**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ,
МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ**

Л.І. Щелкунова

ВИЩА МАТЕМАТИКА

**Тексти лекцій
для студентів напряму «Архітектура»**

*Рекомендовано Міністерством освіти і науки,
молоді та спорту України*

**Харків 2011
ФОП Ворошилова Олеся Володимирівна**

УДК 517:514.12:512.64
ББК 22.11
Щ – 45

Рецензенти:
А.І. Колосов, доктор фіз.-мат. наук, проф., зав. каф. вищої математики Харківської національної академії міського господарства (ХНАМГ)
А.А.Янцевич, доктор фіз.-мат. наук, проф., зав. каф. вищої математики та інформатики Харківського національного університету ім.В.Н.Каразіна (ХНУ)
М.В. Сидоров, канд. фіз.-мат. наук, доцент каф. прикладної математики Харківського національного університету радіоелектроніки (ХНУРЕ)
А.П. Харченко, канд. фіз.-мат. наук, доцент каф. вищої математики Харківського державного технічного університету будівництва та архітектури (ХДТУБА)

Рекомендовано Міністерством освіти і науки, молоді та спорту України як навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів, які навчаються за напрямом підготовки "Архітектура"
(лист № 1/11-832 від 31.01.11)

Л.І. Щелкунова

Щ – 45 Вища математика. Тексти лекцій: Навчальний посібник/ Л.І. Щелкунова – Х.: ФОП О.В. Ворошилова, 2011. – 148 с.
ISBN 978-966-157-4

Викладено теоретичні та практичні основи таких розділів вищої математики: лінійна та векторна алгебра, аналітична геометрія на площині та у просторі, диференціальне та інтегральне числення і звичайні диференціальні рівняння.

Викладання теоретичного матеріалу у всіх розділах супроводжується розглядом багатьох прикладів, у тому числі пов'язаних із задачами будівництва та архітектури. Приділено більше уваги теорії поверхонь другого порядку, локальним властивостям кривих і поверхонь та їх застосуванню в будівництві та архітектурі.

Теоретичний матеріал супроводжується питаннями для самоперевірки.

Призначено для студентів архітектурних спеціальностей, що навчаються за напрямами підготовки бакалаврів 6.060102.
Іл.:113; Табл.:1; бібліогр.назв: 16.

УДК 517:514.12:512.64
ББК 22.11

ISBN 978-966-157-4

Вступ

Дане видання призначено для студентів архітектурних спеціальностей. За діючою програмою з дисципліни “Вища математика» на цьому факультеті лекційний курс складає лише 36 навчальних годин, що ускладнює процес опанування матеріалом курсу.

Програмою охоплені такі розділи вищої математики, як лінійна та векторна алгебра, аналітична геометрія на площині та у просторі, диференціальне та інтегральне числення і звичайні диференціальні рівняння.

Основою даного видання є цикл лекцій із вищої математики, що протягом останніх років автор читає на архітектурному факультеті .

Тексти лекцій є важливою складовою учбово-методичних комплексів , які розробляються з курсів математичних дисциплін у відповідності до кредитно-модульної системи навчання. Видання містять не тільки необхідний матеріал, який викладається на лекціях, але і допоміжні відомості для більш глибокого самостійного вивчення. Крім того, видання має допомогти студенту в тих випадках, коли деякі питання містять багато фактичного матеріалу, який слід вивчити за обмежену кількість часу.

Викладання теоретичного матеріалу за всіма розділами супроводжується розглядом достатньої кількості прикладів, графічних зображень, у тому числі пов’язаних із задачами будівництва та архітектури. Наприклад, на відміну від традиційних курсів з вищої математики, дані тексти лекцій містять інформацію про трансцендентні криві та криві вищих порядків, деякі відомості про локальні (диференціальні) властивості кривих і поверхонь. Також більше уваги приділено теорії поверхонь другого порядку та їх застосуванню в будівництві й архітектурі.

Для більш детального ознайомлення з деякими теоретичними положеннями видання містить посилання (у квадратних дужках) на джерела, які наведені у списку літератури.

Дане видання буде корисним студенту при проведенні лекцій, як додатковий матеріал; при організації самостійної роботи, як джерело нових відомостей; при проведенні заняття – семінару, присвяченого властивостям кривих і поверхонь та їх застосуванню в будівництві та архітектурі; при управлінні пошуково – дослідною роботою, як базовий матеріал для подальшої організації проектної роботи.

При написанні текстів лекцій автор ставив за мету наступне:

- допомогти студентам оволодіти необхідними теоретичними знаннями;
- сформувати первинні навички математичного дослідження прикладних задач;
- виробити вміння самостійно розв’язувати задачі та використовувати літературу;
- навчити самостійно поглиблювати свої знання, розвіваючи у студентів стійкій інтерес до застосування методів математики в будівництві та архітектурі, у тому числі з використанням інформаційних технологій.

Розділ 1 ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ

ЛЕКЦІЇ 1-2

1.1 Визначники та їх властивості
1.2 Матриці та операції над ними
1.3 Системи лінійних рівнянь та методи їх розв'язання

Переважна кількість інженерних задач (наприклад, задача розрахунку будівельних конструкцій) зводиться до складання і розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь. У цьому розділі наведено деякі відомості з лінійної алгебри і розглянуті методи розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь.

1.1 Визначники

1.1.1 Основні поняття

Квадратній матриці A порядку n можна зіставити число $det\, A$ (або Δ, або $|A|$), яке називають її визначником.

Означення. Визначником (детермінантом) другого порядку, який складається з чотирьох елементів a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, називається число, яке позначається через $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ і обчислюється за правилом

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \qquad (1.1)$$

Елементи a_{11}, a_{12} складають **головну діагональ** визначника, а елементи a_{21}, a_{22} – **побічну діагональ**.

Приклад. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -5 \end{vmatrix}$.

Розв'язання.

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-5) - 4 \cdot (-2) = 7.$$

Означення. Визначником третього порядку, який складається з дев'яти елементів, називається число, яке позначається $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ та обчислюється за правилом

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}. \qquad (1.2)$$

Для обчислення визначника третього порядку зручно використати правило трикутників (або Саррюса), яке ілюструється схемою (рис.1.1):

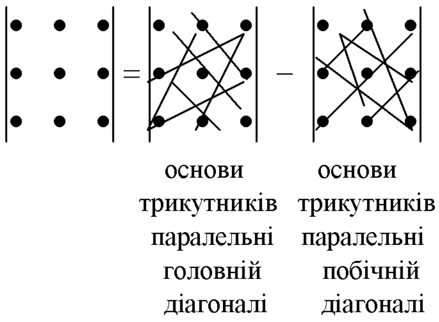


Рис.1.1

Приклад. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 4 \\ -2 & 5 & 1 \end{vmatrix}$.

Розв’язання.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 4 \\ -2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot 3\cdot 1 + (-2)\cdot 1\cdot 5 + (-2)\cdot 1\cdot 4 - (-2)\cdot 3\cdot(-2) - 2\cdot 5\cdot 4 - 1\cdot 1\cdot 1 = -\ 65\,.$$

Означення. Визначником *n* – го порядку, який складається з n^2 елементів називають число Δ_n, яке записано у вигляді квадратної таблиці чисел

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \Delta_n,$$

де числа a_{ij} – елементи визначника, i – номер рядка, j – номер стовпця $(i = \overline{1,n},\quad j = \overline{1,n})$.

Правило обчислення визначника базується на поняттях мінору M_{ij} та алгебраїчного доповнення A_{ij} елемента a_{ij}.

Означення. Мінором M_{ij} елемента a_{ij} називають визначник $(n-1)$ – го порядку Δ_{n-1}, який утворюється з визначника n – го порядку Δ_n викреслюванням i – го рядка та j – го стовпця.

Означення. Алгебраїчним доповненням A_{ij} елемента a_{ij} називають вираз

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}\cdot M_{ij}\,. \tag{1.3}$$

Правило обчислення визначника *n* – го порядку. Визначник дорівнює сумі n добутків елементів будь – якого рядка (стовпця) на їх алгебраїчні доповнення:

$$\Delta_n = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj}\,. \tag{1.4}$$

Приклад. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$.

Розв'язання.

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 4\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + 2\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + (-3)\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 4(6-(-5)) - 2(2-0) - 3(-1-0) = 43.$$

1.1.2 Властивості визначників

Сформулюємо основні властивості визначників, які притаманні визначникам будь – якого порядку. Деякі з цих властивостей розглянемо на прикладі визначників третього порядку.

1) Величина визначника не зміниться, якщо:

- всі його рядки замінити стовпцями з тими самими номерами, і навпаки, тобто

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Наприклад,

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & -2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 5 \\ -2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 51.$$

- до елементів будь – якого рядка (стовпця) додати відповідні елементи паралельного рядка (стовпця), помножені на одне й те саме число.

2) Визначник дорівнює нулю, якщо:

- всі елементи будь – якого рядка (стовпця) визначника дорівнюють нулю;
- відповідні елементи двох рядків (стовпців) рівні між собою, тобто визначник має два однакових рядки (стовпці);
- відповідні елементи двох рядків (стовпців) визначника пропорційні. Наприклад:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & -4 \\ -2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot2\cdot1 + (-2)\cdot4\cdot5 + 1\cdot(-4)\cdot(-2) - (-2)\cdot2\cdot(-2) - 2\cdot5\cdot(-4) - 4\cdot1\cdot1 = 0.$$

У цьому визначнику відповідні елементи першого та другого рядків пропорційні.

3) Величина визначника змінить знак на протилежний, якщо в ньому переставити місцями два рядки або два стовпці:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

4) Величина визначника помножиться на число κ, якщо всі елементи деякого рядка (стовпця) помножити на це число. І навпаки, якщо всі елементи будь – якого рядка (стовпця) мають спільний множник, то його можна винести за знак визначника. Наприклад:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 2 & -4 & 6 \\ -2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \\ -2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 2(-4-10-6+8-30-1) = -86.$$

Усі властивості доводяться за допомогою правила обчислення визначника. Наприклад, доведемо третю властивість:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21}\cdot(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}\cdot(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{23}\cdot(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= -a_{21}\cdot\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}\cdot\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{23}\cdot\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = -\left(a_{21}\cdot\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{22}\cdot\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{23}\cdot\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}\right) =$$

$$= -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

1.2 Матриці та операції над ними

1.2.1 Основні поняття

Означення. Матрицею розміру $\boldsymbol{m \times n}$ називають прямокутну таблицю з $m \times n$ елементів, яка складається з m рядків та n стовпців. Матриця записується у вигляді

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

або скорочено

$$A = (a_{ij}), \quad (i = \overline{1,m}, \quad j = \overline{1,n}) \quad \left(A = (a_{ij})_{m\times n} \right),$$

де a_{ij} – елементи i – го рядка і j – го стовпця.

Класифікація матриць

- **Прямокутна матриця** – це матриця, для якої $m \neq n$.

Наприклад, $A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 3 & -2\\ 1 & 5\end{pmatrix}$ – прямокутна матриця розміру 3×2.

- **Квадратна матриця –** це матриця, для якої $m = n$.

Наприклад, $A=\begin{pmatrix}5 & 7\\ 2 & 9\end{pmatrix}$ – квадратна матриця розміру 2×2, яку називають матрицею 2 – го порядку.

- **Діагональна матриця –** це квадратна матриця, в якої тільки елементи головної діагоналі відмінні від нуля:

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & a_{22} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}.$$

- **Одинична матриця** ***E*** **–** це діагональна матриця, всі елементи якої дорівнюють одиниці:

$$E=\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}.$$

- **Нульова матриця** ***O*** – це матриця, всі елементи якої дорівнюють нулю:

$$O=\begin{pmatrix}0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}.$$

- **Матриця – стовпець або матриця – рядок –** це матриці, які містять один стовпець або один рядок і мають розмір $m\times 1$ або $1\times n$ відповідно. Їх вигляд

$$A=\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_m\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}b_1 & b_2 & \cdots & b_n\end{pmatrix}.$$

- **Транспонована матриця** $\boldsymbol{A^T}$ **–** це матриця, яка одержана з даної матриці A заміною рядків стовпцями.

Якщо $A=\begin{pmatrix}2 & 4 & 1\\ 0 & -3 & 5\end{pmatrix}$, тоді $A^T=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 4 & -3\\ 1 & 5\end{pmatrix}$.

- Дві матриці A і B **рівні** між собою ($A = B$), якщо вони мають однаковий розмір і їх відповідні елементи рівні між собою.

1.2.2 Операції над матрицями

Додавання матриць

Сумою двох матриць $A=(a_{ij})_{m\times n}$ і $B=(b_{ij})_{m\times n}$ однакових розмірів є матриця $C=A+B$, $C=(c_{ij})_{m\times n}$, елементи якої обчислюються за правилом

$$c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}\quad (i=\overline{1,m},\quad j=\overline{1,n}). \tag{1.5}$$

Приклад.

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 7 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -5 & 8 \\ 8 & 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

Аналогічно визначається **різниця *C* двох матриць** $A=(a_{ij})_{m\times n}$ і $B=(b_{ij})_{m\times n}$**:**

$$C=A-B,\ c_{ij}=a_{ij}-b_{ij}\quad (i=\overline{1,m},\quad j=\overline{1,n}). \tag{1.6}$$

Множення матриці на число

Добутком матриці $A=(a_{ij})_{m\times n}$ **на число *к*** є матриця $B=k\cdot A,\ \ B=(b_{ij})_{m\times n}$, кожний елемент якої обчислюється за правилом $b_{ij}=ka_{ij}\ \ (i=\overline{1,m},\ \ j=\overline{1,n})$.

Приклад.

$$A=\begin{pmatrix} 7 & 5 & -4 \\ 1 & 0 & -8 \end{pmatrix},\quad k=3,\quad k\cdot A=\begin{pmatrix} 21 & 15 & -12 \\ 3 & 0 & -24 \end{pmatrix}.$$

Матрицю $-A=(-1)\cdot A$ називають **протилежною до матриці *A***.

Операції додавання, віднімання матриць і множення матриці на число мають такі властивості:

1. $A+B=B+A;$
2. $A+(B+C)=(A+B)+C;$
3. $A+O=A;$
4. $A-A=O;$
5. $E\cdot A=A;$
6. $\alpha\cdot(A+B)=\alpha\cdot A+\alpha\cdot B;$
7. $(\alpha+\beta)\cdot A=\alpha\cdot A+\beta\cdot B;$
8. $\alpha\cdot(\beta A)=(\alpha\,\beta)\cdot A,$

де A, B, C – матриці, α і β – числа.

Добуток матриць

Добутком матриць $A=(a_{ij})_{m\times n}$ і $B=(b_{ij})_{n\times k}$ є матриця $C=A\cdot B$, $C=(c_{ij})_{m\times k}$, елементи якої обчислюються за правилом

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{in}b_{nj}\quad (i=\overline{1,m},\quad j=\overline{1,k}), \tag{1.7}$$

тобто елемент i – го рядка j – го стовпця матриці добутку C дорівнює сумі добутків елементів i – го рядка матриці A на відповідні елементи j – го стовпця матриці B.

Приклад. Знайти добуток матриць $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ і $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. $A\cdot B=\begin{pmatrix} 3\cdot1+1\cdot(-2) & 3\cdot0+1\cdot4 & 3\cdot2+1\cdot3 \\ (-2)\cdot1+5\cdot(-2) & (-2)\cdot0+5\cdot4 & (-2)\cdot2+5\cdot3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 \\ -12 & 20 & 11 \end{pmatrix}.$

Зауваження. Добуток двох матриць існує тоді і тільки тоді, коли число стовпців першої матриці дорівнює числу рядків другої матриці.

Операція множення матриць має такі властивості:

1. $A\cdot(B\ \cdot C) = (A\cdot B)\ \cdot C$;
2. $A\cdot(B + C) = A\cdot B + A\cdot C$;
3. $(A + B)\cdot C = A\cdot B + A\cdot C$;
4. $\alpha\cdot(A\,B) = (\alpha A)\cdot B$

Обернена матриця

Означення. Квадратна матриця A називається **невиродженою (неособливою),** якщо її визначник відмінний від нуля: $det\,A \neq 0$. Якщо $det\,A = 0$, то матриця A називається виродженою.

Означення. Матриця A^{-1} називається **оберненою до квадратної матриці** $\boldsymbol{A}$, якщо $A\times A^{-1} = A^{-1}\times A = E$, де E – одинична матриця того ж самого порядку, що і матриця A.

Зауваження. Обернена матриця існує тільки для невироджених квадратних матриць.

Формула обчислення оберненої матриці

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}, \qquad (1.8)$$

де A_{ij} - алгебраїчні доповнення елементів a_{ij} матриці A.

Приклад. Знайти A^{-1}, якщо $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. Обчислимо визначник матриці

$$\det A = 4\cdot1\cdot0 + 3\cdot2\cdot(-2) + 1\cdot(-2)\cdot0 - (3\cdot1\cdot0 + 1\cdot(-2)\cdot0 + 4\cdot2\cdot(-2)) = -12 + 16 = 4 \neq 0,$$

тому обернена матриця існує.

Знайдемо алгебраїчні доповнення A_{ij} для кожного елемента матриці A:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 4, \quad A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -4,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 6, \quad A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -8,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -5, \quad A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 2, \quad A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 6.$$

За формулою обчислення оберненої матриці маємо:

$$A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & 0 & -4 \\ 6 & 0 & -8 \\ -5 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

1.3 Системи лінійних алгебраїчних рівнянь
1.3.1 Основні поняття

Система m лінійних рівнянь з n невідомими $x_1, x_2, \ldots, x_n$ має вигляд

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{1.9}$$

де числа a_{ij} $(i = \overline{1,m},\ \ j = \overline{1,n})$ називають **коефіцієнтами системи**, числа b_i – **вільними членами.**

Якщо хоча б одне $b_i \neq 0$, то систему (1.9) називають **неоднорідною**, у противному випадку (якщо всі вільні члени $b_i = 0,\ i = \overline{1,m}$) – **однорідною**.

Систему (1.9) можна записати у **матричному вигляді** $A \cdot X = B$,

де $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ – **матриця коефіцієнтів системи**, яку називають **основною**,

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$ – **матриця – стовпець невідомих** x_j,

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$ – **матриця – стовпець вільних членів** b_i.

Означення. Система рівнянь називається **сумісною,** якщо вона має хоча б один розв’язок, і **несумісною**, якщо вона не має жодного розв’язку.

Означення. Сумісну систему лінійних рівнянь називають **визначеною**, якщо вона має єдиний розв’язок, і **невизначеною**, якщо вона має більше одного розв’язку.

Розв’язати систему рівнянь означає дослідити її на сумісність. Якщо система сумісна, то знайти її розв’язок.

Для дослідження системи лінійних рівнянь на сумісність застосовують теорему Кронекера – Капеллі (яку пропонується розглянути самостійно; див. [13], с.23).

1.3.2 Методи розв’язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь

Формули Крамера

Розглянемо систему лінійних рівнянь (1.9), якщо $m = n = 3$ (число рівнянь і невідомих співпадають):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \qquad (1.10)$$

Визначник основної матриці системи $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ називають **головним визначником системи.**

Складемо **допоміжні визначники системи** (1.10):

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta x_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta x_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Тут Δx_i – визначник, який утворюється заміною i-го стовпця у головному визначнику стовпцем вільних членів системи.

Якщо головний визначник системи (1.10) $\Delta \neq 0$, то система має єдиний розв’язок, який визначається за формулами Крамера**:**

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta}.$$

Для системи n лінійних рівнянь із n невідомими формули

$$x_i = \frac{\Delta x_i}{\Delta}, \quad i = \overline{1, n} \qquad (1.11)$$

називають **формулами Крамера.**

Матричний спосіб

Розглянемо систему n лінійних рівнянь з n невідомими, тобто систему (1.9), якщо $n = m$. Матричний запис системи має вигляд

$$A \cdot X = B. \qquad (1.12)$$

Знайдемо розв’язок даної системи рівнянь у випадку, коли $\Delta \neq 0$. Помножимо обидві частини рівняння (1.12) зліва на матрицю A^{-1}:

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B.$$

Оскільки $A^{-1} \cdot A = E$, $E \cdot X = X$, то

$$X = A^{-1} \cdot B \qquad (1.13)$$

Знаходження розв’язку системи n лінійних рівнянь з n невідомими за формулами (1.13) називають **матричним способом розв’язання системи.**

Метод Гауса

Суть цього методу полягає у послідовному виключенні невідомих. Процес рішення за методом Гауса складається з двох етапів і з ним можна ознайомиться самостійно (див.[13], с.26).

Приклад. Розв'язати систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 2, \\ 4x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 1, \\ 5x_1 - 6x_2 + 4x_3 = 3 \end{cases}$$

а) методом Крамера;
б) матричним способом.
Зробити перевірку.

Розв'язання.

а) обчислимо визначники

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -3 & 2 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -6 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -3 & 2 \\ -1 & -5 & 2 \\ -1 & -6 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & -6 & 4 \end{vmatrix} = (-1)^{3+1}(-1)\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = (-1)(6-2) = -4,$$

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 1 & -5 & 2 \\ 3 & -6 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 7 & -2 \\ 1 & -5 & 2 \\ 0 & 9 & -2 \end{vmatrix} = (-1)^{2+1}1\begin{vmatrix} 7 & -2 \\ 9 & -2 \end{vmatrix} = (-1)(-14-(-18)) = -4,$$

$$\Delta x_2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & 2 \\ -7 & 0 & -2 \end{vmatrix} = (-1)^{2+2}1\begin{vmatrix} -5 & -2 \\ -7 & -2 \end{vmatrix} = (10-14) = -4$$

$$\Delta x_3 = \begin{vmatrix} 3 & -3 & 2 \\ 4 & -5 & 1 \\ 5 & -6 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & 7 & 0 \\ 4 & -5 & 1 \\ -7 & 9 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{2+3}1\begin{vmatrix} -5 & 7 \\ -7 & 9 \end{vmatrix} = (-1)(-45-(-49)) = -4.$$

Звідки за формулами Крамера

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta} = \frac{-4}{-4} = 1, \quad x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta} = \frac{-4}{-4} = 1, \quad x_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta} = \frac{-4}{-4} = 1.$$

б) розв'язок системи матричним способом знаходиться за формулою

$$X = A^{-1} \cdot B.$$

Складемо матриці $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -6 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$

Знайдемо обернену матрицю системи

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix},$$

для цього обчислимо алгебраїчні доповнення для кожного елемента матриці A.

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -5 & 2 \\ -6 & 4 \end{vmatrix} = -8, \qquad A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -6 & 4 \end{vmatrix} = 0, \qquad A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = 4,$$

$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}4 & 2\\ 5 & 4\end{vmatrix}=-6,\qquad A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}3 & 2\\ 5 & 4\end{vmatrix}=2,\qquad A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}3 & 2\\ 4 & 2\end{vmatrix}=2,$

$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}4 & -5\\ 5 & -6\end{vmatrix}=1,\qquad A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}3 & -3\\ 5 & -6\end{vmatrix}=3,\qquad A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}3 & -3\\ 4 & -5\end{vmatrix}=-3,$

з пункту а) відомо, що $\Delta=-4$, отже

$$X=\frac{1}{-4}\begin{pmatrix}-8 & 0 & 4\\ -6 & 2 & 2\\ 1 & 3 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 3\end{pmatrix}=\frac{1}{-4}\begin{pmatrix}(-8)\cdot 2+0\cdot 1+4\cdot 3\\ (-6)\cdot 2+2\cdot 1+2\cdot 3\\ 1\cdot 2+3\cdot 1+(-3)\cdot 3\end{pmatrix}=\frac{1}{-4}\begin{pmatrix}-4\\ -4\\ -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$$

або $x_1=1,\ \ x_2=1,\ \ x_3=1$.

Перевірка.

$$\begin{cases}3\cdot 1-3\cdot 1+2\cdot 1=2\\ 4\cdot 1-5\cdot 1+2\cdot 1=1\\ 5\cdot 1-6\cdot 1+4\cdot 1=3\end{cases},\quad \begin{cases}2=2\\ 1=1\\ 3=3\end{cases}.$$

Питання для самоперевірки

1 Дати означення визначників другого та третього порядку.
2 Дати означення мінору елемента визначника.
3 Що називають алгебраїчним доповненням елемента визначника?
4 Навести правило обчислення визначника n – го порядку.
5 Які перетворення не змінюють величину визначника?
6 Яке перетворення змінює лише знак визначника?
7 За яких умов визначник може дорівнювати нулю?
8 Дати означення матриці.
9 Що називають розміром матриці?
10 Які існують види матриць?
11 Сформулюйте правила додавання, віднімання матриць, множення матриці на число і множення матриць.
12 Яка матриця називається оберненою і за якою формулою вона знаходиться?
13 Які існують методи розв’язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь?
14 Яку систему називають лінійною?
15 Яку систему лінійних рівнянь називають сумісною, несумісною, визначеною і невизначеною?
16 Напишіть формули Крамера.
17 У чому полягає матричний спосіб розв’язання системи лінійних рівнянь?

Розділ 2 ЕЛЕМЕНТИ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ
ЛЕКЦІЇ 3-4

2.1 Основні поняття
2.2 Лінійні операції над векторами
2.3 Проекція вектора на вісь. Координати вектора
2.4 Добутки векторів та їх застосування
2.5 Правила дій над векторами, заданими своїми координатами

Величини, які повністю визначаються своїм числовим значенням, називають скалярними. Прикладами скалярів є площа, довжина, робота, маса, тощо. Інші величини, наприклад, сила, швидкість, прискорення, визначаються не тільки своїм числовим значенням, але і напрямком. Такі величини називають векторними і геометрично їх зображують за допомогою вектора.

2.1 Основні поняття

Нехай A і B – дві різні точки площини або простору.

Означення. Відрізок AB, в якому точку A вважають початком, а точку B – кінцем, називають **вектором** і позначають $\overrightarrow{AB}$ або $\vec{a}$ (скорочено: вектор – це напрямлений відрізок).

Вектор $\overrightarrow{BA}$ (у нього початок у точці B, а кінець – у точці A) називають **протилежним** вектору $\overrightarrow{AB}$.

Означення. Довжиною або модулем вектора $\overrightarrow{AB}$ називають довжину відрізка AB і позначають $\left|\overrightarrow{AB}\right|$.

Означення. Вектор, довжина якого дорівнює нулю (або одиниці) називають **нульовим** (або **одиничним**).

Нульовий вектор немає напрямку.

Означення. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, які належать одній або паралельним прямим, називають **колінеарними.**

Колінеарні вектори можуть бути напрямлені однаково або протилежно.

Означення. Два вектори називають **рівними** ($\vec{a} = \vec{b}$), якщо вони колінеарні, однаково напрямлені і мають однакову довжину.

Із означення рівності векторів випливає, що вектор можна переносити в будь – яку точку простору паралельно самому собі і при цьому отримають вектор, рівний даному.

Множину всіх векторів, які дорівнюють даному, називають **вільними векторами** і позначають малими латинськими буквами: $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

Означення. Три вектори у просторі називають **компланарними**, якщо вони належать одній або паралельним площинам.

2.2 Лінійні операції над векторами

До лінійних операцій над векторами належать операції додавання, віднімання, а також множення на число.

Додавання векторів

Під **сумою векторів** $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ і $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ (які приведені до загального початку 0) розуміють вектор $\overrightarrow{OD} = \vec{c}$, який є діагоналлю паралелограма, побудованого на даних векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (рис.2.1). Це правило додавання векторів називають **правилом паралелограма.**

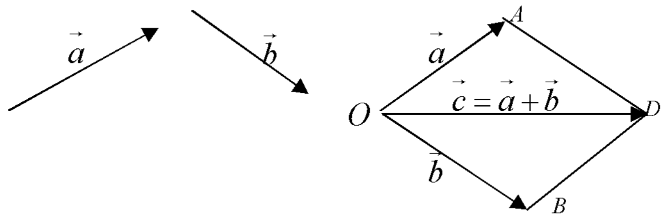


Рис.2.1

Суму векторів можна знайти за правилом трикутника (рис.2.2)

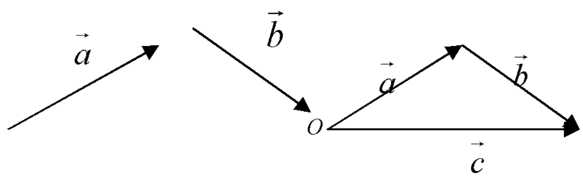


Рис.2.2

Віднімання векторів

Під **різницею векторів** $\vec{a}$ і $\vec{b}$ розуміють вектор $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ такий, що $\vec{b} + \vec{c} = \vec{a}$, тобто віднімання векторів можна замінити додаванням вектора $\vec{a}$ з вектором, протилежним вектору $\vec{b}$: $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$ (рис.2.3).

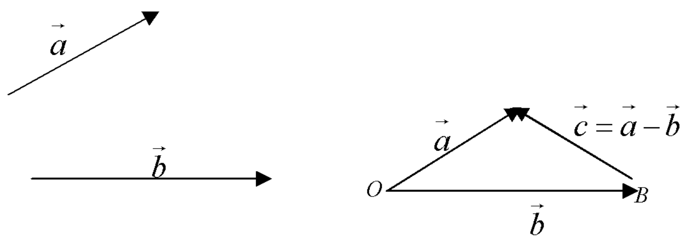


Рис.2.3

Множення вектора на число

Добутком вектора $\vec{a}$ **на число** λ називають вектор $\lambda\vec{a}$, який має напрям вектора $\vec{a}$, якщо $\lambda > 0$, і протилежний напрям, якщо $\lambda < 0$; причому довжина цього вектора дорівнює $|\lambda| \cdot |\vec{a}|$. Якщо $\lambda = 0$, то отримують **нульовий вектор** $\vec{0}$**,** тобто $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$.

Наприклад, якщо заданий вектор $\vec{a}$, то вектори -2$\vec{a}$ і 3$\vec{a}$ мають вигляд

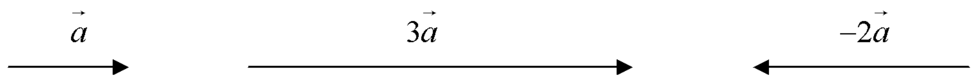


Рис.2.4

Очевидно, якщо $\vec{b} = \lambda\vec{a}$, то $\vec{b} \parallel \vec{a}$. І навпаки, якщо $\vec{b} \parallel \vec{a}$ ($\vec{a} \neq \vec{0}$), то при деякому λ виконується рівність $\vec{b} = \lambda\vec{a}$.

Основні властивості лінійних операцій над векторами:

1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (комутативний закон додавання),
2. $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ (асоціативний закон додавання),
3. $\lambda(\mu \cdot \vec{a}) = \lambda \cdot \mu \cdot \vec{a}$,
4. $(\lambda + \mu) \cdot \vec{a} = \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{a}$,
5. $\lambda \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \cdot \vec{a} + \lambda \cdot \vec{b}$.

Зауваження. Ці властивості дозволяють проводити перетворення в векторній алгебрі так, як це робиться в звичайній алгебрі.

2.3 Проекція вектора на вісь. Координати вектора

Нехай у просторі задана вісь l, тобто напрямлена пряма.

Означення. Проекцією точки *M* на вісь *l* називають основу M_1 перпендикуляра MM_1, який проведений із точки M на вісь l.

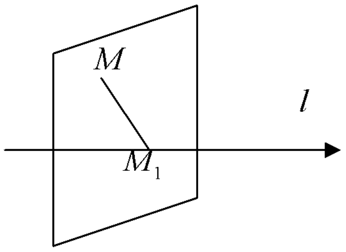


Рис.2.5

Точка M_1 є точкою перетину осі l з площиною, яка проходить через точку M і перпендикулярна цій осі (рис.2.5).

Нехай $\overrightarrow{AB}$ – довільний вектор ($\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$). Позначимо через A_1 і B_1 проекції на вісь l початку A і кінця B вектора $\overrightarrow{AB}$ (рис.2.6).

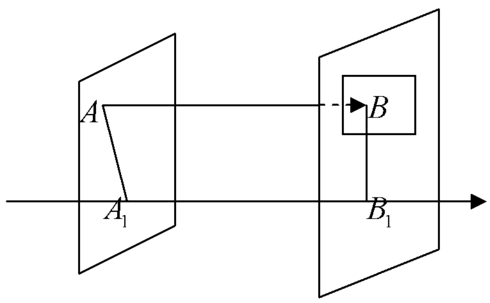


Рис.2.6

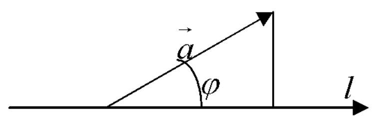


Рис.2.7

Означення. Проекцією вектора $\overrightarrow{AB}$ на вісь l називають додатне число $\left|\overrightarrow{A_1B_1}\right|$, якщо вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$ та вісь l є однаково напрямлені і від'ємне число $-\left|\overrightarrow{A_1B_1}\right|$, якщо вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$ та вісь l є протилежно напрямлені.

Проекція вектора $\overrightarrow{AB}$ на вісь l позначається $пр_l\overrightarrow{AB}$ і дорівнює добутку його довжини на косинус кута φ, який утворює цей вектор з додатним напрямком осі l (рис.2.7).

Геометрично проекцію вектора $\overrightarrow{AB}$ можна визначити довжиною відрізку A_1B_1, яка береться зі знаком „+“, якщо $0 \le \varphi \le \pi/2$, та зі знаком „ – “, якщо $\pi/2 \le \varphi \le \pi$.

Розглянемо прямокутну систему координат $Oxyz$ у просторі (див.п.3.1.1).

Означення. Трійка векторів $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ називається **координатним базисом**, якщо ці вектори задовольняють умовам:

1) $\left|\vec{i}\right| = \left|\vec{j}\right| = \left|\vec{k}\right| = 1$, тобто вектори є одиничними;

2) вектори $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ лежать відповідно на осі Ox, Oy, Oz;

3) кожен вектор $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ напрямлений у додатному напрямі своєї осі.

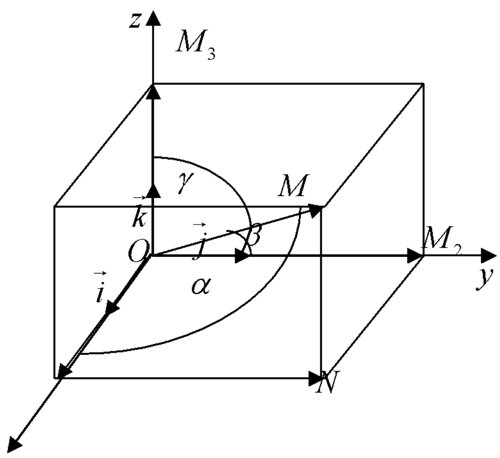


Рис.2.8

Позначимо проекції довільного вектора $\vec{a}$ на координатні осі Ox, Oy, Oz відповідно через a_x, a_y, a_z.

Будь – який вектор $\vec{a}$ ($\vec{a} = \overrightarrow{OM}$, рис.2.8) може бути розкладений за базисом $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, тобто поданий у вигляді

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}. \qquad (2.1)$$

Числа a_x, a_y, a_z називають **координатами вектора** $\vec{a}$, тобто координати вектора – це його проекції на відповідні координатні осі.

Векторну рівність $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ називають розкладом вектора за базисом і записують у символічному вигляді

$$\vec{a} = (a_x; a_y; a_z).$$

2.4 Добутки векторів

2.4.1 Скалярний добуток

Означення. Скалярним добутком двох ненульових векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають число, яке дорівнює добутку довжин векторів на косинус кута між ними.

Позначають скалярний добуток через $\vec{a}\cdot\vec{b}$ або $\left(\vec{a},\vec{b}\right)$ і за означенням

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\varphi, \tag{2.2}$$

де

$$\varphi=\left(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b}\right).$$

Формулу (2.2) можна переписати у вигляді

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|np_{\vec{a}}\vec{b}=\left|\vec{b}\right|np_{\vec{b}}\vec{a}.$$

Скалярний добуток має такі властивості :

- $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ (переставний закон),
- $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$ (сполучний закон),
- $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$ (дистрибутивний закон),
- $\vec{a}\cdot\vec{a}=\vec{a}^{\,2}=\left|\vec{a}\right|^2$

Зокрема, для скалярного добутку ортів маємо:

$$\vec{i}\cdot\vec{i}=\vec{j}\cdot\vec{j}=\vec{k}\cdot\vec{k}=1,\qquad \vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{j}\cdot\vec{k}=\vec{i}\cdot\vec{k}=0.$$

2.4.1.1 Деякі застосування скалярного добутку

Кут між векторами

Кут між двома ненульовими векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ визначається за формулою

$$\cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|}. \tag{2.3}$$

Звідси випливає **умова перпендикулярності векторів** $\vec{a}$ та $\vec{b}$:

$$\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0. \tag{2.4}$$

Проекція вектора у заданому напрямі

Проекція вектора $\vec{a}$ у напрямі вектора $\vec{b}$ визначається за формулою

$$np_{\vec{b}}\vec{a}=\frac{\overrightarrow{a\cdot b}}{\left|\vec{b}\right|}\quad\left(np_{\vec{a}}\vec{b}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|}\right). \tag{2.5}$$

Робота сталої сили (механічний зміст скалярного добутку)

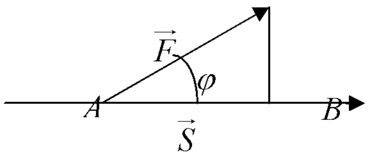


Рис.2.9

Нехай матеріальна точка переміщується прямолінійно із положення A в положення B під дією сили $\vec{F}$, яка утворює кут φ із переміщенням $\vec{S}=\overrightarrow{AB}$ (рис.2.9).

Відомо, що робота сили $\vec{F}$ при переміщенні $\vec{S}$ дорівнює

$$A = F\cdot S\cdot\cos\varphi = \vec{F}\cdot\vec{S}. \qquad (2.6)$$

Отже, робота сталої сили при прямолінійному переміщенні її точки прикладання дорівнює скалярному добутку вектора сили на вектор переміщення $A=\vec{F}\cdot\vec{S}$.

2.4.2 Векторний добуток

Означення. Векторним добутком двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають вектор $\vec{c}$, який задовольняє умовам:

1) довжина вектора $\vec{c}$ чисельно дорівнює площі паралелограма S, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (**геометричний зміст векторного добутку**), тобто
$$|\vec{c}| = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin\varphi,\quad \varphi=\left(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b}\right); \qquad (2.7)$$
2) вектор $\vec{c}$ перпендикулярний як до вектора $\vec{a}$, так і до вектора $\vec{b}$;
3) вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ утворюють праву трійку, тобто якщо дивитися з кінця вектора $\vec{c}$, то найкоротший поворот від $\vec{a}$ до $\vec{b}$ буде відбуватися проти годинникової стрілки (рис.2.10).

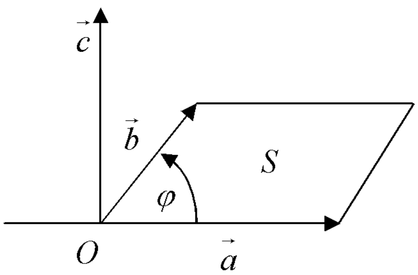


Рис.2.10

Позначають векторний добуток $\vec{a}\times\vec{b}$ або $\left[\vec{a},\,\vec{b}\right]$.

Векторний добуток векторів має такі властивості:

- $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$ (антипереставний закон);
- $\lambda(\vec{a}\times\vec{b})=(\lambda\vec{a})\times\vec{b}=\vec{a}\times(\lambda\vec{b})$ (асоціативний закон відносно множення на число);
- $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$ (дистрибутивний закон відносно додавання).

2.4.2.1 Деякі застосування векторного добутку

Площа паралелограма і трикутника

З означення векторного добутку векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ маємо $|\vec{c}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin\left(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b}\right)$, (рис.2.10), тобто

$$S_{пар}=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|. \qquad (2.8)$$

Момент сили відносно точки

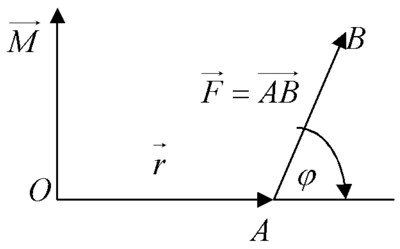


Рис.2.11

Якщо сила $\vec{F}$ прикладена до точки A (рис.2.11), то момент сили $\vec{F}$ відносно точки O є вектор $\vec{M}$, який дорівнює векторному добутку радіус – вектора точки прикладання $\vec{r}=\overrightarrow{OA}$ на вектор сили $\vec{F}$:

$$\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F}. \qquad (2.9)$$

Колінеарність векторів

Два ненульових вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ **колінеарні** тоді і тільки тоді, коли їх векторний добуток дорівнює нульовому вектору:

$$\vec{a}\,||\,\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}. \qquad (2.10)$$

Лінійна швидкість обертання

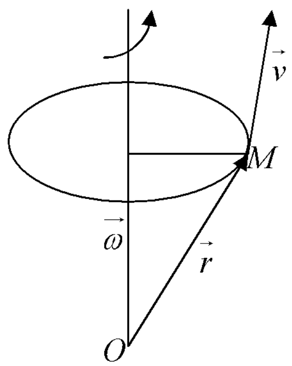


Рис.2.12

Швидкість $\vec{v}$ точки твердого тіла, яке обертається навколо нерухомої осі з кутовою швидкістю $\vec{\omega}$ визначається формулою Ейлера

$$\vec{v}=\vec{\omega}\times\vec{r},\quad \vec{r}=\overrightarrow{OM},$$

де O – деяка нерухома точка осі (рис.2.12).

2.4.3 Мішаний добуток трьох векторів

Означення. Мішаним добутком трьох векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ називають число, яке дорівнює векторному добутку $\vec{a}\times\vec{b}$, помноженому скалярне на вектор $\vec{c}$, тобто $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}$.

Позначають мішаний добуток $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}$ або $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$,

тобто

$$\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}=\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}. \qquad (2.11)$$

Мішаний добуток трьох векторів має такі властивості:

- Мішаний добуток не змінюється, якщо поміняти місцями знаки векторного і скалярного добутку

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c});$$

- Мішаний добуток змінює знак від переставлення двох будь-яких співмножників
$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = -(\vec{a}\times\vec{c})\cdot\vec{b} = -(\vec{c}\times\vec{b})\cdot\vec{a};$$
- Абсолютна величина мішаного добутку трьох векторів дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на цих векторах (**геометричний зміст мішаного добутку).**

2.4.3.1 Деякі застосування мішаного добутку

Об'єм паралелепіпеда і трикутної піраміди

Об'єми паралелепіпеда $V_{пар}$ і трикутної піраміди $V_{пір}$ з ребрами $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ визначаються формулами
$$V_{пар} = |\ \vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}\ |, \tag{2.12}$$
$$V_{пір} = \frac{1}{6}|\ \vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}\ |. \tag{2.13}$$

Умова компланарності векторів

Вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ **компланарні** тоді і тільки тоді, коли їх мішаний добуток дорівнює нулю **(**$\vec{a}\neq\vec{0}$, $\vec{b}\neq\vec{0}$, $\vec{c}\neq\vec{0}$):
$$\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}\ -\ \text{компланарні}\ \Leftrightarrow\ \vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c} = 0. \tag{2.14}$$

Взаємна орієнтація векторів у просторі

Визначення взаємної орієнтації векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ базується на таких правилах:

якщо $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c} > 0$, то $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ – права трійка;

якщо $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c} < 0$, то $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ – ліва трійка.

2.5 Правила дій над векторами, заданими координатами

Будемо вважати, що у базисі ($\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$) вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ задано координатами $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$, $\vec{b} = (b_x; b_y; b_z)$, $\vec{c} = (c_x; c_y; c_z)$.

1**)** Якщо в прямокутній системі координат $Oxyz$ задано вектор $\overrightarrow{AB}$, причому його початкова і кінцева точки мають координати $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$ відповідно, то вектор $\overrightarrow{AB}$ має координати
$$\overrightarrow{AB} = \left(x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\right).$$

2) **Довжина вектора** $\vec{a}$ обчислюється за формулою
$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \tag{2.15}$$

3) **Орт вектора** $\vec{a}$ визначається рівністю
$$\vec{a}^0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \left(\frac{a_x}{|\vec{a}|}; \frac{a_y}{|\vec{a}|}; \frac{a_z}{|\vec{a}|}\right). \tag{2.16}$$

4)**Координати суми (різниці) векторів** дорівнюють сумі (різниці) відповідних координат доданків:

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \pm b_x; a_y \pm b_y; a_z \pm b_z). \qquad (2.17)$$

Це правило випливає з властивостей проекції вектора на вісь.

5) **Координати добутку вектора на число** дорівнюють добутку відповідних координат даного вектора на це число

$$\lambda\vec{a} = (\lambda a_x; \lambda a_y; \lambda a_z). \qquad (2.18)$$

6) **Скалярний добуток двох векторів** дорівнює сумі добутків відповідних координат цих векторів

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z. \qquad (2.19)$$

Доведення. $\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}) \cdot (b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}) =$

$$= a_x b_x \vec{i}^2 + a_x b_y \vec{i} \cdot \vec{j} + a_x b_z \vec{i} \cdot \vec{k} + a_y b_x \vec{j} \cdot \vec{i} + a_y b_y \vec{i}^2 + a_y b_z \vec{j} \cdot \vec{k} + a_z b_x \vec{k} \cdot \vec{i} + a_z b_y \vec{k} \cdot \vec{j} + a_z b_z \vec{k}^2 =$$

$$= \left| \ \vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1, \ \ \vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0 \ \right| =$$

$$= a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z.$$

7) **Векторним добутком двох векторів** є вектор, який можна записати у вигляді визначника третього порядку:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \qquad (2.20)$$

Доведення цієї формули аналогічно доведенню формули скалярного добутку.

8) **Мішаним добутком векторів** $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ є число, яке дорівнює значенню визначника третього порядку:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \qquad (2.21)$$

9) **Косинус кута між двома векторами** обчислюється з векторної рівності

$$\cos\varphi = \cos(\vec{a} \,\hat{,}\, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

або у координатному вигляді

$$\cos\varphi = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}. \qquad (2.22)$$

10) **Умова колінеарності двох векторів** рівносильна рівності

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \ \text{ або } \ \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}, \text{тобто}$$

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}. \qquad (2.23)$$

11) **Умова перпендикулярності двох векторів** $\vec{a}$, $\vec{b}$ рівносильна рівності:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=0,$$

тобто у координатному вигляді

$$\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0. \qquad (2.24)$$

Приклад. Дано вектори $\vec{a}=(-1;2;5)$, $\vec{b}=(3;1;-2)$, $\vec{c}=(4;1;7)$. Необхідно:

1) знайти орти векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$;

2) перевірити, чи є вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ попарно перпендикулярними;

3) перевірити вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ на колінеарність;

4) перевірити, чи є вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ компланарними;

5) знайти площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

6) обчислити об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

Розв'язання. 1) Скористаємося формулами

$$\vec{a}^0=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\left(\frac{a_x}{|\vec{a}|};\frac{a_y}{|\vec{a}|};\frac{a_z}{|\vec{a}|}\right), \text{ де } |\vec{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}.$$

Дійсно,

$$|\vec{a}|=\sqrt{1+4+25}=\sqrt{30};\ \vec{a}^0=\left(\frac{-1}{\sqrt{30}};\frac{2}{\sqrt{30}};\frac{5}{\sqrt{30}}\right).$$

$$|\vec{b}|=\sqrt{9+1+4}=\sqrt{14};\ \vec{b}^0=\left(\frac{3}{\sqrt{14}};\frac{1}{\sqrt{14}};\frac{-2}{\sqrt{14}}\right).$$

$$|\vec{c}|=\sqrt{16+1+49}=\sqrt{66};\ \vec{c}^0=\left(\frac{4}{\sqrt{66}};\frac{1}{\sqrt{66}};\frac{7}{\sqrt{66}}\right).$$

2) Скористаємося умовою перпендикулярності

$$\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0,$$

$$\vec{a}\perp\vec{c}\Leftrightarrow a_xc_x+a_yc_y+a_zc_z=0,$$

$$\vec{b}\perp\vec{c}\Leftrightarrow b_xc_x+b_yc_y+b_zc_z=0.$$

Обчислимо скалярні добутки векторів

$\vec{a}\cdot\vec{b}=(-1)\cdot3+2\cdot1+5\cdot(-2)=-11\neq0$, тобто вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ не перпендикулярні;

$\vec{a}\cdot\vec{c}=(-1)\cdot4+2\cdot1+5\cdot7=33\neq0$, тобто вектори $\vec{a}$ і $\vec{c}$ не перпендикулярні;

$\vec{b}\cdot\vec{c}=3\cdot4+1\cdot1+(-2)\cdot7=-1\neq0$, тобто вектори $\vec{b}$ і $\vec{c}$ не перпендикулярні.

3) Скористаємося умовою колінеарності

$$\vec{a}\parallel\vec{b}\Leftrightarrow \frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}$$

$\frac{-1}{3}\neq\frac{2}{1}\neq\frac{5}{-2}$, тобто вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ не колінеарні;

4) Скористаємось умовою компланарності трьох векторів

$$\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}=0 .$$

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=\begin{vmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 7 \end{vmatrix}=-7-16+15-(20+42+2)=-72 ,$$

$\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}\neq 0$, тобто вектори $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ не компланарні.

5) Площу паралелограма знайдемо за формулою:

$$S_{пар}=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\left\|\begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{matrix}\right\| ,$$

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}=\vec{i}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}-\vec{j}\cdot\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}+\vec{k}\cdot\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=-9\vec{i}+13\vec{j}-7\vec{k} .$$

Отже, $S_{пар}=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\sqrt{(-9)^2+13^2+(-7)^2}=\sqrt{299}$ (кв.од.).

6) **О**б’єм паралелепіпеда знайдемо за допомогою формули

$$V=\left|\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}\right|=\left\|\begin{matrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{matrix}\right\| .$$

Отже, $V=\left\|\begin{matrix} -1 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & -7 \end{matrix}\right\|=|26|=26$ (куб.од.).

Питання для самоперевірки

1 Дайте означення вектора і його довжини.
2 Що називається базисом на площині та у просторі?
3 Які вектори називають колінеарними, компланарними, рівними між собою?
4 Що називають координатами вектора?
5 Як розкласти вектор за координатним базисом?
6 Як визначаються операції додавання, віднімання, множення на число?
7 Що називається скалярним, векторним, мішаним добутком векторів?
8 Як виконуються операції над векторами, які задані координатами?
9 Сформулюйте умови паралельності, перпендикулярності і компланарності векторів.
10 Сформулюйте приклади застосування скалярного, векторного, мішаного добутків.

Розділ 3 АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ НА ПЛОЩИНІ

ЛЕКЦІЇ 5-6

3.1 Системи координат на площині та їх перетворення

3.2 Лінії на площині та їх рівняння

В архітектурному проектуванні та практиці будівництва накопичений великий досвід з використання різних кривих , поверхонь та їх сполучень. За кривими лініями окреслюються різні просторі форми – арки, склепіння тощо. Криві лінії використовують для утворення поверхонь різних архітектурних об'єктів і конструкцій, будівель – покриттів у вигляді оболонок , склепінь і куполів, пандусів і гвинтових сходів. Криві лінії також можуть бути результатом перетину поверхонь, граничними контурами поверхонь тощо. Якщо всі точки кривої лінії належать одній площині, то така крива називається плоскою (наприклад, коло, еліпс, гіпербола). Такі криві будуть розглядатися у цьому розділі. Якщо крива не лежить усіма своїми точками в площині, то вона називається просторою (наприклад, гвинтова лінія).

В аналітичній геометрії геометричні об'єкти (криві, поверхні) вивчаються за допомогою методів алгебри. В основі такого вивчення лежить метод координат. Таким чином, за допомогою методу аналітичної геометрії з геометричними об'єктами зіставляються їх рівняння і за даними рівняннями об'єктів з'ясовуються їх геометричні властивості.

3.1 Системи координат на площині

3.1.1 Основні поняття

Під системою координат на площині треба розуміти спосіб, який дозволяє чисельно визначити положення точки на площині. Важливими координатними системами на площині є прямокутна (декартова) і полярна системи.

Прямокутна система координат

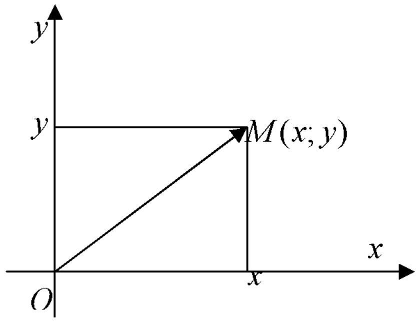


Рис.3.1

Прямокутна система координат на площині визначається двома взаємно перпендикулярними напрямними прямими – осями координат (Ox – вісь абсцис, Oy – вісь ординат), на кожній із яких вибраний одиничний відрізок (масштаб). Точка перетину осей координат O називається початком координат (рис.3.1).

Систему координат позначають через Oxy, а площину, в якій розташована система координат, називають **координатною площиною**.

Аналогічно визначається прямокутна система координат у просторі (за допомогою трьох координатних осей Ox, Oy, Oz).

Розглянемо довільну точку M площини Oxy. Вектор $\overrightarrow{OM}$ називають радіус – вектором точки M.

Координатами точки M у системі координат Oxy називають координати радіус – вектора $\overrightarrow{OM}$. Якщо $\overrightarrow{OM}=(x;y)$, то координати точки M записуються так: $M(x;\ y)$, де x називають **абсцисою**, а y – **ординатою точки** M.

Полярна система координат

Полярна система координат визначається наданням точці О, яка називається **полюсом**, променя OP, який називається **полярною віссю** і відрізком OE (**масштабом**) (рис.3.2).

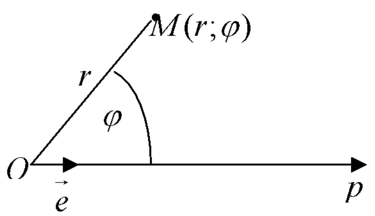


Рис.3.2

Положення точки M у полярній системі координат визначається двома числами: її відстанню $\boldsymbol{r}$ від полюса O, яку називають **полярним радіусом**, і кутом $\varphi=\angle POM$, який утворюється відрізком OM із полярною віссю і називається **полярним кутом.** При цьому підрахунок кутів виконують у напрямі, який є протилежним руху годинникової стрілки. Числа r і φ називають **полярними координатами точки M** і записують $M(r,\ \varphi)$

Для здобуття всіх точок площини достатньо полярний кут φ обмежити проміжком $(-\pi;\pi]$(або $0\le\varphi<2\pi$), а полярний радіус – проміжком $[0;+\infty)$. У цьому випадку кожній точки площині (крім O) відповідає єдина пара чисел r і φ та навпаки.

Зв'язок між прямокутними і полярними координатами

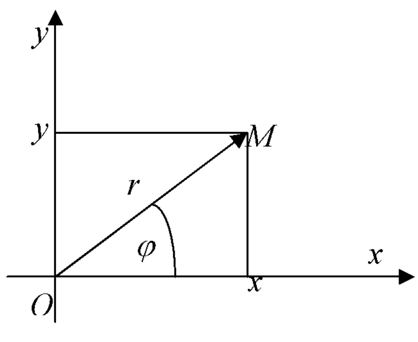


Рис.3.3

Нехай x і y – прямокутні координати точки M у системі координат Oxy, а r і φ – її полярні координати при відповідному виборі координатних систем (рис.3.3).

Прямокутні координати точки M виражаються через її полярні координати таким чином:

$$\begin{cases} x=r\cos\varphi; \\ y=r\sin\varphi. \end{cases} \qquad (3.1)$$

Полярні координати точки M виражаються через її прямокутні координати таким чином:

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2}; \\ tg\varphi = y / x. \end{cases} \qquad (3.2)$$

Приклад. Дано точка $M(-1; -\frac{\sqrt{3}}{3})$. Знайти полярні координати точки M.

Розв'язання. Знайдемо r і φ:

$$r = \sqrt{1 + 1/3} = 2/\sqrt{3}, \quad tg\varphi = \frac{-\sqrt{3}/3}{-1} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

звідки $\varphi = \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z$.

Оскільки точка M належить до 3-ої чверті, то $n = -1$ і $\varphi = \frac{\pi}{6} - \pi = -\frac{5\pi}{6}$.

Отже, полярні координати точки M: $r = 2/\sqrt{3},\ \varphi = -\frac{5\pi}{6}$ або $M\left(2/\sqrt{3}; -\frac{5\pi}{6}\right)$.

3.1.2 Основні застосування метода координат на площині

Відстань між двома точками

Визначимо відстань між точками $A(x_1; y_1)$ і $B(x_2; y_2)$ на площині Oxy. Шукана відстань d дорівнює довжині вектора $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1)$, $d = \left|\overrightarrow{AB}\right|$, тобто

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\,. \qquad (3.3)$$

Поділ відрізка у заданому відношенні

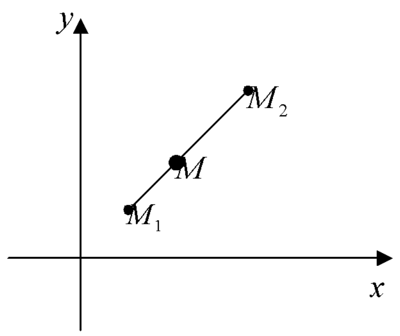


Рис 3.4

Поділимо відрізок M_1M_2, де точки M_1 і M_2 мають координати $M_1(x_1; y_1)$, $M_2(x_2; y_2)$, у відношенні $\lambda > 0$, тобто визначимо координати такої точки $M(x; y)$ (рис.3.4) відрізка M_1M_2, що

$$\frac{M_1M}{MM_2} = \lambda\,.$$

Але $\overrightarrow{M_1M} = (x - x_1; y - y_1)$, тобто $\overrightarrow{M_1M} = (x - x_1)\vec{i} + (y - y_1)\vec{j}$ та $\overrightarrow{MM_2} = (x_2 - x; y_2 - y)$, тобто $\overrightarrow{MM_2} = (x_2 - x)\vec{i} + (y_2 - y)\vec{j}$. Отже, $(x - x_1)\vec{i} + (y - y_1)\vec{j}$ = $\lambda(x_2 - x)\vec{i} + \lambda(y_2 - y)\vec{j}$. Оскільки рівні вектори мають рівні відповідні координати, то

$$\begin{cases} x - x_1 = \lambda x_2 - \lambda x, \\ y - y_1 = \lambda y_2 - \lambda y, \end{cases}$$

тобто

$$\begin{cases} x = \dfrac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \\ y = \dfrac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}. \end{cases} \tag{3.4}$$

Ці формули називають **формулами поділу відрізка у заданому відношенні.** Зокрема, при $\lambda = 1$ визначається середина відрізка M_1M_2 за формулами

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}. \tag{3.5}$$

Зауваження. Якщо $\lambda = 0$, то точки M_1 і M співпадають, якщо $\lambda < 0$ ($\lambda \neq -1$), то точка M лежить зовні відрізка M_1M_2 і говорять, що **точка *M* поділяє відрізок M_1M_2 зовнішнім чином.**

Площа трикутника

Якщо точки $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$, $C(x_3;y_3)$ – вершини трикутника ABC, то можна довести, що його площа обчислюється за формулами:

$$S = \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_3 - x_1 & x_2 - x_1 \\ y_3 - y_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix}$$

або

$$S = \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Пропонуємо ці формули довести самостійно.

3.1.3 Перетворення системи координат

Задача перетворення системи координат полягає у встановленні залежності між координатами довільної точки площини в різних системах координат.

Паралельний перенос осей

Під паралельним переносом осей координат розуміють перехід від системи координат Oxy до нової системи $O_1x_1y_1$, при якому змінюється положення початку координат, а напрямок осей і масштаб залишаються незмінними.

Нехай початок нової системи координат (точка O_1) має координати $(x_0;\ y_0)$ у старій системі координат, тобто $O_1(x_0;\ y_0)$. Позначимо через $(x;\ y)$ і $(x';y')$ координати довільної точки M площини відповідно в системі координат Oxy і в новій системі $O_1x_1y_1$ (рис. 3.5)

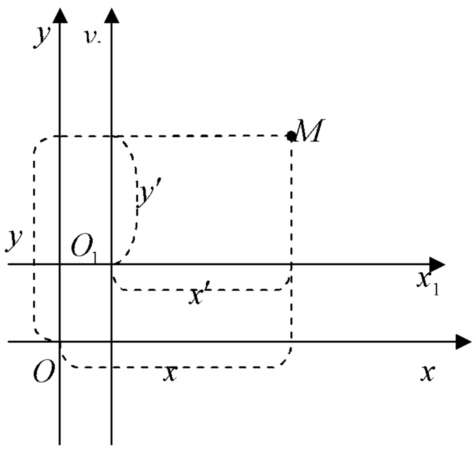


Рис.3.5

Легко встановити зв'язок між старими $(x; y)$ і новими $(x'; y')$ координатами:

$$\begin{cases} x = x' + x_0, \\ y = y' + y_0. \end{cases} \qquad (3.6)$$

Зауваження. Існують інші види перетворення координат, наприклад, поворот осей (див.[13], с. 52).

3.2 Лінії на площині

3.2.1 Основні поняття

Лінію на площині часто задають як множину точок, які мають будь – яку загальну, тільки їм притаманну геометричну властивість. Таку множину ще називають **геометричним місцем точок** (ГМТ). Тобто лінію на площині можна розглядати як ГМТ.

Наприклад, колом називають ГМТ, рівновіддалених від однієї даної точки (центра кола); серединний перпендикуляр – це ГМТ, рівновіддалених від кінців цього відрізка і т.д.

Введення на площині системи координат дозволяє визначати положення точки площини, якщо задати два числа – її координати, а положення лінії на площині визначають за допомогою її рівняння.

Означення. Рівнянням лінії (або кривої) на площині називають рівняння, яке зв'язує змінні (x і y – у декартовій системі координат, r і φ – у полярній системі координат), якому задовольняють координати будь – якої точки цієї лінії і не задовольняють координати жодної точки, яка не належить їй.

Рівняння лінії у прямокутній системі координат має вигляд

$$y = f(x) \text{ або } F(x; y) = 0.$$

Змінні x і y називають **поточними координатами.**

У полярній системі координат рівняння лінії задається рівностями вигляду

$$r = f(\varphi) \text{ або } F(r;\varphi) = 0.$$

Зауваження. Не кожне рівняння $F(x;y)=0$ визначає деяку лінію. Наприклад, рівняння $x^2+y^2=0$ визначає точку $O(0;\ 0)$, а рівняння $x^2+y^2+1=0$ не визначає ніякого геометричного об’єкта.

Лінію на площині можна задати **параметричними рівняннями** вигляду:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \qquad (3.7)$$

де x і y – координати довільної точки $M(x;\ y)$ на лінії, а t – змінна, яку називають **параметром**. Параметр t визначає положення точки $(x;\ y)$ на площині.

Наприклад, параметричні рівняння

$$\begin{cases} x = t, \\ y = t^2, \end{cases}$$

задають параболу $y=x^2$ (це легко отримати підстановкою $t = x$ до другого рівняння).

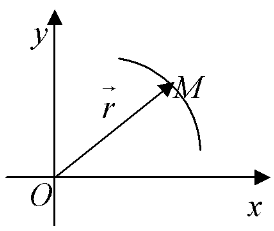


Рис.3.6

Лінію на площині можна задати **векторним рівнянням**

$$\vec{r} = \vec{r}(t), \qquad (3.8)$$

де t – скалярний змінний параметр.

Кожному значенню t_0 відповідає певний вектор $\vec{r_0} = \vec{r}(t_0)$ площини. Якщо параметр t змінюється, то кінець вектора $\vec{r} = \vec{r}(t)$ описує деяку лінію (рис.3.6).

Векторному рівнянню відповідає два скалярних рівняння (3.7).

Рівняння лінії дозволяє вивчення геометричних властивостей лінії замінити дослідженням її рівняння. Так, для встановлення приналежності точки $A(x_0;\ y_0)$ до даної лінії достатньо перевірити, чи задовольняють координати точки A рівнянню цієї лінії у вибраній системі координат.

Приклад. Перевірити, чи належать точки $A(1\ ;\ 0)$ і $B(1;\ 1)$ лінії $x^2+y^2=1$.

Розв’язання. Підставимо до рівняння лінії замість x і y координати точки A й отримаємо рівність $1 + 0 = 1$. Це означає, що точка A належить цій лінії.

Точка B не належить даній лінії, оскільки $1 + 1 \neq 1$.

Задача знаходження точок перетину двох ліній, які задані рівняннями $F_1(x;y)=0$ і $F_2(x;y)=0$, зводиться до визначення точок, координати яких задовольняють рівнянням обох ліній, тобто зводиться до розв'язання системи рівнянь:

$$\begin{cases} F_1(x;y)=0, \\ F_2(x;y)=0. \end{cases}$$

Приклад. Знайти точку перетину ліній $x+y=4$ і $x^2+y^2=16$.

Розв'язання. Для знаходження точок перетину ліній розв'яжемо систему рівнянь

$$\begin{cases} x+y=4, \\ x^2+y^2=16, \end{cases} \text{ тобто } \begin{cases} x=4-y, \\ (4-y)^2+y^2=16, \end{cases}$$

звідки $16-8y+y^2+y^2=16$; $2y^2-8y=0$; $y(y-4)=0$; $y_1=0$; $y_2=4$; $x_1=4$; $x_2=0$.

Отже, лінії перетинаються у двох точках $M_1(4;0)$, $M_2(0;4)$.

3.2.2 Рівняння прямої на площині. Основні задачі

Пряму ще називають лінією першого порядку. Різним способам завдання прямої відповідають у прямокутній системі координат різні вигляди її рівнянь.

Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом

Нехай на площині Oxy положення прямої визначається ординатою b точки N перетину прямої з віссю Oy і кутом нахилу α прямої до осі Ox (рис.3.7).

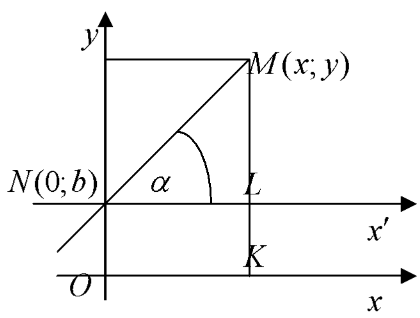


Рис.3.7

Під **кутом нахилу прямої до осі *Ox*** розуміють той кут, на який треба повернути вісь Ox проти годинникової стрілки, щоб вона збіглась із даною прямою. Число $k=tg\alpha$ називають **кутовим коефіцієнтом**. Складемо рівняння прямої, для цього візьмемо довільну точку $M(x;y)$, яка належить цій прямій. З рис.3.7 видно

$$MK=ML+LK,$$

тобто

$$y=tg\alpha\cdot x+b.$$

Позначимо через $k=tg\alpha$ і отримаємо рівняння

$$y=kx+b, \tag{3.9}$$

якому задовольняють координати будь – якої точки $M(x;y)$ на прямій. Можна показати, що координати будь – якої точки $P(x;y)$, яка не належить даній прямій, отриманому рівнянню не задовольняють.

Загальне рівняння прямої

Розглянемо рівняння першого степеня відносно x і y у загальному вигляді:

$$Ax+By+C=0,$$

де

$$A^2 + B^2 \neq 0.$$

Покажемо, що це рівняння є рівнянням прямої. Дійсно, вважаючи, що $B \neq 0$, розв'яжемо його відносно змінної y:

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}.$$

Якщо позначити $-\frac{A}{B} = k$; $-\frac{C}{B} = b$, то останнє рівняння матиме вигляд $y = kx + b$, тобто отримали рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом. Також можна показати, що будь – яка пряма визначається рівнянням

$$Ax + By + C = 0, \tag{3.10}$$

яке називають **загальним рівнянням прямої на площині.**

Дослідження загального рівняння прямої на площині

- Якщо $A = 0$, то рівняння набуває вигляду $y = -\frac{C}{B}$ і визначає пряму, яка паралельна осі Ox;
- Якщо $B = 0$, то пряма паралельна осі Oy;
- Якщо $C = 0$, то рівняння має вигляд $Ax + By = 0$ і визначає пряму, яка проходить через початок координат;
- Якщо $A = C = 0$, то рівняння має вигляд $y = 0$ і визначає вісь Ox;
- Якщо $B = C = 0$, то рівняння набуває вигляду $x = 0$ і визначає вісь Oy.

Рівняння прямої, яка проходить через задану точку в заданому напрямі

Треба скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $M(x_0;y_0)$ і її напрям визначається кутовим коефіцієнтом k. Скористаємося рівнянням $y = kx + b$, де $в$ – поки невідома величина. Оскільки пряма проходить через точку $M(x_0;y_0)$, то координати цієї точки задовольняють рівнянню прямої, отже, $b = y_0 - kx_0$. Таким чином, шукане рівняння прямої має вигляд

$$y = kx + y_0 - kx_0,$$

тобто

$$y - y_0 = k(x - x_o). \tag{3.11}$$

Отримане рівняння з різними значеннями k називають **рівнянням в'язки прямих із центром у точці** $M(x_0;y_0)$.

Рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки

Треба скласти рівняння прямої, яка проходить через точки $M_1(x_1; y_1)$ і $M_2(x_2;y_2)$. Скористаємось рівнянням прямої, яка проходить через точку M_1

$$y - y_1 = k(x - x_1),$$

де k – поки невідомий коефіцієнт. Оскільки пряма проходить через точку M_2, то координати цієї точки задовольняють рівняння:

$$y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1).$$

Звідси знаходимо

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Отже, шукане рівняння має вигляд

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}. \quad (3.12)$$

Рівняння прямої у відрізках

Нехай пряма перетинає вісь Ox у точці $M_1(a; 0)$, а вісь Oy – у точці $M_2(0; в)$, де $a \neq 0$, $b \neq 0$ (рис.3.8).

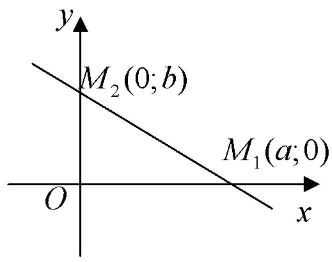


Рис.3.8

У цьому випадку рівняння прямої, яка проходить через дві точки, має вигляд

$$\frac{y-0}{b-0} = \frac{x-a}{0-a}$$

або

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad (3.13)$$

Рівняння прямої, яка проходить через задану точку і перпендикулярна даному вектору

Треба скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(x_0; y_0)$ і перпендикулярна вектору $\vec{n} = (A; B)$ (рис.3.9).

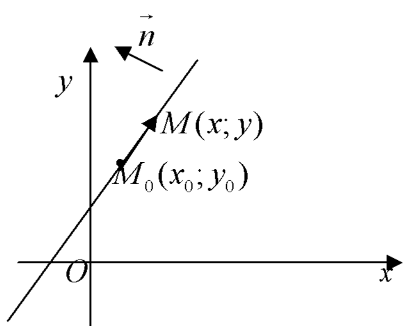


Рис.3.9

Нехай $M(x; y)$ – довільна точка на прямій. Будуємо вектор $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0; y - y_0)$. Оскільки вектори $\vec{n}$ і $\overrightarrow{M_0M}$ перпендикулярні, то їх скалярний добуток дорівнює нулю: $\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0$, тобто

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0. \quad (3.14)$$

Вектор $\vec{n} = (A; B)$, який є перпендикулярним прямій, називають **нормальним вектором прямої** (геометричний зміст коефіцієнтів загального рівняння прямої).

Відстань від точки до прямої

Треба знайти відстань від точки $M_0(x_0;\ y_0)$ до прямої L, яка задана загальним рівнянням $Ax+By+C=0$ (рис.3.10).

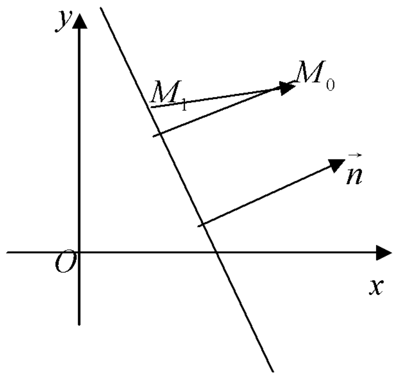


Рис.3.10

Відстань d від точки M_0 до прямої L дорівнює модулю проекції вектора $\overrightarrow{M_1M_0}$ на напрям нормального вектора $\vec{n}=(A;B)$, де $M_1(x_1;\ y_1)$ – довільна точка, яка належить прямій L :

$$d=\left|np_{\vec{n}}\overrightarrow{M_1M_0}\right|=\left|\frac{\overrightarrow{M_1M_0}\cdot\vec{n}}{|\vec{n}|}\right|=$$

$$=\frac{|(x_0-x_1)A+(y_0-y_1)B|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{|Ax_0+By_0-Ax_1-By_1|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

Оскільки точка $M_1(x_1;\ y_1)$ належить прямій L, то $Ax_1+By_1+C=0$.

Отже,

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}. \qquad (3.15)$$

Кут між двома прямими

Нехай прямі L_1 і L_2 задані рівняннями: $y=k_1x+b_1$ і $y=k_2x+b_2$ (рис.3.11.).

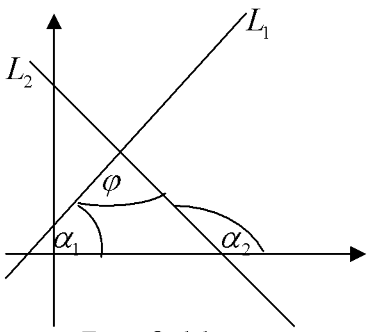


Рис.3.11

Знайдемо кут φ, на який треба повернути у додатному напрямі пряму L_1 навколо точки їх перетину до прямої L_2, щоб вони збіглися.

Маємо $\varphi=\alpha_2-\alpha_1$, тоді

$$tg\varphi=tg(\alpha_2-\alpha_1)=\frac{tg\alpha_2-tg\alpha_1}{1+tg\alpha_1\cdot tg\alpha_2}.$$

Але $tg\alpha_1=k_1$, $tg\alpha_2=k_2$, тому

$$tg\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1\cdot k_2}. \qquad (3.16)$$

Якщо потрібно обчислити гострий кут між прямими, то застосовують формулу

$$tg\varphi=\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right|.$$

З формули кута між прямими L_1 і L_2 випливає **умова паралельності двох прямих:**

$$k_1=k_2 \text{ або } \frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2} \qquad (3.17)$$

і **умова перпендикулярності двох прямих:**

$$k_1 \cdot k_2 = -1 \text{ або } A_1A_2 + B_1B_2 = 0. \tag{3.18}$$

Взаємне розташування двох прямих на площині

Нехай маємо дві прямі

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \text{ і } A_2x + B_2y + C_2 = 0.$$

Розглянемо систему двох рівнянь

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0. \end{cases}$$

Обчислимо визначники

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = A_1B_2 - A_2B_1,$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -C_1 & B_1 \\ -C_2 & B_2 \end{vmatrix} = -C_1B_2 + C_2B_1,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} A_1 & -C_1 \\ A_2 & -C_2 \end{vmatrix} = -A_1C_2 + A_2C_1.$$

Можливі такі випадки:

1) якщо $\Delta \neq 0$, то система має єдиний розв'язок, який визначається за допомогою формул Крамера:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}; \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}.$$

Цей випадок означає, що прямі перетинаються.

2) якщо $\Delta = 0$ і при цьому відмінний від нуля хоча б один із визначників Δ_x, Δ_y, то система розв'язків не має; тобто прямі паралельні.

3) Якщо $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = 0$, то система має нескінчену множину розв'язків, тобто прямі збігаються.

Приклад. Дано координати вершин трикутника ABC:

$$A(3;-2);\ B(1;4);\ C(-2;1).$$

Необхідно:

1) скласти рівняння сторони AB і визначити її кутовий коефіцієнт;
2) скласти рівняння висоти, яка проведена з вершини C;
3) скласти рівняння прямої, яка проведена з вершини C паралельно AB;
4) знайти довжину висоти трикутника, проведеної з вершини C;
5) визначити точку перетину прямих AB і CD;
6) обчислити тангенс кута між прямими AC и BC;
7) виконати рисунок.

Розв'язання.

1) Скористаємось рівнянням прямої, яка проходить через дві точки

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$$, де $A(x_2;y_2)$, $B(x_1;y_1)$;

отримаємо

$$\frac{x-1}{3-1}=\frac{y-4}{-2-4};\ \frac{x-1}{2}=\frac{y-4}{-6};\qquad -3(x-1)=y-4\,.$$

Отже, рівняння прямої AB: $3x+y-7=0$.

Кутовий коефіцієнт прямої AB: $k_{AB}=-\frac{A}{B}=-3$.

2) Складемо рівняння висоти, яка проведена з вершини C, тобто рівняння прямої $CD\perp AB$.

З умови перпендикулярності двох прямих маємо

$$k_1\cdot k_2=-1,$$

тобто

$$k_{CD}=-\frac{1}{k_{AB}},\ \text{звідки}\ \ k_{CD}=\frac{1}{3}.$$

Скористаємось рівнянням в'язки прямих, які проходять через точку $C(x_0;y_0)$:

$$y-y_0=k(x-x_0)\quad.$$

Таким чином, рівняння прямої CD: $y-1=\frac{1}{3}(x+2)$ або $x-3y+5=0$.

3) Складемо рівняння прямої $CK\parallel AB$. З умови паралельності прямих маємо:

$$k_{CK}=k_{AB}=-3\,.$$

Таким чином, рівняння прямої CK: $y-1=-3(x+2)$ або $3x+y+5=0$.

4) скористаємось формулою відстані від точки $C(x_0;y_0)$ до прямої $Ax+By+C=0$:

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}\ ,$$

тобто

$$d=\frac{|3\cdot(-2)+1-7|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\frac{12}{\sqrt{10}}.$$

5) визначимо точку D перетину прямих AB і CD, для цього розв'яжемо систему їх рівнянь:

$$\begin{cases}3x+y-7=0,\\ x-3y+5=0.\end{cases}$$

Скористаємось формулами Крамера.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -9-1=-10,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ -5 & -3 \end{vmatrix} = -21+5=-16,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = -15-7=-22,$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = 1,6 \\ y = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = 2,2 \end{cases}; \quad D(1,6;\, 2,2)\ -\ \text{точка перетину.}$$

6) скористаємось формулою $tg\varphi = \dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$ $\left(k_{AC} = k_1,\, k_{BC} = k_2 \right)$.

Кутові коефіцієнти прямих, які проходять через дві точки (A і C; B і C), обчислимо за формулою

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \left(A(x_1; y_1);\ C(x_2; y_2) \text{ та } B(x_1; y_1); C(x_2; y_2) \right).$$

$$k_{AC} = \frac{1+2}{-2-3} = -\frac{3}{5},$$

$$k_{BC} = \frac{1-4}{-2-1} = 1,$$

звідки

$$tg\varphi = \frac{1 + \frac{3}{5}}{1 - 1 \cdot \frac{3}{5}} = 4\,.$$

7) Будуємо рисунок:

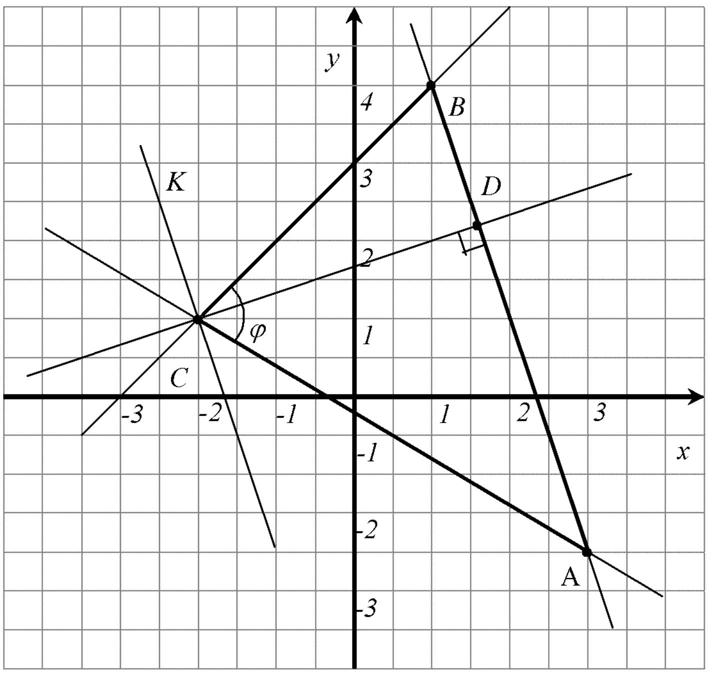


Рис. 3.12

3.2.3 Лінії другого порядку на площині

Лінію, яка в деякій прямокутній системі координат визначається алгебраїчним рівнянням n-го степеня відносно змінних x і y, називають **кривою n -го порядку.**

Зокрема, якщо $n = 2$, то рівняння $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$ визначає **криву другого порядку** (вважається $A^2 + B^2 \neq 0$). Розглянемо випадок, коли $B = 0$. Пізніше буде встановлено, що останнє рівняння визначає на площині (за винятком вироджених випадків) коло, еліпс, гіперболу або параболу. Слід зауважити, що ці криві та їх дуги досить часто застосовують в архітектурі.

Коло

Означення. Коло радіуса R із центром у точці $C(a;b)$ – це множина точок M на площині, рівновіддалених від даної точки C (рис.3.13), тобто $MC = R$.

Виведемо рівняння кола. Нехай $M(x;y)$ – довільна точка кола з центром у точці $C(a;в)$ і радіуса R. За означенням кола $MC = R$, тобто

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = R$$

або

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2. \quad (3.19)$$

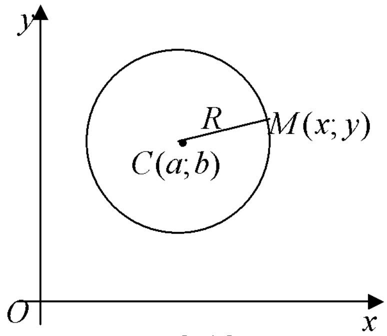


Рис.3.13

Отримали рівняння, якому задовольняють координати будь – якої точки $M(x;y)$ кола і не задовольняють координати жодної точки, яка йому не належить.

Зокрема, $x^2 + y^2 = R^2$ – **канонічне рівняння кола** з центром у початку координат радіуса R.

Еліпс

Означення. Еліпсом називається множина точок на площині, для яких сума відстаней від двох даних точок площини (**фокусів**) є величиною сталою (і більшою за відстань між фокусами).

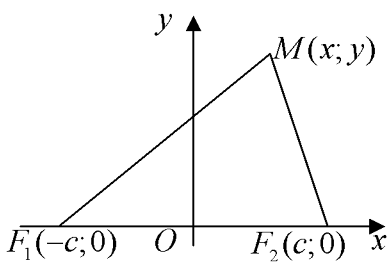


Рис.3.14

Нехай на площині вибрана прямокутна система координат Oxy (рис.3.14) і вибрані точки $F_1(+c;0)$, $F_2(-c;0)$ – фокуси еліпса. Якщо $M(x;y)$ – довільна точка еліпса, то за означенням еліпса

$$F_1M + F_2M = 2a,$$

тобто

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a.$$

Виконаємо перетворення:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2},$$

$$x^2+2cx+c^2+y^2=4a^2-4a\cdot\sqrt{(x-c)^2+y^2}+x^2-2cx+c^2+y^2,$$

$$a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a^2-cx,$$

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2).$$

Оскільки $a>c$, то $a^2-c^2>0$. Покладаємо $b^2=a^2-c^2$.

Тоді останнє рівняння запишеться у вигляді

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2.$$

Остаточно маємо

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$ – **канонічне рівняння еліпса**, (3.20)

де

$$b^2=a^2-c^2.$$

Параметри a і b у канонічному рівнянні еліпса називаються **півосями еліпса**.

Дослідження форми еліпса

Встановимо форму еліпса, користуючись його канонічним рівнянням.

1.Змінні x та y входять до рівняння (3.20) у парних степенях , тобто якщо точка $(x;y)$належить еліпсу, то йому належать також точки $(x;-y)$, $(-x;y)$, $(-x;-y)$. Звідси випливає, що еліпс є симетричним відносно осей Ox і Oy. Отже, Ox і Oy – о**сі симетрії еліпса**, а точку $O(0;0)$ називають **центром еліпса**, як перетин осей симетрії.

2. Неважко показати, що точки $A_1(a;0)$, $A_2(-a;0)$, $B_1(0;b)$, $B_2(0;-b)$ є точками перетину еліпса з осями координат. Точки A_1, A_2, B_1, B_2 називають **вершинами еліпсу.** Відрізки A_1A_2 і B_1B_2, а також їх довжини $2a$ і $2b$ називають відповідно **великою та малою осями еліпса.** Числа a і b називають **великою та малою півосями** відповідно ($OA_1=a$, $OB_1=b$). Довжину відрізка F_1F_2 називають **відстанню між фокусами** ($F_1F_2=2c$).

3. З рівняння (3.20) випливають нерівності $\frac{x^2}{a^2}\le 1$ і $\frac{y^2}{b^2}\le 1$ або $-a\le x\le a$ і $-b\le y\le b$. Таким чином, можна стверджувати, що всі точки еліпса знаходяться всередині прямокутника, який утворюється прямими $x=\pm a$, $y=\pm b$.

4. У рівнянні (3.20) сума доданків $\frac{x^2}{a^2}$ і $\frac{y^2}{b^2}$ дорівнює одиниці, тому якщо зростає $|x|$, то $|y|$ спадає і навпаки.

З вищенаведеного виходить, що еліпс має форму, зображену на рис.3.15 (овальна замкнена крива).

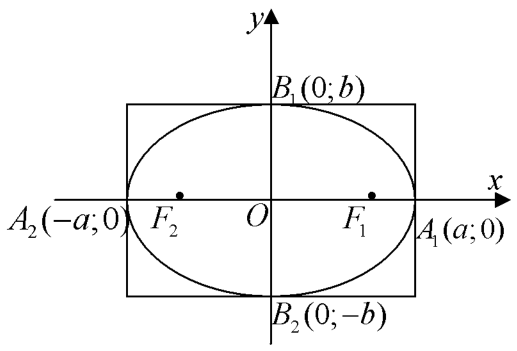


Рис.3.15

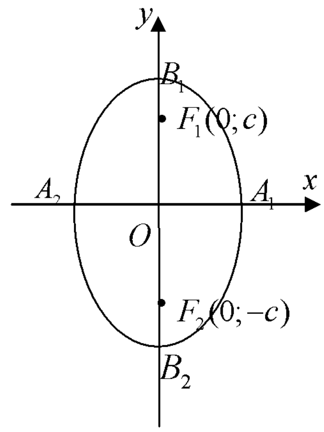


Рис.3.16

Якщо $a<b$, то рівняння (3.20) визначає еліпс, велика вісь якого $B_1B_2 = 2b$ належить осі Oy, а мала вісь – осі Ox (рис.3.16).

Фокуси такого еліпса перебувають на великій осі у точках $F_1(0;c)$ і $F_2(0;-c)$, де $c^2 = b^2 - a^2$.

Якщо $a = b$, одержимо $x^2 + y^2 = a^2$ – рівняння коло.

Гіпербола

Означення. Гіперболою називається множина точок на площині, для яких абсолютна величина різниці відстаней від двох даних точок площини (**фокусів**) є величиною сталою (і меншою за відстань між фокусами).

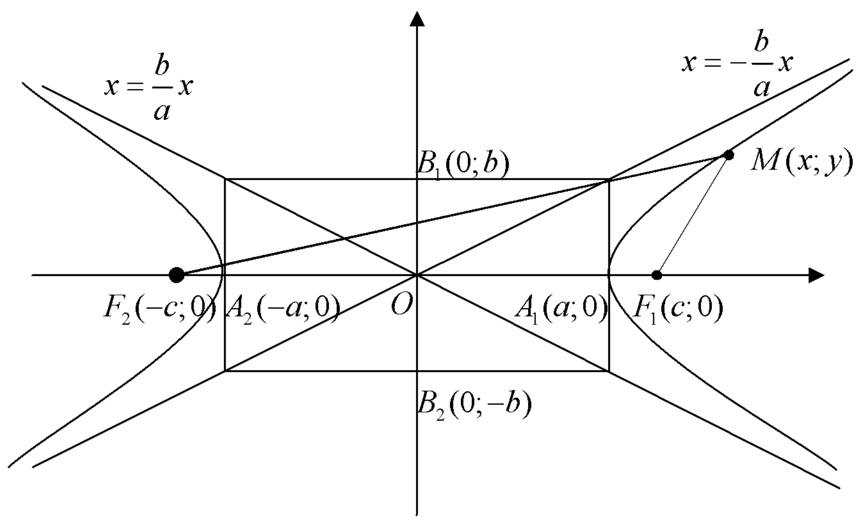


Рис.3.17

Якщо у прямокутній системі координат Oxy (рис.3.17) вибрати точки $F_1(c;0)$, $F_2(-c;0)$ – **фокуси гіперболи**, то за означенням гіперболи для її довільної точки $M(x;y)$ виконується рівність

$$\left|F_1M - F_2M\right| = 2a,$$

тобто

$$\left|\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right| = 2a.$$

Після перетворень отримаємо

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \text{ – } \textbf{канонічне рівняння гіперболи}, \qquad (3.21)$$

де

$$b^2=c^2-a^2.$$

Якщо провести дослідження форми гіперболи такі, як і у випадку з еліпсом, то отримаємо криву, яка зображена на рис. 3.17 і складається з двох нескінчених гілок.

На рис.3.17:

$OA_1 = a$ – дійсна піввісь;
$OB_1 = b$ – уявна піввісь;
$A_1A_2 = 2a$ – дійсна вісь;
$B_1B_2 = 2b$ – уявна вісь;
$F_1F_2 = 2c$ – відстань між фокусами;
Ox, Oy – осі симетрії гіперболи;
Точка $O(0;0)$ – центр симетрії гіперболи як точка перетину осей симетрії;
Точки $A_1(a;0)$, $A_2(-a;0)$ – вершини гіперболи.

Прямокутник із сторонами $2a$ і $2b$ називається **основним прямокутником гіперболи.**

Асимптоти гіперболи

Асимптотою нескінченої кривої називають таку пряму, для якої відстань від точки M на кривій до цієї прямої прямує до нуля при нескінченому віддаленні точки M від початку координат.

Розв’яжемо рівняння гіперболи (3.21) відносно y

$$y=\pm\frac{b}{a}x\cdot\sqrt{1-\left(\frac{a}{x}\right)^2}$$

і зробимо граничний перехід, коли x прямує до нескінченості.
Отримаємо

$$y=\pm\frac{b}{a}x \text{ – } \textbf{рівняння асимптот гіперболи}. \qquad (3.22)$$

Якщо півосі гіперболи рівні, тобто $a = b$, то гіпербола називається **рівнобічною**.

Крива, яка визначається рівнянням

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1,$$

також є гіперболою (рис.3.18), дійсна вісь якої $2b$ розташована на осі Oy, а уявна вісь $2a$ – на осі Ox.

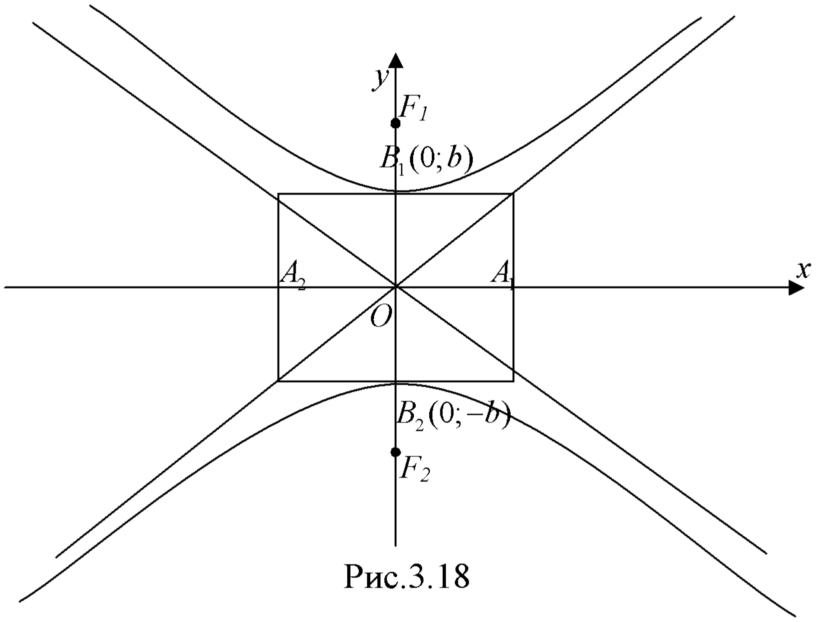


Рис.3.18

На рис. 3.18:
$OB_1 = b$ – дійсна піввісь;
$OA_1 = a$ – уявна піввісь;
$A_1A_2 = 2a$ – уявна вісь;
$B_1B_2 = 2b$ – дійсна вісь;
$F_1F_2 = 2c$ – відстань між фокусами;
Ox, Oy – осі симетрії гіперболи;
Точка $O(0;0)$ – центр симетрії гіперболи;
Точки $B_1(0; b)$, $B_2(0; -b)$ – вершини гіперболи.

Зазначимо, що фокуси гіперболи завжди перебувають на дійсній осі. Очевидно, що гіперболи $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ і $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$ мають спільні асимптоти і називаються **спряженими.**

Парабола

Означення. Параболою називається множина точок на площині, для кожної з яких відстань до заданої точки F (**фокуса)** дорівнює відстані до заданої прямої (**директриси**).

Відстань від фокуса F до директриси називається **параметром параболи** і позначається через p ($p>0$).

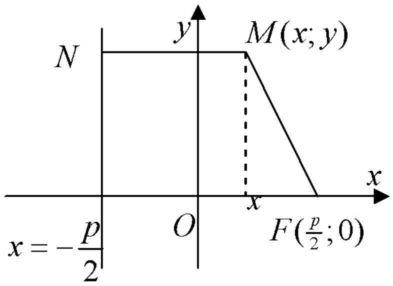


Рис.3.19

Якщо у прямокутній системі координат Oxy (рис.3.19) вибрати $F(\frac{p}{2};0)$ – **фокус параболи** і **директрису**, яка задана рівнянням $x=-\frac{p}{2}$, то згідно з означенням координати довільної точки $M(x;y)$ на параболі задовольняють рівнянню

$$MF = MN,$$

тобто

$$\sqrt{(x-p/2)^2+y^2}=\sqrt{(x+p/2)^2}\,.$$

Після перетворень отримаємо

$y^2=2px$ – **канонічне рівняння параболи**. (2.23)

Точка $O(0;0)$ – вершина параболи; вісь Ox – вісь симетрії параболи (рис.3.18(a)).

Рівняння $y^2=-2px,\ \ x^2=2py,\ \ x^2=-2py$ також визначають параболи, які зображені на рис.3.20.

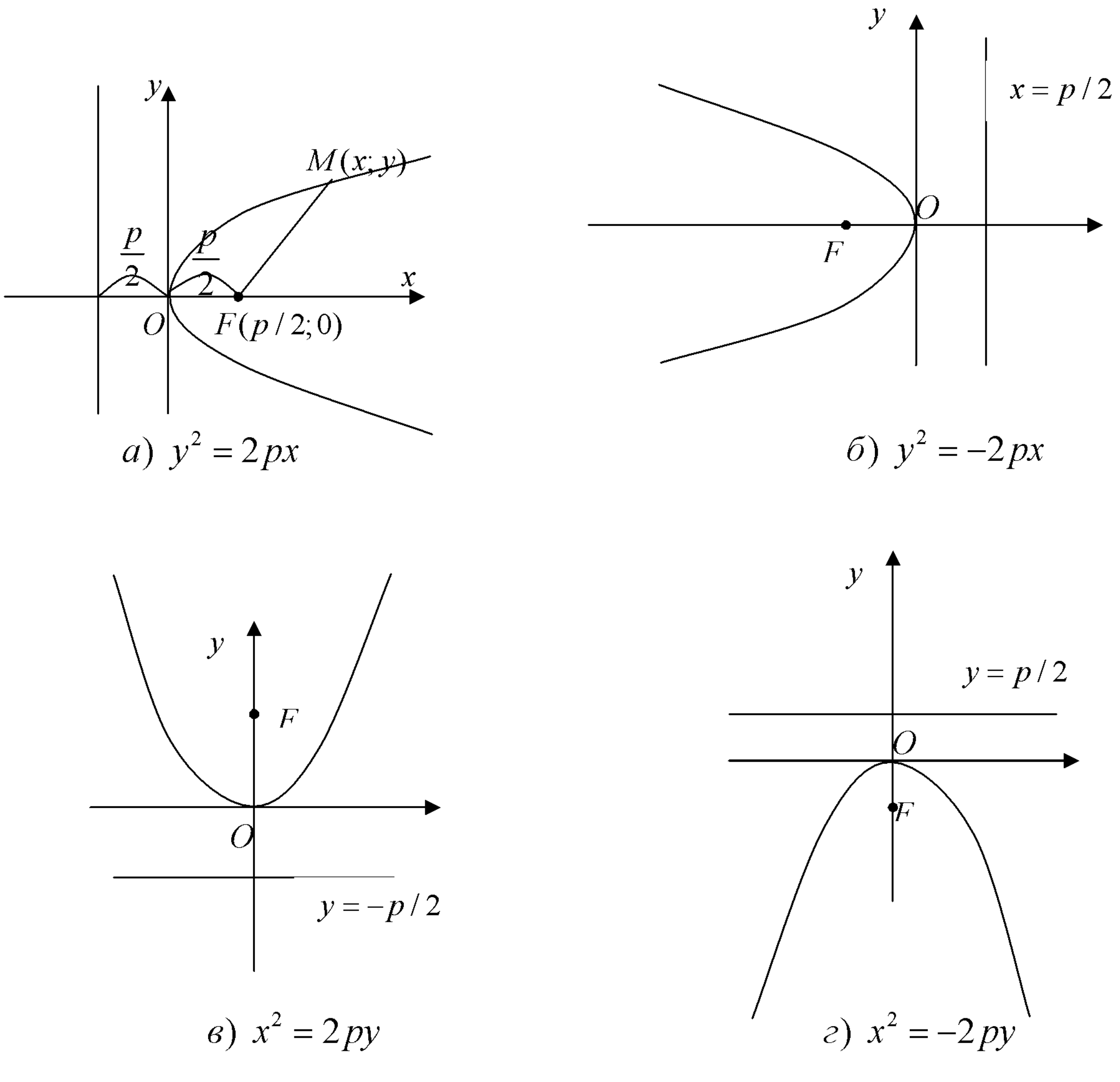


Рис.3.20

Ексцентриситет кривих другого порядку

Означення. Ексцентриситетом еліпса і гіперболи називається відношення відстані між фокусами до довжини великої осі кривої:

$$\varepsilon=\frac{c}{a}.$$

Ексцентриситет   характеризує форму кривої та є мірою «сплюснутості».

Для еліпса $0 \le \varepsilon < 1$ (при $\varepsilon = 0$ еліпс стає колом). Оскільки для еліпса $\varepsilon = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}$, то чим менший його ексцентриситет, тим еліпс ближче за формою до кола.

Для гіперболи $1 < \varepsilon < \infty$. Вважають, що парабола має ексцентриситет, який дорівнює одиниці.

Приклад. Необхідно спроектувати парк таким чином, щоб його межи проходили по лінії, яка є гіперболою, а асфальтовані доріжки по асимптотам цієї гіперболи. Розрахунки довели, що рівняння гіперболи має вигляд $16x^2 - 9y^2 = 14400$ (x та y подані у метрах). Знайти рівняння доріжок, фокуси і ексцентриситет гіперболи, якщо відомо, що початок координат розташували у точці перетину асимптот.

Розв'язання. Рівняння асимптот гіперболи мають вигляд $y = \pm \frac{b}{a} x$, тобто треба знайти дійсну a та уявну b півосі. Для цього перетворимо рівняння гіперболи до канонічного вигляду: $\frac{x^2}{900} - \frac{y^2}{1600} = 1$. Звідки $a = 30$, $b = 40$, отже, c = 50 ($c = \sqrt{a^2 + b^2}$). Рівняння доріжок – $y = \pm \frac{4}{3} x$, координати фокусів – $F_1(50;0)$, $F_2(-50;0)$ і ексцентриситет гіперболи $\varepsilon = \frac{5}{3}$.

Приклад. У будівлі арочний отвір має форму параболи. Виміри показали, що висота арки дорівнює 9 м, а максимальна ширина арочного отвору – 6 м. Необхідно знайти форму арки (рівняння параболи).

Розв'язання. Рівняння параболи шукатимемо у вигляді $x^2 = -2py$ (рис.3.21). Координати точки A (3;9) на параболі задовольняють її рівнянню, тобто $9 = -2p \cdot 9$, $2p = 1$. Отже, рівняння параболи має вигляд: $x^2 = -y$.

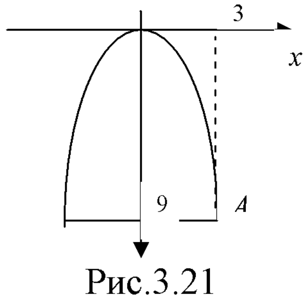


Рис.3.21

Приведення загального рівняння лінії другого порядку до канонічного вигляду

Важливою задачею аналітичної геометрії є дослідження загального рівняння другого порядку, приведення його до найпростішого (канонічного) виду.

У загальному випадку за допомогою перетворення повороту і паралельного переносу осей координат можна одержати найпростіше рівняння кривої другого порядку і визначити вид кривої (за винятком випадків виродження і розпадіння).

Розглянемо далі лише приклади рівнянь другого порядку при $B = 0$:

$$Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

Приклад. Привести рівняння другого порядку до канонічного вигляду та встановити вид кривих:

а) $x^2+2y^2-4x+16y=0$;

б) $16x^2-9y^2-64x-18y+199=0$;

в) $3x^2-10x+y+3=0.$

Розв'язання.

а) $x^2+2y^2-4x+16y=0$

$$(x^2-4x+4-4)+2(y^2+8y+16-16)=0;$$

$$(x-2)^2+2(y+4)^2-4-32=0;$$

$$(x-2)^2+2(y+4)^2=36;$$

$$\frac{(x-2)^2}{36}+\frac{(y+4)^2}{18}=1.$$

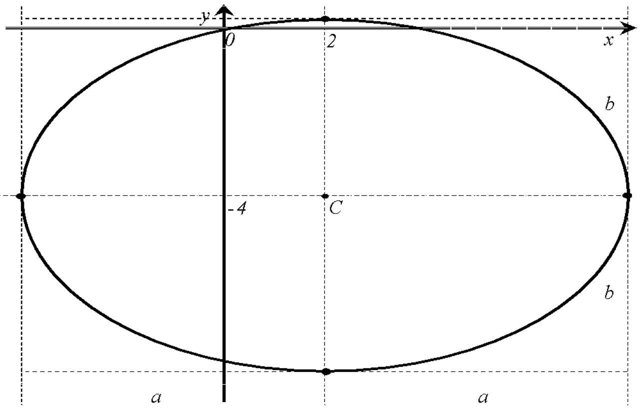


Рис.3.22

Рівняння приведено до вигляду $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$, тобто отримали рівняння еліпса з центром у точці $C(x_0;y_0)$: $C(2;-4)$, півосі якого $a=\sqrt{36}=6$, $b=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$.

б) $16x^2-9y^2-64x-18y+199=0$;

$$16(x^2-4x+4-4)-9(y^2+2y+1-1)+199=0;$$

$$16(x-2)^2-64-9(y+1)^2+9+199=0;$$

$$16(x-2)^2-9(y+1)^2=-144 \quad \Big| \quad :-144;$$

$$-\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{(y+1)^2}{16}=1 \quad .$$

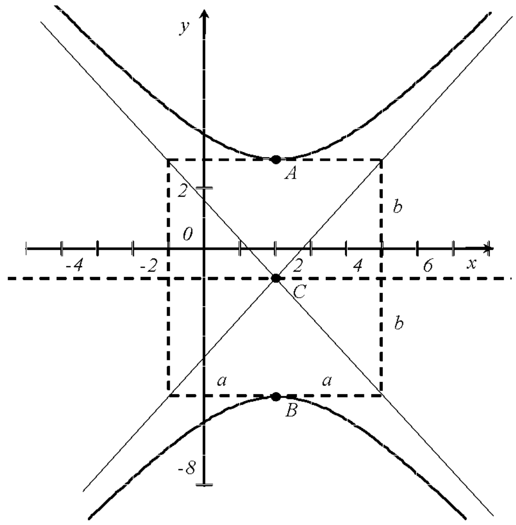


Рис.3.23

Рівняння приведено до вигляду:

$$-\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1,$$

тобто отримали гіперболу з центром у точці $C(x_0;y_0)$: $C(2;-1)$, півосі якої $a=\sqrt{9}=3$; $b=\sqrt{16}=4$.

в) $3x^2-10x+y+3=0.$

$$3\left(x^2-\frac{10}{3}x\right)+y+3=0; \quad 3\left(x^2-2\cdot\frac{5}{3}x+\frac{25}{9}-\frac{25}{9}\right)+y+3=0;$$

$$3\left(x-\frac{5}{3}\right)^2=\frac{75}{9}-3-y; \quad \left(x-\frac{5}{3}\right)^2=-\frac{1}{3}\left(y-\frac{16}{3}\right);$$

$$\left(x-\frac{5}{3}\right)^2=-\frac{1}{3}\left(y-\frac{16}{3}\right) \quad .$$

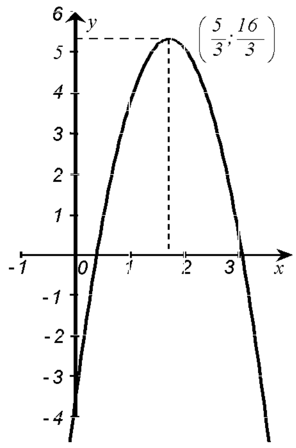


Рис.3.24

Рівняння приведено до вигляду: $(x-x_0)^2=2p(y-y_0)$, тобто отримали параболу з вершиною у точці $C(x_0;y_0)$: $C\left(\frac{5}{3};\frac{16}{3}\right)$, гілки якої напрямлені вздовж осі Oy у від'ємному напрямі.

3.2.4 Криві вищих порядків і трансцендентні криві

Наведемо закони утворення і графіки кривих, які є відомішими серед кривих вищих порядків та трансцендентних кривих.

Декартов лист

Декартов лист – це крива на площині, яка у прямокутній системі координат задовольняє рівнянню $x^3 + y^3 = 3axy$. Параметр $3a$ визначається як діагональ квадрата, сторона якого дорівнює найбільший хорді петлі (рис.3.25).

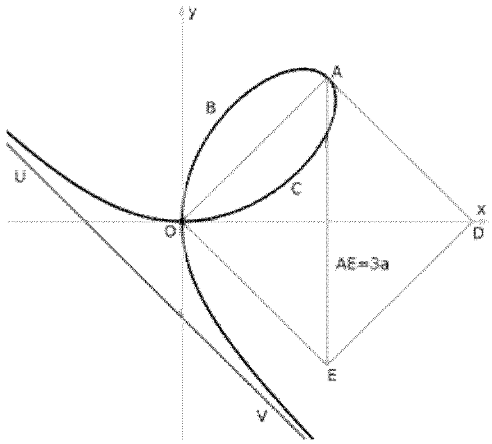


Рис.3.25

Напівкубічна парабола

Напівкубічна парабола або парабола Нейла (рис.3.26) – алгебраїчна крива на площині, яка у прямокутній системі координат задовольняє рівнянню

$$y^2 = ax^3$$

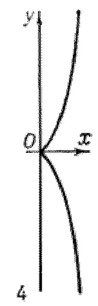


Рис.3.26

Кардіоїда

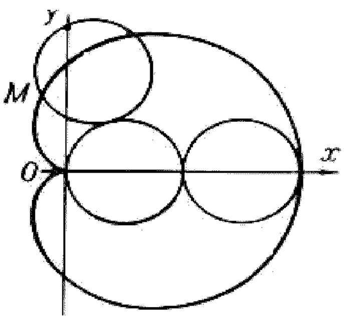
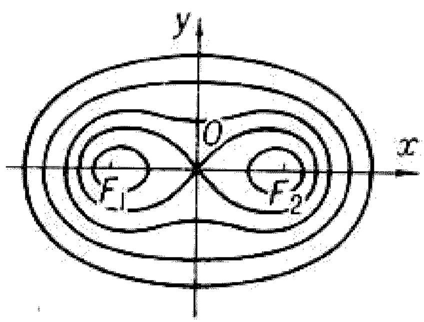


Рис.3. 27

Кардіоїда (від грец. kardía — серце і éidos — вигляд) – це крива, яка описується деякою точкою M кола радіуса a, яка котиться по нерухомому колу того ж самого радіуса та у прямокутних координатах задовольняє рівнянню: $(x^2 + y^2)^2 — 2ax\ (x^2+y^2) = a^2y^2$; у полярних координатах – $r = a\,(1 + \cos\varphi)$ (рис.3.27).

Овали Касіні



Овали Касіні – ГМТ, добуток відстаней яких від фокусів $F_1(-b;0)$ і $F_2(b;0)$ дорівнює a^2 і в прямокутній системі координат задовольняє рівнянню

$$2(x^2 + y^2)^2 — 2b^2\,(x^2 — y^2) = a^4 — b^4 \text{ (рис.3.28).}$$

Лемніската Бернуллі

Лемніската Бернуллі – ГМТ, добуток відстаней яких від фокусів $F_1(-a;0)$ і $F_2(a;0)$ дорівнює a^2 і в прямокутній системі координат задовольняє рівнянню $(x^2 + y^2)^2 — 2a^2 (x^2 — y^2) =0$, у полярних координатах – $r^2 = 2a^2 \cos 2\varphi$.

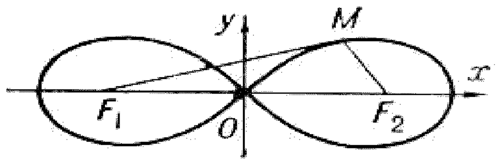


Рис.3.29

Лемніската є частковим випадком овалів Касіні (якщо $a = b$) (рис.3.29).

Якщо вибрати різну кількість фокусів, розташовуючи їх різним чином і призначаючи ту або іншу величину для добутків відстаней, можна отримати лемніскати найчудернацькіших обрисів (контурів). Іншими словами, довільну криву можна наблизити послідовністю лемніскат.

Локон Ан'єзі

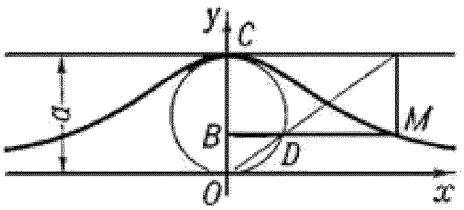


Рис. 3.30

Нехай маємо коло з діаметром $OC = -a$ і відрізок BDM, побудований так, що $OB : BD = OC : BM$; геометричне місце точок M є локоном Ан'єзі (або верзієра) (рис.3.30). Рівняння цієї кривої в прямокутних координатах має вигляд:

$$y = a^3 / (a^2 + x^2).$$

Завиток Паскаля

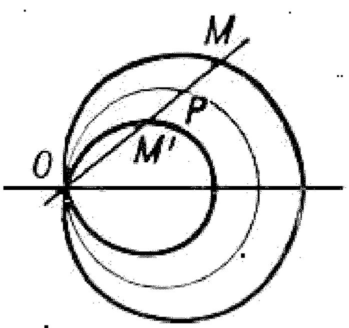


Рис.3.31

Завиток Паскаля – це крива на площині, яка в прямокутній системі координат задовольняє рівнянню

$$(x^2 + y^2 — 2Rx)^2 — a^2(x^2 + y^2) = 0;$$

у полярних координатах – $r = 2R \cos\varphi + a$ (рис.3.31).

При $a = 2R$ петля стягується в точку, у цьому випадку завитка Паскаля перетворюється на кардіоїду.

Астроїда

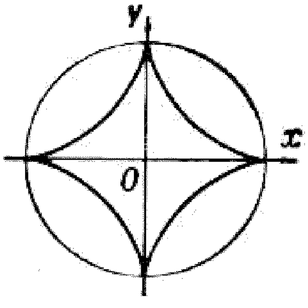
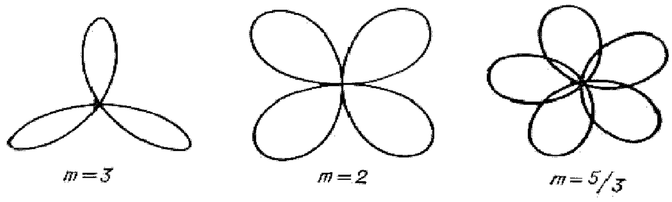


Рис.3.32

Астроїда – це крива шостого порядку на площині, яка в прямокутній системі координат задовольняє рівнянню

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3} \text{ (рис.3.32).}$$

Троянди



Троянди – це криві, які в полярній системі координат задовольняють рівнянню

$r = a \sin m\varphi$ (рис.3.33).

Рис.3.33

Ланцюгова лінія

Ланцюгова лінія (рис.3.34) – це крива, форму якої набуває гнучка однорідна і нерозтяжна важка нитка, кінці якої закріплені в двох точках. Рівняння ланцюгової лінії в прямокутних координатах має вигляд:

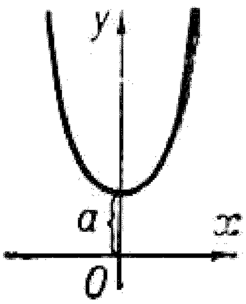


Рис.3.34

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{x/a} + e^{-x/a}\right),$$ де a – параметр лінії.

Важливо зауважити, що ланцюгову лінію, як раціональну лінію, що відображає властивості рівнонапруженості матеріалу, застосовують при проектуванні різних архітектурних форм, зокрема, поверхонь та висячих покриттів – оболонок.

Циклоїда

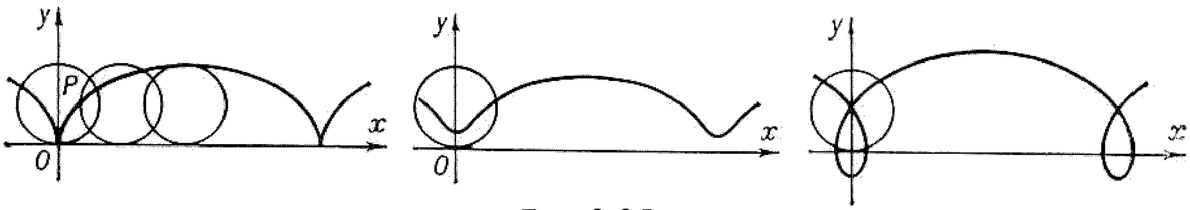


Рис.3.35

Циклоїда (від грец. kykloeides — колоподібний) (рис.3.35) – це крива, яку описує точка P, що розташована на відстані a від центра кола радіуса r, яке котиться без ковзання вздовж прямої лінії.

Рівняння циклоїди в параметричній формі: $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$.

Наведемо каталог кривих третього та четвертого порядків і трансцендентних кривих.

Алгебраїчні криві третього порядку (рис.3.36): 1 — декартов лист; 2 — локон Ан'єзі; 3 — кубічна парабола; 4 — напівкубічна парабола; 5 — строфоїда; 6 — цисоїда Діоклеса.

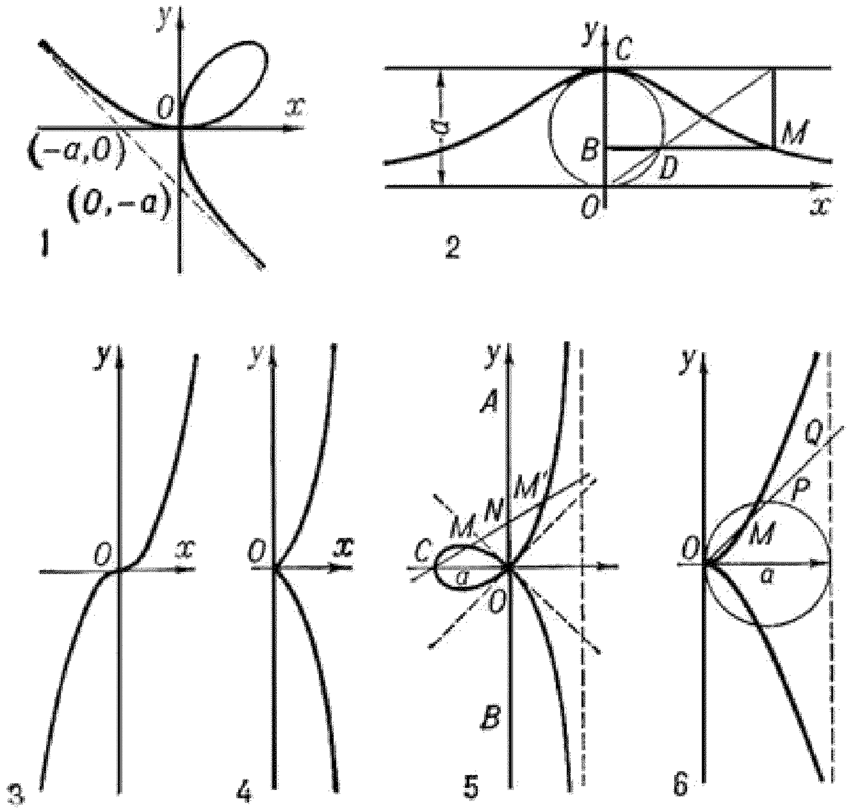


Рис.3.36

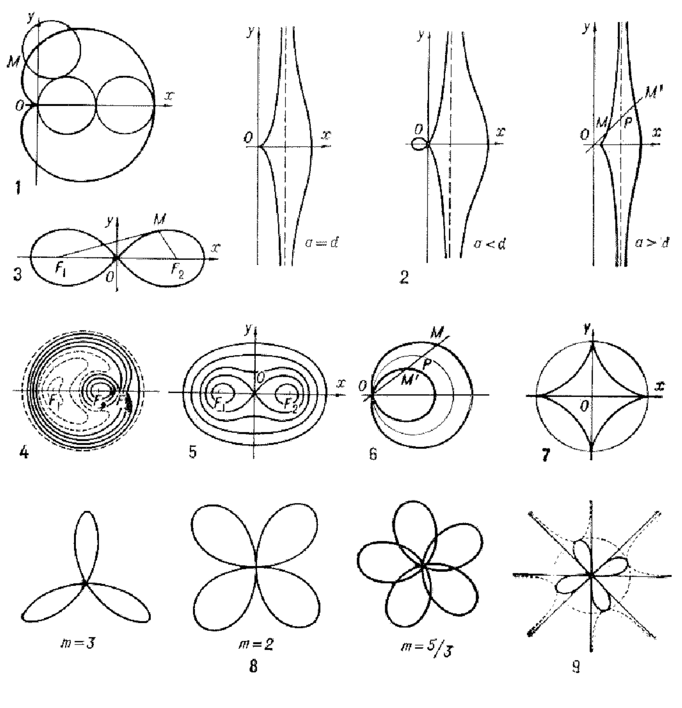


Рис.3.37

Алгебраїчні криві четвертого і вищих порядків (рис.3.37):

1 — кардіоїда; 2 — конхоїда Нікомеда; 3 — лемніската Бернуллі; 4 — овали Декарта; 5 — овали Касіні; 6 —завиток Паскаля; 7 — астроїда; 8 — троянди; 9 — сінус-спіраль.

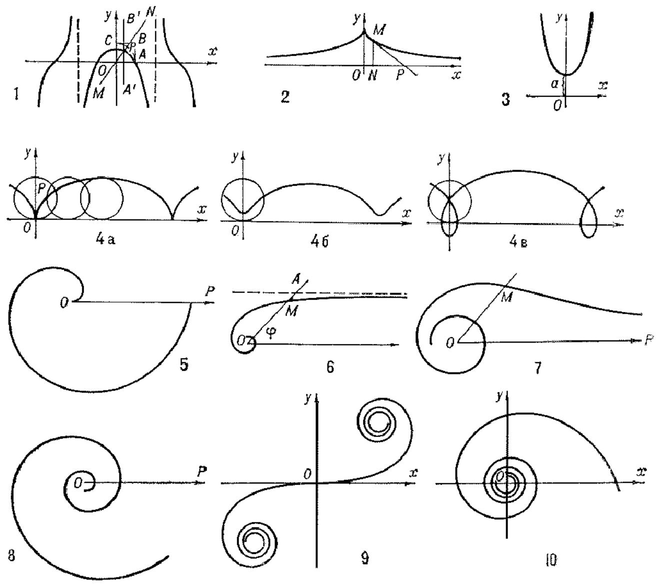


Рис.3.38

Трансцендентні криві (рис.3.38): 1 — квадратриса; 2 — трактриса; 3 — ланцюгова лінія; 4 — циклоїда; 5 — архімедова спіраль; 6 — гіперболічна спіраль; 7 — жезл; 8 — логарифмічна спіраль; 9 — спіраль Корню; 10 — сі-спіраль.

Питання для самоперевірки

1 Що називається рівнянням лінії у деякій системі координат?

2 Які дві основні задачі розглядаються в аналітичній геометрії?

3 Як однозначно може бути визначено положення прямої на площині?

4 Яке рівняння називають рівнянням прямої з кутовим коефіцієнтом?

5 Виведіть рівняння прямої, яка проходить: через дві задані точки площини; через задану точку в заданому напрямі.

6 Запишіть умови паралельності і перпендикулярності двох прямих.

7 Виведіть канонічні рівняння кола, еліпса, гіперболи і параболи.

8 Які геометричні властивості еліпса, гіперболи і параболи?

9 Що називається асимптотами гіперболи?

10 Наведіть приклади застосування кривих у будівництві та архітектурі.

Розділ 4 АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ У ПРОСТОРІ

ЛЕКЦІЇ 7-8

У практиці будівництва та архітектурного проектування з давніх часів застосовують такі поверхні, як циліндричні, конічні, сферичні, поверхні обертання тощо.

Для того, щоб при проектуванні вибрати ту чи іншу поверхню, архітектору недостатньо уявляти її геометричну форму (яка визначає не тільки естетичні якості поверхні, але й її несучі якості), а також необхідно знати закони її утворення і геометричні властивості. Крім того, досить часто при проектуванні будівель використовують складені поверхні, тобто поверхні, які утворені з частин різних поверхонь. Для розв'язання задачі їх спряження необхідно уявляти лінії їх перетину. Всі ці питання розглянемо у цьому розділу.

4.1 Рівняння поверхні та лінії у просторі

Поверхню у просторі, як правило, можна розглядати як геометричне місце точок, які задовольняють деякій умові. Наприклад, сфера радіуса R з центром у точці C є ГМТ, рівновіддалених від точки C на відстань R.

Означення. Рівнянням поверхні у прямокутній системі координат $Oxyz$ називається таке рівняння $F(x;\ y;\ z) = 0$ із трьома змінними x, y, z, якому задовольняють координати кожної точки, що належить поверхні, і не задовольняють координати точок, які не належать цій поверхні.

Змінні x, y, z у рівнянні поверхні називають **поточними координатами**.
Рівняння $F(x;\ y;\ z) = 0$, взагалі кажучи, визначає у просторі деяку поверхню.
Вираз «взагалі кажучи» означає, що в деяких випадках рівняння $F(x;\ y;\ z) = 0$ може визначати не поверхню, а точку, лінію, або не визначати ніякого геометричного образу.

Так, рівнянню $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ задовольняють лише координати точки $O(0,0,0)$, а рівняння $x^2 + y^2 + z^2 = -1$ не визначає ніякого геометричного об'єкту.

В аналітичній геометрії у просторі, як і в аналітичній геометрії на площині, розв'язуються дві основні задачі:
1. за заданими геометричними властивостями поверхні складають її рівняння;
2. за заданим рівнянням поверхні досліджують форму цієї поверхні.

Найпростішою поверхнею у просторі є площина.

Лінію у просторі можна розглядати як лінію перетину двох поверхонь або як геометричне місце точок, які є спільними для двох поверхонь.

Якщо дві поверхні визначаються рівняннями $F_1(x;\ y;\ z) = 0$ і $F_2(x;\ y;\ z) = 0$, то система рівнянь

$$\begin{cases} F_1(x;y;z)=0, \\ F_2(x;y;z)=0 \end{cases} \tag{4.1}$$

визначає лінію, тобто геометричне місце точок, координати яких задовольняють цим рівнянням (рис.4.1).

Рівняння системи (4.1) називаються **рівняннями лінії у просторі**.

Наприклад, $\begin{cases} y=0, \\ z=0 \end{cases}$ є рівняння осі Ox.

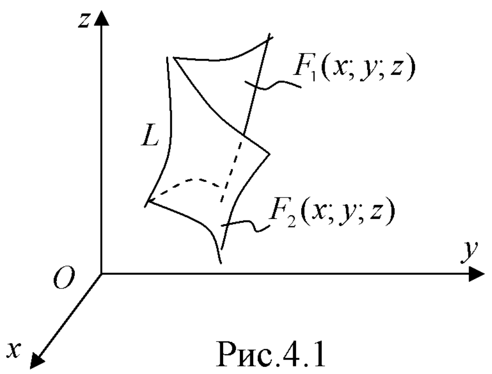


Рис.4.1

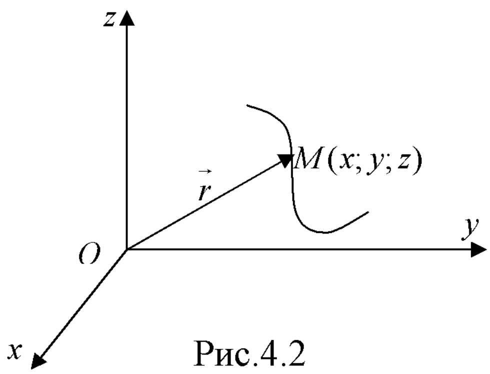


Рис.4.2

Лінію у просторі можна розглядати як траєкторію руху точки (рис.4.2). У цьому випадку її визначають векторним рівнянням

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \tag{4.2}$$

або параметричними рівняннями

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t) \end{cases} \tag{4.3}$$

проекцій вектора $\vec{r}(t)$ на осі координат.

Наприклад, параметричні рівняння гвинтової лінії мають вигляд

$$\begin{cases} x = R\cos t, \\ y = R\sin t, \\ z = \dfrac{h}{2\pi}. \end{cases}$$

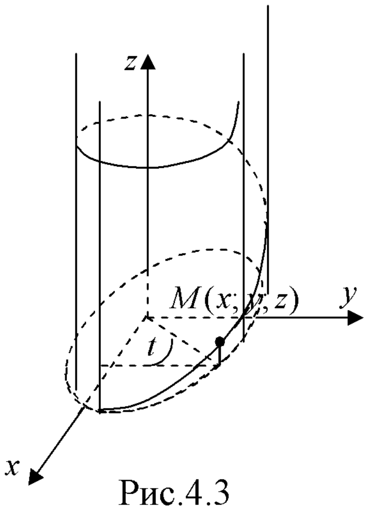


Рис.4.3

Якщо точка M рівномірно рухається вздовж твірної кругового циліндра, а сам циліндр рівномірно обертається навколо осі, то точка M описує гвинтову лінію (рис. 4.3).

В архітектурній практиці циліндричні гвинтові лінії використовують для утворення контурів каркаса і поверхонь гвинтових сходів, гвинтових пандусів для в'їзду автомашин у багатоповерхових гаражах, для влаштування розв'язок у двох рівнях на перетині магістралей.

Горизонтальною проекцією конічної гвинтової лінії, яка є траєкторією руху точки, що рівномірно рухається вздовж твірної прямого кругового конуса і в той же час рівномірно обертається навколо осі, є спіраль Архімеда (трансцендентна крива, див. розділ 3).

4.2 Рівняння площини у просторі

Найпростішою поверхнею у просторі є площина. Площину в просторі *Oxyz* можна визначити різними способами, кожному з яких відповідає певний вигляд її рівняння.

Рівняння площини, яка проходить через задану точку в заданому напрямі

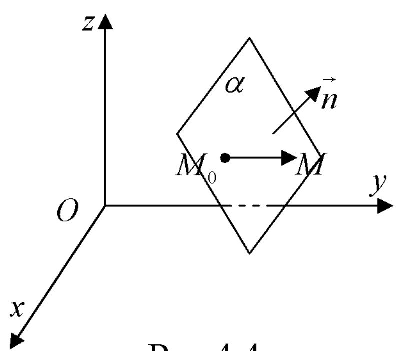


Рис.4.4

Треба у просторі *Oxyz* скласти рівняння площини α, яка задана перпендикулярним до неї вектором $\vec{n}=(A;B;C)$ і проходить через точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ (рис.4.4).

Означення. Будь – який вектор, що відрізняється від нуля , перпендикулярний до площини, називають **нормальним вектором** площини і позначають через
$$\vec{n}=(A;B;C).$$

Нехай точка $M(x;y;z)$ – довільна точка площини, тоді вектори $\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0;y-y_0;z-z_0)$ і $\vec{n}=(A;B;C)$ - взаємно перпендикулярні, тому $\vec{n}\cdot\overrightarrow{M_0M}=0,$ тобто

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0. \quad (4.4)$$

Координати будь – якої точки, яка належить площині α, задовольняють рівнянню, а координати точок, які не належать площині α , цьому рівнянню не задовольняють (для них $\vec{n}\cdot\overrightarrow{M_0M} \neq 0$).

Сукупність площин, які проходять через задану точку (при різних значеннях A,B,C) називають **в'язкою площин**, а рівняння (4.4) – **рівнянням в'язки площин.**

Загальне рівняння площин

Розглянемо загальне рівняння першого степеня відносно змінних x, y, z :

$$Ax + By + Cz + D = 0 . \qquad (4.5)$$

Вважаючи, що хоча б один із коефіцієнтів A, B, C не дорівнює нулю (наприклад, $B \neq 0$), рівняння перепишемо у вигляді:

$$A(x-0) + B\left(y + \frac{D}{B}\right) + C(z-0) = 0 .$$

Тобто будь – яке рівняння першого степеня відносно змінних x, y, z можна звести до рівняння площини і, навпаки, будь – яка площина визначається рівнянням першого степеня.

Рівняння (4.5) називається **загальним рівнянням площини.**

Дослідження загального рівняння площини

Розглянемо, які окремі положення відносно системи координат $Oxyz$ займає площина

$$Ax + By + Cz + D = 0 ,$$

якщо деякі коефіцієнти цього рівняння дорівнюють нулю:

1. Якщо $D = 0$, то маємо рівняння $Ax + By + Cz = 0$, що визначає площину, яка проходить через початок координат;
2. Якщо $C = 0$, то маємо рівняння $Ax + By + D = 0$, що визначає площину, яка паралельна осі Oz;
3. Якщо $C = D = 0$, то маємо рівняння $Ax + By = 0$, що визначає площину, яка проходить через вісь Oz.
4. Якщо $B = C = 0$, то маємо рівняння $Ax + D = 0$, що визначає площину, яка паралельна площині Oyz.
5. Якщо $A = B = D = 0$, то маємо рівняння $Cz = 0$, тобто $z = 0$, яке визначає координатну площину Oxy.

Аналогічно рівняння $x = 0$, $y = 0$ визначають координатні площини, Oyz та Oxz відповідно.

Рівняння площини, яка проходить через три задані точки

Складаємо рівняння площини α, яка проходить через три задані точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$, $M_3(x_3; y_3; z_3)$, що не належать одній прямій.

Нехай точка $M(x\,; y\,; z\,)$ – довільна точка площини α. Тоді вектори $\overrightarrow{M_1M} = (x - x_1; y - y_1; z - z_1)$,$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$, $\overrightarrow{M_1M_3} = (x_3 - x_1; y_3 - y_1; z_3 - z_1)$ належать площині α, отже, вони є компланарними. Тому їх мішаний добуток дорівнює нулю: $\overrightarrow{M_1M}\cdot\overrightarrow{M_1M_2}\cdot\overrightarrow{M_1M_3}$ =0, тобто

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (4.6)$$

Рівняння (4.6) називають **рівнянням площини, яка проходить через три задані точки**.

Рівняння площини у відрізках

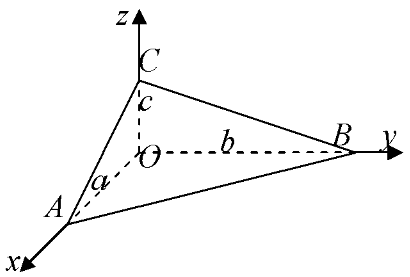


Рис.4.5

Розглянемо площину, яка перетинає всі три координатні осі (тобто жоден із коефіцієнтів *A, B, C* загального рівняння площини не дорівнює нулю).
Нехай площина відсікає на осях координат відрізки довжиною *a*, *в* і *c*, тобто проходить через точки *A(a;0;0), B(0;b;c), C(0;0;c).*

Підставляючи координати цих точок до рівняння (4.6), отримаємо

$$\begin{vmatrix} x-a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = 0$$

або

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1. \qquad (4.7)$$

Рівняння (4.7) називають **рівнянням площини у відрізках.**
Це рівняння можна використовувати для побудови площини.

Нормальне рівняння площини

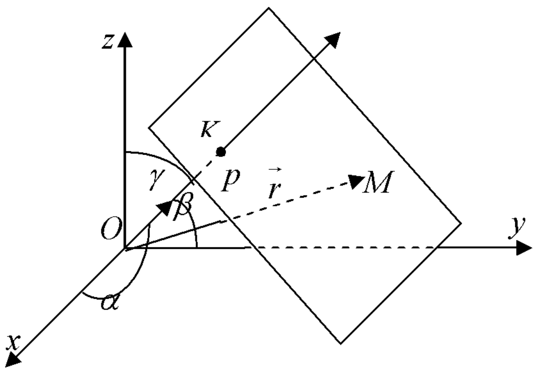


Рис.4.6

Положення площини у просторі буде повністю визначено, якщо задати її відстань від початку координат, тобто довжину перпендикуляра *OK*, який опущений з точки *O* на площину, та одиничний вектор $\vec{e}$, який має напрям перпендикуляра *OK* (рис.4.6)

Нехай *OK = p*, а α, β, γ - кути, які утворює вектор $\vec{e}$ з координатними осями *Ox, Oy, Oz*.

Тоді $\vec{e}=(\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma)$. Нехай точка $M(x\ ;y\ ;z\ )$ – довільна точка на площині. Тоді проекція радіус-вектора $\vec{r}=\vec{OM}=(x;y;z)$ на напрям вектора $\vec{e}$ дорівнює *p* (при будь – якому положенні точки *M*):

$$np_{\vec{e}}\vec{r} = p,$$

тобто

$$\vec{r}\cdot\vec{e}-p=0 \qquad (4.8)$$

або

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0\,. \qquad (4.9)$$

Рівняння (4.8) і (4.9) називають **нормальним рівнянням площини у векторній та координатній формах** відповідно.

4.3 Площина. Основні задачі

Кут між двома площинами. Умови паралельності та перпендикулярності двох площин

Нехай дві площини α_1 та α_2 задані рівняннями

$$\alpha_1:\ A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,$$

$$\alpha_2:\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.$$

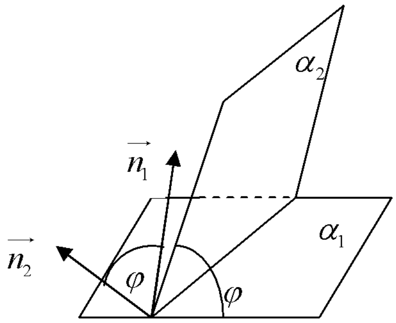


Рис.4.7

Під **кутом між двома площинами** розуміють один із двох суміжних двогранних кутів, утворених цими площинами (якщо вони паралельні, то кут беремо рівним *0* або π).

Кут φ між нормальними векторами $\vec{n}_1=(A_1;B_1;C_1)$ і $\vec{n}_2=(A_2;B_2;C_2)$ площин α_1 та α_2 дорівнює одному з цих кутів (рис 4.7).

Тому

$$\cos\varphi=\frac{\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|} \quad \text{або} \quad \cos\varphi=\pm\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}\,. \qquad (4.10)$$

Для знаходження гострого кута слід взяти модуль правої частини.

Якщо площини α_1 та α_2 перпендикулярні, то перпендикулярні їх нормальні вектори, тобто $\vec{n}_1\perp\vec{n}_2$ (і навпаки).

Тому

$$\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2=0$$

або

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0\,. \qquad (4.11)$$

Рівність (4.11) визначає **умову перпендикулярності двох площин**.

Якщо площини α_1 та α_2 паралельні, то $\vec{n}_1\parallel\vec{n}_2$, тобто

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}\,. \qquad (4.12)$$

Співвідношення (4.12) є **умовою паралельності двох площин**.

Відстань від точки до площини

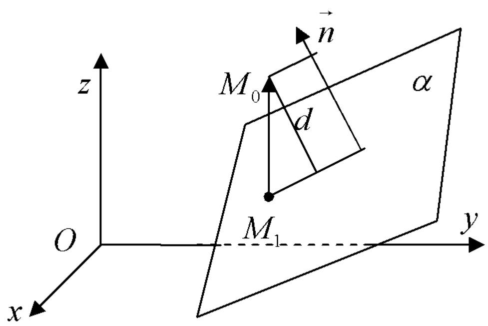


Рис.4.8

Визначимо відстань d від точки $M_0(x_0;y_0;z_0)$ до площини α: $Ax+By+Cz+D=0$ (рис 4.8).

Нехай точка $M_1(x_1;y_1;z_1)-$ довільна точка на площині α.

Тоді

$$d=\left|np_{\vec{n}}\overrightarrow{M_1M_0}\right|=\left|\frac{\overrightarrow{M_1M_0}\cdot\vec{n}}{|\vec{n}|}\right|=$$

$$=\left|\frac{(x_0-x_1)A+(y_0-y_1)B+(z_0-z_1)C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right|=$$

$$=\left|\frac{Ax_0+By_0+Cz_0-Ax_1-By_1-Cz_1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right|.$$

Оскільки точка $M_1(x_1;y_1;z_1)$ належить площині α, то

$$Ax_1+By_1+Cz_1+D=0,$$

тобто

$$D=-Ax_1-By_1-Cz_1.$$

Отже,

$$d=\frac{|\mathrm{Ax_0+By_0+Cz_0+D}|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \qquad (4.13)$$

Зауваження. Якщо площина задана рівнянням $x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0$, то відстань d від точки $M_0(x_0;y_0;z_0)$ до площини визначається за формулою $d=|x_0\cos\alpha+y_0\cos\beta+z_0\cos\gamma-p|$.

4.4 Рівняння прямої у просторі

Векторне рівняння прямої

Означення. Будь – який вектор, що відрізняється від нуля, паралельний прямій, називається **напрямним вектором цієї прямої** і позначається через $\vec{S}=(m;n;p)$.

Нехай у просторі $Oxyz$ треба скласти рівняння прямої l, яка задана точкою $M_0(x_0;y_0;z_0)$ і паралельним їй вектором $\vec{S}=(m;n;p)$ (напрямним) (рис.4.9).

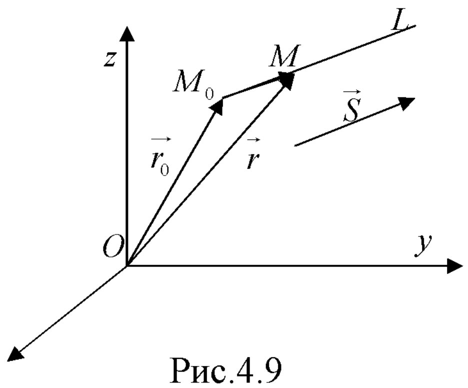


Рис.4.9

Якщо точка $M(x\,;y\,;z\,)$ – довільна точка на прямій l, то вектори $\vec{r}_0=\overrightarrow{OM_0}=(x_0;y_0;z_0)$, $\vec{r}=\overrightarrow{OM}=(x;y;z)$ і $\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0;y-y_0;z-z_0)$ задовольняють співвідношенню $\vec{r}=\vec{r}_0+\overrightarrow{M_0M}$ (рис. 4.9).

Оскільки вектор $\overrightarrow{M_0M}$, який належить прямій l, паралельний вектору $\vec{s}$, то $\overrightarrow{M_0M}=t\vec{s}$, де t – скалярний множник, який називається **параметром**. Рівняння можна записати у вигляді $\vec{r}=\vec{r}_0+t\vec{s}$.

Параметричні рівняння прямої

Рівняння $\vec{r}=\vec{r}_0+t\,\vec{s}$ можна переписати у вигляді

$$x\,\vec{i}+y\,\vec{j}+z\,\vec{k}=(x_0+tm)\,\vec{i}+(y_0+tn)\,\vec{j}+(z_0+tp)\,\vec{k}$$

або

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt. \end{cases} \qquad (4.14)$$

Рівняння (4.14) називають **параметричними рівняннями прямої у просторі**.

Канонічні рівняння прямої у просторі

Якщо із параметричних рівнянь виключати параметр t, то отримаємо **канонічні рівняння прямої**, яка задана точкою $M_0(x_0;y_0;z_0)$ і напрямним вектором $\vec{S}=(m;n;p)$:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}. \qquad (4.15)$$

Зауваження. Обертання на нуль одного із знаменників рівняння означає рівність нулю відповідного чисельника.

Наприклад, рівняння $\frac{x+1}{5}=\frac{y-4}{3}=\frac{z-2}{0}$ визначає пряму, яка проходить через точку $M_0(-1;4;2)$ і перпендикулярна осі Oz (проекція вектора $\vec{S}$ на вісь Oz дорівнює нулю). Це означає, що пряма належить площині $z=2$, тому для всіх точок прямої виконується рівність $z-2=0$.

Рівняння прямої у просторі, яка проходить через дві точки

Нехай пряма l проходить через дві точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$ і $M_2(x_2;y_2;z_2)$.

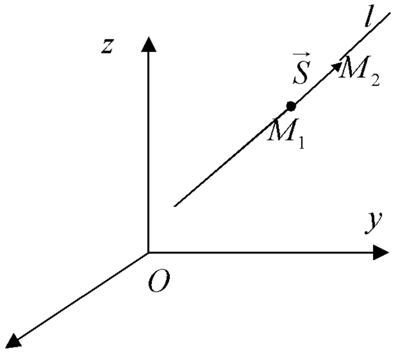


Рис.4.10

Тоді за напрямний вектор $\vec{S}$ можна взяти вектор $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$, тобто $\vec{S} = \overrightarrow{M_1M_2}$ (рис 4.10).

Тоді рівняння можна записати у вигляді

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \qquad (4.16)$$

Рівняння (4.16) називають **рівняннями прямої, яка проходить через дві точки.**

Загальні рівняння прямої

Пряму l у просторі $Oxyz$ можна визначити як лінію перетину двох не паралельних між собою площин, тобто системою рівнянь

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$ – **загальні рівняння прямої.** (4.17)

Тут $\vec{n}_1 = (A_1; B_1; C_1)$ і $\vec{n}_2 = (A_2; B_2; C_2)$ – нормальні вектори площини α_1 і α_2. Від загальних рівнянь (4.17) можна перейти до канонічних (4.15).

Оскільки пряма l перпендикулярна $\vec{n}_1$ і $\vec{n}_2$, то за напрямний вектор $\vec{S}$ прямої l можна взяти векторний добуток $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2$: $\vec{S} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}$.

4.5 Пряма лінія у просторі. Основні задачі

Кут між прямими. Умови паралельності та перпендикулярності прямих

Нехай прямі l_1 і l_2 визначаються напрямними векторами $\vec{S}_1 = (m_1; n_1; p_1)$ та $\vec{S}_2 = (m_2; n_2; p_2)$. Під кутом між двома прямими розуміють кут між їх напрямними векторами $\vec{S}_1$ та $\vec{S}_2$. Тому за відомою формулою з векторної алгебри

$$\cos\varphi = \frac{\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2}{\left|\vec{S}_1\right| \cdot \left|\vec{S}_2\right|} \text{ або } \cos\varphi = \pm \frac{m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}\sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}. \qquad (4.18)$$

Для визначення гострого кута між прямими l_1 і l_2 чисельник правої частини слід узяти за модулем.

Якщо прямі l_1 і l_2 перпендикулярні, то їх напрямні вектори перпендикулярні, тобто $\vec{S}_1 \perp \vec{S}_2$ або $\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 = 0$.

Отже, **умова перпендикулярності двох прямих** має вигляд:

$$m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0. \qquad (4.19)$$

Якщо прямі l_1 і l_2 паралельні, то паралельні їх напрямні вектори $\vec{S_1}$ та $\vec{S_2}$, тобто $\vec{S_1} \parallel \vec{S_2}$, або $\vec{S_1} = \lambda \vec{S_2}$.

Отже, **умова паралельності двох прямих** має вигляд:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}. \qquad (4.20)$$

4.6 Пряма і площина у просторі. Основні задачі

Кут між прямою і площиною

Нехай пряма l і площина α визначаються відповідно напрямним вектором $\vec{S} = (m; n; p)$ і нормальним вектором $\vec{n} = (A; B; C)$.

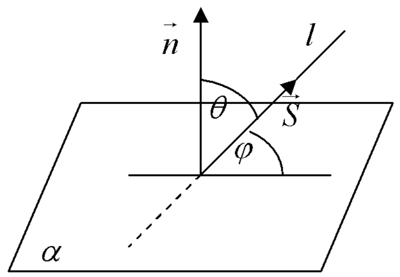


Рис.4.11

Кутом між прямою та площиною будемо називати будь – який із двох суміжних кутів, утворених прямою та її проекцією на площину.

Позначимо через φ кут між прямою l і площиною α, а через θ – кут між векторами $\vec{n} = (A; B; C)$ і $\vec{S} = (m; n; p)$ (рис.4.11). Спочатку знайдемо $\cos\theta$ за формулою кута між векторами:

$$\cos\theta = \frac{\vec{n} \cdot \vec{S}}{\left|\vec{n_1}\right| \cdot \left|\vec{S}\right|}.$$

Визначимо синус кута φ, вважаючи $\varphi \le \frac{\pi}{2}$:

$$\sin\varphi = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta.$$

Оскільки $\sin\varphi \ge 0$, то маємо формулу кута між прямою і площиною:

$$\sin\varphi = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}. \qquad (4.21)$$

Умови паралельності та перпендикулярності прямої і площини

Якщо пряма l паралельна площині α, то вектори $\vec{S}$ і $\vec{n}$ перпендикулярні, а тому $\vec{S} \cdot \vec{n} = 0$ (рис.4.12).

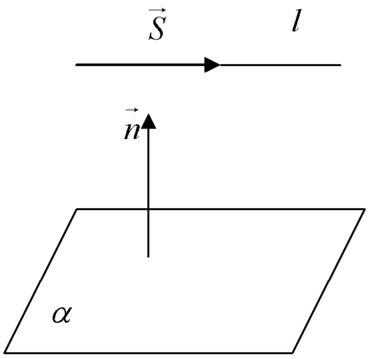


Рис.4.12

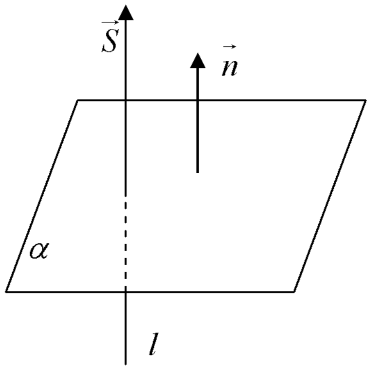


Рис.4.13

Отже, **умова паралельності прямої і площини** має вигляд

$$Am+Bn+Cp = 0. \qquad (4.22)$$

Якщо пряма l перпендикулярна площині α, то вектори $\vec{S}$ і $\vec{n}$ паралельні (рис 4.13).

Отже, **умова перпендикулярності прямої і площини** має вигляд

$$\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}. \qquad (4.23)$$

Перетин прямої і площини

Нехай треба знайти точку перетину прямої $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$ і площини $Ax+By+Cz+D=0$.

Для цього наведемо канонічні рівняння прямої до рівняння у параметричній формі:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt. \end{cases} \qquad (4.24)$$

Підставимо ці вирази до рівняння площини замість *x, y, z*, отримаємо рівняння

$$A(x_0+mt)+B(y_0+nt)+C(z_0+pt)+D=0$$

або

$$t(Am+Bn+Cp)+(Ax_0+By_0+Cz_0+D)=0.$$

Якщо пряма не належить площині або вони не паралельні, тобто $Am+Bn+Cp \neq 0$, то знайдемо t:

$$t=\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{Am+Bn+Cp}.$$

Координати шуканої точки перетину прямої і площини знайдемо, якщо занести обчислене значення параметра t до рівняння прямої (4.24).

Приклад. Дано координати точок S_0, S_1, S_2, S_3 і вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$:

S_0	S_1	S_2	S_3	$\vec{a}$	$\vec{b}$
(-1;2;1)	(3;-4;2)	(4;1;-3)	(2;-1;-2)	(1;3;-5)	(-3;1;4)

Необхідно:

1) скласти рівняння площини α_1, яка проходить через точку S_0 і має нормальний вектор $\vec{n}=\vec{b}$;

2) скласти рівняння площини α_2, яка проходить через точки S_1, S_2, S_3;

3) скласти рівняння площини α_3, яка проходить через точку S_1 і паралельна векторам $\vec{a}$, $\vec{b}$;

4) скласти рівняння площини α_4, яка проходить через точки S_2, S_3 і паралельна вектору $\vec{a}$;

5) знайти відстань від точки S_0 до площини α_2 і записати канонічні рівняння перпендикуляра l_1, який опущений із точки S_0 на площину α_2;

6) записати канонічні рівняння прямої l_2, яка проходить через точки S_1, S_2;

7) перевірити, чи перетинаються прямі l_1 і l_2.

Розв'язання:

1) Використовуючи рівняння площини, яка проходить через точку S_0 і має нормальний вектор $\vec{n}=\vec{b}$:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0, \text{ де } \vec{n}=(A,B,C);\ S_0(x_0, y_0, z_0),$$

отримаємо

$$-3(x+1)+1(y-2)+4(z-1)=0 \quad \text{або} \quad -3x+y+4z-9=0.$$

Остаточно маємо шукане рівняння площини α_1: $3x-y-4z+9=0$.

2) Запишемо рівняння площини, яка проходить через три точки S_1, S_2, S_3:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0, \text{ де } S_1(x_1, y_1, z_1);\ S_2(x_2, y_2, z_2);\ S_3(x_3, y_3, z_3).$$

Отримаємо $\begin{vmatrix} x-3 & y+4 & z-2 \\ 4-3 & 1+4 & -3-2 \\ 2-3 & -1+4 & -2-2 \end{vmatrix}=0$ або $\begin{vmatrix} x-3 & y+4 & z-2 \\ 1 & 5 & -5 \\ -1 & 3 & -4 \end{vmatrix}=0$.

Обчислимо визначник за загальним правилом, розкладаючи його за елементами першого рядка:

$$(x-3)\begin{vmatrix} 5 & -5 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}-(y+4)\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ -1 & -4 \end{vmatrix}+(z-2)\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}=0;$$

$$-5(x-3)+9(y+4)+8(z-2)=0.$$

Отже, маємо шукане рівняння площини α_2: $5x-9y-8z-35=0$.

3) Рівняння площини, яка проходить через точку S_1 і паралельна векторам $\vec{a}$, $\vec{b}$ можна визначити як рівняння площини, що проходить через три точки:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = 0, \text{ де } S_1(x_0,y_0,z_0), \ \ \vec{a} = \left(a_x, a_y, a_z\right) \text{ і } \vec{b} = \left(b_x, b_y, b_z\right).$$

Отримаємо рівняння $\begin{vmatrix} x-3 & y+4 & z-2 \\ 1 & 3 & -5 \\ -3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0$. Обчислимо визначник шляхом його розкладу за елементами першого рядка б

$$(x-3)\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} - (y+4)\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} + (z-2)\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$17(x-3)+11(y+4)+10(z-2)=0,$$

тобто маємо шукане рівняння площини α_3: $17x + 11y + 10z - 27=0.$

4) Запишемо рівняння площини, яка проходить через точки S_2, S_3 і паралельна вектору $\vec{a}$:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = 0, \text{ де } \ S_2(x_1,y_1.z_1);\ S_3(x_2,y_2,z_2);\ \vec{a} = \left(a_x, a_y, a_z\right).$$

Маємо рівняння $\begin{vmatrix} x-4 & y-1 & z+3 \\ 2-4 & -1-1 & -2+3 \\ 1 & 3 & -5 \end{vmatrix} = 0$,

звідси

$$(x-4)\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} - (y-1)\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} + (z+3)\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 0;$$

$$7(x-4) - 9(y-1) - 4(z+3)=0;$$

тобто

$$\alpha_3:\ 7x - 9y - 4z - 31=0.$$

5) Використовуючи формулу (4.13), визначимо відстань від точки S_0 до площини α_2.

$$d = \frac{\left|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D\right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \text{ де } \ S_0(x_1,y_1,z_1).$$

Рівняння площини α_2 визначили раніше: $5x - 9y - 8z - 35 = 0$, тобто

$$d=\frac{|5(-1)-9\cdot 2-8\cdot 1-35|}{\sqrt{5^2+(-9)^2+(-8)^2}}=\frac{|-66|}{\sqrt{170}}\approx 5,7.$$

Запишемо канонічні рівняння перпендикуляра l_1, який опущений із точки $S_0(x_1,y_1,z_1)$ на площину α_2.

Оскільки пряма l_1 перпендикулярна площині α_2, то нормальний вектор площини $\overrightarrow{n_2}=(5;-9;-8)$ буде одночасно і напрямним вектором перпендикуляра l_1. Тому рівняння прямої l_1 матиме вигляд

$$\frac{x+1}{5}=\frac{y-2}{-9}=\frac{z-1}{-8}$$ (тут використали рівняння (4.15)).

6) Запишемо канонічні рівняння прямої , яка проходить через дві точки S_1 і S_2, для цього використаємо рівняння (4.15):

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1},$$ де $S_1(x_1,y_1.z_1)$; $S_2(x_2,y_2,z_2)$.

Звідси маємо шукане рівняння прямої l_2:

$$l_2:\ \frac{x-3}{4-3}=\frac{y+4}{1+4}=\frac{z-2}{-3-2};\quad \frac{x-3}{1}=\frac{y+4}{5}=\frac{z-2}{-5}\ .$$

7) Перевіримо, чи перпендикулярні прямі l_1 і l_2, рівняння яких отримали вище. Отже, відомі їх напрямні вектори $\overrightarrow{s_1}=(5;-9;-8)$ і $\overrightarrow{s_2}=(1;5;-5)$.

Використовуючи умову перпендикулярності прямих (4.19), отримаємо $\overrightarrow{s_1}\cdot\overrightarrow{s_2}=5\cdot 1+(-9)\cdot 5+(-8)\cdot(-5)=0$, тобто прямі l_1 і l_2 перпендикулярні.

4.7 Поверхні другого порядку

Поверхні, порядок яких вищий за перший, називають кривими. Ці поверхні відрізняються багатою різноманітністю форм і надають широкі можливості для цікавих архітектурних рішень.

Означення. Поверхня, яка в деякій системі координат $Oxyz$ визначається алгебраїчним рівнянням другого степеня, називається **поверхнею другого порядку.**

У загальному вигляді рівняння другого порядку відносно змінних x, y, z має вигляд

$$Ax^2+By^2+Cz^2+2Dxy+2Exz+2Fyz+2Gx+2Hy+2Kz+L=0,$$

де коефіцієнти при змінних – деякі дійсні числа.

Циліндричні поверхні

Означення. Поверхня, що утворена рухом прямої L, яка рухається у просторі, зберігаючи сталий напрям і перетинаючи кожного разу деяку криву K, називається **циліндричною поверхнею або циліндром**.

При цьому крива K називається **напрямною циліндра**, а пряма L – його **твірною** (рис.4.13).

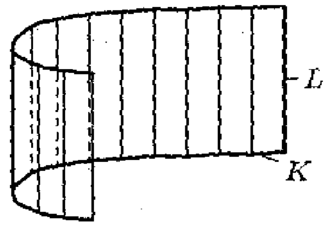


Рис.4.13

Нехай на площині Oxy лежить деяка крива K, рівняння якої має вигляд

$$F(x;y) = 0.$$

Побудуємо циліндр із напрямною K і твірними, паралельними осі Oz (рис.4.13) і доведемо, що рівняння цього циліндра має вигляд

$$F(x;y) = 0, \tag{4.25}$$

тобто не містить координати z.

Дійсно, нехай точка $M(x;y;z)$ – довільна точка на циліндрі, яка належить деякій твірній L.

Позначимо через N точку перетину цієї твірної і площини Oxy, тоді точка N належить і кривій K та її координати задовольняють рівнянню кривої $F(x;y) = 0$. Але точка M має такі ж абсцису x і ординату y, як і точка N, тобто координати точки M також задовольняють рівнянню $F(x;y) = 0$. Оскільки точка M – довільна точка циліндра, то рівняння $F(x;y) = 0$ – рівняння циліндра.

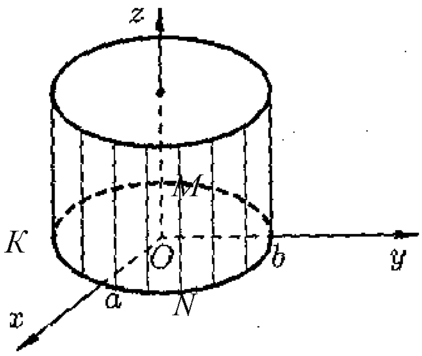


Рис.4.14

Аналогічно можна показати, що рівняння $F(x;z) = 0$ визначає циліндр, твірні якого паралельні осі Oy, а рівняння $F(y;z) = 0$ – циліндр з твірними, які паралельні осі Ox.

Назва циліндра визначається назвою напрямної.

Якщо напрямною циліндра є еліпс на площині Oxy, який задається рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{4.26}$$

то відповідна циліндрична поверхня називається **еліптичним циліндром** (рис.4.14).

Частковим випадком еліптичного циліндра є **круговий циліндр**, рівняння якого має вигляд: $x^2 + y^2 = R^2$.

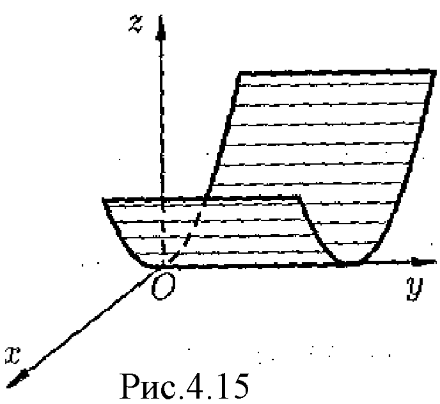


Рис.4.15

Рівняння

$$x^2 = 2pz \tag{4.27}$$

визначає у просторі $Oxyz$ **параболічний циліндр** (рис.4.15).

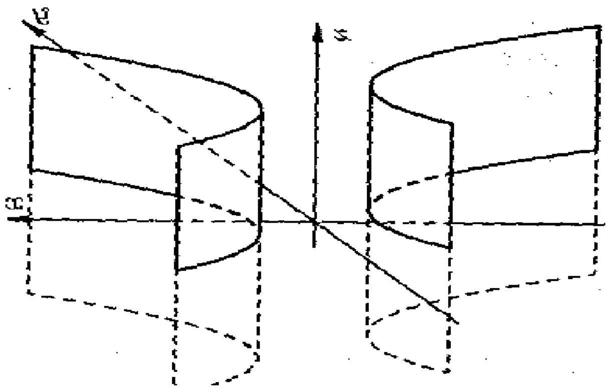


Рис.4.16

Рівняння

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (4.28)$$

визначає у просторі $Oxyz$ **гіперболічний циліндр** (рис.4.16).

Поверхні обертання. Конічні поверхні

Означення. Поверхня, яка утворюється обертанням кривої навколо осі, розташованої в її площині, називається **поверхнею обертання**.

Нехай деяка крива L належить площині Oyz. Рівняння цієї кривої запишемо у вигляді:

$$\begin{cases} F(y;z)=0, \\ x=0. \end{cases}$$

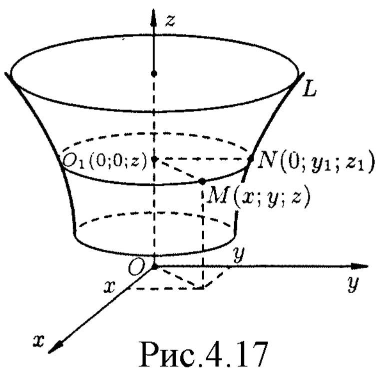


Рис.4.17

Знайдемо рівняння поверхні, яка утворюється обертанням кривої L навколо осі Oz (рис.4.17).

Нехай точка $M(x;y;z)$ – довільна точка на поверхні. Проведемо через точку M площину, яка перпендикулярна осі Oz і позначимо точки перетину її з віссю Oz і кривою L відповідно через $O_1(0;0;z)$ та $N(0;y_1;z_1)$. Оскільки відрізки O_1M і O_1N є радіусами одного кола, тому $O_1N = O_1M$, тобто

$$|y_1|=\sqrt{x^2+y^2} \text{ або } y_1=\pm\sqrt{x^2+y^2}.$$

Крім того, звісно, $z_1=z$. Оскільки точка N належить кривій L, то її координати задовольняють рівнянню $\begin{cases} F(y;z)=0, \\ x=0, \end{cases}$, тому $F(y_1;z_1)=0$.

Звідси

$$F(\pm\sqrt{x^2+y^2};z)=0. \qquad (4.29)$$

Рівняння (4.29) – шукане **рівняння поверхні обертання**. Йому задовольняють координати будь – якої точки M на цій поверхні і не задовольняють координати точок, які не належать поверхні обертання.

Якщо крива $\begin{cases} F(y;z)=0, \\ x=0. \end{cases}$ обертається навколо Oy, то рівняння поверхні обертання має вигляд

$$F(y;\pm\sqrt{x^2+z^2})=0. \qquad (4.30)$$

Якщо крива L належить площині Oxy $(z = 0)$ і має рівняння $F(x,y) = 0$, то рівняння поверхні обертання, яка утворюється обертанням кривої L навколо осі Ox, записується у вигляді:

$$F(x;\pm\sqrt{y^2+z^2})=0. \qquad (4.31)$$

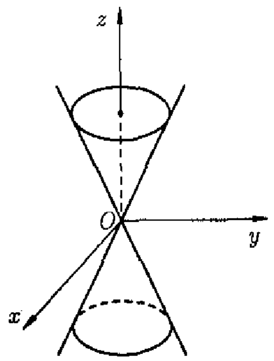


Рис.4.18

Наприклад, якщо пряма $y=z$ обертається навколо осі Oz (рис 4.18), то отримаємо поверхню обертання:

$$z=\pm\sqrt{x^2+y^2} \quad \text{або} \quad x^2+y^2=z^2. \qquad (4.32)$$

Рівняння $x^2+y^2=z^2$ визначає **конус другого порядку**.

Означення. Поверхня, яка утворюється обертанням прямої, яка проходить через задану точку P і перетинає дану плоску лінію K, що не проходить через точку P, називається **конічною поверхнею або конусом**.

При цьому лінія K називається **напрямною**, а пряма, яка описує поверхню, – **твірною.**

Розглянемо поверхні, які є просторовими аналогами кривих другого порядку. За заданим рівнянням поверхні другого порядку в деякій прямокутній системі координат у просторі будемо визначати її властивості. За допомогою методу перерізів геометричний вигляд поверхні вивчається за лініями перетину цієї поверхні з координатними площинами або площинами, які їм паралельні.

Еліпсоїд

Означення. Еліпсоїдом називається поверхня, яка в деякій прямокутній системі координат визначається рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1. \qquad (4.33)$$

Рівняння (4.33) називається **канонічним рівнянням еліпсоїда**. Для дослідження форми еліпсоїда розглянемо перерізи поверхні площинами, які паралельні площині Oxy.

Рівняння таких площин: $z = h$, де h – довільне число.

Лінія, яка утворюється в перерізі , визначається системою двох рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1-\dfrac{h^2}{c^2}, \\ z=h. \end{cases}$$

Досліджуємо рівняння :

1. Якщо $|h| > c,\ c > 0,\ mo\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 0$; отже, точок перетину поверхні $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ і площини $z = h$ не існує;

2. Якщо $|h| = c$, тобто $h = \pm c$, тому $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$; отже, лінія перетину вироджується у дві точки *(0;0;c)* і *(0;0;-c)*. Площини $z = \pm c$ торкаються поверхні;

3. Якщо $|h| < c$, то рівняння $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{h^2}{c^2}, \\ z = h \end{cases}$ запишеться у вигляді:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{\left(a\sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(b\sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}}\right)^2} = 1, \\ z = h. \end{cases}$$

Як видно, лінія перетину є еліпсом із півосями

$$a_1 = a\sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}}, b_1 = b\sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}}.$$

При цьому, чим менше $|h|$, тим більші півосі a_1 і b_1. При $h = 0$ вони досягають своїх найбільших значень $a_1 = a$ і $b_1 = b$.

Рівняння $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{h^2}{c^2}, \\ z = h \end{cases}$ набувають вигляду $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \\ h = 0. \end{cases}$.

Аналогічні результати отримуємо, якщо розглянемо перерізи поверхні площинами $x = h$, $y = h$.

Крім того, можна показати, що еліпсоїд має 6 вершин із координатами:

(a;0;0), (-a;0;0), (0;в;0), (0;-в;0), (0;0;c), (0;0;-c).

Осями симетрії еліпсоїда є координатні осі *Ox, Oy, Oz* , а площинами симетрії – координатні площини *Oxy, Oxz, Oyz*.

Таким чином, наведений аналіз дозволяє зобразити еліпсоїд як замкнену овальну поверхню (рис. 4.19).

Величини *a, b, c* називають **піввісями еліпсоїда.**

Якщо всі ці числа різні, то еліпсоїд називають **трьохвісним.** Якщо деякі дві піввісі рівні, то еліпсоїд можна розглядати як поверхню, яка утворена обертанням еліпса навколо однієї з його осей.

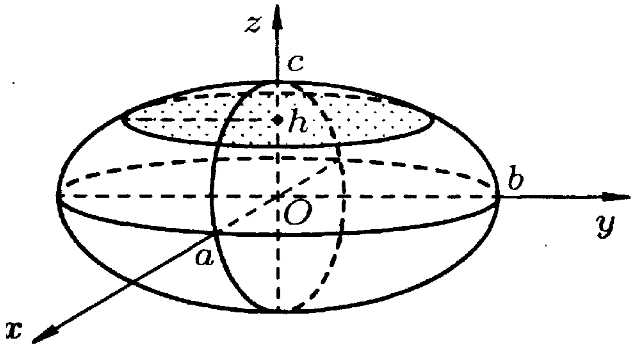


Рис.4.19

Якщо еліпс обертається навколо великої осі, то еліпсоїд називають **витягнутим,** якщо навколо малої осі – **стиснутим**.

Якщо $a = b = c$, то еліпсоїд є сферою, яка визначається рівнянням

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2.$$

Гіперболоїди

Означення. Однополим гіперболоїдом називається поверхня, яка в деякій прямокутній системі координат визначається рівнянням:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1. \qquad (4.34)$$

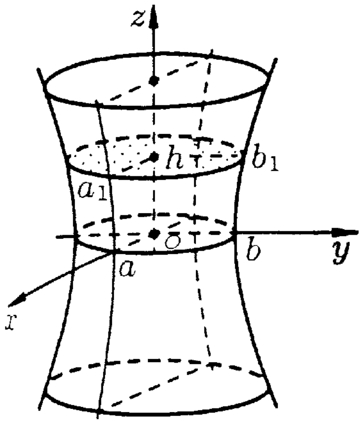


Рис.4.20

Означення. Двополим гіперболоїдом називається поверхня, яка в деякій прямокутній системі координат визначається рівнянням:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1. \qquad (4.35)$$

Аналіз за методом перерізів показує, що лініями перетину однополого гіперболоїда з координатними площинами і площинами, які їм паралельні, є еліпси та гіперболи.

Цей результат дозволяє зобразити однополий гіперболоїд як поверхню, яка має форму трубки, що нескінченно розширюється (рис.4.20).

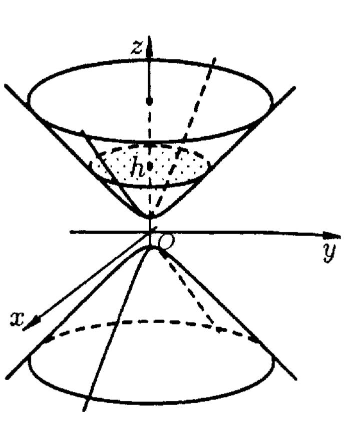


Рис.4.21

Зауваження. Можна довести, що через будь – яку точку однополого гіперболоїда $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ можна провести дві прямі, які йому належать.

Аналіз за методом перерізів дозволяє зобразити двополий гіперболоїд $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$ як поверхню, яка складається з двох частин, що мають форму двох опуклих нескінченних чаш (рис.4.21).

Параболоїди

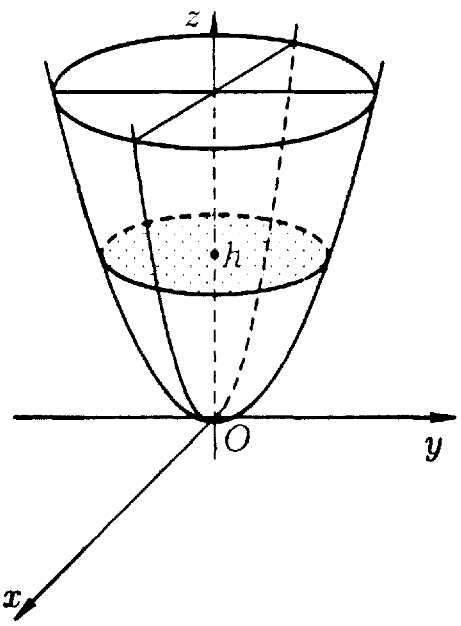


Рис.4.22

Існують дві поверхні, які є просторовими аналогами парабол на площині. Їх називають параболоїдами(еліптичним і гіперболічним).

Означення. Еліптичним параболоїдом називається поверхня, яка в деякій прямокутній системі координат визначається рівнянням

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z, \text{ де } p>0,\ q>0. \qquad (4.36)$$

Означення. Гіперболічним параболоїдом називається поверхня, яка в деякій прямокутній системі координат визначається рівнянням

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z, \quad \text{де } p>0,\ q>0. \quad (4.37)$$

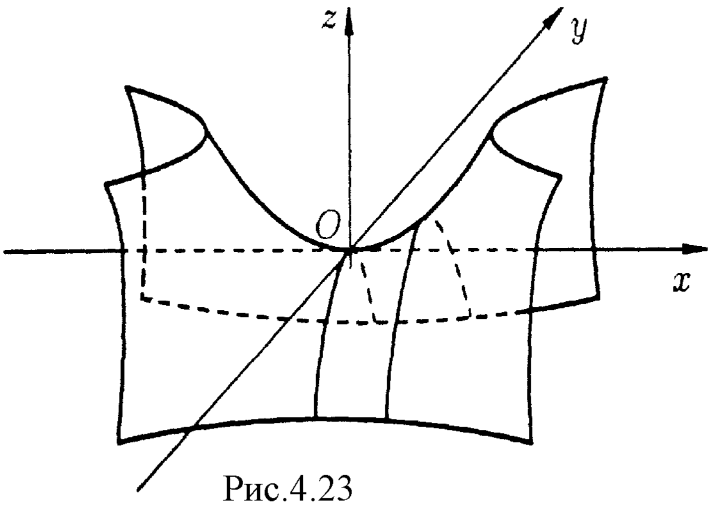


Рис.4.23

Аналіз за методом перерізів дозволяє зобразити еліптичний параболоїд як поверхню, яка має вигляд опуклої чаші, що нескінченно розширюється (рис.4.22), а гіперболічний параболоїд – як поверхню, яка має форму сідла (рис. 4.23).

Поверхні, які складаються з прямих ліній, називають **лінійчатими.** До них належать циліндричні, конічні поверхні, а також однополий гіперболоїд і гіперболічний параболоїд. Лінійчаті поверхні є цінними з точки зору технології будівельного виробництва. Так, відомий інженер В.Г. Шухов запропонував ідею використання лінійчатого характеру однополого гіперболоїда в будівельній техніці. Такі конструкції виявилися легкими і міцними.

Цінна якість гіперболічного параболоїда (як лінійчатої поверхні) полягає в тому, що у процесі побудови складних споруд з'являється можливість спряження її частин за прямолінійними твірними.

Питання для самоперевірки

1 Як визначаються в аналітичній геометрії лінія, поверхня та інші множини точок? Наведіть приклади.

2 Як однозначно може бути визначене положення площини у просторі?

3 Який вектор називається нормальним вектором площини?

4 Яке рівняння називають загальним рівнянням площини у просторі? У чому полягає зміст його коефіцієнтів?

5 Виведіть рівняння площини, яка проходить через задану точку і має заданий нормальний вектор.

6 Виведіть рівняння площини, яка проходить через три задані точки.

7 Як однозначно може бути визначене положення прямої у просторі?

8 Який вектор називають напрямним вектором прямої?

9 Виведіть канонічні та параметричні рівняння прямої у просторі.

10 Виведіть рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки.

11 Як визначити кут між двома площинами; двома прямими; між прямою і площиною?

12 Сформулюйте умови паралельності та перпендикулярності двох прямих; двох площин; прямої і площини.

13 Наведіть приклади поверхонь другого порядку, їх рівняння і властивості.

14 Виведіть рівняння циліндричної поверхні.

15 Яка характерна особливість рівняння циліндричної поверхні, твірні якої паралельні одній з координатних осей? Наведіть приклади.

Теми рефератів

1 Криві третьего порядка та їх властивості.

2 Криві четвертого порядка та їх властивості.

3 Трансцендентні криві та їх властивості.

4 Поверхні обертання та їх застосування в архітектурно-будівельній практиці.

5 Циліндричні поверхні та їх застосування в архітектурно-будівельній практиці.

6 Еліпсоїди, гіперболоїди, параболоїди та їх застосування в архітектурно-будівельній практиці.

7 Застосування диференціальних властивостей поверхонь в архітектурно-будівельній практиці (після вивчення розділу5).

Розділ 5 ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

ЛЕКЦІЇ 9-12

Поняття змінної та функції є основними поняттями диференціального та інтегрального числень. Функція встановлює зв'язок між залежними величинами. Наприклад, у задачах з опору матеріалів визначають зв'язок між інтенсивністю напружень й інтенсивністю деформації, досліджуючи на розтяг – стиск сталеві зразки, або досліджують осідання точок фундаменту споруди залежно від часу. Розв'язання задач в архітектурному проектуванні потребує проведення дотичних площин і нормалей до поверхонь, визначення кривин поверхонь та кривих, а найбільш ефективні пропорції побудови знаходять, наприклад, досліджуючи на екстремуми функції відношення площі поверхні до внутрішнього об'єму побудови. Всі ці задачі розв'язують за допомогою похідної функції.

5.1 Функція та її основні властивості

Означення. Змінною величиною (змінною) називається величина, яка набуває різних числових значень.

Якщо значення величини не змінюється, то її звуть **сталою**.

Змінні величини зазвичай позначають через x, y, z,…і т.д., а сталі – a, b, c,…і т.д.

Нехай задані дві непорожних множини X і Y.

Означення. Відповідність, за якою з кожним значенням змінної $x \in X$ (яка належить множині X) зіставляють цілком певне значення змінної $y \in Y$, називається **функцією** і позначається $y = f(x)$ або $y = y(x)$. Змінну x називають **незалежною змінною** або **аргументом**, а змінну y – **залежною змінною** або **функцією**.

Означення. Сукупність усіх значень незалежної змінної x, для яких визначаються значення функції y називають **областю визначення функції або областю існування** і позначають $D(f)$ або $D(y)$. Сукупність усіх різних значень змінної y, які обчислюються за правилом $f(x)$, називають **областю зміни функції** і позначають $E(f)$ або $E(y)$. У наших позначеннях $D(f) = X$, $E(f) = Y$.

Значення, якого набуває функція $y = f(x)$ при $x = x_0$, позначають $f(x_0)$ і називають **частинним значенням функції**.

Способи задання функції

Найбільш розповсюдженими є три способи задання функції: аналітичний, табличний, графічний .

1) При **аналітичному способі** функцію задають у вигляді однієї або декількох формул або рівнянь. Розрізняють такі форми аналітичного задання функції:

- **Явна форма задання функції:** $y = f(x)$.

Наприклад, $y=\sqrt{1-x^2}$, $\quad y=\begin{cases} x+1, \text{ якщо } -1\le x<0, \\ 1 \ , \text{ якщо } \ 0\le x\le 1, \\ \sin\frac{\pi}{2}x, \text{ якщо } 1<x\le 2. \end{cases}$

- **Неявна форма задання функції:** $F(x;y)=0$.

Наприклад, $y^2-x+1=0$.

- **Параметрична форма задання функції:**

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t). \end{cases}$$

При параметричному заданні функції значення змінних x і y, які відповідають одне одному, визначають через третю величину, яку називають **параметром.**

Наприклад, функція $\begin{cases} x=\sin t, \\ y=\cos t, \end{cases}$ $t\in[0;\pi/2]$ шляхом виключення параметра t допускає запис у явній формі $y=\sqrt{1-x^2}$.

2) При **табличному способі** функцію задають у вигляді таблиці (рис.5.1)

x	x_1 x_2 … x_n
y	y_1 y_2 … y_n

Рис.5.1

де x_i, y_i – значення аргументу і функції ($i=\overline{1;n}$).

3) при **графічному способі** у деякій прямокутній системі координат на площині будують сукупність усіх точок (**графік функції** $y=f(x)$), для яких абсциса x і ордината y є значеннями відповідно аргументу і функції.

До основних властивостей функцій належать:

- область визначення та область зміни;
- парність або непарність;
- періодичність;
- обмеженість;
- існування оберненої функції;
- існування асимптот графіка функції;
- диференційованість;
- неперервність;
- монотонність, існування екстремуму;

- опуклість, угнутість, існування точок перегину;
- інтегруємість і ін.;

Наведемо означення цих понять, за винятком тих понять, які будуть розглянуті нижче.

Означення. Функція $y = f(x)$, яка визначена на множині X, називається **парною**, якщо для всіх $x \in X$ виконуються умови $-x \in X$ і $f(-x) = -f(x)$; і **непарною**, якщо для всіх $x \in X$ виконуються умови $-x \in X$ і $f(-x) = f(x)$.

Графік парної функції симетричний відносно осі Oy, а непарної – відносно початку координат.

Наприклад, $y = x^2$, $y = \cos x$ – парні функції;

$y = x^3$, $y = \sin x$ – непарні функції;

$y = x + 1$, $y = \ln x$ – функції загального вигляду, тобто ні парні, ні непарні.

Означення. Функція $y = f(x)$, яка визначена на множині X, називається **періодичною з періодом *T***, якщо для будь – якого значення аргументу $x \in X$ виконуються умови: $f(x \pm T) = f(x)$.

Зазвичай під періодом функції розуміють найменший із усіх додатних періодів (якщо такий існує).

Наприклад, функції $y = \cos x$, $y = \sin x$ періодичні та мають найменший додатний період 2π .

Означення. Функція $y = f(x)$, яка визначена на множині X, називається **обмеженою на цій множині,** якщо існує таке число $M > 0$, що для всіх $x \in X$ виконується нерівність $|f(x)| < M$ (тобто графік обмеженої функції розташований між прямими $y = -M$ і $y = M$).

Наприклад, функція $y = \sin x$ є обмеженою в області визначення, оскільки $|\sin x| \le 1$ при $x \in R$.

Нехай $D(f)$ і $E(f)$ – відповідно області визначення і зміни функції $y = f(x)$. Якщо кожному значенню $y \in E(f)$ відповідає єдине значення $x \in D(f)$, то визначена функція $x = \varphi(y)$ з областю визначення $E(f)$ та областю зміни $D(f)$. Така функція $\varphi(y)$ називається **оберненою** до функції $f(x)$, її позначають f^{-1} і записують $x = f^{-1}(y)$. Функції $y = f(x)$ і $x = \varphi(y)$ називають **взаємно оберненими**. Наприклад, $y = a^x$ і $y = \log_a x$ ($a > 0$, $a \ne 1$) є взаємно оберненими функціями.

Означення. Функція $y = f(x)$, яка визначена на множині X, називається **зростаючою (спадаючою) на множині $X_1 \subset X$,** якщо для будь – яких значень x_1 і $x_2 \in X_1$ із нерівності $x_1 > x_2$ випливає нерівність $f(x_1) > f(x_2)$ ($f(x_1) < f(x_2)$), тобто більшому значенню аргументу відповідає більше (менше) значення функції. Якщо з нерівності $x_1 > x_2$ випливає нерівність $f(x_1) \ge f(x_2)$ ($f(x_1) \le f(x_2)$), то функцію називають **неспадною (незростаючою) на множині X_1 .**

Зростаючі, незростаючі, спадні та неспадні функції називають

монотонними, а зростаючі і спадні функції – **строго монотонними.**

Наприклад, функція $y = e^x$ є зростаючою при $x \in R$, а функція $y = \log_{1/2} x$ спадає при $x > 0$.

Основні елементарні функції та їх графіки

1. Степенева функція $y = x^{\alpha}$ **,** де α – дійсне число, що відмінне від нуля.

При $\alpha = 1,\ \alpha = 3,\ \alpha = 5$ функція визначена на всій числовій осі: $D(y) = \mathbb{R}$. Область зміни функції $E(y) = \mathbb{R}$ (рис.5.2).

При $\alpha = 2,\ \alpha = 4,$ функція визначена на всій числовій осі: $D(y) = \mathbb{R}$. Область зміни функції $E(y) = [0;+\infty)$ (рис.5.3).

При $\alpha = -1$ область визначення $D(y) = (-\infty;0) \cup (0;+\infty)$. Область зміни функції $E(y) = (-\infty;0) \cup (0;+\infty)$ (рис.5.4).

При $\alpha = \frac{1}{2}$ область визначення $D(y) = [0;+\infty)$. Область зміни функції $E(y) = [0;+\infty)$ (рис.5.5).

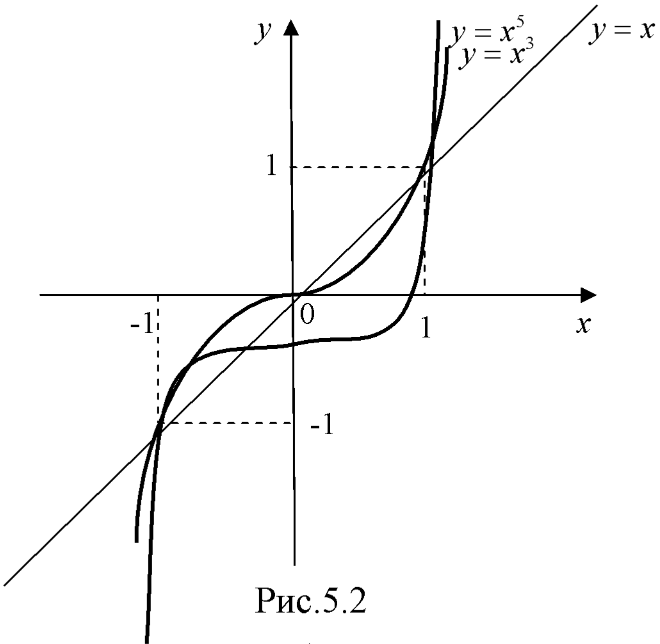


Рис.5.2

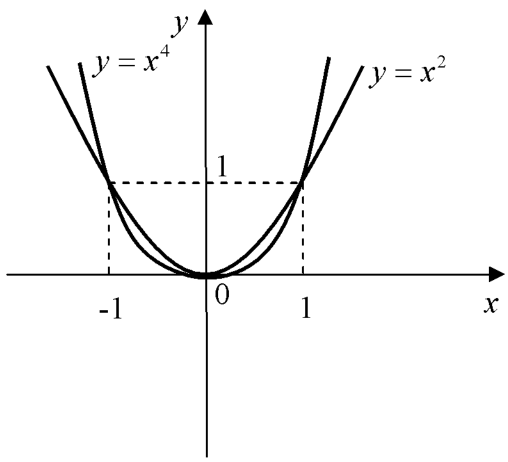


Рис.5.3

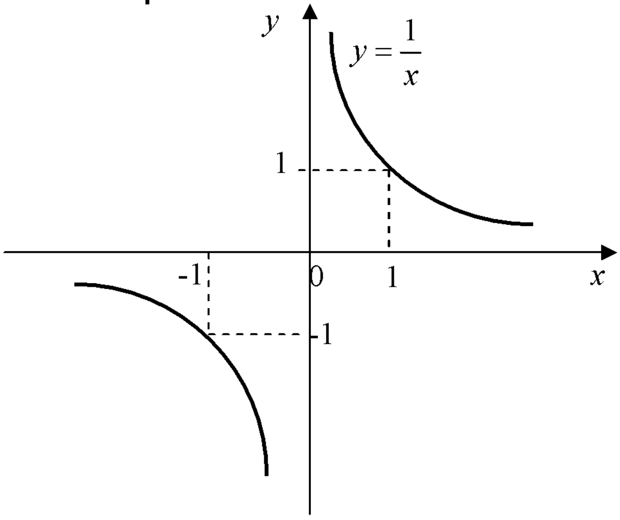


Рис.5.4

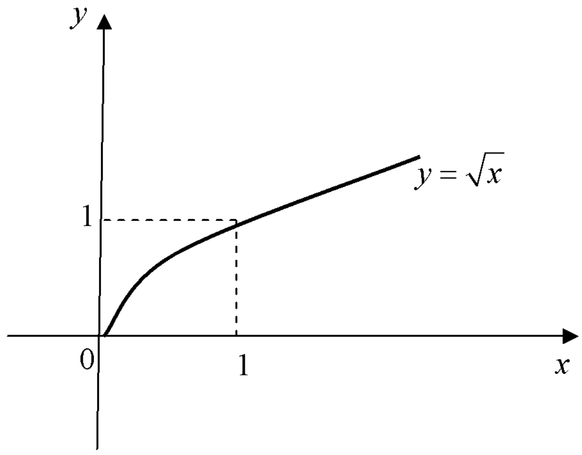


Рис.5.5

2. Показникова функція $y = a^x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$ визначена для всіх дійсних значень x. Область зміни функції $E(y) = (0; +\infty)$ (рис.5.6).

3. Логарифмічна функція $y = \log_a x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$ визначена для $x > 0$. Область зміни функції $E(y) = (-\infty; +\infty)$ (рис.5.7).

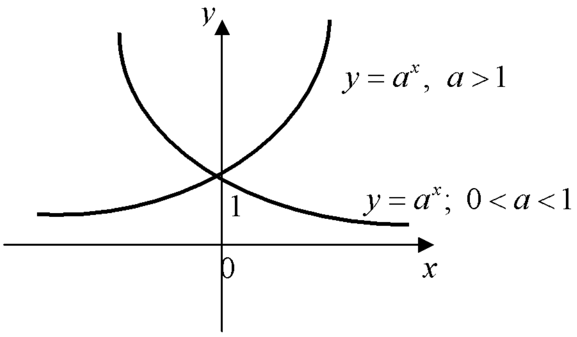


Рис.5.6

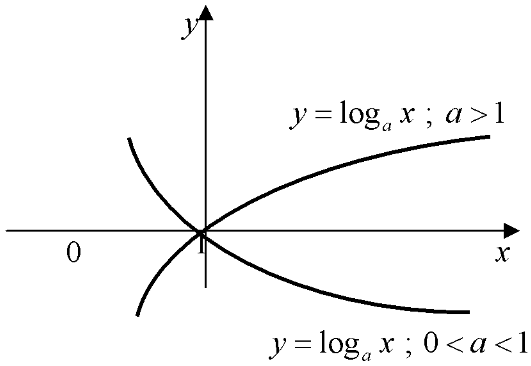


Рис.5.7

4. Тригонометричні функції $y = \sin x$ (рис.5.8) і $y = \cos x$ (рис.5.9) визначені на всій числовій осі, а їх область зміни $E(y) = [-1; 1]$; функція $y = tgx$ (рис.5.10) визначена для всіх x, крім точок $x = \frac{\pi}{2}(2k+1),\ k \in \mathbb{Z}$; функція $y = ctgx$ (рис.5.11) визначена для всіх x, крім точок $x = \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$. Область зміни цих функцій $E(y = tgx) = E(y = ctgx) = \mathbb{R}$.

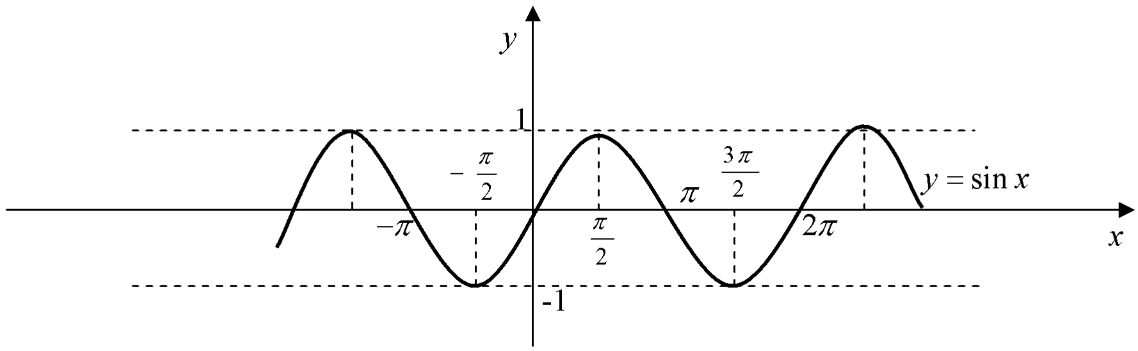


Рис.5.8

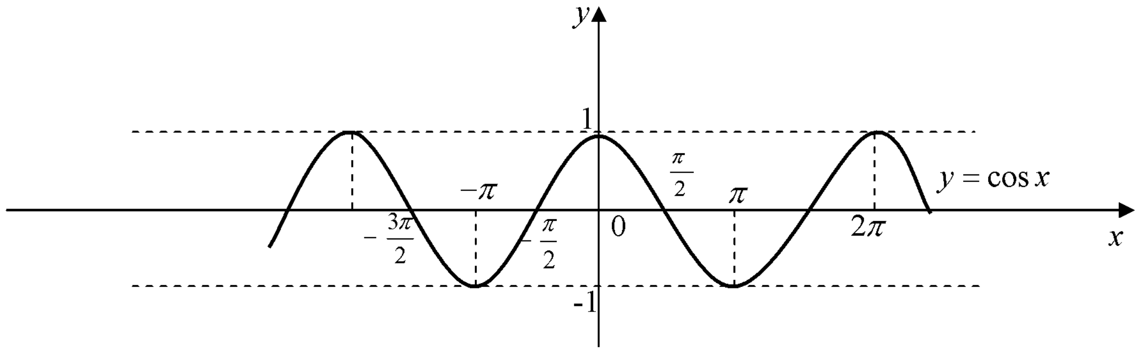


Рис.5.9

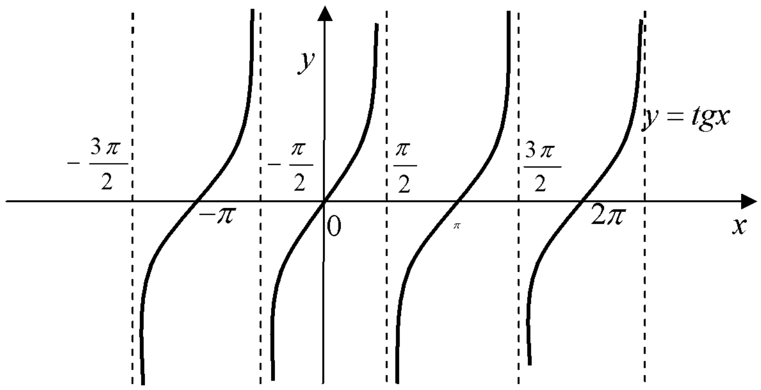


Рис.5.10

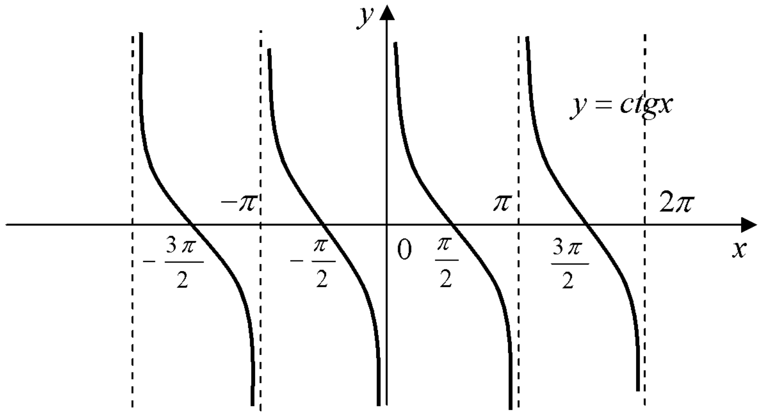


Рис.5.11

5. Обернені тригонометричні функції: $y = \arcsin x$ (рис.5.12) визначена на відрізку $[-1;1]$ і набуває значень, які належать відрізку $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$; $y = \arccos x$ (рис.5.13) визначена на відрізку $[-1;1]$ і набуває значень, які належать відрізку $[0;\pi]$; $y = arctgx$ (рис.5.14) і $y = arcctgx$ (рис.5.15) визначені для всіх значень *x*, а їх області зміни відповідно $-\frac{\pi}{2} < arctgx < \frac{\pi}{2}$ та $0 < arcctgx < \pi$.

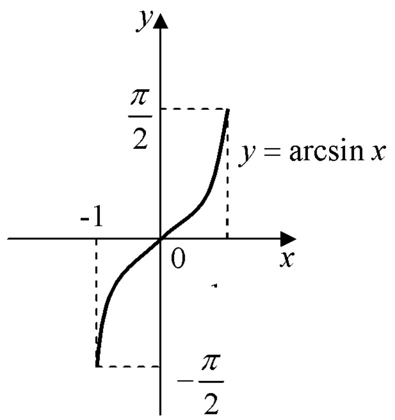


Рис.5.12

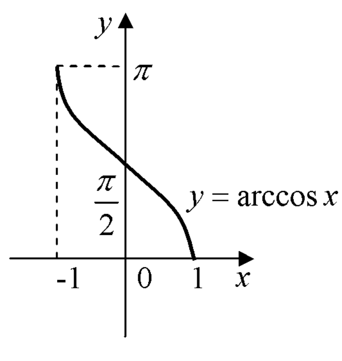
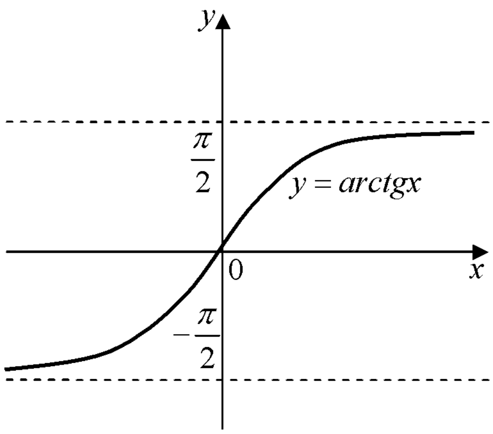


Рис.5.13



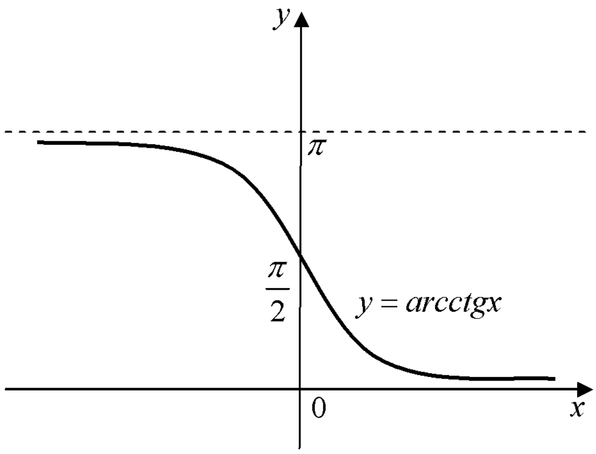


Рис.5.14 Рис.5.15

Слід зазначити, що в тих випадках, коли область визначення функції заздалегідь не вказана, важливо вміти знаходити її, тобто визначати множину тих значень x, для яких існує аналітичний вираз $f(x)$.

Елементарна функція

Функція, яка може бути задана однією формулою, що складається із основних елементарних функцій і сталих величин за допомогою скінченого числа арифметичних операцій (додавання , віднімання, множення, ділення) та операції взяття «функції від функції» називається **елементарною функцією.**

Наприклад, $y = 5^{tg\sqrt{x}}$, $y = \cos^3 \ln\frac{2}{x}$ – елементарні функції;

$y = |x|$, $y = \begin{cases} x^2+1, \text{якщо } x \le 0, \\ 1, \quad \text{якщо } x > 0, \end{cases}$ – неелементарні функції.

Складна функція

Нехай функція $y = f(u)$ визначена на множині *X*, а функція $u = \varphi(x)$ визначена на множині X_1, причому для будь – якого значення $x \in X_1$ існує відповідне значення $u = \varphi(x) \in X$. Тоді на множині X_1 визначена функція $u = f(\varphi(x))$, яка називається **складною функцією від *x*** (або **суперпозицією** заданих функцій).

Наприклад, $y = \sin e^x$ є суперпозицією двох функцій $y = \sin u$ і $u = e^x$.

5.2 Границя функції

Під околом точки x_0 розуміють будь – якій інтервал (*a* ; *b*), який містить точку x_0.

Нехай функція $y = f(x)$ визначена в околі точки x_0, за винятком, можливо, самої точки x_0.

Означення. Число *A* називається **границею функції** $f(x)$ **при *x*, яке прямує до x_0 ($x \to x_0$)**, якщо для будь – якого як завгодно малого числа $\varepsilon > 0$ існує число $\delta(\varepsilon) > 0$, яке залежить від ε, таке, що при всіх $x \in (a;b)$, які задовольняють нерівності $0 < |x - x_0| < \delta$, виконується нерівність $|f(x) - \mathrm{A}| < \varepsilon$.

Символічно цей факт записують так : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \mathrm{A}$.

Якщо $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$, то це означає, що для будь – якого числа $\mathrm{M} > 0$ існує число $\delta(\mathrm{M}) > 0$, яке залежить від M, таке, що при всіх x , які задовольняють нерівності $0 < |x - x_0| < \delta$, виконується нерівність $|f(x)| > \mathrm{M}$.

Границя функції при $x \to \infty$

Якщо $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \mathrm{A}$, то для будь – якого числа $\varepsilon > 0$ існує число $\mathrm{M}(\varepsilon) > 0$, яке залежить від ε, таке, що при всіх x, для яких виконується нерівність $|x| > \mathrm{M}(\varepsilon)$ випливає нерівність $|f(x) - \mathrm{A}| < \varepsilon$.

Аналогічно $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$, якщо для будь – якого числа $\mathrm{M} > 0$ існує число $\mathrm{N}(\mathrm{M}) > 0$, яке залежить від M, таке, що при всіх x, для яких виконується нерівність $|x| > \mathrm{N}$ випливає нерівність $|f(x)| > \mathrm{M}$.

Геометричний зміст границі функції

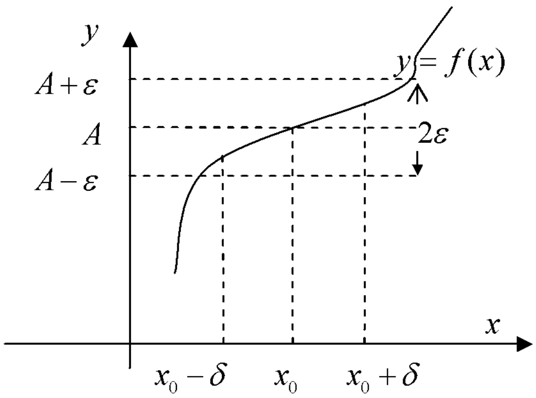


Рис.5.16

Якщо $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \mathrm{A}$, то для всіх точок x, які лежать від точки $\boldsymbol{x_0}$ не далі, ніж на відстань δ, точки графіка функції $y = f(x)$ лежать усередині смуги, шириною 2ε, яка обмежена прямими $y = A - \varepsilon$ і $y = A + \varepsilon$ (рис.5.16).

Односторонні границі

Для існування границі функції $f(x)$ при $x \to x_0$ необхідно й достатньо, щоб мала місце рівність

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x),$$

де $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0)$ – **ліва границя,** а $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0)$ – **права границя функції** $f(x)$ **у точці** $x = x_0$**.** Запис $x \to x_0 - 0$ $(x \to x_0 + 0)$ означає, що точка x наближається до точки x_0 зліва (справа). Права й ліва границі функції у точці називаються **односторонніми границями функції в цій точці.**

У загальному випадку ліва і права границі функції у точці x_0 можуть існувати, але не дорівнювати одна одній.

Наприклад, область визначення функції $y = arcctg(1/x)$: $D(y) = R \backslash \{0\}$**,** тобто функція не визначена лише в одній точці $x_0 = 0$. Обчислимо її односторонні границі в цій точці:

$$\lim_{x \to -0} arcctg(1/x) = 0, \quad \lim_{x \to +0} arcctg(1/x) = \pi .$$

Зауваження. Визначення границі функції у точці $x=x_0$ не обов'язково вимагає існування функції в цій точці.

Нескінченно малі величини (функції)

Функція $y=f(x)$ називається **нескінченно малою** при $x \to x_0$, якщо

$$\lim_{x \to x_0} f(x)=0 .$$

За означенням границі функції ця рівність означає: для будь – якого як завгодно малого числа $\varepsilon>0$ існує число $\delta(\varepsilon)>0$, таке, що при всіх x, які задовольняють нерівності $0<|x-x_0|<\delta$ виконується нерівність $|f(x)|<\varepsilon$.

Наприклад, функція $y=\sin x$ є нескінченно малою при $x \to \pi n,\ n \in Z$.

Для нескінченно малих величин виконуються такі властивості:

а) алгебраїчна сума скінченного числа нескінченно малих величин є нескінченно малою;

б) добуток нескінченно малої величини на обмежену, коли $x \to x_0$ (або $x \to \infty$) є нескінченно малим;

в) частка від ділення нескінченно малої величини на обмежену, границя якої відрізняється від нуля, є нескінченно малою;

Доведення властивості *в*). Нехай $\alpha(x)$ – нескінченно мала функція, $g(x)$ – обмежена функція при $x \to x_0$, тобто $\lim_{x \to x_0} \alpha(x)=0$, $\lim_{x \to x_0} g(x)=a \neq 0$. Розглянемо функцію $\alpha(x)/g(x)$ при $x \to x_0$. Перепишемо функцію у вигляді $\alpha(x)(1/g(x))$. Оскільки $\alpha(x) \to 0$ при $x \to x_0$, а $1/g(x) \to 1/a$ ($a \neq 0$), тому маємо нескінченно малу функцію як добуток нескінченно малої на обмежену функцію.

Нескінченно великі величини

Функція $y=f(x)$ називається **нескінченно великою** при $x \to x_0$, якщо для будь – якого числа $\mathrm{M}>0$ існує число $\delta(\mathrm{M})>0$ таке, що при всіх x, які задовольняють нерівності $0<|x-x_0|<\delta$, виконується нерівність $|f(x)|>\mathrm{M}$. Тобто $\lim_{x \to x_0} f(x)=\infty$.

Наприклад, функція $y=tgx$ є нескінченно великою при $x \to \pi/2$.

Між нескінченно малими й нескінченно великими величинами існує така залежність: якщо $f(x)$ – нескінченно велика при $x \to x_0$, то її обернена величина $\alpha(x)=1/f(x)$ – нескінченно мала (і навпаки).

Зв'язок між функцією, її границею та нескінченно малою

Теорема. Для того, щоб функція $y=f(x)$ мала границю $\lim_{x \to x_0} f(x)=a$, необхідно й достатньо виконання рівності $f(x)=a+\alpha(x)$, де $\alpha(x)$ – нескінченно мала функція при $x \to x_0$.

Доведення. Необхідність: нехай $\lim_{x \to x_0} f(x)=a$. Тоді за означенням границі функції для будь – якого як завгодно малого числа $\varepsilon>0$ існує число $\delta(\varepsilon)>0$, яке залежить від ε, таке, що при всіх x, які задовольняють нерівності

$0<|x-x_0|<\delta$, виконується нерівність $|f(x)-a|<\varepsilon$. А цей факт означає, що функція $f(x)-a$ має границю, яка дорівнює нулю, тобто є нескінченно малою. Позначимо її через $\alpha(x)$, тоді $f(x)-a=\alpha(x)$. Звідси $f(x)=a+\alpha(x)$, що і треба було довести.
Достатність: нехай виконується рівність $f(x)=a+\alpha(x)$, де $\alpha(x)$ – нескінченно мала функція при $x\to x_0$, тобто $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$. Тоді для будь – якого як завгодно малого числа $\varepsilon>0$ існує число $\delta(\varepsilon)>0$, яке залежить від ε, таке, що при всіх x, які задовольняють нерівності $0<|x-x_0|<\delta$, виконується нерівність $|\alpha(x)|<\varepsilon$. Оскільки за умовою $\alpha(x)=f(x)-a$, то маємо $|f(x)-a|<\varepsilon$ при виконанні попередніх умов. А це означає, що $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a$, що і треба було довести.

Зв'язок між існуванням границі та обмеженістю функції

Теорема. Якщо $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a$, де a – скінченна величина, то функція $f(x)$ є обмеженою.

Цю теорему пропонується довести самостійно (аналогічним чином, як і попередні).

Основні теореми про границі функції

Вважатимемо, що границі $\lim\limits_{x\to x_0}f_1(x)$ та $\lim\limits_{x\to x_0}f_2(x)$ існують і скінченні.

Теорема 1. Границя суми (різниці) двох функцій дорівнює сумі (різниці) границь цих функцій

$$\lim_{x\to x_0}(f_1(x)\pm f_2(x))=\lim_{x\to x_0}f_1(x)\pm\lim_{x\to x_0}f_2(x).$$

Наслідок. Якщо функція має границю, то вона єдина.

Теорема 2. Границя добутку двох функцій дорівнює добутку границь цих функцій

$$\lim_{x\to x_0}(f_1(x)\cdot f_2(x))=\lim_{x\to x_0}f_1(x)\cdot\lim_{x\to x_0}f_2(x).$$

Наслідки.

1. Сталий множник можна виносити за знак границі

$$\lim_{x\to x_0}(cf(x))=c\lim_{x\to x_0}f(x),\ \text{де}\ c=\text{const}.$$

2. $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x))^n=(\lim\limits_{x\to x_0}f(x))^n$, де n - ціле додатне число.

3. $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}$.

Зауваження. Теореми 1 і 2 залишаються справедливими для будь – якого скінченного числа доданків і множників.

Теорема 3. Границя частки двох функцій дорівнює частці цих функцій, якщо границя знаменника не дорівнює нулю

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0}f_1(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}f_2(x)},\ \text{якщо}\ \lim_{x\to x_0}f_2(x)\neq 0.$$

Доведення теореми 1. Нехай $\lim\limits_{x\to x_0}f_1(x)=a,\ \lim\limits_{x\to x_0}f_2(x)=b.$

Тоді $f_1(x) = a + \alpha(x)$, $f_2(x) = b + \beta(x)$, де $\alpha(x)$ і $\beta(x)$– нескінченно малі при $x \to x_0$ (за теоремою про зв'язок між функцією, її границею та нескінченно малою).

Отже, $f_1(x) \pm f_2(x) = (a \pm b) + (\alpha(x) \pm \beta(x))$. Тут $(a \pm b)$ – стала величина, а $(\alpha(x) \pm \beta(x))$ – нескінченно мала при $x \to x_0$ (як алгебраїчна сума нескінченно малих), тому

$$\lim_{x \to x_0}(f_1(x) \pm f_2(x)) = a_1 \pm a_2 = \lim_{x \to x_0} f_1(x) \pm \lim_{x \to x_0} f_2(x).$$

Інші теореми доводяться аналогічно.

Приклад. Знайти $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - x + 1}{x - 3}$.

Розв'язання. Щоб перевірити можливість використання теореми про границю частки, треба переконатися в тому, що при граничному значенні аргументу знаменник не дорівнює нулю. Дійсно, при $x = 2$ знаменник $x - 3 = 2 - 3 = -1 \neq 0$.

Отже, використовуючи теореми про границі функції та їх наслідки, одержимо:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - x + 1}{x - 3} = \frac{\lim\limits_{x \to 2}(x^2 - x + 1)}{\lim\limits_{x \to 2}(x - 3)} = \frac{2^2 - 2 + 1}{2 - 3} = -3.$$

Отже, якщо до даної функції, границю якої треба знайти при прямуванні аргументу до деякого граничного значення, можна застосувати теореми про границі, то обчислення границі зводиться до підстановки цього граничного значення до виразу функції.

Ознаки існування границі

Теорема. Якщо функції $f(x)$, $g(x)$, $\varphi(x)$ задовольняють нерівності

$$\varphi(x) < f(x) < g(x)$$

і

$$\lim_{x \to x_0} \varphi(x) = a, \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = a,$$

то

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a.$$

Теорема (про границю монотонної функції). Якщо функція $f(x)$ монотонна і обмежена при $x < x_0$ або при $x > x_0$, то існує відповідно її ліва границя $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0)$ або її права границя $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0)$.

Наслідок. Обмежена і монотонна послідовність x_n, $n \in N$, має границю.

Ці теореми приймемо без доведення.

Еквівалентні нескінченно малі

Якщо границя відношення нескінченно малих $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ прямує до одиниці при $x \to x_0$, тобто $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, то функції $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ називають **еквівалентними нескінченно малими** і пишуть $\alpha(x) \sim \beta(x)$ при $x \to x_0$.

Наприклад, $\sin x \sim x$ при $x \to 0$, оскільки $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ (доведемо нижче).

Наведемо найважливіші еквівалентності, які використовують при обчисленні границь:

$$x \sim \sin x \sim tgx \sim \arcsin x \sim arctgx \sim \frac{a^x-1}{\ln a} \sim \frac{\log_a(1+x)}{\log_a e} \text{ при } x \to 0 \ .$$

Пропонуємо це твердження довести самостійно.

Деякі важливі границі

Перша чудова границя: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

Доведення. Розглянемо коло одиничного радіуса, позначимо радіанну міру кута MOB через x (рис.5.17).

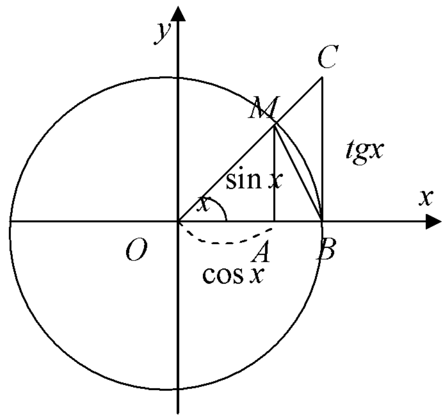


Рис.5.17

Центральний кут $\angle MOA = x$, $|AM| = \sin x$, $|BC| = tgx$. З рис.5.17 маємо $S_{\Delta MOB} < S_{сектораMOB} < S_{\Delta COB}$, тобто $\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}tgx$, $1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$ або $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$. Оскільки $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1$ і $\lim\limits_{x\to 0} 1 = 1$, то за ознакою існування границі функції $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\(x>0)}}\frac{\sin x}{x}=1$.

Якщо $x < 0$, то $\frac{\sin x}{x}=\frac{\sin(-x)}{-x}$, де $-x > 0$. Таким чином, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\(x<0)}}\frac{\sin x}{x}=1$, отже, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

Зауваження. Перша чудова границя розкриває невизначеність вигляду $\left(\frac{0}{0}\right)$.

Друга чудова границя: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ або $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$.

Ці твердження залишимо без доведення.

Зауваження. Друга чудова границя розкриває невизначеність вигляду (1^{∞}).

Приклад. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}$.

Розв'язання. Використовуючи першу чудову границю, матимемо

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{3\sin 3x}{3x}=3\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}=3\cdot 1=3\ .$$

Цей приклад можна розв’язати ще й так. При $x \to 0$ $\sin 3x \sim 3x$, тому

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{x}=\lim_{x\to 0} 3 = 3\ .$$

Приклад. Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-4}{3x+2}\right)^{\frac{x+1}{3}}$.

Розв'язання. При $x\to\infty$ одержуємо невизначеність (1^{∞}). Тоді виконуючи необхідні перетворення і використовуючи формулу другої чудової границі, отримаємо:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x-4}{3x+2}\right)^{\frac{x+1}{3}}=(1^{\infty})=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3x-4}{3x+2}-1\right)^{\frac{x+1}{3}}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3x-4-3x-2}{3x+2}\right)^{\frac{x+1}{3}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-6}{3x+2}\right)^{\frac{x+1}{3}}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{-6}{3x+2}\right)^{\frac{3x+2}{-6}}\right)^{\frac{-6}{3x+2}\cdot\frac{x+1}{3}}=\lim_{x\to\infty}e^{-\frac{2(x+1)}{3x+2}}=$$

$$=e^{-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2(x+1)}{3x+2}}=e^{-\frac{2}{3}}.$$

5.3 Неперервність функції

Нехай функція $y=f(x)$ визначена в точці x_0 і у деякому її околі.

Означення. Функція $y=f(x)$ називається **неперервною в точці** x_0, якщо існує границя цієї функції в цій точці і вона дорівнює значенню функції в цій точці, тобто

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0). \tag{5.1}$$

Це означення рівносильне такому: функція $y=f(x)$ називається **неперервною в точці** x_0, якщо

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0,$$

де $\Delta x=x-x_0$ - **приріст аргументу**;

$\Delta y=f(x)-f(x_0)$ (або $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$) – **приріст функції в точці** $\boldsymbol{x_0}$.

Оскільки $\lim\limits_{x\to x_0}x=x_0$, то рівність (5.1) можна записати у вигляді

$$\lim_{x\to x_0+0}f(x)=\lim_{x\to x_0-0}f(x)=f(x_0), \tag{5.2}$$

Це означає, що при визначені границь неперервної функції знак функції і знак границі можна замінювати один на одний.

Наприклад, $\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{\sin x}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}}=e$.

Якщо функція $y=f(x)$ неперервна у кожній точці інтервалу $(a;b)$, то її називають **неперервною в інтервалі** $(a;b)$**.**

Якщо функція $y=f(x)$ неперервна у кожній точці інтервалу $(a;b)$і в точці $x=a$ вона неперервна справа $\left(\lim\limits_{x\to a+0}f(x)=f(a)\right)$, а в точці $x=b$ вона неперервна зліва $\left(\lim\limits_{x\to b-0}f(x)=f(b)\right)$, то її називають **неперервною на відрізку** $[a;b]$**.**

Слід пам'ятати, що всі елементарні функції неперервні в області їх визначення.

Точки, в яких порушується умова неперервності, називають **точками розриву функції**. Точки розриву можуть належати області визначення або перебувати на границі цієї області.

Усі точки розриву функції поділяють на точки розриву першого та другого роду.

Точка x_0 називається **точкою розриву першого роду** функції $f(x)$, якщо в цій точці існують скінченні границі функції справа та зліва, тобто $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = A_1$ і $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = A_2$. При цьому:

1) якщо $A_1 = A_2$, то точка x_0 називається **точкою усувного розриву**;

2) якщо $A_1 \neq A_2$, то точка x_0 називається **точкою скінченного розриву**.

Величину $|A_1 - A_2|$ називають **стрибком функції в точці розриву**.

Точка x_0 називається **точкою розриву другого роду**, якщо в цій точці хоча б одна з границь $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ або $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ не існує або дорівнює нескінченності.

Приклад. Дослідити функцію $y = 2^{\frac{1}{x}}$ на неперервність у точках $x = 3$ і $x = 0$.

Розв'язання. За означенням функція неперервна в точці x_0, якщо $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0)$. Перевіримо виконання цієї умови в даних точках.

При $x = 3$ маємо

$$y(3) = 2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2};$$

$$\lim_{x\to 3+0} y = \lim_{x\to 3+0} 2^{\frac{1}{x}} = 2^{\frac{1}{3+0}} = 2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}, \quad \lim_{x\to 3-0} y = \lim_{x\to 3-0} 2^{\frac{1}{x}} = 2^{\frac{1}{3-0}} = 2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}.$$

Умова неперервності при $x = 3$ виконується, отже, в цій точці функція неперервна.

Проведемо аналогічні дослідження при $x \to 0$:

$$y(0) = 2^{\frac{1}{0}} \text{ не існує,}$$

$$\lim_{x\to +0} y = \lim_{x\to +0} 2^{\frac{1}{x}} = 2^{\frac{1}{+0}} = 2^{+\infty} = +\infty; \quad \lim_{x\to -0} y = \lim_{x\to -0} 2^{\frac{1}{x}} = 2^{\frac{1}{-0}} = 2^{-\infty} = \frac{1}{2^{+\infty}} = \frac{2}{+\infty} = 0$$

Умова неперервності при $x = 0$ не виконується, отже, в точці $x = 0$ функція розривна (має нескінченний розрив).

Властивості неперервних функцій

Більшість теорем про неперервні функції випливають із відповідних теорем про границі. Наведемо деякі теореми без доведення.

Теорема. Сума, різниця, добуток і частка двох неперервних функцій є функцією неперервною (для частки за винятком тих значень аргументу, для яких знаменник дорівнює нулю).

Теорема (Вейерштраса). Якщо функція неперервна на відрізку, то вона досягає на цьому відрізку свого найбільшого та найменшого значення.

Наслідок. Якщо функція неперервна на відрізку $[a;b]$, то вона обмежена на цьому відрізку.

Функція, яка зображена на рис.5.18 , неперервна на відрізку $[a;b]$, приймає своє найбільше значення M у точці x_1, а найменше m – у точці x_2. Для будь – якого $x \in [a;b]$ має місце нерівність

$$m < f(x) < M \ .$$

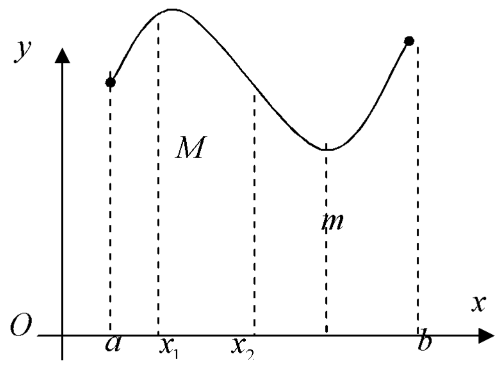


Рис.5.18

Теорема. Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$ і на його кінцях приймає значення різних знаків, то між точками a і $в$ знайдеться хоча б одна точка $x = c$ така, що $f(c) = 0$.

Ця теорема допускає просту геометричну ілюстрацію (рис.5.19).

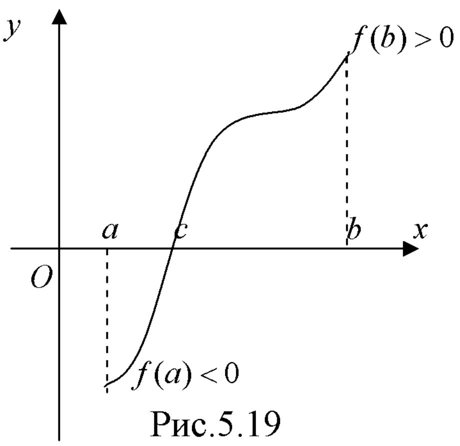


Рис.5.19

5.4 Похідна і диференціал функції

Поняття похідної є одним із основних математичних понять. Похідну широко використовують при розв'язанні інженерних задач, особливо при вивченні швидкості різних процесів.

Задачі, які призводять до поняття похідної

1. **Задача про миттєву швидкість.** Нехай матеріальна точка рухається нерівномірно вздовж деякої прямої. Візьмемо який-небудь момент часу t і розглянемо проміжок часу Δt (приріст часу) від моменту t_0 до моменту $t = t_0 + \Delta t$. Через ΔS позначимо шлях, який пройшла точка за проміжок часу Δt , тобто $\Delta S = S(t + \Delta t) - s(t)$. Цей шлях залежить від Δt .

Відношення $\dfrac{\Delta S}{\Delta t}$ є середньою швидкістю руху точки за час Δt .

Границя середньої швидкості руху , якщо проміжок часу Δt прямує до нуля є **миттєвою швидкістю руху**. Позначимо цю швидкість через V і отримаємо

$$V = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} \text{ або } V = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{\Delta t} .$$

2. Задача про дотичну. Візьмемо на деякій неперервній кривій L дві точки M і M_1. Пряму, яка проходить через ці точки називають **січною** (рис.5.20).

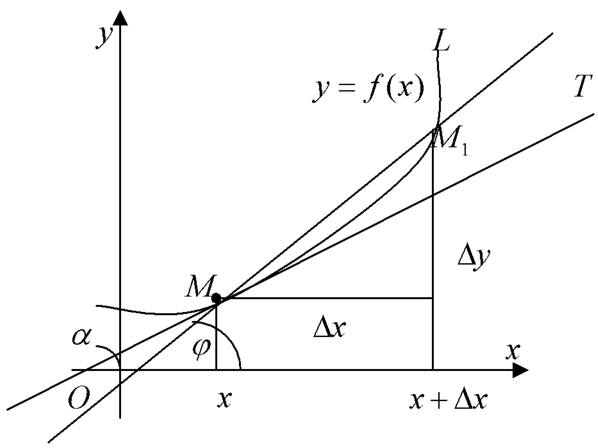


Рис.5.20

Нехай точка M_1 наближається до точки M, рухаючись уздовж кривої L. Тоді кожному положенню точки M_1 відповідатиме своя січна, яка прямує до деякого граничного положення MT.

Дотичною до кривої в даній точці *M* називають граничне положення MT січної MM_1, якщо точка M_1 прямує до точки M.

Розглянемо функцію $y = f(x)$, графіком якої є лінія L. Знайдемо її кутовий коефіцієнт $k = tg\alpha$ у точці M, де α – кут дотичної до додатного напряму осі Ox. Позначимо через φ – кут між січною MM_1 і додатним напрямом осі Ox. З рис. 5.20 видно, що кутовий коефіцієнт січної дорівнює

$$k_{січ} = tg\varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

При $\Delta x \to 0$ в силу неперервності функції приріст функції Δy також прямує до нуля; тому точка M_1 прямує до точки M, кут φ – до кута α, а січна MM_1 переходить до дотичної. Тобто $\lim\limits_{\Delta x \to 0} tg\varphi = tg\alpha$.

Отже, кутовий коефіцієнт дотичної дорівнює

$$k = tg\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Границі, які отримані при розв’язанні задач, мають однаковий вигляд, до якого призводять рішення і багатьох інших задач. Цю границю називають похідною.

Означення. Похідною функції $y = f(x)$ у точці x_0 називають границю відношення приросту функції до приросту аргументу, якщо приріст аргументу прямує до нуля (якщо границя існує).

Похідну функції $f(x)$ позначають одним із символів: $f'(x)$, y', $\frac{dy}{dx}$.

Отже, за означенням

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}.$$

Функція $y = f(x)$, яка має похідну в кожній точці інтервалу $(a;b)$, називається **диференційованою в цьому інтервалі**; операція визначення похідної називається **диференціюванням**.

Значення похідної функції $y = f(x)$ у точці $x=x_0$ позначається $f'(x_0)$ або $y'(x_0)$.

Таким чином, похідна функції $S = S(t)$ у точці t дорівнює миттєвій швидкості руху матеріальної точки в момент часу t (**механічний зміст похідної);** значення похідної в точці x чисельно дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної, яка проведена до кривої в точці x (**геометричний зміст похідної**).

Рівняння дотичної до графіка функції $y = f(x)$ у точці $x=x_0$

Якщо точка дотику M має координати (x_0; y_0) (рис.5.20), то кутовий коефіцієнт дотичної $k = f'(x_0)$. Використовуючи рівняння прямої, яка проходить через задану точку в заданому напрямі $y - y_0 = k(x - x_0)$, можна записати **рівняння дотичної**

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0). \tag{5.3}$$

Рівняння нормалі до графіку функції

Пряма, яка перпендикулярна дотичній у точці дотику, називається **нормаллю до кривої.**

Оскільки нормаль перпендикулярна дотичній, то її кутовий коефіцієнт

$$k_{норм} = -\frac{1}{k_{дот}} = -\frac{1}{f'(x_0)} \text{ (якщо } f'(x_0) \neq 0\text{)}.$$

Тому **рівняння нормалі** має вигляд

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0). \tag{5.4}$$

Зв'язок між неперервністю і диференційованістю

Теорема. Якщо функція диференційована в деякій точці, то вона неперервна в ній.

Доведення. Нехай функція $y = f(x)$ диференційована в деякій точці x, тобто існує границя $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$. Звідси за теоремою про зв'язок функції, її границі і нескінченно малої , маємо $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha$, де $\alpha \to 0$ при $\Delta x \to 0$, тобто $\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha \cdot \Delta x$.

Якщо перейти до границі при $\Delta x \to 0$, то отримаємо $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$. А це і означає, що функція $y = f(x)$ неперервна в точці x.

Зауваження. Обернене твердження у загальному випадку невірне: неперервна функція може не мати похідної.

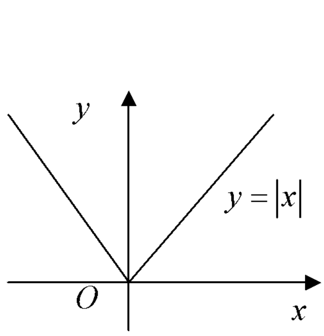


Рис.5.21

Прикладом такої функції є функція

$$y = |x| = \begin{cases} x, якщо \ \ x \geq 0, \\ -x, якщо \ \ x < 0. \end{cases}$$

На рисунку 5.21 зображена функція, яка неперервна в точці $x = 0$, але не є диференційованою в цій точці.

Якщо функція $y = f(x)$ має неперервну похідну $y' = f'(x)$ у деякому інтервалі $(a;b)$, то функція називається **гладкою на цьому інтервалі**.

Правила диференціювання

Знаходження похідної функції за означенням часто призводить до різних труднощів. На практиці функції диференціюють за допомогою низки правил та формул. Сформулюємо ці правила і доведемо деякі з них.

Нехай функції $u = u(x)$, $v = v(x)$ – дві диференційовані в інтервалі $(a;b)$ функції.

- **Похідна суми (різниці).** Похідна суми (різниці) двох функцій дорівнює сумі (різниці) похідних цих функцій:

$$(u \pm v)' = u' \pm v'. \tag{5.5}$$

- **Похідна добутку.** Похідна добутку двох функцій дорівнює добутку похідної першої функції на другу функцію плюс добуток першої функції на похідну другої функції:

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v' \tag{5.6}$$

Доведення. Нехай $y = u \cdot v$. Тоді

$$y' = \lim_{\Delta x \to o} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x) - u(x)\cdot v(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(u(x)+\Delta u)\cdot(v(x)+\Delta v) - u(x)\cdot v(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot \Delta v + v(x)\cdot \Delta u + \Delta u \cdot \Delta v - u(x)\cdot v(x)}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \to o}\left(v(x)\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x} + u(x)\cdot\frac{\Delta v}{\Delta x} + \Delta v \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}\right) =$$

$$v(x)\cdot \lim_{\Delta x \to o}\frac{\Delta u}{\Delta x} + u(x)\cdot\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to}\Delta v \cdot \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} =$$

$$u' \cdot v + u \cdot v' + 0 \cdot u' = u' \cdot v + u \cdot v',$$

тобто

$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$, що треба було довести.

- **Похідна частки.** Похідна частки двох функцій дорівнює дробу, чисельник якого є різницею між добутком похідної чисельника на знаменник і добутком похідної знаменника на чисельник, а знаменник дробу є квадратом знаменника функції:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}. \tag{5.7}$$

Наслідки.

$$а)\ (c \cdot u)' = c \cdot u;$$

$$б)\ \left(\frac{u}{c}\right)' = \frac{1}{c}\cdot u'.$$

- **Похідна складної функції.** Нехай $y = f(u)$ і $u = \varphi(x)$, тоді функція $y = f(\varphi(x))$ – складна функція з проміжним аргументом u і незалежним аргументом x.

Якщо функція $u = \varphi(x)$ має похідну u'_x в точці x, а функція $y = f(u)$ має похідну y'_u у відповідній точці $u = \varphi(x)$, то складна функція $y = f(\varphi(x))$ має похідну y'_x в точці x, яка визначається за формулою

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x . \tag{5.8}$$

Доведення. За умовою $\lim\limits_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} = y'_u$, звідки , за теоремою про зв'язок функції, її границі і нескінченно малої , маємо $\frac{\Delta y}{\Delta u} = y'_u + \alpha$ або $\Delta y = y'_u \cdot \Delta u + \alpha \cdot \Delta u$, де $\alpha \to 0$ при $\Delta u \to 0$.

Функція $u = \varphi(x)$ має похідну в точці x: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = u'_x$, тому

$$\Delta u = u'_x \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta x, \text{ де } \beta \to 0 \text{ при } \Delta x \to 0.$$

Отже,

$$\Delta y = y'_u \cdot (u'_x \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta x) + \alpha \cdot (u'_x \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta x),$$

тобто

$$\Delta y = y'_u \cdot u'_x \cdot \Delta x + y'_u \cdot \beta \cdot \Delta x + u'_x \cdot \alpha \cdot \Delta x + \alpha \cdot \beta \cdot \Delta x .$$

Поділимо отриману рівність на Δx і перейдемо до границі при $\Delta x \to 0$, отримаємо $y'_x = y'_u \cdot u'_x$, що треба було довести.

Зауваження. Це правило залишається справедливим, якщо проміжних аргументів декілька.

- **Похідна оберненої функції.**

Якщо функція $y = f(x)$ задовольняє умові існування оберненої функції і в точці $x \in (a; b)$ має скінченну і відмінну від нуля похідну, тоді обернена функція $x = f^{-1}(y)$ також має похідну у відповідній точці $y = f(x)$. Похідні взаємно обернених функцій зв'язані рівністю

$$(f^{-1}(y))'_y = \frac{1}{f'_x} \text{ або } x'_y = \frac{1}{y'_x}. \tag{5.9}$$

- **Похідна функції, заданої у параметричній формі.**

Нехай функцію задано у параметричному вигляді: $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases}$ де $\varphi(t)$ і $\psi(t)$ – неперервні і диференційовані, коли параметр $t \in (\alpha; \beta)$. Нехай функція $x = x(t)$ має обернену $t = t(x)$, яка також диференційована (це означає, що у деякій точці $t_0 \in (\alpha; \beta)$ похідна $x'_t \neq 0$), тоді

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}. \tag{5.10}$$

- **Похідна неявно заданої функції.** Якщо функція задана рівнянням

$F(x;y)=0$, то для визначення похідної від y по x необхідно: про диференціювати рівняння $F(x;y)=0$ по x, вважаючи, що y є функцією від x; отримане рівняння слід розв'язати відносно y'.

Похідні основних елементарних функцій. Подамо формули похідних елементарних функцій і вибірково доведемо деякі з них.

- **Похідна степеневої функції:** $(x^{\alpha})'=\alpha\cdot x^{\alpha-1}$;
- **Похідна показникової функції:** $(a^x)'=a^x\cdot\ln a$, ($a>0,\ a\neq 1$);

Доведення. Спочатку доведемо формулу похідної функції $y=e^x$. Дамо аргументу x приріст Δx, тоді приріст функції $\Delta y=e^{x+\Delta x}-e^x=e^x(e^{\Delta x}-1)$.
Тобто,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{e^x(e^{\Delta x}-1)}{\Delta x},$$

звідки

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}e^x\cdot\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}=e^x\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}=$$

$$=\left|e^{\Delta x}-1\underset{\Delta x\to 0}{\sim}\Delta x\right|=e^x\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x}=e^x\cdot 1=e^x.$$

Таким чином, $(e^x)'=e^x$.

Тепер розглянемо функцію $y=a^x$. Оскільки $a^x=e^{x\ln a}$, то за правилом диференціювання складної функції, отримаємо:

$$(a^x)'=(e^{x\ln a})'=e^{x\ln x}\cdot(x\cdot\ln a)'=e^{x\ln a}\cdot\ln a=a^x\cdot\ln a.$$

Таким чином, $(a^x)'=a^x\cdot\ln a$.

- **Похідна логарифмічної функції:** $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\cdot\ln a}$, ($a>0,\ a\neq 1$);

Доведення. Функції $y=\log_a x$ і $x=a^y$ взаємно обернені , тоді за правилом диференціювання складної функції

$$y'_x=\frac{1}{x'_y}=\left|\ a^y\neq 0\ \right|=\frac{1}{(a^y)'}=\left|\ (a^y)'=a^y\cdot\ln a\ \right|=$$

$$=\frac{1}{a^y\cdot\ln a}=\left|a^y=a^{\log_a x}=x\right|=\frac{1}{x\cdot\ln a}.$$

Отже, $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\cdot\ln a}$.

- **Похідні тригонометричних функцій:**

$$(\sin x)'=\cos x;\quad (\cos x)'=\sin x;$$

$$(tgx)'=\frac{1}{\cos^2 x};\ (ctgx)'=-\frac{1}{\sin^2 x};$$

- **Похідні обернених тригонометричних функцій:**

$$(arc\sin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};\quad (\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}; \quad (arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Формули похідних основних елементарних функцій запишемо в таблицю. На практиці частіше за все визначають похідні складних функцій, тому в наведеній нижче таблиці замінимо аргумент “x” на проміжний аргумент $u = u(x)$, де $u(x)$ – диференційована функція.

Таблиця похідних

1. $(c)' = o$;
2. $(u^{\alpha})' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u'$; зокрема, $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$;
3. $(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$; зокрема, $(e^u)' = e^u \cdot u'$;
4. $(\log_a u)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a}$;зокрема, $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$;
5. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$;
6. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$;
7. $(tgu)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$;
8. $(ctgu)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$;
9. $(arc\sin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$;
10. $(\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
11. $(arctgu)' = \frac{u'}{1+u^2}$;
12. $(arcctgu)' = -\frac{u'}{1+u^2}$.

Приклад. Знайти похідні від функцій:

$$а)\ y = (3x^2 - 7) \cdot \ln \sin 3x; \quad б)\ y = \frac{7x^5 - 3}{e^{2x}}.$$

Розв’язання.

$$а)\ y' = ((3x^2 - 7) \cdot \ln \sin 2x)' = (3x^2 - 7)' \cdot \ln \sin 2x + (3x^2 - 7) \cdot (\ln \sin 2x)' =$$

$$3 \cdot 2x \cdot \ln \sin 2x + (3x^2 - 7) \cdot \frac{1}{\sin 2x} \cdot \cos 2x \cdot 2 = 6x \cdot \ln \sin 2x + \frac{2(3x^2 7) \cdot \cos 2x}{\sin 2x}.$$

$$б)\ y' = \left(\frac{7x^5 - 3}{e^{2x}}\right)' = \frac{7 \cdot 5x^4 \cdot e^{2x} - (7x^5 - 3) \cdot e^{2x} \cdot 2}{(e^{2x})^2} = \frac{e^{2x} \cdot (35x^4 - 14x^5 + 6)}{e^{4x}}.$$

Похідні вищих порядків

Нехай функція $y = f(x)$ диференційована у проміжку $(a;b)$. Похідна цієї функції $f'(x)$ є функцією аргументу x. Якщо функція $f'(x)$ диференційована, то її похідна називається **похідною другого порядку** і позначається $f''(x)$ (або y'', $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$). Таким чином, $y'' = (y')'$.

Похідна від похідної другого порядку, якщо вона існує, називається **похідною третього порядку** і позначається $f'''(x)$ (або y''', $\frac{d^3y}{dx^3}$, $\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$).

Таким чином, $y''' = (y'')'$.

Означення. Похідною *n* – го порядку (або n- ою похідною) називається похідна від похідної $(n-1)$ – го порядку (якщо вона існує).

Таким чином,

$$y^{(n)} = (y^{(n-1)})'. \qquad (5.11)$$

Похідні порядку, який вище першого, називають **похідними вищих порядків.**

Приклад. Знайти y''', якщо $y = 2e^{3x}$.

Розв'язання. $y' = (2e^{3x})' = 2 \cdot 3 \cdot e^{3x} = 6 \cdot e^{3x}$, $y'' = (6 \cdot e^{3x})' = 6 \cdot 3 \cdot e^{3x} = 18 \cdot e^{3x}$;

$$y''' = (18 \cdot e^{3x})' = 18 \cdot 3 \cdot e^{3x} = 54 \cdot e^{3x}.$$

Диференціал функції

Нехай функція $y = f(x)$ має в точці x похідну $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) \neq 0$. Тоді, за теоремою про зв'язок функції, її границі і нескінченно малої, маємо $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha$, $\alpha \to 0$ при $\Delta x \to 0$, або $\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$.

Таким чином, приріст функції Δy являє собою суму двох доданків $f'(x) \cdot \Delta x$ і $\alpha \cdot \Delta x$, які є нескінченно малими при $\Delta x \to 0$, причому $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x) \cdot \Delta x}{\Delta x} = f'(x) \neq 0$, а $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha \cdot \Delta x}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha = 0$. Тому перший доданок $f'(x) \cdot \Delta x$ називають **головною частиною приросту функції** Δy.

Означення. Диференціалом функції $y = f(x)$ у точці x **називається** головна частина її приросту (лінійна відносно Δx) , яка дорівнює добутку похідної функції на приріст її аргументу і позначається dy (або $df(x)$):

$$dy = f'(x) \cdot \Delta x. \qquad (5.12)$$

Диференціал dy називають **диференціалом першого порядку**.

Якщо $y = x$, то $dy = dx = \Delta x$. Тому

$$dy = f'(x) \cdot dx.$$

Приклад. Знайти диференціал функції $y = x^2 \cdot 5^{7x}$.

Розв'язання. $dy = (x^2 \cdot 5^{7x})' \cdot dx = (2x \cdot 5^{7x} + x^2 \cdot 7 \cdot 5^{7x} \ln 5) \cdot dx$.

Зв'язок між диференційованістю функції та існуванням її похідної

Для того, щоб функція була диференційована в точці, необхідно і достатньо, щоб вона мала в цій точці скінченну похідну.

Правила обчислення диференціалів

Правила обчислення диференціалів легко отримати, використовуючи зв'язок між диференціалом і похідної функції ($dy = y' \cdot dx$) та відповідні правила обчислення похідних.

Диференціал суми, різниці, добутку і частки двох диференційованих функцій визначається за формулами:

$$d(u \pm v) = du \pm dv;$$

$$d(u \cdot v) = du \cdot v + u \cdot dv;$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{du \cdot v - u \cdot dv}{v^2} \quad (v \neq 0)$$

Доведення. Доведемо, наприклад, другу формулу. За означенням диференціала маємо:

$$d(u\cdot v)=(u\cdot v)'\cdot dx=(u'\cdot v+u\cdot v')\cdot dx=u'dx\cdot v+u\cdot v'dx=du\cdot v+u\cdot dv.$$

Інваріантність диференціала

Нехай $y=f(u)$ і $u=u(x)$ – диференційовані функції аргументів u і x, які утворюють складну функцію $y=f(u(x))$. За теоремою про похідну складної функції виконується рівність

$$y'=y'_u\cdot u'_x.$$

Помножимо обидві частини рівності на dx, отримаємо $y'dx=y'_u\cdot u'_x dx$. Оскільки $y'dx=dy$ і $u'_x dx=du$ в припущенні, що x – незалежна змінна, останню рівність можна записати так:

$$dy=y'_u\cdot du.$$

Порівнюючи формули $dy=y'_x\cdot dx$ і $dy=y'_u\cdot du$, робимо висновок, що перший диференціал функції $y=f(x)$ визначається однією і тою самою формулою незалежно від того, чи є її аргумент незалежною змінною або є функцією іншої змінної.

Ця властивість диференціала називається **інваріантністю (незмінністю) форми першого диференціала.**

Диференціали вищих порядків

Нехай маємо функцію $y=f(x)$. Диференціал цієї функції $dy=y'(x)\cdot dx$ є функцією від аргументу x (множник dx не залежить від x). Тоді маємо право говорити про диференціал від dy.

Диференціал від диференціала функції називають **диференціалом другого порядку або другим диференціалом** і позначають через d^2y:

$$d^2y=d(dy)=d(y'(x)dx)=(y'(x)dx)'dx=y''(x)(dx)^2.$$

Прийнято замість степені диференціала $(dx)^2$ писати dx^2. Таким чином,

$$d^2y=y''(x)dx^2.$$

Аналогічно визначаються диференціали n – го порядку.

5.5 Основні теореми диференціального числення

В основі доказів ряду важливих для застосувань теорем покладені основні теореми диференціального числення – теореми Ферма, Ролля, Лагранжа, Коші. Зокрема, безпосередньо з теореми Коші випливає правило Лопіталя.

Теорема (Ролля). Якщо функція $f(x)$ задовольняє умовам:

1. $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$;
2. $f(x)$ диференційована в інтервалі $(a;b)$;
3. $f(a)=f(b)$,

тоді знайдеться хоча б одна точка $c\in(a;b)$, в якій $f'(c)=0$.

Доведення. Оскільки функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$, то вона досягає на ньому свого найбільшого значення M та найменшого значення m.

Якщо $M=m$, то функція стала на $[a;b]$, а похідна сталої функції дорівнює нулю у будь – якій точці відрізка і теорема доведена.

Якщо $M \neq m$, то функція досягає хоча б одне із значень M або m у внутрішній точці c інтервалу $(a;b)$, оскільки $f(a) = f(b)$.

Нехай $f(c) = M$ (коли $f(c) = m$ теорема доводиться аналогічно), тоді для усіх $x \in (a;b)$ виконується нерівність $f(c) \geq f(x)$, тобто $f(c+\Delta x) - f(c) \leq 0$.

Знайдемо похідну $f'(c)$:

$$f'(c) = \lim_{\Delta x \to o} \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x}.$$

Якщо $\Delta x > 0$ (тобто $\Delta x \to 0$ справа від точки $x = c$), то

$$\frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} \leq 0 \text{ і тому } f'(c) \leq 0.$$

Якщо $\Delta x < 0$, то

$$\frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} \geq 0 \text{ і тому } f'(c) \geq 0.$$

Таким чином, $f'(c) = 0$, тобто існує точка $c \in (a;b)$, в якій похідна дорівнює нулю.

Геометрично це означає, що існує точка, в якій дотична до графіка функції, яка задовольняє умовам теореми, паралельна осі абсцис.

Теорема (Коші). Якщо функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ задовольняють умовам:

1. $f(x)$ і $\varphi(x)$ неперервні на відрізку $[a;b]$;
2. $f(x)$ і $\varphi(x)$ диференційовані в інтервалі $(a;b)$;
3. $\varphi'(x) \neq 0$ для $x \in (a;b)$,

тоді знайдеться хоча б одна точка $c \in (a;b)$, така, що виконується рівність

$$\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}.$$

Доведення. Зазначимо, що $\varphi(b) - \varphi(a) \neq 0$, оскільки у противному випадку за теоремою Роллю знайшлась би точка c, така, що $\varphi'(c) = 0$, що неможливо за умовою теореми.

Розглянемо допоміжну функцію

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)}(\varphi(x) - \varphi(a)).$$

Ця функція неперервна на $[a;b]$, диференційована в $(a;b)$ і $F(a) = F(b)$, тобто вона задовольняє умовам теореми Ролля (оскільки є лінійною комбінацією функцій $f(x)$ і $\varphi(x)$). Тому знайдеться точка $c \in (a;b)$, така, що $F'(c) = 0$. Але $F'(x) = f'(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)}\varphi'(x)$,

звідки

$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)}\varphi'(c) = 0.$$

Отже,

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}\varphi'(c) \text{ і } \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}.$$

Теорема (Лагранжа). Якщо функція $f(x)$ задовольняє умовам:

1. $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$;
2. $f(x)$ диференційована в інтервалі $(a;b)$,

тоді знайдеться хоча б одна точка $c\in(a;b)$, така, що

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a).$$

Доведення. Теорему Лагранжа можна розглядати як частинний випадок теореми Коші. Дійсно, покладаючи $\varphi(x)=x$, отримаємо

$$\varphi(b)-\varphi(a)=b-a,\ \varphi'(x)=1,\ \varphi'(c)=0.$$

За теоремою Коші $\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}$, звідки $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$, тобто

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a).$$

Отриману формулу називають **формулою Лагранжа або формулою про скінченні прирости.**

Геометричний зміст теореми Лагранжа

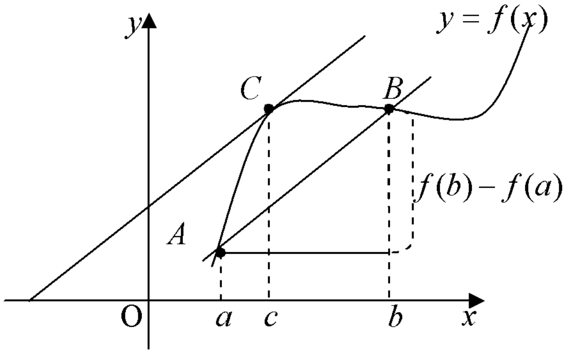


Рис.5.22.

На дузі графіка функції, яка задовольняє умовам теореми, знайдеться точка C між точками A і B, в якій дотична до графіка функції паралельна хорді, яка з'єднує точки A і B (рис.5.22).

Теорема (Правило Лопіталя). Нехай функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ задовольняють умовам теореми Коші на деякому відрізку $[a;b]$ і дорівнюють нулю у точці $x = a$, тобто $f(a)=\varphi(a)=0$, тоді, якщо існує границя відношення похідних $f'(x)$ і $\varphi'(x)$ при $x\to a$, то існує границя

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Цю теорему приймемо без доведення.

Зауваження.

1.Теорема має місце і у випадку, коли функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ не визначені при $x = a$, але $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$ і $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=0$;

2.Теорема справедлива і у випадку, коли $x\to\infty$;

3. Правило Лопіталя може бути застосоване і у випадку, коли $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$ і $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=\infty$ (а також при $x\to\infty$).

Правило Лопіталя застосовують для розкриття невизначеностей вигляду $\left(\frac{0}{0}\right)$ і $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Якщо при обчисленні границь виконати відповідні перетворення функцій, то можна розкривати невизначеності виду:

$$(0\cdot\infty);\ \left(\infty-\infty\right);\ \left(0^0\right);\ \left(\infty^0\right);\ \left(1^\infty\right).$$

Приклад. Знайти границі функцій

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(5+3x)}{2x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3/(5+3x)}{2}=\frac{3}{10}$;

б) $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{e^{5x}}{x^2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{5e^{5x}}{2x}=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{25e^{5x}}{2}=\infty$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}x^2\ln x=(0\cdot\infty)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln x}{1/x^2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1/x}{-2/x^3}=-\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{2}=0$.

5.6 Дослідження функції за допомогою похідної

Визначимо загальні правила дослідження функції, які дозволять зробити ескіз графіка функції.

Зростання і спадання функції

Теорема (необхідна і достатня умова зростання і спадання функції).
1. Якщо диференційована на проміжку $(a;b)$ функція $f(x)$ зростає (спадає) на цьому проміжку, то $f'(x)\ge 0$ $(f'(x)\le 0)$ при будь – якому $x\in(a;b)$.
2. Якщо функція $f(x)$ диференційована на проміжку $(a;b)$ і $f'(x)>0$ $(f'(x)<0)$, то ця функція зростає (спадає) на проміжку $(a;b)$.

Доведення. 1) Нехай функція $f(x)$ зростає на проміжку $(a;b)$. Доведемо, що $f'(x)\ge o$ для всіх $x\in(a;b)$. Додамо аргументу x приріст Δx і розглянемо відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$. Функція $f(x)$ зростає, тому якщо $\Delta x > 0$, то $f(x+\Delta x)>f(x)$; якщо $\Delta x < 0$, то $f(x+\Delta x)<f(x)$. В обох випадках $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}>0$, тобто $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\ge 0$. Аналогічно розглядається випадок, коли $f(x)$ спадає.
2) Нехай $f'(x)>0$. Візьмемо точки x_1 і x_2 із проміжку $(a;b)$ такі, що $x_1<x_2$. За теоремою Лагранжа маємо:

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(c)(x_2-x_1),\text{ де } c\in(x_1;x_2).$$

За умовою $f'(c)>0$, отже, $f(x_2)-f(x_1)>0$ або $f(x_2)>f(x_1)$, тобто функція $f(x)$ є зростаючою на проміжку $(a;b)$, що і треба було довести.

Приклад. Знайти проміжки зростання і спадання функції $y=x^3-3x$.

Розв'язання. Зауважимо, що будь – яке дослідження функції необхідно розпочинати зі знаходження області визначення функції: $D(y)=R$.

Похідна цієї функції $y'=3x^2-3=3(x-1)(x+1)$; $f'(x)>0$ при $x\in(-\infty;-1)\cup(1;\infty)$; $f'(x)<0$ при $x\in(-1;1)$.

Отже, функція $y = x^3 - 3x$ зростає на проміжках $(-\infty; -1)$ і $(1; \infty)$; і спадає на проміжку $(-1; 1)$.

Максимум і мінімум функції

Нехай функція $f(x)$ визначена в точці x_0 і її околі.

Означення. Точка x_0 називається **точкою максимуму (мінімуму) функції** $f(x)$, якщо значення функції у точці x_0 більше (менше) за її значення в усіх точках деякого околу точки x_0: $f(x_0 + \Delta x) < f(x_0)$ $(f(x_0 + \Delta x) > f(x_0))$, коли $\Delta x > 0$ або $\Delta x < 0$.

Максимум і мінімум функції називають **екстремумами** або **екстремальними значеннями функції.**

Теорема (необхідна умова існування екстремуму). Якщо диференційована функція $f(x)$ має у точці x_0 максимум або мінімум, то її похідна в цій точці дорівнює нулю: $f'(x_0) = 0$.

Доведення цієї теореми спирається на теорему Ролля.

Геометрично рівність $f'(x_0) = 0$ означає, що в точці екстремуму функції $f(x)$ дотична до її графіка паралельна осі Ox.

Зауважимо, що умова $f'(x_0) = 0$ є необхідною, але недостатньою умовою існування екстремуму. Наприклад, для функції $y = x^3$ її похідна $y' = 3x^2$ дорівнює нулю при $x = 0$, але $x = 0$ не є точкою екстремуму (рис.5.2).

Існують функції, які в точках екстремуму не мають похідної. Наприклад, неперервна функція $y = |x|$ у точці $x = 0$ похідної не має, але ця точка є точкою мінімуму (рис.5.21).

Значення аргументу, при яких похідна дорівнює нулю або не існує, називають **критичними.**

Теорема (достатня умова існування екстремуму). Якщо при переході (зліва направо) через критичну точку x_0 диференційованої в деякому околі цієї точки функції $f(x)$ її похідна $f'(x)$ змінює знак із плюса на мінус, то x_0 – є точкою максимуму; якщо з мінуса на плюс, то x_0 – є точкою мінімуму.

Доведення. Нехай $f'(x)$ змінює знак із плюса на мінус, тобто виконується умова $f'(x) > 0$, коли $x \in (x_0 - \delta; x_0)$ (δ - окіл точки x_0) і $f'(x) < 0$, коли $x \in (x_0; x_0 + \delta)$. Тоді функція $f(x)$ зростає на проміжку $(x_0 - \delta; x_0)$ і спадає на проміжку $(x_0; x_0 + \delta)$. Звідки випливає, що $f(x) < f(x_0)$ для всіх $x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$, тобто x_0 – точка максимуму функції.

Порядок визначення екстремальних значень функції є аналогічним дослідженню на монотонність.

Найбільше та найменше значення функції на відрізку

Нехай функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$. Відомо, що така функція досягає свого найбільшого та найменшого значення на цьому відрізку.

Таким чином, для визначення найбільшого та найменшого значення функції на відрізку $[a;b]$ необхідно:

1) знайти критичні точки функції на інтервалі $(a;b)$;
2) обчислити значення функції у критичних точках;
3) обчислити значення функції у точках a і b;
4) серед визначених значень вибрати найбільше та найменше.

Приклад. Знайти найбільше та найменше значення функції $f(x)=3x^4+4x^3-1$ на $[-2;1]$.

Розв'язання. Знайдемо критичні точки функції: $f'(x)=12x^3+12x^2$; $f'(x)=0$ при $x_1=0\in[-2;1]$ і при $x_2=-1\in[-2;1]$.

Знайдемо $f(0)=-1$, $f(-1)=3-4-1=-2$, $f(-2)=48-32-1=15$, $f(1)=6$.

Отже, $\max\limits_{[-2;1]} f=f(-2)=15$, $\min\limits_{[-2;1]} f=f(-1)=-2$.

Визначення найбільшого та найменшого значення функції на відрізку застосовують при розв'язанні багатьох практичних задач, які пов'язані з відшуканням оптимальних розв'язків.

Приклад. Із круглої деревини потрібно зробити балку, що має прямокутний переріз. Визначити, які розміри повинен мати переріз, щоб відходи деревини при виготовленні балки були б найменшими.

Розв'язання.

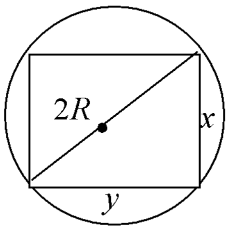


Рис.5.23

Позначимо через x і y довжину і висоту балки. З рисунку 5.23 видно, що $y=\sqrt{4R^2-x^2}$, тому площа перерізу балки $S=x\cdot\sqrt{4R^2-x^2}$. Відходи деревини будуть найменшими, коли площа перерізу буде найбільшою. Знайдемо найбільше значення функції $S=S(x)$ на проміжку $[0;2R]$. Оскільки

$$S'(x)=\sqrt{4R^2-x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{4R^2-x^2}}=\frac{4R^2-x^2-x^2}{\sqrt{4R^2-x^2}}=\frac{4R^2-2x^2}{\sqrt{4R^2-x^2}},$$ то

$S'(x)=0$ при $x=R\sqrt{2}$. Крім того, похідна $S'(x)$ при переході через точку $x=R\sqrt{2}$ змінює знак з «+» на «– », тому $x=R\sqrt{2}$ – точка максимуму. Отже, відходи деревини при виготовленні балки будуть найменшими, якщо її розміри дорівнюють $x=R\sqrt{2}$ і $y=R\sqrt{2}$.

Опуклість графіка функції. Точки перегину

Нехай функція $f(x)$ диференційована на проміжку $(a;b)$.

Графік функції $f(x)$ (крива $f(x)$) називається **опуклим** (**угнутим**) на проміжку $(a;b)$, якщо всі точки кривої $f(x)$ розташовані нижче (вище) за точки дотичної, проведеної у будь – якій точці графіка на цьому проміжку.

Часто опуклі й угнуті функції називають **опуклими вгору і опуклими вниз** відповідно.

Точки графіка функції $f(x)$, у яких змінюється напрямок опуклості, називають **точками перегину.**

У подальшому вважаємо, що функція $f(x)$ має другу похідну на проміжку $(a;b)$.

Теорема (достатня умова опуклості графіка функції).

Якщо друга похідна функції $f''(x) < 0$ $(f''(x) > 0)$ в усіх точках проміжку $(a;b)$, то графік функції опуклий угору (опуклий униз) на цьому проміжку.

Теорема (достатня умова існування точок перегину).

Якщо друга похідна $f''(x)$ при переході через точку x_0, в якій вона дорівнює нулю або не існує, змінює знак, то ця точка є точкою перегину.

Доказ цієї теореми є аналогічним доказу теореми про достатню умову існування екстремуму функції.

Приклад. Дослідити графік функції $y = x^5 - 2x + 5$ на опуклість і знайти точки перегину.

Розв'язання. Область визначення $D(y) = R$. Знайдемо похідні $y' = 5x^4 - 2$, $y'' = 20x^3$. Друга похідна дорівнює нулю $y'' = 0$ при $x = 0$. Тому $y'' > 0$ при $x > 0$; $y'' < 0$ при $x < 0$.

Отже, графік функції $y = x^5 - 2x + 5$ є опуклим угору на проміжку $(-\infty;0)$ і опуклим униз на проміжку $(0;\infty)$. Точка (0; 5) є точкою перегину.

Асимптоти графіка функції

Асимптоти дозволяють створити уявлення про вигляд графіка функції при віддалені його точок на нескінченність.

Асимптотою графіка функції $y = f(x)$ називають пряму, відстань до якої від точки, яка лежить на кривій, прямує до нуля, якщо ця точка рухається вздовж гілки кривої до нескінченності.

Асимптоти поділяють на два види: вертикальні й похилі (зокрема, горизонтальні).

Пряма $x = a$ є **вертикальною асимптотою графіка функції** $y = f(x)$**,** якщо

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty, \text{ або } \lim_{x\to a-0} f(x) = \infty, \text{ або } \lim_{x\to a+0} f(x) = \infty .$$

Рівняння **похилої асимптоти** будемо шукати у вигляді

$$y = kx + b .$$

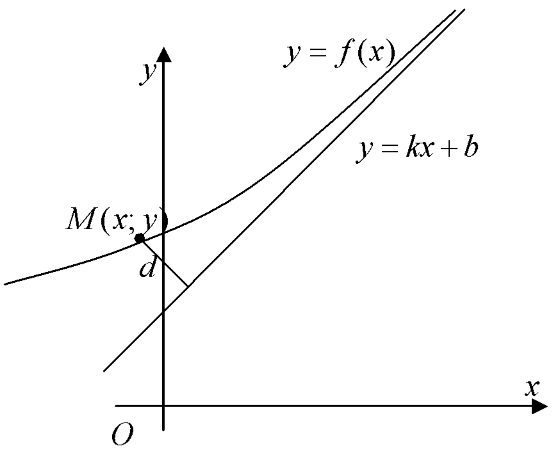


Рис.5.24

Знайдемо k і b. Нехай $M(x;y)$ – довільна точка, яка належить кривій $y = f(x)$ (рис.5.24).

За формулою відстані від точки до прямої $\left(d = \left| \dfrac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right| \right)$ знаходимо відстань від точки M до прямої $y = kx + b$:

$$d = \left| \frac{kx - y + b}{\sqrt{k^2 + 1}} \right|.$$

Умова $d \to 0$ буде виконуватися лише тоді, коли чисельник дробу прямує до нуля, тобто $\lim\limits_{x \to \infty}(kx - y + b) = 0$.

Звідси випливає, що $kx - y + b = \alpha$, де $\alpha = \alpha(x)$ – нескінченно мала, тобто $\alpha \to 0$ при $x \to \infty$. Поділимо обидві частини рівності $y = kx + b - \alpha$ на x, перейдемо до границі при $x \to \infty$, отримаємо:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{b}{x} + k - \frac{\alpha}{x} \right).$$

Звідси

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{y}{x}, \quad b = \lim_{x \to \infty}(y - kx).$$

Таким чином, якщо існує похила асимптота $y = kx + b$, то k і b визначають за отриманими формулами. І навпаки: якщо існують скінченні границі в формулах для k і b, то пряма $y = kx + b$ є похилою асимптотою.

Зокрема, якщо $k = 0$, то $b = \lim\limits_{x \to \infty} f(x)$. Тому $y = b$ – рівняння **горизонтальної асимптоти**.

Зауваження. Асимптоти графіка функції можуть бути різними при $x \to -\infty$ і при $x \to +\infty$.

Якщо хоча б одна з границь при визначенні k і b не існує або дорівнює ∞, то похилих асимптот немає.

Загальна схема дослідження функції

1. Знайти область визначення функції.
2. Дослідити функцію на парність.
3. Визначити точки перетину з осями координат.
4. Дослідити поведінку функції на нескінченності.
5. Знайти асимптоти графіка функції.
6. Знайти інтервали монотонності і екстремуми функції
7. Знайти інтервали опуклості точки перегину функції.
8. Побудувати графік функції.

Приклад. Дослідити функцію $y = \dfrac{1 + x^2}{1 - x^2}$ та побудувати її графік.

1. Область визначення: $x \neq \pm 1$; тобто $D(y) = (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$

2. Оскільки $y(-x) = \dfrac{1 + (-x)^2}{1 - (-x)^2} = \dfrac{1 + x^2}{1 - x^2}$, тобто виконується рівність $y(-x) = y(x)$, то функція парна. Отже, графік функції симетричний відносно вісі Oy.

3. Визначимо точки перетину графіка функції з осями координат.

Точка перетину з віссю Oy знаходиться за умовою $x = 0$, тоді $y(0) = \dfrac{1 + 0^2}{1 - 0^2} = 1$, тобто $A(0;1)$ – точка перетину з віссю Oy.

Точку перетину з віссю Ox визначають, покладаючи $y=0$. Тоді маємо рівняння $y(x) = 0$ або $\frac{1+x^2}{1-x^2}=0$, яке не має розв’язків; тобто графік функції не перетинає вісь Ox.

4. Дослідимо поведінку функції на нескінченності.

Обчислюємо $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1+x^2}{1-x^2}=-1$, тобто пряма $y = -1$ – горизонтальна асимптота.

5. Пряма $x = 1$ – вертикальна асимптота, оскільки $\lim\limits_{x\to 1-0}\frac{1+x^2}{1-x^2}=+\infty$ та $\lim\limits_{x\to 1+0}\frac{1+x^2}{1-x^2}=-\infty$.

Пряма $x = -1$ – теж вертикальна асимптота тому, що графік функції симетричний відносно осі Oy (або $\lim\limits_{x\to -1-0}\frac{1+x^2}{1-x^2}=-\infty$ та $\lim\limits_{x\to -1+0}\frac{1+x^2}{1-x^2}=+\infty$).

6. Знайдемо інтервали монотонності та екстремуми. Для цього спочатку обчислимо похідну $y'(x)$:

$$y'=\frac{2x(1-x^2)-(1+x^2)(-2x)}{(1-x^2)^2}=\frac{4x}{(1-x^2)^2}.$$

Критичні точки визначимо за умови $y'=0$ або y' не існує . Рівняння $y'=0$ має єдиний корінь $x=0$, похідна y' не існує, якщо $x=\pm1$. Але критичною є тільки точка $x=0$, оскільки $x=\pm1$ не належать області визначення функції.

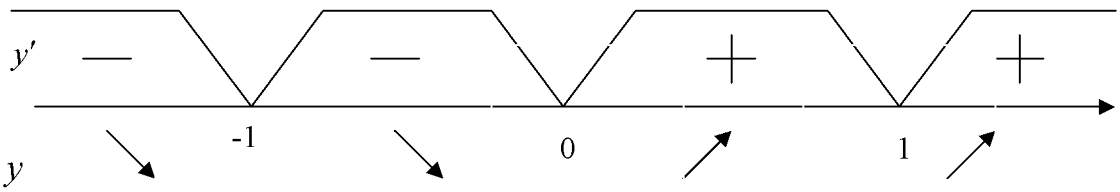


Рис.5.25

На інтервалах $(-\infty;-1)$ і $(-1;0)$ функція спадає, оскільки $y'(x)<0$.
На інтервалах $(0;1)$ і $(1;+\infty)$ функція зростає, оскільки $y'(x)>0$.

$y_{\min}=y(0)=1$, тобто $B(0;1)$ – екстремальна точка.

7. Знайдемо інтервали опуклості та точки перегину.

Обчислимо $y''(x)$

$$y''(x)=(y'(x))'=\left(\frac{4x}{(1-x^2)^2}\right)'=\frac{4\cdot(1-x^2)^2-4x\cdot2\cdot(1-x^2)\cdot(-2x)}{(1-x^2)^4}=\frac{4(1+3x^2)}{(1-x^2)^3};$$

$y''\neq0$ і існує при $x\in D(y)$.

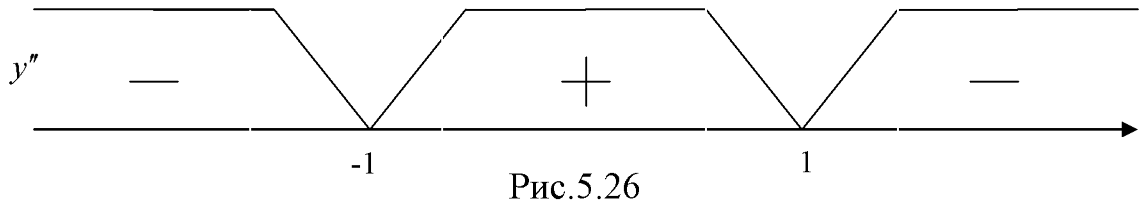


Рис.5.26

На інтервалах $(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$ графік функції опуклий тому, що $y''(x)<0$.
На інтервалі $(-1;1)$ графік функції вгнутий тому, що $y''(x)>0$.
Точок перегину немає.

8. Будуємо графік функції (рис.5.27)

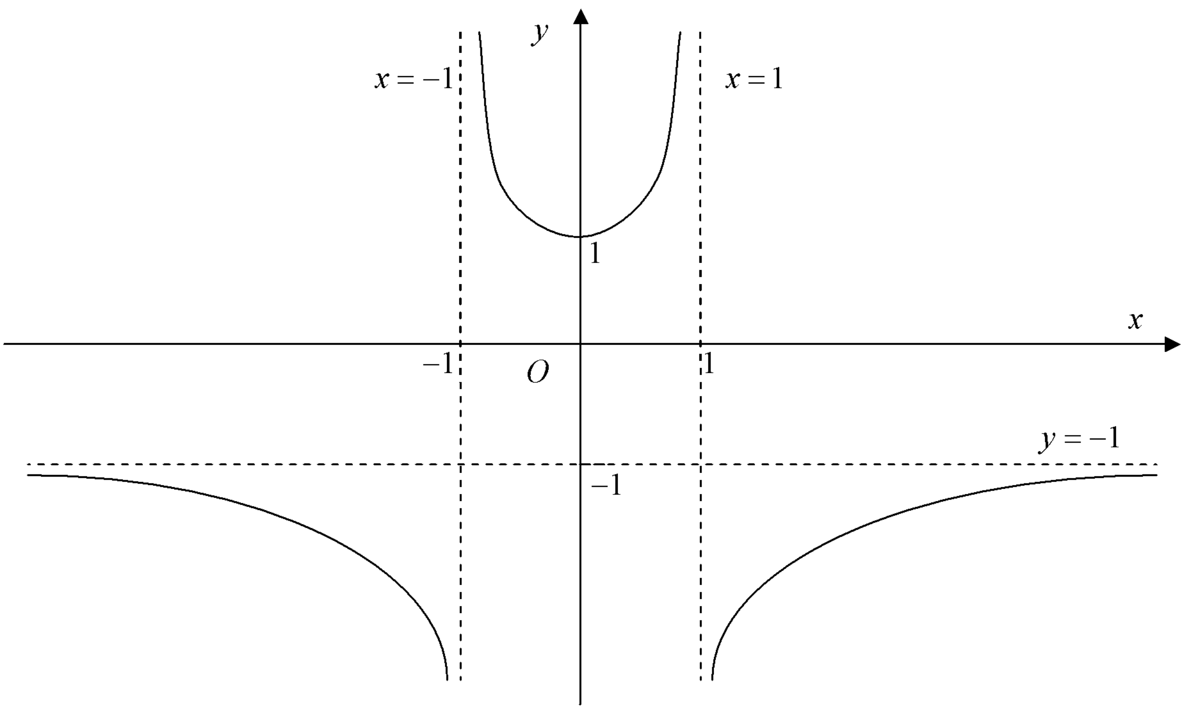


Рис.5.27

5.7 Функція кількох змінних

Розв’язання задач будівництва та архітектури часто призводить до дослідження функцій кількох змінних. Наведемо деякі відомості теорії функцій двох змінних (всі ці факти можна узагальнити на випадок функцій, число змінних яких більше за двох).

Означення. Змінна z називається **функцією двох змінних** x і y, заданою на множині упорядкованих пар чисел D, якщо кожній парі чисел $(x;y)\in D$, за деяким правилом ставиться у відповідність одне певне значення змінної $z\in R$.

Позначають функцію двох змінних через $z=f(x;y)$, де x і y називають **незалежними змінними** (аргументами), а z – **залежною змінною** (функцією). Множину $D=D(f)$ упорядкованих пар чисел $(x;\ y)$ називають **областю визначення функції**, а множину усіх можливих значень змінної z – **областю зміни функції** і позначають через $E=E(f)$.

Область визначення функції двох змінних є вся площина або деяка її частина.

Геометрична інтерпретація функції двох змінних: у прямокутній декартовій системі координат $Oxyz$ функція $z = f(x;y)$, взагалі кажучи, задає поверхню, а рівність $z = f(x;y)$ або $F(x;y;z) = 0$ – рівняння поверхні.

Наприклад, областю визначення функції двох змінних $z = x^2 + y^2$ є вся площина, а просторовим графіком є еліптичний параболоїд (рис. 4.22).

Усі основні поняття теорії функцій однієї змінної узагальнюються на випадок функції кількох змінних. Далі наведемо поняття границі, неперервності та диференційованості функції двох змінних.

Границя функції двох змінних

Множину всіх точок площини, координати яких задовольняють нерівність $\sqrt{(x-x_0)^2} + \sqrt{(y-y_0)^2} < \delta$, називають δ– **околом** точки $M_0(x_0;y_0)$. Іншими словами, δ– окіл точки $M_0(x_0;y_0)$ – це усі внутрішні точки круга з центром в цій точці і радіуса δ.

Нехай функція $z = f(x;y)$ визначена у деякому околі точки $M_0(x_0;y_0)$, за винятком, можливо, самої точки M_0.

Означення. Число A називається **границею функції** $z = f(x;y)$ при $x \to x_0$ і $y \to y_0$ (або, що теж саме, при $M(x;y) \to M_0(x_0;y_0)$) і записують

$$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ y\to y_0}} f(x;y) = A \ \left(\text{або } \lim_{M\to M_0} f(M) = A\right),$$

якщо для будь – якого скільки завгодно малого $\varepsilon > 0$ знайдеться такий δ– окіл точки $M_0(x_0;y_0)$, що для будь – якої точки $M(x;y)$ цього околу (за винятком, можливо, самої точки M_0) виконується нерівність

$$|f(x;y) - A| < \varepsilon \ (\text{або } |f(M) - A| < \varepsilon).$$

Із означення випливає, що якщо границя функції існує, то вона не залежить від напряму руху точки $M(x;y)$ до точки $M_0(x_0;y_0)$.

Геометричний зміст границі функції двох змінних полягає у наступному: як тільки відстань від точки $M(x;y)$ до фіксованої точки $M_0(x_0;y_0)$ стане досить малою, аплікати відповідних точок поверхні $z = f(x;y)$ будуть відрізнятися від числа A по модулю менше, ніж на ε, де ε може обиратися як завгодно малим.

Функції двох змінних мають властивості, які аналогічні властивостям функції однієї змінної. Це означає, що справедливі твердження: якщо функції $f(M)$ і $g(M)$ визначені на множині D і мають у точці M_0 цієї множини границі A і B відповідно, то функції $f(M) \pm g(M)$, $f(M)\cdot g(M)$, $\dfrac{f(M)}{g(M)}$ $(g(M) \neq 0)$ мають у точці M_0 границі, які відповідно дорівнюють $A \pm B$, $A\cdot B$, $\dfrac{A}{B}$ $(B \neq 0)$.

Нехай функція $z = f(x;y)$ визначена у точці $M_0(x_0;y_0)$ і деякому її околу.

Означення. Функція $z = f(x;y)$(або $f(M)$) називається **неперервною у точці** $M(x;y)$, якщо:

а) $f(M)$ визначена у цій точці і деякому її околі;

б) існує скінченна границя $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)$;

в) ця границя дорівнює значенню функції z у точці M_0, тобто

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x;y) = f(x_0;y_0) \text{ або } \lim_{M\to M_0} f(M) = f(M_0).$$

Функція, яка неперервна у кожній точці деякої області, називається **неперервною у цій області.** Точки, в яких порушується хоча б одна із умов неперервності, називають **точками розриву функції.**

Приклад. Функція $z = x^2 + y^2$, яка була розглянута вище, є неперервною у будь – якій області площини Oxy, а функція $z = \dfrac{5}{x-y}$ має лінію розриву $y = x$.

Частинні похідні

Розглянемо функцію двох змінних $z = f(x;y)$. Оскільки x і y – незалежні змінні, то одна з них може змінюватися, а інша зберігати своє значення. Якщо надати незалежній змінній x приріст Δx, зберігаючи y незмінним, тоді z здобуде приріст, який називають **частинним приростом** z **по** $\boldsymbol{x}$ і позначають $\Delta_x z$:

$$\Delta_x z = f(x+\Delta x;y) - f(x;y).$$

Аналогічно, якщо x має стале значення, а y одержує приріст Δy, то z матиме приріст $\Delta_y z$, який зветься **частинним приростом** z **по** $\boldsymbol{y}$:

$$\Delta_y z = f(x;y+\Delta y) - f(x;y).$$

Якщо одночасно змінним x і y дати прирости Δx і Δy відповідно, то матиме **повний приріст функції** Δz:

$$\Delta z = f(x+\Delta x;y+\Delta y) - f(x;y).$$

Означення. Якщо існує границя

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x+\Delta x;y) - f(x;y)}{\Delta x},$$

то ця границя називається **частинною похідною функції** $z = f(x;y)$ **по** $\boldsymbol{x}$ **у точці** $M(x;y)$ і позначається одним із символів:

$$z'_x,\ \frac{\partial z}{\partial x},\ f'_x,\ \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Частинні похідні у точці $M_0(x_0;y_0)$ зазвичай позначають символами

$$f'_x(x_0;y_0),\ f'_x\big|_{M_0}.$$

Аналогічно визначається **частинна похідна** $z = f(x;y)$ **по** $\boldsymbol{y}$ **:**

$$z'_y = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x; y+\Delta y) - f(x; y)}{\Delta y}.$$

Частинні похідні функції кількох змінних знаходять за формулами і правилами обчислення похідних функції однієї змінної (при цьому відповідно x і y вважаються сталими).

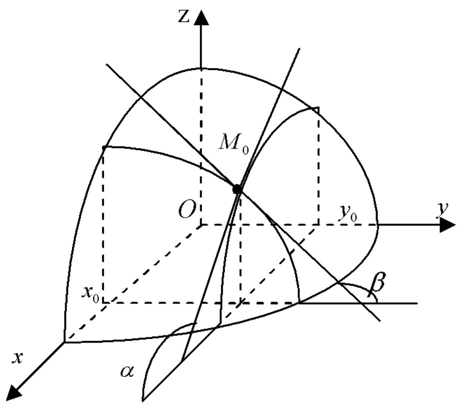


Рис.5.28

Геометричний зміст частинних похідних функції двох змінних $z = f(x; y)$ полягає у наступному: значення $f'_x(x_0; y_0) = tg\alpha$, де α – кут між додатним напрямом осі Ox і дотичною, яка проведена до кривої $z = f(x; y_0)$ (переріз поверхні $z = f(x; y)$ площиною $y = y_0$) у точці $M_0(x_0; y_0; f(x_0; y_0))$ (рис.5.28). Аналогічно $f'_y(x_0; y_0) = tg\beta$.

Частинні похідні $f'_x = \dfrac{\partial f}{\partial x}$ і $f'_y = \dfrac{\partial f}{\partial y}$ називають **частинними похідними першого порядку.** Їх можна розглядати як функції від $(x; y) \in D$. Ці функції також можуть мати частинні похідні, які називають **частинними похідними другого порядку.** Для функції $z = f(x; y)$ ці похідні визначаються і позначаються так:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z''_{xx} = f''_{x^2}(x; y),$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = z''_{xy} = f''_{xy}(x; y),$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = z''_{yx} = f''_{yx}(x; y),$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z''_{yy} = f''_{y^2}(x; y).$$

Похідні f''_{xy} і f''_{yx} називають **мішаними частинними похідними.**

Диференційованість та повний диференціал першого порядку

Нехай функція $z = f(x; y)$ визначена у деякому околі точки $M(x; y)$.

Означення. Функція $z = f(x; y)$ називається **диференційованою у точці** $M(x; y)$, якщо її повний приріст у цій точці можна подати у вигляді

$$\Delta z = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + \alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y,$$

де $\alpha = \alpha(\Delta x; \Delta y) \to 0$ і $\alpha = \alpha(\Delta x; \Delta y) \to 0$ при $\Delta x \to 0, \ \Delta y \to 0$. Сума перших двох доданків останньої рівності являє собою головну частину приросту функції.

Означення. Головна частина приросту функції $z = f(x;y)$, лінійна відносно $\triangle x$ і $\triangle y$, називається **повним диференціалом функції** і позначається символом dz:

$$dz = A \cdot \triangle x + B \cdot \triangle y .$$

Вирази $A \cdot \triangle x$ і $B \cdot \triangle y$ називають **частинними диференціалами.**

Якщо функція $z = f(x;y)$ має в точці $M(x;y)$ неперервні частинні похідні, то повний диференціал можна подати у вигляді

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

або

$$dz = d_x z + d_y z ,$$

де $d_x z = \dfrac{\partial z}{\partial x}dx,\ d_y z = \dfrac{\partial z}{dy}dy$ – **частинні диференціали функції** $z = f(x;y)$.

5.8 Деякі геометричні застосування диференціального числення

За допомогою методів розділу «Аналітична геометрія» можна виявляти глобальні властивості кривих та поверхонь. Застосування методів математичного аналізу, зокрема, диференціального числення, дозволяє вивчати локальні властивості кривих та поверхонь, до яких відносять кривину кривої та поверхні, скрут кривої, центр кривини, еволюту і евольвенту та ін. Дослідження цих характеристик допомагає при проектуванні будівельних конструкцій – йдеться про забезпечення оптимальної несучої здатності конструкцій, їх жорсткості, технологічності, а також архітектурної виразності.

Кривина кривої

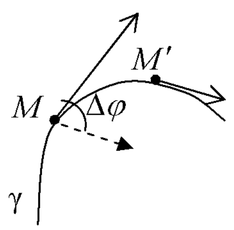


Рис.5.29

Визначимо кількісну міру відхилення кривої від дотичної.

Нехай M – довільна точка регулярної кривої γ, M' - точка кривої, що близька до точки M. Позначимо через $\Delta\varphi$ кут між дотичними в точках M і M', а через Δs – довжину дуги кривої, вміщеної між M і M' (рис.5.29).

Середньою кривиною дуги MM' називається відношення виду $\dfrac{\Delta\varphi}{\Delta s}$.

Кривиною кривої γ у точці M називається границя середньої кривини, якщо M' нескінченно прямує до M (якщо границя існує), тобто

$$\lim_{M' \to M} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} = k$$

або

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} = k . \qquad (5.13)$$

Приклади. 1.Визначити кривину кола радіуса R.

Розв'язання. Задамо коло параметрично: $x = R\cos\varphi;\ y = R\sin\varphi$. Нехай $\Delta\varphi$ – кут між дотичною до кола в точці M, що відповідає значенню параметра φ, і дотичною в точці M', що відповідає значенню параметра $\varphi + \Delta\varphi$. Тоді довжина дуги $\Delta s = R\Delta\varphi$ і $k(\varphi) = \lim\limits_{\Delta s \to 0} \dfrac{\Delta\varphi}{\Delta s} = \lim\limits_{\Delta s \to 0} \dfrac{\Delta\varphi}{R\Delta\varphi} = \dfrac{1}{R}$. Отже, кривина кола є сталою величиною і дорівнює $k = \dfrac{1}{R}$, тобто коло вигинається рівномірно.

2. Очевидно, що кривина прямої дорівнює нулю.

Звичайно, чим більше крива вигинається поблизу даної точки, тим більше кривина і менше радіус кривини кривої в цій точці.

Кривина кривої у прямокутних координатах

Якщо крива задана явно рівнянням $y = f(x)$, то

$$k = \frac{y''}{\left(1 + y'^2\right)^{3/2}}. \tag{5.14}$$

Дійсно, оскільки $\varphi = arctgy'$, де $y' = \dfrac{dy}{dx}$, то $\dfrac{d\varphi}{dx} = \dfrac{y''}{1 + y'^2}$.

Але $\dfrac{ds}{dx} = \left(1 + y'^2\right)^{1/2}$. Поділивши останні дві рівності, отримаємо шукану формулу.

Кривина кривої у параметричній формі

Якщо крива задана параметричними рівняннями $x = x(t),\ y = y(t)$, то кривина обчислюється за формулою

$$k = \frac{x'y'' - x''y'}{\left(x'^2 + y'^2\right)^{3/2}}. \tag{5.15}$$

Зв'язок між кривиною і опуклістю плоскої кривої

З формули (5.14) випливає, що кривина k і y'' мають однакові знаки (вибравши додатний знак для знаменника формули (5.14)). Це означає, що кривина додатна або від'ємна залежно від того, чи є крива опуклою або вгнутою. У точках перегину кривина кривої дорівнює нулю.

Приклад. Розглянемо криву, яка задана рівнянням $\left(x^2 + y^2 - 2ax\right)^2 = 4b^2\left(x^2 + y^2\right),\ b < a$ – завиток Паскаля (рис.3.31). У кожній точці кривої кривина додатна, тобто крива є локально опуклою. Але глобально крива опуклою не буде, оскільки вона не є межею опуклої множини.

Радіус кривини

Радіусом кривини *R* кривої в деякій точці є величина, обернена до кривини кривої в цій точці, тобто

$$R = \frac{1}{k} = \frac{\left(1 + y'^2\right)^{3/2}}{y''}. \tag{5.16}$$

Коло кривини

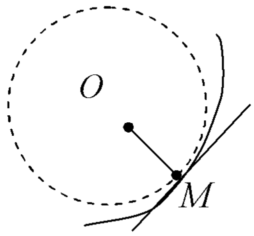


Рис.5.30

Розглянемо на кривій деяку точку M (рис.5.30).

Побудуємо в кожній точці кривої коло, яке має ту саму кривину, що і крива у цій точці. Коло, побудоване таким чином, називається **колом кривини** кривої в точці M.

Центр кривини

Центром кривини $(\alpha;\beta)$ **кривої в точці** $M(x;y)$ називається центр кола кривини у цій точці.

Координати центра кривини кривої $y = f(x)$ у точці $M(x;y)$ визначаються за формулами

$$\alpha = x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''}, \quad \beta = y + \frac{1+y'^2}{y''}. \tag{5.17}$$

Еволюта та евольвента плоскої кривої

Еволютою кривої називається геометричне місце центрів кривини цієї кривої.

Крива, для якої дана крива є еволютою, називається **евольвентою** своєї еволюти**.**

Розглянемо коло кривини кривої в точці M. Якщо точка M буде рухатися по кривій, то разом із нею буде котитися по кривій і відповідне коло кривини, причому його радіус буде змінюватися. Крива, яка описується центром кола, і буде еволютою кривої.

Відома цікава властивість еволюти: нормаль кривої в даній точці дотикається її еволюти, причому точкою дотику її до еволюти є центр кривини кривої в цій точці.

Приклад. Еволютою кола радіуса R є точка , яка співпадає з центром кола.

Фізичний зміст еволюти

Нескінченно близькі нормалі кривої перетинаються в точках еволюти. Якщо на кривій розташовані джерела випромінювання, то в точках еволюти відбувається концентрація цього випромінювання.

Зауваження. Еволюта й евольвента застосовуються при проектуванні зубчастих передач.

Дотична площина і нормаль до поверхні

Дотичною площиною до поверхні у точці M_0 (точка дотику) називають площину, в якій лежать дотичні до всіх плоских перерізів поверхні, що проходять через точку M_0.

Нормаллю до поверхні називають пряму, яка проходить через точку дотику M_0 і перпендикулярна до дотичної площини.

Якщо поверхня задана рівнянням $z = f(x;y)$, то рівняння дотичної площини у точці $M_0(x_0;y_0;z_0)$ має вигляд

$$z - z_0 = f'_x(x_0;y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0;y_0)(y - y_0) \tag{5.18}$$

і рівняння нормалі

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0;y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0;y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}. \tag{5.19}$$

Дотична площина має важливе значення при дослідженні властивостей поверхні, які пов'язані з її формою. Дотична площина до поверхні у заданій точці визначається двома дотичними, що проведені до двох кривих поверхні, які проходять через задану точку. У диференціальній геометрії доводиться, що дотичні до двох кривих, що проведені на поверхні через задану точку і мають екстремальні значення кривини (максимальну і мінімальну), утворюють між собою прямий кут і є так званими **головними напрямами** [12]. Максимальний і мінімальний радіуси кривини ліній у точці дотику називають **головними радіусами** кривини поверхні, а їх центри – **центрами кривини поверхні** у даній точці.

Величини, обернені до головних радіусів кривини, називають **головними кривинами поверхні** у даній точці.

Гауссовою кривиною поверхні називають добуток її головних кривин.

Середньою кривиною поверхні називають півсуму головних кривин поверхні.

Якщо поверхня задана рівнянням $z = f(x;y)$, то гауссова (K) і середня (H) кривини поверхні можна знайти за формулами

$$K = \frac{f''_{xx} f''_{yy} - (f''_{xy})^2}{\left(1 + (f'_x)^2 + \left(f'_y\right)^2\right)^2}, \tag{5.20}$$

$$H = \frac{1}{2} \frac{\left(1 + \left(f'_y\right)^2\right) f''_{xx} - 2 f''_{xy} f'_x f'_y + \left(1 + \left(f'_x\right)^2\right) f''_{yy}}{\left(\sqrt{1 + (f'_x)^2 + \left(f'_y\right)^2}\right)^3} \tag{5.21}$$

У теорії архітектурного проектування відомо, що поверхні – оболонки, які мають форму поверхні додатної або від'ємної гауссової кривини, мають більшу просторову жорсткість , ніж поверхні з нульовою кривиною.

Приклад. Знайти гауссову та середні кривини еліптичного параболоїда $z = x^2 + y^2$.

Розв'язання. Знайдемо частинні похідні, якщо $f(x; y) = x^2 + y^2$:

$$f'_x = 2x,\ f'_y = 2y,\ f''_{xx} = 2,\ f''_{yy} = 2,\ f''_{xy} = 0.$$

Тоді за формулами (5.20) та (5.21)

$$K = \frac{4}{\left(1+4x^2+4y^2\right)^2},\quad H = \frac{\left(1+4y^2\right)2+\left(1+4x^2\right)2}{2\left(\sqrt{1+4x^2+4y^2}\right)^3} = \frac{2+4x^2+4y^2}{\left(1+4x^2+4y^2\right)^{3/2}}.$$

Питання для самоперевірки

1 Дайте означення функції.
2 Що називається границею функції у точці x_0?
3 Що називається похідною функції? У чому полягає фізичний та геометричний зміст похідної?
4 Яка функція називається неперервною в точці?
5 Сформулюйте основні правила диференціювання і запишіть таблицю похідних. Яка функція називається зростаючою (спадаючою) на проміжку?
6 Сформулюйте необхідну і достатню умови зростання (спадання) функції на проміжку.
7 Що називають максимумом (мінімумом) функції в точці?
8 Сформулюйте достатню умову існування екстремуму.
9 Сформулюйте необхідну і достатню умови існування інтервалів опуклості (вгнутості) кривої.
10 Сформулюйте необхідну і достатню умови існування точок перегину кривої.
11 Сформулюйте правило Лопіталя.
12 Що називають асимптотою кривої?
13 Яку пряму називають вертикальною асимптотою?
14 За яких умов існують похилі і горизонтальні асимптоти і як їх визначають?
15 Дайте означення кривини кривої та поверхні. Як застосовують поняття кривини для дослідження властивостей кривих та поверхонь в архітектурному проектуванні?

Розділ 6 ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ

ЛЕКЦІЇ 13-16

6.1 Первісна. Невизначений інтеграл
6.2 Визначений інтеграл
6.3 Геометричні застосування визначеного інтеграла

Багато важливих інженерних задач зводяться до задачі визначення функції, якщо відома її похідна, тобто задачі, оберненої до основної задачі диференціального числення. Задача визначення функції $F(x)$, похідна якої дорівнює $f(x)$, є **основною задачею інтегрального числення**.

6.1 Первісна. Невизначений інтеграл

6.1.1 Основні поняття

Означення. Функція $F(x)$ називається **первісною для функції** $f(x)$**,** визначеної на проміжку $(a;b)$, якщо в усіх точках цього проміжку виконується рівність

$$F'(x) = f(x) \quad (\text{або } \; dF(x) = f(x)dx).$$

Наприклад, первісною функцією для функції $f(x) = 4x^3$ буде $F(x) = x^4$, оскільки $(x^4)' = 4x^3$. Однак похідна від функції ($x^4 + 5$) також дорівнює $4x^3$, а це означає, що функція ($x^4 + 5$) буде також первісною для функції $4x^3$. І взагалі, $F(x) = x^4 + C$, де C –- стала, також будуть первісними для $f(x) = 4x^3$, оскільки $(x^4 + C)' = 4x^3$.

Теорема. Якщо функція $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$ на проміжку $(a;b)$, то множина всіх первісних для функції $f(x)$ на цьому проміжку $(a;b)$ міститься у виразі

$$F(x) + C,$$

де C – довільна стала.

Доведення. Дійсно, $(F(x) + C)' = F'(x) = f(x)$.

Нехай $\Phi(x)$ – деяка інша первісна функції $f(x)$, відмінна від $F(x)$, тобто $\Phi'(x) = f(x)$. Тоді для будь – якого $x \in (a;b)$ маємо

$$(\Phi(x) - F(x))' = \Phi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

А це означає, що $\Phi(x) - F(x) = C$, де С – стала величина. Отже, $\Phi(x) = F(x) + C$.

Означення. Сукупність усіх первісних $F(x)$+С для функції $f(x)$, визначеної на проміжку $(a;b)$, називається **невизначеним інтегралом від функції** $f(x)$ на цьому проміжку і позначається символом

$$\int f(x)dx,$$

де $f(x)$ – підінтегральна функція, $f(x)\,dx$ – підінтегральний вираз, x – змінна інтегрування.

Таким чином, якщо $F'(x) = f(x)$, то

$$\int f(x)dx = F(x) + C .$$

Справедливе й обернене твердження.

Операція знаходження невизначеного інтеграла від функції називається **інтегруванням цієї функції**.

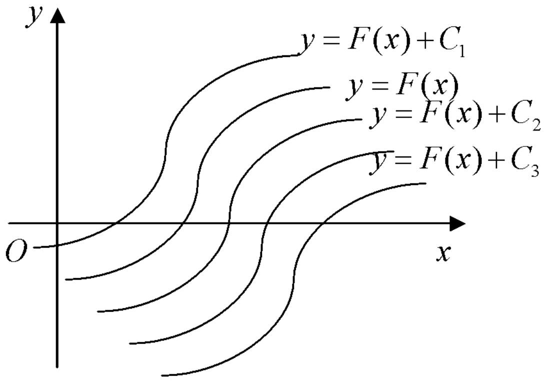


Рис.6.1

Геометрично невизначений інтеграл являє собою сукупність кривих $y = F(x) + C$ (кожному числовому значенню С відповідає крива сукупності) (рис.6.1).

Графік кожної первісної називається **інтегральною кривою.**

Доведено, що будь-яка функція, неперервна на проміжку, має в цьому проміжку первісну, а значить, і невизначений інтеграл.

Властивості невизначеного інтеграла (правила інтегрування)

Подамо властивості, які випливають з означення невизначеного інтеграла і вибірково доведемо деякі з них (усі рівності можна довести диференціюванням їх лівої та правої частин):

1) $(\int f(x)dx)' = f(x)$.

Доведення. Дійсно, $(\int f(x)dx)' = (F(x) + C)' = F'(x) + 0 = f(x)$.

2) $d(\int f(x)dx) = f(x)dx$.

3) $\int dF(x) = F(x) + C$.

4) $\int cf(x)dx = c\int f(x)dx$, де $c = \text{const} \neq 0$.

5) $\int \left(f_1(x) \pm f_2(x)dx\right) = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$.

6) $\int f(ax+b)dx = \dfrac{1}{a}F(ax+b) + C$.

7) (Інваріантність формул інтегрування).

Якщо $\int f(x)dx = F(x) + C$, то $\int f(u)du = F(u) + C$, де $u = \varphi(x)$ – неперервно диференційована функція аргументу x.

Доведення. Розглянемо складну функцію $F(u) = F(\varphi(x))$, де $u = \varphi(x)$ – неперервно диференційована функція. Тоді за інваріантністю форми першого диференціала функції $dF(u) = F'(u)du = f(u)du$.

Звідки $\int f(u)du = \int d(F(u)) = F(u) + C$.

6.1.2 Таблиця інтегралів

З таблиці похідних і означення невизначеного інтеграла можна скласти таблицю невизначених інтегралів.

1. $\int u^{\alpha}du = \int u^{\alpha}u'_x dx = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$; ($\int du = u + C$; $\int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C$; $\int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u^2} + C$);

2. $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$;

3. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$; ($\int e^u du = e^u + C$);

4. $\int \sin u du = -\cos u + C$;

5. $\int \cos u du = \sin u + C$;

6. $\int \mathrm{tg} u du = -\ln|\cos u| + C$;

7. $\int \mathrm{ctg}\, u du = \ln|\sin u| + C$;

8. $\int \frac{du}{\cos^2 u} = tgu + C$;

9. $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -ctgx + C$;

10. $\int \frac{du}{\sin u} = \ln\left|tg\left(\frac{u}{2}\right)\right| + C$;

11. $\int \frac{du}{\cos u} = \ln\left|tg\left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C$;

12. $\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{u}{a} + C$;

13. $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C$;

14. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C$;

15. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C$.

Зауважимо, що символ u може позначати як незалежну змінну, так і неперервну диференційовану функцію від незалежної змінної.

Кожна із формул цієї таблиці справедлива в будь-якому проміжку, який міститься в області визначення відповідної підінтегральної функції, її вірність можна перевірити диференціюванням.

6.1.3 Методи інтегрування

Існує три основні методи інтегрування функцій: метод безпосереднього інтегрування (табличне інтегрування), метод заміни змінної та метод інтегрування частинами. Розглянемо кожний із цих методів.

Безпосереднє інтегрування

Метод інтегрування, за яким даний інтеграл зводиться до одного або кількох табличних інтегралів шляхом тотожних перетворень над підінтегральною функцією (або виразом) і застосування властивостей невизначеного інтеграла.

Приклад 1. Знайти $\int (5x^7 - 7x^2 + 2)dx$.

Розв`язання. Скориставшись властивостями невизначеного інтеграла, матимемо

$$\int(5x^7-7x^2+2)=\int 5x^7dx-\int 7x^2dx+\int 2dx=5\int x^7dx-7\int x^2dx+2\int dx\,.$$

Звідки застосувавши степеневий інтеграл (1)

$$\int(5x^7-7x^2+2)dx= \;=5\frac{x^8}{8}+C_1-7\frac{x^3}{3}+C_2+2x+C_3=\frac{5x^8}{8}-7x^3+2x+C,$$

де

$$C=C_1+C_2+C_3.$$

Відзначимо, що додавати довільну сталу після знаходження кожного інтеграла, як це зроблено в даному прикладі, не слід. Досить усі довільні сталі підсумувати і результат, позначений однією буквою C, записати вкінці, тобто після того, як усі інтеграли будуть визначені.

Приклад 2. Знайти $\int\frac{\sqrt{x}-x^3e^x+x^2}{x^3}dx.$

Розв`язання. Маємо

$$\int\frac{\sqrt{x}-x^3e^x+x^2}{x^3}dx=\int\left(\frac{\sqrt{x}}{x^3}-\frac{x^3e^x}{x^3}+\frac{x^2}{x^3}\right)dx=$$

$$=\int x^{-\frac{5}{2}}dx-\int e^xdx+\int\frac{dx}{x}=-\frac{2}{3}x^{-\frac{3}{2}}-e^x+\ln|x|+C=C-\frac{2}{3x\sqrt{x}}-e^x+\ln|x|.$$

Інтегрування методом заміни змінної (метод підстановки)

Якщо безпосередньо (за допомогою таблиці) не вдається знайти первісну, то застосовують метод заміни змінної. Суть цього методу полягає у застосуванні такої нової змінної інтегрування, що заданий інтеграл зводиться до нового інтеграла, який є табличним або таким, що зводиться до нього.

Нехай треба обчислити інтеграл $\int f(x)dx$. Заміна змінної здійснюється за допомогою підстановок двох видів:

1) покладають $x=\varphi(t)$, де $\varphi(t)-$ неперервно диференційована функція нової змінної t, яка має обернену функцію. Тоді $dx=\varphi'(t)dt$ і, застосувавши властивість інваріантності форми першого диференціала, отримаємо формулу заміни змінної

$$\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\,;$$

2) покладають $u=\psi(x)$, де u – нова змінна, тоді формула заміни змінної має вигляд

$$\int f[\psi(x)]\psi'(x)dx=\int f(u)du.$$

Приклад. Знайти $\int\sin^3x\cos xdx$.

Розв`язання. $\int\sin^3x\cos xdx=\begin{vmatrix}u=\sin x\\ du=\cos xdx\end{vmatrix}=\int u^3du=\frac{u^4}{4}+C=\frac{\sin^4x}{4}+C\,.$

Приклад. Знайти $\int \frac{x^2dx}{x^6+9}$.

Розв`язання. Покладемо, що $x^3 = t$. Тоді $3x^2\,dx = dt$ і

$$\int \frac{x^2dx}{x^6+9} = \left| \begin{array}{c} x^3 = t \\ 3x^2dx = dt \end{array} \right| = \frac{1}{3}\int \frac{3x^2dx}{x^6+9} = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t^2+9} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}arctg\frac{t}{3} + C =$$

$$= \frac{1}{9}arctg\frac{x^3}{3} + C\ .$$

Метод інтегрування частинами

Нехай $u(x)$ і $v(x)$ – дві функції, які мають неперервні похідні. Тоді $d(uv) = u\cdot dv + v\cdot du$. Інтегруючи цю рівність, отримаємо

$$\int d(uv) = \int vdu + \int udv, \text{ але } \int d(uv) = uv + C,$$

звідки

$$\int udv = uv - \int vdu\ . \qquad (6.1)$$

Ця формула називається **формулою інтегрування частинами**, а метод інтегрування, що ґрунтується на застосуванні цієї формули, – **методом інтегрування частинами.**

Метод інтегрування частинами є ефективним, якщо інтеграл у правій частині рівності виявиться простішим, ніж вихідний.

Укажемо деякі типові інтеграли, які зручно обчислювати зо допомогою методу інтегрування частинами:

1) інтеграли вигляду $\int P(x)e^{ax}dx$, $\int P(x)\cos bxdx$, $\int P(x)\sin bxdx$, де $P(x)$ – багаточлен, a і b – будь – які дійсні числа. Зручно вважати $u = P(x)$, а $dv = e^{ax}dx$.
2) інтеграли вигляду $\int P(x)\log_a xdx$, $\int P(x)arctgbxdx$, $\int P(x)arcctgbxdx$, $\int P(x)\arccos bxdx$. Зручно вважати $dv = P(x)dx$, а за u позначають інші множники.
3) інтеграли вигляду $\int e^{ax}\cos bxdx$, $\int e^{ax}\sin bxdx$. Формулу інтегрування частинами застосовують двічі й обидва рази за u позначають або показникову, або тригонометричну функцію.

Приклад. Знайти $\int x^2 \ln xdx$.

Розв`язання. Вважаючи, що $u(x)=\ln x$, $dv(x)=x^2dx$ і застосувавши формулу (6.1), одержимо

$$\int x^2\ln xdx = \left| \begin{array}{ll} u = \ln x; & du = \frac{dx}{x} \\ dv = x^2dx; & v = \int x^2dx = \frac{x^3}{3} \end{array} \right| = \frac{x^3}{3}\ln x - \int \frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{x}dx =$$

$$=\frac{x^3}{3}\ln x-\frac{1}{3}\int x^2dx=\frac{x^3}{3}\ln x-\frac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{3}+C=\frac{1}{9}x^3(3\ln x-1)+C\,.$$

Розв`язання цього прикладу можна записати ще й так:

$$\int x^2\ln xdx=\frac{1}{3}\int\ln xdx^3=\frac{1}{3}\left(x^3\ln x-\int x^3d\ln x\right)=\frac{1}{3}\left(x^3\ln x-\int x^3\cdot\frac{1}{x}dx\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\left(x^3\ln x-\int x^2dx\right)=\frac{1}{3}\left(x^3\ln x-\frac{1}{3}x^3\right)+C=\frac{1}{9}x^3\left(3\ln x-1\right)+C\,.$$

Приклад. Знайти $\int x^2\sin 3xdx.$

Розв`язання. Вважатимемо, що $u=x^2$, $dv=\sin 3xdx$. Тоді

$$du=2xdx,\quad v=\int\sin 3xdx=\frac{1}{3}\int\sin 3xd(3x)=-\frac{1}{3}\cos 3x.$$

За формулою (6.1) визначаємо

$$\int x^2\sin 3xdx=-\frac{1}{3}x^2\cos 3x-\int\left(-\frac{1}{3}\cos 3x\right)\cdot 2xdx=$$

$$=-\frac{1}{3}x^2\cos 3x+\frac{2}{3}\int x\cos 3xdx.$$

До останнього інтеграла знову застосуємо формулу інтегрування частинами. Для цього вважатимемо, що $u=x$, $dv=\cos 3xdx$, тоді

$$du=dx, v=\int\cos 3xdx=\frac{1}{3}\int\cos 3xd(3x)=\frac{1}{3}\sin 3x$$

і $\int x\cos 3xdx=\frac{1}{3}x\sin 3x-\int\frac{1}{3}\sin 3xdx=\frac{1}{3}x\sin 3x-\frac{1}{3}\int\sin 3xdx=\frac{1}{3}x\sin 3x+\frac{1}{9}\cos 3x.$

Таким чином, остаточно будемо мати

$$\int x^2\sin 3xdx=-\frac{1}{3}x^2\cos 3x+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}x\sin 3x+\frac{1}{9}\cos 3x\right)+C.$$

$$=\frac{1}{27}\left(-9x^2\cos 3x+6x\sin 3x+2\cos 3x\right)+C\,.$$

За межами нашого дослідження залишилася теорія додаткових перетворень для інтегрування окремих видів функцій (раціональних, ірраціональних, тригонометричних). Цю інформацію можна отримати з різних джерел (див. [5],т.2, с.328).

На практиці при обчисленні невизначених інтегралів використовують різні довідники, які містять таблиці інтегралів, що часто зустрічаються.

Треба зазначити, що існують випадки, коли невизначений інтеграл не може виражатися через елементарні функції, тоді говорять, що інтеграл «не береться». До цих інтегралів відносять такі: $\int\frac{\sin x}{x}dx$ (інтегральний синус), $\int\frac{\cos x}{x}dx$ (інтегральний косинус), $\int e^{-x^2}dx$ (інтеграл Пуассона) та інші.

6.2 Визначений інтеграл

Поняття визначеного інтеграла відіграє важливу роль у математичному аналізі та у різноманітних його застосуваннях.

6.2.1 Поняття інтегральної суми і визначеного інтеграла

Розглянемо задачу, яка призводить до поняття визначеного інтеграла.

Задача обчислення площі криволінійної трапеції

Нехай на відрізку $[a;b]$ $(a < b)$ задана неперервна функція $f(x)$.

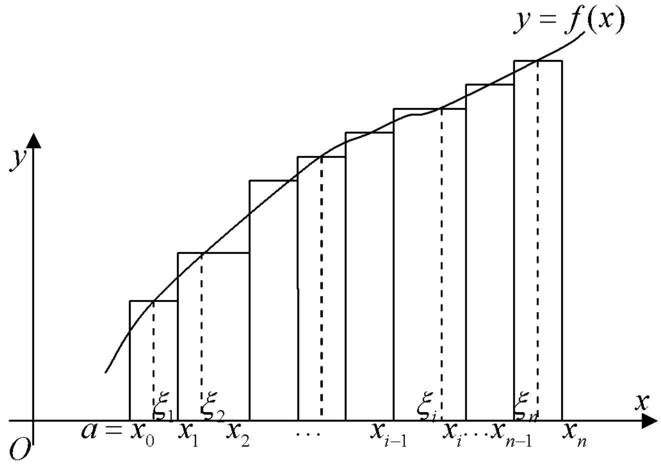


Рис.6.2

Криволінійною трапецією називають плоску фігуру, яка обмежена кривою $y = f(x)$, прямими $x = a$, $x = b$ і відрізком осі Ox. Розглянемо випадок, коли $f(x) \ge 0$ (рис.6.2).

Розіб`ємо відрізок $[a;b]$ на n довільних частин точками $a = x_0, x_1, x_2, \dots x_{n-1}, x_n = b$ $(a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b)$.

Кожний такий відрізок будемо називати **частковим**.

Через Δx_k позначимо довжину часткового відрізка $[x_{k-1}; x_k]$ ($к$=1,2,…,n):

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}.$$

На кожному частковому відрізку оберемо довільну точку, абсцису якої позначимо через ξ_k ($к$=1,2,…,n), обчислимо $f(\xi_k)$ – значення заданої функції $f(x)$ у цій точці. Визначимо добуток числа $f(\xi_k)$ на довжину Δx_k відрізка, на якому взято точку ξ_k. Цей добуток $f(\xi_k)\Delta x_k$ дорівнює площі прямокутника з основою Δx_k і висотою $f(\xi_k)$. Сума всіх таких добутків

$$f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \dots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

дорівнює площі ступінчастої фігури, яка складається з окремих прямокутників і приблизно дорівнює площі криволінійної трапеції.

Така сума називається **інтегральною сумою для функції $f(x)$** на відрізку $[a;b]$.

За точне значення площі криволінійної трапеції можна вважати границю S, до якої прямує площа ступінчастої фігури, якщо $n \to \infty$ (кількість часткових відрізків нескінченно зростає) і $\max\limits_{1 \le i \le n} \Delta x_i \to 0$:

$$S = \lim_{\substack{\max \Delta x_k \to 0 \\ (n \to \infty)}} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k .$$

Означення. Границя інтегральної суми , тобто

$$\lim_{\substack{\max \Delta x_k \to 0 \\ (n\to\infty)}} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k,$$

якщо вона існує і не залежить ні від способу розбиття відрізка $[a;b]$ на часткові, ні від вибору на них точок ξ_k, називається **визначеним інтегралом функції *f*(*x*) на відрізку** $[a;b]$ і позначається символом

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Таким чином,

$$\int f(x)dx \stackrel{def}{=} \lim_{\substack{\max \Delta x_k \to 0 \\ (n\to\infty)}} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k \ . \qquad (6.2)$$

Таким чином, визначений інтеграл від невід’ємної функції чисельно дорівнює площі криволінійної трапеції (**геометричній зміст визначеного інтеграла**) (рис.6.2).

Числа a і b називаються відповідно нижньою і верхньою межами інтегрування, $f(x)$ – підінтегральною функцією, $f(x)dx$ – підінтегральним виразом, x – змінною інтегрування, відрізок $[a;b]$ – відрізком інтегрування.

Означення. Функція $f(x)$, для якої на відрізку $[a;b]$ існує визначений інтеграл $\int_a^b f(x)dx.$, називається **інтегрованою на відрізку** $\int_a^b f(x)dx.$.

Зауваження. Величина визначеного інтеграла залежить лише від вигляду підінтегральної функції і від меж інтегрування a і b, але не від змінної інтегрування, яку можна позначити будь – якою буквою, тобто

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(u)du = \ldots = \int_a^b f(z)dz.$$

Сформулюємо без доведення **теорему існування визначеного інтеграла**.

Теорема (Коші). Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$, то існує границя її інтегральної суми (визначений інтеграл). Ця границя не залежить ні від розбиття відрізка $[a;b]$, ні від вибору точок ξ_k на часткових відрізках.

Обчислення визначеного інтеграла за означенням (як границі інтегральної суми) пов’язане з великими труднощами. Полегшити цю задачу можна за допомогою формули Ньютона – Лейбніця (яку буде подано далі), що встановлює зв`язок між визначеним і невизначеним інтегралами.

Сформулюємо **основні властивості визначеного інтеграла,** які безпосередньо випливають із його означення і доведемо деякі з них. Вважатимемо, що функція $f(x)$ є інтегрованою функцією на відрізку $[a;b]$.

1) Сталий множник можна виносити за знак визначеного інтеграла:

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx .$$

Доведення. $\int cf(x)dx = \lim\limits_{\substack{\max \Delta x_k \to 0 \\ (n\to\infty)}} \sum_{k=1}^{n} cf(\xi_k)\Delta x_k = c \lim\limits_{\substack{\max \Delta x_k \to 0 \\ (n\to\infty)}} f(\xi_k)\Delta x_k = c\int_a^b f(x)dx .$

2) Визначений інтеграл від суми (різниці) декількох інтегрованих функцій дорівнює сумі (різниці) інтегралів від цих функцій:

$$\int_a^b \left(f_1(x) \pm f_2(x)\right)dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx.$$

Доведення цієї властивості спирається на відповідну властивість границі суми (різниці) функцій.

3) Якщо $f(x) \equiv 1$ для $x \in [a;b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b dx = b - a .$$

4) $\int_a^a f(x)dx = 0$;

5) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$

6) Якщо $f(x) \equiv 0$ для $x \in [a;b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b 0dx = 0 .$$

7) Якщо $f(x) \geq 0$ для $x \in [a;b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

8) Якщо $f(x)$ і $\varphi(x)$ – інтегровані функції на відрізку $[a;b]$ і $f(x) \leq \varphi(x)$ для $x \in [a;b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b \varphi(x)dx .$$

9) Якщо функція $f(x)$ інтегрована на відрізку $[a;b]$ і $a<c<b$, то ця функція інтегрована і на відрізках $[a;c]$ і $[c;b]$, причому

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx .$$

Доведення цієї властивості спирається на властивість інтегральної суми, яку можна розділити на окремі частини.

Зауважимо, що має місце й обернене твердження. Цю властивість називають **адитивною властивістю визначеного інтеграла**.

10) Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$, де $a<b$, і $m \le f(x) \le M$ для $x \in [a;b]$, то

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a).$$

Тут m – найменше, а M – найбільше значення функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$. Ці нерівності дають змогу оцінити значення визначеного інтеграла.

11) Теорема (про середнє значення визначеного інтеграла). Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$, то існує точка $c \in [a;b]$ така, що

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

При цьому значення функції $f(x)$ у точці c називають **середнім значенням цієї функції на відрізку $[a;b]$.**

12) Для **інтеграла із змінною верхньою границею** $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$ (який є функцією від верхньої границі x) виконується рівність: $\Phi'(x) = f(x)$.

6.2.2 Методи обчислення визначеного інтеграла

Формула Ньютона – Лейбніця

Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$ і $F(x)$ – будь- яка первісна для $f(x)$ на цьому відрізку, то має місце формула

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \qquad (6.3)$$

Ця формула має назву **формули Ньютона – Лейбніца** і є основною формулою інтегрального числення.

Доведення. Нехай $F(x)$ – деяка первісна для функції $f(x)$. За властивістю (12) функція $\int_a^x f(t)dt$ також є первісною від $f(x)$. Оскільки дві первісні від однієї функції відрізняються на сталу величину C^*, то маємо

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) + C^*.$$

Визначимо сталу C^*, поклавши $x = a$:

$$\int_a^a f(t)dt = F(a) + C^* \quad \text{або} \quad 0 = F(a) + C^*, \text{ звідки } C^* = -F(a).$$

Отже, $\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$.

Покладемо $x = b$ і отримаємо формулу Ньютона – Лейбніця:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Для зручності користування формулу (6.3) записують у вигляді

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a). \tag{6.4}$$

Приклад. Обчислити $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(11+5x)^3}$.

Розв`язання. За формулою Ньютона – Лейбніця

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Отже, скориставшись цією формулою і властивістю 5 визначеного інтеграла, одержимо

$$\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(11+5x)^3} = \frac{1}{5}\int_{-2}^{-1}(11+5x)^{-3}\cdot 5dx = \frac{1}{5}\cdot\frac{(11+5x)^{-2}}{-2}\Big|_{-2}^{-1} =$$

$$= -\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{(11+5x)^2}\Big|_{-2}^{-1} = -\frac{1}{10}\left(\frac{1}{(11-5)^2} - \frac{1}{(11-10)^2}\right) = -\frac{1}{10}\left(\frac{1}{36} - 1\right) = \frac{7}{72}.$$

Приклад. Обчислити $\int_0^{\frac{T}{2}} \sin\left(\frac{2\pi t}{T} - \varphi_0\right)dt.$

Розв`язання. Враховуючи формулу Ньютона – Лейбніця

$$\int_0^{\frac{T}{2}} \sin\left(\frac{2\pi t}{T} - \varphi_0\right)dt = -\frac{T}{2\pi}\cos\left(\frac{2\pi t}{T} - \varphi_0\right)\Bigg|_0^{\frac{T}{2}} = -\frac{T}{2\pi}\left(\cos(\pi - \varphi_0) - \cos(-\varphi_0)\right) =$$

$$= -\frac{T}{2\pi}(-\cos\varphi_0 - \cos\varphi_0) = \frac{T}{\pi}\cos\varphi_0.$$

Приклад. Обчислити $\int_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$.

Розв`язання.

$$\int_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}} = \int_1^{e^3} \frac{d(1+\ln x)}{\sqrt{1+\ln x}} = 2\sqrt{1+\ln x}\Big|_1^{e^3} = 2\left(\sqrt{1+\ln e^3} - \sqrt{1+\ln 1}\right) == 2(\sqrt{4} - \sqrt{1}) = 2(2-1) = 2.$$

Заміна змінної у визначеному інтегралі

Нехай для інтеграла $\int_a^b f(x)dx$ від неперервної функції $f(x)$ зроблена підстановка $x=\varphi(t)$.

Теорема. Якщо:

1) функція $x=\varphi(t)$ і її похідна $x'=\varphi'(t)$ неперервні при $t\in[\alpha;\beta]$;

2) множиною значень функції $x=\varphi(t)$ при $t\in[\alpha;\beta]$ є відрізок $[a;b]$;

3) $\varphi(\alpha)=a$ і $\varphi(\beta)=b$,

тоді

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f\left(\varphi(t)\right)\varphi'(t)dt. \tag{6.5}$$

Цю формулу називають **формулою заміни змінної для визначеного інтеграла.**

Доведення. Нехай $F(x)$ – первісна для $f(x)$ на відрізку $[a;b]$. Тоді за формулою Ньютона – Лейбніца $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$.

Оскільки $(F(\varphi(t))'=f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)$, то $(F(\varphi(t))$ є первісною для функції $f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)$, де $t\in[\alpha;\beta]$. Тому за формулою Ньютона – Лейбніца маємо

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt=F(\varphi(t))\Big|_\alpha^\beta=F(\varphi(\beta))-F(\varphi(\alpha))=$$

$$=F(b)-F(a)=\int_a^b f(x).$$

Відзначимо також, що виконавши заміну змінної у визначеному інтегралі для його обчислення, немає необхідності переходити до початкової змінної, як це робиться при знаходженні невизначеного інтеграла, а досить лише перерахувати межі інтегрування для нової змінної.

Приклад. Обчислити $\int_1^4\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}dx.$

Розв`язання. Функція $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}.$ неперервна на відрізку $[1;4]$. Вважатимемо, що $x=t^2$. Тоді нові межі інтегрування визначаємо з рівнянь $1=t^2$, звідки $t_н=1$ і $4=t^2$, звідки $t_в=2$. Функція $x=t^2$ неперервна разом зі своєю похідною $x'=2t$ на відрізку $[1;2]$, причому її значення не виходять із відрізка $[1;4]$. Тому

$$\int_1^4 \frac{\sqrt{x}dx}{1+\sqrt{x}} = 2\int_1^2 \frac{t^2dt}{1+t} = 2\int_1^2 \frac{t^2-1+1}{1+t}dt = 2\int_1^2\left(t-1+\frac{1}{t+1}\right)dt =$$
$$= 2\left(\frac{t^2}{2}-t+\ln(t+1)\right)\Bigg|_1^2 = 2\left(2-2+\ln 3-\frac{1}{2}+1-\ln 2\right) = 1+2\ln\frac{3}{2}.$$

Інтегрування частинами визначеного інтеграла

Якщо функції $u(x)$ і $v(x)$ неперервні разом із своїми похідними першого порядку на відрізку $[a;b]$, тоді $(uv)' = u'v+uv'$. Інтегруючи обидві частини рівності від a до b, отримаємо

$$\int_a^b (uv)'dx = \int_a^b u'vdx + \int_a^b uv'dx.$$

Оскільки $\int (uv)'dx = uv + C$, то $\int_a^b (uv)'dx = uv\Big|_a^b$, звідки

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu. \tag{6.6}$$

Формулу (6.6) називають формулою **інтегрування частинами для визначеного інтеграла.**

Приклад. Обчислити $\int_0^1 xe^{-x}dx.$

Розв`язання. Функції $u = x$ і $v = -e^{-x}$ неперервні разом із своїми похідними $u' = 1$ і $v' = e^{-x}$ на відрізку $[0;1]$, отже за формулою інтегрування частинами

$$\int_0^1 xe^{-x}dx = \left|\begin{matrix} u = x; & du = dx \\ dv = e^{-x}dx; & v = \int e^{-x}dx = -e^{-x}\end{matrix}\right| = -xe^{-x}\Big|_0^1 - \int_0^1 -e^{-x}dx =$$

$$= -e^{-1} - e^{-x}\Big|_0^1 = -e^{-1} - e^{-1} + e^0 = -2e^{-1} + 1 = 1 - \frac{2}{e}.$$

6.3 Геометричні застосування визначеного інтегралу

6.3.1 Обчислення площі плоскої фігури

Випадок прямокутних координат

Як було встановлено (див. геометричний зміст визначеного інтеграла) площа криволінійної трапеції, яка обмежена графіком неперервної на відрізку $[a;b]$ функції $y = f(x)$, прямими $x = a$, $x = b$ і відрізком осі Ox (рис.6.2), обчислюється за формулою

$$S = \int_a^b f(x)dx. \tag{6.7}$$

Якщо криволінійна трапеція розташована нижче за вісь Ox ($f(x)<0$), то її площа визначається за формулою

$$S=-\int_a^b f(x)dx .$$

У загальному випадку $S=\int_a^b |f(x)|dx$.

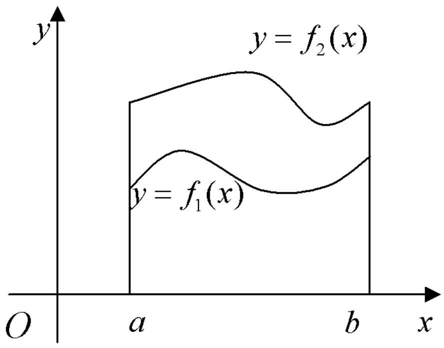


Рис.6.3

Якщо плоска фігура обмежена кривими $y=f_1(x)$ і $y=f_2(x)$, причому на відрізку $[a;b]$ $f_2(x)\geq f_1(x)$ (рис.6.3), то її площу визначають за формулою

$$S=\int_a^b f_2(x)dx-\int_a^b f_1(x)dx=\int_a^b (f_2(x)-f_1(x))dx$$

тобто

$$S=\int_a^b (f_2(x)-f_1(x))dx . \qquad (6.8)$$

Випадок параметричного задання функції

Нехай криволінійна трапеція обмежена кривою, яка задана параметричними рівняннями

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \end{cases} \quad t\in[\alpha;\beta],$$

(де $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$) і ці параметричні рівняння визначають деяку функцію $y=f(x)$ на відрізку $[a;b]$. Отже, площа криволінійної трапеції може бути обчислена за формулою $S=\left|\int_a^b f(x)dx\right|$.

Зробимо заміну змінної у цьому інтегралі, покладаючи $x=\varphi(t)$, $dx=\varphi'(t)dt$. Оскільки $y=f(x)=f(\varphi(t))=\psi(t)$, то формула площі криволінійної трапеції, коли крива задана у параметричній формі має вигляд

$$S=\int_\alpha^\beta \psi(t)\varphi'(t)dt . \qquad (6.9)$$

Випадок полярної системи координат

Визначимо площу криволінійного сектора, тобто плоскої фігури, яка обмежена неперервною лінією $r=r(\varphi)$ і двома радіус – векторами $\varphi=\alpha$ і $\varphi=\beta$ (рис.6.4).

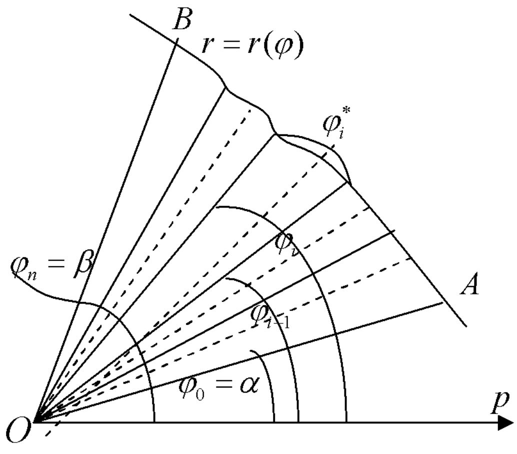


Рис.6.4

Розіб'ємо криволінійній сектор OAB радіус – векторами $\varphi=\alpha=\varphi_0$, $\varphi=\varphi_1,\dots,\varphi=\varphi_n$ на n частин довільним чином. Площу сектора ΔS_i ($i=1,2,\dots,n$), що відповідає проміжку кутів $[\varphi_{i-1};\varphi_i]$, визначимо як площу сектора круга з радіусом $r(\varphi_i^*)$, де $\varphi_i^*\in[\varphi_{i-1};\varphi_i]$, тобто

$$\Delta S_i=\frac{1}{2}r^2(\varphi_i^*)\Delta\varphi_i \quad (\Delta\varphi_i=\varphi_i-\varphi_{i-1}).$$

Складемо інтегральну суму $\sum_{i=1}^{n}\Delta S_i=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}r^2(\varphi_i^*)\Delta\varphi_i$. Її границя при $\max\Delta\varphi_i\to 0$ ($n\to\infty$) є визначеним інтегралом і дає площу сектора OAB.

Отже, формула площі криволінійного сектора має вигляд

$$S=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}r^2(\varphi)d\varphi. \qquad (6.10)$$

Приклад. Переріз даху цеху має форму арки циклоїди (радіус похідного кола дорівнює a). Визначити площу поперечного перерізу (рис.6.5) , якщо висота колон цеху дорівнює h.

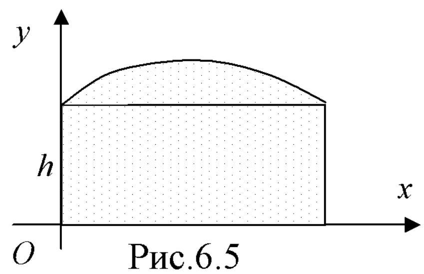


Рис.6.5

Розв'язання. Шукана площа є сумою площі арки циклоїди і прямокутника, сторони якого дорівнюють h і $2\pi a$, тобто

$$S=S_{ар.цікл}+2\pi ah.$$

Циклоїда визначається рівняннями $x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t)$. Якщо вісь Ox направити вздовж лінії, яка з'єднує вершини колон, тоді за формулою $S=\int_{\alpha}^{\beta}\psi(t)\varphi'(t)dt$ маємо:

$$S_{ар.цікл}=\int_0^{2\pi}a^2(1-\cos t)(1-\cos t)dt=a^2\int_0^{2\pi}(1-2\cos t+\cos^2 t)dt=$$

$$=a^2(\frac{3}{2}t-2\sin t+\frac{1}{4}\sin 2t\Big|_0^{2\pi}=3\pi a^2.$$

Остаточно загальна площа $S=3\pi a+2\pi ah=\pi a(3a+2h)$.

Приклад. Обчислити площу фігури, яка обмежена лемніскатою Бернуллі $r = a\sqrt{\cos 2\varphi}$ (рис.3.29).

Розв'язання. Якщо полярний кут змінюється від 0 до $\pi/4$, то радіус – вектор описує область, площа якої дорівнює чверті шуканої площі. Отже,

$$S = 4\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} r^2 d\varphi = 2\int_0^{\pi/4} a^2\cos 2\varphi d\varphi = 2\cdot\frac{1}{2}a^2\sin 2\varphi\Big|_0^{\pi/4} = a^2 \text{(кв.од.)}.$$

6.3.2 Обчислення довжини дуги плоскої кривої

Випадок прямокутних координат

Нехай в прямокутних координатах дана плоска крива *AB*, рівняння якої $y = f(x)$, де $a \le x \le b$ (рис.6.6)

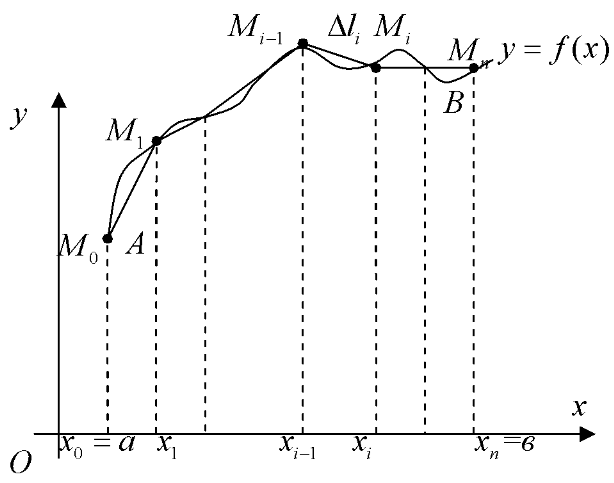


Рис.6.6

Під довжиною дуги кривої *AB* розуміють границю, до якої прямує довжина ламаної, що вписана в цю дугу, коли довжина її найбільшої ланки прямує до нуля.

Нехай функція $y = f(x)$ та її похідна неперервні на відрізку $[a;b]$. Тоді довжина дуги кривої $y = f(x)$ дорівнює

$$l = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}dx. \qquad (6.11)$$

Доведення. Розіб'ємо відрізок $[a;b]$ точками $a = x_0, x_1, x_2, \ldots x_{n-1}, x_n = b$ $(a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b)$ на n довільних частин. Нехай цим точкам відповідають точки $M_0, M_1, \ldots, M_n$ на кривій *AB*, причому точки M_0 і M_n співпадають з точками *A* і *B* відповідно. Проведемо хорди M_0M_1, $M_1M_2, \ldots, M_{n-1}M_n$, довжини яких позначимо через $\Delta l_1, \Delta l_2, \ldots, \Delta l_n$. Довжину Δl_i $(i = 1, 2, \ldots n)$ хорди $M_{i-1}M_i$ визначимо за теоремою Піфагора :

$$\Delta l_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}, \text{ де } \Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \ \Delta y_i = f(x_i) - f(x_{i-1}).$$

За теоремою Лагранжа про скінченні прирости функції $\Delta y_i = f'(\xi_i)\Delta x_i$, де $\xi_i \in (x_{i-1}; x_i)$. Тому

$$\Delta l_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (f'(\xi_i)\Delta x_i)^2} = \sqrt{1+(f'(\xi_i))^2}\cdot\Delta x_i,$$

А довжина вписаної ламаної $M_0M_1 \ldots M_n$ дорівнює

$$l_n = \sum_{i=1}^{n}\Delta l_i = \sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+\left(f'(\xi_i)\right)^2}\cdot\Delta x_i.$$

За умовою $f'(x)$ неперервна, тому функція $\sqrt{1+(f'(\xi_i))^2}$ теж неперервна. Отже, існує границя інтегральної суми $\sum_{i=1}^{n}\Delta l_i$, коли $\max\Delta x_i \to 0$, тобто існує визначений інтеграл:

$$l = \lim_{\substack{\max\Delta x_i \to o \\ (n\to\infty)}} \sum_{i=1}^{n}\Delta l_i = \lim_{\substack{\max\infty x_i \to 0 \\ (n\to\infty)}} \sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+\left(f'(\xi_i)\right)^2}\cdot\Delta x_i = \int_a^b \sqrt{1+((f'(x))^2}dx .$$

Таким чином, маємо формулу довжини дуги кривої

$$l = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}dx \quad \text{або у скороченому вигляді} \quad l = \int_a^b \sqrt{1+(y_x{}')^2}dx .$$

Випадок параметричного задання кривої

Якщо крива задана параметричними рівняннями

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad t \in [\alpha;\beta],$$

де $x(t)$ і $y(t)$ – неперервні функції з неперервними похідними і $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$. Тоді довжина l кривої AB визначається за формулою

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt . \qquad (6.12)$$

Цю формулу можна здобути із формули довжини дуги кривої, яка задана в прямокутних координатах, за допомогою підстановки

$$x = x(t),\ dx = x'(t)dt,\ f'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)} .$$

Випадок полярної системи координат

Нехай крива AB задана рівнянням $r = r(\varphi)$ у полярних координатах, де функції $r(\varphi)$ і $r'(\varphi)$ неперервні при $\alpha \le \varphi \le \beta$.

Якщо в формулах переходу від полярної до прямокутної системи координат $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$ параметром вважати полярний кут φ, то криву можна визначити параметричними рівняннями $\begin{cases} x = r(\varphi)\cos\varphi, \\ y = r(\varphi)\sin\varphi. \end{cases}$

Тоді

$$\begin{cases} x'_\varphi == r'(\varphi)\cos\varphi - r(\varphi)\sin\varphi, \\ y'_\varphi = r'(\varphi)\sin\varphi + r(\varphi)\cos\varphi. \end{cases}$$

Тому

$$\sqrt{(x'_\varphi)^2 + y'_\varphi)^2} =$$

$$= \sqrt{(r'(\varphi)\cos\varphi - r(\varphi)\sin\varphi)^2 + (r'(\varphi)\sin\varphi + r(\varphi)\cos\varphi)^2} =$$

$$= \sqrt{(r'(\varphi))^2 + (r(\varphi))^2} .$$

Отже, формула довжини дуги кривої має вигляд

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + r'^2}d\varphi . \qquad (6.13)$$

Приклад. Знайти довжину дуги кардіоїди $r = a(\cos\varphi + 1)$, $\varphi \in [0;2\pi]$.

Розв'язання. За формулою довжини дуги кривої у полярній системі координат (6.13) маємо

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 + r'^2}\,d\varphi = \int_0^{2\pi} \sqrt{(a(1+\cos\varphi))^2 + (a(-\sin\varphi))^2}\,d\varphi = a\int_0^{2\pi} \sqrt{2 + 2\cos\varphi}\,d\varphi =$$

$$= a\int_0^{2\pi} \sqrt{2\cdot 2\cos^2\frac{\varphi}{2}}\,d\varphi = 2a\int_0^{2\pi} \cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi = 4a\cdot\sin\frac{\varphi}{2}\Bigg|_0^{2\pi} = 8a.$$

6.3.3 Обчислення об'єму тіла

Обчислення об'єму тіла за площами паралельних перерізів

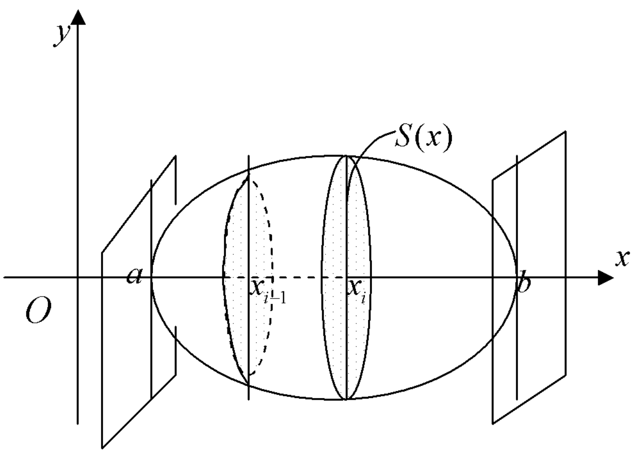


Рис.6.7

Визначимо об'єм V тіла, якщо відома площа перерізу цього тіла площиною, яка перпендикулярна до осі Ox: $S = S(x),\ a \le x \le b$ (рис.6.7).

Припустимо, що функція $S = S(x)$ неперервна на $[a;b]$.

Знов застосуємо схему побудови інтегральних сум, яка базується на означенні визначеного інтеграла. Для цього розіб'ємо тіло площинами $x = x_0 = a_0,\ x = x_1, \ldots, x = x_n = b$ на n частин.

Виберемо точку $\xi_i \in [x_{i-1};x_i]$ $(i = 1,2,\ldots,n)$ і побудуємо циліндричне тіло, твірна якого паралельна осі Ox, а напрямна є контуром перерізу тіла площиною $x = \xi_i$. Об'єм такого циліндру дорівнює $S(\xi_i)\Delta x_i$, де $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Шуканий об'єм V дорівнює границі інтегральної суми функції $S(x)$ на відрізку $[a;b]$:

$$V = \lim_{\substack{\max\Delta x_i \to 0 \\ (n\to\infty)}} \sum_{i=1}^{n} S(\xi_i)\Delta x_i,$$

тобто

$$V = \int_a^b S(x)dx. \qquad (6.14)$$

Об'єм тіла обертання

Нехай навколо осі Ox обертається криволінійна трапеція, яка обмежена неперервною лінією $y = f(x)$, $f(x) \ge 0$, прямими $x = a$, $x = b$ і відрізком осі Ox. При цьому утворюється тіло, яке називають **тілом обертання** (рис.6.8). Переріз цього тіла площиною, перпендикулярною осі Ox, яка проведена через довільну точку x осі Ox, являє собою коло радіуса $y = f(x)$, тобто його площа $S(x) = \pi y^2$.

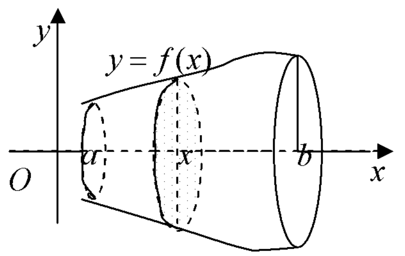


Рис.6.8

Застосовуючи формулу об'єму тіла за площиною паралельних перерізів, отримаємо

$$V_x = \pi \int_a^b y^2 dx. \qquad (6.15)$$

Якщо криволінійна трапеція обмежена графіком неперервної функції $x = \varphi(y)$, $\varphi(y) \geq 0$ і прямими $x = 0$, $y = c$, $y = d$ $(c < d)$, то об'єм тіла обертання криволінійної трапеції навколо осі Oy, дорівнює

$$V_y = \pi \int_c^d x^2 dy. \qquad (6.16)$$

Приклад. Знайти об'єм тіла, яке утворюється обертанням фігури , обмеженої лініями $x = \sqrt{2y}$, $y = 2\sqrt{2}$ навколо осі Oy (рис.6.9).

Розв'язання.

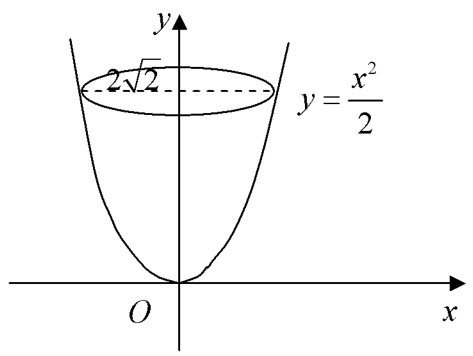


Рис.6.9

Скористаємось формулою

$$V_y = \pi \int_c^d x^2 dy,$$

тобто

$$V_y = \pi \int_0^{2\sqrt{2}} 2y dy = \pi \, y^2 \Big|_0^{2\sqrt{2}} = 8\pi.$$

Питання для самоперевірки

1 Що називається невизначеним інтегралом?
2 Сформулюйте правила інтегрування.
3 Що називається визначеним інтегралом?
4 Запишіть формулу Ньютона – Лейбніця.
5 Сформулюйте методи обчислення визначених інтегралів.
6 Як обчислюється площа фігури, обмеженої кривою, яка задана у декартових координатах, параметрично або у полярних координатах?
7 Як обчислюється довжина кривої, яка задана у декартових координатах, параметрично або у полярних координатах?
8 Як обчислюється об'єм тіла обертання?

Розділ 7 ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

ЛЕКЦІЇ 17-18

7.1 Основні поняття

Диференціальні рівняння складають унаслідок математичного аналізу задачі. Вони відображають основну інформацію про найзагальніші закономірності фізичних процесів або явищ, які є головним змістом дослідження. Наприклад, у задачах механіки твердого деформованого тіла диференціальні рівняння теорії пружності відображають лінійну залежність між напруженнями й деформаціями, у задачах теплопровідності диференціальні рівняння теплопровідності ґрунтуються на залежності теплового потоку від градієнта температури тощо.

Математична модель таких процесів – це рівняння, які містять не тільки невідомі функції та аргументи, а й похідні від цих функцій.

Приклад. З курсу опору матеріалів відоме диференціальне рівняння пружної лінії консолі зі сталим поперечним перерізом і зосередженою на вільному кінці силою P, яке має вигляд

$$\omega'' = -\frac{Px}{EI},$$

де ω – угин консолі в перерізі з абсцисою x, EI – жорсткість на угин перерізу балки. Тут $\omega = \omega(x)$ – невідома функція, яка перебуває під знаком другої похідної.

Означення. Диференціальним рівнянням називають рівняння, яке зв'язує незалежну змінну x, невідому функцію $y = f(x)$ та її похідні $y', y'', ..., y^{(n)}$ (або диференціали).

Символічно диференціальне рівняння можна записати так:

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0. \qquad (7.1)$$

Якщо невідома функція залежить від одного аргументу, то диференціальне рівняння називають **звичайним.**

Означення. Порядком диференціального рівняння називають порядок найвищої похідної (або диференціала), яку містить рівняння.

В наведених вище прикладах були подані звичайні диференціальні рівняння другого порядку.

Під **розв'язком або інтегралом** диференціального рівняння розуміють будь – яку функцію $y = f(x)$, яка будучи підставлена до рівняння обертає його на тотожність.

Процес визначення таких функцій називають **інтегруванням диференціального рівняння.**

Розрізняють загальний і частинний розв'язки диференціального рівняння.

7.2 Диференціальні рівняння першого порядку

У загальному вигляді диференціальні рівняння першого порядку записують так:

$$F(x,y,y')=0 \text{ або } y'=f(x,y). \qquad (7.2)$$

Початковою умовою називають умову $y=y_0$ при $x=x_0$, яку записують так:

$$y(x_0)=y_0 \quad \text{або} \quad y\Big|_{x=x_0}=y_0.$$

Означення. Загальним розв'язком диференціального рівняння першого порядку називають функцію $y=\varphi(x,C)$ (яка залежить від x і довільної сталої C) і задовольняє умовам:

1) функція $y=\varphi(x,C)$ є розв'язком диференціального рівняння при будь-якому відомому значенню C;

2) за будь-якої початкової умови $y(x_0)=y_0$ можна відшукати таке значення $C=C_0$, що функція $y=\varphi(x,C_0)$ задовольняє цю умову.

Іноді загальний розв'язок подають у неявній формі $\Phi(x,y,C)=0$.

Означення. Частинним розв'язком диференціального рівняння першого порядку називають будь-яку функцію $y=\varphi(x,C_0)$, яка отримується із загального розв'язку $y=\varphi(x,C)$ при конкретному значенні сталої $C=C_0$.

Частинний розв'язок утворюється із загального розв'язку $y=\varphi(x,C)$, якщо в останньому довільній сталій величині C надається значення C_0, яке відповідає початковій умові.

Геометричний зміст загального і частинного розв'язків

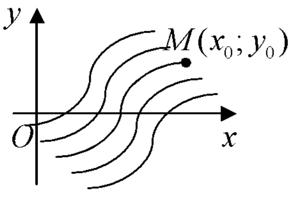


Рис.7.1

Геометрично загальний розв'язок зображується сімейством кривих (інтегральних кривих), які в кожній точці $M(x;\ y)$ мають дотичну з кутовим коефіцієнтом, що дорівнює значенню функції $f(x,y)$ у цій точці (рис.7.1).

Частинний розв'язок, який відповідає початковій умові $y(x_0)=y_0$, зображується однією з цих кривих, яка проходить через точку $M(x_0;\ y_0)$.

Задача визначення частинного розв'язку диференціального рівняння

$$y'=f(x,y),$$

який задовольняє початковій умові $y\Big|_{x=x_0}=y_0$, називається **задачею Коші**.

Теорема існування та єдиності розв'язку диференціального рівняння

Теорема. Якщо функція $f(x,y)$ та її частинна похідна $f_y(x,y)$ неперервні у деякій області на площині, яка містить точку $(x_0;y_0)$, то існує єдиний розв'язок рівняння $y' = f(x, y)$, який задовольняє початковій умові $y(x_0) = y_0$.

Цю теорему приймемо без доведення.

Розглянемо деякі типи диференціальних рівнянь першого порядку.

7.2.1 Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними

Диференціальне рівняння вигляду

$$y' = f(x) \cdot g(y) \qquad (7.3)$$

називають **рівнянням із відокремлюваними змінними (** $f(x) \cdot g(y) \neq 0$).

Загальна схема інтегрування диференціального рівняння з відокремлюваними змінними:

1) похідну y' записують як $y' = \dfrac{dy}{dx}$;
2) розділяють змінні так, щоб одна частина рівняння містила тільки змінну x, а інша – змінну y:

$\dfrac{dy}{g(y)} = f(x)dx$, тобто отримують рівняння **з відокремленими змінними;**

3) інтегрують обидві частини здобутої рівності:

$\int \dfrac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C$ і визначають шуканий загальний розв'язок рівняння.

Приклад. Знайти загальний розв'язок рівняння $xy' = \sqrt{1 - y^2}$.

Розв'язання. Це рівняння з відокремлюваними змінними. Виконуємо перетворення за вказаною вище схемою:

1) $x \dfrac{dy}{dx} = \sqrt{1 - y^2}$;

2) $\dfrac{dy}{\sqrt{1 - y^2}} = \dfrac{dx}{x}$;

3) $\int \dfrac{dy}{\sqrt{1 - y^2}} = \int \dfrac{dx}{x}$, $\arcsin y = \ln x + C$. Ця рівність, яка встановлює зв'язок між змінними x, y і сталою C, і є загальним розв'язком рівняння.

Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними можна подати у вигляді

$$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0 \quad (M_i(x) \neq 0,\ N_i(y) \neq 0,\ i = 1, 2). \qquad (7.4)$$

Поділивши обидві частини рівності на $N_1(y) \cdot M_2(x)$, отримаємо рівняння з відокремленими змінними:

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)} dx = -\frac{N_2(y)}{N_1(y)} dy.$$

Звідки отримаємо загальний розв'язок рівняння: $\int \frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx = -\int \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy$.

7.2.2 Однорідні диференціальні рівняння

Диференціальні рівняння, які можна подати у вигляді $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$, називають **однорідними рівняннями відносно змінних x і y**.

За допомогою заміни $y = u \cdot x$ однорідне рівняння $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними відносно нової змінної $u = u(x)$.

Приклад. Розв'язати рівняння $y' = \frac{y}{x} + 1$.

Розв'язання. Це рівняння вигляду $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$, тобто є однорідним рівнянням відносно x і y. Виконуємо заміну $y = u \cdot x$, тоді $y' = u' \cdot x + u$. Підставляємо ці вирази до рівняння і отримаємо $u'x + u = \frac{ux}{x} + 1$ або $x\frac{du}{dx} = 1$. Останнє рівняння є рівнянням з відокремлюваними змінними відносно нової змінної u. Його розв'язок знайдемо за розглянутою вище схемою:

$du = \frac{dx}{x}$; $\int du = \int \frac{dx}{x}$; $u = \ln|x| + \ln|C|$; $u = \ln|Cx|$, звідки $\frac{y}{x} = \ln|Cx|$ – загальний розв'язок рівняння.

7.2.3 Лінійні диференціальні рівняння

Лінійним диференціальним рівнянням першого порядку називають рівняння , яке подається у вигляді

$$y' + p(x)y = q(x), \tag{7.5}$$

де $p(x)$ і $q(x)$ – відомі неперервні функції від x (або сталі).

Загальний розв'язок лінійного рівняння шукають у вигляді добутку двох функцій від x: $y = u(x)v(x)$. Одну з цих функцій вибирають довільно, а іншу визначають із даного рівняння з урахуванням умови вибору першої функції.

Диференціюємо y: $y' = u'v + uv'$. Підставимо цей вираз до рівняння і отримаємо

$$u'v + uv' + p(x)uv = q(x) \text{ або } u'v + u(v' + p(x)v) = q(x).$$

Виберемо функцію v так, щоб $v' + p(x)v = 0$. Це рівняння є рівнянням з відокремлюваними змінними. Знаходимо його розв'язок за загальною схемою:

$\frac{dv}{dx} = -p(x)v$; $\frac{dv}{v} = -p(x)dx$; $\int \frac{dv}{v} = -\int p(x)dx$, тобто $v = e^{-C_1\int p(x)dx}$ (інтеграл $\int p(x)dx$ існує, оскільки функція $p(x)$ є неперервною від x). Нехай $C_1 = 1$.

Підставимо визначену функцію $v=e^{-\int p(x)dx}$ до рівняння $u'v=q(x)$, яке отримали із попереднього з урахуванням умови $v'+p(x)v=0$, одержимо рівняння

$$u'e^{-\int p(x)dx}=q(x),$$

яке є рівнянням із відокремлюваними змінними. Його розв'язком буде функція

$$u=\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx.$$

Оскільки $y=u\cdot v$, то остаточно маємо $y=e^{-\int p(x)dx}\left(\int q(x)e^{p(x)dx}dx\right)$.

Приклад. Знайти частинний розв'язок рівняння $y'-\dfrac{y}{x}=1+x^3$, який задовольняє початковій умові $y|_{x=1}=2$.

Розв'язання. Дане рівняння є лінійним. Покладемо $y=u\cdot v$, звідки $y'=u'v+uv'$. Тоді рівняння перепишеться у вигляді

$$u'v+uv'-\frac{uv}{x}=1+x^3 \quad \text{або} \quad u'v+u(v'-\frac{v}{x})=1+x^3.$$

Складаємо таку систему рівнянь:

$$1.\ v'-\frac{v}{x}=0;$$

$$2.\ uv'=1+x^3.$$

Спочатку розв'яжемо перше рівняння.

1. $v'-\dfrac{v}{x}=0$ – рівняння з відокремлюваними змінними відносно змінної v, яке розв'яжемо за загальною схемою:

$$\frac{dv}{dx}=\frac{v}{x} \quad \text{або} \quad \frac{dv}{v}=\frac{dx}{x},$$

звідки

$$\int\frac{dv}{v}=\int\frac{dx}{x};\ \ \ln|v|=\ln|x|;\ \ v=x.$$

2. Підставимо вираз $v=x$ до рівняння $uv'=1+x^3$, отримаємо $u'x=1+x^3$ – це рівняння з відокремлюваними змінними відносно змінної u. Знайдемо його загальний розв'язок

$$\frac{du}{dx}=\frac{1+x^3}{x} \quad \text{або} \quad du=\frac{1+x^3}{x}dx,$$

звідки

$$du=(\frac{1}{x}+x^2)dx;\ \ \int du=\int\frac{1}{x}dx+\int x^2dx;\ \ u=\ln|x|+\frac{x^3}{3}+C.$$

Таким чином, загальний розв'язок має вигляд

$$y = x(\ln|x| + \frac{x^3}{3} + C).$$

Згідно з початковою умовою $y|_{x=1} = 2$ матиме

$$2 = 1 \cdot (\ln 1 + \frac{1}{3} + C), \quad C = \frac{5}{3}.$$

Отже, маємо шуканий частинний розв'язок :

$$y = x(\ln|x| + \frac{x^3}{3} + \frac{5}{3}).$$

7.3 Диференціальні рівняння другого порядку

7.3.1 Основні поняття

Серед диференціальних рівнянь вищого порядку найширше застосування при розв'язанні інженерних задач мають рівняння другого порядку.

У загальному вигляді диференціальне рівняння другого порядку записується так:

$$F(x, y, y', y'') = 0 \text{ або } y'' = f(x, y, y'). \tag{7.6}$$

Загальним розв'язком диференціального рівняння другого порядку $y'' = f(x, y, y')$ називають функцію $y = \varphi(x, C_1, C_2)$ (що залежить від x і двох довільних сталих C_1 і C_2), яка задовольняє таким умовам:

1) функція $y = \varphi(x, C_1, C_2)$ задовольняє рівнянню $y'' = f(x, y, y')$ при будь – яких значеннях сталих C_1 і C_2;
2) при заданих початкових умовах $y|_{x=x_0} = y_0$; $y'|_{x=x_0} = y'_0$ можна визначити такі значення сталих $C_1 = C_1^0$ і $C_2 = C_2^0$, що функція $y = \varphi(x, C_1^0, C_2^0)$ буде задовольняти цим умовам.

Задачу визначення розв'язку диференціального рівняння другого порядку

$$y'' = f(x, y, y'),$$

який задовольняє початковим умовам

$$y|_{x=x_0} = y_0;$$

$$y'|_{x=x_0} = y'_0,$$

називають **задачею Коші.**

Розв'язати задачу Коші означає знайти частинний розв'язок рівняння.

Відомо, що сформульована задача Коші має єдиний розв'язок, якщо функція $f(x, y, y')$ та її похідні $f_y(x, y, y')$, $f_{y'}(x, y, y')$ неперервні в деякій області, яка містить точку $(x_0; y_0, y'_0)$ (теорема існування та єдиності).

7.3.2 Лінійні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами

У загальному вигляді лінійні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами записують так:

$$y''+a_1y'+a_2y=f(x), \qquad (7.7)$$

де a_1 і a_2 – дійсні числа.

Якщо $f(x)=0$, то лінійне рівняння називають **однорідним,** у противному випадку **– неоднорідним.**

7.3.2.1 Лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами

Розглянемо лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку (ЛОДР) зі сталими коефіцієнтами

$$y''+a_1y'+a_2y=0. \qquad (7.8)$$

Два розв'язки диференціального рівняння називають **лінійно незалежними на проміжку** $[a;b]$**,** якщо їх відношення $\frac{y_1}{y_2}$ не є сталою величиною, тобто

$$\frac{y_1}{y_2}\neq const.$$

Теорема (про структуру загального розв'язку ЛОДР).

Якщо $y=y_1(x)$ і $y=y_2(x)$ два лінійно незалежних розв'язки диференціального рівняння $y''+a_1y'+a_2y=0$, то функція $y=c_1y_1+c_2y_2$ є загальним розв'язком цього рівняння, де c_1, c_2 – довільні сталі .

Доведення. За означенням загального розв'язку:

1) функція $y=c_1y_1+c_2y_2$ матиме задовольняти рівнянню $y''+a_1y'+a_2y=0$; дійсно, визначимо $y'=c_1y_1'+c_2y_2'$, $y''=c_1y_1''+c_2y_2''$, підставимо до рівняння і отримаємо:

$$c_1y_1''+c_2y_2''+a_1c_1y_1'+a_1c_2y_2'+a_2c_1y_1+a_2c_2y_2=0.$$

Згрупуємо доданки з y_1 і y_2, з урахуванням того, що y_1 і y_2 є розв'язками рівняння, дістанемо тотожність

$$\left(c_1y_1''+c_1a_1y_1'+c_1a_2y_1\right)+\left(c_2y_2''+c_2a_1y_2'+c_2a_2y_2\right)=$$

$$=c_1\underbrace{\left(y_1''+a_1y_1'+a_2y\right)}_{\substack{\parallel\\0}}+c_2\underbrace{\left(y_2''+a_1y_2'+a_2y_2\right)}_{\substack{\parallel\\0}}=0.$$

2) при заданих початкових умовах $y\big|_{x=x_0} = y_0$; $y'\big|_{x=x_0} = y'_0$ можна визначити такі значення сталих $c_1 = c_1^0$ і $c_2 = c_2^0$, що функція $y = \varphi(x, c_1^0, c_2^0)$ буде задовольняти цим умовам. Застосуємо позначення:

$$y_1\big|_{x=x_0} = y_1(x_0);\ y_1'\Big|_{x=x_0} = y_1'(x_0);$$

$$y_2\big|_{x=x_0} = y_2(x_0);\ y_2'\Big|_{x=x_0} = y_2'(x_0).$$

Підставимо початкові умови до рівняння $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$, отримаємо

$$y_0 = c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0).$$

Продиференціюємо цю рівність: $y_0' = c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0)$ і складемо систему

$$\begin{cases} c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) = y_0, \\ c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) = y_0'. \end{cases}$$

Отримали систему двох лінійних рівнянь з двома невідомими c_1 і c_2. Ця система має єдиний розв'язок $c_1 = c_1^0$ і $c_2 = c_2^0$, оскільки її визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} \neq 0$$

в силу лінійній незалежності розв'язків $y_1(x)$ і $y_2(x)$ (пропонуємо переконатися в цьому самостійно).
Таким чином, теорема доведена.

Лінійно незалежні розв'язки $y_1(x)$ і $y_2(x)$ ЛОДР шукатимемо у вигляді $y = e^{kx}$. Такий вибір ґрунтується на тому, що функція $y = e^{kx}$ та її похідні $y' = ke^{kx}$, $y'' = k^2 e^{kx}$ відрізняються одна від одної лише сталими множниками k і k^2, а ця умова є властивістю лінійного диференціального однорідного рівняння.

Підставимо $y = e^{kx}$, $y' = ke^{kx}$, $y'' = k^2 e^{kx}$ до рівняння, отримаємо

$$k^2 e^{kx} + a_1 k e^{kx} + a_2 e^{kx} = 0 \text{ або } e^{kx}(k^2 + a_1 k + a_2) = 0.$$

Оскільки $e^{kx} \neq 0$, то отримаємо рівняння

$$k^2 + a_1 k + a_2 = 0, \qquad (7.9)$$

яке називають **характеристичним рівнянням.**

Розв'язки $y_1(x)$ і $y_2(x)$ визначають у залежності від коренів характеристичного рівняння:

1) Якщо характеристичне рівняння має два різних корені k_1 і k_2, $k_1 \neq k_2$ ($D > 0$), то $y_1 = e^{k_1 x}$; $y_2 = e^{k_2 x}$ і загальний розв'язок має вигляд

$$y = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x}.$$

Вище було показано, що функції $y_1 = e^{k_1 x}$; $y_2 = e^{k_2 x}$ є розв'язками рівняння $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$, переконаємося, що вони є лінійно незалежними. Дійсно, складемо відношення

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{e^{k_1 x}}{e^{k_2 x}} = e^{(k_1 - k_2)x} \neq const, \text{ оскільки } k_1 \neq k_2.$$

2) Якщо характеристичне рівняння має два однакових корені k_1 і k_2, $k_1 = k_2$ ($D = 0$), то можна показати, що загальний розв'язок має вигляд

$$y = c_1 e^{k_1 x} + c_2 x e^{k_1 x}.$$

3) Якщо характеристичне рівняння має два комплексно – спряжених корені $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$, то загальний розв'язок має вигляд

$$y = c_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + c_2 e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

тут α і β – дійсні числа, які є дійсною і уявною частинами комплексних чисел $\alpha \pm \beta i$.

Приклад. Розв'язати рівняння $y'' - 5y' + 6y = 0$.

Розв'язання. Маємо ЛОДР другого порядку зі сталими коефіцієнтами, загальний розв'язок якого визначається за формулою $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$, де $y_1(x)$ і $y_2(x)$ два лінійно незалежних розв'язки цього рівняння.

Для знаходження $y_1(x)$ і $y_2(x)$ складаємо характеристичне рівняння $k^2 - 5k + 6 = 0$, корені якого $k_1 = 2$ і $k_2 = 3$. Характеристичне рівняння має дійсні та різні корені ($k_1 \neq k_2$, випадок 1), тому загальний розв'язок рівняння має вигляд

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}.$$

Приклад. Знайти частинний розв'язок рівняння $y'' - 4y' + 4y = 0$, який задовольняє початковим умовам $y\big|_{x=0} = 1;\ y'\big|_{x=0} = 0$.

Розв'язання. Спочатку визначимо загальний розв'язок рівняння. Складаємо характеристичне рівняння $k^2 - 4k + 4 = 0$. Корені характеристичного рівняння дійсні та рівні $k_1 = k_2 = 2$ (випадок 2), тому загальний розв'язок рівняння має вигляд

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}.$$

Для знаходження частинного розв'язку попередньо продиференціюємо y і отримаємо $y' = 2c_1 e^{2x} + c_2 e^{2x} + 2x c_2 e^{2x}$.

Ураховуючи початкові умови: $y\big|_{x=0} = 1;\ y'\big|_{x=0} = 0$, складаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} 1 = c_1 e^0 + 0 \cdot c_2 e^0, \\ 0 = 2c_1 e^0 + c_2 e^0 + 2c_2 \cdot 0 \cdot e^0, \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} 1 = c_1, \\ 0 = 2c_1 + c_2, \end{cases}$$

звідки $c_1 = 1, \quad c_2 = -2$. Отже, шуканий частинний розв'язок має вигляд

$$y = e^{2x} - 2xe^{2x}.$$

Приклад. Розв'язати рівняння $y'' - 4y' + 5y = 0$.

Розв'язання. Складаємо характеристичне рівняння $k^2 - 4k + 5 = 0$.

Корені характеристичного рівняння комплексно – спряжені та дорівнюють $k_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-5} = 2 \pm \sqrt{-1} = 2 \pm i$ (випадок 3), тобто $\alpha = 2$, $\beta = 1$. Отже, загальний розв'язок рівняння має вигляд

$$y = c_1 e^{2x} \cos x + c_2 e^{2x} \sin x.$$

7.3.2.2 Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами

Розглянемо лінійне неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку (ЛНДР) зі сталими коефіцієнтами

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x).$$

Процес розв'язання цього рівняння ґрунтується на такій теоремі.

Теорема (про структуру загального розв'язку ЛНДР).

Загальний розв'язок y лінійного неоднорідного диференціального рівняння $y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x)$ дорівнює сумі будь - якого частинного розв'язку Y цього рівняння і загального розв'язку $\bar{y}$ відповідного однорідного рівняння $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$.

Пропонуємо цю терему довести самостійно (див. доведення тереми про структуру ЛОДР).

Отже, функція $y = Y + \bar{y}$ є загальним розв'язком ЛНДР.

Теорія знаходження загального розв'язку ЛОДР була розглянута вище, тому залишилося побудувати теорію знаходження будь – якого частинного розв'язку ЛНДР.

Розглянемо неоднорідні рівняння, праві частини яких є функціями спеціального вигляду:

1) $f(x) = e^{\alpha x} P_n(x)$;

2) $f(x) = e^{\alpha x} \left[P_n(x) \cos \beta x + Q_m(x) \sin \beta x \right]$ (загальний випадок).

Тут $P_n(x)$ і $Q_m(x)$ – многочлени відповідно n - го і m – го степеня.

Розглянемо перший випадок. В припущенні, що α не є коренем характеристичного рівняння, частинний розв'язок Y шукатимемо у вигляді $Y = e^{\alpha x} Q_n(x)$, де $Q_n(x)$ – багаточлен n - го степеня.

Зауважимо, що $Q_n'(x)$ і $Q_n''(x)$ є багаточленами відповідно (n – 1) – го і (n – 2) – го степеня.

Отже,

$$Y' = e^{\alpha x}(\alpha \cdot Q_n(x) + Q_n'(x)),$$

$$Y'' = e^{\alpha x}(\alpha^2 \cdot Q_n(x) + 2\alpha \cdot e^{\alpha x}Q_n'(x)) + Q_n''(x)).$$

Підставимо ці рівності до рівняння $y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x)$, отримаємо

$$Q_n(x)(\alpha^2 + a_1 \cdot \alpha + a_2) + Q_n'(x)(2\alpha + a_1) + Q_n''(x) = P_n(x). \qquad (7.10)$$

У лівій частині здобутої рівності має бути багаточлен n - го степеня. Ця умова буде виконуватися, якщо $\alpha^2 + \alpha \cdot a_1 + a_2 \neq 0$, тобто α не є коренем характеристичного рівняння $k^2 + a_1 k + a_2 = 0$.

Якщо α є однократним коренем характеристичного рівняння, тобто $\alpha^2 + \alpha \cdot a_1 + a_2 = 0$, а $2\alpha + a_1 \neq 0$, то для того, щоб багаточлен у лівій частині рівності (7.9) був багаточленом *n – го* степеня, частинний розв'язок Y має бути поданий у вигляді $Y = x \cdot e^{\alpha x} Q_n(x)$.

У випадку, коли α є двократним коренем характеристичного рівняння, тобто $\alpha^2 + \alpha \cdot a_1 + a_2 = 0$ і $2\alpha + a_1 = 0$, частинний розв'язок Y має бути поданий у вигляді $Y = x^2 \cdot e^{\alpha x} Q_n(x)$.

У загальному випадку, коли

$$f(x) = e^{\alpha x}\left[P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x\right],$$

частинний розв'язок Y лінійного неоднорідного рівняння шукають у вигляді

$$Y = x^s \cdot e^{\alpha x}\left[T_k(x)\cos\beta x + R_k(x)\sin\beta x\right], \qquad (7.11)$$

де

$$k = \max(n;m); \quad s = \begin{cases} 0, & \textit{якщо } \alpha \pm \beta i \neq k_{1,2}, \\ 1, & \textit{якщо } \alpha \pm \beta i = k_1 \neq k_2, \\ 2, & \textit{якщо } \alpha \pm \beta i = k_1 = k_2. \end{cases} \qquad (7.12)$$

Приклад. Розв'язати рівняння $y'' - 4y' + 3y = 5e^{2x}$.

Розв'язання. Дане рівняння є ЛНДР другого порядку зі сталими коефіцієнтами і спеціальною правою частиною. Його загальний розв'язок шукаємо у вигляді $y = Y + \bar{y}$.

1) Спочатку визначимо загальний розв'язок $\bar{y}$ відповідного однорідного рівняння $y'' - 4y' + 3y = 0$. Для цього застосуємо теорему $Y = c_1 y_1 + c_2 y_2$, де $y_1(x)$ і $y_2(x)$ два лінійно незалежних розв'язки. Складаємо характеристичне рівняння $k^2 - 4k + 3 = 0$, яке має корені $k_1 = 1$, $k_2 = 3$.

Отже, $\bar{y} = c_1 e^x + c_2 e^{3x}$.

2) Оскільки права частина рівняння $f(x)=5e^{2x}$ є функцією вигляду $f(x)=P_n(x)e^{\alpha x}$, то частинний розв'язок Y шукатимемо у вигляді $Y=x^sP_n(x)e^{\alpha x}$, де $\alpha=2$, $\beta=0$, $k=n=0$, $s=0$, оскільки $\alpha\pm\beta i\neq k_{1,2}$. Таким чином, $Y=Ae^{2x}$, де $A=P_0(x)$.

Для визначення сталої A знайдемо Y' і Y'':

$$Y'=2Ae^{2x},\ Y''=4Ae^{2x}.$$

Підставимо вирази Y, Y', Y'' до даного рівняння і отримаємо

$$4Ae^{2x}-4\cdot 2Ae^{2x}+3Ae^{2x}=5e^{2x},$$

$$-Ae^{2x}=5e^{2x},\text{ тобто } A=-5.$$

Отже, частинний розв'язок має вигляд $Y=-5e^{2x}$.

Остаточно запишемо загальний розв'язок вихідного рівняння:

$$y=c_1e^x+c_2e^{3x}-5e^{2x}.$$

Питання для самоперевірки

1 Що називається диференціальним рівнянням?
2 Що називається порядком диференціального рівняння?
3 Що називається загальним і частинним розв'язками диференціального рівняння?
4 Яка задача називається задачею Коші? За яких умов існує єдиний розв'язок задачі Коші?
5 Які диференціальні рівняння першого порядку називають рівняннями з відокремлюваними змінними, однорідними і лінійними?
6 Сформулюйте теорему про структуру загального розв'язку лінійного однорідного (неоднорідного) диференціального рівняння другого порядку.
7 Як визначають частинний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння зі спеціальною правою частиною?

СПИСОК ДЖЕРЕЛ ІНФОРМАЦІЇ

1. Натансон И.П. Краткий курс высшей математики.- М.:Физматгиз, 1963.
2. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики, - М.: Наука, 1975.
3. Ефимов Н.В. Краткий курс аналитической геометрии. – М.: Наука, 1972.
4. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии. – М.: Наука, 1986.
5. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов: в 2 т. – М.: Наука, 1985.
6. Овчинников П.Ф., Яремчук Ф.П., Михайленко В.М. Высшая математика / Под ред. П.Ф.Овчинникова. – К.: Вища шк., 1987.
7. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. – М.: Наука, 1985.
8. Борисенко О.А. Диференціальна геометрія і топологія. – Х.:ДСВ Основа, 1995.
9. Станішевский С.О. Вища математика. – Х.: ХДАМГ, 2002.
10. Мелентьев Б.В., Оранська А.І., Харченко А.П. Вища математика у прикладах і задачах: в 2 ч. – К.: НМК ВО, 1992.
11. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. – М.: Наука, 1965.
12. Короев Ю.И. Начертательная геометрия. Специальность ”Архитектура”.М.: Стройиздат, 1987.
13. Письменный Д. Конспект лекций по высшей математике: в 2 ч. – М.: Айрис- пресс, 2004.
14. Вирченко Н.А., Ляшко И.И., Швецов К.И. Графики функций: Справочник. – К.: Наук. думка, 1979.
15. Маркушевич А.И. Замечательные кривые. – М.:Наука, 1978.
16. Фридман И. Научные методы в архитектуре. – М.: Стройиздат, 1983.

ЗМІСТ

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

ЩЕЛКУНОВА Любов Іванівна

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Тексти лекцій

Відповідальний за випуск Н.Ю. Іохвідович

Редактор О.В. Ворошилова

Комп'ютерне верстання Л.І. Щелкунова

Підп. до друку 28.09.11 Формат 60x84 1/16. Друк на різографі
Ум. друк.арк. 8,3. Тираж 300 прим. Зам. № 1910

Видавець і виготовлювач:
ФОП Ворошилова Олеся Володимирівна

Харків 2011