МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

А. Є. КОНВЕРСЬКИЙ

ЛОГІКА

(ТРАДИЦІЙНА ТА СУЧАСНА)

2-ге видання

Підручник
для студентів вищих навчальних закладів

*Затверджено
Міністерством освіти і науки України
як підручник для студентів
вищих навчальних закладів*

Київ
«Центр учбової літератури»
2008

ББК 87.4я73
К 64
УДК 16(075.8)

Рекомендовано
Вченою радою філософського факультету
Київського національного університету
імені Тараса Шевченка

Рецензенти:
Жоль К. К. – доктор філософських наук, професор;
Хоменко І. В. – доктор філософських наук, професор.

Конверський А. Є.
К 64 Логіка (традиційна та сучасна): Підручник для студентів вищих навчальних закладів. – К.: Центр учбової літератури, 2008. – 536 с.

ISBN 978-966-364-735-7

Підручник складається із двох книг: «Традиційна логіка» і «Сучасна логіка». У першій книзі «Традиційна логіка» у систематизованому, дидактично витриманому стилі розкривається метод логіки, аналізуються основні форми і закони мислення.

Значна увага приділяється логічному аналізу природної мови, який підводить до розуміння побудови формалізованої логічної мови, а також забезпечує емпіричну основу для опису висновків і доведень у межах спеціальних формалізованих мов.

У другій книзі «Сучасна логіка» розглядаються передумови виникнення сучасної логіки, обґрунтовується поділ класичної логіки на логіку висловлювань і логіку предикатів, здійснюється типологія і аналіз формально-логічних теорій у межах логіки висловлювань і логіки предикатів.

Ця книга містить також досить ретельний опис витоків некласичної логіки, аналіз канонічних систем багатозначної логіки. На підставі логіко-філософського аналізу в ній характеризуються підрозділи системи модальної логіки.

Запропонований підручник сприятиме прищепленню елементів культури мислення, а також підвищенню інтересу до сучасної логічної науки.

Розрахований на студентів вищих навчальних закладів.

ISBN 978-966-364-735-7

ЗМІСТ

КНИГА ДРУГА. **СУЧАСНА ЛОГІКА**

КНИГА ПЕРША
ТРАДИЦІЙНА ЛОГІКА

Розділ I. ПРЕДМЕТ ЛОГІКИ

Розділ II. МИСЛЕННЯ І МОВА

Розділ III. ФОРМАЛІЗАЦІЯ ЯК МЕТОД ЛОГІКИ

Розділ IV. СЕМАНТИЧНИЙ АНАЛІЗ ВИРАЗІВ ПРИРОДНОЇ МОВИ

Розділ V. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ІМЕН

Розділ VI. ФУНКЦІОНАЛЬНИЙ АНАЛІЗ У ЛОГІЦІ

Розділ VII. ІСТОРИЧНИЙ ХАРАКТЕР ЛОГІКИ ЯК НАУКИ

Розділ VIII. ПОНЯТТЯ

Розділ IX. СУДЖЕННЯ

Розділ X. УМОВИВІД

Розділ XI. АРГУМЕНТАЦІЯ

ВСТУП

Підручник написаний на основі досвіду читання курсу "Логіка" в Київському національному університеті імені Тараса Шевченка.

За останній час опубліковано багато підручників з "Логіки" як в Україні так і за її межами. Кожен із сучасних підручників має свої плюси і свої мінуси. Але загалом для цих підручників характерні, в основному, дві точки зору на природу і місію логіки як науки і навчальної дисципліни. Одна точка зору полягає в трактовці логіки як суми правил управління мисленнєвою діяльністю, а друга – в зведенні логіки до числень.

Ці дві точки зору випливають із неясного усвідомлення характеру і структури логічної науки. Логіка є єдиною наукою, не дивлячись на те, що в ній ми виділяємо традиційну логіку і сучасну. Традиційна логіка і сучасна логіка своїм предметом мають вивідне знання, а методом формалізацію. Існування двох хронологічних етапів цієї нау ки обумовлено ступенем досконалості методу формалізації.

В традиційній логіці метод формалізації застосовувався у напівформальному вигляді, а в сучасній логіці цей метод застосовується в чистому вигляді.

Звідси і різниця в переліку центральних категорій у традиційній логіці і сучасній логіці. В традиційній логіці такими категоріями є "поняття", "судження", "умовивід", а в сучасній логіці: висловлювання і терміни. Також вони відрізняються і завданнями, що розв'язують. Традиційна логіка формує культуру мислення, а сучасна логіка досліджує функціонування мислення в мові науки, іншими словами аналізує принципи побудови наукових теорій, принципи трансформації наукових теорій, принципи обґрунтування наукових теорій.

Коли ми зазначаємо, що традиційна логіка формує культуру мислення, то це означає, що вона є засобом побудови доведень, спростувань, засобом ведення дискусій, засобом боротьби проти еклектики і софістики, як це було і 2000 років потому.

Але це зовсім не означає, що написання підручника з традиційної логіки повинно бути повторенням "Логіки Пор-Рояля" і т.п.

Сьогодні підручник з традиційної логіки повинен враховувати досягнення сучасної логіки, але там і настільки наскільки це доречно, там де засоби аргументації можуть бути підсилені технічно, там де засоби аналізу за допомогою логічної техніки стають прозорішими.

В протилежному випадку, а саме завдяки обтяженню матеріалу традиційної логіки сучасними логічними засобами, веде до втрати специфіки традиційної логіки і втрати ефективності її інструментарію.

Досвід написання підручників з традиційної логіки є достатнім. Ці підручники можна критикувати, можна високо оцінювати, але вони разом є висвітленням природи традиційної логіки, її засобів, її завдань.

В той час підручників з сучасної логіки обмаль. Спроба написання таких підручників більше схожа на монографічне висвітлення проблем сучасної логіки.

А відомо, що підручник це особливий жанр.

В даному підручнику робиться, по-перше, спроба подати сучасну логіку у вигляді підручника, а по-друге, зв'язати традиційну і сучасну логіку єдиною сюжетною лінією, тобто, показати, що це два етапи єдиної науки.

Зрозуміло, що підручник має вади, не все знайшло досконале висвітлення, але з чогось потрібно починати.

РОЗДІЛ І

ПРЕДМЕТ ЛОГІКИ

1. Визначення логіки як науки

Логіка як самостійна наука має багатовікову історію. Слово ***«логіка»*** походить від грецького слова ***«logos»***, що в перекладі означає: слово, смисл, думка, мова.

Найчастіше слово ***«логіка»*** вживається в таких значеннях:

1) ***закономірність виникнення, існування та розвитку речей і явищ об'єктивного світу*** (*«логіка речей», «логіка подій», «логіка історичного процесу»* тощо);

2) ***здатність людини відображати навколишній світ за допомогою мислення*** (тобто здатність людини до мислення);

3) ***послідовність, несуперечливість, обгрунтованість міркувань*** (*«у нього гарна логіка», «у нього немає логіки»*);

4) ***спеціальна навчальна дисципліна, яка протягом багатьох віків була обов'язковим елементом європейської системи освіти;***

5) ***особлива наука, що вивчає мислення.***

Вказуючи на те, що *«Логіка є особливою наукою про мислення»*, — цим самим наголошують, що мислення як об'єкт дослідження не є прерогативою лише логіки.

Окрім логіки мислення вивчають ще й такі науки, як фізіологія вищої нервової діяльності, психологія, філософія. Кожна з цих наук досліджує свій, специфічний аспект мислення.

Наприклад, фізіологія вищої нервової діяльності аналізує мислення з урахуванням тих матеріальних процесів, що становлять фізіологічну основу мислення. Психологія розглядає мислення (поряд з емоціями, волею) як один із компонентів внутрішнього (духовного) світу людини. Кібернетика вивчає процес мислення через моделювання його у вигляді спеціальних схем, за допомогою яких здійснюються сприйняття, запам'ятовування і переробка інформації з метою передавання її іншим об'єктам.

Логіка ж досліджує мислення з боку тих закономірностей, якими керується людина у процесі пізнання істини. Точніше: логіку цікавить, як функціонує, «живе» істинне знання, як можна із раніше встановлених і перевірених істин, не звертаючись у кожному конкретному випадку до практики, а лише застосовуючи особливі правила та закони мислення, одержувати нові істини.

Одним з головних завдань логіки, як науки про мислення, є те, що логіка бере до уваги лише форму, спосіб отримання нового знання. Вона досліджує спосіб отримання нового знання, не пов'язуючи форму знання з його конкретним змістом.

Як граматика вивчає форми окремого слова і форми поєднання слів у реченні, відволікаючись від конкретного змісту мовних висловів, як математика розглядає кількісні і просторові відношення поза конкретними матеріальними предметами, так і логіка аналізує форми окремих думок і форми їх поєднання поза конкретним змістом понять, суджень, умовиводів.

Щоб обгрунтувати зазначене, звернемося до прикладу. Візьмемо два міркування:

1. *Усі зірки світять власним світлом.*

   Сонце — зірка.

   Сонце світить власним світлом.

2. *Будь-який трикутник — геометрична фігура.*

   Прямокутний трикутник належить до множини трикутників.

   Прямокутний трикутник — геометрична фігура.

У кожному з цих міркувань двома думками обгрунтовується третя. За змістом, як видно, ці міркування різні. Одне належить до астрономії, а друге — до математики. Але спосіб зв'язку складових частин змісту в обох міркуваннях той самий: ***«Якщо предмет має певну властивість і якщо все, чому притаманна ця властивість, має деяку другу властивість, то предмет, про який йдеться, також має і цю другу властивість».***

Враховуючи зазначену особливість аспекту мислення, який є об'єктом вивчення логіки, треба зауважити, що логіка складає частину духовної культури саме тому, що формує культуру мислення. Це формування є одним із чинників практичного значення логіки, і це, фактично, зумовило універсальність логіки як навчальної дисципліни.

Що ж означає поняття «культура мислення»? Насамперед — ***усвідомлене відношення до процесу міркування, тобто вміння правильно будувати доведення, спростування, проводити аналогії, висувати гіпотези, знаходити й усувати помилки у своїх і чужих міркуваннях.*** Подібно до того, як знання правил граматики дає нам можливість досконало будувати слова, речення, фрази, так і знання правил та законів логіки, забезпечуючи культуру мислення, зумовлює необхідну систематичність, послідовність, обгрунтованість і переконливість наших міркувань.

Під впливом власного або набутого досвіду в кожної людини формуються певні елементи культури мислення (без спеціального вивчення законів і правил логіки). Але людина, яка не вивчала логіки, може «відчувати» логічні помилки в міркуваннях, свідомо ж і кваліфіковано їх позбутися вона не спроможна.

Проілюструємо це на прикладах. Візьмемо навмисно помилкове міркування, відоме ще з давніх часів:

Ліки, які приймає хворий, є добро.
Чим більше робити добра, тим краще.

Отже, ліків слід приймати якомога більше.

Недоречність отриманого висновку випливає із безпідставного ототожнення зовсім не тотожних понять. Йдеться про слово *«добро»*, що вживається у вихідних думках, які передують висновку. У першій думці слово *«добро»* має інший смисл оцінки конкретної речі, дії (приймати ліки, що призначив лікар, для конкретної людини, у конкретному відношенні — корисно). Тут слово *«добро»* означає практичну доцільність певної речі або вчинку. У другій думці слово *«добро»* вживається в загальноетичному плані, як протилежність поняттю *«зло»*.

Розглянемо ще одне міркування, про яке повідомляє давньогрецький філософ Протагор (481—411 рр. до н.е.).

«Між учнем, якого звали Еватл, і вчителем мудрості та красномовства Протагором була укладена угода, відповідно до якої платню за навчання Протагор одержить після того, як Еватл закінчить навчання. Нею буде гонорар Еватла за перший виграний судовий процес .

Але закінчивши навчання, Еватл не брався за ведення судових процесів і тому вважав, що не зобов'язаний платити Протагору винагороду за навчання. Тоді вчитель, погрожуючи звернутися до суду, сказав Еватлу:

— Судді або присудять тебе до сплати гонорару, або не присудять. В обох випадках ти повинен будеш сплатити. У першому випадку — за вироком суду, в другому — відповідно до нашої угоди, бо це буде перший виграний тобою процес.

На це Еватл відповів так:

— Ні в першому, ні в другому випадку я не заплачу. Якщо мене засудять до сплати, то я не заплачу, оскільки програв свій перший судовий процес. Якщо ж мене не засудять до сплати гонорару, то я не заплачу згідно з вироком суду».

Помилковість цього міркування полягає в тому, що поняття *«угода»* береться в межах одного і того ж міркування у різних відношеннях. У першому випадку Еватл повинен був би виступати юристом, який програв судовий процес, у другому випадку — відповідачем, якого суд виправдав.

2. Формальні та змістовні правила міркування

Наведені приклади яскраво свідчать про те, наскільки важливо знати правила та закони мислення і вміти їх застосовувати у практиці міркувань. Отже, фундамент культури мислення складають правила і закони мислення. Недаремно дуже поширеним став термін «логічне мислення», тобто мислення, яке відповідає спеціальним правилам. Фактично наше мислення керується двома видами правил: ***формальними та змістовними*** (методологічними).

Щодо різних сфер людської діяльності формальне правило можна визначити так: ***формальним називається правило, застосування якого передбачає даним (відомим) тільки форму того, що перетворюється згідно з цим правилом, незалежно від знання (або наявності) змісту перетворюваного.***

Формальні правила логіки застосовують до окремих думок, тобто, до формул, що виражають ці думки. ***Думка, в якій фіксується відображення предмета через сукупність його суттєвих ознак, називається поняттям*** (наприклад, *число, дім, планета*), а ***думка, в якій фіксується зв'язок предмета та його ознаки — судженням*** (наприклад, «*Планета — космічний об'єкт*», «*Число не є реальним об'єктом*»). ***Тобто, застосовуючи формальні правила логіки, ми звертаємося до форми понять і суджень.***

Звідси для перетворення понять і суджень за формальними правилами слід виділити їх форму у «чистому» вигляді, тобто, у відокремленому від змісту перетворюваних понять і суджень.

Під змістом поняття розуміють його смисл (ознаку об'єкта, відображуваного в понятті) і значення (сукупність об'єктів, що є носіями цієї ознаки). У свою чергу, зміст судження складають його смисл (знання того, що і про що конкретно в ньому стверджується) і значення (його істинність або хибність).

Змістовні правила беруть до уваги саме зміст того, що згідно з ними перетворюється.

Розглянемо на прикладі відмінність формальних правил від змістовних. Звернемося до правил, що перетворюють форму складних суджень (тобто суджень, що складаються з простих, поєднаних сполучниками *«і», «або», «якщо, ... то»* тощо).

Візьмемо два судження:

1. Варшава — столиця Франції.

2. Якщо Варшава — столиця Франції, то $2 \times 2 = 4$.

До цих суджень можна застосувати одне з формальних правил логіки, яке допоможе одержати нове судження або висновок. Це правило має вигляд:

$$\boldsymbol{x, x \supset y \models y},$$

де $\boldsymbol{x}$ і $\boldsymbol{y}$ — позначають прості судження, $\supset$ — позначає сполучник природної мови *«якщо ..., то»*, $\models$ позначає відношення слідування («випливання»). Коли позначимо перше судження через $\boldsymbol{x}$, а друге через $\boldsymbol{x \supset y}$, то відповідно до наведеного правила отримаємо судження: «$2 \times 2=4$» — $\boldsymbol{y}$. При цьому не має значення, чи істинні ***1-ше*** і ***2-ге*** судження, чи мають вони взагалі який-небудь смисл. Так, очевидно, що перше судження хибне, а друге навряд чи хто прийме за таке, що має смисл у звичайному розумінні цього слова. У цьому судженні немає смислу між простими судженнями, пов'язаними сполучником *«якщо..., то»*. Наведений приклад показує, що ***для застосування формального правила істинність суджень та їхній зв'язок за смислом не суттєві.*** Це характерно для будь-якого формального правила логіки.

Отже, смисл суджень (те, що і про що говориться в ньому) та його значення (істинність та хибність) можна залишити поза увагою як таке, що не є суттєвим для застосування формальних правил логіки. А якщо це так, то, позначивши судження *«Варшава — столиця Франції»* буквою ***A***, а судження *«2 × 2=4»* буквою ***B***, отримаємо формулу складного судження: *«Якщо Варшава столиця Франції, то 2 × 2=4»* у вигляді виразу ***«якщо A, то B»***. Виділивши форму суджень, можемо застосувати до них формальне правило ***«x, x ⊃ y |= y»***, зовсім не знаючи ні смислу, ні значень суджень ***«A»*** та ***«якщо A, то B»***.

Коли виявиться, що судження ***«A»*** та судження ***«якщо A, то B»*** істинні, то обов'язково буде істинним і ***«B»***. У випадку їх хибності істинність ***«B»*** не гарантована.

Отже, головною властивістю формальних правил є можливість їх застосування на основі знання тільки форми понять, суджень.

Процес мислення, підпорядкований формальним правилам логіки (або формально-логічним правилам), є формально-логічно правильним. Іншими словами, якщо хтось, розмірковуючи, із суджень форми ***«A»*** і ***«якщо A, то B»*** робить висновок ***«B»***, то він міркує формально-логічно правильно. А якщо хтось намагається зробити висновок із суджень ***«B»*** і ***«якщо A, то B»***, то він міркує формально-логічно неправильно, оскільки немає такого правила за яким можна було б зробити подібний висновок.

Формально-логічні правила є важливим об'єктом дослідження логіки. Вона їх систематизує і будує з них різні системи, які називаються логіками (наприклад, класична логіка висловлювань, класична логіка предикатів). Якщо взяти для прикладу класичну логіку висловлювань, то в ній формально-логічних правил безліч. Але в звичайному процесі мислення використовується невелика кількість формальних правил, крім того, багато з них набувається нашим мисленням стихійно, без спеціального вивчення. Річ у тому, що логіка не тільки впливає на формування культури мислення, вона необхідна насамперед для побудови та аналізу наукових теорій, для розв'язання ряду науково-технічних проблем, де й знаходять своє повне застосування ці правила. Можна знати всі системи формальних правил, але мислити незадовільно з погляду логіки.

Отже, одних формальних правил для повноцінного процесу мислення замало.

Окрім формальних правил, у процесі міркування використовуються і змістовні правила, які враховують зміст понять і суджень. ***До змістовних правил належать правила неповної індукції, правила аналогії, пояснення, передбачення тощо.***

Особливістю змістовних правил є те, що ми їх не можемо застосовувати до суджень і понять, зміст яких нам невідомий. Запис змістовних правил за допомогою символів не повинен вводити в оману відносно їх змістовного характеру.

Таким чином, якщо схема (набір формул) застосовується у будь-яких випадках без звертання до змісту, то вона виражає ***формальне правило***. А якщо існує хоча б один випадок, коли схема не може бути застосована без посилання на зміст, то вона виражає ***змістовне правило***.

Візьмемо для *прикладу* правило неповної індукції, яке має вигляд послідовності формул:

$$\boldsymbol{P(a_1), P\ (a_2), \ldots, P(a_n) \models \forall x\ P(x)}.$$

Цю схему можна прочитати так: *«З того, що об'єкт* $(\boldsymbol{a_1})$ *має ознаку* ***P****, об'єкт* $(\boldsymbol{a_2})$ *має ознаку* ***P*** *і т.д. аж до факту, що об'єкт* $(\boldsymbol{a_n})$ *має ознаку* ***P****, випливає, що будь-який об'єкт* $(\boldsymbol{x})$ *має ознаку* ***P****, тобто* $\forall \boldsymbol{x}\ \boldsymbol{P}\ (\boldsymbol{x})$*»*.

Залежність цього правила від змісту понять і суджень, до яких воно застосовується, визначається тим, що застосування його до певного змісту має сенс, а застосування його до іншого змісту (за такою ж самою схемою) призводить до явно хибного висновку. Проілюструємо це на прикладах.

Наприклад, про людей, яких ми зустріли на вулиці, ми цілком слушно стверджуємо, що перший зустрічний має здатність до мислення, другий — має здатність до мислення, ***n***-на людина здатна мислити. За правилом неповної індукції робимо висновок: *«Для будь-якої-людини властива здатність мислити»*. Але, припустимо, що перша людина знає, як пройти до Києво-Печерської Лаври, друга — теж і ***n***-на теж знає дорогу до Києво-Печерської Лаври. Чи можемо ми в цьому випадку застосувати правило неповної індукції? Звичайно, ні. Оскільки отримаємо хибний висновок: *«Будь-яка людина знає дорогу до Києво-Печерської Лаври»*.

Тільки враховуючи зміст суджень, можна ефективно використовувати це правило.

Таким чином, знання та доречне застосування формальних і змістовних правил є фундаментом культури мислення. А саме у формуванні культури мислення полягає один з аспектів практичного значення логіки, крім того, що логіка є теоретичним підгрунтям ряду галузей сучасної техніки.

Цілком слушно виникає запитання: *що становить теоретичне значення логіки?* Аби відповісти на це запитання, необхідно показати, що таке логіка як наука. А це передбачає визначення предмета, методу логіки та систематизацію головних етапів її розвитку як науки.

3. Абстрактне мислення і його характерні особливості

Звернемося до найбільш уживаних визначень логіки як науки:

«Логіка — це філософська наука про форми, в яких протікає людське мислення, та про закони, яким воно підпорядковується»,

«Логіка — наука про форми, закони та методи пізнання об'єктивного світу на ступені абстрактного мислення, а також про мову як засіб такого пізнання».

«Логіка — наука про закони і форми правильного мислення».

У наведених визначеннях предметом логіки є абстрактне мислення. Це зумовлює необхідність аналізу його особливостей, специфіки як одного із ступенів пізнання, визначення характеру зв'язку з іншими ступенями пізнання.

За межами спеціального вивчення поняття *свідомість, мислення, абстрактне мислення* розглядаються як синоніми. І це не заважає нам їх ефективно використовувати. Але для цілей нашого аналізу це не годиться, що й спонукає нас дати чіткі визначення цим поняттям.

***Мислення* — це активний процес діяльності людського мозку.**

***Свідомість* — це процес ідеального відображення дійсності.** Свідомість включає в себе мислення, знання, емоції, інтуїцію, пам'ять, волю. Тому кожна людина має своє бачення світу, властиву лише їй свідомість.

***Абстрактне мислення* — це один із ступенів процесу пізнання, якому передує чуттєвий ступінь пізнання.**

Мета чуттєвого пізнання — дати досліджуваний предмет у його безпосередності, наявності, зафіксувати його у вигляді факту чуттєвої наявності. Реалізує цю мету чуттєве пізнання через свої форми: відчуття, сприйняття, уявлення.

Предмети та явища навколишньої дійсності, впливаючи на органи чуття, викликають різноманітну інформацію (зорову, слухову, дотикову та ін.), що й складає зміст такого рівня чуттєвого пізнання, як *відчуття.*

Отже, ***відчуття є відображенням окремих властивостей предметів та явищ дійсності*** (*колір, звук, запах тощо*), ***які діють на наші органи чуття.***

За допомогою ***сприйняття*** (як наступного рівня чуттєвого пізнання) ***отримують інформацію про предмети та явища навколишнього світу у їх цілісному вигляді.*** Так, сприйняття квітки дає нам не тільки інформацію про її окремі властивості (*колір, запах тощо*), а насамперед формує зоровий образ про неї як своєрідний предмет, відмінний від її середовища.

Необхідною умовою формування інформації про предмет у вигляді ***відчуття і сприйняття є безпосередня наявність предмета чи явища.***Тільки тоді можна виділити окремі властивості предмета або ж характеризувати предмет у його цілісності.

Але ми можемо отримати інформацію про предмет і не споглядаючи його. Відомості про предмети та явища, які сприймалися раніше, можуть відновлюватися в нашій уяві у вигляді різних образів. Ось ці образи і є уявленнями.

Отже, ***уявленням називають таку форму чуттєвого пізнання, яка продукує інформацію про***

предмет у вигляді наочних образів. Це дає можливість говорити, наприклад, про знайому людину, яка в даний момент відсутня, сперечатися про явище, яке ми сприймали колись, тощо.

На рівні уявлення ми намагаємося подолати хаотичне розмаїття відомостей про предмет, отриманих за допомогою відчуття і сприйняття, встановити тотожність між предметом і його наочним образом, нехтуючи відчуттям і сприйняттям як менш досконалими формами чуттєвого пізнання.

Але для уявлення, як і для чуттєвого пізнання в цілому, характерним є брак диференціації одиничного і загального, суттєвого і несуттєвого, випадкового і закономірного. А без такої диференціації неможливий генезис знання про предмет. Це й зумовлює необхідність такого ступеня пізнання, яким є абстрактне мислення. Саме слово **«абстракція»** походить від латинського слова ***abstractio*** (усунення, відокремлення, відвертання, відволікання). Про яке ж відвертання, відволікання йдеться, коли ми користуємося терміном ***«абстрактне мислення»?*** Відповідь на це питання, а також визначення абстрактного мислення дамо далі. Зараз же зупинимося на аналізі характерних особливостей абстрактного мислення, серед яких виділяють ***узагальненість, опосередкованість, нерозривний зв'язок з мовою.***

За допомогою органів чуття, як уже зазначалося, людина пізнає світ у сукупності його різноманітних якостей і властивостей. Перед мисленням постає завдання систематизувати результат, отриманий на чуттєвому рівні пізнання. Суть цієї систематизації полягає у відокремленні несуттєвого, випадкового, другорядного від суттєвого, необхідного. Таке відокремлення називають абстракцією у вигляді узагальнення.

Отже, ***узагальнення — це така риса абстрактного мислення, яка розкриває його здатність характеризувати предмети і явища через сукупність їх суттєвих ознак.*** На рівні чуттєвого пізнання предмет постає у вигляді наочного образу, а на рівні абстрактного мислення — у вигляді системи знання, тобто поняття.

Наприклад, науки, що вивчають людину, відкривають різноманітні її якості і властивості. Кожен із власного досвіду знає, що немає двох однакових людей. Люди різняться за кольором шкіри, національністю, здібностями, психологією тощо. Але в розмаїтті цих ознак шляхом узагальнення мислення виділяє найсуттєвіше, що визначає людину як об'єкт, відмінний від усього іншого: «жива істота, здатна виробляти знаряддя праці».

Другою важливою рисою абстрактного мислення є його опосередкований характер. ***Опосередкованість — це фіксація факту незалежності знання від предмета***. Тобто, виникнувши, знання набуває певної відносної самостійності. З ним ми можемо поводитися як з чимось реально існуючим, і, що найголовніше, ми його використовуємо як фундамент та інструмент для добування нового знання. Тобто, у процесі пізнання настає такий момент, коли не безпосередньо сам предмет є джерелом знання, а саме знання про нього є основою для отримання нового, глибшого знання.

Наприклад, люди за різних обставин і в різні часи безпосередньо спостерігали, що деякі предмети не тонуть у воді. А лише Архімед, полишивши чуттєву сторону цього явища, відкрив залежність, яка лежить в його основі і яку згодом сформулював у вигляді знаменитого закону. Отже, Архімед відкрив те, що лежить за межами органів чуття, спираючись на здобуте раніше знання.

А ось інший приклад. Дізнавшись, що ваш приятель перебуває зараз у Варшаві, ви без посилання на чуттєвий досвід стверджуєте, що його немає зараз у Києві.

Тобто, аналізуючи раніше отримане і перевірене знання, ми маємо можливість, не звертаючись щоразу до безпосереднього досвіду, мати нове знання. Можна стверджувати, що саме цей аналіз і є суттю опосередкованості як властивості абстрактного мислення.

Окрім того, абстрактне мислення має ще одну особливість — нерозривний зв'язок з мовою. ***Мова — це безпосередня реальність думки***. Навіть тоді, коли ми не розмовляємо, не записуємо наші думки, ми все одно втілюємо їх у слова, речення, сукупність речень. Завдяки мові ми не тільки фіксуємо отримане знання, а й передаємо інформацію один одному, здійснюємо зв'язок між поколіннями. Оскільки в мові втілюється не тільки знання як результат пізнавальної діяльності, а й спосіб його отримання, то людина, вивчаючи мову, оволодіває і певними прийомами міркування. ***Тільки враховуючи це, можна на***

мовному матеріалі дослідити головні форми мислення, зв'язок між формою думки та її змістом, типи зв'язку між формами мислення як результатами абстрактної діяльності людини, і саме ця обставина робить нерозривний зв'язок мови і мислення визначальним щодо узагальнення та опосередкованості як характерних ознак абстрактного мислення.

Тобто, будь-яке слово і узагальнює, і опосередковує (оскільки виступає представником певного об'єкта), і фіксує певну думку про предмет. Тому абстрактне мислення можна назвати мовним мисленням, в мову — практичним мисленням, підкреслюючи цим, що на цьому рівні пізнання й діяльності головним виразником і акумулятором знання є мова. Мається на увазі не тільки розмовна мова, а й мова моделей інженера, креслень архітектора, мова науки тощо.

Отже, як ми вже зазначали, предмет логіки — абстрактне мислення, яке по суті поглинається мовою, а це означає, що логіка врешті-решт вивчає мову.

Насправді ж логіка не вивчає структури мови як такої, тобто її граматичних властивостей. Граматичні структури безпосередньо не виражають логічних структур. Вони виражають загальні і специфічні принципи побудови природних мов і є предметом лінгвістики. ***На відміну від лінгвістики логіка вивчає не саму природну мову, а закономірності, правила та головні прийоми реалізації і функціонування мислення в такій матерії, як мова.***

Отже, ***предметом логіки є абстрактне мислення, що має специфічні форми і підпорядковується властивим йому правилам і законам.***

4. Поняття про форму мислення

Знаючи характерні особливості абстрактного мислення, можна дати йому таке визначення. ***Абстрактне мислення — це ступінь процесу пізнання, який слідує за чуттєвим пізнанням.*** Суть цього слідування полягає в тому, що абстрактне мислення полишає (абстрагує) хаотичну інформацію про предмет, яку нам дають органи чуття. В цьому розумінні абстрагуватися — не означає відволікатися від предмета: це означає відволікатися від чуттєвого ступеня пізнання, який виконав свою функцію, зафіксувавши данність предмета в сукупності чуттєвих образів і сигналів. Відповідно до цього стає зрозумілим, що абстрактне мислення не віддаляє нас від предмета, а наближає до нього завдяки систематизації чуттєвої інформації про предмет і вилученню суттєвих зв'язків, властивих природі предмета.

Абстрактне мислення має властиві йому форми і підпорядковується відповідним законам. ***Формами абстрактного мислення є поняття, судження, умовивід.***

Кожна думка має форму і зміст. ***Змістом думки є те, про що ми мислимо. А формою думки є спосіб зв'язку структурних елементів або складових частин думки.*** Особливістю форми думки є те, що вона незалежна, інваріантна від змісту думки.

Одна і та сама форма може містити різний зміст. У цій незалежності є водночас і перевага, і недолік. Перевага в тому, що різноманітний зміст ми можемо стандартизувати, а значить, подавати його у вигляді системи. Недоліком є те, що при цьому ми відсуваємо на задній план тонкощі змістовних відтінків одержаної інформації.

Ця особливість форми думки (тобто її незалежність, інваріантність щодо змісту) визначає етимологію слова *«логічний»* (логічний аналіз, логічний підхід, логічна форма тощо). Логічний — означає «здатний утримувати незмінним, інваріантним зміст думки за усіх перетвореннь і перестановок». А оскільки (як ми зазначали раніше) будь-яка думка реалізується у мові, то властивість речень мови при будь-яких перетвореннях зберігати незмінними їх значення (це можуть бути оцінки: *«істинно», «хибно». «правдоподібно», «правильно побудовано», «коректно»* тощо) є їх логічною властивістю. У цьому розумінні ми говоримо: логіка мови, логіка теорії тощо.

Отже, ***логічні форми — це види мисленнєвих структур, які незалежні від конкретного змісту думки. Вони — своєрідний будівельний матеріал, з якого будуються конкретні міркування.*** Це й зумовлює те, що логічні форми (або форми мислення) складають інформативний, змістовний бік міркування.

Зауважимо, що тут немає, як здається на перший погляд, суперечності: форма думки одночасно є і змістом. Справа в тому, що форму мислення (вид структури думки) ми можемо розглядати як змістовну характеристику міркування в тому розумінні, що кожна з форм мислення — поняття, судження, умовивід — у логіці розглядається як відповідний спосіб фіксації в мисленні інформації про предмети та явища.

Наприклад, візьмемо таку думку: *«Квадрат є геометрична фігура»*. З одного боку ми маємо конкретний зміст думки (тобто, що собою являє *«квадрат», «геометрична фігура»* тощо), незалежний від форми думки, яку можна зафіксувати у вигляді: «щось про щось стверджується», а з іншого — відношення між предметом думки і ознакою предмета думки є тим змістом, який цікавить логіку як науку, що вивчає способи утримання незмінними, інваріантними оцінки думок.

Тобто, форми мислення ми можемо розглядати як чисту структуру щодо конкретного змісту і (з іншого боку) як інформацію (змістовну характеристику) про спосіб зв'язку структурних елементів думки. Кожній формі мислення притаманний свій тип зв'язку структурних елементів думки.

Візьмемо для прикладу дві думки:

«Квадрат» і «дім». За змістом ці думки різні, вони належать до різних сфер людської діяльності. *Квадрат* — це прямокутник з рівними сторонами, *дім* — це будівля, яка пристосована для постійного мешкання. Що ж їх об'єднує? Виявляється, що ці дві різні за змістом думки мають однакову форму побудови. У них різні предмети фіксуються єдиним способом, а саме, як взаємозв'язок їхніх суттєвих ознак.

Отже, ***форма мислення, яка відображає предмети та явища через сукупність суттєвих ознак, називається п о н я т т я м.***

Розглянемо інші дві думки: «*Число — ідеальний об'єкт»* і *«Дерево не тоне у воді»*. Хоча за змістом ці дві думки різні, але мають спільну форму. Вони фіксують наявність або відсутність у предмета певної ознаки. Тобто із цих прикладів слідує, що ***форма мислення, яка відображає зв'язок між предметом та його ознакою, називається с у д ж е н н я м.***

Наведемо такі приклади:

1. *Будь-яка рослина не може існувати без води.*

Дерево — рослина.

Отже, дерево не може існувати без води.

2. *Усім мешканцям нашого будинку добре відомі історичні місця Києва.*
Мій приятель мешкає у нашому будинку.
Отже, мій приятель — знавець історичних місць Києва.

У цих міркуваннях різний зміст мислиться однаково як необхідний зв'язок між відомими судженнями і новим судженням. Таку ***форму мислення, завдяки якій із одного або кількох відомих суджень ми отримуємо нове судження, називають у м о в и в о д о м.***

5. Основні формально-логічні закони

Варто зауважити, що логіку цікавлять не тільки форми мислення, а й ті суттєві відношення, які виникають між ними у процесі міркування. Іншими словами, не будь-яка сукупність понять, суджень, умовиводів дає нам ефективні міркування, а лише та сукупність, де між формами мислення є послідовний, несуперечливий, обгрунтований зв'язок. Ці ознаки ефективних міркувань забезпечують логічні закони.

Отже, ***л о г і ч н и м з а к о н о м називають, внутрішній суттєвий, необхідний зв'язок між логічними формами у процесі побудови міркувань.***

Існує чотири головні логічні *закони:*

— ***закон тотожності;***
— ***закон виключеного третього;***
— ***закон протиріччя;***
— ***закон достатньої підстави.***

Закон тотожності

Арістотель у своїй праці ***«Метафізика»*** зазначає, що неможливо нічого мислити, ***«якщо не мислити (кожен раз) що-небудь одне»***[1].

Цей закон тотожності можна сформулювати ще й так: ***«Будь-яка думка протягом даного міркування (за***

[1] *Аристотель*. Метафизика. — М., 1934. — С. 186.

будь-яких перетворень) повинна зберігати один і той самий зміст». Звідси випливає важлива вимога: забороняється тотожні думки приймати за різні, а різні — за тотожні.

У випадку порушення закону тотожності стає можливим ототожнення різних думок і розрізнення тотожних. Це зумовлено особливостями природної мови.

Оскільки природна мова дає можливість висловлювати одну і ту саму думку через різні мовні форми, то це призводить до підміни вихідного смислу понять і до заміни однієї думки іншою. Мається на увазі, що коли ми вкладемо в одну і ту саму думку, зафіксовану навіть одним і тим самим мовним виразом різний зміст, то все одно правильного висновку не отримаємо.

Звернемося до відомого софізму:

6 і 3 є парне і непарне.
6 і 3 є дев'ять.
Отже, 9 є парне і непарне.

Зовні форма міркування правильна, але якщо проаналізувати хід міркування, то ми виявимо помилку, пов'язану з порушенням вимог закону тотожності. Дане міркування грунтується на такій властивості, як транзитивність: ***«якщо дві величини рівні третій, то вони рівні між собою».***

Хоча зовнішня форма міркування здається правильною, але отриманий висновок *«9 є парне і непарне»* ніяк не узгоджується з реальним станом речей. Це відбулося тому, що у процесі міркування сполучник ***«і»*** вживається у різних зняченнях. У першому випадку сполучник ***«і»*** означає об'єднання, співіснування чисел *6 і 3,* а у другому — арифметичну дію додавання. Саме за цієї причини і був отриманий хибний висновок.

Суть закону тотожності Арістотель прокоментував у «Метафізиці» так: *«Без сумніву, що ті, хто мають намір брати участь один з одним у розмові, повинні скільки-небудь розуміти один одного. Якщо цього не відбувається, яка можлива у них один з одним участь у розмові? Тому-то кожне з імен повинно бути зрозуміле і розмовляти про що-небудь, при цьому — не про кілька речей, а тільки про одну; якщо ж у нього кілька значень, то по-*

трібно роз'яснити, яке з них (у нашому випадку) мається на увазі. Отже, якщо хто говорить, що це ось є і (водночас) його немає, він заперечує те, що стверджує, так що за його словами (виходить що) маючи не має того значення, яке воно має: а це неможливо»[1].

По суті наведені слова ***Арістотеля*** є вимогами закону тотожності до процесу міркування, які повинні забезпечувати визначеність, незмінність думок, що вживаються в тому чи іншому конкретному міркуванні. Оскільки, як ми з'ясували раніше, думка реалізується насамперед у мові, а мова, за словами ***Л.Вітгенштейна***, має властивість «перевдягати думки»[2], тобто здатна одну і ту ж саму думку подавати різними мовними виразами, то це зумовлює можливість підміни однієї й тієї ж думки іншою, що спричиняє двозначність, невизначеність і, зрештою, руйнування міркування.

Але це не має нічого спільного з якісною і кількісною визначеністю, постійністю речей та явищ об'єктивного світу, з відносним спокоєм рухомих речей дійсності. Виводити суть закону тотожності (що конкретна думка протягом конкретного міркування повинна бути тотожною сама собі) з того факту, що в речах об'єктивного світу при всій його плинності, змінюваності можна знайти моменти постійності, спокою, незмінності, просто некоректно (хоча у багатьох підручниках з логіки 40—60-х років ця точка зору мала місце).

Закон тотожності не говорить про те, чи справді речі об'єктивного світу при всій їх змінюваності, рухомості залишаються самими собою. Це не його прерогатива.

Закон тотожності застерігає: перш ніж починати обговорення будь-якого питання, потрібно чітко визначити його зміст, а в процесі обговорення треба чітко витримувати головні визначення цього змісту, не підміняти даний зміст іншим, не змішувати понять, не припускати двозначностей.

Тобто, закон тотожності говорить не про те, що речі при всій їх змінюваності в деяких моментах тотожні самі по собі, а про те, що думка, зафіксована в певному мовному

---

[1] *Аристотель*. Метафизика. — С.187.

[2] *Витгенштейн Л*. Логико-философский трактат. — М., 1958. — С. 38.

виразі, за всіх перетворень повинна залишатися тотожною сама по собі в межах конкретного міркування.

Іншими словами, йдеться про змінюваність мовних виразів певної думки, різних аспектів, нюансів конкретного міркування, а не про змінюваність речей, подій, зафіксованих у цій думці.

Отже, цей закон можна сформулювати так:

Закон тотожності — це така вимога до процесу міркування, яка передбачає, що вкладати в думку про один і той самий предмет, взятий в один і той самий час, в одному і тому самому відношенні, можна лише один і той самий зміст.

Тобто, закон тотожності не забороняє нам міркувати в різних випадках про один і той самий предмет, враховуючи різні його ознаки. Але він вимагає, щоб в усіх міркуваннях про цей предмет міркували як саме про цей предмет, скільки б разів він не з'являвся в думці і як би думка про цей предмет не пов'язувалася б з іншими думками про нього самого або про інші предмети.

За інших умов зруйнується процес міркування, що призводить до непорозумінь між людьми під час обміну інформацією.

Для прикладу візьмемо таке міркування:

«Хтось стверджує, що логіка виникає на певному етапі розвитку наукового пізнання, тобто тоді, коли виникає необхідність систематизувати результати пізнання. А хтось стверджує, що логіка виникає разом з виникненням людини, яка володіє мовою і мисленням».

Зрозуміло, співрозмовники, яким належать ці думки, не зможуть порозумітися. І саме тому, що вони в одну і ту саму думку, взяту в один і той самий час, в одному і тому самому відношенні, вкладають різний зміст. Під словом «логіка» перший розуміє поняття про науку, яка вивчає форми і закони мислення, а другий — здатність людини відображати довкілля за допомогою мислення.

Таким чином, закон тотожності не означає, що наші поняття фіксують у собі раз і назавжди встановлений і незмінний зміст. Саме цінність поняття як форми мислення полягає в тому, що воно щоразу здатне фіксувати все нове і нове знання про предмет, збагачуючи зміст нашого пізнання. Але в тому випадку, коли встановлено і домовлено, в якому обсязі і відношенні слід брати зміст даного поняття, то у даному міркуванні це поняття слід брати лише в цьому смислі, інакше в наших міркуваннях не буде ніякої визначеності, зв'язку і послідовності.

Закон протиріччя

Коли глибше осягнути зміст закону тотожності, то стає очевидним, що із його змісту випливає така вимога до процесу міркування:

не можуть бути одночасно істинними два судження, з яких одне дещо стверджує про предмет, а друге — заперечує те саме про цей же предмет, у той самий час, в одному і тому ж самому відношенні.

Ця вимога в логіці отримала назву ***«закон протиріччя»***.

Арістотель, який відкрив цей закон, визначає його так: *«Неможливо, щоб суперечливі твердження були водночас істинні»; «Неможливо, щоб одне і те саме водночас було і не було притаманне одному і тому самому, і в одному і тому самому смислі»*.

Взявши за основу арістотелівське визначення закону протиріччя, можна дати таке стилізоване його формулювання:

з а к о н   п р о т и р і ч ч я — це така вимога до процесу міркування, яка передбачає, що два протилежні судження не можуть бути одночасно істинними; у крайньому разі одне з них буде обов'язково хибним, а то й обидва можуть бути хибними. Яке саме з цих суджень хибне, а яке — істинне, логіка не встановлює.

Розглянемо такі два судження:

1. Будь-який мешканець нашого будинку має вищу освіту;

і

2. Жоден із мешканців нашого будинку не має вищої освіти.

Щоб визначити, яке з них істинне необхідно звернутися до перевірки. Логіка ж у цій ситуації стверджує:

1) ці два судження не можуть бути одночасно істинними;

2) якщо встановлена істинність одного з протилежних суджень, то з цього обов'язково випливає хибність другого;

3) якщо встановлена хибність одного з них, то друге може бути будь-яким.

Враховуючи вищезазначене, можна виділити структури суджень, які будуть знаходитися у відношенні протиріччя.

1. «а є Р» і «а не є Р»;

2. «Жодне S не є Р» і «Усі S є Р»;

3. «Усі S є Р» і «Деякі S не є Р»;

4. «Жодне S не є Р» і «Деякі S є Р»

де ***а*** і ***S*** — символи, що вказують відповідно на індивідуальний предмет і на клас предметів думки у судженні, а ***Р*** — позначає ознаку предмета думки. Якщо відомо, що ознака предмета думки ***Р*** стверджується і заперечується відносно предмета думки ***S*** в одному і тому самому смислі, в один і той самий час, то незалежно від конкретного змісту, з якого абстраговані ці структури, вони репрезентуватимуть протилежні судження.

Наприклад, якщо ***S*** — місто, ***Р*** — населений пункт, то, підставивши ці поняття у будь-яку з наведених структур, отримаємо судження, які не можуть бути одночасно істинними:

1. «Київ — населений пункт» і «Київ не є населеним пунктом».

2. «Жодне місто не є населеним пунктом» і «Будь-яке місто є населеним пунктом».

Щоб ефективно використовувати закон протиріччя, необхідно чітко враховувати умови його застосування (тобто, що дві протилежні думки, висловлені з одного і того ж самого приводу, не можуть бути істинними в один і той же самий час і в одному й тому ж відношенні).

Іншими словами, ми зовсім не порушимо закону протиріччя, якщо стверджувальне і заперечувальне судження віднесемо до різних часових періодів або застосуємо в різних відношеннях. Не буде протиріччя між судженнями *«Київ — столиця України»* і «Київ не є столицею України», якщо *Київ* у першому судженні є назвою міста, а в другому — назвою готелю, або якщо у судженні говориться про один і той же самий предмет, але взятий у різний час (певний час столицею України був Харків).

Також не буде порушенням закону протиріччя, коли стверджувальне і заперечувальне судження беруться в різних відношеннях: *«Мій приятель гарно знає англійську мову»* і *«Мій приятель погано знає англійську мову»*.

У першому судженні знання англійської мови порівнюється з відмінними оцінками мого приятеля як студента вузу, а в другому — з можливістю його працювати професійним перекладачем.

Отже, ***закон протиріччя фіксує відношення між протилежними судженнями, яке називається*** **логічним протиріччям**, і зовсім не стосується протиріччя як відношення між протилежностями однієї сутності, тобто діалектичного протиріччя, що є джерелом розвитку.

У підручниках з логіки та в довідковій літературі стверджується відмінність між логічним протиріччям і діалектичним, але в одночас проводиться думка, що витоки логічного протиріччя сягають буття. З того загальновизнаного факту, що знання, яке б воно не було абстрактне, у кінцевому результаті є відображенням буття, недоречно робити висновок, що будь-який фрагмент результату пізнання є зліпком відповідного фрагменту буття.

З цих же позицій ведеться критика ***Гегеля***, який нібито не розумів суті закону протиріччя і оголошував його зайвим. ***Гегель*** виступав проти онтологізації цього закону (як і інших логічних законів) і проти його абсолютизації. Дещо різка форма висловлювань вченого була зумовлена тим, що він хотів наголосити на несумісності діалектичного світобачення, мислення з метафізичним, яке базувалося насамперед на абсолютизації законів логіки.

Отже, знання закону протиріччя та вміння його застосовувати дисциплінує процес міркування, застерігає мислення від недоречностей, які можуть виникнути при його порушенні.

Закон виключеного третього

У тій же «Метафізиці» ***Арістотель*** формулює ще один закон логіки — ***закон виключеного третього***: *«однаковим чином нічого не може бути посередині між двома суперечливими (один одному) судженнями, але про один (суб'єкт) кожен окремий предикат необхідно або заперечувати, або стверджувати»*[1]. ***Інакше кажучи, закон виключеного третього є така вимога до процесу міркування, з якої***

[1] *Аристотель*. Метафизика. — С.23.

випливає, що з двох суперечливих суджень, в одному з яких стверджується те, що заперечується у другому, — одне обов'язково істинне.

С у п е р е ч л и в и м и називаються судження, які не можуть бути одночасно ні істинними, ні хибними.

Зазначимо, що закон виключеного третього можна застосовувати лише до таких суджень:

а) одне судження щось стверджує щодо одиничного предмета, а друге — це ж саме заперечує щодо цього ж предмета, взятого в одному і тому ж самому відношенні, в один і той же самий час: ***«А є Р»*** і ***«А не є Р»***;

б) одне судження щось стверджує відносно всього класу предметів, а друге — це саме заперечує відносно деякої частини цього класу предметів: ***«Всі S є Р»*** і ***«Деякі S не є Р»***;

в) одне судження щось заперечує відносно всього класу предметів, а друге — це саме стверджує відносно деякої частини предметів цього класу: ***«Жодне S не є Р»*** і ***«Деякі S є Р»***.

Якщо порівняти логічні структури пар суджень, до яких застосовується закон протиріччя, з парами суджень, до яких застосовується закон виключеного третього, то очевидно, що усі судження, які підкоряються закону виключеного третього, підкоряються і закону протиріччя, але не всі судження, які підкоряються закону протиріччя, підкоряються закону виключеного третього.

У свій час ***Арістотель*** висловлював сумніви відносно застосування закону виключеного третього до суджень, що вживаються у майбутньому часі. Наприклад, *«Завтра відбудеться морський бій»* і *«Завтра не відбудеться морський бій»*. Філософ міркував так: «у даний час немає причини ні для того, щоб ця подія відбулася, ні для того, щоб не відбулася». І приходить до висновку, що закон виключеного третього можна застосовувати лише до суджень, вжитих у минулому або теперішньому часі.

Закон виключеного третього не можна застосовувати також до суджень із порожнім суб'єктом: *«Сьогоднішній король Франції лисий»* і *«Сьогоднішній король Франції не лисий»*.

Сумніви ***Арістотеля*** щодо меж застосування закону виключеного третього спонукали вчених XX ст. до розвитку нового напрямку в логіці. Голландський математик і логік ***Лейтзен Брауер*** критично переглядає можливості закону виключеного третього. ***Л. Брауер*** є одним із фундаторів ***інтуїціоністської логіки, в якій не діє закон виключеного третього.***

Інтуїціоністи, заперечуючи поняття актуальної нескінченності (тобто завершеної), приймають поняття потенціальної нескінченності (тобто незавершеної). І, з огляду на це, ми не можемо з необхідністю стверджувати: «*Усім елементам певної множини властива ознака* ***Р***» чи «*Жодному елементу цієї множини не властива ознака* ***Р***», — виходячи з того факту, що конкретному елементу ***а*** цієї множини властива ознака ***Р***.

Справа в тому, що ряд елементів нескінченний, а тому перевірити всі альтернативи неможливо.

Закон виключеного третього діє в арістотелівській двозначній логіці. Тобто, у тих логічних схемах, які грунтуються на абстракції, ***що будь-яке судження може бути або істинним, або хибним і не може бути істинним і хибним одночасно.*** За межами цієї абстракції в дію вступають інші логічні принципи.

Закон достатньої підстави

Огляд головних законів логіки цілком виправдано завершує характеристика закону достатньої підстави. Це зумовлено двома причинами.

По-перше, історично цей закон був відкритий і сформульований значно пізніше перших трьох, а саме у XVII ст. ***Готфрідом Лейбніцем.***

По-друге, за своєю функціональною призначеністю він є своєрідним підсумком трьох попередніх законів, оскільки характеризує таку рису міркування, як обгрунтованість. Відомо, що логіка виробляє і вдосконалює логічний інструментарій для того, щоб наші міркування були логічно обгрунтованими. Іншими словами, обгрунтованість вбирає в себе визначеність, послідовність і несуперечливість міркування, які забезпечуються законами тотожності, протиріччя та виключеного третього.

У своїй «Монадології» ***Г. Лейбніц*** так формулює ***закон достатньої підстави***: ***«Жодне явище не може виявитись істинним або дійсним, жодне твердження — справедли-***

вим без достатньої підстави, чому справа йде саме так, а не інакше».[1]

Існує декілька еквівалентних формулювань закону достатньої підстави, які найчастіше вживаються: ***«будь-яка істинна думка повинна мати достатню підставу», «щоб визначити яке-небудь судження істинним, необхыдно вказати достатню підставу», «будь-яке істинне судження повинно бути обгрунтоване іншими судженнями, істинність яких уже встановлена».***

З наведених визначень закону достатньої підстави очевидно, що в пізнавальній або практичній діяльності людини настає час, коли замало мати істинне твердження — необхідно щоб воно було обгрунтованим. ***Обгрунтованим судженням є судження, істинність якого дається нам з необхідністю. Логічним обгрунтуванням якого-небудь твердження є зіставлення цього твердження з іншими твердженнями як основою, і перенесення ознак основи на це твердження.***

Наприклад, математик не просто стверджує, що сума внутрішніх кутів трикутника дорівнює ***180є,*** а будує міркування, яке передбачає зіставлення цього твердження з відповідними визначеннями і постулатами (тобто, визначення прямого кута, постулат про паралельність тощо). І саме це зіставлення переконує у тому, що сума внутрішніх кутів трикутника, справді, дорівнює сумі двох прямих кутів.

У назві четвертого закону логіки, а також у його формулюванні, фігурує термін ***«достатня підстава».*** Іноді у філософській літературі (маючи на увазі зауваження ***Гегеля*** відносно терміна ***«достатня підстава»***) пропонувалося назвати цей закон ***«закон підстави»*** без ***«достатньої».*** ***Гегель*** у праці ***«Наука логіки»*** пише: *«Що підстава достатня — додавати це, власне кажучи, цілком зайве, бо це є зрозумілим саме по собі; те, для чого підстава була б недостатньою, не мало б ніякої підстави, тоді як усе повинно мати свою достатню підставу».*[2]

Річ у тому, що ***Гегель*** розглядає підставу як одну з категорій своєї філософської системи, а не як категорію логіки. Іншими словами, у нього інший зріз аналізу. Не звер-

[1] *Лейбниц Г.* Избранные сочинения. — М., 1908. — С. 345.
[2] *Гегель Г. В. Ф.* Наука логики. — М., 1971. — С.73.

таючи уваги саме на цю деталь гегелівського підходу до категорії «підстава», справді можна прийти до думки, що називати підставу достатньою є зайвим. Якщо є достатня підстава, то, отже, є і недостатня підстава. Але недостатня підстава не є, власне кажучи, вже підставою. Значить підставою може бути тільки достатня підстава. Прояснити цю ситуацію може лише ретельніший аналіз процесу логічного обгрунтування знання.

По-перше, процес обгрунтування реалізується через свої види: доведення, пояснення, передбачання, інтерпретацію та їх різноманітні модифікації. Тобто, не існує якоїсь універсальної процедури обгрунтування. Це лише абстракція від названих конкретних видів обгрунтування.

По-друге, кожен вид обгрунтування надає обгрунтовуваному (положення, яке ми обгрунтовуємо) відповідну характеристику (доведення — достовірність, пояснення — аподиктичність, інтерпретація — репрезентативність).

По-третє, підстава, з якою співставляється твердження, яке необхідно обгрунтувати, це не тільки знання, істинність якого не викликає сумніву, а ще й відповідні логічні правила, які реалізують конкретний вид обгрунтування (доведення, пояснення тощо) і які забезпечують перенесення відповідної характеристики з основи на обгрунтовуване.

Тільки враховуючи цей складний характер підстави, що використовується у процесі саме логічного обгрунтування знання, є сенс говорити про достатню підставу і про закон достатньої підстави.

Закон достатньої підстави регулює процес обгрунтування, тому треба мати на увазі, що він вимагає того, щоб наші думки у будь-якому міркуванні були внутрішньо пов'язані одна з одною, випливали одна з одної. Бути послідовним означає не тільки проголосити те чи інше положення істинним, а й продемонструвати, чому саме воно істинне.

Таким чином, закон достатньої підстави фіксує співвідношення власне достатньої підстави і того положення, яке потрібно обгрунтувати (обгрунтовуваного). Залежно від мети, характеру і меж наукового дослідження чи практичної діяльності це співвідношення може бути різним.

Найпоширенішим випадком такого співвідношення є аналіз логічних зв'язків певного твердження з раніше встановленими істинними положеннями. Якщо певне твердження логічно випливає із цих положень, то воно визнається обгрунтованим і таким же прийнятним, як і ці положення. Реалізацією такого співвідношення є різні модифікації такої логічної процедури, як доведення.

Найбільш вживаними є кілька видів співвідношення достатньої підстави і положення, яке необхідно обгрунтувати.

1. Дослідження висунутого твердження з погляду можливостей його застосування до всього класу об'єктів або ж до споріднених класів.

2. Вивчення цього твердження з позицій його емпіричного підтвердження або спростування.

Як правило, таке вивчення передбачає виведення наслідків із положення, яке треба обгрунтувати, та подальшу їх емпіричну перевірку. Залежно від наявності емпіричного підтвердження або спростування дане твердження приймається як обгрунтоване або ж відхиляється. Загальновизнаним є факт, що будь-яке наукове положення хоча б потенційно передбачає своє спростування і способи підтвердження.

3. Включення обгрунтованого положення до сукупності фундаментальних положень (принципів) теорії.

Це включення передбачає внутрішню реконструкцію теорії, елементом якої є це положення, за допомогою введення у теорію нових означень і угод, уточнення основних понять і принципів теорії, визначення меж і можливостей їх поширення. У цьому випадку обгрунтування висловленого положення грунтується не тільки на емпіричній перевірці наслідків із нього самого, а й на зв'зках даної теорії з іншими теоріями.

Наведені факти співвідношення достатньої підстави і обгрунтовуваного в реальному процесі міркування реалізуються через такі види обгрунтування, як пояснення, передбачення, інтерпретація.

Різноманітність видів обгрунтування свідчить, що закон достатньої підстави вказує на наявність для кожної істини достатньої підстави лише у найзагальнішому вигляді. Тому, зрозуміло, що цей закон не може вказати, якою саме повинна бути ця підстава у кожному конкретному випадку, та у чому її витоки : у сприйнятті факту чи посиланні на теоретичне положення.

Закон достатньої підстави нічого не говорить і про те, яким повинно бути це сприйняття і посилання. Він висловлює тільки те, що для будь-якого істинного твердження існує і повинна бути зазначена достатня підстава, завдяки якій воно визнається істинним.

Підсумовуючи характеристику законів логіки, зазначимо, що у підручниках з логіки та деякій довідковій літературі часто підкреслюється, що закони логіки можна записати у вигляді формул класичної логіки:

Закон тотожності — А = А, або А ⊃ А;

Закон протиріччя — $\overline{A \wedge \overline{A}}$ ***;***

Закон виключеного третього — $A \vee \overline{A}$ ***;***

Закон достатньої підстави — А ⊃ В.

Цей запис законів у вигляді формул дуже умовно висловлює їх суть. Наприклад, якщо сказати що закон виключеного третього — це формула $A \vee \overline{A}$, це, по суті, майже нічого не сказати. Тому що закон виключеного третього — це методологічний принцип, який має цілу низку вимог до процесу міркування, і зводити його до зв'язку беззмістовних логічних термінів (***диз'юнкції «∨», і заперечення «–»***), які фігурують у формулі закону, буде значним перебільшенням.

На користь запису законів у вигляді формул наводилася думка про те, що формули $A \supset A$; $A \vee \overline{A}$; $\overline{A \wedge \overline{A}}$ ***— це завжди істинні висловлювання*** *у класичній логіці.* ***А завжди істинні висловлювання у класичній логіці називають законами.*** Таку точку зору можна спростувати при записі закону достатньої підстави у вигляді формули. Формула ***А ⊃ В*** не є завжди істинною, а відповідно, й не є логічним законом. Можна сказати, що неможливість подати закон достатньої підстави у вигляді формули була своєрідним свідченням того, що основні формально-логічні закони (або закони логіки) мають зовсім іншу природу, ніж завжди істинні формули, і виконують своєрідну функцію у процесі побудови та аналізу наших міркувань.

Запис законів логіки у вигляді формул і переконання, що це велике досягнення сучасної логіки, з одного боку, збіднює суть і призначення цих законів, а з іншого — залишає поза увагою справжнє призначення та можливості сучасної логіки як ефективного інструменту дослідження та обгрунтування наукового пізнання.

Як уже зазначалося, головним завданням логіки є вивчення законів, правил, якими керується людина при отриманні вивідного знання. ***Вивідним називається знання, яке отримане опосередкованим шляхом.*** Ця опосередкованість полягає у співставленні раніше набутого знання з новим знанням. Саме співставлення не є хаотичним нагромадженням різних тверджень, це є певна струнка будова, яка передбачає суворе дотримання правил і законів логіки.

Більшість знань, якими володіє людина, мають опосередкований характер. І навіть та частина знань, яка має вигляд безпосередніх констатацій фактів типу «*Сніг — білий*», «*Трикутник — геометрична фігура*», — в кінцевому рахунку носить опосередкований характер. Оскільки визначення їх очевидно істинними чи хибними передбачає відомим тільки смисл термінів «*є*», «*сніг*», «*білий*», «*трикутник*», «*геометнична фігура*».

6. Істинність і формальна правильність міркування

Для отримання вивідного знання необхідно доводити або спростовувати конкретні твердження, заперечувати хибні думки, давати визначення поняттям, здійснювати різні види типологій. Кожна із названих процедур передбачає суворе дотримання відповідних логічних правил.

Загальновизнаним є положення, ***що для того, щоб у конкретному міркуванні вивідне знання було істинним, необхідно дотримуватися таких умов:***

а) вихідні твердження обов'язково повині бути істинними;

б) під час міркування між вихідними твердженнями необхідно встановити зв'язок, який відповідає законам і правилам логіки.

Нехтуючи однією із вимог, ми можемо отримати у конкретному міркуванні істинний висновок випадково.

Продемонструємо це на прикладах.

I. *В усіх європейських державах — республіканська форма правління.*
Англія — держава Європи.
____
Отже, Англія — республіка.

II. *В усіх європейських державах — республіканська форма правління.*
Франція — держава Європи.

Отже, Франція — республіка.

В обох міркуванях перше вихідне твердження є хибним, але логічний зв'язок між ними відповідає логічним правилам (саме ***правилу І-ї фігури простого категоричного силогізму***). Оскільки у цих міркуваннях порушена вимога щодо обов'язкової істинності вихідного знання, то висновок у другому міркуванні випадково істинний. ***Тобто, із хибного вихідного твердження висновок можна отримати будь-який.***

Наведемо приклад, де вихідні твердження є істинними, але до них неправильно застосовані правила логіки:

Будь-який університет є вищим навчальним закладом.
Консерваторія — не університет.

Отже, консерваторія не є вищим навчальним закладом.

У цьому прикладі обидва вихідні твердження істинні, але пов'язані вони з порушенням правил логіки. Тому висновок є хибним. Тут порушено правило першої фігури простого категоричного силогізму, відповідно до якого менший засновок не повинен бути заперечувальним.

Таким чином, вивідне знання буде істинним тоді і тільки тоді, коли вихідні твердження міркування будуть істинними, і до них будуть правильно застосовані правила та закони логіки. Тобто, істинність висновку міркування — це відповідність висновку міркування дійсності (*якщо висновок міркування істинний, то він відповідає дійсності, а якщо висновок міркування хибний, то він не відповідає дійсності*)***, а правильність міркування — це відповідність міркування правилам і законам логіки.***

Дотримання цих вимог забезпечує отримання вивідного знання, істинність якого не викликає сумніву.

РОЗДІЛ II

МИСЛЕННЯ І МОВА

1. Визначення мови

Наведений аналіз предмета логіки як науки свідчить про те, що логіка вивчає форми мислення та відношення між ними.

Ф о р м и   м и с л е н н я* — *це вихідні елементи, з яких будуються міркування і в яких акумулюється та функціонує знання,

а   в і д н о ш е н н я між формами мислення — це логічні закони, згідно з якими будується знання у вигляді окремих міркувань, системи міркувань, теорій, фрагментів теорій тощо.

Завдання логіки як науки полягає в тому, щоб подати свій предмет, форми і закони мислення у вигляді такої системи, як теорія.

Своєрідністю предмета логіки є те, що він не є безпосередньо даним. Процес дослідження форм мислення та різних відношень між ними безпосередньо даним має матеріальне втілення мислення, а саме мову. Тому мова — емпірична реальність для логіки.

У зв'язку з цим виникає необхідність з'ясувати, в чому полягає здатність мови бути виразником і реалізатором мислення, чим характеризуються механізми функціонування мислення у мові, чим детермінований зв'язок між мисленням і появою різних мовних засобів.

Розглядаючи абстрактне мислення, ми вказували на таку важливу його особливість, як зв'язок із мовою, оскільки у мовленні реалізується єдність мови і мислення, яке є послідовністю слів, речень та послідовністю думок. У процесі мислення ми оперуємо мислительним змістом, який безпосередньо не збігається з тією предметною дійсністю, від якої він абстрагований.

Тільки в мові цей зміст як щось ідеальне реально існує. Тому мова є дійсність, з якою має справу логіка.

Іншими словами, оскільки логіка має своїм предметом форми мислення та відношення між ними, а мислення нерозривно пов'язане із мовою, то логіка в цьому розумінні є наукою про мову. Але лише в цьому розумінні, інакше не можна буде відрізнити логіку від лінгвістики. Мова визначається як система знаків, між якими існують відношення, що регулюються правилами утворення та перетворення.

Враховуючи це, можна визначити ***мову як систему знаків із заданою інтерпретацією, яка використовується для комунікації (спілкування) та пізнання.*** Іноді в літературі можна зустріти визначення мови просто як системи знаків. Таке визначення неточне, оскільки в ньому немає вказівки на те, за якими правилами співвідноситься знак і об'єкт, який він позначає, і що саме він позначає (тобто без інтерпретації), така система ще не є мовою.

Усю множину мов можна поділити на дві підмножини: ***природні мови і штучні. Серед природних мов розрізняють мови із специфікованою семантикою і мови із неспецифікованою семантикою (розмовна мова різних діалектів).***

П р и р о д н и м и мовами називаються мови, які виникають стихійно, в умовах практичної взаємодії індивідів певної соціальної групи. Природні мови використовуються насамперед як ефективний засіб спілкування.

Ш т у ч н і мови — це мови, які створені спеціально для фіксації способів, засобів і результатів пізнання. До штучних мов відносять мови математики, логіки, шифри. У цих мовах комунікативна функція відступає на задній план, вони не використовуються як засіб спілкування. ***Їх головна мета полягає у тому, щоб ефективно зафіксувати, утримати отриману інформацію і забезпечити її надійну передачу***[1] ***від одного комуніканта до іншого.***

Вони можуть бути засобами комунікації (спілкування) лише для спеціалістів певної галузі (математичні викладки, логічні числення, шифри тощо).

Мовами із специфікованою семантикою є мови природничих, гуманітарних і технічних наук. Мови історії, фізики чи філософії включають поряд із загальновживаними фрагментами природної мови спеціально обумовлені

---

[1] Можна сказати, що спілкування є також передача інформації від одного комуніканта до іншого. Але ми маємо на увазі технічний переклад інформації з одного рівня на інший за суворо визначеними правилами.

терміни (тобто слова із суворо заданим змістом), які складають категоріальний апарат кожної із наук.

Наприклад, слова *«сила», «час», «швидкість»* застосовуються в різних галузях, але у фізиці, історії чи філософії вони мають відповідно свій спеціальний зміст, завдяки чому їх називають — категорією філософії, історії чи фізики.

2. Поняття знака. Види знаків

Отже, з наведеного визначення мови випливає, що головним її елементом є знак. Природно виникає запитання: *що таке знак?*

Під знаком розуміють матеріальний об'єкт, який символічно, умовно представляє і відсилає до означуваного ним предмета, явища, події, властивості, відношення.

Щодо мови, то в ній знаками виступають слова і словосполучення. Справді, слова і словосполучення є матеріальними об'єктами (при усній мові — коливання повітря, при письмовій — сліди чорнила, фарби). При цьому слова і словосполучення завжди мають певні предметні значення, тобто вказують на відповідні об'єкти.

Застосування знаків властиве різноманітним формам людської діяльності. Предметом спеціального вивчення ***знак стає за часів античності.*** У ***Новий час*** до цієї проблеми зверталися ***Локк, Гоббс, Лейбніц.***

Лейбніц вказував на те, що знак своєю чуттєвою наочністю полегшує логічні операції. Використовуючи знаки, люди не тільки передають думки один одному, а й підвищують ефективність процесу мислення. ***Лейбніц*** вважав, що знаки повинні відповідати двом основним вимогам:

по-перше, бути короткими і стислими за формою і містити максимум смислу в мінімумі протяжності;

по-друге, ізоморфно відповідати позначуваним ними поняттям, представляти прості ідеї найбільш природним способом.

Знаки поділяють на три види:

— ***знаки-індекси;***
— ***знаки-образи;***
— ***знаки-символи.***

З н а к а м и - і н д е к с а м и називають знаки, які безпосередньо вказують на позначуваний ними предмет. У цьому випадку між знаком і предметом існує зв'язок, аналогічний зв'язку наслідку з причиною. *Наприклад,* дим вказує на наявність вогню, зміна висоти ртутного стовпчика — на відповідні зміни в атмосфері.

З н а к и - о б р а з и мають певну подібність з відповідними предметами. Наприклад, *карта, план місцевості, картина, креслення.*

З н а к и - с и м в о л и фізично ніяк не пов'язані з предметами на які вони вказують. Тут зв'язок між знаком і предметом складається або за угодою, або стихійно при формуванні мови і практичного її засвоєння конкретною людиною. Саме ці знаки складають основу мови. ***Слова і є знаками-символами.***

Перевага знака-символу над іншими знаками полягає в тому, що за його допомогою можна відображати різноманітний зміст; маючи гнучкий зв'язок з предметом, знак-символ може виразніше представити зміст (мається на увазі саме той аспект змісту, який зараз нас цікавить).

Тобто, використовуючи знак-символ, ми можемо однозначно вказати на те, що для нас суттєве саме зараз у предметі, про який ми говоримо, який ми розглядаємо, досліджуємо.

Іншими словами, відмінність між знаками полягає саме в характері зв'язку, який може мати знак конкретного виду з предметом.

Найдосконаліший за характером — зв'язок між знаком-символом і предметом. Це дає право розглядати основні характеристики знака на прикладі знаку-символу, оскільки все, що притаманне знака-символу, можна з певною мірою умовності екстраполювати на знаки-індекси і знаки-образи.

Кожний знак повинен вказувати на певний предмет і нести певну інформацію про цей предмет. Тобто, ***кожний знак характеризується предметним значенням і смислом.***

П р е д м е т н и м з н а ч е н н я м знака називається об'єкт, який позначається цим знаком. Такими об'єктами можуть бути окремі предмети, множини предметів, явища, події, властивості, відношення тощо.

С м и с л о м є інформація, яку несе знак про предмет.

Тут необхідно зауважити, що, ***говорячи про смисл знака, ми маємо на увазі інформацію про предмет, завдяки якій ми однозначно виділяємо предмет і відрізняємо його від інших предметів***. Тобто не будь-яка інформація про предмет може відігравати роль смислу. Таку інформацію називають ***п р я м и м смислом***.

Прямий смисл слів і словосполучень необхідно відрізняти від переносного та етимологічного (буквального).

Переносний смисл слова вказує лише на подібність одних об'єктів до інших. *Наприклад,* для характеристики *нафти* застосовують вираз *«чорне золото»*. Етимологічний смисл слова вказує на буквальне походження слова. *Наприклад, «біографія»* — буквально означає *«опис життя»*.

3. Рівні семіотичного аналізу мови

Знакам і знаковим системам притаманні різні відношення.

По-перше, це відношення між знаками у знаковій системі, яке називається синтаксичним (від грецького ***sintaxis*** — складання, побудова, порядок).

По-друге, між знаком та об'єктом і знаковою системою об'єктів існує відношення, яке називається семантичним (від грецького ***semantikos*** — позначуваний).

По-третє, між суб'єктом, який використовує знакову систему, і самою знаковою системою має місце відношення, яке називають прагматичним (від грецького ***pragmaticus*** — практичний).

Синтаксичні, семантичні та прагматичні відношення називають семіотичними відношеннями.

У ***XIX ст.*** американський філософ і логік ***Чарльз Пірс*** засновує спеціальну науку про знаки — ***семіотику, яка вивчає властивості семіотичних відношень (семіотичні властивості) і дає методологію побудови знакових систем.***

Семіотика як теорія знакових систем має три розділи:

— ***синтаксис,***
— ***семантику*** і
— ***прагматику.***

С и н т а к с и с о м називають розділ семіотики, який вивчає синтаксичні відношення. На перший погляд здається, що таке визначення синтаксису є тавтологічним. Насправді ж це не так. Мається на увазі ось що. Синтаксисом називають і синтаксис знакової системи (синтаксичні відношення або правила, що визначають ці відношення), і синтаксис як науку про синтаксис знакової системи. В останньому випадку доцільніше було б вживати термін ***«синтактика»***. Але практично до цього терміна звертаються рідко, оскільки з контексту завжди видно, про який синтакс йдеться.

При синтаксичному аналізі знакової системи абстрагуються від смислу і значення знаків.

Семантика як розділ семіотики вивчає властивості семантичних відношень. Зрозуміло, що термін ***«семантика»*** також має два смисли: ним позначають і семантичні відношення знакової системи і науку про семантичні відношення знакової системи. Розрізнити смисли цього терміна в кожному конкретному випадку допомагає контекст.

І, нарешті, ***прагматика як розділ семіотики досліджує прагматичні відношення знакової системи.***

Синтаксис, семантика, прагматика як розділи семіотики розробляють спеціальний інструментарій дослідження знакових систем. Зважаючи на цей інструментарій, ***визначають три рівні семіотичного аналізу знакових систем:***

— ***синтаксичний,***
— ***семантичний,***
— ***прагматичний.***

На синтаксичному рівні аналізу досліджують знаки самі по собі, тобто визначають принципи побудови знаків.

Семантичний рівень аналізу розкриває принципи співвідношення знака і значення.

Прагматичний рівень аналізу висвітлює відношення між знаковою системою та її носієм.

Виділення трьох рівнів аналізу мови обумовлено насамперед тим, що мова розглядається як засіб, інструмент спілкування. ***Саме з тлумачення мови як інструменту спілкування випливає, що будь-який акт спілкування передбачає:***

а) систему засобів спілкування (куди відносяться слова, фрази, а також різноманітні знаки). Головною характеристикою засобів спілкування є їх здатність передаватися по каналах комунікації;

б) систему явищ, до яких відносяться фрагменти мови. Ці явища знаходяться за межами мови і складають позалінгвістичну дійсність;

в) системи, між якими відбувається спілкування. Їх називають комунікантами або інтерпретаторами.

Кожний із рівнів семіотичного аналізу розглядається як певна абстракція від реального процесу спілкування, де вони (рівні) виступають в єдності.

У цьому розумінні ***на синтаксичному рівні*** ми беремо до уваги лише систему ***а***) і відношення, які існують всередині цієї системи. Іншими словами, тут спілкування розглядається як звичайна маніпуляція знаками, що обумовлена їх структурними властивостями та відношеннями.

Семантичний рівень аналізу визначається як система ***а***), до якої додали систему ***в***). Але це не просто система ***а***), тобто чисті знаки, а знаки, пов'язані (або можуть бути пов'язані) з певними типами значень. Тут предметна сторона знака виступає на передній план, є визначальною. Власне знаку надається другорядна роль. Певний об'єкт визначається знаком лише тому, що він може фіксувати певний зміст.

І, нарешті, ***прагматичний рівень*** є така абстракція від реального процесу спілкування, яка дає можливість розглядати системи ***а***) і ***в***) з позицій того, ким і в яких умовах вони застосовуються. Йдеться про те, що на прагматичному рівні знак і його значення сприймаються і вживаються через зміни смислової характеристики слів та виразів, через явища емоційного забарвлення того, про що йдеться, через передумови світоглядного характеру суб'єктів, які спілкуються.

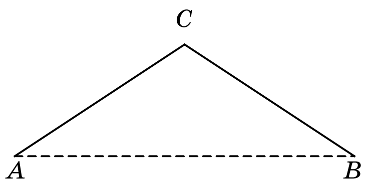
Таке розрізнення рівнів семіотичного аналізу мови, яке свого часу запропонував ***Ч.Морріс***, ***по-перше***, ***дозволяло розглядати семіотику як єдину галузь дослідження мови, а по-друге, формувало цілісний підхід до висвітлення мови як соціокультурного феномена.***

На розрізнення рівнів семіотичного аналізу звертає увагу ***Р.Карнап*** у своїй праці ***«Вступ до семантики»***. Він пропонує розрізняти ***емпіричну семіотику*** від ***чистої семіотики***.

Завдання емпіричної семіотики — вивчати мови, що історично виникли. ***Завдання ж чистої семіотики*** — аналізувати штучні мовні системи, насамперед створені для потреб і в межах логіки. Звідси під «чистим» синтаксисом, «чистою» семантикою і «чистою» прагматикою (до визначення якої він приходить пізніше) ***Карнап*** розумів логічний синтаксис, логічну семантику та логічну прагматику. Виділенням логічної семіотики ***Карнап*** показав, що логіка користується специфічною мовою, яка є не мовою спілкування, а інструментом, методом дослідження предмета логіки. Мова логіки є втіленням, реалізатором мислення і, головне, методом дослідження мислення.

Оскільки природна мова, інструмент спілкування, є також втіленням у собі мислення, то результати її синтаксичного, семантичного та прагматичного аналізу це база, фон, на якому могла вирости чиста семіотика. Іншими словами, численні результати емпіричної семіотики дають ключ до розуміння специфічних проблем логічної семіотики. А іноді те, що в логічній семіотиці є нормою, в емпіричній семіотиці є винятком, який обумовлений певними рамками дослідницького та практичного характеру.

Наприклад***, аналізуючи розрізнення рівнів семіотичного аналізу, К.Огден і Дж.Річардс звертаються до схеми, яка дістала назву «трикутник співвіднесення»:***



Вершини трикутника репрезентують три різні системи: ***A, B, C,*** відношення між якими забезпечує спілкування.

A — символ (у природній мові насамперед слово);

B — предмет, до якого відноситься символ (слово). Предмет, на який вказує символ, називають ***референтом, денотатом***;

C — посередник між символом і референтом. Цим посередником є думка, яку називають смислом, інформацією про предмет.

Суцільні лінії трикутника вказують на реальні відношення між символом та предметом і водночас на те, що відношення між символом і предметом виникли завдяки посередництву думки (смислу).

Отже, ***с м и с л — це така інформація про предмет, яка однозначно характеризує предмет.***

Звідси випливає, що знаки можуть мати один денотат, але різний смисл, і не можуть нести різний смисл, а вказувати на один і той самий денотат.

Наприклад, вирази *«Засновник логіки» і «Вчитель Олександра Македонського»* мають один і той самий денотат, але різний смисл.

Ці міркування, що випливають із розгляду ***«трикутника співвіднесення»,*** є загальними як для емпіричної, так і для логічної семіотики (оскільки в природних і штучних мовах мають місце ситуації відношення знака і предмета).

Аналіз наведеної схеми показує, що вона зображує, по суті, не відношення трьох рівнів аналізу мови, не процес спілкування, а інформацію семантичного відношення (тобто відношення між знаком і значенням через посередництво смислу). У цій схемі відсутній прагматичний рівень. Він лише передбачається у вигляді різноманітних станів свідомості.

Але ***головна мета цієї схеми полягає у тому, щоб показати, що синтаксис, семантика і прагматика — це рівні аналізу, і якщо брати їх ізольовано один від одного, то вони стають своєрідними абстракціями.*** Але це не означає, що кожен із рівнів аналізу не може бути застосований самостійно. Фактично це є нормою в логічній семіотиці.

Якщо досліджують знакові системи не як засіб спілкування, а як засіб фіксації, переробки, зберігання інформації, то отримують семантичний рівень аналізу, який виникає в результаті абстрагування від комунікативної функції мови. А це означає, що знакова система перестає бути мовою в лінгвістичному смислі. Ця абстракція застосовується під час вивчення мов науки логіки та математики.

Якщо аналізують знакові системи з погляду їхніх структурних властивостей і відношень, то отримують синтаксичний рівень аналізу, який виникає завдяки абстрагуванню від семантичного і прагматичного аспектів знакових систем.

Найчастіше наведені абстракції використовуються в логіці у процесі дослідження формалізованих мов.

РОЗДІЛ III

ФОРМАЛІЗАЦІЯ ЯК МЕТОД ЛОГІКИ

1. Поняття формалізації

Оскільки лінгвістична структура природної мови не збігається з логічною структурою форм і законів мислення, які втілюються в цій мові, логіка вимушена створювати спеціальні засоби, які б дали можливість вилучити з природної мови форми мислення, їхні логічні властивості, суттєві відношення між ними, визначити принципи логічної дедукції, критерії розрізнення правильних і неправильних способів міркування.

Тут треба зауважити, що створення логікою спеціальної мови, поряд з існуючою природною мовою, є особливий процес, який пердбачає, що створена штучна знакова система є засобом фіксації логічної структури думки, з одного боку, і засобом дослідження логічних властивостей та відношень думки, з іншого. Тобто, ***мова логіки — це насамперед її метод***. Прийнято говорити не ***«штучна мова логіки»,*** а ***«формалізована мова логіки»***. З легкої руки німецького філософа ***ХУШ ст. І.Канта*** логіці приписали прикметник ***«формальна»,*** тому логіку стали називати ***формальною, а її метод — формалізацією***.

Формалізація як вид людської діяльності застосовується не лише в логіці. З формалізацією ми зустрічаємося у різних науках: математиці, хімії, фізиці тощо.

Якщо розглядати формалізацію як загальнонауковий феномен, то її можна визначити як вид знакового моделювання, в результаті якого дослідження певних об'єктів зводиться до вивчення їх форми. Тобто, йдеться не про те, що в результаті формалізації ми абстрагуємося від змісту досліджуваних об'єктів, а про те, щоб за допомогою символів суттєві сторони змісту виразити через форму і тоді дослідження змісту здійснюється на основі знакової моделі згідно з формальними правилами.

Формалізація виникла разом з мисленням і мовою. Першим проявом формалізації була писемність. Внаслідок розвитку науки до символів природної мови почали додаватися знаки спеціального характеру (елементи математичної, хімічної та іншої символіки).

У логіці формалізація має особливий характер. У загальному розумінні ***формалізація у логіці — це виявлення логічної структури наших думок. А логічною структурою думки є форма зв'язку понять у судженні, форма зв'язку суджень між собою у складніших судженнях, форма зв'язку суджень у складі умовиводу.***

Іноді формалізацію (не тільки в логіці) визначають як процес вивчення змісту за допомогою засобів формалізованої мови. Це спонукає дати визначення формалізованої мови.

Формалізованою мовою, або мовою символів, є будь-яка сукупність спеціалізованих мовних засобів із суворо фіксованими правилами утворення різноманітних виразів і правилами приписування цим виразам певних значень.

У логіці ***формалізованою мовою*** називають формальну систему разом з її інтерпретацією або інтерпретоване числення. У цій науці термін ***«формалізація»*** має кілька значень:

1) метод логіки, який полягає в застосуванні формалізованої мови до вивчення предмета логіки;

2) процес кодування засобами формально-логічної теорії фрагментів наукових теорій чи самих теорій;

3) відображення понять логічної семантики в поняттях логічного синтаксису (наприклад, семантичне відношення логічного слідування виражають через синтаксичне відношення — вивідність).

Формалізована мова (або мова символів) є ефективним засобом будь-якого дослідження. Прогрес у сучасній науці, особливо в логіці, пов'язаний із застосуванням формалізованої мови.

Використання її у процесі дослідницької та практичної діяльності має низку переваг.

По-перше, воно дає змогу стисло, у скороченому вигляді фіксувати і передавати різні відношення між досліджуваними об'єктами.

Наприклад, замість того, щоб описати квадрат суми двох чисел засобами природної мови («*Квадрат суми двох* *чисел дорівнює квадрату першого числа плюс подвійний добуток першого числа на друге плюс квадрат другого числа»*), ми його записуємо у вигляді короткої формули:

$$(a + в)^2 = a^2 + 2\ aв + в^2.$$

Якщо у логіці необхідно зафіксувати структуру, *наприклад*, загальнозаперечувального судження, то замість громіздкої фрази природної мови *«У загальнозаперечувальному судженні жодному предмету певної множини, яку відображає поняття суб'єкта, не належить властивість, що відображена в понятті предиката»* користуємося формулою:

«Жоден S не є P».

По-друге, мова символів допомагає оцінити характер відношень між об'єктами, що зафіксовані у певній формулі.

Зрозуміло, що для цього обов'язково потрібно знати значення символів, використаних у формулі. Якщо будь-який вираз природної мови, *наприклад «Мій вчитель — ровесник мого батька»,* ми запишемо ще кількома мовами (ангійською, французькою та ін.), то вигляд і сполучення знаків (букв) у цих реченнях нічого нам не скажуть про предмети та їх відношення, що описуються в цих реченнях. Ми знатимемо лише, що в цих реченнях сполучення мовних знаків, їх вигляд різний, а думку вони фіксують одну і ту ж саму. Зовсім інша річ, коли ми користуємося формалізованою мовою. Сам вигляд формул $H_2\ O$, $(a{+}в)^2 = a^2 + 2\ aв + в_2$, ***«Жоден S не суть P»*** говорить про характер і вид відношень між об'єктами, що зафіксовані відповідними символами. Така розбіжність між виразом природної мови і виразом (формулою) формалізованої мови пояснюється тим, що у природній мові письмовий знак позначає звук (букву) або сполучення звуків (слів), а у формалізованій мові — об'єкти, їхні властивості і відношення та операції над ними.

Так у виразі $H_2\ O$ букви ***H*** і ***O*** — імена відповідних об'єктів, а їх кількісна характеристика ***2*** і ***1*** вказує, що саме таке поєднання дасть конкретну речовину. У формулі ***«Жоден S не є P»*** знак ***S*** — ім'я логічного підмета, а знак ***P*** — ім'я логічного присудка.

По-третє, завдяки формалізованій мові можна однозначно виявити логічну структуру думки, відрізнити логічний синтаксис від лінгвістичного.

Наприклад, розглянемо такі два міркування:

1. *Я сьогодні зустрів свого вчителя математики.*

Мій учитель математики — автор останнього підручника з математики.

Отже, я сьогодні зустрів автора останнього підручника з математики.

2. *Я сьогодні зустрівся з кимось.*

Хтось написав останній підручник з математики.

Отже, я сьогодні зустрів автора останнього підручника з математики.

З погляду лінгвістичного синтаксису ці міркування однакові. Але з точки зору характеру логічних відношень, які вони фіксують, ці міркування різні.

Щоб виявити відмінність між лінгвістичним синтаксисом і логічним синтаксисом цих мовних відрізків, треба записати ці міркування засобами формалізованої мови.

1. $$\frac{\begin{matrix} \boldsymbol{a\ R\ в} \\ \boldsymbol{в = c} \end{matrix}}{\boldsymbol{a\ R\ c}}$$

2. $$\frac{\begin{matrix} \exists \boldsymbol{x}\ \boldsymbol{R}\ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}) \\ \exists \boldsymbol{x}\ (\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}) \end{matrix}}{\boldsymbol{a\ R\ c}}\ .$$

У першому міркуванні висновок виражає істину, стосовно ж другого міркування ми цього не можемо сказати. Це пояснюється тим, що в першому міркуванні словосполучення *«мій учитель математики»* ***в*** є іменем конкретної людини. У другому ж міркуванні слова *«кимось»* і *«хтось»* вказують, що є імовірність існування якогось предмета ***x***. А це означає, що у нас немає гарантії, що в першому і другому засновку другого міркування вираз *«існує такий **x**»* може бути віднесений до одного й того самого індивідуального предмета.

Отже, застосування формалізованої мови в будь-якій галузі людської діяльності забезпечує оптимізацію (стислість) необхідної інформації, дає можливість за зовнішніми ознаками (за формою символів) оцінювати характер досліджуваних відношень, а також ефективно фіксувати логічну структуру мовних виразів (йдеться про природну мову чи про мову науки).

2. Порівняльна характеристика природної і формалізованої мов

Як уже зазначалося, прогрес у сучасній науці, особливо в логіці, значною мірою пов'язаний із застосуванням формалізованої мови. Але, надаючи переваги формалізованій мові над природною, треба підкреслити, що свого сучасного вигляду вона набула не одразу. Хоча з самого початку для вивчення логічних форм і законів застосовувалася формалізована мова, її первісний вигляд був далеким від того, який вона має зараз.

Тому, щоб краще збагнути ефективність методу формалізації, треба показати, чому не природна мова (яка також є формалізацією інформації), а формалізована мова стала методом дослідження логічних форм.

Природна мова не могла стати методом логіки з кількох причин. Головні з них такі:

а) багатозначність мовних виразів;

б) семантична замкненість;

в) аморфність, невизначеність правил побудови мовних виразів і правил надання значень мовним виразам.

Прокоментуємо кожну із названих причин.

З ***багатозначністю виразів природної мови*** ми зустрічаємося постійно.

Розглянемо, наприклад, кілька суджень:

1. Будь-який трикутник є геометричною фігурою.

2. Місяць є природним супутником Землі.

3. Є гіпотези, які не мають обгрунтування.

4. Платон є давньогрецьким філософом.

Спільним для цих чотирьох судженнь є те, що у них вживається слово ***«є»***, яке має, проте, різні значення. У першому судженні — слово ***«є»*** позначає відношення включення одного класу предметів до іншого, у другому — відношення рівності, тотожності двох предметів, у третьому — існування певного предмета, у четвертому — відношення належності індивідуального предмета до певного класу предметів. Тобто, з наведених прикладів стає очевидним, що виразам природної мови характерна ***багатозначність мовних виразів, коли одне і те саме слово вживається у різних смислах.***

Під ***семантичною замкненістю мови розуміють ситуацію одночасного існування в мові поряд з кожним***

висловлюванням його оцінки: *«істинне висловлювання», «**x** визначає **y**», «хибно», «доведено»* тощо. З цим явищем ми постійно стикаємось у природній мові. І, до певної межі, нам це не заважає досить ефективно користуватися мовою. Але коли потрібно досконаліше проаналізувати інформацію, яку несуть мовні засоби, тоді виникають серйозні труднощі.

Явище ***семантичної замкненості природної мови*** можна прослідкувати на парадоксі під назвою ***«Брехун»***, відкритому давньогрецьким філософом ***Евбулідом*** **(*ІУ ст. до н.е.*).**

Евбулід формулює цей парадокс так:

1. Крітський філософ Епіменід заявив:
«Усі жителі острова Кріт — брехуни».
2. Епіменід — житель острова Кріт.

Отже, Епіменід — брехун.

Але ніхто не забороняє продовжити міркування таким чином:

Оскільки Епіменід — брехун, то його заява, що
«Всі жителі острова Кріт брехуни», — хибна.
Виходить, що жителі острова Кріт — не брехуни.
Сам Епіменід — житель острова Кріт.

Отже, він не брехун, а його заява, що всі жителі
острова Кріт брехуни, правдива.

Внаслідок наведеного міркування ми маємо ситуацію, коли логічно правильне міркування приводить до взаємовиключаючих результатів, які не можна віднести ні до істинних, ні до хибних.

В історії логіки були численні спроби усунути це скрутне становище, до якого приводить дане міркування. Одна з них зводилася до того, що тут порушується закон достатньої підстави. Справді, висновок про те, що все сказане Епіменідом є брехнею, ми робимо, виходячи із *твердження «Епіменід — брехун»*. Але ж насправді немає такого брехуна, який говорив би тільки брехню. А весь парадокс побудований на абстракції, що брехун говорить брехню, а небрехун говорить тільки правду. В житті так не буває. У брехуна істина перемішана з брехнею. В цьому вся складність.

Отже, дане міркування має хибний засновок, що і є серйозним порушенням закону достатньої підстави. Можна навести інші спроби подолання цього парадокса. Але потрібно мати на увазі, що логіка не займається пошуками того, як ліквідувати цей чи інший парадокс, ***це по-перше***. А, ***по -друге***, ці парадокси не можна і не потрібно розв'язувати. Вони в анекдотичній, загальнодоступній формі лише вказують на серйозні проблеми, які виникають у світі науки (саме там, де наша думка відривається від реальності, полишає грунт конкретних вражень, реально існуючих предметів, властивостей і відношень, де орієнтирами не можуть бути посилання на чуттєву достовірність, інтуїцію, здоровий глузд). Наведений парадокс вказує на те, що окрім природної, розмовної мови є мова науки, у даному випадку саме логіки. У цій мові необхідно розрізняти два рівні: рівень, де описується світ досліджуваних предметів, і рівень, де даються пояснення мовним засобам, за допомогою яких ми описуємо цей предметний світ. Про ці рівні йдеться далі.

Щодо ***аморфності***, невизначеності правил побудови мовних виразів природної мови можна сказати ось що. Природна мова складалася стихійно (у певному розумінні), відповідно до потреб спілкування у процесі діяльності, насамперед знаряддєвої. Тому немає якихось чітких параметрів, чому те чи інше слово має таку форму, або чому саме з ним співвідносять певний предмет.

Наприклад, чому слово *«дім»* має таку послідовність знаків, чому саме це слово позначає цей предмет. У мові ж науки кожен термін повинен мати суворе визначення. А в мові логіки, яка своїм предметом має мову науки (у широкому розумінні), і поготів.

3. Структура формалізованої мови

Щоб характеризувати мову логіки, потрібно знову звернутися до визначення предмета логіки (тим більше, що мова логіки є її методом).

Буквально суть предмета логіки полягає в тому, що логіка нам говорить про те, що з чого випливає, слідує. Загальновизнаним прикладом того, як виявляє себе логіка в конкретній галузі теоретичної діяльності людини, є геометрія Евкліда. І не тільки цей текст є демонстрацією логічних зв'язків, а будь-який текст, де йдеться про систематизацію наукового пізнання, та й у повсякденному житті логіка є інструментом міркувань і доведень.

Виходить, що логіка вивчає логічні зв'язки, реалізовані в різних текстах, фрагментах мов (чи то мова науки, чи то розмовна мова різних діалектів). Тобто логіка вивчає логіку. Парадокс.

Щоб усунути цей парадокс, ми повинні відрізняти логіку, яку вивчаємо, від логіки, за допомогою якої це здійснюється. Такий підхід зумовлює розрізнення відповідних мов:

— логіка, яку ми вивчаємо, формулюється за допомогою мови, яка називається ***предметною мовою, або об'єкт — мовою.*** Така назва зумовлена тим, що ця мова і логіка, яка в ній втілена, є предметом (об'єктом) вивчення;

— мова, у межах якої ми досліджуємо предметну мову, називається ***мовою дослідника, метамовою.***

Проілюструємо це на такому прикладі.

Візьмемо речення природної мови:

«Будь-яка книжка є джерелом інформації».

У цьому реченні втілена певна логічна форма, а саме: ***«Усі S суть P».*** Вираз ***«Усі S суть P»*** є структурою загальностверджувального судження, яка є об'єктом вивчення традиційної логіки і яку логіка виявляє за допомогою свого логічного інструментарію.

Вираз ***«Усі S суть P»*** відноситься ***до об'єкт-мови.*** Пояснення, що ***S*** — позначає предмет думки, ***P*** — позначає ознаку предмета думки, ***«суть»*** фіксує відношення між предметом думки та ознакою предмета думки і т.д., ***є мовою дослідника, метамовою.***

Застосування об'єкт-мови і метамови можна прослідкувати, звернувшись до такого прикладу. Під час вивчення іноземної мови, з погляду людини, яка її вивчає, об'єкт-мовою є фрази іноземної мови, а метамовою — рідна мова. Саме рідною мовою ми отримуємо всі початкові відомості й пояснення у словниках і граматиках, а вже потім починаємо писати і розмовляти іноземною мовою (на об'єктній мові).

Отже, розрізнення об'єкт-мови і метамови є надзвичайно принциповим.

Об'єкт-мова — це сукупність знакових засобів, що фіксують логічні зв'язки і структури міркувань.

У метамові здійснюється вже логічний аналіз об'єкт-мови, тобто з'ясовується ефективність знакових засобів для фіксації логічної структури міркувань, визначаються процедури співвідношення знаків об'єктної мови із системою їх значень.

Про важливість розрізнення об'єкт-мови і метамови дуже образно сказав ***Стефан Кліні*** у книзі ***«Математична логіка»***: *«Необхідно весь час пам'ятати про це розрізнення між логікою, що вивчається* (*предметною*), *і логікою як засобом такого вивчення* (*тобто логікою дослідника*). *Тому, хто не готовий до цього, варто одразу ж закрити цю книжку і підшукати собі інше заняття за смаком* (*скажімо, складання шарад або бджільництво*)*»*[1].

Таким чином, формалізована мова логіки і за своїм походженням, і за будовою, і за призначенням відмінна від природної мови. Їх об'єднує лише те, що це інтерпретовані знакові системи.

Якщо у природній мові виділяють три семіотичні аспекти (синтаксичний, семантичний, прагматичний), то у формалізованій мові логіки — лише синтаксичний і семантичний аспекти.

Відсутність прагматичного аспекту у формалізованій мові логіки пояснюється тим, що тут ми маємо точні правила утворення різноманітних правильно побудованих мовних виразів і точні правила, що визначають значення цих виразів.

«Мета використання штучних мов у логіці, — як зазначає ***О.Д.Смирнова,*** *— не заміна слів природної мови деякими спеціальними символами у процесі опису логічних процедур і правил, а* ***відтворення логічної дедукції****»*[2].

Таким чином, аналіз явища формалізації, визначення характерних особливостей штучних мов дає можливість визначити формалізовану мову логіки, або формально-логічну теорію, як систему знакових засобів, що використовуються логікою для фіксації і дослідження процесу міркування разом із характеристикою синтаксичних і семантичних властивостей цих знакових засобів.

Отже, ***структура формалізованої мови складається із:***

— об'єкт-мови і

— метамови.

---

[1] *Клини С.* Математическая логика. — М., 1973. — С.12.

[2] *Смирнова Е. Д.* Основы логической семантики. — М., 1990. — С.13.

Об'єкт-мова як система знакових засобів, сукупність різноманітних формул фіксує у знаковій формі логічну структуру міркувань, логічні властивості складових елементів міркувань та логічні відношення між елементами міркувань. ***Інколи об'єкт-мову ще називають синтаксичною частиною формалізованої мови.***

Метамова — це логічний аналіз об'єкт-мови. Тобто, метамова розкриває, носіями яких саме властивостей і відношень є ті чи інші знаки об'єкт-мови, які саме логічні функції фіксують віповідні комбінації та утворення знакових засобів обєкт-мови. ***Метамову називають семантичною частиною формалізованої мови.*** У самій метамові виділяють синтаксис і семантику.

Синтаксис метамови складають правила, які описують структурні особливості знакових систем об'єкт-мови, а семантика метамови описує види значень, яких можуть набувати знаки об'єкт-мови, та правила, за якими ці значення приписуються відповідним знакам об'єкт-мови.

Оскільки застосування формалізованої мови до вивчення логічних форм і відношень між ними складає суть методу логіки, яким є формалізація, доречно звернути увагу на таку обставину.

Логіка як наука із самого початку свого виникнення до теперішнього її стану є єдиною системою. Мається на увазі, що предметом логіки були і залишаються форми та закони мислення, або (що те саме) форми дедуктивних міркувань, і закони, які лежать в їх основі. Методом логіки була і є формалізація. Існування традиційної та сучасної логіки (її ще називають символічною, математичною) свідчить не про зміну предмета чи методу логіки при переході від традиційної до сучасної, а лише про те, що виникнення сучасної формальної логіки пов'язане з удосконаленням її методу — формалізації.

Традиційна логіка користувалася методом формалізації від початку свого зародження. ***Арістотель*** застосував цей метод для вилучення основних форм і законів мислення з природної мови, систематизував їх у вигляді логічних числень (вчення про простий категоричний силогізм). Але у нього формалізація мала напівформальний характер. Поряд із виразами штучної мови ***Арістотель*** і його послідовники використовували фрагменти природної мови: ***«Деякі S суть P», «Якщо А, то В»*** і т.д. ***Саме застосування фо-***

рмалізації в її напівформальному вигляді було однією з обставин, яка зумовила назву певного періоду в розвитку логічної науки — «традиційна логіка».

Для певного історичного періоду розвитку науки традиційна логіка з її засобами логічного аналізу і систематизації знання була цілком задовільною. У середині ж ***Х1Х ст.*** виникає необхідність досконалішого логічного аналізу наукового знання. Тобто, виникає потреба дослідити, як функціонує знання у такій мові як мова науки, тобто дослідити принципи побудови наукових теорій, закономірності переходу від одних теорій до інших, принципи логічного обгрунтування наукових теорій. У цей період стає все очевиднішою неможливість застосування напівформального методу традиційної логіки для розв'язання цих проблем. Це й було однією з причин виникнення сучасної формальної логіки, яка починає свою історію з побудови чисто формалізованої мови та її застосування в логічному аналізі.

Тут необхідно зробити одне застереження. Той факт, що традиційна логіка досліджувала форми і закони мислення, втілені в природній мові, а сучасна формальна логіка досліджує мислення, реалізоване у мові науки, не означає, що сучасна логіка своїй досконалості у здійсненні логічного аналізу зобов'язана тому, що вона аналізує мову науки. Просто засоби сучасної логіки дають можливість досконаліше проводити логічний аналіз тієї ж природної мови. Сучасна логіка має такі засоби (наприклад, функціональний аналіз), завдяки яким можна глибше збагнути логіку природної мови.

Стосовно традиційної логіки можна сказати, що якщо її засобам був доступний логічний аналіз природної мови і то в певних межах, то логічний аналіз мови науки був поза її межами.

Сучасна логіка дає досконалий аналіз і мови науки, і природної мови. Саме завдяки цій особливості сучасної логіки багато розділів традиційної логіки (той же аналіз поняття як форми мислення, силогістика тощо) отримали принципово нове висвітлення.

РОЗДІЛ IV

СЕМАНТИЧНИЙ АНАЛІЗ ВИРАЗІВ ПРИРОДНОЇ МОВИ

1. Поняття семантичної категорії

Визначаючи предмет і метод логіки, ми підкреслювали, що логіка вивчає форми і закони мислення не безпосередньо, а опосередковано, через мову (чи природну, чи мову науки). І першою турботою логіки є вилучення із мови логічних форм їх властивостей і відношень. Здійснюється цей аналіз за допомогою семантичного аналізу мовних виразів, який полягає в тому, щоб визначити, які саме мовні вирази є носіями тієї чи іншої форми, а які — ні. Треба наголосити, що в цьому випадку йдеться про логічну семантику.

У зв'язку з цим дамо деякі пояснення. Якщо семантика, як розділ семіотики, досліджує загальні аспекти інтерпретації будь-якого типу знакових систем, то логічна семантика має справу з інтерпретацією особливого виду знакових систем — мов, побудованих для цілей логіки.

Відомо, що зв'язок між знаком і його значенням не є природним, тому приписування значень виразам знакових систем здійснюється за допомогою спеціальних правил, які називаються семантичними. У природній мові немає чітких семантичних правил, тут відношення між знаком та його значенням складаються під час комунікативної діяльності людей і залежать від багатьох умов. Це й зумовлює визначення смислу слова природної мови як способу його вживання.

Логічна ж семантика будується для мов із чітко описаною структурою. Семантичні правила логічної семантики включають терміни, які відносяться до опису мовних виразів і терміни, що описують позамовні сутності.

Наприклад, речення *«Моцарт — сучасник Сальєрі»* істинне тоді і тільки тоді, коли *Моцарт* і *Сальєрі* жили в один і той самий час; термін *«5 + 2»* позначає число *7*. Слова *«істинно», «позначає»* встановлюють відповідність між мовними виразами (ми їх виділили лапками) та об'єктами області інтерпретації.

За допомогою семантичного аналізу уся множина мовних виразів (йдеться про природну мову) розбивається на таку, що несе у собі певні логічні об'єкти, і таку, що їх не несе. Потім серед множини мовних виразів, які є носіями логічних форм, властивостей і відношень здійснюється типологія, тобто виділяються класи мовних виразів, які мають однотипні предметні значення, або, іншими словами, здійснюється категоризація мови з погляду логічної семантики. Виділяючи класи мовних виразів з однотипним предметним значенням, цим самим визначається певна семантична категорія, яка одночасно є і синтаксичною категорією, оскільки за класом цих виразів закріплюється один і той самий тип значення.

Так, серед тієї множини мовних виразів (слів і словосполучень), які мають самостійний смисл, за допомогою засобів логічної семантики виділяють речення і ті вирази, що відіграють самостійну роль у структурі речення, тобто забезпечують існування речення саме як речення, а не просто нагромадження мовних знаків.

З усієї множини речень (розповідних, запитальних, окличних) логіку, насамперед, цікавлять розповідні речення. Інтерес логіки до розповідних речень зумовлений тим, що вони є носіями такої логічної форми, як судження. У зв'язку з цим розповідні речення називають висловлюваннями. ***Висловлювання — це назва (ім'я) множини розповідних речень, смислом яких є судження, а значенням — такі логічні об'єкти, як «істинність» і «хибність».*** Маючи на увазі, що ми звертаємося тільки до розповідних речень, поза межами спеціального аналізу терміни *«висловлювання»* і *«речення»* ототожнюються. У межах спеціального аналізу розповідне речення розглядається як послідовність знаків, що відповідає вимогам правил даної мови (це синтаксична категорія) і яка своїм змістом має висловлювання (це семантична категорія). Оскільки висловлювання як семантична категорія фіксує у собі мовні відрізки, які виражають судження, її визначають як основну. Це обумовлено тим, що дослідження природи судження дає ключ до розуміння структури поняття як форми мислення і розкриває механізми функціонування понять і суджень у структурі умовиводу.

Усі вирази, які входять до складу висловлювання, поділяють на:

— дескриптивні і

— логічні терміни.

Назва ***«дескриптивний термін»*** походить від латинського ***descriptio*** — опис, описовий.

Дескриптивними термінами називають слова або словосполучення, які позначають предмети, властивості, відношення чи дії, операції над предметами.

Логічними термінами називають слова, які фіксують зв'язки, відношення, характеристики, що забезпечують інваріантність (незмінність) семіотичного інваріанту висловлювання при всіх можливих перетвореннях і будь-яких значеннях його дескриптивних термінів.

Розглянемо приклад:

1. *Будь-яка теорія є формою пізнання.*

2. *Будь-яке явище є проявом закономірності.*

Слова *«теорія», «форма пізнання», «явище», «прояв закономірності»* — ***позначають дескриптивні терміни.*** Слова *«будь-який», «є»* ***фіксують логічні терміни.*** Саме ці терміни утримують незмінним значення ***1*** і ***2*** висловлювань. Незмінність ця забезпечується схемою ***«Будь-який ... є ...».*** Що б ми не підставили на місце пропусків у цій схемі, все одно отримаємо загальностверджувальне судження, яке буде істинним, коли справді кожному предмету з деякого класу належить приписувана у цьому судженні ознака.

2. Характеристика дескриптивних термінів

Розглянемо види дескриптивних і логічних термінів.

Дескриптивні терміни поділяються на:

— терми,

— предикатори,

— функціональні знаки.

До ***логічних термінів відносять зв'язок між дескриптивними термінами всередині висловлювання, зв'язки між висловлюваннями, кількісні характеристики дескриптивних термінів, які фіксують предмет думки в судженні.***

Спочатку проаналізуємо дескриптивні терміни.

***Т е р м* — це слово або словосполучення, яке позначає окремі предмети** (*Наприклад, «Дніпро», «Центральне тіло Сонячної системи», «9» тощо*).

Терми бувають ***постійні і змінні***.

Далі йдеться лише про постійні терми. ***У структурі висловлювання терми виконують роль логічного предмета або входять складовою частиною в логічний присудок***. *Наприклад:*

1) *«Марс є планета»;*

2) *«Варшава є столиця Польщі».*

У першому висловлюванні ***терм*** *«Марс»* виконує роль ***логічного підмета,*** а у другому — ***терм*** *«Польща»* виконує роль ***складової частини логічного присудка***.

Бути логічним присудком терми не можуть.

У природній мові терми виражаються власними іменами. Графічно терми виділяють лапками.

1. *«Абстракція» — слово латинського походження.*

2. *«Бути електропровідним» — фізична властивість.*

3. *«Бути ровесником» — симетричне відношення.*

4. *«Київський університет ім. Тараса Шевченка розташований на Володимирській вулиці» — розповідне речення.*

У кожному з цих випадків терм називає конкретний об'єкт: у ***1*** і ***4*** терм називає предмети, у ***2*** — властивість, у ***3*** — відношення.

Якщо терм іменує конкретний елемент із певної множини предметів, то його називають п о с т і й н и м і позначають буквами латинського алфавіту (***а,в,с ...***).

Отже, оскільки терм може виконувати у судженні роль тільки логічного підмета, то об'єктом твердження у судженні може бути предмет, властивість і відношення. Зрозуміло, не просто реальні предмет, властивість і відношення, а їхні імена, зафіксовані відповідними термами.

П р е д и к а т о р походить від латинського praedicatum — сказане — це слово або словосполучення, яке представляє властивість або відношення. Головна логічна функція предикатора — виконувати роль логічного присудка в судженні. Підкреслюючи той факт, що терм може бути лише логічним підметом, а функцію логічного присудка здійснює предикатор, уточнимо терміни *«логічний підмет» і «логічний присудок»*.

Логічним п і д м е т о м — називається вираз, який позначає те, що є об'єктом судження у даному висловлюванні.

Логічним п р и с у д к о м — називається вираз, який позначає те, що стверджується про предмет у висловлюванні.

Перегляд різноманітних висловлювань свідчить про те, що судження може відноситися до одного або кількох предметів:

1. *Венера є планетою Сонячної системи.*

2. *Граф Монте-Крісто є персонажем однойменного роману О.Дюма.*

3. *Київ розташований між Москвою і Одесою.*

4. *9 більше 7.*

У ***1*** і ***2*** висловлюваннях логічним підметом відповідно ***є терми*** *«Венера», «Граф Монте-Крісто»*, а ***логічним присудком — предикатори*** *«планета Сонячної системи», «персонаж одноіменного роману О. Дюма»*. У ***3*** і ***4*** висловлюваннях логічним підметом відповідно є упорядкована трійка і двійка предметів. ***Логічним присудком є предикатори*** *«розташований між», «більше»*.

У наведених висловлюваннях логічним підметом виступають терми. Але необхідно враховувати і наявність таких висловлювань, де ствердження відноситься до усіх або деяких предметів певного класу.

1. *Будь-яка мова є знаковою системою.*

2. *Усі мої приятелі знають одну з іноземних мов.*

У першому висловлюванні логічним підметом виступає предикатор *«мова»*, а у другому роль логічного підмета виконують два предикатори: *«приятелі» та «іноземна мова»*. По суті, ці предикатори представляють класи предметів, до яких відносяться твердження, а слова *«будь-яка», «всі», «одну із»* вказують, стверджуємо ми щось відносно усього класу предметів чи тільки до певної його частини. Тобто, логічним присудком є предикатори «*знакова система», «знають»*.

Висловлювання, у яких предикатор у ролі присудка відноситься до одного окремого предмета або кількох окремих предметів, позначених постійними термами, називають одиничними.

Наприклад, «Шекспір є видатним драматургом», «Земля більша за Місяць». Терми, які є логічними підметами, у цих висловлюваннях вказують на предмети, що ***є аргументами*** предикаторів, тобто виконують тут роль логічних присудків.

Слово *«аргумент»* походить від латинського ***argumentum*** — доказ, підстава. Є різні значення терміна ***«аргумент»***. ***У логіці під аргументом розуміють судження (або сукупність суджень), завдяки якому обгрунтовується істинність якого-небудь судження чи теорії.*** У доведеннях аргументи є засновками, з яких виводять судження, істинність якого потрібно встановити.

Наприклад, нам потрібно обгрунтувати істинність судження *«Марс має природний супутник»*. Для цього беремо за аргументи судження *«Будь-яка планета Сонячної системи має природний супутник» і «Марс є планетою Сонячної системи»*. Отже, на підставі цих аргументів можна стверджувати, що *«Марс має природний супутник»*.

Якщо наведені судження (аргументи) визнаються істинними, то із цього з необхідністю випливає істинність судження, що й *«Марс має природний супутник»*.

За терміном ***«аргумент»*** закріплено й інше значення, яке свої витоки бере з математики і набуває своєрідного забарвлення в логіці. У цьому розумінні ***«аргумент»*** трактують як незалежну змінну, замість якої підставляють імена об'єктів із тієї предметної області, до якої має смисл застосування відповідного предикатора.

Наприклад, візьмемо предикатор *«давньогрецький філософ»*. Цей предикатор можна приписати до об'єктів такої предметної області, як множина людей. Так, якщо взяти ім'я *Сократ*, то отримаємо істинне судження *«Сократ є давньогрецьким філософом»*, а якщо вказати імя Кант, то отримаємо хибне судження *«Кант є давньогрецьким філософом»*(тобто таке судження, що не відповідає дійсності).

Зупинимося детальніше на характеристиці предикотора як семантичної категорії.

Інтерес до цієї категорії зумовлений тим, що якщо терм може виконувати функцію логічного підмета, але не може бути логічним присудком, то предикатор вживається не тільки в ролі логічного присудка, а й логічного підмета.

Предикатор характеризується низкою ознак:

— ***місткістю;***

— ***областю визначення;***

— ***областю істинності.***

Місткістю предикатора є кількісна характеристика його застосування в ролі логічного присудка до об'єктів вказаної предметної області.

Коли предикатор можна приписати одному предмету, він називається ***одномісним***, а коли його можна приписати двійці, трійці, четвірці і т.д. аргументів, то він називається відповідно ***двомісним, тримісним, чотиримісним*** і т.д

Наприклад, предикатори *«держава», «лекція», «від'ємне число»* ***є одномісними;*** *«учитель», «раніше», «південніше»* — ***двомісними;*** *«знаходяться між», «повідомляє»* — ***тримісними.***

Місткість предикатора фіксує його логічний зміст. Це виявляється в тому, що ***лише одномісний предикатор виражає властивість, а інші — відношення.*** Як правило, вказівка на те, якої місткості конкретний предикатор, фіксується у його назві: *«більше»* (двомісний), *«метал»* (одномісний), іноді ж встановити місткість предикатора можна тільки з допомогою допоміжних методологічних процедур.

Для прикладу візьмемо предикатор *«читає».* Якщо це стан, то даний предикатор означає властивість: *«Мій приятель читає нормативний курс лекцій».* А якщо це дія, спрямована на щось, то цей предикатор виражає відношення: *«Мій брат* ***читає про*** *останню перемогу Київського «Динамо».*

Доцільним буде зробити деякі пояснення щодо можливості предикаторів представляти властивості або відношення.

У природній мові слова (іменники) *«держава», «книжка», «рідина»* тлумачать як вирази, що позначають предмети, а не властивості. По суті, вони позначають класи предметів, об'єднані в одне ціле на основі якої-небудь ознаки. На цю особливість іменників звернув увагу ***Рейхенбах*** у праці ***«Елементи символічної логіки». Б. Рассел*** вважає, що предикатори-іменники — це також позначаючі вирази, як і терми.. ***Саме здатність предикаторів-іменників позначати клас предметів дає можливість використовувати їх не тільки в ролі логічного присудка, а й логічного підмета висловлювання:***

1. *Планета є космічний об'єкт.*

2. *Земля є планета.*

У наведених прикладах ***предикатор-іменник*** у першому висловлюванні, виконуючи роль логічного підмета, ***по-***

значає клас предметів, а у другому, виконуючи роль ***логічного присудка***, ***представляє властивість.*** У ролі логічного присудка можуть бути різні граматичні категорії (іменники, прикметники, дієслова). Це їх і об'єднує в одну семантичну категорію — предикатор:

1. *Моя сестра малює.*

2. *Сонце є зірка.*

3. *Метал — електропровідний.*

Враховуючи здатність предикаторів-іменників нарівні з термами виконувати функцію позначення, треба мати на увазі ті труднощі, які виникають у процесі розрізнення предикаторів і термів.

Наприклад, слова *«метал», «камінь»,* з одного боку можуть позначати відповідно конкретний вид речовини або узагальнення різних видів речовин. Так, у реченні *«Метал є хімічний елемент»* слово «метал» — виконує роль терму, який позначає певну речовину. А у словосполученнях *«кольоровий метал», «чорний метал»* тощо, слово *«метал»* представляє собою клас предметів. Усе залежить від контексту, в якому вживається дане слово.

Наступною характерною ознакою предикатора є область визначення. ***Областю визначення предикатора є множина його можливих аргументів. Тобто, це множина предметів, у межах якої має смисл застосування даного предикатора.*** Так, областю визначення предикатора *«рідина»* є клас речовин, областю визначення предикатора *«ровесник»* — клас людей.

Особливістю одномісних предикаторів є те, що їх областю визначення виступає множина можливих аргументів предикатора, а особливістю багатомісних предикаторів є те, що область їх визначення складається з множини впорядкованих пар, трійок, четвірок і т.д. предметів. Більше того, ***область визначення багатомісного предикатора може складатися з аргументів, які відносяться до різних множин.***

Наприклад, предикатор *«довіряє»* у одному випадку може фіксувати відношення між людьми *«N довіряє M»*, у другому випадку — відношення людини до якогось виду діяльності, ситуації, речі тощо. Наприклад,

1. *«N довіряє інтуїції»;*

2. *«M довіряє пам'яті»;*

3. *«K довіряє експерименту».*

У ***1*** і ***2*** висловлюваннях один з аргументів предикатора *«довіряє»* належить до множини людей, другий — до множини видів психічної діяльності. У ***3*** висловлюванні предикатор *«довіряє»* — один з аргументів знову належить до множини людей, а другий — до множини видів обґрунтування знання. Наскільки важливим є правильне встановлення області визначення предикатора, свідчить той факт, що однакові за синтаксичною структурою предикатори можуть бути різними завдяки різним областям визначення. Візьмемо предикатор *«більше»*. Якщо слово *«більше»* представляє відношення між числами (*«5 більше 1»*) — це один предикатор, а якщо відношення між містами (*«Київ більший за Канів»*), то інший.

Отже, визначення кількості місць предикатора і встановлення для нього області визначення є необхідною передумовою його правильного застосування. Іншими словами, це дає можливість встановити:

а) що представляє предикатор — властивість чи відношення;

б) з якої сфери треба брати предмети, щоб будувати осмислені вирази.

Тільки після цього можна сказати, що певна послідовність знаків є такою семантичною категорією, як предикатор.

Область визначення будь-якого предикатора розбивається на дві взаємовиключаючі частини. Одна з них складається тільки із тих аргументів, які з даним предикатором, що виконує роль логічного присудка, утворюють істинне висловлювання. Цю частину області визначення предикатора називають областю істинності предикатора. Так, для предикатора *«планета»* областю визначення буде множина космічних об'єктів. До області його істинності увійдуть *Земля, Марс, Венера* тощо. За межами області істинності залишаться ті предмети з області визначення цього предикатора, які разом з ним утворюють хибне висловлювання: *Сонце, Місяць* тощо.

Враховуючи, що є два види предикаторів (за місткістю) — одномісні і багатомісні можна ще й так визначити область істинності стосовно кожного з них.

Областю істинності одномісного предикатора (який представляє певну властивість) є сукупність тих предметів, яким притаманна ця властивість.

Областю істинності багатомісного предикатора (який представляє відношення) є сукупність послідовностей предметів, між якими існує це відношення.

Наприклад, маємо предикатор *«сучасник»*. Областю його визначення буде множина людей. В область істинності увійдуть такі пари імен: *«Платон, Арістотель»*, *«Гегель, Фейєрбах»* тощо. За межами області істинності даного предикатора залишаться пари: *«Платон, Гегель»*, *«Архімед, Ейнштейн»* тощо.

Прийнято також називати область істинності предикатора обсягом представленого ним відношення чи властивості.

Однією з характерних ознак предикатора, як уже зазначалося, є те, що він представляє ознаки предмета, але не називає предмети. Навіть якщо предикатор-іменник виконує роль логічного підмета у висловлюванні, він все одно не позначає предмети, а представляє класи предметів, узагальнені на основі деяких властивостей.

Наприклад: «Будь-яка планета має природний супутник». До речі, це і є підставою для тлумачення предикаторів-іменників, що знаходяться в позиції логічних підметів як своєрідних змінних термів. ***Тільки терм позначає предмети***. Тому про терм часто говорять, що це називаючі вирази. Така відмінність між предикатором і термом зумовлює необхідність дати аналіз терміна *«предмет»*.

Зазвичай слово *«предмет»* (річ) розуміють у широкому смислі, як усе те, що може бути об'єктом думки. Тобто, це і предмети об'єктивної дійсності, і події, і ознаки предметів, і теоретичні конструкти науки. Перетворити властивість, відношення, судження у предмет — означає зробити його предметом думки. Технічно це можна зробити, побудувавши висловлювання у якому йтиметься відповідно про властивість, відношення, судження тощо.

1. *Властивість «бути підлітком» є віковою.*

2. *«Відношення, яке зафіксоване словом «приятель», є симетричним».*

3. *Речення «Варшава розташована на березі Дніпра» — хибне.*

У висловлюваннях ***1, 2, 3*** вирази *«властивість бути підлітком»*, *«відношення, яке зафіксоване словом "приятель"»*, *«речення «Варшава розташована на березі Дніпра»* позначають предмети, тобто ***це — терми***.

Отже, усе, що ми називали, стає об'єктом думки або предметом, а сама назва відноситься до категорії термів. Так, у першому висловлюванні об'єктом думки ми зробили властивість *«бути підлітком»* і таким чином отримали предмет, а назва цього предмета — терм. Щоб показати, що це терм, застосовуються такі технічні засоби, як лапки.

На відміну від терма предикатор може лише представити ознаку, але не може її назвати. У нашому прикладі вирази *«приятель»* і *«відношення «приятель»* відносяться до різних категорій: ***перший — це предикатор, а другий — терм.***

Щоб пересвідчитися в їхній розбіжності, спробуємо поміняти їх місцями. У результаті отримаємо висловлювання: *«Платон приятель Арістотеля»*. Здійснимо тут вказану зміну: *«Платон» «відношення «приятель» «Арістотель»*. Вираз, який ми отримали, не є навіть реченням. По суті, це послідовність термів.

Отже, ***у структурі висловлювання головними дескриптивними термінами є терм і предикатор.*** Саме ці семантичні категорії фіксують головні чинники висловлювання ***«те, що говориться» і «те, про що говориться».***

Але, окрім цих категорій, існують ще вирази, які позначають певні дії, операції над предметами, внаслідок яких виникають нові предмети. Йдеться про предметні функтори, або предметно-функціональні вирази. З предметними функторами (тобто назвами предметних функцій) ми зустрічаємося у математиці (*Sin*, (+), *log* тощо.). У природній мові предметні функції виражаються словами *«віддаль», «зріст», «вага», «маса», «швидкість», «колір», «професія»* тощо.

Предметний функтор, як і предикатор, має область визначення. ***Областю визначення функтора є множина предметів, до яких доцільно застосувати даний функтор.*** Так, областю визначення функтора *«зріст»* є множина людей (*Петро, Тарас, Микола* тощо).

Як і предикатор, функтори поділяються на ***одномісні*** (наприклад, *«вік», «професія»*) і ***багатомісні*** (*«добуток», «відстань»*).

Але на відміну від предикатора застосування функтора *«вік»* до предметів *«Петро», «Микола», «Тарас»* тощо, дасть новий предмет, тобто відповідне поіменоване число (18, 19, 26 тощо). Тому стосовно предметного функтора мова може йти не про область істинності, а про область можливих значень функтора.

Говорячи про терм, предикатор, функтор, зазначалося, що ці вирази позначають або представляють певні об'єкти, тобто малося на увазі, що це постійні вирази: постійний терм, постійний предикатор, постійний функтор. Водночас у науковій практиці застосовуються змінні вирази, або вирази із змінними значенням[1].

Логіка використовує змінні для суджень, предметів, властивостей, відношень, предметних функцій. Це дає змогу підвищити ефективність логічного аналізу природної мови, а також досконаліше будувати формалізовані мови. Так, для суджень уводять пропозиційні змінні або змінні висловлювання, для предметів — предметні змінні, або змінні терми для властивостей і відношень — предикатні змінні, або змінні предикатори, для предметних функцій — функціональні змінні.

Головною особливістю змінних символів є те, що вони нічого не позначають і не представляють (як постійні вирази).

---

[1] У таких судженнях, як *«Деякі дерева є морозостійкими», «Деякі трикутники є рівнобедреними», «Деякі теорії є гуманітарними»*, однакова логічна структура, яку можна записати у вигляді формули ***«Деякі S є P». S*** і ***P*** виражають у цих судженнях різні за змістом поняття. Слова ***«деякі», "є»*** фіксують одні і ті самі логічні зв'язки. Отже, ті знаки-символи у формулах логіки, які замінюються конкретними поняттями, називаються ***змінними*** (йдеться про ***S*** і ***P***). Ті символи (слова), які присутні у всіх конкретних за змістом думках, що мають однакову логічну структуру, називаються ***логічними постійними*** (у наших прикладах це слова ***«деякі» і «є»***). Термін «змінна» широко застосовується у математиці. Тут цей термін вживається у двох значеннях «змінна величина» і «змінний знак у формулах». У математиці «змінна величина» − це функція. Тобто, така величина (***y***), яка залежить від зміни другої величини (***x***). Під змінним знаком математики розуміють знак, на місце якого можна підставляти, відповідно до певних правил, імена індивідуальних предметів. Саме змінна — не ім'я, а пусте місце для конкретних імен. Наприклад, у виразі $(a + x) = (x + a)$ знаки ***«x»*** і ***«a»*** є змінними у другому смислі. У логіці змінні розуміють саме у другому смислі, тобто як змінні знаки. При побудові логічної теорії символами позначають і логічні змінні, і логічні постійні. Завдяки цьому можна не тільки скоротити запис, а й усунути багатозначність слів, за допомогою яких ми виражаємо логічні постійні. Наприклад, слова ***«якщо, то»***, сполучаючи два речення, можуть виражати причинні зв'язки, часові зв'язки, умовні зв'язки тощо. Але у логіці ми відволікаємося від цих смислових відтінків слів ***«якщо, то»*** і за допомогою логічного терміна ***«імплікація»*** надаємо будь-якому складному висловлюванню, утвореному з двох простих шляхом їх поєднання словами ***«якщо, то»,*** один і той самий смисл: якщо висловлювання, яке стоїть після слова ***«то»*** хибне, тоді в цілому складне висловлювання буде хибним, а в усіх інших випадках — істинним.

Наприклад, змінне висловлювання набуває значень із множини суджень, змінний предикатор набуває значень із множини властивостей чи відношень тощо.

Вказати предметну область (тобто область, звідки беруть значення відповідні змінні) є необхідною дією для визначення певного знака як змінної. Не визначивши предметну область не можна сказати, чи є дана послідовність символів знаком, який є змінною, чи ні.

У природній мові роль змінних виконують загальні імена (предикатори-іменники у позиції логічного підмета). По суті, введення змінних — основа методу формалізації.

У логіці об'єкти дослідження та операції над ними позначаються відповідними символами. Завдяки цьому про об'єкти і логічні відношення між ними можна говорити мовою символів. Застосування змінних у логіці, з одного боку, забезпечує дослідження логічної структури природної мови, а з іншого — допомагає розкрити структуру виразів і правил виведення у формалізованих мовах.

3. Визначення логічних термінів

Таким чином, розгляд групи семантичних категорій, яку називають дескриптивними термінами, показує, що вони фіксують головні типи мисленнєвих структур, із яких будується процес міркування.

Самі ж логічні зв'язки, відношення, що мають місце у процесі міркування, представлені другою групою семантичних категорій — ***логічними термінами.***

До логічних термінів відносять відношення[1] між дескриптивними термінами усередині висловлювання, відношення між висловлюваннями, кількісні характеристики предметів думки у простих висловлюваннях, описові вирази предметів думки у простих висловлюваннях.

У природній мові відношення між термінами у простому висловлюванні, відношення між простими висловлюваннями у складному висловлюванні виражають, відповідно, ***словами «є» («суть»), «і», «або», «якщо, то», «ні», «як-***

[1] Зрозуміло, що не самі відношення є логічними термінами, а слова і словосполучення, за допомогою яких зафіксовані ці відношення.

що, і тільки якщо, то». Відношення, зафіксовані цими словами, називають логічними зв'язками.

Кількісні характеристики предмета думки у простому висловлюванні виражають словами ***«будь-які» «всі», «деякі»*** і називають ***кванторами*** (***«всі» — квантор загальності, «деякі» — квантор існування***).

Описові вирази предмета думки у простому висловлюванні представлені словами ***«той», «який», «такий, що»***. Це — оператори визначених і невизначених дескрипцій.

Розглянемо стисло логічні зв'язки. До характеристик кванторів і операторів визначеної та невизначеної дескрипцій звернемося пізніше.

Серед групи логічних зв'язок виділяють зв'язку ***«є»*** і так звані пропозиційні зв'язки ***«і», «або», «якщо, то», «ні», «якщо і тільки якщо, то»***.

Зв'язка ***«є»*** (або множинна форма *«суть»*), як уже зазначалося, фіксує логічні відношення між дескриптивними термінами у простому висловлюванні. Вона констатує наявність певної ознаки у суб'єкта висловлювання. А оскільки ознаки бувають двох видів (властивість або відношення), то зв'язка ***«є»*** вказує на наявність у предмета думки певної властивості, або наявність між предметами думки певного відношення.

1. *Варшава є столичним містом..*

2. *Сократ є вчителем Платона.*

У першому висловлюванні зв'язка ***«є»*** приписує властивість предмета думки *«столичне місто»*, у другому — відношення, яке притаманне *Сократу* і *Платону*.

Залежно від того, що констатує ***«є»*** у висловлюванні, їх поділяють на:

— ***атрибутивні*** (висловлювання про властивості) і

— ***релятивні*** (висловлювання про відношення).

Щоб у даному випадку не виникло плутанини стосовно зв'язки ***«є»*** (тобто, що зв'язка ***«є»*** виражає відношення між ***S і P***, і тут же, що зв'язка ***«є»*** приписує відношення предмета думки висловлювання), то звернемо увагу на таку обставину.

Виходячи з того, що зв'язка ***«є»*** фіксує відношення між ***S і P***, ці відношення можуть бути двох видів: ***або відношенням належності, або відношенням неналежності.***

Відношення належності — це відношення простору, часу, величини, сили, причинності тощо. *Наприклад,* у висловлюванні *«Логіка є філософською наукою»* маємо відношення належності, а у висловлюванні *«Логіка виникла раніше кібернетики»* — маємо відношення часу. За логічним характером ці висловлювання різні. У першому констатується зв'язок між предметом і такою його ознакою, як властивість, а в другому — зв'язок між предметами через таку ознаку, як часове відношення.

***Відношення належності має такі різновиди*:**

***а) належність властивості предмета** («6 є парним числом»);*

***б) належність певного предмета до класу предметів** («Ньютон є видатним фізиком»);*

***в) належність одного класу предметів до іншого** («Трикутник є геометричною фігурою»).*

Отже, розуміння зв'язки ***«є»*** як відношення належності чи неналежності дає єдиний критерій логічного аналізу простих висловлювань, на якому грунтується логіка предикатів — один із розділів сучасної формальної логіки.

На відміну від зв'язки ***«є»***, слова природної мови ***«ні», «і», «або», «якщо, то», «якщо і тільки якщо, то» складають групу логічних термінів, які фіксують логічні відношення не між S і P, а між висловлюваннями.***

Слова ***«і», «або», «якщо, то»*** і подібні їм прийнято називати граматичними сполучниками. І це справді так, коли ми хочемо описати способи зв'язку простих речень у складні. За допомогою граматичних сполучників досягається певна смислова єдність простих речень у складному. Утворюючи складне речення, зосереджуються на тому, щоб воно було зв'язане за змістом, не звертаючи уваги на те, істинні чи ні прості речення (що входять до його складу), а також отримане з них складне речення.

Але ці ж слова є носіями і логічних сполучників. На відміну від граматичних сполучників логічні сполучники фіксують зв'язки між висловлюваннями, а не між реченнями.

Сполучаючи висловлювання за допомогою логічних сполучників, ми враховуємо лише логічні значення (істинність, хибність) простих висловлювань і відволікаємося від змісту, смислу простих висловлювань. При утворенні складних висловлювань нас цікавить залежність істинності чи хибності складного висловлювання від істинності чи хибності простих висловлювань, що його складають.

Наприклад, візьмемо висловлювання *«Квадрат є геометричною фігурою або Франція є монархією»*. У цьому висловлюванні немає смислового, змістовного зв'язку, тому слово ***«або»*** не є носієм граматичного сполучника. Але з погляду логіки таке сполучення простих висловлювань допустиме і отримане з них висловлювання має конкретне значення. Тобто, отримане складне висловлювання ми оцінюємо як істинне.

Враховуючи цю особливість логічних сполучників (які у природній мові представлені тими самими словами, що й граматичні), у логіці вводяться спеціальні назви і ***символи для позначення логічних сполучників:***

«і» — кон'юнкція **($\wedge$)*;***

«або» — диз'юнкція **($\vee$)*;***

«якщо, то» — імплікація **($\supset$)*;***

«якщо і тільки якщо, то» — еквівалентність **($\leftrightarrow$)*;***

«ні» — заперечення **(-).**

Оскільки логічні сполучники, з'єднуючи прості висловлювання у складні, фіксують не смисл, зміст простих висловлювань, а лише їхнє значення, то визначення кожного логічного сполучника зводиться, по суті, до встановлення умов, за яких утворене складне висловлювання буде істинним, а за яких — хибним. Іншими словами, пояснити, наприклад, що собою являє кон'юнкція, це означає показати, як залежить значення складного висловлювання від значень простих, що його утворюють за допомогою цього сполучника. А оскільки у складних висловлюваннях береться до уваги тільки значення простих, які комбінуються за допомогою логічних сполучників, і це є визначальним, то, як правило, складне висловлювання часто називають за іменем сполучника, що його утворює. Тобто, говорять не *«складне кон'юнктивне висловлювання», а «кон'юнкція».*

За допомогою логічних сполучників із простих висловлювань утворюють складні, їх називають логічними операціями.

Розділ логіки, який досліджує природу таких логічних термінів, як заперечення, кон'юнкція, диз'юнкція, імплікація, еквівалентність, називають логікою висловлювань, а логічні терміни ***«кон'юнкція», «диз'юнкція» і подібні — пропозиційними сполучниками***, або ***пропозиційними зв'язками*** («пропозиція» від слова «висловлювання»).

Отже, підсумовуючи попередні зауваження щодо характерних ознак пропозиційних сполучників, можна виділити два головних питанння, які цікавлять логіку висловлювань:

1) яким чином із простих (атомарних) висловлювань можна утворити складні (молекулярні)?

2) як залежить логічне значення молекулярного висловлювання від логічних значень атомарних?

Розглянемо тепер визначення пропозиційних зв'язок.

Серед пропозиційних зв'язок виділяють ***заперечення*** як унарну зв'язку. ***Унарна — означає «одномісна»***. Вона застосовується до одного висловлювання. Решта зв'язок (чотири), є ***бінарними, двомісними***. Тобто, лише при наявності двох простих висловлювань можна отримати правильно побудоване складне висловлювання.

Запереченням називається логічна операція, за допомогою якої з певного істинного висловлювання отримують нове висловлювання, яке буде хибним, і навпаки.

Заперечне висловлювання складається із вихідного висловлювання і знака заперечення (**$\neg$**), який ставлять перед ним: **$\neg$ А**. (Часто вживають і інші символи для позначення заперечення: **(—)** або **(~)**. Відповідно: **$\bar{A}$** або **~А**. Запереченням висловлювання **А** є складне висловлювання **$\neg$ А**. У природній мові аналогами заперечення є слова ***«не», «неправильно, що», «не має місця, що»***.

У логіці висловлювань процедури визначення кожної логічної операції задаються так званими таблицями істинності.

Щоб побудувати таблицю істинності, ми повинні прийняти такі умови:

1) просте висловлювання може бути або істинним, або хибним, але не може бути одночасно і істинним, і хибним;

2) кількість рядків таблиці істинності для певного складного висловлювання відповідає формулі: 2^n (де 2 — кількість логічних значень для простого висловлювання (істина та хиба), а n — кількість простих висловлювань, що входять до складу складного висловлювання). У логіці логічне значення «істина» позначається буквою «t» (від англійського слова «truth» — що означає «правда», «істина»), а логічне значення «хиба» — буквою «f» (від англійського слова «false» — що означає «хибний», «помилковий»).

Наприклад, якщо до складу складного висловлювання входить два простих висловлювання, то відповідно до формули 2^n замість ***n*** підставляємо ***2*** і отримуємо формулу $2^2 = 4$. Тобто, таблиця істинності для цього складного висловлювання буде складатися із чотирьох рядків. Якщо таблиця будується для простого висловлювання, то вона складатиметься із двох рядків відповідно до формули $2^1 = 2$.

Побудуємо таблицю істинності для заперечення.

A	$\overline{A}$
t	*f*
f	*t*

Ця таблиця ілюструє визначення логічної операції заперечення, яке ми дали вище. При ***істинності*** **А** ***хибним*** буде **не-А ($\overline{\text{A}}$)**, а при ***хибності*** **А** ***істинним*** буде **не-А ($\overline{\text{A}}$).**

Як уже зазначалося, до бінарних пропозиційних сполучників належать $\wedge$, $\vee$, $\supset$, $\leftrightarrow$.

Кон'юнкцією називається складне висловлювання (A $\wedge$ B), яке істинне тоді і тільки тоді, коли істинне A і істинне B.

Слово ***«кон'юнкція»*** походить від ***conjnctio —*** зв'язок, сполучник.

У природній мові аналогами кон'юнкції є вирази ***«A разом з B», «A і B», «як A так і B», «A в той час як B», «B, хоча і A», «B, незважаючи на A», «не тільки A, а й B»*** і деякі інші.

У логіці кон'юнкцію позначають символами: «$\wedge$«, «&».

Наведеному визначенню кон'юнкції відповідає така таблиця істинності:

A	*B*	$A \wedge B$
t	*t*	*t*
t	*f*	*f*
f	*t*	*f*
f	*f*	*f*

Відповідно до наведеної таблиці складне висловлювання *«Ми знаходилися в аудиторії, і на вулиці йшов дощ»* буде істинним лише тоді, коли істинними будуть обидва прості висловлювання: *«Ми знаходилися в аудиторії»* і *«На вулиці йшов дощ»*. В усіх інших випадках воно хибне.

Відомим фактом є багатозначність слів природної мови. І це стосується не тільки слів-іменників, а й сполучників, серед яких є і слово ***«або»***. Логіка створює спеціальні засоби, за допомогою яких аналізується подібна багатозначність і які дають можливість запобігти цій багатозначності.

Складне висловлювання, утворене за допомогою сполучника ***«або»,*** відображає існування різних можливостей.

Наприклад, висловлювання *«Він досяг гарних результатів у навчанні або завдяки старанності, або завдяки здібностям»* відображає наявність різних можливостей отримання гарних результатів у навчанні. ***Це висловлювання буде істинним, якщо одна з двох можливостей реалізується. Істинним воно буде і тоді, коли реалізуються обидві можливості.***

Таке висловлювання називають ***диз'юнктивним.*** Слово ***«диз'юнкція»*** походить від латинського ***disjunctio*** — роз'єднування, подія, розрізнення.

У природній мові аналогами диз'юнкції є вирази: ***«А або В», «А або В, або обидва», «А і або В», «А, якщо не В».***

Для позначення диз'юнкції використовується символ: «∨».

Різні значення сполучника ***«або»*** у логіці фіксуються:

— ***з'єднувальною диз'юнкцією (або просто диз'юнкцією),***

— ***розділовою диз'юнкцією (або суворою диз'юнкцією) і***

— ***виключною диз'юнкцією (або антикон'юнкцією).***

Прикладом з'єднувальної диз'юнкції є наведене вище висловлювання.

Отже, ***з'єднувальною диз'юнкцією називають складне висловлювання $A \vee B$, яке буде істинним тоді і тільки тоді, коли буде істинним хоча б одне з висловлювань А або В.***

Наведення визначення відображене у ***таблиці істинності для диз'юнкції***

A	***B***	***A ∨ B***
t	***t***	***t***
t	***f***	***t***
f	***t***	***t***
f	***f***	***f***

Коли потрібно показати, що з двох можливостей реалізується тільки одна і що реалізація однієї можливості виключає реалізацію іншої, користуються ***розділовою, суворою або сильною, диз'юнкцією***.

У природній мові сувора диз'юнкція має аналогом вираз ***«А або В, але не обидва», «А, якщо не В», «А, крім випадку, коли В»***.

Логіка для позначення ***сильної диз'юнкції використовує символи***:

«$\dot{\vee}$», «$\underline{\vee}$», «$\not\equiv$».

Сильною диз'юнкцією називається висловлювання А $\dot{\vee}$ В, яке істинне тоді і тільки тоді, коли одне з простих висловлювань, що входять до його складу, істинне, а друге — обов'язково хибне.

Наприклад, «Ця людина або житель Києва, або іногородній».

Таблиця істинності для сильної диз'юнкції має такий вигляд:

A	***B***	$A \dot{\vee} B$
t	***t***	***f***
t	***f***	***t***
f	***t***	***t***
f	***f***	***f***

Сильною диз'юнкцією користуються тоді, коли відомо, що з двох можливостей, які включають одна одну, реалізуватися може лише одна, але невідомо яка саме.

Отже, у диз'юнкції істинність одного простого висловлювання не виключає істинності другого, а в сильній диз'юнкції істинність одного виключає істинність другого.

У природній мові сполучник ***«або»*** може вживатися і в третьому значенні, яке теж є виключаючим. Іноді нам необхідно сказати, що одна, а то й обидві можливості не мають місця.

Наприклад, у висловлюванні *«Він є студентом або школярем»* ми хочемо сказати, що він ні в якому випадку не є ні тим, ні іншим одночасно. В крайньому разі одним із них. За допомогою виразу «у крайньому разі» ми підкреслюємо, що він не може бути ні тим, ні другим (стосовно нашого прикладу: він і не учень школи і не студент, а учень технікуму).

Тому наведене висловлювання буде істинним і тоді, коли обидва простих висловлювання хибні.

Таке складне висловлювання називають ***виключенням, або антикон'юнкцією***. По суті, смисл сполучника ***«або»*** в цьому випадку можна передати комбінацією таких логічних термінів, як кон'юнкції і заперечення.

Комбінацію цих термінів позначимо вертикальною рискою **(А | В)**. ***Складне висловлювання, яке виражає несумісність простих висловлювань, що його складають, називається виключенням або антикон'юнкцією.***

Отже, ***виключенням (антикон'юнкцією) називають складне висловлювання, яке істинне тоді і тільки тоді, коли у крайньому разі одне з простих висловлювань, що його складають, хибне.***

Цьому визначенню виключення відповідає таблиця істинності:

A	***B***	***A | B***
t	***t***	***f***
t	***f***	***t***
f	***t***	***t***
f	***f***	***t***

До багатозначних сполучників природної мови, крім сполучника ***«або»***, належить і сполучник ***«якщо, то»***, який фіксує той факт, що одне явище спричиняє інше. З'єднавши цим сполучником два прості висловлювання, отримаємо складне умовне висловлювання.

Граматичному сполучнику ***«якщо, то» відповідає логічний термін «імплікація»***. Слово ***«імплікація»*** походить від латинського ***implicite*** — тісно пов'язую.

Аналогами імплікації у природній мові є слова ***«якщо А, то В», «А тоді, коли В», «у випадку А, має місце В», «В, якщо А», «для В достатньо А», «для А необхідно В».***

Для позначення імплікації логіка використовує символи: «→«, « ⊃«

Однією з особливостей імплікації як логічного терміна, на відміну від уже розглянутих, є те, що прості висловлювання, поєднані імплікацією, не можна переставляти місцями, бо це змінить логічне значення складного висловлювання. Кожне з простих висловлювань, які входять до імплікативного висловлювання, має спеціальну назву, відповідно до функцій, які воно виконує у складному висловлюванні.

Висловлювання, якому надіслане слово «якщо» і яке стоїть перед словом «то», називають антецедентом від латинського ***antecedens*** — попередній.

Висловлювання, яке стоїть після слова «то», називають консеквентом (з латинської ***consequens*** **—** наступний).

У літературі **антецедент** прийнято називати ***умовою, причиною***, ***підставою, основою***, а ***консеквент — наслідком, висновком.***

Для імплікації характерна та обставина, що стверджуючи імплікацію, ми стверджуємо, що ні в якому разі не може трапитися так, щоб антецедент був істинним, а консеквент — хибним. Виходить, що ***імплікація істинна у трьох випадках:***

— ***антецедент істинний і консеквент істинний;***

— ***антецедент хибний, а консеквент істинний;***

— ***антецедент хибний і консеквент хибний.***

І лише коли антецедент істинний, а консеквент — хибний, імплікація — хибна.

Це відображено в таблиці істинності для імплікації:

A	***B***	***A ⊃ B***
t	***t***	***t***
t	***f***	***f***
f	***t***	***t***
f	***f***	***t***

Звідси випливає, що, приймаючи імплікацію за істинну і визначаючи істинним її антецедент, ми повинні визнати істинним і її консеквент, а приймаючи імпліквцію за істинну і відкидаючи в то й же час її консеквент як хибний, ми повинні відкинути і її антецедент.

Для імплікації, як і для диз'юнкції, характерна багатозначність, що полягає у розбіжності між вживанням її у логіці і в побуті. Аналог імплікації у природній мові — сполучник ***«якщо, то»*** з'єднує два простих висловлювання у складне в тих випадках, коли між ними існує певний зв'язок за формою і змістом. Під цим зв'язком розуміється той факт, що консеквент обов'язково випливає з антецедента. Іншими словами, ***визнаючи антецедент за істинний, ми змушені визнати істинним і консеквент.***

З чисто інтуїтивної точки зору можна сказати, що ми звертаємося до імплікації у наших міркуваннях тільки тоді, коли не впевнені, істинні її антецедент і консеквент чи ні. В усіх інших випадках вживання імплікації втрачає смисл.

Наприклад, «Якщо дане космічне тіло планета, то воно має природний супутник». Наведене висловлювання, як і будь-яке інше імплікативне висловлювання, містить певний сумнів, який кодується наведеною таблицею істинності.

А.Тарський у книзі ***«Вступ до логіки та методології дедуктивних наук»*** наводить один з фізичних законів (*«Кожен метал є пластичним»*), який записує у вигляді імплікації: *«Якщо **x** є метал, то **x** є пластичним»*. Ця імплікація є формою конкретних застосувань загального закону. Коли ми впевнені в істинності загального закону, то змушені визнати істинність усіх його часткових застосувань. Мається на увазі, що коли на місце ***x*** ми поставимо назву будь-якого матеріалу (*наприклад,* мідь, глина, камінь тощо), то завжди матимемо істинне конкретне імплікативне висловлювання.

Можна легко переконатися, що:

а) *всі висловлювання, отримані в результаті такої підстановки, відповідатимуть умовам істинності імплікації. Ми не матимемо ситуації, коли при істинності антецедента хибним буде консеквент;*

б) *у кожній з імплікацій як конкретизації загального закону існує тісний зв'язок між антецедентом і консеквентом, що відображається у формальному співпаданні їх суб'єктів;*

в) *приймаючи антецедент кожної з цих імплікацій* (*наприклад, «мідь — метал»*) *за істинний, можемо вивести з нього істинний консеквент* (*«мідь — пластична»*). *Підставою для цього є загальний закон, що всі метали — пластичні.*

Однак, як зазначає А.Тарський, з погляду природної мови деякі з імплікативних висловлювань будуть штучними і сумнівними.

Коли ми замість ***x*** підставим назву конкретного матеріалу, відносно якого ми не знаємо, чи є він металом і чи пластичний він, імплікативний зв'язок відповідатиме своєму призначенню. Якщо ми замінимо ***x*** «*міддю*», антецедент і консеквент будуть безсумнівно істинні.Тому тут доречніше замість імплікації вжити вираз: «*Оскільки мідь — метал, то мідь — пластична*». Підставивши замість ***x*** «*глину*», отримаємо імплікацію з хибним антецедентом і істинним консеквентом, яку доцільніше замінити виразом: «*Хоча глина і не метал, вона — пластична*». А дібравши для ***x*** назву такого матеріалу, коли утворена імплікація матиме хибним і антецедент, і консеквент, ми збережемо імплікацію, але при цьому необхідно змінити граматичну форму дієслів. Так, підставивши замість ***x*** «*камінь*», матимемо: «*Якби камінь був металом, то він був би пластичним*».

Враховуючи прагнення мови науки до суворого визначення термінів, логіка задає чітке визначення імплікації. Імплікація вважається осмисленою навіть тоді, коли між антецедентом і консеквентом немає ніякого зв'язку. Істинність чи хибність імплікації залежить виключно від істинності або хибності антецедента і консеквента.

Такий підхід дає можливість, по-перше, встановити логічний смисл виразу «якщо, то» і, по-друге, звільнити цей вираз від психологічних факторів. З цього погляду осмисленими будуть такі висловлювання:

Якщо Варшава — столиця Польщі, то Дніпро впадає в Чорне море.

Якщо Варшава — столиця Франції, то Дніпро впадає в Чорне море.

Якщо Варшава — столиця Польщі, то Дніпро впадає в Каспійське море.

Якщо Варшава — столиця Франції, то Дніпро впадає в Каспійське море.

У природній мові ці висловлювання не мають смислу. Логіка ж визнає їх осмисленими, оскільки вони чітко фіксують логічне значення фрази ***«якщо, то»***, яке полягає в тому, що тільки третє висловлювання хибне, а решта — істинні. Імплікацію з таким визначенням називають ***матеріальною, тобто імплікацією, в якій між антецедентом і консеквентом немає змістовного зв'язку***. Вперше концепцію матеріальної імплікації висунув давньогрецький філософ ***Філон*** (***IV ст. до н.е.***).

Крім матеріальної імплікації, існує і формальна.

Формальна імплікація — це вид імплікації, який фіксує змістовний зв'язок між антецедентом і консеквентом.

Назву ***«формальна»*** ця імплікація отримала завдяки тому, що антецедент і консеквент мають суб'єкти, які збігаються за формою. *Прикладом* може бути закон фізики, наведений ***А. Тарським:*** *«Для будь-якого* ***х****, якщо* ***х*** *є метал, то* ***х*** *є пластичний»*.

Б. Рассел запропонував застосовувати формальну імплікацію для позначення законів природи.

Отже, ми переконалися, що імплікація без смислового зв'язку між антецедентом і консеквентом звучить парадоксально. Незвичний вираз *«Якщо пальми ростуть на полюсі, то крокодили літають»* визнається істинною згідно з таблицею істинності для імплікації. Ця незвичність (ще раз підкреслимо) зумовлена тим, що в природній мові, користуючись імплікацією, ми намагаємося передати певний смисловий зв'язок між антецедентом і консеквентом, а в логіці фіксується той факт, що імплікація хибна тільки при істинності антецедента і хибності консеквента.

Користуючись засобами природної мови, за допомогою сполучника «якщо, то» ми відображаємо різні смислові зв'язки між антецедентом і консеквентом. Ці зв'язки можуть бути таких видів:

а) причинний (наприклад, *«Якщо через провідник пропустити електричний струм, то він збільшиться»*). У цьому висловлюванні відображено те, що певна дія (пропуск електричного струму через провідник) є причиною збільшення провідника. При цьому перше повинно передувати другому;

б) зв'язок, який вказує, що знання про один факт є логічною підставою для ствердження знання про другий факт (наприклад, «*Якщо ртуть у термометрі підня-*

лася, то в кімнаті стало тепліше»). Тут ми маємо справу вже не з причинним зв'язком, оскільки підйом ртуті у термометрі не спричиняє потепління в кімнаті;

в) зв'язок, який висуває один факт як умову для виникнення або існування іншого факту (наприклад, *«Якщо я успішно складу сесію, то я поїду в закордонну мандрівку»*). У цьому висловлюванні антецедент є обов'язковою умовою появи факту, що фіксує консеквент;

г) зв'язок, який відображає часову послідовність подій (наприклад, *«Якщо сьогодні я закінчу писати статтю, то завтра віддам її на рецензію»*). Це висловлювання фіксує часову (а не причинну) послідовність фактів, зафіксованих відповідно в антецеденті і консеквенті.

Очевидно, що у кожному з цих висловлювань сполучник ***«якщо, то»*** має свою специфіку. У логіці ця специфіка відходить на другий план. Використовуючи імплікацію, ми, по суті, абстрагуємося від смислових відтінків сполучника ***«якщо, то»,*** до яких звикли і які досить ефективно використовуємо в процесі спілкування. Цим ми досягаємо більшої точності в передачі інформації, але, зрозуміло, вимушені жертвувати змістом.

З наведених висловлювань можна зробити висновок, що будь-яке істинне умовне висловлювання фіксується істинною імплікацією, але не будь-яка істинна імплікація є виявом умовного висловлювання у звичайному смислі.

Аналіз імплікації передбачає визначення понять ***«достатня підстава»***, ***«необхідна підстава»***. Ці поняття досить широко використовуються в науці, тому необхідно дати їх чіткі визначення.

Достатньою підставою називається підстава, наявність якої обов'язково спричиняє певний наслідок.

У разі відсутності наслідок може наступити, а може й ні.

Наприклад, «Якщо був дощ, то дахи будинків мокрі». Тут ***антецедент фіксує достатню підставу, але не необхідну***. Тому що без дощу дахи будинків можуть бути як мокрими, так і сухими. Причиною наслідку, який зафіксований у консеквенті, може бути дощ, туман, мокрий сніг тощо. Отже, стверджувати, що ***A*** є достатньою підставою для ***B,*** рівнозначно твердженню: *«Якщо має місце* ***A****, то обов'язково матиме місце* ***B****»*. Буквально це фіксується в імплікації ***«$A \supset B$»***.

Необхідною підставою певного явища є підстава, відсутність якої зумовлює відсутність конкретного явища. Наявність цієї підстави не означає обов'язкову появу наслідку (наслідок може бути, а може його і не бути).

Звернемося до згаданого вже висловлювання, але залишимо його в такому вигляді: *«Якщо дахи будинків мокрі, то був дощ»*. У цьому висловлюванні ***антецедент виражає необхідну, але не достатню умову.*** Це означає, що за наявності умови, яку фіксує антецедент, наслідок може наступити, а може й ні (дахи будинків можуть бути мокрі і від дощу, і від снігу). Тільки коли відсутня умова буде відсутній і наслідок (коли дахи будинків сухі, то й не було дощу).

Отже, коли говорять, що ***В*** є необхідною, але не достатньою підставою для ***А***, то це буквально відповідає висловлюванню ***«В, тільки якщо А»***. Іншими словами, якщо достатню підставу виражають через імплікацію (*«Якщо був дощ, то дахи будинків мокрі»*, або ***«$A \supset B$»***), то необхідна підстава фіксується конверсією[1], а твердження достатньої підстави (*«Якщо дахи будинків мокрі, то був дощ», або* ***«$B \rightarrow A$»***). У природній мові, щоб висловити необхідну підставу часто застосовують зворот *«тільки якщо»*. Наприклад, «*Тільки якщо замкнутий контакт, то лампочка горить», «Тільки якщо він депутат, то він може бути обраний головою комісії Верховної Ради»*.

Тобто, ***лише з'ясувавши логічну структуру висловлювань, можна визначити, яке із них виражає достатню підставу, а яке — необхідну.*** Природна мова таких критеріїв не має і не може мати.

Цей висновок значною мірою характеризує природу наступного логічного терміна — ***еквіваленції.***

Еквіваленція (або подвійна імплікація) висловлювань А і В — це складне висловлювання, яке буде істинним тоді і тоді, коли А і В одночасно істинні або одночасно хибні. В інших випадках еквіваленція буде хибною.

Еквіваленцію позначають ***символами:*** $\leftrightarrow$, $\equiv$, ~

$$(A \leftrightarrow B,\ A \equiv B,\ A \sim B).$$

[1] Конверсією імплікації **$A \supset B$** (або оберненою імплікацією) називається висловлювання, у якому антецедентом є консеквент вихідної імплікації, а консеквентом – антецедент вихідної імплікації: **$B \rightarrow A$**.

У природній мові аналогами еквіваленції є вирази: ***«А тоді і тільки тоді, коли В», «А якщо В і В якщо А», «Для А достатньо і необхідно В», «А матеріально еквівалентно В».***

Наведеному визначенню еквіваленції відповідає така таблиця істинності:

A	*B*	$A \leftrightarrow B$
t	*t*	*t*
t	*f*	*f*
f	*t*	*f*
f	*f*	*t*

Ця таблиця відрізняється від таблиці істинності для імплікації третім рядком, а від таблиці істинності для конверсії імплікації — другим рядком.

Оскільки імплікація виражає відношення між достатньою умовою та її наслідком, а конверсія імплікації — між необхідною умовою та її наслідком, то еквіваленція або подвійна імплікація, виражає відношення між достатньою і необхідною умовою та її наслідком.

Напрклад, *«Якщо він знає англійську мову, то він перекладе цей текст», «Якщо геометрична фігура квадрат, то її діагоналі діляться навпіл»*. Як у матеріальній імплікації сполучник ***«якщо, то ...»*** не виражає смислового зв'язку між антецедентом і консеквентом, так і в еквіваленції сполучник ***«якщо і тільки якщо»*** не виражає змістовного зв'язку між лівою і правою частинами еквівалентності; він виражає лише відношення між їх істинними значеннями (*«істина», «хиба»*). Ця особливість еквіваленції відіграє важливу роль для операцій із символами у логічних численнях.

Знання логічної еквіваленції дає можливість:

а) спростити запис послідовності висловлювань;

б) перейти від одного висловлювання до логічно еквівалентного йому (тобто з тим самим істинним значенням);

в) замінити у послідовності формул одні формули на інші.

Аналіз логічних зв'язок як однієї з підмножин множини логічних термінів характеризує головні типи логічних відношень, без яких неможливо збагнути підвалини логіки висловлювань і логіки предикатів.

Окрім логічних зв'язок, серед логічних термінів виділяють логічні оператори, до яких відносяться ***квантори та описові вирази, або оператори дескрипції.***

Розрізняють два види кванторів:

— ***квантор загальності;***

— ***квантор існування.***

Слово ***«квантор»*** походить від латинського ***guantum*** — скільки.

За допомогою кванторів виявляють відношення між предметною областю і предикатами, які визначені для неї.

Для позначення квантору загальності застосовують символи:

$$\forall x,\ (x),\ (Ax),\ \widehat{x},\ \hat{x},\ \overset{\pi}{x}.$$

Читається знак квантору $\forall x$ так: ***«для будь-якого x».*** У природній мові аналогами квантору загальності є слова: ***«усі», «кожний», «будь-який»*** тощо. ***Квантор загальності ставиться при загальних судженнях.***

Наприклад, судження «*Будь-яка планета є космічним тілом*» можна записати, використовуючи квантор загальності у такому вигляді:

$$\forall x\ (S\ (x) \supset P(x)).$$

Читається вираз так: ***«Для будь-якого x, якщо x — планета, то x є космічним тілом».*** Такий запис свідчить, що це судження буде істинним для будь-якого x, визначеного на предметній області S, і хибним у протилежному випадку. Тобто, якщо ми на місце x поставимо назву будь-якої планети, отримаємо істинне судження. Саме цей факт фіксується формулою

$$\forall x\ (S\ (x) \supset P\ (x)).$$

Тому $\forall x$ розглядають як узагальнення кон'юнкції з нескінченною кількістю кон'юнктів:

$$(S\ (a) \supset P(a)) \wedge (S(b) \supset P(b)) \wedge (S(c) \supset P(c))$$

де ***а, в, с*** (у нашому прикладі) — назви планет: *Земля, Марс, Венера та ін .*

Квантор існування в логіці позначають символами:

$$\exists \overset{\Sigma}{x},\ \overset{\vee}{x},\ \breve{x}.$$

Читається він так: ***«існує такий x, що ...»***. У природній мові аналогами квантору існування є вирази: ***«деякі», «існує», «іноді», «кілька»*** тощо. ***Квантор існування приписують частковим судженням.***

Наприклад, судження «*Деякі планети мають атмосферу*» за допомогою $\exists x$ квантору можна записати формулою:

$$\exists x\ (S(x) \wedge P\ (x)),$$

яку читають: ***«Існує такий x, який є планетою і має атмосферу».*** Вираз $\exists x\ (S(x) \wedge P(x))$ вказує на те, що це судження буде істинним при підстановці замість x хоча б одного предмета з предметної області S, і хибним навпаки. А це означає, що квантор існування можна тлумачити як узагальнення диз'юнкції з нескінченною диз'юнкцією її членів:

$$(S(a) \wedge P(a)) \vee (S(b) \wedge P(b)) \vee (S(c) \wedge P(c)) \ldots,$$

де a, b, c — назви конкретних планет (стосовно нашого прикладу).

Ось так можна охарактеризувати квантор загальності та квантор існування. Що ж стосується ще двох логічних операторів, а саме операторів дескрипції, то про них йдеться далі.

Розгляд логічних і дескриптивних термінів робить очевидним той факт, що логічні терміни фіксують ту сторону смислу висловлювання, яка виражає логічну форму відповідного судження. Щоб з'ясувати логічну форму судження і логічну структуру висловлювання, треба замінити всі дескриптивні терміни змінними символами відповідних категорій.

Наприклад, маємо висловлювання: *«Будь-яка теорія має логічне обгрунтування»*. Випишемо дескриптивні терміни за допомогою символів: x, S, P. І отримаємо вираз:

$$\forall\ x\ (S(x) \supset P(x)),$$

який представляє логічну форму даного висловлювання. А оскільки відомо, що процес отримання одних висловлювань з інших (що і є головним інтересом логіки) визначається їх логічною формою, то цю сторону смислу висловлювання називають називають його дедуктивним змістом.

Таким чином, головна функція логічних термінів — визначення дедуктивного змісту висловлювань.

РОЗДІЛ V

ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ІМЕН

1. Ім'я, смисл, значення

Семантичний аналіз природної мови дав змогу здійснити типологію мовних виразів відповідно до того, носіями яких видів мисленнєвих структур їх властивостей і відношень вони є. Але вирази природної мови можна розглядати як знаки, що є носіями імен. З огляду на це, всі осмислені (значущі) мовні вирази у сучасній логіці розглядаються як імена. У процесі пізнавальної і практичної діяльності предметом людської думки стають реально існуючі або умовні речі. Без позначення цих предметів людина не може обійтися.

Іншими словами, між предметами (реальними чи уявними) та способом їх вживання у процесі обміну думками має місце відношення іменування. Відношення іменування передбачає два об'єкти: ***позначуване та позначаюче***.

Позначаюче є продуктом розумової діяльності людини і має суб'єктивний характер.

Позначуване ж може бути залежним від суб'єкта пізнання (коли йдеться про уявні предмети) і незалежним (коли йдеться про об'єктивно існуючі предмети). Позначаючим можуть бути слова, речення, комбінації речень.

Отже, ***мовні вирази, які мають властивість бути позначаючими, називають і м е н а м и.*** До імен належать окремі слова (*«Шевченко»*, *«Дніпро»*, *«річка»*) і словосполучення (*«автор поеми "Сон"»*, *«річка, на берегах якої розташована столиця України»*). Кожне з імен позначає або індивідуальний предмет, або сукупність предметів.

Те, на що вказує ім'я, називають д е н о т а т о м (десігнатом, номінатом) або значенням імені.

Один і той же денотат може мати різні імена. Так, імена *«Т.Шевченко»* і *«автор поеми «Сон»* » вказують на одну і ту саму особу. Ця обставина зумовлює необхідність пояснити, що дає змогу пов'язувати (співвідносити) в кожному конкретному випадку певне ім'я з відповідним предметом (денотатом). Виявляється, що в процесі іменування бере участь деякий посередник, без якого неможливо ні користуватися іменами, ні знаходити і відрізняти одні предмети від інших. Посередником є інформація, знання про позначуваний предмет. Цю інформацію називають ***смислом*** (концептом) імені[1].

Смисл (концепт) і значення (денотат) складають зміст імені. Носіями імені можуть бути не тільки слова і словосполучення, а й деякі речення.

Смислом (концептом) речення-імені є інформація, яку містить у собі речення (щось про щось стверджується або заперечується), а значенням — абстрактний предмет, логічна валентність («істинно» або «хибно»).

Значення мають лише дійсні імена (*«Франція», «винахідник радіо», «Київ»*). Уявні ж імена лише символічно щось позначають, оскільки в дійсності позначуваних ними предметів не існує (такими є імена *«Пегас», «абсолютно тверде тіло», «√-1»* тощо).

Смисл же мають усі імена. Виявлення смислу імені дуже важливе, бо саме смисл — та ланка, яка пов'язує ім'я з предметом. Логіку ж у теорії імен цікавить саме пояснення того, яким чином здійснюється зв'язок імен з предметами позамовної дійсності.

Розглянемо необхідність аналізу теорії імен для логіки.

Логіка робить об'єктом аналізу ім'я з метою розв'язання, насамперед, таких питань:

1) як співвідносяться ім'я і поняття, а саме: смисл імені і зміст поняття;

2) як залежить логічне значення висловлювання від значень імен, що до нього входять;

3) які саме логічні засоби можуть забезпечити інваріантність висловлювань при їх взаємодії у процесі умовиводу.

---

[1] Про поняття смислу вже йшлося, коли розглядалися рівні семіотичного аналізу знакових систем. Але зараз ми акцентуємо увагу на одному із видів знаків — на іменах.

2. Види імен

Залежно від того, вказує ім'я на окремий предмет чи вирізняє якийсь предмет із множини предметів, усі імена поділяють на:

— ***власні*** і

— ***загальні***.

Власні імена позначають (індивідуальні) предмети.

Наприклад, «Платон», «Автор «Енеїди», «Варшава».

Загальні імена виділяють один предмет із множини предметів. *Наприклад, «держава», «місто», «книга», «природний супутник».*

Порівнюючи власні імена з загальними іменами, які позначають множини, звернемо увагу на те, що загальні імена вказують на невизначеного представника із множини предметів — якусь державу, якесь місто і т.д. По суті, загальні імена на відміну від власних, не мають смислу і значення.

Наприклад, якщо слово *«місто»* є іменем для *«Києва», «Варшави»*, то виявляється, що воно є іменем над іменами, оскільки кожний об'єкт, який воно називає, має власне ім'я.

Змістом загального імені є те загальне, яке притаманне кожному окремому предмету з даної множини.

Досить переконливо пояснив ситуацію з правильним розумінням загального імені ***Б. Рассел***. Він вказував, що слово *«людина»* позначає не багатьох людей, а невизначену людину.

Тому є сенс говорити, що ***загальне ім'я не позначає, а представляє певний (довільний) предмет із множини, так як змінна х у математиці представляє якесь довільне число. У цьому розумінні можна трактувати загальні імена як своєрідні предметні змінні, це, по-перше, а по-друге, наслідком цього факту є те, що загальні імена не являються іменами у власному розумінні цього слова, бо не є іменами і предметні змінні***.

Усе це дає змогу зробити висновок, що клас імен не охоплює всю множину мовних виразів, а збігається лише з категорією постійних термів. Це свідчить про різноманітність відношень між словесними знаками та об'єктами. Відношення іменування (позначення) є лише одним із цих відношень.

Тому, коли йдеться про смисл, значення, принципи іменування, то мається на увазі характер зв'язку власних імен (постійних термів) з предметами, які вони представляють. Процедури встановлення смислу імені за характером бувають різні. В одних випадках ім'я безпосередньо вказує на свій смисл, в інших — для виявлення смислу потрібні додаткові дії (спеціальні пояснення, посилання на контекст тощо).

Власні імена у природній мові виражаються не тільки словом або словосполученням (*«Шекспір», «Батьківщина В.Шекспіра»*), а й цілими реченнями за допомогою оператора означеної дескрипції, який називають йота-оператором і у природній мові записують у вигляді виразу *«той, хто ...»*. Наприклад, *«той, хто написав поему «Енеїда», «Той, хто першим відкрив Америку»*. Форма виразу *«той, хто ...»* не явно передає власне ім'я в природній мові.

Візьмемо для прикладу ім'я, яке звучить так: *«Той, хто є автором «Кобзаря»*. Денотат цього імені — реальна людина на прізвище Шевченко, народився він 1814 р. в селі Моринцях на Черкащині; був кріпаком у Енгельгарда; один з видів Шевченкової творчої діяльності була поезія, що й спричинило появу на світ «Кобзаря».

Аналізуючи це ім'я, легко можна переконатися, що тут внутрішньо закладено той нюанс (аспект, наголос, відтінок), за допомогою якого можна відрізнити одне ім'я від іншого при однакових денотатах. Саме цей нюанс, виділений з усього масиву інформації про предмет (яким ми володіємо на даний час), і становить смисл імені.

Або візьмемо речення: *«Той, хто є автором картини «Катерина»*, яке є також ім'ям з цим же денотатом, але в цьому випадку смислом буде вже інший відтінок інформації, а саме: Т.Шевченко мав талант художника, був другом Сошенка, який звернув увагу на здібності молодого Тараса, закінчив Петербурзьку академію художеств.

Очевидно, що є імена, смисл яких встановити досить просто. Але ситуація ускладнюється, коли ім'я розглядається поза контекстом, скажімо, слово *«Київ»*. Денотатом може бути і місто, і військовий корабель, і готель. Щоб однозначно встановити смисл імені, потрібний додатковий аналіз і пояснення.

Якщо смисл імені визначається конкретною ситуацією або контекстом, воно називається простим або неописовим.

Наприклад, *«Юпітер», «Дніпро», «Україна».*

Якщо смисл імені визначається його побудовою, воно називається складним або описовим.

Наприклад, *«Учень Платона», «вчитель Олександра Македонського», «столиця Франції»* тощо.

Виділення різних відтінків у масиві інформації про денотат створює ситуацію, коли один і той самий денотат має різні імена (саме це і є характерним для описових імен, де кожне нове ім'я — це новий смисловий відтінок).

Але досить часто одне й те саме ім'я вказує на різні денотати. Це вже не розщеплення масиву інформації про денотат на відтінки (як у випадку із складними іменами), а знаходження нових масивів інформації, що дає можливість чітко відмежовувати одні денотати від інших. Саме це є властивістю для неописових (простих) імен.

Таким чином, процедура виявлення смислу і денотату імені передбачає наявність контексту мовного виразу.

Під контекстом для довільного виразу А мається на увазі такий вираз, в який входить А без порушень синтаксичних правил мови, яка використовується.

Зрозуміло, що контекстами для ***А*** будуть частини речення, цілі речення або фрагменти тексту. *Наприклад,* візьмемо власні імена *«Арістотель», «Вчитель і друг Арістотеля», «Вчитель Арістотеля та автор теорії ідей».* У всіх прикладах є власне ім'я *«Арістотель».* Вирази, в які входить ім'я *«Арістотель»*, без порушень синтаксичних правил даної мови називається ***контекстом*** для цього імені.

3. Принципи відношення іменування

Процес вживання імен не є довільним. Хоча, на перший погляд, здається, що це саме так. Справді, зіставлення якогось імені з предметом повністю залежить від людини, яка користується цим іменем, але при всьому цьому потрібно дотримуватися такої вимоги: ***різні предмети треба називати різними іменами.***

Р. Карнап у праці ***«Значення і необхідність»*** формулює три принципи відношення іменування.

Принцип однозначності: якщо ми приймаємо певний вираз у даному контексті в ролі імені, то він повинен бути іменем лише одного об'єкта.

Цей принцип випливає з визначення імені. Не заперечуючи факту багатозначності імен (явища дуже поширеного у природній мові), цей принцип вимагає, щоб у спеціалізованих мовах, насамперед у мовах науки, кожне ім'я мало одне значення і один смисл. А якщо вже доводити цю думку до кінця, то доцільно вважати імена з різними денотатами різними іменами, оскільки власне іменем є вираз, який співвідноситься з якимось одним відокремленим предметом.

Принцип предметності: складне ім'я виражає відношення між значеннями простих імен, що в нього входять. Іншими словами, відношення, зв'язки, які виражає складне ім'я, є відношеннями, зв'язками не між іменами, а між предметами, які позначаються простими іменами, що входять у це складне ім'я.

Принцип взаємозамінюваності: коли просте ім'я, що входить у складне, замінити іменем з тим самим денотатом, то отримане складне ім'я матиме те саме значення (денотат), що й вихідне. Може статися, що принцип взаємозамінюваності є прямим наслідком принципу предметності. За умови, що об'єктами думки у складному імені є не прості імена, а предмети, які вони позначають, то нібито само собою зрозуміло, що значення складного імені залежить тільки від значень простих, з яких воно складається. Але трапляються ситуації, які суперечать цьому.

Скористаймося прикладом ***Б. Рассела***, що став уже хрестоматійним. Шотландський письменник *В.Скотт* використовував псевдонім *«автор «Веверлея»*, про що не знало багато читачів і серед них король Англії Георг IV. Таким чином, два імені *«В.Скотт» і «автор «Веверлея»* називають одну і ту саму людину, хоча мають різний смисл. Якось в урочистій обстановці Георг IV поцікавився, чи справді Вальтер Скотт — автор «Веверлея». Цей факт можна записати у вигляді речення: *«Якось Георг ІУ запитав, чи справді Вальтер Скотт є автор «Веверлея»*.

Згідно з принципом взаємозамінюваності, можна замінити *ім'я «автор «Веверлея»* на ім'я *«Вальтер Скотт»*, оскільки у них однакові денотати. Ця заміна не повинна призвести до зміни істинності вихідного речення. Але насправді це не так.

По-перше, такого факту не було, а отже, речення, отримане внаслідок заміни, не буде істинним (*«Якось Георг ІУ запитав, чи справді Вальтер Скотт є Вальтером Скоттом»*). Тут, по суті, порушується принцип взаємозамінюваності, оскільки зазначені власні імена мають однаковий денотат, але мають різний смисл.

По-друге, ім'я *«автор «Веверлея»* у даному контексті набуває своєрідного характеру, який визначається саме природою контексту.

Розглянемо інший приклад: *«Автор «Кобзаря» був співробітником Київського університету»*. Очевидно, імена *«автор «Кобзаря» і «Тарас Шевченко»* мають один і той самий денотат. Коли ми замінимо одне іншим то отримаємо речення з тим самим значенням, що й наведене нами тільки що: *«Тарас Шевченко був співробітником Київського університету»*. Виходить, що тут повністю виконується принцип взаємозамінюваності.

Така розбіжність у реалізації принципу вазємозамінюваності зумовлена різницею контекстів, у яких вживаються замінювані імена.

Контекст, значення якого змінюється при заміні в ньому певного імені на інше з тим самим денотатом, називається н е п р я м и м або інтенсіональним щодо певного імені. Так, у першому прикладі маємо інтенсіональний контекст щодо імені *«автор «Веверлея»*.

Контекст, значення якого не змінюється внаслідок заміщення в ньому якогось імені з тим самим денотатом, називається п р я м и м. У другому прикладі маємо прямий або екстенсіональний контекст.

У природній мові, як правило, інтенсіональними контекстами є контексти, які містять непряму мову. Крім цього, інтенсіональними контекстами є так звані психологічні контексти, які містять відношення людини до якихось предметів або явищ. У цих контекстах вживаються слова: *«знає»*, *«думає»*, *«вважає»*, *«сподівається»*, *«розрізняє»*, *«бачить»* тощо.

Розгляд принципів іменування і поділу контекстів на екстенсіональні та інтенсіональні логічно пов'язаний з питанням про те, яке місце займають ці проблеми в логіці. Щоб з'ясувати це питання, треба прокоментувати головні результати дослідження поняття смислу ***Готлобом Фреге***.

Відомо, що логіка, насамперед двозначна, класична (як логіка висловлювань, так і логіка предикатів), має об'ємний екстенсіональний характер. У цій логіці справедливим ***є принцип об'ємності***, який дає можливість ототожнювати різні властивості або відношення за умови, що вони стосуються одного й того самого предмета.

Іншими словами, згідно ***з принципом об'ємності,*** два предикати (властивості або відношення) не розрізняються, якщо вони мають один і той самий об'єм (такими, *наприклад,* є предикати *«бути рівностороннім трикутником»* і *«бути рівнокутним трикутником»*).Такого трактування принципу об'ємності ***Фреге*** досягнув, запровадивши у логіку уявлення про предикат як про логічну функцію.

Визначення предиката як логічної функції означає, що це така функція, яка ставить у відповідність предметам (двійкам, трійкам і т.д.) певної предметної області істину або хибу.

В екстенсіональній логіці предикат вважається заданим, якщо вказано його об'єм, тобто, якщо вказано, яким самим предметам предикат співвідносить «істину». Це дає можливість ототожнити властивість з множиною предметів, а відношення — з системою предметів (тобто, множинами пар, трійок і т. д. предметів). А якщо це так, то властивості й відношення можна трактувати як відповідні об'єми.

Об'ємне, екстенсіональне трактування властивостей і відношень цілком влаштовувало математику. Тому засобів об'ємної, теоретико-множинної логіки достатньо для обгрунтування значної частини математики.

Саме об'ємний характер мало логічне числення, яке побудував Фреге для обгрунтування арифметики. Звертаючись до поняття смислу, Фреге ставив за мету надати екстенсіональний (об'ємний) характер не тільки логічному численню, яке він використовував спеціально для обгрунтування арифметики, а й звичайному мисленню, звичайній мові, оскільки вони використовуються для цілей логіки. Іншими словами, Фреге шукав шляхів об'ємного трактування смислу, розгляду смислу як своєрідного предмета.

Аналізуючи природну мову, Фреге зіткнувся з контекстами, в яких, на перший погляд, порушувався принцип об'ємності. Тобто з контекстами, означеними вже як інтенсіональні. Поряд з психологічними, модальними контекстами особливо яскравим прикладом інтенсіональних контекстів є непряма мова. Випадок з Георгом IУ, про який говориться у прикладі Рассела, свідчить, що необережне поводження з інтенсіональними контекстами неминуче призводить до антиномій відношення іменування.

Розглядаючи антиномії іменування, Фреге показує, що в інтенсіональних контекстах при вживанні імені, відносно якого цей контекст є інтенсіональним, денотат цього імені змінюється. Денотатом імені при непрямому його застосуванні стає смисл імені при прямому його вживанні. А це означає, що, відповідно до принципу придметності, в інтенсіональних контекстах виражаються відношення не між предметами (звичайними денотатами імен), а між їхніми смислами. У цьому випадку принцип взаємозамінюваності зберігається і для інтенсіональних контекстів, але із застереженням, що замінити ім'я ***а*** в непрямому контексті можна іменем ***в*** лише тоді, коли ***в*** має той самий смисл, що і ***а*** в прямому його вживанні.

Іншими словами, у тих випадках, якщо ознаки, які складають смисл імені, допомагають лише виділити, знайти предмет серед інших предметів (при цьому сам предмет береться в цілому з усіма його властивостями), то ми можемо замінити це ім'я на інше, не звертаючи уваги на його смисл. Головне, щоб це ім'я виділяло той же самий предмет. Така ситуація спостерігається в екстенсіональних контекстах.

Коли ж ознаки не тільки виділяють предмет, а й сам предмет розглядається з боку цих ознак, то заміна імені ***а*** на ім'я ***в*** можлива лише за умови однаковості їхніх смислів (*наприклад, «автор «Веверлея» і «людина, яка написала «Веверлея»*). У цих випадках йдеться про інтенсіональні контексти.

Тобто, коли ім'я вживається в інтенсіональному контексті, то контекст, зрозуміло, висловлюється про позначуваний цим іменем предмет (звичайний його денотат), але як про предмет з тими самими характеристиками.

Для ілюстрації звернемося ***до прикладу Куайна***, який наводить ***Р.Карнап*** у праці «Значення і необхідність». Маємо висловлювання:

1. «*9 необхідно більше 7*».

Візьмемо таке висловлювання:

2. «*Число планет = 9*».

Якщо за принципом взаємозамінюваності замінити *«9»* на *«Число планет»*, то отримаємо висловлювання:

3. *«Число планет необхідно більше 7»*.

Коли подивитися чисто зовнішньо на висловлювання ***3***, то воно як висновок із ***1 і 2*** буде хибним. Але якщо врахувати те, що у висловлюванні ***1*** говориться, що *«9»* саме як число необхідно більше як *«7»*, то у висновку отримаємо висловлювання, яке матиме смисл, що *«Число планет, саме як число, необхідно більше 7»*. Отримане висловлювання істинне, і тут не виникає ніякої антиномії.

Розгляд ***прикладу Рассела*** з Георгом IV, а також багатьох прикладів, пов'язаних з проблемою смислу, які зустрічаються в літературі, не означає, що логіка прагне з'ясувати чи цікавився Георг IV авторством *«Веверлея»* і як треба було йому вийти із скрутного становища, у яке він потрапив. Ці приклади в доступній, іноді анекдотичній формі, засвідчували складні теоретичні проблеми логічної науки.

Проблема смислу, на яку серйозно вперше звернув увагу ***Фреге*** і яка заявила про себе у вигляді анекдотичних недоречностей, була тісно пов'язана з питанням про шляхи розвитку логіки.

Один шлях розвитку логіки пролягав через побудову спеціальних логічних числень, які враховували б інтенсіональні контексти, а другий — через розвиток екстенсіональної логіки. Але цей розвиток повинен враховувати два моменти:

а) екстенсіональна логіка з її вихідними принципами, положеннями є надзвичайно сильною абстракцією щодо реального процесу пізнання мислення;

б) відстоюючи принцип об'ємності, на якому ґрунтується екстенсіональна логіка, треба пам'ятати, що побудувати раз і назавжди закінчену систему логіки, придатну для будь-яких мов, неможливо.

Інтенсіональні контексти не можна усунути із змістовної мови, оскільки вони виражають невизначеність, що є в логіці, як і у будь-якій іншій галузі. Побудова все нових логічних систем ставить завдання перекласти на мову логіки все більше змісту наших знань або, іншими словами, глибше формалізувати зміст мислення, проте на кожному етапі залишається і залишатиметься невизначений, неврахований залишок.

РОЗДІЛ VI

ФУНКЦІОНАЛЬНИЙ АНАЛІЗ У ЛОГІЦІ

1. Поняття функції

Завершуючи розгляд питань, пов'язаних з логічним аналізом природної мови, зупинимося на визначенні поняття ***«пропозиційна функція»***.

Термін ***«пропозиційна функція»*** ввів у логіку ***Б.Рассел***. Поняттю пропозиційна функція передує поняття функції в математиці. Відомо, що під функцією в математиці розуміють певний закон, за допомогою якого встановлюється відповідність між довільними об'єктами, одні з яких називаються значеннями аргументу, а інші — значеннями функції.

У логіці широко застосовується ***особлива функція — пропозиційна***. Функціональному аналізу мови поклав початок ***Г.Фреге***. Він показав, що низку мовних виразів можна тлумачити як деякі функції.

Застосування функціонального підходу в логіці зумовлене тим, що мова безпосередньо не виражає форми думки, лише аналізуючи спосіб буття, функціонування (вживання) відповідного мовного відрізка у структурі висловлювання, ми можемо сказати, носієм якої логічної форми він є.

Наприклад, поза структурою висловлювання не можна визначити, яку логічну форму втілює в собі слово *«книга»*: чи це поняття, чи це предмет, чи це ознака.

У логіці виділяють функції ***власне логічні і предметні***.

Серед логічних розрізняють ***пропозиційні функції і поняттійні***.

П р о п о з и ц і й н о ю або висловлювальною функцією є операція (дія), яка співвідносить предметам деякої предметної області значення істини або хиби.

Прикладами такої функції є вирази:

1. х — геніальний фізик;

2. х більше у.

x і ***y*** — предметні змінні, на місце яких ми можемо підставляти імена конкретних предметів із відповідних предметних областей.

Якщо взяти за предметну область множину людей (тобто вони можуть бути значеннями аргументу ***x***), то, підставивши у першу пропозиційну функцію замість ***x*** імена *«Архімед»*, *«Ньютон»*, отримаємо істину (значенням функції буде «істина»), а підставивши замість ***x*** імена *«Платон»*, *«Гегель»*, отримаємо хибу (значенням функції буде «хиба»).

Якщо візьмемо за предметну область множину натуральних чисел, то пара чисел **(*3, 1*)** перетворить другу функцію в істинне висловлювання, а пара чисел **(*1, 2*)** — в хибне висловлювання.

За допомогою символів пропозиційну функцію записують у вигляді формул:

$$P(x),\ R(x,\ y),$$

де ***x*** і ***y*** — предметні змінні, а ***P*** і ***R*** — фіксовані змінні (конкретно визначені за змістом) властивості та відношення.

З точки зору функціонального підходу до логічного аналізу природної мови всі слова звичайної мови можна поділити на три групи:

а) слова, які можуть бути аргументами функцій (тобто слова, які можна підставляти замість змінних x, y, z і т. д. у виразах P (x), R(x,y,z), Q(y) і т. п.;

б) слова, що виконують роль пропозиційних функцій;

в) слова, які виконують роль логічних зв'язків і операцій (логічні постійні або логічні константи).

До слів, які можуть бути ***аргументами функцій, належать власні імена*** (*«Варшава»*, *«Арістотель»*, *«Дніпро»*) і кількісні числівники (*«два»*, *«п'ять»*, *«сім»*).

До слів, ***які виконують роль пропозиційних функцій*** належать іменники (*«держава»*, *«мати»*, *«планета»*), прикметники (*«вчасний»*, *«розчинний»*, *«білий»*), порядкові числівники (*«другий»*, *«п'ятий»*), дієслова (*«читає»*, *«допомагає»*).

Здатність цих слів виконувати роль пропозиційних функцій зумовлена тим, що, оперуючи ними, ми співвідносимо їх з індивідуумами із конкретних предметних областей, а результат такого співвідношення оцінюємо або як істинний, або як хибний. Іншими словами, за допомогою цих слів ми встановлюємо відповідність між предметами деякої предметної області і такими логічними об'єктами, як істина і хиба.

Враховуючи сказане, названі слова можна зобразити у вигляді таких виразів: *«**x** — планета»*, *«**x** — мати — **y**»*, *«**x** — розчинний»*, *«**x** — другий»*, *«**x** — читає»*, *«**x** — допомагає y»* тощо (тобто ці слова виконують роль пропозиційних функцій з однією або кількома змінними).

І, нарешті, до слів, які виконують роль логічних зв'язків і операцій, належать слова: *«є»*, *«якщо, то»*, *«і»*, *«або»*, *«будь-який»*, *«деякий»*, *«неправильно»* та ін.

2. Види функцій

Оскільки значеннями пропозиційних функцій є висловлювання, що виражають судження, їх називають ***функціями висловлювання.***

Є три види пропозиційних функцій:

— ***предикати;***

— ***квантори;***

— ***логічні сполучники.***

Усі види пропозиційних функцій мають однакові значення (ними є висловлювання), але їх аргументи різні.

Аргументом для предикату як пропозиційної функції є терм, аргументом для квантора як пропозиційної функції є предикат, аргументом для логічних сполучників пропозиційної функції є висловлювання.

Підставивши на місце змінної у пропозиційній функції конкретне ім'я індивіда або приписавши до пропозиційної функції (у вигляді предиката) квантор, отримаємо висловлювання.

Наприклад, маємо пропозиційну функцію з однією змінною у вигляді предиката: ***«x — геніальний фізик».*** Підставимо замість змінної ***x*** ім'я конкретної людини: *«Архімед»*. Отримаємо істинне висловлювання: *«Архімед — геніальний фізик»*. Або припишемо до нашої пропозиційної функції квантор існування ***«Деякі»*** **(∃*x*).** У цьому випадку отримаємо висловлювання такої конструкції: *«Деякі люди є геніальними фізиками»*.

Окрім пропозиційної функції до логічних функцій також належить ***понятійна функція.*** Уже із самої назви зрозуміло, що значенням цієї функції є поняття, а аргументами — одиничні висловлювання, суб'єктами яких є предмети, узагальнені в даному понятті.

***Мовою символів понятійну функцію можна записати у вигляді виразу*: *x S*(*x*),**

де — ***S*(*x*)** — предикат, який виражає зміст поняття (символ ***S*** вживаємо для того, щоб показати, що тут предикатор виконує роль логічного підмета), а ***x*** — змінна, специфікована предикатом ***S*(*x*)**.

Буквально вираз ***x S*(*x*)** читається так: «*Предмет, якому притаманна властивість* ***S*(*x*)**» або на конкретному прикладі: «*Предмет, якому притамана властивість бути столичним містом*». Узявши за аргументи одиничні істинні висловлювання: «*Київ — столичне місто*», «*Варшава — столичне місто*», «*Париж — столичне місто*», внаслідок узагальнення прийдемо до висновку, що будь-яке з названих міст має властивість «*бути столичним містом*». Тобто отримаємо значення понятійної функції, яким є множина предметів, кожен з яких є носієм ознак, що складають зміст конкретного поняття (по суті, отримаємо обсяг поняття).

Що стосується предметних функцій, то їх аргументами і значеннями є терми. Іншими словами, це функції які з предметів породжують предмети. У математиці це операції додавання, множення, підняття до степеня тощо.

У природній мові роль предметних функцій виконують слова «*зріст*», «*вага*», «*маса*», «*професія*».

Наприклад, візьмемо слово «*зріст*» і використаємо його в ролі предметної функції «*зріст **x***». За область визначення функції візьмемо множину людей. Тоді кожний результат застосування цієї функції матиме вигляд: «*зріст **a***», де «***a***» — ім'я конкретної людини, а значенням цієї функції буде множина всіх іменованих чисел, які можуть характеризувати зріст людини.

Маючи на увазі сказане відносно всіх видів функцій, які застосовуються у логіці, можемо наочно переконатися, що функціональний підхід справді дає можливість більш тонко підійти до логічного аналізу природної мови, ніж це було у межах традиційної логіки.

Для прикладу візьмемо слово «*планета*». Поза контекстом висловлювання не можна однозначно визначити його логічну форму. Використаємо це слово у структурі висловлювання:

1. *Планета — космічний об'єкт.*

2. *Планета — слово, що складається із семи букв.*

3. *Земля — планета.*

У цих висловлюваннях одне й те саме слово *«планета»* має різні логічні статуси. У ***першому висловлюванні*** воно виконує ***понятійну функцію, у другому — предметну, в третьому — пропозиційну.***

Підсумовуючи сказане щодо логічного аналізу мови, треба підкреслити, що мета цього аналізу — насамперед розкрити мову як засіб пізнання, показати, що головні категорії мовних виразів відіграють важливу роль не тільки у комунікативних процесах, а й у процесі мислення, а що стосується функціонального підходу до аналізу мовних виразів, то він дає можливість чіткіше визначити, носіями яких логічних форм є ті чи інші фрагменти мови.

РОЗДІЛ VII

ІСТОРИЧНИЙ ХАРАКТЕР ЛОГІКИ ЯК НАУКИ

1. Логіка стародавньої Індії

При аналізі предмета і методу логіки зазначалося, що логіка є єдиною наукою при всій різноманітності систем, учень, шкіл. Щоб осягнути цю єдність, цілісність логіки, варто спинитися на основних історичних етапах її розвитку.

Перші дослідження і відкриття з логіки з'являються незалежно одне від одного у стародавній Греції та Індії. Логіка стародавніх греків, зокрема Арістотеля, була поширена у Західній і Східній Європі, а згодом і на Близькому Сході. Індійська ж логіка була розповсюджена у Китаї, Японії, Тібеті, Монголії, Індонезії та на Цейлоні.

І у Греції, і в Індії логіка формувалася в межах універсальної, єдиної тоді науки — філософії. В Індії виникненню логіки сприяли філософські диспути, на яких представники різних філософських течій відстоювали свої погляди. Тому логіка стародавньої Індії була тісно пов'язана з риторикою, теорією ораторського мистецтва.

В індійській логіці можна виділити три основні періоди її розвитку:

— ***рання буддійська логіка (VI—V ст. до н.е. — II ст. н. е.)***;

— ***діяльність логічних шкіл ньяя і вайшешика (III — V ст. н. е.)***;

— ***розквіт буддійської логіки (VI—VIII ст)***.

У ***ранній буддійській логіці*** вивчаються види промов, залежність промови від місця її проголошення. Тогочасні логіки розрізняли шість видів промов:

— ***промова про себе***;

— ***красива промова (художнє слово)***;

— ***промова диспутів***;

— ***«дурна промова» (промова, яка викладає хибне вчення)***;

— ***правильна промова*** (***промова, яка знаходиться у злагоді з істинним вченням і має за мету донести до слухачів істинне знання***);

— ***промова, яка викладає істинне знання.***

В основі поділу промов на види лежить субстанціональна ознака промови, тобто ознака, яка визначає, носієм чого може бути промова в кожному конкретному випадку: чи істинного відображення дійсності, чи приємних емоцій і т.д.

Промову поділяли на види і за місцем, де вона проголошується:

— ***перед царем,***

— ***перед правлячими,***

— ***у великому зібранні,***

— ***перед ученими,***

— ***перед брахманами,***

— ***перед тими, хто любить слухати істинне вчення.***

Багато уваги індійські логіки приділяли прикрашенню промови. Щоб промова досягла своєї мети, вона повинна бути ясна, легка і проста, послідовна, цікава за змістом. Недоліками промови, яких слід уникати, вважали неясність, незв'язність, неспівмірність промови (або надто коротка промова, або надто довга). Промова також не може досягнути поставленої мети, якщо вона проголошується в стані гніву, або якщо в ній відсутній смисл.

Розробивши докладну типологію самої промови, її ознак, буддійські логіки намагалися пов'язати вивчення правил риторики з дослідженням логічної сторони мови.

У дискусії розрізнялося два елементи: ***об'єкт доведення і саме доведення.***

О б' є к т о м доведення може бути або сутність, або атрибут. Коли об'єктом є сутність, то результатом доведення є встановлення факту існування чого-небудь чи його неіснування. Коли ж об'єктом доведення є атрибут, властивість, то в цьому разі визначається, належить даний атрибут сутності чи не належить.

Доведення складається з восьми членів, кожен з яких виконує певну функцію у процесі доведення і має відповідну назву: речення, підстава, приклад, однорідність, різнорідність, пряма перцепція, висновок, авторитет.

Охарактеризуємо кожний з восьми членів доведення.

Реченням, ***або тезою, є положення, яке учасник дискусії добровільно приймає і яке повинно бути доведеним.***

Підстава ***— логічна основа, яка випливає з прикладу однорідності, різнорідності, прямої перцепції, висновку, авторитету.*** Під логічною основою розуміють відношення, зв'язок, який полягає у визначенні наявності однієї речі залежно від наявності іншої речі (наприклад, від наявності диму стверджують про наявність вогню). Або, іншими словами, логічною основою є відображення саме такої дії, коли істинність одного твердження обов'язково спричинює істинність другого твердження.

Приклад ***— є наведення загальновизнаних або прийнятих наукою положень.***

Однорідність ***— встановлення подібності між сутностями, між атрибутами, між причинами, між наслідками.***

Різнорідність ***— констатація взаємовідмінності між сутностями, атрибутами, причинами, наслідками.***

Пряма перцепція ***— сприйняття речі без домішок, які можуть випливати з психологічних, емоційних сенсорних та інших особливостей людини*** (*наприклад, міраж, ілюзії, сон*).

Висновок ***— констатація інформації про об'єкт за умов, коли він безпосередньо на сприймається*** (*наприклад, минуле виводять із теперішнього*).

Авторитет ***— вчення мудреців, положення, викладені у священних книгах.***

Аналіз структури доведення в ранній буддійській логіці показує, що тут елементи логіки вплетені в загальні догматичні доктрини, значна частина матеріалу має віддалене відношення до логіки, а суто логічний матеріал викладено досить не систематично.

Другий період індійської логіки представлений діяльністю шкіл ньяя і вайшешика.

Ці школи доповнювали одна одну, оскільки перша займалася логікою, а друга — натурфілософією. У цей період логіка також тісно пов'язана з філософією, тобто логічні проблеми розглядаються в контексті філософських вчень, логіці передує вчення про засоби пізнання. Логіка зайнята розробкою правил, норм ведення дискусії. (*До речі, слово* *«ньяя» має багато значень, зокрема, такі: «правило», «канон», «норма»*)

Оскільки власне логічною проблематикою займалася ***школа ньяя***, то здобутки і проблеми логіки цього періоду пов'язані з діяльністю саме цієї школи. ***Школа ньяя*** залишила після себе твір з логіки, який належить фундаторові школи ***Готаму*** і складається із 538 сутр (*«сутра» — основне положення у вигляді короткого афоризму*).

У цей період з'являється теорія умовиводу (*слово «ньяя» означає ще й «силогізм»*), яка включає ***три види умовиводів***:

— ***умовивід за аналогією,***

— ***умовивід від попереднього до наступного, від причини до наслідку*** (*наприклад, від вогню до диму*),

— ***умовивід від наступного до попереднього, від наслідку до причини*** (*наприклад, від дощу до скупчення хмар*).

Щоб краще зрозуміти вчення про умовивід в індійській логіці взагалі і зокрема в логіці ***школи ньяя***, треба охарактеризувати ***теорію «проникнення»***.

В індійських підручниках з логіки найуживанішим прикладом є приклад про зв'язок вогню і диму: «*Якщо я сприймаю, що на горі піднімається дим, то я можу стверджувати, що там є вогонь*». Популярність цього прикладу певно зумовлена його надзвичайною образністю. Він ніби передає і подих вогню, і плин диму.

Скористаємося цим прикладом для з'ясування суті ***теорії «проникнення»***. У цьому прикладі *«дим»* є ознакою, а *«вогонь»* — носієм ознаки. Між ознакою і носієм ознаки існує відношення проникнення. При цьому ознака є проникнутим, а носій ознаки — проникаючим. Тому сфера уявлень про дим вся проникнута уявленням про вогонь. Вогонь є проникаючим. Сфера уявлень про вогонь ширша, оскільки вогонь буває і без диму. Виходить, що сфера ознаки менша, ніж сфера носія ознаки. Таке трактування співвідношення ознаки і носія ознаки відрізняється від арістотелівської точки зору. Арістотель розглядає ознаку як більш широке поняття порівняно з поняттям про носія ознаки.

Наприклад, у судженні *«Дерево — рослина»* арістотелівська логіка за ознаку бере поняття *«рослина»*, а за носія ознаки *«дерево»*.

В індійській же логіці зовсім іншим підхід. Поняття *«дерево»* розглядається як ознака, з якої слідує, що перед нами саме рослина.

Справа в тому, що в індійській логіці логічні відношення, принципи значною мірою мають онтологічний характер. Це відчувається навіть у доборі прикладів («немає диму без вогню» тощо). Тут відчувається намагання ототожнити логічну підставу з причиною, логічний наслідок з дією, наслідком, причинно-наслідкове відношення з відношенням логічного слідування. Саме це і зумовлює специфіку теорії умовиводу в індійській логіці.

В індійській логіці умовивід ототожнюється з доведенням. Тому, коли йшлося про структуру доведення в ранній буддійській логіці, мався на увазі «індійський силогізм» (тобто умовивід) у вигляді доведення. Виходить, що в ранній буддійській логіці силогізм складався з десяти членів (суджень).

У школі ньяя кількість членів силогізму скорочується до п'яти:

— ***теза;***
— ***підстава;***
— ***приклад;***
— ***застосування;***
— ***висновок.***

Наведемо приклад індійського силогізму:

1. На пагорбі є вогонь. (***Теза***).

2. Тому, що на пагорбі є дим. (***Підстава***).

3. Де дим, там є вогонь. Наприклад, на кухні. (***Приклад***).

4. На цьому пагорбі є дим. (***Застосування***).

5. Отже на цьому пагорбі є вогонь. (***Висновок***).

Оскільки силогізм в індійській логіці виступає у вигляді доведення, то йому передує теза, за нею — підстава, і лише потім дається висновок із засновків. Спеціально у структурі силогізму виділяють «приклад», функція якого полягає у демонстрації конкретної ситуації, де реалізовувалася логічна підстава.

Якщо в індійський силогізм внести деякі структурні зміни, то отримаємо арістотелівський силогізм:

1. Де дим, там є вогонь.
2. На пагорбі є дим.

---

3. Отже, на пагорбі є вогонь.

Очевидно, що третій член індійського силогізму (***приклад***) відповідає більшому засновку арістотеліського силогізму, другий — (***підстава***) і четвертий — (***застосування***) — меншому засновку, а перший член — (***теза***) і п'ятий — (***висновок***) відповідає засновку.

Та й основних термінів у індійському силогізмі три. Менший термін, суб'єкт висновку (в даному випадку — *пагорб*) є в тезі і в висновку; середній термін, або причинна ознака — *наявність диму*; більший термін, або доказова ознака — *наявність вогню*.

Відмінність індійського силогізму від арістотелівського полягає в тому, що в ***основі індійського силогізму лежить теорія проникнення*** (*з наявності диму випливає наявність вогню, з того, що певна річ має властивість «бути металом» випливає властивість «бути електропровідним»*), а в ***основі арістотелівського силогізму лежить підведення часткового під загальне*** (*з того, що будь-яка планета є космічним об'єктом, випливає, що і Земля як планета є космічним об'єктом*).

Специфіку індійського силогізму треба вбачати не тільки в тому, що він пов'язаний, ототожнений з доведенням, що в його основі лежить теорія проникнення, а й у тому, що в його підвалинах передбачається той логічний зв'язок, який притаманний умовиводу за аналогією. Підстава в індійському силогізмі доводить те, що повинно бути доведене вказівкою на подібність з прикладом або на відміну від нього. Це й зрозуміло. Особливо, коли врахувати, що умовивід за аналогією є головним умовиводом в школі ньяя.

Визначення умовиводу за аналогією міститься в сутрі 16:

«Порівняння є доведенням порівнюваного із його подібності з відомим». Наприклад: *«Бик мені відомий, але про буйвола я тільки знаю, що він за зовнішнім виглядом схожий на бика. На підставі цього знання я можу, хоча ще ніколи раніше не бачив буйвола, при зустрічі з ним пізнати його і вказати іншим»*.

За основний логічний принцип школа ньяя бере твердження, що з двох контрадикторних суджень одне обов'язково буде істинним, а друге — хибним.

Третій період індійської логіки (VI—VIII ст.) — це розквіт буддійської логіки. Справжнім творцем буддійської логіки, який відділив її від метафізики і сформував як самостійну науку, вважається ***Дігнага***. Йому належить праця з логіки «Про джерела пізнання», де він розробив вчення про три властивості логічної підстави (середнього терміна). Висновок в умовиводі, згідно з цим вченням, буде правильним, якщо:

а) логічна підстава (середній термін) пов'язана з об'єктом умовиводу, тобто з меншим терміном (наприклад, «на пагорбі є дим»);

б) логічна підстава пов'язана з однорідними об'єктами (наприклад, «дим є скрізь, де є вогонь»);

в) логічна підстава не пов'язана з неоднорідними об'єктами (наприклад, «диму немає там, де немає вогню, як у воді»).

Дігнага визнавав правомірність двох видів силогізму: тричленного (підстава, приклад, теза) і п'ятичленного (теза, підстава, приклад, застосування, висновок).

Значний внесок у розробку індійської логіки цього періоду вніс ***Дхармакірті***. Йому належить сім трактатів з логіки, серед яких стислий підручник «Крапля логіки».

Його система логіки включає чотири розділи:

— ***сприйняття,***

— ***умовивід «для себе»,***

— ***умовивід «для інших»,***

— ***логічні помилки.***

Судження ***Дхармакірті*** не вважав особливою формою мислення. На його думку, судження — це особливі умовиводи, які виникають під час сприйняття, ще до того, як вони одержать словесну оболонку. Такі умовиводи він називав умовиводами ***«для себе»***.

Умовиводом ***«для інших»*** називається умовивід, завдяки якому що-небудь повідомляється іншому.

Можливі дві форми умовиводу ***«для інших»***: ***силогізм подібності і силогізм відмінності***.

Прикладом силогізму подібності є такий умовивід:

1. Де є дим, там є вогонь. Наприклад, у домашньому вогнищі.
2. Тут є дим.

---

3. Отже, тут повинен бути вогонь.

Силогізм відмінності має такий вигляд:

1. Де немає вогню, там немає диму.
2. У цьому місці є дим.

---

3. Отже, є і вогонь.

Дхармакірті вважав: правильний умовивід повинен здійснюватися за законами тотожності і причинності, завдяки яким поняття пов'язуються одне з одним, що й зумовлює одержання нового знання.

Таким чином, індійська логіка, яка виникла в руслі філософії для потреб практики (ведення диспутів і риторики), поступово ставала самостійною теорією. З давньогрецькою логікою Індія познайомилася лише в часи походів Олександра Македонського.

2. Попередники логіки Арістотеля у Стародавній Греції

Логіка Стародавньої Греції досягла найбільшого розквіту завдяки діяльності ***Арістотеля***, одного з найвидатніших античних вчених. У деяких працях, присвячених творчості Арістотеля, його називають іменем ***«Стагиріт»***, яке походить від назви міста, де він народився (Стагир).

Арістотель узагальнив і систематизував перші дослідження з логіки, які були в його попередників (представників мілетської школи, софістів, Демокріта, Сократа та його послідовників), визначив основні форми і закони мислення, створив першу теорію висновку (силогізм). Його дослідження з логіки є настільки фундаментальними, що саме з них беруть свій початок багато проблем сучасної логіки. Створена ним логічна система протягом багатьох віків суттєво впливала на розвиток науки, освіти, культури, особливо в країнах Європи, де вона була найбільше поширена. Про його роль у створенні й розвитку логіки від її виникнення і до другої половини XIX ст. (тобто до початку нового етапу в розвитку логіки — «сучасної логіки»), називають арістотелівською логікою. У галузі логіки багато відкриттів зробили учні Арістотеля, логіки середньовіччя, логіки Нового часу, представники класичної філософії, проте результати його досліджень залишалися найбільш фундаментальними. Тому зрозуміло, що коли йдеться про давньогрецьку логіку, то мається на увазі не якийсь локальний історичний період у розвитку цієї науки, а відкриття, що стало надбанням цивілізації на всі часи її існування. Тобто тут хронологічний показник не є визначальним, він лише вказує на часові межі виникнення цього відкриття. Так само фізика Ньютона не є надбанням і прерогативою лише XVIII ст., вона має планетарне значення на всі часи.

Арістотель народився у 384 р. до н. е. Був учнем Платона і вчителем Олександра Македонського. Як стверджують джерела, написав близько тисячі наукових праць, що охоплюють всі галузі тогочасного філософського і наукового знання. Арістотель заснував в Афінах школу, яка називалася «Лікей» (або «ліцей»). Свою назву школа отримала від храму Аполлона Лікейського, біля якого вона знаходилася.

У ***70 р. до н.е.*** послідовник і коментатор вчення Арістотеля ***Андронік Родоський*** об'єднав його твори у трактат під назвою ***«Органон»*** (від грецького *organon — «знаряддя», «інструмент», «засіб пізнання, дослідження»*).

До ***«Органону»*** входить п'ять творів.

У праці ***«Категорії»*** Арістотель розкриває природу найзагальніших понять або категорій. У праці ***«Про тлумачення»*** дається визначення судження як форми мислення, здійснюється класифікація суджень, досліджуються умови їхньої істинності. Основною працею з логіки є ***«Аналітики»***, що складаються з двох книжок. У ***«Першій Аналітиці»*** розглядається силогістика (вчення про умовивід), у ***«Другій Аналітиці»*** — теорія доведення. ***«Топіка»*** присвячена теорії ймовірних доведень. У книзі ***«Про софістичні спростування»*** досліджено джерела неправильних умовиводів і доведень, показано засоби виявлення та усунення помилок.

Створюючи основи науки логіки, Арістотель спирався на праці своїх попередників. Щоправда, в них проблеми з логіки викладалися не систематично, і були вплетені в контекст філософії, риторики, граматики. І все ж вони були солідним підгрунтям, на якому могла з'явитися така теорія, як логіка Арістотеля.

Наукові дослідження в галузі логіки започаткував ***Демокріт (460—370 рр. до н.е.)***. Він вперше описав індукцію як спосіб міркування, охарактеризував гіпотезу, аналогію, логічну операцію визначення понять, дав перше формулювання закону достатньої підстави («ніщо не відбувається безпричинно, але все має достатню підставу»).

У ***Парменіда (540—480 рр. до н.е.)*** знаходимо перші спроби визначити закон тотожності.

Зенон Єлейський (490—430 рр. до н.е.) прославився своїми ***апоріями*** (від грецького *«безвихідність», «скрутне* *становище»*): *«Ахілес і черепаха»*, *«Дихотомія»*, *«Стріла»*, *«Стадій»*, які показали своєрідність чуттєвого і раціонального ступенів пізнання. Ця своєрідність стала безпосередньо доступною завдяки логіці. Логіка довела, що нехтування своєрідністю чуттєвого і раціонального етапів пізнання призводить до визнання з необхідністю очевидного неочевидним (або, як кажуть, визнання чорного білим, і навпаки). Наприклад, мало хто заперечуватиме, що випущена з лука стріла летить. Але розглянувши траєкторію польоту стріли як лінію, що складається з нескінченної множини точок місцезнаходження стріли, ми будемо вимушені визнати, що стріла не летить, а знаходиться у стані спокою.

Після Зенона протягом багатьох віків робилися спроби допомогти йому вибратися із скрутного становища, в яке він потрапив із своїми апоріями. Та і у сучасній літературі зустрічаються подібні спроби (наприклад, що Зенон ділив до нескінченності траєкторію польоту, а треба було ділити ще й час польоту і таке інше).

А насправді в такій легкій для сприйняття формі Зенон показав, що логіка — це особлива рефлексія над процесом пізнання і результатами процесу пізнання.

Саме логіка є тим гарантом, який оберігає будь-яку теорію від руйнування. Нехтуючи логікою, наш інтелект потрапляє у безвихідь. Свідченням цього є логічні протиріччя.

Ще одна цікава постать античної логіки — ***Сократ*** (***469—399 рр. до н. е.***)***,*** який не залишив після себе жодного твору. Про відкриття Сократа відомо із свідчень його учнів і послідовників.

Сократ описує два способи дослідження: індукцію (*«наведення»*) і дефініцію (*«визначення»*). Суть сократівської індукції полягає в утворенні понять. Щоб утворити поняття, слід посилатися на звичайнісінькі уявлення людей, на приклади повсякденного життя, на загально визнані положення. Уникнути випадковості і несистематичності цього процесу допомагає мистецтво зіставлення протилежних думок, поглядів.

Індукція є основою дефініції. Завдяки індукції (*або наведенню*) встановлюють, що є суттєвим для досліджуваного предмета, а що — ні. Кінцевий результат індукції — утворення дефініції.

Свій метод утворення понять Сократ називав ***«маєвтикою»*** (***«мистецтво повитухи»***)**.** Сократівський метод, об'єднуючи індукцію і дефініцію, допомагав народитися думці.

Платон дав чудові зразки застосування цього методу у «сократичних діалогах».

Сократ спочатку вимагав від співбесідника дефініції обговорюваного предмета, наприклад, що таке добро. Як правило, перші визначення цього поняття поверхові, насичені емоційними та психологічними відтінками. Ці визначення підправляють доти, поки не знаходять такого, яке адекватно відображає предмет дослідження. Учні Сократа заснували школи, що розробляли його ідеї. ***Евклід заснував мегарську школу, Федон — елідо-еретрійську, Атисфен — кінічну, Арістіп — кіренську.*** Найвидатніший учень Сократа ***Платон*** заснував (приблизно ***387 р. до н. е.***) в Афінах школу і назвав Академією (іменем міфічного героя Академа).

Платон досліджував природу судження, яке вважав головним елементом мислення. З його точки зору судження — це об’єднання понять, де міститься ствердження або заперечення. Йому були відомі визначення через рід і найближчу родову відміну, дихотомічний поділ обсягу понять, він в притул підійшов до відкриття головних законів логіки, які згодом сформулював його учень — Арістотель.

Значний вплив на формування логіки Арістотеля справили ***софісти***. Софістами у Стародавній Греції називали вчителів мудрості і красномовства. ***Софістів поділяють на старших (Протагор, Горгій, Гіпій, Продик, Антифон) і молодших (Крітій, Гіпподам).***

Старші софісти досить фундаментально досліджували питання політики, етики, держави, права, мовознавства. Всі вони виходили з того, що істина може бути тільки відносною. Саме ***Протагору*** належить знаменитий афоризм ***«Людина є виміром усіх речей».***

Молодші софісти, абсолютизуючи релятивізм старших софістів, приходять до того, що софістика (тобто мудрість) вироджується в них у жонглювання словами, у фальшиві прийоми «доведення» істини і хиби одночасно.

3. Логічне вчення Арістотеля

Критично аналізуючи відкриття з логіки своїх попередників, Арістотель ставить за мету створити таку науку про мислення, яка б грунтувалася на стійких об’єктивних принципах і не допускала свавілля у процесі міркування.

Такими принципами у процесі міркування повинні бути закони: непротиріччя, тотожності і виключеного третього. ***У праці «Метафізика»*** Арістотель дає визначення цих законів. ***Закон непротиріччя***: *«Неможливо, щоб суперечливі міркування були істинними щодо одного і того самого»*. ***Закон виключеного третього***: *«Рівним чином не може бути нічого посередині між двома суперечливими (один одному судженнями), але про одне необхідно або стверджувати, або заперечувати»*. ***Закон тотожності***: *«Неможливо нічого мислити, якщо не мислити (щоразу) щось одне»*.

Хоча Арістотель і не формулює закон достатньої підстави, все ж він передбачається як необхідний принцип його системи. У «Другій Аналітиці» Арістотель пише: *«Кожне вчення і навчання застосоване на (деякому) уже раніше наявному знанні»*.

Ці закони, за задумом Арістотеля, повинні забезпечувати послідовність, визначеність, несуперечливість нашого мислення, їх він поклав в основу своєї логічної системи. Заслугою Арістотеля є дослідження ним форм мислення: поняття, судження, умовиводу.

Арістотель пишався своїм вченням про силогізм. У праці «Про софістичні спростування» він пише: «*Що стосується риторики, то про неї сказано багато і притому давно, але відносно вчення про силогізм ми не знайшли нічого, що було б сказане до нас, але ретельне дослідження цього предмета коштувало нам праці протягом тривалого часу»*.

Слово ***«силогізм»*** означає *«лічити», «рахувати»*. Для Арістотеля силогізм — це ***«висловлювання, в якому при стверджуванні чого-небудь із нього необхідно випливає дещо відмінне від стверджуваного і (саме) в силу того, що це і є»***.

Арістотель відкрив загальні правила силогізму, за якими не будь-яка комбінація двох категоричних суджень дає правильний умовивід, а лише та, яка відповідає цим правилам. Враховуючи, що в силогізмі повинно бути три терміна, він дав визначення фігури категоричного силогізму і встановив спеціальні правила фігур. У центрі його уваги були три фігури. Четверту він вважав менш досконалою, ніж три перші, тому спеціально її не аналізував. Вивченням цієї фігури, її модусів займався його учень ***Теофраст***.

Арістотелівське вчення про силогізм — це перша логічна теорія дедукції. Тут він використовує поняття змінної. Це дає йому можливість подати процедуру висновку як формальний процес. Силогізм у Арістотеля складається із змінних термінів і логічних постійних термінів. Змінними є букви ***A, B, C,*** які позначають відповідно найбільший, середній і найменший терміни силогізму. Логічними постійними є такі відношення між термінами:

а) «бути притаманним кожному»,

б) «не бути притаманним кожному»,

в) «бути притаманним деякому»,

г) «не бути притаманним деякому».

У своїй теорії силогізму Арістотель ставив за мету дослідити, які відношення між термінами дають правильні умовиводи, а які — ні. Його силогістика знайшла вияв у такому розділі сучасної формальної логіки, як числення предикатів. Ретельніше дослідження силогістики показує, що Стагіріт, будуючи свою теорію дедукції, користувався і численням висловлювань. У праці «Метафізика» він спеціально зазначає: *«Із істинних засновків не можна виводити хибний висновок, із хибних же засновків можна виводити істинний (висновок), тільки не (видно) чому (воно істинне), а (видно) лише, що (воно істинне)».*

Враховуючи те, що для Арістотеля силогізм — це своєрідна імплікація, де антицедентом є кон'юнкція засновків, а консеквентом — висновок, то наведена вище цитата, по суті, є означенням імплікації.

Арістотель користувався також принципом контрапозиції: $(\boldsymbol{A} \rightarrow \boldsymbol{B}) \rightarrow (\boldsymbol{B} \rightarrow \boldsymbol{A})$. Свідченням цього є слова з ***«Першої Аналітики»***: *«Коли два (явища) так відносяться одне до одного, що якщо є одне, то необхідно і друге, то, якщо другого немає, не буде і першого».*

Менше уваги Арістотель приділяв аналізу індуктивних умовиводів. Достеменно науковою він вважав лише індукцію, яку називав «*силогізмом по індукції*».

Значне місце в його логіці займає аналіз логічних помилок. Результати цього аналізу викладені в «Аналітиках» і праці «Про софістичні спростування».

Арістотель виділяє серед логічних помилок ***паралогізми і софізми. Паралогізм — це такий уявний силогізм***[1]***, який характеризується правильним без ба-***

---

[1] Уявним називається силогізм, який лише створює видимість отримання достовірного висновку.

жання ввести співбесідника в оману. Паралогізми, за Арістотелем, бувають двох видів:

— ***паралогізми, що залежать від мовних порушень,***

— ***паралогізми, які виникають незалежно від мови (так звані «позамовні»).***

Усього Арістотель виділяє шість мовних паралогізмів і сім позамовних. Прикладом мовного паралогізму є паралогізм, пов'язаний з явищем омонімії. Часто з ним стикаються у випадку з учетверінням термінів у силогізмі. Так, вживаючи ім'я «собака», зауважує Арістотель, ми можемо мати на увазі в одному випадку сузір'я, а другому — домашню тварину.

Наприкінці твору «Про софістичні спростування» Стагіріт наводить найпоширеніші софізми і стисло їх аналізує. ***Софізмом називається такий уявний силогізм, який застосовується з метою ввести співбесідника в оману.*** Прикладом софізму може бути наведене Арістотелем у цьому творі міркування. Ставиться запитання: *«Чи знаєте ви, про що я зараз хочу вас запитати?»* Слідує відповідь: *«Ні»*. Ставиться друге запитання: *«Чи знаєте ви, що сума кутів трикутника дорівнює двом прямим?»*. *«Так»*, — слідує відповідь. *«Але саме про це я вас збирався запитати»*, — говорить софіст. *«Виходить*, — продовжує софіст, — *що ви не знаєте того, що ви знаєте»*. Цей, а також інші подібні софізми (маються на увазі софізми *«Покритий»*, *«Електра»*, *«Захований»*) наголошують у своєрідній формі на неможливості однозначної відповіді у формі *«Так»* або *«Ні»* на деякі питання без їх попереднього аналізу.

Як уже зазначалося, Арістотель, створюючи своє логічне вчення, спирався на відкриття Геракліта, Демокріта, Сократа, Платона та інших мислителів античності, але ***його великою заслугою є те, що він, здійснивши ряд геніальних відкриттів у галузі логіки, вперше систематично виклав науку логіки у вигляді самостійної дисципліни.***

4. Особливості логіки стоїків

Суттєвий внесок у розвиток логіки зробили представники ***мегаро-стоїчної школи***, логічне вчення яких відоме під назвою «логіка стоїків». Представниками цієї школи є ***Зенон, Хрізіпп, Діодор, Стільпон, Евбулід, Філон.***

Логіка ***стоїків*** заклала підвалини одного з розділів сучасної логіки — логіки висловлювань. Стоїки вивчають логічні відношення між висловлюваннями, не вникаючи у внутрішню будову висловлювань і не враховуючи її. У них змінні відносяться не до термінів, а до висловлювань. ***Стоїки вперше дали фундаментальні визначення матеріальної імплікації, диз'юнкції, кон'юнкції, заперечення, еквіваленції.***

Силогізми у стоїків — це правила висновку:

Якщо р то q; але р; отже q.

Якщо р, то q; але не-q; отже не-р.

Неправильно, що (р і q); але р; отже не-q.

р або q; але р; отже не-q.

р або q; але не-q; отже р.

Евбуліду і Хрізіппу належать перші дослідження семантичної антиномії *«Брехуна»*. Цікавим був висновок із цих досліджень: висловлювання, яке стверджує свою власну хибність, позбавлене смислу, тому воно й не може характеризуватися ні як істинне, ні як хибне.

Стоїки звернули увагу на так звані несилогістичні умовиводи, а саме на умовиводи, які будуються із суджень з відношеннями. Детальніше ніж Арістотель і його безпосередні послідовники — перипатетики, стоїки вивчають проблеми модальної логіки.

Усі названі проблеми, які були у центрі уваги представників «логіки Стої», значною мірою стимулювали розвиток багатьох розділів сучасної логіки.

5. Особливості схоластичної логіки

На VI—XV ст. припадає період розвитку логіки, який називають «схоластичною логікою». До видатних представників схоластичної логіки належать ***Іоанн Росцелін, П'єр Абеляр, Михайло Псьол, Петро Іспанський, Раймунд Луллій, Дунс Скот, Уільям Оккам та ін.***

Схоластична логіка, особливо починаючи ***з IX ст.,*** прагне творчо розробляти арістотелівське вчення і логіку стоїків. У цей час багато робиться для того, щоб сформувати логіку як навчальну дисципліну.

Так, візантійський учений ***Михайло Псьол***, з метою кращого запам'ятовування логічних відношень між категоричними судженнями, вводить схему, яка дістала назву ***«логічний квадрат»***. Він же запропонував назви для модусів простого категоричного силогізму і дав позначення для категоричних суджень (***A, E, I, O***).

Значний внесок у розробку арістотелівської логіки і логіки стоїків зробив ***Петро Іспанський***. Його праця «Суммули» була основним підручником з логіки середньовічної Європи. Він займався визначенням таких логічних операцій, як диз'юнкція, кон'юнкція, знав закони заперечення кон'юнкції і диз'юнкції, які в сучасній логіці називаються *«законами де Моргана»*.

У схоластичній логіці розробляється низка проблем, які знайшли своє продовження в сучасній логіці. Це стосується, зокрема, дослідження властивостей формальної імплікації (***Раймунд Луллій***), природи логічного слідування (***Уільям Оккам, Дунс Скот***), аналізу семантичних антиномій.

Оригінальним відкриттям схоластичної логіки було ***вчення про суппозиції*** (*з латинської «підміна», «підкладання»*). Середньовічні логіки словом *«суппозиція»* позначали різноманітні випадки вживання термінів.

Річ у тому, що у природній мові один і той самий термін може відноситися до предметів різних типів. Аналіз суппозиції термінів сприяє запобіганню та усуненню логічних помилок.

Візьмемо для прикладу слово *«метал»* і розглянемо різні варіанти його вживання.

1. Термін *«метал»* може використовуватися для позначення окремого представника класу металів. Стверджуючи, що *«метал — електопровідник»*, ми маємо на увазі *«Кожен із металів — електропровідник»*. Така суппозиція називається **формальною**.

2. Слово може позначати саме себе. Наприклад, *«Метал»* складається з п'яти букв. ***Це — матеріальна суппозиція***.

3. Слово може позначати множину предметів, але в конкретному випадку воно може позначати окремий предмет, наприклад, у фразі *«Перед вами метал»*. Тут маємо на увазі *«Перед нами конкретний метал»*. ***Це — персональна суппозиція***.

4. Слово *«Метал»* може позначати клас предметів як ціле, наприклад: *«Метал є одним із видів хімічних елементів»*. ***Це — проста суппозиція***.

У сучасній логіці використовуються формальна і матеріальна суппозиції. Матеріальна суппозиція дістала назву автонімного використовування виразів.

Дослідження суппозицій середньовічними логіками значною мірою сприяло ефективній розробці формалізованих мов логіки, для яких однозначність вживання термінів є однією з фундаментальних вимог.

Як етап у розвитку логіки схоластична логіка, з одного боку, сприяла популяризації та розвитку античної логіки (насамперед, арістотелівської), а з іншого — в певному розумінні зумовила негативне ставлення до логіки Арістотеля.

6. Новаторські ідеї логіки Ф. Бекона

Першим, хто фундаментально виступив проти схоластичної логіки і, зокрема, проти схоластизованої силогістики, був ***Френсіс Бекон* (*1561—1626 рр.*)**. Він вважав, що логіка повинна давати нове знання, бути логікою відкриттів. Цього не здійснила логіка Арістотеля з її «Органоном». Щоб підкреслити, що його шлях у логіці відмінний від арістотелівського, свою головну працю з логіки вчений називає «Новий Органон».

Логіка Ф.Бекона тісно переплетена з гносеологією, оскільки ***він ставить завдання показати, що логіка — це знаряддя саме пізнання, а не мистецтво ведення диспутів, не основа процесу комунікації, не сума формальних правил, за якими здійснюється обмін думками між людьми.***

Арістотель боровся проти софізмів (навмисних логічних помилок), а Бекон вів боротьбу з *«привидами»*, або *«ідолами»* (труднощами, які виникають у процесі пізнання).

Найхарактернішими *«ідолами»* є *«ідоли роду»*, *«ідоли печери»*, *«ідоли ринку»*, та *«ідоли театру»*.

«Ідоли роду» — це спотворення, які виникають у результаті намагання людини наділити речі та явища природи власними якостями. Природа не може страждати, радіти, бути доброю, злою, мати ціль тощо. Усе це притаманне людині. Але людина іноді намагається тлумачити природу за аналогією із собою (наприклад, *лагідний вітер, розумне розташування планет Сонячної системи*). «Ідоли роду» є найбільш могутніми, оскільки вони вплетені в повсякденне буття кожної людини, незалежно від її освіти і виду занять.

«Ідоли печери» — це помилкові відображення дійсності, які виникають внаслідок надмірної схильності людей або до старих істин, або до нових відкриттів. У процесі пізнання, вважає Бекон, треба діяти врівноважено: не захоплюватися надмірно старими чи новими ідеями, а знаходити раціональне у попередніх теоріях і уважно ставитися до нових наукових відкриттів.

Ефективність пізнавального процесу значно знижують «ідоли ринку». ***«Ідоли ринку» — це труднощі пізнання, які виникають у результаті некритичного, поверхового ставлення до функції, значення і природи слова.*** Слова — це замінники речей (аналогічно гроші — замінники товарів на ринку). Але, вживаючи слова, використовуючи їх у процесі пізнання, комунікації, ми завжди повинні пам'ятати, що це все-таки замінники, а не самі речі. Нехтування цим застереженням призводить до того, що справжня мудрість (знання природи речей) замінюється словесною мудрістю (умінням жонглювати словами).

Перешкодою на шляху до істини, крім названих труднощів, ***є «ідоли театру» — хибні твердження, які обґрунтовуються посиланнями на авторитети.*** Усю історію пізнання, за Беконом, можна розглядати як театральну сцену, де перед глядачами розігруються різні сюжети (якими є різні концепції).

Як у театрі глядачеві нав'язують своєрідне бачення світу, своєрідне тлумачення подій з позицій певного естетичного ідеалу, так і в процесі пізнання завжди є схильність пояснювати світ з позицій певного авторитету, який є фундатором конкретної концепції чи школи. Тому справжній дослідник істини, радить Бекон, приступаючи до пізнання, повинен відкинути бездумне схиляння перед авторитетами.

Але звільнення від ***«привидів»*** — це лише частина роботи, яку повинен здійснити дослідник на шляху до пізнання істини. Йому потрібно ще озброїтися справжнім методом пізнання, яким, на думку Бекона, має бути індукція. Суть беконівської індукції полягає не в тому, щоб знайти якнайбільше фактів, що приведуть до формулювання загального положення, а в тому, щоб при ретельному аналізі фактів відкинути не суттєве і залишити найсуттєвіше для явища, яке вивчається. Іншими словами, індукція, за Беконом, допомагає знайти причини речей.

У літературі з логіки можна зустріти твердження, що Бекон не збагнув суті арістотелівської силогістики, переоцінив індукцію, віддавши їй перевагу перед дедукцією.

На нашу ж думку, до оцінки беконівської логіки слід підходити конкретно-історично, а крім того, треба розрізняти Бекона-логіка і Бекона-методолога.

Учений мав рацію вважаючи, що схоластизована логіка Арістотеля не може бути «органоном пізнання» і її потрібно звільнити від пут, в яких вона перебувала за панування такої ідеології, як релігія.

Стосовно перебільшення Беконом ролі індукції, то необхідно мати на увазі, що Бекон виступив тут як методолог. Він прагнув показати, що все наше знання має дослідну, емпіричну основу, а головним суддею (всіх) наших теоретичних конструкцій є експеримент.

7. Сучасна формальна логіка — другий етап у розвитку логіки як науки

Логіка як наука є єдиною теорією. Ця єдність обумовлена тим, що і для традиційної, і для сучасної логіки предмет і метод залишаються одними і тими самими. Відмінність полягає лише в тому, що в сучасній логіці метод формалізації застосовується послідовніше. Це й стало однією з підстав називати сучасну логіку математичною.

Коли ж ми даємо визначення традиційної логіки, то зазначаємо, що це такий розділ логіки як науки про мислення, в якому застосовується метод формалізації у напівформальному вигляді (тобто, поряд із штучною символікою використовуються фрагменти природної мови, наприклад, ***«Будь-яке S є P»***). ***Сучасна логіка застосовує метод формалізації в чистому вигляді, виключаючи будь-які засоби природної мови.***

У сучасній логіці умовно можна виділити такі історичні періоди:

— ***передісторія сучасної логіки;***
— ***період алгебри логіки;***

— період розробки логіки як теорії обґрунтування математики;

— період розробки металогіки, логічної семантики, некласичної логіки.

Передісторія сучасної логіки пов'язана з діяльністю ***Т. Гоббса, Р. Декарта, і особливо Г. Лейбніца.***

У ***Т. Гоббса*** виникла ідея розглядати процес міркування як числення, ***Р. Декарт*** ввів і обґрунтував такі важливі для сучасної логіки поняття, як *«змінна величина» і «функція»*, ***Г. Лейбніц*** вводить символи для позначення логічних постійних.

Період алгебри логіки починається з опублікування ***в 1847 р.*** англійським логіком ***Дж. Булем*** книжки «Математичний аналіз логіки». Дж. Буль вводить у логіку алгебраїчну символіку для побудови логічних числень, розглядає процес умовиводу як розв'язання логічних рівностей.

Розробка логіки як теорії обґрунтування математики пов'язана з кризовими ситуаціями, що в науці і, зокрема в математиці, мали місце на межі ***XIX—XX ст.*** Коли виявилося, що в основі теорії множин, яка застосовувалася для обґрунтування математики, містяться нерозв'язні суперечності, виникла необхідність звернення до логіки, оскільки в ній сподівалися знайти засоби усунення кризових ситуацій у підвалинах математики. Але для цього потрібно було, щоб логіка мала досить ефективний інструментарій для вивчення логічної структури наукової теорії. Це й зумовило розробку німецьким логіком ***Готлобом Фреге*** аксіоматичної побудови числення висловлювань, теорії квантифікації, основних принципів логічної семантики.

Сама теорія логічного обґрунтування математики була викладена англійськими логіками **Бертраном Расселом** і ***Альфредом Уайтхедом*** в їхній спільній праці *«Принципи математики»*.

Нарешті, період розробки металогіки, логічної семантики пов'язаний з діяльністю ***Львівсько-Варшавської школи***, **працями** ***Р. Карнапа, А. Тарського, Я. Лукасевича, К. Льюїса та ін.***

У кожному з цих періодів можна знайти продовження і поглиблення тих проблем, які були порушені у традиційній логіці. Це також є підставою розглядати логіку як єдину систему.

1. Основні дефініції поняття «логіка».
2. Поняття «культура мислення».
3. Формальне правило міркування.
4. Порівняльна характеристика формального та змістовного правил міркування.
5. Характеристика визначень: *«мислення», «свідомість», «абстрактне мислення»*.
6. Основні форми чуттєвого пізнання.
7. Характерні риси абстрактного мислення.
8. Дефініція предмета логіки як науки.
9. Поняття про форму мислення.
10. Характеристика основних формально-логічних законів.
11. Істинність і формальна правильність міркування.
12. Дефініція мови.
13. Типологія мов.
14. Мова як знакова система. Види знаків.
15. Рівні семіотичного аналізу мови.
16. Формалізація як загальнонауковий феномен.
17. Формалізована мова логіки.
18. Структура формально-логічної теорії.
19. Особливості формалізації в логіці.
20. Порівняльна характеристика природної і формалізованої мови.
21. Дефініція семантичної категорії.
22. Типологія дескриптивних термінів.
23. Терм як семантична категорія.
24. Характеристика предикатора як семантичної категорії.
25. Область визначення та області істинності предикатора.
26. Місткість предикатора.
27. Мовні засоби вираження предикатора.
28. Предикатор і предикат.
29. Предметні функтори і їх характерні ознаки.
30. Типологія логічних термінів.
31. Семантика пропозиційних зв’язок.
32. Ім’я, смисл, значення.
33. Значення теорії імен для логіки.
34. Види імен
35. Характеристика принципів іменування.
36. Парадокс іменування.
37. Поняття «інтенсіонального» та «екстенсіонального» контексту.
38. Поняття функції.
39. Особливості функціонального аналізу в логіці.
40. Пропозиційна функція.

41. Види пропозиційної функції.
42. Логічні функції. Їх порівняльна характеристика.
43. Понятійна функція.
44. Предметна функція.
45. 45.Історичний характер логіки як науки.
46. Особливості логіки стародавньої Індії.
47. Попередники логіки Арістотеля у Стародавній Греції.
48. Основні твори Арістотеля з логіки.
49. Логічне вчення Арістотеля.
50. Характерні риси логіки стоїків.
51. Схоластична логіка.
52. Індуктивна логіка Ф.Бекона.
53. Співвідношення традиційної логіки та сучасної.
54. Формалізація як метод логіки.
55. Співвідношення понять «традиційна логіка», «сучасна логіка», «символічна логіка», «математична логіка».

Контрольні вправи

1. Вкажіть, до яких категорій відносяться частини виразів:

а) *«Будь-яка планета — космічний об'єкт»*;

б) *«Якщо деякі операції є угодами, а всі угоди суть громадянські правовідносини, то деякі громадянські правовідносини є операціями»*;

в). *«Якщо число закінчується на 0 або на будь-яке парне, то воно ділиться на 2»;*

г). *«Рішення вченої ради буде позитивним або негативним, але справедливим»*.

2. Дайте характеристику (вкажіть число місць, область визначення, область істинності) предикаторів, які зустрічаються в наведених висловлюваннях завдання 1.

3. Наведіть приклади застосування предикаторів *«читає»*, *«трикутник»*, *«електропровідний»*, *«успішність»*, *«сузір'я»*, *«рівність»* у ролі пропозиційної та понятійної функції.

4. У ролі яких функцій можуть застосовуватися слова: *«професія»*, *«вивчає»*, *«національність»*. Наведіть конкретні приклади.

5. Вкажіть предикати, які б відповідали предикаторам: *«ровесник»*, *«форма мислення»*, *«розчинність»*.

6. Утворіть з цими предикатами відповідні висловлювання.

7. Які підстановки замість змінної ***x*** можна зробити, щоб наведені пропозиційні функції стали істинними висловлюваннями:

«x + 3 = 8»; «x — столиця Італії»; «x — представник геніальних фізиків»; «x — складне речення»; «x — формально-логічний закон».

8. Які підстановки замість змінних ***x*** та ***y*** можна зробити, щоб наступні пропозиційні функції стали істинними висловлюваннями: *«x — y = 9»; «x причина y»; «x прибуває раніше ніж y»; «x<y»; «x ровесник y»; «x має більшу вагу ніж y»*.

9. Проаналізуйте наведені пари висловлювань і встановіть, чи має місце порушення основних формально-логічних законів і якщо так, то яких саме:

I. 1. *Він знаходився у кімнаті, де скоєно злочин.*
2. Він знаходився у приміщенні, де скоєно злочин.

II. *1. Мій приятель знає англійську мову.*
2. Мій приятель не знає англійської мови.

III. *1. У момент скоєння злочину він був на футбольному матчі.*
2. У момент скоєння злочину він був на хокейному матчі.

IV. *1. Він обраний головою комісії Верховної Ради, тому що є народним депутатом.*

РОЗДІЛ VIII

ПОНЯТТЯ

Процес мислення незалежно від спрямованості (чи міркуємо ми про космічні об’єкти, чи про числа, чи про історичні події і т.ін.), незалежно від рівня (буденний рівень міркування чи науковий) реалізується й існує в трьох основних формах: ***понятті, судженні та умовиводі.***

У практиці міркування ці форми взаємозв’язані між собою, тому виділяти серед них простіші і складніші немає сенсу. У підручниках з логіки, як правило, аналіз форм мислення починають із поняття і переходять відповідно до судження і умовиводу. Це зумовлено, з однієї сторони, методичними міркуваннями, а з іншої — тією роллю, яку відіграють поняття і судження в структурі умовиводу.

Але можливий і інший підхід, який полягає в тому, щоб почати аналіз із судження, перейти до умовиводу і закінчити поняттям. Цей підхід передбачає брати за вихідне типологію формально-логічних теорій і в цій типології виділити мову логіки висловлювань як простішу за мову логіки предикатів. У такій послідовності розглядають форми мислення ***В. Зегет, А. Івлєв, В. Бочаров***, ***В. Маркін*** та ін. у своїх підручниках з логіки.

І все ж таки починати розгляд форм мислення з поняття має певний сенс. ***По-перше,*** з точки зору методики (і це, мабуть, головне), оскільки ми розбиваємо процес міркування на досить виразні складові частини. А, ***по-друге***, з точки зору генезису форм мислення, теоретичного осмислення їх становлення. Тобто, стає можливим показати, за допомогою яких засобів логіки вилучають форми мислення з природної мови, у якій вони знаходять своє втілення і в якій вони функціонують.

1. Визначення поняття

П о н я т т я як форма мислення є такий спосіб відображення дійсності, коли предмет розкривається через сукупність його суттєвих ознак. Тому мати поняття про предмет — означає знати, які ознаки йому притаманні, в яких зв'язках і відношеннях він знаходиться з іншими предметами і чим він від них відрізняється.

У підручниках та монографічній літературі наводиться декілька найбільш вживаних визначень поняття як форми мислення:

«Поняття — думка, яка фіксує ознаки відображуваних в ній предметів і явищ, що дозволяють відрізняти ці предмети і явища від суміжних з ними» (Д. Горський).

«Поняття — це мислене відображення класу індивідів або класу класів на основі загальних ознак» (В. Зегет).

«Поняття — це форма мислення, в якій узагальнюються і виділяються предмети і явища того або іншого класу за більш або менш суттєвими ознаками» (підручник «Логіка». Мінськ: Вид-во БДУ. — 1974).

«Поняття — це думка, в якій узагальнені і виділені предмети за сукупністю ознак, яка спільна для даних предметів і яка відрізняє їх від інших предметів» (А. Івлєв).

«Поняття як форма (вид) думки, або як мислене утворення, є результат узагальнення предметів деякого класу і мисленнєвого виділення самого цього класу за певною сукупністю загальних для предметів цього класу — і за сукупністю відмінних для них — ознак» (Є. Войшвілло).

Перегляд цих визначень показує, що найефективнішим є визначення, яке дає Є. Войшвілло. Визначення, яке наводять автори підручника з логіки Білоруського університету та А. Івлєв, по суті, є похідним від нього. Лаконізуючи його, отримаємо варіант визначення, яким буде зручно користуватися:

«П о н я т т я — це форма мислення, яка є результатом узагальнення і виділення предметів деякого класу за загальними та специфічними для них ознаками».

2. Характеристика предмета думки, відображуваного в понятті

Із наведеного визначення очевидно, що при аналізі поняття «логіка» бере за мету розглянути не конкретні, змістовні ознаки, що мисляться у понятті, а дослідити особливості поняття як своєрідної форми мислення. Тому для логіки має сенс те, що в понятті предмети узагальнюються у класи за загальними і специфічними ознаками. ***Сукупність загальних і специфічних ознак є і необхідною і достатньою підставою формування поняття.*** Необхідною підставою тому, що без неї не відбудеться мислене об'єднання предметів у відповідні однорідні класи. А достатньою тому, що тільки при наявності її відбувається виділення цих класів, тобто тих, які відрізняються від інших.

Тут слушно буде зауважити, що хоча у понятті виділяється клас предметів, але об'єктом думки є не сам клас, а предмети класу, які представлені тут в узагальненому вигляді.

Відомо, що предметом в логіці є індивід або об'єкт даної думки.

В традиційній логіці, з суб'єктно-предикатною структурою судження, предмет репрезентується логічним підметом ***S***. (*Наприклад,«Планети — космічні об'єкти», «Трикутники — геометричні фігури»*).

У сучасній логіці предметом є елемент класу, носій власного імені (його ще називають індивідом).

Відмінність позицій традиційної та сучасної логіки щодо предмета думки полягає навіть у тому, що предмет думки в традиційній і сучасній логіці представлений різними семантичними категоріями. У традиційній логіці це предикатор, а сучасній — терм. Терм, по суті, є мовною формою виразу предмета думки. ***В логіці терми позначають спеціальними символами***:

1. ***a, в, c, ... — предметні (індивідні) постійні або константи;***

2. ***x, y, z ... — предметні (індивідні) змінні;***

3. ***t_1, t_2, t_3 ... — знаки класів (множин) предметів.***

У природній мові терми фіксуються власними іменами або описовими іменами (описовими термами)[1], цифрами, іменами класів (множин), властивостей, відношень, які при написанні беруться в лапки.

Оскільки терм є ім'ям, то він має значення і смисл.

Значенням терму або його денотатом є позначуваний ним предмет.

А смислом терму, як власного імені, є інформація про позначуваний предмет. Смисл, інформація про предмет фіксується у факті виділення предмета через його називання. Терм — це ідеальне утворення, тобто він є абстракцією.

Використання імені предмета завжди передбачає ототожнення різних станів предмета, стадій та етапів його розвитку.

Наприклад, ми говоримо про *«Визвольну війну 1648—1654 рр.»* Або про *«Київ»* так, ніби-то ця подія і це місто залишалися весь час без змін (або, як кажуть «тотожними самі собі»). Коли ж насправді *«Визвольна війна 1648-1654 рр.»* мала свої періоди (*«Битва під Жовтими Водами», «Битва під Берестечком», «Переяславська Рада»* тощо), а *«Київ»* був *«Києвом епохи Ярослава Мудрого», «Києвом часів Хмельничини», «сучасним Києвом».*

Визначаючи терм як абстракцію, насамперед мають на увазі, що при утворенні терму відбувається ототожнююче абстрагування. Ми тут відволікаємося від відмінностей, тут відмінності ігноруються, відкидаються, тому тут немає

---

[1] Описові терми утворюються за допомогою двох операторів: ⌉ — йота оператор (оператор визначеної дескрипції) і η — ета оператор (оператор невизначеної дескрипції). За допомогою ⌉ -оператора ми виражаємо ім'я одиничного предмета, який є єдиним свого роду (неповторний), тобто ⌉ -оператор вказує на наявність предмета і визначає конкретні, лише йому і тільки йому властиві ознаки. Читається ⌉ -оператор: «⌉ **a** — «такий предмет **a**, який». Наприклад, «Самий високий студент нашої групи».

Оператор невизначеної дескрипції η — вказує на наявність єдиного свого роду предмета серед предметів даного класу, але не визначає який він саме. Наприклад, «Студент нашої групи, який знає усіх викладачів». Читається даний оператор «η **a** такий предмет **a**, що...».

У природній мові використовують дані оператори насамперед для того, щоб при позначенні індивідуального предмета розкрити його специфікацію, розгорнути структуру відповідного їм індивідууму, сповістити про нього додаткову інформацію (чого не роблять власні імена). Наприклад, «Байкал» і «Саме велике озеро у світі».

У логіці оператори визначеної і невизначеної дескрипції при застосуванні їх до пропозиційної функції утворюють терм, деяке ім'я: ⌉ **x f(x) — «** той **x**, що має властивість **f**» або η **x f(x)** — «такий **x**, що має властивість **f»**.

узагальнення. І саме це відволікання від відмінностей, що притаманні предмету, позначеному термом, і робить терм абстракцією, незважаючи на те, що терму не притаманна узагальнююча природа (як одна із суттєвих рис абстрактного мислення). А якщо терм не володіє узагальнюючою природою, то він не виражає поняття. ***Звідси — основна функція терму — називання, іменування предмета.***

На відміну від терму поняття як абстракція не називає, не іменує предмети, а узагальнює їх. У понятті окремі предмети мисляться як класи. Тобто у понятті предмети, індивіди відображаються як невизначені представники деякого класу предметів (*«держава»* — як якийсь невизначений елемент множини (класу) *держав; «автомобіль»* — не як легковий, вантажний, спортивний тощо, а як *«автомобіль взагалі»*, як представник усіх різновидів автомобілів).

Припустимо, що є деяка множина предметів, або об'єктів думки (у нашому випадку об'єктів такої думки, як поняття), які ми позначимо постійними термами ***(а, в, с ... п):***

а — Земля

в — Марс

с — Юпітер

п — Меркурій.

Кожний з цих індивідів (***а, в, с ... п***) має різноманітні ознаки (наприклад, *«Мати еліптичну орбіту», «Рухатися навколо Сонця», «Мати природний супутник»* тощо). Візьмемо деяку спільну ознаку для цих предметів *«бути планетою»*. Ця ознака, як основа для узагальнення перерахованих предметів, є результатом відволікання, абстрагування від усіх індивідуальних, специфічних особливостей кожного з предметів в межах множини планет.

Отже, ***при утворенні поняття «планета» на основі ознаки «бути планетою» відбувається: а) абстрагування від усіх інших властивостей і б) ототожнення всіх індивідів (а, в, с, ...п) за загальною ознакою.***

Відволікаючись, абстрагуючись від індивідуальних відмінностей, особливостей предметів при утворенні поняття ми не відкидаємо ці відмінності взагалі. Ми не враховуємо, які ці відмінності, а визнаємо факт їхньої наявності. Іншими словами, при утворенні поняття відбувається ототожнююче-розрізняюче абстрагування (тоді, коли при утворенні терма — ототожнююче абстрагування). Значить, застосовуючи ототожнюючо-розрізняюче абстрагування, ми отримуємо у якості об'єкта думки не окремий предмет, а їх клас, множину. Так, у випадку поняття *«Визвольна війна 1648—1654 рр.»* — це подія в якийсь невизначений час його розвитку. У випадку поняття *«Київ»* — сукупність епох, стадій *Києва*, тобто *Київ* в якийсь невизначений час його існування.

Отже, поняття є специфічний логічний спосіб відображення предметів як невизначених представників якихось класів.

3. Мовні засоби виразу поняття

Оскільки поняття є форма абстрактного мислення, то для нього, як для абстрактного мислення в цілому, характерна така ознака, як зв'язок з мовою. Тобто, ***мовною формою понять в природній мові є слова і словосполучення.***

Зв'язок поняття і мови полягає в тому, що будь-яке слово реалізується, втілюється у понятті, але не всяке слово чи словосполучення виражає поняття. Функція слів чи словосполучень полягає у ***«називанні»*** понять, але вони безпосередньо не співпадають з словесним виразом ознак, що фіксуються в понятті. Так, поняття про метал виражається словом *«метал»*. Це слово не співпадає з мовним виразом ознак металу як хімічного елемента: *«бути металом», «мати питому вагу», «мати вільні електрони на зовнішній орбіті», «мати ковкість», «мати блиск», «бути електропровідним».*

З усіх перерахованих назв ознак ми беремо слово, яке називає ознаку *«бути металом»* і це слово (назва) вбирає в себе всі відомі на сьогодні науці і практиці ознаки, що притаманні металам. Тобто, за словом, яке виражає поняття, стоїть усвідомлення загальних і специфічних ознак предмета, названого даним словом.

Оскільки слово — це знак, то воно володіє двома типами значень — ***денотацією і смислом. Денотацією слова є предмет, який воно називає, а смислом — інформація про цей предмет.*** Коли слово виражає поняття, то справедливо стверджувати, що смислом слова є поняття як концентроване знання про предмет. Але не будь-який смисл слова є поняттям. Тому не всяке слово виражає поняття.

Так, понять не виражають частки, вигуки тому, що їх смислом є емоційні або вольові спонукання. Не виражають понять і власні, прості терми, смислом яких є іменування предмета (*«Предмет називається так-то»*). Тоді поняття — це смисли слів, які є описовими іменами і предикаторами (загальними іменами).

Відмінність між словом і поняттям полягає не тільки в тому, що не всяке слово виражає поняття, а й в тому, що слова природної мови полісемічні, багатозначні[1]. Слово може отримати усталений смисл тільки у певному контексті. Поняття ж однозначні.

4. Зміст поняття

За своєю логічною структурою поняття складається із:

— ***змісту*** і

— ***обсягу.***

З м і с т о м поняття є сукупність ознак, на підставі яких узагальнюються і виділяються у понятті предмети певного класу.

О б с я г о м поняття є множина предметів, кожний з яких є носієм ознак, що складають зміст поняття.

Іноді зміст і обсяг поняття називають, відповідно, інтенсіональною та екстенсіональною характеристиками поняття. Розглянемо зміст поняття як один із складових логічної структури поняття. У визначенні змісту поняття йшлося про ознаки предметів. ***Ознаки бувають двох видів — це властивості і відношення.*** Коректніше буде сказати, що ознака — це не властивість і не відношення, а наявність або відсутність таких. Коли намагаються виявити деяку загальну ознаку ***Q*** як основу узагальнення, об'єднання предметів у клас, то це означає прагнення встановити її наявність ***«бути Q»*** чи відсутність ***«не бути Q»*** у кожного індивіда, кожного представника класу, що аналізується. Тобто, ми намагаємося встановити, що:

---

[1] Для слів природної мови характерним є явище омонімії, коли одне слово позначає декілька предметів: (наприклад, *град* – місто і метеорологічне явище), *ключ, коса, матерія* тощо. Для слів природної мови характерним є обернене омонімії явище – явище синонімії, коли декілька слів позначають один предмет (наприклад, *лінгвістика і мовознавство, квадрат і рівносторонній прямокутник*).

а є Q; в є Q; с є Q; ... п є Q.

А це означає, що у природній мові, де предикатори виражають ознаки, вони у цих випадках застосовуються у ролі логічних присудків.

Із наведеної схеми очевидно, що передумовою узагальнення предметів у понятті є наявність сукупності істинних висловлювань про кожного індивіда:

«а є Q» — істинне
«в є Q» — істинне
«с є Q» — істинне
«п є Q» — істинне

«х є Q» — істинне

Отже, будь-який невизначений представник множини предметів ***а, в, с, ...п*** (позначимо його через ***х***) також має ознаку ***Q***. Тобто, ***«х є Q»***. Характерною особливістю виразу ***«х є Q»*** є те, що він не зв'язаний з конкретною ситуацією притаманності ознаки предмету, а характеризує сукупність предметів через невизначеного і нефіксованого представника цієї сукупності, тобто через — ***х***.

Вираз ***«х є Q»*** є уніфікованим засобом репрезентації (представлення) ознаки предмета (наприклад, ознаки *«бути (не бути) книжкою»*). Це з одного боку, а з іншого — вираз ***«х є Q»*** є не що інше як логічний присудок — предикат. Як відомо, предикат — це один із видів пропозиційної функції. В формулі предиката ***Q(x)*** є дві змінні: ***х*** — предметна змінна або змінний терм, ***Q*** — предикатна змінна або змінний предикатор.

Відмінність цих змінних полягає у тому, що вони належать до різних семантичних категорій: ***х*** — належить до категорії термів, ***Q*** — до категорії предикаторів. Звідси ***х*** і ***Q*** мають різні області значення: ***х*** — це змінна на області власних імен, а ***Q*** — змінна на області предикаторів (загальних імен), це ***по-перше***.

По-друге, х — це невизначений і нефіксований предмет певного класу. Тобто, замість ***х*** можна підставити будь-який предмет із його області визначення ***{а, в, с ... п}***.

У той же час ***Q*** — змінна іншої природи. ***Q*** представляє визначену (фіксовану), але явно не охарактеризовану ознаку. Тут варіювання значеннями цієї змінної в межах конкретної формули неможливе. ***Така змінна називається фіксованою, або невизначеною константою.***

Тому у вузькому численні предикатів, де аналізуються ознаки від індивідів, справжніми змінними є тільки предметні змінні. Вони і є єдиним типом об'єктів думки у вузькому численні предикатів.

Якщо в традиційній логіці ***S*** і ***P*** судження належать до однієї семантичної категорії — предикатора, то у такому розділі сучасної логіки, як числення предикатів, предмет думки належить до термів, а предикат — до предикаторів (загальних імен). Візьмемо пропозиційну функцію ***«x є Q»***. Нехай областю визначення ***x*** буде множина **{*а, в, с …n*}**. Тоді, у результаті підстановки замість ***x*** імен предметів із множини **{*а, в, с …n*}**, отримаємо низку висловлювань про кожен із цих предметів:

***а є Q* — (*Земля є планета*)**
***в є Q* — (*Марс є планета*)**
***с є Q* — (*Юпітер є планета*)**
. . . .
. . . .
***n є Q* — (*Меркурій є планета*)**

Множина висловлювань **{ *Q*(*a*), *Q* (*в*), *Q* (*с*) … *Q* (*n*) }** є областю значення функції ***Q*(*x*)**.

Предикати, які виражають властивості, аргументами мають окремі предмети, а предикати, які виражають відношення — n-ки предметів (двійки, трійки … n-ки предметів). Наприклад, ознаку *«електропровідний»* відносять до одного предмета ***A*(*x*)**, а ознаку *«знаходитися між»* — до трійки предметів ***B*(*x, y, z*)** тощо.

За допомогою логічних сполучників із простих предикатів утворюють складні. Наприклад, *«бути наукою і навчальною дисципліною»* — ***P*(*x*) & *Q*(*x*)**, або *«бути юристом, або депутатом, або головою депутатської комісії»* —

$$P\,(x) \vee Q(x) \vee K(x).$$

Повертаючись до визначення змісту поняття, треба наголосити на деяких моментах. Ознакою предмета є все те, у чому предмети думки подібні або різняться між собою. Мовною формою виразу ознак у традиційній логіці є загальне ім'я, яке виконує роль предикату ***P***, а у сучасній логіці мовною формою виразу ознаки є предикат як пропозиційна функція ***Q*(*x*)**. Тобто, у сучасній логіці чітко відрізняють *«ознаку»* і *предикат*, оскільки предмету належить ознака, а не предикат.

Предикат — це форма виразу в мові мислимих ознак предметів. Можна сказати ще й так, що предикат як ознака — це виражена в мові інформація про ознаку предмета.

За ***структурою ознаки*** можна поділити на ***прості*** (що мають форму простих предикатів: $P(x)$, $Q(x, y)$, $K(x, y, z)$) і на ***складні*** (що мають форму складних предикатів: «$P(x)$ & $Q(x)$», «$Q(x) \vee K(x, y)$», «$P(x) \supset Q(x)$» тощо).

За ***якістю ознаки*** поділяються на ***позитивні*** (ті, що представляють наявність яких-небудь якостей) і ***негативні*** (які вказують на відсутність яких-небудь якостей).

За ***субстанціональністю ознаки*** поділяються на ***суттєві і несуттєві. Суттєвими називають ознаки, які визначають природу предмета, який відображається в понятті.*** Суттєві ознаки виступають основою узагальнення предметів у понятті і виділення їх серед інших схожих з ними предметів. *Наприклад,* суттєвою ознакою для *квадрата* є *«бути прямокутником, у якому всі сторони рівні».*

Несуттєвими є ознаки, які не являються визначальними стосовно якісної специфіки узагальнених у понятті предметів. Так, для *квадрата* несуттєвою буде *довжина сторони.*

Суттєві ознаки[1] поділяють на ***основні і похідні.***

Основні суттєві ознаки відображають сутність предмета, вони є вихідними.

Похідні — це такі ознаки, які обумовлюються, випливають із основних. *Наприклад,* у понятті *«студент»* основною суттєвою ознакою є *«навчатися у вищому навчальному закладі»*, а похідною для цього поняття буде ознака *«вивчати якусь науку».*

Похідні ознаки поділяються, у свою чергу, на ***родові і видові.***

Родовою називають ознаку, яка притаманна предметам певного класу, у межах якого знаходяться предмети, що відображені у даному понятті.

---

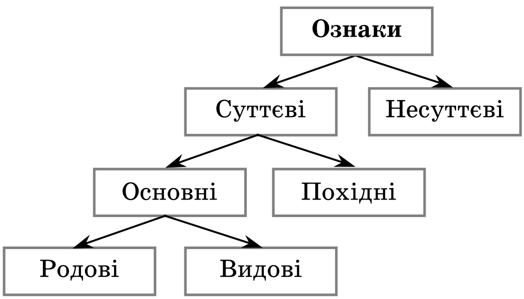
[1] Статус суттєвості чи несуттєвості ознаки встановлюється за межами логіки. Логіка визначає, як структурно взаємодіють різні за статусом ознаки при формуванні поняття, а також при його використанні у процесі міркування.

Родова ознака для цих предметів є нерозрізнюваною (*наприклад,* родовою нерозрізнюваною ознакою для *металів* є ознака *«бути простою речовиною»*).

В и д о в о ю, специфічною ознакою є розрізнювана ознака для предметів, узагальнених у понятті. (*Наприклад*, видовою ознакою для *металів* є *«мати вільні електрони»*).

Треба зауважити, що родові ознаки визначаються у кожному конкретному випадку. Тобто, для одного і того ж самого поняття (в залежності від дослідницької мети чи потреб практики міркування) може бути декілька родових ознак. Наприклад, для поняття *«метал»* родовою ознакою будуть ознаки: *«бути простою речовиною», «бути речовиною», «бути хімічним елементом».* Тому вживаним є вираз ***«найближчий рід»*** або ***«найближче родове поняття».***

У свою чергу, і видових ознак також може бути багато. Це залежить від ступеня та рівня дослідження предмета, який відображений у даному понятті. Тобто, знакове вираження змісту поняття жорстко не зв'язується ні з яким конкретним синтаксисом. Види ознак можна відобразити за такою схемою:



При формалізації змісту поняття виходять з того, що він визначається тим іменем, яким називається поняття. Так, наприклад, у випадку поняття *«метал»* із усіх ознак, що складають його зміст, беруть для назви цього поняття лише ім'я однієї з ознак — *«бути металом».* Хоча при цьому мають на увазі кон'юнкцію усіх відомих науці і практиці ознак, притаманних металам.

5. Обсяг поняття. Елементи теорії множин

Зупинимося на другому елементові логічної структури поняття, на обсязі поняття.

О б с я г о м поняття називається множина предметів, кожен з яких є носієм ознак, що складають зміст поняття.

Наприклад, до обсягу поняття *«столиця»* входять предмети: *«Київ», «Варшава», «Париж»*. Але до обсягу цього поняття не ввійдуть предмети: *«Харків», «Краків», «Нью-Йорк»* тощо, тому що жоден з цих предметів не є носієм ознаки *«бути столичним містом»*.

Як ви звернули увагу, у самому визначенні обсягу поняття фігурує термін ***«множина»***. Справа у тому, що обсягом будь-якого поняття є деяка множина, а тому це дає можливість вивчити природу обсягу поняття, змоделювати його структурні, функціональні особливості на такому об'єкті, як множина. Тобто, надалі для нас обсягом поняття буде множина і ми будемо з нею поводитися як обсягом конкретних понять. Така точка зору зумовлює необхідність визначити такий об'єкт, як множина, і охарактеризувати основні її ознаки.

М н о ж и н о ю називається будь-яка сукупність визначених і розрізнюваних між собою об'єктів, мислимих як єдине ціле. Множина — це абстракція, в якій кожний предмет, що входить до неї, розглядається лише з точки зору тієї ознаки, яка дозволила включити його до свого складу. Тому предмети, що складають множину, не розрізнювані між собою (їм приписуються одні й ті самі ознаки).

Наприклад, множина книг, множина держав, множина рослин тощо. Для кожного із предметів, що входять у перераховані множини, характерним є те, що для них усіх притаманні ознаки, на основі яких утворені ці множини: *«бути книгою», «бути державою», «бути рослиною»*.

Можна сказати, що предмети, які входять до множини, розрізняються між собою. Але це розрізнення один від одного відбувається не за властивостями і відношеннями, а за їх іменами. Так, у множині держав кожний із предметів як носій ознаки *«бути державою»* не відрізняється від іншого, але відрізняється як індивідуальність, як носій власного імені (*«Україна», «Франція», «Аргентина» тощо*).

Предмети, що належать до певної множини, називаються елементами. Позначають їх малими буквами латинського алфавіту —

a, в, c …; x, y z … (або $a_1, a_2, a_3 \dots x_1, x_2, x_3 \dots$).

Самі множини позначають великими буквами латинського алфавіту —

A, B, C…; X, Y, Z … .

Множина, яка містить кінцеве число елементів, називається скінченною (наприклад, *множина планет Сонячної системи; множина формально-логічних законів* тощо). ***А множина, яка має нескінченне число елементів, називається нескінечною*** (наприклад, *множина чисел, множина зірок* тощо).

Оскільки множини можуть складатися з об'єктів різноманітної природи, це визначає їх універсальний характер і, як наслідок, дає можливість застосовувати в різноманітних галузях (математиці, біології, лінгвістиці тощо), а не тільки в логіці.

Між множиною та її елементом існує відношення належності. ***Належати до множини — це означає бути носієм ознаки, на підставі якої ця множина утворена. Відношення належності позначається знаком « $\in$ ».*** Факт належності елемента ***«x»*** до множини ***«A»*** записується так: ***«$x \in A$»***. Факт неналежності елемента ***«x»*** до множини ***«A»*** має вигляд:

« $x \overline{\in} A$ » або « $x \notin A$ ».

Якщо дві множини ***A*** і ***B*** складаються з одних і тих самих елементів, то вони вважаються рівними: ***«A = B»***, а якщо ні, то: ***«$A \neq B$»***.

Існує два найуживаніших способи задання множин. Перший полягає у простому перерахуванні елементів, що складають дану множину. Наприклад, *множина арифметичних дій, множина планет Сонячної системи* тощо. Відповідно записується: $A = \{x_1, x_2, x_3, x._4\}$, $B = \{ x_1, x_2, x_3, \dots x_9 \}$.

Отже, цей спосіб ефективний, коли мають справу із скінченними множинами. Коли ж розглядаються нескінченні множини, той цей спосіб не підходить. У цих випадках користуються іншим способом, який полягає у заданні множини через характеристичну властивість.

Характеристичною називається властивість, яка належить будь-якому елементу даної множини, і не належить жодному предмету, що не входить до неї. Записується це так:

$$M = \{x \,/\, A(x)\}$$

— «множина усіх ***«х»,*** що мають властивість ***«А».***

Спеціально необхідно виділити ***універсальну множину, тобто множину, яка складається із усіх елементів досліджуваної предметної області.*** Позначається універсальна множина буквою ***«U»***, а графічно зображується множиною точок у середині прямокутника:

. . . .
U . . . .

Окрім універсальної множини виділяють ***порожню множину, тобто множину, яка не містить жодного елемента*** (наприклад, *«дерево, яке проводить електричний струм», «метал, який легший повітря»* тощо) . Позначається порожня множина символом: ∅.

Будь-яку частину множини називають підмножиною. Якщо універсальну множину задати характеристичною властивістю ***Q***:

$$U = \{x \,/\, Q(x)\},$$

то множини ***А, В, С ...***, що є частинами універсальної множини ***U***, визначаються властивостями відповідно:

$$Q(a),\ Q(в),\ Q(c),\ \ldots\ .$$

Тоді підмножину ***«А»*** визначаємо:

$$A =_{Df} \{x \,/\, x \in U \ і \ Qa\ (x)\}$$

— читається: ***«А»*** за визначення є множиною усіх тих і тільки тих ***«х»,*** які належать до ***«U»*** і мають властивість ***Q(a)».*** Наприклад, якщо ***«U»*** — *множина всіх геометричних фігур,* ***«Q(a)»*** — *«мати при перетині діагоналей прямі кути», то* ***«А»*** — *множина квадратів.*

Якщо властивості, якими задані деяка множина і її підмножини співпадають, то ці множини будуть рівні. У цьому випадку говорять, що множина є частиною самої себе, або повною частиною. А у тому випадку, якщо ***влас-***

тивість, якою задається деяка підмножина суперечить властивості, за допомогою якої задана сама множина, то така підмножина буде порожньою. Тому порожня підмножина є частиною будь-якої множини, її ще називають ***«порожньою частиною».***

Повна і порожня частини називаються ***невласними підмножинами.*** Решта підмножин є ***власними.***

За формулою 2^n можна вирахувати кількість підмножин будь-якої множини (2 вказує на кількість невласних підмножин: саму множину, як частину самої себе; і порожню множину $\varnothing$), а n — число елементів, що входить у множину. Наприклад, *маємо множину «**A**» із трьох елементів* ***{1, 2, 3}****. Застосуємо формулу* 2^n *для визначення кількості підмножин цієї множини:* $2^3 = 8$. *Запишемо всі підмножини множини «**A**»:*

$$\{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}, \varnothing\}.$$

Між множинами існує відношення включення. Множина ***«A»*** включена у множину ***«B»*** тоді і тільки тоді, коли кожний елемент множини ***«A»*** є елементом множини ***«B».*** Позначається відношення включення символом « $\subset$ ». Записується факт включення ***«A»*** у ***«B»*** таким чином: ***«$A \subset B$».*** При цьому ***«A»*** називається ***підмножиною***, а ***«B»*** — ***надмножиною.***

Відношення включення буває двох видів:

а) ***включення в широкому смислі***, і

б) ***включення у вузькому смислі.***

«A» включається у ***«B»*** в широкому смислі тоді і тільки тоді, коли ***«A»*** включається у ***«B»*** і не виключено, що ***«$A = B$».*** Ця ситуація записується так:

$$«A \subseteq B».$$

«A» включається у ***«B»*** в вузькому смислі, або суворо, тоді і тільки тоді, коли ***«$A \neq B$»,*** (тобто у ***«B»*** існують елементи, які не належать ***«A»***). Записується це так: ***«$A \subset B$».***

Як уже зазначалося, зміст поняття відображає властивості предметів або відношення між ними. Коли предмет позначити через ***«x»***, а його властивість через ***«Q»,*** то обсягом поняття буде множина, кожний елемент якої, будучи підставлений на місце ***«x»*** у формулі ***«$Q(x)$»***, даватиме істинне судження.

Наприклад, *нехай у формулі* ***«Q(x)» Q*** *— представляє властивість «бути планетою», тоді замість* ***«x»*** *можна підставити імена предметів: «Земля», «Марс», «Юпітер» тощо, і при цьому отримаємо істинні судження* (*«Земля — планета», «Марс — планета», «Юпітер — планета» тощо*).

Треба зауважити, що вираз ***«Q(x)»*** близький за смислом до виразу ***«$x \in Q$»***. Так, коли говорять про властивість *«бути планетою»*, мають на увазі множину предметів, кожному з яких притаманна ця властивість:

$$x \in Q \equiv Q\,(x)$$

— «x є елементом множини Q тоді і тільки тоді, коли x має властивість Q». А оскільки обсяг поняття складають тільки ті предмети, яким належить ознака ***«Q(x)»***, то справедливим буде твердження:

$$\forall x\,(x \in Q) \equiv A(x)$$

— «кожний предмет такий, що коли він є елементом обсягу поняття, то йому належить ознака, що складає зміст цього поняття».

Якщо врахувати все це і звернутися до понятійної функції, то стає очевидним, що обсягом поняття є значення понятійної функції:

Значення	*Функція*	*Аргументи*
$\{a, b, ..., n\}$	$x\,Q(x)$	$Q(a), Q(b), ..., Q(n)$

Аргументами понятійної функції будуть істинні висловлювання: ***Q(a), Q(в), ... Q(n),*** а значенням — область істинності предикату ***«Q(x)»***, або обсяг поняття. Тоді обсяг, як значення понятійної функції, можна записати у вигляді формули: ***W x Q(x)***, де ***W*** — перевернуте ***M*** — оператор утворення множини.

Відповідно синтаксис поняття можна зафіксувати так:

— ***x Q(x)*** — об’єкт думки в понятті;

— ***Q(x)*** — зміст поняття;

— ***W x Q(x)*** — обсяг поняття.

6. Закон оберненого відношення між змістом та обсягом поняття

Оскільки обсяги понять — це множини, то усі відношення між множинами і операції над ними можна застосувати до обсягів понять. *Наприклад,* візьмемо поняття *«підручник»* — $x\ A(x)$ і поняття *«книга»* — $x\ B(x)$.

Між обсягами цих понять існує відношення включення:

1. $W\ x\ A(x) \subset W\ x\ B(x) = \forall\ x\ (x \in Wx\ A(x) \supset x \in Wx\ B(x))$ —

***«Якщо обсяг поняття** $x\ A(x)$ **включається до обсягу поняття** $x\ B(x)$**, то для будь-якого предмета «x» вірно, що коли «x» є елемент обсягу поняття** $x\ A(x)$**, то він також є елементом обсягу поняття** $x\ B(x)$.*

З попередньої характеристики обсягу поняття відомо, що коли предмет ***«x»*** є елементом обсягу поняття $x\ A(x)$, то він є носієм змісту поняття $x\ A(x)$.

Отже справедливою є рівність:

2. $x \in Wx\ A(x) = A(x)$.

У такому разі рівність **1** буде мати вигляд:

3. $W\ x\ A(x) \subset Wx\ B(x) = \forall\ x\ (A(x) \supset B(x))$.

Рівність 3 є формулою закону оберненого відношення між обсягом і змістом поняття. Ліва сторона цієї рівності —

$$(Wx\ A(x) \subset Wx\ B(x))$$

представляє відношення між обсягами понять $Wx\ A(x)$ і $Wx\ B(x)$, а права

$$(A(x) \supset B(x))$$

— відношення між змістами цих понять.

Сам закон читається так: ***«Якщо обсяг одного поняття повністю включається до обсягу іншого поняття, то із змісту поняття, що включається, логічно випливає зміст поняття, що включає».***

Іншими словами, цей закон вказує на те, що чим більший зміст поняття, тим вужчий обсяг цього поняття. І навпаки, чим вужчий зміст поняття, тим ширший обсяг даного поняттям.

Наприклад, візьмемо поняття *«держава»* — обсяг цього поняття досить широкий, оскільки включає у себе весь клас держав, додамо до нього більше змісту і отримаємо поняття «*європейська держава*», тобто ми збільшили зміст поняття «*держава*», але цим самим обсяг його зменшили. Таким же чином цей закон діє і у зворотньому порядку.

7. Види понять

Після аналізу логічної структури поняття буде доречним розглянути види понять. Всю множину понять можна розбити на декілька підмножин:

— ***за кількістю елементів обсягу;***

— ***за характером елементів обсягу;***

— ***за типом елементів обсягу;***

— ***за характером ознак, що складають зміст поняття.***

За кількістю елементів обсягу поняття поділяються на ***пусті (нульові) і непусті. Непусті поділяються на одиничні і загальні.***

П у с т и м називається поняття, у обсязі якого немає жодного елемента. Наприклад, «*кентавр*», «*вічний двигун*», «*абсолютно тверде тіло*» тощо.

Пустота поняття може бути зумовлена двома обставинами:

а) фактичною хибністю змісту поняття;

б) логічною хибністю змісту поняття.

Розглянемо по черзі. ***Якщо ознаки, що складають зміст поняття такі, що не можуть належати предметам, які узагальнюються у понятті, то отримують пусте поняття першого роду.*** Наприклад, «*житель Місяця*», «*електропровідне дерево*» тощо.

Якщо ж між ознаками, що складають зміст поняття, має місце відношення логічного протиріччя, тоді це пусте поняття другого роду. Наприклад, «*житель Києва, який ніколи не жив у Києві*», «*круглий квадрат*» тощо. Мовою символів структуру такого поняття можна записати таким способом:

$$x\ (A(x)\ \&\ \overline{A}(x)).$$

Серед непустих понять виділяють ***одиничні і загальні.***

О д и н и ч н и м називається поняття, у обсязі якого узагальнюється один предмет. Наприклад, «*засновник логіки*», «*столиця Франції*» тощо.

У одиничному понятті (як і у загальному) виділяють клас предметів, хоча цей клас складається лише із одного елемента. Одиничні поняття є основою утворення описових власних імен за допомогою ι-***оператора і*** η — ***оператора*** (операторів визначеної і невизначеної дескрипції).

З а г а л ь н и м називається поняття, у обсязі якого узагальнюється більше ніж один предмет. Наприклад, *«столиця», «підручник», «трикутник»* тощо.

За характером елементів обсягу поняття поділяються на ***збірні*** і ***незбірні.***

З б і р н и м називається поняття, у обсязі якого узагальнюються не окремі предмети, а деякі множини, що мисляться як окремі предмети. Наприклад, *«колектив», «сузір'я», «список студентів», «бібліотека», «ліс»* тощо. Елементами обсягу збірного поняття *«сузір'я»* є не окремі предмети (зірки), а одиничні множини: *«сузір'я Лева», «сузір'я Рака»* тощо.

Н е з б і р н и м називається поняття, у обсязі якого узагальнюються окремі предмети. Наприклад, *«зірка», «студент», «трикутник»* тощо.

Збірні поняття можуть бути ***одиничними*** (*«наукова бібліотека Київського університету імені Т. Шевченка», «Голосіївський ліс»* тощо) і ***загальними*** (*«футбольна команда», «студентська група»* тощо).

Треба мати на увазі, що збірними і незбірними, як і одиничними та загальними, можуть бути тільки непусті поняття.

За типом елементів обсягу розрізняють ***конкретні і абстрактні поняття.***

К о н к р е т н и м називається поняття, у обсязі якого узагальнюються предмети або їх упорядковані сукупності. Наприклад, *«книги», «рослина», «сучасник»* тощо.

А б с т р а к т н и м називається поняття, у обсязі якого узагальнюються властивості предметів. Наприклад, *«талант», «успішність», «одночасність»* тощо.

За характером ознак, що складають зміст поняття, виділяють ***позитивні та негативні, співвідносні та безвідносні поняття.***

П о з и т и в н и м називається поняття, зміст якого складається із позитивних ознак, або у назві якого є вказівка на наявність певної ознаки у предмета. Наприклад, *«старанний студент», «успішність», «провідник електричного струму», «історизм»* тощо.

Н е г а т и в н и м називається поняття, у змісті якого є негативні ознаки, або в назві якого міститься

вказівка на відсутність якоїсь ознаки у предмета. Наприклад, *«антиісторизм»*, *«безвідповідальність»*, *«іногородній»* тощо.

Співвідносним називається поняття, зміст якого не має автономного смислу, тобто зміст якого є осмисленим тоді і тільки тоді, коли воно похідне відносно будь-якого іншого поняття. Наприклад, *«кінець занять»* — *«початок занять»*, *«батьки»* — *«діти»*, *«причина»* — *«наслідок»*, *«учитель»* — *«учень»* тощо.

Безвідносними називаються поняття, зміст яких має самостійний автономний смисл. Наприклад, *«геометрична фігура»*, *«університет»*, *«злочин»* тощо.

Таким чином, поділ понять за кількістю елементів обсягу і за характером елементів обсягу називають ***екстенсіональним***. У літературі цей поділ іноді називають ***«види понять за обсягом»***. А поділ понять за типом елементів обсягу і за характером ознак, що складають зміст поняття, називають ***інтенсіональним***. У підручниках з логіки його іноді називають *«поділом понять за змістом»*.

Але оскільки зміст і обсяг поняття взаємозв'язані (що знайшло своє відображення у законі оберненого відношення між змістом та обсягом поняття), то типологія понять за обсягом чи за змістом у значній мірі є умовною. Визначення виду поняття завжди передбачає урахування обсягових і змістовних характеристик. Треба мати на увазі, що підстави поділу понять на види не виключають одна одну. Тому коли здійснюють логічну характеристику поняття, то враховують кожну із чотирьох підстав.

Дати логічну характеристику поняття означає визначити до яких видів належить певне поняття. Наприклад, необхідно дати логічну характеристику поняття *«книга»*. Для цього необхідно співставити це поняття із кожною з чотирьох підстав. Отже, *дане поняття — 1) загальне, 2) незбірне, 3) конкретне, 4) безвідносне*.

8. Логічні відношення між поняттями

З'ясувавши види понять, перейдемо до характеристики логічних відношень між поняттями.

Логічним відношенням між поняттями називають основні типи відношень між структурними

елементами понять, тобто відношення між змістом і обсягом.

Виходячи з цього визначення, поняття поділяють на ***порівнювані і непорівнювані.***

П о р і в н ю в а н и м и називають поняття, які мають спільну родову ознаку або спільне родове поняття. Наприклад, *«автомобіль» і «літак», «підручник» і «словник», «лекція» і «семінар»* тощо.

Н е п о р і в н ю в а н и м и називаються поняття, які не мають спільного родового поняття. Наприклад, *«трикутник», «злочин», «поезія», «ріка», «дім», «успішність»* тощо.

Порівнювані поняття поділяють на ***сумісні і несумісні. С у м і с н и м и називають поняття, видові ознаки яких забезпечують повне або часткове співпадання їх обсягів.*** Наприклад, *«юрист — депутат», «книга — підручник»* тощо.

$\boldsymbol{x\ A(x)}$ сумісне з $\boldsymbol{x\ B(x) =_{Df} \exists\ x\ (x \in Wx\ A(x)\ \&\ x \in Wx\ B(x))}$ — читається: *«Поняття* $\boldsymbol{x\ A(x)}$ *сумісне з поняттям* $\boldsymbol{x\ B(x)}$ *тоді і тільки тоді, коли існує хоча б один спільний елемент у їх обсягах».*

Між сумісними поняттями існує три види відношень:

а) відношення тотожності (рівнозначності або повного співпадання);

б) відношення підпорядкування;

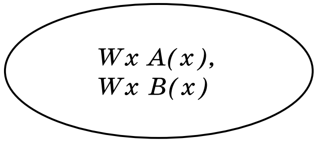
в) відношення часткового співпадання.

У відношенні тотожності знаходяться поняття, обсяги яких повністю співпадають. Тотожні поняття — це різні знакові вирази, які мають різний смисл, але однаковий денотат. Наприклад, *«квадрат» і «ромб, у якого всі кути прямі», «столиця України» і «місто, в якому розташований університет імені Тараса Шевченка»* тощо.

Тотожні поняття не треба плутати з абсолютними синонімами (тобто, знаками, що мають однаковий смисл і однаковий денотат). Тобто, абсолютні синоніми — це різні слова, що виражають одне поняття (смисл). Наприклад, *«бегемот» — «гіпопотам», «лінгвістика» — «мовознавство»* тощо.

$\boldsymbol{x\ A(x)}$ тотожне з $\boldsymbol{x\ B(x) = \forall x\ (x \in Wx\ A(x) \supset x \in Wx\ B(x))\ \&\ \forall x\ (x \in Wx\ B(x) \supset x \in Wx\ A(x))}$ — тобто, «поняття $\boldsymbol{x\ A(x)}$ тотожне з поняттям $\boldsymbol{x\ B(x)}$ тоді і тільки тоді, коли для будь-якого ***«x»*** вірно, якщо ***«x»*** є елементом ***Wx A(x)***, то ***«x»*** є елементом ***Wx B(x)*** і для будь-якого ***«x»*** вірно, якщо ***«x»*** є елементом ***Wx B(x)***, то ***«x»*** є елементом ***Wx A(x)»***.

Схема відношення тотожності зображується так[1]***:***



Відношення підпорядкування фіксує співставлення родового і видового поняття. Наприклад, *«гуманітарна наука» — «історія», «злочин» — «грабіж», «населений пункт» — «місто» тощо.*

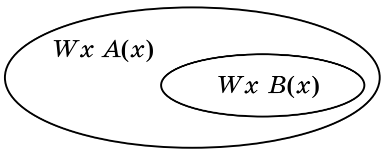
Поняття, яке входить до обсягу іншого поняття, називається «підпорядкованим», а ***поняття, яке включає до свого обсягу інше поняття, називається «підпорядковуючим».*** Так, поняття *«історія»* буде *підпорядкованим*, а поняття *«гуманітарна наука» — підпорядковуючим*:

$\boldsymbol{x\ A(x)}$ підпорядковується

$\boldsymbol{x\ B(x) =_{Df} \forall x\ (x \in Wx\ A(x) \supset x \in Wx\ B(x))\ \&\ \overline{\forall} x\ (x \in Wx\ B(x) \supset x \in Wx\ A(x))}$,

тобто, «поняття ***x A(x)*** підпорядковується поняттю ***x B(x)*** тоді і тільки тоді, коли для будь-якого ***«x»*** вірно, що коли ***«x»*** є елементом ***Wx A(x)***, то ***«x»*** є елементом ***Wx B(x)*** і не вірно, що для будь-якого ***«x»***, якщо ***«x»*** є елементом ***x B(x)***, то ***«x»*** є елементом ***Wx A(x)»***.

Схема відношення підпорядкування така:

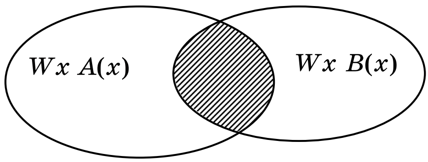


У відношенні часткового співпадання знаходяться поняття, обсяги яких частково співпадають. Наприклад, *«письменник» — «лауреат», «камінь» — «коштовність» тощо.*

[1] Відношення між обсягами понять зображуються за допомогою «Кіл Ейлера» (які отримали свою назву за іменем видатного математика ХУШ ст. — Ейлера).

$x\ A(x)$ частково співпадає з $x\ B(x) =_{Df} \exists x\ (x \in Wx\ A(x)\ \&\ x \in Wx\ B(x))\ \&\ \overline{\forall} x\ (x \in Wx\ A(x)\ \&\ x \in Wx\ B(x))$ — тобто, «поняття $x\ A(x)$ частково співпадає з поняттям $x\ B(x)$ тоді і тільки тоді, коли існує такий ***«x»***, для якого вірно, що він є і елементом $Wx\ A(x)$, і елементом $Wx\ B(x)$. І не вірно, що будь-який ***«x»*** є одночасно елементом $Wx\ A(x)$ і елементом $Wx\ B(x)$».

Схема відношення часткового співпадання має такий вигляд:



Н е с у м і с н и м и називаються поняття, видові ознаки яких обумовлюють повне неспівпадання їх обсягів. Наприклад: *«гуманітарні науки» — «природничі науки», «обгрунтований вирок» — «необгрунтований вирок» тощо.*

$x\ A(x)$ несумісне з $x\ B(x)\ _{Df}= \overline{\exists}\ x\ (x \in Wx\ A(x)\ \&\ Wx\ B(x))$ — тобто «поняття $x\ A(x)$ несумісне з поняттям $x\ B(x)$ тоді і тільки тоді, коли не існує такого ***«x»***, який одночасно належить і $Wx\ A(x)$ і $Wx\ B(x)$».

Несумісні поняття можуть знаходитися у трьох відношеннях:

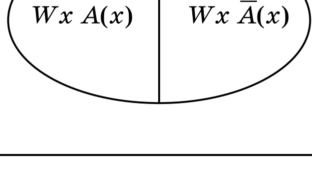
а) протиріччя;

б) протилежності;

в) супідрядності.

У відношенні протиріччя знаходяться поняття, зміст одного з яких повністю заперечує зміст іншого поняття, а сума обсягів цих понять вичерпує обсяг родового поняття. Наприклад, *«житель Києва» — «іногородній», «електропровідник» — «діелектрик», «повнолітній» — «неповнолітній»* тощо.

Схематично відношення протиріччя зображується так:

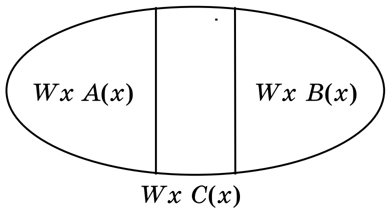


Так, зміст понять *«повнолітній»* $\boldsymbol{x\ A(x)}$ і *«неповнолітній»* $\boldsymbol{x\ \overline{A}(x)}$ — повністю заперечують один одного, але у сумі їх обсяги вичерпують обсяг родового поняття *«вік людини»* $\boldsymbol{x\ C(x)}$.

Протилежними називаються поняття, зміст яких відрізняється вищою мірою. Це означає не тільки неспівпадання їх обсягів, а й те, що у сумі вони не вичерпують обсягу родового поняття.

Наприклад, *«початок занять» — «кінець занять», «високий» — «низький» тощо.*

Графічно це відношення фіксується схемою:

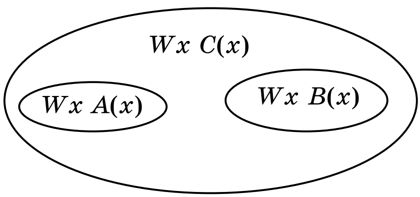


Якщо взяти поняття *«білий»* $\boldsymbol{x\ A(x)}$ і *«чорний»* $\boldsymbol{x\ B(x)}$, то їх зміст відрізняється вищою мірою (тобто, це крайні види одного роду, але у сумі вони не вичерпують обсягу родового поняття *«колір»* $\boldsymbol{x\ C(x)}$.

Якщо видові поняття одного роду не знаходяться ні у відношенні протиріччя, ні у відношенні протилежності, то їм притаманне відношення супідрядності.

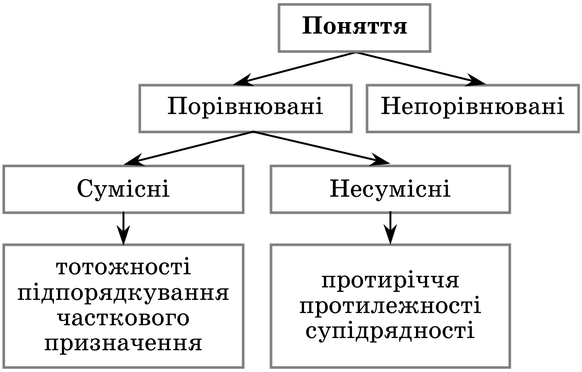
Наприклад, *«метал» — «рідина», «університет» — «консерваторія», «крадіжка» — «грабіж», «місто» — «село» тощо.*

Схема цього відношення така:



Коли маємо поняття *«поезія»* $\boldsymbol{x\ A(x)}$ і *«проза»* $\boldsymbol{x\ B(x)}$, то вони несумісні, але разом підпорядковуються поняттю *«жанри літературної творчості»* $\boldsymbol{x\ C(x)}$.

Загальна схема типології понять за логічними відношеннями буде така:



Аналіз відношень між поняттями має важливе значення для дослідження логічної структури суджень і умовиводів, у яких функціонують поняття. Обсягові та змістовні відношення між поняттями виступають у структурі суджень і умовиводів як відношення між дескриптивними термінами, а також емпірично виражають смисл логічних термінів: *«всі»*, *«деякі»*, *«суть»*, *«і»*, *«або»*, *«якщо, то»* тощо.

Знання відношень між поняттями дає можливість краще осягнути смисл логічних операцій над поняттями.

9. Логічні операції над поняттями

Логічною операцією над поняттями називається така дія, за допомогою якої з одних понять отримують нові поняття.

До логічних операцій над поняттями відносяться:

а) обмеження і узагальнення понять;

б) операції над обсягами понять як множинами;

в) поділ понять;

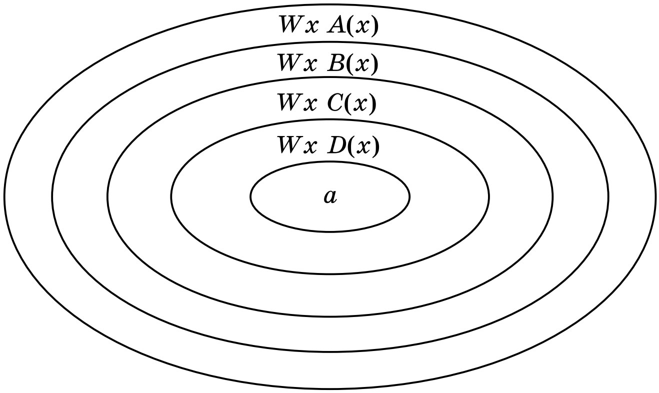
г) визначення понять.

Традиційно прийнято вважати, що операції ***а, б, в*** є власне операціями над обсягами понять, а операція ***г*** є операцією, що розкриває зміст понять.

а) Обмеження і узагальнення понять

В основі операції обмеження і узагальнення понять лежить залежність, яку фіксує закон оберненого відношення між змістом і обсягом понять.

О б м е ж е н н я м поняття називається логічна операція, яка полягає в переході від поняття з більшим обсягом, але меншим змістом до поняття з більшим змістом, але меншим обсягом. Наприклад, візьмемо поняття *«людина»* ***x A(x)*** і обмежимо його. Для цього послідовно збагачуємо його зміст новими ознаками: *«поет»* ***x B(x),*** *«український поет»* ***x C(x),*** *«український поет XIX ст»* ***x Д(x),*** *«автор «Кобзаря»* ***a.***



Межею обмеження є одиничне поняття (у нашому випадку поняття ***a*** — *«автор «Кобзаря»*).

У з а г а л ь н е н н я м поняття називається логічна операція, за допомогою якої переходять від поняття з більшим змістом, але меншим обсягом до поняття з більшим обсягом, але меншим змістом.

У нашому випадку — це перехід від поняття ***a*** — *«автор «Кобзаря»* до поняття ***x A(x)*** — *«людина»*. Межею узагальнення є універсальне поняття, тобто поняття, у якого область визначення предиката, що виражає його (поняття) зміст, співпадає з областю істинності цього предиката.

б) *Операції над обсягами понять як множинами*

Оскільки ми ототожнюємо обсяги понять з множинами, то маємо право застосувати до них усі операції, що й до множин:

доповнення, перетин, об'єднання, різницю.

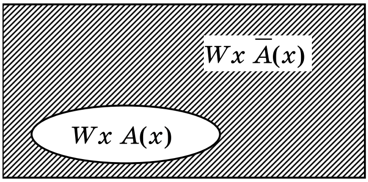
Доповненням обсягу поняття $Wx\ A(x)$ називається обсяг нового поняття $Wx\ \overline{A}(x)$, який складається з тих елементів універсуму, які не належать $Wx\ A(x)$. Позначається ця операція символом **(—)**.

Це визначення записується у вигляді рівності:

а) $Wx\ \overline{A}(x) =_{Df} Wx\ (x \in \overline{Wx\ A(x)})$.

Графічно операція доповнення зображується так:

I.



Якщо ми маємо обсяг поняття *«киянин»* **Wx A(x),** то доповненням до нього буде обсяг поняття *«іногородній»* **Wx $\overline{\mathbf{A}}$(x).** Із схеми **I** очевидно, що будь-який елемент універсального поняття належить або **Wx A(x)**, або **Wx $\overline{\mathbf{A}}$(x).**

Перетином обсягів понять $Wx\ A(x)$ і $Wx\ B(x)$ є обсяг нового поняття, який складається із усіх тих і тільки тих елементів, які одночасно належать і $Wx\ A(x)$ і $Wx\ B(x)$:

$$x \in (Wx\ A(x) \cap Wx\ B(x)).$$

Позначається операція перетину так: $Wx\ A(x) \cap Wx\ B(x)$ — читається: ***«перетин $Wx\ A(x)$ і $Wx\ B(x)$»***.

Операцію перетину записують у вигляді рівності:

б) $Wx\ A(x) \cap Wx\ B(x) =_{Df} Wx(x \in Wx\ A(x)\ \&x \in Wx\ B(x))$.

Графічно операція перетину зображується схемою:

II.

Відомо, що $x \in Wx\ A(x) = A(x)$ *і* $x \in Wx\ B(x) = B(x)$. Коли зробити підстановку у ***б)***, то отримаємо:

в) $Wx\ A(x) \cap Wx\ B(x) = Wx\ (A(x)\ \&\ B(x))$.

Права частина рівності ***в)*** виражає обсяг нового поняття $x\ (A(x)\ \&\ B(x))$, яке змістом має складний предикат: $(A(x)\ \&\ B(x))$. Із схеми даної операції очевидно, що у результаті перетину обсягів понять отримуємо найбільшу спільну частину обсягів, що перетинаються:

1. $Wx\ A(x) \cap Wx\ B(x) \subset Wx\ A(x)$.

2. $Wx\ A(x) \cap Wx\ B(x) \subset Wx\ B(x)$.

Оскільки у формулах ***1, 2*** — вирази до знаку включення ($\subset$) є лівою стороною рівності ***в)***, то отримуємо:

3. $Wx\ (A(x)\ \&\ B(x)) \subset Wx\ A(x)$.

4. $Wx\ (A(x)\ \&\ B(x)) \subset Wx\ B(x)$.

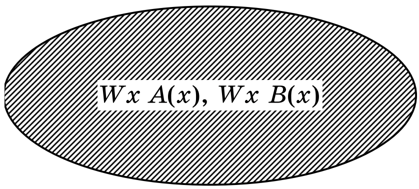
Відповідно до закону оберненого відношення між змістом і обсягом поняття отримуємо:

5. $A(x)\ \&\ B(x) \supset A(x)$.

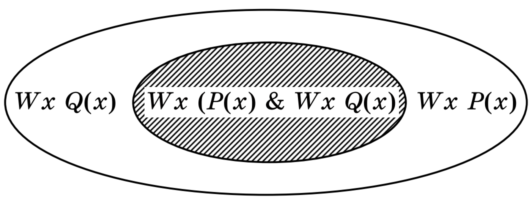
6. $A(x)\ \&\ B(x) \supset B(x)$.

Вирази ***5, 6*** свідчать про те, що із змісту понять, обсяги яких перетнулися, логічно випливає зміст кожного із понять, що не перетинаються. ***Операцію перетину можна здійснювати над сумісними поняттями.***

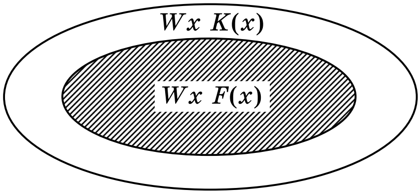
Маємо тотожні поняття: *«квадрат»* $x\ A(x)$ і *«рівносторонній прямокутник»* $x\ B(x)$. У результаті перетину отримуємо: *«квадрат»* або «рівносторонній прямокутник»:



Візьмемо поняття, що знаходяться у відношенні часткового співпадання: *«поет»* $x\ P(x)$ і *«лауреат»* $xQ(x)$. Здійснюючи над їх обсягами операцію перетину, отримуємо: *«людина, яка є і поетом, і лауреатом»*:



Перетнемо підпорядковані поняття: *«книга»* $\boldsymbol{x\ K(x)}$ і *«підручник»* $\boldsymbol{x\ F(x)}$. Отримаємо*: «книга, яка є підручником».*



Результат перетину несумісних понять дорівнює порожній множині **(∅)**, оскільки їх обсяги не мають спільних елементів.

О б ‘є д н а н н я м обсягів понять $\boldsymbol{Wx\ A(x)}$ ***і*** $\boldsymbol{Wx\ B(x)}$ ***є обсяг нового поняття, який складається із усіх тих і тільки тих елементів, які належать хоча б одному із обсягів*** $\boldsymbol{Wx\ A(x)}$ ***або*** $\boldsymbol{Wx\ B(x)}$***:***

$$\boldsymbol{x \in (Wx\ A(x) \cup Wx\ B(x)).}$$

Позначається операція об’єднання так:

$$\boldsymbol{Wx\ A(x) \cup Wx\ B(x)}$$

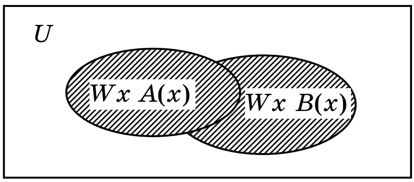
— читається: ***«об’єднання*** $\boldsymbol{Wx\ A(x) \cup Wx\ B(x)}$***».***

Записується операція об’єднання так:

а) $\boldsymbol{Wx\ A(x) \cup Wx\ B(x) = Wx\ (x \in Wx\ A(x) \vee x \in Wx\ B(x)).}$

Графічно операція об’єднання зображується схемою:

Ш.



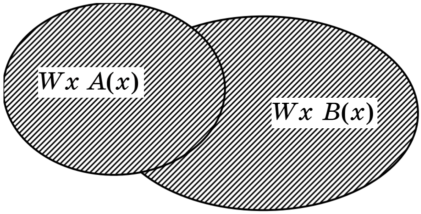
Метою операції об’єднання є виявлення усіх елементів обсягів, що об’єднуються. У правій частині рівності ***а*)**, яка є новим обсягом зробимо підстановку:

б) $\boldsymbol{Wx\ A(x) \cup Wx\ B(x) = Wx\ (A(x) \vee B(x))}$

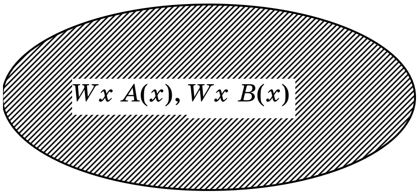
Права частина рівності ***б*)** це новий обсяг нового поняття $\boldsymbol{x\ (A(x) \vee B(x))}$, змістом якого є складний предикат $\boldsymbol{A(x) \vee B(x)}$.

Операцію об’єднання обсягів можна здійснювати над сумісними і несумісними поняттями.

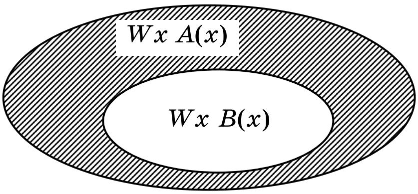
1. ***Часткове співпадання***: наприклад, *«юрист»* ***x A*(*x*)** і *«депутат»* ***x B*(*x*).** Результатом об'єднання є нове поняття *«або юрист, або депутат»*:



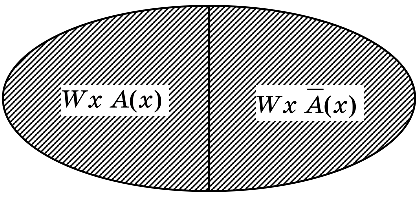
2. ***Відношення тотожності***: наприклад, *«квадрат»* ***x A*(*x*)** і *«прямокутний ромб»* ***x B*(*x*).** Об'єднання тотожних понять дасть нове поняття, яке за змістом співпадатиме з одним із понять, що об'єднуються:



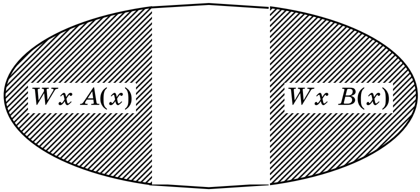
3. ***Відношення підпорядкування***: наприклад, *«космічний об'єкт»* ***x A*(*x*)** і *«планета»* ***x B*(*x*).** При об'єднанні цих понять отримуємо нове поняття *«космічний об'єкт»* (*«космічний об'єкт»* або *«планета»*)*:*



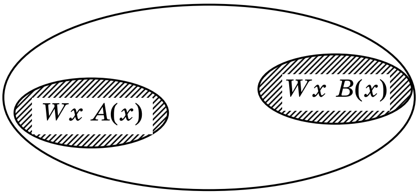
4. ***Відношення протиріччя***: Наприклад, *«трикутник»* **x A(x)** і *«не трикутник»* **x $\overline{\mathbf{A}}$(x).** У результаті об'єднання цих понять отримуємо нове поняття *«геометрична фігура»:*



5. ***Відношення протилежності***: наприклад, *«дитина»* ***x A*(*x*)** і *«людина похилого віку»* ***x B*(*x*).** Результатом об'єднання цих понять буде нове поняття *«основні параметри людського віку»:*



6. Відношення супідрядності: наприклад, *«крадіжка»* ***x A*(*x*)** і *«грабіж»* ***x B*(*x*).** Об'єднавши ці поняття, отримуємо нове поняття *«види злочинів»:*



Отже, операції над обсягами понять **(*об'єднання і перетин*)** не треба ототожнювати з логічними відношеннями між поняттями. ***Одну і ту саму операцію можна здійснювати над поняттями, що знаходяться у різних відношеннях. Логічні відношення між поняттями виступають своєрідним емпіричним вихідним матеріалом для операцій об'єднання і перетину.***

Стосовно операції об'єднання треба мати на увазі, що її результатом є знаходження найменшого обсягу **($Wx\ A(x) \cup Wx\ B(x)$),** частинами якого є обсяги **$Wx\ A(x)$ *і* $Wx\ B(x)$.**

З точки зору закону оберненого відношення зміст понять, що об'єднуються, більш інформативний, ніж зміст поняття, що є результатом об'єднання. Свідченням цього є такі формули:

$Wx\ A(x) \subset Wx\ A(x) \cup Wx\ B(x)$	$A(x) \supset (A(x) \vee B(x)$
$Wx\ B(x) \subset Wx\ A(x) \cup Wx\ B(x)$	$B(x) \supset (A(x) \vee B(x)$.

Різницею обсягів $Wx\ A(x)$ і $Wx\ B(x)$ називається обсяг нового поняття, який складається із усіх тих і тільки тих елементів обсягу $Wx\ A(x)$, які не належать обсягу $Wx\ B(x)$.

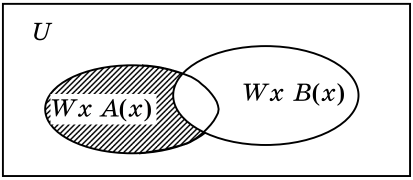
Позначається операція різниці обсягів так:

$$«Wx\ A(x) \cap Wx\ \overline{B}(x)» \text{ або}$$
$$«Wx\ A(x) \mid Wx\ B(x)», \text{ або}$$
$$«Wx\ A(x) — Wx\ B(x)».$$

Записується операція різниці обсягів так:

$$Wx\ A(x) \cap Wx\ \overline{B}(x) =_{Df} Wx\ (x \in Wx\ A(x)\ \&\ x\ \overline{\in}\ Wx\ B(x)).$$

Графічно зображується у вигляді такої схеми:



Якщо візьмемо поняття *«студент»* $x\ S(x)$, *«відмінник»* $x\ V(x)$, і здійснимо різницю їх обсягів, то матимемо:

$$Wx\ S(x) \cap Wx\ \overline{V}(x) =$$
$$= Wx\ (x \in Wx\ S(x)\ \&\ x\ \overline{\in}\ Wx\ V(x)),$$

тобто ми отримали обсяг нового поняття — $x\ (S(x)\ \&\ \overline{V}(x))$ — *«студент, який не є відмінником».*

Різниця двох множин може бути пустою і непустою. Візьмемо два поняття *«дерево»* $x\ D(x)$ і *«рослина»* $x\ R(x)$ запишемо різницю їх обсягів:

$$\mathbf{Wx\ D(x) \cap Wx\ \overline{R}(x) = Wx\ (x \in Wx\ D(x)\ \&\ x\ \overline{\in}\ Wx\ R(x))}$$

Права_сторона рівності — обсяг нового поняття $Wx\ (D(x)\ \&\ \overline{R}(x))$: *«дерево, яке не є рослиною»*, тобто результатом різниці є пусте поняття. Але різницю обсягів можна записати по-іншому:

$$Wx\ D(x) \cap Wx\ \overline{R}(x) = Wx\ (x \in Wx\ D(x)\ \&\ x\ \overline{\in}\ Wx\ R(x)).$$

Тепер права сторона рівності є обсягом не пустого поняття: $x\ (\ \overline{D}(x)\ \&\ R(x))$ — *«рослина, яка не є деревом».*

Екстраполяція операцій над множинами, на обсяги понять, а також аналіз цієї екстраполяції дав змогу глибше осягнути, що в основі формування знакових синтаксичних засобів логіки лежать теоретико-множинні уявлення.

Коли ми інтерпретуємо множини як обсяги понять і ставимо їм у відповідність зміст понять у вигляді предикатів, і коли ми інтерпретуємо теоретико-множинні операції як логічні, то маємо можливість прослідкувати історичні корені походження тих синтаксичних засобів, які зараз широко застосовуються для аналізу традиційних проблем логіки.

в) *Поділ поняття та правила поділу*

Розглянемо тепер наступну операцію — поділ поняття.

П о д і л о м понять називають логічну операцію, за допомогою якої розкривають обсяг поняття. Розкрити обсяг поняття можна шляхом перерахування його елементів, які є носіями тих ознак, що складають зміст даного поняття. Це можна зробити стосовно понять: *«планета Сонячної системи», «арифметична дія», «логічні операції над поняттями»* тощо. Тобто, логічна операція поділу понять застосовується стосовно понять із скінченною кількістю елементів обсягу. Але у тих випадках, коли кількість елементів обсягу досить велика або нескінченна, такий спосіб є мало ефективним.

Тут треба йти шляхом розподілу обсягу поняття на види. Тобто, через групування індивідів за відповідними видами.

Структура операції поділу складається із:

— діленого поняття;

— членів поділу;

— підстави поділу.

Д і л е н и м називається поняття, обсяг якого потрібно розкрити.

Ч л е н а м и поділу називають видові поняття, на які розбивають обсяг діленого поняття.

П і д с т а в о ю поділу називають ознаку, за якою виділяються члени поділу.

Наприклад, візьмемо поняття *«студент»* і здійснимо над ним операцію поділу поняття: *студенти бувають денної форми навчання, заочної та вечірньої.* Тут ***діленим*** є поняття *«студент»*, ***членами поділу*** : *студент заочної форми навчання, студент вечірньої форми навчання, студент денної форми навчання;* ***піставою поділу*** є видова ознака — *«форма навчання»*.

Розрізняють два види поділу понять:

а) поділ за видозмінюваною ознакою,

б) дихотомічний поділ.

Поділом за в и д о з м і н ю в а н о ю ознакою називають такий вид поділу, за допомогою якого розбивають ділене поняття на види на підставі специфічного прояву ознаки у різних видах діленого поняття. *Наприклад, «науки бувають гуманітарні, природничі, технічні».* Тут кожному із членів поділу специфікується ознака *«предмет науки»*.

Назва дихотомічний поділ походить від грецького слова ***«дихотомія»,*** що означає: *«розсікати на дві частини».*

Д и х о т о м і ч н и м називається поділ, за допомогою якого ділене поняття розбивають на два суперечливі поняття.

Наприклад, «студенти бувають здібні і нездібні», «вироки бувають обгрунтовані і необгрунтовані», «книжки бувають художні і нехудожні» тощо.

Схематично цю операцію можна записати так:

$$A\begin{cases} a \\ \text{не } a. \end{cases}$$

Операція поділу поняття підпорядковується спеціальним правилам.

1. ***Поділ поняття повинен бути співмірним.*** Тобто сума обсягів членів поділу повинна вичерпувати обсяг діленого поняття. Порушення цього правила призводить до помилок, які називаються ***«занадто вузький поділ»*** і ***«занадто широкий поділ».***

Суть помилки ***«занадто вузький поділ»*** полягає у тому, що не всі члени поділу знайдені. Наприклад, *«арифметичні дії» — це «додавання», «віднімання» і «ділення».* Тут пропущений четвертий член поділу — *«множення».* Прикладом помилки ***«занадто широкий поділ»*** може бути: *«рослини — це дерева, квіти, трави, кущі і газон».* Тут поняття *«газон»* не є видовим поняттям діленого поняття.

2. ***Поділ слід здійснювати за однією підставою.*** Порушення цього правила веде до помилки ***«підміна підстави поділу».*** Наприклад, *«міжнародні угоди бувають справедливими, несправедливими, усними і письмовими».* Тут використано одночасно дві підстави поділу:

1) рівноправність і нерівноправність;

2) форма складання договорів.

3. ***Члени поділу повинні виключати один одного.*** Це правило випливає із другого правила. Наприклад, *«війни* *бувають справедливі, несправедливі і визвольні»*. Поняття *«визвольна війна»* входить до обсягу поняття *«справедлива війна»*, тому даний поділ є помилковим.

4. *Поділ повинен бути послідовним, тобто, члени поділу повинні бути однопорядковими видами.* Порушення цього правила веде до помилки, яка називається ***«стрибок у поділі»***. Наприклад, *«науки бувають природничі, гуманітарні, технічні і біологічні»*. Тут члени поділу *«природничі науки»* і *«біологічні науки»* не є однопорядковими.

Логічну операцію поділ поняття треба відрізняти від процедур подібних до поділу понять.

Це такі процедури, як ***класифікація і поділ цілого на частини.***

К л а с и ф і к а ц і є ю називається систематизація предметів на основі угоди чи певних практичних міркувань і на основі ознак, що випливають із природи систематизованих предметів.

Класифікацію, яка передбачає систематизацію предметів на основі угоди чи практичних міркувань, називають д о п о м і ж н о ю.

Наприклад, список групи студентів за алфавітом.

Класифікацію, у основі якої при систематизації предметів лежать ознаки, що випливають із природи цих предметів, називають природною. *Прикладом*, може бути *«періодична таблиця хімічних елементів Д. Менделєєва»*. Тут за основу класифікації взята об'єктивна залежність між валентністю і вагою хімічних елементів. У цій класифікації кожний предмет має чітко визначене цією залежністю місце і поміняти місцями ***H*** з ***Cl*** чи ***Ft*** з ***Fe*** неможливо.

Поділ цілого на частини полягає у мисленному розчленуванні цілого на частин.

Наприклад, «рік складається з січня, лютого, березня тощо». Тут маємо не поділ поняття, а розчленування цілого на частини. Справа у тому, що будь-який член поділу має ознаку діленого поняття. Частина ж не є носієм ознаки цілого, оскільки між частиною і цілим відсутній родовидовий зв'язок. Наприклад, побудуємо судження: *«Січень є рік»* — отримали хибне висловлювання, як свідчення того, що будь-якій частині року (в даному випадку місяцю) не притаманна ознака цілого.

г) Визначення поняття та правила визначення

Визначенням поняття називається логічна операція, яка розкриває зміст поняття. Адекватніше операцію визначення можна сформулювати ще й так: ***«Визначенням називається логічна процедура, за допомогою якої відшукується, будується який-небудь предмет, відрізняється від інших, а також формується значення вперше вживаного терміна чи уточнюються значення уже існуючого терміна».***

Назва операції визначення походить від латинського слова — ***definitio,*** дефініція. Тому часто замість назви ***«визначення»*** вживають слово ***«дефініція».***

За своєю структурою операція визначення складається із:

— ***визначуваного*** і

— ***визначуючого.***

Наприклад, «дім є будівля, яка пристосована для постійного проживання». У цьому визначенні поняття *«дім»* є ***визначуваним***, тобто поняттям, зміст якого розкривається, або ***definiendum*** (*дефініендум*), і позначається символом ***«Dfd».***

Та частина визначення, яка виражає способи ототожнення, розрізнення, виділення, конструювання об'єктів думки (*у нашому випадку — «будівля, що пристосована для постійного житла»*) ***називається визначаючим.*** Називають її ***definiens*** (*дефінієнс*) і позначають символом ***«Dfn».***

Операцію визначення поняття можна аналізувати в трьох площинах:

1) семантичній,

2) синтаксичній,

3) прагматичній.

З позицій логічної семантики дефініція є операцією, за допомогою якої розкривається або смисл, або денотат «визначуваного терміна» ***(Dfd)*** через смисл чи денотат «визначуючого терміна» ***(Dfn).***

Наприклад, у визначенні *«Планета — це космічний об'єкт, який рухається по еліптичній орбіті навколо Сонця і має природний супутник»* — ***Dfn*** репрезентує собою смисл, інформацію, зафіксовану у ***Dfd.*** А у визначенні

«Планети — це Земля, Марс, Юпітер, Меркурій» — ***Dfn*** репрезентує денотат, тобто ті об'єкти, до яких відноситься визначуваний термін.

Треба зауважити, що у ***Dfn*** виражається конкретний смисл або конкретне значення ***Dfd***, а не логічний смисл і значення ***Dfd***. Це зумовлено тим, що тип логічного значення і смислу ***Dfd*** визначається тією семантичною категорією, до якої належить ***Dfd***. Відомо, що ***Dfd*** може бути представлений або термом, або предикатором, або висловлюванням.

Якщо подивитися з цієї точки зору на наведені приклади визначень, то у них ***Dfd*** відноситься до категорії предикаторів. Можна ще сказати, що із позиції логічної семантики визначення є, по суті, операцією за допомогою якої детермінуються смисл і денотат визначуваного терміна шляхом співставлення їх із смислом і денотатом визначуючого терміна.

З точки зору логічного синтаксису дефініція (Df) складається з двох термінів і може бути виражена формулою: $Dfd =_{Df} Dfn$. Знак рівності (=) у цій формулі означає можливість взаємозамінювання ***Dfd*** і ***Dfn***.

Факт взаємозамінювання фіксується двома правилами:

1. Правило введення Dfd: $\dfrac{Dfn}{Dfd}$.

2. Правило усунення Dfd: $\dfrac{Dfd}{Dfn}$.

Ці правила фіксують те, що з синтаксичної точки зору дефініція є способом ототожнення двох термінів ***«визначуваного»*** (***Dfd***) і ***«визначуючого»*** (***Dfn***), завдяки чому стає можливим їх взаємозаміна у тих контекстах, де вони фігурують.

З точки зору логічної прагматики дефініції досліджуються з боку їх ролі у комунікативних процесах. Відомо, що у процесі інформаційної комунікації дефініції вносять зміни до наявного фонду комунікантів або тієї мови, у контекстах якої ці дефініції фігурують.

Ці зміни стосуються ***по-перше***, встановлення відношення синонімії між ***Df***, які уже є в інформаційному фонді, ***по-друге***, уточнення або видозмінення усталеного смислу чи значення терміна, ***по-третє***, введення принципово нового значення і смислу для термінів.

У формулюванні визначення як логічної операції (яке наводилось вище) можна виділити ***два основних завдання, які вирішує ця операція***:

по-перше, відшукує, будує який-небудь предмет, вирізняє його серед інших предметів;

по-друге, формує значення для терміна, який вводиться вперше у комунікативний процес або уточнює значення уже вживаного терміна.

Залежно від цих завдань усю множину дефініцій поділяють на дві підмножини:

а) реальні дефініції і

б) номінальні дефініції.

Р е а л ь н о ю дефініцією називається визначення, яке ототожнює, розрізняє, будує, виділяє предмет. Іншими словами, реальна дефініція визначає предмет.

Н о м і н а л ь н о ю дефініцією називається визначення, за допомогою якого розкривається, уточнюється, вводиться значення термінів. Назва номінального визначення походить від латинського слова — ***nomina*** (ім'я).

Як уже зазначалося, визначення — це детермінація смислу і значення одного терміна ***Dfd*** через смисл і значення другого терміна ***Dfn***. Хоча кажуть, що визначення (реальне) як логічна операція розкриває предмет, але усвідомлюють те, що ***Dfd*** — це завжди термін, тобто послідовність знаків (природної чи штучної мови).

Тому, незважаючи на розподіл всієї множини дефініцій на реальні і номінальні стосовно тих завдань, які ці дефініції вирішують, до поділу дефініцій на реальні і номінальні можна підійти ще й з того боку, яку функцію виконує у дефініції ***Dfd*** як знакове утворення.

Dfd як знак може виконувати дві функції:

а) репрезентативну (тобто представляти об'єкти позамовного характеру);

б) номінативну (тобто функцію іменування або згадування).

Якщо Dfd виконує репрезентативну функцію, то мають реальне визначення, а якщо номінативну функцію, то — номінальне визначення. Оскільки у реальному визначенні ***Dfd*** представляє об'єкти позамовного характеру, то тут ***Dfd*** належить до виразів об'єктної мови. Фактично у реальних дефініціях ***Dfd*** виконує роль замінника того об'єкта, який він представляє як знак. У цьому розумінні цілком справедливо визначати пізнавальну мету реальних дефініцій як таку, що визначає предмети і явища дійсності, які зафіксовані у ***Dfd***. Ця обставина зумовлює те, що у формулі дефініції ***Dfd*** не береться у лапки[1]:

$$\boldsymbol{Dfd} =_{Df} \boldsymbol{Dfn}.$$

Виходить, у реальних дефініціях ***Dfd*** не може належати до категорії термів (імен: індивідів, властивостей, відношень, класів, висловлювань). А оскільки відомо, що у ролі логічного присудка може вживатися тільки предикатор (загальне ім'я або висловлювання), то і ***Dfn*** теж не може належати до категорії термів. Наприклад,

1. *Париж — столиця Франції.*

2. *Столиця Франції — Париж.*

3. *Планети Сонячної системи — це космічні тіла, які обертаються навколо Сонця.*

4. *Лінія є діаметром тоді і тільки тоді, коли це відрізок прямої, що проходить через центр кола.*

У прикладах ***1, 2, 3 Dfd*** належить до категорії предикаторів, а у прикладі ***4*** — до категорії висловлювань. ***Dfd*** у ***1*** і ***2*** прикладах представляють одиничні класи, а не окремі елементи. Отже, взаємозамінюваність ***Dfd*** на ***Dfn*** у реальних дефініціях означає, що вони тотожні як об'єкти однієї семантичної категорії (предикатори).

Як уже зазначалося, у номінальних дефініціях ***Dfd*** вживається у функції іменування. А це означає, що у цих дефініціях ***Dfd*** належить до метамови. Якщо у реальних дефініціях ***Dfd*** — у функції репрезентації говорить про предмет, то у номінальних дефініціях ***Dfd*** у функції іменування говорить про слово. *Наприклад:*

1. *«Париж» — складається із п'яти букв.*

2. *Слово «Париж» — чоловічого роду.*

3. *«Марс» — термін, який позначає планету Сонячної системи.*

4. *Вираз «автор Кобзаря» — описове ім'я.*

Очевидно, що у наведених прикладах ***Dfd*** *у номінальних дефініціях завжди є термом, а* ***Dfn*** *може бути у репрезентативній функції:*

---

[1] Як відомо, у лапки беруться терми, власні імена.

1. «*Dfd*» $=_{Df}$ «*Dfn*»

2. «*Dfd*» $=_{Df}$ *Dfn*.

Перша формула відповідає дефініції: «*Борисфен» означає те ж саме, що і «Дніпро»*. Друга — відповідає дефініції: «*Словом «геометрична фігура» називають трикутники, квадрати, трапеції тощо»*.

Після загальних зауважень щодо поділу дефініцій на реальні і номінальні розглянемо конкретні види реальних і номінальних визначень.

До реальних визначень належать:

1. Визначення через рід і найближчу видову відмінність.

2. Визначення через вказівку на протилежність.

3. Генетичне визначення.

4. Операціональне визначення.

5. Індуктивне визначення.

Суть дефініції ***через рід і видову відмінність полягає в тому, що спочатку знаходять найближче родове поняття для Dfd, а потім перераховують характерні видові відмінності.***

Наприклад, «Барометр — це прилад, що слугує для виміру атмосферного тиску»; «Республіка — це форма правління, при якій всі вищі органи державної влади вибираються народом або формуються загальнонаціональними представницькими установами»; «Автократія — це монархія, в якій відсутні справжні представницькі установи».

Якщо потрібно дати визначення універсальним поняттям, а саме категоріям філософії, то тут дефініція через рід і видову відмінність малоефективна. У цих випадках застосовують ***дефініцію через вказівку на протилежність.*** Наприклад, «*Випадковість — це форма прояву і доповненння необхідності»*.

Наступним видом реального визначення є генетична дефініція. ***Г е н е т и ч н и м визначенням називається така реальна дефініція, у якій фіксуються способи походження і побудови визначуваного предмета.*** Генетичні дефініції широко застосовуються у математиці, фізиці, хімії тощо. Наприклад, «*Коло — це частина площини, обмеженої замкненою лінією, яку отримують у результаті руху точки на цій площині на однаковій відстані від центру»; «Куля — це тіло, яке утворюється обертанням півкола навколо діаметра» тощо.*

Широко розповсюдженою є операціональна дефініція. ***Операціональним визначенням називається такий вид реальної дефініції, який полягає у описові специфічних експериментальних операцій для знаходження тих чи інших об'єктів.*** Наприклад, *«Луг — це хімічна речовина, яка зафарбовує лакмусовий папірець у синій колір»; «Ять-мідянка — зелена фарба, яка отримується шляхом окислення міді».*

До реальних дефініцій належить індуктивне визначення. ***Індуктивним визначенням є процедура, яка передбачає:***

1) явну вказівку на вихідні елементи (вони або повністю перераховуються, або дається критерій, за яким можна виділити їх із певної множини);

2) правила утворення із вихідних елементів похідних;

3) обмеження, яке вказує, що окрім наведених в 1 і утворених відповідно до 2 немає ніяких інших, які б належали множині, що визначається.

Візьмемо для прикладу дефініцію формули у мові класичної логіки висловлювань:

1. Будь-яка пропозиційна змінна (p, q, r) є формулою.

2. Якщо p — формула, то $\overline{p}$ ***теж формула.***

3. Якщо p і q формули, то вираз $(p \mathbin{\&} q)$, $(p \vee q)$, $(p \supset q)$, $(p \leftrightarrow q)$ ***теж формули.***

4. Ніщо крім виразів, перерахованих в 1, 2, 3, не є формулою у мові класичного числення висловлювань.

Номінальні дефініції поділяються на ***синтаксичні і семантичні***, а ***семантичні — на аналітичні і синтетичні***.

Синтаксичним називається визначення, у якому вказується, як можна замінити знаки або їх сполучення іншими (як правило коротшими), не звертаючи уваги на їх значення. Синтаксичним визначенням буде дефініція операції об'єднання множин:

$$A \cup B =_{Df} \{x \;/\; x \in A \vee x \in B\}.$$

Таким же способом можемо визначити число ***«0»***. ***«0»*** — *це таке число, яке після перемноження його з будь-яким числом* ***«n»*** *дає* ***0****, тобто відповідає рівності* $\boldsymbol{0 \times n = 0}$*»*.

Граматичні знаки, коми, крапки, дужки тощо також визначаються синтаксично.

***Семантичним* називається визначення, яке певному позначенню ставить у відповідність предмет, охарактеризований через його відмінні ознаки.**

Наприклад, «Слово «п'ятикутник» означає багатокутник з п'ятьма сторонами». Особливістю семантичних визначень є те, що у них у правій частині говориться про предмет, а у лівій — про термін. Вони відповідають формулі:

$$«\boldsymbol{Dfd}» =_{Df} \boldsymbol{Dfn}.$$

З наведеної формули очевидно, що до ***Dfd*** і ***Dfn*** не можна застосовувати вимогу взаємозамінюваності. Щоб застосувати до цього виду дефініцій правило взаємозамінюваності необхідно його перевести або у реальне, або у номінальне несемантичне визначення. *Наприклад,* маємо семантичну дефініцію *«Слово «квадрат» означає прямокутник з рівними сторонами»* — $«\boldsymbol{Dfd}» =_{Df} \boldsymbol{Dfn}$.

Його можна перетворити на ***реальне визначення***: *«Квадрат — це прямокутник з рівними сторонами»* — $\boldsymbol{Dfd} =_{Df} \boldsymbol{Dfn}$, або у ***номінальне визначення***: *«Термін «квадрат» має те ж саме значення, що і термін «прямокутник з рівними сторонами»* — $«\boldsymbol{Dfd}» =_{Df} «\boldsymbol{Dfn}»$.

Семантичні визначення, як уже зазначалося, мають дві підмножини:

— ***аналітичні визначення*** і

— ***синтетичні визначення.***

***Аналітичним* визначенням називається такий вид семантичних дефініцій, який розкриває значення термінів, що уже існують у даній мові.** Прикладами аналітичних визначень є визначення слів, що входять до тлумачних словників. Формою аналітичного визначення може бути вираз: *«Під терміном Т у науці N розуміють ...».* Наприклад, *«під терміном «нормативний акт» у юридичній практиці розуміють правовий акт держави, у якому містяться накази — норми права, що регулюють суспільні відносини певного виду».*

Аналітичні визначення вживають особливо тоді, коли один і той самий термін у різних науках вживається у різному значенні.

***Синтетичним* визначенням називається такий вид семантичних дефініцій, який розкриває значення терміна, що вперше вводиться, або уточнює значен-**

ня терміна, який уже наявний у даній мові. Прикладами синтетичних визначень будуть визначення вперше введених термінів: *«аеробіка», «ринкова економіка», «космонавтика»* тощо.

Операція визначення поняття підпорядковується спеціальним правилам.

1. Дефініція повинна бути відповідною.

Тобто ***W Dfd*** і ***W Dfn*** повинні бути однаковими за обсягом. При порушенні цього правила виникає дві помилки: ***«занадто широка дефініція»*** та ***«занадто вузька дефініція».***

Наведемо приклад, де має місце помилка ***«занадто широка дефініція»***: ***«Діаметр — це пряма, яка з'єднує дві точки кола».*** Якщо проаналізувати цю дефініцію, то стає очевидним, що обсяг визначуваного поняття включається до обсягу визначуючого: ***W Dfd*** $\subset$ ***W Dfn*** .

Тобто, обсяг поняття *«діаметр»* складає частину обсягу поняття *«пряма, яка з'єднує дві точки кола»* і відноситься до останнього як вид ***Dfd*** до роду ***Dfn***. Адже до обсягу визначаючого поняття входить не тільки *«діаметр»*, але й будь-які хорди. Тому не можна відрізнити діаметр від інших прямих ліній, що можуть з'єднувати дві точки на колі.

Помилка ***«занадто широка дефініція»*** також спостерігається у таких прикладах: *«Історія — це наука про людське суспільство»; «Студент — це людина, яка вивчає якусь науку»; «Автократія — це форма правління, при якій державна влада зосереджена в руках однієї особи» тощо.*

Отже, щоб виявити помилку ***«занадто широкої дефініції»*** треба відповісти на запитання: «Чи всі елементи обсягу визначаючого поняття ***W Dfn*** є елементами обсягу визначуваного поняття ***W Dfd***, тобто чи має місце рівність: ***W Dfd*** $\leftrightarrow$ ***W Dfn*** = (***W Dfd*** $\subset$ ***W Dfn***) & (***W Dfn*** $\subset$ ***W Dfd***).

Наведемо приклади помилки ***«занадто вузького визначення»***: *«Історія — це наука про виникнення та розвиток античної цивілізації», «Совість — це усвідомлення людиною відповідальності перед самим собою за свої вчинки»* тощо. У цій помилці обсяг ***Dfn*** менший обсягу ***Dfd***: ***W Dfn*** $\subset$ ***W Dfd*** .

2. Дефініція не повинна здійснюватися по колу.

При порушенні цього правила виникає помилка ***«коло у дефініції».*** Суть цієї помилки полягає у тому, що ***Dfd*** визначається через ***Dfn***, а ***Dfn*** безпосередньо чи опосередковано визначається через ***Dfd***.

Для виникнення даної помилки потрібно мати у наявності хоча б два визначення. *Наприклад,* у визначенні *«Логіка — це наука про правильне мислення»*, наявна помилка ***«коло у дефініції»***, якщо до цього мало місце визначення: *«Правильне мислення — це мислення згідно правил логіки»*. Виходить, що логіка визначається через правильне мислення, яке у свою чергу визначається через логіку. Ця помилка має місце і в таких прикладах: *«Обертання — це рух тіла навколо своєї осі»* і *«Вісь — це пряма, навколо якої обертається тіло»*; *«Істина — це правильне відображення дійсності в думках людини»* і *«Правильне відображення дійсності — це істинне відображення»*.

Різновидом кола у визначенні є помилка, яка називається ***«тавтологією»***, або «теж, через те ж саме» (*«idem per idem» — лат.*).

Тавтологічними називаються дефініції, у яких Dfn повторює Dfd, але може бути вираженим іншими словами.

Наприклад, «Держава — це організація державної влади», «Історія — це наука про історичні явища», «Комічне — це все те, що є смішним», «Можливість — це все те, що може бути».

3. Дефініція по можливості не повинна бути заперечувальною.

Це правило враховує насамперед те, що множина, яка відповідає заперечувальному поняттю, найчастіше буває невизначеною. Іншими словами, оскільки ***Dfn*** у заперечувальній дефініції не вказує ніяких ознак, то він не утворює поняття, а отже, дефініція не виконує свого основного завдання.

Наприклад, «Геологія — це не географія», «Республіка — це форма правління, яка не є монархією».

Треба зауважити, що у математиці і деяких інших науках заперечувальні дефініції мають місце. Це найчастіше відбувається тоді, коли потрібно визначити гранично широкі поняття.

Наприклад, «Паралельні лінії — це такі лінії, які лежать на одній площині і які не пересікаються при необмеженому продовженні у обидва боки», «Рослини — це живі організми, які не здатні до самостійного пересуван-

ня», «Атомарне висловлювання — це таке висловлювання, яке не можна розкласти в рамках даної системи на інші більш прості висловлювання», «Пустий клас — це така множина, яка не має жодного елемента» тощо.

4. Дефініція повинна бути чіткою, ясною, вільною від двозначностей. При побудові визначень у ролі ***Dfn*** треба використовувати не метафори і образні порівняння, а поняття, які мають чіткий смисл і значення.

Наприклад, «Закон — це каральний меч правосуддя», «Скрипка — королева оркестру», «Нафта — чорне золото», «Лев — цар звірів» тощо. Тобто у цих визначеннях порушується правило чіткості і ясності дефініції.

Дотримання перерахованих правил допомагає формулювати ясні, правильні визначення, які допомагають збагнути свої власні знання і передати ці знання іншим у ясній і доступній формі.

Окрім логічної операції визначення поняття у практиці міркувань широко використовуються ***процедури, які подібні до визначення, але такими не є.*** Зокрема, це такі процедури як:

— ***опис;***
— ***характеристика;***
— ***порівняння;***
— ***розрізнення;***
— ***остенсивне визначення.***

Описом називається процедура, яка полягає у перерахуванні ознак, які більшою або меншою мірою розкривають певний предмет.

Опис застосовують при оцінці місця злочину чи пригоди, місцевості, виду рослин чи тварин тощо.

Наприклад, «Тигр — це ссавець родини котячих, один з найбільш великих сучасних хижих звірів. Голова округлої форми, з короткими вухами і боками, червонувато-рудуватим забарвленням, з чорними поперечними смугами».

Характеристикою називається прийом, за допомогою якого вказують якісь помітні ознаки предмета, важливі у певному відношенні. Характеристика може бути повною або неповною, позитивною або негативною, всебічною або односторонньою, але вона повинна завжди бути об'єктивною. Іноді характеристика може мати лише одну ознаку. *Наприклад, «Ньютон — геніальний фізик».*

***Порівнянням** називається процедура ознайомлення з предметом, коли визначення неможливе або не потрібне. Порівняння, власне, є способом пояснення специфіки предметів через аналогію і, головним чином, через метафори.*

Наприклад, «Ахітектура — це застигла музика», «Столиця — серце держави», «Совість — внутрішній суддя» тощо.

Розрізнення — це прийом, за допомогою якого відрізняють один предмет від інших, схожих з ним предметів.

Прикладом розрізнення може бути фіксація особливих прикмет при розшуку людей чи зниклих речей.

Остенсивним визначенням називається процедура, яка полягає в демонстрації предмета (у вказівці на предмет).

Наприклад, коли демонструють предмет і називають його *«Це будинок», «Це телевізор».*

Отже, логічна операція визначення поняття виконує важливу функцію у наукових дослідженнях і практиці міркування. За допомогою дефініції підсумовують знання про предмет, полегшують пошук предмета, який становить дослідницький чи практичний інтерес, розкривають значення термінів і, нарешті, дефініція є важливим засобом скорочення складних описів, засобом скорочення окремих міркувань у наукових теоріях.

Контрольні питання

1. Характеристика індивіду як предмета думки.
2. Характер абстрагування, що має місце при утворенні терму.
3. Суть ототожнююче-відрізняючого абстрагування.
4. Мовні засоби вираження поняття.
5. Види ознак предмета думки.
6. Дефініція змісту поняття.
7. Предикат як знакова форма фіксації змісту поняття.
8. Типологія ознак за субстанціональністю.
9. Родові та видові ознаки.
10. Дефініція обсягу поняття.
11. Обсяг поняття як множина.
12. Поняття множини.
13. Характеристика відношень: *«належність елемента множині»* і *«включення множини в множину».*

14. Поняття *«універсальної множини», «повної підмножини», «порожньої множини»*.

15. Способи задання множин.

16. Процедура вирахування кількості підмножин будь-якої множини.

17. Обсяг поняття як значення понятійної функції.

18. Обґрунтування закону оберненого відношення між змістом та обсягом поняття.

19. Типологія видів понять.

20. Логічні відношення між сумісними поняттями.

21. Логічні відношення між несумісними поняттями.

22. Обмеження та узагальнення понять.

23. Операція доповнення обсягу поняття.

24. Операція перетину обсягів поняття.

25. Операція об'єднання обсягів поняття.

26. Здійснення операції перетину над сумісними поняттями.

27. Здійснення операції об'єднання над сумісними та несумісними поняттями.

28. Різниця обсягів понять.

29. Структура операції поділу понять.

30. Види поділу понять.

31. Правила поділу понять та можливі помилки при їх порушенні.

32. Природна та штучна класифікація.

33. Розчленування цілого на частини.

34. Види визначення.

35. Структура операції визначення понять.

36. Синтаксична та семантична площини аналізу дефініції.

37. Прагматичний аспект дефініції.

38. Види реальних дефініцій.

39. Види номінальних дефініцій.

40. Правила визначення.

41. Процедури, подібні до визначення поняття.

Контрольні вправи

1. Дайте логічний аналіз перерахованих понять: *«юридична особа», «неуспішність», «роман Л. М. Толстого», «футбольна команда», «метал, який не проводить електричний струм», «центральне тіло Сонячної системи», «кредитор»*.

2. Встановіть обсяг таких понять: *«основні формально-логічні закони», «місто», «держава», «справедливість», «наукова бібліотека»*.

3. Наведіть прклади збірних понять.

4. Які пари предметів увійдуть до обсягу понять: *«ровесник», «учитель», «брат», «столиця»*.

5. Які з наведених предикатів є одномісними, двомісними, тримісними: *«талановитий», «сестра», «знаходитися між»*.

6. Наведіть приклади синонімів та омонімів.

7. Наведіть приклади понять, які б знаходилися у відношенні тотожності з такими поняттями: *«квадрат», «адміністративний, економічний, культурний центр держави», «злочин», «підручник»*.

8. Зобразіть у вигляді колових схем відношення між такими поняттями:

а) *«військовослужбовець», «капітан», «полковник», «викладач»;*

б) *«юрист», «депутат», «лауреат»;*

в) *«чотирикутник», «паралелограм», «ромб», «квадрат», «прямокутник»*.

9. Знайдіть поняття, обсяг якого частково співпадає з обсягом даного: *«лікар», «метал», «европейська держава», «учень»*.

10. Чи правильно здійснено поділ понять:

а) *картини бувають історичні і пейзажні;*

б) *клімат буває холодний, помірний, жаркий, морський і континентальний;*

в) *науки поділяють на гуманітарні, природничі, технічні і біологічні.*

11. Чи правильно здійснено визначення таких понять? Якщо ні, то які правила порушені:

а) *фізика -це наука про фізичні явища;*

б) *логіка — це наука про мислення;*

в) *географія — це геологія;*

г) *демократ — це людина, яка дотримується демократичних поглядів;*

д) *планета — це космічний об'єкт на якому існує життя.*

12. Наведіть приклади номінальних дефініцій і переформулюйте їх у реальні.

РОЗДІЛ IX

СУДЖЕННЯ

1. Загальна характеристика судження

Судження — це одна із форм мислення. Існує декілька його визначень. Наведемо найуживаніші з них:

«Судження — це думка, у якій стверджується наявність або відсутність властивостей у предметів, відношень між предметами, зв'язків між ситуаціями»;

«Судження є такою думкою, у якій при її висловлюванні дещо стверджується про предмети дійсності і яка об'єктивно є або істинною, або хибною і при цьому неодмінно однією із двох»;

«Судження — це думка, у якій стверджується або заперечується зв'язок між об'єктами і ознаками»;

«Судження — це думка, що виражається розповідними реченнями і є істинною або хибною».

Фактично всі ці визначення при їх різних мовних відмінностях — ідентичні.

Надалі будемо користуватися такою дефініцією судження: ***«С у д ж е н н я — це така форма мислення, яка розкриває зв'язок між предметом і його ознакою».***

Наприклад, «Квадрат є геометричною фігурою»; «Природний супутник не є планетою» тощо.

Те, про що говориться у судженні, називається «предметом думки у судженні» або «логічним підметом судження», або «суб'єктом судження» і позначається буквою латинського алфавіту «S».

Те, що говориться у судженні про предмет думки, називається «ознакою предмета думки» або «логічним присудком судження», або «предикатом судження» і позначається буквою латинського алфавіту «P».

Відношення між предметом думки і ознакою предмета думки фіксується логічною ознакою «є /не є», «суть / не суть».

Отже, ***логічна структура судження складається із суб'єкта S, предиката P і логічної зв'язки «є /не є».***

Схематично це записується у вигляді такої формули:

«S є P» або ***«S не є P»***

«S» і ***«P»*** називаються ***термінами судження.*** У наведених прикладах ***суб'єктами*** будуть поняття *«квадрат»* і *«природний супутник»*, ***предикатами*** — *«геометрична фігура»*, *«планета»*, а ***логічною зв'язкою*** — слова *«є»* і *«не є»*.

2. Судження і речення

Оскільки судження є однією із форм абстрактного мислення, то його матеріальним втіленням, матеріальною реалізацією є мова, конкретніше — речення. ***Але хоча будь-яке судження реалізується у реченні, не всі речення виражають судження.*** Із усієї множини речень (розповідні, питальні, окличні) ***лише розповідні виражають судження.*** *Наприклад*, суджень не виражають речення: *«Хто сьогодні спізнився на лекцію?», «Принеси книжку!»*

Визначивши, що кожне судження неодмінно виражається у розповідному реченні, цілком слушно виникає питання: «Що розуміється під судженням: думка поза мовними засобами, які її виражають, чи думка разом із засобами її мовного втілення?».

З цього приводу в історії логіки існують дві точки зору. Перша точка зору розглядає судження як висловлювання, як речення, тобто думку разом з її мовними засобами вираження. Відповідно до цієї точки зору одна й та ж сама думка, яка втілена у реченнях різних мов (наприклад, українській, німецькій, англійській тощо) є різними судженнями. Наприклад, речення *«Він є студентом», «Er ist ein student», «He is a student»* повинні розглядатися як різні судження.

Друга точка зору полягає у тому, що судження розглядається у відволіканні від мовних засобів його вираження, як ***«пропозиція в абстрактному смислі».*** Тоді речення: *«Він є студентом», «Er ist ein student», «He is a student»* є одним і тим самим судженням, незалежно від того, яке мовне втілення воно має. У такій трактовці судження є тим спільним, що зберігається у розповідних реченнях при перекладі з однієї мови на іншу.

Кожна з цих точок зору має право на існування в залежності від конкретних завдань дослідження. Тому надалі будемо користуватися і терміном *«судження»*, і терміном *«висловлювання»*, і теміном *«речення»*.

Співвідношення *«речення», «судження» і «висловлювання»* розглядається ще й у такій площині. Оскільки речення розглядається як знак, то знак, з точки зору семантики, повинен мати смисл і значення. Виявляється, що смислом розповідного речення (як знака) є судження (тобто, думка, зафіксована у реченні) або інформація, яку несе в собі речення («щось про щось стверджується або заперечується»), а значенням — оцінка відповідності речення тому, про що говориться у реченні (тобто, «істина» чи «хиба»). Зазначене дає можливість сформулювати таку дефініцію:

В и с л о в л ю в а н н я — це речення[1], смислом якого є судження, а значенням — такі логічні об'єкти, як «істина» або «хиба»».

Оскільки традиційна логіка досліджує форми мислення, розглядає їх як своєрідні способи освоєння відображення дійсності, то в ній йдеться про *«поняття», «судження», «умовивід»* як форми мислення.

Сучасна ж логіка, як другий етап логіки у розвитку єдиної логічної науки, бере до уваги мову як втілення мислення, або іншими словами, досліджує смисловий бік мови і різних її утворень (виразів). Тому у сучасній логіці говорять не про *«поняття», «судження», «умовивід»*, а про *«терміни», «висловлювання», їх комбінації і відношення* (тобто, про висновки).

Отже, коли у традиційній логіці вживається термін ***«висловлювання»*** як рівноцінний терміну ***«судження»***[2], то мається на увазі, що висловлювання як об'єкт сучасної логіки може моделювати судження, бути одним із варіантів представлення судження, особливо коли йдеться про судження з відношеннями та про складні судження. Все це дає можливість вживати в певних межах терміни *«су-*

---

[1] Тут мається на увазі розповідне речення.

[2] Замість терміна «категоричне судження» вживають термін «категоричне висловлювання», замість терміна «складне судження» вживають – «складне висловлювання».

дження» і *«висловлювання»* як однопорядкові. Але коли ми говоримо про специфіку дослідження предмета логіки в історично першій частині (традиційній логіці) і в історично другій частині (сучасній або символічній логіці), то необхідно враховувати зазначені вище нюанси.

3. Види суджень. Атрибутивні судження.

Розглянемо види суджень. Усю множину суджень можна поділити на дві підмножини: ***прості і складні судження.***

П р о с т и м називають таке судження у якому жодна логічна частина не є окремим судженням. Або простим називається судження, яке не має самостійних частин.

Наприклад, «Книга є джерелом інформації», якщо відняти будь-яку частину цього судження (*«книга»*, або *«джерело інформації»*), то окремо взята вона не буде судженням, а вихідне судження, як цілісний об'єкт, зруйнується.

С к л а д н и м називається таке судження, яке складається із двох або більше простих суджень, що пов'язані логічними сполучниками, а кожна із його правильних частин буде окремим судженням.

Наприклад: **1.** *«Марс і Юпітер — це планети Сонячної системи»*;

2. *«Якщо тіло має меншу питому вагу від води, то воно не потоне»* тощо.

Ці два судження є складними, тому що кожне з них можна розкласти на два простих судження. У **1** судженні: прості судження *«Марс — це планета Сонячної системи»*, *«Юпітер — це планета Сонячної системи»* поєднуються логічним сполучником ***«і»***. У **2** — *«Тіло має меншу питому вагу від води»*, *«Воно не потоне»* поєднуються логічним сполучником ***«якщо, то»***.

Зупинимося на аналізі простих суджень.

За характером ознаки, яка представлена предикатом судження, розрізняють такі види суджень:

а) атрибутивні;

б) судження з відношеннями, або судження про відношення;

в) судження існування.

Атрибутивним називається таке просте судження, предикат якого представляє таку ознаку, як властивість. Можна ще й так визначити атрибутивне судження: ***«Атрибутивним судженням називається такий вид простих суджень, в яких йдеться про притаманність предметам якихось властивостей, або про їх відсутність у предмета».*** *Наприклад, «Франція є республікою», «Жоден мій знайомий не має вищої освіти»* тощо.

Судженням з відношеннями називається такий вид простих суджень, у яких предикат представляє таку ознаку, як відношення між предметами. *Наприклад*: *«Київ розташований вище по Дніпру, ніж Канів», «Мій приятель не знає мого брата»* тощо. У першому судженні стверджується, що відношення *«розташований вище по Дніпру»* має місце між двома предметами *«Києвом»* і *«Каневом»*. У другому судженні заперечується, що відношення *«знає»* має місце між *«моїм приятелем»* і *«моїм братом»*.

Судженням існування називається вид простих суджень, у яких предикат виражає наявність (буття) предмета. *Наприклад: «Є люди, які можуть прогнозувати майбутнє», «Не існує життя на Місяці»* тощо. У першому судженні стверджується існування людей, здатних до прогнозування. У другому судженні заперечується наявність живого на такому космічному об'єкті, як Місяць.

Зупинимося на аналізі атрибутивних суджень. Інтерес до атрибутивних суджень у традиційній логіці був викликаний тим, що вони виступили вихідним матеріалом у побудові Арістотелем першої теорії логічного висновку — силогістики. Значною мірою це зумовлювало й те, що решта простих суджень (судження з відношеннями і судження існування) після відповідних синтаксичних реконструкцій тлумачилися як атрибутивні.

Атрибутивні судження поділяються на види на кількістю і якістю.

За якістю виділяють:

— ***стверджувальні*** і

— ***заперечувальні атрибутивні судження.***

Наприклад, «Злочин є суспільно небезпечним вчинком» — ***сверджувальне судження***; *«Жоден мій приятель не має посвідчення водія»* — ***заперечувальне судження..***

За кількістю розрізняють:

— ***одиничні;***
— ***загальні;***
— ***часткові атрибутивні судження.***

О д и н и ч н и м називається таке атрибутивне судження, у якому суб'єктом виступає одиничне поняття.

Наприклад: «Автор «Кобзаря» є відомим художником».

З а г а л ь н и м називається таке атрибутивне судження, у якому суб'єктом є загальне поняття.

Наприклад: «Трапеція є геометричною фігурою».

Ч а с т к о в и м називається атрибутивне судження, у якому суб'єкт представляє частину класу досліджуваних предметів.

Наприклад, «Деякі книжки мають довідковий характер».

Ці дві типології атрибутивних суджень виділяються у методичних цілях. У практиці міркування вони існують у взаємодії, тому спеціально виділяють типологію атрибутивних суджень ***за «об'єднаним поділом за кількістю і якістю»:***

— ***загальностверджувальні;***
— ***частковостверджувальні;***
— ***загальнозаперечувальні;***
— ***частковозаперечувальні атрибутивні судження.***

З а г а л ь н о с т в е р д ж у в а л ь н и м називається судження, яке за кількістю є загальним, а за якістю стверджувальним.

Наприклад: «Будь-яка планета має природний супутник».

Схема загальностверджувального судження така:

«Будь-який S є P».

Позначається цей вид суджень буквою ***«А».***

Це позначення береться від першої букви латинського слова ***«affirmo»*** (***стверджую***). ***«А»*** фіксує логічний термін у структурі загальностверджувального судження ***«Будь-який ... є ...».*** ***«S»*** і ***«P»*** — це дескриптивні терміни. Отже, структуру загальностверджувального судження можна записати так: ***Asp.***

Ч а с т к о в о с т в е р д ж у в а л ь н и м судженням називається таке атрибутивне судження, яке за кількістю є частковим, а за якістю стверджувальним.

Наприклад: «Деякі злочини є посадовими».

Схема частковостверджувального судження має такий вигляд:

«Деякі S є P».

Позначається це судження буквою ***«I»***.

Це друга голосна буква у слові ***«Affirmo»***. ***«I»*** виражає логічний термін у структурі частковостверджувального судження: ***«Деякі ... є ...»***. Отже, частковостверджувальне судження позначається символом: ***Isp***.

З а г а л ь н о з а п е р е ч у в а л ь н и м називається атрибутивне судження, яке за кількістю є загальним, а за якістю — заперечувальним. *Наприклад: «Жоден мій знайомий не був серед учасників семінару».*

Загальнозаперечувальне судження має таку схему:

«Жоден S не є P».

Це судження позначається першою голосною буквою у латинському слові ***«Nego»*** (***заперечую***) — ***«E»***. Символ ***«E»*** представляє логічний термін у загальнозаперечувальному судженні: ***«Жоден ... не є ...»***.

Записується структура загальнозаперечувального судження так: ***Esp***.

Ч а с т к о в о з а п е р е ч у в а л ь н и м називається атрибутивне судження, яке за кількістю є частковим, а за якістю заперечувальним. *Наприклад, «Деякі мої друзі не були запрошені на свято».*

Схема частковозаперечувального судження така:

«Деякі S не є P».

Позначається це судження другою голосною буквою у слові ***«Nego»*** — ***«O»***. Символ ***«O»*** фіксує логічний термін у частковозаперечувальному судженні: ***«Деякі ... не є ...»***.

Структура цього судження записується так: ***Osp***.

Атрибутивні судження можна розглядати як з точки зору інтенсіоналу, так і з точки зору екстенсіоналу. Попередній розгляд атрибутивних суджень базувався на їх інтенсіональній характеристиці. Тобто, до уваги брався факт притаманності або непритаманності предметам якоїсь властивості.

З точки зору екстенсіоналу атрибутивне судження можна тлумачити як судження про повне або часткове включення чи невключення обсягу одного терміна ***S*** до обсягу іншого терміна ***P***.

Наприклад:

1. «Будь-яке дерево — є рослина».

2. «Будь-який квадрат є рівностороннім прямокутником».

3. «Деякі поети — лауреати».

4. Деякі книжки є підручниками».

5. «Жодний природний супутник не є планетою».

6. «Деякі злочини не є посадовими».

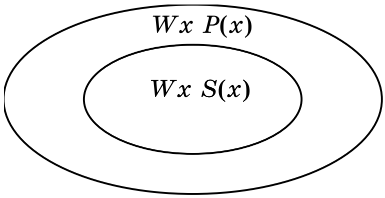
7. «Юпітер є планета».

8. «Місяць не є планетою».

Із позицій екстенсіональної характеристики наведені вище судження можна відповідним способом і у кожному конкретному випадку подати як схему:

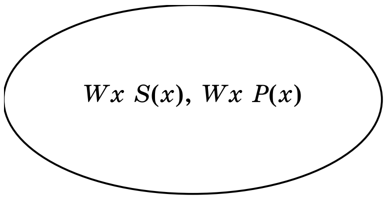
1. $\boldsymbol{Wx\ S(x) \subset Wx\ P(x)}$ — ***Asp.***

I



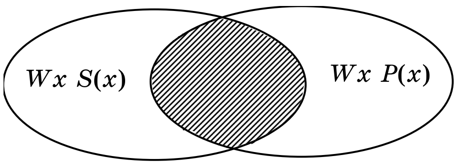
2. $\boldsymbol{Wx\ S(x) \subseteq Wx\ P(x)}$ — ***Asp.***

II



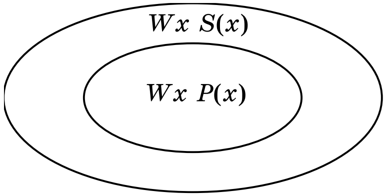
3. $\boldsymbol{Wx\ S(x) \cap Wx\ P(x)}$ — ***Isp.***

III



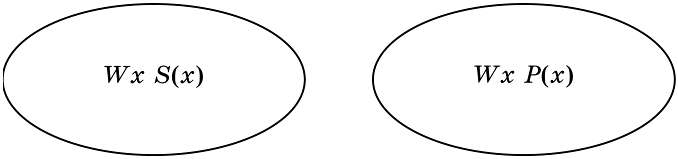
4. Wx P(x) ⊂ Wx S(x) — Isp.

IV



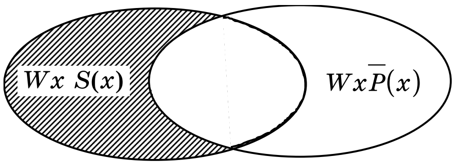
5. Wx S(x) ⊄ Wx P(x) і Wx P(x) ⊄ Wx S(x) − Esp.

V

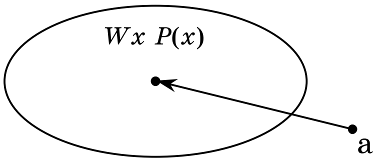


6.Wx S(x) ∩ Wx $\overline{\text{P}}$(x) − ***Osp.***

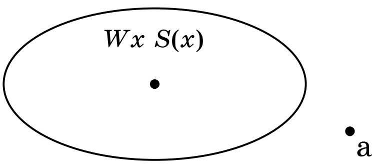
VI



7. а є Wx P(x) − а є р.



8. а є Wx P(x) − а не є р.



Включення або невключення обсягу одного терміна до обсягу другого терміна визначає таке важливе для характеристики атрибутивних суджень відношення, як ***«розподіленість термінів»***.

Термін S або P називається розподіленим у даному судженні, якщо він взятий у повному обсязі.

Нерозподіленим називається термін, якщо він взятий у неповному обсязі.

Це відношення можна визначити ще й так: «Термін атрибутивного судження називається розподіленим, якщо його обсяг повністю включається або повністю виключається із обсягу другого терміна. Термін нерозподілений, якщо його обсяг частково включається або виключається із обсягу другого терміна».

***Розподілений термін позначається знаком* (+), *а нерозподілений — знаком* (–).**

У загальностверджувальному судженні, як правило, суб'єкт розподілений, а предикат не розподілений: $As^{+}p^{-}$. Винятком для загальностверджувального судження є ситуація, коли і суб'єкт і предикат розподілені: $A\ s^{+}\ p^{+}$. Ілюстрацією цього випадку є приклад ***2***.

У загальнозаперечувальному судженні і суб'єкт і предикат розподілені: $E\ s^{+}\ p^{+}$.

У частковостверджувальному судженні і суб'єкт і предикат, як правило, не розподілені: $I\ s^{-}\ p^{-}$. Але буває виняток, коли в цьому судженні суб'єкт не розподілений, а предикат розподілений: $I\ s^{+}\ p^{+}$. Переконанням слугує приклад ***4***.

У частковозаперечувальному судженні суб'єкт не розподілений, а предикат розподілений: $O\ s^{-}\ p^{+}$.

Схеми ***I, II, III, IV, V, VI*** наочно ілюструють відношення розподіленості термінів. Необхідно пам'ятати, що відношення розподіленості термінів є одним із важливих правил при побудові безпосередніх умовиводів[1] і особливо такого опосердкованого умовиводу, як «простий категоричний силогізм».

Схеми розподіленості термінів ***I—VI*** можна розглядати як умови істинності чи хибності для атрибутивних су-

---

[1] Тут маються на увазі безпосередні умовиводи, що засновані на перебудові логічної структури категоричного судження як засновку (обернення, перетворення, протиставлення предикату).

джень. Тобто, схеми ***I*** — ***УІ*** — це своєрідне поле інтерпретації для : ***Asp, Isp, Esp і Osp.***

Все це можна записати у вигляді наступних рівностей:

а) ***Asp — «і» ⇔ {I, II}***

(читається ця рівність так: «*Судження* ***Asp*** *є істинним тоді і тільки тоді, коли мають місце ситуації* ***I, II***»);

б) ***Asp — «х» ⇔ {III, IV, V}***

(читається ця рівність так: «*Судження* ***Asp*** *є хибним тоді і тільки тоді, коли мають місце ситуації* ***III, IV, V***»);

в) ***Isp — «і» ⇔ {I, II, III, IV}***;

г) ***Isp — «х» ⇔ {V}***;

д) ***Esp — «і» ⇔ {V}***;

е) ***Esp — «х» ⇔ {I, II, III, IV}***;

є) ***Osp — «і» ⇔ {IV, V, VI}***;

ж) ***Osp — «х» ⇔ {I, II}***;

Наведені рівності лежать в основі логічних відношень між судженнями.

4. Логічні відношення між атрибутивними судженнями

Так як і поняття, усю множину суджень можна розділити на дві підмножини: ***порівнювані судження і непорівнювані судження.***

П о р і в н ю в а н и м и судженнями називаються такі атрибутивні судження, які мають однакові дескриптивні терміни S і P, але відрізняються логічними термінами.

Наприклад:

1. *«Будь-який злочин є суспільно небезпечним вчинком».*

2. *«Жоден злочин не є суспільно небезпечним вчинком».*

3. *«Деякі злочини є суспільно небезпечними вчинками».*

4. *«Деякі злочини не є суспільно небезпечними вчинками».*

Н е п о р і в н ю в а н и м и судженнями називаються такі атрибутивні судження, у яких різні дескриптивні терміни. Наприклад:

1 *.«Будь-яка планета має природний супутник».*

2. *«Будь-яка книжка є джерелом інформації».*

Порівнювані судження, у свою чергу, поділяються на дві підмножини:

— ***сумісні судження*** і

— ***несумісні судження.***

С у м і с н и м и називаються судження, які можуть бути одночасно істинними, але не можуть бути одночасно хибними. Якщо розглянути рівності, що описують умови істинності атрибутивних суджень, то очевидно, що такими будуть судження ***Asp, Isp***. Їх поле інтерпретації для істини збігається: {***I, II***}.

Н е с у м і с н и м и називаються судження, які не можуть бути одночасно істинними. Такими є, наприклад, судження ***Asp*** і ***Esp***. Для них поле хибності співпадає в ситуаціях {***III, IV***}.

Між сумісними судженнями існують такі відношення:

— ***підпорядкування*** і

— ***підпротивності*** (***субконтрарності***).

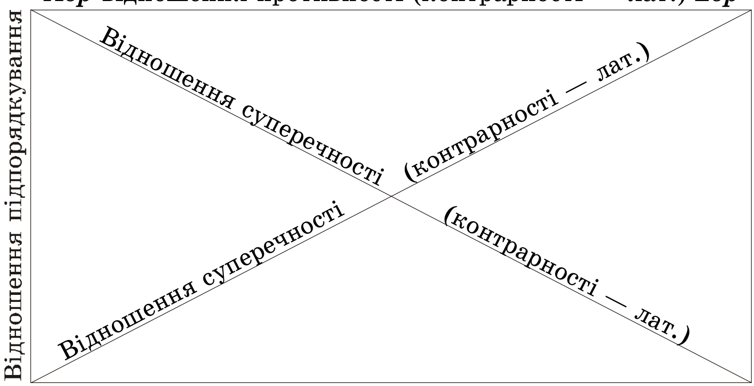
Між несумісними існують відношення:

— ***протиріччя*** (***контрадикторності***) і

— ***противності*** (***контрарності***).

У середні віки був відкритий мнемонічний засіб для наочного зображення логічних відношень між атрибутивними судженнями, який отримав назву ***«логічний квадрат»*** (хоча тут нічого спільного з квадратом як геометричною фігурою, хіба що вербальна подібність).

Asp відношення противності (контрарності — лат.) ***Esp***



Isp відношення противності (підконтрарності — лат.) ***Osp***

Ця схема показує, що на верхній горизонталі квадрата розташувалися загальні судження ***Asp, Esp***, а на нижній — часткові ***Osp, Isp***. Часткові розташовані так, щоб під загальностверджувальним ***Asp*** було частковостверджувальне ***Isp***, а під загальнозаперечувальним ***Esp*** було — частковозаперечувальне ***Osp***.

Зупинимося на визначенні логічних відношень між атрибутивними судженнями.

Відношення підпорядкування

Відношення підпорядкування існує між судженнями ***Asp та Isp; Esp та Osp***.

Суть його полягає в тому, що при істинності Asp (Esp) обов'язково буде істинним Isp (Osp), а при хибності Asp (Esp) судження Isp (Osp) можуть бути будь-якими.

Наприклад, судження: *«Будь-який злочин є суспільно небезпечним вчинком»* ***Asp*** — ***«істинне»*** і *«Деякі злочини є суспільно небезпечним вчинком»* ***Isp*** — теж ***буде істинним***.

Візьмемо ***хибне*** судження ***Asp***: *«Будь-який злочин є навмисним»* і утворимо з нього судження *Isp*: *«Деякі злочини є навмисними»* — яке буде ***істинним***.

Наведемо ще приклад ***хибного*** судження ***Asp:*** *«Будь-який природний супутник є планетою»*. Відповідним йому буде судження *«Деякі природні супутники є планетами»* ***Isp,*** яке також буде ***хибним***.

Наведені приклади ілюструють таку залежність, що при хибності ***Asp*** (***Esp***) судження ***Isp*** (***Osp***) можуть бути будь-якими. Якщо ж хибним є ***Isp*** (***Osp***), то обов'язково хибними будуть ***Asp*** (***Esp***). При істинності ***Isp*** (**Osp**) судження ***Asp*** (***Esp***) можуть бути будь-якими.

У відношенні підпорядкування судження Asp та Esp називаються підпорядковуючими, а судження Isp та Osp підпорядкованими.

Відношення противності (контрарності)

У відношенні противності (контрарності) знаходяться судження ***Asp*** і ***Esp***.

Суть відношення противності полягає у тому, що судження Asp та Esp не можуть бути разом істинними. В крайньому випадку одне з них обов'язково буде хибним, а то й обидва будуть хибними.

Наприклад:

I 1) *«Будь-який злочин є суспільно небезпечним вчинком»* — ***істинне*** і

2) *«Жоден вчинок не є суспільно небезпечним вчинком»* — ***хибне;*** і

II 1) *«Будь-який злочин є посадовим»* — ***хибне***, і

2) *«Жоден злочин не є посадовим»* — те ж ***хибне.***

Відношення підпротивності (субконтрарності)

Відношення підпротивності (субконтрарності) має місце між судженнями ***Isp*** та ***Osp.***

Суть цього відношення полягає в тому, що судження Isp та Osp можуть бути разом істинними, а хибними — ні. В крайньому випадку одне з них буде істинним.

Наприклад:

I 1) *«Деякі вироки є обґрунтованими»* і

2) *«Деякі вироки не є обґрунтованими»* — ***одибва судження істинні;***

II 1) *«Деякі злочини є суспільно небезпечними вчинками»* і

2) *«Деякі злочини не є суспільно небезпечними вчинками».*

У цих прикладах судження ***Isp*** — є ***істинним,*** а судження ***Osp — хибним.***

Суперечливими є пари суджень*:* ***Asp*** та ***Osp*** і
Esp та ***Isp.***

Відношення протиріччя

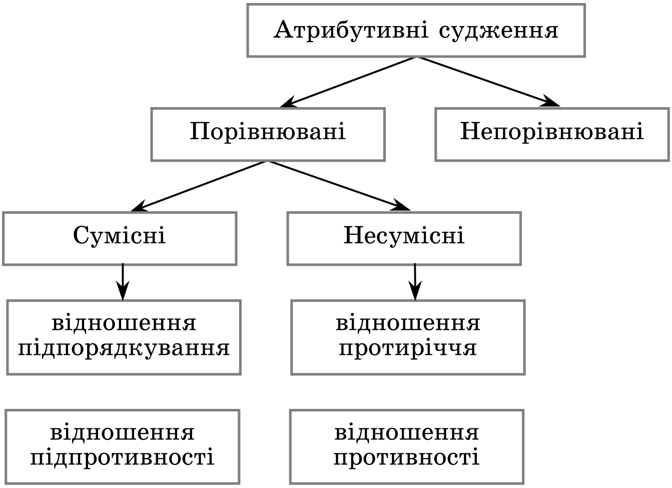
Відношення протиріччя передбачає, що з двох суперечливих суджень одне обов'язково буде істинним, а друге обов'язково буде хибним.

Наприклад: «Будь-який злочин є суспільно небезпечним вчинком» ***Asp — істинне.*** А утворене від нього судження *«Деякі злочини є суспільно небезпечними вчинками»* ***Osp*** буде ***хибним.***

Отже, так як логічні відношення між поняттями враховують лише їх екстенсіональні, обсягові характеристики, так і логічні відношення між атрибутивними судженнями враховують лише їх екстенсіонали, значення («істина», «хиба»). Тобто, ці відношення не враховують «що і про що говориться у судженнях».

Коли відомо, що ***Asp*** є істинним, то, знаючи дефініції логічних відношень між судженнями, ми однозначно можемо стверджувати, що ***Isp*** буде істинним, а ***Osp*** та ***Esp*** буде хибним. Або, коли дано, що ***Asp*** — хибне, то ***Osp*** буде істинним, а ***Isp*** та ***Esp*** буде будь-яким.

Розглянуті відношення між атрибутивними судженнями можна зобразити такою схемою:



Значення дефініцій логічних відношень між атрибутивними судженнями необхідне при побудові безпосередніх умовиводів. Йдеться про безпосередні умовиводи, що базуються на логічних відношеннях між атрибутивними судженнями, або як їх іноді ще називають ***«умовиводи за «логічним квадратом»***.

Знання логічних відношень між атрибутивними судженнями також дає змогу зрозуміти суть такої логічної операції, як ***«заперечення атрибутивного судження»***.

З а п е р е ч е н н я м судження називається така логічна операція, яка полягає у такому перетворенні логічного змісту судження, у результаті якого отримують судження, що знаходиться у відношенні контрадикторності до вихідного. *Наприклад:*

1. *«Всі мої приятелі мають вищу освіту»* і

2. *«Неправильно, що всі мої приятелі мають вищу освіту»*.

По суті судження *2,* коли його взяти без зовнішнього заперечення («*неправильно*»), еквівалентне судженню «*Деякі мої приятелі не мають вищої освіти*» ***Osp***.

При запереченні атрибутивного судження змінюються його кількість і якість. Так, заперечуючи загальне отримуємо часткове (і навпаки), а заперечуючи стверджувальне отримуємо заперечувальне (і навпаки).

5. Тлумачення атрибутивних суджень мовою логіки предикатів

У традиційній логіці структура атрибутивних суджень фіксується схемою ***«Всі S є P»*** або символом ***Asp*** тощо. Очевидно, що тут поряд з елементами формалізації є фрагменти природної мови, що спричиняє певні вади тлумачення структури атрибутивних суджень.

Сучасна логіка знаходить для цього більш ефективні засоби, а саме мову логіки предикатів.

Мова логіки предикатів (***як і будь-яка мова логіки***) ***включає в себе:***

1) ***алфавіт*** (*сукупність вихідних символів: а*) *нелогічних, б*) *логічних, в*) *технічних*) і

2) ***правила побудови з елементів алфавіту правильно побудованих формул*** (***ППФ***)[1].

І. Алфавіт

1. Предметні (***індивідні***) ***константи:*** $a, в, c, a_1, в_1, c_1, a_2, в_2, c_2$ ***... .*** Індивідні константи — це власні імена природної мови (*«Арістотель», «Дніпро», «Юпітер» тощо*). При перекладі виразів природної мови на мову логіки предикатів імена замінюються предметними константами так, щоб однакові імена відповідали однаковим символам із списку індивідних констант, а різні імена — різним.

2. Предметні (***індивідні***) ***змінні:*** $x, y, z, x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$ ***... .***

Якщо предметні константи зв'язуються у відповідних межах із конкретними власними іменами, то предметні змінні можуть замінювати будь-яке ім'я з предметної об-

[1] Вирази побудовані у межах логіки предикатів, називають «формулами» тому, що їх можна ототожнювати, розрізняти, порівнювати лише за зовнішніми ознаками, тобто за формою.

ласті того контексту, який аналізується. Тому предметні змінні використовуються для формалізації атрибутивних суджень з кванторними словами (*«Всі», «Деякі», «Кожен», «Іноді» тощо*).

3. Предметно-функціональні константи : f^n, q^n, h^n, f^n_1, q^n_1, h^n_1, f^n_2, q^n_2, h^n_2 ... .

Верхній індекс n вказує на місність константи, а нижній — на порядковий номер. В арифметиці до предметних функторів відносяться операції над числами: « √ », (+), *sin* тощо. У природній мові предметними функторами є слова, які з одними предметами зіставляють інші (*«столиця», «ріст», «відстані від ... до ...» тощо*).

4. Предикаторні константи: P^n, Q^n, R^n, S^n, P^n_1, Q^n_1, R^n_1, S^n_1, P^n_2, Q^n_2, R^n_2, S^n_2 ... .

Верхній індекс вказує на місткість константи, а нижній — на порядковий номер. Якщо із константи відомо, що предикаторна константа одномісна, то верхній індекс опускається. У природній мові предикатори різної місності представлені словами: *«електропровідний», «більше», «ровесник», «держава» тощо.*

5. Логічні символи:

а) логічні зв'язки: $\&$, $\vee$, $\supset$, $\leftrightarrow$, $\rceil$ ***(або (−));***

б) кванторні символи:

— ***квантор загальності*** — $\forall x$ (*«для будь-якого»*),

— ***квантор існування*** — $\exists x$ (*«існує»*).

6. Технічні символи:

— ***ліва і права дужки, кома.***

II. Правила побудови виразів у мові логіки предикатів

а) Дефініція терма

1. Довільна предметна константа ***є термом.***

2. Довільна предметна змінна ***є термом.***

3. Якщо Φ — n-містка предметно-функціональна константа, а $t_1, t_2, \ldots t_n$ — терми, то вираз $\Phi(t_1, t_2, \ldots t_n)$ ***є термом.***

4. Ніщо, крім зазначеного в пунктах ***1—3,*** не є термом у мові логіки предикатів.

Вирази у пунктах ***1*** та ***2*** відносяться до ***простих термів***, а вирази, зазначені у пункті ***3, — до складних.***

Візьмемо вираз f^1 **(q^2 (x, a))**. Відповідно до наведеної дефініції терма встановимо, чи є даний вираз термом, чи ні.

f^1 **(q^2 (x, a)) = $\Phi(t_1)$** згідно з пунктом ***3*** (тобто, одномісна предметно-функціональна константа);

q^2 **(x, a) = t_1** (тобто є термом);

q^2 **(x, a)** має вид **Φ (t_1, t_2)**.

Φ відповідає функціональній константі — q^2; t_1 є x — тобто термом згідно з пунктом ***1*** визначення терма, а t_2 є a, тобто термом згідно з пунктом ***3*** визначення терма. Виходить, що q^2 **(t_1, t_2)** є термом згідно з пунктом ***3***.

Тоді весь вираз: f^1 **(q^2 (x, a))** є термом.

Можна припустити, що даний терм є формалізацією такого фрагмента природної мови: q відповідає двомісному функтору **(+)**; f — одномісному функтору **(√)**; a відповідає простому імені ***«5»***. У такому випадку вираз f^1 **(q^2 (x,a))** буде формалізацією імені: **« √ x + 5»**.

Якщо візьмемо вираз P^1 **(q^2 (x, a))**, то він не є термом оскільки починається з предикаторної константи.

б) ***Дефініція формули:***

1. Якщо ***П*** — ***n***-містка предикаторна константа, а t_1, t_1 … t_n — терми, то вираз ***П*** **(t_1, t_2, … t_n)** — ***формула.***

2. Якщо ***A*** — формула, то $\rceil$***A є формулою.***

3. Якщо ***A*** і ***B*** — формули, то **(*A* & *B*)**, **(*A* ∨ *B*)**, **(*A* ⊃ *B*)**, **(*A* ↔ *B*)** — ***формули.***

4. Якщо ***A*** — формула, а ***x*** — предметна змінна, то ∀ ***xA*** і ∃ ***xA*** є ***формулами.***

5. Ніщо крім перерахованого в пунктах ***1—4 не є формулами.***

Формули, які відповідають пункту ***1*** дефініції, ***називають елементарними*** або ***атомарними,*** а в пунктах ***2—4*** — ***складними*** або ***молекулярними.***

Елементарною формулою, наприклад, буде вираз P^2 **(x, f^1 (a))** .

P^2 — двомісна константа, а після неї в дужках знаходиться два терми x і f^1 **(a)**.

А вираз Q^1 **(x, f^1 (a))** не є формулою, оскільки Q^1 — одномісна предикаторна константа, але після неї стоїть два терми x і f^1 **(a)**.

На мову логіки предикатів можна перекласти атрибутивні судження, в яких:

а) ***стверджується наявність властивості у окремого предмета;***

б) йдеться про існування якогось об'єкта, що задовольняє деяку умову;

в) стверджується, що деякій умові задовольняє будь-який об'єкт предметної області.

У випадку ***а),*** тобто коли формалізується одиничне атрибутивне судження, користуємося формулою $\boldsymbol{\Pi^1 (t)}$, де $\boldsymbol{\Pi^1}$ є одномісна предикаторна константа, що відповідає знаку властивості, а $\boldsymbol{t}$ — терм, що відповідає імені предмета. Наприклад, маємо атрибутивні судження: *«Тарас Шевченко — поет»*. Перекладом його на мову логіки предикатів буде вираз: ***«P (a)»; «Батько мого приятеля — лікар»*** — $\boldsymbol{Q (f (a))}$, де $\boldsymbol{f}$ — це одномісна предикаторна константа, що відповідає предметному функтору *«батько»*, ***а*** — терм *«мій приятель»*, а $\boldsymbol{Q}$ — одномісна предикаторна константа, що відповідає властивості *«бути лікарем»*;

У ситуації ***б)***, а саме, коли формалізуються атрибутивні судження про існування деяких предметів, то використовують формулу $\exists \boldsymbol{x}\ \boldsymbol{A(x)}$, де $\boldsymbol{x}$ — предметна змінна, що пробігає по області об'єктів, про які йдеться у висловлюванні, а $\boldsymbol{A(x)}$ — формула, яка фіксує, що $\boldsymbol{x}$ задовольняє умову $\boldsymbol{A}$. Наведемо *приклади* перекладу цього типу атрибутивних суджень мовою логіки предикатів:

1. *«Хтось винайшов радіо»* — $\exists \boldsymbol{x}\ \boldsymbol{P(x)}$.

2. *«Деякі поети є лауреатами»* — $\exists \boldsymbol{x}\ \boldsymbol{Q(x)}$.

3. *«Деякі мої приятелі не мають вищої освіти»* — $\exists \mathbf{x}\ \rceil\, \mathbf{F(x)}$.

Треба пам'ятати те, що якщо областю значення для предметної змінної береться множина предметів, які фіксуються предикатором у позиції логічного підмета, то формула, яка буде перекладом атрибутивного судження мовою логіки предикатів буде мати у своєму складі простий предикат виду $\boldsymbol{P(x)}$ чи $\boldsymbol{Q(x)}$ і т.д.

Це очевидно з наведених вище прикладів: $\exists \boldsymbol{x}\ \boldsymbol{P(x)}$, $\exists \boldsymbol{x}\ \boldsymbol{Q(x)}$, $\exists \boldsymbol{x}\ \rceil\, \boldsymbol{F(x)}$.

Якщо змінити область значення предметної змінної, а саме вважати її як множину будь-яких об'єктів, то вираз логіки предикатів, як переклад атрибутивного судження, включатиме в себе складний предикат[1]:

$$\boldsymbol{(S\ (x) \wedge P(x))}.$$

[1] Це ж стосується формалізації загальностверджувальних і загалшьнозаперечувальних суджень.

Наприклад, вираз *«Деякі річки є судноплавними»*, його перекладом мовою логіки предикатів буде вираз $\exists x\ M(x)$, якщо взяти за область значенняпредметної змінної множину річок. А якщо взяти за область значення — множину будь-яких об'єктів, то переклад цього судження матиме вигляд

$$\exists x\ (S(x)\ \&\ P(x))$$

— читається: *«Існує такий* ***x****, що має властивість* ***S*** *і властивість* ***P****».*

S — це символ загального імені *«річка»*. Фактично загальне ім'я *«річка»* ***S*** виділяє в універсумі значень для ***x***, ті, яким може бути притаманна властивість *«бути судноплавною»*.

Якщо наявна ситуація ***в*)**, тобто коли мовою логіки предикатів перекладаються загальні судження, то користуються формулою $\forall x\ A(x)$. Наприклад, **1.** *«Будь-яка планета є космічним об'єктом»* —

$$\forall x\ P(x), \text{ або } \forall x\ (S(x) \supset P(x)) \text{ —}$$

(у випадку, коли областю значення ***x*** буде не *«множина планет»,* а множина будь-яких об'єктів).

2. *«Жоден підозрюваний не має алібі»* —

$$\forall x\ \overline{K}(x) \text{ або } \forall x\ (S(x) \supset \overline{K}(x)).$$

Таким чином, основними виразами логіки предикатів, на які перекладаються атрибутивні судження, є такі:

1. *«Київ є столичне місто»* — a ***є*** $P = P(a)$.

2. *«Місяць не є планетою»* — a ***не є*** $P = \overline{P}(a)$.

3. *«Будь-який квадрат — геометрична фігура»* —

$$\text{«Будь-який } S \text{ є } P\text{»} = A = Asp = \forall x\ P(x) = \forall x\ (S(x) \supset P(x)).$$

4. *«Жоден природний супутник не є планетою»* —

$$\text{«жоден S не є P»} = E = Esp = \forall x\ \overline{P}(x) = \forall x\ (S(x) \supset \overline{P}(x)).$$

5. *«Деякі злочини є посадовими»* —

$$I = Isp = \exists x P(x) = \exists x\ (S(x)\ \&\ P(x)).$$

6. *«Деякі злочини не є посадовими»* —

$$O = Osp = \exists x\ \overline{P}(x) = \exists x(S(x)\ \&\ \overline{P}(x)).$$

Застосування знаку рівності **(=)** показує еволюцію формалізації атрибутивних суджень, втілених у природній мові. Кожний вираз після знаку рівності фіксує відповідний етап формалізації **(*наприклад, випадок 3*:** від першого, напівформального: ***«Будь-який S є P»,*** аж до останнього: $\forall x\ (S(x) \supset P(x))$, що вже є виразом логіки предикатів.

Формули, які є перекладом атрибутивних суджень мовою логіки предикатів, широко використовуються при побудові аналітичних таблиць для перевірки правильності модусів простого категоричного силогізму.

6. Судження з відношеннями

Як уже зазначалося, у ***судженнях з відношеннями предикатом виступає така ознака, як «відношення».***

Наприклад, «Арістотель — сучасник Платона». Із цього слідує, що в цих судженнях предикат може відноситися до пари, трійки, четвірки і т.д. предметів.

Судження з відношеннями ***за якістю*** поділяються на:

— ***стверджувальні*** і

— ***заперечувальні.***

С т в е р д ж у в а л ь н и м називається таке судження з відношеннями, в якому стверджується, що предмети знаходяться у певному відношенні.

Наприклад, «Деякі міста більші столичних міст».

З а п е р е ч у в а л ь н и м називається таке судження з відношеннями, в якому говориться про те, що предмети не знаходяться у певному відношенні.

Наприклад: «Лейбніц не є ровесником Гегеля».

За кількістю судження з відношеннями поділяються на:

— ***одинично-одиничні;***

— ***одинично-загальні;***

— ***одинично-часткові;***

— ***загально-загальні;***

— ***загально-одиничні;***

— ***загально-часткові;***

— ***частково-часткові;***

— ***частково-загальні;***

— ***частково-одиничні.***

Як і атрибутивні судження, судження з відношеннями також можна перекласти мовою логіки предикатів.

Для того, щоб перекласти судження з відношеннями на мову логіки предикатів, необхідно виконати такі дії:

1. Замінити одиничні імена предметними константами, а загальні — предикатними константами.

2. Замінити кванторні слова відповідними кванторами.

3. Виписати квантори згідно того порядку, як вони входять в дане судження.

4. Після послідовно виписаних кванторів записати предикат у якому індивідна змінна зв'язується першим по порядку квантором.

Якщо це квантор загальності, то після даного предикату ставиться знак імплікації (⊃)***, а якщо квантор існування, то — знак кон'юнкції*** (&)***; після знака імплікації чи кон'юнкції ставиться ліва дужка, після якої виписується предикат, у якому предметна змінна зв'язується другим по черзі квантором.***

5. Виписати формулу, що представляє останній предикат.

6. Після формули, яка представляє останній предикат ставиться необхідна кількість правих дужок. Якщо судження заперечувальне, то перед останнім предикатом ставиться заперечення.

Здійснимо переклад суджень з відношеннями мовою логіки предикатів:

«одинично-одиничне»

«Київ більший за Одесу» —

$$«a\ R\ в»;$$

«одинично-загальне»

«Мій брат знає всіх викладачів» —

$$\forall x\ (Q(x) \supset R(a,x));$$

«одинично-часткове»

«Моя сестра вивчає деякі іноземні мови» —

$$\exists x\ (P(x)\ \&\ R(x,a));$$

«загально-одиничне»

«Всі студенти філософського факультету вивчають логіку» —

$$\forall x\ (S(x) \supset R(x,a));$$

«загально-загальне»

«Будь-який нормативний курс з філософських дисциплін більший будь-якого нормативного курсу з природничих дисциплін» —

$$\forall x\ \forall y\ (N\ (x) \supset (Q(y) \supset R(x,y));$$

«загально-часткове»

«Всі мої приятелі знають декого з моєї родини» —

$$\forall x\ \exists y\ (P(x) \supset (Q(y)\ \&\ R(x,y));$$

«частково-одиничне»

«Деякі викладачі знають мого брата» —

$$\exists x\ (Q(x)\ \&\ R(x,a));$$

«частково-часткове»

«Деякі мої приятелі вивчають деякі слов'янські мови» —

$$\exists x\ \exists y\ (P(x)\ \&\ (Q(y)\ \&\ R(x,y));$$

«частково-загальне»

«Деякі словники більші будь-якого підручника» —

$$\exists x\ \forall y\ (P(x)\ \&\ (Q(y) \supset R(x,y)).$$

Знаючи суть процедури перекладу суджень з відношеннями на мову логіки предикатів можна здійснити цей переклад для будь-якого судження.

Наприклад, маємо судження *«Всі студенти економічного факультету вивчають логіку, а деякі студенти економічного факультету вивчають географію»* —

$$\forall x\ (P(x) \supset R(x,a))\ \&\ \exists x\ (P(x)\ \&\ R(x,в))$$

7. Судження існування

Наступний вид простих суджень — це «судження існування». У логіці їх ще називають ***«екзистенціальні судження»***.

До суджень існування відносять судження, у яких предикат представляє ознаку «бути існуючим».

Наприклад:

1. *«Проблема польоту на Марс існує».*

2. *«Кентаври не існують».*

3. *«Трикутники існують».*

4. *«Існують математичні задачі, які не мають вирішення».*

5. *«Є злочини, які не розкриті».*

Структура цих суджень записується так:

1. ***«Деякий S є / не є існуючим».***

2. ***«Будь-який S є / не є існуючим».***

3. ***«Даний S є / не є існуючим».***

Зауважимо, що при аналізі суджень існування випливає низка проблем ***формального та змістовного характеру.***

Змістовний аспект проблеми пов'язаний із вирішенням питанням про те, яким об'єктам можна приписувати ознаку ***«існує»***. Можна виділити ***дві основні концепції існування:***

а) сильна;

б) послаблена.

Сильна концепція існування приписує ознаку існування лише індивідам, властивостям та відношенням об'єктивного світу.

Наприклад: «Чорні лебеді існують»; «Електропровідність існує» тощо.

Послаблена концепція дозволяє приписувати ознаку «існування» лише предметам теорії. В цьому випадку «існувати» означає «бути конструктом теорії». Тут можна говорити про існування результатів інтелектуальної діяльності.

Формальний аспект проблеми існування полягає у пошуку синтаксичних засобів фіксації ознаки існування. Одна із таких спроб полягає в намаганні виразити ознаку ***«існування»*** через предикатну змінну. Якщо взяти одиничне судження, то в цьому випадку лише предикатна змінна дійсно несе інформацію про існування. Наприклад: *«Англійська конституційна монархія існує»* — ознака ***«існування»*** (*Англійська конституційна монархія*) = ***P*(*a*)**.

Але у часткових судженнях ознаку існування несуть і квантор, і предикат. Наприклад: *«Деякі нерозкриті злочини існують»* — ∃***x*** (*Нерозкриті* ***x***) & *існують* ***x***). При перекладі частковостверджувальних суджень мовою логіки предикатів особливих труднощів не виникає.

Недоречності виникають при перекладі частковозаперечувальних суджень на мову логіки предикатів.

Візьмемо судження *«Деякі форми ведення землеробства не існують»* і перекладемо його мовою логіки предикатів:

$\exists \boldsymbol{x}$ **(*F*(*x*)** & $\overline{\boldsymbol{Q}}$**(*x*))** — *«Існує **x** такий, що є формою землеробства і **x** не існує»*. В логіці ця ситуація отримала назву ***«парадокс існування»***.

Щоб уникнути подібної ситуації, ***Б.Рассел*** запропонував фіксувати інформацію про ознаку ***«існування»*** лише в кванторі існування $\exists \boldsymbol{x}$. Ця позиція знаходить своє обгрунтування в тому, що ознака ***«існування»*** не є властивістю об'єкта (тобто це не акцидентальна характеристика об'єкту), а суттєва (субстанціональна) його характеристика. У цьому випадку парадокси частковозаперечувальних суджень елімінуються. Виходить, що ***«існувати»*** — це означає ***«бути значенням підкванторної змінної, яка виражає об'єкт думки»***.

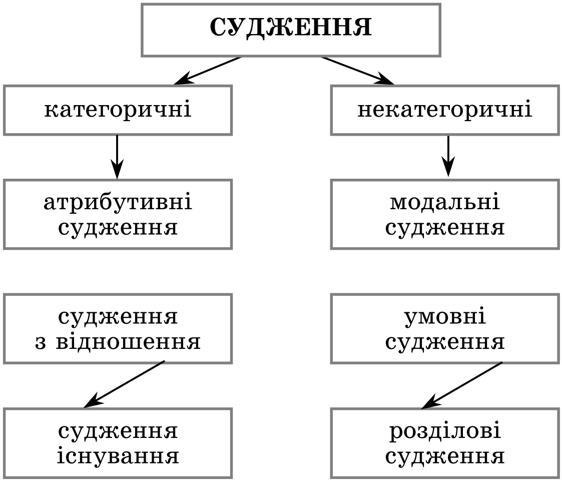
Як правило, у традиційній логіці спеціально не виділяли суджень існування, оскільки судження існування з певними застереженнями можна витлумачити як атрибутивні.

Підсумовуючи зазначене про прості судження (атрибутивні, судження з відношеннями, судження існування), легко помітити, що в них приписування ознаки предмету відбувається з певною однозначністю.

Наприклад, «Місяць є природний супутник», «Наполеон сучасник Гегеля», «Електромагнітне поле Землі існує» тощо. Але часто зустрічаються судження, де зв'язок предмета і ознаки обумовлюється певними обставинами. Тому ***атрибутивні судження, судження з відношеннями, судження існування називають категоричними***.

Категоричним називається судження, в якому предикат стверджується або заперечується відносно суб'єкта без формулювання спеціальних умов.

Категоричні судження протиставляються умовним, розділовим і модальним. Можна зобразити поділ суджень за характером зв'язку між предметом думки та ознакою предмета думки такою схемою:



8. Модальні судження

Крім розглянутих простих суджень у традиційній логіці розглядають ще й такий вид простих суджень, як ***«модальні судження».***

М о д а л ь н и м судженням називається таке просте судження, в якому відношення між предметом думки і ознакою предмета думки обумовлюється своєрідним характером зв'язку. *Наприклад: «Необхідно, що вода кипить при 100°».*

Цей характер зв'язку фіксується спеціальними оцінками, які називаються ***модальностями.***

Модальність (від лат. ***modus*** — міра, спосіб) — ***це оцінка висловлювання, яка проголошена з тієї чи іншої точки зору.*** Модальні оцінки виражаються за допомогою понять: ***«необхідно», «можливо», «імовірно», «доведено», «обов'язково» тощо.***

У традиційній логіці модальні судження ***за природою модальності поділяють на*** :

а) судження за об'єктивною модальністю і

б) судження за логічною модальністю.

За об'єктивною модальністю судження поділяють на:

1) судження можливості;

2) судження дійсності;

3) судження необхідності.

Судженням м о ж л и в о с т і називається таке модальне судження, в якому відображена реально існуюча, але не реалізована можливість.

Наприклад, «Можлива образа словом», «Можливий позитивний результат іспиту» тощо.

Судженням д і й с н о с т і називається вид модального судження, в якому дещо відображається як уже існуюче в дійсності.

Наприклад, «Робота першого блоку ЧАЕС зупинена», «Конституція України прийнята» тощо.

Судженням н е о б х і д н о с т і називається модальне судження, яке відображає неминучість існування якогось предмета, явища або зв'язку між ними.

Наприклад: «Після зими необхідно приходить весна», «Необхідно, що всі закони затверджує Верховна Рада», «Необхідно, що всі свідки повинні говорити правду» тощо.

За логічною модальністю судження поділяють на:

1) проблематичні (імовірні) та

2) достовірні.

П р о б л е м а т и ч н и м називається такий вид модального судження, в якому яка-небудь ознака стверджується або заперечується відносно предмета думки лише передбачувано.

Наприклад: «Тут, імовірно, була симуляція крадіжки». Треба розрізняти проблематичні судження і судження можливості.

Наприклад, візьмемо два судження:

1. *«Можлива побудова мосту через річку»* і

2. *«Імовірно в цьому місці побудувати міст через Дніпро».*

Перше судження є ***судженням можливості***, оскільки у ньому виражене знання про те, що в дійсності можливо розв'язати таке завдання, як побудову мосту через річку. Друге судження ***проблематичне***, оскільки у ньому зафіксоване знання про те, що дана дія може конкретно реалізуватися. ***Судження можливості висловлюється у результаті глибшого вивчення предмета. Виражене в ньому знання є завершеним.***

А проблематичне судження виражає знання передбачливе, незавершене. Передбачуване твердження про належність певної ознаки у предмета означає, що цей предмет може й не мати цієї ознаки.

Наприклад: «Імовірно, підозрюваний знав потерпілого до вчинення злочину» тощо.

Д о с т о в і р н и м називається судження, в якому фіксується знання, що містить цілковиту визначеність про належність ознаки предмету.

Наприклад: «Достовірно, що діагоналі квадрата при перетині утворюють прямі кути».

У сучасній логіці існує цілий розділ, який вивчає типологію модальностей, їх природу і основні функції в пізнавальній діяльності і практиці міркувань.

9. Запитання

Надзвичайну роль у пізнанні та практиці міркування відіграють думки, що втілені в запитальних реченнях. Розв'язання різноманітних проблем передбачає постановку тих або інших запитань. Від правильного, своєчасного, послідовного формулювання запитань значною мірою залежить успішне розв'язання проблеми. Часто ми висуваємо запитання не тільки в процесі розв'язання нових завдань, які стоять перед наукою чи практикою, а й у процесі засвоєння, оволодіння уже наявними знаннями. Таким чином,

З а п и т а н н я — це думка, в якій зафіксована вимога або прохання поновити наявну інформацію з метою усунення або зменшення пізнавальної невизначеності.

Запитання, на відміну від судження, оцінюються не як «істинні» чи «хибні», а як ***«логічно коректні»*** чи ***«логічно некоректні»***.

Логічно к о р е к т н и м називається запитання, на яке можна дати істинну або хибну відповідь.

Наприклад, «Хто може бути обраний народним депутатом?», «Чому дорівнює відстань від Землі до Сонця?».

Логічно н е к о р е к т н и м називається запитання, на яке не можна дати ні хибної, ні істинної відповіді.

Логічно некоректні запитання бувають ***двох видів:***

а) тривіально некоректні запитання і

б) нетривіально некоректні запитання.

Тривіально некоректним є запитання на яке не можна дати ніякої відповіді.

Тривіально некоректні запитання втілюються в реченнях, що містять неясні (невизначені) слова або словосполучення. *Наприклад, «Які інтенції властиві квадрату в точці перетину його діагоналей?».*

Нетривіально некоректним називається запитання, на яке не можна дати істинної відповіді. Такі запитання називають ще провокаційними. *Наприклад, «Коли перестануть вирощувати ананаси на Місяці?».*

Існує типологія відповідей на запитання. ***Серед істинних відповідей на запитання розрізняють***:

а) правильні відповіді і

б) неправильні відповіді.

П р а в и л ь н о ю відповіддю називається відповідь, яка повністю або частково усуває пізнавальну невизначеність.

У свою чергу, відповідь, яка повністю усуває пізнавальну невизначеність називають с и л ь н о ю, а яка не повністю — с л а б к о ю. *Наприклад,* маємо *запитання «Хто відкрив Америку?».*

Сильною відповіддю на це запитання буде: *«Христофор Колумб»,* а ***слабкою*** — *«Іспанець», «Якийсь іноземець»* тощо.

Н е п р а в и л ь н и м и називаються відповіді, які не знижують пізнавальної невизначеності.

У таких відповідях частково або повністю повторюється інформація передумови запитання.

Наприклад, на запитання *«Кому із видатних письменників XIX ст. належить авторство романа «Граф Монте-Крісто»?»* маємо ***неправильну відповідь:*** *«Видатний письменник XIX ст.».*

10. Види складних суджень. Виклад складних суджень мовою логіки висловлювань

С к л а д н и м називається судження, яке складається з двох або більше простих суджень, з'єднаних за допомогою логічних сполучників[1]. *Наприклад: «Моя сес-*

[1] Види логічних сполучників та умови їх істинності розглядаються у § 3 розділу ІУ.

тра навчається у консерваторії, а брат — в університеті»; «Матеріали конференції будуть опубліковані в науковому журналі або в спеціальному збірнику» тощо.

За типом логічних сполучників складні судження поділяються на:

а) з'єднувальні;

б) роз'єднувальні;

в) умовні;

г) еквівалентні.

У традиційній логіці терміни, за допомогою яких утворюються складні судження, подавалися в описовому вигляді. Тут зосереджувалася увага на характеристиці аналогів логічних термінів, якими є слова природної мови: *«і», «або», «якщо, то», «неправильно, що» тощо.* Це в значній мірі ускладнювало дослідження логічної природи складних суджень. Якщо ж застосувати до аналізу складних суджень засоби сучасної логіки (а саме мову логіки висловлювань), то це допоможе ефективніше дослідити основні властивості та характеристики складних суджень.

Отже, розглянемо мову класичної логіки висловлювань.

Мова класичної логіки висловлювань — це спеціальна штучна мова, яка призначена для аналізу логічної структури сладних суджень.

Вона складається із:

— ***алфавіту*** та

— ***правил утворення (дефініції формули).***

Алфавіт

1. Пропозиційні змінні для позначення простих суджень:

$p, q, r, p_1, q_1, r_1, \ldots$.

2. Пропозиційні зв'язки (константи)[1] — $\rceil$, &, $\vee$, $\supset$, $\leftrightarrow$.

3. Технічні символи, якими є ліва та права дужка і кома: **(,)**

[1] Кількість зв'язок може бути різною, але вона повинна бути функціонально повною. Тобто за допомогою функцій даної системи можна виразити будь-яку функцію істинності.

Правила утворення

Дефініція формули:

1. Будь-яка пропозиційна змінна є ***формулою***: $p, q, r, p_1, q_1, r_1, \ldots$

2. Якщо **A**[1] **—** формула, то $\rceil$**A** також ***формула.***

3. Якщо A та B формули, то вирази $A \mathbin{\&} B, A \vee B, A \supset B, A \leftrightarrow B$ також ***формули.***

4. Ніщо, крім зазначеного в пунктах ***1, 2, 3,*** не є формулою мови класичної логіки висловлювань.

Формули, які зазначені в пункті **1** даної дефініції ***називаються елементарними***, а у пунктах **2** і **3** — ***складними.***

Наведена дефініція формули дозволяє ефективно визначати, чи є деякий вираз формулою мови логіки висловлювань **(скорочено МЛВ)**, чи ні.

Візьмемо для *прикладу* такий вираз:

$$p \supset (q \wedge (r \vee q)).$$

Цей вираз має вигляд схеми: $A \supset B$, де A є p, а B — $(q \wedge (r \vee q))$.

Отже, даний вираз є формулою ***МЛВ*** відповідно до **3** пункту наведеної дефініції.

Якщо ж маємо вираз « $p \supset (q \wedge$ », то відповідно до дефініції він не буде формулою ***МЛВ***, оскільки не відповідає жодному пунктові дефініції.

Використовуючи ***МЛВ,*** можна перекласти будь-яке складне судження для з'ясування його логічної форми.

Наприклад, маємо судження: *«Якщо студент успішно навчається і виявляє здібність до наукової роботи, то він має підставу на рекомендацію до аспірантури».*

Щоб перекласти це складне судження на мову логіки висловлювань, необхідно виконати такі дії:

I. ***Спочатку потрібно виділити усі прості судження, які входять до складу складного судження.*** У нашому прикладі їх три:

1.«Студент успішно навчається».

2. «Студент виявляє хист до наукової роботи».

---

[1] Перші великі літери латинського алфавіту належать до метамови. Вони не є формулами об'єкт-мови, а схемами цих формул. Кожна із цих схем може позначати безліч формул об'єкт-мови. Наприклад, p, $p \vee q$, $p \wedge q$ тощо.

3. *«Студент має підставу на рекомендацію до аспірантури».*

Кожному простому судженню ставиться у відповідність конкретна пропозиційна змінна: ***1 — p, 2 — q, 3 — r.***

II. ***Далі потрібно виділити логічні терміни, що входять до складного судження.***

Дане судження має два логічних терміни: & та ⊃.

Визначивши імплікацію головним логічним сполучником отримаємо імплікативне висловлювання, яке буде перекладом умовного судження мовою логіки висловлювань:

$$(p \mathbin{\&} q) \supset r.$$

У природній мові прості судження можуть об'єднуватися за допомогою таких логічних сполучників, яким не відповідають за смислом ніякі пропозиційні зв'язки із побудованої нами мови логіки висловлювань.

Наприклад, висловлювання *«Ні вдень, ні вночі вони не переставали думати про свої плани»* утримує сполучник *«ні ... ні»*, у якого немає смислового аналогу в системі зв'язок $\{ \rceil, \&, \vee, \supset, \leftrightarrow \}$.

Щоб виявити логічну формулу в таких випадках, треба переформулювати складне судження таким чином, щоб воно не змінило первісного смислу і утримувало ті сполучники, яким відповідають за смислом які-небудь зв'язки із алфавіту ***МЛВ***. У нашому випадку матимемо: *«Невірно, що вдень вони переставали думати про свої плани і невірно, що вночі вони переставали думати про свої плани»*. При перекладі на мову логіки висловлювань дане судження отримає вигляд такого висловлювання:

$$\overline{p} \mathbin{\&} \overline{q}.$$

11. Логічні відношення між складними судженнями

Складні судження виступають у тих самих відношеннях, в яких виступають категоричні судження.

Складні судження поділяють на:

— ***порівнювані*** та

— ***непорівнювані.***

***П о р і в н ю в а н и м и* називають складні судження, які складаються з одих і тих же простих суджень, але різняться логічними термінами.**

Наприклад, $\mathbf{A}$ & $\mathbf{B}$ і $\overline{\mathbf{A}} \supset \mathbf{B}$ тощо.

***Н е п о р і в н ю в а н и м и* називаються складні судження, в яких хоча б одне просте судження не співпадає.**

Наприклад, $\boldsymbol{A}$ & $\boldsymbol{B}$ і $\boldsymbol{A}$ & $\boldsymbol{C}$; $\mathbf{A} \vee \overline{\mathbf{B}}$ і $\boldsymbol{A} \supset \boldsymbol{C}$, тощо.

Серед ***порівнюваних*** суджень виділяють:

— ***сумісні*** та

— ***несумісні.***

***С у м і с н и м и* називаються складні судження, які при однакових наборах значень простих можуть бути істинними.**

***Н е с у м і с н и м и* називаються складні судження, які при однакових наборах значень простих не можуть бути разом істинними.**

***Між сумісними складними судженнями існують відношення*:**

а) еквівалентності;

б) часткової сумісності;

в) логічного слідування.

***Для несумісних складних суджень характерні відношення*:**

а) протиріччя;

б) протилежності.

Для наочного уявлення названих відношень використаємо семантичну таблицю істинності складного висловлювання, яке складається із двох простих висловлювань:

p	q	$\overline{p}$	$\overline{q}$	$p \supset q$	$p \,\&\, q$	$p \vee q$	$\overline{p \,\&\, q}$	$\overline{p} \,\&\, \overline{q}$	$\overline{p} \vee q$	$\overline{p} \vee \overline{q}$	$q \supset p$	$p \,\&\, \overline{q}$	$p \leftrightarrow q$	$p \supset \overline{q}$
і	і	х	х	і	і	і	х	х	і	х	і	х	і	і
і	х	х	і	х	х	і	і	х	х	і	і	і	х	і
х	і	і	х	і	х	і	і	х	і	і	х	х	х	і
х	х	і	і	і	х	х	і	і	і	і	і	х	і	х
				1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

У відношенні еквівалентності знаходяться такі прості висловлювання, які при однакових наборах значень їх змінних набувають одні й ті самі значення.

З наведеної таблиці видно, що еквівалентними є висловлювання:

$$((p \supset q)\ і\ (\overline{p} \vee q)),\ ((p \vee q)\ і\ (\overline{p} \supset q)),\ ((p\ \&\ q)\ і\ (\overline{p} \vee \overline{q})).$$

У відношенні часткової сумісності знаходяться висловлювання, які при однакових наборах значень простих висловлювань не можуть мати одночасно значення хибності.

Наведена таблиця показує, що такими висловлюваннями є:

$$((p \vee q)\ і\ (\overline{p\ \&\ q})),\ ((p \vee q)\ і\ (\overline{p} \vee q)),\ ((p \vee q)\ і\ (\overline{p} \vee \overline{q})),\ ((p \vee \overline{q})\ і\ (p \supset q)).$$

Два висловлювання A і B знаходяться у відношенні логічного слідування, якщо не може бути так, щоб A було істинне, а B — хибне.

З наведеної таблиці видно, що відношення слідування буде між висловлюваннями: $((p \leftrightarrow q) \models (p \supset q))$[1], $((p \leftrightarrow q) \models (q \supset p))$,

$$((p\ \&\ \overline{q}) \models (\overline{p} \supset q)),\ ((q \supset p) \models (\overline{p} \vee \overline{q})),\ ((\overline{p} \vee \overline{q}) \models (\overline{p}\ \&\ \overline{q}))$$

Як уже зазначалося, відношення логічної несумісності має два види: протиріччя і протилежності.

Висловлювання A і B знаходяться у відношенні протиріччя, якщо вони при однакових наборах змінних не можуть бути одночасно істинними і одночасно хибними. Наведена вище таблиця ілюструє такі випадки суперечливих висловлювань:

$$((p\ \&\ q)\ і\ (\overline{p\ \&\ q})),\ ((p\ \&\ q)\ і\ (\overline{p} \vee \overline{q})),\ ((\overline{p}\ \&\ \overline{q})\ і\ (\overline{p} \supset q)).$$

У відношенні протилежності знаходяться висловлювання A і B, якщо вони при однакових наборах значень їх змінних не можуть бути одночасно істинними, хибними (у крайньому випадку одне з них обов'язково буде хибним).

До таких висловлювань відносяться, як свідчить наведена вище таблиця, пари висловлювань $((p\ \&\ q)\ і\ (\overline{p}\ \&\ \overline{q}))$, $((\overline{p}\ \&\ \overline{q})\ і\ (p\ \&\ \overline{q}))$. Огляд усіх можливих логічних

[1] $\models$ — це знак логічного слідування.

відношень між складними судженнями можна зобразити такою схемою:

Знання дефініцій логічних відношень між складними судженнями, вміння з ними поводитися допомагає нам у практиці міркувань послідовно аргументувати свою точку зору, спростовувати чужі тези і аргументи, знаходити протиріччя і невизначеності у процесі спілкування і обміну інформацією.

Контрольні питання

1. Які існують найуживаніші дефініції судження?
2. Логічна структура судження.
3. Співвідношення понять: *«судження»*, *«речення»* та *«висловлювання»*.
4. Типологія атрибутивних суджень за кількістю і якістю.
5. Логічні та дескриптивні терміни в атрибутивному судженні.
6. Екстенсіональна площина аналізу атрибутивних суджень.
7. Розподіленість термінів атрибутивного судження.
8. Види логічних відношень між атрибутивними судженнями.
9. Використання мови логіки предикатів для тлумачення атрибутивних суджень.
10. Типологія суджень з відношеннями.
11. Тлумачення суджень з відношеннями на мові логіки предикатів.
12. Змістовний та формальний аспекти трактування суджень існування.

13. Поділ суджень на категоричні та некатегоричні.
14. Поняття «модальність».
15. Види суджень за об'єктивною та логічною модальністю.
16. Роль питання в пізнанні.
17. Типологія питань.
18. Види відповідей.
19. Співвідношення граматичного та логічного сполучників.
20. Використання мови логіки висловлювань для тлумачення складних суджень.
21. Характеристика логічних відношень між складними судженнями.

Контрольні вправи

1. Які з наведених речень виражають судження і які ні:

— *«Коли розпочинається літня екзаменаційна сесія?».*
— *«Нехай наша футбольна команда стане призером!».*
— *«Всі мої приятелі мають вищу освіту».*
— *«Існують небесні тіла, які не світять власним світлом».*
— *«Франція стала республікою раніше ніж Італія».*

2. Які з наведених простих суджень є атрибутивними і які судженнями з відношеннями:

— *«Будь-яка книжка є джерелом інформації».*
— *«Діаметр цього кола більший ніж 2 метри».*
— *«Будь-яке розповідне речення втілює в собі судження».*
— *«Кожний студент нашої групи знає всіх викладачів».*
— *«Всі мої знайомі вивчають англійську мову».*
— *«Платон є видатним давньогрецьким філософом».*
— *«Деякі планети не мають атмосфери».*
— *«Жоден мій знайомий не є учасником наукової конференції».*

3. Запишіть наведені в завданні 2 судження мовою логіки предикатів.

4. Наведені терміни суджень із вказівкою їх розподіленості. Утворіть судження і зобразіть відношення між термінами за допомогою колових схем:

а) *«Ріки, що протікають по території України»* (*суб'єкт, нерозподілений*)*; «Ріки, що відносяться до басейну Чорного моря»*(*предикат, розподілений*)*;*

б) *«підручник»* (*суб'єкт, розподілений*)*; «книжка»* (*предикат, розподілений*)*;*

в) *«риби»* (*суб'єкт, нерозподілений*)*; «хижаки»* (*предикат, нерозподілений*)*;*

г) *«метал»* (*суб'єкт, розподілений*)*; «діелектрик»* (*предикат, розподілений*).

5. Наведіть приклади категоричних суджень, які б знаходилися:

а) *у відношенні протиріччя;*

б) *у відношенні підпорядкування;*

в) *у відношенні противності;*

г) *у відношенні підпротивності.*

6. Здійсніть заперечення таких суджень:

а) *«Деякі студенти не виконали самостійно контрольну роботу »,*

б) *«Жоден мій знайомий не є невстигаючим студентом»,*

в) «Невірно, що всі мої приятелі запрошені на свято»,

г) «Невірно, що деякі мої знайомі мають вищу освіту».

7. Визначіть вид і логічну форму, запишіть на мові логіки висловлювань такі судження:

а) *«Спека, і йде дощ».*

б) *«Йде дощ, але не спекотно».*

в) *«Він хворий, або має поганий настрій».*

г) *«Якщо рослину не поливати, то вона засохне».*

д) *«Це дія або похвальна, або сороміцька, або байдужа».*

е) *«Якщо студент здібний або старанний, то він успішно складає сесію».*

ж) *«Мої знайомі не мають вищої освіти і не прагнуть її отримати».*

8. Наведіть пари складних суджень, які б знаходилися у відношеннях:

а) *еквівалентності;*

б) *часткової сумісності;*

в) логічного *слідування;*

г) *протиріччя;*

д) *протилежності.*

РОЗДІЛ X

УМОВИВІД

1. Загальна характеристика умовиводу

Серед мисленнєвих операцій важливе місце займає умовивід. На відміну від поняття та судження умовивід є логічною операцією, завдяки якій із однієї або декількох думок виводять нову думку. Можна навести й таке визначення умовиводу:

***Умовиводом** називається така форма мислення або логічна операція, за допомогою якої із одного або декількох відомих суджень виводиться нове судження.*

Умовивід складається із:

— ***засновків*** та

— ***висновку***.

***Засновками** називаються раніше відомі судження, на підставі яких робиться висновок.*

***Висновком** називається нове судження, отримане в результаті співставлення засновків.*

Наприклад:

1. Будь-який мешканець нашого будинку знає англійську мову.
2. Мій приятель мешкає в нашому будинку.

---

3. Отже, мій приятель знає англійську мову.

1 і **2** судження будуть ***засновками***, а **3** судження — ***висновком***.

Процес отримання нової думки (надалі — виведення), базується на певних правилах та законах логіки. Тому виведення в умовиводі носить закономірний характер. Це зумовлює таку особливість умовиводу, на відміну від поняття і судження, що він характеризується не адекватністю, істинністю або хибністю, а правильністю чи неправильністю.

Всю множину умовиводів за характером зв'язку між засновками та висновком поділяють на:

— ***дедуктивні*** та

— ***індуктивні.***

Назва ***«дедуктивний умовивід»*** походить від латинського слова ***deductio*** (*виведення*).

У дедуктивних умовиводах між засновками та висновком існує відношення логічного слідування.

А назва ***«індуктивні умовиводи»*** походить від латинського слова ***inductio*** (*наведення*).

В індуктивних умовиводах між засновками та висновком існує відношення наведення.

У традиційній логіці умовиводи за напрямком виведення наслідку поділяються на дедуктивні, індуктивні.

У дедуктивному умовиводі ми переходимо від загального до часткового, або одиничного; в індуктивному — від одиничного до загального.

За ступенем обгрунтованості висновку умовиводи поділяють на:

— ***демонстративні*** та

— ***правдоподібні (імовірні).***

У демонстративних умовиводах висновок необхідно істинний, а в правдоподібних — імовірно істинний.

За кількістю засновків умовиводи поділяються на:

— ***безпосередні*** та

— ***опосередковані.***

Безпосереднім умовиводом називається такий умовивід, в якому висновок отримують із одного засновку.

Опосередкованим умовиводом називається такий умовивід, в якому висновок отримують із двох і більше засновків.

В залежності від того, чи випливає висновок із засновків з урахуванням логічної структури засновків, чи ні, умовиводи поділяються на ***силогізми та умовиводи логіки суджень або висновки логіки висловлювань.***

2. Висновки логіки висловлювань

Зупинимося на аналізі дедуктивних умовиводів, а саме на характеристиці умовиводів логіки висловлювань.

Для цього класу умовиводів характерним є те, що в них при отриманні висновку не враховується внутрішня структура простих висловлювань, із яких складаються засновки і висновок. Тут отримання висновку базується тільки на смислі логічних сполучників.

Наприклад,

Якщо гіпотеза має підтвердження, то вона стає теорією.

Отже, якщо гіпотеза не стає теорією, то вона не має підтвердження.

Логічна структура такого міркування має такий вигляд:

$$\frac{\boldsymbol{A \supset B}}{\boldsymbol{\overline{B} \supset \overline{A}}}\,.$$

Враховуючи наведене вище визначення умовиводу логіки висловлювань, його схему можна записати так:

«із $\boldsymbol{A_1, A_2, A_3 \ldots A_n}$ слідує (виводиться) $\boldsymbol{B}$».

Цей вираз розуміється так: ***«Якщо істинні висловлювання із структурою заданою формулами*** $\boldsymbol{A_1, A_2, A_3, \ldots A_n}$ ***(засновки), то істинним є і висловлювання із структурою, заданою формулою B (висновок)».***

З даного визначення видно, що ми відволікаємося від змісту висловлювань і зосереджуємо увагу на структурі засновків і висновку.

Надалі схему висновку із засновками $\boldsymbol{A_1, A_2, A_3, \ldots A_n}$ і наслідком $\boldsymbol{B}$ будемо записувати так:

$$\frac{\boldsymbol{A_1, A_2, A_3\ \ldots A_n}}{\boldsymbol{B}}$$

або $\boldsymbol{A_1, A_2, A_3\,.\ \ldots A_n} \models \boldsymbol{B}$

Вважається, що ця схема припустима, а висновок є правильнм тоді і тільки тоді, коли кон'юнкція засновків, що сполучена з висновком знаком імплікації є тотожноістинною формулою (тавтологією) логіки висловлювань: $\boldsymbol{A_1, A_2, A_3, \ldots A_n \supset B}$.

Треба зауважити, що у правильному висновку між кон'юнкцією засновків і висновком існує відношення логічного слідування. У тому випадку, коли знайдеться хоча б один набір значень змінних, що входять до $\boldsymbol{A_1, A_2, A_3 \ldots A_n}$, при якій імплікація $(A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \wedge \ldots \wedge A_n) \supset B$ буде хибною, то висновок буде неправильним.

Необхідно мати на увазі:

1. ***Правильність міркування сама по собі не гарантує істинність висновку. Істинність всіх засновків правильного висновку є лише достатньою умовою істинності висновку, але якщо хоча б один із засновків є хибним, то висновок може бути будь-яким:***

I *Якщо метали є рідиною, а мідь — метал, то*

Отже мідь — рідина.

II *Якщо метали є рідиною, а ртуть — метал, то*

Отже, ртуть — рідина.

2. ***Істинність висновку не означає правильність умовиводу, оскільки істинність висновку не є ні достатньою, ні необхідною умовою правильності умовиводу.***

а) Типологія правил висновку

Умовивід аналізується на двох рівнях: ***синтаксичному і семантичному.***

З точки зору ***синтаксису*** умовивід являє собою правило висновку. ***Правилом висновку є норма, що дозволяє із суджень однієї логічної структури як засновків отримувати судження певної логічної структури як висновок.***

Кожне правило репрезентує нескінченну множину умовиводів різноманітних за змістом, але єдиної синтаксичної структури.

Наприклад:

Якщо теорія істинна, то вона не має логічних суперечностей.
Дана теорія — істинна.

Отже, дана теорія не має логічних суперечностей.

Задамо синтаксис цього міркування:

— логічна структура першого засновку має такий вигляд $A \supset \overline{\overline{B}}$;

— другого засновку — A,
— висновку — $\overline{\overline{B}}$.
Разом отримуємо:

$$\frac{\overline{A} \supset \overline{B}, A}{\overline{B}}.$$

Ця логічна структура є правилом висновку, яке регламентує найрізноманітніші міркування лише в рамках схеми, заданої цим правилом.

З точки зору семантики дедуктивний умовивід являє собою відношення логічного слідування. Якщо у нашому прикладі засновки $\overline{A} \supset \overline{B}$ і A приєднати через імплікацію до $\overline{B}$, то отримаємо тотожно-істинну формулу (або тотожно-істинне висловлювання): $((\overline{A} \supset \overline{B}) \wedge A) \supset \overline{B}$.

Це означає, що між засновками $\overline{A} \supset \overline{B}$ і A та висновком $\overline{B}$ існує відношення логічного слідування.

Враховуючи характеристику правила висновку, наведеного вище, можна сказати, що систематичний огляд правил висновку логіки висловлювань сприятиме розгляду всіх можливих міркувань у цій логіці. Тому розглядаючи те чи інше правило висновку логіки висловлювань, мають на увазі, що тут йдеться про конкретні міркування, які репрезентуються цим правилом.

Правила висновку логіки висловлювань поділяються на:
— ***основні*** та
— ***похідні.***

У свою чергу, ***основні та похідні правила поділяються на:***
— ***прямі*** та
— ***непрямі.***

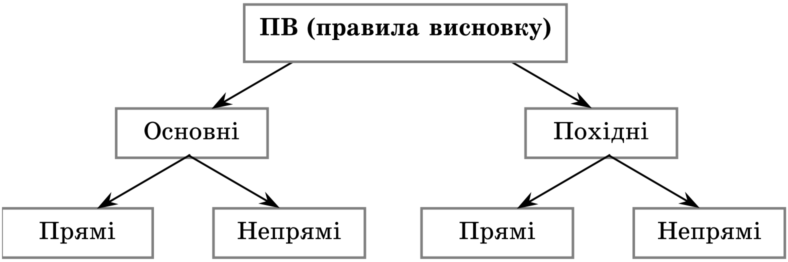
О с н о в н и м и називаються правила, які змістовно очевидні і дозволяють відрізнити правильно побудовані міркування від неправильно побудованих міркувань.

П о х і д н и м и називаються правила, які виводяться із основних і сприяють скороченню процесу висновку.

П р я м и м и називаються правила, які вказують на безпосереднє виведення висновку із засновків.

Н е п р я м и м и називаються правила, які дають можливість стверджувати правомірність деяких висновків на основі визнання правомірності інших висновків.

Систему правил висновку логіки висловлювань можна записати за допомогою такої схеми:



Розгляд правил висновку логіки висловлювань розпочнемо ***з основних прямих правил.***

Правило введення кон'юнкції (ВК):

$$\frac{\boldsymbol{A, B}}{\boldsymbol{A \wedge B}}.$$

Прикладом змістовного міркування, що відповідає цьому правилу, буде:

Франція — європейська держава.
Іспанія — європейська держава.

Отже, Франція та Іспанія — європейські держави.

Правило усунення кон'юнкції (УК):

$$\frac{\boldsymbol{A \wedge B}}{\boldsymbol{A}}, \quad \frac{\boldsymbol{A \wedge B}}{\boldsymbol{B}}.$$

Приклад міркування, що відповідає правилу усунення кон'юнкції:

I *Теорія та гіпотеза — форми наукового пізнання.*

Отже, теорія — форма наукового пізнання.

II *Теорія та гіпотеза — форми наукового пізнання.*

Отже, гіпотеза — форма наукового пізнання.

Правило введення диз'юнкції (ВД):

$$\frac{A}{A \vee B}, \quad \frac{B}{A \vee B}.$$

Приклад міркування, що відповідає правилу введення диз'юнкції:

$$\frac{\textit{Дана форма мислення є поняттям.}}{\textit{Дана форма мислення є поняття або судження.}}$$

Правила усунення диз'юнкції (УД):

$$\frac{A \vee B,\ \overline{A}}{B}.$$

Приклад міркування за правилом усунення диз'юнкції:

Він знає мого брата або мою сестру.
Він не знає мою сестру.

Отже, він знає мого брата.

Треба враховувати різницю смислів сполучника ***«або»:***
1) сполучно-розділове «або»;
2) суворо розділове «або».
Нехтування цією різницею при вживанні диз'юнкції призводить до логічної помилки. *Наприклад,*

Ця книжка належить моєму братові або моїй сестрі.
Ця книжка належить моєму братові.

Отже, ця книжка не належить моїй сестрі.

З'ясуємо логічну структуру цього міркування:

$$\frac{A \vee B,\ A}{\overline{B}}.$$

Якщо приєднати висновок до засновків через імплікацію, то у результаті не отримаємо тотожно-істинної формули, а отже, висновок не відповідає визначенню правильного дедуктивного умовиводу.

$$a)\ [(A \vee B) \wedge A] \supset \overline{B}.$$

У тих випадках, коли неможливо вирішити, в якому смислі вживається сполучник ***«або»,*** треба посилатися на смисл сполучника ***«або»*** у сполучно-розділовому розумінні.

Розглянемо другий *приклад.*

Правила висновку логіки висловлювань бувають основні та похідні.
Це правило — основне.

Отже, це правило не похідне.

Логічна структура цього міркування має такий вигляд:

$$\frac{A \vee B,\ A}{\overline{B}}.$$

Отже, отримуємо

$$б)\ [(A \vee B) \wedge A] \supset \overline{B}$$

вираз, який на перший погляд еквівалентний виразу ***а*)**. Але це лише на перший погляд. Насправді тут присутній ще один засновок, який вказує на те, що не існує правила, яке одночасно було б і основним, і похідним $(A \wedge B)$. З цим засновком вираз ***б*)** стане тотожно-істинним:

$$в)\ [[(A \vee B) \wedge A] \wedge (A \wedge B)] \supset \overline{B}.$$

Виходить, наявність засновку $A \wedge B$ свідчить про те, що ми маємо сильну диз'юнкцію. Отже, вираз ***в*)** набуде вигляду:

$$((A \veebar B) \wedge A) \supset \overline{B}.$$

Правило усунення імплікації (*УІ*):

$$\frac{\begin{array}{c} A \supset B \\ A \end{array}}{B}.$$

Це правило ще називають відділенням висновку B від засновку $A \supset B$ за допомогою засновку A, а іноді називають правилом ***«ствердження за антецедентом»***.

Приклад міркування за правилом усунення імплікації:

Якщо поїзд запізнюється, то ми не встигаємо на автобус.
Поїзд запізнюється.

Отже, ми не встигаємо на автобус.

Правило УІ має такі різновиди:

$$\frac{\begin{array}{c} A \supset B \\ A \end{array}}{B} \quad \frac{\begin{array}{c} \overline{A} \supset B \\ \overline{A} \end{array}}{B} \quad \frac{\begin{array}{c} A \supset \overline{B} \\ A \end{array}}{\overline{B}} \quad \frac{\begin{array}{c} \overline{A} \supset \overline{B} \\ \overline{A} \end{array}}{\overline{B}}.$$

Правило введення еквіваленції (ВЕ):

$$\frac{\begin{array}{c} A \supset B \\ B \supset A \end{array}}{A \leftrightarrow B}.$$

Приклад міркування за правилом введення еквіваленції:

Якщо на планеті є життя, тоді там є атмосфера.
Якщо на планеті є атмосфера, тоді там є життя.

Отже, на планеті є життя тоді і тільки тоді, коли там є атмосфера.

Правило усунення еквіваленції (УЕ):

$$\frac{A \leftrightarrow B}{A \supset B} \quad \frac{A \leftrightarrow B}{B \supset A}.$$

Правило введення подвійного заперечення (ВПЗ):

$$\frac{A}{\overline{\overline{A}}}.$$

Приклад міркування за правилом введення подвійного заперечення:

Ця книжка є підручником з логіки.

Отже, невірно, що ця книжка не підручник з логіки.

Правило усунення подвійного заперечення (УПЗ):

$$\frac{\overline{\overline{A}}}{A}.$$

Приклад міркування за правилом усунення подвійного заперечення:

$$\frac{\textit{Невірно, що курсова робота не виконана самостійно.}}{\textit{Отже, курсова робота виконана самостійно.}}$$

Як уже зазначалося, окрім наведених основних правил висновку логіки висловлювань існують і ***основні непрямі.***

До них відносяться:

а) правило введення імплікації,

б) правило введення заперечення.

Правило введення імплікації (ВІ):

$$\begin{array}{ll} \dfrac{\boldsymbol{\Pi}}{\boldsymbol{A}} & \text{— (\textbf{\textit{множина засновків}}) } \\ & \text{— \textbf{\textit{припущення}}} \\ \vdots & \\ \dfrac{\boldsymbol{B}}{\boldsymbol{A \supset B}}. & \end{array}$$

Це правило використовується у тих вивідних процесах, коли для отримання висновку ми звертаємося до припущень, які полегшують процедуру виведення. Його можна сформулювати так: ***«Якщо із засновків П і з припущення А випливає В, то можна стверджувати вивідність із цих засновків А ⊃ В».***

Правило введення заперечення (ВЗ):

$$\begin{array}{ll} \dfrac{\boldsymbol{\Pi}}{\boldsymbol{A}} & \text{— (\textbf{\textit{множина засновків}}) } \\ & \text{— \textbf{\textit{припущення}}} \\ \vdots & \\ \dfrac{\dfrac{\boldsymbol{B}}{\overline{\boldsymbol{B}}}}{\overline{\boldsymbol{A}}}. & \end{array}$$

Визначення цього правила таке: ***«Якщо із засновків і довільного припущення A випливають два суперечливих висловлювання B і $\overline{B}$, то таке припущення повинно бути визнаним як хибне, істинним визнається $\overline{A}$».***

Зупинимося на розгляді ***похідних правил висновку*** логіки висловлювань.

Правило транзитивності імплікації (ТІ) :

$$\frac{\begin{array}{c}\boldsymbol{A \supset B}\\ \boldsymbol{B \supset C}\end{array}}{\boldsymbol{A \supset C}}.$$

Приклад міркування за правилом транзитивності імплікації:

Якщо мовний відрізок розповідне речення, то він є висловлюванням.
Якщо мовний відрізок є висловлюванням, то він є осмисленим.

Отже, якщо мовний відрізок розповідне речення, то він є осмисленим.

б) Обґрунтування правил висновку

Для подальшого розгляду правил необхідно прийняти деякі домовленості. Аналізуючи правила, природно виникає питання, чи можна перевірити надійність цих правил, їх коректність. На рівні семантики це можна зробити шляхом побудови таблиць істинності, шляхом еквівалентиних перетворень, методом аналітичних таблиць (про що буде сказано пізніше). На рівні синтаксису така перевірка здійснюється через побудову доведення останнього рядка правила.

Розглянемо на прикладі правила транзитивності імплікації його семантичне та синтаксичне обґрунтування (на предмет коректності).

Спочатку зупинимося на ***семантичному обґрунтуванні.***

Побудова таблиць істинності, еквівалентні перетворення **(*КНФ*)** досить громіздкі, тому можна запропонувати такий спосіб.

Відомо, що у правильному висновку між засновками і висновком існує відношення логічного слідування, тобто при істинності засновків висновок повинен бути обов'язково істинним. Виходячи з цього, в правилі ***ТІ*** між **(*A* ⊃ *B*)*,*** **(*B* ⊃ *C*)** ***і*** **(*A* ⊃ *C*)** існує відношення логічного слідування, отже, засновки **(*A* ⊃ *B*)** ***і*** **(*B* ⊃ *C*)** не можуть бути істинними, а висновок **(*A* ⊃ *C*)** — хибним.

Припустимо, що це не так (***тобто, що A ⊃ B і B ⊃ C — істинні, а A ⊃ C — хибне***).

Тоді ***A* ⊃ *C*** — хибне при умові ***A* — *і*, *C* — *х*.** А у засновках: якщо ***A* — *і*,** а ***C* — *х*,** то при будь-якому значенні ***B*** кон'юнкція засновків не буде істинною, а це суперечить нашому припущенню.

Отже, засновки у нашому правилі не можуть бути істинними, а висновок — хибним, а це свідчить, що це правило логічно коректне і гарантує правильність відповідних його структурі змістовних міркувань.

Схематично така перевірка коректності правила висновку зображується таким чином:

$$\begin{array}{l}
i \quad i/x \\
A \supset B \\
i/x \qquad\quad \} \; i \\
\underline{B \supset C - x} \\
A \supset C - x \\
i \qquad\quad x
\end{array}\;.$$

З цієї схеми очевидно, що при будь-яких значеннях ***B*** наше припущення про логічну некоректність правила відпадає. У такий, можна сказати, досить економний спосіб можна перевірити кожне з правил.

Синтаксичне обґрунтування правила висновку передбачає побудову виведення останнього рядка із засновків.

Для цього розгорнемо правило, вставивши між засновками і висновком проміжні ланки, які в правилі опущені.

Доведення здійснюється таким способом:

1. Виписуємо засновки, що входять до правила.

2. Зліва виписуємо кроки доведення.

***3. Справа напроти кожного кроку виписуємо його підставу* (*це може бути домовленість про введення чергового припущення, або певне правило*).** Праву сторону такого запису називають аналізом доведення.

Здійснимо доведення правила ***ТІ:***

$$\frac{\begin{array}{c} A \supset B \\ B \supset C \end{array}}{A \supset C} \qquad \begin{array}{lll} 1. & A \supset B & \\ 2. & B \supset C & \text{засновки} \\ \hline 3. & A & \text{припущення} \\ 4. & B & \text{— (УІ по 1, 3)} \\ 5. & C & \text{— (УІ по 2, 4)} \\ \hline 6. & A \supset C & \text{— (ВІ по 3, 5)} \end{array} .$$

Правило заперечення диз'юнкції (*ЗД*):

$$\frac{\overline{A \vee B}}{\overline{A} \wedge \overline{B}} .$$

Відповідно до цього правила із заперечення диз'юнкції слідує кон'юнкція заперечень висловлювань, що її складають.

Наведемо *приклад* міркування, побудованого за правилом ***ЗД:***

Неправильно, що він студент або школяр.
___
Отже, він і не студент, і не школяр.

Побудуємо ***доведення*** цього правила:

$$\frac{\overline{A \vee B}}{\overline{A} \wedge \overline{B}} \qquad \begin{array}{lll} 1. & A \supset B & \\ \hline 2. & A & \text{— (припущення 1)} \\ 3. & A \vee B & \text{— (ВД по 2)} \\ 4. & \overline{A} & \text{— (ВЗ по 1, 3)} \\ 5. & B & \text{— (припущення 2)} \\ 6. & A \vee B & \text{— (ВД по 5)} \\ 7. & \overline{B} & \text{— (ВЗ по 2, 6)} \\ \hline 8. & \overline{A} \wedge \overline{B} & \text{— (ВК по 4,7).} \end{array}$$

Правило заперечення кон'юнкції (*ЗК*):

$$\frac{\overline{A \wedge B}}{\overline{A} \vee \overline{B}} .$$

Читається правило так: ***«Із заперечення кон'юнкції слідує диз'юнкція заперечень висловлювань, що складають кон'юнкцію».***

Наприклад:

Неправильно, що дане космічне тіло має ознаки планети і природного супутника.

Отже, дане космічне тіло або не має ознак планети, або не має ознак природного супутника.

Доведення правила:

$$\frac{\overline{A \wedge B}}{\overline{A} \vee \overline{B}}$$

1. $\overline{A \wedge B}$

---

2. $\overline{\overline{A} \vee \overline{B}}$ — (**припущення**)
3. $\overline{\overline{A}} \wedge \overline{\overline{B}}$ — (**ЗД по 2**)
4. $\overline{\overline{A}}$ — (**УК по 3**)
5. A — (**УПЗ по 4**)
6. $\overline{\overline{B}}$ — (**УК по 3**)
7. B — (**УПЗ по 6**)
8. $A \wedge B$ — (**ВК по 5, 7**)

---

9. $\overline{A} \vee \overline{B}$ — (**ВЗ по 1, 8**).

Правило «modus tollens», або «від заперечення консеквенту до заперечення антецеденту» (МТ):

$$\frac{\begin{matrix} A \supset B \\ \overline{B} \end{matrix}}{\overline{A}}.$$

Наведемо *приклад* конкретного міркування, що регламентується цим правилом:

Якщо він знає англійську мову, то він перекладе цей текст.
Він не переклав цей текст.

Отже, він не знає англійської мови.

Доведення правила МТ:

$$\frac{\begin{array}{r} A \supset B \\ \overline{B} \end{array}}{\overline{A}} \qquad \begin{array}{ll} 1.\ A \supset B & \\ 2.\ \overline{B} & \\ \hline 3.\ A & \text{— припущення} \\ 4.\ B & \text{— (МП по 1, 3)} \\ \hline 5.\ \overline{A} & \text{— (ВЗ по 2, 4).} \end{array}$$

Правило простої контрапозиції (ПК):

$$\text{I.}\quad \frac{A \supset B}{\overline{B} \supset \overline{A}} \qquad\qquad \text{II.}\quad \frac{\overline{B} \supset \overline{A}}{A \supset B}.$$

Наведемо *приклад* міркування, побудованого за правилом простої контрапозиції:

Якщо лист написаний мною, то його зміст повинен бути мені відомим.

Отже, якщо мені невідомий зміст листа, то він написаний не мною.

Побудуємо ***доведення*** цього ***правила:***

$$\frac{A \supset B}{\overline{B} \supset \overline{A}} \qquad \begin{array}{ll} 1.\ A \supset B & \\ \hline 2.\ \overline{B} & \text{— (припущення)} \\ 3.\ \overline{A} & \text{— (МТ по 1, 3)} \\ \hline 4.\ \overline{B} \supset \overline{A} & \text{— (ВІ по 2, 3)} \end{array}$$

(*аналогічно доводиться і друге правило ПК*).

Правило складної контрапозиції (ПСК):

$$\text{I.}\quad \frac{(A \wedge B) \supset C}{(A \wedge \overline{C}) \supset \overline{B}} \qquad\qquad \text{II.}\quad \frac{(A \wedge \overline{C}) \supset \overline{B}}{(A \wedge B) \supset C}.$$

Наведемо *приклад* конкретного міркування за правилом складної контрапозиції:

Якщо іспит з історії є першимі і він профілюючий, то він є вирішальним для абітурієнта-медаліста.

Отже, якщо іспит з історії є першим, але він не вирішальний для абітурієнта-медаліста, то він не профілюючий.

Побудуємо ***доведення*** цього ***правила***:

$$\frac{(A \wedge B) \supset C}{(A \wedge \overline{C}) \supset \overline{B}}$$

1.	$(A \wedge B) \supset C$	
2.	$A \wedge \overline{C}$	— (***припущення***)
3.	A	— (***УК по 2***)
4.	$\overline{C}$	— (***УК по 2***)
5.	$A \wedge B$	— (***МТ по 1, 4***)
6.	$\overline{A} \vee \overline{B}$	— (***ЗК по 5***)
7.	$\overline{B}$	— (***УД по 3, 6***)
8.	$(A \wedge \overline{C}) \supset \overline{B}$	— (***ВІ по 2,7***)

(***аналогічно будується доведення правила II***).

Правило імпортації (*ПІмп*):

$$\frac{A \supset (B \supset C)}{(A \wedge B) \supset C}.$$

Наведемо *приклад* міркування за цим правилом:

Якщо він добре знає англійську мову, то у випадку, якщо приїде англійська делегація, він зможе виконати роль перекладача.

Отже, якщо він добре знає англійську мову і приїде англійська делегація, то він зможе виконати роль перекладача.

Побудуємо ***доведення*** цього ***правила:***

$$\frac{A \supset (B \supset C)}{(A \wedge B) \supset C}$$

1.	$A \supset (B \supset C)$	
2.	$A \wedge B$	— (***припущення***)
3.	A	— (***УК по 2***)
4.	B	— (***УК по 2***)
5.	$B \supset C$	— (***МП по 1, 3***)
6.	C	— (***МП по 4, 5***)
7.	$(A \wedge B) \supset C$	— (***ВІ по 2, 6***).

Правило експортації (*ПЕкс*):

$$\frac{(A \wedge B) \supset C}{A \supset (B \supset C)}.$$

Наведемо *приклад* міркування за цим правилом:

Якщо дана стаття грунтовна за змістом і відповідає тематиці збірника, то її слід публікувати.

Отже, якщо дана стаття грунтовна за змістом, то у випадку, що вона відповідає тематиці збірника, її слід публікувати.

Побудуємо ***доведення*** цього ***правила***:

$$\frac{(A \wedge B) \supset C}{A \supset (B \supset C)}$$

1. $(A \wedge B) \supset C$	
2. A	— (***припущення 1***)
3. B	— (***припущення 2***)
4. $A \wedge B$	— (***ВК по 2,3***)
5. C	— (***МП по 1, 4***)
6. $(B \supset C)$	— (***ВІ по 3, 5***)
7. $A \supset (B \supset C)$	— (***ВІ по 2, 6***).

Отже, ми розглянули правила висновку логіки висловлювань, які в сукупності є множиною можливих конкретних міркувань. Також з'ясували, що перевірка коректності правила висновку можлива шляхом побудови таблиці істинності для формули, що представляє висновок та доведення останнього рядка правила висновку.

в) Метод аналітичних таблиць

Окрім цих способів перевірки правила висновку (ми наголошуємо саме на перевірці правила висновку, а не на висновку, саме тому, що будь-який висновок це є по суті втілення конкретного правила висновку, тому перевірка коректності висновку зводиться до перевірки коректності правила висновку) існує ще перевірка шляхом застосування методу аналітичних таблиць.

Основу методу аналітичних таблиць складає звичайне визначення таблиць істинності для пропозиційних зв'язок, а сама аналітична таблиця будується навпаки. Виходимо із того, що значення істинності усього виразу нам відомо, залишається знайти лише значення істинності для елементарних висловлювань, з яких складається цей вираз.

Іншими словами, ***таблиці називаються аналітичними тому, що розкладаючи вихідне висловлювання на елементарні висловлювання (на атоми), ми намагаємося знайти набір значень атомів, при яких би вихідне висловлювання було хибне.***

Визначимо аналітичні правила для логічних зв'язок

У цих правилах зустрічаються символи ***T*** і ***F***. Символ ***T*** позначає логічне значення ***«істина»***, а симлол ***F*** — логічне значення ***«хиба»***.

I. ***1. T A ∧ B — «істинна» ≡ TA*** і ***TB***

T∧ $$\frac{\boldsymbol{T\ A \wedge B}}{\begin{array}{c}\boldsymbol{TA}\\ \boldsymbol{TB}\end{array}}.$$

Кон'юнкція ***A ∧ B істинна*** тоді і тільки тоді, коли ***A*** і ***B — істинні.***

Позначається це правило ***T∧*** і читатається: ***«T — кон'юнкція».***

2. F A ∧ B — «хибна» ≡ FA або ***FB***

F∧ $$\frac{\boldsymbol{F\ A \wedge B}}{\boldsymbol{FA \mid FB}}.$$

Риска (|) у цьому правилі позначає наявність різних альтернатив і означає розгалуження аналітичної таблиці (тобто, при наявності розгалуження вихідний вираз не має прямого наслідку (однієї альтернативи). Отже, кон'юнкція ***A ∧ B — хибна*** тоді і тільки тоді, коли або ***A — хибне,*** або ***B — хибне.***

II. ***1. T A ∨ B — «істинна» ≡ TA*** або ***TB***

T∨ $$\frac{\boldsymbol{T\ A \vee B}}{\boldsymbol{TA\ /\ TB}}$$

Диз'юнкція ***A ∨ B істинна*** тоді і тільки тоді, коли або ***A — істинне,*** або ***B — істинне.***

2. F A ∨ B — «хибна» ≡ FA і ***FB***

F∨ $$\frac{\boldsymbol{F\ A \vee B}}{\begin{array}{c}\boldsymbol{FA}\\ \boldsymbol{FB}\end{array}}.$$

Диз'юнкція ***A ∨ B хибна*** тоді і тільки тоді, коли ***A — хибне*** і ***B — хибне.***

III. $\quad$ ***1. T A ⊃ B — «істинна» ≡ FA*** або ***TB***

T⊃
$$\frac{T\ A \supset B}{FA \mid TB}.$$

Імплікація ***A ⊃ B істинна*** тоді і тільки тоді, коли або ***A*** — ***хибне***, або ***B*** — ***істинне***.

2. F A ⊃ B — «хибна» ≡ TA і FB

F⊃
$$\frac{F\ A \supset B}{\begin{array}{c} TA \\ FB \end{array}}$$

Імплікація ***A ⊃ B хибна*** тоді і тільки тоді, коли ***A*** — ***істинне***, а ***B*** — ***хибне***.

IV. $\quad$ ***1. T A ↔ B — «істинна» ≡ TA*** і ***TB або FA*** і ***FB***

T↔
$$\frac{T\ A \leftrightarrow B}{\begin{array}{c|c} TA & FA \\ TA & FB \end{array}}.$$

Еквіваленція ***A ↔ B істинна*** тоді і тільки тоді, коли ***A*** — ***істинне***, і ***B*** — ***істинне***, або ***A*** — ***хибне*** і ***B*** — ***хибне***.

2. F A ↔ B — «хибна» ≡ TA і ***FB або FA*** і ***TB***

F↔
$$\frac{F\ A \leftrightarrow B}{\begin{array}{c|c} TA & FA \\ FB & TB \end{array}}.$$

Еквіваленція ***A ↔ B хибна*** тоді і тільки тоді, коли ***A*** — ***істинне***, а ***B*** — ***хибне***, або ***A*** — ***хибне***, а ***B*** — ***істинне***.

V. $\quad$ ***1.*** $\dfrac{T\overline{A}}{FA}.$

Заперечення $\overline{A}$ ***істинне*** тоді, коли ***хибне A***.

2. $\dfrac{F\overline{A}}{TA}.$

Заперечення $\overline{A}$ ***хибне*** тоді, коли ***істинне A***.

Перелік аналітичних правил для пропозиційних зв'язок показує, що правила ***T∧, F∨, F⊃, T~, F~*** — ***це правила без розгалуження***, а правила ***F∧, T∨, T⊃, T↔, F↔*** — це ***правила з розгалуженням***.

Розглянемо застосування методу аналітичних таблиць для перевірки коректності висновку у логіці висловлювань.

Наприклад, візьмемо складне висловлювання:

$$(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \supset (\mathbf{A} \vee \overline{\mathbf{B}}).$$

Припустимо, що воно хибне. Якщо в результаті встановлення значення атомів, з яких складається вихідне висловлювання, прийдемо до протиріччя, то цим самим буде аргументована коректність висновку, відображеного в цьому висловлюванні.

Для побудови аналітичної таблиці необхідно виконати такі умови:

1. Нумерацію рядків таблиці розпочинають з 0 (нуля).

2. Наслідки відділяються від припущення горизонтальною рискою.

3. Наслідки, які отримані із одного з попередніх висловлювань, позначають римськими цифрами.

4. Аналітична таблиця складається з гілок. Таблиця вважається замкненою, якщо в ній зустрічається пара висловлювань TA і FA, а вся аналітична таблиця вважається замкненою, коли кожна її гілка замкнена.

Враховуючи ці умови, побудуємо для висловлювання $(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \supset (\mathbf{A} \vee \overline{\mathbf{B}})$ аналітичну таблицю:

0.	$F\ (A \wedge B) \supset (A \vee \overline{B})$
I.	***1.*** $T\ A \wedge B$ ***2.*** $F\ A \vee \overline{B}\ F\supset$
II.	***3.*** TA ***4.*** $TB\ T\wedge$
III.	***5.*** FA ***6.*** $F\ \overline{B}\ F\vee$
IV.	***7.*** $\underline{TB}\ F\sim$ +

Спочатку ми застосували правило ***F***⊃ до рядка **0** і отримали перший крок — **I** із рядками ***1, 2***; потім до рядка ***1*** застосували правило ***T***∧ і отримали **II** крок із рядками ***3, 4***, а до рядка ***2*** застосували правило ***F***∨ і отримали **III** крок із рядками ***5,6*** і, нарешті, до рядка ***6*** **III** кроку застосували правило ***F***~ і отримали **IУ** крок з рядком ***7.*** Якщо розглянути отриману гілку, то можна побачити, що вона замкнена, оскільки містить у собі ***TA*** і ***FA*** (***3*** і ***5 рядки***), замкненою є і вся аналітична таблиця, тому що в ній також всі гілки замкнені (в даному випадку одна).

Замкненість аналітичної таблиці позначається знаком **(+)** (у нашому прикладі після ***7*** рядка). Отже, наведене висловлювання тотожно істинне, припущення про його хибність відпадає і можна стверджувати, що дане складне висловлювання коректне відносно правил висновку логіки висловлювань.

Розглянемо складніший випадок.

Чи слідує з висловлювання $\bar{A} \supset \bar{B}$ висловлювання $B \supset A$:

$$(\bar{A} \supset \bar{B}) \mid = (B \supset A)\ ?$$

Щоб це перевірити, побудуємо аналітичну таблицю для цього висловлювання:

0.	$F\ (\bar{A} \supset \bar{B}) \supset (B \supset A)$
I.	***1.*** $T\ \bar{A} \supset \bar{B}$ ***2.*** $F\ B \supset A\ F\supset$
II.	***3.*** TB ***4.*** $FA\ F\supset$
III.	***5.*** $F\ \bar{A}$ ***5'.*** $T\ \bar{B}\ T\supset$
IV.	***6.*** $\underline{TA}$ ***6'.*** $\underline{FB}$ + +

Отримана аналітична таблиця даного висловлювання має дві гілки:

1. $\{F\ (\bar{A} \supset \bar{B}) \supset (B \supset A),\ T\ (\bar{A} \supset \bar{B}),\ F\ (B \supset A),$ $TB,\ FA,\ F\ \bar{A},\ TA\}$ або {***0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 рядки***};
2. $\{F\ (\bar{A} \supset \bar{B}) \supset (B \supset A),\ T\ (\bar{A} \supset \bar{B}),\ F\ (B \supset A),$ $TB,\ FA,\ T\ \bar{B},\ FB\}$ або {***0, 1, 2, 3, 4, 5′, 6′ рядки***}.

Перша гілка замкнена, оскільки в ній наявні рядки ***4*** і ***6*** з висловлюваннями ***FA*** і ***TA***. Замкненою є і друга гілка з рядками ***3*** і ***6′*** з висловлюваннями ***TB*** і ***FB***. Отже, вся аналітична таблиця є замкненою.

Якщо висновок логіки висловлювань неправильний, то при побудові аналітичної таблиці отримаємо хоча б одну незамкнену гілку.

Побудуємо аналітичну таблицю висловлювання:

$$(A \vee B) \supset (A \wedge B)$$

0.	$F\ (A \vee B) \supset (A \wedge B)$
I.	*1.* $T\ A \vee B$ *2.* $F\ A \wedge B\ F\supset$
II.	*3.* $TA\ \neg$ *3'.* $TB\ \neg\ T\vee$
III.	*4.* $\underline{FA}$ *4'.* $\underline{FB}$ *4''.* $\underline{FA}$ *4'''.* $\underline{FB}$ + + + +

Аналітична таблиця цього висловлювання має ***4*** гілки, дві з яких ***замкнені 1, 4,*** а дві ***ні — 2, 3***:

1. $\{F\ (A \vee B) \supset (A \wedge B),\ T\ A \vee B,\ F\ A \wedge B,\ TA,\ FA\}$
2. $\{F\ (A \vee B) \supset (A \wedge B),\ T\ A \vee B,\ F\ A \wedge B,\ TA,\ FB\}$
3. $\{F\ (A \vee B) \supset (A \wedge B),\ T\ A \vee B,\ F\ A \wedge B,\ TB,\ FA\}$
4. $\{F\ (A \vee B) \supset (A \wedge B),\ T\ A \vee B,\ F\ A \wedge B,\ TB,\ FB\}$.

Отже, дане висловлювання не є тавтологією, а це означає, що воно має неправильний висновок.

г) Умовиводи логіки висловлювань у традиційній логіці

Окрім розглянутих правил висновку логіки висловлювань у традиційній логіці досліджується низка умовиводів логіки суджень на аналізі яких ми зупинимося.

Традиційна логіка розглядає умовиводи логіки висловлювань, засновками яких є комбінації категоричного судження з умовним чи розділовим судженням, комбінації тільки умовних суджень і комбінації з умовних і розділових суджень. Зокрема, це такі :

1) умовно-категоричні умовиводи;
2) чисто умовні умовиводи;
3) розділово-категоричні умовиводи;
4) умовно-розділові умовиводи.

Охарактеризуємо кожний із цих видів умовиводів.

Умовно-категоричним називається умовивід, у якому один засновок — умовне судження, а другий засновок і висновок — категоричні судження.

Існує два різновиди умовно-категоричного умовиводу:
— ***modus ponens*** і
— ***modus tollens.***

Розглянемо «modus ponens»

У перекладі з латинської мови ***«modus ponens»*** означає ***«від ствердження підстави до ствердження наслідку»***.
Наприклад:

Якщо гіпотеза підтверджується на практиці, то вона стає теорією.
Дана гіпотеза підтверджується практикою.
Отже, вона перетворюється в теорію.

Мовою логіки висловлювань структуру цього міркування можна записати у вигляді правила висновку:

$$[(\mathbf{p} \supset \mathbf{q}) \wedge \mathbf{p}] \models \mathbf{q}.$$

Дане правило широко використовується у сучасній логіці. Справа в тому, що умовивід ***«від ствердження підстави до ствердження наслідку»*** є зручним засобом пошуку доведення для довільної думки. Виявляється, що для того, щоб довести висловлювання ***q***, необхідно знайти висловлювання ***p***, яке б не тільки було істинним, а й складена із ***p*** та ***q*** імплікація ***p*** $\supset$ ***q*** також була істинною. Тільки тоді ***p*** виступить достатньою підставою для ***q*** і у цьому випадку ***q*** можна визнати істинним.

Наступний правильний різновид умовно-категоричного умовиводу

«Modus tollens»

У перекладі з латинської мови означає ***«від заперечення наслідку до заперечення підстави»***.
Наприклад:

Якщо у діях підозрюваного є ознаки складу злочину, то порушується кримінальна справа.
Кримінальна справа стосовно громадянина N не порушена.
Отже, в діях громадянина N немає ознак складу злочину.

Структуру цього умовиводу можна записати у вигляді правила висновку

$$[(\mathbf{p} \supset \mathbf{q}) \wedge \overline{\mathbf{q}}\,] \models \overline{\mathbf{p}}.$$

Щоб відрізнити правильні умовно-категоричні умовиводи від неправильних потрібно співставити структуру конкретного умовиводу із структурами стверджувального і заперечувального модусів умовно-категоричних умовиводів:

1. $[(p \supset q) \wedge p] \models q;$

2. $[(p \supset q) \wedge q] \models p.$

Звернемося до прикладів.

I. *Якщо він свідок, то говоритиме правду.*
Він говорить правду

Отже, він свідок.

З'ясуємо структуру даного умовиводу:

$$[(p \supset q) \wedge q] \supset p.$$

Даний вираз не співпадає ні з формулою ***1***, ні з формулою ***2***. Отже, цей умовивід є неправильним.

II. *Якщо він студент юридичного факультету, то він вивчає логіку.*
Він не є студентом юридичного факультету

Отже, він не вивчає логіку.

Цей умовивід має структуру: $[(p \supset q) \wedge \overline{p}] \supset \overline{q}$, яка також не відповідає ні формулі *1,* ні формулі *2*.

Ч и с т о   у м о в н и м   називається умовивід, у якому засновки і висновок є умовними судженнями.

Наприклад:

Якщо студент здібний, то він має досягнення у науковій роботі.
Якщо студент має досягнення у науковій роботі, то його можна рекомендувати до вступу в аспірантуру.

Отже, якщо студент здібний, то його можна рекомендувати до вступу в аспірантуру.

Логічну структуру цього умовиводу представляє така формула:

$$[(p \supset q) \wedge (q \supset r)] \models (p \supset r).$$

У логіці висловлювань ця формула є правилом висновку, яке називається ***«транзитивністю імплікації»:***

$$\frac{\begin{array}{c} A \supset B \\ B \supset C \end{array}}{A \supset C}\ .$$

У практиці міркувань широко застосовується розділово-категоричний умовивід.

Розділово-категоричним умовиводом називається умовивід, у якому один засновок — розділове судження, а другий засновок і висновок — категоричні судження.

Наприклад:

До Києва із Одеси можна доїхати потягом або автобусом.
До Києва із Одеси не можна доїхати автобусом.
____
Отже, до Києва з Одеси можна доїхати потягом.

Розділово-категоричний силогізм має два правильних різновиди:

— ***«modus tollendo ponens»*** і
— ***«modus ponendo tollens».***

«Modus tollendo ponens»

У перекладі з латинської мови означає ***«заперечувально-стверджуючий модус».***

Наприклад,

Злочин міг скоїти N або M.
N не був причетним до злочину.
____
Отже, злочин скоїв M.

Структура цього умовиводу така: $[(p \vee q) \wedge \overline{p}] \models q$.

Очевидно, що тут диз'юнкція береться у з'єднувально-розділовому смислі.

Перевіримо правильність цього умовиводу, побудувавши для виразу, що представляє його логічну структуру, аналітичну таблицю:

0.	**F** $[(p \vee q) \wedge \overline{p}] \supset q$		
I.	**1. T** $(p \vee q) \wedge \overline{p}$ **2. Fq**	 **F⊃ ,0**	
II.	**3. T** $(p \vee q)$ **4. T p**	 **¬**	 **T∧, 1**
III.	**5. Tp**	**5'. Tq** **+**	**T∨, 3**
IV.	**6. Fp** **+**		

Аналітична таблиця замкнена, отже даний вираз представляє логічно коректне правило умовиводу. Перевіримо, чи буде правильним у цьому випадку хід міркування ***від ствердження до заперечення.***

Наприклад:

Злочин міг скоїти N або M.
До злочину був причетний N.
Отже, M не скоював злочину.

***Логічна структура цього умовиводу така*:**

$$[(\mathbf{p} \vee \mathbf{q}) \wedge \mathbf{p}] \models \overline{\mathbf{q}}.$$

Побудуємо аналітичну таблицю для цього випадку:

0.	$[F\ (p \vee q) \wedge p] \supset \overline{q}$		
I.	***1.*** $T\ (p \vee q) \wedge p$		
	2. $F\ \overline{q}$		$F\supset$, ***0***
II.	***3.*** $T\ (p \vee q)$		
	4. Tp	$\neg$	$T\wedge$, ***1***
III.	***5.*** Tp	***5′.*** Tq	$T\vee$, ***3***
IV.	***6.*** $\underline{Tq}$	***6′.*** $\underline{Tq}$	

Аналітична таблиця не замкнена. А це означає, що умовивід, логічна структура якого представлена даною формулою, є неправильним. Треба мати на увазі, що ***в заперечувально-стверджуючому розділово-категоричному умовиводі диз'юнкція вживається у з'єднувально-розділовому смислі.***

«Modus ponendo tollens»

Другим правильним різновидом розділово-категоричного умовиводу є ***стверджувально-заперечувальний модус***, або латинською мовою ***«modus ponendo tollens».***

Наприклад:

Цей студент киянин або іногородній.
Цей студент — іногородній.
Отже, цей студент не є мешканцем м. Києва.

***Логічна структура цього умовиводу така*:**

$$[(p \veebar q) \wedge q] \models \bar{p}.$$

При побудові розділово-категоричних умовиводів необхідно дотримуватися таких правил:

1. У стверджувально-заперечувальному модусі[1] більший засновок має сполучник «або», який вживається у строго розділовому смислі.

2. У більшому засновку повинні бути перераховані усі альтернативи[2]. Якщо цього не зробити, то отримаємо хибний засновок, а це означає, що такий умовивід буде не ефективним.

Наприклад:

Студенти бувають вечірньої або заочної форми навчання.
Він не є студентом заочної форми навчання.
Отже, він студент вечірньої форми навчання.

Наступним видом у класі умовиводів логіки суджень є умовно-розділові умовиводи.

Умовно-розділовим умовиводом називається умовивід, у якому один із засновків є розділовим судженням, а решта умовними судженнями.

Наприклад:

Якщо ранкові газети повідомлять про результати референдуму, то я ще сьогодні зможу підготуватися до виступу.
Якщо вечірні газети повідомлять про результати референдуму, то я лише завтра зможу підготуватися до виступу.
Результати референдуму повідомлять або ранкові, або вечірні газети.
Отже, я зможу підготуватися до виступу або сьогодні, або завтра.

Умовно-розділові умовиводи мають ще одну назву — ***лематичні***. Ця назва походить від грецького слова ***lemma*** — припущення. Така назва зумовлена тим, що вона ви-

[1] Модус — це слово латинського походження, яке означає різновид.
[2] Альтернатива — член розділового судження.

пливає з тієї характеристики умовиводів, що розглядають різні припущення та їх наслідки.

В залежності від кількості альтернатив у розділовому засновку лематичні умовиводи поділяють на:

а) ***дилеми*** (*дві альтернативи*);

б) ***трилеми*** (*три альтернативи*);

в) ***полілеми*** (*чотири і більше альтернатив*).

У практиці міркувань найчастіше використовують дилеми, тому зупинимося на їх аналізі.

За якістю наслідку (заперечувальний або стверджувальний) дилеми поділяють на:

— ***конструктивні*** та

— ***деструктивні.***

За складністю наслідку дилеми поділяють на:

— ***прості*** та

— ***складні.***

К о н с т р у к т и в н о ю називається дилема у висновок якої входять наслідки умовних засновків.

Д е с т р у к т и в н о ю називається дилема, висновок якої складається із заперечення підстав умовних засновків.

П р о с т о ю називається дилема, висновком якої є наслідок умовного засновку або заперечення підстави умовного засновку.

С к л а д н о ю називається дилема, висновком якої є диз'юнкція наслідків умовних засновків або заперечення підстав умовних засновків. *Наведемо приклади.*

I. *Якщо студент здібний, то він успішно складе сесію.*
Якщо студент старанний, то він успішно складе сесію.
Студент або здібний, або старанний.

Отже, студент успішно складе сесію.

Маємо ***просту конструктивну дилему (ПКД):***

$$[(p \supset q) \wedge (r \supset q) \wedge (p \vee r)] \models q.$$

II. *Якщо N вчинив протиправні дії, то N понесе матеріальні збитки.*
Якщо N вчинив протиправні дії, то N понесе моральні збитки.
N не понесе ні матеріальних , ні моральних збитків.

Отже, він не вчиняв протиправних дій.

Такий вигляд має ***проста деструктивна дилема*** (***ПДД***):

$$[(\mathbf{p} \supset \mathbf{q}) \wedge (\mathbf{p} \supset \mathbf{r}) \wedge (\overline{\mathbf{q}} \vee \overline{\mathbf{r}})] \models \overline{\mathbf{p}}.$$

Ш. *Якщо іспит вступний, то він може впливати на конкурс.*
Якщо іспит семестровий, то він може впливати на отримання стипендії.
Іспити бувають вступні або семестрові.

Отже, іспити можуть впливати або на конкурс, або на отримання стипендії.

У ***складній конструктивній дилемі*** (***СКД***) висновком є складне диз’юнктивне судження, альтернативами у якому є наслідки умовних засновків:

$$[(\mathbf{p} \supset \mathbf{q}) \wedge (\mathbf{r} \supset \mathbf{q}) \wedge (\overline{\mathbf{q}} \vee \overline{\mathbf{s}})] \models (\overline{\mathbf{p}} \vee \overline{\mathbf{r}}).$$

Отже, складна конструктивна дилема є слабким ствердженням яких-небудь суджень (точніше, їх диз’юнкції), а складна деструктивна дилема використовується для слабкого їх заперечення. Іншими словами, якщо неможливо прямо довести хибність якого-небудь судження ***p*** (тобто, істинність його заперечення $\overline{p}$), то можна спробувати довести, що істинним є розділове судження, до якого входить $\overline{\mathbf{p}}$.

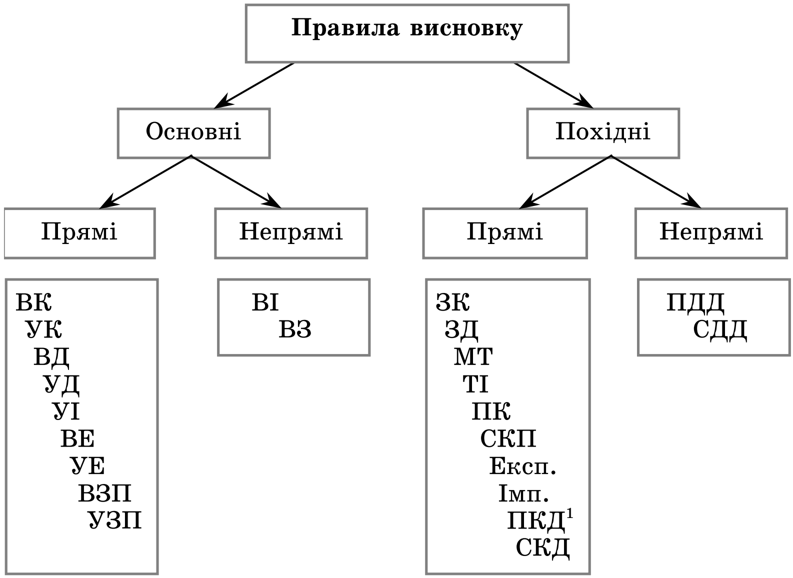
Якщо мати на увазі наведену вище типологію правил висновку логіки висловлювань, то ***схеми висновку за простою та складною конструктивною дилемами належатимуть до похідних прямих правил:***

$$\begin{array}{c} A \supset C \\ B \supset C \\ A \vee B \\ \hline C \end{array} \quad i \quad \begin{array}{c} A \supset B \\ C \supset Д \\ A \vee C \\ \hline B \vee Д \end{array} .$$

Стосовно схем висновку простої та складної деструктивної дилем, то їх відносять до похідних непрямих правил:

$$\begin{array}{c} A \supset B \\ A \supset C \\ \overline{B} \vee \overline{C} \\ \hline \overline{A} \end{array} \quad i \quad \begin{array}{c} A \supset B \\ C \supset Д \\ \overline{B} \vee \overline{Д} \\ \hline \overline{A} \vee \overline{B} \end{array} .$$

Нарешті, після розгляду умовних, умовно-категоричних, розділово-категоричних та умовно-розділових умовиводів, логічні структури яких є відповідними правилами висновку, можна повністю відтворити ***схему типології правил висновку логіки висловлювань.***



3. Висновки із категоричних суджень

Розглянемо умовиводи, для аналізу яких недостатньо засобів логіки висловлювань, а необхідно враховувати внутрішню структуру засновків і висновку.

Отже, йтиметься про силогістику Арістотеля, яка викладена у славнозвісних «Аналітиках».

Висновки із категоричних суджень поділяються на:

— ***безпосередні*** та

— ***опосередковані.***

[1] Позначки на схемі: ***ПКД, СКД, ПДД, СДД*** відповідно означають «проста конструктивна дилема», «складна конструктивна дилема», «проста деструктивна дилема», «складна деструктивна дилема».

а) безпосередні умовиводи

До безпосередніх умовиводів відносять:

а) обернення, перетворення, протиставлення предикату[1];

б) умовиводи за логічним квадратом.

До опосередкованих умовиводів відносять простий категоричний силогізм.

Б е з п о с е р е д н і м умовиводом називається дедуктивний умовивід, у якому висновок отримують із одного засновку.

У практиці міркувань зустрічається той факт, що побудова різноманітних умовиводів дозволяє виділити і донести до співрозмовника смислові відтінки інформації, що міститься в засновках. Особливо це очевидно у випадку з безпосередніми умовиводами:

Всі студенти історичного факультету вивчають логіку — (***засновок***).

---

1. *Отже, деякі особи, що вивчають логіку, є студентами історичного факультету* — (***висновок, отриманий шляхом обернення засновку***).
2. *Жоден студент історичного факультету не може бути серед тих, хто не вивчає логіку* — (***висновок, отриманий шляхом перетворення засновку***).

---

3. *Жоден, хто не вивчає логіку, не належить до студентів історичного факультету* — (***висновок, отриманий, шляхом протиставлення предиката засновку до суб'єкта***).

---

4. *Невірно, що деякі студенти історичного факультету не вивчають логіку* — (***висновок, отриманий за правилом умовиводу по «логічному квадрату» — ASP*** $\models \neg$ ***OSP***).

Отримання тієї чи іншої інформації з конкретного висловлювання обумовлюється безпосередньою мовною ситуацією (це може бути урок, бесіда, будь-яке пояснення тощо), дослідницькими мотивами, суто практичними міркуваннями. Про це і свідчать наведені приклади.

---

[1] Перераховані у пункті ***а*** види безпосередніх умовиводів базуються на перебудові логічної структури засновку, яким є категоричне судження.

Обернення

Аналіз безпосередніх умовиводів розпочнемо з обернення.

Якщо взяти категоричне судження, то в ньому безпосередньо наявна інформація про відношення ***S*** до ***P*** і є прихованою інформація про відношення ***P*** до ***S***. Саме тому, ***метою безпосереднього умовиводу шляхом обернення є отримання інформації про відношення P до S у структурі категоричного судження.***

Схема цього умовиводу така:

$$\frac{S \text{ є } P}{P \text{ є } S}$$

Отже, ***о б е р н е н н я м називається такий безпосередній умовивід, у висновку якого суб'єктом стає предикат засновку, а предикатом — суб'єкт засновку .***

У процесі отримання умовиводу шляхом обернення відбувається перестановка місцями ***S*** і ***P***, але якість засновку зберігається для висновку. У ролі засновків можуть виступати судження ***A, E, I, O.***

Якщо у ролі засновку маємо судження A, то у висновку отримуємо судження I:

Всі підручники мають методичний зміст.

Отже, деякі книги методичного характеру є підручниками.

Зауважимо, що в безпосередніх умовиводах шляхом обернення, перетворення, протиставлення предиката діють правила розподіленості термінів у категоричних судженнях.

Якщо у ролі засновку наявне судження E, то у висновку також отримуємо судження E:

Жодний мій знайомий не був учасником минулого кінофестивалю.

Отже, жоден учасник минулого кінофестивалю не був серед моїх знайомих.

У випадку із судженням I висновком матимемо судження I:

Деякі книги нашої бібліотеки є рідкісними.

Отже, деякі рідкісні книги є в нашій бібліотеці.

Відповідно до загальних правил про розподіленість термінів у засновку і висновку ***судження О оберненню не підлягає.*** *Наприклад, «Деякі рослини не є деревами»* — із цього судження шляхом обернення неможливо отримати істинний висновок.

Обернення суджень Е і I називають оберненням без обмежень. Обернення судження А називають оберненням з обмеженням.

Перетворення

Розглянемо умовиводи, які отримують у результаті перетворення засновку.

Схемою такого умовиводу є:

$$\frac{\boldsymbol{S\ \text{є}\ P}}{\boldsymbol{S\ \text{не є не-}P}.}$$

Виявляється, що в категоричному судженні, окрім явного знання про відношення ***P*** до ***S*** (про що йшлося вище), міститься неявне знання про відношення ***S*** до $\overline{\boldsymbol{P}}$.

Наприклад, якщо всі елементи множини ***S*** належать множині ***P*** (у випадку судження ***A***), то ні в якому разу вони не можуть належати множині ***P*** (доповненню ***P***).

В умовиводі шляхом перетворення ми отримуємо висновок, де суб'єктом є суб'єкт засновку, а предикатом є поняття, що суперечить предикату засновку. Це стає можливим завдяки зміні якості засновку.

Тобто, здійснюється це шляхом введення у висновок двох заперечень: одного перед зв'язкою, а іншого — перед предикатом.

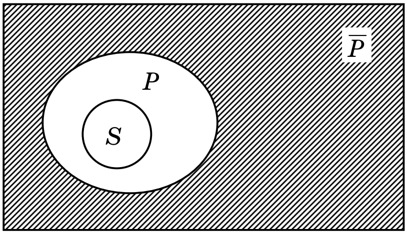
У ролі засновків виступають судження ***A, I, E, O.*** Отже, існує чотири варіанти перетворення.

Судження А перетворюється у судження Е.
Наприклад:

Усі мої друзі мають вищу освіту.

Отже, серед моїх друзів немає жодного, хто не мав би вищої освіти.

Схематично це можна зобразити так:



Отже, якщо всі елементи множини ***S*** належать множині ***P***, то ні в якому разі вони не можуть належати множині ***не-P*** (доповненню ***P***).

Судження E перетворюється у судження A.

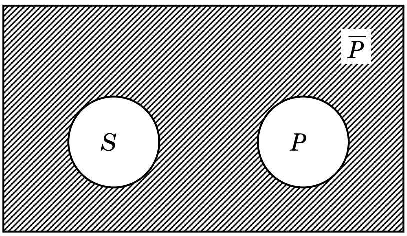
Зауважимо, що вставляючи у судженні ***E,*** як у засновку, заперечення перед зв'язкою, отримуємо подвійне заперечення. Тому ми їх усуваємо, керуючись принципом: ***подвійне заперечення рівносильне твердженню.***

Наприклад:

Жоден мій приятель не має вищої освіти.

Отже, усі мої приятелі є людьми без вищої освіти.

Схема цього умовиводу така:



Наведена схема показує, що усі елементи множини ***S*** належать множині ***не-P***.

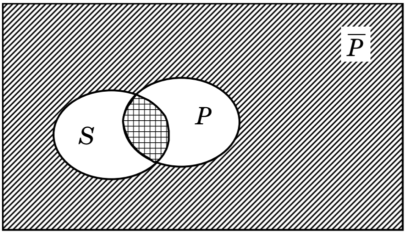
Судження I перетворюється у судження O.

Наприклад:

Деякі мої приятелі вивчають англійську мову.

Отже, деякі мої приятелі не належать до людей, що не вивчають англійську мову.

Схема цього умовиводу така:



Ця схема показує, що частина ***S*** (заштрихована) не належить множині ***не-P***.

Судження O перетворюється в судження I.
Наприклад:

Деякі науки не є гуманітарними.

Отже, деякі науки є не гуманітарними.

Схематично цей умовивід зображується так:

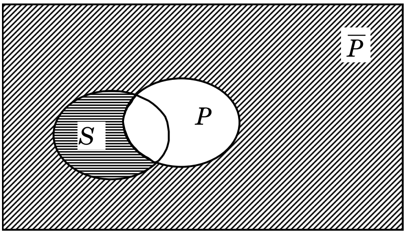


Схема вказує на те, що частина множини ***S*** (заштрихована) належить множині ***не-P***.

У процесі отримання умовиводу шляхом перетворення необхідно відновити зв'язку, яка часто опускається у засновку, і лише потім послідовно ввести заперечення перед зв'язкою та предикатом у висновку.

Протиставлення предикату

Вказуючи на те, що із відношення ***S*** до ***P*** можна отримати інформацію про відношення ***S*** до $\overline{P}$, необхідно враховувати ще один вид інформації, що випливає з цього відношення, тобто йдеться про відношення $\overline{P}$ до ***S***.

Таке перетворення категоричного судження (у ролі засновку) називається ***безпосереднім умовиводом через протиставлення предикату. Схема цього умовиводу така:***

$$\frac{\boldsymbol{S \text{ є } P}}{\boldsymbol{\text{не-}P \text{ є } S.}}$$

Протиставленням предикату називається такий безпосередній умовивід, у результаті якого отримують висновок, суб'єктом якого є поняття, що суперечить предикату засновку, а предикатом стає суб'єкт засновку.

Протиставлення предикату розглядається як результат двох послідовних дій: ***перетворення і обернення.***

Наприклад,

1. Будь-яка наукова теорія об'єктивно відображає дійсність.

I *Отже, жодна наукова теорія не може не об'єктивно відображати дійсність.*

II *Отже, все, що не об'єктивно відображає дійсність, не може належати до наукової теорії.*

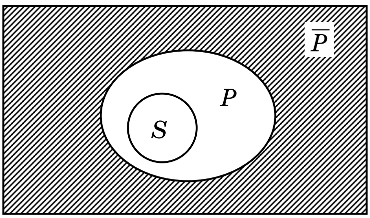
Із судження А шляхом протиставлення предикату отримують судження Е.

Наприклад,

Будь-яка теорія підтверджується на практиці.

Отже, все, що не підтверджується на практиці, не є теорією.

Схематично цей умовивід зображується так:



Наведена схема демонструє, що множини ***не-P*** і ***S*** не мають жодного спільного елемента.

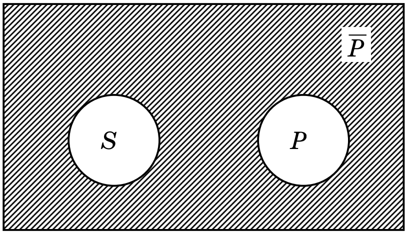
Із судження E шляхом протиставлення предикату отримують судження A.

Наприклад:

Жоден мій приятель не має вищої освіти.

Отже, деякі люди без вищої освіти мої приятелі.

Схема цього умовиводу така:



Із цієї схеми очевидно, що лише деякі елементи множини ***не-P*** є спільними з елементами множини ***S***.

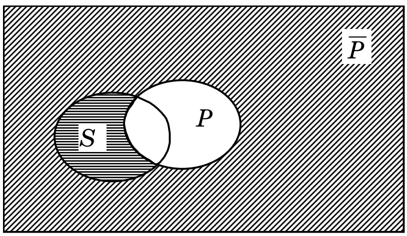
Із судження O шляхом протиставлення предикату отримують судження I.

Наприклад:

Деякі студенти не є учасниками конференції.

Отже, деякі не учасники конференції —студенти.

Схематично це зображується так:



Ця схема вказує на те, що лише частина елементів ***не-P*** і ***S*** є спільними.

Із судження I шляхом протиславлення предикату висновок отримати неможливо. Це зумовлено тим, що перетворюючи судження ***I***, отримують судження ***O***, яке оберненню не підлягає.

Будувати безпосередні умовиводи можна не лише із урахуванням інформації між ***S*** і ***P***, але й виходячи із змісту логічних відношень між категоричними судженнями. Нагадаємо, що таких ***відношень існує чотири види: підпорядкування, суперечності, противності і підпротивності.***

Умовиводи, які будуються із урахуванням цих 4-х типів відношень між категоричними судженнями, називають умовиводами за «логічним квадратом».

Наприклад:

$$\frac{\textit{Деякі телевізійні програми працюють цілодобово.}}{\textit{Отже, невірно, що немає жодної цілодобової телевізійної програми.}}$$

Логічна структура цього міркування така: $\mathbf{ISP} \models \neg\, \mathbf{ESP}$.

Побудова умовиводів за «логічним квадратом» підпорядкована певним правилам, які:

по-перше, забезпечують правильність умовиводу в кожному конкретному випадку;

по-друге, дають систематичний огляд всіх можливих міркувань такого типу.

Правила висновку умовиводів за «логічним квадратом» поділяються на:

— ***основні*** та

— ***похідні.***

Розпочнемо аналіз цих правил з основних.

До основних правил висновку відносяться правила, які регламентують умовиводи, що засновані на:

а) ***відношенні контрадикторності, або суперечності***, і

б) ***підпорядкування.***

Зазначимо, що при побудові умовиводів за «логічним квадратом» використовуються, окрім суджень ***ASP, ESP, ISP, OSP,*** ще й одиничні судження: ***а є Р*** та ***а є Р***.

До основних правил висновку належать такі:

відношення протиріччя

$$1.\ \frac{\mathbf{ASP}}{\mathbf{OSP}} \quad 2.\ \frac{\mathbf{OSP}}{\mathbf{ASP}} \quad 3.\ \frac{\mathbf{ESP}}{\mathbf{ISP}} \quad 4.\ \frac{\mathbf{ISP}}{\mathbf{ESP}} \quad 5.\ \frac{\mathbf{a\ є\ p}}{\neg\mathbf{a}\ \overline{\mathbf{є}}\ \mathbf{p}} \quad 6.\ \frac{\mathbf{a}\ \overline{\mathbf{є}}\ \mathbf{p}}{\neg\mathbf{a\ є\ p}}\ ;$$

відношення підпорядкування

7. $\dfrac{ASP}{ISP}$ 8. $\dfrac{ESP}{OSP}$ 9. $\dfrac{ASP}{a\ \text{є}\ P}$ 10. $\dfrac{ESP}{a\ \overline{\text{є}}\ P}$ 11. $\dfrac{a\ \text{є}\ P}{ISP}$ 12. $\dfrac{a\ \overline{\text{є}}\ P}{OSP}$;

До похідних правил висновку відносяться:

відношення контрарності

13. $\dfrac{ASP}{\rceil ESP}$ 14. $\dfrac{ESP}{\rceil ASP}$ 15. $\dfrac{ASP}{\rceil a\ \overline{\text{є}}\ P}$ 16. $\dfrac{ESP}{\rceil a\ \text{є}\ P}$ 17. $\dfrac{a\ \overline{\text{є}}\ P}{\rceil ASP}$ 18. $\dfrac{a\ \text{є}\ P}{\rceil ESP}$;

відношення підконтрарності

19. $\dfrac{\rceil ISP}{a\ \overline{\text{є}}\ P}$ 20. $\dfrac{\rceil ISP}{OSP}$ 21. $\dfrac{\rceil OSP}{a\ \text{є}\ P}$ 22. $\dfrac{\rceil OSP}{ISP}$ 23. $\dfrac{\rceil a\ \overline{\text{є}}\ P}{ISP}$ 24. $\dfrac{\rceil a\ \text{є}\ P}{OSP}$.

Якщо засновком буде будь-яке із 6 категоричних висловлювань: **ASP, ESP, ISP, OSP а є Р, а є Р,** то можна побудувати правильні умовиводи на основі вказаних правил.

Наприклад:

Деякі тюльпани мають чорний колір.

Отже, невірно, що жоден тюльпан не має чорного кольору. ***ISP |= ⌉ESP.***

Будь-яка книжка має пізнавальний харектер.

Отже, невірно, що деякі книжки не мають пізнавального характеру. ***ASP |= ⌉OSP.***

Отже, й деякі книжки мають пізнавальний характер. ***ASP |= ISP.***

Отже, ця книжка має пізнавальний характер. ***ASP |= а є Р.***

Отже, невірно, що жодна книжка не має пізнавального характеру. ***ASP |= ⌉ESP.***

Коректність похідних правил можна перевірити, побудувавши їх доведення:

I. $\dfrac{\quad}{\rceil ESP}$

1. ***ASP***

2. ***а є Р*** — (***за правилом 9***)

3. ***⌉ESP*** — (***за правилом 18***)

II. $\dfrac{\urcorner ISP}{OSP}$

$$\begin{array}{lll}
1. & \underline{\urcorner ISP} & \\
2. & \urcorner OSP & \text{— (припущення непрямого доведення)} \\
3. & a \in P & \text{— (за правилом 21)} \\
4. & \underline{ISP} & \text{— (за правилом 11)} \\
5. & OSP & \text{— (ВЗ до 1 і 4)}
\end{array}$$

Таким способом можна довести всі похідні правила.

Розглядаючи умовиводи за ***«логічним квадратом»,*** ми переконалися, що суттєвою особливістю безпосередніх умовиводів є отримання інформації різноманітних відтінків.

б) Простий категоричний силогізм

Уперше систематичний розгляд теорії висновку дає ***Арістотель*** в «Аналітиках», вона отримала назву ***«силогістика».***

К а т е г о р и ч н и м   с и л о г і з м о м   називають дедуктивний умовивід, який складається із двох засновків і висновку, представлених судженнями виду: ASP, ESP, ISP, OSP.

Іншими словами, простий категоричний силогізм — це такий дедуктивний умовивід, в якому висновок здійснюється із двох категоричних суджень на основі співвідношення дескриптивних термінів.

Наприклад:

1. *Будь-який умовивід* (***M***) *породжує нове знання* (***P***).
2. *Оскільки категоричний силогізм* (***S***) *належить до класу умовиводів* (***M***)*, то*

Отже, він (***S***) *породжує нове знання* (***P***).

Аналізуючи наведений приклад категоричного силогізму, стає очевидним, що він за структурою складається із трьох термінів: ***S, M, P***.

Термін, що входить до висновку як його суб'єкт, називається   м е н ш и м   і позначається буквою S.

Термін, який виконує роль предиката висновку, називається   б і л ь ш и м   і позначається буквою P.

Більший і менший терміни називаються ***к р а й н і м и.***

Термін, що входить в обидва засновки, але відсутній у висновку, називається середнім і позначається буквою М.

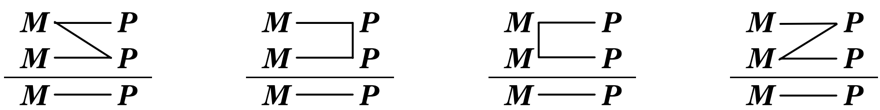
Відповідно до назви термінів засновок, до якого входить більший термін, називається більшим.

Засновок, до якого входить менший термін, називається меншим.

У нашому прикладі ***більший засновок 1***, а ***менший*** — ***2***. Виходячи із зазначеного, структуру силогізму можна записати у вигляді імплікації, де антецедентом буде кон'юнкція засновків, а консеквентом — висновок:

$$[A\ (M\ P) \wedge A\ (S\ M)] \supset A\ (S\ P).$$

Якщо розглядати структуру силогізму в залежності від розташування трьох термінів, то можливі чотири схеми:



Ці схеми називають фігурами категоричного силогізму, тобто різновидами категоричного силогізму, які визначаються розташуванням середнього терміна.

Різновиди категоричного силогізму розрізняють за формами засновків і висновку. Їх прийнято називати ***модусами*** категоричного силогізму.

При побудові категоричного силогізму дотримуються певних правил, які поділяються на:

а) загальні правила категоричного силогізму і

б) спеціальні правила фігур.

До загальних правил категоричного силогізму відносяться такі:

1. У простому категоричному силогізмі повинно бути лише три терміни.

2. Середній термін повинен бути розподіленим хоча б в одному з засновків.

3. Якщо крайній термін розподілений (або не розподілений) у засновку, то він повинен бути розподіленим (або не розподіленим) у висновку.

4. Якщо один із засновків заперечувальне судження, то і висновок буде заперечувальним судженням.

5. Якщо один із засновків часткове судження, то і висновок буде частковим судженням.

6. Із двох заперечувальних суджень висновок отримати не можливо.

7. Із двох часткових суджень висновок отримати неможливо.

Спеціальні правила фігур

Перша фігура:

1. Більший засновок — судження загальне.
2. Менший засновок — судження стверджувальне.

Друга фігура:

1. Більший засновок повинен бути загальним судженням.
2. Один із засновків — заперечувальне судження.

Третя фігура:

1. Менший засновок — стверджувальне судження.
2. Висновок — часткове судження.

Четверта фігура:

1. Якщо більший засновок — стверджувальне судження, то менший повинен бути загальним судженням.

2. Якщо один із засновків — заперечувальне судження, то більший засновок повинен бути загальним судженням.

Побудуємо доведення спеціальних правил.

Спеціальні правила фігур виводяться із загальних, а також із знання про розташування середнього терміна в засновках. Прикладом може служити доведення правил першої фігури.

Припустимо, що правила першої фігури неправильні, а правильні їх заперечення:

> ***1. Більший засновок повинен бути частковим судженням.***
>
> ***2. Менший — заперечувальним судженням.***

Якщо у результаті доведення цього припущення прийдемо до суперечності, то наше припущення відпаде як хибне, а істинним визнається твердження, що складає правила першої фігури.

Доведення:

— якщо приймаємо наше припущення, то висновком у силогізмі за першою фігурою буде заперечувальне судження (***4 — загальне правило силогізму:*** скорочено — ***ЗПС***);

— окрім цього, висновок буде частково-заперечувальним судженням ***OSP*** (***по 5 — ЗСП***);

— у заперечувальному судженні ***P*** — розподілений:

— отже, більший термін буде розподілений і у засновку (***3 — ЗСП***);

— оскільки більший і менший засновки заперечувальні, то висновок отримати неможливо (***6 — ЗПС***).

Таким чином, наше припущення неправильне і воно відпадає. Тоді коректними будуть названі правила першої фігури. Таким способом доводять правила решти трьох фігур.

Використовуючи ***ЗПС*** і ***спеціальні правила фігур***, для кожної фігури можна вивести усі правильні модуси. У межах кожної фігури ***можливі 16 комбінацій*** засновків від чотирьох видів суджень ***ASP, ESP, ISP, OSP***:

AA	***EA***	***IA***	***OA***
AE	***EE***	***IE***	***OE***
AI	***EI***	***II***	***OI***
AO	***EO***	***IO***	***OO***.

Перше правило виключає повністю комбінації ***3*** і ***4*** колонок. Варіанти ***2*** і ***4*** першої колонки суперечать першому правилу фігури.

Варіанти ***2*** і ***4*** другої колонки виключаються з розгляду за ***6 — ЗПС***.

Отже, залишаються комбінації ***AA, AI, EA, EI,*** із яких отримують модуси ***AAA, AII, EAE, EIO***. Кожний модус має конкретне ім'я, що використовується як певний мнемонічний засіб***: Barbara, Celarent, Darii, Ferio***[1].

Таким же чином можна вивести правильні модуси ***II, III, IV фігур***. Із чотирьох фігур перша вважається найдосконалішою. Це зумовлено такими обставинами:

По-перше, тільки ця фігура дає у висновку всі чотири типи категоричних суджень.

[1] Відповідні назви мають модуси II, III фігур: ***модуси II фігури*** — Cesare, Camestres, Festino, Baroco; ***модуси III фігури*** — Darapti, Disamis, Datisi, Felapton, Bocardo, Ferison; ***модуси IУ фігури*** — Bramantip, Camenes, Dimaris, Fesapo, Fresison.

По-друге, в першій фігурі частковий випадок підводиться під загальне положення.

По-третє, тільки ця фігура дає у висновку висловлювання ***ASP***, мовою якого формулюються закони науки.

Зважаючи на це, модуси першої фігури приймаються як основні, а модуси решти трьох фігур як похідні, які можна вивести із основних.

Спочатку обгрунтуємо коректність модусів першої фігури, а потім перейдемо до виведення модусів ***II, III, IV фігур***.

Логічна коректність модусів першої фігури випливає із умов істинності суджень ***ASP, ESP, ISP, OSP***.

Візьмемо модус AAA.

Спочатку припустимо, що ***засновки AMP*** і ***ASM — істинні,*** а ***висновок — ASP — хибний***. Потім, відповідно до умови істинності загальноствердjувального судження: якщо ***ASP — хибне***, то у множині ***S*** знайдеться хоча б один індивід ***a,*** який не належить множині ***P***. Але за угодою, якщо ***ASM — істинне***, то будь-який індивід множини ***S*** належить множині ***M*** (навіть і ***a***). Однак, одночасна приналежність ***a*** до класу ***M*** і не приналежність до класу ***P*** виключається в силу угоди про істинність засновку ***AMP***. Тобто, все, що належить ***M*** (а ***M*** належить і індивід ***a***), належить і ***P***. Таким чином, наше припущення про істинність ***AMP*** і ***ASM*** та хибність висновку ***ASP*** приводить до суперечності, чим і встановлюється логічна коректність модусу ***AAA***.

Обгрунтуємо модус EAE.

Знову припускаємо, що засновки ***EMP*** і ***ASM — істинні***, а ***висновок ESP — хибний***. Якщо ***ESP — хибне***, то за умовою істинності загальнозапечувального судження існує хоча б один індивід ***a*** множини ***S,*** який належить множині ***P***. За припущенням висновок ***ASM — істинний***, отже, кожен індивід із ***S***, в тому числі і ***a,*** належить ***M***. Але приналежність предмета ***a*** множині ***P*** і множині ***M*** виключається припущенням про ***істинність засновку EMP***. Виходить, що припущення про ***істинність EMP*** і ***ASM*** та ***хибність ESP*** спростоване і цим самим визнається логічна коректність модусу ***EAE***.

Обгрунтуємо коректність третього модусу першої фігури AII.

Припустимо, що ***засновки AMP*** і ***ISM — істинні***, а ***висновок ISP — хибний***. Відповідно до умов істинності частковостверджувального судження, якщо ***засновок ISM — істинний***, то існує, в крайньому разі, один індивід ***a*** множини ***S***, який належить і множині ***M***. У той же час за умови ***хибності висновку ISP*** не існує жодного індивіда множини ***S,*** у тому числі й індивіда ***a,*** який би не належав множині ***P***. Належність ***a*** множині ***M*** і неналежність ***a*** множині ***P*** суперечить припущенню про ***істинність засновку AMP***. Адже ***AMP істинне***, якщо всі елементи множини ***M*** (в тому числі і ***a***) належать множині ***P***. Отже, ***припущення*** про істинність засновків ***AMP*** і ***ISM*** та хибність висновку ***ISP відпадає***. Цим самим стверджується логічна коректність модусу ***AII***.

Нарешті побудуємо доведення для четвертого модусу першої фігури EIO.

Нехай засновки ***EMP*** і ***ISM — істинні***, а ***висновок OSP — хибний***. За умови істинності частковостверджувального судження ***ISM істинне***, коли, у крайньому разі, існує хоча б один індивід ***a*** множини ***S,*** який належить ***M***. Висновок ***OSP*** хибний (за умов істинності частковозаперечувального судження), коли всі індивіди множини ***S***, в тому числі і ***a***, який належить ***M,*** належать ***P***. Однак, належність індивіда ***a*** множині ***M*** і множині ***P*** суперечить умовам істинності загальнозаперечувального судження, яким представлений більший засновок і який, згідно з припущенням, є істинним. Отже, ***припущення*** про істинність засновків ***EMP*** і ***ISM*** та хибність висновку ***OSP спростовується*** і цим доводиться логічна коректність модусу ***AIO***.

Таким чином, використовуючи умови істинності ***ASP, ESP, ISP*** та ***OSP,*** обгрунтовують логічну коректність модусів першої фігури.

Логічна коректність модусів П, Ш та ІУ фігур встановлюється за допомогою модусів першої фігури та відповідних правил висновку.

Йдеться про такі правила:

1. ASP |= ISP ***правила висновку, що засновані на відношенні***
ESP |= OSP ***підпорядкування.***

2. ***OSP*** $\models \neg$***ASP*** ***правила висновку, що засновані на відношенні***
ISP $\models \neg$ ***ESP*** ***суперечності.***

3. ***ASP*** $\models$ ***IPS*** ***правила обернення.***
ISP $\models$ ***IPS***
ESP $\models$ ***EPS.***

Зауважимо, що назви модусів (особливо ***П, Ш***, та ***IУ фігур***) виконують не тільки мнемонічну функцію. Початкові букви ***B, C, D, F*** вказують на ті модуси першої фігури, які отримують в результаті зведення. ***Голосні вказують на кількісну і якісну характеристики засновків та висновку конкретного модусу,*** а ***приголосні — на спосіб його обгрунтування***:

— буква ***s*** показує, що судження, яке позначене голосною, після якої стоїть ця буква, повинно піддаватися чистому оберненню;

— буква ***p*** означає, що судження, яке позначене голосною, після якої стоїть ця буква, повинне піддаватися оберненню з обмеженням;

— буква ***m*** вказує на заміну місцями засновків;

— буква ***c*** вказує, що даний модус може бути зведеним до модусу першої фігури шляхому непрямого доведення.

Візьмемо модус «Cesare». Буква ***C*** вказує на те, що його можна звести до модусу ***«Celarent».*** Буква ***s*** вимагає при зведенні обернути більший засновок без обмеження:

EPM	***1.***		
ASM	***2.***	***ASM***	
	3.	***EMP***	***— правило «S», 1***
	4.	***ESM***	***— правило I фігури, 3, 2.***

Побудуємо доведення модусу «Baroco», де приголосна ***c*** вказує на необхідність скористатися непрямим доведенням.

APM	***1.***	***APM***	
OSM	***2.***	***OSM***	
OSP	***3.***	***ASP***	***— припущення***
	4.	***ASM***	***— правило I фігури, 1, 3***
	5.	***OSP***	***— ВЗ, 2, 4.***

Наведені доведення модусів свідчать про те, що зазначений вище список правил висновку достатній для обгрунтування логічної коректності будь-якого модусу ***II, III*** та ***IV фігур***.

в) *Перевірка коректності силогізму*

Розгляд способів обгрунтування спеціальних правил фігур простого категоричного силогізму, модусів фігур переконує в надійності загальних правил простого категоричного силогізму, але у практиці міркування часто виникає потреба перевірки коректності конкретної схеми міркування шляхом співставлення з відповідною фігурою силогізму. Іншими словами, іноді наявна ситуація, коли зовні (завдяки особливостям природної мови) побудова міркування здається логічно бездоганною, висновок істинний, але ми відчуваємо його ненадійність, а то й суперечність звичайним уявленням і твердженням.

Наприклад,

I.
Злочин є суспільно небезпечним діянням.
Крадіжка є суспільно небезпечним діянням.
———
Отже, крадіжка є злочин.

II.
Будь-яка теорія підтверджується практикою.
Геометрія Евкліда підтверджується практикою.
———
Отже, геометрія Евкліда — теорія.

III.
Крадіжка є злочином.
Шахрайство — це не крадіжка.
———
Отже, шахрайство не є злочином.

IV.
Геологія є наукою про землю.
Географія — це не геологія.
———
Отже, географія не є наукою про землю.

Для того, щоб встановити правильність силогізму необхідно здійснити такі кроки:

а) Знайти засновки і висновок даного силогізму.

Зазначимо, що у процесі обміну інформацією та спілкування види міркування не розписуються так як у прикладах, що наведені вище. Тому треба мати на увазі, що якщо у виразі проголошеному або записаному кимось є слова ***«тому, що», «так, як»*** тощо, то висновок буде розташований перед цими словами, а засновки — після вказаних слів. Якщо ж у виразі є слова ***«отже», «таким чином»*** тощо, то засновки будуть розташовані перед цими словами, а висновок — після них.

Наприклад, *«Мідь електропровідник, тому що усі метали проводять електричний струм, а мідь — метал», «Будь-яка книжка є джерелом інформації, отже підручник з хімії є джерелом інформації».*

б) Визначити середній (M), більший (P) та менший (S) терміни досліджуваного силогізму.

в) Визначити більший та менший засновок.

г) Перевірити дотримання загальних правил силогізму.

д) Втановити фігуру досліджуваного силогізму.

е) Перевірити, чи відповідає даний силогізм правилам тієї фігури, за якою він побудований.

Виходячи із наведеного алгоритму, розглянемо наведені вище приклади.

Приклади **I** та **II** побудовані за ***II-ю фігурою*** простого категоричного силогізму. Але в них порушено правило цієї фігури, що ***один із засновків повинен бути заперечувальним судженням.*** А у прикладі **I** і **II** він стверджувальний. Отже, хоча засновки і висновок у цих прикладах істинні судження, але висновок із данних засновків логічно не слідує, не випливає.

Подібна ситуація часто виникає у слідчій практиці, коли відомо, хто вчинив злочин, але потрібно зібрати докази, щоб це довести.

У прикладах **III** та **IV** порушено друге правило ***І-ї фігури*** простого категоричного силогізму, що ***менший засновок повинен бути стверджувальним судженням.*** А у цих прикладах менший засновок — заперечувальне судження. Тому при істинних засновках отримані явно хибні судження.

г) Ентимема

У практиці міркування, як правило, ми користуємося силогізмами не у повному, а у скороченому вигляді.

Наприклад:

«Геометрія Евкліда перевіряється на практиці, тому що вона теорія»;

«Крадіжка — злочин, тому що вона суспільно небезпечне діяння» тощо.

Силогізм, у якому пропущено один із засновків або висновок називається скороченим силогізмом, або ентимемою.

Термін ***«ентимема»*** походить від грецького ***inthymos***, що означає «в думці», «на думці» тощо.

Існує три види ентимеми:

а) Ентимема з пропущеним більшим засновком.

Наприклад, «Земля має природний супутник, тому що вона планета»;

б) Ентимема з пропущеним меншим засновком.

Наприклад, «Земля має природний супутник, тому що усі планети мають природні супутники»;

в) Ентимема з пропущеним висновком.

Наприклад, «Всі планети мають природний супутник, а Земля — планета».

Застосування ентимем у практиці міркування значно підвищує ефективність процесу обміну думками, процесу спілкування, але іноді приводить до значної кількості помилок у наших міркуваннях. Коли користуються повним силогізмом, помилку легше помітити. Але якщо у силогізмі пропускається якась частина, то саме в ній і може критися помилка.

З метою уникнення помилок при користуванні скороченими силогізмами треба вміти знайти пропущену частину силогізму і відновити силогізм у повному вигяді. І лише потім звернутися до наведеного вище алгориту перевірки силогізму.

Для того, щоб відновити силогізм у повному вигляді, необхідно здійснити такі кроки:

а) Визначити, що дано в ентимемі: два засновки, або один засновок і висновок;

б) Знайти терміни силогізму в наявних частинах силогізму;

в) Відновити по знайдених термінах силогізму відсутню частину силогізму;

г) Застосувати алгоритм перевірки силогізму до реконструйованого силогізму.

Розглянемо вищезазначене на *прикладах*.

І. *«Крадіжка — злочин, тому що вона суспільно небезпечне діяння».*

II. *«Земля — планета, тому що вона обертається навколо Сонця»*.

Відновимо у повному вигляді силогізм, виходячи із наявної ентимеми. У ентимемі **II** маємо висновок (який стоїть перед словами *«тому що»*) і засновок. Запишемо їх за схемою силогізму:

Земля обертається навколо Сонця.
___
Земля — планета.

Виходячи із висновку, визначимо більший та менший терміни силогізму. Відповідно ***S* — *«Земля»*** і ***P* — *«планета»***, тоді наявний засновок *«Земля обертається навколо Сонця»* — ***буде меншим***. Отже, пропущеним є більший засновок. Він може мати два варіанти структури:

1) M — P і

2) P — M.

У зв'язку з цим сформулюємо два силогізми:

I. *Усі планети* **(*P*)** *обертаються навколо Сонця* **(*M*)**.
Земля **(*S*)** *обертається навколо Сонця* **(*M*)**.
___
Земля **(*S*)** *— планета* **(*P*)**.

II. Деякі небесні тіла , що обертаються навколо *Сонця***(*M*)**, *є планети* **(*P*)**.
Земля **(*S*)** *обертається навколо Сонця* **(*M*)**.
___
Земля **(*S*)** *— планета* **(*P*)**.

Тепер застосуємо алгоритм перевірки силогізму. Якщо розглянути силогізм **I,** то очевидно, що він побудований за ***II-ю фігурою*** простого категоричного силогізму. Але у ньому порушується друге правило цієї фігури. Отже, висновок логічно не слідує із даних засновків. Схема силогізму **II** побудована за ***I-ю фігурою*** простого категоричного силогізму, але в ній порушується перше правило цієї фігури («***Більший засновок повинен бути загальним судженням***»). Отже, висновок логічно не слідує із даних засновків. Якщо ж спробувати утворити загальне судження, то воно виявиться ***хибним***: *«Усі небесні тіла, що обертаються навколо Сонця — планети»*. Таким чином, ***наведена ентимема неправильна.***

Але цілком правомірно виникає питання: *«Хіба Земля не планета?»*. Дійсно, Земля є планетою і, у цьому випадку, висновок даної ентимеми є істинним судженням. Але ще раз підкреслимо, що цей висновок логічно не випливає із даних засновків. Тому треба знайти ті засновки, із яких з необхідністю буде випливати істинність даного висновку.

Подібні випадки зустрічаються досить часто. На перший погляд, достатньо мати істинний висновок, щоб стверджувати правильність умовиводу. Але це не так. Тому що висновок може бути істинним, а його обгрунтування помилковим.

д) Силогістика та метод аналітичних таблиць

Окрім наведених способів доведення правильності модусів категоричного силогізму застосовують ще й метод аналітичних таблиць. Особливо цей метод ефективний у зв'язку з перекладом висновків із категоричних висловлювань на мову логіки предикатів. Справа в тому, що існує суттєва відмінність арістотелівської силогістики від класичної логіки предикатів. Ця відмінність полягає в тому, що класична логіка предикатів припускає такі предикати, обсяг яких не містить жодного елемента (пуста множина). Силогістика ж не передбачає пустих термінів. Тому не будь-який вираз логіки предикатів, що репрезентує правильний висновок силогістики, буде загальнозначущим.

Щоб застосувати метод аналітичних таблиць для перевірки правильності висновків, сформульованих мовою логіки предикатів, необхідно додатково до аналітичних правил логічних термінів, що використовуються у логіці висловлювань, ввести по два аналітичних правила для кожного квантора:

$$\frac{T\,\forall x\,P(x),}{T\;P(a)}\qquad\qquad \frac{F\,\forall x\,P(x),}{F\;P(в)}\qquad\qquad \frac{T\,\exists x\,P(x),}{T\;P(в)}\qquad\qquad \frac{F\,\exists x\,P(x)}{F\;P(a).}$$

У наведених правилах у ролі змінних фігурують ***а*** і ***в***. ***Вони відрізняються тим, що змінна а*** є ***необмеженою змінною***, а ***в — обмеженою.***

Ці обставини справляють певний вплив на застосування аналітичних правил для кванторів. Мається на увазі те, що при застосуванні правил ***T***∀ і ***F***∃ використовується буква ***а***, яка означає будь-яку змінну.

У правилах ***F***∀ та ***T***∃ змінна ***в*** означає таку предметну змінну, яка не зустрічається в жодній формулі гілки таблиці, де застосовувалося це правило.

Правила ***T***∀ та ***F***∃ дають можливість підставити будь-яку змінну, але підставляють лише ті змінні, які роблять аналітичну таблицю замкненою. Проілюструємо сказане на прикладі.

Встановимо методом аналітичних таблиць тотожно-істинність виразу.

Доведення:

	0. F $\exists x\, \forall y\, A(x,y) \supset \forall y\, \exists x\, A(x,y)$	
I.	***1. T*** $\exists x\, \forall y\, A(x,y)$	
	2. F $\forall y\, \exists x\, A(x,y)$	***F***⊃ ***до 0***
II.	***3.T*** $\forall y\, A(в,y)$	***T***∃ ***до 1***
III.	***4. F*** $\exists x\, A(x,c)$	***F***∀ ***до 2***
IV.	***5.T*** $A(в,c)$	***T***∀ ***до 3***
V.	***6. F*** $A(в, c)$	***F*** ∃ ***до 4***
	+	

На першому кроці доведення ми отримали формули ***1, 2,*** застосувавши правило ***F***⊃, на другому кроці ми застосували правило ***T***∃, де замість ***x*** підставили змінну з обмеженням ***в***. На третьому кроці правило ***T***∃ також вимагає ввести обмежену змінну ***в***, але ми вже в цій гілці, використовуючи правило ***T***∃, зверталися до букви ***в,*** тому вводимо змінну ***с***.

На четвертому і п'ятому кроках, відповідно до правил ***T***∀ та ***F***∃, маємо право вводити будь-які змінні, але ми підставляємо саме ті змінні, які роблять дану таблицю замкненою.

Зробивши загальні зауваження щодо використання методу аналітичних таблиць, перевіримо коректність висновків із категоричних суджень, перекладених на мову класичної логіки предикатів.

Перевіримо правильність безпосереднього умовиводу, заснованого на відношенні підпорядкування. Побудуємо аналітичну таблицю для цього виразу:

	0. $F\ \forall x\ (S(x) \supset P(x)) \supset \exists x\ (S(x) \wedge P(x))$			
I.	*1.* $T\ \forall x\ (S(x) \supset P(x))$			
	2. $F\ \exists x\ (S(x) \wedge P(x))$			*F⊃ до 0*
II.	*3.* $T\ S(a) \supset P(a)$			*T∀ до 1*
III.	*4.* $F\ S(a) \wedge P(x)$ ¬			*F∃ до 2*
IV.	*5.* $F\ S(a)$	¬	*5′.* $TP(a)$ ¬	*T⊃*
V.	*6.* $\underline{F\ S(a)}$	*6′.* $\underline{F\ P(a)}$	*6″.* $\underline{F\ S(a)}$	*6‴.* $\underline{F\ P(a)}$
	−	−	−	+

Отже, аналітична таблиця не замкнена, а це свідчить про те, що ***правильний висновок у традиційній логіці не може бути виражений завжди істинним виразом у логіці предикатів, що й доводить його некоректність з точки зору логіки предикатів.***

Застосуємо метод аналітичних таблиць для перевірки логічної коректності модусів категоричного силогізму.

Для прикладу візьмемо ***модус «Cesare» другої фігури*** та ***модус «Fesapo» четвертої фігури:***

0.	$F\ [\forall x\ (Px) \supset \overline{M}(x)) \wedge \forall x\ (S(x) \supset M(x))] \supset \forall x\ (S(x) \supset \overline{P}(x))$				
I.	*1.* $T\ [\forall x\ (P(x) \supset \overline{M}(x)) \wedge \forall x\ (S(x) \supset M(x))]$				
	2. $F\ \forall x\ (S(x) \supset \overline{P}(x))$				*F⊃ до 0*
II.	*3.* $T\ \forall x\ (P(x) \supset \overline{M}(x))$				
	4. $T\ \forall x\ (S(x) \supset M(x))$				*T∧ до 1*
III.	*5.* $F\ (S(в) \supset \overline{P}(в))$				*F∀ до 2*
IV.	*6.* $T\ S(в)$				
	7. $F\ \overline{P}(в)$				*F⊃ до 5*
V.	*8.* $T\ P(в)$				*F~ до 7*
VI.	*9.* $T\ (P(в) \supset \overline{M}(в))$				*T∀ до 3*
VII.	*10.* $T\ (S(в) \supset M(в))$ ¬				*T∀ до 4*
VIII.	*11.* $F\ P(в)$ ¬		*11’.* $T\ \overline{M}(в)$ ¬		*T⊃ до 9*
IX.	*12.* $F\ S(в)$	*12′.* $T\ M(в)$	*12″.* $F\ S(в)$	*12‴.* $T\ M(в)$	*T⊃ до 10*
			13″. $F\ M(в)$	*13‴.* $F\ M(в)$	
	+	+	+	+	

Зробимо необхідні пояснення. Кроки ***1, 2, 3, 4*** отримані завдяки застосуванню аналітичних правил до імплікації та кон’юнкції. Правило ***F∀***, застосоване до ***2,*** дало можливість у виразі ***5*** замінити ***x*** на ***в***.

При застосуванні правила ***T***∀ (***кроки 9,10***) ми знову замість ***x*** підставляємо ***в***. Це зумовлено тим, що правило ***T***∀ дає право замість ***x*** підставляти будь-яку змінну, тому ми вибираємо ту змінну, яка робить нашу таблицю замкненою. Вирази ***11—13*** отримуємо, застосовуючи аналітичні правила для імплікації та заперечення.

У результаті доведення отримуємо замкнену таблицю. Отже, вихідна формула тотожно-істинна, а модус, який вона представляє, логічно коректний.

Побудуємо в такий самий спосіб аналітичну таблицю для ***модусу «Fesapo»***.

$0.\ F[\forall x\,(P(x) \supset \bar{M}(x)) \wedge \forall x\,(Mx) \supset S(x))] \supset \exists x\,(S(x) \wedge \bar{P}(x))$					
I.	$1.\ T\,(\forall x\,(P(x) \supset \bar{M}(x)) \wedge \forall x\,(M(x) \supset S(x)))$				
	$2.\ F\,\exists x\,(S(x) \wedge \bar{P}(x))$				$F\supset$, 0
II.	$3.\ T\,\forall x\,(P(x) \supset \bar{M}(x))$				
	$4.\ T\,\forall x\,(M(x) \supset S(x))$				$T\wedge$, 1
III.	$5.\ T\,(P(a) \supset \bar{M}(a))$				$T\forall$, 3
IV.	$6.\ T\,(M(a) \supset S(a))$				$T\forall$, 4
V.	$7.\ F\,(S(a) \wedge P(a))\ \neg$				$F\exists$, 2
VI.	$8.\ F\,P(a)\ 8'.T\ \bar{M}(a)\ \neg$				$T\supset$, 5
VII.	$9.\ F\,M(a)\ \neg$	$9'.\ TS(a)\neg$	$9''.\ FM(a)\ \neg$	$9'''.\ TS(a)\ \neg$	$T\supset$, 6
VIII.	$10.\ FS(a)$	$10'.\ FP(a)$	$10''.FS(a)$	$10'''.\ F\ \bar{P}(a)$	$P(a)\ F\wedge\ 7$
	–	$10'.\ TP(a)$	+	$10'''.\ TP(a)$	
		+		+	
	1	2	3	4	
	$10^{IV}.\ FS(a)$	$10^{V}.\ F\ \bar{P}(a)$	$10^{VI}.\ FS(a)$	$10^{VII}.\ F$	
	$10^{IV}.\ FM(a)$	$10^{V}.\ FM(a)$	$10^{VI}.\ FM(a)$	$10^{VII}.\ FM(a)$	
	–	$10^{V}.TP(a)$	+	$10^{VII}.\ TP(a)$	
		–		–	
	5	6	7	8	

Отже, аналітична таблиця для ***модусу «Fesapo» незамкнена***, що свідчить про неможливість виразити його завжди істинною формулою логіки предикатів.

Застосовуючи метод аналітичних таблиць, ми можемо перевірити, чи всі висновки силогістики являються логічно коректними, чи ні.

4. Недедуктивні умовиводи

До недедуктивних умовиводів відносяться:
— ***індуктивні умовиводи*** та
— ***умовиводи за аналогією.***

Як уже зазначалося, для недедуктивних умовиводів характерним є те, що в них між засновками та висновком існує відношення підтвердження, а висновок носить характер гіпотези.

Розпочнемо розгляд недедуктивних умовиводів з індукції.

а) Індуктивні умовиводи

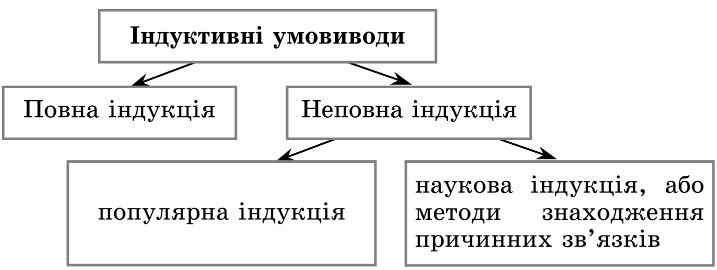
Індуктивним умовиводом називається умовивід, в якому із одиничних або часткових суджень виводиться загальне судження. *Наприклад:*

Земля має природний супутник.
Марс має природний супутник.
Юпітер має природний супутник.
. . . .
Земля, Марс, Юпітер ... це планети Сонячної системи.

Отже, імовірно, що будь-яка планета Сонячної системи має природний супутник.

Індуктивні умовиводи поділяються на :
— ***повну індукцію*** і
— ***неповну індукцію.***
У свою чергу, неповна індукція має два види:
— ***популярна індукція*** і
— ***наукова індукція.***

Виходячи з цього, схема типології індуктивних умовиводів має такий вигляд:



Повна індукція

П о в н о ю індукцією називається такий умовивід, у якому на підставі притаманності ознаки кожному предметові деякої множини робиться висновок про належність цієї ознаки всім предметам цієї множини.

Із даної дефініції видно, що повна індукція може ефективно використовуватися тільки стосовно скінченних і осяжних множин. ***Оскільки повна індукція передбачає дослідження кожного елемента певної множини, то висновок тут носить достовірний характер.*** Іноді, маючи це на увазі, говорять, що дедуктивний умовивід і повна індукція схожі.

Наприклад:

N *знав потерпілого.*
M *знав потерпілого.*
K *знав потерпілого.*
Z *знав потерпілого.*
N, M, K, Z *— це всі*[1] *мої найближчі родичі.*
___
Отже, всі мої найближчі родичі знали потерпілого.

Мовою логіки предикатів структура повної індукції записується так:

$$\frac{\begin{array}{c} P(a_1) \\ P(a_2) \\ P(a_3) \\ P(a_4) \end{array}}{\forall x\, P(x).}$$

У математиці застосовується спосіб доведення загальних положень, який нагадує зовні повну індукцію. Цей спосіб доведення називають ***математичною індукцією***. Він базується на особливостях будови і властивостях натурального ряду чисел. Відомо, що натуральний ряд чисел побудований за простим законом: ***«Кожне натуральне число більше від попереднього рівно на одиницю»***.

Враховуючи цей закон, можна обґрунтувати загальні положення: ***«Якщо якась ознака притаманна першому***

[1] Слово ***«всі»*** тут вживається у значенні, що ***N, K, M, Z*** вичерпують клас найближчих родичів.

числу натурального ряду і ця ж ознака притаманна довільному числу n, то вона буде притаманна і наступному за n числу, тобто n + 1». А це означає, що ми довели притаманність даної ознаки будь-якому числу натурального ряду.

Структуру цього міркування можна виразити формулою:

$$P(1) \wedge P(n) \supset P(n+1) \models \forall x\, P(x).$$

У цій формулі кожний із виразів виконує конкретну функцію:

P(1) — це базис індукції;

P(n) — індуктивне припущення;

P(n) ⊃ P(n + 1) — індуктивний крок.

Отже, математична індукція за характером висновку подібна до дедуктивного умовиводу, а за побудовою — до індукції.

Неповна індукція

У тих випадках, коли мають справу із неосяжними множинами предметів (які ж до того не так добре впорядковані, як натуральний ряд чисел), користуються неповною індукцією.

Н е п о в н о ю індукцією називається умовивід, у якому висновок про весь клас предметів базується на вивченні тільки деяких предметів, що належать до даного класу.

Наприклад:

Київський університет імені Тараса Шевченка має статус національного вузу.

Харківська юридична академія імені Ярослава Мудрого має статус національного вузу.

Український аграрний університет має статус національного вузу.

Київський університет імені Тараса Шевченка, Харківська юридична академія імені Ярослава Мудрого, Український аграрний університет — це основні вузи України.

Отже, імовірно, що всі основні вузи України мають статус національного вузу.

Неповну індукцію відрізняє від повної та математичної те, що висновок у ній, в кращому випадку, є істинним з більшою або меншою мірою імовірності. Іншими словами, ***висновок неповної індукції не випливає логічно із засновків (тобто, істинність засновків не гарантує істинності висновку), а лише підтверджується ними більшою або меншою мірою.*** Наведений приклад досить простий, і ситуація, коли ми можемо виразити імовірність істинності висновку, зустрічається не так часто. Тому у логіці розробляються спеціальні методи оцінки імовірності висновку в індуктивних умовиводах.

Неповна індукція буває двох видів:

— ***популярна, або індукція через простий перелік,*** і

— ***наукова.***

П о п у л я р н о ю індукцією називається такий вид неповної індукції, у якому відсутній конкретний метод відбору засновків. Популярна індукція відрізняється від повної тим, що вона використовується при аналізі кінцевих неосяжних і нескінченних множин предметів. Її ще називають ***«індукція через простий перелік при відсутності контрприкладу».***

У популярній індукції узагальнення базується на тому, що в усіх прикладах, де спостерігаються елементи множини ***M,*** вони мають властивість ***P***, яка регулярно повторюється при спостереженні елементів цієї множини:

$$\frac{\begin{array}{c} P(a_1) \\ P(a_2) \\ \ldots\ldots\ldots \\ P(a_n) \\ a_1 \in M,\ a_2 \in M,\ \ldots,\ a_n \in M \end{array}}{\forall x\, P(x)}$$

Необхідною умовою узагальнення $\forall x\, P(x)$ є відсутність контрприкладу для елементів множини ***M***. Висновок популярної індукції є імовірним, правдоподібним. ***Імовірний характер висновку популярної індукції визначається випадковим характером відбору досліджуваних предметів, відсутністю різноманітності серед досліджуваних предметів і відсутністю гарантій від контрприкладу.***

Випадковий характер вибору предметів, що належать до множини, яку досліджують, зумовлений тим, що предмети $\boldsymbol{a_1, a_2, \ldots, a_n}$ цієї множини випадково володіють ознакою $\boldsymbol{P}$:

Франція — республіка.
Австрія — республіка.
Італія — республіка.
Франція, Австрія, Італія — європейські держави.

Отже, всі європейські держави мають республіканську форму правління.

Хоча формально такий умовивід схожий на правильний, але його висновок хибний, оскільки відомо, що існують держави Європи в яких інша форма правління.

Популярна індукція не враховує також різноманітності досліджуваних предметів.

Наприклад:

Перший зустрічний на Хрещатику знає, як пройти до стадіону «Динамо».
Другий зустрічний — знає, як пройти до стадіону «Динамо».
Третій зустрічний — знає, як пройти до стадіону «Динамо».

Отже, всі зустрічні на Хрещатику знають, як пройти до стадіону «Динамо».

Але може виявитися, що опитувалися лише мешканці міста Києва, а опитування іногородніх може дати інший результат. Головним недоліком популярної індукції є відсутність гарантії від контрприкладу:

N причетний до злочину.
Брат N причетний до злочину.

Отже, будь-хто з родини N здатний скоїти злочин[1].

Для того, щоб підвищити надійність висновку у популярній індукції, необхідно дотримуватися таких вимог:

а) збільшувати число досліджуваних випадків;

---

[1] У цьому прикладі наявна помилка, яка часто трапляється із популярною індукцією: «***поспішне узагальнення***».

Суть цієї помилки полягає у тому, що у засновках не враховуються усі обставини, які є причиною появи досліджуваного явища.

б) збільшувати різноманітність досліджуваних випадків;

в) враховувати характер зв'язку між досліджуваними предметами та їх ознаками.

Наступним видом неповної індукції є ***наукова індукція або метод знаходження причинних зв'язків***[1].

Всього таких методів п'ять:

1) Метод єдиної подібності;

2) Метод єдиної відмінності;

3) Об'єднаний метод подібності і відмінності;

4) Метод супутних змін;

5) Метод залишків.

Метод єдиної подібності базується на таких властивостях причинного зв'язку, як передування, необхідність і всезагальність. Суть цього методу полягає у виявленні серед умов досліджуваного явища такої умови, яка постійно передує даному явищу. ***Сам метод єдиної подібності можна визначити так:***

«Якщо яка-небудь умова К постійно передує появі явища х при зміні всіх інших умов, то імовірно ця умова є причиною х».

Наприкалад: «*На автобазі 7.У, 10.У, 13.У трапилося три випадки крадіжок. Слідчий визначив коло осіб, які могли бути причетними до цього, і застосував таку таблицю:*

Дата	Коло осіб	Спостережуване явище
7.У	**M, N, Z**	**Крадіжка**
10.У	**A, B, N**	**Крадіжка**
13.У	**C, D, N**	**Крадіжка**

Слідчий робить висновок, що винуватцем скоріше всього є ***N***».

Схема цього методу така:

1. АВС — а;
2. АДЕ — а;
3. АКZ — а.

Отже, причиною явища ***а*** *є обставина* ***А.***

---

[1] Методи знаходження причинних зв'язків відкрив англійський філософ ***Френсіс Бекон*** (1561—1626 рр.), а потім удосконалив їх і систематизував англійський логік ***Джон Стюарт Мілль.***

Наступним методом є ***метод єдиної відмінності***, який визначається так: ***«Якщо за наявності умови К настає досліджуване явище х, а за її відсутності явище не настає, то К є причиною появи явища х».***

Наприклад: *«У повітрі, де є кисень, свічка горить. У повітрі, де відсутній кисень, свічка гасне. Отже, наявність кисню є причиною горіння свічки».*

Схема цього методу така:

ABC — a
BC — —

Отже, ***A*** *є причиною явища* ***a***.

Існує ***об'єднаний метод подібності і відмінності*** для знаходження причинних зв'язків. Його визначають таким чином:

«Якщо два або більше випадків, коли настає явище х, подібні тільки за однієї умови К, у той час як два або більше випадків, коли дане явище х відсутнє, відрізняються від перших випадків тільки тим, що відсутня умова К, то К є причиною х».

Повернемося до прикладу з крадіжками на автобазі. Порівнюючи дні тижня, коли були скоєні крадіжки і коли ні, слідчий склав таку таблицю:

Дата	Коло осіб	Подія
7.У	**M, N, Z**	**Крадіжка**
8.У	**A, B, C**	**Крадіжки немає**
9.У	**D, N, F**	**Крадіжка**
10.У	**D, B, C**	**Крадіжки немає**
11.У	**Q, N, Z**	**Крадіжка**
12.У	**S, P, R**	**Крадіжки немає**

Порівнюючи рядки таблиці, слідчий переконується в тому, що крадіжки траплялися, коли працював ***N,*** і не відбувалися, коли ***N*** не працював. Тому є підстава зробити висновок, що імовірно ***N*** причетний до крадіжок.

Схема цього методу зображується так:

АВС — а
АДК — а
ВС — —
ДК — —

---

*Отже, **А** є причиною явища **а**.*

Виявляти причину появи якогось явища можна не тільки по тому, чи присутня вона, чи відсутня, а й по тому як залежить інтенсивність наслідку від інтенсивності причини.

У цьому випадку застосовують ***«метод супутних змін»:***

«Якщо із зміною умови К у тій же мірі змінюється деяке явище х, а решта явищ залишаються незмінними, то імовірно, що К є причиною х».

Наприклад:

«За всіх однакових умовах збільшення сили струму в колі супроводжується збільшенням нагрівання провідника».

Цей метод має схему:

При умовах $\boldsymbol{A_1}$ ***ВСД*** *виникає явище* $\boldsymbol{a_1}$.
При умовах $\boldsymbol{A_2}$ ***ВСД*** *виникає явище* $\boldsymbol{a_2}$.
При умовах $\boldsymbol{A_3}$ ***ВСД*** *виникає явище* $\boldsymbol{a_3}$.

---

*Отже, **А** є причиною явища **а**.*

Поряд з названими методами застосовується ще один метод, а саме ***метод залишків***:

«Якщо складні умови породжують складну дію і відомо, що частина умов викликає частину цієї дії, то залишкова частина умов викликає залишкову частину дії».

Прикладом, який ілюструє цей метод, є факт відкриття планети Нептун. Спостерігаючи за величинами відхилення планети Уран від власної орбіти, вчені врахували відхилення величини ***а, в, с,*** які були викликані впливом планет ***А, В, С***. Але Уран відхилявся ще на величину ***d***. Тоді був зроблений висновок, що існує невідома планета ***Д,*** яка викликає це відхилення.

Цьому методові відповідає схема:

АВ *є причиною складного явища **а, в**.*
В *є причиною **в**.*

---

*Отже, **А** є причиною **а**.*

Незважаючи на відому обмеженість індуктивних методів знаходження причинних зв'язків, як і індукції в цілому, вони мають вагоме значення. При вивченні більш простих предметів та явищ індуктивні висновки, як правило, більш достовірні і шляхи їх перевірки більш прості, при дослідженні більш складних предметів і явищ ці висновки менш достовірні, а шляхи їх перевірки більш складні.

б) Аналогія

Як уже зазначалося, в дедуктивних умовиводах ми переходимо від більш загального знання до менш загального, в індуктивних умовиводах здійснюється перехід від часткового знання до загального. Однак у практиці міркувань часто виникає необхідність переходу від одиничного до одиничного, від часткового до часткового, від загального до загального. Такі переходи можливі завдяки умовиводам за аналогією[1].

А н а л о г і я — це такий недедуктивний умовивід, у якому судження про притаманність певної ознаки деякому об'єктові виводиться на основі подібності цього об'єкта з іншим об'єктом.

Можна навести ще таку дефініцію: ***«Аналогією називається такий умовивід, де від подібності двох предметів у деяких ознаках робиться висновок про схожість цих предметів у інших ознаках».***

Оскільки аналогія — недедуктивний умовивід, то висновок у ній буде імовірним навіть при істинності засновків. Розглядаючи види індуктивних умовиводів, ми переконалися, що імовірність висновків у них може бути більшої або меншої міри. Це залежить від характеру засновків і способу організації конкретних умовиводів. Імовірність висновків за аналогією нижча, навіть від популярної індукції. Це зумовлює те, що аналогія рідко використовується для обгрунтування суджень.

Але роль аналогії надзвичайно велика як евристичного засобу. Вона є своєрідним плідним джерелом здогадок, передбачень, гіпотез, які потім піддаються серйозній переві-

---

[1] Термін ***«аналогія»*** походить від грецького слова ***analogia***, тобто відповідність, подібність.

рці дедуктивними та індуктивними засобами. Основоположник кібернетики ***Н. Вінер*** писав: «З самого початку я був вражений схожістю між принципами дії нервової системи і цифрових обчислювальних машин. Я не збираюся стверджувати, що ця аналогія є повною і що ми вичерпуємо всі властивості нервової системи, уподібнивши її цифровим обчислювальним пристроям. Я хотів би тільки підкреслити, що в деяких відношеннях поведінка нервової системи дуже близька до того, що ми спостерігаємо в обчислювальних пристроях»[1].

Отже, видатний вчений надихався в своїх відкриттях оригінальною аналогією між нервовою системою і цифровою обчислювальною машиною.

Як і будь-який умовивід має в своїй структурі засновки і висновок, так і аналогія має засновки і висновок. Визначимо термінологію, якою користуються при побудові аналогії.

З р а з к о м аналогії називається об'єкт, ознака якого переноситься на другий об'єкт.

С у б ' є к т о м аналогії називається об'єкт на який переноситься ознака.

Зразок і суб'єкт називаються т е р м і н а м и аналогії.

Ознака, яка переноситься із зразка на суб'єкт, називається переносною ознакою.

Ознака, яка одночасно притаманна зразку і суб'єкту і яка є підставою для переносу ознаки, що нас цікавить, називається о с н о в о ю аналогії.

До структури аналогії входять чотири види суджень:

1) судження про наявність основи у зразка;

2) судження про наявність основи у суб'єкта;

3) судження про наявність переносної ознаки у зразка;

4) судження про наявність переносної ознаки у суб'єкта.

Перші три судження — це засновки, а четверте судження — висновок аналогії.

Існує два види аналогій:

— ***аналогія властивостей*** і

— ***аналогія відношень.***

---

[1] *Виннер Н. Я.* Я — математик. — М., 1967. — С. 279.

***Аналогією властивостей* називається такий умовивід, у якому переносною ознакою є властивість.**

Класичним прикладом аналогії властивостей є обгрунтування гіпотези про існування життя на Марсі. Якщо позначити *Землю* і *Марс* відповідно термами ***а*** і ***в***, а ознаку *«мати життя»* через предикатор ***Q***, то обргунтовуване твердження *«На Марсі є життя»* матиме вигляд — ***Q(в)***. Порівнюючи властивості, які має *Марс* і *Земля,* виявляють, що *Марс* і *Земля* є планетами P_1, вони обертаються навколо Сонця P_2, світять відображеним світлом P_3 тощо. Отже, має місце їх схожість за ознаками P_1, P_2, P_3 . Це й дає підставу зробити висновок за аналогією властивостей, що *«На Марсі є життя»*.

Структура цього умовиводу має такий вигляд:

$$\begin{array}{l} P_1(a) \wedge P_2(a) \wedge P_3(a), \ldots, P_n(a). \\ P_1(в) \wedge P_2(в) \wedge P_3(в), \ldots, P_n(в). \\ Q(a) \\ \hline Q(в). \end{array}$$

Читається ця схема так:

$$\begin{array}{l} \textit{Предмет } \mathbf{a} \textit{ має ознаку } P_1, \ldots, P_n. \\ \textit{Предмет } \mathbf{в} \textit{ має ознаку } P_1, \ldots, P_n. \\ \textit{Предмет } \mathbf{a} \textit{ має ознаку } Q. \\ \hline \textit{Отже, предмет } \mathbf{в}\textit{, імовірно, має ознаку } Q. \end{array}$$

Наведемо ще один приклад: *«В одному районі міста зафіксовано 3 випадки крадіжок антикварних речей, шляхом проникнення в квартиру через вхідні двері за допомогою портативного електрозварювального апарата. У результаті розслідування виникла версія, що це були одні й ті самі злочинці».*

Підставою для аналогії були ознаки:
1) характер злочину (крадіжка);
2) однотипність краденого (антикваріат);
3) шлях і спосіб проникнення.

***Аналогією відношення* називається умовивід, в якому переносною ознакою є ознака відношення.**

Прикладом аналогії відношень є відкриття ***Резерфордом*** планетарної моделі атома. На підставі проведених експериментів ***Резерфорд*** установив низку подібних відношень між електронами і ядром, з одного боку, та планетами і Сонцем, з іншого.

Якщо ми маємо дві системи упорядкованих об'єктів: $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ і $\text{в} = (\text{в}_1, \text{в}_2, \dots, \text{в}_n)$, між якими існують однакові відношення, то міркування можна побудувати так:

$$\begin{array}{l} P_1(a_1, a_2, \dots, a_n) \wedge P_2(a_1, a_2, \dots, a_n) \wedge \dots \wedge P_n(a_1, a_2, \dots, a_n). \\ P_1(\text{в}_1, \text{в}_2, \dots, \text{в}_n) \wedge P_2(\text{в}_1, \text{в}_2 \dots, \text{в}_n) \wedge \dots \wedge P_n(\text{в}_1, \text{в}_2, \dots, \text{в}_n). \\ Q(a_1, a_2, \dots, a_n) \\ \hline Q(\text{в}_1, \text{в}_2, \dots, \text{в}_n). \end{array}$$

Для підвищення міри імовірності аналогії треба дотримуватися таких вимог:

1. Число спільних для зразка і суб'єкта ознак повинно бути якомога більшим.

2. Основа аналогії повинна бути суттєвою для зразка і суб'єкта аналогії.

3. Спільні ознаки для зразка і суб'єкта повинні бути найрізноманітніші.

4. Переносна ознака повинна бути зв'язана із спільними ознаками.

Аналогія є своєрідним генератором нових ідей. За допомогою аналогій розкриваються нові грані ідей, які довели свою ефективність, встановлюються зв'язки між новими ідеями, гіпотезами і достовірним знанням.

Контрольні питання

1. Структура умовиводу.
2. Поняття дедуктивного та індуктивного умовиводу.
3. Поняття висновку логіки висловлювань.
4. Типологія правил висновку логіки висловлювань.
5. Визначення основних прямих правил.
6. Характеристика основних непрямих правил.
7. Способи обгрунтування правил висновку логіки висловлювань.
8. Побудова доведення правила висновку.
9. Поняття аналітичного правила.
10. Визначення методу аналітичних таблиць.
11. Побудова аналітичної таблиці.
12. Структура аналітичної таблиці.

13. Умовно-категоричний умовивід і його правильні різновиди.
14. Правило транзитивності імплікації.
15. Різновиди розділово-категоричного силогізму.
16. Поняття дилеми.
17. Правила побудови розділово-категоричних умовиводів.
18. Логічна структура дилем.
19. Обернення як безпосередній умовивід.
20. Характеристика перетворення та протиставлення предикату як безпосередніх умовиводів.
21. Умовиводи за логічним квадратом.
22. Обгрунтування умовиводів за логічним квадратом.
23. Структура простого категоричного силогізму.
24. Поняття фігури та модусу простого категоричного силогізму.
25. Загальні правила простого категоричного силогізму.
26. Спеціальні правила фігур простого категоричного силогізму та їх обгрунтування.
27. Виведення модусів фігур простого категоричного силогізму.
28. Обгрунтування модусів ***II, III*** та ***IV*** фігур шляхом звернення їх до модусів ***I*** фігури.
29. Застосування аналітичних таблиць для обгрунтування силогістичних висновків.
30. Визначення недедуктивного умовиводу.
31. Типологія умовиводів.
32. Характерні особливості повної індукції.
33. Своєрідність математичної індукції.
34. Види неповної індукції.
35. Визначення популярної індукції.
36. Заходи, які підвищують надійність висновку у популярній індукції.
37. Характеристика методів знаходження причинних зв’язків.
38. Визначення аналогії як умовиводу.
39. Структура умовиводів за аналогією.
40. Види аналогій.
41. Умови підвищення ефективності аналогій.

Контрольні вправи

1. Побудуйте доведення таких правил висновку:

$[(p \supset q) \wedge (p \supset r) \wedge (\overline{q} \vee \overline{r})] \models \overline{p}$;

$[(p \supset r) \wedge (q \supset r) \wedge (p \vee q)] \models p$;

$[(p \supset q) \wedge (r \supset s) \wedge (p \vee r)] \models (q \vee s)$;

$[(p \supset q) \wedge (r \supset s) \wedge (\overline{q} \vee \overline{s})] \models (\overline{p} \vee r)$.

2. Обгрунтуйте методом аналітичних таблиць такі правила висновку:

$[(p \wedge q) \supset r] \models [(p \wedge \overline{r}) \supset \overline{q}]$;

$[(p \wedge \overline{r}) \supset \overline{q}] \models [(p \wedge q) \supset r]$;

$[(p \supset (q \supset r)] \models [(p \wedge q) \supset r]$;

$[(p \supset q) \wedge (p \supset r) \wedge (\overline{q} \vee \overline{r})] \models \overline{p}$

3. Побудуйте доведення таких правил висновку за логічним квадратом:

$Asp \models \rceil\, Esp$;

$Asp \models \rceil\, a\ \overline{\text{є}}\ p$;

$a\ \overline{\text{є}}\ p \models \rceil\, Esp$;

$\rceil\, Isp \models Osp$;

$\rceil\, a\ \overline{\text{є}}\ p \models Osp$.

4. Наведіть приклади умовиводів шляхом обернення, перетворення та протиставлення предикату.

5. Наведіть приклади, де порушуються спеціальні правила ***I*** та ***IV*** фігур простого категоричного силогізму.

6. Побудуйте доведення спеціальних правил ***III*** та ***IV*** фігур простого категоричного силогізму.

7. Побудуйте доведення модусів ***II***, ***III*** та ***IV*** фігур простого категоричного силогізму шляхом зведення їх до модусів ***I*** фігури:

II фігура: AEE, EIO;

III фігура: AAI, EAO, OAO, IAI;

IV фігура: AAI, EAO, AEE.

8. Методом аналітичних таблиць перевірте правильність таких силогістичних висновків:

$\forall x\, (S(x) \supset P(x)) \models \exists x\, (P(x) \wedge S(x))$

$\forall x\, (S(x) \supset P(x)) \models \exists x\, (S(x) \wedge \overline{P}(x))$

$[\forall x\, (P(x) \supset M(x)) \wedge \exists x\, (S(x) \wedge \overline{M}(x)] \models \exists x\, (S(x) \wedge \overline{P}(x))$

$[\forall x\, (M(x) \supset P(x)) \wedge \forall x\, (M(x) \supset S(x))] \models \exists x\, (S(x) \wedge P(x))$

$[\forall x\, (P(x) \supset \overline{M}(x)) \wedge \forall x\, (M(x) \supset S(x))] \models \exists x\, (S(x) \wedge \overline{P}(x))$.

9. Наведіть приклад на кожен з індуктивних методів знаходження причинних зв’язків.

10. Наведіть приклад умовиводу, де має місце помилка «поспішне узагальнення».

11. Наведіть приклади аналогії відношень.

РОЗДІЛ XI

АРГУМЕНТАЦІЯ

У практиці міркувань ми часто зустрічаємося із ситуацією, коли необхідно не тільки мати істинне положення, а й продемонструвати, чому це положення істинне чи хибне, в чому полягає його доцільність або недоцільність. Цей спосіб інтелектуальної діяльності називають ***аргументацією***.

Аргументацію можна визначити як спосіб міркування, який складається із доведення і спростування, в ході яких формується переконання в істинності чи хибності якогось положення як у самого автора, так і у опонентів.

Доведенням і спростуванням широко користуються в різних науках і різноманітних галузях людської діяльності. Але лише у логіці розкривається природа доведення і спростування, описується їх структура, визначаються спеціальні правила.

1. Поняття доведення. Структура доведення

Термін ***«доведення»*** має декілька значень.

По-перше, «доведенням» називають факти, за допомогою яких встановлюється істинність певного положення.

По-друге, «доведенням» позначають джерела доказів, наприклад, літописи, архіви, оповіді очевидців, мемуари тощо.

Нарешті, ***по-третє, «доведенням» називають логічну процедуру, в ході якої встановлюється істинність певного положення за допомогою положень, істинність яких уже встановлена раніше.***

Саме третє значення терміна ***«доведення»*** є об'єктом дослідження логіки.

Структура доведення складається із:

— ***тези;***

— ***аргументів*** та

— ***демонстрації.***

Т е з а — це думка або положення, істинність якого потрібно довести.

Наявність тези є обов'язковою умовою будь-якого доведення. Теза може бути сформульована як на початку доведення, так і в будь-який момент доведення. ***У природній мові тезу виокремлюють такими зворотами: а) «Ось моя теза»; б) «Ось моє бачення»; в) «Це моя точка зору»; г) «Це моя позиція»; тощо.***

Іноді тезу проголошують без спеціального посилання на те, що дане положення є тезою. Як правило, теза формулюєтся у вигляді категоричного судження.

Наприклад,

«Земля має еліптичну орбіту руху»;

«Це імітація крадіжки»;

«Україна правова держава»;

«Сума внутрішніх кутів трикутника дорівнює 180^o».

Але бувають випадки, коли теза формулюється у формі запитаня.

Наприклад:

«Хто організатор убивства президента Дж. Кеннеді?»;

«Як була заснована Києво-Печерська Лавра?»;

«Які чинники політичної стабільності в Україні?».

У судовій практиці розрізняють:

— ***основну тезу*** і

— ***підлеглу тезу або часткову тезу.***

О с н о в н о ю т е з о ю називають положення, із якого випливають (або йому підпорядковуються) декілька явно сформульованих положень.

Тому доведення основної тези передбачає обґрунтування цих підлеглих положень.

П і д л е г л о ю т е з о ю називається положення, яке стає тезою лише тому, що завдяки йому доводиться основна теза.

Це і обумовлює те, що доведена часткова теза стає аргументом для основної тези.

Однією із основних властивостей тези є те, що вона повинна бути істинною. Хибне положення, яке висувається як теза, неможливо обґрунтувати ніяким доведенням.

А р г у м е н т — це думка, істинність якої уже встановлена раніше, і яка може бути використана для обґрунтування істинності довільного положення.

До аргументів відносять:

1) факти дійсності;

2) закони;

3) аксіоми;

4) дефініції;

5) раніше доведені положення.

Розглянемо кожен із видів аргументів.

Слово ***«факт»*** походить від латинського — ***factum,*** що означає зроблене, здійснене. Існує декілька значень цього терміна.

По-перше, під фактом розуміють істину, подію або результат;

по-друге, факт визначають як дещо реальне на противагу вигаданому;

по-третє, під фактом розуміють конкретне, одиничне на відміну від абстрактного, загального;

по-четверте, факт трактують як особливого роду положення, що фіксує емпіричне знання, яке протиставляється теорії або гіпотезі.

У межах нашого дослідження під ***фактом*** розуміється явище або подія, що мають місце в дійсності, і які правильно відображені в судженні.

Факт є одним із важливих видів аргументів. Запорукою вагомості факту як аргументу є те, що факт, як правило, відображає дійсний стан справ і відкидати, заперечувати не погоджуватися із фактом означає йти всупереч дійсності. Факт є фундаментом, на якому будуються, формуються людські переконання.

Але факт як те, що наявне в дійсності, у сфері пізнання (у широкому смислі в сфері інтелектуальної діяльності) стає аргументом лише тоді, коли носій факту, суб'єкт факту озвучує його, проголошує його, пояснює його.

Наприклад, *подію затемнення Сонця можна пояснити як явище, що відповідає законам астрономії і як знак різних соціальних катаклізмів* (*війна, голод, зміни влади тощо*).

Або ж факт наявності у підозрюваного знаряддя злочину ще не означає, що саме він причетний до злочину. Це знаряддя могло бути підкинутим, позиченим, купленим після скоєння злочину тощо.

Тому один і той самий факт може бути використаний для трактування або тлумачення різних положень. Тобто, факт лише тоді може стати аргументом, коли він правильно інтерпретований і ретельно пояснений. Своєрідне забарвлення мають факти у судовому процесі (дослідженні).

У судовому дослідженні факти трактуються як фактичні дані. Власне кажучи, розкриття злочину, встановлення злочинця, передбачає виявлення і збір фактів, які із достовірністю відтворюють обставини скоєння злочину, мотиви скоєння злочину, злочинне діяння, вказують на злочинця, істинність його вини. Тобто, фактичними даними по судовій справі можуть бути всі складові середовища, в якому трапилася протиправна дія. Але аргументом або судовим доказом факт стає лише тоді, коли він відповідає вимогам процесуального закону.

Наприклад, *інформація якоїсь особи, що спостерігала певний факт, перетворює даний факт в аргумент* (*доказ у певній справі*) *лише тоді, коли ця особа була допитана як свідок відповідно до процесуального закону і її свідчення занесені до протоколу згідно з вимогами процесуального закону.*

Наступним видом аргументів є ***закони.***

Серед законів розрізняють:

— ***закони природи*** (закони астрономії, фізики, математики, хімії і ін.);

— ***закони суспільства*** (закони соціології, економіки, права, моралі і т. ін.).

З а к о н и — це положення, які відображають суттєві необхідні та загальні зв'язки і відношення.

Тому дія закону є обов'язковою, неминучою. Закон не знає винятків. Неможливо, щоб закон поширювався лише на частину предметів чи явищ, які він описує.

Все це зумовлює те, що закони є фундаментом науки. Тому посилання на закон є глибоко переконливим. Достатньо встановити, що дане положення випливає із певного закону, як одразу із необхідністю визнається істинність цього положення.

Особливим видом аргументів є юридичні закони. У процесі слідства і судового засідання ми користуємося доказовими фактами, з яких намагаємося зробити певні висновки.

Наприклад, *щоб встановити причетність підозрюваного до злочину ми повинні зібрати докази у цій справі. Але самі докази поза правовою нормою не дають можливості зробити відповідні висновки. Лише тоді, коли факти співставляються з юридичною нормою, вони можуть стати аргументами. Іншими словами, у ході слідства і судового процесу висновки логічно спираються на факти дійсності і на відповідні статті закону.*

У ролі аргументів використовують також ***аксіоми.***

Загальновизнаним є те, ***що аксіоми — це положення, які не потребують доведення.*** Саме у такому розумінні будемо вживати цей термін.

Аксіоми як аргументи широкого використовуються в математичних та природничих науках. ***У гуманітарних науках деякі залежності теж можуть виконувати функцію аргументів.***

Маються на увазі такі:

— категоричний імператив І.Канта: «Дій так, щоб ти завжди ставився до людства як у своїй особі, так і в особі будь-кого іншого також, як до мети й ніколи не ставився б до нього тільки як до засобу»;

— деонтичний принцип: «Все, що не заборонено, те дозволено»;

— презумпція невинуватості: «Будь-хто вважається невинуватим, доки не доведено протилежне».

Часто в ролі аргументів використовують дефініції або визначення. Визначення, розкриваючи зміст поняття, є квінтесенцією, концентрованим знанням про предмет. Тому посилання на дефініцію є достатнім для визнання істинності тези.

Досить широко дефініції використовуються у судовій практиці. Це зумовлено тим, що дефініції правових понять містяться в юридичному законі, кодексі, правовому акті і цим самим є універсальними та загальнообов'язковими.

Аргументи-дефініції, як правило, використовуються в доведенні, коли встановлюється кваліфікація скоєного, що може розглядатися як злочин. Довести, що дана дія обвинувачуваного кваліфікована правильно, означає посилання на статтю закону, яка описує ознаки злочину, котрий проглядається у діях обвинувачуваного.

Наприклад, *якщо необхідно довести, що дії обвинувачуваного є шахрайством, то вказують не тільки на факти, що зібрані по даній справі, а й посилаються на статтю кримінального кодексу, яка описує шахрайство.*

Нарешті, ***в ролі аргументів часто виступають раніше доведені положення.*** Будь-яка наука включає в себе принципи, теорії, наукові судження, які мають логічне обгрунтування і підтверджені практикою. Саме вони й можуть виступати аргументами. Посилання на такі аргументи є достатнім для обгрунтування тези.

Роглянемо третю складову частину доведення — ***демонстрацію.*** Розглянуті до цього структурні частини доведення теза і аргумент за своєю логічною формою належать до суджень. Безпосередньо вони виражаються у реченні і сприймаються нами як щось реальне.

Демонстрація — це спосіб, форма зв'язку тези і аргументів.

Тому демонстрація не може бути виражена судженням. Самі мо собі теза і аргументи, поза логічним зв'язком ще не є доведенням. Довільне положення лише тоді стає аргументом, коли із нього виводиться теза. ***Демонстрація як процес виведення тези із аргументів завжди має форму умовиводу.***

Зазначимо, якщо стверджують, що демонстрація — це завжди умовивід, то мають на увазі не те, що доведення це якийсь новий вид умовиводу, поряд із описаним вище з умовиводом як формою мислення. Це — по-перше, а, по-друге, не будь-який умовивід є доведенням.

За дефініцією умовивід — це логічна форма, за допомогою якої отримують нове знання, відкривають істину. Тобто, перехід в умовиводі від засновків до висновку продукує, породжує нове знання. У доведенні ж здійснюється обгрунтування вже відомого знання, формується переконання в істинності раніше відкритого положення. Отже, у доведенні ми здійснюємо підбір аргументів для даної тези, але цьому підбору передує знання тези, проголошення, декларація істинності тези. Залишається це лише показати, продемонструвати. Правда, це тривалий процес. Іншими словами, якщо в умовиводі головним є питання *«Чи випливає висновок із засновків з логічною необхідністю?»*, то у доведенні — *«Чи насправді це має місце?»*.

Враховуючи вищезазначене про демонстрацію, можна розрізнити ***два види демонстрації:***

— ***у формі дедуктивного умовиводу*** і

— ***у формі індуктивного умовиводу.***

2. Види доведення

Усю множину доведень поділяють на ***прямі та непрямі***. Підставою такого поділу є спосіб доведення.

П р я м и м називається доведення, в якому теза безпосередньо випливає із аргументів.

Пряме доведення застосовують тоді, коли наявна достатня кількість аргументів.

Наприклад, для доведення судження *«Підручник з історії є джерелом інформації»* ***застосовуємо пряме доведення.***

«Підручник з історії є джерелом інформації» — ***теза;***

Судження **1.** «*Будь-яка книга є джерелом інформації*» — ***аргумент.***

Судження **2.** *«Підручник з історії належить до множини книг»* — ***аргумент.***

Якщо ми визнаємо істинність **1** та **2** аргументів, то з необхідністю вимушені визнати істинність висунутої тези.

У наведеному прикладі для здійснення прямого доведення застосовується в ролі демонстрації модус ***«Barbara»*** першої фігури простого категоричного силогізму.

Аналогічно можна застосувати ***пряме доведення*** для встановлення істинності такої тези: *«Шахрайство є суспільно небезпечним діянням»*.

«Шахрайство є суспільно небезпечним діянням» — ***теза;***

Судження **1.** *«Будь-який злочин є суспільно небезпечним діянням»* — ***аргумент;***

Судження **2.** *«Шахрайство є злочином»* — ***аргумент***

Таким чином, істинність **1** та **2** аргументів безапеляційно гарантує істинність тези.

У тих випадках, коли аргументів недостатня кількість, застосовують непряме доведення.

Н е п р я м и м* *доведенням називається такий вид доведення, у якому істинність тези випливає із хибності антитези.

А н т и т е з о ю* *називають положення, яке суперечить тезі.

Розрізняють два види непрямого доведення:

— ***апагогічні*** та

— ***розділові.***

Назва ***апагогічне доведення*** походить від грецького слова «***apagogos***», яке означає — «той, що відводить», «той, що відходить».

Апагогічне доведення іноді називають доведенням від супротивного. ***В апагогічному доведенні процес обгрунтування тези нібито відводиться убік від поставленої мети. Тобто замість того, щоб послатися на аргументи, які прямо і позитивно підтверджують істинність тези, висувають судження, яке суперечить тезі, потім із нього виводяться наслідки, що приводять до суперечності. Це дає підставу відкинути антитезу (судження, що суперечить тезі) і визнати істинність тези.***

Стратегія апагогічного доведення така.

Щоб обгрунтувати довільну тезу, потрібно здійснити такі кроки:

— ***висувають антитезу, яку тимчасово вважають істинною;***

— ***із неї виводять відповідні наслідки. Якщо дані наслідки суперечать дійсності положень, істинність яких визнана раніше, то цим самим встановлюється хибність антитези і визнається істинність тези.***

Наприклад, *у темі «Умовивід як форма мислення» шляхом апагогічного доведення ми обгрунтовували логічну коректність, надійність спеціальних правил фігур простого категоричного силогізму. Обгрунтовуючи спеціальні правила І-ї фігури, висували антитезу, положення, яке суперечить правилам цієї фігури. Із тимчасово прийнятих правил знаходили наслідки. Але ці наслідки суперечили загальним правилам простого категоричного силогізму. Це і змушувало нас визнати логічну надійність спеціальних правил І-ї фігури.*

Розглянемо приклад із юридичної практики.

Потрібно обгрунтувати тезу*: «Підозрюваний К. причетний до крадіжки»*. Аргументів маємо обмаль. ***Тому застосовуємо апагогічне доведення.***

«Підозрюваний К. причетний до крадіжки» — **теза**

«Підозрюваний К. не причетний до крадіжки» — ***антитеза***

Виводимо наслідки:

«Якщо К. не причетний до крадіжки, то на місці злочину не повинно бути його слідів. У результаті проведеного розслідування було встановлено, що на місці злочину К. залишив відбитки пальців, у будинку К. знайдено знаряддя злочину, у підвалі гаража К. знайдена частина крадених речей».

Таким чином, наша антитеза відпадає і ми повинні визнати істинність тези.

Наступним видом непрямого доведення є ***розділове доведення.***

Його суть полягає в побудові розділового судження, одним із елементів якого є теза. Інші структурні елементи цього розділового судження є несумісними із тезою. За формою, або за демонстрацією цей вид доведення репрезентований розділово-категоричним умовиводом.

Встановлюючи хибність усіх несумісних із тезою суджень, приходять до істинності тези.

Схема цього виду доведення така:

$$\frac{\begin{array}{l}\boldsymbol{P_1}\textbf{\textit{, або, ... , або }}\boldsymbol{P_n}\textbf{\textit{ або }}\boldsymbol{T}\\ \textbf{\textit{Невірно, що }}\boldsymbol{P_1}\textbf{\textit{, ... , невірно, що }}\boldsymbol{P_n}\end{array}}{\textbf{\textit{Отже, }}\boldsymbol{T}\textbf{.}}$$

Міркування за структурою розділового доведення є улюбленим прийомом авторів детективних романів. Як правило, дія відбувається в замкненому просторі на безлюдному острові, занесеному сніговими завалами потязі, відрізаному повінню від людей будинку тощо. Сюжет роману передбачає побудову розділового судження, в якому про когось із учасників драми стверджується, що він злочинець. Розгортання сюжету крок за кроком наближає нас до розв'язки.

При побудові розділового доведення треба дуже уважно підходити до формулювання розділового судження, до якого входить теза. Розділове судження повинно бути вичерпним, тобто в ньому повинні бути перераховані всі можливості, що існують в універсумі даного міркування.

На відміну від прямого доведення, у якому безпосередньо виводиться істинність тези із істинності аргументів, у непрямому доведенні обгрунтовують хибність суджень, які певним чином пов'язані з тезою. Тому у непрямомі доведенні можуть виникати помилки.

Звернемося до прикладу.

Розглянемо розділове судження, в якому одна із альтернатив є тезою розділового доведення: *«Він є або студентом старших курсів, або аспірантом, або молодшим науковим співробітником»*. Наступним кроком у побудові розділового доведення є встановлення хибності несумісних із тезою суджень. *У ході дослідження виявлено, що особа про яку йдеться в розділовому судженні, не є ні студентом старших курсів, ні аспірантом..*

Таким чином, ця людина є молодшим науковим співробітником.

Він є або студентом старших курсів, або аспірантом, або науковим співробітником.
Невірно, що він студент старших курсів, і невірно, що він аспірант.

Отже, він є молодшим науковим співробітником.

Підсумовуючи вищезазначене про непряме доведення, треба підкреслити його специфіку порівняно з прямим доведенням. У непрямому доведенні концентрують увагу або на отриманні наслідків із хибної антитези, або на встановленні хибності несумісних з тезою суджень. Це, з одного боку, обмежує сферу застосування непрямого доведення, а з іншого — вірогідність його результатів.

3. Спростування

Спростуванням називається така логічна операція, за допомогою якої встановлюють хибність або необгрунтованість тези.

Існує три види спростування:

1) Спростування тези;

2) Спростування аргументів;

3) Спростування демонстрації.

Роглянемо кожний вид спростування зокрема.

а) Спростування тези

Спростування тези — це логічна операція, завдяки якій встановлюється хибність тези.

Існують такі способи спростування:

а) спростування тези фактами;

б) спростування тези шляхом доведення істинності нової тези;

в) спростування тези шляхом виведення з неї наслідків, що суперечать дійсності.

а) Спростування тези фактами.

Відомо, що спростувати що-небудь легше, ніж довести. Досить одного факту, щоб відкинути загальновизнане положення.

Розглянемо універсальне положення: *«Будь-який метал тоне у воді»*. Для спростування цього положення досить знайти один метал, який не тоне у воді. *Таким металом є літій*. Отже, істинним буде судження: *«Деякі метали не тонуть у воді»*.

Візьмемо загальне судження: *«Будь-яка сучасна європейська держава має республіканську форму правління»*. Але фактом є існування в Англії конституційної монархії. Тому визнаємо істинним положення: *«Деякі європейські держави не мають республіканської форми правління»*.

На перший погляд здається, що спростування фактами тези є самим надійним способом. Але це не завжди так. ***По-перше***, отримати факт, який би відкидав тезу, надзвичайно важко. ***По-друге,*** часто вимагають, щоб факт не тільки повторювався, а й його можна було відтворити.

б) Спростування тези шляхом доведення істинності іншої тези.

В основі цього способу спростування лежить закон виключеного третього: «Із двох суперечливих суджень одне обов'язково істинне, а друге обов'язково хибне» Досить у ході дискусії довести, що істинною є нова теза, як попередня буде відкинута.

Хід такого спростування. Наприклад, потрібно спростувати тезу: *«Всі суспільно небезпечні діяння є злочином»*.

Для цього ми висуваємо нову тезу: *«Не всі суспільно небезпечні діяння є злочином»*.

Знаходимо аргументи для нової тези, посилаючись на те, що:

а) «Суспільно небезпечні діяння, вчинені неосудними особами, не є злочином»;

б) «Суспільно небезпечні діяння, вчинені малолітніми особами, не є злочином».

Таким чином, ***визнаємо істинною тезу:*** *«Деякі суспільно небезпечні діяння не є злочином»* і ***одночасно хибність попередньої тези.***

в) Спростування тези шляхом виведення з неї наслідків, що суперечать дійсності.

Процедура спростування тези таким способом передбачає такі кроки:

1. Вводиться припущення, що наявна тези істинна.

2. Із прийнятої тези виводять наслідок.

3. Застосовують правило умовно-категоричного силогізму: «Якщо наслідок хибний, то основа буде хибною».

Наприклад, маємо тезу: *«На Венері можливе органічне життя».* Припустимо, що спростовувана теза є істинною.

Якщо на Венері можливе життя, то температурні показники і показники тиску на поверхні Венери повинні співпадати із земними. Але температура поверхні Венери дорівнює 470^0—480^0, а тиск — 95—97 атмосфер.

Отже, органічне життя на Венері неможливе.

Розглянемо інший приклад.

У справі про крадіжку автомобіля обвинувачуваний зізнався, що автомобіль йому подарував його брат, який тривалий час працює за кордоном. Щоб спростувати це зізнання, слідчий припустив, що воно істинне, і вивів із нього наслідок. Якщо автомобіль дарований братом, то брат обвинувачуваного дійсно повинен мати певний достаток для цього. Перевіркою встановлено, що брат ніколи не працював за кордоном, а його прибутки не дозволяють зробити такого дарунку.

На цій підставі (від хибності наслідку) було спростовано зізнання обвинувачуваного.

б) Спростування аргументів

Спростування може бути направлене не тільки проти тези, а й проти аргументів. ***Існує ряд способів спростування аргументів:***

1) встановлення хибності аргументів;

2) встановлення недостатності аргументів відносно тези;

3) виявлення сумніву в істинності аргументів;

4) виявлення сумніву в надійності джерела аргументів.

Проаналізуємо кожен із способів.

1. Встановлення хибності аргументів.

Якщо встановлюють хибність аргументів, які використовуються у доведенні, то цим самим тезу відкидають як необґрунтовану.

Наприклад, треба довести тезу: *«Його брат здібний до наукової роботи»*. Для цього ми будуємо таке міркування. *«Усі студенти здібні до наукової роботи, а його брат студент університету. Отже, його брат здібний до наукової роботи»*. Це доведення спростовується шляхом встановлення хибності аргументу: *«Усі студенти здібні до наукової творчості»*.

Розглянемо приклад із юридичної практики.

Потрібно довести тезу: *«Підозрюваний причетний до злочину»*. Наведемо таке міркування. *«Будь-хто, в кого у родині є порушники закону, є потенційними злочинцями, а у підозрюваного були в родині порушники закону. Отже, він є злочинцем»*. Дане доведення спростовується встановленням хибності першого аргументу: *«Всі, у кого є в родині порушники закону, є потенційні злочинці»*.

2. Встановлення недостатності аргументів відносно тези.

Цей спосіб спростування передбачає констатацію недостатності аргументів для висунутої тези, тобто істинності аргументів невистачає для визнання істинності тези. У таких випадках потрібно відшукати нові аргументи.

Наприклад, хтось стверджує: *«Його брат є студентом університету»*. У якості аргументу наводиться констатація: *«Він складає іспити»*. Але наведений аргумент є недостатнім. *Вказана особа може складати іспити і у той же час не бути студентом, а бути школярем, навчатися в середньому спеціальному навчальному закладі тощо.*

Або візьмемо інший приклад.

Висувається теза: *«Він буде обраний головою комітету Верховної Ради»*. За аргумент береться факт: *«Він є народ-*

ним депутатом». Але цей аргумент знову (як і у попередньому прикладі) не є достатнім. Оскільки для обрання на цю посаду потрібні ще й інші чинники. Це і професійні, і моральні, і ділові і т.п. характеристики.

Цей спосіб спростування часто використовують у судовій практиці, особливо, коли обґрунтування причетності до злочину ведеться за допомогою непрямих доказів.

Наприклад: *«К. був визнаний винним і притягненим до суду на тій підставі, що бачили, як він виходив із будинку де було вчинено злочин. Адвокат К. спростував цей аргумент, посилаючись на те що в справі відсутні інші факти, які б вказували на причетність К. до даного злочину».*

3. Виявлення сумніву в істинності аргументів.

Суть цього виду спростування полягає у встановленні такого факту, що аргументи, на які посилаються в даному доведенні, самі потребують доведення їх істинності.

Як правило, цей спосіб спростування найчастіше використовується у судовій практиці. Якщо встановлено, що висновки по справі базуються не на достовірно відомих фактах, а лише на передбачуваних, то наведений аргумент відкидається.

Наприклад, у справі використовується такий аргумент: *«Мотивом даного злочину є помста».* Але при цьому виникає сумнів, що потерпілий і підозрюваний знали один одного до моменту скоєння злочину. Це й не дає нам можливості взяти даний факт за аргумент.

4. Виявлення сумніву в надійності джерела аргументів.

Суть даного способу спростування полягає в демонстрації недовіри до автора, що висловлює аргумент, або до фактичного матеріалу, на якому базується цей аргумент.

Наприклад, для обґрунтування тези про передумови відкриття в Києві університету св. Володимира як аргумент висувається твердження, що основною причиною відкриття університету була ініціатива передових кіл демократично налаштованої української інтелігенції, яка особливо пожвавила свою діяльність після грудневих подій 1825 р. на Сенатській площі.

В той же час архівні матеріали свідчать про те, що ініціатором відкриття університету св. Володимира в Києві був Імператор Микола І.

Найчастіше цим видом спростування користуються у судовій практиці для встановлення неякісних свідчень свідка, потерпілого, обвинувачуваного, висновку експерта.

Наприклад, при обґрунтуванні тези про причетність ***К.*** до злочину в ролі аргументу використовуються свідчення ***Д.***, який напередодні був звільнений ***К.*** з посади. Ця обставина може викликати недовіру до свідчень ***Д.*** і вони будуть відкинуті як неякісні.

в) Спростування демонстрації

Суть цього виду спростування полягає у знаходженні помилок у формі доведення. Відомо, що формою доведення виступає завжди конкретний вид умовиводу. Тому-то виявлення порушень правил при побудові такого умовиводу є підставою для визнання доведення неспроможним.

Наприклад, доведемо тезу *«Місяць є планетою»* таким шляхом:

	Будь-яка планета є космічним об'єктом.
I.	*Місяць — космічний об'єкт.*
	Отже, Місяць є планета.

Або доведемо тезу з галузі юридичної практики: *«Заповіт є юридичним договором»:*

	Будь-який договір є юридичною угодою.
II.	*Заповіт є юридичною угодою.*
	Отже, заповіт є договором.

І в першому, і в другому випадку доведення є неспроможними, оскільки в них у ролі демонстрації використовується II фігура простого категоричного силогізму. Але при цьому порушується друге правило цієї фігури, відповідно до якого один із засновків повинен бути заперечувальним судженням.

Тому теза не випливає із засновків, які беруться тут у ролі аргументів.

4. Правила доведення і спростування

Існує низка правил аргументації, які регламентують основні частини цієї процедури: тези, аргументи, демонстрації.

За своїм зовнішньом виглядом ці правила досить прості, але їх знання допомагає уникнути логічних помилок в аргументації, які є досить непростими.

а) Правила і помилки стосовно тези

Розрізняють два правила відносно тези.

1. Теза повинна бути ясно і чітко сформульована.

Теза може бути представлена простим або складним судженням. Тому під чіткістю і ясністю формулювання тези розуміють, насамперед, чіткість і ясність формулювання судження, яке містить у собі тезу.

Під чіткістю формулювання судження розуміють явну вказівку всіх основних смислових частин судження:

а) якщо теза є простим судженням, то повинні бути виділені його логічний підмет (суб'єкт) і логічний присудок (предикат);

б) якщо якийсь із суб'єктів представлений загальним поняттям, то потрібно чітко обумовити його кількісні характеристики («Всі» або «Деякі»).

Наприклад, маємо тезу: *«Твори Л.Толстого не можна прочитати за один день»*. Що мається на увазі: Чи кожен твір не можна прочитати за один день, чи деякі? Чи коли зібрати все написане великим письменником?.

в) чітко визначеними повинні бути модальні характеристики судження.

Наприклад, маємо тезу: *«Тут можлива побудова мосту через Дніпро»* або *«Тут можлива симуляція крадіжки»*.

У цих випадках потрібно визначитися, що криється за модальністю *«можливо»*: об'єктивна модальність чи логічна?

г) при формулюванні тези складних суджень треба чітко визначити смисл логічних сполучників, які утворюють ці судження.

Наприклад, маємо тезу: *«Інформацію про результати референдуму подадуть або вранішні, або вечірні газети»* або *«Підозрюваний був або однокурсником, або знайомим* *потерпілого»*. Тут сполучник *«або»* потребує уточнення. Треба встановити, чи вживається він у розділовому смислі, чи в розділово-з'єднувальному.

Перераховані вимоги, що випливають із 1-го правила стосовно тези, фактично вказують на те, що теза не повинна бути двозначною і не визначеною за смислом.

При порушені цього правила виникає ситуація, коли теза формулюється нечітко або не вказує однозначно на те, що підлягає обгрунтуванню, або дозволяє різні тлумачення. *Прикладом* такої тези буде твердження: *«Парламентська республіка краще парламентсько-президентської»* (*або навпаки*).

У реальній ситуації одне може бути краще або гірше іншого в різних відношеннях — у соціально-політичному, економічному, етичному тощо.

Не можна також доводити або спростовувати те, що пов'язане із індивідуальними уподобаннями людей. Ілюстрацією цього є теза: *«Відпочинок у Криму кращий від відпочинку в Закарпатті»*.

2. Друге правило вимагає, щоб теза протягом всього процесу обгрунтування залишалася незмінною.

Перше і друге правило пов'язані між собою в тому розумінні, що нечіткість, неясність формулювання тези зумовлює більшу вірогідність її підміни.

Порушення цього правила веде до помилки, яка називається підміною тези **(**лат. — ***ignoratio elenchi*****)**.

Підміна тези може бути навмисною або не усвідомленою (ненавмисною). Підміна тези відбувається тоді, коли замість доведення однієї тези намагаються довести іншу.

Наприклад, підміна тези буде, якщо замість доведення тези: *«Він є приятелем мого брата»* доводиться теза, що *«Він є однокурсником мого брата»*, або замість тези: *«Він був на місці злочину»* висувається теза: *«Він знав місце злочину»*.

Існує три різновиди помилки підміни тези:

— «аргументація до людини»;

— «аргументація до публіки»;

— «хто занадто доводить, той нічого не доводить».

Розглянемо названі помилки.

Суть помилки «аргументація до людини» (argument ad hominem) полягає в намаганні підмінити доведення

істинності тези характеристикою людини, яка має відношення до тези.

Наприклад, потрібно довести, що ми обираємо гідного кандидата в народні депутати. А замість цього ми наголошуємо, що кандидат гарний сім'янин, фахівець своєї справи, автор прекрасних підручників тощо.

Або замість того, щоб спростувати деяку тезу, намагаються говорити не про неї, а про людину, яка її висунула, що вона не спеціаліст, що вона не раз припускалася помилок у своїх висновках тощо. Часто такі помилки зустрічаються у судових засіданнях.

Помилка «доведення до публіки» (argument ad populum) має у своїй основі прагнення викликати замість обґрунтування тези симпатію чи антипатію аудиторії до того, про що йдеться в тезі і, таким чином, примусити повірити у правильність висунутої тези або у хибність спростовуваного положення. Від назви цієї помилки походить назва поширеного зараз терміна *«популізм»*.

Ця помилка часто зустрічається у судовому засіданні.

Наприклад, замість того, щоб доводити причетність К. до злочину, звертаються до публіки: «Поставте себе на його місце», «А що б ви зробили на його місці?»тощо.

Логічна помилка «хто занадто доводить, той нічого не доводить» виникає тоді, коли доведення висунутої тези замінюється доведенням іншої тези, яка є положенням настільки загальним, що з нього безпосередньо не випливає істинність висунутої тези.

б) Правила і помилки стосовно аргументів

Аргументи, які використовуються в доведенні і спростуванні, регламентуються певними правилами.

1. Аргументи повинні бути істинними і не суперечити один одному. Суть цього правила полягає в тому, що не можна в процесі доведення користуватися не тільки хибними аргументами, а й вірогідно істинними.

При порушенні цього правила виникають помилки:

— ***хибна підстава або основна помилка*** і

— ***передбачення підстави.***

Логічна помилка «хибна підстава» (error fundamentales) полягає в тому, що для обґрунтування тези беруться хибні положення.

Наприклад, у судовій практиці часто буває коли використовуються хибні свідчення, сумнівні висновки експертизи тощо.

Суть логічної помилки «передбачення підстави» (petito principii) в тому, що в ролі аргументу береться положення, яке хоч і не є хибним, але саме ще потребує доведення.

Наприклад, при доведенні тези: *«К. має бути призначений завідувачем кафедри» використовується аргумент: «Окрім К. призначити завідувачем нікого». Або доводиться теза: «М. вчинив крадіжку». За аргумент береться твердження: «Окрім М. цього ніхто не міг зробити».*

2. Аргументи мають бути достатньою підставою для тези.

Суть цього правила полягає в тому, що істинність тези повинна випливати із істинності аргументів.

При порушенні цього правила виникає помилка «не випливає» (non seguter).

Наприклад, потрібно довести тезу: *«К. є фахівцем в галузі лазерної технології». Для цього наводиться аргумент: «К. є випускником фізичного факультету». Або маємо тезу: «М. є співучасником злочину». За аргумент береться свідчення: «М. бачили разом із злочинцями напередодні скоєння злочину.*

3. Істинність аргументів повинна бути незалежною від тези.

При порушенні цього правила виникає помилка «коло в доведенні». Суть цієї помилки полягає в тому, що теза обгрунтовується аргументами, а аргументи обгрунтовуються тією ж тезою.

в) Правила і помилки стосовно демонстрації

Демонстрація як форма зв'язку тези з аргументами реалізується в конкретних видах умовиводів. Тому при побудові доведення чи спростування треба дотримуватися правил того умовиводу, який виконує роль демонстрації.

Іншими словами, якщо доведення будується у формі дедуктивного умовиводу, то необхідно виконувати правила, що регламентують конкретний вид дедуктивного умовиводу. А якщо демонстрація представлена індукцією чи аналогією, тобто не дедуктивним умовиводом, то гарантом коректності доведення і спростування виступає дотримання правил цих умовиводів.

Тому найчастіше в доведеннях і спростуваннях виникають такі помилки, як ***«учетверіння терміну», «не випливає», «поспішне узагальнення»*** тощо .

Контрольні питання

1. Поняття аргументації.
2. Визначення доведення як логічної процедури.
3. Характеристика структури доведення.
4. Основні форми демонстрації.
5. Визначення прямого доведення.
6. Основа поділу доведень на прямі та непрямі.
7. Поняття апагогічного доведення.
8. Хід побудови апагогічного доведення.
9. Визначення розділового доведення.
10. Характеристика спростування як логічної процедури.
11. Визначення видів спростування.
12. Способи спростування тези.
13. Спростування аргументів і демонстрації.
14. Правила і помилки стосовно тези.
15. Правила стосовно аргументів.
16. Помилки, які виникають при порушенні правил стосовно аргументів.
17. Характеристика правила стосовно демонстрації.
18. Наведіть приклад прямого доведення.
19. Побудуйте непряме доведення.
20. Наведіть приклад спростування тези.

КНИГА ДРУГА
СУЧАСНА ЛОГІКА

ЧАСТИНА ПЕРША.

КЛАСИЧНА ЛОГКА

А. ЛОГІКА ВИСЛОВЛЮВАНЬ

Розділ I. АЛГЕБРА ЛОГІКИ ВИСЛОВЛЮВАНЬ

Розділ II. ЧИСЛЕННЯ ЛОГІКИ ВИСЛОВЛЮВАНЬ

Б. ЛОГІКА ПРЕДИКАТІВ

Розділ I. АЛГЕБРАЇЧНА СИСТЕМА ЛОГІКИ ПРЕДИКАТІВ

Розділ II. ЧИСЛЕННЯ ПРЕДИКАТІВ

ЧАСТИНА ДРУГА.

НЕКЛАСИЧНА ЛОГІКА

Розділ I. БАГАТОЗНАЧНА ЛОГІКА

Розділ II. МОДАЛЬНА ЛОГІКА НА ПОЧАТКУ XX СТОЛІТТЯ

Розділ III. СИСТЕМА МОДАЛЬНОЇ ЛОГІКИ

ЧАСТИНА 1
КЛАСИЧНА ЛОГІКА

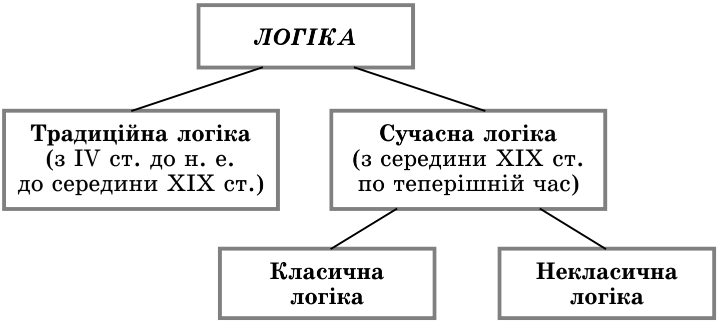
ВСТУП

З другої половини XIX ст. розпочинається другий етап у розвитку логіки, який отримав назву ***«сучасна логіка»***. Від самого початку виникнення цього етапу ведуться дискусії стосовно предмета, методу сучасної логіки, а також співвідношення її з традиційною логікою, стосовно її теоретичного та практичного значення.

Предметом традиційної і сучасної логіки залишається вивідне знання, а методом є формалізація. Різниця між цими етапами єдиної науки полягає в тому, що в сучасній логіці метод формалізації виступає у досконалішій формі. Це, певною мірою, і спричинило одну із назв сучасної логіки ***«символічна логіка»***. Широке використання в сучасній логіці символіки штучної мови і застосування апарату сучасної логіки до логічного обгрунтування математичного знання дали ще одну назву сучасній логіці — ***«математична логіка»***. Іноді ці терміни ***«сучасна логіка»*** і ***«математична логіка»*** розглядають як синоніми. Тим більше, що між методами сучасної логіки і математики є певна подібність і, власне, вперше славу сучасній логіці принесло застосування її засобів до розв'язання кризових ситуацій у математиці. Це, наприклад, дало підставу відомому математику П.С.Порецькому заявити, що сучасна логіка за предметом є логікою, а за методом — математикою.

У межах спеціального аналізу треба розрізняти поняття ***«сучасна логіка»*** і ***«математична логіка»***. ***Математична логіка — це один із прикладних аспектів сучасної логіки, який досліджує основи математики.***

Виходячи із попередніх зауважень, структуру логіки як науки можна зобразити такою схемою:



Із схеми очевидно, що сучасна логіка включає в себе два розділи. Предметом аналізу у цій частині підручника буде саме ***«класична логіка»,*** до ***складу якої входять «логіка висловлювань» і «логіка предикатів».***

Класична логіка — це розділ сучасної логіки, що базується на принципі двозначності, відповідно до якого будь-яке висловлювання є або істинним, або хибним.

Становлення сучасної логіки починається саме з класичної логіки. Основоположником сучасної логіки, цілком слушно, вважають ***Готфріда Лейбніця.*** Хоча і до Лейбніця такі видатні мислителі як Раймунд Луллій, Клавдій, Томас Гоббс, Рене Декарт намагалися удосконалити формалізацію як метод логіки.

Та Лейбніць виходив із того, що подальший розвиток логіки можливий шляхом створення чіткої логічної мови. Застосування такої мови, на його думку, дає можливість замінити змістовні міркування формальними перетвореннями виразів цієї мови. Він першим почав будувати логічні числення. Лейбніць формалізував розширену силогістику і дав їй арифметичну інтерпретацію, розробив логіку відношень, досліджував аналогію між логікою і алгеброю, намагався аксіоматизувати логіку.

До попередників сучасної логіки, окрім Лейбніця, можна віднести ***П.Г.Ламберта, Ж.Д.Жергона, О. де Моргана, Б.Больцано.***

Але започаткував розробку сучасної логіки як системи ***Джордж Буль (1815—1864 рр.).*** Основні ідеї нової логіки Дж.Буль виклав у своїх працях «Математичний аналіз логіки» та «Дослідження законів мислення». Проаналізувавши деяку подібність у логічних і математичних операціях, він застосував алгебраїчну символіку в логічних доведеннях. Свою систему він назвав ***«алгебра логіки»***. Фактично його формальна система числення рівностей є узагальненням арістотелівської силогістики. Дж.Буль розробив загальний метод отримання наслідків із будь-якого числа засновків з будь-яким числом термінів.

«Алгебра логіки» Дж.Буля отримала подальший розвиток в працях ***У.С.Джевонса, Е.Шредера, Д.Венна***.

Значний вплив на формування сучасної логіки справила робота ***Г.Фреге*** «Числення понять». У цій роботі німецький вчений вперше дав визначення логічних змінних, логічних і нелогічних констант, логічних функцій і кванторів, логічних аксіом і правил висновку, поняття доведення і доведеного висловлювання. Тобто, тих категорій, які складають теоретичну основу сучасної логіки. Його дослідження теорії смислу і значення висловлювання мали велике значення для розвитку логічної семантики.

Поширенню ідей Г.Фреге в плані розробки сучасної логіки сприяла трьохтомна праця ***Б.Рассела*** та ***А.Уайтхеда*** «Принципи математики». Вагомі результати при розробці нової логіки були отримані ***К.Геделем, А.Тарським, Я.Лукасевичем, А.Черчем, П.Новіковим, А.Марковим*** та іншими вченими XX ст.

На сьогоднішній день сучасна логіка — це багатогалузева наука, яка знаходиться в стадії інтенсивного розвитку.

Метою написання частини підручника «Класична логіка» є врахування основних досягнень нової логіки з тим, щоб він слугував своєрідним орієнтиром у розмаїтті ідей і напрямків розвитку сучасної логіки.

А. ЛОГІКА ВИСЛОВЛЮВАНЬ

Логіка висловлювань — це перша частина класичної логіки, яка є порівняно простою логічною теорією. Вона посідає особливе місце серед інших логічних систем, оскільки її концепції та методи враховуються, використовуються і розвиваються у більш багатших і складніших теоріях.

Центральною категорією класичної логіки є висловлювання. ***Висловлювання — це ім'я множини розповідних речень, зміст яких можна оцінити як істинний або хибний.***

У логіці висловлювань не аналізується внутрішня структура простого висловлювання. А також у ній відволікаються від смислового змісту висловлювання. Висловлювання порівнюються лише за значеннями («істина», «хиба»). ***У зв'язку з цим серед завдань, які вирішує логіка висловлювань, головними є два питання:***

а) яким чином із простих висловлювань утворюються складні ? і

б) як залежить значення складного висловлювання від значень простих висловлювань, що входять до його складу?

Отже, із вище зазначеного логіку висловлювань (або пропозиційну логіку) можна визначити як логічну теорію, мова якої складається із одного типу нелогічних символів — пропозиційних змінних, а також одного типу логічних символів — пропозиційних зв'язок.

Логіка висловлювань включає в себе алгебру (або, як іноді її називають, морфологічну побудову логіки висловлювань) і числення. Саме у такій послідовності і буде здійснюватися виклад логіки висловлювань.

РОЗДІЛ І

АЛГЕБРА ЛОГІКИ ВИСЛОВЛЮВАНЬ

Алгебра логіки висловлювань досліджує операції над висловлюваннями, які мають лише одну ознаку — істинісне значення. Це дає змогу ототожнювати всі істинні висловлювання і всі хибні, абстрагуючись від їх змісту. Завдяки тотожностям, які відіграють тут роль законів, здійснюються різноманітні перетворення висловлювань.

При викладі алгебри логіки висловлювань буде зосереджена увага на підвалинах її побудови і на завданнях, які вона вирішує своїми засобами.

1. Мова алгебраїчної системи логіки висловлювань

Мова алгебраїчної системи логіки висловлювань, або мова морфологічної системи логіки висловлювань, є своєрідною формально логічною теорією **(*ФЛТ*)**. ***Структура мови логіки висловлювань складається із двох компонентів: об'єкт-мови (OL) та метамови (ML).***

Об'єкт-мова — це сукупність правильно побудованих формул[1] (ППФ), в яких фіксується, відображається, кодується певний фрагмент наукової теорії або контексту природної мови.

Метамова — це мова, засобами якої досліджуються і описуються властивості об'єктної мови.

Метамова повинна задовольняти такі вимоги:

а) наявність засобів для опису синтаксичних властивостей об'єктної мови, а саме засобів для побудови виразів OL;

[1] Вирази об'єкт-мови називають формулами тому, що вони відрізняються один від одного лише за формою.

б) метамова повинна бути достатньою з точки зору виразних можливостей настільки, щоб для кожного виразу OL в ній існувала формула, яка була б перекладом цього виразу;

в) логічний словник повинен бути (в крайньому випадку) настільки ж багатим, як і словник OL;

г) в ML повинні бути додаткові змінні (метазмінні), які належать до більш високого типу ніж змінні OL.

OL та ***ML*** називають відповідно ***синтаксичною частиною формально логічної теорії (Sin ч.ФЛТ)*** і ***семантичною частиною формально логічної теорії (Sem ч. ФЛТ).***

ML складається із:

— ***синтаксису метамови (Sin ML)*** та

— ***семантики метамови (Sem ML).***

Мову алгебраїчної системи логіки висловлювань як певну формально логічну теорію ***позначають символом*** S^1. ***Sin ML*** у S^1 представлений ***правилами утворення (ПУ).***

Правила утворення в S^1 ***включають в себе:***

1) алфавіт; і

2) визначення правильно побудованих формул (Df — ППФ).

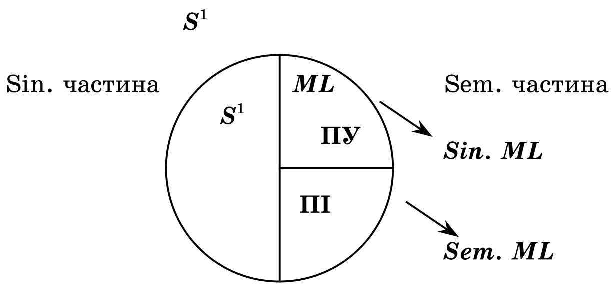
Sem ML в S^1 представлена ***правилами інтерпретації (ПІ).***

Правила інтерпретації складаються із:

1) правил інтерпретації для пропозиційних змінних; і

2) правил інтерпретації для пропозиційних зв'язок.

Структура S^1 ***має таку схему:***



Виходячи із структури S^1, більш аргументовано пояснимо, чому S^1 називають алгеброю, або морфологічною системою.

Взагалі алгебру можна визначити як непорожню множину об'єктів із визначеними на них операціями.

Стосовно нашої ситуації такими об'єктами є ***пропозиційні змінні***, а ***операціями — пропозиційні зв'язки***[1].

Характерною особливістю S^1 є те, що Sin ML має лише один вид правил, а саме правила утворення. Це обумовлює те, що в S^1 формули розглядаються в статичному варіанті, де не досліджується перехід від одних формул до інших, тобто не досліджується процес доведення. А отже, ***завдання, які розв'язуються засобами S^1, такі:***

1) типологія ППФ на синтаксичному рівні;

2) типологія ППФ на семантичному рівні;

3) систематичний огляд логічних законів;

4) визначення відношення логічного слідування;

5) систематичний аналіз логічних відношень.

Після цих зауважень перейдемо до побудови мови системи S^1. Перш за все потрібно описати (задати) алфавіт.

Алфавіт — це сукупність вихідних символів даної формалізованої мови. Алфавіт S^1 складається із:

а) нелогічних символів;

б) логічних символів;

в) технічних символів.

Розглянемо послідовно кожну складову частину алфавіту мови логіки висловлювань.

Нелогічні символи

Нелогічними символами є множина пропозиційних змінних: $p, q, r, s, p_1, q_1, r_1, s_1$...

Пропозиційні змінні використовуються для позначення простих висловлюваннь природної мови. Іншими словами, пропозиційні змінні — ***p, q, r, s*** тощо використовуються як замінники простих висловлювань при виявленні логічних форм контекстів природної мови.

Наприклад, пропозиційна змінна ***p*** може позначати множину конкретних простих висловлювань типу: *«Місяць — природний супутник», «Всі планети — космічні об'єкти», «7 є простим числом», «Книга є джерелом інформації»* тощо.

[1] Тобто, тут йдеться про словесну, вербальну подібність S^1 з алгеброю як відповідним розділом математичної науки.

Логічні символи

Логічними символами в системі S^1 є істинністно-пропозиційні зв'язки:

$\rceil$ ***— заперечення;***

& ***— кон'юнкція;***

$\vee$ ***— слабка диз'юнкція;***

$\vee$ ***— сильна диз'юнкція;***

$\backsim$ ***— еквіваленція.***

Технічні символи

До технічних символів у системі S^1 відносяться:

— ліва та права дужка (;) і

— кома (,).

Переліком вихідних символів завершується побудова алфавіту системи ***S^1*.**

Наступним етапом у побудові ***S^1*** є задання дефініції ***ППФ.***

Дефініція ППФ належить до індуктивних визначень:

1. Будь-яка пропозиційна змінна є формулою.

2. Якщо А — формула, то $\rceil$А (читається: «не А» або «неправильно, що А») — також формула.

3. Якщо А і В — довільні формули, то А & В (читається: ***«А і В»), А $\vee$ В*** (читається: ***«А або В»), А $\supset$ В*** (читається: ***«якщо А, то В»), А$\backsim$В*** (читається: ***«А тоді і тільки тоді, коли В»), А $\vee$ В*** (читається: ***«або А, або В») — теж формули.***

4. Ніякі інші вирази, окрім вказаних у пунктах 1,2,3, не є формулами класичної логіки висловлювань.

Зауважимо, що латинські літери ***А*** і ***В,*** які вживаються у дефініції формули, належать не до ***OL***, а до ***ML*** в ***S^1*.** Іншими словами, вони належать тій мові, на якій ми говоримо про вирази ***OL*** в системі ***S^1***, і слугують для позначення довільних формул із ***OL*.** На відміну від букв p, q,r, s..., які є пропозиційними змінними, вони називаються ***метазмінними***, або метабуквами.

Отже, вирази, які мають метабукви: ***$\rceil$А, А & В, А $\vee$ В, А $\supset$ В, А$\backsim$В, А $\vee$ В — не формули, а схеми формул певного виду.***

Наприклад, вираз $\boldsymbol{A \wedge B}$ може представляти нескінченну множину формул ***OL в S***[1], які мають вигляд: $\boldsymbol{(p \wedge q)}$,

$$(p \supset q) \wedge \bar{q},$$
$$[(p \sim q) \vee s] \wedge (\bar{p} \vee \bar{q}) \text{ тощо,}$$

а вираз $\boldsymbol{B \supset B}$ буде схемою для формул $\boldsymbol{(p \supset p)}$,

$$[(p \sim r) \wedge \bar{r}] \supset [(p \sim r) \wedge \bar{r}],$$
$$[\overline{(p \supset q)} \vee s] \supset [\overline{(p \supset q)} \vee s] \text{ тощо.}$$

Надалі будемо вживати вираз ***«формула A & B»***, розуміючи, що за цим виразом стоїть ***будь-яка формула OL*** відповідного виду, ***а не запис A & B,*** який є схемою формул.

Дефініція формули в ***S***[1] дозволяє визначити, чи є будь-яка послідовность знаків алфавіту формулою, чи ні.

Наприклад, послідовність знаків $\boldsymbol{((p \supset q) \vee \bar{r}) \sim \overline{(p \supset q)}}$ є формулою, тому що вона побудована у відповідності до пунктів ***1—3*** дефініції формули. Так, пропозиційні змінні є формулами згідно пункту ***1***, вираз $\bar{r}$ є формулою згідно пункту ***2***. Якщо в якості ***A*** взяти вираз $((p \supset q) \vee r)$, а в якості ***B*** — вираз $\overline{(p \supset q)}$, то весь вираз є формулою згідно пункту ***3***.

Якщо ж ми візьмемо послідовності знаків: $\boldsymbol{p \vee)}$; $\boldsymbol{p \supset r\ (}$; $\boldsymbol{\bar{p} \supset q\ (\ r}$; тощо, то вони не будуть формулами у ***S***[1] відповідно до дефініції формули цієї системи.

За синтаксичними ознаками формули в S[1] ***поділяються на:***

— ***елементарні*** (***атомарні***) і

— ***складні*** (***молекулярні***).

Елементарною або атомарною формулою називається така формула пропозиційної логіки, яка не має самостійних частин. Тобто, це формули, які відповідають пункту ***1*** наведеної дефініції: ***p, q, r, s...*** .

Складними або молекулярними називаються формули, які складаються з двох або більше елементарних формул, з'єднаних логічними зв'язками. *Наприклад*: $\boldsymbol{p \,\&\, q}$, $\boldsymbol{(p \supset q) \vee r}$, $\boldsymbol{(\overline{p \vee q}) \sim (r \wedge s)}$ тощо. Іншими словами, складними формулами в ***S***[1] є вирази, які відповідають пунктам ***2*** і ***3*** дефініції формули.

Будь-яка частина формули є підформулою. Візьмемо для прикладу формулу: $((p \backsim \overline{r}) \supset q) \vee (r \,\&\, s)$. Підформулами цієї формули будуть:

***1) пропозиційні змінні** p, q, r, s;*

***2) формули —** $\overline{r}$, $(p \backsim \overline{r})$, $(p \backsim \overline{r}) \supset q$, $r \,\&\, s$,*

***3) вся формула —** $((p \backsim \overline{r}) \supset q) \vee (r \,\&\, s)$.*

Підформули A і B у формулі A & B називаються кон'юнктами, або кон'юнктивними членами, в формулі A ∨ B — диз'юнктами, або диз'юнктивними членами, а в формулі A ⊃ B підформула A називається антецедентом, а підформула B — консеквентом.

Степенем формули в S^1 називається кількість логічних термінів, що входять до складу формули.

Наприклад, формула: $((p \supset \overline{q}) \,\&\, r) \backsim s$ є формулою ***4-го степеня***. А формула $(p \vee \overline{q}) \,\&\, r$ має ***3-ій степінь***, оскільки тут наявні три пропозиційні зв'язки: $\rceil$, $\vee$, $\&$.

Головним логічним знаком в S^1 називається логічний термін, який застосовується останнім при побудові формули.

У формулі $\overline{p}$ головним логічним знаком є ***заперечення*** (позначається символом $\rceil$, або ~, або -). У формулі $(\overline{p} \backsim (q \supset \supset p))$ головним логічним знаком буде еквіваленція ($\backsim$), в формулі $((\overline{p} \supset r) \,\&\, q)$ — кон'юнкція (&), *у* формулі $\overline{(p \,\&\, r) \supset (\overline{p} \vee q)}$ — заперечення (-) тощо.

Для компактності запису формул необхідно прийняти угоду про опускання дужок. Якщо першим знаком формули є ліва дужка, а останнім — права дужка, то цю пару опускають.

Наприклад, маємо формулу $((p \supset q) \vee \overline{r})$. Відповідно до даної умови її можна записати $(p \supset q) \vee \overline{r}$.

Розташування дужок у формулі має принципове значення. Застосування лівої та правої дужок дає можливість визначити область дії кожної пропозиційної зв'язки.

Наприклад, область дії зв'язки «$\supset$» у формулі $A \supset (B \vee \vee \overline{A})$ є між A і $B \vee \overline{C}$, а у формулі $(A \supset B) \vee \overline{A}$ — між A і B.

При розташуванні дужок необхідно враховувати степінь сили пропозиційної зв'язки. За степенем зростання сили пропозиційної зв'язки вони розподіляються в такій послідовності: $\backsim$, $\supset$, $\vee$, $\&$, $\rceil$. Отже, самою сильною пропозиційною зв'язкою є заперечення $\rceil$.

Виходячи з цього, спочатку виконується дія, яка вказана більш сильною зв'язкою.

Наприклад, у формулі $A \backsim B \mathbin{\&} C \supset B$ за допомогою дужок вказується порядок виконання дій: $A \backsim ((B \mathbin{\&} C) \supset B)$. Цей запис показує, що першу дію здійснюють над &, другу — над $\supset$, і третю — над $\backsim$.

А якщо потрібен інший порядок дій, тоді змінюють розташування дужок. Візьмемо ту ж саму формулу, але змінимо порядок дій:

$$((A \backsim B) \mathbin{\&} C) \supset B.$$

У цьому випадку першу дію необхідно виконати над $\backsim$, другу над — &, і третю над — $\supset$.

Якщо у формулі наявні лише декілька імплікацій, то приймається групування дужок зліва : $A \supset B \supset C$ є $(A \supset B) \supset \supset C$.

Для виконання групування дужок справа застосовується крапка:

$$A \supset .B \supset C. \text{ є } A \supset (B \supset C).$$

Прийняттям цих угод завершується побудова словника у системі S^1. Після цього розглянемо, як можна виразити логічну форму висловлювань природної мови засобами словника системи S^1.

Для *прикладу* візьмемо конкретне висловлювання: *«Якщо студент здібний, але не старанний, то він може мати посередні результати на сесії або високі».*

Щоб виявити логічну форму конкретного висловлювання засобами словника системи S^1, необхідно здійснити такі дії:

1) виписати всі прості висловлювання, що входять до складу складного;

2) кожному простому висловлюванню поставити у відповідність конкретну пропозиційну змінну;

3) виділити логічні терміни, що входять до складу складного висловлювання;

4) встановити порядок і спосіб поєднання простих висловлювань у складне за допомогою логічних сполучників.

Прокоментуємо кожну дію окремо.

I. Наведене вище складне висловлювання складається із чотирьох простих висловлювань:

1. *«Студент — здібний».*

2. *«Студент — старанний».*

3. *«Студент має посередні результати на сесії».*

4. *«Студент має високі результати на сесії».*

II. Кожному виділеному простому висловлюванню ставимо у відповідність окрему пропозиційну змінну:

першому — ***p*,**

другому — ***q*,**

третьому — ***r*,**

четвертому — ***s*.**

III. Виділяємо логічні терміни, що поєднують ці прості висловлювання у складі складного висловлювання:

виразу ***«але»*** відповідає — **«&»**;

виразу ***«не»* — « ⌉ »;**

виразу ***«або»* — « ∨ »;**

виразу ***«якщо, то»* — « ⊃ ».**

IV. Необхідно виділити головний логічний сполучник. Тільки після цього можна встановити порядок поєднання простих висловлювань у складне.

Стосовно нашого прикладу ***головним логічним сполучником є « ⊃ ».*** Тому логічною формою цього складного висловлювання буде імплікативна формула.

Антецедентом буде кон'юнктивна формула, де кон'юнктами будуть $\boldsymbol{p}$ і заперечення $\boldsymbol{\bar{q}}$, а ***консеквентом*** — диз'юнктивна формула з диз'юнктами $\boldsymbol{r}$ і $\boldsymbol{s}$. Записується це так: $(\boldsymbol{p} \ \& \ \boldsymbol{\bar{q}})$ і $(\boldsymbol{r} \vee \boldsymbol{s})$.

У цілому логічною формою даного висловлювання буде формула:

$$(\boldsymbol{p} \ \& \ \boldsymbol{\bar{q}}) \supset (\boldsymbol{r} \vee \boldsymbol{s}).$$

Таким способом можна записати логічну форму будь-якого складного висловлювання природної мови.

У літературі іноді зустрічається мова $\boldsymbol{S^1}$, де не використовуються дужки. Йдеться про бездужкову логічну мову запропоновану Яном Лукасевичем. Розглянемо послідовно складові словника цієї мови.

Алфавіт

— множина нелогічних символів*: *p, q, r, s, $\boldsymbol{p_1, q_1, r_1, s_1}$**,...**

— логічні терміни:

N (*заперечення*), ***К*** (*кон'юнкція*), ***А*** (*диз'юнкція*), ***С*** (*імплікація*), ***Е*** (*еквіваленція*), ***I*** (*сувора диз'юнкція*).

Дефініція формули:

1) пропозиційна змінна є формулою;

2) якщо α ***формула, то N***α ***також формула;***

3) якщо α ***і*** β ***формули***[1]***, то К***αβ, ***А***αβ, ***С***αβ, ***Е***αβ ***і I***αβ ***— також формули;***

4) ніщо, окрім перерахованих у пунктах 1-3, не є формулами.

---

[1] У мові Я.Лукасевича α і β — метазмінні.

Якщо ми маємо формулу $((\overline{p} \sim q) \supset (p \vee (r \,\&\, \overline{s})))$, то засобами даної мови її можна записати — ***CNEpqApKrNs***.

Цей запис був застосований Я.Лукасевичем при дослідженні арістотелівської силогістики.

Отже, ми розглянули ***синтаксис*** метамови S^1 (***Sin ML***).

Тепер проаналізуємо ***семантику*** метамови в S^1 (***Sem ML***).

2. Семантика логічних символів

При характеристиці структуру системи S^1, зазначалося, що семантика метамови S^1 представлена ***правилами інтерпретації***. Термін ***«інтерпретація»*** походить від латинського слова *interpretatio,* що у перекладі означає роз'яснення, тлумачення.

У логіці під інтерпретацією розуміють приписування деякого змістовного смислу, значення символам і формулам формальної системи.

Завдяки цьому формальна система перетворюється в мову, що описує відповідну предметну область. Сама ця предметна область і види значень, що приписуються символам і формулам, також називається інтерпретацією.

За допомогою правил утворення (***ПУ***) ми здійснили синтаксичну побудову формальної системи, яка є своєрідною грою з символами, коли можна комбінувати символи відповідно до правил, з'єднувати їх, роз'єднувати тощо. Для того, щоб система набула смислу, стала мовою, описом певних об'єктів, властивостей і відношень між ними, необхідно надати їй інтерпретацію.

До правил інтерпретації Sem ML в S^1 відносяться два правила:

1) правило інтерпретації пропозиційних змінних;

2) правила інтерпретації пропозиційних зв'язок.

Правило інтерпретації пропозиційних змінних полягає в тому, що кожна пропозиційна змінна може мати одне із двох значень: або «істину» («і»), або «хибу» («х»), але не те і інше одночасно. Фактично правило інтерпретації пропозиційних змінних є функцією приписування окремій пропозиційній змінній одного з двох логічних об'єктів: ***«істина»*** або ***«хиба»***.

Правилами інтерпретації пропозиційних зв'язок є таблиці істинності.

Таблиця істинності — це такий вид таблиць, за допомогою якого встановлюється істинністне значення складного висловлювання при даних значеннях простих висловлювань, що входять до його складу.

Таблиці істинності є визначенням пропозиційних зв'язок і мають такий вигляд:

p	$\overline{p}$	p	q	$p \& q$	$p \vee q$	$p \supset q$	$p \infty q$	$p \vee q$
і	*х*	*і*	*і*	*і*	*і*	*і*	*і*	*х*
х	*і*	*і*	*х*	*х*	*і*	*х*	*х*	*і*
		х	*і*	*х*	*і*	*і*	*х*	*і*
		х	*х*	*х*	*х*	*і*	*і*	*х*

Після того, як ми визначили табличним методом значення логічних сполучників, можна встановлювати значення будь-якого складного висловлювання.

Проілюструємо це на прикладах.

Маємо формулу: $(p \wedge q) \supset \overline{q}$.

Відомо, що ***антецедент*** цієї формули $(p \wedge q)$ відповідає значенню ***«і»***, а ***консеквент*** — $\overline{q}$ — ***«х»***.

Відповідно до таблиці істинності для ***імплікації*** уся формула матиме значення — ***«х»***.

Щоб побудувати таблицю істинності для довільної формули, необхідно виконати такі дії:

1) скласти без повторів список пропозиційних змінних, що входять до складу формули;

2) кожна пропозиційна змінна розпочинає новий стовпчик таблиці;

3) для кожної підформули у тій послідовності, в якій вони входять до складу формули, будується відповідний стовпчик таблиці;

4) кількість рядків у таблиці істинності обчислюється за формулою 2^n (де 2 означає кількість логічних значень, які приписуються пропозиційним змінним «істину» або «хибу», а n — кількість пропозиційних змінних, що входять до складу формули). Кожен набір значень повинен відрізнятися від інших;

5) визначається головний логічний сполучник у формулі;

6) останній стовпчик таблиці істинності будується для головного логічного сполучника, який відповідає значенню всієї формули.

Побудуємо таблицю істинності для формули:

$$((((p \wedge q) \supset \overline{r}) \vee s) \vee q) \sim s$$

p	q	r	s	$\overline{r}$	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \supset \overline{r}$	$((p \wedge q) \supset \overline{r}) \vee s$	$(((p \wedge q) \supset \overline{r}) \vee s) \vee q$	$((((p \wedge q) \supset \overline{r}) \vee s) \vee q) \sim s$
i	*i*	*i*	*i*	*x*	*i*	*x*	*i*	*x*	*x*
i	*i*	*i*	*x*	*x*	*i*	*x*	*x*	*i*	*x*
i	*i*	*x*	*i*	*i*	*i*	*i*	*i*	*x*	*x*
i	*i*	*x*	*x*	*i*	*i*	*i*	*i*	*x*	*i*
i	*x*	*i*	*i*	*x*	*x*	*i*	*i*	*i*	*i*
i	*x*	*i*	*x*	*x*	*x*	*i*	*i*	*i*	*x*
i	*x*	*x*	*i*	*i*	*x*	*i*	*i*	*i*	*i*
i	*x*	*x*	*x*	*i*	*x*	*i*	*i*	*i*	*x*
x	*i*	*i*	*i*	*x*	*x*	*i*	*i*	*x*	*x*
x	*i*	*i*	*x*	*x*	*x*	*i*	*i*	*x*	*i*
x	*i*	*x*	*i*	*i*	*x*	*i*	*i*	*x*	*x*
x	*i*	*x*	*x*	*i*	*x*	*i*	*i*	*x*	*i*
x	*x*	*i*	*i*	*x*	*x*	*i*	*i*	*i*	*i*
x	*x*	*i*	*x*	*x*	*x*	*i*	*i*	*i*	*x*
x	*x*	*x*	*i*	*i*	*x*	*i*	*i*	*i*	*i*
x	*x*	*x*	*x*	*i*	*x*	*i*	*i*	*i*	*x*

Із цієї таблиці очевидно, що дана формула істинна для семи наборів логічних значень пропозиційних змінних і хибна для решти. Таким способом можна обчислити логічне значення для формули будь-якої складності.

3. Типологія формул за семантичними ознаками

За синтаксичними ознаками всю множину правильно побудованих формул (***ППФ***) в S^1 поділяють на ***прості*** (***атомарні***) і ***складні*** (***молекулярні***).

За семантичними ознаками ППФ в S^1 поділяють на:

— ***тотожно-істинні*** (або тавтології, або логічні тотожності, або логічні закони, або загальнозначущі формули);

— ***тотожно-хибні*** (або протиріччя, або не загальнозначущі формули);

— ***виконувані формули***.

Тотожно-істинною формулою називається така формула, яка при будь-яких наборах значень пропозиційних змінних набуває значення «і» («істина»). Іншими словами, це такі формули, які істинні в силу своєї логічної структури.

Наприклад, формули $p \supset (q \supset p)$, $(p \supset p)$, $((p \wedge q) \supset r) \supset ((p \wedge \overline{r}) \supset \overline{q})$ тощо. Якщо побудувати таблиці істинності для цих формул, то можна переконатися, що вони істинні при будь-яких наборах значень пропозиційних змінних. Для *прикладу* візьмемо формулу $p \supset (q \supset p)$:

p	q	$q \supset p$	$p \supset (q \supset p)$
і	*і*	*і*	*і*
і	*х*	*і*	*і*
х	*і*	*х*	*і*
х	*х*	*і*	*і*

Тотожно-істинні або загальнозначимі формули (за термінологією Л.Вітгенштейна — тавтології) називають в сучасній логіці логічними законами.

З логічними законами ми вже зустрічалися у традиційній логіці. Але якщо основні формально-логічні закони мають нормативний, методологічний характер, тобто вони регламентують процес міркування, забезпечуючи послідовність, несуперечливість, обгрунтованість наших думок, то закони сучасної логіки (тобто, тотожно-істинні формули) — це регламентуючі параметри при побудові логічних конструкцій. Досить виразно про це сказав творець сучасної логіки ***Л.Вітгенштейн***: «... *із тавтології «дощ або йде, або не йде»* ($A \vee \overline{A}$), *ми нічого не можемо дізнатися про погоду. Речення логіки не вважаються образами дійсності, що зображують можливі стани речей. Вони просто формули, що вказують на припустимі в мові перетворення. Вони — частина символізму, подібно до того як «0» є частина символізму арифметики»*[1].

Отже, закони логіки — це такі формули, які є істинними завдяки своїй логічній формі, а логічну форму виражають ті пропозиційні зв'зки, що входять до складу формули.

Тотожно-хибною формулою називається формула, яка хибна при будь-яких наборах значень пропозиційних змінних.

Наприклад: $p \wedge \overline{p}$, $\overline{p \supset (q \supset p)}$, $\overline{p} \,\&\, \overline{(\overline{p} \vee q)}$ тощо.

[1] *Л. Витгенштейн*. Логико-философський трактат. — М., 1958. — С. 13, 4, 461.

Таблиця істинності для кожної з цих формул і схожих з ними результатом матиме одне значення «х» («хибу»):

p	Q	$\overline{p}$	$\overline{p} \vee q$	$\overline{p} \vee q$	$\overline{p}$ & ($\overline{p} \vee q$)
і	*і*	*х*	*і*	*х*	*х*
і	*х*	*х*	*х*	*і*	*х*
х	*і*	*і*	*і*	*х*	*х*
х	*х*	*і*	*і*	*х*	*х*

Тотожно-хибні формули є протилежними тотожно-істинним формул. Це означає, що заперечення тотожно-істинної формули дає тотожно-хибну формулу і навпаки.

І, нарешті, третім видом формул за семантичними ознаками є виконувані, або нейтральні, формули.

Виконуваною фомулою в S^1 називається така формула, яка при одних наборах значень пропозиційних змінних є істинною, а при інших — хибною. Їх іноді називають фактичними істинами.

Наприклад: p & $(q \supset r)$, $p \supset \overline{s}$, $(p \vee q) \supset p$, тощо. Пересвідчитися у тому, що наведені формули є виконуваними допомагають таблиці істинності для цих формул.

p	q	$p \vee q$	$(p \vee q) \supset p$
і	*і*	*і*	*і*
і	*х*	*і*	*і*
х	*і*	*і*	*х*
х	*х*	*х*	*і*

Тавтології і протиріччя називають L-детермінованими виразами (логічно детермінованими, логічно спричиненими), а ***виконувані формули L-недетермінованими*** (логічно недетермінованими).

Уміння розпізнавати і диференціювати формули за семантичними ознаками передує розгляду різноманітних відношень між формулами у системі S^1.

4. Рівносильні формули

При аналізі множини формул в S^1 нерідко зустрічаються ситуації, коли різні за структурою формули при однакових наборах значень пропозиційних змінних приймають однакове значення.

Наприклад, візьмемо дві формули : **($p \supset q$)** і **($\overline{p} \vee q$)**. Побудуємо для них таблиці істинності.

p	q	$p \supset q$
і	*і*	*і*
і	*х*	*х*
х	*і*	*і*
х	*х*	*і*

p	q	$\overline{p}$	$\overline{p} \vee q$
і	*і*	*х*	*і*
і	*х*	*х*	*х*
х	*і*	*і*	*і*
х	*х*	*і*	*і*

Ці формули (та їм подібні) називають ***рівносильними.***

Дефініція. «Нехай А і В — формули, а x_1, x_2, x_3,... x_n список усіх пропозиційних змінних, що входять, в крайньому разі, до складу однієї із них. При наявності цих вихідних даних вважається, що формули А і В — рівносильні, якщо при будь-яких наборах значень x_1, x_2, x_3,... x_n логічні значення формул А і В співпадають».

З цього визначення випливає, що рівносильними будуть не тільки ті формули, до складу яких входять одні й ті самі пропозиційні змінні, але й такі, в яких пропозиційні змінні різняться. *Наприклад:*

1) $\overline{p}$ & ($p \supset q$) і **2) $p \supset$ ($\overline{p}$ & r)**

p	q	r	$\overline{p}$	$p \supset q$	$\overline{p}$ & ($p \supset q$)	$\overline{p}$ & r	$p \supset$ ($\overline{p}$ & r)
і	*і*	*і*	*х*	*і*	*х*	*х*	*х*
і	*х*	*і*	*х*	*х*	*х*	*х*	*х*
і	*і*	*х*	*х*	*і*	*х*	*х*	*х*
і	*х*	*х*	*х*	*х*	*х*	*х*	*х*
х	*і*	*і*	*і*	*і*	*і*	*і*	*і*
х	*х*	*і*	*і*	*і*	*і*	*і*	*і*
х	*і*	*х*	*і*	*і*	*і*	*х*	*і*
х	*х*	*х*	*і*	*і*	*і*	*х*	*і*

Незважаючи на те, що формули *1* і *2* різняться змінними q і r, їхні таблиці істинності співпадають. Це дає підставу стверджувати, що логічні значення формули A не залежать від пропозиційної змінної x_i, якщо для будь-якого набору логічних значень решти пропозиційних змінних у таблиці істинності для A логічне значення A одне й те саме, коли x_i хибне і коли x_i істинне.

Для відношення рівносильності характерними є:

1) Рефлексивність (A рівносильне A);

2) Симетричність (якщо A рівносильне B, то B рівносильне A);

3) Транзитивність (якщо A рівносильне B і B рівносильне C, то A рівносильне C).

Термін ***«рівносильно»*** є виразом метамови. Якщо поєднати дві рівносильні формули знаком еквіваленції, то отримаємо тотожно-істинну формулу або закон логіки.

Тобто, якщо A і B ***рівносильні***, то формула $A \backsim B$ буде логічним законом, що записується так:

$$\models A \backsim B \text{ (або } \# A \backsim B\text{)}.$$

Законів логіки (тобто тавтологій) в S^1 може бути скільки завгодно. Але можна виділити кілька десятків тавтологій, за допомогою яких здійснюються всі дії в системі S^1. Ці вирази легко можна перевірити за допомогою таблиць істинності.

Разом з тим, побудова таблиць істинності досить громіздка справа для визначення завжди істинних формул. Розв'язання цієї задачі досягається в еквівалентних перетвореннях вихідних формул за допомогою законів логіки.

Розглянемо ***основні закони логіки висловлювань***, які записані засобами метамови в S^1.

1. ***Закон подвійного заперечення:***

$\overline{\overline{A}} \equiv A^1$ (читається: те, що не є ***не-A*** є те ж саме, що A).

2. ***Закон комутативності:***

Назва цього закону походить від латинського слова ***commutativus***, що у перекладі означає змінюваність, той, що піддається переміщенню. ***Суть цього закону полягає у тому, що результат операції з двома елементами не залежить від порядку, в якому беруться ці елементи.***

Властивість комутативності притаманна операціям & *і* $\vee$.

$$A \,\&\, B \equiv B \,\&\, A$$

(читається: A і B є те саме, що й B і A)

$$A \vee B \equiv B \vee A$$

(читається: A або B є те саме, що й B або A).

3. Закон асоціативності:

Назву цьому закону дає латинське слово ***associatio,*** що у перекладі означає *з'єднання*. ***Суть закону асоціативності полягає в тому, що при подвійному здійсненні операції над трьома висловлюваннями можна з'єднати (асоціювати) перше і друге висловлювання, виконати операцію над ними, а потім цю ж операцію провести над отриманим результатом і третім висловлюванням. Рівноцінним є й такий порядок здійснення операцій: з'єднати друге і третє висловлювання, провести операцію над ними, а потім цю ж операцію провести над отриманим результатом і першим висловлюванням.***

Асоціативність властива для & *і* ∨.

$$(A \ \& \ B) \ \& \ C \equiv A \ \& \ (B \ \& \ C)$$

(читається: (***A*** і ***B***) і ***C*** є те саме, що й ***A*** і (***B*** і ***C***)).

$(A \vee B) \vee C \equiv A \vee (B \vee C)$ (читається: (***A*** або ***B***) або ***C*** є те ж саме, що й ***A*** або (***B*** або ***C***)).

4. Закон дистрибутивності:

Назва цього закону походить від латинського слова ***distributio,*** що у перекладі означає *розміщення, розподілення*. ***Із формули закону видно, що тут відбувається розподілення, розміщення першого висловлювання стосовно другого, а потім першого відносно третього. Результати цього розміщення об'єднуються через (∨).***

Існує два варіанти цього закону:

— ***«закон дистрибутивності кон'юнкції відносно диз'юнкції»:***

$$A \ \& \ (B \vee C) \equiv (A \ \& \ B) \vee (A \ \& \ C)$$

(читається: ***A*** і (***B*** або ***C***) є те саме, що й (***A*** і ***B***) або (***A*** і ***C***)).

— ***«закон дистрибутивності диз'юнкції по відношенню до кон'юнкції»:***

$$A \vee (B \ \& \ C) \equiv (A \vee B) \ \& \ (A \vee C)$$

(читається: ***A*** або (***B*** і ***C***) є те саме, що й (***A*** або ***B***) і (***A*** або ***C***)).

5. Закон ідемпотентності:

Назва цього закону походить від латинського слова ***idempotens,*** що у перекладі означає зберігаючий той самий степінь. ***Суть цього закону полягає в тому, що якщо кон'юнкцією чи диз'юнкцією сполучаються дві однакові змінні, то одну змінну можна виключити:***

$A \ \& \ A \equiv A$ (читається: ***A*** і ***A*** є те саме, що й ***A***);

$A \vee A \equiv A$ (читається: ***A*** або ***A*** є те саме, що й ***A***).

Розглянемо чотири закони відносно завжди істинних і завжди хибних формул.

***Завжди істинну формулу* (*або тавтологію*) *позначимо символом* ($\top$), *а завжди хибну формулу* — ($\bot$).**

6. ***Закон виключення тавтології із кон'юнкції.***

Суть цього закону полягає в тому, що кон'юнктивне приєднання до виконуваної* (*нейтральної, або довільної*) *формули А тавтології не додає до цієї формули ніякої нової інформації. Тобто, згідно з природою (&), значення формули $A \,\&\, \top$ цілком залежить від значень формули A:

$$A \,\&\, \top \equiv A.$$

7. ***Закон перетворення кон'юнкції в протиріччя.***

Цей закон виражає, що в силу природи кон'юнкції, якщо один із кон'юнктів завжди хибний* ($\bot$)*, то вся кон'юнкція стає завжди хибною:

$$A \,\&\, \bot \equiv \bot.$$

8. ***Закон перетворення диз'юнкції в тавтологію.***

Відомо, що коли один із диз'юнктів завжди істинний, то вся диз'юнкція зажди буде істинною* ($\top$)*:

$$A \vee \top \equiv \top.$$

9. ***Закон виключення протиріччя із диз'юнкції.***

Якщо приєднати диз'юнктивно до довільної формули А завжди хибну формулу, то в силу природи диз'юнкції значення утвореної формули $A \vee \bot$ залежатиме від довільної формули А:

$$A \vee \bot \equiv A.$$

10. ***Перший закон де-Моргана, або заперечення кон'юнкції:***

$$\overline{A \,\&\, B} \equiv \overline{A} \vee \overline{B}.$$

11. ***Другий закон де-Моргана, або заперечення диз'юнкції:***

$$A \vee B \equiv (\overline{\overline{A} \vee \overline{B}}).$$

Суть законів де-Моргана полягає в перенесенні заперечень, застосованих до складних висловлювань, на прості висловлювання, що їх складають.

12. ***Закон виразу кон’юнкції через диз’юнкцію:***

$$A \,\&\, B \equiv (\overline{\overline{A} \vee \overline{B}}).$$

13. ***Закон виразу диз’юнкції через кон’юнкцію*:**

$$A \vee B \equiv (\overline{\overline{A} \,\&\, \overline{B}}).$$

14. ***Закон виключення імплікації:***

$$A \supset B \equiv \overline{A} \vee B.$$

15. ***Закон заміни еквіваленції:***

$$A \backsim B \equiv (A \supset B) \,\&\, (B \supset A).$$

16. ***Закон заміни сильної диз’юнкції:***

$$A \vee B \equiv (A \vee B) \,\&\, (\overline{A} \vee \overline{B}).$$

«Закони виявлення»:

17. $\overline{A} \,\&\, (B \vee A) \equiv \overline{A} \,\&\, (B \vee A) \,\&\, B$

18. $\overline{A} \vee (B \wedge A) \equiv \overline{A} \vee (B \wedge A) \vee B$

19. $(A \vee B) \,\&\, (\overline{A} \,\&\, C) \equiv (A \vee B) \,\&\, (\overline{A} \vee C) \,\&\, (B \vee C)$

20. $(A \,\&\, B) \vee (\overline{A} \,\&\, C) \equiv (A \,\&\, B) \vee (\overline{A} \,\&\, C) \vee (B \,\&\, C)$

«Закони поглинання»:

21. $(A \vee B) \,\&\, (\overline{A} \vee B) \equiv B$

22. $(A \vee B) \,\&\, A \equiv A$

23. $(A \,\&\, B) \vee A \equiv A$

«Нехай А — деяка формула, і А′ отримується із А заміною хоча б одного входження підформули В у формулу А на В′. Тоді, якщо В′ рівносильна В, то формула А′ рівносильна А». Це правило називається «правилом заміни рівносильності».

Застосовуючи це правило, можна переходити від одних формул до інших, які їм рівносильні.

Наведені закони *1—23* обгрунтовуються таблицями істинності. Але, використовуючи ці закони, не звертаючись до таблиць істинності, а керуючись правилом заміни, можна встановити рівносильність будь-якої формули.

Наприклад, візьмемо формулу

$$(\overline{A \vee B}) \supset C.$$

Відповідно до ***другого закону де-Моргана (11)*** замінимо у цій формулі ***антецедент:***

$$(\overline{\overline{A}} \& \overline{\overline{B}}) \supset \boldsymbol{C}.$$

Отримана формула рівносильна вихідній. Згідно з законом ***виключення імплікації (14)*** замінимо цю формулу рівносильною їй:

$$\overline{(\overline{\overline{A}} \& \overline{\overline{B}})} \vee \boldsymbol{C}.$$

Підформулу $\overline{(\overline{\overline{A}} \& \overline{\overline{B}})}$ замінимо згідно з ***першим законом де-Моргана (10):***

$$\overline{\overline{A}} \vee \overline{\overline{B}} \vee \boldsymbol{C}.$$

Тепер застосуємо ***закон подвійного заперечення (1):***

$$\boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{B} \vee \boldsymbol{C}.$$

В силу транзитивності відношення рівносильності отримана формула є рівносильною всім попереднім.

Користуючись правилом заміни, будь-яку формулу можна перетворювати в рівносильну їй таким чином, щоб вона не містила одних логічних сполучників, але містила інші.

Наприклад, використовуючи закони ***14, 15, 16*** за правилом заміни формулу, яка містить знаки ⊃, ∾, ∨, можна перетворити на формулу, в якій відсутні ці знаки. Таким способом, підбираючи відповідні закони, можна отримувати формули, які містять лише & і ⌉, або ∨ і ⌉, або ⊃ і ⌉.

5. Логічні відношення між формулами

Поряд із виділенням логічних законів у системі S^1 розв'язується ще одна задача, яка встановлює логічні відношення (за істинністю і хибністю) між формулами.

В якості фундаментальних логічних відношень у S^1 виділяють:

— ***відношення сумісності за істинністю;***

— ***відношення сумісності за хибністю;***

— ***відношення логічного слідування.***

Дефініція: «Формули деякої множини Г[1] ***є сумісними за істинністю в S^1 тоді і тільки тоді, якщо в S^1 існує***

[1] Г — це метазнак, який використовується для позначення множини довільних формул.

інтерпретація нелогічних символів, які входять до складу вказаних формул, при якій кожна формула із Г приймає значення «істина». У протилежному випадку формули будуть несумісними за істинністю».

Дефініція. «Формули із множини Г є сумісними за хибністю в S^1 тоді і тільки тоді, якщо в S^1 існує інтерпретація нелогічних символів, що входять до складу вказаних формул, при якій кожна формула із Г приймає значення «хиба». У протилежному випадку ці формули будуть несумісними за хибністю».

Найбільш важливим є відношення логічного слідування.

Дефініція. «Із множини формул Г логічно слідує формула В у S^1 тоді і тільки тоді, якщо в S^1 не існує інтерпретації нелогічних символів, що входять до Г і до В, при якій кожна формула із Г приймає значення «істина», а формула В — значення «хиба». У протилежному випадку В не слідує із Г».

Твердження ***«Із Г слідує В»*** записується так:

$$\Gamma \models B.$$

Щоб краще зрозуміти логічні відношення між формулами в S^1 звернемося до прикладів.

Візьмемо формули $p \vee q$, $q \supset r$, $p \vee r$ і побудуємо для них спільну таблицю істинності, щоб розглянути названі логічні відношення.

p	*q*	*r*	$p \vee q$	$q \supset r$	$p \vee r$
і	*і*	*і*	*і*	*і*	*і*
і	*і*	*х*	і	х	і
і	*х*	*і*	*і*	*і*	*і*
і	*х*	*х*	*і*	*і*	*і*
х	*і*	*і*	*і*	*і*	*і*
х	*і*	*х*	і	х	х
х	*х*	*і*	х	і	і
х	*х*	*х*	х	і	х

Розглянемо, які ж логічні відношення мають місце між наведеними формулами. Критерієм сумісності за істинністю, хибністю та логічним слідуванням будуть вище наведені дефініції.

Якщо в спільній таблиці істинності знайдеться, у крайньому разі, один рядок, в якому кожна формула

приймає значення істинності «і», то ці формули вважаються сумісними за істинністю. У протилежному випадку вони не будуть сумісними за істинністю.

Якщо у спільній таблиці істинності знайдеться хоча б один рядок, де кожна формула приймає значення хибності «х», то ці формули сумісні за хибністю. У протилежному випадку вони не будуть сумісні за хибністю.

Якщо потрібно з'ясувати, чи слідує із формул A_1, A_2, ... A_n формула В, будується спільна таблиця істинності. Якщо у побудованій таблиці відсутній рядок в якому формули A_1, A_2,... A_n одночасно істинні, а формула В — хибна, то $A_1, A_2, \ldots A_n \models B$.

Із складеної таблиці істинності очевидно, що формули ***$p \vee q$, $q \supset r$, $p \vee r$ сумісні за істинністю.*** Свідченням цього є рядки: ***1, 3, 4*** і ***5***.

Але ці формули несумісні за хибністю, оскільки немає жодного рядка, де б кожна формула приймала значення «*х*».

Формула ***$p \vee r$ логічно слідує із формул $p \vee q$, $q \supset r$,*** оскільки в таблиці істинності немає жодного рядка де б ***$p \vee q$*** і ***$q \supset r$*** приймали значення ***«і»***, а формула ***$p \vee r$*** — ***«х»***. Записується це так:

$$(p \vee q, q \supset r \models p \vee r)$$

Формула ***$p \vee q$ не слідує із формул $q \supset r$*** і ***$p \vee r$,*** оскільки у сьомому рядку наведеної таблиці істинності формули ***$q \supset r$*** і ***$p \vee r$*** істинні, а формула p ∨ q — хибна. Записується це так:

$$(q \supset r, p \vee r \urcorner\models p \vee q)$$

Таким способом можна розглядати логічні відношення між будь-якими формулами в системі S^1.

6. Нормальні форми логіки висловлювань

Серед нормальних форм логіки висловлювань виділяють:

а) кон'юнктивну нормальну форму (КНФ);
б) диз'юнктивну нормальну форму (ДНФ);
в) досконалу кон'юнктивну нормальну форму (ДКНФ);
г) досконалу диз'юнктивну нормальну форму (ДДНФ);
д) скорочену кон'юнктивну нормальну форму (СКНФ);
е) скорочену диз'юнктивну нормальну форму (СДНФ).

Кожна із цих формул має свій власний спосіб утворення і розв'язує характерні для неї задачі.

а) Кон'юнктивна нормальна форма (КНФ)

Перш ніж аналізувати ***КНФ*** зробимо одне зауваження.

У сучасній логіці існує таке поняття як ***«проблема розв'язання»***. Воно уточнюється стосовно кожного розділу сучасної логіки. В алгебраїчній системі логіки висловлювань цю проблему можна визначити так:

«Проблема розв'язання — це встановлення ефективної процедури, яка кінцевим числом кроків дозволяє встановити чи є дана формула тотожно-істинною, чи тотожно-хибною, чи виконуваною».

У S^1 такими процедурами є:

1) побудова таблиць істинності і

2) зведення формули до КНФ і ДНФ.

Про таблиці істинності йшлося вище. Розглянемо ***КНФ***.

Кон'юнктивною нормальною формою (КНФ) є кон'юнкція елементарних диз'юнкцій.

КНФ записується так:

1) $(\boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{B}) \wedge (\overline{\boldsymbol{A}} \vee \boldsymbol{C})$,

2) $(\boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{B}) \wedge \boldsymbol{C}$ тощо.

У другій формулі кон'юнктивний член ***С*** розглядається як вироджена диз'юнкція з одним диз'юнктом. Будь-яку формулу логіки висловлювань можна звести до ***КНФ***.

Для того щоб звести формулу до КНФ необхідно виконати такі дії:

1. За допомогою відповідних законів треба звільнитися від $\vee$, $\backsim$, $\supset$, ***якщо вони наявні у вихідній формулі.***

2. Усунути загальне заперечення і подвійне заперечення відповідно конкретних законів.

3. До отриманої формули застосувати закон дистрибутивності диз'юнкції по відношенню до кон'юнкції.

За допомогою КНФ розв'язуються такі задачі:

1) є дана формула тотожно-істинною чи ні;

2) чи є формула С наслідком із формул $\boldsymbol{A_1}, \boldsymbol{A_2}, \dots \boldsymbol{A_n}$.

Розглянемо зведення формули до ***КНФ*** на такому *прикладі*:

$$\textbf{1.}\ [(\boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{B}) \supset \boldsymbol{C}] \supset \left[(\boldsymbol{A} \wedge \overline{\boldsymbol{C}}) \vee \overline{\boldsymbol{B}}\right].$$

До цієї формули застосовуємо закон виключення імплікації:

$$\textbf{2.}\ \left[\overline{\overline{(\boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{B})} \supset \boldsymbol{C}}\right] \supset \left[(\overline{\boldsymbol{A} \wedge \overline{\boldsymbol{C}}}) \vee \overline{\boldsymbol{B}}\right].$$

Застосовуємо другий закон де-Моргана:

$$3.\ \left[\overline{\overline{\overline{(A \wedge B)}}} \supset \overline{C}\right] \supset \left[(\overline{A} \wedge \overline{\overline{C}}) \vee \overline{B}\right].$$

Скористаємося законом подвійного заперечення:

$$4.\ \left[(A \wedge B) \supset \overline{C}\right] \supset \left[(\overline{A} \wedge C) \vee \overline{B}\right].$$

Звернемося до закону дистрибутивності диз'юнкції по відношенню до кон'юнкції:

$$5.\ (A \vee \overline{A} \vee C \vee \overline{B}) \wedge (B \vee \overline{A} \vee C \vee \overline{B}) \wedge (\overline{C} \vee \overline{A} \vee C \vee \overline{B}).$$

Ми отримали ***КНФ***. ***Кожен із кон'юнктів містить диз'юнкцію змінної і її заперечення*** $(A \vee \overline{A})$, $(B \vee \overline{B})$, $(C \vee \overline{C})$, ***тобто тавтологію, а це означає, що вихідна формула є тавтологією.***

Формула може мати не одну ***КНФ***. Наприклад, візьмемо формулу

$$(A \vee B) \supset C.$$

1. $(A \vee B) \supset C$
2. $[(A \vee B) \wedge (\overline{A} \vee \overline{B})] \supset C$

3. $[(A \vee B) \wedge (\overline{A} \vee \overline{B})] \vee C$
4. $[(A \vee B) \vee (\overline{A} \vee \overline{B})] \vee C$
5. $[(\overline{A} \wedge \overline{B}) \vee (\overline{A} \wedge \overline{B})] \vee \mathrm{C}$
6. $[(\overline{A} \wedge \overline{B}) \vee (\mathrm{A} \wedge \mathrm{B})] \vee \mathrm{C}$
7. $[(\overline{A} \vee A) \wedge (\overline{B} \vee A) \wedge (\overline{A} \vee B) \wedge (\overline{B} \vee B)] \vee C$
8. $(\overline{A} \vee A \vee C) \wedge (\overline{B} \vee A \vee C) \wedge (\overline{A} \vee B \vee C) \wedge (\overline{B} \vee \mathrm{B} \vee \mathrm{C})$

Отже, ми отримали ***КНФ*** для вихідної формули.
Але для неї ***КНФ*** буде і формула:

$$(\overline{A} \vee A \vee C) \wedge (\overline{B} \vee A \vee C) \wedge$$
$$\wedge (\overline{A} \vee B \vee C) \wedge (\overline{B} \vee B \vee C) \wedge (C \vee \overline{C}).$$

Завдяки структурним особливостям ***КНФ*** за зовнішнім її виглядом можна визначити, чи є вихідна формула тавтологією чи ні.

Наприклад, маємо формулу:

$$(\overline{B} \wedge (A \supset B)) \supset \overline{A}.$$

Зведемо її до ***КНФ***:

1. $\overline{(\overline{B} \wedge (A \supset B))} \vee \overline{A}$
2. $(\overline{B} \vee \overline{(\overline{A} \vee B)}) \vee \overline{A}$
3. $(B \vee (\overline{\overline{A}} \wedge \overline{B})) \vee \overline{A}$
4. $(B \vee (A \wedge \overline{B})) \vee \overline{A}$
5. $((B \vee A) \wedge (B \vee \overline{B})) \vee \overline{A}$
6. $(B \vee A \vee \overline{A}) \wedge (B \vee \overline{B} \vee \overline{A})$

Оскільки обидва кон'юнкти містять змінну і її заперечення, то це тавтологія.

Як уже зазначалося, другою задачею, яку розв'язують ***КНФ***, є з'ясування питання: «*Чи є довільна формула логічним наслідком із інших формул чи ні?*».

Щоб перевірити, чи є довільна формула С наслідком із формул A_1, A_2, ... A_n, необхідно приєднати через імплікацію формулу С до формул A_1, A_2, ... A_n а потім отриманий вираз звести до КНФ.

Якщо отримана КНФ буде тавтологією, то це буде підтвердженням того, що формула С випливає із формул A_1, A_2, ... A_n.

Перевіримо, чи слідує C із формул $A \vee B$, $A \supset C$, $B \supset C$ як засновків.

Поєднаємо кон'юнктивно засновки:

$$(A \vee B) \wedge (A \supset C) \wedge (B \supset C).$$

Приєднаємо до них імплікативно C:

$$((A \vee B) \wedge (A \supset C) \wedge (B \supset C)) \supset C.$$

Зведемо отриману формулу до ***КНФ***:

1. $\overline{((A \vee B) \wedge (A \supset C) \wedge (B \supset C))} \vee C$
2. $(\overline{(A \vee B)} \vee \overline{(A \supset C)} \vee \overline{(B \supset C)}) \vee C$
3. $(\overline{(A \vee \mathrm{B})} \vee (\overline{A} \vee C) \vee \overline{(\overline{B} \vee C)}) \vee \mathrm{C}$
4. $((\overline{A} \wedge \overline{B}) \vee (\overline{A} \wedge \overline{C}) \vee (\overline{B} \wedge \overline{C})) \vee \overline{C}$
5. $((\overline{A} \wedge \overline{B}) \vee (A \wedge \overline{C}) \vee (B \wedge \overline{C})) \vee C$

6. $(((\overline{A} \vee A) \wedge (\overline{A} \vee \overline{C}) \wedge (\overline{B} \vee A) \wedge (\overline{B} \vee \overline{C})) \vee$
$\vee (B \vee \overline{C})) \vee C$

7. $((\overline{A} \vee A \vee B) \wedge (\overline{A} \vee A \vee \overline{C}) \wedge (\overline{A} \vee \overline{C} \vee B) \wedge (\overline{A} \vee \overline{C} \vee$
$\vee \overline{C}) \wedge (\overline{B} \vee A \vee B) \wedge (\overline{B} \vee A \vee \overline{C}) \wedge (\overline{B} \vee \overline{C} \vee B) \wedge (\overline{B} \vee$
$\vee \overline{C} \vee \overline{C})) \vee C$

8. $((\overline{A} \vee A \vee B \vee C) \wedge (\overline{A} \vee A \vee \overline{C} \vee C) \wedge (\overline{A} \vee \overline{C} \vee B \vee C) \wedge$
$\wedge (\overline{A} \vee \overline{C} \vee \overline{C} \vee C) \wedge (\overline{B} \vee A \vee B \vee C) \wedge (\overline{B} \vee A \vee \overline{C} \vee C) \wedge$
$\wedge (\overline{B} \vee \overline{C} \vee B \vee C) \wedge (\overline{B} \vee \overline{C} \vee \overline{C} \vee C)$.

Кожен кон'юнкт має змінну і її заперечення, а це означає, що вихідна формула — тавтологія, тому С є наслідком із формул $A \vee B$, $A \supset C$, $B \supset C$.

б) Досконала кон'юнктивна нормальна форма (ДКНФ)

Кожна не тотожно-істинна формула має одну ДКНФ, яка називається досконалою кон'юнктивною нормальною формою.

ДКНФ має такі ознаки:

1) у ДКНФ немає двох однакових кон'юнктів;

2) жоден кон'юнкт не має двох однакових змінних ($A \vee B \vee A$);

3) жоден кон'юнкт не має змінної і її заперечення ($A \vee B \vee \overline{A}$);

4) у кожному кон'юнкті наяні всі змінні, що входять до складу вихідної формули.

Щоб привести формулу до ДКНФ, необхідно виконати такі дії:

а) звести вихідну формулу до КНФ;

б) співставити отриману КНФ із перерахованими ознаками ДКНФ;

в) якщо в якомусь із кон'юнктів відсутня змінна, що наявна у вихідній формулі, то необхідно диз'юнктивно приєднати до цього кон'юнкта протиріччя ($X \wedge \overline{X}$), а потім застосувати закон дистрибутивності диз'юнкції по відношенню до кон'юнкції.

За допомогою ***ДКНФ*** розв'язують ***задачу знаходження всіх логічних наслідків із даних формул.***

Наведемо приклади.

Маємо формули $\overline{B}$ і $A \supset B$. Знайдемо всі логічні наслідки із цих формул.

Спочатку кон'юнктивно з'єднаємо ці формули:

$$\overline{B} \wedge (A \supset B).$$

Приведемо цю формулу до ***ДКНФ***. Спочатку отримаємо ***КНФ***.

$$\overline{B} \wedge (A \supset B)$$

$$\overline{B} \wedge (\overline{A} \vee B).$$

Отримали ***КНФ***. Тепер співставимо її з ознаками ***ДКНФ***. Виявляється, що в першому кон'юнкті відсутня змінна A, яка є у вихідній формулі. Припишемо диз'юнктивно до першого кон'юнкту протиріччя $(A \wedge \overline{A})$ і застосуємо закон дистрибутивності диз'юнкції по відношенню до кон'юнкції.

$$(\overline{B} \vee (A \wedge \overline{A})) \wedge (\overline{A} \vee B)$$

$$(\overline{B} \vee A) \wedge (\overline{B} \vee \overline{A}) \wedge (\overline{A} \vee B).$$

Отже, ми отримали ***ДКНФ***, яка дає можливість ***оглянути всі логічні наслідки із даних формул. Цими наслідками є:***

1. $(\overline{B} \vee A)$;
2. $(\overline{B} \vee \overline{A})$;
3. $(\overline{A} \vee B)$;
4. $(\overline{B} \vee A) \wedge (\overline{B} \vee \overline{A})$;
5. $(\overline{B} \vee A) \wedge (\overline{A} \vee B)$;
6. $(\overline{B} \vee \overline{A}) \wedge (\overline{A} \vee B)$;
7. $(\overline{B} \vee A) \wedge (\overline{B} \vee \overline{A}) \wedge (\overline{A} \vee B)$.

Візьмемо такі формули: $B \vee C$, $B \supset \overline{A}$, $B \supset C$ і знайдемо всі їх наслідки.

1. $(B \vee C) \wedge (B \supset \overline{A}) \wedge (B \supset C)$
2. $(B \vee C) \wedge (\overline{B} \vee \overline{A}) \wedge (\overline{B} \vee C)$
3. $[(B \vee C) \vee (A \wedge \overline{A})] \wedge [(\overline{B} \vee \overline{A}) \vee (C \wedge \overline{C})] \wedge [(\overline{B} \vee C) \vee$ $\vee (\overline{A} \wedge A)]$

4. $(B \vee C \vee A) \wedge (B \vee C \vee \overline{A}) \wedge (\overline{B} \vee \overline{A} \vee C) \wedge (\overline{B} \vee \overline{A} \vee \overline{C}) \wedge (\overline{B} \vee C \vee A) \wedge (B \vee C \vee \overline{A})$.

Дана ***ДКНФ представляє всі можливі наслідки із даних формул.*** Якщо до вихідної формули **1** приєднати імплікативно будь-який із законів, то отримана формула буде тавтологією.

в) Скорочена кон'юнктивна нормальна форма (СКНФ)

СКНФ має такі ознаки:

1) Жоден кон'юнкт не утримує двох однакових змінних $(A \vee B \vee A)$***;***

2) У СКНФ відсутні два однакових кон'юнкти;

3) У СКНФ відсутні кон'юнкти, до складу яких входить змінна і її заперечення.

Щоб привести формулу до СКНФ, необхідно виконати такі дії:

1) отримати із вихідної формули КНФ;

2) співставити отриману КНФ із ознаками СКНФ;

3) до отриманого виразу послідовно застосовувати закони виявлення і закони поглинання.

Завдяки ***СКНФ розв'язують задачу знаходження всіх простих наслідків із кон'юнкції заданих формул.***

За допомогою ***ДКНФ*** знаходять всі логічні наслідки із даних формул. Але виникає потреба знайти лише прості наслідки.

Простим наслідком називається такий наслідок, який не поглинається ніяким, більш сильним, наслідком[1]***.***

Знайдемо всі прості наслідки із засновків: $A \supset \overline{B}$, $A \vee C$, $B \wedge C$:

$$\mathbf{1.}\ \overline{(A \supset \overline{B}) \wedge (A \vee C) \wedge (B \wedge C)}.$$

$$\mathbf{2.}\ (\overline{A} \vee \overline{B}) \wedge (A \vee C) \wedge (\overline{B} \vee \overline{C}).$$

Ми отримали ***КНФ***. Співставимо її з ознаками ***СКНФ***. Потім до формули **2** послідовно застосуємо ***закони виявлення*** і ***закони поглинання***.

[1] Формула A сильніша формули B, якщо $A \supset B$ є тавтологією.

3. $(\overline{A} \vee \overline{B}) \wedge (A \vee C) \wedge (\overline{B} \vee \overline{C}) \wedge (\overline{B} \vee C) \wedge (A \vee \overline{B})$.

Формула **3** отримана у результаті застосування ***закону виявлення*** **(*19*)** до **2** формули.

$$\mathbf{4.}\ (A \vee C) \wedge \overline{B}.$$

Формула **4** отримана у результаті застосування ***закону поглинання*** **(*22*)** до формули **3**. Отже, ***кожен із кон'юнктів є простим наслідком***.

Розглянемо ще одни приклад.

Дані такі засновки: $(A \supset B)$, $(A \supset C)$, $(\overline{B} \vee \overline{C})$. Потрібно знайти ***всі прості наслідки***:

1. $(A \supset B) \wedge (A \supset C) \wedge (\overline{B} \vee \overline{C})$

2. $(\overline{A} \vee B) \wedge (\overline{A} \vee C) \wedge (\overline{B} \vee \overline{C})$

3. $(\overline{A} \vee B) \wedge (\overline{A} \vee C) \wedge (\overline{B} \vee \overline{C}) \wedge (\overline{A} \vee \overline{C}) \wedge (\overline{A} \vee \overline{B})$

4. $\overline{A} \wedge (\overline{B} \vee \overline{C})$.

Перейдемо до розгляду групи диз'юнктивних нормальних форм.

г) Диз'юнктивна нормальна форма (ДНФ)

Кожна формула в S^1 може бути приведена до ***ДНФ***.

Диз'юнктивною нормальною формою даної формули називається диз'юнкція елементарних кон'юнкцій: $(A \wedge B) \vee \vee(\overline{B} \wedge C) \vee A$ тощо.

Щоб привести формулу до ДНФ, необхідно виконати такі дії:

1) за допомогою відповідних законів послідовно звільнитися від $\vee$, $\backsim$, $\supset$, ***якщо вони є у вихідній формулі;***

2) віднести загальне заперечення до елементарних висловлювань;

3) застосувати до отриманої формули закон дистрибутивності кон'юнкції по відношенню до диз'юнкції.

ДНФ дозволяє встановити, чи є довільна формула тотожно-хибною чи ні.

Наприклад, знайдемо ***ДНФ*** формули:

1. $\overline{[(A \supset B) \wedge (C \supset D) \wedge (A \vee C)] \supset (B \vee D)}$

2. $[\overline{(A \supset B) \wedge (C \supset D) \wedge (A \vee C)}] \vee (B \vee D)$

3. $[(A \supset B) \wedge (C \supset D) \wedge (A \vee C)] \wedge \overline{(B \vee D)}$

4. $[(A \supset B) \wedge (C \supset D) \wedge (A \vee C)\,] \wedge \overline{B} \wedge \overline{D}$

5. $[(\overline{A} \vee B) \wedge (\overline{C} \vee D) \wedge (A \vee C)] \wedge \overline{B} \wedge \overline{D}$

6. $[((\overline{A} \wedge \overline{C}) \vee (\overline{A} \wedge D) \vee (B \wedge \overline{C}) \vee (B \wedge D)) \wedge$
$\wedge (A \vee C)] \wedge \overline{B} \wedge \overline{D}$

7. $[(\overline{A} \wedge \overline{C} \wedge A) \vee (\overline{A} \wedge D \wedge A) \vee (B \wedge \overline{C} \wedge A) \vee$
$\vee (B \wedge D \wedge A) \vee (\overline{A} \wedge \overline{C} \wedge C) \vee (\overline{A} \wedge D \wedge C) \vee$
$\vee (B \wedge \overline{C} \wedge C) \vee (B \wedge D \wedge C)] \wedge \overline{B} \vee \overline{D}$

8. $(\overline{A} \wedge \overline{C} \wedge A \wedge \overline{B} \wedge \overline{D}) \vee (\overline{A} \wedge D \wedge A \wedge \overline{B} \wedge \overline{D}) \vee$
$\vee (B \wedge \overline{C} \wedge A \wedge \overline{B} \wedge \overline{D}) \vee (B \wedge D \wedge A \wedge \overline{B} \wedge \overline{D}) \vee$
$\vee (\overline{A} \wedge \overline{C} \wedge C \wedge \overline{B} \wedge \overline{D}) \vee (\overline{A} \wedge D \wedge C \wedge \overline{B} \wedge \overline{D}) \vee$
$\vee (B \wedge \overline{C} \wedge C \wedge \overline{B} \wedge \overline{D}) \vee (B \wedge D \wedge C \wedge \overline{B} \wedge \overline{D})$.

В отриманій ***ДНФ*** у ***восьмому рядку кожен диз'юнкт має змінну і її заперечення, а це означає, що дана формула тотожно-хибна.***

д) Досконала диз'юнктивна нормальна форма (ДДНФ)

Кожна не тотожно-хибна формула в S^1 має одну досконалу диз'юнктивну форму.

ДДНФ має такі характерні ознаки:

1) у ДДНФ немає двох однакових диз'юнктів;

2) жоден диз'юнкт не містить змінної і її заперечення;

3) жоден диз'юнкт не має двох однакових змінних;

4) кожен диз'юнкт містить всі змінні, що наявні у вихідній формулі.

Щоб привести формулу до ДДНФ, необхідно виконати такі дії:

1) звести формулу до ДНФ;

2) співставити отриману ДНФ з ознаками ДДНФ;

3) якщо в якомусь диз'юнкті не вистачає змінної, яка є у вихідній формулі, то до нього потрібно кон'юнктивно приписати диз'юнкцію цієї змінної і її заперечення $(X \vee \overline{X})$.

За допомогою ДДНФ розв'язують задачу огляду всіх гіпотез даної формули.

Дефініція. «Гіпотезою формули В називається така формула А, якщо $A \supset B$ є тотожно-істинною формулою».

Диз'юнкти ***ДДНФ*** даної формули є різні гіпотези, при істинності яких дана формула істинна.

Наприклад, приведемо до ***ДДНФ*** формулу:

$$(A \supset B) \land (\overline{B} \supset A).$$

1. $(\overline{A} \lor B) \land (\overline{B} \lor A)$
2. $(\overline{A} \lor B) \land (B \lor A)$
3. $(\overline{A} \land B) \lor (\overline{A} \land A) \lor (B \land B) \lor (A \land B)$

Формула в рядку **3** є ***ДНФ*** вихідної формули. Співставимо її з ознаками ***ДДНФ***.

4. $(\overline{A} \land B) \lor B \lor (A \land B)$
5. $(\overline{A} \land B) \lor [B \land (A \lor \overline{A})] \lor (A \land B)$
6. $(\overline{A} \land B) \lor (B \land A) \lor (B \land \overline{A}) \lor (A \land B)$
7. $(\overline{A} \land B) \lor (B \land A)$.

Із отриманої ***ДДНФ*** очевидно, що вихідна формула має ***3 гіпотези***:

1. $(\overline{A} \land B)$
2. $(B \land A)$
3. $(\overline{A} \land B) \lor (B \land \overline{A})$.

Якщо будь-яку гіпотезу приєднати через імплікацію до вихідної формули, то отримаємо тавтологію.

$$(\overline{A} \land B) \supset [(A \supset B) \land (\overline{B} \supset A)].$$

Для перевірки цього факту зведемо дану формулу до ***КНФ***:

1. $(\overline{A} \land B) \supset [(A \supset B) \land (\overline{B} \supset A)]$
2. $\overline{(\overline{A} \land B)} \lor [(\overline{A} \lor B) \land (\overline{B} \lor A)]$
3. $\overline{\overline{A}} \lor \overline{B} \lor [(\overline{A} \lor B) \land (B \lor A)]$
4. $(A \lor \overline{B} \lor \overline{A} \lor B) \land (A \lor \overline{B} \lor B \lor A)$.

Кожен кон'юнкт отриманої ***КНФ*** має змінну і її заперечення, а це означає, що $\overline{A} \land B$ дійсно ***є гіпотезою*** для вихідної формули.

Розглянемо скорочену диз'юнктивну нормальну форму.

е) Скорочена диз'юнктивна нормальна форма (СДНФ)

Скороченою диз'юнктивною нормальною формулою є ДНФ, якій притаманні такі характерні ознаки:

1) у жодному диз'юнкті немає двох однакових кон'юнктів;

2) якщо є два однакових диз'юнкти, то один з них скорочується;

3) жоден диз'юнкт не містить змінної і її заперечення.

Для того, щоб привести формулу до СДНФ, необхідно виконати такі дії:

1) привести вихідну формулу до ДНФ;

2) співставити отриману ДНФ із ознаками СДНФ;

3) послідовно застосувати до отриманого виразу закони виявлення і закони поглинання.

За допомогою ***СДНФ знаходять всі прості гіпотези довільної формули.***

Дефініція. «Гіпотеза А формули В називається простою, якщо вона не поглинається ніякою іншою гіпотезою формули В».

Наприклад, візьмемо формулу:

$$((A \wedge B) \vee C) \supset C.$$

Знайдемо всі її прості гіпотези, тобто приведемо її до ***СДНФ.***

1. $\overline{((A \wedge B) \vee C)} \vee C$

2. $(\overline{(A \wedge B)} \wedge \overline{C}) \vee C$

3. $((\overline{A} \vee \overline{B}) \wedge \overline{C}) \vee C$

4. $(\overline{A} \wedge \overline{C}) \vee (\overline{B} \wedge \overline{C}) \vee C.$

Формула у **4** рядку є ***ДНФ*** вихідної формули. Приведемо її до ***СДНФ.*** Для цього послідовно застосовуємо ***закони виявлення*** і ***закони поглинання.***

5. $(\overline{A} \wedge \overline{C}) \vee (\overline{B} \wedge \overline{C}) \vee C \vee \overline{A} \vee \overline{B}$

6. $C \vee \overline{A} \vee \overline{B}$.

Ми отримали чотири прості гіпотези:

1. C;

2. $\overline{A}$;

3. $\overline{B}$;

4. $C \vee \overline{A} \vee \overline{B}$.

Якщо імплікативно приєднати до будь-якої гіпотези вихідну формулу, то отримаємо тавтологію:

$$(C \vee \overline{A} \vee \overline{B}) \supset [(A \wedge B) \vee C] \supset C.$$

Зведемо цю формулу до КНФ:

1. $\overline{(C \vee \overline{A} \vee \overline{B})} \vee \overline{[(A \wedge B) \vee C]} \vee C$
2. $(\overline{C} \wedge \overline{\overline{A}} \wedge \overline{\overline{B}}) \vee [\overline{(A \wedge B)} \wedge \overline{C}] \vee C$
3. $(\overline{C} \wedge A \wedge B) \vee [(\overline{A} \vee \overline{B}) \wedge \overline{C}] \vee C$
4. $(\overline{C} \wedge A \wedge B) \vee [(\overline{A} \vee \overline{B} \vee C) \wedge (\overline{C} \vee C)]$
5. $(\overline{C} \vee \overline{A} \vee \overline{B} \vee C) \wedge (\overline{C} \vee \overline{C} \vee C) \wedge (\overline{A} \vee \overline{B} \vee C \vee A) \wedge$
   $\wedge (\overline{C} \vee C \vee A) \wedge (\overline{A} \vee \overline{B} \vee C \vee B) \wedge (\overline{C} \vee C \vee B)$.

Отримана ***КНФ*** показує, що вихідна формула є тавтологією, а це означає, що формула $C \vee \overline{A} \vee \overline{B}$ є гіпотезою для формули

$$((A \wedge B) \vee C) \supset C.$$

Розглянемо ще один приклад.

Знайдемо ***прості гіпотези*** для формули

$$((A \wedge \overline{B}) \supset C) \supset (C \vee B).$$

1. $((\mathbf{A} \wedge \overline{B}) \supset C) \vee (C \vee B)$
2. $\overline{((A \wedge \overline{B}) \vee C)} \vee C \vee B$
3. $(\overline{\overline{(A \wedge \overline{B})}} \wedge \overline{C}) \vee C \vee B$
4. $(A \wedge \overline{B} \wedge \overline{C}) \vee C \vee B$
5. $(A \wedge \overline{B} \wedge \overline{C}) \vee C \vee B \vee (A \wedge \overline{B}) \vee (A \wedge \overline{C})$
6. $(A \wedge \overline{B} \wedge \overline{C}) \vee C \vee B \vee (A \wedge \overline{B}) \vee (A \wedge \overline{C}) \vee A$
7. $C \vee B \vee (A \wedge \overline{B}) \vee (A \wedge \overline{C}) \vee A$
8. $C \vee B \vee (A \wedge \overline{C}) \vee A$
9. $C \vee B \vee A$.

Остання формула є ***СДНФ***, яка містить всі прості гіпотези вихідної формули.

Ознайомленням із нормальними формами завершується аналіз характерних особливостей S^1 і тих завдань, які вони розв'язують.

Контрольні питання та вправи

1. Поняття алгебри логіки висловлювань.
2. Структура мови алгебраїчної системи логіки висловлювань.
3. Поняття змінної та метазмінної.

4. Синтаксис метамови в S^1.
5. Семантика метамови в S^1.
6. Характеристика завдань, які розв'язуються засобами S^1.
7. Структура алфавіту S^1.
8. Визначення нелогічних термінів.
9. Характеристика логічних символів.
10. Дефініція формули.
11. Типологія формул за синтаксичними ознаками.
12. Поняття підформули.
13. Поняття степеня формули.
14. Способи розстановки дужок у формулі.
15. Визначення головного логічного знака у формулі.
16. Порядок виконання дій над формулою.
17. Фіксація логічної форми висловлювань природної мови засобами словника S^1.
18. Характерні особливості бездужкової логічної мови Я. Лукасевича.
19. Семантика метамови.
20. Поняття інтерпретації.
21. Правила інтерпретації ***Sem ML в*** S^1.
22. Таблиці істинності.
23. Порядок побудови таблиці істинності.
24. Типологія формул за семантичними ознаками.
25. Тавтології і логічні закони.
26. Поняття рівносильної формули.
27. Характеристика відношення рівносильності.
28. Основні закони логіки та їх функції.
29. Відношення сумісності за істинністю між формулами.
30. Відношення сумісності за хибністю між формулами.
31. Відношення логічного слідування.
32. Поняття нормальної форми логіки висловлювань.
33. Проблема розв'язання в S^1.
34. ***КНФ***, способи її отримання, і задачі, які вона розв'язує.
35. ***ДКНФ***, способи її отримання і задачі, які вона розв'язує.
36. Характерні особливості ***СКНФ***, способи отримання і задачі, які вона розв'язує.
37. ***ДНФ***, способи отримання і задачі, які вона розв'язує.
38. ***ДДНФ***, способи її отримання і задачі, які вона розв'язує.
39. ***СДНФ***, способи її отримання і задачі, які вона розв'язує.
40. Перевірити, чи є формулами логіки висловлювань такі вирази:

а) $(p \supset q) \vee r \wedge$;

б) $(p \vee \overline{r})) \supset (q \ \wedge) \vee p$;

в) $\overline{(p \supset q)} \supset r$.

41. Побудувати таблиці істинності для таких формул:

а) $(((\overline{q} \supset p) \vee q) \sim q)$;

б) $(((p \vee q) \vee r) \supset (\bar{q} \supset r))$;

в) $(r \supset ((p \vee q) \wedge r))$.

42. За допомогою таблиць істинності перевірити, чи є рівносильними формули:

а) $(p \wedge q)$ *і* $\overline{p \supset \bar{q}}$;

б) $(\bar{p} \vee q)$ *і* $(p \supset \bar{q})$;

в) $p \supset (q \supset r)$ *і* $(p \wedge q) \supset r$;

г) $\overline{(p \wedge q) \vee r}$ *і* $(p \supset \bar{q}) \wedge \bar{r}$.

43. Встановити, чи є тотожно-істинними формули:

а) $p \supset (q \supset (p \wedge q))$;

б) $(p \supset (q \supset r)) \supset ((p \supset q) \supset (p \supset r))$;

в) $(p \supset (q \supset r) \supset ((q \supset p) \supset (r \supset p))$.

44. Наведені формули звести до ***КНФ***:

а) $p \supset ((p \supset q) \supset q)$;

б) $((p \supset q) \wedge (r \supset s)) \supset ((p \wedge r) \supset (q \wedge s))$;

в) $((p \supset q) \vee (p \supset r)) \supset (p \supset (p \vee r))$.

45. Знайти всі наслідки із засновків:

а) $(p \wedge q), q, r$;

б) $(\bar{p} \supset q), (q \supset r), (r \supset p)$.

46. Знайти всі прості наслідки із засновків:

а) $p \vee q, q \vee r, \bar{p} \wedge c$;

б) $p \supset q, p \supset c, \bar{q} \vee \bar{c}$.

47. Звести формулу до ***ДНФ:***

$((p \vee q) \supset (\bar{q} \wedge r)) \sim \bar{r}$.

48. Привести до ***ДДНФ*** формулу:

$((p \supset q) \vee (r \sim s)) \supset (\bar{p} \wedge s)$.

49. За допомогою ***СДНФ*** знайти всі прості гіпотези формул:

а) $((p \vee q) \vee (p \wedge q)$;

б) $((p \wedge \bar{q}) \supset r) \supset (r \vee q)$.

РОЗДІЛ II

ЧИСЛЕННЯ ЛОГІКИ ВИСЛОВЛЮВАНЬ

Із загальнонаукової точки зору ***числення можна визначити як формальний апарат оперування зі знаками певного виду, що дозволяє описати деякий клас задач, а для окремих підкласів цього класу — і алгоритм розв'язання.***

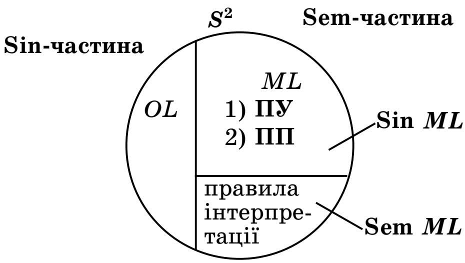
У логіці поняття числення уточнюється і конкретизується засобами суворої формалізації. Тут логічне числення задається на базі деякої формалізованої мови. Спочатку визначається набір вихідних положень, із яких за допомогою чітких правил перетворення отримують нові положення (їх називають теоремами).

Якщо до техніки числень додати інтерпретацію, яка надає значення вихідним символам і формулам, то числення перетворюються у мову, що описує конкретну предметну область. Це можуть бути числення висловлювань або числення предикатів, або числення класів тощо.

У першому розділі розглядалася алгебраїчна система логіки висловлювань, яка позначалася символом S^1. Характерною особливістю цієї системи є те, що в синтаксисі метамови є лише один вид правил — ***правила утворення*** (***ПУ***).

Мова числення логіки висловлювань, окрім правил утворення, включає і правила перетворення (***ПП***). Тобто, до складу мови числення логіки висловлювань входять усі засоби S^1, але тут вони отримують нове звучання і виконують інші функції.

Виходячи із вищезазначеного, структуру числень можна представити у вигляді такої схеми:



1. Аксіоматичне числення логіки висловлювань

Аналізуючи пропозиційну логіку на рівні ***алгебраїчної системи***, ми розглядали кожну формулу як вираз, що може прийняти одне із двох значень: ***«істина»*** або ***«хиба»***. Завдяки цьому засобами даної системи можна було розв'язувати такі задачі:

1) проводити демаркацію між тавтологіями і нетавтологіями;

2) визначати відношення логічного слідування між двома формулами;

3) здійснювати перевірку формул на рівносильність.

Однак складніші задачі засобами S^1 розв'язати неможливо. Для цього необхідно залучати більш ефективні логічні засоби.

а) Мова аксіоматичного числення логіки висловлювань

Позначається ***аксіоматичне числення логіки висловлювань символом S^2.***

До складу синтаксису (Sin ML) S^2 входять окрім правил утворення (як уже зазначалося) ***правила перетворення (ПП).***

Зупинимося на характеристиці ***правил утворення (ПУ).***

Алфавіт S^2 включає такі самі символи, що й алфавіт S^1:

1) пропозиційні символи: $p, q, r, s, p_1, q_1, r_1, s_1, \ldots$;

2) логічні символи: $\&, \vee, \supset, \backsim, \rceil$.

Як бачимо, за назвою це ті ж самі об'єкти, що і в алфавіті S^1, але у S^2 вони розглядаються з іншої, більш формальної, сторони. Тут ***p, q, r, s*** — це вже не сутності, які здатні приймати значення ***«і»*** (істина) або ***«х»*** (хиба) при різних наборах значень, а певні об'єкти, які чітко відрізняються один від одного, і властивості яких явно не визначаються. Стосовно логічних символів зауважимо, що тут уже не йдеться про їх табличне визначення.

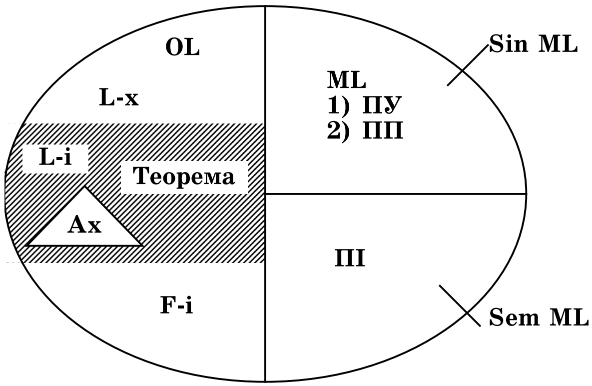
Єдиним способом визначення пропозиційних символів і пропозиційних зв'язок є способи поводження з ними у відповідності до правил висновку.

Дефініція формули така сама, як і в S^1. Але ***формула в S^2 характеризується не таблицями істинності, а си-***

туацією виводу (випливання). Тому тут відбувається диференціація формул не на тавтології, протиріччя і нейтральні (виконувані), а на теореми і аксіоми. Мається на увазі, що саме ця типологія висувається на передній план, а не те, що в об'єкт-мові S^2 відсутні тотожно-хибні (або протиріччя, або ***L-x***) формули і нейтральні (або виконувані, або ***F — і***) формули.

Усередині тотожно-істинних (або тавтологій, або L-і) формул відбувається розшарування на теореми і аксіоми.

Вищезазначене можна проілюструвати ***схемою мови*** S^2:



Ось так можна охарактеризувати ***ПУ*** в S^2. Очевидно, що вони співпадають із ***ПУ*** в S^1, але тут вони, природно, набувають певної специфіки.

Розглянемо ***правила перетворення (ПП).***

До складу ПП входять:

1. Дефініція аксіоми.

2. Дефініція теореми.

3. Список аксіом.

4. Правила доведення, які включають:

а) правило відділення або правило модус поненс (МР);

б) правило підстановки (п/п).

5. Дефініція доведення.

6. Дефініція доведеної формули.

Дефініція: «Аксіомою в S^2 ***називають підмножину тавтологій, які визначаються вихідними при побудові доведення».***

Зауважимо, що не треба розглядати аксіому S^2 у традиційному розумінні як *«очевидну істину» або як «істину, що не потребує доведення»*.

У логічному численні всі формули, в тому числі і аксіоми, розглядаються безвідносно до їх можливих значень «очевидно» або «неочевидно». Тут значення формул враховується опосередковано.

Дефініція: «Теоремами в S^2 називають підмножину тавтологій, для яких існує доведення».

Аксіоми і теореми вичерпують всю множину тавтологій в S^2. Враховуючи це, аксіоматичні числення будують так, щоб клас теорем співпадав із класом тавтологій. Іншими словами, S^2 своїми засобами забезпечує можливість охарактеризувати всю множину тавтологій. Саме цій змістовній вимозі підпорядкований вибір аксіом і правил висновку у S^2.

Набір аксіом у S^2 може бути різним, але він повинен бути достатнім для доведення теорем у S^2.

Як зразок візьмемо набір аксіом, запропонований німецьким вченим ***Давидом Гільбертом***:

1. $A \supset (B \supset A)$[1]
2. $(A \supset (B \supset C) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$
3. $(A \wedge B) \supset A$
4. $(A \wedge B) \supset B$
5. $A \supset (B \supset (A \wedge B))$
6. $A \supset (A \vee B)$
7. $B \supset (A \vee B)$
8. $(A \supset C) \supset ((B \supset C) \supset ((A \vee B) \supset C))$
9. $(A \supset B) \supset ((A \supset B) \supset \overline{A})$
10. $(A \supset B) \supset (\overline{B} \supset \overline{A})$.

Застосовуючи до наведеного набору аксіом правила доведення, можна вивести будь-яку теорему в S^2 .

Визначимо правила доведення.

Дефініція правила відділення (MP): «Якщо A і A ⊃ B істинні, то B також істинне». Записується правило у вигляді схеми:

$$\frac{\begin{array}{c} A \\ A \supset B \end{array}}{B}.$$

[1] Зрозуміло, що тут маються на увазі аксіомні схеми.

Дефініція правила підстановки (п/п): «Нехай А, формула, яка містить змінні x_1, x_2, ... x_n. Тоді, якщо А — істинна формула в численні висловлювань, то, заміняючи в ній змінні x_1, x_2, ... x_n всюди, де вони входять довільними змінними x_1', x_2', ... x_n', отримаємо формулу А′, яка також буде істинною».

Це правило має вигляд:

$$\frac{A(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n)}{A'(x_1',\ x_2',\ ...,\ x_n')}.$$

Дефініція доведення: «Доведенням називається послідовність формул A_1, ... A_n, де кожна із формул є або аксіомою, або доказаною раніше формулою, або отримана за правилами доведення; остання формула послідовності A_n є виразом, який потрібно було довести».

Дефініція доказової формули: «Формула А називається доказовою тоді, коли є можливість побудувати доведення, останньою формулою якого є формула А».

Факт, що ***формула доказова,*** її записують так: **|– А.**

Якщо ***формула не доказова***, то: **–| А.**

Розглянемо структуру доведення на прикладі доказу теореми:

$$\vdash p \supset p.$$

Доведення.

1. p ⊃ (q ⊃ p)		***— Ах. 1***
2. p ⊃ ((p ⊃ p) ⊃ p)	**—** *q/p ⊃ p*	***за п/п до 1***
3. (p ⊃ (q ⊃ r)) ⊃ ((p ⊃ q) ⊃ ⊃(p ⊃ r))		***— Ах. 2***
4. (p ⊃ ((p ⊃ p) ⊃ p)) ⊃ ⊃ ((p ⊃ (p ⊃ p)) ⊃ (p ⊃ p)	**—** *q/p ⊃ p, r/p*	***за п/п до 3***
5. (p ⊃ (p ⊃ p)) ⊃ (p ⊃ p)		***за МР, до 1, 4***
6. p ⊃ (q ⊃ p)		***— Ах 1***
7. p ⊃ (p ⊃ p)	**— q/p**	***за п/п до 6***
8. |– p ⊃ p		***за МР до 7, 5.***

Дамо деякі пояснення до структури доведення.

Послідовність у доведенні ***зліва*** утворює, власне, ***доведення теореми p ⊃ p.*** Послідовність ***справа*** — є ***аналізом цього доведення***, тобто тут вказані підстави, за якими кожен рядок включається в доведення. Треба мати на увазі, що аналіз доведення не є його частиною і може бути опущеним.

Опишемо хід доведення із аксіом.

Для того щоб побудувати доведення формули F, необхідно здійснити такі дії:

1) виписати одну із аксіом;

2) послідовно застосувати правило підстановки (п/п) і правило відділення (MP);

3) доведення є закінченим, якщо останнім виразом у послідовності формул буде F.

Розглянемо приклад побудови ***доведення теореми***:

$$\vdash (p \supset q) \supset ((p \vee q) \supset q).$$

1. Візьмемо ***аксіому 8:***

$$(p \supset r) \supset ((q \supset r) \supset ((p \vee q) \supset r)).$$

2. Застосовуємо ***правило підстановки*** і підставляємо замість ***r/q:***

$$(p \supset q) \supset ((q \supset q) \supset ((p \vee q) \supset q)).$$

3. Беремо ***аксіому 2:***

$$(p \supset (q \supset r)) \supset ((p \supset q) \supset (p \supset r)).$$

4. За ***правилом підстановки*** підставляємо замість $p/p \supset q$, замість $q/q \supset q$, замість $r/(p \vee q) \supset q$:

$$((p \supset q) \supset ((q \supset q) \supset ((p \vee q) \supset q)) \supset$$
$$\supset (((p \supset q) \supset (q \supset q)) \supset ((p \supset q) \supset (p \vee q) \supset q))).$$

5. Застосовуємо ***правило відділення*** **(*MP*)** до **2** і **4** рядків і отримуємо:

$$((p \supset q) \supset (q \supset q)) \supset ((p \supset q) \supset (p \vee q) \supset q)).$$

6. Візьмемо формулу, ***раніше доведену*** в S^2:

$$p \supset p.$$

7. Застосуємо ***правило підстановки*** і підсталяємо замість ***p/q:***

$$q \supset q.$$

8. Беремо ***аксіому 1:***

$$p \supset (q \supset p).$$

9. Використовуємо ***правило підстановки*** і підставляємо замість $p/q \supset q$ і замість $q/p \supset q$:

$$(\mathbf{q} \supset \mathbf{q}) \supset ((\mathbf{p} \supset \mathbf{q}) \supset (\mathbf{q} \supset \mathbf{q})).$$

10. Застосовуємо *правило відділення* (*МР*) до **6** і **8** рядків і отримуємо:

$$(\mathbf{p} \supset \mathbf{q}) \supset (\mathbf{q} \supset \mathbf{q}).$$

11. Використовуючи ***правило МР*** до **9** і **4**, отримуємо:

$$\vdash (\mathbf{p} \supset \mathbf{q}) \supset ((\mathbf{p} \vee \mathbf{q}) \supset \mathbf{q}).$$

Одинадцятий рядок співпадає з формулою, яку потрібно було довести, отже доведення закінчено.

Наведені доведення є доведеннями із аксіом. Ці доведення можна розширити в тому смислі, що воно стане доведенням не лише із аксіом, але й з деякого кінцевого числа довільних формул, які називаються ***припущеннями***, або ***гіпотезами***.

Дефініція: «Доведенням із гіпотез $A_1,\dots A_n$ формули B називається кінцева послідовність формул $B_1,\dots B_n$, кожна з яких є або аксіома, або гіпотеза, або раніше доведена формула в S^2, або отримана із двох попередніх формул за правилом МР; причому B_n є B ».

Факт, що формула ***B*** доказується із гіпотез $A_1,\dots A_n$, записується так:

$$A_1, \dots, A_n \vdash B.$$

Іноді в науковій літературі зустрічається, що ***доведенням із гіпотез називають дедукцію (вивідність) із гіпотез,*** залишаючи термін «доведення» для позначення доведення із порожньої множини гіпотез, або доведення із аксіом.

Наведемо приклад щодо цього виду доведення.

Маємо гіпотези: $\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}, \mathbf{p} \supset (\mathbf{q} \supset \mathbf{r})$.

Необхідно побудувати доведення із них формули **r**:

$$\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}, \mathbf{p} \supset (\mathbf{q} \supset \mathbf{r}) \vdash \mathbf{r}.$$

Доведення.

1. $\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}$	— ***припущення 1***
2. $(\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}) \supset \mathbf{p}$	— ***аксіома 3***
3. $\mathbf{p}$	— ***МР до 1 і 2***
4. $\mathbf{p} \supset (\mathbf{q} \supset \mathbf{r})$	— ***припущення 2***
5. $\mathbf{q} \supset \mathbf{r}$	— ***МР до 3 і 4***

6. $(p \wedge q) \supset q$ — *аксіома 4*
7. q — *MP до 1 і 6*
8. r — *MP до 5 і 7.*

Отже, існує вивід $\mathbf{r}$ із $\mathbf{p \wedge q, p \supset (q \supset r)}$.

Зауважимо, що треба розрізняти терміни ***«теорема»*** і **«метатеорема»**.

Теоремами називаються доказувані формули числення, тоді як ***метатеореми — це доказувані змістовні твердження про властивості числення.***

До таких фундаментальних властивостей числень відносяться:

— ***вивідність;***
— ***розв'язуваність;***
— ***несуперечливість;***
— ***повнота;***
— ***незалежність.***

Кожна із цих властивостей описується відповідними метатеоремами:

— ***про дедукцію;***
— ***про несуперечливість;***
— ***про розв'язуваність;***
— ***про повноту;***
— ***про незалежність.***

Розглянемо їх по порядку.

2. Метатеорема про дедукцію

Вперше ця теорема була сформульована у 1930 р. ***Ербраном***. Тому іноді її називають ***теоремою Ербрана***. Але як загальний методологічний принцип, що характеризує аксіоматично-дедуктивні системи, вона з'явилася у ***А. Тарського***.

Формулюється ***метатеорема про дедукцію*** так:

«Якщо $A_1,\dots A_{n-1}, A_n \vdash B$***, то*** $A_1,\dots A_{n-1} \vdash A_n \supset B$***».***

Тобто, якщо із формул $A_1,\dots A_{n-1}$ і A_n виводиться B, то із формул $A_1, \dots A_{n-1}$ виводиться імплікація $A_n \supset B$.

Іншими словами: ***«Якщо дано доведення*** B ***із*** $A_1,\dots A_{n-1}, A_n$***, то можна побудувати висновок*** $A_n \supset B$ ***на підставі цього доведення».***

Вивідність формули на підставі метатеореми про дедукцію визначається трьома особливостями, які виражаються у вигляді таких правил:

а) із довільних формул $A_1, \ldots A_n$ вивідна кожна із цих формул:

$$A_1, \ldots A_n \vdash A_i \text{ де } n \geq i \geq 1;$$

б) із довільних формул $A_1, \ldots A_n$ вивідна кожна формула, яка є вивідною в S^2 :

$A_1, \ldots A_n \vdash R$ ***(R — вивідна формула в S^2);***

в) якщо із довільних формул $A_1, \ldots A_n$ вивідна формула виду MP, то із них також вивідний і консеквент цього модусу.

Ці особливості вивідності (дедукції) на підставі метатеореми про дедукцію стають очевидними на основі таких ***семантичних міркувань***:

1) Особливість ***а)*** виражає властивість рефлексивності слідування:

«Із засновку випливає він сам» $A \models A$, ***так як*** $\models A \supset A$.

2) Особливість ***б)*** виражає властивість істинних (вивідних) формул. ***«Кожна істинна формула розглядається як консеквент L — ⊃ (логічно істинної імплікації) з довільним антецедентом».***

3) Особливість ***в)*** фіксується таким способом:

«Якщо із $A_1, \ldots A_n \vdash B'$ ***і із*** $A_1, \ldots A_n \vdash B' \supset B''$,
то $\models B' \supset B''$, ***але це можливо, коли*** $\models B''$***».***

Перейдемо до ***доведення метатеореми про дедукцію***:

$$\frac{A_1,\ \ldots,\ A_{n-1},\ A_n \mid\!- B}{A_1,\ \ldots,\ A_{n-1},\ \mid\!- A_n \supset B}.$$

I. ***B може бути однією із формул $A_1, \ldots A_n$:***

1) $B = A_1$

2) $B = A_n$

3) $B = A_i$ — при $n \geq i \geq 1$

Розглянемо послідовно ці випадки.

1). $B = A_1$

$$\frac{A_1, \ldots A_{n-1}, A_n \vdash A_1}{A_1, \ldots A_{n-1} \vdash A_n \supset A_1}$$

Доведення. ***1.*** $A \supset (B \supset A)$ — ***А х. 1***

2. $A_1 \supset (A_n \supset A_1)$ — ***за п/п:*** A/A_1, B/A_n

3. $\vdash A_1$ — *за умовою*
4. $\vdash A_n \supset A_1$ — *за МР — 2,3.*

2) $B = A_n$
$$\frac{A_1,\ldots, A_{n-1}, A_n \vdash A_n}{A_1,\ldots, A_{n-1} \vdash A_n \supset A_n}$$

Доведення. 1. $A \supset A$ — *теорема в* S^2
2. $A_n \supset A_n$ — *за п/п* A/A_n
3. $\vdash A_n \supset A_n$.

3). $B = A_i$
$$\frac{A_1,\ldots, A_{n-1}, A_n \vdash A_i}{A_1,\ldots, A_{n-1} \vdash A_n \supset A_i}$$

Доведення. 1. $A \supset (B \supset A)$ — *А х. 1*
2. $A_i \supset (A_n \supset A_i)$ — *за п/п* A/A_i, B/A_n
3. $\vdash A_i$ — *за умовою*
4. $\vdash A_n \supset A_i$ — *за МР — 2,3.*

ІІ. ***В може бути вивідною формулою в*** S^2 $(\vdash R)$:

$$\frac{A_1,\ldots, A_{n-1}, A_n \vdash R}{A_1,\ldots, A_{n-1} \vdash A_n \supset R}.$$

Цей випадок є очевидним.

ІІІ. ***В може бути консеквентом вивідної імплікації***:
$\vdash [B' \wedge (B' \supset B'')] \supset B''$

$$\frac{A_1,\ldots, A_{n-1}, A_n \vdash B''}{A_1,\ldots, A_{n-1} \vdash A_n \supset B'}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{A_1,\ldots, A_{n-1} \vdash A_n \supset (B' \supset B'')}{A_1,\ldots, A_{n-1} \vdash A_n \supset B''}.$$

Доведення.
1. $A \supset (B \supset C) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C)$ — *А х. 2*
2. $A_n \supset (B' \supset B'') \supset ((A_n \supset B') \supset$
$\supset (A_n \supset B'')$ — *за п/п* A/A_n
3. $\vdash A_n \supset (B' \supset B'')$ — *за умовою* B/B', C/B''
4. $(A_n \supset B') \supset (A_n \supset B'')$ — *за МР — 2,3*
5. $\vdash A_n \supset B'$ — *за умовою.*
6. $\vdash A_n \supset B''$ — *за МР — 4,5.*

Розглянуті ***варіанти доведення метатеореми про дедукцію*** показують, що вона описує одну із фундаментальних властивостей числень, ***суть якої полягає у тому, що доведена формула із множини засновків, з'єднуючись через імплікацію з будь-яким із цих засновків чи їх комбінацією, теж буде доведеною.***

3. Металогічні принципи в S^2

Властивості розв'язання, несуперечливості, повноти і незалежності називають металогічними принципами. Аналізують ці принципи через доведення відповідних метатеорем.

а) Принцип розв'язання

Аналізуючи принцип розв'язання, зауважимо, що логічна мова повинна мати процедуру, яка дозволяє ефективно, тобто кінцевим числом кроків, установити, чи є дана формула логічним законом, чи ні.

Особливість принципу розв'язання в аксіоматичному численні висловлювань пов'язана з тим, що при аксіоматизації логіки висловлювань головним завданням є систематизація логічних законів. Множина законів задається тут не у вигляді сукупності, а у вигляді виведення їх із деяких вихідних законів за допомогою правил висновку. Тобто, ***в аксіоматичному численні висловлювань розв'язуюча процедура для конкретних формул забезпечується побудовою їх доведення.***

Опишемо принцип розв'язання через доведення відповідних ***метатеорем*** (***скорочено — MT***).

Існує усього чотири метатеореми:

$$\mathbf{MT_1} - \vdash \mathbf{A} \supset \models \mathbf{A}$$

— (читається: ***«якщо А доказане, то тотожно-істинне А»***);

$$\mathbf{MT_2} - \neg \models \mathbf{A} \supset \neg \vdash \mathbf{A}$$

— (читається: ***«якщо А не тотожно-істинне, то і не доказане А»***);

$$\mathbf{MT_3} - \models \mathbf{A} \supset \vdash \mathbf{A}$$

— (читається: ***«якщо А тотожно-істинне, то і доказане А»***);

$$\mathbf{MT_4} — \neg \vdash A \supset \neg \models A$$

— (читається: ***«якщо А не доказане, то і не тотожно-істинне А»***).

Розглянемо по черзі кожну з наведених теорем.

$$\mathbf{MT_1} \vdash A \supset \models A.$$

Із наведеної вище структури S^2 очевидно, що множина тавтологій включає в себе дві підмножини: ***аксіоми і теореми***.

Відомо, що якщо $\models A$ і $\models A \supset B$, то $\models B$, тобто ***правило висновку забезпечує зберігання властивості «бути тавтологією»***. Тоді, ***якщо кожна аксіома — це тавтологія і правило висновку зберігає властивість «бути тавтологією», то в силу визначення поняття доведення кожна теорема є тавтологією.***

$$\mathbf{MT_2} \neg \models A \supset \neg \vdash A.$$

Доведення.

1. $(A \supset B) \supset (\overline{B} \supset \overline{A})$ — *А х. 10*
2. $(\vdash A \supset \models A) \supset (\neg \models A \supset \neg \vdash A)$ — *п/п до 1. А / $\vdash$ А, В / $\models$ А*
3. $\vdash A \supset \models A$ — *MT_1*
4. $\neg \models A \supset \neg \vdash A$ — *МР до 2,3*

$$\mathbf{MT_3} \models A \supset \vdash A.$$

Ця метатеорема приймається як очевидна.

$$\mathbf{MT_4} \neg \vdash A \supset \neg \models A.$$

Доведення.

1. $(A \supset B) \supset (\overline{B} \supset \overline{A})$ — *Ах. 10*
2. $(\models A \supset \vdash A) \supset (\neg \vdash A \supset \neg \models A)$ — *п/п А/ $\models$ А, В/ $\vdash$ А*
3. $\models A \supset \vdash A$ — *MT_3*
4. $\neg \vdash A \supset \neg \models A$ — *МР до 2,3.*

Таким чином, через доведення $\mathbf{MT_1} – \mathbf{MT_4}$ ми показали, що в S^2 множина вивідних формул співпадає з множиною тавтологій.

б) Принцип несуперечливості

Принцип несуперечливості формулюється відносно:
1) теорем;
2) правил висновку;
3) елементів алфавіту.

***Дефініція несуперечливості відносно теорем*:**

«Логічна система несуперечлива, якщо клас теорем не співпадає із класом правильно побудованих виразів (ППВ)»

або

***«Логічна система несуперечлива, якщо існує хоча б один ППВ, який не є тавтологією»*,**

або

***«Логічна система несуперечлива, якщо не всі ППВ є теоремами»*.**

Ми навели різні варіанти дефініції **MT_5.** За своєю суттю вони ідентичні, відмінність лише у словесному вираженні.

***Доведення* $MT_{5.}$**

Візьмемо довільну формулу, яка не є тавтологією: $\mathbf{A \supset B}$ (що дана формула не є тавтологією, очевидно із її таблиці істинності).

1. $\neg \models A \supset B$	
2. $\neg \models (A \supset B) \supset \neg \vdash (A \supset B)$	— *MT_2*
3. $\neg \vdash (A \supset B)$	— *МР до 1,2*
4. $(A \wedge \bar{A}) \supset B$	— *теорема (із хибного випливає все що завгодно)*
5. $(A \wedge \bar{A}) \supset \vdash (A \supset B)$	— *п/п В/ ⊢ (А ⊃ В)*
6. $(A \supset B) \supset (\bar{B} \supset \bar{A})$	— *Ах. 10*
7. $[(A \wedge \bar{A}) \supset \vdash (A \supset B)] \supset$ $\supset [\neg \vdash (A \supset B) \supset \neg (A \wedge \bar{A})]$	— *п/п А/А ∧ $\bar{A}$, В/ ⊢ А ⊃ В*
8. $\neg \vdash (A \supset B) \supset \neg (A \wedge \bar{A})$	— *МР до 5,7*
9. $\neg (A \wedge \bar{A})$	— *МР до 3,8.*

Отже, в S^2 неможлива ситуація $\mathbf{A \wedge \bar{A}}$.

Наслідком **MT_5** є семантичне формулювання несуперечливості:

***«Якщо хоча б один ППВ недоказуваний, то жодна теорема не є логічним протиріччям»*.**

Дефініція несуперечливості S^2 відносно перетворень (правил висновку) у $S^/$:

***«У синтаксичному смислі система S^2 несуперечлива відносно перетворень, якщо в ній неможливо довести А і довести $\neg$ А»*.**

Доведення цього положення дається ***двома метатеоремами:***

МТ$_6$ (*пряма*) —

«Якщо вивідне А, то невірно, що вивідне ⌉ А»:

$$\vdash A \supset \urcorner \vdash \urcorner A.$$

Доведення.

1. $\vdash A$	— ***припущення***
2. $\vdash A \supset \models A$	— ***МТ$_1$***
3. $\models A$	— **МР до 1,2**
4. $\models A \supset \urcorner \models \urcorner A$	— ***по таблиці істинності для заперечення***
5. $\urcorner \models \urcorner A$	— ***МР до 3,4***
6. $\urcorner \models \urcorner A \supset \urcorner \vdash \urcorner A$	— ***МТ$_2$***
7. $\urcorner \vdash \urcorner A$	— ***МР до 5,6.***

МТ$_7$ (*обернена*) —

«Якщо в S^2 вивідне ⌉ А, то невірно, що вивідне А»:

$$\vdash \urcorner A \supset \urcorner \vdash A.$$

Доведення.

1. $\vdash \urcorner A$	— ***припущення***
2. $\vdash \urcorner A \supset |$	— ***МТ$_1$***
3. $\models \urcorner A$	— ***МР до 1,2***
4. $\urcorner \models A$	— ***по таблиці істинності для заперечення***
5. $\urcorner \models A \supset \urcorner \vdash A$	— ***МТ$_2$***
6. $\urcorner \vdash A$	— ***МР до 4,5.***

У семантичному смислі ці дві метатеореми свідчать про те, що ***в S^2 не має двох таких теорем, одна із яких є запереченням іншої.*** В кінцевому рахунку несуперечливість обумовлена прийнятими правилами висновку в S^2. Це такі правила, на основі яких здійснювані перетворення із тавтологій породжують тавтології.

Дефініція несуперечливості відносно елементів алфавіту (пропозиційних змінних):

«а) у синтаксичному розумінні — жодна окрема пропозиційна змінна не є теоремою та тавтологією, тобто не доказувана;

б) у семантичному розумінні — жодна окрема пропозиційна змінна не є тавтологією».

Формула, що складається з однієї пропозиційної змінної набуває значення *«і»* або *«х»*, тобто є ***F-істиною***, а значить, не є теоремою, тобто не доказувана.

в) *Принцип повноти*

Принцип повноти характеризує дві властивості формалізованих мов:

а) виразні можливості засобів мови;

б) виразні можливості дедуктивних засобів мови.

Відповідно до цього розрізняють:

1) функціональну повноту мови;

2) дедуктивну повноту мови.

Якщо йдеться про функціональну повноту засобів мови, то перш за все, мається на увазі повнота логічних сполучників.

Відомо, що в S^1 група логічних сполучників повинна бути достатньою для вираження всіх з п'яти сполучників або множини ***ППФ***, де є ці сполучники. Але, у групі сполучників ($\wedge$, $\vee$, $\supset$, $\sim$, $\rceil$) виділяють деякі базисні, вихідні, до яких можна звести решту сполучників. Саме таку групу називають ***функціонально повною***.

В S^1 функціонально повними є:

1. ($\wedge$, $\vee$, $\rceil$);

2. ($\wedge$, $\rceil$);

3. ($\vee$, $\rceil$);

4. ($\supset$, $\rceil$)

На відміну від S^1 у S^2 функціональна повнота характеризується через групу аксіом і правил висновку. У різних аксіоматичних системах можуть бути прийняті різні групи ***аксіом*** і ***ПВ***.

Дедуктивна повнота характеризує властивості засобів побудови доведення. В S^2 такими засобами є ***аксіоми і правила висновку.***

MT_8 :

«Система S^2 дедуктивно повна, якщо в ній для будь-якої формули В доказувано, що:

1) або В вивідне $\vdash$ В;

2) або приєднання В до системи аксіом робить її суперечливою».

Доведення.

1. Припустимо, що **B** має вид **A ⊃ B**.

2. За допомогою таблиці істинності показуємо, що **A ⊃ B** не є тавтологією:

$$\rceil \models (A \supset B).$$

3. $\rceil \models (A \supset B) \supset \rceil \vdash (A \supset B)$ — ***МТ***$_2$.

4. $\rceil \vdash (A \supset B)$ — ***МР до 2,3***.

5. Приєднаємо **A ⊃ B** до системи аксіом в S^2.

6. Застосуємо до нової аксіоми **A ⊃ B** правило підстановки так, щоб замість **A** підставити тавтологію, а замість **B** — протиріччя:

$$A/\ A \supset A \qquad B/\ \rceil(B \supset B)$$
$$(A \supset A) \supset \rceil(B \supset B).$$

Позначимо цю формулу символом $\vdash \Sigma$. Вона вважається доказаною, оскільки отримана за правилом підстановки із аксіоми.

7. Але відповідно до таблиці істинності вона є тотожнохибною.

8. Якщо Σ — $\rceil \models$, то $\rceil \Sigma$ — $\models$ (за табличним визначенням заперечення): $\models \rceil \Sigma$.

9. $\models \rceil \Sigma \supset \vdash \rceil \Sigma$ — ***МТ***$_3$.

10. $\vdash \rceil \Sigma$ — ***МР до 8,9***.

Отже, виходить, що якщо до нашої системи аксіом додати довільну формулу **A ⊃ B**, то вивідними будуть Σ і $\rceil \Sigma$, а це свідчить про суперечливість даної системи. Цим самим встановлено, що сама по собі система S^2 несуперечлива і, значить, дедуктивно повна.

г) Принцип незалежності

Термін ***«незалежність»*** вживається в логіці для характеристики відношення між структурними утвореннями формалізованої мови:

1) стосовно окремих аксіом;

2) стосовно системи аксіом;

3) стосовно правил висновку.

МТ$_9$:

«Аксіома, яка не є вихідною із прийнятої в S^2 системи аксіом, вважається незалежною».

Проілюструємо, що аксіома **(A ∧ B) ⊃ A** є незалежною.

1. Припустимо, що **A ∧ B ⊃ A** не вивідна із аксіом ***S*²**. Якщо вона не вивідна, то ⌉ |=, тобто приймає значення, відмінне від значень решти аксіом.

2. Надамо цій аксіомі інтерпретацію, відмінну від інтерпретації решти аксіом. Для цього обумовимо кон’юнкцію такою констатацією: **A ∧ B = B,** тобто яке значення приймає **B,** таке значення приймає **A ∧ B.**

3. Відповідно до цього аксіома набуде вигляду: **B ⊃ A.**

4. **B ⊃ A** не є |= (згідно з таблицею істинності для імплікації).

За такої інтерпретації «∧» можна гарантувати, що аксіоми, в структурі яких відсутня кон’юнкція, залишаються тавтологіями.

Нас цікавить, як поводять себе аксіоми, в структурі яких є «∧«:

а)	**1. (A ∧ B) ⊃ B**	***— Ax. — 4***
	2. |= (B ⊃ B)	***— A ∧ B/B;***
б)	**1. A ⊃ (B ⊃ (A ∧ B))**	***— Ax. — 5***
	2. |= A ⊃ (B ⊃ B)	***— A ∧ B/B.***

Отже, всі аксіоми окрім **(A ∧ B) ⊃ A** залишаються тавтологіями, незважаючи на ті дефініції, які над ними здійснювалися. А це означає, що ***вона є незалежною.***

Аналізом металогічних принципів завершується знайомство з аксіоматичним численням логіки висловлювань.

3. Натуральне числення логіки висловлювань

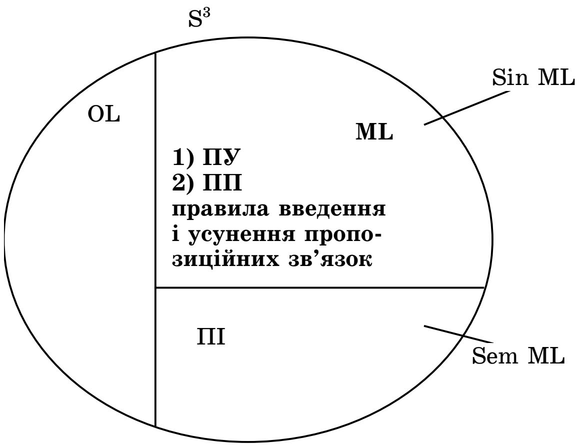
Натуральним численням логіки висловлювань називається такий вид числення, в якому висновок будується із гіпотез (припущень) у відповідності з певними правилами.

Позначають цей вид числень ***символом S³.***

До ***S³*** повністю входять засоби ***S¹***. Мається на увазі ***алфавіт, правила утворення, правила інтерпретації нелогічних і логічних термінів.*** Окрім цього в ***S³ входять 14 правил висновку.***

Якщо в аксіоматичному численні логіки висловлювань ми маємо набір аксіом і декілька правил висновку, то тут дедуктику (а це правила перетворення) складають правила введення і усунення пропозиційних зв’язок.

Структуру S^3 можна зобразити такою схемою:



Логічне числення у вигляді натурального висновку має такі особливості:

а) назва цього числення «натуральне» характеризується тим, що в ньому процес виведення висновку більш наближений до звичайних міркувань людини.

Тобто ***«натуральне»*** вживається не в смислі «неформальне», «не регламентоване суворими правилами», а в смислі отримання наслідку із довільних припущень (гіпотез), а не із аксіом;

б) перевагою S^3 над S^2 вважається те, що тут процес виведення наслідку коротший.

Відомо, що в S^2 одна й та ж сама формула в структурі доведення може зустрічатися декілька разів, що дуже рідко трапляється в S^3;

в) в S^3 відбувається певна систематизація правил висновку. З кожною пропозиційною зв'язкою співставляється одне правило введення і усунення конкретної зв'язки як головного знака формули (наявність двох правил ***УК*** (усунення кон'юнкції), ***ВД*** (введення диз'юнкції), ***УЕ*** (усунення еквіваленції) не є суттєвим).

Треба мати на увазі, що група правил введення пропозиційних зв'язок є фактично їх визначенням, а група правил усунення пропозиційних зв'язок є наслідком цих визначень.

При усуненні конкретного знака формула, якої це стосується, і знак, про який йдеться, можуть використовуватися лише в тому значенні, яке вони отримують при введенні даного знака.

Наприклад, формула $\boldsymbol{A \supset B}$ може бути введена, якщо наявний висновок $\boldsymbol{B}$ із припущення $\boldsymbol{A}$, тобто, якщо вірно $\boldsymbol{A \vdash B}$.

Застосовуючи до формули $\boldsymbol{A \supset B}$ правило ***УІ*** (усунення імплікації), діємо так, якщо б $\boldsymbol{B}$ було вивідним із доведеного $\boldsymbol{A}$, а це можливо в силу того, що формула $\boldsymbol{A \supset B}$ у засновку застосування правила ***УІ*** реєструє існування висновку $\boldsymbol{B}$ із $\boldsymbol{A}$.

Систематизація правил введення і усунення пропозиційних зв'язок належить відомому німецькому математикові і логіку ***Герхарду Генцену*** (***1909—1946 рр.***). Іноді натуральні числення називають ***«генценівські числення»***.

Запишемо ***правила висновку для*** $\boldsymbol{S^3}$***:***

1. $\dfrac{\Gamma,\ \Phi \mid -}{\Gamma \mid - A \supset B}$ (ВІ) 2. $\dfrac{A,\ A \supset B}{B}$ (УІ)

3. $\dfrac{A,\quad B}{A \wedge B}$ (ВК) 4. $\dfrac{A \wedge B}{A},\quad \dfrac{A \wedge B}{B}$ (*УК*)

5. $\dfrac{A}{A \vee B},\quad \dfrac{B}{A \vee B}$ (ВД) 6. $\dfrac{\Gamma,\ A \mid -C \quad \Gamma B \mid -C}{\Gamma,\ A \vee B \mid -C}$

7. $\dfrac{\Gamma,\ A \mid -B \quad \Gamma A \mid -\neg B}{\Gamma \mid -\neg A}$ (ВЗ)

8. $\dfrac{\neg\neg A}{A}$ (УПЗ) $\dfrac{A,\ \neg A}{B}$ (*Сл. УЗ*) — ***слабке усунення заперечення***

9. $\dfrac{A \supset B,\ B \supset A}{A \sim B}$ (ВЕ) $\dfrac{A \sim B}{A \supset B},\quad \dfrac{A \sim B}{A \supset A}$ (УЕ) .

Над рискою в кожному правилі записані засновки, а під рискою — резюме застосування правил. Кожне правило містить один висновок, в той час як засновків може бути декілька (***однозасновкові, двозасновкові тощо***).

Всі «правила введення» уводять відповідну зв'язку у висновок застосування правила, а конже «правило усунення» усуває відповідну зв'язку із засновків. Виняток складає лише правило ***УД***: диз'юнкція $\boldsymbol{A \vee B}$ скоріше тут «вводиться» ніж усувається. Але це правило можна записати у непарадоксальному вигляді:

$$\frac{\mathbf{A \vee B \; \Gamma, A \vdash C \; \Gamma, B \vdash C}}{\mathbf{\Gamma \vdash C}}.$$

Із записів ряду правил введення і усунення пропозиційних зв'язок очевидно, що в них використовується знак вивідності |–, який вважається вихідним знаком. Слідуючи Генцену, цього можна уникнути:

$$\frac{\begin{matrix}\mathbf{[A A} \\ \mathbf{B}\end{matrix}}{\mathbf{A \supset B}} \; \mathbf{(BI)}, \qquad \frac{\begin{matrix}\mathbf{[A] \quad [B]} \\ \mathbf{A \vee B < C < C}\end{matrix}}{\mathbf{C}} \; \mathbf{(УД)}$$

$$\frac{\begin{matrix}\mathbf{[A] \quad [A]} \\ \mathbf{B \quad \neg B}\end{matrix}}{\mathbf{\neg A}} \; \mathbf{(ВЗ)}.$$

Квадратні дужки вказують на те, що у них знаходяться припущення (або гіпотези).

В нашій системі S^3 будемо вважати знак |– вихідним.

При використанні цього знака в наступних доведеннях і дедукціях мають на увазі такі його властивості:

а) A |– A — рефлексивність вивідності;

***б) якщо* Г ⊆ Δ *і* Г |– A, *то* Δ |– A — (*де* Г *і* Δ — *довільні послідовності формул,* A — *формула*).**

***Ця властивість фіксує той факт, що якщо* A *вивідна із множини засновків, то вона залишається вивідною, якщо до* Г *додати додаткові засновки. Іншими словами: якщо* A |– B, *то* C, A |– B;**

***в)* Г |– A *тоді і тільки тоді, коли в* Г *існує кінцева підмножина формул* Δ, *для якої* Δ |– A;**

***г) якщо* Δ |– A *і* Г |– B *для будь-якої формули* B *із* Δ, *то із* Г |– A. *Іншими словами: якщо* A |– B *і* B |– C, *то* A |– C (*транзитивність* |–).**

Власне, ці властивості знака відповідності |– справедливі і для S^2.

Тепер розглянемо дефініцію доведення в S^3.

На відміну від правил висновку у S^2, які застосовуються тільки для виведення доказаних виразів із доказаних, у натуральному численні правила висновку можуть бути застосовані до будь-якого виразу.

Вираз, який випливає за якимось правилом із доведеного виразу, тим, самим є доведенням. Але вираз, який випливає із недоведеного виразу, ще не доведений. У цьому випадку необхідно звільнитися якимось чином від використовуваних припущень. ***У наведених правилах висновку для S^3 тільки двом правилам притаманна властивість звільнення від припущень: (ВІ) і (ВЗ), адже тільки вони усувають формулу А із припущень.***

Оскільки в S^3 немає аксіом, то доведення тут базується або на правилі введення імплікації, або на правилі введення заперечення.

Якщо останнім застосовується правило (ВІ), то висновок буде прямим, а якщо — (ВЗ), то висновок буде непрямим.

Доведення в S^3 починають із припущень, а потім за правилами висновку отримують із них відповідні наслідки, після чого за допомогою правил (ВІ) та (ВЗ) елімінують (усувають) припущення. Тому в S^3 вихідним є поняття доведення із припущень (гіпотез), а поняття безумовного доведення — похідним.

Дефініція поняття вивідності із припущень: «Формула В вивідна із припущень Г, А, символічно: Г, А |– В, якщо і тільки якщо:

1) існує правило висновку, в якому Г і А є засновками, а В висновком цього правила; або

2) існує деяка кінцева послідовність застосування правил висновку A_1, ..., A_n в якій засновками застосування кожного правила є або формули із Г, А, або наслідки попередніх (в даній послідовності) застосувань правил, і наслідком останнього застосування правила є формула В. При цьому дозволяється використовувати властивості знака |–».

Гіпотезу називають усуненою в ході дедукції, якщо в процесі дедукції до цієї гіпотези (або наслідку із неї) застосовується правило (ВІ) або (ВЗ).

Доведенням формули А називається дедукція із деякої кінцевої множини гіпотез, в ході якої кожна із гіпотез усувається.

Здійснимо доведення деяких теорем пропозиційного числення за допомогою натурального висновку.

Щоб побудувати доведення теореми в S^3, необхідно виконати такі дії:

1) виписати всі можливі припущення, виходячи із структури даної формули;

2) застосувати до виписаних припущень відповідні правила висновку із 14 правил, що входять у дедуктику S^3;

3) застосувати одне із правил (ВІ) або (ВЗ) для елімінації припущень.

Користуючись цими настановами, перейдемо до доведення конкретних теорем.

Теорема 1. (A ⊃ B) ⊃ ((B ⊃ C) ⊃ (A ⊃ C)).

Доведення.

1. A ⊃ B	***— припущення 1***
2. B ⊃ C	***— припущення 2***
3. A	***— припущення 3***
4. B	***— УІ до 1,3***
5. C	***— УІ до 2, 4***
6. A ⊃ C	***— ВІ до 3,5***
7. (A ⊃ B) ⊃ (B ⊃ C)	***— ВІ до 1, 2***
8. ⊢ (A ⊃ B) ⊃ ((B ⊃ C) ⊃ (A ⊃ C))	***— ВІ до 6,7.***

Теорема 2. (A ⊃ B) ⊃ ((C ⊃ A) ⊃ (C ⊃ B)).

Доведення.

1. (A ⊃ B)	***— припущення 1***
2. (C ⊃ A)	***— припущення 2***
3. C	**— припущення 3**
4. A	***— УІ до 2, 3***
5. B	***— УІ до 1, 4***
6. (C ⊃ B)	***— ВІ до 3,5***
7. (A ⊃ B) ⊃ (C ⊃ A)	***— ВІ до 1,2***
8. ⊢ (A ⊃ B) ⊃ ((C ⊃ A) ⊃ (C ⊃ B)).	

Теорема 3. (A ⊃ B) ⊃ ((C ∧ A) ⊃ (C ∧ B)).

Доведення.

1. (A ⊃ B)	***— припущення 1***
2. (C ∧ A)	***— припущення 2***

3. C — ***УК до 2***
4. A — ***УК до 2***
5. B — ***УІ до 1,4***
6. $C \wedge B$ — ***ВК до 3,5***
7. $(A \supset B) \supset (C \wedge A)$ — ***ВІ до 1,2***
8. $\vdash (A \supset B) \supset ((C \wedge A) \supset (C \wedge B))$ — ***ВІ до 6,7.***

Теорема 4. $(A \supset B) \supset ((A \wedge C) \supset (B \wedge C))$.

Доведення.
1. $(A \supset B)$ — ***припущення 1***
2. $\underline{(A \wedge C)}$ — ***припущення 2***
3. A — ***УК до 2***
4. C — ***УК до 2***
5. B — ***УІ до 1,3***
6. $B \wedge C$ — ***ВК до 4,5***
7. $(A \supset B) \supset (A \wedge C)$ — ***ВІ до 1,2***
8. $\vdash (A \supset B) \supset ((A \wedge C) \supset (B \wedge C))$ — ***ВІ до 6,7.***

Теорема 5. $(A \supset B) \supset ((C \vee A) \supset (C \vee B))$.

Доведення.
1. $A \supset B$ — ***припущення 1***
2. $\underline{A}$ — ***припущення 2***
3. B — ***УІ до 1,2***
4. $C \vee B$ — ***ВД до 3***
5. C — ***припущення 3***
6. $A \supset B, C \vee A \vdash C \vee B$ — **УД[1] до (1,2,4) і (1,5,4)**
7. $(A \supset B) \supset (C \vee A)$ — **ВІ до 1,6**
8. $\vdash (A \supset B) \supset ((C \vee A) \supset (C \vee B))$ — **ВІ до 7,4.**

Таким способом будується доведення будь-якої теореми в S^3.

Отже, в численнях логіки висловлювань виділяють дві формально логічні теорії: S^2 і S^3, основна різниця яких полягає в їх дедуктивній логіці або у дедуктиці.

[1] Маються на увазі послідовності **1) $A \supset B, A \vdash C \vee B$**
2) $A \supset B, C \vdash C \vee B$.

Контрольні питання та вправи

1. Поняття числення в логіці.
2. Структура S^2.
3. Порівняльна характеристика систем S^1 і S^2.
4. Алфавіт S^2.
5. Правила перетворення в S^2.
6. Аксіоми і теореми в S^2.
7. Правила доведення в S^2.
8. Дефініція доведення.
9. Дефініція доказової формули.
10. Структура доведення в S^2.
11. Хід доведення із аксіом.
12. Розширене поняття доведення в S^2.
13. Поняття «теорема» і «метатеорема».
14. Метатеорема про дедукцію.
15. Варіанти доведення метатеореми про дедукцію.
16. Металогічні принципи в S^2.
17. Принцип розв’язання.
18. Принцип несуперечності.
19. Принцип повноти.
20. Принцип незалежності.
21. Загальна характеристика натурального числення висловлювань S^3.
22. Структура S^3.
23. Правила висновку в S^3.
24. Дефініція доведення в S^3.
25. Прямі і непрямі доведення в S^3.
26. Хід побудови доведення в S^3.
27. Довести вивідність формул:

а) $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$

б) $\overline{A} \supset (A \supset B)$

в) $(A \supset B) \supset ((C \vee A) \supset (C \vee B))$

г) $(A \vee (B \wedge C)) \supset ((A \vee B) \wedge (A \vee C))$

д) $A \supset (B \supset (A \wedge B)$

е) $A \supset (A \supset B) \supset ((A \supset \overline{B}) \supset \overline{A})$

ж) $(A \supset B) \supset ((C \supset Д) \supset ((A \vee C) \supset (B \vee D)))$.

Б. ЛОГІКА ПРЕДИКАТІВ

Проаналізована у першій частині класична логіка висловлювань є досить специфічною логічною теорією. Засобами цієї логічної теорії можна виділити досить вузьку множину тавтологій. В її рамках обгрунтовується правильність досить обмеженої групи дедуктивних міркувань.

Основною причиною такої ситуації є недостатньо виразні можливості логіки висловлювань. Відомо, що розв'язуючи у рамках логіки висловлювань питання про логічну істинність висловлювань, правильність чи неправильність міркувань, відволікаються від внутрішньої структури простих висловлювань, замінюючи їх пропозиційними змінними. Але нерідко виникає ситуація, коли логічну істинність висловлювань, правильність міркувань неможливо дослідити без урахування внутрішньої структури простих висловлювань.

Наприклад: «Будь-який підручник є книгою. Отже, деякі книги є підручниками». Правильність такого міркування залежить не тільки від зв'язків між висловлюваннями, а й від внутрішньої структури самих висловлювань.

Ефективний аналіз висловлювань і міркувань такого типу потребує використання мов з більш виразними можливостями. Такою мовою є мова класичної логіки предикатів.

РОЗДІЛ І

АЛГЕБРАЇЧНА СИСТЕМА ЛОГІКИ ПРЕДИКАТІВ

Цю частину логіки предикатів, як своєрідну формально-логічну теорію, позначають символом S^4.

Засобами S^4 здійснюється типологія формул за синтаксичними і семантичними ознаками, систематизуються закони логіки предикатів, визначаються основні види логічних відношень між формулами, описується процедура розв'язання.

1. Мова алгебраїчної системи логіки предикатів

Знайомство з S^4 розпочнемо із ***Sin ML***. ***Синтаксис метамови алгебраїчної системи логіки предикатів складається із:***

1) списку вихідних символів;

2) правил утворення термінів;

3) правил утворення формул.

Розглянемо по порядку кожен із компонентів.

До вихідних символів відносяться:

а) предметні змінні — $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (нескінченна множина);

б) предметні константи — $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (кінечна або нескінченна множина; є мови, де символи такого рангу не вводяться);

в) предикатні символи (предикатори різних місткостей, на які вказують верхні числові індекси):

$$p_1^1,\ p_2^1,\ \ldots$$
$$p_1^2,\ p_2^2,\ \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$p_1^n,\ p_2^n,\ \ldots$$

(для зручності будемо використовувати предикатні символи ***P, Q, R, S*** і при необхідності — верхні індекси для вказівки місткості);

г) знаки предметних функцій (предметні функтори різних місткостей):

$$
\begin{array}{l}
f_1^1,\ f_2^1,\ \ldots \\
f_1^2,\ f_2^2,\ \ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
f_1^n,\ f_2^n,\ \ldots;
\end{array}
$$

д) логічні терміни: $\wedge, \vee, \supset, \backsim, \rceil, \forall, \exists$;

е) технічні знаки: /,/; / (;) / — кома, ліва і права дужки.

Дефініція терму:

1. Будь-яка предметна змінна і предметна константа є термом;

2. Якщо $t_1, t_2, \ldots, t_n$ ***є терми і*** Φ ***є n-місний функтор, то*** $\Phi\ (t_1, t_2, \ldots\ t_n)$ ***також є термом.***

3. Ніщо, окрім вказаного в пунктах 1 і 2, не є термом.

Дефініція формули:

1. Якщо $t_1, t_2, \ldots, t_n$ ***є терми і*** Π ***— n-містка предикаторна змінна, то*** $\Pi\,(t_1, t_2, \ldots, t_n\ )$ ***є формулою.***

2. Якщо A і B — формули, то $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \supset B$, $A \backsim B$, $\rceil A$ ***— також формули.***

3. Якщо x — предметна змінна і A — формула, то $\forall x\ A$ ***і*** $\exists x\ A$ ***є формулами.***

4. Ніщо, окрім вказаного в пунктах 1—3, не є формулами.

У дефініціях терму і формули використовують ***символи*** $t_1, t_2, \ldots, t_n$, Φ, Π, A, B, x. Це символи метамови, які є синтаксичними змінними, що мають значеннями вирази відповідних категорій об’єктної мови. Формули ***A*** і ***B***, що зустрічаються в дефініції формули, ***називають підформулами відповідних формул.***

Вважається, що ***введені визначення вихідного символу, терму і формули є ефективними або рекурсивними.***

Під ***рекурсивністю поняття розуміють, що існує чіткий спосіб, за допомогою якого завжди можна встановити, чи є даний символ вихідним, чи термом, чи формулою.***

Введемо поняття ***«зв'язаної змінної»*** і ***«вільної змінної».***

Індивідна змінна, яка входить до області дії квантора по цій змінній, зв'язується цим квантором. Таке входження називається зв'язаним.

Змінна, яка не входить у дію відповідного квантора, називається вільною.

Одна і та сама змінна в конкретній формулі може мати зв'язане і вільне входження.

Наприклад:

$$\forall x\ (P(x) \supset Q(y)) \vee \exists\ z\ (R(x,z) \wedge Q(y)).$$

Справжніми змінними є тільки вільні змінні.

Зв'язані змінні називаються фіктивними змінними.

У загальному розумінні змінна — це те, замість чого можна підставити одне із його значень і отримати осмислене висловлювання. Вільні змінні задовольняють цю умову, а зв'язані — ні.

Наприклад, якщо a є одним із значень змінної x і $P(x)$ має смисл, то $P(a)$ також матиме смисл. За цих умов і $\forall x\ P(x)$ має смисл, а вираз $\forall x\ P(a)$ смислу не має. Цим самим підкреслюється фіктивний характер входження x до формули $\forall x\ P(x)$ і $\forall y\ P(y)$, вони означають одне і те саме: *«Всі **x** мають властивість **P»**,* їх різниця полягає у фіктивних змінних. Тобто, вони по-різному виражають одне й те саме висловлювання. Такі формули називають ***конгруентними*** (подібними).

Виходячи з цього, можна сформулювати ***правило перейменування зв'язаних змінних:***

«Усі зв'язані входження змінної x до формули можна замінити входженням іншої змінної, при цьому отримаємо формулу, конгруентну вихідній».

Наприклад, маємо формулу:

$$P(x) \vee \exists x\ P(x).$$

Замінимо в ній зв'язану індивідну змінну x на індивідну змінну y. Отримаємо формулу, яка буде конгруентна даній:

$$P(x) \vee \exists y\ P(y).$$

Якщо формула або терм не мають вільних змінних, то вони відповідно називаються «замкненою формулою» і ***«замкненим термом».***

Зауважимо, що $\boldsymbol{S^4}$ є мовою ***першопорядкової логіки предикатів.*** Суть цієї назви полягає в тому, що в даній мові дозволяється зв'язувати квантором лише предметні змінні.

Систему $\boldsymbol{S^4}$ можна розширити за рахунок введення предметно-функціональних і предикаторних змінних і дозволу їх квантифікувати. Тоді матимемо мову логіки предикатів більш високого гатунку.

Наприклад, логічною формою висловлювання *«Деякі риси вчення Платона притаманні вченню Арістотеля»* буде —

$$\exists \boldsymbol{P} \ (\boldsymbol{P}(\boldsymbol{a}) \wedge \boldsymbol{P}(\boldsymbol{в})),$$

де $\boldsymbol{P}$ — предикаторна змінна, що пробігає по множині властивостей, а предметним константам $\boldsymbol{a}$ і $\boldsymbol{в}$ відповідають імена *«Платон»* і *«Арістотель».*

Мову логіки предикатів першого порядку можна модифікувати іншим чином. Запишемо в списку нелогічних символів лише предметні змінні. Замість предметних констант введемо конкретні імена, замість предметно-функціональних констант — предметні функтори, замість предикаторних констант — предикатори природної мови. Перетворення термів і формул зберігається з тією лише різницею, що там, де раніше йшлося про параметри відповідних видів, тепер маються на увазі нелогічні терміни природної мови. Отримана в результаті такої перебудови мова називається ***прикладною першопорядковою мовою логіки предикатів.***

Для мови логіки предикатів характерним є префіксне вживання предметно-функціональних символів у складних термах і предикаторних символів у атомарних формулах:

$$(\boldsymbol{\Phi^n} \ (\boldsymbol{t_1}, \boldsymbol{t_2}, \ldots, \boldsymbol{t_n}), \boldsymbol{\Pi^n} \ (\boldsymbol{t_1}, \boldsymbol{t_2}, \ldots \boldsymbol{t_n})).$$

У природній мові префіксне вживання предметних функторів і предикаторів зустрічається рідко. Тому прикладна мова логіки предикатів може бути наближена до природної мови за рахунок відмови від обов'язкового префіксного використання предметно-функціональних і предикаторних символів.

Наприклад, запис *«Квадрат* ***t****»* можна замінити на більш звичний — ***«t^2»***, запис *«давньогрецький філософ* ***t*** *»* — на *«**t^2** — давньогрецький філософ»*, запис *«Сучасник* **(*t_1,t_2*)***»* — на ***«t_1 сучасник t_2 »***.

2. Семантика алгебраїчної системи логіки предикатів

Зупинимося на характеристиці семантики S^4. Вихідним етапом у побудові будь-якої логічної теорії є задання множини допустимих інтерпретацій її нелогічних символів. Це означає вказати, які типи об'єктів можуть бути співставлені в якості значень нелогічних термінів різних категорій.

Якщо в класичній логіці висловлювань кожній пропозиційній змінній співставляється один із двох абстрактних об'єктів ***«істина»*** або ***«хиба»,*** то у логіці предикатів процедурі інтерпретації нелогічних термінів передує вибір деякої непорожньої множини, яка називається ***областю інтерпретації або універсумом розгляду*** (міркування).

Єдина умова, яка ставиться до ***області інтерпретації*** (позначимо її символом **U**), — це непорожність **U** (тобто наявність хоча б одного елемента). Таким чином, у логіці предикатів в якості універсуму розгляду може виступати довільна непорожня множина (*наприклад*, множина міст, множина зірок, множина історичних подій, множина людей тощо).

Інтерпретація нелогічних символів в ***S^4*** релятивізується відносно деякого наперед вибраного універсуму **U**. Символам нелогічних термінів в якості значень співставляються лише об'єкти, що задані відповідним чином на множині **U**.

Як уже зазначалося, нелогічні терміни в ***S^4*** поділяються на константи (предметні, предметно-функціональні та предикаторні) і змінні. Встановлено, що константи не можуть зв'язуватися кванторами. Змінні (а їх в ***S^4*** один вид — предметні) зв'язуються кванторами. Вільні входження предметних змінних не є, із змістовної точки зору, параметрами конкретних імен, а виконують, по суті, роль невизначених займенників, які можна замінювати різними іменами.

Приписування значень нелогічним константам у ***S^4*** здійснюється за допомогою спеціальної семантичної функції, яка називається ***інтерпретаційна функція***. Позначається вона символом **I**.

Роль функції* I *полягає в співставленні кожній нелогічній константі деякого об'єкта, який заданий на області інтерпретації* U. *Причому константам різного виду повинні співставлятися об'єкти різних типів.

Будь-яка константа в S^4 повинна мати той самий тип значення, що і вираз відповідної категорії природної мови. Іншими словами, функція **I** задається таким чином, що значення предметних констант виявляється однотипним зі значенням імен, значення предметно-функціональних констант — зі значеннями предметних функторів, значення предикаторних констант — зі значенням предикаторів.

Оскільки предметні константи є параметрами імен, а значеннями імен є окремі предмети, то предметним константам в якості значень приписуються індивіди, але не будь-які, а ті, що містяться в множині **U**.

Наприклад, якщо **U** — *множина космічних об'єктів*, то функція **I** може приписати в якості значення предметній константі ***а*** такий індивід, як *«Марс»*, а константі ***в*** — *«Венера»* або який-небудь інший індивід.

***Дефініція інтерпретації предметної константи. «Функція* I *співставляє кожній предметній константі довільний елемент множини* U*, тобто* I(k) ∈ U, (*де* k — *предметна константа,* ∈ — *знак належності до множини*)».**

Як зазначалося вище, предикаторні константи є параметрами предикаторів природної мови. Звідси:

***а) одномісній предикаторній константі функція* I *співставляє довільну множину (можливо порожню) елементів універсуму* U. *Інакше кажучи, значеннями одномісної предикаторної константи є деяка підмножина множини* U;**

***б) двомісній предикаторній константі функція* I *співсталяє довільну множину пар, які складаються із елементів* U. *Виходить, що значенням двомісної предикаторної константи при інтерпретації* I *є довільна підмножина (можливо порожня) множини* U;**

***в) трьохмісній предикаторній константі функція* I *співставляє трійки предметів із множини* U. *Тобто, значенням такої константи є довільна підмножина множини всіх трійок, складених із елементів* U.**

Проілюструємо сказане на конкретних *прикладах*.

Випадок перший. Маємо одномісну предикаторну константу $\mathbf{P}^1$ і **U**, що складається із множини космічних об'єктів. Функція **I** може приписати константі $\mathbf{P}^1$ *1*) порожню множину, *2*) множину планет, *3*) множину зірок, *4*) множину всіх космічних об'єктів (оскільки будь-яка множина є підмножиною самої себе).

Випадок другий. Універсальна множина є множиною людей. Тоді двомісній константі $\mathbf{P}^2$ функція **I** співставить *1*) множину таких пар людей, які є сучасниками, *2*) множину таких пар людей, які є ровесниками.

Випадок третій. Маємо трьохмісний предикатор $\mathbf{P}^3$ і універсальну множину **U**, яка є множиною усіх міст. Тоді функція **I** співставить $\mathbf{P}^3$ множину трійок міст, наприклад, з яких перше розташоване між другим і третім (*Київ між Москвою і Одесою*).

Дефініція інтерпретації предикатної константи. «Кожній* n*-місткій предикаторній константі* П *інтерпретаційна функція* I *співставляє в якості значення довільну множину послідовностей, які складаються із n таких об'єктів, що є елементами універсуму* U*».

Тобто, $\mathbf{I}\ (\mathbf{П}^n) \subseteq \mathbf{U}^n$, де «$\subseteq$» — знак включення однієї множини в іншу, $\mathbf{U}^n$ — довільна підмножина **n**-ок предметів.

Розглянемо інтерпретацію предметно-функціональних констант. ***Предметно-функціональні константи — це параметри предметних функторів природної мови, які представляють функції, аргументами яких є індивіди.***

При інтерпретації предметно-функціональних констант у S^4 їм також будуть співставлятися предметні функції відповідних місткостей, які релятивізовані стосовно **U**. Аргументами і значеннями цих функцій є елементи **U**. Такі функції називають ***операціями***, які задані на множині **U**.

Звернемося до прикладу. Якщо **U** є множина натуральних чисел, одномісткій предметно-функціональній константі $\mathbf{f}^1$ інтерпретаційна функція **I** може співставити операцію піднесення в квадрат. А якщо взяти двомістку предметно-функціональну константу $\mathbf{q}^2$, то при тому самому універсумі їй може бути співставлена операція додавання.

Дефініція інтерпретації предметно-функціональної константи: «Кожній* n*-місткій предметно-функціональ-

ній константі $\mathbf{\Phi^n}$ ***інтерпретаційна функція*** **I** ***співставляє довільну*** **n**-***містку функцію, аргументами і значенням якої є елементи множини*** **U**, ***тобто*** **I** ($\mathbf{\Phi^n}$) ***є*** **n**-***містка операція на універсумі*** **U*»*.**

Опис процедури інтерпретації нелогічних констант показує, що універсум розгляду **U** і функції **I**, яка співставляє кожній константі значення у відповідності із вище сформульованими правилами.

Пару <**U,I**>, яка задає припустиму в S^4 інтерпретацію нелогічних констант, називають ***моделлю.***

Дефініція моделі.

«Моделлю називається будь-яка пара **<U,I>**, ***така, що*** **U** — ***непорожня множина, а*** **I** — ***функція, що задовольняє таким умовам:***

1. **I (k)** $\in$ **U.**

2. $\mathbf{I\ (\Pi^n) \subseteq U^n}$.

3. **I** ($\mathbf{\Phi^n}$) **є** ***n-місстка операція, яка задана на*** **U** (***де*** **k** — ***довільна предметна константа,*** **П** — ***довільна n-містка предикаторна константа,*** **Ф** — ***довільна n-містка предметно-функціональна константа».***

Розглянемо тепер приписування значень предметним змінним. Значення для предметних змінних знаходять теж в **U**. Кожній предметній змінній в якості значення приписується довільний елемент множини **U**. Слід мати на увазі, що конкретною моделлю <**U,I**> можна пов’язати множину приписування значень предметним змінним. Це означає можливість перебирання значень змінних при фіксованій інтерпретації констант.

Можливими значеннями для термів є індивіди із **U**, а можливими значеннями формул є такі об’єкти, як ***«істина»*** і ***«хиба»***. Тобто, ***терми є аналогами імен, а формули є аналогами висловлювань.***

Продемонструємо процес встановлення значення довільного терму **t** в деякій моделі <**U,I**> при деякому приписуванні значень предметним змінним **φ**. Будемо вживати запис «|**t**|» як скорочення для виразу *«значення* **t** *моделі* <**U,I**> *при приписуванні* **φ** ».

Згідно з наведеною дефініцією терму — **t** є:

1) деякою предметною константою **k** або

2) деякою предметною змінною α або

3) виразом виду — $\mathbf{\Phi(t_1, t_2, \ldots, t_n)}$.

Дамо ***дефініції правил встановлення значень для кожного випадку.***

(Df_1). Якщо терм* t *є предметною константою* k*, то його значення в моделі* <U,I> *при приписуванні* φ *є той індивід, який* I *співставляє константі* k*:

$$| k | = I (k).$$

(Df_2). Якщо терм* t *є предметна змінна* α*, то його значення в* <U,I> *при приписуванні* φ *є той індивід, який приписується змінній* α *за допомогою* φ *:

$$| \alpha | = \varphi (\alpha)$$

(Df_3). Якщо* t *є складним термом* $\Phi^n (t_1, t_2,..., t_n)$, *то для того, щоб встановити його значення в моделі* <U,I> *при приписуванні* φ*, необхідно:

***1. Виділити операцію, яку* I *співставляє* Φ^n*, тобто знайти* $I (\Phi^n)$.**

***2. Знайти значення термів* $t_1, t_2,..., t_n$ *в тій же моделі і при тому самому приписуванні, тобто знайти* $| t_1 |$, $| t_2 |,..., | t_n |$.**

***3. Застосувати операцію* $I (\Phi^n)$ *до аргументів* $| t_1 |, | t_2|,...,| t_n |$. *Результат застосування даної операції до вказаних об'єктів і є значення терму* $\Phi^n (t_1, t_2,..., t_n)$ *в моделі* <U,I> *при приписуванні* φ.**

Це записується так :

$$| \Phi^n (t_1, t_2,..., t_n)| = [I (\Phi^n)] (|t_1 |, |t_2 |,..., |t_n |)$$

Проілюструємо вищезазначене на прикладі.

За **U** візьмемо множину цілих додатніх чисел. Функція **I** співставляє:

1*)** предметній константі ***a число ***3;***

2*)** одномісній предметно-функціональній константі ***f — операцію піднесення до другого степені;

3*)** двомісній предметно-функціональній константі ***q — операцію множення.

Нехай предметній змінній ***y*** приписується значення ***2***, тобто $\varphi (y) = 2$. Тепер визначимо, якими значеннями в моделі **<U,I>** і при вказаному приписуванні **φ** володіють терми:

1. — a

2. — y

3. — f (a)

4. — q (y,a)

5. **— *f (q (y,a))***
6. **— *q (f (a) y).***

1. Оскільки ***a*** — предметна константа, то згідно з Df_1 функція **I** співставить їй такий об'єкт, як ***3***, що й буде її значенням:

$$| \mathbf{a} | = \mathbf{I(a) = 3.}$$

2. Оскільки ***y*** — предметна змінна, то згідно, Df_2 φ припише їй число ***2***:

$$| \mathbf{y} | = \varphi \mathbf{(y) = 2.}$$

3. Визначимо значення складного терму ***f(a)***. Предметно-функціональній константі ***f*** за нашою умовою відповідає дія піднесення до другого степеня, а значення терму ***a*** є число ***3***.

Тоді відповідно до Df_3 треба застосувати операцію **I(f)** до аргументу ***a***, тобто піднести до квадрата число ***3***. Отримане число ***9*** є значенням терму ***f(a):***

$$\mathbf{f\ (a) = [\ I\ (f)\ ]\ (|a|) = 3^2 = 9.}$$

4. Визначимо значення складного терму ***q(y,a)***. Згідно нашої домовленості предметно-функціональній константі ***q*** відповідає операція множення, значеннями термів ***y*** і ***a*** є відповідно числа ***2*** і ***3***. Щоб вирахувати значення терму ***q(y,a)*** необхідно згідно Df_3 застосувати операцію **I(q)** до ***y*** і ***a***, тобто помножити ***2*** на ***3***. Отже число ***6*** є значенням ***q(y,a):***

$$| \mathbf{q\ (y,a)} | = \mathbf{[\ I(q)]\ (|y|, |a|) = 2\ x\ 3 = 6.}$$

5. Щоб встановити значення терму ***f (q (y,a))***, необхідно застосувати операцію **I (f)**[1] до об'єкту | ***q (y,a)*** |. Оскільки ми встановили, що значенням ***q (y,a)*** є число ***6***, то число ***36*** є значенням терму ***f (q (y,a))***.

6. Для того щоб встановити значення терму ***q (f(a) y),*** необхідно перемножити значення термів ***f(a)*** і ***y***, тобто чисел ***9*** і ***2***. Таким чином, значення ***q (f(a) y)*** є ***9x2***, тобто ***18***.

3. Процедури встановлення значень формулам в S[4]

Після того, як було показано, в чому полягає процедура визначення значення терму в конкретній моделі і при конкретному приписуванні значень предметним змінним, пе-

[1] I (f) — операція піднесення до квадрата.

рейдемо до формулювання правил встановлення значень формул у довільній моделі <**U,I**> при довільному приписуванні **φ.**

Усю множину формул розіб'ємо на ***три підмножини***:

1. Елементарні формули —

$$\Pi^n\ (t_1, t_2, \ldots, t_n);$$

2. Складні формули, головним знаком яких є пропозиційна зв'язка —

$$\rceil A,\ (A \wedge B),\ (A \vee B),\ (A \supset B),\ (A \backsim B);$$

3. Складні формули, головним знаком яких є квантор —

$$\forall\ \alpha\ \mathbf{A}\ \text{і}\ \exists\ \alpha\ \mathbf{A},$$

де α — предметна змінна, а **A** — формула.

Розглянемо процедуру встановлення значення формули для кожної із цих груп.

Введемо скорочений запис виразу: ***«значення формули F в моделі <U,I> при приписуванні значення предметним змінним φ» —***

$$«|\ F\ |\ \text{при}\ \varphi\ ».$$

У цьому записі φ виділяється особливо, оскільки при встановленні істинності чи хибності формули (а саме формул $\forall\alpha A$ і $\exists\alpha A$) необхідно визначати значення їх підформул, перебираючи приписування значень предметним змінним. У той же час вказана процедура здійснюється в рамках однієї і тієї самої моделі, тому в записі ***«| F | при φ»*** опускаються параметри **U** і **I**. Замість термінів ***«істина»*** і ***«хиба»*** введемо відповідно символи ***«і»*** та ***«х».***

Дефініція умов істинності і хибності елементарних формул:

«Щоб встановити значення формули Π^n ($t_1, t_2, \ldots, t_n$) в моделі <U,I> при приписуванні φ, необхідно:

а) з'ясувати, яку множину функція I співставляє предикаторній константі Π^n, тобто знайти I (Π^n);

б) визначити, які значення приймають у даній моделі при даному приписуванні терми $t_1, t_2, \ldots, t_n$, тобто знайти значення $|t_1|, |t_2|, \ldots, |t_n|$;

в) встановити, чи є послідовність $<|t_1|, |t_2|, \ldots, |t_n|>$ елементом множини I (Π^n). Якщо дана послідовність

належить до I ($П^n$), то формула $П^n$ ($t_1, t_2,..., t_n$) приймає значення «і», а якщо ні, то її значенням буде «х»:

$$|\,П^n (t_1, t_2,..., t_n)\,| = і$$
$$\text{при } \varphi \Leftrightarrow <|\,t_1\,|, |\,t_2\,|,..., |\,t_n\,|> \in \mathbf{I}\ (П^n)$$

$$|\,П^n (t_1, t_2,..., t_n)\,| = х$$
$$\text{при } \varphi \Leftrightarrow <|\,t_1\,|, |\,t_2\,|,..., |\,t_n\,|> \notin \mathbf{I}\ (П^n).$$

Дефініція умов істинності і хибності формул, де головним знаком є пропозиційна зв'язка:

«Щоб встановити значення складних формул: $\rceil A$, ($A \wedge B$), ($A \vee B$), ($A \supset B$), ($A \backsim B$) у довільній моделі <U,I> при довільному приписуванні φ значень предметним змінним, необхідно з'ясувати, які значення в тій же моделі, при тому самому приписуванні приймають їх підформули A і B»:

$$|\,\rceil A\,| = і \text{ при } \varphi \Leftrightarrow |\,A\,| = х \text{ при } \varphi,$$
$$|\,\rceil A\,| = х \text{ при } \varphi \Leftrightarrow |\,A\,| = і \text{ при } \varphi,$$
$$|\,A \wedge B\,| = і \text{ при } \varphi \Leftrightarrow |\,A\,| = і \text{ і } |\,B\,| = і \text{ при } \varphi,$$
$$|\,A \wedge B\,| = х \text{ при } \varphi \Leftrightarrow |\,A\,| = х \text{ або } |\,B\,| = х \text{ при } \varphi,$$
$$|\,A \vee B\,| = і \text{ при } \varphi \Leftrightarrow |\,A\,| = і \text{ або } |\,B\,| = і \text{ при } \varphi,$$
$$|\,A \vee B\,| = х \text{ при } \varphi \Leftrightarrow |\,A\,| = х \text{ і } |\,B\,| = х \text{ при } \varphi,$$
$$|\,A \supset B\,| = і \text{ при } \varphi \Leftrightarrow |\,A\,| = х \text{ або } |\,B\,| = і \text{ при } \varphi,$$
$$|\,A \supset B\,| = х \text{ при } \varphi \Leftrightarrow |\,A\,| = і \text{ і } |\,B\,| = х \text{ при } \varphi,$$
$$|\,A \backsim B\,| = і \text{ при } \varphi \Leftrightarrow |\,A\,| = і \text{ і } |\,B\,| = і,$$
$$\text{або } |\,A\,| = х \text{ і } |\,B\,| = х \text{ при } \varphi,$$
$$|\,A \backsim B\,| = х \text{ при } \varphi \Leftrightarrow |\,A\,| = і \text{ і } |\,B\,| = х,$$
$$\text{або } |\,A\,| = х \text{ і } |\,B\,| = і \text{ при } \varphi.$$

Дефініція істинності і хибності формул, де головним знаком є квантор:

«В S^4 умови істинності і хибності формул $\forall\alpha A$ і $\exists\alpha A$ в моделі <U,I> при φ здійснюються шляхом перегляду індивідів із U. Цей перегляд здійснюється перебиранням значень змінної α, тобто розглядаються приписування, що співставляють змінній α різні елементи із U, але які зберігають при цьому значення інших змінних. Здійснюючи різні приписування, встановлюють, істинною чи хибною стає формула A в кожному із випадків».

Якщо **A** виявиться істинною, який би індивід із **U** ми не приписали змінній α, то формула $\forall\alpha A$ прийме значення **«і»** в моделі <**U**,**I**> при φ. Якщо ж в **U** знайдеться індивід, при приписуванні якого змінній α формулв **A** виявиться хибною, то $\forall\alpha A$ прийме значення **«х»**.

Якщо при приписуванні α хоча б якого-небудь елемента **U** (значення інших змінних при цьому зберігаються) виявиться, що формула **A** прийме значення **«і»**, то і формула $\exists\alpha A$ буде істинною в моделі **<U,I>** при **φ**. Якщо ж **A** виявиться хибною, який би об'єкт не був приписаний **α**, то $\exists\alpha A$ прийме значення **«х»**.

Сформулюємо більш жорстко умови істинності та хибності формул $\forall\alpha A$ і $\exists\alpha A$. Будемо виходити з того, що α, α_1, α_2 ,... , α_n — список всіх предметних змінних, що є в формулі $\forall\alpha A$ (або $\exists\alpha A$). Нехай φ приписує α індивід **u** із **U**, а змінним α_1, α_2 ,... , α_n — відповідно індивіди $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$,..., $\mathbf{u}_n$ із **U**.

Дефініція для $\forall\alpha A$.

«$|\ \forall\alpha A\ |$ = ***і при*** $\varphi \Leftrightarrow$ ***якщо для будь-якого*** $\nu \in$ **U** ***вірно, що*** $|$ **A** $|$ = ***і при приписуванні*** α ***значення*** ν, ***а змінним*** α_1, α_2 ,... , α_n ***значень*** ν_1, ν_2,... , ν_n.

$|\ \forall\alpha A\ |$ = **х** ***при*** $\varphi \Leftrightarrow$ ***якщо існує*** $\nu \in$ **U**, ***такий, що*** $|$ A $|$ = **х** ***при приписуванні*** α ***значення*** ν, ***а змінним*** α_1 , α_2,... , α_n ***значень*** ν_1, ν_2 ,... ,ν_n.

Дефініція для $\exists\alpha A$:

«$|\ \exists\alpha A\ |$ = **і** ***при*** $\varphi \Leftrightarrow$ ***якщо існує*** $\nu \in$ **U** ***такий, що*** $|$ A $|$ = **і** ***при приписуванні*** α ***значення*** ν, ***змінним*** α_1, α_2, ..., α_n ***значень*** ν_1, ν_2,... ,ν_n.

$|\ \exists\alpha A\ |$ = **х** ***при*** $\varphi \Leftrightarrow$ ***якщо для будь-якого*** $\nu \in$ **U** ***вірно*** $|$ A $|$ = **х** ***при приписуванні*** α ***значення*** ν, ***а змінним*** α_1, α_2, ..., α_n ***значень*** ν_1, ν_2, ..., ν_n».

Після аналізу умов істинності і хибності для формул можна перейти до типології формул за семантичними ознаками.

4. Типологія формул S^4 за семантичними ознаками

Всю множину формул у S^4 за семантичними ознаками можна поділити на:

а) закони класичної логіки предикатів;

б) виконувані формули класичної логіки предикатів;

в) невиконувані формули класичної логіки предикатів.

Відомо, що закон у логічній теорії є формула, яка істинна при будь-яких прийнятих у цій теорії інтерпретаціях нелогічних термінів, що входять до складу цієї формули.

У логіці предикатів інтерпретація нелогічних символів здійснюється вибором деякої моделі **<U,I>** і приписуванням значень предметним змінним **φ.**

Дефініція логічного закону: «Формула **А** ***є законом класичної логіки предикатів, якщо і тільки якщо*** **А** ***приймає значення «істина» в кожній моделі і при будь-якому приписуванні значень предметним змінним».***

Закони логіки ще називають ***загальнозначимими формулами***. Позначають їх символом **|=А.**

Прикладом загальнозначимої формули є вираз:

$$\forall x\ P(x) \supset \exists x\ P(x).$$

Обгрунтуємо загальнозначимість цієї формули. Для цього застосуємо метод від супротивного.

Припустимо, що $\forall x\ P(x) \supset \exists x\ P(x)$ не є загальнозначимою формулою. А це означає, що існує модель **<U,I>** і приписування **φ,** при яких

$$|\ \forall x\ P(x) \supset \exists x\ P(x)\ | = x.$$

Це означає, що $/\forall x\ P\ (x)\ / = i$ і $/\exists x\ P(x)\ / = x$ при **φ.**

Істинність $\forall x\ P(x)$ означає, що $/\ P(x)\ / = i$ при приписуванні x будь-якого індивіду із **U**. Хибність $\exists x\ P(x)$ означає, що $/\ P(x)\ / = x$ при приписуванні x будь-якого індивіду із **U**. Візьмемо довільний елемент ν із **U**.

Згідно з вищезазначеним $/\ P(x)\ / = i$ при приписуванні x індивіда ν і одночасно $/\ P(x)\ / = x$ при цьому самому приписуванні. Отже, ми прийшли до протиріччя. Цим і встановлюється загальнозначимість формули

$$\forall x\ P(x) \supset \exists x\ P(x).$$

Дефініція незагальнозначимої формули. «Формула **А** ***не є законом логіки предикатів тоді і тільки тоді, коли існує модель і існує приписування предметним змінним, при яких*** **А** ***приймає значення «хиба».***

Щоб показати незагальнозначимість формули, потрібно вибрати модель **<U,I>** і приписування **φ**, при яких ця формула прийме значення ***«хиба»***.

Візьмемо для прикладу формулу:

$$\exists x\ P(x) \supset \forall x\ P(x)$$

і покажемо її незагальнозначимість. За область інтерпретації **U** візьмемо множину хімічних елементів. Нехай інтерпретаційна функція співставляє предикаторній константі **P** множину металів. Приписування предметним змінним **φ** може бути довільним, оскільки дана формула є замкненою.

Якщо змінній $\boldsymbol{x}$ приписати ім'я *«Мідь»*, то в моделі **<U,I>** формула $\boldsymbol{P(x)}$ буде істинною. Якщо ж змінній $\boldsymbol{x}$ приписати ім'я *«Кисень»*, то $\boldsymbol{P(x)}$ виявиться хибною формулою. Отже, існує приписування змінній $\boldsymbol{x}$, при якому

$$\boldsymbol{\mid P(x) \mid = i,}$$

звідси випливає, що

$$\boldsymbol{\mid \exists x\, P(x) \mid = i} \text{ при довільному } \boldsymbol{\varphi}.$$

І разом з тим є й друге приписування $\boldsymbol{x}$, при якому

$$\boldsymbol{\mid P(x) = x,}$$

а це означає, що

$$\boldsymbol{\mid \forall x\, P(x) \mid = x} \text{ при } \boldsymbol{\varphi}.$$

Істинність $\boldsymbol{\exists x\, P(x)}$ і хибність $\boldsymbol{\forall x\, P(x)}$ в **<U,I>** при **φ** свідчить, що

$$\boldsymbol{\mid \exists x\, P(x) \supset \forall x\, P(x) \mid = x} \text{ при } \boldsymbol{\varphi}.$$

Отже, дана формула ***незагальнозначима***.

Дефініція виконуваної формули: «Формула **A** ***мови логіки предикатів є виконуваною», якщо і тільки якщо існує модель і приписування значень предметним змінним, при яких*** **A** ***приймає значення «істина».***

Звернемося до прикладу.

Ми встановили, що формула $\boldsymbol{\exists x\, P(x) \supset \forall x\, P(x)}$ є ***незагальнозначимою***. Тепер покажемо, що вона є виконуваною.

Для цього виберемо модель **<U,I>** і приписування **φ,** при яких ця формула буде істинною. Функція **I** співставляє **P** порожню множину (*наприклад, множину людей, які є жителями Місяця*), **φ** знову є довільним. Зрозуміло, що **P** не має жодного елементу.

Тому, $\boldsymbol{\mid P(x) \mid = x}$ при приписуванні $\boldsymbol{x}$ будь-якого об'єкту із **U**, а звідси випливає, що $\boldsymbol{\mid \exists x\, P(x) \mid = x}$ при **φ.** Але якщо антецедент нашої формули хибний, то вся формула буде істинною:

$$| \exists x\, P(x) \supset \forall x\, P(x) | = i \text{ при } \varphi.$$

Отже, формула є ***виконуваною.***

Дефініція невиконуваної формули: «Формула є невиконуваною тоді і тільки тоді, коли вона приймає значення «хиба» в кожній моделі і при кожному приписуванні значень предметним змінним».

Візьмемо для прикладу формулу:

$$\neg \exists x\, P(x) \wedge P(a).$$

Застосуємо міркування від супротивного. Будемо стверджувати, що дана формула виконувана. Тоді повинна існувати модель <**U**,**I**> і приписування φ, при яких вона істинна. Наша формула є кон'юнкцією. А це означає, що

$$| \neg \exists x\, P(x) | = i \text{ і } | P(a) | = i \text{ при } \varphi.$$

Істинність $P(a)$ свідчить про те, що $I\,(a) \in I\,(P)$.

А істинність $\neg \exists x\, P(x)$ означає хибність $\exists x\, P(x)$.

Визнання цього факту означає, що $| P(x) | = x$ при приписуванні будь-якого елемента із **U**, до речі, і того, який функція **I** співставляє константі a.

Отже, $| P(x) | = x$ при приписуванні x об'єкта $I\,(a)$.

Тоді ми повинні визнати, що $I(a) \notin I(P)$. Але це суперечить прийнятому раніше твердженню, що: $I(a) \in I(P)$.

Отже, припущення про виконуваність формули $\neg \exists x\, P(x) \wedge P(a)$ неправильне. Дана ***формула не є виконуваною.***

5. Логічні відношення між формулами в S^4

До фундаментальних відношень у класичній логіці предикатів відносять:

— ***відношення сумісності за істинністю,***
— ***відношення сумісності за хибністю*** і
— ***відношення логічного слідування.***

Дефініція I: «Формули Γ ***сумісні за істинністю, якщо і тільки якщо існує модель і приписування значень предметним змінним, при яких кожна формула із*** Γ ***приймає значення «істина». У протилежному випадку ці формули несумісні за істинністю».***

Дефініція П: «Формули Γ ***сумісні за хибністю, якщо і тільки якщо існує модель і приписування змінним, при яких кожна формула із*** Γ ***приймає значення «хиба». У протилежному випадку ці формули несумісні за хибністю».***

Проілюструємо наведені дефініції на прикладі.

Візьмемо формули:

$$\exists \boldsymbol{x}\ \boldsymbol{R(x,y)} \text{ і } \exists \boldsymbol{x} \urcorner \boldsymbol{R(x,y)}$$

і покажемо, що ***вони сумісні за істинністю.***

Для цього достатньо вибрати конкретну модель <**U,I**> і конкретне приписування **φ,** при яких обидві формули разом будуть істинні.

За універсум розгляду приймемо множину міст **U.** Нехай **I** співставляє двомісній предикаторній константі **R** множину таких пар міст, перше із яких південніше другого Функція **φ** приписує вільній предметній змінній ***y*** *місто Київ,* а решті змінним — *довільні міста.*

Розглянемо тепер приписування **φ,** яке ***y*** також співставляє *Київ,* а ***x*** *Одесу.* Оскільки *Одеса* південніше *Києва,* то пара *< Одеса, Київ>* міститься в $\boldsymbol{I(R)}$ і означає $|\boldsymbol{R(x,y)}| = \boldsymbol{i}$ при **φ.**

А звідси випливає, що $|\exists \boldsymbol{x}\ \boldsymbol{R(x,y)}| = \boldsymbol{i}$ при **φ.**

Розглянемо тепер приписування **φ**, яке знову співставляє ***y*** — *Київ,* а ***x*** — *Львів.* Оскільки *Львів* розташований не південніше *Києва,* то пара *<Львів, Київ >* не міститься в $\boldsymbol{I(R)}$ і $|\boldsymbol{R(x,y)}| = \boldsymbol{x}$ при **φ.**

Тоді, $|\urcorner \boldsymbol{R(x,y)}| = \boldsymbol{i}$ при **φ.** Звідси випливає $|\exists \boldsymbol{x} \urcorner \boldsymbol{R(x,y)}| = \boldsymbol{i}$ при **φ.**

Отже, формули $\exists \boldsymbol{x}\ \boldsymbol{R(x,y)}$ і $\exists \boldsymbol{x} \urcorner \boldsymbol{R(x,y)}$ у моделі <**U,I**> і при приписуванні **φ** одночасно приймають значення ***«істина»,*** що свідчить про ***їх сумісність за істинністю.***

Візьмемо ту саму модель <**U,I**> і приписування **φ.** Покажемо, що формули $\forall \boldsymbol{x} \urcorner \boldsymbol{R(x,y)}$ і $\forall \boldsymbol{x}\ \boldsymbol{R(x,y)}$ ***сумісні за хибністю.***

У попередньому прикладі ми встановили, що $|\boldsymbol{R(x,y)}| = \boldsymbol{i}$ при **φ.** Звідси випливає, що $|\urcorner \boldsymbol{R(x,y)}| = \boldsymbol{x}$ при **φ.**

Тоді $\forall \boldsymbol{x} \urcorner \boldsymbol{R(x,y)} = \boldsymbol{x}$ при **φ.** Також було встановлено, що $|\boldsymbol{R(x,y)}| = \boldsymbol{x}$ при **φ.** А це означає, що $\forall \boldsymbol{x}\ \boldsymbol{R}|\boldsymbol{x,y}| = \boldsymbol{x}$ при **φ.**

Виходить, що в даній моделі при даному приписуванні формули

$\forall \boldsymbol{x} \urcorner \boldsymbol{R(x,y)}$ і $\forall \boldsymbol{x}\ \boldsymbol{R(x,y)}$ ***сумісні за хибністю.***

За допомогою досить простих міркувань можна показати, що формули:

а) $\forall x \urcorner R(x,y)$ ***і*** $\forall x\ R(x,y)$ ***є несумісними за істинністю,*** а

б) $\exists x\ R(x,y)$ ***і*** $\exists x \urcorner R(x,y)$ ***є несумісними за хибністю.***

1. Щоб показати несумісність за істинністю формул

$$\forall x \urcorner R(x,y) \text{ і } \forall x\ R(x,y),$$

зробимо припущення про їх сумісність за істинністю. Тоді, $| \urcorner R(x,y) | = i$ і $| R(x,y) | = i$.

Але визнання ***істинності*** формули $| \urcorner R(x,y) |$ змушує вказати на ***хибність*** формули $| R(x,y) |$. Отже, ми маємо протиріччя.

2. Для встановлення несумісності за хибністю формул

$$\exists x\ R(x,y) \text{ і } \exists x \urcorner R(x,y)$$

зробимо припущення, що вони сумісні за хибністю при деякій моделі <**U**,**I**> і при приписуванні **φ**.

Якщо це так, то $| R(x,y) | = x$ і $| \urcorner R(x,y) | = x$.

Але визнання ***хибності*** формули $| \urcorner R(x,y) |$ примушує визнати ***істинність*** формули $| R(x,y) |$. Маємо протиріччя.

Отже, вихідні формули за хибністю несумісні.

Виходить, що формули $\forall x \urcorner R(x,y)$ і $\forall x\ R(x,y)$ знаходяться у ***відношенні протилежності***, оскільки вони сумісні за хибністю і несумісні за істинністю, а формули $\exists x\ R(x,y)$ і $\exists x \urcorner R(x,y)$ перебувають у ***відношенні підпротилежності***, оскільки вони сумісні за істинністю і несумісні за хибністю.

Дефініція Ш. Із множини формул* Γ *логічно слідує формула* В (Γ |= В), *якщо і тільки якщо не існує моделі і приписування значень предметним змінним, при яких кожна із формул* Γ *приймає значення «істина», а формули* В *— значення «хиба».

Проілюструємо наведену дефініцію на прикладі.

Покажемо, що із $P(a)$ і $Q(a)$ ***логічно слідує*** $\exists x\ (P(x) \wedge \wedge Q(x))$.

$$P(a),\ Q(a) \models \exists x\ (P(x) \wedge Q(x)).$$

Припустимо, що $P(a)$ і $Q(a)$ не слідує із $\exists x\ (P(x) \wedge Q(x))$*:*

$$P(a),\ Q(a) \urcorner\!\models \exists x\ (P(x) \wedge Q(x)).$$

Якщо це так, то існує модель <U,I> і приписування φ, при яких $P(a)$ і $Q(a)$ — *істинні*, а $\exists x\,(P(x) \wedge Q(x))$ — ***хибна***.

Істинність $P(a)$ і $Q(a)$ означає, що $I(a) \in I(P)$ і $I(a) \in$ $\in I(Q)$.

Тому, якщо довільній предметній змінній x приписати об'єкт $I(a)$, то

$$|P(x)| = i \text{ і } |Q(x)| = i.$$

Звідси виходить, що $|P(x) \wedge Q(x)| = i$ при приписуванні x значення $I(a)$. Виходить, $|\ \exists x\,(P(x) \wedge Q(x))\ | = i$ при приписуванні φ, але це суперечить нашому припущенню.

Отже, із формул $P(a)$ і $Q(a)$ логічно слідує формула $\exists x$ $(P(x) \wedge Q(x))$.

6. Проблема розв'язання

Визначення поняття закону класичної логіки предикатів (загальнозначимої формули) і логічного слідування в логіці предикатів передбачає відповідь на такі запитання:

а) За допомогою якої процедури можна встановити чи є деяка формула ***A*** законом чи ні?

б) За яких умов із формул $A_1, A_2, ..., A_n$ слідує формула ***B*** ?

У класичній логіці висловлювань самі визначення логічного закону і логічного слідування містять вказівку на перевірочну процедуру, яка дозволяє встановити чи є дана формула законом, і чи слідує із формули $\mathbf{A_1, A_2, ..., A_n}$ формула ***B***.

Тобто, щоб встановити чи є формула ***A*** законом, необхідно у відповідності з визначенням тотожно-істинної формули побудувати таблицю істинності для ***A*** і з'ясувати, чи приймає ***A*** значення ***«i»*** в усіх рядках таблиці.

А для відповіді на запитання чи слідує формула ***B*** із $A_1, A_2,..., A_n$, необхідно у відповідності з визначенням логічного слідування в класичній логіці висловлювань, побудувати спільну таблицю істинності для формул $A_1, A_2,..., A_n$ і ***B*** і з'ясувати, чи є в цій таблиці рядок, коли $A_1, A_2,..., A_n$ приймає значення ***«i»***, а для ***B*** значення ***«x»***.

Оскільки процес побудови таблиць істинності є алгоритмічним, то перевірити, чи є довільна формула логіки висловлювань її законом (а також чи має місце відношення логічного слідування між формулами $A_1, A_2,..., A_n$ і ***B***), можна кінцевою кількістю кроків. Ті логічні теорії, в яких це можна здійснити, називаються ***розв'язуваними.***

Дефініція: «Логічна теорія називається розв'язуваною, якщо існує ефективна процедура (алгоритм), що дозволяє для будь-якої формули кінцевим числом кроків вирішити питання про те, чи є ця формула законом теорії чи ні».

Класична логіка висловлювань є розв'язуваною. Цього не можна сказати про класичну логіку предикатів. Визначення в ній закону і логічного слідування не є ефективним, тобто не містить алгоритму вирішення питання про загальнозначимість довільної формули $\boldsymbol{A}$ і наявності відношення логічного слідування між довільними формулами $\boldsymbol{A_1, A_2, \ldots, A_n}$ і $\boldsymbol{B}$.

Справді, щоб встановити загальнозначимість формули $\boldsymbol{A}$, необхідно розглянути всі моделі і всі приписування значень предметним змінним і переконатися, що в кожному випадку $\boldsymbol{A}$ приймає значення ***«істина».*** А для того, щоб показати, що $\boldsymbol{A_1, A_2, \ldots, A_n \models B}$ слід розглянути всі моделі і всі приписування і переконатися, що відсутня ситуація, коли $\boldsymbol{A_1, A_2, \ldots, A_n}$ приймають значення ***«істина»,*** а $\boldsymbol{B}$ — значення ***«хиба».***

Зрозуміло, що подібний підбір і перегляд усіх моделей і приписувань неможливий через те, що цей процес нескінченний (на відміну від числа рядків будь-якої таблиці істинності), оскільки в ньому відсутній алгоритм розв'язання питання про загальнозначимість формули і відношення слідування між формулами. Розв'язання цих питань у логіці предикатів є евристичним завданням.

Разом з тим у класичній логіці предикатів розроблено ряд процедур, які дозволяють стандартним і досить оптимальним засобом підійти до проблеми розв'язування.

Зупинимося на одній із них. А саме на процедурі, яка отримала назву ***«метод аналітичних таблиць».***

Суть цього методу полягає в тому, що теза про загальнозначимість формули $\boldsymbol{A}$ ***і теза про слідування формули*** $\boldsymbol{B}$ ***із*** $\boldsymbol{A_1, A_2, \ldots, A_n}$ ***обгрунтовуються способом міркування від супротивного.***

Наприклад, для обгрунтування тези ***«***$\boldsymbol{\models A}$***»,*** показують, що припущення хибності $\boldsymbol{A}$ з необхідністю приводить до протиріччя. Для обгрунтування тези ***«***$\boldsymbol{A_1, A_2, \ldots, A_n \models B}$***»***

показують, що припущення ***істинності*** $A_1, A_2, \ldots, A_n$ і ***хибності*** B приводить до протиріччя.

Введемо деякі ***пояснення щодо побудови самої аналітичної таблиці. Процес міркування від супротивного, який обгрунтовує одну із названих тез, оформлюється у вигляді деякої послідовності кроків, яку називають аналітичною таблицею.***

— Кожен крок в аналітичній таблиці відображає застосування відповідного аналітичного правила;

— кроки складаються із рядків, які є результатами дії відповідних аналітичних правил;

— кроки позначають римськими цифрами (I, П, Ш тощо);

— рядки — арабськими цифрами (1, 2, 3 тощо);

— нумерація рядків аналітичної таблиці починається з нуля (0). Цим підкреслюється, що ми починаємо будувати аналітичну таблицю із антитези;

— вся таблиця від нульового рядка до останнього розбивається на гілки;

— перехід від одного кроку в аналітичній таблиці до іншого здійснюється за допомогою спеціальних аналітичних правил, в основі яких лежать смисли пропозиційних зв'язок $\wedge, \vee, \supset, \sim, \rceil$ ***і кванторів*** $\forall$ ***і*** $\exists$***;***

— кожному із цих правил приписується індекс T («істина») і F («хиба»).

Мета побудови аналітичної таблиці полягає в тому, щоб показати, що антитеза приводить до протиріччя.

Якщо в гілці є формула C ***із обома індексами*** **T** ***і*** **F**, ***то така гілка вважається замкненою. А якщо в кожній гілці зустрічається деяка формула із індексами*** **T** ***і*** **F**, ***то вся таблиця є замкненою.***

При отриманні такого результату теза про загальнозначимість формули A або ж про слідування B із $A_1, A_2, \ldots, A_n$ вважається ***обгрунтованою.***

Визначення аналітичних правил

$$T\wedge \quad \frac{TA\wedge B}{\begin{array}{c}TA\\ TB\end{array}} \qquad\qquad F\wedge \quad \frac{FA\wedge B}{FA\,|\,FB}$$

$$\boldsymbol{T\vee} \quad \frac{\boldsymbol{TA\vee B}}{\boldsymbol{TA \mid TB}} \qquad \boldsymbol{F\vee} \quad \frac{\boldsymbol{FA\vee B}}{\begin{matrix}\boldsymbol{FA}\\ \boldsymbol{FB}\end{matrix}}$$

$$\boldsymbol{T\supset} \quad \frac{\boldsymbol{TA\supset B}}{\boldsymbol{FA+TB}} \qquad \boldsymbol{F\supset} \quad \frac{\boldsymbol{FA\supset B}}{\begin{matrix}\boldsymbol{TA}\\ \boldsymbol{FB}\end{matrix}}$$

$$\boldsymbol{T\sim} \quad \frac{\boldsymbol{T\overline{A}}}{\boldsymbol{FA}} \qquad \boldsymbol{F\sim} \quad \frac{\boldsymbol{F\overline{A}}}{\boldsymbol{TA}}$$

$$\boldsymbol{T\sim} \quad \frac{\boldsymbol{TA\sim B}}{\begin{array}{c|c}\boldsymbol{TA} & \boldsymbol{FA}\\ \boldsymbol{TB} & \boldsymbol{FB}\end{array}} \qquad \boldsymbol{F\sim} \quad \frac{\boldsymbol{FA\sim B}}{\begin{array}{c|c}\boldsymbol{TA} & \boldsymbol{FA}\\ \boldsymbol{FB} & \boldsymbol{TB}\end{array}}.$$

Аналітичні правила для $\forall$ і $\exists$ супроводимо деякими поясненнями.

$$\boldsymbol{T\forall} \quad \frac{\boldsymbol{T\forall A(x)}}{\boldsymbol{TA(a)}},$$

де $\boldsymbol{a}$ — будь-яка предметна змінна.

У відповідності з логічним смислом квантора загальності формула $\forall \boldsymbol{x}\ \boldsymbol{A(x)}$ ***істинна якщо і тільки якщо будь-який індивід предметної області задовольняє умові*** $\boldsymbol{A(x)}$. Тому у випадку істинності $\forall \boldsymbol{x}\ \boldsymbol{A(x)}$ ***істинною*** виявляється будь-яка формула виду $\boldsymbol{A(a)}$, яка є результатом заміни всіх вільних входжень $\boldsymbol{x}$ в $\boldsymbol{A}$ на довільний замкнений терм $\boldsymbol{a}$.

$$\boldsymbol{F\forall} \quad \frac{\boldsymbol{F\forall A(x)}}{\boldsymbol{FA(в)}},$$

де $\boldsymbol{в}$ — предметна змінна, яка не зустрічається в жодній із попередніх формул гілки, де це правило застосовується.

Хибність формули $\forall \boldsymbol{x}\ \boldsymbol{A(x)}$ ***означає існування об'єкта, який не задовольняє умову*** $\boldsymbol{A(x)}$:

$$\boldsymbol{T\exists} \quad \frac{\boldsymbol{T\exists xA(x)}}{\boldsymbol{TA(в)}}.$$

Відповідно до смислу квантора $\exists$ ***істинність*** $\exists x\, A(x)$ ***означає існування об'єкта, що задовольняє умову*** $A(x)$.

$$F\exists \quad \frac{F\exists x A(x)}{FA(a)}.$$

Хибність формули $\exists x\, A(x)$ ***означає, що будь-який індивід предметної області не задовольняє умову*** $A(x)$.

Сформулюємо, як підсумок зазначеному, критерії загальнозначимості і логічного слідування.

Дефініція: Формула A загальнозначима $\models A$***, якщо і тільки якщо існує замкнена аналітична таблиця, нульовий рядок якої представлений антитезою*** $\rceil A$***».***

Дефініція: «Із формули $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ***логічно слідує формула B, якщо і тільки якщо існує замкнена аналітична таблиця, нульовий рядок якої представлений виразом*** $A_1, A_2, \ldots, A_n \rceil \models B$.

При побудові аналітичної таблиці необхідно дотримуватися певних вказівок, які полегшують її побудову.

1. Із множини аналітичних правил насамперед застосовують пропозиційні аналітичні правила, а потім — кванторні правила $T\forall$, $F\forall$, $T\exists$, $F\exists$.

2. Із кванторних правил спочатку застосовують правила $F\forall$ ***і*** $T\exists$***, які вимагають введення нових предметних констант, а потім — правила*** $T\forall$ ***і*** $F\exists$***, які не містять обмежень на терм, що підставляється на місце підкванторної змінної.***

Звернемося до прикладу.

І. Необхідно методом аналітичних таблиць обґрунтувати тезу:

$$P(a) \vee Q(в),\ Q(в) \supset R(c) \models R(c) \vee P(a)$$

0.	$F\,[P(a) \vee Q\,(в) \wedge (Q(в) \supset R(c))] \supset (R(c) \vee P(a))$[1]	
I.	1. $T\,(P(a) \vee Q\,(в)) \wedge (Q(в) \supset R(c))$	
	2. $F\,(R(c) \vee P\,(a))$	$F \supset$ *до 0*
II.	3. $T\,(P(a) \vee Q(в))$	
	4. $T\,(Q(в) \supset R(c))$	$T \wedge$ *до 1*

[1] Як і у логіці висловлювань у таких випадках засновки об'єднують через «$\wedge$» і до них через «$\supset$» приєднують висновок.

$III.\quad 5.\ F\ R(c)$

$\quad\quad 6.\ F\ P(a) \qquad\qquad\qquad\qquad F \vee$ *до 2*

$IV.\quad 7.\ T\ P(a) \qquad\qquad 7'.\ T\ Q(в) \qquad T \vee$ *до 3*

$V.\quad 8.\ F\ Q(в) \quad 8'.\ T\ R(c) \quad 8''.F\ Q(в) \quad 8'''.\ T\ R(c).$

$\quad\quad + \qquad\quad + \qquad\quad + \qquad\quad +$

Факт замкненості гілки позначається знаком **«+»**.

ІІ. Встановити чи є логічним законом вираз:

$$[\ \forall x\ P(x) \supset \exists x\ P(x)] \backsim [\forall x\ \overline{P}(x) \supset \exists x\ \overline{P}(x)].$$

$0.\quad F\ [\ \forall x\ P(x) \supset \exists x\ P(x)] \backsim [\forall x\ \overline{P}(x) \supset \exists x\ \overline{P}(x)]$

$I.\quad 1.\ T\ (\forall x\ P(x) \supset \exists x\ P(x)) \quad 1'.\ F\ (\forall x\ P(x) \supset \exists x\ P(x))$

$2.\quad F\ (\forall x\ \overline{P}(x) \supset \exists x\ \overline{P}(x)) \quad 2'.T\ (\forall x\ \overline{P}(x) \supset \exists x\ \overline{P}(x))\ F\backsim$ *до 0*

$II.\ 3.\ F\ (\ \overline{P}(в) \supset\ \overline{P}(в)) \quad 3'.\ F\ (P(в) \supset P(в)) \quad F\ \forall$ *до 2,1′*

$III.\ 4.\ T\ (P(в) \supset P(в)) \quad 4'.\ T\ (\ \overline{P}(в) \supset \overline{P}(в))\ T\ \forall$ *до 1,2′*

$IV.\ 5.\ T\ \overline{P}(в) \quad 5'.\ T\ P(в)\ '$

$\quad 6.\ F\ \overline{P}(в) \quad 6'.\ F\ P(в) \quad F \supset$ *до 3 і 3′*

$V.\ 7.\ F\ P(в) \quad 7'.\ T\ P(в) \quad 7''.\ F\ \overline{P}(в) \quad 7'''.\ T\ \overline{P}(в)\ T \supset 4$ *і* $4'$

$VI.\ 8.\ F\ \overline{P}(в) \quad 8'.\ F\ \overline{P}(в) \quad 8''.\ T\ P(в) \quad 8'''.\ F\ P(в)$

$\qquad\qquad\qquad\qquad + \qquad\quad +$

$VII.\ 9.\ T\ P(в) \quad 9'.\ T\ P(в).$

$\quad + \qquad\quad +$

Очевидно, що ця аналітична таблиця ***замкнена, отже теза є загальнозначимим виразом.***

Після того, як ми дали визначення логічного закону і описали одну із процедур його розв'язання зупинимося на деяких змістовних міркуваннях відносно природи законів логіки предикатів і на характеристиці списку найбільш важливих законів логіки предикатів.

7. Закони логіки предикатів

При розгляді визначення закону логіки висловлювань вказувалося, що це такий вираз, який при будь-якому розподілі значень істинності своїх пропозиційних змінних приймає значення *«і»*.

Те саме за кінцевим результатом, мається на увазі, коли говориться про закон логіки предикатів. Тобто, ***законом***

логіки предикатів є вираз із якого при будь-якій підстановці значень вільних змінних отримують істинне висловлювання. Але тут йдеться про інші набори значень, ніж у логіці висловлювань.

Візьмемо формулу $\boldsymbol{P(x)}$ і перекладемо природною мовою: *«**x** є джерелом інформації»*. Від конкретного значення $\boldsymbol{x}$ залежить, чи перетвориться $\boldsymbol{P(x)}$ у істинне висловлювання: $\boldsymbol{P(x) = i}$.

Якщо за **U** візьмемо множину книг і φ буде приписувати $\boldsymbol{x}$ конкретного індивіда із **U**, то ми отримаємо істинне висловлювання.

Оскільки існує хоча б одне значення $\boldsymbol{x}$, яке перетворює $\boldsymbol{P(x)}$ в істинне висловлювання, то $|\exists \boldsymbol{x}\ \boldsymbol{P(x)}| =$ «*i*».

Чи буде $\forall \boldsymbol{x}\ \boldsymbol{P(x)}$ істинним висловлюванням, залежить від того, чи перетворюватиметься $\boldsymbol{P(x)}$ в істинне висловлювання при будь-якому значенні $\boldsymbol{x}$.

Це безпосередньо підводить до питання, які ж імена індивідів треба підставляти замість $\boldsymbol{x}$. Іншими словами, що повинно бути універсумом міркування **U**. Якщо за **U** (в нашому прикладі) взяти множину книг, то $\forall \boldsymbol{x}\ \boldsymbol{P(x)}$ буде істинним висловлюванням, а якщо взяти більш широкий клас, то істинність $\forall \boldsymbol{x}\ \boldsymbol{P(x)}$ буде проблематичною.

Залежність перетворення формули $\boldsymbol{P(x)}$ в істинне висловлювання від предметної області **U** зумовлює те, що закони логіки предикатів треба шукати серед таких виразів, які не залежать від спеціальної області індивідів, а значимі для будь-яких непустих індивідних областей.

Цим фактично відрізняються закони логіки від законів конкретних наук, істинність яких детермінована конкретними предметними областями.

Розглянута вище формула $\boldsymbol{P(x)}$ окрім предметної змінної має предикаторну константу *«джерело інформації»*. Треба мати на увазі, що логіка предикатів займається предикатами взагалі, тобто в ній також мало говориться про конкретні висловлювання, як і в логіці висловлювань.

Логіку предикатів головним чином цікавлять структури висловлювань незалежно від їх конкретного змісту. Тому в ній оперують предикаторними змінними. Зрозуміло, що у виразі *«Сократ є **P**»* від значення $\boldsymbol{P}$ залежить чи буде цей вираз істинним висловлюванням. Якщо $\boldsymbol{P}$ замінити предикатором *«філософ»*, то отримаємо істинне висловлювання, а якщо $\boldsymbol{P}$ замінити предикатором *«фізик»*, то висловлювання буде хибним. Очевидно, що в цьому випадку істинність формули $\boldsymbol{P(x)}$ залежить від інтерпретації предикатної змінної.

Виходить, що закони логіки предикатів треба шукати серед таких виразів, які не залежать ні від конкретних індивідуальних областей, ні від конкретних значень предикатних змінних.

Прикладом є вираз:

$$\forall \mathbf{x}\ (\mathbf{P(x)} \vee \overline{\mathbf{P}}\mathbf{(x)}).$$

Тут при будь-якому значенні індивідної змінної $\boldsymbol{x}$ і при будь-якому значенні предикатної змінної $\boldsymbol{P}$ матимемо істинне висловлювання, оскільки для будь-якого індивіда вірно, що йому притаманна певна властивість чи ні.

Даний вираз нагадує тавтологію із класичної логіки висловлювань

$$\mathbf{p} \vee \overline{\mathbf{p}}.$$

Підсумовуючи наведені вище загальні зауваження, можна дати таке визначення закону логіки предикатів:

«***Законом логіки предикатів є вираз логіки предикатів, який при будь-якому значенні індивідних і предикатних змінних приймає значення «істина»***.

При цьому треба мати на увазі, що коли індивідна область порожня, то не всі закони логіки предикатів дійсні.

Як і у логіці висловлювань, у логіці предикатів центральне місце посідають закони, процедури їх знаходження і отримання. Тобто, можливо отримати нові закони, перетворюючи уже існуючі, можна отримувати закони логіки предикатів із законів логіки висловлювань шляхом підстановки.

Суть отримання законів логіки предикатів із законів логіки висловлювань шляхом підстановки полягає в заміщенні у законі логіки висловлювань пропозиційних змінних предикатами. Замість однієї і тієї самої пропозиційної змінної підставляють один і той самий предикат.

Наприклад, візьмемо закон логіки висловлювань:

$$\boldsymbol{((p \wedge q) \supset r) \backsim ((p \wedge \overline{r}) \supset \overline{q})}.$$

Якщо замість $\boldsymbol{p}$ підставити $\boldsymbol{P(x)}$, замість $\boldsymbol{q}$ — $\boldsymbol{Q(x)}$, замість $\boldsymbol{r}$ — $\boldsymbol{R(x)}$, то отримаємо закон логіки предикатів:

$$\boldsymbol{((P(x) \wedge Q(x)) \supset R(x)) \backsim ((P(x) \wedge \overline{R}(x)) \supset \overline{Q}(x))}.$$

Можна легко переконатися, що обидва вирази є законами.

Із кожного предикату $\boldsymbol{P(x)}$, $\boldsymbol{Q(x)}$, $\boldsymbol{R(x)}$ і т.д. підстановкою конкретних значень вільним предметним змінним отримаємо прості висловлювання, які є елементами даного складного висловлювання. Те, що отримане складне висловлювання:

$$((P(a) \wedge Q(a)) \supset R(a)) \backsim ((P(a) \wedge \overline{R}(a)) \supset \overline{Q}(a))$$

є істинним, випливає із того, що $((p \wedge q) \supset r) \backsim ((p \wedge \overline{r}) \supset \overline{q})$ є законом.

Із цього ж закону логіки висловлювань можна отримати також інші закони логіки предикатів, користуючись квантором $\forall$**x**.

Для цього необхідно:

1) у законі логіки висловлювань замість пропозиційних змінних підставити предикати так, щоб замість кожного входження однієї і тієї самої пропозиційної змінної стояв один і той самий предикат і

2) всі вільні предметні змінні зв'язувати квантором загальності.

Отже, при тих самих підстановках, що й раніше, із

$$((p \wedge q) \supset r) \backsim ((p \wedge \overline{r}) \supset \overline{q})$$

отримаємо закон логіки предикатів:

$$\forall x\, [((P(x) \wedge Q(x)) \supset R(x)) \backsim ((P(x) \wedge \overline{R}(x)) \supset \overline{Q}(x))]$$

Смисл цієї процедури полягає у тому, що:

а) вирази, які містяться в квадратних дужках, при кожному наборі значень вільних предметних змінних перетворюються в істинні висловлювання;

б) при зв'язуванні вільних індивідних змінних квантором ∀x і заміщенні вільних предметних змінних конкретними предикаторами отримують істинні висловлювання.

Це говорить про те, що кожен вираз логіки предикатів, загальнозначимий у логіці висловлювань, є загальнозначимим і в логіці предикатів. Із цього слідує, що якщо звести вираз логіки предикатів до виразу логіки висловлювань, то цим самим полегшиться проблема розв'язання виразів логіки предикатів.

Але не кожен загальнозначимий вираз логіки предикатів буде загальнозначимим виразом логіки висловлювань. У протилежному випадку проблему розв'язання в логіці предикатів можна було б звести до процедур розв'язання характерних для логіки висловлювань.

Візьмемо виконувані вирази логіки предикатів і логіки висловлювань і перевіримо, чи існує між ними однозначна відповідність, як між тавтологіями логіки висловлювань і логіки предикатів.

Виявляється, що такої відповідності немає. У результаті підстановки із виконуваного, але не загальнозначимого виразу логіки висловлювань можна отримати протиріччя логіки предикатів.

Для прикладу візьмемо вираз логіки висловлювань:

$$\boldsymbol{p \wedge q}.$$

Підставимо замість $\boldsymbol{p}$ формулу $\exists \boldsymbol{x}\, (\boldsymbol{P(x)} \wedge \overline{\boldsymbol{P}}\boldsymbol{(x)})$, а замість $\boldsymbol{q}$ — $\forall \boldsymbol{x}\, \boldsymbol{Q(x)}$. У результаті отримаємо протиріччя:

$$\exists \boldsymbol{x}\, (\boldsymbol{P(x)} \wedge \overline{\boldsymbol{P}}\boldsymbol{(x)}) \wedge \forall \boldsymbol{x}\, \boldsymbol{Q(x)}.$$

Те, що даний вираз при будь-якому наборі значень буде хибний, залежить від формули, яку підставляють замість $\boldsymbol{p}$.

Але та сама підстановка в законі логіки висловлювань знову приводить до закону.

Якщо у вираз $\boldsymbol{p} \vee \overline{\boldsymbol{p}}$ замість $\boldsymbol{p}$ підставити нашу формулу

$$\exists \boldsymbol{x}\, (\boldsymbol{P(x)} \wedge \overline{\boldsymbol{P}}\boldsymbol{(x)}),$$

то ми отримаємо тавтологію:

$$\exists \mathbf{x}\, (\mathbf{P(x)} \wedge \overline{\mathbf{P}}\mathbf{(x)}) \vee \overline{\exists} \mathbf{x}\, (\mathbf{P(x)} \wedge \overline{\mathbf{P}}\mathbf{(x)}).$$

Загальнозначимість цього виразу визначається тепер загальнозначимістю формули: $\overline{\exists} \mathbf{x}\, (\mathbf{P(x)} \wedge \overline{\mathbf{P}}\mathbf{(x)})$.

Стосовно такої характеристики формул як ***«невиконуваність»*** зауважимо, ***що кожна формула логіки предикатів, яка невиконувана в логіці висловлювань, в логіці предикатів буде також невиконуваною. Але невиконувана формула є протиріччям.*** Це дає змогу (як у випадку із тавтологіями) здійснювати розв'язання таких виразів засобами логіки висловлювань.

Окрім законів логіки предикатів, які можливо отримати із законів логіки висловлювань шляхом вказаних перетворень, існує група своєрідних законів у цій логічній теорії, на перегляді яких ми і зупинимося.

1. Закон усунення ∀:

$$\forall x\ P(x) \supset P(t),$$

де $P(t)$ — результат заміни всіх вільних входжень змінної x на замкнений терм t.

Цей закон стверджує, що якщо кожен індивід x володіє властивістю P, то і конкретно визначений індивід t має цю властивість.

2. Закон введення ∃:

$$P(t) \supset \exists x\ P(x)$$

Цей закон фіксує той факт, що якщо деякий конкретний індивід має властивість P, то існує, в крайньому випадку, один індивід із такою властивістю.

Якщо взяти обидва ці закони як засновки, то отримаємо третій закон, ***закон підпорядкування:***

$$\begin{array}{l} \forall x\ P(x) \supset P(t) \\ \underline{P(t) \supset \exists x\ P(x)} \\ \forall x\ P(x) \supset \exists x\ P(x). \end{array}$$

Тут застосовується правило транзитивності імплікації.

3. Закон підпорядкування:

$$\forall x\ P(x) \supset \exists x\ P(x).$$

4. Закон введення квантора загальності для «∧»:

$$\forall x\ [(P(x) \wedge Q(x)] \backsim [\forall x\ P(x) \wedge \forall x\ Q(x)]$$

Згідно з цим законом кожен індивід володіє певною властивістю $P(x)$ і $Q(x)$ тоді і тільки тоді, коли кожен індивід має властивість $P(x)$ і кожен індивід має властивість $Q(x)$.

Наприклад, кожний квадрат має рівні сторони і прямі кути тоді і тільки тоді, коли кожний квадрат має рівні сторони і кожний квадрат має прямі кути.

5. Закон введення квантора існування для «∧»:

$$\exists x\ [P(x) \wedge Q(x)] \supset [\exists x\ P(x) \wedge \exists x\ Q(x)].$$

Якщо існують об'єкти, які мають властивість $P(x)$ і $Q(x)$, то існують об'єкти, які мають властивість $P(x)$ і існують об'єкти, які мають властивість $Q(x)$.

Наприклад, якщо є книги, які мають пізнавальний і методичний характер, то існують книги, які мають пізнавальний характер і книги, які мають методичний характер.

Очевидно, що у законі *4* головним знаком є $(\backsim)$, а це означає, що ліву і праву сторони можна міняти місцями. У законі *5* головним знаком є $(\supset)$, отже це означає, що члени імплікації не можна міняти місцями. У протилежному випадку отримаємо вираз, який не буде загальнозначимим. *Наприклад,* є книги художні і є книги — словники. Але немає жодної книги, яка була б і художньою і словником одночасно.

6. Закон введення ∀ для «∨»:

$$\forall x\ (P(x) \vee Q(x)) \backsim [\forall x\ P(x) \vee \forall x\ Q(x)].$$

7. Закон виведення ∀ для «∨»:

$$[\forall x\ P(x) \vee \forall x\ Q(x)] \supset \forall x\ [P(x) \vee Q(x)].$$

Якщо всі індивіди мають властивість $P(x)$, або всі індивіди мають властивість $Q(x)$, то всі індивіди мають властивість $P(x)$ або $Q(x)$.

Для цього закону також не властива оберненість, тобто переміна місцями членів імплікації веде до втрати загальнозначимості.

Наприклад, вірно, що кожен депутат або прибічник реформ, або не прибічник реформ, але не вірно ні те, що кожен депутат прибічник реформ, ні те, що кожен депутат не прибічник реформ.

8. Закон введення ∃ для «∨»:

$$\exists x\ [P(x) \vee Q(x)] \backsim [\exists x\ P(x) \vee \exists x\ Q(x)].$$

Із цього закону випливає, що індивіди із властивістю $P(x)$ або $Q(x)$ існують тоді і тільки тоді, коли існують індивіди з властивістю $P(x)$ або індивіди з властивістю $Q(x)$. Оскільки диз'юнкція істинна, коли один із її членів істинний, то для істинності $\exists x\ [P(x) \vee Q(x)]$ не має значення, чи буде істинне $\exists x\ P(x)$, чи $\exists x\ Q(x)$, або обидва будуть істинні.

9. Закон введення ∀ для «⊃»:

$$\forall x\ [P(x) \supset Q(x)] \supset [\forall x\ P(x) \supset \forall x\ Q(x)].$$

Якщо всі x мають властивість $P(x)$, то вони мають властивість $Q(x)$, тоді вірно, що якщо кожен x має властивість $P(x)$, то кожен x має властивість $Q(x)$. Конкретизувати зазначене можна так: *«Якщо для кожного студента, який успішно складе сесію, вірно, що він отримає стипендію, тоді вірно, якщо кожен студент складе сесію, то кожен отримає стипендію».*

У законах ***1-9*** використовуються лише одномісні предикатори. Але так само як шляхом підстановки ми із законів логіки висловлювань отримували закони логіки предикатів, ***можна отримувати закони багатомісної логіки предикатів.***

Для цього необхідно замість одномісних предикатів поставити багатомісні і ввести стільки кванторів, щоб усі предметні змінні були зв'язані.

Наприклад, із ***9*** закону можна отримати закон ***9′:***

9′. $\forall x\ \forall y\ [K(x,y) \supset S(x,y)] \supset [\forall x\ \forall y\ K(x,y) \supset \forall x\ \forall y\ S(x,y)]$.

Закони перестановки кванторів:

10. $\forall x\ \forall y\ R(x,y) \backsim \forall y\ \forall x\ R(x,y)$

11. $\exists x\ \exists y\ R(x,y) \backsim \exists y\ \exists x\ R(x,y)$

12. $\exists x\ \forall y\ R(x,y) \backsim \forall y\ \exists x\ R(x,y)$.

Закони заперечення кванторів:

13. $\overline{\forall}\ P(x) \backsim \exists x\ \overline{P}(x)$

14. $\overline{\exists}\ P(x) \backsim \forall x\ \overline{P}(x)$.

Закони взаємовираженості кванторів:

15. $\forall x\ P(x) \backsim \overline{\exists} x\ \overline{P}(x)$

16. $\exists x\ P(x) \backsim \forall x\ \overline{P}(x)$.

Названі закони використовуються при побудові доведень у логіці предикатів, а також при здійсненні процедур розв'язання для виразів логіки предикатів.

Одна із процедур розв'язання в логіці предикатів розглядалася вище. Вона зводилася до застосування методу аналітичних таблиць. А тепер зупинимося на інших процедурах.

8. Процедури для розв'язання виразів логіки предикатів

У логіці предикатів, на відміну від логіки висловлювань, немає універсального способу для розв'язання будь-яких виразів логіки предикатів. Тому ***один із способів розв'язання полягає у тому, щоб вираз, який потрібно розв'язати, звести до виразу логіки висловлювань і вже до нього застосувати процедури розв'язання із логіки висловлювань.***

Для досить великої групи виразів логіки предикатів можна встановити їх загальнозначимість за допомогою засобів процедури розв'язання логіки висловлювань.

Основна ідея тут та сама, що й при розв'язанні виразів логіки висловлювань. Спочатку припускаємо, що вираз, який потрібно розв'язати, не загальнозначимий. Здійснюємо відповідні кроки, щоб знайти такий розподіл значень істинності або інтерпретацію, при якій даний вираз буде хибним. Якщо з'ясовується, що такого розподілу значень або такої інтерпретації не існує, тоді вираз вважається загальнозначимим.

Наприклад, візьмемо вираз:

$$[\forall x\, (M(x) \supset \overline{P}(x)) \wedge \forall x\, (S(x) \supset M(x))] \supset \forall x\, (S(x) \supset \overline{P}(x))$$

і перевіримо, ***чи є він загальнозначимим.***

Застосуємо ***закон 9 :***

$$\forall x\, (P(x) \supset Q(x)) \backsim [\ \overline{\forall} x\, P(x) \supset \forall x\, Q(x)].$$

Цим досягається, що в області квантора $\forall$ знаходяться не складні предикати, а прості.

$$[(\forall x\, M(x) \supset \forall x\, \overline{P}(x)) \wedge (\forall x\, S(x) \supset$$
$$\supset \forall x\, M(x))] \supset (\forall x\, S(x) \supset \forall x\, \overline{P}(x)).$$

Наша формула має вид імплікації.

Припустимо, що вона не загальнозначима, тобто хоча б при одному наборі значень вона хибна. Але це можливо тоді, коли ***антецедент — істинний***, а ***консеквент — хибний.***

Консеквент буде хибним коли висловлювання $\forall x\, S(x)$ — ***істинне***, а $\forall x\, P(x)$ — ***хибне.*** Нехай буде так. Тоді ці вирази в антецеденті приймають такі значення:

$$[(\forall x\, M(x) \supset \forall x\, \overline{P}(x)) \wedge (\forall x\, S(x) \supset \forall x\, M(x))]$$
$$\begin{array}{cc} \downarrow & \downarrow \\ x & i \end{array}$$

Оскільки ***антецедент є істинною кон'юнкцією***, то обидва кон'юнкти повинні бути істинними. Тому у першому кон'юнкті висловлюванню $\forall x\, M(x)$ треба надати значення ***«хиба»,*** інакше $(\forall x\, M(x) \supset \forall x\, P(x))$ буде хибним, а у другому кон'юнкті висловлюванню $\forall x\, M(x)$ треба надати значення ***«істина»,*** інакше вираз $(\forall x\, S(x) \supset \forall x\, M(x))$ — буде хибним.

Але зрозуміло, що одному і тому самому елементарному висловлюванню в межах конкретного складного висловлювання не можна одночасно приписувати значення ***«істина»*** і ***«хиба».***

Отже, припущення, що вихідний вираз є не загальнозначимий не вірне.

Візьмемо наступний приклад:

$$[\forall x\, (P(x) \supset \overline{M}(x)) \wedge \exists x\, (S(x) \wedge M(x)] \supset \exists x\, (S(x) \wedge \overline{P}(x))$$

Застосуємо окрім ***закону 9*** ще й ***закон 5:***

$$([\exists x\, (P(x) \wedge Q(x))] \backsim [\exists x\, P(x) \wedge \exists x\, Q(x)])$$
$$[(\forall x\, P(x) \supset \forall x\, \overline{M}(x)) \wedge \exists x\, S(x) \wedge \exists x\, M(x)] \supset$$
$$\supset (\exists x\, S(x) \wedge \exists x\, \overline{P}(x)).$$

Спробуємо знайти інтерпретацію, при якій антецедент був би істинним, а консеквент — хибним. Відомо, що консеквент буде хибним, якщо, в крайньому випадку, один із кон'юнктів хибний. Неможливо припустити, що висловлювання $\exists x\, S(x)$ хибне, інакше весь антецедент буде хибним.

Залишається висловлювання $\exists x \overline{P}(x)$. Розглянемо імплікацію в антецеденті. Згідно з припущенням висловлювання $\exists x \overline{P}(x)$ — ***хибне.***

Відповідно до ***закону 14*** воно еквівалентне $\overline{\forall} x\, P(x)$. Це означає, що висловлювання $\forall x\, P(x)$ — ***істинне.***

Тоді висловлювання $\forall x\, \overline{M}(x)$ теж повинно бути істинним, оскільки за припущенням імплікація $(\forall x\, \overline{P}(x) \supset$ $\supset \forall x\, \overline{M}(x))$ — ***істинна.***

Але $\forall x\, \overline{M}(x)$ еквівалентне $\overline{\exists} x\, M(x)$. Тоді ***хибним є*** $\exists x\, M(x)$.

Отже, не існує такого набору значень істинності при якому дана імплікація хибна, тобто ***вихідний вираз є загальнозначимим.***

Але ця процедура не є ефективною для всіх формул логіки предикатів.

Розглянемо формулу:

$$[\forall x\ (M(x) \supset \overline{P}(x)) \wedge \exists x\ (S(x) \wedge M(x))] \supset \exists x\ (S(x) \wedge \overline{P}(x)).$$

Застосуємо до цього виразу ***закони 9 і 5:***

$$[(\forall x\ M(x) \supset \forall x\ \overline{P}(x)) \wedge \exists x\ S(x) \wedge$$
$$\wedge\ \exists x\ M(x)] \supset (\exists x\ S(x) \wedge \exists x\ \overline{P}(x)).$$

Щоб проінтерпретувати дану формулу таким чином, коли антецедент буде істинним, а консеквент — хибним, необхідно припустити, що обидва екзистенційні висловлювання в антецеденті — істинні і цим самим $\exists x\ S(x)$ істинне в консеквенті, а $\exists x\ \overline{P}(x)$ — хибне в ньому.

Із хибності $\exists x\ \overline{P}(x)$ випливає хибність $\forall x\ \overline{P}(x)$. Із попередніх припущень нічого не випливає стосовно значення висловлювання $\forall x\ M(x)$:

$$\begin{array}{ccccccc}
[(\forall x\ M(x) & \supset & \forall x\ \overline{P}(x)) & \wedge & \exists x\ S(x) & \wedge & \exists x\ M(x)] \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
? & & x & & i & & i
\end{array}$$

З передбачуваною істинністю $\exists x\ M(x)$ сумісна як істинність, так і хибність $\forall x\ M(x)$. При ***істинності*** $\forall x\ M(x)$ імплікація буде ***хибною,*** а при ***хибності*** $\forall x\ M(x)$ — вона буде ***істинною.***

Процедуру розв'язання, яку ми щойно застосували до наведених виразів (позначимо її літерою «А»), можна описати так:

1) перетворити за допомогою законів введення кванторів вихідний вираз так, щоб кожне висловлювання утримувало тільки один предикат;

2) знайти інтерпретацію для отриманого виразу, виходячи із припущення про те, що цей вираз хибний.

Розглянемо ще одну процедуру розв'язання (позначимо її літерою ***«В»***). Як процедура ***«А»*** так і процедура ***«В»*** спрямовані на розв'язання виразів, які в традиційній логіці представляють різновиди умовиводів. ***Тому ці вирази***

мають вид імплікації, де антецедентом є кон'юнкція засновків, а консеквентом — висновок.

Ця процедура складається з таких кроків:

1. Використовуючи відповідні закони, перетворити всі наявні у вихідній формулі загальні висловлювання в екзистенційні.
2. Перетворити екзистенційні висловлювання так, щоб в області дії квантора були тільки кон'юнкція і заперечення, яке б відносилося до простих предикатів.
3. Замінити консеквент вихідного виразу його запереченням, а імплікацію — на кон'юнкцію.
4. Перевірити, чи немає в отриманій кон'юнкції хоча б одного кон'юнкта із запереченням і без нього.
5. Якщо в цьому виразі є висловлювання із запереченням і без нього, тоді необхідно виконати такі дії:

а) виписати всі висловлювання без заперечення;

б) приєднати до них через імплікацію диз'юнкцію висловлювань, які мають заперечення;

в) зняти заперечення перед кванторами.

6. Зняти квантори і предметні змінні.
7. Отриманий вираз перевірити або за допомогою таблиці істинності або зведенням до КНФ.

Звернемося до прикладу.

Маємо вираз:

$$[\forall x\ M(x) \supset \overline{P}(x)) \wedge \exists x\ (S(x) \wedge M(x)] \supset \exists x\ (S(x) \wedge \overline{P}(x)).$$

Перевіримо його на ***загальнозначимість.***

1. $[\ \overline{\exists} x\ (M(x) \wedge P(x)) \wedge \exists x\ (S(x) \wedge M(x))] \supset \exists x\ (S(x) \wedge \overline{P}(x))$

За ***законом 14*** у вихідному виразі загальне висловлювання заміним екзестенційним.

2. $\overline{\exists} x\ (M(x) \wedge P(x)) \wedge \exists x\ (S(x) \wedge M(x)) \wedge \overline{\exists} x\ (S(x) \wedge \overline{P}(x)).$

Замінимо консеквент його запереченням, а імплікацію — кон'юнкцією.

3. $\exists x\ (S(x) \wedge M(x)) \supset [\exists x\ (M(x) \wedge P(x)) \vee \exists x\ (S(x) \wedge \overline{P}(x))].$

До висловлювання без заперечення через імплікацію приєднаємо диз'юнкцію висловлювань із запереченням, але при цьому знімаємо заперечення над кванторами.

4. $(S \wedge M) \supset [(M \wedge P) \vee (S \wedge \overline{P})]$

Усуваємо квантори і предметні змінні.

Фактично ми звели вихідний вираз до виразу логіки висловлювань, тому є можливість привести його до ***КНФ.***

а) $(\mathbf{S} \wedge \mathbf{M}) \vee [(\mathbf{M} \wedge \mathbf{P}) \vee (\mathbf{S} \wedge \overline{\mathbf{P}})]$

б) $\overline{\mathbf{S}} \vee \overline{\mathbf{M}} \vee [(\mathbf{M} \vee \mathbf{S}) \wedge (\mathbf{M} \vee \overline{\mathbf{P}}) \wedge (\mathbf{P} \vee \mathbf{S}) \wedge (\mathbf{P} \vee \overline{\mathbf{P}})]$

в) $(\overline{\mathbf{S}} \vee \overline{\mathbf{M}} \vee \mathbf{M} \vee \mathbf{S}) \wedge (\overline{\mathbf{S}} \vee \overline{\mathbf{M}} \vee \mathbf{M} \vee \overline{\mathbf{P}}) \wedge$

$\wedge (\overline{\mathbf{S}} \vee \overline{\mathbf{M}} \vee \mathbf{P} \vee \mathbf{S}) \wedge (\overline{\mathbf{S}} \vee \overline{\mathbf{M}} \vee \mathbf{P} \vee \overline{\mathbf{P}})$.

Отже, вихідний ***вираз є загальнозначимим.***

Як уже зазначалося, універсальної процедури розв'язання для всієї області логіки предикатів не існує. Частковою областю логіки предикатів для якої, так би мовити, ця проблема розв'язана, є одномісна логіка предикатів. Тому, звертаючись до розглянутих процедур розв'язання, необхідно мати на увазі цю обставину.

Контрольні питання та вправи

1. Особливості логіки предикатів.
2. Поняття алгебраїчної системи логіки предикатів S^4.
3. Структура мови S^4.
4. Синтаксис метамови S^4.
5. Дефініція терму.
6. Дефініція формули.
7. Поняття ***«зв'язаної змінної»*** і ***«вільної змінної»***.
8. Поняття конгруентної формули.
9. Структура семантики метамови S^4.
10. Універсум розгляду **U**.
11. Інтерпретаційна функція **I**.
12. Дефініція інтерпретації предметної константи.
13. Дефініція інтерпретації предикаторної константи.
14. Дефініція інтерпретації предметно-функціональної константи.
15. Поняття моделі.
16. Процедури встановлення значень для формул.
17. Дефініція умов істинності та хибності елементарних формул.
18. Дефініція умов істинності та хибності формул, в яких головним законом є пропозиційні знаки.
19. Дефініція умов істинності та хибності, в яких головним знаком є квантор.
20. Типологія формул в S^4 за семантичними ознаками.
21. Поняття логічного закону.
22. Дефініція не загальнозначимої формули.
23. Дефініція виконуваної формули.
24. Дефініція невиконуваної формули.
25. Логічні відношення між формулами в S^4.
26. Відношення сумісності за істинністю.
27. Відношення сумісності за хибністю.

28. Відношення логічного слідування.
29. Проблема розв’язання.
30. Метод аналітичних таблиць у логіці предикатів.
31. Закони логіки предикатів.
32. Процедури розв’язання в логіці предикатів.
33. Перевірити за допомогою аналітичних таблиць, чи є загальнозначимими формулами:

а) $\exists x\, P(x) \supset \forall y\, P(x)$;
б) $\forall x\, (P(x) \vee Q(x)) \supset (\forall x\, P(x) \vee \forall x\, Q(x))$;
в) $\forall x\, (P(x) \vee Q(a)) \supset (\forall x\, P(x) \vee Q(a))$;
г) $[\forall x\, (M(x) \supset \overline{P}(x)) \wedge \exists x\, (M(x) \wedge (S(x))] \supset \exists x\, (S(x) \wedge \overline{P}(x))$;
д) $[\forall x\, (P(x) \supset M(x)) \wedge \forall x\, (M(x) \supset (S(x))] \supset \exists x\, (S(x) \wedge P(x))$.

34. Застосувати процедури розв’язання ***«A»*** і ***«B»*** до виразів:

а) $[\forall x\, (P(x) \supset M(x)) \wedge \exists x\, (S(x) \wedge \overline{M}(x))] \supset \exists x\, (S(x) \wedge \overline{P}(x))$;
б) $[\forall x\, (M(x) \supset \overline{P}(x)) \wedge \forall x\, (M(x) \supset S(x)] \supset \exists x\, (S(x) \wedge \overline{P}(x))$;
в) $[\exists x\, (P(x) \wedge M(x)) \wedge \forall x\, (M(x) \supset S(x))] \supset \exists x\, (S(x) \wedge P(x))$;
г) $[\forall x\, (M(x) \supset \overline{P}(x)) \wedge \exists x\, (S(x) \wedge M(x))] \supset \exists x\, (S(x) \wedge \overline{P}(x))$.

РОЗДІЛ II

ЧИСЛЕННЯ ПРЕДИКАТІВ

Відомо, що основним змістом логіки є побудова і аналіз числень. Як у традиційній, так і у сучасній логіці предметом вивчення є форми правильних міркувань. Існує, щоправда, принципова відмінність у підході до числень у традиційній і сучасній логіці.

У традиційній логіці числення зводилися, в основному, до емпіричного виділення та опису деяких форм правильних міркувань. У сучасній же логіці числення, або теорія дедукції, здійснюється як теоретична систематизація правильних міркувань на основі чітких визначень логічного закону, відношення логічного слідування та інших суттєвих відношень між висловлюваннями, які складають логіку відповідної мови.

Виходячи із досвіду розгляду числень логіки висловлювань, зазначимо, що основою побудови теорії дедукції у вигляді логічних числень є наявність зв'язку між законами та правилами висновку. Саме цей зв'язок забезпечує можливість обгрунтування одних законів і правил за допомогою інших.

При побудові числень необхідно виділити:

а) оптимальну кількість законів і правил висновку;

б) дефініцію висновку і доведення.

Важливим при цьому є те, що при коректній побудові числення формула $\boldsymbol{A}$ може бути доведена $\vdash \boldsymbol{A}$ тільки у тому випадку, коли вона є тавтологією $\models \boldsymbol{A}$, а вивідність деякої формули $\boldsymbol{B}$ із множини законів $\boldsymbol{\Gamma} \vdash \boldsymbol{B}$ матиме місце лише тоді, коли $\boldsymbol{B}$ є логічним наслідком із $\boldsymbol{\Gamma}$. Якщо це так, то числення є несуперечливим.

Побудова логічних числень переслідує фактично дві мети.

По-перше, власне теоретичну для самої логіки, оскільки у процесі і в результаті побудови числень виявляються зв'язки між самими законами, правилами висно-

вку. Із множини тих і інших виділяється множина вихідних, які є достатніми для доведення всіх формул (тавтологій), для відтворення всіх можливих відношень слідування, для обґрунтування правил міркувань.

По-друге, побудова логічних числень може бути використана як логічний апарат для здійснення висновків і доведень в нелогічних теоріях, побудованих на базі відповідної прикладної формалізованої мови.

1. Аксіоматичне числення предикатів

Аксіоматичне числення логіки предикатів — це така формально-логічна теорія, яка є розширенням числення висловлювань.

Мається на увазі, що аксіоми S^2 і правила висновку аксіоматичного числення висловлювань зберігаються в аксіоматичному численні предикатів. Позначають ***аксіоматичне числення предикатів***, як своєрідну формально-логічну теорію, ***символом*** S^5.

До аксіом S^5 ***відносяться такі вирази:***

1. $A \supset (B \supset A)$
2. $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$
   2а. $(A \supset B) \supset ((A \supset (B \supset C)) \supset (A \supset C))$
3. $(A \wedge B) \supset A$
4. $(A \wedge B) \supset B$
5. $(A \supset B) \supset ((A \supset C) \supset ((A \supset B) \wedge C))$
6. $A \supset (A \vee B)$
7. $B \supset (A \vee B)$
8. $(A \supset C) \supset ((B \supset C) \supset (A \vee B) \supset C))$
9. $(A \supset B) \supset (\overline{B} \supset \overline{A})$
10. $A \supset \overline{\overline{A}}$
11. $\overline{\overline{A}}\, A \supset A$
12. $\forall x\, F(x) \supset F(y)$
13. $F(y) \supset \exists x\, F(x)$.

Із переліку аксіом очевидно, що до списку аксіом S^5 включаються всі ***11 аксіом*** S^2 і до них додаються ще дві аксіоми ***12*** і ***13***, де $F(x)$ — будь-яка формула логіки предикатів, в якій маються вільні входження предметної змінної x і одне із цих входжень знаходиться в області дії квантора по предметній змінній y, а формула $F(y)$, отримана із $F(x)$, заміною всіх вільних входжень x на y.

Метабукви ***A, B, C*** у записі аксіомних схем представляють будь-яку формулу логіки предикатів.

Наприклад, аксіому ***1*** можна записати мовою логіки предикатів таким чином:

$$P(x) \supset (Q(x) \supset P(x)) \text{ тощо.}$$

До правил висновку S^5 відноситься правило заключення, або правило ***«модус поненс»***, яке застосовується і в S^2: ***«Якщо G і G ⊃ H — вивідні формули, H — теж вивідна формула».***

Окрім цього правила тут застосовуються правила введення і усунення кванторів, на яких ми зараз і зупинимося.

Але перш ніж сформулювати ці правила, дамо деякі пояснення. Введемо поняття ***«правильної підстановки»***.

Під ***правильною підстановкою розуміють таку підстановку, у результаті якої із істинних формул отримують тільки істинні формули.***

Щоб досягти цієї мети, необхідно дотримуватися таких вимог:

а) вираз, який підставляють, повинен належати до тієї самої предметної області, на якій визначена змінна x.

Наприклад, не можна у вираз *«Існує **x**, який є ровесником **y**»* замість змінної y підставляти ім'я предмета із області хімічних елементів;

б) підстановка значень замість змінної x можлива лише там, де вона вільна.

Неможливо, *наприклад,* у виразі *«Для будь-якого **x**, якщо **x** — планета, то **x** має природний супутник»* зв'язану змінну x замінити іменем конкретної планети. Порушення цієї вимоги веде до нісенітниці. Для *прикладу* замість x візьмемо ім'я *«Юпітер»*. Отримаємо вираз *«Для будь-якого Юпітера»*, який не має смислу;

в) підстановка деякого значення замість вільної змінної x здійснюється скрізь, де зустрічається змінна x у даному виразі;

г) в результаті підстановки жодна вільна змінна не повинна виявитися зв'язаною[1].

[1] Тобто у вираз **A** з вільною змінною γ не можна підставляти вираз α з вільною змінною ν, якщо в **A** ν є зв'язаною змінною. І якщо вираз α підставляється замість вільної змінної γ, то цей факт записується у вигляді виразу: $\mathbf{A}\ (\gamma\ /\ \alpha)$.

Пояснимо це на *прикладах*.

Нехай вираз $\exists x\ R(x,y)$ означає фразу *«Існує ціле число* x*, яке не дорівнює довільному числу* y*»*.

Це висловлювання буде залишатися істинним при будь-якій підстановці, окрім випадку, коли замість змінної y підставимо зв'язану предметну змінну x:

$$\exists x\ R(x, x).$$

Отримаємо недоречне висловлювання. *«Існує таке ціле число* x*, яке не дорівнює самому собі»*.

Або ж візьмемо цю формулу, але R буде представляти двомісний предикатор *«батько»*, а x і y змінні, які визначені на області людей. Формула $\exists x\ R(x,y)$ буде представляти істинне висловлювання до тих пір, поки замість вільної змінної y не підставимо зв'язану змінну x. Така підстановка приводить до недоречного висловлювання: *«Існує людина, яка є батьком самого себе»*.

Після цих зауважень перейдемо до формулювання правил введення і усунення кванторів.

Правило усунення квантора загальності (*У*$\forall$):

$$\frac{\forall \gamma F}{F(\gamma/\alpha)}.$$

Буквально це правило означає, що якщо всі предмети універсуму міркування мають певну ознаку, то з цього можна зробити висновок, що будь-який довільний або визначений предмет даної області має цю ознаку.

Правило введення квантора загальності (*В*$\forall$):

«Якщо у формулі $B(x)$ є вільні входження предметної змінної x, а формула A не містить вільних входжень x, то із формули $A \supset B(x)$ вивідною є формула $A \supset \forall x\ B(x)$».

$$A \supset B(x) \vdash A \supset \forall x\ B(x)$$

або

$$\frac{A \supset B(x)}{A \supset \forall x B(x)}.$$

Суть цього правила полягає в тому, що якщо із деяких засновків і додаткових припущень A із зв'язаною змінною

x виводиться пропозиційна функція (предикат) $B(x)$, то із A виводиться $\forall x\, B(x)$.

Іншими словами, ***якщо в процесі виведення отримуємо твердження про те, що довільний предмет із якоїсь області має певну ознаку, то можна стверджувати, що всі предмети цієї області мають цю ознаку.***

Зауважимо, що правило **(*В*∀)** застосовується лише в тому випадку, коли x в A є зв'язаною змінною. У тому випадку, коли x не зв'язана в A, то $B(x)$, будучи виведеною із A, перетвориться в істинне висловлювання лише для тих значень x, для яких A — істинне. Однак такою властивістю можуть володіти не всі значення змінної x і пропозиційна функція $B(x)$ не буде перетворюватися в істинне висловлювання для довільного значення змінної x. У цьому випадку висловлювання $\forall x\, B(x)$ виявиться хибним.

Правило введення квантора існування (*В*∃):

$$\frac{F(\gamma/\alpha)}{\exists\gamma F}.$$

Із цього правила випливає, якщо будь-який довільно взятий або визначений предмет має якусь ознаку, то це означає, що існує, в крайньому разі, один предмет, який має цю ознаку.

Правило усунення квантора існування (*У*∃):

$$\frac{\exists\gamma F}{F(\gamma/\alpha)}.$$

Із цього правила випливає, що із істинності екзістенційного висловлювання $\exists\gamma\ \mathbf{F}$ слідує істинність висловлювання $\mathbf{F}(\alpha)$, яке є результатом підстановки постійної x замість вільної змінної γ.

Правила **(*У*∀)** і **(*В*∃)** є сильнішими порівняно з правилами **(*В*∀)** і **(*У*∃)**, оскільки в їх основі лежить відношення логічного слідування. Тобто, перехід від формули $\forall\gamma\mathbf{F}$ до $\mathbf{F}(\gamma/\alpha)$ виправданий наявністю логічного слідування $\forall\gamma\mathbf{F} \models \mathbf{F}(\gamma/\alpha)$, і при переході від $\mathbf{F}(\gamma/\alpha)$ до $\exists\gamma\mathbf{F}$ має місце логічне слідування:

$$\mathbf{F}(\gamma/\alpha) \models \exists\mathbf{x}\ \mathbf{F}.$$

Інша ситуація для правил (**В**∀) і *(У*∃). В їх основі відсутнє відношення логічного слідування. Не зважаючи на це, у численні логіки предикатів ці правила все ж таки є прийнятними.

Але ***щоб не допустити можливості виведення із істинних засновків хибних висновків, необхідно дотримуватися двох формальних вимог:***

1) Перша формальна вимога полягає в тому, що жодна індивідна змінна не обмежує себе у висновку.

Наприклад, дана вимога дозволяє виключити переходи такого виду:

$$«y = y» \vdash \forall x\ (x = y);\ \exists x\ (x < y) \vdash y < y,$$

тобто переходи від істинних (виконуваних) тверджень до хибних.

2) Друга формальна вимога полягає в розрізненні поняття висновку і поняття завершеного висновку.

Тільки при здійсненні завершеного висновку гарантується, що між засновками і висновком має місце відношення логічного слідування.

Правило перейменування вільних змінних:

«Якщо формула числення предикатів А(х) містить вільні входження предметної змінної х і жодне із цих входжень не міститься в області дії квантора по предметній змінній у, то із |– А(х) слідує |– А(у), де А(у) — отримана змінною в А(х) всіх вільних входжень х на у».

Правило перейменування зв'язаних змінних:

«Якщо формула числення предикатів А(х) не містить вільних входжень предметної змінної у і містить вільні входження предметної змінної х, ні одне із яких не знаходиться в області дії квантора по змінній у, то із |– σ х А(х) слідує |– σ у А(у), де σ — будь-який із кванторів ∀,∃, а формула А(у) отримана із А(х) заміною всіх вільних входжень х на у».

Дамо визначення процедури доведення і доведеної формули.

Дефініція доведення.

«Доведенням формули В називається послідовність формул B_1, B_2, ... B_n, в якій B_n = В і кожна із формул по-

слідовності B_i (i = 1, ..., n.) є або аксіомою, або отриманою за яким-небудь із правил висновку з попередніх формул». При цьому число ***n*** називається довжиною доведення.

Дефініція доказової формули.

«Формула В у численні предикатів називається доказовою, або теоремою, якщо для неї існує доведення».

Зауважимо, що множина всіх доказових формул у численні предикатів не розшириться, якщо при побудові доведення ми будемо використовувати не тільки аксіоми, а й будь-які доказові формули. Врахування цього факту часто дозволяє значно спрощувати доведення формул. Цій же меті слугують багато допоміжних правил висновку.

Побудуємо доведення формул логіки предикатів.

I. $\vdash \exists x\, \forall y\, A(x,y) \supset \forall y\, \exists x\, A(x,y)$.

Доведення.

1. $\forall y\, A(x,y) \supset A(x,z)$	— ***Ах. 12,*** де ***z*** змінна, яка не входить у формулу $A(x,y)$.
2. $A(x,z) \supset \exists v\, A(v,z)$	— ***Ах. 13,*** де ***v*** змінна, яка не входить у формулу $A(x,z)$.
3. $\exists v\, A(v,z) \supset \exists x\, A(x,z)$	— за правилом перейменування зв'язаної змінної.
4. $A(x,z) \supset \exists x\, A(x,z)$	— за правилом транзитивності імплікації (***2,3***).
5. $\forall y\, A(x,y) \supset \exists x\, A(x,z)$	— за правилом тразитивності імплікації (***1,4***).
6. $\exists x\, \forall y\, (x,y) \supset \exists x\, A(x,z)$	— ***В***∃ до ***5***.
7. $\exists x\, \forall y\, (x,y) \supset \forall z\, \exists x\, (x,z)$	— ***В***∀ до ***6***.
8. $\forall z\, \exists x\, (x,z) \supset \forall y\, \exists x\, (x,y)$	— за правилом заміни зв'язаної змінної.
9. $\vdash \exists x\, \forall y\, A(x,y) \supset \forall y\, \exists x\, A(x,y)$	— за правилом тразитивності (***7,8***).

П. $\vdash \overline{\exists} x\, A(x) \supset \forall x\, \overline{A}(x)$

Доведення.

1. $A(y) \supset \exists x\, A(x)$	— ***Ах. 13.***
2. $\overline{\exists} x\, A(x) \supset \overline{A}(y)$	— за правилом контрапозиції до ***1.***
3. $\overline{\exists} x\, A(x) \supset \forall y\, \overline{A}(y)$	— ***В***$\forall$ до ***2.***
4. $\forall y\, \overline{A}(y) \supset \forall x\, \overline{A}(x)$	— за правилом заміни зв'язаної змінної.
5. $\vdash \overline{\exists} x\, A(x) \supset \forall x\, \overline{A}(x)$	— за правилом транзитивності імплікації.

Поняття доведення в аксіоматичному численні предикатів можна розширити за рахунок введення поняття висновку.

Дефініція висновку в S^5.

«Висновком в S^5 називається послідовність формул $B_1, B_2...,B_n$ кожна з яких є або аксіомою, або припущенням (гіпотезою), або виведена із попередніх формул за правилами висновку».

Отже при побудові висновку в S^5 використовуються, поряд із аксіомами, гіпотези (припущення). Це вносить певну своєрідність в отримання наслідку таким способом.

Побудуємо висновок формули $B \supset \forall x\, P(x)$ із формули $\forall y\, (B \supset P(y))$.

Висновок.

1. $\forall y\, P(y) \supset P(x)$	— ***Ах. 13.***
2. $\forall y\, P(y) \supset \forall x\, P(x)$	— ***В***$\forall$ до ***1.***
3. $\forall y\, (B \supset P(y))$	— припущення.
4. $\forall y\, (B \supset P(y)) \supset (B \supset P(y))$	— ***Ах. 13.***
5. $B \supset P(y)$	— ***МР*** до ***3,4.***
6. $B \supset \forall y\, P(y)$	— ***В***$\forall$ до ***5.***
7. $(\forall y\, P(y) \supset \forall x\, P(x)) \supset ((B \supset(\forall y\, P(y) \supset \supset \forall x\, P(x))$	— ***Ах. 1.***
8. $B \supset (\forall y\, P(y) \supset \forall x\, P(x))$	— ***МР*** до ***2,7.***

$\boldsymbol{9.\ (B \supset \forall y\ P(y)) \supset ((B \supset (\forall y\ P(y) \supset}$ — ***Ах. 2а.***
$\boldsymbol{\supset \forall x\ P(x)) \supset (B \supset \forall x\ P(x))}$
$\boldsymbol{10.\ (B \supset (\forall y\ P(y) \supset \forall x\ P(x)) \supset (B \supset \forall x\ P(x)}$ — ***МР*** до ***6,9.***
$\boldsymbol{11.\ B \supset \forall x\ P(x)}$ — ***МР*** до ***8,10.***

Оскільки у припущенні $\boldsymbol{\forall y\ (B \supset P(y))}$ немає вільних змінних, то це означає, що $\boldsymbol{\forall y\ (B \supset P(y)) \vdash (B \supset \forall x\ P(x))}$.

Після характеристики аксіоматичного числення предикатів розглянемо теорему дедукції.

2. Теорема про дедукцію в S[5]

Теорему про дедукцію в численні предикатів записують так:

$$\frac{A_1,\ \ldots,\ A_{n-1},\ A_n\ \vdash B}{A_1,\ \ldots,\ A_{n-1}\ \vdash A_n \supset B} \text{ —}$$

(всі вільні змінні у припущеннях зв'язані).

Представимо дедукцію у вигляді послідовності $\boldsymbol{B_1, \ldots, B_n}$ — де $\boldsymbol{B_n = B}$.

Доведення.

Зазначимо для початку, що тут можливі випадки як і в аксіоматичному численні висловлювань:

а) B є аксіомою;
б) B є одним із припущень $\boldsymbol{A_1, \ldots, A_{n-1}}$;
в) B є припущенням $\boldsymbol{A_n}$.

Випадок *а*): Якщо ***В*** — аксіома, тоді:
$\boldsymbol{1.\ \vdash B}$
$\boldsymbol{2.\ \vdash B \supset (A \supset B)}$ — ***Ах. 1.***
$\boldsymbol{3.\ \vdash A_n \supset B}$ — ***МР*** до ***1,2.***
$\boldsymbol{4.\ A_1, \ldots, A_{n-1} \vdash A_n \supset B}$ — згідно з властивостями $\vdash$.

Випадок *б*). ***В*** є одним із припущень $\boldsymbol{A_1, \ldots, B_n}$.
Тоді, $\boldsymbol{A_1, \ldots, A_{n-1} \vdash B}$ згідно з властивостями знака $\vdash$.
Звідси $\boldsymbol{A_1, \ldots, A_{n-1} \vdash A_n \supset B}$.

Випадок *в*). ***В*** є припущенням $\boldsymbol{A_n}$.
Тоді $\boldsymbol{\vdash A_n \supset B}$, оскільки $\boldsymbol{A_n \supset B}$ є $\boldsymbol{B \supset B}$.
Звідси $\boldsymbol{A_1, \ldots, A_{n-1} \vdash A_n \supset B}$ — згідно з властивостями знака $\vdash$.

Розглянемо ще два випадки.

1. B отримують із B_i завдяки правилу $B\forall$.

2. B отримують із B_i завдяки правилу $B\exists$ (при цьому $i < n$).

Візьмемо випадок **1.** B отримують із B_i завдяки правилу $B\forall$.

Тоді B_i є $C \supset A(x)$, а B є $C \supset \forall x\ A(x)$, причому C не містить x вільно. Отже:

1. $A_1,\ldots, A_{n-1} \vdash A_n \supset (C \supset A(x))$.

Якщо x не входить вільно ні до A_n, ні до C, то x не входить вільно до $(A_n \wedge C)$.

2. $A_1,\ldots, A_{n-1} \vdash A_n \wedge C \supset A(x)$ — згідно рівносильності:

$$A \supset (B \supset C) \equiv A \wedge B \supset C$$

3. $A_1,\ldots, A_{n-1} \vdash A_n \wedge C \supset \forall x\ A(x)$ — $B\forall$ до *2*

4. $A_1,\ldots, A_{n-1} \vdash A_n \supset (C \supset \forall x\ A(x))$.

Випидок **2.** B отримують із B_i завдяки правилу $B\exists$.

Тоді B_i є $A(x) \supset C$, B є $\exists x\ A(x) \supset C$. Необхідно мати на увазі, що C не утримує x вільно. Враховуючи, що $i < n$, маємо:

1. $A_1,\ldots, A_{n-1} \vdash A_n \supset (A(x) \supset C)$

Тут, як і у випадку **1**, x не входить в A_n вільно. Використаємо рівносильність:

$$A \supset (B \supset C) \equiv B \supset (A \supset C)$$

2. $A_1,\ldots, A_{n-1} \vdash A(x) \supset (A_n \supset C)$

3. $A_1,\ldots, A_{n-1} \vdash \exists x\ A(x) \supset (A_n \supset C)$ — $B\exists$ до *2*.

Скористаємося наведеною вище рівносильністю:

4. $A_1,\ldots, A_{n-1} \vdash A_n \supset (\exists x\ A(x) \supset C)$.

Але *4* рядок є дедуцією $A_1,\ldots, A_{n-1} \vdash A_n \supset B$ для випадку *2*.

Отже, для всіх випадків показано побудову дедукції

$$A_1,\ldots, A_{n-1} \vdash A_n \supset B \text{ із дедукції } A_1,\ldots, A_n \vdash B.$$

3. Металогічні принципи аксіоматичного числення логіки предикатів

Металогічні принципи у S^5 описують основні властивості процесу логічного виведення.

До металогічних принципів у S^5 відносять:

а) несуперечливість;

б) незалежність;

в) повноту.

а) Несуперечливість аксіом

Введемо поняття інтерпретованої та неінтерпретованої системи.

Під інтерпретованістю формальної системи розуміють наявність області предметів, із яких можна складати множини і визначати на них предикати так, щоб за допомогою цих множин і предикатів можна було б знаходити інтерпретації для досліджуваної системи аксіом.

Якщо це неможливо здійснити, то формальна система вважається неінтерпретованою.

Дамо визначення несуперечливості: ***«Система аксіом називається змістовно несуперечливою або інтерпретованою, якщо для неї існує інтерпретація».***

У протилежному випадку система аксіом називається ***змістовно суперечливою*** або неінтерпретованою.

Можна дати і таке визначення несуперечливості : ***«Система аксіом називається несуперечливою, якщо із неї неможливо вивести одночасно істинність і хибність одного й того ж твердження». Несуперечливість у цьому смислі називають «внутрішньою».***

Якщо порівнювати змістовну і внутрішню несуперечливість, то стає очевидним, що коли область теоретико-множинних понять, із якої ми беремо інтерпретацію для системи аксіом, є внутрішньо несуперечлива, то і сама система аксіом буде внутрішньо несуперечливою.

Отже, наявність інтерпретації системи аксіом зводить питання про несуперечливість цієї системи до несуперечливості системи понять, що використовуються в цій інтерпретації. Тобто, якщо ми впевнені, що ця система понять внутрішньо несуперечлива, то факт наявності інтерпретації встановлює внутрішню несуперечливість досліджуваної системи аксіом.

б) Незалежність аксіом

Так само, як несуперечливість має два визначення, незалежність також представлена двома дефініціями. Введемо поняття ***«зовнішньої незалежності».***

Для цього візьмемо довільну систему аксіом і стосовно неї дамо визначення зовнішньої незалежності.

Отже, маємо систему аксіом: $\boldsymbol{A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}}$.

Тоді: ***«Аксіома** A_i **називається незалежною від решти аксіом цієї системи, якщо існує область М з предикатами** $F\gamma$**, яка задовольняє систему аксіом** $A_1,\ldots, A_{i-1}, A_{i+1},\ldots,A_n$**, але не задовольняє систему (I)».***

Внутрішню незалежність визначають так: ***«Аксіома** A_i **внутрішньо незалежна від решти аксіом, якщо вона не може бути виведеною із інших аксіом системи».***

Порівняємо ці дефініції.

Припустимо, що аксіома A_i незалежна від решти аксіом у першому розумінні. У такому випадку для системи аксіом

$$A_1, \ldots, A_{i-1}, A_{i+1}, \ldots, A_n \text{ — (II)}$$

існує інтерпретація, яка не задовольняє системі аксіом **(II)** разом з аксіомою A_i. Це означає, що формула A_i не може бути логічно виведена із решти аксіом. Якщо б вона була вивідною, то цей висновок був би справедливим для будь-якої інтерпретації.

Тобто, для будь-якої області з будь-якими предикатами із істинності аксіом **(II)** випливала б аксіома A_i. Але за нашим припущенням у тій інтерпретації, де ***істинні аксіоми* (II) *аксіома Ai — хибна***. Звідси випливає висновок про те, що ***якщо яка-небудь аксіома незалежна в першому смислі, то вона повинна бути незалежною і в другому смислі***.

Введемо дефініцію залежної аксіоми:

«Аксіома** A_i **залежна від решти аксіом** $A_1,\ldots,A_{i-1}, A_{i+1},\ldots, A_n$**, якщо будь-яка інтерпретація цієї системи задовольняє також і системі з аксіомою** A_i **».

Поняття несуперечливості і незалежності системи аксіом мають велике значення для теорій з високим ступенем абстрактності. Насамперед це стосується математичних теорій.

Якщо ми користуємося певною системою аксіом, то критерієм її надійності виступають саме несуперечливість і незалежність. Оскільки відомо, що в суперечливій системі немає водорозділу між істиною і хибою, то в ній можливо довести будь-яке твердження.

До внутрішньої незалежності звертаються в тому випадку, коли потрібно вилучити із системи зайві аксіоми.

В історії методології науки відомі факти застосування принципу незалежності. Досить відомою є ситуація з п'ятим постулатом ***геометрії Евкліда,*** або з *«аксіомою про паралельність»*.

Розв'язання ситуації з п'ятим постулатом протягом багатьох віків йшло у руслі виведення його із інших принципів геометрії Евкліда. Всі спроби на цьому шляху були безрезультатними. І лише ***Лобачевському*** вдалося знайти вірний вихід із даної ситуації. Він висловив думку про незалежність п'ятого постулату і обгрунтував її. Ним була побудована така система об'єктів, яка задовольняла кожну аксіому геометрії, але не задовольняла аксіому про паралельність.

Отже, металогічні принципи, окрім суто спеціального змісту, важливого для побудови аксіоматичного числення логіки предикатів, мають ще й загальнометодологічний зміст.

в) *Принцип повноти*

Повнота в численні предикатів розглядається у двох аспектах:

1) повнота у вузькому смисі;

2) повнота у широкому смислі.

Питання про повноту аксіоматичного числення предикатів у вузькому смислі вирішується негативно.

Дамо дефініцію повноти у вузькому смислі:

«Логічна система називається повною у вузькому смислі, якщо не можна без суперечності приєднати до її аксіом, у якості нової аксіоми, ніяку не вивідну в ній формулу так, щоб отримана при цьому система була несуперечливою».

Якщо аксіоматичне числення висловлювань повне у вузькому смислі, то цього не можна сказати про аксіоматичне числення предикатів.

Коли прєднати до системи аксіом S^5 формулу, яка не доказується в ній, то суперечності не отримаємо.

Для прикладу такою формулою є вираз:

$\exists x\, P(x) \supset \forall x\, P(x)$ — **(I).**

Здійснимо ***доведення принципу повноти у вузькому смислі***.

Це доведення базується на основі відповідності формул числення предикатів формулам числення висловлювань.

Тобто, вивідним формулам числення предикатів відповідають відповідні формули числення висловлювань[1].

Формулі **(I)** у численні висловлювань відповідає формула $\boldsymbol{p \supset p}$, яка є вивідною у численні висловлювань.

Отже, формула **(I)** може бути приєднаною до аксіом числення предикатів.

На перший погляд може здатися дивним, що таку, явно невірну, формулу можна без суперечності приєднати до аксіом числення предикатів. Щоб пояснити цю ситуацію скористаємося зверненням до змістовного смислу логіки предикатів.

Відомо, що із загальних логічних аксіом нічого не випливає відносно того, які саме предмети і скільки існує в тій області ***M***, до якої відносяться наші висловлювання і предикати. Тобто, із загальних логічних положень неможливо зробити висновок, що область ***M*** містить більше як один елемент.

Якщо ж область ***M*** містить тільки один елемент, то формула **(I)** є для неї істинною. До речі, коли ми обґрунтовували несуперечливість аксіом, то застосовували інтерпретацію формул на предметній області із одного елемента.

Щоб довести, що числення предикатів неповне у вузькому смислі, необхідно показати, що формула* (I) *не є вивідною із аксіом числення предикатів.

З точки зору змісту це очевидно. Адже із загальної істинності формули **(I)** випливала б неможливість існування в області ***M*** більше як одного елемента. І якщо із загальнологічних положень не можна довести існування більше ніж одного предмета, то існування тільки одного предмета також довести неможливо.

Однак, можна побудувати досить суворе доведення того, що формула **(I)** не може бути формально виведена із аксіом числення предикатів. Центральна ідея цього доведення полягає у тому, що для інтерпретації формул числення предикатів береться предметна область ***M***, яка складається лише із двох елементів (*наприклад*, ***а*** і ***в***).

Тепер поставимо у відповідність кожній формулі числення предикатів таку формулу ***A****, в якій операція зв'язування квантором замінюється таким чином:

---

[1] Обгрунтувати зазначене можна таким способом: аксіомам **1—11** відповідають вивідні формули числення висловлювань; аксіомам **12** і **13** відповідає формула **p ⊃ p**, яка є вивідною формулою числення висловлювань.

$$\forall x\ A(x) \text{ замінюється } A(a) \wedge A(в),$$

$$\exists x\ A(x) \text{ замінюється } A(a) \vee A(в).$$

Формулу числення предикатів, яка не утримує кванторів, називають правильною, якщо при будь-яких замінах вільних змінних предметами а і в вона є вивідною формулою числення висловлювань.

Покажемо, що для кожної вивідної формули A в численні предикатів відповідна їй формула A^* є вивідною в численні висловлювань.

Для аксіом ***1—11*** це можна перевірити безпосередньо. Аксіоми ***1—11*** не містять ні змінних, ні кванторів, тому відповідними їм формулами є вони самі, тобто вивідні формули числення висловлювань.

Розглянемо ***аксіому 12:***

$$\forall x\ F(x) \supset F(y).$$

Замінимо засновок кон'юнкцією:

$$F(a) \wedge F(в) \supset F(y).$$

Ця формула правильна, оскільки вона стає вивідною формулою числення висловлювань при заміні змінної y предметами a і $в$.

Таким же способом можна переконатися, що і ***аксіомі 13*** ставиться у відповідність правильна формула.

Тепер покажемо, що правила отримання вивідних формул числення предикатів для відповідних формул без кванторів переходять у правила, завдяки яким із правильних формул отримуються правильні формули числення предикатів.

Візьмемо для прикладу правило зв'язування квантором.

Припустимо, що формула $A \supset B(x)$, де A — не утримує змінної x, вивідна, а відповідна їй формула є правильною формулою числення предикатів. Ця формула має вигляд:

$$A^* \supset B^*(x),\ \text{(II)},$$

де A^* і B^* — формули, які відповідають A і B.

Так як формула **(II)** за припущенням правильна, то формули:

$$A^* \supset B^*(a) \text{ і } A^* \supset B^*(в) \text{ теж правильні.}$$

Але тоді слід визнати правильною формулу

$$A^* \supset B^*(a) \wedge B^*(в),$$

а це і є формула, що відповідає формулі

$$A \supset \forall x\, B(x).$$

Якщо провести доведення для всіх правил числення предикатів, то стає очевидно, що кожній вивідній формулі числення предикатів відповідає правильна формула.

Розглянемо тепер формулу, яка відповідає формулі **(I).**

$$P(a) \vee P(в) \supset P(a) \wedge P(в) \text{ (III).}$$

Так як формула **(I)** не має вільних змінних, то формула **(III),** якщо вона правильна, повинна бути вивідною формулою числення висловлювань.

Однак, легко переконатися, що формула **(III)** не є вивідною. Дійсно, для предиката P, для якого $P(a)$ має значення *«і»*, а $F(в)$ — значення *«х»,* формула **(III)** перейде в *«і»* $\vee$ *«х»* $\supset$ *«і»* $\wedge$ *«х»,* тобто прийме значення *«х».* Звідси випливає не вивідність формули **(I)** у численні предикатів, що й потрібно було довести.

Відомо, що будь-яка вивідна формула в численні предикатів буде тотожно-істинною. Звідси випливає питання: ***чи буде будь-яка тотожно-істинна формула вивідною в численні предикатів ?***

У такій постановці це питання носить ***назву проблеми повноти у широкому смислі.*** При розв'язанні проблеми повноти числення предикатів у широкому смислі не можна обмежуватися лише засобами міркування фінітної металогіки. Справа в тому, що в саму постановку проблеми входить поняття ***«тотожно-істинної формули»,*** яке включає в себе розгляд усіх інтерпретацій.

Врахуємо ще одну обставину технічного порядку. Йдеться про співвідношення дедуктивної еквівалентності[1] і тотожної істинності формул.

Із дедуктивної еквівалентності випливає така залежність: ***«якщо дві формули дедуктивно еквівалентні, то***

---

[1] Формули A^* і B^* називаються ***дедуктивно еквівалентними*** у численні предикатів, якщо із аксіом цього числення і формули A^* завдяки правилам числення можна вивести формулу B^* і навпаки, із аксіом числення і формули B^* за допомогою правил числення можна вивести формулу A^* .

із того, що одна із них тотожно-істинна слідує, що і друга теж тотожно-істинна».

Дійсно, нехай ***A**** і ***B**** — дедуктивно еквівалентні формули і ***A**** — ***тотожно-істинна формула.*** А правила числення такі, що забезпечують отримання тотожно-істинних формул із тотожно-істинних формул.

Завдяки дедуктивній еквівалентності ***B**** вивідна із аксіом числення предикатів і формули ***A****. А це означає, що ***B* є тотожно-істинною формулою.***

Окрім того, якщо ***A**** і ***B**** дедуктивно еквівалентні і ***A**** — ***вивідна формула в численні предикатів, B* також є вивідною формулою.***

Отже, проблема повноти числення предикатів у широкому смислі розв'язується позитивно.

Розглядом металогічних принципів завершується знайомство із побудовою аксіоматичного числення предикатів.

4. Натуральне числення предикатів

Поряд із аксіоматичним численням у логіці предикатів застосовують і такий засіб дослідження, як натуральне числення або систему натурального висновку.

На відміну від аксіоматичного числення, в якому разом із деяким необхідним мінімумом правил висновку в числі вивідних постулатів містяться аксіоми, ***натуральне числення містить тільки правила висновку.***

Усю множину правил висновку в натуральному численні предикатів (S^6) [1] поділяють на дві підмножини:

1) прямі правила і

2) непрямі правила.

За цими підмножинами правил зберігаються визначення, які їм давалися при формулюванні натурального числення висловлювань.

Тобто, правила першого виду дозволяють із одних виразів виводити нові вирази, а правила другого виду регламентують виведення із тверджень про логічне слідування нових тверджень про логічне слідування.

[1] Натуральне числення логіки предикатів позначають символом S^6 .

Прямі правила висновку у S^6

$$\frac{A,\ B}{A \wedge B}\ (\boldsymbol{ВК});\qquad \frac{A \wedge B}{A}\ (\boldsymbol{УК},\ 1);\qquad \frac{A \wedge B}{B}\ (\boldsymbol{УК},\ 2);$$

$$\frac{\overline{A \wedge B}}{\overline{A} \vee \overline{B}}\ (\boldsymbol{ЗК});\qquad \frac{A}{A \vee B}\ (\boldsymbol{ВД},\ 1);\qquad \frac{B}{A \vee B}\ (\boldsymbol{ВД},\ 2);$$

$$\frac{A \vee B,\ \overline{A}}{B}\ (\boldsymbol{УД},\ 1);\qquad \frac{A \vee B,\ \overline{B}}{A}\ (\boldsymbol{УД},\ 2);\qquad \frac{\overline{A \vee B}}{\overline{A} \wedge \overline{B}}\ (\boldsymbol{ЗД});$$

$$\frac{A \supset B,\ A}{B}\ (\boldsymbol{УІ},\ 1);\qquad \frac{A \supset B,\ \overline{B}}{\overline{A}}\ (\boldsymbol{УІ},\ 2);\qquad \frac{\overline{A \supset B}}{A \wedge \overline{B}}\ (\boldsymbol{ЗІ});$$

$$\frac{A \supset B,\ B \supset A}{A \sim B}\ (\boldsymbol{ВЕ});\qquad \frac{A \sim B}{A \supset B}\ (\boldsymbol{УЕ},\ 1);\qquad \frac{A \sim B}{B \supset A}\ (\boldsymbol{УЕ},\ 2);$$

$$\frac{A}{\overline{\overline{A}}}\ (\boldsymbol{ВЗП});\qquad \frac{\overline{\overline{A}}}{A}\ (\boldsymbol{УЗП});$$

$$\frac{\overline{\forall} x A(x)}{\exists x \overline{A}(X)}\ (\boldsymbol{З}\forall);\qquad \frac{\overline{\exists} x A(x)}{\forall x \overline{A}(x)}\ (\boldsymbol{З}\exists);$$

$$\frac{A(\alpha/\beta,\ \gamma_1,\ ...,\ \gamma_n)}{A\alpha A(\alpha,\ \gamma_1,\ ...,\ \gamma_n)}\ (\boldsymbol{В}\forall);$$ де β — абс. обм., $\gamma_1, ..., \gamma_n$ — обм.

$$\frac{\forall \alpha A(\alpha)}{A(\alpha/t)}\ (\boldsymbol{У}\forall);\qquad \frac{A(\alpha/t)}{\exists \alpha A(\alpha)}\ (\boldsymbol{В}\exists);$$

$$\frac{\exists \alpha A(\alpha,\ \gamma_1,\ ...,\ \gamma_n)}{A(\alpha/\beta,\ \gamma_1,\ ...,\ \gamma_n)}\ (\boldsymbol{У}\exists);$$ де β — абс. обм., $\gamma_1, ..., \gamma_n$ — обм.

Правила введення пропозиційних зв'язок зрозумілі із тих пояснень, які давалися у попередніх розділах. Дамо деякі пояснення до кванторних правил висновку.

Це, перш за все, стосується виразу $A(\alpha\ /\ t)$ і його часткового випадку

$$A(\alpha\ /\beta\ ,\gamma_1,...,\ \gamma_n).$$

Під виразом $A(\alpha \,/\, t)$ мається на увазі результат правильної підстановки у формулу $A(\alpha)$ замість усіх вільних входжень предметної змінної α терму t.

Звернемося до прикладу.

Нехай $A(x)$ представляє формулу:

$$\exists\, y\ (x < y \wedge x = z).$$

У цій формулі змінна x має два вільних входження. Замість x будемо підставляти один із таких термів: «5» або «z» або $(x+z)\cdot 5$.

Внаслідок підстановки вираз $A(x \,/\, t)$ у кожному конкретному випадку приймає вигляд:

1. $\exists y\ (5 < y \wedge 5 = z)$ — $x \,/\, 5$
2. $\exists y\ (z < y \wedge z = z)$ — $x \,/\, z$
3. $\exists y\ ((x + z) \cdot 5 < y \wedge (x + z) \cdot 5 = z)$ — $x \,/\, (x + z)\cdot 5$.

В усіх трьох випадках ми здійснили підстановку правильно. Оскільки жодна змінна, яка входить у терм t, не стала зв'язаною на місцях, де з'явився в результаті підстановки терм t.

Порушення цієї вимоги веде до некоректних семантичних наслідків.

Візьмемо той самий вираз:

$$\exists y\ (x < y \wedge x = z).$$

За семантичною типологією виразів логіки предикатів даний вираз є виконуваним. Приймемо за область визначення для змінних, що входять в даний вираз, універсум натуральних чисел.

При $x \,/\, y{+}2$ отримаємо:

$$\exists\, y\ (y' + 2 < y \wedge y' + 2) = z.$$

Оскільки терм t містить змінну y, то після підстановки вона виявилася зв'язаною $\exists$ на тих місцях, де t з'явився у результаті підстановки. Графічно це зображено штрихом.

З точки зору семантики даний вираз є тотожно-хибним. Дійсно, які б значення не вибиралися для індивідних змінних із множини натуральних чисел, вираз $x + 2 < y$ ніколи не буде істинним. А це означає, що вся кон'юнкція буде завжди хибною.

Отже, ми порушили правило підстановки, яке (як і всі правила висновку) гарантує отримання із істинних тверджень знову ж таки істинні твердження.

Щодо виразу $A(\alpha / \beta, \gamma_{1,}..., \gamma_{n)}$, який фігурує в правилах ***В***∀ і ***У***∃, то він є метамовним записом часткового випадку результату правильної підстановки у вираз $A(\alpha / \beta, \gamma_1,...,\gamma_{n)}$ замість усіх вільних входжень індивідної змінної α і індивідної змінної β.

Тепер опишемо правила ***У***∀ і ***В***∃.

Правило У∀ представляє собою дозвіл перейти від формули

$$\forall\alpha\, A(\alpha) \textit{ до формули } A(\alpha / t).$$

Щоб здійснити цей перехід, необхідно усунути ∀, а в залишковій формулі $A(\alpha)$ зробити правильну підстановку замість α терму t. Оскільки в $A(\alpha)$ можуть входити квантори, то необхідно бути уважними, здійснюючи процедуру підстановки.

Наприклад, маємо вираз $\forall x\, \exists\, y\, (x < y)$.

Якщо за область визначення для змінних x і y береться множина натуральних чисел, то даний вираз стверджує про відсутність найбільшого числа. За значенням ***цей вираз є істинним***. Але якщо підставити замість x терм y, то отримаємо із цього істинного ***твердження хибне***:

$$\exists\, y\, (y < y).$$

Тут терм y виявився зв'язаним ∃ на тому місці, де він був підставлений замість x.

Правило введення квантору існування дозволяє перейти від формули

$$A(\alpha / t) \textit{ до формули } \exists\, \alpha\, A(\alpha).$$

Тут також необхідно дотримуватися вимог правильної підстановки. У протилежному випадку матимемо хибний висновок.

Візьмемо предикат ***«6 < у»***. Якщо невірно застосуємо правило ***В***∃, то отримаємо хибне твердження: $\exists y\, (y < y)$.

Що ж тут насправді відбулося? Справа в тому, що у цьому застосуванні ***В***∃ предикат $6 < y$ трактувався як нібито результат вірної підстановки терму ***6*** замість змінної y. Але результатом такої підстановки повинен бути вираз $6 < 6$, а не $6 < y$, оскільки підстановка завжди здійснюється замість всіх входжень вільної індивідної змінної.

Отже, вираз $6 < y$ не можна розуміти як $A(y / 6)$, а тому ***перехід до $\exists y\, A(y)$ невірний.***

З іншого боку $\boldsymbol{6 < y}$ можна розуміти як $\boldsymbol{A(x\ /\ 6)}$, як результат тепер вірної підстановки у $\boldsymbol{x < y}$ замість всіх вільних входжень змінної $\boldsymbol{x}$ терму ***6***. У цьому випадку ми отримаємо $\exists\ \boldsymbol{x\ (x < y)}$.

При записі правил $\boldsymbol{B}\forall$ і $\boldsymbol{У}\exists$ фігурує додаткова інформація у вигляді скорочених вказівок: ***«β — абс. обм.; γ_1,..., γ_n — обм.»***. Розглянемо смисл цієї інформації.

З семантичної точки зору змінні трактуються як такі, що пробігають по деякій предметній області і набувають тут будь-яких значень. Саме в цьому полягає основна суть вільних змінних. Але в складі формул вільні змінні не завжди виконують цю роль, тобто не завжди розглядаються як знаки, що можуть позначати будь-який (довільний) об'єкт області визначення. Тут можливі варіанти.

У тому випадку, коли вільна предметна змінна в складі формули позначає будь-який об'єкт із універсуму розгляду, вважається, що вона застосована в цій формулі в інтерпретації всезагальності.

Наприклад, у виразі ***«$x \cdot y = y \cdot x$»*** змінні ***y*** і ***x*** вживаються в ***інтерпретації всезагальності,*** оскільки їх співвідношення при будь-яких значеннях ***x*** і ***y*** буде ***істинним.***

У тому випадку, коли твердження справедливе для якогось (фіксованого), можливо і невідомого предмета із області значень x, то маємо умовну інтерпретацію.

Так, *наприклад,* у виразі $\boldsymbol{3x + 6 = 0}$ змінна ***x*** уже не використовується у інтерпретації всезагальності, так як не позначає довільний об'єкт із універсуму. Навпаки, можливі значення для ***x*** суворо фіксовані, тобто обмежені умовою даного твердження. А це значить, що ***x*** використана в умовній інтерпретації.

Звернемося ще до прикладу.

У виразі $\boldsymbol{x + 6 < y}$ нехай ***x*** і ***y*** взяті ***в умовній інтерпретації.***

Виберемо для ***x*** значення ***2***. Вибір цього значення для ***x*** відразу ж накладає обмеження на вибір можливих значень для ***y***.

Дійсно, змінна ***y*** не може тепер прийняти в якості значень числа, менші ніж ***9***. Але вибір числа ***2*** як значення ***x*** довільний. Нам нічого не заважало б вибрати в якості значення для ***x*** число ***23***. Цей вибір відразу ж по-новому обмежить множину можливих значень для ***y***. Тепер значенням для ***y*** повинно бути число, не менше як ***30***.

Отже, у випадку умовної інтерпретації змінних вибір значення для однієї змінної обмежує вибір значення для інших вільних змінних, які входять у конкретний вираз.

Проілюструємо правила ***В***∀ і ***У***∃.

Відповідно до ***правила У***∃ дозволяється перехід від формули $\exists\alpha$ **(**$\alpha, \gamma_1,..., \gamma n$**)** до формули ***А*** **(**$\alpha / \beta, \gamma_1,..., \gamma_n$**)**.

Зрозуміло, цей перехід регламентується вимогами правильної підстановки.

Засновок даного правила $\exists\alpha$ ***А*** **(**$\alpha, \gamma_1,..., \gamma_n$**)** стверджує, що в універсумі розгляду існує деякий об'єкт, що задовольняє вимозі ***А*** **(**$\alpha / \gamma_1,..., \gamma_n$**)**.

Тоді ***правило У***∃ дозволяє вважати цим об'єктом предмет, що позначається змінною β. Буквально це звучить так:

«Якщо існує предмет, що задовольняє умові А, то нехай ним буде предмет β***».*** Цим самим здійснюється такий вибір значення для β, що предикат ***А*** **(**$\beta, \gamma_1,...,\gamma_n$**)** ***стає істинним висловлюванням.***

У цьому випадку β береться ***в умовній інтерпретації***, а це означає, що ***вона абсолютно обмежена,*** тобто виступає іменем якогось чітко визначеного предмета, що задовольняє умові ***А*** **(**$\beta, \gamma_1, ..., \gamma_n$**)**.

Але цим самим вибір значення для β обмежує можливість вибору значення для решти вільних змінних $\gamma_1,...,\gamma_n$. Саме ця інформація і фіксується у правилі усунення квантора існування вказівкою на те, що β — ***абсолютно обмежена змінна*** (абс.обм.), а $\gamma_1,...,\gamma_n$ — обмежені змінні (обм.) [1]. При цьому в ***правилі У***∃ змінні $\gamma_1,...,\gamma_n$ — це вільні змінні, які входять у вираз $\exists$ α ***А*** **(**$\alpha, \gamma_1,...,\gamma_n$**)**.

Проілюструємо дію ***У***∃ *на прикладі.*

Маємо вираз: $\exists$ ***х (х + 6 = 9)***.

Цей вираз стверджує про наявність у множині натуральних чисел такого числа, яке задовольняє умові ***х + 6 =*** ***= 9***.

Припустимо, що таким числом буде значення змінної ***у***. У цьому випадку відповідно до ***правила У***∃ отримаємо вираз ***у + 6 = 9***, де ***у*** є обсолютно обмеженою змінною, оскі-

[1] Тут необхідно зробити зауваження. Коли вживається термін «абсолютно обмежена змінна», то не у розумінні «неповноцінна», а обмежена у розумінні визначення, встановлення межі, відділення одного предмету від іншого. Тобто, обмежити предметні змінну — це означає визначити для неї характер інтерпретації.

льки ***y*** позначає тепер вибраний об'єкт із універсуму (у даному випадку він єдиний).

Розглянемо ще такий вираз: $\exists x (x + 6 < y)$.

Вибиремо у множині натуральних чисел предмет, який задовольняє умові $x + 6 < y$. Що такий об'єкт є, свідчить висловлювання

$$\exists x (x + 6 < y).$$

Нехай таким об'єктом буде предмет, позначений індивідною змінною ***x***. Застосовуючи тепер ***правило У***$\exists$, отримаємо вираз:

$$x + 6 < y,$$

де змінна ***x абсолютно обмежена***, змінна ***y відносно обмежена,*** або ***просто обмежена.***

Подібну інформацію несе і вираз «β — ***абс. обм.;*** $\gamma_1,..., \gamma_n$ — ***обм.***», який є приміткою до ***правила В***$\forall$.

Суть цього правила полягає в дозволі переходу від виразу

$$A (\alpha / \beta, \gamma_1,..., \gamma_n) \text{ до } \forall\alpha A (\alpha, \gamma_1,..., \gamma_n).$$

Прокоментуємо цей перехід.

У даному випадку ***є дві можливості.***

Вираз $A (\beta / \alpha, \gamma_1,..., \gamma_n)$ може, ***по-перше,*** при деяких фіксованих значеннях $\gamma_1, ..., \gamma_n$ приймати ***значення «істина»*** на певній області визначення при будь-яких значеннях β. Іншими словами, змінна β при відповідних фіксованих значеннях $\gamma_1, ..., \gamma_n$ входить у вираз $A (\beta, \gamma_1, ..., \gamma_n)$ ***в інтерпретації всезагальності.***

У даному випадку перехід від цього виразу за ***правилом В***$\forall$ до виразу $\forall\alpha A(\alpha, \gamma_1, ..., \gamma_n)$ є цілком правомірним.

По-друге, вираз $A (\beta, \gamma_1, ..., \gamma_n)$ може виявитися і таким, що при певних фіксованих значеннях $\gamma_1, ..., \gamma_n$ на відповідній області міркувань буде при деяких значеннях β приймати валентність ***«хиба».***

Тоді виберемо це значення для β. Внаслідок цього β стає ***абсолютно обмеженою змінною***, а решта вільних змінних — ***обмеженими.***

Зрозуміло, що вираз $A (\beta, \gamma_1,..., \gamma_n)$ при такому виборі значень для змінних ***буде хибним.*** Але з хибного висловлювання слідує все, що завгодно. Тому ***правомірним є вираз*** $\forall\alpha (\alpha, \gamma_1,..., \gamma_n)$.

Після того, як ми виписали прямі правила висновку в S^6 з їх короткою характеристикою, ознайомимося з ***непрямими правилами висновку*** S^6 .

До непрямих правил висновку S^6 відносять:

а) правило введення імплікації (ВІ):

$$\frac{\Gamma,\ A \mid\!- B}{\Gamma \mid\!- A \supset B};$$

б) правило введення заперечення, або правило спростування «шляхом зведення до абсурду» (ВЗ) або (Зв.А):

$$\frac{\Gamma,\ A \mid\!- B,\ \overline{B}}{\Gamma \mid \overline{A}};$$

в) правило доведення від противного (ДВП):

$$\frac{\Gamma,\ \overline{A} \mid\!- B,\ \overline{B}}{\Gamma \mid\!- A}.$$

Окрім правил висновку дедуктика, або дедуктивна логіка S^6, включає в себе низку дефініцій:

1. Дефініція висновку:

«Висновком в S^6 називається непорожня кінцева послідовність формул $C_1,..., C_n$, яка задовольняє таким вимогам:

а) кожна C_i є або засновок, або отримана із попередніх формул за правилами висновку;

б) якщо у висновку застосовувалися правила ВІ або ВЗ, то всі формули, починаючи з останнього засновку аж до результату застосування даного правила, виключаються із подальших кроків побудови висновку[1];

[1] Властивість «виключеності» деяких формул із подальшої побудови висновку означає, що до даних формул у подальших кроках уже не можна більше застосовувавти будь-яких правил. Ці формули нібито ізолюються із процесу побудови висновку. У подальшому такі формули будемо називати ***виключеними формулами, або виключеними засновками***. Той факт, що деякі засновки є виключеними, при запису висновка графічно позначають вертикальною рискою.

Звернемося до прикладів.

Нехай потрібно обгрунтувати метатвердження про вивідність формули R із засновків $P \supset Q$, $Q \supset R$ і P.

в) жодна індивідна змінна у висновку не обмежується абсолютно більше одного разу;

г) жодна індивідна змінна не обмежує у висновку сама себе».

Для цього необхідно побудувати висновок у якому остання формула графічно співпадала б з формулою $\boldsymbol{R}$, а засновками були б формули — $\boldsymbol{P \supset Q, Q \supset R}$ і $\boldsymbol{P}$. Тобто, йдеться про таку послідовність:

1. ***P ⊃ Q — засновок***
2 ***Q ⊃ R — засновок***
3. ***P — засновок***
4. ***Q — УІ до 1,3***
5. ***R — УІ до 2,4***

Дійсно, ми отримали висновок, де остання формула послідовності співпадає графічно з R, а формули $\boldsymbol{P \supset Q}$, $\boldsymbol{Q \supset R}$ і $\boldsymbol{P}$ є невиключеними засновками. Цим самим побудовано висновок, який обгрунтовує метатвердження про вивідність $\vdash \boldsymbol{P \supset Q, Q \supset R, P \vdash R}$.

Розглянемо ще одне метатвердження: $\vdash \boldsymbol{(P \supset Q) \supset ((Q \supset R) \supset (P \supset R))}$.

Це метатвердження фіксує той факт, що формула, яка стоїть справа від знака $\vdash$, є теоремою. Побудуємо послідовність, яка обгрунтовує дане метатвердження.

1. ***P ⊃ Q — засновок***
2. ***Q ⊃ R — засновок***
3. ***P — засновок***
4 ***Q — УІ, до 1, 3***
5. ***R — УІ, до 2, 4***
6. ***P ⊃ R — ВІ, до 3, 5***
7. ***(Q ⊃ R) ⊃ (P ⊃ R) — ВІ, до 2, 6***
8. ***(P ⊃ Q) ⊃ ((Q ⊃ R) ⊃ (P ⊃ R)) — ВІ, до 1, 7.***

Отже, оскільки рядок **8** послідовності графічно співпадає із тією формулою, яку потрібно було отримати, то ми маємо висновок. Окрім того, усі засновки включені, тому множина невиключених засновків порожня. У зв'язку з цим дана послідовність згідно з дефініцією доведення є доведенням формули

$$\boldsymbol{(P \supset Q) \supset ((Q \supset R) \supset (P \supset R)),}$$

тобто дана формула є теоремою.

Якщо порівняти дану послідовність із попередньою, то легко побачити подібність їх п'яти кроків. Коли ми призупинили доведення формули $\boldsymbol{(P \supset Q) \supset ((Q \supset R) \supset}$ $\boldsymbol{\supset (P \supset R))}$ на п'ятому кроці , то мали б вивідність вигляду $\boldsymbol{(P \supset Q), (Q \supset R), P \vdash R}$. Однак, побудова послідовності була продовжена ***6***-м кроком. На ***6***-му кроці було застосовано правило ***ВІ до 3,5*** рядків. Відповідно до цього правила дозволяється отримати формулу $\boldsymbol{P \supset R}$, де $\boldsymbol{P}$ — останній засновок, а $\boldsymbol{R}$ — 5-та формула. Саме ця формула і записана на ***6***-му кроці.

У дефініції висновку зазначено, що при застосуванні ***правила ВІ*** із подальших кроків висновку виключаються усі формули, починаючи із останнього засновку аж до результату застосування цього правила, тобто, у нашому випадку з ***3***-ї до ***6***-ї формули. Якщо висновок був би обірваний на ***6***-му кроці, то цим самим була б обгрунтована вивідність такого роду: $\boldsymbol{P \supset Q, Q \supset R \vdash P \supset R}$. Але оскільки процес виведення був продовжений у результаті застосування ***правила ВІ*** до ***6***-го кроку, то на ***7***-му кроці була отримана формула $\boldsymbol{(Q \supset R) \supset (P \supset R)}$ і внаслідок цього були виключені рядки з ***2***-го по **7**-й.

Якщо б виведення закінчилося на 7-му кроці, то була б обгрунтована вивідність $\boldsymbol{(P \supset Q) \vdash ((Q \supset R) \supset (P \supset R))}$. Застосувавши до ***7***-го кроку ***правило ВІ***, отримуємо на ***8***-му кроці обгрунтування вивідності із порожньої множини засновків формули $\boldsymbol{(P \supset Q) \vdash ((Q \supset R) \supset (P \supset R))}$.

2. Дефініція доведення:

«Доведенням у S^6 є висновок із порожньої множини не виключених засновків».

3. Дефініція завершеного висновку:

«Завершеним називається висновок у якому ніяка змінна, що абсолютно обмежувалася у процесі висновку, не зустрічається вільно ні у не виключених засновках, ні у наслідку».

4. Дефініція завершеного доведення:

«Завершеним доведенням у численні предикатів є завершений висновок із порожньої множини не виключених засновків».

Якщо проаналізувати чотири наведені дефініції, то очевидно, що основною є дефініція висновку.

Порівняно з поняттям висновку в численні висловлювань у S^6 ***поняття висновку збагачується ще двома вимогами.***

Перша вимога зводиться до того, що позначка про абсолютну обмеженість деякої змінної означає, що в процесі побудови висновку вона стає знаком якогось конкретного предмета, а тому друге її абсолютне обмеження може вказувати на те, що вона стала знаком якогось іншого предмета. Така ситуація повинна бути заборонена, оскільки вона веде до протиріччя.

Відносно ***другої вимоги,*** то вона пов'язана з такими міркуваннями. В основі кванторних правил ***У***$\forall$ і ***В***$\exists$ лежить відношення логічного слідування[1].

Іншими словами, для ***У***$\forall$ це означає, що перехід від формули $\forall\alpha\ A(\alpha)$ до $A(\alpha / t)$ виправданий відношенням логічного слідування:

$$\forall\alpha\ A(\alpha) \models A(\alpha / t),$$

а для ***В***$\exists$ перехід від $A(\alpha / t)$ до $\exists\alpha\ A(\alpha)$ виправданий відношенням логічного слідування типу:

$$A(\alpha / t) \models \exists\alpha\ A(\alpha).$$

Інша ситуація виникає з ***правилами В***$\forall$ і ***У***$\exists$, оскільки в їх основі не лежить відношення логічного слідування:

---

[1] Тут ми зупинимося на особливості правил ***В***$\exists$ і ***У***$\forall$ більш детально, ніж у § 2 цього розділу.

$$A(\alpha\ /\ \beta,\ \gamma_1,\ldots,\ \gamma_n) \not\models \forall\alpha\ (\alpha,\ \gamma_1,\ldots,\ \gamma_n\ )$$
$$\exists\alpha\ A(\alpha,\ \gamma_1,\ldots,\ \gamma_n) \not\models A(\alpha\ /\ \beta,\ \gamma_1,\ldots\ \gamma_n).$$

Незважаючи на цю обставину, в численні предикатів все ж таки приймаються ці правила. Але з певними умовами.

Для того, щоб не допустити можливості виведення із істинних тверджень хибних наслідків, необхідно якимось чином заблокувати, виключити негативний вплив відсутності логічного слідування.

Це досягається завдяки двом формальним умовам.

Перша формальна умова представлена пунктом г) дефініції висновку.

Необхідно мати на увазі, що ситуація, коли змінна обмежує сама себе, може виникнути не тільки прямим чином, а й опосередковано.

Тут мається на увазі, що відношення ***«х обмежує у»*** є транзитивним, тобто для нього вірним є співвідношення: ***«якщо*** α ***обмежує*** β***, а*** β ***обмежує*** γ***, то*** α ***обмежує*** γ***».***

Це пояснює ситуацію самообмеження деякої змінної в процесі побудови висновку, скажімо змінної ***х***, таким чином: ***в одному кроці*** висновку змінна ***х***, ***будучи абсолютно обмеженою***, ***обмежує*** змінну ***у***, а в ***другому кроці*** — змінна ***у***, ***будучи абсолютно обмеженою, обмежує х***. Тоді, згідно з відношенням транзитивності, змінна ***х*** буде ***обмежувати сама себе***.

Друга формальна умова, як зазначалося в §2, полягає в розрізненні поняття висновку і поняття завершеного висновку.

Наявність завершеного висновку гарантує відношення логічного слідування між засновками і наслідком.

Перед тим, як розглянути конкретні варіанти побудови висновку і доведення в S^6, зупинимося ще на одному питанні.

Побудова висновків і доведень є творчою проблемою. Вона полягає у находженні потрібної послідовності формул, зокрема, знаходженні засновків. Звичайно, в якості засновків можна брати будь-які формули, але обов'язково треба враховувати ту обставину, що, застосовуючи до вибраних засновків відповідне правило, необхідно мати можливість виключити із висновку всі зайві засновки.

Для того, щоб вибір потрібних засновків для побудови висновку не носив випадкового характеру і не був простим перебиранням різних можливостей, необхідно описати деякі способи або прийоми вибору засновків.

***Назвемо прийом вибору засновків для побудови процедури висновку методикою вибору засновків. Скорочено позначається буквами* МЗ.** *Розглянемо основні з них.*

Нехай шляхом побудови висновку необхідно обгрунтувати метатвердження про вивідність:

$$A_1, A_2, \ldots, A_n \vdash (C_1 \supset (C_2 \supset \ldots \supset (C_n \supset B))).$$

Спочатку в якості засновків беремо формули, які стоять до знака $\vdash$. Подальший вибір засновків здійснюється за такими методиками.

Перша МЗ: ***«Якщо формула, що стоїть після знака $\vdash$, є імплікацією, то антецедент даної імплікації береться за засновок, а метою виведення стає консеквент. Тобто, до уже вибраних засновків $A_1, A_2, \ldots, A_n$ додається новий засновок C_1.***

Застосування першої **МЗ** здійснюють до того часу, поки метою побудови висновку не стане формула, яка не має вигляду імплікації. В нашому випадку це формула ***B***:

$$A_1, A_2, \ldots, A_n, C_1, C_2, \ldots, C_n \vdash B».$$

Якщо побудова висновку відбувається, то, послідовно застосовуючи ***правило ВІ*** для виключення додаткових засновків, можна отримати обгрунтування даного висновку:

$$A_1, A_2, \ldots, A_n \vdash (C_1 \supset (C_2 \supset \ldots \supset (C_n \supset B)\ldots)).$$

Друга МЗ: ***«Якщо послідовне застосування першої МЗ привело до формули В як мети побудови висновку, але висновок не вдається побудувати, то необхідно взяти в якості додаткового засновку заперечення формули*** $\overline{B}$:

$A_1, A_2, \ldots, A_n, C_1, C_2, \ldots, C_n, \overline{B}$**».**

Метою висновку тепер стає отримання в його складі протиріччя.

Третя МЗ. ***«Якщо в процесі побудови висновку зустрічається диз'юнктивна формула $A \vee B$ (вона може входити до складу більш складного виразу), то є декілька варіантів вибору частин цієї формули в якості додаткових засновків: або A, або B; або A і B, або $\overline{A}$, або $\overline{B}$; або $\overline{A}$ і $\overline{B}$ ».***

Четверта МЗ. ***«Після того, як завдяки застосуванню першої МЗ вдалося отримати формулу В, яка має вигляд ∀αA або ∃αA, дозволяється продовжити вибір засновків із формули за першою МЗ і другою МЗ, не звертаючи уваги на квантори».***

Зупинимося на декількох варіантах побудови висновків і доведень в S^6.

I. $\exists x\ \forall y\ P(x,y) \vdash \forall y\ \exists x\ P(x,y)$

1. $\exists x\ \forall y\ P(x,y)$	— *засновок*
2. $\forall y\ P(x,y)$ — *У∃, 1, x*	— *абс. обм.*
3. $P(x,y)$	— *У∀, 2*
4. $\exists x\ P(x,y)$	— *В∃, 3*
5. $\forall y\ \exists x\ P(x,y)$ — *В∀, 4, y*	— *абс. обм.*

У цьому висновку змінні ***x*** і ***y абсолютно обмежені***, але оскільки вони не входять вільно ні у засновок, ні у наслідок, то дана послідовність являє собою завершений висновок.

Побудуємо висновок для виразу:

II. $\forall x\ \exists y\ P(x,y) \vdash \exists y\ \forall x\ P(x,y)$

1. $\forall x\ \exists y\ P(x,y)$	— *засновок*
2. $\exists y\ P(x,y)$	— *У∃, 1*
3. $P(x,y)$ — *У∃, 2 z*	— *абс. обм.; x — обм.*
4. $\forall x\ P(x,y)$ — *В∀, 3, x*	— *абс. обм; z — обм.*

На четвертому кроці висновок повинен бути призупинений, оскільки послідовність ***1—4*** суперечить пункту ***г) дефініції висновку***. Згідно з цим пунктом жодна змінна не повинна обмежувати сама себе. У нашому прикладі на ***3-му*** кроці ***z обмежує x***, а на ***4-му x обмежує z***. Тому згідно з відношенням транзитивності виходить, що ***z обмежує z***.

Обійти цю ситуацію неможливо навіть при заміні змінної при застосуванні ***правила У∃***.

Отже, дана вивідність не може бути обґрунтованою.

Побудуємо доведення виразу:

III. $\vdash (\forall x\ S(x) \supset P(x)) \wedge \forall x\ (P(x) \supset Q(x))) \supset \forall x\ (S(x) \supset$ $\supset Q(x))$

1. $\forall x\ (S(x) \supset P(x)) \wedge \forall x\ (P(x) \supset Q(x))$ — *засновок* (*МЗ-1*)
2. $S(x)$ — *засновок* (*МЗ-4*)
3. $\forall x\ (S(x) \supset P(x))$ — *УК, 1*
4. $\forall x\ (P(x) \supset Q(x))$ — *УК, 1*
5. $S(x) \supset P(x)$ — *У∀, 3*
6. $P(x)$ — *УІ, 2,5*
7. $P(x) \supset Q(x)$ — *У∀, 4*
8. $Q(x)$ — *УІ, 6,7*
9. $S(x) \supset Q(x)$ — *ВІ, 8*
10. $\forall x\ (S(x) \supset Q(x)$ — *В∀, 9, х-абс.обм.*
11. $(\forall x\ (S(x) \supset P(x)) \wedge \forall x\ (P(x) \supset Q(x)) \supset \forall x\ (S(x) \supset Q(x)).$

Даний висновок є завершеним доведенням, а тому це метатвердження є обгрунтованим.

Розглянемо наступний варіант побудови доведення.

IV. $\vdash \overline{\exists} x\ \overline{P}(x,y,a) \supset \forall x\ P(x,y,a)$

1. $\overline{\exists}\ \overline{P}(x,y,a)$ — *засновок* (*МЗ-1*)
2. $\overline{P}(x,y,a)$ — *засновок* (*МЗ-4*)
3. $\exists x\ \overline{P}(x,y,a)$ — *В∃, 2*
4. $\overline{P}(x,y,a)$ — *ВЗ, 1,3*
5. $P(x,y,a)$ — *УЗ, 4*
6. $\forall x\ P(x,y,a)$ — *В∀, 5, х-абс.обм., у-обм.*
7. $\overline{\exists} x\ \overline{P}(x,y,a) \supset \forall x\ P(x,y,a)$ — *ВІ, 6*

Ця послідовність — завершене доведення, оскільки є єдина ***х***, яка обмежується. На ***6-му*** кроці висновку змінна ***х*** не входить вільно в наслідок (множина невиключених засновків порожня).

Суть застосування **МЗ-4** на ***2-му*** кроці полягала в тому, що був розглянутий предикат ***Р(х,у,а),*** який не мав вигляду імплікації, а тому згідно з **МЗ-2** для переходу від побудови висновку від протилежного було взято в ролі засновку заперечення цієї формули.

Наведені варіанти побудови висновків технічно розкривають специфіку натурального числення предикатів порівняно з аксіоматичним численням.

1. Загальна характеристика числень логіки предикатів.
2. Поняття аксіоматичного числення логіки предикатів.
3. Структура аксіоматичного числення логіки предикатів $\boldsymbol{S^5}$.
4. Характеристика списку аксіом $\boldsymbol{S^5}$.
5. Загальна характеристика правил висновку в $\boldsymbol{S^5}$.
6. Поняття правильної підстановки.
7. Правило усунення квантору загальності.
8. Правило введення квантору загальності.
9. Правило введення квантору існування.
10. Правило усунення квантору існування.
11. Правило перейменування вільних змінних.
12. Правило перейменування зв'язаних змінних.
13. Характеристика дефініції доведення.
14. Характеристика доказової формули.
15. Дефініція висновку.
16. Теорія дедукції.
17. Доведення теореми дедукції.
18. Загальна характеристика металогічних принципів в $\boldsymbol{S^5}$.
19. Принцип несуперечливості аксіом.
20. Принцип незалежності аксіом.
21. Принцип повноти.
22. Загальна характеристика натурального числення предикатів $\boldsymbol{S^6}$.
23. Типологія правил висновку в $\boldsymbol{S^6}$.
24. Характеристика кванторних правил в $\boldsymbol{S^6}$.
25. Поняття умовної інтерпретації змінної.
26. Поняття інтерпретації всезагальності для змінної.
27. Поняття ***«абсолютно обмежена змінна»*** і ***«обмежена змінна»***.
28. Дефініція висновку в $\boldsymbol{S^6}$.
29. Дефініція доведення в $\boldsymbol{S^6}$.
30. Дефініція завершеного висновку.
31. Дефініція завершеного доведення.
32. Процедура побудови висновків і доведень в $\boldsymbol{S^6}$.
33. Поняття методики вибору засновків.
34. Побудувати обгрунтування виразів $\boldsymbol{S^6}$:

    а) $\forall\alpha\ (A(\alpha) \wedge B(\alpha)) \vdash \forall\alpha\ A(\alpha) \wedge \forall\alpha\ B(\alpha)$

    б) $\exists x\ (S(x) \supset P(x)) \vdash \forall x\ (S(x) \supset \exists x\ P(x))$

    в) $\forall x\ (M(x) \supset P(x)); \forall x\ (S(x) \supset M(x)) \vdash \forall x\ (S(x) \supset P(x))$

    г) $\forall x\ (M(x) \supset \overline{P}(x)), (S(x) \supset M(x)) \vdash \forall x\ (S(x) \supset \overline{P}(x))$.

ЧАСТИНА 2
НЕКЛАСИЧНА ЛОГІКА

ВСТУП

Некласична логіка — це розділ сучасної логіки, в основі якого лежить опозиція до класичної логіки. Хронологічно некласична логіка виникає ***в кінці XIX ст.—на початку XX ст.***

Умовно, в процесі становлення некласичної логіки, можна виділити три основні напрямки:

1) критика принципу двозначності;

2) нове тлумачення смислу логічних сполучників;

3) перегляд розділів традиційної логіки засобами некласичної логіки та розширення виразних можливостей логіки.

Критика принципу двозначності класичної логіки, за яким висловлювання може мати одну із двох оцінок «істина» або «хиба», приводить до появи систем багатозначної логіки. Незалежно один від одного і майже одночасно засновниками багатозначної логіки стають ***Я.Лукасевич (1920 р.)*** та ***Е.Пост (1921 р.)***.

Нове тлумачення смислу логічних сполучників (а саме матеріальної імплікації) приводить до виникнення систем ***«строгої імплікації» К.Льюїса*** та ***«сильної імплікації» В.Аккермана.***

Перегляд розділів традиційної логіки засобами некласичної логіки став поштовхом до появи цілої низки зовсім нових розділів сучасної логіки. При цьому виявляється, що у багатьох випадках ці розділи є, по суті, реалізацією тих ідей, які були у центрі уваги логіків античності та середньовіччя.

Відомий голандський математик, логік ***Лейтзен Брауер*** звертає увагу на неуніверсальність дії закону виключеного третього ($\mathbf{A} \vee \overline{\mathbf{A}}$), закону подвійного заперечення ($\overline{\overline{\mathbf{A}}} \supset \mathbf{A}$), закону непрямого доведення

$$((\overline{A} \supset B) \wedge (A \supset \overline{B})) \supset A.$$

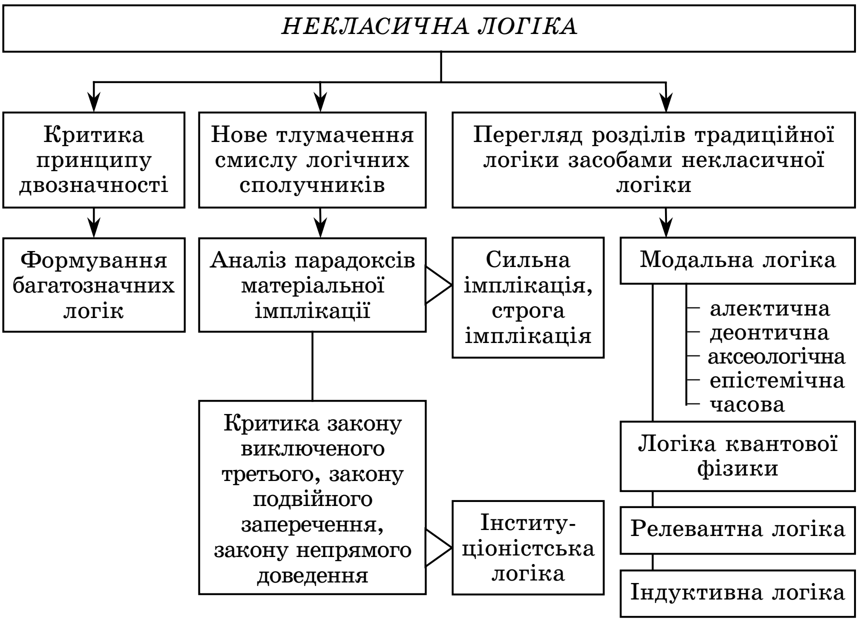
У ***1930 р.*** учень Л.Брауера ***А.Гейтінг,*** виходячи із такої позиції свого вчителя, формулює інтуїціоністську логіку.

У ***1912 р. К.Льюїс***, досліджуючи парадокси матеріальної імплікації, ревізує класичну теорію логічного слідування і розробляє некласичну теорію логічного слідування, яка покладена в основу релевантної логіки.

На межі ***20-х років ХХ ст.*** зусиллями ***Я.Лукасевича*** та ***К.Льюїса*** почала розроблятися модальна логіка, яка своїми витоками йде до ***Арістотеля*** та логіків середньовіччя.

Характеризуючи в цілому некласичну логіку, треба зазначити, що між її розділами існують складні і неоднозначні відношення. Йдеться про те, що різні розділи можуть мати єдину оцінку (*наприклад*, інтуїціоністська і модальна логіка можуть вважатися багатозначними), це, ***по-перше***, а, ***по-друге***, засобами одного розділу можна визначати фундаментальні поняття другого розділу (так, *наприклад,* засобами модальної логіки можна визначити поняття логічного слідування, а засобами некласичної імплікації уточнити модальні поняття).

Все вищезазначене можна проілюструвати такою схемою:



Зрозуміло, ця таблиця дуже приблизно відображає ті багатограннні і складні процеси, які притаманні некласичній логіці. Вона скоріше виконує методичну функцію, що дає нам підстави розглядати у підручнику найбільш суттєві властивості багатозначної логіки, а потім проаналізувати їх застосування в різних розділах некласичної логіки.

РОЗДІЛ І

БАГАТОЗНАЧНА ЛОГІКА

Виникнення багатозначної логіки можна було б порівняти (за своєю епохальністю) хіба що із появою неевклідової геометрії. Тому що був зроблений напад на «святу святих», ***принцип класичної логіки: «Кожне висловлювання або істинне, або хибне»*** (так само, як у свій час був зроблений замах на V постулат геометрії Евкліда).

Сумніви відносно принципу двозначності мали підгрунття, оскільки постійно викликали труднощі при оцінці значень істинності висловлювань про майбутні події, висловлювань, у яких не зазначався час чи місце подій, висловлювань, які отримували при умові взаємовиключаючих дослідів тощо.

У загальних рисах розвиток багатозначної логіки здійснюється за трьома основними напрямками:

а) розробка власного апарату багатозначної логіки;

б) застосування засобів багатозначної логіки для вирішення задач конкретних наукових досліджень;

в) розробка загальної теорії багатозначної логіки, яка передбачає типологію систем багатозначної логіки, характеристику її суттєвих ознак, прогнозування основних тенденцій розвитку багатозначної логіки.

Дамо дефініцію багатозначної логіки:

«Багатозначна логіка — це сукупність логічних числень, у яких висловлюванням приписується більше двох істинністних значень».

З цього визначення випливає, що традиційні оцінки «істинно» або «хибно» є лише окремими випадками значень, які вводить багатозначна логіка для оцінювання висловлювань.

1. Система багатозначної логіки Я.Лукасевича.

а) Тризначна логіка Я.Лукасевича

Відомий польський логік ***Я.Лукасевич***, досліджуючи природу модальних висловлювань, прийшов до висновку, що для оцінки модальних висловлювань засобів класичної логіки недостатньо. У зв'язку з цим він вводить третю оцінку — ***«нейтрально»,*** яка може розглядатися як ***«можливо»***. Треба мати на увазі, що оцінка ***«можливо»*** — це не модальний оператор **«◇»**, а оцінка висловлювання, яка знаходиться за межами самого висловлювання, подібно до оцінок ***«істинно»*** або ***«хибно»***.

При цьому необхідно підкреслити, що навіть у тих випадках, коли поняття ***«істинно», «хибно», «можливо»*** виконують роль предикатів (*наприклад, «висловлювання* ***р*** *— істинне», «висловлювання* ***р*** *— хибне», «висловлювання* ***р*** *— можливе»*), суть справи не змінюється. Тобто, у цих випадках відбувається утворення нового висловлювання, де назва «*висловлювання «****р****»* є суб'єктом, а оцінка *«істинно»* (*«хибно», «можливо»*) — предикатом.

Якщо прийняти трактовку принципу багатозначності як поділ усієї множини висловлювань на ***«істинні», «хибні», «можливі»*** (***«нейтральні»***), то справедливим буде положення:

Для будь-якого висловлювання правильно, що воно або «істинне», або «хибне», або «нейтральне» — четвертого не дано.

При побудові тризначної логіки ***Я.Лукасевич*** істиннісні значення позначає таким чином:

«істинно» — 1,

«хибно» — 0,

«нейтрально» — ½.

Третє значення ***«нейтрально»*** може тлумачитися у вигляді положення: ***«може бути істинним, а може бути хибним».***

Враховуючи значення «½» і визначення пропозиційних зв»язок у двозначній логіці, ***Лукасевич*** задає нове табличне визначення логічних сполучників:

I.

p	$\overline{p}$
1	0
1/2	1/2
0	1

II.

	$\wedge$	1	1/2	0
		q		
p	1	1	1/2	0
	1/2	1/2	1/2	0
	0	0	0	0

III.

	$\vee$	1	1/2	0
		q		
p	1	1	1	1
	1/2	1	1/2	1/2
	0	0	1/2	0

IV.

	$\supset$	1	1/2	0
		q		
p	1	1	1/2	0
	1/2	1	1	1/2
	0	0	1	1

V.

	$\sim$	1	1/2	0
		q		
p	1	1	1/2	1
	1/2	1/2	1	1/2
	0	0	1/2	0

Наведене табличне визначення логічних сполучників Я.***Лукасевичем*** базується на своєрідній трактовці третього значення ***«нейтрально»*** (***«невизначено», або ½***).

Третє занчення ***«невизначено»*** розглядається як дві рівноможливі ситуації:

а) «висловлювання «р» може мати значення «істинно» (1)» і

б) «висловлювання «р» може мати значення «хибно» (0)».

У такому випадку, коли розглядаємо диз'юнктивне висловлювання

«$p \vee q$», де $p = 1$, а $q = ½$,

треба припустити дві можливості:

I — $1 \vee 1 = 1$ і

II — $1 \vee 0 = 1$.

Виходить, що значенням **р ∨ q** буде «**1**».

Або ж візьмемо імплікацію

$p \supset q$, де знову $p = 1$, а $q = ½$.

Тут матимемо таку ситуацію:

I — *1 ⊃ 1 = 1;*

II — *1 ⊃ 0 = 0*.

Отже, імплікація при такому наборі значень, де ***антецедент істинний*** (***1***), а ***консеквент невизначений*** (**½**) матиме значення «**½**». Таким способом встановлюється значення для будь-якої формули в тризначній логіці.

Якщо побудува таблиці істинності в двозначній логіці здійснюється за формулою 2^n, то в тризначній логіці — за формулою 3^n.

У цій формулі число ***3*** вказує на кількість істинністних значень (***1, 0, ½***), а буква «***n***» на кількість простих висловлювань, що входять до складу вихідного висловлювання.

Звернемося до прикладу і побудуємо таблицю істинності для висловлювання:

$$(p \wedge \overline{q}) \supset r.$$

Виходячи із формули побудови таблиці істинності в тризначній логіці, така таблиця матиме ***27 рядків***:

№	p	q	r	$\overline{q}$	$P \wedge \overline{q}$	$(p \wedge \overline{q}) \supset r$
1	1	1	1	0	0	1
2	1	1	1/2	0	0	1
3	1	1	0	0	0	1
4	1	1/2	1	1/2	1/2	1
5	1	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2
6	1	1/2	0	1/2	1/2	1/2
7	1	0	1	1	1	1
8	1	0	1/2	1	1	1/2
9	1	0	0	1	1	0
10	1/2	1	1	0	0	1
11	1/2	1	1/2	0	0	1
12	1/2	1	0	0	0	1
13	1/2	1/2	1	1/2	1/2	1
14	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1
15	1/2	1/2	0	1/2	1/2	1/2

№	p	q	r	$\overline{q}$	$P \wedge \overline{q}$	$(p \wedge \overline{q}) \supset r$
16	1/2	0	1	1	1/2	1
17	1/2	0	1/2	1	1/2	1
18	1/2	0	0	1	1/2	1/2
19	0	1	1	0	0	1
20	0	1	1/2	0	0	1
21	0	1	0	0	0	1
22	0	1/2	1	1/2	0	1
23	0	1/2	1/2	1/2	0	1
24	0	1/2	0	1/2	0	1
25	0	0	1	1	0	1
26	0	0	1/2	1	0	1
27	0	0	0	1	0	1

Окрім табличного способу визначення пропозиційних сполучників існує ще спосіб визначення даних сполучників у формі рівностей.

Скористаємося позначенням логічних сполучників, яке вживає Я. Лукасевич:

N — заперечення;

C — імплікація;

K — кон'юнкція;

A — диз'юнкція.

Тепер логічні сполучники, як пропозиційні функції можна записати у вигляді таких рівностей:

а) Nx = 1 — x.

б) Kx, y = min (x,y).

в) Ax, y = max (x,y).

г) Cx, y = min (1,1 — x + y).

Прокоментуємо кожну із наведених рівностей:

а) Nx =1-x (тобто ***Nx = 0*** при ***x = 1***, ***Nx = 1,*** при ***x = 0***, ***Nx = ½*** при ***x = ½***);

г) Cx,y* = min *(1,1 − x + y)*.** *Читається ця рівність: «значення істинності імплікації висловлювань* ***x *та* ***y*** *дорівнює меншому із чисел «**1**»; «**1 − x + y**».*

Розглянемо всі варіанти:

1. С 1,0 = min (1, 1 — 1 + 0) = 1, 0 = 0
2. С 0, 1 = min (1, 1 — 0 + 1) = 1, 2 = 1
3. С 1, 1= min (1, 1 — 1 + 1) = 1, 1 = 1
4. С 0, 0 = min (1, 1 — 0 + 0) = 1, 1 = 1
5. С ½, 1= min (1, 1 — ½ + 1) = 1, 1 ½ = 1
6. С 1, ½ = min (1, 1 — 1 + ½) = 1, ½ = ½
7. С 0, ½ = min (1, 1 — 0 + ½) = 1, ½ =1
8. С ½, 0 = min (1, 1 — ½ + 0) =1, ½ = ½
9. С ½,½ = min (1, 1 — ½ + ½) = 1, 1 =1.

б) ***Кх, у = min (х, у)*** — (*тобто значення істинності кон'юнкції* ***х*** *та* ***у*** *дорівнює у меншому із значень істинності* ***х*** *та* ***у***).

Розгорнемо цю дефініцію:

1. К 1, 0 = min (1, 0) = 0
2. К 0, 1 = min (0, 1) = 0
3. К 0, 0 = min (0, 0) = 0
4. К 1, 1 = min (1, 1) = 1
5. К ½, 1 = min (½, 1) = ½
6. К 1, ½ = min (1, ½) = ½
7. К ½, 0 = min (½, 0) = 0
8. К 0, ½ = min (0, ½) = 0
9. К ½, ½ = min (½, ½) = ½.

в) ***Ах,у = max (х, у)*** — (*тобто значення істинності диз'юнкції* ***х*** *та* ***у*** *дорівнює більшому із значень істинності* ***х*** *і* ***у***).

Наведемо можливі варіанти.

1. А 1, 0 = max (1, 0) = 1
2. А 0, 1 = max (0, 1) = 1
3. А 1, 1 = max(1, 1) = 1
4. А 0, 0 = max (0, 0) = 0
5. А ½, 1 = max (½, 1) = 1
6. А 1, ½ = max (1, ½) = 1
7. А ½, 0 = max (½, 0) = ½
8. А 0, ½ = max (0, ½) = ½
9. А ½, ½ = max (½, ½) = ½.

Якщо співставити табличне визначення пропозиційних зв'язок (яке наводилося вище) із визначенням їх у формі рівностей, то їх ідентичність буде очевидною.

Як і у двозначній логіці, в якості тавтологій (стверджуваних, доказових, завжди істинних тощо висловлювань) вважаються ті, які набувають лише значення *«і»,* так і в трьохзначній логіці Я.Лукасевича законом є формула, яка при будь-яких наборах значень пропозиційних змінних набуває значення *«1»*.

У зв'язку з цим виникає закономірне питання: ***«Чи співпадає клас тавтологій двозначної логіки із класом тавтологій тризначної логіки?»***

Виявляється, що не всі тавтології двозначної логіки є тавтологіями у тризначній.

Візьмемо такі принципові формули, як закон виключеного третього і закон протиріччя: $A \vee \bar{A}$, $\urcorner (A \wedge \bar{A})$.

При значені ½ вони перестають бути тавтологіями:

$$A \vee \bar{A} = ½ \vee \urcorner ½ = ½ \vee ½ = ½$$

$$\urcorner (A \wedge \urcorner A) = \urcorner (½ \wedge \urcorner ½) = \urcorner (½ \wedge ½) \urcorner = ½ = ½.$$

Не відноситься до числа тавтологій і правило зведення до абсурду:

$$(\bar{A} \supset (B \wedge \bar{B})) \supset A,$$

оскільки —

$$(\urcorner ½ \supset (½ \wedge \urcorner ½)) \supset ½ = (½ \supset (½ \wedge ½)) \supset ½ =$$
$$= (½ \supset ½) \supset ½ = 1 \supset ½ = ½.$$

Як ми вже переконалися, закон виключеного третього і закон протиріччя не є тавтологіями в тризначній логіці, але й такими не є їх заперечення.

Переконаємося у цьому, здійснивши заперечення даних законів.

Візьмемо спочатку заперечення закону виключеного третього:

$$\urcorner (A \vee \bar{A})$$

1. $\urcorner (1 \vee \bar{1}) = \urcorner (1 \vee 0) = \urcorner (1) = 0$
2. $\urcorner (0 \vee \bar{0}) = \urcorner (0 \vee 1) = \urcorner (1) = 0$
3. $\urcorner (½ \vee \bar{½}) = \urcorner (½ \vee ½) = \urcorner (½) = ½.$

Із наведених фактів випливає, що багатозначна логіка не є запереченням (відкиданням) двозначної логіки (подібно до того, як поява фізики Енштейна не була запереченням, в негативному розумінні, фізики Ньютона), а багатозначна логіка є узагальненням двозначної. Адже при значеннях ***«1»*** та ***«0»***, коли виключати проміжні значення, то двозначна логіка виступає як граничний (частковий) випадок багатозначної.

б) Чотиризначна логіка Я.Лукасевича

У творі «Арістотелівська силогістика з точки зору сучасної формальної логіки» Я.Лукасевич розробляє чотиризначну логіку.

Для цього він бере два вихідні значення ***«1»*** та ***«0»*** і утворює з них чотири впорядковані пари: ***(1, 1), (1, 0), (0, 1), (0, 0)***. Які розглядаються як елементи нової таблиці істинності. Значення істинності для вихідних (в його логіці) логічних зв'язок імплікації та заперечення Я.Лукасевич задає відповідними рівностями:

1) C (a, b) (c, d) = (C ab, C bd);

2) N (a, b) = (Na, Nb).

Упорядковані пари відповідно позначимо:

$$(1, 1) = 1,$$
$$(1, 0) = 2,$$
$$(0, 1) = 3,$$
$$(0, 0) = 0.$$

Побудуємо таблицю істинності для імплікації із урахуванням введених рівностей:

q

	C	1,1	1,0	0,1	0,0
	1,1	1,1	1,0	0,1	0,0
p	1,0	1,1	1,1	0,1	0,1
	0,1	1,1	1,0	1,1	1,0
	0,0	1,1	1,1	1,1	1,1

Перепишемо дану таблицю, застосовуючи введені раніше скорочення:

		q			
	C	**1**	**2**	**3**	**0**
	1	**1**	**2**	**3**	**0**
p	**2**	**1**	**1**	**3**	**3**
	3	**1**	**2**	**1**	**2**
	4	**1**	**1**	**1**	**1**

Дамо табличне визначення ***заперчення*** **(*N*)*:***

p	***Np***
1,1	**0,0**
1,0	**0,1**
0,1	**1,0**
0,0	**1,1**

Враховуючи скорочення, дана таблиця набуде вигляду:

p	***Np***
1	**0**
2	**3**
3	**2**
0	**1**

Задамо значення для кон'юнкції, диз'юнкції та еквіваленції:

***3) К* (*a,b*) (*c,d*) = (*К* (*a,c*) *К* (*b,d*))**

***4) A* (*a,b*) (*c,d*) = (*A* (*a,c*) *A* (*b,d*))**

***5) Q* (*a,b*) (*c,d*) = (*Q* (*a,c*) *Q* (*b,d*)).**

Введемо табличне визначення для кон'юнкції (***К***), диз'юнкції (***A***) та еквіваленції (***Q***).

		q				
	K	**1,1**	**1,0**	**0,1**	**0,0**
	1,1	**1,1**	**1,0**	**0,1**	**0,0**
p	**1,0**	**1,0**	**1,1**	**0,0**	**0,0**
	0,1	**0,1**	**0,0**	**0,0**	**0,0**
	0,0	**0,0**	**0,0**	**0,0**	**0,0**

У скороченому варіанті дана таблиця матиме вигляд:

		q			
	K	**1**	**2**	**3**	**0**
	1	**1**	**2**	**3**	**0**
p	**2**	**2**	**2**	**0**	**0**
	3	**3**	**0**	**0**	**0**
	0	**0**	**0**	**0**	**0**

Таблиця для диз'юнкції виглядатиме так:

		q			
	A	**1,1**	**1,0**	**0,1**	**0,0**
	1,1	**1,1**	**1,1**	**1,1**	**1,1**
p	**1,0**	**1,1**	**1,0**	**1,1**	**1,0**
	0,1	**1,1**	**1,1**	**0,1**	**0,1**
	0,0	**1,1**	**1,0**	**0,1**	**0,0**

Скорочений варіант таблиці:

		q			
	A	**1**	**2**	**3**	**0**
	1	**1**	**1**	**1**	**1**
p	**2**	**1**	**2**	**1**	**2**
	3	**1**	**1**	**3**	**3**
	0	**1**	**2**	**3**	**0**

Запишемо таблицю для еквіваленції:

q

	Q	**1,1**	**1,0**	**0,1**	**0,0**
	1,1	**1,1**	**1,0**	**0,1**	**0,0**
p	**1,0**	**1,0**	**1,0**	**0,0**	**0,1**
	0,1	**0,1**	**0,0**	**1,1**	**1,0**
	0,0	**0,0**	**0,1**	**1,0**	**1,1**

Скорочений варіант таблиці для еквіваленції:

q

	Q	**1**	**2**	**3**	**0**
	1	**1**	**2**	**3**	**0**
p	**2**	**2**	**2**	**0**	**3**
	3	**3**	**0**	**1**	**2**
	0	**0**	**3**	**2**	**1**

Нові символи, які введені для таблиць істинності «**2**» і «**3**», можна тлумачити: ***«2» — «ближче до істини», «3» — «ближче до хиби»***. Оскільки ***«2»*** і ***«3»*** взяті як додаткові істинісні значення, то їх можна ототожнювати з ***«1»*** і ***«0»*** байдуже як саме.

Візьмемо, *наприклад,* таблицю для імплікації і приймемо умову*:* **2 = 1**, а **3 = 0**.

Таблиця 1

q

	C	**1**	**1**	**0**	**0**
	1	**1**	**1**	**0**	**0**
p	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**
	0	**1**	**1**	**1**	**1**
	0	**1**	**1**	**1**	**1**

А тепер перепишемо дану таблицю за умови **2 = 0**, а **3 = 1.**

Таблиця 2

			q		
	C	**1**	**0**	**1**	**0**
	1	**1**	**0**	**1**	**0**
p	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**
	1	**1**	**0**	**1**	**0**
	0	**1**	**1**	**1**	**1**

Аналізуючи ***таблицю 1,*** ми бачимо, що:

а) другий рядок ідентичний першому, а третій —четвертому;

б) друга колонка ідентична першій, а третя — четвертій.

Якщо викреслити менші проміжні рядки і колонки, то отримаємо таблицю істинності для імплікації в двозначній логіці. Це ж саме можна спостерігати, аналізуючи ***таблицю 2.***

Отже, як і у випадку із тризначною логікою, чотиризначна логіка так само є узагальненням двозначної логіки. Все це дає право стверджувати, що будь-яке числення некласичної логіки у своїй основі як базову утримує двозначну логіку.

Наприкінці знайомства з чотиризначною логікою задамо алгоритм побудови таблиці істинності і знайдемо значення для довільного виразу.

Таблиця істинності будується тут за формулою «4^n», де «4» — це кількість значень, що приймає одне висловлювання, а «n» — це кількість простих висловлювань, що входять до складу вихідного висловлювання.

Наприклад, маємо вираз:

$$(p \supset \overline{q}) \vee p.$$

Побудуємо для нього таблицю істинності. Відповідно до формули 4^n вона буде мати ***16 рядків.***

№	p	q	$\overline{q}$	$p \supset \overline{q}$	$(p \supset \overline{q}) \vee p$	$(p \supset \overline{q}) \vee p$
1	1,1	1,1	0,0	0,0	1,1	1
2	1,1	1,0	0,1	0,1	1,1	1
3	1,1	0,1	1,0	1,0	1,1	1
4	1,1	0,0	1,1	1,1	1,1	1
5	1,0	1,1	0,0	0,1	1,1	1
6	1,0	1,0	0,1	0,1	1,1	1
7	1,0	0,1	1,0	1,1	1,1	1
8	1,0	0,0	1,1	1,1	1,1	1
9	0,1	1,1	0,0	1,0	1,1	1
10	0,1	1,0	0,1	1,1	1,1	1
11	0,1	0,1	1,0	1,0	1,1	1
12	0,1	0,0	1,1	1,1	1,1	1
13	0,0	1,1	0,0	1,1	1,1	1
14	0,0	1,0	0,1	1,1	1,1	1
15	0,0	0,1	1,0	1,1	1,1	1
16	0,0	0,0	1,1	1,1	1,1	1

Отже, даний вираз є доказуваним у чотиризначній логіці.

Перевіримо, чи будуть тавтологіями в чотиризначній логіці ***закон виключеного третього і закон протиріччя:*** $(A \vee \overline{A})$ ***та*** $\rceil(A \wedge \overline{A})$.

№	A	$\overline{A}$	$A \vee \overline{A}$	$A \vee \overline{A}$	$A \wedge \overline{A}$	$\rceil(A \wedge \overline{A})$	$\rceil(A \wedge \overline{A})$
1	1,1	0,0	1,1	1	0,0	1,1	1
2	1,0	0,1	1,1	1	0,0	1,1	1
3	0,1	1,0	1,1	1	0,0	1,1	1
4	0,0	1,1	1,1	1	0,0	1,1	1

Виходить, ***що закони виключеного третього і протиріччя залишаються тавтологіями і в чотиризначній логіці.***

Це означає, що багатозначна логіка не завжди відкидає закони класичної логіки, тому більш конкретним буде все ж таки визначення багатозначної логіки як такої, що визнає за висловлюванням більш ніж дві оцінки.

Критика законів виключеного третього та протиріччя є лише зовнішнім виявом тих процесів, які визначають відношення між класичною та некласичною логікою. І це потрібно мати на увазі, даючи дефініцію класичної логіки.

Прокоментуємо дане положення.

Враховуючи факт існування класичної та некласичної логіки, закон виключеного третього матиме три різні за формою дефініції:

а) «Будь-яке висловлювання або істинне, або хибне».

б) «Будь-якому висловлюванню або притаманне деяке значення істинності, або ні».

в) $A \vee \overline{A}$.

У наведених дефініціях закону виключеного третього визначальними є характеристики диз'юнкції та заперечення. В усіх цих дефініціях диз'юнкція та запереченння виступають в узагальнюючому вигляді. Це означає, що для одних визначень $A \wedge \overline{A}$ залишається законом (чотирьохзначна логіка Я.Лукасевича), а для інших — ні (тризначна логіка Я.Луксевича). Якщо ми приймемо, що тавтологією є висловлювання, яке завжди приймає одне з двох значень **«1»** або **«½»**, то $A \wedge \overline{A}$ виявиться тавтологією:

$$A \vee \overline{A} = 1 \vee \overline{1} = 1 \vee 0 = 1$$
$$A \vee \overline{A} = 0 \vee \overline{0} = 0 \vee 1 = 1$$
$$A \vee \overline{A} = ½ \vee \overline{½} = ½ \vee ½ = ½.$$

Третя дефініція закону виключеного третього $A \vee \overline{A}$ (як і закону протиріччя $\rceil (A \wedge \overline{A})$ є приблизним позначенням цього закону (тобто цей закон не можна зводити до відповідної тотожньо-істинної формули, це лише певна експлікація цього закону). І коли в підручниках з логіки в розділі «Закони логіки висловлювань» приводять закони тотожності, виключеного третього, протиріччя як відповідні тавтології ($A \supset A$, $A \vee \overline{A}$, $\rceil (A \wedge \overline{A})$), то це не зовсім коректно.

Особливо це відчутно, коли задається інтерпретація диз'юнкції та заперечення в багатозначній логіці, при цьому вираз $A \vee \overline{A}$ є законом (*наприклад*, в чотиризначній логіці), то формула $A \vee \overline{A}$ не буде законом виключеного третього у власному розумінні.

Виходячи з цього, завжди треба підходити прискіпливо до тези: ***«закон виключеного третього в даній системі не діє».***

Якщо взяти чотиризначну логіку Я.Лукасевича, то заява, що «кожне висловлювання або істинне, або хибне» буде некоректною. Тут прийнятним є твердження: «Будь-яке висловлювання має значення «1», або «2», або «3», або «0». В іншому формулюванні: «Будь-яке висловлювання або має значення істинності, або не має його (має якесь інше з чотирьох можливих)».

Це ж саме стосується і ***закону протиріччя***, але тут із трьох можливих дефініцій перша зберігає силу і в багатозначній логіці:

1. «Не може бути, щоб висловлювання було істинним і одночасно хибним».

2. «Не може бути, щоб висловлювання мало і одночасно не мало хоча б одне значення із числа можливих».

3. $\rceil (A \wedge \overline{A})$.

Такі основні риси багатозначної логіки Я. Лукасевича.

2. Багатозначна логіка Брауера — Гейтінга

Як у розвитку будь-якої науки, так і у розвитку логіки визначальними є два види причин:

а) внутрішні і

б) зовнішні.

Для логіки внутрішніми стимулами розвитку є розробка та вдосконалення її апарату, а зовнішніми — ті процеси в науковому пізнанні, для аналізу яких потрібні засоби логіки.

Якщо ***для формування багатозначної логіки Я.Лукасевича таким зовнішнім поштовхом був аналіз модальних висловлювань***, то для багатозначної логіки ***Брауера — Гейтінга — потреба обґрунтування математики на базі принципів інтуїціонізму.***

Брауер виходить із положення: ***«Якщо закон виключеного третього діє в кінцевій математичній системі, то***

в системі з нескінченними величинами він втрачає свою абсолютність».

Гейтінг вводить таке табличне визначення для ***заперечення (N)*** та ***імплікації (C):***

x	Nx
1	0
0	1
1/2	0

	C	1	0	1/2
x	1	1	0	1/2
	0	1	1	1
	1/2	1	0	1

У формі рівностей Гейтінг так задає імплікацію:

1) ***C x,y = 1, якщо x ≤ y.***

а) C x,y = C 0,1 = 1
б) C x,y = C 0, ½ = 1
в) C x,y = C ½,1 = 1
г) C x,y = C 0,0 = 1
д) C x,y = C 1,1 = 1
е) C x,y = C ½, ½ = 1

2) ***C x,y = y, якщо x > y.***

а) C x,y = C 1,0 = 0
б) C x, y = C 1, ½ = ½
в) C x, y = C ½, 0 = 0

Якщо скласти результати двох рівностей, то отримаємо наведену вище таблицю істинності для імплікації.

Порівняємо імплікацію тризначної логіки Я.Лукасевича і Б.Гейтінга:

Я.Лукасевич: **C x, y = C ½, 0 = 1 — ½ + 0 = ½**
C x, y = C 1, ½ = 1 — 1 + ½ = ½.

Б.Гейтінг: **C x, y = C ½, 0 = 0**
C x, y = 1, ½ = ½.

Отже, повної подібності немає.

Кон'юнкцію і диз'юнкцію Б.Гейтінг визначає відповідно за рівностями:
а) К x, y **= min (*x, y*)**
б) А x, y **= max (*x, y*).**

а) **б)**

Table а) (q across, p down):

$\wedge$	1	1/2	0
1	1	1/2	0
1/2	1/2	1/2	0
0	0	0	0

Table б) (q across, p down):

$\vee$	1	1/2	0
1	1	1	1
1/2	1	1/2	1/2
0	0	1/2	0

За допомогою таблиць істинності перевіримо, чи є тавтологіями вирази: ***CNNxx*** та ***AxNx***:

1. CNNxx = CNN½½ = CN 0 ½ = C1½ = ½

2. AxNx = A½ N½= A½ 0 = ½.

Отже***, закон подвійного заперечення і виключеного третього в системі Брауера—Гейтінга не є доказовим.***

В той час як вирази ***CxNNx*** і ***AAxNxNNx*** є тавтологіями:

1. CxNNx = C½ NN½ = C½ N0 = C ½1 = 1
2. CxNNx = C0 NN0 = C 00 = 1
3. CxNNx = C1 NN1 = C11 = 1.

Розглянемо вираз ***AAxNxNNx:***

1. AAxNxNNx = AA1 N1 NN1 = AA101 = A11 = 1
2. AAxNxNNx = AA00 N0 NN0 = AA 010 = A01 = 1
3. AAxNxNNx = AA½ N½ NN½ = AAN½ N0 = A½1 = 1.

Даний вираз є своєрідним узагальненням закону виключеного третього: **(p$\vee$ p) $\vee$ p** (враховуючи те, що в логіці Гейтінга подвійне заперечення не дорівнює ствердженню). ***Все це свідчить про те, що багатозначна логіка Гейтінга є доповненням, узагальненням двозначної логіки.***

Для доведення формул у даній системі будуються таблиці істинності. Оскільки дана логіка тризначна, то таблиця істинності будується за формулою ***«3^n»***.

Візьмемо два вирази і побудуємо відповідні їм таблиці істинності.

$$а)\ (p \supset \overline{q}) \vee q;$$

$$б)\ \overline{p} \supset (p \supset q).$$

а)

№	p	q	$\overline{q}$	$p \supset \overline{q}$	$(p \supset \overline{q}) \vee q$
1	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**
2	**1**	**½**	**0**	**0**	**½**
3	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**
4	**½**	**1**	**0**	**0**	**1**
5	**½**	**½**	**0**	**0**	**½**
6	**½**	**0**	**1**	**1**	**1**
7	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**
8	**0**	**½**	**0**	**1**	**1**
9	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**

б)

№	p	q	$\overline{p}$	$P \supset q$	$\overline{p} \supset (p \supset q)$
1	1	1	0	1	1
2	1	½	0	½	1
3	1	0	0	0	1
4	½	1	0	1	1
5	½	½	0	1	1
6	½	0	0	0	1
7	0	1	1	1	1
8	0	½	1	1	1
9	0	0	1	1	1

3. Багатозначна логіка Е.Поста

Як уже зазначалося, незалежно і майже одночасно з ***Я.Лукасевичем*** почав розробляти систему багатозначної логіки ***Е.Пост.***

Він виходить із того, що висловлювання може мати не декілька фіксованих значень, а відповідну множину ***«n»*** ***(1, 2, 3, … n)***. Причому ці значення можуть бути різної природи (а ***не тільки {істина … хиба}***). ***Це можуть бути оцінки: {добро … зло}; {включено … виключено};***

{***прекрасне ... потворне***} тощо. Головне тут — логічні відношення, у які вступають аргументи (висловлювання).

При побудові своєї системи ***Е.Пост вводить два заперечення.***

Перше заперечення він називає «циклічним» поетапним, а друге заперечення збігається із запереченням Я.Лукасевича.

Перше заперечення позначимо $\urcorner x$, а

друге — ~x.

Дамо ***табличне визначення цих заперечень***:

x	$\urcorner$
1	2
2	3
...	...
$n-1$	n
n	1

x	$\sim x$
1	n
2	$n-1$
...	...
$n-1$	2
n	1

У формі рівностей ***Е.Пост*** ще так визначав заперечення. ***Перше заперечення (циклічне) визначається двома рівностями:***

1. $\urcorner x = |x| + 1$ при $|x| \leq n - 1$

2. $\urcorner n = 1$.

Друге заперечення визначається однією рівністю:

$$\sim x = n - |x| + 1.$$

Прокоментуємо дані дефініції заперечення.

Візьмемо циклічне заперечення (***1***). Припустимо, що наша система багатозначної логіки (у варіанті Поста) має ***6 значень*** для одного висловлювання: ***1, 2, 3, 4, 5, 6*** (***тобто «6 = n», а «5 = n-1»***).

Маємо висловлювання ***p***, яке «пробігає» по множині даних значень. Знайдемо його значення впродовж усієї шкали (від ***1*** до ***6***).

1. $\urcorner p = 1+1 = 2$

2. $\urcorner p = 2+1 = 3$

3. $\urcorner p = 3+1 = 4$

4. $\urcorner p = 4+1 = 5$

5. $\rceil$ ***p = 5+1 = 6 (n)***

6. $\rceil$ ***p = 6+1 = 1 (x = 1).***

У табличному варіанті ця зв'язка матиме вигляд:

p	$\rceil$ *p*
1	***2***
2	***3***
3	***4***
4	***5***
5	***6***
6	***1***

Тепер розглянемо другий варіант запереченя **(~x)** ***Е.Поста.*** Знову припустимо, що в нашій системі ***6 значень*** **(*1, 2, 3, 4, 5, 6*)** для довільного висловлювання.

1. ~p = 6 − 1 + 1 = 6 при ***n = 6***

2. ~p = 6 − 2 + 1 = 5

3. ~p = 6 − 3 + 1 = 4

4. ~p = 6 − 5 + 1 = 3

5. ~p = 6 − 5 + 1 = 2

6. ~p = 6 − 6 + 1 = 1.

Табличний варіант для (~x):

p	*~p*
1	*6*
2	*5*
3	*4*
4	*3*
5	*2*
6	*1*

Диз'юнкція і кон'юнкція визначаються відповідними рівностями:

а) А ху = тіп (х,у)

б) К ху = тах (х,у).

Тут необхідно мати на увазі, що ***в системі Е.Поста більш стверджувальним*** (враховуючи те, що ми маємо справу не з двозначною логікою, то за терміном «стверджувальне» не треба розуміти «більш істинне») ***є те заперечення, яке ближче по порядку до вихідного.***

Наприклад, в системі із ***6 значень (1, 2, 3, 4, 5, 6)*** *більш стверджувальним буде* ***«2»***, *а не* ***«3»***.

Розглянемо наведені приклади диз'юнкції та кон'юнкції:

1. Аху = тіп (1, 2) = 1

2. Аху = тіп (2, 3) = 2

3. Аху = тіп (3, 4) = 3

4. Аху = тіп (4, 5) = 4

5. Аху = тіп (5, 6) = 5.

Табличний варіант:

q

p

∨	1	2	3	4	5	6
1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	2	2	2	2
3	1	2	3	3	3	3
4	1	2	3	4	4	4
5	1	2	3	4	5	5
6	1	2	3	4	5	6

Визначимо таким самим способом кон'юнкцію:

1. Кху = тах (1,2) = 2

2. Кху = тах (2,3) = 3

3. Кху = тах (3,4) = 4

4. Кху = тах (4,5) = 5

5. Кху = тах (5,6) = 5.

Табличне визначення:

q

$\wedge$	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	2	6	4	5	6
3	3	3	3	4	5	6
4	4	4	4	4	5	6
5	5	5	5	5	5	6
6	6	6	6	6	6	6

p

Використовуючи введені Е.Постом обидва варіанти заперечення, диз'юнкцію та кон'юнкцію, визначимо вирази:

$$\mathbf{p} \vee \overline{\mathbf{p}},\ \rceil(\mathbf{p} \wedge \overline{\mathbf{p}}).$$

Припустимо, що в нашій системі $n = 6$:

p	$\rceil p$	$\sim p$	$p \vee \rceil p$	$\rceil(p \vee \rceil p)$	$p \wedge \sim p$	$\sim (p \wedge \sim p)$
1	2	6	1	2	6	1
2	3	5	2	3	5	2
3	4	4	3	4	4	3
4	5	3	4	5	4	3
5	6	2	5	6	5	2
6	1	1	1	1	6	1

4. Тризначна логіка Д. Бочвара

Відомий математик, логік ***Д.Бочвар в 1938 р.*** запропонував тризначну систему логіки, яка розповсюджується не лише на істинні та хибні висловлювання, а й на висловлювання, які не мають смислу.

Відповідно до цього він вводить три значення:
«1» — істинно;
«2» — хибно;
«3» — беззмістовно.

Вихідним положенням логіки Д.Бочвара є теза:

«Якщо до складу висловлювання «A» входить беззмістовне висловлювання «B», то висловлювання «A» треба визнати беззмістовним».

Ця теза покладена в основу визначення логічних сполучників Д.Бочваром. Дамо послідовно табличне визначення заперечення, кон'юнкції, диз'юнкції та імплікації.

Заперечення:

A	~ ***A***
1	**2**
2	**1**
3	**3**

Кон'юнкція:

		B		
	$\wedge$	**1**	**2**	**3**
A	**1**	**1**	**2**	**3**
	2	**2**	**2**	**3**
	3	**3**	**3**	**3**

Диз'юнкція:

		B		
	$\vee$	**1**	**2**	**3**
A	**1**	**1**	**1**	**3**
	2	**1**	**2**	**3**
	3	**3**	**3**	**3**

Імплікація:

		B		
	$\supset$	**1**	**2**	**3**
A	**1**	**1**	**1**	**3**
	2	**1**	**1**	**3**
	3	**3**	**3**	**3**

Доказовою формулою у Д.Бочвара є вираз, який приймає значення «1» при будь-яких значеннях аргументів.

Доведення здійснюється табличним шляхом.

Протестуємо декілька формул:

$$\bar{p} \supset (p \supset q),\ p \supset (q \supset p),\ p \vee \bar{p}.$$

p	q	$\bar{p}$	$P \supset \bar{q}$	$\bar{p} \supset (p \supset q)$	$q \supset p$	$p \supset (q \supset p)$	$p \vee \bar{p}$
1	1	2	1	1	1	1	1
1	2	2	2	1	1	1	1
1	3	2	3	3	3	3	1
2	1	1	1	1	2	1	1
2	2	1	1	1	1	1	1
2	3	1	3	3	3	3	1
3	1	3	3	3	3	3	3
3	2	3	3	3	3	3	3
3	3	3	3	3	3	3	3

Свою багатозначну логіку Д. Бочвар задумав як запобіжний засіб проти парадоксів. Він дає свою типологію висловлювань, розрізняючи висловлювання у власному розумінні від речення (тобто висловлювання зі смислом).

І знову, як і у попередніх багатозначних системах переконуємося, що логіка Д.Бочвара є узагальненням класичної логіки.

Контрольні питання та вправи

1. Визначення некласичної логіки.
2. Передумови виникнення некласичної логіки.
3. Визначення багатозначної логіки.
4. Обставини виникнення тризначної логіки Я.Лукасевича.
5. Види оцінок висловлювання в тризначній логіці Я.Лукасевича.
6. Табличне визначення логічних сполучників у тризначній логіці Я.Лукасевича.

7. Визначення логічних сполучників у формі рівностей.

8. Співвідношення тавтологій класичної логіки з класом тавтологій тризначної логіки Я.Лукасевича.

9. Багатозначна логіка як узагальнення двозначної логіки.

10. Принципи побудови чотиризначної логіки Я.Лукасевича.

11. Визначення логічних сполучників у чотиризначній логіці Я.Лукасевича.

12. Побудова таблиці істинності в чотирьохзначній логіці Я.Лукасевича.

13. Вихідні умови побудови багатозначної логіки Брауера — Гейтінга.

14. Визначення заперечення (**N**) та імплікації (**C**).

15. Передумови побудови багатозначної логіки Е.Поста.

16. Два види заперечення у Е.Поста.

17. Визначення кон'юнкції та диз'юнкції у Е Поста.

18. Вихідні принципи логіки Д.Бочвара.

МОДАЛЬНА ЛОГІКА НА ПОЧАТКУ ХХ ст.

Модальна логіка — це розділ некласичної логіки, де досліджуються логічні відношення між висловлюваннями, в яких дається їх оцінка з тієї чи іншої точки зору.

Ці оцінки називаються модальними і позначаються відповідно поняттями: «необхідно», «можливо», «доведено», «обов'язково», «заборонено», «добре» тощо.

Свої витоки модальна логіка бере в логіці античності та середньовіччя, але систематичні її розробки припадають на ***початок ХХ ст.***

Перші дослідження в галузі модальної логіки здійснюють ***К.Льюїс, Я.Лукасевич, В.Аккерман.*** Характерним є те, що ні Льюїс, ні Лукасевич не починають з безпосередніх досліджень проблем модальної логіки, а до ідеї модальної логіки вони приходять через аналіз проблем класичної логіки, які, на їх думку, не можна розв'язати засобами класичної логіки.

К.Льюїс переглядає класичне понятння логічного слідування, а ***Я.Лукасевич*** звертає увагу на недостатність засобів двозначної логіки при аналізі висловлювань, в яких не просто щось стверджується або заперечується, а в яких висловлюється думка про неможливість чогось, про майбутні події, про неминучість чогось і т.д.

Здійснимо послідовно короткий огляд цих пошуків.

1. Критика К.Льюїсом класичної теорії логічного слідування

Після виходу в світ праці ***Б.Рассела*** та ***В.Уайтхеда «Принципи математики»*** громадянство отримала класична теорія логічного слідування, в основу якої було покладено відношення матеріальної імплікації. Дана теорія логічного слідування дала позитивні результати і в певних межах була досить адекватною, але вже зразу після своєї появи викликала до себе прискіпливий інтерес, який часто межував із спробами її ревізії.

Матеріальна імплікація є абстракцією, узагальненням відношення між умовою і результатом, причиною і наслідком, підставою і висновком, попереднім і наступним, а також узагальненням, абстракцією смислового, змістовного зв'язку між антецедентом і консеквентом.

Така абстракція дозволяє зв'язувати не лише причину і наслідок, істинні висловлювання, які зв'язані за змістом, а й протилежні їм.

Це зафіксовано у дефініції імплікації:

«Імплікація хибна тоді і тільки тоді, коли антецедент істинний, а консеквент хибний, в решті випадків вона істинна».

Використовуючи в теорії логічного слідування матеріальну імплікацію, ми можемо досліджувати найрізноманітніші предметні області, зв'язки та відношення, які існують між ними: чи йдеться про числа, чи про історичні події, чи про астрономічні об'єкти тощо.

Така універсальність теорії логічного слідування є її значним досягненням, але вона має низку небажаних наслідків, за якими в логіці закріпилася назва ***«парадокси матеріальної імплікації»***. Образність цієї назви полягає в тому, що у відношеннях матеріальної імплікації немає того, що в логіці прийнято називати парадоксами, тобто внутрішньої суперечності. Тут є інше: ***невідповідність логічного слідування звичайному умовному зв'язку*** **(*«якщо ..., то ...»*)**.

***У численні матеріальної імплікації істинними будуть*:**

1. «Якщо через провідник пропустити електричний струм, то він нагріється».

2. «Якщо Земля — планета, то Париж — столиця Франції».

3. «Якщо $2 \times 2 = 5$, то число планет 9».

4. «Якщо $2 \times 2 = 5$, то число планет 5».

Лише в першому випадку антецедент і консеквент істинні і змістовно зв'язані. В решті прикладів антецедент з консеквентом або одночасно не істинні і не пов'язані за змістом, а якщо і істинні, то не мають смислового зв'язку, хоча і в цих випадках імплікація істинна.

Звідси випливають дві залежності:

1. «Істина слідує з будь-чого»

$$p \supset (q \supset p).$$

2. «Із хиби слідує будь-що»

$$\overline{p} \supset (p \supset q).$$

Таблиця істинності для імплікації дуже виразно це ілюструє:

№	*p*	*q*	*p ⊃ q*
1	*і*	*і*	*і*
2	*і*	*х*	*х*
3	*х*	*і*	*і*
4	*х*	*х*	*і*

З таблиці видно, що дефініція імплікації забороняє 2-й рядок, решту все дозволяє. Це відбувається за принципом ***«все, що не заборонено, те дозволяється»***. Тому, виходячи із даної дефініції, ніяких «парадоксів» не виникає.

Дискомфорт виникає тоді, коли ми виходимо за межі цієї дефініції і мимоволі забуваємо, що вона є абстракцією умовного зв'язку і що таблиця істинності для імплікації не є ізоморфним зліпком зображення умовного зв'язку.

Тоді ***1-й*** та ***3-й*** рядки таблиці є ілюстрацією ***першого формулювання «парадоксу»***, а ***3*** і ***4 — другого.*** У зв'язку з цим пошуки моделі логічного слідування, яке було б адекватне змістовному, смисловому тлумаченню, полягають не в тому, щоб знайти ще якусь імплікацію поряд з матеріальною, чимось схожу на матеріальну, але щоб вона не мала названих недоліків. Строга, сильна імплікації не є такими.

К. Льюїс спеціально підкреслює, що всі функції від p та q, які властиві системі класичного слідування: p, $p \wedge q$, $p \vee q$, $p \supset q$, $p \equiv q$, є функціями істинності, в той час в системі строгої імплікації відношення $p \prec q$, $p = q$ не є функціями істинності.

У зв'язку з цим К.Льюїс перед тим як описати свою систему строгої імплікації, вводить низку попередніх понять. ***До таких понять відносяться: «породжує», «сумісно», «незалежно», «вивідне судження», «стверджувальне судження».***

Роглянемо по порядку.

Термін ***«р породжує q»*** означає *«із* ***р*** *вивідним є* ***q****»* (*«із* ***р*** *випливає* ***q****»*). Тут не просто «голе» співставлення істинністних значень (екстенсіоналів) антецедента та консеквента (якщо це має місце у відношенні матеріальної імплікації), а тут натяк на внутрішній, змістовний зв'язок ***р*** і ***q***.

Наступний термін ***«р сумісне з q»*** означає *«****р*** *не породжує хибності* ***q****»* (*«із* ***р*** *не випливає* ***не-q****»*, або *«із* ***р*** *не випливає хибність* ***q****»*), а термін ***«q незалежне від р»*** означає *«****р*** *не породжує* ***q****»*, або *«із* ***р*** *не випливає* ***q****»*.

Іншими словами, коли ***«р сумісне з q»,*** то це означає, що *«****р****» може породити, з нього може слідувати лише істинне «****q****»*, а коли ***«q» незалежне, незв'язане з «р»***, то *«****р****» ніяким чином не може породити «****q****»*.

Термін ***«вивідне судження»*** еквівалентне терміну ***«істинне судження»,*** а вираз ***«стверджувати «р»*** означає *«стверджувати істинність «****р****»*, в той час ***«стверджувати заперечення «р»*** означає *«стверджувати хибність «****р****»*.

Розглянемо складові системи строгої імплікації:

1. p, q, r, ... p, q, r, ... — висловлювання;

2. ~p — заперечення (читається «p — хибне», або «не — p»);

3. (pq) — логічний добуток (читається: «p — істинне і q — істинне», «p і q»);

4. ◊p — (читається: «p можливо», «можливо, щоб p було істинним», «p самосумісне»);

5. p = q — логічна еквівалентність.

Пункти ***1—5*** складають ***вихідні елементи алфавіту.***

Крім вихідних елементів система містить низку дефініцій:

$$Df\ 1:\ p \vee q = \sim(\sim p \wedge \sim q)$$

— читається: ***«в крайньому випадку одне із двох, p або q, істинне, разом хибними вони не можуть бути».***

$$Df\ 2:\ p \prec q = \sim\Diamond(p \wedge \sim q).$$

Ця дефініція є визначенням строгої імплікації. Читається: ***«Хибно, що можливо, щоб «р» було істинним і одноразово «q» було хибним»; «Не може бути, щоб «р» було істинним, а «q» хибним»; «Забороняється, щоб «р» було істинним, а «q» — хибним».***

Іншими словами наведена дефініція звучить так:

«Якщо забороняється, щоб «р» було істинним, а «q» — хибним, то це означає, дозволяється лише, щоб при істинності «р» обов»язково істиним було «q».

З поверхової точки зору це може означати, що строга імплікація зводиться до першого рядка таблиці істинності для імплікації:

№	*p*	*q*	$p \supset q$
1	***I***	***I***	***I***
2	***I***	***х***	***х***
3	***х***	***I***	***I***
4	***х***	***х***	***I***

Тобто дозволяється перший рядок таблиці і забороняється решта рядків. Якщо це витримати, то небажані ситуації, які отримали назву ***«парадокси матеріальної імплікації»*** виключені самі собою.

Проти такого поспішного погляду застережує ***К.Льюїс***, і тоді, коли підкреслюється, що сторога імплікація і строга еквіваленція не є функціями істинності, і тоді, коли вводять в дефініцію матеріальної імплікації модальні поняття.

Отже, у відношенні строгої імплікації має місце не екстенсіональна комбінація істинністних значень, а — інтенсіональний зв'язок попереднього і наступного.

Наступна дефініція характеризує строгу еквіваленцію:

$$\textit{Df 3:}\ (p = q) = (p \prec q) \wedge (q \prec p)$$

— читається: ***«p строго еквівалентне q тоді і тільки тоді, коли p строго імплікує q, а q строго імплікує p».***

К.Льюїс визначає аксіоми своєї системи, в структурі яких фігурують лише логічний добуток, заперечення і строга імплікація.

1. $pq \prec qp$

2. $pq \prec p$

3. $p \prec pp$
4. $(pq)r \prec p(qr)$
5. $p \prec \sim(\sim p)$
6. $((p \prec q)(q \prec r)) \prec p \prec r$
7. $(p(p \prec q)) \prec q$
У дедуктику системи К.Льюїса входить три правила:
— підстановки,
— ад'юнкції,
— інференції.

Правило підстановки. Це правило має два формулювання:

1. «Будь-які два еквівалентні один одному вирази взаємозамінювані»;

2. «Кожен вираз, який значимий у термінах системи, може бути підставлений замість p, або q, або r і т.д. в будь-якому реченні чи теоремі».

Правило ад'юнкції: «Будь-які два вирази, що стверджуються окремо, можуть стверджуватися разом».

Правило інференції: «Якщо стверджується p і стверджується $(p \prec q)$, то стверджуваним є і q».

У.Льюїс проводить порівняння матеріальної і строгої імплікації. У зв'язку з цим він до наведених вище трьох дефініцій додає ще дві:

$$Df\ 4.\ p \supset q = \sim(p \wedge \sim q)$$

— читається: ***«невірно, що p — істинне, а q — хибне».***

$$Df\ 5.\ (p \equiv q) = \sim(p \wedge \sim q) \wedge \sim(q \wedge \sim p)$$

— читається: ***«p та q або обидва істинні, або обидва хибні».***

Дефініції ***4, 5*** є відповідно ***визначенням матеріальної імплікації і матеріальної еквіваленції.***

Порівнюючи матеріальну імплікацію зі строгою, Льюїс приходить до висновку, що строга імплікація за обсягом поняття вужче, ніж матеріальна, тому, за законом оберненого відношення, має місце залежність:

«Якщо приймається строга імплікація, то приймається і матеріальна, але не навпаки» — $(p \prec q) \prec (p \supset q)$.

За допомогою правила строгої імплікації і ***Df 2*** із наведених аксіом доводять аксіоми класичної системи логічного висновку і, що саме головне, доводиться теорема:

$$[p \wedge (p \supset q)] \prec q.$$

Застосовуємо ***правило адьюнкції: «Якщо стверджується р і стверджується*** ($p \supset q$)***, то q приймається згідно строгій імплікації»***. Виходить, що вся система матеріальної імплікації утримується в системі строгої імплікації при наявності ***Df 4*** в останній.

І ще один важливий висновок, який випливає з факту порівняння «$\prec$», «$\supset$».

«Якщо в будь-якій теорії матеріальної імплікації виду «А ⊃ В», де А і В будь-які складні формули, замінити знак стверджувальної матеріальної імплікації знаком строгої імплікації, то отримана формула буде доказовою в системі строгої імплікації.»

Оскільки, як було встановлено вище, не будь-яка теорема матеріальної імплікації є теоремою в системі строгої імплікації, то Льюїс розглядає теореми матеріальної імплікації, які не мають аналогів у системі строгої імплікації.

Із Df 2 випливає дві формули:

1. $\dfrac{(p \supset q) = \sim (p \wedge \sim q)}{(p \supset q) \prec \sim (p \wedge \sim q)}$

2. $\dfrac{(p \supset q) = \sim (p \wedge \sim q)}{\sim (p \wedge \sim q) \prec (p \supset q)}$

Згідно третього висновку, що випливає із порівняння ***«<» і «⊃»***, аналог першої формули приймається в системі строгої імплікації:

$$(p \prec q) \prec \sim(p \wedge \sim q)$$

— читається: ***«істинне висловлювання не породжує хибного ні строго, ні матеріально».***

Аналог другої формули, що випливає із ***Df 4***, не приймається:

$$\sim(p \wedge \sim q) \prec (p \prec q).$$

Це обумовлено тим, що немає гарантії в змістовному зв'язку «p» і «q».

К.Льюїс вважає, що наслідок (*2*) із ***Df 4*** є джерелом «парадоксів» матеріальної імплікації.

Якщо $p \prec (q \prec p)$, то $p \supset (q \supset p)$. Значить, ***коли «p» істинне, то будь-яке висловлювання матеріально породжує «p».*** Але аналог зі строгою нестверджувальною імплікацією не приймається:

$$p \prec (q \prec p).$$

Якщо $\sim p \prec (p \supset q)$, то $\sim p \supset (p \supset q)$. Отже, ***при хибності «p» з нього випливає матеріально будь-яке «q».*** І знову аналог зі строгою імплікацією не приймається:

$$\sim p \prec (p \prec q).$$

Візьмемо наступну низку теорем:

а) $\sim(p \supset q) \prec (p \supset \sim q)$ — аналогом є $\sim(p \supset q) \supset (p \supset \sim q)$;

б) $\sim(p \supset \sim q) \prec (p \supset q)$ — аналогом є $\sim(p \supset \sim q) \supset (p \supset q)$.

Виходить, що коли ми маємо висловлювання «***p***» і «***q***», то «***p***» повинно імплікувати матеріально істинність «***q***», в протилежному випадку «***p***» буде імплікувати хибність «***q***».

Оскільки, якщо б «$p \supset q$» була прийнята за еквівалент виразу ***«із p вивідним є q»***, то ні одна пара висловлювань не могла б бути одночасно сумісною і незалежною. Тому що відомо, коли «***p***» і «***q***» сумісні, то «***p***» не може імплікувати хибність «***q***», а коли «***q***» незалежне від «***p***», то «***p***» не може імплікувати істинність «***q***». Цей факт є основним проти того, щоб ототожнювати змістовне логічне слідування з матеріальною імплікацією. Для більш повного опису змістовного логічного слідування К.Льюїс вводить ще дві дефініції:

$$\mathbf{Df\ 6.}\ p \circ q = \sim(p \prec \sim q).$$

Це визначення відношення сумісності: ***«p і q сумісні, тоді і тільки тоді, коли не може бути такого, щоб із p строго імплікувалася хибність q».***

$$\mathbf{Df\ 7.}\ \Diamond p = p \circ p = \sim(p \prec \sim p)$$

— «◊» — це модальний оператор ***«можливо».*** **◊p** читається: ***«p самосумісно», або «p не породжує свого заперечення», або «p можливо».*** Якщо ми введемо заперечення, то отримаємо низку похідних операторів:

$\sim\Diamond p$ — ***«p неможливе», або «хибно, що p можливе»;***

$\Diamond \sim p$ — «можливо, що р хибне», або «р не необхідно істинне»;

$\sim \Diamond \sim p$ — «неможливо, що р хибне», або «р необхідно істинне».

К.Льюїс тлумачить так модальні оператори ***«можливо», «неможливо», «необхідно»:***

— ***$\Diamond p$ — розуміється як логічно можливе, як відсутність самосуперечки, як логічно мислиме;***

— ***$\sim\Diamond p$ — розуміється як логічна неможливість, як логічно немислиме;***

— ***$\sim\Diamond\sim p$ — розуміється як логічна необхідність, як логічна немислимість того, щоб «р» було хибним.***

Використовуючи модальні оператори К.Льюїс вводить низку теорем, серед яких:

1) $p \prec \Diamond p$;

2) $\sim\Diamond\sim p \prec p$;

3) $\sim\Diamond\sim p \prec \Diamond p$.

Застосовуючи аксіоматику К.Льюса, теореми ***1, 2*** і правила доведення, ***побудуємо доведення теореми 3.***

Візьмемо аксіому **VI**

1. $[(p \prec q) \wedge (q \prec r)] \prec (p \prec r)$

2. $[(\sim\Diamond\sim p \prec p) \wedge (p \prec \Diamond p)] \prec (\sim\Diamond\sim p \prec \Diamond p)$ — за правилом підстановки до 1 $p/\sim\Diamond\sim p$, q/p, $r/\Diamond p$

3. $(\sim\Diamond\sim p \prec p) \wedge (p \prec \Diamond p)$ — за принципом логічного добутку

4. $\sim\Diamond\sim p \prec \Diamond p$ — за правилом інференції.

До семи аксіом своєї системи К.Льюїс додає аксіому **VIII**, яка іменується ***«постулат сумісності»:***

$$\text{VIII. } \Diamond(pq) \prec \Diamond p.$$

За допомогою цієї аксіоми К.Льюїс виводить низку теорем, серед яких вирази, що співзвучні з «парадоксами» матеріальної імплікації, але тепер вони отримані в системі строгої імплікації:

1. «Неможливе висловлюванння породжує будь-яке висловлювання»

$$\sim\Diamond p \prec (p \prec q).$$

2. «Необхідно істинне висловлювання породжує будь-яке висловлювання»

$$\sim\Diamond\sim p \prec (q \prec p).$$

К.Льюїс не важає ці формули за парадокси, оскільки вони не суперечать змістовному тлумаченню логічного слідування, як це відбувається з подібними виразами в системі матеріальної імплікації.

В цілому концепція К.Льюїса є значимим внеском у розвиток сучасної модальної логіки.

2. Концепція модальної логіки Я.Лукасевича

а) Тризначна система Я.Лукасевича

Ідею появи ***модальної логіки Я.Лукасевича*** спричинили його дослідження модальної логіки ***Арістотеля,*** який у своїх працях «Про витлумачення» та в «Першій аналітиці» використовує модальні терміни: ***«необхідно», «можливо», «неможливо», «випадково».***

Терміни ***«необхідно»*** і ***«можливо»*** беруться за основні. Позначимо їх відповідно «***M***» і «***L***».

У творі «Про тлумачення» ***Арістотель*** стверджує, що ***«можливість розуміється як відсутність необхідності».***

Я.Лукасевич фіксує цей факт у вигляді залежностей:

1. «Якщо можливо, що «р», то не необхідно «р».

Але з цієї залежності випливає, що необхідність утримує в собі можливість.

2. «Якщо необхідно, що «р», то можливо, що «р».

Тоді за правилом гіпотетичного силогізму отримуємо із ***2-го 1-ше.***

3. «Якщо необхідно, що «р», то не необхідно, що «р».

Виходить нісенітниця. Пізніше, у «Першій аналітиці», Арістотель виправляє ситуацію за допомогою введення такої еквівалентністі:

4. «Можливо, що «р», якщо і тільки якщо не необхідно, що не «р».

А відношення необхідності до можливості, про яке говорить Арістотель в роботі «Про тлумачення», ***Я.Лукасевич*** формулює у вигляді такої залежності:

5. «Необхідно, що «р», якщо і тільки якщо не можливо, що не «р».

Використовуючи символіку Я.Лукасевича, ***4*** і ***5*** залежніть можна виразити таким способом:

— ***QMpNLNp*** — читається: ***Mp — якщо і тільки якщо — NLNp;***

— ***QLpNMNp*** — читається: ***Lp — якщо і тільки якщо — NMNp.***

Я.Лукасевич вбачав основний недолік попередніх досліджень у галузі модальних логік — це відсутність ефективних логічних засобів для фіксації модальних понять. Таким інструментом, на його думку, може стати логіка, яка приписує одному висловлюванню більше ніж два значення.

Першою його пропозицією була тризначна пропозиційна логіка.

Запропонована Я.Лукасевичем система складається із немодальної і модальної частин.

Немодальна частина включає в себе:

1. Список пропозиційних змінних: p, q, r, ...

2. Список пропозиційних зв'язок: N, K, A, C, Q, (відповідно: ¬, ∧, ∨, ⊃,∾).

3. Дефініцію формули.

4. Дефініцію пропозиційних зв'язок.

5. Дефініцію доказової формули.

До модальної частини відносяться:

1. Список модальних функторів: M, L, NM, D.

2. Дефініція формули.

3. Дефініція модальних функторів.

4. Дефініція доказової формули.

Кількість можливих значень, яке може мати довільне висловлювання, дорівнює трьом **(1, 0, ½).**

— **1** ***ставиться у відповідність оцінка «істинно»;***

— **0** — ***«хибно»;***

— **½** — ***«невизначено».***

Пропозиційні зв'язки заперечення та імплікація задаються табличним способом:

C	**1**	**1/2**	**0**	***Np***
1	**1**	**1/2**	**0**	**0**
1/2	**1**	**1**	**1/2**	**1/2**
0	**1**	**1**	**1**	**1**

Пропозиційні зв'язки кон'юнкції, диз'юнкції, еквіваленції задаються відповідними дефініціями.

Розглянемо їх послідовно.

$$pAq = Df\ pCqCq$$

1. pAq = 1A1 = 1C1C1 = 1C1 = 1
2. pAq = 0A0 = 0C0C0 = 1C0 = 0
3. pAq = 1A0 = 1C0C0 = 0C0 = 1
4. pAq = 0A1 = 0C1C1 = 1C1 = 1
5. pAq = ½ A½ = ½ C½ C½ = 1C½ = ½
6. pAq = ½ A1 = ½ C1C1 = 1C1 = 1
7. pAq = 1A½ = 1C½ C½ = ½ C½ = 1
8. pAq = ½ A0 = ½ C0C0 = ½ C0 = ½
9. pAq = 0A½ = 0C½ C½ = 1C½ = ½.

$$pKq = Df\ N(NpANq)$$

1. pKq = 1K1 = N(N1AN1) = N(0A0) = N0 = 1
2. pKq = 1K0 = N(N1AN0) = N(0A1) = N1 = 0
3. pKq = 0K1 = N(N0AN1) = N(1A0) = N1 = 0
4. pKq =0K0 = N(N0AN0) = N(1A1) = N1 = 0
5. pKq = ½ K½ = N(N½ AN½) = N(½ A½) = N½ = ½
6. pKq = ½ K1 = N(N½ AN1) = N(½ AN0) = N½ = ½
7. pKq = 1K½ = N(N1AN) = N(0A½) = N½ = ½
8. pKq = 0K½ = N(N0AN½) = N(1A½) = N1 = 0
9. pKq = ½ K0 = N(N½ AN0) = N(½ A1) =N1 = 0.

$$pQq = Df\ pCqKqCp$$

1. pQq = 1Q1 = 1C1K1C1 = 1K1 = 1
2. pQq = 1Q0 = 1C0K0C1 = 0K1 = 0
3. pQq = 0Q1 = 0C1K1C0 = 1K0 = 0
4. pQq = 0Q0 = 0C0K0C0 = 1K1 = 1
5. pQq = ½ Q½ = ½ C½ K½ C½ = 1K1 = 1
6. pQq = ½ Q1 = ½ C1K1C½ = 1K½ = ½
7. pQq = 1Q½ = 1C½ K½ C1 = ½ K1= ½
8. pQq = ½ Q0 = ½ C0K0C½ = K1 = ½
9. pQq = 0Q½ = 0C½ K½ C0= 1K0 = 0.

Модальні функції в трьохзначній системі Я.Лукасевича є функціями від трьох значень істинності (1, 0, ½).

Вихідною модальною функцією є можливість (M). Через можливість визначаються неможливість і необхідність.

Змістовна трактовка можливості передбачає зв'язок існування і можливого стану, дії, результату тощо. Іншими словами, ***існування чогось передбачає його можливість, але не навпаки.*** Виходячи із цього, Я.Лукасевич тлумачить істинністну функцію можливості в аспекті трьох істинністних оцінок таким способом:

1) p, q, r .... — це змінні висловлювань, в яких відбувається констатація чогось;

2) Mp, Mq, Mr, ... — це змінні висловлювання, в яких висловлюється оцінка з тієї чи іншої точки зору стосовно змісту висловлювання: «Можливо, що p», «Можливо, що q».

Тоді, якщо висловлювання *«**p**»* має оцінку *«**1**»* (*підтверджено факт існування*), то висловлювання *«**Mp**»* теж матиме оцінку *«**1**»*. Це означає, що ***якщо дещо існує, то воно можливе.***

Якщо висловлювання *«**p**»* має оцінку *«**0**»* (*факт існування не підтверджено*), то висловлювання *«**Mp**»* має оцінку *«**0**»*, і цим самим ***підкреслюється відсутність реалізації якоїсь можливості.***

За певних умов деякий факт може мати місце, а може й ні. Ця ситуація фіксується висловлюванням, яке має оцінку *«**½**»* (*«невизначено»*). Модальне висловлювання, яке утворене від нього, матиме оцінку *«**1**»*, цим самим ***вказуючи на здатність чогось реалізуватися.***

За допомогою таблиць зазначене можна відобразити так:

p	*Mp*
1	1
½	1
0	0

Як уже зазначалося *«**M**»* є вихідною модальністю у Я.Лукасевича. Тому табличне визначення можливості є базовим для визначеня інших модальностей.

p	*Mp*	*NMp*	*MNp*	*NMNp*
1	1	0	0	1
½	1	0	1	0
0	0	1	1	0

Таким чином, ми будували таблиці для ***«неможливості»*** (***NMp***) і для ***«необхідності»*** (***NMNp***).

Я.Лукасевич задає модальну функцію ***«випадковість»*** (***D***) за допомогою дефініції:

Dp = Df pQNp.

1. Dp = 1QN1 = 1Q0 = 0
2. Dp = 0QN0= 0Q1 = 0
3. Dp = ½ QN½ = ½ Q½ = 1.

У вигляді таблиці це можна представити так:

p	***Dp***	***NDp***
1	***0***	***1***
½	***1***	***0***
0	***0***	***1***

NDp — це значення випадковості.

Прокоментуємо визначення випадковості.

З чисто змістовної точки зору, ***якщо у висловлюванні «р» однозначно фіксується наявність якогось факту або його відсутність, то це означає виключення будь-якої випадковості. Іншими словами, якщо висловлювання «р» має оцінку «1» або «0», то модальне висловлювання «Dp» матиме оцінку «0». А коли у висловлюванні «р» фіксується рівноцінність як того, що може мати місце, так і того, що не може мати місця (це відображається оцінкою «½»), то модальне висловлювання «Dp» оцінюється «1».***

У запропонованій Я.Лукасевичем системі вивідними (доказовими) є тільки ті формули, які при будь-якій комбінації значень приймають значення *«1»*.

Візьмемо дві формули: ***pCMp*** і ***MpCp*** перевіримо їх на доказовість.

p	***Mp***	***pCMp***	***MpCp***
1	**1**	**1**	**1**
½	**1**	**1**	**½**
0	**0**	**1**	**1**

Отже, формула ***pCMp* є доказовою** і вона приймається в системі Я.Лукасевича, а формула ***MpCp* не є доказовою** і вона відкидається у цій системі.

б) Чотиризначна система Я.Лукасевича

У роботі ***«Арістотелівська силогістика з точки зору сучасної формальної логіки» Я.Лукасевич*** розробляє систему модальної логіки, яку називає ***«Основна модальна логіка»***.

До основної модальної логіки він відносить вісім залежностей, які повинна обов'язково мати будь-яка система, що претендує бути модальною:

1. ***QMpNLNp***, тобто ***Mp*** — тоді і тільки тоді, якщо ***NLNp*** (***можливо, що «p» тоді і тільки тоді, якщо не необхідно «не-p»***);

2. ***QLpNMNp***, тобто ***Lp*** — тоді і тільки тоді, якщо ***NMNp*** (***необхідно, що «p» тоді і тільки тоді, якщо не можливо, що «не-p»***);

3. ***CLpp***, тобто, якщо ***Lp***, то *«p»* (***якщо необхідно, що «p», то «p»***);

4. ***CpMp***, тобто, якщо *«p»*, то ***Mp*** (***якщо наявне (існує) «p», то можливо, що «p»***);

5. ***CMpp***, тобто, якщо ***Mp***, то *«p»* (***якщо можливо, що «p», то наявне (існує) «p»***);

6. ***CpLp***, тобто якщо *«p»*, то ***Lp*** (***якщо наявне (існує) «p», то необхідно, що «p»***);

7. ***Mp***, тобто можливо, що *«p»*;

8. ***NLp***, тобто не необхідно, що *«p»*.

Посилаючись на дослідника творчості Арістотеля Александра Афродизійського, ***Я.Лукасевич підкреслює, що існування (наявність) передбачає можливість, але не навпаки, а необхідність — існування (наявність), але не навпаки. Ті залежності, де порушуються ці вимоги, повинні бути відкинуті.***

Отже, формули *5 — 8* відкидаються в будь-якій системі.

Чотиризначна модальна логіка Я.Лукасевича включає в себе немодальну частину і модальну. Немодальну частину складає чотирьохзначна логіка Я.Лукасевича, яка розглянута вище.

Модальну частину Я.Лукасевич задає у вигляді двох альтернатив. У залежності від того, чи береться за

вихідний функтор можливість (М), чи необхідність (L) приймаються відповідні основні принципи модальної логіки:

I. ***CpMp, CMpp, Mp;***

II. ***CLpp, CpLp, NLp.***

Характерною особливістю модальної логіки Я.Лукасевича є те, що тут модальності є функціями істинності.

Дамо визначення модальних функцій.

Визначимо можливість (М) на підставі рівності і таблиці:

$$M\ (a,b) = (a,\ Cbb)$$

1. M (1,1) = (1,C11) = (1,1) = 1
2. M (1,0) = (1,C00) = (1,1) = 1
3. M (0,1) = (0,C11) = (0,1) = 3
4. M (0,0) = (0,C00) = (0,1) = 3.

У табличному варіанті можливість (М) має такий вигляд:

p	*Mp*
1	1
2	1
3	3
4	3

Оскільки функтор ***М*** є вихідним, то через нього визначається функтор ***L***:

Lp = Df NMNp.

***Дамо табличне визначення Lp*:**

p	*Np*	*MNp*	*NMNp*
1	*4*	*3*	*2*
2	*3*	*3*	*2*
3	*2*	*1*	*4*
4	*1*	*1*	*4*

У даній системі доказовою є формула, яка при будь-яких підстановках значень приймає значення *«1»*.

За допомогою введених визначень модальних функторів спробуємо верифікувати декілька формул:

I) ***CLpp;*** **II)** ***CpMp;*** **III)** ***CMpp;*** **IV)** ***CpLp.***

I) ***1. CLpp = CL11 = C21 = 1***
2. CLpp = CL22 = C22 = 1
3. CLpp = CL33 = C43 = 1
4. CLpp = CL44 = C44 = 1

II) ***1. CpMp = C1M1 = C11 = 1***
2. CpMp = C2M2 = C21 = 1
3. CpMp = C3M3 = C33 = 1
4. CpMp = C4M4 = C43 = 1

III) ***1. CMpp = CM11 = C11 = 1***
2. CMpp = CM22 = C12 = 2
3. CMpp = CM33 = C33 =1
4. CMpp = CM = 44 = C34 = 2

IV) ***1. CpLp = C1L1 = C12 = 2***
2. CpLp = C2L2 = C22 = 1
3. CpLp = C3L3 = C24 = 3
4. CpLp = C4L4 = C44 = 1.

Таким чином, формули **I, II** ***є доказовими***, а **III, IV** — ***ні***, а це означає, що, за термінологією Я.Лукасевича, вони повинні бути відкинуті.

Окрім функтора (***M***) для модальності ***«можливість»*** Я.Лукасевич вводить ще один функтор (***W***). Позначення для цього функтора виглядає як перевернута «***M***». Визначає він цей функтор за допомогою рівності:

W (a,b) = (Caa,b).

1. W (a,b) = (C11,1) = (1,1) = 1
2. W (1,0) = (C11,0) = (1,0) = 2
3. W (0,1) = (C00,1) = (1,1) = 1
4. W (0,0) = (C00,0) = (1,0) = 2.

У табличному варіанті:

p	*W*
(*1,1*)	***1***
(*1,0*)	***2***
(*0,1*)	***1***
(*0,0*)	***2***

Незважаючи на те, що функтор «***W***» відмінний від функтора «***M***», він верифікує формули тієї ж структури, що і «***M***». Тобто, якщо вираз ***CpMp*** приймається, то приймається і вираз ***CpWp,*** а якщо вираз ***CMpp*** відкидається, то відкидається й вираз ***CWpp*** тощо.

Переконаємося в цьому:

I) ***CpWp***

1. CpWp = C1W1 = C11 = 1
2. CpWp = C2W2 = C22 = 1
3. CpWp = C3W3 = C31 = 1
4. CpWp = C4W4 = C42 = 1

II) ***CWpp***

1. CWpp = CW11= C11 = 1
2. CWpp = CW22 =C22 = 1
3. CWpp = CW33 = C13 = 3
4. Cwpp = Cw44 = C24 = 3.

Отже, другий (**II**) вираз повинен бути відкинутий. «***W***» і «***M***» представляють один і той самий функтор, тому вони повинні мати спільні властивості. Але, не дивлячись на їх тотожність, вони поводять себе по-різному, входячи до структури єдиної формули.

Для ілюстраці зазначеного доведемо декілька формул:

I) ***MWp***

p	*Wp*	*MWp*
1	**1**	**1**
2	**2**	**1**
3	**1**	**1**
4	**2**	**1**

II) ***WMp***

p	*Mp*	*WMp*
1	1	1
2	1	1
3	3	1
4	3	1

III) ***MMp***

p	*Mp*	*MMp*
1	1	1
2	1	1
3	3	3
4	3	3

IV) ***WWp***

p	*Wp*	*W Wp*
1	*1*	*1*
2	*2*	*2*
3	*1*	*1*
4	*2*	*2*

Наведені таблиці показують, що ми не можемо замінити у формулах **I** і **II** ***M*** на ***W*** і ***W*** на ***M***, оскільки отримаємо формули, які треба буде відкинути.

Я.Лукасевич звертає увагу на проблему випадкових висловлювань у логіці Арістотеля. Коротко ця проблема зводилася до встановлення факту: ***«Чи можуть бути істинними деякі випадкові висловлювання?»***

Визначимо випадковість як модальний функтор. Позначимо його літерою «***D***»:

CKMpMNpDp — читається: ***«Якщо можливо, що «р» і можливо, що «не-р», то випадково, що «р».***

З цього визначення випливає, що неможливим є існування істинного випадкового висловлювання, оскільки не можуть бути разом істинними висловлювання ***Mp*** і ***MNp***:

1. KMpMNp = KM1MN1 = K1M0 = K13 = 3

2. KMpMNp = KM2MN2 = K1M3 = K13 = 3

3. KMpMNp = KM3MN3 = K3M2 = K31 = 3

4. KMpMNp = KM4MN4 = K3M1 = K31 = 3

Якщо наведена кон'юнкція постійно має значення *«**3**»*, то вона ніколи не буде істинною, а звідси ***Dp = 3***, і тому не може бути істинного випадкового висловлювання, згідно з наведеним визначенням *«**D**»*.

Аналогічно можна продемонструвати, що ***KpWpWNp*** має значення *«**2**»:*

1. KWpWNp = KW1WN1 = K1W1 = K12 = 2

2. KWpWNp = KW2WN2 = K2W3 = K21 = 2

3. KWpWNp = KW3WN3 = K1W2 = K12 = 2

4. KWpWNp = KW4WN4 = K2W1 = K21 = 2

Арістотель наполягає, що висловлювання: *«Можливо, що завтра буде морський бій»* і *«Можливо, що завтра не буде морського бою»*, які висловлені напередодні, можуть бути обидва істинними.

Я.Лукасевич, використовуючи свої парні можливості «***M***» і «***W***», намагається уточнити арістотелівське розуміння випадковості. Він звертається до прикладу з монетою.

При підкиданні монети ми можемо мати в результаті випадання герба або — цифри. Обидва результати ми схильні оцінити як істинні, але вони не можуть бути разом істинними, якщо перший результат позначити тим же функтором, що і другий. Тут ми маємо ситуацію, коли випадання герба є можливістю, що відмінна від його невипадання.

Першу можливість ми позначимо «***Mp***» (***«Можливо, що «р»***, тут ми маємо ствердження), а ***другий — WNp*** (***«Можливо, що «не-р»***, тут ми маємо заперечення). Ми можемо за домовленістю поміняти їх місцями. Першу можливість позначимо ***Wp***, а другу — ***MNp***. Ситуація від цього не зміниться.

Позначимо введені функтори символами ***X*** та ***Y***:

Mp — X,

WNp — Y.

Функтори ***X*** та ***Y*** є ***функторами випадковості***, тобто ***«X — випадкове»*** і ***«Y — випадкове»***. Визначимо їх таким чином:

1. ***CKMpWNpXp*** — читається ***«p є X — випадкове»*** означає, що ***«p є M — можливе і Np є W — можливе»;***

2. ***CKWpMNpYp*** — читається ***«p є Y — випадкове»*** означає, що ***«p є W — можливе і Np є M — можливе».***

Із наведених визначень ***X*** та ***Y*** виведемо їх матриці.

а) ***X1 = KM1WN1 = K1W4 = K12 = 2***
X2 = KM2WN2 = K1W3 = K11 = 1
X3 = KM3WN3 = K3W2 = K32 = 4
X4 = KM4WN4 = K3W1 = K31 = 3;

б) ***Y1 = KW1MN1= K1M4 = K13 = 3***
Y1 = KW2MN2 = K2M3 = K23 = 4
Y3 = KW3MN3 = K1M2 = K11= 1
Y4 = KW4MN4 = K2M1= K21 = 2.

У табличному варіанті функтори ***X*** та ***Y*** виглядають так:

p	***X***	***Y***
1	***2***	***3***
2	***1***	***4***
3	***4***	***1***
4	***3***	***2***

Із даної таблиці видно, що ***Xp*** та ***Yp*** повинні бути істинними відповідно при ***p = 2*** і при ***p = 3***. Раніше було доведено, що ***KMpMNp*** має постійне значення «***3***», а ***KWpWNp*** — «***2***».

Таким чином, вивідними є дві формули:

а) ***XKW pWNp і***

б) ***YKMpMNp.***

Цим самим визначається існування істинних випадкових висловлювань:

1) «істинне X — випадкове висловлювання» і

2) «істинне Y — випадкове висловлювання».

Необхідно зауважити, що ***X — випаковість*** та ***Y — випадковість*** є ***двійниками***. Мається на увазі, якщо в таблиці істинності для ***X*** та ***Y*** поміняти ***2*** на ***3***, а ***3*** на ***2***, то ***X*** стане ***Y***, а ***Y*** стане ***X***:

p	*X*	*Y*	*p'*	*X'*	*Y'*
1	*2*	*3*	*1*	*3*	*2*
2	*1*	*4*	*3*	*4*	*1*
3	*4*	*1*	*2*	*1*	*4*
4	*3*	*2*	*4*	*2*	*3*

Разом з тим ***X*** відрізняється від ***Y*** і ця відмінність більша навіть, як між ***M*** і ***W***, тому що висловлювання ***Xp*** та ***Yp*** є суперечливими.

Використовуючи дефініцію ***X*** та ***Y***, перевіримо рівності:

а) Xp = YNp = NYp

б) Yp = XNp = NXp

а) ***1. X1 = YN1 = Y4 = 2= NY2= N4 = 1***
2. X2 = YN2 = Y3 = 1 = NY1 = N3 =2
3. X3 = YN3 = Y2 = 4 = NY4 = N2 = 3
4. X4 = YN4 = Y1 = 3 = NY3 = N1 = 4

б) ***1. Y1 = XN1 = X4 = 3 = NX3 = N4 = 1***
2. Y2 = XN2 = X3 = 4 = NX4 = N3 = 2
3. Y3 = XN3 = X2 = 1 = NX1 = N2 = 3
4. Y4 = XN 4 = X1 = 2= NX2 = N1 = 4.

Таким чином, дані рівності приймаються.

Тепер превіримо закони протиріччя та виключеного третього для Xp та Yp:

I) ***NKXpYp***
1. NKX1Y1 = NK23 = N4 = 1
2. NKX2Y2 = NK14 = N4 = 1
3. NKX3Y3 = NK41 = N4 = 1
4. NKX4Y4 — NK32 — N4 = 1

II) ***AxpYp***
1. AX1Y1 = A23 =1
2. AX2Y2 = A14 = 1
3. AX3Y3 = A41 = 1
4. AX4Y4 = A32 =1.

Оскільки ***закони протиріччя*** (***NKXpYp***) та ***виключеного третього*** (***AXpYp***) ***істинні,*** то це означає, що ***жодне висловлювання не може бути одночасно і X-випадкове, і Y-випадкове, це, по-перше, а, по-друге, будь-яке висловлюваня є або X-випадковим, або Y-випадковим. Заперечення X — випадкового висловлювання є Y-випадковим висловлюванням.***

Тобто: ***NXp = Yp*** і ***NYp = Xp.*** У цьому ми могли переконатися, коли доказували рівності***: а***) ***Xp = YNp = Nyp*** і ***б***) ***Yp = XNp = NXp.***

Таким чином, вводячи парні модальні функтори, Я.Лукасевич розкриває суть модального функтора «***D***». Традиційно прийнятною була точка зору, що те, що не є випадковим, або неможливе, або необхідне. При цьому ***NM*** і ***L*** співвідносили з єдиним видом можливості ***M. Але коли з'явилися парні можливості M і W, то невірно стверджувати, що те, що не є X-випадковим, є або M-неможливим, або M-необхідним. В цьому випадку доречніше буде сказати, що те, що не є X-випадковим, є або M-неможливим, або W-необхідним. Іншими словами, випадковість не може бути визначеною за допомогою кон'юнкції Mp і MNp, а лише за допомогою кон'юнкції Mp і WNp або WpMNp.***

Арістотель, досліджуючи природу випадковості, прийшов до ідеї багатозначної логіки, яку реалізував у XX ст. Я.Лукасевич. Створивши апарат тризначної, а потім чотиризначної логіки, Я.Лукасевич почав досліджувати засобами створених систем модальні функтори. Це сприяло проясненню і чіткому визначенню понять, категорій, які були перевантажені інтуїтивним змістом, елементами здорового глузду, психологізмами.

Наприклад, довгий час, слідуючи Арістотелю вважали, що судження, яке описує суттєві ознаки предметів не тільки фактично, а й необхідно істинне. Ця теза послужила потім основою для поділу наук на аподиктичні (логіка, математика) і емпіричні (зміст яких фіксується асерторичними судженнями). Я.Лукасевич справедливо вказує на хибність такої точки зору.

У ***70—80-х роках*** минулого століття у вітчизняній літературі з'явилася критика такої позиції Я.Лукасевича. Його звинувачували в тому, він стає на позиції крайнього номіналізму, не визнає існування істинних необхідних суджень.

Справа в тому, що Я.Лукасевич створюючи свою багатозначну логіку, розкрив зовсім іншу природу терміна «істина» в логіці. А якщо це так, то критика наших вітчизняних філософів є безпредметною. Слово «істина» в логіці вживається не в розумінні тотожності мислення і буття, не як відповідність думки і предмета, не у філософському смислі, а в ***логіці термін «істина» вживається для умовного позначення логічної властивості висловлювання.*** Якщо висловлювання ***істинне,*** то кажуть: *«Висловлювання має істинісне значення «істина»,* а якщо висловлювання ***хибне***, то вживають вираз: *«Висловлювання має істинісне значення «хиба».* Хоча останній вираз викликає певний дискомфорт «істинісне значення «хиба», але це виникає тоді, коли не мати на увазі, що під терміном «істина» в логіці розуміється зовсім особливий смисл, відмінний від того, що розуміється у філософії, в інших науках, а також у повсякденному житті.

Щоб уникнути небажаних філософських, буденних, психологічних асоціацій і нашарувань ***Е.Шредер*** пропонує ***замінити термін «істина» цифрою «1», а термін «хиба» цифрою «0».*** Хоча те, що має значення «***1***» може відповідати науковому, буденному значенню ***«істина»*** — *«Сума внутрішніх кутів трикутника дорівнює 180°», «Земля має атмосферу», «Вода кипить при 100°» тощо.*

Але, позначаючи в логіці ці та подібні їм висловлювання одиницею «***1***» (як і висловлювання *«Якщо сума кутів дорівнює 90°, то вода кипить при 90°»*) ми не цікавимося, що собою являє *«внутрішній кут трикутника», «атмосфера», «градус»,* які вони мають властивості і відношення. Головне, що будь-яке висловлювання може мати одне із прийнятих значень. Якщо це двозначна логіка, то одне із двох (позначимо їх як ***{«істина», «хиба»},*** чи ***{1, 2}***). Якщо це тризначна логіка, то одне із трьох тощо.

Логіка ніколи, особливо сучасна, не порівнювала істинне висловлювання з вірним відображенням дійсності, а хибне висловлювання з помилковим відображенням дійсності. ***В сучасній логіці істинне висловлювання співставляється з непорожньою множиною елементів, а хибне висловлювання ототожнюється з порожньою множиною елементів. При цьому природа елементів, що складають множину (чи то фізична, чи етична, чи правова, чи математична і т.д.), не береться до уваги.***

Виходячи з цього Я.Лукасевич зауважував, що справжніх аподиктичних висловлювань немає. І в ніякому разі він не зазіхав на прерогативу філософії стосовно: теоретичного та емпіричного рівнів пізнання, співвідношення категорій можливості — дійсності, необхідності — випадковості, основних критеріїв типології наук, вихідних моментів процесу пізнання тощо. Хоча це може здатися, коли він заявляє, що немає різниці між математичною істиною і емпіричною, що істина завжди синтетична, що закон причинності повинен розглядатися як гіпотеза і т.д.

Але на цьому він наголошує лише з однією метою, щоб вказати на особливий, специфічний характер досліджень сучасної логіки.

Контрольні питання та вправи

1. Передумови виникнення модальної логіки.
2. Матеріальна імплікація і теорія логічного слідування.
3. Строга імплікація К.Льюїса.
4. Аксіоми строгої імплікації К.Льюїса.
5. Порівняння матеріальної та строгої імплікації.
6. Тлумачення К.Льюїсом модальних операторів.
7. Вихідні принципи концепції модальної логіки Я.Лукасевича.
8. Характерні особливості тризначної модальної логіки Я.Лукасевча.
9. Визначення модальних функцій у тризначній системі Я.Лукасевича.
10. Витоки чотиризначної модальної логіки Я.Лукасевича.
11. Визначення модальних функцій у чотиризначній системі Я.Лукасевича.
12. Визначення доказової формули в чотиризначній системі Я.Лукасевича.
13. Два функтори для модальності «можливість» у чотиризначній системі Я.Лукасевича.
14. Характерні риси модального функтора «випадковість» в чотиризначній системі Я.Лукасевича.

РОЗДІЛ ІІІ

СИСТЕМА МОДАЛЬНОЇ ЛОГІКИ

1. Алетична логіка

У попередньому розділі розглядалися результати досліджень в галузі модальної логіки, що належать її засновникам ***К.Льюїсу*** та ***Я.Лукасевичу***. Результати цих досліджень є своєрідною новітньою історією модальної логіки, з одного боку, а з іншого — вони послугували сильним поштовхом для сучасних досліджень модальної логіки.

Роботи ***К.Льюїса*** та ***Я.Лукасевича*** були пов'язані, в основному, ***із синтаксичною побудовою модальної логіки.***

Семантика модальних логік починає розроблятися лише в 50 — 60-х роках ХХст. завдяки працям Р.Карнапа, С.Кріпке, Я.Хінтікки. Кожен із цих вчених зробив вагомий внесок у розробку сучасної модальної логіки.

Так, ***Р.Карнап, досліджуючи модальності, розробляє концепцію «опису станів».***

С.Кріпке та Я.Хінтікка формулюють метод семантики можливих світів. Тобто, фактично на сьогоднішній день модальна логіка знаходиться в стані систематичного дослідження та вивчення.

Виходячи із типології модальних операторів, виділяють різні види модальних логік.

Серед найбільш канонічних є такі види модальних логік:

— алетична;
— темпоральна;
— деонтична;
— епістемічна.

Знайомство з цими системами розпочнемо з алетичної логіки.

а) Мова алетичної логіки висловлювань

Назва ***«алетична логіка»*** походить від грецького слова — ***«aletheia»*** (що означає ***істина***).

***А л е т и ч н о ю   л о г і к о ю* називають розділ модальної логіки, яка досліджує модальності: «необхідно», «можливо», «випадково».**

Ці модальності трактуються як близькі до істини, тому ця логіка отримала назву ***«алетична»***.

Дослідження алетичних модальностей починається ще за часів античності, що значною мірою сприяло розгляду алетичної логіки як бази для всієї модальної логіки.

Для того, щоб утворити мову алетичної логіки висловлювань, необхідно до мови класичної пропозиційної логіки додати знаки алетичних модальностей:

1. p, q, r, ... — пропозиційні змінні;

2. $\wedge$, $\vee$, $\supset$, $\neg$, $\backsim$ — логічні зв'язки;

3. $\Box$ — «необхідно»;

4. $\Diamond$ — «можливо»;

5. ∇ — «випадково»;

6. {, [, (,),], }; ,,. — ***допоміжні символи.***

Дефініція формули:

1. Будь-яка пропозиційна змінна — p, q, r ... — формули;

2. Якщо A і B формули, то $\neg A$, $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \supset B$, $A \backsim B$, $\Box A$, $\Diamond A$, ∇A — формули;

3. Ніщо, крім визначених у пунктах Df 1, 2, не є формулою.

Опишемо основні алетичні модальності.

I. $\Box$

Виділяють два види необхідності:

а) логічну і

б) фізичну.

Логічною називається необхідність, яка випливає із законів логіки і заперечення якої є несумісною з ними.

Істинність логічно необхідного висловлювання обгрунтовується лише логічними підставами.

Фізична необхідність обумовлюється законами природи і не суперечить їм.

Відношення між логічною і фізичною необхідністю можна сформулювати у вигляді такої залежності:

«Все, що логічно необхідно, є і фізично необхідно, але не все, що фізично необхідно є логічно необхідно».

Схематично це записується у вигляді такої формули:

$$[\forall_x \Box_л \mathbf{A} \supset \forall_x \Box_ф \mathbf{A}] \wedge [\neg\forall_x \Box_ф \mathbf{A} \supset \neg\forall_x \Box_л \mathbf{A}],$$

де $\Box_{л}$ — ***знак логічної необхідності***, а $\Box_{ф}$ — ***знак фізичної необхідності***.

Наприклад, відповідно до закону тотожності істинним є висловлювання: *«Якщо метал — електропровідник, тоді він завжди проводитиме електричний струм»*. Цей логічний наслідок є також істиною фізики. Але те, що у металу є певна кількість вільних електронів на зовнішній орбіті, регламентується законом фізики, а не логіки.

II. $\Diamond$

Існує два види можливості:

а) логічна і

б) фізична.

Л о г і ч н а можливість пов'язана із внутрішньою несуперечливістю висловлювання. Логічно можливим є те, що не суперечить законам логіки, є сумісним із ними і заперечення якого не випливає з них.

Ф і з и ч н о можливим є те, що узгоджується із законами природи, не суперечить їм і заперечення якого не випливає з них.

Зв'язок між логічною можливістю **($\Diamond$л)** ***і фізичною*** **($\Diamond$ф)** ***можливістю можна зафіксувати у вигляді такої залежності:***

«Все, що можливо фізично, те можливо і логічно, але не все, що можливо логічно є можливим фізично».

Схематично це записується у вигляді такої формули:

$$[\forall_{x}\Diamond_{ф}\mathbf{A} \supset \forall_{x}\Diamond_{л}\mathbf{A}] \wedge [\neg\forall_{x}\Diamond_{л}\mathbf{A} \supset \neg\forall_{x}\Diamond_{ф}\mathbf{A}].$$

Наприклад:

а) якщо фізично можливо побудувати міст через певну річку, то й теоретично можливо здійснити проектування цієї дії;

б) якщо теоретично можна спроектувати вічний двигун, то фізично це неможливо.

III. ∇

Випадковість визначають через можливість. якщо можливість — це те, що може бути, то випадковість — це те, що може бути, а може й не бути.

Випадковість теж поділяють на:

а) логічну та

б) фізичну.

***Л о г і ч н о* випадковим є висловлювання, якщо ні воно саме, ні його заперечення не містить внутрішньої суперечності.**

***Ф і з и ч н о* випадковим є те, наявність чого чи його відсутність не регламентована природними законами.**

Введемо дефініції $\Box$, $\Diamond$, ∇.

1. $\Box p \equiv Df\ \neg\Diamond\neg p$ («p *є необхідним, якщо і тільки якщо неможливим є заперечення* p»);

2. $\Diamond p \equiv Df\ \neg\Box\neg p$ («p *є можливим, якщо і тільки якщо не є необхідним заперечення* p»);

3. $\nabla p \equiv Df\ \Diamond p \wedge \Diamond\neg p$ («p *є випадковим, якщо і тільки, якщо можливим є* p *і його заперечення*»).

б) Алетична логіка і теорія «можливих світів»

Щоб установити логічне значення дескриптивного висловлювання, ми співставляємо дане висловлювання з тим, про що в ньому йдеться (або з дійсністю).

Якщо маємо відповідність висловлювання з дійсністю, то фіксуємо за ним значення «істина», а якщо ні — значення «хиба».

Так, *наприклад, «Варшава — столиця Польщі»* — це висловлювання відповідає дійсності, отже воно є істинним, а висловлювання *«Авраам Лінкольн відкрив Америку»* не відповідає дійсності, отже, є хибним.

А як себе поводять в такій ситуації модальні висловлювання? ***Виявляється, що модальні висловлювання не є ні категорично істинними, ні категорично хибними, а є істинними або хибними в деяких або усіх випадках.***

Проілюструємо зазначене на прикладах.

Візьмемо дескриптивне висловлювання:

1) *«Всі планети мають атмосферу»* (**p**). Утворимо від нього модальне висловлювання:

2) *«Необхідно, що всі планети мають атмосферу»* (**$\Box$p**).

Отже, можемо сформулювати відповідний постулат:

«Якщо дескриптивне висловлювання хибне, то утворене від нього необхідне висловлювання буде хибним»:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{p} & \rightarrow & \Box\mathbf{p} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{x} & & \mathbf{x} \end{array}$$

Маємо висловлювання:

1) *«Будь-яка планета є космічним об’єктом»* **(p)**;

2) *«Необхідно, що будь-яка планета є космічним об’єктом»* **($\Box$p)**;

1′) *«Всі мої приятелі мають вищу освіту»* **(p)**;

2′) *«Необхідно, що всі мої приятелі мають вищу освіту»* **($\Box$p)**.

Якщо в ситуації **(*1, 2*)** ми із істинного дескриптивного висловлювання отримуємо істинне модальне висловлювання, то у ситуації **(*1′, 2′*)** — сумнів, що висловлювання «**$\Box$p**» фіксує безумовність і неминучість даного факту.

Звідси випливає постулат: ***«Якщо дескриптивне висловлювання істинне, то утворене від нього необхідне висловлювання може бути будь-яким (як істинним, так і хибним)»:***

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{p} & \rightarrow & \Box\mathbf{p} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{i} & & \mathbf{(i,\ x).} \end{array}$$

Подібним чином, але тільки у зворотньому розумінні, поводить себе оператор можливості **(◊)**.

Звернемося до прикладу:

1) *«Всі учасники конференції підготували змістовні доповіді»* **(p)**;

2) *«Можливо, що всі учасники конференції підготували доповіді»* **(◊p)**.

«Якщо дескриптивне висловлювання істинне, то утворене від нього можливе висловлювання також буде істинним»:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{p} & \rightarrow & \Diamond\mathbf{p} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{i} & & \mathbf{i} \end{array}$$

Наведемо ще такий приклад:

1) *«Природні супутники мають атмосферу»* **(p)**;

2) *«Можливо, що природні супутники мають атмосферу»* **(◊p)**.

1′) *«Метали — рідини»* **(p)**;

2′) *«Можливо, що метали — рідини»* **(◊p)**.

Якщо у ситуації **(*1, 2*)** із хибності дескриптивного висловлювання ми отримуємо хибність модального висловлювання, то у випадку **(*1′, 2′*)** із хибності дескриптивного висловлювання ми маємо істинне модальне висловлювання.

Отже, ***якщо дескриптивне висловлювання хибне, то утворене від нього можливе висловлювання може бути будь-яким (як хибним, так і істинним).***

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{p} & \rightarrow & \Diamond\mathbf{p} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{x} & & (\approx\mathbf{x}, \mathbf{i}) \end{array}$$

Із наведених прикладів випливає, що ***для встановлення логічного значення модальних висловлювань недостатньо лише співставити його із реальною дійсністю, а треба мати на увазі всю множину варіантів ситуації, з якими є смисл співставляти дане висловлювання. При цьому необхідно враховувати ці ситуації стосовно минулого, майбутнього, просторової координації прийнятих моральних, правових норм системи оцінок, стандартів пізнавальної діяльності тощо.***

У пізнавальній, практичній діяльності у нас постійно виникає потреба оцінювати свої дії, поведінку інших людей, прогнозувати події, виражати своє ставлення до результатів як своєї діяльності, так і оточуючих. Іншими словами, ми постійно вимушені припускати стосовно певного факту, події довільне число можливостей, альтернатив, підходів, які забезпечують їх інтерпретацію.

У зв'язку з цим множину альтернативних підходів, множину припустимих варіантів пояснення ситуацій, розв'язання проблем, прогнозування подій, оцінки результатів діяльності тощо прийнято називати можливими світами.

Фундатор теорії «можливих світів» — ***Г.Лейбніц***. Саме він, досліджуючи природу істини розуму та істини факту, звертається до поняття ***«можливий світ»***. Трактовка ***Г.Лейбніцем «можливого світу»*** переобтяжена гносеологічним змістом. Це наклало відповідний відбиток при визначенні необхідного висловлювання як істинного у всіх можливих світах, а можливого — хоча б в одному.

У сучасній логіці ***«можливий світ»*** розглядається як теоретико-множинне поняття. Навіть тоді, коли ми говоримо, що дескриптивне висловлювання співставляється для визначення його значення з дійсністю, реальним станом справ, то мається на увазі не реальна дійсність, яка є незалежною від суб'єкта, що пізнає, а «істина» не як тотожність мислення і буття, а «хиба» як спотворене відображення дійсності, а маються на увазі теоретико-множинні поняття «належності», чи «не належності» елемента до множини, «включення» чи «не включення» однієї множини в іншу. Тим більше це стосується ***«можливого світу»***.

Оскільки, можливі світи моделюють різні обставини, альтернативні стани справ, різноманітні гносеологічні стандарти, припустимі і неприпустимі норми, оцінки відносно якогось випадку чи умови, то кожен можливий світ розглядається як елемент деякої множини можливих світів.

Між можливими світами існує відношення досяжності, яке також має теоретико-множинний смисл. Це не відношення співставлення, яке має місце між дескриптивними висловлюваннями і реальним (дійсним) світом, а відношення обстеження перегляду множини можливих світів, які якимось чином зв'язані, стосуються реального світу.

Відношенню досяжності (альтернативності) притаманні такі властивості, як:

— рефлексивність,

— симетричність,

— транзитивність.

Якщо позначити можливі світи символами $w_1, w_2, w_3, \dots w_n$, а відношення досяжності — **R**, то названі властивості можна записати так:

1. $w \, R \, w$ ***— рефлексивність;***

2. $w \, R \, w_1 \rightarrow w_2 \, R \, w$ ***— симетричність;***

3. $(w \, R \, w_1 \wedge w_1 \, R \, w_2) \rightarrow w \, R \, w_2$ ***— транзитивність.***

Р.Карнап конкретизує поняття можливий світ через термін ***«опис стану»***.

Опис стану — це один з можливих розподілів істинісних значень для елементарних висловлювань.

Так, для висловлювання $p \wedge q$ можливими є чотири комбінації розподілу істинністних значень:

1. $p - i, q - i;$

2. $p - i, q - x;$

3. $p - x, q - i;$

4. $p - x, q - x.$

Кожна з цих комбінацій є описом стану.

Можливий світ — це саме той світ, який є заданим певним описом стану. Ми маємо чотири можливих світи. У нашому прикладі лише перший опис стану відповідає реальному світові. ***Р.Карнап*** використовує поняття ***«опис стану»*** для дефініції логічної і фактичної істинності висловлювання.

Логічно істинним є висловлюваня, яке істинне в усіх описах світів, а фактично істинним — яке лише в деяких описах станів істинне.

Враховуючи вищезазначене, визначимо основні алетичні модальності і аналітичні правила для них.

Визначення □, ◊ у термінах можливих світів:

а) ***Висловлювання А буде необхідним у деякому можливому світі w, якщо воно буде істинним в усіх можливих світах, досяжних із w:***

$$\mathbf{T}\square \quad \frac{Tw\ \square A}{Tw'A} \text{ при } Rww',$$

де *w′* є будь-який можливий світ, який досяжний із ***wґ***.

б) ***Висловлювання А не буде необхідним у деякому можливому світі w, якщо воно буде хибним хоча б в одному можливому світі w, який є досяжним із w:***

$$\mathbf{F}\square \quad \frac{F\square\ wA}{Tw'A} \text{ при } Rww',$$

де *w’* — є деякий можливий світ, якого ще не було в попередніх рядках тієї гілки таблиці, де застосовується це правило, і який досяжний із ***w***.

в) ***Висловлювання А буде можливим у деякому можливому світі w, якщо воно буде істинним хоча б в одному можливому світі wґ, який є досяжним із w:***

$$\mathbf{T}\Diamond \quad \frac{\mathbf{T}\ \Diamond\ \mathbf{wA}}{Tw'A} \text{ при } Rww',$$

де *w’* є деякий можливий світ, якого ще не було в попередніх рядках тієї гілки таблиці, де застосовувалося це правило, і який досяжний із ***w***.

г) ***Висловлювання А не буде можливим у деякому можливому світі w, якщо воно буде хибним у будь-якому можливому світі wґ, який досяжний із w:***

$$\mathbf{T}\square \quad \frac{F\ \Diamond\ wA}{Tw'A} \text{ при } Rww',$$

де *w’* є будь-який можливий світ, який досяжний із ***w***.

Застосування аналітичних правил ефективне для здійснення проблеми розв'язання в алетичній логіці.

При побудові аналітичних таблиць для формул алетичної логіки треба мати на увазі, що таблиця вважається замкненою лише тоді, коли одна і та сама пропозиціна змінна буде з індексом T і F у тому самому можливому світі.

Здійснимо побудову аналітичної таблиці для формули:

$$\Box A \supset A$$

	0. Fw □ A ⊃ A	
	1. Tw □ A	
I	***2. Fw A***	***F⊃, 0***
II	***3. Tw A***	***T□, 1***
	+	

Аналітична таблиця є замкненою. Отже, дана формула є законом алетичної логіки і при цьому ***відношення досяжності R є рефлексивним: «Все необхідне є реальним».***

Наведений закон відображає фундаментальне відношення між необхідністю і дійсністю. Буквально він засвідчує те, що при істинності □***A A*** буде завжди істинним в усіх можливих світах і в дійсному також.

Ця залежність іноді може провокувати невірне обмежене твердження: ***«Все дійсне є необхідним».*** Але не завджи із дійсності випливає необхідність чогось. Для цього дійсність повинна мати атрибут необхідності.

Наприклад, із того, що *«Всі мешканці нашого будинку знають англійську мову»,* не випливає необхідність цього факту.

Наведемо ще один приклад.

Маємо формулу **□□◊(A ⊃ A).**

Побудуємо для неї аналітичну таблицю:

	0. *Fw* □□ ◊ (*A* ⊃ *A*)	
I	***1. Fwr′ □ ◊ (A ⊃ A)***	***F□, 0***
II	***2. Fwr′r′ □ ◊ (A ⊃ A)***	***F□, 1***
Ш	***3. Fwr′r′ (A ⊃ A)***	***F ◊, 2***
IV	***4. Twr′r′A***	
	5. Fw□ A	
	+	

«Все необхідне є реальним».

Отже, формула є законом алетичної логіки, а ***відношення досяжності R є транзитивним і рефлексивним.***

Розглянемо ще два закони алетичної логіки.

$$A \supset \Diamond A$$

«Все дійсне є можливим».

Аналітична таблиця цього закону матиме вигляд:

	0. Fw (AA)	
	1. TwA	***F⊃, 0***
I	***2. Fw ◊ A***	
	3. Fw	***F ◊, 2***
	+	

Даний закон регламентує той аспект відношення між реальним і можливим, коли визнання висловлювання можливим означає його істинність хоча б в одному з можливих світів, але не виключено, що ним може бути дійсний світ.

Зрозуміло, що обернена залежність буде невірною: ***«Із того, що можливо, не випливає його дійсність».***

Наприклад, із того, що *«Київське Динамо» може виграти у черговому турі, не випливає його перемога.*

$$\Box A \supset \Diamond A$$

«Все необхідне є можливим».

Цей закон є наслідком із попередніх двох законів:

$$\frac{\begin{array}{c}\Box A \supset A \\ A \supset \Diamond A\end{array}}{\Box A \supset \Diamond A.}$$

У цьому законі зафіксована залежність: ***«Якщо □A істинне, то A буде істинним в усіх можливих світах, у тому числі і в дійсному, а, отже, і ◊A буде істинним».***

Даний закон перевіримо за допомогою аналітичної таблиці:

	0. Fw□ A ⊃ ◊A	
	1. Tw□A	
I	***2. Fw ◊A***	***F⊃, 0***
II	***3. Twґ A***	***T□, 1***
III	***4. Fwґ A***	***F◊, 2***
	+	

2. Темпоральна логіка

Т е м п о р а л ь н о ю, або часовою, логікою називають розділ модальної логіки, який досліджує природу, ознаки, логічні зв'язки часових висловлювань.

Дамо визначення часового висловлювання.

Ч а с о в и м висловлюванням називається висловлювання, в якому часовий параметр включається до його логічної форми.

Тобто до складу темпорального висловлювання входять модальності ***P, F, H, G*** (відповідно ***«було так, що ...», «буде так, що ...», «завжди було так, що ...», «завжди буде так, що ...»***).

Темпоральна логіка як самостійний розділ починає формуватися в XX ст. Фундаторами темпоральної логіки є ***А.Прайор, Г.Х. фон Врігт, М.Решер, Х. Укварт*** та інші. Але перші дослідження в галузі темпоральної логіки знаходимо в ***часи античності*** у ***Арістотеля,*** у ***середньовіччі*** у ***Діодора Кроноса, У.Оккама, Ж.Бурідана, Альберта Саксонського.***

Темпоральна логіка розробляє апарат, за допомогою якого можна було б більш адекватно дослідити міркування про предмети і явища, які залежні від часу. Звідси і поділ часових логік за часовими рядами. ***Часові ряди незалежні один від одного, вони не зводяться один до одного, вони не повторюють один одного, нарешті, вони не перетинаються один з одним.*** Завдяки цьому часові ряди охоплюють, характеризують речі, явища, події, які відбувалися, відбуваються і будуть відбуватися у світі. Чи це буде світ описуваний гуманітарними науками, чи — природничими.

Таких рядів існує два.

Один з них позначають буквою А, другий — В.

Ряд А охоплює часовий простір з оцінками «буде», «було», «завжди буде», «завжди було».

Ряд В відображає часовий простір з оцінками «раніше», «пізніше», «одночасно».

Той розділ темпоральної логіки, який описує ряд А, називають А-логіка, а той розділ темпоральної логіки, який описує ряд В — часовою В-логікою.

а) Мова темпоральної логіки висловлювань

Мова темпоральної логіки висловлювань складається із засобів мови класичної логіки висловлювань і доданих до них знаків темпоральних модальностей.

Алфавіт

1. Пропозиційні змінні для позначення дескриптивних висловлювань:

$$p, q, r, \ldots$$

2. Пропозиційні зв'язки (константи): $\neg, \wedge, \vee, \supset, \backsim$.

3. Знаки темпоральних модальностей:

P — «було так, що ...»

F — «буде так, що ...»

H — «завжди було так, що ...»

G — «зажди буде так, що ...»

4. технічні знаки, якими є ліва та права дужки, кома, кома з крапкою, двокрапка, тире: (.),; : —

Дефініція формули:

1. Будь-яка пропозиційна змінна — формула.

2. Якщо A і B формули, то $\neg A$, $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \supset B$, $A \backsim B$, PA, FA, HA, GA ***— формули.***

3. Ніщо, крім вказаного в пунктах 1, 2 дефініції, не є формулою.

Наведена дефініція є ефективною.

Так, вирази $Hp \supset p$, $p \supset Fp$, $HFp \supset p$, $H(p \supset q) \backsim (Hp \supset Hq)$ ***є формулами***, а вирази $p \supset H \vee F$, $Pq \supset$, $pH \vee p$ ***формулами не будуть.***

Використовуючи мову темпоральної пропозиційної логіки, запишемо

Основні закони часової логіки

1. $Gp \supset Fp$

(*«Якщо після зими завжди наступатиме весна то, так воно і буде».*)

2. $Hp \supset Pp$

(*«Якщо завжди гіпотеза, яка підтверджувалася практично, перетворювалася в теорію, то так воно і було».*)

3. $\neg(Fp \wedge F\ p)$

(*«Невірно, що буде ясна погода і хмарна».*)

4. $\neg(Pp \wedge P\ p)$

(*«Невірно, що вирок був обґрунтованим і необґрунтованим».*)

5. $FFp \supset Fp$

(*«Якщо буде, що буде позитивний результат, то він буде».*)

6. $\neg H \neg Gp \supset p$

7. $FPp \equiv p \vee Fp \vee Pp$

(*«Буде так, що був успіх «київського Динамо», тільки якщо він є, або буде, або уже був».*)

8. $HGp \equiv p \wedge Hp \wedge Gp$

(*«Завжди було, що завжди в цю пору року, в цій місцевості настане гарна погода, тоді і тільки тоді, якщо вона є, завжди була і завжди буде».*)

Застосовуючи засоби мови темпоральної логіки висловлювань, визначимо темпоральні модальності одну через іншу.

$$\text{а) } Gp \equiv \neg F\ \overline{p}$$

(*«Завжди буде «**р**», тоді і тільки тоді, коли не буде «**не-р**». «Завжди в цю пору року, в цій місцевості буде ясна погода, тоді і тільки тоді, коли в цю пору року в цій місцевості не буде хмарної погоди».*)

$$\text{б) } Fp \equiv \neg G\ \overline{p}$$

(*«Буде «**р**», тоді і тільки тоді, коли не завжди буде «**не-р**». «Буде ясна погода, тоді і тільки тоді, коли не завжди буде хмарна погода».*)

$$\text{в) } H\ \overline{p} \equiv \neg P\ \overline{p}$$

(*«Завжди була «**р**», тоді і тільки тоді, коли не було «**не-р**». «Завжди був позитивний результат чемпіонату, тоді і тільки тоді, коли не було жодного випадку негативного результату».*)

$$\text{г) } Pp \equiv \neg H\ \overline{p}$$

(*«Було «**p**», тоді і тільки тоді, коли не завжди було «**не-p**». «Був позитивний результат експерименту, тоді і тільки тоді, коли не завжди був негативний».*)

За допомогою темпоральних модальностей можна визначити алетичні модальності:

$$\textbf{а)}\ \Box p \equiv p \wedge Gp$$

(*«**p**» є необхідним, тоді і тільки тоді, коли «**p**» є і завжди буде». «Необхідною ознакою металу є електропровідність, тоді і тільки тоді, коли вона є і завжди буде».*)

$$\textbf{а')}\ \Box p \equiv Hp \wedge p \wedge Gp$$

(*«**p**» є необхідним, тоді і тільки тоді, коли «**p**» завджи було, є і завжди буде». «Необхідно, що студенти повинні складати іспити, тоді і тільки тоді, коли завжди так було, є і завжди так буде».*)

$$\textbf{б)}\ \Diamond p \equiv p \vee Fp$$

(*«**p**» є можливим, тоді і тільки тоді, коли «**p**» є або буде». «Перемага нашої команди в чемпіонаті можлива, тоді і тільки тоді, коли вона є або буде».*)

$$\textbf{б')}\ \Diamond p \equiv Pp \vee p \vee Fp$$

(*«**p**» можливо, тоді і тільки тоді, коли було «**p**», або є, або буде». «Можливо є поїздка до Варшави, тоді і тільки тоді, коли це було, або є, або буде».*)

б) Темпоральна логіка і теорія можливих світів

Відомо, що класична логіка описувала ситуації, які відбувалися в статичному світі. Тут висловлювання розглядалися як незмінно істинні і незмінно хибні, а предмети або володіли певними ознаками, або ні.

Але існує й інший світ, який знаходиться в постійному русі і зміні. Тому для опису цього динамічного світу потрібна нова логіка, засобами якої можна було б охопити концептуальну структуру мінливого світу.

Візьмемо для прикладу декілька висловлювань:

1) *2 + 3 = 5;*

2) *Бібліотека ім. Максимовича більша за Парламентську бібліотеку;*

3) *Йде дощ.*

Висловлювання *1* істинне раз і назавжди. Висловлювання *2* також істинне, але потрібно враховувати той факт, що фонди бібліотеки змінюються. Нарешті, висловлювання *3* має оцінку «істинна» лише відносно локалізованого простору і часу. В один і той же час дощ може йти і може не йти. *Наприклад: «Йде в Києві, але не йде в Одесі»*. Також в одному й тому ж місці дощ може йти, а може не йти: *«Йти ранком, але не вдень»*.

Наведені приклади показують, що істинна оцінка висловлюванння змінюється залежно від просторово-часової локалізації. ***Але треба мати на увазі, що не простір і час сам по собі змушують змінюватися істинністні оцінки висловлювання, а відмінність між різними частинами світу і змінами в одній і тій же частині світу.***

Іншими словами, існує тісний зв'язок між часом і зміною, між простором і відмінністю. Зміна має місце, коли дещо збільшується або зменшується у розмірах, або змінює свій колір чи температуру. Зміна включає в себе стан справ, подію і процес.

Стан справ, як один із видів факту, виражає інваріантність знання (з точки зору логіки і методології науки) і фіксується висловлюваннями (пропозиціями). Стани справ — це ті цеглинки, із яких будуються події, процеси, зміни.

Для більш ефективного аналізу поняття ***«зміна»*** введемо темпоральну логічну зв'язку ***«і потім»***. Цей сполучник є бінарним. Позначається він символом ***T***.

Оскільки ми домовилися, що стани справ представляють пропозиції, то аргументами ***T***, як і для істинністних сполучників, виступають пропозиційні змінні — ***p, q, r, ...***. ***Проте необхідно враховувати, що аргумент, який стоїть зліва від T, — це стан, який існує в даний момент (існує зараз), а аргумент, який справа, — це стан, який описує наступний момент часу.***

Сполучник ***T*** нагадує кон'юнкцію, тому його можна називати ***темпоральною кон'юнкцією***. Але на відміну від звичайної кон'юнкції ***темпоральна кон'юнкція асиметрична і не асоціативна***.

Використовуючи сполучник ***T***, ми можемо спостерігати, що відбуватиметься з елементарним станом справ.

Тут можливі чотири варіанти стану справ:

1) має місце стан «p» і він продовжує залишатися — «pTp»;

2) «р» є, але зникає (перестає існувати) — «рТ~р»;

3) «р» немає місця, але виникає (стає існуючим) — «~рТр»;

4) «р» немає і продовжує бути відсутнім — «~рТ~р».

Випадок ***2*** і ***3 свідчать про наявність зміни***, а ***1*** і ***4*** — ***про її відсутність***. Будемо називати ***2*** і ***3*** варіанти ***елементарними змінами***.

Подія — це одноразовий перехід від одного стану справ до іншого. Процес — це багаторазовий прехід від станів до станів.

Таким чином, подія і процес — це різновиди зміни, яле якщо подія трапляється, то процес триває.

Подію треба рогзлядати як таку зміну, яка є парою станів, справ (початкового і кінцевого), що упорядковані у часі. Але будь-яка подія відбувається у часі. Мірилом перебування подій у часі (одиницею виміру) є момент часу. Саме момент часу детермінує істинісні оцінки темпоральних висловлювань.

Момент часу — це множина подій, які одночасно відбуваються.

Момент часу можна порівняти із математичною точкою на часовій прямій, але скоріше це проміжок часу, самототожність якого гарантована тим, що ніяка заміна не може відбутися протягом нього. Фактично момент часу фіксує конкретну подію, що пов'язана з ним, або множину подій, які знаходяться у відношенні часової координації.

Момент часу в темпоральній логіці є аналогом поняття «можливий світ». У зв'язку з цим відношення досяжності між можливими світами ***R*** розглядається тут як часове відношення між моментами часу. Звідси й характерні властивості відношення досяжності в темпоральній логіці.

Відношення R може бути:

— транзитивним;

— лінійним;

— дискретним;

— безкінечним;

— скінченним;

— циклічним.

Під часовою координацією розуміють співставлення частин подій на основі відношень «раніше», «пізніше» або «одночасно».

Наприклад, вираз *«Битва при Бородіно відбувалася раніше битви при Ватерлоо»* означає, що будь-яка частина першої події відбувалася раніше, ніж будь-яка частина другої.

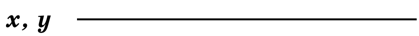
У тому випадку, коли події не можуть координуватися, говорять, що вони належать до різних часових потоків. Дамо визначення часового потоку.

Часовий потік — це множина моментів часу, які фіксують події, що можна порівнювати за часом.

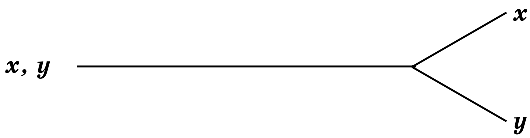
Найпростіший часовий потік складається з одного моменту часу. А оскільки ми прийняли, що момент часу — це є можливий світ, то будь-який часовий потік ми можемо вважати певним можливим світом.

Комбінації часових потоків утворюють часові структури. Найбільш характерними є такі:

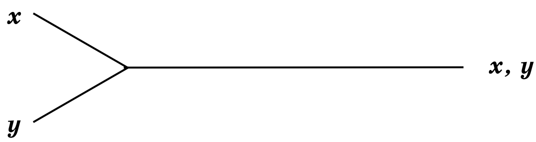
I. ***Лінійний час.***



II. ***Лінійний час із розгалуженням у майбутньому.***



III. ***Лінійний час із розгалуженням у минулому.***



IV. ***Лінійний час із розгалуженням у минулому і майбутньому.***

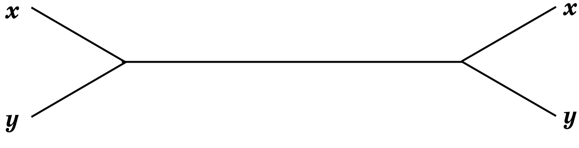


Схема **I** відповідає найпростішій часовій структурі, що є реальним курсом подій.

Схема **II** представляє таке відношення між потоками, коли усі події потоків x і y до певного моменту часу співпадають, а потім ні. З цього моменту часу відбувається розгалуження потоків, виникають можливі напрямки, за якими піде курс подій. Таке відношення між потоками називається ***розгалуженням***.

Схема **III** фіксує відношення між потоками, коли події потоків x та y до певного моменту не мають нічого спільного, а потім із цього моменту співпадають. Іншими словами, схема **III** представляє можливості, які були в минулому.

Схема **IV** показує, що час, який розгалужувався в минулому, із певного моменту розгалужується в майбутньому.

Наведені схеми співвідношення часових потоків свідчать про те, що коли потоки x та y мають спільну подію, то це дає можливість порівнювати решту подій цих потоків.

в) *Метод аналітичних таблиць у темпоральній логіці*

Введемо аналітичні правила для темпоральних модальностей. Всього цих правил вісім відповідно до кількості модальних операторів (***P, F, H, G***).

I.

$$T_G \quad \frac{TtGA}{Tt'A}$$

— читається: *подія **A** завжди буде в деякий момент часу **t’**, якщо **A** буде істинним у будь-який наступний момент часу, який є досяжним із **t** (**tRt’**, **t’** — будь-який наступний момент часу, який є досяжним із **t**).*

II.

$$F_G \quad \frac{FtGA}{Ft'A}$$

— читається: *подія **A** ніколи не буде в деякий момент часу **t**, якщо **A** буде хибним хоча б в один наступний момент часу **t’**, який є досяжним із **t** (**tRt’**, де **t’** — деякий наступний момент часу, який ще не зустрічався в попередніх рядках тієї гілки таблиці, де застосовується правило F_G, і який є досяжним із **t**).*

III.

$$T_H \quad \frac{TtHA}{Tt'A}$$

— читається: *подія* ***A*** *завжди була в деякий момент часу* ***t****, якщо* ***A*** *було істинним в будь-якому попередньому моменті часу, який є досяжним із* **t** (***tRt’****, де* ***t’*** *— будь-який попередній момент часу, який є досяжним із* ***t***).

IV.

$$F_H \quad \frac{FtHA}{Ft'A}$$

— читається: *події* ***A*** *ніколи не було в деякий момент часу* ***t****, якщо* ***A*** *було хибним хоча б в одному попередньому моменті часу* ***t’****, який є досяжним із* **t** (***tRt’****, де* ***t’*** *— деякий попередній момент часу, який ще не зустрічався в попередніх рядках тієї гілки таблиці, де застосовувалося правило* F_H*, і який є досяжним із* ***t***).

V.

$$T_F \quad \frac{TtFA}{Tt'A}$$

— читається: *подія* ***A*** *буде в деякий момент часу* ***t****, якщо* ***A*** *буде істинним хоча б в один нступний момент часу, який є досяжним із* ***t’*** (***tRt’****, де* ***t’*** *— деякий наступний момент часу, якого ще не було в рядках тієї гілки таблиці, де застосовувалося правило* ***TF****, і який є досяжним із* ***t***).

VI.

$$F_F \quad \frac{FtFA}{Ft'A}$$

— читається: *події* ***A*** *не було в деякий момент часу* ***t****, якщо* ***A*** *буде хибним у будь-який наступний момент часу* ***t***□*, який є досяжним із* **t** (***tRt***□*, де* ***t***□ *— будь-який момент часу, який є досяжним із* ***t***)

VII.

$$T_P \quad \frac{TtPA}{Tt'A}$$

— читається*: подія* ***A*** *була в деякий момент часу* ***t****, якщо* ***A*** *було істинним хоча б в один попередній момент часу* ***t’****, який є досяжним із* **t** (***tRt’****, де* ***t’*** *— деякий попередній мо-*

мент часу, якого ще не було в попередніх рядках тієї гілки таблиці, де застосовувалося правило T_P*, і який є досяжним із* ***t*****).**

VIII.

$$F_P \quad \frac{FtPA}{Ft'A}$$

— читається: *події* ***A*** *не було в деякий момент часу* ***t****, якщо* ***A*** *було хибним у будь-який попередній момент часу* ***t'****, який є досяжним із* **t** **(*****tRt'*****,** *де* ***t'*** *— будь-який попередній момент часу, який є досяжним із* ***t*****).**

За допомогою наведених аналітичних правил можна побудувати аналітичні таблиці для будь-яких формул темпоральної логіки з метою встановлення їх семантичного статусу.

Звернемося до ілюстрації.

Маємо формулу **p ⊃ GPp.**

Шляхом побудови аналітичної таблиці з'ясуємо, чи є ця формула логічним законом, чи протиріччям, ви виконуваною:

	0. Ft (p ⊃ GPp)	
I	*1. Tt p*	*F⊃*
	2. Ft GPp	
II	*3. Ft' Pp*	
III	*4. Ft p*	*FG, 2*
	+	

3. Деонтична логіка

Назва ***«деонтична логіка»*** походить від грецького слова ***deon***, що в перекладі означає *«обов'язок», «правильність»*.

Д е о н т и ч н у логіку можна визначити як розділ модальної логіки, що досліджує природу, властивості, відношення деонтичних висловлювань та їх функціонування в структурі міркування.

До деонтичних висловлювань ми відносимо ті висловлювання, які є носіями різноманітних норм. ***Зовнішньою ознакою деонтичного висловлювання є терміни «дозволено», «заборонено», «обов'язково» та їх різновиди.***

Наприклад: «Заборонено їхати на червоне світло», «Середній термін повинен бути розподіленим у простому категоричному силогізмі», «Дозволено користуватися кредитною карткою».

У повсякденному житті, в теоретичних дослідженнях, у практиці міркувань ми стикаємося з різноманітними нормами. Це і закони, які регулюють правові відносини між людьми в державі, і технічні норми, які використовують в різних видах діяльності людини, і команди різних рангів та ступенів, і правила граматики, логіки, правила гри, і моральні принципи, і ідеали, звичаї тощо.

Але при усьму розмаїтті норм для них властива спільна структура.

До структури норм входить чотири складові частини:

а) характер;

б) зміст;

в) умови застосування;

г) суб'єкт.

Дамо визначення кожного структурного елемента норми.

Х а р а к т е р о м норми є вказівка на дозвіл, заборону, зобов'язання певної дії.

З м і с т о м норми називається вчинок, намір, прагнення, дія, яка повинна бути, може або не повинна бути виконана.

У м о в о ю застосування норми є вказана в нормі ситуація, з настанням якої реалізується або може бути реалізованою дія, що не передбачається даною нормою.

Нарешті, ***с у б'є к т о м норми є особа або група осіб, яким адресована норма.***

Поділ норм на види носить позалогічний характер. Деонтична логіка складається із множини пов'язаних між собою систем, ***відмінність між якими полягає в засобах аналізу деонтичних висловлювань.*** Це означає, що тут немає особливої «логіки імперативів» і спеціальної «логіки власне норм».

Отже, одна і та сама нормальна система може використовуватися для аналізу логічної поведінки будь-якого змісту.

Деонтична логіка має свою історію. Перші систематичні спроби дослідження деонтичних висловлювань належать ***Готфріду Лейбніцу.*** Саме він намагається дослідити природу деонтичних висловлювань та логічні відношення між ними. Результати досліджень ***Г.Лейбніца*** не справили особливого враження на його сучасників. І лише у ***XVIII ст.*** англійський вчений ***І. Бентам*** звертається до проблематики, якою займався ***Г. Лейбніц***, і висуває ідею створення логіки повелінь, або логіки волі.

Справжня історія деонтичної логіки починається в ***XX ст.*** завдяки працям ***Е. Малі***. Він зробив спробу аксіоматично описати деонтичні поняття і створити систему деонтичної логіки. Через чверть століття, ***в 1951 р.*** завдяки праці ***Г. фон Врігта «Деонтична логіка»*** розпочинається власне сучасна деонтична логіка. Тут описуються її основні проблеми, формулюються напрямки їх розв'язання, систематизуються основні деонтичні категорії, закладаються підвалини розробки мови деонтичної логіки.

а) Характеристика деонтичного висловлювання

Починаючи з перших спроб дослідити деонтичні висловлювання, серед логіків і філософів панували сумніви щодо можливості побудови деонтичної логіки. Фактично це і було причиною того, що результати дослідження ***Г.Лейбніцом*** понять ***«дозволено», «обов»язково», «заборонено», «байдуже»*** та його спроби пов'язати ці поняття з основними положеннями логічного вчення ***Арістотеля*** були скептично сприйняті тогочасними вченими.

Вважалося, що логіка має справу з висловлюваннями, які є істинними або хибними, а відношення логічного слідування передбачає саме систематизацію таких висловлювань. Деонтичним же висловлюванням не притаманні оцінки «істина» і «хиба» (вони представляють світ належного), а тому із них будувати міркування, в основі яких лежить відношення логічного слідування, неможливо. Фактично йшлося про можливість створення деонтичної логіки.

В історії логіки дана проблема отримала назву ***«дилема Йоргенсена»*** за ім'ям датського філософа і логіка ***Й. Йоргенсена***.

Незважаючи на те, що деонтичні висловлюваня не володіють оцінками «істина», «хиба», у практиці міркувань можна зустріти ситуації, коли формулюються висновки, елементами яких є імперативи.

Наприклад: 1. «Виконуйте правила гри в шахи»;

2. «Ви учасник шахового турніру»;

3. «Поступайде згідно з правилами гри в шахи».

Виходить, що висновок в імперативній відміні може бути отриманий із засновків, серед яких є імперативи. Дискусії навколо ***«дилеми Йоргенсена»*** присвячена досить солідна література. В розмаїтті точок зору з цього приводу можна вивести деяку синтезуючу, згідно з якою суперечність між звичайною дефініцією логічного слідування в термінах істини і дозволом будувати міркування із використанням деонтичних висловлювань, які не є носіями істини, розв'язується або шляхом встановлення зв'язку деонтичних висловлювань з дескриптивними, або шляхом розширення поняття логічного слідування.

«Дилема Йоргенсена» і дискусія навколо неї показали, що деонтичні висловлюваня мають своєрідну природу (на відміну від дескриптивних) і вони поводять себе самобутньо в логічному процесі. І це цілком природньо. Але між ними є внутрішній зв'язок, який забеспечує, визначає логічний аналіз деонтичних висловлювань і побудову деонтичної логіки.

Будь-якому деонтичному висловлюванню можна співставити паралельне йому дескриптивне висловлювання, яке виражає зміст бажання або команди. ***У зв'язку з цим за кожним деонтичним висловлюванням треба вбачати два фактори:***

— ***імперативний*** і

— ***дескриптивний.***

І м п е р а т и в н и й фактор демонструє, що деяка подія чи річ бажається або наказується, а д е с к р и п т и в н и й характеризує бажану або наказувану дію чи річ. Саме дескриптивний фактор може бути виділений із імператива і представлений асерторичним висловлюванням. Це дає змогу оцінити його як істинне, коли команда виконується, і хибним, коли цього немає.

Іншими словами, необхідно враховувати різницю між нормою та її описом.

Якщо норма нічого не описує, оскільки вона містить лише регулятиви людської поведінки і тому не може бути носієм оцінок «істина», «хиба», то опис норми оцінюється саме як істинний або хибний.

Наприклад, візьмемо деонтичне висловлювання, яке випливає із *«Правил гри в шахи»*: *«Королева повинна «хо-*

дити» таким-то чином». У цьому висловлюванні нічого не говориться про дійсність, а лише вказується, як себе повинна поводити конкретна шахова фігура на шаховому полі (тому воно не може бути оцінене як істинне чи хибне). Але, якщо підійти до цього висловлювання з іншого боку і вбачити в цьому твердження, що певна шахова фігура повинна діяти належним чином відповідно до існуючих правил, то ця ситуація може бути оцінена в термінах «істина», «хиба». І тут йдеться не про норму, а про її опис. Фактично це висловлювання треба читати так: *«Істинно, що згідно з правилами гри в шахи королева повинна «ходити» таким-то чином».*

Отже, якщо враховувати ту обставину, що деонтична логіка аналізує не лише самі норми, а й висловлювання про них, то цілком слушно буде представляти її як відповідний розділ модальної логіки.

б) Мова деонтичної пропозиційної логіки

До алфавіту мови деонтичної пропозиційної логіки входить:

— ***множина пропозиційних змінних;***
— ***список пропозиційних сполучників;***
— ***перелік деонтичних операторів (O, P, I, F).***

Опишемо деонтичні оператори.

Op *— обов'язкова дія, яка веде до стану, що описується висловлюванням «****p****».*

Pp *— дозволена дія, яка веде до стану, що описується висловлюванням «****p****».*

Ip *— байдужа дія, яка веде до стану, що описується висловлюванням «****p****».*

Fp *— заборонена дія, яка веде до стану, що описаний висловлюванням «****p****».*

Введемо визначення деонтичних операторів:

$Op =_{Df} \sim P \sim p$ (*«обов'язковим є «****p****», якщо не дозволено «****не-p****»*);

$Pp =_{Df} \sim O \sim p$ (*«дозволеним є «****p****», якщо не обов'язковим є «****не-p****»*);

$Fp =_{Df} O \sim p$ (*«заборонеим є «p», якщо обов'язковим є «****не-p****»*);

$Ip =_{Df} PpP \sim p$ (*«байдужим є «****p****», якщо дозволеним є «p» і дозволеним є «****не-p****»*).

Дамо визначення формули:

1. Будь-яка пропозиційна змінна є формулою.

2. Якщо p і q формули, то $\sim p$, $p \wedge q$, $p \supset q$, $p \vee q$, Op, Pp, Fp, Ip є формулами.

3. Ніщо крім вказаного в пунктах 1 і 2 даної дефініції не є формулами.

Згідно з цим визначенням вирази Fp, $O\sim p$, $\sim Fp \wedge Ip$ є формулами деонтичної логіки, а вирази pF, $Ip(p \wedge O)$ такими не є.

Використовуючи засоби мови деонтичної пропозиційної логіки, задамо аксіоматичну побудову деонтичної логіки.

До алфавіту цієї системи включимо два деонтичні оператори O та I, як базові, і на їх основі визначимо решту:

$Fp = Df\ O\sim p$ (*«р» є забороненим, «не-р» є обов'язковим»*);

$Pp = Df\ Op \vee Ip$ (*«р» є дозволеним, якщо «р» є обов'язковим або байдужим*).

Наведені дефініції можна прочитати ще й так: *«Заборонені дії, від виконання яких треба утримуватися»*; і *«Дозволені дії, які є обов'язковими або байдужими»*.

За аксіоми візьмемо наступні тавтології:

Ax 1. $Op \wedge Oq \supset O(p \wedge q)$

Ax 2. $O(p \vee q) \vee I(p \vee q) \equiv Op \vee Oq \vee Ip \vee Iq$

Ax 3. $Ip \supset I\sim p \wedge \sim Op$.

До правил перетворення віднесемо такі положення:

R1 — правило підстановки (П/п);

R2 — правило відділення (Мр);

R3 — правило екстенсіональності;

R4 — правило перетворення тавтологій класичної пропозиціної логіки в теореми деонтичної логіки.

Дана аксіоматична система містить низку цікавих положень про логічні зв'язки нормативних тверджень:

I. $O(p \wedge q) \equiv Op \wedge Oq$

II. $I(p \vee q) \supset Ip \vee Iq$

III. $F(p \vee q) \equiv Fp \vee Fq$

IV. $P(p \vee q) \equiv Pp \vee Pq$

V. $Ip \supset \sim Op \wedge \sim Fp$

VI. $Ip \supset Pp \wedge P\sim p$

VII. $Ip \equiv I\sim p$

VIII. $Op \supset Pp$

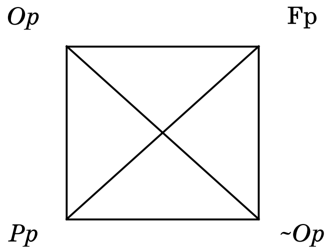
IX. $O(p \supset q) \wedge Op \supset Oq$

X. $O(p \supset q) \wedge Fq \supset Fp$

XI. $O(p \supset q) \supset (Pp \supset Pq)$

XII. $O(p \supset q) \supset (O{\sim}q \supset O{\sim}p)$
XIII. $Op \supset {\sim}Ip$
XIV. $Fp \supset {\sim}Ip$.

Крізь наведені тавтології проглядаються логічні залежності ***O, P, F***, які можна зобразити схемою, що носить назву ***квадрата протилежностей.***



Із цієї схеми випливають такі твердження:

«Якщо дія обов'язкова, то вона дозволена» —
$(Op \supset Pp)$.
«Якщо дія заборонена, то вона необов'язкова» —
$(Fp \supset {\sim}Op)$.
«Ніяка дія не є обов'язковою і забороненою одночасно» —
${\sim}(Op \wedge Fp)$.
«Будь-яка дія або обов'язкова, або необов'язкова» —
$(Op \vee {\sim}Op)$.
«Будь-яка дія або дозволена, або заборонена» —
$(Pp \vee Fp)$.
«Якщо дія заборонена, то вона не дозволена» —
$(Fp \supset {\sim}Pp)$.
«Якщо дія дозволена, то вона не заборонена» —
$(Pp \supset {\sim}Fp)$.
«Все, що не заборонено, те дозволено» —
$({\sim}Fp \supset Pp)$.

Логічні відношення між ***O, P, F*** за квадратом протилежностей фокусують у собі принципи деонтичної повноти і деонтичної несуперечності, завдяки яким можливим є розширення нашої аксіоматичної системи.

Принцип деонтичної повноти можна сформулювати наступним чином: «Будь-яка дія або обов'язкова, або байдужа, або заборонена»:

$$Op \vee Ip \vee Fp.$$

Використовуючи оператор «P», принцип деонтичної повноти можна сформулювати у вигляді декількох еквівалентних положень:

а) $\sim O{\sim}p \supset Pp$ — (*«дія дозволена, якщо утримання від неї не є обов'язковим»);*

б) $\sim Fp \supset Pp$ — (*«якщо дія не заборонена, то вона дозволена»);*

в) $Pp \vee P{\sim}p$ — (*«будь-яка дія або дозволена, або дозволено утримання від її виконання»*).

Принцип деонтичної повноти передбачає, що в будь-якому зібранні норм або в кодексі охоплюються різноманітні людські дії. Вони детермінуються явними або імпліцитними (неявними) нормами, які вкажуть на обов'язковість, дозволенність, забороненність, байдужість виконання якихось норм. Відомо, що реальні кодекси мають справу лише з чітко визначенним колом дій і не визначають нормативний статус не тільки поки що невідомих або неможливих способів поведінки, але й тих дій, виконання чи не виконання яких не має сенсу робити об'єктом будь-яких норм.

Отже, ***включення в деонтичну логіку принципу повноти визначає межі класу нормативних систем, для дослідження яких може бути застосована логіка.***

Введемо ***дефініцію принципу деонтичної несуперечливості: «Виконанння дії і утримання від неї не можуть бути обов'язковими одночасно»***

$$\sim(Op \wedge O{\sim}p).$$

Аналогами принципу деонтичної несуперечливості є вирази:

а) *«Ніяка дія не є обов'язковою і забороненою одночасно»* — $\sim(Op \wedge Fp)$;

б) *«Якщо дія обов'язкова, то не дозволено не виконувати її»* — $(Op \supset \sim P{\sim}p)$.

Принцип деонтичної несуперечливості є критерієм поділу кодексів на ***досконалі і недосконалі. Адже наявність в нормативному кодексі суперечності ставить носія нормативних актів або суб'єкта в ситуацію, коли будь-який його вчинок веде з необхідністю до порушення одного із своїх обов'язків. Цим і визначається недосконалість кодексу.***

У реальному житті зустрічаються кодекси, які містять конфлікти моральних, правових та інших обов'язків. Часто існуючі нормативні системи до певної міри недосконалі. Ця непослідовність обумовлюється тим, що нові права і обов'язки не узгоджуються зі старими.

Але треба мати на увазі, що ***деонтична логіка не просто описує нормативні міркування і реальні кодекси, а формулює (і це найголовніше) критерії раціонального міркування в середовищі норм, які надають розумні підстави для дії. Звідси міркування не може бути назване раціональним, якщо воно дозволяє обов'язковість виконання забороненої дії.***

Таким чином, принцип деонтичної несуперечливості (як і принцип деонтичної повноти) відноситься до фундаментальних положень деонтичної логіки.

в) Деонтична логіка і теорія «можливих світів»

Фундатором деонтично можливих світів є ***І. Кант.*** Досліджуючи у ***«Критиці практичного розуму»*** проблеми моралі, він приходить до висновку, що світ, який утворений за законами моралі, є одним із варіантів можливого світу, де все ідеально діє і взаємодіє. Це світ, який би нам хотілось бачити. Іншими словами, це світ, який є конкретизацією можливого світу у вигляді нормативного тлумачення реальності.

Виходячи за рамки кантівського розуміння деонтичного можливого світу, можна сказати, що деонтичний світ — це і сукупність культурних зразків народних звичаїв, досвіду, кодекс, правила гри тощо. В цьому розумінні конституція — це такий деонтично можливий світ, який є описом ідеальної держави, якою їй потрібно бути, описом належних вчинків і дій рядових громадян, урядовців усіх рівнів і самого президента.

Прокоментувати вищезазначене можна ще й таким чином.

Якщо в світі, що описується правилами гри в шахи, є наявні норми, то передбачається, що ці норми виконуються в усіх варіантах шахових партій. Варіанти шахових партій — це сукупність можливих світів.

Особливістю деонтичного можливого світу є те, що він детермінується духом належного. Іншим словами, сказане в реальному світі про належне означає, що в де-

якому деонтично можливому світі зміст належного є істинним. Тобто, тут ми співставляємо сказане не з дійсним світом, а з прийнятими правилами, нормами.

Наприклад, поведінка шахових фігур на шаховій дошці відповідає правилам, а результат партії є істинним, тому що він узгоджується в даній партії (в даному деонтично можливому світі) з існуючими правилами.

Деонтично можливі світи — це альтернативи у вигляді варіантів шахових партій, проектів конституцій, спроб виходу держави із кризових ситуацій, проектів бюджету, поданих на розгляд парламенту (тобто це всі ті ситуації, поява, існування яких на цьому світі регламентується правилами гри, законами держави, економіки, ринку).

Звідси, якщо Верховна Рада ухвалила проект бюджету, то це означає, що створено ідеальний шлях розвитку держави у певному історичному проміжку.

Сам факт ухвалення бюджету назвемо реальним, дійсним світом ***w***, а функціонування держави відповідно до прийнятого бюджету — деонтично можливим світом ***w'***.

Або, якщо в конституції описано, як повинні функціонувати органи влади, то припускається, що це дійсно так і відбувається. Між світом, в якому створюється деонтичний світ, і цим деонтичним світом існує відношення досяжності ***R***.

В ***алетичній логіці*** відношення досяжності ***R*** — це огляд, співставлення з можливими комбінаціями логічних значень із множини ***і, х***, в ***темпоральній логіці R*** — це злиття з часовим потоком, в ***деонтичній логіці R*** — це узгодження з правилами, кодексами, приписами тощо.

Характерною рисою відношення досяжності R в деонтичній логіці є те, що воно не може бути рефлексивним, але воно при будь-яких варіантах обов'язково детермінується наступною умовою:

«Для будь-якого реального світу w існує деонтичний світ w', який є досяжним із w».

Приймемо модальності ***P*** і ***O*** за основні і введемо ***дефініції відповідних аналітичних правил.***

I.

$$T_O \quad \frac{TwOA}{Tw'A}$$

— за умови ***wRw'***, де ***w'*** — будь-який деонтичний світ, який є досяжним із деякого реального світу ***w***.

Прочитати це правило можна так: ***«Те, що є обов'язковим у реальному світі TwOA, є істинним у деонтичному світі Tw'A»;*** або: ***«Якщо у реальному світі w істинним є OA, то у будь-якому деонтичному світі w□ істинним є A».***

II.

$$F_O \quad \frac{FwOA}{Fw'A}$$

— при умові ***wRw'***, де ***w'*** — деонтичний світ, який ще не зустрічався в рядках тієї гілки таблиці, де застосовувалося правило F_O, і який є досяжним із ***w***.

Прочитати це правило можна так: ***«Якщо у реальному світі w хибним є OA, то існує хоча б один деонтичний світ w', де хибним є A»;*** або: ***«Те, що не є обов'язковим у реальному світі w, може бути хибним у деонтичному світі w'».***

III.

$$T_P \quad \frac{TwPA}{Tw'A}$$

— при умові ***wRw'***, де ***w'*** — один із деонтичних світів, який ще не зустрічався в рядках тієї гілки таблиці, де застосовувалося правило ***Tp*** і який є досяжним із ***w***.

Прочитати це правило можна так: ***«Якщо у реальному світі w істинним є PA, то хоча б в одному деонтичному світі w' істинним буде A»;*** або ***«Те, що є дозволеним у реальному світі, може виявитися істинним у деонтичному світі».***

IV.

$$F_P \quad \frac{FwPA}{Fw'A}$$

— при умові ***wRw'***, де ***w'*** — будь-який деонтичний світ, який є досяжним із ***w***.

Прочитати це правило можна так: ***«Якщо у реальному світі w хибне PA, то у будь-якому деонтичному світі w' хибним є A»;*** або: ***«Те, що не є дозволеним у реальному світі, є хибним у деонтичному світі».***

Застосуємо наведені аналітичні правила для здійснення проблеми розв'язання в деонтичній логіці.

Маємо вираз: **Op ⊃ ~O~p.**

Побудуємо для нього аналітичну таблицю:

0. Fw Op ⊃ ~O~p	
1. Tw Op	
2. Fw ~O~p	***F⊃,0***
3. Twr′ p	***T 0,1***
4. Tw O~p	***F~,2***
5. Twr′ ~p	***T 0,4***
6. Fwr′ p	***T~***
+	

Із таблиці видно, що рядки ***3*** і ***6*** вступають у суперечність, а, отже, даний вираз є логічним законом.

Візьмемо ще один приклад: ***~P(Op ∧ ~Pp)***

0. Fw ~P(Op ∧ ~Pp)	
1. Tw P(Op ∧ ~Pp)	***F~,0***
2. Twr′ (Op ∧ ~Pp)	***Tp,1***
3. Twr′ Op	
4. Twr′ ~Pp	***T ∧,2***
5. Twr′ p	***T 0,3***
6. Fwr′ Pp	***T~,4***
7. Fwr′ p	***Fp,6***
+	

Отже, дана формула також є тавтологією.

Таким способом можна дослідити будь-який вираз деонтичної логіки.

4. Епістемічна логіка

а) Визначення епістемічної логіки.

Е п і с т е м і ч н о ю логікою називається розділ модальної логіки, який досліджує природу, властивості, відношення епістемічних висловлювань у структурі міркування.

Назва ***«епістемічна логіка»*** походить від грецького слова ***episteme*** — що означає *знання.* Саме епістемічне висловлювання можна визначити як особливий вид висловлювання, що містить ***модальні оцінки «знаю», «думаю», «вважаю», «передбачаю», «припускаю», «доведено», «вірю» та їх аналоги у особистісній і безособистісній формі.***

Наприклад:

1. «Відомо, що Колумб відкрив Америку»;

2. «Доведено, що квадрат гіпотенузи дорівнює сумі квадратів катетів»;

3. «На мою думку, в цій місцевості є джерела мінеральної води».

Особливістю епістемічних модальностей є те, що вони характеризують різні періоди, стани формування знання як результату пізнавального процесу. Тому терміни ***«знаю», «вірю», «гадаю», «доведено» з одного боку, фіксують етапи, періоди формування знання, а з іншого*** (***стосовно суб'єкту пізнання, яким виступає людина як родова істота***) ***— це оцінки станів формування знання, які проходять, вживаються в особистісний духовний світ людини, що виступає виразником, носієм конкретних висловлювань.***

Це випливає із природи знання, як результату розв'язання протиріччя між суб'єктом і об'єктом пізнання, як результату пізнавального процесу, що знаходить своє підтвердження в практиці. Знання в цьому розумінні виступає протилежністю неуцтву. Але знання як результат пізнавального процесу не є чимось готовим, закам'янілим, раз і назавжди даним, що протистоїть своєму антиподу — неуцтву. Інакше можна прийти до тієї точки зору, що існує знання і неуцтво. В той час як у реальному пізнавальному процесі існують ступені, стани знання, а саме: переконання, непевна думка[1], віра, припущення, передбачання, сумнів. Кожен із названих епістемічних станів може набути форми знання за певних умов того контексту, в якому здійснюється пізнавальний процес. А до цього моменту перераховані стани відображають рухливість, неспокій, життя того, що ми називаємо знанням і досягнення чого є найвищою винагородою будь-якого дослідника.

[1] Переклад з російського слова «мнение».

Дамо визначення основних епістемічних модальностей стосовно нашого предмета розгляду.

П е р е к о н а н н я м, або суб'єктивною достатністю, є свідоме визнання істинним якогось положення стосовно особи, яка його висловлює, або до якої воно відноситься, або якій воно адресується. Іншими словами, переконання є свідоме визнання чогось істинним для самого себе.

Наприклад, коли вчитель пояснює учневі теорему Піфагора, то вона постає для нього не просто істиною, яку відкрив багато віків тому для людської цивілізації давньогрецький мислитель, а стає істиною для нього, яку він відкриває слідом за вчителем, усвідомлюючи його пояснення доведення знаменитої теореми.

Д о с т о в і р н і с т ь, або об'єктивна достатність, є свідоме визнання чогось істинним для будь-кого.

Наприклад: «Після літа наступає осінь», «Найкоротша відстань між двома точками — пряма лінія» тощо.

Н е п е в н о ю д у м к о ю є визнання чогось істинним при відсутності суб'єктивної і об'єктивної достатності.

Наприклад: «На мою думку, в цьому лісі є білі гриби».

В і р а є свідоме визнання істинним якогось положення з точку зору суб'єктивної достатності при чіткому усвідомленні відсутності об'єктивної достатності.

Це часто призводить до того, що ми вимушені приймати деякі положення без доведення, без перевірки, оскільки вони на даний момент не можуть бути обгрунтованими. В цьому розумінні віра[1] є протилежністю знанню, як єдності суб'єктивної та об'єктивної достатності.

С у м н і в о м називається оцінка інформації, коли суб'єкт не переконаний ні в її істинності, ні в її хибності.

Переконання, віра, припущення можуть бути будь-якими, в той час як знання завжди істинне.

Це і зумовило два основні напрями епістемічної логіки:

а) логіка знання;

б) логіка переконання.

---

[1] На відміну від наукової віри релігійна віра намагається бути основою знання: «Я знаю тому, що вірю».

Є два варіанти логіки знання в залежності від того, яка оцінка береться за вихідну — ***«доведено»*** чи ***«істинно»***.

Система логіки, де вихідним є термін «доведено», має такі закони:

а) «Якщо висловлювання доведено, то воно істинне» (оскільки довести можна лише істину).

Наприклад, якщо висловлювання *«Сума внутрішніх кутів трикутника дорівнює 180 градусів»* доведено, то воно істинне.

б) «Логічний наслідок доведеного є також доведеним».

Наприклад, якщо положення *«Будь-яка планета є космічним об'єктом»* доведено, то і його наслідок *«Земля є космічним об'єктом»* також є доведенним.

в) «Якщо дещо доведено, то доведено, що воно доведено».

г) «Логічне протиріччя не доводиться» (тобто доведення хибного висловлювання не існує).

Наприклад, не можна побудувати доведення для висловлювань: *«Камінь проводить електричний струм», «Місяць має атмосферу» тощо.*

Коли ми за вихідний термін візьмемо поняття «істини», то матимемо логіку істини, де законами є такі положення:

а) «Якщо висловлювання істинне, то невірно, що його заперечення також істинне».

Наприклад, якщо істинно, що *«О. Дюма є автором роману «Три мушкетери»»*, то не вірно, що істинно, *«Нібито йому не належить авторство цього роману»;*

б) «Кон'юнкція істинна, якщо і тільки якщо обидва кон'юнкти істинні».

Наприклад, істинно, що Земля має природній супутник і атмосферу, тільки якщо істинно, що Земля має природній супутник і істинно, що вона має атмосферу.

У логіці переконання вихідним є термін «переконаний» («вірить»).

До законів логіки переконання відносять такі положення:

а) «S вірить, що перше і друге, якщо і тільки якщо він вірить, що перше і вірить, що друге»;

б) «Не можна одночасно вірити і сумніватися, бути переконаним і заперечувати; сумніватися і заперечувати»;

в) «S або переконаний у чомусь, або сумнівається в цьому, або відкидає це».

Наприклад, суб'єкт або переконаний в тому, що на Марсі є життя, або відкидає це;

г) «Неможливо бути переконаним одночасно в чомусь і в протилежному йому».

Наприклад, не можна одночасно вірити в те, що єгипетські піраміди створили люди і прибульці з космосу.

Для вихідних понять логіки знання ***«знає», «істинно», «доказувано», «вірно»,*** що логічний наслідок відомого є відомий, істинного — істинний, доказуваного — доведений.

У ***логіці переконання*** ця залежність має свою специфіку. Мається на увазі така ситуація: Чи буде суб'єкт переконаний в усіх логічних наслідках, що випливатимуть із прийнятих ним вихідних положень?

Наприклад, якщо суб'єкт переконаний в надійності правил гри в шахи, то він приймає все, що відбувається на шаховій дошці, як наслідок дії цих правил. Але погоджуючись з правилами гри як вихідними принципами, людина може не знати розв'язку конкретної шахової задачі.

Отже, якщо людина в чомусь переконана, то вона не завжди буде переконана в наслідках цього.

Підсумовуючи попередні міркування, необхідно звернути увагу на той факт, що хоча в епістемічній логіці є логіка знання і логіка переконання, але в назві цього розділу модальної логіки зберігається словосполучення ***«епістемічна логіка»*** (від грецького слова ***episteme***), бо в цьому розділі логічними засобами досліджуються саме знання як рухливий процес, як процес взаємодії названих епістемічних станів, між якими існують різноманітні зв'язки, переходи, відношення.

б) Мова епістемічної пропозиційної логіки.

Алфавіт мови епістемічної пропозиційної логіки включає:

1. Список пропозиційних змінних: (p, r, q та інші);

***2. Список пропозиційних зв'язок:* ($\sim, \wedge, \vee, \supset, \equiv$ *та інші*);**
3. Список епістемічних операторів:
К*[1] *а — а знає, що......
В а — а вірить, що......
С а — а сумнівається, що......
О а — а спростовує, що......

Введемо визначення формули:

1. Будь-яка пропозиційна змінна є формулою;

2. Якщо р і q формули, то ~ р, р ∨ q, р ∧ q, р ⊃ q, Кар, Вар, Сар, Оар;

3. Ніщо крім вказанного в пунктах 1 і 2 даної дефініції не є формулами.

Відповідно до цього визначення ***вирази Кар, р ⊃ Кар, ~ Оар, Ва ~ р, є формулами***, а вирази ***Ка, К ~ а ⊃, ОВа ⊃ р такими не є.***

Використовуючи засоби мови пропозиційної епістемічної логіки, опишемо характерні особливості логіки знання як одного з напрямків епістемічної логіки.

Дамо визначення епістемічних модальностей логіки знання Ка, Са, Оа у вигляді правил редукції. Такий підхід, з одного боку розкриє своєрідність кожного оператора, а з іншого — вкаже на специфічні зв'язки з іншими операторами.

$$\frac{Ka \sim p}{Oap}$$

— *«Якщо, **а** знає, що на Місяці немає земного тяжіння, то **а** спростовує наявність земного тяжіння на Місяці», або «із знання **не-р** випливає спростування **р**».*

$$\frac{Oa \sim p}{Kap}$$

— *«Із спростування **не-р**, випливає знання **р**».*

$$\frac{Ca \sim p}{Cap}$$

[1] Позначною для цього оператора є перша буква в англійському слові Knowledge (знання).

— «*Із сумніву* ***не-p****, випливає сумнів* ***p***».

$$\frac{\sim Kap}{\begin{array}{c|c} Cap & Oap \end{array}}$$

— «*Якщо а не знає* ***p****, то або* ***a*** *сумнівається в* ***p****, або* ***a*** *спростовує* ***p***».

$$\frac{\sim Cap}{\begin{array}{c|c} Kap & Oap \end{array}}$$

— «*Якщо* ***a*** *не сумнівається в* ***p****, то або* ***a*** *знає* ***p****, або* ***a*** *спростовує* ***p***».

$$\frac{\sim Oap}{\begin{array}{c|c} Kap & Cap \end{array}}$$

— « *Якщо* ***a*** *не спростовує* ***p****, то або* ***a*** *знає* ***p****, або сумнівається в* ***p***».

$$\frac{KA(p \vee Q)}{\begin{array}{c} Kap \\ Kaq \end{array}}$$

$$\frac{Ca(p \vee q)}{\begin{array}{c|c|c} Cap & Cap & Kap \\ Caq & Kaq & Caq \end{array}}$$

$$\frac{Oa(p \wedge q)}{\begin{array}{c|c|c|c|c|c} Oap & Oap & Kap & Oap & Cap & Cap \\ Oaq & Kaq & Oaq & Caq & Kaq & Caq \end{array}}$$

$$\frac{Ka(p \vee q)}{\begin{array}{c|c|c|c|c|c} Kap & Kap & Oap & Kap & Cap & Cap \\ Kaq & Oaq & Kaq & Caq & Kaq & Caq \end{array}}$$

$$Ca(p \vee q)$$

Cap	Cap	Oap
Caq	Oaq	Caq

$$Ka(p \supset q)$$

Kap	Oap	Oap	Oap	Cap	Cap
Kaq	Kaq	Oaq	Caq	Kaq	Caq

$$Ca(p \supset q)$$

Cap	Cap	Kap
Caq	Oaq	Caq

Якщо стовпчик таблиці містить хоча б одну пару формул (Kap, Cap), (Cap, Oap), (Kap, Oap), то вважається замкненим.

Пропозиційному численню логіки знання притаманні такі положення:

1. $\dashv Kap \supset p$
2. $\dashv Ka\,(p \supset p)$
3. $\vdash \sim (Kap \wedge Ka \sim p)$
4. $\vdash \sim Ka\,(p \wedge \sim p)$
5. $\dashv Oa\,(p \wedge \sim p)$
6. $\vdash \sim Kap \vee \sim Oap$
7. $\dashv Kap \vee Oap$
8. $\vdash Ka\,(p \wedge \sim p) \supset Kaq$
9. $\vdash Ka\,(p \wedge q) \equiv Kap \wedge Kaq$
10. $\vdash (Kap \vee Kaq) \supset Ka\,(p \vee q)$
11. $\dashv Ka\,(p \vee q) \supset Kap$
12. $\vdash Ka\,(p \supset q) \supset (Kap \supset Kaq)$
13. $\vdash Ka\,(p \supset q) \supset (Oaq \supset Oap)$
14. $\vdash Ca\,(p \wedge q) \supset (Cap \supset Caq)$
15. $\vdash Kap \vee Cap \vee Oap$

Твердження *1—15* є характеристиками знання в даному численні.

Твердження *1* вказує на те, що тут не визнається правило: ***«Знання p спонукає істинність p»***. Визнання цього правила передбачає граничну ідеалізацію пізнавального процесу. ***«Якщо я знаю, що p, то я неявно заперечую, що яка-небудь нова інформація заставить мене змінити свою точку зору»***. А це означає відкинути прогрес в науці.

Твердження *2* і *5* показують, що ті характеристики знання, які вони описують, не передбачають «логічного беззаконня».

Твердження *3* зазначає, що формальне протиріччя не входить до складу знання.

Твердження *6* показує, що незнання, на відміну від знання, повне: ***«Для будь-якого p вірно, що a або не знає p, або не спростовує p»***.

Згідно з твердженням *7* знання не повне в такому розумінні: ***«Для довільного p не можна довести, що будь-який або знає p, або спростовує p»***. Фактично це є своєрідне формулювання знаменитої теореми ***К. Геделя: «Якщо система S не суперечлива, то в ній існує таке висловлювання p, що ні само p, ні його заперечення не можуть бути доведені засобами S»***.

Твердження *8* фіксує, що із знання формального протиріччя випливає знання будь-якого висловлювання.

Твердження *12* і *13* є епістемічними варіантами правил модус поненс і модус толленс.

Згідно з твердженням *15* набір епістемічних операторів ***Ка, Са, Оа*** є повним, тобто для будь-якого ***p a*** або знає ***p***, або сумнівається в ***p***, або спростовує ***p***.

Важливу роль в дослідженні процесу пізнання відіграє ***логіка віри***. Цікавим є об'єднання в рамках епістемічної логіки ***«логіки знання» і «логіки віри»***.

Співставлення в операторів віри і знання дає наступні, важливі своїми наслідками, правила:

$$\frac{\mathbf{Kap}}{\mathbf{Bap}} \text{ і } \frac{\mathbf{Kap}}{\mathbf{BaKap}}.$$

Ці правила показують, що наукова віра є наслідком знання, тобто знання є істинною вірою, оскільки суб'єкт знає щось, якщо і тільки якщо він вірить у нього і предмет віри має місце:

$$\boldsymbol{Kap \sim \equiv Bap \supset p.}$$

Звідси випливає таке твердження:

$$\boldsymbol{Kap \supset BaKap}$$

— ***a*** вірить в те, що знає ***p***, (або суб'єкт вірить у свої знання).

У логіці віри приймається залежність $\boldsymbol{B\tilde{}p \supset \tilde{}BBap}$, але не приймаються залежності:

$$\boldsymbol{\sim Bap \supset Ba \sim p} \text{ і}$$

$$\boldsymbol{Bap \wedge (p \equiv q) \supset Baq.}$$

Другу залежність можна прокоментувати таким чином.

Нехай ***«p»*** означає *«бачить Вальтера Скотта»*, а ***«q»*** — *«бачить автора «Веверлея»*. Але сучасники Вальтера Скотта не вірили, що Вальтер Скотт і «автор Веверлея» це імена однієї і тієї самої людини. Тому із віри в те, що суб'єкт бачить Вальтера Скотта, не слідує, що бачить «автора «Веверлея»:

$$\boldsymbol{Bap \wedge (p \equiv q)} \text{ не випливає } \boldsymbol{Baq}.$$

Сучасні дослідження епістемічної логіки направлені на дослідження реального процесу пізнання, тому ефективне застосування результатів цих досліджень лежить на шляху поєднання епістемічних модальностей з алетичними, деонтичними та темпоральними.

в) Епістемічна логіка і теорія можливих світів

В епістемічній логіці для аналізу її висловлювань використовується семантика можливих світів. Тут вводиться ***поняття «епістемічно можливий світ»***. Якщо співставити алетично можливі світи з епістемічно можливими, то епістемічно можливий світ є лише фрагментом логічно можливого світу. Це пояснюється тим, що епістемічно можливі світи співставляються і є сумісними з тим, що знає носій, виразник епістемічного висловлювання. Це співставлення і визначає відношення досяжності ***R***.

Епістемічно можливий світ специфікується, співвідноситься із носієм епістемічного висловлювання. Тому у кожного суб'єкта своя множина епістемічно можливих світів. Не існує такої множини можливих світів, які є спільними для різних суб'єктів. Іншими словами, множини епістемічно можливих світів різних суб'єктів повністю не співпадають.

Засобами семантики можливих світів оператор ***«Ka»*** ***має таку дефініцію:***

«Якщо Kap ∈ w, де w ∈ W, то для усіх w' ∈ W, таких, що R (w,w'), має місце p ∈ w'», або «Kap є істинним у світі w, якщо тільки в альтернативному епістемічному світі w p є істинним».

У вигляді аналітичного правила модальність знання можна записати так:

$$\boldsymbol{T_K} \quad \frac{\boldsymbol{TwKap}}{\boldsymbol{Tw'p}}$$

— за умови ***R (w,w')***, де ***w'*** — будь-який епістемічний світ, який є досяжним із ***w***.

Приймаємо, що заперечення модальності знання ***~Ka*** трактується як сумнів. А саме, якщо суб'єкт в чомусь сумнівається то це означає, що воно може не мати місця, тобто буде хибним, аналітичне правило в цьому випадку матиме вигляд:

$$\boldsymbol{F_K} \quad \frac{\boldsymbol{FwKap}}{\boldsymbol{Fw'p}}$$

— за умови ***R (w,w')***, де ***w'*** — деякий епістемічний світ, який ще не зустрічався в попередніх рядках тієї гілки таблиці, де застосовувалося це правило, який є досяжним із ***w***.

Побудуємо аналітичну таблицю для формул

$$\boldsymbol{Kap \supset p, \sim (Kap \wedge Ka \sim p)}$$

а)

	0. Fw Kap ⊃ p	
	1. TwKap	*— F ⊃, 0*
I	*2. Fp*	
II	*3. Tp*	*— Tk, 1*
	+	

б)

	0. Fw ~ (Kap ∧Ka ~ p)	
I	*1. Tw (Kap ∧ Ka ~ p)*	*F ~, 0*
II	*2. Tw Kap*	
	3. Tw Ka ~ p	*— T∧, 1*
III	*4. Fw Kap*	*F ~ 3*
IV	*5. Fw’p*	*Fk, 4*
V	*6. T w’p*	*Tk, 2*
	+	

Таким способом можна будувати аналітичні таблиці для будь-яких формул в епістемічній логіці.

Сучасні досягнення епістемічної логіки є багатогалузевими, тому їх ефективність передбачає залучення засобів із інших розділів модальної логіки.

Контрольні питання і вправи.

1. Визначення алетичної логіки.
2. Характеристика основних логічних модальностей.
3. Алфавіт мови пропозиційної модальної логіки.
4. Поняття «можливий світ».
5. Алетично можливі світи.
6. Відношення досяжності.
7. Поняття «опис стану».
8. Визначення модальних операторів через аналітичні правила.
9. Побудова аналітичних таблиць.
10. Чи є наведені вирази формулами алетичної пропозиційної логіки?

а) $\Diamond p \supset \Diamond\Diamond p$
б) $\Box p \supset \neg\Diamond\Diamond\neg p$
в) $\Diamond\neg p \wedge \Box p$
г) $\Box\Diamond\neg p$

11. Наведіть приклади висловлювань, які відповідають наведеним формулам:

а) $\Box\ (p \supset q) \supset \Box p \supset \Box q$
б) $\Diamond p \wedge \Box q$
в) $(\neg\Diamond p \vee \neg\Diamond q) \supset \neg(\Diamond p \wedge \Diamond q)$
г) $\Box p \supset p$
д) $\neg(\Diamond\neg\ p \supset \neg p)$
е) $\neg(\neg p \supset \neg\Diamond p)$.

12. Побудуйте аналітичні таблиці для таких виразів:

а) $\neg p \supset \neg\Box p$
б) $\Box p \supset \neg\Diamond\Box p$
в) $\Diamond\Box p \supset \Diamond p$
г) $\Box(p \supset q) \supset (\Box p \supset \Box q)$
д) $\Box q \supset (p \supset \Box q)$
е) $\Box\Box q \supset (p \supset \Box q)$.

13. Передумови виникнення темпоральної логіки.
14. Алфавіт мови темпоральної логіки висловлювань.
15. Дефініція часових модальностей.
16. Основні закони часової логіки.
17. Взаємовизначення темпоральних модальностей.
18. Поняття темпорально можливого світу.
19. Поняття зміни.
20. Дефініція моменту часу.
21. Характеристика часового потоку.
22. Аналітичні правила для темпоральних модальностей.
23. Чи є наступні вирази формулами темпоральної пропозиційної логіки?

а) $Gp \supset Ghp$
б) $FpH \supset F\neg Fp$
в) $Fp \supset F\neg Fp$
г) $pqF \wedge pH$
д) $p \wedge pH$
е) $G \supset p\neg H$.

24. Наведіть приклади висловлювань, які відповідають наступним формулам:

а) $Gp \supset GGp$
б) $Hp \supset Fp$
в) $Gp \supset Fp$
г) $p \supset Pp$
д) $Fp \supset F\neg Fp$.

25. Побудуйте аналітичні таблиці для виразів:

а) $p \supset Hp$
б) $(p \supset q) \supset (Gp \supset Gq)$
в) $Hp \supset HHp$
г) $Hp \supset Pp$
д) $Pp \supset p \urcorner Pp$

26. Дефініція деонтичної логіки.
27. Структура норми.
28. Види норм.
29. Характеристика деонтичного висловлювання.
30. Суть дискусії навколо «дилеми Йоргенсена».
31. Алфавіт мови пропозиційної деонтичної логіки.
32. Визначення деонтичних операторів.
33. Поняття деонтично можливого світу.
34. Аналітичні правила в аналітичній деонтичній логіці.
35. Встановіть, чи є наведені вирази формулами деонтичної логіки:

а) $G (p \wedge q) \supset (Gp \wedge Gq)$
б) $O (p \wedge q) \equiv (Op \wedge Oq)$
в) $OP \supset (Pq \wedge Fq)$
д) $OO\urcorner p \supset\urcorner PPp$
е) $Fp \supset PPp$
ж) $q \supset pOq$
з) $p \supset Opp$.

36. Побудуйте аналітичні правила для виразів:

а) $Op \supset \urcorner O \urcorner p$
б) $O (p \vee q) \supset (Pp \vee Pq)$
в) $O (p \vee q) \supset (Op \vee Oq)$
г) $Op \supset OOp$
д) $p \supset OPp$
е) $OO\urcorner p \supset\urcorner PPp$.

37. Характерні особливості епістемічних модальностей.
38. Визначення епістемічних модальностей.
39. Логіка знання і логіка переконання.
40. Алфавіт пропозиційної епістемічної логіки.
41. Поняття епістемічно можливого світу.
42. Вкажіть, чи є наступні вирази формулами пропозиційної епістемічної логіки:

а) $\urcorner Oa\ Oap$
б) $\urcorner Ka\ Kap$

в) $OKa \supset Cap$

г) $Kap \supset p$

д) $Kap \supset Bap$

е) $apC \wedge Bap$

ж) $aBp \supset Kap$.

43. Наведіть приклади висловлювань, які відповідають наступним формулам:

а) $Kap \supset p$

б) $Ka\,(p \supset q) \supset (Kap \supset Kaq)$

в) $(p \supset q) \supset (Kap \supset Kaq)$

г) $Kap \vee Cap \vee Oap$.

44. Побудуйте аналітичні таблиці для формул:

а) $Ka\,(p \supset p)$

б) $\neg Ka\,(p \vee \neg p)$

в) $\neg Ka\,(p \wedge q) \supset (\neg Kap \wedge Kaq)$

г) $Ka\,(p \wedge \neg p) \supset Kaq$.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Арістотель*. Перша Аналітика. Друга Аналітика. — В 4-х томах. Т.2. — М., 1978.
2. *Арістотель*. Метафізика. — В 4-х томах. Т.1. — М., 1978.
3. *Арістотель*. Риторика. — Античні риторики. — М., 1978.
4. *Асмус В. Ф*. Логіка. — М., 2001.
5. *Бочаров В. А*. Арістотель і традиційна силогістика. — М., 1984.
6. *Брюшинкін В. Н*. Логіка. — М., 2001.
7. *Войшвілло Є. К*. Поняття як форма мислення. — М., 1989.
8. *Войшвілло Є. К., Дегтярьов М. Г*. Логіка. — М., 2002.
9. *Гегель*. Наука логіки. — М., 1971.
10. *Горський Д. П*. Логіка. — М., 1963.
11. *Жоль К. К*. Логіка. — М., 2004.
12. *Зінов'єв О. О*. Нариси комплексної логіки. — М., 2000.
13. *Івін О. А., Нікіфоров О. Л*. Словник з логіки. — М., 1998.
14. *Ішмуратов А. Т*. Вступ до філософської логіки. — К., 1997.
15. *Горський Д. П., Івін А. А., Нікіфоров А. Л*. Короткий словник з логіки. — М., 1991.
16. *Кліні С*. Математична логіка. — М., 1973.
17. *Кондаков М. І*. Логічний словник. — М., 1971.
18. *Лейбниць Г*. Вибрані твори. — М., 1908.
19. *Лукасевич Я*. Арістотелівська силогістика з точки зору сучасної формальної логіки. — М., 1959.
20. *Маковельський А. О*. Історія логіки. — М., 1967.
21. *Мілль Д. С*. Система логіки. Т.1. — С.-Пб., 1865.

22. *Попович М. В.* Філософські питання семантики. — К., 1975.

23. *Смірнова О. Д.* Основи логічної семантики. — М., 1990.

24. *Тарський А.* Вступ в логіку та методологію дедуктивних наук. — М., 1948.

25. *Уйомов А. І.* Основи практичної логіки. — Одеса, 1997.

26. *Хінтікка Я.* Логіко-епістемічні дослідження. — М., 1980.

27. *Хоменко І. В.* Логіка — юристам. — К., 1997.

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

Анатолій Євгенович КОНВЕРСЬКИЙ

ЛОГІКА

(ТРАДИЦІЙНА ТА СУЧАСНА)
2-ге видання

Підручник

Керівник видавничих проектів – *Б. А. Сладкевич*
Друкується в авторській редакції
Дизайн обкладинки – *Б. В. Борисов*
Верстка – *О. Г. Михолат*

Підписано до друку 28.05.2008. Формат 60х84 1/16.
Друк офсетний. Гарнітура PetersburgC.
Умовн. друк. арк. 30,2.
Наклад 2000 прим.

Видавництво “Центр учбової літератури”
вул. Електриків, 23
м. Київ, 04176
тел./факс 425-01-34, тел. 451-65-95, 425-04-47, 425-20-63
8-800-501-68-00 (безкоштовно в межах України)
e-mail: office@uabook.com
сайт: WWW.CUL.COM.UA

Свідоцтво ДК №2458 від 30.03.2006