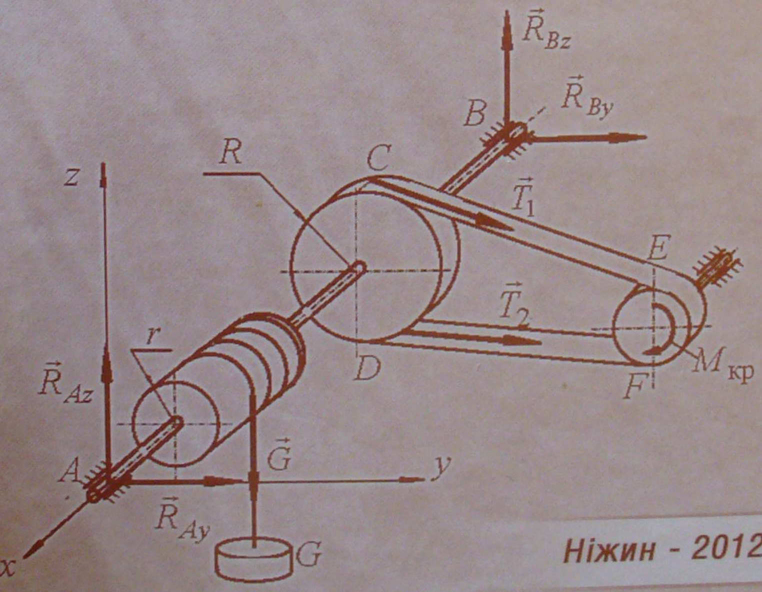
Булгаков В.М., Бурлака В.В., Василюк В.І., Лукач В.С., Кучеренко С.І., Мазоренко Д.І., Тіщенко Л.М.

ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА

Навчальний посібник



Ніжин - 2012

В.М.Булгаков, В.В.Бурлака,
В.І.Василюк, В.С. Лукач, С.І.Кучеренко,
Д.І. Мазоренко, В.С.Лукач, Л.М.Тіщенко

Теоретична механіка

Навчальний посібник

Збірник завдань для розрахунково-графічних робіт

За редакцією С.І.Кучеренка

*Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України
як навчальний посібник для студентів
вищих навчальних закладів*

Ніжин - 2012

УДК 531/534 (075)
ББК 22.21я73
Б90

Рецензенти:
д-р техн. наук, проф. О.К. Морачковський,
д-р. техн. наук, проф. О.М. Ларін,
д-р фіз.-мат. наук, проф. В.П. Ольшанський

Булгаков В.М., Бурлака В.В., Василюк В.І., Лукач В.С., Кучеренко С.І., Мазоренко Д.І., Тіщенко Л.М.
Б90 Теоретична механіка: Навчальний посібник. Збірник завдань для розрахунково-графічних робіт. / За редакцією проф.. С.І.Кучеренка – Ніжин: Видавець ПП Лисенко М.М., 2012. – 432 с.

ISBN 978-966-2213-89-8

Збірник завдань охоплює основні теми навчальної програми з теоретичної механіки, містить завдання на курсові роботи зі статики, кінематики та динаміки. Підбір завдань різноманітний як за формою, так і за змістом.

Кожна тема охоплює короткий теоретичний матеріал, розв'язування підготовчих задач, вихідні дані варіантів завдань за темами, а також зразок виконання аналогічних завдань тем.

Навчальний посібник призначений для студентів технічних вузів усіх форм навчання.

ISBN 978-966-2213-89-8 **ББК 22.21я73**

ПЕРЕДМОВА

Для підвищення якості підготовки інженерів необхідно розвивати самостійну роботу студентів у всіх видах навчального процесу й особливо при виконанні курсових робіт.

Збірник завдань охоплює найважливіші теми статики, кінематики і динаміки, що відповідають робочій програмі з теоретичної механіки для вищих учбових закладів. Він включає методичні вказівки до виконання курсових робіт і детальні зразки розв'язування задач, аналогічних наведеним в завданнях. На початку кожної теми наводяться короткі відомості з теорії, необхідні формули та рівняння. Зрозуміло, що наявність такого довідкового матеріалу не виключає необхідності глибокого вивчення теорії по окремим підручникам.

При виконанні роботи треба враховувати, що на рисунках до задач усі лінії, які паралельні тексту, вважаються горизонтальними, а перпендикулярні – вертикальними. Вважається, що всі нитки є нерозтяжними і невагомими та по блоках не ковзають; котки і колеса котяться по площинах без ковзання.

Кожне завдання виконують на окремих аркушах паперу формату А4, які потім зшиваються. Рисунки до курсових робіт треба виконувати акуратно **і обов'язково з урахуванням умов варіанта задачі, яка розв'язується, та, при необхідності, з дотриманням масштабу.** Допускається виконання рисунків на окремих листках міліметрового паперу, які потім приклеюються поруч з умовою задачі. Розв'язання задач необхідно супроводжувати короткими поясненнями (які формули або теореми застосовуються, відкіля з'являються ті чи інші результати і т.п.) **і докладними розрахунками.** Наприкінці повинні бути дані відповіді на поставлені питання..

Збірник завдань може бути використаний студентами вищих навчальних закладів усіх форм навчання.

РОБОЧА ПРОГРАМА КУРСУ ТЕОРЕТИЧНОЇ МЕХАНІКИ

1. **Вступ.** Механічний рух як одна з форм руху матерії. Теоретична механіка та її місце серед природничих наук. Механіка як теоретична база ряду областей сучасної техніки. Об'єктивний характер законів механіки. Основні історичні етапи розвитку механіки.

2. **Вступ до статики.** Основні поняття та аксіоми статики. Предмет статики. Абсолютно тверде тіло, матеріальна точка, сила, еквівалентні та зрівноважені системи сил, рівнодійна, сили зовнішні та внутрішні. Аксіоми статики. В'язі та реакції в'язей. Основні види в'язей та їх реакції.

3. **Системи збіжних сил.** Геометричний спосіб додавання системи збіжних сил. Многокутник сил. Умова рівноваги тіла під дією системи збіжних сил у геометричній формі. Теорема про рівновагу трьох непаралельних сил, що лежать в одній площині. Проекція сили на вісь та на площину. Визначення сили за її проекціями. Теорема про проекцію рівнодійної сили на вісь. Аналітичний спосіб додавання збіжних сил. Умова рівноваги тіла під дією системи збіжних сил.

4. **Теорія пар сил.** Додавання двох паралельних сил, напрямлених в один бік. Додавання двох паралельних сил, напрямлених протилежно. Момент сили відносно точки (центра). Момент сили як вектор. Теорема Варіньона про момент рівнодійної системи збіжних сил. Момент пари сил. Властивості пар у площині. Умова рівноваги системи пар у площині.

5. **Система сил, що довільно розміщені у площині.** Теорема про паралельне перенесення сили. Зведення довільної системи сил до даного центра.

Головний вектор, головний момент системи сил. Окремі випадки зведення плоскої системи сил. Умови та рівняння рівноваги плоскої системи довільних сил. Три форми рівнянь рівноваги. Рівновага плоскої системи паралельних сил.

6. **Зосереджені сили та розподілені навантаження.** Приклади розподілення навантажень, реакція жорсткого затиснення. Рівновага системи тіл. Сили зовнішні та внутрішні. Статично означені та неозначені системи. Метод розчленування системи тіл для визначення внутрішніх сил.

7. **Розрахунок плоских ферм.** Поняття про ферму. Аналітичні методи розрахунку ферми. Метод вирізання вузлів, метод перетинів (метод Ріттера).

8. **Рівновага тіл з урахуванням сил тертя.** Тертя ковзання. Кут та конус тертя. Рівновага тіл на похилій площині. Тертя кочення. Тертя нитки об циліндричну поверхню.

9. **Система довільних сил у просторі.** Момент сили відносно осі. Залежність між моментом сили відносно центра та відносно осі, що проходить через цей центр. Формули для обчислення моментів сили відносно координатних осей. Пари сил у просторі. Теорема про перенесення пари у паралельну площину. Умови еквівалентності пар у просторі. Додавання пар, довільно розміщених у просторі.

10. **Зведення просторової системи сил до даного центра.** Обчислення головного вектора та головного моменту просторової системи сил. Окремі випадки зведення довільної системи сил, динамічний гвинт. Аналітичні умови рівноваги системи сил, довільно

розміщених у просторі, випадок паралельних сил. Теорема Варіньона про момент рівнодійної сили відносно осі.

11. **Центр паралельних сил та центр ваги.** Зведення система паралельних сил до рівнодійної. Центр паралельних сил. Центр ваги тіла, об’єму, площі, лінії. Статистичний момент площі, плоскої фігури відносно осі. Способи, визначення положення центрів ваги тіла. Центр ваги деяких однорідних тіл: дуга кола, сектор, трикутник.

12. **Кінематика матеріальної точки.** Предмет кінематики. Способи означення руху точки. Векторний спосіб. Швидкість та прискорення точки при векторному способі. Координатний спосіб. Швидкість та прискорення точки при координатному способі. Натуральний спосіб означення руху точки. Закон руху і швидкість руху точки. Натуральний тригранник. Кривизна кривої. Прискорення точки. Дотична і нормальна складові прискорення.

13. **Кінематика твердого тіла.** Поступальний і обертальний рух. Теорема о траєкторіях, швидкостях і прискореннях точок твердого тіла при поступальному русі. Обертальний рух тіла навколо нерухомої осі. Закон руху, кутова швидкість і кутове прискорення. Швидкість та прискорення точок обертового тіла. Швидкість точки як векторний добуток.

14. **Плоскопаралельний рух твердого тіла.** Швидкість точок плоскої фігури. Миттєвий центр швидкостей, його визначення. План швидкостей. Прискорення точок фігури. План прискорень. Методика побудови планів швидкостей та прискорень плоского механізму.

15. **Сферичний рух.**

16. **Складний рух матеріальної точки.** Теорема про додавання швидкостей та прискорень точки в складному русі. Прискорення Коріоліса. Методика розв'язування задач на складний рух точки.

17. **Складний рух твердого тіла.** Додавання обертальних рухів навколо паралельних осей. Додавання обертальних рухів навколо осей, що перетинаються. Гвинтовий рух твердого тіла.

18. **Динаміка матеріальної точки.** Предмет динаміки. Закони динаміки. Диференціальні рівняння руху матеріальної точки в декартових і натуральних координатах. Дві основні задачі динаміки точки. Схема і послідовність розв'язування першої та другої задачі. Приклади і методика розв'язування задач, коли сили залежать від часу, швидкості і переміщення.

19. **Вступ до динаміки механічної системи.** Механічна система. Маса і центр мас. Класифікація сил. Диференціальні рівняння руху механічної системи. Теорема про рух центра мас. Закон збереження руху центра мас.

20. **Загальні теореми динаміки.** Кількість руху матеріальної точки і системи. Імпульс сили. Теорема про зміну кількостей руху точки і системи. Закон про збереження кількості руху системи. Момент інерції маси тіла. Теорема Гюйгенса-Штейнера про момент інерції відносно паралельних осей. Приклади обчислення моментів інерції простих тіл. Центральні моменти інерції. Головні осі та половні моменти інерції.

21. **Момент кількості руху матеріальної точки і кінетичний момент системи.** Теореми про зміну моменту кількості руху точки і кінетичного моменту системи. Закон збереження кінетичного моменту системи.

22. **Динаміка твердого тіла.** Диференціальні рівняння поступального руху твердого тіла, обертального руху тіла навколо нерухомої осі. Фізичний маятник. Диференціальні рівняння плоского руху тіла.

23. **Робота і потужність сили.** Елементарна робота сили. Повна робота сили на кінцевому переміщенні. Робота сили ваги, сили пружності. Робота сили, яка прикладена до тіла, яке обертається навколо осі. Теорема про роботу рівнодійної сили. Потужність сили. Коефіцієнт корисної дії.

24. **Кінетична і потенціальна енергія.** Кінетична енергія матеріальної точки і механічної системи. Кінетична енергія тіла при поступальному, обертальному та плоско-паралельному рухах. Теорема про зміну кінетичної енергії точки і системи. Потенціальне силове поле, потенціальна енергія. Силова функція і силове поле. Закон збереження механічної енергії.

25. **Сили інерції. Принцип Даламбера.** Сила інерції матеріальної точки. Принцип Даламбера для матеріальної точки і механічної системи. Визначення динамічної реакцій підшипників при обертанні тіла навколо нерухомої осі. Поняття про статичне і динамічне балансування. Зведення сил інерції. Головний вектор і головний момент сил інерції. Кінетостатичне дослідження плоского механізму.

26. **Елементи аналітичної механіки.** Класифікація в’язей. Ідеальні в’язі. Можливі переміщення. Принцип можливих переміщень. Застосування принципу можливих переміщень для розв’язування задач. Загальне рівняння динаміки і методика розв’язування задач. Узагальнені координати, швидкості і сили. Рівняння Лагранжа другого роду і методика розв’язування задач.

27. **Основи теорії коливань.** Кінематика коливань, вільні коливання. Затухаючі коливання і декремент затухання. Вимушені коливання без і при наявності сили опору. Резонанс. Поняття про стійкість рівноваги. Малі коливання системи.

28. **Динаміка відносного руху матеріальної точки.** Диференціальні рівняння відносного руху матеріальної точки. Принцип відносності у класичній механіці. Відносний спокій. Рух тіла по поверхні землі.

29. **Теорія удару.** Явище удару, ударний імпульс, основна теорема теорії удару. Прямий центральний удар тіла об нерухому поверхню. Коефіцієнт відновлення. Прямий центральний удар двох тіл. Втрати кінетичної енергії при ударі двох тіл. Теорема Карно. Удар по обертовому тілу. Центр удару.

30. **Наближена теорія гіроскопа.** Основні поняття. Властивості гіроскопа. Теорема Резаля. Основне рівняння наближеної теорії гіроскопа. Гіроскопічний момент.

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. *Тарг С.М.* Краткий курс теоретической механики. – М.: Наука, 1986.-416 с.
2. *Яблонский А.А., Никифорова В.М.* Курс теоретической механики. Часть 1. Статика. Кинематика. – М.: Высшая школа, 1972.– 436 с.
3. *Мещерский И.В.* Сборник задач по теоретической механике. – М.: Наука, 1972. – 258 с.
4. *Мохір О.П., Тіщенко Л.М., Кучеренко С.І., Бурлака В.В.* Основи математики та фізики для теоретичної механіки. – Х.: Око, 2000, – 344 с.
5. *Никитин Н.Н.* Курс теоретической механики. – М.: Высшая школа, 1974. – 607 с.
6. *Дроннік Ю.М., Тіщенко Л.М., Кучеренко С.І.* Теоретична механіка. Курс лекцій. – Х.: Око, 2002, 456 с.
7. *Дроннік Ю.М., Тіщенко Л.М., Кучеренко С.І.* Довідник з теоретичної механіки. – Х.: Око, 2003, 225 с.

РОЗДІЛ ПЕРШИЙ
СТАТИКА ТВЕРДОГО ТІЛА

ВСТУП

Розрахунково-графічна робота зі статики твердого тіла передбачає розв’язування задач на наступні теми: (див. стор. 61).

- виділення об’єкту рівноваги та розстановка активних сил і реакцій в’язей (тема С1) (задачі 1÷8);

- рівновага тіла під дією системи збіжних сил на площині та в просторі (тема С2) (задачі 1, 2);

- рівновага тіла під дією довільної плоскої системи сил (тема С3) (задачі 3, 4 5);

- рівновага тіла під дією довільної просторової системи сил (тема С4) (задача 6).

Виконання розрахунково-графічної роботи треба починати з повторення теоретичного матеріалу, наведеного для кожного з розділів, що вивчаються. Потім необхідно розібратися в розв’язуванні відповідної задачі, що наводиться для прикладу, звернувши особливу увагу на методичні рекомендації з їх вирішення.

Крім того для самостійного виконання розрахунково-графічної роботи з статики необхідно мати відповідну математичну підготовку, оскільки розв’язування задач потребує вміння обчислювати проекції векторів на координатні осі та площини, знаходити суму векторів геометрично (побудовою векторного трикутника або многокутника) та аналітично (за проекціями на координатні осі), треба вміти вільно користуватися системою прямокутних декартових координат на площині і в просторі.

Варіанти завдань зі статики (с. 64-94) та вихідні данні до них (с. 95-106) наведені в додатках до статики.

Варіант завдання, який обирається студентом для виконання, відповідає його порядковому номеру у списку групи, або задається викладачем. Крім того, викладач, керуючись власними міркуваннями, може видавати завдання комбінуючи їх із задач різних варіантів. Наприклад, задача 1 із 1-го варіанту, задача 2 із 5-го варіанту і т.д.

Тема С1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТА АКСІОМИ СТАТИКИ

В теоретичній механіці використовуються абстрактні уявлення про ***матеріальну точку і абсолютно тверде тіло***.

Матеріальною точкою *називається матеріальне тіло, розмірами якого в умовах задачі, що розглядається, можна знехтувати.*

Приймається, що в матеріальній точці зосереджено всю масу тіла та до неї прикладається сила тяжіння тіла.

Абсолютно твердим *називається таке тіло, у якого відстань між будь якими двома його точками при всіх умовах залишається незмінною (інакше кажучи, тіло не деформується).*

Силою *в механіці називають кількісну міру механічної взаємодії двох матеріальних тіл.*

Одиницею вимірювання сили в системі СІ є 1 Ньютон (*Н*), який визначається як сила, що надає тілу масою 1 *кг* прискорення 1 $м/с^2$.

Сила - векторна величина і її дія на тіло визначається:

- точкою прикладення,
- напрямом (лінією дії),
- величиною (числовим значенням).

Сукупність сил, що прикладена до даного тіла, називається ***системою сил.***

Система сил, під дією якої тіло знаходиться в рівновазі, називається ***зрівноваженою****, а саме тіло - об'єктом рівноваги.*

Системи сил, які чинять однакову механічну дію на одне й те ж тверде тіло, називаються ***еквівалентними системами сил****.*

Якщо є сила, яка діє на тіло так само, як і задана система сил (тобто, еквівалентна їй), то таку силу називають ***рівнодійною даної системи сил.***

Рівнодійна зрівноваженої системи сил дорівнює нулю.

С1.1. Аксіоми статики

Розв'язування задач статики ґрунтується на використанні ряду аксіом і теорем.

Аксіома 1. *(Перший закон Ньютона). Ізольована від зовнішньої дії матеріальна точка, або така, на яку діє еквівалентна нулю система сил, знаходиться в стані спокою або рухається прямолінійно та рівномірно.*

Аксіома 2. *Дві сили, що прикладені до абсолютно твердого тіла, взаємно зрівноважуються тоді і тільки тоді, коли вони однакові за модулем та діють уздовж однієї прямої в протилежні сторони.*

Аксіома 3. *Приєднання або відкидання зрівноваженої системи сил не змінює дію заданої системи сил на абсолютно тверде тіло.*

Наслідок з аксіом 2 та 3. *Не змінюючи дію заданої системи сил на абсолютно тверде тіло, точку* *прикладення кожної сили можна переносити уздовж лінії її дії в будь-яку точку тіла.*

Аксіома 4. *.(Паралелограм сил). Рівнодійна двох сил, що прикладені до однієї точки абсолютно твердого тіла* (рис.С1.1), *прикладена до тієї ж самої точки і зображається діагоналлю паралелограма* $\left(\vec{F}=\vec{F}_1+\vec{F}_2\right)$, *який побудовано на заданих силах, як на сторонах, і модуль якої дорівнює*:

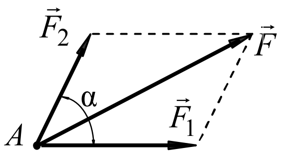


Рис. С1.1

$$F=\sqrt{F_1^2+F_2^2+2F_1F_2\cos a}\ .$$

Аксіома 5. *Сили, з якими діють між собою два тіла, завжди дорівнюють одна одній за модулем, напрямлені уздовж однієї прямої в протилежні сторони і прикладені до різних тіл.*

Аксіома 6. *Рівновага нетвердого (такого, що деформується) тіла, на яке діє задана система сил, буде зберігатися, якщо воно миттєво затвердіє.*

С1.2.Реакції в'язей

В задачах на рівновагу тіл здебільшого розглядаються *невільні тверді тіла*, тобто *такі, що знаходяться під дією інших тіл, які обмежують переміщення даного тіла і називаються* ***в'язями***.

В'язь діє на тіло, що розглядається, з деякою силою, яку називають ***реакцією в'язі.*** Для знаходження кожної реакції, як і будь-якої сили, треба визначити її величину, напрям та точку прикладення.

Аксіома 7. *(Аксіома в'язей). Будь-яке невільне тіло можна звільнити від в'язей, якщо замінити їх дію реакціями, після чого розглядати тіло як вільне, що* *знаходиться в рівновазі під дією заданих сил та реакцій.*

Незважаючи на велику кількість фізично існуючих в'язей, більшість з них можна звести до наступних випадків.

Гладка поверхня

В тому випадку, коли сила тертя, що виникає між тілом і поверхнею в'язі, незначна і нею можна знехтувати, то поверхні тіла і в'язі називають ***гладкими*** (або ідеальними).

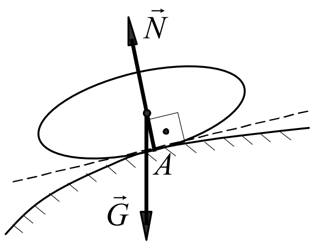


Рис. С1.2

Якщо тіло спирається на таку поверхню (рис.С1.2), то *реакція* $\vec{N}$*,* яка виникає в точці *A* дотику, *завжди напрямлена вздовж нормалі до спільної дотичної площини між поверхнями в'язі та тіла у бік, протилежний тому, куди в'язь не дає рухатися тілу.*

У тому випадку, коли одна поверхня (тіла або в'язі) вироджується в точку, то реакція буде напрямлена перпендикулярно до поверхні, що існує (рис.С1.3).

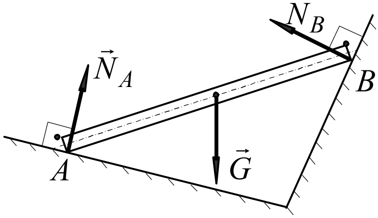


Рис. С1.3

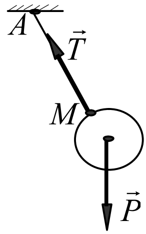


Рис. С1.4

Гнучка в’язь

Це є в’язь, що виконана у вигляді гнучкої нерозтяжної нитки (мотузка, канат, трос, ланцюг), і не дозволяє тілу віддалятися від точки підвісу нитки за напрямом *AM* (рис.С1.4). Таким чином, *реакція* $\vec{T}$ *натягнутої нитки напрямлена вздовж нитки від тіла до точки її підвісу.*

Циліндричний шарнір

Циліндричним шарніром (рис.С1.5) *називається з’єднання двох тіл, яке допускає лише обертання одного тіла або обох тіл навколо центра шарніра (точка А) в одній площині.*

На рис.С1.5,а показано конструкцію циліндричного шарніру, а на рис.С1.5,б – його умовне зображення на схемах.

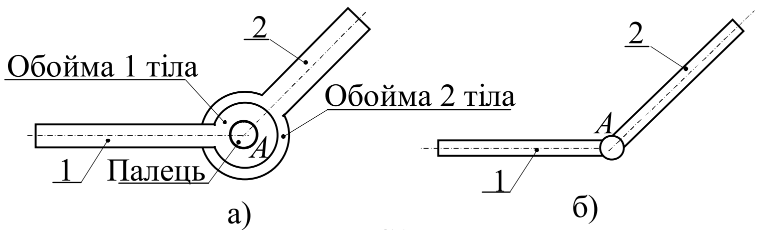
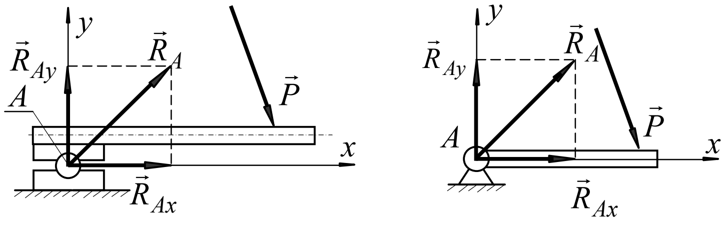


Рис. С1.5

Циліндрична шарнірно-нерухома опора

Шарнірно-нерухома опора утворюється шляхом нерухомого закріплення однієї з частин шарніра і перешкоджає будь-якому поступальному руху тіла, але дозволяє йому вільно обертатися навколо шарніра. Центр шарніра визначає точку прикладення опорної реакції $\vec{R}_A$ (рис. С1.6,а,б), а її величина і напрям є невідомими.

При розв’язуванні задач реакцію $\vec{R}_A$, як правило, розкладають на дві складові (рис.С1.6,а), які напрямляють за осями обраної системи координат: $\vec{R}_{Ax}$ - за віссю Ax, $\vec{R}_{Ay}$ - за віссю Ay.

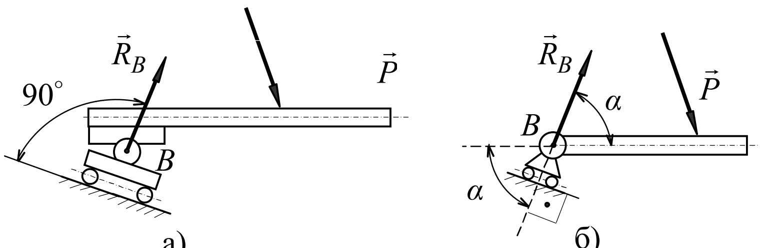


а) б)

Рис. С1.6

Циліндрична шарнірно-рухома опора

Шарнірно-рухома опора відрізняється від шарнірно-нерухомої тим, що нижня її частина встановлена на котки. Така опора не перешкоджу переміщенню механічної системи в напрямі кочення котків, але перешкоджає в перпендикулярному. Тому реакція цієї опори напрямлена за нормаллю до поверхні кочення. На рис. С1.7,а показано конструкцію шарнірно-рухомої опори, а на рис. С1.7,б – її умовне зображення на кресленнях та схемах.



а) б)

Рис. С1.7

Невагомий (ідеальний) стержень

На рис.С1.8 показано закріплення вантажу G за допомогою двох невагомих стержнів CA та CB.

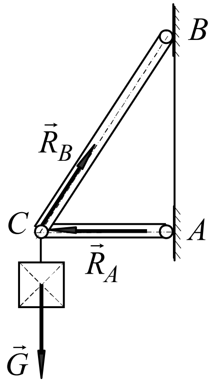


Рис. С1.8

Кожен з цих стержнів на кінцях (до речі - необов'язково на кінцях) має циліндричні шарніри, за допомогою яких приєднується до інших вузлів конструкції.

Якщо силами тяжіння стержнів і силами тертя в шарнірах знехтувати, то кожен стержень буде знаходитися в рівновазі під дією двох сил, реакцій шарнірів, які, виходячи з другої аксіоми статики, напрямлені уздовж лінії , що з'єднує шарніри. Ці сили можуть як розтягувати відповідний стержень ($\vec{R}_B$), так і стискувати ($\vec{R}_A$).

Жорстке закріплення

Балка *AB* (рис.С1.9) одним своїм кінцем жорстко закріплена (замурована) в стінку. Якщо на балку діють зовнішні сили, то в місці закріплення виникають: реакція $\vec{R}_A$ (оскільки жорстке закріплення перешкоджає будь-якому поступальному рухові тіла) і пара сил з ***моментом закріплення*** *Mз* (оскільки жорстке закріплення не дозволяє тілу вільно обертатися).

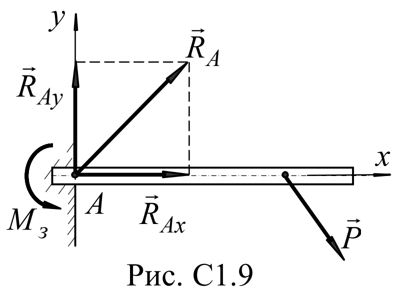


Рис. С1.9

Модулі і напрями реакцій $\vec{R}_A$ та $M_з$ невідомі. Реакцію $\vec{R}_A$, як правило, розкладають на дві складові, які напрямляють за осями обраної системи координат ($\vec{R}_{Ax}$ та $\vec{R}_{Ay}$), а напрямом моменту закріплення $M_з$ задаються довільно.

Сферичний шарнір (підп'ятник)

Сферичний шарнір (шарова опора) допускає вільне обертання стержня у просторі навколо центра (точки O) шарніра (рис.С1.10, а).

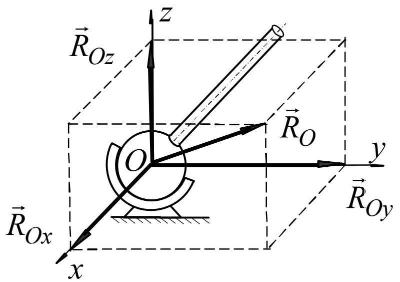


Рис.С1.10,а

Реакція $\vec{R}_O$ сферичного шарніра проходить через центр шарніра і невідома за напрямом та величиною. При розв'язуванні задач її доцільно розкладати на три складові ($\vec{R}_{Ox}, \vec{R}_{Oy}, \vec{R}_{Oz}$) за напрямами обраної просторової системи координат $Oxyz$.

Підп'ятник (рис.1.10, б), або опорно-упорний підшипник, як і сферичний шарнір, закріпляє нерухомо одну з точок твердого тіла.

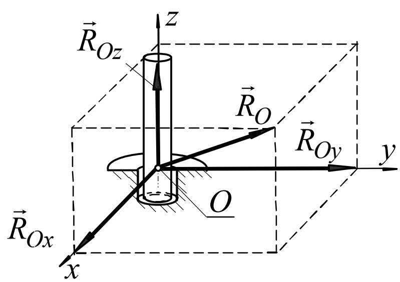


Рис.С1.10,б

В підп'ятнику реакція проходить через нерухому точку O та невідома ні за модулем, ні за напрямом. Можна порадити розкладати реакцію $\vec{R}_O$ на складові $\vec{R}_{Ox}$, $\vec{R}_{Oy}$, $\vec{R}_{Oz}$ вдовж осей прямокутної системи координат $Oxyz$.

С1.3. Види навантажень, що діють на тіло

Зосереджена сила діє на тіло по площі, розмірами якої в порівнянні з площею поверхні тіла можна знехтувати, і тому умовно вважають, що сила прикладена в точці. Зосереджені сили позначають великими латинськими буквами ($\vec{R}$, $\vec{P}$, $\vec{Q}$ та ін.). Одиницею вимірювання зосередженої сили є Ньютон (*Н*).

Розподілена сила діє на частині довжини або на всій довжині балки. ***Балкою*** називається тіло, у якого один розмір (довжина) значно більший двох інших (ширини та висоти). В залежності від характеру навантаження ці сили діляться на *рівномірно та нерівномірно* розподілені.

Величина рівномірно розподіленої сили (рис.С1.11,а), що діє на одиницю довжини балки, називається ***інтенсивністю*** *навантаження і позначається буквою* $\vec{q}$.

Одиницею вимірювання інтенсивності розподіленого навантаження є Ньютон поділений на метр (*Н/м*).

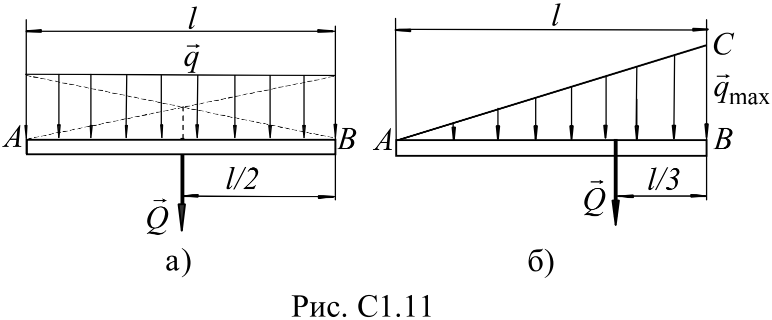


Рис. С1.11

Рівномірно-розподілену силу при розв'язуванні задачі треба замінити зосередженою силою $\vec{Q}$, яка по модулю дорівнює $Q = q \cdot l$ і прикладена посередині відрізка *АВ*.

Для навантаження, розподіленого за законом "трикутника" (рис.С1.11,б), інтенсивність являє собою величину змінну і зростає від нуля до максимального значення $q_{\max}$. Рівнодійна такого розподіленого навантаження дорівнює $Q = 0,5 \cdot q_{\max} \cdot l$ і прикладена на відстані $l/3$ від сторони *BC* трикутника *ABC*.

Парою сил (рис.С1.12,а) *називається навантаження у вигляді двох однакових за модулем сил* ($\vec{F}$, $\vec{F}'$)*, напрямлених в протилежні сторони і лінії дії яких паралельні та не лежать на одній прямій.*

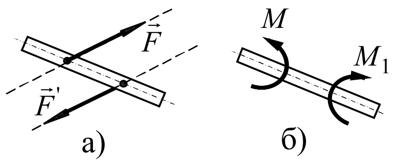


Рис. С1.12

Пара сил задається моментом *M* і зображається на кресленні схематично (рис.С1.12,б). Одиницею вимірювання моменту пари сил є Ньютон на метр (*Нм*).

Момент пари вважається додатним, якщо пара прагне повертати тіло, на яке діє, проти ходу годинникової стрілки, і від'ємним – у протилежному випадку (на рис.С1.12,б – $M>0$, $M_1<0$).

С1.4. Контрольні запитання

1. Що називається матеріальною точкою?
2. Що розуміють в механіці під абсолютно твердим тілом?
3. Що таке сила? Що треба задати, щоб означити силу?
4. Що називається системою сил?
5. Які дві сили називаються еквівалентними?
6. Яка сила називається рівнодійною?
7. Яка система сил називається зрівноваженою?
8. Сформулюйте аксіоми статики.

9. Як визначають модуль і напрям рівнодійної двох сил, що прикладені до однієї точки?
10. Що називають в’язями?
11. Що називається реакцією в’язі?
12. В чому полягає сутність принципу звільнення від в’язей?
13. Перерахуйте основні типи опор, для яких відомі лінії дії реакції в’язей.
14. Як спрямовані реакції:
    – гладкої поверхні,
    – гнучкої нитки,
    – ідеального стержня,
    – циліндричного шарніру,
    – підп’ятника,
    – підшипника,
    – сферичного шарніру,
    – жорсткого закріплення?
15. Види навантажень, що діють на тіло.

С1.5. Зразок виконання теми С1

Виділення об’єкту рівноваги та розстановка сил, що на нього діють

Для кожного завдання вказано один або декілька об’єктів рівноваги. Мета роботи полягає в тому, щоб для вказаного об’єкту рівноваги показати активні сили та реакції в’язей, що на нього діють.

Задача 1

Задано: Об’єкт рівноваги – точка B; AB – невагомий стержень; BC і BD – нитки (рис.1).

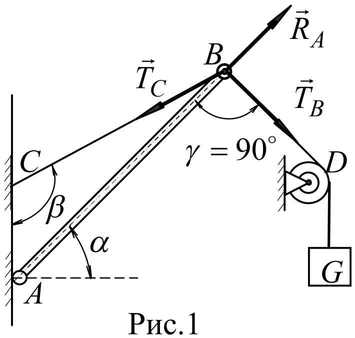


Рис.1

Точка B знаходиться в рівновазі під дією реакції $\vec{T}_C$ нитки BC, напрямленої вздовж неї до точки C; натягу $\vec{T}_B$ нитки BD, напрямленого вздовж неї до точки D; реакції $\vec{R}_A$ невагомого стержня AB, напрямленої вздовж осі стержня.

Модуль натягу нитки $\vec{T}_B$ можна визначити,

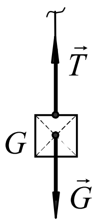


Рис. 2

розглянувши рівновагу тіла G (рис.2). Тіло G знаходиться в рівновазі під дією двох сил: ваги $\vec{G}$, напрямленої вертикально униз, та реакції нитки $\vec{T}$, напрямленої вздовж нитки вгору. За другою аксіомою статики $\vec{T} = -\vec{G}$. Таким чином, натяг нитки дорівнює вазі тіла G, тобто, $T_B = G$.

Задача 2

Задано: об'єкт рівноваги – шарнір D; AD, BD – невагомі стержні; DC, DE – нитки (рис.1).

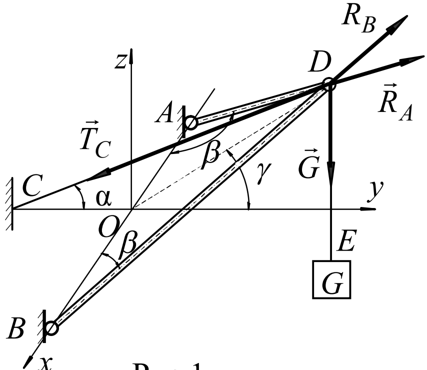


Рис.1

Шарнір D знаходиться в рівновазі під дією: ваги вантажу $\vec{G}$, яку, враховуючи, що напрям лінії дії сили $\vec{G}$ і напрям нитки DE збігаються, можна перенести в точку D; сили натягу $\vec{T}_C$ нитки DC, напрямленої вздовж нитки до точки *C*; реакцій $\vec{R}_A$ і $\vec{R}_B$ стержнів *AD* і *BD*, напрямлених уздовж осей стержнів.

Задача 3

Задано: об'єкт рівноваги – балка *AB* (рис.1) вагою *P*; *DE*, *BK* – нитки.

Балка знаходиться в рівновазі під дією: ваги $\vec{P}$, яка прикладена посередині балки *AB*; натягу $\vec{T}_D$ нитки *DE*, напрямленої до точки підвісу *E* нитки; натягу $\vec{T}_B$ нитки *BK*, напрямленої до точки *K* і за модулем рівної *G* (див. задачу 1); реакції циліндричного шарніра *A*, яка розкладається на дві складові $\vec{R}_{Ax}, \vec{R}_{Ay}$ уздовж осей координат *Ax* і *Ay*.

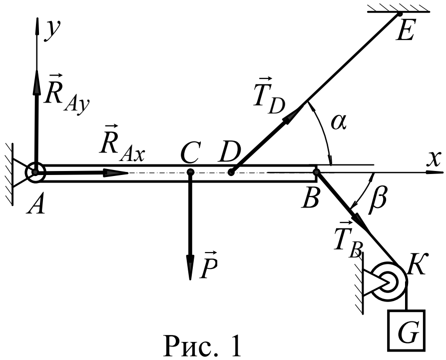


Рис. 1

Задача 4

Задано: об'єкт рівноваги – балка AB вагою P.

Балка AB знаходиться в рівновазі під дією сили тяжіння $\vec{P}$, яка прикладена до середини балки; рівномірно-розподіленого навантаження інтенсивністю $\vec{q}$, дію якого можна замінити зосередженою силою $\vec{Q} = \vec{q} \cdot CB$, що прикладена на середині ділянки CB; сили $\vec{F}$, яка прикладена під

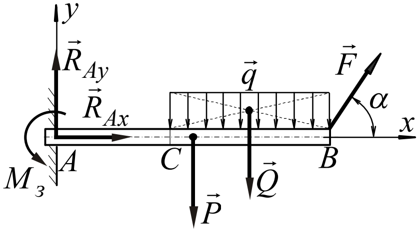


Рис.1

кутом α до осі балки; реакції жорсткого закріплення, яка розкладена на складові $\overline{R}_{Ax}$ і $\overline{R}_{Ay}$ за осями обраної системи координат і пари сил з моментом закріплення $M_з$.

Задача 5

Задано: складену конструкцію (рис.1), яка складається з балки *AB* вагою P_1 та балки *CD* вагою P_2.

Розглянути об'єкти рівноваги: конструкцію в цілому; балку *AB*; балку *CD*.

1. Конструкція ABCD (рис.1) знаходиться в рівновазі під дією: ваги $\vec{P}_1$ балки *AB*; ваги $\vec{P}_2$ балки *CD*; ваги вантажу $\vec{G}$; реакції опорної поверхні $\vec{R}_D$; реакцій циліндричних шарнірів *A* і *C*, розкладених на складові $\vec{R}_{Ax}$, $\vec{R}_{Ay}$ та $\vec{R}_{Cx}$, $\vec{R}_{Cy}$. Точка *B* у цьому випадку являє собою внутрішню точку об'єкта рівноваги і реакція в ній не зображається.

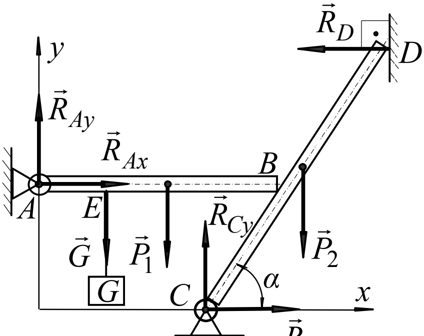


Рис. 1

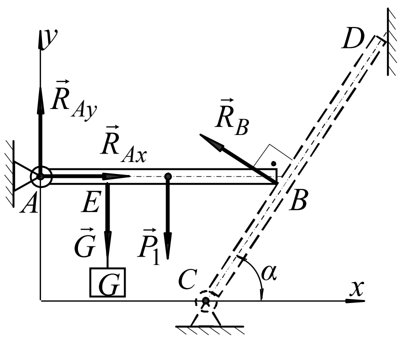


Рис. 2

2. Балка AB (рис. 2) знаходиться в рівновазі під дією: сили ваги $\vec{P}_1$, прикладеної посередині *AB*; сили ваги $\vec{G}$ вантажу; реакції $\vec{R}_B$, яка заміняє дію відкинутої балки

CD і яка напрямлена перпендикулярно до неї; реакції шарніра A, розкладеної на складові $\vec{R}_{Ax}$ і $\vec{R}_{Ay}$.

3. Балка CD (рис. 3) знаходиться в рівновазі під дією: сили ваги $\vec{P}_2$, прикладеної посередині CD; реакції гладкої поверхні $\vec{R}_D$, напрямленої перпендикулярно опорній поверхні; реакція $\vec{R}'_B = -\vec{R}_B$ за п'ятою аксіомою статики (розділ С1.1); реакції циліндричного шарніра C, що розкладена на складові $\vec{R}_{Cx}$ і $\vec{R}_{Cy}$ за осями обраної системи координат.

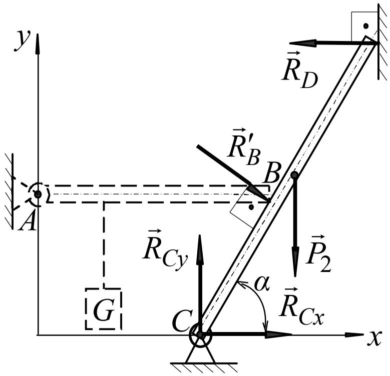


Рис. 3

Увага! Для спрощення розв'язування задачі у випадку складеної конструкції бажано обирати єдину систему координат для усіх об'єктів рівноваги.

Задача 6

Задана складена конструкція (рис.1), в яку входять невагомі балки AB та BC, з'єднані шарніром B.

Розглянути об'єкти рівноваги: конструкцію в цілому; балку AB; балку BC.

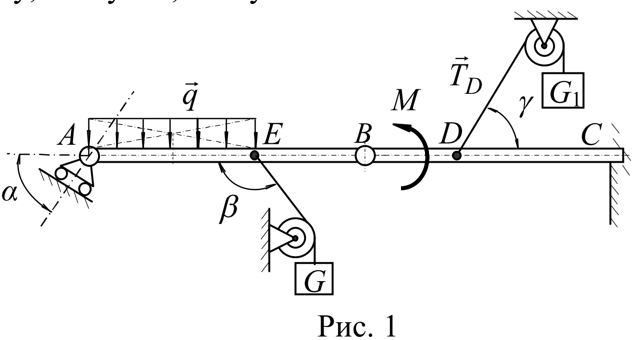


Рис. 1

1. ***Балка AB*** (рис.2) знаходиться в рівновазі під дією: розподіленого навантаження інтенсивністю $\vec{q}$, дію якого можна замінити зосередженою силою $\vec{Q} = \vec{q} \cdot AE$, що буде прикладена посередині відрізка AE; реакції шарнірно-рухомої опори $\vec{R}_A$, напрямленої перпендикулярно до опорної поверхні під кутом α до осі балки; натягу нитки $\vec{T}_E$, який за модулем дорівнює G; реакції шарніра B, що розкладена на складові $\vec{R}_{Bx}$ і $\vec{R}_{By}$ за осями обраної системи координат Axy.

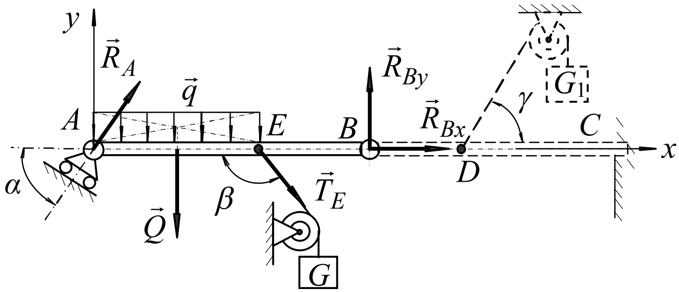


Рис. 2

2. ***Балка BC*** (рис.3) знаходиться в рівновазі під дією: реакції шарніра B, що розкладена на дві складові $\vec{R}'_{Bx} = -\vec{R}_{Bx}$ і $\vec{R}'_{By} = -\vec{R}_{By}$; натягу нитки $\vec{T}_D$ (при цьому $T_D = G_1$); пари сил з моментом M; реакції закріплення в

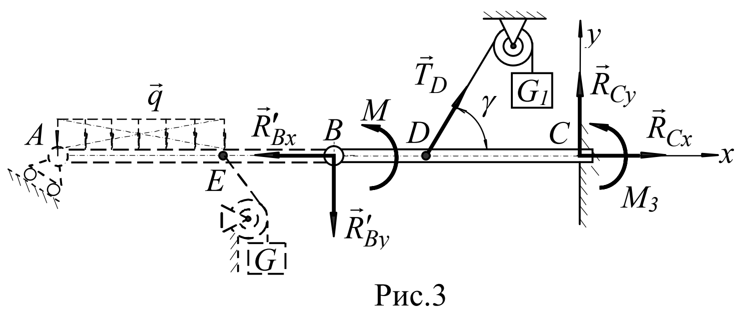


Рис.3

точці *C*, яка розкладається на дві складові сили $\vec{R}_{Cx}$ і $\vec{R}_{Cy}$ за осями обраної системи координат та пару сил з моментом M_3.

3. ***Конструкція ABC*** (рис.4) знаходиться в рівновазі під дією наступних сил: реакцій $\vec{R}_A, \vec{R}_{Cx}, \vec{R}_{Cy}, M_3$; натягів ниток $\vec{T}_E, \vec{T}_D$; зосередженої сили $\overline{Q}$, що замінює дію розподіленого навантаження; пари сил з моментом *M*.

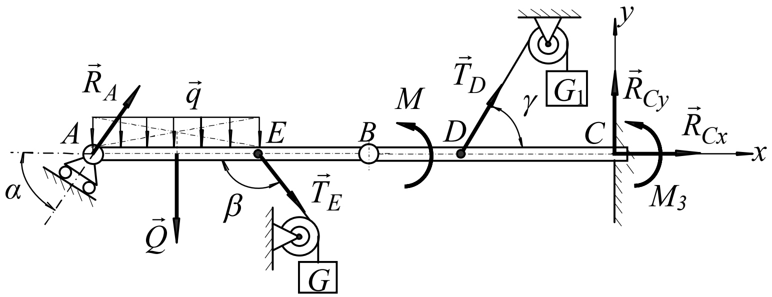


Рис. 4

Задача 7

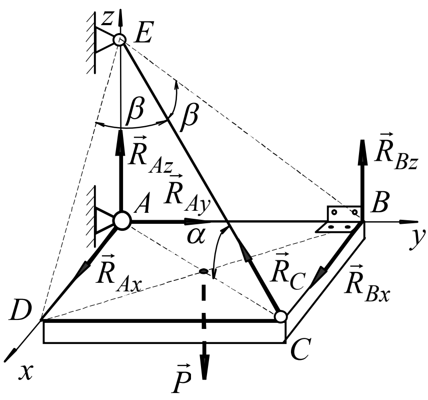


Рис 1

Об'єкт рівноваги – прямокутна плита *ABCD* (рис. 1) вагою *P*.

Точка *A* – центр сферичного шарніру, петля *B* – циліндричний шарнір, *EC* – невагомий стержень.

Плита *ABCD* знаходиться в рівновазі під дією: ваги $\vec{P}$, прикладеної в точці перетину діагоналей прямокутної плити; реакції $\vec{R}_C$ невагомого стержня, напрямленої вздовж стержня *CE*; реакції циліндричного шарніра *B*, що розкладена на дві складові за осями координат $\vec{R}_{Bx}, \vec{R}_{Bz}$; реакції сферичного шарніра *A*, що розкладена на три складові за осями координат $\vec{R}_{Ax}, \vec{R}_{Ay}, \vec{R}_{Az}$.

Задача 8

Об'єкт рівноваги – невагомий вал *AB* (рис 1). *A*, *B* – підшипники, *FDCE* – пасова передача.

Вал *AB* знаходиться в рівновазі під дією сили тяжіння вантажу $\vec{G}$, яка напрямлена вздовж нитки, що намотується на барабан; сил натягу $\vec{T}_1$ і $\vec{T}_2$ віток паса *CE* і *DF* пасової передачі; реакцій підшипників (циліндричних шарнірів) *A* і *B*, які розкладені на складові $\vec{R}_{Ay}$, $\vec{R}_{Az}$ і $\vec{R}_{By}$, $\vec{R}_{Bz}$ за осями обраної системи координат $Axyz$.

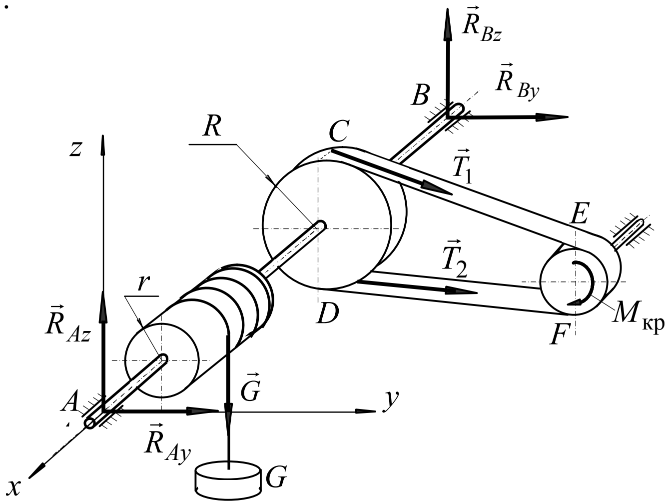


Рис.1

Тема С2. СИСТЕМА ЗБІЖНИХ СИЛ

С2.1. Умови рівноваги системи збіжних сил

***Збіжними** називаються сили, лінії дії яких перетинаються в одній точці.*

Якщо всі сили по лініям їх дії перенести в цю точку, то дістанемо еквівалентну систему сил, що прикладена до однієї точки. Рівнодійна $\vec{R}$ системи прикладених до однієї точки сил, прикладена до тієї ж точки і зображається замикаючим вектором силового многокутника, який побудований на силах, що додаються. Тобто рівнодійна $\vec{R}$ дорівнює векторній сумі сил, що додаються:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_n = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k . \qquad (C2.1)$$

Оскільки система збіжних сил може бути замінена однією силою (рівнодійною), то необхідною і достатньою умовою рівноваги тіла під дією системи збіжних сил є рівність нулю цієї рівнодійної:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_n = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k = 0. \qquad (C2.2)$$

Геометрично це рівняння означає, що в побудованому многокутнику кінець останнього вектора збігається з початком першого, тобто многокутник являє собою замкнену фігуру.

У випадку, коли на тіло діють три зрівноважені збіжні сили, то силовий (векторний) многокутник зводиться до силового трикутника. Розв'язування задачі на рівновагу в цьому випадку зводиться до знаходження сторін трикутника за допомогою тригонометричних формул.

Теорема про три непаралельні сили. *Якщо тіло знаходиться в рівновазі під дією трьох непаралельних сил, то лінії дії цих сил обов'язково перетинаються в одній точці і лежать в одній площині, тобто сили утворюють плоску систему збіжних сил.*

Теорема про три сили полегшує розв'язування задачі на рівновагу твердого тіла в тому випадку, коли напрям однієї з сил невідомий. Знайшовши точку перетину ліній дій двох сил, напрями яких відомі, можна визначити напрям лінії дії третьої сили, оскільки вона повинна проходити через точку прикладання цієї сили і точку перетину ліній дій перших двох сил.

С2.2. Геометричний метод розв'язування задач

Безпосереднє використання многокутника сил для розв'язування задач статики зводиться до геометричної побудови в масштабі векторного многокутника з подальшим визначенням невідомих елементів за допомогою тригонометричних формул. При розв'язуванні задач на рівновагу твердого тіла геометричним методом рекомендується дотримуватися наступного порядку:

1. Виділити об'єкт рівноваги;
2. Показати на кресленні точки прикладання та напрями активних сил, що діють на об'єкт рівноваги;
3. З'ясувати характер в'язей і можливі напрями їх реакцій;
4. Побудувати замкнений силовий многокутник (побудову треба починати з сили, яка відома як за модулем, так і за напрямом);

5. З силового многокутника знайти невідомі величини.

С2.3. Аналітичний метод розв'язування задач

Проекція сили на вісь і на площину

Загальним способом визначення модуля і напряму рівнодійної є аналітичний, який теж випливає з умови (С2.1) і базується на аналітичному методі означення сили.

Аналітичний метод означення сили полягає в тому, що, обравши деяку прямокутну систему координат $Oxyz$ (рис.С2.1), силу $\vec{F}$ розкладають за правилом паралелепіпеда на три складові $\vec{F}_x, \vec{F}_y, \vec{F}_z$.

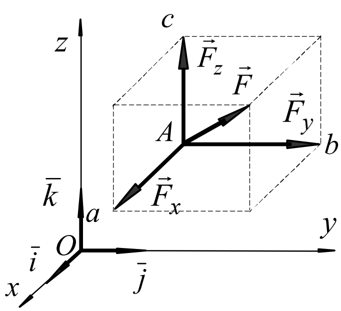


Рис.С2.1

Алгебраїчні значення довжин напрямлених відрізків Aa, Ab і Ac називаються проекціями сили на осі Ox, Oy і Oz, та позначаються F_x, F_y і F_z.

Якщо $\bar{i}$, $\bar{j}$ та $\bar{k}$ - одиничні вектори, які напрямлені за осями Ox, Oy та Oz, відповідно, а F_x, F_y та F_z - проекції сили на ці осі, то

$$\vec{F} = F_x\,\bar{i} + F_y\,\bar{j} + F_z\,\bar{k}\,. \qquad \text{(C2.3)}$$

Модуль і напрям сили за відомими проекціями на три взаємно перпендикулярні осі Ox, Oy та Oz, можна дістати з формул:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}\,; \qquad \text{(C2.4)}$$

$$\cos(\vec{F},\bar{i})=\frac{F_x}{F};\ \cos(\vec{F},\bar{j})=\frac{F_y}{F};\ \cos(\vec{F},\bar{k})=\frac{F_z}{F}.\ \text{(С2.5)}$$

При визначенні проекції сили на вісь можливі 4 випадки (рис.С2.2).

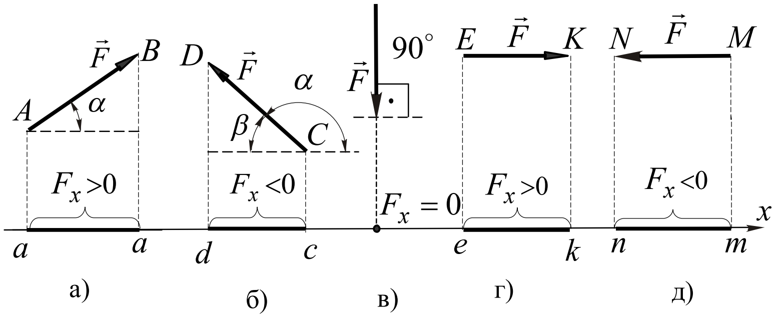


Рис. С2.2

1. Вектор сили утворює гострий кут α з додатним напрямом координатної осі (рис. С2.2,а). В цьому випадку проекція сили на вісь F_x додатна і за модулем дорівнює:

$$F_x = ab = F\cos\alpha..$$

2. Вектор сили утворює з додатним напрямом осі тупий кут (рис.С2.2,б). В цьому випадку проекція сили на вісь від'ємна і за модулем дорівнює:

$$F_x = -\,dc = -\,F\cos\beta = F\cos\alpha..$$

3. Вектор сили утворює прямий кут з віссю (α = 90^o) (рис.С2.2,в.). В цьому випадку проекція сили на вісь дорівнює нулю:

$$F_x = F\,\sin 90^\circ = 0.$$

4. Сила паралельна до координатної осі. В цьому випадку сила проектується на вісь у натуральну величину зі знаком плюс, коли її напрям збігається з додатним

напрямом осі (рис.С2.2,г), і зі знаком мінус у протилежному випадку (рис.С2.2,д):

$$F_x = F\cos 0^\circ = F_x;$$

$$F_x = F\cos 180^\circ = -F_x.$$

У деяких випадках для знаходження проекції сили на вісь зручніше спочатку знайти її проекцію на площину, в якій лежить ця вісь, а вже потім спроектувати знайдену проекцію на потрібну вісь.

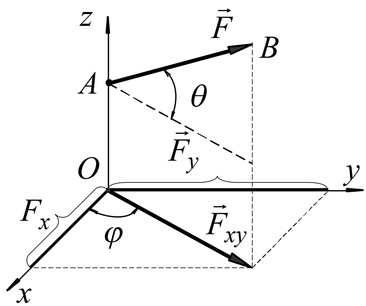


Рис.С2.3

Наприклад, у випадку, що зображений на рис. 2.3, спочатку краще спроектувати силу $\vec{F}$ на площину xOy і отримати проекцію $\vec{F}_{xy}$, а вже потім знайти проекції сили на осі Ox та Oy $-F_x$ і F_y. Тоді:

$$\begin{aligned} F_x &= F_{xy}\cos\varphi = F\cos\theta\cos\varphi; \\ F_y &= F_{xy}\sin\varphi = F\cos\theta\sin\varphi. \end{aligned} \qquad (С2.6)$$

Аналітичні умови рівноваги системи збіжних сил

Нехай сили $\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n$ утворюють систему збіжних сил, тоді рівнодійна $\vec{R}$ дорівнює їх геометричній сумі і тоді за теоремою про проекцію рівнодійної на осі системи координат:

$$R_x = \sum_{k=1}^{n} F_{kx}; \quad R_y = \sum_{k=1}^{n} F_{ky}; \quad R_z = \sum_{k=1}^{n} F_{kz}. \qquad (С2.7)$$

Якщо тіло під дією заданої системи сил знаходиться в рівновазі, то $\vec{R}$ =0, отже, $R_x = 0$, $R_y = 0$ та $R_z = 0$, або з урахуванням (С2.7) дістаємо наступні умови рівноваги тіла під дією системи збіжних сил:

$$R_x = \sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0; \quad R_y = \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0; \quad R_z = \sum_{k=1}^{n} F_{kz} = 0. \quad (С2.8)$$

Таким чином, для рівноваги просторової системи збіжних сил необхідно і достатньо, щоб сума проекцій цих сил на кожну з трьох координатних осей дорівнювала нулю.

При розв’язанні задачі аналітичним способом до трьох перших пунктів, що наведені в розділі С2.2, треба додати наступні:

4. Обрати декартову систему координат $Oxyz$;
5. Скласти рівняння рівноваги твердого тіла в проекціях на осі координат;
6. Розв’язати одержану систему рівнянь рівноваги і знайти невідомі величини.

С2.4 Контрольні запитання

1. Які сили називаються збіжними?
2. Як визначити напрям рівнодіючої системи збіжних сил при побудові силового многокутника?
3. Сформулюйте геометричну умову рівноваги системи збіжних сил.
4. Сформулюйте теорему про три непаралельні сили, що знаходяться в рівновазі.
5. Що називається проекцією сили на вісь?
6. Які можливі випадки при визначені проекції сили на вісь?
7. Як визначити проекцію сили на площину?

8. Сформулюйте аналітичні умови рівноваги системи збіжних сил:
   - плоскої,
   - просторової.

С2.5. Зразок виконання теми С2

Задача 1

Задано: $\alpha = 45^\circ$; $\beta = 120^\circ$; $\gamma = 90^\circ$; $G = 500 \quad H$ (рис.1).

Визначити: натяг T_C нитки BC; реакцію $R_{A.}$ стержня AB.

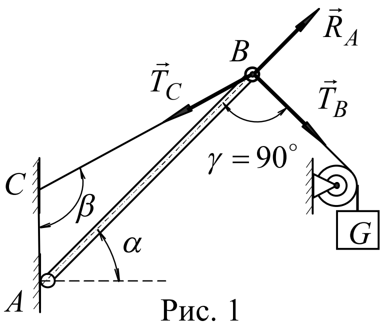


Рис. 1

Розв'язування. Центр шарніра точка B знаходиться в рівновазі під дією сил натягу ниток $\vec{T}_C, \vec{T}_B$ і реакції невагомого стержня $\vec{R}_A$. Причому $\vec{T}_B$ за модулем дорівнює $\vec{G}$ (п. С1.4, задача 1).

Таким чином, точка В знаходиться в рівновазі під дією трьох сил, що лежать в одній площині і лінії дії яких перетинаються в одній точці.

Величину і напрям реакції $\vec{R}_A$ та величину натягу нитки $\vec{T}_C$ визначимо геометрично, скориставшись умовою рівноваги системи збіжних сил у векторній формі:

$$\vec{R}_A + \vec{T}_B + \vec{T}_C = 0. \qquad (1)$$

Для розв'язання рівняння (1) побудуємо силовий (векторний) трикутник (рис.2).

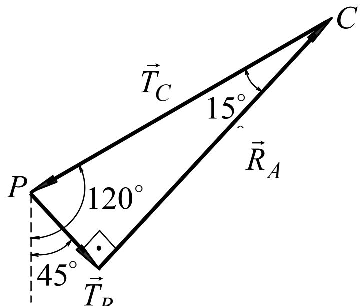


Рис. 2

Для цього з довільної точки *P* (полюса) відкладемо вектор $\vec{T}_B$, величина якого нам відома. Оскільки векторний трикутник повинен бути замкненим, то з початку цього вектора проведемо напрям $\vec{T}_C$, а з кінця - напрям $\vec{R}_A$ до взаємного перетину (точка *C*).

Вектори $\vec{R}_A$ і $\vec{T}_C$ напрямимо таким чином, щоб векторний трикутник був замкненим.

Встановивши кути трикутника, можна записати теорему синусів:

$$\frac{T_B}{\sin 15^\circ} = \frac{T_C}{\sin 90^\circ} = \frac{R_A}{\sin 75^\circ}.$$

Звідки дістанемо:

$$T_C = T_B \frac{\sin 90^\circ}{\sin 15^\circ} = G\frac{\sin 90^\circ}{\sin 15^\circ} = 500\frac{1}{0.259} = 1930\ H;$$

$$R_A = T_B \frac{\sin 75^\circ}{\sin 15^\circ} = G\frac{\sin 75^\circ}{\sin 15^\circ} = 500\frac{0.966}{0.259} = 1865\ H.$$

Відповідь: $T_C = 1930\ H$; $R_A = 1865\ H$.

Задача 2

Задано: $G = 500\ H$; $AD = BD$; $\alpha = 30^\circ$; $\beta = 60^\circ$; $\gamma = 45^\circ$ (рис.1).

***Визначити*:** натяг нитки $\vec{T}_C$ та реакції $\vec{R}_B$ і $\vec{R}_A$ стержнів AD і BD.

Розв'язування. Шарнір D знаходиться в рівновазі під дією сили ваги $\vec{G}$; натягу нитки $\vec{T}_C$; реакцій $\vec{R}_B$ і $\vec{R}_A$ невагомих стержнів AD і BD (п.С1.4, задача 2). Реакції $\vec{R}_B$ і $\vec{R}_A$ напрямимо вздовж стержнів від вузла D, тобто приймемо, що стержні розтягнуті.

Усі сили прикладені до однієї точки D і для визначення невідомих реакцій можна скористатися аналітичними умовами рівноваги системи збіжних сил.

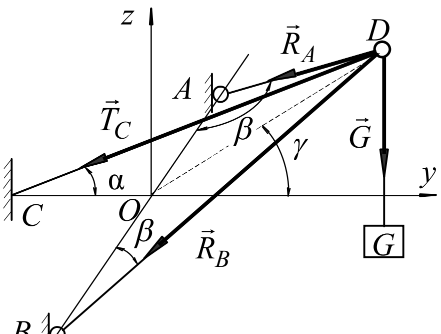


Рис.1

Із точкою O пов'яжемо просторову систему координат, напрямивши вісь Oz перпендикулярно до площини ABC, а осі Ox і Oy розташуємо в цій площині.

Спроектувавши всі сили на осі обраної системи координат, дістанемо:

$$\sum F_{kx} = -R_A \cos\beta + R_B \cos\beta = 0; \tag{1}$$

$$\sum F_{ky} = T_C \cos\alpha - R_A \sin\beta \cos\gamma - R_B \sin\beta \cos\gamma = 0; = \tag{2}$$

$$\sum F_{kz} = -\,T_C \sin\alpha - R_A \sin\beta \sin\gamma - R_B \sin\beta \sin\gamma - G = 0. \quad (3)$$

З рівняння (1) знаходимо: $R_A = R_B$.

Виразимо з рівняння (2) натяг нитки T_C і підставимо в рівняння (3):

$$T_C = -\,2R_A \frac{\sin\beta\cos\gamma}{\cos\alpha};$$

$$2R_A \frac{\sin\beta\cos\gamma}{\cos\alpha}\sin\alpha - 2R_A \sin\beta\sin\gamma - G = 0.$$

Звідки:

$$R_A = R_B = \frac{G}{2\sin\beta(\cos\gamma\cdot tg\alpha - \sin\gamma)} =$$

$$= \frac{500}{2\sin 60^\circ\left(\cos 45^\circ \cdot tg 30^\circ - \sin 45^\circ\right)} =$$

$$= \frac{250}{0{,}866\left(0{,}707\cdot 0{,}577 - 0{,}707\right)} = -\,961\ H;$$

$$T_C = -2R_A \frac{\sin 60^\circ \cos 45^\circ}{\cos 30^\circ} =$$

$$= -2(-961)\cdot\cos 45^\circ = 1359\ H.$$

Якщо при розв’язуванні задачі якась з реакцій набуває від’ємного значення, то це означає, що напрям цієї реакції треба змінити на протилежний. Тоді, дійсний напрям реакцій R_A і R_B невагомих стержнів DA і DB протилежний зображеним на рис.1, а самі стержні будуть не розтягнутими, як приймалося на початку, а стиснутими.

Відповідь: $R_B = R_A = -961\ H$; $T_C = 1359\ H$.

Тема С3. ДОВІЛЬНА ПЛОСКА СИСТЕМА СИЛ

Плоскою довільною системою сил*, що прикладена до твердого тіла, називають таку систему сил, лінії дії яких лежать в одній площині як завгодно.*

С3.1. Умови рівноваги довільної плоскої системи сил

Аналітичні умови рівноваги довільної плоскої системи сил виражаються трьома рівняннями рівноваги (основна форма):

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0; \quad \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0; \quad \sum_{k=1}^{n} M_O(F_k) = 0. \quad (С3.1)$$

Довільна плоска система сил знаходиться в рівновазі, якщо алгебраїчна сума проекцій всіх сил на кожну з координатних осей і алгебраїчна сума моментів усіх сил відносно будь-якої точки площини їх дії дорівнюють нулю.

Правила обчислення проекцій сили на координатні осі розібрані в розділі С2.3.

Момент сили відносно точки *дорівнює узятому з відповідним знаком добутку модуля сили на її плече.* ***Плече сили*** *- це довжина перпендикуляра, що опущений з точки, відносно якої визначається момент, на лінію дії сили* (рис.С3.1).

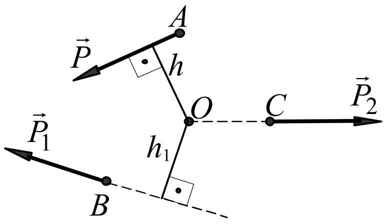


Рис. С3.1

Якщо сила намагається обертати тіло навколо точки проти ходу годинникової стрілки, то момент сили вважають ***додатним***, а якщо – за ходом, то ***від'ємним***.

Момент сили $\vec{P}$ відносно точки O позначають $M_O(\vec{P})$. У випадках, зображених на рис. 3.1, будемо мати:

$$M_O\left(\vec{P}\right) = P \cdot h; \qquad M_O\left(\vec{P}_1\right) = P_1 \cdot h_1.$$

Момент сили відносно точки дорівнює нулю, коли лінія дії сили проходить через цю точку, оскільки плече сили в цьому випадку дорівнює нулю. Наприклад, момент сили $\vec{P}_2$ відносно точки O (рис.С3.1) дорівнює нулю:

$$M_O\left(\vec{P}_2\right) = 0.$$

При обчисленні моменту сили інколи буває зручно розкласти силу на дві складові і визначити момент заданої сили як алгебраїчну суму моментів її складових ***(теорема Варіньона).***

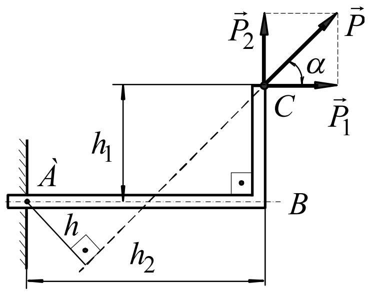


Рис. С3.2

Сила $\vec{P}$ (рис.С3.2) прикладена в точці C під кутом α до горизонту (частина AB балки горизонтальна). Плече h сили $\vec{P}$ відносно точки A обчислити складно і тому силу $\vec{P}$ краще розкласти на дві складові $\vec{P}_1$ та $\vec{P}_2$, плечі яких h_1 та h_2 дорівнюють довжинам AB та BC, відповідно. Для моменту сили $\vec{P}$ відносно точки A можна записати:

$$M_A(\vec{P}) = P \cdot h = -P_1 \cdot h_1 + P_2 \cdot h_2 =$$
$$= -P \cdot \cos\alpha \cdot h_1 + P \cdot \sin\alpha \cdot h_2.$$

С3.2. Порядок розв'язування задач на рівновагу довільної плоскої системи сил

При розв'язуванні задач на рівновагу довільної плоскої системи сил, що прикладена до твердого тіла, доцільно дотримуватися наступного порядку.

1. Встановити, рівновагу якого тіла треба розглядати, тобто, яке тіло є об'єктом рівноваги.
2. Визначити активні сили, що діють на тіло, і показати їх напрям.
3. З'ясувати характер в'язей і показати можливі напрями їх реакцій.
4. Обрати систему координат. При цьому одну з координатних осей доцільно напрямити перпендикулярно до однієї з невідомих сил.
5. Записати відповідні умови рівноваги та скласти рівняння рівноваги. При цьому за точку, відносно якої буде складатися рівняння моментів, бажано брати таку, в якій перетинаються лінії дії більшості невідомих сил.
6. Розв'язавши рівняння рівноваги, визначити невідомі величини.

С3.3 Контрольні запитання

1. Дайте визначення довільної плоскої системи сил.
2. Сформулюйте визначення момента сил відносно точки.
3. В якому випадку момент сили відносно точки дорівнює нулю?
4. Чи зміниться момент сили відносно даної точки при перенесені сили вздовж лінії її дії?
5. Чи можуть бути рівними моменти двох різних сил відносно однієї й тієї ж точки?
6. Яка системасил називається парою?
7. Чи можна пару сил замінити рівнодіючою?
8. Чи можна стверджувати, що система сил, довільно розміщених на площині, знаходиться в рівновазі, коли многокутник, який побудований на цих силах, замкнутий?
9. Напишіть рівняння рівноваги системи сил, довільно розміщених на площині.
10. Яку послідовність дій рекомендують при розв'язанні задач на рівновагу плоскої системи сил?
11. Як рекомендується вибирати осі системи координат?
12. Як рекомендується вибирати точку, відносно якої буде складатися рівняння моментів?

С3.4. Зразок виконання теми С3

Задача 3

***Задано**:* $\alpha = 45^\circ$; $\beta = 60^\circ$; $AB = 4$ *м*; $DB = 1$ *м*; $P = 1000$ *Н*; $G = 2000$ *Н* (рис.1).

***Визначити**:* реакції шарніра *А* та натяг нитки *DE*.

Розв'язування. Розглянемо рівновагу балки *АВ*, на яку діють вага балки $\vec{P}$, прикладена посередині *АВ*; натяг нитки $\vec{T}_B$, який дорівнює за модулем *G*; натяг нитки $\vec{T}_D$; реакція $\vec{R}_A$ шарніра *А* (див. п.С1.4, задача 3).

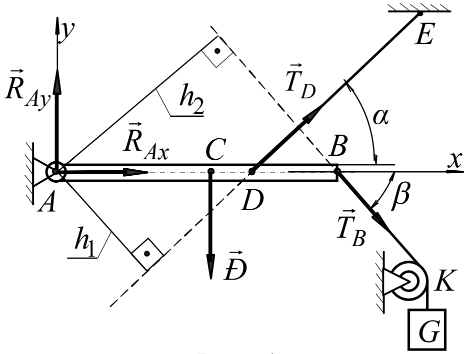


Рис. 1

З шарніром *А* пов'яжемо систему координат *Axy,* вісь абсцис якої напрямимо уздовж балки.

Невідому реакцію $\vec{R}_A$ розкладемо на дві складові $\vec{R}_{Ax}$ і $\vec{R}_{Ay}$, напрямивши їх у бік додатних напрямів осей.

Балка знаходиться в рівновазі під дією довільної плоскої системи сил, дві з яких, $\vec{P}$ і $\vec{T}_B$, відомі, а реакції $\vec{R}_{Ax}$ і $\vec{R}_{Ay}$, а також $\vec{T}_D$ - невідомі. Таким чином, задача є статично визначеною (кількість невідомих дорівнює числу умов рівноваги).

Запишемо умови рівноваги балки в проекціях на осі *Ax* і *Ay* та рівняння моментів відносно точки *А*. Точку *А* за центр моментів зручно обрати тому, що моменти двох невідомих $\vec{R}_{Ax}$ і $\vec{R}_{Ay}$ відносно точки *А* дорівнюють нулю і в рівнянні залишиться момент тільки однієї невідомої $\vec{T}_D$.

Рівняння рівноваги мають вигляд:

$$\sum F_{kx} = R_{Ax} + T_D \cos\alpha + T_B \cos\beta = 0; \qquad (1)$$

$$\sum F_{ky} = R_{Ay} - P + T_D \sin\alpha - T_B \sin\beta = 0; \qquad (2)$$

$$\sum M_A\left(\vec{F}_k\right) = -P \cdot AC + T_D \cdot h_1 - T_B \cdot h_2 = 0, \qquad (3)$$

де $h_1 = (AD)\sin\alpha = 3\sin 45^\circ = 3\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ *м*;

$h_2 = (AB)\sin\beta = 4\sin 60^\circ = 2\sqrt{3}$ *м*.

Враховуючи, що $T_B = G$, з рівняння (3) дістанемо:

$$T_D = P \cdot \frac{(AC)}{h_1} + G \cdot \frac{h_2}{h_1} =$$

$$= 1000 \cdot \frac{2}{3\sqrt{2}/2} + 2000 \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}/2} = 4218\ H.$$

Підставляючи T_D в рівняння (1) і (2), знайдемо:

$$R_{Ax} = -T_D \cos\alpha - G\cos\beta =$$

$$= -4218\cos 45^\circ - 2000\cos 60^\circ = -3982\ H;$$

$$R_{Ay} = P + G\sin\beta - T_D \sin\alpha =$$

$$= 1000 + 2000\sin 60^\circ - 4218\sin 45^\circ = -251\ H.$$

Знак “мінус”, який стоїть перед значенням реакції R_{Ax}, вказує на те, що її напрям протилежний тому, який вказаний на рис.1, тобто вона напрямлена горизонтально вліво. Аналогічно, реакція R_{Ay} напрямлена вертикально униз.

Відповідь: $R_{Ax} = -3982\ H$; $R_{Ay} = -251\ H$;
T_D=4218 H.

Задача 4

Задано: $P = 200\ H,\ F = 100\ H,\ q = 50\ H/м,$

$$AB = 2\ м,\ \ AC = 1\ м,\ \ \alpha = 60^\circ,\ \ (\text{рис.1}).$$

Визначити: реакції жорсткого закріплення.

Розв'язання: Розглянемо рівновагу балки AB, на яку діє (див.п.С1.1, задача 4) сила тяжіння $\overline{P}$, що прикладена по середині балки; рівномірно-розподілене навантаження інтенсивністю $\overline{q}$; активна сила $\overline{F}$, яка прикладена під кутом α до осі балки і реакція жорсткого закріплення в точці A, яка розкладається на дві складові за осям Ax і Ay обраної системи координат Axy і пара сил з моментом закріплення $M_з$.

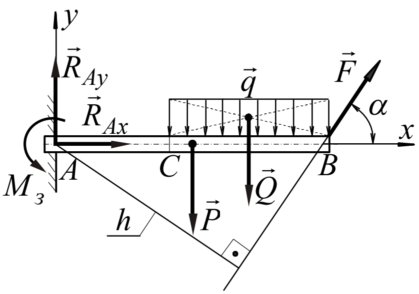


Рис.1

Дію рівномірно-розподіленого навантаження замінимо рівнодіючою $\overline{Q}$, точка прикладання якої знаходиться на середині відрізка CB, напрям збігає з напрямом інтенсивності $\overline{q}$, а модуль дорівнює:

$$Q = q \cdot (CB) = 50 \cdot 1 = 50\,H.$$

Запишемо умови рівноваги сил в проекціях на осі Ax і Ay та умови рівноваги моментів сил відносно точки A:

$$\sum F_{kx} = 0\,;\ \ \sum F_{ky} = 0\,;\ \ \sum m_A(\overline{F}_k) = 0\,.$$

Рівняння рівноваги мають вигляд:

$$\sum F_{kx} = R_{Ax} + F\cos\alpha = 0\,; \qquad (1)$$

$$\sum F_{ky} = R_{Ay} - \overline{P} - Q + F\cdot\sin\alpha = 0\,; \qquad (2)$$

$$\sum m_A(\overline{F}_k) = M_з - P\cdot(AC) -$$

$$-Q\cdot\left(AC + \frac{CB}{2}\right) + F\cdot h = 0\,; \quad (3)$$

де h – плече сили $\overline{F}$ відносно точки A (рис. 1),

$$h = AB\cdot\sin\alpha = 2\cdot\sin 60^\circ = 2\cdot 0{,}866 = 1{,}73\,.$$

З урахуванням чисельних значень величин, рівняння (1÷3) набудуть виду:

$$\sum F_{kx} = R_{Ax} - 100\cdot\cos 60^\circ = R_{Ax} - 50 = 0\,;$$

$$\sum F_{kx} = R_{Ay} - 200 - 50 + 10\cdot\sin 60^\circ = 0\,;$$

$$\sum m_A(\overline{F}_k) = M_з - 200\cdot 1 - 50\cdot 1{,}5 + 100\cdot 1{,}73 = 0\,.$$

З першого рівняння визначаємо R_{Ax}:

$$R_{Ax} = 50\,H.$$

З другого рівняння:

$$R_{Ay} = 200 + 50 - 86{,}6 = 163{,}4\,H.$$

З третього рівняння:

$$M_з = 200 + 75 - 173 = 102\ \ H\cdot м.$$

Відповідь: $R_{Ax} = 50\ H$; $R_{Ay} = 163{,}4\ H$;

$M_з = 102\ H\cdot м.$

С3.5. Розв’язування задач на рівновагу системи тіл

На практиці зустрічаються задачі, в яких розглядається рівновага системи тіл, тобто пов’язаних між собою декількох тіл.

В’язі, що з’єднують між собою тіла, ***називаються внутрішніми****, а в’язі, що з’єднують систему тіл з опорами, називаються* ***зовнішніми****.*

При розв’язуванні задач на рівновагу системи тіл може з’ясуватися, що число рівнянь рівноваги, записаних для конструкції в цілому, менше числа невідомих сил. В цьому випадку додатково розглядають рівновагу окремих тіл, що входять до системи. Це – *перший спосіб*.

Другий спосіб розв’язування подібних задач полягає в тому, що конструкцію розбивають на окремі тіла і розглядають рівновагу кожного тіла окремо, тоді реакції внутрішніх в’язей можна рахувати зовнішніми і вони при цьому будуть попарно рівними за модулем і протилежними за напрямом.

Порядок розв’язування задачі на рівновагу системи тіл залишається таким же, як і в розділі С3.2.

С3.6.Зразок розв’язування задач на рівновагу системи тіл

Задача 4

Задано*:* $G = 280$ *Н*; $P_1 = 160$ *Н*; $\alpha = 60^\circ$; $P_2 = 120$ *Н*; $AE = AB/4$; $CB = CD/3$ (рис.1).

Визначити**:** реакції шарнірів *А* і *С*; реакцію поверхні в точці *D* і внутрішню реакцію в точці *В*.

Розв'язування. Невідомі за напрямом реакції шарнірів A і C розкладаємо на складові $\vec{R}_{Ax}$, $\vec{R}_{Ay}$, $\vec{R}_{Cx}$, $\vec{R}_{Cy}$ за осями координат (див. п. С1.4, задача 4). Реакцію стінки $\vec{R}_D$ направляємо перпендикулярно до стінки.

П'ять невідомих величин $\vec{R}_{Ax}$, $\vec{R}_{Ay}$, $\vec{R}_{Cx}$, $\vec{R}_{Cy}$ і $\vec{R}_D$ не можна визначити з трьох рівнянь рівноваги, які можна скласти для системи сил, що діє на дві балки разом і тому розіб'ємо конструкцію на складові, тобто розглянемо окремо рівновагу сил, що прикладені до кожної з балок.

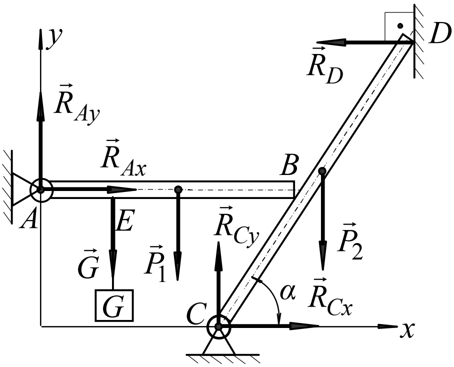


Рис. 1

На балку AB (рис.2) діють відомі сили $\vec{G}$ і $\vec{P}_1$, складові $\vec{R}_{Ax}$, $\vec{R}_{Ay}$ реакції шарніра A, і реакція $\vec{R}_B$ балки CD, напрямлена перпендикулярно до її поверхні.

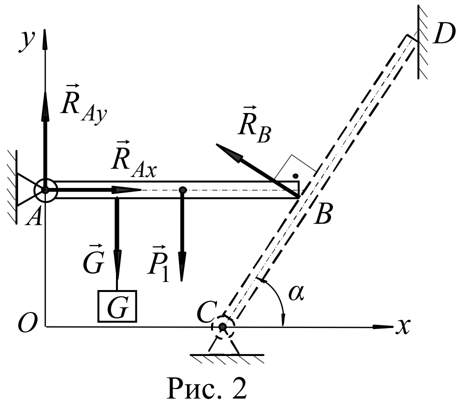


Рис. 2

На балку CD (рис.3) діють: вага балки $\vec{P}_2$; реакція $\vec{R}'_B$ балки AB, яка дорівнює за модулем реакції $\vec{R}_B$ і напрямлена в протилежну сторону; реакція стінки $\vec{R}_D$;

складові $\vec{R}_{Cx}$, $\vec{R}_{Cy}$ реакції шарніра C.

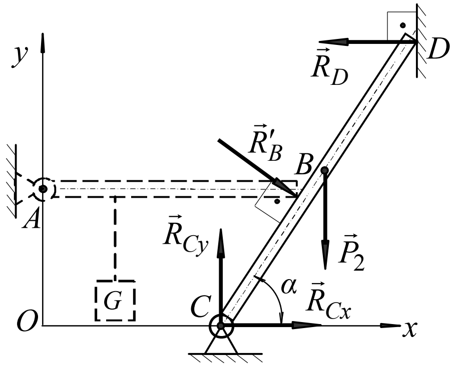


Рис. 3

В число зовнішніх сил, що прикладені до кожної з балок, входять сили $\vec{R}_B = -\vec{R}'_B$, які відображають взаємодію балок AB і CD. Як уже було сказано, для системи балок у цілому ці сили будуть внутрішніми.

Запишемо по три рівняння рівноваги сил, що діють на кожну з балок, і визначимо шість невідомих величин:

$$\vec{R}_{Ax};\ \vec{R}_{Ay};\ \vec{R}_{Cx};\ \vec{R}_{Cy};\ \vec{R}_D;\ \vec{R}_B = -\vec{R}'_B .$$

Для сил, що прикладені до балки AB (рис.2), дістанемо:

$$\sum F_{kx} = R_{Ax} - R_B \cos 30^\circ = 0; \qquad (1)$$

$$\sum F_{ky} = R_{Ay} - G - P_1 - R_B \cos 60^\circ = 0; \qquad (2)$$

$$\sum M_A\left(\vec{F}_k\right) = -G(AE) - P_1(AB)/2 + R_B h_1 = 0, \qquad (3)$$

де $AE=(AB)/4$; $h_1 = (AB)\sin 30^\circ$.

Для сил, що прикладені до балки CD (рис.3), дістанемо:

$$\sum F_{kx} = R_{Cx} + R'_B \cos 30^\circ - R_D = 0; \qquad (4)$$

$$\sum F_{ky} = R_{Cy} - R'_B \cos 60^\circ - P_2 = 0; \qquad (5)$$

$$\sum M_C\left(\vec{F}_k\right) = -R'_B\left(BC\right) - P_2\frac{(CD)}{2}\cos 60^\circ +$$

$$+ R_D \cdot CD\sin 60^\circ = 0\,, \qquad (6)$$

де $(BC)=(CD)/3$.

З рівняння (3) знаходимо R_B :

$$R_B = \frac{G(AE) + 0{,}5P_1(AB)}{h_1} =$$

$$= \frac{280(AB)/4 + 0{,}5\cdot 160(AB)}{0{,}5(AB)} = 300\ H.$$

За рівняннями (1) і (2) обчислюємо R_{Ax} і R_{Ay} :

$$R_{Ax} = R_B\cos 30^\circ = 260\ H;$$

$$R_{Ay} = G + P_1 - R_B\cos 60^\circ = 290\ H.$$

Послідовно розв’язуючи рівняння (6), (4), (5), з урахуванням того, що $R_B = R'_B = 300$ H, знаходимо $\vec{R}_D, \vec{R}_{Cx}, \vec{R}_{Cy}$:

$$R_D = \frac{R_B(BC) + 0{,}5P(CD)\cos 60^\circ}{(CD)\sin 60^\circ} =$$

$$= \frac{300(CD)/3 + 120\cdot 0{,}5(CD)\cdot 0{,}5}{(CD)\cdot 0{,}866} = 150\ H;$$

$$R_{Cx} = R_D - R_B\cos 30^\circ = 150 - 300\cdot 0{,}866 = -110\ H;$$

$$R_{Cy} = P_2 + R'_B\cos 60^\circ = 120 + 300\cdot 0{,}5 = 270\ H.$$

Від’ємне значення складової R_{Cx} вказує на те, що в дійсності ця складова напрямлена вліво. Напрями інших сил збігаються з вказаними на схемі.

Відповідь: $R_{Ax}=260H$; $R_{Ay}=290H$; $R_D=150H$;
$R_B=300\ H$; $R_{Cx}=-110\ H$; $R_{Cy}=270\ H$.

Задача 5

Задано: $\alpha=30^\circ$; $\gamma=60^\circ$; $\beta=120^\circ$; *AE*= 2 *м;*
AB= 3 *м; AD*= 4 *м; AC*= 5 *м;* G_1= 60 *Н*;
G_2= 150 *Н*; *М*= 50 *Нм; q*= 40 *Н/м* (рис. 1).

Визначити: реакції шарнірів *A* і *B* та реакцію жорсткого закріплення в точці *C*.

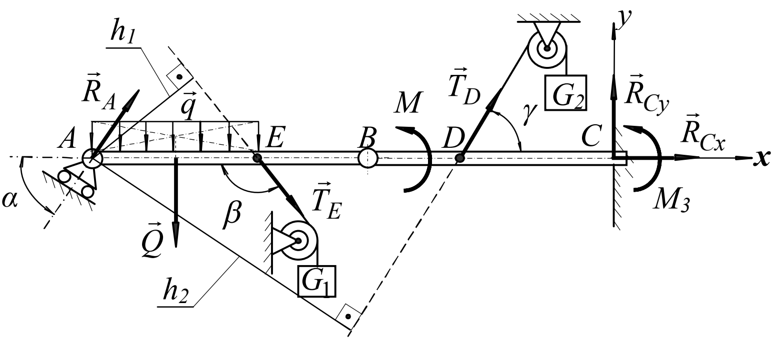


Рис. 1

Розв'язування: Балки *AB* і *BC* утворюють складену конструкцію, яка з'єднана циліндричним шарніром в точці *B*. На конструкцію діють (див. п.С1.4, задача 5) рівномірно розподілене навантаження інтенсивністю $\bar{q}$; момент пари сил *M*; натяг нитки $\vec{T}_E$, яка за модулем дорівнює G_1; натяг нитки $\vec{T}_D$, яка за модулем дорівнює G_2; реакція $\vec{R}_A$ шарнірно–рухомої опори *A*, яка напрямлена перпендикулярно опорній поверхні під кутом α до осі балки; реакція затиснення в точці *C*, яка розкладається на дві складові за осями координат

$\vec{R}_{Cx}, \vec{R}_{Cy}$ і пару сил з моментом M_3. Дія рівномірно розподіленого навантаження замінюється рівнодіючою силою $\overline{Q}$, точка прикладення якої знаходиться посередині ділянки *AE*, напрям збігається з $\vec{q}$, а модуль дорівнює $Q=q\cdot(AE)=40\cdot 2=80$ *Н*.

На конструкцію діють три невідомих сили $\vec{R}_A$, $\vec{R}_{Cx}$, $\vec{R}_{Cy}$ і невідомий момент M_3. Таким чином, число невідомих більше, ніж число умов рівноваги плоскої системи сил.

Для визначення невідомих величин спочатку розглянемо рівновагу всієї конструкції в цілому, при цьому силу взаємодії між частинами конструкції, тобто реакцію в шарнірі *B*, не враховуємо, оскільки вона належить до внутрішніх сил об'єкту рівноваги, а потім розглянемо рівновагу однієї з її частин, наприклад балки *AB*.

Рівняння рівноваги для всієї конструкції мають вигляд:

$$\sum F_{kx} = R_A \cos 30^\circ + T_E \cos 60^\circ + T_D \cos 60^\circ + R_{Cx} = 0; \qquad (1)$$

$$\sum F_{ky} = R_A \cos 30^\circ - Q - T_E \sin 60^\circ + T_D \sin 60^\circ + R_{Cy} = 0; \quad (2)$$

$$\sum M_A(\vec{F}) = -Q\frac{AE}{2} - T_E h_1 + M + T_D h_2 +$$

$$+ R_{Cy} \cdot (AC) + M_3 = 0, \qquad (3)$$

де $h_1 = (AE)\cdot \sin 60^\circ$; $h_2 = (AD)\cdot \sin 60^\circ$.

Розглянемо рівновагу балки *AB* (рис.2).

Балка *AB* знаходиться в рівновазі під дією рівномірно розподіленого навантаження $\overline{q}$, дію якого замінюємо силою $\overline{Q}$; натягу нитки $\vec{T}_E$, рівною за модулем G_1; реакції $\vec{R}_A$ шарнірно–рухомої опори; реакції шарніра B, яку розкладаємо на складові $\vec{R}_{Bx}, \vec{R}_{By}$ за осями координат.

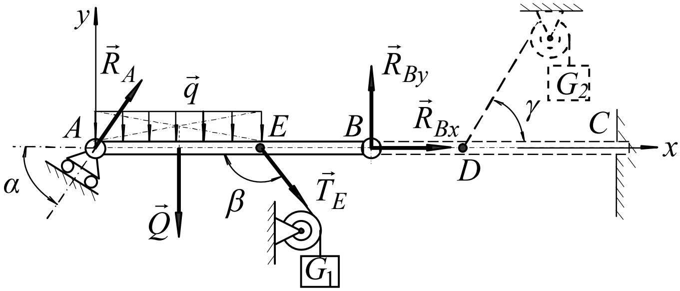


Рис. 2

Рівняння рівноваги для балки AB мають вигляд:

$$\sum F_{kx} = R_A \cos 30^\circ + T_E \cos 60^\circ + R_{Bx} = 0; \tag{4}$$

$$\sum F_{ky} = R_A \cos 60^\circ - T_E \cos 30^\circ - Q + R_{By} = 0; \tag{5}$$

$$\sum M_A\left(\vec{F}_k\right) = -Q \cdot (AE)/2 - T_E \cdot h_1 + R_{By} \cdot (AB) = 0. \tag{6}$$

Враховуючи, що $|\vec{T}_E| = G_1$, з (6) знайдемо:

$$R_{By} = \frac{Q(AE)/2 + G_1(AE)\sin 60^\circ}{(AB)} = \frac{80 \cdot 2 + 60 \cdot 2 \cdot \sqrt{3}}{2 \cdot 3} = 61{,}26 \ \ H.$$

Тоді, з (5) і (4) можна дістати:

$$R_A = \left(Q + G_1 \sin 60^\circ - R_{By}\right)/\sin 30^\circ =$$

$$= \left(80 + 60 \cdot \sqrt{3}/2 - 61{,}26\right)/0{,}5 = 141{,}3\ H;$$

$$R_{Bx} = -R_A \cos 30^\circ - G_1 \cos 60^\circ =$$

$$= -141{,}3 \cdot \sqrt{3}/2 - 60 \cdot 0{,}5 = -152\ H.$$

Реакцію жорсткого закріплення при відомій реакції R_A, та враховуючи, що $|\vec{T}_D|=G_2$, можна дістати з рівнянь (1), (2) і (3):

$$R_{Cx} = -R_A \cos 30^\circ - G_1 \cos 60^\circ - G_2 \cos 60^\circ =$$

$$= -141{,}3 \cdot 0{,}866 - 60 \cdot 0{,}5 - 150 \cdot 0{,}5 = 227{,}2 \ H;$$

$$R_{Cy} = -R_A \cos 60^\circ + G_1 \cos 30^\circ + Q - G_2 \cos 30^\circ =$$
$$= -141{,}3 \cdot 0{,}5 + 80 + 60 \cdot 0{,}866 + 150 \cdot 0{,}866 = -67{,}1 \ H;$$

$$M_з = Q \cdot (AE)/2 + G_1 \cdot (AE) \sin 60^\circ - M -$$

$$- G_2 \cdot (AD) \cdot \sin 60^\circ - R_{Cy} \cdot (AC) =$$

$$= 80 \cdot 2/2 + 60 \cdot 2 \cdot 0{,}866 - 50 -$$

$$-150 \cdot 4 \cdot 0{,}866 + 67{,}1 \cdot 5 = -42 \ Hм.$$

Від'ємні знаки значень реакцій R_{Bx}, R_{Cx}, R_{Cy} і M_3 вказують на те, що їх дійсні напрями протилежні вказаним на рис.1 і 2.

Відповідь: R_A =141,3 H; R_{By} =61,3 H; R_{Bx} = –152 H; R_{Cx} = –227,2 H; R_{Cy} = – 67,1 H; M_3= – 42 $Hм$.

Тема С4. ДОВІЛЬНА ПРОСТОРОВА СИСТЕМА СИЛ

4.1 Умови рівноваги довільної просторової системи сил

Умови рівноваги довільної просторової системи сил можна записати наступним чином:

$$\sum F_{kx} = 0, \quad (С4.1) \qquad \sum M_x(\vec{F}_k) = 0, \quad (С4.4)$$

$$\sum F_{ky} = 0, \quad (С4.2) \qquad \sum M_y(\vec{F}_k) = 0, \quad (С4.5)$$

$$\sum F_{kz} = 0, \quad (С4.3) \qquad \sum M_z(\vec{F}_k) = 0. \quad (С4.6)$$

Таким чином, для рівноваги довільної просторової системи сил, що прикладена до твердого тіла, необхідно і достатньо, щоб суми проекцій усіх сил на кожну з трьох координатних осей, а також суми їх моментів відносно кожної з цих осей дорівнювали б нулю.

Момент сили відносно осі *визначається як алгебраїчна величина, абсолютне значення якої дорівнює добутку модуля проекції сили на площину, перпендикулярну осі, на відстань від точки перетину осі з цією площиною до лінії дії проекції сили на площині* (рис.С4.1).

Для визначення моменту сили відносно осі треба:

а) провести площину “*n*”, яка перпендикулярна до осі;

б) спроектувати силу на цю площину ($\vec{F}_n$);

в) з точки перетину *O* осі з площиною (*n*) опустити перпендикуляр *h* на лінію дії проекції сили;

г) помножити модуль проекції сили $\vec{F}_n$ на довжину перпендикуляра h та взяти добуток додатним, коли напрям обертання проекції сили з додатного напряму осі z видно проти ходу годинникової стрілки, і від'ємним, коли обертання видно за ходом годинникової стрілки.

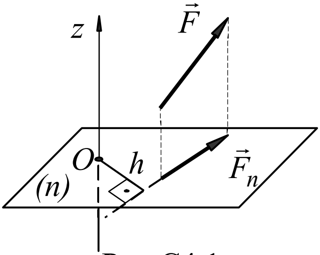
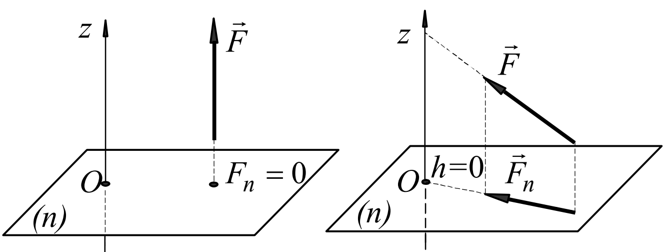


Рис.С4.1

Момент сили $\vec{F}$, що зображена на рис. С4.1, відносно осі z дорівнює $M_z(\vec{F}) = F_n \cdot h.$ Момент додатний, оскільки обертання проекції сили навколо осі z з додатного напряму осі видно проти ходу годинникової стрілки.

Момент сили відносно осі дорівнює нулю в двох випадках:

1. Коли сила паралельна осі (рис.С4.2,а). У цьому випадку проекція сили на площину дорівнює нулю.
2. Коли лінія дії сили перетинає вісь (рис.С4.2,б). У цьому випадку плече проекції сили дорівнює нулю.



а) б)

Рис.С4.2

С4.2. Порядок розв'язування задач на рівновагу довільної просторової системи сил

Під час розв'язування задач на рівновагу довільної просторової системи сил доцільно дотримуватися наступного порядку:

1. Виділити тверде тіло, рівновагу якого треба розглянути для знаходження невідомих величин (об'єкт рівноваги).
2. Показати активні сили, що на нього діють.
3. З'ясувати характер в'язей і показати можливі напрями їх реакцій.
4. Перевірити, чи належить дана задача до статично визначених, коли число невідомих величин повинно дорівнювати шести.
5. Скласти шість рівнянь рівноваги.
6. Розв'язати систему рівнянь відносно невідомих величин.

С4.3 Контрольні запитання

1. Дайте визначення моменту сил відносно осі.
2. Як визначається величина і знак моменту сили відносно осі?
3. У якій площині повинна лежати сила і який вона повинна мати напрям, щоб її момент відносно певної осі був максимальним?
4. У яких випадках момент сили відносно осі дорівнює нулю?
5. Чому при визначені моменту сили відносно осі потрібно обов'язково проектувати силу на площину, що перпендикулярна до осі?
6. Які умови рівноваги довільної просторової системи сил і чим вони відрізняються від умов рівноваги для довільної плоскої системи сил?

С4.4. Зразок виконання теми С4

Задача 6

Задано: квадратна плита *ABCD: AB = BC = СД = ДА = AE; P=1000 Н* (рис.1).

Визначити: реакцію сферичного шарніра *A*, реакцію циліндричного шарніра *B*, реакцію невагомого стержня *CE*.

Розв'язування. Оскільки задача являє собою просторову, то початок системи координат пов'яжемо з точкою *A*, осі *Ax* і *Ay* розмістимо в площині плити *ABCD*, а вісь *Az* спрямуємо перпендикулярно до неї.

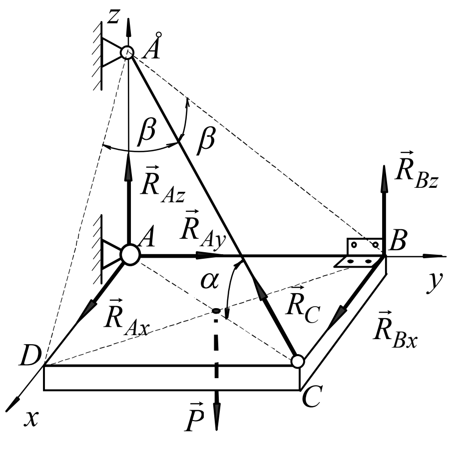


Рис 1

Об'єкт рівноваги, квадратна плита *ABCD*, знаходиться в рівновазі під дією (див. п.С1.4, задача №6) ваги плити $\vec{P}$, прикладеної в центрі симетрії плити; реакції $\vec{R}_C$ невагомого стержня, яка напрямлена вздовж нього від *C* до *E*; реакції сферичного шарніра *A*, яку розкладаємо на три складові $\vec{R}_{Ax}, \vec{R}_{Ay}, \vec{R}_{Az}$ за осями обраної системи координат; реакції петлі (циліндричного шарніру) *B*, яку розкладаємо на дві складові $\vec{R}_{Bx}, \vec{R}_{Bz}$. Складова реакції цього шарніра, паралельна до осі *Ay,* дорівнює нулю, оскільки шарнір дозволяє вільно зміщувати плиту в цьому напрямі.

Для запису умов рівноваги просторової системи сил доцільно користуватися проекціями просторової системи сил на площини координатної системи.

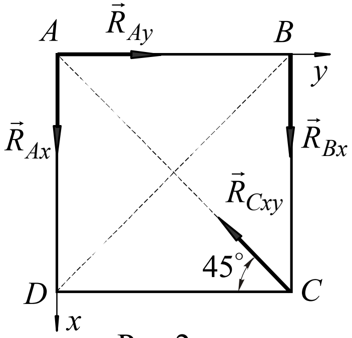


Рис 2

Розглянемо проекцію системи сил на площину xAy (рис.2). Сили $\vec{R}_{Ax}, \vec{R}_{Ay}$ проектуються в натуральну величину. Проекції $\vec{R}_{Bz}, \vec{R}_{Az}$ і $\vec{P}$ дорівнюють нулю, оскільки вони перпендикулярні до даної площини.

Проекцію сили $\vec{R}_C$ на площину xAy можна визначити таким чином (рис.1):

$$R_{Cxy} = R_C \cdot \cos\alpha = R_C\sqrt{2/3},$$

де $\cos\alpha = \dfrac{AC}{EC} = \dfrac{\sqrt{AB^2 + BC^2}}{\sqrt{AB^2 + BC^2 + AE^2}} = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

Запишемо суму проекцій усіх сил на осі Ax і Ay, та суму моментів відносно осі Az:

$$\sum F_{kx} = R_{Bx} + R_{Ax} - R_{Cxy}\cos 45^\circ = 0; \qquad (1)$$

$$\sum F_{ky} = R_{Ay} - R_{Cxy}\sin 45^\circ = 0; \qquad (2)$$

$$\sum M_z(\vec{F}_k) = -R_{Bx} \cdot (AB) = 0. \qquad (3)$$

Розглянемо систему сил в проекції на площину zAy (рис.3). Сили $\vec{R}_{Az}, \vec{R}_{Ay}, \vec{R}_{Bz}, \vec{P}$ проектуються в натуральну величину. Проекції складових $\vec{R}_{Bx}, \vec{R}_{Ax}$ дорівнюють нулю, оскільки вони перпендикулярні до даної площини.

Проекцію сили $\vec{R}_C$ на площину zAy можна визначити так (рис.1):

$$R_{Czy} = R_C \cos\beta = R_C\sqrt{2/3},$$

де $\cos\beta = \dfrac{BE}{EC} = \dfrac{\sqrt{AB^2 + AE^2}}{\sqrt{AB^2 + BC^2 + AE^2}} = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

Скориставшись рис.3, можна записати суму проекцій сил на вісь Az і суму моментів цих сил відносно осі x:

$$\sum F_{kz} = R_{Az} - P + R_{Bz} + R_{Czy}\sin 45^\circ = 0; \tag{4}$$

$$\sum M_x(\vec{F}_k) = R_{Bz}(AB) - P\frac{(AB)}{2} + R_{Czy}\cdot h_1 = 0; \tag{5}$$

де $h_1 = (AB)\sin 45^\circ = (AB)\sqrt{2}/2$.

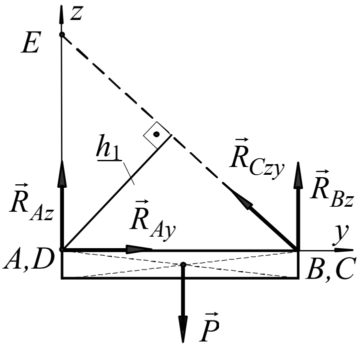


Рис. 3

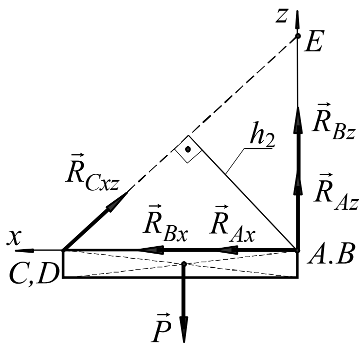


Рис. 4

Розглянемо проекцію системи сил на площину xAz (рис.4). Сили $\vec{R}_{Ax}, \vec{R}_{Az}, \vec{R}_{Bz}$, $\vec{P}, \vec{R}_{Bx}$, проектуються в натуральну величину. Проекція сили $\vec{R}_{Ay}$ дорівнює нулю. Проекцію сили $\vec{R}_C$ на площину xAz можна визначити так (рис.1):

$$R_{Cxz} = R_C \cdot \cos\beta = R_C\sqrt{2/3}.$$

Запишемо суму моментів усіх сил відносно осі y:

$$\sum M_y(\vec{F}_k) = P \cdot (BC)/2 - R_{Cxz} \cdot h_2 = 0, \quad (6)$$

де $h_2=(BC)\cdot\sin45^\circ=(BC)\sqrt{2}/2$.

Перепишемо записану систему (1) – (6) з усіма підстановками в наступній послідовності:

$$\sum F_{kx} = R_{Bx} + R_{Ax} - R_C \cdot \sqrt{2/3} \cdot \sqrt{2}/2 = 0; \quad (7)$$

$$\sum F_{ky} = R_{Ay} - R_C \cdot \sqrt{2/3} \cdot \sqrt{2}/2 = 0; \quad (8)$$

$$\sum F_{kz} = R_{Az} - P + R_{Bz} + R_C \cdot \sqrt{2/3} \cdot \sqrt{2}/2 = 0; \quad (9)$$

$$\sum M_x(\vec{F}_k) = R_{Bz}(AB) - P\frac{(AB)}{2} + R_C(AB) \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0; (10)$$

$$\sum M_y(\vec{F}_k) = P \cdot (BC)/2 - R_C(BC) \cdot \sqrt{2/3} \cdot \sqrt{2}/2 = 0; \quad (11)$$

$$\sum M_z(\vec{F}_k) = -R_{Bx}(AB) = 0; \;\Rightarrow\; R_{Bx}=0. \quad (12)$$

З рівняння (11) знаходимо реакцію R_C невагомого стержня CE:

$$R_C = P\,\frac{(BC)}{2} \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \frac{2}{(BC)\sqrt{2}} = P\frac{\sqrt{3}}{2} = 866\ H.$$

Потім, розв'язавши послідовно рівняння (10), (9), (8), (7), дістанемо R_{Bz}, R_{Az}, R_{Ay}, R_{Ax}:

$$R_{Bz} = P/2 - R_C/\sqrt{3} = 1000/2 - 866/1{,}73 = 0;$$

$$R_{Az} = P - R_{Bz} - R_C/\sqrt{3} = 1000 - 866/1{,}73 = 500\ H;$$

$$R_{Ay} = R_C/\sqrt{3} = 866/1{,}73 = 500\ H;$$

$$R_{Ax} = R_C/\sqrt{3} - R_{Bx} = 866/1{,}73 - 0 = 500\ H.$$

Відповідь: $R_{Ax}= 500H$; $R_{Ay}= 500H$; $R_{Az}= 500H$;

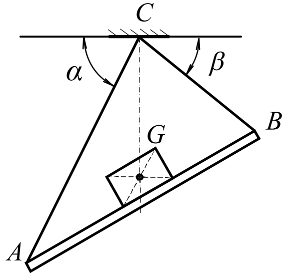
$R_{Bx}= 0$; $R_{Bz}= 0$; $R_C= 866\ H$.

ДОДАТКИ

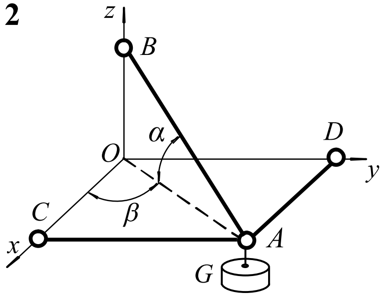
ВИХІДНІ ДАННІ ДЛЯ ЗАВДАНЬ ЗІ СТАТИКИ

Варіант №1

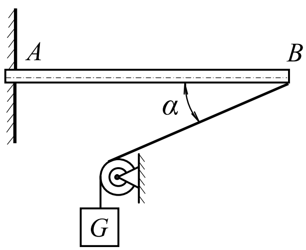
1



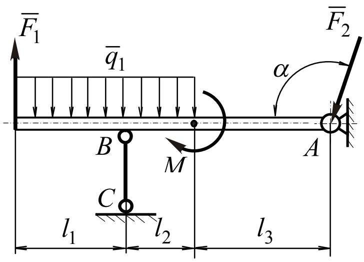
2



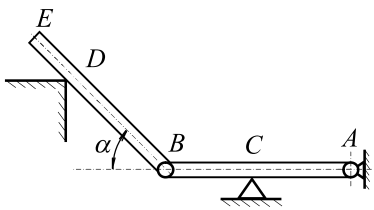
3



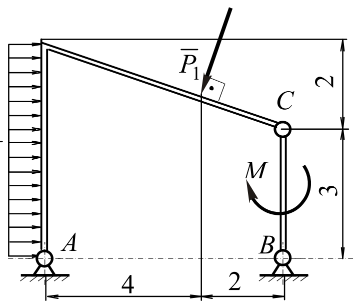
4



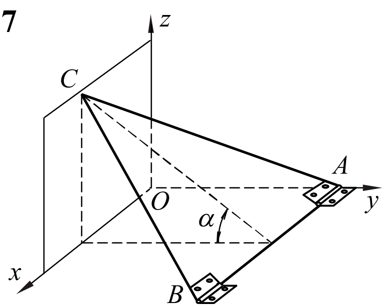
5



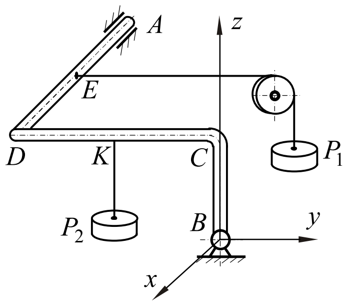
6



7

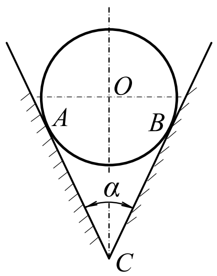


8

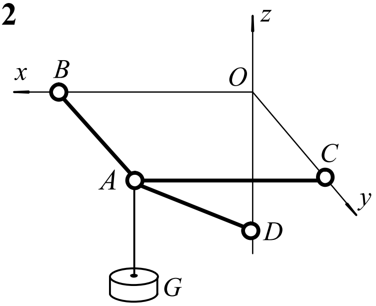


Варіант №2

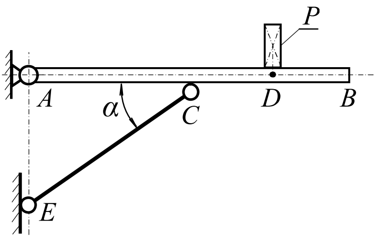
1



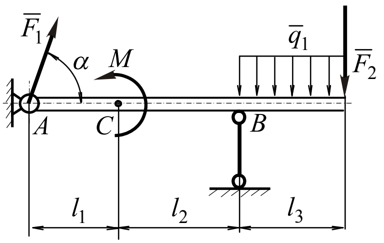
2



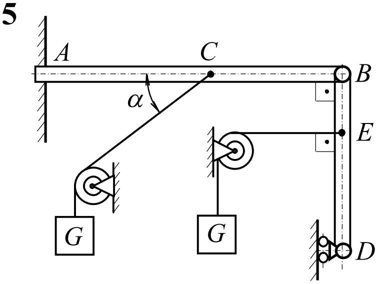
3



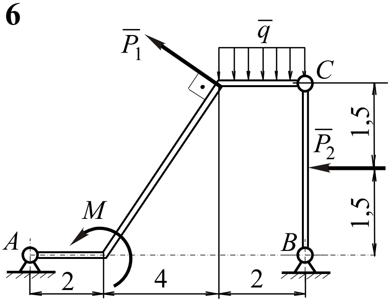
4



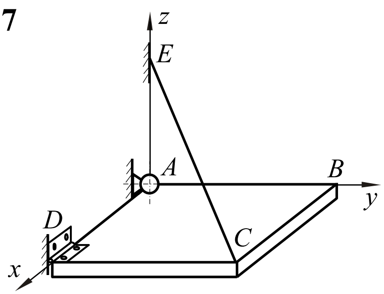
5



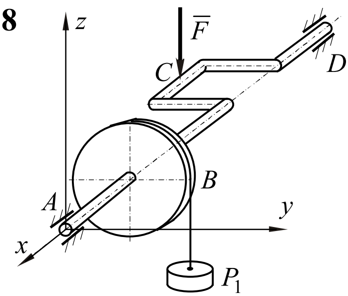
6



7

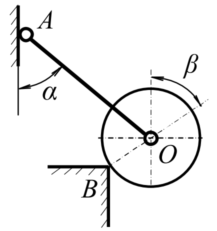


8

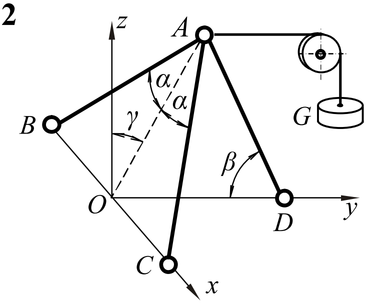


Варіант №3

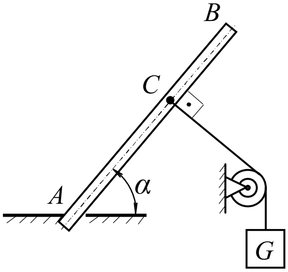
1



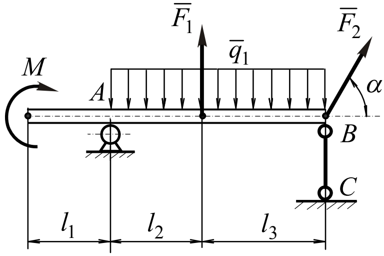
2



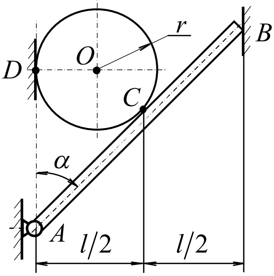
3



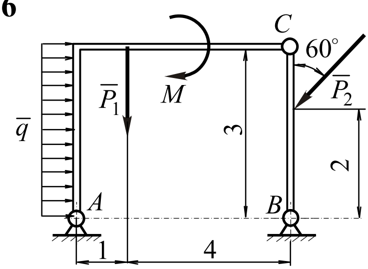
4



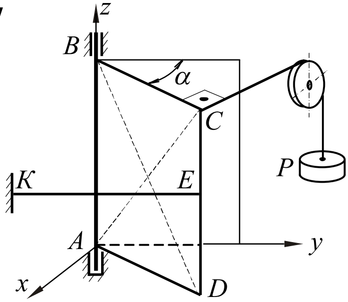
5



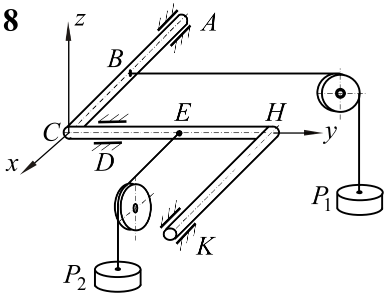
6



7

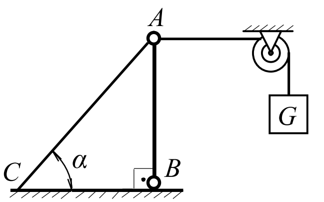


8

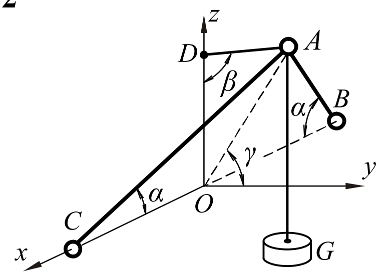


Варіант №4

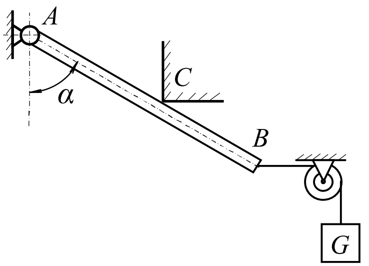
1



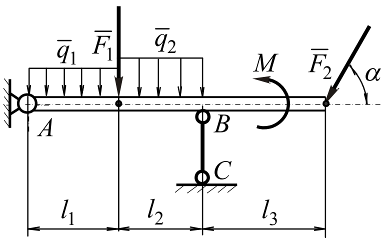
2



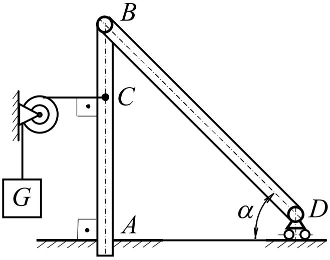
3



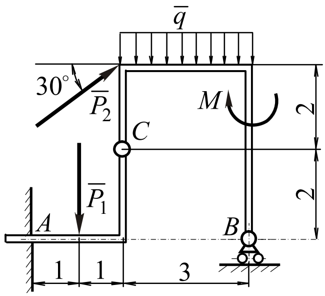
4



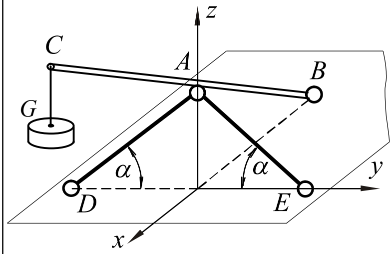
5



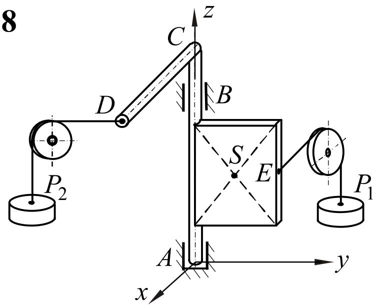
6



7

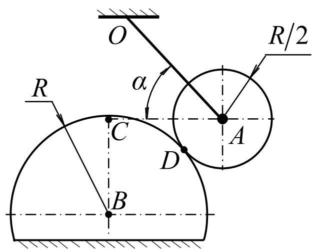


8

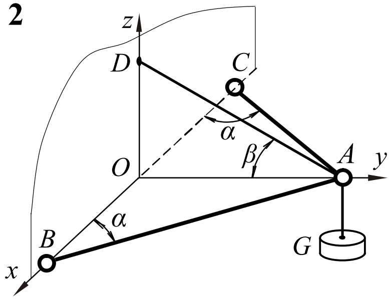


Варіант №5

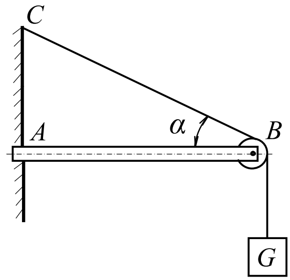
1



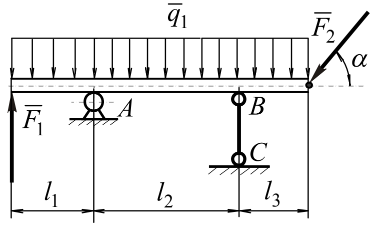
2



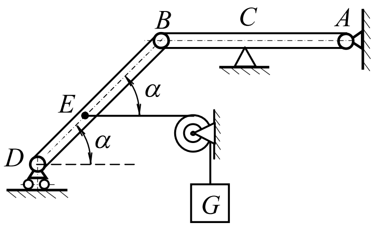
3



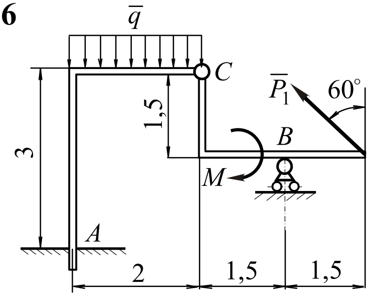
4



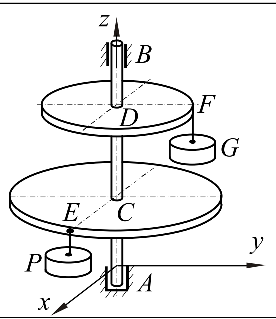
5



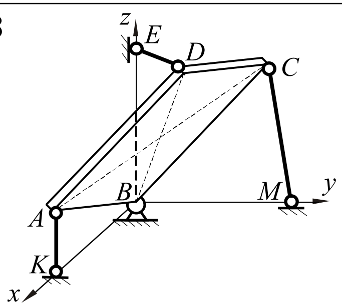
6



7

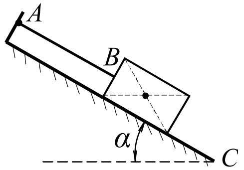


8

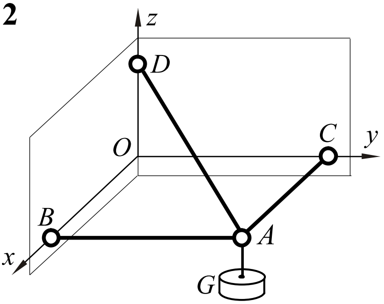


Варіант №6

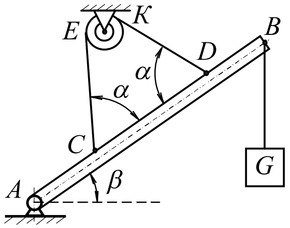
1



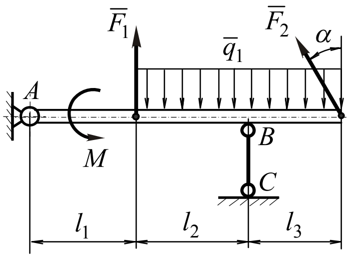
2



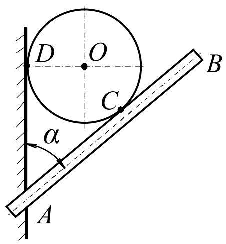
3



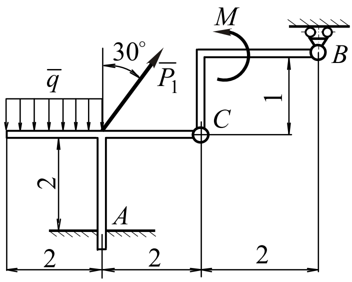
4



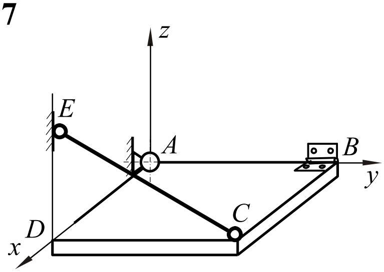
5



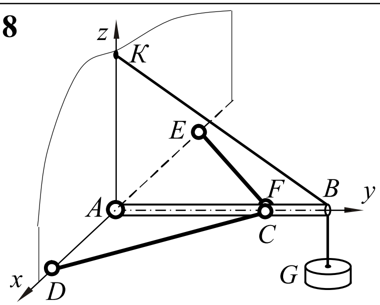
6



7

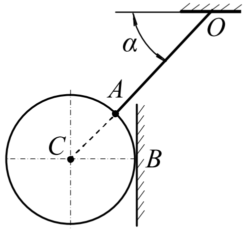


8

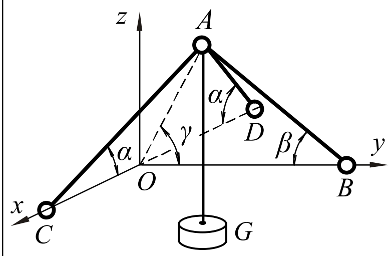


Варіант №7

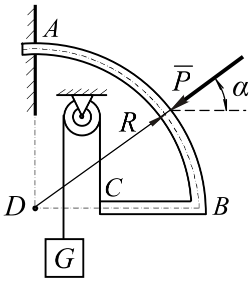
1



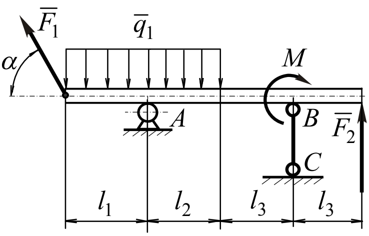
2



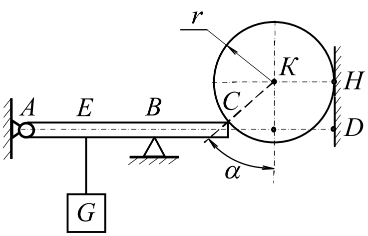
3



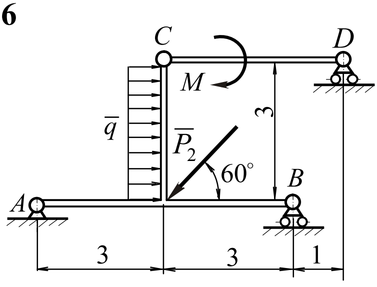
4



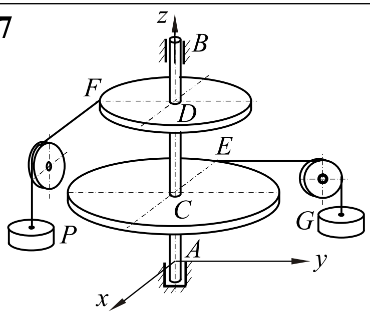
5



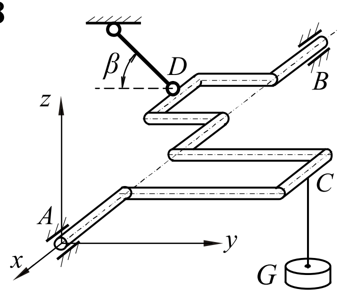
6



7

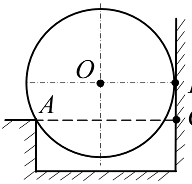


8

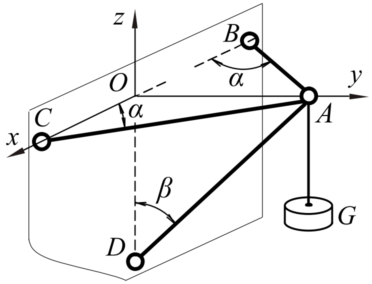


Варіант №8

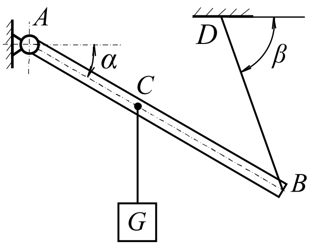
1



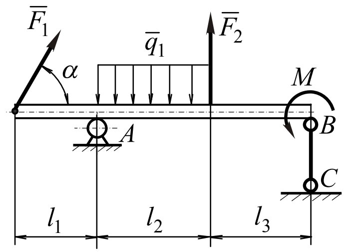
2



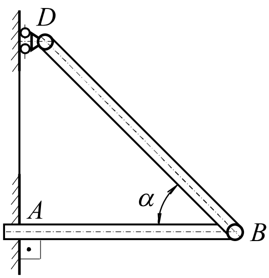
3



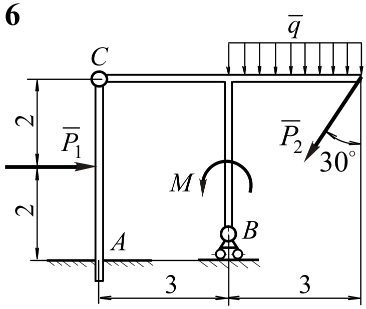
4



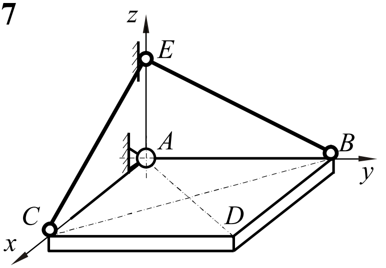
5



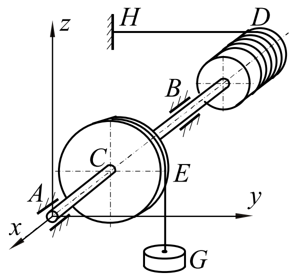
6



7

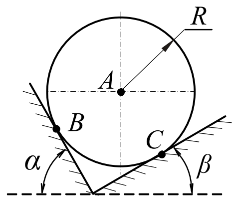


8

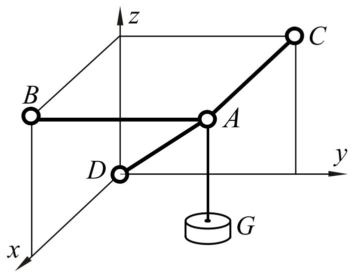


Варіант №9

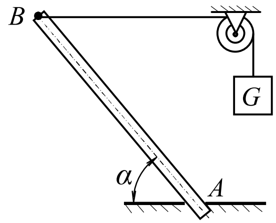
1



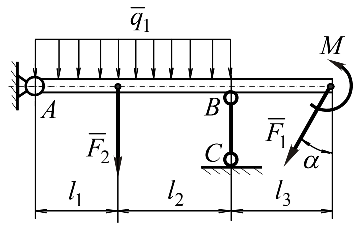
2



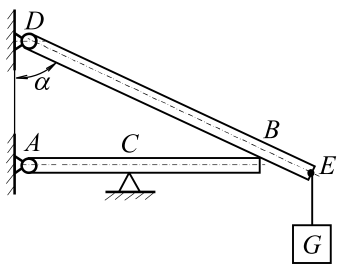
3



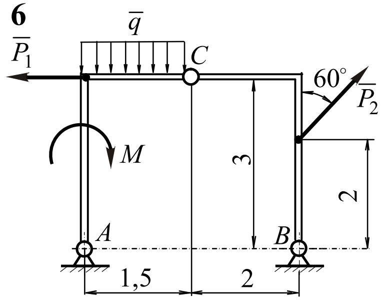
4



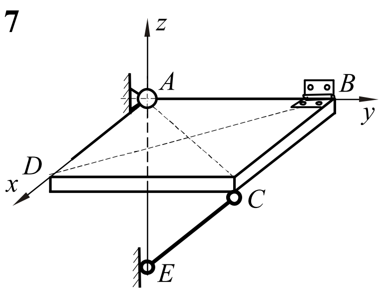
5



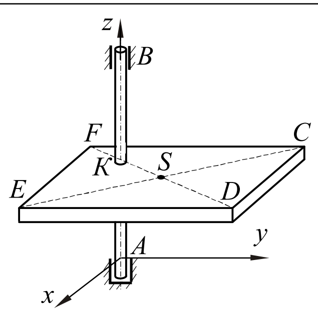
6



7

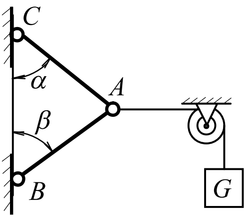


8

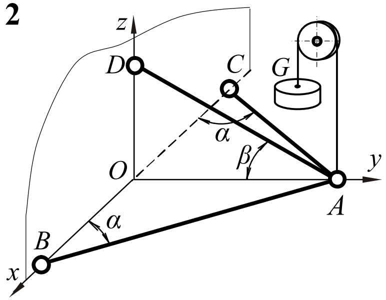


Варіант №10

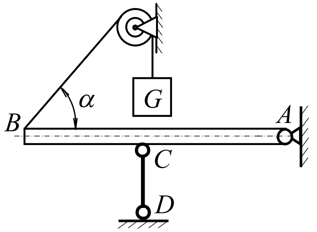
1



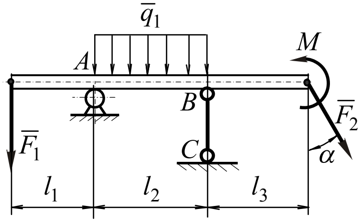
2



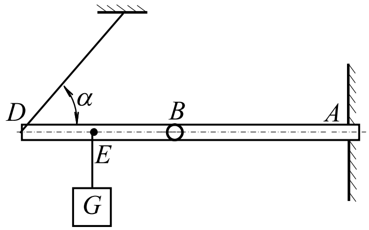
3



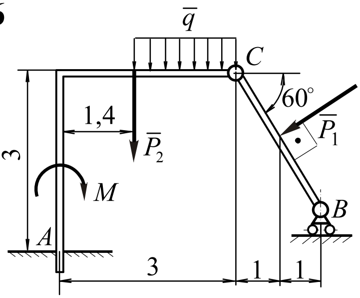
4



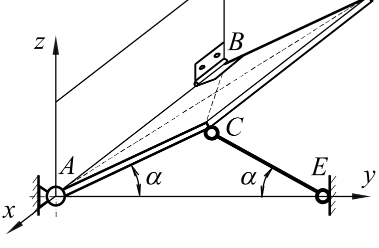
5



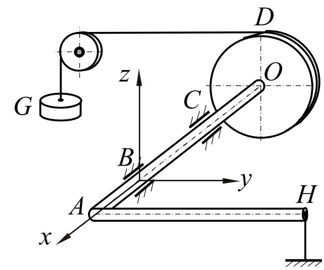
6



7

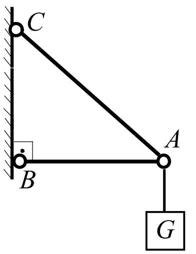


8

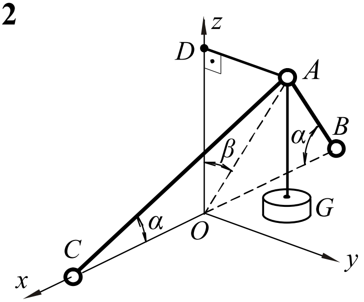


Варіант №11

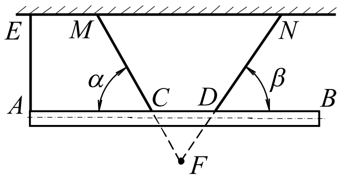
1



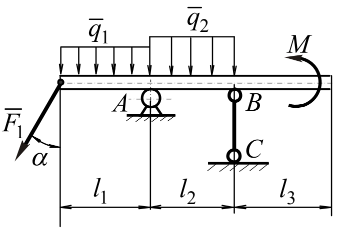
2



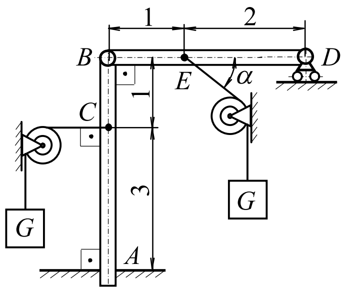
3



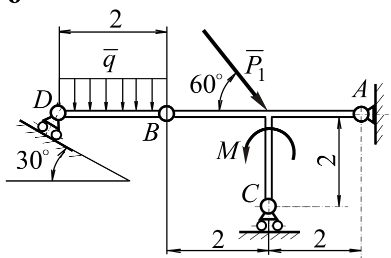
4



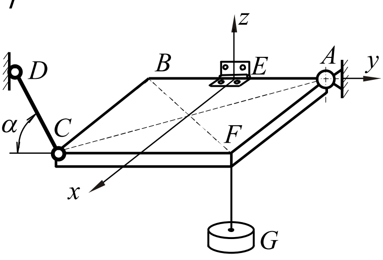
5



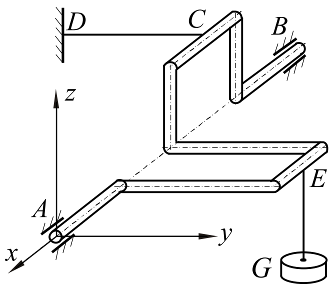
6

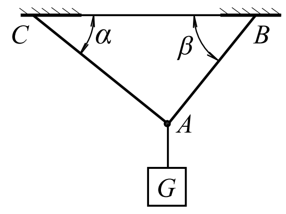
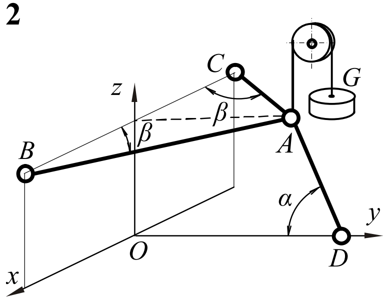
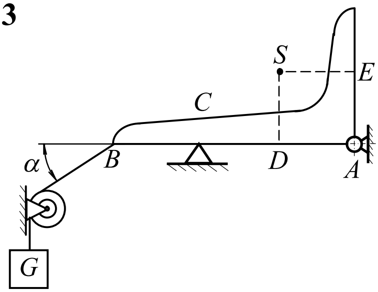
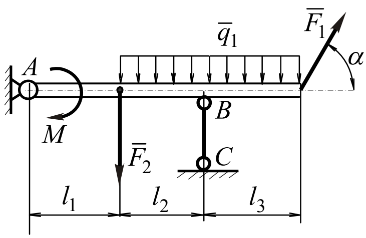
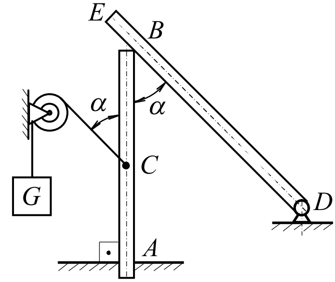
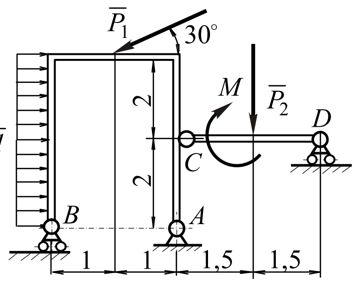
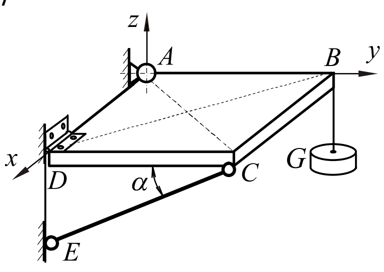
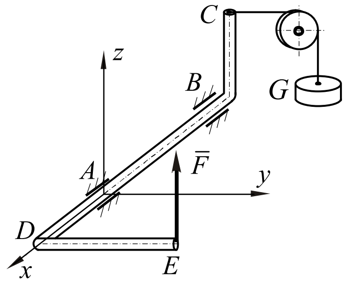


7



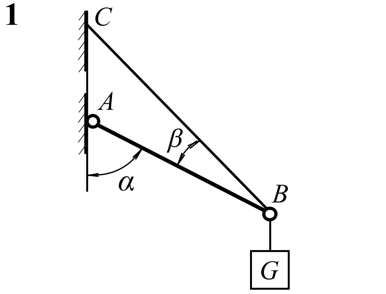
8



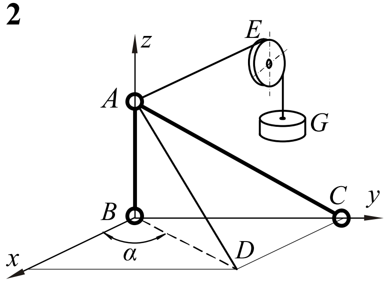
Варіант №12	
1 	**2** 
3 	**4** 
5 	**6** 
7 	**8** 

Варіант №13

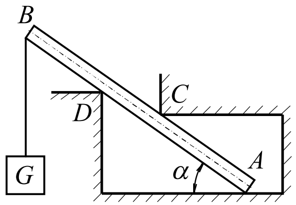
1



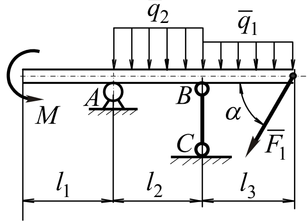
2



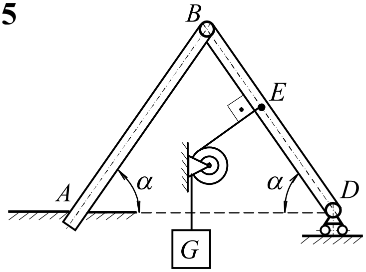
3



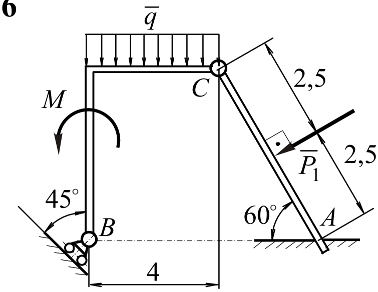
4



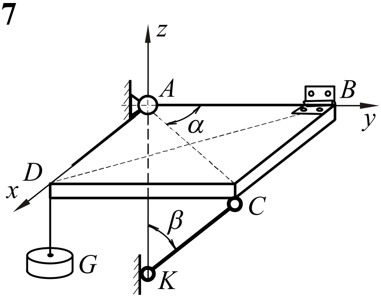
5



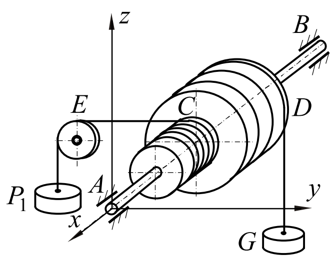
6



7

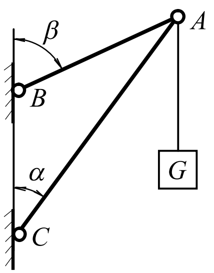


8

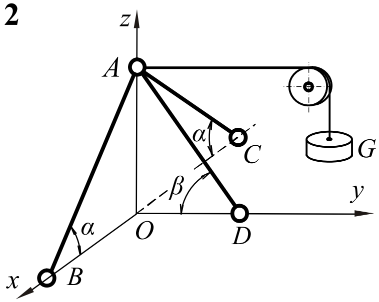


Варіант №14

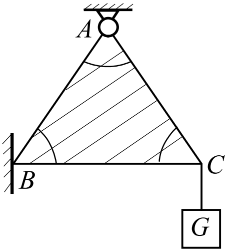
1



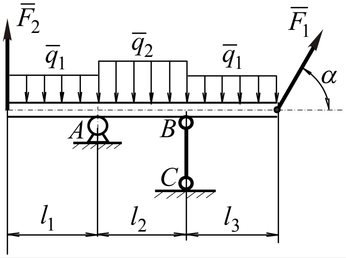
2



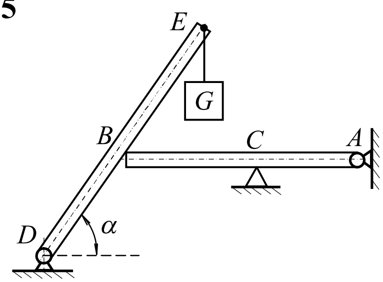
3



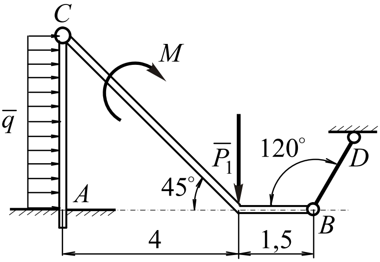
4



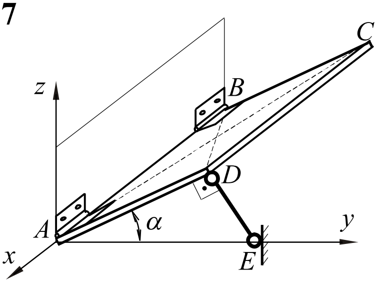
5



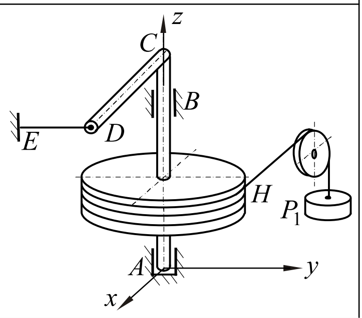
6



7

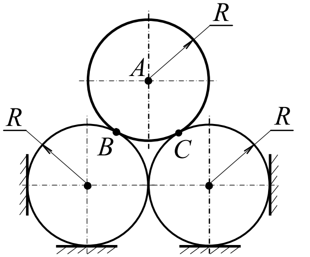


8

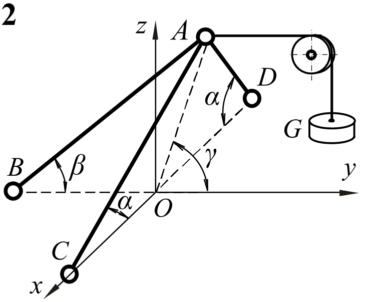


Варіант №15

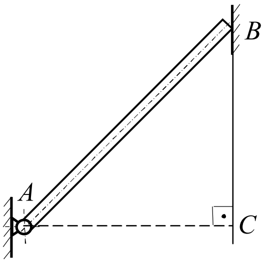
1



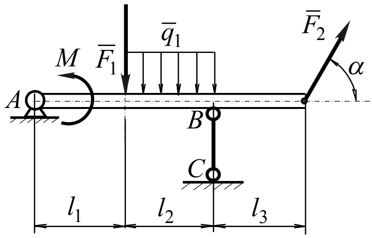
2



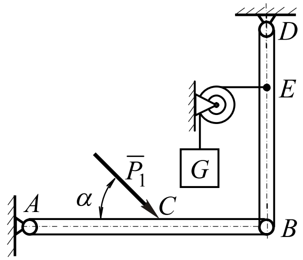
3



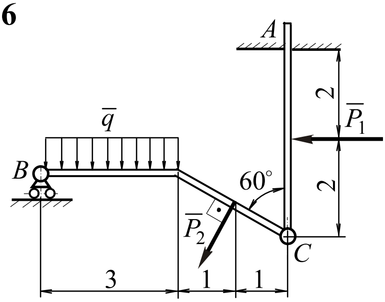
4



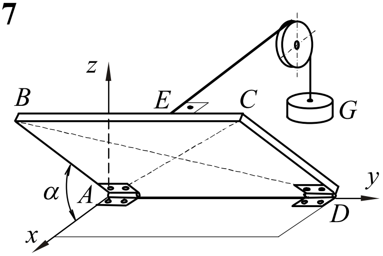
5



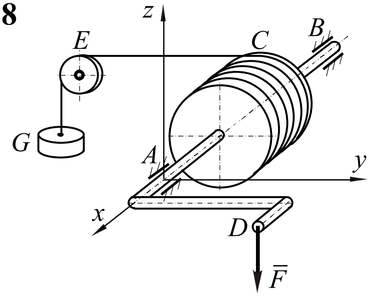
6



7

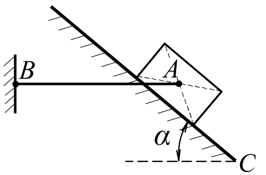


8

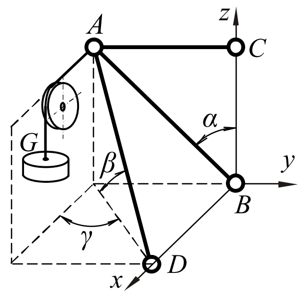


Варіант №16

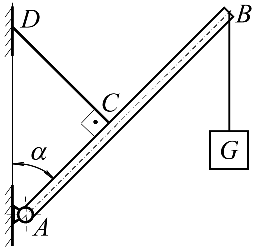
1



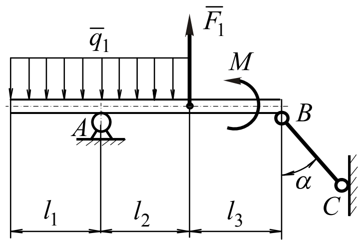
2



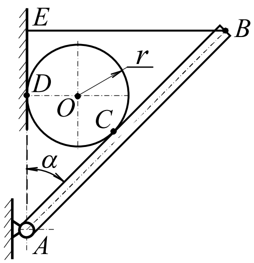
3



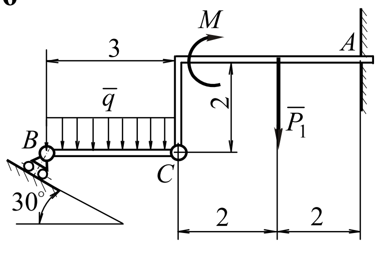
4



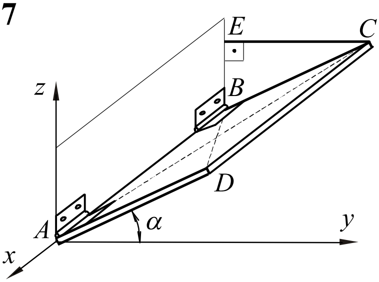
5



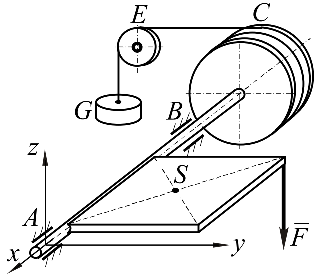
6



7

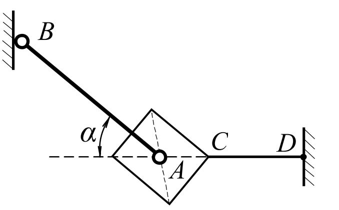


8

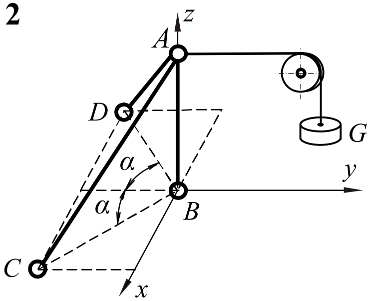


Варіант №17

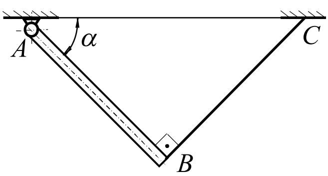
1



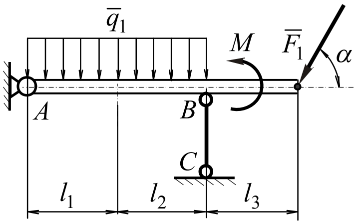
2



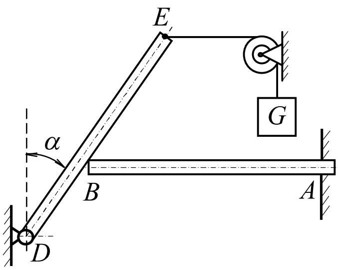
3



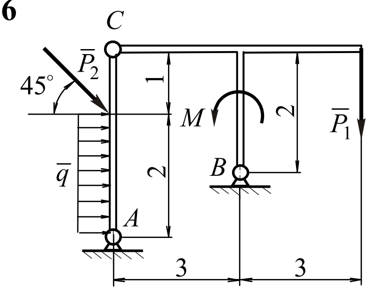
4



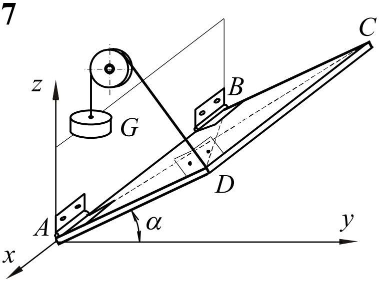
5



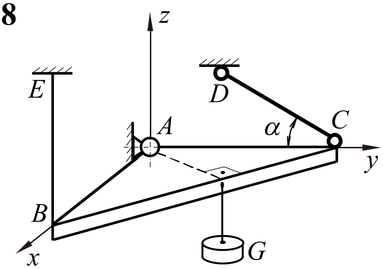
6



7

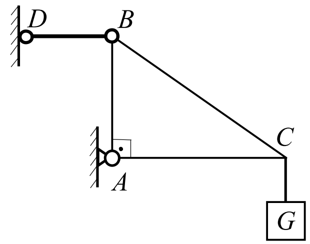


8

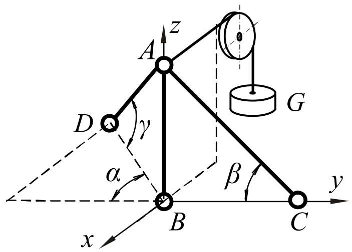


Варіант №18

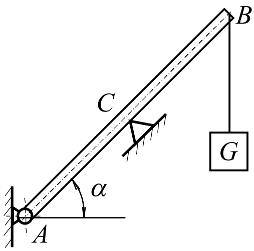
1



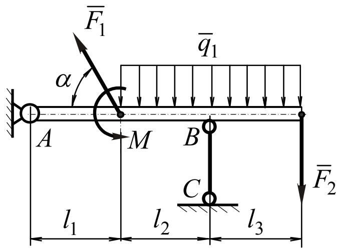
2



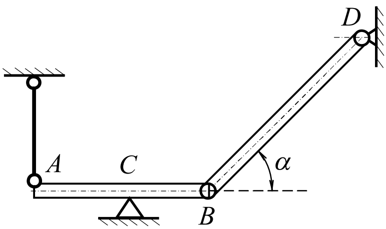
3



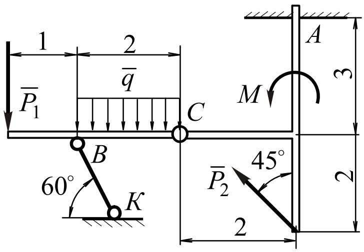
4



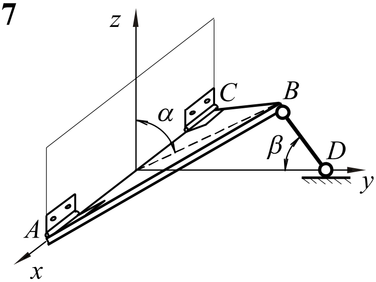
5



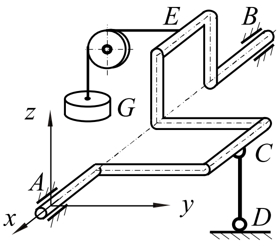
6



7

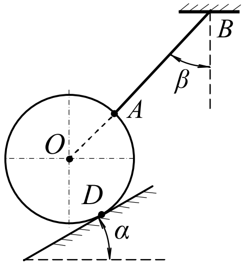


8

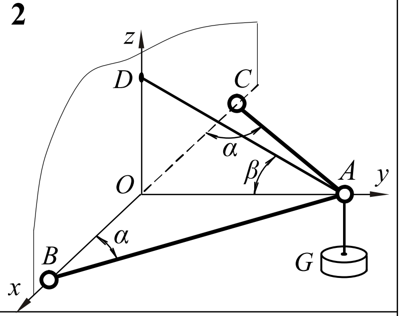


Варіант №19

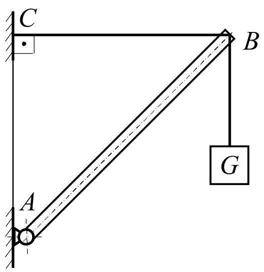
1



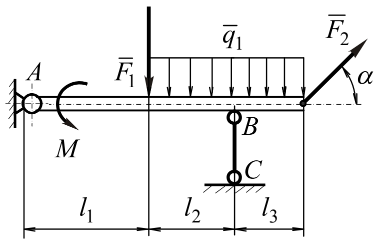
2



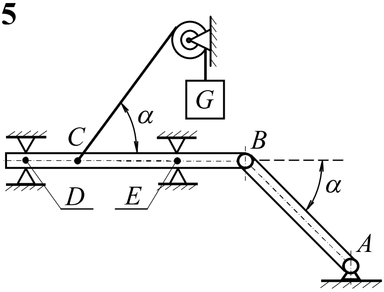
3



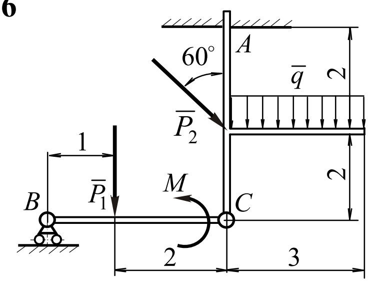
4



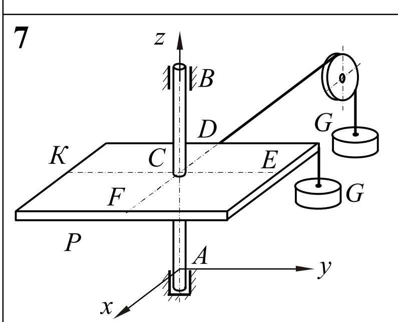
5



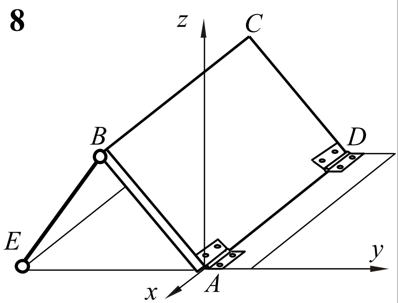
6



7

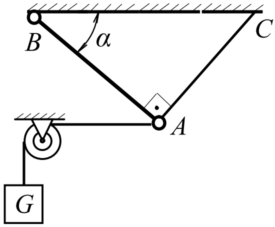


8

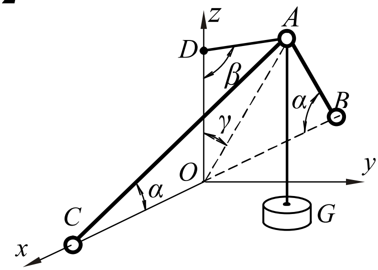


Варіант №20

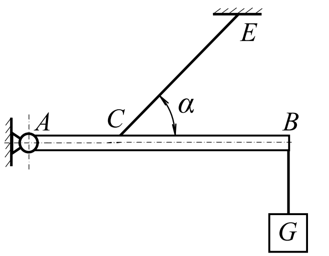
1



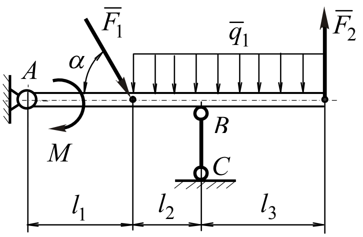
2



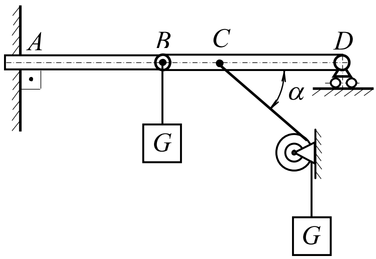
3



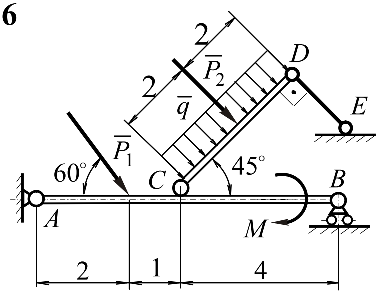
4



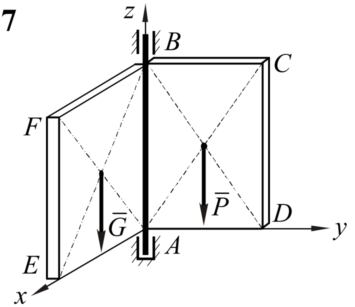
5



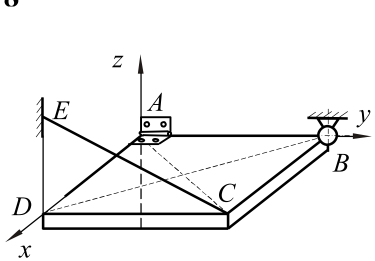
6



7

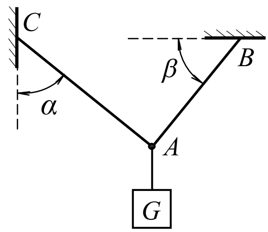


8

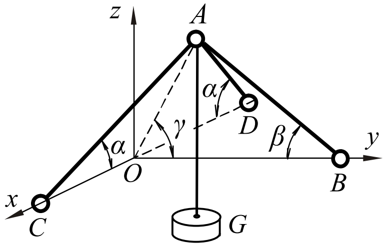


Варіант №21

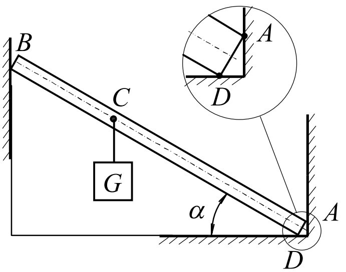
1



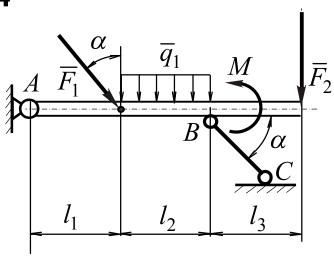
2



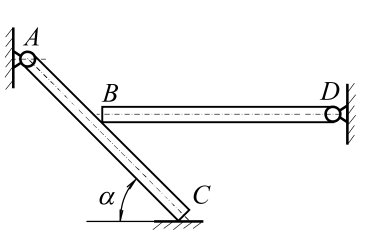
3



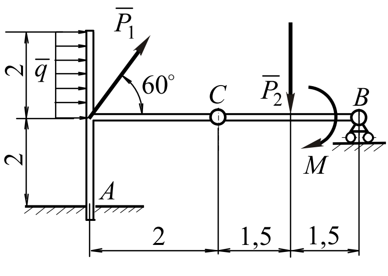
4



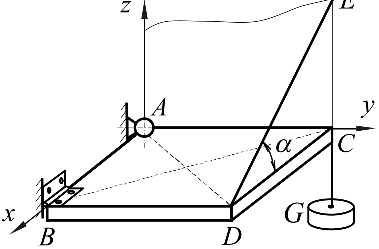
5



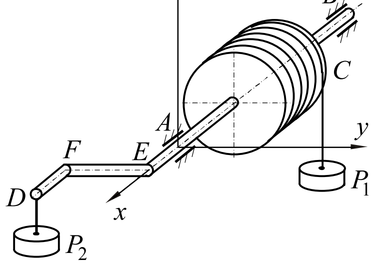
6



7

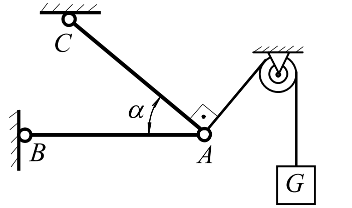


8

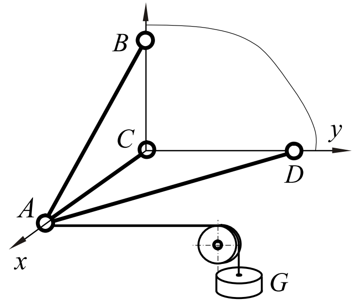


Варіант №22

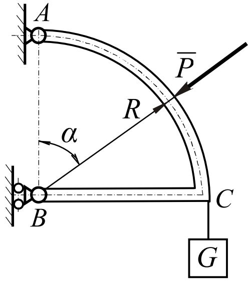
1



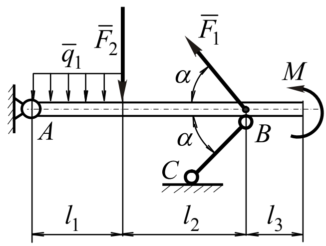
2



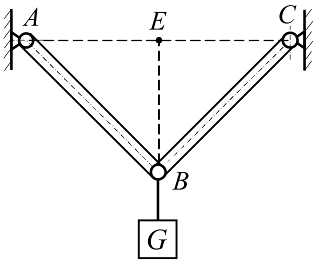
3



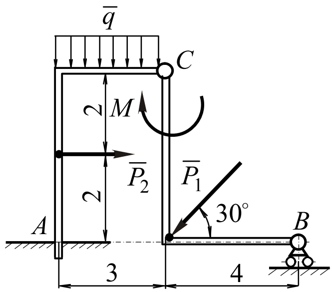
4



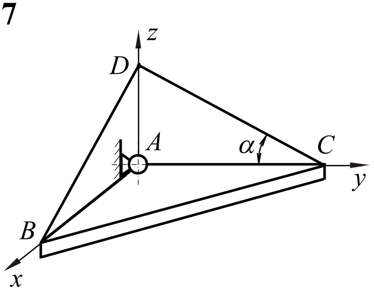
5



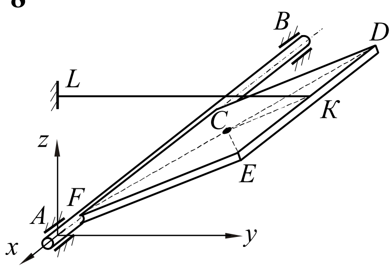
6



7

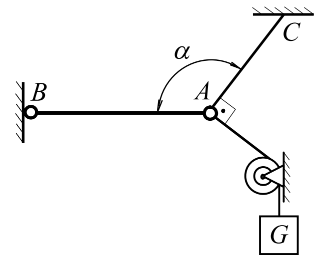


8

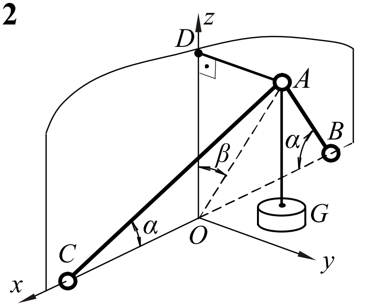


Варіант №23

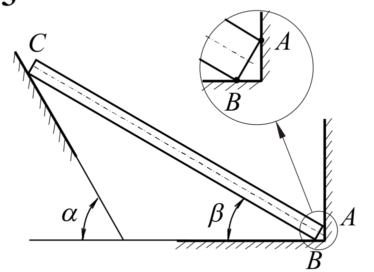
1



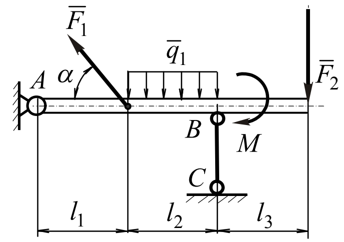
2



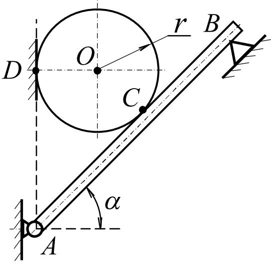
3



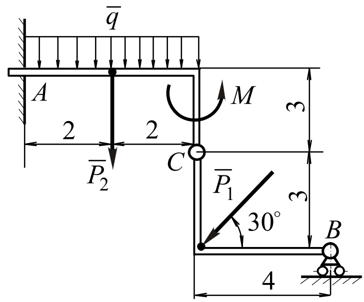
4



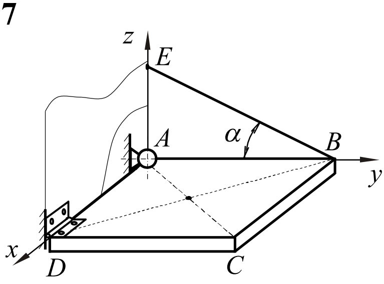
5



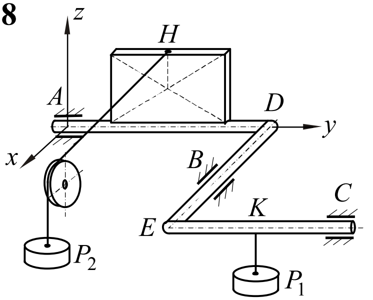
6



7

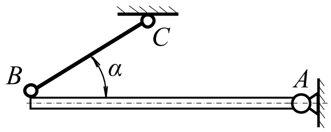


8

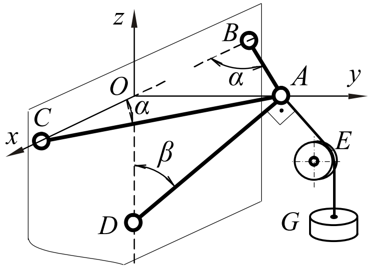


Варіант № 24

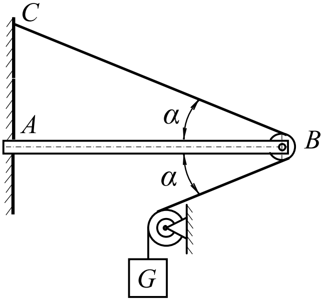
1



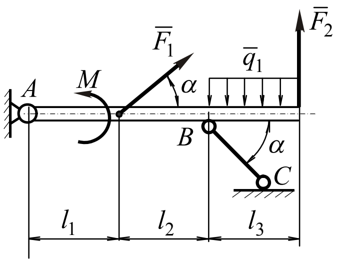
2



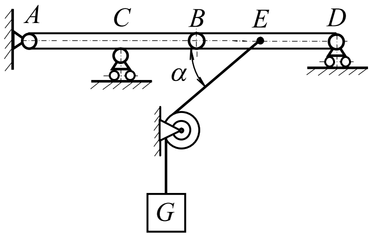
3



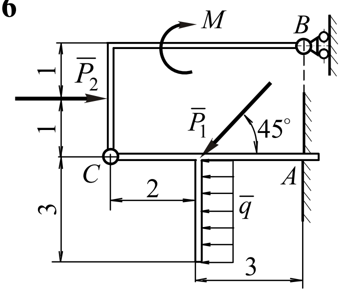
4



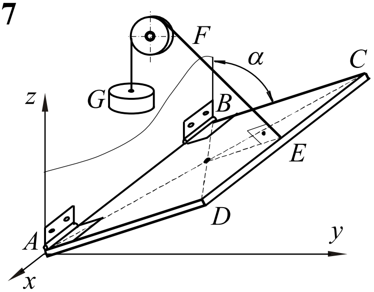
5



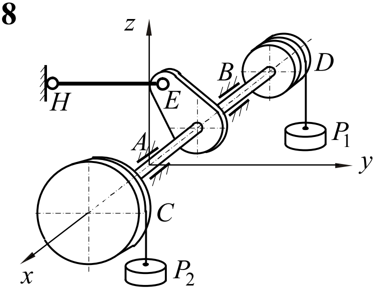
6



7

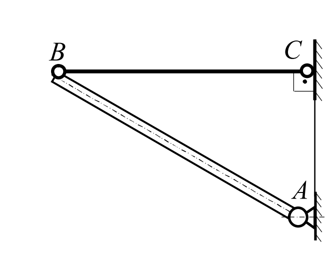


8

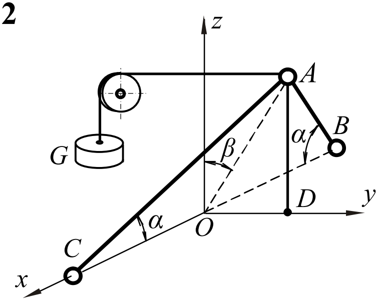


Варіант № 25

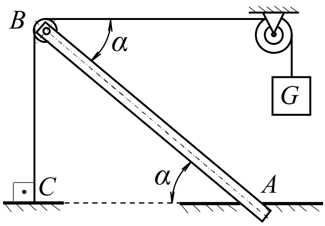
1



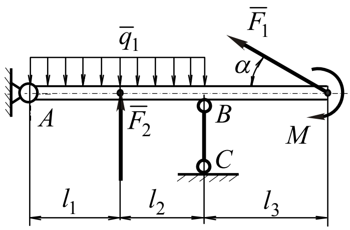
2



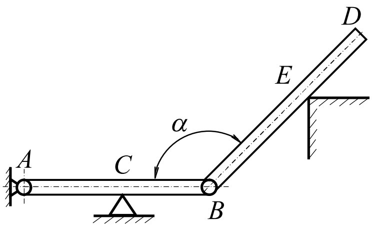
3



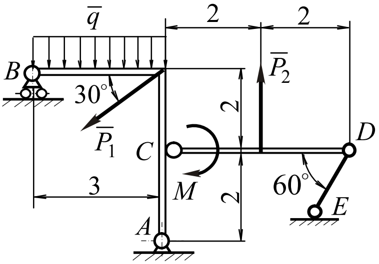
4



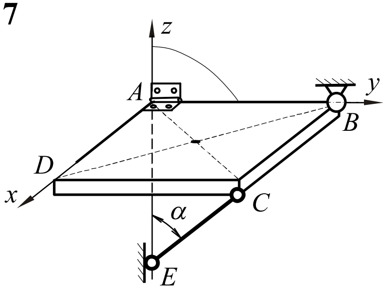
5



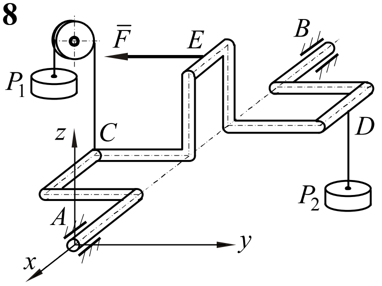
6

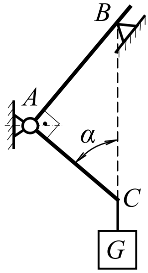
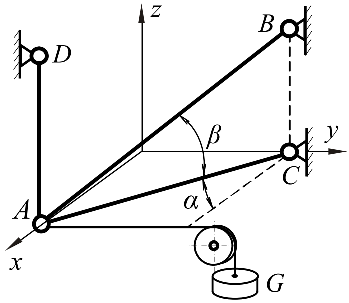
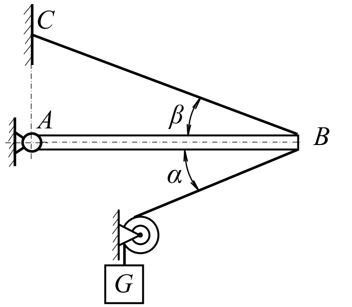
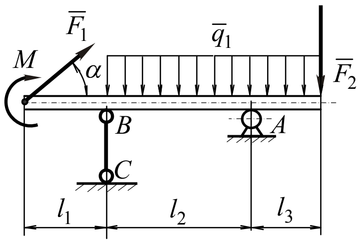
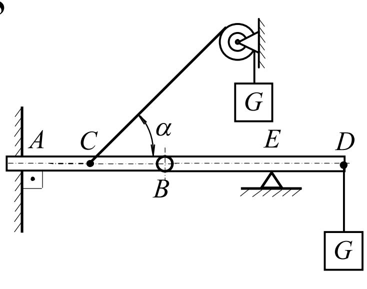
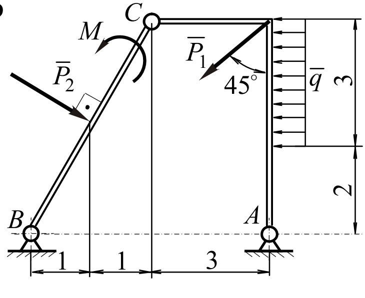
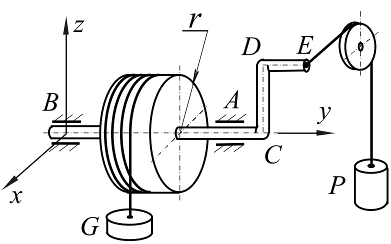
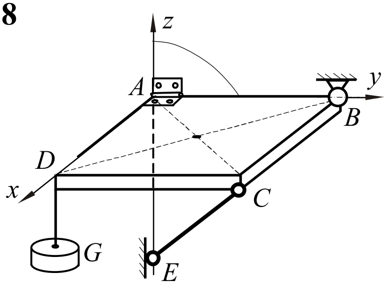


7



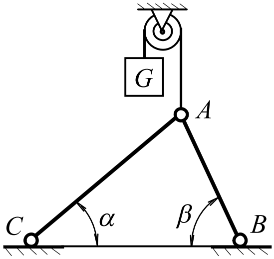
8



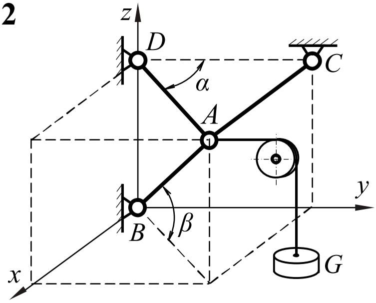
Варіант № 26	
1 	**2** 
3 	**4** 
5 	**6** 
7 	**8** 

Варіант № 27

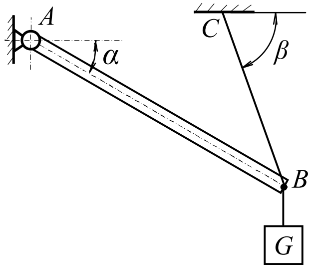
1



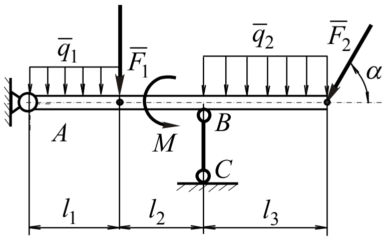
2



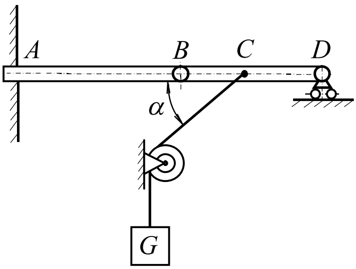
3



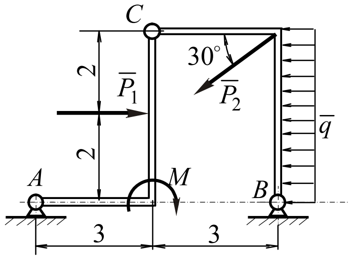
4



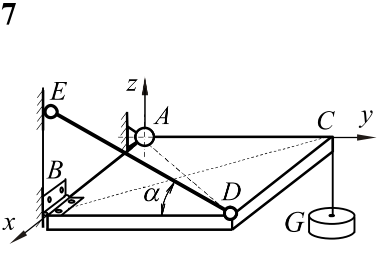
5



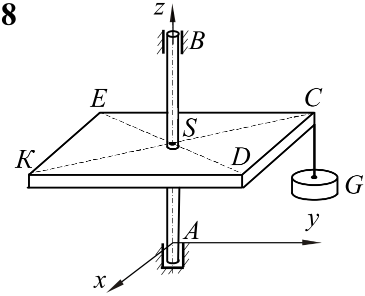
6



7

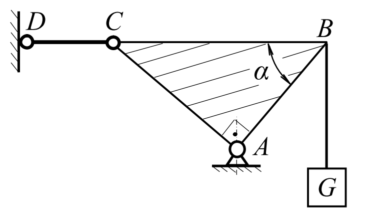


8

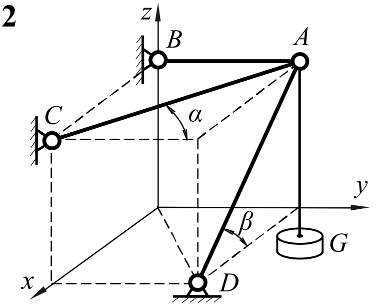


Варіант № 28

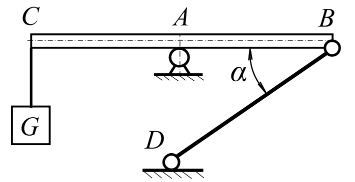
1



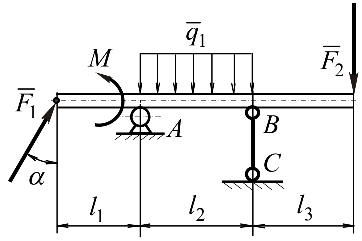
2



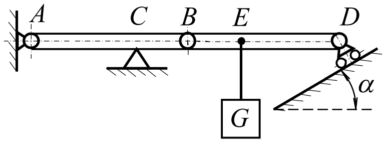
3



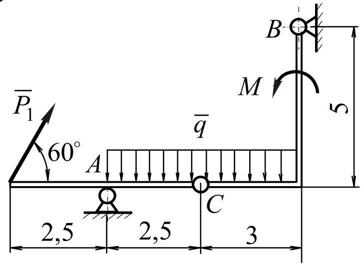
4



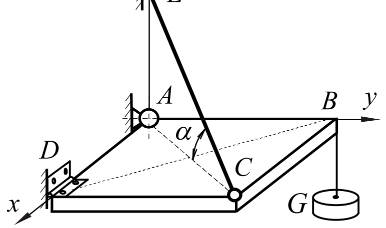
5



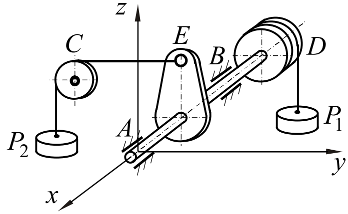
6



7

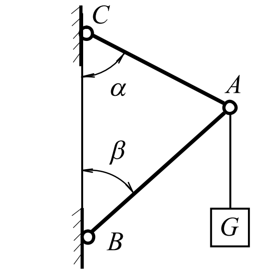


8

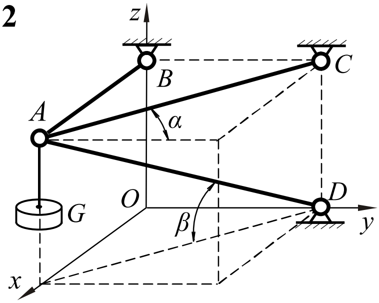


Варіант № 29

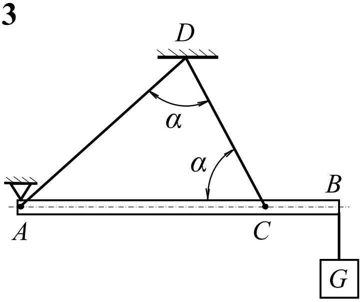
1



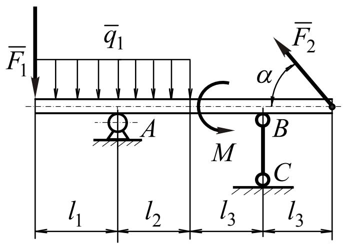
2



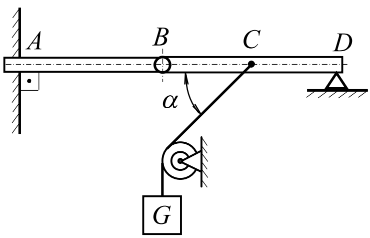
3



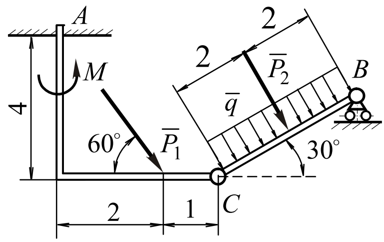
4



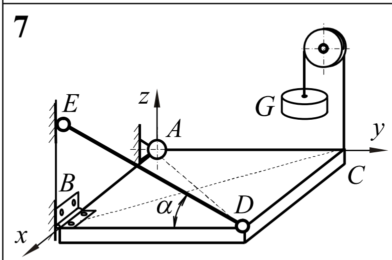
5



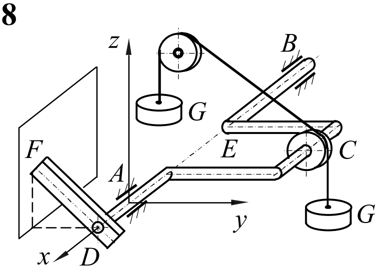
6

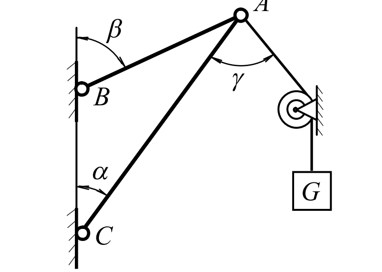
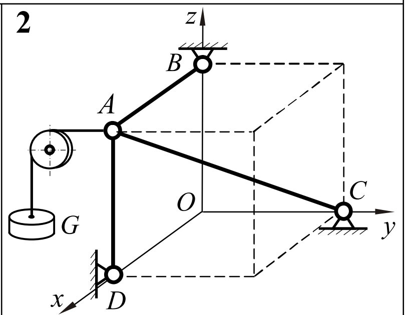
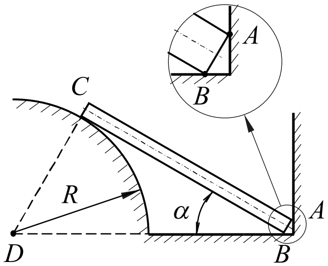
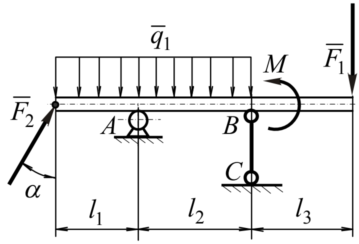
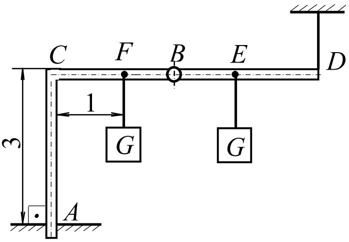
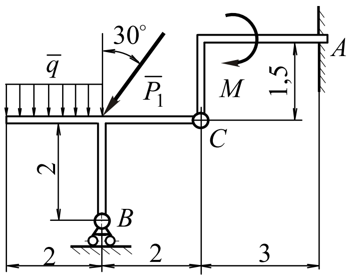
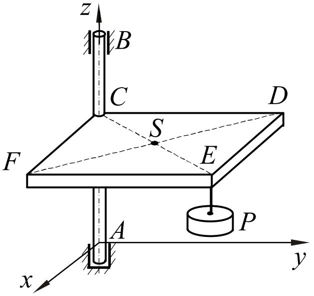
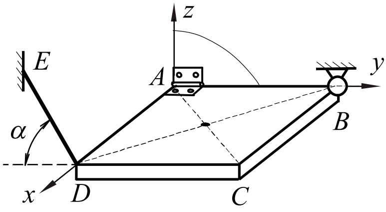


7



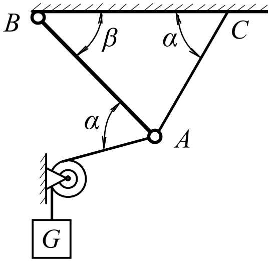
8



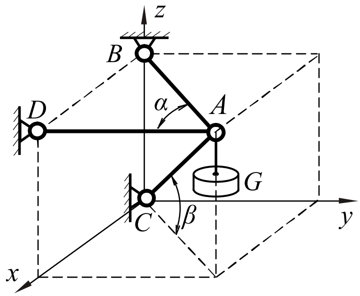
Варіант № 30	
1 	**2** 
3 	**4** 
5 	**6** 
7 	**8** 

Варіант № 31

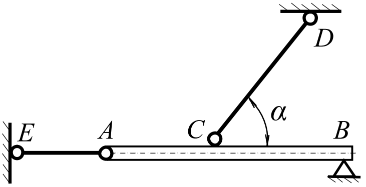
1



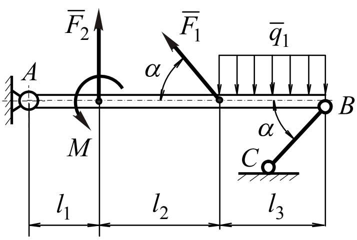
2



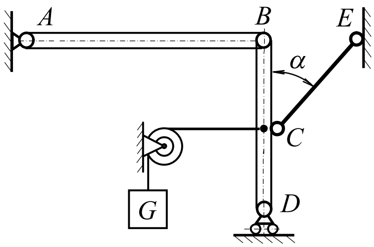
3



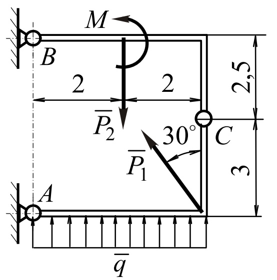
4



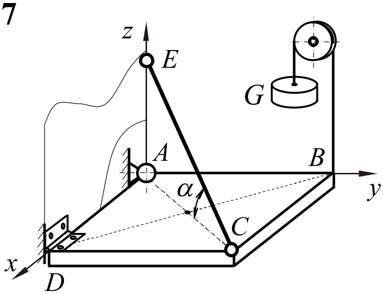
5



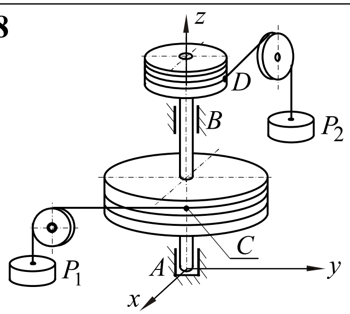
6



7



8



Вихідні дані до задачі №1

Варіант	Об'єкт рівноваги	G, H	α, *град*	β, *град*	Додаткові умови	Примітки
1	Невагоме тіло AB	300	75	30	–	AC,AB–нитки
2	Циліндр O вагою G	10	60	–	–	–
3	Циліндр O вагою G	200	45	15	–	AO–ідеальний стержень
4	Шарнір A	100	60	–	–	AB–ід.стержень; AC–нитка
5	Циліндр A вагою G	200	30	–	BC=0,75R	OA–нитка
6	Тіло В вагою G	150	30	–	–	AB–нитка
7	Циліндр C вагою G	1000	60	–	–	AO–нитка
8	Циліндр O вагою G	40	–	–	AC=1,5(OB)	–
9	Циліндр A вагою G	100	60	45	–	–
10	Шарнір A	500	45	60	–	AB,AC–ідеальні стержні
11	Шарнір A	200	–	–	AC=2(AB)	AB,AC–ідеальні стержні
12	Точка A	1000	30	60	–	AB,AC–нитки
13	Шарнір B	2000	60	30	–	BC–нитка; AB–ід.стержень
14	Шарнір A	200	30	45	–	AB,AC–ідеальні стержні
15	Циліндр A вагою G	100	–	–	–	–
16	Тіло A вагою G	200	60	–	–	AB–нитка

Вихідні дані до задачі №1 (продовження).

Варіант	Об'єкт рівноваги	*G*, *Н*	*α*, *град*	*β*, *град*	Додаткові умови	Примітки
17	Тіло *A* вагою *G*	300	30	–	–	*AB* – ід.стерж.; *CD* – нитка
18	Невагоме тіло *ABC*	200	–	–	*BC*=2(*AB*)	*BD* – ідеальний стержень
19	Циліндр *O* вагою *G*	500	30	45	–	*AB*–нитка
20	Шарнір *A*	400	60	–	–	*AB*–ід.стерж.; *AC* – нитка
21	Точка *A*	200	30	60	–	*AB*, *AC* – нитки
22	Шарнір *A*	100	60	–	–	*AB*, *AC*–ідеальні стержні
23	Шарнір *A*	80	150	–	–	*AB* – ід.стерж.; *AC* – нитка
24	Балка *AB* вагою *G*	300	30	–	–	*BC* – ідеальний стержень
25	Балка *AB* вагою *G*	60	–	–	*AB*=2(*BC*)	*BC* – ідеальний стержень
26	Невагомий кутник *CAB*	100	30	–	–	
27	Шарнір *A*	120	45	60	–	*AB*, *AC* – ідеальні стержні
28	Невагомий Δ *ABC*	300	60	–	–	*DC* – ідеальний стержень
29	Шарнір *A*	1000	60	45	–	*AB, AC*–ідеальні стержні
30	Шарнір *A*	1000	15	60	$\gamma=120^{\circ}$	*AB, AC*–ідеальні стержні
31	Шарнір *A*	500	60	45	–	*AB*– ід.стержень; *AC*–нитка

Вихідні дані до задачі №2

Для всіх варіантів – об'єкт рівноваги шарнір *A*.

Варіант	*G* *Н*	α *град*	β *град*	γ *град*	*AB* *м*	*AC* *м*	*AD* *м*	Ідеальні стержні	Нитка
1	1000	60	30	–	–	–	–	*AB, AC, AD*	–
2	200	–	–	–	0,2	0,4	0,6	*AB, AC, AD*	–
3	2000	30	60	45	–	–	–	*AB, AC, AD*	*AE*
4	100	60	120	60	–	–	–	*AB, AC*	*AD*
5	3000	30	30	–	–	–	–	*AB, AC*	*AD*
6	500	–	–	–	0,4	0,3	1,3	*AB, AC, AD*	–
7	1800	60	30	60	–	–	–	*AB, AC, AD*	–
8	200	45	60	–	–	–	–	*AB, AC, AD*	–
9	600	–	–	–	0,7	0,5	1,5	*AB, AC, AD*	–
10	300	30	60	–	–	–	–	*AB, AC, AD*	–
11	100	60	60	–	–	–	–	*AB, AC*	*AD*
12	2400	60	45	–	–	–	–	*AB, AC, AD*	–
13	1000	60	–	–	0,4	0,8	–	*AB, AC*	*AD, AE*
14	600	45	60	–	–	–	–	*AB, AC, AD*	–
15	2000	60	45	60	–	–	–	*AB, AC, AD*	–
16	200	60	30	30	–	–	–	*AB, AC, AD*	–

Вихідні дані до задачі №2 (продовження)
Для всіх варіантів – об’єкт рівноваги шарнір А.

Варіант	G H	α *град*	β *град*	γ *град*	AB *м*	AC *м*	AD *м*	Ідеальні стержні	Нитка
17	1000	60	–	–	6	7,5	7,5	*AB, AD, AC*	–
18	180	30	60	30	–	–	–	*AB, AC, AD*	–
19	1000	60	30	–	–	–	–	*AB, AC*	*AD*
20	300	60	135	30	–	–	–	*AB, AC*	*AD*
21	200	30	30	45	–	–	–	*AB, AC, AD*	–
22	500	–	–	–	0,5	0,3	0,8	*AB, AC, AD*	–
23	400	45	60	–	–	–	–	*AB, AC*	*AD*
24	1500	30	45	–	–	–	–	*AB, AC, AD*	*AE*
25	100	60	30	–	–	–	–	*AB, AC*	*AD*
26	1000	45	30	–	–	–	–	*AB, AC, AD*	–
27	800	60	60	–	–	–	–	*AB, AC, AD*	–
28	400	30	60	–	–	–	–	*AB, AC, AD*	–
29	200	60	45	–	–	–	–	*AB, AC, AD*	–
30	1800	–	–	–	1	1,73	1	*AB, AC, AD*	–
31	500	30	45	–	–	–	–	*AB, AC, AD*	*AE*

Вихідні дані до задачі №3

Варі- ант	Об'єкт рівноваги	*P* *Н*	*G* *Н*	*α* *град*	*β* *град*	*AB* *м*	*BC* *м*	*CD* *м*	Примітка
1	Балка *AB* вагою *P*	80	100	30	–	2	–	–	–
2	Балка *AB* вагою *G*	150	120	30	–	1.4	1	0.2	*EC* – ід. стержень
3	Балка *AB* вагою *P*	60	80	60	–	1	0.25	–	–
4	Балка *AB* вагою *P*	40	20	30	–	1.2	0.4	–	–
5	Балка *AB* вагою *P*	100	80	30	–	2	–	–	*CB* – нитка; *B* - блок
6	Невагома балка *AB*	–	100	60	30	0.9	0.6	0.3	*CE, DK* – нитки
7	Невагоме тіло *ABC*	60	20	30	–	–	1	1	–
8	Балка *AB* вагою *P*	240	80	60	75	6	4	–	*BD* – нитка
9	Балка *AB* вагою *P*	200	400	60	–	1	–	–	–
10	Балка *AB* вагою *P*	200	300	60	–	1	0.2	–	*CD* – ід. стержень
11	Балка *AB* вагою *P*	1200	–	60	45	4	3	1	*AE, CM, DN* – нитки
12	Тіло *AB* вагою *P*	200	400	30	–	0.2	0.05	0.1	*S* – центр тяжіння
13	Невагома балка *AB*	–	1000	60	–	0.6	0.4	0.1	–
14	Δ*ABC* вагою *P*	1500	1000	–	–	–	–	–	*AB*=*BC*=*AC*
15	Балка *AB* вагою *P*	1000	–	–	–	2	0.5	–	–
16	Балка *AB* вагою *P*	500	1000	60	–	1	0.7	–	*DC* – нитка

Вихідні дані до задачі №3 (продовження).

Варі-ант	Об'єкт рівноваги	*P* *Н*	*G* *Н*	*α* *град*	*β* *град*	*AB* *м*	*BC* *м*	*CD* *м*	Примітка
17	Балка *AB* вагою *P*	2000	–	30	–	–	–	–	*BC* – нитка
18	Балка *AB* вагою *P*	500	1000	30	–	3	1	–	–
19	Балка *AB* вагою *P*	300	500	–	–	1.5	1	–	*BC* – нитка
20	Балка *AB* вагою *P*	1000	500	30	–	2	1.5	–	*CE* – нитка
21	Балка *AB* вагою *P*	1000	400	30	–	1.2	0.5	–	–
22	Неваг. стерж. *ACB*	150	300	60	–	1	1	–	–
23	Балка *AC* вагою *P*	1000	–	60	30	–	–	–	–
24	Балка *AB* вагою *P*	800	600	30	–	1.5	–	–	*CB, BD* – нитки
25	Балка *AB* вагою *P*	200	400	30	–	1	–	–	*CB, BD* – нитки
26	Балка *AB* вагою *P*	400	200	45	30	1	–	–	*CB* – нитка
27	Балка *AB* вагою *P*	600	400	45	60	1.5	–	–	*CB* – нитка
28	Балка *AB* вагою *P*	1000	800	60	–	2	3	–	*BD* – ід. стержень
29	Балка *AB* вагою *P*	700	1000	75	–	1	0.5	–	*AD, DC* – нитки
30	Балка *AB* вагою *P*	800	–	30	–	–	1.5	–	$CD \perp BC$
31	Балка *AB* вагою *P*	1000	–	60	–	2	0.5	–	*AE, CD*–ід. стержні

Вихідні дані до задачі №5

Крім вказаних для варіанта об’єктів рівноваги розглянути як об’єкт рівноваги всю конструкцію в цілому.

Варіант	Об’єкти рівноваги	P_1 *Н*	P_2 *Н*	*G* *Н*	α *град*	*AB* *м*	*BC* *м*	*BD* *м*	*BE* *м*
1	*AB* вагою P_1, *BE* вагою P_2	100	200	–	60	0,9	0,3	0,6	0,8
2	*AB* вагою P_1, *BD* вагою P_2	1000	500	200	30	2	0,5	1,5	0,5
3	Куля *O* вагою P_1, *AB* вагою P_2	250	150	–	60	1	–	–	–
4	*AB* вагою P_1, *BD* вагою P_2	500	1000	300	45	1	0,25	0,8	–
5	*AB* вагою P_1, *BD* вагою P_2	700	1300	400	60	1,5	0,5	1	0,5
6	Куля *O* вагою P_1, *AB* вагою P_2	600	900	–	60	2	1,4	–	–
7	Куля *K* вагою P_1, *AC* вагою P_2	1500	1000	800	45	1	0,5	1	0,5
8	*AB* вагою P_1, *BD* вагою P_2	200	1500	–	30	1,5	–	–	–
9	*AB* вагою P_1, *DE* вагою P_2	900	1300	600	60	1	0,4	–	0,3
10	*AB* вагою P_1, *BD* вагою P_2	800	600	1200	60	1,2	–	1	0,2
11	*AB* вагою P_1, *BD* вагою P_2	500	1200	800	30	–	–	–	–
12	*AB* вагою P_1, *ED* вагою P_2	300	800	500	30	1	0,3	2	0,5
13	*AB* вагою P_1, *BD* вагою P_2	600	600	1000	60	1,3	–	1,3	0,3
14	*AB* вагою P_1, *DE* вагою P_2	800	1000	600	60	1,5	1	0,8	0,7
15	Балка *AB*, балка *BD*	2500	–	1200	60	1	0,6	1	0,7
16	Куля *O* вагою P_1, *AB* вагою P_2	700	300	–	60	1	0,6	–	–

Вихідні дані до задачі №5 (продовження)

Крім вказаних для варіанта об'єктів рівноваги розглянути як об'єкт рівноваги всю конструкцію в цілому.

Варіант	Об'єкти рівноваги	P_1 *Н*	P_2 *Н*	G *Н*	α *град*	AB *м*	BC *м*	BD *м*	BE *м*
17	AB вагою P_1, DE вагою P_2	900	1400	300	30	1,5	–	0,4	0,6
18	AB вагою P_1, BD вагою P_2	500	100	–	60	4	1,5	3	–
19	AB вагою P_1, BD вагою P_2	500	1000	1000	60	2	3	4	1
20	AB вагою P_1, BD вагою P_2	600	400	300	30	1,5	0,5	1,5	–
21	AC вагою P_1, BD вагою P_2	1000	2500	–	30	1	2	4	–
22	AB вагою P_1, BC вагою P_2	1200	800	700	–	2	1,41	–	1
23	Куля O вагою P_1, AB вагою P_2	4000	3000	–	30	3	2	–	–
24	AB вагою P_1, BD вагою P_2	2000	3000	1000	45	2	1,5	4	2
25	AB вагою P_1, BD вагою P_2	300	800	–	150	3	1	2	1,5
26	AB вагою P_1, BD вагою P_2	1800	1000	800	60	2	1,5	3	2
27	AB вагою P_1, BD вагою P_2	2100	4000	1500	–	3	0,7	4	–
28	AB вагою P_1, BD вагою P_2	1800	6000	2000	30	1,8	0,6	3	1
29	AB вагою P_1, BD вагою P_2	800	1800	900	30	2	2	3	–
30	ACB, BD вагою P_2	–	900	400	–	–	1,5	3	2
31	AB вагою P_1, BD вагою P_2	600	400	800	30	4	1,5	3	–

Вихідні дані до задачі №7

№ вар.	Об'єкт рівноваги	G *кН*	P *кН*	AB *м*	BC *м*	α *град*	Додаткові дані	Примітки
1	Плита *ABC* вагою *P*	-	9	*AC*	*AC*	30	-	*A, B*-цил.шарніри
2	Плита *ABCD* вагою *P*	-	3	0,4	0,3	-	*CE*=1*м*	*A*-сф.шарн.; *D*-цил. шарн.
3	Пластина *ABCD* вагою *P*	2	0,5	2	1	30	*CE*=1,4*м*	*A*-підп'ятн.; *B*-цил. шарн.
4	Стержень *BC*	0,5	-	0,5	1,5	30	*AE*=*AD*=*AB*	*B*-сф.шарн.; *AD,AE*-ід. ст.
5	Невагомий вал *AB*	0,8	1,2	0,8	-	-	*CE*=0,2*м*; *DF*=0.3*м*	*A*-підп'ятн.; *B*–цил.шарн.
6	Плита *ABCD* вагою *P*	-	2,5	0,4	0,2	-	*CE*=0,8*м*	*A*-сф.шарн.; *B*-цил.шарн.
7	Невагомий вал *AB*	1	2,5	0,6	0,5	-	*CD*=*CE*=0,3*м*	*A*-підп'ятн.; *B*-цил.шарн.
8	Плита *ABDC* вагою *P*	-	4	0,3	0,5	-	*CE*=0,56*м*	*A*-сф.шарн.; *CE,BE*-ід.ст.
9	Плита *ABCD* вагою *P*	-	5	2	2	-	*CE*=4*м*	*A*-сф.шарн.; *B*-цил.шарн.
10	Плита *ABDC* вагою *P*	-	3	2	-	30	BD=1*м*	*A*-сф.шарн.; *B*-цил.шарн.
11	Плита *ABCF* вагою *P*	2	2	1	1	60	-	*A*-сф.шарн.; *E*-цил.шарн.
12	Плита *ABCD* вагою *P*	1,5	1	0,3	0,5	30	-	*A*-сф.шарн.; *D*-цил.шарн.
13	Плита *ABCD* вагою *P*	1	2,5	0,6	-	45	β=60°	*A*-сф.шарн.; *B*-цил.шарн.
14	Плита *ABCD* вагою *P*	-	6	2	1	60	-	*A,B*-цил.шарн., *DE*-ід.ст.
15	Плита *ABCD* вагою *P*	0,6	-	0,2	0,6	60	*BE*=0,4*м*	*A,D*-цил.шарніри
16	Плита *ABCD* вагою *P*	-	5,5	1,5	1	30	-	*A,B*-цил.шарн.;*CE*-нитка

Вихідні дані до задачі №7 (продовження)

№ вар.	Об'єкт рівноваги	*G* *кН*	*P* *кН*	*AB* *м*	*BC* *м*	*α* *град*	Додаткові дані	Примітки
17	Плита *ABCD* вагою *P*	-	3	0,8	0,4	60	-	*A, B*-цил.шарніри
18	Плита *ABC* вагою *P*	-	1,5	1	1	45	*β*=60°; *AB=AC*	*A, C*-цил. шарн.; *BE*-ід.ст.
19	Пластина вагою *P* на осі	0,6	2,5	1,4	0,4	-	*DF*=2*CE*=0,4*м*	*A*-підп'ятн.; *B*-цил. шарн.
20	Гнута пластина *CDEF*	0,5	1	2	0,5	-	*BF*=0,3*м*	*A*-підп'ятн.; *B*-цил. шарн.
21	Плита *ABDC* вагою *P*	1,5	3	0,8	-	30	*AC*=1,2*м*	*A*-сф.шарн.; *B*-цил. шарн.
22	Плита *ABC* вагою *P*	-	5	1	-	30	*AB=AC*	*A*-сф.шарн.;*BD,CD*-нитки
23	Плита *ABCD* вагою *P*	-	2,5	1,5	0,8	30	-	*A*-сф.шарн.; *D*-цил. шарн.
24	Плита *ABCD* вагою *P*	-	4	2	0,8	60	*CE*=0,8*м*	*A, B*-цил.шарніри
25	Плита *ABCD* вагою *P*	-	6	0,9	0,5	60	-	*B* - сф.шарн.;*A*-цил.шарн.
26	Ворот *BCDE*	2	-	1	1,2	-	*r*=0,1*м*; *CD=DE*=0.2*м*	*A, B*-цил.шарніри
27	Плита *ABDC* вагою *P*	0,5	1,5	1,2	-	30	*AC*=0,6*м*	*A*-сф.шарн.; *B*-цил. шарн.
28	Плита *ABCD* вагою *P*	2	1	1	1	30	-	*A*-сф.шарн.; *D*-цил. шарн.
29	Плита *ABCD* вагою *P*	1	2	0,6	1	45	-	*A*-сф.шарн.; *B*-цил. шарн.
30	Пластина вагою *P* на осі	2	4	1	0,4	-	*CD=DE*=0.5*м*	*A*-підп'ятн.; *B*-цил.шарн.
31	Плита *ABCD* вагою *P*	1,5	2	1	1	45	-	*A*-сф.шарн.; *D*-цил. шарн.

Вихідні дані до задачі №8

Варіант	Об’єкт рівноваги	Примітки
1	Стержень *ADCB*	*B*–сф.шарнір; *A*–цил. шарнір
2	Вал *AB*	*A*, *D*–цил. шарніри
3	Стержень *ACHK*	*A, D, K*–цил. шарніри
4	Пластина вагою *P* на осі *AC*	*A*–підп’ятник; *B*–цил.шарнір
5	Плита *ACDB* вагою *P*	*B*–сф.шарнір; *AK*, *CM*, *DE*–ід.стержні
6	Стержень АВ вагою *P*	*A*–сф.шарн; *CD, EF*–ід.стер.; *BK*–нитка
7	Стержень *ACDB*	*A*, *B*–цил. шарніри; *DE*–ід. стержень
8	Вал *AB*	*A, B*–цил. шарніри
9	Вісь *AB* з пластиною вагою *G*	*A*–підп’ятник; *B*–цил. шарнір
10	Вал *HABC*	*C, B*–цил. шарніри
11	Стержень *AECB*	*A, B*–цил. шарніри; *DC*–нитка
12	Стержень *EDABC*	*A, B*–цил. шарніри
13	Вал *AB*	*A, B*–цил. шарніри
14	Вал *ACD*	*A*–підп’ятник; *B*–цил. шарнір; *DE*–нитка
15	Ворот *DAB*	*A*, *B*–цил. шарніри
16	Вісь *AB* з пластиною вагою *P*	*A*, *B*–цил. шарніри

Вихідні дані до задачі №8 (продовження)

Варіант	Об’єкт рівноваги	Примітки
17	Плита *ABC* вагою *P*	*A*–сф.шарн.; *CD*–ід.стерж.; *BE*–нитка
18	Стержень *ACEB*	*A, B*–цил. шарніри; *DC*–ід.стержень
19	Плита *ABCD* вагою *P*	*A, D*–цил. щарніри; *BE*–ід.стержень
20	Плита *ABCD* вагою *P*	*B*–сф.шарн.; *A*–цил. шарн.; *CE*–нитка
21	Ворот *DAB*	*A, B*–цил. шарніри
22	Вісь *AB* з пластиною вагою *P*	*A, B*–цил. шарніри; *KL*–нитка
23	Стержень *ADEC*	*A, B, C*–цил. шарніри
24	Вал *AB*	*A, B*–цил. шарніри; *HE*–ід.стержень
25	Стержень *ACEDB*	*A, B*–цил. шарніри
26	Плита *ABCD* вагою *P*	*B*–сф.шарн.; *A*–цил. шарн.; *CE*–ід.стер.
27	Вісь *AB* з пластиною вагою *P*	*A*–підп’ятник; *B*–цил.шарнір
28	Вал *AB*	*A, B*–цил. шарніри
29	Стержень *ACB*	*A, B*–цил. шарніри
30	Плита *ABCD* вагою *P*	*B*–сф.шарн.; *A*–цил. шарн.; *DE*–нитка
31	Вал *AB*	*A*–підп’ятник; *B*–цил. шарніри

РОЗДІЛ ДУГИЙ

КІНЕМАТИКА

В даній частині крім мінімуму теоретичних знань, якими повинен оволодіти студент з кінематики, наводяться приклади розв'язування різних задач, вихідні дані до індивідуального розрахункового-графічного завдання та зразок його виконання.

Задачі розрахунково-графічного завдання охоплюють матеріал наступних тем кінематики:

- кінематика точки (тема КI);
- поступальний та обертальний рухи тіла (тема К2);
- плоский рух тіла (тема К3);
- складний рух точки (тема К4).

Задачі 1,3 та 4 об'єднані загальними вихідними даними.

Графічні побудови до завдання з кінематики виконуються на аркуші паперу формату А3.

Варіант розрахунково-графічного завдання визначається двома цифрами, які являють собою дві останні цифри номера залікової книжки або задаються викладачем.

Для тем К1, К3 і К4 перша цифра шифру визначає номер варіанта в таблиці К1, а друга – в таблиці К2. Для теми К2 перша цифра шифру визначає номер рисунка (рис. К2.2), а друга – варіант в таблиці К3.

Тема К1. КІНЕМАТИКА ТОЧКИ

К1.1. Стислі відомості з теорії

Кінематика *– розділ теоретичної механіки, в якому вивчаються геометричні властивості механічного руху матеріальних тіл без урахування умов і причин, які викликають або змінюють цей рух, тобто без урахування мас тіл і сил, що діють на ці тіла.*

Основною задачею кінематики точки **є** означення її руху та визначення основних характеристик цього руху: *траєкторії, пройденого шляху, переміщення, швидкості* і *прискорення* в будь-який момент часу відносно обраної системи відліку.

При ***координатному способі*** означення руху точки його кінематичні рівняння виражені залежністю координат точки від часу. В прямокутній (декартові) системі координат $Oxyz$ ці рівняння мають вигляд:

$$x = x(t);\;\; y = y(t);\;\; z = z(t). \qquad \text{(К1.1)}$$

Коли точка рухається у площині, наприклад Oxy, то система рівнянь спрощується до двох:

$$x = x(t);\;\; y = y(t). \qquad \text{(К1.2)}$$

Траєкторією точки *називається лінія, що описується рухомою точкою у просторі. Траєкторія точки виражається рівнянням у вигляді залежності між її координатами:*

$$F(x, y, z) = 0. \qquad \text{(К1.3)}$$

Швидкість точки *– векторна величина, яка характеризує бистроту зміни положення точки у просторі з часом.*

При координатному способі означення руху швидкість точки визначається через її проекції на координатні осі:

$$V_x = \dot{x} = \frac{dx}{dt}; \quad V_y = \dot{y} = \frac{dy}{dt}; \quad V_z = \dot{z} = \frac{dz}{dt}, \qquad \text{(К1.4)}$$

а величина (модуль) швидкості відповідно дорівнює:

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}\,. \qquad \text{(К1.5)}$$

Вектор швидкості спрямований за дотичною до траєкторії у бік руху точки. Одиницею вимірювання швидкості в системі СІ є метр за секунду: $[V] = м/с$.

Прискорення точки *- векторна величина, яка характеризує бистроту зміни швидкості з часом.*

При координатному способі означення руху точки проекції прискорення точки на координатні осі дорівнюють:

$$a_x = \dot{V}_x = \frac{dV_x}{dt} = \ddot{x}; \;\; a_y = \dot{V}_y = \frac{dV_y}{dt} = \ddot{y};$$

$$a_z = \dot{V}_z = \frac{dV_z}{dt} = \ddot{z}. \qquad \text{(К1.6)}$$

Величина (модуль) прискорення обчислюється за формулою:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\,. \qquad \text{(К1.7)}$$

Одиницею вимірювання прискорення в системі СІ є метр за секунду в квадраті: $[a] = м/с^2$.

Якщо відома траєкторія точки і обрана ***природна система координат*** $M\tau n$ (вісь $M\tau$ напрямити за дотичною, а вісь Mn – перпендикулярно до $M\tau$ в бік центра кривизни) то прискорення точки (рис. К1.1) можна розкласти на складові *тангенціальну (або дотичну)* за віссю $M\tau$ і *нормальну (або доцентрову)* за віссю Mn.

Тангенціальне прискорення $\vec{a}^{\tau}$ спрямоване вздовж дотичної до траєкторії і за модулем дорівнює:

$$a^{\tau} = \frac{dV}{dt}. \qquad (К1.8)$$

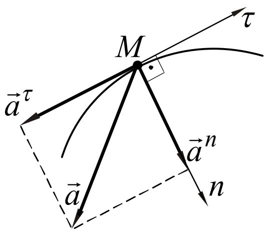


Рис. К1.1

При цьому, якщо величини a^{τ} і V мають однакові знаки, то вектори $\vec{a}^{\tau}$ і $\vec{V}$ напрямлені в один бік, якщо ж величини a^{τ} і V мають різні знаки, то вектори $\vec{a}^{\tau}$ і $\vec{V}$ напрямлені в різні боки.

Якщо диференціювати за часом вираз для швидкості точки при її русі в площині Oxy $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$, то дістанемо:

$$a^{\tau} = \frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sqrt{V_x^2 + V_y^2}\right) = \frac{V_x \cdot a_x + V_y \cdot a_y}{V}. \qquad (К1.9)$$

Нормальне $\vec{a}^{n}$ прискорення завжди спрямоване вздовж нормалі до траєкторії в бік центра кривини і дорівнює:

$$a^{n} = \frac{V^2}{\rho}, \qquad (К1.10)$$

де ρ – радіус кривини траєкторії у даній точці.

Повне ж прискорення через нормальну і тангенціальну складові відповідно дорівнює:

$$a = \sqrt{(a^{n})^2 + (a^{\tau})^2}. \qquad (К1.11)$$

К1.2. Порядок розв'язування задач з кінематики точки

При розв'язувані задач на визначення швидкості і прискорення точки треба дотримуватися наступного порядку:

1. Вибрати систему координат.
2. Скласти рівняння руху точки в обраній системі координат.
3. Диференціюючи рівняння руху точки визначити проекції вектора швидкості на осі координат, його величину та напрям.
4. Диференціюючи рівняння проекції швидкості, визначити проекції вектора прискорення на осі координат, його величину та напрям.

К1.3. Контрольні запитання

1. Як визначається швидкість і прискорення точки при координатному способі означення?
2. В чому полягає природний спосіб означення руху точки?
3. Як визначити швидкість точки за модулем і за напрямом?
4. Що характеризують дотичне і нормальне прискорення точки?
5. Як визначити величину і напрям дотичного прискорення?
6. Як визначити величину і напрям нормального прискорення?
7. При якому русі точки дорівнює нулю дотичне прискорення і при якому – нормальне прискорення?

К1.4. Приклади розв'язування задач

Задача 1

Рух точки на площині визначається рівняннями:

$$x = 5\sin 10t\,; \qquad y = 3\cos 10t\,.$$

Визначити рівняння траєкторії і напрям руху точки.

Розв'язування. Рівняння траєкторії задано в параметричній формі, координати x і y залежать від параметра t (часу).

Щоб отримати рівняння траєкторії в координатній формі, тобто у вигляді залежності $y = f(x)$, необхідно виключити з обох рівнянь руху час t.

Піднесемо до квадрату ліві та праві частини рівнянь руху:

$$x^2 = 5^2\sin^2 10t\,; \qquad y^2 = 3^2\cos^2 10t\,,$$

або

$$\frac{x^2}{5^2} = \sin^2 10t\,, \qquad \frac{y^2}{3^2} = \cos^2 10t\,.$$

Додамо ці рівняння:

$$\left(\frac{x}{5}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 = \sin^2 10t + \cos^2 10t\,.$$

Оскільки $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ то:

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 = 1\,.$$

Рівнянням траєкторії точки є еліпс з центром в початку системи координат, велика піввісь якого дорівнює 5-ти одиницям довжини (по осі Ox), а мала (по осі Oy) – 3-ом одиницям довжини (рис.1).

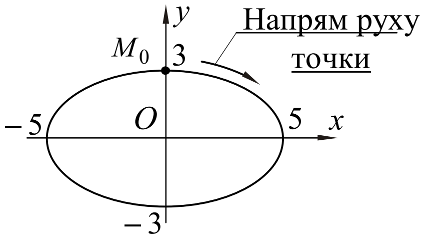


Рис. 1

В початковий момент часу $t=0$ точка знаходиться в положенні M_0 з координатами:

$$x_0 = 5\sin(10\cdot 0) = 0\ ;$$

$$y_0 = 3\cos(10\cdot 0) = 3\,.$$

В початковий момент руху (при зростанні t) координата x почне збільшуватися, а координата y − зменшуватися. Таким чином, точка буде рухатися за ходом годинникової стрілки.

Відповідь: а) рівняння траєкторії $\left(\dfrac{x}{5}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{3}\right)^2 = 1$;

б) точка рухається за ходом годинникової стрілки.

Задача 2

В механізмі (рис.1) тіло OA (кривошип) обертається навколо нерухомого шарніра O, а тіло B (повзун) рухається зворотно-поступально по осі Ox. Точка A тіла AB (шатуна) рухається за траєкторією точки A кривошипа, а точка B – за траєкторією повзуна.

Визначити рівняння руху і траєкторію середньої точки M шатуна та рівняння руху повзуна B, якщо в початковий момент повзун знаходився в крайньому правому положенні; кривошип OA обертається зі сталою кутовою швидкістю $\omega = 10\ c^{-1}$ і $OA = AB = 0{,}8\ м$.

Розв'язування. Для визначення траєкторії точки M зобразимо механізм у довільному положенні та складемо рівняння її руху в координатній формі.

З рис. 1 видно, що:

$$x_M = OC + CD; \quad y_M = MD.$$

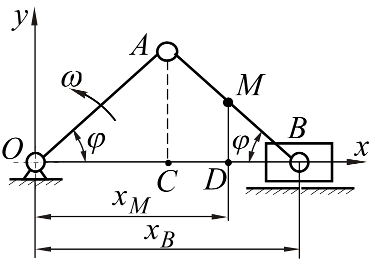


Рис. 1

Оскільки трикутник OAB рівнобедрений ($OA = AB$), то кути ABC і AOC рівні між собою і дорівнюють $\varphi = \omega \cdot t$.

З трикутника OAC знайдемо відстань OC:

$$OC = OA\cos\varphi,$$

а з трикутника MBD відстані CD і MD:

$$CD = DB = MB\cos\varphi = \frac{AB}{2}\cos\varphi;$$

$$MD = MB\sin\varphi = \frac{AB}{2}\sin\varphi.$$

Тоді:

$$x_M = OA\cos\varphi + \frac{AB}{2}\cos\varphi;$$

$$y_M = \frac{AB}{2}\sin\varphi.$$

Якщо урахувати числові дані, то рівняння руху точки M набудуть вигляду:

$$x_M = 0{,}8\cos 10t + 0{,}4\cos 10t = 1{,}2\cos 10t;$$

$$y_M = 0{,}4\sin 10t.$$

Для знаходження траєкторії точки M піднесемо рівняння руху до квадрату і додамо:

$$\frac{x_M}{1,2} = \cos 10t; \qquad \frac{y_M}{0,4} = \sin 10t;$$

$$\left(\frac{x_M}{1,2}\right)^2 + \left(\frac{y_M}{0,4}\right)^2 = \cos^2 10t + \sin^2 10t.$$

Враховуючи, що $\cos^2 10t + \sin^2 10t$, дістанемо вираз для рівняння траєкторії:

$$\left(\frac{x_M}{1,2}\right)^2 + \left(\frac{y_M}{0,4}\right)^2 = 1.$$

Таким чином, траєкторією точки буде еліпс, одна піввісь якого, по осі Ox, складає 1,2 *м*, а друга, по осі Oy, – 0,4 *м*.

Визначимо координати точки B:

$$x_B = OC + CB = OA\cos\varphi + AB\cos\varphi;$$

$$x_B = 0,8\cos 10t + 0,8\cos 10t = 1,6\cos 10t.$$

Таким чином, рівняння руху повзуна B буде мати вигляд:

$$x_B = 1,6\cos 10t.$$

Відповідь: $\left(\frac{x_M}{1,2}\right)^2 + \left(\frac{y_M}{0,4}\right)^2 = 1; \quad x_B = 1,6\cos 10t.$

Задача 3

Точка рухається по колу радіусом $R = 4$ *м*. Шлях в метрах, який проходить точка по траєкторії, в будь який момент часу визначається рівнянням: $S = 4,5t^3$.

Визначити величину прискорення точки і кут α, який утворюють між собою вектори швидкості і прискорення в момент часу, коли величина швидкості дорівнює $6\ м/с$.

Розв'язування. Зобразимо траєкторію з точкою M у довільному положенні (рис.1).

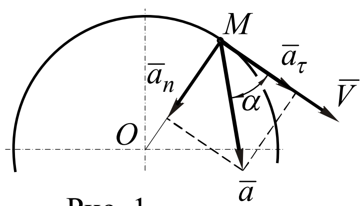


Рис. 1

Швидкість $\bar{V}$ напрямимо за дотичною до кола, нормальне прискорення $\bar{a}_n$ - до центра кола, а дотичне $\bar{a}_\tau$ - за швидкістю, приймаючи, що воно додатне.

Кут α між векторами швидкості $\bar{V}$ і повного прискорення $\bar{a}$ буде дорівнювати:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a_n}{a_\tau}; \qquad \alpha = \operatorname{arctg}\frac{a_n}{a_\tau}.$$

Знайдемо величину нормального прискорення:

$$a_n = \frac{V^2}{R} = \frac{6^2}{4} = 9\ \ м/с^2 .$$

Функціональні залежності для швидкості та дотичного прискорення знайдемо за рівнянням руху точки:

$$V = \frac{dS}{dt} = \frac{d}{dt}(4{,}5t^3) = 13{,}5t^2 ;$$

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}(13{,}5t^2) = 27t .$$

Оскільки для обчислення дотичного прискорення треба знати час, коли швидкість буде дорівнювати 6 *м/с*, то з першого рівняння дістанемо:

$$t = \sqrt{\frac{V}{13,5}} = \sqrt{\frac{6}{13,5}} = \frac{2}{3} \ c.$$

Величина дотичного прискорення:

$$a_\tau = 27t = 27 \cdot \frac{2}{3} = 18 \ \ м/с^2 \ .$$

Тоді:

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{9}{18} = 0,5 ; \qquad \alpha = \mathrm{arctg}(0,5) = 26^\circ 30' .$$

Повне прискорення точки:

$$a = \sqrt{a_n{}^2 + a_\tau{}^2} = \sqrt{9^2 + 18^2} = 9\sqrt{5} \ \ м/с^2 \ .$$

Відповідь: $a = 9\sqrt{5} \ м/с^2$; $\alpha = 26^\circ 30'$.

К1.5. Завдання теми К1

Кінематичні рівняння руху точки A тіла, що рухається у площині Oxy мають вигляд:

$$\begin{aligned} x &= a + k \cdot b \cdot \cos\left(\pi d t^n\right); \\ y &= a_1 + k_1 \cdot b_1 \cdot \sin\left(\pi d t^n\right), \end{aligned} \qquad (К1.12)$$

Коефіцієнти a, a_1, b, b_1, k наведені в таблиці К1, а коефіцієнти d, n, k_1 та час t_1 в таблиці К2. Координати x та y задані в метрах.

Визначити: рівняння траєкторії, швидкість, прискорення точки A і радіус кривизни траєкторії точки в момент часу t_1. Зобразити на рисунку в декартовій системі координат Oxy траєкторію точки та її положення в момент часу t_1. Показати складові швидкості та прискорення, що паралельні до осей координат, повну швидкість та прискорення, дотичне та нормальне прискорення.

Таблиця К1

Перша цифра шифру	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a	-0,5	-1	2	3	-2,5	1,5	3	0,5	-2	3,5
b	0,1	0,2	0,2	-0,1	0,1	-0,2	0,3	-0,1	0,2	0,4
a_1	2,8	1,6	2,1	2	3	5,6	4,3	4,6	3,4	2,8
b_1	-0,1	0,1	-0,2	0,2	0,4	-0,2	-0,4	-0,2	0,4	0,3
k	11,5	11	10,5	10	9,5	9	8,5	8	7,5	7

Таблиця К2

Друга цифра шифру	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
d	1/3	0,25	0,5	1/6	1	1,5	2	3	1/3	0,25
t_1	1	1	0,5	1	0,5	1/3	0,5	1/3	0,5	1
n	1	1	1	1	1	2	1	3	2	2
k_1	7	7,5	8	8,5	9	9,5	10	10,5	11	11,5

К1.6. Приклад розв'язування завдання теми К1

Розглянемо приклад при таких вихідних даних і коефіцієнтах: $k_1 = k = 16$; $a = –1,5$; $a_1 = 4$; $b = 0,3$; $b_1 = 0,1$; $n = 2$; $d = 3$; $t_1 = 1/3$ *с*.

1. Визначення кінематичних рівнянь руху точки А

Підставимо значення відповідних коефіцієнтів у рівняння (К1.12), тоді:

$$x = -1,5 + 16 \cdot 0,3 \cdot \cos(3\pi t^2),$$
$$y = 4 + 16 \cdot 0,1 \cdot \sin(3\pi t^2).$$

Після обчислень дістанемо:

$$\begin{aligned} x &= -1,5 + 4,8 \cdot \cos(3\pi t^2), \\ y &= 4 + 1,6 \cdot \sin(3\pi t^2). \end{aligned} \tag{1}$$

Отримані вирази і є шуканими кінематичними рівняннями руху точки A.

2. Визначення рівняння траєкторії точки А

Для визначення рівняння траєкторії вилучимо з рівнянь (1) параметр *t*. З цією метою перенесемо в цих рівняннях вільний член у ліву частину, поділимо на коефіцієнти при відповідних тригонометричних функціях і обидва рівняння піднесемо до квадрату. Додавши праві та ліві частини рівнянь і з урахуванням того, що $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, дістанемо:

$$\frac{(x+1,5)^2}{4,8^2} + \frac{(y-4)^2}{1,6^2} = 1.$$

Одержаний вираз є рівнянням траєкторії точки A і являє собою еліпс з півосями, по осі Ox $c = 4{,}8$ *м* і по осі Oy $d =$ 1,6 *м*. Центр еліпса лежить в точці з координатами: $x_S = -1{,}5$ *м*; $y_S = 4$ *м*.

Для визначення положення точки A на траєкторії в момент часу $t_1 = 1/3$ с., підставимо значення t_1 в рівняння (1):

$$x_A = -1{,}5 + 4{,}8 \cdot \cos(3\pi \cdot 1/3^2) =$$
$$= -1{,}5 + 4{,}8 \cdot \cos(\pi/3) = 0{,}9 \text{ м};$$

$$y_A = 4 + 1{,}6 \cdot \sin(3\pi \cdot 1/3^2) =$$
$$= 4 + 1{,}6 \cdot \sin(\pi/3) = 5{,}39 \text{ м}.$$

3. Визначення швидкості точки A

Оскільки проекція швидкості на вісь дорівнює похідній за часом від відповідної координати (К1.4), то:

$$\begin{aligned} V_{Ax} &= \dot{x}_A = \left[-1{,}5 + 4{,}8 \cdot \cos(3\pi t^2)\right]' = \\ &= -4{,}8 \cdot \sin(3\pi t^2) \cdot 6\pi t = -90{,}5 t \sin(3\pi t^2); \\ V_{Ay} &= \dot{y}_A = \left[4 + 1{,}6 \cdot \sin(3\pi t^2)\right]' = \\ &= 1{,}6 \cdot \cos(3\pi t^2) \cdot 6\pi t = 30{,}2 t \cos(3\pi t^2). \end{aligned} \qquad (2)$$

В момент часу $t_1 = 1/3$ с. дістанемо:

$$V_{Ax} = -90{,}5 \cdot \frac{1}{3} \cdot \sin(3 \cdot \pi \cdot (1/3)^2) = -26{,}1 \text{ м/с};$$

$$V_{Ay} = 30{,}2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \cos(3 \cdot \pi \cdot (1/3)^2) = 5{,}03 \text{ м/с};$$

$$V_A = \sqrt{(-26{,}1)^2 + (5{,}03)^2} = 26{,}6 \text{ м/с}.$$

Від'ємне значення проекції V_{Ax} означає, що складова $\vec{V}_{Ax}$ вектора повної швидкості $\vec{V}_A$ напрямлена в бік від'ємних значень осі Ox .

4. Визначення прискорення точки А та радіуса кривизни траєкторії.

Скориставшись виразами (2) визначимо проекції прискорення точки A на осі Ox і Oy :

$$a_{Ax} = \dot{V}_{Ax} = \left[-90,5t\sin\left(3\pi t^2\right)\right]' =$$
$$= -90,5\left[\sin\left(3\pi t^2\right) + 6\pi t^2\cos\left(3\pi t^2\right)\right];$$

$$a_{Ay} = \dot{V}_{Ay} = \left[30,2t\cos\left(3\pi t^2\right)\right]' =$$
$$= 30,2\left[\cos\left(3\pi t^2\right) - 6\pi t^2\sin\left(3\pi t^2\right)\right].$$

В момент часу $t_1 = 1/3$ с дістанемо:

$$a_{Ax} = -90,5\left[\sin(3\pi(1/3)^2) + 6\pi(1/3)^2\cos(3\pi(1/3)^2)\right] =$$
$$= -173,1\ м/с^2;$$

$$a_{Ay} = 30,2\left[\cos(3\pi(1/3)^2) - 6\pi(1/3)^2\sin(3\pi(1/3)^2)\right] =$$
$$= -39,6\ \ м/с^2.$$

Повне прискорення в момент часу $t_1 = 1/3$ с:

$$a_A = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(-173,1)^2 + (-39,6)^2} = 177,6\ м/с^2.$$

Знаки мінус перед значеннями проекцій a_{Ax} і a_{Ay} означають, що складові $\vec{a}_{Ax}$ і $\vec{a}_{Ay}$ вектора повного прискорення $\vec{a}_A$ напрямлені в боки від'ємних значень відповідних осей координат.

З формул (К1.9, К1.11) визначимо величини тангенціального і нормального прискорення :

$$a_A^\tau = \frac{V_x \cdot a_x + V_y \cdot a_y}{V} =$$

$$\frac{(-26{,}1)(-173{,}1) + 5{,}03(-39{,}6)}{26{,}6} = 162{,}4 \ \ м/с^2;$$

$$a_A^n = \sqrt{{a_A}^2 - {a_A^\tau}^2} = \sqrt{177{,}6^2 - 162{,}4^2} = 71{,}9 \ \ м/с^2.$$

За відомою швидкістю V_A і величиною нормального прискорення a_A^n з формули (К1.10) знайдемо радіус кривизни траєкторії для цього положення точки:

$$\rho = \frac{{V_A}^2}{a_A^n} = \frac{26{,}6^2}{71{,}9} = 9{,}84 \ \ м.$$

5. Графічні побудови

За результатами розрахунків будується креслення (рис. К1.2).

Оскільки отримані розміри вимірюються в метрах, а на кресленні відкладаються в міліметрах, то побудови виконуються в певному масштабі (це ж стосується і відрізків, що зображають на кресленні вектори швидкостей та прискорень). Для цього спочатку необхідно визначити масштабні коефіцієнти довжин μ_l, швидкостей μ_V і прискорень μ_a.

Масштабним коефіцієнтом μ *називається відношення дійсної величини до відрізка в міліметрах, який буде зображати цю величину на кресленні.*

Відрізок, який зображає певну величину на кресленні, підбирають довільно виходячи з наступних міркувань:

- креслення повинно мати певні розміри (не бути дуже великим, або дуже маленьким);
- по можливості величина масштабного коефіцієнта повинна мати одну значущу цифру.

За визначеними масштабними коефіцієнтами треба перерахувати дійсні величини знайдених параметрів у відрізки, які будуть зображати ці величини на кресленні, і тільки після цього виконувати побудови на кресленні.

Оберемо масштабний коефіцієнт довжин μ_l. При розв'язуванні задачі були визначені наступні лінійні розміри:

$$x_S = -1{,}5\ м;\quad y_S = 4\ м;\quad c = 4{,}8\ м;\quad d = 1{,}6\ м;$$
$$y_A = 5{,}39\ м;\ x_A = 0{,}9\ м;\ \rho = 9{,}84\ м.$$

Оберемо будь який з цих розмірів, наприклад $y_A = 5{,}39$ *м*. Нехай цю координату на кресленні буде зображати відрізок $(y_A) = 27$ *мм*. Тоді масштабний коефіцієнт довжин μ_l буде дорівнювати:

$$\mu_l = \frac{y_A}{(y_A)} = \frac{5{,}39}{27} = 0{,}199\frac{м}{мм} \approx 0{,}2\frac{м}{мм}.$$

При цьому відрізки, що будуть зображати на кресленні лінійні величини будуть дорівнювати:

$$(x_S) = \frac{x_S}{\mu_l} = \frac{1,5}{0,2} = 7,5 \ мм; \qquad (y_S) = \frac{y_S}{\mu_l} = \frac{4}{0,2} = 20 \ мм;$$

$$(x_A) = \frac{x_A}{\mu_l} = \frac{0,9}{0,2} = 4,5 \ мм; \qquad (\rho) = \frac{\rho}{\mu_l} = \frac{9,84}{0,2} = 49,2 \ мм;$$

$$(c) = \frac{c}{\mu_l} = \frac{0,9}{0,2} = 24 \ мм; \qquad (d) = \frac{d}{\mu_l} = \frac{1,6}{0,2} = 8 \ мм.$$

Оберемо масштабний коефіцієнт швидкостей μ_V.

При розв'язуванні задачі були знайдені швидкості:

$$V_{Ax} = -26,1 \ м/с; \ V_{Ay} = 5,03 \ м/с; \ V_A = 26,6 \ м/с.$$

Оберемо будь яку з цих швидкостей, наприклад $V_A = 26,6 \ м/с$. Нехай цю швидкість на кресленні буде зображати відрізок $(V_A) = 44,3 \ мм$. Тоді масштабний коефіцієнт швидкостей μ_V буде дорівнювати:

$$\mu_V = \frac{V_A}{(V_A)} = \frac{26,6}{44,3} = 0,6 \ \frac{м}{с \cdot мм}.$$

При цьому відрізки, що будуть зображати на кресленні складові швидкості будуть дорівнювати:

$$(V_{Ay}) = \frac{V_{Ay}}{\mu_V} = \frac{5,03}{0,6} = 8,5 \ мм.$$

$$(V_{Ax}) = \frac{V_{Ax}}{\mu_V} = \frac{26,1}{0,6} = 43,5 \ мм;$$

Оберемо масштабний коефіцієнт прискорень μ_a. При розв'язуванні задачі були знайдені прискорення:

$$a_{Ax} = -173{,}1\ м/с^2;\ a_{Ay} = -39{,}6\ м/с^2;\ a_A = 177{,}6\ м/с^2.$$

Оберемо будь яке з цих прискорень, наприклад $a_A = 177{,}6\ м/с^2$. Нехай це прискорення на кресленні буде зображати відрізок $(a_A) = 59\ мм$. Тоді масштабний коефіцієнт прискорень μ_V буде дорівнювати:

$$\mu_a = \frac{a_A}{(a_A)} = \frac{177{,}6}{59} = 3\ \frac{м}{с^2 \cdot мм}.$$

При цьому відрізки, що будуть зображати на кресленні складові прискорення будуть дорівнювати:

$$(a_{Ax}) = \frac{a_{Ax}}{\mu_a} = \frac{173{,}1}{3} = 57{,}7\ мм;$$

$$(a_{Ay}) = \frac{a_{Ay}}{\mu_a} = \frac{39{,}6}{3} = 13{,}2\ мм.$$

На кресленні (рис. К1.2):

1. З довільної точки O під прямим кутом одна до другої проводимо координатні осі Ox і Oy.
2. Будуємо траєкторію точки за відомими півосями еліпса (c) і (d) та координатами центра (x_S), (y_S);
3. Показуємо точку A в момент часу t_1 за її координатами на осі (x_A) та (y_A) ;

4. За відомими відрізками $\vec{V}_{Ax}$ та $\vec{V}_{Ay}$ проекцій зображаємо паралельні до осей координат складові (V_{Ax}) і (V_{Ay}) швидкості(якщо проекція від'ємна, то складова напрямлена проти додатного напряму відповідної осі);
5. Визначаємо швидкість точки $\vec{V}_A$ через складові за правилом паралелограма
6. За відомими відрізками $\vec{a}_{Ax}$ та $\vec{a}_{Ay}$ проекцій зображаємо паралельні до осей координат складові (a_{Ax}) і (a_{Ay}) прискорення (якщо проекція прискорення від'ємна, то складова напрямлена проти додатного напряму відповідної осі);
7. Визначаємо прискорення точки $\vec{a}_A$ через складові за правилом паралелограма;
8. Зображаємо складові прискорення $\vec{a}_A^{\tau}$ і $\vec{a}_A^{n}$ в природній системі координат.
9. За відомими напрямом $\vec{a}_A^{n}$ і радіусом кривизни ρ визначаємо положення центра кривизни еліпса в точці A (точка O_1).

Слід пам'ятати, що вектор швидкості напрямлений за дотичною до траєкторії точки, а вектор прискорення – в бік кривизни траєкторії.

$$\mu_\ell = 0{,}2\ \frac{м}{мм};\quad \mu_V = 0{,}6\ \frac{м/с}{мм};\quad \mu_a = 3\ \frac{м/с^2}{мм}.$$

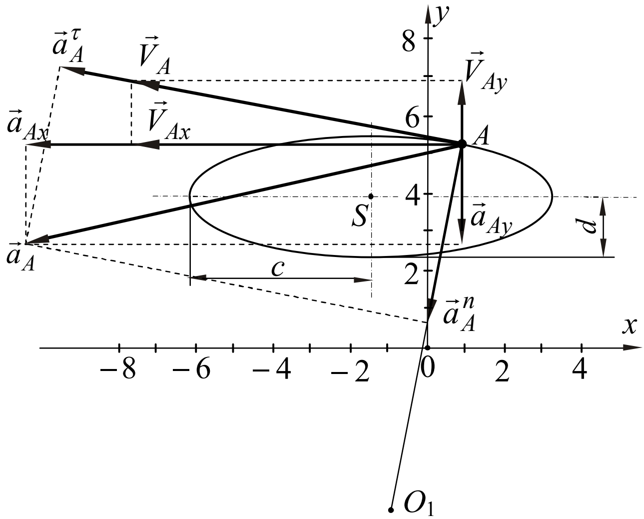


Рис. К1.2

Тема К2. ПОСТУПАЛЬНИЙ ТА ОБЕРТАЛЬНИЙ РУХИ ТВЕРДОГО ТІЛА

К2.1. Стислі відомості з теорії

Поступальним *називається такий рух твердого тіла по траєкторії довільної форми, при якому будь-яка пряма, що проведена у цьому тілі, при переміщенні разом з тілом залишається паралельною самій собі.*

Головна властивість поступального руху тіла визначається теоремою, згідно з якою *при поступальному русі тіла всі його точки рухаються за однаковими (при накладенні збігаються) траєкторіями і мають у кожен момент часу однакові вектори швидкостей і однакові вектори прискорень:*

$$\begin{aligned} \vec{V}_1 &= \vec{V}_2 = \ldots = \vec{V}_n; \\ \vec{a}_1 &= \vec{a}_2 = \ldots = \vec{a}_n. \end{aligned} \qquad \text{(К2.1)}$$

Таким чином, поступальний рух твердого тіла повністю визначається рухом будь якої його точки, рух якої був розглянутий в темі К1.

Обертальним *називається такий рух твердого тіла, при якому всі його точки, що належать певній незмінно пов'язаній з тілом прямій, яку називають віссю обертання, залишаються нерухомими, а траєкторіями решти точок тіла будуть концентричні кола в площинах, що перпендикулярні до осі обертання, і з центрами, які лежать на цій осі.*

Положення тіла при його обертанні навколо осі відносно початкового положення в будь який момент часу визначається ***кутом повороту тіла.*** Таким чином, кінематичним рівнянням обертального руху тіла є залежність від часу його кута повороту φ:

$$\varphi = f(t). \qquad \text{(К2.2)}$$

Одиницею кута повороту тіла в системі СІ є *радіан*:

$$[\varphi] = 1 \text{ рад.}$$

Кінематичними характеристиками обертального руху твердого тіла є його *кутова швидкість* $\boldsymbol{\omega}$ та *кутове прискорення* $\boldsymbol{\varepsilon}$.

Кутова швидкість *ω характеризує зміну кута повороту тіла за одиницю часу і в даний момент часу чисельно дорівнює першій похідній від кута повороту за часом :*

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}. \qquad \text{(К2.3)}$$

Одиницею кутової швидкості в системі СІ є *радіан поділений на секунду*: $[\omega] = рад/с = 1/с = с^{-1}$.

Знак кутової швидкості ω визначає напрям обертання тіла. Якщо $\omega > 0$, то з додатного напряму осі обертання рух тіла буде видно проти ходу годинникової стрілки, а якщо $\omega < 0$, то – навпаки.

В техніці кут повороту пропорційний кількості обертів N, що зробило тіло за деякий проміжок часу. В цьому випадку кут повороту тіла φ в радіанах можна знайти за залежністю:

$$\varphi = 2\pi N. \qquad \text{(К2.4)}$$

Кутову швидкість обертання тіла часто задають числом обертів за одну хвилину $n \ (об/хв)$.

Кутову швидкість ω в цьому випадку визначають за формулою:

$$\omega = \frac{\pi n}{30}, \ \frac{p}{c}, \tag{К2.5}$$

де n – підставляють в $об/хв$.

Кутове прискорення *ε характеризує зміну кутової швидкості тіла з часом і в даний момент часу чисельно дорівнює першій похідній від кутової швидкості або другій похідний від кута повороту за часом*:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}. \tag{К2.6}$$

Одиницею кутового прискорення в системі СІ є *радіан поділений на секунду в квадраті*: $[\varepsilon] = рад/c^2 \equiv 1/\text{c}^2 \equiv c^{-2}$.

Знак кутового прискорення ε залежить від характеру обертання тіла. Якщо обертання тіла прискорене, то знаки ω та ε збігаються, а якщо обертання сповільнене, то знаки ω та ε різні.

У випадку ***рівномірного*** обертального руху тіла його кутова швидкість буде сталою ($\omega = const$), а кутове прискорення дорівнює нулю $(\varepsilon = 0)$.

Кут повороту тіла в цьому випадку обчислюється за формулою:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega \cdot t, \tag{К2.7}$$

де φ_0 – початковий кут повороту тіла при $t = 0$.

У випадку ***рівномірно змінного*** обертального руху тіла його кутове прискорення буде сталим ($\varepsilon = const$).

Кутова швидкість і кут повороту тіла в цьому випадку обчислюються за формулами:

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t; \tag{К2.8}$$

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}, \tag{К2.9}$$

де φ_0, ω_0 – відповідно кут повороту тіла і кутова швидкість в момент часу $t = 0$.

Лінійною або коловою швидкістю *будь якої точки М тіла, що обертається, є добуток кутової швидкості тіла на відстань ОМ від осі обертання до цієї точки (радіус кола, по якому рухається точка)*:

$$V = \omega \cdot (OM). \tag{К2.10}$$

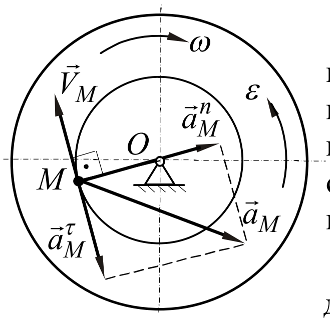


Рис. К2.1

Напрямлена лінійна швидкість (рис. К2.1) за дотичною до кола (перпендикулярно до радіусу), що пише точка тіла, яке обертається, в бік руху тіла (в бік кутової швидкості).

Повне прискорення довільної точки M тіла, що обертається, і яка не лежить на осі обертання, можна розкласти на дві складові за осями природної системи координат τ і n:

тангенціальне (***або дотичне***) прискорення, яке напрямлене за дотичною до траєкторії точки тіла (перпендикулярно до радіусу) в бік кутового прискорення і визначається за формулою:

$$a_M^\tau = \varepsilon \cdot (OM) \tag{К2.11}$$

і нормальне (***або доцентрове***) прискорення, яке напрямлене вздовж радіусу до осі обертання тіла і визначається за формулою:

$$a_M^n = \omega^2 \cdot (OM). \qquad (\text{К}2.12)$$

Повне прискорення точки відповідно дорівнює:

$$a_M = \sqrt{(a_M^n)^2 + (a_M^\tau)^2} = (OM) \cdot \sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}. \qquad (\text{К}2.13)$$

К2.2. Порядок розв'язування задач на обертальний рух твердого тіла

При розв'язуванні задач на обертання твердого тіла навколо нерухомій осі рекомендується дотримуватися такої послідовності:

1. Вибрати систему координат таким чином, щоб одна з осей (як правило вісь z) збігалася з віссю обертання.
2. Скласти рівняння обертального руху твердого тіла (залежність кута повороту φ від часу t).
3. Диференціюючи за часом залежність для кута повороту, визначити величину кутової швидкості ω.
4. Визначити другу похідну від кута повороту за часом, знайти величину кутового прискорення ε.
5. Скориставшись кутовою швидкістю ω визначити лінійну швидкість потрібної точки тіла та її нормальне прискорення a^n.
6. Скориставшись кутовим прискоренням ε визначити дотичне прискорення a^τ потрібної точки тіла.
7. Знайти величину та напрям повного прискорення цієї точки.

К2.3. Контрольні запитання

1. Який рух твердого тіла називається поступальним?
2. Який рух твердого тіла називається обертальним навколо нерухомої осі?
3. За якими формулами визначаються модулі кутової швидкості і кутового прискорення?
4. Як напрямлений вектор швидкості тіла, що обертається?
5. Як визначити величину та напрям дотичного і нормального прискорення точки тіла, що обертається?

К2.4. Приклади розв'язування задач

Задача 1

Вал починає обертатися зі сталим прискоренням із стану спокою. За перші 5 секунд вал робить $N = 12{,}5$ оберти.

Визначити кутову швидкість вала в кінці проміжку часу, що розглядається.

Розв'язування. При рівноприскореному обертанні тіла кутова швидкість ω змінюється за законом:

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t\,.$$

Оскільки за умовою задачі $\omega_0 = 0$, то

$$\omega = \varepsilon t\,.$$

Таким чином, для визначення кутової швидкості вала треба знайти його кутове прискорення ε.

Кут повороту тіла при рівноприскореному обертанні визначається за формулою:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}.$$

Оскільки $\varphi_0 = 0$ і $\omega_0 = 0,$ то

$$\varphi = \frac{\varepsilon t^2}{2}.$$

Кут повороту вала за число обертів N дорівнює:

$$\varphi = 2\pi N .$$

Тоді:

$$\varepsilon = \frac{2\varphi}{t^2} = \frac{2 \cdot 2\pi N}{t^2} .$$

Підставивши вираз для ε в формулу для ω дістанемо:

$$\omega = \varepsilon t = \frac{4\pi N}{t^2} t = \frac{4\pi N}{t}.$$

З урахуванням числових даних:

$$\omega = \frac{4\pi \cdot 12,5}{5} = 10\pi \ \ рад/c .$$

Відповідь: $\omega = 10\pi \ \ рад/c$.

Задача 2

Шків пасової передачі починає обертатися із стану спокою з сталим кутовим прискоренням і через 10 хвилин від початку руху має кутову швидкість, яка відповідає 120 $об/хв$.

Визначити число обертів N, які зробив шків за 10 хвилин.

Розв'язування. Число обертів N можна визначити, якщо відомий кут φ, на який повернувся шків за 10 хвилин.

Оскільки $\varphi = 2\pi N$, то $N = \dfrac{\varphi}{2\pi}$.

Кут повороту тіла при рівноприскореному обертанні дорівнює:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}.$$

Оскільки $\varphi_0 = 0$ і $\omega_0 = 0$, то $\varphi = \dfrac{\varepsilon t^2}{2}$.

Таким чином:

$$N = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{\varepsilon t^2}{4\pi}.$$

Для визначення кутового прискорення ε скористаємося формулою для кутової швидкості при рівноприскореному обертанні тіла:

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t.$$

Оскільки $\omega_0 = 0$, то $\varepsilon = \dfrac{\omega}{t}$.

З іншого боку, через число обертів за хвилину

$$\omega = \frac{\pi n}{30}.$$

Тоді:

$$\varepsilon = \frac{\omega}{t} = \frac{\pi n}{30t}.$$

Якщо підставити ε в формулу для N, дістанемо:

$$N = \frac{\varepsilon t^2}{4\pi} = \frac{\pi n t^2}{30t \cdot 4\pi} = \frac{nt}{120}.$$

При $n = 120\ об/хв$ і $t = 600\, с$, знайдемо:

$$N = \frac{120 \cdot 600}{120} = 600\ об.$$

Відповідь: $N = 600\ об$.

Задача 3

Колесо радіусом $R = 0,2\ м$ починає обертатися із стану спокою зі сталим прискоренням. Через $t = 10\ с$ від початку руху точка, що лежить на ободі колеса, має лінійну швидкість $V = 10\ м/с$.

Визначити швидкість, нормальне і дотичне прискорення точок обода колеса в момент часу $t_1 = 15\ с$ від початку руху.

Розв'язування. Для визначення V_1, a_{n_1} і a_{τ_1} скористаємося залежностями обертального руху:

$$V_1 = \omega_1 R; \quad a_{n_1} = \omega_1^2 R; \quad a_{\tau_1} = \varepsilon R.$$

Таким чином, для визначення V_1, a_{n_1} і a_{τ_1} треба знайти кутову швидкість і кутове прискорення колеса в момент часу $t_1 = 15\ с$.

Визначимо кутову швидкість в момент часу $t = 10\ с$.

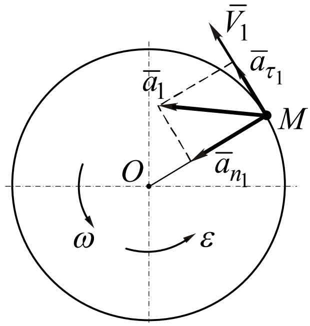


Рис. 1

Оскільки при $t = 10\ c$ швидкість точки обода колеса $V = 10\ м/с$, то:

$$\omega = \frac{V}{R} = \frac{10}{0,2} = 50\ рад/с .$$

При рівноприскореному обертанні тіла ($\varepsilon = \text{const}$) кутова швидкість змінюється за законом:

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t .$$

Оскільки $\omega_0 = 0$, то

$$\varepsilon = \frac{\omega}{t} = \frac{50}{10} = 5\ рад/с .$$

В момент часу $t_1 = 15\ c$ кутова швидкість тіла відповідно буде дорівнювати:

$$\omega_1 = \varepsilon t_1 = 5 \cdot 15 = 75\ рад/с .$$

Тоді:

$$V_1 = \omega_1 R = 75 \cdot 0,2 = 15\ м/с ;$$

$$a_{n_1} = \omega_1^2 R = 75^2 \cdot 0,2 = 1125\ м/с^2 ;$$

$$a_{\tau_1} = \varepsilon R = 5 \cdot 0,2 = 1\ м/с^2 .$$

На рис. 1 показані напрями визначених векторів.

Оскільки $\omega > 0$ і $\varepsilon > 0$, то напрями $\overline{V}_1$ і $\overline{a}_{\tau_1}$ збігаються. Нормальне ж прискорення $\overline{a}_{n_1}$ напрямлене до центра обертання шківа.

Відповідь: $V_1 = 15\ м/с$; $a_{n_1} = 1125\ м/с^2$; $a_{\tau_1} = 1\ м/с^2$.

Задача 4

Обертальний рух вала радіусом $R = 0{,}1$ *м* викликається вантажем P, що підвішений до нитки, яка намотана на вал (рис.1). Вантаж P рухається вертикально за законом $x = t^2$, де x - відстань від тіла до точки збігу нитки з поверхні вала в метрах, t - час в секундах.

Визначити кутову швидкість ω і кутове прискорення ε вала та повне прискорення $\overline{a}$ точки на поверхні вала в довільний момент часу t.

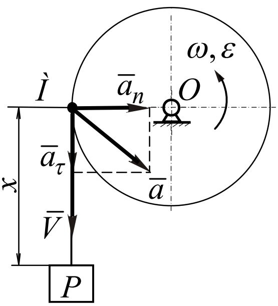


Рис. 1

Розв'язування. Величина швидкості $\overline{V}$ точки M обода вала дорівнює швидкості нитки, що змотується з поверхні вала при опусканні вантажу P, а також швидкості вантажу P. Швидкість же вантажу P визначимо шляхом диференціювання його закону руху:

$$V = V_P = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left(t^2\right) = 2t\ .$$

Дотичне прискорення $\overline{a}_\tau$ точки M дорівнює прискоренню вантажу P, оскільки з цим прискоренням збігає нитка з поверхні вала:

$$a_\tau = a_P = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}\left(2t\right) = 2\ \text{м}/\text{с}^2.$$

За відомими лінійною швидкістю і дотичним прискоренням точки M поверхні вала можна визначити кутову швидкість ω і кутове прискорення ε вала:

$$V = \omega \cdot R \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{V}{R} = \frac{2t}{0,1} = 20t \, ;$$

$$a_\tau = \varepsilon \cdot R \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = \frac{a^\tau}{R} = \frac{2}{0,1} = 20 \ \text{рад}/c^2 \, .$$

Тоді, нормальне прискорення точки M буде дорівнювати:

$$a_n = \omega^2 R = \left(20t\right)^2 \cdot 0,1 = 40t^2 \, .$$

Для повного прискорення точки M, що лежить на поверхні вала, дістанемо:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(2\right)^2 + \left(40t^2\right)^2} = 2\sqrt{1 + 400t^4} \, .$$

Відповідь: $\omega = 20t$; $\varepsilon = 20 \ ðàä/ñ^2$; $a = 2\sqrt{1 + 400t^4}$.

Задача 5

Передача складається з трьох шківів : 1, 2 і 3 (рис. 1). Передача обертального руху від першого шківа на другий відбувається за рахунок сил тертя в точці A дотику шківів. Причому, обертання відбувається без проковзування одного шківа відносно другого. Другий і третій шків жорстко насаджені на один вал (вісь вала O_2). Кут повороту першого шківа змінюється за законом: $\varphi = t^2 - 10t$.

Визначити кутові швидкості і кутові прискорення шківів передачі та швидкості і прискорення точок дотикання шківів в момент часу $t = 3 \ c$, якщо радіуси шківів: $r_1 = r_3 = 0,2 \ м$; $r_2 = 0,4 \ м$.

Розв'язування. Визначимо кутову швидкість і кутове прискорення шківа 1:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d}{dt}\left(t^2 - 10t\right) = 2t - 10\,;$$

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt}\left(2t - 10\right) = 2\ рад/c^2\,.$$

В момент часу $t = 3\ c$:

$$\omega_1 = 2\cdot 3 - 10 = -4\ рад/c\,; \qquad \varepsilon_1 = 2\ рад/c^2\,.$$

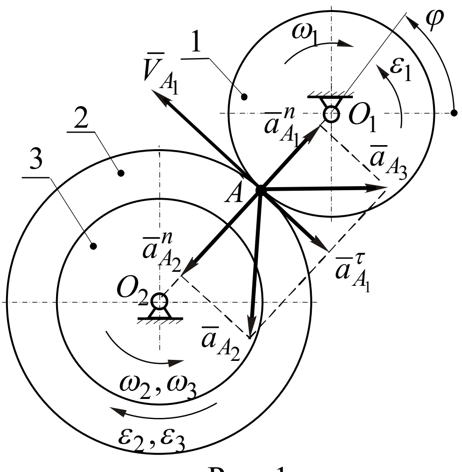


Рис. 1

Знак мінус при значенні ω_1 вказує на те, що напрям кутової швидкості в момент часу $t = 3\ c$ в протилежний бік від додатного напряму відліку кута φ. Оскільки знаки ω_1 і ε_1 різні, то кутове прискорення напрямлене в протилежний бік від кутової швидкості.

На рис. 1 додатний напрям відліку кута φ обрано проти ходу годинникової стрілки. Тоді напрям ω_1 буде за ходом годинникової стрілки, а ε_1 проти ходу годинникової стрілки. За модулем же ω_1 і ε_1 відповідно дорівнюють:

$$\omega_1 = 4\ рад/c\,;\ \ \varepsilon_1 = 2\,рад/c^2\,.$$

Швидкість та прискорення точки A дотику першого шківа визначимо за формулами:

$$V_{A_1} = \omega_1 r_1 = 4 \cdot 0,2 = 0,8 \ м/с;$$

$$a_{A_1}^{\tau} = \varepsilon_1 r_1 = 2 \cdot 0,2 = 0,4 \ м/с^2;$$

$$a_{A_1}^{n} = \omega_1^2 r_1 = 0,2 \cdot 4^2 = 3,2 \ м/с^2.$$

Швидкість $\bar{V}_{A_1}$ напрямлена (рис. 1) перпендикулярно до радіуса AO_1 за напрямом кутової швидкості ω_1. Дотичне прискорення $\bar{a}_{A_1}^{\tau}$ напрямлене теж перпендикулярно до AO_1, але за напрямом ε_1. Нормальне прискорення $\bar{a}_{A_1}^{n}$ напрямлене вздовж радіуса AO_1 до центра обертання O_1.

Оскільки шківи 1 та 2 обертаються без проковзування в точці дотику, то швидкість і дотичне прискорення точки A другого шківа будуть дорівнювати швидкості і дотичному прискоренню точки A першого шківа, тобто:

$$\bar{V}_{A_1} = \bar{V}_{A_2}; \qquad \bar{a}_{A_1}^{\tau} = \bar{a}_{A_2}^{\tau}.$$

Тоді:

$$\omega_2 = \frac{V_{A_2}}{r_2} = \frac{V_{A_1}}{r_2} = \frac{0,8}{0,4} = 2 \ рад/с;$$

$$\varepsilon_2 = \frac{a_{A_2}^{\tau}}{r_2} = \frac{a_{A_1}^{\tau}}{r_2} = \frac{0,4}{0,4} = 1 \ рад/с^2.$$

Обчислимо нормальне прискорення точки A другого шківа:

$$a_{A_2}^n = \omega_2^2 r_2 = 2^2 \cdot 0,4 = 1,6 \ м/с^2 .$$

Напрямлене нормальне прискорення точки A другого шківа вздовж радіуса AO_2 до центра обертання O_2.

Напрям кутової швидкості другого шківа визначається напрямом швидкості точки A, тобто буде проти ходу годинникової стрілки. Напрям же кутового прискорення визначається напрямом дотичного прискорення, тобто буде за ходом годинникової стрілки.

Повні прискорення точок дотику шківів:

$$a_{A_1} = \sqrt{a_{A_1}^{\tau\,2} + a_{A_1}^{n\,2}} = \sqrt{(0,4)^2 + (3,2)^2} = 3,2 \ м/с^2 ;$$

$$a_{A_2} = \sqrt{a_{A_2}^{\tau\,2} + a_{A_2}^{n\,2}} = \sqrt{(0,4)^2 + (1,6)^2} = 1,65 \ м/с^2 .$$

Оскільки шківи 2 та 3 жорстко насаджені на один вал, то їх кутові швидкості і кутові прискорення будуть однаковими, тобто:

$$\omega_3 = \omega_2 = 2 \ рад/с ; \quad \varepsilon_3 = \varepsilon_2 = 1 \ рад/с^2 .$$

Відповідь: $\omega_1 = 4 \ рад/с$; $\omega_2 = \omega_3 = 2 \ рад/с$; $V_A = 0,8 \ м/с$; $a_{A_1} = 3,2 \ м/с^2$; $a_{A_2} = 1,65 \ м/с^2$.

К2.5. Завдання теми К2

Механізм (рис.К2.2), складається з зубчастої рейки 1, яка в зачепленні зі ступінчастим колесом 3, або вантажу 1, який прикріплений до нитки, що намотана на колесо 2. Колеса 2 і 3 зв'язані між собою або пасовою передачею, або знаходяться в зачепленні. Радіуси ступінчастих коліс відповідно дорівнюють: для колеса 2 – менше колесо r_2 =0,03 *м*, більше колесо R_2 = 0,08 *м*; для колеса 3 – менше колесо r_3 =0,04 *м*, більше колесо R_3 = 0,12 *м*. Якщо колеса 3 і 2 одноступінчасті, то їх радіуси дорівнює r_3 та r_2, крім схеми 0, для якої R_3. На ободі одного з коліс показана точка *М.*

В таблиці К3 задано закон руху або одного з коліс 2 чи 3, або вантажу 1. Закон руху коліс задається у вигляді або кута повороту: $\varphi_2(t)$; $\varphi_3(t)$, або зміни кутової швидкості: $\omega_2(t)$; $\omega_3(t)$. Закон руху вантажу задається у вигляді або переміщення $s_1(t)$, або зміни швидкості $V_1(t)$.

За додатний напрям для відліку φ і ω, для яких закон руху заданий, прийняти рух проти ходу годинникової стрілки, а для V_1 швидкості вантажу та рейки 1 – рух донизу. (В законах руху: S_1 – в метрах; V_1 – в метрах за секунду; φ – в радіанах; t – в секундах.)

Визначити в момент часу t_1 = 2 *с* величини, що вказані у відповідній графі таблиці К3.

Схема механізму обирається з рис. К2.2 за першою цифрою шифру, а номер умови з таблиці К3 за другою.

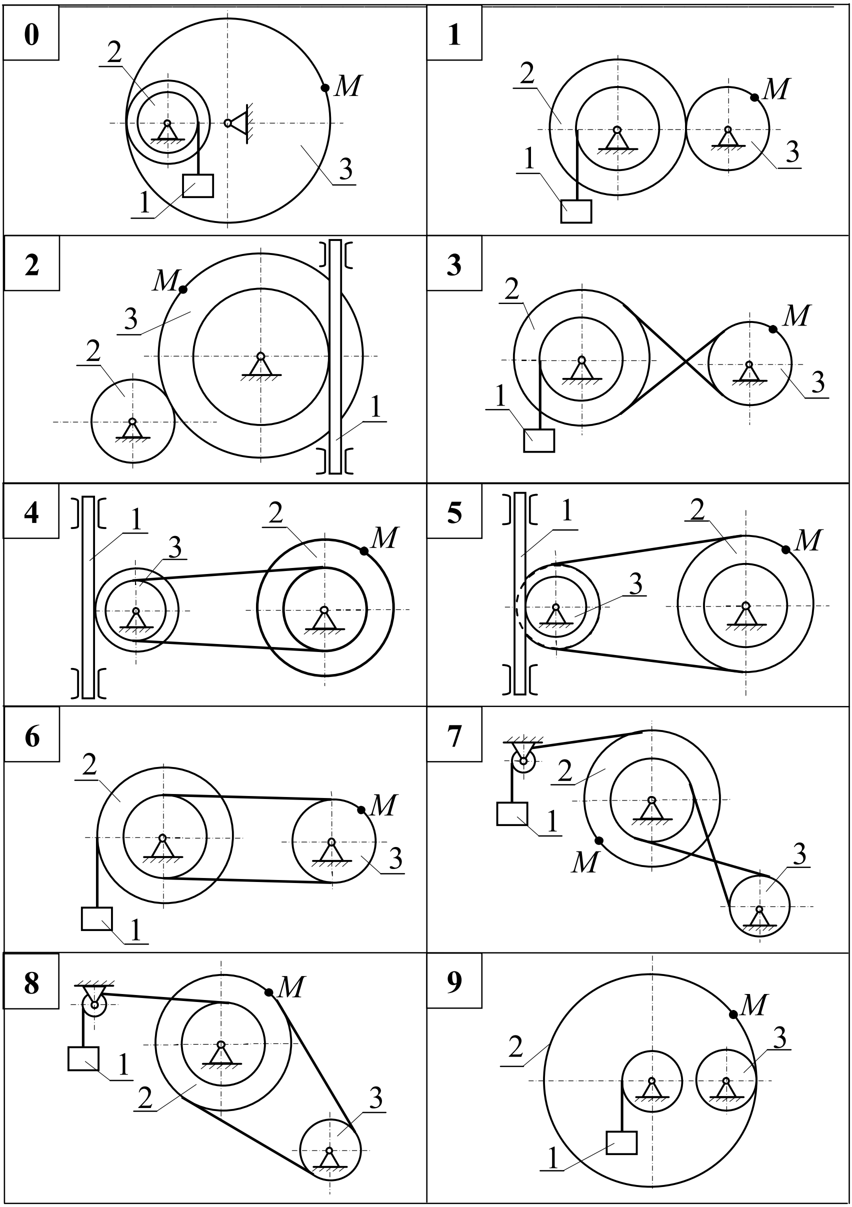

0
2
M
3
1
1
2
M
1
3
2
M
3
2
1
3
2
M
1
3
4
1
3
2
M
5
1
2
M
3
6
2
M
3
1
7
2
1
M
3
8
M
1
2
3
9
M
2
3
1

Рис. К2.2

Таблиця К3

Номер умови	Закон руху	Визначити
0	$\varphi_2 = 8t - 4t^2$	$V_1, \omega_2, \omega_3, V_M, \varepsilon_2, \varepsilon_3, a_M$
1	$\omega_3 = 3\left(6t - t^2\right)$	$V_1, \omega_2, V_M, \varepsilon_2, \varepsilon_3, a_M$
2	$s_1 = 0{,}05\left(2t^2 - 3t\right)$	$V_1, \omega_2, \omega_3, V_M, \varepsilon_2, \varepsilon_3, a_M$
3	$\varphi_3 = 3t - t^2$	$V_1, \omega_2, \omega_3, V_M, \varepsilon_2, \varepsilon_3, a_M$
4	$\varphi_2 = 3t^2 - t$	$V_1, \omega_2, \omega_3, V_M, \varepsilon_2, \varepsilon_3, a_M$
5	$\omega_2 = 3t^2 - 5t$	$V_1, a_1, \omega_3, V_M, \varepsilon_2, \varepsilon_3, a_M$
6	$s_1 = 0{,}1\left(t^2 - 2t\right)$	$V_1, \omega_2, \omega_3, V_M, \varepsilon_2, \varepsilon_3, a_M$
7	$V_1 = 0{,}01(5t^3 - 9t)$	$a_1, \omega_2, \omega_3, V_M, \varepsilon_2, \varepsilon_3, a_M$
8	$\varphi_3 = 3t^2 - 8$	$V_1, \omega_2, \omega_3, V_M, \varepsilon_2, \varepsilon_3, a_M$
9	$V_1 = 0{,}02\left(t^2 - 1\right)$	$a_1, \omega_2, \omega_3, V_M, \varepsilon_2, \varepsilon_3, a_M$

Зауваження. Ця задача на дослідження простих видів руху твердого тіла: поступального і обертального. При розв'язуванні задачі треба мати на увазі, що у випадку зубчастого зачеплення двох коліс точки зачеплення кожного з коліс мають однакові швидкості і однакові тангенціальні прискорення. У випадку ж пасової передачі швидкості всіх точок паса і точок ободів коліс за величиною однакові (приймається, що пас не ковзає по колесу).

К2.6. Приклад розв'язування завдання теми К2

Рейка 1 (рис. К2.3) рухається в вертикальних напрямних за законом $s_1 = 0,012t^3 + 7$.

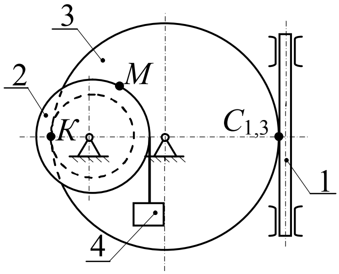


Рис.К2.3

Колесо 3 радіуса R_3 знаходиться в зачепленні з одного боку з рейкою 1, а з другого – з малим колесом радіуса r_2, яке зблоковане з шківом 2 радіуса R_2. На шків намотано нерозтяжну нитку з вантажем 4 на кінці.

Дано: $R_2 = 0{,}08\ м$; $r_2 = 0{,}03\ м$; $R_2 = 0{,}12\ м$; $s_1 = 0,02t^3 + 7$; $t_1 = 2\ с$.

Визначити: $V_1,\ \omega_2,\ \omega_3,\ V_4,\ \varepsilon_2,\ \varepsilon_3,\ a_4,\ a_M^{\tau},\ a_M^{n},\ a_M$

1. За відомим законом руху рейки 1 визначимо швидкість точки C_1, яка їй належить:

$$V_{C_1} = \dot{s}_1 = 0,06t^2.$$

В момент часу t_1=2 *с*. $V_{C_1} = 0,06 \cdot 2^2 = 0,24$ *м/с*.

2. Оскільки рейка 1 і колесо 3 знаходяться в зачепленні, то $V_{C_3} = V_{C_1}$ і, з огляду на те, що V_{C_3} – лінійна швидкість точки на ободі колеса 3, що обертається, дістанемо:

$$V_{C_3} = V_{C_1} = \omega_3 \cdot R_3.$$

Звідки:

$$\omega_3 = \frac{V_{C_1}}{R_3} = \frac{0,06t^2}{R_3}.$$

Оскільки колеса 2 і 3 теж знаходяться в зачепленні в точці K то $V_{K_2} = V_{C_3}$. З іншого боку:

$$V_{K_2} = \omega_2 \cdot r_2,$$

або, з урахуванням виразу для V_{C_3} дістанемо:

$$\omega_3 \cdot R_3 = \omega_2 \cdot R_2.$$

З цього рівняння з урахуванням значення для ω_3 знайдемо ω_2:

$$\omega_2 = \frac{\omega_3 \cdot R_3}{r_2} = \frac{6t^2 \cdot R_3}{R_3 \cdot r_2} = \frac{0,06t^2}{r_2}.$$

Підставивши час $t_1 = 2\,c$ у вирази для ω_3 і ω_2, дістанемо:

$$\omega_2 = \frac{0,06 \cdot 2^2}{0,03} = 8\ c^{-1}; \quad \omega_3 = \frac{0,06 \cdot 2^2}{0,12} = 2\ c^{-1}.$$

3. Визначимо швидкість вантажу 4 з урахуванням того, що:

$$V_4 = V_{K_2} = V_M = \omega_2 \cdot R_2.$$

В момент часу $t_1 = 2\,c$ дістанемо:

$$V_4 = 8 \cdot 0,08 = 0,64\ м/с.$$

Вектори лінійних швидкостей і напрями кутових швидкостей показані на рис.К2.4.

4. Визначимо прискорення точки C_1 рейки:

$$a_1 = \dot{V}_{C_1} = 0,12t.$$

5. Прискорення точки C_1 рейки дорівнює дотичному прискоренню точки C_3 на ободі колеса 3 (оскільки вони знаходяться в зачепленні), тобто:

$$a_3^\tau = a_1 = 0,12t.$$

Оскільки $a_3^\tau = \varepsilon_3 \cdot R_3,$ знайдемо кутове прискорення ε_3 колеса 3:

$$\varepsilon_3 = \frac{a_3^\tau}{R_3} = \frac{0,12t}{R_3}.$$

Аналогічно визначаємо кутове прискорення ε_2 колеса 2, виходячи з того, що $a_3^\tau = a_2^\tau = \varepsilon_2 \cdot r_2,$ тобто:

$$\varepsilon_2 = \frac{a_3^\tau}{r_2} = \frac{0,12t}{r_2}.$$

В момент часу $t_1 = 2\ c$, дістанемо:

$$\varepsilon_2 = \frac{0,12t}{r_2} = \frac{0,12 \cdot 2}{0,03} = 8\ c^{-2};\ \ \varepsilon_3 = \frac{0,12t}{R_3} = \frac{0,12 \cdot 2}{0,12} = 2\ c^{-2}.$$

6. Визначимо нормальне і дотичне прискорення точки M, що лежить на зовнішньому ободі колеса 2 (при $t_1 = 2\ c$):

$$a_M^\tau = \varepsilon_2 \cdot R_2 = 8 \cdot 0,08 = 0,64\ \ м/c^2\ ;$$

$$a_M^n = \omega_2^2 \cdot R_2 = 8^2 \cdot 0,08 = 5,12\ \ м/c^2\ .$$

Для повного прискорення точки M в момент часу $t_1 = 2\ c$ дістанемо:

$$a_M = \sqrt{(a_M^\tau)^2 + (a_M^n)^2} = \sqrt{0,64^2 + 5,12^2} = 5,16\ \ м/c^2\ .$$

7. Враховуючи те, що $a_4 = a_M^\tau$, знаходимо прискорення вантажу 4:

$$a_4 = 0,64\ \ м/c^2\ .$$

Вектори прискорень точок і напрями кутових прискорень показані на рис. К2.5.

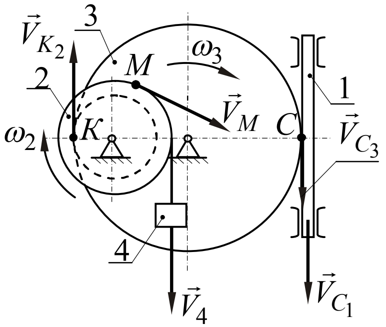


Рис. К2.4

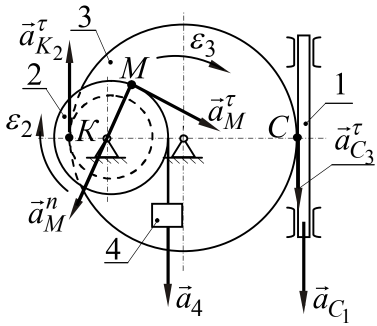


Рис. К2.5

Відповідь: $V_1 = 0,24\ м/c$; $\omega_2 = 8\ c^{-1}$; $\omega_3 = 2\ c^{-1}$;

$V_4 = 0,64\ м/c$; $\varepsilon_2 = 8\ c^{-2}$; $\varepsilon_3 = 2\,c^{-2}$;

$a_4 = 0,64\ м/c^2$; $a_M^n = 5,12\ м/c^2$;

$a_M^\tau = 0,64\ м/c^2$; $a_M = 5,16\ м/c^2$.

Тема К3. ПЛОСКОПАРАЛЕЛЬНИЙ РУХ ТВЕРДОГО ТІЛА

К3.1. Стислі відомості з теорії

***Плоско-паралельним** або **плоским** називається такий рух твердого тіла, при якому всі точки тіла рухаються в площинах, паралельних деякій заданій нерухомій площині.*

Для означення плоского руху тіла достатньо означити рух плоскої фігури, яка може бути отримана шляхом перетину тіла площиною, що паралельна заданій нерухомій площині.

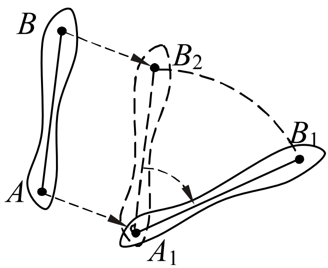


Рис. К3.1

Будь-яке переміщення плоскої фігури (рис. К3.1) з положення AB в положення A_1B_1 можна розкласти на поступальний рух разом з довільно обраною точкою, наприклад A, яка зветься ***полюсом***, в положення A_1B_2 і обертальний рух навколо полюса з положення A_1B_2 в положення A_1B_1.

Правило додавання швидкостей. *Швидкість будь-якої точки B тіла, що здійснює плоский рух, дорівнює геометричній сумі швидкості $\vec{V}_A$ обраного полюса A і швидкості обертання $\vec{V}_{BA}$ даної точки B навколо цього полюса*:

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA}, \qquad \text{(К3.1)}$$

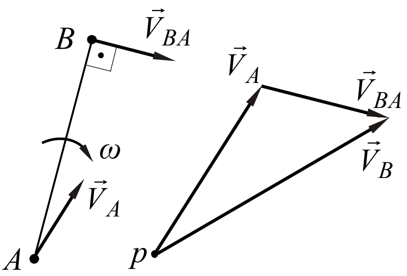


Рис. К3.2

Розв'язується рівняння (К3.1) шляхом побудови векторного трикутника (рис. К3.2). Для цього з довільної точки p відповідно рівнянню (К3.1) в деякому масштабі будується вектор швидкості полюса $\vec{V}_A$, до якого додається вектор швидкості $\vec{V}_{BA}$ обертання точки B навколо A. Швидкість $\vec{V}_{BA}$ напрямлена (рис. К3.2) перпендикулярно до BA в бік кутової швидкості ω обертального руху тіла і за модулем дорівнює:

$$V_{BA} = \omega \cdot AB .$$

Вектор швидкості $\vec{V}_B$ точки B являє собою вектор суми двох побудованих векторів $\vec{V}_A$ і $\vec{V}_{BA}$.

Побудована *векторна фігура, на якій від певного центру p в обраному масштабі відкладені вектори швидкостей точок тіла в певний момент часу називається* ***планом швидкостей****. Точка p називається* ***полюсом плану швидкостей****.*

Властивості плану швидкостей: *Відрізки, що на плані швидкостей з'єднують кінці векторів швидкостей точок тіла, перпендикулярні відрізкам, які з'єднують відповідні точки тіла, і за модулем пропорційні довжинам цих відрізків.*

Швидкості точок плоскої фігури ABC можна визначити і іншим способом, використовуючи поняття *миттєвого центру швидкостей.*

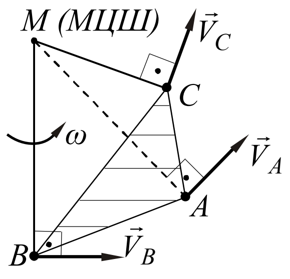


Рис. К3.3

Миттєвим центром швидкостей *(МЦШ) називається точка плоскої фігури, швидкість якої в даний момент часу дорівнює нулю.*

МЦШ *знаходиться в точці перетину перпендикулярів, поставлених із точок В і С до напрямів швидкостей цих точок* (рис. К3.3).

Швидкість довільної точки плоскої фігури, наприклад A, дорівнює її швидкості обертання навколо $МЦШ$ і може бути визначена за формулою:

$$V_A = \omega \cdot (MC) \cdot \mu_l, \tag{К3.2}$$

де ω – кутова швидкість обертання фігури ABC навколо $МЦШ$;

(MC) – відстань від точки C до $МЦШ$;

μ_l – масштаб довжин, в якому виконані побудови для визначенню положення $МЦШ$.

Напрямлена швидкість точки C перпендикулярно до MC в бік кутової швидкості ω.

Правило додавання прискорень. *Прискорення будь-якої точки* B *тіла, що здійснює плоский рух, являє собою геометричну суму прискорень точки, яку прийнято за полюс (наприклад точки* A*), і даної точки* B *в її обертанні разом з тілом навколо цього полюса.*

Таким чином, прискорення довільної точки B тіла може бути зображено векторним рівнянням:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}, \tag{К3.3}$$

де $\vec{a}_A$ – прискорення полюсу A в поступальному русі тіла;

$\vec{a}_{BA}$ – прискорення точки B в обертальному русі тіла навколо полюса A.

Враховуючи, що прискорення точки B при обертальному русі навколо A можна представити як геометричну суму нормального ($\vec{a}^n_{BA}$) і дотичного ($\vec{a}^\tau_{BA}$) прискорень, останнє рівняння матиме вигляд:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}^n_{BA} + \vec{a}^\tau_{BA}, \tag{К3.4}$$

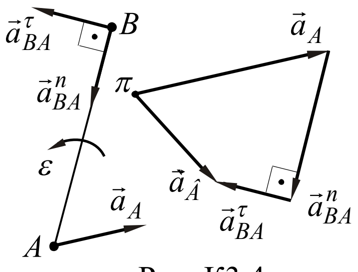


Рис. К3.4

Для визначення прискорень точок плоскої фігури за рівнянням (К3.4) використовується графічний метод, який полягає в побудові плану прискорень (рис. К3.4). Для цього з довільної точки π відповідно рівнянню (К3.4) будується вектор прискорення полюса $\vec{a}_A$, до якого додається вектор нормального прискорення $\vec{a}^n_{BA}$ обертання точки B навколо A. Прискорення $\vec{a}^n_{BA}$ (рис. К3.4) напрямлене вздовж BA до полюса A і за модулем дорівнює:

$$a^n_{BA} = \omega^2 \cdot (AB). \tag{К3.5}$$

До вектора нормального прискорення $\vec{a}_{BA}^{n}$ додається вектор тангенціального прискорення $\vec{a}_{BA}^{\tau}$ обертання точки B навколо A, яке напрямлене перпендикулярно до AB в бік кутового прискорення тіла ε і за модулем дорівнює:

$$a_{BA}^{\tau} = \varepsilon \cdot (AB). \qquad \text{(К3.6)}$$

Вектор прискорення $\vec{a}_B$ точки B являє собою вектор суми трьох побудованих векторів $\vec{a}_A$, $\vec{a}_{BA}^{n}$ і $\vec{a}_{BA}^{\tau}$.

Планом прискорень *називається векторна фігура, на якій від певного центру π відкладені вектори прискорень точок тіла в певний момент часу. Точка π називається* ***полюсом плану прискорень***.

План прискорень має одну з тих властивостей, що притаманні плану швидкостей, а саме – властивість пропорційності (або подібності) відповідних відрізків між точками на тілі і на плані прискорень.

К3.2. Контрольні запитання

1. Який рух тіла називають плоским?
2. Як визначити швидкість будь якої точки тіла при поступальному русі?
3. Яка точка називається миттєвим центром швидкостей?
4. Яким способом можна знайти положення миттєвого центра швидкостей ?
5. Яку точку треба обирати за полюс для визначення прискорень точок плоскої фігури?

6. Запишіть формулу розподілення прискорень точок плоскої фігури.
7. Як обчислити модуль нормального прискорення?
8. Як обчислити модуль тангенціального прискорення?
9. Як напрямлений вектор нормального прискорення?
10. Як визначити напрям тангенціального прискорення?

К3.3. Приклади розв'язування задач

Задача 1

Стержень AB (рис.1) довжиною 2 *м* виконує плоский рух. Вектор швидкості точки A утворює кут 30° з віссю стержня і в даний момент часу дорівнює $5\,м/с$. Вектор швидкості точки B у цей же момент часу утворює кут 60° з віссю стержня.

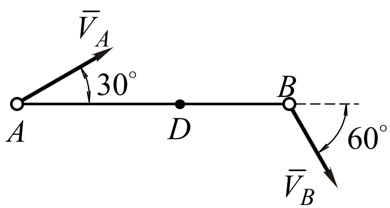


Рис. 1

Визначити величину швидкості точки B, положення миттєвого центра швидкостей, кутову швидкість стержня та швидкість точки D, яка лежить на середині стержня.

Розв'язування задачі графоаналітичним способом.

1. За полюс оберемо точку A (рис.1), оскільки відомі напрям і величина швидкості цієї точки.

2. Використовуючи формулу розподілення швидкостей при плоскому русі, запишемо векторне рівняння для визначення швидкості точки B :

$$\overline{V}_B = \overline{V}_A + \overline{V}_{BA}, \tag{1}$$

де $\overline{V}_A$ – швидкість полюса точки A;

$\overline{V}_{BA}$ – відносна швидкість точки B у її відносному обертальному русі разом з тілом навколо полюса A.

Дане векторне рівняння можна розв'язати побудовою векторного трикутника швидкостей (рис.2). Для цього з довільної точки O треба побудувати праву і ліву частину векторного рівняння (1).

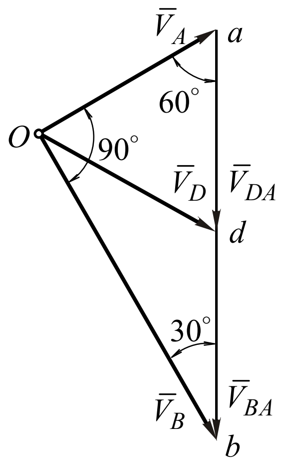


Рис. 2

При побудові правої частини рівняння (1) з точки O в довільному масштабі відкладемо вектор швидкості $\overline{V}_A$, який є відомим і за величиною і за напрямом. До вектора $\overline{V}_A$ треба додати вектор відносної швидкості $\overline{V}_{BA}$, напрям якого є відомим, оскільки швидкість точки B у її відносному обертальному русі навколо полюса A перпендикулярна до радіуса обертання, в даному випадку радіус обертання – відрізок AB. Величина вектора $\overline{V}_{BA}$ невідома і тому через точку "a" проводиться тільки його напрям (пряма ab рис. 2).

Тепер з точки O побудуємо ліву частину рівняння (1). Напрям швидкості точки B є відомим (за умовою задачі), але невідома її величина, і тому, з точки O проводимо лінію паралельну до $\overline{V}_B$.

Точка "b" перетину прямих, паралельних до $\overline{V}_{BA}$ та $\overline{V}_B$, і буде рішенням даного векторного рівняння.

В результаті побудови отримали замкнутий трикутник швидкостей, сторони якого в обраному масштабі визначають шукану швидкість точки B і відносну швидкість цієї ж точки при її обертанні разом з тілом навколо полюса A.

В цьому трикутнику відомі всі кути і одна сторона $\overline{V}_A$. З трикутника Oab знаходимо:

$$V_{BA} = \frac{V_A}{\sin 30^\circ} = \frac{5}{0,5} = 10 \;\; м/c;$$

$$V_B = V_A \cdot \mathrm{tg}60^\circ = 5\sqrt{3} = 8,65 \; м/c.$$

3. Визначимо кутову швидкість обертання стержня AB. Оскільки $V_{BA} = \omega \cdot (AB)$, то :

$$\omega = \frac{V_{BA}}{(AB)} = \frac{10}{2} = 5 \;\; рад/c.$$

4. Знайдемо швидкість точки D, що лежить посередині відрізка AB. Для цього запишемо формулу для швидкості точки D відносно того ж самого полюса точки A:

$$\overline{V}_D = \overline{V}_A + \overline{V}_{DA}, \qquad (2)$$

де $\overline{V}_A$ – швидкість полюса точки A;

$\overline{V}_{DA}$ – відносна швидкість точки D у її відносному обертальному русі разом з тілом навколо полюса A.

Швидкість $\overline{V}_{DA}$ має той же напрям, що і $\overline{V}_{BA}$, а за модулем дорівнює:

$$V_{DA} = \omega\left(AD\right) = \omega\frac{\left(AB\right)}{2} = \frac{1}{2}V_{BA} = 5 \ \ м/с .$$

Відклавши від точки "a" (рис.2) вектор $\overline{V}_{DA}$, рівний половині вектора $\overline{V}_{BA}$, отримаємо точку "d". Вектор, що проведений з точки початку побудови (точки O) в точку "d" зображає швидкість $\overline{V}_D$ точки D.

Оскільки сторони Oa та ad трикутника Oad рівні між собою ($V_A = V_{DA} = 5 \ м/с$) і кут між ними 60°, то трикутник рівносторонній. Таким чином: $V_D = 5 \ \ м/с$.

Розв'язування задачі за допомогою миттєвого центра швидкостей.

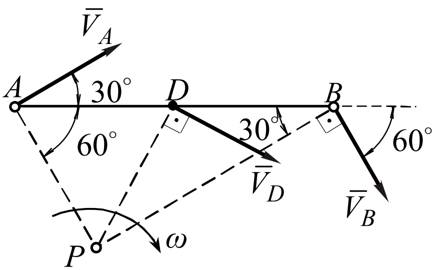


Рис. 3

Визначимо положення миттєвого центра швидкостей. Для цього з точок A і B (рис.3) проведемо перпендикуляри до швидкостей $\overline{V}_A$ і $\overline{V}_B$. Перетин цих перпендикулярів (точка P) буде миттєвим центром швидкостей.

1. Визначимо миттєві радіуси. Оскільки трикутник ABP прямокутний, то:

$$AP = \left(AB\right)\cdot\sin 30^\circ = 2\cdot 0,5 = 1 \ м;$$

$$BP = \left(AB\right)\cdot\sin 60^\circ = 2\cdot 0,866 = 1,73 \ м.$$

3.Обчислимо кутову швидкість обертання фігури навколо миттєвого центра швидкостей:

$$\omega = \frac{V_A}{(AB)} = \frac{5}{1} = 5 \ p/c \ .$$

4.Знайдемо швидкості точок B і D:

$$V_B = \omega \cdot (BP) = 5 \cdot 1{,}73 = 8{,}65 \ м/с \ ;$$
$$V_D = \omega (DP) = 5 \cdot 1 = 5 \ м/с \ ,$$

де DP – миттєвий радіус точки B.

Оскільки трикутник ABP рівносторонній ($AD = AP$ і кут між ними 60°), то $DP = 1 \ м$.

Якщо треба було б визначити тільки величину швидкості $\bar{V}_B$, то можна було б скористатися теоремою про рівність проекцій двох точок плоскої фігури на пряму, що з'єднує ці точки:

$$V_A \cos 30^\circ = V_B \cos 60^\circ .$$

Тоді:

$$V_B = V_A \frac{\cos 30^\circ}{\cos 60^\circ} = 5 \frac{0{,}865}{0{,}5} = 8{,}65 \ м/с \ .$$

Відповідь: $V_B = 8{,}65 \ м/с$; $V_D = 5 \ м/с$; $\omega = 5 \ рад/с$.

Задача 2

Рівносторонній трикутник ABC рухається в площині креслення. Прискорення вершин A та B в даний момент часу дорівнюють $16 \ м/с^2$ і напрямлені вздовж сторін трикутника (рис.1).

Визначити прискорення вершини C .

Розв'язування. Якщо відомі прискорення двох точок плоскої фігури, наприклад A і B, то задачу рекомендується розв'язувати в наступній послідовності:

1. Розглядаючи першу точку A як полюс поступального руху, записати векторне рівняння розподілення прискорень при плоскому русі для точки B і спроектувати це рівняння на пряму AB, що з'єднує обидві точки.
2. З рівняння проекцій визначити величину нормального прискорення a_{BA}^{n} і значення кутової швидкості фігури ω.
3. Спроектувати векторне рівняння розподілення прискорень при плоскому русі на пряму, яка перпендикулярна до AB, та визначити з рівняння проекцій величину тангенціального прискорення $\overline{a}_{BA}^{\tau}$ і значення кутового прискорення фігури ε.
4. Якщо треба, то, використовуючи формулу розподілення прискорень при плоскому русі, визначити прискорення будь-якої іншої точки плоскої фігури.

Розв'яжемо задачу, дотримуючись наведеної послідовності.

1. Оберемо за полюс точку A. Для точки B трикутника можна записати:

$$\overline{a}_B = \overline{a}_A + \overline{a}_{BA}^{n} + \overline{a}_{BA}^{\tau}, \tag{1}$$

де $\overline{a}_{BA}^{n}$ – відносне нормальне прискорення точки B у її відносному обертальному русі навколо точки A, напрямлене вздовж BA від точки B до точки A;

$\overline{a}_{BA}^{\tau}$ – відносне тангенціальне прискорення точки B в її відносному обертальному русі навколо точки A, напрямлене перпендикулярно до BA, напрямом задаємося (рис.1).

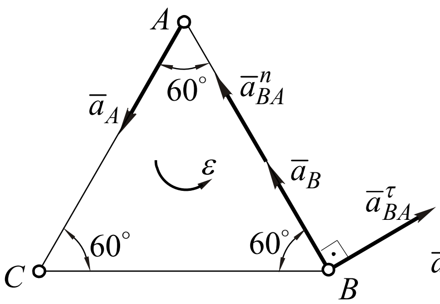


Рис.1

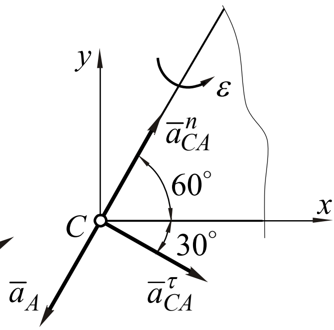


Рис.2

Спроектуємо записану рівність (1) на пряму AB:

$$-a_B = a_A \cos 60^\circ - a_{BA}^n + 0.$$

2. Звідки:

$$a_{BA}^n = a_B + a_A \cos 60^\circ = 16 + 16 \cdot 0,5 = 24 \ м/с^2 .$$

Оскільки $a_{BA}^n = \omega^2 \cdot (BA)$, то:

$$\omega = \sqrt{\frac{a_{BA}^n}{(BA)}} = \sqrt{\frac{24}{(BA)}} \ рад/с .$$

3. Спроектуємо векторне рівняння (1) на пряму, що перпендикулярна до AB:

$$0 = a_A \sin 60^\circ + 0 - a_{BA}^\tau .$$

Звідки:

$$a_{BA}^{\tau} = a_A \sin 60^\circ = 16 \cdot 0{,}866 = 13{,}86 \ м/с^2 .$$

Враховуючи те, що $a_{BA}^{\tau} = \varepsilon \cdot (BA)$, отримаємо:

$$\varepsilon = \frac{a_{BA}^{\tau}}{(BA)} = \frac{13{,}86}{(BA)} \ рад/с^2 .$$

Оскільки величина тангенціального прискорення $\overline{a}_{BA}^{\tau}$ додатна, то його напрям на рис. 1 обрано вірно. Звідси випливає, що кутове прискорення напрямлене проти ходу годинникової стрілки.

4. Визначимо прискорення точки C, прийнявши за полюс точку A:

$$\overline{a}_C = \overline{a}_A + \overline{a}_{CA}^{n} + a_{CA}^{-\tau}, \qquad (2)$$

де $\overline{a}_{CA}^{n}$ - відносне нормальне прискорення точки C у її відносному обертальному русі навколо точки A, напрямлене вздовж CA від точки C до точки A;

$\overline{a}_{CA}^{\tau}$ - відносне тангенціальне прискорення точки C у її відносному обертальному русі навколо точки A, напрямлене перпендикулярно до CA в бік кутового прискорення фігури ε.

Враховуючи, що $CA = BA$, визначимо модулі відносного нормального і тангенціального прискорень:

$$a_{CA}^{n} = \omega^2 \cdot (CA) = \frac{24}{(BA)} \cdot (CA) = 24 \ м/с^2 ;$$

$$a_{CA}^{\tau} = \varepsilon \cdot (CA) = \frac{13{,}86}{(BA)} \cdot (CA) = 13{,}86 \ м/с^2 .$$

Від точки C (рис.2) відкладемо вектори прискорень, які складають праву частину рівняння (2).

Оберемо систему координат xCy, причому вісь Cx напрямимо вздовж сторони CB трикутника.

Спроектуємо рівність (2) на осі обраної системи координат:

$$a_{Cx} = -a_A \cos 60^\circ + a_{CA}^n \cos 60^\circ + a_{CA}^\tau \cos 30^\circ;$$

$$a_{Cy} = -a_A \sin 60^{0\circ} + a_{CA}^n \sin 60^\circ - a_{CA}^\tau \sin 30^\circ.$$

Підставляючи числові дані, дістанемо:

$$a_{Cx} = -16 \cdot 0{,}5 + 24 \cdot 0{,}5 + 13{,}86 \cdot 0{,}866 = 16 \ м/с^2;$$

$$a_{Cy} = -16 \cdot 0{,}866 + 24 \cdot 0{,}866 - 13{,}86 \cdot 0{,}5 = 0.$$

Таким чином, прискорення вершини C трикутника дорівнює:

$$a_C = \sqrt{a_{Cx}^2 + a_{Cy}^2} = 16 \ \ м/с^2.$$

Оскільки проекція прискорення $\overline{a}_C$ на вісь Cy дорівнює нулю і величина проекції на вісь Cx додатна, то вектор прискорення точки C буде напрямлений вздовж сторони CB трикутника від точки C до точки B.

Відповідь: $a_C = 16 \ м/с^2$.

К3.4. Завдання теми К3

Точка A (її кінематичні характеристики руху відомі з задачі К1) є вершиною рівнобічного трикутника ABC (рис.К3.5), який здійснює плоский рух таким чином, що вершина B рухається вздовж осі Ox. Положення точки B на осі Ox визначається за таблицею К4.

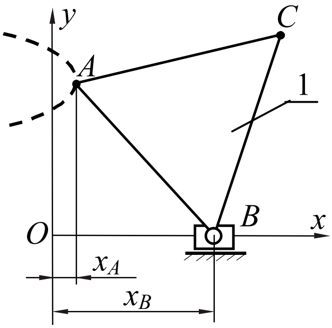


Рис.К3.5

Визначити: кінематичні характеристики фігури ABC та її вершин в момент часу t_1 за допомогою планів швидкостей та прискорень; положення миттєвого центру швидкостей (*МЦШ*); перевірити за допомогою *МЦШ* визначені кутову швидкість фігури та швидкості всіх її вершин.

Зауваження. При побудові рівнобічного трикутника ABC точку B відкладати на осі Ox завжди праворуч від точки A, а порядок обходу точок ABC фігури повинен бути проти руху годинникової стрілки.

Таблиця К4

Перша цифра шифру	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\lvert x_B - x_A \rvert (м)$	4	5	3	4	5	8	9	5	8	6

К3.5. Приклад розв’язування завдання теми К3

З умови завдання К3 відомо, що рівнобічний трикутник ABC здійснює плоский рух. Нехай проекція на вісь Ox сторони AB цього трикутника дорівнює $\lvert x_B - x_A \rvert = 4{,}8$ *м*.

За відомими із розв'язання першого завдання координатами точки A і проекцією сторони AB на вісь Ox будуємо фігуру 1 – рівнобічний трикутник ABC в масштабі $\mu_l = 0,27\, м/мм$ (рис. К3.6,а).

Визначення швидкостей вершин фігури ABC

Величина і напрям швидкості точки A визначені в завданні К1 (рис К1.2).

Якщо обрати точку A за полюс, то для швидкості точки B можна записати векторне рівняння:

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA}, \tag{1}$$

де $\vec{V}_{BA}$ - швидкість точки B в її обертальному русі навколо A, напрямлена перпендикулярно до $\overline{BA}$.

Розв’яжемо це рівняння графічно. З цією метою на кресленні (рис. К3.6,б) з будь-якої точки p (полюса плану швидкостей) проводимо вектор $\left(\overline{pa}\right)$, що паралельний швидкості $\vec{V}_A$ і рівний її величині у певному масштабі.

Оберемо масштабний коефіцієнт плану швидкостей:

$$\mu_V = 0,7 \frac{м}{с \cdot мм},$$

Тоді:

$$(pa) = \frac{V_A}{\mu_V} = \frac{26,6}{0,7} = 38\; мм. \tag{2}$$

Згідно рівнянню (1) через точку “a” вектора $\left(\overline{pa}\right)$ проводимо пряму “mn”, перпендикулярну до, BA вздовж якої буде напрямлений вектор $\vec{V}_{BA}$, довжина якого є невідомою.

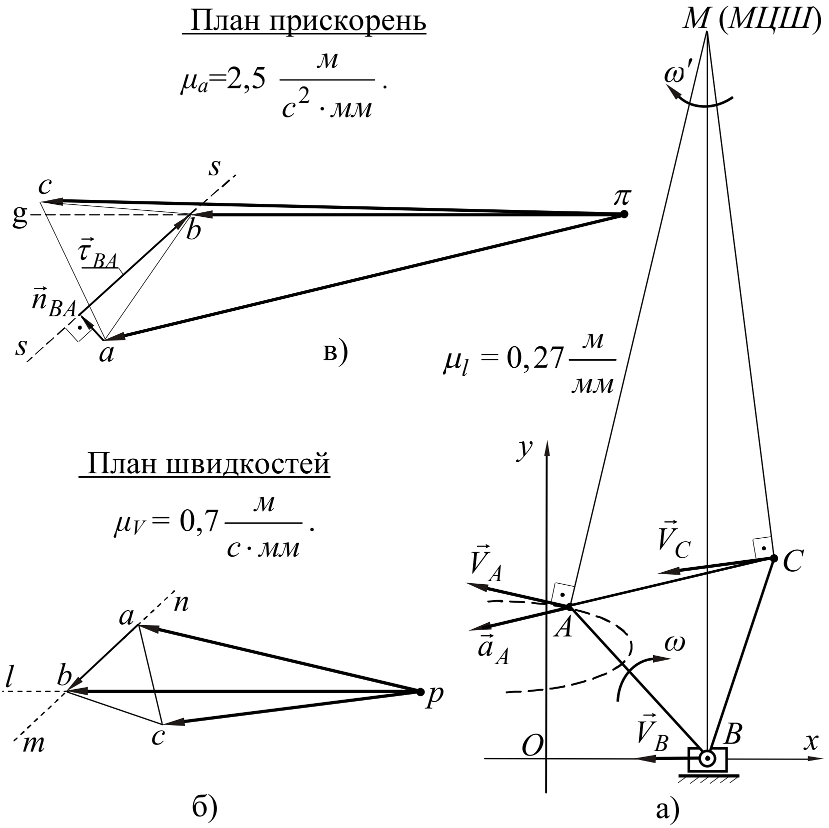


Рис.К3.6

Оскільки напрям швидкості точки B відомий (точка B за умовою задачі рухається горизонтально по осі Ox), то проводимо через полюс плану швидкостей горизонтальну пряму “ pl ”, вздовж якої буде напрямлений вектор швидкості $\vec{V}_B$. Тоді вектор $\left(\overline{pb}\right)$, що одержаний в результаті перетину прямих “ pl ” та “ mn ”, буде зображати в масштабі μ_V швидкість $\vec{V}_B$, а вектор $\left(\overline{ab}\right)$ – швидкість $\vec{V}_{BA}$.

Замірявши довжини відрізків на плані швидкостей дістанемо:

$$(pb) = 46 \text{ мм}; \;\; V_B = (pb)\cdot\mu_V = 46\cdot0,7 = 32,25 \text{ м/с};$$

$$(ab) = 13 \text{ мм}; \;\; V_{BA} = (ab)\cdot\mu_V = 13\cdot0,7 = 9,1 \text{ м/с}.$$

За відомою лінійною швидкістю обертального руху точки B навколо полюса A, можна визначити кутову швидкість фігури ABC за формулою:

$$\omega = \frac{V_{BA}}{l_{AB}} = \frac{V_{BA}}{AB\cdot\mu_l} = \frac{9,1}{27\cdot0,27} = 1,25 \;\; c^{-1}.$$

Для визначення швидкості точки C скористаємося властивістю плану швидкостей – подібністю трикутних фігур ABC на схемі тіла і на плані швидкостей. З цією метою побудуємо на плані швидкостей (рис. К3.6,б) рівнобічний трикутник abc зі сторонами рівними (ab) так, щоб послідовність розташування точок *a, b* і *c* була проти руху годинникової стрілки, як і на схемі тіла (рис.К3.6,а). Відрізок $\left(\overline{pc}\right)$ плану швидкостей і є шуканим вектором швидкості точки C.

Замірявши довжину відрізка на плані швидкостей дістанемо:

$$(pc) = 32 \text{ мм}; \;\; V_C = (pc)\cdot\mu_V = 32\cdot0,7 = 22,4 \text{ м/с};$$

Визначення швидкостей вершин фігури ABC за допомогою миттєвого центру швидкостей (МЦШ)

Знаходимо точку M (рис. К3.6,а) миттєвий центр швидкостей (*МЦШ*) як точку перетину перпендикулярів, проведених з точок A і B до напрямів їх швидкостей $\vec{V}_A$ і $\vec{V}_B$.

З формули (К3.2) визначаємо кутову швидкість обертання фігури ABC навколо *МЦШ*:

$$\omega' = \frac{V_A}{MA \cdot \mu_l} = \frac{26,6}{78 \cdot 0,27} = 1,26 \ c^{-1}.$$

Оскільки всі точки фігури мають в один і той же момент часу однакову кутову швидкість обертання навколо точки *МЦШ*, то:

$$V_B = \omega' \cdot (BM) \cdot \mu_l = 1,26 \cdot 96 \cdot 0,27 = 32 \ \ м/с;$$

$$V_C = \omega' \cdot (CM) \cdot \mu_l = 1,26 \cdot 69 \cdot 0,27 = 23,5 \ \ м/с.$$

Порівнюючи знайдені значення швидкостей з тими, що були визначені за планом швидкостей, переконуємось, що всі графічні побудови виконані нами з похибкою, яка не перебільшує 5%.

Визначення прискорень вершин фігури ABC

Прискорення точок B і C плоскої фігури ABC в момент часу t_1 визначимо за допомогою плану прискорень.

Скориставшись правилом додавання прискорень при плоскому русі тіла (К3.4), якщо за полюс обрати точку A, то для точки B можна записати векторне рівняння:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}^{\,n}_{BA} + \vec{a}^{\,\tau}_{BA}, \qquad (3)$$

де $\vec{a}_A$ – прискорення точки A, напрям і величина якого відомі з виконання завдання К1;

$\vec{a}_{BA}^n$ – нормальне прискорення точки B в її обертальному русі навколо A, напрямлене вздовж сторони AB до центру обертання, тобто від точки B до точки A;

$\vec{a}_{BA}^\tau$ – тангенціальне прискорення точки B в її обертальному русі навколо A, напрямлене перпендикулярно до сторони AB, тобто перпендикулярно до $\vec{a}_{BA}^n$;

$\vec{a}_B$ – прискорення точки B, напрямлене по траєкторії руху точки B, тобто горизонтально.

Величину нормального прискорення $\vec{a}_{BA}^n$ визначимо за формулою (К3.5):

$$a_{BA}^n = \omega^2 \cdot l_{AB} = \omega^2 \cdot (AB) \cdot \mu_l =$$
$$= 1,25^2 \cdot 27 \cdot 0,27 = 11,39 \ \text{м}/\text{с}^2 .$$

Для побудови плану прискорень обираємо масштабний коефіцієнт плану прискорень. Нехай відоме прискорення точки A ($a_A = 177,6 \ \text{м}/\text{с}^2$) на плані буде зображуватися відрізком $(\pi a) = 71 \ \text{мм}$.

Тоді:

$$\mu_a = \frac{a_A}{(\pi a)} = \frac{117,6}{71} = 2,5 \frac{\text{м}}{\text{с}^2 \cdot \text{мм}}.$$

На кресленні (рис. К3.6,в) з довільної точки π, яку приймаємо за полюс плану прискорень, відкладаємо відрізок $\left(\overline{\pi a}\right)$, паралельно до вектора прискорення $\vec{a}_A$.

Згідно рівнянню (3) до вектора $\left(\overline{\pi a}\right)$ додамо вектор $\vec{n}_{BA}$, який в масштабі μ_a буде зображати прискорення $\vec{a}_{BA}^{n}$ і напрямлений паралельно до сторони AB трикутника ABC від точки B до точки A. Довжина вектора $\vec{n}_{BA}$ відповідно дорівнює:

$$n_{BA} = \frac{a_{BA}^{n}}{\mu_a} = \frac{11,39}{2,5} = 4,55 \;\; мм.$$

Через кінець вектора $\vec{n}_{BA}$ перпендикулярно до нього проводимо пряму "ss", вздовж якої буде напрямлене прискорення $\vec{a}_{BA}^{\tau}$.

Оскільки точка B рухається горизонтально, то з полюса проводимо горизонтальну пряму "πg", вздовж якої буде напрямлене прискорення $\vec{a}_B$.

Точка перетину b двох прямих "πg" та "ss" буде кінцем вектора $\left(\overline{\pi b}\right)$, який в масштабі μ_a зображає повне прискорення $\vec{a}_B$ точки B. Величина цього прискорення:

$$a_B = (\pi b)\cdot \mu_a = 57,5\cdot 2,5 = 144 \;\; м/с^2 .$$

Для визначення прискорення точки C скористаємося властивістю подібності фігури ABC, що рухається, і фігури abc на плані прискорень. З цією метою побудуємо на плані прискорень рівнобічний трикутник зі сторонами, рівними відрізку (ab) так, щоб обхід контуру abc здійснювався в тому ж напрямі, що і фігури ABC.

Тоді вектор $(\overline{\pi c})$ в масштабі плану прискорень являє собою повне прискорення точки C:

$$a_C = (\pi c)\cdot \mu_a = 77,5\cdot 2,5 = 194 \;\; м/с^2 .$$

Тема К4. СКЛАДНИЙ РУХ ТОЧКИ

К4.1. Стислі відомості з теорії

Характер руху істотно залежить від того, в якій системі відліку (рухомій або нерухомій) розглядається цей рух.

Рух точки відносно нерухомої системи відліку називається ***абсолютним****.*

Рух точки по відношенню до рухомої системи відліку називається ***відносним.***

Рух, який має рухома система відліку з усіма незмінно зв'язаними з нею точками простору по відношенню до умовно нерухомої системи відліку, називається ***переносним.***

Кожний із цих рухів характеризується своїми швидкостями і прискореннями.

У відповідності з законами додавання швидкостей:

$$\vec{V}_a = \vec{V}_e + \vec{V}_r, \tag{К4.1}$$

та прискорень:

$$\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_C + \vec{a}_r, \tag{К4.2}$$

де $\vec{V}_a$, $\vec{a}_a$ – абсолютні швидкість і прискорення рухомої точки;

$\vec{V}_e$, $\vec{a}_e$ – переносні швидкість і прискорення рухомої точки;

$\vec{V}_r$, $\vec{a}_r$ – відносні швидкість і прискорення рухомої точки;

$\vec{a}_C$ – Коріолісове прискорення.

Величина ***Коріолісового прискорення*** визначається за формулою:

$$a_C = 2\omega_e V_r \sin(\vec{\omega}_e, \vec{V}_r), \qquad \text{(К4.3)}$$

де ω_e – кутова швидкість переносного руху;

$(\vec{\omega}_e, \vec{V}_r)$ – кут між векторами $\vec{\omega}_e$ та $\vec{V}_r$.

Вектор Коріолісового прискорення $\vec{a}_C$ напрямлений перпендикулярно до площини, в якій лежать вектори кутової швидкості $\vec{\omega}_e$ та відносної швидкості $\vec{V}_r$ в той бік, звідки спостерігач бачить найменший поворот вектора $\vec{\omega}_e$ до вектора $\vec{V}_r$ проти руху годинникової стрілки.

Оскільки у випадку плоского руху тіла кут між векторами $\vec{\omega}_e$ та $\vec{V}_r$ дорівнює 90°, то:

$$a_C = 2\omega_e V_r. \qquad \text{(К4.4)}$$

При плоскому русі напрям $\vec{a}_C$ можна визначити за правилом Жуковського М.Є.: *на напрям Коріолісового прискорення вкаже вектор відносної швидкості $\vec{V}_r$, якщо його повернути в площині розташування на 90° в бік переносної кутової швидкості ω_e.*

У випадку, якщо переносний рух є поступальним ($\omega_e = 0$), то $a_C = 0$.

Якщо переносний і відносний рухи являються криволінійними, то переносне і відносне прискорення можна зобразити у вигляді геометричних сум відповідних нормальних і дотичних прискорень:

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r^n + \vec{a}_r^\tau + \vec{a}_e^n + \vec{a}_e^\tau + \vec{a}_C. \qquad \text{(К4.5)}$$

К4.2. Порядок розв’язування задач на складний рух точки

При розв’язуванні задач на складний рух точки рекомендується дотримуватися такої послідовності:

1. Розкласти рух точки на складові, визначити абсолютний, відносний і переносний рухи.
2. Вибрати дві системи координат: абсолютну (нерухому) і відносну (рухому).
3. Подумки зупинити переносний рух, визначити швидкість і прискорення точки у відносному русі.
4. Подумки зупинити відносний рух, визначити кутову швидкість переносного руху, швидкість і прискорення точки в переносному русі.
5. За відомими кутовою швидкістю переносного руху і швидкістю точки у відносному русі знайти величину і напрям коріолісового прискорення точки.
6. Користуючись методом проекцій, визначити проекції абсолютного прискорення і абсолютної швидкості на осі нерухомої системи координат.
7. За визначеними проекціями, знайти модулі та напрями абсолютної швидкості і абсолютного прискорення.

К4.3. Контрольні запитання

1. Що називається відносним і абсолютним рухом точки?
2. Що називається переносним рухом?
3. Які швидкості точки називаються відносною і абсолютною?
4. Як визначити абсолютну швидкість точки при складному русі?

5. Як визначити абсолютне прискорення точки при складному русі?
6. Яка причина виникнення коріолісового прискорення?
7. Як знайти модуль і напрям коріолісового прискорення?
8. В яких випадках коріолісове прискорення точки дорівнює нулю?

К4.4. Приклади розв'язування задач

Задача 1

Диск обертається навколо осі, яка перпендикулярна до його площини, проти ходу годинникової стрілки з кутовою швидкістю $\omega = 20 \ p/c$. По хорді диска від точки K до L рухається точка M.

Визначити модуль і напрям коріолісового прискорення точки M в зображеному на рис. 1 положенні, якщо відносна швидкість $V_r = 5 \ м/с$.

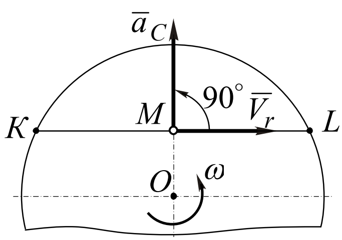


Рис. 1

Розв'язування. Точка M рухається в площині диска яка перпендикулярна до осі обертання, тобто кут між векторами $\overline{\omega}$ і $\overline{V}_r$ складає 90°.

Враховуючи, що $\sin(\overline{\omega} \hat{,} \overline{V}_r) = 1$, модуль прискорення Коріоліса дорівнює:

$$a_C = 2\omega \cdot V_r = 2 \cdot 20 \cdot 5 = 200 \ м/с^2 .$$

Оскільки вектор відносної швидкості лежить в площині перпендикулярній до осі обертання, то для визначення напряму прискорення Коріоліса згідно правилу Жуковського треба повернути вектор $\overline{V}_r$ за напрямом кутової швидкості ω переносного руху на кут 90° (рис.1).

Задача 2

Визначити модуль і напрям коріолісового прискорення точки M, яка рухається по твірній BN кругового конуса від вершини B до точки N. Конус обертається навколо своєї осі з кутовою швидкістю $\omega = 10\ p/c$ в напрямі. показаному на рис.1, кут нахилу твірної до осі конуса $\angle ABN = \alpha = 30^\circ$, відносна швидкість точки $V_r = 5\ м/с$.

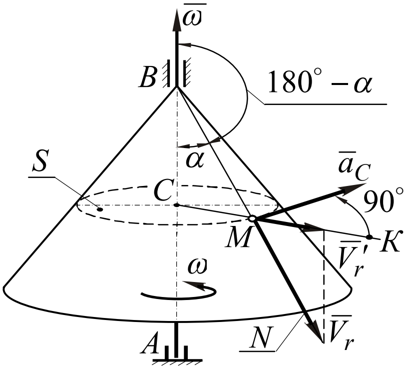


Рис. 1

Розв'язування. Відкладемо вектор кутової швидкості $\overline{\omega}$ переносного обертального руху по осі обертання в бік, з якого обертання видно проти ходу годинникової стрілки. Відносну швидкість $\overline{V}_r$ напрямимо від точки M до точки N. Тоді кут між векторами $\overline{\omega}$ і $\overline{V}_r$ (рис.1) складе:

$$(\overline{\omega} \hat{,} \overline{V}_r) = 180^\circ - \alpha = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ .$$

Модуль прискорення Коріоліса точки M дорівнює:

$$a_C = 2\omega \cdot V_r \cdot \sin(\overline{\omega} \hat{,} \overline{V}_r) = 2\omega \cdot V_r \cdot \sin(180 - \alpha) =$$

$$= 2\omega \cdot V_r \cdot \sin\alpha = 2 \cdot 10 \cdot 5 \cdot \sin 30^\circ = 50 \ м/с^2 .$$

Щоб знайти напрям прискорення Коріоліса (рис.1), спроектуємо вектор відносної швидкості $\bar{V}_r$ на площину S, яка перпендикулярна до осі обертання конуса.

Проекція відносної швидкості $\bar{V}_r'$ напрямлена по прямій MK, яка є продовженням радіуса CM.

Повернувши проекцію $\bar{V}_r'$ в напрямі обертання конуса на кут 90°, встановлюємо, що вектор $\bar{a}_C$ коріолісового прискорення напрямлений за дотичною до кола радіусом CM в бік обертання конуса.

Задача 3

По хорді AB диска, що обертається, від точки A до точки B (рис.1) рухається точка M, згідно рівнянню $S = 4t^2$, кут повороту диска змінюється за законом $\varphi = 8t$.

Визначити абсолютні швидкості та прискорення точки M в момент часу, коли вона знаходиться на відстані $h = 0,2 \ м$ від осі обертання диска (рис.1).

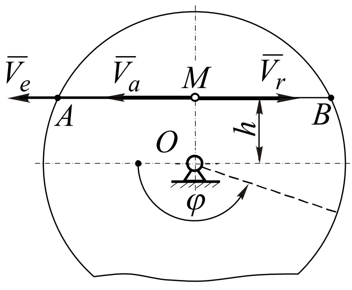


Рис. 1

Розв'язування. У даній задачі переносним рухом буде обертання диска за законом $\varphi = 8t$, а відносним – рух точки по хорді AB за законом $S = 4t^2$.

Запишемо рівняння для визначення абсолютної швидкості точки M:

$$\bar{V}_a = \bar{V}_r + \bar{V}_e .$$

Для визначення відносної швидкості зупинимо переносне обертання диска і будемо розглядати рух точки по відношенню до нерухомого диска.

Оскільки закон відносного руху $S = 4t^2$, то величина відносної швидкості визначається як перша похідна від шляху за часом:

$$V_r = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}\left(4t^2\right) = 8t.$$

Вектор $\overline{V_r}$ відносної швидкості напрямлений по хорді AB (рис. 1) від точки A до точки B.

Переносною швидкістю $\overline{V_e}$ точки M буде швидкість тієї точки диска, з якою в даний момент збігається точка M.

З умови задачі витікає, що точка M в даний момент часу знаходиться посередині хорди AB на відстані h від осі обертання диска.

Переносна швидкість обертального руху визначається за формулою:

$$V_e = \omega \cdot h,$$

де ω – кутова швидкість переносного обертального руху.

Кутову швидкість переносного обертального руху знайдемо як першу похідну від кута повороту φ за часом:

$$\omega_e = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d}{dt}\left(8t\right) = 8\ р/с.$$

Таким чином, переносна швидкість обертального руху дорівнює:

$$V_e = 8 \cdot 0{,}2 = 1{,}6\ м/с.$$

Вектор переносної швидкості напрямлений перпендикулярно радіусу OM в бік обертання диска.

Оскільки вектори $\overline{V}_r$ і $\overline{V}_e$ напрямлені вздовж однієї прямої в різні боки (рис. 1), то для визначення абсолютної швидкості від операції векторного додавання швидкостей можна перейти до їх алгебраїчного додавання.

Тоді:

$$V_a = V_e - V_r = 1{,}6 - 8t\,.$$

В залежності від абсолютних значень швидкостей $\overline{V}_e$ і $\overline{V}_r$, вектор $\overline{V}_a$ буде напрямлений або в бік $\overline{V}_e$, або в бік $\overline{V}_r$.

Визначимо абсолютне прискорення точки M. Оскільки переносний рух є обертальним, то абсолютне прискорення точки дорівнює:

$$\overline{a}_a = \overline{a}_r + \overline{a}_e + \overline{a}_C\,.$$

Модуль відносного прискорення визначимо як похідну від відносної швидкості за часом:

$$a_r = \frac{dV_r}{dt} = \frac{d}{dt}\left(8t\right) = 8\ м/с^2\,.$$

Напрямлений вектор $\overline{a}_r$ вздовж хорди AB від точки A до точки B (рис.2).

Переносне прискорення $\overline{a}_e$ точки диска, яка збігається з точкою M, враховуючи, що вона рухається по колу радіусом h, складається із переносного тангенціального (дотичного) прискорення $\overline{a}_e^{\tau}$ і переносного нормального прискорення $\overline{a}_e^{n}$:

$$\overline{a}_e = \overline{a}_e^{\tau} + \overline{a}_e^{n}\,.$$

Обчислимо модулі нормального $\overline{a}_e^n$ і тангенціального $\overline{a}_e^\tau$ прискорень:

$$a_e^n = \omega^2 \cdot h = 8^2 \cdot 0,2 = 12,8\ м/с^2;$$

$$a_e^\tau = \varepsilon \cdot h = 0,$$

де $\varepsilon = \dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{d}{dt}(8) = 0$ – кутове прискорення переносного обертального руху.

Переносне нормальне прискорення напрямлене вздовж радіуса до центра обертання O (рис.2).

Оскільки рух точки M відбувається в площині, перпендикулярній до осі обертання, то прискорення Коріоліса визначається з формули:

$$a_C = 2\omega_e \cdot V_r = 2 \cdot 8 \cdot 8t = 128t.$$

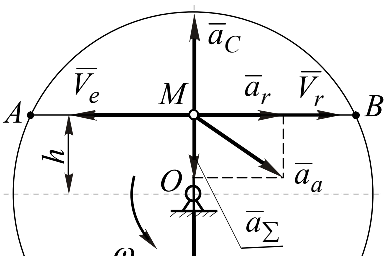


Рис. 2

Для визначення напряму прискорення Коріоліса (рис.2) необхідно вектор відносної швидкості $\overline{V}_r$ повернути на 90° в бік кутової швидкості ω_e переносного обертального руху, тобто проти ходу годинникової стрілки.

Для визначення величини і напряму абсолютного прискорення $\overline{a}_a$ спочатку додамо вектори $\overline{a}_e^n$ і $\overline{a}_C$, які напрямлені вздовж однієї прямої в протилежні боки. Знайдена векторна сума $\overline{a}_\Sigma = \overline{a}_e^n + \overline{a}_C$ напрямлена перпендикулярно до вектора $\overline{a}_r$ і за модулем дорівнює $a_{\sum} = 12,8 - 128t$.

Таким чином, абсолютне прискорення точки M дорівнює сумі векторів:

$$\overline{a}_a = \overline{a}_{\sum} + \overline{a}_r .$$

Оскільки вектор $\overline{a}_r$ перпендикулярний до вектора $\overline{a}_{\sum}$, то вектор $\overline{a}_a$ буде зображатися діагоналлю прямокутника з сторонами $\overline{a}_r$ і $\overline{a}_{\sum}$ (рис.2).

Модуль абсолютного прискорення буде дорівнювати:

$$a_a = \sqrt{a_r^2 + a_{\sum}^2} = \sqrt{64 + (12,8 - 128t)^2} .$$

Відповідь: $V_a = 1,6 - 8t$; $a_a = \sqrt{64 + (12,8 - 128t)^2}$.

К4.5. Завдання теми К4 (складний рух точки)

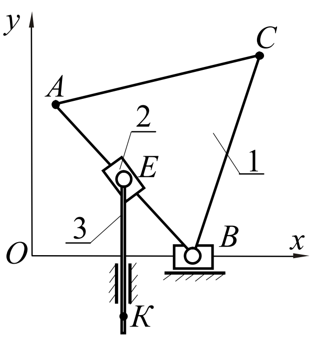


Рис. К4.1

Вздовж сторони AB (див. задачу К3 та рис. К4.1) рухається повзун 2, шарнірно з’єднаний з стержнем EK, який рухається у нерухомих напрямних паралельно осі Oy. Точка E поділяє сторону AB в пропорції, яку задано в таблиці К5 коефіцієнтом пропорційності $f = AE/AB$.

Визначити шляхом побудови планів швидкостей та прискорень за відомими із задачі К3 кінематичними характеристиками руху фігури ABC абсолютні швидкості і прискорення точок E та K.

Таблиця К5

Друга цифра шифру	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f = AE/AB$	0,5	0,3	0,25	0,7	0,6	0,75	0,5	0,25	0,45	0,8

К4.6. Приклад розв'язування завдання теми К4

Зобразимо на стороні AB тіла 1 (рис.К4.2, а) повзун 2, який з'єднаний шарніром E зі стержнем 3. Повзун 2 може рухатися поступально по стороні AB, а стержень 3 – поступально у вертикальних напрямних. Положення шарніра E на стороні AB визначаємо за заданим коефіцієнтом пропорційності f:

$$\left(AE\right) = f \cdot \left(AB\right) = 0{,}5 \cdot 27 = 13{,}5\ мм.$$

1. Аналіз руху стержня ЕК

Розглянемо точку E_2, яка належить одночасно повзуну 2 і стержню 3. Ця точка здійснює складний рух, рухаючись як по напрямній AB, так і разом з фігурою ABC.

Очевидно, швидкість і прискорення точки E_2 в її поступальному русі разом із стержнем EK відносно нерухомої опори (яке бачить нерухомий спостерігач) слід вважати абсолютним. Позначимо їх відповідно $\vec{V}_a$ і $\vec{a}_a$.

Тоді рух точки E_2 повзуна 2 вздовж напрямної AB буде відносним. Швидкість $\vec{V}_r$ і прискорення $\vec{a}_r$ точки E_2 в відносному русі напрямлені вздовж сторони AB, оскільки повзун рухається відносно стержня поступально.

Одночасно повзун 2 рухається разом з фігурою ABC. Цей рух для точки E_2 є переносним. Переносні швидкість і прискорення $\vec{V}_e, \vec{a}_e$ слід визначити як швидкість і прискорення тієї точки E_1 фігури ABC, з якою в даний момент часу збігається точка E_2 повзуна 2.

2. Визначення переносної, абсолютної і відносної швидкості точки E₂

Прийнявши точку A тіла 1, що здійснює плоский рух, за полюс (рис. К4.2, б), визначимо швидкість точки E_1 сторони AB використовуючи властивість подібності фігур ABC тіла 1 і abc плану швидкостей, у відповідності з якою:

$$\frac{AE}{AB} = \frac{(ae_1)}{(ab)}. \tag{1}$$

З цієї пропорції визначимо відрізок (ae_1):

$$(ae_1) = \frac{AE}{AB}(ab) = f \cdot (ab) = 0{,}5 \cdot 13 = 6{,}5 \ \text{мм}.$$

Цей відрізок відкладаємо на стороні ab фігури abc плану швидкостей (рис.К4.2, б) в напрямі від точки "a" до точки "b". Величині переносної швидкості повзуна 2 на плані буде відповідати відрізок (pe_1):

$$V_e = V_{E_1} = (pe_1) \cdot \mu_V = 42 \cdot 0{,}7 = 29{,}5 \ м/с$$

Запишемо рівняння для абсолютної швидкості точки E_2 повзуна 2:

$$\vec{V}_a = \vec{V}_e + \vec{V}_r, \tag{2}$$

В цьому рівнянні нам відомі:

- величина і напрям переносної швидкості $\vec{V}_e = \vec{V}_{E_1}$ (з плану швидкостей);

- напрям відносної швидкості $\vec{V}_r$ (вздовж AB), оскільки повзун 2 рухається відносно стержня AB поступально;
- напрям абсолютної швидкості $\vec{V}_a = \vec{V}_{E_2} = \vec{V}_K$ (вздовж EK), оскільки повзун 3 рухається поступально в вертикальних напрямних.

Для розв'язання рівняння (2) скористаємося планом швидкостей (рис.К4.2,б). Оскільки згідно рівнянню до вектора $\vec{V}_e$ треба додати вектор $\vec{V}_r$, то з точки "e_1" проведемо пряму $e_1 к$, паралельну до AB, а з полюса p проведемо напрям абсолютної швидкості $\vec{V}_a$ – вертикальну пряму. Точка перетину цих прямих "$к$" і буде розв'язанням рівняння (2), а відрізок $(pк)$ буде зображати в масштабі μ_V абсолютну швидкість точок E_2 і K:

$$V_a = V_{E_2} = V_K = (pк) \cdot \mu_V = 45{,}5 \cdot 0{,}7 = 31{,}9 \;\; м/с.$$

3. Визначення переносного і абсолютного прискорення точки E_2

Визначимо переносне прискорення точки E_2 повзуна 2.

Із умови подібності фігур ABC тіла 1 і abc плану прискорень (рис.К4.2,в) випливає, що точка e_1 (кінець вектора прискорення $\vec{a}_{E1}$) на плані прискорень буде лежати на відрізку ab. При цьому відстань (ae_1) може бути знайдена із пропорції (1). Оскільки на плані прискорень $(ab) = 20 \;\; мм$, то:

$$(ae_1) = \frac{AE}{AB}(ab) = f \cdot (ab) = 0{,}5 \cdot 20 = 10 \;\; мм.$$

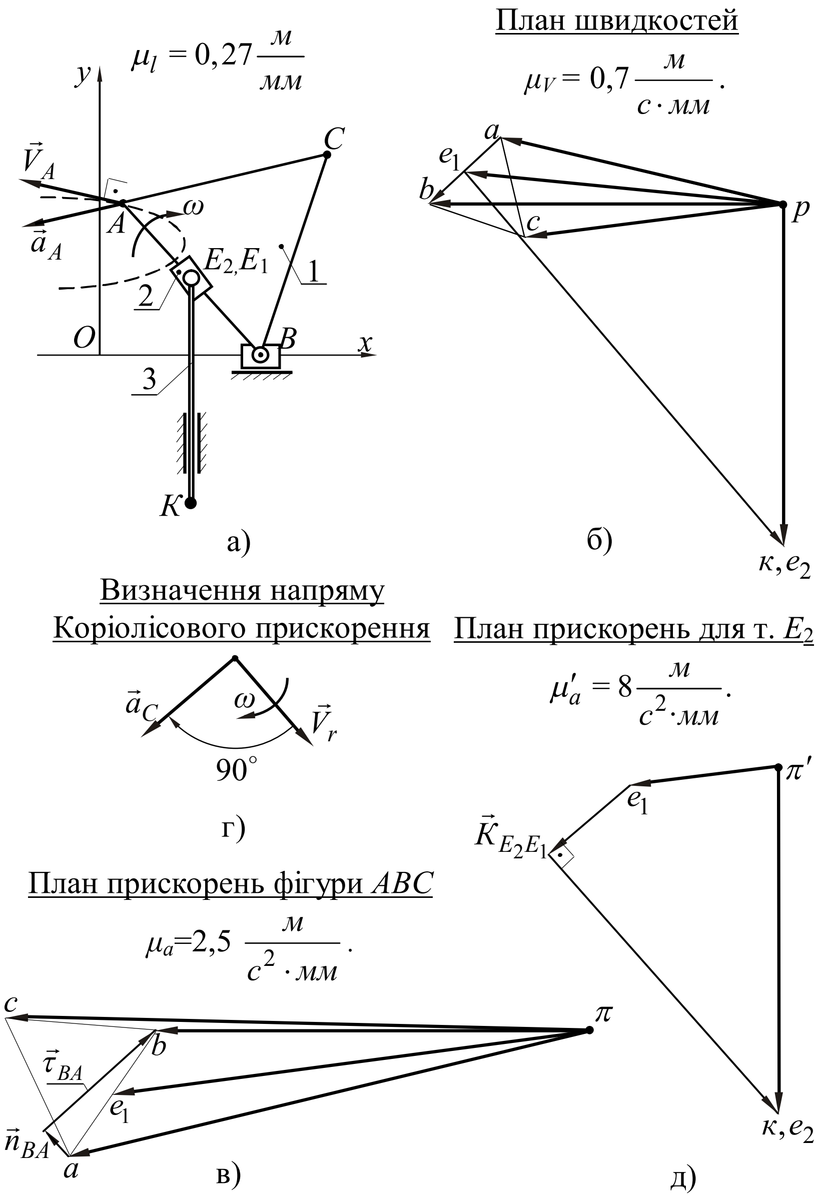

План швидкостей
$\mu_V = 0,7 \frac{м}{с \cdot мм}$.
$\mu_l = 0,27 \frac{м}{мм}$
а)
б)
Визначення напряму
Коріолісового прискорення
90°
г)
План прискорень для т. E_2
$\mu'_a = 8 \frac{м}{с^2 \cdot мм}$.
План прискорень фігури ABC
$\mu_a = 2,5 \frac{м}{с^2 \cdot мм}$.
в)
д)

Рис.К4.2

Тоді відрізок $(\pi e_1) = 64$ *мм* буде зображати переносне прискорення точки E_1 в масштабі плану прискорень μ_a:

$$a_e = a_{E_1} = (\pi e_1) \cdot \mu_a = 63{,}5 \cdot 2{,}5 = 159 \; м/с^2.$$

Запишемо векторне рівняння для абсолютного прискорення для точки E_2 повзуна 2:

$$\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_C + \vec{a}_r. \tag{3}$$

Визначимо спочатку величину і напрям Коріолісового прискорення.

Оскільки рух відбувається в площині Oxy, тобто кут між векторами відносної швидкості $\vec{V}_r$ і кутової переносної швидкості $\vec{\omega}_e$ дорівнює 90°, то для визначення величини a_C скористаємося формулою (4.4):

$$a_c = 2\omega_e V_r .$$

Кутова переносна швидкість ω_e дорівнює кутовій швидкості тіла 1, тобто $\omega_e = \omega = 1{,}25 \; с^{-1}$. Величину відносної швидкості $\vec{V}_r$ визначимо з плану швидкостей. (рис. К4.2, б). Вимірюючи відрізок $(e_1 к) = 64 \; мм$, який на плані швидкостей в масштабі μ_V зображає $\vec{V}_r$, знаходимо:

$$V_r = (e_1 к) \cdot \mu_V = 64 \cdot 0{,}7 = 44{,}8 \; м/с.$$

Тоді:

$$a_C = 2 \cdot 1{,}25 \cdot 44{,}8 = 112 \; м/с^2.$$

Напрям Коріолісового прискорення визначимо за правилом Жуковського М.Є., для цього вектор відносної швидкості $\vec{V}_r$, що на плані швидкостей (рис. К4.2, б) зображається вектором $\left(\overline{e_1 к}\right)$, повернемо в бік кутової переносної швидкості ω, напрям якої показаний на рис. К4.2,а, на 90° (рис. К4.2, г).

Таким чином, в рівнянні (3) нам відомі:

- величина і напрям переносного прискорення $\vec{a}_e = \vec{a}_{E_1}$;
- величина і напрям Коріолісового прискорення $\vec{a}_C$;
- напрям відносного прискорення $\vec{a}_r$ (вздовж AB), оскільки повзун 2 рухається відносно стержня AB поступально;
- напрям абсолютного прискорення $\vec{a}_a$ (вздовж EK), оскільки повзун 3 рухається поступально в вертикальних напрямних.

Все це дозволяє нам побудувати многокутник прискорень в відповідності з рівнянням (3) на плані прискорень, або окремим кресленням. Враховуючи, що величини відрізків, які будуть зображати деякі прискорення, занадто великі і виходять за межі креслення, для знаходження абсолютного прискорення точки E_2 побудуємо окремий план прискорень з масштабним коефіцієнтом:

$$\mu_a' = 8\frac{м}{c^2 \cdot мм}.$$

Спочатку з довільної точки π' (рис. К4.2, д) за напрямом $\vec{a}_{E_1}$ (рис. К4.2, в) відкладемо вектор $\left(\overline{\pi' e_1}\right)$, який в масштабі μ_a' буде зображати $\vec{a}_e$:

$$(\pi' e_1) = \frac{a_{E_1}}{\mu_a'} = \frac{159}{8} = 19{,}9 \ \text{мм}.$$

До цього вектора в напрямі Коріолісового прискорення (рис. К4.2, г) додамо вектор $\vec{K}_{E_2 E_1}$, який в масштабі μ_a' буде зображати $\vec{a}_C$:

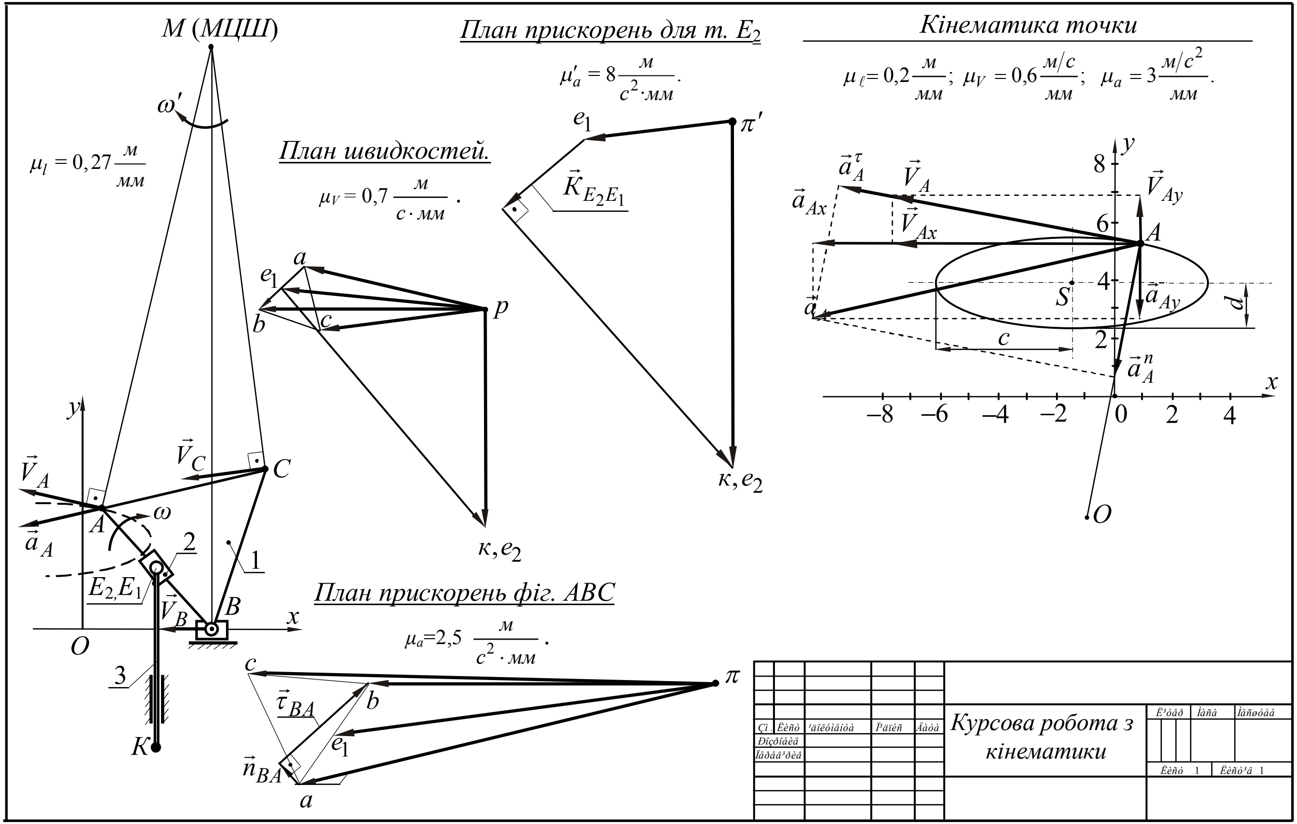
$$(K_{E_2 E_1}) = \frac{a_C}{\mu_a'} = \frac{112}{8} = 14 \ \text{мм}.$$

Через кінець вектора $\vec{K}_{E_2 E_1}$ паралельно до AB проведемо напрям відносного прискорення $\vec{a}_r$ (перпендикулярно до $\vec{K}_{E_2 E_1}$ або паралельно AB), а через полюс π' напрям абсолютного прискорення $\vec{a}_a$ (паралельно EK). Точка перетину "$к$" цих двох напрямів і буде рішенням рівняння (3), а вектор $\left(\overline{\pi' к}\right)$ в масштабі μ_a' буде зображати абсолютне прискорення точок K і E_2.

Замірявши відрізок $\left(\pi' к\right)$ дістанемо:

$$a_a = a_{E_2} = a_K = (\pi' к) \cdot \mu_a = 46 \cdot 8 = 368 \ м/с^2.$$

Примітка. Оскільки всі побудови розрахунково графічних робіт з кінематики К1, К3 і К4 рекомендується виконувати на папері форматом А3, то після виконання даної курсової роботи її графічна частина буде мати вигляд подібний зображеному на с. 188.


M (МЦШ)
$\mu_l = 0,27\ \frac{м}{мм}$
План швидкостей.
$\mu_V = 0,7\ \frac{м}{с \cdot мм}$.
План прискорень для т. E_2
$\mu'_a = 8\ \frac{м}{с^2 \cdot мм}$.
Кінематика точки
$\mu_\ell = 0,2\ \frac{м}{мм}$; $\mu_V = 0,6\ \frac{м/с}{мм}$; $\mu_a = 3\ \frac{м/с^2}{мм}$.
План прискорень фіг. ABC
$\mu_a = 2,5\ \frac{м}{с^2 \cdot мм}$.
Курсова робота з кінематики

РОЗДІЛ ТРЕТІЙ

ДИНАМІКА

В даній частині крім мінімуму теоретичних знань, якими повинен оволодіти студент з динаміки, наводяться приклади розв'язування різних задач, вихідні дані до індивідуального розрахунково-графічного завдання та зразок його виконання.

Задачі розрахунково-графічного завдання охоплюють матеріали наступних тем динаміки:

- пряма задача динаміки матеріальної точки (тема Д1);
- обернена задача динаміки матеріальної точки (тема Д2);
- коливання та динаміка відносного руху матеріальної точки (тема Д3);
- теореми про рух центру мас та про зміну кількості руху механічної системи (тема Д4);
- теорема про зміну кінетичної енергії механічної системи(тема Д5);
- принцип Даламбера (тема Д6).

Варіант розрахунково-графічного завдання визначається двома цифрами, які являють собою дві останні цифри номера залікової книжки або задаються викладачем. Перша цифра визначає номер рисунка, а друга – номер варіанта в таблиці.

ЗАКОНИ ДИНАМІКИ

Динаміка *– розділ теоретичної механіки, в якому вивчається механічний рух матеріальних тіл (точок) з урахуванням причин, які викликають або змінюють цей рух, тобто з урахуванням мас тіл і сил, що на них діють.*

В основі динаміки лежать закони Ньютона, які витікають з узагальнення великої кількості дослідних фактів. Наведемо основні закони динаміки в сучасному викладанні.

1. Перший закон або закон інерції

Матеріальна точка, на яку не діє сила $\vec{F}$ (*або діє система зрівноважених сил*), *зберігає стан спокою або рівномірного прямолінійного руху відносно інерціальної системи відліку*:

$$\vec{V} = const, \quad \vec{a} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{F} = 0, \tag{1}$$

де $\vec{V}$ і $\vec{a}$ – відповідно, швидкість та прискорення матеріальної точки.

Такий рух називається ***рухом за інерцією*** або *рухом без прискорення.* Із закону витікає, що для зміни швидкості точки, тобто надання їй прискорення, необхідно подіяти на неї силою, відмінною від нуля. Справедливо і обернене, якщо матеріальна точка рухається нерівномірно або непрямолінійно, то вона рухається з прискоренням, тобто на неї діє сила.

Інерціальною системою *відліку називається така система, в якій виконуються перший та другий основні закони механіки.*

Неінерціальною системою відліку *називається така система, яка рухається з прискоренням відносно інерціальної. В неінерціальній системі відліку перший та другий закони динаміки не виконуються.*

2. Другий закон або основний закон динаміки

Прискорення, яке набуває матеріальна точка під дією сили, має напрям сили, прямо пропорційне силі і обернено пропорційне масі точки.

Або еквівалентне визначення: сила, *яка діє на матеріальну точку, дорівнює добутку маси точки на її прискорення та має напрям прискорення*

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} \quad \text{або} \quad \vec{F} = m\vec{a}. \tag{2}$$

Маса "***m***" є додатна скалярна величина, яка характеризує ступінь опору матеріальної точки зміні її швидкості, тобто є мірою інертності точки. В класичній механіці вважається, що маса матеріальної точки є величина стала.

За одиницю маси в СІ прийнято кілограм:

$$[m] = 1\,кг.$$

3. Третій закон або закон рівності дії і протидії

Сили, з якими дві матеріальні точки діють одна на одну, рівні за величиною і напрямлені в протилежні сторони вздовж прямої, яка з'єднує ці точки, тобто

$$\overline{F}_{1,2} = -\overline{F}_{2,1} \tag{3}$$

де $\vec{F}_{1,2}$ – сила, з якою перша матеріальна точка діє на другу;

$\vec{F}_{2,1}$ – сила, з якою друга матеріальна точка діє на першу.

Якщо одну із цих сил назвати "дією", то друга буде "протидією". Якщо одну силу назвати "активною силою", то друга буде " реакцією". Таким чином, при взаємодії двох матеріальних точок сили завжди з'являються парами та являються силами однієї природи. Це означає, що прискорення, які набувають матеріальні точки під дією сил взаємодії, обернено пропорційні їх масам.

Слід пам'ятати, що ці сили прикладені до різних матеріальних точок і тому не зрівноважують одна одну.

4. Четвертий закон або закон незалежності дії сил

Прискорення, яке набуває матеріальна точка при одночасній дії на неї декількох сил, дорівнює векторній сумі прискорень, які набуває матеріальна точка під дією кожної із сил в відсутності інших сил, тобто

$$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \ldots + \vec{a}_n. \qquad (4)$$

Закон стверджує, що сили, які одночасно діють на матеріальну точку, не впливають одна на одну і тому підлягають *принципу суперпозиції* (*накладання*) *сил.* Це значить, що одночасна дія на матеріальну точку системи сил $\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n\}$ еквівалентна дії однієї сили $\vec{R}$, яка називається ***рівнодіючою*** і *яка дорівнює векторній сумі сил, що діють*:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k\ . \qquad (5)$$

Сили, які додаються, називаються *складовими або компонентами рівнодіючої.* Додавання сил виконується за ***правилом паралелограма*** або його модифікаціями (*правилами трикутника*, *або силового многокутника*).

Таким чином, якщо на матеріальну точку одночасно діють декілька сил, то в рівняннях (1) і (2) під силою $\vec{F}$ слід розуміти рівнодіючу $\vec{R}$ всіх прикладених до точки сил.

Диференціальне рівняння руху матеріальної точки (2*) у векторній формі має вигляд*:

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}\ , \qquad (6)$$

або в скороченій формі запису

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F},$$

де $\vec{r}$ – радіус-вектор точки, який визначає положення точки на траєкторії (рис. 1).

Рівняння (6) являє собою математичний вираз основного закону динаміки (2) в векторній формі.

В залежності від характеру та постановки конкретної задачі це рівняння часто використовують в скалярній формі, тобто в проекціях на осі будь-якої системи координат.

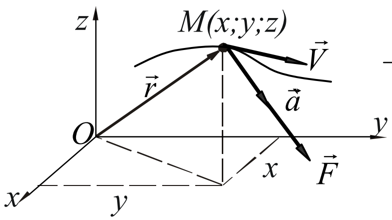


Рис. 1

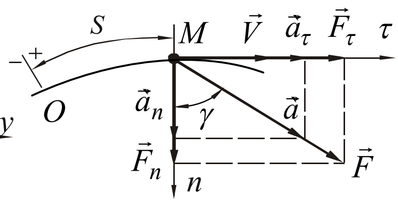


Рис. 2

Диференціальні рівняння руху матеріальної точки в проекціях на осі (*Oxyz*) *декартової системи координат мають вигляд*:

$$ma_x = \sum F_{kx};\ ma_y = \sum F_{ky};\ ma_z = \sum F_{kz}, \qquad (7)$$

або

$$m\ddot{x} = \sum F_{kx};\quad m\ddot{y} = \sum F_{ky};\quad m\ddot{z} = \sum F_{kz},$$

де $a_x = \ddot{x},\ a_y = \ddot{y},\ a_z = \ddot{z}$ – проекції вектора прискорення $\vec{a}$ на відповідні координатні осі;

$F_{kx},\ F_{ky},\ F_{kz}$ – проекції сили $\vec{F}_k$ на ті ж осі;

$x,\ y,\ z$ – поточні координати точки.

Диференціальні рівняння руху матеріальної точки в проекціях на осі ($M\tau nb$) *природної системи координат мають вигляд*:

$$ma_\tau = \sum F_{k\tau};\ ma_n = \sum F_{kn};\ 0 = \sum F_{kb},$$

або

$$m\ddot{S} = \sum F_{k\tau}; \quad \frac{mV^2}{\rho} = \sum F_{kn}, \tag{8}$$

де $a_\tau = \ddot{S}$ – проекція вектора прискорення на напрям дотичної до траєкторії ;

S – дугова координата точки;

$a_n = V^2/\rho$ – проекція вектора прискорення на напрям головної нормалі до траєкторії;

V – модуль швидкості;

ρ – радіус кривини траєкторії в даній точці;

$F_{k\tau}, F_{kn}, F_{kb}$ – проекції сили $\overline{F}_k$ відповідно на дотичну ($M\tau$), головну нормаль (Mn) та бінормаль (Mb) до траєкторії.

Як витікає із (8), проекція на бінормаль рівнодіючої сил, прикладених до матеріальної точки, дорівнює нулю. Це означає, що траєкторія точки розташована так, що рівнодіюча сила завжди лежить в площині $M\tau n$, що перпендикулярна до Mb.

За допомогою диференціальних рівнянь руху матеріальної точки (6 ÷ 8) можна розв’язати **дві основні задачі динаміки: пряму та обернену.**

Першою, *або* ***прямою задачею динаміки*** *називається задача, в якій по заданому закону руху та масі матеріальної точки визначається рівнодіюча сил, які прикладені до точки.*

Другою, *або* **оберненою,** *або* **основною задачею динаміки** *називається задача, в якій по заданим силам, що діють на матеріальну точку, масі точки та початковим умовам визначається закон руху матеріальної точки.*

Тема Д1. ПРЯМА ЗАДАЧА ДИНАМІКИ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ

Д1.1. Стислі відомості з теорії

Завдання Д1 – на розв'язування першої (прямої) задачі динаміки матеріальної точки.

Якщо слід визначити рівнодіючу $\vec{R}$ прикладених до точки сил, то задача вирішується дворазовим диференціюванням за часом заданих рівнянь руху точки $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$ і $z = f_3(t)$ в декартових координатах, або $s = f(t)$ – в природних координатах з наступним використанням формул (7) або (8) для визначення проекцій R_x, R_y і R_z, або R_τ і R_n рівнодіючої $\vec{R}$ на відповідні осі координат. Тоді величина рівнодіючої обчислюється за формулами:

$$R = \sqrt{R_x{}^2 + R_y{}^2 + R_z{}^2}, \text{ або } R = \sqrt{R_\tau{}^2 + R_n{}^2}. \quad \text{(Д1.1)}$$

Напрям вектора $\vec{R}$ визначається:

- або за значенням косинусів напрямних кутів між $\vec{R}$ та одиничними векторами $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ декартових осей координат *Ox*, *Oy* і *Oz*, тобто:

$$\cos(\vec{R},\vec{i}) = R_x / R \Rightarrow \angle(\vec{R},\vec{i}) = \arccos\ R_x / R,$$
$$\cos(\vec{R},\vec{j}) = R_y / R \Rightarrow \angle(\vec{R},\vec{j}) = \arccos R_y / R, \quad \text{(Д1.2)}$$
$$\cos(\vec{R},\vec{k}) = R_z / R \Rightarrow \angle(\vec{R},\vec{k}) = \arccos R_z / R,$$

- або за значенням тангенса кута між вектором $\vec{R}$ та одиничним вектором $\vec{n}$ головної нормалі природної системи координат, тобто:

$$\mathrm{tg}(\vec{R},\vec{n}) = |R_\tau| / R_n \Rightarrow \angle(\vec{R},\vec{n}) = \mathrm{arctg}(|R_\tau| / R_n). \quad (1.3)$$

Д1.2. Порядок розв'язування прямої задачі динаміки матеріальної точки

Якщо в задачі слід визначити будь-яку із складових рівнодіючої або іншу величину, то рекомендується наступний порядок розв'язування:

1. Зобразити на рисунку матеріальну точку в довільному положенні.
2. Показати активні сили і реакції в'язей, що на неї діють.
3. Вибрати систему відліку.
4. Записати векторне рівняння руху точки у формі другого закону динаміки.
5. Спроектувати векторне рівняння руху точки на вибрані осі координат.
6. Із одержаних рівнянь визначити необхідні величини.

Д1.3. Контрольні запитання

1. Сформулюйте основні закони динаміки.
2. Яке рівняння називається основним рівнянням динаміки?
3. Що є мірою інертності твердих тіл при поступальному русі?
4. Чи залежить вага тіла від його місця знаходження на поверхні Землі?
5. Яку систему відліку називають інерціальною?

Д1.4. Приклади розв'язування задач

Задача 1

Куля вагою $G = 100\,H$ падає вертикально униз під дією сили тяжіння і зазнає опору середовища (рис.1). Закон руху кулі відповідає рівнянню $x = 327t - 109\left(1 - e^{-3t}\right)$, причому x виражається у сантиметрах, t – у секундах.

Визначити силу опору середовища R у вигляді функції швидкості, тобто $R = f\left(V\right)$.

Розв'язування. Зобразимо кулю у довільному положенні на траєкторії і покажемо сили, які на неї діють (рис.1.3): $\overline{G}$ – сила тяжіння; $\overline{R}$ – сила опору середовища.

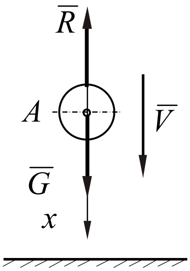


Рис. 1.

Рух кулі відбувається вздовж вертикалі, тому спрямуємо вісь x вертикально униз за напрямком швидкості. Тоді положення кулі буде визначатися координатою x.

Запишемо рівняння руху кулі у векторній формі:

$$m\overline{a} = \sum \overline{F}_k = \overline{G} + \overline{R}$$

та спроектуємо його на вісь x:

$$ma_x = G - R,$$

відкіля

$$R = G - ma_x.$$

Таким чином, щоб визначити силу опору R, необхідно знати прискорення кулі a_x.

Оскільки закон зміни координати x відомий, то

$$V_x = \dot{x}, \quad a_x = \ddot{x}.$$

Знаходимо першу и другу похідні від закону руху кулі:

$$V_x = \dot{x} = \left[327t - 109(1 - e^{-3t})\right]' =$$

$$= 327 - 109 \cdot 3e^{-3t} = 327\left(1 - e^{-3t}\right);$$

$$a_x = \ddot{x} = \left[327(1 - e^{-3t})\right]' = 327 \cdot 3 \cdot e^{-3t} = 981e^{-3t}.$$

Таким чином,

$$R = G - \frac{G}{g} \cdot 981 \cdot e^{-3t} = 100 - \frac{100}{981} \cdot 981 \cdot e^{-3t} =$$

$$= 100\left(1 - e^{-3t}\right).$$

Із виразу для V_x (з урахуванням того, що $V_x = V$) витікає

$$\left(1 - e^{-3t}\right) = \frac{V}{327},$$

тобто

$$R = \frac{100}{327} V = 0{,}306 \cdot V.$$

Відповідь: $R = 0{,}306 \cdot V$.

Задача 2

Рух тіла A масою $m = 1\,кг$ виражається рівняннями:

$$x = V_0 t; \quad y = h - \frac{gt^2}{2},$$

де x і y – в метрах; t – в секундах.

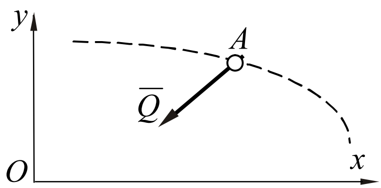


Рис. 1

Визначити силу Q, яка діє на тіло , приймаючи його за матеріальну точку (рис.1).

Розв'язування. Проекції на осі координат сили

$\bar{Q}$, яка прикладена до тіла, визначаються за формулами:

$$Q_x = ma_x; \quad Q_y = ma_y,$$

де a_x і a_y – проекції прискорення тіла на осі координат.

У даному випадку

$$a_x = \ddot{x}, \quad \dot{x} = V_0, \quad \ddot{x} = 0; \quad a_y = \ddot{y}, \quad \dot{y} = -gt, \quad \ddot{y} = -g.$$

Отже

$$Q_x = 0; \quad Q_y = -mg = -1 \cdot 9{,}81 = -9{,}81 \ H.$$

Модуль сили Q дорівнює:

$$Q = \sqrt{Q_x^2 + Q_y^2} = \sqrt{9{,}81^2} = 9{,}81 \ H.$$

Сила Q спрямована вертикально униз, оскільки $Q_x = 0$. Таким чином, шукана сила, модуль якої дорівнює mg, є силою тяжіння.

Відповідь: $Q = 9{,}81 \ H$.

Задача 3

Матеріальна точка масою m=1,2 *кг* рухається по колу з радіусом $r = 0{,}6$ *м* згідно закону $S = 2{,}4\,t$.

Визначити модуль R рівнодіючої сил, що прикладені до матеріальної точки.

Розв'язування. У задачі рух матеріальної точки задано природним способом , тому для визначення рівнодіючої сил скористаємося залежностями (8):

$$R_\tau = ma_\tau = m\frac{dV}{dt};$$

$$R_n = ma_n = m\frac{V^2}{r}.$$

Визначимо дотичне і нормальне прискорення матеріальної точки:

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} \;\Rightarrow\; V = \frac{dS}{dt} = \frac{d(2{,}4t)}{dt} = 2{,}4\ м/с \;\Rightarrow$$

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = 0;$$

$$a_n = \frac{V^2}{r} = \frac{2{,}4^2}{0{,}6} = 9{,}6\ м/с^2 .$$

Оскільки $a_\tau = 0$, то проекція R_τ рівнодіючої R на дотичну вісь дорівнює нулю.

Знаходимо нормальну складову рівнодіючої сил:

$$R_n = ma_n = 1{,}2 \cdot 9{,}6 = 11{,}5\,H.$$

Модуль рівнодіючої визначимо з виразу (Д1.1):

$$R = \sqrt{R_n^2 + R_\tau^2} = \sqrt{(11{,}5)^2 + 0} = 11{,}5\,H.$$

Таким чином, заданий рух матеріальної точки відбувається під дією сили, сталої за модулем і спрямованої вздовж радіуса до центра кола.

Відповідь: $R = 11{,}5\ H$.

Задача 4

Матеріальна точка масою $m = 18\ кг$ рухається по колу з радіусом $R = 8\ м$ згідно закону $S = e^{0{,}3t}$.

Визначити проекцію F_τ рівнодіючої сил, що прикладені до матеріальної точки, на дотичну до траєкторії в момент часу $t = 10\ с$.

Розв'язування. Для визначення проекції F_τ скористаємося рівнянням:

$$F_\tau = ma_\tau . \qquad (1)$$

Спочатку знайдемо значення швидкості матеріальної точки:

$$V = \frac{dS}{dt} = \frac{d}{dS}(e^{0,3t}) = 0,3e^{0,3t},$$

при $t = 10\ c$: $V = 0,3 \cdot e^{0,3 \cdot 10} = 0,3 \cdot 2,72^3 = 6,04\ м/с$.

Визначаємо величину дотичного прискорення

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}(0,3e^{0,3t}) = 0,09e^{0,3t},$$

при $t = 10\ c$: $a_\tau = 0,09 \cdot e^{0,3 \cdot 10} = 0,09 \cdot 2,72^3 = 1,81\ м/c^2$.

Підставивши в рівняння (1) значення a_τ і m, одержимо:

$$F_\tau = ma_\tau = 18 \cdot 1,8 = 32,4\ H.$$

Відповідь: $F_\tau = 32,4\ H.$

Задача 5

Вантаж M вагою $P = 1\ H$, який підвішений до нитки довжиною $l = 0,3\ м$ у нерухомій точці O, являє собою конічний маятник (рис.1), тобто рухається по колу у горизонтальній площині, при цьому нитка з вертикаллю утворює кут $\alpha = 60^\circ$.

Визначити величину швидкості вантажу V і модуль сили натягу нитки T.

Розв'язування. Зобразимо вантаж M у довільному положенні і покажемо сили, які на нього діють: силу тяжіння $\overline{P}$, яка спрямована вертикально униз, і натяг нитки $\overline{T}$, який спрямовано до точки підвісу O.

Для розв'язування задачі вибираємо природну систему координат: вісь τ спрямуємо по дотичній до траєкторії (до кола) в бік руху вантажу, вісь n – по нормалі до центру кривини і вісь b – вертикально вгору.

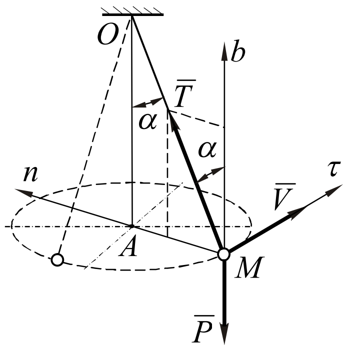


Рис. 1

Запишемо рівняння руху вантажу в векторній формі:

$$m\overline{a} = \sum \overline{F}_k = \overline{P} + \overline{T} \ .$$

Проектуємо це векторне рівняння на осі координат:

$$ma_\tau = 0;$$

$$ma_n = T \sin 60^\circ; \qquad (1)$$

$$ma_b = T \cos 60^\circ - P.$$

Модуль сили натягу нитки T знайдемо з третього із рівнянь (1), враховуючи, що $a_b = 0$:

$$0 = T \cos 60^\circ - P \quad \Rightarrow \quad T = \frac{P}{\cos 60^\circ} = \frac{1}{0{,}5} = 2\,H.$$

З другого із рівнянь (1) знайдемо V, якщо врахувати, що

$$a_n = \frac{V^2}{R}; \qquad m = \frac{P}{g}; \qquad R = l \sin 60^\circ,$$

то

$$\frac{P}{g} \frac{V^2}{l \sin 60^\circ} = T \sin 60^\circ .$$

Звідкіля

$$V = \sqrt{\frac{T \cdot g \cdot l \sin^2 60^\circ}{P}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}3}{1}} \cdot 0{,}866 = 2{,}1 \quad м/с \ .$$

Відповідь: $V = 2{,}1$ $м/с$; $T = 2\,H$.

Завдання теми Д1

Д1.5. Задача Д1

Вказівки. Завдання Д1 містить дві задачі Д1а і Д1б, які треба вирішити. Обидві задачі є прямими або першими задачами динаміки матеріальної точки. Відмінність полягає в тому, що при розв'язуванні задачі Д1а треба скористатися диференціальними рівняннями руху точки в проекціях на осі декартової системи координат, а при розв'язуванні задачі Д1б – у проекціях на природні осі координат.

Слід пам'ятати, що напрямок вектора сили збігається з напрямком вектора відповідного прискорення.

Д1.6. Задача Д1а

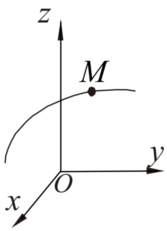
Матеріальна точка М масою $\boldsymbol{m}$ рухається в просторі відповідно до рівнянь: $x = f_1(t)$; $y = f_2(t)$; $z = f_3(t)$, де x, y, z – декартові координати точки в метрах, t – час у секундах.

Залежності $x = f_1(t)$ і $y = f_2(t)$ вказані безпосередньо на рис. Д1.1 (траєкторія точки на рисунках показана умовно), а залежності $z = f_3(t)$, маса $\boldsymbol{m}$ точки і момент часу t_1 приведені в таблиці Д1а.

Визначити величину і напрямок рівнодіючої системи сил, що діють на матеріальну точку в момент часу t_1.

Примітка. Перша цифра шифру визначає номер рисунка, а друга – номер варіанту в таблиці.

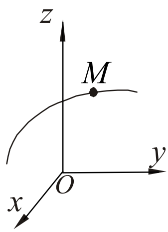
0



$x = t + e^{2t};$

$y = t^3 - 1.$

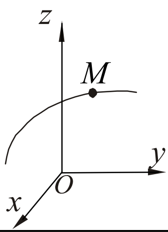
1



$x = e^t + 3t;$

$y = 5\sin \pi t.$

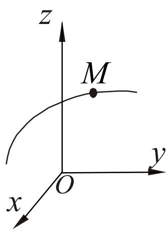
2



$x = 5 + \cos \pi t;$

$y = \pi \sin \pi t.$

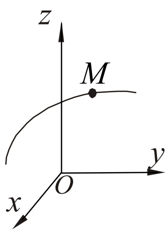
3



$x = 5 - 2\cos \frac{\pi}{3} t;$

$y = 9\sin \frac{\pi}{3} t.$

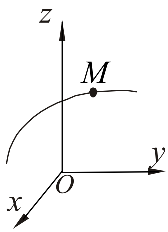
4



$x = -\pi \sin \pi t;$

$y = 2t^2 + 1.$

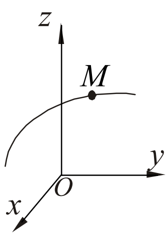
5



$x = -\pi \sin \pi t;$

$y = 2t^2 + 1.$

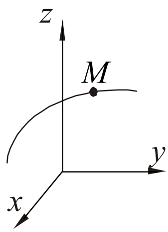
6



$x = 5 + \cos \pi t;$

$y = \pi \sin \pi t.$

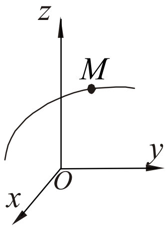
7



$x = 3\sin \frac{\pi}{6} t;$

$y = -2\cos \frac{\pi}{3} t.$

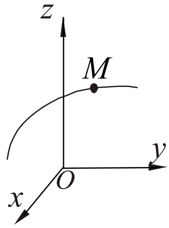
8



$x = -5t^2 - 2;$

$y = -2\sin \frac{\pi}{3} t.$

9



$x = -e^{-5t} - 5t;$

$y = -\sin 2\pi t.$

Рис. Д1.1

Табл. Д1а

Номер умови	m, *кг*	t_1, *с*	$z = f_3(t)$
0	0,5	1	$\sin^2(\pi t)$
1	1	1,5	$4\ln(t+1)$
2	1,5	2	$\sin \pi t^2$
3	2	2,5	$t - \cos \pi t$
4	2,5	3	$2\pi t^2$
5	3	0,5	$e^{(2t+1)}$
6	2,5	0,5	$e^{-2\pi t}$
7	2	2	$t^3 + 4t^2$
8	1,5	1	$-2/(t+\pi)$
9	1	1,5	$t^4 + t^2$

Д1.7. Приклад розв'язування завдання Д1а

Дано: $x = -\pi \sin \pi t$; $y = 2t^2 + 1$; $z = e^{(2t+1)}$;
$m = 3$ *кг*; $t_1 = 0{,}5$ *с*.

Визначити: рівнодіючу $\vec{R}$.

Розв'язання. Оскільки кінематичні рівняння руху матеріальної точки задані координатним способом, то скористаємося диференціальними рівняннями руху точки в проекціях на осі декартової системи координат:

$$ma_x = R_x; \quad ma_y = R_y; \quad m_z = R_z, \tag{1}$$

де a_x, a_y, a_z – проекції вектора прискорення на координатні осі;

R_x, R_y, R_z, – проекції рівнодіючої системи сил , що ді-
ють на точку, на координатні осі.

Оскільки $a_x = \ddot{x}$, $a_y = \ddot{y}$, $a_z = \ddot{z}$, то рівняння (1) можна переписати у вигляді:

$$R_x = m\ddot{x}; \quad R_y = m\ddot{y}; \quad R_z = m\ddot{z}. \qquad (2)$$

Двічі диференціюємо за часом задані кінематичні рівняння руху:

$$\dot{x} = -\pi^2 \cos \pi\, t; \quad \ddot{x} = \pi^3 \sin \pi\, t;$$

$$\dot{y} = 4t; \quad \ddot{y} = 4;$$

$$\dot{z} = 2e^{(2t+1)}; \; \ddot{z} = 4e^{(2t+1)},$$

і підставляємо отримані вирази в (2). З урахуванням того, що $m = 3$ $кг$, дістанемо:

$$R_x = 3 \cdot 3{,}14^3 \sin \pi t;$$

$$R_y = 3 \cdot 4 = 12 \; H;$$

$$R_z = 3 \cdot 4 \cdot 2{,}72^{(2t+1)},$$

або

$$R_x = 93 \cdot \sin \pi t; \quad R_y = 12\, H; \quad R_z = 12 \cdot 2{,}72^{(2t+1)}.$$

У заданий момент часу $t_1 = 0{,}5\; c$:

$$R_x = 93 \cdot \sin \pi / 2 = 93 \text{ Н}; \quad R_y = 12 \; H;$$

$$R_z = 12 \cdot 2{,}72^2 \approx 88{,}8 \; H.$$

Тоді модуль рівнодіючої сили:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = \sqrt{93^2 + 12^2 + 88{,}8^2} \approx 129 \; H.$$

Орієнтація в просторі вектора рівнодіючої визначається напрямними кутами α, β і γ між вектором $\vec{R}$ і відповідними координатними осями Ox, Oy і Oz.

Ці кути знаходяться за значеннями їх косинусів:

$$\cos\alpha = \frac{R_x}{R} = \frac{93}{129} \approx 0,721; \quad \alpha = \arccos 0,72 \approx 43,9°,$$

$$\cos\beta = \frac{R_y}{R} = \frac{12}{129} \approx 0,093; \quad \beta = \arccos 0,09 \approx 84,8°,$$

$$\cos\gamma = \frac{R_z}{R} = \frac{88,8}{129} \approx 0,688; \quad \gamma = \arccos 0,688 \approx 46,5°.$$

Відповідь: $R = 129\ H$; $\quad \alpha = \angle(\vec{P},\vec{i}\,) = 43,9^{\circ}$;

$$\beta = \angle(\vec{P},\vec{j}\,) = 84,8^{\circ}; \quad \gamma = \angle(\vec{P},\vec{k}\,) = 46,5^{\circ}.$$

Д 1.8. Завдання Д1б

Матеріальне тіло M масою $\boldsymbol{m}$ ковзає (коефіцієнт тертя ковзання $f = 0{,}1$) по жолобу OAB, який розташований у вертикальній площині і вигнутий, як показано на рис. Д1.2. Рівняння руху тіла $S(t) = OM$ наведені в таблиці Д1б. Такий закон руху обумовлений тим, що на тіло, крім сили тяжіння, реакції жолоба та сили тертя, діє деяка сила $\vec{F}$, яка спрямована за дотичною до траєкторії.

У момент часу $t_1 = 1c$ тіло знаходиться в точці M_1, розташованій на прямолінійній ділянці жолоба. У момент часу $t_2 = 2c$ тіло знаходиться в точці M_2, розташованій на дузі півкола радіуса r і визначеної кутом α.

Знайти. Уважаючи тіло матеріальною точкою визначити у моменти часу t_1 і t_2 величину та напрямок сили $\vec{F}$ і величину сили тертя $F_{тер}$.

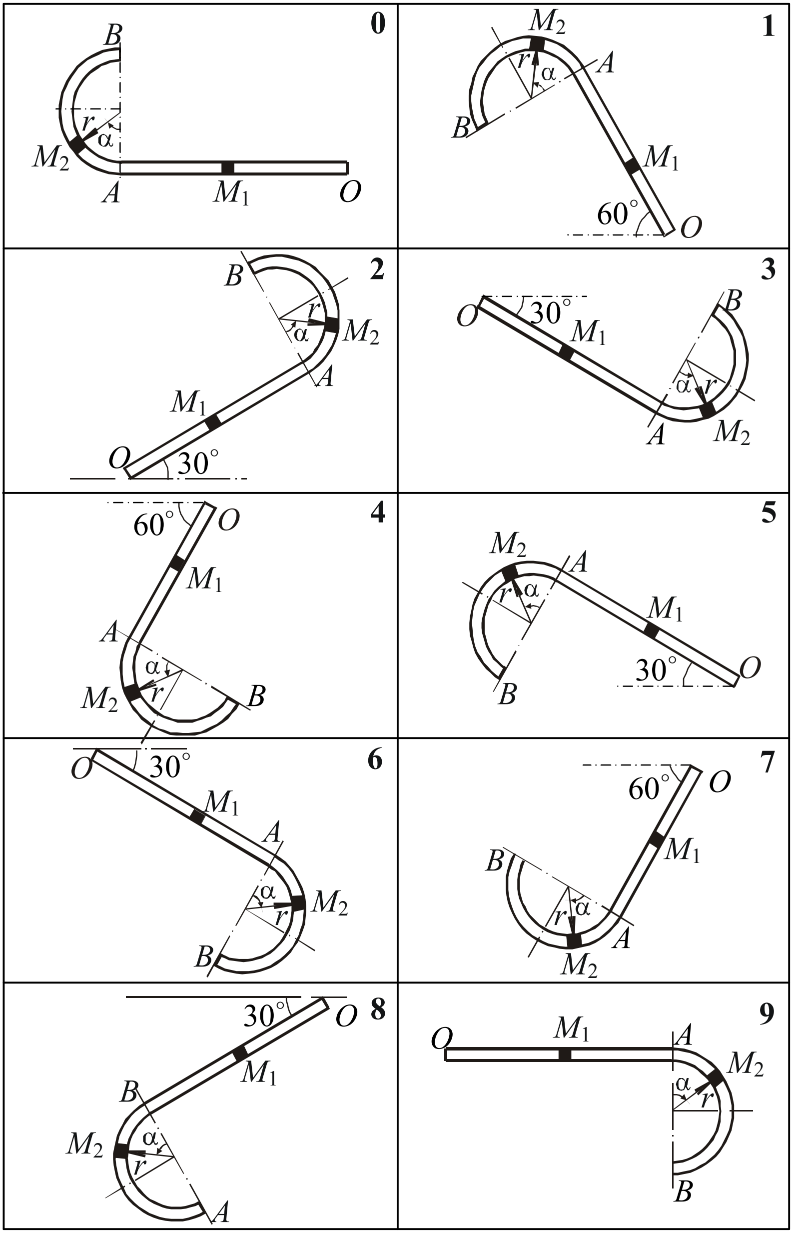

0
B
r
α
M2
A
M1
O
1
M2
r
α
A
B
M1
60°
O
2
B
r
M2
α
A
M1
O
30°
3
O
30°
M1
B
α
r
A
M2
4
60°
O
M1
A
α
r
M2
B
5
M2
A
r
α
M1
30°
O
B
6
O
30°
M1
A
α
M2
r
B
7
60°
O
M1
B
r
α
A
M2
8
30°
O
M1
B
M2
α
r
A
9
O
M1
A
M2
α
r
B

Рис. Д1.2

Таблиця Д1б

Номер умови	$S(t)$, *м*	m, *кг*	r, *м*	α, *град.*
0	$34t-t^4$	0,1	1	30
1	$2t+3\sin(\pi t/6)$	0,2	1,5	45
2	$t+\sqrt{t+1}-1$	0,3	2	60
3	$(t+6)-6\cos(\pi t/6)$	0,4	2,5	90
4	$10-10e^{-2t}$	0,5	3	120
5	$15t-t^3$	0,6	3,5	150
6	$9\sin(\pi t/6)$	0,7	4	180
7	$t+\ln\cos(\pi t/6)$	0,8	4,5	30
8	$(t+1)\ln(t+1)$	0,9	5	45
9	$9t-2t^2$	1	5,5	60

Д1.9. Приклад розв'язування завдання Д1б

Дано: траєкторія точки (рис. Д1.3), $S(t)=15t-t^3$,

$m=0{,}6$ *кг*, $r=3{,}5$ *м*, $\alpha=150^\circ$, $f=0{,}1$.

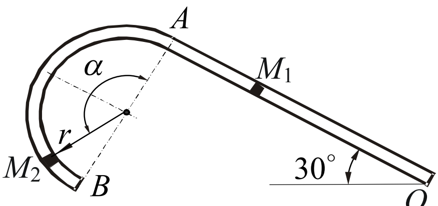


Рис. Д1.3

Визначити: величину і напрямок сили F, та величину сили тертя $F_{тер}$.

Розв'язування.

1. Зобразимо тіло (матеріальну точку) в положенні M_1 (рис Д1.4).

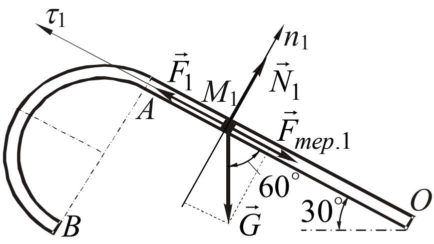


Рис. Д1.4

Покажемо сили, що діють на матеріальну точку: $\vec{G}$ – сила тяжіння; $\vec{N}_1$ – реакція поверхні жолоба (перпенди-кулярно до поверхні); $\vec{F}_{mep.1}$ – сила тертя (проти напряму руху тіла); $\vec{F}_1$ – деяка сила (спрямуємо в бік руху тіла).

Оскільки траєкторія точки відома, пов'яжемо з нею природну систему координат $M_1\tau_1 n_1$ (вісь τ_1 спрямуємо за напрямом руху, а вісь n_1 – перпендикулярно до τ_1).

Запишемо рівняння руху матеріальної точки в векторній формі:

$$m\vec{a} = \sum \vec{F}_k = \vec{F}_1 + \vec{G} + \vec{N}_1 + \vec{F}_{mep.1} \,.$$

Проектуємо це векторне рівняння на осі обраної системи координат:

$$ma_\tau = \sum F_{k\tau} = F_1 - F_{mep.1} - G\cos 60^\circ \,, \qquad (1)$$

$$ma_n = \sum F_{kn} = N_1 - G\sin 60^\circ \qquad (2)$$

де a_τ і a_n – проекції вектора прискорення на дотичну $M_1\tau_1$ і головну нормаль $M_1 n_1$ до траєкторії,

$F_{mep.1} = f \cdot N_1$ – величина сили тертя.

В рівняннях (1) і (2):

$$a_\tau = \frac{dV}{dt}; \quad a_n = \frac{V^2}{\rho},$$

де ρ – радіус кривизни траєкторії в даній точці.

Швидкість точки дорівнює:

$$V = \frac{dS}{dt} = \frac{d}{dt}(15t - t^3) = 15 - 3t^2.$$

Тоді:

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}(15 - 3t^2) = -6t, \tag{3}$$

$$a_n = \frac{V^2}{\rho} = \frac{(15 - 3t^2)^2}{\rho}. \tag{4}$$

У положенні точки M_1 $(t_1 = 1\ c)$ радіус кривизни траєкторії дорівнює нескінченності $(\rho = \infty)$, оскільки ця ділянка траєкторії є прямолінійною. Тоді:

$$a_\tau = -6\ м/c^2; \qquad a_n = 0.$$

Оскільки $a_n = 0$, то рівняння (2) можна переписати у вигляді:

$$N_1 - G\sin 60^\circ = 0, \text{ або } N_1 = G\sin 60^\circ = mg\sin 60^\circ.$$

Тоді

$$F_{тер.1} = f \cdot mg\sin 60^\circ = 0{,}1 \cdot 0{,}6 \cdot 10 \cdot 0{,}866 = 0{,}52\ H.$$

Рівняння (1) розв'яжемо відносно сили F_1:

$$F_1 = ma_\tau + F_{тер.1} + mg\cos 60^\circ =$$

$$= 0{,}6 \cdot (-6) + 0{,}52 + 0{,}6 \cdot 10 \cdot 0{,}5 = 3{,}16\ H.$$

Таким чином, в цьому положенні матеріальної точки сила $\vec{F}$ спрямована за напрямком її руху (оскільки величина сили додатна).

2. Зобразимо матеріальну точку в положенні M_2 (рис Д1.5) на криволінійній ділянці траєкторії (при зображенні точки рекомендується витримувати заданий кут α).

Покажемо сили, що на неї діють: $\vec{G}$ – сила тяжіння, $\vec{N}_2$ – реакції поверхні жолоба (перпендикулярно до поверхні), $\vec{F}_{тер.2}$ – сила тертя (проти напряму руху тіла), $\vec{F}_2$ – деяка сила (спрямуємо в бік руху тіла).

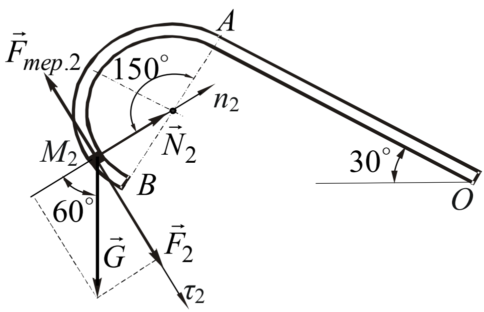


Рис. Д1.4

Покажемо обрану систему координат в цьому положенні точки (вісь τ_2 спрямуємо за дотичною до траєкторії в бік руху точки, а вісь n_2 – перпендикулярно до τ_2 в бік центра кривизни траєкторії).

Запишемо рівняння руху матеріальної точки в векторній формі:

$$m\vec{a} = \sum \vec{F}_k = \vec{F}_2 + \vec{G} + \vec{N}_2 + \vec{F}_{тер.2}.$$

Проектуємо це векторне рівняння на осі обраної системи координат:

$$ma_\tau = \sum F_{k\tau} = F_2 - F_{тер.2} + G\sin 60^\circ; \qquad (5)$$

$$ma_n = \sum F_{kn} = N_2 - G\cos 60^\circ. \qquad (6)$$

У положенні точки M_2 ($t_2 = 2\ c,\ \rho = r = 3{,}5\ м$) величини тангенціального (3) і нормального (4) прискорення дорівнюють:

$$a_\tau = -6t_2 = -6 \cdot 2 = -12\ м/c^2;$$

$$a_n = \frac{(15-3t_2^2)^2}{\rho} = \frac{\left(15-3\cdot 2^2\right)^2}{3{,}5} = 2{,}57\ \frac{м}{c^2}.$$

Із рівняння (6) визначимо величину нормальної реакції N_2 поверхні:

$$N_2 = ma_n + G\cos 60^\circ =$$
$$= 0{,}6 \cdot 2{,}57 + 0{,}6 \cdot 10 \cdot 0{,}5 = 4{,}54\ H.$$

Тоді, сила тертя дорівнює:

$$F_{тер.2} = f \cdot N_2 = 0{,}1 \cdot 4{,}54 = 0{,}454\ H.$$

Рівняння (5) розв’яжемо відносно сили F_2:

$$F_2 = ma_\tau + F_{тер.2} - G\sin 60^\circ =$$

$$-0{,}6 \cdot 10 \cdot 0{,}866 = -11{,}88\ H.$$

Таким чином, в цьому положенні матеріальної точки сила $\vec{F}_2$ спрямована проти напрямку її руху (оскільки величина сили від’ємна).

Відповідь: $F_{тер.1} = 0{,}52\ H$; $F_1 = 3{,}16\ H$.

$F_{тер.2} = 0{,}454\ H$; $F_2 = 11{,}88\ H$.

Тема Д 2. ОБЕРНЕНА ЗАДАЧА ДИНАМІКИ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ

Д 2.1. Стислі відомості з теорії

Завдання Д2 – на розв'язування другої (оберненої або основної) задачі динаміки матеріальної точки. Для її розв'язання необхідно проінтегрувати або диференціальне рівняння руху матеріальної точки у векторній формі, або рівносильні йому системи скалярних рівнянь, які відповідають обраній системі відліку, з урахуванням початкових умов.

Якщо, наприклад, задача розв'язується в проекціях на осі декартової системи координат, то інтегрується система диференціальних рівнянь другого порядку:

$$m\ddot{x} = \sum F_{kx}, \quad m\ddot{y} = \sum F_{ky}, \quad m\ddot{z} = \sum F_{kz}. \qquad (Д2.1)$$

При інтегруванні кожного з цих рівнянь з'явиться по дві довільні сталі інтегрування, а всього їх буде шість, і *загальний розв'язок рівнянь руху точки* буде мати вигляд:

$$\left.\begin{aligned} x &= f_1(t, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6); \\ y &= f_2(t, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6); \\ z &= f_3(t, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6), \end{aligned}\right\} \qquad (Д2.2)$$

де c_1, c_2, ..., c_6 – довільні сталі інтегрування.

Щоб одержати *часткове рішення рівнянь руху точки*, яке буде відповідати її дійсному руху, необхідно визначити значення *довільних сталих*. Для цього необхідні додаткові дані, які визначають положення точки та її швидкість в деякий фіксований момент часу t. Якщо $t = t_0$ (*початковий момент часу*), то ці додаткові дані називають ***початковими умовами задачі.***

Положення точки визначається трьома її декартовими координатами x, y, z; швидкість точки – трьома проекціями швидкості на осі декартових координат $V_x = \dot{x}$, $V_y = \dot{y}$, $V_z = \dot{z}$. Таким чином, початкові умови для системи диференціальних рівнянь (Д2.1) при $t = t_0$ мають вигляд:

$$\begin{aligned} &x = x_0; \quad y = y_0; \quad z = z_0; \\ &V_x = V_{0x}; \quad V_y = V_{0y}; \quad V_z = V_{0z}. \end{aligned} \qquad (Д2.3)$$

В результаті підстановки початкових умов в перші та другі інтеграли системи (2.1) утворюється система шести рівнянь для визначення шести невідомих c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6.

При русі точки в площині, наприклад Oxy, маємо два диференціальних рівняння руху, відповідно буде чотири довільні сталі. При $t = t_0$ початкові умови будуть мати вигляд:

$$\begin{aligned} &x = x_0; \quad y = y_0; \\ &V_x = V_{0x}; \quad V_y = V_{0y}. \end{aligned} \qquad (Д2.4)$$

При прямолінійному русі точки, наприклад вздовж осі Ox, будемо мати одне диференціальне рівняння руху та дві довільні сталі. При $t = t_0$ початкові умови будуть мати вигляд:

$$x = x_0; \; V_x = V_{0x}. \qquad (Д2.5)$$

Якщо задача розв'язується в проекціях на осі природної системи координат, то інтегрувати необхідно диференціальні рівняння руху для цієї системи координат:

$$m\ddot{S} = \sum F_{k\tau}; \; mV^2 / \rho = \sum F_{kn}. \qquad (Д2.6)$$

Початковими умовами в цьому випадку будуть значення дугової координати S та проекція вектора швидкості на напрям дотичної до траєкторії $V_\tau = \dot{S}$, тобто при $t = t_0$:

$$S = S_0,\ V_\tau = V_{0\tau}. \qquad (Д2.7)$$

Нарешті, відмітимо, що *задана початкова швидкість руху точки враховує вплив на її рух тих сил, які діяли на точку до початкового моменту часу.*

Д2.2. Порядок розв'язування оберненої задачі динаміки матеріальної точки

Обернені задачі динаміки матеріальної точки рекомендується розв'язувати наступним чином:

1. Зобразити на рисунку матеріальну точку в довільному положенні та всі сили, які на неї діють (як активні, так і реакції в'язей).
2. Вибрати систему відліку, в якій задача вирішується найбільш простим способом. При цьому початок координат розташувати в місці, де знаходилась точка в початковий момент часу t_0.
3. Записати початкові умови задачі.
4. Скласти диференціальне рівняння руху точки в проекціях на осі системи координат, яка обрана.
5. Провести інтегрування одержаної системи диференціальних рівнянь руху точки.
6. Визначити за початковими умовами сталі інтегрування.
7. Із одержаної системи рівнянь визначити невідомі величини.

Д2.3. Контрольні запитання

1. Які рівняння динаміки називаються природними рівняннями руху матеріальної точки?
2. Як записуються диференціальні рівняння руху в декартовій системі координат?
3. Які дві основні задачі динаміки точки розв'язуються за допомогою диференціальних рівнянь руху матеріальної точки?
4. Яка кількість початкових умов потрібна при розв'язуванні задачі про рух матеріальної точки в площині?

Д2.4. Приклади розв'язування задач

Задача 1

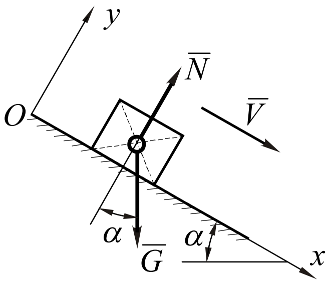


Рис. 1

Важке тіло ковзає по гладкій поверхні, яка нахилена під кутом $\alpha = 30^\circ$ до горизонту.

Визначити, за який час T тіло пройде шлях $S = 9{,}6\ м$, якщо у початковий момент його швидкість дорівнювала $V_0 = 2\ м/с$.

Розв'язування. Зобразимо тіло у довільному положенні на похилій площині (рис.1). Оскільки рух тіла по площині є поступальним, а при поступальному русі прискорення всіх точок тіла однакові, то рух такого тіла будемо розглядати як рух матеріальної точки (дане допущення буде справедливим і для наступних задач цієї теми).

Покажемо сили, що діють на тіло: силу тяжіння $\overline{G}$ і нормальну реакцію похилої площини $\overline{N}$.

Вісь Ox спрямуємо у сторону руху тіла.

В початковий момент часу $(t=0)$ матеріальна точка знаходилась в початку системи координат (точка O), а її швидкість дорівнювала $V_0 = 2$ $м/с$. Таким чином, при $t=0$ початкові умови будуть мати вигляд:

$$x_0 = 0; \quad V_{x0} = V_0 = 2 \ м/с .$$

Запишемо рівняння руху тіла у векторній формі:

$$m\bar{a} = \bar{G} + \bar{N} .$$

Спроектуємо записане рівняння на вісь Ox:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = m\frac{dV_x}{dt} = G\sin\alpha .$$

Враховуючи, що $G = mg$, одержимо

$$\frac{dV_x}{dt} = g\sin\alpha .$$

Знайдемо залежність швидкості V_x від часу t. Для цього розділимо змінні в останньому рівнянні і про інтегруємо:

$$dV_x = g\sin\alpha dt;$$

$$\int dV_x = g\sin\alpha\int dt;$$

$$V_x = gt\sin\alpha + C_1 .$$

Використовуючи початкові умови визначимо сталу інтегрування C_1. Для цього підставимо їх в останнє рівняння. Оскільки при $t=0$ $V_{x0} = 2$ $м/с$, то:

$$2 = g\sin\alpha\cdot 0 + C_1 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 2 .$$

Таким чином, рівняння для зміни швидкості матеріальної точки буде мати вигляд:

$$V_x = gt\sin\alpha + 2\,.$$

Знаходимо залежність координати x від часу:

$$V_x = \frac{dx}{dt} = gt\sin\alpha + 2;$$

$$dx = gt\sin\alpha\ dt + 2dt;$$

$$\int dx = g\sin\alpha\int tdt + 2\int dt;$$

$$x = g\frac{t^2}{2}\sin\alpha + 2t + C_2.$$

Сталу інтегрування C_2 визначимо із початкових умов. Оскільки при $t = 0$ $x_0 = 0$, то:

$$0 = g\cdot 0\cdot\sin\alpha + 2\cdot 0 + C_2 \quad\Rightarrow\quad C_2 = 0\,.$$

Остаточно, для координати x будемо мати залежність:

$$x = g\frac{t^2}{2}\sin\alpha + 2t.$$

Визначимо час T, при якому $x = S = 9{,}6\ \textit{м}$:

$$9{,}6 = 9{,}81\frac{T^2}{2}\sin 30^\circ + 2T,$$

або

$$2{,}45T^2 + 2T - 9{,}6 = 0.$$

Звідси:

$$T_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{1+2{,}45\cdot 9{,}6}}{2{,}45} = \frac{-1\pm 4{,}95}{2{,}45}.$$

Оскільки час може бути тільки додатним, то:

$$T = \frac{-1+4,95}{2,45} = 1,6\ с\ .$$

Відповідь: $T = 1,6\ с$.

Задача 2

Важке тіло піднімається по негладкій похилій площині, яка нахилена до горизонту під кутом $\alpha = 30^\circ$. У початковий момент швидкість тіла дорівнювала $V_0 = 15\ м/с$. Коефіцієнт тертя тіла об площину $f = 0,1$.

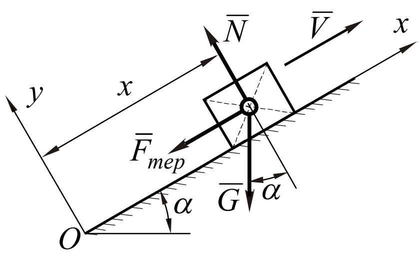


Рис. 1

Визначити, який шлях S пройде тіло до зупинки? За який час T тіло пройде цей шлях?

Розв'язування. Зобразимо тіло у вигляді матеріальної точки в довільному положенні (рис.1).

Покажемо сили , що діють на матеріальну точку: силу тяжіння $\overline{G}$, реакцію похилої площини $\overline{N}$ і силу тертя $\overline{F}_{тер}$.

Вісь Ox спрямуємо вздовж похилої поверхні у сторону руху, а початок відліку (точку O) візьмемо у початковому положенні точки. Вісь Oy спрямуємо перпендикулярно до осі Ox . Початкові умови руху точки при $t = 0$ будуть мати вигляд:

$$x = 0; \qquad V_{x0} = V_0 = 15\ м/с\ .$$

Запишемо рівняння руху точки у векторній формі:

$$m\overline{a} = \sum \overline{F}_k = \overline{G} + \overline{F}_{тер} + \overline{N}\ . \qquad (1)$$

Проектуємо векторне рівняння (1) на осі координат:

$$m\ddot{x} = -F_{тер} - G\sin\alpha\,; \qquad (2)$$

$$m\ddot{y} = N - G\cos\alpha\,. \qquad (3)$$

Оскільки точка в напрямі осі Oy не рухається $(\ddot{y} = 0)$, то із рівняння (3) випливає, що нормальна складова реакції похилої поверхні дорівнює $N = G\cos\alpha$.

Підставивши в рівняння (2) $m = G/g$, отримаємо:

$$\frac{G}{g}\ddot{x} = -F_{тер} - G\sin\alpha\,,$$

де $F_{тер} = f \cdot N = f \cdot G\cos\alpha$.

Тоді:

$$\frac{G}{g}\ddot{x} = -f \cdot G\cos\alpha - G\sin\alpha\,,$$

або

$$\ddot{x} = -g\left(f\cos\alpha + \sin\alpha\right),$$

$$\frac{dV_x}{dt} = -g\left(f\cos\alpha + \sin\alpha\right),$$

$$dV_x = -g\left(f\cos\alpha + \sin\alpha\right)dt.$$

Після інтегрування цього рівняння одержимо:

$$V_x = -g\left(f\cos\alpha + \sin\alpha\right)t + C_1. \qquad (4)$$

Співвідношення (4) є першим інтегралом диференціального рівняння (2). Для визначення сталої інтегрування C_1 підставимо в рівняння (4) початкову умову, а саме при $t = 0$ $\quad V_{x0} = V_0$.

Тоді:

$$V_0 = -g\left(f\cos\alpha + \sin\alpha\right)\cdot 0 + C_1 \quad \Rightarrow \quad C_1 = V_0\,,$$

та

$$V_x = -g\left(f\cos\alpha + \sin\alpha\right)t + V_0\,. \qquad (5)$$

Для визначення закону руху точки запишемо отримане рівняння наступним чином:

$$V_x = \frac{dx}{dt} = -g\left(f\cos\alpha + \sin\alpha\right)t + V_0\,.$$

Розділимо змінні і проінтегруємо вираз:

$$dx = -g\left(f\cos\alpha + \sin\alpha\right)tdt + V_0 dt\,;$$

$$\int dx = -g\left(f\cos\alpha + \sin\alpha\right)\int tdt + V_0\int dt;$$

$$x = -\frac{g}{2}\left(f\cos\alpha + \sin\alpha\right)t^2 + V_0 t + C_2\,.$$

Стала інтегрування C_2 визначиться після підстановки початкових умов (при $t=0$ $x_0=0$) в останнє рівняння:

$$0 = -\frac{g}{2}\left(f\cos\alpha + \sin\alpha\right)0 + V_0\cdot 0 + C_2 \;\Rightarrow\; C_2 = 0\,.$$

Таким чином, закон руху тіла має вигляд:

$$x = V_0 t - \frac{g}{2}\left(f\cos\alpha + \sin\alpha\right)t^2\,. \qquad (6)$$

Отже, ми одержали закони зміни швидкості (5) та координати x (6) тіла в залежності від часу.

Визначимо час T руху тіла до повної зупинки, швидкість при цьому буде дорівнювати нулю. Підставимо $V_x = 0$ в рівняння (5):

$$0 = V_0 - g\left(f\cos\alpha + \sin\alpha\right)T,$$

звідкіля:

$$T = \frac{V_0}{g\left(f\cos\alpha + \sin\alpha\right)}\,.$$

Через час T, згідно рівнянню (6), точка буде знаходитися від початку координат на відстані S, яка у нашому випадку чисельно дорівнює пройденому точкою шляху:

$$S = V_0 T - \frac{g}{2}\left(f\cos\alpha + \sin\alpha\right)T^2.$$

Підставивши вираз для T, отримаємо:

$$S = \frac{V_0 \cdot V_0}{g\left(f\cos\alpha + \sin\alpha\right)} - \frac{g}{2}\frac{\left(f\cos\alpha + \sin\alpha\right)\cdot V_0^{\,2}}{g^2\left(f\cos\alpha + \sin\alpha\right)^2},$$

$$S = \frac{V_0^2}{g\left(f\cos\alpha + \sin\alpha\right)} - \frac{V_0^2}{2g\left(f\cos\alpha + \sin\alpha\right)},$$

$$S = \frac{V_0^2}{2g\left(f\cos\alpha + \sin\alpha\right)}.$$

З урахуванням числових значень отримаємо:

$$T = \frac{15}{9,81\left(0,1\cos 30^\circ + \sin 30^\circ\right)} = 2,6\ с,$$

$$S = \frac{15^2}{2\cdot 9,81\left(0,1\cos 30^\circ + \sin 30^\circ\right)} = 19,6\ м.$$

Відповідь: $T = 2,6\ с$, $S = 19,6\ м$.

Задача 3

Точка M, маса якої m, рухається під дією сили тяжіння по гладенькій внутрішній поверхні жолоба (рис.1). Поверхня жолоба являє собою частину бокової поверхні циліндра радіусом r. У початковий момент часу точка знаходиться в положенні M_0, а її швидкість дорівнює нулю.

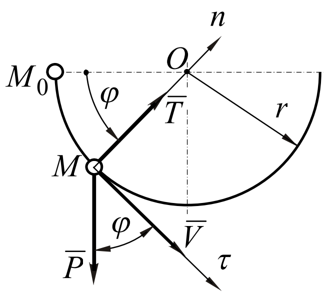


Рис. 1

Визначити швидкість V точки M і реакцію T поверхні жолоба в положенні, коли центральний кут $\varphi = 60^\circ$.

Розв'язування. Зобразимо точку M у довільному положенні на траєкторії, якою є внутрішня поверхня жолоба. Положення точки визначається кутом φ.

Покажемо сили, які діють на точку M: $\overline{P}$ – сила тяжіння точки; $\overline{T}$ – реакція внутрішньої поверхні жолоба, яка спрямована по радіусу до центра кривини O.

Оскільки траєкторія точки відома (дуга з радіусом r), то пов'яжемо з точкою M природну систему координат $M\tau n$.

Рівняння руху точки M у векторній формі має вигляд:

$$m\overline{a} = \sum \overline{F}_k = \overline{P} + \overline{T}. \tag{1}$$

Спроектуємо векторне рівняння (1) на координатні осі:

$$ma_\tau = P\cos\varphi = mg\cos\varphi;$$

$$ma_n = T - P\sin\varphi,$$

тобто

$$a_\tau = g\cos\varphi \quad \Rightarrow \quad \frac{dV}{dt} = g\cos\varphi; \tag{2}$$

$$m\frac{V^2}{r} = T - mg\sin\varphi. \tag{3}$$

У рівняннях (2) і (3) три змінні величини: V, t, φ. При розв'язуванні цих рівнянь необхідно одну зі змінних виразити через інші. Оскільки в умові задачі не вказаний час руху точки, а задається кут зміни положення точки, то виразимо в рівнянні (2) змінну t через змінну φ:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \frac{dV}{d\varphi}\omega = g\cos\varphi.$$

Оскільки $\omega = V/r$, то:

$$\frac{dV}{d\varphi}\cdot\frac{V}{r} = g\cos\varphi\,.$$

Розділимо змінні в останньому рівнянні і проінтегруємо:

$$VdV = gr\cos\varphi\; d\varphi;$$

$$\int VdV = gr\int\cos\varphi\cdot d\varphi;$$

$$\frac{V^2}{2} = gr\sin\varphi + C\,.$$

Оскільки при $t = 0$ (коли точка знаходиться в положенні M_0) φ=0 і $V_0 = 0$, то:

$$\frac{{V_0}^2}{2} = 0 = gr\sin 0 + \ C \Rightarrow \ C = 0\,.$$

Таким чином, закон зміни швидкості матеріальної точки буде мати вигляд:

$$V = \sqrt{2gr\sin\varphi}\,.$$

В положенні, коли $\varphi = 60^\circ$, швидкість точки M дорівнює:

$$V = \sqrt{2gr\sin\frac{\pi}{3}} = \sqrt{2gr\frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt[4]{3}\cdot\sqrt{gr}\,.$$

Після визначення швидкості точки M з рівняння (3) знаходимо нормальну реакцію внутрішньої поверхні циліндра:

$$T = \frac{mV^2}{r} + mg\sin\varphi = m\left(\frac{V^2}{r} + g\sin\varphi\right).$$

При $\varphi = \pi/3$ та $V^2/r = g\sqrt{3}$, одержимо:

$$T = m\left(g\sqrt{3} + g\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}mg.$$

Відповідь : $V = \sqrt[4]{3}\sqrt{gr}$; $T = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}mg$.

Задача 4

Важке кільце M нанизане на горизонтальне гладке дротяне коло (рис. 1). Кільцю надають початкову швидкість V_0, яка спрямована за дотичною до кола. Під час руху кільця на нього діє сила опору $F = km\sqrt{V}$, де m – маса кільця, V – його швидкість, k – сталий коефіцієнт.

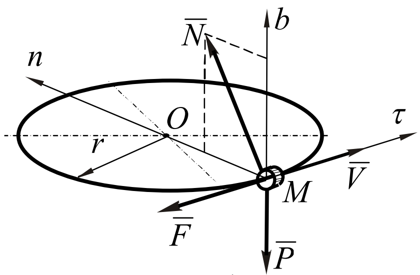


Рис. 1

Визначити: через який проміжок часу t_1 кільце зупиниться, якщо $k = 0{,}5$, $V_0 = 16$ $м/с$.

Розв'язування. Оскільки траєкторія важкого кільця M відома – це коло радіуса r, то з кільцем пов'яжемо природну систему координат $M\tau nb$.

Покажемо сили, що діють на важке кільце M: $\overline{P}$ – сила тяжіння кільця; $\overline{F}$ – сила опору, яка спрямована у бік, протилежний швидкості $\overline{V}$; $\overline{N}$ – реакція поверхні дротяного кола, яка лежить в площині Mnb, що перпендикулярна до кола.

Рівняння руху кільця M у векторній формі має вигляд:

$$m\bar{a} = \sum \bar{F}_k = \bar{P} + \bar{F} + \bar{N}.$$

Спроектуємо це рівняння на вісь $M\tau$:

$$ma_\tau = -F = -km\sqrt{V}\,, \quad \text{або} \quad \frac{dV}{dt} = -k\sqrt{V}\,.$$

Розділимо в останньому рівнянні змінні та проінтегруємо. При інтегруванні врахуємо, що швидкість кільця змінюється від V_0 в початковий момент часу ($t = 0$) до V в деякий момент часу t:

$$\frac{dV}{\sqrt{V}} = -kdt \;\Rightarrow\; \int_{V_0}^{V} \frac{dV}{\sqrt{V}} = -k\int_0^t dt \;\Rightarrow\; 2\sqrt{V}\Big|_{V_0}^{V} = -kt\;\Big|_0^t \Rightarrow$$

$$2\left(\sqrt{V} - \sqrt{V_0}\right) = -kt \Rightarrow \sqrt{V} = \sqrt{V_0} - \frac{k}{2}t\,.$$

Таким чином, закон зміни швидкості важкого кільця буде мати вигляд:

$$V = \left(\sqrt{V_0} - \frac{k}{2}t\right)^2.$$

Визначимо час руху кільця. В момент часу $t = t_1$, коли кільце зупиняється, швидкість $V = 0$, тобто:

$$\sqrt{V_0} - kt_1/2 = 0 \Rightarrow 2\sqrt{V_0} = kt_1 \Rightarrow t_1 = 2\sqrt{V_0}\big/k\,.$$

Підставивши в останнє рівняння числові дані, одержимо:

$$t_1 = 2\sqrt{16}\big/0{,}5 = 16\ c\,.$$

Відповідь: $t_1 = 16\ c$.

Д2.5. Завдання теми Д2

Вантаж M масою $\boldsymbol{m}$, діставши в точці A початкову швидкість V_0, рухається в зігнутій трубі ABC, що розташована у вертикальній площині, як показано на рис. Д2.1.

На ділянці AB на вантаж, крім сили тяжіння $\overline{G}$ діють стала сила $\overline{Q}$ (її напрям показаний на рисунках, а величина наведена в табл. Д2) та сила опору середовища $\overline{R}$, яка залежить від швидкості або квадрату швидкості вантажу (табл. Д2). Тертям вантажу по трубі на ділянці AB знехтувати.

У точці B вантаж, не змінюючи значення своєї швидкості, переходить на ділянку труби BC, де на нього, крім сили тяжіння $\overline{G}$, діє сила тертя $\overline{F}_{тер}$ (коефіцієнт тертя $f = 0{,}2$) та змінна сила $\overline{F}$, проекція якої F_x на вісь x задана в таблиці Д2.

Знайти закон руху вантажу на ділянці BC, тобто $x = f(t)$, де $x = BM$, вважаючи вантаж матеріальною точкою та знаючи відстань $AB = l$ або час t_1 руху вантажу на ділянці AB. При розрахунках прийняти прискорення вільного падіння $g \approx 10 м/с^2$.

Вказівки. Задача Д2 є другою або оберненою задачею динаміки точки, яка розв'язується шляхом складання та наступного двократного інтегрування диференційного рівняння другого порядку з урахуванням початкових умов. При цьому слід пам'ятати, що якщо в якийсь момент часу сили, які діють на матеріальну точку, змінюються, то для опису наступного руху точки необхідно скласти і інтегрувати нове диференціальне рівняння її руху. Початковими умовами нового руху точки будуть її положення та швидкість в кінці попереднього руху.

У випадку, коли задана довжина l ділянки, доцільно перейти від змінної t до змінної x, враховуючи, що

$$\frac{dV_x}{dt} = \frac{dV_x}{dt} \cdot \frac{dx}{dx} = V_x \frac{dV_x}{dx}.$$

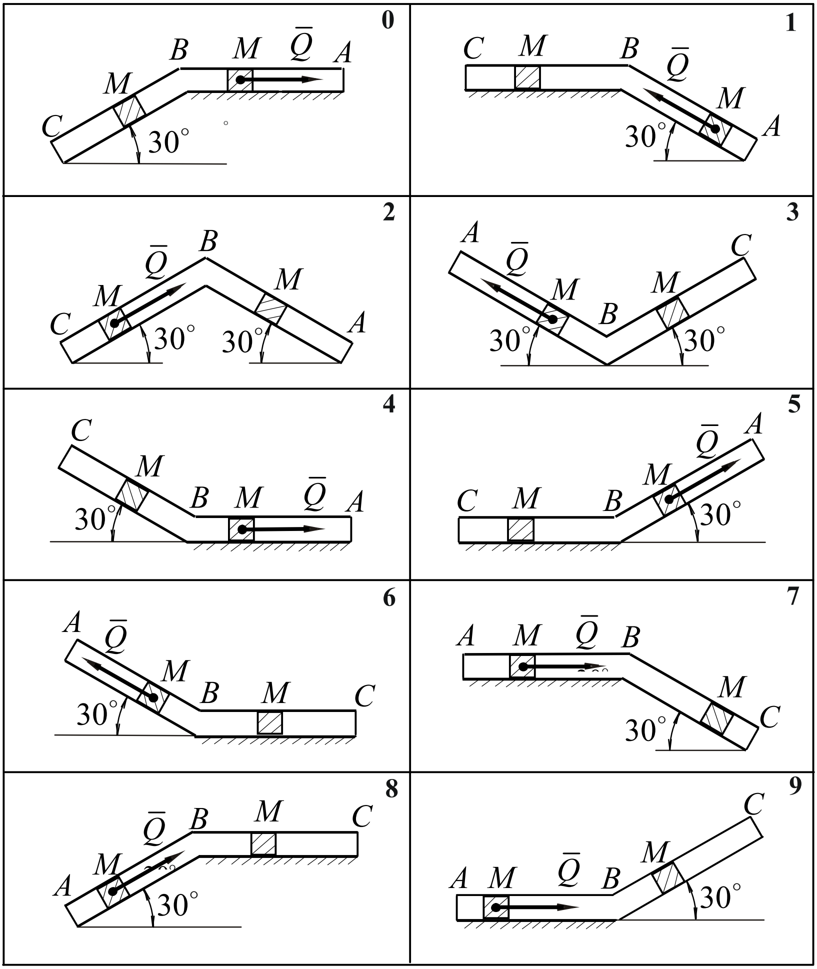


Рис. Д2.1

Таблиця Д2

Номер умови	m кг	V_0 м/с	Q Н	R Н	l м	t_1 с	F_x Н
0	1,6	18	4	$0,4V$	–	2	$4\cos(4t)$
1	4,8	10	12	$0,2V^2$	4	–	$-6\sin(4t)$
2	3	22	9	$0,5V^2$	–	3	$2\cos(2t)$
3	4	12	12	$0,8V^2$	2,5	–	$-8\cos(4t)$
4	2	20	6	$0,4V$	–	2,5	$2\sin(4t)$
5	8	10	16	$0,5V^2$	4	–	$-6\sin(2t)$
6	1,8	24	5	$0,3V$	–	2	$9t^2$
7	6	14	22	$0,6V^2$	5	–	$-3\cos(2t)$
8	4,5	24	9	$0,5V$	–	3	$3\sin(2t)$
9	2,4	12	6	$0,8V^2$	1,5	–	$\cos(2t)$

Д2.6. Приклад розв’язування завдання теми Д 2

Дано: $m = 8кг$; $V_0 = 10\,м/с$; $Q = 16\ Н$; $R = 0,5V^2$; $l = 4\ м$; $F_x = -6\sin(2t)$; $f = 0,2$; $g \approx 10\ м/с^2$.

Визначити: $x = f(t)$ де $x = BM$ на ділянці BC.

Розв’язування. Оскільки сили, що діють на вантаж, в точці B змінюються, то розв’язання задачі розбивається на дві частини. Спочатку розглядається рух вантажу на ділянці AB, а потім на ділянці BC.

1. Розглянемо рух вантажу на ділянці ***AB*** (рис. Д 2.2), вважаючи його за матеріальну точку.

Зобразимо вантаж в довільному положенні M_1 на цій ділянці та покажемо всі сили, що на нього діють: $\overline{G}$ – сила тяжіння;. $\overline{Q}$ – задана сила; $\overline{R}$ – сила опору середовища і $\overline{N}_1$ – реакція поверхні.

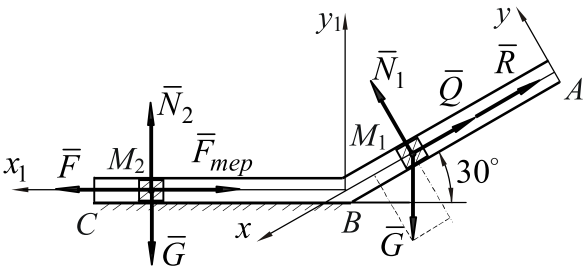


Рис. Д2.2

Початок прямокутної системи координат Axy розташуємо в точці A, а за додатний напрям осі Ax приймаємо напрям руху вантажу.

Запишемо основне рівняння динаміки у векторному вигляді і в проекціях на вісь Ax:

$$m\overline{a} = \overline{G} + \overline{N}_1 + \overline{Q} + \overline{R}. \tag{1}$$

$$ma_x = G_x + N_{1x} + Q_x + R_x. \tag{2}$$

Враховуючи, що:

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = \frac{dV}{dt}; \qquad G_x = G\sin 30^\circ = mg\sin 30^\circ;$$

$$N_{1x} = 0; \quad Q_x = -Q = -16 \ H; \quad R_x = -R = -05V^2,$$

рівняння (2) набуде вигляду:

$$m\frac{dV}{dt} = mg\sin 30^\circ - 16 - 0{,}5V^2.$$

Поділивши на m і підставивши числові значення, дістанемо:

$$\frac{dV}{dt} = g\sin 30^\circ - \frac{16}{m} - \frac{0,5}{m}V^2 =$$

$$= 10 \cdot 0,5 - \frac{16}{8} - \frac{0,5}{8}V^2 = 3 - 0,06V^2.$$

Оскільки за умовою задачі треба визначити швидкість тіла в залежності від пройденої відстані x , то в останньому рівнянні перейдемо від змінної t до змінної x :

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dx}{dt}\frac{dV}{dx} = V\frac{dV}{dx} = 3 - 0,06V^2. \qquad (3)$$

Розділимо змінні в рівнянні (3), перетворимо його до вигляду, що зручний для інтегрування, та проінтегруємо:

$$\frac{VdV}{3 - 0,06V^2} = dx; \qquad \frac{2VdV}{0,06V^2 - 3} = -2dx;$$

$$\frac{d(V^2)}{0,06(V^2 - 50)} = -2dx; \qquad \int \frac{d(V^2)}{(V^2 - 50)} = -0,12\int dx;$$

$$\ln(V^2 - 50) = -0,12x + C_1. \qquad (4)$$

За початковими умовами $x = x_0 = 0$; $V = V_0$ визначаємо сталу інтегрування C_1:

$$C_1 = \ln(V_0^2 - 50).$$

Тоді рівняння (4) набуде вигляду:

$$\ln(V^2 - 50) = -0,12x + \ln(V_0^2 - 50)\,,$$

звідки знаходимо вираз для V :

$$\ln(V^2 - 50) - \ln(V_0^2 - 50) = -0,12x;$$

$$\ln\frac{(V^2-50)}{(V_0^2-50)}=-0,12x;$$

$$\frac{(V^2-50)}{(V_0^2-50)}=e^{-0,12x};$$

$$V^2-50=e^{-0,12x}(V_0^2-50);$$

$$V=\sqrt{e^{-0,12x}(V_0^2-50)+50}; \qquad (5)$$

Вважаючи в рівнянні (5) $x=l=4$ *м*; $V_0=10\,м/с$; $e=2,7$, визначимо швидкість V_B вантажу в точці *B*:

$$V_B=\sqrt{2,7^{-0,12\cdot 4}(10^2-50)+50}=9\ \ м/с.$$

Ця швидкість буде початковою швидкістю руху вантажу на ділянці *BC*.

2. Розглянемо рух вантажу на ділянці *BC*. Зобразимо вантаж (рис. Д2.2) в довільному положенні M_2 на цій ділянці та покажемо всі сили, що на нього діють: $\overline{G}$ – сила тяжіння; $\overline{N}_2$ – реакція поверхні; $\overline{F}_{тер}$ – сила тертя і задана сила $\overline{F}$, яку спрямуємо в напрямі руху.

Оберемо систему координат для цієї ділянки. Початок прямокутної системи координат Bx_1y_1 розташуємо в точці *B*, а за додатний напрям осі Bx_1 приймаємо напрям руху вантажу.

Запишемо основне рівняння динаміки у векторному вигляді і в проекціях на вісь Bx_1:

$$m\overline{a}=\overline{G}+\overline{N}+\overline{F}_{тер}+\overline{F};$$

$$ma_x=G_x+N_x+F_{тер}+F_x. \qquad (6)$$

Враховуючи, що

$$a_x = \frac{dVx}{dt} = \frac{dV}{dt};$$

$$G_x = 0; \quad N_x = 0; \quad F_x = -6\sin(2t);$$

$$F_{тер.x} = -F_{тер.} = -fN = -fmg,$$

рівняння (6) набуде вигляду:

$$m\frac{dV}{dt} = -fmg - 6\sin(2t)\,.$$

Поділивши на m і підставивши числові значення f, g та m, дістанемо:

$$\frac{dV}{dt} = -fg - \frac{6}{m}\sin(2t) = -0{,}2\cdot 10 - \frac{6}{8}\sin(2t);$$

$$\frac{dV}{dt} = -2 - 0{,}75\sin(2t). \qquad (7)$$

Розділимо змінні та проінтегруємо рівняння (7). Інтегрування виконаємо за допомогою визначених інтегралів, верхня границя яких змінна. При цьому нижньою границею будуть початкові умови. При зміні часу від $t_0 = 0$ до t швидкість точки змінюється від $V_0 = V_B$ до V, а координата від $x_0 = 0$ до x:

$$\int_{V_B}^{V} dV = -2\int_0^t dt - 0{,}75\int_0^t \sin(2t)\,dt\,;$$

$$V - V_B = -2t\Big|_0^t + \frac{0{,}75}{2}\cos 2t\Big|_0^t =$$

$$= -2t + 0{,}375\left[\cos 2t - \cos 2\cdot 0\right];$$

$$V - V_B = -2t + 0{,}375(\cos 2t - 1) =$$

$$= -2t + 0{,}375\cos 2t - 0{,}375;$$

$$V - V_B = -2t + 0{,}375\cos 2t - 0{,}375;$$

$$V = -2t + 0{,}375\cos 2t + 8{,}625.$$

Враховуючи, що $V = dx/dt$, дістанемо:

$$V = \frac{dx}{dt} = -2t + 0{,}375\cos 2t + 8{,}625\,.$$

Розділяємо змінні та інтегруємо:

$$dx = -2t\,dt + 0{,}375 \cdot \cos(2t)\,dt + 8{,}625\,dt;$$

$$\int_0^x dx = -2\int_0^t t\,dt + 0{,}375\int_0^t \cos(2t)\,dt + 8{,}625\int_0^t dt;$$

$$x = -t^2 + \frac{0{,}375}{2}\sin 2t + 8{,}625t;$$

$$x = -t^2 + 0{,}187\sin 2t + 8{,}625t.$$

Відповідь: закон руху вантажу на ділянці BC:

$$x = -t^2 + 0{,}187\sin 2t + 8{,}625t.$$

де x – в метрах, t – в секундах.

Тема Д 3. КОЛИВАННЯ ТА ДИНАМІКА ВІДНОСНОГО РУХУ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ

Д 3.1. Стислі відомості з теорії коливань матеріальної точки

Завдання Д3 охоплює одночасно коливання та динаміку відносного руху матеріальної точки.

Коливання матеріальної точки

Механічними періодичними коливаннями *називають такі рухи матеріальної точки, при яких вона по черзі переміщується в двох протилежних напрямах відносно положення рівноваги, і які повторюються через визначені проміжки часу*.

Основними характеристиками періодичних коливань є період і частота.

Періодом коливань *(T) називається найменший проміжок часу, після якого повторюються значення величин, які характеризують коливальну систему і змінюються при коливаннях.*

За період коливань система здійснює одне *повне коливання.*

Одиницею періоду в СІ є *секунда*:

$$[T]=1\,c.$$

Частотою коливань *(ν) називається величина, яка обернена періоду і дорівнює числу повних коливань за секунду,*

$$\nu = 1/T.$$

Одиницею частоти в СІ є *Герц* (*Гц*):

$$[\nu]=1\,c^{-1}=1\,Гц.$$

Коловою, або циклічною, або кутовою частотою (k) *називається величина, яка дорівнює числу повних коливань за* 2π *секунд, тобто:*

$$k = 2\pi\nu \quad \text{або} \quad k = 2\pi / T. \qquad \text{(Д3.1)}$$

Одиницею колової частоти в СІ є *радіан в секунду*:

$$[k] = 1\frac{рад}{с}.$$

Найбільш важливим різновидом періодичних коливань є гармонічні коливання.

Гармонічними коливаннями *називаються такі періодичні коливання, при яких величини, що їх характеризують, змінюються за часом за законом синуса або косинуса.*

Необхідною умовою виникнення коливань є дія в довільний момент часу на матеріальну точку, яка виведена з положення рівноваги, ***відновлювальною сили*** $\overline{F}$, що напрямлена до положення рівноваги та повертає точку в це положення. Простішим прикладом відновлювальної сили є сила пружності деформованої пружини, яка пропорційна деформації та напрямлена в сторону, протилежну деформації.

Крім відновлювальної сили на матеріальну точку, яка здійснює коливання, діють і інші сили. В залежності від характеру цих сил прийнято розрізняти *вільні, вільні загасаючі та вимушені коливання матеріальної точки.*

Подальше розглядання проведемо на прикладі *пружного маятника* (пружини, до одного кінця якої прикріплено тіло масою m, а другий кінець закріплений, причому масою пружини у порівнянні з масою тіла нехтують), який розташований на гладкій горизонтальній поверхні.

Таким чином, дослідження коливань зводиться до розв'язання оберненої задачі динаміки матеріальної точки (тіла) M, яка рухається вздовж горизонтальної осі, наприклад Ox, під дією або тільки відновлювальної сили (рис. Д3.1), або під дією відновлювальної сили та інших сил (рис. Д3.2 і Д3.3).

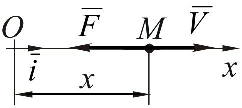


Рис. Д3.1

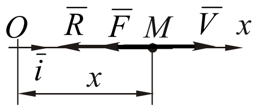


Рис. Д3.2

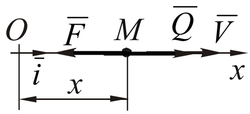


Рис. Д3.3

Початок відліку точку O розташуємо в місці, де знаходиться точка (тіло) M при недеформованій пружині. Відновлювальна сила у всіх випадках буде сила пружності деформованої пружини, яка дорівнює:

$$\overline{F} = -cx\overline{i}, \qquad \text{(Д3.2)}$$

де c – жорсткість або коефіцієнт пружності пружини,
x – зміщення або відхилення точки (тіла) від положення рівноваги при деформації пружини,
$\overline{i}$ – орт осі Ox.

Вільними коливаннями матеріальної точки *називаються такі її коливання, які відбуваються під дією тільки* ***відновлювальної сили*** (рис. Д3.1).

У цьому випадку *диференціальне рівняння руху точки має вигляд:*

$$\ddot{x} + k^2 x = 0, \qquad \text{(Д3.3)}$$

де $k^2 = c/m$ і $k = \sqrt{c/m}$ – колова частота коливань.

Період коливань дорівнює

$$T = 2\pi / k = 2\pi\sqrt{m/c}. \qquad \text{(Д3.4)}$$

Розв'язок однорідного лінійного диференціального рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами (Д3.3) або, що теж саме, *закон руху точки має вигляд*:

$$x = C_1 \cos k\,t + C_2 \sin k\,t, \qquad (Д3.5)$$

де C_1 і C_2 – сталі інтегрування, які визначаються за початковими умовами.

Якщо початкові умови при $t = t_0$ мають вигляд: $x = x_0$; $V = V_0$, то $C_1 = x_0$ та $C_2 = V_0 / k$, і

$$x = x_0 \cos kt + \frac{V_0}{k} \sin kt. \qquad (Д3.6)$$

В амплітудній формі запису розв'язок має вигляд:

$$x = a \cdot \sin(k\,t + \alpha), \qquad (Д3.7)$$

де $a \equiv x_{\max}$ – ***амплітуда коливань*** (найбільше за величиною відхилення точки від положення рівноваги);

$(kt + \alpha)$ – ***фаза коливань*** (визначає миттєве значення координати x точки в довільний момент часу t);

α – ***початкова фаза коливань*** (визначає значення координати точки в початковий момент часу t_0).

Амплітуда та початкова фаза коливань визначаються за початковими умовами.

Якщо початкові умови мають при $t = t_0$ вигляд: $x = x_0$; $V = V_0$, то :

$$a = \sqrt{x_0^2 + \frac{V_0^2}{k^2}} \quad \text{і} \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{kx_0}{V_0}. \qquad (Д3.8)$$

Таким чином, в цьому випадку матеріальна точка буде здійснювати *незатухаючі гармонічні коливання*, графік яких при $\alpha = 0$ наведено на рис. Д3.4. Період T і частота ν коливань не залежать від початкових умов руху точки та *виявляються незмінними характеристиками коливальної системи.*

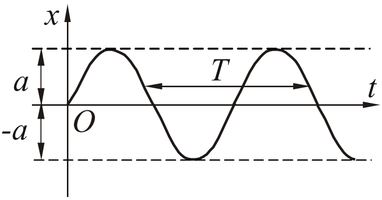


Рис. Д3.4

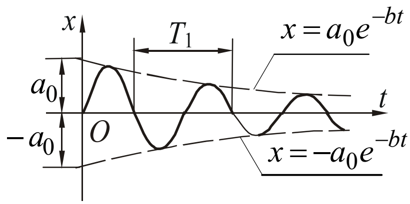


Рис. Д3.5

Якщо на матеріальну точку крім відновлювальної сили буде діяти стала за величиною та напрямом сила $\overline{P} = const$, то характер коливань не зміниться, тобто точка буде як і раніше здійснювати *незатухаючі гармонічні коливання*, але уже відносно *нового положення рівноваги* O_1, яке буде зміщено відносно попереднього положення рівноваги O на величину ***статичного відхилення точки*** $\delta_{ст.}$ в бік дії сили $\overline{P}$ При цьому величини $\delta_{ст.}$, k і T визначаються за формулами:

$$\delta_{ст.} = P / c;$$
$$k = \sqrt{P / \left(m\delta_{ст.}\right)}; \qquad (Д3.9)$$
$$T = 2\pi\sqrt{m\delta_{ст.} / P}$$

Вільними затухаючими коливаннями *матеріальної точки називаються такі її коливання, які відбуваються під дією* ***відновлювальної сили*** $\overline{F}$ ***і сили опору середовища*** $\overline{R}$ (рис. Д3.2).

Нехай сила опору $\overline{R}$ пропорційна швидкості V точки, тобто $\overline{R} = -\mu\overline{V}$, де μ – *коефіцієнт опору.* У цьому випадку *диференціальне рівняння руху* точки має вигляд:

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + k^2 x = 0, \tag{Д3.10}$$

де $b = \mu / 2m$ –коефіцієнт затухання,

$k = \sqrt{c / m}$ – колова частота вільних гармонічних коливань.

Розв'язання цього однорідного лінійного диференціального рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами залежить від співвідношення між b і k.

У *випадку малого опору* $(b < k)$ *розв'язок має вигляд*:

$$x = e^{-bt}(C_1 \cos k_1 t + C_2 \sin k_1 t), \tag{Д3.11}$$

або в *амплітудній формі*

$$x = a_0 e^{-bt} \sin(k_1 t + \alpha). \tag{Д3.12}$$

В цих рівняннях C_1, C_2, a_0 і α – сталі інтегрування, які визначаються за початковими умовами, $k_1 = \sqrt{k^2 - b^2}$ – *умовна частота затухаючих коливань.*

Тоді *умовний період* T_1 *затухаючих коливань*

$$T_1 = \frac{2\pi}{k_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - b^2}}. \tag{Д3.13}$$

Як видно з (Д3.12), рух точки носить коливальний характер, тому що координата x періодично змінює свій знак. Множник e^{-bt} вказує на те, що амплітуда коливань з часом зменшується. Тому такі коливання називаються ***затухаючими*** (рис. Д3.5).

У випадках великого опору $(b > k)$ та *критичного опору* $(b = k)$ в розв'язок диференціального рівняння руху точки не входять знакозмінні періодичні функції і тому *рух точки не буде коливальним.* Такий рух називається ***аперіодичним*** *(неперіодичним).*

Якщо $b > k$, то в цьому випадку розв'язок рівняння (Д3.10) має вигляд:

$$x = C_1 e^{-(b+r)t} + C_2 e^{-(b-r)t}, \tag{Д3.14}$$

де $r = \sqrt{b^2 - r^2}$ (Д3.15)

Якщо $b = k$, то розв'язок рівняння (Д3.10) має вигляд:

$$x = e^{-bt}\left[x_0 + (x + bx_0)t\right]. \tag{Д3.16}$$

Вимушеними коливаннями *матеріальної точки без урахування сили опору середовища називаються такі коливання, які відбуваються під дією* ***відновлювальної сили*** $\overline{F}$ *та* ***вимушуючої сили*** $\overline{Q}$ (рис. Д3.3), *яка періодично змінюється.*

Нехай проекція вимушуючої сили на вісь, що співпадає з напрямком руху точки, змінюється за законом:

$$Q_x = H\sin\left(pt + \delta\right), \tag{Д3.17}$$

де H – максимальне значення вимушуючої сили;

p – частота зміни вимушуючої сили;

$pt + \delta$ – фаза зміни вимушуючої сили;

δ – початкова фаза зміни вимушуючої сили.

Диференціальне рівняння руху точки M у проекції на вісь Ox має вигляд:

$$m\ddot{x} = -F_x + Q_x = -cx + H\sin\left(pt + \delta\right),$$

або

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}x = \frac{H}{m}\sin\left(pt + \delta\right).$$

Якщо позначити

$$\frac{c}{m} = k^2; \qquad \frac{H}{m} = h,$$

то одержимо диференціальне рівняння вимушених коливань матеріальної точки:

$$\ddot{x} + k^2 x = h\sin\left(pt + \delta\right). \qquad \text{(Д3.18)}$$

Рішення рівняння (3.18) в амплітудній формі, тобто, залежність координати x від часу t, має вигляд:

$$x = a\sin\left(kt + \alpha\right) + A\sin\left(pt + \delta\right), \qquad \text{(Д3.19)}$$

де A – амплітуда вимушених коливань має вигляд:

$$A = \frac{h}{k^2 - p^2}. \qquad \text{(Д3.20)}$$

Із рівняння (3.19) витікає, що рух точки являє собою накладення двох коливальних рухів.

Коливання, які визначаються першим доданком:

$$x_1 = a\sin\left(kt + \alpha\right), \qquad \text{(Д3.21)}$$

мають частоту k вільних гармонічних коливань і називаються ***власними коливаннями матеріальної точки.***

Коливання, які визначаються другим доданком

$$x_2 = A\sin\left(pt + \delta\right), \qquad \text{(Д3.22)}$$

мають частоту p вимушуючої сили $\overline{Q}$ і називаються ***вимушеними коливаннями матеріальної точки.***

Таким чином, при одночасній дії відновлюючої та вимушуючої сил точка здійснює складний коливальний рух, який являє собою результат накладення вільних і вимушених коливань точки.

Необхідно підкреслити, що частота p і період $\tau = \dfrac{2\pi}{p}$ вимушених коливань є також ***частотою і періодом вимушуючої сили.***

Вимушені коливання, частота яких менша за частоту вільних коливань точки, називають ***вимушеними коливаннями малої частоти.***

Вимушені коливання, частота яких більша за частоту вільних коливань, називають ***вимушеними коливаннями великої частоти.***

Фаза вимушених коливань

Якщо $p < k$ (випадок вимушених коливань малої частоти), то $k^2 - p^2 > 0$, і фаза вимушених коливань співпадає з частотою вимушуючої сили. У цьому випадку:

$$A = \frac{h}{k^2 - p^2}.$$

Якщо вимушені коливання відбуваються з великою частотою ($p > k$), то $k^2 - p^2 < 0$, і для того, щоб амплітуда коливань була додатною, її записують у вигляді:

$$A = \frac{h}{p^2 - k^2}.$$

При цьому, фаза вимушених коливань великої частоти дорівнює $pt+\delta-\pi$ і відрізняється від фази вимушучої сили $pt+\delta$ на величину π, тобто фази вимушучої сили і вимушених коливань протилежні.

У випадку вимушених коливань малої частоти точка M завжди відхилена від початку координат O у той бік, в якому спрямована у даний момент вимушуюча сила $\bar{Q}$.

У випадку вимушених коливань великої частоти відхилення точки M від початку координат O завжди протилежне напрямку вимушуючої сили $\bar{Q}$. При цьому в обох випадках максимальне відхилення точки від початку координат відбувається в той момент часу, коли модуль вимушуючої сили досягає максимуму.

Амплітуда вимушених коливань

Статичним відхиленням точки називається величина A_0 (рис.Д3.6), яка визначається із умови:

$$F=c\cdot A_0=H\,.$$

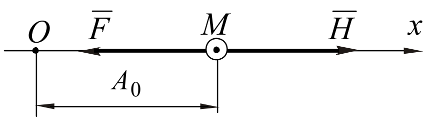


Рис. Д3.6

Звідси

$$A_0=\frac{H}{c}=\frac{H/m}{c/m}=\frac{h}{k^2}\,,$$

де H – максимальне значення вимушуючої сили.

Відношення амплітуди вимушених коливань A до статичного відхилення A_0 називається ***коефіцієнтом динамічності*** η.

При $p < k$:

$$\eta = \frac{A}{A_0} = \frac{\dfrac{h}{k^2 - p^2}}{\dfrac{h}{k^2}} = \frac{k^2}{k^2 - p^2} = \frac{1}{1 - \dfrac{p^2}{k^2}}. \quad \text{(Д3.23)}$$

При $p > k$:

$$\eta = \frac{A}{A_0} = \frac{\dfrac{h}{p^2 - k^2}}{\dfrac{h}{k^2}} = \frac{1}{\dfrac{p^2}{k^2} - 1}. \quad \text{(Д3.24)}$$

Графік зміни коефіцієнта динамічності в залежності від зміни частоти вимушуючої сили (рис.Д3.7) має розрив при значенні $\dfrac{p}{k} = 1$. У цьому випадку коефіцієнт динамічності η збільшується до нескінченності і настає так зване явище ***резонансу***.

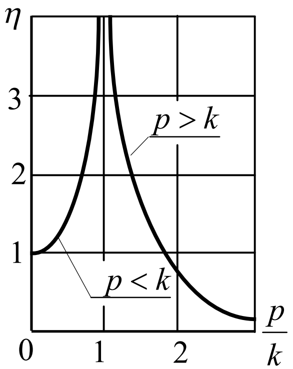


Рис. Д3.8.

Явище резонансу

Явище резонансу виникає коли частоти вимушених і вільних коливань точки збігаються, тобто:

$$p = k.$$

При цьому амплітуда A вимушених коливань точки дорівнює нескінченності і більшість рівнянь вимушених коливань, одержаних за умови $p = k$, втрачають сенс.

Диференціальне рівняння руху при $p = k$, набуде вигляду:

$$\ddot{x} + k^2 x = h \sin(kt + \delta). \qquad (Д3.25)$$

Рівняння (Д3.25) відрізняється від рівняння (Д3.18) тим, що у правій частині стоїть частота k, яка дорівнює частоті власних коливань точки.

Рішення диференціального рівняння (Д3.25) має вигляд:

$$x = a \sin(kt + \alpha) + \frac{h}{2k} t \sin\left(kt + \delta - \frac{\pi}{2}\right). \qquad (Д3.26)$$

При резонансі частота і період вимушених коливань дорівнюють, відповідно, частоті k і періоду T вільних коливань точки, а фаза вимушених коливань $(kt + \delta - \pi/2)$ відстає від фази вимушуючої сили $(kt + \delta)$ на величину $\pi/2$.

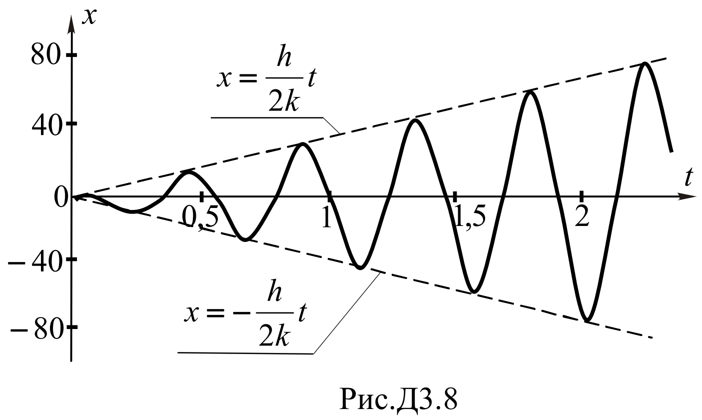


Рис.Д3.8

Графіком відхилень для вимушених коливань під час резонансу є періодична крива, яка нагадує синусоїду (рис.Д3.8), що вписується в область, обмежену прямими

$x = \frac{h}{2k}t$ і $x = -\frac{h}{2k}t$, оскільки $\sin(kt + \delta - \pi/2)$ не більший за одиницю. При $\sin(kt + \delta - \pi/2) = \pm 1$ точки графіка лежать на цих прямих.

Із графіка видно, що амплітуди коливань збільшуються з часом.

Д3.2. Порядок розв'язування задач на коливальний рух матеріальної точки

При розв'язування задач на коливання матеріальної точки рекомендується дотримуватися наступного порядку:

1. Зобразити матеріальну точку у довільному положенні та показати сили, що на неї діють.
2. Обрати систему відліку, початок системи координат розмістити в положенні статичної рівноваги і спрямувати вісь у бік руху точки.
3. Записати початкові умови руху матеріальної точки.
4. Скласти диференціальне рівняння руху матеріальної точки в проекціях на відповідну вісь.
5. Проінтегрувати диференціальне рівняння руху.
6. Використовуючи початкові умови визначити сталі інтегрування.
7. Записати остаточне рівняння руху.

Для визначення кругової частоти k і k_1 та періоду коливань T і T_1 не потрібно інтегрувати диференціальні рівняння руху. Досить тільки скласти диференціальне рівняння руху, визначити коефіцієнт k^2 при координаті x, коефіцієнт $2b$ при проекції швидкості $\dot{x}$ точки та обчислити кругову частоту і період коливань за наведеними вище формулами.

Розглядаючи задачу на вільні коливання матеріальної точки при відсутності сил опору, можна довести розв'язок до результату в загальному вигляді, а вже потім підставити в нього чисельні дані.

Розглядаючи ж задачу на вільні коливання матеріальної точки при наявності сил опору, пропорційних швидкості, чисельні дані треба підставити в складене диференціальне рівняння руху та визначити величини коефіцієнтів b і k, оскільки рішення диференціального рівняння руху при таких коливаннях залежить від співвідношення цих коефіцієнтів (випадки малого опору ($b < k$), великого опору $(b > k)$ та критичного опору $(b = k)$).

Розв'язуючи задачу на вимушені коливання треба визначати числові значення коефіцієнтів диференціального рівняння, оскільки вид часткового рішення цього рівняння залежить від співвідношення коефіцієнтів p і k.

При розв'язуванні задач, в яких потрібно визначити умови, що забезпечують потрапляння матеріальної точки в резонанс, не потрібно інтегрувати диференціальні рівняння руху. Для визначення цих умов достатньо, скориставшись складеним диференціальним рівнянням руху, визначити кругові частоти вільних – k і вимушених p коливань та прирівняти їх між собою.

Д3.3. Контрольні запитання

1. Під дією якої сили відбуваються вільні гармонічні коливання?
2. Який вигляд має диференціальне рівняння вільних гармонічних коливань?
3. Що називається амплітудою, періодом та частотою вільних коливань матеріальної точки?

4. Від яких факторів залежить частота та період вільних коливань?
5. Від яких факторів залежать амплітуда та початкова фаза вільних коливань?
6. Як впливає стала сила на вільні коливання?
7. Як визначається величина статичного відхилення точки?
8. Як записується диференціальне рівняння руху матеріальної точки під дією відновлюючи сили і сили опору, пропорційній швидкості точки?
9. Як визначається сила опору за модулем і напрямком?
10. Від яких параметрів залежить коефіцієнт "*b*", який характеризує опір середовища?
11. При яких значеннях коефіцієнта опору "*b*" рух точки буде коливальним, а при яких - аперіодичним?
12. Записати рівняння затухаючих коливань в амплітудній формі.
13. Що називається періодом затухаючих коливань?
14. Як визначається амплітуда затухаючих коливань?
15. Про що свідчить декремент коливань?
16. За яким законом може змінюватися вимушуюча сила?
17. Як визначається період вимушуючої сили?
18. Чому дорівнює амплітуда вимушених коливань?
19. Як визначається фаза вимушених коливань у випадках вимушених коливань великої і малої частот?
20. Що називається коефіцієнтом динамічності?
21. При яких умовах виникає явище резонансу?

Д3.4. Приклади розв'язування задач

Задача 1

Визначити максимальне видовження $\Delta_{\max}$ пружини AB (рис. 1, а) у сантиметрах при вільних вертикальних коливаннях вантажу, якщо він прикріплений у точці B до недеформованої пружини та відпущений зі стану спокою. Статична деформація пружини під дією вантажу дорівнює $\delta_{cm} = 2см$.

Розв'язування. Зобразимо вантаж у довільному положенні (рис.1, б) та покажемо сили, що на нього діють: силу пружності пружини $\overline{F}$, яка є відновлювальною силою, і силу тяжіння вантажу $\overline{G}$.

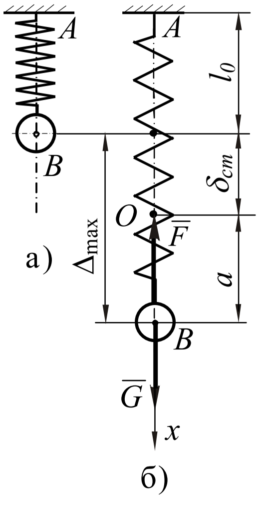


Рис. 1

Оскільки на вантаж крім відновлювальної сили $\overline{F}$, діє і стала сила – сила тяжіння вантажу $\overline{G}$, то центр коливань змістимо відносно кінця недеформованої пружини в напрямі сили тяжіння на δ_{cm} (точка O). Вісь Ox спрямуємо в напрямі руху вантажу.

Коли вантаж буде знаходитися у крайньому нижньому положенні (рис.1, б), то максимальне видовження пружини буде складатися зі статичної деформації δ_{cm} та амплітуди a вільних коливань:

$$\Delta_{\max} = \delta_{cm} + a \, .$$

Величину амплітуди можна визначити з виразу:

$$a = \sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{k^2}} \, , \qquad (1)$$

де x_0 – початкове положення вантажу;

$\dot{x}_0$ – початкова швидкість вантажу.

За умовою задачі при $t = 0$: $x_0 = -\delta_{cm}$; $\dot{x}_0 = 0$.

Підставляючи значення x_0 та $\dot{x}_0$ у рівняння (1), дістанемо:

$$a = \sqrt{(-\delta_{cm})^2 + \frac{0}{k^2}} = \delta_{cm}.$$

Таким чином, максимальне видовження пружини дорівнює:

$$\Delta_{\max} = \delta_{cm} + \delta_{cm} = 2\delta_{cm} = 2 \cdot 2 = 4\,см.$$

Відповідь: $\Delta_{\max} = 4\,см.$

Задача 2

Визначити еквівалентний коефіцієнт жорсткості $c_{екв}$ двох пружин та період коливань вантажу P вагою $18\,H$, підвішеного до цих пружин, якщо пружини з'єднані послідовно (рис. 1,а) і паралельно (рис. 2). Коефіцієнти жорсткості пружин: $c_1 = 2\,H/м$; $c_2 = 18\,H/м$.

Розв'язування: У випадку послідовного з'єднання пружин загальне статичне подовження δ_{cm} буде дорівнювати сумі статичних подовжень першої та другої пружини:

$$\delta_{cm} = \delta_{1cm} + \delta_{2cm}. \tag{1}$$

Оскільки кожна з пружин у статичному положенні розтягується силою P, то згідно з (Д3.9):

$$\delta_{1cm} = P/c_1, \qquad \delta_{2cm} = P/c_2.$$

З урахуванням останніх співвідношень формула (1) набуде вигляду:

$$\delta_{cm} = \frac{P}{c_1} + \frac{P}{c_2} = \frac{P(c_1 + c_2)}{c_1 \cdot c_2}.$$

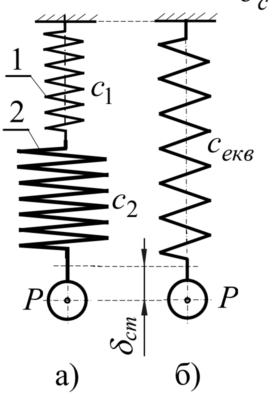


Рис. 1

Для еквівалентної розрахункової схеми з однією пружиною (рис. 1,б):

$$\delta_{cm} = \frac{P}{c_{екв}^{пос}},$$

де $c_{екв}^{пос}$ – коефіцієнт жорсткості еквівалентної пружини, яка заміняє дві послідовно з'єднані пружини.

Оскільки статичне видовження заданої (рис. 1, а) і еквівалентної (рис. 1, б) схем повинно бути рівним, то:

$$\frac{P}{c_{екв}^{пос}} = \frac{P(c_1 + c_2)}{c_1 \cdot c_2} \quad \Rightarrow \quad c_{екв}^{пос} = \frac{c_1 \cdot c_2}{c_1 + c_2}.$$

З урахуванням числових даних:

$$c_{екв}^{пос} = \frac{2 \cdot 18}{2 + 18} = 1{,}8 \quad Н/м.$$

Період коливань за формулою (Д3.9):

$$T_{пос} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{P}\delta_{cm}} = 2\pi\sqrt{\frac{\delta_{cm}}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{P}{g \cdot c_{екв}^{пос}}};$$

$$T_{пос} = 2\pi\sqrt{\frac{18}{9{,}81 \cdot 1{,}8}} = 6{,}34 \quad с.$$

У випадку паралельного з’єднання пружин (рис. 2) їх статичне видовження буде однаковим:

$$\delta_{1ст} = \delta_{2ст} = \delta_{ст}.$$

Виходячи з формули (Д3.9) пружини будуть розтягнуті зусиллями:

$$P_1 = \delta_{ст} \cdot c_1; \qquad P_2 = \delta_{ст} \cdot c_2.$$

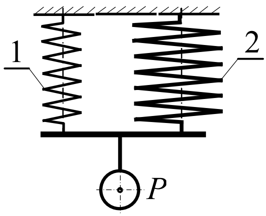


Рис. 2

Таким чином, сила тяжіння вантажу P буде зрівноважуватися двома вертикальними зусиллями P_1 і P_2 пружин, тобто, $P = P_1 + P_2$, або:

$$P = \delta_{ст}c_1 + \delta_{ст}c_2.$$

З іншого боку, для еквівалентної розрахункової схеми з однією пружиною (рис. 1,б):

$$P = \delta_{ст}c_{екв}^{пар},$$

де $c_{екв}^{пар}$ – коефіцієнт жорсткості еквівалентної пружини, яка заміняє дві паралельні пружини.

Відкіля

$$c_{екв}^{пар} = c_1 + c_2.$$

З урахуванням числових даних:

$$c_{екв}^{пар} = 2 + 18 = 20\ Н/м.$$

Період коливань за формулою (Д3.9):

$$T_{пар} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{P}\delta_{ст}} = 2\pi\sqrt{\frac{P}{g \cdot c_{екв}^{пар}}};$$

$$T_{пар} = 2\pi\sqrt{\frac{18}{9{,}81 \cdot 20}} = 1{,}9\ c\,.$$

Відповідь: $c_{екв}^{пос} = 1{,}8\ Н/м, \qquad T_{пос} = 6{,}34\ c;$

$$c_{екв}^{пар} = 20\ Н/м, \qquad T_{пар} = 1{,}9\ c\,.$$

Задача 3

Диференціальне рівняння руху матеріальної точки має вигляд $m\ddot{x} + 4\dot{x} + 2x = 0$.

Визначити максимальне значення маси точки, при якому рух буде аперіодичним.

Розв'язування. Рух точки буде аперіодичним, якщо виконується умова

$$b \geq k\,, \tag{1}$$

де $b = \dfrac{\mu}{2m}$ – коефіцієнт опору;

$k = \sqrt{\dfrac{c}{m}}$ – частота вільних незатухаючих коливань.

Задане диференціальне рівняння $m\ddot{x} + 4\dot{x} + 2x = 0$ приведемо до канонічного вигляду, розділивши на масу:

$$\ddot{x} + \frac{4}{m}\dot{x} + \frac{2}{m} = 0\,.$$

Звідси:

$$2b = \frac{4}{m}; \qquad b = \frac{2}{m}; \qquad k^2 = \frac{2}{m}; \qquad k = \sqrt{\frac{2}{m}}\,.$$

З урахуванням одержаних значень b і k, умова (1) набуде вигляду:

$$\frac{2}{m} \geq \sqrt{\frac{2}{m}}\,. \tag{2}$$

Вирішуємо нерівність (2) відносно маси m:

$$\frac{4}{m^2} \geq \frac{2}{m} \quad \Rightarrow \quad 4 \geq 2m \quad \Rightarrow \quad m \leq 2 \;\; кг.$$

Відповідь: максимальне значення маси $m = 2\;кг$.

Задача 4

Тіло вагою $P = 19{,}6\,H$, що підвішене на пружині, яку сила $P_1 = 10\,H$ розтягує на $\Delta l = 20\,см$, при русі зустрічає опір, величина якого пропорційна першому ступеню швидкості. Сила опору при швидкості $V = 1\,см/с$ дорівнює $R = 0{,}2\;H$. У початковий момент пружина була розтягнута відносно положення рівноваги на $\Delta = 5\,см$, і тіло почало рухатися без початкової швидкості, тобто, $V_0 = 0$.

Визначити рівняння руху тіла $x = f(t)$.

Розв'язування. Перед тим, як записати загальне рівняння руху точки, необхідно з'ясувати, при якому опорі відбувається рух, тобто порівняти значення коефіцієнта b і кругової частоти k:

$$b = \frac{\mu}{2m}; \qquad k = \sqrt{\frac{c}{m}}.$$

З умови задачі витікає:

$$c = \frac{P_1}{\Delta l} = \frac{10}{20} = 0{,}5 \;\; H/см.$$

$$b = \frac{\mu}{2\cdot m} = \frac{R}{V\cdot 2m} = \frac{0{,}2\cdot g}{2\cdot P} = \frac{0{,}2\cdot 981}{2\cdot 19{,}6} = 5 \;\; c^{-1},$$

$$k = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{0{,}5\cdot 981}{19{,}6}} = 5 \;\; c^{-1}.$$

Таким чином, $b = k$, тобто коефіцієнт опору дорівнює круговій частоті, і рух точки буде аперіодичним.

У цьому випадку закон руху точки визначається залежністю (Д3.16):

$$x = e^{-bt}\left[x_0 + \left(\dot{x}_0 + bx_0\right)t\right]. \qquad (1)$$

Початкові умови: $x_0 = \Delta = 5\ см$; $\dot{x}_0 = V_0 = 0$. Підставляючи їх у рівняння (1), одержимо:

$$x = e^{-5t}\left[5 + \left(0 + 5 \cdot 5\right)t\right] = 5e^{-5t}\left(5t + 1\right). \qquad (2)$$

Відповідь: $x = 5e^{-5t}\left(5t + 1\right)$, *см.*

Знайшовши за формулою (2) значення x в залежності від часу t (табл. 1), побудуємо графік $x = f\left(t\right)$ (рис.1).

Таблиця 1

$t\,(c)$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
$x\,(см)$	5	3,68	2,0	0,99	0,46	0,2

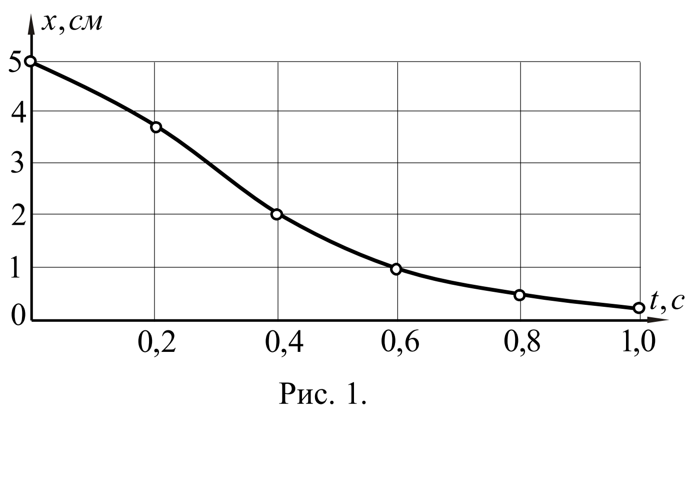


Рис. 1.

Із графіка видно, що при $b = k$ точка не коливається і швидко наближається до положення рівноваги $(x = 0)$. З'ясуємо тепер, чи переходить вантаж положення статичної рівноваги. Для цього прирівняємо x у рівнянні (2) до нуля:

$$x = 5e^{-5t}(5t + 1) = 0.$$

Моменти часу, у які вантаж знаходиться у положенні статичної рівноваги, визначаються із рівнянь:

$$5e^{-5t} = 0 \qquad \text{і} \qquad 5t + 1 = 0 .$$

Із першого рівняння витікає: $t_1 = \infty$.

Із другого рівняння : $t_2 = -0,2 \;\; c$.

Значення $t_1 = \infty$ відповідає згасанню руху, від'ємне значення $t_2 = -0,2 \; c$ показує на відсутність переходу тіла через положення статичної рівноваги.

Задача 5

На тіло, яке підвішене до пружини, діє вертикальна вимушуюча сила $Q = 30 \sin 20t$.

Визначити коефіцієнт динамічності, якщо кругова частота вільних коливань тіла $k = 25 \; c^{-1}$.

Розв'язування. Порівнюючи задане в умовах значення для вимушуючої сили з виразом (Д3.17):

$$Q = H \sin(pt + \delta) ,$$

отримаємо, що частота її зміни $p = 20 \;\; c^{-1}$.

Оскільки $p < k$, то в даній задачі маємо вимушені коливання малої частоти.

Коефіцієнт динамічності η у цьому випадку відповідно з (Д3.23) дорівнює:

$$\eta = \frac{1}{1 - \frac{p^2}{k^2}} = \frac{1}{1 - \frac{20^2}{25^2}} = 2,78 .$$

Відповідь: $\eta = 2,78$.

Задача 6

Диференціальне рівняння коливального руху матеріальної точки має вигляд: $\ddot{x} + 36x = 50\sin\left(5t + 0,8\right)$.

Визначити коефіцієнт динамічності η.

Розв'язування. Порівнюючи задане в умовах задачі рівняння коливального руху з (Д3.18):

$$\ddot{x} + k^2 x = h\sin(pt + \delta) ,$$

отримаємо:

$$k = 6\ c^{-1}; \qquad p = 5\ c^{-1} .$$

Оскільки $p < k$, то маємо вимушені коливання малої частоти і коефіцієнт динамічності η дорівнює:

$$\eta = \frac{1}{1 - \frac{p^2}{k^2}} = \frac{1}{1 - \frac{25}{36}} = 3,27 .$$

Відповідь: $\eta = 3,27$.

Задача 7

Матеріальна точка M масою $m = 2\ кг$ здійснює прямолінійні коливання вздовж осі Ox (рис.1) під дією вимушуючої сили $Q = 4\cos t\ (H)$ та відновлювальної сили

$\overline{F}$, модуль якої пропорційний відстані точки від початку координат (коефіцієнт пропорційності дорівнює 8 $кг/с^2$).

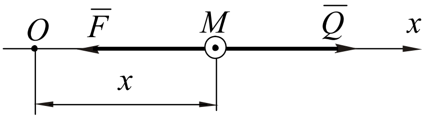


Рис. 1

Визначити закон руху точки, якщо в початковий момент $x_0 = 0$ та $V_0 = 0$.

Розв'язування: Диференціальне рівняння руху матеріальної точки M у даному випадку має вигляд:

$$2\ddot{x} = -8x + 4\cos t,$$

або

$$\ddot{x} + 4x = 2\cos t = 2\sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right). \qquad (1)$$

Рівняння (1) є диференціальним рівнянням вимушених коливань (Д3.18), у якому: $k^2 = 4$ (тобто $k = 2$); $h = 2$; $p = 1$ та $\delta = \frac{\pi}{2}$.

Оскільки $p \neq k$, то загальне рішення рівняння (1) знаходимо з формули (Д3.19):

$$x = a\sin(kt + \alpha) + A\sin(pt + \delta).$$

У нашому випадку це рівняння матиме вигляд:

$$x = a\sin(2t + \alpha) + A\sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right),$$

або

$$x = a\sin(2t + \alpha) + A\cos t.$$

Враховуючи, що $k > p$, то $A = \frac{h}{k^2 - p^2} = \frac{2}{4 - 1} = \frac{2}{3}$.

Остаточно,

$$x = a\sin(2t+\alpha) + \frac{2}{3}\cos t\,. \qquad (2)$$

Перейдемо до знаходження сталих a та α. Для цього здиференціюємо рівняння (2) за часом t:

$$V = \dot{x} = 2a\cos(2t+\alpha) - \frac{2}{3}\sin t\,. \qquad (3)$$

Підставимо у рівняння (2) та (3) початкові умови. При $t_0 = 0$: $x_0 = 0$, $V_0 = \dot{x}_0 = 0$.

Тоді

$$0 = a\sin(2\cdot 0+\alpha) + \frac{2}{3}\cos 0\,, \qquad (2')$$

$$0 = 2a\cos(2\cdot 0+\alpha) - \frac{2}{3}\sin 0\,, \qquad (3')$$

або

$$0 = a\sin\alpha + \frac{2}{3}, \qquad 0 = 2a\cos\alpha\,.$$

З другого рівняння знаходимо сталу α. Оскільки $a \neq 0$, то нулю дорівнює $\cos\alpha$, тобто $\alpha = \pi/2$.

З першого рівняння знаходимо сталу a:

$$0 = a\sin\frac{\pi}{2} + \frac{2}{3}, \qquad a = -\frac{2}{3}.$$

Таким чином, шуканий закон руху точки M буде мати вигляд:

$$x = -\frac{2}{3}\sin\left(2t + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{2}{3}\cos t = \frac{2}{3}(\cos t - \cos 2t).$$

Відповідь: $x = \dfrac{2}{3}(\cos t - \cos 2t)$.

Д3.5. Стислі відомості з теорії динаміки відносного руху матеріальної точки

Відносним рухом *матеріальної точки називається її рух відносно неінерціальної (рухомої) системи відліку, яка рухається відносно інерціальної (умовно нерухомої) системи.*

Основне рівняння динаміки відносного руху матеріальної точки має вигляд:

$$m\overline{a}_{від.} = \sum \overline{F}_k + \overline{\Phi}_{пер.} + \overline{\Phi}_{кор.}, \qquad (Д3.27)$$

де $\overline{a}_{від.}$ – відносне прискорення точки,

$\overline{F}_k$ – сили, які діють на точку (як активні, так і реакції в’язей);

$\overline{\Phi}_{пер.}$ – *переносна сила інерції*, $\overline{\Phi}_{пер.} = -m\overline{a}_{пер.}$*і*;

$\overline{\Phi}_{кор.}$ – *кориолісова сила інерції*, $\overline{\Phi}_{кор.} = -m\overline{a}_{кор.}$.

Відзначимо, що сили інерції напрямлені в бік, протилежний відповідним прискоренням.

Таким чином, зміна відносного руху точки може відбуватися за двома причинами: по-перше, внаслідок взаємодії точки з іншими матеріальними точками (активні сили та реакції в’язей), по-друге, внаслідок прискореного руху рухомої системи відліку відносно нерухомої системи відліку (сили інерції).

Коріолісова сила інерції

$$\vec{\Phi}_{кор.} = -m\overline{a}_{кор.} = -2m\left[\overline{\omega}_{пер.} \times \overline{V}_{від.}\right] =$$

$$= 2m\left[\overline{V}_{від.} \times \overline{\omega}_{пер.}\right], \qquad (Д3.28)$$

напрямлена перпендикулярно площині, в якій лежать вектори $\overline{V}_{від.}$ та $\overline{\omega}_{пер.}$, за правилом правого гвинта і за величиною дорівнює:

$$\Phi_{кор.} = 2mV_{від.}\omega_{пер.}\sin\angle(\overline{V}_{від.}{}^{\wedge}\overline{\omega}_{пер.}), \quad (Д3.21)$$

де $\overline{V}_{від.}$ – відносна швидкість точки,

$\overline{\omega}_{пер.}$ – кутова швидкість обертання рухомої системи координат відносно нерухомої.

Кориолісова сила інерції дорівнює нулю, якщо точка нерухома відносно рухомої системи відліку $(V_{від.} = 0)$, або якщо рухома система відліку рухається поступально відносно нерухомої $(\omega_{пер.} = 0)$, або вектори $\overline{V}_{від.}$ та $\overline{\omega}_{пер.}$ напрямлені або в одну сторону, або в протилежні сторони $(\sin\angle(\overline{V}_{від.}{}^{\wedge}\overline{\omega}_{пер.}) = 0)$.

Переносна сила інерції

Конкретний вигляд переносної сили інерції $\overline{\Phi}_{пер.}$ буде залежати від того, який тип руху здійснює рухома система відліку відносно нерухомої.

1. *Рухомі осі координат здійснюють нерівномірне обертання навколо нерухомої осі.*

В цьому випадку

$$\overline{\Phi}_{пер.} = \overline{\Phi}^{n}_{пер.} + \overline{\Phi}^{\tau}_{пер.}, \quad (Д3.29)$$

де $\overline{\Phi}^{n}_{пер.} = -m\overline{a}^{n}_{пер.}$ – *відцентрова сила інерції*,

$\overline{\Phi}^{\tau}_{пер.} = -m\overline{a}^{\tau}_{пер.}$ – *обертальна сила інерції* (рис. Д3.10).

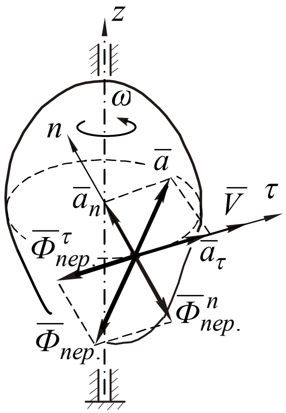


Рис. Д3.10

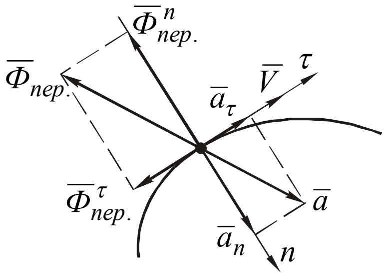


Рис. Д3.11

Величини відцентрової та обертальної сил інерції визначаються за формулами:

$$\Phi^{n}_{пер.} = ma^{n}_{пер.} = m \ \ \omega^{2}_{пер.}h; \\ \Phi^{\tau}_{пер.} = ma^{\tau}_{пер.} = m\varepsilon_{пер.}h, \tag{Д3.30}$$

де $\omega_{пер.}$ та $\varepsilon_{пер.}$ – кутова швидкість та кутове прискорення рухомої системи відліку;

h – відстань від матеріальної точки до осі обертання.

Тоді основне рівняння динаміки відносного руху точки має вигляд:

$$m\overline{a}_{від.} = \sum \overline{F}_k + \overline{\Phi}^{n}_{пер.} + \overline{\Phi}^{\tau}_{пер.} + \overline{\Phi}_{кор.}. \tag{Д3.31}$$

2. *Рухомі осі координат здійснюють рівномірне обертання навколо нерухомої осі.*

У цьому випадку $\omega_{пер.} = const$, тобто, $\varepsilon_{пер.} = 0$ і $\Phi^{\tau}_{пер.} = 0$.

Основне рівняння динаміки відносного руху точки в цьому випадку має вигляд:

$$m\bar{a}_{\text{від.}} = \sum \bar{F}_k + \bar{\Phi}^n_{\text{пер.}} + \bar{\Phi}_{\text{кор.}}. \qquad (\text{Д}3.32)$$

3. *Рухомі осі координат рухаються поступально.*

У цьому випадку $\omega_{\text{пер.}} = 0$, тобто, $\Phi_{\text{кор.}} = 0$ при будь-якому поступальному русі.

Якщо поступальний рух прямолінійний, то

$$\bar{\Phi}_{\text{пер.}} = -m\bar{a}_{\text{пер.}}, \qquad (\text{Д}3.33)$$

де $\vec{a}_{\text{пер.}} \equiv \vec{a}_0$ – прискорення початку рухомої системи координат відносно нерухомої системи.

За величиною

$$\Phi_{\text{пер.}} = ma_{\text{пер.}} = ma_0 = m\dot{V}_0. \qquad (\text{Д}3.34)$$

Основне рівняння динаміки відносного руху точки тоді буде мати вигляд:

$$m\bar{a}_{\text{від.}} = \sum \bar{F}_k + \bar{\Phi}_{\text{пер.}}. \qquad (\text{Д}3.35)$$

Якщо поступальний рух криволінійний, то

$$\bar{\Phi}_{\text{пер.}} = \bar{\Phi}^n_{\text{пер.}} + \bar{\Phi}^\tau_{\text{пер.}}, \qquad (3.36)$$

де $\bar{\Phi}^n_{\text{пер.}} = -m\bar{a}^n_{\text{пер.}}$ – *нормальна сила інерції*,

$\bar{\Phi}^\tau_{\text{пер.}} = -m\bar{a}^\tau_{\text{пер.}}$ – *дотична сила інерції* (рис. Д3.10).

Величини нормальної та дотичної сил інерції визначаються за формулами:

$$\begin{aligned} \Phi^n_{\text{пер.}} &= ma^n_{\text{пер.}} = ma^n_0 = mV_0^2/\rho; \\ \Phi^\tau_{\text{пер.}} &= ma^\tau_{\text{пер.}} = ma^\tau_0 = m\dot{V}_0, \end{aligned} \qquad (\text{Д}3.37)$$

де V_0 – алгебраїчна величина швидкості початку рухомої системи координат відносно нерухомої системи;

ρ – радіус кривини траєкторії.

Основне рівняння динаміки відносного руху точки тоді буде мати вигляд:

$$m\overline{a}_{від.} = \sum \overline{F}_k + \overline{\Phi}_{пер.}^{n} + \overline{\Phi}_{пер.}^{\tau}. \qquad (Д3.38)$$

4. *Точка знаходиться в стані спокою відносно рухомої системи координат.*

Оскільки $V_{від.} = 0$, то $\vec{a}_{від.} = 0$ і $\overline{\Phi}_{кор.} = 0$ і *рівняння відносного спокою матеріальної точки* буде мати вигляд:

$$\sum \overline{F}_k + \overline{\Phi}_{пер.} = 0. \qquad (3.39)$$

Д3.6. Порядок розв’язування задач динаміки відносного руху матеріальної точки

1. Зобразити матеріальну точку в довільному положенні.
2. Розкласти абсолютний рух матеріальної точки на відносний і переносний, вибрати нерухому систему координат, пов’язану з тілом, яке здійснює переносний рух.
3. Записати початкові умови відносного руху матеріальної точки.
4. Зобразити на рисунку активні сили, які прикладені до точки.
5. Визначити переносне і коріолісове прискорення і переносну та коріолісову сили інерції, додати їх до активних сил, які діють на матеріальну точку.

6. Записати рівняння відносного руху у векторній формі.
7. Спроектувати векторне рівняння на осі вибраної рухомої системи координат.
8. Проінтегрувати одержані диференціальні рівняння, визначити сталі інтегрування за допомогою початкових умов.
9. Визначити величини, які шукаються.

Д3.7. Контрольні запитання

1. Який модуль і який напрямок мають переносна і коріолісова сили інерції?
2. У чому полягає різниця між диференціальними рівняннями відносного і абсолютного руху матеріальної точки?
3. У чому полягає принцип відносності класичної механіки?
4. Які системи відліку називаються інерціальними?

Д3.8. Приклади розв'язування задач

Задача 1

Куля M масою $m = 0{,}2$ *кг* рухається зі швидкістю $V_{від} = 19{,}62$ *м/с* відносно вертикальної трубки, яка на відстані l= 0,5 *м* прикріплена до вертикального валу 1 (рис.1). Вал обертається зі сталою кутовою швидкістю ω = 5 *рад/с*.

Визначити переносну силу інерції кулі.

Розв'язування. Спочатку визначимо, що відносним рухом точки M буде її рух відносно труби, а переносним

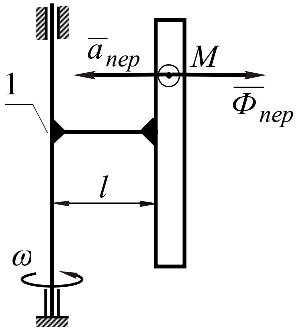


Рис.1

рухом буде обертання вертикального валу 1, тобто, можна позначити його кутову швидкість $\omega_{пер}$ замість ω. У загальному випадку переносна сила інерції дорівнює:

$$\overline{\Phi}_{пер} = -m\overline{a}_{пер},$$

де m – маса матеріальної точки, $\overline{a}_{пер}$ – переносне прискорення.

Оскільки рухома система координат, яка пов'язана з тілом, здійснює обертальний рух, то переносне прискорення складається з нормального та тангенціального прискорень:

$$\overline{a}_{пер} = \overline{a}^{n}_{пер} + \overline{a}^{\tau}_{пер}.$$

У цьому випадку

$$\overline{\Phi}_{пер} = \overline{\Phi}^{n}_{пер} + \overline{\Phi}^{\tau}_{пер},$$

де

$$\Phi^{n}_{пер} = ma^{n}_{пер} = m\omega^{2}_{пер} \cdot l,$$

$$\Phi^{\tau}_{пер} = ma^{\tau}_{пер} = m\varepsilon_{пер} \cdot l,$$

а l – відстань від точки до осі обертання.

Оскільки вал 1 обертається зі сталою кутовою швидкістю, то $\varepsilon_{пер}$ дорівнює нулю і $\overline{\Phi}^{\tau}_{пер} = 0$.

Таким чином, у даній задачі переносне прискорення точки складається тільки з нормального прискорення:

$$\overline{a}_{пер} = \overline{a}^{n}_{пер}.$$

Нормальне прискорення точки M спрямовано ліворуч, до центру обертання точки (рис.1), а переносна сила інерції $\overline{\Phi}_{пер}$ – у сторону, протилежну $\overline{a}^{n}_{пер}$.

За модулем переносна сила інерції дорівнює:

$$\Phi^{n}_{пер} = ma_{пер} = m\omega^{2}_{пер} \cdot l = 0{,}2 \cdot 5^{2} \cdot 0{,}5 = 2{,}5 \;\; H.$$

Відповідь : $\Phi^{n}_{пер} = 2{,}5 \;\; H.$

Задача 2

Трубка обертається навколо осі O (рис.1) за законом $\varphi = t^{2}$. У трубці рухається куля M масою $m = 0{,}1 \;\; кг$ за законом $OM = S = 0{,}2t^{3}$.

Визначити модуль коріолісової сили інерції кулі у момент часу $t_{1} = 1 \;\; c$.

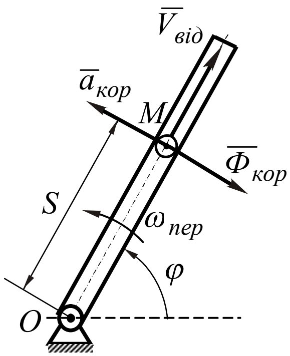


Рис.1

Розв'язування. Коріолісова сила інерції за визначенням дорівнює:

$$\overline{\Phi}_{кор} = -m\overline{a}_{кор}, \qquad (1)$$

де $\overline{a}_{кор}$ – коріолісове прискорення точки.

Спрямована $\overline{\Phi}_{кор}$ у бік, протилежний коріолісову прискоренню.

В загальному випадку $a_{кор}$ за величиною дорівнює:

$$a_{кор} = 2\omega_{пер} \cdot V_{від} \cdot \sin\left(\overline{\omega}_{пер} \,\hat{}\, \overline{V}_{від}\right). \qquad (2)$$

Обчислимо модуль коріолісового прискорення відповідно до умов даної задачі.

Обертання трубки навколо осі O є переносним рухом для кулі M. Закон обертального руху заданий:

$$\varphi = t^2 ,$$

отже, закон зміни кутової швидкості має вигляд:

$$\omega_{пер} = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d}{dt}\left(t^2\right) = 2t ,$$

а при $t_1 = 1\ \ c$ – $\omega_{пер} = 2\ \ рад/с$.

Оскільки значення кутової швидкості додатне, то обертання трубки збігається з напрямом кута відліку φ (рис.1).

Переміщення кулі вздовж трубки є відносним рухом, рівняння якого задано у вигляді:

$$S = 0{,}2t^3 .$$

Тоді, швидкість відносного руху кулі визначиться із виразу:

$$V_{від} = \frac{dS}{dt} = \frac{d}{dt}\left(0{,}2t^3\right) = 0{,}6t^2 ,$$

а при $t_1 = 1\ \ c$ – $V_{від} = 0{,}6\,м/с.$

Оскільки вектор кутової швидкості $\overline{\omega}_{пер}$ є перпендикулярний площині, в якій обертається трубка, то кут між векторами $\overline{\omega}_{пер}$ і $\overline{V}_{від}$ дорівнює 90°. Таким чином, модуль коріолісового прискорення згідно з (2) дорівнює:

$$a_{кор} = 2 \cdot 2 \cdot 0{,}6 \cdot \sin 90^\circ = 2{,}4\ м/с^2 ,$$

а величина коріолісової сили інерції:

$$\Phi_{кор} = m \cdot a_{кор} = 0{,}1 \cdot 2{,}4 = 0{,}24\ \ H.$$

Визначимо напрям $\overline{\Phi}_{кор}$. Згідно з (1) $\overline{\Phi}_{кор}$ спрямована у бік, протилежний коріолісову прискоренню $\overline{a}_{кор}$. Якщо (за правилом Жуковського) повернути вектор відносної швидкості $\overline{V}_{від}$ навколо точки M на 90° у бік переносного обертання (тобто, проти руху годинникової стрілки), то повернутий вектор укаже нам напрям $\overline{a}_{кор}$ (рис. 1) і, таким чином, напрям коріолісової сили інерції $\overline{\Phi}_{кор}$.

Відповідь: $\Phi_{кор} = 0{,}24\ H.$

Задача 3

Тіло вагою 2 H покладено на гладку грань тригранної призми, друга грань якої лежить на горизонтальній площині.

Визначити, яке горизонтальне прискорення повинна мати призма, щоб тіло не рухалось відносно призми, і який тиск спричиняє тіло на призму у цьому випадку, якщо $\alpha = 30^\circ$.

Розв'язування. Якщо тіло знаходиться у стані відносного спокою по відношенню до призми, яка рухається, то геометрична сума прикладених до тіла сил і переносної сили інерції дорівнює нулю.

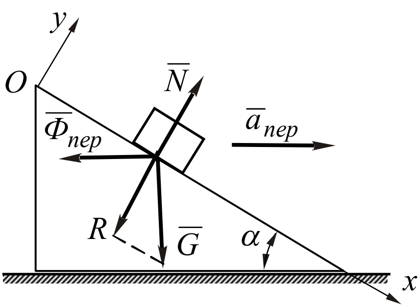


Рис.1

До тіла прикладені сила тяжіння $\overline{G}$ і реакція гладкої поверхні $\overline{N}$ (рис.1). Умовно прикладемо до тіла переносну силу інерції $\overline{\Phi}_{пер}$ (модуль якої $\Phi_{пер} = ma_{пер}$, де m – маса тіла), спрямовану протилежно переносному прискоренню $\bar{a}_{пер}$, яке являє собою прискорення призми.

Тоді

$$\bar{G} + \bar{N} + \bar{\Phi}_{пер} = 0.$$

Спроектуємо це рівняння на осі Ox і Oy, які пов'язані з рухомою призмою:

$$G\sin\alpha - \Phi_{пер}\cos\alpha = 0 \tag{1}$$

$$N - G\cos\alpha - \Phi_{пер}\sin\alpha = 0. \tag{2}$$

З першого рівняння знайдемо модуль прискорення $\bar{a}_{пер}$:

$$mg\sin\alpha - ma_{пер}\cos\alpha = 0,$$

$$a_{пер} = g\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = g \cdot tg\alpha.$$

З урахуванням числових значень:

$$a_{пер} = 9{,}81\mathrm{tg}30^\circ = 5{,}66\ м/с^2.$$

Визначимо переносну силу інерції:

$$\Phi_{пер} = ma_{пер} = mg\ tg\alpha = G\ \mathrm{tg}\alpha.$$

Із другого рівняння визначимо модуль реакції призми:

$$N = G\cos\alpha + \Phi_{пер}\sin\alpha = G\cos\alpha + G\ \mathrm{tg}\alpha\sin\alpha =$$

$$= G\ \cos\alpha\left(1 + \mathrm{tg}^2\alpha\right).$$

З урахуванням числових значень:

$$N = 2\cos 30^\circ\left(1 + \mathrm{tg}^2 30^\circ\right) = 2{,}3\ Н.$$

Тиск R тіла на призму за модулем дорівнює реакції N, але спрямований у протилежний бік.

Відповідь: $a_{пер} = 5{,}66\ м/с^2$, $R = 2{,}3\ Н.$

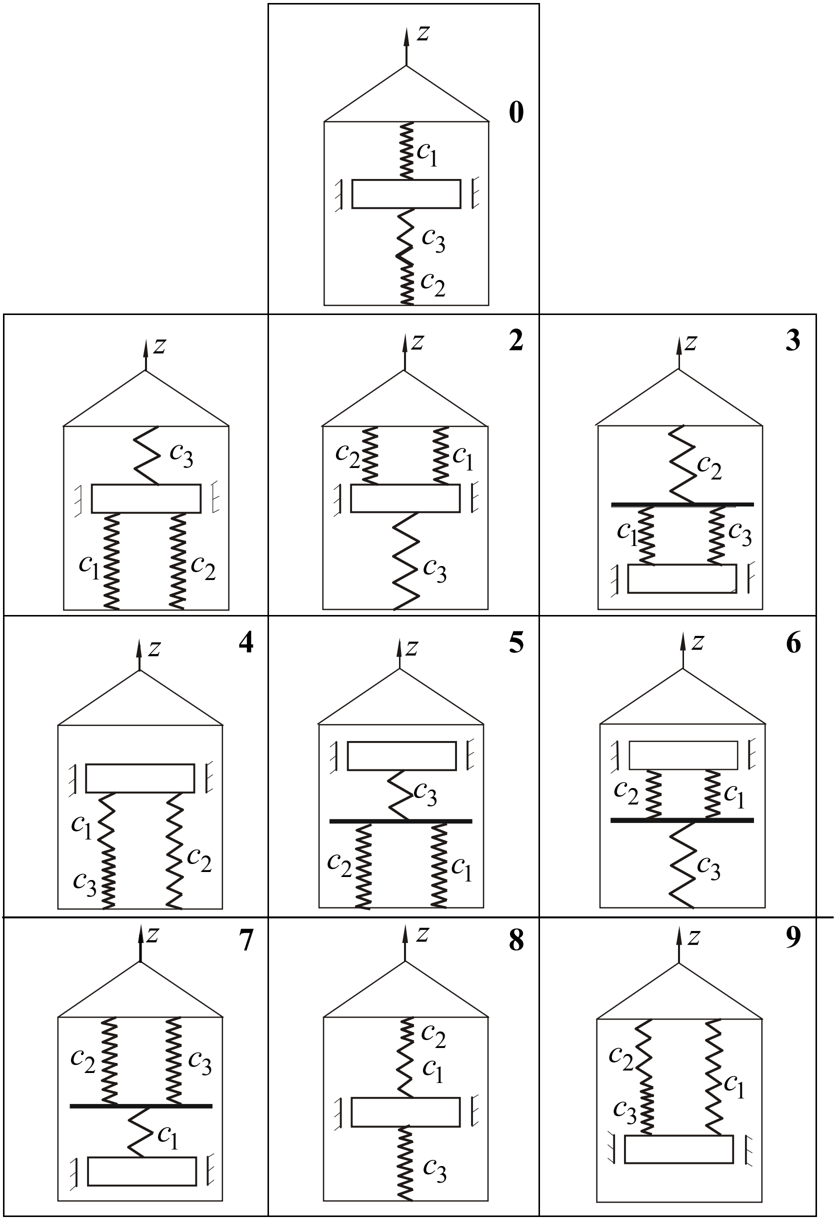
Д3.9. Завдання теми Д3

Вантаж масою m закріплений на пружному підвісі в ліфті (рис. Д3.12), який рухається вертикально угору за законом $z = 0{,}5\alpha_1 t^2 + \alpha_2 \sin(\omega t) + \alpha_3 \cos(\omega t)$ де z – в метрах, t – в секундах. Крім сил тяжіння $\overline{G}$ та пружності $\overline{F}_{пр.}$ у деяких варіантах на вантаж діє ще сила опору середовища, модуль якої $R = \mu V$, де V – швидкість вантажу відносно ліфту.

Знайти закон руху вантажу відносно ліфту $x = f(t)$. Масою пружини та з'єднувальної планки знехтувати та прийняти $g \approx 10\ м/с^2$.

Нагадуємо, що схема підвісу (рис. Д3.12) визначається першою цифрою шифру, а номер варіанту в таблиці Д3.1 визначається другою цифрою шифру.

В таблиці Д3.1 крім коефіцієнтів α_1, α_2 і α_3 позначено: c_1, c_2, c_3 – жорсткості пружин; λ_0 – видовження пружини з еквівалентною жорсткістю в початковий момент часу $t_0 = 0$; V_0 – початкова швидкість вантажу відносно ліфту (напрямлена так, як додатний напрямок осі x). Якщо у стовпцях c_1, c_2, c_3 стоїть "–", це значить, що відповідна пружина відсутня і на рисунку зображатися не повинна. Якщо при цьому кінець однієї з пружин, яка залишилася, є вільним, його слід прикріпити у відповідному місці або до тіла, або до стелі (підлоги) ліфту; те ж слід зробити, якщо вільними будуть кінці обох пружин, що з'єднані планкою. Умова $\mu = 0$ означає, що сила опору середовища R відсутня.



z
0
c_1
c_3
c_2
z
c_3
c_1
c_2
z
2
c_2
c_1
c_3
z
3
c_2
c_1
c_3
z
4
c_1
c_3
c_2
z
5
c_3
c_2
c_1
z
6
c_2
c_1
c_3
z
7
c_2
c_3
c_1
z
8
c_2
c_1
c_3
z
9
c_2
c_3
c_1

Рис. Д3.12

Таблиця Д3.1

Номер умови	m, *кг*	c_1, *Н/м*	c_2, *Н/м*	c_3, *Н/м*	α_1, *м/с*^{2}	α_2, *м*	α_3, *м*	ω, *1/с*	μ, *Н·с/м*	λ_0, *м*	V_0, *м/с*
0	0,8	–	240	120	-1,5g	0	0	–	8	0,1	0
1	0,5	–	100	150	0	0,8	0	5	0	0	4
2	1	240	–	160	0	0	0,5	6	0	0	0
3	1	300	150	–	0	0,1	0	15	0	0	0
4	2	–	400	400	0	0	0,1	16	0	0	0
5	0,5	80	120	–	g	0	0	–	6	0,15	0
6	0,4	50	200	–	0	0	0,2	20	0	0,15	0
7	1	200	–	300	1,5g	0	0	–	20	0	3
8	0,5	120	–	180	0	0,1	0	20	0	0	0
9	0,4	60	–	120	-g	0	0	–	4	0	2

Вказівки. Спочатку треба зобразити розрахункову схему, для чого пружини, які прикріплені до вантажу (за умовами задачі їх буде дві), замінити однією з еквівалентною жорсткістю $c_{екв} = c,$ зробивши відповідний розрахунок. Якщо вантаж прикріплений до пружин, які з'єднані послідовно, то $c = \dfrac{c_1 \cdot c_2}{c_1 + c_2}$. Якщо вантаж, прикріплений до пружин, які з'єднані паралельно, або знаходиться між двома пружинами, то $c = c_1 + c_2$. Початок O координатних осей Oxy розташувати в положенні статичної рівноваги вантажу при нерухомому ліфті; напрямити вісь x в бік видовження пружини, а вантаж зобразити в поточному положенні, коли пружина розтягнута $(x > 0)$.

Потім необхідно скласти диференціальне рівняння відносного руху (відносно ліфта) вантажу, який розглядається в задачі, для чого приєднати до діючих сил переносну силу інерції. При цьому слід пам'ятати, що сила інерції напрямлена протилежно відповідному прискоренню. Отримане лінійне неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку слід проінтегрувати з урахуванням початкових умов.

Д3.10. Приклад розв'язування теми Д3

Дано: $m = 0{,}5\ кг$; $c_1 = 80\ Н/м$; $c_2 = 120\ Н/м$;

$\alpha_1 = g$; $\alpha_2 = 0$; $\alpha_3 = 0$; $\omega = 0$; $V_0 = 0$;

$z = 0{,}5\,\alpha_1 t^2 = 5t^2$; $R = \mu \cdot V = \mu\,\dot{x}$;

$\mu = 6\ Н \cdot с/м$; $\lambda_0 = 0{,}15 м$; $g \approx 10\ м/с^2$.

Визначити: $x = f(t)$.

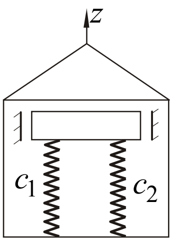


Рис.Д3.13

Розв'язування. Замінюємо систему з двох пружин (рис. Д3.13) однією пружиною з еквівалентною жорсткістю. Оскільки пружини встановлені паралельно, то жорсткість еквівалентної пружини дорівнює:

$$c = c_1 + c_2 = 80 + 120 = 200\ Н/м.$$

Створимо розрахункову схему коливальної системи (рис.Д3.14).

При нерухомому ліфті в положенні статичної рівноваги вантажу еквівалентна пружина, довжина якої в недеформованому стані l_0, під дією сили тяжіння $\overline{G}$ буде стиснута на величину $\delta_{ст}$.

Із умови рівноваги витікає, що:

$$c\delta_{ст.} = G \Rightarrow \delta_{ст.} = \frac{G}{c} = \frac{mg}{c} = \frac{0{,}5 \cdot 10}{200} = 0{,}025\ м.$$

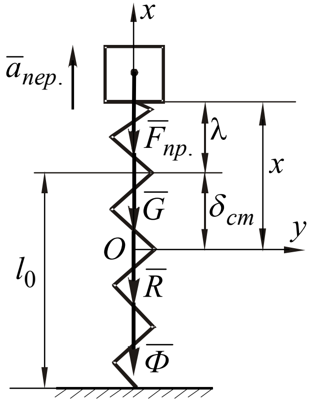


Рис. Д3.14

Пов'яжемо з ліфтом рухому систему відліку Oxy, початок O якої розташуємо в положенні статичної рівноваги вантажу, а вісь Ox спрямуємо вертикально угору (в бік видовження пружини).

Розглянемо вантаж в положенні, при якому $x > 0$ і пружина розтягнута на величину λ.

Зобразимо всі сили, що діють на вантаж: $\overline{G}$ – сила тяжіння, $\overline{F}_{пр.}$ – сила пружності, $\overline{R}$ – сила опору середовища, $\overline{\Phi}$ – переносна сила інерції.

Запишемо рівняння відносного руху вантажу у векторній формі та в проекціях на вісь Ox:

$$m\overline{a}_{від.} = \overline{G} + \overline{F}_{пр.} + \overline{R} + \overline{\Phi}, \tag{1}$$

$$ma_{від.x} = G_x + F_{пр.x} + R_x + \Phi_x, \tag{2}$$

В рівнянні (2):

$$a_{від.x} = \ddot{x}; \qquad G_x = -G = -mg;$$

$$F_{пр.x} = -F_{пр.} = -c\lambda = -c(x - \delta_{ст.}) = -cx + c\delta;$$

$$R_x = -R = -\mu\dot{x}; \quad \Phi_x = -\Phi = -ma_{пер.x}.$$

Враховуючи, що осі x та z напрямлені однаково, дістанемо $a_{пер.x} = a_{пер.z} = \ddot{z} = (0{,}5\alpha_1 t^2)''_t = \alpha_1 = 10\ м/с^2$. Тоді

$$\Phi_x = -10\ m.$$

Підставляючи всі ці величини в (2) і враховуючи, що $c\delta_{cm} = G = mg$, одержимо:

$$m\ddot{x} = -mg - cx + c\delta_{cm} - \mu\,\dot{x} - 10\,m\,;$$

$$m\ddot{x} = -cx - \mu\dot{x} - 10m. \tag{3}$$

Поділивши на масу m та перегрупувавши складові, дістанемо:

$$\ddot{x} + \frac{\mu}{m}\dot{x} + \frac{c}{m}x = -10\,. \tag{4}$$

Позначивши в рівнянні (4):

$$\frac{\mu}{m} = 2b; \quad \frac{c}{m} = k^2; \quad -10 = d\,,$$

остаточно отримаємо диференціальне рівняння відносного руху вантажу (рівняння затухаючих коливань)*

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + k^2 x = d\,, \tag{5}$$

де $b = \dfrac{\mu}{2m} = \dfrac{6}{2\cdot 0{,}5} = 6c^{-1};\quad k = \sqrt{\dfrac{c}{m}} = \sqrt{\dfrac{200}{0{,}5}} = 20c^{-1}.$

Рівняння (5) лінійне неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку. Його загальний розв'язок є сумою двох розв'язків: x_1 – загального розв'язку однорідного рівняння та x_2 – часткового розв'язку рівняння (5), тобто

$$x = x_1 + x_2\,. \tag{6}$$

Загальний розв'язок однорідного рівняння $\ddot{x} + 2b\dot{x} + k^2 x = 0$ при $b < k$ $(6 < 20)$ має вигляд (Д3.11):

$$x_1 = e^{-bt}(C_1 \cos k_1 t + C_2 \sin k_1 t), \tag{7}$$

де k_1 – умовна частота загасаючих коливань,

$$k_1 = \sqrt{k^2 - b^2} = \sqrt{400 - 36} = 19\ c^{-1}.$$

Тоді з урахуванням, що $b = 6$, дістанемо:

$$x_1 = e^{-6t}(C_1 \cos 19t + C_2 \sin 19t). \tag{8}$$

Частковий розв'язок рівняння (5) будемо шукати у вигляді його правої частини, тобто

$$x_2 = Д = const.$$

Для визначення $Д$ знаходимо $\dot{x}_2 = 0$; $\ddot{x}_2 = 0$ та підставляємо в (5):

$$0 + 2b \cdot 0 + k^2 Д = d.$$

Звідки

$$Д = d / k^2 = -10 / 400 = -0{,}025.$$

Оскільки $x_2 = -0{,}025$, то загальний розв'язок (6) рівняння (5) буде мати вигляд:

$$x = e^{-6t}(C_1 \cos 19t + C_2 \sin 19t) - 0{,}025. \tag{9}$$

∗ У тих варіантах, де $\mu = 0$ (опір середовища не враховується) буде отримано неоднорідне диференціальне рівняння вимушених коливань вигляду $\ddot{x} + k^2 x = d \sin(\omega t)$ або $\ddot{x} + k^2 x = d \cos(\omega t)$, де $d = const$. Загальний розв'язок цих рівнянь $x = x_1 + x_2$, де $x_1 = C_1 \sin(kt) + C_2 \cos(kt)$ – загальний розв'язок однорідного рівняння $\ddot{x} + k^2 x = 0$, а x_2 – частковий розв'язок рівняння $\ddot{x} + k^2 x = d \sin(\omega t)$, який шукають у вигляді правої частини неоднорідного рівняння.

Для визначення сталих інтегрування C_1 та C_2 знайдемо V_x:

$$V_x = \dot{x} = -6e^{-6t}(C_1\cos 19t + C_2\sin 19t) +$$

$$+e^{-6t}(-C_1\cdot 19\cdot\sin 19t + C_2\cdot 19\cdot\cos 19t). \quad (10)$$

В початковий момент часу, коли $t_0 = 0$:

$$V_x = V_0 = 0;$$

$$x_0 = \delta_{cm} + \lambda_0 = 0{,}025 + 0{,}15 = 0{,}175 \ \text{м}.$$

Підставляючи ці початкові дані в рівняння (9) та (10), знаходимо C_1 і C_2:

$$0{,}175 = C_1 - 0{,}025, \ \text{звідки} \ C_1 = 0{,}175 + 0{,}025 = 0{,}2;$$

$$0 = -6C_1 + 19C_2, \ \text{звідки} \ C_2 = \frac{6\cdot C_1}{19} = \frac{6\cdot 0{,}2}{19} = 0{,}06.$$

Таким чином, рівняння (9) набуде остаточного вигляду:

$$x = e^{-6t}(0{,}2\cos 19t + 0{,}06\sin 19t) - 0{,}025, \ \text{м}.$$

Відповідь: закон руху вантажу відносно ліфту

$$x = e^{-6t}(0{,}2\cos 19t + 0{,}06\sin 19t) - 0{,}025.$$

Д3.5. Стислі відомості з теорії динаміки відносного руху матеріальної точки

Відносним рухом *матеріальної точки називається її рух відносно неінерціальної (рухомої) системи відліку, яка рухається відносно інерціальної (умовно нерухомої) системи.*

Основне рівняння динаміки відносного руху матеріальної точки має вигляд:

$$m\overline{a}_{від.} = \sum \overline{F}_k + \overline{\Phi}_{пер.} + \overline{\Phi}_{кор.}, \qquad (Д3.27)$$

де $\overline{a}_{від.}$ – відносне прискорення точки,

$\overline{F}_k$ – сили, які діють на точку (як активні, так і реакції в'язей);

$\overline{\Phi}_{пер.}$ – *переносна сила інерції*, $\overline{\Phi}_{пер.} = -m\overline{a}_{пер.}$*і*;

$\overline{\Phi}_{кор.}$ – *кориолісова сила інерції*, $\overline{\Phi}_{кор.} = -m\overline{a}_{кор.}$.

Відзначимо, що сили інерції напрямлені в бік, протилежний відповідним прискоренням.

Таким чином, зміна відносного руху точки може відбуватися за двома причинами: по-перше, внаслідок взаємодії точки з іншими матеріальними точками (активні сили та реакції в'язей), по-друге, внаслідок прискореного руху рухомої системи відліку відносно нерухомої системи відліку (сили інерції).

Коріолісова сила інерції

$$\vec{\Phi}_{кор.} = -m\overline{a}_{кор.} = -2m\left[\overline{\omega}_{пер.} \times \overline{V}_{від.}\right] =$$

$$= 2m\left[\overline{V}_{від.} \times \overline{\omega}_{пер.}\right], \qquad (Д3.28)$$

напрямлена перпендикулярно площині, в якій лежать вектори $\overline{V}_{від.}$ та $\overline{\omega}_{пер.}$, за правилом правого гвинта і за величиною дорівнює:

$$\Phi_{кор.} = 2mV_{від.}\omega_{пер.}\sin\angle(\overline{V}_{від.}{}^{\wedge}\overline{\omega}_{пер.}), \qquad (Д3.21)$$

де $\overline{V}_{від.}$ – відносна швидкість точки,

$\overline{\omega}_{пер.}$ – кутова швидкість обертання рухомої системи координат відносно нерухомої.

Коріолісова сила інерції дорівнює нулю, якщо точка нерухома відносно рухомої системи відліку ($V_{від.} = 0$), або якщо рухома система відліку рухається поступально відносно нерухомої ($\omega_{пер.} = 0$), або вектори $\overline{V}_{від.}$ та $\overline{\omega}_{пер.}$ напрямлені або в одну сторону, або в протилежні сторони ($\sin\angle(\overline{V}_{від.}{}^{\wedge}\overline{\omega}_{пер.}) = 0$).

Переносна сила інерції

Конкретний вигляд переносної сили інерції $\overline{\Phi}_{пер.}$ буде залежати від того, який тип руху здійснює рухома система відліку відносно нерухомої.

1. *Рухомі осі координат здійснюють нерівномірне обертання навколо нерухомої осі.*

В цьому випадку

$$\overline{\Phi}_{пер.} = \overline{\Phi}^{n}_{пер.} + \overline{\Phi}^{\tau}_{пер.}, \qquad (Д3.29)$$

де $\overline{\Phi}^{n}_{пер.} = -m\overline{a}^{n}_{пер.}$ – *відцентрова сила інерції*,

$\overline{\Phi}^{\tau}_{пер.} = -m\overline{a}^{\tau}_{пер.}$ – *обертальна сила інерції* (рис. Д3.10).

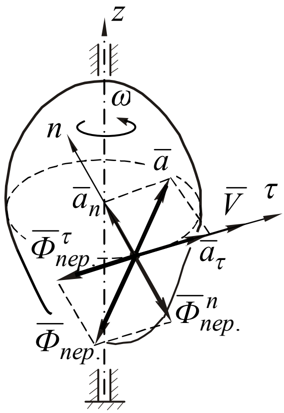


Рис. Д3.10

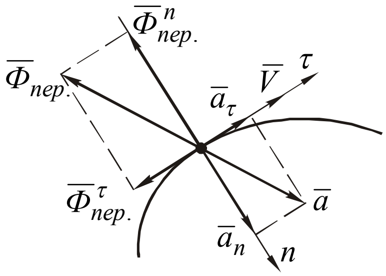


Рис. Д3.11

Величини відцентрової та обертальної сил інерції визначаються за формулами:

$$\Phi^{n}_{пер.} = ma^{n}_{пер.} = m \quad \omega^{2}_{пер.}h;$$
$$\Phi^{\tau}_{пер.} = ma^{\tau}_{пер.} = m\varepsilon_{пер.}h, \qquad (Д3.30)$$

де $\omega_{пер.}$ та $\varepsilon_{пер.}$ – кутова швидкість та кутове прискорення рухомої системи відліку;

h – відстань від матеріальної точки до осі обертання.

Тоді основне рівняння динаміки відносного руху точки має вигляд:

$$m\overline{a}_{від.} = \sum \overline{F}_k + \overline{\Phi}^{n}_{пер.} + \overline{\Phi}^{\tau}_{пер.} + \overline{\Phi}_{кор.}. \qquad (Д3.31)$$

2. *Рухомі осі координат здійснюють рівномірне обертання навколо нерухомої осі.*

У цьому випадку $\omega_{пер.} = const$, тобто, $\varepsilon_{пер.} = 0$ і $\Phi^{\tau}_{пер.} = 0$.

Основне рівняння динаміки відносного руху точки в цьому випадку має вигляд:

$$m\overline{a}_{від.} = \sum \overline{F}_k + \overline{\Phi}^n_{пер.} + \overline{\Phi}_{кор.}. \qquad (Д3.32)$$

3. *Рухомі осі координат рухаються поступально.*

У цьому випадку $\omega_{пер.} = 0$, тобто, $\Phi_{кор.} = 0$ при будь-якому поступальному русі.

Якщо поступальний рух прямолінійний, *то*

$$\overline{\Phi}_{пер.} = -m\overline{a}_{пер.}, \qquad (Д3.33)$$

де $\vec{a}_{пер.} \equiv \vec{a}_0$ – прискорення початку рухомої системи координат відносно нерухомої системи.

За величиною

$$\Phi_{пер.} = ma_{пер.} = ma_0 = m\dot{V}_0. \qquad (Д3.34)$$

Основне рівняння динаміки відносного руху точки тоді буде мати вигляд:

$$m\overline{a}_{від.} = \sum \overline{F}_k + \overline{\Phi}_{пер.}. \qquad (Д3.35)$$

Якщо поступальний рух криволінійний, *то*

$$\overline{\Phi}_{пер.} = \overline{\Phi}^n_{пер.} + \overline{\Phi}^\tau_{пер.}, \qquad (3.36)$$

де $\overline{\Phi}^n_{пер.} = -m\overline{a}^n_{пер.}$ – *нормальна сила інерції*,

$\overline{\Phi}^\tau_{пер.} = -m\overline{a}^\tau_{пер.}$ – *дотична сила інерції* (рис. Д3.10).

Величини нормальної та дотичної сил інерції визначаються за формулами:

$$\begin{aligned} \Phi^n_{пер.} &= ma^n_{пер.} = ma^n_0 = mV_0^2 / \rho; \\ \Phi^\tau_{пер.} &= ma^\tau_{пер.} = ma^\tau_0 = m\dot{V}_0, \end{aligned} \qquad (Д3.37)$$

де V_0 – алгебраїчна величина швидкості початку рухомої системи координат відносно нерухомої системи;

ρ – радіус кривини траєкторії.

Основне рівняння динаміки відносного руху точки тоді буде мати вигляд:

$$m\overline{a}_{від.} = \sum \overline{F}_k + \overline{\Phi}^n_{пер.} + \overline{\Phi}^\tau_{пер.}. \qquad (Д3.38)$$

4. *Точка знаходиться в стані спокою відносно рухомої системи координат.*

Оскільки $V_{від.} = 0$, то $\vec{a}_{від.} = 0$ і $\overline{\Phi}_{кор.} = 0$ і *рівняння відносного спокою матеріальної точки* буде мати вигляд:

$$\sum \overline{F}_k + \overline{\Phi}_{пер.} = 0. \qquad (3.39)$$

Д3.6. Порядок розв'язування задач динаміки відносного руху матеріальної точки

1. Зобразити матеріальну точку в довільному положенні.
2. Розкласти абсолютний рух матеріальної точки на відносний і переносний, вибрати нерухому систему координат, пов'язану з тілом, яке здійснює переносний рух.
3. Записати початкові умови відносного руху матеріальної точки.
4. Зобразити на рисунку активні сили, які прикладені до точки.

5. Визначити переносне і коріолісове прискорення і переносну та коріолісову сили інерції, додати їх до активних сил, які діють на матеріальну точку.
6. Записати рівняння відносного руху у векторній формі.
7. Спроектувати векторне рівняння на осі вибраної рухомої системи координат.
8. Проінтегрувати одержані диференціальні рівняння, визначити сталі інтегрування за допомогою початкових умов.
9. Визначити величини, які шукаються.

Д3.7. Контрольні запитання

1. Який модуль і який напрямок мають переносна і коріолісова сили інерції?
2. У чому полягає різниця між диференціальними рівняннями відносного і абсолютного руху матеріальної точки?
3. У чому полягає принцип відносності класичної механіки?
4. Які системи відліку називаються інерціальними?

Д3.8. Приклади розв'язування задач

Задача 1

Куля M масою $m = 0{,}2$ *кг* рухається зі швидкістю $V_{від} = 19{,}62$ *м/с* відносно вертикальної трубки, яка на відстані $l = 0{,}5$ *м* прикріплена до вертикального валу 1 (рис.1). Вал обертається зі сталою кутовою швидкістю $\omega = 5$ *рад/с*.

Визначити переносну силу інерції кулі.

Розв'язування. Спочатку визначимо, що відносним рухом точки M буде її рух відносно труби, а переносним

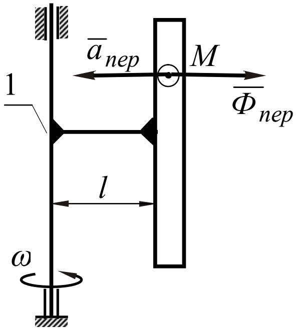


Рис.1

рухом буде обертання вертикального валу 1, тобто, можна позначити його кутову швидкість $\omega_{пер}$ замість ω. У загальному випадку переносна сила інерції дорівнює:

$$\bar{\Phi}_{пер} = -m\bar{a}_{пер},$$

де m – маса матеріальної точки, $\bar{a}_{пер}$ – переносне прискорення.

Оскільки рухома система координат, яка пов'язана з тілом, здійснює обертальний рух, то переносне прискорення складається з нормального та тангенціального прискорень:

$$\bar{a}_{пер} = \bar{a}^{n}_{пер} + \bar{a}^{\tau}_{пер}.$$

У цьому випадку

$$\bar{\Phi}_{пер} = \bar{\Phi}^{n}_{пер} + \bar{\Phi}^{\tau}_{пер},$$

де

$$\Phi^{n}_{пер} = ma^{n}_{пер} = m\omega^{2}_{пер} \cdot l,$$

$$\Phi^{\tau}_{пер} = ma^{\tau}_{пер} = m\varepsilon_{пер} \cdot l,$$

а l – відстань від точки до осі обертання.

Оскільки вал 1 обертається зі сталою кутовою швидкістю, то $\varepsilon_{пер}$ дорівнює нулю і $\bar{\Phi}^{\tau}_{пер} = 0$.

Таким чином, у даній задачі переносне прискорення точки складається тільки з нормального прискорення:

$$\bar{a}_{пер} = \bar{a}^{n}_{пер}.$$

Нормальне прискорення точки M спрямовано ліворуч, до центру обертання точки (рис.1), а переносна сила інерції $\bar{\Phi}_{пер}$ – у сторону, протилежну $\bar{a}^{n}_{пер}$.

За модулем переносна сила інерції дорівнює:

$$\Phi^{n}_{пер} = ma_{пер} = m\omega^{2}_{пер} \cdot l = 0{,}2 \cdot 5^{2} \cdot 0{,}5 = 2{,}5\ H.$$

Відповідь : $\Phi^{n}_{пер} = 2{,}5\ H.$

Задача 2

Трубка обертається навколо осі O (рис.1) за законом $\varphi = t^{2}$. У трубці рухається куля M масою $m = 0{,}1\ кг$ за законом $OM = S = 0{,}2t^{3}$.

Визначити модуль коріолісової сили інерції кулі у момент часу $t_1 = 1\ c$.

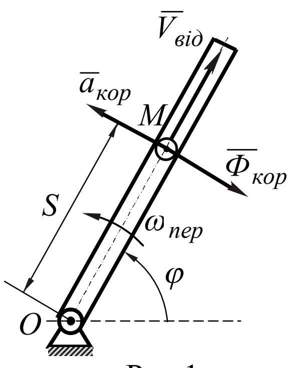


Рис.1

Розв'язування. Коріолісова сила інерції за визначенням дорівнює:

$$\bar{\Phi}_{кор} = -m\bar{a}_{кор}, \qquad (1)$$

де $\bar{a}_{кор}$ – коріолісове прискорення точки.

Спрямована $\bar{\Phi}_{кор}$ у бік, протилежний коріолісову прискоренню.

В загальному випадку $a_{кор}$ за величиною дорівнює:

$$a_{кор} = 2\omega_{пер} \cdot V_{від} \cdot \sin\left(\overline{\omega}_{пер} \hat{\ } \overline{V}_{від}\right). \tag{2}$$

Обчислимо модуль коріолісового прискорення відповідно до умов даної задачі.

Обертання трубки навколо осі O є переносним рухом для кулі M. Закон обертального руху заданий:

$$\varphi = t^2,$$

отже, закон зміни кутової швидкості має вигляд:

$$\omega_{пер} = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d}{dt}\left(t^2\right) = 2t,$$

а при $t_1 = 1\ с$ – $\omega_{пер} = 2\ \ рад/с$.

Оскільки значення кутової швидкості додатне, то обертання трубки збігається з напрямом кута відліку φ (рис.1).

Переміщення кулі вздовж трубки є відносним рухом, рівняння якого задано у вигляді:

$$S = 0{,}2t^3.$$

Тоді, швидкість відносного руху кулі визначиться із виразу:

$$V_{від} = \frac{dS}{dt} = \frac{d}{dt}\left(0{,}2t^3\right) = 0{,}6t^2,$$

а при $t_1 = 1\ с$ – $V_{від} = 0{,}6\ м/с.$

Оскільки вектор кутової швидкості $\overline{\omega}_{пер}$ є перпендикулярний площині, в якій обертається трубка, то кут між векторами $\overline{\omega}_{пер}$ і $\overline{V}_{від}$ дорівнює 90°. Таким чином, модуль коріолісового прискорення згідно з (2) дорівнює:

$$a_{кор} = 2 \cdot 2 \cdot 0{,}6 \cdot \sin 90^\circ = 2{,}4\ м/с^2,$$

а величина коріолісової сили інерції:

$$\Phi_{кор} = m \cdot a_{кор} = 0{,}1 \cdot 2{,}4 = 0{,}24\ H.$$

Визначимо напрям $\overline{\Phi}_{кор}$. Згідно з (1) $\overline{\Phi}_{кор}$ спрямована у бік, протилежний коріолісову прискоренню $\overline{a}_{кор}$. Якщо (за правилом Жуковського) повернути вектор відносної швидкості $\overline{V}_{від}$ навколо точки M на 90° у бік переносного обертання (тобто, проти руху годинникової стрілки), то повернутий вектор укаже нам напрям $\overline{a}_{кор}$ (рис. 1) і, таким чином, напрям коріолісової сили інерції $\overline{\Phi}_{кор}$.

Відповідь: $\Phi_{кор} = 0{,}24\ H.$

Задача 3

Тіло вагою 2 H покладено на гладку грань тригранної призми, друга грань якої лежить на горизонтальній площині.

Визначити, яке горизонтальне прискорення повинна мати призма, щоб тіло не рухалось відносно призми, і який тиск спричиняє тіло на призму у цьому випадку, якщо $\alpha = 30^\circ$.

Розв'язування. Якщо тіло знаходиться у стані відносного спокою по відношенню до призми, яка рухається, то геометрична сума прикладених до тіла сил і переносної сили інерції дорівнює нулю.

До тіла прикладені сила тяжіння $\overline{G}$ і реакція гладкої поверхні $\overline{N}$ (рис.1).

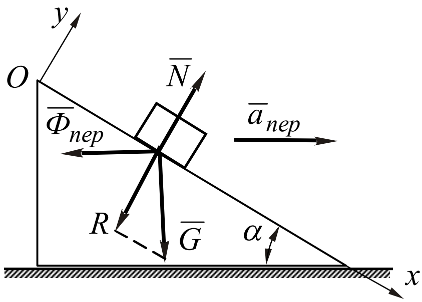


Рис.1

Умовно прикладемо до тіла переносну силу інерції $\overline{\Phi}_{пер}$ (модуль якої $\Phi_{пер} = ma_{пер}$, де m – маса тіла), спрямовану протилежно переносному прискоренню $\overline{a}_{пер}$, яке являє собою прискорення призми.

Тоді

$$\overline{G} + \overline{N} + \overline{\Phi}_{пер} = 0.$$

Спроектуємо це рівняння на осі Ox і Oy, які пов'язані з рухомою призмою:

$$G\sin\alpha - \Phi_{пер}\cos\alpha = 0 \qquad (1)$$

$$N - G\cos\alpha - \Phi_{пер}\sin\alpha = 0. \qquad (2)$$

З першого рівняння знайдемо модуль прискорення $\overline{a}_{пер}$:

$$mg\sin\alpha - ma_{пер}\cos\alpha = 0,$$

$$a_{пер} = g\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = g\cdot tg\alpha.$$

З урахуванням числових значень:

$$a_{пер} = 9{,}81\mathrm{tg}30^\circ = 5{,}66\ м/с^2.$$

Визначимо переносну силу інерції:

$$\Phi_{пер} = ma_{пер} = mg\ tg\alpha = G\ \mathrm{tg}\alpha.$$

Із другого рівняння визначимо модуль реакції призми:

$$N = G\cos\alpha + \Phi_{пер}\sin\alpha = G\cos\alpha + G\ \mathrm{tg}\alpha\sin\alpha =$$

$$= G\ \cos\alpha\ \left(1 + \mathrm{tg}^2\alpha\right).$$

З урахуванням числових значень:

$$N = 2\cos 30^\circ\left(1 + \mathrm{tg}^2 30^\circ\right) = 2{,}3\ Н.$$

Тиск R тіла на призму за модулем дорівнює реакції N, але спрямований у протилежний бік.

Відповідь: $a_{пер} = 5{,}66\ м/с^2$, $R = 2{,}3\ Н.$

Д3.9. Завдання теми Д3

Вантаж масою m закріплений на пружному підвісі в ліфті (рис. Д3.11), який рухається вертикально угору за законом $z = 0{,}5\alpha_1 t^2 + \alpha_2\sin(\omega t) + \alpha_3\cos(\omega t)$ де z – в метрах, t – в секундах. Крім сил тяжіння $\overline{G}$ та пружності $\overline{F}_{пр.}$ у деяких варіантах на вантаж діє ще сила опору середовища, модуль якої $R = \mu V$, де V – швидкість вантажу відносно ліфту.

Знайти закон руху вантажу відносно ліфту $x = f(t)$. Масою пружини та з’єднувальної планки знехтувати та прийняти $g \approx 10\ м/с^2$.

Нагадуємо, що схема підвісу (рис. Д3.11) визначається першою цифрою шифру, а номер варіанту в таблиці Д3.1 визначається другою цифрою шифру.

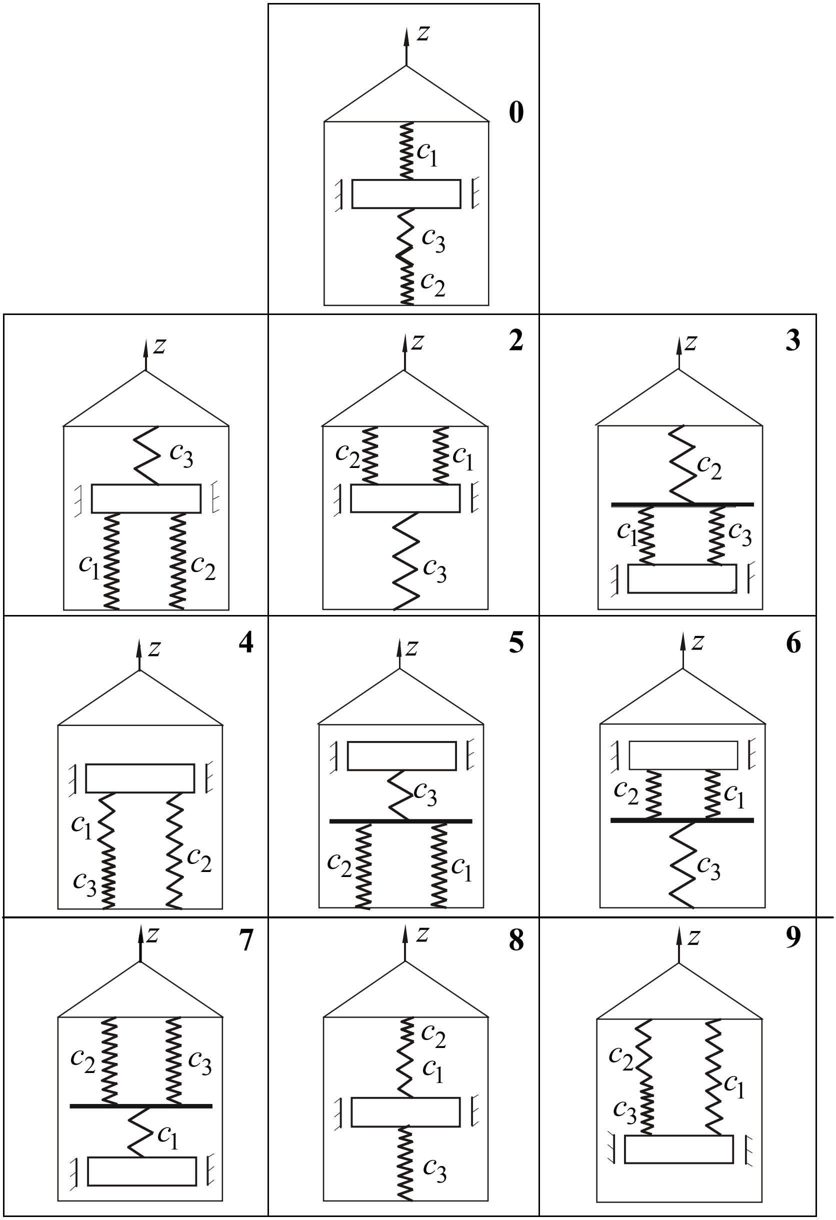


Рис. Д3.11

Таблиця Д3.1

Номер умови	m, *кг*	c_1, *Н/м*	c_2, *Н/м*	c_3, *Н/м*	α_1, *м/с*^{2}	α_2, *м*	α_3, *м*	ω, *1/с*	μ, *Н·с/м*	λ_0, *м*	V_0, *м/с*
0	0,8	–	240	120	-1,5g	0	0	–	8	0,1	0
1	0,5	–	100	150	0	0,8	0	5	0	0	4
2	1	240	–	160	0	0	0,5	6	0	0	0
3	1	300	150	–	0	0,1	0	15	0	0	0
4	2	–	400	400	0	0	0,1	16	0	0	0
5	0,5	80	120	–	g	0	0	–	6	0,15	0
6	0,4	50	200	–	0	0	0,2	20	0	0,15	0
7	1	200	–	300	1,5g	0	0	–	20	0	3
8	0,5	120	–	180	0	0,1	0	20	0	0	0
9	0,4	60	–	120	-g	0	0	–	4	0	2

В таблиці Д3.1 крім коефіцієнтів α_1, α_2 і α_3 позначено: c_1, c_2, c_3 – жорсткості пружин; λ_0 – видовження пружини з еквівалентною жорсткістю в початковий момент часу $t_0 = 0$; V_0 – початкова швидкість вантажу відносно ліфту (напрямлена так, як додатний напрямок осі x). Якщо у стовпцях c_1, c_2, c_3 стоїть "–", це значить, що відповідна пружина відсутня і на рисунку зображатися не повинна. Якщо при цьому кінець однієї з пружин, яка залишилася, є вільним, його слід прикріпити у відповідному місці або до тіла, або до стелі (підлоги) ліфту; те ж слід зробити, якщо вільними будуть кінці обох пружин, що з'єднані планкою. Умова $\mu = 0$ означає, що сила опору середовища R відсутня.

Вказівки. Спочатку треба зобразити розрахункову схему, для чого пружини, які прикріплені до вантажу (за умовами задачі їх буде дві), замінити однією з еквівалентною жорсткістю $c_{екв} = c$, зробивши відповідний розрахунок. Якщо вантаж прикріплений до пружин, які з'єднані послідовно, то $c = \dfrac{c_1 \cdot c_2}{c_1 + c_2}$. Якщо вантаж, прикріплений до пружин, які з'єднані паралельно, або знаходиться між двома пружинами, то $c = c_1 + c_2$. Початок O координатних осей Oxy розташувати в положенні статичної рівноваги вантажу при нерухомому ліфті; напрямити вісь x в бік видовження пружини, а вантаж зобразити в поточному положенні, коли пружина розтягнута $(x > 0)$.

Потім необхідно скласти диференціальне рівняння відносного руху (відносно ліфта) вантажу, який розглядається в задачі, для чого приєднати до діючих сил переносну силу інерції. При цьому слід пам'ятати, що сила інерції напрямлена протилежно відповідному прискоренню. Отримане лінійне неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку слід проінтегрувати з урахуванням початкових умов.

Д3.10. Приклад розв'язування теми Д3

Дано: $m = 0{,}5\,кг$; $c_1 = 80\ Н/м$; $c_2 = 120\ Н/м$;

$\alpha_1 = g$; $\alpha_2 = 0$; $\alpha_3 = 0$; $\omega = 0$; $V_0 = 0$;

$z = 0{,}5\,\alpha_1 t^2 = 5t^2$; $R = \mu \cdot V = \mu\,\dot{x}$;

$\mu = 6\ Н \cdot с / м$; $\lambda_0 = 0{,}15 м$; $g \approx 10\ м/с^2$.

Визначити: $x = f(t)$.

Розв'язування. Замінюємо систему з двох пружин (рис. Д3.12) однією пружиною з еквівалентною жорсткістю. Оскільки пружини встановлені паралельно, то жорсткість еквівалентної пружини дорівнює:

$$c = c_1 + c_2 = 80 + 120 = 200 \ Н/м.$$

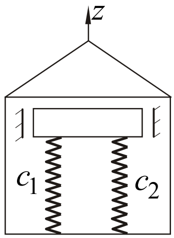


Рис.Д3.12

Створимо розрахункову схему коливальної системи (рис.Д3.14).

При нерухомому ліфті в положенні статичної рівноваги вантажу еквівалентна пружина, довжина якої в недеформованому стані l_0, під дією сили тяжіння $\overline{G}$ буде стиснута на величину $\delta_{ст}$.

Із умови рівноваги витікає, що:

$$c\delta_{ст.} = G \Rightarrow \delta_{ст.} = \frac{G}{c} = \frac{mg}{c} = \frac{0{,}5 \cdot 10}{200} = 0{,}025 \ м.$$

Пов'яжемо з ліфтом рухому систему відліку Oxy, початок O якої розташуємо в положенні статичної рівноваги вантажу, а вісь Ox спрямуємо вертикально угору (в бік видовження пружини).

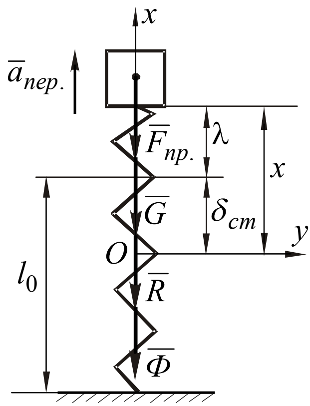


Рис. Д3.13

Розглянемо вантаж в положенні, при якому $x > 0$ і пружина розтягнута на величину λ.

Зобразимо всі сили, що діють на вантаж: $\overline{G}$ – сила тяжіння, $\overline{F}_{пр.}$ – сила пружності, $\overline{R}$ – сила опору середовища, $\overline{\Phi}$ – переносна сила інерції.

Запишемо рівняння відносного руху вантажу у векторній формі та в проекціях на вісь Ox:

$$m\overline{a}_{від.} = \overline{G} + \overline{F}_{пр.} + \overline{R} + \overline{\Phi}, \tag{1}$$

$$ma_{від.x} = G_x + F_{пр.x} + R_x + \Phi_x, \tag{2}$$

В рівнянні (2):

$$a_{від.x} = \ddot{x}; \qquad G_x = -G = -mg;$$

$$F_{пр.x} = -F_{пр.} = -c\lambda = -c(x - \delta_{ст.}) = -cx + c\delta;$$

$$R_x = -R = -\mu\dot{x}; \quad \Phi_x = -\Phi = -ma_{пер.x}.$$

Враховуючи, що осі x та z напрямлені однаково, дістанемо $a_{пер.x} = a_{пер.z} = \ddot{z} = (0{,}5\alpha_1 t^2)''_t = \alpha_1 = 10\ м/с^2$. Тоді

$$\Phi_x = -10\,m.$$

Підставляючи всі ці величини в (2) і враховуючи, що $c\delta_{ст} = G = mg$, одержимо:

$$m\ddot{x} = -mg - cx + c\delta_{ст} - \mu\dot{x} - 10\,m;$$

$$m\ddot{x} = -cx - \mu\dot{x} - 10m. \tag{3}$$

Поділивши на масу m та перегрупувавши складові, дістанемо:

$$\ddot{x} + \frac{\mu}{m}\dot{x} + \frac{c}{m}x = -10. \tag{4}$$

Позначивши в рівнянні (4):

$$\frac{\mu}{m} = 2b; \quad \frac{c}{m} = k^2; \quad -10 = d,$$

остаточно отримаємо диференціальне рівняння відносного руху вантажу (рівняння затухаючих коливань)*

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + k^2 x = d\,, \tag{5}$$

де $b = \dfrac{\mu}{2m} = \dfrac{6}{2 \cdot 0{,}5} = 6c^{-1}$;

$$k = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{200}{0{,}5}} = 20c^{-1}.$$

Рівняння (5) лінійне неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку. Його загальний розв'язок є сумою двох розв'язків: x_1 – загального розв'язку однорідного рівняння та x_2 – часткового розв'язку рівняння (5), тобто

$$x = x_1 + x_2\,. \tag{6}$$

Загальний розв'язок однорідного рівняння $\ddot{x} + 2b\dot{x} + k^2 x = 0$ при $b < k$ $(6 < 20)$ має вигляд (Д3.11):

$$x_1 = e^{-bt}(C_1 \cos k_1 t + C_2 \sin k_1 t), \tag{7}$$

де k_1 – умовна частота загасаючих коливань, $k_1 = \sqrt{k^2 - b^2} = \sqrt{400 - 36} = 19\,c^{-1}$.

Тоді з урахуванням, що $b = 6$, дістанемо:

$$x_1 = e^{-6t}(C_1 \cos 19t + C_2 \sin 19t)\,. \tag{8}$$

Частковий розв'язок рівняння (5) будемо шукати у вигляді його правої частини, тобто

$$x_2 = Д = const\,.$$

Для визначення $Д$ знаходимо $\dot{x}_2 = 0$; $\ddot{x}_2 = 0$ та підставляємо в (5):

$$0 + 2b \cdot 0 + k^2 Д = d.$$

Звідки

$$Д = d / k^2 = -10 / 400 = -0{,}025.$$

Оскільки $x_2 = -0{,}025$, то загальний розв'язок (6) рівняння (5) буде мати вигляд:

$$x = e^{-6t}(C_1 \cos 19t + C_2 \sin 19t) - 0{,}025. \qquad (9)$$

Для визначення сталих інтегрування C_1 та C_2 знайдемо V_x:

$$V_x = \dot{x} = -6e^{-6t}(C_1 \cos 19t + C_2 \sin 19t) +$$

$$+ e^{-6t}(-C_1 \cdot 19 \cdot \sin 19t + C_2 \cdot 19 \cdot \cos 19t). \quad (10)$$

В початковий момент часу, коли $t_0 = 0$:

$$V_x = V_0 = 0;$$

$$x_0 = \delta_{ст} + \lambda_0 = 0{,}025 + 0{,}15 = 0{,}175 \ \textit{м}.$$

Підставляючи ці початкові дані в рівняння (9) та (10), знаходимо C_1 і C_2:

$$0{,}175 = C_1 - 0{,}025, \quad \text{звідки } C_1 = 0{,}175 + 0{,}025 = 0{,}2;$$

$$0 = -6C_1 + 19C_2, \quad \text{звідки } C_2 = \frac{6 \cdot C_1}{19} = \frac{6 \cdot 0{,}2}{19} = 0{,}06.$$

Таким чином, рівняння (9) набуде остаточного вигляду:

$$x = e^{-6t}(0{,}2\cos 19t + 0{,}06\sin 19t) - 0{,}025\text{, } \textit{м.}$$

Відповідь: закон руху вантажу відносно ліфту

$$x = e^{-6t}(0{,}2\cos 19t + 0{,}06\sin 19t) - 0{,}025\,.$$

∗ У тих варіантах, де $\mu = 0$ (опір середовища не враховується) буде отримано неоднорідне диференціальне рівняння вимушених коливань вигляду $\ddot{x} + k^2 x = d\sin(\omega t)$ або $\ddot{x} + k^2 x = d\cos(\omega t)$, де $d = const$. Загальний розв'язок цих рівнянь $x = x_1 + x_2$, де $x_1 = C_1\sin(kt) + C_2\cos(kt)$ – загальний розв'язок однорідного рівняння $\ddot{x} + k^2 x = 0$, а x_2 – частковий розв'язок рівняння $\ddot{x} + k^2 x = d\sin(\omega t)$, який шукають у вигляді правої частини неоднорідного рівняння.

Тема Д4. ТЕОРЕМИ ПРО РУХ ЦЕНТРА МАС ТА ПРО ЗМІНУ КІЛЬКОСТІ РУХУ МЕХАНІЧНОЇ СИСТЕМИ

Д4.1. Стислі відомості з теорії про рух центра мас механічної системи

Механічною системою *або системою матеріальних точок називається така сукупність матеріальних тіл (точок), в якій положення та рух кожного тіла (точки) залежить від положення та руху всіх інших.*

Частковим випадком механічної системи є ***абсолютно тверде тіло*,** яке розглядають як систему взаємодіючих матеріальних точок, відстань між якими не змінюється.

Зовнішніми силами $\overline{F}^{e}$ *називаються сили, з якими діють на тіла (точки) механічної системи інші тіла (точки), які не входять в дану систему.*

Замкнутою, *або* ***ізольованою системою****, називається механічна система, на яку не діють зовнішні сили.*

Внутрішніми силами $\vec{F}^{i}$ ***системи*** *називаються сили взаємодії тіл (точок) даної механічної системи між собою.*

Властивості внутрішніх сил

1. Геометрична сума (головний вектор) всіх внутрішніх сил дорівнює нулю:

$$\overline{F}^{i} = \sum \overline{F}_{k}^{i} = 0\,. \qquad \text{(Д4.1)}$$

2. Сума моментів (головний момент) всіх внутрішніх сил системи відносно будь-якого центра O або осі,

наприклад x, дорівнює нулю:

$$\overline{M}_0(\overline{F}^i) = \sum \overline{m}_0(\overline{F}_k^i) = 0,$$

або

$$M_x(\overline{F}^i) = \sum m_x(\overline{F}_k^i) = 0. \qquad (Д4.2)$$

Масою М механічної системи *називається сума мас всіх тіл (точок), які входять в дану систему:*

$$M = m_1 + m_2 + \ldots + m_n = \sum m_k \ .$$

Центром мас *або* ***центром інерції*** *механічної системи називається точка С, положення якої відносно обраної системи відліку визначається радіус-вектором* $\bar{r}_C$ (рис. Д4.1), що обчислюється за формулою:

$$\bar{r}_C = \frac{1}{M}(m_1\bar{r}_1 + m_2\bar{r}_2 + \ldots + m_n\bar{r}_n) = \frac{1}{M}\sum m_k\bar{r}_k, \quad (Д4.3)$$

де M – маса всієї системи;
m_k та $\bar{r}_k$ – маса і радіус-вектор k-ої точки системи.

В декартовій системі координат положення центра мас визначається за формулами:

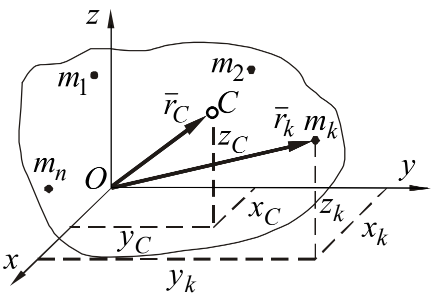


Рис. Д4.1

$$\left.\begin{aligned} x_C &= \frac{1}{M}\sum m_k x_k, \\ y_C &= \frac{1}{M}\sum m_k y_k, \\ z_C &= \frac{1}{M}\sum m_k z_k. \end{aligned}\right\} \qquad (Д4.4)$$

Теорема про рух центра мас механічної системи

Добуток маси M системи на прискорення її центра мас $\overline{a}_C$ дорівнює головному вектору (геометричній сумі) всіх зовнішніх сил , що діють на систему:

$$M\,\overline{a}_C = \sum \overline{F}_k^e. \tag{Д4.5}$$

У проекціях на осі декартової системи координат рівняння (Д4.5) *має вигляд*:

$$\left.\begin{aligned} M\,\ddot{x}_C &= \sum F_{kx}^e;\\ M\,\ddot{y}_C &= \sum F_{ky}^e;\\ M\,\ddot{z}_C &= \sum F_{kz}^e. \end{aligned}\right\} \tag{Д4.6}$$

Із теореми (Д4.5) у вигляді двох наслідків випливає ***закон збереження руху центра мас системи:***

1. Якщо головний вектор зовнішніх сил дорівнює нулю, то вектор швидкості центра мас залишається сталим, тобто:

$$\text{якщо} \;\; \sum \overline{F}_k^e = 0, \;\; \text{то} \;\; \overline{a}_C = 0 \quad \text{і} \quad \overline{V}_C = const. \tag{Д4.7}$$

Зокрема, якщо в початковий момент часу $\overline{V}_{0C} = 0$, то центр мас не буде переміщуватись. Якщо $\overline{V}_{0C} \neq 0$ то центр мас рухається рівномірно і прямолінійно.

2. Якщо головний вектор зовнішніх сил не дорівнює нулю, але його проекція на будь-яку вісь дорівнює нулю, то відповідна проекція швидкості центра мас залишається сталою, тобто:

$$\text{якщо} \;\; \sum \overline{F}_k^e \neq 0, \;\; \text{але, наприклад,} \;\; \sum F_{kx}^e = 0,$$

$$\text{то} \;\; a_{C_x} = 0 \quad \text{і} \quad V_{Cx} = const. \tag{Д4.8}$$

Зокрема, якщо в початковий момент $V_{0Cx} = 0$ то центр мас системи вздовж осі Ox рухатися не буде $(x_c = const)$.

Д4.2. Порядок розв'язування задач на застосування теореми про рух центра мас

Рекомендується така послідовність розв'язування задач:

1. Зобразити на рисунку усі зовнішні сили, які діють на систему.
2. Вибрати систему координат.
3. Записати теорему про рух центра мас у векторній формі.
4. Спроектувати це векторне рівняння на осі координат.
5. Вирахувати суми проекцій усіх зовнішніх сил на осі координат і підставити їх у проекції рівняння руху.
6. Розв'язати отримані рівняння та знайти величини, які треба визначити.

Д4.3. Контрольні запитання

1. Сформулюйте теорему про рух центра мас системи.
2. Який рух твердого тіла можна розглядати як рух матеріальної точки, яка має масу даного тіла і чому?
3. За яких умов центр мас знаходиться у стані спокою, і за яких умов він рухається рівномірно і прямолінійно ?
4. За яких умов центр мас системи не переміщується вздовж будь-якої осі ?
5. Яку дію на вільне тверде тіло справляє прикладена до нього пара сил ?

Д4.4. Приклади розв'язування задач

Задача 1

Визначити головний вектор зовнішніх сил, що діють на колесо вагою P, яке скочується без ковзання з похилої площини, якщо його центр мас C рухається за законом $x_C = 0{,}5at^2$ (рис.1).

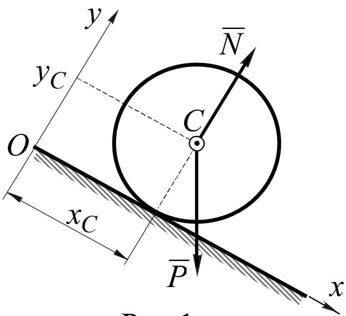


Рис.1

Розв'язування. Покажемо зовнішні сили, які діють на колесо: силу тяжіння $\overline{P}$ і реакцію поверхні $\overline{N}$, які проходять через центр мас колеса C.

Запишемо теорему про рух центра мас у векторній формі:

$$Ma_C = \sum \overline{F}_k^e = \overline{P} + \overline{N}. \quad (1)$$

Виберемо систему координат xOy та спроектуємо рівняння (1) на осі Ox і Oy:

$$\frac{P}{g}\ddot{x}_C = \sum F_{kx}^e, \qquad \frac{P}{g}\ddot{y}_C = \sum F_{ky}^e.$$

Оскільки $y_C = const$, то $\dot{y}_C = \ddot{y}_C = 0$ і $\sum F_{ky}^e = 0$. Тобто, головний вектор зовнішніх сил є паралельним осі Ox:

$$R = R_x = \sum F_{kx}^e.$$

Знайдемо проекцію прискорення центра мас на вісь Ox:

$$a_{C_x} = \dot{V}_{C_x} = \ddot{x}_C = \frac{d^2 x_C}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2}\left(0{,}5at^2\right) = a.$$

Отже,

$$R = \frac{P}{g}\ddot{x}_C = \frac{P}{g}a\ .$$

Відповідь: $R = \dfrac{P}{g}a.$

Задача 2

Колесо вагою P і радіусом r котиться з ковзанням по прямолінійній горизонтальній рейці внаслідок дії сталої сили $\overline{F}$, яка прикладена до його центра тяжіння C (рис.1).

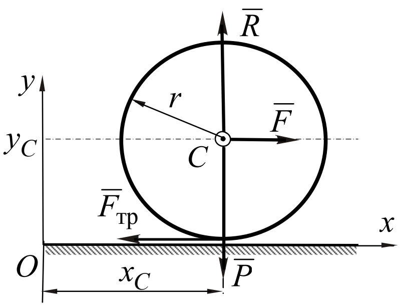


Рис. 1

Визначити швидкість центра мас колеса, якщо у початковий момент воно знаходилось у спокою. Коефіцієнт тертя ковзання дорівнює f.

Розв'язування. На колесо діють зовнішні сили: $\overline{P}$ – сила тяжіння колеса, $\overline{F}$ – рушійна сила, $\overline{R}$ – нормальна реакція рейки, $\overline{F}_{тр}$ – сила тертя ковзання, яка спрямована вздовж рейки у бік, протилежний силі $\overline{F}$.

Запишемо теорему про рух центра мас колеса у векторній формі:

$$M\overline{a}_C = \sum \overline{F}_k^e = \overline{P} + \overline{F} + \overline{R} + \overline{F}_{тр}\,,$$

де $\overline{a}_C$ – прискорення центра мас колеса.

Виберемо систему координат xOy та спроектуємо рівняння (1) на осі Ox і Oy:

$$Ma_{C_x} = F - F_{\text{тр}}, \qquad Ma_{C_y} = R - P. \tag{1}$$

Під час руху колеса $y_C = r = const$. Отже, $\ddot{y}_C = a_{C_y} = 0$, і з другого рівняння (1) одержуємо:

$$R = P. \tag{2}$$

Оскільки при коченні колеса з ковзанням сила тертя досягає свого максимального значення, то

$$F_{\text{тр}} = f \cdot R = f \cdot P. \tag{3}$$

Підставимо (3) у перше з рівнянь (1) і одержимо:

$$a_{C_x} = \frac{F - F_{\text{тр}}}{M} = g\frac{F - F_{\text{тр}}}{P} = g\frac{F - f \cdot P}{P}. \tag{4}$$

Оскільки $a_{C_x} = dV_{C_x} / dt$, то:

$$\frac{dV_{C_x}}{dt} = g\frac{F - fP}{P}; \quad dV_{C_x} = g\frac{F - fP}{P}dt;$$

$$V_{C_x} = \int g\frac{F - fP}{P}dt = g\frac{F - fP}{P}t + C_1. \tag{5}$$

Згідно з початковими умовами при $t = 0$ $V_{C_x} = 0$, то довільна стала $C_1 = 0$.

Отже, закон зміни швидкості центра мас колеса C має вигляд:

$$V_{C_x} = g\frac{F - fP}{P}t.$$

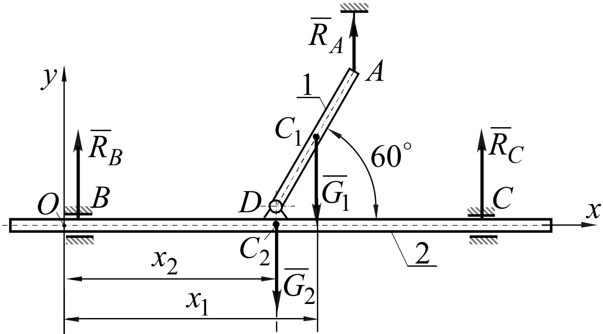
Відповідь: $V_{C_x} = g\dfrac{F - fP}{P}t$.

Задача 3

Однорідний стержень 1 (DA) довжиною l і масою $m_1 = m$ (рис. 1,а) розташований у вертикальній площині та шарнірно з'єднаний зі стержнем 2 (шарнір D). Стержень 2 масою $m_2 = 3m$ може рухатися в горизонтальних напрямних $\hat{A}$ і C. Стержень 1 утримується під кутом 60° до горизонту вертикальною ниткою в точці A.

Визначити яке зміщення отримає стержень 2, якщо нитка в точці A обірветься і стержень 1 впаде на стержень 2 (рис. 1,б). Силами тертя в напрямних $\hat{A}$ і C знехтувати.

а)



б)

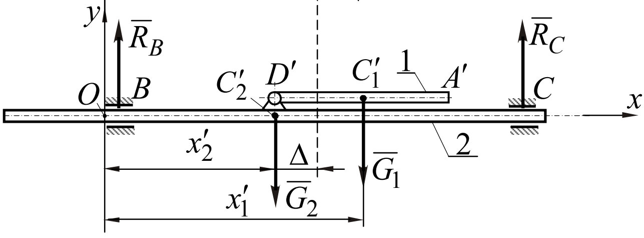


Рис. 1

Розв'язування. Покажемо всі зовнішні сили, що діють на матеріальну систему, яка складається із стержнів 1 і 2. Зовнішніми силами будуть: $\overline{G}_1$ – сила тяжіння стержня 1; $\overline{G}_2$ – сила тяжіння стержня 2; $\overline{R}_A$ – реакція нитки; $\overline{R}_B$ і $\overline{R}_C$ – реакції напрямних $\hat{A}$ і C.

Оберемо прямокутну систему координат $\tilde{o}\hat{I}\acute{o}$, одну з осей якої $\hat{I}\tilde{o}$ напрямимо по осі стерня 2 (рис. 1,а). Запишемо теорему про рух цента мас механічної системи в проекції на вісь $\hat{I}\tilde{o}$ (Д4.6):

$$M\ \ddot{x}_{\tilde{N}} = \sum F_{kx}^{e},$$

де $\grave{I}$ – маса системи, $\grave{I} = m_1 + m_2$;

x_C – координата центра мас системи.

В даній задачі всі зовнішні сили перпендикулярні до осі $\hat{I}\tilde{o}$, тобто $\sum F_{kx}^{e} = 0$. Згідно із законом про збереження руху центра мас (Д4.8), якщо $\sum F_{kx}^{e} = 0$, то:

$$a_{C_x} = 0 \Rightarrow V_{Cx} = const.$$

Оскільки в початковий момент часу система не рухалась, тобто $V_{Cx} = 0$, то $\tilde{o}_{\tilde{N}} = const$.

Таким чином, абсциса центра мас механічної системи не залежить від переміщення стержнів, що входять в систему, і залишається незмінною по відношенню до нерухомої системи координат $\tilde{o}\hat{I}\acute{o}$.

Запишемо вираз для визначення абсциси центра мас системи в початковий момент часу:

$$x_C = \frac{m_1 \cdot x_1 + m_2 \cdot x_2}{m_1 + m_2}, \qquad (1)$$

де $\tilde{o}_1$ – абсциса центра мас стержня 1;

$\tilde{o}_2$ – абсциса центра мас стержня 2.

Не порушуючи загальності задачі, приймемо, що центр мас стержня 2 співпадає з центром шарніра D.

Тоді (рис 1а):

$$x_1 = x_2 + \left(DC_1\right)\cos 60^\circ = x_2 + \frac{l}{2}\cos 60^\circ = x_2 + 0,25l\,.$$

З урахуванням останньої залежності і того, що $m_1 = m$ та $m_2 = 3m$, рівняння (1) набуде вигляду:

$$x_C = \frac{m\cdot\left(x_2 + 0,25l\right) + 3m\cdot x_2}{m + 3m} = \frac{4x_2 + 0,25l}{4}\,. \qquad (2)$$

При обриві нитки, що утримує стержень 1, під дією сили тяжіння $\overline{G_1}$, стержень почне падати донизу, опираючись при цьому в шарнірі D на стержень 2. Стержень 2 при цьому зміститься ліворуч. Кінцеве положення стержня 2 показано на рис. 1,б.

Запишемо вираз для визначення абсциси $\tilde{o}'_{\tilde{N}}$ центра мас в кінцевому положенні системи:

$$x'_C = \frac{m_1\cdot x'_1 + m_2\cdot x'_2}{m_1 + m_2}\,, \qquad (3)$$

де $\tilde{o}'_1$ – нове значення абсциси центра мас стержня 1;

$\tilde{o}'_2$ – нове значення абсциси центра мас стержня 2.

Визначимо нові значення абсцис $\tilde{o}'_1$ і $\tilde{o}'_2$. Нехай стержень 2 зміститься ліворуч на деяку відстань Δ (рис. 1,б). Тоді:

$$x'_2 = x_2 - \Delta; \qquad x'_1 = x_2 - \Delta + \frac{l}{2}. \qquad (4)$$

З урахуванням (4) вираз (3) набуде виду:

$$x'_C = \frac{m_1 \cdot \left(x_2 - \Delta + l/2\right) + m_2 \cdot \left(x_2 - \Delta\right)}{m_1 + m_2},$$

або

$$x'_C = \frac{m \cdot \left(x_2 - \Delta + l/2\right) + 3m \cdot \left(x_2 - \Delta\right)}{m + 3m}.$$

Звідки

$$x'_C = \frac{x_2 - \Delta + l/2 + 3x_2 - 3\Delta}{} = \frac{4x_2 + 0,5l - 4\Delta}{4}. \quad (5)$$

Оскільки $x_C = x'_C$, то, порівнюючи (2) і (4), отримаємо:

$$\frac{4x_2 + 0,25l}{4} = \frac{4x_2 + 0,5l - 4\Delta}{4}.$$

Розв'язавши дане рівняння відносно Δ дістанемо:

$$\Delta = \frac{1}{16} l.$$

Таким чином, при падінні стержня 1 на стержень 2 система зміститься ліворуч на відстань $\Delta = \dfrac{1}{16} l$.

Відповідь: $\Delta = \dfrac{1}{16} l$.

Д4.5. Теореми про зміну кількості руху матеріальної точки і механічної системи

Кількістю руху матеріальної точки *називається векторна величина* $\overline{q}$, *яка дорівнює добутку маси* m *точки на її швидкість* $\overline{\upsilon}$ *і напрямлена за вектором швидкості, тобто:*

$$\overline{q} = m\overline{V}. \tag{Д4.9}$$

Одиницею кількості руху в системі СІ є *кілограм · метр на секунду*:

$$[q] = [m] \cdot [V] = 1\,кг \cdot м \,/\, с.$$

Теорема про зміну кількості руху матеріальної точки у диференціальній формі має вигляд:

$$\frac{d\overline{q}}{dt} = \sum \overline{F}_k\ , \tag{Д4.10}$$

тобто похідна за часом від кількості руху матеріальної точки дорівнює геометричній сумі усіх сил, що діють на цю точку.

Теорема про зміну кількості руху матеріальної точки в інтегральній формі:

$$m\overline{V}_1 - m\overline{V}_0 = \int_0^t \overline{F}_k dt = \sum \overline{S}_k\ , \tag{Д4.11}$$

тобто зміна кількості руху матеріальної точки за деякий проміжок часу дорівнює геометричній сумі імпульсів усіх сил, що діють на цю точку.

Імпульс сили $\overline{S}$ характеризує дію сили $\overline{F}$ за деякий проміжок часу t. Якщо сила $\overline{F}$ стала, то імпульс сили $\overline{S}$ за напрямком збігається з напрямком сили і дорівнює

$$\overline{S} = \overline{F} \cdot t. \qquad (Д4.12)$$

Векторному рівнянню (Д4.11) відповідає три рівняння в проекціях на осі декартової системи координат:

$$\left. \begin{aligned} mV_{1x} - mV_{0x} &= \sum S_{kx}^{e}; \\ mV_{1y} - mV_{0y} &= \sum S_{ky}^{e}; \\ mV_{1z} - mV_{0z} &= \sum S_{kx}^{e}. \end{aligned} \right\} \qquad (Д4.13)$$

Кількістю руху механічної системи *називається векторна величина* $\overline{Q}$, *яка дорівнює геометричній сумі (головному вектору) кількостей рухів всіх тіл (точок) цієї системи:*

$$\overline{Q} = \sum \overline{q}_k = \sum m_k \overline{V}_k. \qquad (Д4.14)$$

Кількість руху системи можна також виразити через масу M всієї системи та швидкість $\overline{V}_C$ її центру мас:

$$\overline{Q} = M\overline{V}_C. \qquad (Д4.15)$$

Теорема про зміну кількості руху системи в диференціальній *формі* виражається формулою:

$$\frac{d\overline{Q}}{dt} = \sum \overline{F}_k^e, \qquad (Д4.16)$$

тобто похідна за часом від кількості руху механічної системи дорівнює головному вектору зовнішніх сил, які діють на систему.

Якщо спроектувати векторне рівняння (Д4.16) на осі декартової системи координат, то одержимо запис *теореми в скалярному вигляді*:

$$\frac{dQ_x}{dt} = \sum F_{kx}^e; \quad \frac{dQ_y}{dt} = \sum F_{ky}^e; \quad \frac{dQ_z}{dt} = \sum F_{kz}^e. \quad (Д4.17)$$

Із теореми у вигляді двох висновків витікає ***закон збереження кількості руху механічної системи:***

1. Якщо головний вектор зовнішніх сил дорівнює нулю, то кількість руху системи залишається сталою, тобто:

$$\text{якщо } \sum \overline{F}_k^e = 0, \text{ то } d\overline{Q}/dt = 0 \text{ і } \overline{Q} = const. \quad (Д4.18)$$

2. Якщо головний вектор зовнішніх сил не дорівнює нулю, але його проекція на будь-яку вісь дорівнює нулю, то проекція кількості руху системи на цю вісь залишається сталою, тобто:

$$\text{якщо } \sum \overline{F}_k^e \neq 0, \text{ але, наприклад } \sum F_{kx} = 0,$$

$$\text{то } dQ_x/dt = 0 \quad \text{і} \quad Q_x = const. \quad (Д4.19)$$

Нарешті відмітимо, що оскільки у формули, які виражають обидві теореми, внутрішні сили не входять, то змінити кількість руху механічної системи і рух її центру мас можуть тільки зовнішні сили.

Якщо позначити кількість руху системи у початковий момент часу $\overline{Q}_0$, а кількість руху системи у кінцевий момент часу $\overline{Q}_1$, то ***теорема про зміну кількості руху механічної системи в інтегральній формі*** має вигляд:

$$\overline{Q}_1 - \overline{Q}_0 = \sum \overline{S}_k^e, \quad (Д4.20)$$

тобто зміна кількості руху механічної системи за деякий проміжок часу дорівнює геометричній сумі імпульсів зов-

нішніх сил $\sum \overline{S}_k^e$ *, що діють на систему, за той же проміжок часу.*

Якщо спроектувати векторне рівняння (Д4.20) на осі декартової системи координат, то одержимо запис *теореми про зміну кількості руху механічної системи в інтегральній формі в скалярному вигляді*:

$$\left.\begin{aligned} Q_{1x} - Q_{0x} &= \sum S_{kx}^e; \\ Q_{1y} - Q_{0y} &= \sum S_{ky}^e; \\ Q_{1z} - Q_{0z} &= \sum S_{kx}^e. \end{aligned}\right\} \qquad (Д4.21)$$

Д4.6. Порядок розв'язування задач на застосування теореми про зміну кількості руху точки і механічної системи

Для матеріальної точки:

1. Зобразити на рисунку усі сили, які прикладені до матеріальної точки, тобто активні сили і реакції в'язей.
2. Вибрати систему координат.
3. Записати теорему про зміну кількості руху точки у векторній формі.
4. Спроектувати це векторне рівняння на осі обраної системи координат.
5. Розв'язати одержані рівняння і визначити шукані величини.

Для механічної системи:

1. Зобразити на рисунку усі зовнішні сили.
2. Вибрати систему координат.

3. Записати теорему про зміну кількості руху системи у векторній формі.
4. Спроектувати це векторне рівняння на осі обраної системи координат.
5. Розв'язати одержані рівняння і визначити шукані величини

Д4.7. Контрольні запитання

1. Як визначається імпульс змінної сили за кінцевий проміжок часу?
2. Чому дорівнює імпульс рівнодіючої?
3. Що називається кількістю руху системи ?
4. Сформулюйте теореми про зміну кількості руху точки і системи у диференціальній формі.
5. Сформулюйте теореми про зміну кількості руху точки і системи в інтегральній формі.
6. Чому дорівнює кількість руху маховика, який обертається навколо нерухомої осі?

Д4.8. Приклади розв'язування задач

Задача 1

Залізничний потяг рухається по горизонтальній і прямолінійній ділянці колії (рис.1). Під час гальмування до повної зупинки розвивається сила опору, яка дорівнює $R = 0{,}1$ ваги потяга. У момент початку гальмування швидкість V потяга становила 72 *км/год*.

Визначити час t і шлях L гальмування.

Розв'язування. Зобразимо сили (рис.1), які діють на потяг під час гальмування: силу тяжіння потяга $\overline{P}$, нормальну реакція колії $\overline{N}$, силу опору $\overline{R}$, яка за величиною

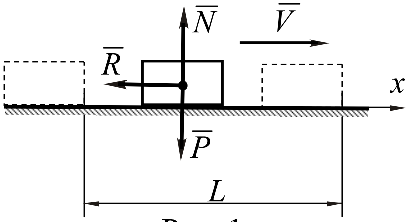


Рис. 1

дорівнює $R = 0{,}1P$.

Виберемо систему координат. Оскільки рух прямолінійний і горизонтальний, досить розглянути рух у напрямі осі x.

Будемо розглядати потяг як матеріальну точку. Запишемо теорему про зміну кількості руху потяга в інтегральній формі (Д4.11):

$$m\overline{V}_1 - m\overline{V}_0 = \sum \overline{S}_k = \overline{S}_P + \overline{S}_R + \overline{S}_N \qquad (1)$$

де m – маса потяга;

$\overline{V}_1$, $\overline{V}_0$ – кінцева і початкова швидкість потяга;

$\overline{S}_P$, $\overline{S}_R$, $\overline{S}_N$ – імпульси сил $\overline{P}$, $\overline{R}$, $\vec{N}$, що діють на потяг під час гальмування.

Спроектуємо векторне рівняння (1) на вісь x (Д4.13):

$$mV_{1x} - mV_{0x} = -S_R. \qquad (2)$$

Проекції імпульсів сил $\overline{S}_P$ і $\overline{S}_N$ на вісь x дорівнюють нулю, оскільки вектори $\overline{P}$ і $\overline{N}$ перпендикулярні до цієї осі.

Сила опору $\overline{R}$ під час гальмування за величиною не змінюється, отже, її імпульс дорівнює (Д4.12):

$$S_R = R \cdot t = 0{,}1P \cdot t\,.$$

Швидкість у кінці ділянки гальмування дорівнює нулю, тобто $V_1 = 0$.

Остаточно, рівняння імпульсів (2) у проекції на вісь x набуде вигляду:

$$-mV_0 = -S_R = -0{,}1Pt, \quad \text{або} \quad \frac{P}{g}V_0 = 0{,}1Pt\,.$$

Звідки $t = \dfrac{V_0}{0{,}1g}$, або з урахуванням числових значень для V_0 і g отримаємо:

$$t = \frac{20}{0{,}1 \cdot 9{,}81} = 20{,}4 \ \textit{с}.$$

Запишемо основний закон динаміки для матеріальної точки в проекції на вісь x:

$$ma_x = \sum F_{kx} = -R\,.$$

Оскільки $R = 0{,}1P = const$, то і $a_x = const$. Таким чином, для визначення гальмівного шляху скористаємося формулою для рівнозмінного руху:

$$L = V_0 t + at^2 \big/ 2\,.$$

В цьому випадку прискорення потяга визначається з формули:

$$V_1 = V_0 + at,$$

тобто,

$$a = \frac{V_1 - V_0}{t} = \frac{0 - 20}{20{,}4} = -0{,}98 \ \textit{м/с}^2.$$

Тоді

$$L = V_0 t - \frac{at^2}{2} = 20 \cdot 20{,}4 - \frac{0{,}98(20{,}4)^2}{2} = 204 \ \textit{м}\,.$$

Відповідь: $t = 20{,}4\,\textit{с}$, $L = 204 \ \textit{м}$.

Задача 2

По шорсткій похилій площині, яка утворює з горизонтом кут $\alpha = 30^\circ$, спускається важке тіло без початкової швидкості.

Визначити час T, за який тіло пройде шлях довжиною $l = 39{,}2\,м$, якщо коефіцієнт тертя $f = 0{,}2$ і $V_0 = 0$.

Розв'язування. Під час руху на тіло діють сила тяжіння тіла $\overline{G}$, нормальна реакція поверхні $\overline{N}$ та сила тертя $\overline{F}_{тер}$, яка спрямована у бік протилежний рухові тіла (рис.1).

Запишемо теорему про зміну кількості руху у векторній формі:

$$m\overline{V}_1 - m\overline{V}_0 = \sum \overline{S}_k = \overline{S}_G + \overline{S}_N + \overline{S}_{тер}\,. \tag{1}$$

Спрямуємо вісь x уздовж похилої поверхні униз і спроектуємо рівність (1) на цю вісь:

$$mV_{1x} - mV_{0x} = S_G \sin\alpha - S_{тер}\,. \tag{2}$$

Проекція імпульсу нормальної реакції $\overline{N}$ на вісь x дорівнює нулю, оскільки сила $\overline{N}$ перпендикулярна Ox.

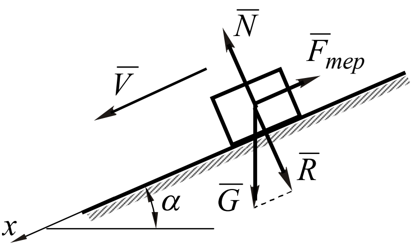


Рис.1

Ураховуючи, що під час руху сила тяжіння $\overline{G}$ і сила тертя $\overline{F}_{тер}$ не змінюються , то:

$$S_G = G \cdot T\,;$$

$$S_{тр} = F_{тр} \cdot T\,.$$

Окрім того:

$$V_{0x} = V_0 = 0\,;\;\; V_{1x} = V_1\,.$$

З урахуванням записаного рівняння (2) набуде вигляду:

$$mV_1 = G \cdot T \sin\alpha - F_{тер} \cdot T\,. \tag{3}$$

Знайдемо силу тертя:

$$F_{тер} = f \cdot R = f \cdot G \cdot \cos\alpha\,.$$

Підставивши $F_{тер}$ в рівняння (3) отримаємо:

$$\frac{G}{g}V_1 = GT\sin\alpha - f\cdot GT\cos\alpha,$$

або

$$\frac{V_1}{g} = T\sin\alpha - Tf\cos\alpha\ .$$

Тоді

$$T = \frac{V_1}{(\sin\alpha - f\cos\alpha)\cdot g}\ .$$

Оскільки $\sin 30^\circ = 0{,}5$; $\cos 30^\circ = 0{,}866$; $f = 0{,}2$ і $g = 9{,}8\ м/c^2$ то

$$T = V_1/3{,}2\ .$$

Скориставшись одержаною залежністю, спочатку визначимо прискорення тіла, а після цього - час руху.

Оскільки для рівноприскореного руху $V_1 = V_0 + aT$ і при $V_0 = 0$ $V_1 = aT$, то:

$$T = \frac{aT}{3{,}2},\quad \text{або}\quad a = 3{,}2\ м/c^2\ .$$

За формулою $S = V_0 t + at^2/2$, враховуючи, що при $t = T$ шлях $S = l$, одержимо

$$l = V_0 T + \frac{1}{2}aT^2 = \frac{1}{2}aT^2.$$

З цієї формули знаходимо час руху T:

$$T = \sqrt{\frac{2l}{a}} = \sqrt{\frac{2\cdot 39{,}5}{3{,}2}} = 5\ c\ .$$

Відповідь: $T = 5\ c$.

Задача 3

По понтонному мосту масою M рухається автомобіль масою m за законом $S(t) = b\left(\alpha t + e^{-\alpha t} - 1\right)$.

Нехтуючи опором води ***визначити***:

1. ***Швидкість*** $\overline{V}_{П}$, з якою рухався б міст під час руху автомобіля, якщо б він не був прикріплений тросами до берега.
2. ***Силу*** $\overline{T}$ натягу тросів, за допомогою яких міст кріпиться до берега.

Розв'язування.

1. Спочатку розглянемо випадок, коли міст не прикріплений до берега, тобто $(T = 0)$. Для визначення швидкості $\overline{V}_{П}$ моста скористаємося теоремою про зміну кількості руху механічної системи.

На систему, яка складається з мосту і автомобіля, діють зовнішні сили: сила тяжіння мосту $\overline{G}_{П}$; сила тяжіння автомобіля $\overline{G}_{A}$ та виштовхуюча сила води $\overline{N}$ (рис. 1). Усі сили, що діють на систему, є вертикальними.

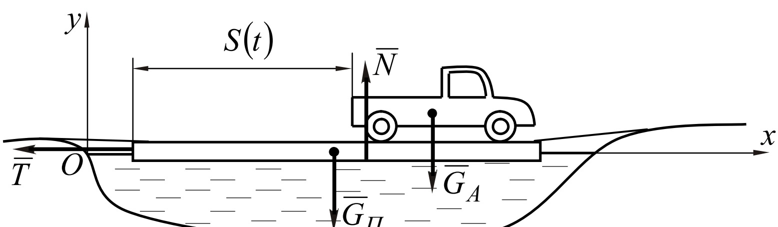


Рис. 1

Пов'яжемо з берегом нерухому систему координат xOy, відносно якої будемо вивчати рух системи, причому вісь Ox спрямуємо паралельно поверхні води, тобто перпендикулярно зовнішнім силам, що діють на систему.

Закон руху автомобіля $S(t)$ задано відносно моста. Таким чином, відносна швидкість автомобіля $V_A^{від}$ буде змінюватися за законом

$$V_A^{від} = \frac{dS}{dt} = \frac{d}{dt}\left[b\left(\alpha t + e^{-\alpha t} - 1\right)\right] = b\alpha\left(1 - e^{-\alpha t}\right),$$

а абсолютна швидкість автомобіля V_A за законом

$$V_A = V_П + V_A^{від} = V_П + b\alpha\left(1 - e^{-\alpha t}\right),$$

де $V_П$ – абсолютна швидкість моста.

Оскільки швидкість автомобіля залежить від часу, то для розв'язання задачі скористаємося теоремою про зміну кількості руху системи в диференціальній формі в проекції на вісь Ox (Д4.17):

$$\frac{dQ_x}{dt} = \sum F_{kx}^e.$$

Враховуючи, що $\sum F_{kx}^e = 0$, то $\dfrac{dQ_x}{dt} = 0$, (1)

де Q_x – проекція кількості руху системи на вісь Ox.

Проекція кількості руху системи на вісь Ox дорівнює сумі проекцій на цю вісь кількостей руху автомобіля Q_{Ax} і понтонного моста $Q_{Пx}$:

$$Q_x = Q_{Ax} + Q_{Пx},$$

де $Q_{Ax} = m \cdot V_A = m\left[V_П + b\alpha\left(1 - e^{-\alpha t}\right)\right]$;

$Q_{Пx} = M \cdot V_П$.

Тоді

$$Q_x = m\left[V_П + b\alpha\left(1 - e^{-\alpha t}\right)\right] + M \cdot V_П,$$

або

$$Q_x = (m + M)V_П + mb\alpha\left(1 - e^{-\alpha t}\right). \qquad (2)$$

Підставимо (2) в (1) і здиференціюємо за часом:

$$\frac{dQ_x}{dt} = \frac{d}{dt}\left[(m + M)V_П + mb\alpha\left(1 - e^{-\alpha t}\right)\right] = 0;$$

$$(m + M)\frac{dV_П}{dt} + mb\alpha\left(\alpha e^{-\alpha t}\right) = 0;$$

$$(m + M)\frac{dV_П}{dt} + mb\alpha^2 e^{-\alpha t} = 0. \qquad (3)$$

Таким чином, щоб знайти вираз для $V_П$ треба розділити змінні в рівняння (3) та проінтегрувати отримане рівняння за швидкістю від 0 до $V_П$ і за часом від 0 до t:

$$(m + M)dV_П = -mb\alpha^2 e^{-\alpha t}dt;$$

$$(m + M)\int_0^{V_П} dV_П = -mb\alpha^2\int_0^t e^{-\alpha t}dt;$$

$$(m + M)V_П = -mb\alpha^2\left(-\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha t}\right)\Bigg|_0^t = mb\alpha \cdot e^{-\alpha t}\Big|_0^t =$$

$$= mb\alpha\left(e^{-\alpha \cdot t} - e^{-\alpha \cdot 0}\right) = mb\alpha\left(e^{-\alpha t} - 1\right).$$

Остаточно дістанемо

$$V_П = -\frac{mb\alpha}{m + M}\left(1 - e^{-\alpha t}\right).$$

Знак мінус вказує на те, що швидкість моста напрямлена в сторону, яка протилежна руху автомобіля.

2. Розглянемо випадок, коли міст прикріплений тросами до берега.

В цьому випадку до вертикальних сил $\overline{G}_П$, $\overline{G}_A$ і $\overline{N}$, що діють на систему, додається горизонтальна сила $\overline{T}$ (рис. 1) від натягу тросів.

Скористаємося диференціальним рівнянням зміни кількості руху в проекції на вісь Ox (Д4.17):

$$\frac{dQ_x}{dt} = \sum F_{kx}^e = -T. \tag{4}$$

Оскільки в цьому випадку міст нерухомий $\left(V_П = 0\right)$, то кількість руху механічної системи буде дорівнювати тільки кількості руху автомобіля, який рухається зі швидкістю:

$$V_A = V_A^{від} = b\alpha\left(1 - e^{-\alpha t}\right);$$

$$Q_x = Q_{Ax} = mb\alpha\left(1 - e^{-\alpha t}\right).$$

З рахуванням виразу для Q_x, рівняння (4) набуде виду

$$\frac{dQ_x}{dt} = \frac{d}{dt}\left[mb\alpha\left(1 - e^{-\alpha t}\right)\right] = mb\alpha^2 e^{-\alpha t} = -T .$$

Таким чином, натяг тросів дорівнює

$$T = -mb\alpha^2 e^{-\alpha t} .$$

Відповідь: $V_П = -\dfrac{mb\alpha}{m+M}\left(1 - e^{-\alpha t}\right);$

$$T = -mb\alpha^2 e^{-\alpha t} .$$

Д4.9. Завдання теми Д4

Механічна система складається із вантажів 1 масою m_1 і 2 масою m_2 та прямокутної вертикальної плити 3 масою $m_3 = 10\,кг$, яка рухається вздовж горизонтальних напрямних (рис. Д4.2, табл. Д4). В момент часу $t = t_0 = 0$, коли швидкість плити $V_{03} = 2\,м/с$, вантажі під дією внутрішніх сил починають рухатися по жолобам плити. Вантаж 1 рухається по дузі півкола радіуса R за законом $\varphi = f_1(t)$, де φ виражено в радіанах, t – в секундах. (Вісь, від якої ведеться відлік кута φ, і напрям додатного відліку вказані на рис. Д4.2). Вантаж 2 рухається від точки C_3 прямолінійно за законом $S = f_2(t)$, де S виражено в метрах, t – в секундах. (На рис. Д.2 вантаж 2 зображений в бік додатного відліку шляху S).

Визначити залежність $V_3 = f_3(t)$, тобто швидкість руху плити як функцію часу, вважаючи вантажі матеріальними точками і нехтуючи всіма силами опору руху

Вказівка. Завдання теми Д4 розв’язати двома способами:

а) застосовуючи теорему про рух центру мас механічної системи;

б) застосовуючи теорему про зміну кількості руху механічної системи.

Як і в попередніх завданнях перша цифра шифру визначає номер малюнка на рис. Д4.2, а друга – варіант в таблиці Д4.

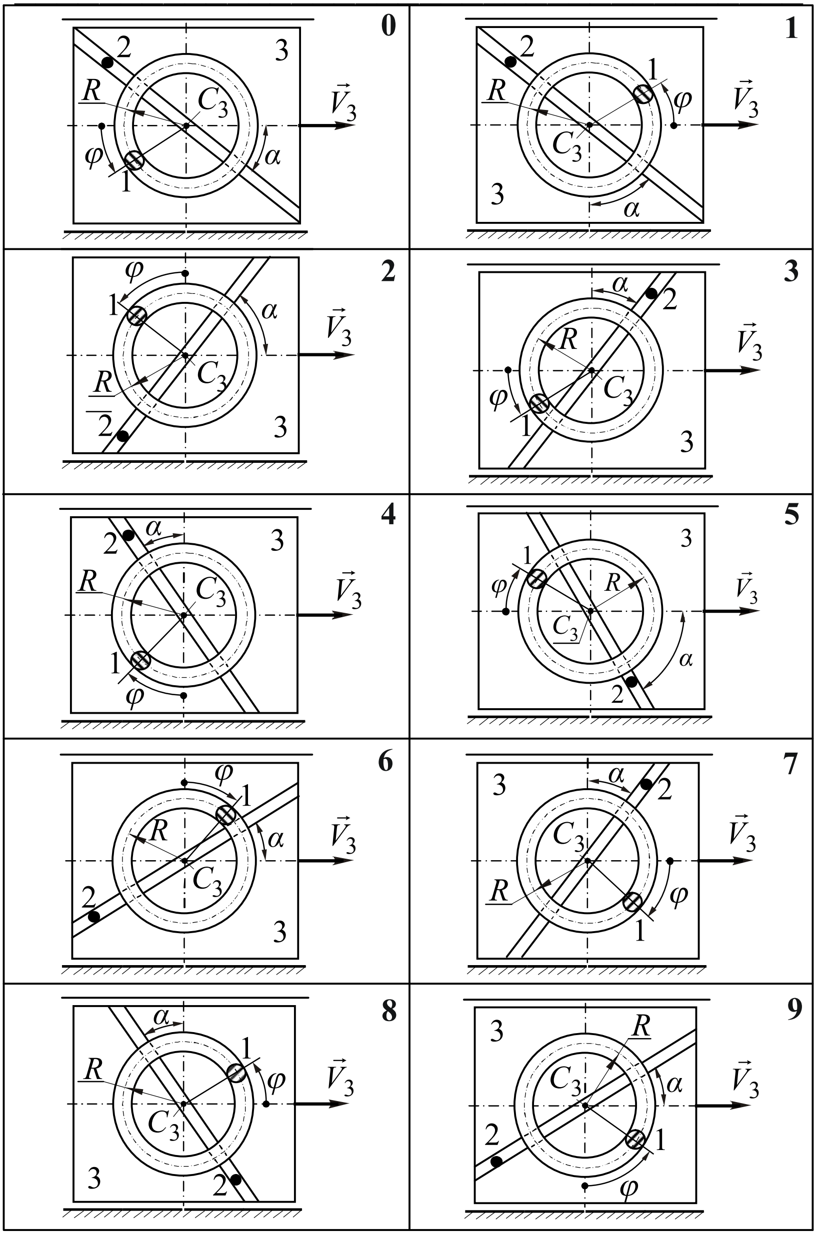


Рис.Д4.2

Таблиця Д 4.

Номер умови	m_1, *кг*	m_2, *кг*	α, град	R, *м*	$\varphi = f_1(t)$, рад	$S = f_2(t)$, *м*
0	0,5	1,5	30	0,2	$\pi\,(1-2t^2)$	$0{,}3\sin(\pi\,t^2\,/\,3)$
1	1	2	60	0,4	$\pi\,(2t^2-1)$	$1{,}5\cos(\pi\,t^2\,/\,3)$
2	0,2	0,8	45	0,6	$\pi\,(1-4t^2)/8$	$1{,}2\sin(\pi\,t^2\,/\,6)$
3	4	2	30	0,8	$\pi\,(3+t^2)/2$	$1{,}8\cos(\pi\,t^2\,/\,6)$
4	5	3	45	1,0	$\pi\,(3-t^2)/4$	$0{,}8\sin(\pi\,t^2\,/\,4)$
5	2	3	60	0,1	$\pi\,(4t^2-1)/2$	$0{,}4\cos(\pi\,t^2\,/\,4)$
6	3	1	60	0,3	$\pi\,(1-4t^2)/4$	$0{,}6\sin(5\pi\,t^2\,/12)$
7	4	3	30	0,5	$\pi\,t^2\,/\,4$	$1{,}8\cos(5\pi\,t^2\,/\,12)$
8	6	4	45	0,7	$\pi\,(5-3t^2)/3$	$0{,}1\sin(3\pi\,t^2\,/\,2)$
9	3	6	60	0,9	$\pi\,(3t^2+4)/6$	$0{,}2\cos(\pi\,t^2)$

Д4.10. Приклад розв'язування теми Д4

Дано: $m_1 = 2\ кг$; $m_2 = 3\ кг$; $m_3 = 10\ кг$; $\alpha = 60^\circ$;

$$R = 0{,}1\ м;\ V_{03} = 2\ м/с;\ S = 0{,}4\cos\left(\frac{\pi t^2}{4}\right)\ м;$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2}(4t^2-1)\ рад.$$

Визначити: $V_3 = f(t)$.

Розв'язування.. Розглянемо механічну систему, яка складається з плити 3 та вантажів 1 і 2 у довільному положенні (рис. Д4.3).

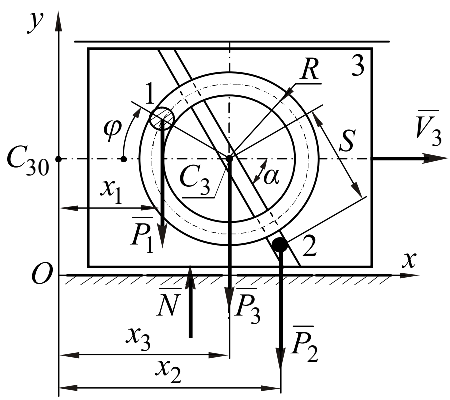


Рис. Д4.3

Покажемо всі зовнішні сили, що діють на систему: сили тяжіння $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$, $\overline{P}_3$ та реакцію напрямних $\overline{N}$.

Проведемо координатні осі Oxy так, щоб вісь Oy проходила через точку C_{30}, де знаходиться центр мас плити C_3 у початковий момент часу $t = t_0 = 0$.

а) ***Визначимо*** $V_3 = f(t)$ ***за допомогою теореми про рух центру мас механічної системи.***

Оскільки $V_3 = \dot{x}$ то необхідно знати рівняння руху плити, тобто $x_3 = f(t)$. Запишемо диференціальне рівняння руху центру мас плити в проекції на вісь x:

$$M\,\ddot{x}_C = \sum F_{kx}^e, \tag{1}$$

де $M = m_1 + m_2 + m_3$ – маса системи.

Оскільки всі зовнішні сили, що діють на систему, вертикальні, то $\sum F_{kx}^e = 0$ і згідно з законом збереження руху центра мас системи (Д4.8) $V_{Cx} = const$. Таким чином, добуток маси системи $(M = const)$ на швидкість центра мас буде величиною сталою, тобто:

$$M \cdot V_{Cx} = C_1(const), \quad \text{або} \quad M\frac{dx_C}{dt} = C_1.$$

Відокремлюючи змінні та інтегруючи останнє рівняння дістанемо:

$$M\int dx_C = C_1\int dt \;\Rightarrow\; Mx_C = C_1 t + C_2, \qquad (2)$$

де C_1 і C_2 – сталі інтегрування.

Із формули (Д4.4) визначимо значення Mx_C:

$$Mx_C = m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3\,. \qquad (3)$$

Виразимо координати x_1 та x_2 через координату x_3. Із рис. Д4.3 видно, що в довільний момент часу абсциса першого вантажу:

$$x_1 = x_3 - R\cos\varphi\,, \qquad (4)$$

а абсциса другого вантажу:

$$x_2 = x_3 + S\cos\alpha = x_3 + S\cos 60^\circ = x_3 + 0{,}5S. \qquad (5)$$

Підставляючи (4) і (5) в (3), дістанемо:

$$\begin{aligned} Mx_C &= m_1(x_3 - R\cos\varphi) + m_2(x_3 + 0{,}5S) + m_3 x_3 = \\ &= (m_1 + m_2 + m_3)x_3 - m_1\cdot R\cos\varphi + m_2\cdot 0{,}5S = \\ &= (2+3+10)x_3 - 2\cdot 0{,}1\cdot\cos\varphi + 3\cdot 0{,}5S = \\ &= 15x_3 - 0{,}2\cdot\cos\varphi + 1{,}5S\,. \end{aligned}$$

Після підстановки залежностей для φ і S, отримаємо:

$$Mx_C = 15x_3 - 0{,}2\cos\left(2\pi t^2 - \frac{\pi}{2}\right) + 0{,}6\cos\left(\frac{\pi t^2}{4}\right). \qquad (6)$$

Підставляючи рівняння (6) в (2), дістанемо:

$$15x_3 - 0{,}2\cos\left(2\pi t^2 - \frac{\pi}{2}\right) + 0{,}6\cos\left(\frac{\pi t^2}{4}\right) = C_1 t + C_2\,, \qquad (7)$$

звідки рівняння руху плити буде мати вигляд:

$$x_3 = \frac{0,2}{15}\cos\left(2\pi t^2 - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{0,6}{15}\cos\left(\frac{\pi t^2}{4}\right) + \frac{C_1}{15}t + \frac{C_2}{15}. \quad (8)$$

Для визначення швидкості плити $V_3 = \dot{x}_3$ здиференціюємо за часом рівняння (8):

$$V_3 = \dot{x}_3 = -\frac{0,2}{15}\cdot 4\pi\cdot t\cdot\sin\left(2\pi t^2 - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{0,6}{15}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot t\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}t^2\right) + \frac{C_1}{15} =$$

$$= -\frac{0,2}{15}\cdot 4\cdot 3,14\cdot t\cdot\sin\left(2\pi t^2 - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{0,6}{15}\cdot\frac{3,14}{2}\cdot t\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}t^2\right) + \frac{C_1}{15} =$$

$$= -0,17\cdot t\cdot\sin\left(2\pi t^2 - \frac{\pi}{2}\right) + 0,06\cdot t\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}t^2\right) + \frac{C_1}{15}. \quad (9)$$

Сталу інтегрування C_1 визначимо із початкових умов: при $t = t_0 = 0$ швидкість $V_3 = V_{03} = 2\ м/с$. Підставивши ці значення в рівняння (9), дістанемо

$$2 = \frac{C_1}{15} \quad \Rightarrow \quad C_1 = 30.$$

Таким чином швидкість плити 3 буде змінюватися за законом:

$$V_3 = 2 - 0,17\cdot t\cdot\sin\left(2\pi t^2 - \frac{\pi}{2}\right) + 0,06\cdot t\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}t^2\right),\ \frac{м}{с}.$$

б) *Визначимо $V_3 = f(t)$ за допомогою теореми про зміну кількості руху $\overline{Q}$ механічної системи в проекції на вісь x.*

Оскільки всі зовнішні сили, що діють на систему, вертикальні, то $\sum F_{kx}^e = 0$ і згідно з (Д4.19) маємо:

$$Q_x = const, \quad \text{або} \quad Q_x^I = Q_x^{II}, \tag{10}$$

де Q_x^I – проекція кількості руху системи в момент часу $t_0 = 0$;

Q_x^{II} – проекція кількості руху системи в довільний момент часу t.

Визначимо значення Q_x^I і Q_x^{II}:

$$Q_x^I = MV_{03} = (m_1 + m_2 + m_3)V_{03} =$$
$$= (2 + 3 + 10) \cdot 2 = 30 \ \text{кг} \cdot \text{м}/\text{с}; \tag{11}$$

$$Q_x^{II} = m_1 V_{1x} + m_2 V_{2x} + m_3 V_{3x}, \tag{12}$$

де $V_{3x} = V_3 = \dot{x}_3$;

$$V_{1x} = \dot{x}_1 = (x_3 - R\cos\varphi)'_t = (x_3 - 0{,}1\cos(2\pi t^2 - \pi/2))'_t =$$
$$= \dot{x}_3 + 0{,}1 \cdot 4\pi t \cdot \sin\left(2\pi t^2 - \frac{\pi}{2}\right) = V_3 + 1{,}3t \cdot \sin\left(2\pi t^2 - \frac{\pi}{2}\right);$$

$$V_{2x} = \dot{x}_2 = (x_3 + S \cdot \cos\alpha)'_t = ((x_3 + 0{,}5 \cdot 0{,}4 \cdot \cos(\pi t^2/4))'_t =$$
$$= \dot{x}_3 - 0{,}2 \cdot t \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}t^2\right) = V_3 - 0{,}3t \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}t^2\right).$$

Підставляючи отримані вирази для V_{3x}, V_{1x} і V_{2x} в рівняння (12), дістанемо:

$$Q_x^{II} = m_3 V_3 + m_1[V_3 + 1{,}3 \cdot t \cdot \sin(2\pi t^2 - \pi/2)] +$$

$$+m_2[V_3 - 0{,}3t \cdot \sin\cdot(\pi\, t^2/4)] = (m_3 + m_1 + m_2)V_3 +$$

$$+m_1 \cdot 1{,}3t \cdot \sin(2\pi\, t^2 - \pi/2) - m_2 \cdot 0{,}3t \cdot \sin(\pi\, t^2 4) =$$

$$= 5V_3 + 2{,}6t \cdot \sin\left(2\pi t^2 - \frac{\pi}{2}\right) - 0{,}9t \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}t^2\right). \quad (13)$$

У відповідності з (10) вирази (11) та (13) рівні, тобто:

$$30 = 15 \cdot V_3 + 2{,}6t \cdot \sin\left(2\pi t^2 - \frac{\pi}{2}\right) - 0{,}9t \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}t^2\right).$$

Звідси остаточно дістанемо:

$$V_3 = \frac{30}{15} - \frac{2{,}6}{15}t \cdot \sin\left(2\pi t^2 - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{0{,}9}{15}t \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}t^2\right) =$$

$$= 2 - 0{,}17t \cdot \sin\left(2\pi t^2 - \frac{\pi}{2}\right) + 0{,}06t \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}t^2\right),\ \frac{м}{с}.$$

Відповідь: швидкість руху плити 3, як функція часу

$$V_3 = 2 - 0{,}17t \cdot \sin\left(2\pi t^2 - \frac{\pi}{2}\right) + 0{,}06t \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}t^2\right),\ \frac{м}{с}.$$

Зауваження. Оскільки обидві теореми є різними формами одного і того ж закону, то вибір, яку з них застосовувати, залежить від характеру задачі, що розв'язується. При вивченні руху одного твердого тіла (або системи тіл) можна з однаковим успіхом користуватися будь-якою з цих форм. Якщо ж розглядається рух суцільного середовища (рідини або газу), то поняття про центр мас системи практично втрачає свій зміст. У цих випадках використовують теорему про зміну кількості руху.

Тема Д5. ТЕОРЕМА ПРО ЗМІНУ КІНЕТИЧНОЇ ЕНЕРГІЇ МЕХАНІЧНОЇ СИСТЕМИ

Д5.1. Стислі відомості з теорії

Кінетичною енергією матеріальної точки *називається скалярна додатна величина, яка дорівнює половині добутку маси точки на квадрат її швидкості:*

$$T = \frac{1}{2} m V^2. \qquad (Д5.1)$$

Одиницею кінетичної енергії в СІ є *Джоуль* (*Дж*):

$$[T] = [m] \cdot [V]^2 = 1 \frac{кг \cdot м^2}{с^2} \equiv 1 H \cdot м \equiv 1 Дж.$$

Кінетичною енергією механічної системи n матеріальних точок *(тіл) називається арифметична сума кінетичних енергій всіх точок (тіл) системи*:

$$T = \sum_{k=1}^{n} T_k \equiv \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} m_k V_k^2. \qquad (Д5.2)$$

Кінетичну енергію твердого тіла в найпростіших випадках його руху обчислюють за формулами:

а) *при поступальному русі тіла*

$$T = \frac{1}{2} M V^2, \qquad (Д5.3)$$

де M – маса тіла;

V – швидкість будь-якої його точки.

б) *при обертанні тіла навколо нерухомої осі*

$$T = \frac{1}{2} I_z \omega^2, \tag{Д5.4}$$

де I_z – момент інерції тіла відносно осі обертання z;

ω – кутова швидкість тіла.

в) *при плоскопаралельному русі тіла*

$$T = \frac{1}{2} M V_C^2 + \frac{1}{2} I_{Cz} \cdot \omega^2, \tag{Д5.5}$$

де M – маса тіла;

V_C – модуль швидкості його центру мас;

I_{Cz} – момент інерції тіла відносно осі z, яка проходить через центр мас перпендикулярно до площини в якій рухається тіло;

ω – кутова швидкість тіла.

Елементарною роботою δA ***змінної сили*** $\overline{F}$ *називається скалярна міра дії сили, яка дорівнює скалярному добутку сили на елементарне переміщення* $d\overline{r}$ *точки її прикладення:*

$$\delta A = (\overline{F} \cdot d\overline{r}) = F \cdot dr \cdot \cos\alpha, \tag{Д5.6}$$

де α – кут між векторами $\overline{F}$ та $d\overline{r}$.

В залежності від кута α *робота може бути додатною*, якщо α – гострий кут $(\cos\alpha > 0)$; *від'ємною*, якщо α – тупий кут $(\cos\alpha < 0)$; *дорівнювати нулю*, якщо α – прямий кут $(\cos\alpha = 0)$.

Крім того, *робота дорівнює нулю*, якщо в даний момент $F = 0$, а також якщо $dr = 0$, тобто в момент, коли точка прикладання сили нерухома. Зокрема, сили, які прикладені у миттєвому центрі швидкостей тіла, роботи не здійснюють.

Одиницею роботи в СІ є *Джоуль* (*Дж*):

$$[A] = [F] \cdot [S] = 1 \frac{кг \cdot м^2}{с^2} \equiv 1\,Н \cdot м \equiv 1Дж.$$

Вираз елементарної роботи змінної сили через проекції сили та елементарного переміщення на осі декартових координат має вигляд:

$$\delta\, A = F_x \cdot dx + F_y \cdot dy + F_z \cdot dz. \qquad \text{(Д5.7)}$$

Робота А змінної сили $\overline{F}$ *на кінцевому переміщенні* $(M_1 M_2)$ *за довільною траєкторією* дорівнює криволінійному інтегралу від елементарної роботи цієї сили, який береться вздовж дуги кривої від M_1 до M_2:

$$A = \int\limits_{(M_1 M_2)} F \cos\alpha\, dr = \int\limits_{(M_1 M_2)} F_\tau dr, \qquad \text{(Д5.8)}$$

де $F_\tau = F\cos\alpha$ – проекція сили на напрям дотичної осі τ до траєкторії в даній точці,

або в координатному вигляді:

$$A = \int\limits_{(M_1\ M_2)} (F_x \cdot dx + F_y \cdot dy + F_z \cdot dz). \qquad \text{(Д5.9)}$$

У деяких окремих випадках роботу обчислюють за готовими формулами:

1. *Робота сталої сили на прямолінійному переміщенні її точки прикладення*

$$A = (\overline{F} \cdot \Delta\overline{r}) = F \cdot S \cdot \cos\alpha, \qquad (Д5.10)$$

де S – шлях, який пройшла точка прикладення сили $\overline{F}$;
a – кут між векторами сили і переміщення $\Delta\overline{r}$ точки прикладення сили.

2. *Робота сили тяжіння*

$$A = \pm P \cdot h, \qquad (Д5.11)$$

де $P = mg$ – модуль сили тяжіння,
h – вертикальне переміщення точки прикладення сили $\overline{P}$.

Знак "+" береться, якщо точка прикладення рухається донизу, знак "–", якщо угору.

3. *Робота сили пружності*

$$A = \frac{c}{2}[(\Delta l_{поч.})^2 - (\Delta l_{кін.})^2], \qquad (Д5.12)$$

де c – жорсткість пружини;
$\Delta l_{поч.}$ – початкове видовження (стиснення) пружини;

$\Delta l_{кін.}$ – кінцеве видовження (стиснення) пружини.

Робота буде додатною, якщо $\Delta l_{поч.} > \Delta l_{кін.}$, тобто коли кінець пружини рухається до положення рівноваги, у якому пружина недеформована. Робота буде від'ємною, якщо $\Delta l_{поч.} < \Delta l_{кін.}$, тобто коли кінець пружини віддаляється від положення рівноваги.

4. *Робота сили, яка прикладена до тіла, що обертається навколо нерухомої осі*

$$A = \int_{\varphi_0}^{\varphi} M\ (\overline{F})d\varphi, \qquad (Д5.13)$$

де $M_z(\overline{F})$ – момент сили $\overline{F}$ відносно осі обертання z;

φ_0 і φ – початкове та кінцеве значення кута повороту тіла.

Якщо $M_z(\overline{F}) = const$, то:

$$A = M_z(\overline{F})(\varphi - \varphi_0). \qquad (Д5.14)$$

Теорема про зміну кінетичної енергії матеріальної точки в інтегральній формі

Зміна кінетичної енергії матеріальної точки на її переміщенні M_0M_1 дорівнює сумі робіт всіх сил, що діють на цю точку, в межах того ж переміщення:

$$\frac{mV_1^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = \sum A_{(M_0M_1)}(F_k). \qquad (Д5.15)$$

Якщо сума робіт сил додатна, то $V_1 > V_0$ і кінетична енергія точки зростає. Якщо ж сума робіт від'ємна, то $V_1 < V_0$ і кінетична енергія точки зменшується.

У випадку невільного руху точки в праву частину рівняння (Д5.15) окрім робіт активних сил увійдуть також і роботи реакцій в'язей.

Якщо матеріальна точка рухається по гладкій поверхні (сила тертя дорівнює нулю), то реакція поверхні буде спрямована перпендикулярно до поверхні (перпендикулярно до переміщення точки) і її робота буде дорівнювати нулю. Таким чином, при переміщенні матеріальної точки по гладкій поверхні зміна кінетичної енергії буде визначатися сумою робіт на цьому переміщенні тільки прикладених до точки активних сил.

Теорема про зміну кінетичної енергії механічної системи в інтегральній формі

Зміна кінетичної енергії системи на її кінцевому переміщенні (0–1) дорівнює сумі робіт всіх зовнішніх та внутрішніх сил системи на цьому переміщенні:

$$T_1 - T_0 = \sum A\left(\overline{F}_k^e\right) + \sum A\left(\overline{F}_k^i\right). \qquad (Д5.16)$$

Для незмінної системи (тверде тіло, гнучка нерозтяжна нитка) $\sum A\left(\overline{F}_k^i\right) = 0$ і тому для неї

$$T_1 - T_0 = \sum A\left(\overline{F}_k^e\right) \qquad (Д5.17)$$

Зміна кінетичної енергії незмінної системи на її кінцевому переміщенні (0–1) дорівнює сумі робіт всіх зовнішніх сил, які діють на систему на цьому переміщенні.

Д5.2. Порядок розв'язування задач на застосування теореми про зміну кінетичної енергії в інтегральній формі

Розв'язування задач за допомогою теореми про зміну кінетичної енергії в інтегральній формі рекомендується проводити у наступній послідовності:

1. Показати на рисунку всі зовнішні сили системи.

2. Обчислити суму робіт усіх зовнішніх сил на переміщенні точок системи.
3. Обчислити кінетичну енергію механічної системи у початковому та кінцевому її станах.
4. Користуючись результатами підрахунків за пунктами 2 і 3, записати теорему про зміну кінетичної енергії механічної системи і визначити величину параметру, який треба знайти.

Д5.3. Контрольні запитання

1. Як визначається робота сталої за модулем і напрямком сили на прямолінійному переміщенні точки прикладення сили?
2. Як записується вираз для елементарної роботи у загальному вигляді?
3. Як визначається елементарна робота сили через проекції сили на осі координат?
4. Як вираховується робота сил тяжіння і пружності?
5. На яких переміщеннях робота сили тяжіння: додатна, від'ємна, дорівнює нулю?
6. У якому випадку робота сили пружності додатна і в якому від'ємна?
7. Що називається кінетичною енергією матеріальної точки?
8. Що називається кінетичною енергією механічної системи?
9. Як підраховується кінетична енергія твердого тіла у випадку поступального руху?
10. Як підраховується кінетична енергія твердого тіла при обертальному русі?
11. Як підраховується кінетична енергія твердого тіла при плоскому русі?

12. Як формулюються теореми про зміну кінетичної енергії механічної системи?
13. Чи входять у рівняння, які виражають теорему про зміну кінетичної енергії системи, внутрішні сили цієї системи?
14. У якому випадку у рівняння, які виражають теорему про зміну кінетичної системи, не входять внутрішні сили?
15. Якщо дана ізольована від дії будь-яких зовнішніх сил система таким чином, що на її точки діють тільки внутрішні сили, то чи буде змінюватися кінетична енергія такої системи?

Д5.4. Приклади розв'язування задач

Задача 1

Визначити найменшу роботу A, яку необхідно виконати, щоб підняти на висоту $h = 5$ *м* вантаж $P = 2$ *кН*, пересуваючи його по похилій площині, яка складає з горизонтом кут $\alpha = 30^\circ$; коефіцієнт тертя ковзання $f = 0{,}5$.

Розв'язування: Зобразимо вантаж у довільному положенні на похилій площині і покажемо всі сили, що на нього діють (рис.1): силу тяжіння $\overline{P}$, силу тертя $\overline{F}_{тер}$ і нормальну реакцію $\overline{N}$.

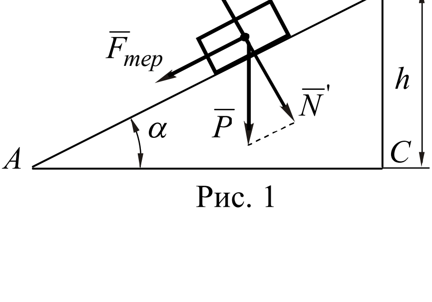


Рис. 1

Робота, яка витрачається на піднімання вантажу на висоту $h = 5$ *м*, дорівнює сумі робот сили тертя вздовж довжини AB та сили тяжіння на переміщенні BC точки її прикладення.

Нормальна реакція роботи не виконує, оскільки вона перпендикулярна переміщенню.

Обчислимо роботу сили тертя:

$$A_{тер} = F_{тер} \cdot AB \cdot \cos 180^\circ = -f \cdot N' \cdot AB.$$

Оскільки $N' = P\cos\alpha$, та $AB = \dfrac{BC}{\sin\alpha}$, то

$$A_{тер} = -f \cdot P \cdot \cos\alpha \cdot \frac{BC}{\sin\alpha}.$$

$$A_{тер} = -0{,}5 \cdot 2000 \cdot \cos 30^\circ \frac{5}{\sin 30^\circ} = -8660 \ \text{Дж}.$$

Робота сили тяжіння у нашому випадку від'ємна, оскільки вантаж рухається угору, і дорівнює:

$$A_P = -P \cdot h = -2000 \cdot 5 = -10000 \ \text{Дж}.$$

Повна робота, витрачена на піднімання вантажу, дорівнює:

$$A = A_P + A_{тер} = -8660 - 10000 =$$
$$= -18660 \ \text{Дж} = -18{,}7 \ \text{кДж}.$$

Відповідь: $A = -18{,}7$ *кДж*.

Задача 2

Тіло A (рис.1) утримується в рівновазі на гладенькій похилій поверхні, розташованій під кутом α до горизонту, за допомогою пружини. Внаслідок одержаного поштовху тіло перемістилося униз по похилій поверхні на відстань L.

Визначити суму робіт A усіх сил, прикладених до тіла на цьому переміщенні, якщо сила тяжіння тіла

$P = 80\ H$, кут $\alpha = 30^\circ$, $L = 0{,}3\,м$, жорсткість пружини $c = 4{,}0\,H\,/\,см$.

Розв'язування. До тіла прикладені наступні сили: сила тяжіння $\overline{P}$, нормальна реакція поверхні $\overline{R}$ та сила пружності розтягнутої пружини $\overline{F}$ (рис.1).

Вісь x спрямуємо паралельно похилій поверхні, а початок відліку O сполучимо з кінцем недеформованої пружини.

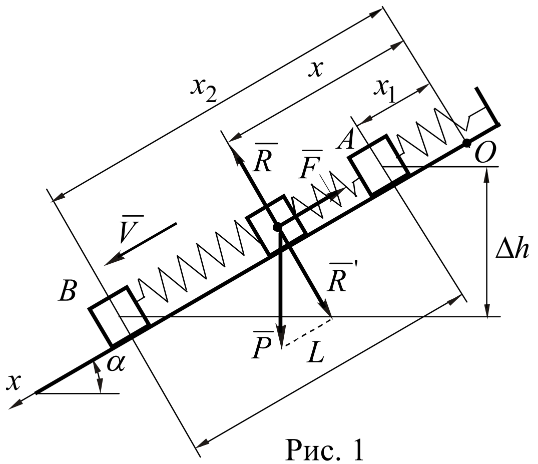


Рис. 1

Тоді тіло під дією поштовху почне рухатись із положення A, яке характеризується координатою x_1, що дорівнює:

$$x_1 = \delta_{cm},$$

де δ_{cm} – статичне видовження пружини.

Обчислимо суму робіт сил $\overline{P}$, $\overline{R}$, $\overline{F}$ на переміщенні $L = x_2 - x_1$:

$$\sum A_k = A(\overline{P}) + A(\overline{F}) + A(\overline{R}),$$

де $A\left(\overline{P}\right)$ – робота сили тяжіння на перепаді висот Δh між точками A та B;

$A\left(\overline{F}\right)$ – робота сили пружності пружини;

$A\left(\overline{R}\right)$ – робота нормальної реакції.

Робота сили тяжіння дорівнює:

$$A\left(\overline{P}\right) = P \cdot \Delta h = P \cdot L \cdot \sin\alpha = 80 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}5 = 12 \ Дж.$$

Робота сили пружності пружини визначається за формулою (Д5.12):

$$A\left(\overline{F}\right) = -\frac{c}{2}\left(x_2^2 - x_1^2\right),$$

де $x_2 = x_1 + L = \delta_{cm} + L$.

Отже,

$$A\left(\overline{F}\right) = -\frac{c}{2}\left[\left(\delta_{cm} + L\right)^2 - \delta_{cm}^2\right] =$$

$$= -\frac{c}{2}\left(\delta_{cm}{}^2 + 2\delta_{cm} \cdot L + L^2 - \delta_{cm}{}^2\right).$$

Остаточно

$$A(\overline{F}) = -\frac{c}{2} L(2\delta_{cm} + L).$$

Обчислимо δ_{cm} – статичне видовження пружини, яке має місце у положенні рівноваги тіла (точка A), коли пружина розтягнута сталою силою тяжіння. Для цього положення запишемо у проекції на вісь x рівняння рівноваги для сили тяжіння $\overline{P}$ та сили пружності пружини $\overline{F}_{cm}$, які діють на тіло:

$$P \sin\alpha - F_{cm} = 0.$$

Оскільки $F_{ст} = c \cdot \delta_{ст}$, то:

$$P\sin\alpha - c\delta_{ст} = 0,$$

або

$$\delta_{ст} = \frac{P \cdot \sin\alpha}{c} = \frac{80 \cdot 0,5}{4} = 10\,см = 0,1\ м.$$

Остаточно,

$$A(\overline{F}) = -\frac{c}{2}L(2\delta_{ст} + L) =$$

$$= -\frac{400}{2} \cdot 0,3(2 \cdot 0,1 + 0,3) = -30\ Дж.$$

Робота нормальної реакції $\overline{R}$ дорівнює нулю, оскільки ця сила перпендикулярна до переміщення тіла, тобто $A\left(\overline{R}\right) = 0$.

Отже,

$$\sum A_k = A\left(\overline{P}\right) + A\left(\overline{F}\right) = 12 - 30 = -18\ Дж.$$

Відповідь: $A = -18\ Дж.$

Задача 3

Матеріальна точка M масою m рухається прямолінійно по горизонтальній площині за законом $S = t^4$ під дією сили F=12t^2 (рис.1).

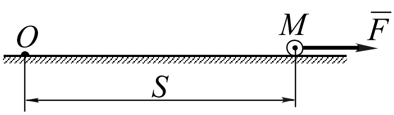


Рис.1

Визначити роботу цієї сили при переміщенні точки її прикладення з початкового положення (S_0= 0) у положення, де $S_1 = 4\ м.$

Розв'язування. Сила, яка діє на матеріальну точку *M,* змінюється зі зміною часу. Отже, для визначення роботи цієї сили необхідно скористатися рівнянням (Д5.8):

$$A_{(M_0M_1)} = \int_{M_0}^{M_1} F_\tau dS \,, \tag{1}$$

де F_τ – проекція сили на елементарне переміщення точки прикладення сили.

У нашому випадку задана сила $\overline{F}$ співпадає за напрямком з переміщенням точки *M,* а роботу *A* необхідно вираховувати на переміщенні від S_0 до S_1.

Таким чином, рівняння (1) набуде вигляду:

$$A_{(M_0M_1)} = \int_{M_0}^{M_1} F_\tau dS = \int_{S_0}^{S_1} 12t^2 \cdot dS \,. \tag{2}$$

Знайдемо залежність між силою F та переміщенням S, виключивши параметр t, який входить у вирази для значення сили та переміщення:

$$S = t^4, \quad t^2 = \sqrt{S}, \quad F = 12t^2 = 12\sqrt{S}.$$

Підставивши новий вираз для сили F у рівняння (2), одержимо:

$$A = \int_{S_0}^{S_1} 12\sqrt{S} dS = \int_0^4 12\sqrt{S} dS. \tag{3}$$

Обчислимо цей визначений інтеграл:

$$A = 12\int_0^4 \sqrt{S} dS = \frac{12 \cdot 2}{3} S^{\frac{3}{2}} \Bigg|_0^4 = 8\sqrt{4^3} = 64 \ \text{Дж}.$$

Відповідь: $A = 64$ *Дж.*

Задача 4

На рис. 1 зображено піднімальний механізм лебідки. Вантаж A вагою P_1 піднімається за допомогою невагомого та нерозтяжного тросу, який перекинуто через блок C і намотано на барабан B радіусом r і вагою P_2. До барабана прикладений обертаючий момент, який є пропорційним квадрату кута повороту φ барабану:

$$M_{об} = a\varphi^2,$$

де a – сталий коефіцієнт.

Визначити швидкість вантажу A в момент, коли він підніметься на висоту h. Масу барабана B рахувати рівномірно розподіленою вздовж його ободу. Блок C - суцільний диск вагою P_3. У початковий момент система знаходилась у спокої.

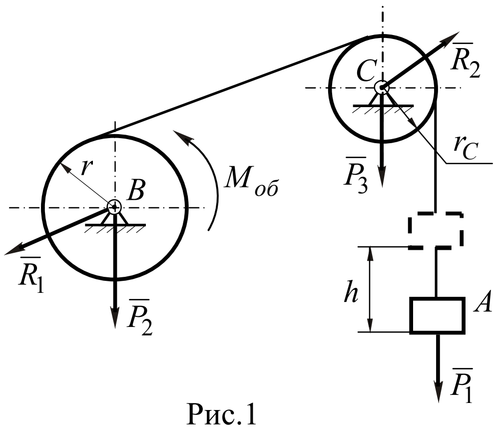


Рис.1

Розв'язування. Зобразимо на рисунку усі зовнішні сили, які діють на барабан B, блок C і вантаж A: сили тяжіння $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$, $\overline{P}_3$; обертаючий момент $M_{об}$, а також реакції шарнірів $\overline{R}_1$ і $\overline{R}_2$. Внутрішньою силою є натяг троса $\overline{T}$.

Запишемо теорему про зміну кінетичної енергії системи (Д5.16):

$$T_1 - T_0 = \sum A\left(\overline{F}_k^e\right) + \sum A\left(\overline{F}_k^i\right),$$

де T_1 – кінетична енергія системи у кінцевому положенні;

T_0 – кінетична енергія системи у початковому положенні;

$\sum A\left(\overline{F}_k^e\right)$ – сума робіт усіх зовнішніх сил на переміщенні h;

$\sum A\left(\overline{F}_k^i\right)$ – сума робіт усіх внутрішніх сил на переміщенні h.

Оскільки у початковий момент часу система знаходилася у стані спокою, то

$$T_0 = 0 .$$

У зв'язку з тим, що трос не розтягується і при русі системи знаходиться у натягнутому стані, сума робіт внутрішніх сил системи дорівнює нулю, отже

$$T_2 = \sum A\left(\overline{F}_k^e\right). \tag{1}$$

При піднятті вантажу A на висоту h сума робіт дорівнює:

$$\sum A(\overline{F}_k^{(e)}) = A\left(\overline{P}_1\right) + A\left(\overline{P}_2\right) + A\left(\overline{P}_3\right) +$$
$$+ A\left(\overline{R}_1\right) + A\left(\overline{R}_2\right) + A\left(M_{об}\right).$$

Оскільки точки прикладання сил $\overline{P}_3$, $\overline{P}_2$, $\overline{R}_1$ і $\overline{R}_2$ нерухомі, то

$$A\left(\overline{P}_2\right) = A\left(\overline{P}_3\right) = A\left(\overline{R}_1\right) = A\left(\overline{R}_2\right) = 0 .$$

Робота сили $\overline{P}_1$ дорівнює:

$$A\left(\overline{P}_1\right) = -P_1 h .$$

Оскільки обертаючий момент є змінним, то його робота визначиться шляхом інтегрування (Д5.13):

$$A\left(M_{об}\right)=\int\limits_0^{\varphi}dA=\int\limits_0^{\varphi}M_{об}d\varphi=\int\limits_0^{\varphi}a\varphi^2 d\varphi=\frac{a\cdot\varphi^3}{3}.$$

Визначимо кут φ, на який повернувся барабан B при підніманні вантажу A на висоту h:

$$\varphi=\frac{h}{r}.$$

Отже,

$$A\left(M_{об}\right)=\frac{a\cdot h^3}{3r^3}.$$

Таким чином

$$\sum A\left(\overline{F}_k^e\right)=A\left(M_{об}\right)-A\left(\overline{P}_1\right)=\frac{ah^3}{3r^3}-P_1 h;$$

$$\sum A\left(\overline{F}_k^e\right)=\frac{1}{3r^3}h\left(ah^2-3P_1 r^3\right).$$

Перейдемо до підрахування кінетичної енергії системи у кінцевому положенні:

$$T_2=T_A+T_B+T_C,$$

де T_A – кінетична енергія вантажу A;

T_C – кінетична енергія диска C;

T_B – кінетична енергія барабана B.

Вантаж A рухається поступально і його кінетична енергія дорівнює (Д5.3):

$$T_A=\frac{m_1 V_A^2}{2}=\frac{P_1 V_A^2}{2g}.$$

Диск C здійснює обертальний рух, його кінетична енергія визначається з виразу (Д5.4):

$$T_C = \frac{I_C \omega_C^2}{2},$$

де I_C – момент інерції диска відносно осі обертання;

ω_C – кутова швидкість диска.

Оскільки диск C – суцільний, то I_C дорівнює:

$$I_C = \frac{m_3 r_C^2}{2},$$

де r_C – радіус диска.

Оскільки лінійна швидкість обода диска дорівнює швидкості вантажу, кутова швидкість обертання ω_C буде:

$$\omega_C = \frac{V_A}{r_C}.$$

Отже,

$$T_C = \frac{m_3 r_C^2}{2 \cdot 2} \frac{V_A^2}{r_C^2} = \frac{P_3}{4g} V_A^2.$$

Кінетична енергія барабана *B,* оскільки він здійснює обертальний рух, дорівнює:

$$T_B = \frac{I_B \omega_B^2}{2},$$

Оскільки маса барабана *B* розподілена по ободу, то:

$$I_B = m_2 r^2 = \frac{P_2}{g} r^2.$$

Кутову швидкість барабана вирахуємо із умови рівності лінійних швидкостей на ободах диска і барабана:

$$\omega_B r = \omega_C r_C \,.$$

Звідки

$$\omega_B = \omega_C \frac{r_C}{r} = \frac{V_A}{r_C} \cdot \frac{r_C}{r} = \frac{V_A}{r} \,.$$

Таким чином

$$T_B = \frac{P_2}{g} \frac{r^2}{2} \cdot \frac{V_A^2}{r^2} = \frac{P_2}{2g} V_A^2 \,.$$

Кінетична енергія системи у кінцевому положенні дорівнює:

$$T_2 = \frac{P_1 V_A^2}{2g} + \frac{P_2 V_A^2}{2g} + \frac{P_3 V_A^2}{4g} = \frac{V_A^2}{4g} (2P_1 + 2P_2 + P_3) \,.$$

Отже, теорема про зміну кінетичної енергії системи (1) має вигляд:

$$\frac{V_A^2}{4g}\left(2P_1 + 2P_2 + P_3\right) = \frac{h\left(ah^2 - 3P_1 r^3\right)}{3r^3} \,.$$

Розв’язуючи це рівняння відносно V_A, знаходимо швидкість вантажу A після того, як він пройде шлях h:

$$V_A = \frac{2}{r} \sqrt{\frac{gh\left(ah^2 - 3P_1 r^3\right)}{3r\left(2P_1 + 2P_2 + P_3\right)}} \,.$$

Відповідь: $V_A = \dfrac{2}{r} \sqrt{\dfrac{gh\left(ah^2 - 3P_1 r^3\right)}{3r\left(2P_1 + 2P_2 + P_3\right)}}$.

Д5.5. Завдання теми Д5

Механічна система, схема якої показана на рис. Д5.1, а вихідні дані наведені в таблиці Д5, складається: із чотирьох тіл масами m_1, m_2, m_3, m_4; вантажу 1; двох ступінчастих шківів 2 і 3, радіуси ступенів яких $R_2 = 0{,}8\,м$, $r_2 = 0{,}4\,м$, $R_3 = 0{,}5\,м$, $r_3 = 0{,}2\,м$ та радіуси інерції відносно осі обертання $\rho_2 = 0{,}2\,м$, $\rho_3 = 0{,}1\,м$ (або ступінчастого шківа 2 і рухомого блока 3 радіусом r_3 і радіусом інерції ρ_3); вантажу 4 (або суцільного однорідного циліндричного котка 4 радіусом $r_4 = 0{,}3\,м$). Тіла системи з'єднані одне з одним нитками, які перекинуті через блоки і намотані на шківи 2 і 3 і коток 4 (або тільки на шків 2). Ділянки ниток паралельні відповідним площинам.

Під дією сили $F_1 = f(s)$, яка залежить від переміщення s_1 точки її прикладення, система приходить в рух із стану спокою. Під час руху на шківи 2 і 3 (або тільки на шків 2) діють сталі моменти M_{02} та M_{03} (або тільки M_{02}) сил тертя підшипників, а на коток 4 – момент M_4 пари сил опору коченню. Коефіцієнт тертя кочення $k = 0{,}002\,м.$ Коефіцієнт тертя ковзання $f = 0{,}1$.

Визначити значення швидкості, яка наведена у таблиці Д5, у той момент часу, коли тіло 1 переміститься на відстань $s_1 = 0{,}2\,м.$

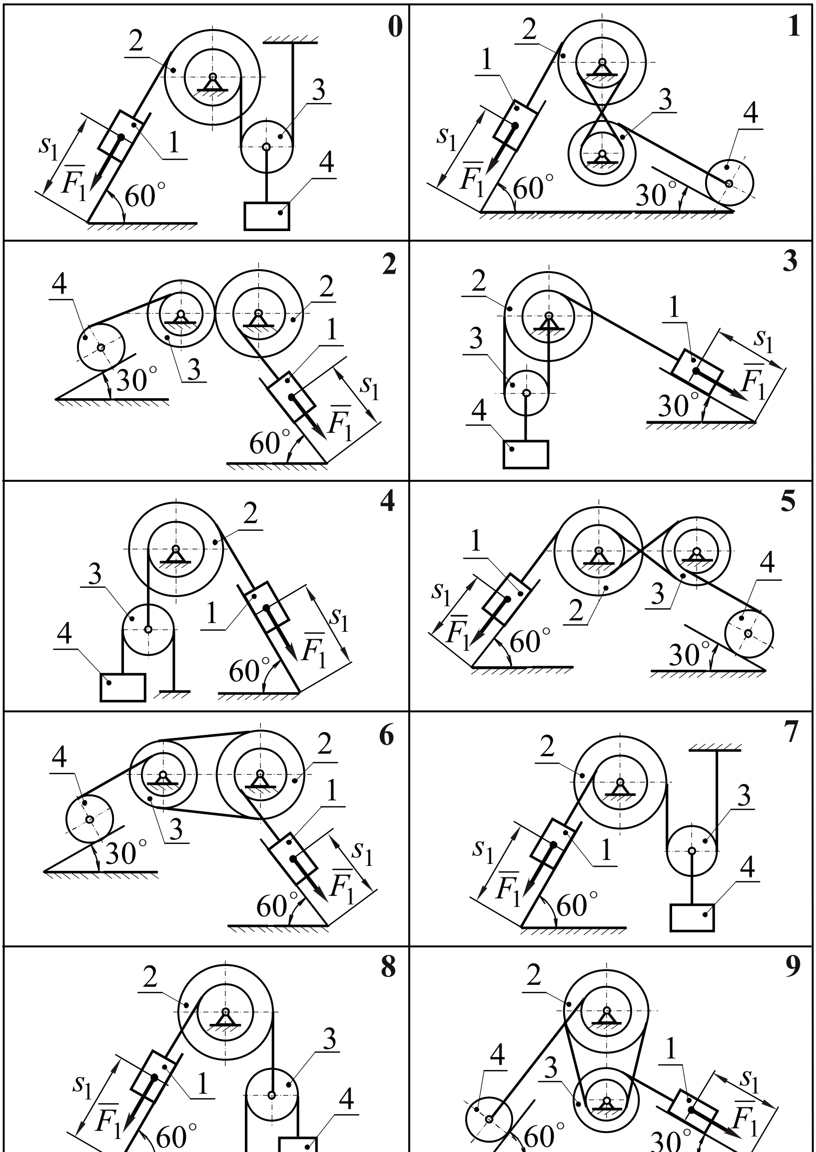

0
2
3
1
4
s_1
$\overline{F}_1$
60°
1
2
1
3
4
s_1
$\overline{F}_1$
60°
30°
2
4
2
3
1
s_1
$\overline{F}_1$
30°
60°
3
2
1
3
s_1
$\overline{F}_1$
4
30°
4
2
3
1
s_1
4
$\overline{F}_1$
60°
5
1
4
s_1
2
3
$\overline{F}_1$
60°
30°
6
4
2
1
3
s_1
30°
$\overline{F}_1$
60°
7
2
3
s_1
1
4
$\overline{F}_1$
60°
8
2
3
s_1
1
4
$\overline{F}_1$
60°
9
2
4
1
3
s_1
$\overline{F}_1$
60°
30°

Рис. Д5.1

Таблица Д5

Номер умови	m_1, *кг*	m_2, *кг*	m_3, *кг*	m_4, *кг*	M_{02}, *Н·м*	M_{03}, *Н·м*	$F_1 = f(s)$, *Н*	Знайти
0	8	2	3	4	0,2	2,0	4(8+9s)	V_{C1}
1	12	4	6	8	0,4	1,8	7(2+3s)	ω_2
2	9	6	3	5	0,6	1,6	6(3+5s)	V_{C1}
3	5	3	1	4	0,8	1,4	2(10+20s)	ω_3
4	6	4	3	2	1,0	1,2	8(5+6s)	ω_2
5	10	6	4	2	1,2	0,8	5(4+2s)	V_{C4}
6	12	7	6	3	1,4	1,0	4(5+7s)	ω_2
7	8	5	4	2	1,6	0,6	3(4+5s)	V_{C1}
8	11	3	2	1	1,8	0,4	9(2+3s)	ω_3
9	9	3	4	6	2,0	0,2	10(1+2s)	V_{C4}

Вказівки. Задача Д5 – на використання теореми про зміну кінетичної енергії механічної системи. Слід урахувати, що ***всі швидкості***, які входять у вирази для кінетичної енергії системи, необхідно виразити через ту швидкість (лінійну або кутову), яку в задачі треба визначити.

При обчисленні кінетичної енергії тіла, яке рухається плоскопаралельно, для встановлення залежності між швидкостями різних точок тіла або між їхньою кутовою швидкістю і швидкістю центра мас треба скористатися миттєвим центром швидкостей. Крім того, при обчисленні робіт зовнішніх сил і моментів сил треба всі переміщення виразити через задане переміщення s_1, враховуючи, що залежність між переміщеннями буде такою ж, як між відповідними швидкостями.

Д5.6. Приклад розв'язування теми Д5

Дано: $m_1 = 10\ кг$; $m_2 = 6\ кг$; $m_3 = 4\ кг$; $m_4 = 2\ кг$; $R_2 = 0{,}8\ м$; $r_2 = 0{,}4\ м$; $\rho_2 = 0{,}2\ м$; $R_3 = 0{,}5\ м$; $r_3 = 0{,}2\ м$; $\rho_3 = 0{,}1\ м$; $r_4 = 0{,}3\ м$; $M_{02} = 1{,}2\ Нм$; $M_{03} = 0{,}8\ Нм$; $F_1 = 5(4+2s),\ Н$; $k = 0{,}002\ м$; $f = 0{,}1$; $s_1 = 0{,}2\ м$; $g \approx 10\ м/с^2$.

Визначити: швидкість V_{C4} центра котка 4.

Розв'язання. Розглянемо рух незмінної механічної системи (рис.Д5.2).

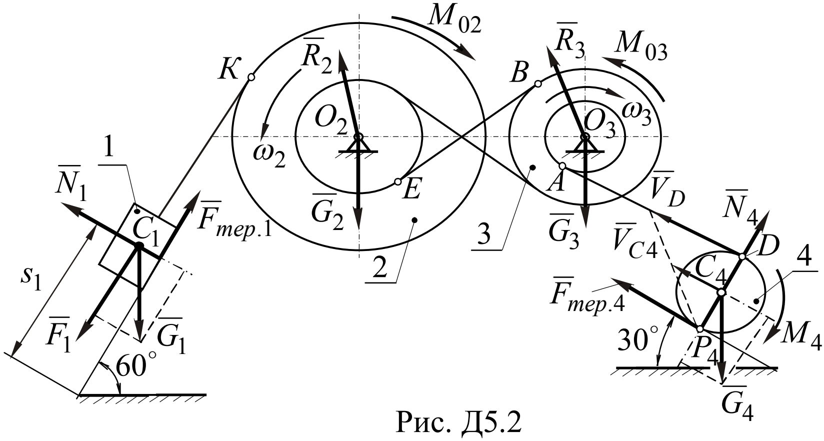


Рис. Д5.2

Зобразимо зовнішні сили та моменти сил опору руху, що діють на тіла системи: $\overline{G}_1$, $\overline{G}_2$, $\overline{G}_3$, $\overline{G}_4$ – сили тяжіння; $\overline{N}_1$, $\overline{R}_2$, $\overline{R}_3$, $\overline{N}_4$ – реакції в'язей; $\overline{F}_{тер.1}$ і $\overline{F}_{тер.4}$ – сили тертя ковзання тіл 1 і 4; M_{02} і M_{03} – моменти сил тертя підшипників шківів 2 та 3; M_4 – момент пари сил опору коченню котка 4.

Для визначення V_{C4} скористуємося теоремою про зміну кінетичної енергії механічної системи (Д5.16):

$$T - T_0 = \sum A\left(\overline{F}_k^e\right) + \sum A\left(\overline{F}_k^i\right) \tag{1}$$

де T_0 і T – кінетичні енергії системи в початковому та кінцевому положеннях;

$\sum A\left(\overline{F}_k^e\right)$ – сума робіт зовнішніх сил, прикладених до тіл системи на її переміщенні із початкового положення до кінцевого;

$\sum A\left(\overline{F}_k^i\right)$ – сума робіт внутрішніх сил на тому ж переміщенні.

Оскільки в початковому положенні система знаходиться у стані спокою, то $T_0 = 0$. Оскільки система незмінна, то $\sum A\left(\overline{F}_k^i\right) = 0$. Таким чином, рівняння (1) приймає вигляд:

$$T = \sum A\left(\overline{F}_k^e\right) \tag{2}$$

Величина T дорівнює сумі кінетичних енергій всіх тіл системи:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4. \tag{3}$$

Запишемо вирази для T_1, T_2, T_3, T_4, враховуючи, що тіло 1 рухається поступально, тіла 2 і 3 обертаються навколо нерухомих осей, а тіло 4 здійснює плоскопаралельний рух:

$$T_1 = m_1 \frac{V_1^2}{2} = 10 \frac{V_1^2}{2} = 5V_1^2; \tag{4}$$

$$T_2 = I_2 \frac{\omega_2^2}{2} = m_2 \rho_2^2 \frac{\omega_2^2}{2} = 6 \cdot 0,2^2 \cdot \frac{\omega_2^2}{2} = 0,12\omega_2^2; \qquad (5)$$

$$T_3 = I_3 \frac{\omega_3^2}{2} = m_3 \rho_3^2 \frac{\omega_3^2}{2} = 4 \cdot 0,1^2 \cdot \frac{\omega_3^2}{2} = 0,02\omega_3^2; \qquad (6)$$

$$T_4 = m_4 \frac{V_{C4}^2}{2} + I_4 \frac{\omega_4^2}{2} = m_4 \frac{V_{C4}^2}{2} + \frac{m_4 r_4^2}{2} \frac{\omega_4^2}{2} =$$

$$= 2\frac{V_{C4}^2}{2} + \frac{2 \cdot 0,3^2}{2} \frac{\omega_4^2}{2} = V_{C4}^2 + 0,045\omega_4^2. \qquad (7)$$

Всі швидкості, які входять в рівняння (4) ÷ (7), виразимо через невідому швидкість V_{C4}. Кутова швидкість ω_4 котка 4, миттєвий центр швидкостей якого знаходиться в точці P_4, дорівнює:

$$\omega_4 = \frac{V_{C4}}{r_4} = \frac{V_{C4}}{0,3} = 3,3V_{C4}.$$

Тоді

$$\omega_4^2 = 11V_{C4}^2.. \qquad (8)$$

Кутова швидкість ступінчастого шківа 3 дорівнює

$$\omega_3 = \frac{V_A}{r_3}.$$

Оскільки $V_A = V_D$, а $V_D = 2V_{C4}$, то

$$\omega_3 = \frac{V_A}{r_3} = \frac{V_D}{r_3} = \frac{2V_{C4}}{r_3} = \frac{2V_{C4}}{0,2} = 10V_{C4}..$$

Тоді

$$\omega_3^2 = 100\,V_{C4}^2. \qquad (9)$$

Кутова швидкість ω_2 ступінчастого шківа 2 дорівнює:

$$\omega_2 = \frac{V_E}{r_2}.$$

Оскільки $V_E = V_B$, то

$$\omega_2 = \frac{V_B}{r_2}.$$

Швидкість точки B дорівнює:

$$V_B = \omega_3 \cdot R_3 = 10V_{C4} \cdot R_3.$$

Тоді:

$$\omega_2 = \frac{V_B}{r_2} = \frac{10V_{C4} \cdot R_3}{r_2} = \frac{10V_{C4} \cdot 0,5}{0,4} = 12,5V_{C4};$$

$$\omega_2^2 = 156,25\, V_{C4}^2. \qquad (10)$$

Швидкість V_1 вантажу 1 дорівнює:

$$V_1 = V_K = \omega_2 R_2 = 12,5 \cdot V_{C4} \cdot 0,8 = 10V_{C4};$$

$$V_1^2 = 100V_{C4}^2. \qquad (11)$$

Загалом :

$$T_1 = 5V_1^2 = 5 \cdot 100V_{C4}^2 = 500V_{C4}^2;$$

$$T_2 = 0,12\omega_2^2 = 0,12 \cdot 156,25V_{C4}^2 = 18,8V_{C4}^2;$$

$$T_3 = 0,02\omega_3^2 = 0,02 \cdot 100V_{C4}^2 = 2V_{C4}^2;$$

$$T_4 = V_{C4}^2 + 0,045\omega_4^2 = V_{C4}^2 + 0,045 \cdot 11V_{C4}^2 = 1,5V_{C4}^2,$$

і остаточно:

$$T = 500V_{C4}^2 + 18,8V_{C4}^2 + 2V_{C4}^2 + 1,5V_{C4}^2 \approx 522V_{C4}^2. \qquad (12)$$

Знайдемо суму робіт зовнішніх сил, які прикладені до тіл системи на заданому переміщенні:

$$\sum A\left(\overline{F}_k^e\right) = A(\overline{F}_1) + A(\overline{G}_1) + A(\overline{N}_1) + (\overline{F}_{тер.1}) + A(\overline{G}_2) +$$

$$+A(\overline{G}_3) + A(\overline{R}_3) + A(M_{03}) + A(\overline{R}_2) + A(M_{02}) +$$

$$A(\overline{G}_4) + A(\overline{N}_4) + A(M_4) + A(\overline{F}_{тер.4}). \quad (13)$$

Враховуючи, що $A(\overline{G}_2) = A(\overline{R}_2) = A(\overline{G}_3) = A(\overline{R}_3) =$ $= A(\overline{F}_{тер.4}) = A(\overline{N}_4) = 0,$ оскільки ці сили прикладені до нерухомих точок, і $A(\overline{N}_1) = 0,$ оскільки ця сила перпендикулярна переміщенню точки прикладення, рівняння (13) набуде вигляду:

$$\sum A\left(\overline{F}_k^e\right) = A(\overline{F}_1) + A(\overline{G}_1) + A(\overline{F}_{тер.1}) + A(M_{02}) +$$

$$+A(M_{03}) + A(\overline{G}_4) + A(M_4). \quad (14)$$

Робота змінної сили F_1 дорівнює:

$$A(\overline{F}_1) = \int_0^{S_1} F_{1S} \cdot ds = \int_0^{0,2} 5(4+2s)ds = 20\int_0^{0,2} ds + 10\int_0^{0,2} sds =$$

$$= 20s\Big|_0^{0,2} + 5s^2\Big|_0^{0,2} = 20 \cdot 0,2 + 5 \cdot 0,2^2 = 4,2 \text{ Дж}. \quad (15)$$

Робота сили тяжіння $\overline{G}_1$:

$$A(\overline{G}_1) = G_1 \cdot h_1 = m_1 g \cdot s_1 \cdot \sin 60^\circ =$$

$$= 10 \cdot 10 \cdot 0,2 \cdot 0,87 = 17,4 \text{ Дж}. \quad (16)$$

Робота сили тертя $\overline{F}_{тер1}$:

$$A(\overline{F}_{тер1}) = -F_{тер1} \cdot s_1 = -f \cdot N_1 \cdot s_1 =$$

$$= -f \cdot G_1 \cos 60^\circ \cdot s_1 = -f \cdot m_1 g \cdot \cos 60^\circ \cdot s_1 =$$

$$= -0{,}1 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}2 = -1 Дж. \quad (17)$$

Робота моменту сили тертя підшипника шківа 2:

$$A(M_{02}) = -M_{02} \cdot \varphi_2 = -1{,}2 \cdot \varphi_2. \quad (18)$$

Робота моменту сили тертя підшипника шківа 3:

$$A(M_{03}) = -M_{03} \cdot \varphi_3 = -0{,}8 \cdot \varphi_3. \quad (19)$$

Робота сили тяжіння $\overline{G}_4$:

$$A(\overline{G}_4) = -G_4 h_4 = -m_4 g \cdot s_{C4} \cdot \sin 30^\circ =$$

$$= -2 \cdot 10 \cdot s_{C4} \cdot 0{,}5 = -10 s_{C4}. \quad (20)$$

Робота моменту пари сил опору коченню котка 4:

$$A(M_4) = -M_4 \cdot \varphi_4 = -k N_4 \cdot \varphi_4 =$$

$$= -\varphi_4 \cdot k \cdot m_4 \cdot g \cdot \cos 30^\circ =$$

$$= -0{,}002 \cdot 2 \cdot 10 \cdot 0{,}87 \cdot \varphi_4 = -0{,}03 \cdot \varphi_4. \quad (21)$$

Величини s_{C4}, φ_2, φ_3 та φ_4 виразимо через задане переміщення s_1, враховуючи, що залежність між переміщеннями така ж, як і між відповідними швидкостями.

Із (11) витікає $V_{C4} = 0{,}1 V_1$, тоді

$$s_{C4} = 0{,}1 s_1 = 0{,}1 \cdot 0{,}2 = 0{,}02 \text{ м}. \quad (22)$$

Із (10) витікає $\omega_2 = 12{,}5 V_{C4}$, тоді

$$\varphi_2 = 12{,}5 s_{C4} = 12{,}5 \cdot 0{,}02 = 0{,}25 \, рад. \quad (23)$$

Із (9) витікає $\omega_3 = 10V_{C4}$, тоді

$$\varphi_3 = 10\,s_{C4} = 10 \cdot 0{,}02 = 0{,}2 \ \text{рад}. \quad (24)$$

Із (8) витікає $\omega_4 = 3{,}3V_{C4}$, тоді

$$\varphi_4 = 3{,}3\,s_{C4} = 3{,}3 \cdot 0{,}02 = 0{,}07 \ \text{рад}. \quad (25)$$

Таким чином:

$$A(M_{02}) = -1{,}2 \cdot \varphi_2 = -1{,}2 \cdot 0{,}25 = -0{,}3 \ \text{Дж}. \quad (26)$$

$$A(M_{03}) = -0{,}8 \cdot \varphi_3 = -0{,}8 \cdot 0{,}2 = -0{,}16 \ \text{Дж}. \quad (27)$$

$$A(\overline{G}_4) = -10 \cdot s_{C4} = -10 \cdot 0{,}02 = -0{,}2 \ \text{Дж}. \quad (28)$$

$$A(M_4) = -\,0{,}03 \cdot \varphi_4 = -\,0{,}03 \cdot 0{,}07 = -0{,}002 \ \text{Дж}. \quad (29)$$

Підставляючи (15) ÷ (17) та (26) ÷ (29) в (14), дістанемо:

$$\sum A\left(\overline{F}_k^e\right) = 4{,}2 + 17{,}4 - 1 - 0{,}3 -$$

$$-\,0{,}16 - 0{,}2 - 0{,}002 = 19{,}9 \ \text{Дж}. \quad (30)$$

Згідно з (2), прирівнюємо (12) і (30):

$$522V_{C4}^2 = 19{,}9.$$

Звідки

$$V_{C4} = \sqrt{19{,}9/522} \approx \sqrt{0{,}038} = 0{,}195 \ м/с.$$

Відповідь: швидкість руху центру мас котка $V_{C4} = 0{,}195 \ м/с.$

Тема Д6. ПРИНЦИП ДАЛАМБЕРА

Д6.1. Стислі відомості з теорії

Принцип Даламбера є одним із методів розв'язування задач динаміки, використання якого дозволяє складати рівняння руху матеріальної точки та механічної системи у формі рівнянь статики, які простіші ніж рівняння динаміки.

Принцип Даламбера для матеріальної точки

Розглянемо матеріальну точку *M*, яка рухається і на котру діють задана сила $\overline{F}$ і реакція в'язі $\overline{N}$ (рис.6.1).

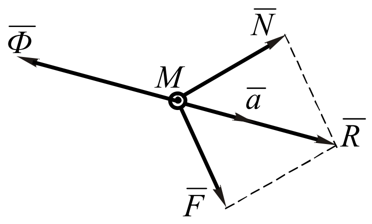


Рис. Д6.1

Рівнодіюча $\overline{R}$ сил $\overline{F}$ і $\overline{N}$ зобразиться діагоналлю паралелограма і, згідно з основним законом динаміки, прискорення точки $\overline{a}$ буде співпадати за напрямком з $\overline{R}$, отже:

$$\overline{R} = m\overline{a}\,.$$

Додамо до сил $\overline{F}$ і $\overline{N}$ ще одну силу, яка має такий самий модуль, що і $\overline{R}$, тобто ma, але спрямована протилежно $\overline{a}$:

$$\overline{\Phi} = -m\overline{a}\,, \qquad \text{(Д6.1)}$$

а за модулем: $\Phi = -ma$.

*Сила, яка за модулем дорівнює добутку маси точки на модуль її прискорення і спрямована протилежно прискоренню, називається **силою інерції.***

Сукупність сил $\overline{R}$ і $\overline{\Phi}$ дорівнює нулю, тому що вони рівні за модулем і протилежні за напрямком:

$$\overline{R}+\overline{\Phi}=0, \quad \text{або} \quad \overline{N}+\overline{F}+\overline{\Phi}=0. \qquad (\text{Д}6.2)$$

Отже*, при русі матеріальної точки у кожний даний момент часу сукупність заданої сили* $\overline{F}$ *, реакції в'язі* $\overline{N}$ *і сили інерції* $\overline{O}$ *задовольняє умовам рівноваги системи збіжних сил.*

У цьому складається **принцип Даламбера** для матеріальної точки, значення якого полягає у тому, що при його застосуванні до задач динаміки рівняння руху складаються у формі добре відомих рівнянь рівноваги.

При проектуванні векторної рівності (Д6.1) на декартові осі координат, одержуємо вирази для проекцій сили інерції на ці осі:

$$\left.\begin{aligned}
\Phi_x &= -ma_x = -m\frac{d^2x}{dt^2};\\
\Phi_y &= -ma_y = -m\frac{d^2y}{dt^2};\\
\Phi_z &= -ma_z = -m\frac{d^2z}{dt^2}.
\end{aligned}\right\} \qquad (\text{Д}6.3)$$

Проектуючи ту ж саму векторну рівність на природні осі, одержимо проекції сили інерції на дотичну, нормаль і бінормаль до траєкторії:

$$\left.\begin{aligned}
\Phi_\tau &= -ma_\tau = -m\frac{dV}{dt};\\
\Phi_n &= -ma_n = -m\frac{V^2}{\rho};\\
\Phi_b &= -ma_b = 0.
\end{aligned}\right\} \qquad (\text{Д}6.4)$$

Складові сили інерції $\overline{\Phi}_\tau$ і $\overline{\Phi}_n$, які спрямовані по дотичній і головній нормалі, називаються, відповідно, ***дотичною*** (або ***тангенціальною***) і ***нормальною*** (або ***відцентровою***) силами інерції.

Принцип Даламбера для механічної системи

Якщо до кожної точки механічної системи, яка рухається, умовно прикласти відповідну силу інерції, то у будь-який момент часу активні сили, що діють на цю точку, реакції в'язей та сила інерції утворюють зрівноважену систему сил, тобто

$$\overline{F}_k + \overline{N}_k + \overline{\Phi}_k = 0, \tag{Д6.5}$$

де $\overline{F}_k$ – рівнодіюча активних сил, що прикладені до k-ї точки;

$\overline{N}_k$ – рівнодіюча реакцій в'язей, які накладені на точку;

$\overline{\Phi}_k$ – сила інерції, яка прикладена до k-ї точки.

Із статики відомо, що геометрична сума сил, які знаходяться в рівновазі, та сума їх моментів відносно будь-якого центра O дорівнює нулю, тому

$$\overline{F}^* + \overline{N}^* + \overline{\Phi}^* = 0, \tag{Д6.6}$$

$$\overline{M}_0(\overline{F}) + \overline{M}_0(\overline{N}) + \overline{M}_0(\overline{\Phi}) = 0, \tag{Д6.7}$$

де $\overline{F}^*$ – головний вектор активних сил, $\overline{F}^* = \sum \overline{F}_k$;

$\overline{N}^*$ – головний вектор реакцій в'язей, $\overline{N}^* = \sum \overline{N}_k$;

$\overline{\Phi}^*$ – головний вектор сил інерції, $\overline{\Phi}^* = \sum \overline{\Phi}_k$;

$\overline{M}_O(\overline{F})$ – головний момент активних сил відносно центра O, $\overline{M}_O(\overline{F}) = \sum \overline{m}_O(\overline{F}_k)$;

$\overline{M}_O(\overline{N})$ – головний момент реакцій в'язей відносно центра O, $\overline{M}_O(\overline{N}) = \sum \overline{m}_O(\overline{N}_k)$;

$\overline{M}_O(\overline{\Phi})$ – головний момент сил інерції точок системи відносно центра O, $\overline{M}_O(\overline{\Phi}) = \sum \overline{m}_O(\overline{\Phi}_k)$.

В проекціях на осі декартової системи координат рівняння (6.6) та (6.7) дають або шість рівнянь для довільної просторової системи сил:

$$\left.\begin{aligned}
&\sum F_{kx} + \sum N_{kx} + \sum \Phi_{kx} = 0;\\
&\sum F_{ky} + \sum N_{ky} + \sum \Phi_{ky} = 0;\\
&\sum F_{kz} + \sum N_{kz} + \sum \Phi_{kz} = 0;\\
&\sum m_x(\overline{F}_k) + \sum m_x(\overline{N}_k) + \sum m_x(\overline{\Phi}_k) = 0;\\
&\sum m_y(\overline{F}_k) + \sum m_y(\overline{N}_k) + \sum m_y(\overline{\Phi}_k) = 0;\\
&\sum m_z(\overline{F}_k) + \sum m_z(\overline{N}_k) + \sum m_z(\overline{\Phi}_k) = 0,
\end{aligned}\right\} \qquad (Д6.8)$$

або три рівняння для довільної плоскої системи сил (основна форма):

$$\left.\begin{aligned}
&\sum F_{kx} + \sum N_{kx} + \sum \Phi_{kx} = 0,\\
&\sum F_{ky} + \sum N_{ky} + \sum \Phi_{ky} = 0,\\
&\sum m_O(\overline{F}_k) + \sum m_O(\overline{N}_k) + \sum m_O(\overline{\Phi}_к) = 0.
\end{aligned}\right\} \qquad (Д6.9)$$

Приведення сил інерції точок твердого тіла до найпростішого вигляду

Як відомо, систему сил можна привести до сили, яка дорівнює головному вектору і до пари сил з моментом, який дорівнює головному моменту усіх сил системи.

Приведення сил інерції точок твердого тіла дає наступні результати.

1. При поступальному русі тіла сили інерції приводяться до рівнодіючої, яка прикладена у центрі мас C тіла. Рівнодіюча $\overline{\Phi}^*$ дорівнює за модулем добутку маси тіла на прискорення центра мас і спрямована протилежно цьому прискоренню:

$$\overline{\Phi}^* = -M\overline{a}_C .$$

2. При обертанні тіла навколо осі, яка проходить через центр мас тіла, сили інерції приводяться до однієї пари, яка лежить у площині, перпендикулярній до осі обертання тіла і має момент (рис. Д6.2):

$$M_C^{\Phi} = -I_C \cdot \varepsilon ,$$

де ε – кутове прискорення тіла;

I_C – момент інерції тіла відносно осі, яка проходить через його центр мас.

Напрямок пари сил є протилежним напрямку кутового прискорення ε.

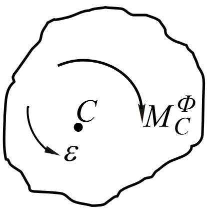


Рис. Д6.2

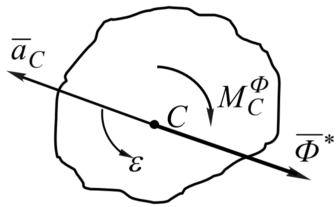


Рис. Д6.3

3. При плоскому русі сили інерції приводяться до результуючої сили, яка дорівнює $\overline{\Phi}^*$ і прикладена у центрі мас C тіла та напрямлена протилежно прискоренню $\overline{a}_C$ центра мас, і до пари сил, яка лежить у площині

фігури, напрямлена протилежно кутовому прискоренню ε тіла та має момент M_C^{Φ} (рис. Д6.3):

$$\bar{\Phi}^* = -M\bar{a}_C;$$

$$M_C^{\Phi} = -I_C \cdot \varepsilon.$$

Д6.2. Порядок розв'язування задач на застосування принципу Даламбера

Розв'язування задач за допомогою принципу Даламбера (методу кінетостатики) рекомендується виконувати у такій послідовності:

1. Зобразити на рисунку активні сили , які прикладені до кожної матеріальної точки;
2. Зобразити реакції в'язей;
3. Додати до активних сил і реакцій в'язей сили інерції матеріальних точок системи;
4. Вибрати систему координат;
5. Скласти рівняння рівноваги усіх сил;
6. Розв'язавши складену систему рівнянь, визначити величини, які шукаються.

Д6.3. Контрольні запитання

1. Як визначається за величиною і напрямком сила інерції матеріальної точки?
2. У чому полягає суть принципу Даламбера для матеріальної точки?
3. У чому полягає суть принципу Даламбера для механічної системи?
4. До чого приводяться сили інерції точок твердого тіла при його поступальному русі?

5. До чого приводяться сили інерції точок твердого тіла при його обертанні навколо нерухомої осі, яка проходить через центр мас тіла?
6. До чого приводяться сили інерції точок твердого тіла при плоскому русі?

Д6.4. Приклади розв'язування задач

Задача 1

Вантаж M вагою 1 H, який підвішений на нитці довжиною 30 *см* у нерухомій точці O, уявляє собою конічний маятник, тобто описує коло у горизонтальній площині, при цьому нитка складає з вертикаллю кут $\alpha = 60^0$ (рис.1).

Визначити швидкість вантажу V і натяг нитки T.

Розв'язування. На вантаж M діють сила тяжіння $\overline{G}$ і реакція нитки $\overline{T}$. Ці сили не зрівноважуються, тому що вантаж рухається, і рух цей відбувається по криволінійній траєкторії кола з радіусом AM і з нормальним прискоренням a_n, яке дорівнює

$$a_n = \frac{V^2}{\rho} = \frac{V^2}{AM}.$$

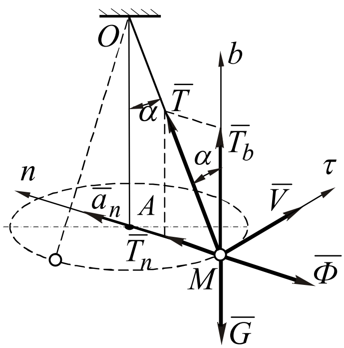


Рис.1

Підрахуємо силу інерції вантажу. Сила інерції $\overline{\Phi}$ спрямована по радіусу AM у бік, протилежний $\overline{a}_n$, і дорівнює за модулем

$$\Phi = ma_n = \frac{G}{g}\frac{V^2}{(OM)\sin 60^\circ};$$

$$\varPhi = \frac{1}{9,81}\frac{V^2}{0,3 \cdot 0,866} = 0,39V^2.$$

Пов'яжемо з точкою M природну систему координат $M\tau bn$: вісь $M\tau$ спрямуємо за дотичною у напрямку вектора швидкості $\overline{V}$, вісь Mn за нормаллю і вісь Mb перпендикулярно до площини, у якій лежать осі $M\tau$ і Mn.

Згідно з принципом Даламбера геометрична сума сил $\overline{G}$, $\overline{T}$ і $\overline{\varPhi}$ дорівнює нулю:

$$\overline{G} + \overline{T} + \overline{\varPhi} = 0.$$

Спроектуємо цю векторну рівняння на осі вибраної системи координат:

на вісь Mn: $\quad T \cdot \sin\alpha - \varPhi = 0$,

на вісь Mb: $\quad T \cdot \cos\alpha - G = 0$,

на вісь $M\tau$: $\quad 0 \equiv 0.$

Із другого рівняння визначимо натяг нитки T:

$$T = \frac{G}{\cos\alpha} = \frac{1}{\cos 60^\circ} = 2 \ H.$$

Із першого рівняння знаходимо швидкість V вантажу:

$$T \cdot \sin\alpha = \varPhi = 0,39V^2,$$

$$V = \sqrt{\frac{T\sin\alpha}{0,39}} = \sqrt{\frac{2 \cdot \sin 60^\circ}{0,39}} = 2,1 \ \ м/с.$$

Відповідь: $T = 2 \ H$, $\quad V = 2,1 \ \ м/с$.

Задача 2

Визначити опорні реакції підп'ятника A і підшипника B поворотного крана (рис. 1) при підніманні вантажу E вагою 30 *кН* з прискоренням $\frac{1}{3}g$. Вага крана дорівнює 20 *кН* і прикладена у його центрі тяжіння C. Вага візка D дорівнює 5 *кН*. Кран і візок нерухомі. Розміри показані на рис. 1.

Розв'язування. На кран діють сили тяжіння крана $\overline{P}_K$, візка $\overline{P}_D$ і вантажу $\overline{P}_E$, а також реакції опор: $\overline{R}_{Ax}$, $\overline{R}_{Ay}$, $\overline{R}_{Bx}$.

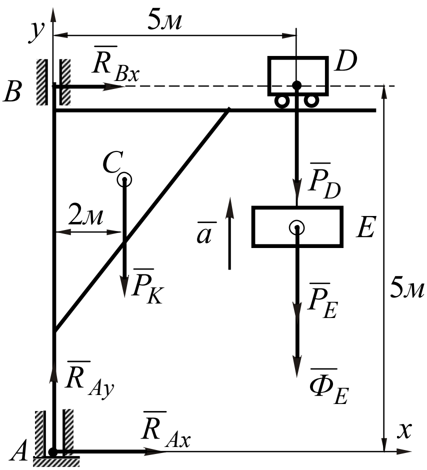


Рис.1

Для одержання зрівноваженої системи сил додамо силу інерції вантажу E, який піднімається з прискоренням $\overline{a}$.

Сила інерції $\overline{\Phi}_E$ спрямована вертикально униз і за модулем дорівнює:

$$\Phi_E = m_E a = \frac{P_E}{g}\frac{1}{3}g =$$

$$= \frac{P_E}{3} = 10 \;\; кН.$$

Перейдемо, згідно з методом кінетостатики, до складання рівнянь рівноваги крана за наявності активних сил, реакцій в'язей і сили інерції. Рівняння рівноваги мають вигляд:

$$\sum F_{kx} = R_{Ax} + R_{Bx} = 0;$$

$$\sum F_{ky} = R_{Ay} - P_D - P_E - P_K - \Phi_E = 0;$$

$$\sum m_A(\overline{F}_k) = -R_{Bx} \cdot 5 - P_K \cdot 2 -$$
$$-P_D \cdot 5 - P_E \cdot 5 - \varPhi_E \cdot 5 = 0\,.$$

Розв'язуючи ці рівняння, знаходимо невідомі величини:

$$-5R_{Bx} - 2P_K - 5(P_D + P_E + \varPhi_E) = 0,$$

$$R_{Bx} = \frac{-20 \cdot 2 - 5\left(5 + 30 + 10\right)}{5} = -53 \quad кН\,.$$

$$R_{Ay} = P_D + P_E + P_K + \varPhi_E = 5 + 30 + 20 + 10 = 65\,кН,$$

$$R_{Ax} = -R_{Bx} = -\left(-53\right) = 53 \quad кН\,.$$

Відповідь: $R_{Ax} = 53 \quad кН$; $R_{Ay} = 65 \quad кН$;

$R_{Bx} = -53 \quad кН$.

Задача 3

Барабан A (рис. 1), вагою P і радіусом r, обертається навколо горизонтальної осі O в результаті опускання тіла B, вагою Q, яке підвішене до нерозтяжного і невагомого каната, що намотаний на барабан.

Визначити кутове прискорення ε барабана, рахуючи його однорідним суцільним циліндром, і натяг N каната.

Розв'язування. На систему діють зовнішні (активні) сили: сили тяжіння барабана $\overline{P}$ і тіла $\overline{Q}$, реакція $\overline{R}$ в опорі O.

Дана система сил не є зрівноваженою.

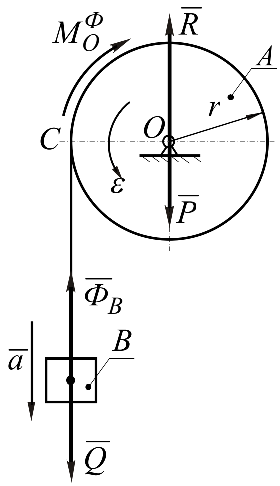


Рис.1

Згідно із принципом Даламбера, якщо до активних сил і реакцій в'язей, що діють на систему, додати сили інерції, то отримана система сил буде зрівноваженою і до неї можна застосувати рівняння рівноваги.

Знайдемо сили інерції, які треба додати до тіл даної системи.

Тіло B рухається вниз з деяким прискоренням $\overline{a}$, величина якого дорівнює тангенціальному прискоренню точки C барабана:

$$a = a_C^\tau = \varepsilon \cdot r .$$

Сила інерції $\overline{Ф}_B$ тіла B напрямлена протилежно вектору прискорення $\overline{a}$ (рис. 1) і за модулем дорівнює:

$$Ф_B = m_B \cdot a = \frac{Q}{g} \cdot \varepsilon \cdot r .$$

Оскільки барабан обертається навколо осі, що проходить через його центр мас, то сили інерції барабана зводяться до пари сил з моментом $M_O^Ф$, модуль якого дорівнює:

$$M_O^Ф = I_O \cdot \varepsilon ,$$

де I_O – момент інерції барабана відносно його осі обертання.

Враховуючи, що барабан являє собою суцільний диск, то:

$$I_O = \frac{1}{2} m_A r^2 = \frac{1}{2} \frac{P}{g} r^2 .$$

Тоді

$$M_O^{\Phi} = \frac{P}{2g} r^2 \cdot \varepsilon .$$

Напрям моменту M_O^{Φ} сил інерції барабана протилежно його кутовому прискоренню ε.

Оскільки систему сил після прикладення сил інерції можна розглядати як таку, що знаходиться в рівновазі, то запишемо рівність нулю моментів сил відносно осі обертання:

$$Q \cdot r - \Phi_B \cdot r - M_O^{\Phi} = 0,$$

або

$$Q \cdot r - \frac{Q}{g} \cdot \varepsilon \cdot r \cdot r - \frac{P}{2g} r^2 \cdot \varepsilon = 0 .$$

Скоротивши на r $\left(r \neq 0\right)$ і виконавши перетворення, дістанемо:

$$\varepsilon r \left(\frac{Q}{g} + \frac{P}{2g} \right) = Q .$$

Звідки

$$\varepsilon = \frac{2gQ}{\left(2Q + P\right) r} = \frac{Qg}{\left(Q + 0{,}5P\right) r}. \qquad (1)$$

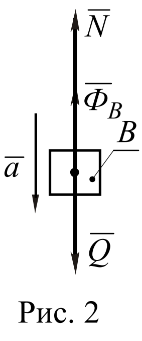


Рис. 2

Для визначення натягу канату скористаємося вивільнюваним принципом: розріжемо канат і покажемо активні сили, що діють на тіло B (рис. 2): силу тяжіння $\overline{Q}$ і натяг каната $\overline{N}$.

Згідно із принципом Даламбера додамо до цих сил силу інерції $\overline{\Phi}_B$ тіла B.

Запишемо рівняння рівноваги усіх сил, включаючи і силу інерції, на вертикаль:

$$Q - N - \Phi_B = 0\,, \text{ або } \; Q - N - \frac{Q}{g}\cdot\varepsilon\cdot r = 0.$$

Звідки

$$N = Q - \frac{Q}{g}\cdot\varepsilon\cdot r\,.$$

Підставимо в отримане рівняння вираз для ε (1):

$$N = Q - \frac{Q}{g}\cdot\frac{Qg}{\left(Q+0{,}5P\right)r}\cdot r = Q - \frac{Q^2}{Q+0{,}5P}\,.$$

Тоді

$$N = \frac{Q^2 + 0{,}5QP - Q^2}{Q+0{,}5P} = 0{,}5Q\frac{P}{Q+0{,}5P}.$$

Відповідь: $\varepsilon = \dfrac{Qg}{\left(Q+0{,}5P\right)r}$;

$$N = 0{,}5Q\frac{P}{Q+0{,}5P}.$$

Д6.5. Задача Д6

Вертикальний вал, який закріплено у підп'ятнику в точці A та у циліндричному підшипнику в точці B (рис. Д6.4), обертається зі сталою кутовою швидкістю $\omega = 100\,c^{-1}$. У точках, які вказані в таблиці Д6 та які знаходяться на однаковій відстані $(a = 0{,}2\ м)$ одна від одної, до валу жорстко прикріплені: перпендикулярно до осі обертання маховик у вигляді суцільного однорідного диску масою m_1, при цьому площина рисунка є площиною його матеріальної симетрії, а його центр мас C зміщений від осі валу на відстань h_{C1}; та тонкий однорідний прямолінійний стержень довжиною l і масою m_2, який розташований у площині рисунку під кутом α до осі валу (табл. Д6).

Нехтуючи вагою валу, ***визначити*** реакції підп'ятника та підшипника, а також обчислити у скільки разів радіальні динамічні складові реакцій відрізняються від статичних. При розрахунках прийняти прискорення вільного падіння $g \approx 10\ м/c^2$.

Вказівки. Задача Д6 – на використання принципу Даламбера до вивчення руху матеріальної системи. Слід пам'ятати, що сили інерції напрямлені протилежно відповідним прискоренням, і оскільки за умовою задачі $\omega = const$ і $\varepsilon = 0$, то враховувати слід тільки відцентрові сили інерції елементів маховика і стержня. Крім того, якщо сили інерції часток тіла мають рівнодіючу $\overline{\Phi}$, то її модуль $\Phi = ma_C$, де a_C – прискорення центра мас C стержня, але при цьому лінія дії сили $\overline{\Phi}$, у загальному випадку не проходить через точку C.

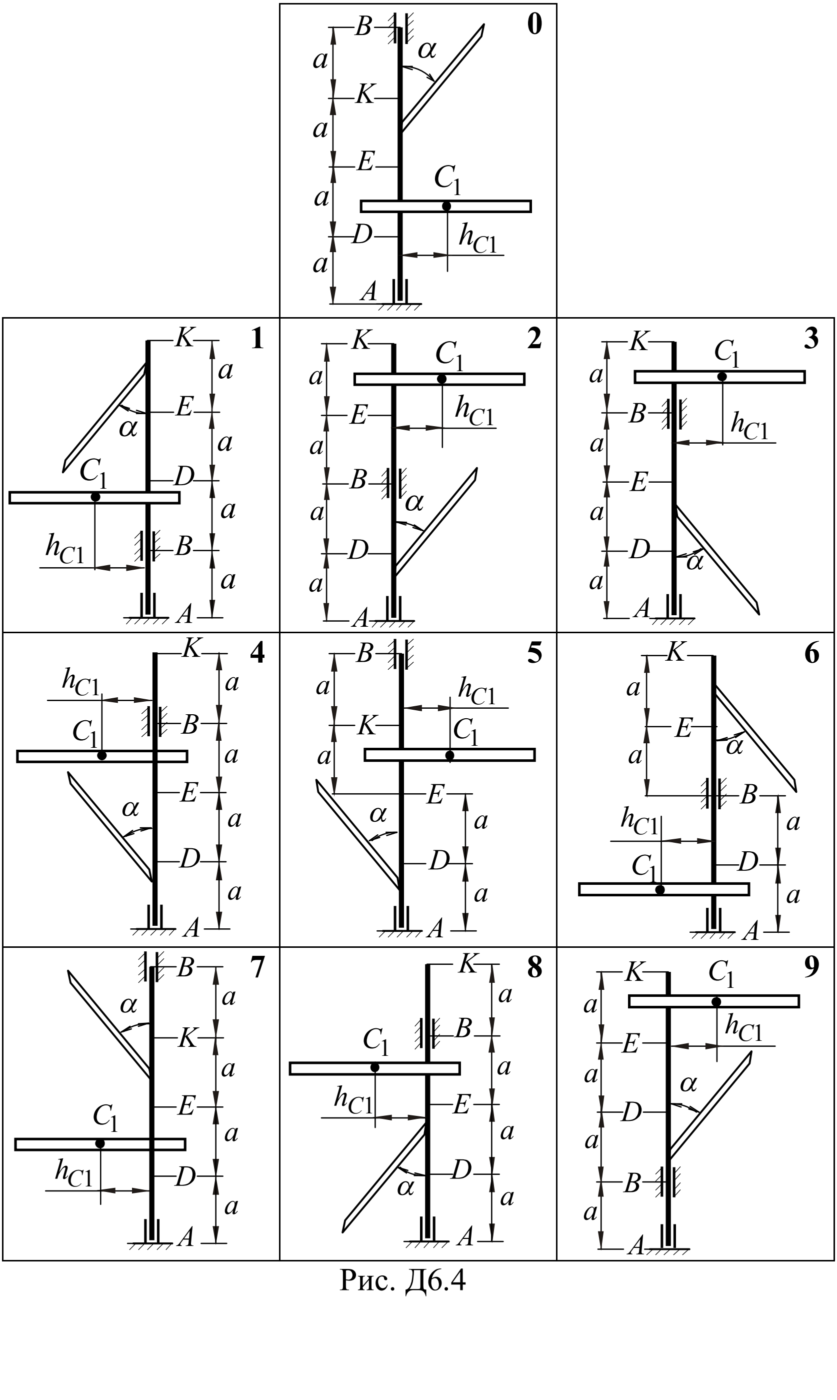


Рис. Д6.4

Таблиця Д6

Номер умови	Точки кріплення: махо-вика	Точки кріплення: стер-жня	m_1, *кг*	h_{C1}, *м*	m_2, *кг*	l_2, *м*	α, *град*
0	Д	Е	10	0,002	3	0,7	60
1	Д	К	20	0,003	4	0,3	45
2	К	Д	30	0,004	1,5	0,4	30
3	К	Е	50	0,005	1,0	0,5	60
4	Е	Д	40	0,0015	2,5	0,6	45
5	К	Д	50	0,001	2	0,2	30
6	Д	К	60	0,002	2,5	0,1	60
7	Е	К	30	0,003	3	0,4	45
8	Е	Д	20	0,004	4	0,6	60
9	К	Д	25	0,005	1,5	0,8	30

Д6.6. Приклад розв'язування теми Д6

***Задано*:** $\omega = 100\,c^{-1}$; $a = 0,2$ *м*; $m_1 = 50$ *кг*;

$h_{C1} = 0,001$ *м*; $m_2 = 2$ *кг*; $\alpha = 30°$;

$l = 0,2$ *м*; $g \approx 10\,м/c^2$.

***Визначити*:** R_A, R_B, η_A, η_B.

Розв'язок. Відповідно до даних зображаємо вал, який закріплено підп'ятником у точці *A* та підшипником у точці *B* (рис.Д6.2). До валу жорстко прикріплені: у точці *K* перпендикулярно осі обертання маховик, центр мас C_1 якого зміщений від осі валу на відстань $KC_1 = h_{C1}$; у точці *D* під кутом $\alpha = 30°$ до вертикалі прямолінійний стержень довжиною l. Для визначення невідомих реакцій розглянемо рух заданої механічної системи та застосуємо принцип Даламбера.

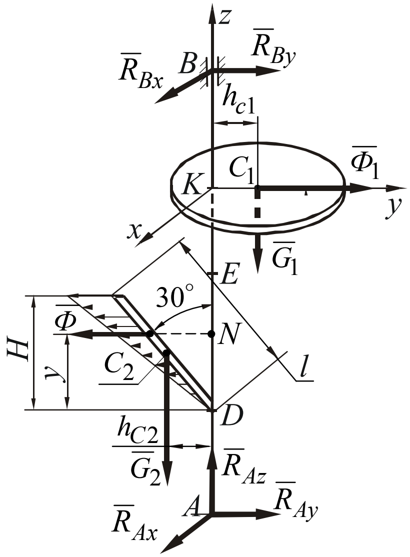


Рис. Д6.5

Оберемо систему координат $Kxyz$, яка буде обертатися разом з валом, так, щоб стержень лежав у площині yz, а вісь Ky пройшла через центр мас C_1 диску.

Покажемо активні сили, що діють на систему: сили тяжіння диска $\overline{G}_1$ і стержня $\overline{G}_2$, що прикладені у відповідних центрах мас C_1 і C_2, та реакції опор: підп'ятника A, яку розкладемо на три складові $\overline{R}_{Ax}$, $\overline{R}_{Ay}$, $\overline{R}_{Az}$ і циліндричного шарніру B, яку розкладемо на дві складові $\overline{R}_{Bx}$, $\overline{R}_{By}$.

Сили тяжіння рівні за величиною:

$$\begin{aligned} G_1 &= m_1 g = 50 \cdot 10 = 500\ H; \\ G_2 &= m_2 g = 2 \cdot 10 = 20\ H. \end{aligned} \quad (1)$$

Згідно з принципом Даламбера, приєднаємо до цих сил відцентрові сили інерції елементів ***диску*** та ***стержня***.

Для кожного елемента ***диску*** масою Δm_k сила інерції $\overline{\Phi}_{1k}$ розташована в площині xy та має напрямок від точки К диску, оскільки кутове прискорення вала за умовою задачі дорівнює нулю ($\varepsilon = 0$).

Ці сили, які збігаються в точці K, можуть бути замінені рівнодіючою $\overline{\Phi}_1 = \sum \overline{\Phi}_{1k}$, яка напрямлена внаслідок симетрії вздовж осі Ky.

Оскільки кутове прискорення диску дорівнює нулю, то головний момент сил інерції елементів диску теж дорівнює нулю.

Таким чином, система сил інерції елементів диску зводиться до однієї рівнодіючої $\overline{\Phi}_1$, яка прикладена у точці K і спрямована уздовж осі Ky і дорівнює за величиною:

$$\Phi_1 = m_1 a_{C1} = m_1 \omega^2 h_{C1} = 50 \cdot 100^2 \cdot 0{,}001 = 500 \quad H. \quad (2)$$

Оскільки вектор сили можна переносити вздовж його лінії дії, то будемо рахувати, що сила $\overline{\Phi}_1$ прикладена у центрі мас диску, тобто у точці C_1.

Для кожного елементу ***стержня*** масою Δm_k сила інерції $\Delta\overline{\Phi}_{2k}$ лежить в площині yz паралельно осі Ky, напрямлена від осі обертання та чисельно дорівнює $\Delta\Phi_{2k} = \Delta m_k \omega^2 h_k$; де h_k – відстань k-ого елементу від осі обертання.

Оскільки всі елементарні сили $\Delta\Phi_{2k}$ пропорційні h_k, то епюри цих паралельних сил інерції стержня утворюють трикутник (рис. Д6.5). Отже, їх рівнодіюча $\overline{\Phi}_2$ проходить через центр тяжіння трикутника, тобто на відстані $h = 2H / 3$ від вершини D трикутника, де:

$$H = l \cdot \cos 30° = 0{,}2 \cdot 0{,}87 = 0{,}174\,м. \quad (3)$$

Модуль цієї рівнодіючої дорівнює головному вектору сил інерції стержня:

$$\varPhi_2 = m_2 a_{C2} = m_2 \omega^2 h_{C2} = m_2 \omega^2 \frac{l}{2} \sin 30° =$$

$$= 2 \cdot 100^2 \cdot \frac{0{,}2}{2} \cdot 0{,}5 = 1000 \ H. \qquad (4)$$

Оскільки сили $\overline{G}_1$, $\overline{G}_2$, $\overline{\varPhi}_1$ і $\overline{\varPhi}_2$ лежать в одній площині *Kyz,* то реакції підп'ятника A і підшипника B лежать у тій же площині, тобто мають складові $\overline{R}_{Ay}$, $\overline{R}_{Az}$ у точці A і $\overline{R}_{By}$ у точці B.

Згідно з принципом Даламбера зовнішні сили та сили інерції, які прикладені до системи, утворюють зрівноважену систему сил. Складемо для цієї плоскої системи три рівняння рівноваги:

$$\sum F_{ky} = R_{Ay} + R_{By} + \varPhi_1 - \varPhi_2 = 0 \qquad (5)$$

$$\sum F_{kz} = R_{Az} - G_1 - G_2 = 0; \qquad (6)$$

$$\sum m_A\left(\overline{F}_k\right) = -R_{By} \cdot AB - \varPhi_1 \cdot AK - G_1 h_{C1} +$$

$$+\varPhi_2 \cdot AN + G_2 \cdot h_{C2} = 0. \qquad (7)$$

В рівнянні (7) AB, AK, h_{C1}, h_{C2} і AN - плечі відповідних сил відносно точки A, які дорівнюють:

$$AB = 4a = 4 \cdot 0{,}2 = 0{,}8 \ м;$$

$$AK = 3a = 3 \cdot 0{,}2 = 0{,}6 м;$$

$$h_{C1} = 0{,}001 \ м;$$

$$h_{C2} = \frac{\ell_2}{2} \sin 30° = \frac{0{,}2}{2} \cdot 0{,}5 = 0{,}05 м;$$

$$AN = AD + DN = a + h = a + \frac{2}{3}H =$$

$$= a + \frac{2}{3}\ell_2 \cos 30^\circ = 0,2 + \frac{2}{3}0,2 \cdot 0,865 = 0,316\,м\,.$$

Виразивши із рівнянь (5) ÷ (7) невідомі реакції та підставивши в одержані рівняння відповідні величини із (1), (2), (4) знайдемо складові реакцій в’язей:

із (7) витікає

$$R_{By} = \frac{-\Phi_1 \cdot AK - G_1 \cdot h_{C1} + \Phi_2 \cdot AN + G_2 \cdot h_{C2}}{AB} =$$

$$= \frac{-500 \cdot 0{,}6 - 500 \cdot 0{,}001 + 1000 \cdot 0{,}316 + 20 \cdot 0{,}05}{0{,}8} =$$

$$= 20{,}625 \approx 20{,}6\ Н;$$

із (6) витікає

$$R_{Az} = G_1 + G_2 = 500 + 20 = 520\ Н;$$

із (5) витікає:

$$R_{Ay} = \Phi_2 - \Phi_1 - R_{By} =$$

$$= 1000 - 500 - 20{,}6 = 479{,}4\,Н. \approx 479\ Н.$$

Тоді повні реакції:

$$R_B = R_{By} = 20{,}6\ Н;$$

$$R_A = \sqrt{R_{Ay}^2 + R_{Az}^2} = \sqrt{479^2 + 520^2} \approx 707\,Н.$$

Щоб визначити статичні реакції підшипника та підп’ятника слід в рівняннях рівноваги (5) ÷ (7) виключити доданки, які містять сили інерції.

Тоді рівняння (5) ÷ (7) набудуть вигляду:

$$\sum F_{ky} = R_{Ay}^c + R_{By}^c = 0; \qquad (8)$$

$$\sum F_{kz} = R_{Az}^c - G_1 - G_2 = 0; \qquad (9)$$

$$\sum m_A(\overline{F}_k) = -R_{By}^c \cdot AB - G_1 h_{C1} + G_2 h_{C2} = 0. \qquad (10)$$

Із (10) витікає

$$R_{By}^c = \frac{-G_1 h_{C1} + G_2 h_{C2}}{AB} = \frac{-500 \cdot 0{,}001 + 20 \cdot 0{,}05}{0{,}8} =$$

$$= \frac{0{,}5}{0{,}8} = 0{,}625\ H.$$

Із (9) витікає

$$R_{Az}^c = G_1 + G_2 = 500 + 20 = 520\ H.$$

Із (9) витікає

$$R_{Ay}^c = -R_{By}^c = -0{,}625\ H.$$

Зрештою, обчислимо у скільки разів радіальні динамічні складові реакції підшипників більші, ніж статичні

$$\eta_A = \frac{|R_{Ay}|}{|R_{Ay}^c|} = \frac{479}{0{,}625} \approx 766;$$

$$\eta_B = \frac{|R_{By}|}{|R_{By}^c|} = \frac{20{,}6}{0{,}625} \approx 33.$$

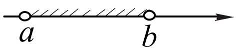
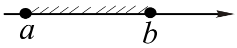
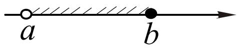
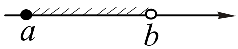
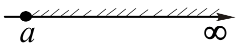
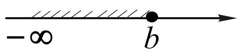
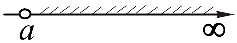
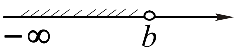
Таким чином, радіальні динамічні навантаження на підшипники, які виникають завдяки силам інерції, можуть бути значно більшими, ніж статичні навантаження, що необхідно ураховувати при конструюванні машин та механізмів.

Відповідь: реакція підп'ятника $R_A = 707\ H$,
реакція підшипника $R_B = 20{,}6\ H$,
$\eta_A = 766, \quad \eta_B = 33.$

ДОДАТКИ

І. МАТЕМАТИКА

1.Числові проміжки

Вид проміжку	Геометричне зображення	Позна-чення	Запис за допомогою нерівностей
Інтервал		$(a;b)$	$a < x < b$
Відрізок		$[a;b]$	$a \le x \le b$
Півінтервал		$(a;b]$	$a < x \le b$
Півінтервал		$[a;b)$	$a \le x < b$
Промінь		$[a;+\infty)$	$x \ge a$
Промінь		$(-\infty;b]$	$x \le b$
Відкритий промінь		$(a;+\infty)$	$x > a$
Відкритий промінь		$(-\infty;b)$	$x < b$

2. Властивості арифметичних дій над дійсними числами

Для будь-яких дійсних чисел a, b і c справедливі рівняння:

1. $a+b=b+a$,
2. $(a+b)+c=a+(b+c)$,
3. $a\cdot b=b\cdot a$,
4. $(a+b)\cdot c=a\cdot(b+c)$,
5. $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$,
6. $a+0=a$,
7. $a+(-a)=0$,
8. $a-b=a+(-b)$,
9. $a\cdot 1=a$,
10. $a\cdot 0=0$,
11. $a\cdot(-1)=-a$,
12. $a\cdot\frac{1}{a}=1\,(a\neq 0)$.

3.Найпростіші алгебраїчні тотожності

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b),$$

$$a^3-b^3=(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right),$$

$$a^3+b^3=(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right),$$

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2,$$

$$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2+b^3,$$

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2,$$

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$$

Увага: a^2+b^2 не розкладається на множники в області дійсних чисел.

Справедлива формула бінома Ньютона:

$$(a+b)^n=a^n+na^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}b^2+\ldots$$

$$\ldots+\frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot k}a^{n-k}b^k+\ldots..+b^n.$$

Приклад:

$$\left(a+b\right)^6 = a^6 + 6a^5b + \frac{6\cdot 5}{1\cdot 2}a^4b^2 + \frac{6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3}a^3b^3 +$$

$$\ldots + \frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}a^2b^4 + \frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}ab^5 + b^6 =$$

$$= a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6.$$

4. Формула коренів квадратного рівняння

Якщо $ax^2 + bx + c = 0$, де $a,\ b,\ c$ - дійсні числа і $a \neq 0$, то

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

5. Розкладання квадратного тричлена на лінійні множники

Якщо x_1 і x_2 - корені квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$, то

$$ax^2 + bx + c = a\left(x - x_1\right)\left(x - x_2\right).$$

Приклад. Розкласти на множники $6x^2 - x - 2$.

Скориставшись формулою коренів квадратного рівняння знаходимо $x_1 = -1/2,\ x_2 = 2/3$. Тоді

$$6x^2 - x - 2 = 6\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{2}{3}\right) = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)\cdot 3\left(x - \frac{2}{3}\right) =$$

$$= \left(2x + 1\right)\left(3x - 2\right).$$

6. Формули для наближеного обчислення

Якщо то $\alpha << 1$, то

$$\left(1 \pm \alpha\right)^n \approx 1 \pm n\alpha; \quad e^{\alpha} \approx 1 + \alpha; \quad \ln\left(1 + \alpha\right) \approx \alpha.$$

Якщо кут α малий ($\alpha < 5^\circ$ або $\alpha < 0{,}1\,рад$) і виражений в радіанах, то

$$\sin\alpha \approx \alpha; \quad \mathrm{tg}\,\alpha \approx \alpha; \quad \cos\alpha \approx 1.$$

7. Перехід від градусної системи вимірювання кутів до радіанної і навпаки

Якщо кут α заданий в градусах, то

$$\alpha\left(рад\right) = 0{,}0175 \cdot \alpha^\circ.$$

Якщо кут α заданий в радіанах, то

$$\alpha^\circ = 0{,}0175 \cdot \alpha\left(рад\right).$$

8. Радіана міра деяких кутів

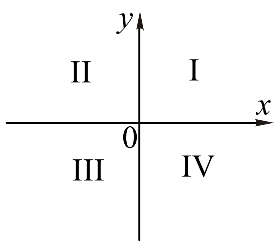
Град.	15	30	45	60	75	90	180	270	360
Рад.	0,26	0,52	0,785	1,05	1,31	1,57	3,14	4,71	6,28

9. Значення тригонометричних функцій кутів, які найбільш часто зустрічаються

α	град.	0	15	30	45	60	75	90	180	270	360
	рад.	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\alpha$		0	0,26	0,50	0,71	0,87	0,97	1	0	– 1	0
$\cos\alpha$		1	0,97	0,87	0,71	0,50	0,26	0	–1	0	1
$\mathrm{tg}\,\alpha$		0	0,27	0,58	1,00	1,73	3,73	—	0	—	0
$\mathrm{ctg}\,\alpha$		—	3,73	1,73	1,00	0,58	0,27	0	—	0	—

10. Знаки тригонометричних функцій по квадрантам

Функ-ція	Квадрант			
	I	II	III	IV
sin	+	+	–	–
cos	+	–	–	+
tg	+	–	+	–
ctg	+	–	+	–



11.Формули зведення

	Аргумент x				
Функ-ція	$-\alpha$	$\frac{\pi}{2}\pm\alpha$ $90^\circ\pm\alpha$	$\pi\pm\alpha$ $180^\circ\pm\alpha$	$\frac{3\pi}{2}\pm\alpha$ $270^\circ\pm\alpha$	$2\pi\pm\alpha$ $360^\circ\pm\alpha$
$\sin x$	$-\sin\alpha$	$+\cos\alpha$	$\mp\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\pm\sin\alpha$
$\cos x$	$+\cos\alpha$	$\mp\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\pm\sin\alpha$	$+\cos\alpha$
$\mathrm{tg}\, x$	$-\mathrm{tg}\alpha$	$\mp\mathrm{ctg}\alpha$	$\pm\mathrm{tg}\alpha$	$\mp\mathrm{ctg}\alpha$	$\pm\mathrm{tg}\alpha$
$\mathrm{ctg}\, x$	$-\mathrm{ctg}\alpha$	$\mp\mathrm{tg}\alpha$	$\pm\mathrm{ctg}\alpha$	$\mp\mathrm{tg}\alpha$	$\pm\mathrm{ctg}\alpha$

12. Формули, які пов'язують функції одного і того ж аргументу

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1;\quad tg\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha};\quad \mathrm{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha};$$

$$\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{ctg}\alpha=1;\quad 1+\mathrm{tg}\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha};\quad 1+\mathrm{ctg}\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}.$$

3. Формули подвійного кута

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha;\qquad \cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha;$$

$$\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha;\qquad \cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1;$$

$$tg2\alpha=2tg\alpha\Big/\left(1-tg^2\alpha\right).$$

14. Формули ділення аргументу навпіл

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}};\qquad \sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}};$$

$$tg\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}.$$

15. Формули зниження степені

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}; \qquad \cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}.$$

16. Формули тригонометричних функцій через тангенс половинного кута

$$\sin\alpha = \frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}; \quad \cos\alpha = \frac{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}; \quad tg\alpha = \frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}.$$

17. Формули додавання аргументу

$$\sin(\alpha\pm\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta \pm \cos\alpha\cdot\sin\beta;$$

$$\cos(\alpha\pm\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta \mp \sin\alpha\cdot\sin\beta;$$

$$tg(\alpha\pm\beta) = \frac{tg\alpha \pm tg\beta}{1\mp tg\alpha\cdot tg\beta}.$$

18. Формули перетворення добутку тригонометричних функцій в суму

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}{2};$$

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2};$$

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2}.$$

19. Формули перетворення суми тригонометричних функцій в добуток

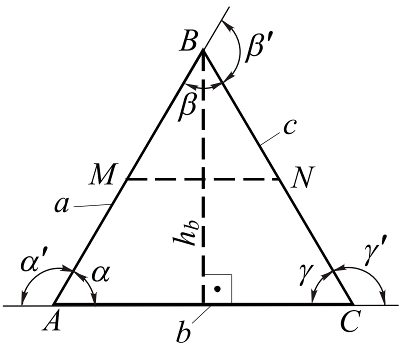
$$\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha\pm\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha\mp\beta}{2};$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$tg\alpha \pm tg\beta = \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}.$$

20. Співвідношення в довільному і прямокутному трикутниках



a, *b*, *c* – сторони трикутника;

α, β, γ – внутрішні кути трикутника;

α', β', γ' – зовнішні кути трикутника;

MN – середня лінія трикутника ($AM = MB$, $BN = NC$);

h_b – висота трикутника, опущена на сторону *b*.

Сума кутів трикутника:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ.$$

Властивості зовнішніх кутів трикутника:

$$\alpha' = \beta + \gamma;\ \beta' = \alpha + \gamma;\ \gamma' = \alpha + \beta.$$

Нерівності трикутника:

$$b - c < a < b + c;\ \ a - c < b < a + c;\ \ a - b < c < a + b.$$

Теорема синусів:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}.$$

Теорема косинусів:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha;\quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta;$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$

Периметр (*P*) і півпериметр (*p*) трикутника:

$$P = a + b + c; \qquad p = (a + b + c)/2.$$

Властивості середньої лінії трикутника:

$$MN \parallel AC; \qquad MN = AC/2.$$

Площа трикутника

$$S = \frac{1}{2} b \cdot h_b = \frac{1}{2} b \cdot a \cdot \sin\gamma = \frac{1}{2} b \cdot c \cdot \sin\alpha;$$

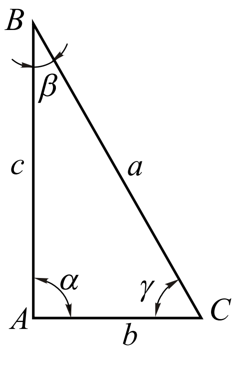
$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad \text{(формулаГерона).}$$

Якщо задані координати вершин трикутника $A(x_1, y_1)$; $B(x_2, y_2)$; $C(x_3, y_3)$, то:

$$S = \pm\frac{1}{2}\left[(x_2 - x_1)\cdot(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)\cdot(y_2 - y_1)\right],$$

де знак обирають таким, щоб площа була додатною.

Прямокутний трикутник



Для прямокутного трикутника:

$$\alpha = 90^\circ; \qquad \beta + \gamma = 90^\circ;$$

b і c – катети; a – гіпотенуза.

Теорема Піфагора: $a^2 = b^2 + c^2$.

Площа трикутника: $S = \frac{1}{2} b \cdot c.$

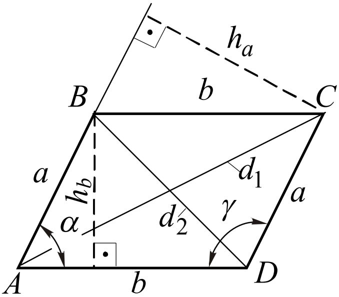
Якщо $\beta = 30^\circ$ то $b = a/2$.

$$\sin\gamma = \frac{c}{a}; \quad \cos\gamma = \frac{b}{a}; \quad tg\gamma = \frac{c}{b};$$

$$ctg\gamma = \frac{b}{c}; \qquad \sin\beta = \frac{b}{a}; \qquad \cos\beta = \frac{c}{a}; \quad tg\beta = \frac{b}{c}; \quad ctg\beta = \frac{c}{b};$$

$$c = a \cdot \sin\gamma = a \cdot \cos\beta; \qquad b = a \cdot \sin\beta = a \cdot \cos\gamma.$$

21. Паралелограм



a, b – сторони паралелограма.

h_a, h_b – висоти паралелограма.

d_1, d_2 – діагоналі паралелограма.

α, γ – кути паралелограма

$AB \parallel CD$ і $AB = CD$;

$AD \parallel BC$ і $AD = BC$;

$\alpha + \gamma = 180^\circ$;

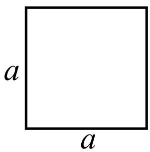
$S = a \cdot h_a$; $\quad S = b \cdot h_b$; $\quad S = a \cdot b \cdot \sin\alpha$;

$d_1^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cdot \cos\alpha$; $\quad d_2^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\alpha$;

$$d_1^2 + d_2^2 = 2\left(a^2 + b^2\right).$$

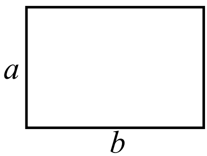
22. Площа (S) геометричних фігур

Квадрат



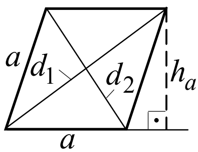
$S = a^2$

Прямокутник



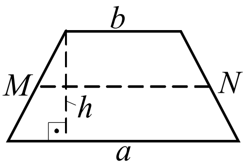
$S = a \cdot b$

Ромб

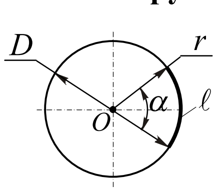


$S = a \cdot h_a = \dfrac{1}{2} d_1 \cdot d_2$

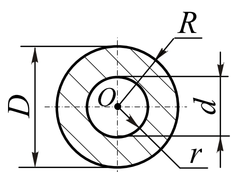
Трапеція



Коло і круг



Кільце

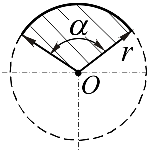


Трапеція: $S = \dfrac{a+b}{2} h$; середня лінія $MN = \dfrac{a+b}{2}$.

Коло і круг: діаметр $D = 2r$; $S = \pi r^2 = \pi D^2 / 4$; довжина кола $L = 2\pi r = \pi D$; довжина дуги ℓ при центральному куті α:
$$l = \frac{\pi r \alpha^\circ}{180^\circ}\ (\alpha^\circ \text{ в } град);\quad l = \alpha r\ \left(\alpha \text{ в } рад\right).$$

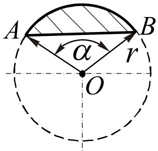
Кільце: $S = \pi\left(R^2 - r^2\right) = \pi\left(D^2 - d^2\right)/4.$

Сектор



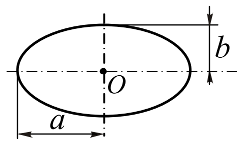
$$S = \frac{\pi r^2 \alpha^\circ}{360^\circ}$$

Сегмент



$$S = \frac{\pi r^2 \alpha^\circ}{360^\circ} - S_{\Delta OAB}$$

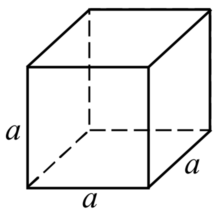
Еліпс



$$S = \pi ab$$

23. Площа поверхні (S) і об'єм (V) тіл

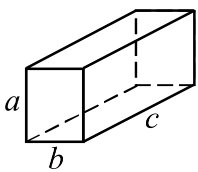
Куб



$S = 6a^2$

$V = a^3$

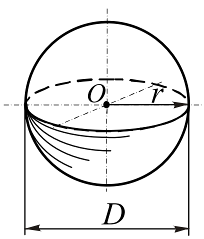
Прямокутний паралелепіпед



$S = 2\left(ab + ac + bc\right)$

$V = abc$

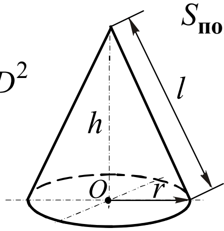
Сфера і куля



$S = 4\pi r^2 = \pi D^2$

$V = \frac{4}{3}\pi r^3$

Конус

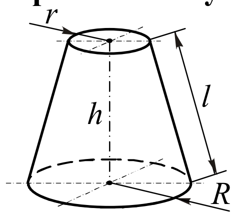


$S_{\textbf{пов}} = \pi r\left(r + l\right)$

$S_{\textbf{бок}} = \pi r l$

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

Зрізаний конус

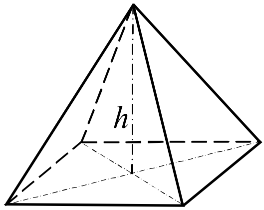


$$S_{\textbf{бок}} = \pi l\left(R + r\right)$$

$$S_{\textbf{пов}} = \pi\left[l\left(R + r\right) + R^2 + r^2\right]$$

$$V = \tfrac{1}{3}\pi h\left(R^2 + Rr + r^2\right)$$

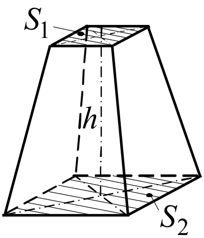
Піраміда



$$S_{\textbf{пов}} = S_{\textbf{бок}} + S_{\textbf{осн}}$$

$$V = \tfrac{1}{3} S_{\textbf{осн}} \cdot h$$

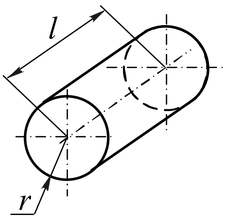
Зрізана піраміда



$$S_{\textbf{пов}} = S_{\textbf{бок}} + S_1 + S_2$$

$$V = \frac{h}{3}\left(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2}\right)$$

Суцільний циліндр

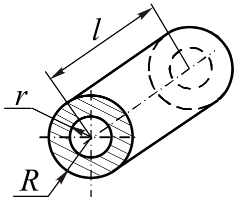


$$S_{\textbf{бок}} = 2\pi rl$$

$$S_{\textbf{пов}} = 2\pi r\left(r + l\right)$$

$$V = \pi r^2 l$$

Порожнистий циліндр (труба)



$$V = \pi\left(R^2 - r^2\right)l$$

$$V = \frac{\pi l}{4}\left(D^2 - d^2\right)$$

24. Визначення похідної від функції

Похідну від функції $y = f\left(x\right)$ в точці x_0 позначають символом $f'\left(x_0\right)$ або $y'\left(x_0\right)$. По визначенню:

$$f'\left(x_0\right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f\left(x_0 + \Delta x\right) - f\left(x_0\right)}{\Delta x} \quad \text{або} \quad y'\left(x_0\right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Використовуються і другі позначення :

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x};\ \dot{s}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t}$$, якщо $s=f(t)$, де t – час.

25. Правила диференціювання функцій

Якщо $c=const$ (стала величина), $u=u(x)$ і $v=v(x)$ – функції, які можуть бути здиференційовані, то

1. $c'=0$.
2 $x'_x=1$.
3. $(c\cdot x)'=c\cdot x'$.
4. $(u\pm v)'=u'\pm v'$.
5. $(u\cdot v)'=u'\cdot v+u\cdot v'$.
6. $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}$.

7. Якщо $y=f(u)$, $u=\varphi(x)$ тобто $y=f\left[\varphi(x)\right]$ – складна функція, то

$$y'_x=y'_u\cdot u'_x\,.$$

8. Якщо $y=f(x)$, $x=\varphi(y)$– пара взаємно обернених функцій і $y'_x\neq 0$ то

$$x'_y=\frac{1}{y'_x}\,.$$

9. Якщо функція y від аргументу x задана параметрично: $x=\varphi(t)$; $y=f(t)$ і $x'_t\neq 0$, то

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}\,.$$

26. Зв'язок диференціала функції з похідною

$$dy=y'dx\,.$$

27. Похідні і диференціали основних елементарних функцій

Похідні	*Диференціали*
1. $(x^n)' = nx^{n-1}$	$dx^n = nx^{n-1}dx$
2. $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$d\sqrt{x} = \dfrac{dx}{2\sqrt{x}}$
3. $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$	$d\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\dfrac{dx}{x^2}$
4. $(e^x)' = e^x$	$de^x = e^x dx$
5. $(a^x)' = a^x \ln a,\ (a > 0)$	$d(a^x) = a^x \left(\ln a\right) dx, (a > 0)$
6. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$	$d(\ln x) = \dfrac{dx}{x}$
7. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$	$d(\log_a x) = \dfrac{dx}{x \ln a}$
8. $(\sin x)' = \cos x$	$d(\sin x) = \cos x \cdot dx$
9. $(\cos x)' = -\sin x$	$d(\cos x) = -\sin x \cdot dx$
10. $(tgx)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$d(tgx) = \dfrac{dx}{\cos^2 x}$
11. $(ctgx)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$d(ctgx) = -\dfrac{dx}{\sin^2 x}$
12. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$d(\arcsin x) = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$
13. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$d(\arccos x) = -\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$
14. $(arctgx)' = \dfrac{1}{1+x^2}$	$d(arctgx) = \dfrac{dx}{1+x^2}$
15. $(arcctgx)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$	$d(arcctgx)' = -\dfrac{dx}{1+x^2}$

28. Властивості диференціала

1. $dc = 0,$ де $c = const$.
2. $d(c \cdot x) = c \cdot dx.$
3. $d(u \pm v) = du \pm dv.$
4. $d(u \cdot v) = u \cdot dv + v \cdot du.$
5. $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v \cdot du - u \cdot dv}{v^2}.$
6. $df(u) = f'(u)du$, де $u = u(x)$.

29. Визначення невизначеного інтеграла

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

де $F'(x) = f(x)$, а C – довільна стала.

30. Основні властивості невизначеного інтеграла (правила інтегрування).

1. $d\int f(x)dx = f(x)dx$ $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)dx$.
2. $\int df(x) = f(x) + C$.
3. $\int Af(x)dx = A\int f(x)dx$ ($A = const$, $A \neq 0$).
4. $\int \left[f(x) \pm g(x)\right]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$.
5. Якщо $\int f(x)dx = F(x) + C$ і $u = \varphi(x)$ то
$$\int f(u)du = F(u) + C.$$
6. $\int udv = uv - \int vdu$ де $u = f(x)$, $v = \varphi(x)$.

31. Таблиця найбільш простих невизначених інтегралів

1. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$.
2. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$.
3. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0)$.
3. $\int e^x dx = e^x + C.$

5. $\int \sin x dx = -\cos x + C.$ 6. $\int \cos x dx = \sin x + C$.

7. $\int tgx dx = -\ln|\cos x| + C.$ 8. $\int ctgx dx = \ln|\sin x| + C.$

9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C.$ 10. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C.$

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C.$

12. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + C.$

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C.$

14. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C.$

15. $\int \ln x dx = x\ln x - x + C.$ 16. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + C.$

Зауваження. В таблиці інтегралів замість x можна записати u , де $u = f(x)$ – будь-яка функція незалежної змінної x, яка може бути здиференційована. В цьому випадку для перетворення підінтегрального виразу до вигляду $g(u)du$ використовуються перетворення диференціалів:

1. $dx = d(x+b)$ де $b = const$; 2. $dx = \frac{1}{a}d(ax)$, $a \neq 0$;

3. $dx = \frac{1}{a}d(ax+b)$, $a \neq 0$; 4. $xdx = \frac{1}{2}d\left(x^2+b\right)$;

5. $\sin x dx = d(-\cos x)$; 6. $\cos x dx = d(\sin x)$.

Наприклад,

$$\int \sin 5x dx = \int \sin 5x \frac{1}{5} d5x = \frac{1}{5}\int \sin 5x d5x = -\frac{\cos 5x}{5} + C.$$

$$\int \frac{xdx}{x^2+1} = \int \frac{d(x^2+1)/2}{x^2+1} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} = \frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right| + C.$$

32. Визначення визначеного інтегралу і його властивості

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sum f(\xi_k)\Delta x_k.$$

1. $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)dx.$

2. $\int_a^a f(x)\,dx = 0.$

3. $\int_a^b dx = b - a.$

4. $\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx,$ де $c = const$.

5. $\int_a^b \left[f_1(x) \pm f_2(x)\right]dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx.$

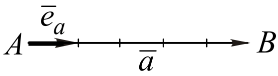
6. $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$

33. Формула Ньютона - Лейбніца

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

де $F(x)$ — первісна для $f(x)$, тобто $F'(x) = f(x)$.

34. Стандартне зображення вектора



$\overline{a} = a\overline{e}_a$ або $\overline{AB} = (AB)\overline{e}_a$,

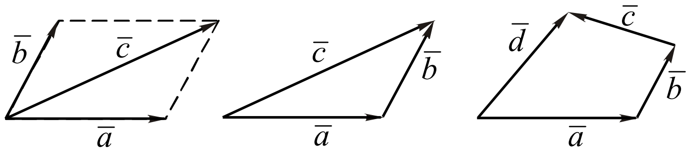
де $a \equiv |\overline{a}|$ – модуль або довжина вектора;

$e_a = \dfrac{\overline{a}}{a}$ – одиничний вектор або орт даного вектора.

35. Додавання векторів

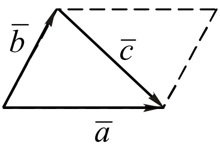
Вектори додаються за правилами:

а) паралелограма; б) трикутника; в) замикаючої.



$\overline{c} = \overline{a} + \overline{b}$ $\qquad$ $\overline{c} = \overline{a} + \overline{b}$ $\qquad$ $\overline{d} = \overline{a} + \overline{b} + \overline{c}$

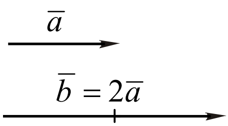
36. Віднімання векторів

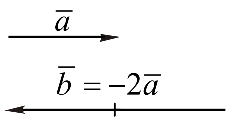


$\overline{c} = \overline{a} - \overline{b}$ якщо $\overline{b} + \overline{c} = \overline{a}$

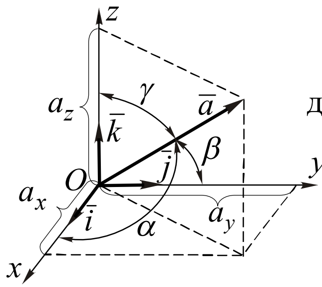
37. Добуток вектора ($\overline{a}$) на скаляр (k)

$\overline{b} = k\overline{a}$, якщо $k > 0$ $\qquad$ $\overline{b} = -k\overline{a}$, якщо $k < 0$.





38. Розкладання вектора по ортам прямокутної декартової системи координат (координатна форма вектора)



$$\overline{a} = a_x\overline{i} + a_y\overline{j} + a_z\overline{k},$$

де $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$ – орти координатних осей Ox, Oy, Oz;

a_x, a_y, a_z – проекції вектора $\overline{a}$ на осі Ox, Oy, Oz.

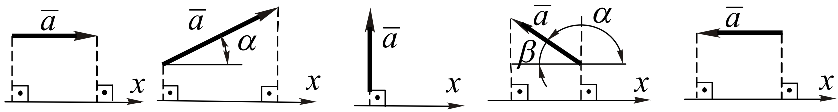
39. Проекції вектора на координатні осі

Якщо задані кути α, β, γ $\left(0 \le \alpha, \beta, \gamma \le \pi\right)$ утворені вектором $\overline{a}$ з координатними осями Ox, Oy, Oz, то

$$a_x = a\cos\alpha; \quad a_y = a\cos\beta; \quad a_z = a\cos\gamma.$$

Приклади.

$\alpha = 0$ $\qquad$ $0 < \alpha < 90^\circ$ $\qquad$ $\alpha = 90^\circ$ $\qquad$ $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ $\qquad$ $\alpha = 180^\circ$



$a_x = a$ $\qquad$ $a_x = a\cos\alpha$ $\qquad$ $a_x = 0$ $\qquad$ $a_x = a\cos\alpha = -a\cos\beta$ $\qquad$ $a_x = -a$

Якщо для вектора $\overline{a}$ задані координати його початку $A\left(x_1; y_1; z_1\right)$ і кінця $B\left(x_2; y_2; z_2\right)$, то

$$a_x = x_2 - x_1; \quad a_y = y_2 - y_1; \quad a_z = z_2 - z_1.$$

40. Модуль (довжина) вектора

$$\left|\overline{a}\right| \equiv a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \quad \text{або}$$

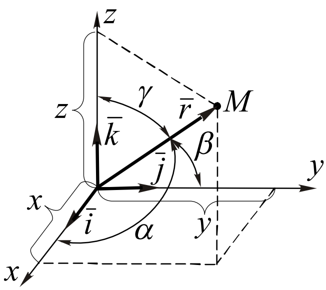
$$\left|\overline{a}\right| \equiv a = \sqrt{\left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2 + \left(z_2 - z_1\right)^2}.$$

41. Напрямні косинуси

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{a}; \qquad \cos\beta = \frac{a_y}{a}; \qquad \cos\gamma = \frac{a_z}{a},$$

причому $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$

42. Радіус-вектор $\overline{r}$ точки $M(x; y; z)$ в координатній формі, його модуль (довжина) і напрямні косинуси



$$\overline{r} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}.$$

$$\left|\overline{r}\right| \equiv r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

$$\cos\alpha = \frac{x}{r};$$

$$\cos\beta = \frac{y}{r};$$

$$\cos\gamma = \frac{z}{r}.$$

43. Скалярний добуток векторів (скаляр)

$$\left(\overline{a}\cdot\overline{b}\right) \equiv \overline{a}\cdot\overline{b} = ab\cos\varphi,$$

де φ – кут між векторами $\overline{a}$ і $\overline{b}$.

Властивості скалярного добутку:

1. $\overline{a}\cdot\overline{a} = a^2$ або $\overline{a}^2 = a^2$.
2. $\overline{a}\cdot\overline{b} = 0$ якщо $\overline{a} = 0$, або $\overline{b} = 0$, або $\overline{a}\perp\overline{b}$.
3. $\overline{a}\cdot\overline{b} = \overline{b}\cdot\overline{a}$.
4. $\overline{a}\left(\overline{b} + \overline{c}\right) = \overline{a}\cdot\overline{b} + \overline{a}\cdot\overline{c}.$
5. $\left(k\overline{a}\right)\cdot\overline{b} = \overline{a}\cdot\left(k\overline{b}\right) = k\left(\overline{a}\cdot\overline{b}\right),$

де k – чисельний множник.

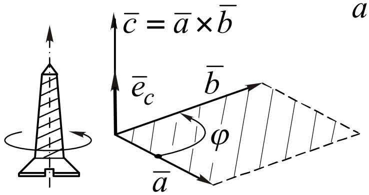
Скалярний добуток ортів осей координат:

$$\overline{i}^2=\overline{j}^2=\overline{k}^2=1;\quad \overline{i}\cdot\overline{j}=\overline{i}\cdot\overline{k}=\overline{j}\cdot\overline{k}=0.$$

Якщо $\overline{a}=a_x\overline{i}+a_y\overline{j}+a_z\overline{k}$ і $\overline{b}=b_x\overline{i}+b_y\overline{j}+b_z\overline{k}$, то

$$\overline{a}\cdot\overline{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z.$$

44. Векторний добуток векторів (вектор) і подвійний векторний добуток



$$\overline{a}\times\overline{b}\equiv\left[\overline{a}\overline{b}\right]=\overline{c}.$$

Вектор $\overline{c}$, що є векторним добутком векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$, перпендикулярний до площини, в якій лежать ці вектори.

Його напрям визначається за правилом правого гвинта: якщо обертати головку гвинта по найкоротшій відстані від першого множника до другого, то напрям руху самого гвинта дає напрям вектора $\overline{c}$.

Модуль векторного добутку:

$$\left|\overline{c}\right|\equiv c=a\cdot b\cdot\sin\varphi,\quad \text{де}\quad \varphi=\angle\left(\overline{a},\overline{b}\right).$$

Властивості векторного добутку:

1. $\overline{a}\times\overline{b}=-\overline{b}\times\overline{a}$.
2. $\overline{a}\times\overline{b}=0$, якщо $\overline{a}=0$, або $\overline{b}=0$, або $\overline{a}\parallel\overline{b}=0$.
3. $\left(k\overline{a}\right)\times\overline{b}=\overline{a}\times\left(k\overline{b}\right)=k\left[\overline{a}\times\overline{b}\right]$,

   де k – чисельний множник.
4. $\overline{a}\times\left(\overline{b}+\overline{c}\right)=\overline{a}\times\overline{b}+\overline{a}\times\overline{c}.$

Векторний добуток ортів осей координат:

$$\overline{i}\times\overline{i}=\overline{j}\times\overline{j}=\overline{k}\times\overline{k}=0.$$

$$\overline{i}\times\overline{j}=-\overline{j}\times\overline{i}=\overline{k};\quad \overline{j}\times\overline{k}=-\overline{k}\times\overline{j}=\overline{i};\quad \overline{k}\times\overline{i}=-\overline{i}\times\overline{k}=\overline{j}.$$

Якщо $\overline{a} = a_x\overline{i} + a_y\overline{j} + a_z\overline{k}$ і $\overline{b} = b_x\overline{i} + b_y\overline{j} + b_z\overline{k}$, то

$$\overline{a} \times \overline{b} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} =$$

$$= \overline{i}\left(a_y b_z - a_z b_y\right) + \overline{j}\left(a_z b_x - a_x b_z\right) + \overline{k}\left(a_x b_y - a_y b_x\right).$$

Подвійний векторний добуток:

$$\left[\overline{a}\left[\overline{b} \times \overline{c}\right]\right] = \overline{b}\left(\overline{a} \cdot \overline{c}\right) - \overline{c}\left(\overline{a} \cdot \overline{b}\right).$$

45. Правила диференціювання вектор - функції скалярного аргументу *t*

Якщо $\overline{a} = \overline{a}(t) = a_x(t)\overline{i} + a_y(t)\overline{j} + a_z(t)\overline{k}$ і

$\overline{b} = \overline{b}(t) = b_x(t)\overline{i} + b_y(t)\overline{j} + b_z(t)\overline{k}$;

$\overline{c}$ – сталий вектор;

$\lambda(t)$ – скалярна функція від t, яка може бути здиференційована;

k – стала скалярна величина, то:

1. $\dfrac{d\overline{a}}{dt} = \overline{i}\,\dfrac{da_x}{dt} + \overline{j}\,\dfrac{da_y}{dt} + \overline{k}\,\dfrac{da_z}{dt}.$ 2. $\dfrac{d\overline{c}}{dt} = 0.$

3. $\dfrac{d}{dt}\left(\overline{a} \pm \overline{b}\right) = \dfrac{d\overline{a}}{dt} \pm \dfrac{d\overline{b}}{dt}.$ 4. $\dfrac{d}{dt}\left(k\overline{a}\right) = k\,\dfrac{d\overline{a}}{dt}.$

5. $\dfrac{d}{dt}\left(\lambda\overline{a}\right) = \lambda\,\dfrac{d\overline{a}}{dt} + \overline{a}\,\dfrac{d\lambda}{dt}.$ 6. $\dfrac{d}{dt}\left(\lambda\overline{c}\right) = \overline{c}\,\dfrac{d\lambda}{dt}.$

7. $\dfrac{d}{dt}\left(\overline{a} \cdot \overline{b}\right) = \dfrac{d\overline{a}}{dt} \cdot \overline{b} + \overline{a} \cdot \dfrac{d\overline{b}}{dt}.$

8. $\dfrac{d}{dt}\left[\overline{a} \times \overline{b}\right] = \left[\dfrac{d\overline{a}}{dt} \times \overline{b}\right] + \left[\overline{a} \times \dfrac{d\overline{b}}{dt}\right].$

II. ФІЗИЧНІ ОСНОВИ МЕХАНІКИ

47. Букви, які використовуються для позначення фізичних величин

Латинський алфавіт		*Грецький алфавіт*	
A, a — а	N, n — ен	Α, α — альфа	Ν, ν — ню
B, b — бе	O, o — о	Β, β — бета	Ξ, ξ — ксі
C, c — це	P, p — пе	Γ, γ — гамма	Ο, ο — омікрон
D, d — де	Q, q — ку	Δ, δ — дельта	Π, π — пі
E, e — є	R, r — ер	Ε, ε — епсілон	Ρ, ρ — ро
F, f — еф	S, s — ес	Ζ, ζ — дзета	Σ, σ — сігма
G, g — ге, же	T, t — те	Η, η — ета	Τ, τ — тау
H, h — аш	U, u — у	Θ, ϑ — тета	Υ, υ — іпсілон
I, i — і	V, v — ве	Ι, ι — йота	Φ, φ — фі
J, j — йот, жі	W, w — дубль-ве	Κ, κ — каппа	Χ, χ — хі
K, k — ка	X, x — ікс	Λ, λ — ламбда	Ψ, ψ — псі
L, l — ель	Y, y — ігрек	Μ, μ — мю	Ω, ω — омега
M, m — ем	Z, z — зет		

48. Міжнародна система одиниць СІ фізичних величин в механіці

Фізична величина і її позначення	Формула для визначення	Одиниця вимірювання	
		Назва	Позначення
Довжина — *l, s, r*	обираються незалежно	метр	*м*
Маса — *m*		кілограм	*кг*
Час — *t*		секунда	*с*

Додаткові			
Плоский кут $\alpha, \beta, \gamma, \varphi$	$\alpha = l/r$	радіан	*рад*
Тілесний кут Ω	$\Omega = S/r^2$	стерадіан	*ср*
Похідні			
Площа – S, A	$S = l^2$	квадратний метр	*м*^{2}
Об'єм – V	$V = l^3$	кубічний метр	*м*^{3}
Кривина – k	$k = 1/r$	одиниця на метр	1/*м*
Швидкість – V	$V = s/t$	метр на секунду	*м/с*
Прискорення a	$a = \Delta V/t$	метр на секунду в квадраті	*м/с*^{2}
Кутова швидкість – ω	$\omega = \varphi/t$	радіан на секунду	*рад/с*
Кутове прискорення – ε	$\varepsilon = \Delta\omega/t$	радіан на секунду в квадраті	*рад/с*^{2}
Період – T, τ	$\tau = 2\pi/\omega$	секунда	*с*
Частота періодичного процесу – ν, f	$\nu = 1/\tau$	Герц	*Гц* =1/*с*
Частота обертання – n	$n = \Delta N/t$	обертів за секунду	1/*с*
Густина – ρ	$\rho = m/V$	кілограм на кубічний метр	*кг/м*^{3}
Кількість руху (імпульс) – p	$p = m \cdot V$	кілограм×метр на секунду	*кг* $\cdot$ *м/с*

Похідні			
Момент кількості руху – *L*	$L = m \cdot V \times \times r$	кілограм×метр в квадраті на секунду	$кг \cdot м^2/с$
Сила – *F, Q, R, G, P*	$F = m \cdot a$	Ньютон	$кг \cdot м/с^2$
Момент сили, момент пари сил – *M*, *m*	$M = F \cdot h$	Ньютон×метр	$Н \cdot м$
Імпульс сили – *s*	$s = F \cdot t$	Ньютон× секунда	$Н \cdot с$
Момент інерції – *I*	$I = m \cdot r^2$	Кілограм × метр в квадраті	$кг \cdot м^2$
Тиск – *p*	$p = F / s$	Паскаль	$Па \equiv Н/м^2$
Робота – *A* і енергія – *E*, *W*	$A = F \cdot l$	Джоуль	$Дж \equiv Н \cdot м$
Потужність – *N*, *P*	$N = A / t$	Ват	$Вт \equiv Дж/с$

49. Визначення основних одиниць СІ

Метр – це шлях, який проходить у вакуумі плоска електромагнітна хвиля за 1/299 792 458 секунди.

Метр приблизно дорівнює 1/40000000 частині довжини земного меридіану.

Кілограм – це маса платиново-іридієвого (Pt 90%, Ir 10%) еталона – циліндра діаметром і висотою 39 мм. До маси еталону наближається маса 1 дм^3 (1 літра) чистої води при температурі 4°С.

Секунда – це проміжок часу, за який відбувається 9192631770 періодів електромагнітного випромінювання, яке відповідає переходу між двома надтонкими рівнями основного стану атома цезія–133. Секунда приблизно дорівнює 1/86400 частині середньої сонячної доби.

50. Приставки і множники до одиниць СІ для утворення кратних та часткових одиниць

Кратні		Часткові	
Приставка та її скорочене позначення	Множник	Приставка та її скорочене позначення	Множник
дека — да	10^{1}	деці — д	10^{-1}
гекто — г	10^{2}	санти — с	10^{-2}
кіло — к	10^{3}	мілі — м	10^{-3}
мега — М	10^{6}	мікро — мк	10^{-6}
гіга — Г	10^{9}	нано — н	10^{-9}
тера — Т	10^{12}	піко — п	10^{-12}
пета — П	10^{15}	фемто — ф	10^{-15}
екса — Е	10^{18}	атто — а	10^{-18}

Приклади:

гігагерц – 1 *ГГц* = 10^{9} *Гц*, нанометр – 1*нм* = 10^{-9} *м*,
мегават – 1 *МВт* = 10^{6} *Вт*, мікроват – 1 *мкВт* = 10^{-6} *Вт*,
кілоньютон – 1 *кН* = 10^{3} *Н*, мілісекунда – 1*мс* = 10^{-3} *с*.

51. Позасистемні одиниці, використання яких допускається нарівні з одиницями СІ

Час 1 хв. (хвилина) = 60 *с*
1 год. (година) = 3600 *с*
1 доб. (доба) = 86400 *с*

Маса	1 т. (тона) = 10^3 *кг* 1 а.о.м. (атомна одиниця маси) = $=1{,}66 \cdot 10^{-27}$ *кг*
Плоский кут	1° (градус) = $60' = 1{,}745 \cdot 10^{-2}$ *рад* $1'$ (минута) = $60'' = 2{,}91 \cdot 10^{-4}$ *рад* $1''$ (секунда) = $4{,}85 \cdot 10^{-6}$ *рад*
Площа	1 га (гектар) = 10^4 *м*^{2}
Об'єм, місткість	1 л (літр) = 1 *дм*^{3} = 10^{-3} *м*^{3}
Швидкість	1 км/год (кілометр за годину) = 1/3,6 *м/с*
Частота обертання	1 об/хв (оберт за хвилину) $\approx 0{,}105$ *с*$^{-1}$
Енергія	1 еВ (електрон – Вольт) = $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ *Дж* 1 Вт·год (Ват – годин) = $3{,}6 \cdot 10^3$ *Дж* 1кВт·год (кілоВат – годин) = $3{,}6 \cdot 10^6$ *Дж*
Потужність	1 к.с. (кінська сила) = 736 *Вт*
Тиск	1 мм рт.ст. (міліметр ртутного стовпа) ≈ 133 *Па* 1 техн.атм. (технічна атмосфера) = $= 9{,}8 \cdot 10^4$ *Па* 1 фіз.атм (фізична атмосфера) = $=1{,}013 \cdot 10^5$ *Па*

52. Деякі фізичні сталі (константи) та астрономічні величини

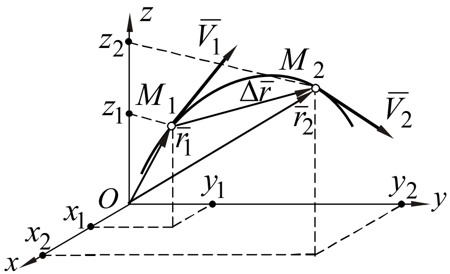
Швидкість світла у вакуумі	$c = 2{,}998 \cdot 10^8$ *м/с*
Гравітаційна стала	$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ *м*^{3}/*кг*·*с*^{2}
Прискорення вільного падіння (середнє)	$g = 9{,}807$ *м/с*^{2}
Маса Землі	$m_з = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ *кг*
Середній радіус Землі	$R_з = 6{,}37 \cdot 10^6$ *м*

53. Кінематичні характеристики точки при різних способах означення її руху

а) *векторний*

Рівняння руху: $\bar{r} = \bar{r}(t)$,

де $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$ – радіус-вектор точки.



Вектор переміщення:

$$\Delta\bar{r} = \bar{r}_2 - \bar{r}_1.$$

Швидкість точки:

$$\bar{V} = \frac{d\bar{r}}{dt} \equiv \dot{\bar{r}}.$$

Прискорення точки:

$$a = \frac{d\bar{V}}{dt} \equiv \dot{\bar{V}} \quad \text{або} \quad \bar{a} = \frac{d^2\bar{r}}{dt_2} \equiv \ddot{\bar{r}}.$$

б) *координатний*

Рівняння руху:

$$x = f_1(t); \quad y = f_2(t); \quad z = f_3(t),$$

де x, y, z – координати точки.

Одночасно рівняння руху являють собою рівняння траєкторії точки в параметричному вигляді. Параметром є час t.

Модуль та напрям вектора швидкості точки:

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2};$$

$$\cos(\bar{V},\bar{i}) = \frac{V_x}{V}; \quad \cos(\bar{V},\bar{j}) = \frac{V_y}{V}; \quad \cos(\bar{V},\bar{k}) = \frac{V_z}{V},$$

де $V_x = \dot{x},\ \ V_y = \dot{y},\ \ V_z = \dot{z}$ – проекції вектора швидкості на осі координат.

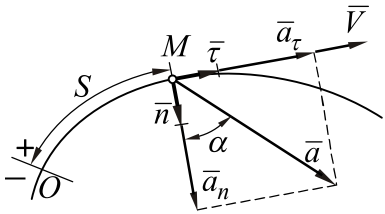
Модуль та напрям вектора прискорення точки:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\ ;$$

$$\cos\left(\bar{a}, \bar{i}\right) = \frac{a_x}{a};\ \ \cos\left(\bar{a}, \bar{j}\right) = \frac{a_y}{a};\ \cos\left(\bar{a}, \bar{k}\right) = \frac{a_z}{a},$$

де $a_x = \dot{V}_x = \ddot{x},\ \ a_y = \dot{V}_y = \ddot{y},\ \ a_z = \dot{V}_z = \ddot{z}$ – проекції вектора прискорення на осі координат.

в) *природний*



Рівняння руху:

$$S = f\left(t\right),$$

де S – дугова координата точки.

Швидкість точки:

$$\bar{V} = V_\tau \cdot \bar{\tau} \quad \text{і} \quad \left|\bar{V}\right| = V_\tau = \frac{dS}{dt},$$

де V_τ – проекція вектора $\bar{V}$ на напрям вектора $\bar{\tau}$,

$\bar{\tau}$ – одиничний вектор, який дотичний до траєкторії в даній точці.

Прискорення точки:

$$\bar{a} = \bar{a}_\tau + \bar{a}_n,$$

де $\bar{a}_\tau = \dfrac{dV}{dt}\bar{\tau}$ – дотичне або тангенціальне прискорення;

$\bar{a}_n = \dfrac{V^2}{\rho}\bar{n}$ – доцентрове або нормальне прискорення;

$\overline{n}$ – одиничний вектор головної нормалі до траєкторії;

ρ – радіус кривини траєкторії в даній точці.

Модуль повного прискорення:

$$\left|\overline{a}\right| \equiv a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{\dot{V}^2 + V^2/\rho}.$$

Кут α відхилення $\overline{a}$ від $\overline{a}_n$: $tg\alpha = \left|a_\tau\right|/a$.

54. Класифікація руху точки в залежності від тангенціального і нормального прискорень

1. $a_\tau = 0,\ a_n = 0$ – рівномірний $(V = const)$ прямолінійний $(\rho = \infty)$ рух. Єдиний можливий вид руху без прискорення.

2. $a_\tau = const \neq 0,\ a_n = 0$ – рівнозмінний прямолінійний рух.

3. $a_\tau = f(t),\ a_n = 0$ – нерівномірний прямолінійний рух.

4. $a_\tau = 0,\ a_n \neq 0$ – рівномірний криволінійний рух. Якщо $a_\tau = 0,\ a_n = const \neq 0$ – рівномірний рух по колу радіусом ρ.

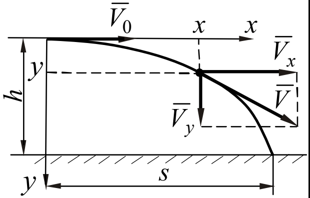
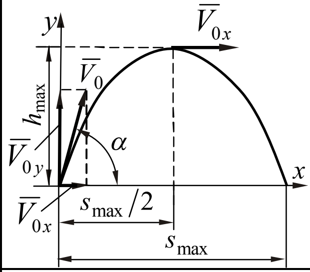
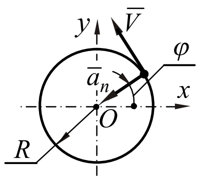
5. $a_\tau = const \neq 0,\ a_n \neq 0$ – рівнозмінний криволінійний рух.

6. $a_\tau = f(t),\ a_n \neq 0$ – нерівномірний криволінійний рух.

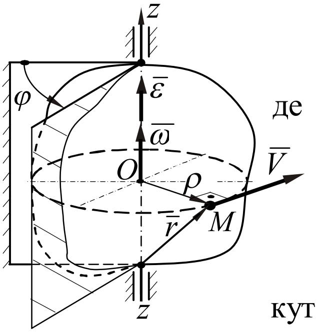
55. Деякі часткові випадки прямолінійного руху точки

Види руху	Швидкість	Шлях	Координати
Рівномірний ($\overline{a}=0$)	$\overline{V}=const$ $V_x=\frac{s_x}{t}=\frac{x-x_0}{t}$	$s_x=V_x\cdot t$	$x=x_0+V_xt,$ $y=0$
Рівнозмінний з початковою швидкістю $\overline{V}_0$ ($\overline{a}=const\neq 0$)	$V_x=V_{0x}+a_xt$ $V_x^2-V_{0x}^2=2a_xs_x$	$s_x=V_{0x}t+$ $+\frac{a_xt^2}{2}$	$x=x_0+V_{0x}t+$ $+\frac{a_xt^2}{2},$ $y=0.$
Вільне падіння ($\overline{V}_0=0$) ($\overline{a}=\overline{g}$, $a=g$)	$V=gt,$ $V=\sqrt{2gh}$	$h=\frac{gt^2}{2}$	$x=const,$ $y=\frac{gt^2}{2}$
Рух тіла, що кинуто вертикально вгору з початковою швидкістю $\overline{V}_0$ ($\overline{a}=\overline{g}$, $a=-g$)	$V=V_0-gt,$ $V^2-V_0^2=2gh$	$h=V_0t-\frac{gt^2}{2}$ $h_{\max}=\frac{V_0^2}{2g}$	$x=const,$ $y=V_0t-\frac{gt^2}{2}$

56. Деякі часткові випадки криволінійного руху точки

Види руху	Схема руху	Швидкість	Шлях	Координати
Рух тіла, що кинуте горизонтально з початковою швидкістю V_0 ($a_x = 0;\ a_y = g$)		$\overline{V} = \overline{V}_x + \overline{V}_y;$ $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2};$ $V_x = V_0;\ V_y = gt.$	$s = V_0 t;$ $h = \dfrac{gt^2}{2}.$	$x = V_0 t;$ $y = \dfrac{gt^2}{2}.$
Рух тіла, що кинуте під кутом α до горизонту з початковою швидкістю $\overline{V}_0$ ($a_x = 0;\ a_y = g$)		$\overline{V} = \overline{V}_x + \overline{V}_y;$ $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2};$ $V_x = V_{0x} = V_0 \cos\alpha$ $V_y = V_{0y} - gt =$ $= V_0 \sin\alpha - gt$	$s_{\max} = \dfrac{V_0^2 \sin 2\alpha}{g}$ $h_{\max} = \dfrac{V_0^2 \sin^2\alpha}{2g}$	$x = V_0 t \cos\alpha$ $y = V_0 t \sin\alpha -$ $- \dfrac{gt^2}{2}$
Рівномірний рух ($\overline{V} = const$) по колу радіуса R. ($a_\tau = 0;\ a_n = \dfrac{V^2}{R}$)		$\omega = const;\ \omega = \varphi / t;$ $\omega = 2\pi n;\ V = \omega R,$ де n - частота обертання.	$s = \varphi R;\ \varphi = \omega t;$ $\varphi = 2\pi N$, де N - число обертів.	$x = R\cos\varphi;$ $y = R\sin\varphi.$

57. Кінематичні характеристики обертального руху твердого тіла навколо нерухомої осі



Рівняння руху: $\varphi = f(t)$.

Кут повороту: $\varphi = \ell/\rho$; $[\varphi] = рад$,

де ℓ – довжина дуги кола, по якій рухається будь-яка точка M тіла;

ρ – радіус кола траєкторії точки.

Якщо відомо число обертів N, то кут φ повороту тіла: $\varphi = 2\pi N$.

Кутова швидкість: $\omega = d\varphi/dt = \dot{\varphi}$; $[\omega] = рад/с$.

Кутове прискорення: $\varepsilon = d\omega/dt = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}$; $[\varepsilon] = рад/c^2$.

Період обертання: $T = 2\pi/\omega$; $[T] = с$.

Частота обертання: $n = \dfrac{1}{T} = \dfrac{\omega}{2\pi}$; $[n] = \dfrac{об}{с}$.

58. Перехід від обертів за хвилину до радіан за секунду

$$\omega\left[\frac{рад}{с}\right] = \frac{\pi}{30} n\left[\frac{об}{хв}\right] \approx 0,1n\left[\frac{об}{хв}\right].$$

59. Співвідношення між лінійною і кутовою швидкостями точок твердого тіла, яке обертається навколо нерухомої осі

$$\bar{V} = [\bar{\omega} \times \bar{r}] \text{ або } |\bar{V}| \equiv V = \omega r \sin\angle(\bar{\omega}, \bar{r}) = \omega\rho,$$

де $\bar{r}$ – радіус-вектор точки;

ρ – радіус кривини траєкторії в даній точці.

60. Порівняння основних величин, які характеризують поступальний і обертальний рух твердого тіла

Поступальний рух	Обертальний рух
s — шлях V — швидкість a — прискорення	φ — кут повороту ω — кутова швидкість ε — кутове прискорення
Повне прискорення $a = \sqrt{a_\tau + a_n}$	
$a_\tau = \dot{V} = \ddot{s}$ $a_n = V^2 / \rho$	$a_\tau = \rho\varepsilon$ $a_n = \rho\omega^2$
де ρ — радіус кривини траєкторії в даній точці	
Рівномірний рух	
$(a = 0)$ $s = s_0 + Vt$ $V = \dfrac{s - s_0}{t}$	$(\varepsilon = 0)$ $\varphi = \varphi_0 + \omega t$ $\omega = \dfrac{\varphi - \varphi_0}{t}$
Рівнозмінний рух	
$(a_\tau = const \neq 0)$ $a_\tau = \dfrac{V - V_0}{t}$ $s = s_0 + V_0 t + \dfrac{at^2}{2}$ $V^2 - V_0^2 = 2as$	$(\varepsilon = const \neq 0)$ $\varepsilon = \dfrac{\omega - \omega_0}{t}$ $\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \dfrac{\varepsilon t^2}{2}$ $\omega^2 - \omega_0^2 = 2\varepsilon\varphi$

61. Закони Ньютона

Перший: $\overline{V} = const, \quad \overline{a} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \overline{F} = 0,$

де $\overline{V}$ і $\overline{a}$, відповідно, швидкість та прискорення матеріальної точки, $\overline{F} = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k$ – рівнодійна сил, що прикладені до матеріальної точки.

Другий: $\overline{a} = \dfrac{\overline{F}}{m}$, або $m\overline{a} = \overline{F}$, або $\dfrac{d\overline{p}}{dt} = \overline{F}$,

де m – маса матеріальної точки,

$\overline{p} = m\overline{V}$ – імпульс (кількість руху) матеріальної точки.

Третій: $\overline{R}_{1,2} = \overline{R}_{2,1}$,

де $\overline{R}_{1,2}$ – сила, з якою на першу матеріальну точку діє друга;

$\overline{R}_{2,1}$ – сила, з якою на другу матеріальну точку діє перша.

62. Динамічне рівняння руху матеріальної точки

У векторній формі: $m\ddot{\overline{r}} = \overline{F}$,

де $\overline{r}$ – радіус-вектор матеріальної точки.

В проекціях на осі декартової системи координат $(Oxyz)$:

$$m\ddot{x} = F_x, \quad m\ddot{y} = F_y, \quad m\ddot{z} = F_z,$$

де F_x, F_y, F_z – проекції вектора $\overline{F}$ на осі x, y, z.

В проекціях на осі природної системи координат:

$$m\ddot{l} = F_\tau, \quad m\frac{V^2}{\rho} = F_n, \quad 0 = F_b,$$

де l – дугова координата точки;

F_τ, F_n, F_b – проекції вектора $\overline{F}$ на дотичну $(\overline{\tau})$, головну нормаль $(\overline{n})$ та бінормаль $(\overline{b})$ до траєкторії в даній точці,

ρ – радіус кривини траєкторії в даній точці.

63. Сили в механіці

Гравітаційна сила або сила всесвітнього тяготіння

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2},$$

де $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{м^3}{кг \cdot с^2}$ – гравітаційна стала або стала всесвітнього тяготіння; m_1 і m_2 – маси матеріальних точок, що притягуються; r – відстань між матеріальними точками.

Однорідна сила тяжіння

$$P = mg,$$

де g = 9,81 $м/с^2$ – прискорення вільного падіння;

m – маса тіла.

Вага тіла

$$\overline{Q} = \overline{P} \quad \text{та} \quad Q = mg, \text{ якщо } \overline{a} = 0.$$

Якщо підпора або підвіс рухається у вертикальному напрямі з прискоренням , яке напрямлене:

угору, то $\overline{Q} > \overline{P}$ та $Q = m\,(g + a)$,

униз, то $\overline{Q} < \overline{P}$ та $Q = m\,(g - a)$.

Сила пружності

$$\left|F_{\mathbf{пр}}\right| = -kx\,,$$

де k – жорсткість тіла або коефіцієнт пружності ;
x – деформація (зміщення від положення рівноваги).

Сила тертя

$$F_{\mathbf{тр}} = \mu N,$$

де μ – коефіцієнт тертя;
N – сила нормального тиску, або сила нормальної реакції поверхні.

Сила опору середовища

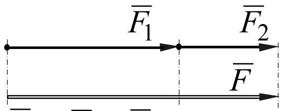
При невеликих швидкостях: $F_{\mathbf{оп}} = kV$.

При великих швидкостях: $F_{\mathbf{оп}} = kV^2$,

де k – коефіцієнт опору середовища;
V – швидкість тіла.

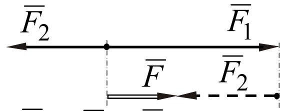
64. Додавання двох сил

1. Сили напрямлені уздовж однієї прямої



$\overline{F} = \overline{F_1} + \overline{F_2}$ та

$\left|\overline{F}\right| = \left|\overline{F_1}\right| + \left|\overline{F_2}\right|$.

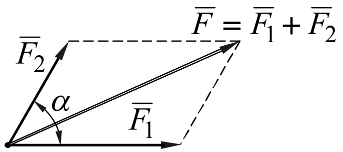


$\overline{F} = \overline{F_1} + \overline{F_2}$ та

$\left|\overline{F}\right| = \left|\overline{F_1}\right| - \left|\overline{F_2}\right|$.

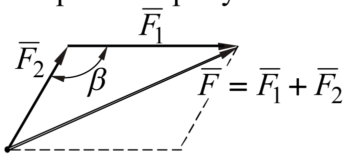
2. Сили напрямлені під кутом α одна до одної

Правило паралелограма



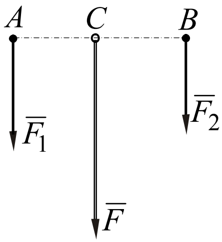
$$\left|F\right| = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\alpha}$$

Правило трикутника



$$\left|F\right| = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2\cos\beta}$$

3. Дві паралельні сили, напрямлені в одну сторону

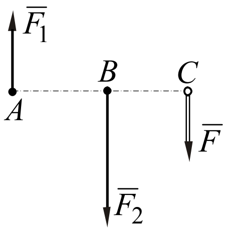


$$\frac{BC}{F_1} = \frac{AC}{F_2} = \frac{AB}{F}$$

$$\overline{F} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 \quad \text{та}$$

$$\left|\overline{F}\right| = \left|\overline{F}_1\right| + \left|\overline{F}_2\right|.$$

4. Дві нерівні за модулем паралельні сили, що напрямлені в протилежні сторони



$$\frac{BC}{F_1} = \frac{AC}{F_2} = \frac{AB}{F}$$

$$\overline{F} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 \quad \text{та}$$

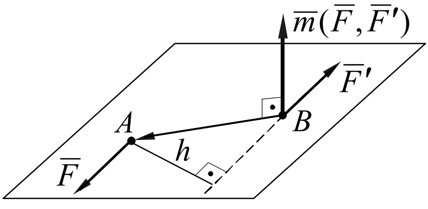
$$\left|\overline{F}\right| = \left|\overline{F}_1\right| + \left|\overline{F}_2\right|.$$

5. Дві рівні за модулем паралельні сили, напрямлені в протилежні сторони (пара сил)

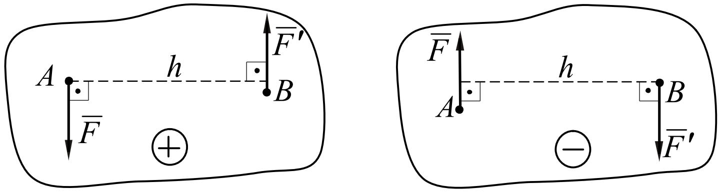
Рівнодійна пари сил дорівнює нулю. Пара сил характеризується *моментом пари сил:*

$$\overline{m}\left(\overline{F}, \overline{F}'\right) = \left[\overline{r} \times \overline{F}\right] \equiv \left[\overline{r} \times \overline{F}'\right] \quad \text{та}$$

$$\left|\overline{m}\left(\overline{F}, \overline{F}'\right)\right| \equiv m\left(\overline{F}, \overline{F}'\right) = \pm Fh = \pm F'h\,.$$



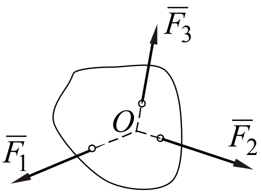
Приклади визначення знака модуля моменту пари сил

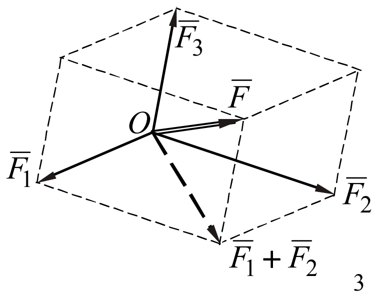


$$m\left(\overline{F},\overline{F}'\right)=Fh\equiv F'h \qquad m\left(\overline{F},\overline{F}'\right)=-Fh\equiv -F'h$$

65. Додавання трьох сил, що не лежать в одній площині (правило паралелепіпеда

Векторна сума трьох сил що не лежать в одній площині, зображається *діагоналлю паралелепіпеда*, який побудований на цих силах.

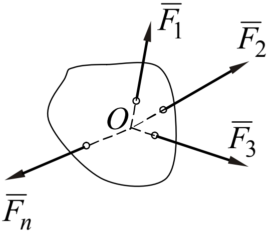


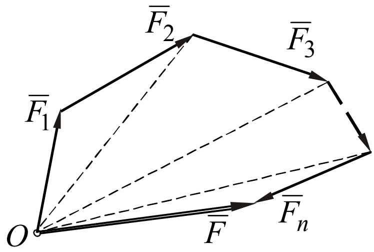


$$\overline{F}=\overline{F}_1+\overline{F}_2+\overline{F}_3=\sum_{k=1}^{3}F_k$$

66. Додавання системи «*n*» сил (правило замикаючої силового многокутника)

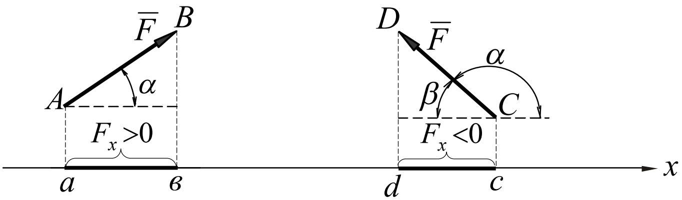
Векторна сума $\overline{F}$ декількох сил $\overline{F}_1,\overline{F}_2,...,\overline{F}_n$ зображається *замикаючою стороною* (вектором, який з’єднує початок і кінець) силового многокутника, що побудований на цих силах.



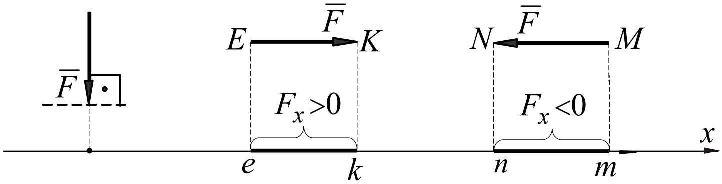


$$\overline{F} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \ldots + \overline{F}_n = \sum_{k=1}^{n} F_k \, .$$

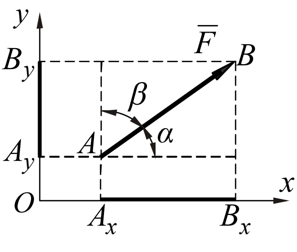
67. Проекція сили на вісь



$F_x = (ав) = F\cos\alpha$. $\qquad F_x = -(dc) = F\cos\alpha = -F\cos\beta$.



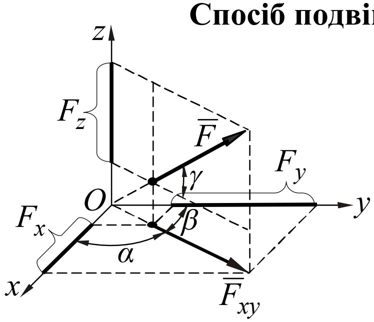
$F_x = 0$. $\qquad F_x = (ek) = F$. $\qquad F_x = -(nm) = -F$.



$$F_x = A_x B_x = F\cos\alpha = F\sin\beta;$$

$$F_y = A_y B_y = F\cos\beta = F\sin\alpha.$$

Спосіб подвійного проектування

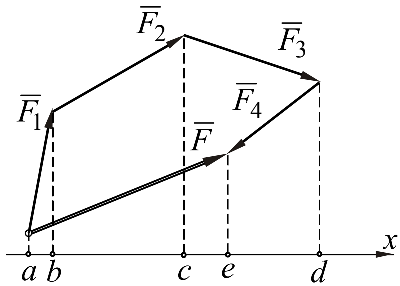


$$F_x = F_{xy}\cos\alpha = F\cos\gamma\cos\alpha;$$

$$F_y = F_{xy}\cos\beta = F\cos\gamma\cos\beta;$$

$$F_z = F\sin\gamma.$$

Проекція вектора суми векторів на будь-яку вісь дорівнює алгебраїчній (з урахуванням знаку) сумі проекцій векторів, що додаються, на ту ж саму вісь.

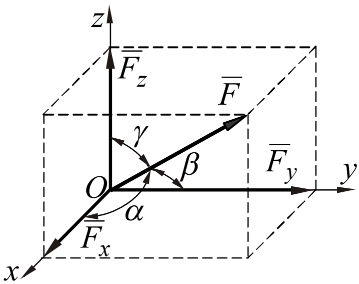


Якщо $\overline{F} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \overline{F}_3 + \overline{F}_4$, то

$$F_x = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + F_{4x} =$$

$$= ab + bc + cd - de = ae.$$

68. Розкладання сили на складові (компоненти) відносно осей прямокутної декартової системи координат



$$\overline{F} = \overline{F}_x + \overline{F}_y + \overline{F}_z.$$

Модуль вектора сили:

$$\left|\overline{F}\right| \equiv F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2},$$

де F_x, F_y, F_z – проекції складових $\overline{F}_x$, $\overline{F}_y$, $\overline{F}_z$ на відповідні координатні осі.

Напрямні косинуси:

$$\cos\alpha = F_x/F; \quad \cos\beta = F_y/F; \quad \cos\gamma = F_z/F.$$

69. Гармонічні коливання

$$S = A\cos(\omega t + \alpha) \quad \text{або} \quad S = A\sin(\omega t + \alpha - \pi/2),$$

де S – відхилення (зміщення) з часом t матеріальної точки, що коливається, від положення рівноваги, якому відповідає значення $S = 0$;

A – амплітуда коливань, $A = S_{\max}$;

$\omega t + \alpha$ – фаза коливань;

α – початкова фаза коливань;

ω – кругова (циклічна) частота коливань, $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$;

T – період коливань (час одного повного коливання);

ν – частота коливань, $\nu = \dfrac{1}{T} = \dfrac{\omega}{2\pi}$.

Швидкість точки, що коливається

Якщо, наприклад, $S = A\sin(\omega t + \alpha)$ то

$$V \equiv \dot{S} = A\omega\cos(\omega t + \alpha) = A\omega\sin(\omega t + \alpha + \pi/2).$$

Прискорення точки, що коливається

$$a \equiv \dot{V} \equiv \ddot{S} = -A\omega^2\sin(\omega t + \alpha) = A\omega^2\sin(\omega t + \alpha + \pi).$$

70. Диференціальне рівняння вільних гармонічних коливань точки без урахування сил опору середовища

$$\frac{d^2S}{dt^2} + \omega^2 S = 0 \quad \text{або} \quad \ddot{S} + \omega^2 S = 0.$$

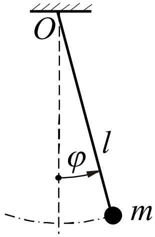
71. Власна частота ω_0 та період коливань T пружинного маятника

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}; \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}},$$

де m – маса тіла, прикріпленого до пружини,

k – жорсткість (коефіцієнт пружності) пружини.

72. Власна частота ω_0 та період T коливань математичного маятника

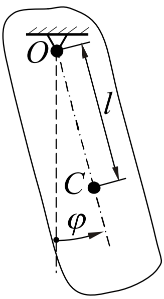


$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}; \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

де $g = 9,81\ м/с^2$ – прискорення вільного падіння;

l – довжина маятника.

73. Власна частота та період коливань фізичного маятника



$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgl}{I_O}} = \sqrt{\frac{g}{l'}}; \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{I_O}{mgl}} = 2\pi\sqrt{\frac{l'}{g}},$$

де m – маса маятника;

$g = 9,81\ м/с^2$ – прискорення вільного падіння;

l – відстань між точкою підвісу O і центром мас C маятника;

I_O – момент інерції маятника відносно осі, що проходить через точку підвісу;

$l' = \dfrac{I_O}{ml}$ – приведена довжина фізичного маятника.

74. Диференціальне рівняння затухаючих коливань

$$\frac{d^2S}{dt^2}+2\beta\frac{dS}{dt}+\omega_0^2S=0,$$

де β – коефіцієнт затухання, $\beta=\mu/2m$;

μ – коефіцієнт опору;

ω_0 – власна (при відсутності опору середовища) частота коливань системи.

Рішенням цього рівняння при малому опорі середовища $\left(\beta<\omega_0\right)$ є:

$$S=A_0e^{-\beta t}\sin\left(\omega t+\alpha\right)$$

де $A=A_0e^{-\beta t}$ – амплітуда затухаючих коливань;

A_0 – початкова амплітуда;

$\omega=\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}$ – умовна частота затухаючих коливань.

Інші величини, що характеризують затухаючі коливання:

Умовний період затухаючих коливань:

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}}.$$

Час релаксації:

$$\tau=1/\beta.$$

Декремент коливань:

$$D=\frac{A(t)}{A(t+T)}=e^{\beta t}.$$

Логарифмічний декремент коливань:

$$\Lambda=\ln D=\beta T=T/\tau.$$

При великому опорі середовища рух коливальної системи стає *аперіодичним* (неперіодичним), тобто перестає носити коливальний характер.

75. Диференціальне рівняння вимушених коливань під дією зовнішньої змінної сили $F = F_0 \sin \Omega t$

$$\frac{d^2 S}{dt^2} + 2\beta \frac{dS}{dt} + \omega_0^2 S = \frac{F_0}{m} \sin \Omega t,$$

де β – коефіцієнт затухання;

ω_0 – власна частота коливальної системи;

m – маса;

Ω – кругова (циклічна) частота зміни зовнішньої сили F.

Рішенням цього неоднорідного рівняння буде:

$$S = S_1 + S_2,$$

де $S_1 = A_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t + \alpha)$ – загальне рішення однорідного рівняння, що відповідає затухаючим коливанням (див. Додаток 74);

$S_2 = A^* \sin(\Omega t - \varphi)$ – часткове рішення неоднорідного рівняння, що відповідає незатухаючим гармонічним коливанням з частотою сили F.

Через відносно невеликий проміжок часу τ (*час встановлення вимушених коливань*) затухаючі коливання практично зникають і система переходить в стан *усталених вимушених коливань*, які описує другий доданок рішення, тобто

$$S = S_2 = A^* \sin(\Omega t - \varphi);$$

$$A^* = \frac{F_0/m}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right) + 4\beta^2\Omega^2}};$$

$$\varphi = arctg\,\frac{2\beta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2},$$

де A^* – амплітуда усталених вимушених коливань;

φ – зміщення фаз (відставання за фазою усталених вимушених коливань від сили, що викликає ці коливання, тобто сили F).

Резонанс — явище різкого зростання амплітуди A^* вимушених коливань при наближені частоти сили, що викликає ці коливання, до значення резонансної частоти даної коливальної системи.

Резонансна частота:

$$\Omega_{\mathbf{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - \Omega^2}.$$

Амплітуда резонансних коливань:

$$A^*_{\mathbf{рез}} = \frac{F_0/m}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}}.$$

МЕХАНІЧНА СИСТЕМА

76. Маса механічної системи

$$M = m_1 + m_2 + \ldots + m_n = \sum_{k=1}^{n} m_k,$$

де M – маса системи;

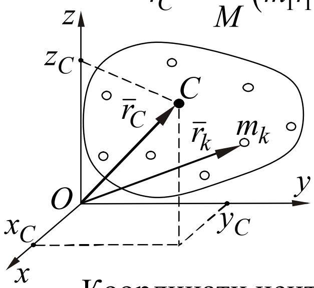
m_k – маса k-ої матеріальної точки системи;

n – число точок системи.

77. Центр мас або центр інерції механічної системи

Радіус-вектор центра мас

$$\overline{r}_C = \frac{1}{M}\left(m_1\overline{r}_1 + m_2\overline{r}_2 + ... + m_n\overline{r}_n\right) = \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{n} m_k\overline{r}_k,$$



де M – маса системи;

m_k – маса і радіус-вектор k-ої точки системи;

n – число точок системи.

Координати центра мас:

$$x_C = \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{n} m_k x_k; \quad y_C = \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{n} m_k y_k; \quad z_C = \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{n} m_k z_k,$$

де x_k, y_k, z_k – координати k-ої точки системи.

78. Закон руху центра мас механічної системи

$$M\overline{a}_C = \overline{F}^e,$$

де $M = \sum m_k$ – маса системи;

$\overline{a}_C = d\overline{V}_C / dt$ – прискорення центра мас системи;

$\overline{V}_C$ – швидкість центра мас системи;

$\overline{F}^e = \sum \overline{F}_k^e$ – головний вектор зовнішніх сил, що діють на систему.

79. Основне рівняння динаміки поступального руху твердого тіла

$$M\overline{a} = \overline{F}^e,$$

де M – маса тіла;

$\overline{a} = d\overline{V} / dt$ – прискорення тіла;

$\overline{F}^e = \sum \overline{F}_k^e$ – головний вектор зовнішніх сил, що діють на тіло.

Якщо $\overline{F}^e = 0$ то $\overline{V} = const$ (тіло рухається рівномірно і прямолінійно, або знаходиться в стані спокою).

80. Імпульс (кількість руху) механічної системи

$$\overline{P} = \sum_{k=1}^{n} \overline{p}_k = \sum_{k=1}^{n} m_k \overline{V}_k,$$

де m_k і $\overline{V}_k$ – відповідно, маса і швидкість k-ої матеріальної точки системи;

n – число точок системи.

81. Закон зміни імпульсу (кількості руху) механічної системи

В векторній формі:

$$\frac{d\overline{P}}{dt} = \overline{F}^e,$$

де $\overline{P} = \sum \overline{p}_k = \sum m_k \overline{V}_k$, – імпульс (кількість руху) механічної системи;

$\overline{F}^e = \sum \overline{F}_k^e$ – головний вектор зовнішніх сил, що діють на систему.

В проекціях на осі декартової прямокутної системи координат:

$$\frac{dP_x}{dt} = F_x^e; \quad \frac{dP_y}{dt} = F_y^e; \quad \frac{dP_z}{dt} = F_z^e,$$

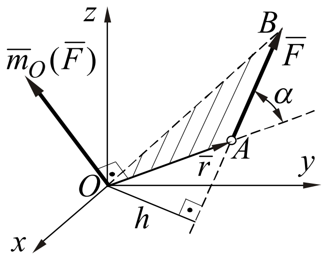
де P_x, P_y, P_z і F_x^e, F_y^e, F_z^e – проекції імпульсу системи та проекції головного вектора зовнішніх сил на координатні осі Ox, Oy, Oz.

82. Закон збереження імпульсу (кількості руху) механічної системи

Якщо $\overline{F}^e = \sum \overline{F}_k^e \equiv 0$ то $\dfrac{d\overline{P}}{dt} = 0 \Rightarrow \overline{P} = const$.

Якщо $\overline{F}^e \neq 0$ але наприклад, $F_x^e = const,$ то $P_x = const$.

83. Момент сили відносно нерухомої точки



$\overline{m}_O\left(\overline{F}\right) = \left[\overline{r} \times \overline{F}\right]$ та

$\left|\overline{m}_O\left(\overline{F}\right)\right| \equiv m_O\left(\overline{F}\right) =$

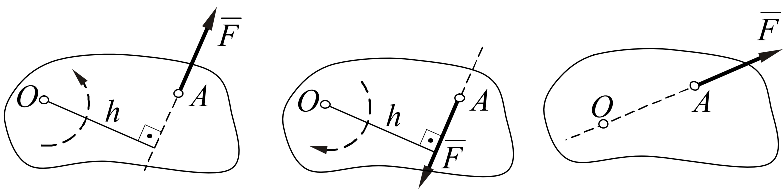
$r \cdot F \cdot \sin\alpha = \pm F \cdot h,$

де $\overline{r}$ – радіус-вектор точки A прикладення сили $\overline{F}$;

α – кут між векторами $\overline{r}$ і $\overline{F}$;

h – плече сили (перпендикуляр, опущений з точки O, відносно якої визначається момент, на лінію дії сили), $h = r \cdot \sin\alpha$.

Приклади визначення знака модуля моменту сили відносно точки O:



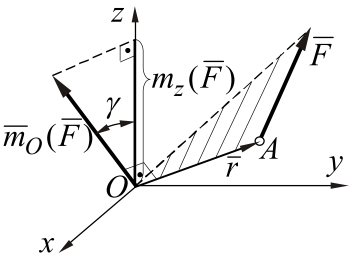
$m_O\left(\overline{F}\right) = Fh$ $m_O\left(\overline{F}\right) = -Fh$ $m_O\left(\overline{F}\right) = 0$

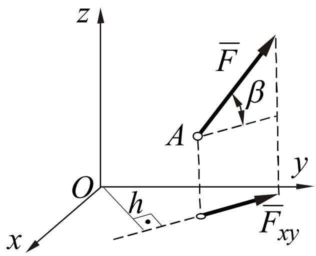
Теорема Варіньона: якщо на тіло діє система сил $\overline{F}_1,\ \overline{F}_2,\ \dots ,\overline{F}_n$ і вона має рівнодійну, то *момент рівнодійної*

$\overline{F}$ цієї системи сил відносно нерухомої точки дорівнює:

$$\overline{M}_O\left(\overline{F}\right)=\overline{m}_O\left(\overline{F}_1\right)+\overline{m}_O\left(\overline{F}_2\right)+\ldots+\overline{m}_O\left(\overline{F}_n\right)=\sum_{k=1}^{n}\overline{m}_O\left(\overline{F}_k\right).$$

84. Момент сили відносно нерухомої осі





$$m_z\left(\overline{F}\right)=\left[\overline{m}_O\left(\overline{F}\right)\right]_z=m_O\left(\overline{F}\right)\cdot\cos\gamma\,,$$

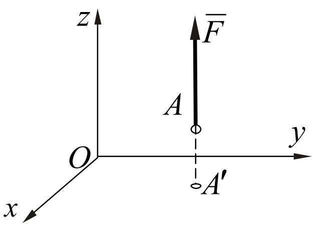
або

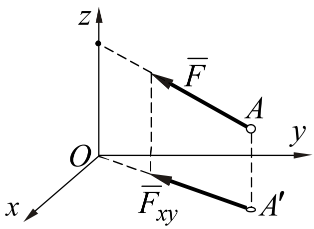
$$m_z\left(\overline{F}\right)=\pm F_{xy}h=\pm F\cos\beta\cdot h\,.$$

Знак «+» або «–» визначається так, як і в Додатку 83.

Момент сили відносно осі дорівнює нулю, якщо:

1. Сила паралельна до осі
2. Сила або лінія дії сили перетинає вісь





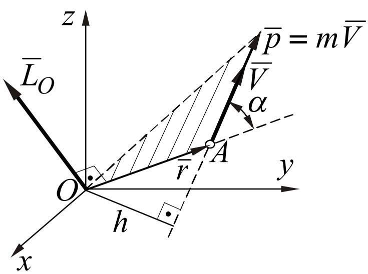
Теорема Варіньона: якщо на тіло діє система сил $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, ... , $\overline{F}_n$ і вона має рівнодійну $\overline{F}=\sum\overline{F}_k$ то *момент* *рівнодійної* цієї системи сил відносно нерухомої осі дорівнює:

$$M_z\left(\overline{F}\right)=m_z\left(\overline{F}_1\right)+m_z\left(\overline{F}_2\right)+...+m_z\left(\overline{F}_n\right)=\sum_{k=1}^{n}m_z\left(\overline{F}_k\right).$$

85. Момент імпульсу (кількості руху) матеріальної точки відносно нерухомого полюса

$$\overline{L}_O=\left[\overline{r}\times\overline{p}\right]=\left[\overline{r}\times m\overline{V}\right] \quad \text{та}$$

$$\left|\overline{L}_O\right|\equiv L_O=r\cdot p\cdot\sin\alpha=\pm p\cdot h=\pm mV\cdot h.$$



де $\overline{r}$ – радіус-вектор матеріальної точки;

$\overline{p}$ – імпульс (кількість руху) $\overline{p}=m\overline{V}$;

h – плече імпульсу (кількості руху) відносно полюса O, $h=r\sin\alpha$;

α – кут між векторами $\overline{r}$ і $\overline{p}$.

Знак «+» або «–» визначається так, як і в Додатку 83.

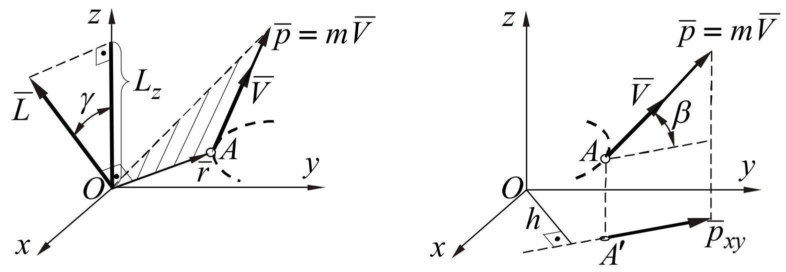
86. Момент імпульсу (кількості руху) системи матеріальних точок (головний момент) відносно нерухомого полюса

$$\overline{K}_O=\sum_{k=1}^{n}\overline{L}_{Ok}=\sum_{k=1}^{n}\left[\overline{r}_k\times\overline{p}_k\right]=\sum_{k=1}^{n}\left[\overline{r}_k\times m_k\overline{V}_k\right],$$

де $\overline{r}_k$, m_k і $\overline{V}_k$ – радіус-вектор, маса і швидкість k-ої матеріальної точки;

n – загальне число точок системи.

87. Момент імпульсу (кількості руху) матеріальної точки відносно нерухомої осі



$L_z = \left(\overline{L}_O\right)_z = \pm L_O \cos\gamma$ або $L_z = \pm p_{xy} \cdot h = \pm p \cos\beta \cdot h$

Знак «+» або «–» визначається так, як і в Додатку 83.

88. Момент імпульсу (кількості руху) системи матеріальних точок (головний момент) відносно нерухомої осі

$$K_z = \sum_{k=1}^{n} L_{kz} \ .$$

89. Момент імпульсу (кількості руху) твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі

$$K_z = I_z \cdot \omega,$$

де I_z – момент інерції тіла відносно осі z;

ω – кутова швидкість тіла.

90. Момент інерції механічної системи відносно нерухомої осі

$$I_z = \sum_{k=1}^{n} m_k h_k^2,$$

де m_k і h_k – маса k-ої точки системи і відстань від осі z до k-ої точки;

n – загальне число точок системи.

У випадку *однорідного твердого тіла*

$$I_z = \int\limits_{(m)} h^2 dm = \rho \int\limits_{(V)} h^2 dV,$$

де dm – маса малого елементу тіла об'ємом dV;

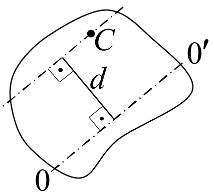
ρ – густина;

h – відстань від елементу об'ємом dV до осі z;

V – об'єм тіла.

91. Теорема про моменти інерції відносно паралельних осей (теорема Гюйгенса-Штейнера)

$$I_{00'} = I_C + md^2,$$



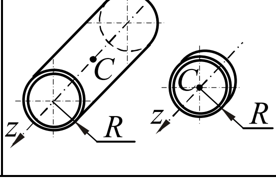
де $I_{00'}$ – момент інерції тіла відносно довільної осі $00'$;

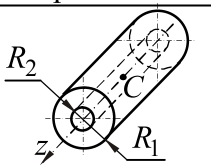
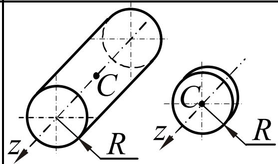
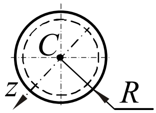
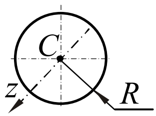
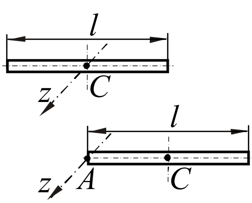
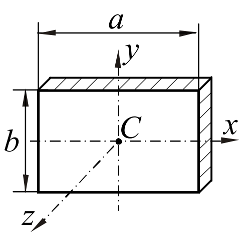
I_C – момент інерції тіла відносно осі, яка проходить через центр мас C тіла паралельно до осі $00'$;

m – маса тіла;

d – відстань між осями.

92. Значення моментів інерції однорідних тіл масою *m* відносно деяких осей обертання

Тіло	Положення осі обертання	Момент інерції
Порожнистий тонкостінний циліндр радіусом R або тонке кільце радіусом R		$I_{zc} = mR^2$

Тіло	Положення осі обертання	Момент інерції
Порожнистий товстостінний циліндр радіусами R_1 і R_2		$I_{zC} = \frac{1}{2} m \times$ $\times (R_1^2 + R_2^2)$
Суцільний циліндр радіусом R або тонкий диск радіусом R		$I_{zC} = \frac{1}{2} mR^2$
Порожниста тонкостінна куля радіусом R		$I_{zC} = \frac{2}{3} mR^2$
Суцільна куля радіусом R		$I_{zC} = \frac{2}{5} mR^2$
Тонкий стержень довжиною l: вісь проходить через його середину (C); вісь проходить через один з його кінців (A)		$I_{zC} = \frac{1}{12} m\,l^2;$ $I_{zA} = \frac{1}{3} ml^2.$
Прямокутна пластина зі сторонами a і b		$I_{xC} = \frac{1}{12} mb^2;$ $I_{yC} = \frac{1}{12} ma^2;$ $I_{zC} = \frac{1}{12} m \times$ $\times (a^2 + b^2).$

93. Основний закон динаміки обертального руху (рівняння моментів)

У векторній формі:

$$\frac{d\bar{K}_O}{dt} = \bar{M}_O^e,$$

де $\bar{K}_O$ – момент імпульсу (кількості руху) системи відносно нерухомої точки O, $\bar{K}_O = \sum \bar{m}_O\left[\bar{r}_k \times \bar{p}_k\right]$;

$\bar{M}_O^e$ – момент рівнодійної (головний момент) зовнішніх сил, що діють на систему, відносно тієї ж точки, $\bar{M}_O^e = \sum \bar{m}_O\left(\bar{F}_k^e\right)$.

В проекціях на осі прямокутної системи координат *Oxyz*:

$$\frac{dK_x}{dt} = M_x^e; \quad \frac{dK_y}{dt} = M_y^e; \quad \frac{dK_z}{dt} = M_z^e,$$

де K_x, K_y, K_z і M_x^e, M_y^e, M_z^e – моменти імпульсу (кількості руху) системи і головні моменти зовнішніх сил відносно відповідних координатних осей.

У випадку обертання твердого тіла навколо нерухомої осі, наприклад Oz, *основний закон динаміки твердого тіла*, що обертається навколо нерухомої осі:

$$I_z \cdot \varepsilon = M_z^e \quad \text{або} \quad \varepsilon = M_z^e / I_z,$$

де ε – кутове прискорення тіла,

I_z – момент інерції тіла відносно осі Oz.

Диференціальне рівняння, яке описує *обертання твердого тіла навколо нерухомої осі:*

$$I_z \cdot \frac{d^2\varphi}{dt^2} = M_z^e,$$

де φ – кут повороту тіла.

94. Закон збереження моменту імпульсу (кількості руху) механічної системи

Якщо $\bar{M}_O^e = 0$, то $\dfrac{d\bar{K}_O}{dt} = 0 \Rightarrow \bar{K}_O = const.$

Якщо $\bar{M}_O^e \neq 0$ але, наприклад, $M_z^e = 0, \Rightarrow K_z = const.$

Зокрема, для твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі Oz,

$$K_z = I_z \cdot \omega = const.$$

95. Умови рівноваги твердого тіла

У векторній формі:

$$\bar{F}^e = \sum \bar{F}_k^e = 0; \quad \bar{M}_O^e = \sum \bar{m}_O\left(\bar{F}_k^e\right) = 0,$$

де $\bar{F}^e$ – головний вектор усіх зовнішніх сил;

$\bar{M}_O^e$ – головний момент усіх зовнішніх сил відносно довільного центра.

В проекціях на осі прямокутної системи координат $Oxyz$:

$$F_x^e = \sum F_{kx}^e = 0; \qquad M_x^e = \sum m_x\left(\bar{F}_k^e\right) = 0;$$

$$F_y^e = \sum F_{ky}^e = 0; \qquad M_y^e = \sum m_y\left(\bar{F}_k^e\right) = 0;$$

$$F_z^e = \sum F_{kz}^e = 0; \qquad M_z^e = \sum m_z\left(\bar{F}_k^e\right) = 0,$$

де F_x^e, F_y^e, F_z^e – проекції головного вектора зовнішніх сил на координатні осі Ox, Oy, Oz;

M_x^e, M_y^e, M_z^e – головний момент зовнішніх сил відносно осей Ox, Oy, Oz.

96. Основне рівняння динаміки в неінерціальній системі відліку

$$m\overline{a}_{\textbf{від}} = \overline{F} + \overline{\Phi}_{\textbf{пер}} + \overline{\Phi}_{\textbf{кор}},$$

де m – маса тіла;

$\overline{a}_{\textbf{від}}$ – відносне прискорення тіла;

$\overline{F}$ – головний вектор зовнішніх сил, що діють на тіло;

$\overline{\Phi}_{\textbf{пер}}$ – переносна сила інерції, $\overline{\Phi}_{\textbf{пер}} = -m\overline{a}_{\textbf{пер}}$;

$\overline{\Phi}_{\textbf{кор}}$ – коріолісова сила інерції, $\overline{\Phi}_{\textbf{кор}} = -m\overline{a}_{\textbf{кор}}$;

$\overline{a}_{\textbf{пер}}$ – переносне прискорення;

$\overline{a}_{\textbf{кор}}$ – коріолісово прискорення.

97. Сили інерції

Переносна сила інерції:

$$\overline{\Phi}_{\textbf{пер}} = \overline{\Phi}_{\textbf{пост}} + \overline{\Phi}_{\textbf{вц}} + \overline{\Phi}_{\textbf{об}},$$

де $\overline{\Phi}_{\textbf{пост}}$ – поступальна сила інерції;

$\overline{\Phi}_{\textbf{вц}}$ – відцентрова сила інерції;

$\overline{\Phi}_{\textbf{об}}$ – обертальна сила інерції.

Поступальна сила інерції:

$$\overline{\Phi}_{\textbf{пост}} = -m\overline{a}_O \quad \text{та} \quad \left|\overline{\Phi}_{\textbf{пост}}\right| = ma_O,$$

де $\overline{a}_O$ – прискорення початку координат O неінерціальної системи відліку при її поступальному русі відносно інерціальної системи відліку.

Відцентрова сила інерції:

$$\overline{\varPhi}_{\textbf{вц}} = -m\left[\overline{\omega}\left[\overline{\omega}\times\overline{r}\right]\right] \text{ та } \left|\overline{\varPhi}_{\textbf{вц}}\right| = m\omega^2\rho,$$

де ω – кутова швидкість неінерціальної системи відліку при її обертанні навколо миттєвої осі, яка проходить через точку O;

ρ – радіус-вектор, що перпендикулярний миттєвій осі обертання, який характеризує положення точки відносно цієї осі.

Обертальна сила інерції:

$$\overline{\varPhi}_{\textbf{об}} = -m\left[\overline{\varepsilon}\times\overline{r}\right] \text{ та } \left|\overline{\varPhi}_{\textbf{об}}\right| = -m\left|\varepsilon\right|\rho,$$

де ε – кутове прискорення неінерціальної системи відліку при її обертанні навколо миттєвої осі, яка проходить через точку O.

Коріолісова сила інерції:

$$\overline{\varPhi}_{\textbf{кор}} = 2m\left[\overline{V}_{\textbf{від}}\times\overline{\omega}\right] \quad \text{та}$$

$$\left|\overline{\varPhi}_{\textbf{кор}}\right| = 2m\cdot\left|V_{\textbf{від}}\right|\cdot\left|\omega\right|\cdot\sin\angle\left(\overline{V}_{\textbf{від}},\overline{\omega}\right),$$

де $V_{\textbf{від}}$ – відносна швидкість.

98. Механічна робота

Робота сталої сили на прямолінійному переміщенні точки її прикладання:

$$A = \left(\overline{F}\cdot\overline{r}\right) = F\cdot\Delta r\cdot\cos\alpha = F\cdot S\cdot\cos\alpha,$$

де $\alpha = \angle\left(\overline{F},\Delta\overline{r}\right)$ – кут між векторами $\overline{F}$ і $\Delta\overline{r}$;

$S = \left|\Delta\overline{r}\right|$ – шлях, який проходить точка прикладення сили.

Якщо: $0 < \alpha < \pi/2$, то $A > 0$ – робота сили додатна;

$\pi/2 < \alpha < \pi$, то $A < 0$ – робота сили від'ємна;

$\alpha = \pi/2$, то $A = 0$ – механічна робота силою не виконується.

В загальному випадку, коли діє змінна сила і точка її прикладення рухається по криволінійній траєкторії, користуються поняттям елементарної роботи.

Елементарна робота сили $\overline{F}$ на малому переміщенні $d\overline{r}$:

$$\delta A = \left(\overline{F} \cdot d\overline{r}\right) = \left(\overline{F} \cdot \overline{V}\right)dt,$$

де $\overline{r}$ і $\overline{V} = \dot{\overline{r}}$ – радіус-вектор та швидкість точки прикладення сили;

dt – малий проміжок часу, за який сила $\overline{F}$ виконує роботу δA .

Вираз для *елементарної роботи* можна записати у вигляді:

$$\delta A = F \cdot dS \cdot \cos\angle\left(\overline{F}, d\overline{r}\right) = F_\tau \cdot dS,$$

де dS – елементарний шлях точки прикладення сили за проміжок часу dt ;

F_τ – проекція сили $\overline{F}$ на напрям переміщення $d\overline{r}$, $F_\tau = F \cdot \cos\angle\left(\overline{F}, d\overline{r}\right)$.

Повна робота A_{1-2}, яку виконує сила $\overline{F}$ на кінцевому переміщенні від $\overline{r}_1$ до $\overline{r}_2$ (на відрізку траєкторії від S_1 до S_2) точки її прикладення:

$$A_{1-2} = \int_{r_1}^{r_2} \left(\overline{F} \cdot d\overline{r}\right) = \int_{S_1}^{S_2} F \cdot dS.$$

Елементарна робота δA при обертанні твердого тіла навколо нерухомої осі під дією сили $\overline{F}$

$$\delta A = M_z \cdot d\varphi ,$$

де M_z – обертальний момент навколо осі обертання z;

$d\varphi$ – елементарний кут повороту.

Формула справедлива і для випадку, коли діє декілька сил $\overline{F}_1,\ \overline{F}_2,\ \ldots ,\ \overline{F}_n$, якщо $M_z = \sum m_z\left(\overline{F}_k\right)$.

Повна робота A_{1-2}, яку виконує сила при повороті на кінцевий кут від φ_1 до φ_2 точки її прикладання:

$$A_{1-2} = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} M_z d\varphi.$$

99. Потужність

Миттєва потужність:

$$N = \frac{\delta A}{dt},$$

де δA – елементарна робота;

dt – проміжок часу, за який була виконана елементар на робота δA.

Якщо $A = const$ за проміжок часу *t*, то $N = A/t$.

Якщо $\overline{F}$ – сила, яка виконує роботу δA, то

$$N = \left(\overline{F} \cdot \overline{V}\right) = F_\tau \cdot V,$$

де $\overline{V}$ – швидкість точки прикладення сили;

F_τ – проекція сили на напрям вектора швидкості точки прикладення сили, $F_\tau = F \cdot \cos\angle\left(\overline{F},\overline{V}\right)$.

Середня потужність за проміжок часу Δt:

$$\langle N \rangle = A/\Delta t,$$

де A – робота, яка була виконана за проміжок часу Δt.

Потужність сили, що прикладена до твердого тіла, яке обертається навколо нерухомої осі:

$$N = M_z \cdot \omega,$$

де M_z – обертальний момент навколо осі обертання z;

ω – кутова швидкість.

100. Коефіцієнт корисної дії (ККД)

$$\eta = \frac{A_{\mathbf{кор}}}{A_{\mathbf{зат}}} = \frac{N_{\mathbf{кор}}}{N_{\mathbf{зат}}} < 1,$$

де $A_{\mathbf{кор}}$ і $N_{\mathbf{кор}}$ – корисна робота і потужність;

$A_{\mathbf{зат}}$ і $N_{\mathbf{зат}}$ – затрачена робота і потужність.

Часто ККД виражають у відсотках, тобто

$$\eta = \frac{A_{\mathbf{кор}}}{A_{\mathbf{зат}}} \cdot 100\% \quad \text{або} \quad \eta = \frac{N_{\mathbf{кор}}}{N_{\mathbf{зат}}} \cdot 100\%.$$

101. Кінетична енергія

Кінетична енергія матеріальної точки

$$W_k = \frac{mV^2}{2},$$

де m – маса матеріальної точки;

V – швидкість точки.

Кінетична енергія механічної системи

$$W_k = \sum_{i=1}^{n} W_{ki} = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i V_i^2}{2},$$

де m_i – маса i-ї матеріальної точки;

V_i – швидкість i-ї матеріальної точки;

n – число матеріальних точок системи.

Кінетична енергія твердого тіла при його поступальному русі

$$W_k = \frac{mV^2}{2},$$

де m – маса тіла; V – швидкість тіла.

Кінетична енергія твердого тіла, яке обертається навколо нерухомої осі Oz

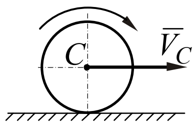
$$W_k = \frac{1}{2} I_z \cdot \omega^2,$$

де I_z – момент інерції тіла відносно осі Oz;

ω – кутова швидкість.

Кінетична енергія твердого тіла, яке котиться по поверхні

$$W_k = \frac{1}{2} m V_C^2 + \frac{1}{2} I_C \omega^2,$$



де m – маса тіла,

V_C – швидкість центра мас тіла,

I_C – момент інерції тіла відносно осі, що проходить через центр мас,

ω – кутова швидкість.

Теорема про зміну кінетичної енергії механічної системи

$$W_2 - W_1 = \sum A_k^e + \sum A_k^i ,$$

де W_2 та W_1 – кінетична енергія системи в її кінцевому і початковому положеннях,

$\sum A_k^e$ – алгебраїчна сума робіт усіх зовнішніх сил на переміщенні 1–2 системи,

$\sum A_k^i$ – алгебраїчна сума робіт усіх внутрішніх сил на переміщенні 1–2 системи.

У випадку твердого тіла $\sum A_k^i = 0$. Тоді:

$$W_2 - W_1 = \sum A_k^e .$$

102. Потенціальна енергія

Потенціальна енергія тіла, піднятого над поверхнею Землі на висоту h

$$W_p = m \cdot g \cdot h,$$

де m – маса тіла;

g – прискорення вільного падіння.

Потенціальна енергія пружно деформованого тіла

$$W_p = \frac{1}{2} kx,$$

де k – жорсткість (коефіцієнт пружності) матеріалу тіла;

x – зміщення від положення рівноваги.

103. Закон збереження механічної енергії

Повна механічна енергія системи матеріальних точок у полі консервативних сил

$$W = W_k + W_p^i + W_p^e,$$

де W_k – кінетична енергія системи,

W_p^i – потенціальна енергія взаємодії точок системи одна з одною,

W_p^e – потенціальна енергія взаємодії точок системи з оточуючими матеріальними точками.

У випадку замкнутої системи $W_p^e = 0$. Тоді:

$$W = W_k + W_p^i.$$

Закон збереження механічної енергії

$$W = W_k + W_p^i + W_p^e = const.$$

У випадку замкнутої системи

$$W = W_k + W_p^i = const.$$

104. Зіставлення основних величин та рівнянь динаміки, які характеризують поступальний рух твердого тіла і його обертання навколо нерухомої осі

Поступальний рух	Обертальний рух
Маса – m	Момент інерції – I_z
Сила – $\overline{F}$	Момент сили – $\overline{M}_O$ або M_z
Імпульс (кількість руху) $\overline{P} = m\overline{V}$	Момент імпульсу (момент кількості руху) $K_z = I_z \cdot \omega$
Основне рівняння динаміки	
$\overline{F} = d\overline{P}/dt$ або $\overline{F} = m\overline{a}$	$\overline{M}_O = d\overline{K}_O/dt$ або $M_z = I_z\varepsilon$
Закони збереження:	
імпульсу (кількості руху): якщо $\overline{F} \equiv 0 \Rightarrow \overline{P} = const$	моменту імпульсу (моменту кількості руху): якщо $\overline{M}_O = 0 \Rightarrow \overline{K}_O = const$
Елементарна робота	
$\delta A = F_\tau dS$	$\delta A = M_z d\varphi$
Потужність	
$N = F_\tau \cdot V$	$N = M_z \cdot \omega$
Кінетична енергія	
$W_k = \frac{1}{2} mV^2$	$W_k = \frac{1}{2} I_z \omega^2$

ЗМІСТ