В.Е. ГМУРМАН

Теория вероятностей и математическая статистика

Издание девятое, стереотипное

Рекомендовано
Министерством образования
Российской Федерации
в качестве учебного пособия
для студентов вузов

Москва
«Высшая школа» 2003

УДК 519.2
ББК 22.171
Г 55

Гмурман, В. Е.
Г 55 Теория вероятностей и математическая статистика: Учеб. пособие для вузов/В. Е. Гмурман. — 9-е изд., стер. — М.: Высш. шк., 2003. — 479 с.: ил.

ISBN 5-06-004214-6

Книга (8-е изд. 2002г.) содержит в основном весь материал программы по теории вероятностей и математической статистике. Большое внимание уделено статистическим методам обработки экспериментальных данных. В конце каждой главы помещены задачи с ответами.

Предназначается для студентов вузов и лиц, использующих вероятностные и статистические методы при решении практических задач.

УДК 519.2
ББК 22.171

ISBN 5-06-004214-6

ОГЛАВЛЕНИЕ

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

ЧАСТЬ ТРЕТЬЯ

ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

ЧАСТЬ ПЯТАЯ

СЛУЧАЙНЫЕ ФУНКЦИИ

ВВЕДЕНИЕ

Предмет теории вероятностей. Наблюдаемые нами события (явления) можно подразделить на следующие три вида: достоверные, невозможные и случайные.

Достоверным называют событие, которое обязательно произойдет, если будет осуществлена определенная совокупность условий S. Например, если в сосуде содержится вода при нормальном атмосферном давлении и температуре 20°, то событие «вода в сосуде находится в жидком состоянии» есть достоверное. В этом примере заданные атмосферное давление и температура воды составляют совокупность условий S.

Невозможным называют событие, которое заведомо не произойдет, если будет осуществлена совокупность условий S. Например, событие «вода в сосуде находится в твердом состоянии» заведомо не произойдет, если будет осуществлена совокупность условий предыдущего примера.

Случайным называют событие, которое при осуществлении совокупности условий S может либо произойти, либо не произойти. Например, если брошена монета, то она может упасть так, что сверху будет либо герб, либо надпись. Поэтому событие «при бросании монеты выпал «герб»—случайное. Каждое случайное событие, в частности выпадение «герба», есть следствие действия очень многих случайных причин (в нашем примере: сила, с которой брошена монета, форма монеты и многие другие). Невозможно учесть влияние на результат всех этих причин, поскольку число их очень велико и законы их действия неизвестны. Поэтому теория вероятностей не ставит перед собой задачу предсказать, произойдет единичное событие или нет,—она просто не в силах это сделать.

По-иному обстоит дело, если рассматриваются случайные события, которые могут многократно наблюдаться при осуществлении одних и тех же условий S, т. е. если речь идет о массовых однородных случайных событиях. Оказывается, что достаточно большое число однородных случайных событий независимо от их конкретной природы подчиняется определенным закономерностям, а именно вероятностным закономерностям. Установлением этих закономерностей и занимается теория вероятностей.

Итак, *предметом теории вероятностей является изучение вероятностных закономерностей массовых однородных случайных событий.*

Знание закономерностей, которым подчиняются массовые случайные события, позволяет предвидеть, как эти события будут протекать. Например, хотя, как было уже сказано, нельзя наперед определить результат одного бросания монеты, но можно предсказать, причем с небольшой погрешностью, число появлений «герба», если монета будет брошена достаточно большое число раз. При этом предполагается, конечно, что монету бросают в одних и тех же условиях.

Методы теории вероятностей широко применяются в различных отраслях естествознания и техники: в теории надежности, теории массового обслуживания, в теоретической физике, геодезии, астрономии, теории стрельбы, теории ошибок наблюдений, теории автоматического управления, общей теории связи и во многих других теоретических и прикладных науках. Теория вероятностей служит также для обоснования математической и прикладной статистики, которая в свою очередь используется при планировании и организации производства, при анализе технологических процессов, предупредительном и приемочном контроле качества продукции и для многих других целей.

В последние годы методы теории вероятностей все шире и шире проникают в различные области науки и техники, способствуя их прогрессу.

Краткая историческая справка. Первые работы, в которых зарождались основные понятия теории вероятностей, представляли собой попытки создания теории азартных игр (Кардано, Гюйгенс, Паскаль, Ферма и другие в XVI—XVII вв.).

Следующий этап развития теории вероятностей связан с именем Якоба Бернулли (1654—1705). Доказанная им теорема, получившая впоследствии название «Закона больших чисел», была первым теоретическим обоснованием накопленных ранее фактов.

Дальнейшими успехами теория вероятностей обязана Муавру, Лапласу, Гауссу, Пуассону и др.

Новый, наиболее плодотворный период связан с именами П. Л. Чебышева (1821—1894) и его учеников А. А. Маркова (1856—1922) и А. М. Ляпуиова (1857—1918). В этот период теория вероятностей становится стройной математической наукой. Ее последующее развитие обязано в первую очередь русским и советским математикам (С. Н. Бериштейн, В. И. Романовский, А. Н. Колмогоров, А. Я. Хинчин, Б. В. Гнеденко, Н. В. Смирнов и др.). В настоящее время ведущая роль в создании новых ветвей теории вероятностей также принадлежит советским математикам.

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

Глава первая

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

§ 1. Испытания и события

Выше событие названо случайным, если при осуществлении определенной совокупности условий S оно может либо произойти, либо не произойти. В дальнейшем, вместо того чтобы говорить «совокупность условий S осуществлена», будем говорить кратко: «произведено испытание». Таким образом, событие будет рассматриваться как результат испытания.

Пример 1. Стрелок стреляет по мишени, разделенной на четыре области. Выстрел — это испытание. Попадание в определенную область мишени — событие.

Пример 2. В урне имеются цветные шары. Из урны наудачу берут один шар. Извлечение шара из урны есть испытание. Появление шара определенного цвета — событие.

§ 2. Виды случайных событий

События называют *несовместными*, если появление одного из них исключает появление других событий в одном и том же испытании.

Пример 1. Из ящика с деталями наудачу извлечена деталь. Появление стандартной детали исключает появление нестандартной детали. События «появилась стандартная деталь» и «появилась нестандартная деталь» — несовместные.

Пример 2. Брошена монета. Появление «герба» исключает появление надписи. События «появился герб» и «появилась надпись» — несовместные.

Несколько событий образуют *полную группу*, если в результате испытания появится хотя бы одно из них. Другими словами, появление хотя бы одного из событий полной группы есть достоверное событие. В частности, *если события, образующие полную группу, попарно несовместны, то в результате испытания появится одно и только одно из этих событий.* Этот частный случай представляет для нас наибольший интерес, поскольку используется далее.

Пример 3. Приобретены два билета денежно-вещевой лотереи. Обязательно произойдет одно и только одно из следующих событий: «выигрыш выпал на первый билет и не выпал на второй», «выигрыш не выпал на первый билет и выпал на второй», «выигрыш выпал на оба билета», «на оба билета выигрыш не выпал». Эти события образуют полную группу попарно несовместных событий.

Пример 4. Стрелок произвел выстрел по цели. Обязательно произойдет одно из следующих двух событий: попадание, промах. Эти два несовместных события образуют полную группу.

События называют *равновозможными*, если есть основания считать, что ни одно из них не является более возможным, чем другое.

Пример 5. Появление «герба» и появление надписи при бросании монеты — равновозможные события. Действительно, предполагается, что монета изготовлена из однородного материала, имеет правильную цилиндрическую форму и наличие чеканки не оказывает влияния на выпадение той или иной стороны монеты.

Пример 6. Появление того или иного числа очков на брошенной игральной кости — равновозможные события. Действительно, предполагается, что игральная кость изготовлена из однородного материала, имеет форму правильного многогранника и наличие очков не оказывает влияния на выпадение любой грани.

§ 3. Классическое определение вероятности

Вероятность — одно из основных понятий теории вероятностей. Существует несколько определений этого понятия. Приведем определение, которое называют классическим. Далее укажем слабые стороны этого определения и приведем другие определения, позволяющие преодолеть недостатки классического определения.

Рассмотрим пример. Пусть в урне содержится 6 одинаковых, тщательно перемешанных шаров, причем 2 из них — красные, 3 — синие и 1 — белый. Очевидно, возможность вынуть наудачу из урны цветной (т. е. красный или синий) шар больше, чем возможность извлечь белый шар. Можно ли охарактеризовать эту возможность числом? Оказывается, можно. Это число и называют вероятностью события (появления цветного шара). Таким образом, вероятность есть число, характеризующее степень возможности появления события.

Поставим перед собой задачу дать количественную оценку возможности того, что взятый наудачу шар цветной. Появление цветного шара будем рассматривать в качестве события A. Каждый из возможных результатов испытания (испытание состоит в извлечении шара из урны) назовем *элементарным исходом* (*элементарным событием*). Элементарные исходы обозначим через ω_1, ω_2, ω_3 и т. д. В нашем примере возможны следующие 6 элементарных исходов: ω_1 — появился белый шар; ω_2, ω_3 — появился красный шар; ω_4, ω_5, ω_6 — появился синий шар. Легко видеть, что эти исходы образуют полную группу попарно несовместных событий (обязательно появится только один шар) и они равновозможны (шар вынимают наудачу, шары одинаковы и тщательно перемешаны).

Те элементарные исходы, в которых интересующее нас событие наступает, назовем *благоприятствующими* этому событию. В нашем примере благоприятствуют событию A (появлению цветного шара) следующие 5 исходов: ω_2, ω_3, ω_4, ω_5, ω_6.

Таким образом, событие A наблюдается, если в испытании наступает один, безразлично какой, из элементарных исходов, благоприятствующих A; в нашем примере A наблюдается, если наступит ω_2, или ω_3, или ω_4, или ω_5, или ω_6. В этом смысле событие A подразделяется на несколько элементарных событий (ω_2, ω_3, ω_4, ω_5, ω_6); элементарное же событие не подразделяется на другие события. В этом состоит различие между событием A и элементарным событием (элементарным исходом).

Отношение числа благоприятствующих событию A элементарных исходов к их общему числу называют вероятностью события A и обозначают через $P(A)$. В рассматриваемом примере всего элементарных исходов 6; из них 5 благоприятствуют событию A. Следовательно, вероятность того, что взятый шар окажется цветным, равна $P(A) = 5/6$. Это число и дает ту количественную оценку степени возможности появления цветного шара, которую мы хотели найти. Дадим теперь определение вероятности.

Вероятностью события A называют отношение числа благоприятствующих этому событию исходов к общему числу всех равновозможных несовместных элементарных исходов, образующих полную группу. Итак, вероятность события A определяется формулой

$$P(A) = m/n,$$

где m — число элементарных исходов, благоприятствующих A; n — число всех возможных элементарных исходов испытания.

Здесь предполагается, что элементарные исходы несовместны, равновозможны и образуют полную группу. Из определения вероятности вытекают следующие ее свойства:

Свойство 1. *Вероятность достоверного события равна единице.*

Действительно, если событие достоверно, то каждый элементарный исход испытания благоприятствует событию. В этом случае $m = n$, следовательно,

$$P(A) = m/n = n/n = 1.$$

Свойство 2. *Вероятность невозможного события равна нулю.*

Действительно, если событие невозможно, то ни один из элементарных исходов испытания не благоприятствует событию. В этом случае $m = 0$, следовательно,

$$P(A) = m/n = 0/n = 0.$$

Свойство 3. *Вероятность случайного события есть положительное число, заключенное между нулем и единицей.*

Действительно, случайному событию благоприятствует лишь часть из общего числа элементарных исходов испытания. В этом случае $0 < m < n$, значит, $0 < m/n < 1$, следовательно,

$$0 < P(A) < 1.$$

Итак, вероятность любого события удовлетворяет двойному неравенству

$$0 \leqslant P(A) \leqslant 1.$$

Далее приведены теоремы, которые позволяют по известным вероятностям одних событий находить вероятности других событий.

Замечание. Современные строгие курсы теории вероятностей построены на теоретико-множественной основе. Ограничимся изложением на языке теории множеств тех понятий, которые рассмотрены выше.

Пусть в результате испытания наступает одно и только одно из событий ω_i ($i = 1, 2, \ldots, n$). События ω_i называют *элементарными событиями* (*элементарными исходами*). Уже отсюда следует, что элементарные события попарно несовместны. Множество всех элементарных событий, которые могут появиться в испытании, называют *пространством элементарных событий* Ω, а сами элементарные события — *точками пространства* Ω.

Событие A отождествляют с подмножеством (пространства Ω), элементы которого есть элементарные исходы, благоприятствующие A; событие B есть подмножество Ω, элементы которого есть исходы, благоприятствующие B, и т. д. Таким образом, множество всех событий, которые могут наступить в испытании, есть множество всех подмножеств Ω. Само Ω наступает при любом исходе испытания, поэтому Ω — достоверное событие; пустое подмножество пространства Ω — невозможное событие (оно не наступает ни при каком исходе испытания).

Заметим, что элементарные события выделяются из числа всех событий тем, что каждое из них содержит только один элемент Ω.

Каждому элементарному исходу ω_i ставят в соответствие положительное число p_i — вероятность этого исхода, причем $\sum\limits_i p_i = 1$.

По определению, вероятность $P(A)$ события A равна сумме вероятностей элементарных исходов, благоприятствующих A. Отсюда легко получить, что вероятность события достоверного равна единице, невозможного — нулю, произвольного — заключена между нулем и единицей.

Рассмотрим важный частный случай, когда все исходы равновозможны. Число исходов равно n, сумма вероятностей всех исходов равна единице; следовательно, вероятность каждого исхода равна $1/n$. Пусть событию A благоприятствует m исходов. Вероятность события A равна сумме вероятностей исходов, благоприятствующих A:

$$P(A) = 1/n + 1/n + \ldots + 1/n.$$

Учитывая, что число слагаемых равно m, имеем

$$P(A) = m/n.$$

Получено классическое определение вероятности.

Построение логически полноценной теории вероятностей основано на аксиоматическом определении случайного события и его вероятности. В системе аксиом, предложенной А. Н. Колмогоровым *), неопределяемыми понятиями являются элементарное событие и вероятность. Приведем аксиомы, определяющие вероятность:

1. Каждому событию A поставлено в соответствие неотрицательное действительное число $P(A)$. Это число называется вероятностью события A.

2. Вероятность достоверного события равна единице:

$$P(\Omega) = 1.$$

3. Вероятность наступления хотя бы одного из попарно несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий.

Исходя из этих аксиом, свойства вероятностей и зависимости между ними выводят в качестве теорем.

---

*) Колмогоров А. Н. Основные понятия теории вероятностей. М., «Наука», 1974.

§ 4. Основные формулы комбинаторики

Комбинаторика изучает количества комбинаций, подчиненных определенным условиям, которые можно составить из элементов, безразлично какой природы, заданного конечного множества. При непосредствениом вычислении вероятностей часто используют формулы комбинаторики. Приведем наиболее употребительные из них.

Перестановками называют комбинации, состоящие из одних и тех же n различных элементов и отличающиеся только порядком их расположения. Число всех возможных перестановок

$$P_n = n!,$$

где $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n$.

Заметим, что удобно рассматривать $0!$, полагая, по определению, $0! = 1$.

Пример 1. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, если каждая цифра входит в изображение числа только один раз?

Решение. Искомое число трехзначных чисел

$$P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6.$$

Размещениями называют комбинации, составленные из n различных элементов по m элементов, которые отличаются либо составом элементов, либо их порядком. Число всех возможных размещений

$$A_n^m = n(n-1)(n-2) \ldots (n-m+1).$$

Пример 2. Сколько можно составить сигналов из 6 флажков различного цвета, взятых по 2?

Решение. Искомое число сигналов

$$A_6^2 = 6 \cdot 5 = 30.$$

Сочетаниями называют комбинации, составленные из n различных элементов по m элементов, которые отличаются хотя бы одним элементом. Число сочетаний

$$C_n^m = n!/(m!\,(n-m)!).$$

Пример 3. Сколькими способами можно выбрать две детали из ящика, содержащего 10 деталей?

Решение. Искомое число способов

$$C_{10}^2 = 10!/(2!\,8!) = 45.$$

Подчеркнем, что числа размещений, перестановок и сочетаний связаны равенством

$$A_n^m = P_m C_n^m.$$

Замечание. Выше предполагалось, что все n элементов различны. Если же некоторые элементы повторяются, то в этом случае *комбинации с повторениями* вычисляют по другим формулам. Например, если среди n элементов есть n_1 элементов одного вида, n_2 элементов другого вида и т. д., то число перестановок с повторениями

$$P_n(n_1, n_2, \ldots) = n!/(n_1!\, n_2! \ldots),$$

где $n_1 + n_2 + \ldots = n$.

При решении задач комбинаторики используют следующие правила:

Правило суммы. Если некоторый объект A может быть выбран из совокупности объектов m способами, а другой объект B может быть выбран n способами, то выбрать либо A, либо B можно $m+n$ способами.

Правило произведения. Если объект A можно выбрать из совокупности объектов m способами и после каждого такого выбора объект B можно выбрать n способами, то пара объектов (A, B) в указанном порядке может быть выбрана mn способами.

§ 5. Примеры непосредственного вычисления вероятностей

Пример 1. Набирая номер телефона, абонент забыл одну цифру и набрал ее наудачу. Найти вероятность того, что набрана нужная цифра.

Решение. Обозначим через A событие — набрана нужная цифра. Абонент мог набрать любую из 10 цифр, поэтому общее число возможных элементарных исходов равно 10. Эти исходы несовместны, равновозможны и образуют полную группу. Благоприятствует событию A лишь один исход (нужная цифра лишь одна). Искомая вероятность равна отношению числа исходов, благоприятствующих событию, к числу всех элементарных исходов:

$$P(A) = 1/10.$$

Пример 2. Набирая номер телефона, абонент забыл последние две цифры и, помня лишь, что эти цифры различны, набрал их наудачу. Найти вероятность того, что набраны нужные цифры.

Решение. Обозначим через B событие — набраны две нужные цифры. Всего можно набрать столько различных цифр, сколько может быть составлено размещений из десяти цифр по две, т. е. $A_{10}^2 = 10 \cdot 9 = 90$. Таким образом, общее число возможных элементарных исходов равно 90. Эти исходы несовместны, равновозможны и образуют полную группу. Благоприятствует событию B лишь один исход. Искомая вероятность равна отношению числа исходов, благоприятствующих событию, к числу всех элементарных исходов:

$$P(B) = 1/90.$$

Пример 3. Указать ошибку «решения» задачи: «Брошены две игральные кости. Найти вероятность того, что сумма выпавших очков равна 4 (событие A)».

Решение. Всего возможны 2 исхода испытания: сумма выпавших очков равна 4, сумма выпавших очков не равна 4. Событию A благоприятствует один исход; общее число исходов равно двум. Следовательно, искомая вероятность

$$P(A)=1/2.$$

Ошибка этого решения состоит в том, что рассматриваемые исходы не являются равновозможными.

Правильное решение. Общее число равновозможных исходов испытания равно $6\cdot 6=36$ (каждое число выпавших очков на одной кости может сочетаться со всеми числами очков другой кости). Среди этих исходов благоприятствуют событию A только 3 исхода: (1; 3), (3; 1), (2; 2) (в скобках указаны числа выпавших очков). Следовательно, искомая вероятность

$$P(A)=3/36=1/12.$$

Пример 4. В партии из 10 деталей 7 стандартных. Найти вероятность того, что среди шести взятых наудачу деталей 4 стандартных.

Решение. Общее число возможных элементарных исходов испытания равно числу способов, которыми можно извлечь 6 деталей из 10, т. е. числу сочетаний из 10 элементов по 6 элементов (C_{10}^6).

Определим число исходов, благоприятствующих интересующему нас событию A (среди шести взятых деталей 4 стандартных). Четыре стандартные детали можно взять из семи стандартных деталей C_7^4 способами; при этом остальные $6-4=2$ детали должны быть нестандартными; взять же 2 нестандартные детали из $10-7=3$ нестандартных деталей можно C_3^2 способами. Следовательно, число благоприятствующих исходов равно $C_7^4\cdot C_3^2$.

Искомая вероятность равна отношению числа исходов, благоприятствующих событию, к числу всех элементарных исходов:

$$P(A)=(C_7^4\cdot C_3^2)/C_{10}^6=1/2.$$

§ 6. Относительная частота. Устойчивость относительной частоты

Относительная частота наряду с вероятностью принадлежит к основным понятиям теории вероятностей.

Относительной частотой события называют отношение числа испытаний, в которых событие появилось, к общему числу фактически произведенных испытаний. Таким образом, относительная частота события A определяется формулой

$$W(A)=m/n,$$

где m — число появлений события, n — общее число испытаний.

Сопоставляя определения вероятности и относительной частоты, заключаем: определение вероятности не требует, чтобы испытания производились в действительности; определение же относительной частоты предполагает, что испытания были произведены фактически. Другими словами, *вероятность вычисляют до опыта, а относительную частоту — после опыта.*

Пример 1. Отдел технического контроля обнаружил 3 нестандартных детали в партии из 80 случайно отобранных деталей. Относительная частота появления нестандартных деталей

$$W(A) = 3/80.$$

Пример 2. По цели произвели 24 выстрела, причем было зарегистрировано 19 попаданий. Относительная частота поражения цели

$$W(A) = 19/24.$$

Длительные наблюдения показали, что если в одинаковых условиях производят опыты, в каждом из которых число испытаний достаточно велико, то относительная частота обнаруживает свойство устойчивости. Это свойство состоит в том, *что в различных опытах относительная частота изменяется мало (тем меньше, чем больше произведено испытаний), колеблясь около некоторого постоянного числа.* Оказалось, что это постоянное число есть вероятность появления события.

Таким образом, если опытным путем установлена относительная частота, то полученное число можно принять за приближенное значение вероятности.

Подробнее и точнее связь между относительной частотой и вероятностью будет изложена далее. Теперь же проиллюстрируем свойство устойчивости на примерах.

Пример 3. По данным шведской статистики, относительная частота рождения девочек за 1935 г. по месяцам характеризуется следующими числами (числа расположены в порядке следования месяцев, начиная с января): 0,486; 0,489; 0,490; 0,471; 0,478; 0,482; 0,462; 0,484; 0,485; 0,491; 0,482; 0,473

Относительная частота колеблется около числа 0,482, которое можно принять за приближенное значение вероятности рождения девочек.

Заметим, что статистические данные различных стран дают примерно то же значение относительной частоты.

Пример 4. Многократно проводились опыты бросания монеты, в которых подсчитывали число появления «герба». Результаты нескольких опытов приведены в табл. 1.

Здесь относительные частоты незначительно отклоняются от числа 0,5, причем тем меньше, чем больше число испытаний. Например, при 4040 испытаниях отклонение равно 0, 0069, а при 24 000

Таблица 1

Число бросаний	Число появлений «герба»	Относительная частота
4 040	2 048	0,5069
12 000	6 019	0,5016
24 000	12 012	0,5005

испытаний — лишь 0,0005. Приняв во внимание, что вероятность появления «герба» при бросании монеты равна 0,5, мы вновь убеждаемся, что относительная частота колеблется около вероятности.

§ 7. Ограниченность классического определения вероятности. Статистическая вероятность

Классическое определение вероятности предполагает, что число элементарных исходов испытания конечно. На практике же весьма часто встречаются испытания, число возможных исходов которых бесконечно. В таких случаях классическое определение неприменимо. Уже это обстоятельство указывает на ограниченность классического определения. Отмеченный недостаток может быть преодолен, в частности, введением геометрических вероятностей (см. § 8) и, конечно, использованием аксиоматической вероятности (см. § 3, замечание).

Наиболее слабая сторона классического определения состоит в том, что очень часто невозможно представить результат испытания в виде совокупности элементарных событий. Еще труднее указать основания, позволяющие считать элементарные события равновозможными. Обычно о равновозможности элементарных исходов испытания говорят из соображений симметрии. Так, например, предполагают, что игральная кость имеет форму правильного многогранника (куба) и изготовлена из однородного материала. Однако задачи, в которых можно исходить из соображений симметрии, на практике встречаются весьма редко. По этой причине наряду с классическим определением вероятности используют и другие определения, в частности статистическое определение: *в качестве статистической вероятности события принимают относительную частоту или число, близкое к ней.* Например, если в результате достаточно большого числа испытаний оказалось, что относительная частота весьма близка к числу 0,4, то это число можно принять за статистическую вероятность события.

Легко проверить, что свойства вероятности, вытекающие из классического определения (см. § 3), сохраняются и при статистическом определении вероятности. Действительно, если событие достоверно, то $m=n$ и относительная частота

$$m/n=n/n=1,$$

т. е. статистическая вероятность достоверного события (так же как и в случае классического определения) равна единице.

Если событие невозможно, то $m=0$ и, следовательно, относительная частота

$$0/n=0,$$

т. е. статистическая вероятность невозможного события равна нулю.

Для любого события $0\leqslant m\leqslant n$ и, следовательно, относительная частота

$$0\leqslant m/n\leqslant 1,$$

т. е. статистическая вероятность любого события заключена между нулем и единицей.

Для существования статистической вероятности события A требуется:

а) возможность, хотя бы принципиально, производить неограниченное число испытаний, в каждом из которых событие A наступает или не наступает;

б) устойчивость относительных частот появления A в различных сериях достаточно большого числа испытаний.

Недостатком статистического определения является неоднозначность статистической вероятности; так, в приведенном примере в качестве вероятности события можно принять не только 0,4, но и 0,39; 0,41 и т. д.

§ 8. Геометрические вероятности

Чтобы преодолеть недостаток классического определения вероятности, состоящий в том, что оно неприменимо к испытаниям с бесконечным числом исходов, вводят *геометрические вероятности* — вероятности попадания точки в область (отрезок, часть плоскости и т. д.).

Пусть отрезок l составляет часть отрезка L. На отрезок L наудачу поставлена точка. Это означает выполнение следующих предположений: поставленная точка может оказаться в любой точке отрезка L, вероятность попадания точки на отрезок l пропорциональна длине этого отрезка и не зависит от его расположения относительно отрезка L. В этих предположениях вероятность попадания точки на отрезок l определяется равенством

$$P = \text{Длина}\, l/\text{Длина}\, L.$$

Пример 1. На отрезок OA длины L числовой оси Ox наудачу поставлена точка $B(x)$. Найти вероятность того, что меньший из отрезков OB и BA имеет длину, бо́льшую $L/3$. Предполагается, что вероятность попадания точки на отрезок пропорциональна длине отрезка и не зависит от его расположения на числовой оси.

Решение. Разобьем отрезок OA точками C и D на 3 равные части. Требование задачи будет выполнено, если точка $B(x)$ попадет на отрезок CD длины $L/3$. Искомая вероятность

$$P = (L/3)/L = 1/3.$$

Пусть плоская фигура g составляет часть плоской фигуры G. На фигуру G наудачу брошена точка. Это означает выполнение следующих предположений: брошенная точка может оказаться в любой точке фигуры G, вероятность попадания брошенной точки на фигуру g пропорциональна площади этой фигуры и не зависит ни от ее расположения относительно G, ни от формы g. В этих предположениях вероятность попадания точки в фигуру g определяется равенством

$$P = \text{Площадь}\, g/\text{Площадь}\, G.$$

Пример 2. На плоскости начерчены две концентрические окружности, радиусы которых 5 и 10 см соответственно. Найти вероятность того, что точка, брошенная наудачу в большой круг, попадет в кольцо, образованное построенными окружностями. Предполагается, что вероятность попадания точки в плоскую фигуру пропорциональна площади этой фигуры и не зависит от ее расположения относительно большого круга.

Решение. Площадь кольца (фигуры g)

$$S_g = \pi(10^2 - 5^2) = 75\pi.$$

Площадь большого круга (фигуры G)

$$S_G = \pi 10^2 = 100\pi.$$

Искомая вероятность

$$P = 75\pi/(100\pi) = 0{,}75.$$

Пример 3. В сигнализатор поступают сигналы от двух устройств, причем поступление каждого из сигналов равновозможно в любой момент промежутка времени длительностью T. Моменты поступления сигналов независимы один от другого. Сигнализатор срабатывает, если разность между моментами поступления сигналов меньше

t $(t < T)$. Найти вероятность того, что сигнализатор сработает за время T, если каждое из устройств пошлет по одному сигналу.

Решение. Обозначим моменты поступления сигналов первого и второго устройств соответственно через x и y. В силу условия задачи должны выполняться двойные неравенства: $0 \leqslant x \leqslant T$, $0 \leqslant y \leqslant T$. Введем в рассмотрение прямоугольную систему координат xOy. В этой системе двойным неравенствам удовлетворяют координаты любой точки квадрата $OTAT$ (рис. 1). Таким образом, этот квадрат можно рассматривать как фигуру G, координаты точек которой представляют все возможные значения моментов поступления сигналов.

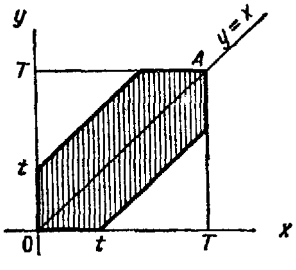

Рис. 1

Сигнализатор срабатывает, если разность между моментами поступления сигналов меньше t, т. е. если $y-x < t$ при $y > x$ и $x-y < t$ при $x > y$, или, что то же,

$$y < x+t \quad \text{при} \quad y > x, \qquad (*)$$

$$y > x-t \quad \text{при} \quad y < x. \qquad (**)$$

Неравенство $(*)$ выполняется для тех точек фигуры G, которые лежат выше прямой $y=x$ и ниже прямой $y=x+t$, неравенство $(**)$ имеет место для точек, расположенных ниже прямой $y=x$ и выше прямой $y=x-t$.

Как видно из рис. 1, все точки, координаты которых удовлетворяют неравенствам $(*)$ и $(**)$, принадлежат заштрихованному шестиугольнику. Таким образом, этот шестиугольник можно рассматривать как фигуру g, координаты точек которой являются благоприятствующими моментами времени x и y.

Искомая вероятность

$$P = \text{Пл.}\, g/\text{Пл.}\, G = (T^2-(T-t)^2)/T^2 = (t\,(2T-t))/T^2.$$

Замечание 1. Приведенные определения являются частными случаями общего определения геометрической вероятности. Если обозначить меру (длину, площадь, объем) области через mes, то вероятность попадания точки, брошенной наудачу (в указанном выше смысле) в область g — часть области G, равна

$$P = \text{mes}\, g/\text{mes}\, G.$$

Замечание 2. В случае классического определения вероятность достоверного (невозможного) события равна единице (нулю); справедливы и обратные утверждения (например, если вероятность события равна нулю, то событие невозможно). В случае геометрического определения вероятности обратные утверждения не имеют места. Например, вероятность попадания брошенной точки в одну определенную точку области G равна нулю, однако это событие может произойти, и, следовательно, не является невозможным.

Задачи

1. В ящике имеется 50 одинаковых деталей, из них 5 окрашенных. Наудачу вынимают одну деталь. Найти вероятность того, что извлеченная деталь окажется окрашенной.

Отв. $p=0{,}1$.

2. Брошена игральная кость. Найти вероятность того, что выпадет четное число очков.

Отв. $p=0{,}5$.

3. Участники жеребьевки тянут из ящика жетоны с номерами от 1 до 100. Найти вероятность того, что номер первого наудачу извлеченного жетона не содержит цифры 5.

Отв. $p=0{,}81$.

4. В мешочке имеется 5 одинаковых кубиков. На всех гранях каждого кубика написана одна из следующих букв: о, п, р, с, т. Найти вероятность того, что на вынутых по одному и расположенных «в одну линию» кубиков можно будет прочесть слово «спорт».

Отв. $p=1/120$.

5. На каждой из шести одинаковых карточек напечатана одна из следующих букв: а, т, м, р, с, о. Карточки тщательно перемешаны. Найти вероятность того, что на четырех, вынутых по одной и расположенных «в одну линию» карточках можно будет прочесть слово «трос».

Отв. $p=1/A_6^4=1/360$.

6. Куб, все грани которого окрашены, распилен на тысячу кубиков одинакового размера, которые затем тщательно перемешаны. Найти вероятность того, что наудачу извлеченный кубик будет иметь окрашенных граней: а) одну; б) две; в) три.

Отв. а) 0,384; б) 0,096; в) 0,008.

7. Из тщательно перемешанного полного набора 28 костей домино наудачу извлечена кость. Найти вероятность того, что вторую наудачу извлеченную кость можно приставить к первой, если первая кость: а) оказалась дублем; б) не есть дубль.

Отв. а) 2/9; б) 4/9.

8. В замке на общей оси пять дисков. Каждый диск разделен на шесть секторов, на которых написаны различные буквы. Замок открывается только в том случае, если каждый диск занимает одно определенное положение относительно корпуса замка. Найти вероятность того, что при произвольной установке дисков замок можно будет открыть.

Отв. $p=1/6^5$.

9. Восемь различных книг расставляются наудачу на одной полке. Найти вероятность того, что две определенные книги окажутся поставленными рядом.

Отв. $p=7\cdot 2!\cdot 6!/8!=1/4$.

10. Библиотечка состоит из десяти различных книг, причем пять книг стоят по 4 рубля каждая, три книги — по одному рублю и две книги — по 3 рубля. Найти вероятность того, что взятые наудачу две книги стоят 5 рублей.

Отв. $p=C_5^1\cdot C_3^1/C_{10}^2=1/3$.

11. В партии из 100 деталей отдел технического контроля обнаружил 5 нестандартных деталей. Чему равна относительная частота появления нестандартных деталей?

Отв. $w=0{,}05$.

12. При стрельбе из винтовки относительная частота попадания в цель оказалась равной 0,85. Найти число попаданий, если всего было произведено 120 выстрелов.

Отв. 102 попадания.

13. На отрезок OA длины L числовой оси Ox наудачу поставлена точка $B(x)$. Найти вероятность того, что меньший из отрезков OB и BA имеет длину, меньшую, чем $L/3$. Предполагается, что вероятность попадания точки на отрезок пропорциональна длине отрезка и не зависит от его расположения на числовой оси.

Отв. $p=2/3$.

14. Внутрь круга радиуса R наудачу брошена точка. Найти вероятность того, что точка окажется внутри вписанного в круг квадрата. Предполагается, что вероятность попадания точки в квадрат пропорциональна площади квадрата и не зависит от его расположения относительно круга.

Отв. $p=2/\pi$.

15. Задача о встрече. Два студента условились встретиться в определенном месте между 12 и 13 часами дня. Пришедший первым ждет второго в течение 1/4 часа, после чего уходит. Найти вероятность того, что встреча состоится, если каждый студент наудачу выбирает момент своего прихода (в промежутке от 12 до 13 часов).

Указание. Ввести в рассмотрение прямоугольную систему координат xOy и принять для простоты, что встреча должна состояться между 0 и 1 часами.

Отв. Возможные значения координат: $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$; благоприятствующие встрече значения координат: $|y-x| \leqslant 1/4$; $P=7/16$.

Глава вторая

ТЕОРЕМА СЛОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

§ 1. Теорема сложения вероятностей несовместных событий

Суммой $A+B$ двух событий A и B называют событие, состоящее в появлении события A, или события B, или обоих этих событий. Например, если из орудия произведены два выстрела и A — попадание при первом выстреле, B — попадание при втором выстреле, то $A+B$ — попадание при первом выстреле, или при втором, или в обоих выстрелах.

В частности, если два события A и B — несовместные, то $A+B$ — событие, состоящее в появлении одного из этих событий, безразлично какого.

Суммой нескольких событий называют событие, которое состоит в появлении хотя бы одного из этих событий. Например, событие $A+B+C$ состоит в появлении одного из следующих событий: A, B, C, A и B, A и C, B и C, A и B и C.

Пусть события A и B — несовместные, причем вероятности этих событий известны. Как найти вероятность того, что наступит либо событие A, либо событие B? Ответ на этот вопрос дает теорема сложения.

Теорема. *Вероятность появления одного из двух несовместных событий, безразлично какого, равна сумме вероятностей этих событий:*

$$P(A+B)=P(A)+P(B).$$

Доказательство. Введем обозначения: n — общее число возможных элементарных исходов испытания; m_1 — число исходов, благоприятствующих событию A; m_2 — число исходов, благоприятствующих событию B.

Число элементарных исходов, благоприятствующих наступлению либо события A, либо события B, равно m_1+m_2. Следовательно,

$$P(A+B)=(m_1+m_2)/n=m_1/n+m_2/n.$$

Приняв во внимание, что $m_1/n=P(A)$ и $m_2/n=P(B)$, окончательно получим

$$P(A+B)=P(A)+P(B).$$

Следствие. *Вероятность появления одного из нескольких попарно несовместных событий, безразлично какого, равна сумме вероятностей этих событий:*

$$P(A_1+A_2+\ldots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n).$$

Доказательство. Рассмотрим три события: A, B и C. Так как рассматриваемые события попарно несовместны, то появление одного из трех событий, A, B и C, равносильно наступлению одного из двух событий, $A+B$ и C, поэтому в силу указанной теоремы

$$P(A+B+C)=P[(A+B)+C]=P(A+B)+P(C)=$$
$$=P(A)+P(B)+P(C).$$

Для произвольного числа попарно несовместных событий доказательство проводится методом математической индукции.

Пример 1. В урне 30 шаров: 10 красных, 5 синих и 15 белых. Найти вероятность появления цветного шара.

Решение. Появление цветного шара означает появление либо красного, либо синего шара.

Вероятность появления красного шара (событие A)

$$P(A) = 10/30 = 1/3.$$

Вероятность появления синего шара (событие B)

$$P(B) = 5/30 = 1/6.$$

События A и B несовместны (появление шара одного цвета исключает появление шара другого цвета), поэтому теорема сложения применима.

Искомая вероятность

$$P(A+B) = P(A) + P(B) = 1/3 + 1/6 = 1/2.$$

Пример 2. Стрелок стреляет по мишени, разделенной на 3 области. Вероятность попадания в первую область равна 0,45, во вторую — 0,35. Найти вероятность того, что стрелок при одном выстреле попадет либо в первую, либо во вторую область.

Решение. События A — «стрелок попал в первую область» и B — «стрелок попал во вторую область» — несовместны (попадание в одну область исключает попадание в другую), поэтому теорема сложения применима.

Искомая вероятность

$$P(A+B) = P(A) + P(B) = 0{,}45 + 0{,}35 = 0{,}80.$$

§ 2. Полная группа событий

Теорема. *Сумма вероятностей событий A_1, A_2, ..., A_n, образующих полную группу, равна единице:*

$$P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = 1.$$

Доказательство. Так как появление одного из событий полной группы достоверно, а вероятность достоверного события равна единице, то

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = 1. \qquad (*)$$

Любые два события полной группы несовместны, поэтому можно применить теорему сложения:

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n). \qquad (**)$$

Сравнивая (*) и (**), получим

$$P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = 1.$$

Пример. Консультационный пункт института получает пакеты с контрольными работами из городов A, B и C. Вероятность получения пакета из города A равна 0,7, из города B — 0,2. Найти вероятность того, что очередной пакет будет получен из города C.

Решение. События «пакет получен из города A», «пакет получен из города B», «пакет получен из города C» образуют полную группу, поэтому сумма вероятностей этих событий равна единице:

$$0,7+0,2+p=1.$$

Отсюда искомая вероятность

$$p=1-0,9=0,1.$$

§ 3. Противоположные события

Противоположными называют два единственно возможных события, образующих полную группу. Если одно из двух противоположных событий обозначено через A, то другое принято обозначать $\bar{A}$.

Пример 1. Попадание и промах при выстреле по цели — противоположные события. Если A — попадание, то $\bar{A}$ — промах.

Пример 2. Из ящика наудачу взята деталь. События «появилась стандартная деталь» и «появилась нестандартная деталь» — противоположные.

Теорема. *Сумма вероятностей противоположных событий равна единице*:

$$P(A)+P(\bar{A})=1.$$

Доказательство. Противоположные события образуют полную группу, а сумма вероятностей событий, образующих полную группу, равна единице (см. § 2).

Замечание 1. Если вероятность одного из двух противоположных событий обозначена через p, то вероятность другого события обозначают через q. Таким образом, в силу предыдущей теоремы

$$p+q=1.$$

Пример 3. Вероятность того, что день будет дождливым, $p=0,7$. Найти вероятность того, что день будет ясным.

Решение. События «день дождливый» и «день ясный» — противоположные, поэтому искомая вероятность

$$q=1-p=1-0,7=0,3.$$

Замечание 2. При решении задач на отыскание вероятности события A часто выгодно сначала вычислить вероятность события $\bar{A}$, а затем найти искомую вероятность по формуле

$$P(A)=1-P(\bar{A}).$$

Пример 4. В ящике имеется n деталей, из которых m стандартных. Найти вероятность того, что среди k наудачу извлеченных деталей есть хотя бы одна стандартная.

Решение. События «среди извлеченных деталей есть хотя бы одна стандартная» и «среди извлеченных деталей нет ни одной стандартной» — противоположные. Обозначим первое событие через A, а второе — через $\bar{A}$.

Очевидно,

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}).$$

Найдем $P(\overline{A})$. Общее число способов, которыми можно извлечь k деталей из n деталей, равно C_n^k. Число нестандартных деталей равно $n-m$; из этого числа деталей можно C_{n-m}^k способами извлечь k нестандартных деталей. Поэтому вероятность того, что среди извлеченных k деталей нет ни одной стандартной, равна $P(\overline{A}) = C_{n-m}^k/C_n^k$.

Искомая вероятность

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - C_{n-m}^k/C_n^k.$$

§ 4. Принцип практической невозможности маловероятных событий

При решении многих практических задач приходится иметь дело с событиями, вероятность которых весьма мала, т. е. близка к нулю. Можно ли считать, что маловероятное событие A в единичном испытании не произойдет? Такого заключения сделать нельзя, так как не исключено, хотя и мало вероятно, что событие A наступит.

Казалось бы, появление или непоявление маловероятного события в единичном испытании предсказать невозможно. Однако длительный опыт показывает, что маловероятное событие в единичном испытании в подавляющем большинстве случаев не наступает. На основании этого факта принимают следующий «принцип практической невозможности маловероятных событий»: *если случайное событие имеет очень малую вероятность, то практически можно считать, что в единичном испытании это событие не наступит.*

Естественно возникает вопрос: насколько малой должна быть вероятность события, чтобы можно было считать невозможным его появление в одном испытании? На этот вопрос нельзя ответить однозначно. Для задач, различных по существу, ответы разные. Например, если вероятность того, что парашют при прыжке не раскроется, равна 0,01, то было бы недопустимым применять такие парашюты. Если же вероятность того, что поезд дальнего следования прибудет с опозданием, равна 0,01, то можно практически быть уверенным, что поезд прибудет вовремя.

Достаточно малую вероятность, при которой (в данной определенной задаче) событие можно считать практически невозможным, называют *уровнем значимости*. На практике обычно принимают уровни значимости, заключенные между 0,01 и 0,05. Уровень значимости, равный 0,01, называют однопроцентным; уровень значимости, равный 0,02, называют двухпроцентным, и т. д.

Подчеркнем, что рассмотренный здесь принцип позволяет делать предсказания не только о событиях, имеющих малую вероятность, но и о событиях, вероятность которых близка к единице. Действительно, если событие A имеет вероятность, близкую к нулю, то вероятность противоположного события $\overline{A}$ близка к единице. С другой стороны, непоявление события A означает наступление противоположного события $\overline{A}$. Таким образом, из принципа невозможности маловероятных событий вытекает следующее важное для приложений следствие: *если случайное событие имеет вероятность, очень близкую к единице, то практически можно считать, что в единичном испытании это событие наступит.* Разумеется, и здесь ответ на вопрос о том, какую вероятность считать близкой к единице, зависит от существа задачи.

Задачи

1. В денежно-вещевой лотерее на каждые 10 000 билетов разыгрывается 150 вещевых и 50 денежных выигрышей. Чему равна вероятность выигрыша, безразлично денежного или вещевого, для владельца одного лотерейного билета?

Отв. $p=0,02$.

2. Вероятность того, что стрелок при одном выстреле выбьет 10 очков, равна 0,1; вероятность выбить 9 очков равна 0,3; вероятность выбить 8 или меньше очков равна 0,6. Найти вероятность того, что при одном выстреле стрелок выбьет не менее 9 очков.

Отв. $p=0,4$.

3. В партии из 10 деталей 8 стандартных. Найти вероятность того, что среди наудачу извлеченных 2 деталей есть хотя бы одна стандартная.

Отв. $p=44/45$.

4. В ящике 10 деталей, среди которых 2 нестандартных. Найти вероятность того, что в наудачу отобранных 6 деталях окажется не более одной нестандартной детали.

Отв. $p=2/3$.

Указание. Если A — нет ни одной нестандартной детали, B — есть одна нестандартная деталь, то

$$P(A+B)=P(A)+P(B)=C_8^6/C_{10}^6+C_2^1\cdot C_8^5/C_{10}^6.$$

5. События A, B, C и D образуют полную группу. Вероятности событий таковы: $P(A)=0,1$; $P(B)=0,4$; $P(C)=0,3$. Чему равна вероятность события D?

Отв. $P(D)=0,2$.

6. По статистическим данным ремонтной мастерской, в среднем на 20 остановок токарного станка приходится: 10 — для смены резца; 3 — из-за неисправности привода; 2 — из-за несвоевременной подачи заготовок. Остальные остановки происходят по другим причинам. Найти вероятность остановки станка по другим причинам.

Отв. $p = 0{,}25$.

Глава третья

ТЕОРЕМА УМНОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

§ 1. Произведение событий

Произведением двух событий A и B называют событие AB, состоящее в совместном появлении (совмещении) этих событий. Например, если A — деталь годная, B — деталь окрашенная, то AB — деталь годна и окрашена.

Произведением нескольких событий называют событие, состоящее в совместном появлении всех этих событий. Например, если A, B, C — появление «герба» соответственно в первом, втором и третьем бросаниях монеты, то ABC — выпадение «герба» во всех трех испытаниях.

§ 2. Условная вероятность

Во введении случайное событие определено как событие, которое при осуществлении совокупности условий S может произойти или не произойти. Если при вычислении вероятности события никаких других ограничений, кроме условий S, не налагается, то такую вероятность называют *безусловной*; если же налагаются и другие дополнительные условия, то вероятность события называют *условной*. Например, часто вычисляют вероятность события B при дополнительном условии, что произошло событие A. Заметим, что и безусловная вероятность, строго говоря, является условной, поскольку предполагается осуществление условий S.

Условной вероятностью $P_A(B)$ называют вероятность события B, вычисленную в предположении, что событие A уже наступило.

Пример. В урне 3 белых и 3 черных шара. Из урны дважды вынимают по одному шару, не возвращая их обратно. Найти вероятность появления белого шара при втором испытании (событие B), если при первом испытании был извлечен черный шар (событие A).

Решение. После первого испытания в урне осталось 5 шаров, из них 3 белых. Искомая условная вероятность

$$P_A(B) = 3/5.$$

Этот же результат можно получить по формуле

$$P_A(B) = P(AB)/P(A) \qquad (P(A) > 0). \qquad (*)$$

Действительно, вероятность появления белого шара при первом испытании

$$P(A) = 3/6 = 1/2.$$

Найдем вероятность $P(AB)$ того, что в первом испытании появится черный шар, а во втором — белый. Общее число исходов — совместного появления двух шаров, безразлично какого цвета, равно числу размещений $A_6^2 = 6 \cdot 5 = 30$. Из этого числа исходов событию AB благоприятствуют $3 \cdot 3 = 9$ исходов. Следовательно,

$$P(AB) = 9/30 = 3/10.$$

Искомая условная вероятность

$$P_A(B) = P(AB)/P(A) = (3/10)/(1/2) = 3/5.$$

Как видим, получен прежний результат.

Исходя из классического определения вероятности, формулу (*) можно доказать. Это обстоятельство и служит основанием для следующего общего (применимого не только для классической вероятности) определения.

Условная вероятность события B при условии, что событие A уже наступило, по определению, равна

$$P_A(B) = P(AB)/P(A) \qquad (P(A) > 0).$$

§ 3. Теорема умножения вероятностей

Рассмотрим два события: A и B; пусть вероятности $P(A)$ и $P_A(B)$ известны. Как найти вероятность совмещения этих событий, т. е. вероятность того, что появится и событие A и событие B? Ответ на этот вопрос дает теорема умножения.

Теорема. *Вероятность совместного появления двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие уже наступило:*

$$P(AB) = P(A)\,P_A(B).$$

Доказательство. По определению условной вероятности,

$$P_A(B) = P(AB)/P(A).$$

Отсюда

$$P(AB) = P(A)\,P_A(B). \qquad (*)$$

Замечание. Применив формулу (*) к событию BA, получим

$$P(BA) = P(B)\,P_B(A),$$

или, поскольку событие BA не отличается от события AB,

$$P(AB) = P(B)\,P_B(A). \qquad (**)$$

Сравнивая формулы (*) и (**), заключаем о справедливости равенства

$$P(A)\,P_A(B) = P(B)\,P_B(A). \qquad (***)$$

Следствие. *Вероятность совместного появления нескольких событий равна произведению вероятности одного из них на условные вероятности всех остальных, причем вероятность каждого последующего события вычисляется в предположении, что все предыдущие события уже появились:*

$$P(A_1A_2A_3\ldots A_n) = P(A_1)\,P_{A_1}(A_2)\,P_{A_1A_2}(A_3)\ldots$$
$$\ldots P_{A_1A_2\ldots A_{n-1}}(A_n),$$

где $P_{A_1A_2\ldots A_{n-1}}(A_n)$ — вероятность события A_n, вычисленная в предположении, что события A_1, A_2, $\ldots$, A_{n-1} наступили. В частности, для трех событий

$$P(ABC) = P(A)\,P_A(B)\,P_{AB}(C).$$

Заметим, что порядок, в котором расположены события, может быть выбран любым, т. е. безразлично какое событие считать первым, вторым и т. д.

Пример 1. У сборщика имеется 3 конусных и 7 эллиптических валиков. Сборщик взял один валик, а затем второй. Найти вероятность того, что первый из взятых валиков — конусный, а второй — эллиптический.

Решение. Вероятность того, что первый валик окажется конусным (событие A),

$$P(A) = 3/10.$$

Вероятность того, что второй валик окажется эллиптическим (событие B), вычисленная в предположении, что первый валик — конусный, т. е. условная вероятность

$$P_A(B) = 7/9.$$

По теореме умножения, искомая вероятность

$$P(AB) = P(A)\,P_A(B) = (3/10)\cdot(7/9) = 7/30.$$

Заметим, что, сохранив обозначения, легко найдем: $P(B) = 7/10$, $P_B(A) = 3/9$, $P(B)\,P_B(A) = 7/30$, что наглядно иллюстрирует справедливость равенства (***).

Пример 2. В урне 5 белых, 4 черных и 3 синих шара. Каждое испытание состоит в том, что наудачу извлекают один шар, не возвращая его обратно. Найти вероятность того, что при первом испытании появится белый шар (событие A), при втором — черный (событие B) и при третьем — синий (событие C).

Решение. Вероятность появления белого шара в первом испытании

$$P(A) = 5/12.$$

Вероятность появления черного шара во втором испытании, вычисленная в предположении, что в первом испытании появился белый шар, т. е. условная вероятность

$$P_A(B) = 4/11.$$

Вероятность появления синего шара в третьем испытании, вычисленная в предположении, что в первом испытании появился белый шар, а во втором — черный, т. е. условная вероятность

$$P_{AB}(C) = 3/10.$$

Искомая вероятность

$$P(ABC) = P(A)\,P_A(B)\,P_{AB}(C) = (5/12)\cdot(4/11)\cdot(3/10) = 1/22.$$

§ 4. Независимые события. Теорема умножения для независимых событий

Пусть вероятность события B не зависит от появления события A.

Событие B называют независимым от события A, если появление события A не изменяет вероятности события B, т. е. если условная вероятность события B равна его безусловной вероятности:

$$P_A(B) = P(B). \qquad (*)$$

Подставив (*) в соотношение (***) предыдущего параграфа, получим

$$P(A)\,P(B) = P(B)\,P_B(A).$$

Отсюда

$$P_B(A) = P(A),$$

т. е. условная вероятность события A в предположении, что наступило событие B, равна его безусловной вероятности. Другими словами, событие A не зависит от события B.

Итак, если событие B не зависит от события A, то и событие A не зависит от события B; это означает, что свойство независимости событий взаимно.

Для независимых событий теорема умножения $P(AB) = P(A)P_A(B)$ имеет вид

$$P(AB) = P(A)P(B), \qquad (**)$$

т. е. вероятность совместного появления двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий.

Равенство (**) принимают в качестве определения независимых событий.

Два события называют независимыми, если вероятность их совмещения равна произведению вероятностей этих событий; в противном случае события называют *зависимыми*.

На практике о независимости событий заключают по смыслу задачи. Например, вероятности поражения цели каждым из двух орудий не зависят от того, поразило ли цель другое орудие, поэтому события «первое орудие поразило цель» и «второе орудие поразило цель» независимы.

Пример 1. Найти вероятность совместного поражения цели двумя орудиями, если вероятность поражения цели первым орудием (событие A) равна 0,8, а вторым (событие B) — 0,7.

Решение. События A и B независимые, поэтому, по теореме умножения, искомая вероятность

$$P(AB) = P(A)P(B) = 0{,}7 \cdot 0{,}8 = 0{,}56.$$

Замечание 1. Если события A и B независимы, то независимы также события A и $\overline{B}$, $\overline{A}$ и B, $\overline{A}$ и $\overline{B}$. Действительно,

$$A = A\overline{B} + AB.$$

Следовательно,

$$P(A) = P(A\overline{B}) + P(AB), \text{ или } P(A) = P(A\overline{B}) + P(A)P(B).$$

Отсюда

$$P(A\overline{B}) = P(A)[1 - P(B)], \text{ или } P(A\overline{B}) = P(A)P(\overline{B}),$$

т. е. события A и B независимы.

Независимость событий $\overline{A}$ и B, $\overline{A}$ и $\overline{B}$ — следствие доказанного утверждения.

Несколько событий называют попарно независимыми, если каждые два из них независимы. Например, события A, B, C попарно независимы, если независимы события A и B, A и C, B и C.

Для того чтобы обобщить теорему умножения на несколько событий, введем понятие независимости событий в совокупности.

Несколько событий называют независимыми в совокупности (или просто *независимыми*), если независимы каждые два из них и независимы каждое событие и все возможные произведения остальных. Например, если события A_1, A_2, A_3 независимы в совокупности, то независимы события A_1 и A_2, A_1 и A_3, A_2 и A_3; A_1 и A_2A_3, A_2 и A_1A_3, A_3 и A_1A_2. Из сказанного следует, что если события независимы в совокупности, то условная вероятность появления любого события из них, вычисленная в предположении, что наступили какие-либо другие события из числа остальных, равна его безусловной вероятности.

Подчеркнем, что если несколько событий независимы попарно, то отсюда еще не следует их независимость в совокупности. В этом смысле требование независимости событий в совокупности сильнее требования их попарной независимости.

Поясним сказанное на примере. Пусть в урне имеется 4 шара, окрашенные: один — в красный цвет (A), один — в синий цвет (B), один — в черный цвет (C) и один — во все эти три цвета (ABC). Чему равна вероятность того, что извлеченный из урны шар имеет красный цвет?

Так как из четырех шаров два имеют красный цвет, то $P(A) = 2/4 = 1/2$. Рассуждая аналогично, найдем $P(B) = 1/2$, $P(C) = 1/2$. Допустим теперь, что взятый шар имеет синий цвет, т. е. событие B уже произошло. Изменится ли вероятность того, что извлеченный шар имеет красный цвет, т. е. изменится ли вероятность события A? Из двух шаров, имеющих синий цвет, один шар имеет и красный цвет, поэтому вероятность события A по-прежнему равна 1/2. Другими словами, условная вероятность события A, вычисленная в предположении, что наступило событие B, равна его безусловной вероятности. Следовательно, события A и B независимы. Аналогично придем к выводу, что события A и C, B и C независимы. Итак, события A, B и C попарно независимы.

Независимы ли эти события в совокупности? Оказывается, нет. Действительно, пусть извлеченный шар имеет два цвета, например синий и черный. Чему равна вероятность того, что этот шар имеет и красный цвет? Лишь один шар окрашен во все три цвета, поэтому взятый шар имеет и красный цвет. Таким образом, допустив, что события B и C произошли, приходим к выводу, что событие A обязательно наступит. Следовательно, это событие достоверное и вероятность его равна единице. Другими словами, условная вероятность $P_{BC}(A)=1$ события A не равна его безусловной вероятности $P(A)=1/2$. Итак, попарно независимые события A, B, C не являются независимыми в совокупности.

Приведем теперь следствие из теоремы умножения.

Следствие. *Вероятность совместного появления нескольких событий, независимых в совокупности, равна произведению вероятностей этих событий:*

$$P(A_1A_2\ldots A_n)=P(A_1)P(A_2)\ldots P(A_n).$$

Доказательство. Рассмотрим три события: A, B и C. Совмещение событий A, B и C равносильно совмещению событий AB и C, поэтому

$$P(ABC)=P(AB\cdot C).$$

Так как события A, B и C независимы в совокупности, то независимы, в частности, события AB и C, а также A и B. По теореме умножения для двух независимых событий имеем:

$$P(AB\cdot C)=P(AB)P(C) \text{ и } P(AB)=P(A)P(B).$$

Итак, окончательно получим

$$P(ABC)=P(A)P(B)P(C).$$

Для произвольного n доказательство проводится методом математической индукции.

Замечание. Если события A_1, A_2, ..., A_n независимы в совокупности, то и противоположные им события $\bar{A}_1$, $\bar{A}_2$, ..., $\bar{A}_n$ также независимы в совокупности.

Пример 2. Найти вероятность совместного появления герба при одном бросании двух монет.

Решение. Вероятность появления герба первой монеты (событие A)

$$P(A)=1/2.$$

Вероятность появления герба второй монеты (событие B)

$$P(B)=1/2.$$

События A и B независимые, поэтому искомая вероятность по теореме умножения равна

$$P(AB)=P(A)P(B)=1/2\cdot 1/2=1/4.$$

Пример 3. Имеется 3 ящика, содержащих по 10 деталей. В первом ящике 8, во втором 7 и в третьем 9 стандартных деталей. Из каждого ящика наудачу вынимают по одной детали. Найти вероятность того, что все три вынутые детали окажутся стандартными.

Решение. Вероятность того, что из первого ящика вынута стандартная деталь (событие A),

$$P(A)=8/10=0{,}8.$$

Вероятность того, что из второго ящика вынута стандартная деталь (событие B),

$$P(B)=7/10=0{,}7.$$

Вероятность того, что из третьего ящика вынута стандартная деталь (событие C),

$$P(C)=9/10=0{,}9.$$

Так как события A, B и C независимые в совокупности, то искомая вероятность (по теореме умножения) равна

$$P(ABC)=P(A)\,P(B)\,P(C)=0{,}8\cdot0{,}7\cdot0{,}9=0{,}504.$$

Приведем пример совместного применения теорем сложения и умножения.

Пример 4. Вероятности появления каждого из трех независимых событий A_1, A_2, A_3 соответственно равны p_1, p_2, p_3. Найти вероятность появления только одного из этих событий.

Решение. Заметим, что, например, появление только первого события A_1 равносильно появлению события $A_1\bar{A}_2\bar{A}_3$ (появилось первое и не появились второе и третье события). Введем обозначения:

B_1 — появилось только событие A_1, т. е. $B_1=A_1\bar{A}_2\bar{A}_3$;

B_2 — появилось только событие A_2, т. е. $B_2=A_2\bar{A}_1\bar{A}_3$;

B_3 — появилось только событие A_3, т. е. $B_3=A_3\bar{A}_1\bar{A}_2$.

Таким образом, чтобы найти вероятность появления только одного из событий A_1, A_2, A_3, будем искать вероятность $P(B_1+B_2+B_3)$ появления одного, безразлично какого из событий B_1, B_2, B_3.

Так как события B_1, B_2, B_3 несовместны, то применима теорема сложения

$$P(B_1+B_2+B_3)=P(B_1)+P(B_2)+P(B_3). \qquad (*)$$

Остается найти вероятности каждого из событий B_1, B_2, B_3.

События A_1, A_2, A_3 независимы, следовательно, независимы события A_1, $\bar{A}_2$, $\bar{A}_3$, поэтому к ним применима теорема умножения

$$P(B_1)=P(A_1\bar{A}_2\bar{A}_3)=P(A_1)\,P(\bar{A}_2)\,P(\bar{A}_3)=p_1q_2q_3.$$

Аналогично,

$$P(B_2)=P(A_2\bar{A}_1\bar{A}_3)=P(A_2)\,P(\bar{A}_1)\,P(\bar{A}_3)=p_2q_1q_3;$$

$$P(B_3)=P(A_3\bar{A}_1\bar{A}_2)=P(A_3)\,P(\bar{A}_1)\,P(\bar{A}_2)=p_3q_1q_2.$$

Подставив эти вероятности в (*), найдем искомую вероятность появления только одного из событий A_1, A_2, A_3:

$$P(B_1+B_2+B_3)=p_1q_2q_3+p_2q_1q_3+p_3q_1q_2.$$

§ 5. Вероятность появления хотя бы одного события

Пусть в результате испытания могут появиться n событий, независимых в совокупности, либо некоторые из них (в частности, только одно или ни одного), причем вероятности появления каждого из событий известны. Как найти вероятность того, что наступит хотя бы одно из этих событий? Например, если в результате испытания могут появиться три события, то появление хотя бы одного из этих событий означает наступление либо одного, либо двух, либо трех событий. Ответ на поставленный вопрос дает следующая теорема.

Теорема. *Вероятность появления хотя бы одного из событий* $A_1, A_2, \ldots, A_n$, *независимых в совокупности, равна разности между единицей и произведением вероятностей противоположных событий* $\overline{A}_1, \overline{A}_2, \ldots, \overline{A}_n$:

$$P(A) = 1 - q_1 q_2 \ldots q_n. \qquad (*)$$

Доказательство. Обозначим через A событие, состоящее в появлении хотя бы одного из событий A_1, $A_2, \ldots, A_n$. События A и $\overline{A}_1\overline{A}_2 \ldots \overline{A}_n$ (ни одно из событий не наступило) противоположны, следовательно, сумма их вероятностей равна единице:

$$P(A) + P(\overline{A}_1\overline{A}_2 \ldots \overline{A}_n) = 1.$$

Отсюда, пользуясь теоремой умножения, получим

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}_1\overline{A}_2 \ldots \overline{A}_n) = 1 - P(\overline{A}_1)\,P(\overline{A}_2) \ldots P(\overline{A}_n),$$

или

$$P(A) = 1 - q_1 q_2 \ldots q_n.$$

Частный случай. *Если события* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *имеют одинаковую вероятность, равную* p, *то вероятность появления хотя бы одного из этих событий*

$$P(A) = 1 - q^n. \qquad (**)$$

Пример 1. Вероятности попадания в цель при стрельбе из трех орудий таковы: $p_1 = 0{,}8$; $p_2 = 0{,}7$; $p_3 = 0{,}9$. Найти вероятность хотя бы одного попадания (событие A) при одном залпе из всех орудий.

Решение. Вероятность попадания в цель каждым из орудий не зависит от результатов стрельбы из других орудий, поэтому рассматриваемые события A_1 (попадание первого орудия), A_2 (попадание второго орудия) и A_3 (попадание третьего орудия) независимы в совокупности.

Вероятности событий, противоположных событиям A_1, A_2 и A_3 (т. е. вероятности промахов), соответственно равны:

$$q_1 = 1 - p_1 = 1 - 0{,}8 = 0{,}2; \quad q_2 = 1 - p_2 = 1 - 0{,}7 = 0{,}3;$$
$$q_3 = 1 - p_3 = 1 - 0{,}9 = 0{,}1.$$

Искомая вероятность

$$P(A) = 1 - q_1 q_2 q_3 = 1 - 0{,}2 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}1 = 0{,}994.$$

Пример 2. В типографии имеется 4 плоскопечатных машины. Для каждой машины вероятность того, что она работает в данный момент, равна 0,9. Найти вероятность того, что в данный момент работает хотя бы одна машина (событие A).

Решение. События «машина работает» и «машина не работает» (в данный момент) — противоположные, поэтому сумма их вероятностей равна единице:

$$p+q=1.$$

Отсюда вероятность того, что машина в данный момент не работает, равна

$$q=1-p=1-0{,}9=0{,}1.$$

Искомая вероятность

$$P(A)=1-q^4=1-0{,}1^4=0{,}9999.$$

Так как полученная вероятность весьма близка к единице, то на основании следствия из принципа практической невозможности маловероятных событий мы вправе заключить, что в данный момент работает хотя бы одна из машин.

Пример 3. Вероятность того, что при одном выстреле стрелок попадает в цель, равна 0,4. Сколько выстрелов должен произвести стрелок, чтобы с вероятностью не менее 0,9 он попал в цель хотя бы один раз?

Решение. Обозначим через A событие «при n выстрелах стрелок попадает в цель хотя бы один раз». События, состоящие в попадании в цель при первом, втором выстрелах и т. д., независимы в совокупности, поэтому применима формула (**)

$$P(A)=1-q^n.$$

Приняв во внимание, что, по условию, $P(A)\geqslant 0{,}9$, $p=0{,}4$ (следовательно, $q=1-0{,}4=0{,}6$), получим

$$1-0{,}6^n\geqslant 0{,}9; \text{ отсюда } 0{,}6^n\leqslant 0{,}1.$$

Прологарифмируем это неравенство по основанию 10:

$$n\lg 0{,}6\leqslant \lg 0{,}1.$$

Отсюда, учитывая, что $\lg 0{,}6<0$, имеем

$$n\geqslant \lg 0{,}1/\lg 0{,}6=-1/\bar{1}{,}7782=-1/(-0{,}22\bar{1}\bar{8})=4{,}5.$$

Итак, $n\geqslant 5$, т. е. стрелок должен произвести не менее 5 выстрелов.

Пример 4. Вероятность того, что событие появится хотя бы один раз в трех независимых в совокупности испытаниях, равна 0,936. Найти вероятность появления события в одном испытании (предполагается, что во всех испытаниях вероятность появления события одна и та же).

Решение. Так как рассматриваемые события независимы в совокупности, то применима формула (**)

$$P(A)=1-q^n.$$

По условию, $P(A)=0{,}936$; $n=3$. Следовательно,

$$0{,}936=1-q^3, \text{ или } q^3=1-0{,}936=0{,}064.$$

Отсюда $q=\sqrt[3]{0{,}064}=0{,}4$.

Искомая вероятность

$$p=1-q=1-0{,}4=0{,}6.$$

Задачи

1. Вероятность того, что стрелок при одном выстреле попадает в мишень, равна $p=0{,}9$. Стрелок произвел 3 выстрела. Найти вероятность того, что все 3 выстрела дали попадание.

Отв. 0,729.

2. Брошены монета и игральная кость. Найти вероятность совмещения событий: «появился «герб», «появилось 6 очков».

Отв. 1/12.

3. В двух ящиках находятся детали: в первом — 10 (из них 3 стандартных), во втором — 15 (из них 6 стандартных). Из каждого ящика наудачу вынимают по одной детали. Найти вероятность того, что обе детали окажутся стандартными.

Отв. 0,12.

4. В студии телевидения 3 телевизионных камеры. Для каждой камеры вероятность того, что она включена в данный момент, равна $p=0{,}6$. Найти вероятность того, что в данный момент включена хотя бы одна камера (событие А).

Отв. 0,936.

5. Чему равна вероятность того, что при бросании трех игральных костей 6 очков появится хотя бы на одной из костей (событие A)?

Отв. 91/216.

6. Предприятие изготовляет 95% изделий стандартных, причем из них 86% — первого сорта. Найти вероятность того, что взятое наудачу изделие, изготовленное на этом предприятии, окажется первого сорта.

Отв. 0,817.

7. Монета бросается до тех пор, пока 2 раза подряд она не выпадет одной и той же стороной. Найти вероятности следующих событий: а) опыт окончится до шестого бросания; б) потребуется четное число бросаний.

Отв. а) 15/16; б) 2/3.

8. Из цифр 1, 2, 3, 4, 5 сначала выбирается одна, а затем из оставшихся четырех — вторая цифра. Предполагается, что все 20 возможных исходов равновероятны. Найти вероятность того, что будет выбрана нечетная цифра: а) в первый раз; б) во второй раз; в) в оба раза.

Отв. а) 3/5; б) 3/5; в) 3/10.

9. Вероятность того, что при одном выстреле стрелок попадет в десятку, равна 0,6. Сколько выстрелов должен сделать стрелок, чтобы с вероятностью не менее 0,8 он попал в десятку хотя бы один раз?

Отв. $n \geqslant 2$.

10. Три электрические лампочки последовательно включены в цепь. Вероятность того, что одна (любая) лампочка перегорит, если напряжение в сети превысит номинальное, равна 0,6. Найти вероятность того, что при повышенном напряжении тока в цепи не будет.

Отв. 0,936.

11. Вероятность того, что событие A появится хотя бы один раз при двух независимых испытаниях, равна 0,75. Найти вероятность появления события в одном испытании (предполагается, что вероятность появления события в обоих испытаниях одна и та же).

Отв. 0,5.

12. Три команды A_1, A_2, A_3 спортивного общества A состязаются соответственно с тремя командами общества B. Вероятности того, что команды общества A выиграют матчи у команд общества B, таковы: при встрече A_1 с B_1—0,8; A_2 с B_2—0,4; A_3 с B_3—0,4. Для победы необходимо выиграть не менее двух матчей из трех (ничьи во внимание не принимаются). Победа какого из обществ вероятнее?

Отв. Общества A ($P_A=0,544 > 1/2$).

13. Вероятность поражения цели первым стрелком при одном выстреле равна 0,8, а вторым стрелком — 0,6. Найти вероятность того, что цель будет поражена только одним стрелком.

Отв. 0,44.

14. Из последовательности чисел 1, 2, ..., n наудачу одно за другим выбираются два числа. Найти вероятность того, что одно из них меньше целого положительного числа k, а другое больше k, где $1 < k < n$.

Отв. $[2[k-1)(n-k)]/[n(n-1)]$.

Указание. Сделать допущения: а) первое число $<k$, а второе $> k$; б) первое число $> k$, а второе $< k$.

15. Отдел технического контроля проверяет изделия на стандартность. Вероятность того, что изделие нестандартно, равна 0,1. Найти вероятность того, что: а) из трех проверенных изделий только одно окажется нестандартным; б) нестандартным окажется только четвертое по порядку проверенное изделие.

Отв. а) 0,243; б) 0,0729.

Глава четвертая

СЛЕДСТВИЯ ТЕОРЕМ СЛОЖЕНИЯ И УМНОЖЕНИЯ

§ 1. Теорема сложения вероятностей совместных событий

Была рассмотрена теорема сложения для несовместных событий. Здесь будет изложена теорема сложения для совместных событий.

Два события называют *совместными*, если появление одного из них не исключает появления другого в одном и том же испытании.

Пример 1. A — появление четырех очков при бросании игральной кости; B — появление четного числа очков. События A и B — совместные.

Пусть события A и B совместны, причем даны вероятности этих событий и вероятность их совместного появления. Как найти вероятность события $A+B$, состоящего в том, что появится хотя бы одно из событий A и B? Ответ на этот вопрос дает теорема сложения вероятностей совместных событий.

Теорема. *Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления:*

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

Доказательство. Поскольку события A и B, по условию, совместны, то событие $A+B$ наступит, если наступит одно из следующих трех несовместных событий: $A\overline{B}$, $\overline{A}B$ или AB. По теореме сложения вероятностей несовместных событий,

$$P(A+B)=P(A\overline{B})+P(\overline{A}B)+P(AB). \qquad (*)$$

Событие A произойдет, если наступит одно из двух несовместных событий: $A\overline{B}$ или AB. По теореме сложения вероятностей несовместных событий имеем

$$P(A)=P(A\overline{B})+P(AB).$$

Отсюда

$$P(A\overline{B})=P(A)-P(AB). \qquad (**)$$

Аналогично имеем

$$P(B)=P(\overline{A}B)+P(AB).$$

Отсюда

$$P(\overline{A}B)=P(B)-P(AB). \qquad (***)$$

Подставив (**) и (***) в (*), окончательно получим

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB). \qquad (****)$$

Замечание 1. При использовании полученной формулы следует иметь в виду, что события A и B могут быть как независимыми, так и зависимыми.

Для независимых событий

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A)\,P(B);$$

для зависимых событий

$$P(A+B)=P(A)\ '\cdot P(B)-P(A)\,P_A(B).$$

Замечание 2. Если события A и B несовместны, то их совмещение есть невозможное событие и, следовательно, $P(AB)=0$. Формула (****) для несовместных событий принимает вид

$$P(A+B)=P(A)+P(B).$$

Мы вновь получили теорему сложения для несовместных событий. Таким образом, формула (****) справедлива как для совместных, так и для несовместных событий.

Пример 2. Вероятности попадания в цель при стрельбе первого и второго орудий соответственно равны: $p_1=0{,}7$; $p_2=0{,}8$. Найти вероятность попадания при одном залпе (из обоих орудий) хотя бы одним из орудий.

Решение. Вероятность попадания в цель каждым из орудий не зависит от результата стрельбы из другого орудия, поэтому события A (попадание первого орудия) и B (попадание второго орудия) независимы.

Вероятность события AB (оба орудия дали попадание)

$$P(AB) = P(A)P(B) = 0{,}7 \cdot 0{,}8 = 0{,}56.$$

Искомая вероятность

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0{,}7 + 0{,}8 - 0{,}56 = 0{,}94.$$

Замечание 3. Так как в настоящем примере события A и B независимые, то можно было воспользоваться формулой $P = 1 - q_1 q_2$ (см. гл. III, § 5). В самом деле, вероятности событий, противоположных событиям A и B, т. е. вероятности промахов, таковы:

$$q_1 = 1 - p_1 = 1 - 0{,}7 = 0{,}3; \quad q_2 = 1 - p_2 = 1 - 0{,}8 = 0{,}2.$$

Искомая вероятность того, что при одном залпе хотя бы одно орудие даст попадание, равна

$$P = 1 - q_1 q_2 = 1 - 0{,}3 \cdot 0.2 = 0{,}94.$$

Как и следовало ожидать, получен тот же результат.

§ 2. Формула полной вероятности

Пусть событие A может наступить при условии появления одного из несовместных событий $B_1, B_2, \ldots, B_n$, которые образуют полную группу. Пусть известны вероятности этих событий и условные вероятности $P_{B_1}(A)$, $P_{B_2}(A)$, ..., $P_{B_n}(A)$ события A. Как найти вероятность события A? Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема. *Вероятность события A, которое может наступить лишь при условии появления одного из несовместных событий $B_1, B_2, \ldots, B_n$, образующих полную группу, равна сумме произведений вероятностей каждого из этих событий на соответствующую условную вероятность события A:*

$$P(A) = P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + \ldots$$
$$\ldots + P(B_n)P_{B_n}(A).$$

Эту формулу называют «формулой полной вероятности».

Доказательство. По условию, событие A может наступить, если наступит одно из несовместных событий $B_1, B_2, \ldots, B_n$. Другими словами, появление события A означает осуществление одного, безразлично какого, из несовместных событий B_1A, B_2A, ..., B_nA. Пользуясь для вычисления вероятности события A теоремой сложения, получим

$$P(A)=P(B_1A)+P(B_2A)+\ldots+P(B_nA). \qquad (*)$$

Остается вычислить каждое из слагаемых. По теореме умножения вероятностей зависимых событий имеем

$$P(B_1A)=P(B_1)P_{B_1}(A);\ P(B_2A)=P(B_2)P_{B_2}(A);\ \ldots;$$
$$P(B_nA)=P(B_n)P_{B_n}(A).$$

Подставив правые части этих равенств в соотношение (*), получим формулу полной вероятности

$$P(A)=P(B_1)P_{B_1}(A)+P(B_2)P_{B_2}(A)+\ldots$$
$$\ldots+P(B_n)P_{B_n}(A).$$

Пример 1. Имеется два набора деталей. Вероятность того, что деталь первого набора стандартна, равна 0,8, а второго — 0,9. Найти вероятность того, что взятая наудачу деталь (из наудачу взятого набора) — стандартная.

Решение. Обозначим через A событие «извлеченная деталь стандартна».

Деталь может быть извлечена либо из первого набора (событие B_1), либо из второго (событие B_2).

Вероятность того, что деталь вынута из первого набора, $P(B_1)=1/2$.

Вероятность того, что деталь вынута из второго набора, $P(B_2)=1/2$.

Условная вероятность того, что из первого набора будет извлечена стандартная деталь, $P_{B_1}(A)=0{,}8$.

Условная вероятность того, что из второго набора будет извлечена стандартная деталь, $P_{B_2}(A)=0{,}9$.

Искомая вероятность того, что извлеченная наудачу деталь — стандартная, по формуле полной вероятности равна

$$P(A)=P(B_1)P_{B_1}(A)+P(B_2)P_{B_2}(A)=$$
$$=0{,}5\cdot0{,}8+0{,}5\cdot0{,}9=0{,}85.$$

Пример 2. В первой коробке содержится 20 радиоламп, из них 18 стандартных; во второй коробке — 10 ламп, из них 9 стандартных. Из второй коробки наудачу взята лампа и переложена в первую. Найти вероятность того, что лампа, наудачу извлеченная из первой коробки, будет стандартной.

Решение. Обозначим через A событие «из первой коробки извлечена стандартная лампа».

Из второй коробки могла быть извлечена либо стандартная лампа (событие B_1), либо нестандартная (событие B_2).

Вероятность того, что из второй коробки извлечена стандартная лампа, $P(B_1)=9/10$.

Вероятность того, что из второй коробки извлечена нестандартная лампа, $P(B_2)=1/10$.

Условная вероятность того, что из первой коробки извлечена стандартная лампа, при условии, что из второй коробки в первую была переложена стандартная лампа, равна $P_{B_1}(A)=19/21$.

Условная вероятность того, что из первой коробки извлечена стандартная лампа, при условии, что из второй коробки в первую была переложена нестандартная лампа, равна $P_{B_2}(A)=18/21$.

Искомая вероятность того, что из первой коробки будет извлечена стандартная лампа, по формуле полной вероятности равна

$$P(A)=P(B_1)P_{B_1}(A)+P(B_2)P_{B_2}(A)=(9/10)\cdot(19/21)+\\+(1/10)\cdot(18/21)=0{,}9.$$

§ 3. Вероятность гипотез. Формулы Бейеса

Пусть событие A может наступить при условии появления одного из несовместных событий $B_1, B_2, \ldots, B_n$, образующих полную группу. Поскольку заранее не известно, какое из этих событий наступит, их называют *гипотезами*. Вероятность появления события A определяется по формуле полной вероятности (см. § 2):

$$P(A)=P(B_1)P_{B_1}(A)+P(B_2)P_{B_2}(A)+\ldots\\\ldots+P(B_n)P_{B_n}(A). \qquad (*)$$

Допустим, что произведено испытание, в результате которого появилось событие A. Поставим своей задачей определить, как изменились (в связи с тем, что событие A уже наступило) вероятности гипотез. Другими словами, будем искать условные вероятности

$$P_A(B_1),\ P_A(B_2),\ \ldots,\ P_A(B_n).$$

Найдем сначала условную вероятность $P_A(B_1)$. По теореме умножения имеем

$$P(AB_1)=P(A)P_A(B_1)=P(B_1)P_{B_1}(A).$$

Отсюда

$$P_A(B_1)=\frac{P(B_1)P_{B_1}(A)}{P(A)}.$$

Заменив здесь $P(A)$ по формуле (*), получим

$$P_A(B_1)=\frac{P(B_1)P_{B_1}(A)}{P(B_1)P_{B_1}(A)+P(B_2)P_{B_2}(A)+\ldots+P(B_n)P_{B_n}(A)}.$$

Аналогично выводятся формулы, определяющие условные вероятности остальных гипотез, т. е. условная вероятность любой гипотезы B_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ может быть вычислена по формуле

$$P_A(B_i)=\frac{P(B_i)\,P_{B_i}(A)}{P(B_1)\,P_{B_1}(A)+P(B_2)\,P_{B_2}(A)+\ldots+P(B_n)\,P_{B_n}(A)}.$$

Полученные формулы называют *формулами Бейеса* (по имени английского математика, который их вывел; опубликованы в 1764 г.). *Формулы Бейеса позволяют переоценить вероятности гипотез после того, как становится известным результат испытания, в итоге которого появилось событие A.*

Пример. Детали, изготовляемые цехом завода, попадают для проверки их на стандартность к одному из двух контролеров. Вероятность того, что деталь попадает к первому контролеру, равна 0,6, а ко второму — 0,4. Вероятность того, что годная деталь будет признана стандартной первым контролером, равна 0,94, а вторым — 0,98. Годная деталь при проверке была признана стандартной. Найти вероятность того, что эту деталь проверил первый контролер.

Решение. Обозначим через A событие, состоящее в том, что годная деталь признана стандартной. Можно сделать два предположения:

1) деталь проверил первый контролер (гипотеза B_1);

2) деталь проверил второй контролер (гипотеза B_2).

Искомую вероятность того, что деталь проверил первый контролер, найдем по формуле Бейеса:

$$P_A(B_1)=\frac{P(B_1)\,P_{B_1}(A)}{P(B_1)\,P_{B_1}(A)+P(B_2)\,P_{B_2}(A)}.$$

По условию задачи имеем:

$P(B_1)=0,6$ (вероятность того, что деталь попадает к первому контролеру);

$P(B_2)=0,4$ (вероятность того, что деталь попадет ко второму контролеру);

$P_{B_1}(A)=0,94$ (вероятность того, что годная деталь будет признана первым контролером стандартной);

$P_{B_2}(A)=0,98$ (вероятность того, что годная деталь будет признана вторым контролером стандартной).

Искомая вероятность

$$P_A(B_1)=(0,6\cdot 0,94)/(0,6\cdot 0,94+0,4\cdot 0,98)\approx 0,59.$$

Как видно, до испытания вероятность гипотезы B_1 равнялась 0,6, а после того, как стал известен результат испытания, вероятность этой гипотезы (точнее, условная вероятность) изменилась и стала равной 0,59. Таким образом, использование формулы Бейеса позволило переоценить вероятность рассматриваемой гипотезы.

Задачи

1. Два стрелка произвели по одному выстрелу. Вероятность попадания в мишень первым стрелком равна 0,7, а вторым — 0,6. Найти вероятность того, что хотя бы один из стрелков попал в мишень.

Отв. 0,88.

2. У сборщика имеется 16 деталей, изготовленных заводом № 1, и 4 детали завода № 2. Наудачу взяты 2 детали. Найти вероятность того, что хотя бы одна из них окажется изготовленной заводом № 1.

Отв. 92/95.

3. В группе спортсменов 20 лыжников, 6 велосипедистов и 4 бегуна. Вероятность выполнить квалификационную норму такова: для лыжника — 0,9, для велосипедиста — 0,8 и для бегуна — 0,75. Найти вероятность того, что спортсмен, выбранный наудачу, выполнит норму.

Отв. 0,86.

4. Сборщик получил 3 коробки деталей, изготовленных заводом № 1, и 2 коробки деталей, изготовленных заводом № 2. Вероятность того, что деталь завода № 1 стандартна, равна 0,8, а завода № 2 — 0,9, Сборщик наудачу извлек деталь из наудачу взятой коробки. Найти вероятность того, что извлечена стандартная деталь.

Отв. 0,84.

5. В первом ящике содержится 20 деталей, из них 15 стандартных; во втором — 30 деталей, из них 24 стандартных; в третьем — 10 деталей, из них 6 стандартных. Найти вероятность того, что наудачу извлеченная деталь из наудачу взятого ящика—стандартная.

Отв. 43/60.

6. В телевизионном ателье имеется 4 кинескопа. Вероятности того, что кинескоп выдержит гарантийный срок службы, соответственно равны 0,8; 0,85; 0,9; 0,95. Найти вероятность того, что взятый наудачу кинескоп выдержит гарантийный срок службы.

Отв. 0,875.

7. В двух ящиках имеются радиолампы. В первом ящике содержится 12 ламп, из них 1 нестандартная; во втором 10 ламп, из них 1 нестандартная. Из первого ящика наудачу взята лампа и переложена во второй. Найти вероятность того, что наудачу извлеченная из второго ящика лампа будет нестандартной.

Отв. 13/132.

8. Из полного набора 28 костей домино наудачу извлечена кость. Найти вероятность того, что вторую извлеченную наудачу кость можно приставить к первой.

Отв. 7/18.

9. Студент знает не все экзаменационные билеты. В каком случае вероятность вытащить неизвестный билет будет для него наименьшей: когда он берет билет первым или последним?

Отв. Вероятности одинаковы в обоих случаях.

10. В ящик, содержащий 3 одинаковых детали, брошена стандартная деталь, а затем наудачу извлечена одна деталь. Найти вероятность того, что извлечена стандартная деталь, если равновероятны все возможные предположения о числе стандартных деталей, первоначально находящихся в ящике.

Отв. 0,625.

11. При отклонении от нормального режима работы автомата срабатывает сигнализатор С-1 с вероятностью 0,8, а сигнализатор С-11 срабатывает с вероятностью 1. Вероятности того, что автомат снабжен сигнализатором С-1 или С-11, соответственно равны 0,6 и 0,4. Получен сигнал о разделке автомата. Что вероятнее: автомат снабжен сигнализатором С-1 или С-11?

Отв. Вероятность того, что автомат снабжен сигнализатором С-1, равна 6/11, а С-11 — 5/11.

12. Для участия в студенческих отборочных спортивных соревнованиях выделено из первой группы курса 4, из второй — 6, из третьей группы — 5 студентов. Вероятности того, что студент первой, второй и третьей группы попадает в сборную института, соответственно равны 0,9; 0,7 и 0,8. Наудачу выбранный студент в итоге соревнования попал в сборную. К какой из групп вероятнее всего принадлежал этот студент?

Отв. Вероятности того, что выбран студент первой, второй, третьей групп, соответственно равны: 18/59, 21/59, 20/59.

13. Вероятность для изделий некоторого производства удовлетворять стандарту равна 0,96. Предлагается упрощенная система проверки на стандартность, дающая положительный результат с вероятностью 0,98 для изделий, удовлетворяющих стандарту, а для изделий, которые не удовлетворяют стандарту,— с вероятностью 0,05. Найти вероятность того, что изделие, признанное при проверке стандартным, действительно удовлетворяет стандарту.

Отв. 0,998.

Глава пятая

ПОВТОРЕНИЕ ИСПЫТАНИЙ

§ 1. Формула Бернулли

Если производится несколько испытаний, причем вероятность события A в каждом испытании не зависит от исходов других испытаний, то такие испытания называют *независимыми относительно события A*.

В разных независимых испытаниях событие A может иметь либо различные вероятности, либо одну и ту же вероятность. Будем далее рассматривать лишь такие независимые испытания, в которых событие A имеет одну и ту же вероятность.

Ниже воспользуемся понятием *сложного события*, понимая под ним совмещение нескольких отдельных событий, которые называют *простыми*.

Пусть производится n независимых испытаний, в каждом из которых событие A может появиться либо не появиться. Условимся считать, что вероятность события A в каждом испытании одна и та же, а именно равна p. Следовательно, вероятность ненаступления события A в каждом испытании также постоянна и равна $q=1-p$.

Поставим перед собой задачу вычислить вероятность того, что при n испытаниях событие A осуществится ровно k раз и, следовательно, не осуществится $n-k$ раз. Важно подчеркнуть, что не требуется, чтобы событие A повторилось ровно k раз в определенной последовательности. Например, если речь идет о появлении события A три раза в четырех испытаниях, то возможны следующие сложные события: $AAA\bar{A}$, $AA\bar{A}A$, $A\bar{A}AA$, $\bar{A}AAA$. Запись $AAA\bar{A}$ означает, что в первом, втором и третьем испытаниях событие A наступило, а в четвертом испытании оно не появилось, т. е. наступило противоположное событие $\bar{A}$; соответственный смысл имеют и другие записи.

Искомую вероятность обозначим $P_n(k)$. Например, символ $P_5(3)$ означает вероятность того, что в пяти испытаниях событие появится ровно 3 раза и, следовательно, не наступит 2 раза.

Поставленную задачу можно решить с помощью так называемой формулы Бернулли.

Вывод формулы Бернулли. Вероятность одного сложного события, состоящего в том, что в n испытаниях событие A наступит k раз и не наступит $n-k$ раз, по теореме умножения вероятностей независимых событий равна $p^k q^{n-k}$. Таких сложных событий может быть столько, сколько можно составить сочетаний из n элементов по k элементов, т. е. C_n^k. Так как эти сложные события несовместны, то по теореме сложения вероятностей несовместных событий искомая вероятность равна сумме вероятностей всех возможных сложных событий. Поскольку же вероятности всех этих сложных событий одинаковы, то искомая вероятность (появления k раз события A в n испытаниях) равна вероятности одного сложного события, умноженной на их число:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$$

или

$$P_n(k) = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} p^k q^{n-k}.$$

Полученную формулу называют *формулой Бернулли*.

Пример. Вероятность того, что расход электроэнергии в продолжение одних суток не превысит установленной нормы, равна $p=0,75$. Найти вероятность того, что в ближайшие 6 суток расход электроэнергии в течение 4 суток не превысит нормы.

Решение. Вероятность нормального расхода электроэнергии в продолжение каждых из 6 суток постоянна и равна $p=0,75$. Следовательно, вероятность перерасхода электроэнергии в каждые сутки также постоянна и равна $q=1-p=1-0,75=0,25$.

Искомая вероятность по формуле Бернулли равна

$$P_6(4) = C_6^4 p^4 q^2 = C_6^2 p^4 q^2 = \frac{6\cdot 5}{1\cdot 2}(0,75)^4\cdot(0,25)^2 = 0,30.$$

§ 2. Локальная теорема Лапласа

Выше была выведена формула Бернулли, позволяющая вычислить вероятность того, что событие появится в n испытаниях ровно k раз. При выводе мы предполагали, что вероятность появления события в каждом испытании постоянна. Легко видеть, что пользоваться формулой Бернулли при больших значениях n достаточно трудно, так как формула требует выполнения действий над громадными числами. Например, если $n=50$, $k=30$, $p=0{,}1$, то для отыскания вероятности $P_{50}(30)$ надо вычислить выражение $P_{50}(30)=50!/(30!20!)\cdot(0{,}1)^{30}\cdot(0{,}9)^{20}$, где $50!=30\,414\,093\cdot 10^{57}$, $30!=26\,525\,286\cdot 10^{25}, 20!=$ $=24\,329\,020\cdot 10^{11}$. Правда, можно несколько упростить вычисления, пользуясь специальными таблицами логарифмов факториалов. Однако и этот путь остается громоздким и к тому же имеет существенный недостаток: таблицы содержат приближенные значения логарифмов, поэтому в процессе вычислений накапливаются погрешности; в итоге окончательный результат может значительно отличаться от истинного.

Естественно возникает вопрос: нельзя ли вычислить интересующую нас вероятность, не прибегая к формуле Бернулли? Оказывается, можно. Локальная теорема Лапласа и дает асимптотическую[*] формулу, которая позволяет приближенно найти вероятность появления события ровно k раз в n испытаниях, если число испытаний достаточно велико.

Заметим, что для частного случая, а именно для $p=1/2$, асимптотическая формула была найдена в 1730 г. Муавром; в 1783 г. Лаплас обобщил формулу Муавра для произвольного p, отличного от 0 и 1. Поэтому теорему, о которой здесь идет речь, иногда называют *теоремой Муавра — Лапласа.*

Доказательство локальной теоремы Лапласа довольно сложно, поэтому мы приведем лишь формулировку теоремы и примеры, иллюстрирующие ее использование.

Локальная теорема Лапласа. *Если вероятность p появления события A в каждом испытании постоянна и отлична от нуля и единицы, то вероятность $P_n(k)$ того,*

---

[*] Функцию $\varphi(x)$ называют асимптотическим приближением функции $f(x)$, если $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=1$.

что событие A появится в n испытаниях ровно k раз, приближенно равна (тем точнее, чем больше n) значению функции

$$y=\frac{1}{\sqrt{npq}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}=\frac{1}{\sqrt{npq}}\cdot\varphi(x)$$

при $x=(k-np)/\sqrt{npq}$.

Имеются таблицы, в которых помещены значения функции $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$, соответствующие положительным значениям аргумента x (см. приложение 1). Для отрицательных значений аргумента пользуются теми же таблицами, так как функция $\varphi(x)$ четна, т. е. $\varphi(-x)=\varphi(x)$.

Итак, вероятность того, что событие A появится в n независимых испытаниях ровно k раз, приближенно равна

$$P_n(k)\approx\frac{1}{\sqrt{npq}}\cdot\varphi(x),$$

где $x=(k-np)/\sqrt{npq}$.

Пример 1. Найти вероятность того, что событие A наступит ровно 80 раз в 400 испытаниях, если вероятность появления этого события в каждом испытании равна 0,2.

Решение. По условию, $n=400$; $k=80$; $p=0{,}2$; $q=0{,}8$. Воспользуемся асимптотической формулой Лапласа:

$$P_{400}(80)\approx\frac{1}{\sqrt{400\cdot0{,}2\cdot0{,}8}}\cdot\varphi(x)=\frac{1}{8}\cdot\varphi(x).$$

Вычислим определяемое данными задачи значение x:

$$x=(k-np)/\sqrt{npq}=(80-400\cdot0{,}2)/8=0.$$

По таблице приложения 1 находим $\varphi(0)=0{,}3989$.

Искомая вероятность

$$P_{400}(80)=(1/8)\cdot0{,}3989=0{,}04986.$$

Формула Бернулли приводит примерно к такому же результату (выкладки ввиду их громоздкости опущены):

$$P_{400}(80)=0{,}0498.$$

Пример 2. Вероятность поражения мишени стрелком при одном выстреле $p=0{,}75$. Найти вероятность того, что при 10 выстрелах стрелок поразит мишень 8 раз.

Решение. По условию, $n=10$; $k=8$; $p=0{,}75$; $q=0{,}25$. Воспользуемся асимптотической формулой Лапласа:

$$P_{10}(8)\simeq\frac{1}{\sqrt{10\cdot0{,}75\cdot0{,}25}}\cdot\varphi(x)=0{,}7301\cdot\varphi(x).$$

Вычислим определяемое данными задачи значение x:

$$x=\frac{k-np}{\sqrt{npq}}=\frac{8-10\cdot 0,75}{\sqrt{10\cdot 0,75\cdot 0,25}}\simeq 0,36.$$

По таблице приложения 1 находим $\varphi(0,36)=0,3739$.

Искомая вероятность

$$P_{10}(8)=0,7301\cdot 0,3739=0,273.$$

Формула Бернулли приводит к иному результату, а именно $P_{10}(8)=0,282$. Столь значительное расхождение ответов объясняется тем, что в настоящем примере n имеет малое значение (формула Лапласа дает достаточно хорошие приближения лишь при достаточно больших значениях n).

§ 3. Интегральная теорема Лапласа

Вновь предположим, что производится n испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A постоянна и равна p $(0<p<1)$. Как вычислить вероятность $P_n(k_1, k_2)$ того, что событие A появится в n испытаниях не менее k_1 и не более k_2 раз (для краткости будем говорить «от k_1 до k_2 раз»)? На этот вопрос отвечает интегральная теорема Лапласа, которую мы приводим ниже, опустив доказательство.

Теорема. *Если вероятность p наступления события A в каждом испытании постоянна и отлична от нуля и единицы, то вероятность $P_n(k_1, k_2)$ того, что событие A появится в n испытаниях от k_1 до k_2 раз, приближенно равна определенному интегралу*

$$P_n(k_1, k_2)\simeq\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x'}^{x''}e^{-z^2/2}\,dz, \qquad (*)$$

где $x'=(k_1-np)/\sqrt{npq}$ и $x''=(k_2-np)/\sqrt{npq}$.

При решении задач, требующих применения интегральной теоремы Лапласа, пользуются специальными таблицами, так как неопределенный интеграл $\int e^{-z^2/2}\,dz$ не выражается через элементарные функции. Таблица для интеграла $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-z^2/2}\,dz$ приведена в конце книги (см. приложение 2). В таблице даны значения функции $\Phi(x)$ для положительных значений x и для $x=0$; для $x<0$ пользуются той же таблицей [функция $\Phi(x)$ нечетна, т. е. $\Phi(-x) = -\Phi(x)$]. В таблице приведены значения интеграла лишь до $x=5$, так как для $x>5$ можно принять $\Phi(x)=0{,}5$. Функцию $\Phi(x)$ часто называют *функцией Лапласа*.

Для того чтобы можно было пользоваться таблицей функции Лапласа, преобразуем соотношение (*) так:

$$P_n(k_1,\ k_2) \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{x'}^{0} e^{-z^2/2}\,dz + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{x''} e^{-z^2/2}\,dz =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{x''} e^{-z^2/2}\,dz - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{x'} e^{-z^2/2}\,dz = \Phi(x'') - \Phi(x').$$

Итак, вероятность того, что событие A появится в n независимых испытаниях от k_1 до k_2 раз,

$$P_n(k_1,\ k_2) \simeq \Phi(x'') - \Phi(x'),$$

где $x' = (k_1 - np)/\sqrt{npq}$ и $x'' = (k_2 - np)/\sqrt{npq}$.

Приведем примеры, иллюстрирующие применение интегральной теоремы Лапласа.

Пример. Вероятность того, что деталь не прошла проверку ОТК, равна $p=0{,}2$. Найти вероятность того, что среди 400 случайно отобранных деталей окажется непроверенных от 70 до 100 деталей.

Решение. По условию, $p=0{,}2$; $q=0{,}8$; $n=400$; $k_1=70$; $k_2=100$. Воспользуемся интегральной теоремой Лапласа:

$$P_{400}(70,\ 100) \approx \Phi(x'') - \Phi(x').$$

Вычислим нижний и верхний пределы интегрирования:

$$x' = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{70 - 400\cdot 0{,}2}{\sqrt{400\cdot 0{,}2\cdot 0{,}8}} = -1{,}25;$$

$$x'' = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{100 - 400\cdot 0{,}2}{\sqrt{400\cdot 0{,}2\cdot 0{,}8}} = 2{,}5.$$

Таким образом, имеем

$$P_{400}(70,\ 100) = \Phi(2{,}5) - \Phi(-1{,}25) = \Phi(2{,}5) + \Phi(1{,}25).$$

По таблице приложения 2 находим:

$$\Phi(2{,}5) = 0{,}4938;\quad \Phi(1{,}25) = 0{,}3944.$$

Искомая вероятность

$$P_{400}(70,\ 100) = 0{,}4938 + 0{,}3944 = 0{,}8882.$$

Замечание. Обозначим через m число появлений события A при n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность наступления события A постоянна и равна p. Если число m изменяется от k_1 до k_2, то дробь $(m-np)/\sqrt{npq}$ изменяется от $(k_1-np)/\sqrt{npq}=x'$ до $(k_2-np)/\sqrt{npq}=x''$. Следовательно, интегральную теорему Лапласа можно записать и так:

$$P\left(x' \leqslant \frac{m-np}{\sqrt{npq}} \leqslant x''\right) \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{x'}^{x''} \mathrm{e}^{-z^2/2}\, dz.$$

Эта форма записи используется ниже.

§ 4. Вероятность отклонения относительной частоты от постоянной вероятности в независимых испытаниях

Вновь будем считать, что производится n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A постоянна и равна p $(0 < p < 1)$. Поставим перед собой задачу найти вероятность того, что отклонение относительной частоты m/n от постоянной вероятности p по абсолютной величине не превышает заданного числа $\varepsilon > 0$. Другими словами, найдем вероятность осуществления неравенства

$$|m/n - p| \leqslant \varepsilon. \qquad (*)$$

Эту вероятность будем обозначать так: $P(|m/n - p| \leqslant \varepsilon)$. Заменим неравенство (*) ему равносильными:

$$-\varepsilon \leqslant m/n - p \leqslant \varepsilon \quad \text{или} \quad -\varepsilon \leqslant (m-np)/n \leqslant \varepsilon.$$

Умножая эти неравенства на положительный множитель $\sqrt{n/(pq)}$, получим неравенства, равносильные исходному:

$$-\varepsilon\sqrt{n/(pq)} \leqslant (m-np)/\sqrt{npq} \leqslant \varepsilon\sqrt{n/(pq)}.$$

Воспользуемся интегральной теоремой Лапласа в форме, указанной в замечании (см. § 3). Положив $x' = -\varepsilon\sqrt{n/(pq)}$ и $x'' = \varepsilon\sqrt{n/(pq)}$, имеем

$$P\left(-\varepsilon\sqrt{n/(pq)} \leqslant (m-np)/\sqrt{npq} \leqslant \varepsilon\sqrt{n/(nq)}\right) \approx$$

$$\approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\varepsilon\sqrt{n/(pq)}}^{\varepsilon\sqrt{n/(pq)}} \mathrm{e}^{-z^2/2}\, dz = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{\varepsilon\sqrt{n/(pq)}} \mathrm{e}^{-z^2/2}\, dz =$$

$$= 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{n/(pq)}\right).$$

Наконец, заменив неравенства, заключенные в скобках, равносильным им исходным неравенством, окончательно получим

$$P(|m/n - p| \leqslant \varepsilon) \simeq 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{n/(pq)}\right).$$

Итак, вероятность осуществления неравенства $|m/n-p|\leqslant\varepsilon$ приближенно равна значению удвоенной функции Лапласа $2\Phi(x)$ при $x=\varepsilon\sqrt{n/(pq)}$.

Пример 1. Вероятность того, что деталь не стандартна, $p=0,1$. Найти вероятность того, что среди случайно отобранных 400 деталей относительная частота появления нестандартных деталей отклонится от вероятности $p=0,1$ по абсолютной величине не более чем на 0,03.

Решение. По условию, $n=400$; $p=0,1$; $q=0,9$; $\varepsilon=0,03$. Требуется найти вероятность $P(|m/400-0,1|\leqslant 0,03)$. Пользуясь формулой $P(|m/n-p|\leqslant\varepsilon)\approx 2\Phi(\varepsilon\sqrt{n/(pq)})$, имеем

$$P(|m/400-0,1|\leqslant 0,03)\approx 2\Phi(0,03\sqrt{400/(0,1\cdot 0,9)})=2\Phi(2).$$

По таблице приложения 2 находим $\Phi(2)=0,4772$. Следовательно, $2\Phi(2)=0,9544$.

Итак, искомая вероятность приближенно равна 0,9544.

Смысл полученного результата таков: если взять достаточно большое число проб по 400 деталей в каждой, то примерно в 95,44% этих проб отклонение относительной частоты от постоянной вероятности $p=0,1$ по абсолютной величине не превысит 0,03.

Пример 2. Вероятность того, что деталь не стандартна, $p=0,1$. Найти, сколько деталей надо отобрать, чтобы с вероятностью, равной 0,9544, можно было утверждать, что относительная частота появления нестандартных деталей (среди отобранных) отклонится от постоянной вероятности p по абсолютной величине не более чем на 0,03.

Решение. По условию, $p=0,1$; $q=0,9$; $\varepsilon=0,03$; $P(|m/n-0,1|\leqslant 0,03)=0,9544$. Требуется найти n.

Воспользуемся формулой

$$P(|m/n-p|\leqslant\varepsilon)\approx 2\Phi(\varepsilon\sqrt{n/(pq)}).$$

В силу условия

$$2\Phi(0,03\sqrt{n/(0,1\cdot 0,9)})=2\Phi(0,1\sqrt{n})=0,9544.$$

Следовательно, $\Phi(0,1\sqrt{n})=0,4772$.

По таблице приложения 2 находим $\Phi(2)=0,4772$.

Для отыскания числа n получаем уравнение $0,1\sqrt{n}=2$. Отсюда искомое число деталей $n=400$.

Смысл полученного результата таков: если взять достаточно большое число проб по 400 деталей, то в 95,44% этих проб относительная частота появления нестандартных деталей будет отличаться от постоянной вероятности $p=0,1$ по абсолютной величине не более чем на 0,03, т. е. относительная частота заключена в границах от 0,07 $(0,1-0,03=0,07)$ до 0,13 $(0,1+0,03=0,13)$. Другими словами, число нестандартных деталей в 95,44% проб будет заключено между 28 (7% от 400) и 52 (13% от 400).

Если взять лишь одну пробу из 400 деталей, то с большой уверенностью можно ожидать, что в этой пробе будет нестандартных деталей не менее 28 и не более 52. Возможно, хотя и маловероятно, что нестандартных деталей окажется меньше 28 либо больше 52.

Задачи

1. В цехе 6 моторов. Для каждого мотора вероятность того, что он в данный момент включен, равна 0,8. Найти вероятность того, что в данный момент: а) включено 4 мотора; б) включены все моторы; в) выключены все моторы.

Отв. а) $P_6(4)=0{,}246$; б) $P_6(6)=0{,}26$; в) $P_6(0)=0{,}000064$.

2. Найти вероятность того, что событие A появится в пяти независимых испытаниях не менее двух раз, если в каждом испытании вероятность появления события A равна 0,3.

Отв. $P=1-[P_5(0)+P_5(1)]=0{,}472$.

3. Событие B появится в случае, если событие A появится не менее двух раз. Найти вероятность того, что наступит событие B, если будет произведено 6 независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A равна 0,4.

Отв. $P=1-[P_6(0)+P_6(1)]=0{,}767$.

4. Произведено 8 независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A равна 0,1. Найти вероятность того, что событие A появится хотя бы 2 раза.

Отв. $P=1-[P_8(0)+P_8(1)]=0{,}19$.

5. Монету бросают 6 раз. Найти вероятность того, что герб выпадет: а) менее двух раз; б) не менее двух раз.

Отв. а) $P=P_6(0)+P_6(1)=7/64$; б) $Q=1-[P_6(0)+P_6(1)]=57/64$.

6. Вероятность попадания в цель при одном выстреле из орудия $p=0{,}9$. Вероятность поражения цели при k попаданиях ($k\geqslant 1$) равна $1-q^k$. Найти вероятность того, что цель будет поражена, если сделано два выстрела.

Указание. Воспользоваться формулами Бернулли и полной вероятности.

Отв. 0,9639.

7. Найти приближенно вероятность того, что при 400 испытаниях событие наступит ровно 104 раза, если вероятность его появления в каждом испытании равна 0,2.

Отв. $P_{400}(104)=0{,}0006$.

8. Вероятность поражения мишени стрелком при одном выстреле равна 0,75. Найти вероятность того, что при 100 выстрелах мишень будет поражена: а) не менее 70 и не более 80 раз; б) не более 70 раз.

Отв. а) $P_{100}(70,80)=2\Phi(1{,}15)=0{,}7498$;
б) $P_{100}(0;\ 70)=-\Phi(1{,}15)+0{,}5=0{,}1251$.

9. Вероятность появления события в каждом из 10 000 независимых испытаний $p=0{,}75$. Найти вероятность того, что относительная частота появления события отклонится от его вероятности по абсолютной величине не более чем на 0,001.

Отв. $P=2\Phi(0{,}23)=0{,}182$.

10. Вероятность появления события в каждом из независимых испытаний равна 0,2. Найти, какое отклонение относительной частоты появления события от его вероятности можно ожидать с вероятностью 0,9128 при 5000 испытаниях.

Отв. $\varepsilon=0{,}00967$.

11. Сколько раз надо бросить монету, чтобы с вероятностью 0,6 можно было ожидать, что отклонение относительной частоты появлений герба от вероятности $p=0{,}5$ окажется по абсолютной величине не более 0,01?

Отв. $n=1764$.

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Глава шестая

ВИДЫ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН. ЗАДАНИЕ ДИСКРЕТНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

§ 1. Случайная величина

Уже в первой части приводились события, состоящие в появлении того или иного числа. Например, при бросании игральной кости могли появиться числа 1, 2, 3, 4, 5 и 6. Наперед определить число выпавших очков невозможно, поскольку оно зависит от многих случайных причин, которые полностью не могут быть учтены. В этом смысле число очков есть величина случайная; числа 1, 2, 3, 4, 5 и 6 есть *возможные значения* этой величины.

Случайной называют величину, которая в результате испытания примет одно и только одно возможное значение, наперед не известное и зависящее от случайных причин, которые заранее не могут быть учтены.

Пример 1. Число родившихся мальчиков среди ста новорожденных есть случайная величина, которая имеет следующие возможные значения: 0, 1, 2, ..., 100.

Пример 2. Расстояние, которое пролетит снаряд при выстреле из орудия, есть случайная величина. Действительно, расстояние зависит не только от установки прицела, но и от многих других причин (силы и направления ветра, температуры и т. д.), которые не могут быть полностью учтены. Возможные значения этой величины принадлежат некоторому промежутку (a, b).

Будем далее обозначать случайные величины прописными буквами X, Y, Z, а их возможные значения — соответствующими строчными буквами x, y, z. Например, если случайная величина X имеет три возможных значения, то они будут обозначены так: x_1, x_2, x_3.

§ 2. Дискретные и непрерывные случайные величины

Вернемся к примерам, приведенным выше. В первом из них случайная величина X могла принять одно из следующих возможных значений: 0, 1, 2, ..., 100. Эти значения отделены одно от другого промежутками, в которых нет возможных значений X. Таким образом, в этом примере случайная величина принимает отдельные, изолированные возможные значения. Во втором примере случайная величина могла принять любое из значений промежутка (a, b). Здесь нельзя отделить одно возможное значение от другого промежутком, не содержащим возможных значений случайной величины.

Уже из сказанного можно заключить о целесообразности различать случайные величины, принимающие лишь отдельные, изолированные значения, и случайные величины, возможные значения которых сплошь заполняют некоторый промежуток.

Дискретной (прерывной) называют случайную величину, которая принимает отдельные, изолированные возможные значения с определенными вероятностями. Число возможных значений дискретной случайной величины может быть конечным или бесконечным.

Непрерывной называют случайную величину, которая может принимать все значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка. Очевидно, число возможных значений непрерывной случайной величины бесконечно.

Замечание. Настоящее определение непрерывной случайной величины не является точным. Более строгое определенне будет дано позднее.

§ 3. Закон распределения вероятностей дискретной случайной величины

На первый взгляд может показаться, что для задания дискретной случайной величины достаточно перечислить все ее возможные значения. В действительности это не так: случайные величины могут иметь одинаковые перечни возможных значеиий, а вероятности их — различные. Поэтому для задания дискретной случайной величины недостаточно перечислить все возможные ее значения, нужно еще указать их вероятности.

Законом распределения дискретной случайной величины называют соответствие между возможными значениями и их вероятностями; его можно задать таблично, аналитически (в виде формулы) и графически.

При табличном задании закона распределения дискретной случайной величины первая строка таблицы содержит возможные значения, а вторая — их вероятности:

$$\begin{array}{ccccc} X & x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ p & p_1 & p_2 & \ldots & p_n \end{array}$$

Приняв во внимание, что в одном испытании случайная величина принимает одно и только одно возможное значение, заключаем, что события $X=x_1$, $X=x_2$, $\ldots$, $X=x_n$ образуют полную группу; следовательно, сумма вероятностей этих событий, т. е. сумма вероятностей второй строки таблицы, равна единице:

$$p_1+p_2+\ldots+p_n=1.$$

Если множество возможных значений X бесконечно (счетно), то ряд $p_1+p_2+\ldots$ сходится и его сумма равна единице.

Пример. В денежной лотерее выпущено 100 билетов. Разыгрывается один выигрыш в 50 руб. и десять выигрышей по 1 руб. Найти закон распределения случайной величины X — стоимости возможного выигрыша для владельца одного лотерейного билета.

Решение. Напишем возможные значения X: $x_1=50$, $x_2=1$, $x_3=0$. Вероятности этих возможных значений таковы: $p_1=0{,}01$, $p_2=0{,}01$, $p_3=1-(p_1+p_2)=0{,}89$.

Напишем искомый закон распределения:

X	50	10	0
p	0,01	0,1	0,89

Контроль: $0{,}01+0{,}1+0{,}89=1$.

Для наглядности закон распределения дискретной случайной величины можно изобразить и графически, для чего в прямоугольной системе координат строят точки (x_i, p_i), а затем соединяют их отрезками прямых. Полученную фигуру называют *многоугольником распределения*.

§ 4. Биномиальное распределение

Пусть производится n независимых испытаний, в каждом из которых событие A может появиться либо не появиться. Вероятность наступления события во всех испытаниях постоянна и равна p (следовательно, вероятность непоявления $q=1-p$). Рассмотрим в качестве дискретной случайной величины X число появлений события A в этих испытаниях.

Поставим перед собой задачу: найти закон распределения величины X. Для ее решения требуется определить возможные значения X и их вероятности. Очевидно, событие A в n испытаниях может либо не появиться, либо появиться 1 раз, либо 2 раза, ..., либо n раз. Таким образом, возможные значения X таковы: $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=2$, ..., $x_{n+1}=n$. Остается найти вероятности этих возможных значений, для чего достаточно воспользоваться формулой Бернулли:

$$P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}, \qquad (*)$$

где $k=0, 1, 2, \ldots, n$.

Формула (*) и является аналитическим выражением искомого закона распределения.

Биномиальным называют распределение вероятностей, определяемое формулой Бернулли. Закон назван «биномиальным» потому, что правую часть равенства (*) можно рассматривать как общий член разложения бинома Ньютона:

$$(p+q)^n = C_n^n p^n + C_n^{n-1}p^{n-1}q + \ldots + C_n^k p^k q^{n-k} + \ldots + C_n^0 q^n.$$

Таким образом, первый член разложения p^n определяет вероятность наступления рассматриваемого события n раз в n независимых испытаниях; второй член $np^{n-1}q$ определяет вероятность наступления события $n-1$ раз; ...; последний член q^n определяет вероятность того, что событие не появится ни разу.

Напишем биномиальный закон в виде таблицы:

X	n	$n-1$	...	k	...	0
P	p^n	$np^{n-1}q$	...	$C_n^k p^k q^{n-k}$	...	q^n

Пример. Монета брошена 2 раза. Написать в виде таблицы закон распределения случайной величины X — числа выпадений «герба».

Решение. Вероятность появления «герба» в каждом бросании монеты $p=1/2$, следовательно, вероятность непоявления «герба» $q=1-1/2=1/2$.

При двух бросаниях монеты «герб» может появиться либо 2 раза, либо 1 раз, либо совсем не появиться. Таким образом, возможные значения X таковы: $x_1=2$, $x_2=1$, $x_3=0$. Найдем вероятности этих возможных значений по формуле Бернулли:

$$P_2(2)=C_2^2p^2=(1/2)^2=0{,}25,$$
$$P_2(1)=C_2^1pq=2\cdot(1/2)\cdot(1/2)=0{,}5,$$
$$P_2(0)=C_2^0q^2=(1/2)^2=0{,}25.$$

Напишем искомый закон распределения:

X	2	1	0
p	0,25	0,5	0,25

Контроль: $0{,}25+0{,}5+0{,}25=1$.

§ 5. Распределение Пуассона

Пусть производится n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A равна p. Для определения вероятности k появлений события в этих испытаниях используют формулу Бернулли. Если же n велико, то пользуются асимптотической формулой Лапласа. Однако эта формула непригодна, если вероятность события мала ($p\leqslant 0{,}1$). В этих случаях (n велико, p мало) прибегают к асимптотической формуле Пуассона.

Итак, поставим перед собой задачу найти вероятность того, что при очень большом числе испытаний, в каждом из которых вероятность события очень мала, событие наступит ровно k раз. Сделаем важное допущение: произведение np сохраняет постоянное значение, а именно $np=\lambda$. Как будет следовать из дальнейшего (см. гл. VII, § 5), это означает, что среднее число появлений события в различных сериях испытаний, т. е. при различных значениях n, остается неизменным.

Воспользуемся формулой Бернулли для вычисления интересующей нас вероятности:

$$P_n(k)=\frac{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(k-1)]}{k!}p^k(1-p)^{n-k}.$$

Так как $pn=\lambda$, то $p=\lambda/n$. Следовательно,

$$P_n(k)=\frac{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(k-1)]}{k!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}.$$

Приняв во внимание, что n имеет очень большое значение, вместо $P_n(k)$ найдем $\lim\limits_{n\to\infty}P_n(k)$. При этом будет найдено лишь приближенное значение отыскиваемой вероятности: n хотя и велико, но конечно, а при отыскании предела мы устремим n к бесконечности. Заметим, что поскольку произведение np сохраняет постоянное значение, то при $n \to \infty$ вероятность $p \to 0$.

Итак,

$$P_n(k) \simeq \lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(k-1)]}{k!} \cdot \frac{\lambda^k}{n^k}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} =$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!} \lim_{n\to\infty}\left[1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}\right]=$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!} \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n} \cdot \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k} = \frac{\lambda^k}{k!}\cdot e^{-\lambda}\cdot 1.$$

Таким образом (для простоты записи знак приближенного равенства опущен),

$$P_n(k) = \lambda^k e^{-\lambda}/k!$$

Эта формула выражает закон распределения Пуассона вероятностей массовых (n велико) и редких (p мало) событий.

Замечание. Имеются специальные таблицы, пользуясь которыми можно найти $P_n(k)$, зная k и λ.

Пример. Завод отправил на базу 5000 доброкачественных изделий. Вероятность того, что в пути изделие повредится, равно 0,0002. Найти вероятность того, что на базу прибудут 3 негодных изделия.

Решение. По условию, $n = 5000$, $p = 0{,}0002$, $k = 3$. Найдем λ:

$$\lambda = np = 5000 \cdot 0{,}0002 = 1.$$

По формуле Пуассона искомая вероятность приближенно равна

$$P_{5000}(3) = \lambda^k e^{-\lambda}/k! = e^{-1}/3! = 1/6e \simeq 0{,}06.$$

§ 6. Простейший поток событий

Рассмотрим события, которые наступают в случайные моменты времени.

Потоком событий называют последовательность событий, которые наступают в случайные моменты времени. Примерами потоков служат: поступление вызовов на АТС, на пункт неотложной медицинской помощи, прибытие самолетов в аэропорт, клиентов на предприятие бытового обслуживания, последовательность отказов элементов и многие другие.

Среди свойств, которыми могут обладать потоки, выделим свойства стационарности, отсутствия последействия и ординарности.

Свойство стационарности характеризуется тем, что вероятность появления k событий на любом промежутке времени зависит только от числа k и от длительности t промежутка и не зависит от начала его отсчета; при этом различные промежутки времени предполагаются непересекающимися. Например, вероятности появления k событий на промежутках времени (1; 7), (10; 16), (T; $T+6$) одинаковой длительности $t=6$ ед. времени равны между собой.

Итак, *если поток обладает свойством стационарности, то вероятность появления k событий за промежуток времени длительности t есть функция, зависящая только от k и t.*

Свойство отсутствия последействия характеризуется тем, что вероятность появления k событий на любом промежутке времени не зависит от того, появлялись или не появлялись события в моменты времени, предшествующие началу рассматриваемого промежутка. Другими словами, условная вероятность появления k событий на любом промежутке времени, вычисленная при любых предположениях о том, чтó происходило до начала рассматриваемого промежутка (сколько событий появилось, в какой последовательности), равна безусловной вероятности. Таким образом, предыстория потока не сказывается на вероятности появления событий в ближайшем будущем.

Итак, *если поток обладает свойством отсутствия последействия, то имеет место взаимная независимость появлений того или иного числа событий в непересекающиеся промежутки времени.*

Свойство ординарности характеризуется тем, что появление двух и более событий за малый промежуток времени практически невозможно. Другими словами, вероятность появления более одного события пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью появления только одного события.

Итак, *если поток обладает свойством ординарности, то за бесконечно малый промежуток времени может появиться не более одного события.*

Простейшим (пуассоновским) называют поток событий, который обладает свойствами стационарности, отсутствия последействия и ординарности.

Замечание. Часто на практике трудно установить, обладает ли поток перечисленными выше свойствами. Поэтому были найдены и другие условия, при соблюдении которых поток можно считать простейшим или близким к простейшему. В частности, установлено, *что если поток представляет собой сумму очень большого числа неза-*

висимых стационарных потоков, влияние каждого из которых на всю сумму (суммарный поток) ничтожно мало, то суммарный поток (при условии его ординарности) близок к простейшему.

Интенсивностью потока λ называют среднее число событий, которые появляются в единицу времени.

Можно доказать, что если постоянная интенсивность потока известна, то вероятность появления k событий простейшего потока за время длительностью t определяется формулой Пуассона

$$P_t(k) = (\lambda t)^k \cdot e^{-\lambda t}/k!.$$

Эта формула отражает все свойства простейшего потока.

Действительно, из формулы видно, что вероятность появления k событий за время t, при заданной интенсивности является функцией k и t, что характеризует свойство стационарности.

Формула не использует информации о появлении событий до начала рассматриваемого промежутка, что характеризует свойство отсутствия последействия.

Убедимся, что формула отражает свойство ординарности. Положив $k=0$ и $k=1$, найдем соответственно вероятности непоявления событий и появления одного события:

$$P_t(0) = e^{-\lambda t}, \quad P_t(1) = \lambda t e^{-\lambda t}.$$

Следовательно, вероятность появления более одного события

$$P_t(k > 1) = 1 - [P_t(0) + P_t(1)] = 1 - [e^{-\lambda t} + \lambda t e^{-\lambda t}].$$

Пользуясь разложением

$$e^{-\lambda t} = 1 - \lambda t + (\lambda t)^2/2! - \ldots,$$

после элементарных преобразований получим

$$P_t(k > 1) = (\lambda t)^2/2 + \ldots .$$

Сравнивая $P_t(1)$ и $P_t(k > 1)$, заключаем, что при малых значениях t вероятность появления более одного события пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью наступления одного события, что характеризует свойство ординарности.

Итак, формулу Пуассона можно считать математической моделью простейшего потока событий.

Пример. Среднее число вызовов, поступающих на АТС в одну минуту, равно двум. Найти вероятности того, что за 5 мин поступит: а) 2 вызова; б) менее двух вызовов; в) не менее двух вызовов. Поток вызовов предполагается простейшим.

Решение. По условию, $\lambda = 2$, $t = 5$, $k = 2$. Воспользуемся формулой Пуассона

$$P_t(k) = (\lambda t)^k \cdot e^{-\lambda t}/k!$$

а) Искомая вероятность того, что за 5 мин поступит 2 вызова,

$$P_5(2) = 10^2 \cdot e^{-10}/2! = 100 \cdot 0{,}000045/2 = 0{,}00225.$$

Это событие практически невозможно.

б) События «не поступило ни одного вызова» и «поступил один вызов» несовместны, поэтому по теореме сложения искомая вероятность того, что за 5 мин поступит менее двух вызовов, равна

$$P_5(k < 2) = P_5(0) + P_5(1) = e^{-10} + (10 \cdot e^{-10})/1! = 0{,}000495.$$

Это событие практически невозможно.

в) События «поступило менее двух вызовов» и «поступило не менее двух вызовов» противоположны, поэтому искомая вероятность того, что за 5 мин поступит не менее двух вызовов,

$$P_5(k \geqslant 2) = 1 - P_5(k < 2) = 1 - 0{,}000495 = 0{,}999505.$$

Это событие практически достоверно.

§ 7. Геометрическое распределение

Пусть производятся независимые испытания, в каждом из которых вероятность появления события A равна p $(0 < p < 1)$ и, следовательно, вероятность его непоявления $q = 1 - p$. Испытания заканчиваются, как только появится событие A. Таким образом, если событие A появилось в k-м испытании, то в предшествующих $k - 1$ испытаниях оно не появлялось.

Обозначим через X дискретную случайную величину — число испытаний, которые нужно провести до первого появления события A. Очевидно, возможными значениями X являются натуральные числа: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, ...

Пусть в первых $k - 1$ испытаниях событие A не наступило, а в k-м испытании появилось. Вероятность этого «сложного события», по теореме умножения вероятностей независимых событий,

$$P(X = k) = q^{k-1}p. \qquad (*)$$

Полагая $k = 1, 2, \ldots$ в формуле (*), получим геометрическую прогрессию с первым членом p и знаменателем q $(0 < q < 1)$:

$$p,\ qp,\ q^2p,\ \ldots,\ q^{k-1}p,\ \ldots \qquad (**)$$

По этой причине распределение (*) называют *геометрическим*.

Легко убедиться, что ряд (**) сходится и сумма его равна единице. Действительно, сумма ряда (**)

$$p/(1-q)=p/p=1.$$

Пример. Из орудия производится стрельба по цели до первого попадания. Вероятность попадания в цель $p=0,6$. Найти вероятность того, что попадание произойдет при третьем выстреле.

Решение. По условию, $p=0,6$, $q=0,4$, $k=3$. Искомая вероятность по формуле (*)

$$P=q^{k-1}\cdot p=0,4^2\cdot 0,6=0,096.$$

§ 8. Гипергеометрическое распределение

Прежде чем дать определение гипергеометрического распределения, рассмотрим задачу. Пусть в партии из N изделий имеется M стандартных ($M<N$). Из партии случайно отбирают n изделий (каждое изделие может быть извлечено с одинаковой вероятностью), причем отобранное изделие перед отбором следующего не возвращается в партию (поэтому формула Бернулли здесь неприменима). Обозначим через X случайную величину — число m стандартных изделий среди n отобранных. Очевидно, возможные значения X таковы: 0, 1, 2, ..., $\min(M, n)$.

Найдем вероятность того, что $X=m$, т. е. что среди n отобранных изделий ровно m стандартных. Используем для этого классическое определение вероятности.

Общее число возможных элементарных исходов испытания равно числу способов, которыми можно извлечь n изделий из N изделий, т. е. числу сочетаний C_N^n.

Найдем число исходов, благоприятствующих событию $X=m$ (среди взятых n изделий ровно m стандартных); m стандартных изделий можно извлечь из M стандартных изделий C_M^m способами; при этом остальные $n-m$ изделий должны быть нестандартными; взять же $n-m$ нестандартных изделий из $N-m$ нестандартных изделий можно C_{N-M}^{n-m} способами. Следовательно, число благоприятствующих исходов равно $C_M^m C_{N-M}^{n-m}$ (см. гл. I, § 4, правило умножения).

Искомая вероятность равна отношению числа исходов, благоприятствующих событию $X=m$, к числу всех элементарных исходов

$$P(X=m)=\frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}. \qquad (*)$$

Формула (*) определяет распределение вероятностей, которое называют *гипергеометрическим*.

Учитывая, что m — случайная величина, заключаем, что гипергеометрическое распределение определяется тремя параметрами: N, M, n. Иногда в качестве параметров этого распределения рассматривают N, n и $p=M/N$, где p — вероятность того, что первое извлеченное изделие стандартное.

Заметим, что если n значительно меньше N (практически если $n < 0{,}1N$), то гипергеометрическое распределение дает вероятности, близкие к вероятностям, найденным по биномиальному закону.

Пример. Среди 50 изделий 20 окрашенных. Найти вероятность того, что среди наудачу извлеченных 5 изделий окажется ровно 3 окрашенных.

Решение. По условию, $N=50$, $M=20$, $n=5$, $m=3$. Искомая вероятность

$$P(X=3)=C_{20}^{3}C_{30}^{2}/C_{50}^{5}=0{,}234.$$

Задачи

1. Возможные значения случайной величины таковы: $x_1=2$, $x_2=5$, $x_3=8$. Известны вероятности первых двух возможных значений: $p_1=0{,}4$, $p_2=0{,}15$. Найти вероятность x_3.

Отв. $p_3=0{,}45$.

2. Игральная кость брошена 3 раза. Написать закон распределения числа появлений шестерки.

Отв.

X	3	2	1	0
p	1/216	15/216	75/216	125/216

3. Составить закон распределения вероятностей числа появлений события A в трех независимых испытаниях, если вероятность появления события в каждом испытании равна 0,6.

Отв.

k	0	1	2	3
p	0,064	0,288	0,432	0,216

4. Прядильщица обслуживает 1000 веретен. Вероятность обрыва нити на одном веретене в течение 1 мин равна 0,004. Найти вероятность того, что в течение 1 мин обрыв произойдет на пяти веретенах.

Отв. $P_{1000}(5)=0{,}1562$.

5. Найти среднее число опечаток на странице рукописи, если вероятность того, что страница рукописи содержит хотя бы одну опечатку, равна 0,95. Предполагается, что число опечаток распределено по закону Пуассона.

Указание. Задача сводится к отысканию параметра λ из уравнения $e^{-\lambda}=0{,}05$.

Отв. 3.

6. Коммутатор учреждения обслуживает 100 абонентов. Вероятность того, что в течение 1 мин абонент позвонит на коммутатор, равна 0,02. Какое из двух событий вероятнее: в течение 1 мин позвонят 3 абонента; позвонят 4 абонента?

Отв. $P_{100}(3)=0{,}18$; $P_{100}(4)=0{,}09$.

7. Рукопись объемом в 1000 страниц машинописного текста содержит 1000 опечаток. Найти вероятность того, что наудачу взятая страница содержит: а) хотя бы одну опечатку; б) ровно 2 опечатки; в) не менее двух опечаток. Предполагается, что число опечаток распределено по закону Пуассона.

Отв. а) $P=1-e^{-1}=0{,}6321$; б) $P_{1000}(2)=0{,}18395$; в) $P=0{,}2642$.

8. Среднее число вызовов, поступающих на АТС в 1 мин, равно 5. Найти вероятность того, что за 2 мин поступит: а) два вызова; б) менее двух вызовов; в) не менее двух вызовов.

Указание. $e^{-10}=0{,}000045$.

Отв. а) 0,00225; б) 0,000495; в) 0,999505.

9. Производится бросание игральной кости до первого выпадения шести очков. Найти вероятность того, что первое выпадение «шестерки» произойдет при втором бросании игральной кости.

Отв. $P(X=2)=5/36$.

10. В партии из 12 деталей имеется 8 стандартных. Найти вероятность того, что среди 5 взятых наудачу деталей окажется 3 стандартных.

Отв. $P(X=3)=14/33$.

Глава седьмая

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОЖИДАНИЕ ДИСКРЕТНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

§ 1. Числовые характеристики дискретных случайных величин

Как уже известно, закон распределения полностью характеризует случайную величину. Однако часто закон распределения неизвестен и приходится ограничиваться меньшими сведениями. Иногда даже выгоднее пользоваться числами, которые описывают случайную величину суммарно; такие числа называют *числовыми характеристиками случайной величины*. К числу важных числовых характеристик относится математическое ожидание.

Математическое ожидание, как будет показано далее, приближенно равно среднему значению случайной величины. Для решения многих задач достаточно знать математическое ожидание. Например, если известно, что математическое ожидание числа выбиваемых очков у первого стрелка больше, чем у второго, то первый стрелок в среднем выбивает больше очков, чем второй, и, следовательно, стреляет лучше второго. Хотя математическое ожидание дает о случайной величине значительно меньше сведений, чем закон ее распределения, но для решения задач, подобных приведенной и многих других, знание математического ожидания оказывается достаточным.

§ 2. Математическое ожидание дискретной случайной величины

Математическим ожиданием дискретной случайной величины называют сумму произведений всех ее возможных значений на их вероятности.

Пусть случайная величина X может принимать только значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$, вероятности которых соответственно равны $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Тогда математическое ожидание $M(X)$ случайной величины X определяется равенством

$$M(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_np_n.$$

Если дискретная случайная величина X принимает счетное множество возможных значений, то

$$M(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_ip_i,$$

причем математическое ожидание существует, если ряд в правой части равенства сходится абсолютно.

Замечание. Из определения следует, что математическое ожидание дискретной случайной величины есть неслучайная (постоянная) величина. Рекомендуем запомнить это утверждение, так как далее оно используется многократно. В дальнейшем будет показано, что математическое ожидание непрерывной случайной величины также есть постоянная величина.

Пример 1. Найти математическое ожидание случайной величины X, зная закон ее распределения:

X	3	5	2
p	0,1	0,6	0,3

Решение. Искомое математическое ожидание равно сумме произведений всех возможных значений случайной величины на их вероятности:

$$M(X) = 3\cdot 0{,}1 + 5\cdot 0{,}6 + 2\cdot 0{,}3 = 3{,}9.$$

Пример 2. Найти математическое ожидание числа появлений события A в одном испытании, если вероятность события A равна p.

Решение. Случайная величина X — число появлений события A в одном испытании — может принимать только два значения: $x_1 = 1$ (событие A наступило) с вероятностью p и $x_2 = 0$ (событие A не наступило) с вероятностью $q = 1 - p$. Искомое математическое ожидание

$$M(X) = 1\cdot p + 0\cdot q = p.$$

Итак, *математическое ожидание числа появлений события в одном испытании равно вероятности этого события*. Этот результат будет использован ниже.

§ 3. Вероятностный смысл математического ожидания

Пусть произведено n испытаний, в которых случайная величина X приняла m_1 раз значение x_1, m_2 раз значение x_2, ..., m_k раз значение x_k, причем $m_1+m_2+\ldots+m_k=n$. Тогда сумма всех значений, принятых X, равна

$$x_1m_1+x_2m_2+\ldots+x_km_k.$$

Найдем среднее арифметическое $\overline{X}$ всех значений, принятых случайной величиной, для чего разделим найденную сумму на общее число испытаний:

$$\overline{X}=(x_1m_1+x_2m_2+\ldots+x_km_k)/n,$$

или

$$\overline{X}=x_1(m_1/n)+x_2(m_2/n)+\ldots+x_k(m_k/n). \qquad (*)$$

Заметив, что отношение m_1/n — относительная частота W_1 значения x_1, m_2/n — относительная частота W_2 значения x_2 и т. д., запишем соотношение (*) так:

$$\overline{X}=x_1W_1+x_2W_2+\ldots+x_kW_k. \qquad (**)$$

Допустим, что число испытаний достаточно велико. Тогда относительная частота приближенно равна вероятности появления события (это будет доказано в гл. IX, § 6):

$$W_1\simeq p_1,\quad W_2\simeq p_2,\quad \ldots,\quad W_k\simeq p_k.$$

Заменив в соотношении (**) относительные частоты соответствующими вероятностями, получим

$$\overline{X}\simeq x_1p_1+x_2p_2+\ldots+x_kp_k.$$

Правая часть этого приближенного равенства есть $M(X)$. Итак,

$$\overline{X}\simeq M(X).$$

Вероятностный смысл полученного результата таков: *математическое ожидание приближенно равно* (тем точнее, чем больше число испытаний) *среднему арифметическому наблюдаемых значений случайной величины.*

Замечание 1. Легко сообразить, что математическое ожидание больше наименьшего и меньше наибольшего возможных значений. Другими словами, на числовой оси возможные значения расположены слева и справа от математического ожидания. В этом смысле математическое ожидание характеризует расположение распределения и поэтому его часто называют *центром распределения.*

Этот термин заимствован из механики: если массы $p_1, p_2, \ldots, p_n$ расположены в точках с абсциссами $x_1, x_2, \ldots, x_n$, причем $\sum p_i = 1$, то абсцисса центра тяжести

$$x_c = \left(\sum x_i p_i\right) / \sum p_i.$$

Учитывая, что $\sum x_i p_i = M(X)$ и $\sum p_i = 1$, получим $M(X) = x_c$.

Итак, математическое ожидание есть абсцисса центра тяжести системы материальных точек, абсциссы которых равны возможным значениям случайной величины, а массы — их вероятностям.

Замечание 2. Происхождение термина «математическое ожидание» связано с начальным периодом возникновения теории вероятностей (XVI — XVII вв.), когда область ее применения ограничивалась азартными играми. Игрока интересовало среднее значение ожидаемого выигрыша, или, иными словами, математическое ожидание выигрыша.

§ 4. Свойства математического ожидания

Свойство 1. *Математическое ожидание постоянной величины равно самой постоянной:*

$$M(C) = C.$$

Доказательство. Будем рассматривать постоянную C как дискретную случайную величину, которая имеет одно возможное значение C и принимает его с вероятностью $p = 1$. Следовательно,

$$M(C) = C \cdot 1 = C.$$

Замечание 1. Определим *произведение постоянной величины C на дискретную случайную величину X* как дискретную случайную CX, возможные значения которой равны произведениям постоянной C на возможные значения X; вероятности возможных значений CX равны вероятностям соответствующих возможных значений X. Например, если вероятность возможного значения x_1 равна p_1, то вероятность того, что величина CX примет значение Cx_1, также равна p_1.

Свойство 2. *Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания:*

$$M(CX) = CM(X).$$

Доказательство. Пусть случайная величина X задана законом распределения вероятностей:

$$\begin{array}{lllll} X & x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ p & p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{array}$$

Учитывая замечание 1, напишем закон распределения случайной величины CX:

$$\begin{array}{lllll} CX & Cx_1 & Cx_2 & \dots & Cx_n \\ p & p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{array}$$

Математическое ожидание случайной величины CX:

$$M(CX) = Cx_1p_1 + Cx_2p_2 + \dots + Cx_np_n =$$
$$= C(x_1p_1 + x_2p_2 + \dots + x_np_n) = CM(X).$$

Итак,

$$M(CX) = CM(X).$$

Замечание 2. Прежде чем перейти к следующему свойству, укажем, что две случайные величины называют *независимыми*, если закон распределения одной из них не зависит от того, какие возможные значения приняла другая величина. В противном случае случайные величины *зависимы*. Несколько случайных величин называют *взаимно независимыми*, если законы распределения любого числа из них не зависят от того, какие возможные значения приняли остальные величины.

Замечание 3. Определим *произведение независимых случайных величин* X и Y как случайную величину XY, возможные значения которой равны произведениям каждого возможного значения X на каждое возможное значение Y; вероятности возможных значений произведения XY равны произведениям вероятностей возможных значений сомножителей. Например, если вероятность возможного значения x_1 равна p_1, вероятность возможного значения y_1 равна g_1, то вероятность возможного значения x_1y_1 равна p_1g_1.

Заметим, что некоторые произведения x_iy_j могут оказаться равными между собой. В этом случае вероятность возможного значения произведения равна сумме соответствующих вероятностей. Например, если $x_1y_2 = x_3y_5$, то вероятность x_1y_2 (или, что то же, x_3y_5) равна $p_1g_2 + p_3g_5$.

Свойство 3. *Математическое ожидание произведения двух независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий:*

$$M(XY) = M(X)\,M(Y).$$

Доказательство. Пусть независимые случайные величины X и Y заданы своими законами распределения вероятностей *):

X	$x_1 x_2$	Y	$y_1 y_2$
P	$p_1 p_2$	g	$g_1 g_2$

Составим все значения, которые может принимать случайная величина XY. Для этого перемножим все возможные значения X на каждое возможное значение Y; в итоге получим x_1y_1, x_2y_1, x_1y_2 и x_2y_2. Учитывая замечание 3, напишем закон распределения XY, предполагая для простоты, что все возможные значения произведения различны (если это не так, то доказательство проводится аналогично):

XY	x_1y_1	x_2y_1	x_1y_2	x_2y_2
p	p_1g_1	p_2g_1	p_1g_2	p_2g_2

Математическое ожидание равно сумме произведений всех возможных значений на их вероятности:

$$M(XY) = x_1y_1 \cdot p_1g_1 + x_2y_1 \cdot p_2g_1 + x_1y_2 \cdot p_1g_2 + x_2y_2 \cdot p_2g_2,$$

или

$$M(XY) = y_1g_1(x_1p_1 + x_2p_2) + y_2g_2(x_1p_1 + x_2p_2) =$$
$$= (x_1p_1 + x_2p_2)(y_1g_1 + y_2g_2) = M(X) \cdot M(Y).$$

Итак, $M(XY) = M(X) \cdot M(Y)$.

Следствие. *Математическое ожидание произведения нескольких взаимно независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий.*

Например, для трех случайных величин имеем:

$$M(XYZ) = M(XY \cdot Z) = M(XY)\,M(Z) = M(X)\,M(Y)\,M(Z).$$

Для произвольного числа случайных величин доказательство проводится методом математической индукции.

Пример 1. Независимые случайные величины X и Y заданы следующими законами распределения:

X	5	2	4	Y	7	9
p	0,6	0,1	0,3	p	0,8	0,2

Найти математическое ожидание случайной величины XY.

Решение. Найдем математические ожидания каждой из данных величин:

$$M(X) = 5 \cdot 0{,}6 + 2 \cdot 0{,}1 + 4 \cdot 0{,}3 = 4{,}4;$$
$$M(Y) = 7 \cdot 0{,}8 + 9 \cdot 0{,}9 = 7{,}4.$$

---

*) Для упрощения выкладок мы ограничились малым числом возможных значений. В общем случае доказательство аналогичное.

Случайные величины X и Y независимые, поэтому искомое математическое ожидание

$$M(XY)=M(X)\,M(Y)=4{,}4\cdot 7{,}4=32{,}56.$$

Замечание 4. Определим *сумму случайных величин* X и Y как случайную величину $X+Y$, возможные значения которой равны суммам каждого возможного значения X с каждым возможным значением Y; вероятности возможных значений $X+Y$ для независимых величин X и Y равны произведениям вероятностей слагаемых; для зависимых величин — произведениям вероятности одного слагаемого на условную вероятность второго.

Заметим, что некоторые суммы $x+y$ могут оказаться равными между собой. В этом случае вероятность возможного значения суммы равна сумме соответствующих вероятностей. Например, если $x_1+y_2=x_3+y_5$ и вероятности этих возможных значений соответственно равны p_{12} и p_{35}, то вероятность x_1+x_2 (или, что то же, x_3+y_5) равна $p_{12}+p_{35}$.

Следующее ниже свойство справедливо как для независимых, так и для зависимых случайных величин.

Свойство 4. *Математическое ожидание суммы двух случайных величин равно сумме математических ожиданий слагаемых:*

$$M(X+Y)=M(X)+M(Y).$$

Доказательство. Пусть случайные величины X и Y заданы следующими законами распределения [*]:

$$\begin{array}{ccc} X & x_1 & x_2 \\ p & p_1 & p_2 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} Y & y_1 & y_2 \\ g & g_1 & g_2 \end{array}$$

Составим все возможные значения величины $X+Y$. Для этого к каждому возможному значению X прибавим каждое возможное значение Y; получим x_1+y_1, x_1+y_2, x_2+y_1 и x_2+y_2. Предположим для простоты, что эти возможные значения различны (если это не так, то доказательство проводится аналогично), и обозначим их вероятности соответственно через p_{11}, p_{12}, p_{21} и p_{22}.

Математическое ожидание величины $X+Y$ равно сумме произведений возможных значений на их вероятности:

$$M(X+Y)=(x_1+y_1)\,p_{11}+(x_1+y_2)\,p_{12}+(x_2+y_1)\,p_{21}+$$
$$+(x_2+y_2)\,p_{22},$$

---

[*] Чтобы упростить вывод, мы ограничились лишь двумя возможными значениями каждой из величин. В общем случае доказательство аналогичное.

или

$$M(X+Y)=x_1(p_{11}+p_{12})+x_2(p_{21}+p_{22})+y_1(p_{11}+p_{21})+\\ +y_2(p_{12}+p_{22}). \qquad (*)$$

Докажем, что $p_{11}+p_{12}=p_1$. Событие, состоящее в том, что X примет значение x_1 (вероятность этого события равна p_1), влечет за собой событие, которое состоит в том, что $X+Y$ примет значение x_1+y_1 или x_1+y_2 (вероятность этого события по теореме сложения равна $p_{11}+p_{12}$), и обратно. Отсюда и следует, что $p_{11}+p_{12}=p_1$. Аналогично доказываются равенства

$$p_{21}+p_{22}=p_2, \quad p_{11}+p_{21}=g_1 \text{ и } p_{12}+p_{22}=g_2.$$

Подставляя правые части этих равенств в соотношение (*), получим

$$M(X+Y)=(x_1p_1+x_2p_2)+(y_1g_1+y_2g_2),$$

или окончательно

$$M(X+Y)=M(X)+M(Y).$$

Следствие. *Математическое ожидание суммы нескольких случайных величин равно сумме математических ожиданий слагаемых.*

Например, для трех слагаемых величин имеем

$$M(X+Y+Z)=M[(X+Y)+Z]=\\ =M(X+Y)+M(Z)=M(X)+M(Y)+M(Z).$$

Для произвольного числа слагаемых величин доказательство проводится методом математической индукции.

Пример 2. Производится 3 выстрела с вероятностями попадания в цель, равными $p_1=0{,}4$; $p_2=0{,}3$ и $p_3=0{,}6$. Найти математическое ожидание общего числа попаданий.

Решение. Число попаданий при первом выстреле есть случайная величина X_1, которая может принимать только два значения: 1 (попадание) с вероятностью $p_1=0{,}4$ и 0 (промах) с вероятностью $q=1-0{,}4=0{,}6$.

Математическое ожидание числа попаданий при первом выстреле равно вероятности попадания (см. § 2, пример 2), т. е. $M(X_1)=0{,}4$. Аналогично найдем математические ожидания числа попаданий при втором и третьем выстрелах: $M(X_2)=0{,}3$, $M(X_3)=0{,}6$.

Общее число попаданий есть также случайная величина, состоящая из суммы попаданий в каждом из трех выстрелов:

$$X=X_1+X_2+X_3.$$

Искомое математическое ожидание находим по теореме о математическом ожидании суммы:

$$M(X)=M(X_1+X_2+X_3)=M(X_1)+M(X_2)+M(X_3)=$$
$$=0{,}4+0{,}3+0{,}6=1{,}3 \text{ (попаданий)}.$$

Пример 3. Найти математическое ожидание суммы числа очков, которые могут выпасть при бросании двух игральных костей.

Решение. Обозначим число очков, которое может выпасть на первой кости, через X и на второй — через Y. Возможные значения этих величин одинаковы и равны 1, 2, 3, 4, 5 и 6, причем вероятность каждого из этих значений равна 1/6.

Найдем математическое ожидание числа очков, которые могут выпасть на первой кости:

$$M(X)=1\cdot(1/6)+2\cdot(1/6)+3(1/6)+4\cdot(1/6)+5\cdot(1/6)+6\cdot(1/6)=7/2.$$

Очевидно, что и $M(Y)=7/2$.

Искомое математическое ожидание

$$M(X+Y)=M(X)+M(Y)=7/2+7/2=7.$$

§ 5. Математическое ожидание числа появлений события в независимых испытаниях

Пусть производится n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A постоянна и равна p. Чему равно среднее число появлений события A в этих испытаниях? Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема. *Математическое ожидание $M(X)$ числа появлений события A в n независимых испытаниях равно произведению числа испытаний на вероятность появления события в каждом испытании:*

$$M(X)=np.$$

Доказательство. Будем рассматривать в качестве случайной величины X число наступления события A в n независимых испытаниях. Очевидно, общее число X появлений события A в этих испытаниях складывается из чисел появлений события в отдельных испытаниях. Поэтому если X_1 — число появлений события в первом испытании, X_2 — во втором, ..., X_n — в n-м, то общее число появлений события $X=X_1+X_2+\ldots+X_n$.

По третьему свойству математического ожидания,

$$M(X)=M(X_1)+M(X_2)+\ldots+M(X_n). \qquad (*)$$

Каждое из слагаемых правой части равенства есть математическое ожидание числа появлений события в одном испытании: $M(X_1)$ — в первом, $M(X_2)$ — во втором и т. д. Так как математическое ожидание числа появлений события в одном испытании равно вероятности события (см. § 2, пример 2), то $M(X_1)=M(X_2)=M(X_n)=p$. Подставляя в правую часть равенства (*) вместо каждого слагаемого p, получим

$$M(X)=np. \qquad (**)$$

Замечание. Так как величина X распределена по биномиальному закону, то доказанную теорему можно сформулировать и так: математическое ожидание биномиального распределения с параметрами n и p равно произведению np.

Пример. Вероятность попадания в цель при стрельбе из орудия $p=0,6$. Найти математическое ожидание общего числа попаданий, если будет произведено 10 выстрелов.

Решение. Попадание при каждом выстреле не зависит от исходов других выстрелов, поэтому рассматриваемые события независимы и, следовательно, искомое математическое ожидание

$$M(X)=np=10\cdot 0,6=6 \text{ (попаданий).}$$

Задачи

1. Найти математическое ожидание дискретной случайной величины, зная закон ее распределения:

X	6	3	1
p	0,2	0,3	0,5

Отв. 2,6.

2. Производится 4 выстрела с вероятностью попадания в цель $p_1=0,6$, $p_2=0,4$, $p_3=0,5$ и $p_4=0,7$. Найти математическое ожидание общего числа попаданий.

Отв. 2,2 попадания.

3. Дискретные независимые случайные величины заданы законами распределения:

X	1	2
p	0,2	0,8

Y	0,5	1
p	0,3	0,7

Найти математическое ожидание произведения XY двумя способами: а) составив закон распределения XY; б) пользуясь свойством 3.

Отв. 1,53.

4. Дискретные случайные величины X и Y заданы законами распределения, указанными в задаче 3. Найти математическое ожидание суммы $X+Y$ двумя способами: а) составив закон распределения $X+Y$; б) пользуясь свойством 4.

Отв. 2,65.

5. Вероятность отказа детали за время испытания на надежность равна 0,2. Найти математическое ожидание числа отказавших деталей, если испытанию будут подвергнуты 10 деталей.

Отв. 2 детали.

6. Найти математическое ожидание произведения числа очков, которые могут выпасть при одном бросании двух игральных костей.

Отв. 12,25 очка.

7. Найти математическое ожидание числа лотерейных билетов, на которые выпадут выигрыши, если приобретено 20 билетов, причем вероятность выигрыша по одному билету равна 0,3.

Отв. 6 билетов.

Глава восьмая

ДИСПЕРСИЯ ДИСКРЕТНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

§ 1. Целесообразность введения числовой характеристики рассеяния случайной величины

Легко указать такие случайные величины, которые имеют одинаковые математические ожидания, но различные возможные значения. Рассмотрим, например, дискретные случайные величины X и Y, заданные следующими законами распределения:

X	$-0{,}01$	$0{,}01$	Y	-100	100
p	$0{,}5$	$0{,}5$	p	$0{,}5$	$0{,}5$

Найдем математические ожидания этих величин:

$$M(X) = -0{,}01\cdot 0{,}5 + 0{,}01\cdot 0{,}5 = 0,$$
$$M(Y) = -100\cdot 0{,}5 + 100\cdot 0{,}5 = 0.$$

Здесь математические ожидания обеих величин одинаковы, а возможные значения различны, причем X имеет возможные значения, близкие к математическому ожиданию, а Y—далекие от своего математического ожидания. Таким образом, зная лишь математическое ожидание случайной величины, еще нельзя судить ни о том, какие возможные значения она может принимать, ни о том, как они рассеяны вокруг математического ожидания. Другими словами, математическое ожидание полностью случайную величину не характеризует.

По этой причине наряду с математическим ожиданием вводят и другие числовые характеристики. Так, например, для того чтобы оценить, как рассеяны возможные значения случайной величины вокруг ее математического ожидания, пользуются, в частности, числовой характеристикой, которую называют дисперсией.

Прежде чем перейти к определению и свойствам дисперсии, введем понятие отклонения случайной величины от ее математического ожидания.

§ 2. Отклонение случайной величины от ее математического ожидания

Пусть X — случайная величина и $M(X)$ — ее математическое ожидание. Рассмотрим в качестве новой случайной величины разность $X-M(X)$.

Отклонением называют разность между случайной величиной и ее математическим ожиданиям.

Пусть закон распределения X известен:

$$\begin{array}{cccc} X & x_1 & x_2 \ldots & x_n \\ p & p_1 & p_2 \ldots & p_n \end{array}$$

Напишем закон распределения отклонения. Для того чтобы отклонение приняло значение $x_1-M(X)$, достаточно, чтобы случайная величина приняла значение x_1. Вероятность же этого события равна p_1; следовательно, и вероятность того, что отклонение примет значение $x_1-M(X)$, также равна p_1. Аналогично обстоит дело и для остальных возможных значений отклонения.

Таким образом, отклонение имеет следующий закон распределения:

$$\begin{array}{ccccc} X-M(X) & x_1-M(X) & x_2-M(X) & \ldots & x_n-M(X) \\ p & p_1 & p_2 & \ldots & p_n \end{array}$$

Приведем важное свойство отклонения, которое используется далее.

Теорема. *Математическое ожидание отклонения равно нулю:*

$$M[X-M(X)]=0.$$

Доказательство. Пользуясь свойствами математического ожидания (математическое ожидание разности равно разности математических ожиданий, математическое ожидание постоянной равно самой постоянной) и приняв во внимание, что $M(X)$ — постоянная величина, имеем

$$M[X-M(X)]=M(X)-M[M(X)]=M(X)-M(X)=0.$$

Пример. Задан закон распределения дискретной случайной величины X:

$$\begin{array}{ccc} X & 1 & 2 \\ p & 0,2 & 0,8 \end{array}$$

Убедиться, что математическое ожидание отклонения равно нулю.

Решение. Найдем математическое ожидание X:

$$M(X)=1\cdot 0,2+2\cdot 0,8=1,8.$$

Найдем возможные значения отклонения, для чего из возможных значений X вычтем математическое ожидание $M(X)$: $1-1,8=-0,8$; $2-1,8=0,2$.

Напишем закон распределения отклонения:

$X-M(X)$	$-0,8$	$0,2$
p	$0,2$	$0,8$

Найдем математическое ожидание отклонения:

$$M[X-M(X)]=(-0,8)\cdot 0,2+0,2\cdot 0,8=0.$$

Итак, математическое ожидание отклонения равно нулю, как и должно быть.

Замечание. Наряду с термином «отклонение» используют термин «центрированная величина». *Центрированной случайной величиной* $\overset{\circ}{X}$ называют разность между случайной величиной и ее математическим ожиданием:

$$\overset{\circ}{X}=X-M(X).$$

Название «центрированная величина» связано с тем, что математическое ожидание есть центр распределения (см. гл. VII, § 3, замечание).

§ 3. Дисперсия дискретной случайной величины

На практике часто требуется оценить рассеяние возможных значений случайной величины вокруг ее среднего значения. Например, в артиллерии важно знать, насколько кучно лягут снаряды вблизи цели, которая должна быть поражена.

На первый взгляд может показаться, что для оценки рассеяния проще всего вычислить все возможные значения отклонения случайной величины и затем найти их среднее значение. Однако такой путь ничего не даст, так как среднее значение отклонения, т. е. $M[X-M(X)]$, для любой случайной величины равно нулю. Это свойство уже было доказано в предыдущем параграфе и объясняется тем, что одни возможные отклонения положительны, а другие — отрицательны; в результате их взаимного погашения среднее значение отклонения равно нулю. Эти соображения говорят о целесообразности заменить возможные отклонения их абсолютными значениями или их квадратами. Так и поступают на деле. Правда, в случае, когда возможные отклонения заменяют их абсолютными значениями, приходится оперировать с абсолютными величинами, что приводит иногда к серьезным затруднениям. Поэтому чаще всего идут по другому пути, т. е. вычисляют среднее значение квадрата отклонения, которое и называют дисперсией.

Дисперсией (рассеянием) дискретной случайной величины называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания:

$$D(X)=M[X-M(X)]^2.$$

Пусть случайная величина задана законом распределения

$$\begin{array}{cccccc} X & x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ p & p_1 & p_2 & \ldots & p_n \end{array}$$

Тогда квадрат отклонения имеет следующий закон распределения:

$$\begin{array}{ccccc} [X-M(X)]^2 & [x_1-M(X)]^2 & [x_2-M(X)]^2 \ldots & [x_n-M(X)]^2 \\ p & p_1 & p_2 & p_n \end{array}$$

По определению дисперсии,

$$D(X)=M[X-M(X)]^2=$$
$$=[x_1-M(X)]^2p_1+[x_2-M(X)]^2p_2+\ldots+[x_n-M(X)]^2p_n.$$

Таким образом, для того чтобы найти дисперсию, достаточно вычислить сумму произведений возможных значений квадрата отклонения на их вероятности.

Замечание. Из определения следует, что дисперсия дискретной случайной величины есть неслучайная (постоянная) величина. В дальнейшем читатель узнает, что дисперсия непрерывной случайной величины также есть постоянная величина.

Пример. Найти дисперсию случайной величины X, которая задана следующим законом распределения:

$$\begin{array}{cccc} X & 1 & 2 & 5 \\ p & 0,3 & 0,5 & 0,2 \end{array}$$

Решение. Найдем математическое ожидание:

$$M(X)=1\cdot 0,3+2\cdot 0,5+5\cdot 0,2=2,3.$$

Найдем все возможные значения квадрата отклонения:

$$[x_1-M(X)]^2=(1-2,3)^2=1,69;$$
$$[x_2-M(X)]^2=(2-2,3)^2=0,09;$$
$$[x_3-M(X)]^2=(5-2,3)^2=7,29.$$

Напишем закон распределения квадрата отклонения:

$$\begin{array}{cccc} [X-M(X)]^2 & 1,69 & 0,09 & 7,29 \\ p & 0,3 & 0,5 & 0,2 \end{array}$$

По определению,

$$D(X)=1,69\cdot 0,3+0,09\cdot 0,5+7,29\cdot 0,2=2,01.$$

Вычисление, основанное на определении дисперсии, оказалось относительно громоздким. Далее будет указана формула, которая приводит к цели значительно быстрее.

§ 4. Формула для вычисления дисперсии

Для вычисления дисперсии часто бывает удобно пользоваться следующей теоремой.

Теорема. *Дисперсия равна разности между математическим ожиданием квадрата случайной величины X и квадратом ее математического ожидания:*

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2.$$

Доказательство. Математическое ожидание $M(X)$ есть постоянная величина, следовательно, $2M(X)$ и $M^2(X)$ есть также постоянные величины. Приняв это во внимание и пользуясь свойствами математического ожидания (постоянный множитель можно вынести за знак математического ожидания, математическое ожидание суммы равно сумме математических ожиданий слагаемых), упростим формулу, выражающую определение дисперсии:

$$D(X) = M[X - M(X)]^2 = M[X^2 - 2XM(X) + M^2(X)] =$$
$$= M(X^2) - 2M(X)\,M(X) + M^2(X) =$$
$$= M(X^2) - 2M^2(X) + M^2(X) = M(X^2) - M^2(X).$$

Итак,

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2.$$

Квадратная скобка введена в запись формулы для удобства ее запоминания.

Пример 1. Найти дисперсию случайной величины X, которая задана следующим законом распределения:

X	2	3	5
p	0,1	0,6	0,3

Решение. Найдем математическое ожидание $M(X)$:

$$M(X) = 2 \cdot 0,1 + 3 \cdot 0,6 + 5 \cdot 0,3 = 3,5.$$

Напишем закон распределения случайной величины X^2:

X^2	4	9	25
p	0,1	0,6	0,3

Найдем математические ожидания $M(X^2)$:

$$M(X^2) = 4 \cdot 0,1 + 9 \cdot 0,6 + 25 \cdot 0,3 = 13,3.$$

Искомая дисперсия

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = 13,3 - (3,5)^2 = 1,05.$$

Замечание. Казалось бы, если X и Y имеют одинаковые возможные значения и одно и то же математическое ожидание, то и дисперсии этих величин равны (ведь возможные значения обеих величин одинаково рассеяны вокруг своих математических ожиданий!). Однако в общем случае это не так. Дело в том, что одинаковые возможные значения рассматриваемых величин имеют, вообще говоря, различные вероятности, *а величина дисперсии определяется не только самими возможными значениями, но и их вероятностями*. Например, если вероятности «далеких» от математического ожидания возможных значений X больше, чем вероятности этих же значений Y, и вероятности «близких» значений X меньше, чем вероятности тех же значений Y, то, очевидно, дисперсия X больше дисперсии Y.

Приведем иллюстрирующий пример.

Пример 2. Сравнить дисперсии случайных величин, заданных законами распределения:

X	-1	1	2	3
p	0,48	0,01	0,09	0,42

Y	-1	1	2	3
p	0,19	0,51	0,25	0,05

Решение. Легко убедиться, что

$$M(X) = M(Y) = 0{,}97;\quad D(X) \simeq 3{,}69,\ D(Y) \simeq 1{,}21.$$

Таким образом, возможные значения и математические ожидания X и Y одинаковы, а дисперсии различны, причем $D(X) > D(Y)$. Этот результат можно было предвидеть без вычислений, глядя лишь на законы распределений.

§ 5. Свойства дисперсии

Свойство 1. *Дисперсия постоянной величины C равна нулю:*

$$D(C) = 0.$$

Доказательство. По определению дисперсии,

$$D(C) = M\{[C - M(C)]^2\}.$$

Пользуясь первым свойством математического ожидания (математическое ожидание постоянной равно самой постоянной), получим

$$D(C) = M[(C - C)^2] = M(0) = 0.$$

Итак,

$$D(C) = 0.$$

Свойство становится ясным, если учесть, что постоянная величина сохраняет одно и то же значение и рассеяния, конечно, не имеет.

Свойство 2. *Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возводя его в квадрат:*

$$D(CX) = C^2 D(X).$$

Доказательство. По определению дисперсии имеем

$$D(CX)=M\{[CX-M(CX)]^2\}.$$

Пользуясь вторым свойством математического ожидания (постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания), получим

$$D(CX)=M\{[CX-CM(X)]^2\}=M\{C^2[X-M(X)]^2\}=$$
$$=C^2M\{[X-M(X)]^2\}=C^2D(X).$$

Итак,

$$D(CX)=C^2D(X).$$

Свойство становится ясным, если принять во внимание, что при $|C|>1$ величина CX имеет возможные значения (по абсолютной величине), бóльшие, чем величина X. Отсюда следует, что эти значения рассеяны вокруг математического ожидания $M(CX)$ больше, чем возможные значения X вокруг $M(X)$, т. е. $D(CX)>D(X)$. Напротив, если $0<|C|<1$, то $D(CX)<D(X)$.

Свойство 3. *Дисперсия суммы двух независимых случайных величин равна сумме дисперсий этих величин:*

$$D(X+Y)=D(X)+D(Y).$$

Доказательство. По формуле для вычисления дисперсии имеем

$$D(X+Y)=M[(X+Y)^2]-[M(X+Y)]^2.$$

Раскрыв скобки и пользуясь свойствами математического ожидания суммы нескольких величин и произведения двух независимых случайных величин, получим

$$D(X+Y)=M[X^2+2XY+Y^2]-[M(X)+M(Y)]^2=$$
$$=M(X^2)+2M(X)\cdot M(Y)+M(Y^2)-M^2(X)-$$
$$-2M(X)\cdot M(Y)-M^2(Y)=\{M(X^2)-[M(X)]^2\}+$$
$$+\{M(Y^2)-[M(Y)]^2\}=D(X)+D(Y).$$

Итак,

$$D(X+Y)=D(X)+D(Y).$$

Следствие 1. *Дисперсия суммы нескольких взаимно независимых случайных величин равна сумме дисперсий этих величин.*

Например, для трех слагаемых имеем

$$D(X+Y+Z)=D[X+(Y+Z)]=D(X)+D(Y+Z)=$$
$$=D(X)+D(Y)+D(Z).$$

Для произвольного числа слагаемых доказательство проводится методом математической индукции.

Следствие 2. *Дисперсия суммы постоянной величины и случайной равна дисперсии случайной величины:*

$$D(C+X)=D(X).$$

Доказательство. Величины C и X независимы, поэтому, по третьему свойству,

$$D(C+X)=D(C)+D(X).$$

В силу первого свойства $D(C)=0$. Следовательно,

$$D(C+X)=D(X).$$

Свойство становится понятным, если учесть, что величины X и $X+C$ отличаются лишь началом отсчета и, значит, рассеяны вокруг своих математических ожиданий одинаково.

Свойство 4. *Дисперсия разности двух независимых случайных величин равна сумме их дисперсий:*

$$D(X-Y)=D(X)+D(Y).$$

Доказательство. В силу третьего свойства

$$D(X-Y)=D(X)+D(-Y).$$

По второму свойству,

$$D(X-Y)=D(X)+(-1)^2D(Y),$$

или

$$D(X-Y)=D(X)+D(Y).$$

§ 6. Дисперсия числа появлений события в независимых испытаниях

Пусть производится n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A постоянна. Чему равна дисперсия числа появлений события в этих испытаниях? Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема. *Дисперсия числа появлений события A в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность*

p появления события постоянна, равна произведению числа испытаний на вероятности появления и непоявления события в одном испытании:

$$D(X) = npq.$$

Доказательство. Рассмотрим случайную величину X — число появлений события A в n независимых испытаниях. Очевидно, общее число появлений события в этих испытаниях равно сумме появлений события в отдельных испытаниях:

$$X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n,$$

где X_1 — число наступлений события в первом испытании, X_2 — во втором, ..., X_n — в n-м.

Величины X_1, X_2, ..., X_n взаимно независимы, так как исход каждого испытания не зависит от исходов остальных, поэтому мы вправе воспользоваться следствием 1 (см. § 5):

$$D(X) = D(X_1) + D(X_2) + \ldots + D(X_n). \qquad (*)$$

Вычислим дисперсию X_1 по формуле

$$D(X_1) = M(X_1^2) - [M(X_1)]^2. \qquad (**)$$

Величина X_1 — число появлений события A в первом испытании, поэтому (см. гл. VII, § 2, пример 2) $M(X_1) = p$.

Найдем математическое ожидание величины X_1^2, которая может принимать только два значения, а именно: 1^2 с вероятностью p и 0^2 с вероятностью q:

$$M(X_1^2) = 1^2 \cdot p + 0^2 \cdot q = p.$$

Подставляя найденные результаты в соотношение (**), имеем

$$D(X_1) = p - p^2 = p(1 - p) = pq.$$

Очевидно, дисперсия каждой из остальных случайных величин также равна pq. Заменив каждое слагаемое правой части (*) через pq, окончательно получим

$$D(X) = npq.$$

Замечание. Так как величина X распределена по биномиальному закону, то доказанную теорему можно сформулировать и так: *дисперсия биномиального распределения с параметрами n и p равна произведению npq.*

Пример. Производятся 10 независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события равна 0,6. Найти дисперсию случайной величины X — числа появлений события в этих испытаниях.

Решение. По условию, $n=10$, $p=0{,}6$. Очевидно, вероятность непоявления события

$$q=1-0{,}6=0{,}4.$$

Искомая дисперсия

$$D(X)=npq=10\cdot 0{,}6\cdot 0{,}4=2{,}4.$$

§ 7. Среднее квадратическое отклонение

Для оценки рассеяния возможных значений случайной величины вокруг ее среднего значения кроме дисперсии служат и некоторые другие характеристики. К их числу относится среднее квадратическое отклонение.

Средним квадратическим отклонением случайной величины X называют квадратный корень из дисперсии:

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}.$$

Легко показать, что дисперсия имеет размерность, равную квадрату размерности случайной величины. Так как среднее квадратическое отклонение равно квадратному корню из дисперсии, то размерность $\sigma(X)$ совпадает с размерностью X. Поэтому в тех случаях, когда желательно, чтобы оценка рассеяния имела размерность случайной величины, вычисляют среднее квадратическое отклонение, а не дисперсию. Например, если X выражается в линейных метрах, то $\sigma(X)$ будет выражаться также в линейных метрах, а $D(X)$ — в квадратных метрах.

Пример. Случайная величина X задана законом распределения

X	2	3	10
p	0,1	0,4	0,5

Найти среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$.

Решение. Найдем математическое ожидание X:

$$M(X)=2\cdot 0{,}1+3\cdot 0{,}4+10\cdot 0{,}5=6{,}4.$$

Найдем математическое ожидание X^2:

$$M(X^2)=2^2\cdot 0{,}1+3^2\cdot 0{,}4+10^2\cdot 0{,}5=54.$$

Найдем дисперсию:

$$D(X)=M(X^2)-[M(X)]^2=54-6{,}4^2=13{,}04.$$

Искомое среднее квадратическое отклонение

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{13{,}04}\simeq 3{,}61.$$

§ 8. Среднее квадратическое отклонение суммы взаимно независимых случайных величин

Пусть известны средние квадратические отклонения нескольких взаимно независимых случайных величин. Как найти среднее квадратическое отклонение суммы этих величин? Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема. *Среднее квадратическое отклонение суммы конечного числа взаимно независимых случайных величин равно квадратному корню из суммы квадратов средних квадратических отклонений этих величин:*

$$\sigma(X_1+X_2+\ldots+X_n)=\sqrt{\sigma^2(X_1)+\sigma^2(X_2)+\ldots+\sigma^2(X_n)}.$$

Доказательство. Обозначим через X сумму рассматриваемых взаимно независимых величин:

$$X=X_1+X_2+\ldots+X_n.$$

Дисперсия суммы нескольких взаимно независимых случайных величин равна сумме дисперсий слагаемых (см. § 5, следствие 1), поэтому

$$D(X)=D(X_1)+D(X_2)+\ldots+D(X_n).$$

Отсюда

$$\sqrt{D(X)}=\sqrt{D(X_1)+D(X_2)+\ldots+D(X_n)},$$

или окончательно

$$\sigma(X)=\sqrt{\sigma^2(X_1)+\sigma^2(X_2)+\ldots+\sigma^2(X_n)}.$$

§ 9. Одинаково распределенные взаимно независимые случайные величины

Уже известно, что по закону распределения можно найти числовые характеристики случайной величины. Отсюда следует, что если несколько случайных величин имеют одинаковые распределения, то их числовые характеристики одинаковы.

Рассмотрим n взаимно независимых случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$, которые имеют одинаковые распределения, а следовательно, и одинаковые характеристики (математическое ожидание, дисперсию и др.). Наибольший интерес представляет изучение числовых характеристик среднего арифметического этих величин, чем мы и займемся в настоящем параграфе.

Обозначим среднее арифметическое рассматриваемых случайных величин через $\overline{X}$:

$$\overline{X}=(X_1+X_2+\ldots+X_n)/n.$$

Следующие ниже три положения устанавливают связь между числовыми характеристиками среднего арифметического $\overline{X}$ и соответствующими характеристиками каждой отдельной величины.

1. *Математическое ожидание среднего арифметического одинаково распределенных взаимно независимых случайных величин равно математическому ожиданию а каждой из величин:*

$$M(\overline{X})=a.$$

Доказательство. Пользуясь свойствами математического ожидания (постоянный множитель можно вынести за знак математического ожидания; математическое ожидание суммы равно сумме математических ожиданий слагаемых), имеем

$$M(\overline{X})=M\left(\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}\right)=$$

$$=\frac{M(X_1)+M(X_2)+\ldots+M(X_n)}{n}.$$

Приняв во внимание, что математическое ожидание каждой из величин по условию равно a, получим

$$M(\overline{X})=na/n=a.$$

2. *Дисперсия среднего арифметического n одинаково распределенных взаимно независимых случайных величин в n раз меньше дисперсии D каждой из величин:*

$$D(\overline{X})=D/n. \qquad (*)$$

Доказательство. Пользуясь свойствами дисперсии (постоянный множитель можно вынести за знак дисперсии, возведя его в квадрат; дисперсия суммы независимых величин равна сумме дисперсий слагаемых), имеем

$$D(\overline{X})=D\left(\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}\right)=$$

$$=\frac{D(X_1)+D(X_2)+\ldots+D(X_n)}{n^2}.$$

Приняв во внимание, что дисперсия каждой из величин по условию равна D, получим

$$D(\overline{X}) = nD/n^2 = D/n.$$

3. *Среднее квадратическое отклонение среднего арифметического n одинаково распределенных взаимно независимых случайных величин в $\sqrt{n}$ раз меньше среднего квадратического отклонения σ каждой из величин:*

$$\sigma(\overline{X}) = \sigma/\sqrt{n}. \qquad (**)$$

Доказательство. Так как $D(\overline{X}) = D/n$, то среднее квадратическое отклонение $\overline{X}$ равно

$$\sigma(\overline{X}) = \sqrt{D(\overline{X})} = \sqrt{D/n} = \sqrt{D}/\sqrt{n} = \sigma/\sqrt{n}.$$

Общий вывод из формул (*) и (**): вспоминая, что дисперсия и среднее квадратическое отклонение служат мерами рассеяния случайной величины, заключаем, что среднее арифметическое достаточно большого числа взаимно независимых случайных величин имеет значительно меньшее рассеяние, чем каждая отдельная величина.

Поясним на примере значение этого вывода для практики.

Пример. Обычно для измерения некоторой физической величины производят несколько измерений, а затем находят среднее арифметическое полученных чисел, которое принимают за приближенное значение измеряемой величины. Предполагая, что измерения производятся в одних и тех же условиях, доказать:

а) среднее арифметическое дает результат более надежный, чем отдельные измерения;

б) с увеличением числа измерений надежность этого результата возрастает.

Решение. а) Известно, что отдельные измерения дают неодинаковые значения измеряемой величины. Результат каждого измерения зависит от многих случайных причин (изменение температуры, колебания прибора и т. п.), которые не могут быть заранее полностью учтены.

Поэтому мы вправе рассматривать возможные результаты n отдельных измерений в качестве случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$ (индекс указывает номер измерения). Эти величины имеют одинаковое распределение вероятностей (измерения производятся по одной и той же методике и теми же приборами), а следовательно, и одинаковые числовые характеристики; кроме того, они взаимно независимы (результат каждого отдельного измерения не зависит от остальных измерений).

Мы уже знаем, что среднее арифметическое таких величин имеет меньшее рассеяние, чем каждая отдельная величина. Иначе говоря, среднее арифметическое оказывается более близким к истинному значению измеряемой величины, чем результат отдельного измерения. Это и означает, что среднее арифметическое нескольких измерений дает более надежный результат, чем отдельное измерение.

б) Нам уже известно, что при возрастании числа отдельных случайных величин рассеяние среднего арифметического убывает. Это значит, что с увеличением числа измерений среднее арифметическое нескольких измерений все менее отличается от истинного значения измеряемой величины. Таким образом, увеличивая число измерений, получают более надежный результат.

Например, если среднее квадратическое отклонение отдельного измерения $\sigma=6$ м, а всего произведено $n=36$ измерений, то среднее квадратическое отклонение среднего арифметического этих измерений равно лишь 1 м. Действительно,

$$\sigma(\overline{X})=\sigma/\sqrt{n}=6/\sqrt{36}=1.$$

Мы видим, что среднее арифметическое нескольких измерений, как и следовало ожидать, оказалось более близким к истинному значению измеряемой величины, чем результат отдельного измерения.

§ 10. Начальные и центральные теоретические моменты

Рассмотрим дискретную случайную величину X, заданную законом распределения:

X	1	2	5	100
p	0,6	0,2	0,19	0,01

Найдем математическое ожидание X:

$$M(X)=1\cdot 0{,}6+2\cdot 0{,}2+5\cdot 0{,}19+100\cdot 0{,}01=2{,}95.$$

Напишем закон распределения X^2:

X^2	1	4	25	10 000
p	0,6	0,2	0,19	0,01

Найдем математическое ожидание X^2:

$$M(X^2)=1\cdot 0{,}6+4\cdot 0{,}2+25\cdot 0{,}19+10\,000\cdot 0{,}01=106{,}15.$$

Видим, что $M(X^2)$ значительно больше $M(X)$. Это объясняется тем, что после возведения в квадрат возможное значение величины X^2, соответствующее значению $x=100$ величины X, стало равным 10 000, т. е. значительно увеличилось; вероятность же этого значения мала (0,01).

Таким образом, переход от $M(X)$ к $M(X^2)$ позволил лучше учесть влияние на математическое ожидание того возможного значения, которое велико и имеет малую вероятность. Разумеется, если бы величина X имела несколько больших и маловероятных значений, то переход к величине X^2, а тем более к величинам X^3, X^4 и т. д., позволил бы еще больше «усилить роль» этих больших, но маловероятных возможных значений. Вот почему оказывается целесообразным рассматривать математическое ожидание целой положительной степени случайной величины (не только дискретной, но и непрерывной).

Начальным моментом порядка k случайной величины X называют математическое ожидание величины X^k:

$$\nu_k = M\,(X^k).$$

В частности,

$$\nu_1 = M\,(X), \quad \nu_2 = M\,(X^2).$$

Пользуясь этими моментами, формулу для вычисления дисперсии $D(X) = M\,(X^2) - [M\,(X)]^2$ можно записать так:

$$D\,(X) = \nu_2 - \nu_1^2. \qquad (*)$$

Кроме моментов случайной величины X целесообразно рассматривать моменты отклонения $X - M\,(X)$.

Центральным моментом порядка k случайной величины X называют математическое ожидание величины $(X - M\,(X))^k$:

$$\mu_k = M\,[(X - M\,(X))^k].$$

В частности,

$$\mu_1 = M\,[X - M\,(X)] = 0, \qquad (**)$$

$$\mu_2 = M\,[(X - M\,(X))^2] = D\,(X). \qquad (***)$$

Легко выводятся соотношения, связывающие начальные и центральные моменты. Например, сравнивая (*) и (***), получим

$$\mu_2 = \nu_2 - \nu_1^2.$$

Нетрудно, исходя из определения центрального момента и пользуясь свойствами математического ожидания, получить формулы:

$$\mu_3 = \nu_3 - 3\nu_2\nu_1 + 2\nu_1^3,$$

$$\mu_4 = \nu_4 - 4\nu_3\nu_1 + 6\nu_2\nu_1^2 - 3\nu_1^4.$$

Моменты более высоких порядков применяются редко.

Замечание. Моменты, рассмотренные здесь, называют *теоретическими*. В отличие от теоретических моментов, моменты, которые вычисляются по данным наблюдений, называют *эмпирическими*. Определения эмпирических моментов даны далее (см. гл. XVII, § 2).

Задачи

1. Известны дисперсии двух независимых случайных величин: $D(X)=4$, $D(Y)=3$. Найти дисперсию суммы этих величин.

Отв. 7.

2. Дисперсия случайной величины X равна 5. Найти дисперсию следующих величин: а) $X-1$; б) $-2X$; в) $3X+6$.

Отв. а) 5; б) 20; в) 45.

3. Случайная величина X принимает только два значения: $+C$ и $-C$, каждое с вероятностью 0,5. Найти дисперсию этой величины.

Отв. C^2.

4. Найти дисперсию случайной величины, зная закон ее распределения

X	0,1	2	10	20
p	0,4	0,2	0,15	0,25

Отв. 67,6404.

5. Случайная величина X может принимать два возможных значения: x_1 с вероятностью 0,3 и x_2 с вероятностью 0,7, причем $x_2 > x_1$. Найти x_1 и x_2, зная, что $M(X)=2,7$ и $D(X)=0,21$.

Отв. $x_1=2$, $x_2=3$.

6. Найти дисперсию случайной величины X — числа появлений событий A в двух независимых испытаниях, если $M(X)=0,8$.

Указание. Написать биномиальный закон распределения вероятностей числа появлений события A в двух независимых испытаниях.

Отв. 0,48.

7. Испытывается устройство, состоящее из четырех независимо работающих приборов. Вероятности отказа приборов таковы: $p_1=0,3$; $p_2=0,4$; $p_3=0,5$; $p_4=0,6$. Найти математическое ожидание и дисперсию числа отказавших приборов.

Отв. 1,8; 0,94.

8. Найти дисперсию случайной величины X — числа появлений события в 100 независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность наступления события равна 0,7.

Отв. 21.

9. Дисперсия случайной величины $D(X)=6,25$. Найти среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$.

Отв. 2,5.

10. Случайная величина задана законом распределения

X	2	4	8
p	0,1	0,5	0,4

Найти среднее квадратическое отклонение этой величины.

Отв. 2,2.

11. Дисперсия каждой из 9 одинаково распределенных взаимно независимых случайных величин равна 36. Найти дисперсию среднего арифметического этих величин.

Отв. 4.

12. Среднее квадратическое отклонение каждой из 16 одинаково распределенных взаимно независимых случайных величин равно 10. Найти среднее квадратическое отклонение среднего арифметического этих величин.

Отв. 2,5.

Глава девятая

ЗАКОН БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ

§ 1. Предварительные замечания

Как уже известно, нельзя заранее уверенно предвидеть, какое из возможных значений примет случайная величина в итоге испытания; это зависит от многих случайных причин, учесть которые невозможно. Казалось бы, поскольку о каждой случайной величине мы располагаем в этом смысле весьма скромными сведениями, то вряд ли можно установить закономерности поведения и суммы достаточно большого числа случайных величин. На самом деле это не так. Оказывается, что при некоторых сравнительно широких условиях суммарное поведение достаточно большого числа случайных величин почти утрачивает случайный характер и становится закономерным.

Для практики очень важно знание условий, при выполнении которых совокупное действие очень многих случайных причин приводит к результату, почти не зависящему от случая, так как позволяет предвидеть ход явлений. Эти условия и указываются в теоремах, носящих общее название закона больших чисел. К ним относятся теоремы Чебышева и Бернулли (имеются и другие теоремы, которые здесь не рассматриваются). Теорема Чебышева является наиболее общим законом больших чисел, теорема Бернулли — простейшим. Для доказательства этих теорем мы воспользуемся неравенством Чебышева.

§ 2. Неравенство Чебышева

Неравенство Чебышева справедливо для дискретных и непрерывных случайных величин. Для простоты ограничимся доказательством этого неравенства для дискретных величин.

Рассмотрим дискретную случайную величину X, заданную таблицей распределения:

$$\begin{array}{lllll} X & x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ p & p_1 & p_2 & \ldots & p_n \end{array}$$

Поставим перед собой задачу оценить вероятность того, что отклонение случайной величины от ее математического ожидания не превышает по абсолютной величине положительного числа ε. Если ε достаточно мало, то мы оценим, таким образом, вероятность того, что X примет значения, достаточно близкие к своему математическому ожиданию. П. Л. Чебышев доказал неравенство, позволяющее дать интересующую нас оценку.

Неравенство Чебышева. *Вероятность того, что отклонение случайной величины X от ее математического ожидания по абсолютной величине меньше положительного числа ε, не меньше, чем $1-D(X)/\varepsilon^2$:*

$$P(|X-M(X)|<\varepsilon)\geqslant 1-D(X)/\varepsilon^2.$$

Доказательство. Так как события, состоящие в осуществлении неравенств $|X-M(X)|<\varepsilon$ и $|X-M(X)|\geqslant\varepsilon$, противоположны, то сумма их вероятностей равна единице, т. е.

$$P(|X-M(X)|<\varepsilon)+P(|X-M(X)|\geqslant\varepsilon)=1.$$

Отсюда интересующая нас вероятность

$$P(|X-M(X)|<\varepsilon)=1-P(|X-M(X)|\geqslant\varepsilon). \qquad (*)$$

Таким образом, задача сводится к вычислению вероятности $P(|X-M(X)|\geqslant\varepsilon)$.

Напишем выражение дисперсии случайной величины X:

$$D(X)=[x_1-M(X)]^2p_1+[x_2-M(X)]^2p_2+\dots$$
$$\dots+[x_n-M(X)]^2p_n.$$

Очевидно, все слагаемые этой суммы неотрицательны.

Отбросим те слагаемые, у которых $|x_i-M(X)|<\varepsilon$ (для оставшихся слагаемых $|x_j-M(X)|\geqslant\varepsilon$), вследствие чего сумма может только уменьшиться. Условимся считать для определенности, что отброшено k первых слагаемых (не нарушая общности, можно считать, что в таблице распределения возможные значения занумерованы именно в таком порядке). Таким образом,

$$D(X)\geqslant[x_{k+1}-M(X)]^2p_{k+1}+[x_{k+2}-M(X)]^2p_{k+2}+\dots$$
$$\dots+[x_n-M(X)]^2p_n.$$

Заметим, что обе части неравенства $|x_j-M(X)|\geqslant\varepsilon$ $(j=k+1,\ k+2,\ \dots,\ n)$ положительны, поэтому, возведя их в квадрат, получим равносильное неравенство $|x_j-M(X)|^2\geqslant\varepsilon^2$. Воспользуемся этим замечанием и, заменяя в оставшейся сумме каждый из множителей $|x_j-M(X)|^2$ числом ε^2 (при этом неравенство может лишь усилиться), получим

$$D(X) \geqslant \varepsilon^2 (p_{k+1} + p_{k+2} + \ldots + p_n). \qquad (**)$$

По теореме сложения, сумма вероятностей $p_{k+1}+p_{k+2}+\ldots$ $\ldots+p_n$ есть вероятность того, что X примет одно, безразлично какое, из значений $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n$, а при любом из них отклонение удовлетворяет неравенству $|x_j - M(X)| \geqslant \varepsilon$. Отсюда следует, что сумма $p_{k+1}+p_{k+2}+\ldots$ $\ldots+p_n$ выражает вероятность

$$P(|X-M(X)| \geqslant \varepsilon).$$

Это соображение позволяет переписать неравенство (**) так:

$$D(X) \geqslant \varepsilon^2 P(|X-M(X)| \geqslant \varepsilon),$$

или

$$P(|X-M(X)| \geqslant \varepsilon) \leqslant D(X)/\varepsilon^2. \qquad (***)$$

Подставляя (***) в (*), окончательно получим

$$P(|X-M(X)| < \varepsilon) \geqslant 1 - D(X)/\varepsilon^2,$$

что и требовалось доказать.

Замечание. Неравенство Чебышева имеет для практики ограниченное значение, поскольку часто дает грубую, а иногда и тривиальную (не представляющую интереса) оценку. Например, если $D(X) > \varepsilon^2$ и, следовательно, $D(X)/\varepsilon^2 > 1$, то $1-D(X)/\varepsilon^2 < 0$; таким образом, в этом случае неравенство Чебышева указывает лишь на то, что вероятность отклонения неотрицательна, а это и без того очевидно, так как любая вероятность выражается неотрицательным числом.

Теоретическое же значение неравенства Чебышева весьма велико. Ниже мы воспользуемся этим неравенством для вывода теоремы Чебышева.

§ 3. Теорема Чебышева

Теорема Чебышева. *Если $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ — попарно независимые случайные величины, причем дисперсии их равномерно ограничены (не превышают постоянного числа C), то, как бы мало ни было положительное число ε, вероятность неравенства*

$$\left| \frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n} - \frac{M(X_1)+M(X_2)+\ldots+M(X_n)}{n} \right| < \varepsilon$$

будет как угодно близка к единице, если число случайных величин достаточно велико.

Другими словами, в условиях теоремы

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{M(X_1)+M(X_2)+\ldots+M(X_n)}{n}\right|<\varepsilon\right)=1.$$

Таким образом, теорема Чебышева утверждает, что если рассматривается достаточно большое число независимых случайных величин, имеющих ограниченные дисперсии, то почти достоверным можно считать событие, состоящее в том, что отклонение среднего арифметического случайных величин от среднего арифметического их математических ожиданий будет по абсолютной величине сколь угодно малым.

Доказательство. Введем в рассмотрение новую случайную величину — среднее арифметическое случайных величин

$$\overline{X}=(X_1+X_2+\ldots+X_n)/n.$$

Найдем математическое ожидание $\overline{X}$. Пользуясь свойствами математического ожидания (постоянный множитель можно вынести за знак математического ожидания, математическое ожидание суммы равно сумме математических ожиданий слагаемых), получим

$$M\left(\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}\right)=\frac{M(X_1)+M(X_2)+\ldots+M(X_n)}{n}. \qquad (*)$$

Применяя к величине $\overline{X}$ неравенство Чебышева, имеем

$$P\left(\left|\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}-M\left(\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}\right)\right|<\varepsilon\right)\geqslant$$

$$\geqslant 1-\frac{D\left(\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}\right)}{\varepsilon^3},$$

или, учитывая соотношение (*),

$$P\left(\left|\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{M(X_1)+M(X_2)+\ldots+M(X_n)}{n}\right|<\varepsilon\right)\geqslant 1-$$

$$-\frac{D\left(\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}\right)}{\varepsilon^2}. \qquad (**)$$

Пользуясь свойствами дисперсии (постоянный множитель можно вынести за знак дисперсии, возведя его в квадрат; дисперсия суммы независимых случайных величин равна сумме дисперсий слагаемых), получим

$$D\left(\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}\right)=\frac{D(X_1)+D(X_2)+\ldots+D(X_n)}{n^2}.$$

По условию дисперсии всех случайных величин ограничены постоянным числом C, т. е. имеют место неравенства: $D(X_1)\leqslant C$; $D(X_2)\leqslant C$; $\ldots$; $D(X_n)\leqslant C$, поэтому

$$(D(X_1)+D(X_2)+\ldots+D(X_n))/n^2\leqslant(C+C+\ldots+C)/n^2=$$
$$=nC/n^2=C/n.$$

Итак,

$$D\left(\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}\right)\leqslant\frac{C}{n}. \qquad (***)$$

Подставляя правую часть (***) в неравенство (**) (отчего последнее может быть лишь усилено), имеем

$$P\left(\left|\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{M(X_1)+M(X_2)+\ldots+M(X_n)}{n}\right|<\varepsilon\right)\geqslant 1-\frac{C}{n\varepsilon^2}.$$

Отсюда, переходя к пределу при $n\to\infty$, получим

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{M(X_1)+M(X_2)+\ldots+M(X_n)}{n}\right|<\varepsilon\right)\geqslant 1.$$

Наконец, учитывая, что вероятность не может превышать единицу, окончательно можем написать

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{M(X_1)+M(X_2)+\ldots+M(X_n)}{n}\right|<\varepsilon\right)=1.$$

Теорема доказана.

Выше, формулируя теорему Чебышева, мы предполагали, что случайные величины имеют различные математические ожидания. На практике часто бывает, что случайные величины имеют одно и то же математическое ожидание. Очевидно, что если вновь допустить, что дисперсии этих величин ограничены, то к ним будет применима теорема Чебышева.

Обозначим математическое ожидание каждой из случайных величин через a; в рассматриваемом случае среднее арифметическое математических ожиданий, как легко видеть, также равно a. Мы можем сформулировать теорему Чебышева для рассматриваемого частного случая.

Если $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ — попарно независимые случайные величины, имеющие одно и то же математическое ожидание a, и если дисперсии этих величин равномерно ограничены, то, как бы мало ни было число $\varepsilon > 0$, вероятность неравенства

$$\left|\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}-a\right| < \varepsilon$$

будет как угодно близка к единице, если число случайных величин достаточно велико.

Другими словами, в условиях теоремы будет иметь место равенство

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}-a\right| < \varepsilon\right)=1.$$

§ 4. Сущность теоремы Чебышева

Сущность доказанной теоремы такова: хотя отдельные независимые случайные величины могут принимать значения, далекие от своих математических ожиданий, среднее арифметическое достаточно большого числа случайных величин с большой вероятностью принимает значения, близкие к определенному постоянному числу, а именно к числу $(M(X_1)+M(X_2)+\ldots+M(X_n))/n$ (или к числу a в частном случае). Иными словами, отдельные случайные величины могут иметь значительный разброс, а их среднее арифметическое рассеянно мало.

Таким образом, нельзя уверенно предсказать, какое возможное значение примет каждая из случайных величин, но можно предвидеть, какое значение примет их среднее арифметическое.

Итак, *среднее арифметическое достаточно большого числа независимых случайных величин* (дисперсии которых равномерно ограничены) *утрачивает характер случайной величины*. Объясняется это тем, что отклонения каждой из величин от своих математических ожиданий могут быть как положительными, так и отрицательными, а в среднем арифметическом они взаимно погашаются.

Теорема Чебышева справедлива не только для дискретных, но и для непрерывных случайных величин; она является ярким примером, подтверждающим справедливость учения диалектического материализма о связи между случайностью и необходимостью.

§ 5. Значение теоремы Чебышева для практики

Приведем примеры применения теоремы Чебышева к решению практических задач.

Обычно для измерения некоторой физической величины производят несколько измерений и их среднее арифметическое принимают в качестве искомого размера. При каких условиях этот способ измерения можно считать правильным? Ответ на этот вопрос дает теорема Чебышева (ее частный случай).

Действительно, рассмотрим результаты каждого измерения как случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_n$. К этим величинам можно применить теорему Чебышева, если: 1) они попарно независимы, 2) имеют одно и то же математическое ожидание, 3) дисперсии их равномерно ограничены.

Первое требование выполняется, если результат каждого измерения не зависит от результатов остальных. Второе требование выполняется, если измерения произведены без систематических (одного знака) ошибок. В этом случае математические ожидания всех случайных величин одинаковы и равны истинному размеру a. Третье требование выполняется, если прибор обеспечивает определенную точность измерений. Хотя при этом результаты отдельных измерений различны, но рассеяние их ограничено.

Если все указанные требования выполнены, мы вправе применить к результатам измерений теорему Чебышева: при достаточно большом n вероятность неравенства

$$|(X_1+X_2+\ldots+X_n)/n-a|<\varepsilon$$

как угодно близка к единице. Другими словами, при достаточно большом числе измерений почти достоверно, что их среднее арифметическое как угодно мало отличается от истинного значения измеряемой величины.

Итак, теорема Чебышева указывает условия, при которых описанный способ измерения может быть применен. Однако ошибочно думать, что, увеличивая число измерений, можно достичь сколь угодно большой точности. Дело в том, что сам прибор дает показания лишь с точностью $\pm \alpha$; поэтому каждый из результатов измерений, а следовательно, и их среднее арифметическое будут получены лишь с точностью, не превышающей точности прибора.

На теореме Чебышева основан широко применяемый в статистике выборочный метод, суть которого состоит в том, что по сравнительно небольшой случайной выборке судят о всей совокупности (генеральной совокупности) исследуемых объектов. Например, о качестве кипы хлопка заключают по небольшому пучку, состоящему из волокон, наудачу отобранных из разных мест кипы. Хотя число волокон в пучке значительно меньше, чем в кипе, сам пучок содержит достаточно большое количество волокон, исчисляемое сотнями.

В качестве другого примера можно указать на определение качества зерна по небольшой его пробе. И в этом случае число наудачу отобранных зерен мало сравнительно со всей массой зерна, но само по себе оно достаточно велико.

Уже из приведенных примеров можно заключить, что для практики теорема Чебышева имеет неоценимое значение.

§ 6. Теорема Бернулли

Пусть производится n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A равна p. Можно ли предвидеть, какова примерно будет относительная частота появлений события? Положительный ответ на этот вопрос дает теорема, доказанная Якобом Бернулли (опубликована в 1713 г.), которая получила название «закона больших чисел» и положила начало теории вероятностей как науке. Доказательство Бернулли было сложным; простое доказательство дано П. Л. Чебышевым в 1846 г.

Теорема Бернулли. *Если в каждом из n независимых испытаний вероятность p появления события A постоянна, то как угодно близка к единице вероятность того, что отклонение относительной частоты от вероятности p по абсолютной величине будет сколь угодно малым, если число испытаний достаточно велико.*

Другими словами, если ε — сколь угодно малое положительное число, то при соблюдении условий теоремы имеет место равенство

$$\lim_{n \to \infty} P(|m/n-p| < \varepsilon) = 1.$$

Доказательство. Обозначим через X_1 дискретную случайную величину — число появлений события в первом испытании, через X_2 — во втором, ..., X_n — в n-м испытании. Ясно, что каждая из величин может принять лишь два значения: 1 (событие A наступило) с вероятностью p и 0 (событие не появилось) с вероятностью $1-p=q$.

Можно ли применить к рассматриваемым величинам теорему Чебышева? Можно, если случайные величины попарно независимы и дисперсии их ограничены. Оба условия выполняются Действительно, попарная независимость величин $X_1, X_2, \dots, X_n$ следует из того, что испытания независимы. Дисперсия любой величины X_i $(i=1, 2, \dots, n)$ равна произведению pq *); так как $p+q=1$, то произведение pq не превышает **) 1/4 и, следовательно, дисперсии всех величин ограничены, например, числом $C=1/4$.

Применяя теорему Чебышева (частный случай) к рассматриваемым величинам, имеем

$$\lim_{n \to \infty} P(|(X_1+X_2+\dots+X_n)/n-a| < \varepsilon) = 1.$$

Приняв во внимание, что математическое ожидание a каждой из величин X_i (т. е. математическое ожидание числа появлений события в одном испытании) равно вероятности p наступления события (см. гл. VII, § 2, пример 2), получим

$$\lim_{n \to \infty} P(|(X_1+X_2+\dots+X_n)/n-p| < \varepsilon) = 1.$$

Остается показать, что дробь $(X_1+X_2+\dots+X_n)/n$ равна относительной частоте m/n появлений события A в испытаниях. Действительно, каждая из величин X_1, X_2, .. , X_n при появлении события в соответствующем испытании принимает значение, равное единице; следо-

---

*) Это следует из § 6 гл. VIII, если принять $n=1$.

**) Известно, что произведение двух сомножителей, сумма которых есть величина постоянная, имеет наибольшее значение при равенстве сомножителей. Здесь сумма $p_i+q_i=1$, т. е. постоянна, поэтому при $p_i=q_i=1/2$ произведение p_iq_i имеет наибольшее значение и равно 1/4.

вательно, сумма $X_1+X_2+\ldots+X_n$ равна числу m появлений события в n испытаниях, а значит,

$$(X_1+X_2+\ldots+X_n)/n=m/n.$$

Учитывая это равенство, окончательно получим

$$\lim_{n\to\infty} P(|m/n-p|<\varepsilon)=1.$$

Замечание. Было бы неправильным на основании теоремы Бернулли сделать вывод, что с ростом числа испытаний относительная частота неуклонно стремится к вероятности p; другими словами, из теоремы Бернулли не вытекает равенство $\lim\limits_{n\to\infty}(m/n)=p$. В теореме речь идет лишь о вероятности того, что при достаточно большом числе испытаний относительная частота будет как угодно мало отличаться от постоянной вероятности появления события в каждом испытании.

Таким образом, сходимость относительной частоты m/n к вероятности p отличается от сходимости в смысле обычного анализа. Для того чтобы подчеркнуть это различие, вводят понятие «сходимости по вероятности»[*]. Точнее, различие между указанными видами сходимости состоит в следующем: если m/n стремится при $n\to\infty$ к p как пределу в смысле обычного анализа, то начиная с некоторого $n=N$ и для всех последующих значений n неуклонно выполняется неравенство $|m/n-p|<\varepsilon$; если же m/n стремится по вероятности к p при $n\to\infty$, то для отдельных значений n неравенство может не выполняться.

Итак, теорема Бернулли утверждает, что при $n\to\infty$ относительная частота стремится по вероятности к p. Коротко теорему Бернулли записывают так:

$$\frac{m}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{\text{вер}}p.$$

Как видим, теорема Бернулли объясняет, почему относительная частота при достаточно большом числе испытаний обладает свойством устойчивости и оправдывает статистическое определение вероятности (см. гл. I, § 6—7).

Задачи

1. Сформулировать и записать теорему Чебышева, используя понятие «сходимости по вероятности».

2. Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что $|X-M(X)|<0{,}1$, если $D(X)=0{,}001$.

Отв. $P\geqslant 0{,}9$.

3. Дано: $P(|X-M(X)|<\varepsilon)\geqslant 0{,}9$; $D(X)=0{,}004$. Используя неравенство Чебышева, найти ε.

Отв. 0,2.

---

[*] Последовательность случайных величин $X_1, X_2, \ldots$ сходится по вероятности к случайной величине X, если для любого $\varepsilon>0$ вероятность неравенства $|X_n-X|<\varepsilon$ при $n\to\infty$ стремится к единице.

Глава десятая

ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

§ 1. Определение функции распределения

Вспомним, что дискретная случайная величина может быть задана перечнем всех ее возможных значений и их вероятностей. Такой способ задания не является общим: он неприменим, например, для непрерывных случайных величин.

Действительно, рассмотрим случайную величину X, возможные значения которой сплошь заполняют интервал (a, b). Можно ли составить перечень всех возможных значений X? Очевидно, что этого сделать нельзя. Этот пример указывает на целесообразность дать общий способ задания любых типов случайных величин. С этой целью и вводят функции распределения вероятностей случайной величины.

Пусть x — действительное число. Вероятность события, состоящего в том, что X примет значение, меньшее x, т. е. вероятность события $X < x$, обозначим через $F(x)$. Разумеется, если x изменяется, то, вообще говоря, изменяется и $F(x)$, т. е. $F(x)$ — функция от x.

Функцией распределения называют функцию $F(x)$, определяющую вероятность того, что случайная величина X в результате испытания примет значение, меньшее x, т. е.

$$F(x) = P(X < x).$$

Геометрически это равенство можно истолковать так: $F(x)$ есть вероятность того, что случайная величина примет значение, которое изображается на числовой оси точкой, лежащей левее точки x.

Иногда вместо термина «функция распределения» используют термин «интегральная функция».

Теперь можно дать более точное определение непрерывной случайной величины: случайную величину называют *непрерывной*, если ее функция распределения есть непрерывная, кусочно-дифференцируемая функция с непрерывной производной.

§ 2. Свойства функции распределения

Свойство 1. *Значения функции распределения принадлежат отрезку* $[0, 1]$:

$$0 \leqslant F(x) \leqslant 1.$$

Доказательство. Свойство вытекает из определения функции распределения как вероятности: вероятность всегда есть неотрицательное число, не превышающее единицы.

Свойство 2. $F(x)$ — *неубывающая функция, т. е.*

$$F(x_2) \geqslant F(x_1), \text{ если } x_2 > x_1.$$

Доказательство. Пусть $x_2 > x_1$. Событие, состоящее в том, что X примет значение, меньшее x_2, можно подразделить на следующие два несовместных события: 1) X примет значение, меньшее x_1, с вероятностью $P(X < x_1)$; 2) X примет значение, удовлетворяющее неравенству $x_1 \leqslant X < x_2$, с вероятностью $P(x_1 \leqslant X < x_2)$. По теореме сложения имеем

$$P(X < x_2) = P(X < x_1) + P(x_1 \leqslant X < x_2).$$

Отсюда

$$P(X < x_2) - P(X < x_1) = P(x_1 \leqslant X < x_2),$$

или

$$F(x_2) - F(x_1) = P(x_1 \leqslant X < x_2). \qquad (*)$$

Так как любая вероятность есть число неотрицательное, то $F(x_2) - F(x_1) \geqslant 0$, или $F(x_2) \geqslant F(x_1)$, что и требовалось доказать.

Следствие 1. *Вероятность того, что случайная величина примет значение, заключенное в интервале* (a, b), *равна приращению функции распределения на этом интервале:*

$$P(a \leqslant X < b) = F(b) - F(a). \qquad (**)$$

Это важное следствие вытекает из формулы (*), если положить $x_2 = b$ и $x_1 = a$.

Пример. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \leqslant -1; \\ x/4 + 1/4 & \text{при} \quad -1 < x \leqslant 3; \\ 1 & \text{при} \quad x > 3. \end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение, принадлежащее интервалу (0, 2):

$$P(0 < X < 2) = F(2) - F(0).$$

Решение. Так как на интервале (0, 2), по условию,

$$F(x) = x/4 + 1/4,$$

то

$$F(2) - F(0) = (2/4 + 1/4) - (0/4 + 1/4) = 1/2.$$

Итак,

$$P(0 < X < 2) = 1/2.$$

Следствие 2. *Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет одно определенное значение, равна нулю.*

Действительно, положив в формуле (**) $a = x_1$, $b = x_1 + \Delta x$, имеем

$$P(x_1 \leqslant X < x_1 + \Delta x) = F(x_1 + \Delta x) - F(x_1).$$

Устремим Δx к нулю. Так как X — непрерывная случайная величина, то функция $F(x)$ непрерывна. В силу непрерывности $F(x)$ в точке x_1 разность $F(x_1 + \Delta x) - F(x_1)$ также стремится к нулю; следовательно, $P(X = x_1) = 0$. Используя это положение, легко убедиться в справедливости равенств

$$P(a \leqslant X < b) = P(a < X < b) = \\ = P(a < X \leqslant b) = P(a \leqslant X \leqslant b). \qquad (***)$$

Например, равенство $P(a < X \leqslant b) = P(a < X < b)$ доказывается так:

$$P(a < X \leqslant b) = P(a < X < b) + P(X = b) = P(a < X < b).$$

Таким образом, не представляет интереса говорить о вероятности того, что непрерывная случайная величина примет одно определенное значение, но имеет смысл рассматривать вероятность попадания ее в интервал, пусть даже сколь угодно малый. Этот фак полностью соответствует требованиям практических задач. Например, интересуются вероятностью того, что размеры деталей не выходят за дозволенные границы, но не ставят вопроса о вероятности их совпадения с проектным размером.

Заметим, что было бы неправильным думать, что равенство нулю вероятности $P(X = x_1)$ означает, что событие $X = x_1$ невозможно (если, конечно, не ограничиваться классическим определением вероятности). Действительно, в результате испытания случайная величина обязательно примет одно из возможных значений; в частности, это значение может оказаться равным x_1.

Свойство 3. *Если возможные значения случайной величины принадлежат интервалу* (a, b), *то*: 1) $F(x)=0$ *при* $x \leqslant a$; 2) $F(x)=1$ *при* $x \geqslant b$.

Доказательство. 1) Пусть $x_1 \leqslant a$. Тогда событие $X < x_1$ невозможно (так как значений, меньших x_1, величина X по условию не принимает) и, следовательно, вероятность его равна нулю.

2) Пусть $x_2 \geqslant b$. Тогда событие $X < x_2$ достоверно (так как все возможные значения X меньше x_2) и, следовательно, вероятность его равна единице.

Следствие. *Если возможные значения непрерывной случайной величины расположены на всей оси* x, *то справедливы следующие предельные соотношения:*

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0; \quad \lim_{x \to \infty} F(x) = 1.$$

§ 3. График функции распределения

Доказанные свойства позволяют представить, как выглядит график функции распределения непрерывной случайной величины.

График расположен в полосе, ограниченной прямыми $y=0$, $y=1$ (первое свойство).

При возрастании x в интервале (a, b), в котором заключены все возможные значения случайной величины, график «подымается вверх» (второе свойство).

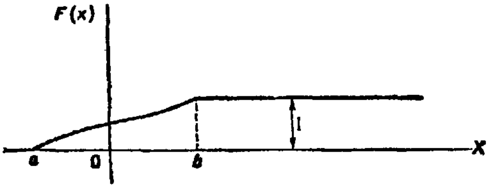

Рис. 2

При $x \leqslant a$ ординаты графика равны нулю; при $x \geqslant b$ ординаты графика равны единице (третье свойство).

График функции распределения непрерывной случайной величины изображен на рис. 2.

Замечание. График функции распределения дискретной случайной величины имеет ступенчатый вид. Убедимся в этом на примере.

Пример. Дискретная случайная величина X задана таблицей распределения

X	1	4	8
p	0,3	0,1	0,6

Найти функцию распределения и вычертить ее график.

Решение. Если $x \leqslant 1$, то $F(x) = 0$ (третье свойство).

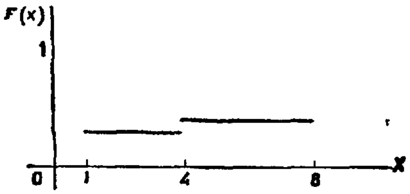

Рис. 3

Если $1 < x \leqslant 4$, то $F(x) = 0{,}3$. Действительно, X может принять значение 1 с вероятностью 0,3.

Если $4 < x \leqslant 8$, то $F(x) = 0{,}4$. Действительно, если x_1 удовлетворяет неравенству $4 < x_1 \leqslant 8$, то $F(x_1)$ равно вероятности события $X < x_1$, которое может быть осуществлено, когда X примет значение 1 (вероятность этого события равна 0,3) или значение 4 (вероятность этого события равна 0,1). Поскольку эти два события несовместны, то по теореме сложения вероятность события $X < x_1$ равна сумме вероятностей $0{,}3 + 0{,}1 = 0{,}4$.

Если $x > 8$, то $F(x) = 1$. Действительно, событие $X \leqslant 8$ достоверно, следовательно, его вероятность равна единице.

Итак, функция распределения аналитически может быть записана так:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \leqslant 1, \\ 0{,}3 & \text{при} \quad 1 < x \leqslant 4, \\ 0{,}4 & \text{при} \quad 4 < x \leqslant 8, \\ 1 & \text{при} \quad x > 8. \end{cases}$$

График этой функции приведен на рис. 3.

Задачи

1. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \leqslant -1, \\ x/3 + 1/3 & \text{при} \quad -1 < x \leqslant 2, \\ 1 & \text{при} \quad x > 2. \end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение, заключенное в интервале (0, 1).

Отв. 1/3.

2. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \leqslant 2, \\ (x/2) - 1 & \text{при} \quad 2 < x \leqslant 4, \\ 1 & \text{при} \quad x > 4. \end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение, заключенное в интервале (2, 3).

Отв. 1/2.

3. Дискретная случайная величина X задана законом распределения

X	2	6	10
p	0,5	0,4	0,1

Построить график функции распределения этой величины.

Глава одиннадцатая

ПЛОТНОСТЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ НЕПРЕРЫВНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

§ 1. Определение плотности распределения

Выше непрерывная случайная величина задавалась с помощью функции распределения. Этот способ задания не является единственным. Непрерывную случайную величину можно также задать, используя другую функцию, которую называют плотностью распределения или плотностью вероятности (иногда ее называют дифференциальной функцией).

Плотностью распределения вероятностей непрерывной случайной величины X называют функцию $f(x)$ — первую производную от функции распределения $F(x)$:

$$f(x) = F'(x).$$

Из этого определения следует, что функция распределения является первообразной для плотности распределения.

Заметим, что для описания распределения вероятностей дискретной случайной величины плотность распределения неприменима.

§ 2. Вероятность попадания непрерывной случайной величины в заданный интервал

Зная плотность распределения, можно вычислить вероятность того, что непрерывная случайная величина примет значение, принадлежащее заданному интервалу. Вычисление основано на следующей теореме.

Теорема. *Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет значение, принадлежащее интервалу (a, b), равна определенному интегралу от плотности* *распределения, взятому в пределах от a до b*:

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Доказательство. Используем соотношение (**) (см. гл. X, § 2)

$$P(a \leqslant X < b) = F(b) - F(a).$$

По формуле Ньютона — Лейбница,

$$F(b) - F(a) = \int_a^b F'(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Таким образом,

$$P(a \leqslant X < b) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Так как $P(a \leqslant X < b) = P(a < X < b)$, то окончательно получим

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)\,dx. \qquad (*)$$

Геометрически полученный результат можно истолковать так: вероятность того, что непрерывная случайная величина примет значение, принадлежащее интервалу (a, b), равна площади криволинейной трапеции, ограниченной осью Ox, кривой распределения $f(x)$ и прямыми $x = a$ и $x = b$.

Замечание. В частности, если $f(x)$ — четная функция и концы интервала симметричны относительно начала координат, то

$$P(-a < X < a) = P(|X| < a) = 2\int_0^a f(x)\,dx.$$

Пример. Задана плотность вероятности случайной величины X

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \leqslant 0, \\ 2x & \text{при} \quad 0 < x \leqslant 1, \\ 0 & \text{при} \quad x > 1. \end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение, принадлежащее интервалу (0,5; 1).

Решение. Искомая вероятность

$$P(0{,}5 < X < 1) = 2\int_{0{,}5}^{1} x\,dx = x^2 \Big|_{0{,}5}^{1} = 1 - 0{,}25 = 0{,}75.$$

§ 3. Нахождение функции распределения по известной плотности распределения

Зная плотность распределения $f(x)$, можно найти функцию распределения $F(x)$ по формуле

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx.$$

Действительно, мы обозначили через $F(x)$ вероятность того, что случайная величина примет значение, меньшее x, т. е.

$$F(x) = P(X < x).$$

Очевидно, неравенство $X < x$ можно записать в виде двойного неравенства $-\infty < X < x$, следовательно,

$$F(x) = P(-\infty < X < x). \qquad (*)$$

Полагая в формуле (*) (см. § 2) $a = -\infty$, $b = x$, имеем

$$P(-\infty < X < x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx.$$

Наконец, заменив $P(-\infty < X < x)$ на $F(x)$, в силу (*), окончательно получим

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx.$$

Таким образом, зная плотность распределения, можно найти функцию распределения. Разумеется, по известной функции распределения может быть найдена плотность распределения, а именно:

$$f(x) = \Gamma'(x).$$

Пример. Найти функцию распределения по данной плотности распределения:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \leqslant a, \\ 1/(b-a) & \text{при} \quad a < x \leqslant b, \\ 0 & \text{при} \quad x > b. \end{cases}$$

Построить график найденной функции.

Решеиие. Воспользуемся формулой $F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$.

Если $x \leqslant a$, то $f(x) = 0$, следовательно, $F(x) = 0$. Если $a < x \leqslant b$, то $f(x) = 1/(b-a)$, следовательно,

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a} 0\,dx + \int_{a}^{x} \frac{1}{b-a}\,dx = \frac{x-a}{b-a}.$$

Если $x > b$, то

$$F(x) = \int_{-\infty}^{a} 0\,dx + \int_{a}^{b} \frac{dx}{b-a} + \int_{b}^{x} 0\,dx = \frac{b-a}{b-a} = 1.$$

Итак, искомая функция распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \leqslant a, \\ (x-a)/(b-a) & \text{при} \quad a < x \leqslant b, \\ 1 & \text{при} \quad x > b. \end{cases}$$

График этой функции изображен на рис. 4.

§ 4. Свойства плотности распределения

Свойство 1. *Плотность распределения — неотрицательная функция:*

$$f(x) \geqslant 0.$$

Доказательство. Функция распределения — неубывающая функция, следовательно, ее производная $F'(x) = f(x)$ — функция неотрицательная.

Геометрически это свойство означает, что точки, принадлежащие графику плотности распределения, расположены либо над осью Ox, либо на этой оси.

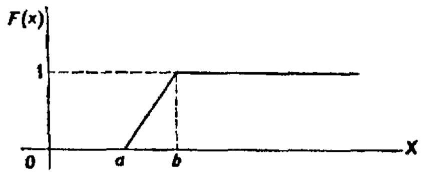

Рис. 4

График плотности распределения называют *кривой распределения*.

Свойство 2. *Несобственный интеграл от плотности распределения в пределах от $-\infty$ до ∞ равен единице:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1.$$

Доказательство. Несобственный интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ выражает вероятность события, состоящего в том, что случайная величина примет значение, принадлежащее интервалу $(-\infty, \infty)$. Очевидно, такое событие достоверно, следовательно, вероятность его равна единице.

Геометрически это означает, что вся площадь криволинейной трапеции, ограниченной осью Ox и кривой распределения, равна единице.

В частности, если все возможные значения случайной величины принадлежат интервалу (a, b), то

$$\int_a^b f(x)\,dx = 1.$$

Пример. Плотность распределения случайной величины X задана:

$$f(x) = \frac{a}{e^{-x}+e^{x}}.$$

Найти постоянный параметр a.

Решение. Плотность распределения должна удовлетворять условию $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$, поэтому потребуем, чтобы выполнялось равенство

$$a\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{e^{-x}+e^{x}} = 1.$$

Отсюда

$$a = \frac{1}{\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{e^{-x}+e^{x}}}.$$

Найдем неопределенный интеграл:

$$\int\frac{dx}{e^{-x}+e^{x}} = \int\frac{e^{x}\,dx}{1+e^{2x}} = \operatorname{arctg} e^{x}.$$

Вычислим несобственный интеграл:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{e^{-x}+e^{x}} = \lim_{b\to-\infty}\int_b^0\frac{dx}{e^{-x}+e^{x}} + \lim_{c\to\infty}\int_0^c\frac{dx}{e^{-x}+e^{x}} =$$

$$= \lim_{b\to-\infty}(-\operatorname{arctg} e^{b}) + \lim_{c\to\infty}(\operatorname{arctg} e^{c}) = \pi/2.$$

Таким образом, искомый параметр

$$a = \frac{1}{\pi/2} = \frac{2}{\pi}.$$

§ 5. Вероятностный смысл плотности распределения

Пусть $F(x)$ — функция распределения непрерывной случайной величины X. По определению плотности распределения, $f(x)=F'(x)$, или в иной форме

$$f(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}.$$

Как уже известно, разность $F(x+\Delta x)-F(x)$ определяет вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу $(x,\ x+\Delta x)$. Таким образом, предел отношения вероятности того, что непрерывная случайная величина примет значение, принадлежащее интервалу $(x,\ x+\Delta x)$, к длине этого интервала (при $\Delta x\to 0$) равен значению плотности распределения в точке x.

По аналогии с определением плотности массы в точке [*] целесообразно рассматривать значение функции $f(x)$ в точке x как плотность вероятности в этой точке.

Итак, функция $f(x)$ определяет плотность распределения вероятности для каждой точки x.

Из дифференциального исчисления известно, что приращение функции приближенно равно дифференциалу функции, т. е.

$$F(x+\Delta x)-F(x)\simeq dF(x),$$

или

$$F(x+\Delta x)-F(x)\simeq F'(x)\,dx.$$

Так как $F'(x)=f(x)$ и $dx=\Delta x$, то

$$F(x+\Delta x)-F(x)\simeq f(x)\,\Delta x.$$

Вероятностный смысл этого равенства таков: вероятность того, что случайная величина примет значение, принадлежащее интервалу $(x,\ x+\Delta x)$, приближенно равна (с точностью до бесконечно малых высшего порядка относительно Δx) произведению плотности вероятности в точке x на длину интервала Δx.

---

[*] Если масса непрерывно распределена вдоль оси x по некоторому закону, например $F(x)$, то плотностью $\rho(x)$ массы в точке x называют предел отношения массы интервала $(x,\ x+\Delta x)$ к длине интервала при $\Delta x\to 0$, т. е. $\rho(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}$.

Геометрически этот результат можно истолковать так: вероятность того, что случайная величина примет значение, принадлежащее интервалу $(x, x+\Delta x)$, приближенно равна площади прямоугольника с основанием Δx и высотой $f(x)$.

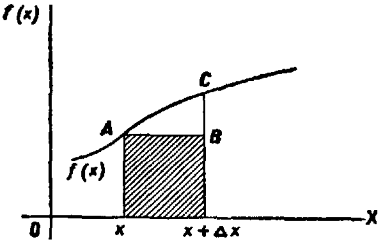

Рис. 5

На рис. 5 видно, что площадь заштрихованного прямоугольника, равная произведению $f(x)\,\Delta x$, лишь приближенно равна площади криволинейной трапеции (истинной вероятности, определяемой определенным интегралом $\int\limits_{x}^{x+\Delta x} f(x)\,dx$). Допущенная при этом погрешность равна площади криволинейного треугольника ABC.

§ 6. Закон равномерного распределения вероятностей

При решении задач, которые выдвигает практика, приходится сталкиваться с различными распределениями непрерывных случайных величин. Плотности распределений непрерывных случайных величин называют также *законами распределений*. Часто встречаются, например, законы равномерного, нормального и показательного распределений. В настоящем параграфе рассматривается закон равномерного распределения вероятностей. Нормальному и показательному законам посвящены следующие две главы.

Распределение вероятностей называют *равномерным*, если на интервале, которому принадлежат все возможные значения случайной величины, плотность распределения сохраняет постоянное значение.

Приведем пример равномерно распределенной непрерывной случайной величины.

Пример. Шкала измерительного прибора проградуирована в некоторых единицах. Ошибку при округлении отсчета до ближайшего целого деления можно рассматривать как случайную величину X, которая может принимать с постоянной плотностью вероятности любое значение между двумя соседними целыми делениями. Таким образом, X имеет равномерное распределение.

Найдем плотность равномерного распределения $f(x)$, считая, что все возможные значения случайной величины заключены в интервале (a, b), на котором функция $f(x)$ сохраняет постоянные значения:

По условию, X не принимает значений вне интервала (a, b), поэтому $f(x)=0$ при $x<a$ и $x>b$.

Найдем постоянную C. Так как все возможные значения случайной величины принадлежат интервалу (a, b), то должно выполняться соотношение

$$\int_a^b f(x)\,dx=1, \quad \text{или} \quad \int_a^b C\,dx=1.$$

Отсюда

$$C=1/\int_a^b dx=1/(b-a).$$

Итак, искомая плотность вероятности равномерного распределения

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x\leqslant a, \\ 1/(b-a) & \text{при} \quad a<x\leqslant b, \\ 0 & \text{при} \quad x>b. \end{cases}$$

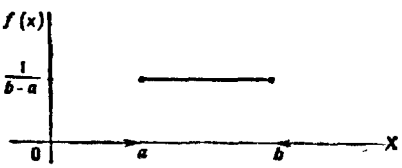

Рис. 6

График плотности равномерного распределения изображен на рис. 6, а график функции распределения — на рис. 4.

Замечание. Обозначим через R непрерывную случайную величину, распределенную равномерно в интервале $(0, 1)$, а через r — ее возможные значения. Вероятность попадания величины R (в результате испытания) в интервал (c, d), принадлежащий интервалу $(0, 1)$, равна его длине:

$$P(c<R<d)=d-c.$$

Действительно, плотность рассматриваемого равномерного распределения

$$f(r)=1/(1-0)=1.$$

Следовательно, вероятность попадания случайной величины R в интервал (c, d) (см. гл. XI, § 2)

$$P(c<R<d)=\int_c^d f(r)\,dr=\int_c^d 1\cdot dr=d-c.$$

Далее случайная величина R используется неоднократно (см. гл. XXI).

Задачи

1. Случайная величина задана плотностью распределения

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \leqslant -\pi/2, \\ a\cos x & \text{при} \quad -\pi/2 < x \leqslant \pi/2, \\ 0 & \text{при} \quad x > \pi/2. \end{cases}$$

Найти коэффициент a.

Отв. $a=1/2$.

2. Случайная величина задана плотностью распределения

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \leqslant 0, \\ (\sin x)/2 & \text{при} \quad 0 < x \leqslant \pi, \\ 0 & \text{при} \quad x > \pi. \end{cases}$$

Найти: а) функцию распределения; б) вероятность того, что в результате испытания случайная величина примет значение, заключенное в интервале $(0, \pi/4)$.

$$\textit{Отв.}\ F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \leqslant 0, \\ (1-\cos x)/2 & \text{при} \quad 0 < x \leqslant \pi, \\ 1 & \text{при} \quad x > \pi. \end{cases}$$

3. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \leqslant 0, \\ x & \text{при} \quad 0 < x \leqslant 1, \\ 1 & \text{при} \quad x > 1. \end{cases}$$

Найти плотность распределения.

Отв. $f(x)=1$ в интервале $(0, 1)$; вне этого интервала $f(x)=0$.

4. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x=0, \\ (1-\cos x)/2 & \text{при} \quad 0 < x \leqslant \pi, \\ 1 & \text{при} \quad x > \pi. \end{cases}$$

Отв. $f(x)=(\sin x)/2$ в интервале $(0, \pi)$; вне этого интервала $f(x)=0$.

Глава двенадцатая

НОРМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

§ 1. Числовые характеристики непрерывных случайных величин

Распространим определения числовых характеристик дискретных величин на величины непрерывные. Начнем с математического ожидания.

Пусть непрерывная случайная величина X задана плотностью распределения $f(x)$. Допустим, что все возможные значения X принадлежат отрезку $[a, b]$. Разобьем этот отрезок на n частичных отрезков длиной $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$ и выберем в каждом из них произвольную точку x_i ($=1, 2, \ldots, n$). Нам надо определить математическое ожидание непрерывной величины по аналогии с дискретной; составим сумму произведений возможных значений x_i на вероятности попадания их в интервал Δx_i (напомним, что произведение $f(x)\Delta x$ приближенно равно вероятности попадания X в интервал Δx):

$$\sum x_i f(x_i)\,\Delta x_i.$$

Перейдя к пределу при стремлении к нулю длины наибольшего из частичных отрезков, получим определенный интеграл $\int\limits_a^b xf(x)\,dx$.

Математическим ожиданием непрерывной случайной величины X, возможные значения которой принадлежат отрезку $[a, b]$, называют определенный интеграл

$$M(X) = \int\limits_a^b xf(x)\,dx. \qquad (*)$$

Если возможные значения принадлежат всей оси Ox, то

$$M(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx.$$

Предполагается, что несобственный интеграл сходится абсолютно, т. е. существует интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |x|\,f(x)\,dx$. Если бы это требование не выполнялось, то значение интеграла зависело бы от скорости стремления (в отдельности) нижнего предела к $-\infty$, а верхнего — к $+\infty$.

По аналогии с дисперсией дискретной величины определяется и дисперсия непрерывной величины.

Дисперсией непрерывной случайной величины называют математическое ожидание квадрата ее отклонения.

Если возможные значения X принадлежат отрезку $[a, b]$, то

$$D(X) = \int\limits_a^b [x - M(X)]^2 f(x)\,dx;$$

если возможные значения принадлежат всей оси x, то

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty}[x-M(X)]^2 f(x)\,dx.$$

Среднее квадратическое отклонение непрерывной случайной величины определяется, как и для величины дискретной, равенством

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}.$$

Замечание 1. Можно доказать, что свойства математического ожидания и дисперсии дискретных величин сохраняются и для непрерывных величин.

Замечание 2. Легко получить для вычисления дисперсии более удобные формулы:

$$D(X)=\int_a^b x^2 f(x)\,dx-[M(X)]^2, \qquad (**)$$

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx-[M(X)]^2.$$

Пример 1. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины X, заданной функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x\leqslant 0,\\ x & \text{при} \quad 0<x\leqslant 1,\\ 1 & \text{при} \quad x>1.\end{cases}$$

Решение. Найдем плотность распределения:

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x\leqslant 0,\\ 1 & \text{при} \quad 0<x<1.\\ 0 & \text{при} \quad x>1.\end{cases}$$

Найдем математическое ожидание по формуле (*):

$$M(X)=\int_0^1 x\cdot 1\cdot dx=x^2/2\Big|_0^1=1/2.$$

Найдем дисперсию по формуле (**):

$$D(X)=\int_0^1 x^2\cdot 1\cdot dx-[1/2]^2=x^3/3\Big|_0^1-1/4=1/12.$$

Пример 2. Найти математическое ожидание и дисперсию непрерывной случайной величины X, распределенной равномерно в интервале (a, b).

Решение. Найдем математическое ожидание X по формуле (*), учитывая, что плотность равномерного распределения $f(x)=1/(b-a)$

(см. гл. XI, § 6):

$$M(X)=\int_a^b xf(x)\,dx=\frac{1}{b-a}\int_a^b x\,dx.$$

Выполнив элементарные выкладки, получим

$$M(X)=(a+b)/2.$$

Найдем дисперсию X по формуле (**):

$$D(X)=\int_a^b x^2f(x)\,dx-[M(X)]^2=\frac{1}{b-a}\int_a^b x^2\,dx-\left[\frac{a+b}{2}\right]^2.$$

Выполнив элементарные выкладки, получим

$$D(X)=(b-a)^2/12.$$

Замечание 3. Математическое ожидание и дисперсия случайной величины R, распределенной равномерно в интервале (0, 1), т. е. если $a=0$, $b=1$, как следует из примера 2, соответственно равны $M(R)=1/2$, $D(R)=1/12$. Этот же результат мы получили в примере 1 по заданной функции распределения случайной величины R.

§ 2. Нормальное распределение

Нормальным называют распределение вероятностей непрерывной случайной величины, которое описывается плотностью

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,e^{-(x-a)^2/2\sigma^2}.$$

Мы видим, что *нормальное распределение определяется двумя параметрами*: a и σ. Достаточно знать эти параметры, чтобы задать нормальное распределение. Покажем, что вероятностный смысл этих параметров таков: a есть математическое ожидание, σ — среднее квадратическое отклонение нормального распределения.

а) По определению математического ожидания непрерывной случайной величины,

$$M(X)=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} x\,e^{-(x-a)^2/2\sigma^2}\,dx.$$

Введем новую переменную $z=(x-a)/\sigma$. Отсюда $x=\sigma z+a$, $dx=\sigma\,dz$. Приняв во внимание, что новые пределы интегрирования равны старым, получим

$$M(X)=\frac{\sigma}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(\sigma z+a)\,e^{-z^2/2}\,dz=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\sigma z e^{-z^2/2}\,dz+\frac{a}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-z^2/2}\,dz.$$

Первое из слагаемых равно нулю (под знаком интеграла нечетная функция; пределы интегрирования симметричны относительно начала координат). Второе из слагаемых равно a $\left(\text{интеграл Пуассона } \int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-z^2/2}\,dz=\sqrt{2\pi}\right)$.

Итак, $M(X)=a$, т. е. *математическое ожидание нормального распределения равно параметру a.*

б) По определению дисперсии непрерывной случайной величины, учитывая, что $M(X)=a$, имеем

$$D(X)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(x-a)^2\,e^{-(x-a)^2/2\sigma^2}\,dx.$$

Введем новую переменную $z=(x-a)/\sigma$. Отсюда $x-a=\sigma z$, $dx=\sigma\,dz$. Приняв во внимание, что новые пределы интегрирования равны старым, получим

$$D(X)=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}z\cdot ze^{-z^2/2}\,dz.$$

Интегрируя по частям, положив $u=z$, $dv=ze^{-z^2/2}\,dz$, найдем

$$D(X)=\sigma^2.$$

Следовательно,

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{\sigma^2}=\sigma.$$

Итак, *среднее квадратическое отклонение нормального распределения равно параметру σ.*

Замечание 1. *Общим* называют нормальное распределение с произвольными параметрами a и σ ($\sigma>0$).

Нормированным называют нормальное распределение с параметрами $a=0$ и $\sigma=1$. Например, если X — нормальная величина с параметрами a и σ, то $U=(X-a)/\sigma$ — нормированная нормальная величина, причем $M(U)=0$, $\sigma(U)=1$.

Плотность нормированного распределения

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-x^2/2}.$$

Эта функция табулирована (см. приложение 1).

Замечание 2. Функция $F(x)$ общего нормального распределения (см. гл. XI, § 3)

$$F(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-(z-a)^2/(2\sigma^2)}\,dz,$$

а функция нормированного распределения

$$F_0(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-z^2/2}\,dz.$$

Функция $F_0(x)$ табулирована. Легко проверить, что

$$F(x)=F_0((x-a)/\sigma).$$

Замечание 3. Вероятность попадания нормированной нормальной величины X в интервал $(0,\ x)$ можно найти, пользуясь функцией Лапласа $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{x} e^{-z^2/2}\,dz$. Действительно (см. гл. XI, § 2),

$$P(0<X<x)=\int\limits_{0}^{x}\varphi(x)\,dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{x} e^{-z^2/2}\,dz=\Phi(x).$$

Замечание 4. Учитывая, что $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\,dx=1$ (см. гл. XI, § 4, свойство 2), и, следовательно, в силу симметрии $\varphi(x)$ относительно нуля

$$\int\limits_{-\infty}^{0}\varphi(x)\,dx=0{,}5,\ \text{ а значит, и }\ P(-\infty<X<0)=0{,}5,$$

легко получить, что

$$F_0(x)=0{,}5+\Phi(x).$$

Действительно,

$$F_0(x)=P(-\infty<X<x)=P(-\infty<X<0)+P(0<X<x)=$$
$$=0{,}5+\Phi(x).$$

§ 3. Нормальная кривая

График плотности нормального распределения называют *нормальной кривой (кривой Гаусса).*

Исследуем функцию

$$y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-a)^2/(2\sigma^2)}$$

методами дифференциального исчисления.

1. Очевидно, функция определена на всей оси x.

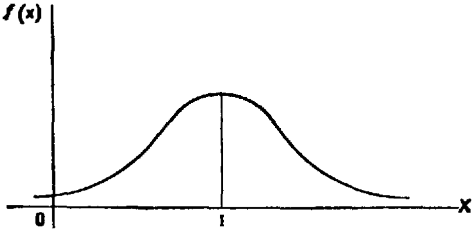

Рис. 7

2. При всех значениях x функция принимает положительные значения, т. е. нормальная кривая расположена над осью Ox.

3 Предел функции при неограниченном возрастании x (по абсолютной величине) равен нулю: $\lim\limits_{|x|\to\infty} y = 0$, т. е. ось Ox служит горизонтальной асимптотой графика.

4. Исследуем функцию на экстремум. Найдем первую производную:

$$y' = -\frac{x-a}{\sigma^3\sqrt{2\pi}} e^{-(x-a)^2/(2\sigma^2)}.$$

Легко видеть, что $y'=0$ при $x=a$, $y'>0$ при $x<a$, $y'<0$ при $x>a$.

Следовательно, при $x=a$ функция имеет максимум, равный $1/(\sigma\sqrt{2\pi})$.

5. Разность $x-a$ содержится в аналитическом выражении функции в квадрате, т. е. график функции симметричен относительно прямой $x=a$.

6. Исследуем функцию на точки перегиба. Найдем вторую производную:

$$y'' = -\frac{1}{\sigma^3\sqrt{2\pi}} e^{-(x-a)^2/(2\sigma^2)} \left[1 - \frac{(x-a)^2}{\sigma^2}\right].$$

Легко видеть, что при $x=a+\sigma$ и $x=a-\sigma$ вторая производная равна нулю, а при переходе через эти точки она меняет знак (в обеих этих точках значение функции равно $1/(\sigma\sqrt{2\pi}\,e)$). Таким образом, точки графика $(a-\sigma,$ $1/(\sigma\sqrt{2\pi}e))$ и $(a+\sigma,$ $1/(\sigma\sqrt{2\pi}e))$ являются точками перегиба.

На рис. 7 изображена нормальная кривая при $a=1$ и $\sigma=2$.

§ 4. Влияние параметров нормального распределения на форму нормальной кривой

Выясним, как влияют на форму и расположение нормальной кривой значения параметров a и σ.

Известно, что графики функций $f(x)$ и $f(x-a)$ имеют одинаковую форму; сдвинув график $f(x)$ в положительном направлении оси x на a единиц масштаба при $a>0$ или в отрицательном направлении при $a<0$, получим график $f(x-a)$. Отсюда следует, что *изменение величины параметра a* (математического ожидания) *не изменяет формы нормальной кривой, а приводит лишь к ее сдвигу вдоль оси Ox: вправо, если a возрастает, и влево, если a убывает.*

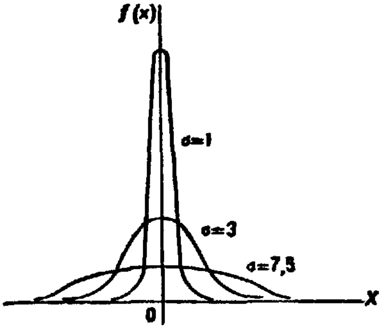

Рис. 8

По-иному обстоит дело, если изменяется параметр σ (среднее квадратическое отклонение). Как было указано в предыдущем параграфе, максимум дифференциальной функции нормального распределения равен $1/(\sigma\sqrt{2\pi})$. Отсюда следует, что *с возрастанием σ максимальная ордината нормальной кривой убывает, а сама кривая становится более пологой, т. е. сжимается к оси Ox; при убывании σ нормальная кривая становится более «островершинной» и растягивается в положительном направлении оси Oy.*

Подчеркнем, что при любых значениях параметров a и σ площадь, ограниченная нормальной кривой и осью x, остается равной единице (см. гл. XI, § 4, второе свойство плотности распределения).

На рис. 8 изображены нормальные кривые при различных значениях σ и $a=0$. Чертеж наглядно иллюстрирует, как изменение параметра σ сказывается на форме нормальной кривой.

Заметим, что при $a=0$ и $\sigma=1$ нормальную кривую $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$ называют *нормированной*.

§ 5. Вероятность попадания в заданный интервал нормальной случайной величины

Уже известно, что если случайная величина X задана плотностью распределения $f(x)$, то вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу (α, β), такова:

$$P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx.$$

Пусть случайная величина X распределена по нормальному закону. Тогда вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу (α, β), равна

$$P(\alpha < X < \beta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-(x-a)^2/(2\sigma^2)}\,dx.$$

Преобразуем эту формулу так, чтобы можно было пользоваться готовыми таблицами. Введем новую переменную $z=(x-a)/\sigma$. Отсюда $x=\sigma z+a$, $dx=\sigma\,dz$. Найдем новые пределы интегрирования. Если $x=\alpha$, то $z=(\alpha-a)/\sigma$; если $x=\beta$, то $z=(\beta-a)/\sigma$.

Таким образом, имеем

$$P(\alpha < X < \beta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{(\alpha-a)/\sigma}^{(\beta-a)/\sigma} e^{-z^2/2}\,(\sigma\,dz) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{(\alpha-a)/\sigma}^{0} e^{-z^2/2}\,dz + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{(\beta-a)/\sigma} e^{-z^2/2}\,dz =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{(\beta-a)/\sigma} e^{-z^2/2}\,dz - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{(\alpha-a)/\sigma} e^{-z^2/2}\,dz.$$

Пользуясь функцией Лапласа

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-z^2/2}\, dz,$$

окончательно получим

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right). \qquad (*)$$

Пример. Случайная величина X распределена по нормальному закону. Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение этой величины соответственно равны 30 и 10. Найти вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу (10, 50).

Решение. Воспользуемся формулой (*). По условию, $\alpha = 10$, $\beta = 50$, $a = 30$, $\sigma = 10$, следовательно,

$$P(10 < X < 50) = \Phi\left(\frac{50 - 30}{10}\right) - \Phi\left(\frac{10 - 30}{10}\right) = 2\Phi(2).$$

По таблице приложения 2 находим $\Phi(2) = 0{,}4772$. Отсюда искомая вероятность

$$P(10 < X < 50) = 2 \cdot 0{,}4772 = 0{,}9544.$$

§ 6. Вычисление вероятности заданного отклонения

Часто требуется вычислить вероятность того, что отклонение нормально распределенной случайной величины X по абсолютной величине меньше заданного положительного числа δ, т. е. требуется найти вероятность осуществления неравенства $|X - a| < \delta$.

Заменим это неравенство равносильным ему двойным неравенством

$$-\delta < X - a < \delta, \quad \text{или} \quad a - \delta < X < a + \delta.$$

Пользуясь формулой (*) (см. § 5), получим

$$P(|X - a| < \delta) = P(a - \delta < X < a + \delta) =$$
$$= \Phi\left[\frac{(a + \delta) - a}{\sigma}\right] - \Phi\left[\frac{(a - \delta) - a}{\sigma}\right] = \Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

Приняв во внимание равенство

$$\Phi(-\delta/\sigma) = -\Phi(\delta/\sigma)$$

(функция Лапласа — нечетная), окончательно имеем

$$P(|X - a| < \delta) = 2\Phi(\delta/\sigma).$$

В частности, при $a = 0$

$$P(|X| < \delta) = 2\Phi(\delta/\sigma).$$

На рис. 9 наглядно показано, что если две случайные величины нормально распределены и $a=0$, то вероятность принять значение, принадлежащее интервалу $(-\delta, \delta)$, больше у той величины, которая имеет меньшее значение σ. Этот факт полностью соответствует вероятностному смыслу параметра σ (σ есть среднее квадратическое отклонение; оно характеризует рассеяние случайной величины вокруг ее математического ожидания).

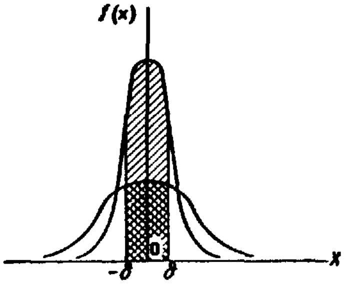

Рис. 9

Замечание. Очевидно, события, состоящие в осуществлении неравенств $|X-a| < \delta$ и $|X-a| \geqslant \delta$, — противоположные. Поэтому, если вероятность осуществления неравенства $|X-a| < \delta$ равна p, то вероятность неравенства $|X-a| \geqslant \delta$ равна $1-p$.

Пример. Случайная величина X распределена нормально. Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение X соответственно равны 20 и 10. Найти вероятность того, что отклонение по абсолютной величине будет меньше трех.

Решение. Воспользуемся формулой

$$P(|X-a| < \delta) = 2\Phi(\delta/\sigma).$$

По условию, $\delta=3$, $a=20$, $\sigma=10$. Следовательно,

$$P(|X-20| < 3) = 2\Phi(3/10) = 2\Phi(0,3).$$

По таблице приложения 2 находим $\Phi(0,3)=0,1179$.

Искомая вероятность

$$P(|X-20| < 3) = 0,2358.$$

§ 7. Правило трех сигм

Преобразуем формулу (см. § 6)

$$P(|X-a| < \delta) = 2\Phi(\delta/\sigma),$$

положив $\delta=\sigma t$. В итоге получим

$$P(|X-a| < \sigma t) = 2\Phi(t).$$

Если $t=3$ и, следовательно, $\sigma t = 3\sigma$, то

$$P(|X-a| < 3\sigma) = 2\Phi(3) = 2 \cdot 0,49865 = 0,9973,$$

т. е. вероятность того, что отклонение по абсолютной величине будет меньше утроенного среднего квадратического отклонения, равна 0,9973.

Другими словами, вероятность того, что абсолютная величина отклонения превысит утроенное среднее квадратическое отклонение, очень мала, а именно равна 0,0027. Это означает, что лишь в 0,27% случаев так может произойти. Такие события исходя из принципа невозможности маловероятных событий можно считать практически невозможными. В этом и состоит сущность правила трех сигм: *если случайная величина распределена нормально, то абсолютная величина ее отклонения от математического ожидания не превосходит утроенного среднего квадратического отклонения.*

На практике правило трех сигм применяют так: если распределение изучаемой случайной величины неизвестно, но условие, указанное в приведенном правиле, выполняется, то есть основание предполагать, что изучаемая величина распределена нормально; в противном случае она не распределена нормально.

§ 8. Понятие о теореме Ляпунова. Формулировка центральной предельной теоремы

Известно, что нормально распределенные случайные величины широко распространены на практике. Чем это объясняется? Ответ на этот вопрос был дан выдающимся русским математиком А. М. Ляпуновым (центральная предельная теорема): *если случайная величина X представляет собой сумму очень большого числа взаимно независимых случайных величин, влияние каждой из которых на всю сумму ничтожно мало, то X имеет распределение, близкое к нормальному.*

Пример. Пусть производится измерение некоторой физической величины. Любое измерение дает лишь приближенное значение измеряемой величины, так как на результат измерения влияют очень многие независимые случайные факторы (температура, колебания прибора, влажность и др.). Каждый из этих факторов порождает ничтожную «частную ошибку». Однако, поскольку число этих факторов очень велико, их совокупное действие порождает уже заметную «суммарную ошибку».

Рассматривая суммарную ошибку как сумму очень большого числа взаимно независимых частных ошибок, мы вправе заключить, что суммарная ошибка имеет распределение, близкое к нормальному. Опыт подтверждает справедливость такого заключения.

Приведем формулировку центральной предельной теоремы, которая устанавливает условия, при которых сумма большого числа независимых слагаемых имеет распределение, близкое к нормальному.

Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ — последовательность независимых случайных величин, каждая из которых имеет конечные математическое ожидание и дисперсию:

$$M(X_k) = a_k, \quad D(X_k) = b_k^2.$$

Введем обозначения:

$$S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n, \quad A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \quad B^2 = \sum_{k=1}^{n} b_k^2.$$

Обозначим функцию распределения нормированной суммы через

$$F_n(x) = P\left(\frac{S_n - A_n}{B_n} < x\right).$$

Говорят, что к последовательности $X_1, X_2, \ldots$ применима центральная предельная теорема, если при любом x функция распределения нормированной суммы при $n \to \infty$ стремится к нормальной функции распределения:

$$\lim_{n \to \infty} P\left[\frac{S_n - A_n}{B_n} < x\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-z^2/2}\, dz.$$

В частности, если все случайные величины $X_1, X_2, \ldots$ одинаково распределены, то к этой последовательности применима центральная предельная теорема, если дисперсии всех величин X_i $(i = 1, 2, \ldots)$ конечны и отличны от нуля. А. М. Ляпунов доказал, что если для $\delta > 0$ при $n \to \infty$ отношение Ляпунова

$$L_n = C_n / B_n^{2+\delta}, \quad \text{где } C_n = \sum_{k=1}^{n} M\,|X_k - a_k|^{2+\delta},$$

стремится к нулю (*условие Ляпунова*), то к последовательности $X_1, X_2, \ldots$ применима центральная предельная теорема.

Сущность условия Ляпунова состоит в требовании, чтобы каждое слагаемое суммы $(S_n - A_n)/B_n$ оказывало на сумму ничтожное влияние.

Замечание. Для доказательства центральной предельной теоремы А. М. Ляпунов использовал аппарат характеристических функций. Характеристической функцией случайной величины X называют функцию $\varphi(t) = M[e^{itX}]$.

Для дискретной случайной величины X с возможными значениями x_k и их вероятностями p_k характеристическая функция

$$\varphi(t)=\sum_k e^{itx_k}p_k.$$

Для непрерывной случайной величины X с плотностью распределения $f(x)$ характеристическая функция

$$\varphi(t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itx}f(x)\,dx.$$

Можно доказать, что характеристическая функция суммы независимых случайных величин равна произведению характеристических функций слагаемых.

§ 9. Оценка отклонения теоретического распределения от нормального. Асимметрия и эксцесс

Эмпирическим называют распределение относительных частот. Эмпирические распределения изучает математическая статистика.

Теоретическим называют распределение вероятностей. Теоретические распределения изучает теория вероятностей. В этом параграфе рассматриваются теоретические распределения.

При изучении распределений, отличных от нормального, возникает необходимость количественно оценить это различие. С этой целью вводят специальные характеристики, в частности асимметрию и эксцесс. Для нормального распределения эти характеристики равны нулю. Поэтому если для изучаемого распределения асимметрия и эксцесс имеют небольшие значения, то можно предположить близость этого распределения к нормальному. Наоборот, большие значения асимметрии и эксцесса указывают на значительное отклонение от нормального.

Как оценить асимметрию? Можно доказать, что для симметричного распределения (график такого распределения симметричен относительно прямой $x=M(X)$) каждый центральный момент нечетного порядка равен нулю. Для несимметричных распределений центральные моменты нечетного порядка отличны от нуля. Поэтому любой из этих моментов (кроме момента первого порядка, который равен нулю для любого распределения) может служить для оценки асимметрии; естественно выбрать простейший из них, т. е. момент третьего порядка μ_3. Однако принять этот момент для оценки асимметрии неудобно потому, что его величина зависит от единиц, в которых измеряется случайная величина. Чтобы устранить этот недостаток, μ_3 делят на σ^3 и таким образом получают безразмерную характеристику.

Асимметрией теоретического распределения называют отношение центрального момента третьего порядка к кубу среднего квадратического отклонения:

$$A_s = \mu_3/\sigma^3.$$

Асимметрия положительна, если «длинная часть» кривой распределения расположена справа от математического ожидания; асимметрия отрицательна, если «длинная часть» кривой расположена слева от математического ожидания. Практически определяют знак асимметрии по расположению кривой распределения относительно моды (точки максимума дифференциальной функции): если «длинная часть» кривой расположена правее моды, то асимметрия положительна (рис. 10, *а*), если слева — отрицательна (рис. 10, *б*).

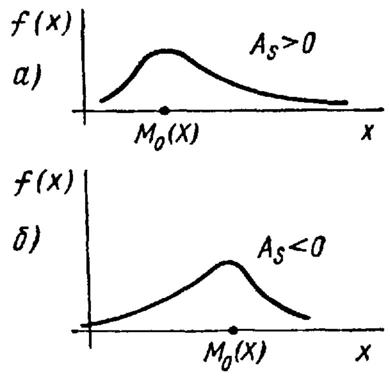

Рис. 10

Для оценки «крутости», т. е. большего или меньшего подъема кривой теоретического распределения по сравнению с нормальной кривой, пользуются характеристикой — эксцессом.

Эксцессом теоретического распределения называют характеристику, которая определяется равенством

$$E_k = (\mu_4/\sigma^4) - 3.$$

Для нормального распределения $\mu_4/\sigma^4 = 3$; следовательно, эксцесс равен нулю. Поэтому если эксцесс некоторого распределения отличен от нуля, то кривая этого распределе-

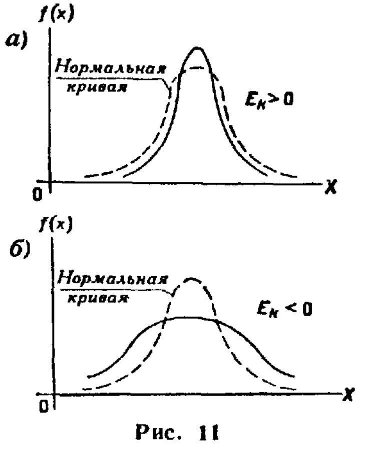

Рис. 11

ния отличается от нормальной кривой: если эксцесс положительный, то кривая имеет более высокую и «острую» вершину, чем нормальная кривая (рис. 11, *а*); если эксцесс отрицательный, то сравниваемая кривая имеет более низкую и «плоскую» вершину, чем нормальная кривая (рис. 11, *б*). При этом предполагается, что нормальное и теоретическое распределения имеют одинаковые математические ожидания и дисперсии.

§ 10. Функция одного случайного аргумента и ее распределение

Предварительно заметим, что далее, вместо того чтобы говорить «закон распределения вероятностей», будем часто говорить кратко—«распределение».

Если каждому возможному значению случайной величины X соответствует одно возможное значение случайной величины Y, то Y называют функцией случайного аргумента X:

$$Y = \varphi (X).$$

Далее показано, как найти распределение функции по известному распределению дискретного и непрерывного аргумента.

1. Пусть аргумент X—дискретная случайная величина.

а) Если различным возможным значениям аргумента X соответствуют различные возможные значения функции Y, то вероятности соответствующих значений X и Y между собой равны.

Пример 1. Дискретная случайная величина X задана распределением

X	2	3
p	0,6	0,4

Найти распределение функции $Y = X^2$.

Решение. Найдем возможные значения Y: $y_1 = 2^2 = 4$; $y_2 = 3^2 = 9$. Напишем искомое распределение Y:

Y	4	9
p	0,6	0,4

б) Если различным возможным значениям X соответствуют значения Y, среди которых есть равные между собой, то следует складывать вероятности повторяющихся значений Y.

Пример 2. Дискретная случайная величина X задана распределением

X	—2	2	3
p	0,4	0,5	0,1

Найти распределение функции $Y = X^2$.

Решение. Вероятность возможного значения $y_1 = 4$ равна сумме вероятностей несовместных событий $X = -2$, $X = 2$, т. е. $0,4 + 0,5 = 0,9$. Вероятность возможного значения $y_2 = 9$ равна 0,1. Напишем искомое распределение Y:

Y	4	9
p	0,9	0,1

2. Пусть аргумент X — непрерывная случайная величина. Как найти распределение функции $Y = \varphi(X)$, зная плотность распределения случайного аргумента X? Доказано: если $y = \varphi(x)$ — дифференцируемая строго возрастающая или строго убывающая функция, обратная функция которой $x = \psi(y)$, то плотность распределения $g(y)$ случайной величины Y находится с помощью равенства

$$g(y) = f[\psi(y)]\,|\psi'(y)|.$$

Пример 3. Случайная величина X распределена нормально, причем ее математическое ожидание $a = 0$. Найти распределение функции $Y = X^3$.

Решение. Так как функция $y = x^3$ дифференцируема и строго возрастает, то можно применить формулу

$$g(y) = f[\psi(y)]\,|\psi'(y)|. \qquad (*)$$

Найдем функцию, обратную функции $y = x^3$:

$$\psi(y) = x = y^{1/3}.$$

Найдем $f[\psi(y)]$. По условию,

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-x^2/2\sigma^2},$$

поэтому

$$f[\psi(y)] = f\left[y^{1/3}\right] = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-y^{2/3}/2\sigma^2}. \qquad (**)$$

Найдем производную обратной функции по y:

$$\psi'(y) = \left(y^{1/3}\right)' = \frac{1}{3y^{2/3}}. \qquad (***)$$

Найдем искомую плотность распределения, для чего подставим (**) и (***) в (*):

$$g(y) = \frac{1}{3\sigma y^{2/3}\sqrt{2\pi}}\, e^{-y^{2/3}/2\sigma^2}.$$

Замечание. Пользуясь формулой (*), можно доказать, что линейная функция $Y=AX+B$ нормально распределенного аргумента X также распределена нормально, причем для того чтобы найти математическое ожидание Y, надо в выражение функции подставить вместо аргумента X его математическое ожидание a:

$$M(Y)=Aa+B;$$

для того чтобы найти среднее квадратическое отклонение Y, надо среднее квадратическое отклонение аргумента X умножить на модуль коэффициента при X:

$$\sigma(Y)=|A|\,\sigma(X).$$

Пример 4. Найти плотность распределения линейной функции $Y=3X+1$, если аргумент распределен нормально, причем математическое ожидание X равно 2 и средиее квадратическое отклонение равно 0,5.

Решение. Найдем математическое ожидание Y:

$$M(Y)=3\cdot 2+1=7.$$

Найдем среднее квадратическое отклонение Y:

$$\sigma(Y)=3\cdot 0{,}5=1{,}5$$

Искомая плотность распределения имеет вид

$$g(y)=\frac{1}{1{,}5\sqrt{2\pi}}\,e^{-(y-7)^2/[2\cdot(1{,}5)^2]}.$$

§ 11. Математическое ожидание функции одного случайного аргумента

Задана функция $Y=\varphi(X)$ случайного аргумента X. Требуется найти математическое ожидание этой функции, зная закон распределения аргумента.

1. Пусть аргумент X—дискретная случайная величина с возможными значениями $x_1, x_2, \ldots, x_n$, вероятности которых соответственно равны $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Очевидно, Y—также дискретная случайная величина с возможными значениями $y_1=\varphi(x_1)$, $y_2=\varphi(x_2)$, $\ldots$, $y_n=\varphi(x_n)$. Так как событие «величина X приняла значение x_i» влечет за собой событие «величина Y приняла значение $\varphi(x_i)$», то вероятности возможных значений Y соответственно равны $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Следовательно, математическое ожидание функции

$$M[\varphi(X)]=\sum_{i=1}^{n}\varphi(x_i)\,p_i. \qquad (*)$$

Пример 1. Дискретная случайная величина X задана распределением

X	1	3	5
p	0,2	0,5	0,3

Найти математическое ожидание функции $Y=\varphi(X)=X^2+1$.

Решение. Найдем возможные значения Y:

$$\varphi(1)=1^2+1=2;\quad \varphi(3)=3^2+1=10;$$
$$\varphi(5)=5^2+1=26.$$

Искомое математическое ожидание функции Y равно

$$M[X^2+1]=2\cdot 0{,}2+10\cdot 0{,}5+26\cdot 0{,}3=13{,}2.$$

2. **Пусть аргумент X — непрерывная случайная величина**, заданная плотностью распределения $f(x)$. Для отыскания математического ожидания функции $Y=\varphi(X)$ можно сначала найти плотность распределения $g(y)$ величины Y, а затем воспользоваться формулой

$$M(Y)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} yg(y)\,dy.$$

Однако если отыскание функции $g(y)$ является затруднительным, то можно непосредственно найти математическое ожидание функции $\varphi(X)$ по формуле

$$M[\varphi(X)]=\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)f(x)\,dx.$$

В частности, если возможные значения X принадлежат интервалу (a, b), то

$$M[\varphi(X)]=\int\limits_{a}^{b} \varphi(x)f(x)\,dx. \qquad (**)$$

Опуская доказательство, заметим, что оно аналогично доказательству формулы (*), если заменить суммирование интегрированием, а вероятность — элементом вероятности $f(x)\Delta x$.

Пример 2. Непрерывная случайная величина X задана плотностью распределения $f(x)=\sin x$ в интервале $(0, \pi/2)$; вне этого интервала $f(x)=0$. Найти математическое ожидание функции $Y=\varphi(X)=X^2$.

Решение. Воспользуемся формулой (**). По условию, $f(x)=\sin x$, $\varphi(x)=x^2$, $a=0$, $b=\pi/2$. Следовательно,

$$M[\varphi(X)]=\int\limits_{0}^{\pi/2} x^2\sin x\,dx.$$

Интегрируя по частям, получим искомое математическое ожидание

$$M[X^2]=\pi-2.$$

§ 12. Функция двух случайных аргументов. Распределение суммы независимых слагаемых. Устойчивость нормального распределения

Если каждой паре возможных значений случайных величин X и Y соответствует одно возможное значение случайной величины Z, то Z называют *функцией двух случайных аргументов* X и Y:

$$Z=\varphi(X,\ Y).$$

Далее на примерах будет показано, как найти распределение функции $Z=X+Y$ по известным распределениям слагаемых. Такая задача часто встречается на практике. Например, если X — погрешность показаний измерительного прибора (распределена нормально), Y — погрешность округления показаний до ближайшего деления шкалы (распределена равномерно), то возникает задача — найти закон распределения суммы погрешностей $Z=X+Y$.

1. Пусть X и Y — дискретные независимые случайные величины. Для того чтобы составить закон распределения функции $Z=X+Y$, надо найти все возможные значения Z и их вероятности.

Пример 1. Дискретные незавнснмые случайные величины заданы распределениями:

X	1	2
p	0,4	0,6

Y	3	4
p	0,2	0,8

Составить распределение случайной величины $Z=X+Y$.

Решение. Возможные значения Z есть суммы каждого возможного значения X со всеми возможными значениями Y:

$$z_1=1+3=4;\ z_2=1+4=5;\ z_3=2+3=5;\ z_4=2+4=6.$$

Найдем вероятности этих возможных значений. Для того чтобы $Z=4$, достаточно, чтобы величина X приняла значение $x_1=1$ и величина Y — значение $y_1=3$. Вероятности этих возможных значений, как следует из данных законов распределения, соответственно равны 0,4 и 0,2.

Аргументы X и Y независимы, поэтому события $X=1$ и $Y=3$ независимы и, следовательно, вероятность их совместного наступления (т. е. вероятность события $Z=1+3=4$) по теореме умноження равна $0{,}4\cdot 0{,}2=0{,}08$.

Аналогично найдем:

$$P(Z=1+4=5)=0{,}4\cdot 0{,}8=0{,}32;$$

$$P(Z=2+3=5)=0{,}6\cdot 0{,}2=0{,}12;$$

$$P(Z=2+4=6)=0{,}6\cdot 0{,}8=0{,}48.$$

Напишем искомое распределение, сложив предварительно вероятности несовместных событий $Z=z_2$, $Z=z_3$ $(0{,}32+0{,}12=0{,}44)$:

Z	4	5	6
p	0,08	0,44	0,48

Контроль: $0{,}08+0{,}44+0{,}48=1$.

2. Пусть X и Y — непрерывные случайные величины. Доказано: если X и Y независимы, то плотность распределения $g(z)$ суммы $Z=X+Y$ (при условии, что плотность хотя бы одного из аргументов задана на интервале $(-\infty, \infty)$ одной формулой) может быть найдена с помощью равенства

$$g(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)\, f_2(z-x)\, dx \qquad (*)$$

либо с помощью равносильного равенства

$$g(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(z-y)\, f_2(y)\, dy, \qquad (**)$$

где f_1, f_2 — плотности распределения аргументов.

Если возможные значения аргументов неотрицательны, то $g(z)$ находят по формуле

$$g(z)=\int_{0}^{z} f_1(x)\, f_2(z-x)\, dx, \qquad (***)$$

либо по равносильной формуле

$$g(z)=\int_{0}^{z} f_1(z-y)\, f_2(y)\, dy. \qquad (****)$$

Плотность распределения суммы независимых случайных величин называют *композицией*.

Закон распределения вероятностей называют *устойчивым*, если композиция таких законов есть тот же закон (отличающийся, вообще говоря, параметрами). Нормальный закон обладает свойством устойчивости: композиция нормальных законов также имеет нормальное распределение (математическое ожидание и дисперсия этой композиции равны соответственно суммам математических ожиданий и дисперсий слагаемых). Например, если X и Y — независимые случайные величины, распределенные нормально с математическими ожиданиями и дисперсиями, соответственно равными $a_1 = 3$, $a_2 = 4$, $D_1 = 1$, $D_2 = 0{,}5$, то композиция этих величин (т. е. плотность вероятности суммы $Z = X + Y$) также распределена нормально, причем математическое ожидание и дисперсия композиции соответственно равны $a = 3 + 4 = 7$; $D = 1 + {}$ $+0{,}5 = 1{,}5$.

Пример 2. Независимые случайные величины X и Y заданы плотностями распределений:

$$f(x) = \frac{1}{3} e^{-x/3} \quad (0 \leqslant x < \infty);$$

$$f(y) = \frac{1}{4} e^{-y/4} \quad (0 \leqslant y < \infty).$$

Найти композицию этих законов, т. е. плотность распределения случайной величины $Z = X + Y$.

Решение. Возможные значения аргументов неотрицательны, поэтому воспользуемся формулой (***)

$$g(z) = \int_0^z f_1(x) f_2(z - x)\, dx = \int_0^z \left[\frac{1}{3} e^{-x/3}\right] \left[\frac{1}{4} e^{-(z-x)/4}\right] dx =$$

$$= \frac{1}{12} e^{-z/4} \int_0^z e^{-x/12}\, dx = e^{-z/4} (1 - e^{-z/12}).$$

Заметим, что здесь $z \geqslant 0$, так как $Z = X + Y$ и, по условию, возможные значения X и Y неотрицательны.

Рекомендуем читателю для контроля убедиться, что

$$\int_0^\infty g(z)\, dz = 1.$$

В следующих далее параграфах кратко описаны распределения, связанные с нормальным, которые будут использованы при изложении математической статистики.

§ 13. Распределение «хи квадрат»

Пусть X_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ — нормальные независимые случайные величины, причем математическое ожидание каждой из них равно нулю, а среднее квадратическое отклонение — единице. Тогда сумма квадратов этих величин

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

распределена по закону χ^2 («хи квадрат») с $k=n$ степенями свободы; если же эти величины связаны одним линейным соотношением, например $\sum X_i = n\overline{X}$, то число степеней свободы $k=n-1$.

Плотность этого распределения

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x\leqslant 0, \\ \dfrac{1}{2^{k/2}\Gamma(k/2)}\,\mathrm{e}^{-x/2}\,x^{(k/2)-1} & \text{при } x>0, \end{cases}$$

где $\Gamma(x)=\int\limits_0^\infty t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,dt$ — гамма-функция; в частности,

$$\Gamma(n+1)=n!.$$

Отсюда видно, что распределение «хи квадрат» определяется одним параметром — числом степеней свободы k.

С увеличением числа степеней свободы распределение медленно приближается к нормальному.

§ 14. Распределение Стьюдента

Пусть Z — нормальная случайная величина, причем $M(Z)=0$, $\sigma(Z)=1$, а V — независимая от Z величина, которая распределена по закону χ^2 с k степенями свободы. Тогда величина

$$T=\frac{Z}{\sqrt{V/k}} \qquad (*)$$

имеет распределение, которое называют t-распределением или распределением Стьюдента (псевдоним английского статистика В. Госсета), с k степенями свободы.

Итак, отношение нормированной нормальной величины к квадратному корню из независимой случайной величины, распределенной по закону «хи квадрат» с k степенями свободы, деленной на k, распределено по закону Стьюдента с k степенями свободы.

С возрастанием числа степеней свободы распределение Стьюдента быстро приближается к нормальному. Дополнительные сведения об этом распределении приведены далее (см. гл. XVI, § 16).

§ 15. Распределение F Фишера — Снедекора

Если U и V — независимые случайные величины, распределенные по закону χ^2 со степенями свободы k_1 и k_2, то величина

$$F=\frac{U/k_1}{V/k_2} \qquad (*)$$

имеет распределение, которое называют распределением F Фишера — Снедекора со степенями свободы k_1 и k_2 (иногда его обозначают через V^2).

Плотность этого распределения

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x\leqslant 0,\\ C_0\dfrac{x^{(k_1-2)/2}}{(k_2+k_1x)^{(k_1+k_2)/2}} & \text{при } x>0,\end{cases}$$

где

$$C_0=\frac{\Gamma\left(\frac{k_1+k_2}{2}\right)k_1^{k_1/2}\,k_2^{k_2/2}}{\Gamma(k_1/2)\,\Gamma(k_2/2)}.$$

Мы видим, что распределение F определяется двумя параметрами — числами степеней свободы. Дополнительные сведения об этом распределении приведены далее (см. гл. XIX, § 8).

Задачи

1. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины X, зная ее плотность распределения:

а) $f(x)=\dfrac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}$ при $-1<x<1$, $f(x)=0$ при остальных значениях x;

б) $f(x)=\dfrac{1}{2l}$ при $a-l\leqslant x\leqslant a+l$, $f(x)=0$ при остальных значениях x.

Отв. а) $M(X)=0$, $D(X)=1/2$; б) $M(X)=a$, $D(X)=l^2/3$.

2. Случайная величина X распределена нормально. Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение этой величины соответственно равны 6 и 2. Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение, заключенное в интервале (4,8).

Отв. 0,6826.

3. Случайная величина распределена нормально. Среднее квадратическое отклонение этой величины равно 0,4. Найти вероятность того, что отклонение случайной величины от ее математического ожидания по абсолютной величине будет меньше 0,3.

Отв. 0,5468.

4. Случайные ошибки измерения подчинены нормальному закону со средним квадратическим отклонением $\sigma = 1$ мм и математическим ожиданием $a = 0$. Найти вероятность того, что из двух независимых наблюдений ошибка хотя бы одного из них не превзойдет по абсолютной величине 1,28 мм.

Отв. 0,96.

5. Валики, изготовляемые автоматом, считаются стандартными, если отклонение диаметра валика от проектного размера не превышает 2 мм. Случайные отклонения диаметра валиков подчиняются нормальному закону со средним квадратическим отклонением $\sigma = 1{,}6$ мм и математическим ожиданием $a = 0$. Сколько процентов стандартных валиков изготовляет автомат?

Отв. Примерно 79%.

6. Дискретная случайная величина X задана законом распределения:

а)

X	1	2	3
p	0,2	0,1	0,7

б)

X	—1	1	2
p	0,1	0,2	0,7

Найти закон распределения случайной величины $Y = X^4$.

Отв. а)

Y	1	16	81
p	0,2	0,1	0,7

б)

Y	1	16
p	0,3	0,7

7. Непрерывная случайная величина X задана плотностью распределения $f(x)$. Найти дифференциальную функцию $g(y)$ случайной величины Y, если:

а) $Y = X + 1 \ (-\infty < x < \infty)$; б) $Y = 2X \ (-a < x < a)$.

Отв. а) $g(y) = f(y-1) \ (-\infty < y < \infty)$;

б) $g(y) = \frac{1}{2} f\left(\frac{y}{2}\right) \ (-2a < y < 2a)$.

8. Независимые дискретные случайные величины заданы следующими законами распределения:

X	2	3	5
p	0,3	0,5	0,2

Y	1	4
p	0,2	0,8

Найти законы распределения функций: а) $Z = X + Y$; б) $Z = XY$.

Отв. а)

Z	3	4	6	7	9
p	0,06	0,10	0,28	0,40	0,16

б)

Z	2	3	5	8	12	20
p	0,06	0,10	0,04	0,24	0,40	0,16

9. Независимые случайные величины X и Y заданы плотностями распределений

$$f_1(x) = \frac{1}{3} e^{-x/3} \quad (0 \leqslant x < \infty);$$

$$f_2(x) = \frac{1}{5} e^{-y/5} \quad (0 \leqslant y < \infty).$$

Найти композицию этих законов, т. е. плотность распределения случайной величины $Z = X + Y$.

Отв. $$g(z) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{-z/5} \left(1 - e^{-2z/15}\right) & \text{при } z \geqslant 0; \\ 0 & \text{при } z < 0. \end{cases}$$

Глава тринадцатая

ПОКАЗАТЕЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

§ 1. Определение показательного распределения

Показательным (экспоненциальным) называют распределение вероятностей непрерывной случайной величины X, которое описывается плотностью

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x<0, \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{при} \quad x \geqslant 0, \end{cases}$$

где λ — постоянная положительная величина.

Мы видим, что показательное распределение определяется одним параметром λ. Эта особенность показательного распределения указывает на его преимущество по сравнению с распределениями, зависящими от большего числа параметров. Обычно параметры неизвестны и приходится находить их оценки (приближенные значения); разумеется, проще оценить один параметр, чем два или три и т. д. Примером непрерывной случайной величины, распределенной по показательному закону, может служить время между появлениями двух последовательных событий простейшего потока (см. § 5).

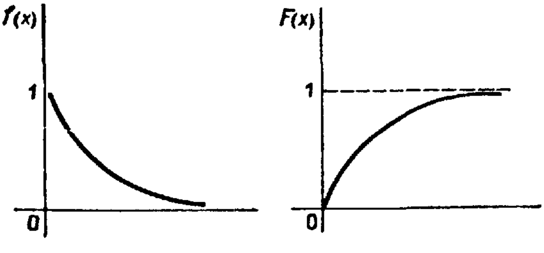

Рис. 12

Найдем функцию распределения показательного закона (см. гл. XI, § 3):

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx=\int_{-\infty}^{0} 0dx+\lambda\int_{0}^{x} e^{-\lambda x}\,dx=1-e^{-\lambda x}.$$

Итак,

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x<0, \\ 1-e^{-\lambda x} & \text{при} \quad x \geqslant 0. \end{cases}$$

Мы определили показательный закон с помощью плотности распределения; ясно, что его можно определить, используя функцию распределения.

Графики плотности и функции распределения показательного закона изображены на рис. 12.

Пример. Написать плотность и функцию распределения показательного закона, если параметр $\lambda = 8$.

Решение. Очевидно, искомая плотность распределения

$$f(x) = 8e^{-8x} \text{ при } x \geqslant 0; \quad f(x) = 0 \text{ при } x < 0.$$

Искомая функция распределения

$$F(x) = 1 - e^{-8x} \text{ при } x \geqslant 0; \quad F(x) = 0 \text{ при } x < 0.$$

§ 2. Вероятность попадания в заданный интервал показательно распределенной случайной величины

Найдем вероятность попадания в интервал (a, b) непрерывной случайной величины X, которая распределена по показательному закону, заданному функцией распределения

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x} \quad (x \geqslant 0).$$

Используем формулу (см. гл. X, § 2, следствие 1)

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a).$$

Учитывая, что $F(a) = 1 - e^{-\lambda a}$, $F(b) = 1 - e^{-\lambda b}$, получим

$$P(a < X < b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}. \qquad (*)$$

Значения функции e^{-x} находят по таблице.

Пример. Непрерывная случайная величина X распределена по показательному закону

$$f(x) = 2e^{-2x} \text{ при } x \geqslant 0; \quad f(x) = 0 \text{ при } x < 0.$$

Найти вероятность того, что в результате испытания X попадает в интервал $(0,3, 1)$.

Решение. По условию, $\lambda = 2$. Воспользуемся формулой (*):

$$P(0,3 < X < 1) = e^{-(2 \cdot 0,3)} - e^{-(2 \cdot 1)} = e^{-0,6} - e^{-2} = \\ = 0,54881 - 0,13534 \simeq 0,41.$$

§ 3. Числовые характеристики показательного распределения

Пусть непрерывная случайная величина X распределена по показательному закону

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x<0, \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{при} \quad x\geqslant 0. \end{cases}$$

Найдем математическое ожидание (см. гл. XII, § 1):

$$M(X)=\int\limits_0^\infty xf(x)\,dx=\lambda\int\limits_0^\infty xe^{-\lambda x}dx.$$

Интегрируя по частям, получим

$$M(X)=1/\lambda. \qquad (*)$$

Таким образом, *математическое ожидание показательного распределения равно обратной величине параметра* λ.

Найдем дисперсию (см. гл. XII, § 1):

$$D(X)=\int\limits_0^\infty x^2f(x)\,dx-[M(X)]^2=\lambda\int\limits_0^\infty x^2e^{-\lambda x}dx-1/\lambda^2.$$

Интегрируя по частям, получим

$$\lambda\int\limits_0^\infty x^2e^{-\lambda x}dx=2/\lambda^2.$$

Следовательно,

$$D(X)=1/\lambda^2.$$

Найдем среднее квадратическое отклонение, для чего извлечем квадратный корень из дисперсии:

$$\sigma(X)=1/\lambda. \qquad (**)$$

Сравнивая (*) и (**), заключаем, что

$$M(X)=\sigma(X)=1/\lambda,$$

т. е. *математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение показательного распределения равны между собой.*

Пример. Непрерывная случайная величина X распределена по показательному закону

$$f(x)=5e^{-5x} \text{ при } x\geqslant 0; \; f(x)=0 \text{ при } x<0.$$

Найти математическое ожидание, среднее квадратическое отклонение и дисперсию X.

Решение. По условию, $\lambda = 5$. Следовательно,

$$M(X) = \sigma(X) = 1/\lambda = 1/5 = 0{,}2;$$
$$D(X) = 1/\lambda^2 = 1/5^2 = 0{,}04.$$

Замечание 1. Пусть на практике изучается показательно распределенная случайная величина, причем параметр λ неизвестен. Если математическое ожидание также неизвестно, то находят его оценку (приближенное значение), в качестве которой принимают выборочную среднюю $\bar{x}$ (см. гл. XVI, § 5). Тогда приближенное значение параметра λ находят с помощью равенства

$$\lambda^* = 1/\bar{x}.$$

Замечание 2. Допустим, имеются основания предположить, что изучаемая на практике случайная величина имеет показательное распределение. Для того чтобы проверить эту гипотезу, находят оценки математического ожидания и среднего квадратического отклонения, т. е. находят выборочную среднюю и выборочное среднее квадратическое отклонение (см. гл. XVI, § 5, 9). Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение показательного распределения равны между собой, поэтому их оценки должны различаться незначительно. Если оценки окажутся близкими одна к другой, то данные наблюдений подтверждают гипотезу о показательном распределении изучаемой величины; если же оценки различаются существенно, то гипотезу следует отвергнуть.

Показательное распределение широко применяется в приложениях, в частности в теории надежности, одним из основных понятий которой является функция надежности.

§ 4. Функция надежности

Будем называть *элементом* некоторое устройство независимо от того, «простое» оно или «сложное».

Пусть элемент начинает работать в момент времени $t_0 = 0$, а по истечении времени длительностью t происходит отказ. Обозначим через T непрерывную случайную величину — длительность времени безотказной работы элемента. Если элемент проработал безотказно (до наступления отказа) время, меньшее t, то, следовательно, за время длительностью t наступит отказ.

Таким образом, функция распределения $F(t) = P(T < t)$ определяет вероятность отказа за время длительностью t. Следовательно, вероятность безотказной работы за это же время длительностью t, т. е. вероятность противоположного события $T > t$, равна

$$R(t) = P(T > t) = 1 - F(t). \qquad (*)$$

Функцией надежности $R(t)$ называют функцию, определяющую вероятность безотказной работы элемента за время длительностью t:

$$R(t) = P(T > t).$$

§ 5. Показательный закон надежности

Часто длительность времени безотказной работы элемента имеет показательное распределение, функция распределения которого

$$F(t) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}.$$

Следовательно, в силу соотношения (*) предыдущего параграфа функция надежности в случае показательного распределения времени безотказной работы элемента имеет вид

$$R(t) = 1 - F(t) = 1 - (1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}) = \mathrm{e}^{-\lambda t}.$$

Показательным законом надежности называют функцию надежности, определяемую равенством

$$R(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}, \qquad (*)$$

где λ — интенсивность отказов.

Как следует из определения функции надежности (см. § 4), эта формула позволяет найти вероятность безотказной работы элемента на интервале времени длительностью t, если время безотказной работы имеет показательное распределение.

Пример. Время безотказной работы элемента распределено по показательному закону $f(t) = 0{,}02\mathrm{e}^{-0{,}02t}$ при $t \geq 0$ (t — время). Найти вероятность того, что элемент проработает безотказно 100 ч.

Решение. По условию, постоянная интенсивность отказов $\lambda = 0{,}02$. Воспользуемся формулой (*):

$$R(100) = \mathrm{e}^{-0.02 \cdot 100} = \mathrm{e}^{-2} = 0{,}13534.$$

Искомая вероятность того, что элемент проработает безотказно 100 ч, приближенно равна 0,14.

Замечание. Если отказы элементов в случайные моменты времени образуют простейший поток, то вероятность того, что за время длительностью t не наступит ни одного отказа (см. гл. VI, § 6),

$$P_t(0) = \mathrm{e}^{-\lambda t},$$

что согласуется с равенством (*), поскольку λ в обеих формулах имеет один и тот же смысл (постоянная интенсивность отказов).

§ 6. Характеристическое свойство показательного закона надежности

Показательный закон надежности весьма прост и удобен для решения задач, возникающих на практике. Очень многие формулы теории надежности значительно упрощаются. Объясняется это тем, что этот закон обладает следующим важным свойством: *вероятность безотказной работы элемента на интервале времени длительностью t не зависит от времени предшествующей работы до начала рассматриваемого интервала, а зависит только от длительности времени t* (при заданной интенсивности отказов λ).

Для доказательства свойства введем обозначения событий:

A—безотказная работа элемента на интервале $(0,\ t_0)$ длительностью t_0; B—безотказная работа на интервале $(t_0,\ t_0+t)$ длительностью t. Тогда AB—безотказная работа на интервале $(0,\ t_0+t)$ длительностью t_0+t.

Найдем вероятности этих событий по формуле (*) (см. § 5):

$$P(A)=\mathrm{e}^{-\lambda t_0},\quad P(B)=\mathrm{e}^{-\lambda t},$$
$$P(AB)=\mathrm{e}^{-\lambda(t_0+t)}=\mathrm{e}^{-\lambda t_0}\mathrm{e}^{-\lambda t}.$$

Найдем условную вероятность того, что элемент будет работать безотказно на интервале $(t_0,\ t_0+t)$ при условии, что он уже проработал безотказно на предшествующем интервале $(0,\ t_0)$ (см. гл. III, § 2):

$$P_A(B)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{\mathrm{e}^{-\lambda t_0}\mathrm{e}^{-\lambda t}}{\mathrm{e}^{-\lambda t_0}}=\mathrm{e}^{-\lambda t}.$$

Полученная формула не содержит t_0, а содержит только t. Это и означает, что время работы на предшествующем интервале не сказывается на величине вероятности безотказной работы на последующем интервале, а зависит только от длины последующего интервала, что и требовалось доказать.

Полученный результат можно сформулировать несколько иначе. Сравнив вероятности $P(B)=\mathrm{e}^{-\lambda t}$ и $P_A(B)=\mathrm{e}^{-\lambda t}$, заключаем: условная вероятность безотказной работы элемента на интервале длительностью t, вычисленная в предположении, что элемент проработал безотказно на предшествующем интервале, равна безусловной вероятности.

Итак, в случае показательного закона надежности безотказная работа элемента «в прошлом» не сказывается на величине вероятности его безотказной работы «в ближайшем будущем».

Замечание. Можно доказать, что рассматриваемым свойством обладает только показательное распределение. Поэтому если на практике изучаемая случайная величина этим свойством обладает, то она распределена по показательному закону. Например, при допущении, что метеориты распределены равномерно в пространстве и во времени, вероятность попадания метеорита в космический корабль не зависит от того, попадали или не попадали метеориты в корабль до начала рассматриваемого интервала времени. Следовательно, случайные моменты времени попадания метеоритов в космический корабль распределены по показательному закону.

Задачи

1. Написать функцию распределения $F(x)$ и плотность вероятности $f(x)$ непрерывной случайной величины X, распределенной по показательному закону с параметром $\lambda=5$.

Отв. $f(x)=5e^{-5x}$ при $x \geqslant 0$; $f(x)=0$ при $x<0$; $F(x)=1-e^{-5x}$.

2. Непрерывная случайная величина X распределена по показательному закону: $f(x)=5e^{-5x}$ при $x \geqslant 0$, $f(x)=0$ при $x<0$. Найти вероятность того, что в результате испытания X попадет в интервал $(0,4,\ 1)$.

Отв. $P(0,4<X<1)=0,13$.

3. Непрерывная случайная величина X распределена по показательному закону $f(x)=4e^{-4x}$ $(x>0)$. Найти математическое ожидание, среднее квадратическое отклонение и дисперсию X.

Отв. $M(X)=\sigma(X)=0,25$; $D(X)=0,0625$.

4. Время безотказной работы элемента распределено по показательному закону $f(t)=0,01\,e^{-0,01t}$ $(t>0)$, где t — время, ч. Найти вероятность того, что элемент проработает безотказно 100 ч.

Отв. $R(100)=0,37$.

Глава четырнадцатая

СИСТЕМА ДВУХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

§ 1. Понятие о системе нескольких случайных величин

До сих пор рассматривались случайные величины, возможные значения которых определялись одним числом. Такие величины называют одномерными. Например, число очков, которое может выпасть при бросании игральной кости, — дискретная одномерная величина; расстояние от орудия до места падения снаряда — непрерывная одномерная случайная величина.

Кроме одномерных случайных величин изучают величины, возможные значения которых определяются двумя, тремя, ..., n числами. Такие величины называются соответственно двумерными, трехмерными, ..., n-мерными.

Будем обозначать через (X, Y) двумерную случайную величину. Каждую из величин X и Y называют составляющей (компонентой); обе величины X и Y, рассматриваемые одновременно, образуют систему двух случайных величин. Аналогично n-мерную величину можно рассматривать как систему n случайных величин. Например, трехмерная величина (X, Y, Z) определяет систему трех случайных величин X, Y и Z.

Пример. Станок-автомат штампует стальные плитки. Если контролируемыми размерами являются длина X и ширина Y, то имеем двумерную случайную величину (X, Y); если же контролируется и высота Z, то имеем трехмерную величину (X, Y, Z).

Двумерную случайную величину (X, Y) геометрически можно истолковать либо как случайную точку $M(X, Y)$ на плоскости (т. е. как точку со случайными координатами), либо как случайный вектор $\overline{OM}$. Трехмерную случайную величину геометрически можно истолковать как точку $M(X, Y, Z)$ в трехмерном пространстве или как вектор $\overline{OM}$.

Целесообразно различать дискретные (составляющие этих величин дискретны) и непрерывные (составляющие этих величин непрерывны) многомерные случайные величины.

§ 2. Закон распределения вероятностей дискретной двумерной случайной величины

Законом распределения дискретной двумерной случайной величины называют перечень возможных значений этой величины, т. е. пар чисел (x_i, y_j) и их вероятностей $p(x_i, y_j)$ $(i=1, 2, \ldots, n; j=1, 2, \ldots, m)$. Обычно закон распределения задают в виде таблицы с двойным входом (табл. 2).

Первая строка таблицы содержит все возможные значения составляющей X, а первый столбец — все возможные значения составляющей Y. В клетке, стоящей на пересечении «столбца x_i» и «строки y_j», указана вероятность $p(x_i, y_j)$ того, что двумерная случайная величина примет значение (x_i, y_j).

Так как события $(X=x_i, Y=y_j)$ $(i=1, 2, \ldots, n; j=1, 2, \ldots, m)$ образуют полную группу (см. гл. II, § 2), то сумма вероятностей, помещенных во всех клетках таблицы, равна единице.

Таблица 2

Y	X					
	x_1	x_2	...	x_i	...	x_n
y_1	$p(x_1,\ y_1)$	$p(x_2,\ y_1)$		$p(x_i,\ y_1)$		$p(x_n,\ y_1)$
...	...	...	...	...	...	...
y_j	$p(x_1,\ y_j)$	$p(x_2,\ y_j)$	...	$p(x_i,\ y_j)$	...	$p(x_n,\ y_j)$
...	...	...	...	...	...	...
y_m	$p(x_1,\ y_m)$	$p(x_2,\ y_m)$	...	$p(x_i,\ y_m)$	...	$p(x_n,\ y_m)$

Зная закон распределения двумерной дискретной случайной величины, можно найти законы распределения каждой из составляющих. Действительно, например, события $(X=x_1;\ Y=y_1)$, $(X=x_1;\ Y=y_2)$, ..., $(X=x_1;\ Y=y_m)$ несовместны, поэтому вероятность $P(x_1)$ того, что X примет значение x_1, по теореме сложения такова:

$$P(x_1)=p(x_1,\ y_1)+p(x_1,\ y_2)+\ldots+p(x_1,\ y_m).$$

Таким образом, вероятность того, что X примет значение x_1, равна сумме вероятностей «столбца x_1». В общем случае, для того чтобы найти вероятность $P(X=x_i)$, надо просуммировать вероятности столбца x_i. Аналогично сложив вероятности «строки y_j», получим вероятность $P(Y=y_j)$.

Пример. Найти законы распределения составляющих двумерной случайной величины, заданной законом распределения (табл. 3).

Решение. Сложив вероятности по столбцам, получим вероятности возможных значений X: $P(x_1)=0{,}16$; $P(x_2)=0{,}48$; $P(x_3)=0{,}36$. Напишем закон распределения составляющей X:

X	x_1	x_2	x_3
P	0,16	0,48	0,36

Таблица 3

Y	X		
	x_1	x_2	x_3
y_1	0,10	0,30	0,20
y_2	0,06	0,18	0,16

Контроль: $0,16+0,48+0,36=1$.

Сложив вероятности по строкам, получим вероятности возможных значений Y: $P(y_1)=0,60$; $P(y_2)=0,40$. Напишем закон распределения составляющей Y:

Y	y_1	y_2
P	0,60	0,40

Контроль: $0,60+0,40=1$.

§ 3. Функция распределения двумерной случайной величины

Рассмотрим двумерную случайную величину (X, Y) (безразлично, дискретную или непрерывную). Пусть x, y—пара действительных чисел. Вероятность события, состоящего в том, что X примет значение, меньшее x, и при этом Y примет значение, меньшее y, обозначим через $F(x, y)$. Если x и y будут изменяться, то, вообще говоря, будет изменяться и $F(x, y)$, т. е. $F(x, y)$ есть функция от x и y.

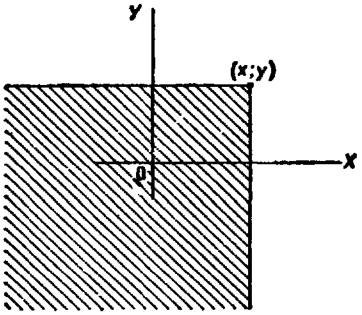

Рис. 13

Функцией распределения двумерной случайной величины (X, Y) называют функцию $F(x, y)$, определяющую для каждой пары чисел x, y вероятность того, что X примет значение, меньшее x, и при этом Y примет значение, меньшее y:

$$F(x, y)=P(X<x,\ Y<y).$$

Геометрически это равенство можно истолковать так: $F(x, y)$ есть вероятность того, что случайная точка (X, Y)

попадет в бесконечный квадрант с вершиной (x, y), расположенный левее и ниже этой вершины (рис. 13).

Пример. Найти вероятность того, что в результате испытания составляющая X двумерной случайной величины (X, Y) примет значение $X < 2$ и при этом составляющая Y примет значение $Y < 3$, если известна функция распределения системы

$$F(x, y) = \left(\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{y}{3}+\frac{1}{2}\right).$$

Решение. По определению функции распределения двумерной случайной величины,

$$F(x, y) = P(X < x, Y < y).$$

Положив $x = 2$, $y = 3$, получим искомую вероятность

$$P(X < 2, Y < 3) = F(2, 3) = \left(\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{2}{2}+\frac{1}{2}\right)\times$$
$$\times\left(\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{3}{3}+\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4} = \frac{9}{16}.$$

§ 4. Свойства функции распределения двумерной случайной величины

Свойство 1. *Значения функции распределения удовлетворяют двойному неравенству*

$$0 \leqslant F(x, y) \leqslant 1.$$

Доказательство. Свойство вытекает из определения функции распределения как вероятности: вероятность — всегда неотрицательное число, не превышающее единицу.

Свойство 2. *$F(x, y)$ есть неубывающая функция по каждому аргументу, т. е.*

$$F(x_2, y) \geqslant F(x_1, y), \text{ если } x_2 > x_1;$$
$$F(x, y_2) \geqslant F(x, y_1), \text{ если } y_2 > y_1.$$

Доказательство. Докажем, что $F(x, y)$ — неубывающая функция по аргументу x. Событие, состоящее в том, что составляющая X примет значение, меньшее x_2, и при этом составляющая $Y < y$, можно подразделить на следующие два несовместных события:

1) X примет значение, меньшее x_1, и при этом $Y < y$ с вероятностью $P(X < x_1, Y < y)$;

2) X примет значение, удовлетворяющее неравенству $x_1 \leqslant X < x_2$, и при этом $Y < y$ с вероятностью $P(x_1 \leqslant X < x_2), Y < y)$.

По теореме сложения,

$$P(X<x_2,\ Y<y)=P(X<x_1,\ Y<y)+P(x_1\leqslant X<x_2,\ Y<y).$$

Отсюда

$$P(X<x_2, Y<y)-P(X<x_1, Y<y)=P(x_1\leqslant X<x_2,\ Y<y),$$

или

$$F(x_2,\ y)-F(x_1,\ y)=P(x_1\leqslant X<x_2,\ Y<y).$$

Любая вероятность есть число неотрицательное, поэтому

$$F(x_2,\ y)-F(x_1,\ y)\geqslant 0,\ \text{или}\ F(x_2,\ y)\geqslant F(x_1,\ y),$$

что и требовалось доказать.

Свойство становится наглядно ясным, если воспользоваться геометрическим истолкованием функции распределения как вероятности попадания случайной точки в бесконечный квадрант с вершиной (x; y) (рис. 13). При возрастании x правая граница этого квадранта сдвигается вправо; при этом вероятность попадания случайной точки в «новый» квадрант, очевидно, не может уменьшиться.

Аналогично доказывается, что $F(x,\ y)$ есть неубывающая функция по аргументу y.

Свойство 3. *Имеют место предельные соотношения:*

$$1)\ F(-\infty,\ y)=0, \qquad 2)\ F(x,\ -\infty)=0,$$
$$3)\ F(-\infty,\ -\infty)=0, \qquad 4)\ F(\infty,\ \infty)=1.$$

Доказательство. 1) $F(-\infty,\ y)$ есть вероятность события $X<-\infty$ и $Y<y$; но такое событие невозможно (поскольку невозможно событие $X<-\infty$), следовательно, вероятность этого события равна нулю.

Свойство становится наглядно ясным, если прибегнуть к геометрической интерпретации: при $x\to-\infty$ правая граница бесконечного квадранта (рис. 13) неограниченно сдвигается влево и при этом вероятность попадания случайной точки в квадрант стремится к нулю.

2) Событие $Y<-\infty$ невозможно, поэтому $F(x,\ -\infty)=0$.

3) Событие $X<-\infty$ и $Y<-\infty$ невозможно, поэтому $F(-\infty,\ -\infty)=0$.

4) Событие $X<\infty$ и $Y<\infty$ достоверно, следовательно, вероятность этого события $F(\infty,\ \infty)=1$.

Свойство становится наглядно ясным, если принять во внимание, что при $x\to\infty$ и $y\to\infty$ бесконечный квадрант (рис. 13) превращается во всю плоскость xOy и, следовательно, попадание случайной точки (X; Y) в эту плоскость есть достоверное событие.

Свойство 4. а) *При $y = \infty$ функция распределения системы становится функцией распределения составляющей X:*

$$F(x,\ \infty) = F_1(x).$$

б) *При $x = \infty$ функция распределения системы становится функцией распределения составляющей Y:*

$$F(\infty,\ y) = F_2(y).$$

Доказательство. а) Так как событие $Y < \infty$ достоверно, то $F(x,\ \infty)$ определяет вероятность события $X < x$, т. е. представляет собой функцию распределения составляющей X.

б) Доказывается аналогично.

§ 5. Вероятность попадания случайной точки в полуполосу

Используя функцию распределения системы случайных величин X и Y, легко найти вероятность того, что в результате испытания случайная точка попадает в полуполосу $x_1 < X < x_2$ и $Y < y$ (рис. 14, *а*) или в полуполосу $X < x$ и $y_1 < Y < y_2$ (рис. 14, *б*).

Вычитая из вероятности попадания случайной точки в квадрант с вершиной $(x_2;\ y)$ вероятность попадания точки в квадрант с вершиной $(x_1;\ y)$ (рис. 14, *а*), получим

$$P(x_1 \leqslant X < x_2,\ Y < y) = \\ = F(x_2,\ y) - F(x_1,\ y).$$

Аналогично имеем

$$P(X < x,\ y_1 \leqslant Y < y_2) = \\ = F(x,\ y_2) - F(x,\ y_1).$$

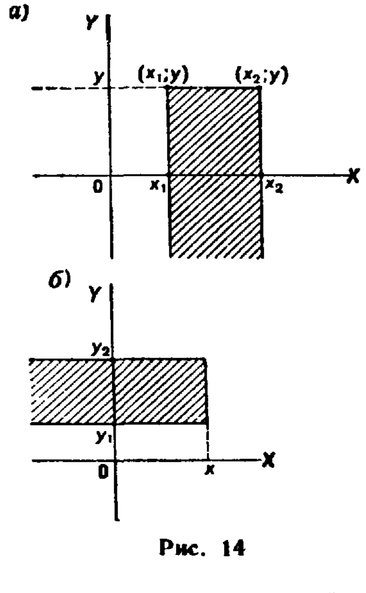

Рис. 14

Таким образом, **вероятность попадания случайной точки в полуполосу равна приращению функции распределения по одному из аргументов.**

§ 6. Вероятность попадания случайной точки в прямоугольник

Рассмотрим прямоугольник $ABCD$ со сторонами, параллельными координатным осям (рис. 15). Пусть уравнения сторон таковы:

$$X = x_1, \quad X = x_2, \quad Y = y_1 \text{ и } Y = y_2.$$

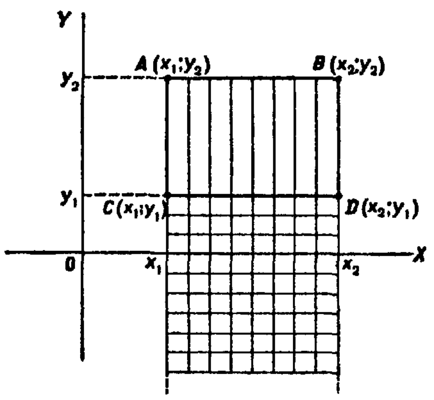

Рис. 15

Найдем вероятность попадания случайной точки $(X;\ Y)$ в этот прямоугольник. Искомую вероятность можно найти, например, так: из вероятности попадания случайной точки в полуполосу AB с вертикальной штриховкой (эта вероятность равна $F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2)$) вычесть вероятность попадания точки в полуполосу CD с горизонтальной штриховкой (эта вероятность равна $F(x_2, y_1) - F(x_1, y_1)$):

$$P(x_1 \leqslant X < x_2,\ y_1 \leqslant Y < y_2) = [F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2)] - \\ - [F(x_2, y_1) - F(x_1, y_1)]. \qquad (*)$$

Пример. Найти вероятность попадания случайной точки $(X;\ Y)$ в прямоугольник, ограниченный прямыми $x = \pi/6$, $x = \pi/2$, $y = \pi/4$, $y = \pi/3$, если известна функция распределения

$$F(x, y) = \sin x \sin y \ (0 \leqslant x \leqslant \pi/2,\ 0 \leqslant y \leqslant \pi/2).$$

Решение. Положив $x_1 = \pi/6$, $x_2 = \pi/2$, $y_1 = \pi/4$, $y_2 = \pi/3$ в формуле (*), получим

$$P(\pi/6 < X < \pi/2,\ \pi/4 < Y < \pi/3) = [F(\pi/2, \pi/3) - \\ - F(\pi/6, \pi/3)] - [F(\pi/2, \pi/4) - F(\pi/6, \pi/4)] = \\ = [\sin(\pi/2)\sin(\pi/3) - \sin(\pi/6)\sin(\pi/3)] - [\sin(\pi/2)\sin(\pi/4) - \\ - \sin(\pi/6)\sin(\pi/4)] = [\sqrt{3}/2 - \sqrt{3}/4] - [\sqrt{2}/2 - \sqrt{2}/4] = \\ = (\sqrt{3} - \sqrt{2})/4 = 0{,}08.$$

§ 7. Плотность совместного распределения вероятностей непрерывной двумерной случайной величины (двумерная плотность вероятности)

Двумерная случайная величина задавалась с помощью функции распределения. Непрерывную двумерную величину можно также задать, пользуясь плотностью распределения. Здесь и далее будем предполагать, что функция распределения $F(x, y)$ всюду непрерывна и имеет всюду (за исключением, быть может, конечного числа кривых) непрерывную частную производную второго порядка.

Плотностью совместного распределения вероятностей $f(x, y)$ двумерной непрерывной случайной величины (X, Y) называют вторую смешанную частную производную от функции распределения:

$$f(x, y)=\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x\, \partial y}.$$

Геометрически эту функцию можно истолковать как поверхность, которую называют *поверхностью распределения.*

Пример. Найти плотность совместного распределения $f(x, y)$ системы случайных величин (X, Y) по известной функции распределения

$$F(x, y)=\sin x \sin y \ (0 \leqslant x \leqslant \pi/2,\ 0 \leqslant y \leqslant \pi/2).$$

Решение. По определению плотности совместного распределения,

$$f(x, y)=\frac{\partial^2 F}{\partial x\, \partial y}.$$

Найдем частную производную по x от функции распределения:

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\cos x \sin y.$$

Найдем от полученного результата частную производную по y, в итоге получим искомую плотность совместного распределения:

$$f(x, y)=\frac{\partial^2 F}{\partial x\, \partial y}=\cos x \cos y \ (0 \leqslant x \leqslant \pi/2,\ 0 \leqslant y \leqslant \pi/2).$$

§ 8. Нахождение функции распределения системы по известной плотности распределения

Зная плотность совместного распределения $f(x, y)$, можно найти функцию распределения $F(x, y)$ по формуле

$$F(x, y)=\int\limits_{-\infty}^{y}\int\limits_{-\infty}^{x} f(x, y)\, dx\, dy,$$

что непосредственно следует из определения плотности распределения двумерной непрерывной случайной величины (X, Y).

Пример. Найти функцию распределения двумерной случайной величины по данной плотности совместного распределения

$$f(x, y)=\frac{1}{\pi^2(1+x^2)(1+y^2)}.$$

Решение. Воспользуемся формулой

$$F(x, y)=\int\limits_{-\infty}^{y}\int\limits_{-\infty}^{x} f(x, y)\,dx\,dy.$$

Положив $f(x, y)=\dfrac{1}{\pi^2(1+x^2)(1+y^2)}$, получим

$$F(x, y)=\frac{1}{\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{y}\left(\frac{1}{1+y^2}\int\limits_{-\infty}^{x}\frac{dx}{1+x^2}\right)dy=$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{y}\frac{1}{1+y^2}\left(\operatorname{arctg} x+\frac{\pi}{2}\right)dy=\left(\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} x+\frac{1}{2}\right)\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{y}\frac{dy}{1+y^2}=$$

$$=\left(\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} x+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} y+\frac{1}{2}\right).$$

§ 9. Вероятностный смысл двумерной плотности вероятности

Вероятность попадания случайной точки $(X; Y)$ в прямоугольник $ABCD$ (рис. 16) равна (см. § 6)

$$P(x_1<X<x_2,\ y_1<Y<y_2)=[F(x_2, y_2)-F(x_1, y_2)]-$$
$$-[F(x_2, y_1)-F(x_1, y_1)].$$

Обозначив для краткости левую часть равенства через P_{ABCD} и применив к правой части теорему Лагранжа, получим

$$P_{ABCD}=F''_{xy}(\xi, \eta)\,\Delta x\,\Delta y,$$

где

$$x_1<\xi<x_2,\quad \Delta x=x_2-x_1;\quad y_1<\eta<y_2,\quad \Delta y=y_2-y_1.$$

Отсюда

$$F''_{xy}(\xi, \eta)=\frac{P_{ABCD}}{\Delta x\,\Delta y}, \qquad (*)$$

или

$$f(\xi,\ \eta)=\frac{P_{ABCD}}{\Delta x\,\Delta y}. \qquad (**)$$

Приняв во внимание, что произведение $\Delta x\,\Delta y$ равно площади прямоугольника $ABCD$, заключаем: $f(\xi,\ \eta)$ есть отношение вероятности попадания случайной точки в прямоугольник $ABCD$ к площади этого прямоугольника.

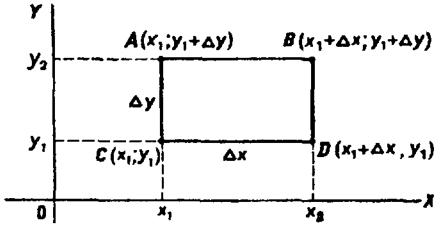

Рис. 16

Перейдем теперь в равенстве (**) к пределу при $\Delta x \longrightarrow 0$ и $\Delta y \longrightarrow 0$. Тогда $\xi \longrightarrow x$, $\eta \longrightarrow y$ и, следовательно, $f(\xi,\ \eta) \longrightarrow f(x,\ y)$.

Итак, функцию $f(x,\ y)$ можно рассматривать как предел отношения вероятности попадания случайной точки в прямоугольник (со сторонами Δx и Δy) к площади этого прямоугольника, когда обе стороны прямоугольника стремятся к нулю.

§ 10. Вероятность попадания случайной точки в произвольную область

Перепишем соотношение (**) § 9 так:

$$f(\xi,\ \eta)\,\Delta x\,\Delta y=P_{ABCD}.$$

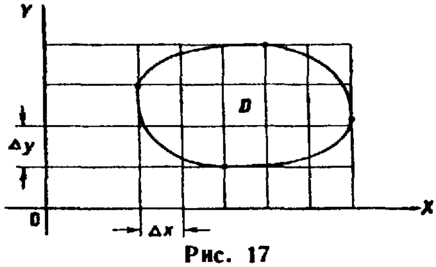

Рис. 17

Отсюда заключаем: произведение $f(\xi,\ \eta)\,\Delta x\,\Delta y$ есть вероятность попадания случайной точки в прямоугольник со сторонами Δx и Δy.

Пусть в плоскости xOy задана произвольная область D. Обозначим событие, состоящее в попадании случайной точки в эту область, так: $(X,\ Y)\subset D$.

Разобьем область D на n элементарных областей прямыми, параллельными оси Oy, находящимися на расстоянии Δx одна от другой, и прямыми, параллельными оси Ox, находящимися на расстоянии Δy одна от другой (рис. 17) (для простоты предполагается, что эти прямые пересекают контур области не более чем в двух точках). Так как события, состоящие в попадании случайной точки в элементарные области, несовместны, то вероятность попадания в область D приближенно (сумма элементарных областей приближенно равна области D!) равна сумме вероятностей попаданий точки в элементарные области:

$$P((X,\ Y)\subset D)\approx\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\ \eta_i)\,\Delta x\,\Delta y.$$

Переходя к пределу при $\Delta x\longrightarrow 0$ и $\Delta y\longrightarrow 0$, получим

$$P((X,\ Y)\subset D)=\iint\limits_{(D)} f(x,\ y)\,dx\,dy. \qquad (*)$$

Итак, для того чтобы вычислить вероятность попадания случайной точки $(X;\ Y)$ в область D, достаточно найти двойной интеграл по области D от функции $f(x,\ y)$.

Геометрически равенство $(*)$ можно истолковать так: вероятность попадания случайной точки $(X;\ Y)$ в область D равна объему тела, ограниченного сверху поверхностью $z=f(x,\ y)$, основанием которого служит проекция этой поверхности на плоскость xOy.

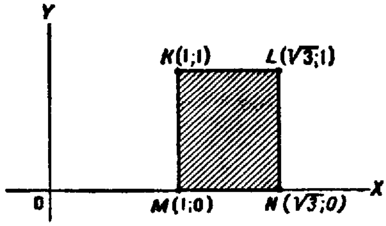

Рис. 18

Замечание. Подынтегральное выражение $f(x,\ y)\,dx\,dy$ называют *элементом вероятности*. Как следует из предыдущего, элемент вероятности определяет вероятность попадания случайной точки в элементарный прямоугольник со сторонами dx и dy.

Пример. Плотность распределения двумерной случайной величины

$$f(x,\ y)=\frac{1}{\pi^2(1+x^2)(1+y^2)}.$$

Найти вероятность попадания случайной точки в прямоугольник (рис. 18) с вершинами $K(1;\ 1)$, $L(\sqrt{3};\ 1)$, $M(1;\ 0)$ и $N(\sqrt{3};\ 0)$.

Решение. Искомая вероятность

$$P((X,\ Y)\subset D)=\iint\limits_{(D)}\frac{1}{\pi^2(1+x^2)(1+y^2)}\,dx\,dy=$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\int\limits_0^1\left[\frac{1}{1+y^2}\int\limits_1^{\sqrt{3}}\frac{dx}{1+x^2}\right]dy=\frac{1}{\pi^2}\operatorname{arctg} x\,\Big|_1^{\sqrt{3}}\int\limits_0^1\frac{dy}{1+y^2}=$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\operatorname{arctg} y\,\Big|_0^1=\frac{1}{\pi^2}\cdot\frac{\pi}{12}\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{1}{48}.$$

§ 11. Свойства двумерной плотности вероятности

Свойство 1. *Двумерная плотность вероятности неотрицательна:*

$$f(x, y) \geqslant 0.$$

Доказательство. Вероятность попадания случайной точки в прямоугольник со сторонами Δx и Δy есть неотрицательное число; площадь этого прямоугольника — положительное число. Следовательно, отношение этих двух чисел, а значит, и их предел (при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$), который равен $f(x, y)$ (см. § 9), есть неотрицательное число, т. е.

$$f(x, y) \geqslant 0.$$

Заметим, что свойство непосредственно следует из того, что $F(x, y)$ — неубывающая функция своих аргументов (§ 4).

Свойство 2. *Двойной несобственный интеграл с бесконечными пределами от двумерной плотности равен единице:*

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dx\, dy = 1.$$

Доказательство. Бесконечные пределы интегрирования указывают, что областью интегрирования служит вся плоскость xOy; поскольку событие, состоящее в том, что случайная точка попадет при испытании на плоскость xOy, достоверно, то вероятность этого события (она и определяется двойным несобственным интегралом от двумерной плотности) равна единице, т. е.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dx\, dy = 1.$$

Пример. Задана плотность совместного распределения непрерывной двумерной случайной величины (X, Y): $f(x, y) = C \cos x \cos y$ в квадрате $0 \leqslant x \leqslant \pi/2$, $0 \leqslant y \leqslant \pi/2$; вне этого квадрата $f(x, y) = 0$. Найти постоянный параметр C.

Решение. Воспользуемся свойством 2, учитывая, что x и y изменяются от 0 до $\pi/2$:

$$C \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \cos x \cos y\, dx\, dy = 1.$$

Отсюда

$$C = 1\Big/\left(\int\limits_0^{\pi/2} \cos x\,dx \int\limits_0^{\pi/2} \cos y\,dy\right).$$

Выполнив интегрирование, получим искомое значение параметра $C = 1$.

§ 12. Отыскание плотностей вероятности составляющих двумерной случайной величины

Пусть известна плотность совместного распределения вероятностей системы двух случайных величин. Найдем плотности распределения каждой из составляющих.

Найдем сначала плотность распределения составляющей X. Обозначим через $F_1(x)$ функцию распределения составляющей X. По определению плотности распределения одномерной случайной величины,

$$f_1(x) = \frac{dF_1(x)}{dx}.$$

Приняв во внимание соотношения

$$F(x, y) = \int\limits_{-\infty}^{x} \int\limits_{-\infty}^{y} f(x, y)\,dx\,dy \qquad \text{(см. § 8)},$$

$$F_1(x) = F(x, \infty) \qquad \text{(см. § 4)},$$

найдем

$$F_1(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,dx\,dy.$$

Продифференцировав обе части этого равенства по x, получим

$$\frac{dF_1}{dx} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,dy,$$

или

$$f_1(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,dy. \qquad (*)$$

Аналогично находится плотность распределения составляющей Y:

$$f_2(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,dx. \qquad (**)$$

Итак, *плотность распределения одной из составляющих равна несобственному интегралу с бесконечными пределами от плотности совместного распределения системы, причем переменная интегрирования соответствует другой составляющей.*

Пример. Двумерная случайная величина (X, Y) задана плотностью совместного распределения

$$f(x, y) = \begin{cases} 1/(6\pi) & \text{при} \quad x^2/9 + y^2/4 < 1, \\ 0 & \text{при} \quad x^2/9 + y^2/4 > 1. \end{cases}$$

Найти плотности распределения составляющих X и Y.

Решение. Найдем плотность распределения составляющей X по формуле (*):

$$f_1(x) = \frac{1}{6\pi} \int\limits_{-2\sqrt{1-x^2/9}}^{2\sqrt{1-x^2/9}} dy = \frac{2}{6\pi} \int\limits_{0}^{2\sqrt{1-x^2/9}} dy = \frac{2}{9\pi}\sqrt{9-x^2}.$$

Итак,

$$f_1(x) = \begin{cases} 2\sqrt{9-x^2}/(9\pi) & \text{при} \quad |x| < 3, \\ 0 & \text{при} \quad |x| \geqslant 3. \end{cases}$$

Аналогично, используя формулу (**), найдем плотность распределения составляющей Y:

$$f_2(y) = \begin{cases} \sqrt{4-y^2}/(2\pi) & \text{при} \quad |y| < 2, \\ 0 & \text{при} \quad |y| \geqslant 2. \end{cases}$$

Рекомендуем читателю для контроля самостоятельно убедиться в том, что найденные функции удовлетворяют соотношениям

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_1(x)\,dx = 1 \quad \text{и} \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_2(y)\,dy = 1.$$

§ 13. Условные законы распределения составляющих системы дискретных случайных величин

Известно, что если события A и B зависимы, то условная вероятность события B отличается от его безусловной вероятности. В этом случае (см. гл. III, § 2)

$$P_A(B) = P(AB)/P(A). \qquad (*)$$

Аналогичное положение имеет место и для случайных величин. Для того чтобы охарактеризовать зависимость между составляющими двумерной случайной величины, введем понятие условного распределения.

Рассмотрим дискретную двумерную случайную величину (X, Y). Пусть возможные значения составляющих таковы: $x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, y_2, \ldots, y_m$.

Допустим, что в результате испытания величина Y приняла значеиие $Y=y_1$; при этом X примет одно из своих возможных значений: x_1, или x_2, ..., или x_n. Обозначим условную вероятность того, что X примет, например, значение x_1 при условии, что $Y=y_1$, через $p(x_1 \mid y_1)$. Эта вероятность, вообще говоря, не будет равиа безусловной вероятности $p(x_1)$.

В общем случае условные вероятности составляющей будем обозначать так:

$$p(x_i \mid y_j) \quad (i=1, 2, \ldots, n; \; j=1, 2, \ldots, m).$$

Условным распределением составляющей X при $Y=y_j$ называют совокупность условных вероятностей $p(x_1 \mid y_j)$, $p(x_2 \mid y_j)$, ..., $p(x_n \mid y_j)$, вычисленных в предположении, что событие $Y=y_j$ (j имеет одно и то же значение при всех значениях X) уже наступило. Аналогично определяется условное распределение составляющей Y.

Зная закон распределения двумерной дискретной случайной величины, можно, пользуясь формулой (*), вычислить условные законы распределения составляющих. Например, условный закон распределения X в предположении, что событие $Y=y_1$ уже произошло, может быть найден по формуле

$$p(x_i \mid y_1) = \frac{p(x_i, y_1)}{p(y_1)} \quad (i=1, 2, \ldots, n).$$

В общем случае условные законы распределения составляющей X определяются соотношением

$$p(x_i \mid y_j) = p(x_i, y_j)/p(y_j). \qquad (**)$$

Аналогично находят условные законы распределения составляющей Y:

$$p(y_j \mid x_i) = p(x_i, y_j)/p(x_i). \qquad (***)$$

Замечание. Сумма вероятностей условного распределения равна единице. Действительно, так как при фиксированном y_j имеем (см. § 2) $\sum_{i=1}^{n} p(x_i,\ y_j) = p(y_j)$, то

$$\sum_{i=1}^{n} p(x_i \mid y_j) = \sum_{i=1}^{n} p(x_i,\ y_j)/p(y_j) = p(y_j)/p(y_j) = 1.$$

Аналогично доказывается, что при фиксированном x_i

$$\sum_{j=1}^{m} p(y_j \mid x_i) = 1.$$

Это свойство условных распределений используют для контроля вычислений.

Пример. Дискретная двумерная случайная величина задана табл. 4.

Таблица 4

Y	X		
	x_1	x_2	x_3
y_1	0,10	0,30	0,20
y_2	0,06	0,18	0,16

Найти условный закон распределения составляющей X при условии, что составляющая Y приняла значение y_1.

Решение. Искомый закон определяется совокупностью следующих условных вероятностей:

$$p(x_1 \mid y_1),\ p(x_2 \mid y_1),\ p(x_3 \mid y_1).$$

Воспользовавшись формулой (*) и приняв во внимание, что $p(y_1) = 0{,}60$ (см. § 2, пример), имеем:

$$p(x_1 \mid y_1) = p(x_1,\ y_1)/p(y_1) = 0{,}10/0{,}60 = 1/6;$$
$$p(x_3 \mid y_1) = p(x_2,\ y_1)/p(y_1) = 0{,}30/0{,}60 = 1/2;$$
$$p(x_3 \mid y_1) = p(x_3,\ y_1)/p(y_1) = 0{,}20/0{,}60 = 1/3.$$

Сложив для контроля найденные условные вероятности, убедимся, что их сумма равна единице, как и должно быть, в соответствии с замечанием, помещеным выше: $1/6 + 1/2 + 1/3 = 1$.

§ 14. Условные законы распределения составляющих системы непрерывных случайных величин

Пусть $(X,\ Y)$ — непрерывная двумерная случайная величина.

Условной плотностью $\varphi(x \mid y)$ распределения составляющих X при данном значении $Y = y$ называют отношение плотности совместного распределения $f(x, y)$ системы (X, Y) к плотности распределения $f_2(y)$ составляющей Y:

$$\varphi(x \mid y) = f(x, y)/f_2(y). \qquad (*)$$

Подчеркнем, что отличие условной плотности $\varphi(x \mid y)$ от безусловной плотности $f_1(x)$ состоит в том, что функция $\varphi(x \mid y)$ дает распределение X при условии, что составляющая Y приняла значение $Y = y$; функция же $f_1(x)$ дает распределение X независимо от того, какие из возможных значений приняла составляющая Y.

Аналогично определяется условная плотность составляющей Y при данном значении $X = x$:

$$\psi(y \mid x) = f(x, y)/f_1(x). \qquad (**)$$

Если известна плотность совместного распределения $f(x, y)$, то условные плотности составляющих могут быть найдены в силу (*) и (**) (см. § 12) по формулам:

$$\varphi(x \mid y) = f(x, y) \Big/ \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,dx, \qquad (***)$$

$$\psi(y \mid x) = f(x, y) \Big/ \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,dy. \qquad (****)$$

Запишем формулы (*) и (**) в виде

$$f(x, y) = f_2(y)\,\varphi(x \mid y), \quad f(x, y) = f_1(x)\,\psi(y \mid x).$$

Отсюда заключаем: умножая закон распределения одной из составляющих на условный закон распределения другой составляющей, найдем закон распределения системы случайных величин.

Как и любая плотность распределения, условные плотности обладают следующими свойствами:

$$\varphi(x \mid y) \geqslant 0, \qquad \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x \mid y)\,dx = 1;$$

$$\psi(y \mid x) \geqslant 0, \qquad \int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi(y \mid x)\,dy = 1.$$

Пример. Двумерная случайная величина (X, Y) задана плотностью совместного распределения

$$f(x, y) = \begin{cases} 1/(\pi r^2) & \text{при } x^2 + y^2 < r^2, \\ 0 & \text{при } x^2 + y^2 > r^2. \end{cases}$$

Найти условные законы распределения вероятностей составляющих.

Решение. Найдем условную плотность составляющей X при $|x| < \sqrt{r^2 - y^2}$ по формуле (***):

$$\varphi(x \mid y) = \frac{1/(\pi r^2)}{\frac{1}{\pi r^2} \int\limits_{-\sqrt{r^2-y^2}}^{\sqrt{r^2-y^2}} dx} = \frac{1}{2\sqrt{r^2-y^2}}.$$

Так как $f(x, y) = 0$ при $x^2 + y^2 > r^2$, то $\varphi(x \mid y) = 0$ при $|x| > \sqrt{r^2 - y^2}$.

Пользуясь формулой (****), аналогично найдем условную плотность составляющей Y:

$$\psi(y \mid x) = \begin{cases} 1/(2\sqrt{r^2 - x^2}) & \text{при } |y| < \sqrt{r^2 - x^2}, \\ 0 & \text{при } |y| > \sqrt{r^2 - x^2}. \end{cases}$$

§ 15. Условное математическое ожидание

Важной характеристикой условного распределения вероятностей является условное математическое ожидание.

Условным математическим ожиданием дискретной случайной величины Y при $X = x$ (x — определенное возможное значение X) называют произведение возможных значений Y на их условные вероятности:

$$M(Y \mid X = x) = \sum_{j=1}^{m} y_j p(y_j \mid x). \qquad (*)$$

Для непрерывных величин

$$M(Y \mid X = x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} y \psi(y \mid x)\, dy,$$

где $\psi(y \mid x)$ — условная плотность случайной величины Y при $X = x$.

Условное математическое ожидание $M(Y \mid x)$ есть функция от x:

$$M(Y \mid x) = f(x),$$

которую называют *функцией регрессии* Y на X.

Аналогично определяются условное математическое ожидание случайной величины X и *функция регрессии* X на Y:

$$M(X \mid y) = \varphi(y).$$

Пример. Дискретная двумерная случайная величина задана табл. 5.

Таблица 5

Y	X			
	$x_1=1$	$x_2=3$	$x_3=4$	$x_4=8$
$y_1=3$	0,15	0,06	0,25	0,04
$y_2=6$	0,30	0,10	0,03	0,07

Найти условное математическое ожидание составляющей Y при $X=x_1=1$.

Решение. Найдем $p(x_1)$, для чего сложим вероятности, помещенные в первом столбце табл. 5:

$$p(x_1)=0{,}15+0{,}30=0{,}45.$$

Найдем условное распределение вероятностей величины Y при $X=x_1=1$ (см. § *13*):

$$p(y_1 \mid x_1)=p(x_1,\ y_1)/p(x_1)=0{,}15/0{,}45=1/3;$$
$$p(y_2 \mid x_1)=p(x_2,\ y_2)/p(x_1)=0{,}30/0{,}45=2/3.$$

Найдем искомое условное математическое ожидание по формуле (*):

$$M(Y \mid X=x_1)=\sum_{j=1}^{2} y_j p(y_j \mid x_1)=y_1 p(y_1 \mid x_1)+y_2 p(y_2 \mid x_1)=$$
$$=3\,(1/3)+6\,(2/3)=5.$$

§ 16. Зависимые и независимые случайные величины

Мы назвали две случайные величины независимыми, если закон распределения одной из них не зависит от того, какие возможные значения приняла другая величина. Из этого определения следует, что условные распределения независимых величин равны их безусловным распределениям.

Выведем необходимые и достаточные условия независимости случайных величин.

Теорема. *Для того чтобы случайные величины X и Y были независимыми, необходимо и достаточно, чтобы функция распределения системы $(X,\ Y)$ была равна произведению функций распределения составляющих:*

$$F(x,\ y)=F_1(x)\,F_2(y).$$

Доказательство. а) Необходимость. Пусть X и Y независимы. Тогда события $X<x$ и $Y<y$ неза-

висимы, следовательно, вероятность совмещения этих событий равна произведению их вероятностей:

$$P(X < x,\ Y < y) = P(X < x)\,P(Y < y),$$

или

$$F(x,\ y) = F_1(x)\,F_2(y).$$

б) Достаточность. Пусть $F(x,\ y) = F_1(x)\,F_2(y)$. Отсюда

$$P(X < x,\ Y < y) = P(X < x)\,P(Y < y),$$

т. е. вероятность совмещения событий $X < x$ и $Y < y$ равна произведению вероятностей этих событий. Следовательно, случайные величины X и Y независимы.

Следствие. *Для того чтобы непрерывные случайные величины X и Y были независимыми, необходимо и достаточно, чтобы плотность совместного распределения системы $(X,\ Y)$ была равна произведению плотностей распределения составляющих:*

$$f(x,\ y) = f_1(x)\,f_2(y).$$

Доказательство. а) Необходимость. Пусть X и Y — независимые непрерывные случайные величины. Тогда (на основании предыдущей теоремы)

$$F(x,\ y) = F_1(x)\,F_2(y).$$

Дифференцируя это равенство по x, затем по y, имеем

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial F_1}{\partial x}\,\frac{\partial F_2}{\partial y},$$

или (по определению плотностей распределения двумерной и одномерной величин)

$$f(x,\ y) = f_1(x)\,f_2(y).$$

б) Достаточность. Пусть

$$f(x,\ y) = f_1(x)\,f_2(y).$$

Интегрируя это равенство по x и по y, получим

$$\int\limits_{-\infty}^{y}\int\limits_{-\infty}^{x} f(x,\ y)\,dx\,dy = \int\limits_{-\infty}^{x} f_1(x)\,dx \int\limits_{-\infty}^{y} f_2(y)\,dy,$$

или (см. § 8 гл. XIV и § 3 гл. XI)

$$F(x,\ y) = F_1(x)\,F_2(y).$$

Отсюда (на основании предыдущей теоремы) заключаем, что X и Y независимы.

Замечание. Так как приведенные выше условия являются необходимыми и достаточными, то можно дать новые определения независимых случайных величин:

1) две случайные величины называют независимыми, если функция распределения системы этих величин равна произведению функций распределения составляющих;

2) две непрерывные случайные величины называют независимыми, если плотность совместного распределения системы этих величин равна произведению плотностей распределения составляющих.

Пример. Двумерная непрерывная случайная величина (X, Y) задана плотностью совместного распределения

$$f(x, y) = (\sin x \sin y)/4$$

в квадрате $0 \leqslant x \leqslant \pi$, $0 \leqslant y \leqslant \pi$; вне квадрата $f(x, y) = 0$. Доказать, что составляющие X и Y независимы.

Решение. Используя формулы (*) и (**) § 12, легко найдем плотности распределения составляющих: $f_1(x) = \sin x/2$, $f_2(y) = \sin y/2$. Плотность совместного распределения рассматриваемой системы равна произведению плотностей распределения составляющих, поэтому X и Y независимы.

Разумеется, можно было доказать, что условные законы распределения составляющих равны их безусловным законам, откуда также следует независимость X и Y.

§ 17. Числовые характеристики системы двух случайных величин. Корреляционный момент. Коэффициент корреляции

Для описания системы двух случайных величин кроме математических ожиданий и дисперсий составляющих используют и другие характеристики; к их числу относятся корреляционный момент и коэффициент корреляции.

Корреляционным моментом μ_{xy} случайных величин X и Y называют математическое ожидание произведения отклонений этих величин:

$$\mu_{xy} = M\{[X - M(X)][Y - M(Y)]\}.$$

Для вычисления корреляционного момента дискретных величин используют формулу

$$\mu_{xy} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} [x_i - M(X)][y_j - M(Y)]\, p(x_i, y_j),$$

а для непрерывных величин — формулу

$$\mu_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [x - M(X)][y - M(Y)]\, f(x, y)\, dx\, dy.$$

Корреляционный момент служит для характеристики связи между величинами X и Y. Как будет показано ниже, корреляционный момент равен нулю, если X и Y независимы; следовательно, если корреляционный момент не равен нулю, то X и Y — зависимые случайные величины.

Замечание 1. Учитывая, что отклонения есть центрированные случайные величины (см. гл. VIII, § 2), корреляционный момент можно определить как математическое ожидание произведения центрированных случайных величин:

$$\mu_{xy} = M\,[\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{Y}].$$

Замечание 2. Легко убедиться, что корреляционный момент можно записать в виде

$$\mu_{xy} = M\,(XY) - M\,(X)\,M\,(Y).$$

Теорема 1. *Корреляционный момент двух независимых случайных величин X и Y равен нулю.*

Доказательство. Так как X и Y — независимые случайные величины, то их отклонения $X - M(X)$ и $Y - M(Y)$ также независимы. Пользуясь свойствами математического ожидания (математическое ожидание произведения независимых случайных величин равно произведению математических ожиданий сомножителей) и отклонения (математическое ожидание отклонения равно нулю), получим

$$\mu_{xy} = M\,\{[X - M\,(X)]\,[Y - M\,(Y)]\} = \\ = M\,[X - M\,(X)]\,M\,[Y - M\,(Y)] = 0.$$

Из определения корреляционного момента следует, что он имеет размерность, равную произведению размерностей величин X и Y. Другими словами, величина корреляционного момента зависит от единиц измерения случайных величин. По этой причине для одних и тех же двух величин величина корреляционного момента имеет различные значения в зависимости от того, в каких единицах были измерены величины.

Пусть, например, X и Y были измерены в сантиметрах и $\mu_{xy} = 2$ см^2; если измерить X и Y в миллиметрах, то $\mu_{xy} = 200$ мм. Такая особенность корреляционного момента является недостатком этой числовой характеристики, поскольку сравнение корреляционных моментов различных систем случайных величин становится затруднительным. Для того чтобы устранить этот недостаток, вводят новую числовую характеристику — коэффициент корреляции.

Коэффициентом корреляции r_{xy} случайных величин X и Y называют отношение корреляционного момента к произведению средних квадратических отклонений этих величин:

$$r_{xy}=\mu_{xy}/(\sigma_x\sigma_y). \qquad (*)$$

Так как размерность μ_{xy} равна произведению размерностей величин X и Y, σ_x имеет размерность величины X, σ_y имеет размерность величины Y (см. гл. VIII, § 7), то r_{xy}—безразмерная величина. Таким образом, величина коэффициента корреляции не зависит от выбора единиц измерения случайных величин. В этом состоит преимущество коэффициента корреляции перед корреляционным моментом.

Очевидно, коэффициент корреляции независимых случайных величин равен нулю (так как $\mu_{xy}=0$).

Замечание 3. Во многих вопросах теории вероятностей целесообразно вместо случайной величины X рассматривать нормированную случайную величину X', которую определяют как отношение отклонения к среднему квадратическому отклонению:

$$X'=(X-M(X))/\sigma_x.$$

Нормированная величина имеет математическое ожидание, равное нулю, и дисперсию, равную единице. Действительно, используя свойства математического ожидания и дисперсии, имеем:

$$M(X')=M\left[\frac{X-M(X)}{\sigma_x}\right]=\frac{1}{\sigma_x}M[X-M(X)]=\frac{1}{\sigma_x}\cdot 0=0;$$

$$D(X')=D\left[\frac{X-M(X)}{\sigma_x}\right]=\frac{1}{\sigma_x^2}D[X-M(X)]=\frac{D(X)}{\sigma_x^2}=1.$$

Легко убедиться, что коэффициент корреляции r_{xy} равен корреляционному моменту нормированных величин X' и Y':

$$r_{xy}=\frac{M\{[X-M(X)][Y-M(Y)]\}}{\sigma_x\sigma_y}=M\left[\frac{X-M(X)}{\sigma_x}\cdot\frac{Y-M(Y)}{\sigma_y}\right]=$$

$$=M(X'Y')=\mu_{x'y'}.$$

Теорема 2. *Абсолютная величина корреляционного момента двух случайных величин X и Y не превышает среднего геометрического их дисперсий:*

$$|\mu_{xy}|\leqslant\sqrt{D_xD_y}.$$

Доказательство. Введем в рассмотрение случайную величину $Z_1=\sigma_yX-\sigma_xY$ и найдем ее дисперсию $D(Z_1)=M[Z_1-m_{z_1}]^2$. Выполнив выкладки, получим

$$D(Z_1)=2\sigma_x^2\sigma_y^2-2\sigma_x\sigma_y\mu_{xy}.$$

Любая дисперсия неотрицательна, поэтому

$$2\sigma_x^2\sigma_y^2 - 2\sigma_x\sigma_y\mu_{xy} \geqslant 0.$$

Отсюда

$$\mu_{xy} \leqslant \sigma_x\sigma_y. \qquad (**)$$

Введя случайную величину $Z_2 = \sigma_y X + \sigma_x Y$, аналогично найдем

$$\mu_{xy} \geqslant -\sigma_x\sigma_y. \qquad (***)$$

Объединим (**) и (***):

$$-\sigma_x\sigma_y \leqslant \mu_{xy} \leqslant \sigma_x\sigma_y, \qquad (****)$$

или

$$|\mu_{xy}| \leqslant \sigma_x\sigma_y.$$

Итак,

$$\mu_{xy} \leqslant \sqrt{D_x D_y}.$$

Теорема 3. *Абсолютная величина коэффициента корреляции не превышает единицы:*

$$|r_{xy}| \leqslant 1.$$

Доказательство: Разделим обе части двойного неравенства (****) на произведение положительных чисел $\sigma_x\sigma_y$:

$$-1 \leqslant r_{xy} \leqslant 1.$$

Итак,

$$|r_{xy}| \leqslant 1.$$

§ 18. Коррелированность и зависимость случайных величин

Две случайные величины X и Y называют *коррелированными*, если их корреляционный момент (или, что то же, коэффициент корреляции) отличен от нуля; X и Y называют *некоррелированными* величинами, если их корреляционный момент равен нулю.

Две коррелированные величины также и зависимы. Действительно, допустив противное, мы должны заключить, что $\mu_{xy} = 0$, а это противоречит условию, так как для коррелированных величин $\mu_{xy} \neq 0$.

Обратное предположение не всегда имеет место, т. е. если две величины зависимы, то они могут быть как коррелированными, так и некоррелированными. Другими словами, корреляционный момент двух зависимых величин может быть не равен нулю, но может и равняться нулю.

Убедимся на примере, что две зависимые величины могут быть некоррелированными.

Пример. Двумерная случайная величина (X, Y) задана плотностью распределения:

$f(x, y) = 1/6\pi$ внутри эллипса $x^2/9 + y^2/4 = 1$;
$f(x, y) = 0$ вне этого эллипса.

Доказать, что X и Y — зависимые некоррелированные величины.

Решение. Воспользуемся ранее вычисленными плотностями распределения составляющих X и Y (см. § 12):

$f_1(x) = \frac{2}{9\pi}\sqrt{9-x^2}$, $f_2(y) = \frac{1}{2\pi}\sqrt{4-y^2}$ внутри заданного эллипса и $f_1(x) = 0$, $f_2(y) = 0$ вне его.

Так как $f(x, y) \neq f_1(x) f_2(y)$, то X и Y — зависимые величины (см. § 16).

Для того чтобы доказать некоррелированность X и Y, достаточно убедиться в том, что $\mu_{xy} = 0$. Найдем корреляционный момент по формуле (см. § 17)

$$\mu_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} [x - M(X)][y - M(Y)] f(x, y)\, dx\, dy.$$

Поскольку функция $f_1(x)$ симметрична относительно оси Oy, то $M(X) = 0$; аналогично, $M(Y) = 0$ в силу симметрии $f_{\_}(y)$ относительно оси Ox. Следовательно,

$$\mu_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy f(x, y)\, dx\, dy.$$

Выносся постоянный множитель $f(x, y)$ за знак интеграла, получим

$$\mu_{xy} = f(x, y) \int_{-\infty}^{\infty} y \left(\int_{-\infty}^{\infty} x\, dx \right) dy.$$

Внутренний интеграл равен нулю (подынтегральная функция нечетна, пределы интегрирования симметричны относительно начала координат), следовательно, $\mu_{xy} = 0$, т. е. зависимые случайные величины X и Y некоррелированы.

Итак, из коррелированности двух случайных величин следует их зависимость, но из зависимости еще не вытекает коррелированность. Из независимости двух величин следует их некоррелированность, но из некоррелированности еще нельзя заключить о независимости этих величин.

Заметим, однако, что из некоррелированности нормально распределенных величин вытекает их независимость. Это утверждение будет доказано в следующем параграфе.

§ 19. Нормальный закон распределения на плоскости

На практике часто встречаются двумерные случайные величины, распределение которых нормально.

Нормальным законом распределения на плоскости называют распределение вероятностей двумерной случайной величины $(X,\ Y)$, если

$$f(x,\ y)=\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-r_{xy}^2}}\times$$
$$\times\mathrm{e}^{-\frac{1}{2\left(1-r_{xy}^2\right)}\left[\frac{(x-a_1)^2}{\sigma_x^2}+\frac{(y-a_2)^2}{\sigma_y^2}-2r_{xy}\frac{x-a_1}{\sigma_x}\frac{y-a_2}{\sigma_y}\right]}. \qquad (*)$$

Мы видим, что нормальный закон на плоскости определяется пятью параметрами: a_1, a_2, σ_x, σ_y и r_{xy}. Можно доказать, что эти параметры имеют следующий вероятностный смысл: a_1, a_2 — математические ожидания, σ_x, σ_y — средние квадратические отклонения, r_{xy} — коэффициент корреляции величин X и Y.

Убедимся в том, что если составляющие двумерной нормально распределенной случайной величины некоррелированны, то они и независимы. Действительно, пусть X и Y некоррелированны. Тогда, полагая в формуле (*) $r_{xy}=0$, получим

$$f(x,\ y)=\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y}\cdot e^{-0{,}5\left[(x-a_1)^2/\sigma_x^2+(y-a_2)^2/\sigma_y^2\right]}=$$
$$=\frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}\cdot\mathrm{e}^{-(x-a_1)^2/\left(2\sigma_x^2\right)}\cdot\frac{1}{\sigma_y\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-(y-a_2)^2/\left(2\sigma_y^2\right)}=f_1(x)\,f_2(y).$$

Таким образом, если составляющие нормально распределенной случайной величины некоррелированны, то плотность совместного распределения системы равна произведению плотностей распределения составляющих, а отсюда и следует независимость составляющих (см. § 16). Справедливо и обратное утверждение (см. § 18).

Итак, для нормально распределенных составляющих двумерной случайной величины понятия независимости и некоррелированности равносильны.

Замечание. Используя формулы (*) и (**) § 12, можно доказать, что если двумерная случайная величина распределена нормально с параметрами a_1, a_2, σ_x, σ_y, r_{xy}, то ее составляющие также распределены нормально с параметрами, соответственно равными a_1, σ_x и a_2, σ_y.

§ 20. Линейная регрессия. Прямые линии среднеквадратической регрессии

Рассмотрим двумерную случайную величину (X, Y), где X и Y — зависимые случайные величины. Представим одну из величин как функцию другой. Ограничимся приближенным представлением (точное приближение, вообще говоря, невозможно) величины Y в виде линейной функции величины X:

$$Y \simeq g(x) = \alpha X + \beta,$$

где α и β — параметры, подлежащие определению. Это можно сделать различными способами: наиболее употребительный из них — метод наименьших квадратов.

Функцию $g(X) = \alpha X + \beta$ называют «наилучшим приближением» Y в смысле метода наименьших квадратов, если математическое ожидание $M[Y - g(X)]^2$ принимает наименьшее возможное значение; функцию $g(x)$ называют *среднеквадратической регрессией* Y на X.

Теорема. *Линейная средняя квадратическая регрессия* Y *на* X *имеет вид*

$$g(X) = m_y + r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(X - m_x),$$

где $m_x = M(X)$, $m_y = M(Y)$, $\sigma_x = \sqrt{D(X)}$, $\sigma_y = \sqrt{D(Y)}$, $r = \mu_{xy}/(\sigma_x\sigma_y)$ — *коэффициент корреляции величин* X *и* Y.

Доказательство. Введем в рассмотрение функцию двух независимых аргументов α и β:

$$F(\alpha, \beta) = M[Y - \alpha - \beta X]^2. \qquad (*)$$

Учитывая, что $M(X - m_x) = M(Y - m_y) = 0$, $M[(X - m_x) \times \times (Y - m_y)] = \mu_{xy} = r\sigma_x\sigma_y$, и выполнив выкладки, получим

$$F(\alpha, \beta) = \sigma_y^2 + \beta^2\sigma_x^2 - 2r\sigma_x\sigma_y\beta + (m_y - \alpha - \beta m_x)^2.$$

Исследуем функцию $F(\alpha, \beta)$ на экстремум, для чего приравняем нулю частные производные:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial \alpha} = -2(m_y - \alpha - \beta m_x) = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial \beta} = 2\beta\sigma_x^2 - 2r\sigma_x\sigma_y = 0. \end{cases}$$

Отсюда

$$\beta = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}, \quad \alpha = m_y - r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}m_x.$$

Легко убедиться, что при этих значениях α и β рассматриваемая функция принимает наименьшее значение.

Итак, линейная средняя квадратическая регрессия Y и X имеет вид

$$g(X) = \alpha + \beta X = m_y - r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}m_x + r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}X,$$

или

$$g(X) = m_y + r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(X - m_x).$$

Коэффициент $\beta = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}$ называют *коэффициентом регрессии Y на X*, а прямую

$$y - m_y = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - m_x) \qquad (**)$$

называют *прямой среднеквадратической регрессии Y* на X.

Подставив найденные значения α и β в соотношение (*), получим минимальное значение функции $F(\alpha, \beta)$, равное $\sigma_y^2(1-r^2)$. Величину $\sigma_y^2(1-r^2)$ называют *остаточной дисперсией* случайной величины Y относительно случайной величины X; она характеризует величину ошибки, которую допускают при замене Y линейной функцией $g(X) = \alpha + \beta X$. При $r = \pm 1$ остаточная дисперсия равна нулю; другими словами, при этих крайних значениях коэффициента корреляции не возникает ошибки при представлении Y в виде линейной функции от X.

Итак, если коэффициент корреляции $r = \pm 1$, то Y и X связаны линейной функциональной зависимостью.

Аналогично можно получить прямую среднеквадратической регрессии X на Y:

$$x - m_x = r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(Y - m_y) \qquad (***)$$

$\left(r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}\right.$ — коэффициент регрессии X на $\left.Y\right)$ и остаточную дисперсию $\sigma_x^2(1-r^2)$ величины X относительно Y.

Если $r = \pm 1$, то обе прямые регрессии, как видно из (**) и (***), совпадают.

Из уравнений (**) и (***) следует, что обе прямые регрессии проходят через точку $(m_x; m_y)$, которую называют *центром совместного распределения величин X и Y*.

§ 21. Линейная корреляция. Нормальная корреляция

Рассмотрим двумерную случайную величину (X, Y). Если обе функции регрессии Y на X и X на Y линейны (см. § 15), то говорят, что X и Y связаны *линейной корреляционной зависимостью*. Очевидно, что графики линейных функций регрессии — прямые линии, причем можно доказать, что они совпадают с прямыми среднеквадратической регрессии (см. § 20). Имеет место следующая важная теорема.

Теорема. *Если двумерная случайная величина (X, Y) распределена нормально, то X и Y связаны линейной корреляционной зависимостью.*

Доказательство. Двумерная плотность вероятности (см. § 19)

$$f(x,\ y)=\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-r^2}}\,\mathrm{e}^{-(u^2+v^2-2ruv)/(2\,(1-r^2))}, \qquad (*)$$

где

$$u=(x-a_1)/\sigma_x,\ \ v=(y-a_2)/\sigma_y. \qquad (**)$$

Плотность вероятности составляющей X (см. § 19, замечание)

$$f_1(x)=\frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-u^2/2}. \qquad (***)$$

Найдем функцию регрессии $M(Y\,|\,x)$, для чего сначала найдем условный закон распределения величины Y при $X=x$ [см. § 14, формула $(**)$]:

$$\psi(y\,|\,x)=\frac{f(x,\ y)}{f_1(x)}.$$

Подставив $(*)$ и $(**)$ в правую часть этой формулы и выполнив выкладки, имеем

$$\psi(y\,|\,x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y}\,\mathrm{e}^{-(v-ru)^2/(2\,(1-r^2))}.$$

Заменив u и v по формулам $(**)$, окончательно получим

$$\psi(y\,|\,x)=\frac{1}{(\sigma_y\sqrt{1-r^2})\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{\left\{y-\left[a_2-r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x-a_1)\right]\right\}^2}{2\left[\sigma_y^2(1-r^2)\right]}}.$$

Полученное условное распределение нормально с математическим ожиданием (функцией регрессии Y на X)

$$M(Y\,|\,x)=a_2+r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x-a_1)$$

и дисперсией $\sigma_y^2(1-r^2)$.

Аналогично можно получить функцию регрессии X на Y:

$$M(X\,|\,y)=a_1+r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y-a_2).$$

Так как обе функции регрессии линейны, то корреляция между величинами X и Y линейная, что и требовалось доказать.

Принимая во внимание вероятностный смысл параметров двумерного нормального распределения (см. § 19), заключаем, что уравнения прямых регрессии

$$y-a_2=r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x-a_1),\quad x-a_1=r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y-a_2)$$

совпадают с уравнениями прямых среднеквадратической регрессии (см. § 20).

Задачи

1. Найти законы распределения составляющих дискретной двумерной случайной величины, заданной законом распределения

Y		X	
	x_1	x_2	x_3
y_1	0,12	0,18	0,10
y_2	0,10	0,11	0,39

Отв. X x_1 x_2 x_3 Y y_1 y_2
p 0,22 0,29 0,49 p 0,40 0,60

2. Найти вероятность того, что составляющая X двумерной случайной величины примет значение $X<1/2$ и при этом составляющая Y примет значение $Y<1/3$, если известна функция распределения системы

$$F(x,\,y)=\left(\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}2x+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}3y+\frac{1}{2}\right).$$

Отв. $P(X<1/2,\ Y<1/3)=9/16$.

3. Найти вероятность попадания случайной точки $(X;\ Y)$ в прямоугольник, ограниченный прямыми $x=\pi/4$, $x=\pi/2$, $y=\pi/6$, $y=\pi/3$, если известна функция распределения

$$F(x, y) = \sin x \sin y \; (0 \leqslant x \leqslant \pi/2, \; 0 \leqslant y \leqslant \pi/2).$$

Отв. $P(\pi/4 < X < \pi/2, \; \pi/6 < Y < \pi/3) = 0{,}11$.

4. Найти плотность распределения системы двух случайных величин по известной функции распределения

$$F(x, y) = (1 - e^{-2x})(1 - e^{-3y}) \; (x \geqslant 0, \; y \geqslant 0).$$

Отв. $f(x, y) = \dfrac{\partial^2 F}{\partial x \, \partial y} = 6e^{-(2x+3y)}$.

5. Внутри прямоугольника, ограниченного прямыми $x = 0$, $x = \pi/2$, $y = 0$, $y = \pi/2$, плотность распределения системы двух случайных величин $f(x, y) = C \sin(x + y)$; вне прямоугольника $f(x, y) = 0$. Найти: а) величину C; б) функцию распределения системы.

Отв. а) $C = 0{,}5$; б) $F(x, y) = 0{,}5 [\sin x + \sin y - \sin(x + y)]$ $(0 \leqslant x \leqslant \pi/2, \; 0 \leqslant y \leqslant \pi/2)$.

6. Система двух случайных величин распределена равномерно: в прямоугольнике, ограниченном прямыми $x = 4$, $x = 6$, $y = 10$, $y = 15$, функция $f(x, y)$ сохраняет постоянное значение, а вне этого прямоугольника она равна нулю. Найти: а) плотность $f(x, y)$ совместного распределения; б) функцию распределения системы.

Отв. а) $f(x, y) = \begin{cases} 0{,}1 & \text{внутри прямоугольника,} \\ 0 & \text{вне прямоугольника;} \end{cases}$

б) $F(x, y) = \dfrac{(x - 4)(y - 10)}{10}$.

7. Плотность совместного распределения системы двух случайных величин $f(x, y) = \dfrac{C}{(4 + x^2)(9 + y^2)}$. Найти: а) величину C; б) функцию распределения системы.

Отв. а) $C = 6/\pi^2$; б) $F(x, y) = \left(\dfrac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{2} \right) \left(\dfrac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \dfrac{y}{3} + \dfrac{1}{2} \right)$.

8. Двумерная случайная величина задана плотностью совместного распределения

$$f(x, y) = \frac{3\sqrt{3}}{\pi} e^{-4x^2 - 6xy - 9y^2}.$$

Найти условные законы распределения составляющих.

Отв. $\varphi(x \mid y) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\left(2x + \frac{3}{2} y\right)^2}$; $\psi(x \mid y) = \dfrac{3}{\sqrt{\pi}} e^{-(x+3y)^2}$.

ЧАСТЬ ТРЕТЬЯ

ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

Глава пятнадцатая

ВЫБОРОЧНЫЙ МЕТОД

§ 1. Задачи математической статистики

Установление закономерностей, которым подчинены массовые случайные явления, основано на изучении методами теории вероятностей статистических данных — результатов наблюдений.

Первая задача математической статистики — указать способы сбора и группировки статистических сведений, полученных в результате наблюдений или в результате специально поставленных экспериментов.

Вторая задача математической статистики — разработать методы анализа статистических данных в зависимости от целей исследования. Сюда относятся:

а) оценка неизвестной вероятности события; оценка неизвестной функции распределения; оценка параметров распределения, вид которого известен; оценка зависимости случайной величины от одной или нескольких случайных величин и др.;

б) проверка статистических гипотез о виде неизвестного распределения или о величине параметров распределения, вид которого известен.

Современная математическая статистика разрабатывает способы определения числа необходимых испытаний до начала исследования (планирование эксперимента), в ходе исследования (последовательный анализ) и решает многие другие задачи. Современную математическую статистику определяют как науку о принятии решений в условиях неопределенности.

Итак, задача математической статистики состоит в создании методов сбора и обработки статистических данных для получения научных и практических выводов.

§ 2. Краткая историческая справка

Математическая статистика возникла (XVII в.) и развивалась параллельно с теорией вероятностей. Дальнейшее развитие математической статистики (вторая половина XIX—начало XX в.) обязано, в первую очередь, П. Л. Чебышеву, А. А. Маркову, А. М. Ляпунову, а также К. Гауссу, А. Кетле, Ф. Гальтону, К. Пирсону и др.

В XX в. наиболее существенный вклад в математическую статистику был сделан советскими математиками (В. И. Романовский, Е. Е. Слуцкий, А. Н. Колмогоров, Н. В. Смирнов), а также английскими (Стьюдент, Р. Фишер, Э. Пирсон) и американскими (Ю. Нейман, А. Вальд) учеными.

§ 3. Генеральная и выборочная совокупности

Пусть требуется изучить совокупность однородных объектов относительно некоторого качественного или количественного признака, характеризующего эти объекты. Например, если имеется партия деталей, то качественным признаком может служить стандартность детали, а количественным—контролируемый размер детали.

Иногда проводят сплошное обследование, т. е. обследуют каждый из объектов совокупности относительно признака, которым интересуются. На практике, однако, сплошное обследование применяют сравнительно редко. Например, если совокупность содержит очень большое число объектов, то провести сплошное обследование физически невозможно. Если обследование объекта связано с его уничтожением или требует больших материальных затрат, то проводить сплошное обследование практически не имеет смысла. В таких случаях случайно отбирают из всей совокупности ограниченное число объектов и подвергают их изучению.

Выборочной совокупностью или просто *выборкой* называют совокупность случайно отобранных объектов.

Генеральной совокупностью называют совокупность объектов, из которых производится выборка.

Объемом совокупности (выборочной или генеральной) называют число объектов этой совокупности. Например, если из 1000 деталей отобрано для обследования 100 деталей, то объем генеральной совокупности $N = 1000$, а объем выборки $n = 100$.

Замечание. Часто генеральная совокупность содержит конечное число объектов. Однако если это число достаточно велико, то иногда в целях упрощения вычислений, или для облегчения теоретических выводов, допускают, что генеральная совокупность состоит из бесчисленного множества объектов. Такое допущение оправдывается тем, что увеличение объема генеральной совокупности (достаточно большого объема) практически не сказывается на результатах обработки данных выборки.

§ 4. Повторная и бесповторная выборки. Репрезентативная выборка

При составлении выборки можно поступать двумя способами: после того как объект отобран и над ним произведено наблюдение, он может быть возвращен либо не возвращен в генеральную совокупность. В соответствии со сказанным выборки подразделяют на повторные и бесповторные.

Повторной называют выборку, при которой отобранный объект (перед отбором следующего) возвращается в генеральную совокупность.

Бесповторной называют выборку, при которой отобранный объект в генеральную совокупность не возвращается.

На практике обычно пользуются бесповторным случайным отбором.

Для того чтобы по данным выборки можно было достаточно уверенно судить об интересующем признаке генеральной совокупности, необходимо, чтобы объекты выборки правильно его представляли. Другими словами, выборка должна правильно представлять пропорции генеральной совокупности. Это требование коротко формулируют так: выборка должна быть *репрезентативной (представительной)*.

В силу закона больших чисел можно утверждать, что выборка будет репрезентативной, если ее осуществить случайно: каждый объект выборки отобран случайно из генеральной совокупности, если все объекты имеют одинаковую вероятность попасть в выборку.

Если объем генеральной совокупности достаточно велик, а выборка составляет лишь незначительную часть этой совокупности, то различие между повторной и бесповторной выборками стирается; в предельном случае, когда рассматривается бесконечная генеральная совокупность, а выборка имеет конечный объем, это различие исчезает.

§ 5. Способы отбора

На практике применяются различные способы отбора. Принципиально эти способы можно подразделить на два вида:

1. Отбор, не требующий расчленения генеральной совокупности на части. Сюда относятся: а) простой случайный бесповторный отбор; б) простой случайный повторный отбор.

2. Отбор, при котором генеральная совокупность разбивается на части. Сюда относятся: а) типический отбор; б) механический отбор; в) серийный отбор.

Простым случайным называют такой отбор, при котором объекты извлекают по одному из всей генеральной совокупности. Осуществить простой отбор можно различными способами. Например, для извлечения n объектов из генеральной совокупности объема N поступают так: выписывают номера от 1 до N на карточках, которые тщательно перемешивают, и наугад вынимают одну карточку; объект, имеющий одинаковый номер с извлеченной карточкой, подвергают обследованию; затем карточку возвращают в пачку и процесс повторяют, т. е. карточки перемешивают, наугад вынимают одну из них и т. д. Так поступают n раз; в итоге получают простую случайную повторную выборку объема n.

Если извлеченные карточки не возвращать в пачку, то выборка является простой случайной бесповторной.

При большом объеме генеральной совокупности описанный процесс оказывается очень трудоемким. В этом случае пользуются готовыми таблицами «случайных чисел», в которых числа расположены в случайном порядке. Для того чтобы отобрать, например, 50 объектов из пронумерованной генеральной совокупности, открывают любую страницу таблицы случайных чисел и выписывают подряд 50 чисел; в выборку попадают те объекты, номера которых совпадают с выписанными случайными числами. Если бы оказалось, что случайное число таблицы превышает число N, то такое случайное число пропускают. При осуществлении бесповторной выборки случайные числа таблицы, уже встречавшиеся ранее, следует также пропустить.

Типическим называют отбор, при котором объекты отбираются не из всей генеральной совокупности, а из каждой ее «типической» части. Например, если детали изготовляют на нескольких станках, то отбор производят не из всей совокупности деталей, произведенных всеми станками, а из продукции каждого станка в отдельности. Типическим отбором пользуются тогда, когда обследуемый признак заметно колеблется в различных типических частях генеральной совокупности. Например, если продукция изготовляется на нескольких машинах, среди которых есть более и менее изношенные, то здесь типический отбор целесообразен.

Механическим называют отбор, при котором генеральную совокупность «механически» делят на столько групп, сколько объектов должно войти в выборку, а из каждой группы отбирают один объект. Например, если нужно отобрать 20% изготовленных станком деталей, то отбирают каждую пятую деталь; если требуется отобрать 5% деталей, то отбирают каждую двадцатую деталь, и т. д. Следует указать, что иногда механический отбор может не обеспечить репрезентативности выборки. Например, если отбирают каждый двадцатый обтачиваемый валик, причем сразу же после отбора производят замену резца, то отобранными окажутся все валики, обточенные затупленными резцами. В таком случае следует устранить совпадение ритма отбора с ритмом замены резца, для чего надо отбирать, скажем, каждый десятый валик из двадцати обточенных.

Серийным называют отбор, при котором объекты отбирают из генеральной совокупности не по одному, а «сериями», которые подвергаются сплошному обследованию. Например, если изделия изготовляются большой группой станков-автоматов, то подвергают сплошному обследованию продукцию только нескольких станков. Серийным отбором пользуются тогда, когда обследуемый признак колеблется в различных сериях незначительно.

Подчеркнем, что на практике часто применяется комбинированный отбор, при котором сочетаются указанные выше способы. Например, иногда разбивают генеральную совокупность на серии одинакового объема, затем простым случайным отбором выбирают несколько серий и, наконец, из каждой серии простым случайным отбором извлекают отдельные объекты.

§ 6. Статистическое распределение выборки

Пусть из генеральной совокупности извлечена выборка, причем x_1 наблюдалось n_1 раз, x_2—n_2 раз, x_k—n_k раз и $\sum n_i = n$—объем выборки. Наблюдаемые значения x_i называют *вариантами*, а последовательность вариант, записанных в возрастающем порядке,—*вариационным рядом*. Числа наблюдений называют *частотами*, а их отношения к объему выборки $n_i/n = W_i$—*относительными частотами*.

Статистическим распределением выборки называют перечень вариант и соответствующих им частот или относительных частот. Статистическое распределение можно задать также в виде последовательности интервалов и соответствующих им частот (в качестве частоты, соответствующей интервалу, принимают сумму частот, попавших в этот интервал).

Заметим, что в теории вероятностей под *распределением* понимают соответствие между возможными значениями случайной величины и их вероятностями, а в математической статистике—соответствие между наблюдаемыми вариантами и их частотами, или относительными частотами.

Пример. Задано распределение частот выборки объема $n=20$:

x_i	2	6	12
n_i	3	10	7

Написать распределение относительных частот.

Решение. Найдем относительные частоты, для чего разделим частоты на объем выборки:

$$W_1 = 3/20 = 0{,}15, \quad W_2 = 10/20 = 0{,}50, \quad W_3 = 7/20 = 0{,}35.$$

Напишем распределение относительных частот:

x_i	2	6	12
W_i	0,15	0,50	0,35

Контроль: $0{,}15 + 0{,}50 + 0{,}35 = 1$.

§ 7. Эмпирическая функция распределения

Пусть известно статистическое распределение частот количественного признака X. Введем обозначения: n_x—число наблюдений, при которых наблюдалось значение признака, меньшее x; n—общее число наблюдений (объем выборки). Ясно, что относительная частота события $X < x$ равна n_x/n. Если x изменяется, то, вообще говоря, изменяется и относительная частота, т. е. относительная частота n_x/n есть функция от x. Так как эта функция находится эмпирическим (опытным) путем, то ее называют эмпирической.

Эмпирической функцией распределения (функцией распределения выборки) называют функцию $F^*(x)$, определяющую для каждого значения x относительную частоту события $X < x$.

Итак, по определению,

$$F^*(x) = n_x/n,$$

где n_x — число вариант, меньших x; n — объем выборки.

Таким образом, для того чтобы найти, например, $F^*(x_2)$, надо число вариант, меньших x_2, разделить на объем выборки:

$$F^*(x_2) = n_{x_2}/n.$$

В отличие от эмпирической функции распределения выборки функцию распределения $F(x)$ генеральной совокупности называют *теоретической функцией распределения*. Различие между эмпирической и теоретической функциями состоит в том, что теоретическая функция $F(x)$ определяет вероятность события $X < x$, а эмпирическая функция $F^*(x)$ определяет относительную частоту этого же события. Из теоремы Бернулли следует, что относительная частота события $X < x$, т. е. $F^*(x)$ стремится по вероятности к вероятности $F(x)$ этого события. Другими словами, при больших n числа $F^*(x)$ и $F(x)$ мало отличаются одно от другого в том смысле, что $\lim\limits_{n \to \infty} P[|F(x) - F^*(x)| < \varepsilon] = 1$ $(\varepsilon > 0)$. Уже отсюда следует целесообразность использования эмпирической функции распределения выборки для приближенного представления теоретической (интегральной) функции распределения генеральной совокупности.

Такое заключение подтверждается и тем, что $F^*(x)$ обладает всеми свойствами $F(x)$. Действительно, из определения функции $F^*(x)$ вытекают следующие ее свойства:

1) значения эмпирической функции принадлежат отрезку $[0, 1]$;

2) $F^*(x)$ — неубывающая функция;

3) если x_1 — наименьшая варианта, то $F^*(x) = 0$ при $x \leqslant x_1$; если x_k — наибольшая варианта, то $F^*(x) = 1$ при $x > x_k$.

Итак, эмпирическая функция распределения выборки служит для оценки теоретической функции распределения генеральной совокупности.

Пример. Построить эмпирическую функцию по данному распределению выборки:

варианты x_i	2	6	10
частоты n_i	12	18	30

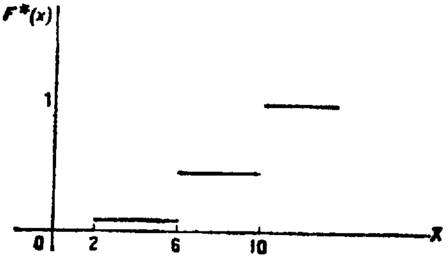

Рис. 19

Решение. Найдем объем выборки: $12+18+30=60$. Наименьшая варианта равна 2, следовательно,

$$F^*(x)=0 \text{ при } x \leqslant 2.$$

Значение $X<6$, а именно $x_1=2$, наблюдалось 12 раз, следовательно,

$$F^*(x)=12/60=0{,}2 \text{ при } 2<x \leqslant 6.$$

Значения $X<10$, а именно $x_1=2$ и $x_2=6$, наблюдались $12+18=30$ раз, следовательно,

$$F^*(x)=30/60=0{,}5 \text{ при } 6<x \leqslant 10.$$

Так как $x=10$ — наибольшая варианта, то

$$F^*(x)=1 \text{ при } x>10.$$

Искомая эмпирическая функция

$$F^*(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \leqslant 2, \\ 0{,}2 & \text{при} \quad 2<x \leqslant 6, \\ 0{,}5 & \text{при} \quad 6<x \leqslant 10, \\ 1 & \text{при} \quad x>10. \end{cases}$$

График этой функции изображен на рис. 19.

§ 8. Полигон и гистограмма

Для наглядности строят различные графики статистического распределения и, в частности, полигон и гистограмму.

Полигоном частот называют ломаную, отрезки которой соединяют точки $(x_1;\ n_1)$, $(x_2;\ n_2)$, ..., $(x_k;\ n_k)$. Для построения полигона частот на оси абсцисс откладывают варианты x_i, а на оси ординат — соответствующие им частоты n_i. Точки $(x_i;\ n_i)$ соединяют отрезками прямых и получают полигон частот.

Полигоном относительных частот называют ломаную, отрезки которой соединяют точки $(x_1;\ W_1)$, $(x_2;\ W_2)$, ...

..., $(x_k;\ W_k)$. Для построения полигона относительных частот на оси абсцисс откладывают варианты x_i, а на оси ординат — соответствующие им относительные частоты W_i. Точки $(x_i;\ W_i)$ соединяют отрезками прямых и получают полигон относительных частот.

На рис. 20 изображен полигон относительных частот следующего распределения:

X	1,5	3,5	5,5	7,5
W	0,1	0,2	0,4	0,3

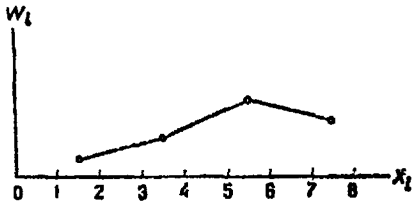

Рис. 20

В случае непрерывного признака целесообразно строить гистограмму, для чего интервал, в котором заключены все наблюдаемые значения признака, разбивают на несколько частичных интервалов длиной h и находят для каждого частичного интервала n_i — сумму частот вариант, попавших в i-й интервал.

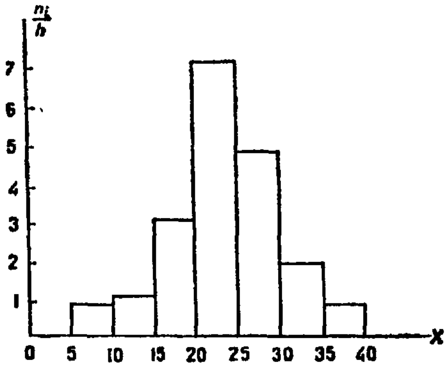

Рис. 21

Гистограммой частот называют ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длиною h, а высоты равны отношению n_i/h (плотность частоты).

Для построения гистограммы частот на оси абсцисс откладывают частичные интервалы, а над ними проводят отрезки, параллельные оси абсцисс на расстоянии n_i/h.

Площадь i-го частичного прямоугольника равна $hn_i/h = n_i$ — сумме частот вариант i-го интервала; следовательно, *площадь гистограммы частот равна сумме всех частот, т. е. объему выборки.*

На рис. 21 изображена гистограмма частот распределения объема $n = 100$, приведенного в табл. 6.

Гистограммой относительных частот называют ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длиною h, а высоты равны отношению W_i/h (плотность относительной частоты).

Для построения гистограммы относительных частот на оси абсцисс откладывают частичные интервалы, а над ними проводят отрезки, параллельные оси абсцисс на расстоянии W_i/h. Площадь i-го частичного прямоугольника равна $hW_i/h = W_i$ — относительной частоте вариант, попавших в i-й интервал. Следовательно, *площадь гистограммы относительных частот равна сумме всех относительных частот, т. е. единице.*

Таблица 6

Частичный интервал длиною $h=5$	Сумма частот вариант частичного интервала n_i	Плотность частоты n_i/h
5—10	4	0,8
10—15	6	1,2
15—20	16	3,2
20—25	36	7,2
25—30	24	4,8
30—35	10	2,0
35—40	4	0,8

Задачи

1. Построить график эмпирической функции распределения

x_i	5	7	10	15
n_i	2	3	8	7

2. Построить полигоны частот и относительных частот распределения

x_i	1	3	5	7	9
n_i	10	15	30	33	12

3. Построить гистограммы частот и относительных частот распределения (в первом столбце указан частичный интервал, во втором — сумма частот вариант частичного интервала)

2—5	9
5—8	10
8—11	25
11—14	6

Глава шестнадцатая

СТАТИСТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

§ 1. Статистические оценки параметров распределения

Пусть требуется изучить количественный признак генеральной совокупности. Допустим, что из теоретических соображений удалось установить, какое именно распределение имеет признак. Естественно возникает задача оценки параметров, которыми определяется это распределение. Например, если наперед известно, что изучаемый признак распределен в генеральной совокупности нормально, то необходимо оценить (приближенно найти) математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение, так как эти два параметра полностью определяют нормальное распределение; если же есть основания считать, что признак имеет, например, распределение Пуассона, то необходимо оценить параметр λ, которым это распределение определяется.

Обычно в распоряжении исследователя имеются лишь данные выборки, например значения количественного признака $x_1, x_2, \ldots, x_n$, полученные в результате n наблюдений (здесь и далее наблюдения предполагаются независимыми). Через эти данные и выражают оцениваемый параметр. Рассматривая $x_1, x_2, \ldots, x_n$ как независимые случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_n$, можно сказать, что найти статистическую оценку неизвестного параметра теоретического распределения — это значит найти функцию от наблюдаемых случайных величин, которая и дает приближенное значение оцениваемого параметра. Например, как будет показано далее, для оценки математического ожидания нормального распределения служит функция (среднее арифметическое наблюдаемых значений признака)

$$\overline{X}=(X_1+X_2+\ldots+X_n)/n.$$

Итак, статистической оценкой неизвестного параметра теоретического распределения называют функцию от наблюдаемых случайных величин.

§ 2. Несмещенные, эффективные и состоятельные оценки

Для того чтобы статистические оценки давали «хорошие» приближения оцениваемых параметров, они должны удовлетворять определенным требованиям. Ниже указаны эти требования.

Пусть Θ^* — статистическая оценка неизвестного параметра Θ теоретического распределения. Допустим, что по выборке объема n найдена оценка Θ_1^*. Повторим опыт, т. е. извлечем из генеральной совокупности другую выборку того же объема и по ее данным найдем оценку Θ_2^*. Повторяя опыт многократно, получим числа $\Theta_1^*, \Theta_2^*, \ldots, \Theta_k^*$, которые, вообще говоря, различны между собой. Таким образом, оценку Θ^* можно рассматривать как случайную величину, а числа Θ_1^*, Θ_2^*, ..., Θ_k^* — как ее возможные значения.

Представим себе, что оценка Θ^* дает приближенное значение Θ с избытком; тогда каждое найденное по данным выборок число Θ_i^* $(i = 1, 2, \ldots, k)$ больше истинного значения Θ. Ясно, что в этом случае и математическое ожидание (среднее значение) случайной величины Θ^* больше, чем Θ, т. е. $M(\Theta^*) > \Theta$. Очевидно, что если Θ^* дает оценку с недостатком, то $M(\Theta^*) < \Theta$.

Таким образом, использование статистической оценки, математическое ожидание которой не равно оцениваемому параметру, привело бы к систематическим[*] (одного знака) ошибкам. По этой причине естественно потребовать, чтобы математическое ожидание оценки Θ^* было равно оцениваемому параметру. Хотя соблюдение этого требования не устранит ошибок (одни значения Θ^* больше, а другие меньше Θ), однако ошибки разных знаков будут встречаться одинаково часто. Иными словами, соблюдение требований $M(\Theta^*) = \Theta$ гарантирует от получения систематических ошибок.

Несмещенной называют статистическую оценку Θ^*, математическое ожидание которой равно оцениваемому параметру Θ при любом объеме выборки, т. е.

$$M(\Theta^*) = \Theta.$$

---

[*] В теории ошибок измерений систематическими ошибками называют неслучайные ошибки, искажающие результаты измерений в одну определенную сторону Например, измерение длины растянутой рулеткой систематически дает заниженные результаты.

Смещенной называют оценку, математическое ожидание которой не равно оцениваемому параметру.

Однако было бы ошибочным считать, что несмещенная оценка всегда дает хорошее приближение оцениваемого параметра. Действительно, возможные значения Θ^* могут быть сильно рассеяны вокруг своего среднего значения, т е. дисперсия $D(\Theta^*)$ может быть значительной. В этом случае найденная по данным одной выборки оценка, например Θ_1^*, может оказаться весьма удаленной от среднего значения $\overline{\Theta^*}$, а значит, и от самого оцениваемого параметра Θ; приняв Θ_1^* в качестве приближенного значения Θ, мы допустили бы большую ошибку. Если же потребовать, чтобы дисперсия Θ^* была малой, то возможность допустить большую ошибку будет исключена. По этой причине к статистической оценке предъявляется требование эффективности.

Эффективной называют статистическую оценку, которая (при заданном объеме выборки n) имеет наименьшую возможную дисперсию.

При рассмотрении выборок большого объема (n велико!) к статистическим оценкам предъявляется требование состоятельности.

Состоятельной называют статистическую оценку, которая при $n \to \infty$ стремится по вероятности к оцениваемому параметру. Например, если дисперсия несмещенной оценки при $n \to \infty$ стремится к нулю, то такая оценка оказывается и состоятельной.

§ 3. Генеральная средняя

Пусть изучается дискретная генеральная совокупность относительно количественного признака X.

Генеральной средней $\bar{x}_г$ называют среднее арифметическое значений признака генеральной совокупности.

Если все значения $x_1, x_2, \ldots, x_N$ признака генеральной совокупности объема N различны, то

$$\bar{x}_г = (x_1 + x_2 + \ldots + x_N)/N.$$

Если же значения признака $x_1, x_2, \ldots, x_k$ имеют соответственно частоты $N_1, N_2, \ldots, N_k$, причем $N_1 + N_2 + \ldots + N_k = N$, то

$$\bar{x}_г = (x_1N_1 + x_2N_2 + \ldots + x_kN_k)/N,$$

т. е. генеральная средняя есть средняя взвешенная значений признака с весами, равными соответствующим частотам.

Замечание. Пусть генеральная совокупность объема N содержит объекты с различными значениями признака X, равными $x_1, x_2, \ldots, x_N$. Представим себе, что из этой совокупности наудачу извлекается один объект. Вероятность того, что будет извлечен объект со значением признака, например x_1, очевидно, равна $1/N$. С этой же вероятностью может быть извлечен и любой другой объект. Таким образом, величину признака X можно рассматривать как случайную величину, возможные значения которой $x_1, x_2, \ldots, x_n$ имеют одинаковые вероятности, равные $1/N$. Найдем математическое ожидание $M(X)$:

$$M(X)=x_1\cdot 1/N+x_2\cdot 1/N+\ldots+x_N\cdot 1/N=(x_1+x_2+\ldots+x_N)/N=\bar{x}_\text{г}.$$

Итак, если рассматривать обследуемый признак X генеральной совокупности как случайную величину, то математическое ожидание признака равно генеральной средней этого признака:

$$M(X)=\bar{x}_\text{г}.$$

Этот вывод мы получили, считая, что все объекты генеральной совокупности имеют различные значения признака. Такой же итог будет получен, если допустить, что генеральная совокупность содержит по нескольку объектов с одинаковым значением признака.

Обобщая полученный результат на генеральную совокупность с непрерывным распределением признака X, и в этом случае определим генеральную среднюю как математическое ожидание признака:

$$\bar{x}_\text{г}=M(X).$$

§ 4. Выборочная средняя

Пусть для изучения генеральной совокупности относительно количественного признака X извлечена выборка объема n.

Выборочной средней $\bar{x}_\text{в}$ называют среднее арифметическое значение признака выборочной совокупности.

Если все значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$ признака выборки объема n различны, то

$$\bar{x}_\text{в}=(x_1+x_2+\ldots+x_n)/n.$$

Если же значения признака $x_1, x_2, \ldots, x_k$ имеют соответственно частоты $n_1, n_2, \ldots, n_k$, причем $n_1+n_2+\ldots+n_k=n$, то

$$\bar{x}_\text{в}=(n_1x_1+n_2x_2+\ldots+n_kx_k)/n,$$

или

$$\bar{x}_\text{в}=\left(\sum_{i=1}^{k} n_ix_i\right)\Big/ n,$$

т. е. выборочная средняя есть средняя взвешенная значений признака с весами, равными соответствующим частотам.

Замечание. Выборочная средняя, найденная по данным одной выборки, есть, очевидно, определенное число. Если же извлекать другие выборки того же объема из той же генеральной совокупности, то выборочная средняя будет изменяться от выборки к выборке. Таким образом, выборочную среднюю можно рассматривать как случайную величину, а следовательно, можно говорить о распределениях (теоретическом и эмпирическом) выборочной средней и о числовых характеристиках этого распределения (его называют выборочным), в частности о математическом ожидании и дисперсии выборочного распределения.

Заметим, что в теоретических рассуждениях выборочные значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$ признака X, полученные в итоге независимых наблюдений, также рассматривают как случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_n$, имеющие то же распределение и, следовательно, те же числовые характеристики, которые имеют X.

§ 5. Оценка генеральной средней по выборочной средней. Устойчивость выборочных средних

Пусть из генеральной совокупности (в результате независимых наблюдений над количественным признаком X) извлечена повторная выборка объема n со значениями признака $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Не уменьшая общности рассуждений, будем считать эти значения признака различными. Пусть генеральная средняя $\overline{x}_г$ неизвестна и требуется оценить ее по данным выборки. В качестве оценки генеральной средней принимают выборочную среднюю

$$\overline{x}_в = (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)/n.$$

Убедимся, что $\overline{x}_в$ — несмещенная оценка, т. е. покажем, что математическое ожидание этой оценки равно $\overline{x}_г$. Будем рассматривать $\overline{x}_в$ как случайную величину и $x_1, x_2, \ldots, x_n$ как независимые, одинаково распределенные случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Поскольку эти величины одинаково распределены, то они имеют одинаковые числовые характеристики, в частности одинаковое математическое ожидание, которое обозначим через a. Так как математическое ожидание среднего арифметического одинаково распределенных случайных величин равно математическому ожиданию каждой из величин (см. гл. VIII, § 9), то

$$M(\overline{X}_в) = M[(X_1+X_2+\ldots+X_n)/n] = a \qquad (*)$$

Приняв во внимание, что каждая из величин $X_1, X_2, \ldots$ $\ldots, X_n$ имеет то же распределение, что и генеральная совокупность (которую мы также рассматриваем как случайную величину), заключаем, что и числовые характеристики этих величин и генеральной совокупности одинаковы. В частности, математическое ожидание a каждой из величин равно математическому ожиданию признака X генеральной совокупности, т. е.

$$M(X) = \overline{x}_г = a.$$

Заменив в формуле (*) математическое ожидание a на $\overline{x}_г$, окончательно получим

$$M(\overline{X}_в) = \overline{x}_г.$$

Тем самым доказано, что выборочная средняя есть несмещенная оценка генеральной средней.

Легко показать, что выборочная средняя является и состоятельной оценкой генеральной средней. Действительно, допуская, что случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_n$ имеют ограниченные дисперсии, мы вправе применить к этим величинам теорему Чебышева (частный случай), в силу которой при увеличении n среднее арифметическое рассматриваемых величин, т. е. $\overline{X}_в$, стремится по вероятности к математическому ожиданию a каждой из величин, или, что то же, к генеральной средней $\overline{x}_г$ (так как $\overline{x}_г = a$).

Итак, при увеличении объема выборки n выборочная средняя стремится по вероятности к генеральной средней, а это и означает, что выборочная средняя есть состоятельная оценка генеральной средней. Из сказанного следует также, что если по нескольким выборкам достаточно большого объема из одной и той же генеральной совокупности будут найдены выборочные средние, то они будут приближенно равны между собой. В этом и состоит свойство *устойчивости выборочных средних.*

Заметим, что если дисперсии двух одинаково распределенных совокупностей равны между собой, то близость выборочных средних к генеральным не зависит от отношения объема выборки к объему генеральной совокупности. Она зависит от объема выборки: чем объем выборки больше, тем меньше выборочная средняя отличается от генеральной. Например, если из одной совокупности отобран 1% объектов, а из другой совокупности отобрано 4% объектов, причем объем первой выборки оказался большим, чем второй, то первая выборочная средняя будет меньше отличаться от соответствующей генеральной средней, чем вторая.

Замечание. Мы предполагали выборку повторной. Однако полученные выводы применимы и для бесповторной выборки, если ее объем значительно меньше объема генеральной совокупности. Это положение часто используется на практике.

§ 6. Групповая и общая средние

Допустим, что все значения количественного признака X совокупности, безразлично-генеральной или выборочной, разбиты на несколько групп. Рассматривая каждую группу как самостоятельную совокупность, можно найти ее среднюю арифметическую.

Групповой средней называют среднее арифметическое значений признака, принадлежащих группе.

Теперь целесообразно ввести специальный термин для средней всей совокупности.

Общей средней $\bar{x}$ называют среднее арифметическое значений признака, принадлежащих всей совокупности.

Зная групповые средние и объемы групп, можно найти общую среднюю: *общая средняя равна средней арифметической групповых средних, взвешенной по объемам групп.*

Опуская доказательство, приведем иллюстрирующий пример.

Пример. Найти общую среднюю совокупности, состоящей из следующих двух групп:

Группа	первая		вторая	
Значение признака . . .	1	6	1	5
Частота	10	15	20	30
Объем	10+15=25		20+30=50	

Решение. Найдем групповые средние:

$$\bar{x}_1 = (10\cdot 1 + 15\cdot 6)/25 = 4;$$
$$\bar{x}_2 = (20\cdot 1 + 30\cdot 5)/50 = 3,4.$$

Найдем общую среднюю по групповым средним:

$$\bar{x} = (25\cdot 4 + 50\cdot 3,4)/(25 + 50) = 3,6.$$

Замечание. Для упрощения расчета общей средней совокупности большого объема целесообразно разбить ее на несколько групп, найти групповые средние и по ним общую среднюю.

§ 7. Отклонение от общей средней и его свойство

Рассмотрим совокупность, безразлично — генеральную или выборочную, значений количественного признака X объема n:

значения признака	x_1	x_2	...	x_k
частоты	n_1	n_2	...	n_k

При этом $\sum\limits_{i=1}^{k} n_i = n$. Далее для удобства записи знак суммы $\sum\limits_{i=1}^{k}$ заменен знаком $\sum$.

Найдем общую среднюю:

$$\bar{x} = (\sum n_i x_i)/n.$$

Отсюда

$$\sum n_i x_i = n\bar{x}. \qquad (*)$$

Заметим, что поскольку $\bar{x}$ — постоянная величина, то

$$\sum n_i \bar{x} = \bar{x} \sum n_i = n\bar{x}. \qquad (**)$$

Отклонением называют разность $x_i - \bar{x}$ между значением признака и общей средней.

Теорема. *Сумма произведений отклонений на соответствующие частоты равна нулю:*

$$\sum n_i (x_i - \bar{x}) = 0.$$

Доказательство. Учитывая (*) и (**), получим

$$\sum n_i (x_i - \bar{x}) = \sum n_i x_i - \sum n_i \bar{x} = n\bar{x} - n\bar{x} = 0.$$

Следствие. *Среднее значение отклонения равно нулю.* Действительно,

$$(\sum n_i (x_i - \bar{x}))/\sum n_i = 0/n = 0.$$

Пример. Дано распределение количественного признака X:

x_i	1	2	3
n_i	10	4	6

Убедиться, что сумма произведений отклонений на соответствующие частоты равна нулю.

Решение. Найдем общую среднюю:

$$\bar{x} = (10 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 6 \cdot 3)/20 = 1{,}8.$$

Найдем сумму произведений отклонений на соответствующие частоты:

$$\sum n_i (x_i - \bar{x}) = 10\,(1 - 1{,}8) + 4\,(2 - 1{,}8) + 6\,(3 - 1{,}8) = 8 - 8 = 0.$$

§ 8. Генеральная дисперсия

Для того чтобы охарактеризовать рассеяние значений количественного признака X генеральной совокупности вокруг своего среднего значения, вводят сводную характеристику — генеральную дисперсию.

Генеральной дисперсией $D_г$ называют среднее арифметическое квадратов отклонений значений признака генеральной совокупности от их среднего значения $\overline{x}_г$.

Если все значения x_1 x_2, ..., x_N признака генеральной совокупности объема N различны, то

$$D_г = \left(\sum_{i=1}^{N} (x_i - \overline{x}_г)^2 \right) / N.$$

Если же значения признака x_1, x_2, ..., x_k имеют соответственно частоты N_1, N_2, ..., N_k, причем $N_1 + N_2 + \ldots + N_k = N$, то

$$D_г = \left(\sum_{i=1}^{k} N_i (x_i - \overline{x}_г)^2 \right) / N,$$

т. е. генеральная дисперсия есть средняя взвешенная квадратов отклонений с весами, равными соответствующим частотам.

Пример. Генеральная совокупность задана таблицей распределения

x_i	2	4	5	6
N_i	8	9	10	3

Найти генеральную дисперсию.

Решение. Найдем генеральную среднюю (см. § 3):

$$\overline{x}_г = \frac{8 \cdot 2 + 9 \cdot 4 + 10 \cdot 5 + 3 \cdot 6}{8 + 9 + 10 + 3} = \frac{120}{30} = 4.$$

Найдем генеральную дисперсию;

$$D_г = \frac{8 \cdot (2-4)^2 + 9 \cdot (4-4)^2 + 10 \cdot (5-4)^2 + 3 \cdot (6-4)^2}{30} = 54/30 = 1{,}8.$$

Кроме дисперсии для характеристики рассеяния значений признака генеральной совокупности вокруг своего среднего значения пользуются сводной характеристикой — средним квадратическим отклонением.

Генеральным средним квадратическим отклонением (стандартом) называют квадратный корень из генеральной дисперсии:

$$\sigma_г = \sqrt{D_г}.$$

§ 9. Выборочная дисперсия

Для того чтобы охарактеризовать рассеяние наблюдаемых значений количественного признака выборки вокруг своего среднего значения $\bar{x}_\text{в}$, вводят сводную характеристику — выборочную дисперсию.

Выборочной дисперсией $D_\text{в}$ называют среднее арифметическое квадратов отклонения наблюдаемых значений признака от их среднего значения $\bar{x}_\text{в}$.

Если все значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$ признака выборки объема n различны, то

$$D_\text{в} = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}_\text{в})^2\right) \Big/ n.$$

Если же значения признака $x_1, x_2, \ldots, x_k$ имеют соответственно частоты $n_1, n_2, \ldots, n_k$, причем $n_1 + n_2 + \ldots$ $\ldots + n_k = n$, то

$$D_\text{в} = \left(\sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - \bar{x}_\text{в})^2\right) \Big/ n,$$

т. е. выборочная дисперсия есть средняя взвешенная квадратов отклонений с весами, равными соответствующим частотам.

Пример. Выборочная совокупность задана таблицей распределения

x_i	1	2	3	4
n_i	20	15	10	5

Найти выборочную дисперсию.

Решение. Найдем выборочную среднюю (см. § 4):

$$\bar{x}_\text{в} = \frac{20 \cdot 1 + 15 \cdot 2 + 10 \cdot 3 + 5 \cdot 4}{20 + 15 + 10 + 5} = \frac{100}{50} = 2.$$

Найдем выборочную дисперсию:

$$D_\text{в} = \frac{20\,(1-2)^2 + 15 \cdot (2-2)^2 + 10 \cdot (3-2)^2 + 5 \cdot (4-2)^2}{50} =$$

$$= 50/50 = 1.$$

Кроме дисперсии для характеристики рассеяния значений признака выборочной совокупности вокруг своего среднего значения пользуются сводной характеристикой — средним квадратическим отклонением.

Выборочным средним квадратическим отклонением (стандартом) называют квадратный корень из выборочной дисперсии:

$$\sigma_\text{в} = \sqrt{D_\text{в}}.$$

§ 10. Формула для вычисления дисперсии

Вычисление дисперсии, безразлично — выборочной или генеральной, можно упростить, используя следующую теорему.

Теорема. *Дисперсия равна среднему квадратов значений признака минус квадрат общей средней:*

$$D = \overline{x^2} - [\bar{x}]^2.$$

Доказательство. Справедливость теоремы вытекает из преобразований:

$$D = \frac{\sum n_i (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{\sum n_i \left(x_i^2 - 2x_i\bar{x} + [\bar{x}]^2\right)}{n} =$$

$$= \frac{\sum n_i x_i^2}{n} - 2\bar{x}\frac{\sum n_i x_i}{n} + [\bar{x}]^2 \frac{\sum n_i}{n} = \overline{x^2} - 2\bar{x}\cdot\bar{x} + [\bar{x}]^2 =$$

$$= \overline{x^2} - [\bar{x}]^2.$$

Итак,

$$D = \overline{x^2} - [\bar{x}]^2,$$

где $\bar{x} = \left(\sum n_i x_i\right)/n$, $\overline{x^2} = \left(\sum n_i x_i^2\right)/n$.

Пример. Найти дисперсию по данному распределению

x_i	1	2	3	4
n_i	20	15	10	5

Решение. Найдем общую среднюю:

$$\bar{x} = \frac{20\cdot 1 + 15\cdot 2 + 10\cdot 3 + 5\cdot 4}{20 + 15 + 10 + 5} = \frac{100}{50} = 2.$$

Найдем среднюю квадратов значений признака

$$\overline{x^2} = \frac{20\cdot 1^2 + 15\cdot 2^2 + 10\cdot 3^2 + 5\cdot 4^2}{50} = 5.$$

Искомая дисперсия

$$D = \overline{x^2} - [\bar{x}]^2 = 5 - 2^2 = 1.$$

§ 11. Групповая, внутригрупповая, межгрупповая и общая дисперсии

Допустим, что все значения количественного признака X совокупности, безразлично — генеральной или выборочной, разбиты на k групп. Рассматривая каждую группу как самостоятельную совокупность, можно найти групповую среднюю (см. § 6) и дисперсию значений признака, принадлежащих группе, относительно групповой средней.

Групповой дисперсией называют дисперсию значений признака, принадлежащих группе, относительно групповой средней

$$D_{j\text{гр}}=\left(\sum n_i(x_i-\bar{x}_j)^2\right)/N_j,$$

где n_i — частота значения x_i; j — номер группы; $\bar{x}_j$ — групповая средняя группы j; $N_j=\sum n_i$ — объем группы j.

Пример 1. Найти групповые дисперсии совокупности, состоящей из следующих двух групп:

Первая группа		Вторая группа	
x_i	n_i	x_i	n_i
2	1	3	2
4	7	8	3
5	2		
$N_1=\sum n_i=10$		$N_2=\sum n_i=5$	

Решение. Найдем групповые средние:

$$\bar{x}_1=\left(\sum n_i x_i\right)/\sum n_i=(1\cdot 2+7\cdot 4+2\cdot 5)/10=4;$$

$$\bar{x}_2=(2\cdot 3+3\cdot 8)/5=6.$$

Найдем искомые групповые дисперсии:

$$D_{1\text{гр}}=\left(\sum n_i(x_i-\bar{x}_1)^2\right)/N_1=$$
$$=(1\cdot(2-4)^2+7\cdot(4-4)^2+2\cdot(5-4)^2)/10=0{,}6;$$
$$D_{2\text{гр}}=(2\cdot(3-6)^2+3\cdot(8-6)^2)/5=6.$$

Зная дисперсию каждой группы, можно найти их среднюю арифметическую.

Внутригрупповой дисперсией называют среднюю арифметическую дисперсий, взвешенную по объемам групп:

$$D_{\text{внгр}}=\left(\sum N_j D_{j\text{гр}}\right)/n,$$

где N_j — объем группы j; $n=\sum_{j=1}^{k} N_j$ — объем всей совокупности.

Пример 2. Найти внутригрупповую дисперсию по данным примера 1.

Решение. Искомая внутригрупповая дисперсия равна

$$D_{\text{внгр}}=(N_1D_{1\text{гр}}+N_2D_{2\text{гр}})/n=(10\cdot 0{,}6+5\cdot 6)/15=12/5.$$

Зная групповые средние и общую среднюю, можно найти дисперсию групповых средних относительно общей средней.

Межгрупповой дисперсией называют дисперсию групповых средних относительно общей средней:

$$D_{\text{межгр}} = (\sum N_j (\overline{x}_j - \overline{x})^2)/n,$$

где $\overline{x}_j$ — групповая средняя группы j; N_j — объем группы j; $\overline{x}$ — общая средняя; $n = \sum\limits_{j=1}^{k} N_j$ — объем всей совокупности.

Пример 3. Найти межгрупповую дисперсию по данным примера 1.

Решение. Найдем общую среднюю:

$$\overline{x} = \frac{\sum n_i x_i}{\sum n_i} = \frac{1 \cdot 2 + 7 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 8}{15} = \frac{14}{3}.$$

Используя вычисленные выше величины $\overline{x}_1 = 4$, $\overline{x}_2 = 6$, найдем искомую межгрупповую дисперсию:

$$D_{\text{межгр}} = \frac{N_1 (\overline{x}_1 - \overline{x})^2 + N_2 (\overline{x}_2 - \overline{x})^2}{n} =$$

$$= \frac{10 \cdot (4 - 14/3)^2 + 5 \cdot (6 - 14/3)^2}{15} = \frac{8}{9}.$$

Теперь целесообразно ввести специальный термин для дисперсии всей совокупности.

Общей дисперсией называют дисперсию значений признака всей совокупности относительно общей средней:

$$D_{\text{общ}} = (\sum n_i (x_i - \overline{x})^2)/n,$$

где n_i — частота значения x_i; $\overline{x}$ — общая средняя; n — объем всей совокупности.

Пример 4. Найти общую дисперсию по данным примера 1.

Решение. Найдем искомую общую дисперсию, учитывая, что общая средняя равна 14/3:

$$D_{\text{общ}} = \frac{1 \cdot (2 - 14/3)^2 + 7 \cdot (4 - 14/3)^2 + 2 \cdot (5 - 14/3)^2}{15} +$$

$$+ \frac{2 \cdot (3 - 14/3)^2 + 3 \cdot (8 - 14/3)^2}{15} = \frac{148}{45}.$$

Замечание. Найденная общая дисперсия равна сумме внутригрупповой и межгрупповой дисперсий:

$$D_{\text{общ}} = 148/45;$$

$$D_{\text{внгр}} + D_{\text{межгр}} = 12/5 + 8/9 = 148/45.$$

В следующем параграфе будет доказано, что такая закономерность справедлива для любой совокупности.

§ 12. Сложение дисперсий

Теорема. *Если совокупность состоит из нескольких групп, то общая дисперсия равна сумме внутригрупповой и межгрупповой дисперсий:*

$$D_{\text{общ}} = D_{\text{внгр}} + D_{\text{межгр}}.$$

Доказательство. Для упрощения доказательства предположим, что вся совокупность значений количественного признака X разбита на две следующие группы:

Группа	первая	вторая
Значение признака	$x_1\ x_2$	$x_1\ x_2$
Частота	$m_1\ m_2$	$n_1\ n_2$
Объем группы	$N_1 = m_1 + m_2$	$N_2 = n_1 + n_2$
Групповая средняя	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$
Групповая дисперсия	$D_{1\text{гр}}$	$D_{2\text{гр}}$
Объем своей совокупности $n = N_1 + N_2$		

Далее для удобства записи вместо знака суммы $\sum\limits_{i=1}^{2}$ пишется знак $\sum$. Например, $\sum m_i = \sum\limits_{i=1}^{2} m_i = m_1 + m_2 = N_1$.

Следует также иметь в виду, что если под знаком суммы стоит постоянная величина, то ее целесообразно выносить за знак суммы. Например, $\sum m_i (\bar{x}_1 - \bar{x})^2 = (\bar{x}_1 - \bar{x})^2 \sum m_i = (\bar{x}_1 - \bar{x})^2 N_1$.

Найдем общую дисперсию:

$$D_{\text{общ}} = \left(\sum m_i (x_i - \bar{x})^2 + \sum n_i (x_i - \bar{x})^2\right)/n. \qquad (*)$$

Преобразуем первое слагаемое числителя, вычтя и прибавив $\bar{x}_1$:

$$\sum m_i (x_i - \bar{x})^2 = \sum m_i [(x_i - \bar{x}_1) + (\bar{x}_1 - \bar{x})]^2 =$$
$$= \sum m_i (x_i - \bar{x}_1)^2 + 2(\bar{x}_1 - \bar{x}) \sum m_i (x_i - \bar{x}_1) + \sum m_i (\bar{x}_1 - \bar{x})^2.$$

Так как

$$\sum m_i (x_i - \bar{x}_1)^2 = N_1 D_{1\text{гр}}$$

(равенство следует из соотношения $D_{1\text{гр}} = (\sum m_i (x_i - \bar{x}_1)^2)/N_1$) и в силу § 7

$$\sum m_i (x_i - \bar{x}_1) = 0,$$

то первое слагаемое принимает вид

$$\sum m_i (x_i - \overline{x}_1)^2 = N_1 D_{1\text{гр}} + N_1 (\overline{x}_1 - \overline{x})^2. \qquad (**)$$

Аналогично можно представить второе слагаемое числителя (*) (вычтя и прибавив $\overline{x}_2$):

$$\sum n_i (x_i - \overline{x})^2 = N_2 D_{2\text{гр}} + N_2 (\overline{x}_2 - \overline{x})^2. \qquad (***)$$

Подставим (**) и (***) в (*):

$$D_{\text{общ}} = (N_1 D_{1\text{гр}} + N_2 D_{2\text{гр}})/n +$$
$$+ (N_1 (\overline{x}_1 - \overline{x})^2 + N_2 (\overline{x}_2 - \overline{x})^2)/n = D_{\text{внгр}} + D_{\text{межгр}}.$$

Итак,

$$D_{\text{общ}} = D_{\text{внгр}} + D_{\text{межгр}}.$$

Пример, иллюстрирующий доказанную теорему, приведен в предыдущем параграфе.

Замечание. Теорема имеет не только теоретическое, но и важное практическое значение. Например, если в результате наблюдений получены несколько групп значений признака, то для вычисления общей дисперсии можно группы в единую совокупность не объединять. С другой стороны, если совокупность имеет большой объем, то целесообразно разбить ее на несколько групп. В том и другом случаях непосредственное вычисление общей дисперсии заменяется вычислением дисперсий отдельных групп, что облегчает расчеты.

§ 13. Оценка генеральной дисперсии по исправленной выборочной

Пусть из генеральной совокупности в результате n независимых наблюдений над количественным признаком X извлечена повторная выборка объема n:

значения признака	x_1	x_2	...	x_k
частоты	n_1	n_2	...	n_k

При этом $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$.

Требуется по данным выборки оценить (приближенно найти) неизвестную генеральную дисперсию $D_{\text{г}}$. Если в качестве оценки генеральной дисперсии принять выборочную дисперсию, то эта оценка будет приводить к систематическим ошибкам, давая заниженное значение генеральной дисперсии. Объясняется это тем, что, как можно доказать, выборочная дисперсия является смещенной оценкой $D_{\text{г}}$, другими словами, математическое ожидание выборочной дисперсии не равно оцениваемой генеральной дисперсии, а равно

$$M[D_{\text{в}}] = \frac{n-1}{n} D_{\text{г}}.$$

Легко «исправить» выборочную дисперсию так, чтобы ее математическое ожидание было равно генеральной дисперсии. Достаточно для этого умножить $D_{\text{в}}$ на дробь $n/(n-1)$. Сделав это, получим *исправленную дисперсию*, которую обычно обозначают через s^2:

$$s^2 = \frac{n}{n-1} D_{\text{в}} = \frac{n}{n-1} \frac{\sum\limits_{i=1}^{k} n_i (x_i - \overline{x}_{\text{в}})^2}{n} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{k} n_i (x_i - \overline{x}_{\text{в}})^2}{n-1}.$$

Исправленная дисперсия является, конечно, несмещенной оценкой генеральной дисперсии. Действительно,

$$M[s^2] = M\left[\frac{n}{n-1} D_{\text{в}}\right] = \frac{n}{n-1} M[D_{\text{в}}] = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n} D_{\text{г}} = D_{\text{г}}.$$

Итак, в качестве оценки генеральной дисперсии принимают исправленную дисперсию

$$s^2 = \left(\sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - \overline{x}_{\text{в}})^2\right) \Big/ (n-1).$$

Для оценки же среднего квадратического отклонения генеральной совокупности используют «исправленное» среднее квадратическое отклонение, которое равно квадратному корню из исправленной дисперсии:

$$s = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - \overline{x}_{\text{в}})^2\right) \Big/ (n-1)}.$$

Подчеркнем, что s не является несмещенной оценкой; чтобы отразить этот факт, мы написали и будем писать далее так: «исправленное» среднее квадратическое отклонение.

Замечание. Сравнивая формулы

$$D_{\text{в}} \left(\sum n_i (x_i - \overline{x}_{\text{в}})^2\right)/n \quad \text{и} \quad s^2 = \left(\sum n_i (x_i - \overline{x})^2\right)/(n-1),$$

видим, что они отличаются лишь знаменателями. Очевидно, при достаточно больших значениях n объема выборки выборочная и исправленная дисперсии различаются мало. На практике пользуются исправленной дисперсией, если примерно $n < 30$.

§ 14. Точность оценки, доверительная вероятность (надежность). Доверительный интервал

Точечной называют оценку, которая определяется одним числом. Все оценки, рассмотренные выше, — точечные. При выборке малого объема точечная оценка может значительно отличаться от оцениваемого параметра, т. е. приводить к грубым ошибкам. По этой причине при небольшом объеме выборки следует пользоваться интервальными оценками.

Интервальной называют оценку, которая определяется двумя числами — концами интервала. Интервальные оценки позволяют установить точность и надежность оценок (смысл этих понятий выясняется ниже).

Пусть найденная по данным выборки статистическая характеристика Θ^* служит оценкой неизвестного параметра Θ. Будем считать Θ постоянным числом (Θ может быть и случайной величиной). Ясно, что Θ^* тем точнее определяет параметр Θ, чем меньше абсолютная величина разности $|\Theta-\Theta^*|$. Другими словами, если $\delta > 0$ и $|\Theta-\Theta^*| < \delta$, то чем меньше δ, тем оценка точнее. Таким образом, положительное число δ характеризует *точность оценки*.

Однако статистические методы не позволяют категорически утверждать, что оценка Θ^* удовлетворяет неравенству $|\Theta-\Theta^*| < \delta$; можно лишь говорить о вероятности γ, с которой это неравенство осуществляется.

Надежностью (доверительной вероятностью) оценки Θ по Θ^* называют вероятность γ, с которой осуществляется неравенство $|\Theta-\Theta^*| < \delta$. Обычно надежность оценки задается наперед, причем в качестве γ берут число, близкое к единице. Наиболее часто задают надежность, равную 0,95; 0,99 и 0,999.

Пусть вероятность того, что $|\Theta-\Theta^*| < \delta$, равна γ:

$$P[|\Theta-\Theta^*| < \delta]=\gamma.$$

Заменив неравенство $|\Theta-\Theta^*| < \delta$ равносильным ему двойным неравенством $-\delta < \Theta-\Theta^* < \delta$, или $\Theta^*-\delta < \Theta < \Theta^*+\delta$, имеем

$$P[\Theta^*-\delta < \Theta < \Theta^*+\delta]=\gamma.$$

Это соотношение следует понимать так: вероятность того, что интервал $(\Theta^*-\delta, \Theta^*+\delta)$ заключает в себе (покрывает) неизвестный параметр Θ, равна γ.

Доверительным называют интервал $(\Theta^* - \delta,\ \Theta^* + \delta)$, который покрывает неизвестный параметр с заданной надежностью γ.

Замечание. Интервал $(\Theta^* - \delta,\ \Theta^* + \delta)$ имеет случайные концы (их называют доверительными границами). Действительно, в разных выборках получаются различные значения Θ^*. Следовательно, от выборки к выборке будут изменяться и концы доверительного интервала, т. е. доверительные границы сами являются случайными величинами—функциями от $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$.

Так как случайной величиной является не оцениваемый параметр Θ, а доверительный интервал, то более правильно говорить не о вероятности попадания Θ в доверительный интервал, а о вероятности того, что доверительный интервал покроет Θ.

Метод доверительных интервалов разработал американский статистик Ю. Нейман, исходя из идей английского статистика Р. Фишера.

§ 15. Доверительные интервалы для оценки математического ожидания нормального распределения при известном σ

Пусть количественный признак X генеральной совокупности распределен нормально, причем среднее квадратическое отклонение σ этого распределения известно. Требуется оценить неизвестное математическое ожидание a по выборочной средней $\overline{x}$. Поставим своей задачей найти доверительные интервалы, покрывающие параметр a с надежностью γ.

Будем рассматривать выборочную среднюю $\overline{x}$ как случайную величину $\overline{X}$ ($\overline{x}$ изменяется от выборки к выборке) и выборочные значения признака $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$—как одинаково распределенные независимые случайные величины $X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n$ (эти числа также изменяются от выборки к выборке). Другими словами, математическое ожидание каждой из этих величин равно a и среднее квадратическое отклонение—σ.

Примем без доказательства, что если случайная величина X распределена нормально, то выборочная средняя $\overline{X}$, найденная по независимым наблюдениям, также распределена нормально. Параметры распределения $\overline{X}$ таковы (см. гл. VIII, § 9):

$$M(\overline{X}) = a, \quad \sigma(\overline{X}) = \sigma/\sqrt{n}.$$

Потребуем, чтобы выполнялось соотношение

$$P(|\overline{X}-a| < \delta)=\gamma,$$

где γ — заданная надежность.

Пользуясь формулой (см. гл. XII, § 6)

$$P(|X-a| < \delta)=2\Phi(\delta/\sigma),$$

заменив X на $\overline{X}$ и σ на $\sigma(\overline{X})=\sigma/\sqrt{n}$, получим

$$P(|\overline{X}-a| < \delta)=2\Phi(\delta\sqrt{n}/\sigma)=2\Phi(t),$$

где $t=\delta\sqrt{n}/\sigma$.

Найдя из последнего равенства $\delta=t\sigma/\sqrt{n}$, можем написать

$$P(|\overline{X}-a| < t\sigma/\sqrt{n})=2\Phi(t).$$

Приняв во внимание, что вероятность P задана и равна γ, окончательно имеем (чтобы получить рабочую формулу, выборочную среднюю вновь обозначим через $\overline{x}$)

$$P(\overline{x}-t\sigma/\sqrt{n} < a < \overline{x}+t\sigma/\sqrt{n})=2\Phi(t)=\gamma.$$

Смысл полученного соотношения таков: с надежностью γ можно утверждать, что доверительный интервал $(\overline{x}-t\sigma/\sqrt{n}, \overline{x}+t\sigma/\sqrt{n})$ покрывает неизвестный параметр a; точность оценки $\delta=t\sigma/\sqrt{n}$.

Итак, поставленная выше задача полностью решена. Укажем еще, что число t определяется из равенства $2\Phi(t)=\gamma$, или $\Phi(t)=\gamma/2$; по таблице функции Лапласа (см. приложение 2) находят аргумент t, которому соответствует значение функции Лапласа, равное $\gamma/2$.

Замечание 1. Оценку $|\overline{x}-a| < t\sigma/\sqrt{n}$ называют классической. Из формулы $\delta=t\sigma/\sqrt{n}$, определяющей точность классической оценки, можно сделать следующие выводы:

1) при возрастании объема выборки n число δ убывает и, следовательно, точность оценки увеличивается;

2) увеличение надежности оценки $\gamma=2\Phi(t)$ приводит к увеличению t ($\Phi(t)$ — возрастающая функция), следовательно, и к возрастанию δ; другими словами, увеличение надежности классической оценки влечет за собой уменьшение ее точности.

Пример. Случайная величина X имеет нормальное распределение с известным средним квадратическим отклонением $\sigma=3$. Найти доверительные интервалы для оценки неизвестного математического ожидания a по выборочным средним $\overline{x}$, если объем выборки $n=36$ и задана надежность оценки $\gamma=0{,}95$.

Решение. Найдем t. Из соотношения $2\Phi(t)=0{,}95$ получим $\Phi(t)=0{,}475$. По таблице приложения 2 находим $t=1{,}96$.

Найдем точность оценки:

$$\delta=t\sigma/\sqrt{n}=(1{,}96\cdot 3)/\sqrt{36}=0{,}98.$$

Доверительный интервал таков: $(\bar{x}-0{,}98;\ \bar{x}+0{,}98)$. Например, если $\bar{x}=4{,}1$, то доверительный интервал имеет следующие довернтельные границы:

$$\bar{x}-0{,}98=4{,}1-0{,}98=3{,}12;\quad \bar{x}+0{,}98=4{,}1+0{,}98=5{,}08.$$

Таким образом, значения неизвестного параметра a, согласующиеся с данными выборки, удовлетьоряют неравенству $3{,}12 < a < 5{,}08$. Подчеркнем, что было бы ошибочным написать $P(3{,}12 < a < 5{,}08)=0{,}95$. Действительно, так как a — постояиная величина, то либо она заключена в найденном интервале (тогда событие $3{,}12 < a < 5{,}08$ достоверно и его вероятность равна единице), либо в нем не заключена (в этом случае событие $3{,}12 < a < 5{,}08$ невозможно и его вероятиость равна нулю). Другими словами, доверительную вероятность не следует связывать с оценнваемым параметром; она связана лишь с границами доверительного интервала, которые, как уже было указано, изменяются от выборки к выборке.

Поясним смысл, который имеет заданная надежность. Надежность $\gamma=0{,}95$ указывает, что если произведено достаточно большое число выборок, то 95% из них определяет такие доверительные интервалы, в которых параметр действнтельно заключен; лишь в 5% случаев он может выйти за границы доверительного интервала.

Замечание 2. Если требуется оценить математнческое ожидание с наперед заданной точностью δ н надежностью γ, то минимальный объем выборки, который обеспечит эту точность, находят по формуле

$$n=t^2\sigma^2/\delta^2$$

(следствне равенства $\delta=t\sigma/\sqrt{n}$).

§ 16. Доверительные интервалы для оценки математического ожидания нормального распределения при неизвестном σ

Пусть количественный признак X генеральной совокупности распределен нормально, причем среднее квадратическое отклонение σ неизвестно. Требуется оценить неизвестное математическое ожидание a с помощью доверительных интервалов. Разумеется, невозможно воспользоваться результатами предыдущего параграфа, в котором σ предполагалось известным.

Оказывается, что по данным выборки можно построить случайную величину (ее возможные значения будем обозначать через t):

$$T = \frac{\overline{X} - a}{S/\sqrt{n}},$$

которая имеет распределение Стьюдента с $k = n - 1$ степенями свободы (см. пояснение в конце параграфа); здесь $\overline{X}$ — выборочная средняя, S — «исправленное» среднее квадратическое отклонение, n — объем выборки.

Плотность распределения Стьюдента

$$S(t, n) = B_n \left[1 + \frac{t^2}{n-1}\right]^{-n/2},$$

где $B_n = \dfrac{\Gamma(n/2)}{\sqrt{\pi(n-1)}\,\Gamma((n-1)/2)}$.

Мы видим, что распределение Стьюдента определяется параметром n — объемом выборки (или, что то же, числом степеней свободы $k = n - 1$) и не зависит от неизвестных параметров a и σ; эта особенность является его большим достоинством. Поскольку $S(t, n)$ — четная функция от t, вероятность осуществления неравенства $\left|\dfrac{\overline{X} - a}{S/\sqrt{n}}\right| < \gamma$ определяется так (см. гл. § XI, 2, замечание):

$$P\left(\left|\frac{\overline{X}-a}{S/\sqrt{n}}\right| < t_\gamma\right) = 2\int\limits_0^{t_\gamma} S(t, n)\,dt = \gamma.$$

Заменив неравенство в круглых скобках равносильным ему двойным неравенством, получим

$$P(\overline{X} - t_\gamma S/\sqrt{n} < a < \overline{X} + t_\gamma S/\sqrt{n}) = \gamma.$$

Итак, пользуясь распределением Стьюдента, мы нашли доверительный интервал $(\overline{x} - t_\gamma s/\sqrt{n},\ \overline{x} + t_\gamma s/\sqrt{n})$, покрывающий неизвестный параметр a с надежностью γ. Здесь случайные величины $\overline{X}$ и S заменены неслучайными величинами $\overline{x}$ и s, найденными по выборке. По таблице приложения 3 по заданным n и γ можно найти t_γ.

Пример. Количественный признак X генеральной совокупности распределен нормально. По выборке объема $n = 16$ найдены выборочная средняя $\overline{x} = 20{,}2$ и «исправленное» среднее квадратическое отклонение $s = 0{,}8$. Оценить неизвестное математическое ожидание при помощи доверительного интервала с надежностью 0,95.

Решение. Найдем t_γ. Пользуясь таблицей приложения 3, по $\gamma = 0{,}95$ и $n = 16$ находим $t_\gamma = 2{,}13$.

Найдем доверительные границы:

$$\overline{x}-t_\gamma s/\sqrt{n}=20{,}2-2{,}13\cdot 0{,}8/\sqrt{16}=19{,}774.$$

$$\overline{x}+t_\gamma s/\sqrt{n}=20{,}2+2{,}13\ 0{,}8/\sqrt{16}=20{,}626.$$

Итак, с надежностью 0,95 неизвестный параметр a заключен в доверительном интервале $19{,}774 < a < 20{,}626$.

Замечание. Из предельных соотношений

$$\lim_{n\to\infty} B_n=\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\quad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{t^2}{n-1}\right)^{-n/2}=e^{-t^2/2},$$

следует, что при неограниченном возрастании объема выборки n распределение Стьюдента стремится к нормальному. Поэтому практически при $n > 30$ можно вместо распределения Стьюдента пользоваться нормальным распределением.

Однако важно подчеркнуть, что для малых выборок ($n < 30$), в особенности для малых значений n, замена распределения нормальным приводит к грубым ошибкам, а именно к неоправданному сужению доверительного интервала, т. е. к повышению точности оценки. Например, если $n=5$ и $\gamma=0{,}99$, то, пользуясь распределением Стьюдента, найдем $t_\gamma=4{,}6$, а используя функцию Лапласа, найдем $t_\gamma=2{,}58$, т. е. доверительный интервал в последнем случае окажется более узким, чем найденный по распределению Стьюдента.

То обстоятельство, что распределение Стьюдента при малой выборке дает не вполне определенные результаты (широкий доверительный интервал), вовсе не свидетельствует о слабости метода Стьюдента, а объясняется тем, что малая выборка, разумеется, содержит малую информацию об интересующем нас признаке.

Пояснение. Ранее было указано (см. гл. XII, § 14), что если Z—нормальная величина, причем $M(Z)=0$, $\sigma(Z)=1$, а V—независимая от Z величина, распределенная по закону χ^2 с k степенями свободы, то величина

$$T=\frac{Z}{\sqrt{V/k}} \qquad (*)$$

распределена по закону Стьюдента с k степенями свободы.

Пусть количественный признак X генеральной совокупности распределен нормально, причем $M(X)=a$, $\sigma(X)=\sigma$. Если из этой совокупности извлекать выборки объема n и по ним находить выборочные средние, то можно доказать, что выборочная средняя распределена нормально, причем (см. гл. VIII, § 9)

$$M(\overline{X}_в)=a,\quad \sigma(\overline{X}_в)=\sigma/\sqrt{n}.$$

Тогда случайная величина

$$Z=\frac{\overline{X}_{\text{в}}-a}{\sigma/\sqrt{n}} \qquad (**)$$

также имеет нормальное распределение как линейная функция нормального аргумента $\overline{X}_{\text{в}}$ (см. гл. XII, § 10, замечание), причем $M(Z)=0$, $\sigma(Z)=1$.

Доказано, что случайные величины Z и

$$V=((n-1)S^2)/\sigma^2 \qquad (***)$$

независимы (S^2 — исправленная выборочная дисперсия) и что величина V распределена по закону χ^2 с $k=n-1$ степенями свободы.

Следовательно, подставив (**) и (***) в (*), получим величину

$$T=((\overline{x}_{\text{в}}-a)\sqrt{n})/S,$$

которая распределена по закону Стьюдента с $k=n-1$ степенями свободы.

§ 17. Оценка истинного значения измеряемой величины

Пусть производится n независимых равноточных измерений некоторой физической величины, истинное значение a которой неизвестно. Будем рассматривать результаты отдельных измерений как случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Эти величины независимы (измерения независимы), имеют одно и то же математическое ожидание a (истинное значение измеряемой величины), одинаковые дисперсии σ^2 (измерения равноточны) и распределены нормально (такое допущение подтверждается опытом). Таким образом, все предположения, которые были сделаны при выводе доверительных интервалов в двух предыдущих параграфах, выполняются, и, следовательно, мы вправе использовать полученные в них формулы. Другими словами, истинное значение измеряемой величины можно оценивать по среднему арифметическому результатов отдельных измерений при помощи доверительных интервалов. Поскольку обычно σ неизвестно, следует пользоваться формулами, приведенными в § 16.

Пример. По данным девяти независимых равноточных измерений физической величины найдены среднее арифметической результатов отдельных измерений $\overline{x}=42{,}319$ н «исправленное» среднее квадратическое отклонение $s=5{,}0$. Требуется оценить истинное значение измеряемой величины с надежностью $\gamma=0{,}95$.

Решение. Истинное значение измеряемой величины равно ее математическому ожиданию. Поэтому задача сводится к оценке математического ожидания (при неизвестном σ) при помощи доверительного нитервала

$$\overline{x}-t_\gamma S/\sqrt{n} < a < \overline{x}+t_\gamma S/\sqrt{n},$$

покрывающего a с заданной надежностью $\gamma=0{,}95$.

Пользуясь таблицей приложения 3, по $\gamma=0{,}95$ и $n=9$ находим $t_\gamma=2{,}31$.

Найдем точность оценки:

$$t_\gamma(s/\sqrt{n})=2{,}31\cdot(5/\sqrt{9})=3{,}85.$$

Найдем доверительные границы:

$$\overline{x}-t_\gamma s/\sqrt{n}=42{,}319-3{,}85=38{,}469;$$

$$\overline{x}+t_\gamma s/\sqrt{n}=42{,}319+3{,}85=46{,}169.$$

Итак, с надежностью 0,95 истинное значение нзмеряемой величины заключено в доверительном интервале

$$38{,}469 < a < 46{,}169.$$

§ 18. Доверительные интервалы для оценки среднего квадратического отклонения σ нормального распределения

Пусть количественный признак X генеральной совокупности распределен нормально. Требуется оценить неизвестное генеральное среднее квадратическое отклонение σ по «исправленному» выборочному среднему квадратическому отклонению s. Поставим перед собой задачу найти доверительные интервалы, покрывающие параметр σ с заданной надежностью γ.

Потребуем, чтобы выполнялось соотношение

$$P(|\sigma-s|<\delta)=\gamma, \text{ или } P(s-\delta<\sigma<s+\delta)=\gamma.$$

Для того чтобы можно было пользоваться готовой таблицей, преобразуем двойное неравенство

$$s-\delta<\sigma<s+\delta$$

в равносильное неравенство

$$s(1-\delta/s)<\sigma<s(1+\delta/s).$$

Положив $\delta/s=q$, получим

$$s(1-q)<\sigma<s(1+q). \qquad (*)$$

Остается найти q. С этой целью введем в рассмотрение случайную величину «хи»:

$$\chi = (S/\sigma)\sqrt{n-1},$$

где n — объем выборки.

Как было указано [см. § 16, пояснение, соотношение (***)], величина $S^2(n-1)/\sigma^2$ распределена по закону χ^2 с $n-1$ степенями свободы, поэтому квадратный корень из нее обозначают через χ.

Плотность распределения χ имеет вид (см. пояснение в конце параграфа)

$$R(\chi,\ n) = \frac{\chi^{n-2} e^{-\chi^2/2}}{2^{(n-3)/2}\,\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}. \qquad (**)$$

Это распределение не зависит от оцениваемого параметра σ, а зависит лишь от объема выборки n.

Преобразуем неравенство (*) так, чтобы оно приняло вид $\chi_1 < \chi < \chi_2$. Вероятность этого неравенства (см. гл. XI, § 2) равна заданной вероятности γ, т. е.

$$\int\limits_{\chi_1}^{\chi_2} R(\chi,\ n)\,d\chi = \gamma.$$

Предполагая, что $q < 1$, перепишем неравенство (*) так:

$$\frac{1}{S(1+q)} < \frac{1}{\sigma} < \frac{1}{S(1-q)}.$$

Умножив все члены неравенства на $S\sqrt{n-1}$, получим

$$\frac{\sqrt{n-1}}{1+q} < \frac{S\sqrt{n-1}}{\sigma} < \frac{\sqrt{n-1}}{1-q},$$

или

$$\frac{\sqrt{n-1}}{1+q} < \chi < \frac{\sqrt{n-1}}{1-q}.$$

Вероятность того, что это неравенство, а следовательно, и равносильное ему неравенство (*) будет осуществлено, равна

$$\int\limits_{\sqrt{n-1}/(1+q)}^{\sqrt{n-1}/(1-q)} R(\chi,\ n)\,d\chi = \gamma.$$

Из этого уравнения можно по заданным n и γ найти q. Практически для отыскания q пользуются таблицей приложения 4.

Вычислив по выборке s и найдя по таблице q, получим искомый доверительный интервал (*), покрывающий σ с заданной надежностью γ, т. е. интервал

$$s(1-q) < \sigma < s(1+q).$$

Пример 1. Количественный признак X генеральной совокупности распределен нормально. По выборке объема $n=25$ найдено «исправленное» среднее квадратическое отклонение $s=0,8$. Найти доверительный интервал, покрывающий генеральное среднее квадратическое отклонение σ с надежностью 0,95.

Решение. По таблице приложения 4 по данным $\gamma=0,95$ и $n=25$ найдем $q=0,32$.

Искомый доверительный интервал (*) таков:

$$0,8(1-0,32) < \sigma < 0,8(1+0,32), \quad \text{или} \quad 0,544 < \sigma < 1,056.$$

Замечание. Выше предполагалось, что $q < 1$. Если $q > 1$, то неравенство (*) примет вид (учитывая, что $\sigma > 0$)

$$0 < \sigma < s(1+q),$$

или (после преобразований, аналогичных случаю $q < 1$)

$$\sqrt{n-1}/(1+q) < \chi < \infty.$$

Следовательно, значения $q > 1$ могут быть найдены из уравнения

$$\int\limits_{\sqrt{n-1}/(1+q)}^{\infty} R(\chi, n)\, d\chi = \gamma.$$

Практически для отыскания значений $q > 1$, соответствующих различным заданным n и γ, пользуются таблицей приложения 4.

Пример 2. Количественный признак X генеральной совокупности распределен нормально. По выборке объема $n=10$ найдено «исправленное» среднее квадратическое отклонение $s=0,16$. Найти доверительный интервал, покрывающий генеральное среднее квадратическое отклонение σ с надежностью 0,999.

Решение. По таблице приложения 4 по данным $\gamma=0,999$ и $n=10$ найдем $q=1,80$ ($q > 1$). Искомый доверительный интервал таков:

$$0 < \sigma < 0,16(1+1,80), \quad \text{или} \quad 0 < \sigma < 0,448.$$

Пояснение. Покажем, что плотность распределения χ имеет вид (**).

Если случайная величина X распределена по закону χ^2 с $k=n-1$ степенями свободы, то ее плотность распределения (см. гл. XII, § 13)

$$f(x) = \frac{x^{(k/2)-1}\, e^{-x/2}}{2^{k/2}\, \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)},$$

или после подстановки $k=n-1$

$$f(x)=\frac{x^{(n-3)/2}\,e^{-x/2}}{2^{(n-1)/2}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}.$$

Воспользуемся формулой (см. гл. XII, § 10)

$$g(y)=f[\psi(y)]\,|\psi'(y)|,$$

чтобы найти распределение функции $\chi=\varphi(X)=\sqrt{X}$ $(\chi>0)$. Отсюда обратная функция

$$x=\psi(\chi)=\chi^2 \quad \text{и} \quad \psi'(\chi)=2\chi.$$

Так как $\chi>0$, то $|\psi'(\chi)|=2\chi$, следовательно,

$$g(\chi)=f[\psi(\chi)]\cdot|\psi'(\chi)|=\frac{(\chi^2)^{(n-3)/2}\,e^{-\chi^2/2}}{2^{(n-1)/2}\,\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\cdot 2\chi.$$

Выполнив элементарные преобразования и изменив обозначения ($g(\chi)$, заменим на $R(\chi,\ n)$), окончательно получим

$$R(\chi,\ n)=\frac{\chi^{n-2}\,e^{-\chi^2/2}}{2^{(n-3)/2}\,\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}.$$

§ 19. Оценка точности измерений

В теории ошибок принято точность измерений (точность прибора) характеризовать с помощью среднего квадратического отклонения σ случайных ошибок измерений. Для оценки σ используют «исправленное» среднее квадратическое отклонение s. Поскольку обычно результаты измерений взаимно независимы, имеют одно и то же математическое ожидание (истинное значение измеряемой величины) и одинаковую дисперсию (в случае равноточных измерений), то теория, изложенная в предыдущем параграфе, применима для оценки точности измерений.

Пример. По 15 равноточным измерениям найдено «исправленное» среднее квадратическое отклонение $s=0{,}12$. Найти точность измерений с надежностью 0,99.

Решение. Точность измерений характеризуется средним квадратическим отклонением σ случайных ошибок, поэтому задача сводится к отысканию доверительного интервала (*), покрывающего σ с заданной надежностью 0,99 (см. § 18).

По таблице приложения 4 по $\gamma = 0,99$ и $n = 15$ найдем $q = 0,73$. Искомый доверительный интервал

$$0,12(1-0,73) < \sigma < 0,12(1+0,73), \quad \text{или} \quad 0,03 < \sigma < 0,21.$$

§ 20. Оценка вероятности (биномиального распределения) по относительной частоте

Пусть производятся независимые испытания с неизвестной вероятностью p появления события A в каждом испытании. Требуется оценить неизвестную вероятность p по относительной частоте, т. е. надо найти ее точечную и интервальную оценки.

А. Точечная оценка. В качестве точечной оценки неизвестной вероятности p принимают относительную частоту

$$W = m/n,$$

где m — число появлений события A; n — число испытаний *[1].

Эта оценка несмещенная, т. е. ее математическое ожидание равно оцениваемой вероятности. Действительно, учитывая, что $M(m) = np$ (см. гл. VII, § 5), получим

$$M(W) = M[m/n] = M(m)/n = np/n = p.$$

Найдем дисперсию оценки, приняв во внимание, что $D(m) = npq$ (см. гл. VII, § 6):

$$D(W) = D[m/n] = D(m)/n^2 = npq/n^2 = pq/n.$$

Отсюда среднее квадратическое отклонение

$$\sigma_W = \sqrt{D(W)} = \sqrt{pq/n}.$$

Б. Интервальная оценка. Найдем доверительный интервал для оценки вероятности по относительной частоте. Напомним, что ранее (см. гл. XII, § 6) была выведена формула, позволяющая найти вероятность того, что абсолютная величина отклонения не превысит положительного числа δ:

$$P(|X-a| < \delta) = 2\Phi(\delta/\sigma), \qquad (*)$$

---

[1] Напомним, что случайные величины обозначают прописными, а их возможные значения — строчными буквами. В различных опытах число m появлений события будет изменяться и поэтому является случайной величиной M. Однако, поскольку через M уже обозначено математическое ожидание, мы сохраним для случайного числа появлений события обозначение m.

где X — нормальная случайная величина с математическим ожиданием $M(X) = a$.

Если n достаточно велико и вероятность p не очень близка к нулю и к единице, то можно считать, что относительная частота распределена приближенно нормально, причем, как показано в п. А, $M(W) = p$.

Таким образом, заменив в соотношении (*) случайную величину X и ее математическое ожидание a соответственно случайной величиной W и ее математическим ожиданием p, получим приближенное (так как относительная частота распределена приближенно нормально) равенство

$$P(|W - p| < \delta) = 2\Phi(\delta/\sigma_W). \qquad (**)$$

Приступим к построению доверительного интервала (p_1, p_2), который с надежностью γ покрывает оцениваемый параметр p, для чего используем рассуждения, с помощью которых был построен доверительный интервал в гл. XVI, § 15. Потребуем, чтобы с надежностью γ выполнялось соотношение (**):

$$P(|W - p| < \delta) = 2\Phi(\delta/\sigma) = \gamma.$$

Заменив σ_W через $\sqrt{pq/n}$ (см. п. А), получим

$$P(|W - p| < \delta) = 2\Phi(\delta\sqrt{n}/\sqrt{pq}) = 2\Phi(t) = \gamma,$$

где $t = \delta\sqrt{n}/\sqrt{pq}$.

Отсюда

$$\delta = t\sqrt{pq/n}$$

и, следовательно,

$$P\left(|W - p| < t\sqrt{pq/n}\right) = 2\Phi(t) = \gamma.$$

Таким образом, с надежностью γ выполняется неравенство (чтобы получить рабочую формулу, случайную величину W заменим неслучайной наблюдаемой относительной частотой w и подставим $1 - p$ вместо q):

$$|w - p| < t\sqrt{p(1-p)/n}.$$

Учитывая, что вероятность p неизвестна, решим это неравенство относительно p. Допустим, что $w > p$. Тогда

$$w - p < t\sqrt{p(1-p)/n}.$$

Обе части неравенства положительны; возведя их в квадрат, получим равносильное квадратное неравенство относительно p:

$$[(t^2/n)+1)]\,p^2-2\,[w+(t^2/n)]\,p+w^2<0.$$

Дискриминант трехчлена положительный, поэтому его корни действительные и различные:

меньший корень

$$p_1=\frac{n}{t^2+n}\left[w+\frac{t^2}{2n}-t\sqrt{\frac{w\,(1-w)}{n}+\left(\frac{t}{2n}\right)^2}\right], \qquad (***)$$

больший корень

$$p_2=\frac{n}{t^2+n}\left[w+\frac{t^2}{2n}+t\sqrt{\frac{w\,(1-w)}{n}+\left(\frac{t}{2n}\right)^2}\right]. \qquad (****)$$

Итак, искомый доверительный интервал $p_1<p<p_2$, где p_1 и p_2 находят по формулам (***) и (****).

При выводе мы предположили, что $w>p$; тот же результат получим при $w<p$.

Пример. Производят независимые испытания с одинаковой, но неизвестной вероятностью p появления события A в каждом испытании. Найти доверительный интервал для оценки вероятности p с надежностью 0,95, если в 80 испытаниях событие A появилось 16 раз.

Решение. По условию, $n=80$, $m=16$, $\gamma=0{,}95$. Найдем относительную частоту появления события A:

$$w=m/n=16/80=0{,}2.$$

Найдем t из соотношения $\Phi\,(t)=\gamma/2=0{,}95/2=0{,}475$; по таблице функции Лапласа (см. приложение 2) находим $t=1{,}96$.

Подставив $n=80$, $w=0{,}2$, $t=1{,}96$ в формулы (***) и (****), получим соответственно $p_1=0{,}128$, $p_2=0{,}299$.

Итак, искомый доверительный интервал $0{,}128<p<0{,}299$.

Замечание 1. При больших значениях n (порядка сотен) слагаемые $t^2/(2n)$ и $(t/(2n))^2$ очень малы и множитель $n/(t^2+n)\simeq 1$, поэтому можно принять в качестве приближенных границ доверительного интервала

$$p_1=w-t\sqrt{w\,(1-w)/n} \quad \text{и} \quad p_2=w+t\sqrt{w\,(1-w)/n}.$$

Замечание 2. Чтобы избежать расчетов концов доверительных интервалов, можно использовать табл. 28 книги Янко Я. Математико-статистические таблицы. М., Госстатиздат, 1961.

§ 21. Метод моментов для точечной оценки параметров распределения

Можно доказать, что начальные и центральные эмпирические моменты являются состоятельными оценками соответственно начальных и центральных теоретических моментов того же порядка. На этом основан метод моментов, предложенный К. Пирсоном. Достоинство метода — сравнительная его простота. Метод моментов точечной оценки неизвестных параметров заданного распределения состоит в приравнивании теоретических моментов рассматриваемого распределения соответствующим эмпирическим моментам того же порядка.

А. Оценка одного параметра. Пусть задан вид плотности распределения $f(x, \theta)$, определяемой одним неизвестным параметром θ. Требуется найти точечную оценку параметра θ.

Для оценки одного параметра достаточно иметь одно уравнение относительно этого параметра. Следуя методу моментов, приравняем, например, начальный теоретический момент первого порядка начальному эмпирическому моменту первого порядка: $\nu_1 = M_1$. Учитывая, что $\nu_1 = M(X)$ (см. гл. VIII, § 10), $M_1 = \bar{x}_в$ (см. гл. XVII, § 2), получим

$$M(X) = \bar{x}_в. \qquad (*)$$

Математическое ожидание $M(X)$, как видно из соотношения

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x;\ \theta)\,dx = \varphi(\theta),$$

есть функция от θ, поэтому (*) можно рассматривать как уравнение с одним неизвестным θ. Решив это уравнение относительно параметра θ, тем самым найдем его точечную оценку θ^*, которая является функцией от выборочной средней, следовательно, и от вариант выборки:

$$\theta^* = \psi(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Пример 1. Найти методом моментов по выборке $x_1, x_2, \ldots, x_n$ точечную оценку неизвестного параметра λ показательного распределения, плотность распределения которого $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ $(x \geqslant 0)$.

Решение. Приравняем начальный теоретический момент первого порядка начальному эмпирическому моменту первого порядка: $\nu_1 = M_1$. Учитывая, что $\nu_1 = M(X)$, $M_1 = \bar{x}_в$, получим

$$M(X) = \bar{x}_в.$$

Приняв во внимание, что математическое ожидание показательного распределения равно $1/\lambda$ (см. гл. XIII, § 3), имеем

$$1/\lambda = \bar{x}_в.$$

Отсюда

$$\lambda = 1/\overline{x}_в.$$

Итак, искомая точечная оценка параметра λ показательного распределения равна величине, обратной выборочной средней:

$$\lambda^* = 1/\overline{x}_в.$$

Б. Оценка двух параметров. Пусть задан вид плотности распределения $f(x;\ \theta_1,\ \theta_2)$, определяемой неизвестными параметрами θ_1 и θ_2. Для отыскания двух параметров необходимы два уравнения относительно этих параметров. Следуя методу моментов, приравняем, например, начальный теоретический момент первого порядка начальному эмпирическому моменту первого порядка и центральный теоретический момент второго порядка центральному эмпирическому моменту второго порядка:

$$\nu_1 = M_1, \quad \mu_2 = m_2.$$

Учитывая, что $\nu_1 = M(X)$, $\mu_2 = D(X)$ (см. гл. VIII, § 10), $M_1 = \overline{x}_в$, $m_2 = D_в$ (см. гл. XVII, § 2), получим

$$\left.\begin{aligned} M(X) &= \overline{x}_в, \\ D(X) &= D_в. \end{aligned}\right\} \qquad (**)$$

Математическое ожидание и дисперсия есть функции от θ_1 и θ_2, поэтому (**) можно рассматривать как систему двух уравнений с двумя неизвестными θ_1 и θ_2. Решив эту систему относительно неизвестных параметров, тем самым получим их точечные оценки θ_1^* и θ_2^*. Эти оценки являются функциями от вариант выборки:

$$\theta_1^* = \psi_1(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n),$$
$$\theta_2^* = \psi_2(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n).$$

Пример 2. Найти методом моментов по выборке $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ точечные оценки неизвестных параметров a и σ нормального распределения

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-(x-a)^2/(2\sigma^2)}.$$

Решение. Приравняем начальные теоретические и эмпирические моменты первого порядка, а также центральные и эмпирические моменты второго порядка:

$$\nu_1 = M_1, \qquad \mu_2 = m_2.$$

Учитывая, что $\nu_1 = M(X)$, $\mu_2 = D(X)$, $M_1 = \overline{x}_в$, $m_2 = D_в$, получим

$$M(X) = \overline{x}_в, \quad D(X) = D_в.$$

Приняв во внимание, что математическое ожидание нормального распределения равно параметру a, дисперсия равна σ^2 (см. гл. XII, § 2), имеем:

$$a=\overline{x}_в, \qquad \sigma^2=D_в.$$

Итак, искомые точечные оценки параметров нормального распределения:

$$a^*=\overline{x}_в, \qquad \sigma^*=\sqrt{D_в}.$$

Замечание 1. Для оценок неизвестных параметров можно приравнивать не только сами моменты, но и функции от моментов. В частности, этим путем получают состоятельные оценки характеристик распределений, которые являются функциями теоретических моментов. Например, асимметрия теоретического распределения (см. гл. XII, § 9)

$$A_S=\mu_3/\sigma^3=\mu_3/(\sqrt{\mu_2})^3$$

есть функция от центральных моментов второго и третьего порядков. Заменив эти теоретические моменты соответствующими эмпирическими моментами, получим точечную оценку асимметрии

$$A_S^*=m_3/(\sqrt{m_2})^3.$$

Замечание 2. Учитывая, что $\sqrt{m_2}=\sqrt{D_в}=\sigma_в$, последнюю формулу можно записать в виде

$$A_S^*=m_3/\sigma_в^3.$$

Далее эта оценка будет принята в качестве определения асимметрии эмпирического распределения (см. гл. XVII, § 9).

§ 22. Метод наибольшего правдоподобия

Кроме метода моментов, который изложен в предыдущем параграфе, существуют и другие методы точечной оценки неизвестных параметров распределения. К ним относится метод наибольшего правдоподобия, предложенный Р. Фишером.

А. Дискретные случайные величины. Пусть X — дискретная случайная величина, которая в результате n испытаний приняла значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Допустим, что вид закона распределения величины X задан, но неизвестен параметр θ, которым определяется этот закон. Требуется найти его точечную оценку.

Обозначим вероятность того, что в результате испытания величина X примет значение x_i ($i=1, 2, \ldots, n$), через $p(x_i; \theta)$.

Функцией правдоподобия дискретной случайной величины X называют функцию аргумента θ:

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta)=p(x_1; \theta)\,p(x_2; \theta) \ldots p(x_n; \theta),$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — фиксированные числа.

В качестве точечной оценки параметра θ принимают такое его значение $\theta^* = \theta^*(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, при котором функция правдоподобия достигает максимума. Оценку θ^* называют *оценкой наибольшего правдоподобия.*

Функции L и $\ln L$ достигают максимума при одном и том же значении θ, поэтому вместо отыскания максимума функции L ищут (что удобнее) максимум функции $\ln L$.

Логарифмической функцией правдоподобия называют функцию $\ln L$. Как известно, точку максимума функции $\ln L$ аргумента θ можно искать, например, так:

1) найти производную $\frac{d \ln L}{d\theta}$;

2) приравнять производную нулю и найти критическую точку — корень полученного уравнения (его называют *уравнением правдоподобия*);

3) найти вторую производную $\frac{d^2 \ln L}{d\theta^2}$; если вторая производная при $\theta = \theta^*$ отрицательна, то θ^* — точка максимума.

Найденную точку максимума θ^* принимают в качестве оценки наибольшего правдоподобия параметра θ.

Метод наибольшего правдоподобия имеет ряд достоинств: оценки наибольшего правдоподобия, вообще говоря, состоятельны (но они могут быть смещенными), распределены асимптотически нормально (при больших значениях n приближенно нормальны) и имеют наименьшую дисперсию по сравнению с другими асимптотически нормальными оценками; если для оцениваемого параметра θ существует эффективная оценка θ^*, то уравнение правдоподобия имеет единственное решение θ^*; этот метод наиболее полно использует данные выборки об оцениваемом параметре, поэтому он особенно полезен в случае малых выборок.

Недостаток метода состоит в том, что он часто требует сложных вычислений.

Замечание 1. Функция правдоподобия — функция от аргумента θ; оценка наибольшего правдоподобия — функция от независимых аргументов $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Замечание 2. Оценка наибольшего правдоподобия не всегда совпадает с оценкой, найденной методом моментов.

Пример 1. Найти методом наибольшего правдоподобия оценку параметра λ распределения Пуассона

$$P_m(X = x_i) = \frac{\lambda^{x_i} e^{-\lambda}}{x_i!},$$

где m — число произведенных испытаний, x_i — число появлений события в i-м ($i = 1, 2, \ldots, n$) опыте (опыт состоит из m испытаний).

Решение. Составим функцию правдоподобия, учитывая, что $\theta = \lambda$:

$$L = p(x_1;\ \lambda)\, p(x_2;\ \lambda)\ \ldots\ p(x_n;\ \lambda) =$$

$$= \frac{\lambda^{x_1}\ e^{-\lambda}}{x_1!} \cdot \frac{\lambda^{x_2}\ e^{-\lambda}}{x_2!} \ \cdots\ \frac{\lambda^{x_n} \cdot e^{-\lambda}}{x_n!} = \frac{\lambda^{\sum x_i} \cdot e^{-n\lambda}}{x_1!\, x_2!\ .\ .\ x_n!}\ .$$

Найдем логарифмическую функцию правдоподобия:

$$\ln L = \left(\sum x_i\right) \ln \lambda - n\lambda - \ln (x_1!\, x_2!\ \ldots\ x_n!).$$

Найдем первую производную по λ:

$$\frac{d \ln L}{d\lambda} = \frac{\sum x_i}{\lambda} - n.$$

Напишем уравнение правдоподобия, для чего приравняем первую производную нулю:

$$\left(\sum x_i / \lambda\right) - n = 0.$$

Найдем критическую точку, для чего решим полученное уравнение относительно λ:

$$\lambda = \sum x_i / n = \overline{x}_в .$$

Найдем вторую производную по λ:

$$\frac{d^2 \ln L}{d\lambda^2} = -\frac{\sum x_i}{\lambda^2}\ .$$

Легко видеть, что при $\lambda = \overline{x}_в$ вторая производная отрицательна; следовательно, $\lambda = \overline{x}_в$ — точка максимума и, значит, в качестве оценки наибольшего правдоподобия параметра λ распределения Пуассона надо принять выборочную среднюю $\lambda^* = \overline{x}_в$.

Пример 2. Найти методом наибольшего правдоподобия оценку параметра p биномиального распределения

$$P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k},$$

если в n_1 независимых испытаниях событие A появилось $x_1 = m_1$ раз и в n_2 независимых испытаниях событие A появилось $x_2 = m_2$ раз.

Решение. Составим функцию правдоподобия, учитывая, что $\theta = p$:

$$L = P_{n_1}(m_1)\, P_{n_2}(m_2) = C_{n_1}^{m_1} C_{n_2}^{m_2} p^{m_1+m_2} (1-p)^{[(n_1+n_2)-(m_1+m_2)]}.$$

Найдем логарифмическую функцию правдоподобия:

$$\ln L = \ln \left(C_{n_1}^{m_1} C_{n_2}^{m_2}\right) + (m_1 + m_2) \ln p + [(n_1 + n_2) - (m_1 + m_2)] \ln (1 - p).$$

Найдем первую производную по p:

$$\frac{d \ln L}{dp} = \frac{m_1 + m_2}{p} - \frac{(n_1 + n_2) - (m_1 + m_2)}{1 - p}\ .$$

Напишем уравнение правдоподобия, для чего приравняем первую производную нулю:

$$\frac{m_1 + m_2}{p} - \frac{(n_1 + n_2) - (m_1 + m_2)}{1 - p} = 0.$$

Найдем критическую точку, для чего решим полученное уравнение относительно p:

$$p=(m_1+m_2)/(n_1+n_2).$$

Найдем вторую производную по p:

$$\frac{d^2\ln L}{dp^2}=-\frac{m_1+m_2}{p^2}+\frac{(n_1+n_2)-(m_1+m_2)}{(1-p)^2}.$$

Легко убедиться, что при $p=(m_1+m_2)/(n_1+n_2)$ вторая производная отрицательна; следовательно, $p=(m_1+m_2)/(n_1+n_2)$ — точка максимума и, значит, ее надо принять в качестве оценки наибольшего правдоподобия неизвестной вероятности p биномиального распределения:

$$p^*=(m_1+m_2)/(n_1+n_2).$$

Б. Непрерывные случайные величины. Пусть X — непрерывная случайная величина, которая в результате n испытаний приняла значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Допустим, что вид плотности распределения $f(x)$ задан, но не известен параметр θ, которым определяется эта функция.

Функцией правдоподобия непрерывной случайной величины X называют функцию аргумента θ:

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta)=f(x_1; \theta)\,f(x_2; \theta)\ldots f(x_n; \theta),$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — фиксированные числа.

Оценку наибольшего правдоподобия неизвестного параметра распределения непрерывной случайной величины ищут так же, как в случае дискретной величины.

Пример 3. Найти методом наибольшего правдоподобия оценку параметра λ показательного распределения

$$f(x)=\lambda e^{-\lambda x} \qquad (0<x<\infty),$$

если в результате n испытаний случайная величина X, распределенная по показательному закону, приняла значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Решение. Составим функцию правдоподобия, учитывая, что $\theta=\lambda$:

$$L=f(x_1; \lambda)\,f(x_2; \lambda)\ldots f(x_n; \lambda)=(\lambda e^{-\lambda x_1})(\lambda e^{-\lambda x_2})\ldots(\lambda e^{-\lambda x_1}).$$

Отсюда

$$L=\lambda^n e^{-\lambda\sum x_i}.$$

Найдем логарифмическую функцию правдоподобия:

$$\ln L=n\ln\lambda-\lambda\sum x_i.$$

Найдем первую производную по λ:

$$\frac{d\ln L}{d\lambda}=\frac{n}{\lambda}-\sum x_i.$$

Напишем уравнение правдоподобия, для чего приравняем первую производную нулю:

$$(n/\lambda)-\sum x_i=0.$$

Найдем критическую точку, для чего решим полученное уравнение относительно λ:

$$\lambda=n/\sum x_i=1/\left(\sum x_i/n\right)=1/\overline{x}_{\text{в}}.$$

Найдем вторую производную по λ:

$$\frac{d^2 \ln L}{d\lambda^2}=-\frac{n}{\lambda^2}.$$

Легко видеть, что при $\lambda=1/\overline{x}_{\text{в}}$ вторая производная отрицательна; следовательно, $\lambda=1/\overline{x}_{\text{в}}$ — точка максимума и, значит, в качестве оценки наибольшего правдоподобия параметра λ показательного распределения надо принять величину, обратную выборочной средней: $\lambda^*=1/\overline{x}_{\text{в}}$.

Замечание. Если плотность распределения $f(x)$ непрерывной случайной величины X определяется двумя неизвестными параметрами θ_1 и θ_2, то функция правдоподобия является функцией двух независимых аргументов θ_1 и θ_2:

$$L=f(x_1;\ \theta_1,\ \theta_2)\,f(x_2;\ \theta_1,\ \theta_2)\ \ldots\ f(x_n;\ \theta_1,\ \theta_2),$$

где $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ — наблюдавшиеся значения X. Далее находят логарифмическую функцию правдоподобия и для отыскания ее максимума составляют и решают систему

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \ln L}{\partial \theta_1}=0, \\ \dfrac{\partial \ln L}{\partial \theta_2}=0. \end{cases}$$

Пример 4. Найти методом наибольшего правдоподобия оценки параметров a и σ нормального распределения

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,e^{-(x-a)^2/2\sigma^2},$$

если в результате n испытаний величина X приняла значения $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$.

Решение. Составим функцию правдоподобия, учитывая, что $\theta_1=a$ и $\theta_2=\sigma$:

$$L=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,e^{-(x_1-a)^2/2\sigma^2}\cdot\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,e^{-(x_2-a)^2/2\sigma^2}\ldots\times$$
$$\ldots\times\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,e^{-(x_n-a)^2/2\sigma^2}$$

Отсюда

$$L=\frac{1}{\sigma^n\,(\sqrt{2\pi})^n}\,e^{-\left(\sum(x_i-a)^2/2\sigma^2\right.}$$

Найдем логарифмическую функцию правдоподобия:

$$\ln L = -n \ln \sigma + \ln \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} - \frac{\sum (x_i - a)^2}{2\sigma^2}.$$

Найдем частные производные по a и по σ:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial a} = \frac{\sum x_i - na}{\sigma^2}; \quad \frac{\partial \ln L}{\partial \sigma} = -\frac{n}{\sigma} + \frac{\sum (x_i - a)^2}{\sigma^3}.$$

Приравняв частные производные нулю и решив полученную систему двух уравнений относительно a и σ^2, получим:

$$a = \sum x_i / n = \overline{x}_в; \quad \sigma^2 = \left(\sum (x_i - \overline{x}_в)^2\right) / n = D_в.$$

Итак, искомые оценки наибольшего правдоподобия: $a^* = \overline{x}_в$; $\sigma^* = \sqrt{D_в}$. Заметим, что первая оценка несмещенная, а вторая смещенная.

§ 23. Другие характеристики вариационного ряда

Кроме выборочной средней и выборочной дисперсии применяются и другие характеристики вариационного ряда. Укажем главные из них.

Модой M_0 называют варианту, которая имеет наибольшую частоту. Например, для ряда

варианта	1	4	7	9
частота	5	1	20	6

мода равна 7.

Медианой m_e называют варианту, которая делит вариационный ряд на две части, равные по числу вариант. Если число вариант нечетно, т. е. $n = 2k + 1$, то $m_e = x_{k+1}$; при четном $n = 2k$ медиана

$$m_e = (x_k + x_{k+1})/2.$$

Например, для ряда 2 3 5 6 7 медиана равна 5; для ряда 2 3 5 6 7 9 медиана равна $(5+6)/2 = 5{,}5$.

Размахом варьирования R называют разность между наибольшей и наименьшей вариантами:

$$R = x_{\max} - x_{\min}.$$

Например, для ряда 1 3 4 5 6 10 размах равен $10 - 1 = 9$.

Размах является простейшей характеристикой рассеяния вариационного ряда.

Средним абсолютным отклонением θ называют среднее арифметическое абсолютных отклонений:

$$\theta = \left(\sum n_i \,|x_i - \overline{x}_в|\right) / \sum n_i.$$

Например, для ряда

x_i	1	3	6	16
n_i	4	10	5	1

имеем:

$$\bar{x}_в=\frac{4\cdot 1+10\cdot 3+5\cdot 6+1\cdot 16}{4+10+5+1}=\frac{80}{20}=4;$$

$$\theta=\frac{4\cdot|1-4|+10\cdot|3-4|+5\cdot|6-4|+1\cdot|16-4|}{20}=2,2.$$

Среднее абсолютное отклонение служит для характеристики рассеяния вариационного ряда.

Коэффициентом вариации V называют выраженное в процентах отношение выборочного среднего квадратического отклонения к выборочной средней:

$$V=\sigma_в/\bar{x}_в\cdot 100\%.$$

Коэффициент вариации служит для сравнения величин рассеяния по отношению к выборочной средней двух вариационных рядов: тот из рядов имеет большее рассеяние по отношению к выборочной средней, у которого коэффициент вариации больше. Коэффициент вариации — безразмерная величина, поэтому он пригоден для сравнения рассеяний вариационных рядов, варианты которых имеют различную размерность, например если варианты одного ряда выражены в сантиметрах, а другого — в граммах.

Замечание. Выше предполагалось, что вариационный ряд составлен по данным выборки, поэтому все описанные характеристики называют *выборочными*; если вариационный ряд составлен по данным генеральной совокупности, то характеристики называют *генеральными*.

Задачи

1. Найти групповые средние совокупности, состоящей из двух групп:

первая группа . . .	x_i	0,1	0,4	0,6
	n_i	3	2	5
вторая группа . . .	x_i	0,1	0,3	0,4
	n_i	10	4	6

Отв. $\bar{x}_1=0,41$; $\bar{x}_2=0,23$.

2. Найти общую среднюю по данным задачи 1 двумя способами: а) объединить обе группы в одну совокупность; б) использовать найденные в задаче 1 групповые средние.

Отв. $\bar{x}=0,29$.

3. Дано распределение статистической совокупности:

x_i	1	4	5
n_i	6	11	3

Убедиться, что сумма произведений отклонений на соответствующие частоты равна нулю.

4. Дано распределение статистической совокупности:

x_i	4	7	10	15
n_i	10	15	20	5

Найти дисперсию совокупности: а) исходя из определения дисперсии; б) пользуясь формулой $D=\overline{x^2}-[\overline{x}]^2$.

Отв. $D=9,84$.

5. Найти внутригрупповую, межгрупповую и общую дисперсии совокупности, состоящей из трех групп:

первая группа . . .	x_i	1	2	8
	n_i	30	15	5
вторая группа . . .	x_i	1	6	
	n_i	10	15	
третья группа . . .	x_i	3	8	
	n_i	20	5	

Отв. $D_{\text{внгр}}=4,6$; $D_{\text{межгр}}=1$; $D_{\text{общ}}=5,6$.

6. Найти внутригрупповую, межгрупповую и общую дисперсии совокупности, состоящей из двух групп:

первая группа . . .	x_i	2	7
	n_i	6	4
вторая группа . . .	x_i	2	7
	n_i	2	8

Отв. $D_{\text{внгр}}=5$; $D_{\text{межгр}}=1$; $D_{\text{общ}}=6$.

7. Найти выборочную и исправленную дисперсии вариационного ряда, составленного по данным выборкам:

варианта . . .	1	2	5	8	9
частота . . .	3	4	6	4	3

Отв: $\sigma_{\text{в}}^2=8,4$; $s^2=8,84$.

В задачах 8—9 даны среднее квадратическое отклонение, выборочная средняя и объем выборки нормально распределенного признака. Найти доверительные интервалы для оценки неизвестного математического ожидания с заданной надежностью.

8. $\sigma=2$, $\overline{x}_{\text{в}}=5,40$, $n=10$, $\gamma=0,95$.

Отв. $4,16 < a < 6,64$.

9. $\sigma=3$, $\overline{x}_{\text{в}}=20,12$, $n=25$, $\gamma=0,99$.

Отв. $18,57 < a < 21,67$.

10. Найти минимальный объем выборки, при котором с надежностью 0,95 точность оценки математического ожидания нормально распределенного признака по выборочной средней будет равна 0,2, если среднее квадратическое отклонение равно 2.

Указание. См. замечание 2, § 15.

Отв. $n=385$.

В задачах 11—12 даны «исправленное» среднее квадратическое отклонение, выборочная средняя и объем малой выборки нормально распределенного признака. Найти, пользуясь распределением Стьюдента, доверительные интервалы для оценки неизвестного математического ожидания с заданной надежностью.

11. $s=1{,}5$, $\bar{x}_в=16{,}8$, $n=12$, $\gamma=0{,}95$.
Отв. $15{,}85 < a < 17{,}75$.

12. $s=2{,}4$, $\bar{x}_в=14{,}2$, $n=9$, $\gamma=0{,}99$.
Отв. $11{,}512 < a < 16{,}888$.

13. По данным 16 независимых равноточных измерений физической величины найдены $\bar{x}_в=23{,}161$ и $s=0{,}400$. Требуется оценить истинное значение a измеряемой величины и точность измерений σ с надежностью 0,95.

Отв. $22{,}948 < a < 23{,}374$; $0{,}224 < \sigma < 0{,}576$.

14. Найти доверительный интервал для оценки неизвестной вероятности p биномиального распределения с надежностью 0,95, если в 60 испытаниях событие появилось 18 раз.

Отв. $0{,}200 < p < 0{,}424$.

15. Найти методом моментов точечную оценку эксцесса $E_k = m_4/\sigma^4-3$ теоретического распределения.

Отв. $e_k=m_4/\sigma_в^4-3$.

16. Найти методом моментов точечные оценки параметров α и β гамма-распределения

$$f(x)=\frac{1}{\beta^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)}x^{\alpha}e^{-x/\beta}\ (\alpha > -1,\ \beta > 0,\ x \geqslant 0).$$

Указание. Сделать подстановку $y=x/\beta$ и, используя гамма-функцию $\Gamma(n)=\int\limits_0^{\infty} x^{n-1}e^{-x}\,dx$, найти сначала $M(X)=(\alpha+1)\beta$, $D(X)=(\alpha+1)\beta^2$, а затем приравнять $M(X)=\bar{x}_в$, $D(X)=D_в$.

Отв. $\alpha^*=(\bar{x}_в^2/D_в)-1$; $\beta^*=D_в/\bar{x}_в$.

17. Найти методом наибольшего правдоподобия по выборке x_1, x_2, ..., x_n точечную оценку неизвестного параметра β гамма-распределения, если параметр α известен.

Указание. Использовать плотность гамма-распределения, приведенную в задаче 16.

Отв. $\beta^*=\bar{x}_в/(\alpha+1)$.

Глава семнадцатая

МЕТОДЫ РАСЧЕТА СВОДНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ВЫБОРКИ

§ 1. Условные варианты

Предположим, что варианты выборки расположены в возрастающем порядке, т. е. в виде вариационного ряда.

Равноотстоящими называют варианты, которые образуют арифметическую прогрессию с разностью h.

Условными называют варианты, определяемые равенством

$$u_i = (x_i - C)/h,$$

где C — ложный нуль (новое начало отсчета); h — шаг, т. е. разность между любыми двумя соседними первоначальными вариантами (новая единица масштаба).

Упрощенные методы расчета сводных характеристик выборки основаны на замене первоначальных вариант условными.

Покажем, что если вариационный ряд состоит из равноотстоящих вариант с шагом h, то условные варианты есть целые числа. Действительно, выберем в качестве ложного нуля произвольную варианту, например x_m. Тогда

$$u_i = \frac{x_i - x_m}{h} = \frac{x_1 + (i-1)h - [x_1 + (m-1)h]}{h} = i - m.$$

Так как i и m — целые числа, то их разность $i - m = u_i$ — также целое число.

Замечание 1. В качестве ложного нуля можно принять любую варианту. Максимальная простота вычислений достигается, если выбрать в качестве ложного нуля варианту, которая расположена примерно в середине вариационного ряда (часто такая варианта имеет наибольшую частоту).

Замечание 2. Варианте, которая принята в качестве ложного нуля, соответствует условная варианта, равная нулю.

Пример. Найти условные варианты статистического распределения:

варианты . . .	23,6	28,6	33,6	38,6	43,6
частоты . . .	5	20	50	15	10

Решение. Выберем в качестве ложного нуля варианту 33,6 (эта варианта расположена в середине вариационного ряда).

Найдем шаг:

$$h = 28{,}6 - 23{,}6 = 5.$$

Найдем условную варианту:

$$u_1 = (x_1 - C)/h = (23{,}6 - 33{,}6)/5 = -2.$$

Аналогично получим: $u_2 = -1$, $u_3 = 0$, $u_4 = 1$, $u_5 = 2$. Мы видим, что условные варианты — небольшие целые числа. Разумеется, оперировать с ними проще, чем с первоначальными вариантами.

§ 2. Обычные, начальные и центральные эмпирические моменты

Для вычисления сводных характеристик выборки удобно пользоваться эмпирическими моментами, определения которых аналогичны определениям соответствующих теоретических моментов (см. гл. VIII, § 10). В отличие от теоретических эмпирические моменты вычисляют по данным наблюдений.

Обычным эмпирическим моментом порядка k называют среднее значение k-х степеней разностей $x_i - C$:

$$M'_k = (\sum n_i (x_i - C)^k)/n,$$

где x_i — наблюдаемая варианта, n_i — частота варианты, $n = \sum n_i$ — объем выборки, C — произвольное постоянное число (ложный нуль).

Начальным эмпирическим моментом порядка k называют обычный момент порядка k при $C = 0$

$$M_k = (\sum n_i x_i^k)/n.$$

В частности,

$$M_1 = (\sum n_i x_i)/n = \bar{x}_в,$$

т. е. начальный эмпирический момент первого порядка равен выборочной средней.

Центральным эмпирическим моментом порядка k называют обычный момент порядка k при $C = \bar{x}_в$

$$m_k = (\sum n_i (x_i - \bar{x}_в)^k)/n.$$

В частности,

$$m_2 = (\sum n_i (x_i - \bar{x}_в)^2)/n = D_в, \qquad (*)$$

т. е. центральный эмпирический момент второго порядка равен выборочной дисперсии.

Легко выразить центральные моменты через обычные (рекомендуем читателю сделать это самостоятельно):

$$m_2 = M'_2 - (M'_1)^2, \qquad (**)$$

$$\left.\begin{aligned} m_3 &= M'_3 - 3M'_2M'_1 + 2(M'_1)^3, \\ m_4 &= M'_4 - 4M'_3M'_1 + 6M'_2(M'_1)^2 - 3(M'_1)^4. \end{aligned}\right\} \qquad (***)$$

§ 3. Условные эмпирические моменты. Отыскание центральных моментов по условным

Вычисление центральных моментов требует довольно громоздких вычислений. Чтобы упростить расчеты, заменяют первоначальные варианты условными.

Условным эмпирическим моментом порядка k называют начальный момент порядка k, вычисленный для условных вариант:

$$M_k^* = \frac{\sum n_i u_i^k}{n} = \frac{\sum n_i \left(\frac{x_i - C}{h}\right)^k}{n}.$$

В частности,

$$M_1^* = \frac{\sum n_i \left(\frac{x_i - C}{h}\right)}{h} = \frac{1}{h}\left[\frac{\sum n_i x_i}{n} - C\frac{\sum n_i}{n}\right] = \frac{1}{h}(\bar{x}_в - C).$$

Отсюда

$$\bar{x}_в = M_1^* h + C. \qquad (*)$$

Таким образом, для того чтобы найти выборочную среднюю, достаточно вычислить условный момент первого порядка, умножить его на h и к результату прибавить ложный нуль C.

Выразим обычные моменты через условные:

$$M_k^* = \frac{1}{h^k}\frac{\sum n_i (x_i - C)^k}{n} = \frac{M'_k}{h^k}.$$

Отсюда

$$M'_k = M_k^* h^k.$$

Таким образом, для того чтобы найти обычный момент порядка k, достаточно условный момент того же порядка умножить на h^k.

Найдя же обычные моменты, легко найти центральные моменты по равенствам (**) и (***) предыдущего параграфа. В итоге получим удобные для вычислений формулы, выражающие центральные моменты через условные:

$$m_2 = [M_2^* - (M_1^*)^2]h^2, \qquad (**)$$

$$\left.\begin{aligned} m_3 &= [M_3^* - 3M_2^* M_1^* + 2(M_1^*)^3]h^3, \\ m_4 &= [M_4^* - 4M_3^* M_1^* + 6M_2^*(M_1^*)^2 - 3(M_1^*)^4]h^4. \end{aligned}\right\} \qquad (***)$$

В частности, в силу (**) и соотношения (*) предыдущего параграфа получим формулу для вычисления выборочной дисперсии по условным моментам первого и второго порядков

$$D_в = [M_2^* - (M_1^*)^2]h^2. \qquad (****)$$

Техника вычислений центральных моментов по условным описана далее.

§ 4. Метод произведений для вычисления выборочных средней и дисперсии

Метод произведений дает удобный способ вычисления условных моментов различных порядков вариационного ряда с равноотстоящими вариантами. Зная же условные моменты, нетрудно найти интересующие нас начальные и центральные эмпирические моменты. В частности, методом произведений удобно вычислять выборочную среднюю и выборочную дисперсию. Целесообразно пользоваться расчетной таблицей, которая составляется так:

1) в первый столбец таблицы записывают выборочные (первоначальные) варианты, располагая их в возрастающем порядке;

2) во второй столбец записывают частоты вариант; складывают все частоты и их сумму (объем выборки n) помещают в нижнюю клетку столбца;

3) в третий столбец записывают условные варианты $u_i=(x_i-C)/h$, причем в качестве ложного нуля C выбирают варианту, которая расположеиа примерно в середине вариационного ряда, и полагают h равным разности между любыми двумя соседними вариантами; практически же третий столбец заполняется так: в клетке строки, содержащей выбранный ложный нуль, пишут 0; в клетках над нулем пишут последовательно —1, —2, —3 и т. д., а под нулем — 1, 2, 3 и т. д.;

4) умножают частоты на условные варианты и записывают их произведения n_iu_i в четвертый столбец; сложив все полученные числа, их сумму $\sum n_iu_i$ помещают в нижнюю клетку столбца;

5) умножают частоты на квадраты условных вариант и записывают их произведения $n_iu_i^2$ в пятый столбец; сложив все полученные числа, их сумму $\sum n_iu_i^2$ помещают в нижнюю клетку столбца;

6) умножают частоты на квадраты условных вариант, увеличенных каждая на единицу, и записывают произведения $n_i(u_i+1)^2$ в шестой контрольный столбец; сложив все полученные числа, их сумму $\sum n_i(u_i+1)^2$ помещают в нижнюю клетку столбца.

Замечание 1. Целесообразно отдельно складывать отрицательные числа четвертого столбца (их сумму A_1 записывают в клетку строки, содержащей ложный нуль) и отдельно положительные числа (их сумму A_2 записывают в предпоследнюю клетку столбца); тогда $\sum n_iu_i = A_1 + A$.

Замечание 2. При вычислении произведений $n_iu_i^2$ пятого столбца целесообразно числа n_iu_i четвертого столбца умножать на u_i.

Замечание 3. Шестой столбец служит для контроля вычислений: если сумма $\sum n_i(u_i+1)^2$ окажется равной сумме $\sum n_iu^2_i + 2\sum n_iu_i + n$ (как и должно быть в соответствии с тождеством $\sum n_i(u_i+1)^2 = \sum n_iu_i^2 + 2\sum n_iu_i + n$), то вычисления проведены правильно.

После того как расчетная таблица заполнена и проверена правильность вычислений, вычисляют условные моменты:

$$M_1^* = (\sum n_iu_i)/n, \quad M_2^* = (\sum n_iu_i^2)/n.$$

Наконец, вычисляют выборочные среднюю и дисперсию по формулам (*) и (****) § 3:

$$\bar{x}_в = M_1^*h + C, \quad D_в = [M_2^* - (M_1^*)^2]\,h^2.$$

Пример. Найти методом произведений выборочные среднюю и дисперсию следующего статистического распределения:

варианты	10,2	10,4	10,6	10,8	11,0	11,2	11,4	11,6	11,8	12,0
частоты	2	3	8	13	25	20	12	10	6	1

Решение. Составим расчетную таблицу, для чего:

1) запишем варианты в первый столбец;

2) запишем частоты во второй столбец; сумму частот (100) поместим в нижнюю клетку столбца;

3) в качестве ложного нуля выберем варианту 11,0 (эта варианта расположена примерно в середине вариационного ряда); в клетке третьего столбца, которая принадлежит строке, содержащей выбранный ложный нуль, пишем 0; над нулем записываем последовательно —1, —2, —3, —4, а под нулем — 1, 2, 3, 4, 5;

4) произведения частот на условные варианты записываем в четвертый столбец; отдельно находим сумму (—46) отрицательных и отдельно сумму (103) положительных чисел; сложив эти числа, их сумму (57) помещаем в нижнюю клетку столбца;

5) произведения частот на квадраты условных вариант запишем в пятый столбец; сумму чисел столбца (383) помещаем в нижнюю клетку столбца;

6) произведения частот на квадраты условных вариант, увеличенных на единицу, запишем в шестой контрольный столбец; сумму (597) чисел столбца помещаем в нижнюю клетку столбца.

В итоге получим расчетную табл. 7.

Контроль: $\sum n_iu_i^2 + 2\sum n_iu_i + n = 383 + 2\cdot 57 + 100 = 597.$

$$\sum n_i(u_i+1)^2 = 597.$$

Вычисления произведены правильно.

Таблица 7

1	2	3	4	5	6
x_i	n_i	u_i	$n_i u_i$	$n_i u_i^2$	$n_i (u_i+1)^2$
10,2	2	—4	—8	32	18
10,4	3	—3	—9	27	12
10,6	8	—2	—16	32	8
10,8	13	—1	—13	13	0
11,0	25	0	$\boxed{A_1 = -46}$		25
11,2	20	1	20	20	80
11,4	12	2	24	48	108
11,6	10	3	30	90	160
11,8	6	4	24	96	150
12,0	1	5	5	25	36
			$\boxed{A_2 = 103}$		
	$n = 100$		$\sum n_i u_i = 57$	$\sum n_i u_i^2 = 383$	$\sum n_i (u_i+1)^2 = 597$

Вычислим условные моменты первого и второго порядков:

$$M_1^* = \left(\sum n_i u_i\right)/n = 57/100 = 0{,}57;$$

$$M_2^* = \left(\sum n_i u_i^2\right)/n = 383/100 = 3{,}83.$$

Найдем шаг: $h = 10{,}4 - 10{,}2 = 0{,}2$.

Вычислим искомые выборочные среднюю и дисперсию:

$$\overline{x}_в = M_1^* h + C = 0{,}57 \cdot 0{,}2 + 11{,}0 = 11{,}1;$$

$$D_в = \left[M_2^* - (M_1^*)^2\right] h^2 = [3{,}83 - (0{,}57)^2] \cdot 0{,}2^2 = 0{,}14.$$

§ 5. Сведение первоначальных вариант к равноотстоящим

Выше изложена методика расчета выборочных характеристик для равноотстоящих вариант. На практике, как правило, данные наблюдений не являются равноотстоящими числами. Естественно, возникает вопрос: нельзя ли соответствующей обработкой наблюдаемых значений признака свести вычисления к случаю равноотстоящих вариант? Оказывается, можно. С этой целью интервал, в котором заключены все наблюдаемые значения признака (первоначальные варианты), делят на несколько равных частичных интервалов. (Практически в каждый частичный интервал должно попасть не менее 8—10 первоначальных вариант.) Затем находят середины частичных интервалов, которые и образуют последовательность равноотстоящих вариант.

В качестве частоты каждой «новой» варианты (середины частичного интервала) принимают общее число первоначальных вариант, попавших в соответствующий частичный интервал.

Ясно, что замена первоначальных вариант серединами частичных интервалов сопровождается ошибками (первоначальные варианты левой половины частичного интервала будут увеличены, а варианты правой половины уменьшены), однако эти ошибки будут в основном погашаться, поскольку они имеют разные знаки.

Пример. Выборочная совокупность объема $n=100$ задана табл. 8. Составить распределение равноотстоящих вариант.

Решение. Разобьем интервал 1,00—1,50, например, на следующие 5 частичных интервалов.

1,00—1,10; 1,10—1,20; 1,20—1,30; 1,30—1,40; 1,40—1,50.

Таблица 8

x_i	n_i	x_i	n_i	x_i	n_i
1,00	1	1,19	2	1,37	6
1,03	3	1,20	4	1,38	2
1,05	6	1,23	4	1,39	1
1,06	4	1,25	8	1,40	2
1,08	2	1,26	4	1,44	3
1,10	4	1,29	4	1,45	3
1,12	3	1,30	6	1,46	2
1,15	6	1,32	4	1,49	4
1,16	5	1,33	5	1,50	2

Приняв середины частичных интервалов в качестве новых вариант y_i, получим равноотстоящие варианты: $y_1=1{,}05$; $y_2=1{,}15$; $y_3=1{,}25$; $y_4=1{,}35$; $y_5=1{,}45$.

Найдем частоту варианты y_1:

$$n_1 = 1+3+6+4+2+4/2 = 18$$

(Поскольку первоначальная варианта 1,10 одновременно является концом первого частичного интервала и началом второго, частота 4 этой варианты поровну распределена между обоими частичными интервалами.)

Найдем частоту варианты y_2:

$$n_2 = 4/2+3+6+5+2+4/2 = 20.$$

Аналогично вычислим частоты остальных вариант: $n_3 = 25$; $n_4 = 22$; $n_5 = 15$.

В итоге получим следующее распределение равноотстоящих вариант:

y_i	1,05	1,15	1,25	1,35	1,45
n_i	18	20	25	22	15

Рекомендуем читателю убедиться, что выборочные средние и дисперсии, вычисленные по первоначальным и равноотстоящим вариантам, окажутся соответственно равными.

$$\overline{x}_в = 1{,}250,\ \overline{y}_в = 1{,}246;\ D_x = 0{,}018;\ D_y = 0{,}017.$$

Как видим, замена первоначальных вариант равноотстоящими не привела к существенным ошибкам; при этом объем вычислительной работы значительно уменьшается.

§ 6. Эмпирические и выравнивающие (теоретические) частоты

А. Дискретное распределение. Рассмотрим дискретную случайную величину X, закон распределения которой неизвестен. Пусть произведено n испытаний, в которых величина X приняла n_1 раз значение x_1, n_2 раз значение x_2, ..., n_k раз значение x_k, причем $\sum n_i = n$.

Эмпирическими частотами называют фактически наблюдаемые частоты n_i.

Пусть имеются основания предположить, что изучаемая величина X распределена по некоторому определенному закону. Чтобы проверить, согласуется ли это предположение с данными наблюдений, вычисляют частоты наблюдаемых значений, т. е. находят теоретически частоту n'_i каждого из наблюдаемых значений в предположении, что величина X распределена по предполагаемому закону.

Выравнивающими (теоретическими) в отличие от фактически наблюдаемых эмпирических частот называют частоты n'_i, найденные теоретически (вычислением). Выравнивающие частоты находят с помощью равенства

$$n_i' = nP_i,$$

где n — число испытаний; P_i — вероятность наблюдаемого значения x_i, вычисленная при допущении, что X имеет предполагаемое распределение.

Итак, *выравнивающая частота наблюдаемого значения x_i дискретного распределения равна произведению числа испытаний на вероятность этого наблюдаемого значения.*

Пример. В результате эксперимента, состоящего из $n = 520$ испытаний, в каждом из которых регистрировалось число x_i появлений некоторого события, получено следующее эмпирическое распределение:

набл. значения . .	x_i	0	1	2	3	4	5	6	7
эмп. частота . .	n_i	120	167	130	69	27	5	1	1

Найти выравнивающие частоты n_i' в предположении, что случайная величина X (генеральная совокупность) распределена по закону Пуассона.

Решение. Известно, что параметр λ, которым определяется распределение Пуассона, равен математическому ожиданию этого распределения. Поскольку в качестве оценки математического ожидания принимают выборочную среднюю (см. гл. XVI, § 5), то и в качестве оценки λ можно принять выборочную среднюю $\overline{x}_в$. Легко найти по условию, что выборочная средняя равна 1,5, следовательно, можно принять $\lambda = 1,5$.

Таким образом, формула Пуассона

$$P_n(k) = (\lambda^k e^{-\lambda})/k!$$

принимает вид

$$P_{520}(k) = (1,5^k \cdot e^{-1,5})/k!$$

Пользуясь этой формулой, найдем вероятности $P_{520}(k)$ при $k = 0$, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 (для простоты записи индекс 520 далее опущен): $P(0) = 0,22313$, $P(1) = 0,33469$, $P(2) = 0,251021$, $P(3) = 0,125511$, $P(4) = 0,047066$, $P(5) = 0,014120$, $P(6) = 0,003530$, $P(7) = 0,000755$.

Найдем выравнивающие частоты (результаты умножения округлены до единицы):

$$n_1' = nP(0) = 520 \cdot 0,22313 = 116,$$
$$n_2' = nP(1) = 520 \cdot 0,33469 = 174.$$

Аналогично находят и остальные выравнивающие частоты. В итоге получим:

эмп. частота . .	123	167	130	69	27	5	1	1
выр. частота . .	116	174	131	65	25	7	2	0

Сравнительно небольшое расхождение эмпирических и выравнивающих частот подтверждает предположение, что рассматриваемое распределение подчинено закону Пуассона.

Заметим, что если подсчитать выборочную дисперсию по данному распределению, то окажется, что она равна выборочной средней, т. е. 1,5. Это служит еще одним подтверждением сделанного предположения, поскольку для распределения Пуассона $\lambda = M(X) = D(X)$.

Сравнения эмпирических и теоретических частот «на глаз», конечно, недостаточно. Чтобы сделать это более обоснованно, надо использовать, например, критерий Пирсона (см. гл. XIX, § 23). Проверка гипотезы о распределении случайной величины по закону Пуассона изложена в книге: Гмурман В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. М., «Высшая школа», 1972 (см. гл. XIII, § 17).

Б. Непрерывное распределение. В случае непрерывного распределения, вероятности отдельных возможных значений равны нулю (см. гл, X, § 2, следствие 2). Поэтому весь интервал возможных значений делят на k непересекающихся интервалов и вычисляют вероятности P_i попадания X в i-й частичный интервал, а затем, как и для дискретного распределения, умножают число испытаний на эти вероятности.

Итак, выравнивающие частоты непрерывного распределения находят по равенству

$$n_i' = nP_i,$$

где n — число испытаний; P_i — вероятность попадания X в i-й частичный интервал, вычисленная при допущении, что X имеет предполагаемое распределение.

В частности, если имеются основания предположить, что случайная величина X (генеральная совокупность) распределена нормально, то выравнивающие частоты могут быть найдены по формуле

$$n_i' = \frac{nh}{\sigma_в} \varphi(u_i), \qquad (*)$$

где n — число испытаний (объем выборки), h — длина частичного интервала, $\sigma_в$ — выборочное среднее квадратическое отклонение, $u_i = (x_i - \overline{x}_в)/\sigma_в$ (x_i — середина i-го частичного интервала),

$$\varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}.$$

Пример на применение формулы (*) приведен в § 7.

Пояснение. Поясним происхождение формулы (*). Напишем плотность общего нормального распределения:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-a)^2/(2\sigma^2)}. \qquad (**)$$

При $a=0$ и $\sigma=1$ получим плотность нормированного распределения:

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-x^2/2},$$

или, изменив обозначение аргумента,

$$\varphi(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-u^2/2}.$$

Положив $u=(x-a)/\sigma$, имеем

$$\varphi(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-(x-a)^2/(2\sigma^2)}. \qquad (***)$$

Сравнивая (**) и (***), заключаем, что

$$f(x)=\frac{1}{\sigma}\,\varphi(u).$$

Если математическое ожидание a и среднее квадратическое отклонение σ неизвестны, то в качестве оценок этих параметров принимают соответственно выборочную среднюю $\bar{x}_в$ и выборочное среднее квадратическое отклонение $\sigma_в$ (см. гл. XVI, § 5,9). Тогда

$$f(x)=\frac{1}{\sigma_в}\,\varphi(u),$$

где $u=(x-\bar{x}_в)/\sigma_в$.

Пусть x_i — середина i-го интервала (на которые разбита совокупность всех наблюдаемых значений нормально распределенной случайной величины X) длиной h. Тогда вероятность попадания X в этот интервал приближенно равна произведению длины интервала на значение плотности распределения $f(x)$ в любой точке интервала и, в частности, при $x=x_i$ (см. гл. XI, § 5):

$$P_i=hf(x_i)=h\,\frac{1}{\sigma_в}\,\varphi(u_i).$$

Следовательно, выравнивающая частота

$$n_i'=nP_i=\frac{nh}{\sigma_в}\,\varphi(u_i),$$

где $u_i=(x_i-\bar{x}_в)/\sigma_в$. Мы получили формулу (*).

§ 7. Построение нормальной кривой по опытным данным

Один из способов построения нормальной кривой по данным наблюдений состоит в следующем:

1) находят $\bar{x}_в$ и $\sigma_в$, например, по методу произведений;

2) находят ординаты y_i (выравнивающие частоты) теоретической кривой по формуле $y_i=\frac{nh}{\sigma_в}\cdot\varphi(u_i)$, где n — сумма наблюдаемых частот, h — разность между двумя соседними вариантами: $u_i=(x_i-\bar{x}_в)/\sigma_в$ и $\varphi(u)=(1/\sqrt{2\pi})\,e^{-u^2/2}$;

3) строят точки (x_i, y_i) в прямоугольной системе координат и соединяют их плавной кривой.

Близость выравнивающих частот к наблюдаемым подтверждает правильность допущения о том, что обследуемый признак распределен нормально.

Пример. Построить нормальную кривую по данному распределению:

варианты . . . x_i	15	20	25	30	35	40	45	50	55
частоты . . . n_i	6	13	38	74	106	85	30	10	4

Решение. Пользуясь методом произведений (см. § 4), найдем $\bar{x}_в=34{,}7$, $\sigma_в=7{,}38$.

Вычислим выравнивающие частоты (табл. 9).

Таблица 9

x_i	n_i	$x_i-\bar{x}_в$	$u_i=\frac{x_i-\bar{x}_в}{\sigma_в}$	$\varphi(u_i)$	$y_i=\frac{nh}{\sigma_в}\cdot\varphi(u_i)=$ $=248\cdot\varphi(u_i)$
15	6	—19,7	—2,67	0,0113	3
20	13	—14,7	—1,99	0,0551	14
25	38	—9,7	—1,31	0,1691	42
30	74	—4,7	—0,63	0,3271	82
35	106	0,3	0,05	0,3984	99
40	85	5,3	0,73	0,3056	76
45	30	10,3	1,41	0,1476	37
50	10	15,3	2,09	0,0449	11
55	4	20,3	2,77	0,0086	2
	$n=366$				$\sum y_i=366$

На рис. 22 построены нормальная (теоретическая) кривая по выравнивающим частотам (они отмечены кружками) и полигон наблюдаемых частот (они отмечены крестиками). Сравнение графиков наглядно показывает, что построенная теоретическая кривая удовлетворительно отражает данные наблюдений.

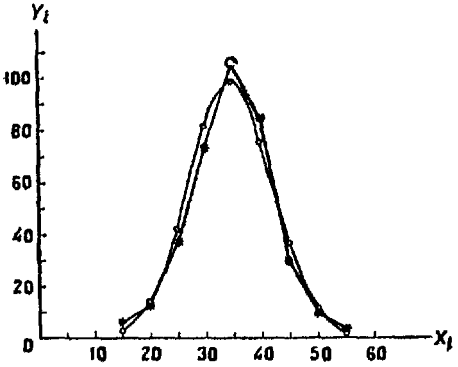

Рис. 22

Для того чтобы более уверенно считать, что данные наблюдений свидетельствуют о нормальном распределении признака, пользуются специальными правилами (их называют критериями согласия), понятие о которых можно найти далее (см. гл. XIX, § 23).

§ 8. Оценка отклонения эмпирического распределения от нормального. Асимметрия и эксцесс

Для оценки отклонения эмпирического распределения от нормального используют различные характеристики, к числу которых относятся асимметрия и эксцесс. Смысл этих характеристик аналогичен смыслу асимметрии и эксцесса теоретического распределения (см. гл. XII, § 9).

Асимметрия эмпирического распределения определяется равенством

$$a_s = m_3/\sigma_в^3,$$

где m_3 — центральный эмпирический момент третьего порядка (см. § 2).

Эксцесс эмпирического распределения определяется равенством

$$e_k = m_4/\sigma_в^4 - 3,$$

где m_4 — центральный эмпирический момент четвертого порядка.

Моменты m_3 и m_4 удобно вычислять методом произведений (см. § 4), используя формулы (***) § 3.

Пример. Найти асимметрию и эксцесс эмпирического распределения:

варианта	10,2	10,4	10,6	10,8	11,0	11,2	11,4	11,6	11,8	12,0
частота	2	3	8	13	25	20	12	10	6	1

Решение. Воспользуемся методом произведений, для чего составим расчетную табл. 10. Поскольку в § 4 указано, как заполняются столбцы 1—5 таблицы, ограничимся краткими пояснениями: для заполнения столбца 6 удобно перемножать числа каждой строки столбцов 3 и 5; для заполнения столбца 7 удобно перемножать числа каждой строки столбцов 3 и 6. Столбец 8 служит для контроля вычислений по тождеству:

$$\sum n_i(u_i+1)^4=\sum n_iu_i^4+4\sum n_iu_i^3+6\sum n_iu_i^2+4\sum n_iu_i+n.$$

Контроль: $\sum n_i(u_i+1)^4=9141;$

$$\sum n_iu_i^4+4\sum n_iu_i^3+6\sum n_iu_i^2+4\sum n_iu_i+n=$$
$$=4079+4\cdot 609+6\cdot 383+4\cdot 57+100=9141.$$

Таблица 10

1	2	3	4	5	6	7	8
x_i	n_i	u_i	n_iu_i	$n_iu_i^2$	$n_iu_i^3$	$n_iu_i^4$	$n_i(u_i+1)^4$
10,2	2	—4	—8	32	—128	512	162
10,4	3	—3	—9	27	—81	243	48
10,6	8	—2	—16	32	—64	128	8
10,8	13	—1	—13	13	—13	13	—
11,0	25	0	—46		—286		25
11,2	20	1	20	20	20	20	320
11,4	12	2	24	48	96	192	972
11,6	10	3	30	90	270	810	2560
11,8	6	4	24	96	384	1536	3750
12,0	1	5	5	25	125	625	1296
			103		895		
	$n=$ $=100$		$\sum n_iu_i=$ $=57$	$\sum n_iu_i^2=$ $=383$	$\sum n_iu_i^3=$ $=609$	$\sum n_iu_i^4=$ $=4079$	$\sum n_i(u_i+$ $+1)^4=9141$

Совпадение сумм свидетельствует о том, что вычисления произведены правильно.

В примере § 4 для рассматриваемого распределения было найдено: $M_1^* = 0,57$; $M_2^* = 3,83$; $D_в = 0,14$, следовательно, $\sigma_в = \sqrt{0,14}$.

Найдем условные моменты третьего и четвертого порядка:

$$M_3^* = \left(\sum n_i u_i^3\right)/n = 609/100 = 6,09; \quad M_4^* = \left(\sum n_i u_i^4\right)/n = 4079/100 = 40,79.$$

Найдем центральные эмпирические моменты третьего и четвертого порядка:

$$m_3 = \left[M_3^* - 3M_1^* M_2^* + 2\,(M_1^*)^3\right] h^3 =$$
$$= [6,09 - 3\cdot 0,57\cdot 3,83 + 2\cdot (0,57)^3]\cdot 0,2^3 = -0,0007;$$
$$m_4 = \left[M_4^* - 4M_1^* M_3^* + 6\,(M_1^*)^2\, M_2^* - 3\,(M_1^*)^4\right] h^4 =$$
$$= [40,79 - 4\cdot 0,57\cdot 6,09 + 6\,(0,57)^2\cdot 3,83 - 3\cdot (0,57)^4]\cdot 0,2^4 = 0,054.$$

Найдем асимметрию и эксцесс:

$$a_s = m_3/\sigma_в^3 = (-0,0007)/(\sqrt{0,14})^3 = -0,01;$$
$$e_k = m_4/\sigma_в^4 - 3 = (0,054/(\sqrt{0,14})^4 - 3 = -0,24.$$

Замечание. В случае малых выборок к оценкам асимметрии и эксцесса следует относиться с осторожностью и определить точность этих оценок (см.: Смирнов Н. В. и Дунин-Барковский И. В. Курс теории вероятностей и математической статистики. М., «Наука», 1965, с. 277).

Задачи

В задачах 1—2 даны выборочные варианты и их частоты. Найти, пользуясь методом произведений, выборочные среднюю и дисперсию.

1.

x_i	10,3	10,5	10,7	10,9	11,1	11,3	11,5	11,7	11,9	12,1
n_i	4	7	8	10	25	15	12	10	4	5

Отв. $\bar{x}_в = 11,19$, $D_в = 0,19$.

2.

x_i	83	85	87	89	91	93	95	97	99	101
n_i	6	7	12	15	30	10	8	6	4	2

Отв. $\bar{x}_в = 90,72$, $D_в = 17,20$.

3. Найти асимметрию и эксцесс эмпирического распределения

x_i	10,6	10,8	11,0	11,2	11,4	11,6	11,8
n_i	5	10	17	30	20	12	6

Отв. $a_s = -0,0006$, $e_k = 0,00004$.

Глава восемнадцатая

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ КОРРЕЛЯЦИИ

§ 1. Функциональная, статистическая и корреляционная зависимости

Во многих задачах требуется установить и оценить зависимость изучаемой случайной величины Y от одной или нескольких других величин. Рассмотрим сначала зависимость Y от одной случайной (или неслучайной) величины X, а затем от нескольких величин (см. § 15).

Две случайные величины могут быть связаны либо функциональной зависимостью (см. гл. XII, § 10), либо зависимостью другого рода, называемой статистической, либо быть независимыми.

Строгая функциональная зависимость реализуется редко, так как обе величины или одна из них подвержены еще действию случайных факторов, причем среди них могут быть и общие для обеих величин (под «общими» здесь подразумеваются такие факторы, которые воздействуют и на Y и на X). В этом случае возникает статистическая зависимость.

Например, если Y зависит от случайных факторов Z_1, Z_2, V_1, V_2, а X зависит от случайных факторов Z_1, Z_2, U_1, то между Y и X имеется статистическая зависимость, так как среди случайных факторов есть общие, а именно: Z_1 и Z_2.

Статистической называют зависимость, при которой изменение одной из величин влечет изменение распределения другой. В частности, статистическая зависимость проявляется в том, что при изменении одной из величин изменяется среднее значение другой; в этом случае статистическую зависимость называют *корреляционной*.

Приведем пример случайной величины Y, которая не связана с величиной X функционально, а связана корреляционно. Пусть Y — урожай зерна, X — количество удобрений. С одинаковых по площади участков земли при равных количествах внесенных удобрений снимают различный урожай, т. е. Y не является функцией от X. Это объясняется влиянием случайных факторов (осадки, температура воздуха и др.). Вместе с тем, как показывает опыт, *средний* урожай является функцией от количества удобрений, т. е. Y связан с X корреляционной зависимостью.

§ 2. Условные средние

В качестве оценок условных математических ожиданий (см. гл. XIV, § 15) принимают условные средние, которые находят по данным наблюдений (по выборке).

Условным средним $\overline{y}_x$ называют среднее арифметическое наблюдавшихся значений Y, соответствующих $X=x$. Например, если при $x_1=2$ величина Y приняла значения $y_1=5$, $y_2=6$, $y_3=10$, то условное среднее $\overline{y}_{x_1}=$ $=(5+6+10)/3=7$.

Аналогично определяется условное среднее $\overline{x}_y$.

Условным средним $\overline{x}_y$ называют среднее арифметическое наблюдавшихся значений X, соответствующих $Y=y$.

§ 3. Выборочные уравнения регрессии

В гл. XIV, § 15 были введены уравнения регрессии Y на X и X на Y:

$$M(Y \mid x)=f(x), \quad M(X \mid y)=\varphi(y).$$

Условное математическое ожидание $M(Y \mid x)$ является функцией от x, следовательно, его оценка, т. е. условное среднее $\overline{y}_x$, также функция от x; обозначив эту функцию через $f^*(x)$, получим уравнение

$$\overline{y}_x=f^*(x).$$

Это уравнение называют *выборочным уравнением регрессии Y на X*; функцию $f^*(x)$ называют *выборочной регрессией Y на X*, а ее график — *выборочной линией регрессии* Y на X. Аналогично уравнение

$$\overline{x}_y=\varphi^*(y)$$

называют *выборочным уравнением регрессии X* на Y; функцию $\varphi^*(y)$ называют *выборочной регрессией X на Y*, а ее график — *выборочной линией регрессии X на Y.*

Как найти по данным наблюдений параметры функций $f^*(x)$ и $\varphi^*(y)$, если вид их известен? Как оценить силу (тесноту) связи между величинами X и Y и установить, коррелированы ли эти величины? Ответы на эти вопросы изложены ниже.

§ 4. Отыскание параметров выборочного уравнения прямой линии среднеквадратичной регрессии по несгруппированным данным

Пусть изучается система количественных признаков (X, Y). В результате n независимых опытов получены n пар чисел (x_1, y_1), $(x_2\ y_2)$, ..., (x_n, y_n).

Найдем по данным наблюдений выборочное уравнение прямой линии среднеквадратичной регрессии (см. гл. XIV, § 20). Для определенности будем искать уравнение

$$\overline{y}_x = kx + b$$

регрессии Y на X.

Поскольку различные значения x признака X и соответствующие им значения y признака Y наблюдались по одному разу, то группировать данные нет необходимости. Также нет надобности использовать понятие условной средней, поэтому искомое уравнение можно записать так:

$$y = kx + b.$$

Угловой коэффициент прямой линии регрессии Y на X называют *выборочным коэффициентом регрессии* Y на X и обозначают через ρ_{yx}; он является оценкой коэффициента регрессии β (см. гл. XIV, § 20).

Итак, будем искать выборочное уравнение прямой линии регрессии Y на X вида

$$Y = \rho_{yx} x + b. \qquad (*)$$

Подберем параметры ρ_{yx} и b так, чтобы точки $(x_1;\ y_1)$ $(x_2;\ y_2)$, ..., $(x_n;\ y_n)$, построенные по данным наблюдений, на плоскости xOy лежали как можно ближе к прямой (*). Уточним смысл этого требования. Назовем отклонением разность

$$Y_i - y_i \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

где Y_i — вычисленная по уравнению (*) ордината, соответствующая наблюдаемому значению x_i; y_i — наблюдаемая ордината, соответствующая x_i.

Подберем параметры ρ_{yx} и b так, чтобы сумма квадратов отклонений была минимальной (в этом состоит сущность метода наименьших квадратов). Так как каждое отклонение зависит от отыскиваемых параметров, то и сумма квадратов отклонений есть функция F этих параметров (временно вместо ρ_{yx} будем писать ρ):

$$F(\rho,\ b)=\sum_{i=1}^{n}(Y_i-y_i)^2,$$

или

$$F(\rho,\ b)=\sum_{i=1}^{n}(\rho x_i+b-y_i)^2.$$

Для отыскания минимума приравняем нулю соответствующие частные производные:

$$\frac{\partial F}{\partial \rho}=2\sum_{i=1}^{n}(\rho x_i+b-y_i)\,x_i=0;$$

$$\frac{\partial F}{\partial b}=2\sum_{i=1}^{n}(\rho x_i+b-y_i)=0.$$

Выполнив элементарные преобразования, получим систему двух линейных уравнений относительно ρ и b*):

$$\left(\sum x^2\right)\rho+\left(\sum x\right)b=\sum xy;\quad \left(\sum x\right)\rho+nb=\sum y. \qquad (**)$$

Решив эту систему, найдем искомые параметры:

$$\rho_{yx}=\left(n\sum xy-\sum x\cdot\sum y\right)/\left(n\sum x^2-\left(\sum x\right)^2\right);$$

$$b=\left(\sum x^2\cdot\sum y-\sum x\cdot\sum xy\right)/\left(n\sum x^2-\left(\sum x\right)^2\right). \qquad (***)$$

Аналогично можно найти выборочное уравнение прямой линии регрессии X на Y:

$$\overline{x}_y=\rho_{xy}x+C,$$

где ρ_{xy} — выборочный коэффициент регрессии X на Y.

Пример. Найти выборочное уравнение прямой линии регрессии Y на X по данным $n=5$ наблюдений:

x	1,00	1,50	3,00	4,50	5,00
y	1,25	1,40	1,50	1,75	2,25

Решение. Составим расчетную табл. 11.

Найдем искомые параметры, для чего подставим вычисленные по таблице суммы в соотношения (***):

$$\rho_{xy}=(5\cdot 26{,}975-15\cdot 8{,}15)/(5\cdot 57{,}5-15^2)=0{,}202;$$

$$b=(57{,}5\cdot 8{,}15-15\cdot 26{,}975)/62{,}5=1{,}024.$$

---

*) Для простоты записи вместо $\sum_{i=1}^{n}$ условимся писать $\sum$.

Таблица 11

x_i	y_i	x_i^2	x_iy_i
1,00	1,25	1,00	1,250
1,50	1,40	2,25	2,100
3,00	1,50	9,00	4,500
4,50	1,75	20,25	7,875
5,00	2,25	25,00	11,250
$\sum x_i=15$	$\sum y_i=8,15$	$\sum x_i^2=57,50$	$\sum x_iy_i=26,975$

Напишем искомое уравнение регрессии:

$$Y=0,202x+1,024.$$

Для того чтобы получить представление, насколько хорошо вычисленные по этому уравнению значения Y_i согласуются с наблюдаемыми значениями y_i, найдем отклонения Y_i-y_i. Результаты вычислений приведены в табл. 12.

Таблица 12

x_i	Y_i	y_i	Y_i-y_i
1,00	1,226	1,25	—0,024
1,50	1,327	1,40	—0,073
3,00	1,630	1,50	0,130
4,50	1,933	1,75	0,183
5,00	2,034	2,25	—0,216

Как видно из таблицы, не все отклонения достаточно малы. Это объясняется малым числом наблюдений.

§ 5. Корреляционная таблица

При большом числе наблюдений одно и то же значение x может встретиться n_x раз, одно и то же значение y — n_y раз, одна и та же пара чисел (x, y) может наблюдаться n_{xy} раз. Поэтому данные наблюдений группируют, т. е. подсчитывают частоты n_x, n_y, n_{xy}. Все сгруппированные данные записывают в виде таблицы, которую называют *корреляционной*.

Поясним устройство корреляционной таблицы на примере табл. 13.

Таблица 13

Y	X				
	10	20	30	40	n_y
0,4	5	—	7	14	26
0,6	—	2	6	4	12
0,8	3	19	—	—	22
n_x	8	21	13	18	$n=60$

В первой строке таблицы указаны наблюдаемые значения (10; 20; 30; 40) признака X, а в первом столбце — наблюдаемые значения (0,4; 0,6; 0,8) признака Y. На пересечении строк и столбцов находятся частоты n_{xy} наблюдаемых пар значений признаков. Например, частота 5 указывает, что пара чисел (10; 0,4) наблюдалась 5 раз. Все частоты помещены в прямоугольнике, стороны которого проведены жирными отрезками. Черточка означает, что соответственная пара чисел, например (20; 0,4), не наблюдалась.

В последнем столбце записаны суммы частот строк. Например, сумма частот первой строки «жирного» прямоугольника равна $n_y=5+7+14=26$; это число указывает, что значение признака Y, равное 0,4 (в сочетании с различными значениями признака X), наблюдалось 26 раз.

В последней строке записаны суммы частот столбцов. Например, число 8 указывает, что значение признака X, равное 10 (в сочетании с различными значениями признака Y), наблюдалось 8 раз.

В клетке, расположенной в нижнем правом углу таблицы, помещена сумма всех частот (общее число всех наблюдений n). Очевидно, $\sum n_x=\sum n_y=n$. В нашем примере

$$\sum n_x=8+21+13+18=60 \quad \text{и} \quad \sum n_y=26+12+22=60.$$

§ 6. Отыскание параметров выборочного уравнения прямой линии регрессии по сгруппированным данным

В § 4 для определения параметров уравнения прямой линии регрессии Y на X была получена система уравнений

$$\left.\begin{aligned}(\sum x^2)\rho_{yx}+(\sum x)b=\sum xy,\\ (\sum x)\rho_{yx}+nb=\sum y.\end{aligned}\right\}\qquad(*)$$

Предполагалось, что значения X и соответствующие им значения Y наблюдались по одному разу. Теперь же допустим, что получено большое число данных (практически для удовлетворительной оценки искомых параметров должно быть хотя бы 50 наблюдений), среди них есть повторяющиеся, и они сгруппированы в виде корреляционной таблицы. Запишем систему (*) так, чтобы она отражала данные корреляционной таблицы. Воспользуемся тождествами:

$$\sum x=n\bar{x}\ \text{(следствие из } \bar{x}=\sum x/n);$$
$$\sum y=n\bar{y}\ \text{(следствие из } \bar{y}=\sum y/n);$$
$$\sum x^2=n\overline{x^2}\ \text{(следствие из } \overline{x^2}=\sum x^2/n),$$

$\sum xy=\sum n_{xy}xy$ (учтено, что пара чисел (x, y) наблюдалась n_{xy} раз).

Подставив правые части тождеств в систему (*) и сократив обе части второго уравнения на n, получим

$$\left.\begin{aligned}(n\overline{x^2})\rho_{yx}+(n\bar{x})b=\sum n_{xy}xy,\\ (\bar{x})\rho_{yx}+b=\bar{y}.\end{aligned}\right\}\qquad(**)$$

Решив эту систему, найдем параметры ρ_{yx} и b и, следовательно, искомое уравнение

$$\bar{y}_x=\rho_{yx}x+b.$$

Однако более целесообразно, введя новую величину — выборочный коэффициент корреляции, написать уравнение регрессии в ином виде. Сделаем это. Найдем b из второго уравнения (**):

$$b=\bar{y}-\rho_{yx}\bar{x}.$$

Подставив правую часть этого равенства в уравнение $\bar{y}_x = \rho_{yx} x + b$, получим

$$\bar{y}_x - \bar{y} = \rho_{yx} (x - \bar{x}). \qquad (***)$$

Найдем *) из системы (*) коэффициент регрессии, учитывая, что $\overline{x^2} - (\bar{x})^2 = \tilde{\sigma}_x^2$ (см. гл. XVI, § 10):

$$\rho_{yx} = \frac{\sum n_{xy} xy - n\bar{x}\bar{y}}{n\left[\overline{x^2} - (\bar{x})^2\right]} = \frac{\sum n_{xy} xy - n\bar{x}\bar{y}}{n\tilde{\sigma}_x^2}.$$

Умножим обе части равенства на дробь $\tilde{\sigma}_x / \tilde{\sigma}_y$:

$$\rho_{yx} \cdot \frac{\tilde{\sigma}_x}{\tilde{\sigma}_y} = \frac{\sum n_{xy} xy - n\bar{x}\bar{y}}{n\tilde{\sigma}_x \tilde{\sigma}_y}. \qquad (****)$$

Обозначим правую часть равенства через $r_в$ и назовем ее выборочным коэффициентом корреляции (см. замечание 3):

$$r_в = \frac{\sum n_{xy} xy - n\bar{x}\bar{y}}{n\tilde{\sigma}_x \tilde{\sigma}_y}.$$

Подставим $r_в$ в (****):

$$\rho_{yx} \tilde{\sigma}_x / \tilde{\sigma}_y = r_в.$$

Отсюда

$$\rho_{yx} = r_в \frac{\tilde{\sigma}_y}{\tilde{\sigma}_x}.$$

Подставив правую часть этого равенства в (***), окончательно получим выборочное уравнение прямой линии регрессии Y на X вида

$$\bar{y}_x - \bar{y} = r_в \frac{\tilde{\sigma}_y}{\tilde{\sigma}_x} (x - \bar{x}).$$

Замечание 1. Аналогично находят выборочное уравнение прямой линии регрессии X на Y вида

$$\bar{x}_y - \bar{x} = r_в \frac{\tilde{\sigma}_x}{\tilde{\sigma}_y} (y - \bar{y}),$$

где $r_в \tilde{\sigma}_x / \tilde{\sigma}_y = \rho_{xy}$.

---

*) В этой главе выборочное среднее квадратическое отклонение обозначено через $\tilde{\sigma}$; например, $\tilde{\sigma}_x$ — выборочное среднее квадратическое отклонение X.

Замечание 2. Уравнения выборочных прямых регрессии можно записать в более симметричной форме:

$$\frac{\bar{y}_x-\bar{y}}{\tilde{\sigma}_y}=r_{\text{в}}\frac{x-\bar{x}}{\tilde{\sigma}_x},\quad \frac{\bar{x}_y-\bar{x}}{\tilde{\sigma}_x}=r_{\text{в}}\frac{y-\bar{y}}{\tilde{\sigma}_y}.$$

Замечание 3. Выборочный коэффициент корреляции является оценкой коэффициента корреляции

$$r=\frac{\mu_{xy}}{\sigma_x\sigma_y}=\frac{M(XY)-M(X)\cdot M(Y)}{\sigma_x\sigma_y}.$$

Действительно, используя метод моментов (см. гл. XVI, § 21), т. е. заменив числовые характеристики их оценками, получим

$$r_{\text{в}}=\frac{\left[\left(\sum n_{xy}xy\right)/n\right]-\bar{x}\bar{y}}{\tilde{\sigma}_x\tilde{\sigma}_y}=\frac{\sum n_{xy}xy-n\bar{x}\bar{y}}{n\tilde{\sigma}_x\tilde{\sigma}_y}.$$

§ 7. Выборочный коэффициент корреляции

Как следует из предыдущего параграфа, выборочный коэффициент корреляции определяется равенством

$$r_{\text{в}}=\frac{\sum n_{xy}xy-n\bar{x}\bar{y}}{n\tilde{\sigma}_x\tilde{\sigma}_y},$$

где x, y—варианты (наблюдавшиеся значения) признаков X и Y; n_{xy}—частота пары вариант (x, y); n—объем выборки (сумма всех частот); $\tilde{\sigma}_x$, $\tilde{\sigma}_y$—выборочные средние квадратические отклонения; $\bar{x}$, $\bar{y}$—выборочные средние.

Известно, что если величины Y и X независимы, то коэффициент корреляции $r=0$ (см. гл. XIV, § 17); если $r=\pm 1$, то Y и X связаны *линейной* функциональной зависимостью (см. гл. XIV, § 20). Отсюда следует, что коэффициент корреляции r измеряет силу (тесноту) *линейной* связи между Y и X.

Выборочный коэффициент корреляции $r_{\text{в}}$ является оценкой коэффициента корреляции r генеральной совокупности и поэтому также служит для измерения линейной связи между величинами—количественными признаками Y и X. Допустим, что выборочный коэффициент корреляции, найденный по выборке, оказался отличным от нуля. Так как выборка отобрана случайно, то отсюда еще нельзя заключить, что коэффициент корреляции генеральной совокупности также отличен от нуля. Возникает необходимость проверить гипотезу о значимости (существенности) выборочного коэффициента корреляции (или, что то же, о равенстве нулю коэффициента корреляции генеральной совокупности). Если гипотеза о равенстве нулю генерального коэффициента корреляции будет отвергнута, то выборочный коэффициент корреляции значим, а величины X и Y коррелированы; если гипотеза принята, то выборочный коэффициент корреляции незначим, а величины X и Y не коррелированы.

Проверка гипотезы о значимости выборочного коэффициента корреляции для случая нормальной корреляции изложена далее (см. гл. XIX, § 21).

Если выборка имеет достаточно большой объем и хорошо представляет генеральную совокупность (репрезентативна), то заключение о тесноте линейной зависимости между признаками, полученное по данным *выборки*, в известной степени может быть распространено и на *генеральную совокупность*. Например, для оценки коэффициента корреляции $r_г$ нормально распределенной генеральной совокупности (при $n \geqslant 50$) можно воспользоваться формулой

$$r_в - 3\frac{1-r_в^2}{\sqrt{n}} \leqslant r_г \leqslant r_в + 3\frac{1+r_в^2}{\sqrt{n}}.$$

Замечание 1. Знак выборочного коэффициента корреляции совпадает со знаком выборочных коэффициентов регрессии, что следует из формул (см. § 6):

$$\rho_{yx} = r_в\frac{\bar{\sigma}_y}{\bar{\sigma}_x}; \quad \rho_{xy} = r_в\frac{\bar{\sigma}_x}{\bar{\sigma}_y}. \qquad (*)$$

Замечание 2. Выборочный коэффициент корреляции равен среднему геометрическому выборочных коэффициентов регрессии. Действительно, перемножив левые и правые части равенств (*), получим

$$\rho_{xy}\rho_{xy} = r_в^2.$$

Отсюда

$$r_в = \pm\sqrt{\rho_{yx}\rho_{xy}}.$$

Знак при радикале в соответствии с замечанием 1 должен совпадать со знаком коэффициентов регрессии.

§ 8. Методика вычисления выборочного коэффициента корреляции

Пусть требуется по данным корреляционной таблицы вычислить выборочный коэффициент корреляции. Можно значительно упростить расчет, если перейти к условным вариантам (при этом величина $r_в$ не изменится)

$$u_i=(x_i-C_1)/h_1 \text{ и } v_j=(y_j-C_2)/h_2.$$

В этом случае выборочный коэффициент корреляции вычисляют по формуле

$$r_в=\left(\sum n_{uv}uv-n\bar{u}\bar{v}\right)/(n\tilde{\sigma}_u\tilde{\sigma}_v).$$

Величины $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\tilde{\sigma}_u$ и $\tilde{\sigma}_v$ можно найти методом произведений (см. гл. XVII, § 4), а при малом числе данных — непосредственно исходя из определений этих величин. Остается указать способ вычисления $\sum n_{uv}uv$, где n_{uv} — частота пары условных вариант (u, v).

Можно доказать, что справедливы формулы (см. пояснение в конце параграфа):

$$\sum n_{uv}uv=\sum vU, \text{ где } U=\sum n_{uv}u,$$
$$\sum n_{uv}uv=\sum uV, \text{ где } V=\sum n_{uv}v.$$

Для контроля целесообразно выполнить расчеты по обеим формулам и сравнить результаты; их совпадение свидетельствует о правильности вычислений.

Покажем на примере, как пользоваться приведенными формулами.

Пример 1. Вычислить $\sum n_{uv}uv$ по данным корреляционной табл. 14.

Таблица 14

Y	X						n_y
	10	20	30	40	50	60	
15	5	7	—	—	—	—	12
25	—	20	23	—	—	—	43
35	—	—	30	47	2	—	79
45	—	—	10	11	20	6	47
55	—	—	—	9	7	3	19
n_x	5	27	63	67	29	9	$n=200$

Решение. Перейдем к условным вариантам: $u_i=(x_i-C_1)/h_1=(x_i-40)/10$ (в качестве ложного нуля C_1 взята варианта $x=40$, расположенная примерно в середине вариационного ряда; шаг h_1 равен разности между двумя соседними вариантами: $20-10=10$) и $v_j=(y_j-C_2)/h_2=(y_j-35)/10$ (в качестве ложного нуля C_2 взята варианта $y=35$, расположенная в середине вариационного ряда; шаг h_2 равен разности между двумя соседними вариантами: $25-15=10$).

Составим корреляционную таблицу в условных вариантах. Практически это делают так: в первом столбце вместо ложного нуля C_2 (варианты 35) пишут 0; над нулем последовательно записывают —1, —2; под нулем пишут 1, 2. В первой строке вместо ложного нуля C_1 (варианты 40) пишут 0; слева от нуля последовательно записывают —1, —2, —3; справа от нуля пишут 1, 2. Все остальные данные переписывают из первоначальной корреляционной таблицы. В итоге получим корреляционную табл. 15 в условных вариантах.

Таблица 15

v	u						n_v
	−3	−2	−1	0	1	2	
—2	5	7	—	—	—	—	12
—1	—	20	23	—	—	—	43
0	—	—	30	47	2	—	79
1	—	—	10	11	20	6	47
2	—	—	—	9	7	3	19
n_u	5	27	63	67	29	9	$n=200$

Теперь для вычисления искомой суммы $\sum n_{uv}uv$ составим расчетную табл. 16. Пояснения к составлению табл. 16:

1. В каждой клетке, в которой частота $n_{uv}\neq 0$, записывают в правом верхнем углу произведение частоты n_{uv} на варианту u. Например, в правых верхних углах клеток первой строки записаны произведения: $5\cdot(-3)=-15$; $7\cdot(-2)=-14$.

2. Складывают все числа, помещенные в правых верхних углах клеток одной строки и их сумму записывают в клетку этой же строки столбца U. Например, для первой строки $U=-15+(-14)=-29$.

3. Умножают варианту v на U и полученное произведение записывают в последнюю клетку той же строки, т. е. в клетку столбца vU. Например, в первой строке таблицы $v=-2$, $U=-29$; следовательно, $vU=(-2)\cdot(-29)=58$.

4. Наконец, сложив все числа столбца vU, получают сумму $\sum\limits_{v} vU$, которая равна искомой сумме $\sum n_{uv}uv$. Например, для табл. 16 имеем $\sum\limits_{v} vU=169$; следовательно, искомая сумма $\sum n_{uv}uv=169$.

Таблица 16

v	u						$U=$ $=\sum n_{uv}u$	vU
	−3	−2	−1	0	1	2		
−2	−15 5 −10	−14 7 −14	—	—	—	—	−29	58
−1	—	−40 20 −20	−23 23 −23	—	—	—	−63	63
0	—	—	−30 30 0	0 47 0	2 2 0	—	−28	0
1	—	—	−10 10 10	0 11 11	20 20 20	12 6 6	22	22
2	—	—	—	0 9 18	7 7 14	6 3 6	13	26
$V=\sum n_{uv}v$	−10	−34	−13	29	34	12		$\sum_v vU=169$
uV	30	68	13	0	34	24	$\sum_u uV=169$	←Контроль↑

Для контроля аналогичные вычисления производят по столбцам: произведения $n_{uv}v$ записывают в левый нижний угол клетки, содержащей частоту $n_{uv} \neq 0$; все числа, помещенные в левых нижних углах клеток одного столбца, складывают и их сумму записывают в строку V; далее умножают каждую варианту u на V и результат записывают в клетках последней строки.

Наконец, сложив все числа последней строки, получают сумму $\sum\limits_u uV$, которая также равна искомой сумме $\sum n_{uv}uv$. Например, для табл. 16 имеем $\sum\limits_u uV = 169$; следовательно, $\sum n_{uv}uv = 169$.

Теперь, когда мы научились вычислять $\sum n_{uv}uv$, приведем пример на отыскание выборочного коэффициента корреляции.

Пример 2. Вычислить выборочный коэффициент корреляции $r_в = (\sum n_{uv}uv - n\bar{u}\bar{v})/(n\tilde{\sigma}_u\tilde{\sigma}_v)$ по данным корреляционной табл. 14.

Решение. Перейдя к условным вариантам, получим корреляционную табл. 15. Величины $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\tilde{\sigma}_u$ и $\tilde{\sigma}_v$ можно вычислить методом произведений; однако, поскольку числа u_i, v_i малы, вычислим $\bar{u}$ и $\bar{v}$, исходя из определения средней, а $\tilde{\sigma}_u$ и $\tilde{\sigma}_v$ — используя формулы (см. гл. XVI, § 10)

$$\tilde{\sigma}_u = \sqrt{\overline{u^2} - (\bar{u})^2}, \quad \tilde{\sigma}_v = \sqrt{\overline{v^2} - (\bar{v})^2}.$$

Найдем $\bar{u}$ и $\bar{v}$:

$$\bar{u} = (\sum n_u u)/n = [5\cdot(-3) + 27\cdot(-2) + 63\cdot(-1) + 29\cdot 1 + 9\cdot 2]/200 = -0{,}425;$$

$$\bar{v} = (\sum n_v v)/n = [12\cdot(-2) + 43\cdot(-1) + 47\cdot 1 + 19\cdot 2]/200 = 0{,}09.$$

Вычислим вспомогательную величину $\overline{u^2}$, а затем $\tilde{\sigma}_u$:

$$\overline{u^2} = (\sum n_u u^2)/n = (5\cdot 9 + 27\cdot 4 + 63\cdot 1 + 29\cdot 1 + 9\cdot 4)/200 = 1{,}405;$$

$$\tilde{\sigma}_u = \sqrt{\overline{u^2} - (\bar{u})^2} = \sqrt{1{,}405 - (0{,}425)^2} = 1{,}106.$$

Аналогично получим $\tilde{\sigma}_в = 1{,}209$.

Найдем искомый выборочный коэффициент корреляции, учитывая, что ранее уже вычислена сумма $\sum n_{uv}uv = 169$:

$$r_в = (\sum n_{uv}uv - n\bar{u}\bar{v})/(n\tilde{\sigma}_u\tilde{\sigma}_v) =$$
$$= [169 - 200\cdot(-0{,}425)\cdot 0{,}09]/(200\cdot 1{,}106\cdot 1{,}209) = 0{,}603.$$

Итак, $r_в = 0{,}603$.

Пояснение. Покажем, что $\sum n_{uv}uv = \sum\limits_v vU$, где $U = \sum\limits_u n_{uv}u$.

Рассмотрим корреляционную таблицу в условных вариантах (для простоты таблица содержит мало данных):

v	u		
	u_1	u_2	u_3
v_1	$n_{u_1v_1}$	$n_{u_2v_1}$	$n_{u_3v_1}$
v_2	$n_{u_1v_2}$	$n_{u_2v_2}$	$n_{u_3v_2}$

Найдем $\sum n_{uv}uv$ двумя способами: суммируя произведения частот n_{uv} на произведения соответствующих условных вариант uv по строкам и по столбцам. Для первой строки таблицы

$$n_{u_1v_1}\cdot(u_1v_1)+n_{u_2v_1}\cdot(u_2v_1)+n_{u_3v_1}\cdot(u_3v_1)=v_1\sum_u n_{uv_1}u. \qquad (*)$$

Для второй строки таблицы

$$n_{u_1v_2}\cdot(u_1v_2)+n_{u_3v_2}\cdot(u_2v_2)+n_{u_2v_2}\cdot(u_3v_2)=v_2\sum_u n_{uv_2}u. \qquad (**)$$

Сложим (*) и (**):

$$\sum n_{uv}uv=v_1\sum_u n_{uv_1}n+v_2\sum_u n_{uv_2}u.$$

Итак,

$$\sum n_{uv}uv=\sum_v vU,$$

где $U=\sum_u n_{uv}u.$

Аналогично, суммируя произведения частот n_{uv} на произведения соответствующих условных вариант uv по столбцам, получим

$$\sum n_{uv}uv=\sum_u uV,$$

где $V=\sum n_{uv}v.$

§ 9. Пример на отыскание выборочного уравнения прямой линии регрессии

Теперь, когда известно, как вычисляют $r_в$, уместно привести пример на отыскание уравнения прямой линии регрессии.

Поскольку при нахождении $r_в$ уже вычислены $\bar{u}$, $\bar{v}$, σ_u, σ_v, то целесообразно пользоваться формулами:

$$\sigma_x=h_1\sigma_u,\quad \sigma_y=h_2\sigma_v,\quad \bar{x}=\bar{u}h_1+c_1,\quad \bar{y}=\bar{v}h_2+c_2.$$

Здесь сохранены обозначения предыдущего параграфа. Рекомендуем читателю самостоятельно вывести эти формулы.

Пример. Найти выборочное уравнение прямой линии регрессии Y на X по данным корреляционной табл. 14 примера предыдущего параграфа.

Решение. Напишем искомое уравнение в общем виде:

$$\overline{y}_x-\overline{y}=r_в \frac{\overline{\sigma}_y}{\overline{\sigma}_x}(x-\overline{x}). \qquad (*)$$

Коэффициент корреляции уже вычислен в предыдущем параграфе. Остается найти $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{\sigma}_x$ и $\overline{\sigma}_y$:

$$\overline{x}=\overline{u}h_1+c_1=-0,425\cdot 10+40=35,75;$$

$$\overline{y}=\overline{v}h_2+c_2=0,09\cdot 10+35=35,9;$$

$$\overline{\sigma}_x=\overline{\sigma}_u h_1=1,106\cdot 10=11,06;\quad \overline{\sigma}_y=\overline{\sigma}_v h_2=1,209\cdot 10=12,09.$$

Подставив найденные величины в (*), получим искомое уравнение

$$\overline{y}_x-35,9=0,603\frac{12,09}{11,06}(x-35,75),$$

или окончательно

$$\overline{y}_x=0,659x+12,34.$$

Сравним условные средние, вычисленные: а) по этому уравнению; б) по данным корреляционной табл. 14. Например, при $x=30$:

а) $\overline{y}_{30}=0,659\cdot 30+12,34=32,11;$

б) $\overline{y}_{30}=(23\cdot 25+30\cdot 35+10\cdot 45)/63=32,94.$

Как видим, согласование расчетного и наблюдаемого условных средних — удовлетворительное.

§ 10. Предварительные соображения к введению меры любой корреляционной связи

Выше рассматривалась оценка тесноты линейной корреляционной связи. Как оценить тесноту любой корреляционной связи?

Пусть данные наблюдений над количественными признаками X и Y сведены в корреляционную таблицу. Можно считать, что тем самым наблюдаемые значения Y разбиты на группы; каждая группа содержит те значения Y, которые соответствуют определенному значению X. Например, дана корреляционная табл. 17.

К первой группе относятся те 10 значений Y (4 раза наблюдалось $y_1=3$ и 6 раз $y_2=5$), которые соответствуют $x_1=8$.

Ко второй группе относятся те 20 значений Y (13 раз наблюдалось $y_1=3$ и 7 раз $y_2=5$), которые соответствуют $x_2=9$.

Таблица 17

Y	X	
	3	9
3	4	13
5	6	7
n_x	10	20
$\bar{y}_x$	4,2	3,7

Условные средние теперь можно назвать групповыми средними: групповая средняя первой группы $\bar{y}_3 = (4 \cdot 3 + 6 \cdot 5)/10 = 4{,}2$; групповая средняя второй группы $\bar{y}_9 = (13 \cdot 3 + 7 \cdot 5)/20 = 3{,}7$.

Поскольку все значения признака Y разбиты на группы, можно представить общую дисперсию признака в виде суммы внутригрупповой и межгрупповой дисперсий (см. гл. XVI, § 12):

$$D_{\text{общ}} = D_{\text{внгр}} + D_{\text{межгр}}. \qquad (*)$$

Покажем справедливость следующих утверждений:

1) если Y связан с X функциональной зависимостью, то

$$D_{\text{межгр}}/D_{\text{общ}} = 1;$$

2) если Y связан с X корреляционной зависимостью, то

$$D_{\text{межгр}}/D_{\text{общ}} < 1.$$

Доказательство. 1) Если Y связан с X функциональной зависимостью, то определенному значению X соответствует одно значение Y. В этом случае в каждой группе содержатся равные между собой значения Y [*], поэтому групповая дисперсия каждой группы равна нулю. Следовательно, средняя арифметическая

---

[*] Например, если значению $x_1 = 3$ соответствует $y_1 = 7$, причем $x_1 = 3$ наблюдалось 5 раз, то в группе содержится 5 значений $y_1 = 7$.

групповых дисперсий (взвешенная по объемам групп), т. е. внутригрупповая дисперсия $D_{\text{внгр}}=0$ и равенство (*), имеет вид

$$D_{\text{общ}}=D_{\text{межгр}}.$$

Отсюда

$$D_{\text{межгр}}/D_{\text{общ}}=1.$$

2) Если Y связан с X корреляционной зависимостью, то определенному значению X соответствуют, вообще говоря, различные значения Y (образующие группу). В этом случае групповая дисперсия каждой группы отлична от нуля. Следовательно, средняя арифметическая групповых дисперсий (взвешенная по объемам групп) $D_{\text{внгр}}\neq 0$. Тогда одно положительное слагаемое $D_{\text{межгр}}$ меньше суммы двух положительных слагаемых $D_{\text{внгр}}+D_{\text{межгр}}=D_{\text{общ}}$:

$$D_{\text{межгр}}<D_{\text{общ}}.$$

Отсюда

$$D_{\text{межгр}}/D_{\text{общ}}<1.$$

Уже из приведенных рассуждений видно, что чем связь между признаками ближе к функциональной, тем меньше $D_{\text{внгр}}$ и, следовательно, тем больше приближается $D_{\text{межгр}}$ к $D_{\text{общ}}$, а значит, отношение $D_{\text{межгр}}/D_{\text{общ}}$ — к единице. Отсюда ясно, что целесообразно рассматривать в качестве меры тесноты корреляционной зависимости отношение межгрупповой дисперсии к общей, или, что то же, отношение межгруппового среднего квадратического отклонения к общему среднему квадратическому отклонению.

§ 11. Выборочное корреляционное отношение

Для оценки тесноты линейной корреляционной связи между признаками в выборке служит выборочный коэффициент корреляции. Для оценки тесноты нелинейной корреляционной связи вводят новые сводные характеристики:

η_{yx} — выборочное корреляционное отношение Y к X;
η_{xy} — выборочное корреляционное отношение X к Y.

Выборочным корреляционным отношением Y к X называют отношение межгруппового среднего квадратического отклонения к общему среднему квадратическому отклонению признака Y:

$$\eta_{yx} = \sigma_{\text{межгр}}/\sigma_{\text{общ}},$$

или в других обозначениях

$$\eta_{yx} = \sigma_{\bar{y}_x}/\bar{\sigma}_y.$$

Здесь

$$\sigma_{\bar{y}_x} = \sqrt{D_{\text{межгр}}} = \sqrt{\left(\sum n_x(\bar{y}_x - \bar{y})^2\right)/n};$$

$$\bar{\sigma}_y = \sqrt{D_{\text{общ}}} = \sqrt{\left(\sum n_y(y - \bar{y})^2\right)/n},$$

где n — объем выборки (сумма всех частот); n_x — частота значения x признака X; n_y — частота значения y признака Y; $\bar{y}$ — общая средняя признака Y; $\bar{y}_x$ — условная средняя признака Y.

Аналогично определяется выборочное корреляционное отношение X к Y:

$$\eta_{xy} = \sigma_{\bar{x}_y}/\bar{\sigma}_x.$$

Пример. Найти η_{yx} по данным корреляционной табл. 18.

Таблица 18

Y	X			
	10	20	30	n_y
15	4	28	6	38
25	6	—	6	12
n_x	10	28	12	$n=50$
$\bar{y}_x$	21	15	20	

Решение. Найдем общую среднюю:

$$\bar{y} = \left(\sum n_y y\right)/n = (38 \cdot 15 + 12 \cdot 25)/50 = 17{,}4.$$

Найдем общее среднее квадратическое отклонение:

$$\bar{\sigma}_y = \sqrt{\left(\sum n_y (y - \bar{y})^2\right)/n} =$$

$$= \sqrt{[38\,(15 - 17{,}4)^2 + 12\,(25 - 17{,}4)^2]/50} = 4{,}27.$$

Найдем межгрупповое среднее квадратическое отклоиение:

$$\sigma_{\overline{y}_x} = \sqrt{\left[\sum n_x (\overline{y}_x - \overline{y})^2\right]/n} =$$

$$= \sqrt{[10\,(21-17{,}4)^2 + 28\,(15-17{,}4)^2 + 12\,(20-17{,}4)^2]/50} = 2{,}73.$$

Искомое корреляционное отношение

$$\eta_{yx} = \sigma_{\overline{y}_x} / \tilde{\sigma}_y = 2{,}73/4{,}27 = 0{,}64.$$

§ 12. Свойства выборочного корреляционного отношения

Поскольку η_{xy} обладает теми же свойствами, что и η_{yx}, перечислим свойства только выборочного корреляционного отношения η_{yx}, которое далее для упрощения записи будем обозначать через η и для простоты речи называть «корреляционным отношением».

Свойство 1. *Корреляционное отношение удовлетворяет двойному неравенству*

$$0 \leqslant \eta \leqslant 1.$$

Доказательство. Неравенство $\eta \geqslant 0$ следует из того, что η есть отношение неотрицательных чисел — средних квадратических отклонений (межгруппового к общему).

Для доказательства неравенства $\eta \leqslant 1$ воспользуемся формулой

$$D_{\text{общ}} = D_{\text{внгр}} + D_{\text{межгр}}.$$

Разделив обе части равенства на $D_{\text{общ}}$, получим

$$1 = D_{\text{внгр}}/D_{\text{общ}} + D_{\text{межгр}}/D_{\text{общ}},$$

или

$$1 = D_{\text{внгр}}/D_{\text{общ}} + \eta^2.$$

Так как оба слагаемых неотрицательны и сумма их равна единице, то каждое из них не превышает единицы; в частности, $\eta^2 \leqslant 1$. Приняв во внимание, что $\eta \geqslant 0$, заключаем:

$$0 \leqslant \eta \leqslant 1.$$

Свойство 2. *Если $\eta = 0$, то признак Y с признаком X корреляционной зависимостью не связан.*

Доказательство. По условию,

$$\eta = \sigma_{\text{межгр}}/\sigma_{\text{общ}} = 0.$$

Отсюда $\sigma_{\text{межгр}} = 0$ и, следовательно, $D_{\text{межгр}} = 0$.

Межгрупповая дисперсия есть дисперсия условных (групповых) средних $\overline{y}_x$ относительно общей средней $\overline{y}$. Равенство нулю межгрупповой дисперсии означает, что при всех значениях X условные средние сохраняют постоянное значение (равное общей средней). Иными словами, при $\eta=0$ условная средняя не является функцией от X, а значит, признак Y не связан корреляционной зависимостью с признаком X.

Замечание 1. Можно доказать и обратное предложение: если признак Y не связан с признаком X корреляционной зависимостью, то $\eta=0$.

Свойство 3. *Если $\eta=1$, то признак Y связан с признаком X функциональной зависимостью.*

Доказательство. По условию,

$$\eta=\sigma_{\text{межгр}}/\sigma_{\text{общ}}=1.$$

Отсюда

$$\sigma_{\text{общ}}=\sigma_{\text{межгр}}.$$

Возведя обе части равенства в квадрат, получим

$$D_{\text{общ}}=D_{\text{межгр}}. \qquad (*)$$

Так как $D_{\text{общ}}=D_{\text{внгр}}+D_{\text{межгр}}$, то в силу (*)

$$D_{\text{внгр}}=0. \qquad (**)$$

Поскольку внутригрупповая дисперсия есть средняя арифметическая групповых дисперсий (взвешенная по объемам групп), то из (**) следует, что дисперсия каждой группы (значений Y, соответствующих определенному значению X) равна нулю. А это означает, что в группе содержатся равные значения Y, т. е. каждому значению X соответствует одно значение Y. Следовательно, при $\eta=1$ признак Y связан с признаком X функциональной зависимостью.

Замечание 2. Можно доказать и обратное предположение: если признак Y связан с признаком X функциональной зависимостью, то $\eta=1$.

Приведем еще два свойства, опустив доказательства.

Свойство 4. *Выборочное корреляционное отношение* *не меньше абсолютной величины выборочного коэффициента корреляции*: $\eta \geqslant |r_в|$.

Свойство 5. *Если выборочное корреляционное отношение равно абсолютной величине выборочного коэффициента корреляции, то имеет место точная линейная корреляционная зависимость.*

Другими словами, если $\eta = |r_в|$, то точки $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$, ..., $(x_n; y_n)$ лежат на прямой линии регрессии, найденной способом наименьших квадратов.

§ 13. Корреляционное отношение как мера корреляционной связи. Достоинства и недостатки этой меры

В предыдущем параграфе установлено: при $\eta = 0$ признаки не связаны корреляционной зависимостью; при $\eta = 1$ имеет место функциональная зависимость.

Убедимся, что с возрастанием η корреляционная связь становится более тесной. С этой целью преобразуем соотношение $D_{общ} = D_{внгр} + D_{межгр}$ так:

$$D_{внгр} = D_{общ}\,[1 - (D_{межгр}/D_{общ})],$$

или

$$D_{внгр} = D_{общ}\,(1 - \eta^2).$$

Если $\eta \to 1$, то $D_{внгр} \to 0$, следовательно, стремится к нулю и каждая из групповых дисперсий. Другими словами, при возрастании η значения Y, соответствующие определенному значению X, все меньше различаются между собой и связь Y с X становится более тесной, переходя в функциональную при $\eta = 1$.

Поскольку в рассуждениях не делалось никаких допущений о форме корреляционной связи, η *служит мерой тесноты связи любой, в том числе и линейной, формы.* В этом состоит преимущество корреляционного отношения перед коэффициентом корреляции, который оценивает тесноту лишь линейной зависимости. Вместе с тем корреляционное отношение обладает недостатком: оно не позволяет судить, насколько близко расположены точки, найденные по данным наблюдений, к кривой определенного вида, например к параболе, гиперболе и т. д. Это объясняется тем, что при определении корреляционного отношения форма связи во внимание не принималась.

§ 14. Простейшие случаи криволинейной корреляции

Если график регрессии $\overline{y}_x = f(x)$ или $\overline{x}_y = \varphi(y)$ изображается кривой линией, то корреляцию называют *криволинейной*.

Например, функции регрессии Y на X могут иметь вид:

$\overline{y}_x = ax^2 + bx + c$ (параболическая корреляция второго порядка);

$\overline{y}_x = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (параболическая корреляция третьего порядка).

Для определения вида функции регрессии строят точки $(x;\ \overline{y}_x)$ и по их расположению делают заключение о примерном виде функции регрессии; при окончательном решении принимают во внимание особенности, вытекающие из сущности решаемой задачи.

Теория криволинейной корреляции решает те же задачи, что и теория линейной корреляции (установление формы и тесноты корреляционной связи). Неизвестные параметры уравнения регрессии ищут методом наименьших квадратов. Для оценки тесноты криволинейной корреляции служат выборочные корреляционные отношения (см. § 11).

Чтобы выяснить суть дела, ограничимся параболической корреляцией второго порядка, предположив, что данные n наблюдений (выборки) позволяют считать, что имеет место именно такая корреляция. В этом случае выборочное уравнение регрессии Y на X имеет вид

$$\overline{y}_x = Ax^2 + Bx + C, \qquad (*)$$

где A, B, C — неизвестные параметры.

Пользуясь методом наименьших квадратов, получают систему линейных уравнений относительно неизвестных параметров (вывод опущен, поскольку он не содержит ничего нового сравнительно с § 4):

$$\left.\begin{aligned} &\left(\sum n_x x^4\right) A + \left(\sum n_x x^3\right) B + \left(\sum n_x x^2\right) C = \sum n_x \overline{y}_x x^2; \\ &\left(\sum n_x x^3\right) A + \left(\sum n_x x^2\right) B + \left(\sum n_x x\right) C = \sum n_x \overline{y}_x x; \\ &\left(\sum n_x x^2\right) A + \left(\sum n_x x\right) B + nC = \sum n_x \overline{y}_x. \end{aligned}\right\} \qquad (**)$$

Найденные из этой системы параметры A, B, C подставляют в (*); в итоге получают искомое уравнение регрессии.

Пример. Найти выборочное уравнение регрессии Y на X вида $\overline{y}_x = Ax^2 + Bx + C$ по данным корреляционной табл. 19.

Таблица 19

Y	X			
	1	1,1	1,2	n_y
6	8	2	—	10
7	—	30	—	30
7,5	—	1	9	10
n_x	8	33	9	$n=50$
$\overline{y}_x$	6	6,73	7,5	

Составим расчетную табл. 20. Подставив числа (суммы) нижней строки табл. 20 в (**), получим систему

$$\left.\begin{aligned} 74{,}98\,A + 67{,}48\,B + 60{,}89\,C &= 413{,}93,\\ 67{,}48\,A + 60{,}89\,B + 55{,}10\,C &= 373{,}30,\\ 60{,}89\,A + 55{,}10\,B + 50\,C &= 337{,}59. \end{aligned}\right\}$$

Решив эту систему, найдем: $A = 1{,}94$, $B = 2{,}98$, $C = 1{,}10$. Напишем искомое уравнение регрессии:

$$\overline{y}_x = 1{,}94x^2 + 2{,}98x + 1{,}10.$$

Легко убедиться, что условные средние, вычисленные по этому уравнению, незначительно отличаются от условных средних корреляционной таблицы. Например, при $x_1 = 1$ найдем: по таблице $\overline{y}_1 = 6$; по уравнению $\overline{y}_1 = 1{,}94 + 2{,}98 + 1{,}10 = 6{,}02$. Таким образом, найденное уравнение хорошо согласуется с данными наблюдений (выборки).

§ 15. Понятие о множественной корреляции

До настоящего параграфа рассматривалась корреляционная связь между двумя признаками. Если же исследуется связь между несколькими признаками, то корреляцию называют *множественной*.

В простейшем случае число признаков равно трем и связь между ними линейная:

$$z = ax + by + c.$$

В этом случае возникают задачи:

1) найти по данным наблюдений выборочное уравнение связи вида

$$z = Ax + By + C, \qquad (*)$$

т. е. требуется найти коэффициенты регрессии A и B и параметр C;

2) оценить тесноту связи между Z и обоими признаками X, Y;

3) оценить тесноту связи между Z и X (при постоянном Y), между Z и Y (при постоянном X).

Первая задача решается методом наименьших квадратов, причем вместо уравнения (*) удобнее искать уравнение связи вида

$$z - \bar{z} = A(x - \bar{x}) + B(y - \bar{y}),$$

где

$$A = \frac{r_{xz} - r_{yz} r_{xy}}{1 - r_{xy}^2} \cdot \frac{\sigma_z}{\sigma_x};$$

$$B = \frac{r_{yz} - r_{xz} r_{xy}}{1 - r_{xy}^2} \cdot \frac{\sigma_z}{\sigma_y}.$$

Таблица 20

x	n_x	$\bar{y}_x$	$n_x x$	$n_x x^2$	$n_x x^3$	$n_x x^4$	$n_x \bar{y}_x$	$n_x \bar{y}_x x$	$n_x \bar{y}_x x^2$
1	8	6	8	8	8	8	48	48	48
1,1	33	6,73	36,3	39,93	43,93	48,32	222,09	244,30	268,73
1,2	9	7,5	10,8	12,96	15,55	18,66	67,50	81	97,20
Σ	50	—	55,1	60,89	67,48	74,98	337,59	373,30	413,93

Здесь r_{xz}, r_{yz}, r_{xy}—коэффициенты корреляции соответственно между признаками X и Z, Y и Z, X и Y; σ_x, σ_y, σ_z—средние квадратические отклонения.

Теснота связи признака Z с признаками X, Y оценивается *выборочным совокупным коэффициентом корреляции*

$$R=\sqrt{\frac{r_{xz}^2-2r_{xy}r_{xz}r_{yz}+r_{yz}^2}{1-r_{xy}^2}},$$

причем $0 \leqslant R \leqslant 1$.

Теснота связи между Z и X (при постоянном Y), между Z и Y (при постоянном X) оценивается соответственно *частными выборочными коэффициентами корреляции:*

$$r_{xz(y)}=\frac{r_{xz}-r_{xy}r_{yz}}{\sqrt{(1-r_{xy}^2)(1-r_{yz}^2)}};$$

$$r_{yz(x)}=\frac{r_{yz}-r_{xy}r_{xz}}{\sqrt{(1-r_{xy}^2)(1-r_{xz}^2)}}.$$

Эти коэффициенты имеют те же свойства и тот же смысл, что и обыкновенный выборочный коэффициент корреляции, т. е. служат для оценки линейной связи между признаками.

Задачи

В задачах 1—2 даны корреляционные табл. 21 и 22. Найти: а) $r_в$; б) выборочные уравнения прямых регрессии; в) η_{yx} и η_{xy}.

Отв. к задаче 1. а) 0,636; б) $\overline{y}_x=1,17\,x+16,78$, $\overline{x}_y=0,345\,y+1,67$; в) $\eta_{yx}=0,656$, $\eta_{xy}=0,651$.

Таблица 21

1.

Y	X					
	5	10	15	20	n_y	$\bar{x}_y$
10	2	—	—	—	2	5
20	5	4	1	—	10	8
30	3	8	6	3	20	12,25
40	—	3	6	6	15	16
50	—	—	2	1	3	16,67
n_x	10	15	15	10	$n=50$	
$\bar{y}_x$	21	29,33	36	38		

Таблица 22

2.

Y	X							
	65	95	125	155	185	215	n_y	$\bar{x}_y$
30	5	—	—	—	—	—	5	65
40	4	12	—	—	—	—	16	87,5
50	—	8	5	4	—	—	17	101,18
60	—	1	5	7	2	—	15	145
70	—	—	—	—	1	1	2	200
n_x	9	21	10	11	3	1	$n=55$	
$\bar{y}_x$	34,44	44,76	55	56,36	63,33	70		

Отв. к задаче 2. а) 0,825; б) $\bar{y}_x = 0,23\,x + 21,78$, $\bar{x}_y = 2,92\,y - 27,25$; в) $\eta_{yx} = 0,859$, $\eta_{xy} = 0,875$.

В задачах **3—4** найти выборочные уравнения регрессии $\bar{y}_x = Ax^2 + Bx + C$ по данным корреляционных табл. 23 и 24.

Таблица 23

3.

Y	X			
	2	3	5	n_y
25	20	—	—	20
45	—	30	1	31
110	—	1	48	49
n_x	20	31	49	$n = 100$

Отв. $\bar{y}_x = 2,94\ x^2 + 7,27\ x - 1,25$.

Таблица 24

4.

Y	X		
	1	2	n_y
2	30	1	31
6	1	18	19
n_x	31	19	$n = 50$

Отв. $\bar{y}_x = 0,39\ x^2 + 2,49\ x - 0,75$.

Глава девятнадцатая

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ПРОВЕРКА СТАТИСТИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗ

§ 1. Статистическая гипотеза. Нулевая и конкурирующая, простая и сложная гипотезы

Часто необходимо знать закон распределения генеральной совокупности. Если закон распределения неизвестен, но имеются основания предположить, что он имеет определенный вид (назовем его A), выдвигают гипотезу: генеральная совокупность распределена по закону A. Таким образом, в этой гипотезе речь идет о виде предполагаемого распределения.

Возможен случай, когда закон распределения известен, а его параметры неизвестны. Если есть основания предположить, что неизвестный параметр Θ равен определенному значению Θ_0, выдвигают гипотезу: $\Theta=\Theta_0$. Таким образом, в этой гипотезе речь идет о предполагаемой величине параметра одного известного распределения.

Возможны и другие гипотезы: о равенстве параметров двух или нескольких распределений, о независимости выборок и многие другие.

Статистической называют гипотезу о виде неизвестного распределения, или о параметрах известных распределений.

Например, статистическими являются гипотезы:

1) генеральная совокупность распределена по закону Пуассона;

2) дисперсии двух нормальных совокупностей равны между собой.

В первой гипотезе сделано предположение о виде неизвестного распределения, во второй — о параметрах двух известных распределений.

Гипотеза «на Марсе есть жизнь» не является статистической, поскольку в ней не идет речь ни о виде, ни о параметрах распределения.

Наряду с выдвинутой гипотезой рассматривают и противоречащую ей гипотезу. Если выдвинутая гипотеза будет отвергнута, то имеет место противоречащая гипотеза. По этой причине эти гипотезы целесообразно различать.

Нулевой (основной) называют выдвинутую гипотезу H_0.

Конкурирующей (альтернативной) называют гипотезу H_1, которая противоречит нулевой.

Например, если нулевая гипотеза состоит в предположении, что математическое ожидание a нормального распределения равно 10, то конкурирующая гипотеза, в частности, может состоять в предположении, что $a \neq 10$. Коротко это записывают так: $H_0: a = 10$; $H_1: a \neq 10$.

Различают гипотезы, которые содержат только одно и более одного предположений.

Простой называют гипотезу, содержащую только одно предположение. Например, если λ — параметр показательного распределения, то гипотеза $H_0: \lambda = 5$ — простая. Гипотеза H_0: математическое ожидание нормального распределения равно 3 (σ известно) — простая.

Сложной называют гипотезу, которая состоит из конечного или бесконечного числа простых гипотез. Например, сложная гипотеза $H: \lambda > 5$ состоит из бесчисленного множества простых вида $H_i: \lambda = b_i$, где b_i — любое число, большее 5. Гипотеза H_0: математическое ожидание нормального распределения равно 3 (σ неизвестно) — сложная.

§ 2. Ошибки первого и второго рода

Выдвинутая гипотеза может быть правильной или неправильной, поэтому возникает необходимость ее проверки. Поскольку проверку производят статистическими методами, ее называют *статистической*. В итоге статистической проверки гипотезы в двух случаях может быть принято неправильное решение, т. е. могут быть допущены ошибки двух родов.

Ошибка первого рода состоит в том, что будет отвергнута правильная гипотеза.

Ошибка второго рода состоит в том, что будет принята неправильная гипотеза.

Подчеркнем, что последствия этих ошибок могут оказаться весьма различными. Например, если отвергнуто правильное решение «продолжать строительство жилого дома», то эта ошибка первого рода повлечет материальный ущерб; если же принято неправильное решение «продолжать строительство», несмотря на опасность обвала стройки, то эта ошибка второго рода может повлечь гибель людей. Можно привести примеры, когда ошибка первого рода влечет более тяжелые последствия, чем ошибка второго рода.

Замечание 1. Правильное решение может быть принято также в двух случаях:

1) гипотеза принимается, причем и в действительности она правильная;

2) гипотеза отвергается, причем и в действительности она неверна.

Замечание 2. Вероятность совершить ошибку первого рода принято обозначать через α; ее называют *уровнем значимости*. Наиболее часто уровень значимости принимают равным 0,05 или 0,01. Если, например, принят уровень значимости, равный 0,05, то это означает, что в пяти случаях из ста имеется риск допустить ошибку первого рода (отвергнуть правильную гипотезу).

§ 3. Статистический критерий проверки нулевой гипотезы. Наблюдаемое значение критерия

Для проверки нулевой гипотезы используют специально подобранную случайную величину, точное или приближенное распределение которой известно. Эту величину обозначают через U или Z, если она распределена нормально, F или v^2 — по закону Фишера — Снедекора, T — по закону Стьюдента, χ^2 — по закону «хи квадрат» и т. д. Поскольку в этом параграфе вид распределения во внимание приниматься не будет, обозначим эту величину в целях общности через K.

Статистическим критерием (или просто *критерием*) называют случайную величину K, которая служит для проверки нулевой гипотезы.

Например, если проверяют гипотезу о равенстве дисперсий двух нормальных генеральных совокупностей, то в качестве критерия K принимают отношение исправленных выборочных дисперсий:

$$F = s_1^2/s_2^2.$$

Эта величина случайная, потому что в различных опытах дисперсии принимают различные, наперед неизвестные значения, и распределена по закону Фишера — Снедекора.

Для проверки гипотезы по данным выборок вычисляют частные значения входящих в критерий величин и таким образом получают частное (наблюдаемое) значение критерия.

Наблюдаемым значением $K_{\text{набл}}$ называют значение критерия, вычисленное по выборкам. Например, если по двум выборкам найдены исправленные выборочные дисперсии $s_1^2 = 20$ и $s_2^2 = 5$, то наблюдаемое значение критерия F

$$F_{\text{набл}} = s_1^2/s_2^2 = 20/5 = 4.$$

§ 4. Критическая область. Область принятия гипотезы. Критические точки

После выбора определенного критерия множество всех его возможных значений разбивают на два непересекающихся подмножества: одно из них содержит значения критерия, при которых нулевая гипотеза отвергается, а другая — при которых она принимается.

Критической областью называют совокупность значений критерия, при которых нулевую гипотезу отвергают.

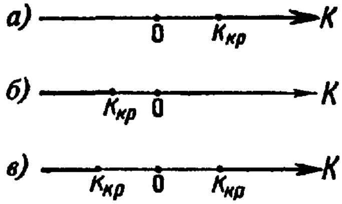

Рис. 23

Областью принятия гипотезы (областью допустимых значений) называют совокупность значений критерия, при которых гипотезу принимают.

Основной принцип проверки статистических гипотез можно сформулировать так: если наблюдаемое значение критерия принадлежит критической области — гипотезу отвергают, если наблюдаемое значение критерия принадлежит области принятия гипотезы — гипотезу принимают.

Поскольку критерий K — одномерная случайная величина, все ее возможные значения принадлежат некоторому интервалу. Поэтому критическая область и область принятия гипотезы также являются интервалами и, следовательно, существуют точки, которые их разделяют.

Критическими точками (границами) $k_{кр}$ называют точки, отделяющие критическую область от области принятия гипотезы.

Различают одностороннюю (правостороннюю или левостороннюю) и двустороннюю критические области.

Правосторонней называют критическую область, определяемую неравенством $K > k_{кр}$, где $k_{кр}$ — положительное число (рис. 23, *а*).

Левосторонней называют критическую область, определяемую неравенством $K < k_{кр}$, где $k_{кр}$ — отрицательное число (рис. 23, *б*).

Односторонней называют правостороннюю или левостороннюю критическую область.

Двусторонней называют критическую область, определяемую неравенствами $K < k_1$, $K > k_2$, где $k_2 > k_1$.

В частности, если критические точки симметричны относительно нуля, двусторонняя критическая область определяется неравенствами (в предположении, что $k_{кр} > 0$): $K < -k_{кр}$, $K > k_{кр}$, или равносильным неравенством $|K| > k_{кр}$ (рис. 23, *в*).

§ 5. Отыскание правосторонней критической области

Как найти критическую область? Обоснованный ответ на этот вопрос требует привлечения довольно сложной теории. Ограничимся ее элементами. Для определенности начнем с нахождения правосторонней критической области, которая определяется неравенством $K > k_{кр}$, где $k_{кр} > 0$. Видим, что для отыскания правосторонней критической области достаточно найти критическую точку. Следовательно, возникает новый вопрос: как ее найти?

Для ее нахождения задаются достаточной малой вероятностью — уровнем значимости α. Затем ищут критическую точку $k_{кр}$, исходя из требования, чтобы при условии справедливости нулевой гипотезы вероятность того, что критерий K примет значение, большее $k_{кр}$, была равна принятому уровню значимости:

$$P(K > k_{кр}) = \alpha.$$

Для каждого критерия имеются соответствующие таблицы, по которым и находят критическую точку, удовлетворяющую этому требованию.

Замечание 1. Когда критическая точка уже найдена, вычисляют по данным выборок наблюденное значение критерия и, если окажется, что $K_{набл} > k_{кр}$, то нулевую гипотезу отвергают; если же $K_{набл} < k_{кр}$, то нет оснований, чтобы отвергнуть нулевую гипотезу.

Пояснение. Почему правосторонняя критическая область была определена исходя из требования, чтобы при справедливости нулевой гипотезы выполнялось соотношение

$$P(K > k_{кр}) = \alpha? \qquad (*)$$

Поскольку вероятность события $K > k_{кр}$ мала (α — малая вероятность), такое событие при справедливости нулевой гипотезы, в силу принципа практической невозможности маловероятных событий, в единичном испытании не должно наступить (см. гл. II, § 4). Если все же оно произошло, т. е. наблюдаемое значение критерия оказалось больше $k_{кр}$, то это можно объяснить тем, что нулевая гипотеза ложна и, следовательно, должна быть отвергнута. Таким образом, требование (*) определяет такие значения критерия, при которых нулевая гипотеза отвергается, а они и составляют правостороннюю критическую область.

Замечание 2. Наблюдаемое значение критерия может оказаться большим $k_{кр}$ не потому, что нулевая гипотеза ложна, а по другим причинам (малый объем выборки, недостатки методики эксперимента и др.). В этом случае, отвергнув правильную нулевую гипотезу, совершают ошибку первого рода. Вероятность этой ошибки равна уровню значимости α. Итак, пользуясь требованием (*), мы с вероятностью α рискуем совершить ошибку первого рода.

Заметим кстати, что в книгах по контролю качества продукции вероятность признать негодной партию годных изделий называют «риском производителя», а вероятность принять негодную партию — «риском потребителя».

Замечание 3. Пусть нулевая гипотеза принята; ошибочно думать, что тем самым она доказана. Действительно, известно, что один пример, подтверждающий справедливость некоторого общего утверждения, еще не доказывает его. Поэтому более правильно говорить «данные наблюдений согласуются с нулевой гипотезой и, следовательно, не дают оснований ее отвергнуть».

На практике для большей уверенности принятия гипотезы ее проверяют другими способами или повторяют эксперимент, увеличив объем выборки.

Отвергают гипотезу более категорично, чем принимают. Действительно, известно, что достаточно привести один пример, противоречащий некоторому общему утверждению, чтобы это утверждение отвергнуть. Если оказалось, что наблюдаемое значение критерия принадлежит критической области, то этот факт и служит примером, противоречащим нулевой гипотезе, что позволяет ее отклонить.

§ 6. Отыскание левосторонней и двусторонней критических областей

Отыскание левосторонней и двусторонней критических областей сводится (так же, как и для правосторонней) к нахождению соответствующих критических точек.

Левосторонняя критическая область определяется (см. § 4) неравенством $K < k_{кр}$ $(k_{кр} < 0)$. Критическую точку находят исходя из требования, чтобы при справедливости нулевой гипотезы вероятность того, что критерий примет значение, меньшее $k_{кр}$, была равна принятому уровню значимости:

$$P(K < k_{кр}) = \alpha.$$

Двусторонняя критическая область определяется (см. § 4) неравенствами $K < k_1$, $K > k_2$. Критические точки находят исходя из требования, чтобы при справедливости нулевой гипотезы сумма вероятностей того, что критерий примет значение, меньшее k_1 или большее k_2, была равна принятому уровню значимости:

$$P(K < k_1) + P(K > k_2) = \alpha. \qquad (*)$$

Ясно, что критические точки могут быть выбраны бесчисленным множеством способов. Если же распределение критерия симметрично относительно нуля и имеются основания (например, для увеличения мощности [*]) выбрать симметричные относительно иуля точки $-k_{кр}$ и $k_{кр}$ $(k_{кр} > 0)$, то

$$P(K < -k_{кр}) = P(K > k_{кр}).$$

Учитывая (*), получим

$$P(K > k_{кр}) = \alpha/2.$$

Это соотношение и служит для отыскания критических точек двусторонней критической области.

Как уже было указано (см. § 5), критические точки находят по соответствующим таблицам.

§ 7. Дополнительные сведения о выборе критической области. Мощность критерия

Мы строили критическую область, исходя из требования, чтобы вероятность попадания в нее критерия была равна α при условии, что нулевая гипотеза справедлива. Оказывается целесообразным ввести в рассмотрение вероятность попадания критерия в критическую область при условии, что нулевая гипотеза неверна и, следовательно, справедлива конкурирующая.

Мощностью критерия называют вероятность попадания критерия в критическую область при условии, что справедлива конкурирующая гипотеза. Другими словами, мощность критерия есть вероятность того, что нулевая гипотеза будет отвергнута, если верна конкурирующая гипотеза.

Пусть для проверки гипотезы принят определенный уровень значимости и выборка имеет фиксированный объем. Остается произвол в выборе критической области. Покажем, что ее целесообразно построить так, чтобы мощность критерия была максимальной. Предварительно убедимся, что если вероятность ошибки второго рода

---

[*] Определение мощности дано в § 7.

(принять неправильную гипотезу) равна β, то мощность равна $1-\beta$. Действительно, если β — вероятность ошибки второго рода, т. е. события «принята нулевая гипотеза, причем справедлива конкурирующая», то мощность критерия равна $1-\beta$.

Пусть мощность $1-\beta$ возрастает; следовательно, уменьшается вероятность β совершить ошибку второго рода. Таким образом, чем мощность больше, тем вероятность ошибки второго рода меньше.

Итак, если уровень значимости уже выбран, то *критическую область следует строить так, чтобы мощность критерия была максимальной*. Выполнение этого требования должно обеспечить минимальную ошибку второго рода, что, конечно, желательно.

Замечание 1. Поскольку вероятность события «ошибка второго рода допущена» равна β, то вероятность противоположного события «ошибка второго рода не допущена» равна $1-\beta$, т. е. мощности критерия. Отсюда следует, что мощность критерия есть вероятность того, что не будет допущена ошибка второго рода.

Замечание 2. Ясно, что чем меньше вероятности ошибок первого и второго рода, тем критическая область «лучше». Однако при заданном объеме выборки уменьшить одновременно α и β невозможно; если уменьшить α, то β будет возрастать. Например, если принять $\alpha=0$, то будут приниматься все гипотезы, в том числе и неправильные, т. е. возрастает вероятность β ошибки второго рода.

Как же выбрать α наиболее целесообразно? Ответ на этот вопрос зависит от «тяжести последствий» ошибок для каждой конкретной задачи. Например, если ошибка первого рода повлечет большие потери, а второго рода — малые, то следует принять возможно меньшее α.

Если α уже выбрано, то, пользуясь теоремой Ю. Неймана и Э. Пирсона, изложенной в более полных курсах, можно построить критическую область, для которой β будет минимальным и, следовательно, мощность критерия максимальной.

Замечание 3. Единственный способ одновременного уменьшения вероятностей ошибок первого и второго рода состоит в увеличении объема выборок.

§ 8. Сравнение двух дисперсий нормальных генеральных совокупностей

На практике задача сравнения дисперсий возникает, если требуется сравнить точность приборов, инструментов, самих методов измерений и т. д. Очевидно, предпочтительнее тот прибор, инструмент и метод, который обеспечивает наименьшее рассеяние результатов измерений, т. е. наименьшую дисперсию.

Пусть генеральные совокупности X и Y распределены нормально. По независимым выборкам с объемами, соответственно равными n_1 и n_2, извлеченным из этих совокупностей, найдены исправленные выборочные дисперсии s_X^2 и s_Y^2. Требуется по исправленным дисперсиям при заданном уровне значимости α проверить нулевую гипотезу, состоящую в том, что генеральные дисперсии рассматриваемых совокупностей равны между собой:

$$H_0: D(X) = D(Y).$$

Учитывая, что исправленные дисперсии являются несмещенными оценками генеральных дисперсий (см. гл. XVI, § 13), т. е.

$$M[s_X^2] = D(X), \quad M[s_Y^2] = D(Y),$$

нулевую гипотезу можно записать так:

$$H_0: M[s_X^2] = M[s_Y^2].$$

Таким образом, требуется проверить, что математические ожидания исправленных выборочных дисперсий равны между собой. Такая задача ставится потому, что обычно исправленные дисперсии оказываются различными. Возникает вопрос: значимо (существенно) или незначимо различаются исправленные дисперсии?

Если окажется, что нулевая гипотеза справедлива, т. е. генеральные дисперсии одинаковы, то различие исправленных дисперсий незначимо и объясняется случайными причинами, в частности случайным отбором объектов выборки. Например, если различие исправленных выборочных дисперсий результатов измерений, выполненных двумя приборами, оказалось незначимым, то приборы имеют одинаковую точность.

Если нулевая гипотеза отвергнута, т. е. генеральные дисперсии неодинаковы, то различие исправленных дисперсий значимо и не может быть объяснено случайными причинами, а является следствием того, что сами генеральные дисперсии различны. Например, если различие исправленных выборочных дисперсий результатов измерений, произведенных двумя приборами, оказалось значимым, то точность приборов различна.

В качестве критерия проверки нулевой гипотезы о равенстве генеральных дисперсий примем отношение большей исправленной дисперсии к меньшей, т. е. случайную величину

$$F = S_б^2/S_м^2.$$

Величина F при условии справедливости нулевой гипотезы имеет распределение Фишера — Снедекора (см. гл. XII, § 15) со степенями свободы $k_1 = n_1 - 1$ и $k_2 = n_2 - 1$, где n_1 — объем выборки, по которой вычислена большая исправленная дисперсия, n_2 — объем выборки, по которой найдена меньшая дисперсия. Напомним, что распределение Фишера — Снедекора зависит только от чисел степеней свободы и не зависит от других параметров.

Критическая область строится в зависимости от вида конкурирующей гипотезы.

Первый случай. Нулевая гипотеза $H_0: D(X) = D(Y)$. Конкурирующая гипотеза $H_1: D(X) > D(Y)$.

В этом случае строят одностороннюю, а именно правостороннюю, критическую область, исходя из требования, чтобы вероятность попадания критерия F в эту область в предположении справедливости нулевой гипотезы была равна принятому уровню значимости:

$$P[F > F_{кр}(\alpha;\ k_1,\ k_2)] = \alpha.$$

Критическую точку $F_{кр}(\alpha;\ k_1,\ k_2)$ находят по таблице критических точек распределения Фишера — Снедекора (см. приложение 7), и тогда правосторонняя критическая область определяется неравенством $F > F_{кр}$, а область принятия нулевой гипотезы — неравенством $F < F_{кр}$.

Обозначим отношение большей исправленной дисперсии к меньшей, вычисленное по данным наблюдений, через $F_{набл}$ и сформулируем правило проверки нулевой гипотезы.

Правило 1. Для того чтобы при заданном уровне значимости проверить нулевую гипотезу $H_0: D(X) = D(Y)$ о равенстве генеральных дисперсий нормальных совокупностей при конкурирующей гипотезе $H_1: D(X) > D(Y)$, надо вычислить отношение большей исправленной дисперсии к меньшей, т. е.

$$F_{набл} = s_б^2/s_м^2,$$

и по таблице критических точек распределения Фишера — Снедекора, по заданному уровню значимости α и числам степеней свободы k_1 и k_2 (k_1 — число степеней свободы большей исправленной дисперсии) найти критическую точку $F_{набл}(\alpha;\ k_1,\ k_2)$.

Если $F_{\text{набл}} < F_{\text{кр}}$ — нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу. Если $F_{\text{набл}} > F_{\text{кр}}$ — нулевую гипотезу отвергают.

Пример 1. По двум независимым выборкам объемов $n_1 = 12$ и $n_2 = 15$, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей X и Y, найдены исправленные выборочные дисперсии $s^2_X = 11{,}41$ и $s^2_Y = 6{,}52$. При уровне значимости 0,05 проверить нулевую гипотезу $H_0: D(X) = D(Y)$ о равенстве генеральных дисперсий при конкурирующей гипотезе $H_1: D(X) > D(Y)$.

Решение. Найдем отношение большей исправленной дисперсии к меньшей:

$$F_{\text{набл}} = 11{,}41/6{,}52 = 1{,}75.$$

Конкурирующая гипотеза имеет вид $D(X) > D(Y)$, поэтому критическая область — правосторонняя.

По таблице приложения 7, по уровню значимости $\alpha = 0{,}05$ и числам степеней свободы $k_1 = 12 - 1 = 11$ и $k_2 = 15 - 1 = 14$ находим критическую точку $F_{\text{кр}}$ (0,05; 11, 14) = 2,56.

Так как $F_{\text{набл}} < F_{\text{кр}}$ — нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу о равенстве генеральных дисперсий.

Второй случай. Нулевая гипотеза $H_0: D(X) = D(Y)$. Конкурирующая гипотеза $H_1: D(X) \neq D(Y)$.

В этом случае строят двустороннюю критическую область, исходя из требования, чтобы вероятность попадания критерия в эту область в предположении справедливости нулевой гипотезы была равна принятому уровню значимости α.

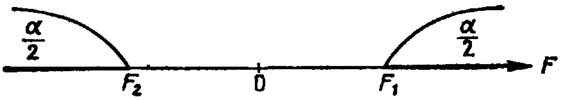

Рис. 24

Как выбрать границы критической области? Оказывается, что наибольшая мощность (вероятность попадания критерия в критическую область при справедливости конкурирующей гипотезы) достигается тогда, когда вероятность попадания критерия в каждый из двух интервалов критической области равна $\alpha/2$.

Таким образом, если обозначить через F_1 левую границу критической области и через F_2 — правую, то должны иметь место соотношения (рис. 24):

$$P(F < F_1) = \alpha/2, \quad P(F > F_2) = \alpha/2.$$

Мы видим, что достаточно найти критические точки, чтобы найти саму критическую область: $F < F_1$, $F > F_2$, а также область принятия нулевой гипотезы: $F_1 < F < F_2$. Как практически отыскать критические точки?

Правую критическую точку $F_2 = F_{кр}(\alpha/2;\ k_1,\ k_2)$ находят непосредственно по таблице критических точек распределения Фишера—Снедекора по уровню значимости $\alpha/2$ и степеням свободы k_1 и k_2.

Однако левых критических точек эта таблица не содержит и поэтому найти F_1 непосредственно по таблице невозможно. Существует способ, позволяющий преодолеть это затруднение. Однако мы не будем его описывать, поскольку можно левую критическую точку и не отыскивать. Ограничимся изложением того, как обеспечить попадание критерия F в двустороннюю критическую область с вероятностью, равной принятому уровню значимости α.

Оказывается, достаточно найти правую критическую точку F_2 при уровне значимости, вдвое меньшем заданного. Тогда не только вероятность попадания критерия в «правую часть» критической области (т. е. правее F_2) равна $\alpha/2$, но и вероятность попадания этого критерия в «левую часть» критической области (т. е. левее F_1) также равна $\alpha/2$. Так как эти события несовместны, то вероятность попадания рассматриваемого критерия во всю двустороннюю критическую область будет равна $\alpha/2 + \alpha/2 = \alpha$.

Таким образом, в случае конкурирующей гипотезы $H_1: D(X) \neq D(Y)$ достаточно найти критическую точку $F_2 = F_{кр}(\alpha/2;\ k_1,\ k_2)$.

Правило 2. Для того чтобы при заданном уровне значимости α проверить нулевую гипотезу о равенстве генеральных дисперсий нормально распределенных совокупностей при конкурирующей гипотезе $H_1: D(X) \neq D(Y)$, надо вычислить отношение большей исправленной дисперсии к меньшей, т. е. $F_{набл} = s_б^2/s_м^2$ и по таблице критических точек распределения Фишера—Снедекора по уровню значимости $\alpha/2$ (вдвое меньшем заданного) и числам степеней свободы k_1 и k_2 (k_1—число степеней свободы большей дисперсии) найти критическую точку $F_{кр}(\alpha/2;\ k_1,\ k_2)$.

Если $F_{набл} < F_{кр}$—нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу. Если $F_{набл} > F_{кр}$—нулевую гипотезу отвергают.

Пример 2. По двум независимым выборкам, объемы которых соответственно равны $n_1 = 10$ и $n_2 = 18$, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей X и Y, найдены исправленные выборочные дисперсии $s_X^2 = 1,23$ и $s_Y^2 = 0,41$. При уровне значимости $\alpha = 0,1$

проверить нулевую гипотезу о равенстве генеральных дисперсий при конкурирующей гипотезе $H_1: D(X) \neq D(Y)$.

Решение. Найдем отношение большей исправленной дисперсии к меньшей:

$$F_{\text{набл}} = 1{,}23/0{,}41 = 3.$$

По условию, конкурирующая гипотеза имеет вид $D(X) \neq D(Y)$, поэтому критическая область—двусторонняя.

По таблице, по уровню значимости, вдвое меньшем заданного, т. е. при $\alpha/2 = 0{,}1/2 = 0{,}05$, и числам степеней свободы $k_1 = 10 - 1 = 9$, $k_2 = 18 - 1 = 17$ находим критическую точку $F_{\text{кр}}(0{,}05,\ 9,\ 17) = 2{,}50$.

Так как $F_{\text{набл}} > F_{\text{кр}}$, нулевую гипотезу о равенстве генеральных дисперсий отвергаем. Другими словами, выборочные исправленные дисперсии различаются значимо. Например, если бы рассматриваемые дисперсии характеризовали точность двух методов измерений, то следует предпочесть тот метод, который имеет меньшую дисперсию (0,41).

§ 9. Сравнение исправленной выборочной дисперсии с гипотетической генеральной дисперсией нормальной совокупности

Пусть генеральная совокупность распределена нормально, причем генеральная дисперсия хотя и неизвестна, но имеются основания предполагать, что она равна гипотетическому (предполагаемому) значению σ_0^2. На практике σ_0^2 устанавливается на основании предшествующего опыта или теоретически.

Пусть из генеральной совокупности извлечена выборка объема n и по ней найдена исправленная выборочная дисперсия S^2 с $k = n - 1$ степенями свободы. Требуется по исправленной дисперсии при заданном уровне значимости проверить нулевую гипотезу, состоящую в том, что генеральная дисперсия рассматриваемой совокупности равна гипотетическому значению σ_0^2.

Учитывая, что S^2 является несмещенной оценкой генеральной дисперсии, нулевую гипотезу можно записать так:

$$H_0: M(S^2) = \sigma_0^2.$$

Итак, требуется проверить, что математическое ожидание исправленной дисперсии равно гипотетическому значению генеральной дисперсии. Другими словами, *требуется установить, значимо или незначимо различаются исправленная выборочная и гипотетическая генеральная дисперсии.*

На практике рассматриваемая гипотеза проверяется, если нужно проверить точность приборов, инструментов, станков, методов исследования и устойчивость технологических процессов. Например, если известна допустимая характеристика рассеяния контролируемого размера деталей, изготавливаемых станком-автоматом, равная σ_0^2, а найденная по выборке окажется значимо больше σ_0^2, то станок требует подналадки.

В качестве критерия проверки нулевой гипотезы примем случайную величину $(n-1)S^2/\sigma_0^2$. Эта величина случайная, потому что в разных опытах S^2 принимает различные, наперед неизвестные значения. Поскольку можно доказать, что она имеет распределение χ^2 с $k=n-1$ степенями свободы (см. гл. XII, § 13), обозначим ее через χ^2.

Итак, критерий проверки нулевой гипотезы

$$\chi^2=(n-1)S^2/\sigma_0^2.$$

Критическая область строится в зависимости от вида конкурирующей гипотезы.

Первый случай. Нулевая гипотеза $H_0:\sigma^2=\sigma_0^2$. Конкурирующая гипотеза $H_1:\sigma^2>\sigma_0^2$.

В этом случае строят правостороннюю критическую область, исходя из требования, чтобы вероятность попадания критерия в эту область в предположении справедливости нулевой гипотезы была равна принятому уровню значимости:

$$P[\chi^2>\chi^2_{\text{кр}}(\alpha;\ k)]=\alpha.$$

Критическую точку $\chi^2_{\text{кр}}(\alpha;\ k)$ находят по таблице критических точек распределения χ^2 (см. приложение 5), и тогда правосторонняя критическая область определяется неравенством $\chi^2>\chi^2_{\text{кр}}$, а область принятия нулевой гипотезы — неравенством $\chi^2<\chi^2_{\text{кр}}$.

Обозначим значение критерия, вычисленное по данным наблюдений, через $\chi^2_{\text{набл}}$ и сформулируем правило проверки нулевой гипотезы.

Правило 1. Для того чтобы при заданном уровне значимости α проверить нулевую гипотезу $H_0:\sigma^2=\sigma_0^2$ о равенстве неизвестной генеральной дисперсии нормальной совокупности гипотетическому значению при конкурирующей гипотезе $H_1:\sigma^2>\sigma_0^2$, надо вычислить наблюдаемое значение критерия $\chi^2_{\text{набл}}=(n-1)S^2/\sigma_0^2$ и по таблице критических точек распределения χ^2, по заданному уровню значимости α и числу степеней свободы $k=n-1$ найти критическую точку $\chi^2_{\text{кр}}(\alpha;\ k)$.

Если $\chi^2_{\text{набл}} < \chi^2_{\text{кр}}$ — нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу. Если $\chi^2_{\text{набл}} > \chi^2_{\text{кр}}$ — нулевую гипотезу отвергают.

Пример 1. Из нормальной генеральной совокупности извлечена выборка объема $n = 13$ и по ней найдена исправленная выборочная дисперсия $s^2 = 14{,}6$. Требуется при уровне значимости 0,01 проверить нулевую гипотезу $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2 = 12$, приняв в качестве конкурирующей гипотезы $H_1: \sigma^2 > 12$.

Решение. Найдем наблюденное значение критерия:

$$\chi^2_{\text{набл}} = (n-1)\,S^2/\sigma_0^2 = ((13-1)\cdot 14{,}6)/12 = 14{,}6.$$

По условию, конкурирующая гипотеза имеет вид $\sigma^2 > 12$, поэтому критическая область правосторонняя.

По таблице приложения 5, по уровню значимости 0,01 и числу степеней свободы $k = n - 1 = 13 - 1 = 12$ находим критическую точку $\chi^2_{\text{кр}}(0{,}01;\ 12) = 26{,}2$.

Так как $\chi^2_{\text{набл}} < \chi^2_{\text{кр}}$ — нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу. Другими словами, различие между исправленной дисперсией (14,6) и гипотетической генеральной дисперсией (12) — незначимое.

Второй случай. Нулевая гипотеза $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$. Конкурирующая гипотеза $H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$.

В этом случае строят двустороннюю критическую область, исходя из требования, чтобы вероятность попадания критерия в эту область в предположении справедливости нулевой гипотезы была равна принятому уровню значимости α.

Критические точки — левую и правую границы критической области — находят, требуя, чтобы вероятность попадания критерия в каждой из двух интервалов критической области была равна $\alpha/2$:

$$P\left[\chi^2 < \chi^2_{\text{лев.кр}}(\alpha/2;\ k)\right] = \alpha/2,$$
$$P\left[\chi^2 > \chi^2_{\text{прав.кр}}(\alpha/2;\ k)\right] = \alpha/2.$$

В таблице критических точек распределения χ^2 указаны лишь «правые» критические точки, поэтому возникает кажущееся затруднение в отыскании «левой» критической точки. Это затруднение легко преодолеть, если принять во внимание, что события $\chi^2 < \chi^2_{\text{лев.кр}}$ и $\chi^2 > \chi^2_{\text{лев.кр}}$ противоположны и, следовательно, сумма их вероятностей равна единице:

$$P(\chi^2 < \chi^2_{\text{лев.кр}}) + P(\chi^2 > \chi^2_{\text{лев.кр}}) = 1.$$

Отсюда

$$P(\chi^2 > \chi^2_{\text{лев.кр}}) = 1 - P(\chi^2 < \chi^2_{\text{лев.кр}}) = 1 - (\alpha/2).$$

Мы видим, что левую критическую точку можно искать как правую (и значит, ее можно найти по таблице), исходя из требования, чтобы вероятность попадания критерия в интервал, расположенный правее этой точки, была равна $1-(\alpha/2)$.

Правило 2. Для того чтобы при заданном уровне значимости α проверить нулевую гипотезу о равенстве неизвестной генеральной дисперсии σ^2 нормальной совокупности гипотетическому значению σ_0^2 при конкурирующей гипотезе $H_1:\sigma^2\neq\sigma_0^2$, надо вычислить наблюдаемое значение критерия $\chi^2_{\text{набл}}=(n-1)\,s^2/\sigma_0^2$ и по таблице найти левую критическую точку $\chi^2_{\text{кр}}(1-\alpha/2;\ k)$ и правую критическую точку $\chi^2_{\text{кр}}(\alpha/2;\ k)$.

Если $\chi^2_{\text{лев.кр}}<\chi^2_{\text{набл}}<\chi^2_{\text{прав.кр}}$ — нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу.

Если $\chi^2_{\text{набл}}<\chi^2_{\text{лев.кр}}$ или $\chi^2_{\text{набл}}>\chi^2_{\text{прав.кр}}$ — нулевую гипотезу отвергают.

Пример 2. Из нормальной генеральной совокупности извлечена выборка объема $n=13$ и по ней найдена исправленная выборочная дисперсия $s^2=10,3$. Требуется при уровне значимости 0,02 проверить нулевую гипотезу $H_0:\sigma^2=\sigma_0^2=12$, приняв в качестве конкурирующей гипотезы $H_1:\sigma^2\neq 12$.

Решение. Найдем наблюдавшееся значение критерия:

$$\chi^2_{\text{набл}}=(n-1)\,s^2/\sigma_0^2=((13-1)\cdot 10,3)/12=10,3.$$

Так как конкурирующая гипотеза имеет вид $\sigma^2\neq 12$, то критическая область — двусторонняя.

По таблице приложения 5 находим критические точки: левую — $\chi^2_{\text{кр}}(1-\alpha/2;\ k)=\chi^2_{\text{кр}}(1-0,02/2;\ 12)=\chi^2_{\text{кр}}(0,99;\ 12)=3,57$ и правую — $\chi^2_{\text{кр}}(\alpha/2;\ k)=\chi^2_{\text{кр}}(0,01;\ 12)=26,2$. Так как наблюдавшееся значение критерия принадлежит области принятия гипотезы ($3,57<10,3<26,2$) — нет оснований ее отвергнуть. Другими словами, исправленная выборочная дисперсия (10,3) незначимо отличается от гипотетической генеральной дисперсии (12).

Третий случай. Конкурирующая гипотеза $H_1:\sigma^2<\sigma_0^2$.

Правило 3. При конкурирующей гипотезе $H_1:\sigma^2<\sigma_0^2$ находят критическую точку $\chi^2_{\text{кр}}(1-\alpha;\ k)$.

Если $\chi^2_{\text{набл}}>\chi^2_{\text{кр}}(1-\alpha;\ k)$ — нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу.

Если $\chi^2_{\text{набл}}<\chi^2_{\text{кр}}(1-\alpha;\ k)$ — нулевую гипотезу отвергают.

Замечание 1. В случае, если найдена выборочная дисперсия $D_{\text{в}}$, в качестве критерия принимают случайную величину $\chi^{2\prime}=nD_{\text{в}}/\sigma_0^2$, которая имеет распределение χ^2 с $k=n-1$ степенями свободы, либо переходят к $s^2=[n/(n-1)]\,D_{\text{в}}$.

Замечание 2. Если число степеней свободы $k>30$, то критическую точку можно найти приближенно по равенству Уилсона —

Гилферти

$$\chi^2_{\text{кр}}(\alpha;\ k) = k[1-(2/9k)+z_\alpha\sqrt{(2/9k)}]^3,$$

где z_α определяют, используя функцию Лапласа (см. приложение 2), по равенству $\Phi(z_\alpha)=(1-2\alpha)/2$.

§ 10. Сравнение двух средних нормальных генеральных совокупностей, дисперсии которых известны (независимые выборки)

Пусть генеральные совокупности X и Y распределены нормально, причем их дисперсии известны (например, из предшествующего опыта или найдены теоретически). По независимым выборкам, объемы которых соответственно равны n и m, извлеченным из этих совокупностей, найдены выборочные средние $\overline{x}$ и $\overline{y}$.

Требуется по выборочным средним при заданном уровне значимости α проверить нулевую гипотезу, состоящую в том, что генеральные средние (математические ожидания) рассматриваемых совокупностей равны между собой, т. е.

$$H_0: M(X)=M(Y).$$

Учитывая, что выборочные средние являются несмещенными оценками генеральных средних (см. гл. XV, § 5), т. е. $M(\overline{X})=M(X)$ и $M(\overline{Y})=M(Y)$, нулевую гипотезу можно записать так:

$$H_0: M(\overline{X})=M(\overline{Y}).$$

Таким образом, требуется проверить, что математические ожидания выборочных средних равны между собой. Такая задача ставится потому, что, как правило, выборочные средние оказываются различными. Возникает вопрос: значимо или незначимо различаются выборочные средние?

Если окажется, что нулевая гипотеза справедлива, т. е. генеральные средние одинаковы, то различие выборочных средних незначимо и объясняется случайными причинами и, в частности, случайным отбором объектов выборки.

Например, если физические величины A и B имеют одинаковые истинные размеры, а средние арифметические $\bar{x}$ и $\bar{y}$ результатов измерений этих величин различны, то это различие незначимое.

Если нулевая гипотеза отвергнута, т. е. генеральные средние неодинаковы, то различие выборочных средних значимо и не может быть объяснено случайными причинами, а объясняется тем, что сами генеральные средние (математические ожидания) различны. Например, если среднее арифметическое $\bar{x}$ результатов измерений физической величины A значимо отличается от среднего арифметического $\bar{y}$ результатов измерений физической величины B, то это означает, что истинные размеры (математические ожидания) этих величин различны.

В качестве критерия проверки нулевой гипотезы примем случайную величину

$$Z=\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sigma(\bar{X}-\bar{Y})}=\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{D(X)/n+D(Y)/m}}.$$

Эта величина случайная, потому что в различных опытах $\bar{x}$ и $\bar{y}$ принимают различные, наперед неизвестные значения.

Пояснение. По определению среднего квадратического отклонения, $\sigma(\bar{X}-\bar{Y})=\sqrt{D(\bar{X}-\bar{Y})}$.

На основании свойства 4 (см. гл. VIII, § 5), $D(\bar{X}-\bar{Y})=D(\bar{X})+D(\bar{Y})$.

По формуле (*) (см. гл. VIII, § 9), $D(\bar{X})=D(X)/n$, $D(\bar{Y})=D(Y)/m$.

Следовательно,

$$\sigma(\bar{X}-\bar{Y})=\sqrt{D(X)/n+D(Y)/m}.$$

Критерий Z—нормированная нормальная случайная величина. Действительно, величина Z распределена нормально, так как является линейной комбинацией нормально распределенных величин $\bar{X}$ и $\bar{Y}$; сами эти величины распределены нормально как выборочные средние, найденные по выборкам, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей; Z—нормированная величина потому, что $M(Z)=0$; при справедливости нулевой гипотезы $\sigma(Z)=1$, поскольку выборки независимы.

Критическая область строится в зависимости от вида конкурирующей гипотезы.

Первый случай. Нулевая гипотеза H_0: $M(X) = M(Y)$. Конкурирующая гипотеза H_1: $M(X) \neq M(Y)$.

В этом случае строят двустороннюю критическую область, исходя из требования, чтобы вероятность попадания критерия в эту область в предположении справедливости нулевой гипотезы была равна принятому уровню значимости α.

Наибольшая мощность критерия (вероятность попадания критерия в критическую область при справедливости конкурирующей гипотезы) достигается тогда, когда

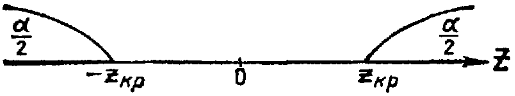

Рис. 25

«левая» и «правая» критические точки выбраны так, что вероятность попадания критерия в каждый из двух интервалов критической области равна $\alpha/2$:

$$P(Z < z_{\text{лев. кр}}) = \alpha/2, \quad P(Z > z_{\text{прав. кр}}) = \alpha/2.$$

Поскольку Z — нормированная нормальная величина, а распределение такой величины симметрично относительно нуля, критические точки симметричны относительно нуля.

Таким образом, если обозначить правую границу двусторонней критической области через $z_{кр}$, то левая граница равна $-z_{кр}$ (рис. 25).

Итак, достаточно найти правую границу, чтобы найти саму двустороннюю критическую область $Z < -z_{кр}$, $Z > z_{кр}$ и область принятия нулевой гипотезы $(-z_{кр}, z_{кр})$.

Покажем, как найти $z_{кр}$ — правую границу двусторонней критической области, пользуясь функцией Лапласа $\Phi(z)$. Известно, что функция Лапласа определяет вероятность попадания нормированной нормальной случайной величины, например Z, в интервал $(0, z)$:

$$P(0 < Z < z) = \Phi(z). \qquad (**)$$

Так как распределение Z симметрично относительно нуля, то вероятность попадания Z в интервал $(0, \infty)$ равна 1/2. Следовательно, если разбить этот интервал точкой $z_{кр}$ на интервалы $(0, z_{кр})$ и $(z_{кр}, \infty)$, то, по теореме сложения,

$$P(0 < Z < z_{кр}) + P(Z > z_{кр}) = 1/2, \qquad (***)$$

В силу (*) и (**) получим

$$\Phi(z_{кр}) + \alpha/2 = 1/2.$$

Следовательно,

$$\Phi(z_{кр}) = (1-\alpha)/2.$$

Отсюда заключаем: для того чтобы найти правую границу двусторонней критической области ($z_{кр}$), достаточно найти значение аргумента функции Лапласа, которому соответствует значение функции, равное $(1-\alpha)/2$. Тогда двусторонняя критическая область определяется неравенствами

$$Z < -z_{кр}, \quad Z > z_{кр},$$

или равносильным неравенством $|Z| > z_{кр}$, а область принятия нулевой гипотезы — неравенством — $z_{кр} < Z < z_{кр}$, или равносильным неравенством $|Z| < z_{кр}$.

.Обозначим значение критерия, вычисленное по данным наблюдений, через $Z_{набл}$ и сформулируем правило проверки нулевой гипотезы.

Правило 1. Для того чтобы при заданном уровне значимости α проверить нулевую гипотезу H_0: $M(X) = M(Y)$ о равенстве математических ожиданий двух нормальных генеральных совокупностей с известными дисперсиями при конкурирующей гипотезе H_1: $M(X) \neq M(Y)$, надо вычислить наблюденное значение критерия $Z_{набл} = \dfrac{\bar{x}-\bar{y}}{\sqrt{D(X)/n + D(Y)/m}}$ и по таблице функции Лапласа найти критическую точку по равенству $\Phi_{z_{кр}} = (1-\alpha)/2$.

Если $|Z_{набл}| < z_{кр}$ — нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу.

Если $|Z_{набл}| > z_{кр}$ — нулевую гипотезу отвергают.

Пример 1. По двум независимым выборкам, объемы которых соответственно равны $n = 60$ и $m = 50$, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей, найдены выборочные средние $\bar{x} = 1250$ и $\bar{y} = 1275$. Генеральные дисперсии известны: $D(X) = 120$, $D(Y) = 100$. При уровне значимости 0,01 проверить нулевую гипотезу H_0: $M(X) = M(Y)$, при конкурирующей гипотезе H_1: $M(X) \neq M(Y)$.

Решение. Найдем наблюдаемое значение критерия:

$$Z_{набл} = \frac{\bar{x}-\bar{y}}{\sqrt{D(X)/n + D(Y)/m}} = \frac{1250-1275}{\sqrt{120/60 + 100/50}} = -12{,}5.$$

По условию, конкурирующая гипотеза имеет вид $M(X) \neq M(Y)$, поэтому критическая область — двусторонняя.

Найдем правую критическую точку:

$$\Phi(z_{кр}) = (1-\alpha)/2 = (1-0{,}01)/2 = 0{,}495.$$

По таблице функции Лапласа (см. приложение 2) находим $z_{кр} = 2{,}58$.

Так как $|Z_{набл}| > z_{кр}$ — нулевую гипотезу отвергаем. Другими словами, выборочные средние различаются значимо.

Второй случай. Нулевая гипотеза H_0: $M(X) = M(Y)$. Конкурирующая гипотеза H_1: $M(X) > M(Y)$.

На практике такой случай имеет место, если профессиональные соображения позволяют предположить, что генеральная средняя одной совокупности больше генеральной средней другой. Например, если введено усовершенствование технологического процесса, то естественно допустить, что оно приведет к увеличению выпуска продукции. В этом случае строят правостороннюю критическую область, исходя из требования, чтобы вероятность попадания критерия в эту область в предположении справедливости нулевой гипотезы была равна принятому уровню значимости (рис. 26):

Рис. 26

$$P(Z > z_{кр}) = \alpha. \qquad (****)$$

Покажем, как найти критическую точку с помощью функции Лапласа. Воспользуемся соотношением (***):

$$P(0 < Z < z_{кр}) + P(Z > z_{кр}) = 1/2.$$

В силу (**) и (****) имеем

$$\Phi(z_{кр}) + \alpha = 1/2.$$

Следовательно,

$$\Phi(z_{кр}) = (1-2\alpha)/2.$$

Отсюда заключаем: для того чтобы найти границу правосторонней критической области ($z_{кр}$), достаточно найти значение аргумента функции Лапласа, которому соответствует значение функции, равное $(1-2\alpha)/2$. Тогда правосторонняя критическая область определяется неравенством $Z > z_{кр}$, а область принятия нулевой гипотезы — неравенством $Z < z_{кр}$.

Правило 2. Для того чтобы при заданном уровне значимости α проверить нулевую гипотезу H_0: $M(X) = M(Y)$

о равенстве математических ожиданий двух нормальных генеральных совокупностей с известными дисперсиями при конкурирующей гипотезе H_1: $M(X) > M(Y)$, надо вычислить наблюдавшееся значение критерия $Z_{\text{набл}} = \frac{\bar{x}-\bar{y}}{\sqrt{D(X)/n+D(Y)/m}}$ и по таблице функции Лапласа найти критическую точку из равенства $\Phi(z_{\text{кр}}) = (1-2\alpha)/2$.

Если $Z_{\text{набл}} < z_{\text{кр}}$ — нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу.

Если $Z_{\text{набл}} > z_{\text{кр}}$ — нулевую гипотезу отвергают.

Пример 2. По двум независимым выборкам, объемы которых соответственно равны $n = 10$ и $m = 10$, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей, найдены выборочные средние $\bar{x} = 14{,}3$ и $\bar{y} = 12{,}2$. Генеральные дисперсии известны: $D(X) = 22$, $D(Y) = 18$. При уровне значимости 0,05 проверить нулевую гипотезу H_0: $M(X) = M(Y)$, при конкурирующей гипотезе H_1: $M(X) > M(Y)$.

Решение. Найдем наблюдаемое значение критерия:

$$Z_{\text{набл}} = \frac{14{,}3-12{,}2}{\sqrt{22/10+18/10}} = 1{,}05.$$

По условию, конкурирующая гипотеза имеет вид $M(X) > M(Y)$, поэтому критическая область — правосторонняя.

По таблице функции Лапласа находим $z_{\text{кр}} = 1{,}64$.

Так как $Z_{\text{набл}} < z_{\text{кр}}$ — нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу. Другими словами, выборочные средние различаются незначимо.

Третий случай. Нулевая гипотеза H_0: $M(X) = M(Y)$. Конкурирующая гипотеза H_1. $M(X) < M(Y)$.

В этом случае строят левостороннюю критическую область, исходя из требования, чтобы вероятность попадания критерия в эту область в предположении справедливости нулевой гипотезы была равна принятому уровню значимости (рис. 27):

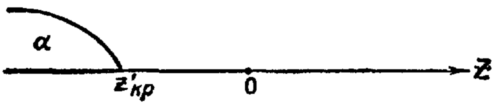

Рис. 27

$$P(Z < z'_{\text{кр}}) = \alpha.$$

Приняв во внимание, что критерий Z распределен симметрично относительно нуля, заключаем, что искомая критическая точка $z'_{\text{кр}}$ симметрична такой точке $z_{\text{кр}} > 0$, для которой $P(Z > z_{\text{кр}}) = \alpha$, т. е. $z'_{\text{кр}} = -z_{\text{кр}}$. Таким образом, для того чтобы найти точку $z'_{кр}$, достаточно сначала найти «вспомогательную точку» $z_{кр}$ так, как описано во втором случае, а затем взять найденное значение со знаком минус. Тогда левосторонняя критическая область определяется неравенством $Z < -z_{кр}$, а область принятия нулевой гипотезы — неравенством $Z > -z_{кр}$.

Правило 3. При конкурирующей гипотезе H_1: $M(X) < M(Y)$ надо вычислить $Z_{набл}$ и сначала по таблице функции Лапласа найти «вспомогательную точку» $z_{кр}$ по равенству $\Phi(z_{кр}) = (1-2\alpha)/2$, а затем положить $z'_{кр} = -z_{кр}$.

Если $Z_{набл} > -z_{кр}$ — нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу.

Если $Z_{набл} < -z_{кр}$ — нулевую гипотезу отвергают.

Пример 3. По двум независимым выборкам, объемы которых соответственно равны $n=50$ и $m=50$, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей, найдены выборочные средние $\bar{x}=142$ и $\bar{y}=150$. Генеральные дисперсии известны: $D(X)=28{,}2$, $D(Y)=22{,}8$. При уровне значимости 0,01 проверить нулевую гипотезу H_0: $M(X)=M(Y)$, при конкурирующей гипотезе H_1: $M(X) < M(Y)$.

Решение. Подставив данные задачи в формулу для вычисления наблюдаемого значения критерия, получим $Z_{набл}=-8$.

По условию, конкурирующая гипотеза имеет вид $M(X) < M(Y)$, поэтому критическая область — левосторонняя.

Найдем «вспомогательную точку» $z_{кр}$:

$$\Phi(z_{кр}) = (1-2\alpha)/2 = (1-2\cdot 0{,}01)/2 = 0{,}49.$$

По таблице функции Лапласа находим $z_{кр}=2{,}33$. Следовательно, $z'_{кр} = -z_{кр} = -2{,}33$.

Так как $Z_{набл} < -z_{кр}$ — нулевую гипотезу отвергаем. Другими словами, выборочная средняя $\bar{x}$ значимо меньше выборочной средней $\bar{y}$.

§ 11. Сравнение двух средних произвольно распределенных генеральных совокупностей (большие независимые выборки)

В предыдущем параграфе предполагалось, что генеральные совокупности X и Y распределены нормально, а их дисперсии известны. При этих предположениях в случае справедливости нулевой гипотезы о равенстве средних и независимых выборках критерий Z распределен точно нормально с параметрами 0 и 1.

Если хотя бы одно из приведенных требований не выполняется, метод сравнения средних, описанный в § 10, неприменим.

Однако если независимые выборки имеют большой объем (не менее 30 каждая), то выборочные средние распределены приближенно нормально, а выборочные дисперсии являются достаточно хорошими оценками генеральных дисперсий и в этом смысле их можно считать известными приближенно. В итоге критерий

$$Z' = \frac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sqrt{D_{\text{в}}(X)/n+D_{\text{в}}(Y)/m}}$$

распределен приближенно нормально с параметрами $M(Z')=0$ (при условии справедливости нулевой гипотезы) и $\sigma(Z')=1$ (если выборки независимы).

Итак, если: 1) генеральные совокупности распределены нормально, а дисперсии их неизвестны; 2) генеральные совокупности не распределены нормально и дисперсии их неизвестны, причем выборки имеют большой объем и независимы,— можно сравнивать средние так, как описано в § 10, заменив точный критерий Z приближенным критерием Z'. В этом случае наблюдаемое значение приближенного критерия таково:

$$Z'_{\text{набл}} = \frac{\overline{x}-\overline{y}}{\sqrt{D_{\text{в}}(X)/n+D_{\text{в}}(Y)/m}}\,.$$

Замечание. Поскольку рассматриваемый критерий — приближенный, к выводам, полученным по этому критерию, следует относиться осторожно.

Пример. По двум независимым выборкам, объемы которых соответственно равны $n=100$ и $m=120$, найдены выборочные средние $\overline{x}=32,4$, $\overline{y}=30,1$ и выборочные дисперсии $D_{\text{в}}(X)=15,0$, $D_{\text{в}}(Y)=25,2$. При уровне значимости 0,05 проверить нулевую гипотезу H_0: $M(X)=M(Y)$, при конкурирующей гипотезе H_1: $M(X)\neq M(Y)$.

Решение. Подставив данные задачи в формулу для вычисления наблюдаемого значения приближенного критерия, получим $Z'_{\text{набл}}=3,83$.

По условию, конкурирующая гипотеза имеет вид $M(X) > M(Y)$, поэтому критическая область — правосторонняя.

Найдем критическую точку по равенству

$$\Phi(z_{\text{кр}})=(1-2\alpha)/2=(1-2\cdot 0,05)/2=0,45.$$

По таблице функции Лапласа находим $z_{\text{кр}}=1,64$.

Так как $Z_{\text{набл}} > z_{\text{кр}}$ — нулевую гипотезу отвергаем. Другими словами, выборочные средние различаются значимо.

§ 12. Сравнение двух средних нормальных генеральных совокупностей, дисперсии которых неизвестны и одинаковы (малые независимые выборки)

Пусть генеральные совокупности X и Y распределены нормально, причем их дисперсии неизвестны. Например, по выборкам малого объема нельзя получить хорошие оценки генеральных дисперсий. По этой причине метод сравнения средних, изложенный в § 11, применить нельзя.

Однако если дополнительно предположить, что неизвестные генеральные дисперсии равны между собой, то можно построить критерий (Стьюдента) сравнения средних. Например, если сравниваются средние размеры двух партий деталей, изготовленных на одном и том же станке, то естественно допустить, что дисперсии контролируемых размеров одинаковы.

Если же нет оснований считать дисперсии одинаковыми, то, прежде чем сравнивать средние, следует, пользуясь критерием Фишера—Снедекора (см. § 8), предварительно проверить гипотезу о равенстве генеральных дисперсий.

Итак, в предположении, что генеральные дисперсии одинаковы, требуется проверить нулевую гипотезу H_0: $M(X)=M(Y)$. Другими словами, требуется установить, значимо или незначимо различаются выборочные средние $\bar{x}$ и $\bar{y}$, найденные по независимым малым выборкам объемов n и m.

В качестве критерия проверки нулевой гипотезы примем случайную величину

$$T=\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{(n-1)S_x^2+(m-1)S_y^2}}\sqrt{\frac{nm(n+m-2)}{n+m}}.$$

Доказано, что величина T при справедливости нулевой гипотезы имеет t-распределение Стьюдента с $k=n+m-2$ степенями свободы.

Критическая область строится в зависимости от вида конкурирующей гипотезы.

Первый случай. Нулевая гипотеза H_0: $M(X)=M(Y)$. Конкурирующая гипотеза H_1: $M(X)\neq M(Y)$.

В этом случае строят двустороннюю критическую область, исходя из требования, чтобы вероятность попадания критерия T в эту область в предположении справедливости нулевой гипотезы была равна принятому уровню значимости α.

Наибольшая мощность критерия (вероятность попадания критерия в критическую область при справедливости конкурирующей гипотезы) достигается тогда, когда «левая» и «правая» критические точки выбраны так, что вероятность попадания критерия в каждый из двух интервалов двусторонней критической области равна $\alpha/2$:

$$P(T < t_{\text{лев. кр}}) = \alpha/2, \quad P(T > t_{\text{прав. кр}}) = \alpha/2.$$

Поскольку величина T имеет распределение Стьюдента, а оно симметрично относительно нуля, то и критические точки симметричны относительно нуля. Таким образом, если обозначить правую границу двусторонней критической области через $t_{\text{двуст. кр}}(\alpha;\ k)$, то левая граница равна $-t_{\text{двуст. кр}}(\alpha;\ k)$. Итак, достаточно найти правую границу двусторонней критической области, чтобы найти саму двустороннюю критическую область: $T < -t_{\text{двуст. кр}}(\alpha;\ k)$, $T > t_{\text{двуст. кр}}(\alpha;\ k)$ и область принятия нулевой гипотезы: $[-t_{\text{двуст. кр}}(\alpha;\ k),\ t_{\text{двуст. кр}}(\alpha;\ k)]$.

Обозначим значение критерия, вычисленное по данным наблюдений, через $T_{\text{набл}}$ и сформулируем правило проверки нулевой гипотезы.

Правило 1. Для того чтобы при заданном уровне значимости α проверить нулевую гипотезу H_0: $M(X) = M(Y)$ о равенстве математических ожиданий двух нормальных совокупностей с неизвестными, но одинаковыми дисперсиями (в случае независимых малых выборок) при конкурирующей гипотезе H_1: $M(X) \neq M(Y)$, надо вычислить наблюдаемое значение критерия:

$$T_{\text{набл}} = \frac{\overline{x} - \overline{y}}{\sqrt{(n-1)s_X^2 + (m-1)s_Y^2}} \sqrt{\frac{nm(n+m-2)}{n+m}}$$

и по таблице критических точек распределения Стьюдента, по заданному уровню значимости α (помещенному в верхней строке таблицы) и числу степеней свободы $k = n + m - 2$ найти критическую точку $t_{\text{двуст. кр}}(\alpha;\ k)$.

Если $|T_{\text{набл}}| < t_{\text{двуст. кр}}(\alpha;\ k)$ — отвергнуть нулевую гипотезу нет оснований.

Если $|T_{\text{набл}}| > t_{\text{двуст. кр}}(\alpha;\ k)$ — нулевую гипотезу отвергают.

Пример. По двум независимым малым выборкам, объемы которых соответственно равны $n=5$ и $m=6$, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей X и Y, найдены выборочные средние $\overline{x}=3{,}3$, $\overline{y}=2{,}48$ и исправленные дисперсии $s_X^2=0{,}25$ и $s_Y^2=0{,}108$. При уровне значимости 0,05 проверить нулевую гипотезу $H_0: M(X)=M(Y)$, при конкурирующей гипотезе $H_1: M(X) \neq M(Y)$.

Решение. Так как выборочные дисперсии различны, проверим предварительно нулевую гипотезу о равенстве генеральных дисперсий, пользуясь критерием Фишера—Снедекора (см. § 8).

Найдем отношение большей исправленной дисперсии к меньшей:

$$F_{\text{набл}}=0{,}25/0{,}108=2{,}31.$$

Дисперсия s_X^2 значительно больше дисперсии s_Y^2, поэтому в качестве конкурирующей примем гипотезу $H_1: D(X) > D(Y)$. В этом случае критическая область — правосторонняя. По таблице, по уровню значимости $\alpha=0{,}05$ и числам степеней свободы $k_1=5-1=4$, $k_2=6-1=5$ находим критическую точку $F_{\text{кр}}(0{,}05;\ 4;\ 5)=5{,}19$.

Так как $F_{\text{набл}} < F_{\text{кр}}$ — нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу о равенстве генеральных дисперсий.

Поскольку предположение о равенстве генеральных дисперсий выполняется, сравним средние.

Вычислим наблюдаемое значение критерия Стьюдента:

$$T_{\text{набл}}=\frac{\overline{x}-\overline{y}}{\sqrt{ns_X^2+ms_Y^2}}\sqrt{\frac{nm(n+m-2)}{n+m}}.$$

Подставив числовые значения величин, входящих в эту формулу, получим $T_{\text{набл}}=3{,}27$.

По условию, конкурирующая гипотеза имеет вид $M(X) \neq M(Y)$, поэтому критическая область — двусторонняя. По уровню значимости 0,05 и числу степеней свободы $k=5+6-2=9$ находим по таблице (см. приложение 6) критическую точку $t_{\text{двуст. кр}}(0{,}05;\ 9)=2{,}26$.

Так как $T_{\text{набл}} > t_{\text{двуст. кр}}$ — нулевую гипотезу о равенстве генеральных средних отвергаем. Другими словами, выборочные средние различаются значимо.

Второй случай. Нулевая гипотеза $H_0: M(X)=M(Y)$. Конкурирующая гипотеза $H_1: M(X) > M(Y)$.

В этом случае строят правостороннюю критическую область, исходя из требования, чтобы вероятность попадания критерия T в эту область в предположении справедливости нулевой гипотезы была равна принятому уровню значимости:

$$P(T > t_{\text{правост. кр}})=\alpha.$$

Критическую точку $t_{\text{правост. кр}}(\alpha;\ k)$ находят по таблице приложения 6, по уровню значимости α, помещенному в нижней строке таблицы, и по числу степеней свободы $k=n+m-2$.

Если $T_{\text{набл}} < t_{\text{правост. кр}}$ — нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу.

Если $T_{\text{набл}} > t_{\text{правост. кр}}$ — нулевую гипотезу отвергают.

Третий случай. Нулевая гипотеза $H_0: M(X) = M(Y)$. Конкурирующая гипотеза $H_1: M(X) < M(Y)$.

В этом случае строят левостороннюю критическую область, исходя из требования, чтобы вероятность попадания критерия в эту область в предположении справедливости нулевой гипотезы была равна принятому уровню значимости:

$$P(T < t_{\text{левост. кр}}) = \alpha.$$

В силу симметрии распределения Стьюдента относительно нуля $t_{\text{левост. кр}} = -t_{\text{правост. кр}}$. Поэтому сначала находят «вспомогательную» критическую точку $t_{\text{правост. кр}}$ так, как описано во втором случае, и полагают $t_{\text{левост. кр}} = -t_{\text{правост. кр}}$.

Если $T_{\text{набл}} > -t_{\text{правост. кр}}$ — отвергнуть нулевую гипотезу нет оснований.

Если $T_{\text{набл}} < -t_{\text{правост. кр}}$ — нулевую гипотезу отвергают.

§ 13. Сравнение выборочной средней с гипотетической генеральной средней нормальной совокупности

А. Дисперсия генеральной совокупности известна. Пусть генеральная совокупность X распределена нормально, причем генеральная средняя a хотя и неизвестна, но имеются основания предполагать, что она равна гипотетическому (предполагаемому) значению a_0. Например, если X — совокупность размеров x_i партии деталей, изготовляемых станком-автоматом, то можно предположить, что генеральная средняя a этих размеров равна проектному размеру a_0. Чтобы проверить это предположение, находят выборочную среднюю $\overline{x}$ и устанавливают, значимо или незначимо различаются $\overline{x}$ и a_0. Если различие окажется незначимым, то станок обеспечивает в среднем проектный размер; если различие значимое, то станок требует подналадки.

Предположим, что дисперсия генеральной совокупности известна, например, из предшествующего опыта, или найдена теоретически, или вычислена по выборке большого объема (по большой выборке можно получить достаточно хорошую оценку дисперсии).

Итак, пусть из нормальной генеральной совокупности извлечена выборка объема n и по ней найдена выборочная средняя $\overline{x}$, причем генеральная дисперсия σ^2 известна. Требуется по выборочиой средней при заданном уровне значимости проверить нулевую гипотезу $H_0: a = a_0$ о равенстве генеральной средней a гипотетическому значению a_0.

Учитывая, что выборочная средняя является несмещенной оценкой генеральной средней (см. гл. XVI, § 5), т. е. $M(\overline{X}) = a$, нулевую гипотезу можно записать так: $M(\overline{X}) = a_0$.

Таким образом, требуется проверить, что математическое ожидание выборочной средней равно гипотетической генеральной средней. Другими словами, надо установить, значимо или незначимо различаются выборочная и генеральная средние.

В качестве критерия проверки нулевой гипотезы примем случайную величину

$$U = (\overline{X} - a_0)/\sigma(\overline{X}) = (\overline{X} - a_0)\sqrt{n}/\sigma,$$

которая распределена нормально, причем при справедливости нулевой гипотезы $M(U) = 0$, $\sigma(U) = 1$.

Поскольку здесь критическая область строится в зависимости от вида конкурирующей гипотезы, так же как в § 10, ограничимся формулировкой правил проверки нулевой гипотезы, обозначив значение критерия U, вычисленное по данным наблюдений, через $U_{\text{набл}}$.

Правило 1. Для того чтобы при заданном уровне значимости α проверить нулевую гипотезу $H_0: a = a_0$ о равенстве генеральной средней a нормальной совокупности с известной дисперсией σ^2 гипотетическому значению a_0 при конкурирующей гипотезе $H_1: a \neq a_0$, надо вычислить наблюдаемое значение критерия:

$$U_{\text{набл}} = (\overline{x} - a_0)\sqrt{n}/\sigma$$

и по таблице функции Лапласа найти критическую точку двусторонней критической области по равенству

$$\Phi(u_{\text{кр}}) = (1 - \alpha)/2.$$

Если $|U_{\text{набл}}| < u_{\text{кр}}$ — нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу.

Если $|U_{\text{набл}}| > u_{\text{кр}}$ — нулевую гипотезу отвергают.

Правило 2. При конкурирующей гипотезе $H_1: a > a_0$ критическую точку правосторонней критической области находят по равенству

$$\Phi(u_{кр}) = (1-2\alpha)/2.$$

Если $U_{набл} < u_{кр}$ — нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу. Если $U_{набл} > u_{кр}$ — нулевую гипотезу отвергают.

Правило 3. При конкурирующей гипотезе $H_1: a < a_0$ сначала находят критическую точку $u_{кр}$ по правилу 2, а затем полагают границу левосторонней критической области $u'_{кр} = -u_{кр}$.

Если $U_{набл} > -u_{кр}$ — нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу.

Если $U_{набл} < -u_{кр}$ — нулевую гипотезу отвергают.

Пример 1. Из нормальной генеральной совокупности с известным средним квадратическим отклонением $\sigma = 0{,}36$ извлечена выборка объема $n = 36$ и по ней найдена выборочная средняя $\bar{x} = 21{,}6$. Требуется при уровне значимости 0,05 проверить нулевую гипотезу $H_0: a = a_0 = 21$, при конкурирующей гипотезе $H_1: a \neq 21$.

Решение. Найдем наблюдаемое значение критерия:

$$U_{набл} = (\bar{x} - a_0)\sqrt{n}/\sigma = (21{,}6-21)\sqrt{36}/0{,}36 = 10.$$

По условию, конкурирующая гипотеза имеет вид $a \neq a_0$, поэтому критическая область — двусторонняя.

Найдем критическую точку:

$$\Phi(u_{кр}) = (1-\alpha)/2 = (1-0{,}05)/2 = 0{,}475.$$

По таблице функции Лапласа находим $u_{кр} = 1{,}96$.

Так как $U_{набл} > u_{кр}$ — нулевую гипотезу отвергаем. Другими словами, выборочная и гипотетическая генеральная средние различаются значимо.

Пример 2. По данным примера 1 проверить нулевую гипотезу $H_0: a = 21$ при конкурирующей гипотезе $a > 21$.

Решение. Так как конкурирующая гипотеза имеет вид $a > 21$, критическая область — правосторонняя.

Найдем критическую точку из равенства

$$\Phi(u_{кр}) = (1-2\alpha)/2 = (1-2\cdot 0{,}05)/2 = 0{,}45.$$

По таблице функции Лапласа находим $u_{кр} = 1{,}65$.

Так как $U_{набл} = 10 > u_{кр}$ — нулевую гипотезу отвергаем; различие между выборочной и гипотетической генеральной средней — значимое.

Заметим, что в примере 2 нулевую гипотезу можно было отвергнуть сразу, поскольку она была отвергнута в примере 1 при двусторонней критической области; полное решение приведено в учебных целях.

Б. Дисперсия генеральной совокупности неизвестна. Если дисперсия генеральной совокупности неизвестна (например, в случае малых выборок), то в качестве критерия проверки нулевой гипотезы принимают случайную величину

$$T = (\bar{X} - a_0)\sqrt{n}/S,$$

где S — «исправленное» среднее квадратическое отклонение. Величина T имеет распределение Стьюдента с $k=n-1$ степенями свободы.

Критическая область строится в зависимости от вида конкурирующей гипотезы. Поскольку это делается так, как описано выше, ограничимся правилами проверки нулевой гипотезы.

Правило 1. Для того чтобы при заданном уровне значимости α проверить нулевую гипотезу $H_0: a=a_0$ о равенстве неизвестной генеральной средней a (нормальной совокупности с неизвестной дисперсией) гипотетическому значению a_0 при конкурирующей гипотезе $H_1: a \neq a_0$, надо вычислить наблюдаемое значение критерия:

$$T_{\text{набл}} = (\bar{x} - a_0)\sqrt{n}/s$$

и по таблице критических точек распределения Стьюдента, по заданному уровню значимости α, помещенному в верхней строке таблицы, и числу степеней свободы $k=n-1$ найти критическую точку $t_{\text{двуст. кр}}(\alpha;\ k)$.

Если $|T_{\text{набл}}| < t_{\text{двуст. кр}}$ — нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу.

Если $|T_{\text{набл}}| > t_{\text{двуст. кр}}$ — нулевую гипотезу отвергают.

Правило 2. При конкурирующей гипотезе $H_1: a > a_0$ по уровню значимости α, помещенному в нижней строке таблицы приложения 6, и числу степеней свободы $k=n-1$ находят критическую точку $t_{\text{правост. кр}}(\alpha;\ k)$ правосторонней критической области.

Если $T_{\text{набл}} < t_{\text{правост. кр}}$ — нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу.

Правило 3. При конкурирующей гипотезе $H_1: a < a_0$, сначала находят «вспомогательную» критическую точку $t_{\text{правост. кр}}(\alpha;\ k)$ и полагают границу левосторонней критической области $t_{\text{левост. кр}} = -t_{\text{правост. кр}}$.

Если $T_{\text{набл}} > -t_{\text{правост. кр}}$ — нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу.

Если $T_{\text{набл}} < -t_{\text{правост. кр}}$ — нулевую гипотезу отвергают.

Пример 3. По выборке объема $n=20$, извлеченной из нормальной генеральной совокупности, найдены выборочная средняя $\bar{x}=16$ и «исправленное» среднее квадратическое отклонение $s=4,5$. Требуется при уровне значимости 0,05 проверить нулевую гипотезу $H_0: a = a_0 = 15$, при конкурирующей гипотезе $H_1: a \neq 15$.

Решение. Вычислим наблюдаемое значение критерия:

$$T_{\text{набл}} = (\bar{x} - a_0)\sqrt{n}/s = (16 - 15) \cdot \sqrt{20}/4,5 = 0,99.$$

По условию, конкурирующая гипотеза имеет вид $a \neq a_0$, поэтому критическая область — двусторонняя.

По таблице критических точек распределения Стьюдента, по уровню значимости $\alpha = 0,05$, помещенному в верхней строке таблицы, и по числу степеней свободы $k = 20 - 1 = 19$ находим критическую точку $t_{\text{двуст. кр}}(0,05; 19) = 2,09$.

Так как $|T_{\text{набл}}| < t_{\text{двуст. кр}}$ — нет оснований, чтобы отвергнуть нулевую гипотезу; выборочная средняя незначимо отличается от гипотетической генеральной средней.

§ 14. Связь между двусторонней критической областью и доверительным интервалом

Легко показать, что, отыскивая двустороннюю критическую область при уровне значимости α, тем самым находят и соответствующий доверительный интервал с надежностью $\gamma = 1 - \alpha$. Например, в § 13, проверяя нулевую гипотезу $H_0: a = a_0$ при $H_1: a \neq a_0$, мы требовали, чтобы вероятность попадания критерия $U = (\bar{x} - a)\sqrt{n}/\sigma$ в двустороннюю критическую область была равна уровню значимости α, следовательно, вероятность попадания критерия в область принятия гипотезы $(-u_{\text{кр}}, u_{\text{кр}})$ равна $1 - \alpha = \gamma$. Другими словами, с надежностью γ выполняется неравенство

$$-u_{\text{кр}} < (\bar{x} - a)\sqrt{n}/\sigma < u_{\text{кр}},$$

или равносильное неравенство

$$\bar{x} - u_{\text{кр}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{x} + u_{\text{кр}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

где $\Phi(u_{\text{кр}}) = \gamma/2$.

Мы получили доверительный интервал для оценки математического ожидания a нормального распределения при известном σ с надежностью γ (см. гл. XVI, § 15).

Замечание. Хотя отыскание двусторонней критической области и доверительного интервала приводит к одинаковым результатам, их истолкование различно: двусторонняя критическая область определяет границы (критические точки), между которыми заключено $(1 - \alpha)\%$ числа наблюдаемых критериев, найденных при повторении опытов; доверительный же интервал определяет границы (концы интервала), между которыми в $\gamma = (1 - \alpha)\%$ опытов заключено истинное значение оцениваемого параметра.

§ 15. Определение минимального объема выборки при сравнении выборочной и гипотетической генеральной средних

На практике часто известна величина (точность) $\delta > 0$, которую не должна превышать абсолютная величина разности между выборочной и гипотетической генеральной средними. Например, обычно требуют, чтобы средний размер изготовляемых деталей отличался от проектного не более чем на заданное δ. Возникает вопрос: каким должен быть минимальный объем выборки, чтобы это требование с вероятностью $\gamma = 1 - \alpha$ (α — уровень значимости) выполнялось?

Поскольку задача отыскания доверительного интервала для оценки математического ожидания нормального распределения при известном σ и задача отыскания двусторонней критической области для проверки гипотезы о равенстве математического ожидания (генеральной средней) гипотетическому значению (см. § 13, п. А) сводятся одна к другой (см. § 14), воспользуемся формулой (см. гл. XVI, § 15)

$$n = u_{\text{кр}}^2 \sigma^2 / \delta^2,$$

где $u_{\text{кр}}$ находят по равенству $\Phi(u_{\text{кр}}) = \gamma/2 = (1 - \alpha)/2$.

Если же σ неизвестно, а найдена его оценка s, то (см. § 13, п. Б)

$$n = t_{\text{двуст.кр}}^2 (\alpha;\ k) \cdot s^2/\delta^2.$$

§ 16. Пример на отыскание мощности критерия

Приведем решение примера на нахождение мощности критерия.

Пример. По выборке объема $n = 25$, извлеченной из нормальной генеральной совокупности с известным средним квадратическим отклонением $\sigma = 10$, найдена выборочная средняя $\bar{x} = 18$. При уровне значимости 0,05 требуется:

а) найти критическую область, если проверяется нулевая гипотеза $H_0: a = a_0 = 20$ о равенстве генеральной средней гипотетическому значению при конкурирующей гипотезе $H_1: a < 20$;

б) найти мощность критерия проверки при $a_0 = 16$.

Решение. а) Так как конкурирующая гипотеза имеет вид $a < a_0$, критическая область — левосторонняя.

Пользуясь правилом 3 (см. § 13, п. А), найдем критическую точку: $u'_{\text{кр}} = -1{,}65$. Следовательно, левосторонняя критическая область определяется неравенством $U < -1,65$, или подробнее

$$(\bar{x}-20)\sqrt{25}/10 < -1,65.$$

Отсюда $\bar{x} < 16,7$.

При этих значениях выборочной средней нулевая гипотеза отвергается; в этом смысле $\bar{x}=16,7$ можно рассматривать как критическое значение выборочной средней.

б) Для того чтобы вычислить мощность рассматриваемого критерия, предварительно найдем его значение при условии справедливости конкурирующей гипотезы (т. е. при $a_0=16$), положив $\bar{x}=16,7$:

$$U=(\bar{x}-a_0)\sqrt{n}/\sigma=(16,7-16)\sqrt{25}/10=0,35.$$

Отсюда видно, что если $\bar{x} < 16,7$, то $U < 0,35$. Поскольку при $\bar{x} < 16,7$ нулевая гипотеза отвергается, то и при $U < 0,35$ она также отвергается (при этом конкурирующая гипотеза справедлива, так как мы положили $a_0=16$).

Найдем теперь, пользуясь функцией Лапласа, мощность критерия, т. е. вероятность того, что нулевая гипотеза будет отвергнута, если справедлива конкурирующая гипотеза (см. § 7):

$$P(U < 0,35)=P(-\infty < U < 0,35)=P(-\infty < U < 0)+$$
$$+P(0 < U < 0,35)=0,5+\Phi(0,35)=0,5+0,1368=0,6368.$$

Итак, искомая мощность рассматриваемого критерия приближенно равна 0,64. Если увеличить объем выборки, то мощность увеличится.

Например, при $n=64$ мощность равна 0,71. Если увеличить α, то мощность также увеличится. Например, при $\alpha=0,1$ мощность равна 0,7642.

Замечание. Зная мощность, легко найти вероятность ошибки второго рода: $\beta=1-0,64$. (Разумеется, при решении примера можно было сначала найти β, а затем мощность, равную $1-\beta$.)

§ 17. Сравнение двух средних нормальных генеральных совокупностей с неизвестными дисперсиями (зависимые выборки)

В предыдущих параграфах выборки предполагались независимыми. Здесь рассматриваются выборки одинакового объема, варианты которых попарно зависимы. Например, если x_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ — результаты измерений деталей первым прибором, а y_i — результаты измерений этих же деталей, произведенные в том же порядке вторым прибором, то x_i и y_i попарно зависимы и в этом смысле сами выборки зависимые. Поскольку, как правило, $x_i \neq y_i$, то возникает необходимость установить, значимо или незначимо различаются пары этих чисел. Аналогичная задача ставится при сравнении двух методов исследования, осуществленных одной лабораторией, или если исследование произведено одним и тем же методом двумя различными лабораториями.

Итак, пусть генеральные совокупности X и Y распределены нормально, причем их дисперсии неизвестны. Требуется при уровне значимости α проверить нулевую гипотезу $H_0: M(\overline{X}) = M(\overline{Y})$ о равенстве генеральных средних нормальных совокупностей с неизвестными дисперсиями при конкурирующей гипотезе $H_1: M(\overline{X}) \neq M(\overline{Y})$ по двум зависимым выборкам одинакового объема.

Сведем эту задачу сравнения двух средних к задаче сравнения одной выборочной средней с гипотетическим значением генеральной средней, решенной в § 13, п. Б. С этой целью введем в рассмотренные случайные величины — разности $D_i = X_i - Y_i$ и их среднюю

$$\overline{D} = \frac{\sum D_i}{n} = \frac{\sum (X_i - Y_i)}{n} = \frac{\sum X_i}{n} - \frac{\sum Y_i}{n} = \overline{X} - \overline{Y}.$$

Если нулевая гипотеза справедлива, т. е. $M(\overline{X}) = M(\overline{Y})$, то $M(\overline{X}) - M(\overline{Y}) = 0$ и, следовательно,

$$M(\overline{D}) = M(\overline{X} - \overline{Y}) = M(\overline{X}) - M(\overline{Y}) = 0.$$

Таким образом, нулевую гипотезу $H_0: M(\overline{X}) = M(\overline{Y})$ можно записать так:

$$H_0: M(\overline{D}) = 0.$$

Тогда конкурирующая гипотеза примет вид

$$H_1: M(\overline{D}) \neq 0.$$

Замечание 1. Далее наблюдаемые неслучайные разности $x_i - y_i$ будем обозначать через d_i в отличие от случайных разностей $D_i = X_i - Y_i$. Аналогично выборочную среднюю этих разностей $\sum d_i/n$ обозначим через $\overline{d}$ в отличие от случайной величины $\overline{D}$.

Итак, задача сравнения двух средних $\overline{x}$ и $\overline{y}$ сведена к задаче сравнения одной выборочной средней $\overline{d}$ с гипотетическим значением генеральной средней $M(\overline{D}) = a_0 = 0$. Эта задача решена ранее в § 13, п. Б, поэтому приведем лишь правило проверки нулевой гипотезы и иллюстрирующий пример.

Замечание 2. Как следует из изложенного выше, в формуле (см. § 13, п. Б)

$$T_{\text{набл}} = (\overline{x} - a_0)\sqrt{n}/s$$

надо положить

$$\bar{x}=\bar{d},\quad a_0=0,\quad s=s_d=\sqrt{\frac{\sum d_i^2-\left[\sum d_i\right]^2/n}{n-1}}.$$

Тогда $T_{\text{набл}}=\bar{d}\sqrt{n}/s_d$.

Правило. Для того чтобы при заданном уровне значимости α проверить нулевую гипотезу $H_0: M(\overline{X})=M(\overline{Y})$ о равенстве двух средних нормальных совокупностей с неизвестными дисперсиями (в случае зависимых выборок одинакового объема) при конкурирующей гипотезе $M(\overline{X})\neq M(\overline{Y})$, надо вычислить наблюдаемое значение критерия:

$$T_{\text{набл}}=\bar{d}\sqrt{n}/s_d$$

и по таблице критических точек распределения Стьюдента, по заданному уровню значимости α, помещенному в верхней строке таблицы, и по числу степеней свободы $k=n-1$ найти критическую точку $t_{\text{двуст. кр}}(\alpha;\ k)$.

Если $|T_{\text{набл}}|<t_{\text{двуст. кр}}$ — нет основаиий отвергнуть нулевую гипотезу.

Если $|T_{\text{набл}}|>t_{\text{двуст. кр}}$ — нулевую гипотезу отвергают.

Пример. Двумя приборами в одном и том же порядке измерены 5 деталей и получены следующие результаты (в сотых долях миллиметра):

$$x_1=6,\quad x_2=7,\quad x_3=8,\quad x_4=5,\quad x_5=7;$$
$$y_1=7,\quad y_2=6,\quad y_3=8,\quad y_4=7,\quad y_5=8.$$

При уровне значимости 0,05 установить, значимо или незначимо различаются результаты измерений.

Решение. Вычитая из чисел первой строки числа второй, получим: $d_1=-1$, $d_2=1$, $d_3=0$, $d_4=-2$, $d_5=-1$.

Найдем выборочную среднюю:

$$\bar{d}=\sum d_i/n=(-1+1+0-2+-1)/5=-0,6.$$

Учитывая, что $\sum d_i^2=1+1+4+1=7$ и $\sum d_i=-3$, найдем «исправленное» среднее квадратическое отклонение:

$$s_d=\sqrt{\frac{\sum d_i^2-\left[\sum d_i\right]^2/n}{n-1}}=\sqrt{\frac{7-9/5}{5-1}}=\sqrt{1,3}.$$

Вычислим наблюдаемое значение критерия:

$$T_{\text{набл}}=\bar{d}\sqrt{n}/s_d=-0,6\sqrt{5}/\sqrt{1,3}=-1,18.$$

По таблице критических точек распределения Стьюдента, по уровню зиачимости 0,05, помещенному в верхней строке таблицы, и числу степеней свободы $k=5-1=4$ находим критическую точку $t_{\text{двуст. кр}}(0,05;\ 4)=2,78$.

Так как $|T_{\text{набл}}| < t_{\text{двуст. кр}}$ — нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу. Другими словами, результаты измерений различаются незначимо.

§ 18. Сравнение наблюдаемой относительной частоты с гипотетической вероятностью появления события

Пусть по достаточно большому числу n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность p появления события постоянна, но неизвестна, найдена относительная частота m/n. Пусть имеются основания предполагать, что неизвестная вероятность равна гипотетическому значению p_0. Требуется при заданном уровне значимости α проверить нулевую гипотезу, состоящую в том, что неизвестная вероятность p равна гипотетической вероятности p_0.

Поскольку вероятность оценивается по относительной частоте, рассматриваемую задачу можно сформулировать и так: требуется установить, значимо или незначимо различаются наблюдаемая относительная частота и гипотетическая вероятность.

В качестве критерия проверки нулевой гипотезы примем случайную величину

$$U = (M/n - p_0)\sqrt{n}/\sqrt{p_0 q_0},$$

где $q_0 = 1 - p_0$.

Величина U при справедливости нулевой гипотезы распределена приближенно нормально с параметрами $M(U) = 0$, $\sigma(U) = 1$.

Пояснение. Доказано (теорема Лапласа), что при достаточно больших значениях n относительная частота имеет приближенно нормальное распределение с математическим ожиданием p и средним квадратическим отклонением $\sqrt{pq/n}$. Нормируя относительную частоту (вычитая математическое ожидание и деля на среднее квадратическое отклонение), получим

$$U = \frac{M/n - p}{\sqrt{pq/n}} = \frac{(M/n - p)\sqrt{n}}{\sqrt{pq}},$$

причем $M(U) = 0$, $\sigma(U) = 1$.

При справедливости нулевой гипотезы, т. е. при $p = p_0$,

$$U = \frac{(M/n - p_0)\sqrt{n}}{\sqrt{p_0 q_0}}.$$

Замечание 1. Далее наблюдаемая частота обозначается через m/n в отличие от случайной величины M/n.

Поскольку здесь критическая область строится так же, как и в § 10, приведем лишь правила проверки нулевой гипотезы и иллюстрирующий пример.

Правило 1. Для того чтобы при заданном уровне значимости проверить нулевую гипотезу $H_0: p = p_0$ о равенстве неизвестной вероятности гипотетической вероятности при конкурирующей гипотезе $H_1: p \neq p_0$, надо вычислить наблюдаемое значение критерия:

$$U_{\text{набл}} = (m/n - p_0)\sqrt{n}/\sqrt{p_0 q_0}$$

и по таблице функции Лапласа найти критическую точку $u_{\text{кр}}$ по равенству $\Phi(u_{\text{кр}}) = (1 - \alpha)/2$.

Если $|U_{\text{набл}}| < u_{\text{кр}}$ — нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу.

Если $|U_{\text{набл}}| > u_{\text{кр}}$ — нулевую гипотезу отвергают.

Правило 2. При конкурирующей гипотезе $H_1: p > p_0$ находят критическую точку правосторонней критической области по равенству $\Phi(u_{\text{кр}}) = (1 - 2\alpha)/2$.

Если $U_{\text{набл}} < u_{\text{кр}}$ — нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу.

Если $U_{\text{набл}} > u_{\text{кр}}$ — нулевую гипотезу отвергают.

Правило 3. При конкурирующей гипотезе $H_1: p < p_0$ находят критическую точку $u_{\text{кр}}$ по правилу 2, а затем полагают границу левосторонней критической области $u'_{\text{кр}} = -u_{\text{кр}}$.

Если $U_{\text{набл}} > -u_{\text{кр}}$ — нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу.

Если $U_{\text{набл}} < -u_{\text{кр}}$ — нулевую гипотезу отвергают.

Замечание 2. Удовлетворительные результаты обеспечивает выполнение неравенства $np_0 q_0 > 9$.

Пример. По 100 независимым испытаниям найдена относительная частота 0,08. При уровне значимости 0,05 проверить нулевую гипотезу $H_0: p = p_0 = 0,12$ при конкурирующей гипотезе $H_1: p \neq 0,12$.

Решение. Найдем наблюдаемое значение критерия:

$$U_{\text{набл}} = \frac{(m/n - p_0)/\sqrt{n}}{\sqrt{p_0 q_0}} = \frac{(0,08 - 0,12)\sqrt{100}}{\sqrt{0,12 \cdot 0,88}} = -1,23.$$

По условию, конкурирующая гипотеза имеет вид $p \neq p_0$, поэтому критическая область двусторонняя.

Найдем критическую точку $u_{кр}$ по равенству

$$\Phi(u_{кр}) = (1-\alpha)/2 = (1-0{,}05)/2 = 0{,}475.$$

По таблице функции Лапласа (см. приложение 2) находим $u_{кр} = 1{,}96$.

Так как $|U_{набл}| < u_{кр}$ — нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу. Другими словами, наблюдаемая относительная частота незначимо отличается от гипотетической вероятности.

§ 19. Сравнение двух вероятностей биномиальных распределений

Пусть в двух генеральных совокупностях производятся независимые испытания; в результате каждого испытания событие A может появиться либо не появиться.

Обозначим неизвестную вероятность появления события A в первой совокупности через p_1, а во второй — через p_2. Допустим, что в первой совокупности произведено n_1 испытаний (извлечена выборка объема n_1), причем событие A наблюдалось m_1 раз. Следовательно, относительная частота появления события в первой совокупности

$$w_1(A) = m_1/n_1.$$

Допустим, что во второй совокупности произведено n_2 испытаний (извлечена выборка объема n_2), причем событие A наблюдалось m_2 раз. Следовательно, относительная частота появления события во второй совокупности

$$w_2(A) = m_2/n_2.$$

Примем наблюдавшиеся относительные частоты в качестве оценок неизвестных вероятностей появления события A: $p_1 \simeq w_1$, $p_2 \simeq w_2$. Требуется при заданном уровне значимости α проверить нулевую гипотезу, состоящую в том, что вероятности p_1 и p_2 равны между собой:

$$H_0: p_1 = p_2 = p.$$

Заметим, что, поскольку вероятности оцениваются по относительным частотам, рассматриваемую задачу можно сформулировать и так: требуется установить, значимо или незначимо различаются относительные частоты w_1 и w_2.

В качестве критерия проверки нулевой гипотезы примем случайную величину

$$U = \frac{M_1/n_1 - M_2/n_2}{\sqrt{p(1-p)(1/n_1 + 1/n_2)}}, \qquad (*)$$

Величина U при справедливости нулевой гипотезы распределена приближенно нормально с параметрами $M(U)=0$ и $\sigma(U)=1$ (см. далее пояснение). В формуле (*) вероятность p неизвестна, поэтому заменим ее оценкой наибольшего правдоподобия (см. гл. XVI, § 21, пример 2):

$$p^*=(m_1+m_2)/(n_1+n_2);$$

кроме того, заменим случайные величины M_1 и M_2 их возможными значениями m_1 и m_2, полученными в испытаниях. В итоге получим рабочую формулу для вычисления наблюдаемого значения критерия:

$$U_{\text{набл}}=\frac{m_1/n_1-m_2/n_2}{\sqrt{\frac{m_1+m_2}{n_1+n_2}\left(1-\frac{m_1+m_2}{n_1+n_2}\right)\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}}.$$

Критическая область строится в зависимости от вида конкурирующей гипотезы так же, как в § 10, поэтому ограничимся формулировкой правил проверки нулевой гипотезы.

Правило 1. Для того чтобы при заданном уровне значимости α проверить нулевую гипотезу $H_0: p_1=p_2=p$ о равенстве вероятностей появления события в двух генеральных совокупностях (имеющих биномиальные распределения) при конкурирующей гипотезе $H_1: p_1\neq p_2$, надо вычислить наблюдаемое значение критерия:

$$U_{\text{набл}}=\frac{m_1/n_1-m_2/n_2}{\sqrt{\frac{m_1+m_2}{n_1+n_2}\left(1-\frac{m_1+m_2}{n_1+n_2}\right)\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}}$$

и по таблице функции Лапласа найти критическую точку $u_{\text{кр}}$ по равенству $\Phi(u_{\text{кр}})=(1-\alpha)/2$.

Если $|U_{\text{набл}}|<u_{\text{кр}}$ — нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу.

Если $|U_{\text{набл}}|>u_{\text{кр}}$ — нулевую гипотезу отвергают.

Правило 2. При конкурирующей гипотезе $H_1: p_1>p_2$ находят критическую точку правосторонней критической области по равенству $\Phi(u_{\text{кр}})=(1-2\alpha)/2$.

Если $U_{\text{набл}}<u_{\text{кр}}$ — нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу.

Если $U_{\text{набл}}>u_{\text{кр}}$ — нулевую гипотезу отвергают.

Правило 3. При конкурирующей гипотезе $H_1: p_1<p_2$ находят критическую точку $u_{\text{кр}}$ по правилу 2, а затем полагают границу левосторонней критической области $u'_{\text{кр}}=-u_{\text{кр}}$.

Если $U_{\text{набл}} > -u_{\text{кр}}$ — нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу.

Если $U_{\text{набл}} < -u_{\text{кр}}$ — нулевую гипотезу отвергают.

Пример. Из первой партии изделий извлечена выборка объема $n_1 = 1000$ изделий, причем $m_1 = 20$ изделий оказались бракованными; из второй партии извлечена выборка объема $n = 900$, причем $m_2 = 30$ изделий оказались бракованными. При уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ проверить нулевую гипотезу $H_0: p_1 = p_2 = p$ о равенстве вероятностей появления брака в обеих партиях при конкурирующей гипотезе H_1: $p_1 \neq p_2$.

Решение. По условию, конкурирующая гипотеза имеет вид $p_1 \neq p_2$, поэтому критическая область — двусторонняя.

Найдем наблюдаемое значение критерия:

$$U_{\text{набл}} = \frac{m_1/n_1 - m_2/n_2}{\sqrt{\frac{m_1+m_2}{n_1+n_2}\left(1 - \frac{m_1+m_2}{n_1+n_2}\right)\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}}.$$

Подставив данные задачи и выполнив вычисления, получим $U_{\text{набл}} = -1{,}81$.

Найдем критическую точку:

$$\Phi(u_{\text{кр}}) = (1-\alpha)/2 = (1-0{,}05)/2 = 0{,}475.$$

По таблице функции Лапласа (см. приложение 2) находим $u_{\text{кр}} = 1{,}96$.

Так как $|U_{\text{набл}}| < u_{\text{кр}}$ — нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу. Другими словами, вероятности получения брака в обеих партиях различаются незначимо.

Замечание. Для увеличения точности расчета вводят так называемую *поправку на непрерывность*, а именно вычисляют наблюдаемое значение критерия по формуле

$$U_{\text{набл}} = \frac{[m_1/n_1 - 1/2n_1] - [m_2/n_2 + 1/2n_2]}{\sqrt{\frac{m_1+m_2}{n_1+n_2}\left(1 - \frac{m_1+m_2}{n_1+n_2}\right)\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}}.$$

В рассмотренном примере по этой формуле получим $|U_{\text{набл}}| = 1{,}96$. Поскольку и $u_{\text{кр}} = 1{,}96$, необходимо провести дополнительные испытания, причем целесообразно увеличить объем выборок.

Пояснение. Случайные величины M_1 и M_2 распределены по биномиальному закону; при достаточно большом объеме выборок их можно считать приближенно нормальными (практически должно выполняться неравенство $npq > 9$), следовательно, и разность $U' = M_1/n_1 - M_2/n_2$ распределена приближенно нормально.

Для нормирования случайной величины U' надо вычесть из нее математическое ожидание $M(U')$ и разделить результат на среднее квадратическое отклонение $\sigma(U')$.

Покажем, что $M(U') = 0$. Действительно, $M(M_1) = n_1 p_1$ (см. гл. VII, § 5, замечание); при справедливости нулевой гипотезы ($p_1 = p_2 = p$) $M(M_1) = n_1 p$ и аналогично $M(M_2) = n_2 p$. Следовательно,

$$M(U') = M\left[\frac{M_1}{n_1}\right] - M\left[\frac{M_2}{n_2}\right] = \frac{1}{n_1} M(M_1) - \frac{1}{n_2} M(M_2) = $$
$$= \frac{1}{n_1} n_1 p - \frac{1}{n_2} n_2 p = 0.$$

Покажем, что среднее квадратическое отклонение

$$\sigma(U') = \sqrt{p(1-p)[(1/n_1) + (1/n_2)]}.$$

Действительно, дисперсия $D(M_1) = n_1 p_1 (1 - p_1)$ (см. гл. VIII, § 6, замечание); при справедливости нулевой гипотезы ($p_1 = p_2 = p$) $D(M_1) = n_1 p(1-p)$ и аналогично $D(M_2) = n_2 p(1-p)$. Следовательно,

$$D(U') = D\left[\frac{M_1}{n_1} - \frac{M_2}{n_2}\right] = \frac{1}{n_1^2} D(M_1) + \frac{1}{n_2^2} D(M_2) =$$
$$= \frac{1}{n_1^2} n_1 p(1-p) + \frac{1}{n_2^2} n_2 p(1-p) = p(1-p)\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right).$$

Отсюда среднее квадратическое отклонение

$$\sigma(U') = \sqrt{p(1-p)[1/n_1) + (1/n_2)]}.$$

Итак, случайная величина $U = (u' - M(u'))/\sigma(u')$ (см. формулу (*)) нормирована и поэтому $M(U) = 0$ и $\sigma(U) = 1$.

§ 20. Сравнение нескольких дисперсий нормальных генеральных совокупностей по выборкам различного объема. Критерий Бартлетта

Пусть генеральные совокупности $X_1, X_2, \ldots, X_l$ распределены нормально Из этих совокупностей извлечены независимые выборки, вообще говоря, различных объемов $n_1, n_2, \ldots, n_l$ (некоторые объемы могут быть одинаковыми; если все выборки имеют одинаковый объем, то предпочтительнее пользоваться критерием Кочрена, который описан в следующем параграфе). По выборкам найдены исправленные выборочные дисперсии $s_1^2, s_2^2, \ldots, s_l^2$.

Требуется по исправленным выборочным дисперсиям при заданном уровне значимости α проверить нулевую гипотезу, состоящую в том, что генеральные дисперсии рассматриваемых совокупностей равны между собой:

$$H_0: D(X_1) = D(X_2) = \ldots = D(X_l).$$

Другими словами, требуется установить, значимо или незначимо различаются исправленные выборочные дисперсии.

Рассматриваемую здесь гипотезу о равенстве нескольких дисперсий называют *гипотезой об однородности дисперсий.*

Заметим, что числом степеней свободы дисперсии s_i^2 называют число $k_i = n_i - 1$, т. е. число, на единицу меньшее объема выборки, по которой вычислена дисперсия.

Обозначим через $\overline{s^2}$ среднюю арифметическую исправленных дисперсий, взвешенную по числам степеней свободы:

$$\overline{s^2} = \left(\sum_{i=1}^{l} k_i s_i^2 \right) \Big/ k,$$

где $k = \sum\limits_{i=1}^{l} k_i$.

В качестве критерия проверки нулевой гипотезы об однородности дисперсий примем критерий Бартлетта — случайную величину

$$B = V/C,$$

где

$$V = 2{,}303 \left[k \lg \overline{s^2} - \sum_{i=1}^{l} k_i \lg s_i^2 \right],$$

$$C = 1 + \frac{1}{3(l-1)} \left[\sum_{i=1}^{l} \frac{1}{k_i} - \frac{1}{k} \right].$$

Бартлетт установил, что случайная величина B при условии справедливости нулевой гипотезы распределена приближенно как χ^2 с $l-1$ степенями свободы, если все $k_i > 2$. Учитывая, что $k_i = n_i - 1$, заключаем, что $n_i - 1 > 2$, или $n_i > 3$, т. е. объем каждой из выборок должен быть не меньше 4.

Критическую область строят правостороннюю, исходя из требования, чтобы вероятность попадания критерия в эту область в предположении справедливости нулевой гипотезы была равна принятому уровню значимости:

$$P\left[B > \chi^2_{\text{кр}}(\alpha;\ l-1)\right] = \alpha.$$

Критическую точку $\chi^2_{\text{кр}}(\alpha;\ l-1)$ находят по таблице приложения 5, по уровню значимости α и числу степеней свободы $k=l-1$, и тогда правосторонняя критическая область определяется неравенством $B>\chi^2_{\text{кр}}$, а область принятия гипотезы — неравенством $B<\chi^2_{\text{кр}}$.

Обозначим значение критерия Бартлетта, вычисленное по данным наблюдений, через $B_{\text{набл}}$ и сформулируем правило проверки нулевой гипотезы.

Правило. Для того чтобы при заданном уровне значимости α проверить нулевую гипотезу об однородности дисперсий нормальных совокупностей, надо вычислить наблюдаемое значение критерия Бартлетта $B=V/C$ и по таблице критических точек распределения χ^2 найти критическую точку $\chi^2_{\text{кр}}(\alpha;\ l-1)$.

Если $B_{\text{набл}}<\chi^2_{\text{кр}}$ — нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу.

Если $B_{\text{набл}}>\chi^2_{\text{кр}}$ — нулевую гипотезу отвергают.

Замечание 1. Не следует торопиться вычислять постоянную C. Сначала надо найти V и сравнить с $\chi^2_{\text{кр}}$; если окажется, что $V<\chi^2_{\text{кр}}$, то подавно (так как $C>1$) $B=(V/C)<\chi^2_{\text{кр}}$ и, следовательно, C вычислять не нужно.

Если же $V>\chi^2_{\text{кр}}$, то надо вычислить C и затем сравнить B с $\chi^2_{\text{кр}}$.

Замечание 2. Критерий Бартлетта весьма чувствителен к отклонениям распределений от нормального, поэтому к выводам, полученным по этому критерию, надо относиться с осторожностью.

Таблица 25

1	2	3	4	5	6	7	8
Номер выборки i	Объем выборки n_i	Число степеней свободы k_i	Дисперсии s_i^2	$k_is_i^2$	$\lg s_i^2$	$k_i\lg s_i^2$	$1/k_i$
1	10	9	0,25	2,25	$\bar{1},3979$	$\bar{6},5811$	
2	13	12	0,40	4,80	$\bar{1},6021$	$\bar{5},2252$	
3	15	14	0,36	5,04	$\bar{1},5563$	$\bar{7},7822$	
4	16	15	0,46	6,90	$\bar{1},6628$	$\bar{6},9420$	
Σ		$k=50$		18,99		$\overline{22},5305$	

Пример. По четырем независимым выборкам, объемы которых соответственно равны $n_1 = 10$, $n_2 = 12$, $n_3 = 15$, $n_4 = 16$, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей, найдены исправленные выборочные дисперсии, соответственно равные 0,25; 0,40; 0,36; 0,46. При уровне значимости 0,05 проверить гипотезу об однородности дисперсий (критическая область — правосторонняя).

Решение. Составим расчетную табл. 25 (столбец 8 пока заполнять не будем, поскольку еще неизвестно, понадобится ли вычислять C).

Пользуясь расчетной таблицей, найдем:

$$\overline{s^2} = \left(\sum k_i s_i^2\right)/k = 18{,}99/50 = 0{,}3798; \quad \lg 0{,}3798 = \bar{1}{,}5795;$$

$$V = 2{,}303\left[k \lg \overline{s^2} - \sum k_i \lg s_i^2\right] = 2{,}303\left[50 \cdot \bar{1}{,}5795 - \overline{22}{,}5305\right] = 1{,}02.$$

По таблице приложения 5, по уровню значимости 0,05 и числу степеней свободы $l - 1 = 4 - 1 = 3$ находим критическую точку $\chi^2_{\text{кр}}(0{,}05;\ 3) = 7{,}8$.

Так как $V < \chi^2_{\text{кр}}$, то подавно (поскольку $C > 1$) $B_{\text{набл}} = (V/C) < \chi^2_{\text{кр}}$ и, следовательно, отвергнуть нулевую гипотезу об однородности дисперсий нет оснований. Другими словами, исправленные выборочные дисперсии различаются незначимо.

Замечание 3. Если требуется оценить генеральную дисперсию, то при условии однородности дисперсий целесообразно принять в качестве ее оценки среднюю арифметическую исправленных дисперсий, взвешенную по числам степеней свободы, т. е.

$$\overline{s^2} = \left(\sum k_i s_i^2\right)/k.$$

Например, в рассмотренной задаче в качестве оценки генеральной дисперсии целесообразно принять 0,3798.

§ 21. Сравнение нескольких дисперсий нормальных генеральных совокупностей по выборкам одинакового объема. Критерий Кочрена

Пусть генеральные совокупности $X_1, X_2, \ldots, X_l$ распределены нормально. Из этих совокупностей извлечено l независимых выборок одинакового объема n и по ним найдены исправленные выборочные дисперсии $s_1^2, s_2^2, \ldots, s_l^2$, все с одинаковым числом степеней свободы $k = n - 1$.

Требуется по исправленным дисперсиям при заданном уровне значимости α проверить нулевую гипотезу, состоящую в том, что генеральные дисперсии рассматриваемых совокупностей равны между собой:

$$H_0: D(X_1) = D(X_2) = \ldots = D(X_l).$$

Другими словами, требуется проверить, значимо или незначимо различаются исправленные выборочные дисперсии.

В рассматриваемом случае выборок одинакового объема можно по критерию Фишера—Снедекора (см. § 8) сравнить наибольшую и наименьшую дисперсии; если окажется, что различие между ними незначимо, то подавно незначимо и различие между остальными дисперсиями. Недостаток этого метода состоит в том, что информация, которую содержат остальные дисперсии, кроме наименьшей и наибольшей, не учитывается.

Можно также применить критерий Бартлетта. Однако, как указано в § 20, известно лишь приближенное распределение этого критерия, поэтому предпочтительнее использовать критерий Кочрена, распределение которого найдено точно.

Итак, в качестве критерия проверки нулевой гипотезы примем критерий Кочрена—отношение максимальной исправленной дисперсии к сумме всех исправленных дисперсий:

$$G = S^2_{\max}/(S_1^2 + S_2^2 + \ldots + S_l^2).$$

Распределение этой случайной величины зависит только от числа степеней свободы $k = n - 1$ и количества выборок l.

Критическую область строят правостороннюю, исходя из требования, чтобы вероятность попадания критерия в эту область в предположении справедливости нулевой гипотезы была равна принятому уровню значимости:

$$P[G > G_{кр}(\alpha;\, k,\, l)] = \alpha.$$

Критическую точку $G_{кр}(\alpha;\, k,\, l)$ находят по таблице приложения 8, и тогда правосторонняя критическая область определяется неравенством $G > G_{кр}$, а область принятия нулевой гипотезы—неравенством $G < G_{кр}$.

Обозначим значение критерия, вычисленное по данным наблюдений, через $G_{набл}$ и сформулируем правило проверки нулевой гипотезы.

Правило. Для того чтобы при заданном уровне значимости α проверить гипотезу об однородности дисперсий нормально распределенных совокупностей, надо вычислить наблюдаемое значение критерия и по таблице найти критическую точку.

Если $G_{набл} < G_{кр}$—нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу.

Если $G_{набл} > G_{кр}$—нулевую гипотезу отвергают.

Замечание. Если требуется оценить генеральную дисперсию, то при условии однородности дисперсий целесообразно принять в качестве ее оценки среднюю арифметическую исправленных выборочных дисперсий.

Пример. По четырем независимым выборкам одинакового объема $n=17$, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей, найдены исправленные дисперсии: 0,26; 0,36; 0,40; 0,42. Требуется: а) при уровне значимости 0,05 проверить нулевую гипотезу об однородности генеральных дисперсий (критическая область — правосторонняя); б) оценить генеральную дисперсию.

Решение. а) Найдем наблюдаемое значение критерия Кочрена — отношение максимальной исправленной дисперсии к сумме всех дисперсий:

$$G_{\text{набл}}=0,42/(0,26+0,36+0,40+0,42)=0,2917.$$

Найдем по таблице приложения 8, по уровню значимости 0,05, числу степеней свободы $k=17-1=16$ и числу выборок $l=4$ критическую точку $G_{\text{кр}}(0,05;\ 16;\ 4)=0,4366$.

Так как $G_{\text{набл}} < G_{\text{кр}}$ — нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу об однородности дисперсий. Другими словами, исправленные выборочные дисперсии различаются незначимо.

б) Поскольку нулевая гипотеза справедлива, в качестве оценки генеральной дисперсии примем среднюю арифметическую исправленных дисперсий:

$$\sigma^2=(0,26+0,36+0,40+0,42)/4=0,36.$$

§ 22. Проверка гипотезы о значимости выборочного коэффициента корреляции

Пусть двумерная генеральная совокупность (X, Y) распределена нормально. Из этой совокупности извлечена выборка объема n и по ней найден выборочный коэффициент корреляции $r_{\text{в}}$, который оказался отличным от нуля. Так как выборка отобрана случайно, то еще нельзя заключить, что коэффициент корреляции генеральной совокупности $r_{\text{г}}$ также отличен от нуля. В конечном счете нас интересует именно этот коэффициент, поэтому возникает необходимость при заданном уровне значимости α проверить нулевую гипотезу $H_0: r_{\text{г}}=0$ о равенстве нулю генерального коэффициента корреляции при конкурирующей гипотезе $H_1: r_{\text{г}}=0$.

Если нулевая гипотеза отвергается, то это означает, что выборочный коэффициент корреляции значимо отличается от нуля (кратко говоря, значим), а X и Y коррелированы, т. е. связаны линейной зависимостью.

Если нулевая гипотеза будет принята, то выборочный коэффициент корреляции незначим, а X и Y некоррелированы, т. е. не связаны линейной зависимостью.

В качестве критерия проверки нулевой гипотезы примем случайную величину

$$T = r_{\text{в}}\sqrt{n-2}/\sqrt{1-r_{\text{в}}^2}.$$

Величина T при справедливости нулевой гипотезы имеет распределение Стьюдента с $k=n-2$ степенями свободы.

Поскольку конкурирующая гипотеза имеет вид $r_{\text{г}} \neq 0$, критическая область—двусторонняя; она строится так же, как в § 12 (первый случай).

Обозначим значение критерия, вычисленное по данным наблюдений, через $T_{\text{набл}}$ и сформулируем правило проверки нулевой гипотезы.

Правило. Для того чтобы при заданном уровне значимости α проверить нулевую гипотезу $H_0: r_{\text{г}}=0$ о равенстве нулю генерального коэффициента корреляции нормальной двумерной случайной величины при конкурирующей гипотезе $H_1: r_{\text{г}} \neq 0$, надо вычислить наблюдаемое значение критерия:

$$T_{\text{набл}} = r_{\text{в}}\sqrt{n-2}/\sqrt{1-r_{\text{в}}^2}$$

и по таблице критических точек распределения Стьюдента, по заданному уровню значимости и числу степеней свободы $k=n-2$ найти критическую точку $t_{\text{кр}}(\alpha; k)$ для двусторонней критической области.

Если $|T_{\text{набл}}| < t_{\text{кр}}$—нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу.

Если $|T_{\text{набл}}| > t_{\text{кр}}$—нулевую гипотезу отвергают.

Пример. По выборке объема $n=122$, извлеченной из нормальной двумерной совокупности, найден выборочный коэффициент корреляции $r_{\text{в}}=0{,}4$. При уровне значимости 0,05 проверить нулевую гипотезу о равенстве нулю генерального коэффициента корреляции при конкурирующей гипотезе $H_1: r_{\text{г}} \neq 0$.

Решение. Найдем наблюдаемое значение критерия:

$$T_{\text{набл}} = r_{\text{в}}\sqrt{n-2}/\sqrt{1-r_{\text{в}}^2} = 0{,}4\sqrt{122-2}/\sqrt{1-0{,}4^2} = 4{,}78.$$

По условию, конкурирующая гипотеза имеет вид $r_{\text{г}} \neq 0$, поэтому критическая область — двусторонняя.

По уровню значимости 0,05 и числу степеней свободы $k = 122-2=120$ находим по таблице приложения 6 для двусторонней критической области критическую точку $t_{\text{кр}}(0{,}05;\ 120)=1{,}98$.

Поскольку $T_{\text{набл}} > t_{\text{кр}}$ — нулевую гипотезу отвергаем. Другими словами, выборочный коэффициент корреляции значимо отличается от нуля, т. е. X и Y коррелированы.

§ 23. Проверка гипотезы о нормальном распределении генеральной совокупности. Критерий согласия Пирсона

В предыдущих параграфах закон распределения генеральной совокупности предполагается известным.

Если закон распределения неизвестен, но есть основания предположить, что он имеет определенный вид (назовем его *A*), то проверяют нулевую гипотезу: генеральная совокупность распределена по закону *A*.

Проверка гипотезы о предполагаемом законе неизвестного распределения производится так же, как и проверка гипотезы о параметрах распределения, т. е. при помощи специально подобранной случайной величины — критерия согласия.

Критерием согласия называют критерий проверки гипотезы о предполагаемом законе неизвестного распределения.

Имеется несколько критериев согласия: χ^2 («хи квадрат») К. Пирсона, Колмогорова, Смирнова и др. Ограничимся описанием применения критерия Пирсона к проверке гипотезы о нормальном распределении генеральной совокупности (критерий аналогично применяется и для других распределений, в этом состоит его достоинство). С этой целью будем сравнивать эмпирические (наблюдаемые) и теоретические (вычисленные в предположении нормального распределения) частоты.

Обычно эмпирические и теоретические частоты различаются. Например (см. гл. XVII, § 7):

эмп. частоты.....	6	13	38	74	106	85	30	10	4
теорет. частоты...	3	14	42	82	99	76	37	11	2

Случайно ли расхождение частот? Возможно, что расхождение случайно (незначимо) и объясняется либо малым числом наблюдений, либо способом их группировки, либо другими причинами. Возможно, что расхождение частот неслучайно (значимо) и объясняется тем, что теоретические частоты вычислены исходя из неверной гипотезы о нормальном распределении генеральной совокупности.

Критерий Пирсона отвечает на поставленный выше вопрос. Правда, как и любой критерий, он не доказывает справедливость гипотезы, а лишь устанавливает на принятом уровне значимости ее согласие или несогласие с данными наблюдений.

Итак, пусть по выборке объема n получено эмпирическое распределение:

варианты . . . . . . x_i x_1 x_2 . . . x_s
эмп. частоты . . . n_i n_1 n_2 . . . n_s

Допустим, что в предположении нормального распределения генеральной совокупности вычислены теоретические частоты n'_i (например, так, как в следующем параграфе). При уровне значимости α требуется проверить нулевую гипотезу: генеральная совокупность распределена нормально.

В качестве критерия проверки нулевой гипотезы примем случайную величину

$$\chi^2=\sum(n_i-n'_i)^2/n'_i. \qquad (*)$$

Эта величина случайная, так как в различных опытах она принимает различные, заранее не известные значения. Ясно, что чем меньше различаются эмпирические и теоретические частоты, тем меньше величина критерия (*), и, следовательно, он в известной степени характеризует близость эмпирического и теоретического распределений.

Заметим, что возведением в квадрат разностей частот устраняют возможность взаимного погашения положительных и отрицательных разностей. Делением на n'_i достигают уменьшения каждого из слагаемых; в противном случае сумма была бы настолько велика, что приводила бы к отклонению нулевой гипотезы даже и тогда, когда она справедлива. Разумеется, приведенные соображения не являются обоснованием выбранного критерия, а лишь пояснением.

Доказано, что при $n \to \infty$ закон распределения случайной величины (*) независимо от того, какому закону распределения подчинена генеральная совокупность, стремится к закону распределения χ^2 с k степенями свободы. Поэтому случайная величина (*) обозначена через χ^2, а сам критерий называют критерием согласия «хи квадрат».

Число степеней свободы находят по равенству $k = s-1-r$, где s — число групп (частичных интервалов) выборки; r — число параметров предполагаемого распределения, которые оценены по данным выборки.

В частности, если предполагаемое распределение — нормальное, то оценивают два параметра (математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение), поэтому $r=2$ и число степеней свободы $k=s-1-r=s-1-2=$ $=s-3$.

Если, например, предполагают, что генеральная совокупность распределена по закону Пуассона, то оценивают один параметр λ, поэтому $r=1$ и $k=s-2$.

Поскольку односторонний критерий более «жестко» отвергает нулевую гипотезу, чем двусторонний, построим правостороннюю критическую область, исходя из требования, чтобы вероятность попадания критерия в эту область в предположении справедливости нулевой гипотезы была равна принятому уровню значимости α:

$$P[\chi^2 > \chi^2_{\text{кр}}(\alpha;\ k)] = \alpha.$$

Таким образом, правосторонняя критическая область определяется неравенством $\chi^2 > \chi^2_{\text{кр}}(\alpha;\ k)$, а область принятия нулевой гипотезы—неравенством $\chi^2 < \chi^2_{\text{кр}}(\alpha;\ k)$.

Обозначим значение критерия, вычисленное по данным наблюдений, через $\chi^2_{\text{набл}}$ и сформулируем правило проверки нулевой гипотезы.

Правило. Для того чтобы при заданном уровне значимости проверить нулевую гипотезу H_0: генеральная совокупность распределена нормально, надо сначала вычислить теоретические частоты, а затем наблюдаемое значение критерия:

$$\chi^2_{\text{набл}} = \sum (n_i - n_i')^2/n_i \qquad (**)$$

и по таблице критических точек распределения χ^2, по заданному уровню значимости α и числу степеней свободы $k=s-3$ найти критическую точку $\chi^2_{\text{кр}}(\alpha;\ k)$.

Если $\chi^2_{\text{набл}} < \chi^2_{\text{кр}}$—нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу.

Если $\chi^2_{\text{набл}} > \chi^2_{\text{кр}}$—нулевую гипотезу отвергают.

Замечание 1. Объем выборки должен быть достаточно велик, во всяком случае не менее 50. Каждая группа должна содержать не менее 5—8 вариант; малочисленные группы следует объединять в одну, суммируя частоты.

Замечание 2. Поскольку возможны ошибки первого и второго рода, в особенности если согласование теоретических и эмпирических частот «слишком хорошее», следует проявлять осторожность. Например, можно повторить опыт, увеличить число наблюдений, воспользоваться другими критериями, построить график распределения, вычислить асимметрию и эксцесс (см. гл. XVII, § 8).

Замечание 3. Для контроля вычислений формулу (**) преобразуют к виду

$$\chi^2_{\text{набл}} = [\sum n_i^2/n_i'] - n.$$

Рекомендуем читателю выполнить это преобразование самостоятельно, для чего надо в (**) возвести в квадрат разность частот, сократить результат на n'_i и учесть, что $\sum n_i = n$, $\sum n'_i = n$.

Пример. При уровне значимости 0,05 проверить гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности, если известны эмпирические и теоретические частоты:

эмп. частоты	6	13	38	74	106	85	30	14
теорет. частоты...	3	14	42	82	99	76	37	13

Решение. Вычислим $\chi^2_{набл}$, для чего составим расчетную табл. 26.

Контроль: $\chi^2_{набл}=7,19$:

$$\left[\sum n_i^2/n'_i\right] - n = 373,19 - 366 = 7,19.$$

Вычисления произведены правильно.

Найдем число степеней свободы, учитывая, что число групп выборки (число различных вариант) $s=8$; $k=8-3=5$.

Таблица 26

1	2	3	4	5	6	7	8
i	n_i	n'_i	$n_i-n'_i$	$(n_i-n'_i)^2$	$(n_i-n'_i)^2/n'_i$	n_i^2	n_i^2/n'_i
1	6	3	3	9	3	36	12
2	13	14	—1	1	0,07	169	12,07
3	38	42	—4	16	0,38	1444	34,38
4	74	82	—8	64	0,78	5476	66,78
5	106	99	7	49	0,49	11236	113,49
6	85	76	9	81	1,07	7225	95,07
7	30	37	—7	49	1,32	900	24,32
8	14	13	1	1	0,08	196	15,08
Σ	366	366			$\chi^2_{набл}=$ $=7,19$		373,19

По таблице критических точек распределения χ^2 (см. приложение 5), по уровню значимости $\alpha=0,05$ и числу степеней свободы $k=5$ находим $\chi^2_{кр}(0,05;\ 5)=11,1$.

Так как $\chi^2_{набл} < \chi^2_{кр}$ — нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу. Другими словами, расхождение эмпирических и теоретических частот незначимое. Следовательно, данные наблюдений согласуются с гипотезой о нормальном распределении генеральной совокупности.

§ 24. Методика вычисления теоретических частот нормального распределения

Как следует из предыдущего параграфа, сущность критерия согласия Пирсона состоит в сравнении эмпирических и теоретических частот. Ясно, что эмпирические частоты находят из опыта. Как найти теоретические частоты, если предполагается, что генеральная совокупность распределена нормально? Ниже приведен один из способов решения этой задачи.

1. Весь интервал наблюдаемых значений X (выборки объема n) делят на s частичных интервалов $(x_i,\ x_{i+1})$ одинаковой длины. Находят середины частичных интервалов $x_i^* = (x_i + x_{i+1})/2$; в качестве частоты n_i варианты x_i^* принимают число вариант, которые попали в i-й интервал. В итоге получают последовательность равноотстоящих вариант и соответствующих им частот:

$$\begin{matrix} x_1^* & x_2^* & \ldots & x_s^* \\ n_1 & n_2 & \ldots & n_s \end{matrix}$$

При этом $\sum n_i = n$.

2. Вычисляют, например методом произведений, выборочную среднюю $\overline{x}^*$ и выборочное среднее квадратическое отклонение σ^*.

3. Нормируют случайную величину X, т. е. переходят к величине $Z = (X - \overline{x}^*)/\sigma^*$ и вычисляют концы интервалов $(z_i,\ z_{i+1})$:

$$z_i = (x_i - \overline{x}^*)/\sigma^*, \quad z_{i+1} = (x_{i+1} - \overline{x}^*)/\sigma^*,$$

причем наименьшее значение Z, т. е. z_1, полагают равным $-\infty$, а наибольшее, т. е. z_s, полагают равным ∞.

4. Вычисляют теоретические вероятности p_i попадания X в интервалы $(x_i,\ x_{i+1})$ по равенству ($\Phi(z)$ — функция Лапласа)

$$p_i = \Phi(z_{i+1}) - \Phi(z_i)$$

и, наконец, находят искомые теоретические частоты $n_i' = np_i$.

Пример. Найти теоретические частоты по заданному интервальному распределению выборки объема $n = 200$, предполагая, что генеральная совокупность распределена нормально (табл. 27).

Решение. 1. Найдем середины интервалов $x_i^* = (x_i + x_{i+1})/2$. Например, $x_1^* = (4+6)/2 = 5$. Поступая аналогично, получим последовательность равноотстоящих вариант x_i^* и соответствующих им частот n_i:

x_i^*	5	7	9	11	13	15	17	19	21
n_i	15	26	25	30	26	21	24	20	13

2. Пользуясь методом произведений, найдем выборочную среднюю и выборочное среднее квадратическое отклонение:

$$\overline{x^*}=12{,}63,\quad \sigma^*=4{,}695.$$

3. Найдем интервалы $(z_i,\ z_{i+1})$, учитывая, что $\overline{x^*}=12{,}63$, $\sigma^*=4{,}695$, $1/\sigma^*=0{,}213$, для чего составим расчетную табл. 28.

Таблица 27

Номер интервала	Границы интервала		Частота	Номер интервала	Границы интервала		Частота
i	x_i	x_{i+1}	n_i	i	x_i	x_{i+1}	n_i
1	4	6	15	6	14	16	21
2	6	8	26	7	16	18	24
3	8	10	25	8	18	20	20
4	10	12	30	9	20	22	13
5	12	14	26				
							$n=200$

4. Найдем теоретические вероятности p_i и искомые теоретические частоты $n_i'=np_i$, для чего составим расчетную табл. 29.

Таблица 28

i	Границы интервала		$x_i-\overline{x}^*$	$x_{i+1}-\overline{x}^*$	Границы интервала	
	x_i	x_{i+1}			$z_i=(x_i-\overline{x}^*)/\sigma^*$	$z_{i+1}=(x_{i+1}-\overline{x}^*)/\sigma^*$
1	4	6	—	—6,63	$-\infty$	—1,41
2	6	8	—6,63	—4,63	—1,41	—0,99
3	8	10	—4,63	—2,63	—0,99	—0,56
4	10	12	—2,63	—0,63	—0,156	—0,13
5	12	14	—0,63	1,37	—0,13	0,29
6	14	16	1,37	3,37	0,29	0,72
7	16	18	3,37	5,37	0,72	1,14
8	18	20	5,37	7,37	1,14	1,57
9	20	22	7,37	—	1,57	∞

Таблица 29

i	Границы интервала		$\Phi(z_i)$	$\Phi(z_{i+1})$	$p_i=\Phi(z_{i+1})-$ $-\Phi(z_i)$	$n'_i=np_i=200\ p_i$
	z_i	z_{i+1}				
1	$-\infty$	$-1{,}41$	$-0{,}5$	$-0{,}4207$	0,0793	15,86
2	$-1{,}41$	$-0{,}99$	$-0{,}4207$	$-0{,}3389$	0,0818	16,36
3	$-0{,}99$	$-0{,}56$	$-0{,}3389$	$-0{,}2123$	0,1266	25,32
4	$-0{,}56$	$-0{,}13$	$-0{,}2123$	$-0{,}0517$	0,1606	32,12
5	$-0{,}13$	0,29	$-0{,}0517$	0,1141	0,1658	33,16
6	0,29	0,72	0,1141	0,2642	0,1501	30,02
7	0,72	1,14	0,2642	0,3729	0,1087	21,74
8	1,14	1,57	0,3729	0,4418	0,0689	13,78
9	1,57	∞	0,4418	0,5	0,0582	11,64
					$\sum p_i=1$	$\sum n'_i=200$

Искомые теоретические частоты помещены в последнем столбце табл. 29.

§ 25. Выборочный коэффициент ранговой корреляции Спирмена и проверка гипотезы о его значимости

Допустим, что объекты генеральной совокупности обладают двумя качественными признаками. Под *качественным* подразумевается признак, который невозможно измерить точно, но он позволяет сравнивать объекты между собой и, следовательно, расположить их в порядке убывания или возрастания качества. Для определенности будем всегда располагать объекты в порядке ухудшения качества. При таком «ранжировании» на первом месте находится объект наилучшего качества по сравнению с остальными; на втором месте окажется объект «хуже» первого, но «лучше» других, и т. д.

Пусть выборка объема *n* содержит независимые объекты, которые обладают двумя качественными признаками *A* и *B*. Для оценки степени связи признаков вводят, в частности, коэффициенты ранговой корреляции Спирмена (изложен в настоящем параграфе) и Кендалла (см. § 26).

Для практических целей использование ранговой корреляции весьма полезно. Например, если установлена высокая ранговая корреляция между двумя качественными признаками изделий, то достаточно контролировать изделия только по одному из признаков, что удешевляет и ускоряет контроль.

Расположим сначала объекты выборки в порядке ухудшения качества по признаку A при допущении, что все объекты имеют различное качество по обоим признакам (случай, когда это допущение не выполняется, рассмотрим ниже). Припишем объекту, стоящему на i-м месте, число—ранг x_i, равный порядковому номеру объекта. Например, ранг объекта, занимающего первое место, $x_1 = 1$; объект, расположенный на втором месте, имеет ранг $x_2 = 2$, и т. д. В итоге получим последовательность рангов по признаку A: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $\ldots$, $x_n = n$.

Расположим теперь объекты в порядке убывания качества по признаку B и припишем каждому из них ранг y_i, однако (для удобства сравнения рангов) индекс i при y будет по-прежнему равен порядковому номеру объекта по признаку A. Например, запись $y_2 = 5$ означает, что по признаку A объект стоит на втором месте, а по признаку B—на пятом.

В итоге получим две последовательности рангов:

$$\begin{array}{l} \text{по признаку } A \ldots x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n \\ \text{по признаку } B \ldots y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n \end{array}$$

Заметим, что в первой строке индекс i совпадает с порядковым номером объекта, а во второй, вообще говоря, не совпадает. Итак, в общем случае $x_i \neq y_i$.

Рассмотрим два «крайних случая».

1. Пусть ранги по признакам A и B совпадают при всех значениях индекса $i: x_i = y_i$. В этом случае ухудшение качества по одному признаку влечет ухудшение качества по другому. Очевидно, признаки связаны: имеет место «полная прямая зависимость».

2. Пусть ранги по признакам A и B противоположны в том смысле, что если $x_1 = 1$, то $y_1 = n$; если $x_2 = 2$, то $y_2 = n - 1$; $\ldots$, если $x_n = n$, то $y_n = 1$. В этом случае ухудшение качества по одному признаку влечет улучшение по другому. Очевидно, признаки связаны—имеет место «противоположная зависимость».

На практике чаще будет встречаться промежуточный случай, когда ухудшение качества по одному признаку влечет для некоторых объектов ухудшение, а для других—улучшение качества. Задача состоит в том, чтобы оценить связь между признаками. Для ее решения рассмотрим ранги $x_1, x_2, \ldots, x_n$ как возможные значения случайной величины X, а $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — как возможные значения случайной величины Y. Таким образом, о связи между качественными признаками A и B можно судить по связи между случайными величинами X и Y, для оценки которой используем коэффициент корреляции.

Вычислим выборочный коэффициент корреляции случайных величин X и Y в условных вариантах (см. гл. XVIII, § 8):

$$r_в = \frac{\sum n_{uv}uv - n\overline{u}\overline{v}}{n\sigma_u\sigma_v},$$

приняв в качестве условных вариант отклонения $u_i = x_i - \overline{x}$, $v_i = y_i - \overline{y}$. Каждому рангу x_i соответствует только один ранг y_i, поэтому частота любой пары рангов с одинаковыми индексами, а следовательно, и любой пары условных вариант с одинаковыми индексами равна единице: $n_{u_i v_i} = 1$. Очевидно, что частота любой пары вариант с разными индексами равна нулю. Учитывая, кроме того, что среднее значение отклонения равно нулю (см. гл. XVI, § 7, следствие), т. е. $\overline{u} = \overline{v} = 0$, получим более простую формулу вычисления выборочного коэффициента корреляции:

$$r_в = \frac{\sum u_i v_i}{n\sigma_u\sigma_v}. \qquad (*)$$

Таким образом, надо найти $\sum u_i v_i$, σ_u и σ_v.

Выразим $\sum u_i v_i$ через известные числа — объем выборки n и разности рангов $d_i = x_i - y_i$. Заметим, что поскольку средние значения рангов $\overline{x} = (1 + 2 + \ldots + n)/n$ и $\overline{y} = (1 + 2 + \ldots + n)/n$ равны между собой, то $\overline{y} - \overline{x} = 0$. Используем последнее равенство:

$$d_i = x_i - y_i = x_i - y_i + (\overline{y} - \overline{x}) = (x_i - \overline{x}) - (y_i - \overline{y}) = u_i - v_i.$$

Следовательно,

$$d_i^2 = (u_i - v_i)^2.$$

Учитывая, что (см. далее пояснение)

$$\sum u_i^2 = \sum v_i^2 = (n^3 - n)/12, \qquad (**)$$

имеем

$$\sum d_i^2 = \sum (u_i - v_i)^2 = \sum u_i^2 - 2\sum u_i v_i + \sum v_i^2 = \\ = [(n^3 - n)/6] - 2\sum u_i v_i.$$

Отсюда

$$\sum u_i v_i = [(n^3 - n)/12] - \sum d_i^2/2. \qquad (***)$$

Остается найти σ_u и σ_v. По определению выборочной дисперсии, учитывая, что $\bar{u} = 0$, и используя (**), получим

$$D_u = \sum (u_i - \bar{u})^2/n = \sum u_i^2/n = (n^3 - n)/12n = (n^2 - 1)/12.$$

Отсюда среднее квадратическое отклонение

$$\sigma_u = \sqrt{(n^2 - 1)/12}.$$

Аналогично найдем

$$\sigma_v = \sqrt{(n^2 - 1)/12}.$$

Следовательно,

$$n\sigma_u\sigma_v = (n^3 - n)/12.$$

Подставив правые части этого равенства и соотношения (***) в (*), окончательно получим *выборочный коэффициент ранговой корреляции Спирмена*

$$\rho_в = 1 - [(6\sum d_i^2)/(n^3 - n)], \qquad (****)$$

где $d_i = x_i - y_i$.

Пояснение. Покажем, что $\sum u_i^2 = (n^3 - n)/12$. Действительно, учитывая, что

$$\sum x_i = 1 + 2 + \ldots + n = (1 + n)\,n/2,$$
$$\bar{x} = \sum x_i/n = (1 + n)/2,$$
$$\sum x_i^2 = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = [n\,(n + 1)\,(2n + 1)]/6,$$
$$\sum u_i^2 = \sum (x_i - \bar{x})^2 = \sum x_i^2 - 2\bar{x}\sum x_i + n\,(\bar{x})^2,$$

после элементарных выкладок получим

$$\sum u_i^2 = (n^3 - n)/12.$$

Аналогично можно показать, что

$$\sum v_i^2 = (n^3 - n)/12.$$

Приведем свойства выборочного коэффициента корреляции Спирмена.

Свойство 1. *Если между качественными признаками A и B имеется «полная прямая зависимость» в том смысле, что ранги объектов совпадают при всех значениях i, то выборочный коэффициент ранговой корреляции Спирмена равен единице.*

Действительно, подставив $d_i=x_i-y_i=0$ в (****), получим

$$\rho_в=1.$$

Свойство 2. *Если между качественными признаками A и B имеется «противоположная зависимость» в том смысле, что рангу $x_1=1$ соответствует ранг $y_1=n$; рангу x_2 соответствует ранг $y_2=n-1$; ...; рангу $x_n=n$ соответствует ранг $y_n=1$, то выборочный коэффициент ранговой корреляции Спирмена равен минус единице.*

Действительно,

$$d_1=1-n,\ d_2=3-n,\ \ldots,\ d_n=(2n-1)-n.$$

Следовательно,

$$\sum d_i^2=(1-n)^2+(3-n)^2+\ldots+[(2n-1)-n]^2=$$
$$=[1^2+3^2+\ldots+(2n-1)^2]-2n[1+3+\ldots+(2n-1)]+$$
$$+n\cdot n^2=[n(4n^2-1)/3]-2n\cdot n^2+n^3=(n^3-n)/3.$$

Подставив $\sum d_i^2=(n^3-n)/3$ в (****), окончательно получим

$$\rho_в=-1.$$

Свойство 3. *Если между качественными признаками A и B нет ни «полной прямой», ни «противоположной» зависимостей, то коэффициент $\rho_в$ заключен между -1 и $+1$, причем чем ближе к нулю его абсолютная величина, тем зависимость меньше.*

Пример 1. Найти выборочный коэффициент ранговой корреляции Спирмена по данным ранга объектов выборки объема $n=10$:

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i	6	4	8	1	2	5	10	3	7	9

Решение. Найдем разности рангов $d_i=x_i-y_i$: $-5, -2, -5, 3, 3, 1, -3, 5, 2, 1$.

Вычислим сумму квадратов разностей рангов:

$$\sum d_i^2=25+4+25+9+9+1+9+25+4+1=112.$$

Найдем искомый коэффициент ранговой корреляции, учитывая, что $n = 10$:

$$\rho_в = 1 - \left[6 \sum d_i^2/(n^3 - n)\right] = 1 - [6 \cdot 112/(1000 - 10)] = 0{,}32.$$

Замечание. Если выборка содержит объекты с одинаковым качеством, то каждому из них приписывается ранг, равный среднему арифметическому порядковых номеров объектов. Например, если объекты одинакового качества по признаку A имеют порядковые номера 5 и 6, то их ранги соответственно равны: $x_5 = (5+6)/2 = 5{,}5$; $x_6 = 5{,}5$.

Приведем правило, позволяющее установить значимость или незначимость ранговой корреляции связи для выборок объема $n \geqslant 9$. Если $n < 9$, то пользуются таблицами (см., например, табл. 6.10а, 6.10б в книге: Большев Л. Н., Смирнов Н. В. Таблицы математической статистики. М., «Наука», 1965).

Правило. Для того чтобы при уровне значимости α проверить нулевую гипотезу о равенстве нулю генерального коэффициента ранговой корреляции $\rho_г$ Спирмена при конкурирующей гипотезе $H_1: \rho_г \neq 0$, надо вычислить критическую точку:

$$T_{кр} = t_{кр}(\alpha;\ k)\sqrt{(1 - \rho_в^2)/(n-2)},$$

где n — объем выборки, $\rho_в$ — выборочный коэффициент ранговой корреляции Спирмена, $t_{кр}(\alpha;\ k)$ — критическая точка двусторонней критической области, которую находят по таблице критических точек распределения Стьюдента, по уровню значимости α и числу степеней свободы $k = n - 2$.

Если $|\rho_в| < T_{кр}$ — нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу. Ранговая корреляционная связь между качественными признаками незначима.

Если $|\rho_в| > T_{кр}$ — нулевую гипотезу отвергают. Между качественными признаками существует значимая ранговая корреляционная связь.

Пример 2. При уровне значимости 0,05 проверить, является ли ранговая корреляционная связь, вычисленная в примере 1, значимой?

Решение. Найдем критическую точку двусторонней критической области распределения Стьюдента по уровню значимости $\alpha = 0{,}05$ и числу степеней свободы $k = n - 2 = 10 - 2 = 8$ (см. приложение 6): $t_{кр}(0{,}05;\ 8) = 2{,}31$.

Найдем критическую точку:

$$T_{кр} = t_{кр}(\alpha;\ k)\sqrt{(1 - \rho_в^2)/(n-2)}.$$

Подставив $t_{кр} = 2{,}31$, $n = 10$, $\rho_в = 0{,}24$, получим $T_{кр} = 0{,}79$.

Итак, $T_{кр} = 0{,}79$, $\rho_в = 0{,}24$.

Так как $\rho_в < T_{кр}$ — нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу; ранговая корреляционная связь между признаками незначимая.

§ 26. Выборочный коэффициент ранговой корреляции Кендалла и проверка гипотезы о его значимости

Можно оценивать связь между двумя качественными признаками, используя коэффициент ранговой корреляции Кендалла. Пусть ранги объектов выборки объема n (здесь сохранены все обозначения § 25):

$$\text{по признаку } A \quad x_1, x_2, \ldots, x_n$$
$$\text{по признаку } B \quad y_1, y_2, \ldots, y_n$$

Допустим, что правее y_1 имеется R_1 рангов, бóльших y_1; правее y_2 имеется R_2 рангов, бóльших y_2; ... ; правее y_{n-1} имеется R_{n-1} рангов, бóльших y_{n-1}. Введем обозначение суммы рангов R_i $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$:

$$R = R_1 + R_2 + \ldots + R_{n-1}.$$

Выборочный коэффициент ранговой корреляции Кендалла определяется формулой

$$\tau_{\text{в}} = [4R/n(n-1)] - 1, \qquad (*)$$

где n — объем выборки, $R = \sum_{i=1}^{n-1} R_i$.

Убедимся, что коэффициент Кендалла имеет те же свойства, что и коэффициент Спирмена.

1. В случае «полной прямой зависимости» признаков

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \ldots, x_n = n$$
$$y_1 = 1, \quad y_2 = 2, \ldots, y_n = n$$

Правее y_1 имеется $n-1$ рангов, бóльших y_1, поэтому $R_1 = n-1$. Очевидно, что $R_2 = n-2, \ldots, R_{n-1} = 1$. Следовательно,

$$R = (n-1) + (n-2) + \ldots + 1 = n(n-1)/2. \qquad (**)$$

Подставив (**) в (*), получим

$$\tau_{\text{в}} = 1.$$

2. В случае «противоположной зависимости»

$$x_1 = 1, \; x_2 = 2, \ldots, x_n = n$$
$$y_1 = n, \; y_2 = n-1, \ldots, y_n = 1$$

Правее y_1 нет рангов, бóльших y_1; поэтому $R_1=0$. Очевидно, что $R_2=R_3=\ldots=R_{n-1}=0$. Следовательно,

$$R=0. \qquad (***)$$

Подставив (***) в (*), получим

$$\tau_в=-1.$$

Замечание. При достаточно большом объеме выборки и при значениях коэффициентов ранговой корреляции, не близких к единице, имеет место приближенное равенство

$$\rho_В=(3/2)\,\tau_В.$$

Пример 1. Найти выборочный коэффициент ранговой корреляции Кендалла по данным рангам объектов выборки объема $n=10$:

по признаку $A \ldots x_i$ 1 2 3 4 5 6 ¦ 7 8 9 10
по признаку $B \ldots y_i$ 6 4 8 1 2 5 10 3 7 9

Решение. Правее $y_1=6$ имеется 4 ранга (8, 10, 7, 9), бóльших y_1, поэтому $R_1=4$. Аналогично найдем. $R_2=5$, $R_3=2$, $R_4=6$, $R_5=5$, $R_6=3$, $R_7=0$, $R_8=2$, $R_9=1$. Следовательно, сумма рангов $R=28$.

Найдем искомый коэффициент ранговой корреляции Кендалла, учитывая, что $n=10$·

$$\tau_в=[4R/n\,(n-1)]-1=[4\cdot 28/10\cdot 9]-1=0{,}24.$$

Приведем правило, позволяющее установить значимость или незначимость ранговой корреляционной связи Кендалла.

Правило. Для того чтобы при уровне значимости α, проверить нулевую гипотезу о равенстве нулю генерального коэффициента ранговой корреляции $\tau_г$ Кендалла при конкурирующей гипотезе $H_1{:}\,\tau_г\neq 0$, надо вычислить критическую точку:

$$T_{кр}=z_{кр}\sqrt{\frac{2\,(2n+5)}{9n\,(n-1)}},$$

где n — объем выборки; $z_{кр}$ — критическая точка двусторонней критической области, которую находят по таблице функции Лапласа по равенству $\Phi(z_{кр})=(1-\alpha)/2$.

Если $|\tau_в|<T_{кр}$ — нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу. Ранговая корреляционная связь между качественными признаками незначимая.

Если $|\tau_в|>T_{кр}$ — нулевую гипотезу отвергают. Между качественными признаками существует значимая ранговая корреляционная связь.

Пример 2. При уровне значимости 0,05 проверить, является ли ранговая корреляционная связь $\tau_в=0{,}24$, вычисленная в примере 1, значимой?

Решение. Найдем критическую точку $z_{кр}$:

$$Ф(z_{кр}) = (1-\alpha)/2 = (1-0,05)/2 = 0,475.$$

По таблице функции Лапласа (см. приложение 2) находим $z_{кр} = 1,96$ Найдем критическую точку:

$$T_{кр} = z_{кр} \sqrt{\frac{2(2n+5)}{9n(n-1)}}.$$

Подставив $z_{кр} = 1,96$ и $n = 10$, получим $T_{кр} = 0,487$. В примере 1 $\tau_в = 0,24$.

Так как $\tau_в < T_{кр}$ — нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу; ранговая корреляционная связь между признаками незначимая.

§ 27. Критерий Вилкоксона и проверка гипотезы об однородности двух выборок

Критерий Вилкоксона [*] служит для проверки однородности двух независимых выборок: $x_1, x_2, \ldots, x_{n_1}$ и y_1, $y_2, \ldots, y_{n_2}$. Достоинство этого критерия состоит в том, что он применим к случайным величинам, распределения которых неизвестны; требуется лишь, чтобы величины были непрерывными.

Если выборки однородны, то считают, что они извлечены из одной и той же генеральной совокупности и, следовательно, имеют одинаковые, причем неизвестные, непрерывные функции распределения $F_1(x)$ и $F_2(x)$.

Таким образом, нулевая гипотеза состоит в том, что при всех значениях аргумента (обозначим его через x) функции распределения равны между собой: $F_1(x) = F_2(x)$.

Конкурирующими являются следующие гипотезы: $F_1(x) \neq F_2(x)$, $F_1(x) < F_2(x)$ и $F_1(x) > F_2(x)$.

Заметим, что принятие конкурирующей гипотезы H_1: $F_1(x) < F_2(x)$ означает, что $X > Y$. Действительно, неравенство $F_1(x) < F_2(x)$ равносильно неравенству $P(X < x) < P(Y < x)$. Отсюда легко получить, что $P(X > x) > P(Y > x)$. Другими словами, вероятность того, что случайная величина X превзойдет фиксированное действительное число x, больше, чем вероятность случайной величине Y оказаться большей, чем x; в этом смысле $X > Y$.

Аналогично, если справедлива конкурирующая гипотеза $H_1: F_1(x) > F_2(y)$, то $X < Y$.

---

[*] В 1945 г. Вилкоксон опубликовал критерий сравнения двух выборок одинакового объема, в 1947 г. Манн и Уитни обобщили критерий на выборки различного объема.

Далее предполагается, что объем первой выборки меньше (не больше) объема второй: $n_1 \leqslant n_2$; если это не так, то выборки можно перенумеровать (поменять местами).

А. Проверка нулевой гипотезы в случае, если объем обеих выборок не превосходит 25. Правило 1. Для того чтобы при заданном уровне значимости $\alpha = 2Q$ проверить нулевую гипотезу $H_0: F_1(x) = F_2(x)$ об однородности двух независимых выборок объемов n_1 и n_2 $(n_1 \leqslant n_2)$ при конкурирующей гипотезе $H_1: F_1(x) \neq F_2(x)$, надо:

1) расположить варианты обеих выборок в возрастающем порядке, т. е. в виде одного вариационного ряда, и найти в этом ряду наблюдаемое значение критерия $W_{\text{набл}}$—сумму порядковых номеров вариант первой выборки;

2) найти по таблице приложения 10 нижнюю критическую точку $w_{\text{нижн. кр}}(Q;\ n_1,\ n_2)$, где $Q = \alpha/2$;

3) найти верхнюю критическую точку по формуле

$$w_{\text{верхн. кр}} = (n_1 + n_2 + 1)\, n_1 - w_{\text{нижн. кр}}.$$

Если $W_{\text{набл}} < w_{\text{нижн. кр}}$ или $W_{\text{набл}} > w_{\text{верхн. кр}}$—нулевую гипотезу отвергают.

Если $w_{\text{нижн. кр}} < W_{\text{набл}} < w_{\text{верхн. кр}}$—нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу.

Пример 1. При уровне значимости 0,05 проверить нулевую гипотезу об однородности двух выборок объемов $n_1 = 6$ и $n_2 = 8$:

x_i	15	23	25	26	28	29		
y_i	12	14	18	20	22	24	27	30

при конкурирующей гипотезе $H_1: F_1(x) \neq F_2(x)$.

Решение. Расположим варианты обеих выборок в виде одного вариационного ряда и перенумеруем их:

порядковые номера . . .	1	2	*3*	4	5	6	*7*	8	*9*	*10*	11	*12*	*13*	14
варианты . . .	12	14	15	18	20	22	23	24	25	26	27	28	29	30

Найдем наблюдаемое значение критерия Вилкоксона—сумму порядковых номеров (они набраны курсивом) вариант первой выборки:

$$W_{\text{набл}} = 3 + 7 + 9 + 10 + 12 + 13 = 54.$$

Найдем по таблице приложения 10 нижнюю критическую точку, учитывая, что $Q = \alpha/2 = 0{,}05/2 = 0{,}025$, $n_1 = 6$, $n_2 = 8$:

$$w_{\text{нижн. кр}}(0{,}025;\ 6,\ 8) = 29.$$

Найдем верхнюю критическую точку:

$$w_{\text{верхн. кр}} = (n_1 + n_2 + 1)n_1 - w_{\text{нижн. кр}} = (6 + 8 + 1)\cdot 6 - 29 = 61.$$

Так как $29 < 54 < 61$, т. е. $w_{\text{нижн. кр}} < W_{\text{набл}} < w_{\text{верхн. кр}}$,—нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу об однородности выборок.

Правило 2. При конкурирующей гипотезе $F_1(x) > F_2(x)$ надо найти по таблице нижнюю критическую точку $w_{\text{нижн. кр}}(Q;\ n_1;\ n_2)$, где $Q=\alpha$.

Если $W_{\text{набл}} > w_{\text{нижн. кр}}$ — нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу.

Если $W_{\text{набл}} < w_{\text{нижн. кр}}$ — нулевую гипотезу отвергают.

Правило 3. При конкурирующей гипотезе $H_1: F_1(x) < F_2(x)$ надо найти верхнюю критическую точку: $w_{\text{верхн. кр}}(Q;\ n_1,\ n_2) = (n_1+n_2+1)\,n_1 - w_{\text{нижн. кр}}(Q;\ n_1,\ n_2)$, где $Q=\alpha$.

Если $W_{\text{набл}} < w_{\text{верхн. кр}}$ — нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу.

Если $W_{\text{набл}} > w_{\text{верхн. кр}}$ — нулевую гипотезу отвергают.

Замечание. Если несколько вариант только одной выборки одинаковы, то в общем вариационном ряду им приписывают обычные порядковые номера (совпавшие варианты нумеруют так, как если бы они были различными числами); если же совпадают варианты разных выборок, то всем им присваивают один и тот же порядковый номер, равный среднему арифметическому порядковых номеров, которые имели бы эти варианты до совпадения.

Б. Проверка нулевой гипотезы в случае, если объем хотя бы одной из выборок превосходит 25. 1. При конкурирующей гипотезе $F_1(x) \neq F_2(x)$ нижняя критическая точка

$$w_{\text{нижн. кр}}(Q;\ n_1,\ n_2) = \left[\frac{(n_1+n_2+1)\,n_1-1}{2} - z_{\text{кр}}\sqrt{\frac{n_1 n_2\,(n_1+n_2+1)}{12}}\right], \qquad (*)$$

где $Q=\alpha/2$; $z_{\text{кр}}$ находят по таблице функции Лапласа по равенству $\Phi(z_{\text{кр}}) = (1-\alpha)/2$; знак $[a]$ означает целую часть числа a.

В остальном правило 1, приведенное в п. А, сохраняется.

2. При конкурирующих гипотезах $F_1(x) > F_2(x)$ и $F_1(x) < F_2(x)$ нижнюю критическую точку находят по формуле (*), положив $Q=\alpha$; соответственно $z_{\text{кр}}$ находят по таблице функции Лапласа по равенству $\Phi(z_{\text{кр}}) = (1-2\alpha)/2$. В остальном правила 2—3, приведенные в п. А, сохраняются.

Пример 2. При уровне значимости 0,01 проверить нулевую гипотезу об однородности двух выборок объемов $n_1=30$ и $n_2=50$ при конкурирующей гипотезе $H_1: F_1(x) \neq F_2(x)$, если известно, что в общем вариационном ряду, составленном из вариант обеих выборок, сумма порядковых номеров вариант первой выборки $W_{\text{набл}} = 1600$.

Решение. По условию, конкурирующая гипотеза имеет вид $F_1(x) \neq F_2(x)$, поэтому критическая область — двусторонняя.

Найдем $z_{кр}$ по равенству

$$\Phi(z_{кр}) = (1-\alpha)/2 = (1-0,01)/2 = 0,495.$$

По таблице функции Лапласа (см. приложение 2) находим $z_{кр} = 2,58$.

Подставив $n_1 = 30$, $n_2 = 50$, $z_{кр} = 2,58$ в формулу (*), получим $w_{нижн.\,кр} = 954$.

Найдем верхнюю критическую точку:

$$w_{верхн.\,кр} = (n_1 + n_2 + 1)\,n_1 - w_{нижн.\,кр} = 2430 - 954 = 1476.$$

Так как $1600 > 1476$, т. е. $W_{набл} > w_{верх.\,кр}$ — нулевая гипотеза отвергается.

Задачи

1. По двум незавнсимым выборкам, объемы которых соответственно равны n_1 и n_2, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей X и Y, найдены исправленные выборочные дисперсии s_X^2 и s_Y^2. При уровне значимости α проверить нулевую гипотезу H_0: $D(X) = D(Y)$ о равенстве генеральных дисперсий при конкурирующей гипотезе H_1: $D(X) > D(Y)$, если:

а) $n_1 = 10$, $n_2 = 16$, $s_X^2 = 3,6$, $s_Y^2 = 2,4$, $\alpha = 0,05$;

б) $n_1 = 13$, $n_2 = 18$, $s_X^2 = 0,72$, $s_Y^2 = 0,20$, $\alpha = 0,01$.

Отв. а) $F_{набл} = 1,5$; $F_{кр}(0,05;\ 9;\ 15) = 2,59$. Нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу; б) $F_{набл} = 3,6$; $F_{кр}(0,01;\ 12;\ 17) = 3,45$. Нулевая гипотеза отвергается.

2. По двум независимым выборкам, объемы которых соответственно равны n и m, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей X и Y, найдены выборочные средние $\overline{x}$ и $\overline{y}$. Генеральные дисперсии $D(X)$ и $D(Y)$ известны. При уровне значимости α проверить нулевую гипотезу H_0: $M(X) = M(Y)$ о равенстве математических ожиданий при конкурирующей гипотезе $H_1: M(X) \neq M(Y)$, если:

а) $n = 30$, $m = 20$, $D(X) = 120$, $D(Y) = 100$, $\alpha = 0,05$;

б) $n = 50$, $m = 40$, $D(X) = 50$, $D(Y) = 120$, $\alpha = 0,01$.

Отв. а) $Z_{набл} = 1$, $z_{кр} = 1,96$. Нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу; б) $Z_{набл} = 10$, $z_{кр} = 2,58$. Нулевая гипотеза отвергается.

3. По двум независимым выборкам, объемы которых соответственно равны $n = 5$ и $m = 6$, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей X и Y, найдены выборочные средние $\overline{x} = 15,9$, $\overline{y} = 14,1$ и исправленные выборочные дисперсии $s_X^2 = 14,76$, $s_Y^2 = 4,92$. При уровне значимости 0,05 проверить нулевую гипотезу $H_0: M(X) = M(Y)$ о равенстве математических ожиданий при конкурирующей гипотезе $H_1: M(X) \neq M(Y)$.

Указание. Предварительно сравнить дисперсии.

Отв. $T_{набл} = 0,88$, $t_{кр}(0,05;\ 9) = 2,26$. Нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу.

4. Из нормальной генеральной совокупности с известным средним квадратическим отклонением $\sigma = 2,1$ извлечена выборка объема

$n=49$ и по ней найдена выборочная средняя $\overline{x}=4{,}5$. Требуется при уровне значимости 0,05 проверить нулевую гипотезу H_0: $a=3$ о равенстве математического ожидания гипотетическому значению при конкурирующей гипотезе H_1: $a \neq 3$.

Отв. $U_{\text{набл}}=5$, $u_{\text{кр}}=1{,}96$. Нулевая гипотеза отвергается.

5. По выборке объема $n=16$, извлеченной из нормальной генеральной совокупности, найдены выборочная средняя $\overline{x}=12{,}4$ и «исправленное» среднее квадратическое отклонение $s=1{,}2$. Требуется при уровне значимости 0,05 проверить нулевую гипотезу H_0: $a=11{,}8$ о равенстве математического ожидания гипотетическому значению при конкурирующей гипотезе H_1:$a \neq 11{,}8$.

Отв. $T_{\text{набл}}=2$, $t_{\text{кр}}(0{,}05;\ 15)=2{,}13$. Нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу.

6. Двумя приборами измерены 5 деталей. Получены следующие результаты (мм):

$$x_1=4,\quad x_2=5,\quad x_3=6,\quad x_3=7,\quad x_5=8$$
$$y_1=5,\quad y_2=5,\quad y_3=9,\quad y_4=4,\quad y_5=6$$

При уровне значимости 0,05 проверить, значимо или незначимо различаются результаты измерений.

Отв. $T_{\text{набл}}=10{,}54$, $t_{\text{кр}}(0{,}05;\ 4)=2{,}78$. Различие результатов измерений значимое.

7. По 100 независимым испытаниям найдена относительная частота $m/n=0{,}15$. При уровне значимости 0,05 проверить нулевую гипотезу H_0:$p=0{,}17$ о равенстве относительной частоты гипотетической вероятности при конкурирующей гипотезе H_1:$p \neq 0{,}17$.

Отв. $|U_{\text{набл}}|=0{,}53$, $u_{\text{кр}}=1{,}96$. Нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу.

8. Из партии картона фабрики № 1 случайно отобрано 150 листов, среди которых оказалось 12 нестандартных; из 100 листов картона фабрики № 2 обнаружено 15 нестандартных. Можно ли считать на пятипроцентном уровне значимости, что относительные частоты получения нестандартного картона обеими фабриками различаются значимо?

Указание. Принять в качестве конкурирующей гипотезы H_1:$p_1 \neq p_2$.

Отв. $U_{\text{набл}}=-1{,}75$; $u_{\text{кр}}=1{,}96$. Различие относительных частот незначимое.

9. По пяти независимым выборкам, объемы которых соответственно равны $n_1=7$, $n_2=9$, $n_3=10$, $n_4=12$, $n_5=12$, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей, найдены исправленные выборочные дисперсии: 0,27; 0,32; 0,40; 0,42; 0,48. При уровне значимости 0,05 проверить нулевую гипотезу об однородности дисперсий (критическая область — правосторонняя).

Указание. Использовать критерий Бартлетта (см. § 20).

Отв. $V=6{,}63$, $\chi^2_{\text{кр}}(0{,}05;\ 4)=9{,}5$. Нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу.

10. По четырем независимым выборкам одинакового объема $n=17$, извлеченным из нормальных совокупностей, найдены исправленные выборочные дисперсии: 2,12; 2,32; 3,24; 4,32. Требуется: а) при уровне значимости 0,05 проверить нулевую гипотезу о равенстве генеральных дисперсий (критическая область — правосторонняя); б) оценить генеральную дисперсию.

Указание. Использовать критерий Кочрена (см. § 21).

Отв. а) $G_{\text{набл}}=0{,}36$; $G_{\text{кр}}(0{,}05;\ 16;\ 4)=0{,}4366$. Нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу; б) $\sigma=3$.

11. По выборке объема $n=62$, извлеченной из двумерной нормальной совокупности $(X,\ Y)$, найден выборочный коэффициент корреляции $r_{\text{в}}=0{,}6$. При уровне значимости 0,05 проверить нулевую гипотезу $H_0: r_{\text{г}}=0$ о равенстве нулю генерального коэффициента корреляции при конкурирующей гипотезе $r_{\text{г}}\neq 0$.

Отв. $T_{\text{набл}}=5{,}81$, $t_{\text{кр}}(0{,}05;\ 60)=2{,}0$. Нулевая гипотеза отвергается.

12. При уровне значимости 0,05 проверить гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности, если известны эмпирические (приведены в первой строке) и теоретические частоты (приведены во второй строке):

а)	6	12	16	40	13	8	5			
	4	11	15	43	15	6	6			
б)	5	6	14	32	43	39	30	20	6	5
	4	7	12	29	48	35	34	18	7	6
в)	5	13	12	44	8	12	6			
	2	20	12	35	15	10	6			

Отв. $\chi^2_{\text{набл}}=2{,}5$, $\chi^2_{\text{кр}}(0{,}05;\ 4)=9{,}5$. Нет оснований отвергнуть гипотезу; б) $\chi^2_{\text{набл}}=3$, $\chi^2_{\text{кр}}(0{,}05;\ 7)=1461$. Нет оснований отвергнуть гипотезу; в) $\chi^2_{\text{набл}}=13$, $\chi^2_{\text{кр}}(0{,}05;\ 4)=9{,}5$. Гипотеза отвергается.

13. а) Найти выборочный коэффициент ранговой корреляции Спирмена по данным рангам объектов выборки объема $n=10$:

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i	4	3	5	8	6	1	7	10	2	9

б) значима ли ранговая корреляционная связь при уровне значимости 0,05?

Отв. а) $\rho_{\text{в}}=1/3$; б) $T_{\text{кр}}=0{,}77$; корреляционная ранговая связь незначима.

14. а) Найти выборочный коэффициент ранговой корреляции Кендалла по данным рангам объектов выборки объема $n=10$:

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i	4	3	5	8	6	1	7	10	2	9

б) значима ли ранговая корреляционная связь при уровне значимости 0,05?

Отв. а) $\tau_{\text{в}}=0{,}29$; б) $T_{\text{кр}}=0{,}96$; ранговая корреляционная связь незначима.

15. Известны результаты измерения (мм) изделий двух выборок, объемы которых соответственно равны $n_1=6$ и $n_2=6$:

x_i	12	10	8	15	14	11
y_i	13	9	16	17	7	18

При уровне значимости 0,05 проверить нулевую гипотезу $F_1(x)=F_2(x)$ об однородности выборок при конкурирующей гипотезе $H_1: F_1(x)\neq F_2(x)$.

Указание. Использовать критерий Вилкоксона.

Отв. Нулевая гипотеза отвергается: $w_{\text{нижн. кр}}(0{,}025;\ 6;\ 6)=26$, $w_{\text{верхн. кр}}=52$, $W_{\text{набл}}=70$.

16. Используя критерий Вилкоксона, при уровне значимости 0,05 проверить нулевую гипотезу об однородности двух выборок, объемы которых соответственно равны $n_1=30$ и $n_2=50$, при конкурирующей гипотезе $F_1(x) > F_2(x)$, если известно, что сумма порядковых номеров вариант первой выборки в общем вариационном ряду $W_{\text{набл}}=1150$.

Отв. Нег оснований отвергнуть нулевую гипотезу:

$$w_{\text{нижн. кр}}(0{,}05;\ 30;\ 50)=1048,\quad w_{\text{верхн. кр}}=1382.$$

Глава двадцатая

ОДНОФАКТОРНЫЙ ДИСПЕРСИОННЫЙ АНАЛИЗ

§ 1. Сравнение нескольких средних. Понятие о дисперсионном анализе

Пусть генеральные совокупности $X_1, X_2, \ldots, X_p$ распределены нормально и имеют одинаковую, хотя и неизвестную, дисперсию; математические ожидания также неизвестны, но могут быть различными. Требуется при заданном уровне значимости по выборочным средним проверить нулевую гипотезу $H_0: M(X_1)=M(X_2)=\ldots=M(X_p)$ о равенстве всех математических ожиданий. Другими словами, требуется установить, значимо или. незначимо различаются выборочные средние. Казалось бы, для сравнения нескольких средних $(p>2)$ можно сравнить их попарно. Однако с возрастанием числа средних возрастает и наибольшее различие между ними: среднее новой выборки может оказаться больше наибольшего или меньше наименьшего из средних, полученных до нового опыта. По этой причине для сравнения нескольких средних пользуются другим методом, который основан на сравнении дисперсий и поэтому назван *дисперсионным анализом* (в основном развит английским статистиком Р. Фишером).

На практике дисперсионный анализ применяют, чтобы установить, оказывает ли существенное влияние некоторый качественный фактор F, который имеет p уровней $F_1, F_2, \ldots, F_p$ на изучаемую величину X. Например, если требуется выяснить, какой вид удобрений наиболее эффективен для получения наибольшего урожая, то фактор F — удобрение, а его уровни — виды удобрений.

Основная идея дисперсионного анализа состоит в сравнении «факторной дисперсии», порождаемой воздействием фактора, и «остаточной дисперсии», обусловленной случайными причинами. Если различие между этими дисперсиями значимо, то фактор оказывает существенное влияние на X; в этом случае средние наблюдаемых значений на каждом уровне (групповые средние) различаются также значимо.

Если уже установлено, что фактор существенно влияет на X, а требуется выяснить, какой из уровней оказывает наибольшее воздействие, то дополнительно производят попарное сравнение средних.

Иногда дисперсионный анализ применяется, чтобы установить однородность нескольких совокупностей (дисперсии этих совокупностей одинаковы по предположению; если дисперсионный анализ покажет, что и математические ожидания одинаковы, то в этом смысле совокупности однородны). Однородные же совокупности можно объединить в одну и тем самым получить о ней более полную информацию, следовательно, и более надежные выводы.

В более сложных случаях исследуют воздействие нескольких факторов на нескольких постоянных или случайных уровнях и выясняют влияние отдельных уровней и их комбинаций (*многофакторный анализ*).

Мы ограничимся простейшим случаем однофакторного анализа, когда на X воздействует только один фактор, который имеет p постоянных уровней.

§ 2. Общая факторная и остаточная суммы квадратов отклонений

Пусть на количественный нормально распределенный признак X воздействует фактор F, который имеет p постоянных уровней. Будем предполагать, что число

Таблица 30

Номер испытания	Уровни фактора F_j			
	F_1	F_2	...	F_p
1	x_{11}	x_{12}	...	x_{1p}
2	x_{21}	x_{22}	...	x_{2p}
...	...	...	...	...
q	x_{q1}	x_{q2}	...	x_{qp}
Групповая средняя	$\overline{x}_{\text{гр}}$	$\overline{x}_{\text{гр}2}$	...	$\overline{x}_{\text{гр}p}$

наблюдений (испытаний) на каждом уровне одинаково и равно q.

Пусть наблюдалось $n=pq$ значений x_{ij} признака X, где i — номер испытания ($i=1, 2, \ldots, q$), j — номер уровня фактора ($j=1, 2, \ldots, p$). Результаты наблюдений приведены в табл. 30.

Введем, по определению,

$$S_{\text{общ}}=\sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{q}(x_{ij}-\overline{x})^2$$

(*общая сумма* квадратов отклонений наблюдаемых значений от общей средней $\overline{x}$),

$$S_{\text{факт}}=q\sum_{j=1}^{p}(\overline{x}_{\text{гр}\,j}-\overline{x})^2$$

(*факторная сумма* квадратов отклонений групповых средних от общей средней, которая характеризует рассеяние «между группами»),

$$S_{\text{ост}}=\sum_{i=1}^{q}(x_{i1}-\overline{x}_{\text{гр}1})^2+$$

$$+\sum_{i=1}^{q}(x_{i2}-\overline{x}_{\text{гр}2})^2+\ldots+\sum_{i=1}^{q}(x_{ip}-\overline{x}_{\text{гр}p})^2$$

(*остаточная сумма* квадратов отклонений наблюдаемых значений группы от своей групповой средней, которая характеризует рассеяние «внутри групп»).

Практически остаточную сумму находят по равенству (см. § 3, следствие)

$$S_{\text{ост}}=S_{\text{общ}}-S_{\text{факт}}.$$

Элементарными преобразованиями можно получить формулы, более удобные для расчетов:

$$S_{\text{общ}}=\sum_{i=1}^{p}P_j-\left[\left(\sum_{j=1}^{p}R_j\right)^2\Big/(pq)\right], \qquad (*)$$

$$S_{\text{факт}}=\left[\left(\sum_{j=1}^{p}R_j^2\right)\Big/q\right]-\left[\left(\sum_{j=1}^{p}R_j\right)^2\Big/(pq)\right], \qquad (**)$$

где $P_j=\sum_{i=1}^{q}x_{ij}^2$ — сумма квадратов значений признака на уровне F_j; $R_j=\sum_{i=1}^{q}x_{ij}$ — сумма значений признака на уровне F_j.

Замечание. Для упрощения вычислений вычитают из каждого наблюдаемого значения одно и то же число C, примерно равное общей средней. Если уменьшенные значения $y_{ij}=x_{ij}-C$, то

$$S_{\text{общ}}=\sum_{j=1}^{p} Q_j-\left[\left(\sum_{j=1}^{p} T_j\right)^2\Big/(pq)\right], \qquad (***)$$

$$S_{\text{факт}}=\left[\sum_{j=1}^{p} T_j^2/q\right]-\left[\left(\sum_{j=1}^{p} T_j\right)^2\Big/(pq)\right], \qquad (****)$$

где $Q_j=\sum\limits_{i=1}^{q} y_{ij}^2$ — сумма квадратов уменьшенных значений признака на уровне F_j; $T_j=\sum\limits_{i=1}^{q} y_{ij}$ — сумма уменьшенных значений признака на уровне F_j.

Для вывода формул (***) и (****) достаточно подставить $x_{ij}=y_{ij}+C$ в соотношение (*) и $R_j=\sum\limits_{i=1}^{q} x_{ij}=\sum\limits_{i=1}^{q} (y_{ij}+C)=\sum\limits_{i=1}^{q} y_{ij}+qC=T_j+qC$ в соотношение (**).

Пояснения. 1. Убедимся, что $S_{\text{факт}}$ характеризует воздействие фактора F. Допустим, что фактор оказывает существенное влияние на X. Тогда группа наблюдаемых значений признака на одном определенном уровне, вообще говоря, отличается от групп наблюдений на других уровнях. Следовательно, различаются и групповые средние, причем они тем больше рассеяны вокруг общей средней, чем большим окажется воздействие фактора. Отсюда следует, что для оценки воздействия фактора целесообразно составить сумму квадратов отклонений групповых средних от общей средней (отклонение возводят в квадрат, чтобы исключить погашение положительных и отрицательных отклонений). Умножив эту сумму на q, получим $S_{\text{факт}}$. Итак, $S_{\text{факт}}$ характеризует воздействие фактора.

2. Убедимся, что $S_{\text{ост}}$ отражает влияние случайных причин. Казалось бы, наблюдения одной группы не должны различаться. Однако, поскольку на X, кроме фактора F, воздействуют и случайные причины наблюдения одной и той же группы, вообще говоря, различны и, значит, рассеяны вокруг своей групповой средней. Отсюда следует, что для оценки влияния случайных причин целесообразно составить сумму квадратов отклонений наблюдаемых значений каждой группы от своей групповой средней, т. е. $S_{\text{ост}}$. Итак, $S_{\text{ост}}$ характеризует воздействие случайных причин.

3. Убедимся, что $S_{\text{общ}}$ отражает влияние и фактора и случайных причин. Будем рассматривать все наблюдения как единую совокупность. Наблюдаемые значения признака различны вследствие воздействия фактора и случайных причин. Для оценки этого воздействия целесообразно составить сумму квадратов отклонений наблюдаемых значений от общей средней, т. е. $S_{\text{общ}}$.

Итак, $S_{\text{общ}}$ характеризует влияние фактора и случайных причин.

Приведем пример, который наглядно показывает, что факторная сумма отражает влияние фактора, а остаточная — влияние случайных причин.

Пример. Двумя приборами произведены по два измерения физической величины, истинный размер которой равен x. Рассматривая в качестве фактора систематическую ошибку C, а в качестве его уровней — систематические ошибки C_1 и C_2 соответственно первого и второго прибора, показать, что $S_{\text{факт}}$ определяется систематическими, а $S_{\text{ост}}$ — случайными ошибками измерений.

Решение. Введем обозначения: α_1, α_2 — случайные ошибки первого и второго измерений первым прибором; β_1, β_2 — случайные ошибки первого и второго измерений вторым прибором.

Тогда наблюдаемые значения результатов измерений соответственно равны (первый индекс при x указывает номер измерения, а второй — номер прибора):

$$x_{11}=x+C_1+\alpha_1,\ x_{21}=x+C_1+\alpha_2;\ x_{12}=x+C_2+\beta_1,\ x_{22}=x+C_2+\beta_2.$$

Средние значения измерений первым и вторым приборами соответственно равны:

$$\bar{x}_{\text{гр }1}=x+C_1+[(\alpha_1+\alpha_2)/2]=x+C_1+\alpha,$$

$$\bar{x}_{\text{гр }2}=x+C_2+[(\beta_1+\beta_2)/2]=x+C_2+\beta.$$

Общая средняя

$$\bar{x}=(\bar{x}_{\text{гр }1}+\bar{x}_{\text{гр }2})/2=x+[(C_1+C_2)/2]+[(\alpha+\beta)/2],$$

факторная сумма

$$S_{\text{факт}}=(\bar{x}_{\text{гр }1}-\bar{x})^2+(\bar{x}_{\text{гр }2}-\bar{x})^2.$$

Подставив величины, заключенные в скобках, после элементарных преобразований получим

$$S_{\text{факт}}=[(C_1-C_2)^2/2]+(C_1-C_2)(\alpha-\beta)+[(\alpha-\beta)^2/2].$$

Мы видим, что $S_{\text{факт}}$ определяется главным образом, первым слагаемым (поскольку случайные ошибки измерений малы) и, следовательно, действительно отражает влияние фактора C.

Остаточная сумма

$$S_{\text{ост}}=(x_{11}-\bar{x}_{\text{гр }1})^2+(x_{21}-\bar{x}_{\text{гр }1})^2+(x_{12}-\bar{x}_{\text{гр }2})^2+(x_{22}-\bar{x}_{\text{гр }2})^2.$$

Подставив величины, заключенные в скобках, получим

$$S_{\text{ост}}=[(\alpha_1-\alpha)^2+(\alpha_2-\alpha)^2]+[(\beta_1-\beta)^2+(\beta_2-\beta)^2].$$

Мы видим, что $S_{\text{ост}}$ определяется случайными ошибками измерений и, следовательно, действительно отражает влияние случайных причин.

Замечание. То, что $S_{\text{ост}}$ порождается случайными причинами, следует также из равенства (см. § 3, следствие)

$$S_{\text{ост}} = S_{\text{общ}} - S_{\text{факт}}.$$

Действительно, $S_{\text{общ}}$ является результатом воздействия фактора и случайных причин; вычитая $S_{\text{факт}}$, мы исключаем влияние фактора. Следовательно, «оставшаяся часть» отражает влияние случайных причин.

§ 3. Связь между общей, факторной и остаточной суммами

Покажем, что

$$S_{\text{общ}} = S_{\text{факт}} + S_{\text{ост}}.$$

Для упрощения вывода ограничимся двумя уровнями ($p=2$) и двумя испытаниями на каждом уровне ($q=2$). Результаты испытаний представим в виде табл. 31.

Таблица 31

Номер испытания	Уровни фактора	
i	F_1	F_2
1 2	x_{11} x_{21}	x_{12} x_{22}
$\overline{x}_{\text{гр}\,j}$	$\overline{x}_{\text{гр}\,1}$	$\overline{x}_{\text{гр}\,2}$

Тогда

$$S_{\text{общ}} = (x_{11}-\overline{x})^2 + (x_{21}-\overline{x})^2 + (x_{12}-\overline{x})^2 + (x_{22}-\overline{x})^2.$$

Вычтем и прибавим к каждому наблюдаемому значению на первом уровне групповую среднюю $\overline{x}_{\text{гр}\,1}$, а на втором — $\overline{x}_{\text{гр}\,2}$. Выполнив возведение в квадрат и учитывая, что сумма всех удвоенных произведений равна нулю (рекомендуем читателю убедиться в этом самостоятельно), получим

$$S_{\text{общ}} = 2\left[(\overline{x}_{\text{гр}\,1}-\overline{x})^2 + (\overline{x}_{\text{гр}\,2}-\overline{x})^2\right] + \left[(x_{11}-\overline{x}_{\text{гр}\,1})^2 + \right.$$
$$\left. + (x_{21}-\overline{x}_{\text{гр}\,1})^2 + (x_{12}-\overline{x}_{\text{гр}\,2})^2 + (x_{22}-\overline{x}_{\text{гр}\,2})^2\right] =$$
$$= S_{\text{факт}} + S_{\text{ост}}.$$

Итак,

$$S_{\text{общ}} = S_{\text{факт}} + S_{\text{ост}}.$$

Следствие. Из полученного равенства вытекает важное следствие:

$$S_{\text{ост}} = S_{\text{общ}} - S_{\text{факт}}.$$

Отсюда видно, что нет надобности непосредственно вычислять остаточную сумму: достаточно найти общую и факторную суммы, а затем их разность.

§ 4. Общая, факторная и остаточная дисперсии

Разделив суммы квадратов отклонений на соответствующее число степеней свободы, получим общую, факторную и остаточную дисперсии:

$$s^2_{\text{общ}} = \frac{S_{\text{общ}}}{pq-1}, \quad s^2_{\text{факт}} = \frac{S_{\text{факт}}}{p-1}, \quad s^2_{\text{ост}} = \frac{S_{\text{ост}}}{p(q-1)},$$

где p — число уровней фактора; q — число наблюдений на каждом уровне; $pq-1$ — число степеней свободы общей дисперсии; $p-1$ — число степеней свободы факторной дисперсии; $p(q-1)$ — число степеней свободы остаточной дисперсии.

Если нулевая гипотеза о равенстве средних справедлива, то все эти дисперсии являются несмещенными оценками генеральной дисперсии. Например, учитывая, что объем выборки $n = pq$, заключаем, что

$$s^2_{\text{общ}} = \frac{S_{\text{общ}}}{pq-1} = \frac{S_{\text{общ}}}{n-1}$$

— исправленная выборочная дисперсия, которая, как известно, является несмещенной оценкой генеральной дисперсии.

Замечание. Число степеней свободы $p(q-1)$ остаточной дисперсии равно разности между числами степеней свободы общей и факторной дисперсий. Действительно,

$$(pq-1)-(p-1) = pq-p = p(q-1).$$

§ 5. Сравнение нескольких средних методом дисперсионного анализа

Вернемся к задаче, поставленной в § 1: проверить при заданном уровне значимости нулевую гипотезу о равенстве нескольких ($p > 2$) средних нормальных совокупностей с неизвестными, но одинаковыми дисперсиями. Покажем, что решение этой задачи сводится к сравнению факторной и остаточной дисперсий по критерию Фишера—Снедекора (см. гл. XIX, § 8).

1. Пусть нулевая гипотеза о равенстве нескольких средних (далее будем называть их групповыми) правильна. В этом случае факторная и остаточная дисперсии являются несмещенными оценками неизвестной генеральной дисперсии (см. § 4) и, следовательно, различаются незначимо. Если сравнить эти оценки по критерию F, то очевидно, критерий укажет, что нулевую гипотезу о равенстве факторной и остаточной дисперсий следует принять.

Таким образом, если гипотеза о равенстве групповых средних правильна, то верна и гипотеза о равенстве факторной и остаточной дисперсий.

2. Пусть нулевая гипотеза о равенстве групповых средних ложна. В этом случае с возрастанием расхождения между групповыми средними увеличивается факторная дисперсия, а вместе с ней и отношение $F_{\text{набл}} = s^2_{\text{факт}}/s^2_{\text{ост}}$. В итоге $F_{\text{набл}}$ окажется больше $F_{\text{кр}}$ и, следовательно, гипотеза о равенстве дисперсий будет отвергнута.

Таким образом, если гипотеза о равенстве групповых средних ложна, то ложна и гипотеза о равенстве факторной и остаточной дисперсий.

Легко доказать от противного справедливость обратных утверждений: из правильности (ложности) гипотезы о дисперсиях следует правильность (ложность) гипотезы о средних.

Итак, *для того чтобы проверить нулевую гипотезу о равенстве групповых средних нормальных совокупностей с одинаковыми дисперсиями, достаточно проверить по критерию F нулевую гипотезу о равенстве факторной и остаточной дисперсий.* В этом и состоит метод дисперсионного анализа.

Замечание 1. Если факторная дисперсия окажется меньше остаточной, то уже отсюда следует справедливость гипотезы о равенстве групповых средних и, значит, нет надобности прибегать к критерию F.

Замечание 2. Если нет уверенности в справедливости предположения о равенстве дисперсий рассматриваемых p совокупностей, то это предположение следует проверить предварительно, например по критерию Кочрена.

Пример. Произведено по 4 испытания на каждом из трех уровней. Результаты испытаний приведены в табл. 32. Методом дисперсионного анализа при уровне значимости 0,05 проверить нулевую

Таблица 32

Номер испытания	Уровни фактора F_j		
i	F_1	F_2	F_3
1	51	52	42
2	52	54	44
3	56	56	50
4	57	58	52
$\bar{x}_{\text{гр}\,j}$	54	55	47

гипотезу о равенстве групповых средних. Предполагается, что выборки извлечены из нормальных совокупностей с одинаковыми дисперсиями.

Решение. Для упрощения расчета вычтем $C=52$ из каждого наблюдаемого значения: $y_{ij}=x_{ij}-52$. Составим расчетную табл. 33.

Пользуясь таблицей и учитывая, что число уровней фактора $p=3$, число испытаний на каждом уровне $q=4$, найдем общую и факторную суммы квадратов отклонений (см. § 2, формулы (***)

Таблица 33

Номер испытания	Уровни фактора F_j						Итоговый столбец
i	F_1		F_2		F_3		
	y_{i1}	y_{i1}^2	y_{i2}	y_{i2}^2	y_{i3}	y_{i3}^2	
1	−1	1	0	0,	−10	100	
2	0	0	2	4	−8	64	
3	4	16	4	16	−2	4	
4	5	25	6	36	0	0	
$Q_j=\sum_{i=1}^{4} y_{ij}^2$		42		56		168	$\sum Q_j=266$
$T_j=\sum y_{ij}$	8		12		−20		$\sum T_j=0$
T_j^2	64		144		400		$\sum T_j^2=608$

и (****)):

$$S_{\text{общ}}=\sum_{j=1}^{p} Q_j-\left[\left(\sum_{j=1}^{p} T_j\right)^2 \Big/ (pq)\right]=266-0=266;$$

$$S_{\text{факт}}=\left[\sum_{j=1}^{p} T_j^2/q\right]-\left[\left(\sum_{j=1}^{p} T_j\right)^2 \Big/ (pq)\right]=(608/4)-0=152.$$

Найдем остаточную сумму квадратов отклонений:

$$S_{\text{ост}}=S_{\text{общ}}-S_{\text{факт}}=266-152=114.$$

Найдем факторную и остаточную дисперсии:

$$s^2_{\text{факт}}=S_{\text{факт}}/(p-1)=152/(3-1)=76;$$

$$s^2_{\text{ост}}=S_{\text{ост}}/(p(q-1))=114/3\,(4-1)=114/9=12,67.$$

Сравним факторную и остаточную дисперсии по критерию F (см. гл. XIX, § 8), для чего найдем наблюдаемое значение критерия:

$$F_{\text{набл}}=s^2_{\text{факт}}/s^2_{\text{ост}}=76/12,67=6.$$

Учитывая, что число степеней свободы числителя $k_1=2$, а знаменателя $k_2=9$ и уровень значимости $\alpha=0,05$, по таблице приложения 7 находим критическую точку:

$$F_{\text{кр}}(0,05;\ 2;\ 9)=4,26.$$

Так как $F_{\text{набл}}>F_{\text{кр}}$ — нулевую гипотезу о равенстве групповых средних отвергаем. Другими словами, групповые средние «в целом» различаются значимо. Если требуется сравнить средние попарно, то следует воспользоваться критерием Стьюдента.

Замечание 3. Если наблюдаемые значения x_{ij} — десятичные дроби с одним знаком после запятой, то целесообразно перейти к числам $y_{ij}=10x_{ij}-C$, где C — примерно среднее значение чисел $10x_{ij}$. В итоге получим сравнительно небольшие целые числа. Хотя при этом факторная и остаточная дисперсия увеличиваются в 10^2 раз, их отношение не изменится. Например, если $x_{11}=12,1$, $x_{21}=12,2$, $x_{31}=12,6$, то, приняв $y_{ij}=10\cdot x_{ij}-123$, получим: $y_{11}=121-123=-2$, $y_{21}=122-123=-1$, $y_{31}=126-123=3$.

Аналогично поступают, если после запятой имеется k знаков:

$$y_{ij}=10^k x_{ij}-C.$$

§ 6. Неодинаковое число испытаний на различных уровнях

Выше число испытаний на различных уровнях предполагалось одинаковым. Пусть число испытаний на различных уровнях, вообще говоря, различно, а именно: произведено q_1 испытаний на уровне F_1, q_2 испытаний — на уровне F_2, ..., q_p испытаний — на уровне F_p. В этом случае общую сумму квадратов отклонений находят по формуле

$$S_{\text{общ}}=[P_1+P_2+\ldots+P_p]-[(R_1+R_2+\ldots+R_p)^2/n],$$

где $P_1=\sum_{i=1}^{q_1} x_{i1}^2$ — сумма квадратов наблюдавшихся значений признака на уровне F_1;

$P_2=\sum_{i=1}^{q_2} x_{i2}^2$ — сумма квадратов наблюдавшихся значений признака на уровне F_2;

. . . .

$P_p=\sum_{i=1}^{q_p} x_{ip}^2$ — сумма квадратов наблюдавшихся значений признака на уровне F_p;

$R_1=\sum_{i=1}^{q_1} x_{i1}$, $R_2=\sum_{i=1}^{q_2} x_{i2}$, ..., $R_p=\sum_{i=1}^{q_p} x_{ip}$ — суммы наблюдавшихся значений признака соответственно на уровнях F_1, F_2, ..., F_p;

$n=q_1+q_2+\ldots+q_p$ — общее число испытаний (объем выборки).

Если для упрощения вычислений из каждого наблюдавшегося значения x_{ij} вычитали одно и то же число C и приняли $y_{ij}=x_{ij}-C$, то

$$S_{\text{общ}}=[Q_1+Q_2+\ldots+Q_p]-[(T_1+T_2+\ldots+T_p)^2/n],$$

где $Q_1=\sum_{i=1}^{q_1} y_{i1}^2$, $Q_2=\sum_{i=1}^{q_2} y_{i2}^2$, ..., $Q_p=\sum_{i=1}^{q_p} y_{ip}^2$; $T_1=\sum_{i=1}^{q_1} y_{i1}$, $T_2=\sum_{i=1}^{q_2} y_{i2}$, ..., $T_p=\sum_{i=1}^{q_p} y_{ip}$.

Факторную сумму квадратов отклонений находят по формуле

$$S_{\text{факт}}=[(R_1^2/q_1)+(R_2^2/q_2)+\ldots+(R_p^2/q_p)]-\\-[R_1+R_2+\ldots+R_p)^2/n];$$

если значения признака были уменьшены ($y_{ij}=x_{ij}-C$), то

$$S_{\text{факт}}=[(T_1^2/q_1)+(T_2^2/q_2)+\ldots\\\ldots+(T_p^2/q_p)]-[(T_1+T_2+\ldots+T_p)^2/n].$$

Остальные вычисления производят, как и в случае одинакового числа испытаний:

$$S_{\text{ост}} = S_{\text{общ}} - S_{\text{факт}},$$

$$s^2_{\text{факт}} = S_{\text{факт}}/(p-1), \quad s^2_{\text{ост}} = S_{\text{ост}}/(n-p).$$

Пример. Произведено 10 испытаний, из них 4 на первом уровне фактора, 4 — на втором и 2 — на третьем. Результаты испытаний приведены в табл. 34. Методом дисперсионного анализа при уровне значимости 0,01 проверить нулевую гипотезу о равенстве групповых средних. Предполагается, что выборки извлечены из нормальных совокупностей с одинаковыми дисперсиями.

Таблица 34

Номер испытания	Уровни фактора F_j		
i	F_1	F_2	F_3
1	40	62	92
2	44	80	76
3	48	71	
4	36	91	
$\bar{x}_{\text{гр}\, j}$	42	76	84

Решение. Для упрощения расчета вычтем $C = 64$ из каждого наблюдаемого значения: $y_{ij} = x_{ij} - 64$. Составим расчетную табл. 35.

Используя табл. 35, найдем общую и факторную суммы квадратов отклонений:

$$S_{\text{общ}} = \sum Q_j - \left[\left(\sum T_j\right)^2/n\right] = 3253 - [(-27)^2/10] =$$
$$= 3253 - 72{,}9 = 3180{,}1;$$

$$S_{\text{факт}} = \left[(T_1^2/q_1) + (T_2^2/q_2) + (T_3^2/q_3)\right] - \left[\left(\sum T_j\right)^2/n\right] =$$
$$= (7744/4) + (441/4) + (1600/2)] - 72{,}90 = 2846{,}25 - 72{,}90 = 2773{,}35.$$

Найдем остаточную сумму квадратов отклонений:

$$S_{\text{ост}} = S_{\text{общ}} - S_{\text{факт}} = 3180{,}10 - 2773{,}35 = 406{,}75.$$

Найдем факторную и остаточную дисперсии:

$$s^2_{\text{факт}} = S_{\text{факт}}/(p-1) = 2773{,}35/(3-1) = 2773{,}35/2 = 1387;$$

$$s^2_{\text{ост}} = S_{\text{ост}}/(n-p) = 406{,}75/(10-3) = 406{,}75/7 = 58.$$

Сравним факторную и остаточную дисперсии по критерию F (см. гл. XIX, § 8), для чего найдем наблюдаемое значение критерия:

$$F_{\text{набл}} = s^2_{\text{факт}}/s^2_{\text{ост}} = 1387/58 = 23{,}9.$$

Таблица 35

Номер испытания	Уровни фактора F_j						Итоговый столбец
	F_1		F_2		F_3		
i	y_{i1}	y_{i1}^2	y_{i2}	y_{i2}^2	y_{i3}	y_{i3}^2	
1	-24	576	-2	4	28	784	
2	-20	400	16	256	12	144	
3	-16	256		49			
4	-28	784					
$Q_j=\sum y_{ij}^2$		2016		309		928	$\sum Q_j=3253$
$T_j=\sum y_{ij}$	-88		21		40		$\sum T_j=-27$
T_j^2	7744		441		1600		

Учитывая, что число степеней свободы числителя $k_1=2$, а знаменателя $k_2=7$ и уровень значимости $\alpha=0{,}01$, по таблице приложения 7 находим критическую точку: $F_{кр}(0{,}01;\ 2;\ 7)=9{,}55$.

Так как $F_{набл} > F_{кр}$ — нулевую гипотезу о равенстве групповых средних отвергаем. Другими словами, групповые средние различаются значимо.

Задачи

В задачах 1—3 требуется при уровне значимости 0,05 проверить нулевую гипотезу о равенстве групповых средних. Предполагается, что выборки извлечены из нормальных совокупностей с одинаковыми генеральными дисперсиями.

1.

Номер испытания	Уровни фактора F_j				
i	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5
1	42	66	35	64	70
2	55	91	50	70	79
3	67	96	60	79	88
4	67	98	69	81	90
$\bar{x}_{гр\,j}$	57,75	87,75	53,50	73,50	81,75

Отв. $F_{набл}=6{,}13$; $F_{кр}(0{,}05;\ 4;\ 15)=3{,}06$. Нулевая гипотеза отвергается.

2.

Номер испытания	Уровни-фактора F_j			
i	F_1	F_2	F_3	F_4
1	6	6	9	7
2	7	7	12	9
3	8	11	13	10
4	11	12	14	10
$\bar{x}_{гр\, j}$	8	9	12	9

Отв. $F_{набл} = 2,4$; $F_{кр}$ (0,05; 3; 12) $= 3,49$. Нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу.

3.

Номер испытания	Уровни фактора F_j		
i	F_1	F_2	F_3
1	37	60	69
2	47	86	100
3	40	67	98
4	60	92	
5		95	
6		98	
$\bar{x}_{гр\, j}$	46	83	89

Отв. $F_{набл} = 9,92$; $F_{кр}$ (0,05; 2; 10) $= 4,10$. Нулевая гипотеза отвергается.

ЧАСТЬ ЧЕТВЕРТАЯ

МЕТОД МОНТЕ — КАРЛО. ЦЕПИ МАРКОВА

Глава двадцать первая

МОДЕЛИРОВАНИЕ (РАЗЫГРЫВАНИЕ) СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН МЕТОДОМ МОНТЕ — КАРЛО

§ 1. Предмет метода Монте — Карло

Датой рождения метода Монте—Карло принято считать 1949 г., когда американские ученые Н. Метрополис и С. Улам опубликовали статью «Метод Монте — Карло», в которой систематически его изложили. Название метода связано с названием города Монте—Карло, где в игорных домах (казино) играют в рулетку—одно из простейших устройств для получения случайных чисел, на использовании которых основан этот метод.

ЭВМ позволяют легко получать так называемые псевдослучайные числа (при решении задач их применяют вместо случайных чисел); это привело к широкому внедрению метода во многие области науки и техники (статистическая физика, теория массового обслуживания, теория игр и др.). Метод Монте—Карло используют для вычисления интегралов, в особенности многомерных, для решения систем алгебраических уравнений высокого порядка, для исследования различного рода сложных систем (автоматического управления, экономических, биологических и т. д.).

Сущность метода Монте—Карло состоит в следующем: требуется найти значение a некоторой изучаемой величины. Для этого выбирают такую случайную величину X, математическое ожидание которой равно a:

$$M(X)=a.$$

Практически же поступают так: производят n испытаний, в результате которых получают n возможных значений X; вычисляют их среднее арифметическое

$$\bar{x}=(\sum x_i)/n$$

и принимают x в качестве оценки (приближенного значения) a^* искомого числа a:

$$a \simeq a^* = \bar{x}.$$

Поскольку метод Монте—Карло требует проведения большого числа испытаний, его часто называют *методом статистических испытаний*. Теория этого метода указывает, как наиболее целесообразно выбрать случайную величину X, как найти ее возможные значения. В частности, разрабатываются способы уменьшения дисперсии используемых случайных величин, в результате чего уменьшается ошибка, допускаемая при замене искомого математического ожидания a его оценкой a^*.

Отыскание возможных значений случайной величины X (моделирование) называют «разыгрыванием случайной величины». Изложим лишь некоторые способы разыгрывания случайных величин и укажем, как оценить допускаемую при этом ошибку.

§ 2. Оценка погрешности метода Монте — Карло

Пусть для получения оценки a^* математического ожидания a случайной величины X было произведено n независимых испытаний (разыграно n возможных значений X) и по ним была найдена выборочная средняя $\bar{x}$, которая принята в качестве искомой оценки: $a^* = \bar{x}$. Ясно, что если повторить опыт, то будут получены другие возможные значения X, следовательно, другая средняя, а значит, и другая оценка a^*. Уже отсюда следует, что получить точную оценку математического ожидания невозможно. Естественно, возникает вопрос о величине допускаемой ошибки. Ограничимся отысканием лишь верхней границы δ допускаемой ошибки с заданной вероятностью (надежностью) γ:

$$P(|\bar{X} - a| \leqslant \delta) = \gamma.$$

Интересующая нас верхняя граница ошибки δ есть не что иное, как «точность оценки» математического ожидания по выборочной средней при помощи доверительных интервалов, о которой уже шла речь в гл. XVI. Поэтому воспользуемся результатами, полученными ранее, и рассмотрим следующие три случая.

1. Случайная величина X распределена нормально и ее среднее квадратическое

отклонение σ известно. В этом случае с надежностью γ верхняя граница ошибки (см. гл. XVI, § 15)

$$\delta = t\sigma / \sqrt{n}, \qquad (*)$$

где n — число испытаний (разыгранных значений X); t — значение аргумента функции Лапласа, при котором $\Phi(t) = \gamma/2$, σ — известное среднее квадратическое отклонение X.

Пример 1. С надежностью $\gamma = 0,95$ найти верхнюю границу ошибки δ, если для оценки математического ожидания нормальной величины X с известным средним квадратическим отклонением, равным 0,5, было разыграно 100 возможных значений X.

Решение. По условию, $n = 100$, $\sigma = 0,5$, $\Phi(t) = 0,95/2 = 0,475$. По таблице функции Лапласа (см. приложение 2) находим $t = 1,96$. Искомая верхняя граница ошибки $\delta = 1,96 \cdot 0,5 / \sqrt{100} = 0,098$.

2. Случайная величина X распределена нормально, причем ее среднее квадратическое отклонение σ неизвестно. В этом случае с надежностью γ верхняя граница ошибки (см. гл. XVI, § 16)

$$\delta = t_{\gamma} s / \sqrt{n}, \qquad (**)$$

где n — число испытаний; s — «исправленное» среднее квадратическое отклонение, t_{γ} находят по таблице приложения 3.

Пример 2. С надежностью $\gamma = 0,95$ найти верхнюю границу ошибки δ, если для оценки математического ожидания нормальной величины X было разыграно 100 ее возможных значений и по ним найдено «исправленное» среднее квадратическое отклонение $s = 0,5$.

Решение По условию, $n = 100$, $s = 0,5$ Используя таблицу приложения 3, по $\gamma = 0,95$, $n = 100$ находим $t_{\gamma} = 1,984$. Искомая верхняя граница ошибки $\delta = 1,984$ $0,5 / \sqrt{100} = 0,099$.

3. Случайная величина X распределена по закону, отличному от нормального. В этом случае при достаточно большом числе испытаний ($n > 30$) с надежностью, приближенно равной γ, верхняя граница ошибки может быть вычислена по формуле (*), если среднее квадратическое отклонение σ случайной величины X известно; если же σ неизвестно, то можно подставить в формулу (*) его оценку s — «исправленное» среднее квадратическое отклонение либо воспользоваться формулой (**). Заметим, что чем больше n, тем меньше различие между результатами, которые дают обе формулы. Это объясняется тем, что при $n \to \infty$ распределение

Стьюдента стремится к нормальному (см. гл. XVI, § 16, замечание). В частности (примеры 1 и 2), при $n=100$, $\gamma=0{,}95$ верхняя граница ошибки равна 0,098 по формуле (*) и 0,099 по формуле (**). Как видим, результаты различаются незначительно.

Замечание. Для того чтобы найти наименьшее число испытаний, которые обеспечат наперед заданную верхнюю границу ошибки δ, надо выразить n из формул (*) и (**):

$$n=t^2\sigma^2/\delta^2, \quad n=t_\gamma^2 s^2/\delta^2.$$

Например, если $\delta=0{,}098$, $t=1{,}96$, $\sigma=0{,}5$, то минимальное число испытаний, при которых ошибка не превысит 0,098, равно

$$n=1{,}96^2\cdot 0{,}5^2/0{,}098^2=100.$$

§ 3. Случайные числа

Ранее было указано, что метод Монте—Карло основан на применении случайных чисел; дадим определение этих чисел. Обозначим через R непрерывную случайную величину, распределенную равномерно в интервале (0, 1).

Случайными числами называют возможные значения r непрерывной случайной величины R, распределенной равномерно в интервале (0, 1).

В действительности пользуются не равномерно распределенной случайной величиной R, возможные значения которой, вообще говоря, имеют бесконечное число десятичных знаков, а *квазиравномерной случайной величиной* R^*, возможные значения которой имеют конечное число знаков. В результате замены R на R^* разыгрываемая величина имеет не точно, а приближенно заданное распределение. В приложении 9 приведена таблица случайных чисел, заимствованная из книги: Большев Л. Н., Смирнов Н. В. Таблицы математической статистики. М., «Наука», 1965, с. 428.

§ 4. Разыгрывание дискретной случайной величины

Пусть требуется разыграть дискретную случайную величину X, т. е. получить последовательность ее возможных значений x_i $(i=1, 2, \ldots, n)$, зная закон распределения X:

$$\begin{array}{cccc} X & x_1 & x_2 \ldots & x_n \\ p & p_1 & p_2 \ldots & p_n \end{array}$$

Обозначим через R непрерывную случайную величину, распределенную равномерно в интервале (0, 1), а через r_j $(j=1, 2, \dots)$ — ее возможные значения, т. е. случайные числа.

Разобьем интервал $0 \leqslant R < 1$ на оси Or точками с координатами $p_1, p_1+p_2, p_1+p_2+p_3, \dots, p_1+p_2+\dots+p_{n-1}$ на n частичных интервалов $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$:

$$\text{Дл. } \Delta_1 = p_1 - 0 = p_1,$$

$$\text{Дл. } \Delta_2 = (p_1+p_2) - p_1 = p_2,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\text{Дл. } \Delta_n = 1 - (p_1+p_2+\dots+p_{n-1}) = p_n.$$

Видим, что длина частичного интервала с индексом i равна вероятности с тем же индексом:

$$\text{Дл. } \Delta_i = p_i. \qquad (*)$$

Теорема. *Если каждому случайному числу r_j $(0 \leqslant r_j < 1)$, которое попало в интервал Δ_i, ставить в соответствие возможное значение x_i, то разыгрываемая величина будет иметь заданный закон распределения:*

$$\begin{array}{llll} X & x_1 & x_2 \dots & x_n \\ p & p_1 & p_2 \dots & p_n \end{array}$$

Доказательство. Так как при попадании случайного числа r_j в частичный интервал Δ_i разыгрываемая величина принимает возможное значение x_i, а таких интервалов всего n, то разыгрываемая величина имеет те же возможные значения, что и X, а именно $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Вероятность попадания случайной величины R в интервал Δ_i равна его длине (см. гл. XI, § 6, замечание), а в силу (*) Дл. $\Delta_i = p_i$. Таким образом, вероятность попадания R в интервал Δ_i равна p_i. Следовательно, вероятность того, что разыгрываемая величина примет возможное значение x_i, также равна p_i (поскольку мы условились в случае попадания случайного числа r_j в интервал Δ_i считать, что разыгрываемая величина приняла возможное значение x_i). Итак, разыгрываемая величина имеет заданный закон распределения.

Правило. Для того чтобы разыграть дискретную случайную величину, заданную законом распределения

$$\begin{array}{llll} X & x_1 & x_2 \dots & x_n \\ p & p_1 & p_2 \dots & p_n \end{array}$$

надо: 1) разбить интервал (0, 1) оси Or на n частичных интервалов: $\Delta_1 - (0;\ p_1)$, $\Delta_2 - (p_1;\ p_1+p_2)$, $\ldots$, $\Delta_n - (p_1+ +p_2+\ldots+p_{n-1};\ 1)$;

2) выбрать (например, из таблицы случайных чисел) случайное число r_j.

Если r_j попало в частичный интервал Δ_i, то разыгрываемая дискретная случайная величина приняла возможное значение x_i.

Пример. Разыграть 8 значений дискретной случайной величины X, закон распределения которой задан в виде таблицы

X	3	11	24
p	0,25	0,16	0,59

Решение. 1. Разобьем интервал (0,1) оси Or точками с координатами 0,25; $0{,}25+0{,}16=0{,}41$ на 3 частичных интервала: $\Delta_1 - (0;\ 0{,}25)$, $\Delta_2 - (0{,}25;\ 0{,}41)$, $\Delta_3 - (0{,}41;\ 1)$.

2. Выпишем из таблицы приложения 9 восемь случайных чисел, например: 0,10; 0,37; 0,08; 0,99; 0,12; 0,66; 0,31; 0,85.

Случайное число $r_1=0{,}10$ принадлежит частичному интервалу Δ_1, поэтому разыгрываемая дискретная случайная величина приняла возможное значение $x_1=3$. Случайное число $r_2=0{,}37$ принадлежит частичному интервалу Δ_2, поэтому разыгрываемая величина приняла возможное значение $x_2=11$. Аналогично получим остальные возможные значения.

Итак, разыгранные возможные значения X таковы: 3; 11; 3; 24; 3; 24; 11; 24.

Замечание. Далее будет показано, что разыгрывание событий можно свести к разыгрыванию дискретной случайной величины. Сначала рассмотрим полную группу, состоящую из двух событий (см. § 5), а затем из n событий (см. § 6). Разумеется, полная группа из двух событий является частным случаем полной группы n событий. Однако исходя из методических соображений этот частный случай намерено выделен в самостоятельный параграф—§ 5.

§ 5. Разыгрывание противоположных событий

Пусть требуется разыграть испытания, в каждом из которых событие A появляется с известной вероятностью p и, следовательно, не появляется с вероятностью $q=1-p$.

Введем в рассмотрение дискретную случайную величину X с двумя возможными значениями (для определенности примем $x_1=1$, $x_2=0$) и соответствующими им вероятностями $p_1=p$, $p_2=q$. Условимся считать, что если в испытании величина X приняла возможное значение $x_1=1$, то событие A наступило; если $X=x_2=0$, то событие A не наступило, т. е. появилось противоположное событие $\bar{A}$.

Таким образом, разыгрывание противоположных событий A и $\bar{A}$ сведено к разыгрыванию дискретной случайной величины X с заданным законом распределения:

$$\begin{array}{ccc} X & 1 & 0 \\ p & p & q \end{array}$$

Для разыгрывания X надо (по правилу § 4) интервал (0, 1) разбить точкой p на два частичных интервала: Δ_1—(0, p) и Δ_2—(p, 1). Затем выбирают случайное число r_j. Если r_j попадает в интервал Δ_1, то $X = x_1$ (наступило событие A); если r_j попадает в интервал Δ_2, то $X = x_2 = 0$ (событие A не наступило).

Правило. Для того чтобы разыграть испытания, в каждом из которых вероятность появления события равна p и, следовательно, вероятность наступления противоположного события A равна $1-p$, надо выбрать (например, из таблицы случайных чисел) случайное число r_j ($j = 1$, 2, ...); если $r_j < p$, то событие A наступило; если $r_j \geqslant p$, то появилось противоположное событие $\bar{A}$.

Пример. Разыграть 6 испытаний, в каждом из которых событие A появляется с вероятностью $p = 0{,}35$.

Решение. Выберем из таблицы приложения 9 шесть случайных чисел, например: 0,10; 0,36; 0,08; 0,99; 0,12; 0,06. Считая, что при $r_j < 0{,}35$ событие A появилось, а при $r_j \geqslant 0{,}35$ наступило противоположное событие $\bar{A}$, получим искомую последовательность событий: A, $\bar{A}$, A, $\bar{A}$, A, A.

§ 6. Разыгрывание полной группы событий

Разыгрывание полной группы n ($n > 2$) несовместных событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$, вероятности которых $p_1, p_2, \ldots, p_n$ известны, можно свести к разыгрыванию дискретной случайной величины X со следующим законом распределения (для определенности примем $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, ..., $x_n = n$):

$$\begin{array}{cccc} X & 1 & 2 \ldots & n \\ p & p_1 & p_2 \ldots & p_n \end{array}$$

Действительно, достаточно считать, что если в испытании величина X приняла значение $x_i = i$ ($i = 1, 2, \ldots, n$), то наступило событие A_i. Справедливость этого утверждения следует из того, что число n возможных значений X

равно числу событий полной группы и вероятности возможных значений x_i и соответствующих им событий A_i одинаковы: $P(X=x_i)=P(A_i)=p_i$. Таким образом, появление в испытании события A равносильно событию, состоящему в том, что дискретная случайная величина X приняла возможное значение x_i.

Правило. Для того чтобы разыграть испытания, в каждом из которых наступает одно из событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ полной группы, вероятности которых $p_1, p_2, \ldots, p_n$ известны, достаточно разыграть (по правилу § 4) дискретную случайную величину X со следующим законом распределения:

X	1	2	$\ldots n$
p	p_1	p_2	$\ldots p_n$

Если в испытании величина X приняла возможное значение $x_i=i$, то наступило событие A_i.

Пример 1. Заданы вероятности четырех событий, образующих полную группу: $p_1=P(A_1)=0{,}19$, $p_2=P(A_2)=0{,}21$, $p_3=P(A_3)=0{,}34$, $p_4=P(A_4)=0{,}26$. Разыграть 5 испытаний, в каждом из которых появляется одно из четырех заданных событий.

Решение. В соответствии с правилом, приведенным в настоящем параграфе, надо разыграть дискретную случайную величину X, закон распределения которой

X	1	2	3	4
p	0,19	0,21	0,34	0,26

По правилу § 4 разобьем интервал (0,1) на четыре частичных интервала: Δ_1—(0; 0,19), Δ_2—(0,19; 0,40), Δ_3—(0,40; 0,74), Δ_4—(0,74; 1). Выберем из таблицы приложения 9 пять случайных чисел, например: 0,66; 0,31; 0,85; 0,63; 0,73. Так как случайное число $r_1=0{,}66$ принадлежит интервалу Δ_3, то $X=3$, следовательно, наступило событие A_3. Аналогично найдем остальные события.

Итак, искомая последовательность событий такова:

$$A_3,\ A_2,\ A_4,\ A_3,\ A_3.$$

Пример 2. События A и B независимы и совместны. Разыграть 6 испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A равна 0,6, а вероятность появления события B равна 0,2.

Решение. Возможны 4 исхода испытания:

$A_1=AB$, причем в силу независимости событий $P(AB)=P(A)\cdot P(B)=0{,}6\cdot 0{,}2=0{,}12$;

$A_2=A\overline{B}$, причем $P(A\overline{B})=0{,}6\cdot 0{,}8=0{,}48$;

$A_3=\overline{A}B$, причем $P(\overline{A}B)=0{,}4\cdot 0{,}2=0{,}08$;

$A_4=\overline{A}\overline{B}$, причем $P(\overline{A}\overline{B})=0{,}4\cdot 0{,}8=0{,}32$.

Таким образом, задача сведена к разыгрыванию полной группы четырех событий: A_1 с вероятностью $p_1=0{,}12$, A_2 с вероятностью $p_2=0{,}48$, A_3 с вероятностью $p_3=0{,}08$ и A_4 с вероятностью $p_4=0{,}32$.

В свою очередь, в соответствии с правилом настоящего параграфа эта задача сводится к разыгрыванию дискретной случайной величины X, закон распределения которой

X	1	2	3	4
p	0,12	0,48	0,08	0,32

Используем правило § 4. Выберем 6 случайных чисел, например: 0,45; 0,65; 0,06; 0,59; 0,33; 0,70. Построим частичные интервалы: Δ_1 — (0; 0,12), Δ_2 — (0,12; 0,60); Δ_3 — (0,60; 0,68), Δ_4 — (0,68; 1). Случайное число $r_1 = 0{,}45$ принадлежит интервалу Δ_2, поэтому наступило событие $A_2 = A\overline{B}$. Аналогично найдем исходы остальных испытаний.

Итак, искомая последовательность исходов разыгранных испытаний такова: $A\overline{B}$, $\overline{A}B$, AB, $A\overline{B}$, $A\overline{B}$, $\overline{A}\overline{B}$.

Пример 3. События A и B зависимы и совместны. Разыграть 4 испытания, в каждом из которых заданы вероятности $P(A) = 0{,}8$, $P(B) = 0{,}6$, $P(AB) = 0{,}5$.

Решение. Возможны 4 исхода испытания:

$A_1 = AB$, причем, по условию, $P(AB) = 0{,}5$;

$A_2 = A\overline{B}$, причем $P(A\overline{B}) = P(A) - P(AB) = 0{,}8 - 0{,}5 = 0{,}3$;

$A_3 = A\overline{B}$, причем $P(\overline{A}B) = P(B) - P(AB) = 0{,}6 - 0{,}5 = 0{,}1$;

$A_4 = \overline{A}\overline{B}$, причем $P(\overline{A}\overline{B}) = 1 - [P(A_1) + P(A_2) + P(A_3)] = 1 - (0{,}5 + 0{,}3 + 0{,}1) = 0{,}1$.

Таким образом, задача сведена к разыгрыванию полной группы четырех событий: A_1 с вероятностью 0,5, A_2 с вероятностью 0,3, A_3 с вероятностью 0,1 и A_4 с вероятностью 0,1 и A_4 с вероятностью 0,1.

Рекомендуем закончить решение самостоятельно, считая для определенности, что выбраны случайные числа: 0,65; 0,06; 0,59; 0,33.

Для контроля приводим ответ: $A\overline{B}$, AB, $A\overline{B}$, AB.

Пояснение. Так как $A = AB + A\overline{B}$, то $P(A) = P(AB) + P(A\overline{B})$. Отсюда

$$P(A\overline{B}) = P(A) - P(AB).$$

Аналогично получим, что

$$P(\overline{A}B) = P(B) - P(AB).$$

§ 7. Разыгрывание непрерывной случайной величины. Метод обратных функций

Пусть требуется разыграть непрерывную случайную величину X, т. е. получить последовательность ее возможных значений x_i $(i = 1, 2, \ldots)$, зная функцию распределения $F(x)$.

Теорема. *Если r_i — случайное число, то возможное значение x_i разыгрываемой непрерывной случайной величины X с заданной функцией распределения $F(x)$, соответ-*

ствующее r_i, является корнем уравнения

$$F(x_i) = r_i. \qquad (*)$$

Доказательство. Пусть выбрано случайное число $r_i (0 \leqslant r_i < 1)$. Так как в интервале всех возможных значений X функция распределения $F(x)$ монотонно возрастает от 0 до 1, то в этом интервале существует, причем только одно, такое значение аргумента x_i, при котором функция распределения примет значение r_i. Другими словами, уравнение (*) имеет единственное решение

$$x_i = F^{-1}(r_i),$$

где F^{-1} — функция, обратная функции $y = F(x)$.

Докажем теперь, что корень x_i уравнения (*) есть возможное значение такой непрерывной случайной величины (временно обозначим ее через ξ, а потом убедимся, что $\xi = X$). С этой целью докажем, что вероятность попадания ξ в интервал, например (c, d), принадлежащий интервалу всех возможных значений X, равна приращению функции распределения $F(x)$ на этом интервале:

$$P(c < \xi < d) = F(d) - F(c).$$

Действительно, так как $F(x)$ — монотонно возрастающая функция в интервале всех возможных значений X, то в этом интервале бо́льшим значениям аргумента соответствуют бо́льшие значения функции, и обратно. Поэтому, если $c < x_i < d$, то $F(c) < r_i < F(d)$, и обратно [учтено, что в силу (*) $F(x_i) = r_i$].

Из этих неравенств следует, что если случайная величина ξ заключена в интервале

$$c < \xi < d, \qquad (**)$$

то случайная величина R заключена в интервале

$$F(c) < R < F(d), \qquad (***)$$

и обратно. Таким образом, неравенства (**) и (***) равносильны, а, значит, и равновероятны:

$$P(c < \xi < d) = P[F(c) < R < F(d)]. \qquad (****)$$

Так как величина R распределена равномерно в интервале (0, 1), то вероятность попадания R в некоторый интервал, принадлежащий интервалу (0, 1), равна его длине (см. гл. XI, § 6, замечание). В частности,

$$P[F(c) < R < F(d)] = F(d) - F(c).$$

Следовательно, соотношение (****) можно записать в виде

$$P(c < \xi < d) = F(d) - F(c).$$

Итак, вероятность попадания ξ в интервал (c, d) равна приращению функции распределения $F(x)$ на этом интервале, а это означает, что $\xi = X$. Другими словами, числа x_i, определяемые формулой (*), есть возможные значения величины X с заданной функцией распределения $F(x)$, что и требовалось доказать.

Правило 1. Для того чтобы найти возможное значение x_i непрерывной случайной величины X, зная ее функцию распределения $F(x)$, надо выбрать случайное число r_i, приравнять его функции распределения и решить относительно x_i полученное уравнение

$$F(x_i) = r_i.$$

Замечание 1. Если решить это уравнение в явном виде не удается, то прибегают к графическим или численным методам.

Пример 1. Разыграть 3 возможных значения непрерывной случайной величины X, распределенной равномерно в интервале $(2, 10)$.

Решение. Напишем функцию распределения величины X, распределенной равномерно в интервале (a, b) (см. гл. XI, § 3, пример):

$$F(x) = (x-a)/(b-a).$$

По условию, $a=2$, $b=10$, следовательно,

$$F(x) = (x-2)/8.$$

Используя правило настоящего параграфа, напишем уравнение для отыскания возможных значений x_i, для чего приравняем функцию распределения случайному числу:

$$(x_i - 2)/8 = r_i.$$

Отсюда $x_i = 8r_i + 2$.

Выберем 3 случайных числа, например, $r_1 = 0{,}11$, $r_2 = 0{,}17$, $r_3 = 0{,}66$. Подставим эти числа в уравнение, разрешенное относительно x_i; в итоге получим соответствующие возможные значения X: $x_1 = 8 \cdot 0{,}11 + 2 = 2{,}88$; $x_2 = 1{,}36$; $x_3 = 7{,}28$.

Пример 2. Непрерывная случайная величина X распределена по показательному закону, заданному функцией распределения (параметр $\lambda > 0$ известен)

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x} \quad (x > 0).$$

Требуется найти явную формулу для разыгрывания возможных значений X.

Решение. Используя правило настоящего параграфа, напишем уравнение

$$1 - e^{-\lambda x_i} = r_i.$$

Решим это уравнение относительно x_i:

$$e^{-\lambda x_i} = 1 - r_i, \text{ или } -\lambda x_i = \ln(1 - r_i).$$

Отсюда

$$x_i = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-r_i).$$

Случайное число r_i заключено в интервале (0, 1); следовательно, число $1-r_i$ также случайное и принадлежит интервалу (0,1). Другими словами, величины R и $1-R$ распределены одинаково. Поэтому для отыскания x_i можно воспользоваться более простой формулой

$$x_i = -\frac{1}{\lambda}\ln r_i.$$

Замечание 2. Известно, что (см. гл. XI, § 3)

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx.$$

В частности,

$$F(x_i) = \int_{-\infty}^{x_i} f(x)\,dx.$$

Отсюда следует, что если известна плотность вероятности $f(x)$, то для разыгрывания X можно вместо уравнений $F(x_i) = r_i$ решить относительно x_i уравнение

$$\int_{-\infty}^{x_i} f(x)\,dx = r_i.$$

Правило 2. Для того чтобы найти возможное значение x_i непрерывной случайной величины X, зная ее плотность вероятности $f(x)$, надо выбрать случайное число r_i и решить относительно x_i уравнение

$$\int_{-\infty}^{x_i} f(x)\,dx = r_i,$$

или уравнение

$$\int_{a}^{x_i} f(x)\,dx = r_i,$$

где a—наименьшее конечное возможное значение X.

Пример 3. Задана плотность вероятности непрерывной случайной величины X $f(x) = \lambda(1-\lambda x/2)$ в интервале (0; $2/\lambda$); вне этого интервала $f(x) = 0$. Требуется найти явную формулу для разыгрывания возможных значений X.

Решение. Напишем в соответствии с правилом 2 уравнение

$$\lambda \int_0^{x_i} (1-\lambda x/2)\,dx = r_i.$$

Выполнив интегрирование и решив полученное квадратное уравнение относительно x_i, окончательно получим

$$x_i = 2\left(1-\sqrt{1-r_i}\right)/\lambda.$$

§ 8. Метод суперпозиции

Пусть функция распределения разыгрываемой случайной величины X может быть представлена в виде линейной комбинации двух функций распределения:

$$F(x) = C_1 F_1(x) + C_2 F_2(x) \quad (C_1 > 0,\ C_2 > 0).$$

При $x \to \infty$ каждая из функций распределения стремится к единице, поэтому $C_1 + C_2 = 1$.

Введем вспомогательную дискретную случайную величину Z с законом распределения

$$\begin{array}{ccc} Z & 1 & 2 \\ p & C_1 & C_2 \end{array}$$

Мы видим, что

$$P(Z=1) = C_1, \quad P(Z=2) = C_2. \qquad (*)$$

Выберем два независимых случайных числа r_1 и r_2. По числу r_1 разыгрываем возможное значение Z (см. § 4). Если окажется, что $Z = 1$, то ищут искомое возможное значение X из уравнения $F_1(x) = r_2$; если $Z = 2$, то решают относительно x уравнение $F_2(x) = r_2$.

Докажем, что функция распределения разыгрываемой случайной величины равна заданной функции распределения. Воспользуемся формулой полной вероятности (см. гл. IV, § 2)

$$P(A) = P(B_1)\,P_{B_1}(A) + P(B_2)\,P_{B_2}(A).$$

Обозначим через A событие $X < x$; тогда

$$P(A) = P(X < x) = F(x). \qquad (**)$$

Рассмотрим гипотезы B_1: $Z = 1$ и B_2: $Z = 2$. Вероятности этих гипотез в силу $(*)$:

$$P(B_1) = P(Z=1) = C_1 \text{ и } P(B_2) = P(Z=2) = C_2. \qquad (***)$$

Условные вероятности появления события A соответственно равны:

$$P_{B_1}(A) = P_{B_1}(X < x) = F_1(x) \text{ и }$$
$$P_{B_2}(A) = P_{B_2}(X < x) = F_2(x). \qquad (****)$$

Подставив (**), (***) и (****) в формулу полной вероятности, окончательно получим

$$F(x) = C_1F_1(x) + C_2F_2(x),$$

что и требовалось доказать.

Замечание. Метод суперпозиции обобщается на n слагаемых функций распределения.

Правило. Для того чтобы разыграть возможное значение случайной величины X, функция распределения которой

$$F(x) = C_1F_1(x) + C_2F_2(x),$$

где $C_1 > 0$, $C_2 > 0$ и $C_1 + C_2 = 1$, надо выбрать два независимых случайных числа r_1 и r_2 и по случайному числу r_1 разыграть возможное значение вспомогательной дискретной случайной величины Z (по правилу § 4):

Z	1	2
p	C_1	C_2

Если окажется, что $Z = 1$, то решают относительно x уравнение $F_1(x) = r_2$; если $Z = 2$, то решают уравнение $F_2(x) = r_2$.

Пример. Найти явные формулы для разыгрывания непрерывной случайной величины X, заданной функцией распределения

$$F(x) = 1 - 0{,}25(e^{-2x} + 3e^{-x}), \quad 0 < x < \infty.$$

Решение. Воспользуемся методом суперпозиции, для чего представим заданную функцию в виде

$$F(x) = 0{,}25(1 - e^{-2x}) + 0{,}75(1 - e^{-x}).$$

Таким образом, можно принять:

$$F_1(x) = 1 - e^{-2x}, \quad F_2(x) = 1 - e^{-x}, \quad C_1 = 0{,}25, \quad C_2 = 0{,}75.$$

Введем в рассмотрение вспомогательную дискретную случайную величину Z с законом распределения

Z	1	2
p	0,25	0,75

Выберем независимые случайные числа r_1 и r_2. Разыграем Z по случайному числу r_1, для чего по правилу § 4 построим частичные интервалы Δ_1—(0; 0,25) и Δ_2—(0,25; 1). Если $r_1 < 0{,}25$, то $Z=1$, если $r_1 \geqslant 0{,}25$, то $Z=2$.

Итак, возможное значение X находят, решая относительно x уравнение

$$1-e^{-2x}=r_2, \text{ если } r_1 < 0{,}25,$$

или

$$1-e^{-x}=r_2, \text{ если } r_1 \geqslant 0{,}25.$$

Используя решение примера 2 (см. § 7), в котором была найдена явная формула $x=-(1/\lambda)\ln r$ для разыгрывания возможных значений показательного распределения с заданным параметром λ, окончательно получим:

$$x=-(1/2)\ln r_2, \text{ если } r_1 < 0{,}25;$$
$$x=-\ln r_2, \text{ если } r_1 \geqslant 0{,}25.$$

§ 9. Приближенное разыгрывание нормальной случайной величины

Напомним предварительно, что если случайная величина R распределена равномерно в интервале (0, 1), то ее математическое ожидание и дисперсия соответственно равны (см. гл. XII, § 1, замечание 3):

$$M(R)=1/2, \qquad (*)$$
$$D(R)=1/12. \qquad (**)$$

Составим сумму n независимых, распределенных равномерно в интервале (0, 1) случайных величин R_j ($j=1, 2, \ldots, n$):

$$\sum_{j=1}^{n} R_j. \qquad (***)$$

Для нормирования этой суммы найдем предварительно ее математическое ожидание и дисперсию.

Известно, что математическое ожидание суммы случайных величин равно сумме математических ожиданий слагаемых. Сумма (***) содержит n слагаемых, математическое ожидание каждого из которых в силу (*) равно 1/2; следовательно, математическое ожидание суммы (***)

$$M\left[\sum_{j=1}^{n} R_j\right]=n/2.$$

Известно, что дисперсия суммы независимых случайных величин равна сумме дисперсий слагаемых. Сумма (***) содержит n независимых слагаемых, дисперсия каждого из которых в силу (**) равна 1/12; следовательно, дисперсия суммы (***)

$$D\left[\sum_{j=1}^{n} R_j\right] = n/12.$$

Отсюда среднее квадратическое отклонение суммы (***)

$$\sigma_\Sigma = \sqrt{n/12}.$$

Пронормируем рассматриваемую сумму, для чего вычтем математическое ожидание и разделим результат на среднее квадратическое отклонение:

$$\frac{\sum\limits_{j=1}^{n} R_j - (n/2)}{\sqrt{n/12}}.$$

В силу центральной предельной теоремы при $n \to \infty$ распределение этой нормированной случайной величины стремится к нормальному с параметрами $a=0$ и $\sigma=1$. При конечном n распределение приближенно нормальное. В частности, при $n=12$ получим достаточно хорошее и удобное для расчета приближение

$$\sum_{j=1}^{12} R_j - 6.$$

Правило. Для того чтобы разыграть возможное значение x_i нормальной случайной величины X с параметрами $a=0$ и $\sigma=1$, надо сложить 12 независимых случайных чисел и из полученной суммы вычесть 6:

$$x_i = \sum_{j=1}^{12} r_j - 6 = S_i - 6.$$

Пример. а) Разыграть 100 возможных значений нормальной величины X с параметрами $a=0$ и $\sigma=1$; б) оценить параметры разыгранной величины.

Решение. а) Выберем 12 случайных чисел из первой строки таблицы *), сложим их и из полученной суммы вычтем 6; в итоге имеем

$$x_1 = (0{,}10 + 0{,}09 + \ldots + 0{,}67) - 6 = -0{,}99.$$

Аналогично, выбирая из каждой следующей строки таблицы первые 12 чисел, найдем остальные возможные значения X.

---

*) См.: Большев Л. Н., Смирнов Н. В. Таблицы математической статистики. М., «Наука», 1965, с. 428—429.

б) Выполнив расчеты, получим искомые оценки:

$$a^* = \overline{x}_{\text{в}} \simeq -0,05, \quad \sigma^* = \sqrt{D_{\text{в}}} \simeq 1,04.$$

Оценки удовлетворительные: a^* близко к нулю, σ^* мало отличается от единицы.

Замечание. Если требуется разыграть возможное значение z_i нормальной случайной величины Z с математическим ожиданием a и средним квадратическим отклонением σ, то, разыграв по правилу настоящего параграфа возможное значение x_i, находят искомое возможное значение по формуле

$$z_i = \sigma x_i + a.$$

Эта формула получена из соотношения $(z_i - a)/\sigma = x_i$.

Задачи

1. Разыграть 6 значений дискретной случайной величины X, закон распределения которой задан в виде таблицы

X	2	3,2	10
p	0,18	0,24	0,58

Указание. Для определенности принять, что выбраны случайные числа: 0,73; 0,75; 0,54; 0,08; 0,28; 0,53.

Отв. 10; 10; 10; 2; 3; 22; 10.

2. Разыграть 4 испытания, в каждом из которых вероятность появления события A равна 0,52.

Указание. Для определенности принять, что выбраны случайные числа: 0,28; 0,53; 0,91; 0,89.

Отв. A, $\overline{A}$, $\overline{A}$, $\overline{A}$.

3. Заданы вероятности трех событий, образующих полную группу: $P(A_1) = 0,20$, $P(A_2) = 0,32$, $P(A_3) = 0,48$. Разыграть 6 испытаний, в каждом из которых появляется одно из заданных событий.

Указание. Для определенности принять, что выбраны случайные числа: 0,77; 0,19; 0,21; 0,51; 0,99; 0,33.

Отв. A_3, A_1, A_2, A_2, A_3, A_2.

4. События A и B независимы и совместны. Разыграть 5 испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A равна 0,5, а события B — 0,8.

Указание. Составить полную группу событий: $A_1 = AB$, $A_2 = A\overline{B}$, $A_3 = \overline{A}B$, $A_4 = \overline{A}\overline{B}$; для определенности принять случайные числа: 0,34; 0,41; 0,48; 0,21; 0,57.

Отв. A_1, A_2, A_2, A_1, A_3.

5. События A, B, C независимы и совместны. Разыграть 4 испытания, в каждом из которых вероятности появления событий заданы: $P(A) = 0,4$, $P(B) = 0,6$, $P(C) = 0,5$.

Указание. Составить полную группу событий: $A_1 = ABC$, $A_2 = AB\overline{C}$, $A_3 = A\overline{B}C$, $A_4 = \overline{A}BC$, $A_5 = A\overline{B}\overline{C}$, $A_6 = \overline{A}B\overline{C}$, $A_7 = \overline{A}\overline{B}C$, $A_8 = \overline{A}\overline{B}\overline{C}$; для определенности принять, что выбраны случайные числа: 0,075; 0,907; 0,401; 0,344.

Отв. A_1, A_8, A_4, A_4.

6. События A и B зависимы и совместны. Разыграть 4 испытания, в каждом из которых заданы вероятности: $P(A) = 0,7$, $P(B) = 0,6$, $P(AB) = 0,4$.

Указание. Составить полную группу событий: $A_1=AB$, $A_2=A\overline{B}$, $A_3=\overline{A}B$, $A_4=\overline{A}\overline{B}$; для определенности принять случайные числа: 0,28; 0,53; 0,91; 0,89.

Отв. A_1, A_2, A_4, A_3.

7. Разыграть 3 возможных значения непрерывной случайной величины X, которая распределена по показательному закону и задана функцией распределения $F(x)=1-e^{-10x}$.

Указание. Для определенности принять, что выбраны случайные числа: 0,67; 0,79; 0,91.

Отв. 0,04; 0,02; 0,009.

8. Разыграть 4 возможных значения непрерывной случайной величины X, распределенной равномерно в интервале (6, 14).

Указание. Для определенности принять, что выбраны случайные числа: 0,11: 0,04; 0,61; 0,93.

Отв. 6,88; 6,32; 10,88; 13,44.

9. Найти методом суперпозиции явные формулы для разыгрывания непрерывной случайной величины X, заданной функцией распределения

$$F(x)=1-(1/3)(2e^{-2x}+e^{-3x}),\quad 0<x<\infty.$$

Отв. $x=-(1/2)\ln r_2$, если $r_1<2/3$; $x=-(1/3)\ln r_2$, если $r_1\geqslant 2/3$.

10. Найти явную формулу для разыгрывания непрерывной случайной величины X, заданной плотностью вероятности $f(x)=b/(1+ax)^2$ в интервале $0\leqslant x\leqslant 1/(b-a)$; вне этого интервала $f(x)=0$.

Отв. $x_i=-r_i/(b-ar_i)$.

11. Разыграть 2 возможных значения нормальной случайной величины с параметрами: а) $a=0$, $\sigma=1$; б) $a=2$, $\sigma=3$.

Указание. Для определенности принять случайные числа (далее указано число сотых долей; например, числу 74 соответствует случайное число $r_1=0,74$): 74, 10, 88, 82, 22, 88, 57, 07, 40, 15, 25, 70; 62, 88, 08, 78, 73, 95, 16, 05, 92, 21, 22, 30.

Отв. а) $x_1=-0,22$, $x_2=-0,10$; б) $z_1=1,34$, $z_2=2,70$.

Глава двадцать вторая

ПЕРВОНАЧАЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ О ЦЕПЯХ МАРКОВА

§ 1. Цепь Маркова

Цепью Маркова называют последовательность испытаний, в каждом из которых появляется только одно из k несовместных событий $A_1, A_2, \ldots, A_k$ полной группы, причем условная вероятность $p_{ij}(s)$ того, что в s-м испытании наступит событие A_j $(j=1, 2, \ldots, k)$, при условии, что в $(s-1)$-м испытании наступило событие A_i $(i=1, 2, \ldots, k)$, не зависит от результатов предшествующих испытаний.

Например, если последовательность испытаний образует цепь Маркова и полная группа состоит из четырех несовместных событий A_1, A_2, A_3, A_4, причем известно, что в шестом испытании появилось событие A_2, то условная вероятность того, что в седьмом испытании наступит событие A_4, не зависит от того, какие события появились в первом, втором, ..., пятом испытаниях.

Заметим, что независимые испытания являются частным случаем цепи Маркова. Действительно, если испытания независимы, от появление некоторого определенного события в любом испытании не зависит от результатов ранее произведенных испытаний. Отсюда следует, что понятие цепи Маркова является обобщением понятия независимых испытаний.

Далее используется терминология, которая принята при изложении цепей Маркова. Пусть некоторая система в каждый момент времени находится в одном из k состояний: первом, втором, ..., k-м. В отдельные моменты времени в результате испытания состояние системы изменяется, т. е. система переходит из одного состояния, например i, в другое, например j. В частности, после испытания система может остаться в том же состоянии («перейти» из состояния i в состояние $j=i$).

Таким образом, события называют *состояниями системы*, а испытания — *изменениями ее состояний.*

Дадим теперь определение цепи Маркова, используя новую терминологию.

Цепью Маркова называют последовательность испытаний, в каждом из которых система принимает только одно из k состояний полной группы, причем условная вероятность $p_{ij}(s)$ того, что в s-м испытании система будет находиться в состоянии j, при условии, что после $(s-1)$-го испытания она находилась в состоянии i, не зависит от результатов остальных, ранее произведенных испытаний.

Цепью Маркова с дискретным временем называют цепь, изменение состояний которой происходит в определенные фиксированные моменты времени.

Цепью Маркова с непрерывным временем называют цепь, изменение состояний которой происходит в любые случайные возможные моменты времени.

§ 2. Однородная цепь Маркова. Переходные вероятности. Матрица перехода

Однородной называют цепь Маркова, если условная вероятность $p_{ij}(s)$ (перехода из состояния i в состояние j) не зависит от номера испытания. Поэтому вместо $p_{ij}(s)$ пишут просто p_{ij}.

Пример. Случайное блуждание. Пусть на прямой Ox в точке с целочисленной координатой $x=n$ находится материальная частица. В определенные моменты времени t_1, t_2, t_3, ... частица испытывает толчки. Под действием толчка частица с вероятностью p смещается на единицу вправо и с вероятностью $1-p$ — на единицу влево. Ясно, что положение (координата) частицы после толчка зависит от того, где находилась частица после непосредственно предшествующего толчка, и не зависит от того, как она двигалась под действием остальных предшествующих толчков.

Таким образом, случайное блуждание — пример однородной цепи Маркова с дискретным временем.

Далее ограничимся элементами теории конечных однородных цепей Маркова.

Переходной вероятностью p_{ij} называют условную вероятность того, что из состояния i (в котором система оказалась в результате некоторого испытания, безразлично какого номера) в итоге следующего испытания система перейдет в состояние j.

Таким образом, в обозначении p_{ij} первый индекс указывает номер предшествующего, а второй — номер последующего состояния. Например, p_{11} — вероятность «перехода» из первого состояния в первое; p_{23} — вероятность перехода из второго состояния в третье.

Пусть число состояний конечно и равно k.

Матрицей перехода системы называют матрицу, которая содержит все переходные вероятности этой системы:

$$\mathcal{P}_1=\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1k} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2k} \\ . & . & . & . \\ p_{k1} & p_{k2} & \dots & p_{kk} \end{pmatrix}.$$

Так как в каждой строке матрицы помещены вероятности событий (перехода из одного и того же состояния i в любое возможное состояние j), которые образуют полную группу, то сумма вероятностей этих событий равна единице. Другими словами, сумма переходных вероятностей каждой строки матрицы перехода равна единице:

$$\sum_{j=1}^{k} p_{ij}=1 \quad (i=1, 2, \dots, k).$$

Приведем пример матрицы перехода системы, которая может находиться в трех состояниях:

$$\mathcal{P}_1 = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}2 & 0{,}3 \\ 0{,}4 & 0{,}5 & 0{,}1 \\ 0{,}6 & 0{,}3 & 0{,}1 \end{pmatrix}.$$

Здесь $p_{11} = 0{,}5$ — вероятность перехода из состояния $i = 1$ в это же состояние $j = 1$; $p_{21} = 0{,}4$ — вероятность перехода из состояния $i = 2$ в состояние $j = 1$. Аналогичный смысл имеют остальные элементы матрицы.

§ 3. Равенство Маркова

Обозначим через $P_{ij}(n)$ вероятность того, что в результате n шагов (испытаний) система перейдет из состояния i в состояние j. Например, $P_{25}(10)$ — вероятность перехода за 10 шагов из второго состояния в пятое.

Подчеркнем, что при $n = 1$ получим переходные вероятности

$$P_{ij}(1) = p_{ij}.$$

Поставим перед собой задачу: зная переходные вероятности p_{ij}, найти вероятности $P_{ij}(n)$ перехода системы из состояния i в состояние j за n шагов. С этой целью введем в рассмотрение промежуточное (между i и j) состояние r. Другими словами, будем считать, что из первоначального состояния i за m шагов система перейдет в промежуточное состояние r с вероятностью $P_{ir}(m)$, после чего за оставшиеся $n-m$ шагов из промежуточного состояния r она перейдет в конечное состояние j с вероятностью $P_{rj}(n-m)$.

По формуле полной вероятности,

$$P_{ij}(n) = \sum_{r=1}^{k} P_{ir}(m)\,P_{rj}(n-m). \qquad (*)$$

Эту формулу называют *равенством Маркова*.

Пояснение. Введем обозначения: A — интересующее нас событие (за n шагов система перейдет из начального состояния i в конечное состояние j), следовательно, $P(A) = P_{ij}(n)$; B_r $(r = 1, 2, \ldots, k)$ — гипотезы (за m шагов система перейдет из первоначального состояния i в промежуточное состояние r), следовательно, $P(B_r) = P_{ir}(m)$;

$P_{B_r}(A)$ — условная вероятность наступления A при условии, что имела место гипотеза B_r (за $n-m$ шагов система перейдет из промежуточного состояния r в конечное состояние j), следовательно, $P_{B_r}(A)=P_{rj}(n-m)$.

По формуле полной вероятности,

$$P(A)=\sum_{r=1}^{k} P(B_r) P_{B_r}(A),$$

или в принятых нами обозначениях

$$P_{ij}(n)=\sum_{r=1}^{k} P_{ir}(m) P_{rj}(n-m),$$

что совпадает с формулой (*) Маркова.

Покажем, что, зная все переходные вероятности $p_{ij}=P_{ij}(1)$, т. е. зная матрицу $\mathcal{P}_1$ перехода из состояния в состояние за один шаг, можно найти вероятности $P_{ij}(2)$ перехода из состояния в состояние за два шага, следовательно, и саму матрицу перехода $\mathcal{P}_2$; по известной матрице $\mathcal{P}_2$ можно найти матрицу $\mathcal{P}_3$ перехода из состояния в состояние за 3 шага, и т. д.

Действительно, положив $n=2$, $m=1$ в равенстве Маркова

$$P_{ij}(n)=\sum_{r=1}^{k} P_{ir}(m) P_{rj}(n-m),$$

получим

$$P_{ij}(2)=\sum_{r=1}^{k} P_{ir}(1) P_{rj}(2-1),$$

или

$$P_{ij}(2)=\sum_{r=1}^{k} p_{ir}p_{rj}. \qquad (**)$$

Таким образом, по формуле (**) можно найти все вероятности $P_{ij}(2)$, следовательно, и саму матрицу $\mathcal{P}_2$. Поскольку непосредственное использование формулы (**) оказывается утомительным, а матричное исчисление ведет к цели быстрее, напишем вытекающее из (**) соотношение в матричной форме:

$$\mathcal{P}_2=\mathcal{P}_1\mathcal{P}_1=\mathcal{P}_1^2.$$

Положив $n=3$, $m=2$ в (*), аналогично получим

$$\mathcal{P}_3=\mathcal{P}_1\mathcal{P}_2=\mathcal{P}_1\mathcal{P}_1^2=\mathcal{P}_1^3.$$

В общем случае

$$\mathcal{P}_n = \mathcal{P}_1^n.$$

Пример. Задана матрица перехода $\mathcal{P}_1 = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}$. Найти матрицу перехода $\mathcal{P}_2 = \begin{pmatrix} P_{11}(2) & P_{12}(2) \\ P_{21}(2) & P_{22}(2) \end{pmatrix}$.

Решение. Воспользуемся формулой $\mathcal{P}_2 = \mathcal{P}_1^2$:

$$\mathcal{P}_2 = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}.$$

Перемножив матрицы, окончательно получим

$$\mathcal{P}_2 = \begin{pmatrix} 0,34 & 0,66 \\ 0,33 & 0,67 \end{pmatrix}.$$

Задачи

1. Задана матрица перехода $\mathcal{P}_1 = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,8 \\ 0,7 & 0,3 \end{pmatrix}$. Найти матрицу перехода $\mathcal{P}_2$.

Отв. $\mathcal{P}_2 = \begin{pmatrix} 0,60 & 0,40 \\ 0,35 & 0,65 \end{pmatrix}$.

2. Задана матрица перехода $\mathcal{P}_1 = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,9 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}$. Найти матрицу перехода $\mathcal{P}_3$.

Отв. $\mathcal{P}_3 = \begin{pmatrix} 0,244 & 0,756 \\ 0,252 & 0,748 \end{pmatrix}$.

ЧАСТЬ ПЯТАЯ
СЛУЧАЙНЫЕ ФУНКЦИИ

Глава двадцать третья
СЛУЧАЙНЫЕ ФУНКЦИИ

§ 1. Основные задачи

Можно выделить два основных вида задач, решение которых требует использования теории случайных функций.

Прямая задача (*анализ*): заданы параметры некоторого устройства и его вероятностные характеристики (математические ожидания, корреляционные функции, законы распределения) поступающей на его «вход» функции (сигнала, процесса); требуется определить характеристики на «выходе» устройства (по ним судят о «качестве» работы устройства).

Обратная задача (*синтез*): заданы вероятностные характеристики «входной» и «выходной» функций; требуется спроектировать оптимальное устройство (найти его параметры), осуществляющее преобразование заданной входной функции в такую выходную функцию, которая имеет заданные характеристики. Решение этой задачи требует кроме аппарата случайных функций привлечения и других дисциплин и в настоящей книге не рассматривается.

§ 2. Определение случайной функции

Случайной функцией называют функцию неслучайного аргумента t, которая при каждом фиксированном значении аргумента является случайной величиной. Случайные функции аргумента t обозначают прописными буквами $X(t)$, $Y(t)$ и т. д.

Например, если U — случайная величина, то функция $X(t) = t^2U$ — случайная. Действительно, при каждом фиксированном значении аргумента эта функция является случайной величиной: при $t_1=2$ получим случайную величину $X_1=4U$, при $t_2=1,5$—случайную величину $X_2=2,25U$ и т. д.

Для краткости дальнейшего изложения введем понятие сечения.

Сечением случайной функции называют случайную величину, соответствующую фиксированному значению аргумента случайной функции. Например, для случайной функции $X(t)=t^2U$, приведенной выше, при значениях аргумента $t_1=2$ и $t_2=1,5$ были получены соответственно случайные величины $X_1=4U$ и $X_2=2,25U$, которые и являются сечениями заданной случайной функции.

Итак, случайную функцию можно рассматривать как совокупность случайных величин $\{X(t)\}$, зависящих от параметра t. Возможно и другое истолкование случайной функции, если ввести понятие ее реализации.

Реализацией (*траекторией*, *выборочной функцией*) случайной функции $X(t)$ называют неслучайную функцию аргумента t, равной которой может оказаться случайная функция в результате испытания.

Таким образом, если в опыте наблюдают случайную функцию, то в действительности наблюдают одну из возможных ее реализаций; очевидно, при повторении опыта будет наблюдаться другая реализация.

Реализации функции $X(t)$ обозначают строчными буквами $x_1(t)$, $x_2(t)$ и т. д., где индекс указывает номер испытания. Например, если $X(t)=U\sin t$, где U—непрерывная случайная величина, которая в первом испытании приняла возможное значение $u_1=3$, а во втором испытании $u_2=4,6$, то реализациями $X(t)$ являются соответственно неслучайные функции $x_1(t)=3\sin t$ и $x_2(t)=$ $=4,6\sin t$.

Итак, случайную функцию можно рассматривать как совокупность ее возможных реализаций.

Случайным (*стохастическим*) *процессом* называют случайную функцию аргумента t, который истолковывается как время. Например, если самолет должен лететь с заданной постоянной скоростью, то в действительности вследствие воздействия случайных факторов (колебание температуры, изменение силы ветра и др.), учесть влияние которых заранее нельзя, скорость изменяется. В этом примере скорость самолета — случайная функция от непрерывно изменяющегося аргумента (времени), т. е. скорость есть случайный процесс.

Заметим, что если аргумент случайной функции изменяется дискретно, то соответствующие ему значения случайной функции (случайные величины) образуют *случайную последовательность*.

Аргументом случайной функции может быть не только время. Например, если измеряется диаметр ткацкой нити вдоль ее длины, то вследствие воздействия случайных факторов диаметр нити изменяется. В этом примере диаметр — случайная функция от непрерывно изменяющегося аргумента (длины нити).

Очевидно, задать случайную функцию аналитически (формулой), вообще говоря, невозможно. В частных случаях, если вид случайной функции известен, а определяющие ее параметры — случайные величины, задать ее аналитически можно. Например, случайными являются функции:

$X(t) = \sin \Omega t$, где Ω — случайная величина,
$X(t) = U \sin t$, где U — случайная величина,
$X(t) = U \sin \Omega t$, где Ω и U — случайные величины.

§ 3. Корреляционная теория случайных функций

Как известно, при фиксированном значении аргумента случайная функция является случайной величиной. Для задания этой величины достаточно задать закон ее распределения, в частности одномерную плотность вероятности. Например, случайную величину $X_1 = X(t_1)$ можно задать плотностью вероятности $f(x_1)$; в теории случайных функций ее обозначают через $f_1(x_1;\ t_1)$; здесь индекс 1 при f указывает, что плотность вероятности одномерная, t_1 — фиксированное значение аргумента t, x_1 — возможное значение случайной величины $X_1 = X(t_1)$. Аналогично, через $f_1(x_2;\ t_2)$, $f_1(x_3;\ t_3)$ и т. д. обозначают одномерные плотности вероятности сечений $X_2 = X(t_2)$, $X_3 = X(t_3)$ и т. д. Одномерную плотность вероятности любого сечения обозначают через $f_1(x;\ t)$, подразумевая, что аргумент t принимает все допустимые значения. Например, если случайная функция $X(t)$ распределена нормально с параметрами $m_x(t) = 4$, $\sigma_x(t) = 3$, то

$$f_1(x;\ t) = \frac{1}{3|t|\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-4t)^2}{2(3|t|)^2}}.$$

Хотя функция $f_1(x;\ t)$ полностью характеризует каждое отдельно взятое сечение, нельзя сказать, что она полностью описывает и саму случайную функцию. (Исключением является случай, когда любой набор сечений образует систему независимых случайных величин.) Например, зная лишь одномерную функцию распределения сечения, невозможно выполнять над случайной функцией операции, требующие совместного рассмотрения совокупности сечений.

В простейшем случае совместно рассматривают два сечения: $X_1=X(t_1)$ и $X_2=X(t_2)$, т. е. изучают систему двух случайных величин $(X_1,\ X_2)$. Известно, что эту систему можно задать двумерным законом распределения, в частности двумерной плотностью вероятности $f(x_1,\ x_2)$. В теории случайных функций ее обозначают через $f_2(x_1,\ x_2;\ t_1,\ t_2)$; здесь индекс 2 при f указывает, что плотность вероятности двумерная; t_1 и t_2 — значения аргумента t; x_1, x_2 — возможные значения случайных величин, соответственно $X_1=X(t_1)$ и $X_2=X(t_2)$.

Хотя двумерный закон распределения описывает случайную функцию более полно, чем одномерный (по известному двумерному можно найти одномерный закон), он не характеризует случайную функцию исчерпывающим образом (исключением являются случаи, когда случайная функция распределена нормально или представляет собой марковский случайный процесс).

Аналогично обстоит дело и при переходе к трехмерным, четырехмерным распределениям и т. д. Поскольку такой способ изучения случайных функций является, вообще говоря, громоздким, часто идут по другому пути, не требующему знания многомерных законов распределения, а именно изучают моменты, причем ограничиваются моментами первых двух порядков.

Корреляционной теорией случайных функций называют теорию, основанную на изучении моментов первого и второго порядка. Эта теория оказывается достаточной для решения многих задач практики.

В отличие от случайных величин, для которых моменты являются числами и поэтому их называют *числовыми характеристиками*, моменты случайной функции являются неслучайными функциями (их называют *характеристиками случайной функции*).

Ниже рассматриваются следующие характеристики случайной функции: математическое ожидание (начальный момент первого порядка), дисперсия (центральный момент второго порядка), корреляционная функция (корреляционный момент).

§ 4. Математическое ожидание случайной функции

Рассмотрим случайную функцию $X(t)$. При фиксированном значении аргумента, например при $t = t_1$, получим сечение — случайную величину $X(t_1)$ с математическим ожиданием $M[X(t_1)]$. (Полагаем, что математическое ожидание любого сечения существует.) Таким образом, каждое фиксированное значение аргумента определяет сечение — случайную величину, а каждой случайной величине соответствует ее математическое ожидание. Отсюда следует, что каждому фиксированному значению аргумента t соответствует определенное математическое ожидание; это означает, что математическое ожидание случайной функции есть функция (неслучайная) от аргумента t; ее обозначают через $m_x(t)$. В частном случае функция $m_x(t)$ может сохранять постоянное значение при всех допустимых значениях аргумента. Дадим теперь определение математического ожидания.

Математическим ожиданием случайной функции $X(t)$ называют неслучайную функцию $m_x(t)$, значение которой при каждом фиксированном значении аргумента t равно математическому ожиданию сечения, соответствующего этому же фиксированному значению аргумента:

$$m_x(t) = M[X(t)].$$

Геометрически математическое ожидание случайной функции можно истолковать как «среднюю кривую», около которой расположены другие кривые — реализации; при фиксированном значении аргумента математическое ожидание есть среднее значение сечения («средняя ордината»), вокруг которого расположены его возможные значения (ординаты).

§ 5. Свойства математического ожидания случайной функции

Используя свойства математического ожидания случайной величины, легко получить свойства математического ожидания случайной функции.

Свойство 1. *Математическое ожидание неслучайной функции* $\varphi(t)$ *равно самой неслучайной функции*:

$$M[\varphi(t)] = \varphi(t).$$

Свойство 2. *Неслучайный множитель* $\varphi(t)$ *можно выносить за знак математического ожидания*:

$$M[\varphi(t) X(t)] = \varphi(t) M[X(t)] = \varphi(t) m_x(t).$$

Свойство 3. *Математическое ожидание суммы двух случайных функций равно сумме математических ожиданий слагаемых*:

$$M[X(t) + Y(t)] = m_x(t) + m_y(t).$$

Следствие. *Для того чтобы найти математическое ожидание суммы случайной и неслучайной функций, достаточно к математическому ожиданию случайной функции прибавить неслучайную функцию:*

$$M[X(t) + \varphi(t)] = m_x(t) + \varphi(t).$$

Рекомендуем самостоятельно доказать приведенные свойства, учитывая, что при любом фиксированном значении аргумента случайная функция является случайной величиной, а неслучайная функция — постоянной величиной. Например, свойство 3 доказывается так: при фиксированном значении аргумента случайные функции $X(t)$ и $Y(t)$ являются случайными величинами, для которых математическое ожидание суммы равно сумме математических ожидаиий слагаемых.

Пример. Найти математическое ожиданне случайной функции $X(t) = U \cos t$, где U — случайная велнчина, причем $M(U) = 2$.

Решение. Найдем математическое ожиданне, учитывая, что неслучайный множитель $\cos t$ можно вынести за знак математического ожидания:

$$M[X(t)] = M[U \cos t] = \cos t M(U) = 2 \cos t.$$

Итак, искомое математическое ожидание

$$m_x(t) = 3 \cos t.$$

§ 6. Дисперсия случайной функции

Рассмотрим случайную функцию $X(t)$. При фиксированном значении аргумента, например при $t = t_1$, получим сечение — случайную величину $X(t_1)$ с дисперсией $D[X(t_1)] \geqslant 0$ (предполагается, что дисперсия любого сечения существует). Таким образом, каждое фиксированное значение аргумента определяет сечение — случайную величину, а каждой случайной величине соответствует ее дисперсия. Отсюда следует, что каждому фиксированному значению аргумента t соответствует определенная дисперсия; это означает, что дисперсия случайной функции есть функция (неслучайная, причем неотрицательная) от аргумента t; ее обозначают через $D_x(t)$. В частном случае $D_x(t)$ может сохранять постоянное значение при всех допустимых значениях аргумента. Дадим теперь определение дисперсии.

Дисперсией случайной функции $X(t)$ называют неслучайную неотрицательную функцию $D_x(t)$, значение которой при каждом фиксированном значении аргумента t равно дисперсии сечения, соответствующего этому же фиксированному значению аргумента:

$$D_x(t) = D[X(t)].$$

Дисперсия характеризует степень рассеяния возможных реализаций (кривых) вокруг математического ожидания случайной функции («средней кривой»). При фиксированном значении аргумента дисперсия характеризует степень рассеяния возможных значений (ординат) сечения вокруг математического ожидания сечения («средней ординаты»).

Часто вместо дисперсии рассматривают среднее квадратическое отклонение случайной функции, которое определяют по аналогии со средним квадратическим отклонением случайной величины.

Средним квадратическим отклонением случайной функции называют квадратный корень из дисперсии:

$$\sigma_x(t) = \sqrt{D_x(t)}.$$

§ 7. Свойства дисперсии случайной функции

Используя свойства дисперсии случайной величины, легко получить свойства дисперсии случайной функции.

Свойство 1. *Дисперсия неслучайной функции* $\varphi(t)$ *равна нулю:*

$$D[\varphi(t)] = 0.$$

Свойство 2. *Дисперсия суммы случайной функции* $X(t)$ *и неслучайной функции* $\varphi(t)$ *равна дисперсии слу-*

чайной функции:

$$D[X(t)+\varphi)t)]=D_x(t).$$

Свойство 3. *Дисперсия произведения случайной функции $X(t)$ на неслучайную функцию $\varphi(t)$ равна произведению квадрата неслучайного множителя на дисперсию случайной функции:*

$$D[X(t)\,\varphi(t)]=\varphi^2(t)\,D_x(t).$$

Рекомендуем самостоятельно доказать приведенные свойства, учитывая, что при любом фиксированном значении аргумента случайная функция является случайной величиной, а неслучайная функция — постоянной величиной.

Пример. Найти дисперсию случайной функции $X(t)=U\sin t$, где U — случайная величина, причем $D(U)=6$.

Решение. Найдем дисперсию, приняв во внимание, что неслучайный множитель $\sin t$ можно вынести за знак дисперсии, возведя его в квадрат:

$$D[X(t)]=D[U\sin t[=\sin^2 tD(U)=6\sin^2 t.$$

Итак, искомая дисперсия $D_x(t)=6\sin^2 t$.

§ 8. Целесообразность введения корреляционной функции

Математическое ожидание и дисперсия характеризуют случайную функцию далеко не полно. Можно привести примеры двух случайных функций, которые имеют одинаковые математические ожидания и дисперсии, но поведение которых различно. Зная лишь эти две характеристики, в частности, ничего нельзя сказать о степени зависимости двух сечений. Для оценки этой зависимости вводят новую характеристику — корреляционную функцию. Далее покажем, что, зная корреляционную функцию, можно найти и дисперсию; поэтому знать закон распределения для отыскания дисперсии нет необходимости. Уже это обстоятельство указывает на целесообразность введения корреляционной функции.

Прежде чем перейти к дальнейшему изложению, введем понятие центрированной случайной функции по аналогии с понятием центрированной случайной величины (центрированной случайной величиной называют разность между случайной величиной и ее математическим ожиданием: $\overset{\circ}{X}=X-m_x$).

Центрированной случайной функцией называют разность между случайной функцией и ее математическим ожиданием:

$$\overset{\circ}{X}(t) = X(t) - m_x(t).$$

§ 9. Корреляционная функция случайной функции

Рассмотрим случайную функцию $X(t)$. При двух фиксированных значениях аргумента, например при $t = t_1$ и $t = t_2$, получим два сечения — систему двух случайных величин $X(t_1)$ и $X(t_2)$ с корреляционным моментом $M[\overset{\circ}{X}(t_1)\overset{\circ}{X}(t_2)]$, где

$$\overset{\circ}{X}(t_1) = X(t_1) - m_x(t_1) \quad \text{и} \quad \overset{\circ}{X}(t_2) = X(t_2) - m_x(t_2).$$

Таким образом, каждая пара чисел t_1 и t_2 определяет систему двух случайных величин, а каждой такой системе соответствует ее корреляционный момент. Отсюда следует, что каждой паре фиксированных значений t_1 и t_2 соответствует определенный корреляционный момент; это означает, что корреляционный момент случайной функции есть функция (неслучайная) двух независимых аргументов t_1 и t_2; ее обозначают через $K_x(t_1, t_2)$. В частном случае значения обоих аргументов могут быть равны между собой.

Приведем теперь определение корреляционной функции.

Корреляционной функцией случайной функции $X(t)$ называют неслучайную функцию $K_x(t_1, t_2)$ двух независимых аргументов t_1 и t_2, значение которой при каждой паре фиксированных значений аргументов равно корреляционному моменту сечений, соответствующих этим же фиксированным значениям аргументов:

$$K_x(t_1, t_2) = M[\overset{\circ}{X}(t_1)\overset{\circ}{X}(t_2)].$$

Замечание. *При равных между собой значениях аргументов $t_1 = t_2 = t$ корреляционная функция случайной функции равна дисперсии этой функции:*

$$K_x(t, t) = D_x(t).$$

Действительно, учитывая, что

$$D_x(t) = M[X(t) - m_x(t)]^2 = M[\overset{\circ}{X}(t)]^2,$$

получим

$$K_x(t, t) = M[\overset{\circ}{X}(t)\overset{\circ}{X}(t)] = M[\overset{\circ}{X}(t)]^2 = D_x(t).$$

Таким образом, достаточно знать корреляционную функцию, чтобы найти дисперсию случайной функции.

Пример. Задана случайная функция $X(t) = Ut$, где U — случайная величина, причем $M(U) = 4$, $D(U) = 10$. Найти: а) корреляционную функцию; б) дисперсию заданной случайной функции.

Решение. а) Найдем математическое ожидание:

$$m_x(t) = M[X(t)] = M(Ut) = tM(U) = 4t.$$

Найдем центрированную функцию:

$$\overset{\circ}{X}(t) = X(t) - m_x(t) = Ut - 4t = (U-4)t.$$

Отсюда

$$\overset{\circ}{X}(t_1) = (U-4)t_1, \quad \overset{\circ}{X}(t_2) = (U-4)t_2.$$

Найдем корреляционную функцию:

$$K_x(t_1, t_2) = M[\overset{\circ}{X}(t_1)\overset{\circ}{X}(t_2)] = M[(U-4)t_1(U-4)t_2] =$$
$$= t_1t_2M[(U-4)^2] = t_1t_2D(U) = 10t_1t_2.$$

Итак, искомая корреляционная функция

$$K_x(t_1, t_2) = 10t_1t_2.$$

б) Найдем дисперсию, для чего положим $t_1 = t_2 = t$:

$$D_x(t) = K_x(t, t) = 10tt.$$

Итак, искомая дисперсия

$$D_x(t) = 10t^2.$$

§ 10. Свойства корреляционной функции

Свойство 1. *При перестановке аргументов корреляционная функция не изменяется (свойство симметрии):*

$$K_x(t_1, t_2) = K_x(t_2, t_1).$$

Доказательство. По определению корреляционной функции,

$$K_x(t_1, t_2) = M[\overset{\circ}{X}(t_1)\overset{\circ}{X}(t_2)],$$
$$K_x(t_2, t_1) = M[\overset{\circ}{X}(t_2)\overset{\circ}{X}(t_1)].$$

Правые части этих равенств равны (математическое ожидание произведения не зависит от порядка сомножителей), следовательно, равны и левые части. Итак,

$$K_x(t_1, t_2) = K_x(t_2, t_1).$$

Замечание 1. Прибавление к случайной функции $X(t)$ неслучайного слагаемого $\varphi(t)$ не изменяет ее центрированной функции:

если

$$Y(t) = X(t) + \varphi(t),$$

то

$$\overset{\circ}{Y}(t) = \overset{\circ}{X}(t).$$

Действительно, математическое ожидание функции $Y(t)$

$$m_y(t) = m_x(t) + \varphi(t).$$

Следовательно,

$$\overset{\circ}{Y}(t) = Y(t) - m_y(t) = [X(t) + \varphi(t)] - [m_x(t) + \varphi(t)] =$$
$$= X(t) - m_x(t) = \overset{\circ}{X}(t).$$

Итак,

$$\overset{\circ}{Y}(t) = \overset{\circ}{X}(t).$$

Свойство 2. *Прибавление к случайной функции $X(t)$ неслучайного слагаемого $\varphi(t)$ не изменяет ее корреляционной функции:*

если

$$Y(t) = X(t) + \varphi(t),$$

то

$$K_y(t_1, t_2) = K_x(t_1, t_2).$$

Доказательство. В силу замечания 1

$$\overset{\circ}{Y}(t) = \overset{\circ}{X}(t).$$

Отсюда $\overset{\circ}{Y}(t_1) = \overset{\circ}{X}(t_1)$ и $\overset{\circ}{Y}(t_2) = \overset{\circ}{X}(t_2)$. Следовательно,

$$M[\overset{\circ}{Y}(t_1)\overset{\circ}{Y}(t_2)] = M[\overset{\circ}{X}(t_1)\overset{\circ}{X}(t_2)].$$

Итак,

$$K_y(t_1, t_2) = K_x(t_1, t_2).$$

Замечание 2. При умножении случайной функции $X(t)$ на неслучайный множитель $\varphi(t)$ ее центрированная функция умножается на этот же множитель:

если

$$Y(t) = X(t)\,\varphi(t),$$

то

$$\overset{\circ}{Y}(t) = \overset{\circ}{X}(t)\,\varphi(t).$$

Действительно, математическое ожидание функции $Y(t)$

$$m_y(t) = M[X(t)\,\varphi(t)] = \varphi(t)\,m_x(t).$$

Следовательно,

$$\overset{\circ}{Y}(t) = Y(t) - m_y(t) = [X(t)\,\varphi(t)] - [m_x(t)\,\varphi(t)] =$$
$$= \varphi(t)\,[X(t) - m_x(t)] = \varphi(t)\,\overset{\circ}{X}(t).$$

Итак,

$$\overset{\circ}{Y}(t)=\overset{\circ}{X}(t)\varphi(t).$$

Свойство 3. *При умножении случайной функции* $X(t)$ *на неслучайный множитель* $\varphi(t)$ *ее корреляционная функция умножается на произведение* $\varphi(t_1)\varphi(t_2)$*; если*

$$Y(t)=X(t)\varphi(t),$$

то

$$K_y(t_1,\ t_2)=K_x(t_1,\ t_2)\varphi(t_1)\varphi(t_2).$$

Доказательство. В силу замечания 2

$$\overset{\circ}{Y}(t)=\overset{\circ}{X}(t).$$

Следовательно,

$$K_y(t_1,\ t_2)=M[\overset{\circ}{Y}(t_1)\overset{\circ}{Y}(t_2)]=M\{[\overset{\circ}{X}(t_1)\varphi(t_1)][\overset{\circ}{X}(t_2)\varphi(t_2)]\}.$$

Вынесем неслучайные множители за знак математического ожидания:

$$K_y(t_1,t_2)=\varphi(t_1)\varphi(t_2)M[\overset{\circ}{X}(t_1)\overset{\circ}{X}(t_2)]=\varphi(t_1)\varphi(t_2)K_x(t_1,t_2).$$

Итак,

$$K_y(t_1,\ t_2)=K_x(t_1,\ t_2)\varphi(t_1)\varphi(t_2).$$

Свойство 4. *Абсолютная величина корреляционной функции не превышает среднего геометрического дисперсий соответствующих сечений:*

$$|K_x(t_1,\ t_2)|\leqslant\sqrt{D_x(t_1)D_x(t_2)}.$$

Доказательство. Известно, что для модуля корреляционного момента двух случайных величин справедливо неравенство (см. гл. XIV, § 17, теорема 2)

$$|\mu_{xy}|\leqslant\sqrt{D_xD_y}. \qquad (*)$$

При фиксированных значениях аргументов t_1 и t_2 значение корреляционной функции равно корреляционному моменту соответствующих сечений — случайных величин $X(t_1)$ и $X(t_2)$. Поэтому неравенство (*) можно записать так:

$$|K_x(t_1,\ t_2)|\leqslant\sqrt{D_x(t_1)D_x(t_2)}.$$

§ 11. Нормированная корреляционная функция

Известно, что для оценки степени линейной зависимости двух случайных величин пользуются коэффициентом корреляции (см. гл. XIV, § 17, соотношение (*))

$$r_{xy}=\mu_{xy}/(\sigma_x\sigma_y).$$

В теории случайных функций аналогом этой характеристики служит нормированная корреляционная функция.

Очевидно, что каждой паре фиксированных значений t_1 и t_2 аргумента случайной функции $X(t)$ соответствует определенный коэффициент корреляции $K_x(t_1, t_2)/\sigma_x(t_1)\sigma(t_2)$ соответствующих сечений — случайных величин $X(t_1)$ и $X(t_2)$; это означает, что коэффициент корреляции случайной функции есть функция (неслучайная) двух независимых аргументов t_1 и t_2; ее обозначают через $\rho_x(t_1, t_2)$.

Дадим теперь определение нормированной корреляционной функции.

Нормированной корреляционной функцией случайной функции $X(t)$ называют неслучайную функцию двух независимых переменных t_1 и t_2, значение которой при каждой паре фиксированных значений аргументов равно коэффициенту корреляции сечений, соответствующих этим же фиксированным значениям аргументов:

$$\rho_x(t_1, t_2)=\frac{K_x(t_1, t_2)}{\sigma_x(t_1)\sigma_x(t_2)}. \qquad (*)$$

Учитывая, что $\sigma_x(t_1)=\sqrt{D_x(t_1)}=\sqrt{K_x(t_1, t_1)}$ и $\sigma_x(t_2)=$ $=\sqrt{K_x(t_2, t_2)}$, получим

$$\rho_x(t_1, t_2)=\frac{K_x(t_1, t_2)}{\sqrt{K_x(t_1, t_1)}\sqrt{K_x(t_2, t_2)}}. \qquad (**)$$

Таким образом, зная корреляционную функцию, можно найти нормированную корреляционную функцию.

Пример. Найти нормированную корреляционную функцию случайной функции $X(t)$ по ее известной корреляционной функции $K_x(t_1, t_2)=5\cos(t_2-t_1)$.

Решение. Искомая нормированная корреляционная функция

$$\rho_x(t_1, t_2)=\frac{K_x(t_1, t_2)}{\sqrt{K_x(t_1, t_1)}\sqrt{K_x(t_2, t_2)}}=$$

$$=\frac{5\cos(t_2-t_1)}{\sqrt{5\cos(t_1-t_1)}\sqrt{5\cos(t_2-t_2)}}=\cos(t_2-t_1).$$

Нормированная корреляционная функция имеет те же свойства, что и корреляционная функция (см. § 10), причем свойство 4 заменяется на следующее: абсолютная величина нормированной корреляционной функции не превышает единицы:

$$|\rho_x(t_1, t_2)| \leqslant 1.$$

Это свойство следует из того, что при фиксированных значениях аргументов значение нормированной корреляционной функции равно коэффициенту корреляции двух случайных величин — соответствующих сечений, а абсолютная величина коэффициента корреляции не превышает единицы (см. гл. XIV, § 17, замечание 3).

Легко видеть из (*) или (**), что при равных значениях аргументов нормированная корреляционная функция равна единице: $\rho_x(t, t) = 1$.

Очевидно, нормированная корреляционная функция имеет тот же вероятностный смысл, что и коэффициент корреляции: чем ближе модуль этой функции к единице, тем линейная связь между сечениями сильнее; чем ближе модуль этой функции к нулю, тем эта связь слабее.

§ 12. Взаимная корреляционная функция

Для того чтобы оценить степень зависимости сечений двух случайных функций, вводят характеристику — взаимную корреляционную функцию.

Рассмотрим две случайные функции $X(t)$ и $Y(t)$. При фиксированных значениях аргумента, например $t = t_1$ и $t = t_2$, получим два сечения — систему двух случайных величин $X(t_1)$ и $Y(t_2)$ с корреляционным моментом $M[\overset{\circ}{X}(t_1)\overset{\circ}{Y}(t_2)]$. Таким образом, каждая пара чисел t_1 и t_2 определяет систему двух случайных величин, а каждой такой системе соответствует ее корреляционный момент. Отсюда следует, что каждой паре фиксированных значений t_1 и t_2 соответствует определенный корреляционный момент; это означает, что взаимная корреляционная функция двух случайных функций есть функция (неслучайная) двух независимых аргументов t_1 и t_2; ее обозначают через $R_{xy}(t_1, t_2)$. Дадим теперь определение взаимной корреляционной функции.

Взаимной корреляционной функцией двух случайных функций $X(t)$ и $Y(t)$ называют неслучайную функцию $R_{xy}(t_1, t_2)$ двух независимых аргументов t_1 и t_2, значение которой при каждой паре фиксированных значений аргументов равно корреляционному моменту сечений обеих функций, соответствующих этим же фиксированным значениям аргументов:

$$R_{xy}(t_1,\ t_2)=M[\overset{\circ}{X}(t_1)\overset{\circ}{Y}(t_2)].$$

Коррелированными называют две случайные функции, если их взаимная корреляционная функция не равна тождественно нулю.

Некоррелированными называют две случайные функции, взаимная корреляционная функция которых тождественно равна нулю.

Пример. Найти взаимную корреляционную функцию двух случайных функций $X(t)=tU$ и $Y(t)=t^2U$, где U — случайная величина, причем $D(U)=3$.

Решение. Найдем математические ожидания:

$$m_x(t)=M(tU)=tm_u,\quad m_y(t)=M(t^2U)=t^2m_u.$$

Найдем центрированные функции:

$$\overset{\circ}{X}(t)=X(t)-m_x(t)=tU-tm_u=t(U-m_u),$$

$$\overset{\circ}{Y}(t)=Y(t)-m_y(t)=t^2U-t^2m_u=t^2(U-m_u).$$

Найдем взаимную корреляционную функцию:

$$R_{xy}(t_1,\ t_2)=M[\overset{\circ}{X}(t_1)\overset{\circ}{Y}(t_2)]=M\{[t_1(U-m_u)][t_2^2(U-m_u)]\}=$$

$$=t_1t_2^2M[(U-m_u)^2]=t_1t_2^2D(U)=3t_1t_2^2.$$

Итак, искомая взаимная корреляционная функция

$$R_{xy}(t_1,\ t_2)=3t_1t_2^2.$$

§ 13. Свойства взаимной корреляционной функции

Свойство 1. *При одновременной перестановке индексов и аргументов взаимная корреляционная функция не изменяется:*

$$R_{xy}(t_1,\ t_2)=R_{yx}(t_2,\ t_1).$$

Свойство 2. *Прибавление к случайным функциям $X(t)$ и $Y(t)$ неслучайных слагаемых, соответственно $\varphi(t)$ и $\psi(t)$, не изменяет их взаимной корреляционной функции: если*

$$X_1(t)=X(t)+\varphi(t)\ \text{и}\ Y_1(t)=Y(t)+\psi(t),$$

то

$$R_{x_1y_1}(t_1,\ t_2)=R_{xy}(t_1,\ t_2).$$

Свойство 3. *При умножении случайных функций $X(t)$ и $Y(t)$ на неслучайные множители, соответственно $\varphi(t)$ и $\psi(t)$, взаимная корреляционная функция умножается на произведение* $\varphi(t_1)\psi(t_2)$:

если

$$X_1(t)=X(t)\varphi(t) \text{ и } Y_1(t)=Y(t)\psi(t),$$

то

$$R_{x_1y_1}(t_1,\ t_2)=R_{xy}(t_1,\ t_2)\,\varphi(t_1)\psi(t_2).$$

Свойство 4. *Абсолютная величина взаимной корреляционной функции двух случайных функций не превышает среднего геометрического их дисперсий*:

$$|R_{xy}(t_1,\ t_2)|\leqslant\sqrt{D_x(t_1)\,D_y(t_2)}.$$

Доказательства этих свойств аналогичны доказательствам свойств корреляционной функции.

§ 14. Нормированная взаимная корреляционная функция

Наряду с взаимной корреляционной функцией для оценки степени зависимости сечений двух случайных функций пользуются характеристикой — нормированной взаимной корреляционной функцией.

Нормированной взаимной корреляционной функцией двух случайных функций $X(t)$ и $Y(t)$ называют неслучайную функцию двух независимых аргументов t_1 и t_2:

$$\rho_{xy}(t_1,\ t_2)=\frac{R_{xy}(t_1,\ t_2)}{\sqrt{K_x(t_1,\ t_1)}\ \sqrt{K_y(t_2,\ t_2)}}=\frac{R_{xy}(t_1,\ t_2)}{\sqrt{D_x(t_1)\,D_y(t_2)}}.$$

Нормированная взаимная корреляционная функция имеет те же свойства, что и взаимная корреляционная функция (см. § 13), причем свойство 4 заменяется следующим свойством: *абсолютная величина нормированной взаимной корреляционной функции не превышает единицы*:

$$|\rho_{xy}(t_1,\ t_2)|\leqslant 1.$$

Пример. Найти нормированную взаимную корреляционную функцию двух случайных функций $X(t)=tU$ и $Y(t)=t^2U$, где U — случайная величина, причем $D(U)=3$.

Решение. Ранее при решении примера (см. § 12), в котором заданы те же функции, что и в настоящем примере, были найдены функции:

$$R_{xy}(t_1,\ t_2)=3t_1t_2^2,\quad \mathring{X}(t)=t(U-m_u),\quad \mathring{Y}(t)=t^2(U-m_u).$$

Пользуясь этими результатами, легко найдем корреляционные функции:

$$K_x(t_1, t_2) = 3t_1t_2, \; K_y(t_1, t_2) = 3t_1^2t_2^2$$

и нормированную функцию:

$$\rho_{xy}(t_1, t_2) = \frac{R_{xy}(t_1, t_2)}{\sqrt{K_x(t_1, t_1)}\,\sqrt{K_y(t_2, t_2)}} = \frac{3t_1t_2^2}{\sqrt{3t_1t_1}\,\sqrt{3t_2^2t_2^2}} = 1.$$

Итак, искомая нормированная взаимная корреляционная функция

$$\rho_{xy}(t_1, t_2) = 1.$$

Заметим, что функция $Y(t)$ связана с $X(t)$ линейной функциональной зависимостью:

$$Y(t) = t^2U = t(tU) = tX(t).$$

§ 15. Характеристики суммы случайных функций

Пусть $X(t)$ и $Y(t)$ — случайные функции. Найдем характеристики суммы этих функций по известным характеристикам слагаемых.

Теорема 1. *Математическое ожидание суммы двух случайных функций равно сумме математических ожиданий слагаемых:*

если

$$Z(t) = X(t) + Y(t),$$

то

$$m_z(t) = m_x(t) + m_y(t).$$

Эта теорема уже была приведена ранее (см. § 5, свойство 3); здесь она помещена для систематизации изложения. Методом математической индукции теорему можно обобщить на n слагаемых.

Следствие. *Математическое ожидание суммы случайной функции $X(t)$ и случайной величины Y равно сумме их математических ожиданий:*

если

$$Z(t) = X(t) + Y,$$

то

$$m_z(t) = m_x(t) + m_y.$$

Замечание 1. Центрированная функция суммы случайных функций равна сумме центрированных слагаемых:

если

$$Z(t) = X(t) + Y(t),$$

то

$$\mathring{Z}(t) = \mathring{X}(t) + \mathring{Y}(t).$$

Действительно,

$$\overset{\circ}{Z}(t)=Z(t)-m_z(t)=[X(t)+Y(t)]-[m_x(t)+m_y(t)]=$$
$$=[X(t)-m_x(t)]+[Y(t)-m_y(t)].$$

Отсюда

$$\overset{\circ}{Z}(t)=\overset{\circ}{X}(t)+\overset{\circ}{Y}(t).$$

Теорема 2. *Корреляционная функция суммы двух коррелированных случайных функций равна сумме корреляционных функций слагаемых и взаимной корреляционной функции, которая прибавляется дважды (с разным порядком следования аргументов):*

если

$$Z(t)=X(t)+Y(t),$$

то

$$K_z(t_1,\ t_2)=K_x(t_1,\ t_2)+K_y(t_1,\ t_2)+R_{xy}(t_1,\ t_2)+R_{xy}(t_2,\ t_1).$$

Доказательство. По определению корреляционной функции,

$$K_z(t_1,\ t_2)=M[\overset{\circ}{Z}(t_1)\overset{\circ}{Z}(t_2)].$$

В силу замечания 1

$$\overset{\circ}{Z}(t)=\overset{\circ}{X}(t)+\overset{\circ}{Y}(t).$$

Следовательно,

$$\overset{\circ}{Z}(t_1)\overset{\circ}{Z}(t_2)=[\overset{\circ}{X}(t_1)+\overset{\circ}{Y}(t_1)][\overset{\circ}{X}(t_2)+\overset{\circ}{Y}(t_2)].$$

Выполнив умножение, приравняем математические ожидания обеих частей равенства:

$$M[\overset{\circ}{Z}(t_1)\overset{\circ}{Z}(t_2)]=M[\overset{\circ}{X}(t_1)\overset{\circ}{X}(t_2)]+M[\overset{\circ}{Y}(t_1)\overset{\circ}{Y}(t_2)]+$$
$$+M[\overset{\circ}{X}(t_1)\overset{\circ}{Y}(t_2)]+M[\overset{\circ}{Y}(t_1)\overset{\circ}{X}(t_2)].$$

По определению корреляционной и взаимной корреляционной функций имеем

$$K_z(t_1,\ t_2)=K_x(t_1,\ t_2)+K_y(t_1,\ t_2)+R_{xy}(t_1,\ t_2)+R_{yx}(t_1,\ t_2).$$

Учитывая, что $R_{yx}(t_1,\ t_2)=R_{xy}(t_2,\ t_1)$ (см. § 13, свойство 1), окончательно получим

$$K_z(t_1,t_2)=K_x(t_1,t_2)+K_y(t_1,t_2)+R_{xy}(t_1,t_2)+R_{xy}(t_2,t_1).\ (*)$$

Методом математической индукции теорему можно обобщить на n попарно коррелированных случайных функций:

если

$$Z(t)=\sum_{i=1}^{n} X_i(t),$$

то

$$K_z(t_1, t_2)=\sum_{i=1}^{n} K_{x_i}(t_1, t_2)+\sum_{i\neq j} R_{x_i y_j}(t_1, t_2),$$

где индексы i, j второго слагаемого есть размещения чисел 1, 2, ..., n, взятых по два.

Следствие 1. *Корреляционная функция суммы двух некоррелированных случайных функций равна сумме корреляционных функций слагаемых:*

если

$$Z(t)=X(t)+Y(t),$$

то

$$K_z(t_1, t_2)=K_x(t_1, t_2)+K_y(t_1, t_2).$$

Доказательство. Так как функции $X(t)$ и $Y(t)$ не коррелированы, то их взаимные корреляционные функции равны нулю. Следовательно, соотношение (*) примет вид

$$K_z(t_1, t_2)=K_x(t_1, t_2)+K_y(t_1, t_2).$$

Методом математической индукции следствие можно обобщить на n попарно некоррелированных функций.

Замечание 2. В частности, при равных значениях аргументов $t_1=t_2=t$ получим $K_z(t, t)=K_x(t, t)+K_y(t, t)$, или

$$D_z(t)=D_x(t)+D_y(t).$$

Итак, дисперсия суммы двух некоррелированных случайных функций равна сумме дисперсий слагаемых.

Следствие 2. *Корреляционная функция случайной функции $X(t)$ и некоррелированной с ней случайной величины Y равна сумме корреляционной функции случайной функции и дисперсии случайной величины:*

если

$$Z(t)=X(t)+Y,$$

то

$$K_z(t_1, t_2)=K_x(t_1, t_2)+D_y.$$

Пояснение. Случайную величину Y можно считать случайной функцией, не изменяющейся при изменении аргумента $t: Y(t) = Y$ при всех значениях t. Тогда $\mathring{Y}(t) = \mathring{Y}$ и, следовательно,

$$K_y(t_1, t_2) = M[\mathring{Y}\mathring{Y}] = M[\mathring{Y}^2] = D_y.$$

Пример. Заданы случайные функции $X(t) = tU$, $Y(t) = t^2U$, где U и V — некоррелированные случайные величины, причем $M(U) = 3$, $M(V) = 6$, $D(U) = 0{,}2$, $D(V) = 5$. Найти: а) математическое ожидание; б) корреляционную функцию; в) дисперсию суммы $Z(t) = X(t) + Y(t)$.

Решение. а) Найдем математическое ожидание суммы заданных функций. По теореме 1

$$m_z(t) = m_x(t) + m_y(t) = M(tU) + M(t^2V) = tM(U) + t^2M(V) = 3t + 6t^2.$$

б) Найдем корреляционную функцию суммы $Z(t)$. Так как случайные величины U и V не коррелированы, то их корреляционный момент равен нулю:

$$M[(U-3)(V-6)] = 0.$$

Следовательно, взаимная корреляционная функция

$$R_{xy}(t_1, t_2) = M[\mathring{X}(t_1)\mathring{Y}(t_2)] = t_1t_2^2M[(U-3)(V-6)] = 0,$$

а значит, функции $X(t)$ и $Y(t)$ не коррелированы. Поэтому искомая корреляционная функция в силу следствия 1

$$K_z(t_1, t_2) = K_x(t_1, t_2) + K_y(t_1, t_2).$$

Выполнив выкладки, окончательно получим

$$K_z(t_1, t_2) = 0{,}2t_1t_2 + 5t_1^2t_2^2.$$

в) Найдем искомую дисперсию:

$$D_z(t) = K_z(t, t) = 0{,}2t^2 + 5t^4.$$

§ 16. Производная случайной функции и ее характеристики

При изучении случайных величин встречалось понятие сходимости по вероятности. Для изучения случайных функций необходимо ввести *среднеквадратичную сходимость*.

Говорят, что последовательность случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ сходится в *среднеквадратичном* к случайной величине X, если математическое ожидание квадрата разности $X_n - X$ стремится к нулю при $n \to \infty$:

$$M[(X_n - X)^2] = 0.$$

Случайную величину X называют *пределом в среднеквадратичном* последовательности случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ и пишут

$$X = \mathrm{l.i.m.} X_n.$$

Заметим, что из среднеквадратичной сходимости следует сходимость по вероятности; обратное утверждение, вообще говоря, неверно.

Случайную функцию $X(t)$ называют *дифференцируемой*, если существует такая функция $X'(t)$ (ее называют *производной*), что

$$\lim_{\Delta t\to 0} M\left[\frac{X(t+\Delta t)-X(t)}{\Delta t}-X'(t)\right]^2=0.$$

Итак, *производной случайной функции* $X(t)$ называют среднеквадратичный предел отношения приращения функции к приращению аргумента Δt при $\Delta t \to 0$:

$$X'(t)=\underset{\Delta t\to 0}{\text{l.i.m.}}\ \frac{X(t+\Delta t)-X(t)}{\Delta t}.$$

Пусть известны характеристики случайной функции. Как найти характеристики ее производной? Ответ на этот вопрос дают теоремы, приведенные ниже, причем рассматриваются только среднеквадратично дифференцируемые случайные функции.

Теорема 1. *Математическое ожидание производной* $X'(t)=\dot{x}$ *от случайной функции* $X(t)$ *равно производной от ее математического ожидания:*

$$m_{\dot{x}}(t)=m'_x(t).$$

Доказательство. По определению производной,

$$X'(t)=\underset{\Delta t\to 0}{\text{l.i.m.}}\frac{X(t+\Delta t)-X(t)}{\Delta t}.$$

Приравняем математические ожидания обеих частей равенства, а затем изменим порядок нахождения математического ожидания и предела (законность изменения порядка этих операций примем без доказательства):

$$M[X'(t)]=\lim_{\Delta t\to 0} M\left[\frac{X(t+\Delta t)-X(t)}{\Delta t}\right].$$

Используя свойства математического ожидания, получим

$$M[X'(t)]=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{m_x(t+\Delta t)-m_x(t)}{\Delta t}=m'_x(t).$$

Итак, $m_{\dot{x}}(t)=m'_x(t)$.

Замечание 1. По существу доказано, что *для среднеквадратически дифференцируемых случайных функций операции нахождения математического ожидания и дифференцирования можно менять местами.* Действительно, запишем доказанную теорему так:

$$M[X'(t)] = \{M[X(t)]\}'.$$

Мы видим, что в левой части равенства сначала находят производную, а затем математическое ожидание; в правой части — наоборот.

Пример 1. Зная математическое ожидание $m_x(t) = t^2 + t$ случайной функции $X(t)$, найти математическое ожидание ее производной.

Решение. Искомое математическое ожидание

$$m_{\dot{x}}(t) = m'_x(t) = [t^2 + t]' = 2t + 1.$$

Замечание 2. Если первая производная дифференцируема, то производную от первой производной называют *второй производной* и обозначают через $X''(t)$. Аналогично определяют производные более высоких порядков.

Замечание 3. Теорему 1 можно обобщить: математическое ожидание производной порядка n равно производной этого же порядка от математического ожидания случайной функции.

Теорема 2. *Корреляционная функция производной от случайной функции $X(t)$ равна второй смешанной производной от ее корреляционной функции:*

$$K_{\dot{x}}(t_1, t_2) = \frac{\partial^2 K_x(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2}.$$

Доказательство. По определению корреляционной функции,

$$K_{\dot{x}}(t_1, t_2) = M[\overset{\circ}{X}'(t_1)\overset{\circ}{X}'(t_2)].$$

Представим произведение производных как вторую смешанную частную производную:

$$\overset{\circ}{X}'(t_1)\overset{\circ}{X}'(t_2) = \frac{\partial^2[\overset{\circ}{X}(t_1)\overset{\circ}{X}(t_2)]}{\partial t_1 \partial t_2}.$$

Следовательно,

$$K_{\dot{x}}(t_1, t_2) = M\left\{\frac{\partial^2[\overset{\circ}{X}(t_1)\overset{\circ}{X}(t_2)]}{\partial t_1 \partial t_2}\right\}.$$

Изменив порядок операций нахождения математического ожидания и дифференцирования (на основании замечания 1), окончательно получим

$$K_{\dot{x}}(t_1, t_2) = \frac{\partial^2 M[\overset{\circ}{X}(t_1)\overset{\circ}{X}(t_2)]}{\partial t_1 \partial t_2} = \frac{\partial^2 K_x(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2}.$$

Итак,

$$K_{\dot{x}}(t_1, t_2) = \frac{\partial^2 K_x(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2}.$$

Пример 2. Зная корреляционную функцию $K_x(t_1, t_2) = 2t_1t_2 + t_1^2t_2^2$ *случайной функции* $X(t)$, *найти корреляционную функцию ее производной.*

Решение. Найдем частную производную от заданной корреляционной функции по t_1:

$$\frac{\partial K_x(t_1, t_2)}{\partial t_1} = \frac{\partial(2t_1t_2 + t_1^2t_2^2)}{\partial t_1} = 2t_2 + 2t_1t_2^2.$$

Найдем частную производную от полученного результата по t_2:

$$\frac{\partial^2 K_x(t_1, t_2)}{\partial t_1\,\partial t_2} = \frac{\partial(2t_2 + 2t_1t_2^2)}{\partial t_2} = 2 + 4t_1t_2.$$

Искомая корреляционная функция

$$K_{\dot x}(t_1, t_2) = 2 + 4t_1t_2.$$

Теорема 3. *Взаимная корреляционная функция случайной функции* $X(t)$ *и ее производной* $X'(t) = \dot x$ *равна частной производной от корреляционной функции по соответствующему аргументу* [*если индекс* $\dot x$ *при* R *записан на первом (втором) месте, то дифференцируют по первому (второму) аргументу*]:

а) $R_{x\dot x}(t_1t_2) = \dfrac{\partial K_x(t_1, t_2)}{\partial t_2}$,

б) $R_{\dot x x}(t_1, t_2) = \dfrac{\partial K_x(t_1, t_2)}{\partial t_1}$.

Доказательство.

а) По определению взаимной корреляционной функции двух функций $X(t)$ и $X'(t) = \dot x$,

$$R(t_1, t_2) = M[\overset{\circ}{X}(t_1)\,\overset{\circ}{X}'(t_2)] = M\left[\overset{\circ}{X}(t_1)\,\frac{d\overset{\circ}{X}(t_2)}{dt_2}\right] = M\left\{\frac{\partial[\overset{\circ}{X}(t_1)\,\overset{\circ}{X}(t_2)]}{\partial t_2}\right\}.$$

Изменим порядок операций дифференцирования и нахождения математического ожидания:

$$R_{x\dot x}(t_1, t_2) = \frac{\partial M[\overset{\circ}{X}(t_1)\,\overset{\circ}{X}(t_2)]}{\partial t_2} = \frac{\partial K_x(t_1, t_2)}{\partial t_2}.$$

Итак, искомая взаимная корреляционная функция

$$R_{x\dot x}(t_1t_2) = \frac{\partial K_x(t_1, t_2)}{\partial t_2}.$$

б) Доказывается аналогично.

Пример 3. Задана корреляционная функция $K_x(t_1, t_2) = t_1 t_2 e^{t_1+t_2}$ случайной функции $X(t)$. Найти взаимную корреляционную функцию $R_{x\dot{x}}(t_1, t_2)$.

Решение. Воспользуемся формулой

$$R_{x\dot{x}}(t_1, t_2) = \frac{\partial K_x(t_1, t_2)}{\partial t_2}.$$

Выполнив дифференцирование заданной корреляционной функции по t_2, получим

$$\frac{\partial K_x(t_1, t_2)}{\partial t_2} = t_1 e^{t_1+t_2}(t_2+1).$$

Итак, искомая взаимная корреляционная функция

$$R_{x\dot{x}}(t_1, t_2) = t_1 e^{t_1+t_2}(t_2+1).$$

§ 17. Интеграл от случайной функции и его характеристики

Интегралом от случайной функции $X(t)$ по отрезку $[0, t]$ называют предел в среднеквадратическом интегральной суммы при стремлении к нулю частичного интервала Δs_i максимальной длины (переменная интегрирования обозначена через s, чтобы отличить ее от предела интегрирования t):

$$Y(t) = \underset{\Delta s_i \to 0}{\text{l.i.m.}} \sum X(s_i)\Delta s_i = \int_0^t X(s)\,ds.$$

Пусть известны характеристики случайной функции. Как найти характеристики интеграла от случайной функции? Ответ на этот вопрос дают теоремы, приведенные ниже.

Теорема 1. *Математическое ожидание интеграла от случайной функции равно интегралу от ее математического ожидания:*
если

$$Y(t) = \int_0^t X(s)\,ds,$$

то

$$m_y(t) = \int_0^t m_x(s)\,ds.$$

Доказательство. По определению интеграла,

$$Y(t) = \underset{\Delta s_i \to 0}{\text{l.i.m.}} \sum X(s_i)\,\Delta s_i.$$

Приравняем математические ожидания обеих частей равенства:

$$M[Y(t)] = M\left[\underset{\Delta s_i \to 0}{\text{l.i.m.}} \sum X(s_i)\,\Delta s_i\right].$$

Изменим порядок нахождения математического ожидания и предела (законность изменения порядка этих операций примем без доказательства):

$$M[Y(t)] = \lim_{\Delta s_i \to 0} [M \sum X(s_i)\,\Delta s_i].$$

Воспользуемся теоремой сложения математических ожиданий:

$$M[Y(t)] = \lim_{\Delta s_i \to 0} \sum m_x(s_i)\,\Delta s_i.$$

Учитывая, что $\sum m_x(s_i)\,\Delta s_i$ — интегральная сумма функции $m_x(s)$, окончательно получим

$$m_y(t) = \int_0^t m_x(s)\,ds.$$

Замечание. По существу доказано, что *операции нахождения математического ожидания и среднеквадратичного интегрирования можно менять местами*. Действительно, запишем доказанную теорему так:

$$M\left[\int_0^t X(s)\,ds\right] = \int_0^t M[X(s)]\,ds.$$

Видим, что в левой части равенства сначала находят интеграл, а затем математическое ожидание; в правой части — наоборот.

Пример 1. Зная математическое ожидание $m_x(t) = 2t + 1$ случайной функции $X(t)$, найти математическое ожидание интеграла

$$Y(t) = \int_0^t X(s)\,ds.$$

Решение. Искомое математическое ожидание

$$m_y(t) = \int_0^t m_x(s)\,ds = \int_0^t (2s+1)\,ds = t^2 + t.$$

Теорема 2. *Корреляционная функция интеграла от случайной функции $X(t)$ равна двойному интегралу от ее корреляционной функции*:

если

$$Y(t)=\int\limits_0^t X(s)\,ds,$$

то

$$K_y(t_1,\ t_2)=\int\limits_0^{t_1}\int\limits_0^{t_2} K_x(s_1,\ s_2)\,ds_1\,ds_2.$$

Доказательство. По определению корреляционной функции,

$$K_y(t_1,\ t_2)=M\,[\overset{\circ}{Y}(t_1)\,\overset{\circ}{Y}(t_2)].$$

Центрированная случайная функция

$$\overset{\circ}{Y}(t)=Y(t)-m_y(t)=\int\limits_0^t X(s)\,ds-\int\limits_0^t m_x(s)\,ds=$$

$$=\int\limits_0^t [X(s)-m_x(s)]\,ds,$$

или

$$\overset{\circ}{Y}(t)=\int\limits_0^t \overset{\circ}{X}(s)\,ds. \qquad (*)$$

Поскольку под знаком определенного интеграла переменную интегрирования можно обозначать любой буквой, обозначим переменную интегрирования в одном интеграле через s_1, а в другом — через s_2 (чтобы отличить переменные интегрирования и пределы интегрирования):

$$\overset{\circ}{Y}(t_1)=\int\limits_0^{t_1}\overset{\circ}{X}(s_1)\,ds_1,\quad \overset{\circ}{Y}(t_2)=\int\limits_0^{t_2}\overset{\circ}{X}(s_2)\,ds_2.$$

Следовательно,

$$\overset{\circ}{Y}(t_1)\,\overset{\circ}{Y}(t_2)=\int\limits_0^{t_1}\overset{\circ}{X}(s_1)\,ds_1\int\limits_0^{t_2}\overset{\circ}{X}(s_2)\,ds_2=\int\limits_0^{t_1}\int\limits_0^{t_2}\overset{\circ}{X}(s_1)\,\overset{\circ}{X}(s_2)\,ds_1\,ds_2.$$

Приравняем математические ожидания обеих частей равенства:

$$M\,[\overset{\circ}{Y}(t_1)\,\overset{\circ}{Y}(t_2)]=M\left[\int\limits_0^{t_1}\int\limits_0^{t_2}\overset{\circ}{X}(s_1)\,\overset{\circ}{X}(s_2)\,ds_1\,ds_2\right].$$

Изменив порядок операций нахождения математического ожидания и интегрирования, окончательно получим

$$K_y(t_1, t_2) = \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} K_x(s_1, s_2)\, ds_1\, ds_2. \qquad (**)$$

Пример 2. Зная корреляционную функцию $K_x(t_1, t_2) = 4t_1t_2 + 9t_1^2t_2^2$ случайной функции $X(t)$, найти корреляционную функцию интеграла $Y(t) = \int_0^t X(s)\, ds$.

Решение. Используя формулу (**), найдем

$$K_y(t_1, t_2) = \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} (4s_1s_2 + 9s_1^2s_2^2)\, ds_1\, ds_2.$$

Выполнив интегрирование, получим искомую корреляционную функцию:

$$K_y(t_1, t_2) = t_1^2t_2^2(1 + t_1t_2).$$

Теорема 3. *Взаимная корреляционная функция случайной функции* $X(t)$ *и интеграла* $Y(t) = \int_0^t X(s)\, ds$ *равна интегралу от корреляционной функции случайной функции* $X(t)$:

а) $R_{xy}(t_1, t_2) = \int_0^{t_2} K_x(t_1, s)\, ds$;

б) $R_{yx}(t_1, t_2) = \int_0^{t_1} K_x(s, t_2)\, ds$.

Доказательство. а) По определению взаимной корреляционной функции,

$$R_{xy}(t_1, t_2) = M[\overset{\circ}{X}(t_1)\overset{\circ}{Y}(t_2)]. \qquad (***)$$

В силу соотношения (*) центрированная функция

$$\overset{\circ}{Y}(t) = \int_0^t \overset{\circ}{X}(s)\, ds,$$

следовательно,

$$\overset{\circ}{Y}(t_2) = \int_0^{t_2} \overset{\circ}{X}(s)\, ds.$$

Подставим правую часть этого равенства в (***):

$$R_{xy}(t_1, t_2) = M\left[\overset{\circ}{X}(t_1)\int\limits_0^{t_2}\overset{\circ}{X}(s)\,ds\right] = M\left[\int\limits_0^{t_2}\overset{\circ}{X}(t_1)\,\overset{\circ}{X}(s)\,ds\right].$$

Операции нахождения математического ожидания и интегрирования можно менять местами (см. § 17, замечание), поэтому

$$R_{xy}(t_1, t_2) = \int\limits_0^{t_2} M\,[\overset{\circ}{X}(t_1)\,\overset{\circ}{X}(s)]\,ds,$$

или окончательно

$$R_{xy}(t_1, t_2) = \int\limits_0^{t_2} K_x(t_1, s)\,ds.$$

б) Доказывается аналогично.

Пример 3. Задана корреляционная функция $K_x(t_1, t_2) = 3t_1t_2$ случайной функции $X(t)$. Найти взаимную корреляционную функцию $R_{xy}(t_1, t_2)$ случайной функции $X(t)$ и $Y(t) = \int\limits_0^t X(s)\,ds$.

Решение. Используя формулу

$$R_{xy}(t_1, t_2) = \int\limits_0^{t_2} K_x(t_1, s)\,ds,$$

получим искомую корреляционную функцию:

$$R_{xy}(t_1, t_2) = 3t_1\int\limits_0^{t_2} s\,ds = (3/2)\,t_1t_2^2.$$

§ 18. Комплексные случайные величины и их числовые характеристики

В дальнейшем кроме действительных рассматриваются и комплексные случайные функции. Эти функции и их характеристики определяют по аналогии с комплексными случайными величинами, поэтому начнем изложение с комплексных величин.

Комплексной случайной величиной называют величину $Z = X + Yi$, где X и Y — действительные случайные величины.

Сопряженной случайной величине $Z=X+Yi$ называют случайную величину $\overline{Z}=X-Yi$.

Обобщим определения математического ожидания и дисперсии на комплексные случайные величины так, чтобы, в частности, при $Y=0$ эти характеристики совпали с ранее введенными характеристиками действительных случайных величин, т. е. чтобы выполнялись требования:

$$m_z=m_x, \qquad (*)$$

$$D_z=D_x. \qquad (**)$$

Математическим ожиданием комплексной случайной величины $Z=X+Yi$ называют комплексное число

$$m_z=m_x+m_yi.$$

В частности, при $y=0$ получим $m_z=m_x$, т. е требование (*) выполняется.

Дисперсией комплексной случайной величины Z называют математическое ожидание квадрата модуля центрированной величины $\overset{\circ}{Z}$:

$$D_z=M\,[|\overset{\circ}{Z}|^2].$$

В частности, при $Y=0$ получим $D_z=M\,[(\overset{\circ}{X})^2]=D_x$, т. е. требование (**) выполняется.

Учитывая, что математическое ожидание суммы равно сумме математических ожиданий слагаемых, имеем

$$D_z=M\,[\,|\overset{\circ}{Z}|^2]=M\,[(\overset{\circ}{X})^2+(\overset{\circ}{Y})^2]=M\,[(\overset{\circ}{X})^2]+M\,[(\overset{\circ}{Y})^2]=$$
$$=D_x+D_y.$$

Итак, *дисперсия комплексной случайной величины равна сумме дисперсий ее действительной и мнимой частей*:

$$D_z=D_x+D_y.$$

Известно, что корреляционный момент двух равных случайных величин $X_1=X_2=X$ равен дисперсии D_x — положительному действительному числу. Обобщим определение корреляционного момента так, чтобы, в частности, корреляционный момент двух равных комплексных случайных величин $Z_1=Z_2=Z$ был равен дисперсии D_z — положительному действительному числу, т. е. чтобы выполнялось требование

$$\mu_{zz}=D_z. \qquad (***)$$

Корреляционным моментом двух комплексных случайных величин называют математическое ожидание произведения отклонения одной из величин на сопряженное отклонение другой:

$$\mu_{z_1 z_2} = M[(Z_1 - m_{z_1})\overline{(Z_2 - m_{z_2})}] = M[\mathring{Z}_1 \mathring{Z}_2].$$

В частности, при $Z_1 = Z_2 = Z$, учитывая, что произведение сопряженных комплексных чисел равно квадрату их модуля, получим

$$\mu_{zz} = M[\mathring{Z}\overline{\mathring{Z}}] = M[|\mathring{Z}|^2] = D_z,$$

т. е. требование (***) выполняется.

Корреляционный момент комплексных случайных величин $Z_1 = X_1 + Y_1 i$ и $Z_2 = X_2 + Y_2 i$ выражается через корреляционные моменты действительных и мнимых частей этих величин следующей формулой:

$$\mu_{z_1 z_2} = \mu_{x_1 y_1} + \mu_{x_2 y_2} + (\mu_{x_2 y_1} - \mu_{x_1 y_2})\, i. \qquad (****)$$

Рекомендуем вывести эту формулу самостоятельно.

§ 19. Комплексные случайные функции и их характеристики

Комплексной случайной функцией называют функцию

$$Z(t) = X(t) + Y(t)\, i,$$

где $X(t)$ и $Y(t)$ — действительные случайные функции действительного аргумента t.

Обобщим определения математического ожидания и дисперсии на комплексные случайные функции так, чтобы, в частности, при $Y = 0$ эти характеристики совпали с ранее введенными характеристиками для действительных случайных функций, т. е. чтобы выполнялись требования:

$$m_z(t) = m_x(t), \qquad (*)$$

$$D_z(t) = D_x(t). \qquad (**)$$

Математическим ожиданием комплексной случайной функции $Z(t) = X(t) + Y(t)\, i$ называют комплексную функцию (неслучайную)

$$m_z(t) = m_x(t) + m_y(t)\, i.$$

В частности, при $Y=0$ получим $m_z(t)=m_x(t)$, т. е. требование (*) выполняется.

Дисперсией комплексной случайной функции $Z(t)$ называют математическое ожидание квадрата модуля центрированной функции $\overset{\circ}{Z}(t)$:

$$D_z(t)=M[\,|\overset{\circ}{Z}(t)|^2].$$

В частности, при $Y=0$ получим $D_z(t)=M[\overset{\circ}{X}(t)]^2=D_x(t)$, т. е. требование (**) выполняется.

Учитывая, что математическое ожидание суммы равно сумме математических ожиданий слагаемых, имеем

$$D_z(t)=M[\,|\overset{\circ}{Z}(t)|^2]=M\{[\overset{\circ}{X}(t)]^2+[\overset{\circ}{Y}(t)]^2\}=$$
$$=M[\overset{\circ}{X}(t)]^2+M[\overset{\circ}{Y}(t)]^2=D_x(t)+D_y(t).$$

Итак, *дисперсия комплексной случайной функции равна сумме дисперсий ее действительной и мнимой частей:*

$$D_z(t)=D_x(t)+D_y(t).$$

Известно, что корреляционная функция действительной случайной функции $X(t)$ при разных значениях аргументов равна дисперсии $D_x(t)$. Обобщим определение корреляционной функции на комплексные случайные функции $Z(t)$ так, чтобы при равных значениях аргументов $t_1=t_2=t$ корреляционная функция $K_z(t,\ t)$ была равна дисперсии $D_z(t)$, т. е. чтобы выполнялось требование

$$K_z(t,\ t)=D_z(t). \qquad (***)$$

Корреляционной функцией комплексной случайной функции $Z(t)$ называют корреляционный момент сечений $\overset{\circ}{Z}(t_1)$ и $\overline{\overset{\circ}{Z}(t_2)}$:

$$K_z(t_1,\ t_2)=M[\overset{\circ}{Z}(t_1)\overline{\overset{\circ}{Z}(t_2)}].$$

В частности, при равных значениях аргументов

$$K_z(t,\ t)=M[\overset{\circ}{Z}(t)\overline{\overset{\circ}{Z}(t)}]=M[\,|\overset{\circ}{Z}|^2]=D_z(t),$$

т. е. требование (***) выполняется.

Если действительные случайные функции $X(t)$ и $Y(t)$ коррелированы, то

$$K_z(t_1,\ t_2)=K_x(t_1,\ t_2)+K_y(t_1,\ t_2)+[R_{xy}(t_2,\ t_1)-$$
$$-R_{xy}(t_1,\ t_2)]\,i;$$

если $X(t)$ и $Y(t)$ не коррелированы, то

$$K_z(t_1,\ t_2)=K_x(t_1,\ t_2)+K_y(t_1,\ t_2).$$

Рекомендуем убедиться в справедливости этих формул, используя соотношение (****) предыдущего параграфа.

Обобщим определение взаимной корреляционной функции на комплексные случайные функции $Z_1(t)=X_1(t)+Y_1(t)i$ и $Z_2(t)=X_2(t)+Y_2(t)i$ так, чтобы, в частности, при $Y_1=Y_2=0$ выполнялось требование

$$R_{z_1z_2}(t_1,\ t_2)=R_{x_1x_2}(t_1,\ t_2). \qquad (****)$$

Взаимной корреляционной функцией двух комплексных случайных функций называют функцию (неслучайную)

$$R_{z_1z_2}(t_1,\ t_2)=M\left[\overset{\circ}{Z}_1(t_1)\,\overline{\overset{\circ}{Z}_2(t_2)}\right].$$

В частности, при $Y_1=Y_2=0$ получим

$$R_{z_1z_2}(t_1,\ t_2)=M\left[\overset{\circ}{X}_1(t_1)\,\overline{\overset{\circ}{X}_2(t_2)}\right]=R_{x_1x_2}(t_1,\ t_2),$$

т. е. требование (****) выполняется.

Взаимная корреляционная функция двух комплексных случайных функций выражается через взаимные корреляционные функции их действительных и мнимых частей следующей формулой:

$$R_{z_1z_2}(t_1,\ t_2)=R_{x_1x_2}(t_1,\ t_2)+R_{y_1y_2}(t_1,\ t_2)+\\+[R_{x_2y_1}(t_2,\ t_1)-R_{x_1y_2}(t_1,\ t_2)]\,i.$$

Рекомендуем вывести эту формулу самостоятельно.

Задачи

1. Найти математическое ожидание случайных функций:

а) $X(t)=Ut^2$, где U — случайная величина, причем $M(U)=5$; б) $X(t)=U\cos 2t+Vt$, где U и V — случайные величины, причем $M(U)=3$, $M(V)=4$.

Отв. а) $m_x(t)=5t^2$; б) $m_x(t)=3\cos 2t+4t$.

2. Задана корреляционная функция $K_x(t_1,\ t_2)$ случайной функции $X(t)$. Найти корреляционные функции случайных функций а) $Y(t)=X(t)+t$; б) $Y(t)=(t+1)X(t)$; в) $Y(t)=4X(t)$.

Отв. а) $K_y(t_1,\ t_2)=K_x(t_1,\ t_2)$; б) $K_y(t_1,\ t_2)=(t_1+1)(t_2+1)\times\times K_x(t_1,\ t_2)$; в) $K_y(t_1,\ t_2)=16K_x(t_1,\ t_2)$.

3. Задана дисперсия $D_x(t)$ случайной функции $X(t)$. Найти дисперсию случайных функций: а) $Y(t)=X(t)+e^t$; б) $Y(t)=tX(t)$.

Отв. а) $D_y(t)=D_x(t)$; б) $D_y(t)=t^2D_x(t)$.

4. Найти: а) математическое ожидание; б) корреляционную функцию; в) дисперсию случайной функции $X(t)=U\sin 2t$, где U — случайная величина, причем $M(U)=3$, $D(U)=6$.

Отв. а) $m_x(t)=3\sin 2t$; б) $K_x(t_1, t_2)=6\sin 2t_1 \sin 2t_2$; в) $D_x(t)=6\sin^2 2t$.

5. Найти нормированную корреляционную функцию случайной функции $X(t)$, зная ее корреляционную функцию $K_x(t_1, t_2)=3\cos(t_2-t_1)$.

Отв. $\rho_x(t_1, t_2)=\cos(t_2-t_1)$.

6. Найти: а) взаимную корреляционную функцию; б) нормированную взаимную корреляционную функцию двух случайных функций $X(t)=(t+1)U$ и $Y(t)=(t^2+1)U$, где U — случайная величина, причем $D(U)=7$.

Отв. а) $R_{xy}(t_1, t_2)=7(t_1+1)\left(t_2^2+1\right)$; б) $\rho_{xy}(t_1, t_2)=1$.

7. Заданы случайные функции $X(t)=(t-1)U$ и $Y(t)=t^2U$, где U и V — некоррелированные случайные величины, причем $M(U)=2$, $M(V)=3$, $D(U)=4$, $D(V)=5$. Найти: а) математическое ожидание; б) корреляционную функцию; в) дисперсию суммы $Z(t)=X(t)+Y(t)$.

Указание. Убедиться, что взаимная корреляционная функция заданных случайных функций равна нулю и, следовательно, $X(t)$ и $Y(t)$ не коррелированы.

Отв. а) $m_z(t)=2(t-1)+3t^2$; б) $K_z(t_1, t_2)=4(t_1-1)(t_2-1)+6t_1^2t_2^2$; в) $D_z(t)=4(t-1)^2+6t^4$.

8. Задано математическое ожидание $m_x(t)=t^2+1$ случайной функции $X(t)$. Найти математическое ожидание ее производной.

Отв. $m_{\dot{x}}(t)=2t$.

9. Задано математическое ожидание $m_x(t)=t^2+3$ случайной функции $X(t)$. Найти математическое ожидание случайной функции $Y(t)=tX'(t)+t^3$.

Отв. $m_y(t)=t^2(t+2)$.

10. Задана корреляционная функция $K_x(t_1, t_2)=e^{-(t_2-t_1)^2}$ случайной функции $X(t)$. Найти корреляционную функцию ее производной.

Отв. $K_{\dot{x}}(t_1, t_2)=2e^{-(t_2-t_1)^2}[1-2(t_2-t_1)^2]$.

11. Задана корреляционная функция $K_x(t_1, t_2)=e^{-(t_2-t_1)^2}$ случайной функции $X(t)$. Найти взаимные корреляционные функции: а) $R_{x\dot{x}}(t_1, t_2)$; б) $R_{\dot{x}x}(t_1, t_2)$.

Отв. а) $R_{x\dot{x}}(t_1, t_2)=-2(t_2-t_1)e^{-(t_2-t_1)^2}$; б) $R_{\dot{x}x}(t_1, t_2)=2(t_2-t_1)e^{-(t_2-t_1)^2}$.

12. Задано математическое ожидание $m_x(t)=4t^3$ случайной функции $X(t)$. Найти математическое ожидание интеграла $Y(t)=\int\limits_0^t X(s)\,ds$.

Отв. $m_y(t)=t^4$.

13. Задана случайная функция $X(t)=U\cos^2 t$, где U — случайная величина, причем $M(U)=2$. Найти математическое ожидание случайной функции $Y(t)=(t^2+1)\int\limits_0^t X(s)\,ds$.

Отв. $m_y(t)=(t^2+1)[t+(\sin 2t)/2]$.

14. Задана корреляционная функция $K_x(t_1, t_2) = \cos\omega t_1 \cos\omega t_2$ случайной функции $X(t)$. Найти: а) корреляционную функцию; б) дисперсию интеграла $Y(t) = \int\limits_0^t X(s)\,ds$.

Отв. а) $K_y(t_1, t_2) = \dfrac{\sin\omega t_1 \sin\omega t_2}{\omega^2}$; б) $D_y(t) = (\sin^2\omega t)/\omega^2$.

15*. Задана случайная функция $X(t) = Ue^{3t}\cos 2t$, где U — случайная величина, причем $M(U) = 5$, $D(U) = 1$. Найти: а) математическое ожидание, б) корреляционную функцию, в) дисперсию интеграла $Y(t) = \int\limits_0^t X(s)\,ds$.

Отв. а) $m_x(t) = 5e^{3t}\cos 2t$;
б) $K_y(t_1, t_2) = (1/169)\,[e^{3t_1}(2\sin 2t_1 + 3\cos 2t_1) - 3]\,[e^{3t_2}(2\sin 2t_2 + {} + 3\cos 2t_2 - 3]$; в) $D_y(t) = (1/169)\,[e^{3t}(2\sin 2t + 3\cos 2t) - 3]^2$.

16. Задана корреляционная функция $K_x(t_1, t_2) = t_1 t_2^2$ случайной функции $X(t)$. Найти взаимные корреляционые функции: а) $R_{xy}(t_1, t_2)$; б) $R_{yx}(t_1, t_2)$ случайных функций $X(t)$ и $Y(t) = \int\limits_0^t X(s)\,ds$.

Отв. а) $R_{xy}(t_1, t_2) = t_1 t_2^3/3$; б) $R_{yx}(t_1, t_2) = t_1^2 t_2^2/2$.

Глава двадцать четвертая

СТАЦИОНАРНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ФУНКЦИИ

§ 1. Определение стационарной случайной функции

Среди случайных функций целесообразно выделить класс функций, математические ожидания которых сохраняют одно и то же постоянное значение при всех значениях аргумента t и корреляционные функции которых зависят только от разности аргументов $t_2 - t_1$. Ясно, что для таких функций начало отсчета аргумента может быть выбрано произвольно. Такие случайные функции называют «стационарными в широком смысле» в отличие от случайных функций, «стационарных в узком смысле» (все характеристики этих функций не зависят от самих значений аргументов, но зависят от их взаимного расположения на оси t).

Из стационарности в узком смысле следует стационарность в широком смысле; обратное утверждение неверно.

Поскольку мы ограничиваемся корреляционной теорией, которая использует только две характеристики (математическое ожидание и корреляционную функцию), далее рассмотрим случайные функции, стационарные в широком смысле, причем будем их называть просто стационарными.

Стационарной называют случайную функцию $X(t)$, *математическое ожидание которой постоянно при всех значениях аргумента* t и *корреляционная функция которой зависит только от разности аргументов* t_2-t_1. Из этого определения следует, что:

1) корреляционная функция стационарной случайной функции есть функция одного аргумента $\tau=t_2-t_1$, т. е.

$$K_x(t_1,\ t_2)=k_x(t_2-t_1)=k_x(\tau); \qquad (*)$$

2) дисперсия стационарной случайной функции постоянна при всех значениях аргумента t и равна значению ее корреляционной функции в начале координат ($\tau=0$), т. е.

$$D_x(t)=K_x(t,\ t)=k_x(t-t)=k_x(0). \qquad (**)$$

Пример. Задана случайная функция $X(t)=\cos(t+\varphi)$, где φ — случайная величина, распределенная равномерно в интервале $(0,\ 2\pi)$. Доказать, что $X(t)$ — стационарная случайная функция.

Решение. Найдем математическое ожидание:

$$m_x(t)=M[\cos(t+\varphi)]=M[\cos t\cos\varphi-\sin t\sin\varphi]=\cos tM(\cos\varphi)-$$
$$-\sin tM(\sin\varphi).$$

Используя формулы (**) из гл. XII, § 11 и (*) из гл. XI, § 6, получим:

$$M(\cos\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\cos\varphi\,d\varphi=0 \text{ и } M(\sin\varphi)=0.$$

Следовательно, $m_x(t)=0$.

Найдем корреляционную функцию, учитывая, что центрированная функция $\overset{\circ}{X}(t)=X(t)-m_x(t)=X(t)=\cos(t+\varphi)$:

$$K_x(t_1,\ t_2)=M[\overset{\circ}{X}(t_1)\overset{\circ}{X}(t_2)]=M[\cos(t_1+\varphi)\cos(t_2+\varphi)]=$$
$$=M\left[\frac{\cos(t_2-t_1)+\cos(t_2+t_1+2\varphi)}{2}\right]=\frac{\cos(t_2-t_1)}{2}.$$

(Легко убедиться, что $M[\cos(t_2+t_1+2\varphi)]=0$.)

Итак, математическое ожидание случайной функции $X(t)$ постоянно при всех значениях аргумента и ее корреляционная функция зависит только от разности аргументов. Следовательно, $X(t)$ — стационарная случайная функция.

Заметим, что, положив $t_1 = t_2 = t$ в корреляционной функции, найдем дисперсию $D_x(t) = K_x(t, t) = [\cos(t - t)]/2 = 1/2$. Таким образом, дисперсия сохраняет постоянное значение при всех значениях аргумента, как и должно быть для стационарной случайной функции.

§ 2. Свойства корреляционной функции стационарной случайной функции

Свойство 1. *Корреляционная функция стационарной случайной функции есть четная функция:*

$$k_x(\tau) = k_x(-\tau).$$

Доказательство. Корреляционная функция любой случайной функции при перестановке аргументов не изменяется (см. гл. XXIII, § 10, свойство 1). В частности, для стационарной функции

$$k_x(t_2 - t_1) = k_x(t_1 - t_2).$$

Положив $\tau = t_2 - t_1$, получим

$$k_x(\tau) = k_x(-\tau).$$

Свойство 2. *Абсолютная величина корреляционной функции стационарной случайной функции не превышает ее значения в начале координат:*

$$|k_x(\tau)| \leqslant k_x(0).$$

Доказательство. Для любой случайной функции (см. гл. XXIII, § 10, свойство 4)

$$|K_x(t_1, t_2)| \leqslant \sqrt{D_x(t_1) D_x(t_2)}.$$

В частности, для стационарной функции

$$K_x(t_1, t_2) = k_x(\tau) \text{ и } D_x(t_1) = D_x(t_2) = k_x(0).$$

Следовательно,

$$|k_x(\tau)| \leqslant \sqrt{k_x(0) k_x(0)} = k_x(0).$$

§ 3. Нормированная корреляционная функция стационарной случайной функции

Кроме корреляционной функции для оценки степени зависимости сечений стационарной случайной функции используют еще одну характеристику — нормированную корреляционную функцию.

Ранее нормированная корреляционная функция была определена так (см. гл. XXIII, § 11):

$$\rho_x(t_1, t_2) = \frac{K_x(t_1, t_2)}{\sigma_x(t_1)\,\sigma_x(t_2)}. \qquad (*)$$

В частности, для стационарной функции числитель и знаменатель этой дроби имеют вид (см. § 1, соотношения (*) и (**)) $K_x(t_1, t_2) = k_x(\tau)$, $\sigma_x(t) = \sqrt{D_x(t)} = \sqrt{k_x(0)}$. Следовательно, для стационарной функции правая часть (*) равна $k_x(\tau)/k_x(0)$ и является функцией одного аргумента τ; очевидно, и левая часть (*) — функция от τ.

Нормированной корреляционной функцией стационарной случайной функции называют неслучайную функцию аргумента τ:

$$\rho_x(\tau) = k_x(\tau)/k_x(0).$$

Абсолютная величина нормированной корреляционной функции стационарной случайной функции не превышает единицы. Справедливость этого свойства уже была доказана ранее для любой случайной функции (см. гл. XXIII, § 11). В учебных целях докажем его непосредственно для стационарной функции.

Приняв во внимание, что абсолютиая величина частного равна частному абсолютных величин, получим

$$|\rho_x(\tau)| = |k_x(\tau)/k_x(0)| = |k_x(\tau)|/|k_x(0)|.$$

Учитывая, что $|k_x(\tau)| \leqslant k_x(0)$ (см. § 2, свойство 2), окончательно имеем

$$|\rho_x(\tau)| \leqslant 1.$$

Замечание. При $\tau = 0$ нормированная корреляционная функция равна единице. Действнтельно,

$$\rho_x(0) = k_x(0)/k_x(0) = 1.$$

Пример. Задана корреляционная функция $k_x(\tau) = (1/2)\cos\tau$ стационарной случайной функции $X(t)$. Найти нормированную корреляционную функцию.

Решение. Воспользуемся определением нормированной корреляционной функции:

$$\rho_x(\tau) = \frac{k_x(\tau)}{k_x(0)} = \frac{(1/2)\cos\tau}{(1/2)\cos 0} = \cos\tau.$$

Итак, искомая нормированная корреляционная функция

$$\rho_x(\tau) = \cos\tau.$$

Заметим, что $\rho_x(0) = 1$, как и должно быть в соответствии с замечанием, приведенным в этом параграфе,

§ 4. Стационарно связанные случайные функции

Стационарно связанными называют две случайные функции $X(t)$ и $Y(t)$, если их взаимная корреляционная функция зависит только от разности аргументов $\tau = t_2 - t_1$:

$$R_{xy}(t_1, t_2) = r_{xy}(\tau).$$

Взаимная корреляционная функция стационарно связанных случайных функций обладает следующим свойством:

$$r_{xy}(\tau) = r_{yx}(-\tau).$$

Это равенство следует из свойства 1 взаимной корреляционной функции (при одновременной перестановке индексов и аргументов взаимная корреляционная функция не изменяется):

$$r_{xy}(t_2 - t_1) = r_{yx}(t_1 - t_2), \quad \text{или} \quad r_{xy}(\tau) = r_{yx}(-\tau).$$

Геометрически свойство можно истолковать так: график кривой $r_{yx}(-\tau)$ симметричен графику кривой $r_{xy}(\tau)$ относительно оси ординат.

Заметим, что если каждая из двух случайных функций стационарна, то отсюда еще нельзя заключить, что их взаимная корреляционная функция зависит только от разности аргументов.

Стационарными и стационарно связанными называют две стационарные случайные функции $X(t)$ и $Y(t)$, взаимная корреляционная функция которых зависит только от разности аргументов $\tau = t_2 - t_1$.

Пример. Заданы две стационарные случайные функции $X(t) = \cos(t + \varphi)$ и $Y(t) = \sin(t + \varphi)$, где φ — случайная величина, распределенная равномерно в интервале $(0, 2\pi)$. Доказать, что заданные стационарные функции стационарно связаны.

Решение. Ранее было найдено, что $m_x(t) = 0$ (см. § 1, пример); аналогично можно получить, что $m_y(t) = 0$. Запишем центрированные функции:

$$\overset{\circ}{X}(t) = X(t) - m_x(t) = X(t) = \cos(t + \varphi),$$

$$\overset{\circ}{Y}(t) = Y(t) - m_y(t) = Y(t) = \sin(t + \varphi).$$

Найдем взаимную корреляционную функцию:

$$R_{xy}(t_1, t_2) = M[\overset{\circ}{X}(t_1)\overset{\circ}{Y}(t_2)] = M[\cos(t_1 + \varphi)\sin(t_2 + \varphi)] =$$

$$= M\left[\frac{\sin(t_2 - t_1) + \sin(t_1 + t_2 + 2\varphi)}{2}\right] =$$

$$= \frac{\sin(t_2 - t_1)}{2} + M\left[\frac{\sin(t_1 + t_2 + 2\varphi)}{2}\right].$$

Легко убедиться, что математическое ожидание второго слагаемого равно нулю (см. § 1, пример), поэтому

$$R_{xy}(t_1, t_2) = (1/2)\sin(t_2 - t_1).$$

Итак, взаимная корреляционная функция заданных стационарных случайных функций зависит только от разности аргументов; следовательно, эти функции стационарно связаны.

§ 5. Корреляционная функция производной стационарной случайной функции

Теорема. *Корреляционная функция производной $X'(t) = \dot{x}$ дифференцируемой стационарной случайной функции $X(t)$ равна второй производной от ее корреляционной функции, взятой со знаком минус:*

$$k_{\dot{x}}(\tau) = -k''_x(\tau).$$

Доказательство. Известно, что корреляционная функция производной любой дифференцируемой случайной функции равна второй смешанной производной от ее корреляционной функции (см. гл. XXIII, § 16, теорема 2):

$$K_{\dot{x}}(t_1, t_2) = \frac{\partial^2 K_x(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2}.$$

По условию, $X(t)$ — стационарная функция, поэтому ее корреляционная функция зависит только от разности аргументов:

$$K_x(t_1, t_2) = k_x(\tau).$$

Из соотношения $\tau = t_2 - t_1$ следует, что

$$\frac{\partial\tau}{\partial t_1} = -1 \quad \text{и} \quad \frac{\partial\tau}{\partial t_2} = 1. \qquad (*)$$

Учитывая равенства (*), получим

$$K_{\dot{x}}(t_1, t_2) = \frac{\partial^2 k_x(\tau)}{\partial t_1 \partial t_2} = \frac{\partial}{\partial t_1}\left[\frac{\partial k_x(\tau)}{\partial t_2}\right] = \frac{\partial}{\partial t_1}\left[\frac{dk_x(\tau)}{d\tau}\frac{\partial\tau}{\partial t_2}\right] =$$

$$= \frac{d^2 k_x(\tau)}{d\tau^2}\frac{\partial\tau}{\partial t_1} = k''_x(\tau)\cdot(-1) = -k''_x(\tau).$$

Видим, что искомая корреляционная функция зависит только от τ, поэтому $K_{\dot{x}}(t_1, t_2) = k_{\dot{x}}(\tau)$.

Итак,

$$k_{\dot{x}}(\tau) = -k''_x(\tau).$$

Пример. Задана корреляционная функция $k_x(\tau)=2e^{-0,5\tau^2}$ стационарной случайной функции $X(t)$. Найти: а) корреляционную функцию; б) дисперсию производной $X'(t)=\dot{x}$.

Решение. а) Продифференцировав дважды заданную корреляционную функцию и изменив знак результата на противоположный, найдем искомую корреляционную функцию:

$$k_{\dot{x}}(\tau)=2e^{-0,5\tau^2}(1-\tau^2).$$

б) Положив $\tau=0$, получим искомую дисперсию:

$$D_{\dot{x}}=k_{\dot{x}}(0)=2.$$

§ 6. Взаимная корреляционная функция стационарной случайной функции и ее производной

Теорема. *Взаимная корреляционная функция дифференцируемой стационарной случайной функции $X(t)$ и ее производной $X'(t)=x$ равна первой производной от корреляционной функции $k_x(\tau)$, взятой со своим (противоположным) знаком, если индекс $\dot{x}$ стоит на втором (первом) по порядку месте:*

а) $r_{x\dot{x}}(\tau)=k'_x(\tau)$; б) $r_{\dot{x}x}(\tau)=-k'_x(\tau)$.

Предполагается, что $\tau=t_2-t_1$.

Доказательство. а) По определению взаимной корреляционной функции,

$$R_{x\dot{x}}(t_1, t_2)=M[\mathring{X}(t_1)\mathring{X}'(t_2)]=M\left\{\frac{\partial[\mathring{X}(t_1)\mathring{X}(t_2)]}{\partial t_2}\right\}.$$

Операции нахождения математического ожидания и дифференцирования можно переставить (см. гл. XXIII, § 16, замечание 1), поэтому

$$R_{x\dot{x}}(t_1, t_2)=\frac{\partial M[\mathring{X}(t_1)\mathring{X}(t_2)]}{\partial t_2}=\frac{\partial K_x(t_1, t_2)}{\partial t_2}.$$

Так как $X(t)$ — стационарная функция, то ее корреляционная функция зависит только от разности аргументов: $K_x(t_1, t_2)=k_x(\tau)$, где $\tau=t_2-t_1$ и, следовательно, $\frac{\partial\tau}{\partial t_2}=1$.

Таким образом,

$$R_{x\dot{x}}(t_1, t_2)=\frac{\partial k_x(\tau)}{\partial t_2}=\frac{dk_x(\tau)}{d\tau}\frac{\partial\tau}{\partial t_2}=k'_x(\tau)\cdot 1=k'_x(\tau).$$

Правая часть равенства зависит только от τ; следовательно, и левая часть есть функция от τ. Обозначив ее через $r_{x\dot{x}}(\tau)$, окончательно получим

$$r_{x\dot{x}}(\tau)=k'_x(\tau).$$

б) Доказывается аналогично.

Заметим, что поскольку взаимная корреляционная функция $r_{x\dot{x}}(\tau)$ зависит только от τ, то стационарная случайная функция и ее производная стационарно связаны (см. § 4).

Пример. Задана корреляционная функция $k_x(\tau)=e^{-|\tau|}(1+|\tau|)$ стационарной случайной функции $X(t)$. Найти взаимную корреляционную функцию $r_{x\dot{x}}(\tau)$ заданной случайной функции и ее производной.

Решение. Воспользуемся формулой

$$r_{x\dot{x}}(\tau)=k'_x(\tau).$$

а) Пусть $\tau\geqslant 0$. Тогда $|\tau|=\tau$, $k_x(\tau)=e^{-\tau}(1+\tau)$, $k'_x(\tau)=e^{-\tau}\times$ $\times 1-(1+\tau)e^{-\tau}=-\tau e^{-\tau}$. Таким образом, при $\tau\geqslant 0$

$$r_{x\dot{x}}(\tau)=-\tau e^{-\tau}.$$

б) Пусть $\tau<0$. Тогда $|\tau|=-\tau$, $k_x(\tau)=e^{\tau}(1-\tau)$, $k'_x(\tau)=-e^{\tau}+$ $+(1-\tau)e^{\tau}=-\tau e^{\tau}$. Таким образом, при $\tau<0$

$$r_{x\dot{x}}(\tau)=-\tau e^{\tau}.$$

Итак, искомая взаимная корреляционная функция

$$r_{x\dot{x}}(\tau)=\begin{cases}-\tau e^{-\tau} & \text{при } \tau\geqslant 0,\\ -\tau e^{\tau} & \text{при } \tau<0.\end{cases}$$

§ 7. Корреляционная функция интеграла от стационарной случайной функции

Теорема. *Корреляционная функция интеграла* $Y(t)=\int\limits_0^t X(s)\,ds$ *от стационарной случайной функции равна*

$$K_y(t_1,t_2)=\int\limits_0^{t_2}(t_2-\tau)k_x(\tau)\,d\tau-\int\limits_0^{t_2-t_1}(t_2-t_1-\tau)k_x(\tau)\,d\tau+$$
$$+\int\limits_0^{t_1}(t_1-\tau)k_x(\tau)\,d\tau. \qquad (*)$$

Доказательство. Известно, что корреляционная функция интеграла $Y(t)=\int\limits_0^t X(s)\,ds$ от случайной функции $X(t)$ равна двойному интегралу от ее корреляционной функции (см. гл. XXIII, § 17, теорема 2):

$$K_y(t_1,\ t_2)=\int\limits_0^{t_1}\int\limits_0^{t_2} K_x(s_1,\ s_2)\,ds_1\,ds_2.$$

Принимая во внимание, что корреляционная функция стационарной случайной функции зависит только от разности аргументов, т. е. $K_x(s_1,\ s_2)=k_x(s_2-s_1)$, получим

$$K_y(t_1,\ t_2)=\int\limits_0^{t_1}\int\limits_0^{t_2} k_x(s_2-s_1)\,ds_1\,ds_2.$$

Вычисление этого интеграла весьма громоздко, поэтому ограничимся указаниями: перейти к новым переменным $\tau=s_2-s_1$, $\xi=s_2+s_1$; начертить новую область интегрирования, ограниченную прямыми $\tau=\xi$, $\tau=-\xi$, $\tau=\xi-2t_1$, $\tau=-\xi+2t_2$, и выполннть интегрирование по ξ. Двойной интеграл по области $OABD$ можно вычислить как разность двойных интегралов по областям OAC и BDC. При интегрировании по области ODE переставить пределы интегрирования по τ и перейти к новой переменной $\tau'=-\tau$ (рис. 28).

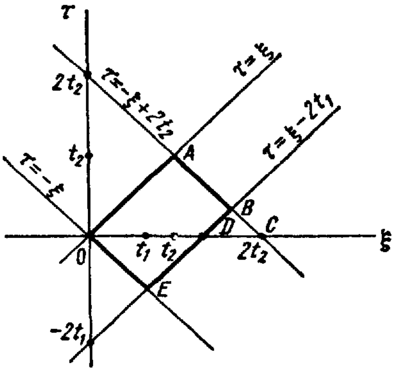

Рис. 28

Следствие. *Дисперсия интеграла* $Y(t)=\int\limits_0^t X(s)\,ds$ *от стационарной случайной функции равна*

$$D_y(t)=2\int\limits_0^t (t-\tau)\,k_x(\tau)\,d\tau. \qquad (**)$$

Действительно, положив $t_1 = t_2 = t$ в формуле (*), получим

$$K_y(t, t) = \int_0^t (t - \tau)\, k_x(\tau)\, d\tau - \int_0^0 (t - t - \tau)\, d\tau +$$

$$+ \int_0^t (t - \tau)\, k_x(\tau)\, d\tau.$$

После приведения подобных членов окончательно имеем

$$D_y(t) = 2 \int_0^t (t - \tau)\, k_x(\tau)\, d\tau.$$

Пример. Задана корреляционная функция $k_x(\tau) = 1/(1+\tau^2)$ стационарной случайной функции $X(t)$. Найти дисперсию интеграла $Y(t) = \int_0^t X(s)\, ds$.

Решение. Воспользуемся формулой (**):

$$D_y(t) = 2 \int_0^t (t - \tau)\, k_x(\tau)\, d\tau = 2 \int_0^t \frac{(t - \tau)\, d\tau}{1 + \tau^2} =$$

$$= 2t \int_0^t \frac{d\tau}{1 + \tau^2} - \int_0^t \frac{2\tau\, d\tau}{1 + \tau^2}.$$

Выполнив интегрирование, получим искомую дисперсию:

$$D_y(t) = 2t \operatorname{arctg} t - \ln (1 + t^2).$$

Заметим, что функция $Y(t)$ не стационарна, так как ее дисперсия не постоянна, а зависит от аргумента t.

§ 8. Определение характеристик эргодических стационарных случайных функций из опыта

Среди стационарных случайных функций можно выделить класс функций, оценка характеристик которых путем усреднения множества реализаций равносильна усреднению по времени только одной реализации достаточно большой длительности.

Стационарную случайную функцию $X(t)$ называют *эргодической*, если ее характеристики, найденные усреднением множества реализаций, совпадают с соответствующими характеристиками, полученными усреднением по времени одной реализации $x(t)$, которая наблюдалась на интервале $(0,\ T)$ достаточно большой длительности.

Достаточное условие эргодичности стационарной случайной функции $X(t)$ относительно математического ожидания состоит в том, что ее корреляционная функция $k_x(\tau)$ при $\tau \to \infty$ стремится к нулю:

$$\lim_{\tau \to \infty} k_x(\tau) = 0.$$

Достаточное условие эргодичности стационарной случайной функции $X(t)$ относительно корреляционной функции состоит в том, что корреляционная функция $k_y(\tau)$ при $\tau \to \infty$ стремится к нулю:

$$\lim_{\tau \to \infty} k_y(\tau) = 0,$$

где $Y(t,\ \tau) = \overset{\circ}{X}(t)\,\overset{\circ}{X}(t+\tau)$.

В качестве оценки математического ожидания эргодической стационарной случайной функции $X(t)$ по наблюдавшейся на интервале $(0,\ T)$ реализации $x(t)$ принимают среднее по времени ее значение:

$$m_x^* = \frac{1}{T} \int_0^T x(t)\,dt. \qquad (*)$$

Известно, что корреляционная функция стационарной случайной функции

$$k_x(\tau) = M\,[\overset{\circ}{X}(t)\,\overset{\circ}{X}(t+\tau)].$$

Таким образом, оценить $k_x(\tau)$ означает оценить математическое ожидание функции $\overset{\circ}{X}(t)\,\overset{\circ}{X}(t+\tau)$, поэтому можно воспользоваться соотношением (*), учитывая, что функция $\overset{\circ}{X}(t+\tau)$ определена при $t+\tau \leqslant T$ и, следовательно, $t \leqslant T-\tau$.

Итак, в качестве оценки корреляционной функции эргодической стационарной случайной функции принимают

$$k_x^*(\tau) = \frac{1}{T-\tau} \int_0^{T-\tau} \overset{\circ}{x}(t)\,\overset{\circ}{x}(t+\tau)\,dt \qquad (**)$$

либо, что равносильно,

$$k_x^*(\tau) = \frac{1}{T-\tau} \int_0^{T-\tau} x(t)\,x(t+\tau)\,dt - [m_x^*]^2. \qquad (***)$$

Практически интегралы вычисляют приближенно, например по формуле прямоугольников. С этой целью делят интервал $(0, T)$ на n частичных интервалов длиной $\Delta t = T/n$; в каждом частичном i-м интервале выбирают одну точку, например его середину t_i. В итоге оценка (*) принимает вид

$$m_x^* = \frac{1}{T}\left[x(t_1)\Delta t + x(t_2)\Delta t + \ldots + x(t_n)\Delta t\right] = \frac{\Delta t}{T}\sum_{i=1}^{n} x(t_i).$$

Учитывая, что $\Delta t = T/n$, окончательно получим

$$m_x^* = \left[\sum_{i=1}^{n} x(t_i)\right]\Big/ n.$$

Аналогично приближенно вычисляют интеграл (**), полагая, что τ принимает значения Δt, $2\Delta t$, ..., $(n-1)\Delta t$, или, что то же, T/n, $2T/n$, $3T/n$, ..., $(n-1)T/n$.

В итоге оценки корреляционной функции (**) и (***) принимают соответственно вид:

$$k_x^*\left(l\frac{T}{n}\right) = \frac{1}{n-l}\sum_{i=1}^{n-l} \overset{\circ}{x}(t_i)\,\overset{\circ}{x}(t_{i+l}),$$

$$k_x^*\left(l\frac{T}{n}\right) = \frac{1}{n-l}\sum_{i=1}^{n-l} x(t_i)\,x(t_{i+l}) - [m_x^*]^2,$$

где $l = 1, 2, \ldots, n-1$.

Замечание. Можно показать, что оценка (*) — несмещенная, т. е. $M[m_x^*] = m_x$; оценка (**) — асимптотически несмещенная, т. е.

$$\lim_{T \to \infty} M[k_x^*(\tau)] = k_x(\tau).$$

Задачи

1. Является ли стационарной случайная функция $X(t) = t^3 U$, где U — случайная величина, причем: а) $m_u \neq 0$, б) $m_u = 0$?

Отв. а) Нет: $m_x(t) \neq \text{const}$; б) Нет: корреляционная функция зависит не от разности аргументов, а от каждого из них.

2. Стационарна ли случайная функция $X(t) = \sin(t + \varphi)$, где φ — случайная величина, распределенная равномерно в интервале $(0, 2\pi)$?

Отв. Да: $m_x(t) = 0 = \text{const}$, $K_x(t_1, t_2) = 0{,}5\cos(t_2 - t_1)$.

3. Известно, что если φ — случайная величина, распределенная равномерно в интервале $(0, 2\pi)$, то случайная функция $X(t) = \sin(t + \varphi)$ — стационарная. Можно ли отсюда непосредственно заключить, что случайная функция $Y(t) = \cos(t + \varphi)$ также стационарна?

Отв. Можно: изменив начало отсчета аргумента, например на $\pi/2$, стационарной функции $X(t)$, получим функцию $Y(t)$.

4. Задана случайная функция $X(t)=t+U\sin t+V\cos t$, где U и V — случайные величины, причем $M(U)=M(V)=0$, $D(U)=D(V)=5$, $M(UV)=0$. Доказать, что: а) $X(t)$ — нестационарная функция; б) $X(t)$ — стационарная функция.

Отв. а) $m_x(t)\neq\text{const}$; б) $m_{\dot{x}}(t)=\text{const}$, $K_x(t_1, t_2)=5\cos(t_2-t_1)$.

5. Известна корреляционная функция $k_x(\tau)=3e^{-2\tau^2}$ стационарной случайной функции $X(t)$. Найти корреляционную функцию случайной функции $Y(t)=5X(t)$.

Отв. $k_y(\tau)=75e^{-2\tau^2}$.

6. Задана корреляционная функция $k_x(\tau)=2e^{-2\tau^2}$ стационарной случайной функции $X(t)$. Найти нормированную корреляционную функцию.

Отв. $\rho_x(\tau)=e^{-\tau^2}$.

7. Заданы две стационарные случайные функции $X(t)=\cos(2t+\varphi)$ и $Y(t)=\sin(2t+\varphi)$, где φ — случайная величина, распределенная равномерно в интервале $(0, 2\pi)$. Доказать, что заданные функции стационарно связаны.

Отв. $R_{xy}(t_1, t_2)=0{,}5\sin 2(t_2-t_1)$.

8. Задана корреляционная функция $k_x(\tau)=6e^{-0{,}2\tau^2}$ стационарной случайной функции $X(t)$. Найти: а) корреляционную функцию; б) дисперсию производной $X'(t)=\overset{\circ}{x}$.

Отв. а) $k_{\dot{x}}(\tau)=0{,}24e^{-0{,}2\tau^2}(1-0{,}4\tau^2)$; б) $D_{\dot{x}}=0{,}24$.

9. Задана корреляционная функция $k_x(\tau)=e^{-\tau^2}$ стационарной случайной функции $X(t)$. Найти взаимные корреляционные функции случайной функции $X(t)$ и ее производной.

Отв. $r_{x\dot{x}}(\tau)=-2\tau e^{-\tau^2}$; $r_{\dot{x}x}(\tau)=2\tau e^{-\tau^2}$.

10. Задана корреляционная функция $k_x(\tau)=e^{-|\tau|}$ стационарной случайной функции $X(t)$. Найти дисперсию интеграла $Y(t)=\int\limits_0^t X(s)\,ds$.

Отв. $D_y(t)=2(t+e^{-t}-1)$.

Глава двадцать пятая

ЭЛЕМЕНТЫ СПЕКТРАЛЬНОЙ ТЕОРИИ СТАЦИОНАРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ФУНКЦИЙ

§ 1. Представление стационарной случайной функции в виде гармонических колебаний со случайными амплитудами и случайными фазами

В этой главе вводится новая характеристика стационарной случайной функции — *спектральная плотность*, которая упрощает теоретические и практические расчеты. В частности, используя ее, можно найти характеристики выходной функции стационарной линейной динамической системы по известным характеристикам входной функции (см. § 8).

Далее будет показано, что стационарную случайную функцию, вообще говоря, можно представить в виде гармонических колебаний со случайными амплитудами и случайными фазами.

1. Рассмотрим случайную функцию вида

$$Z(t) = U\cos\omega t + V\sin\omega t, \qquad (*)$$

где ω — постоянное действительное число; U и V — некоррелированные случайные величины с математическими ожиданиями, равными нулю, и одинаковыми дисперсиями: $m_u = m_v = 0$, $D_u = D_v = D$.

Преобразуем правую часть соотношения (*):

$$Z(t) = V\left(\frac{U}{V}\cos\omega t + \sin\omega t\right).$$

Положив $U/V = \operatorname{tg}\varphi$ и выполнив элементарные выкладки, получим

$$Z(t) = \sqrt{U^2 + V^2}\sin(\omega t + \varphi),$$

где $\varphi = \operatorname{arctg}(U/V)$.

Отсюда следует, что случайную функцию $Z(t) = U\cos\omega t + V\sin\omega t$ можно истолковать как гармоническое колебание со **случайной амплитудой** $\sqrt{U^2+V^2}$, **случайной фазой** $\omega t + \operatorname{arctg}(U/V)$ и частотой ω.

Заметим, что, по допущению, $m_u = m_v = 0$, поэтому U и V — центрированные случайные величины: $\overset{\circ}{U} = U$ и $\overset{\circ}{V} = V$.

Легко убедиться, что $m_z(t) = 0$. Следовательно, $Z(t)$ — центрированная случайная функция:

$$\overset{\circ}{Z}(t) = Z(t).$$

Покажем, что $Z(t) = U\cos\omega t + V\sin\omega t$ — стационарная случайная функция. Действительно, математическое ожидание $m_z(t) = 0$, т. е. постоянно при всех значениях аргумента. Найдем корреляционную функцию, приняв во внимание, что $\overset{\circ}{Z}(t) = Z(t)$:

$$K_z(t_1, t_2) = M[\overset{\circ}{Z}(t_1)\overset{\circ}{Z}(t_2)] = M[Z(t_1)Z(t_2)] =$$
$$= M[(U\cos\omega t_1 + V\sin\omega t_1)(U\cos\omega t_2 + V\sin\omega t_2)].$$

Выполнив элементарные выкладки*), получим

$$K_z(t_1, t_2) = D\cos(t_2 - t_1).$$

Итак, корреляционная функция случайной функции $Z(t)$ зависит только от разности аргументов, а ее математическое ожидание постоянно. Следовательно, $Z(t)$ — стационарная случайная функция, что и требовалось доказать.

2. Рассмотрим теперь случайную функцию $X(t)$, которая является суммой конечного числа слагаемых вида (*):

$$X(t) = \sum_{i=1}^{n} [U_i \cos\omega_i t + V_i \sin\omega_i t], \qquad (**)$$

где случайные величины U_1 и V_i не коррелированы, их математические ожидания равны нулю и дисперсии величин с одинаковыми индексами равны между собой: $D(U_i) = D(V_i) = D$.

Заметим, что $X(t)$ — центрированная функция, т. е. $X(t) = \overset{\circ}{X}(t)$. Действительно, математическое ожидание каждого слагаемого суммы (**) равно нулю; следовательно, математическое ожидание $m_x(t)$ этой суммы также равно нулю и, значит,

$$\overset{\circ}{X}(t) = X(t) - m_x(t) = X(t).$$

Докажем, что функция $X(t)$ вида (**) — стационарная. Действительно, математическое ожидание $m_x(t) = 0$ при всех значениях аргумента, т. е. постоянно. Кроме того, слагаемые суммы (**) попарно не коррелированы (см. далее пояснение), поэтому корреляционная функция этой суммы равна сумме корреляционных функций слагаемых (см. гл. XXIII, § 15, следствие 1 из теоремы 2). В п. 1 доказано, что корреляционная функция каждого слагаемого (**) зависит только от разности аргументов $t_2 - t_1$. Следовательно, корреляционная функция суммы (**) также зависит только от разности аргументов:

$$K_x(t_1, t_2) = \sum_{i=1}^{n} D_i \cos\omega_i (t_2 - t)_1,$$

---

*) При выкладках следует учесть, что, по условию, $M(\overset{\circ}{U}{}^2) = M(\overset{\circ}{V}{}^2) = D$, а так как $\overset{\circ}{U} = U$, $\overset{\circ}{V} = V$, то $M(U^2) = M(V^2) = D$. Случайные величины U и V не коррелированы, поэтому их корреляционный момент $\mu_{uv} = M(\overset{\circ}{U}\overset{\circ}{V}) = M(UV) = 0$.

или

$$k_x(\tau)=\sum_{i=1}^{n} D_i \cos\omega_i\tau, \qquad (***)$$

где $\tau = t_2 - t_1$.

Таким образом, случайная функция $X(t)$ вида (**) есть стационарная функция (разумеется, должны выполняться условия, указанные в п. 2).

Принимая во внимание, что (см. п. 1)

$$X_i(t)=\sqrt{U_i^2+V_i^2}\sin(\omega_i t+\varphi_i),$$

где $\varphi_i = \operatorname{arctg}(U_i/V_i)$, заключаем, что сумму (**) можно записать в виде

$$X(t)=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{U_i^2+V_i^2}\sin(\omega_i t+\varphi_i).$$

Итак, *если случайная функция $X(t)$ может быть представлена в виде суммы гармоник различных частот со случайными амплитудами и случайными фазами*, то $X(t)$ — *стационарная функция.*

Спектральным разложением стационарной случайной функции называют представление этой функции в виде суммы гармонических колебаний различных частот со случайными амплитудами и случайными фазами.

Пояснение. Покажем, что слагаемые суммы (**) попарно не коррелированы. Для простоты, не теряя общности доказательства, ограничимся двумя слагаемыми:

$$X_1(t)=U_1\cos\omega_1 t+V_1\sin\omega_1 t \quad \text{и}$$
$$X_2(t)=U_2\cos\omega_2 t+V_2\sin\omega_2 t.$$

Убедимся, что их взаимная корреляционная функция равна нулю и, следовательно, они не коррелированы (см. гл. XXIII, § 12):

$$R_{x_1x_2}(t_1, t_2)=M[\overset{\circ}{X}_1(t_1)\overset{\circ}{X}_2(t_2)]=M[X_1(t_1)X_2(t_2)]=$$
$$=M[(U_1\cos\omega_1t_1+V_1\sin\omega_1t_1)(U_2\cos\omega_2t_2+V_2\sin\omega_2t_2)].$$

Выполнив умножение и вынеся неслучайные множители за знак математического ожидания, найдем

$$R_{x_1x_2}(t_1, t_2)=\cos\omega_1t_1\cos\omega_2t_2M(U_1U_2)+$$
$$+\sin\omega_1t_1\cos\omega_2t_2M(U_2V_1)+\sin\omega_2t_2\cos\omega_1t_1M(U_1V_2)+$$
$$+\sin\omega_1t_1\sin\omega_2t_2M(V_1V_2).$$

Случайные величины U_1, U_2, V_1, V_2 попарно не коррелированы, поэтому их корреляционные моменты равны нулю; отсюда следует, что все математические ожидания парных произведений этих величин равны нулю. Например, корреляционный момент величин U_1 и U_2 равен нулю: $\mu_{u_1u_2} = M(\overset{\circ}{U}_1\overset{\circ}{U}_2) = 0$; так как эти величины центрированные (см. п. 1), то $M(U_1U_2) = 0$.

Итак, взаимная корреляционная функция $R_{x_1x_2}(t_1, t_2) = 0$, что и требовалось доказать.

§ 2. Дискретный спектр стационарной случайной функции

А. Частоты — произвольные числа, количество их конечно. Пусть стационарная случайная функция $X(t)$ может быть представлена в виде спектрального разложения

$$X(t) = \sum_{i=1}^{n} X_i(t) = \sum_{i=1}^{n} [U_i \cos\omega_i t + V_i \sin\omega_i t], \qquad (*)$$

причем сохраняются допущения, указанные в начале п. 2 (см. § 1). Найдем дисперсию одной гармоники $X_i(t)$, учитывая, что случайные величины U_i и V_i не коррелированы и дисперсии величин с одинаковыми индексами равны между собой: $D(U_i) = D(V_i) = D_i$:

$$D[X_i(t)] = D[U_i \cos\omega_i t + V_i \sin\omega_i t] = D[U_i \cos\omega_i t] + D[V_i \sin\omega_i t] = \cos^2\omega_i t D(U_i) + \sin^2\omega_i t\, D(V_i) = (\cos^2\omega_i t + \sin^2\omega_i t) D_i = D_i.$$

Итак,

$$D[X_i(t)] = D_i. \qquad (**)$$

Таким образом, дисперсия i-й гармоники спектрального разложения (*) равна дисперсии случайной величины U_i, или, что то же, дисперсии случайной величины V_i.

Найдем теперь дисперсию стационарной случайной функции $X(t)$, приняв во внимание, что слагаемые $X_i(t)$ не коррелированы (см. § 1) и поэтому дисперсия их суммы равна сумме дисперсий слагаемых (см. гл. XXIII, § 15, замечание 2):

$$D[X(t)] = D\left[\sum_{i=1}^{n} X_i(t)\right] = \sum_{i=1}^{n} D[X_i(t)].$$

Используя (**), окончательно получим

$$D[X(t)] = \sum_{i=1}^{n} D_i.$$

Итак, дисперсия стационарной случайной функции, которая может быть представлена в виде суммы конечного числа гармоник с произвольными частотами, равна сумме дисперсий составляющих ее гармоник.

Дискретным спектром стационарной случайной функции $X(t)$ вида (*) называют совокупность дисперсий всех составляющих ее гармоник.

Заметим, что поскольку каждой частоте ω_i можно поставить в соответствие дисперсию D_i, то спектр можно изобразить графически: на горизонтальной оси откладывают частоты ω_i, а в качестве соответствующих ординат (их называют *спектральными линиями*) строят дисперсии D_i. Этот дискретный спектр называют *линейчатым*.

Пример. Построить дискретный спектр стационарной случайной функции

$$X(t) = [U_1 \cos 2t + V_1 \sin 2t] + [U_2 \cos 3t + V_2 \sin 3t] + \\ + [U_3 \cos 4t + V_3 \sin 4t],$$

если случайные величины U_1, U_2, U_3; V_1, V_2, V_3 не коррелированы, их математические ожидания равны нулю и заданы дисперсии: $D(U_1) = D(V_1) = 5$, $D(U_2) = D(V_2) = 6$, $D(U_3) = D(V_3) = 4$.

Решение. Отложив на горизонтальной оси частоты $\omega_1 = 2$, $\omega_2 = 3$, $\omega_3 = 4$, а на вертикальной оси — соответствующие им ординаты $D_1 = 5$, $D_2 = 6$, $D_3 = 4$, получим график искомого спектра.

Б. Равноотстоящие частоты, множество их бесконечное (счетное). В предыдущем пункте предполагалось, что число частот в спектральном разложении (*) конечно, а сами частоты — произвольные числа. Теперь рассмотрим спектральное разложение вида

$$X(t) = \sum_{i=1}^{\infty} [U_i \cos \omega_i t + V_i \sin \omega_i t],$$

в котором число частот бесконечно (счетно), они равноотстоящие, причем разность любых двух «соседних» частот

$$\Delta\omega = \omega_{i+1} - \omega_i = \pi/T \quad (i = 1, 2, \ldots),$$

где T — действительное положительное число.

Таким образом,

$$\omega_1 = \frac{\pi}{T}, \quad \omega_2 = \frac{2\pi}{T}, \quad \ldots, \quad \omega_i = \frac{\pi i}{T}, \quad \ldots$$

Напишем корреляционную функцию [см. § 1, формула (***)] рассматриваемой стационарной случайной функции $X(t)$, положив $\omega_i = \pi i/T$, $n = \infty$:

$$k_x(\tau) = \sum_{i=1}^{\infty} D_i \cos \frac{\pi i}{T} \tau. \qquad (*)$$

При $\tau = 0$, учитывая, что $k_x(0) = D_x$, получим

$$D_x = \sum_{i=1}^{\infty} D_i. \qquad (**)$$

Итак, дисперсия стационарной случайной функции, которая может быть представлена в виде суммы бесконечного (счетного) множества гармоник с равноотстоящими частотами, равна сумме дисперсий слагаемых гармоник (если сумма существует, т. е. ряд (**) сходится).

Заметим, что соотношение (*) можно рассматривать как разложение корреляционной функции в ряд Фурье по косинусам. Из (*) видно, что $k_x(\tau)$ — периодическая функция с периодом $2T$, поэтому коэффициенты Фурье

$$D_i = \frac{1}{T} \int_{-T}^{T} k_x(\tau) \cos \frac{\pi i}{T} \tau \, d\tau,$$

или, учитывая, что $\omega_i = \pi i/T$ и подынтегральная функция — четная,

$$D_i = \frac{2}{T} \int_{0}^{T} k_x(\tau) \cos \omega_i \tau \, d\tau.$$

Если каждой частоте $\omega_i = \pi i/T$ $(i = 1, 2, \ldots)$ ставить в соответствие дисперсию D_i, то получим, как и в случае конечного числа произвольных частот, дискретный линейчатый спектр, причем число спектральных линий (ординат D_i) бесконечно (счетно) и они равноотстоящие (соседние спектральные линии находятся одна от другой на одном и том же расстоянии $\Delta\omega = \pi/T$).

§ 3. Непрерывный спектр стационарной случайной функции. Спектральная плотность

Среди стационарных случайных функций есть такие функции, корреляционные функции которых нельзя представить в виде

$$k_x(\tau) = \sum D_i \cos \omega_i \tau \quad (D_i > 0),$$

где число слагаемых конечно или счетно. Спектр этих функций не дискретный, а непрерывный. Для рассмотрения стационарных случайных функций с непрерывным спектром необходимо ввести понятие спектральной плотности.

Выше, когда частоты гармоник спектрального разложения стационарной случайной функции были дискретными и равноотстоящими, был получен дискретный линейчатый спектр, причем соседние частоты отличались на величину $\Delta\omega=\pi/T$. Пусть $T\longrightarrow\infty$, тогда $\Delta\omega\longrightarrow 0$. Ясно, что при этом частота изменяется непрерывно (поэтому обозначим ее через ω без индекса), соседние ординаты спектра сближаются и в пределе вместо дискретного спектра мы получим непрерывный спектр, т. е. каждой частоте $\omega\,(\omega\geqslant 0)$ соответствует ордината, которую обозначим через $s_x^*(\omega)$.

Хотя отрицательные частоты физического смысла не имеют, для упрощения вычислений целесообразно считать, что частоты изменяются в интервале $(-\infty, \infty)$, и вместо функции $s_x^*(\omega)$ рассматривать функцию, которая имеет вдвое меньшие ординаты:

$$s_x(\omega)=s_x^*(\omega)/2.$$

Спектральной плотностью стационарной случайной функции $X(t)$ называют функцию $s_x(\omega)$, которая связана с корреляционной функцией $k_x(\tau)$ взаимно обратными преобразованиями Фурье:

$$s_x(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} k_x(\tau)\,e^{-i\omega\tau}\,d\tau, \tag{$*$}$$

$$k_x(\tau)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} s_x(\omega)\,e^{i\omega t}\,d\omega. \tag{$**$}$$

Эти формулы называют формулами Винера—Хинчина. В действительной форме они представляют собой взаимно обратные косинус-преобразования Фурье:

$$s_x(\omega)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty} k_x(\tau)\cos\omega\tau\,d\tau, \tag{$***$}$$

$$k_x(\tau)=2\int\limits_{0}^{\infty} s_x(\omega)\cos\omega\tau\,d\omega. \tag{$****$}$$

Важное значение спектральной плотности состоит в том, что, зная ее, можно найти корреляционную функцию, и обратно (в этом смысле спектральная плотность и корреляционная функция эквивалентны); кроме того, как уже было указано, использование спектральной плотности в ряде случаев значительно упрощает теоретические и практические расчеты.

Подчеркнем, что, как следует из формулы (***), спектральная плотность—четная функция:

$$s_x(-\omega) = s_x(\omega).$$

Выясним вероятностный смысл функции $s_x(\omega)$. Положив $\tau = 0$ в соотношении (****) и учитывая, что $k_x(0) = D_x$, $s_x(\omega)$—четная функция, получим

$$D_x = 2\int\limits_0^{\infty} s_x(\omega)\,d\omega = \int\limits_{-\infty}^{\infty} s_x(\omega)\,d\omega.$$

Видим, что дисперсия стационарной случайной функции $X(t)$ представляет собой «сумму» элементарных дисперсий $s_x(\omega)\,d\omega = s_x(\omega)\,\Delta\omega$; каждая элементарная дисперсия соответствует частичному интервалу частот $\Delta\omega$. В частности, частичному интервалу $\Delta\omega = \omega_b - \omega_a$ соответствует дисперсия

$$D_x = \int\limits_{\omega_a}^{\omega_b} s_x(\omega)\,d\omega.$$

По теореме о среднем,

$$D_x = (\omega_b - \omega_a)\,s_x(\omega_c) = \Delta\omega s_x(\omega_c),$$

где $\omega_a < \omega_c < \omega_b$.

Отсюда

$$s_x(\omega_c) = D_x/\Delta\omega.$$

Из этой формулы заключаем:

а) величину $s_x(\omega_c)$ можно истолковать как среднюю плотность дисперсии на частичном интервале $\Delta\omega$, содержащем частоту ω_c;

б) при $\Delta\omega \to 0$ естественно считать, что $s_x(\omega_c)$—плотность дисперсии в точке ω_c. Поскольку никаких ограничений на частоту ω_c наложено не было, полученный результат справедлив для любой частоты.

Итак, *спектральная плотность описывает распределение дисперсий стационарной случайной функции по непрерывно изменяющейся частоте.*

Из вероятностного смысла спектральной функции следует, что спектральная плотность — неотрицательная функция $s_x(\omega) \geqslant 0$.

Пример 1. Найти спектральную плотность стационарной случайной функции $X(t)$, зная ее корреляционную функцию

$$k_x(\tau) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2}|\tau| & \text{при} \quad |\tau| \leqslant 2, \\ 0 & \text{при} \quad |\tau| > 2. \end{cases}$$

Решение. Используя формулу

$$s_x(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty k_x(\tau) \cos \omega\tau \, d\tau$$

и учитывая, что $|\tau| = \tau$ в интервале $(0, 2)$, имеем

$$s_x(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^2 \left(1 - \frac{1}{2}\tau\right) \cos \omega\tau \, d\tau.$$

Интегрируя по частям, окончательно получим искомую спектральную плотность:

$$s_x(\omega) = \sin^2 \omega / (\pi\omega^2).$$

Пример 2. Найти спектральную плотность стационарной случайной функции $X(t)$, зная ее корреляционную функцию $k_x(\tau) = De^{-\alpha|\tau|}$, $\alpha > 0$.

Решение. Используем формулу

$$s_x(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty k_x(\tau) e^{-i\omega\tau} \, d\tau.$$

Учитывая, что $|\tau| = -\tau$ при $\tau < 0$, $|\tau| = \tau$ при $\tau \geqslant 0$, получим

$$k_x(\tau) = De^{\alpha\tau} \text{ при } \tau < 0, \quad k_x(\tau) = De^{-\alpha\tau} \text{ при } \tau \geqslant 0.$$

Следовательно,

$$s_x(\omega) = \frac{D}{2\pi}\left[\int_{-\infty}^0 e^{\alpha\tau} e^{-i\omega\tau} d\tau + \int_0^\infty e^{-\alpha\tau} e^{-i\omega\tau} d\tau\right] =$$

$$= \frac{D}{2\pi}\left[\int_\infty^0 e^{(\alpha - i\omega)\tau} d\tau + \int_0^\infty e^{-(\alpha + i\omega)\tau} d\tau\right].$$

Выполнив интегрирование, найдем искомую спектральную плотность:

$$s_x(\omega) = \frac{D\alpha}{\pi(\alpha^2 + \omega^2)}.$$

Пример 3. Найти корреляционную функцию стационарной случайной функции $X(t)$, зная ее спектральную плотность

$$s_x(\omega)=\begin{cases} s_0 & \text{в интервале } -\omega_0 \leqslant \omega \leqslant \omega_0, \\ 0 & \text{вне этого интервала.}\end{cases}$$

Решение. Используя формулу

$$k_x(\tau)=2\int\limits_0^\infty s_x(\omega)\cos\omega\tau\, d\tau$$

и учитывая, что $s_x(\omega)=\omega_0$ в интервале $(0, \omega_0)$, имеем

$$k_x(\tau)=2s_0\int\limits_0^{\omega_0}\cos\omega\tau\, d\tau.$$

Выполнив интегрирование, получим искомую корреляционную функцию:

$$k_x(\tau)=2s_0\sin\omega_0\tau/\tau.$$

§ 4. Нормированная спектральная плотность

Наряду со спектральной плотностью часто используют нормированную спектральную плотность.

Нормированной спектральной плотностью стационарной случайной функции $X(t)$ называют отношение спектральной плотности к дисперсии случайной функции:

$$s_{x\,\text{норм}}(\omega)=s_x(\omega)/D_x=s_x(\omega)\Big/\int\limits_{-\infty}^{\infty}s_x(\omega)\,d\omega.$$

Пример. Задана спектральная плотность $s_x(\omega)=5/(\pi(1+\omega^2))$ стационарной случайной функции $X(t)$. Найти нормированную спектральную плотность.

Решение. Найдем дисперсию:

$$D_x=\int\limits_{-\infty}^{\infty}s_x(\omega)\,d\omega=\frac{5}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega}{1+\omega^2}=\frac{5}{\pi}\cdot\pi=5.$$

Найдем искомую нормированную спектральную плотность, для чего разделим заданную спектральную плотность на дисперсию $D_x=5$; в итоге получим

$$s_{x\,\text{норм}}(\omega)=1/(\pi(1+\omega^2)).$$

Нормированная спектральная плотность представима в виде косинус-преобразования Фурье нормированной корреляционной функции:

$$s_{x\,\text{норм}}(\omega)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \rho_x(\tau)\cos\omega\tau\, d\tau.$$

Действительно, чтобы получить эту формулу, достаточно разделить на D_x обе части соотношения (***) (см. § 3).

В свою очередь, нормированная корреляционная функция выражается через нормированную спектральную плотность при помощи обратного преобразования Фурье:

$$\rho_x(\tau) = 2\int\limits_0^\infty s_{x\,\text{норм}}(\omega)\cos\omega\tau\,d\omega.$$

В частности, положив $\tau = 0$ и учитывая, что $\rho_x(0) = 1$, получим

$$2\int\limits_0^\infty s_{x\,\text{норм}}(\omega)\,d\omega = 1, \text{ или } \int\limits_{-\infty}^\infty s_{x\,\text{норм}}(\omega)\,d\omega = 1.$$

Геометрически этот результат означает, что площадь, ограниченная снизу осью $O\omega$ и сверху кривой $s_{x\,\text{норм}}(\omega)$, равна единице.

§ 5. Взаимная спектральная плотность стационарных и стационарно связанных случайных функций

Пусть $X(t)$ и $Y(t)$ — стационарные и стационарно связанные случайные функции со взаимной корреляционной функцией $r_{xy}(\tau)$.

Взаимной спектральной плотностью двух стационарных и стационарно связанных случайных функций $X(t)$ и $Y(t)$ называют функцию $s_{xy}(\omega)$, определяемую преобразованием Фурье:

$$s_{xy}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^\infty r_{xy}(\tau)\,e^{-i\omega\tau}\,d\tau.$$

В свою очередь, взаимная корреляционная функция выражается через взаимную спектральную плотность с помощью обратного преобразования Фурье:

$$r_{xy}(\tau) = \int\limits_{-\infty}^\infty s_{xy}(\omega)\,e^{i\omega\tau}\,d\omega.$$

Пример. Задана корреляционная функция $k_x(\tau)$ стационарной случайной функции $X(t)$. Найти: а) взаимную корреляционную функцию; б) взаимную спектральную плотность случайных функций $X(t)$ и $Y(t) = X(t + t_0)$.

Решение. а) Легко убедиться, что $Y(t)$ — стационарная функция. Найдем взаимную корреляционную функцию:

$$R_{xy}(t_1, t_2) = M[\overset{\circ}{X}(t_1)\overset{\circ}{Y}(t_2)] = M[\overset{\circ}{X}(t_1)\overset{\circ}{X}(t_2+t_0)] =$$
$$= k_x[(t_2+t_0)-t_1] = k_x(\tau+t_0).$$

Отсюда видно, что стационарные функции $X(t)$ и $Y(t)$ стационарно связаны (их взаимная корреляционная функция зависит только от разности аргументов τ).

б) Найдем взаимную спектральную плотность:

$$s_{xy}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} k_x(\tau+t_0)\,e^{-i\omega\tau}\,d\tau =$$
$$= e^{i\omega t_0}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} k_x(\tau+t_0)\,e^{-i\omega(\tau+t_0)}\,d(\tau+t_0) = e^{i\omega t_0}\,s_x(\omega).$$

Итак, искомая взаимная спектральная плотность

$$s_{xy}(\omega) = e^{i\omega t_0}\,s_x(\omega).$$

§ 6. Дельта-функция

Дельта-функция $\delta(t)$ является примером обобщенной функции (*обобщенная функция* — предел последовательности однопараметрического семейства непрерывных функций). Дельта-функцию определяют тем условием, что она ставит в соответствие всякой непрерывной функции $f(t)$ ее значение при $t=0$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,f(t)\,dt = f(0).$$

Правую часть равенства можно представить в виде предела:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\varepsilon}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(t)\,dt = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} \delta_\varepsilon(t)\,f(t)\,dt \quad (\varepsilon>0),$$

где

$$\delta_\varepsilon(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } |t| \geqslant \varepsilon, \\ 1/(2\varepsilon) & \text{при } |t| < \varepsilon. \end{cases}$$

Таким образом, дельта-функцию можно рассматривать как предел последовательности функций $\delta_\varepsilon(t)$ при $\varepsilon \to 0$. Учитывая, что $\delta_\varepsilon(t) \to 0$ при $t \neq 0$, $\delta_\varepsilon(t) \to \infty$ при $t \to 0$ и $\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\frac{1}{2\varepsilon}dt = 1$, условно пишут

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \neq 0, \\ \infty & \text{при } t = 0. \end{cases}$$

Физически дельта-функцию можно истолковать как плотность единичной массы, сосредоточенной в нуле.

Можно доказать, что дельта-функция представима интегралом Фурье:

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\, d\omega.$$

Отсюда

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\, d\omega = 2\pi\, \delta(t). \qquad (*)$$

Замечание. В приложениях часто используют соотношение

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, \delta(t - t_0)\, dt = f(t_0),$$

которое вытекает из сказанного выше.

§ 7. Стационарный белый шум

Стационарным белым шумом называют стационарную случайную функцию $X(t)$, спектральная плотность которой постоянна:

$$s_x(\omega) = s = \text{const}.$$

Найдем корреляционную функцию белого шума. Используя формулу (**) (см. § 3)

$$k_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s_x(\omega)\, e^{i\omega\tau}\, d\omega,$$

получим

$$k_x(\tau) = s \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} d\omega.$$

Приняв во внимание, что [см. § 6, соотношение (*)]

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} d\omega = 2\pi\delta(\tau),$$

окончательно имеем

$$k_x(\tau) = 2\pi s \delta(\tau). \qquad (**)$$

Таким образом, корреляционная функция стационарного белого шума пропорциональна дельта-функции; коэффициент пропорциональности $2\pi s$ называют *интенсивностью стационарного белого шума*.

Дельта-функция равна нулю при всех значениях $\tau \neq 0$, поэтому и корреляционная функция $k_x(\tau)$ также равна нулю при этих же значениях τ [это видно из формулы (**)]. Равенство же нулю корреляционной функции стационарного белого шума означает некоррелированность любых двух его сечений — случайных величин $X(t_1)$ и $X(t_2)$ $(t_1 \neq t_2)$. Благодаря этой особенности белый шум находит широкое применение в теории случайных функций и ее приложениях. Однако эта же особенность указывает на то, что осуществить белый шум невозможно, так как в действительности при очень близких значениях t_1 и t_2 соответствующие случайные величины $X(t_1)$ и $X(t_2)$ в известной степени коррелированы.

Таким образом, стационарный белый шум — математическая абстракция, полезная для теории случайных функций и ее приложений. В частности, белый шум используют для моделирования случайных процессов, которые имеют постоянную спектральную плотность в определенном диапазоне частот, причем поведение спектральной плотности вне его исследователя не интересует.

Пример. Спектральная плотность стационарной случайной функции $X(t)$ постоянна в диапазоне частот $(-\omega_0, \omega_0)$, а вне его равна нулю:

$$s_x(\omega) = \begin{cases} 0 \text{ при } & \omega < -\omega_0, \\ s \text{ при } & -\omega_0 < \omega < \omega_0, \\ 0 \text{ при } & \omega > \omega_0. \end{cases}$$

Найти: а) корреляционную функцию; б) дисперсию случайной функции $X(t)$.

Решение. а) Найдем искомую корреляционную функцию:

$$k_x(\tau) = \int_{-\omega_0}^{\omega_0} s \cos \omega\tau \, d\omega = 2s \int_{0}^{\omega_0} \cos \omega\tau \, d\omega = \frac{2s \sin \omega_0\tau}{\tau}.$$

Итак,

$$k_x(\tau) = \frac{2s \sin \omega_0\tau}{\tau}.$$

б) Найдем искомую дисперсию:

$$D_x = \lim_{\tau \to 0} k_x(\tau) = \lim_{\tau \to 0} \frac{2s \sin \omega_0\tau}{\tau} = 2s\omega_0 \lim_{\tau \to 0} \frac{\sin \omega_0\tau}{\omega_0\tau} = 2s\omega_0.$$

Итак,

$$D_x = 2s\omega_0.$$

§ 8. Преобразование стационарной случайной функции стационарной линейной динамической системой

Стационарной линейной динамической системой называют устройство, которое описывается линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами вида

$$a_0Y^{(n)}(t)+a_1Y^{(n-1)}(t)+\ldots+a_nY(t)=$$
$$=b_0X^{(m)}(t)+b_1X^{(m-1)}(t)+\ldots+b_mX(t), \qquad (*)$$

где $X(t)$ — входная стационарная случайная функция (воздействие, возмущение), $Y(t)$ — выходная случайная функция (реакция, отклик).

Если динамическая система устойчива, то при достаточно больших значениях t, т. е. по окончании переходного процесса, функцию $Y(t)$ можно считать стационарной. Подчеркнем, что при дальнейшем изложении предполагается, что $X(t)$ и $Y(t)$ — стационарные случайные функции.

Поставим перед собой задачу найти характеристики выходной функции по известным характеристикам входной функции.

Найдем математическое ожидание m_y, зная m_x, для чего приравняем математические ожидания левой и правой частей уравнения (*). Учитывая, что $X(t)$ и $Y(t)$ — стационарные случайные функции, а значит, математические ожидания производных этих функций равны нулю, получим

$$a_nm_y=b_mm_x.$$

Отсюда искомое математическое ожидание

$$m_y=b_mm_x/a_n. \qquad (**)$$

Пример 1. На вход линейной динамической системы, описываемой уравнением

$$Y'(t)+2Y(t)=5X'(t)+6X(t),$$

подается стационарная случайная функция $X(t)$ с математическим ожиданием $m_x=10$. Найти математическое ожидание случайной функции $Y(t)$ на выходе системы в установившемся режиме (после затухания переходного процесса).

Решение. Используя формулу (**), получим

$$m_y=b_mm_x/a_n=(6/2)\cdot10=30.$$

Введем понятия передаточной функции и частотной характеристики, которые понадобятся далее. Предварительно запишем уравнение (*) в операторной форме, обозначив оператор дифференцирования $\frac{d}{dt}$ через p, $\frac{d^2}{dt^2}$ — через p^2 и т. д. В итоге уравнение (*) примет вид

$$(a_0p^n+a_1p^{n-1}+\ldots+a_n)Y(t)=$$
$$=(b_0p^m+b_1p^{m-1}+\ldots+b_m)X(t). \qquad (***)$$

«Решим» это уравнение относительно $Y(t)$:

$$Y(t)=\frac{b_0p^m+b_1p^{m-1}+\ldots+b_m}{a_0p^n+a_1p^{n-1}+\ldots+a_n}X(t). \qquad (****)$$

Передаточной функцией линейной динамической системы называют отношение многочлена относительно p при $X(t)$ к многочлену при $Y(t)$ в операторном уравнении (***):

$$\Phi(p)=\frac{b_0p^m+b_1p^{m-1}+\ldots+b_m}{a_0p^n+a_1p^{n-1}+\ldots+a_n}.$$

Из соотношения (****) следует, что выходная и входная функции связаны равенством

$$Y(t)=\Phi(p)X(t).$$

Частотной характеристикой линейной динамической системы называют функцию, которая получается заменой аргумента p в передаточной функции на аргумент $i\omega$ (ω — действительное число):

$$\Phi(i\omega)=\frac{b_0(i\omega)^m+b_1(i\omega)^{m-1}+\ldots+b_m}{a_0(i\omega)^n+a_1(i\omega)^{n-1}+\ldots+a_n}.$$

Доказано, что спектральные плотности выходной и входной функций связаны равенством

$$s_y(\omega)=s_x(\omega)\,|\Phi(i\omega)|^2.$$

Отсюда заключаем: *для того чтобы найти спектральную плотность выходной функции, надо умножить спектральную плотность входной функции на квадрат модуля частотной характеристики.*

Зная же спектральную плотность выходной функции, можно найти ее корреляционную функцию [§ 3, формула (**)]:

$$k_y(\tau)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}s_y(\omega)\,e^{i\omega\tau}d\omega,$$

а следовательно, и дисперсию:

$$D_y = k_y(0) = \int_{-\infty}^{\infty} s_y(\omega)\, d\omega.$$

Пример 2. На вход линейной стационарной динамической системы, описываемой уравнением

$$3Y'(t) + Y(t) = 4X'(t) + X(t),$$

подается стационарная случайная функция $X(t)$ с корреляционной функцией $k_x(\tau) = 6e^{-2|\tau|}$. Найти дисперсию случайной функции $Y(t)$ на выходе системы в установившемся режиме.

Решение 1. Найдем спектральную плотность выходной функции. Используя решение примера 2 (см. § 4) при $D=6$ и $\alpha=2$, получим

$$s_x(\omega) = \frac{D\alpha}{\pi(\omega^2+\alpha^2)} = \frac{6\cdot 2}{\pi(\omega^2+4)} = \frac{12}{\pi(\omega^2+4)}.$$

2. Найдем передаточную функцию, для чего напишем заданное уравнение в операторной форме:

$$(3p+1)Y(t) = (4p+1)X(t).$$

Отсюда

$$Y(t) = \frac{4p+1}{3p+1}\cdot X(t).$$

Следовательно, передаточная функция

$$\Phi(p) = \frac{4p+1}{3p+1}.$$

3. Найдем частотную характеристику, для чего заменим в передаточной функции аргумент p на $i\omega$:

$$\Phi(i\omega) = \frac{4i\omega+1}{3i\omega+1}.$$

4. Найдем спектральную плотность выходной функции, для чего умножим спектральную плотность входной функции на квадрат модуля частотной характеристики:

$$s_y(\omega) = s_x(\omega)\,|\Phi(i\omega)|^2 = \frac{12}{\pi(\omega^2+4)}\cdot\frac{|4i\omega+1|^2}{|3i\omega+1|^2} = \frac{12}{\pi(\omega^2+4)}\cdot\frac{16\omega^2+1}{9\omega^2+1}.$$

5. Найдем искомую дисперсию:

$$D_y = \int_{-\infty}^{\infty} s_y(\omega)\,d\omega = \frac{12}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(16\omega^2+1)\,d\omega}{(\omega^2+4)(9\omega^2+1)} = \frac{24}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{(16\omega^2+1)\,d\omega}{(\omega^2+4)(9\omega^2+1)}.$$

Представим подынтегральную функцию в виде суммы простейших дробей:

$$D_y = \frac{24}{\pi}\left[\frac{81}{5}\int_0^{\infty}\frac{d\omega}{\omega^2+4} - \frac{1}{5}\int_0^{\infty}\frac{d\omega}{9+1}\right].$$

Выполнив интегрирование, получим искомую дисперсию:

$$D_y = 96{,}4.$$

Задачи

1. Найти дисперсию стационарной случайной функции $X(t)$, зная ее спектральную плотность $s_x(\omega) = \frac{6}{\pi(1+\omega^2)}$.

Отв. $D_x = 6$.

2. Найти спектральную плотность стационарной случайной функции $X(t)$, зная ее корреляционную функцию

$$k_x(\tau) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{3}|\tau| & \text{при } |\tau| \leqslant 3, \\ 0 & \text{при } |\tau| > 3. \end{cases}$$

Отв. $s_x(\omega) = \frac{2\sin^2(3\omega/2)}{3\pi\omega^2}$.

3. Найти спектральную плотность стационарной случайной функции $X(t)$, зная ее корреляционную функцию $k_x(\tau) = 5e^{-2|\tau|}$.

Отв. $s_x(\omega) = 10/(\pi(4+\omega^2))$.

4. Задана спектральная плотность $s_x(\omega) = 6/(\pi(1+\omega^2))$ стационарной случайной функции $X(t)$. Найти нормированную спектральную плотность.

Отв. $s_{x\,\text{норм}}(\omega) = 1/(\pi(1+\omega^2))$.

5. Найти корреляционную функцию стационарной случайной функции $X(t)$, зная ее спектральную плотность

$$s_x(\omega) = \begin{cases} s_0 & \text{в интервалах } (-4\omega_0, -2\omega_0) \text{ и } (2\omega_0, 4\omega_0), \\ 0 & \text{вне этих интервалов.} \end{cases}$$

Отв. $k_x(\tau) = \frac{2s_0}{\tau}\sin\omega_0\tau\,(2\cos 2\omega_0\tau - 1)$.

6. Спектральная плотность стационарной случайной функции $X(t)$ постоянна в диапазоне частот (ω_1, ω_2), а вне его равна нулю:

$$s_x(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{при } \omega < \omega_1 \\ s & \text{при } \omega_1 < \omega < \omega_2, \\ 0 & \text{при } \omega > \omega_2. \end{cases}$$

Найти: а) корреляционную функцию; б) дисперсию; в) нормированную корреляционную функцию случайной функции $X(t)$.

Отв. а) $k_x(\tau) = \frac{s(\sin\omega_2\tau - \sin\omega_1\tau)}{\tau}$;

б) $D_x = s(\omega_2 - \omega_1)$; в) $\rho_x(\tau) = \frac{\sin\omega_2\tau - \sin\omega_1\tau}{\tau(\omega_2 - \omega_1)}$.

7. На вход линейной стационарной динамической системы, описываемой уравнением

$$Y'(t) + 3Y(t) = X'(t) + 4X(t),$$

подается стационарная случайная функция $X(t)$ с математическим ожиданием $m_x = 6$ и корреляционной функцией $k_x(\tau) = 5e^{-2|\tau|}$. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной функции $Y(t)$ на выходе системы в установившемся режиме.

Отв. $m_y=8$; $D_y=22/3$.

8. На вход линейной стационарной динамической системы, описываемой уравнением

$$Y''(t)+5Y'(t)+6Y(t)=X'(t)+X(t),$$

подается стационарная случайная функция $X(t)$ с математическим ожиданием $m_x=4$ и корреляционной функцией $k_x(\tau)=e^{-|\tau|}$. Найти математическое ожидание и спектральную плотность случайной функции $Y(t)$ на выходе системы в установившемся режиме.

Отв. $m_y=\frac{2}{3}$; $s_y(\omega)=\frac{1}{\pi}\frac{1}{25\omega^2+(6-\omega^2)^2}$.

9*. На вход линейной стационарной динамической системы, описываемой уравнением

$$Y'''(t)+6Y''(t)+11Y'(t)+6Y(t)=7X'''(t)+5X(t),$$

подается стационарная случайная функция $X(t)$ с известной корреляционной функцией $k_x(\tau)=2e^{-|\tau|}(1+|\tau|)$. Найти спектральную плотность случайной функции $Y(t)$ на выходе системы в установившемся режиме.

Указание. Разложить на линейные множители знаменатель передаточной функции: $p^3+6p^2+11p+6=(p+1)(p+2)(p+3)$.

Отв. $s_y(\omega)=4(49\omega^6+25)/(\pi(\omega^2+1)^3(\omega^2+4)(\omega^2+9))$.

10. На вход линейной стационарной динамической системы, описываемой уравнением $Y'(t)+Y(t)=X(t)$, поступает случайная функция $X(t)$ с постоянной спектральной плотностью s_0 (стационарный белый шум). Найти дисперсию случайной функции $Y(t)$ на выходе системы в установившемся режиме.

Отв. $D=s_0\pi$.

ДОПОЛНЕНИЕ

А. Пример расчета многоканальной системы массового обслуживания с отказами методом Монте — Карло

Пусть в систему массового обслуживания с отказами (заявка покидает такую систему, если все каналы заняты), состоящую из N каналов, поступает простейший поток заявок (см. гл. VI, § 6), причем плотность распределения промежутка времени между двумя последовательными заявками задана:

$$f(\tau) = \lambda e^{-\lambda\tau} \quad (\lambda > 0, \ 0 < \tau < \infty).$$

Каждая заявка поступает в первый канал. Если первый канал свободен, то он обслуживает заявку; если первый канал занят, то заявка поступает во второй канал, обслуживается им (если канал свободен) или передается в третий канал (если первый и второй каналы заняты) и т. д.

В случае, если в момент поступления заявки все каналы заняты, наступает отказ, т. е. поступившая заявка не обслуживается и из дальнейшего рассмотрения исключается.

Ведется подсчет числа обслуженных заявок и числа отказов. Если заявка обслужена, то в «счетчик обслуженных заявок» добавляют единицу; при отказе единицу добавляют в «счетчик отказов».

Ставится задача: найти математические ожидания числа обслуженных заявок и числа отказов за заданное время T. Для решения этой задачи производят n испытаний, каждое длительностью T, и определяют в каждом испытании число обслуженных заявок и число отказов.

Введем обозначения:

$t_{\text{обсл}}$ — длительность обслуживания заявки каналом;

t_i — момент освобождения i-го канала;

T_k — момент поступления k-й заявки;

τ_k — длительность времени между поступлениями k-й и $(k+1)$-й заявок; $T_{k+1} = T_k + \tau_k$ — момент поступления $(k+1)$-й заявки, n — число испытаний.

Пусть первая заявка поступила в момент $T_1 = 0$, когда все каналы свободны. Эта заявка поступит в первый канал и будет им обслужена за время $t_{\text{обсл}}$. В счетчик обслуженных заявок надо записать единицу.

Разыграем момент T_2 поступления второй заявки, для чего выберем случайное число r_1 и разыграем τ_1 (учитывая, что τ распределено по показательному закону) по формуле (см. гл. XXI, § 7, пример 2)

$$\tau_1 = -(1/\lambda) \ln r_1.$$

Следовательно, вторая заявка поступит в момент времени

$$T_2 = T_1 + \tau_1 = 0 + \tau_1 = \tau_1.$$

Если окажется, что $t_1 \leqslant T_2$ (вторая заявка поступила после того, как первый канал освободился), то вторая заявка будет обслужена первым каналом и в счетчик обслуженных заявок надо добавить единицу.

Если же окажется, что $t_1 > T_2$, то первый канал занят, и заявка поступит во второй канал и будет им обслужена, поскольку расчет начат в предположении, что все каналы свободны; в счетчик обслуженных заявок надо добавить единицу.

Дальнейший расчет производится аналогично. Если в некоторый момент времени поступления очередной заявки все каналы заняты, то наступает отказ и в счетчик отказов надо добавить единицу.

Испытание заканчивается, если очередная заявка поступит в момент времени, превышающий момент окончания испытания, т. е. если $T_{k+1} > T$.

В итоге i-го испытания в счетчиках окажутся соответственно число обслуженных заявок $м_{i\,\text{обсл}}$ и число отказов $м_{i\,\text{отк}}$.

Пусть произведено всего n испытаний, каждое длительностью T, причем в i-м испытании зарегистрировано $м_{i\,\text{обсл}}$ обслуженных заявок и $м_{i\,\text{отк}}$ отказов. В качестве оценок искомых математических ожиданий принимают выборочные средние:

$$M^*[м_{\text{обсл}}] = \frac{\sum_{i=1}^{n} м_{i\,\text{обсл}}}{n}, \quad M^*[м_{\text{отк}}] = \frac{\sum_{i=1}^{n} м_{i\,\text{отк}}}{n}.$$

Для вычисления наименьшего числа испытаний, которые с надежностью γ обеспечат наперед заданную верхнюю границу ошибки δ, можно использовать формулу (см. гл. XVI, § 15, замечание 2)

$$n=\frac{t^2\sigma^2}{\delta^2},$$

где t находят по равенству $\Phi(t)=\gamma/2$, $\sigma=1/\lambda$ (см. гл. XIII, § 3).

Пусть, например, известны среднее квадратическое отклонение $\sigma=4$ и $\gamma=0{,}95$, $\delta=0{,}7$. Тогда $\Phi(t)=0{,}95/2=$ $=0{,}475$ и $t=1{,}96$.

Минимальное число испытаний

$$n=\frac{t^2\sigma^2}{\delta^2}=\frac{1{,}96^2\cdot 4^2}{0{,}7^2}=126.$$

Предполагалось, что время обслуживания — неслучайная величина; если время обслуживания случайно, то расчет производится аналогично. Разумеется для разыгрывания случайного времени обслуживания надо задать законы его распределения для каждого канала.

На практике расчет производят ЭВМ.

Б. Применение метода Монте — Карло к вычислению определенных интегралов

Приведем один из способов вычисления определенных интегралов методом Монте — Карло — *способ усреднения подынтегральной функции.*

Требуется найти оценку I_1^* определенного интеграла $I=\int\limits_a^b \varphi(x)\,dx$. Рассмотрим случайную величину X, распределенную равномерно в интервале интегрирования (a, b) с плотностью $f(x)=1/(b-a)$. Тогда математическое ожидание

$$M[\varphi(X)]=\int\limits_a^b \varphi(x)\,f(x)\,dx=\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b \varphi(x)\,dx.$$

Отсюда

$$\int\limits_a^b \varphi(x)\,dx=(b-a)\cdot M[\varphi(x)].$$

Заменим математическое ожидание $M[\varphi(X)]$ его оценкой — выборочной средней, получим оценку I_1^* искомого интеграла:

$$I_1^* = (b-a)\cdot\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\varphi(x_i)}{n},$$

где x_i — возможные значения случайной величины X. Так как величина X распределена равномерно в интервале (a, b) с плотностью $f(x) = 1/(b-a)$, то x_i разыгрывают по формуле $\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b dx = r_i$ (см. гл. XXI, § 7, правило 2). Отсюда $x_i = a+(b-a)\,r_i$.

Пример. Найти: а) оценку I_1^* определенного интеграла $I = \int\limits_1^3 (x+1)\,dx$; б) абсолютную погрешность $|I - I_1^*|$; в) минимальное число испытаний, которые с надежностью $\gamma = 0{,}95$ обеспечат верхнюю границу ошибки $\delta = 0{,}1$.

Решение. Используем формулу

$$I_1^* = (b-a)\cdot\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\varphi(x_i)}{n}.$$

По условию $a = 1$, $b = 3$, $\varphi(x) = x+1$. Примем для простоты число испытаний $n = 10$. Тогда оценка

$$I_1^* = (3-1)\cdot\frac{\sum\limits_{i=1}^{10}(x_i+1)}{10} = 2\cdot\frac{\sum\limits_{i=1}^{10}(x_i+1)}{10}.$$

Результаты 10 испытаний приведены в табл. 36. Случайные числа взяты из приложения 9 с тремя знаками после запятой.

Таблица 36

Номер испытания i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
r_i	0,100	0,973	0,253	0,376	0,520	0,135	0,863	0,467	0,354	0,876
$2r_i$	0,200	1,946	0,506	0,752	1,040	0,270	1,726	0,934	0,708	1,752
$x_i = 1 + 2r_i$	1,200	2,946	1,506	1,752	2,040	1,270	2,726	1,934	1,708	2,752
$\varphi(x_i) = x_i + 1$	2,200	3,946	2,506	2,752	3,040	2,270	3,726	2,934	2,708	3,752

Сложив числа последней строки таблицы, находим $\sum \varphi(x_i) = 29{,}834$.

Искомая оценка интеграла

$$I_1^* = 2 \cdot (29{,}834/10) = 5{,}967.$$

б) Найдем абсолютную погрешность, приняв во внимание, что $I = \int\limits_1^3 (x+1)\,dx = 6$:

$$|I - I_1^*| = 6 - 5{,}967 = 0{,}033.$$

в) Найдем дисперсию усредняемой функции $\varphi(X) = X+1$, учитывая, что случайная величина X в интервале интегрирования $(1, 3)$ распределена равномерно и ее дисперсия $D(X) = (3-1)^2/12 = 1/3$ (см. гл. XII, § 1, пример 2):

$$\sigma^2 = D(X+1) = D(X) = 1/3.$$

г) Найдем минимальное число испытаний, которые с надежностью 0,95 обеспечат верхнюю границу ошибки $\delta = 0{,}1$. Из равенства $\Phi(t) = 0{,}95/2 = 0{,}475$ по таблице приложения 2 находим $t = 1{,}96$. Искомое минимальное число испытаний

$$n = \frac{t^2\sigma^2}{\delta^2} = \frac{1{,}96^2 \cdot (1/3)}{0{,}1^2} = 128.$$

В. Примеры случайных процессов

1. *Процесс Пуассона.* Рассмотрим простейший поток случайных событий, наступающих в интервале времени $(0, t)$. Напомним свойства простейшего потока (см. гл. VI, § 6):

1) стационарность (вероятность появления k событий за время t зависит только от k и t);

2) отсутствие последействия (вероятность появления k событий в течение промежутка времени $(T, T+t)$ не зависит от того, сколько событий и как появлялось до момента T);

3) ординарность (вероятность появления более одного события за малый промежуток времени Δt есть бесконечно малая более высокого порядка, чем Δt, т. е. $P_{k>1}(\Delta t) = o(\Delta t)$, где $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} = 0$.

Поставим своей задачей найти вероятность $P_k(t)$ появления k событий за время длительности t. Для упрощения вывода используем следствие, которое можно получить из приведенных выше свойств:

4) вероятность того, что за малое время Δt наступит ровно одно событие, пропорциональна Δt с точностью до бесконечно малой высшего порядка относительно Δt:

$$P_1(\Delta t) = \lambda\Delta t + o(\Delta t) \qquad (\lambda > 0). \qquad (*)$$

а) Найдем вероятность $P_0(t)$ того, что **за время длительности t не наступит ни одного события**. Для этого примем во внимание, что на промежутке $t+\Delta t$ не наступит ни одного события, если на каждом из двух промежутков t и Δt не появится ни одного события.

В силу свойств 1 и 2, по теореме умножения,

$$P_0(t+\Delta t)=P_0(t)\,P_0(\Delta t). \qquad (**)$$

События «за время Δt не появилось ни одного события», «появилось одно событие», «появилось более одного события» образуют полную группу, поэтому сумма вероятностей этих событий равна единице:

$$P_0(\Delta t)+P_1(\Delta t)+P_{k>1}(\Delta t)=1.$$

Учитывая, что $P_{k>1}(\Delta t)=o(\Delta t)$ (свойство 3), $P_1(\Delta t)=$ $=\lambda\Delta t+o(\Delta t)$ (свойство 4), имеем

$$P_0(\Delta t)=1-\lambda\,\Delta t-o(\Delta t). \qquad (***)$$

Заметим, что, перейдя к пределу при $\Delta t\to 0$, найдем

$$P_0(0)=1. \qquad (****)$$

Подставим (***) в (**):

$$P_0(t+\Delta t)=P_0(t)\,[1-\lambda\Delta t-o(\Delta t)].$$

Отсюда

$$P_0(t+\Delta t)-P_0(t)=-\lambda P_0(t)\,\Delta t-o(\Delta t)\,P_0(t).$$

Разделив обе части равенства на Δt и перейдя к пределу при $\Delta t\to 0$, получим дифференциальное уравнение

$$P_0'(t)=-\lambda P_0(t),$$

общее решение которого

$$P_0(t)=Ce^{-\lambda t}.$$

Используя (****), найдем, что $C=1$ и, следовательно,

$$P_0(t)=e^{-\lambda t}.$$

Итак, вероятность того, что за время t не появится ни одного события, найдена.

б) Найдем вероятность $P_1(t)$ **появления за время t ровно одного события**. Для этого определим вероятность того, что за время $t+\Delta t$ событие появится один раз. Так будет в двух несовместных случаях:

1) событие наступит за время t и не наступит за время Δt, 2) событие не наступит за время t и наступит за время Δt.

По формуле полной вероятности,

$$P_1(t+\Delta t)=P_1(t)\,P_0(\Delta t)+P_0(t)\,P_1(\Delta t).$$

Заменим $P_1(\Delta t)$ и $P_0(\Delta t)$ соответственно по формулам (*) и (***), перенесем $P_1(t)$ в левую часть равенства, разделим обе его части на Δt и перейдем к пределу при $\Delta t \to 0$. В итоге получим линейное неоднородное уравнение первого порядка

$$P_1'(t)+\lambda P_1(t)=\lambda e^{-\lambda t}.$$

Учитывая начальные условия, найдем $C=0$ и, следовательно,

$$P_1(t)=(\lambda t)\,e^{-\lambda t}. \qquad (*****)$$

Итак, вероятность того, что за время t появится ровно одно событие, найдена.

в) Найдем вероятность $P_2(t)$ появления за время t ровно двух событий. Для этого определим вероятность того, что за время $t+\Delta t$ событие появится два раза. Так будет в трех несовместных случаях: 1) событие наступит 2 раза за время t и не наступит за время Δt, 2) событие наступит 1 раз за время t и 1 раз за время Δt, 3) событие не наступит за время t и наступит 2 раза за время Δt.

По формуле полной вероятности,

$$P_2(t+\Delta t)=P_2(t)\,P_0(\Delta t)+P_1(t)\,P_1(\Delta t)+P_0(t)\,P_2(\Delta t).$$

Заменим $P_0(\Delta t)$, $P_1(\Delta t)$ и $P_1(t)$ соответственно по формулам (***), (*) и (*****); примем во внимание условие 4; перенесем $P_2(t)$ в левую часть равенства, разделим обе его части на Δt и перейдем к пределу при $\Delta t \to 0$. В итоге получим дифференциальное уравнение

$$P_2'(t)+\lambda P_2(t)=\lambda^2 t e^{-\lambda t}.$$

Решив это уравнение, найдем вероятность того, что за время t появится ровно два события:

$$P_2(t)=\frac{(\lambda t)^2 e^{-\lambda t}}{2!}.$$

Аналогично можно получить вероятность того, что за время t наступит k событий:

$$P_k(t)=\frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}.$$

Таким образом, если события, наступающие в случайные моменты времени, удовлетворяют указанным выше условиям, то число событий, наступающих за фиксированное время t, распределено по закону Пуассона с параметром λt. Другими словами, если $X(t)$ — число событий простейшего потока, наступивших за время t, то при фиксированном t функция $X(t)$ есть случайная величина, распределенная по закону Пуассона с параметром λt. Функцию $X(t)$ называют *случайным процессом Пуассона*. Очевидно, каждая реализация $X(t)$ есть неубывающая ступенчатая функция.

Процесс Пуассона широко используется при решении многих задач практики и особенно в теории массового обслуживания.

Замечание. Длительность времени между появлениями двух последовательных событий простейшего потока (случайная величина T) распределена по показательному закону. Действительно, убедимся, что функция распределения случайной величины T имеет вид

$$F(t)=1-e^{-\lambda t}.$$

События $T<t$ и $T\geqslant t$ противоположны, поэтому

$$P(T<t)+P(T\geqslant t)=1,$$

или

$$F(t)+P(T\geqslant t)=1.$$

Отсюда,

$$F(t)=1-P(T\geqslant t).$$

$P(T\geqslant t)$ есть вероятность того, что за время длительности t не появится ни одного события потока; эта вероятность, как показано выше, равна $e^{-\lambda t}$.

Итак,

$$F(t)=1-e^{-\lambda t},$$

что и требовалось доказать.

2. *Винеровский процесс*. Известно, что если в жидкость погрузить маленькую частицу, то она под влиянием ударов молекул жидкости будет двигаться по ломаной линии со случайными направлениями звеньев. Это явление называют *броуновским движением* по имени английского ботаника Р. Броуна, который в 1827 г. открыл явление, но не объяснил его. Лишь в 1905 г. А. Эйнштейн описал броуновское движение математически. В 1918 г. и в последующие годы американский ученый Н. Винер построил

математическую модель, более точно описывающую броуновское движение. По этой причине процесс броуновского движения называют винеровским процессом.

Прежде чем определить винеровский процесс, введем предварительно понятия нормального процесса и процесса с независимыми приращениями.

Случайный процесс $X(t)$ называют *нормальным (гауссовым)*, если совместное распределение $X(t_1)$, $X(t_2)$, ..., $X(t_k)$ является нормальным для каждого k и всех t_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$. Нормальный процесс полностью определяется его характеристиками: математическим ожиданием и корреляционной функцией.

Случайный процесс $X(t)$ называют *процессом с независимыми приращениями*, если его приращения на неперекрывающихся интервалах взаимно независимы, т. е. случайные величины $X(t_2)-X(t_1)$, $X(t_3)-X(t_2)$, ..., $X(t_k)-X(t_{k-1})$ для $t_1 < t_2 < \ldots < t_k$ взаимно независимы. Процесс с независимыми приращениями определяется распределением приращений $X(t)-X(s)$ для произвольных t и s. Если приращение $X(t)-X(s)$ зависит только от разности $t-s$, то процесс называют *процессом со стационарными приращениями*.

Винеровским процессом (процессом броуновского движения) называют нормальный случайный процесс $X(t)$ с независимыми стационарными приращениями, для которого $X(0)=0$, $M[X(t)]=0$, $M[X(t)^2]=\sigma^2 t$ для всех $t > 0$.

Важное значение винеровского процесса состоит в том, что он используется при изучении многих других случайных процессов.

3. *Марковский случайный процесс.* Используем терминологию, введенную в гл. XXII, § 1. Пусть в каждый момент времени некоторая система может находиться в одном из состояний E_1, E_2, ... (число состояний конечно или счетно). Если система случайно переходит из одного состояния, например E_i, в другое, например E_j, то говорят, что в системе происходит случайный процесс. Если при этом вероятность перехода из состояния E_i в состояние E_j зависит только от состояния E_i и не зависит от того, когда и как система пришла в это состояние, то случайный процесс $X(t)$ называют *марковским*. Другими словами, если для каждого момента времени t_0 протекание случайного процесса $X(t)$ в будущем (при $t > t_0$) определяется его настоящим (значением $X(t_0)$) и

не зависит от прошлого (от значений $X(t)$ при $t < t_0$), то $X(t)$ — марковский случайный процесс.

Различают марковские процессы с *дискретным множеством состояний* (число состояний конечно или счетно, переходы из состояния в состояние происходят скачком) и с *непрерывным множеством состояний*, а также различают процессы с *дискретным временем* (моменты переходов фиксированны) и с *непрерывным временем* (моменты переходов случайны).

В качестве примера рассмотрим процесс обслуживания простейшего потока заявок системой массового обслуживания с ожиданием (в такой системе заявка «становится в очередь», если все каналы заняты) и показательным временем обслуживания; покажем, что этот процесс является марковским.

Допустим, что в момент времени t_0 система находилась в некотором определенном состоянии (обслуживается некоторое число заявок, причем обслуживание каждой из них уже длилось определенное время). Назовем условно «будущим обслуживанием» обслуживание для моментов времени $t > t_0$, которое определяется:

а) длительностью оставшегося времени обслуживания заявок, поступивших до момента t_0;

б) числом заявок, которые поступят после момента t_0;

в) длительностью обслуживания этих заявок.

Убедимся, что будущее обслуживание не зависит от того, как происходило обслуживание до момента t_0. Действительно:

а) длительность оставшегося времени обслуживания заявок, которые уже обслуживались в момент t_0, не зависит от времени обслуживания в силу характеристического свойства показательного распределения;

б) число заявок, которые поступят после момента t_0, не зависит от числа заявок, которые поступили до момента t_0, в силу свойства отсутствия последействия простейшего потока;

в) длительность обслуживания заявок, поступивших после момента t_0, очевидно, не зависит ни от числа заявок, которые поступили до момента t_0, ни от длительности обслуживания каждой из них.

Итак, будущий процесс обслуживания (при $t > t_0$) зависит только от состояния системы в момент t_0 и не зависит от того, как протекала работа системы до момента t_0. Другими словами, процесс обслуживания простейшего потока заявок системой с ожиданием и показательным законом времени обслуживания является марковским процессом.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

Таблица значений функции $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3652	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013

Продолжение прилож. 1

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Приложение 2

Таблица значений функции $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-z^2/2}\, dz$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,24	0,0948	0,48	0,1844	0,72	0,2642
0,01	0,0040	0,25	0,0987	0,49	0,1879	0,73	0,2673
0,02	0,0080	0,26	0,1026	0,50	0,1915	0,74	0,2703
0,03	0,0120	0,27	0,1064	0,51	0,1950	0,75	0,2734
0,04	0,0160	0,28	0,1103	0,52	0,1985	0,76	0,2764
0,05	0,0199	0,29	0,1141	0,53	0,2019	0,77	0,2794
0,06	0,0239	0,30	0,1179	0,54	0,2054	0,78	0,2823
0,07	0,0279	0,31	0,1217	0,55	0,2088	0,79	0,2852
0,08	0,0319	0,32	0,1255	0,56	0,2123	0,80	0,2881
0,09	0,0359	0,33	0,1293	0,57	0,2157	0,81	0,2910
0,10	0,0398	0,34	0,1331	0,58	0,2190	0,82	0,2939
0,11	0,0438	0,35	0,1368	0,59	0,2224	0,83	0,2967
0,12	0,0478	0,36	0,1406	0,60	0,2257	0,84	0,2995
0,13	0,0517	0,37	0,1443	0,61	0,2291	0,85	0,3023
0,14	0,0557	0,38	0,1480	0,62	0,2324	0,86	0,3051
0,15	0,0596	0,39	0,1517	0,63	0,2357	0,87	0,3078
0,16	0,0636	0,40	0,1554	0,64	0,2389	0,88	0,3106
0,17	0,0675	0,41	0,1591	0,65	0,2422	0,89	0,3133
0,18	0,0714	0,42	0,1628	0,66	0,2454	0,90	0,3159
0,19	0,0753	0,43	0,1664	0,67	0,2486	0,91	0,3186
0,20	0,0793	0,44	0,1700	0,68	0,2517	0,92	0,3212
0,21	0,0832	0,45	0,1736	0,69	0,2549	0,93	0,3238
0,22	0,0871	0,46	0,1772	0,70	0,2580	0,94	0,3264
0,23	0,0910	0,47	0,1808	0,71	0,2611	0,95	0,3289

x	Φ (x)	x	Φ (x)	x	Φ (x)	x	Φ (x)
0,96	0,3315	1,37	0,4147	1,78	0,4625	2,36	0,4909
0,97	0,3340	1,38	0,4162	1,79	0,4633	2,38	0,4913
0,98	0,3365	1,39	0,4177	1,80	0,4641	2,40	0,4918
0,99	0,3389	1,40	0,4192	1,81	0,4649	2,42	0,4922
1,00	0,3413	1,41	0,4207	1,82	0,4656	2,44	0,4927
1,01	0,3438	1,42	0,4222	1,83	0,4664	2,46	0,4931
1,02	0,3461	1,43	0,4236	1,84	0,4671	2,48	0,4934
1,03	0,3485	1,44	0,4251	1,85	0,4678	2,50	0,4938
1,04	0,3508	1,45	0,4265	1,86	0,4686	2,52	0,4941
1,05	0,3531	1,46	0,4279	1,87	0,4693	2,54	0,4945
1,06	0,3554	1,47	0,4292	1,88	0,4699	2,56	0,4948
1,07	0,3577	1,48	0,4306	1,89	0,4706	2,58	0,4951
1,08	0,3599	1,49	0,4319	1,90	0,4713	2,60	0,4953
1,09	0,3621	1,50	0,4332	1,91	0,4719	2,62	0,4956
1,10	0,3643	1,51	0,4345	1,92	0,4726	2,64	0,4959
1,11	0,3665	1,52	0,4357	1,93	0,4732	2,66	0,4961
1,12	0,3686	1,53	0,4370	1,94	0,4738	2,68	0,4963
1,13	0,3708	1,54	0,4382	1,95	0,4744	2,70	0,4965
1,14	0,3729	1,55	0,4394	1,96	0,4750	2,72	0,4967
1,15	0,3749	1,56	0,4406	1,97	0,4756	2,74	0,4969
1,16	0,3770	1,57	0,4418	1,98	0,4761	2,76	0,4971
1,17	0,3790	1,58	0,4429	1,99	0,4767	2,78	0,4973
1,18	0,3810	1,59	0,4441	2,00	0,4772	2,80	0,4974
1,19	0,3830	1,60	0,4452	2,02	0,4783	2,82	0,4976
1,20	0,3849	1,61	0,4463	2,04	0,4793	2,84	0,4977
1,21	0,3869	1,62	0,4474	2,06	0,4803	2,86	0,4979
1,22	0,3883	1,63	0,4484	2,08	0,4812	2,88	0,4980
1,23	0,3907	1,64	0,4495	2,10	0,4821	2,90	0,4981
1,24	0,3925	1,65	0,4505	2,12	0,4830	2,92	0,4982
1,25	0,3944	1,66	0,4515	2,14	0,4838	2,94	0,4984
1,26	0,3962	1,67	0,4525	2,16	0,4846	2,96	0,4985
1,27	0,3980	1,68	0,4535	2,18	0,4854	2,98	0,4986
1,28	0,3997	1,69	0,4545	2,20	0,4861	3,00	0,49865
1,29	0,4015	1,70	0,4554	2,22	0,4868	3,20	0,49931
1,30	0,4032	1,71	0,4564	2,24	0,4875	3,40	0,49966
1,31	0,4049	1,72	0,4573	2,26	0,4881	3,60	0,499841
1,32	0,4066	1,73	0,4582	2,28	0,4887	3,80	0,499928
1,33	0,4082	1,74	0,4591	2,30	0,4893	4,00	0,499968
1,34	0,4099	1,75	0,4599	2,32	0,4898	4,50	0,499997
1,35	0,4115	1,76	0,4608	2,34	0,4904	5,00	0,499997
1,36	0,4131	1,77	0,4616				

Приложение 3

Таблица значений $t_\gamma = t(\gamma, n)$

n	γ			n	γ		
	0,95	0,99	0,999		0,95	0,99	0,999
5	2,78	4,60	8,61	20	2,093	2,861	3,883
6	2,57	4,03	6,86	25	2,064	2,797	3,745
7	2,45	3,71	5,96	30	2,045	2,756	3,659
8	2,37	3,50	5,41	35	2,032	2,720	3,600
9	2,31	3,36	5,04	40	2,023	2,708	3,558
10	2,26	3,25	4,78	45	2,016	2,692	3,527
11	2,23	3,17	4,59	50	2,009	2,679	3,502
12	2,20	3,11	4,44	60	2,001	2,662	3,464
13	2,18	3,06	4,32	70	1,996	2,649	3,439
14	2,16	3,01	4,22	80	1,001	2,640	3,418
15	2,15	2,98	4,14	90	1,987	2,633	3,403
16	2,13	2,95	4,07	100	1,984	2,627	3,392
17	2,12	2,92	4,02	120	1,980	2,617	3,374
18	2,11	2,90	3,97	∞	1,960	2,576	3,291
19	2,10	2,88	3,92				

Приложение 4

Таблица значений $q = q(\gamma, n)$

n	γ			n	γ		
	0,95	0,99	0,999		0,95	0,99	0,999
5	1,37	2,67	5,64	20	0,37	0,58	0,88
6	1,09	2,01	3,88	25	0,32	0,49	0,73
7	0,92	1,62	2,98	30	0,28	0,43	0,63
8	0,80	1,38	2,42	35	0,26	0,38	0,56
9	0,71	1,20	2,06	40	0,24	0,35	0,50
10	0,65	1,08	1,80	45	0,22	0,32	0,46
11	0,59	0,98	1,60	50	0,21	0,30	0,43
12	0,55	0,90	1,45	60	0,188	0,269	0,38
13	0,52	0,83	1,33	70	0,174	0,245	0,34
14	0,48	0,78	1,23	80	0,161	0,226	0,31
15	0,46	0,73	1,15	90	0,151	0,211	0,29
16	0,44	0,70	1,07	100	0,143	0,198	0,27
17	0,42	0,66	1,01	150	0,115	0,160	0,211
18	0,40	0,63	0,96	200	0,099	0,136	0,185
19	0,39	0,60	0,92	250	0,089	0,120	0,162

Приложение 5

Критические точки распределения χ^2

Число степеней свободы k	Уровень значимости α					
	0,01	0,025	0,05	0,95	0,975	0,89
1	6,6	5,0	3,8	0,0039	0,00098	0,00016
2	9,2	7,4	6,0	0,103	0,051	0,020
3	11,3	9,4	7,8	0,352	0,216	0,115
4	13,3	11,1	9,5	0,711	0,484	0,297
5	15,1	12,8	11,1	1,15	0,831	0,554
6	16,8	14,4	12,6	1,64	1,24	0,872
7	18,5	16,0	14,1	2,17	1,69	1,24
8	20,1	17,5	15,5	2,73	2,18	1,65
9	21,7	19,0	16,9	3,33	2,70	2,09
10	23,2	20,5	18,3	3,94	3,25	2,56
11	24,7	21,9	19,7	4,57	3,82	3,05
12	26,2	23,3	21,0	5,23	4,40	3,57
13	27,7	24,7	22,4	5,89	5,01	4,11
14	29,1	26,1	23,7	6,57	5,63	4,66
15	30,6	27,5	25,0	7,26	6,26	5,23
16	32,0	28,8	26,3	7,96	6,91	5,81
17	33,4	30,2	27,6	8,67	7,56	6,41
18	34,8	31,5	28,9	9,39	8,23	7,01
19	36,2	32,9	30,1	10,1	8,91	7,63
20	37,6	34,2	31,4	10,9	9,59	8,26
21	38,9	35,5	32,7	11,6	10,3	8,90
22	40,3	36,8	33,9	12,3	11,0	9,54
23	41,6	38,1	35,2	13,1	11,7	10,2
24	43,0	39,4	36,4	13,8	12,4	10,9
25	44,3	40,6	37,7	14,6	13,1	11,5
26	45,6	41,9	38,9	15,4	13,8	12,2
27	47,0	43,2	40,1	16,2	14,6	12,9
28	48,3	44,5	41,3	16,9	15,3	13,6
29	49,6	45,7	42,6	17,7	16,0	14,3
30	50,9	47,0	43,8	18,5	16,8	15,0

Приложение 6

Критические точки распределения Стьюдента

Число степеней свободы k	Уровень значимости α (двусторонняя критическая область)					
	0,10	0,05	0,02	0,01	0,002	0,001
1	6,31	12,7	31,82	63,7	318,3	637,0
2	2,92	4,30	6,97	9,92	22,33	31,6
3	2,35	3,18	4,54	5,84	10,22	12,9
4	2,13	2,78	3,75	4,60	7,17	8,61
5	2,01	2,57	3,37	4,03	5,89	6,86
6	1,94	2,45	3,14	3,71	5,21	5,96
7	1,89	2,36	3,00	3,50	4,79	5,40
8	1,86	2,31	2,90	3,36	4,50	5,04
9	1,83	2,26	2,82	3,25	4,30	4,78
10	1,81	2,23	2,76	3,17	4,14	4,59
11	1,80	2,20	2,72	3,11	4,03	4,44
12	1,78	2,18	2,68	3,05	3,93	4,32
13	1,77	2,16	2,65	3,01	3,85	4,22
14	1,76	2,14	2,62	2,98	3,79	4,14
15	1,75	2,13	2,60	2,95	3,73	4,07
16	1,75	2,12	2,58	2,92	3,69	4,01
17	1,74	2,11	2,57	2,90	3,65	3,96
18	1,73	2,10	2,55	2,88	3,61	3,92
19	1,73	2,09	2,54	2,86	3,58	3,88
20	1,73	2,09	2,53	2,85	3,55	3,85
21	1,72	2,08	2,52	2,83	3,53	3,82
22	1,72	2,07	2,51	2,82	3,51	3,79
23	1,71	2,07	2,50	2,81	3,49	3,77
24	1,71	2,06	2,49	2,80	3,47	3,74
25	1,71	2,06	2,49	2,79	3,45	3,72
26	1,71	2,06	2,48	2,78	3,44	3,71
27	1,71	2,05	2,47	2,77	3,42	3,69
28	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
29	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
30	1,70	2,04	2,46	2,75	3,39	3,65
40	1,68	2,02	2,42	2,70	3,31	3,55
60	1,67	2,00	2,39	2,66	3,23	3,46
120	1,66	1,98	2,36	2,62	3,17	3,37
∞	1,64	1,96	2,33	2,58	3,09	3,29
	0,05	0,025	0,01	0,005	0,001	0,0005
	Уровень значимости α (односторонняя критическая область)					

Приложение 7

Критические точки распределения F Фишера — Снедекора

(k_1 — число степеней свободы большей дисперсии,
k_2 — число степеней свободы меньшей дисперсии)

Уровень значимости $\alpha=0,01$

k_2	k_1											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	4052	4999	5403	5625	5764	5889	5928	5981	6022	6056	6082	6106
2	98,49	99,01	99,17	99,25	99,30	99,33	99,34	99,36	99,38	99,40	99,41	99,42
3	34,12	30,81	29,46	28,71	28,24	27,91	27,67	27,49	27,34	27,23	27,13	27,05
4	21,20	18,00	16,69	15,98	15,52	15,21	14,98	14,80	14,66	14,54	14,45	14,37
5	16,26	13,27	12,06	11,39	10,97	10,67	10,45	10,27	10,15	10,05	9,96	9,89
6	13,74	10,92	9,78	9,15	8,75	8,47	8,26	8,10	7,98	7,87	7,79	7,72
7	12,25	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	7,00	6,84	6,71	6,62	6,54	6,47
8	11,26	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,19	6,03	5,91	5,82	5,74	5,67
9	10,56	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,62	5,47	5,35	5,26	5,18	5,11
10	10,04	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,21	5,06	4,95	4,85	4,78	4,71
11	9,86	7,20	6,22	5,67	5,32	5,07	4,88	4,74	4,63	4,54	4,46	4,40
12	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,65	4,50	4,39	4,30	4,22	4,16
13	9,07	6,70	5,74	5,20	4,86	4,62	4,44	4,30	4,19	4,10	4,02	3,96
14	8,86	6,51	5,56	5,03	4,69	4,46	4,28	4,14	4,03	3,94	3,86	3,80
15	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,14	4,00	3,89	3,80	3,73	3,67
16	8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20	4,03	3,89	3,78	3,69	3,61	3,55
17	8,40	6,11	5,18	4,67	4,34	4,10	3,93	3,79	3,68	3,59	3,52	3,45

Уровень значимости $\alpha=0,05$

k_2	k_1											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	243	244
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,36	19,37	19,38	19,39	19,40	19,41
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,88	8,84	8,81	8,78	8,76	8,74
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,93	5,91
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,78	4,74	4,70	4,68
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,03	4,00
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,63	3,60	3,57
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,34	3,31	3,28
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,13	3,10	3,07
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,97	2,94	2,91
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,86	2,82	2,79
12	4,75	3,88	3,49	3,26	3,11	3,00	2,92	2,85	2,80	2,76	2,72	2,69
13	4,67	3,80	3,41	3,18	3,02	2,92	2,84	2,77	2,72	2,67	2,63	2,60
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,77	2,70	2,65	2,60	2,56	2,53
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,70	2,64	2,59	2,55	2,51	2,48
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,45	2,42
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,62	2,55	2,50	2,45	2,41	2,38

Приложение 8

Критические точки распределения Кочрена

(*k* — число степеней свободы, *l* — количество выборок)

Уровень значимости α=0,01

l	*k*						
	1	2	3	4	5	6	7
2	0,9999	0,9950	0,9794	0,9586	0,9373	0,9172	0,8988
3	9933	9423	8831	8335	7933	7606	7335
4	9676	8643	7814	7212	6761	6410	6129
5	0,9279	0,7885	0,6957	0,6329	0,5875	0,5531	0,5259
6	8828	7218	6258	5635	5195	4866	4608
7	8376	6644	5685	5080	4659	4347	4105
8	0,7945	0,6152	0,5209	0,4627	0,4226	0,3932	0,3704
9	7544	5727	4810	4251	3870	3592	3378
10	7175	5358	4469	3934	3572	3308	3106
12	0,6528	0,4751	0,3919	0,3428	0,3099	0,2861	0,2680
15	5747	4069	3317	2882	2593	2386	2228
20	4799	3297	2654	2288	2048	1877	1748
24	0,4247	0,2871	0,2295	0,1970	0,1759	0,1608	0,1495
30	3632	2412	1913	1635	1454	1327	1232
40	2940	1915	1508	1281	1135	1033	0957
60	0,2151	0,1371	0,1069	0,0902	0,0796	0,0722	0,0668
120	1225	0759	0585	0489	0429	0387	0357
∞	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000

Уровень значимости α=0,01

l	*k*						
	8	9	10	16	36	144	∞
2	0,8823	0,8674	0,8539	0,7949	0,7067	0,6062	0,5000
3	7107	6912	6743	6059	5153	4230	3333
4	5897	5702	5536	4884	4057	3251	2500
5	0,5037	0,4854	0,4697	0,4094	0,3351	0,2644	0,2000
6	4401	4229	4084	3529	2858	2229	1667
7	3911	3751	3616	3105	2494	1929	1429
8	0,3522	0,3373	0,3248	0,2779	0,2214	0,1700	0,1250
9	3207	3067	2950	2514	1992	1521	1111
10	2945	2813	2704	2297	1811	1376	1000
12	0,2535	0,2419	0,2320	0,1961	0,1535	0,1157	0,0833
15	2104	2002	1918	1612	1251	0934	0667
20	1646	1567	1501	1248	0960	0709	0500
24	0,1406	0,1338	0,1283	0,1060	0,0810	0,0595	0,0417
30	1157	1100	1054	0867	0658	0480	0333
40	0898	0853	0816	0668	0503	0363	0250
60	0,0625	0,0594	0,0567	0,0461	0,0344	0,0245	0,0167
120	0334	0316	0302	0242	0178	0125	0083
∞	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000

Уровень значимости $\alpha=0,05$

l	*k*						
	1	2	3	4	5	6	7
2	0,9985	0,9750	0,9392	0,9057	0,8772	0,8534	0,8332
3	9669	8709	7977	7457	7071	6771	6530
4	9065	7679	6841	6287	5895	0,5598	5365
5	0,8412	0,6338	0,5981	0,5440	0,5063	4783	0,4564
6	7808	6161	5321	4803	4447	4184	3980
7	7271	5612	4800	4307	3974	3726	3535
8	0,6798	0,5157	0,4377	0,3910	0,3595	0,3362	0,3185
9	6385	4775	4027	3584	3286	3067	2901
10	6020	4450	3733	3311	3029	2823	2666
12	0,5410	0,3924	0,3624	0,2880	0,2624	0,2439	0,2299
15	4709	3346	2758	2419	2195	2034	1911
20	3894	2705	2205	1921	1735	1602	1501
24	0,3434	0,2354	0,1907	0,1656	0,1493	0,1374	0,1286
30	2929	1980	1593	1377	1237	1137	1061
40	2370	1576	1259	1082	0968	0887	0827
60	0,1737	0,1131	0,0895	0,0765	0,0682	0,0623	0,0583
120	0998	0632	0495	0419	0371	0337	0312
∞	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000

Уровень значимости $\alpha=0,05$

l	*k*						
	8	9	10	16	36	144	∞
2	0,8159	0,8010	0,7880	0,7341	0,6602	0,5813	0,5000
3	6333	6167	6025	5466	4748	4031	3333
4	5175	5017	4884	4366	3720	3093	2500
5	0,4387	0,4241	0,4118	0,3645	0,3066	0,2013	0,2000
6	3817	3682	3568	3135	2612	2119	1667
7	3384	3259	3154	2756	2278	1833	1429
8	0,3043	0,2926	0,2829	0,2462	0,2022	0,1616	0,1250
9	2768	2659	2568	2226	1820	1446	1111
10	2541	2439	2353	2032	1655	1308	1000
12	0,2187	0,2098	0,2020	0,1737	0,1403	0,1100	0,0833
15	1815	1736	1671	1429	1144	0889	0667
20	1422	1357	1303	1108	0879	0675	0500
24	0,1216	0,1160	0,1113	0,0942	0,0743	0,0567	0,0417
30	1002	0958	0921	0771	0604	0457	0333
40	0780	0745	0713	0595	0462	0347	0250
60	0,0552	0,0520	0,0497	0,0411	0,0316	0.0234	0,0167
120	0292	0279	0266	0218	0165	0120	0083
∞	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000

Приложение 9

Равномерно распределенные случайные числа

10 09 73 25 33	76 52 01 35 86	34 67 35 48 76	80 95 90 91 17
37 54 20 48 05	64 89 47 42 96	24 80 52 40 37	20 63 61 04 02
08 42 26 89 53	19 64 50 93 03	23 20 90 25 60	15 95 33 47 64
99 01 90 25 29	09 37 67 07 15	38 31 13 11 65	88 67 67 43 97
12 80 79 99 70	80 15 73 61 47	64 03 23 66 53	98 95 11 68 77
66 06 57 47 17	34 07 27 68 50	36 69 73 61 70	65 81 33 98 85
31 06 01 08 05	45 57 18 24 06	35 30 34 26 14	86 79 90 74 39
85 26 97 76 02	02 05 16 56 92	68 66 57 48 18	73 05 38 52 47
63 57 33 21 35	05 32 54 70 48	90 55 35 75 48	28 46 82 87 09
73 79 64 57 53	03 52 96 47 78	35 80 83 42 82	60 93 52 03 44
98 52 01 77 67	14 90 56 86 07	22 10 94 05 58	60 97 09 34 33
11 80 50 54 31	39 80 82 77 32	50 72 56 82 48	29 40 52 42 01
83 45 29 96 34	06 28 89 80 83	13 74 67 00 78	18 47 54 06 10
88 68 54 02 00	86 50 75 84 01	36 76 66 79 51	90 36 47 64 93
99 59 46 73 48	87 51 76 49 69	91 82 60 89 28	93 78 56 13 68
65 48 11 76 74	17 46 85 09 50	58 04 77 69 74	73 03 95 71 86
80 12 43 56 35	17 72 70 80 15	45 31 82 23 74	21 11 57 82 53
74 35 09 98 17	77 40 27 72 14	43 23 60 02 10	45 52 16 42 37
69 91 62 68 03	66 25 22 91 48	36 93 68 72 03	76 62 11 39 90
09 89 32 05 05	14 22 56 85 14	46 42 75 67 88	96 29 77 88 22
91 49 91 45 23	68 47 92 76 86	46 16 28 35 54	94 75 08 99 23
80 33 69 45 98	26 94 03 68 58	70 29 73 41 35	53 14 03 33 40
44 10 48 19 49	85 15 74 79 54	32 97 92 65 75	57 60 04 08 81
12 55 07 37 42	11 10 00 20 40	12 86 07 46 97	96 64 48 94 39
63 60 64 93 29	16 50 53 44 84	40 21 95 25 63	43 65 17 70 82
61 19 69 04 46	26 45 74 77 74	51 92 43 37 29	65 39 45 95 93
15 47 44 52 66	95 27 07 99 53	59 36 78 38 48	82 39 61 01 18
94 55 72 85 73	67 89 75 43 87	54 62 24 44 31	91 19 04 25 92
42 48 11 62 13	97 34 40 87 21	16 86 84 87 67	03 07 11 20 59
23 52 37 83 17	73 20 88 98 37	68 93 59 14 16	26 25 22 96 63
04 49 35 24 94	75 24 63 38 24	45 86 25 10 25	61 96 27 93 35
00 54 99 76 54	64 05 18 81 59	96 11 96 38 96	54 69 28 23 91
35 96 31 53 07	26 89 80 93 54	33 35 13 54 62	77 97 45 00 24
59 80 80 83 91	45 42 72 68 42	83 60 94 97 00	13 02 12 48 92
46 05 88 52 36	01 39 09 22 86	77 28 14 40 77	93 91 08 36 47

Продолжение прилож. 9

32 17 90 05 97	87 37 92 52 41	05 56 70 70 07	86 74 31 71 57
69 23 46 14 06	20 11 74 52 04	15 95 66 00 00	18 74 39 24 23
19 56 54 14 30	01 75 87 53 79	40 41 92 15 85	66 67 43 68 06
45 15 51 49 38	19 47 60 72 46	43 66 79 45 43	59 04 79 00 33
94 86 43 19 94	36 16 81 08 51	34 88 88 15 53	01 54 03 54 56
98 08 62 48 26	45 24 02 84 04	44 99 90 88 96	39 09 47 34 07
33 18 51 62 32	41 94 15 09 49	89 43 54 85 81	88 69 54 19 94
80 95 10 04 06	96 38 27 07 74	20 15 12 33 87	25 01 62 52 98
79 75 24 91 40	71 96 12 82 96	69 86 10 25 91	74 85 22 05 39
18 63 33 25 37	98 14 50 65 71	31 01 02 46 74	05 45 56 14 27
74 02 94 39 02	77 55 73 22 70	97 79 01 71 19	52 52 75 80 21
54 17 84 56 11	80 99 33 71 43	05 33 51 29 69	56 12 71 92 55
11 66 44 98 83	52 07 98 48 27	59 38 17 15 39	09 97 33 34 40
48 32 47 79 28	31 24 96 47 10	02 29 53 68 70	32 30 75 75 46
69 07 49 41 38	87 63 79 19 76	35 58 40 44 01	10 51 82 16 15

Приложение 10

Критические точки критерия Вилкоксона

Объемы выборок		Q				Объемы выборок		Q			
n_1	n_2	0,005	0,01	0,025	0,05	n_1	n_2	0,005	0,01	0,025	0,05
6	6	23	24	26	28	7	7	32	34	36	39
	7	24	25	27	30		8	34	35	38	41
	8	25	27	29	31		9	35	37	40	43
	9	26	28	31	33		10	37	39	42	45
	10	27	29	32	35		11	38	40	44	47
	11	28	30	34	37		12	40	42	46	49
	12	30	32	35	38		13	41	44	48	52
	13	31	33	37	40		14	43	45	50	54
	14	32	34	38	42		15	44	47	52	56
	15	33	36	40	44		16	46	49	54	58
	16	34	37	42	46		17	47	51	56	61
	17	36	39	43	47		18	49	52	58	63
	18	37	40	45	49		19	50	54	60	65
	19	38	41	46	51		20	52	56	62	67
	20	39	43	48	53		21	53	58	64	69
	21	40	44	50	55		22	55	59	66	72
	22	42	45	51	57		23	57	61	68	74
	23	43	47	53	58		24	58	63	70	76
	24	44	48	54	60		25	60	64	72	78
	25	45	50	56	62						

Продолжение прилож. 10

Объемы выборок		Q			
n_1	n_2	0,005	0,01	0,025	0,05
8	8	43	45	49	51
	9	45	47	51	54
	10	47	49	53	56
	11	49	51	55	59
	12	51	53	58	62
	13	53	56	60	64
	14	54	58	62	67
	15	56	60	65	69
	16	58	62	67	72
	17	60	64	70	75
	18	62	66	72	77
	19	64	68	74	80
	20	66	70	77	83
	21	68	72	79	85
	22	70	74	81	88
	23	71	76	84	90
	24	73	78	86	93
	25	75	81	89	96
9	9	56	59	62	66
	10	58	61	65	69
	11	61	63	68	72
	12	63	66	71	75
	13	65	68	73	78
	14	67	71	76	81
	15	69	73	79	84
	16	72	76	82	87
	17	74	78	84	90
	18	76	81	87	93
	19	78	83	90	96
	20	81	85	93	99
	21	83	88	95	102
	22	85	90	98	105
	23	88	93	101	108
	24	90	95	104	111
	25	92	98	107	114
10	10	71	74	78	82
	11	73	77	81	86
	12	76	79	84	89
	13	79	82	88	92
	14	81	85	91	96
	15	84	88	94	99
	16	86	91	97	103
	17	89	93	100	106
	18	92	96	103	110
	19	94	99	107	113
	20	97	102	110	117
	21	99	105	113	120
	22	102	108	116	123
	23	105	110	119	127
	24	107	113	122	130
	25	110	116	126	134
11	11	87	91	96	100
	12	90	94	99	104
	13	93	97	103	108
	14	96	100	106	112
	15	99	103	110	116
	16	102	107	113	120
	17	105	110	117	123
	18	108	113	121	127
	19	111	116	124	131
	20	114	119	128	135
	21	117	123	131	139
	22	120	126	135	143
	23	123	129	139	147
	24	126	132	142	151
	25	129	136	146	155
12	12	105	109	115	120
	13	109	113	119	125
	14	112	116	123	129
	15	115	120	127	133
	16	119	124	131	138
	17	122	127	135	142
	18	125	131	139	146
	19	129	134	143	150
	20	132	138	147	155
	21	136	142	151	159
	22	139	145	155	163
	23	142	149	159	168
	24	146	153	163	172
	25	149	156	167	176
13	13	125	130	136	142
	14	129	134	141	147
	15	133	138	145	152
	16	136	142	150	156
	17	140	146	154	161
	18	144	150	158	166

Продолжение прилож. 10

Объемы выборок		Q			
n_1	n_2	0,005	0,01	0,025	0,05
	19	148	154	163	171
	20	151	158	167	175
	21	155	162	171	180
	22	159	166	176	185
	23	163	170	180	189
	24	166	174	185	194
	25	170	178	189	199
14	14	147	152	160	166
	15	151	156	164	171
	16	155	161	169	176
	17	159	165	174	182
	18	163	170	179	187
	19	168	174	183	192
	20	172	178	188	197
	21	176	183	193	202
	22	180	187	198	207
	23	184	192	203	212
	24	188	196	207	218
	25	192	200	212	223
15	15	171	176	184	192
	16	175	181	190	197
	17	180	186	195	203
	18	184	190	200	208
	19	189	195	205	214
	20	193	200	210	220
	21	198	205	216	225
	22	202	210	221	231
	23	207	214	226	236
	24	211	219	231	242
	25	216	224	237	248
16	16	196	202	211	219
	17	201	207	217	225
	18	206	212	222	231
	19	210	218	228	237
	20	215	223	234	243
	21	220	228	239	249
	22	225	233	245	255
	23	230	238	251	261
	24	235	244	256	267
	25	240	249	262	273
17	17	223	230	240	249
	18	228	235	246	255
	19	234	241	252	262
	20	239	246	258	268
	21	244	252	264	274
	22	249	258	270	281
	23	255	263	276	287
	24	260	269	282	294
	25	265	275	288	300
18	18	252	259	270	280
	19	258	265	277	287
	20	263	271	283	294
	21	269	277	290	301
	22	275	283	296	307
	23	280	289	303	314
	24	286	295	309	321
	25	292	301	316	328
19	19	283	291	303	313
	20	289	297	309	320
	21	295	303	316	328
	22	301	310	323	335
	23	307	316	330	342
	24	313	323	337	350
	25	319	329	344	357
20	20	315	324	337	348
	21	322	331	344	356
	22	328	337	351	364
	23	335	344	359	371
	24	341	351	366	379
	25	348	358	373	387
21	21	349	359	373	385
	22	356	366	381	393
	23	363	373	388	401
	24	370	381	396	410
	25	377	388	404	418
22	22	386	396	411	424
	23	393	403	419	432
	24	400	411	427	441
	25	408	419	435	450
23	23	424	434	451	465
	24	431	443	459	474
	25	439	451	468	483
24	24	464	475	492	507
	25	472	484	501	517
25	25	505	517	536	552

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Учебное издание

Гмурман Владимир Ефимович

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Художник *К Э Семенков*
Технический редактор *Л А Овчинникова*
Корректор *Г И Кострикова*

Лицензия ИД № 06236 от 09 11 01

Изд № ФМ-228 Подп в печать 14 02 03 Формат $60 \times 88^1/_{16}$ Бумага газетн
Гарнитура литературная Печать офсетная Объем 29,40 усл печ л
29,40 усл кр -отт 22 76 уч -изд л Тираж 20 000 экз Заказ № 2730

ФГУП «Издательство «Высшая школа», 127994 Москва, ГСП-4
Неглинная ул д 29/14

Тел (095) 200-04-56
E mail info@v-shkola ru http //www v-shkola ru

Отдел реализации (095) 200-07-69 200-59-39, факс (095) 200-03-01
E-mail sales@v-shkola ru

Отдел «Книга почтой» (095) 200-33-36
E-mail bookpost@v-shkola ru

Отпечатано в соответствии с качеством предоставленных
диапозитивов в ФГУП ордена «Знак Почета»
Смоленской областной типографии им В И Смирнова
214000, г Смоленск, пр-т им Ю Гагарина, 2

ISBN 5-06-004214-6

9 785060 042146