні відомості зручно за допомогою діаграм (секторних, лінійних, стовпчастих), гістограм, полігонів і графіків. На малюнках 119 і 120 зображені на секторній і стовпчастій діаграмах співвідношення між чисельностями громадян України різних національностей у 2000 р. Стовпчасту діаграму із з'єднаних прямокутників називають

Мал. 119



Мал. 120

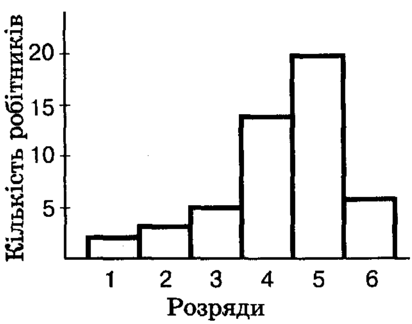
гістограмою. На малюнку 121 зображено гістограму, яка відповідає наведеній нижче таблиці розподілу робітників цеху за тарифними розрядами:

Тарифний розряд	1	2	3	4	5	6	Всього
Кількість робітників	2	3	5	14	20	6	50

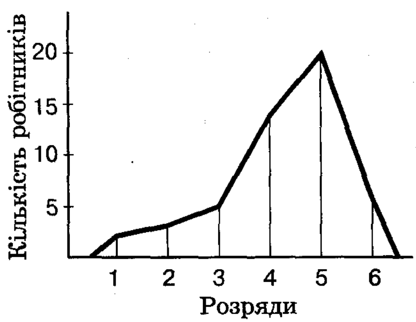
Іноді замість гістограми будують *полігон розподілу*, з'єднуючи відрізками середини верхніх основ послідовних прямокутників гістограми (мал. 122). Бувають також інші діаграми.

Середнім значенням вибірки називають середнє арифметичне усіх її варіант. Наприклад, якщо дано вибірку 1, 2, 3, 3, 5, 6, 8, то її середнє

$$\overline{x} = \frac{1}{7}(1 + 2 + 3 + 3 + 5 + 6 + 8) = 4.$$



Мал. 121



Мал. 122

Якщо варіанти вибірки повторюються, то суми рівних доданків можна замінити добутками.

З а д а ч а. 7 робітників бригади щомісяця одержують по 300 грн., 8 — по 450 грн., а 5 — по 500 грн. Визначте середню місячну зарплату робітника цієї бригади.

Р о з в' я з а н н я. Всього робітників у бригаді $7 + 8 + 5 = 20$. Тому шукана середня зарплата

$$\overline{x} = \frac{1}{20}(300 \cdot 7 + 450 \cdot 8 + 500 \cdot 5) = 410.$$

В і д п о в і д ь. 410 грн.

У статистиці часто використовують і *середнє квадратичне*. Якщо дано n чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$, то їх середнє квадратичне $\overline{x}_2$ визначається за формулою

$$\overline{x}_2 = \sqrt{\frac{1}{n}(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)}.$$

За допомогою середнього квадратичного найчастіше оцінюють сукупності похибок або відхилень від норми. Розглянемо приклад. Бажаючи виточити деталь радіуса R, токар практично виточує деталь радіуса $R + \alpha$, де α — деяке відхилення (додатне або від'ємне). Нехай два токарі, виточивши по 6 таких деталей, допустили такі похибки (в десятих частках міліметра):

перший: 2, −5, 4, −3, −3, 5;

другий: 3, −1, 4, 1, 1, 2.

Хто з них завдання виконав якісніше?

Щоб відповісти на запитання, обчислюють середні квадратичні допущених відхилень:

$$\overline{x}_2 = \sqrt{\frac{1}{6}(4 + 25 + 16 + 9 + 9 + 25)} \approx 14{,}7;$$

$$\overline{y}_2 = \sqrt{\frac{1}{6}(9 + 1 + 16 + 1 + 1 + 4)} \approx 5{,}3.$$

Якісніше роботу виконав другий токар.

Якщо різниці між варіантами вибірки і її середнім значенням дорівнюють $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, то середнє арифметичне їх квадратів називається *дисперсією* вибірки (лат. dispersio — розсіяння). Дисперсія дорівнює квадрату середнього квадратичного усіх відхилень і обчислюється за формулою

$$D = \frac{1}{n}(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_n^2).$$

861. Знайдіть моду і медіану вибірки 28, 29, 29, 30, 31, 32, 32, 32, 32, 33.

862. Дано вибірку 3, 1, 4, 1, 2, 3, 4, 3, 1, 2, 1. Побудуйте відповідний їй варіаційний ряд, знайдіть розмах, моду і медіану вибірки.

863. Користуючись наведеною на с. 198 частотною таблицею, визначте:

а) частоту і відносну частоту варіанти, яка відповідає розміру 26;

б) у скільки разів взуття розміру 26 слід виробляти менше, ніж розміру 27,5.

864. Вибірка містить усі натуральні числа, менші за 10, а крім того, числа 6, 8, 8 і 13. Побудуйте її варіаційний ряд. Знайдіть розмах вибірки, її моду і медіану.

865. Варіанти 1, 2, 3, 4, 5 вибірки мають частоти 3, 4, 6, 2 і 3 відповідно, а всього вибірка має 18 варіант. Знайдіть її розмах, моду і медіану.

866. За екзаменаційну роботу з математики одержали 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 і 12 балів відповідно 2, 9, 8, 10, 20, 17, 4, 6 і 4 абітурієнти. Складіть частотну таблицю і обчисліть відносні частоти балів, які зустрічались найрідше і найчастіше.

867. Як зростала кількість людей на Землі протягом трьох минулих тисячоліть, показано в таблиці (числові дані наближені).

Роки	1000 до н.д.	500 до н.д.	0	500	1000	1500	1900	1970	2000
Мільйонів осіб	120	150	200	270	300	460	1600	3700	6000

За цими даними побудуйте графік.

868. В Україні дотримуються приблизно такої структури посівних площ: озима пшениця — 23 %, інші зернові культури — 22 %, кормові культури — 37 %, технічні культури — 12 %, картопля і овочі — 6 %. Побудуйте відповідну секторну діаграму.

869. Побудуйте стовпчасту діаграму за таблицею про число мешканців найбільших міст України (2001 р., грудень).

Місто	Київ	Харків	Дніпропетровськ	Донецьк	Одеса	Запоріжжя	Львів
Тисяч осіб	2611	1470	1065	1016	1029	815	733

870. Юнаки-старшокласники однієї школи за зростом розподілені так:

Зріст, см	150	155	160	165	170	175	180
Кількість юнаків	1	4	5	15	25	8	2

Побудуйте відповідну гістограму і полігон.

871. Урожайність пшениці на різних полях ферми дано в таблиці:

Урожайність, ц/га	20—25	26—30	31—35	36—40	41—45	46—50
Площа, %	6	15	33	21	20	5

Побудуйте відповідну гістограму і полігон.

872. Три токарі протягом 6 год виготовляли однакові деталі. Перший одну деталь виготовляв за 30 хв, другий — за 36 хв, третій — за 40 хв. Складіть відповідну таблицю статистичного розподілу. Визначте, скільки часу в середньому затрачував один токар на виготовлення однієї деталі.

873. Знайдіть середнє арифметичне: а) усіх натуральних чисел, не більших за 100; б) усіх цілих чисел x, таких, що $-10 \le x \le 110$.

874. Вибірка містить 60 чисел; з них число 3 трапляється 10 раз, 4 — 20 раз і 5 — 30 раз. Знайдіть її середнє значення, моду і медіану.

875. Вибірка містить усі натуральні числа, більші за 20, але менші за 50, а крім того, числа 13, 31, 31 і 32. Знайдіть її моду, медіану і середнє значення.

876. Протягом 5 днів маси десяти бичків збільшилися відповідно на 2,5; 3,0; 2,8; 2,7; 2,7; 2,8; 2,0; 2,4; 2,6 і 2,9 кг. Знайдіть середній денний приріст маси одного бичка.

877. Чи правильно, що сума різниць між усіма варіантами вибірки і її середнім значенням дорівнює нулю? Наведіть приклади. Обґрунтуйте.

878. Знайдіть середній відсоток бракованих виробів, користуючись такою таблицею:

Партія товару	Кількість штук	Відсоток бракованих виробів	Кількість бракованих виробів, шт.
I II III	2000 1420 408	3,4 2,46 0,49	68 35 2
Разом	3828		105

879. Суму n чисел $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ позначають символом $\sum_{i=1}^{n} a_i$ (знак суми $\sum$ — сигма велика). Запишіть за допомогою цього знака середнє арифметичне і середнє квадратичне даних n чисел.

880. Три фрезерувальники виготовили по 5 однакових деталей завдовжки 235 мм, допустивши відповідно такі похибки (в мм):

перший: 0,2, –0,2, –0,5, 0,3, 0,4;
другий: 0,1, 0,5, –0,2, –0,4, 0,5;
третій: 0,5, –0,1, –0,4, 0,3, 0,4.

Знайдіть середні квадратичні допущених ними похибок і їх дисперсії. Хто завдання виконав найкраще?

§ 49. СТАТИСТИЧНА ІМОВІРНІСТЬ І ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ

Досі йшлося про класичне розуміння ймовірності (див. с. 191). Її обчислюють, виходячи з того, що всі розглядувані елементарні події однаково ймовірні. Таке трапляється порівняно рідко.

Уявіть, що гральний кубик зроблено так, що його грань з 6 очками знаходиться далі від центра мас, ніж протилежна грань. Такий кубик і падає частіше догори гранню з 6 очками. При цьому спостерігається цікава і дуже важлива закономірність. Коли б хтось один підкинув такий кубик 1000 раз і він упав, наприклад, 300 раз догори гранню з 6 очками, то й інші експериментатори мали б приблизно такі самі результати. Багато масових випадкових подій мають властивість стійкості. При досить великому числі незалежних випробувань частота появи спостережуваної події коливається близько одного й того самого числа. У справедливості цього багато спеціалістів переконалися експериментально. А математики Я. Бернуллі, П. Чебишов та ін. обґрунтували це твердження і теоретично (закон великих чисел). Тому для таких (статистично стійких) подій є сенс ввести поняття ймовірності.

Якщо в n випробуваннях подія A відбувається m разів, то дріб $\frac{m}{n}$ визначає відносну частоту події A. У багатьох реальних випадках із збільшенням n відносна частота події стабілізується і все менше відрізняється від деякого числа p (коли $n \to \infty$, то $\frac{m}{n} \to p$). Це число p називають імовірністю події A.

Таке статистичне означення ймовірності. Обсяг означуваного ним поняття набагато ширший від того, що відповідає класичному означенню (див. с. 191). Класична ймовірність — окремий вид статистичної. І все ж відрізняються вони істотно. Класичну ймовірність обчислюють математичними методами, а статистичну здебільшого визначають експериментально.

Тепер, говорячи про ймовірність, спеціалісти здебільшого мають на увазі статистичну ймовірність. Тому сучасна теорія ймовірностей тісно пов'язується з математичною статистикою. Об'єднання математичної статистики і теорії ймовірностей називають *стохастикою.* Стохастичний — значить випадковий, імовірний.

Одне з найважливіших понять стохастики — *випадкова величина.* Величину називають випадковою, якщо вона може набувати наперед невідомих числових значень, що залежать від випадкових обставин. Приклади:

1) виграш на лотерейний квиток;

2) відстань від точки попадання кулі до центра мішені.

Значення першої з цих випадкових величин — деякі цілі числа. Такі величини називають *дискретними.* Множина значень другої величини — деякий неперервний відрізок числової прямої. Такі величини називають *неперервними.*

Розглянемо задачу. Випущено 100 лотерейних білетів. З них 5 мають виграти по 10 грн., 10 — по 5 грн., 40 — по 1 грн., решта — безвиграшні. Який середній виграш припадає на один білет?

Розв'язати цю задачу можна арифметичним способом:

$$(5 \cdot 10 \text{ грн.} + 10 \cdot 5 \text{ грн.} + 40 \cdot 1 \text{ грн.}) : 100 = 1{,}4 \text{ грн.}$$

Ми проілюструємо на цій задачі поняття випадкової величини. Тут виграш — випадкова величина, яка може набувати значень 0, 1, 5, 10 (грн.) відповідно з імовірностями 0,45, 0,4, 0,1 і 0,05. Це — дискретна випадкова величина ξ. Описаній ситуації відповідає така таблиця:

ξ	0	1	5	10
p	0,45	0,4	0,1	0,05

Зверніть увагу: сума ймовірностей, що є в другому рядку таблиці, дорівнює 1. Говорять, що дану випадкову величину ξ *розподілено за ймовірностями.*

Якщо випадкова величина ξ набуває значень $x_1, x_2, \ldots, x_n$ з імовірностями відповідно $p_1, p_2, \ldots, p_n$, то говорять, що величину ξ розподілено за таким законом:

ξ	x_1	x_2	...	x_n
p	p_1	p_2	...	p_n

Її середнє значення називають *математичним сподіванням* і позначають $M(\xi)$.

$$M(\xi) = x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_np_n.$$

Наприклад, для попередньої задачі

$$M(\xi) = 0 \cdot 0{,}45 + 1 \cdot 0{,}4 + 5 \cdot 0{,}1 + 10 \cdot 0{,}05 = 1{,}4.$$

Міру розсіювань випадкової величини навколо її математичного сподівання називають її *дисперсією*. Дисперсію випадкової величини x позначають символом $D(x)$ і обчислюють за формулою $D(x) = M(x - Mx)^2$. Тут Mx — математичне сподівання величини x, $(x - Mx)^2$ — сума квадратів відхилень значень x від Mx. Величина $(x - Mx)^2$ також випадкова, її математичне сподівання $M(x - Mx)^2$ — дисперсія випадкової величини x.

Наприклад, щоб знайти дисперсію розглянутої вище випадкової величини ξ, спочатку знайдемо відхилення усіх її значень від математичного сподівання:

$$0 - 1{,}4 = -1{,}4;\ 1 - 1{,}4 = -0{,}4;\ 5 - 1{,}4 = 3{,}6;\ 10 - 1{,}4 = 8{,}6.$$

Квадрати цих відхилень: 1,96, 0,16, 12,96, 73,96.

Знайдемо математичне сподівання випадкової величини:

$(x - Mx)^2$	1,96	0,16	12,96	73,96
p	0,45	0,4	0,1	0,05

$$1{,}96 \cdot 0{,}45 + 0{,}16 \cdot 0{,}4 + 12{,}96 \cdot 0{,}1 + 73{,}96 \cdot 0{,}05 = 5{,}94.$$

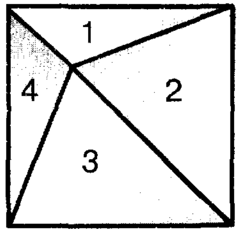
Це і є дисперсія розглядуваної випадкової величини: $D(\xi) = 5{,}94$.

881. Відомо, що серед 1000 новонароджених звичайно буває 511 хлопчиків і 489 дівчаток. Знайдіть імовірність народження хлопчика.

882. Розподіліть за ймовірностями випадкову величину кількості очок, які випадають при киданні правильного грального кубика. Знайдіть математичне сподівання цієї випадкової величини.

883. Тільки одна грань правильного однорідного кубика пофарбована жовтим кольором. З якою відносною частотою падатиме цей кубик догори жовтою гранню, якщо його кидати багато разів?

884. На гранях правильного октаедра нанесено очки від 1 до 8 (мал. 123). Задайте таблицею випадкову величину кількості очок, які випадають при киданні такого октаедра. Знайдіть середнє значення цієї величини.



Мал.123

885. Випадкову величину кількості очок, які випадають при киданні неправильного грального кубика, розподілено за таким законом:

ξ	1	2	3	4	5	6
p	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	

Заповніть останню клітину таблиці. Визначте математичне сподівання величини ξ.

886. Випущено 1000 лотерейних білетів, на один з яких має випасти виграш 100 грн., на 10 — по 20 грн., на 50 — по 1 грн. Задайте таблицею випадкову величину виграшу. Знайдіть математичне сподівання цієї величини.

887. Знайдіть математичне сподівання і дисперсію випадкової величини, розподіленої за таким законом:

а)

φ	0	1	2	3	4	5
p	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

б)

ψ	1	2	3	4	5	6	7	8
p	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

Придумайте реальні ситуації, математичними моделями яких були б випадкові величини φ і ψ.

888. Кидають відразу два гральних кубики і рахують суму очок на їх верхніх гранях. Задайте випадкову величину цієї суми і знайдіть її математичне сподівання.

889. З повного набору пластинок доміно, перевернутих донизу очками, беруть навмання одну і рахують суму очок на обох її половинках. Задайте випадкову величину цієї суми таблично і накресліть відповідну діаграму.

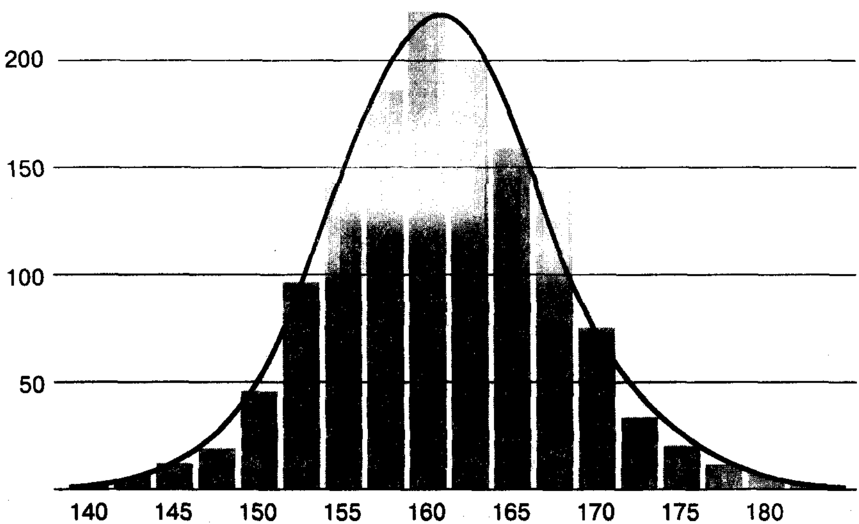
§ 50. РОЗПОДІЛИ ІМОВІРНОСТЕЙ

Якщо випадкова величина дискретна і ймовірності усіх її значень рівні, то говорять, що вона має *рівномірний дискретний розподіл* ймовірностей. Прикладами рівномірних розподілів можуть служити ті, що наведені в умові задачі 887. За рівномірним розподілом випадає число очок при підкиданні правильного грального кубика. А бувають інші розподіли.

Для багатьох природних і суспільних явищ характерні *біномні розподіли ймовірностей*. Біномний розподіл виникає при послідовному проведенні в однакових незалежних умовах випадкових дослідів. Результатом кожного досліду може бути «успіх» — з імовірністю p, або «неуспіх» — з імовірністю $1 - p = q$. Число «успіхів» μ_n після n подібних випробувань матиме біномний розподіл імовірностей:

$$P(\mu_n = k) = C_n^k p^k q^{n-k},\ k = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Англійський математик А. Муавр ще у XVIII ст. виміряв зріст 1375 навмання вибраних жінок. На малюнку 124 зображено діаграму, яка відповідає результатам його вимірювань. Якщо «успіхом» назвати той факт, що наступна зустрінута жінка має зріст, який знаходиться у певних межах, то число жінок такої категорії серед 1375 зустрінутих є випадковою величиною з біномним розподілом. Стосовно параметра p можна стверджувати, що цим числом може служити віднос-



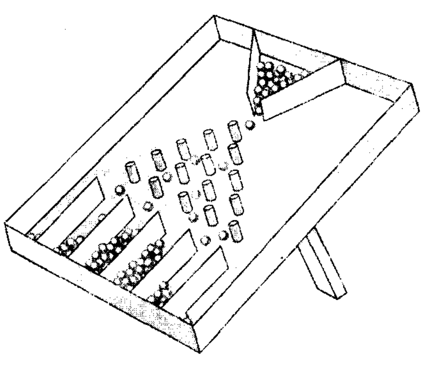
Мал. 124

на частота жінок виділеної категорії зросту, оскільки числ проведених дослідів досить велике і ця частота стабілізувалася.

Англійський психолог Ф. Гальтон сконструював прила (дошку Гальтона), який наочно показує, як формується випад кова величина, розподілена за біномним законом, щоправд при $p = \frac{1}{2}$ (мал. 125). У верхній резервуар насипаються куль ки. Скочуючись похилою дошкою і обминаючи рівномірн забиті в неї кілочки, кульки заповнюють нижні комірк відповідно до біномного розподілу ймовірностей: якщо маєм n рядів кілочків, то має бути зарезервовано $(n + 1)$ комірку Якщо занумерувати комірки послідовними числами від 0 до n то ймовірність потрапити черговій кульці до комірки з но мером k дорівнює $C_n^k\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = C_n^k\left(\frac{1}{2}\right)^n$. Дійсно, при падінн кульки на черговий кілочок відбувається випадковий вибі подальшого руху: вправо («успіх») або вліво («неуспіх») Якщо відбудеться рівно k «успіхів», то кулька попаде д комірки з номером k.

Якщо кульок достатньо багато, то внизу вони утворят симетричну гірку дзвіноподібної форми. Верхня межа ціє гірки утворює полігон, який при зростанні числа кульо наближається до кривої Гаусса — так званої *щільності стан дартного нормального закону*.

У розглянутому вище прикладі результати вимірюванн зросту жінок розбито на 18 груп з різницею d = 2,5 см. Якб розбили їх на більшу кількість груп, щоб ця різниц дорівнювала, наприклад, 0,5 см, і побудували відповідни полігон, то утворилась би ламана з багатьох відрізків. А кол б різницю d продовжували зменшувати, то відповідний по лігон наближався б до неперервної кривої, зображеної н



Мал. 125

малюнку 124. Це — крива щільності *нормального розподілу ймовірностей*. Приблизно так розподіляються ймовірності мас новонароджених, швидкостей газових молекул і багатьох інших випадкових величин фізичної, біологічної чи соціальної природи. Біномний розподіл характерний для багатьох дискретних випадкових величин, а нормальний — для неперервних. Якщо відомо, що розподіл імовірностей випадкової величини нормальний, то досить знати тільки дві її числові характеристики (математичне сподівання і дисперсію), щоб повністю описати розподіл імовірностей.

Розуміння нормального розподілу дуже потрібне для всіх науковців, які досліджують закономірності живої чи неживої природи і особливо — людського суспільства. Не випадково цей розподіл називають *нормальним*, він — природний. Саме так найчастіше розподіляються не тільки маси, зрости, фізичні можливості людей і людських спільнот, а й багато інших їх характеристик. Не розуміючи цього, не можна бути справжнім науковцем.

890. Яка з таблиць а) — в) задає закон розподілу випадкової величини?

а)

x	0	1	2	3
p	0,3	0,1	0,4	0,2

б)

x	1	2	3	4
p	0,1	0,5	0,3	0,2

в)

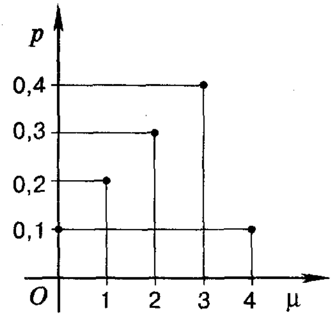
x	1	1	2	3
p	0,1	0,2	0,3	0,4

891. Учень вирізав з дерева гральний кубик, такий, що, підкинувши його 100 раз, одержав результати:

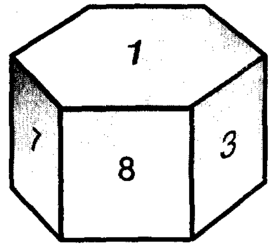
ξ	1	2	3	4	5	6
p	0,2	0,1	0,2	0,3	0,1	0,1

Які можна очікувати результати, якщо цей самий гральний кубик хто-небудь інший підкине 1000 раз?

892. Побудуйте графік функції $y = C_9^x$. Перелічіть її найважливіші властивості. Проведіть через точки графіка плавну лінію, подібну до кривої Гаусса.



Мал. 126



Мал. 127

893. Побудуйте графік функції $y = C_6^x$. Вкажіть її область визначення і область значень.

894. На малюнку 126 показано розподіл випадкової величини μ. Запишіть закон її розподілу у вигляді таблиці. Знайдіть її математичне сподівання і дисперсію.

895. Уявіть, що гральний «кубик» зроблено з однорідного матеріалу у формі правильної чотирикутної призми, сторона основи якої 2 см, а висота 1,9 см. Нехай на його основах нанесено цифри 1 і 6, а на інших гранях — 2, 3, 4 і 5. Яким, на ваш погляд, може бути розподіл імовірностей при багаторазовому підкиданні такого «кубика»? Спробуйте перевірити свою догадку експериментально.

896. Уявіть гральну кісточку у формі правильної шестикутної призми, усі ребра якої рівні і на основах якої написані цифри 1 і 2, а на решті граней — 3, 4, 5, 6, 7 і 8 (мал. 127). Як, на ваш погляд, могли б розподілитися ймовірності випадання тих чи інших очок при багаторазовому підкиданні такої гральної кісточки?

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

В а р і а н т 1

1. Яка ймовірність того, що кинутий правильний гральний кубик впаде догори гранню: а) з непарним числом очок; б) з числом очок, більшим за 3?

2. Що ймовірніше: вгадати 2 числа з 9 чи 3 з 8?

3. В урні є картки з номерами від 1 до 100. Яка ймовірність того, що вийнята навмання картка не міститиме цифри 5?

4. Обчисліть математичне сподівання і дисперсію випадкової величини:

φ	1	2	3	4	5
p	0,2	0,2	0,3	0,2	0,1

Варіант 2

1. Яка ймовірність того, що кинутий правильний гральний кубик впаде догори гранню з числом очок: а) більшим за 4; б) меншим за 4?

2. Що ймовірніше: вгадати 3 числа з 9 чи 4 з 8?

3. В урні є картки з номерами від 1 до 100. Яка ймовірність того, що вийнята навмання картка матиме число, сума цифр якого дорівнює 7?

4. Обчисліть математичне сподівання і дисперсію випадкової величини:

ψ	0	1	2	3	4
p	0,2	0,1	0,3	0,1	0,3

Варіант 3

1. Яка ймовірність того, що взята навмання пластинка доміно матиме всього очок: а) 8; б) більше за 8?

2. Що ймовірніше: вгадати 3 числа з 10 чи 2 числа з 16?

3. В урні є картки з номерами від 50 до 100. Яка ймовірність того, що вийнята навмання картка міститиме число, яке не ділиться на 3?

4. Обчисліть математичне сподівання і дисперсію випадкової величини:

φ	0	1	2	3	4	5
p	0,1	0,2	0,3	0,2	0,1	0,1

Варіант 4

1. Яка ймовірність того, що взята навмання пластинка доміно матиме всього очок: а) 9; б) більше за 9?

2. Що ймовірніше: вгадати 3 звуки з 10 голосних чи 21 звук з 22 приголосних?

3. В урні є картки з номерами від 1 до 100. Яка ймовірність того, що вийнята навмання картка міститиме число, яке не ділиться на 5?

4. Обчисліть математичне сподівання і дисперсію випадкової величини:

ψ	−2	−1	0	1	2	3
p	0,1	0,1	0,2	0,3	0,2	0,1

Контрольні запитання і завдання

1. Наведіть приклади випадкових подій.
2. Які події називають неможливими, достовірними?
3. Наведіть приклад повної групи подій.
4. Які події називають елементарними? Наведіть приклади.
5. Що таке ймовірність випадкової події?
6. Чому дорівнює ймовірність достовірної події? А неможливої?
7. Що таке відносна частота випадкової події?
8. Що таке статистика, математична статистика?
9. Що таке вибірка? Наведіть приклад.
10. Що таке варіанта вибірки, варіаційний ряд?
11. Що таке мода, медіана, середнє значення вибірки?
12. Що таке гістограма, полігон частот?
13. Як обчислюють середнє квадратичне n чисел?
14. Що таке дисперсія, як її обчислюють?
15. Чим відрізняється класична ймовірність від статистичної?
16. Наведіть приклад випадкової величини.
17. Що таке математичне сподівання випадкової величини?
18. У чому суть нормального розподілу ймовірностей?

Історичні відомості

Деякі властивості випадкових подій виявили італійські математики Л. Пачіолі (1445—1514) і Д. Кардано (1501—1576) у зв'язку з дослідженнями азартних ігор. Теорію ймовірностей як галузь математики започаткували французькі математики Б. Паскаль і П. Ферма. Згодом вагомий внесок у її розвиток зробив Я. Бернуллі. І все ж, поки теорія ймовірностей пов'язувалась майже виключно з азартними іграми, вона цікавила небагатьох. Згодом, увівши поняття статистичної ймовірності, вчені переконалися, що ця нова галузь математики досить перспективна, особливо в дослідженнях проблем статистики, демографії, теорії стрільби, фізики, біології, соціології.

Збирати і аналізувати статистичні дані деякі люди почали давно. У Китаї переписи населення робилися ще понад 4 тис. років тому. У Київській Русі переписи здійснювалися з 1245 р.

ПАСКАЛЬ БЛЕЗ
(1623—1662)

Видатний французький математик, фізик, філософ. Перший трактат з геометрії написав у 16 років. У ньому сформулював основну теорему проективної геометрії. Один з творців теорії ймовірностей, розробив нові методи в комбінаториці, численні нескінченно малих. Як філософ на перше місце ставив науку, на друге — людину, на третє — віру.

«Паскаль — людина великого розуму і великого серця... один із тих, яких називають пророками».

Л. Толстой

У Європі в XVII ст. з'явилась окрема наука «Політична арифметика», яку започаткувала надрукована в 1662 р. книга Дж. Граунта «Природні і політичні спостереження, зроблені за бюлетнями смертності... відносно управління, релігії, торгівлі, росту, повітря, хвороб та різних змін...». У цій книзі вперше введено поняття частоти події, виявлено, що хлопчики народжуються частіше, ніж дівчатка (у відношенні 14 : 13). Автор книги дослідив, що у тогочасному Лондоні з кожних 100 новонароджених жили до:

6 років — 64,	36 років — 16,	66 років — 3,
16 років — 40,	46 років — 10,	76 років — 1,
26 років — 25,	56 років — 6,	86 років — 0.

Згодом великий внесок у розвиток математичної статистики зробили У. Петті, А. Муавр, Л. Ейлер, Я. Бернуллі, П. Лаплас, С. Пуассон та ін. У Російській імперії в XIX ст. проблемами статистики найбільше займалися українські математики М. Остроградський і В. Буняковський. Зокрема, М. Остроградський розробив статистичні методи бракування товарів, склав «Таблиці для полегшення обчислення траєкторії тіла в середовищі з опором». В. Буняковський досліджував статистичні характеристики народонаселення, імовірних контингентів російської армії, пенсій, правдоподібності свідчень у судочинстві, похибок у спостереженнях і т. п. Він був головним експертом уряду з питань статистики і страхування.

У XX ст. з українських математиків у галузі теорії ймовірностей і математичної статистики плідно працювали

БЕРНУЛЛІ ЯКОБ І (1654—1705)

Швейцарський математик — перший з найвідомішої родини математиків. Вивчав теологію, читав лекції з експериментальної фізики, досліджував проблеми диференціального числення, теорії ймовірностей, заклав основи варіаційного числення — розділу математики про знаходження екстремумів різних величин. Найважливіші результати одержав у теорії ймовірностей (теорема Бернуллі, схема Бернуллі та ін.). Досліджуючи суми $1^m + 2^m + 3^m + \dots + n^m$, відкрив важливі для математики числа Бернуллі. Досліджував також проблеми арифметики, алгебри, геометрії, фізики, астрономії. Ввів термін «інтеграл».

Крім Якоба І, родина Бернуллі мала ще 7 відомих математиків: Іоганн І, Микола І, Микола ІІ, Данило, Іоганн ІІ, Іоганн ІІІ, Якоб ІІ.

Є. Слуцький, М. Кравчук, С. Бернштейн, Й. Гіхман, Ю. Лінник та інші вчені. Сучасна держава не може функціонувати без статистики. В Україні існує Державний комітет статистики, тисячі спеціалістів збирають, аналізують і використовують різні статистичні відомості.

ЗАДАЧІ НА ПОВТОРЕННЯ

Обчисліть значення виразу (897—903).

897. а) $4:6{,}25+\frac{1}{7}\cdot 1{,}96$; б) $\left(\frac{1}{2}-0{,}375\right):0{,}125$.

898. а) $\left(\frac{5}{6}-\frac{7}{12}\right):(0{,}35-0{,}1)$; б) $\left(6\frac{2}{3}+5\frac{1}{2}+2\frac{4}{15}\right):\frac{1}{15}$.

899. а) $\frac{20{,}88:18+45:0{,}36}{11{,}94+19{,}6}$; б) $\frac{8{,}03+5{,}47}{(8{,}77+7{,}97):3{,}72}$.

900. а) $\sqrt{28}\cdot\sqrt{63}$; б) $\sqrt{0{,}7}\cdot\sqrt{2{,}8}$.

901. а) $\sqrt{14}\cdot\sqrt{56}$; б) $\sqrt{0{,}8}\cdot\sqrt{0{,}018}$.

902. а) $(1+\sqrt{5})^2-2\sqrt{5}$; б) $4\sqrt{3}+(2-\sqrt{3})^2$.

903. а) $(3+2\sqrt{3})(2\sqrt{3}-3)$; б) $(3\sqrt{5}-2)(2+3\sqrt{5})$;

в) $\left(\sqrt{\frac{1}{3}}-\sqrt{3}\right)^4$; г) $(\sqrt{5}-\sqrt{0{,}2})^4$;

ґ) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{10}:\sqrt{0{,}05}$; д) $\sqrt{6}\cdot\sqrt{10}:\sqrt{0{,}6}$.

904. Знайдіть 12 % від числа: а) 45; б) 2,5; в) $\frac{5}{6}$.

905. Знайдіть число, 15 % якого дорівнює: а) 300; б) 0,6.

906. Скільки відсотків становить число 0,7 від 2,5?

907. Знайдіть відсоткове відношення чисел 12 і 15.

908. Знайдіть невідомий член пропорції:

а) $24:\frac{1}{8}=x:\frac{5}{36}$; б) $x:(-6{,}2)=25:150$;

в) $3\frac{1}{3}:52=0{,}5:x$; г) $\sqrt{2}:(-6)=-\sqrt{8}:x$.

909. Поділіть число 600 на частини, пропорційні числам 2, 5 і 8.

910. Знайдіть середнє арифметичне і середнє геометричне чисел 2 і 18.

911. Порівняйте числа:

а) $0,5$ і $\frac{1}{3}$; б) $-\frac{2}{3}\sqrt{3}$ і $-\frac{3}{\sqrt{2}}$;

в) $\sqrt{31}$ і $3+\sqrt{7}$; г) $\sqrt{6}$ і $\sqrt[3]{12}$.

912. На скільки півсума чисел $0,8$ і $\frac{1}{3}$ більша за їх піврізницю?

913. Запишіть у стандартному вигляді число:

а) $0,038$; б) $\left(\frac{1}{20}\right)^3$.

914. Запишіть у вигляді звичайного дробу: а) $0,(6)$; б) $1,2(3)$.

915. Розкладіть на множники:

а) x^6-8; б) a^2-b^2-2b-1;

в) $4n^4+1$; г) $a^3+(c-1)a+c$.

916. Скоротіть дріб:

а) $\frac{x^2-3x-10}{x^2-4x+4}$; б) $\frac{c^3+27}{c^2x+6cx+9x}$.

Спростіть вираз (917—919).

917. а) $\frac{x+2}{x+3}+\frac{x-2}{x}\cdot\frac{x^2-1}{x^2+2x-3}$; б) $\left(\frac{1}{a}+2\right):\frac{8a^2+8a+2}{a^2-4a}$;

в) $1+\frac{10-2x}{x+2}\cdot\frac{2+3x+x^2}{x^2-25}$; г) $\left(\frac{1}{c}+\frac{1+2c}{1+c}\right):\left(\frac{2c+1}{c}-\frac{1}{1+c}\right)$.

918. а) $\frac{x\sqrt{2}+x-\sqrt{2}-1}{x\sqrt{2}-2-\sqrt{2}+2x}-\frac{1}{\sqrt{2}}$; б) $\left(\frac{a+\sqrt{ac}}{\sqrt{a^2+ac}}-\frac{\sqrt{ac+c^2}}{\sqrt{ac+c}}\right)^{-2}$;

в) $\frac{a-1}{a+a^{0,5}+1}:\frac{a^{0,5}+1}{a^{0,5}-1}+2a^{0,5}$; г) $\left(\frac{1}{\sqrt{c}-\frac{9}{\sqrt{c}}}+\frac{3\sqrt[3]{c}}{\sqrt[3]{c^4}-9\sqrt[3]{c}}\right)^{-2}$.

919. а) $\sqrt{1+\frac{a}{b}+2\sqrt{\frac{a}{b}}}\cdot\sqrt{1+\frac{a}{b}-2\sqrt{\frac{a}{b}}}$;

б) $\left(\sqrt[4]{a^2-2a+1}+\frac{a}{\sqrt{1-a}}\right):\left(\frac{1}{\sqrt{a+1}}-\frac{\sqrt{a+1}}{a-1}\right)$.

Розв'яжіть рівняння (920—925).

920. а) $6(x-3)=(x-2)(x-3)$; б) $x^4-3x^2+2=0$;

в) $x-4+\frac{1}{x}=0$; г) $x-1+\frac{1}{x-1}=2$.

921. а) $x-2\sqrt{x}-15=0$; б) $4\sqrt{x}+x=5$;

в) $|2x-3|=14$; г) $|x+8|=2x$.

922. а) $\frac{3x}{x+1}=4-\frac{x-1}{x-2}$; б) $\frac{5+2x}{x}+1=\frac{3x}{x+5}$;

в) $\frac{2-x}{3-x}+\frac{12}{x^2-9}=\frac{x+1}{x+3}$; г) $4+\frac{4x^2}{x+2}=\frac{10}{x+2}$.

923. а) $\left(\frac{x-1}{x}\right)^2+2=3\left(\frac{x-1}{x}\right)$; б) $\frac{x}{x-1}+\frac{5}{16}=\frac{x^2}{(x-1)^2}$;

в) $x^3+\frac{8}{x^3}+9=0$; г) $9x^2+\frac{4}{x^2}=37$.

924. а) $x-4=\sqrt{x+8}$; б) $2-x=\sqrt{x}$;

в) $\sqrt{2x-5}=\sqrt{4x+7}$; г) $\sqrt{3x-1}=\sqrt{x^2+1}$;

ґ) $\sqrt[3]{x-50}=9$; д) $\sqrt[3]{2x+6}=2\sqrt[3]{2}$.

925. а) $x+\sqrt{2x-5}=2$; б) $x^2+4=5\sqrt{x^2-2}$;

в) $\sqrt{\sqrt{x^2-3x}}=\sqrt{2x}$; г) $\sqrt{x+1}=\sqrt{\sqrt{x^2+7}}$.

Розв'яжіть систему рівнянь (926, 927).

926. а) $\begin{cases}\frac{9x-y}{7}=3+2y,\\ 12x+5y=9(x+1);\end{cases}$ б) $\begin{cases}\frac{3x+y}{2}=1{,}75,\\ 3x-2y=5.\end{cases}$

927. а) $\begin{cases}\frac{x}{y}-\frac{y}{x}=1{,}5,\\ x^2+y^2=20;\end{cases}$ б) $\begin{cases}\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=3\frac{1}{3},\\ x^2-y^2=8.\end{cases}$

Розв'яжіть нерівність (928—939).

928. а) $x-1>0{,}25(x+4)$; б) $3{,}5z-2<3(1-z)$.

929. а) $x^2-3x-4<0$; б) $x^2+7\le 8x$.

930. а) $3x^2-9x\le 0$; б) $x^2+1>x$.

931. а) $(x^2+3)(x-5)\le 0$; б) $3x^4+2x^2+5\le 0$.

932. а) $\frac{2x+3}{x-1}<1$; б) $\frac{3y-5}{y-3}>1$.

933. а) $\frac{x-1}{x^2+4x+2}<0$; б) $\frac{x^2+5x+4}{x^2-5x-6}<0$.

934. а) $4 - x > \sqrt{2x}$; б) $\sqrt{x^2 - 2} < 3$.

935. а) $|x - 5| < 3$; б) $|2x - 1| > 1$.

936. а) $|x - 4| > x$; б) $|3 - 2x| > x$.

937. а) $|x^2 - 1| \le 3$; б) $|x^2 + 1| > 3$.

938. а) $\sqrt{x^2 - 10 + 25} > 5$; б) $\sqrt{4x^2 - 12x + 9} \le 1$.

939. а) $\sqrt{\dfrac{2x - 1}{x + 5}} > 2$; б) $\sqrt{\dfrac{5 - 2x}{x - 1}} \le 3$.

Розв'яжіть систему нерівностей (940, 941).

940. а) $\begin{cases} x^2 - 9 \le 0, \\ x^2 + x > 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 - 16 \le 0, \\ x^2 + 3x > 0. \end{cases}$

941. а) $\begin{cases} x^2 + x \le 6, \\ x^2 + x > 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + 2x \ge 0, \\ |x| < 4. \end{cases}$

942. Розв'яжіть подвійну нерівність:
а) $3 \le x^2 - 1 < 8$; б) $4 < 3x^2 + 1 \le 13$.

943. Знайдіть область визначення функції:
а) $y = \sqrt{6x - x^2 - 8}$; б) $y = \sqrt{x^2 - x + 1}$.

944. Побудуйте графік функції: а) $y = (2 - x)^2$; б) $y = x^2 - 2x$; в) $y = 3x - x^2$. На яких проміжках дана функція зростає, на яких спадає?

945. При якому значенні x значення виразу $x^2 - 6x + 5$ найменше?

946. Знайдіть найменше значення функції $y = 2x^2 + 4x + 7$.

947. На якому проміжку значення функції $y = x^2 - 3x$ менші за 10?

948. Порівняйте числа: а) $3{,}7^8$ і $2{,}9^8$; б) $-1{,}7^5$ і $-1{,}9^5$.

949. Доведіть, що число $7^{20} - 7^{19} + 7^{18}$ ділиться на 301.

950. Доведіть, що сума трьох послідовних натуральних чисел ділиться на 3, а їх добуток — на 6.

951. Доведіть, що при будь-якому дійсному значенні a:
а) $a^2 + 5 > 4a$; б) $3a^2 + 4 > 6a$;
в) $0{,}5a^2 + 3 > 2a$; г) $a^2 + 2 \ge 2\sqrt{a^2 + 1}$.

952. Знайдіть двадцятий член і суму перших двадцяти членів арифметичної прогресії:

а) 1, 4, 7, ... ; б) $-5\frac{1}{2}, -5, -4\frac{1}{2}, \ldots$.

953. Знайдіть суму перших n членів арифметичної прогресії, якщо: а) $a_1 = -12, d = 3, n = 12$; б) a_1=90, a_3 = 78, n = 31.

954. Знайдіть десятий член і суму перших десяти членів геометричної прогресії: а) 1, 2, 4, ... ; б) 64, −32, 16, ...

955. Обчисліть нескінченну суму членів геометричної прогресії:

а) $1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \ldots$; б) $3 - \sqrt{3} + 1 - \ldots$.

956. Знайдіть знаменник і суму нескінченної спадної геометричної прогресії: $\sqrt{3}, \frac{2}{\sqrt{3}+1}, \ldots$.

957. Знайдіть чотири числа, з яких перші три утворюють геометричну прогресію, а останні три — арифметичну, якщо сума крайніх чисел дорівнює 14, а сума середніх 12.

958. На одному складі вугілля на 25 % більше, ніж на другому. На скільки відсотків вугілля на другому складі менше, ніж на першому?

959. Вкладник поклав у банк 10 000 грн. під 15 % річних (за умови, що відсотки від відсотків нараховуватимуться раз на рік). Скільки відсоткових грошей він матиме: а) через рік; б) через 5 років?

960. Скільки кілограмів 10-відсоткового розчину солі треба долити до 15 кг 5-відсоткового розчину, щоб одержати 8-відсотковий розчин?

961. Обчисліть: а) $\cos 300°$; б) $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$; в) $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{4}$.

962. Обчисліть значення $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ і $\operatorname{ctg}\alpha$, якщо $\cos\alpha = \frac{1}{2}$ і $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

Доведіть тотожність (963—966).

963. $2\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \sqrt{2}\,(\sin\alpha + \cos\alpha)$.

964. $\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \cos\alpha - \sin\alpha$.

965. $(1 - \operatorname{tg}^2\alpha)\cos^2\alpha = \cos 2\alpha$.

966. а) $\frac{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{tg}\alpha}=\cos 2\alpha$; б) $\frac{2}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}=\sin\alpha$.

Спростіть вираз (967—969).

967. а) $\frac{1+\cos 2\alpha}{2\cos\alpha}$; б) $\frac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$.

968. а) $\frac{\operatorname{tg}\alpha-\sin\alpha}{\operatorname{tg}\alpha+\sin\alpha}$; б) $\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}$.

969. а) $\frac{\sin\alpha-\sin 3\alpha}{\cos\alpha-\cos 3\alpha}$; б) $\frac{\cos 3\alpha}{\cos\alpha}-\frac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha}$.

Розв'яжіть рівняння (970—985).

970. а) $2\sin 4x+1=0$; б) $2\sin 3x=1$.

971. а) $\operatorname{tg}(x+2)=1$; б) $\operatorname{ctg}(x-1)=0$.

972. а) $4\sin x\cos x=-1$; б) $2\sin x\cos x=\sqrt{2}$.

973. а) $\sin x+\cos x=0$; б) $\sin x=\cos x$.

974. а) $\sin^2 x+\sin x=2$; б) $\sin^2 x+5=6\sin x$.

975. а) $4\cos^2 x+4\cos x=3$; б) $\sin^2 x=6\sin x+7$.

976. а) $1-\sin 2x=\cos 4x$; б) $\cos 2x+\sin x=1$.

977. а) $\sin 2x-\cos 3x=\cos x$; б) $\cos^2 x+\cos 2x=\frac{5}{4}$.

978. а) $\sin 3x-1=\cos 3x$; б) $\cos 2x-\cos 6x=0$.

979. а) $\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}=0{,}25$; б) $2\operatorname{tg}x-3\operatorname{ctg}x=1$.

980. а) $4\sin^2\frac{x}{4}=1$; б) $2\cos^2\frac{x}{3}=0{,}5$.

981. а) $4\sin^2 x=1+4\cos x$; б) $4\cos^2 x+4\sin x=1$.

982. а) $\cos x+\sqrt{3}\sin x=0$; б) $\sin x-\sqrt{3}\cos x=0$.

983. а) $\sin 2x+\cos 4x=1$; б) $\sqrt{1-\sin x}=\cos x$.

984. а) $\frac{\sin 3x-\sin x}{\sin x}=0$; б) $\frac{4\cos x-3\cos^2 x}{1+\sin x}=0$.

985. а) $\frac{\cos 2x}{1-\sin^2 x}=1$; б) $\frac{\sin 2x}{1-\cos^2 x}=2$.

986. Знайдіть розв'язки рівняння:

а) $\sqrt{3}\cos x+\sin x=0$ на проміжку $[0;\ \pi]$;

б) $\sin 2x + \operatorname{ctg} x = 0$ на проміжку $[\pi; 2\pi]$;

в) $1 + \cos x = \sin x$ на інтервалі $(0; 2\pi)$.

Розв'яжіть систему рівнянь (987, 988).

987. а) $\begin{cases} \sin x \cos y = \cos^2 x, \\ \cos x \sin y = \sin^2 x; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \sin x + \sin y = 0{,}5, \\ \sin x \sin y = -0{,}5. \end{cases}$

988. а) $\begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 2, \\ \cos x \cos y = 0{,}5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \cos 2x + \cos y = 1, \\ x + y = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$

Розв'яжіть нерівність (989, 990).

989. а) $2\sin 2x < 1$; б) $2\cos\frac{x}{2} > 1$.

990. а) $\cos x < \sqrt{3}\sin x$; б) $\operatorname{tg}\left(\pi + \frac{x}{2}\right) > \sqrt{3}$.

991. Побудуйте графік функції:

а) $y = \sin 2x$; б) $y = \cos\frac{x}{2}$; в) $y = -\sin\frac{x}{2}$.

992. Що більше: а) $0{,}5^{-\pi}$ чи $0{,}5^{-3}$; б) $\lg 0{,}7$ чи $\ln 0{,}7$?

Спростіть вираз (993—996).

993. а) $(c^{\sqrt{5}})^{\sqrt{5}}$; б) $(a^{\sqrt{2}})^{-\sqrt{2}}$.

994. а) $(x^{1,5} \cdot x^{-2})^{-3}$; б) $\sqrt[3]{a^{3\sqrt{5}}} : a^{\sqrt{5}} + 1$.

995. а) $\left(\dfrac{x^{-\frac{4}{3}} \cdot x^{\frac{5}{6}}}{x^{-1}}\right)^{-\frac{4}{9}}$; б) $\left(\dfrac{c^3 \cdot c^{-\frac{2}{3}}}{c^{-9} \cdot c^{-\frac{2}{3}}}\right)^{-\frac{1}{2}}$.

996. а) $(a-1)\sqrt[4]{\dfrac{a^2}{(1-a)^4}}$; б) $\dfrac{1}{2-x} \cdot \sqrt[4]{\dfrac{(x-2)^4}{x^2}}$.

Розв'яжіть рівняння (997—1003).

997. а) $2^x \cdot 3^{x-3} = 288$; б) $9^{5-2x} = 3^{5x+10}$.

998. а) $\sqrt{2^x \cdot 3^x} = 36$; б) $\left(\frac{8}{3}\right)^x = \frac{16}{81} \cdot 4^x$.

999. а) $\log_{0,5}(x-1) = 2$; б) $\log_{\sqrt{3}}\left(x - \frac{1}{2}\right) = 0$.

1000. а) $\ln(5x+2) = \ln(4x+5)$; б) $\lg(x^2 + 3) = \lg(2x + x^2)$.

1001. а) $2^{x+1} + 5 \cdot 2^{x-2} = 104$; б) $3^{x+1} - 2 = 3^x$.

1002. а) $2\lg(-x) = \lg(x+2)$; б) $\ln(x^2 - 2x) = \ln(2x+12)$.

1003. а) $\log_2 x + \log_x 16 = 5$; б) $x^{2+\lg x} = 1000$.

Побудуйте графік функції (1004—1006).

1004. а) $y = x^{-0,5}$; б) $y = (-x)^{0,5}$; в) $y = |x|^{0,5}$.

1005. а) $y = 2^{x-2}$; б) $y = 2^x - 3$; в) $y = 2^{|x-2|}$.

1006. а) $y = \log_2(x+3)$; б) $y = \log_{\frac{1}{2}}(x+3)$;
в) $y = \log_2|x+3|$.

Розв'яжіть нерівність (1007—1014).

1007. а) $0,5^{3x-2} < 0,25$; б) $0,3^{7-2x} > 0,027$.

1008. а) $\lg(5x+8) < 2$; б) $\ln(4-2x) \geq 0$.

1009. а) $\log_4 \frac{x-1}{3x+1} < 0$; б) $\log_3 \frac{2x+1}{x+1} \geq 1$.

1010. а) $4^x - 2^x \geq 12$; б) $9^x + 3^x < 12$.

1011. а) $2^x + 2^{1+x} < 24$; б) $3^{x+1} + 3^{x-1} \leq 90$.

1012. а) $\log_4(x^2 - 6x + 9) < 0$; б) $\log_{0,5}(x^2 + 3x) \leq -2$.

1013. а) $\frac{\lg(3x-7)}{\lg(x+1)} \leq 1$; б) $\frac{\ln(x+1)}{\ln(2x+3)} < 1$.

1014. а) $|\log_2 x| > x+1$; б) $|\log_{0,5} x| \geq x-1$.

Знайдіть похідну функції (1015—1022).

1015. а) $y = 3x^4 - 2x^3 - 7$; б) $y = 12 - 5x + 3x^5$.

1016. а) $y = \frac{3}{x+1}$; б) $y = \frac{2}{5-x}$.

1017. а) $y = \sqrt{x^2 - 5}$; б) $y = \sqrt{12 - x^2}$.

1018. а) $y = x + \frac{2}{x}$; б) $y = 2x - \frac{3}{x}$.

1019. а) $y = \sqrt{x} + 2x^2$; б) $y = x^3 - \sqrt{x}$.

1020. а) $y = x + \sin x$; б) $y = 2x - \cos x$.

1021. а) $y = \sin x - \cos x$; б) $y = x \sin x$.

1022. а) $y = 3e^x - 5x^2$; б) $y = \cos x - 2e^x$.

1023. Обчисліть $f'(2)$, $f'(-1)$, $f'(0)$, якщо:
а) $f(x) = 2x^3 - x$; б) $f(x) = \sqrt{x+5}$; в) $f(x) = 3e^x + 2\pi$.

1024. Обчисліть $\varphi'(0)$, $\varphi'\left(\frac{\pi}{3}\right)$, $\varphi'\left(-\frac{\pi}{4}\right)$, якщо:

а) $\varphi = \sin 2x$; б) $\varphi(x) = 3\cos\frac{x}{2}$; в) $\varphi(x) = \sin x \cos x$.

1025. Складіть рівняння дотичної до графіка даної функції в даній точці:

а) $f(x) = 2x^3 - 5x^2$, $x_0 = 0$; б) $f(x) = x^3 + 3x^2$, $x_0 = -2$;

в) $f(x) = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$, $x_0 = \pi$; г) $f(x) = 3\operatorname{tg} x$, $x_0 = -\frac{\pi}{4}$.

1026. Знайдіть критичні точки функції:

а) $f(x) = x^3 - 3x + 7$; б) $f(x) = x^4 - 8x^2 - 5$;

в) $f(x) = 0{,}5x + 2x^{-1}$; г) $f(x) = x + 2\cos x$.

1027. Знайдіть проміжки зростання і спадання функції:

а) $f(x) = x^2 - 5x + 7$; б) $f(x) = 5 - 6x - x^3$;

в) $f(x) = x^4 - 4x^3 - 6$; г) $f(x) = \sqrt{x^2 - 6x}$.

1028. Дослідіть функцію і побудуйте її графік:

а) $f(x) = 4x - x^2$; б) $f(x) = x^3 - 3x + 2$;

в) $f(x) = 3 + \frac{1}{x}$; г) $f(x) = \cos^2 x + \cos x$.

1029. Дослідіть функцію і побудуйте її графік:

а) $f(x) = e^{x+1}$; б) $f(x) = e^{\sin x}$;

в) $f(x) = \ln x^2$; г) $f(x) = e^x + \ln x$.

1030. Різниця двох чисел дорівнює 8. Якими мають бути ці числа, щоб їх добуток був найменшим?

1031. Сума двох чисел дорівнює 8. Якими мають бути ці числа, щоб сума їх квадратів була найменшою?

1032. Знайдіть довжини сторін прямокутника з периметром 76 см, який має найбільшу площу.

1033. Зі всіх прямокутників з діагоналлю 10 см знайдіть сторони такого, який має найбільшу площу.

1034. Знайдіть найкоротшу відстань від точки $M\left(0; \frac{3}{2}\right)$ до графіка функції $y = x^2$.

1035. Знайдіть найкоротшу відстань від точки P (8,5; 0) до графіка функції $y = \sqrt{x}$.

1036. Знайдіть виміри правильної чотирикутної призми, об'єм якої найбільший, а площа поверхні дорівнює 600 см^2.

1037. Знайдіть висоту циліндра, вписаного у сферу радіуса R, який має найбільший об'єм.

Знайдіть загальний вигляд первісної для функції (1038—1040).

1038. а) $f(x) = x^2 + 3$; б) $f(x) = 2 - x^3$.

1039. а) $f(x) = 1 + \cos x$; б) $f(x) = x - \sin x$.

1040. а) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x-1}}$; б) $f(x) = e^{3-2x}$.

Знайдіть для функції $f(x)$ первісну, графік якої проходить через дану точку M (1041—1043).

1041. а) $f(x) = x^2 - 5$, $M(0; 0)$; б) $f(x) = 3x - x^2$, $M(0; 1)$.

1042. а) $f(x) = \frac{4}{(3x-1)^2}$, $M(2; 0)$; б) $f(x) = (2x-3)^3$, $M(1; 0)$.

1043. а) $f(x) = 3\sin 2x$, $M(\pi; 0)$; б) $f(x) = e^{2x} + 1$, $M(1; 1)$.

Обчисліть інтеграл (1044—1046).

1044. а) $\int\limits_1^2 x^3\,dx$; б) $\int\limits_0^3 (x+2)\,dx$; в) $\int\limits_0^1 (2x+1)^3\,dx$.

1045. а) $\int\limits_1^5 \frac{1}{x^2}\,dx$; б) $\int\limits_1^2 \frac{dx}{(2x-1)^2}$; в) $\int\limits_0^\pi \sin x\,dx$.

1046. а) $\int\limits_0^1 e^x\,dx$; б) $\int\limits_0^1 (e^{2x} - x)\,dx$; в) $\int\limits_{-1}^1 2^x\,dx$.

Знайдіть площу підграфіка функції (1047—1050).

1047. $f(x) = -x^3$ на $[-2; 0]$.

1048. $f(x) = (x-1)^2$ на $[0; 1]$.

1049. $f(x) = \sin x$ на $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right]$.

1050. $f(x) = e^{-x}$ на $[0; 1]$.

Обчисліть площу фігури, обмеженої лініями (1051—1058).

1051. $y = 4 - x^2$ і $y = 0$.

1052. $y = 4x - x^2$ і $y = 0$.

1053. $y = 4 - x^2$ і $y = 2 + x$.

1054. $y = x^2 - x + 2$ і $y = 2x^2$.

1055. $y = x^2$ і $y = \sqrt{-x}$.

1056. $y = 2 + 4x - x^2$ і $y = x^2 - 2x + 2$.

1057. $y = e^x$, $y = e^{-x}$ і $y = e^2$.

1058. $y = \frac{6}{x}$ і $y = 7 - x$.

1059. Зобразіть кругами Ейлера множини:

а) функцій, періодичних функцій, парних функцій;
б) графіків, графіків функцій, графіків рівнянь.

Обчисліть значення виразів (1060—1063).

1060. а) $9!$; б) P_6; в) A_5^3; г) C_{15}^2; ґ) C_{15}^3.

1061. а) $34! : 32!$; б) $P_{11} - P_9$; в) $C_{12}^3 : C_{12}^9$.

1062. а) $(18! + 19!) : 20!$; б) $50! : (48! + 49!)$.

1063. а) $P_{20} : (P_{19} - P_{18})$; б) $(P_{39} - P_{38}) : (C_{39}^2 + C_{38}^2)$.

1064. Спростіть вираз:

а) $A_m^n : C_m^n$; б) $A_m^n : C_{m-1}^n$;
в) $A_m^n : C_m^{n-1}$; г) $(x^2 + \sqrt{3})^5 - (x^2 - \sqrt{3})^5$.

1065. Розв'яжіть рівняння: а) $A_x^3 = 56x$; б) $C_{x+2}^4 = x^2 - 1$.

1066. Побудуйте графік функції: а) $y = C_x^2$; б) $y = P_{x+1} : P_x$.

1067. На колі позначено 18 точок. Скільки існує різних трикутників з вершинами у даних точках?

1068. Який опуклий многокутник має 35 діагоналей; 65 діагоналей?

1069. Скількома способами можна утворити поїзд з 10 вагонів?

1070. Із 32 учнів класу обирають делегацію з трьох осіб. Скількома способами це можна зробити?

1071. Збори з 32 осіб обирають голову, його заступника і секретаря. Скількома способами це можна зробити?

1072. Що ймовірніше: вгадати 2 числа з десяти, чи 3 — з восьми?

1073. Знайдіть імовірність того, що вибране навмання натуральне число від 40 до 70 ділиться на 6.

1074. Із 10 лотерейних квитків виграшними є 2. Знайдіть імовірність того, що серед взятих навмання 5 квитків один буде виграшним.

1075. Кидають відразу три гральних кубики. Яка ймовірність того, що на них випадуть очки, сума яких дорівнює: а) 2; б) 3; в) 10; г) 15?

1076. В урні є 3 синіх, 8 білих і 9 чорних куль одного розміру і маси. Знайдіть імовірність того, що вийняті з урни навмання дві кулі виявляться одного кольору.

ЗАДАЧІ ПІДВИЩЕНОЇ СКЛАДНОСТІ

1077. Додатне чи від'ємне число sin 363?

Доведіть справедливість числових рівностей (1078—1081).

1078. а) $\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$; б) $\cos 36^\circ = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$.

1079. а) $\sin 10^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ = \frac{1}{8}$; б) $\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{5\pi}{7} = \frac{1}{8}$.

1080. а) $\sin\frac{\pi}{10}\sin\frac{3\pi}{10} = \frac{1}{4}$; б) $\sin\frac{3\pi}{10} - \sin\frac{\pi}{10} = \frac{1}{2}$.

1081. а) $\cos\frac{\pi}{16} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$;

б) $\cos\frac{\pi}{32} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$.

Доведіть тотожність (1082—1084).

1082. а) $3\sin 2\alpha - \sin 6\alpha = 32\sin^3\alpha\cos^3\alpha$;

б) $\sin^6\alpha + \frac{3}{4}\sin^2 2\alpha + \cos^6\alpha = 1$.

1083. а) $\sin\alpha + 2\sin 3\alpha + \sin 5\alpha = 4\sin 3\alpha\cos^2\alpha$;

б) $\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha - 2\operatorname{tg}2\alpha - 4\operatorname{tg}4\alpha = 8\operatorname{ctg}8\alpha$.

1084. а) $\frac{\operatorname{tg}2x\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}2x-\operatorname{tg}x} = \sin 2x$;

б) $\frac{\sqrt{\operatorname{ctg}\alpha}+\sqrt{\operatorname{tg}\alpha}}{\sqrt{\operatorname{ctg}\alpha}-\sqrt{\operatorname{tg}\alpha}} = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$.

1085. Доведіть тотожність Л. Ейлера:

а) $\operatorname{tg}(30^\circ + 2b) = \frac{1}{2}(\operatorname{ctg}(30^\circ - b) - \operatorname{tg}(30^\circ - b))$;

б) $a^4 + b^4 = \left(a^2 - 2ab\cos\frac{\pi}{4} + b^2\right)\left(a^2 - 2ab\cos\frac{3\pi}{4} + b^2\right)$.

1086. Доведіть, що коли $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, то:

а) $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$;

б) $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2} = \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$;

в) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} + \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = 1$;

г) $\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}\gamma + \operatorname{ctg}\gamma\operatorname{ctg}\alpha = 1$.

1087. Знайдіть значення $\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{ctg}^3 x$, якщо $\sin x + \cos x = a$.

У задачах 1088—1090 a, b, c — довжини сторін довільного трикутника, A, B, C — міри протилежних їм кутів.

1088. Доведіть формулу Ф. Вієта (теорему тангенсів):

$$\frac{a-b}{a+b} = \operatorname{tg}\frac{A-B}{2} : \operatorname{tg}\frac{A+B}{2}.$$

1089. Доведіть формулу І. Ньютона:

$$\frac{a+b}{c} = \cos\frac{A-B}{2} : \sin\frac{C}{2}.$$

1090. Доведіть формули Тіхо Браге:

а) $\operatorname{tg} C = \dfrac{c\sin B}{a - c\cos B}$; б) $\operatorname{tg}(B + C) = \dfrac{a\sin B}{a\cos B - c}$.

1091. Доведіть, що при додатному значенні x $\sin x \geq x - \frac{x^3}{6}$.

1092. Доведіть, що при додатному α і будь-якому x $\cos x - \cos(x + \alpha) < \alpha$.

1093. Що більше: $\cos 1994$ чи $1 + \cos 1995$?

Розв'яжіть рівняння (1094—1100).

1094. а) $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} 3x$; б) $\operatorname{tg} 5x = \operatorname{tg} x$.

1095. а) $\sin 5x - 2\cos 2x = 3$; б) $3\cos 2x + 2\cos x = 5$.

1096. а) $\sin^8 x - \cos^6 x = 1$; б) $\cos^2 7x + \sin^2 6x = 0$.

1097. а) $\sin 3x - 8\sin^3 x = 0$; б) $4\cos 3x = 15\sin 2x$.

1098. а) $\cos 3x \operatorname{tg} 5x = \sin 7x$; б) $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} 4x = \operatorname{ctg} 3x$.

1099. а) $\sin 2x + \cos 2x = 1$; б) $\cos 4x - \sin^2 3x = 1$.

1100. а) $|\cos x| = \cos\left(x + \frac{\pi}{5}\right)$; б) $\sqrt{\cos x} = \sqrt{2}\sin\frac{x}{2}$.

1101. Скільки розв'язків має рівняння $\operatorname{tg}\pi\sqrt{x + 30} = \operatorname{tg}\pi\sqrt{x}$?

Розв'яжіть систему рівнянь (1102—1105).

1102. а) $\begin{cases}\sin(2x + 3y) = 0,\\ \cos(3x - 2y) = 1;\end{cases}$ б) $\begin{cases}\sqrt{2}\cos x = 1 + \cos y,\\ \sqrt{2}\sin x = \sin y.\end{cases}$

1103. а) $\begin{cases}\sin x \sin y = 0{,}25,\\ \cos x \cos y = 0{,}75;\end{cases}$ б) $\begin{cases}\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 2,\\ 2\cos x \cos y = 1.\end{cases}$

1104. а) $\begin{cases} 2\cos x = 3\sin(x+y), \\ 4\cos y = 3\sin(x+y); \end{cases}$ б) $\begin{cases} 8x + 2\sqrt{3}\cos y = -1, \\ 28x + 4\sqrt{3}\cos y = 1. \end{cases}$

1105. а) $\begin{cases} \cos 2y + \cos x = 1, \\ 2x + 2y = \pi; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \sin x + \cos 2y = -1, \\ 2x + 2y = 5\pi. \end{cases}$

Розв'яжіть нерівність (1106—1109).

1106. а) $\sin^2(x - \frac{\pi}{6}) < 0{,}25;$ б) $\sin^2 x - \sin x > 0.$

1107. а) $2(1 + \sin^2 x) > 5\sin x;$ б) $\cos 3x > \cos^3 x.$

1108. а) $\cos 4x + \sin^2 2x \le 1;$ б) $3\text{tg}^4 x - 1 < 2\text{tg}^2 x.$

1109. а) $\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\text{tg}\, x} \ge 0;$ б) $\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x} \le 0.$

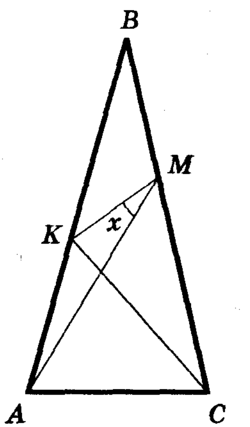
Розв'яжіть задачі складанням рівнянь (1110—1116).

1110. Дві сторони трикутника відносяться, як $1:(1+\sqrt{3})$, а кут між ними дорівнює 120°. Знайдіть інші кути трикутника.

1111. Знайдіть найменший кут прямокутного трикутника, якщо радіус вписаного в нього кола відноситься до периметра, як $1:(6+4\sqrt{3})$.

1112. Знайдіть кути трикутника, якщо два з них відносяться, як $2:3$, а протилежні їм сторони — як $1:\sqrt{2}$.

1113. Знайдіть кути трикутника, якщо один з них вдвічі менший від другого, а висота, проведена з вершини третього кута, ділить протилежну сторону у відношенні $(2\sqrt{3}+3):3$.



Мал. 128

1114. У трикутнику ABC $\angle BAC = \angle BCA = 80^\circ$, $\angle MAC = 60^\circ$, $\angle KCA = 50^\circ$ (мал. 128). Знайдіть міру кута KMA.

1115. MA — перпендикуляр до площини квадрата $ABCD$. Знайдіть міри кутів MCB і MCA, якщо їх різниця дорівнює 15°.

1116. Сторона AB правильного трикутника ABC з деякою площиною утворює кут 30°. Як нахилені до цієї площини прямі AC і BC, якщо один з цих кутів втричі більший від другого?

1117. Знаючи, що $\lg 2 \approx 0{,}3010$, знайдіть число цифр числа 2^{500}.

1118. Доведіть, що при різних додатних a і b

$$\sqrt{ab} < \frac{a-b}{\ln a - \ln b} < \frac{a+b}{2}.$$

Розв'яжіть рівняння (1119—1124).

1119. а) $\sqrt{x} + \sqrt[3]{x-1} = 5$; б) $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x-16} = \sqrt[3]{x-8}$.

1120. а) $(2+\sqrt{3})^x + (2-\sqrt{3})^x = 4$; б) $(6-\sqrt{35})^x + (6+\sqrt{35})^x = 142$.

1121. а) $4^x + 6^x = 9^x$; б) $2^{2x+1} + 3^{2x+1} = 5 \cdot 6^x$.

1122. а) $x^{x+1} = x^2$; б) $4x^x + 5x + 9 = 0$.

1123. а) $\log_3(3^x - 8) = 2 - x$; б) $\log_4 x + \log_{x^2} 2 = 1$.

1124. а) $5 + 4x^{\lg 5} = 25^{\lg x}$; б) $\sqrt{\log_x \sqrt{5x}} = -\log_x 5$.

1125. Що більше: а) $3^{\sqrt{2}}$ чи $2^{\sqrt{3}}$; б) e^{π} чи π^{e}?

1126. Знайдіть найменше значення функції $y = 3^x + 3^{-x}$.

1127. Знайдіть область визначення функції $y = \log_{x+5} \frac{x+3}{2x-1}$.

1128. Побудуйте графік функції: а) $y = x^{\pi - e}$; б) $y = \log_x 2$.

1129. Задача Ейлера. Обчисліть

$$\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}.$$

1130. Задача Тарталья. Доведіть, що рівняння $x^3 + px + q = 0$ має корінь

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} - \frac{q}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} + \frac{q}{2}}.$$

1131. Задача Ейлера. Доведіть, що логарифми двох чисел при будь-якій основі зберігають відношення, тобто $\log_a m : \log_a n = \log_b m : \log_b n$.

1132. Доведіть, що при додатних і відмінних від 1 числах a, b, c $\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c$.

1133. Обчисліть $\log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdot \log_6 7 \cdot \log_7 8 \cdot \log_8 9$.

Розв'яжіть нерівність (1134—1136).

1134. а) $(3x - x^2)^{0{,}5} < 4 - x$; б) $x^2 \cdot 3^x < 3^{x+1}$.

1135. а) $\frac{1+\sqrt{x^2-1}}{x} \geq 1$; б) $\frac{1-\sqrt{1-4x^2}}{x} < 3$.

1136. а) $\log_{x-3}(x-4) < 2$; б) $5^{\log_5^2 x} + x^{\log_5 x} < 10$.

1137. Задача Ейлера. Знайдіть раціональні розв'язки рівняння $x^y = y^x$.

1138. Задача Ейлера. Нехай число людей щороку збільшується на 0,01 своєї кількості. Через скільки років число людей збільшиться в 10 раз?

1139. Функція $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ має дві критичні точки: 1 і 3. Знайдіть $f(3)$, якщо $f(1) = 4$.

1140. Функція $f(x) = (x-a)(x^2-1)$ має мінімум у точці $x = \frac{1}{9}$. В якій точці вона має максимум?

1141. Знайдіть усі значення x, для кожного з яких функція $f(x) = 6\cos^2 x + 6\sin x - 2$ набуває найбільшого значення.

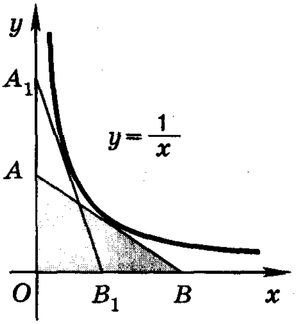
1142. Доведіть, що площа трикутника, утвореного осями координат і дотичною до графіка функції $y = \frac{1}{x}$, стала. Знайдіть цю площу (мал. 129).

1143. Напишіть рівняння такої дотичної до графіка функції $y = \sqrt{4-2x-x^2}$, яка проходить через точку A (3; 0).

1144. Задача Ейлера. За яких умов вираз $x^3 - ax^2 + bx - c$ набуває максимального або мінімального значення?

1145. Задача Евкліда. Доведіть, що з усіх прямокутників, вписаних у даний трикутник, найбільшу площу має той, основа якого дорівнює половині основи трикутника.

1146. Задача Ферма. Даний відрізок KM поділіть точкою P так, щоб прямокутний паралелепіпед, в основі якого — квадрат із стороною KP і висотою PM, мав би найбільший об'єм.



Мал. 129

1147. Задача Регіомонтана. Жердина завдовжки 10 стоп підвішена вертикально так, що її нижній кінець від підлоги віддалений на 4 стопи. На якій відстані від її нижнього кінця на підлозі знаходиться місце, з якого жердину видно під найбільшим кутом?

1148. Яким повинен бути кут при вершині рівнобедреного трикутника площею 1 м^2, щоб радіус вписаного в трикутник кола був найбільший?

1149. Знайдіть довжину найкоротшого з відрізків, кінці якого лежать на осях координат і який проходить через точку A (1; 8).

1150. Радіус металевого диска під час нагрівання рівномірно збільшується на 0,01 см щосекунди. З якою швидкістю збільшується площа основи диска в момент, коли його радіус дорівнює 20 см?

1151. Дослідіть функцію:

а) $f(x) = x\sin x$; б) $f(x) = x\cos x$.

1152. Побудуйте графік функції:

а) $y = \sqrt{x + 2\sqrt{x-1}}$; б) $y = \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}}$.

1153. Знайдіть загальний вигляд первісних для функції $y = \frac{x}{x-1}$.

1154. Напишіть рівняння кривої, коли відомо, що вона проходить через точку A (2; 3) і кутовий коефіцієнт дотичної до неї у кожній її точці з абсцисою $x > 0$ дорівнює $3x^{-2}$.

1155. Доведіть, що кожна первісна визначеної на $[-a; a]$ непарної неперервної функції — функція парна.

1156. Доведіть, що визначена на $[-a; a]$ парна неперервна функція має принаймні одну непарну первісну.

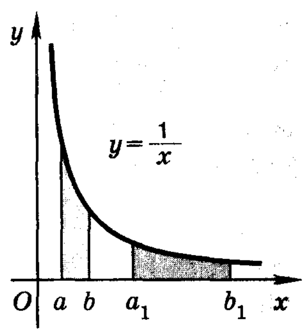
1157. Знайдіть площу фігури, обмеженої параболою $y = x^2 - 4x + 5$ і дотичними до неї, проведеними через її точки з абсцисами $x = 1$ і $x = 3$.

1158. Знайдіть площу фігури, обмеженої кривою, рівняння якої:

а) $|y| = 2x - x^2$; б) $|y| = 1 - x^4$.

1159. У якому відношенні площа квадрата ділиться параболою, що проходить через кінці його сторони і дотикається до протилежної його сторони в її середині?

1160. Задача Ферма. Доведіть, що коли $a:b = a_1:b_1$ і $x > 0$, то площі підграфіків функції $y = \frac{1}{x}$ на $[a; b]$ і $[a_1; b_1]$ рівні (мал. 130).



Мал. 130

1161. Доведіть, що коли $0 < a < b < \frac{\pi}{2}$, то $(b-a)\cos b < \sin b - \sin a < (b-a)\cos a$.

1162. Обчисліть інтеграл:

а) $\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}dx$; б) $\int_{0}^{3}\sqrt{9-x^2}dx$.

ВІДПОВІДІ І ВКАЗІВКИ

10 КЛАС

Розділ 1

1. 4320°, 360°. **3.** $\sin\alpha = \frac{\sqrt{8}}{3}$, $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{8}$. **4.** $\sin\beta = 0{,}8$. **6.** б) $\cos 10^\circ > \sin 10^\circ$; г) $\sin 10^\circ > \cos 100^\circ$. **7.** а) $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$. **8.** а) $2\sqrt{2}$. **9.** а) 3 і -3. **10.** а) Ні; б) так; г) так. **11.** а) 0,2924. **14.** а) 1,42262. **15.** а) 30°. **16.** Зменшується від 1 до 0, зменшується від 0 до -1, збільшується від -1 до 0, збільшується від 0 до 1. **19.** а) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. **20.** а) $\frac{\sqrt{15}}{4}$, $-\sqrt{15}$, $-\frac{\sqrt{15}}{15}$. **22.** б) $\sin^2\alpha$; в) 1. **23.** а) $\operatorname{ctg}^2\alpha$. **24.** а) $\frac{2}{\cos x}$. **26.** 120°. **27.** $\approx 77^\circ$. **30.** а) $\sin 1 > \cos 1$. **31.** б) $\cos 70^\circ > \cos 2$. **32.** $\cos\pi$, $\sin\frac{3\pi}{2}$, $\cos 4$. **37.** Ні. **38.** в) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; 1. **40.** 2. **41.** $\frac{\sqrt{2}-3}{2}$. **42.** $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{12}}{2}$. **43.** -4. **44.** а) 0. **45.** а) 0,25. **46.** а) 0,75. **47.** а) 1. **48.** а) Так. **54.** а) $2\sin^2\alpha$. **55.** а) 1. **56.** а) $\operatorname{ctg}\alpha$. **57.** а) $\cos^2\alpha$. **58.** а) $\frac{\pi}{3}$. **60.** а) $\cos\alpha$. **61.** а) $\sin\alpha$. **62.** а) $-\sin\alpha$. **63.** а) $-\cos\alpha$. **64.** б) $-\sin 3\alpha$. **65.** в) $-\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{3}$. **66.** а) $\cos\alpha$. **67.** а) $-\cos\alpha$. **68.** а) $-\cos 2\alpha$. **69.** а) 0; б) $2\cos\alpha$. **70.** а) -1. **71.** а) $\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\right)$. **73.** б) $\sin(\alpha-\pi) = \sin(\alpha-\pi+2\pi) = \sin(\alpha+\pi)$. **76.** а) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) 1. **77.** а) $\frac{1}{2}$. **78.** а) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **79.** а) $\cos 3$. **80.** а) $-\sin 2$. **81.** а) -1; б) 0. **83.** а) $\cos^2\alpha$. **84.** а) $1 : \sin^2\alpha$. **85.** а) 1. **86.** а) $1 : \sin^2 x$. **87.** а) $\operatorname{tg}^2\alpha$. **88.** а) 180°; б) 135°. **89.** а) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \sin\frac{\pi}{2}\cos\alpha - \cos\frac{\pi}{2}\sin\alpha = \cos\alpha$. **92.** а) $0{,}25(\sqrt{6}-\sqrt{2})$. **94.** б) $-0{,}25(\sqrt{6}-\sqrt{2})$. **96.** а) 0. **97.** а) $\sin(\alpha+x)$. **98.** а) $-\cos(\alpha+\beta)$. **99.** а) $\cos\alpha\sin\beta$. **100.** а) $\sin\alpha$. **101.** а) $-\sin\alpha$. **102.** а) $-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x$. **103.** а) $\operatorname{ctg}\beta$. **109.** 0,5. **110.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **111.** $-0{,}5$. **112.** 0. **113.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **114.** $\operatorname{tg}(36^\circ+24^\circ) = \sqrt{3}$. **115.** $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{19}{8}$. **119.** а) 0,5; в) 0,25. **120.** а) 1. **121.** а) -1. **123.** а) $\sin\alpha$. **124.** а) 2. **125.** а) $\operatorname{tg}\alpha$. **126.** а) $\operatorname{ctg}^2\beta$. **127.** а) $1 : 2\cos 2x$; в) $2\operatorname{tg}\alpha$. **137.** а) $\sin 35^\circ \sin 55^\circ = \sin 35^\circ \cos 35^\circ = \frac{1}{2}\sin 70^\circ = \frac{1}{2}\cos 20^\circ$. **138.** а) $\frac{\pi}{4}$; г) $\frac{\pi}{8}$. **140.** а) Перетворіть вираз $\sin(2\alpha+\alpha)$. **141.** а) $\cos 20^\circ$. **142.** а) $2\sin 3\alpha\cos 2\alpha$.

143. а) $2\sin\frac{3\pi}{10}\cos\frac{\pi}{10}$. **144.** а) $\frac{\sin 3\beta}{\cos 2\beta\cos\beta}$. **145.** а) $\sin\alpha+\cos\alpha=$ $=\sin\alpha+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=2\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$. **146.** а) $\cos\alpha$. **150.** а) $2\sin\left(15^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(15^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)$. **151.** б) $4\cos\alpha\sin\frac{3\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$. **155.** а) $(\sqrt{3}+2):4$. **156.** а) $x=\frac{\pi}{2}$. **159.** Ні. На множині $[-\pi;\pi]$ функція парна. **160.** Функція $y=\sin x$, задана на $[-2\pi;2\pi]$, непарна. **161.** Ні. **170.** б) $x\neq\frac{\pi}{3}+\pi n$; в) $x\neq\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3}$. **171.** а) $[-2;\ 2]$; б) $\left[-\sqrt{3};\sqrt{3}\right]$; в) $\left[\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right]$. **173.** Розв'яжіть рівняння $\sin\frac{x}{2}=0$. **174.** Розв'яжіть рівняння $\cos 2x=0{,}5$. **175.** а) Непарна; б) парна; в) непарна. **176.** а) $y=\frac{1}{2}\sin 2x$; б) $y=\cos 2x$. **178.** в) $2\pi n$; г) $\frac{\pi}{2}+2\pi n$. **180.** а) $\pm\frac{\pi}{6}+2\pi n$. **181.** в) $\frac{\pi}{8}+\frac{1}{2}\pi n$. **183.** а) $2+\frac{\pi}{2}+\pi n$. **184.** а) $\frac{\pi}{2}+\pi n$. **185.** а) $-\frac{\pi}{4}+\pi n$. **186.** а) πn; $\frac{\pi}{6}+2\pi n$; $\frac{5\pi}{6}+2\pi n$. **187.** а) $\frac{\pi}{2}+2\pi n$. **188.** а) $\pi+2\pi n$; $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$. **189.** а) πn. **190.** а) $2\pi n$, $\frac{\pi}{3}+4\pi n$, $\frac{5\pi}{3}+4\pi n$. **191.** а) $\pm\frac{\pi}{6}+\pi n$. **193.** а) πn; $\frac{\pi}{10}+\frac{\pi n}{5}$. **194.** а) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$; $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$. **195.** а) $\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi n}{3}$. **197.** в) Замініть: $1=\sin^2 x+\cos^2 x$. **198.** а) Замініть: $13=13(\sin^2 x+$ $+\cos^2 x)$. **199.** а) $(2n+1)\pi$; $\frac{4n\pm1}{2}\pi$. **200.** а) Розв'язків немає. **202.** а) $x=2\pi n$; $y=\frac{\pi}{2}+2\pi k$ або $x=\pi+2\pi n$; $y=\frac{3\pi}{2}+2\pi k$. **203.** 30°, 75° і 75°. **204.** Застосуйте теорему косинусів. **206.** 60° і 30°. **207.** 30°. **208.** а) $\left(\frac{\pi}{3}+2\pi n;\ \frac{2\pi}{3}+2\pi n\right)$. **209.** а) $\left(\frac{5\pi}{6}+2\pi n;\ \frac{7\pi}{6}+2\pi n\right)$. **210.** а) $x\neq$ $\neq\frac{\pi}{2}+2\pi n$. **211.** а) $\left(\frac{\pi}{3}+2\pi n;\ \frac{5\pi}{3}+2\pi n\right)$. **213.** а) $[4\pi+6\pi n;\ 5\pi+6\pi n]$. **214.** а) $\left[\frac{\pi}{16}+\frac{\pi n}{4};\ \frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{4}\right]$. **215.** а) $\left[-\frac{\pi}{2}+\pi n;\ \frac{\pi}{6}+\pi n\right]$.

Розділ 2

221. а) 1. **222.** а) $\frac{1}{3}$; в) 10. **223.** а) $\frac{a}{b}$. **224.** а) $6m^8n$. **225.** а) $4x^4y^2$. **226.** а) a^6b^{-2}. **227.** а) $8p^6x^{-1}+1$. **228.** а) $2x^5y^5$. **229.** а) $4ac^{-3}$. **230.** Так. **231.** Так. **233.** а) $4{,}53\cdot10^{-5}$; в) $6{,}4\cdot10^7$. **234.** а) $1{,}8\cdot10^8$ г. **235.** б) $2{,}94\cdot10^{-2}$ м. **236.** Сума: $2{,}9442\cdot10^{-8}$. **238.** а) $-0{,}5$. **239.** а) $(2;2)$, $(2;-2)$, $(-2;2)$, $(-2;-2)$. **243.** а) 2. **244.** а) 9. **245.** а) 4. **246.** а) $2^{\frac{3}{2}}$. **247.** а) $\left(\frac{2}{3}\right)^7$. **248.** а) $-2\frac{26}{27}$. **249.** а) Друге число більше. **250.** а) 1,26191; б) 2,33989. **252.** а) $x^{\frac{1}{2}}\left(x^{\frac{1}{2}}-1\right)$; г) $\left(1+a^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}}\right)$. **253.** а) 2; б) $5+2\cdot6^{\frac{1}{2}}$. **254.** а) a^2-x. **255.** а) $a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}$. **256.** а) $x-1$. **257.** а) $a^{\frac{2}{3}}+2a^{\frac{1}{3}}+4$. **258.** а) $a^{\frac{1}{3}}-1$. **259.** а) $\left(\frac{c}{x}\right)^{\frac{1}{2}}-1$.

260. а) $a^{\frac{1}{4}} - a^{-\frac{1}{4}}$. 261. а) $c + 1$. 262. а) 8,82498. 263. а) 5498,33. 264. а) 2,17458. 265. а) 171,387. 266. а) $2^{\sqrt{2}}$. 267. а) 3. 268. а) $x^{\sqrt{3}} + 1$.

271. −2. 272. −2. 277. а) $\sqrt[5]{x}$. 278. а) $x^{\frac{1}{7}}$; д) $\left(x + x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{4}}$. 279. а) 3.

280. а) −5. 281. а) $\approx 2{,}512$. Скористайтеся калькулятором. 282. а) $-\frac{1}{2}$.

283. а) $\frac{3}{2}$. 284. а) 12. 285. а) 13; б) −9; в) 9. 286. а) 5. 287. а) 733.

288. а) $\sqrt[6]{5}$. 289. а) 4. 290. а) $3 + 2\sqrt[3]{2}$. 291. а) $2 - \sqrt{3}$. Помножте чисельник і знаменник на $2 - \sqrt{3}$. 292. а) $\sqrt{3} + 1$. 293. а) $8 + 2\sqrt[3]{9}$. 294. а) 20. 296. а) $6 + 4\sqrt{3}$. 298. $b^{-0,5} - a^{-0,5}$. 299. $a^{0,5}x^{0,5} : (a^{0,5} + x^{0,5})$. 300. $3 : (x^{0,5} + 6)$. 301. $2 : (1 - c)$. 302. $\sqrt{1 + x}$. 303. $a + 1$. 304. $2a(a - x) : (a^2 - xy)$.

305. $2a^{\frac{1}{4}}x^{\frac{1}{4}}$. 306. $(x^2 + x + 1) : (x + \sqrt[3]{x^2})$. 307. $V = \frac{\sqrt{3}}{9}d^3$, $V = \left(\frac{S}{6}\right)^{\frac{3}{2}}$, $S = 6\sqrt[3]{V^2}$ і т. д. 308. Алгебраїчні всі, крім а), ірраціональні — в), г), ґ). 309. а) 81. 310. а) 8. 311. а) $\frac{1}{4}$. 312. а) 9 і −9. 313. 4 і 9. 314. б) −1 і 27.

315. а) 4. 316. а) 16; б) 4 і 9. 317. а) 5. 318. а) 3. 319. а) 0, 3 і 4. 320. а) 3. 321. а) 10. 322. а) 61. 323. а) 7. 324. а) 84. 325. а) 4. 326. а) 3. 328. а) (8; 1). 329. а) (9; 1). 330. а) (25; 9). 331. а) (1; 27) або (27; 1). 332. а) (4; 1) або $\left(-9; -\frac{9}{4}\right)$. 333. 5 см і 12 см. 334. а) 16 см і 63 см. 335. Складіть рівняння $\sqrt{x^2 + (x + 7)^2} = 2x + 7 - 6$. 336. 1,5. 337. $-0{,}5(4 + \sqrt{3})$. 338. $M\,(8; \sqrt{8})$. 339. а) [0; 9); г) [0; ∞). 340. а) [2; 3). 341. а) (−∞; 25). 342. а) (−4; −1). 343. а) [1; ∞). 344. а) (−∞; −1). 345. а) $\left[\frac{1}{3}; \frac{9 - \sqrt{41}}{2}\right)$. 347. а) (−∞;−2). 348. а) $\left(2 - \sqrt{5}; \frac{9 - \sqrt{41}}{4}\right)$.

Розділ 3

352. а) 1,3038. 354. а) 2; в) 0,5. 355. а) Існує. 357. а) (−2; ∞). 358. Ні. 360. $0{,}4^{0,75}$; $2{,}5^{0,75}$. 361. а) 1; д) 0. 362. а) $x > 2$; б) $x \le -3$. 363. а) $2^4 = 16$; в) $(\sqrt{3})^8 = 3^4 = 81$. 364. а) $\log_5 625 = 4$; д) $\log_a c = 3x$. 365. а) $3^4 = 81$; д) $x^2 = 49$. 366. а) Так. 367. 3. 368. а) $\log_a ab = \log_a a + \log_a b = 1 + 8 = 9$. 369. а) 4; ґ) 2. 371. а) 81; д) $0{,}5e^2$. 372. а) 8; ґ) 3. 373. а) $x < 0{,}6$; ґ) $x \ne 0$. 374. Скористайтесь формулою переходу. 375. а) Враховуючи, що $\log_3 2 \cdot \log_2 3 = 1$, спростіть вираз $3^{\log_2 5 \log_3 2 \log_2 3}$; в) покажіть, що коли $a > 0$ і $a \ne 1$, $a + \frac{1}{a} > 2$. 376. а) 10. 377. б) Ні; ґ) ні; д) так. 381. а) Ні. 382. а) $\log_3 2{,}7 > \log_3 2{,}5$; г) дані числа рівні. 385. а) 1; б) 1 і 4. 386. а) (0; 2); б) (0; ∞). 388. 0,5. 389. а) 1 і −1.

391. а) 0,4771; в) 1,5476. **392.** а) 2,5. **393.** а) 0,75. **394.** а) 3. **395.** а) 0. **397.** а) 3. **398.** а) –1. **399.** а) 1. **400.** а) 2. **401.** а) 1. **402.** а) 3 і 11. **403.** а) 1 і –1. **404.** а) 3. **405.** а) 2,5119; в) 40,4473. **406.** а) 19. **407.** а) 5000. **408.** а) 10 і 0,1. **409.** а) 0,375. **415.** а) 4 і 6. **416.** а) (1; 2). **417.** а) –4; –3; $0{,}5(-7 \pm \sqrt{17})$. **418.** а) $(-\infty;\ 5)$; в) $(-\infty;\ \lg 5)$. **419.** а) (0; 1000). **420.** а) $(-\infty;\ 1)$. **421.** а) $(-\infty;\ 3)$. **422.** а) $(-\infty;\ 0)$. **423.** а) (2; 18). **424.** а) $(-\infty;\ 0)$. **425.** а) $(4;\ \infty)$. **426.** а) Розв'язків немає. **427.** а) $(2;\ \infty)$. **428.** а) (1; 3). **430.** а) (0,01; 1000). **431.** а) (2; 32). **432.** а) $(2n-1)\pi - \arcsin 0{,}1 < x < 2n\pi + \arcsin 0{,}1$. **433.** а) $(-\infty;\ 1]$. **436.** а) $(-\infty;\ 0]$. **438.** а) $\boldsymbol{R}$. **440.** а) 2 і 3.

11 КЛАС

Розділ 4

443. [0; 7], [–1; 7], [–7; 7] і т. д. Задача не визначена. **444.** $y = 2\cos(x+3)$, $y = 2\sin x$ на $\boldsymbol{R}$ і т. д. **447.** Може бути. Наприклад, $y = 0$ на [–1; 1]. **448.** Періодичні дві перші функції. **449.** Ні. **450.** Зростає на $\left[-\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$, $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $\left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$. **451.** а) На $(-\infty;\ 0)$ функція спадає. **452.** а) (0; 3). **453.** а) Нехай $0 < x_1 < x_2$. Тоді $f(x_1) < f(x_2)$, бо $f(x_2) - f(x_1) = x_2^2 + 2x_2 - (x_1^2 + 2x_1) = (x_2 - x_1)(x_2 + x_1 + 2) > 0$. **454.** а) 12,5. **457.** –0,4. **459.** У точці $x_0 = -1$ дана функція неперервна. **460.** Не визначена, границя існує і дорівнює 0. **461.** а) Так; б) так. **462.** Ні. **463.** а) 47. **464.** а) –8. **467.** $y = 3x - 1$. **468.** а) 1; б) –0,5. **470.** а) 0,6. **471.** $\frac{1}{2}$, 1, $\frac{3}{2}$. **472.** –1. **473.** Ні. **475.** 1. **476.** Вісь x. **477.** –1 і 1. **478.** Функція зростає на проміжку (–3; 2) і спадає на (2; 5). **479.** а) 4. **480.** а) –4. **483.** а) 5; б) –5. **485.** а) $y = 3x - 2$; в) $y = 0$. **487.** $M(3;\ 9)$. **488.** (1; 1) і (7; 49). **489.** а) $6x^5$. **490.** а) $6x$. **491.** а) $2x + 3x^2$. **492.** а) $20x^4$. **493.** а) $6x - 5$. **494.** а) $4x^3 + 9x^2 - 5$. **495.** а) $30x - 15x^4$. **496.** а) $10(x+3)$. **497.** а) $5x^4 - 10x$. **498.** а) $2x + 1$. **499.** $f'(1) = -3; f'(0) = -5; f'(-2) = -9$. **500.** – 142; 2; $24\sqrt{2} + 2$. **502.** а) $x_1 = \frac{1}{6}$, $x_2 = -\frac{1}{6}$. **503.** а) (–1; 2). **504.** $y = x^2 + 3x + 1$ і безліч інших. **505.** $y = 4x - 9; y = -6x - 4$. **508.** а) $x = 0$; $x = 1$; $x = -1$. **509.** а) $x = 0; x = 3$. **510.** а) $y' = -\frac{2}{x^2}$. **511.** а) $y' = -\frac{11}{(5x-3)^2}$. **512.** а) $y' = \frac{3x^2-2}{x^2}$. **513.** а) $y' = \frac{10}{3x^2}$. **514.** а) $y = -1{,}5x + 6$. **515.** а) $y' = 3\cos x$. **516.** а) $y' = -\sin x$. **517.** а) $y' = \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{2}\sin x$. **518.** а) $y' = \sin x + x\cos x$. **519.** а) $y' = 3x^2 \sin x + x^3 \cos x$. **520.** а) $y' = \frac{2(\sin x - x\cos x)}{\sin^2 x}$. **521.** а) $y' = \frac{-2x\cos x - (x^2+1)\sin x}{(x^2+1)^2}$. **522.** а) $y' = \cos 2x$. **523.** а) $y' = 0$. **524.** 1, –1, $-\frac{\pi}{2}$, $\cos 3 - 3\sin 3$. **525.** $y = 1 - \cos x$. **526.** а) $y' = 20(x+3)^{19}$. **527.** а) $y' =$

$=4\cos 4x$. **528.** а) $y' = 3\cos 3x$. **529.** а) $y' = \cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$. **530.** а) $y' = \sin 2x + 2x\cos 2x$. **531.** а) $y' = \cos 3x - \sin x \sin 2x$. **532.** а) $y' = 4\sin^3 x\cos x$. **533.** а) $-\frac{2(x-1)\sin 2x+\cos 2x}{(x-1)^2}$. **534.** а) $\frac{x}{\sqrt{x^2-5}}$. **535.** а) $\frac{2x+1}{2\sqrt{(x-1)(x+2)}}$. **536.** а) $3x^2$. **537.** а) $3\cos x$. **538.** а) $-3\sin(3x+2)$. **539.** а) $3e^x$. **541.** а) $(7e)^x(1+\ln 7)$. **542.** а) $(\sqrt{2})^x \ln\sqrt{2}$. **544.** а) $\frac{1}{x\ln 2}$; б) $\frac{1}{(x+3)\ln 10}$. **545.** а) $2^{\frac{x}{2}}\ln\sqrt{2}$; б) $1{,}5^{\sin x}\ln 1{,}5\cos x$. **546.** а) $0{,}5x^{-0{,}5}$. **547.** а) $2x^{-\frac{1}{3}}$. **548.** а) $0{,}25x^{-0{,}75}$. **549.** а) $e^x + ex^{e-1}$. **550.** а) $2ex - e^{-x}$. **551.** а) $y = (x-1)\ln 4 + 2$. **553.** а) $x = 3$; в) $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in Z$. **555.** а) $f(x)$ зростає на $(-\infty; 0]$, спадає на $[0; \infty)$. **556.** а) Зростає на $[-1; 0]$ і $[1; \infty)$. **557.** а) Спадає на $[-1; 3]$. **558.** а) Зростає на $(-\infty; 0)$ і $(0; \infty)$. **559.** а) Спадає на $[-8; -4)$ і $(-4; 0)$. **560.** а) Спадає на $\left(\frac{\pi}{6}; \frac{3\pi}{6}\right)$; $\left(\frac{5\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}\right)$ і т. д. **562.** Функції a і b зростають на R. **563.** а) Один корінь. **564.** а) Функція $f(x) = x + \sin x$ зростає на R від $-\infty$ до ∞; тому її графік кожну пряму, паралельну осі x, перетинає один раз. **565.** Перші три. **566.** x_2, x_3, x_4, x_6. **567.** Якщо x_0 — точка максимуму функції, причому $x_0 \in [-7; 7]$, то існує таке Δx, що на $[x_0; x_0 + \Delta x]$ функція спадає. А це суперечить умові задачі. Аналогічно показується, що дана функція на $[-7; 7]$ не може мати і мінімуму. **568.** Функція не має максимуму. **570.** а) $x = \frac{1}{7}$ — точка мінімуму, $f_{\min} = 3\frac{6}{7}$. **571.** а) $x = -1$ — точка максимуму, $x = 1$ — точка мінімуму. **572.** а) Функція $f(x)$ спадає на R, тому не має екстремумів. **573.** а) $x = 2$ — точка мінімуму. **574.** а) $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n$ — точки мінімуму, $x = \frac{7\pi}{6} + 2\pi n$ — точки максимуму при кожному $n \in Z$. **576.** а) $x = 0$ — точка максимуму, $f_{\max} = 2$. **579.** При даних умовах нерівність $3ax^2 + 2bx + c > 0$ задовольняє кожне дійсне число. **580.** в) $x = -2$ — точка мінімуму, $y_{\min} = 1$. **592.** Має: в точці $x = 2$ мінімум, а в $x = 3$ максимум. **593.** Непарна функція — не може; парна може. **594.** 21; –4. **595.** 56; –56. **597.** $\sqrt{20}$, 0. **598.** 5; 2. **599.** $\sqrt{3}$; $-\sqrt{3}$. **600.** –2. **601.** а) Ні; б) ні. **602.** а) $[-2; \infty)$; г) $(-\infty; -2] \cup [2; \infty)$. **603.** –0,5. **604.** 1200 м. **605.** $XM = \sqrt{3}$. **606.** Квадрат. Другий спосіб геометричний. Доведіть, що площа прямокутного трикутника, вписаного в коло, найбільша тоді, коли він рівнобедрений. **607.** Квадрат. Знайдіть найбільше значення функції $f(x) = x + \sqrt{d^2 - x^2}$. **608.** Застосуйте теорему косинусів. **609.** 60°. **610.** 4 м і 2 м. **611.** Площі рівні; найменший периметр має квадрат. **612.** 3 і 18. **613.** $\frac{32\sqrt{3}}{9}$. **615.** $\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

616. Якщо діаметр основи циліндра x, а висота y, то його об'єм $\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2 y = 1$, звідки $y = \frac{4}{x^2}$. Площа поверхні $S = 2\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 2\pi\left(\frac{x}{2}\right)y = 2\pi\left(\frac{x^2}{4} + \frac{2}{x}\right)$, її значення найменше, коли $x^3 = 4$. У цьому випадку $y^3 = \frac{64}{x^3} = 4$. Отже, $x = y$. **617.** 4 м/с, 2 м/с, 0 м/с. **618.** 36 м/с². **619.** $t = 1$ с. **621.** 20 рад/с. **622.** Через $\frac{20}{3}$ с. **623.** 3π рад/с. **624.** 4 град/с. **625.** $\frac{13}{12}$ г/год. **626.** $\frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}\pi n < t < \frac{2\pi}{3} + \frac{2}{3}\pi n$, де $n \in Z$. **627.** $t \approx 4{,}1$ с; $h \approx 82$ м. **628.** $\frac{4t}{\sqrt{25-4t^2}}$ м/с. Скористайтесь теоремою Піфагора. **629.** а) $\approx 1{,}2$.

631. а) 2; б) 3. **632.** а) $(-7; 4)$. **633.** а) $(-\infty; -8) \cup (-3; 2)$. **634.** а) $(0; 3)$. **635.** а) $(-\infty; -6] \cup \left[\frac{3}{2}; \frac{5}{3}\right]$. **636.** а) $(-\infty; -2) \cup (3; 6)$. **637.** а) $(2; 3)$. **638.** а) $(-\infty; 0) \cup (2; 4) \cup (6; \infty)$. **639.** а) Рівняння розв'язків не має; б) коренем рівняння є кожне дійсне число $x \in [1; 3]$. **640.** $(-1; 0) \cup [4; 5]$.

Розділ 5

641. $(x^4)' = 4x^3$. **642.** Так. **644.** $(0{,}5x^2)' = 0{,}5 \cdot 2x = x$. **645.** $0{,}5x^2 + c$. **649.** При кожному $n \in N$ на проміжку $(\pi n; \pi(n+1))$ функція ctg x визначена і диференційовна, причому $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$. **650.** а) Так; в) ні, бо в точці $x = 0$, що належить $[-3; 3]$, дана функція не визначена. **652.** а) $x^4 + 2$. **654.** $x^{n+1} : (n+1)$. **655.** а) $3x + C$. **656.** а) $x^3 + C$. **657.** а) $C - x^5$. **658.** а) $\frac{1}{4}x^4 + C$. **659.** а) $\frac{1}{4}x^4 + x^2 + C$. **660.** а) $2x + \sin x + C$. **661.** а) $\frac{1}{x} + C$. **662.** а) $4x + \frac{1}{x} + C$. **663.** а) $4\sqrt{x} + C$. **664.** а) $2{,}7 \operatorname{tg} x + C$; в) $\operatorname{tg} x - \cos x + C$. **667.** а) Так. **668.** а) $15x^4$. **669.** а) $x + \frac{x^3}{3} + 21$. **670.** а) $0{,}25x^4 + 1{,}75$. **672.** а) $x(t) = t^3 + t + 3$. Спочатку покажіть, що $v(t) = 3t^2 + 1$. **675.** а) $8\frac{2}{3}$. **676.** а) 1. **677.** а) 6. **678.** а) $\pi + 4$. **679.** а) 6,4. **680.** Один із способів — за формулою площі трапеції; її основи 4 і 6, а висота 4. **682.** $10\frac{2}{3}$. **683.** а) 0,25. **684.** а) 0,5. **685.** а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **686.** а) $\frac{2}{3}$. **687.** а) 4,5. **688.** а) $\frac{1}{3}(e^3 - 1)$. **689.** а) 2. **690.** а) $\frac{1}{3}\ln 7$. **693.** $\frac{4}{3}$. **695.** 4,5. **696.** 4,25. **699.** а) 6; б) 12. **700.** а) $e - 1$. **701.** а) $12 + \ln 81$. **702.** $3{,}5 \ln 2$.

706. Так. **710.** 0,125 Дж. **711.** 0,784 Дж. **712.** $ke_1e_2\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)$. **713.** Якщо M — маса Землі, то $\frac{kMm}{R^2}=mg$, звідки $kM=gR^2$ і $A=\int\limits_R^{R+h}\frac{kMm}{x^2}dx=\frac{gmRh}{R+h}$.
714. $\approx$ 1800 Н. **715.** 2 : 1. **716.** а) Якщо $y=4e^{3x}$, то $y'=3\cdot 4e^{3x}=3y$.
717. а) Так; б) ні; в) ні. **718.** $y=e^x+2$. **720.** $y=2e^x$. **721.** $y=0{,}5e^{2x}$.
722. Так. **724.** а) $f(x)=\frac{1}{3}(x^3-5)$. **725.** а) $y=Ce^{3x}$. **727.** $S(3)\approx 76$ м, $S(8)\approx 6$ м.
729. $\approx$ 545 діб. **730.** 0,005. **731.** $t\ln 2:\ln\frac{m}{n}$.

Розділ 6

734. а) {4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}. **737.** {1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30}. **738.** а) {–2, 0, 2}. **739.** а) $(-\infty; 4)$. **740.** а і б. **741.** а) [0; 49]. **742.** $K\cap P=\{a, c, 2\}$, $K\cup P=\{1, 2, a, c, b, x\}$, $K\setminus P=\{b\}$. **744.** 3. **745.** 4. **746.** Пара (4; –1). **747.** $A\cap B$ — множина чисел, кратних 6. **748.** $A\cap B=\varnothing$, $A\cup B=N$, $A\setminus B=A$. **749.** K — множина квадратів; $A\setminus B$ — множина прямокутників з нерівними сторонами; $B\setminus A$ — множина ромбів з непрямими кутами. **750.** $A\neq B$, A — не підмножина множини B. **752.** а) 40 320. **753.** а) n. **754.** 24. **755.** 16. **756.** 27. **757.** 24. **758.** 120. **760.** 20 160. **761.** а) 8. **762.** а) 24. **765.** 720. **766.** 2520. **767.** 6. **768.** 18. **770.** 30 240. **771.** а) 60. **772.** 648. **773.** 4536. **774.** 60. **775.** 20. **776.** 60. **778.** а) 7. **779.** A_8^5 менше за P_8 у 6 разів. **781.** а) 10. **782.** 190. **783.** 496. **784.** 28. **785.** 0,5 $n(n-1)$. **786.** 35; 0,5 $n(n-3)$. **787.** 56; C_n^3. **788.** Найбільше $C_{10}^4=210$. **789.** C_{20}^4, A_{20}^4. **791.** в) 9. **792.** б) Ці числа рівні. **794.** $C_{28}^7\cdot C_{21}^7\cdot C_{14}^7$. **795.** C_{49}^6. **796.** а) Шансів порівну. **798.** 685. **799.** $x^4+4x^3c+6x^2c^2+4xc^3+c^4$. **802.** а) $(a+1)^5$. **803.** $a^4+4a^3+6a^2+4a+1$. **804.** $c^7+7c^6x+21c^5x^2+\ldots+21c^2x^5+7cx^6+x^7$. **807.** 70. **808.** а) 7; б) $n+1$. **810.** а) $2x^4+12x^2+2$.

Розділ 7

813. $\frac{1}{6}$. **814.** $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$. **815.** $\frac{1}{7}$. **816.** 0,1. **817.** $\frac{54}{125}$; $\frac{36}{125}$; $\frac{8}{125}$. **818.** а) 0,3; б) 0,2. **819.** а) $\frac{5}{12}$; б) $\frac{7}{12}$. **820.** 0,8. **821.** $\frac{b}{a+b-1}$. **822.** 0,5. **823.** 0,5. **825.** 0,9. **826.** 0,09. **827.** 0,81. **828.** а) $\frac{2}{85}$; б) $\frac{21}{85}$. **829.** 0,4. **830.** а) $\frac{5}{6}$; б) $\frac{1}{6}$. **831.** $\frac{11}{36}$. **832.** а) $\frac{1}{14}$; б) $\frac{1}{7}$; в) $\frac{11}{14}$. **833.** а) 0,25; б) 0,75. **834.** $\frac{2}{9}$ або $\frac{4}{9}$. **835.** $\frac{1}{6}$. **836.** 0,78. **837.** 0,2; 0,2. **838.** $\frac{1}{24}$. **839.** $\frac{1}{1296}$. **840.** $\frac{1}{24}$. **841.** $\frac{1}{2520}$. **842.** а) $\frac{1}{60}$; б) $\frac{1}{10}$. **845.** $\frac{16}{45}$. **846.** а) $\frac{60}{253}$; б) $\frac{15}{253}$. **847.** а) $\frac{1}{330}$; б) $\frac{33}{236}$. **848.** а) $\frac{33}{59}$; б) $\frac{45}{118}$. **849.** а) $C_{14}^4:C_{20}^{10}=\frac{7}{1292}$; б) $C_6^2\cdot C_{14}^8:C_{20}^{10}=\frac{315}{1292}$. **850.** а) $C_m^2:C_{m+n}^2$;

б) $mn:C_{m+n}^2$. **851.** $\frac{5}{9}$. **853.** а) 3 числа з 49; б) рівні ймовірності, бо $C_{15}^7 = C_{15}^8$. **854.** 0,5. **855.** $\frac{1}{27}$. **856.** 0,5. **857.** $\frac{2}{n-1}$. **858.** $\frac{1}{15}$. **859.** $\frac{1}{720}$. **860.** а) $\frac{18}{35}$; б) $\frac{1}{35}$. **861.** Мода 32, медіана 31,5. **862.** 1, 1, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4 — варіаційний ряд, 3 — його розмах, 1 — мода, 2 — медіана. **863.** а) Частота 3, відносна частота 0,05; б) у 3 рази. **864.** 1, 2, 3, 4, 5, 6, 6, 7,7, 8, 8, 8, 9, 13 — варіаційний ряд. **865.** Розмах — 4, мода — 3, медіана — 3. **872.** 34,8 хв. **873.** а) 50,5. **874.** $4\frac{1}{3}$, 5 і 4,5. **876.** 528 г. **877.** Так. **878.** 2,7 %. **879.** $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i$; $\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i^2}$. **880.** Середні квадратичні $\sqrt{0{,}116}$, $\sqrt{0{,}142}$, $\sqrt{0{,}134}$. Найкраще завдання виконав перший фрезерувальник, найгірше другий. **881.** 0,511. **882.** $M(\xi) = 3{,}5$. **883.** $\frac{1}{6}$. **884.** $M(\xi) = 4{,}5$. **885.** У останній клітині має бути $\frac{1}{4}$, бо $1 - 4\cdot\frac{1}{6} - \frac{1}{12} = \frac{1}{4}$. $M(\xi) = 3\frac{5}{6}$. **886.**

Виграш	0	1	20	100
Кількість	939	50	10	1

$M(\xi) = 350$ (грн).

887. а) $M(\varphi) = 2{,}5$; $D(\varphi) \approx 2{,}92$. Така випадкова величина відповідає, наприклад, випаданню очок при киданні правильного грального кубика. **891.** Приблизно такі самі. **893.** Область визначення — множина натуральних чисел, менших за 7. Область значень $\{1; 6; 15; 20\}$. **1077.** Від'ємне. **1078.** Розгляньте $\triangle ABC$, у якого $AC = CB$; $\angle C = 36^\circ$. Позначте на стороні AC точку K таку, що $AB = BK$. Тоді $AB = BK = KC$ і якщо $BC = a$, то $AB = \frac{\sqrt{5}-1}{2}a$, $\sin 18^\circ = \frac{AB}{2BC}$. **1079.** б) Помножте обидві частини рівності на $2\sin\frac{\pi}{7}$. **1080.** а) Помножте обидві частини рівності на $2\cos\frac{\pi}{10}$; б) перетворіть ліву частину у добуток. **1082.** а) $3\sin 2\alpha - \sin 6\alpha = 2\sin 2\alpha - (\sin 6\alpha - \sin 2\alpha)$; б) спростіть вираз $(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^3$. **1083.** а) $\sin\alpha + \sin 5\alpha = 2\sin 3\alpha\cos 2\alpha$; б) врахуйте, що $\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha = 2\operatorname{ctg} 2\alpha$. **1085.** б) Перемножте тричлени $a^2 + b^2 - \sqrt{2}ab$ і $a^2 + b^2 + \sqrt{2}ab$. **1086.** а) $\sin\alpha + \sin\beta + \sin(\pi - \alpha - \beta) = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2} = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$. **1088.** Покажіть, що $(a - b) : b = (\sin\alpha - \sin\beta) : \sin\beta$ і $(a + b) : b = (\sin\alpha + \sin\beta) : \sin\beta$. **1089.** По-

кажіть, що $(a+b):c=(\sin\alpha+\sin\beta):\sin c$ і $\sin\frac{\alpha+\beta}{2}=\cos\frac{c}{2}$.
1091. Нехай $f(x)=\sin x-x+\frac{x^3}{6}$. Покажіть, що $f(0)=0$; і $f'(x)\geq 0$.
1092. Покажіть, що функція $f(x)=x+\cos x$ зростає; отже, $x+\alpha+\cos(x+\alpha)>x+\cos x$. **1093.** Застосуйте нерівність попередньої задачі. **1094.** а) πn, $n\in \boldsymbol{Z}$. **1095.** а) $0{,}5\pi+2\pi n$. Повинні виконуватись рівності $\sin 5x=1$ і $\cos 2x=-1$. **1096.** а) $\frac{\pi}{2}+\pi n$. **1097.** а) πn і $\pm\frac{\pi}{6}+\pi n$. Покажіть, що $\sin 3x=(3-4\sin^2 x)\sin x$. **1098.** а) πn; $\frac{\pi}{20}+\frac{\pi n}{10}$. **1099.** а) πn; $\frac{\pi}{4}+\pi n$; б) $\frac{\pi n}{6}$. **1100.** а) $-\frac{\pi}{10}+2\pi n$; $-\frac{3\pi}{5}+2\pi n$.
1101. Один. **1102.** а) $x=\frac{2\pi}{13}(k+3n)$ і $y=\frac{\pi}{13}(3k-4n)$, $k\in \boldsymbol{Z}$, $n\in \boldsymbol{Z}$.
1103. а) $x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi(k+n)$, $y=\pm\frac{\pi}{6}+\pi(k-n)$. **1104.** а) $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $y=$ $=\frac{\pi}{2}+\pi k$. **1105.** а) $x=\frac{\pi}{2}+\pi n, y=-\pi n; x=\frac{\pi}{6}+\pi n, y=\frac{\pi}{3}-\pi n; x=-\frac{\pi}{6}+\pi n$, $y=\frac{2\pi}{3}-\pi n$. **1106.** а) $\pi n<x<\frac{1}{3}\pi+2\pi n$. **1107.** а) $\frac{5}{6}\pi+2\pi n<x<\frac{13}{6}\pi+2\pi n$.
1108. а) $\boldsymbol{R}$. **1109.** а) $2\pi n<x<\frac{\pi}{2}+2\pi n$ і $\frac{\pi}{2}+2\pi n<x<\pi+2\pi n$. **1110.** 45° і 15°. Складіть рівняння $\left(1+\sqrt{3}\right)\sin(60^\circ-x)=\sin x$. **1111.** 60° і 30°. Якщо x — найменший кут, то $\operatorname{ctg}\frac{x}{2}+\operatorname{ctg}\left(45^\circ-\frac{x}{2}\right)=2\left(\sqrt{3}+1\right)$, звідки $\sin x+\cos x=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$. **1112.** 30°, 45° і 105°. **1113.** 15°, 30° і 135°. Врахуйте, що $2-\sqrt{3}=\operatorname{tg}15^\circ$, див. с. 27. **1114.** Нехай $\angle AMK=x$. Тоді $\angle AKM=160^\circ-x$ і $\frac{\sin x}{\sin(160^\circ-x)}=\frac{AK}{AM}=\frac{AC}{AM}=\frac{\sin 40^\circ}{\sin 80^\circ}=\frac{1}{2\cos 40^\circ}$. Маємо рівняння $2\cos 40^\circ\sin x=\sin(20^\circ+x)$, звідки $x=30^\circ$. **1115.** 45° і 60°. Рівняння $\cos x\cos 45^\circ=\cos(x+15^\circ)$. **1116.** Розгляньте два випадки, що зводяться до рівнянь $\sin 3x-\sin x=0{,}5$ і $\sin 3x+\sin x=0{,}5$.
1117. 151 цифра, бо $\lg 2^{500}=500\lg 2\approx 150{,}5$. **1118.** Порівняйте площу підграфіка функції $y=\frac{1}{x}$ на $[b;\,a]$ з площею прямокутника, сторони якого $a-b$ і $\frac{1}{\sqrt{ab}}$, та з площею трапеції, висота якої $a-b$, а середня лінія $\frac{2}{a+b}$. **1119.** а) 9. **1120.** а) 1 і -1. **1121.** Поділіть обидві частини рівняння на 6^x. **1122.** а) -1, 0, 1; б) -1, -2. **1123.** а) 2; б) 2.
1124. а) 10. Врахуйте, що $x^{\lg 5}=5^{\lg x}$. **1125.** а) $2^{\sqrt{6}}<2^3<3^2$, $2^{\sqrt{6}}<3^2$, $\left(2^{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{2}}<\left(3^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$, $2^{\sqrt{3}}<3^{\sqrt{2}}$; б) Доведіть, що функція $f(x)=\frac{\ln x}{x}$ визначена на $(0;\,\infty)$ і має найбільше значення, коли $x=e$, тобто

$f(e) > f(\pi)$. **1126.** 2. **1127.** $(-5; -4) \cup (-4; -3) \cup \left(\frac{1}{2}; \infty\right)$. **1129.** Покажіть, що $\left(2 \pm \sqrt{2}\right)^3 = 20 \pm 14\sqrt{2}$. **1131.** Скористайтесь формулою переходу. **1132.** $\log_b c \cdot \log_a b = \log_a b^{\log_b c} = \log_a c$. **1133.** 2. **1134.** а) [0; 3]. **1135.** а) [1; ∞]. **1136.** а) (4; ∞). **1137.** Рівняння задовольняє кожна пара (a; a) чисел, при яких вираз a^a має зміст, а також кожна пара $\left(a^{\frac{1}{a-1}}; a^{\frac{a}{a-1}}\right)$, де a — число, відмінне від 0 і 1. Справді, якщо $y = ax$, то $(ax)^x = x^{ax}$, $ax = x^a$, $a = x^{a-1}$, $x = a^{\frac{1}{a-1}}$, $y = ax = a^{\frac{a}{a-1}}$. **1138.** ≈ 231 рік. **1139.** 0. **1140.** –3. **1141.** $\frac{\pi}{6} + 2\pi n$; $\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$. **1142.** 2 кв. од. **1143.** $y = -\sqrt{\frac{5}{11}}(x-3)$. **1144.** $a^2 > 3b$. **1146.** $3KP = 2KM$. **1147.** $6\sqrt{2}$ стоп. **1148.** 60°. **1149.** $5\sqrt{5}$. **1150.** $0{,}4\pi$ см²/с. **1152.** а) Покажіть, що $y = \sqrt{x-1} + 1$. **1153.** $F(x) = x + \ln(x-1) + C$ на $(1; \infty)$, $F(x) = x - \ln(1-x) + C$ на $(-\infty; 1)$. **1154.** $y = -\frac{3}{x} + 4{,}5$, $x > 0$. **1157.** $\frac{2}{3}$ кв. од. **1158.** а) $\frac{8}{3}$ кв. од. **1159.** 4 : 1 :1. **1160.** $\int_a^b \frac{1}{x}dx = \ln b - \ln a = \ln\frac{b}{a} = \ln\frac{b_1}{a_1} = \ln b_1 - \ln a_1 = \int_{a_1}^{b_1} \frac{1}{x}dx$. **1161.** Розгляньте підграфік функції $y = \cos x$ на $[a; b]$. **1162.** а) $\frac{\pi}{2}$. Даний інтеграл виражає площу півкруга радіуса 1.

ДОВІДКОВИЙ МАТЕРІАЛ

Основні позначення

N — множина натуральних чисел
Z — множина цілих чисел
Q — множина раціональних чисел
R — множина дійсних чисел, числова пряма
$[a; b]$ — числовий відрізок
$(a; b)$ — числовий інтервал
a^n — n-й степінь числа a
$\sqrt{a}$ — арифметичний квадратний корінь з числа a
$\sqrt[n]{a}$ — корінь n-го степеня з числа a (якщо число n парне, то

$\sqrt[n]{a} \geq 0$, завжди $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$)

$\log_a b$ — логарифм числа b за основою a
$\lg b$ — десятковий логарифм числа b
$\ln b$ — натуральний логарифм числа b
$\sin\alpha$ — синус кута або числа α
$\cos\alpha$ — косинус кута або числа α
$\mathrm{tg}\,\alpha$ — тангенс кута або числа α
$\mathrm{ctg}\,\alpha$ — котангенс кута або числа α
$\arcsin a$ — арксинус числа a $(-1 \leq a \leq 1)$
$\arccos a$ —арккосинус числа a $(-1 \leq a \leq 1)$
$\mathrm{arctg}\,a$ — арктангенс числа a
$|a|$ — модуль числа a
$\in$ — належить, є елементом множини
$\notin$ — не належить, не є елементом множини
$\subset$ — підмножина множини
$A \cup B$ — об'єднання множин A і B
$A \cap B$ — переріз (спільна частина) множин A і B
$D(f)$ — область визначення функції f
$E(f)$ — область значень функції f
Δx — приріст змінної x
Δf — приріст функції f
y' — похідна функції y

$f'(x)$ — похідна функції f в точці x

$\int\limits_a^b f(x)dx$ — інтеграл функції f на відрізку $[a; b]$

$F(x)\Big|_a^b$ — різниця $F(b) - F(a)$

$n!$ — ен факторіал

P_n — число перестановок з n елементів

A_n^k — число розміщень з n елементів по k

C_n^k — число комбінацій з n елементів по k

$P(A)$ — ймовірність події A

Формули скороченого множення

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2,$$
$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3,$$
$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc,$$
$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2),$$
$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2),$$
$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + b^{n-1}).$$

Степені і корені*

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \qquad \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab},$$
$$a^m : a^n = a^{m-n}, \qquad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}},$$
$$(a^m)^n = a^{mn}, \qquad \sqrt[n]{a^k} = (\sqrt[n]{a})^k,$$
$$(ab)^n = a^n b^n, \qquad \sqrt[n]{a} = \sqrt[nk]{a^k},$$
$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}; \qquad \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}.$$

Логарифми

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y, \qquad a^{\log_a x} = x,$$
$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y, \qquad \log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a},$$
$$\log_a x^p = p \log_a x, \qquad \log_a x = \frac{1}{\log_x a}.$$
$$\log_a a = 1, \log_a 1 = 0,$$

---

* Тут і далі у формулах не наведено області допустимих значень змінних, що входять до цих формул.

Тригонометричні тотожності

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1, \quad \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \quad \mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},$$

$$\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{1}{\mathrm{tg}\,\alpha}, \quad 1 + \mathrm{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha},$$

$$1 + \mathrm{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha};$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta,$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta,$$

$$\mathrm{tg}\,(\alpha \pm \beta) = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha \pm \mathrm{tg}\,\beta}{1 \mp \mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta};$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha, \quad \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha,$$

$$\mathrm{tg}\,2\alpha = \frac{2\mathrm{tg}\,\alpha}{1 - \mathrm{tg}^2\alpha};$$

$$\sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha), \quad \cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha);$$

$$\sin\alpha = \frac{2\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}}{1 + \mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}, \quad \cos\alpha = \frac{1 - \mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1 + \mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}},$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{2\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}}{1 - \mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}};$$

$$\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha \pm \beta}{2}\cos\frac{\alpha \mp \beta}{2},$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha + \beta}{2}\cos\frac{\alpha - \beta}{2},$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = 2\sin\frac{\alpha + \beta}{2}\sin\frac{\beta - \alpha}{2},$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha \pm \mathrm{tg}\,\beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos\alpha\cos\beta}.$$

Прогресії

Арифметична прогресія: $a_1,\ a_1 + d,\ a_1 + 2d,\ a_1 + 3d, \ldots$

$$a_n = a_1 + (n - 1)d,$$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n.$$

Геометрична прогресія: $b_1,\ b_1q,\ b_1q^2,\ b_1q^3,\ b_1q^4, \ldots$

$$b_n = b_1q^{n-1},$$

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1},$$

$$S = \frac{b_1}{1 - q}, \text{ якщо } |q| < 1.$$

Розв'язки рівнянь

$ax + b = 0, \qquad x = -\frac{b}{a};$

$ax^2 + bx + c = 0, \qquad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a};$

$a^x = b, \qquad x = \log_a b;$

$\log_a x = b, \qquad x = a^b;$

$\sin x = a, \qquad x = (-1)^n \arcsin a + \pi n;$

$\cos x = a, \qquad x = \pm \arccos a + 2\pi n;$

$\operatorname{tg} x = a, \qquad x = \operatorname{arctg} a + \pi n.$

Функції

$y = kx + b$ — лінійна; графік — пряма.

$y = ax^2 + bx + c$ — квадратична; графік — парабола з вершиною в точці $\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$.

$y = x^a$ — степенева (мал. 38—40).

$y = a^x$ — показникова (мал. 45).

$y = \log_a x$ — логарифмічна (мал. 54).

$y = \sin x,\ y = \cos x,\ y = \operatorname{tg} x,\ y = \operatorname{ctg} x$ — тригонометричні.

Похідна

Якщо $\Delta x \to 0$, то $\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \to f'(x_0)$.

$C' = 0, \qquad (x^a)' = ax^{a-1}, \qquad (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}},$

$(Cu)' = Cu', \qquad (\sin x)' = \cos x, \qquad (e^x)' = e^x,$

$(u + v)' = u' + v', \qquad (\cos x)' = -\sin x, \qquad (a^x)' = a^x \ln a,$

$(uv)' = u'v + uv', \qquad (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \qquad (\ln x)' = \frac{1}{x},$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}, \qquad (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}, \qquad (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}.$

Якщо $y = f(u)$, де $u = h(x)$, то $y' = y'_u u'$.

Первісна та інтеграл

Якщо $F(x)$ — первісна для функції $f(x)$, а $k \neq 0$, b — сталі, то:

$kF(x)$ — первісна для функції $kf(x)$,

$\frac{1}{k}F(kx+b)$ — первісна для функції $f(kx+b)$.

Дана функція	0	k	x^n, $n \neq -1$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$\sin x$
Одна з її первісних	C	kx	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\ln\lvert x\rvert$	$2\sqrt{x}$	$-\cos x$

Дана функція	$\cos x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\frac{1}{\sin^2 x}$	e^x	a^x
Одна з її первісних	$\sin x$	$\operatorname{tg} x$	$-\operatorname{ctg} x$	e^x	$\frac{a^x}{\ln a}$

$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ — Формула Ньютона — Лейбніца.

Комбінаторика

$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1)n,$

$P_n = n!$

$A_n^k = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1),$

$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!},$

$C_n^k = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots k},$

$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}.$

Таблиця квадратів натуральних чисел від 1 до 159

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
3	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1 521
4	1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2 401
5	2500	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3 481
6	3600	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4 761
7	4900	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6 241
8	6400	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7 921
9	8100	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9 801
10	10 000	10 201	10 404	10 609	10 816	11 025	11 236	11 449	11 664	11 881
11	12 100	12 321	12 544	12 769	12 996	13 225	13 456	13 689	13 924	14 161
12	14 400	14 641	14 884	15 129	15 376	15 625	15 876	16 129	16 384	16 641
13	16 900	17 161	17 424	17 689	17 956	18 225	18 496	18 769	19 044	19 321
14	19 600	19 881	20 164	20 449	20 736	21 025	21 316	21 609	21 904	22 201
15	22 500	22 801	23 104	23 409	23 716	24 025	24 336	24 649	24 964	25 281

Таблиця значень тригонометричних функцій

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\mathrm{tg}\,\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	–	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	–	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
$\mathrm{ctg}\,\alpha$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	–

Щоб знайти значення тригонометричної функції кута, меншого за 45° (див. табл. на с. 249), слід користуватися нумерацією зліва і назвами функцій зверху, а кута, більшого за 45°, — нумерацією справа і назвами функцій знизу.

Таблиця наближених значень тригонометричних функцій

Градуси	Синуси	Косинуси	Тангенси	Котангенси	Градуси
0	0,00000	1,00000	0,00000	∞	90
1	0,01745	0,99985	0,01746	57,28996	89
2	0,03490	0,99939	0,03492	28,63608	88
3	0,05234	0,99863	0,05241	19,08114	87
4	0,06976	0,99756	0,06993	14,30067	86
5	0,08716	0,99619	0,08749	11,43005	85
6	0,10453	0,99452	0,10510	9,51436	84
7	0,12187	0,99255	0,12278	8,14435	83
8	0,13917	0,99027	0,14054	7,11537	82
9	0,15643	0,98769	0,15838	6,31375	81
10	0,17365	0,98481	0,17633	5,67128	80
11	0,19081	0,98163	0,19438	5,14455	79
12	0,20791	0,97815	0,21256	4,70463	78
13	0,22495	0,97437	0,23087	4,33148	77
14	0,24192	0,97030	0,24933	4,01078	76
15	0,25882	0,96593	0,26795	3,73205	75
16	0,27564	0,96126	0,28675	3,48741	74
17	0,29237	0,95630	0,30573	3,27685	73
18	0,30902	0,95106	0,32492	3,07768	72
19	0,32557	0,94552	0,34433	2,90421	71
20	0,34202	0,93969	0,36397	2,74748	70
21	0,35837	0,93358	0,38386	2,60509	69
22	0,37461	0,92718	0,40403	2,47509	68
23	0,39073	0,92050	0,42447	2,35585	67
24	0,40674	0,91355	0,44523	2,24604	66
25	0,42262	0,90631	0,46631	2,14451	65
26	0,43837	0,89879	0,48773	2,05030	64
27	0,45399	0,89101	0,50953	1,96261	63
28	0,46947	0,88295	0,53171	1,88073	62
29	0,48481	0,87462	0,55431	1,80405	61
30	0,50000	0,86603	0,57735	1,73205	60
31	0,51504	0,85717	0,60086	1,66428	59
32	0,52992	0,84805	0,62487	1,60033	58
33	0,54464	0,83867	0,64941	1,53987	57
34	0,55919	0,82904	0,67451	1,48256	56
35	0,57358	0,81915	0,70021	1,42815	55
36	0,58779	0,80902	0,72654	1,37638	54
37	0,60182	0,79864	0,75355	1,32704	53
38	0,61566	0,78801	0,78129	1,27994	52
39	0,62932	0,77715	0,80978	1,23490	51
40	0,64279	0,76604	0,83910	1,19175	50
41	0,65606	0,75471	0,86929	1,15037	49
42	0,66913	0,74314	0,90040	1,11061	48
43	0,68200	0,73135	0,93252	1,07239	47
44	0,69466	0,71134	0,96569	1,03553	46
45	0,70711	0,70711	1,00000	1,00000	45
Градуси	cos	sin	ctg	tg	Градуси

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

ЗМІСТ

10 КЛАС

11 КЛАС

Р о з д і л 4. *Похідна та її застосування*

Р о з д і л 5. Первісна та інтеграл

Р о з д і л 6. Елементи комбінаторики

Р о з д і л 7. Початки стохастики

Навчальне видання

БЕВЗ Григорій Петрович

АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ

Підручник для 10—11 класів загальноосвітніх навчальних закладів

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України

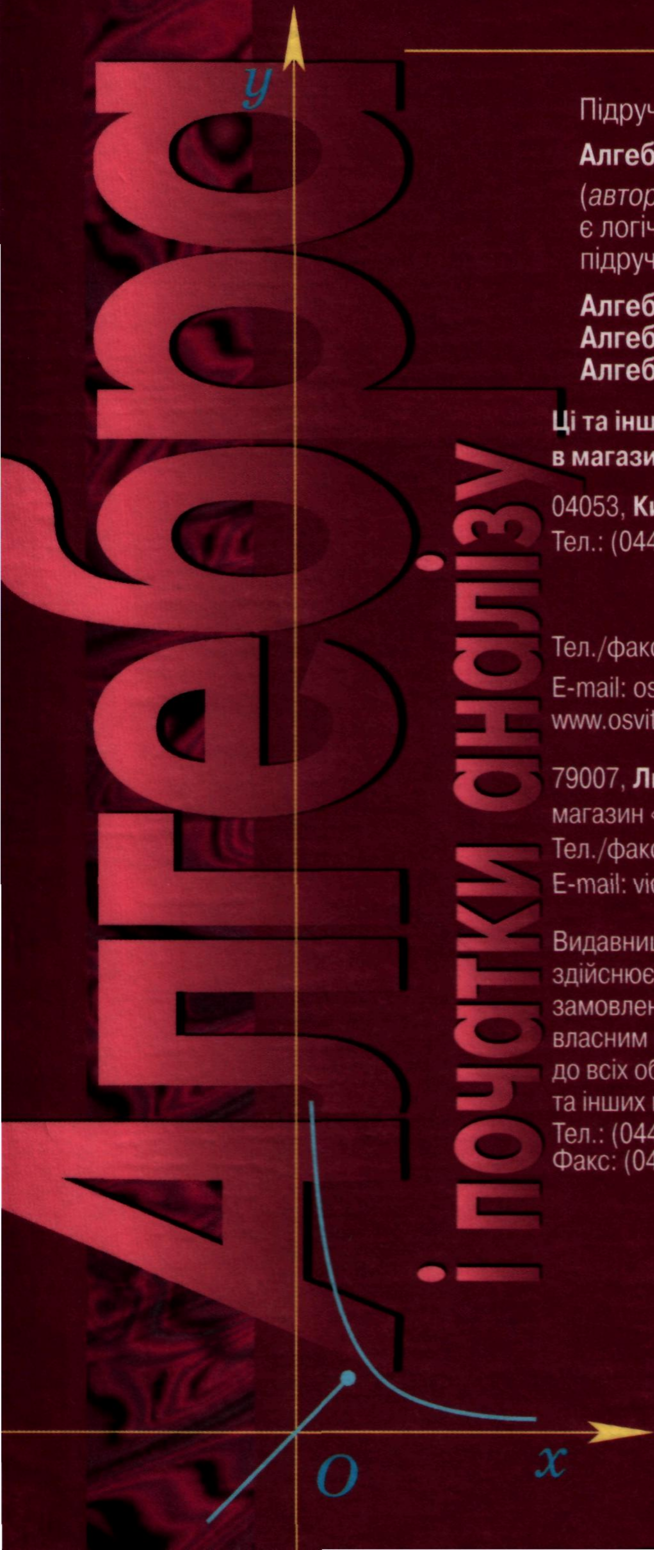
Відповідальна за випуск *Є. М. Коденко*
Редактор *Г. В. Криволапова*
Художній редактор *М. Ю. Крюченко*
Технічний редактор *Ц. Б. Федосіхіна*
Комп'ютерна верстка *О. М. Білохвост*
Коректори *Г. А. Зацерковна, Н. А. Чаплюк*

Підписано до друку 22.06.05. Формат 60×90/16. Папір офс. Гарнітура шкільна. Друк офс. Ум. друк. арк. 16. Ум. фарбовідб. 16,5. Обл.-вид. арк. 12,3. Тираж 10 000 пр. Вид. № 36540. Зам. № 5-652.

Набір та верстка комп'ютерного центру видавництва «Освіта»

Видавництво «Освіта», 04053, Київ, вул. Юрія Коцюбинського, 5. Свідоцтво ДК № 27 від 31.03.2000 р.

Віддруковано з готових діапозитивів ТОВ «Оберіг» 61140, м. Харків, проспект Гагаріна, 82/68.



Підручник

Алгебра і початки аналізу, 10 — 11

(*автор Г. П. Бевз*)
є логічним продовженням
підручників:

Алгебра, 7
Алгебра, 8
Алгебра, 9 цього ж автора.

Ці та інші видання можна придбати в магазинах видавництва «Освіта»:

04053, **Київ**, вул. Юрія Коцюбинського, 5.
Тел.: (044) 486-93-46 (*магазин*)
486-93-21 (*служба збуту*)
486-55-89 (*книга–поштою*)
Тел./факс: (044) 486-54-44 (*маркетинг*)
E-mail: osvita@kv.ukrtel.net
www.osvitapublish.com.ua

79007, **Львів,** вул. Шпитальна, 30,
магазин «Глобус»
Тел./факс: (0322) 72-34-03
E-mail: viddillv@gal.ukrpack.net

Видавництво «Освіта»
здійснює доставку
замовленої літератури
власним коштом
до всіх обласних центрів
та інших міст України
Тел.: (044) 486-93-21
Факс: (044) 486-50-20

ISBN 966-04-0590-1

9 789660 405905