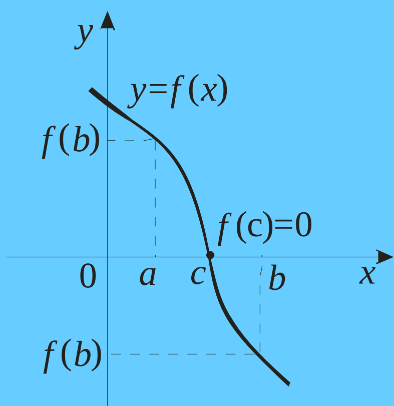
МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
СУМСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ВИЩА МАТЕМАТИКА

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

У ТРЬОХ ЧАСТИНАХ

ЧАСТИНА 2



Суми
Видавництво СумДУ
2010

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
СУМСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ВИЩА МАТЕМАТИКА

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

для напрямів підготовки 0501,0502
зі спеціальностей
6.050104 „Фінанси”, 6.050107 „Економіка підприємства”,
6.050108 „Маркетинг”, 6.050201 „Менеджмент організацій”
для студентів денної та заочної форм навчання

У ТРЬОХ ЧАСТИНАХ

ЧАСТИНА 2

Затверджено
на засіданні кафедри
прикладної та обчислювальної
математики
як конспект лекцій
з дисципліни „Вища математика”.
Протокол № 6 від 22.12.2009 р.

Суми
Видавництво СумДУ
2010

Вища математика: конспект лекцій у 3 частинах / Укладач О.І. Оглобліна. – Суми: Вид-во СумДУ, 2010. – Ч.2. – 111 с.

Кафедра прикладної та обчислювальної математики

Зміст С.

РОЗДІЛ 3 МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ

Математичний аналіз вивчає змінні величини та функціональні залежності між ними.

§ 1 ФУНКЦІЇ ВІД ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ ТА СПОСОБИ ЇХ ЗАВДАННЯ

1.1 Характеристика змінних величин

Означення 1

Величиною називають те, що можна виразити в певних одиницях та характеризувати **числовим значенням**.

Наприклад, ціна товару, кількість виробів, прибуток, довжина кола, довжина шляху, швидкість, маса.

Величини бувають розмірні і безрозмірні.

Розмірність – одиниці, через які величина виражається: грош. од., м^2, кг.

Додавати і віднімати можна тільки величини **однакової розмірності.**

Множити та ділити можна величини **будь -якої розмірності.**

У математиці частіше за все вивчають безрозмірні величини.

Величини бувають постійні та змінні.

Означення 2

Величина, яка зберігає одне й те саме значення за умов, що розглядаються, називається **постійною,** або **сталою.**

Змінною називається величина, яка приймає різні числові значення в границях умов, що вивчаються.

1.2 Поняття функції. Основні властивості функції

Розглянемо дві множини будь - яких елементів $\boldsymbol{X} = \{\boldsymbol{x_1 x_2,..., x_n}\}$ та $\boldsymbol{Y} = \{\boldsymbol{y_1 y_2,..., y_n}\}$.

Означення

Якщо кожному елементу $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}$ за якимсь законом $\boldsymbol{f}$ можна поставити у відповідність визначений елемент $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{Y}$, то кажуть що задана **функція** відображення множини $\boldsymbol{X}$ у множину Y: $X \xrightarrow{f} Y$, або

$$y = f(x). \tag{1}$$

Відповідно до такого означення величина $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}$ називається **незалежною змінною,** або **аргументом**, а величина $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{Y}$ – **залежною змінною,** або **значенням функції**. Буквою $\boldsymbol{f}$ позначають закон відповідності між цими величинами.

Множина $\boldsymbol{X}$ називається **областю визначення (існування)** функції **(ОВФ)** Позначається $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{f})$. Множина $\boldsymbol{Y}$ називається **областю значень** функції **(ОЗФ)**.

Якщо область визначення не обумовлена спочатку, то за ОВФ беруть **область допустимих значень (ОДЗ)** змінної $\boldsymbol{X}$, тобто множину значень $\boldsymbol{x}$, для якої функція $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ має сенс.

Приклад

Функція $y = x^2 + \sqrt{10 - x}$ має ОДЗ $\boldsymbol{x} \in (-\infty, \mathbf{10}]$. У загальному випадку ОВФ збігається з ОДЗ.

Якщо ж розглядається задача економічного змісту, то частіше за все на незалежну змінну накладається умова невід'ємності: $\boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}$. Тоді ОВФ буде: $\boldsymbol{x} \in [\mathbf{0}, \mathbf{10}]$.

1.2.1 Способи завдання функції

Існує декілька способів завдання функції:

а) **аналітичний** спосіб: функція задається формулою виду $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$.

Так функція $y = x^2 + \sqrt{10 - x}$ задана аналітично. Треба розрізняти функцію та її **аналітичний вираз**. Так одна функція

$$y = f(x) = \begin{cases} x^2, & \textit{якщо } x < 0; \\ 2x + 5, & \textit{якщо } x \geq 0 \end{cases}$$

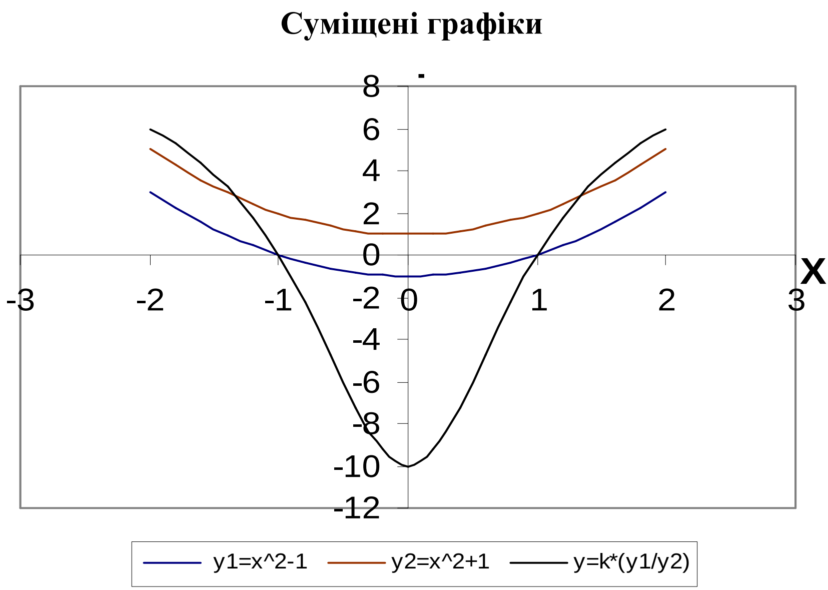
має два аналітичних вирази (якщо $\boldsymbol{x < 0}$, і якщо $\boldsymbol{x \geq 0}$).

б) **табличний** спосіб являє собою таблицю значень аргументу і відповідних значень залежної змінної.

N	1	2	3	4
x	0	0.5	1.5	3
y	2	25	30	65

Тут ОВФ: $\boldsymbol{x \in [0,3]}$, ОЗФ: $\boldsymbol{y \in [2,65]}$.

в) **графічний** спосіб: функція задається у вигляді графіку. Точки графіку $(\boldsymbol{x, y})$ і задають співвідношення між $\boldsymbol{x}$ та $\boldsymbol{y}$.



1.2.2 ДЕЯКІ ВЛАСТИВОСТІ ФУНКЦІЙ

1. **Парність і непарність функції.**

Означення 1

Функція $\boldsymbol{y = f(x)}$ називається **парною**, якщо для будь-якого **х** з ОВФ виконується рівність $\boldsymbol{f(-x) = f(x)}$ і **непарною**, якщо $\boldsymbol{f(-x) = -f(x)}$. Всі інші функції називаються функціями **загального виду**.

Приклад 1

$\boldsymbol{y = x^2}$ – парна функція, оскільки $\boldsymbol{f(-x) = f(x)}$, $\boldsymbol{y = x^3}$ – непарна функція, бо $\boldsymbol{f(-x) = -f(x)}$, $\boldsymbol{y = x^3 + x^2}$ – функція загального виду, оскільки вищенаведені рівності не виконуються.

Графік парної функції симетричний відносно осі ординат, графік непарної – відносно початку координат (точки **(0,0)**).

2. **Монотонність функції.**

Означення 2

Функція $\boldsymbol{y = f(x)}$ називається **зростаючою (спадаючою)** на проміжку $[a,b]$, якщо більшому значенню аргументу на цьому проміжку відповідає більше (менше) значення функції. Або функція називається **зростаючою** на $[a,b]$, якщо виконуються умови:

$$\forall x_1, x_2 \in [a,b]: x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1) \tag{2}$$

відповідно функція називається **спадаючою** на $[a,b]$, якщо

$$\forall x_1, x_2 \in [a,b]: x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1) \tag{3}$$

Зростаючі і спадаючі функції носять назву **строго монотонних функцій.** Якщо ж в умовах (2), (3) строгі нерівності між функціями змінити на нестрогі:

$$\forall x_1, x_2 \in [a,b]: x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1),$$

$$\forall x_1, x_2 \in [a,b]: x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \leq f(x_1),$$

то такі функції називаються просто **монотонними** функціями.

Приклад 2

$y = x^2$ – монотонна функція. На проміжку $(-\infty,0]$ вона спадаюча, а на проміжку $[0,\infty)$ вона зростаюча.

3. **Обмеженість функції.**

Означення 3

Функція $y = f(x)$ називається **обмеженою** на проміжку $[a,b]$, якщо існує таке додатне число $M > 0$, що

$$|f(x)| \le M, \forall x \in [a,b].$$

В іншому разі функція називається **необмеженою**.

Приклад 3

Функція $y = \sin x$ - обмежена функція, бо на всій ОВФ $|\sin x| \le 1$.

4. Періодичність функції.

Означення 4

Функція $y = f(x)$ називається **періодичною з періодом** $T \ne 0$, якщо $\forall x \in$ ОВФ $\exists!\ T \in R,\ T \ne 0$:

$$f(x+T) = f(x).$$

Приклад 4

Функція $y = \sin x$ має період T=2π, бо $\forall x \in$ ОВФ $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$.

1.2.3 Деякі види функцій. Класифікація функцій

1. **Функції, задані явно та неявно.**

Означення 1

Функція називається **явно заданою**, якщо вона задається формулою, у якої в правій частині стоїть сама залежна змінна.

$$y = f(x). \qquad (4)$$

Наприклад, $y = x^2 + 2x + 4$. $\boldsymbol{y}$ – залежна змінна, $\boldsymbol{x}$ – незалежна або аргумент.

Функція називається **заданою неявно**, якщо вона задається рівнянням, нерозв'язаним відносно залежної змінної:

$$\boldsymbol{F(x, y) = 0}. \tag{5}$$

Наприклад, $\boldsymbol{F(x, y) = x^2 + xy + y^3 = 0}$ - незалежна змінна $\boldsymbol{x}$ та залежна змінна $\boldsymbol{y}$ входять в один аналітичний вираз.

2. **Обернена функція.**

Нехай $\boldsymbol{y = f(x)}$ – функція від незалежної змінної $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{X}$ – ОВФ, $\boldsymbol{Y}$ – ОЗФ.

Означення 2

Якщо можна кожному значенню $\boldsymbol{y \in Y}$ поставити у відповідність єдине значення $\boldsymbol{x \in X}$, для якого $\boldsymbol{y = f(x)}$, то кажуть, що існує функція $\boldsymbol{x = \varphi(y)}$ – **обернена до** $\boldsymbol{y = f(x)}$.

Позначають обернену функцію

$$\boldsymbol{x = f^{-1}(y)}.$$

Наприклад, $\boldsymbol{y = a^x}$ та $\boldsymbol{x = log_a y}$ – взаємно обернені функції.

Можна довести, що для будь- якої строго монотонної функції існує обернена.

3. **Складена функція.**

Означення 3

Нехай функція $\boldsymbol{y = f(u)}$ – є функція від змінної $\boldsymbol{u}$ з ОВФ $\boldsymbol{U}$ та ОЗФ $\boldsymbol{Y}$, а $\boldsymbol{u}$, в свою чергу є $\boldsymbol{u = \varphi(x)}$ з ОВФ $\boldsymbol{X}$ та ОЗФ $\boldsymbol{U}$. Функція

$$\boldsymbol{y = f(\varphi(x))}$$

називається **складеною функцією** від незалежної змінної $\boldsymbol{x}$ (або **суперпозицією, композицією** функцій).

Наприклад, $\boldsymbol{y = arctg^5(ln 3x)}$. Тут функція **у** є композицією чотирьох функцій

$$\boldsymbol{y = s^5;\quad s = arctg\,\mathrm{v};\quad \mathrm{v} = ln\,u;\quad u = 3x}\,.$$

4. **Основні елементарні функції.**

Степенева функція

$$y = x^n,\quad n - \textit{дійсне число}.$$

Показникова функція

$$y = a^x,\quad a > 0,\, a \neq 1.$$

Експоненціальна функція (показникова з основою ***e***)

$$y = e^x,\quad e = 2{,}718281828.$$

Логарифмічна функція (обернена до показникової)

$$y = \log_a x,\quad a > 0,\quad a \neq 1$$

$$y = \ln x \quad a = e.$$

Тригонометричні функції

$$y = \sin x; \qquad y = \cos x;$$

$$y = tg\ x; \qquad y = ctg\ x;$$

$$y = \sec x = \frac{1}{\cos x}; \qquad y = \cos ecx = \frac{1}{\sin x}.$$

Обернені тригонометричні функції

$$y = \arcsin x; \qquad y = \arccos x;$$

$$y = arctg\ x; \qquad y = arcctg\ x;$$

$$y = arc\sec x; \qquad y = \arccos ec\ x.$$

5. **Елементарні функції.**

Означення 4

Функції, які побудовані з основних елементарних функцій скінченою множиною алгебраїчних перетворень та скінченою кількістю операцій називаються **елементарними.**

Наприклад, функція $y = \dfrac{\sqrt{x} + \sin 3x}{5^{x^2} + \ln x} - \sqrt[7]{(x+5)^3}$ - елементарна функція.

6. **Класифікація елементарних функцій.**

Елементарні функції діляться на **алгебраїчні** та **неалгебраїчні (трансцендентні).**

Алгебраїчні функції:

а) **ціла раціональна функція (поліном)**

$y = P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ – поліном n-го степеня.

Наприклад, $y = P_5(x) = 3x^5 + 2x^3 - 7x^2 + 4$ – поліном *4*-го степеня. Тут $a_5 = 3,\ a_4 = 0,\ a_3 = 2,\ a_2 = -7,\ a_1 = 0,\ a_0 = 4$,

$\mathrm{a_i} \in \mathrm{Z},\ \mathrm{i} = \overline{1{,}5}$ ***x*** – незалежна змінна;

б) **дробово-раціональна функція** – відношення поліномів $\mathrm{y} = \dfrac{\mathrm{P_n}(\mathrm{x})}{\mathrm{Q_m}(\mathrm{x})}$.

Наприклад, $y = \dfrac{P_0(x)}{Q_3(x)} = \dfrac{5}{x^3 - 8}$;

в) **ірраціональна функція** – уфункції присутнє добування кореня з аргументу.

Наприклад, $y = \dfrac{\sqrt[3]{x+y} - \sqrt{x-4y}}{\sqrt[6]{x}}$.

Будь яка неалгебраїчна функція називається **трансцендентною**. До трансцендентних функцій відносяться такі функції:

- показникові;

- логарифмічні;

- тригонометричні;

- обернені тригонометричні.

§ 2 ГРАНИЦЯ ФУНКЦІЇ

2.1 ГРАНИЦЯ ПОСЛІДОВНОСТІ Й ФУНКЦІЇ. ТЕОРЕМИ ПРО ГРАНИЦІ

2.1.1 ГРАНИЦЯ ПОСЛІДОВНОСТІ. ГЕОМЕТРИЧНИЙ ЗМІСТ ГРАНИЦІ ПОСЛІДОВНОСТІ

Означення

Число $\boldsymbol{A}$ називається **границею послідовності** $\{\boldsymbol{x_n}\}_{n=1}^{\infty}$, якщо для будь-якого достатньо малого позитивного числа $\boldsymbol{\varepsilon}$ існує номер $\boldsymbol{N}$ ($N = N(\varepsilon)$) такий, що всі значення $\boldsymbol{x_n}$, у яких $\boldsymbol{n} > \boldsymbol{N}$, задовольняють нерівність:

$$\left|\boldsymbol{x_n} - \boldsymbol{A}\right| < \boldsymbol{\varepsilon}. \tag{2.1}$$

Записують це в такий спосіб: $\lim\limits_{n\to\infty} \boldsymbol{x_n} = \boldsymbol{A}$ або $\boldsymbol{x_n} \to \boldsymbol{A}$.

Геометричний зміст границі послідовності:
нерівність (2.1) рівносильна подвійній нерівності

$$\boldsymbol{A} - \boldsymbol{\varepsilon} < \boldsymbol{x_n} < \boldsymbol{A} + \boldsymbol{\varepsilon}. \tag{2.2}$$

Це означає, що всі точки $\boldsymbol{x_n}$, починаючи з деякого номера $\boldsymbol{n} > \boldsymbol{N}$, лежать усередині інтервалу $(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{\varepsilon},\ \boldsymbol{A} + \boldsymbol{\varepsilon})$ на числовій прямій, тобто попадають у будь -який достатньо малий $\boldsymbol{\varepsilon}$ - окіл точки $\boldsymbol{A}$.

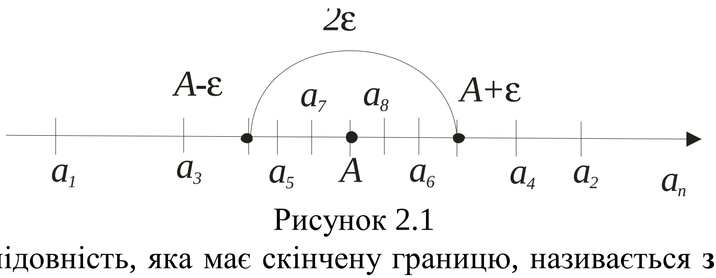


Рисунок 2.1

Послідовність, яка має скінчену границю, називається **збіжною**, у протилежному випадку –**розбіжною**.

Використовуючи символи логічного запису, означення границі можна записати так:

$$\left(A=\lim_{n\to\infty} x_n\right) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon>0)(\exists N=N(\varepsilon))(\forall n>N) \Rightarrow |x_n-A|<\varepsilon. \quad (2.3)$$

Приклад

На основі означення довести, що границя послідовності

$\left\{0, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{4}, \ldots, \left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right), \ldots\right\}$ дорівнює 1.

Доведення

Якщо 1 є границею даної послідовності, то за означенням

$$\lim_{n\to\infty}\left|\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)-1\right|<\varepsilon.$$

Нехай $\boldsymbol{\varepsilon=0{,}1}$.

Тоді $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)-1\right|<0{,}1$, або $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n}\right|<0{,}1$, що означає $\frac{1}{n}<\frac{1}{10}$.

Отже, нерівність буде виконуватися для $\boldsymbol{n>10}$. Знайшли $\boldsymbol{N=10}$, починаючи з якого нерівність виконується.

Нехай $\boldsymbol{\varepsilon=0{,}001}$. Тоді $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)-1\right|<0{,}001$, або $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n}\right|<0{,}001$, що означає $\frac{1}{n}<\frac{1}{1000}$

Отже, нерівність буде виконуватися для $n>1000$. Знайшли $N=1000$, починаючи з якого нерівність виконується.

Залежно від $\boldsymbol{\varepsilon}>0$ ми знаходимо такий номер $\boldsymbol{N=N(\varepsilon)}$, що для всіх $\boldsymbol{n}$, більших за цей номер, нерівність (2.1) виконується завжди.

Тобто доведено, що 1 дійсно є границею даної послідовності.

2.1.2 ГРАНИЦЯ ФУНКЦІЇ НА БЕЗКІНЕЧНОСТІ

Поняття границі функції на безкінечності є узагальненням поняття границі послідовності, тому що послідовність можна розглядати як функцію $\boldsymbol{x_n = f(n)}$ цілого аргументу $\boldsymbol{n}$, $n \to \infty$.

Означення

Число $\boldsymbol{A}$ називається **границею функції** $\boldsymbol{y = f(x)}$, $x \in R$ **за умови** $\boldsymbol{x \to \infty}$, якщо для будь-якого достатньо малого позитивного числа $\boldsymbol{\varepsilon}$ знайдеться таке число $\boldsymbol{S > 0}$ (залежно від $\boldsymbol{\varepsilon : S = S(\varepsilon)}$), що для всіх $|\boldsymbol{x}| > \boldsymbol{S}$ виконується нерівність

$$|f(x) - A| < \varepsilon . \tag{2.4}$$

Записують цей факт у такий спосіб:

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$, або $\boldsymbol{f(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} A}$.

Формальний запис означення границі функції на безкінечності

$$\left(A = \lim_{x\to\infty} f(x)\right) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists S = S(\varepsilon))(\forall x : |x| > S) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon . \tag{2.5}$$

Геометричний зміст границі функції на безкінечності: нерівність (2.4) можна записати $\boldsymbol{-\varepsilon + A < f(x) < \varepsilon + A}$.

Це означає, що з деякого $\boldsymbol{x = S}$ для значень аргументу $|\boldsymbol{x}| > \boldsymbol{S}$ графік функції вміщується у смугу розміром $2\boldsymbol{\varepsilon}$, якою б вузькою ця смуга не була.

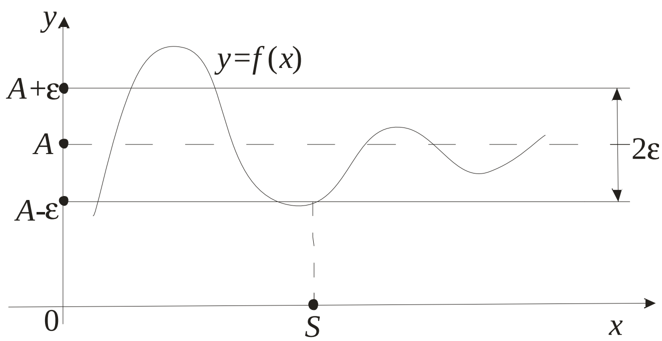


Рисунок 2.2

2.1.3 Границя функції в точці

Нехай дана функція $f(x)$ і нехай A – **гранична точка** області визначення цієї функції $D(f)$, тобто така точка, будь-який окіл якої містить точки множини $D(f)$, відмінні від A. Точка A може належати множині $D(f)$, а може й не належати їй.

Означення 1 (означення границі по Гейне – мовою послідовностей)

Число A називається **границею функції** $f(x)$ при $x \to a$, якщо для множини послідовностей $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ значень аргументу, кожна з яких прямує до a, відповідні їм послідовності значень функції $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ мають одну й ту саму границю – A.

Означення 2 (означення границі за Коши – мовою $\varepsilon - \delta$)

Число A називається **границею функції** $f(x)$ при $x \to a$, якщо для заданого довільного будь-якого достатньо малого числа $\varepsilon > 0$, можна знайти таке $\delta > 0$ $(\delta = \delta(\varepsilon))$, що для всіх x, з δ – околу числа a, значення функції $f(x)$ будуть лежати в ε – околі числа A, тобто для всіх x таких, що:

$$0 < |x - a| < \delta, \tag{2.6}$$

виконується нерівність

$$|f(x) - A| < \varepsilon. \tag{2.7}$$

Означення 1 і 2 рівносильні. Записують факт існування границі так:

$$\lim_{x \to a} f(x) = A, \text{ або } f(x) \xrightarrow[x \to a]{} A. \tag{2.8}$$

Формальний запис означення границі функції в точці:

$$\left(A = \lim_{x \to a} f(x)\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0)(\forall x \ne a : |x - a| < \delta) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon. \tag{2.9}$$

Геометричний зміст границі функції в точці.
Нерівність (2.7) можна записати $-\boldsymbol{\varepsilon}+\boldsymbol{A}<\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})<\boldsymbol{\varepsilon}+\boldsymbol{A}$, що відповідає вміщенню графіка у смугу, завширшки у $\boldsymbol{2\varepsilon}$, якою вузькою ця смуга не була б. Нерівність (2.6) теж можна записати як подвійну: $-\boldsymbol{\delta}+\boldsymbol{a}<\boldsymbol{x}<\boldsymbol{\delta}+\boldsymbol{a}$, що також означає смугу завширшки у $\boldsymbol{2\delta}$ навколо точки $\boldsymbol{a}$.

Число $\boldsymbol{A}$ є **границею** функції $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ за $\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}$**,** якщо для будь якого малого $\boldsymbol{\varepsilon}>0$ знайдеться $\boldsymbol{\delta}$ – окіл точки $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{\delta}=\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{\varepsilon}))$ такий, що для всіх **абсцис** $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{a}$ з цього околу **ординати** графіка функції $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ будуть вміщені в смугу $-\boldsymbol{\varepsilon}+\boldsymbol{A}<\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})<\boldsymbol{\varepsilon}+\boldsymbol{A}$, якою вузькою вона не була б.

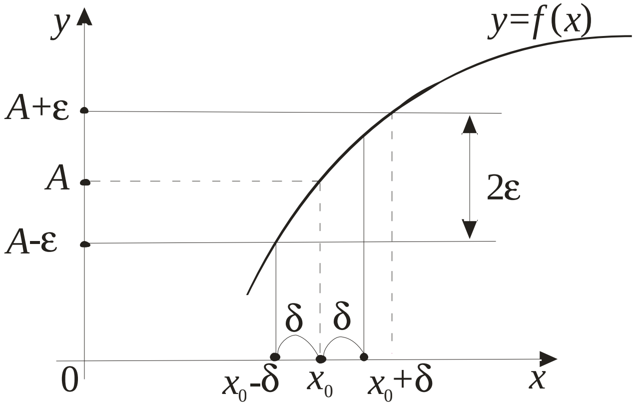


Рисунок 2.3

Означення 3

У тому випадку, якщо послідовність $\{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{n}})\}_{n=1}^{\infty}$ необмежено зростає (або спадає) при будь-якому способі наближення $\boldsymbol{x}$ до своєї граничної точки $\boldsymbol{a}$, будемо говорити, що функція $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ має **нескінченну границю**, і записувати це у вигляді:

$$\lim_{x\to a}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\infty, \text{ або } \lim_{x\to a}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=-\infty. \qquad (2.10)$$

2.1.4 Однобічні та нескінченні границі функції в точці

Розглянемо поведінку функції, коли аргумент прямує до своєї граничної точки або ліворуч, або праворуч. Позначають таке прямування аргументу так

прямування ліворуч – $\boldsymbol{x \to a_{-0}}$,

прямування праворуч – $\boldsymbol{x \to a_{+0}}$.

Означення

Якщо число $\boldsymbol{A}$ – скінчена границя функції $\boldsymbol{y = f(x)}$ за умови, що аргумент $\boldsymbol{x}$ прямує до граничної точки $\boldsymbol{a}$ ліворуч $\boldsymbol{x \to a_{-0}}$, то така границя називається **лівою границею** функції $\boldsymbol{y = f(x)}$ у точці $\boldsymbol{a}$ і позначається:

$$\lim_{x \to a_{-0}} f(x) = A. \tag{2.11}$$

Якщо число $\boldsymbol{A}$ – скінчена границя функції $\boldsymbol{y = f(x)}$ за умови, що аргумент $\boldsymbol{x}$ прямує до граничної точки $\boldsymbol{a}$ праворуч $\boldsymbol{x \to a_{+0}}$, то така границя називається **правою границею** функції $\boldsymbol{y = f(x)}$ в точці $\boldsymbol{a}$ і позначається:

$$\lim_{x \to a_{+0}} f(x) = A. \tag{2.12}$$

Загальна назва таких границь – **однобічні границі**.

Теорема

Для існування границі функції $\boldsymbol{y = f(x)}$ у точці $\boldsymbol{a}$ необхідно і достатньо, щоб однобічні границі цієї функції в точці $\boldsymbol{a}$ існували і були рівні між собою:

$$\lim_{x \to a_{-0}} f(x) = \lim_{x \to a_{+0}} f(x) = A.$$

2.1.5 Нескінченно малі та нескінченно великі величини

Означення 1

Функція $\alpha(x)$ називається **нескінченно малою** функцією при $x \to x_0$, якщо

$$\lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 0.$$

Нехай $\alpha(x)$ та $\beta(x)$ – нескінченно малі при $x \to x_0$. Якщо існує границя їх частки $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A$, то розглядають три типи відношення безкінечно малих величин $\alpha(x)$ і $\beta(x)$.

1. A є скінченою величиною, $A \neq 0$, тоді $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ називають **нескінченно малими величинами одного порядку** малості для $x \to x_0$.

Якщо $A = 1$, то $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ є еквівалентними нескінченно малими величинами для $x \to x_0$. Позначається цей факт

$$\alpha(x) \sim \beta(x).$$

2. $A = 0$ – функція $\alpha(x)$ називається **нескінченно малою величиною вищого порядку малості відносно** $\beta(x)$ для $x \to x_0$.

3. $A = \infty$ – функція $\alpha(x)$ називається **нескінченно малою величиною нижчого порядку малості відносно** $\beta(x)$ для $x \to x_0$.

Означення 2

Функція $\Omega(x)$ називається **нескінченно великою** при $x \to x_0$, якщо

$$\lim_{x \to x_0} \Omega(x) = \infty.$$

Нехай $\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{x})$ та $\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{x})$ – нескінченно великі величини при $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x_0}$. Якщо існує границя їх відношення

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\Omega(x)}{\Sigma(x)} = A,$$

то розподілення нескінченно великих $\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{x})$ і $\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{x})$ буде таким:

1. А є скінченою величиною, $A \neq 0$ – $\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{x})$ і $\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{x})$ – **нескінченно великі величини одного порядку** для $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x_0}$. Якщо $A = 1$, то $\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{x})$ і $\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{x})$ є еквівалентними нескінченно малими величинами для $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x_0}$. Позначається – $\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{x}) \sim \Sigma(\boldsymbol{x})$.

2. $A = 0$, тоді функція $\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{x})$ називається **нескінченно великою величиною нижчого порядку відносно** $\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{x})$ для $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x_0}$.

3. $A = \infty$, тоді функція $\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{x})$ є **нескінченно великою величиною вищого порядку відносно** $\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{x})$ для $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x_0}$.

2.1.6 Основні теореми про границі

Для знаходження границь на практиці користуються такими теоремами.

Теорема 1

Якщо існують границі $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A,\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$, то

1. $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x) \pm g(x)\right) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = A \pm B$. (2.13)

2. $\lim\limits_{x\to x_0}\left(c \cdot f(x)\right) = c \cdot \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = c \cdot A,\ \ c \in R$. (2.14)

3. $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x) \cdot g(x)\right) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = A \cdot B$. (2.15)

4. Якщо існує скінчена границя $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B \neq 0$, то

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}=\frac{A}{B}. \qquad (2.16)$$

Зауваження

У математичній практиці дуже часто виникає необхідність визначення границі частки нескінченно малих або нескінченно великих величин типу $\left(\frac{0}{0}\right)$, $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Такі частки носять назву **невизначеності**. До невизначеностей під знаком границі відносяться також границі виду $\left(1^{\infty}\right)$, $(0\cdot\infty)$. Знаходження границь з невизначеностями називається **"розкриттям невизначеностей"**. Для обчислення таких границь застосовуються спеціальні прийоми, деякі з них будуть розглядатися на практичних заняттях та під час вивчення похідної функції однієї змінної.

Теорема 2 (про граничний перехід)

1. Границю можна вносити під знак степені

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{\alpha}=\left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right)^{\alpha}, \qquad \alpha\in R-const. \qquad (2.17)$$

Зокрема, $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[p]{f(x)}=\sqrt[p]{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}}$.

2. Границю можна підносити до показника степені

$$\lim_{x\to x_0} b^{f(x)}=b^{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}, \quad b\in R-const,\ \lim_{x\to x_0} f(x)=A. \qquad (2.18)$$

3. Границю можна вносити під знак логарифма

$$\lim_{x\to x_0}\left(\log_c f(x)\right)=\log_c\left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right),\ c\in R-const,\ \lim_{x\to x_0} f(x)=A. \qquad (2.19)$$

4. Узагальнений граничний перехід

$$\lim_{x\to x_0}\left(f(x)\right)^{g(x)}=\left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right)^{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}, \qquad \lim_{x\to x_0} f(x)=A,\ \lim_{x\to x_0} g(x)=B.$$

Для обчислення границь дуже важливим є знання таких відомих границь функцій.

Теорема 3 (такі границі вважаються загальновідомими)

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=\mathbf{1}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=\mathbf{1}$, $\mathbf{a=const,}\quad \mathbf{a>0}$.

2. Перша чудова границя

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1. \qquad (2.20)$$

3. Друга чудова границя

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e\text{, або} \qquad (2.21)$$

$$\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e\text{, де e}\approx 2.7. \qquad (2.22)$$

Використовуються на практиці й наслідки формули (2.22):

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\log_c(1+\alpha)}{\alpha}=\log_c e,$$

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{a^{\alpha}-1}{\alpha}=\ln a,$$

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{(1-\alpha)^{\mu}-1}{\alpha}=\mu,$$

зокрема:

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha}=1,$$

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{e^{\alpha}-1}{\alpha}=1.$$

До обчислення другої чудової границі зводяться багато задач, пов'язаних з неперервним ростом деякої величини. До таких задач, наприклад, відносятьсяч: ріст внеску за законом складних відсотків, ріст населення країни, розпад радіоактивної речовини, розмноження бактерій і т.п.

Розглянемо **приклад Я. І. Перельмана**, що дає інтерпретацію числа е у задачі про складні відсотки. Число **е** є границею послідовності $\left(1+\frac{1}{\mathrm{n}}\right)^{\mathrm{n}}$ за умови, що $\boldsymbol{n \to \infty}$: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e$.

В ощадбанках процентні гроші приєднуються до основного капіталу щорічно. Якщо приєднання відбувається частіше, то капітал росте швидше, тому що в утворенні відсотків бере участь більша сума. Візьмемо чисто теоретичний, досить спрощений приклад.

Нехай у банк покладено 100 грош. од. з розрахунку нарощування капіталу на 100 % за рік. Якщо процентні гроші будуть приєднані до основного капіталу лише після закінчення року, то на цей термін 100 грош. од. перетворяться в 200 грош. од. Подивимося тепер, у що перетворяться 100 грош. од., якщо процентні гроші приєднувати до основного капіталу кожні півроку. Після закінчення півріччя 100 грош. од. виростуть в $100 \cdot 1{,}5=150$ грош. од., а ще через півроку – в $150 \cdot 1{,}5 = 225$ (грош. од.). Якщо приєднання робити кожні 1/3 року, то після закінчення року 100 грош. од. перетворяться в $100 \cdot (1 + 1/3)^3 \approx 237$ грош. од. Будемо зменшувати строки приєднання процентних грошей до 0,1 року, до 0,01 року, до 0,001 року й т. ін. Тоді з 100 грош. од. через рік вийде:

$100 \cdot (1 + 1/10)^{10} \approx 259$ (грош. од.),

$100 \cdot (1+1/100)^{100} \approx 270$ (грош. од.),

$100 \cdot (1+1/1000)^{1000} \approx 271$ (грош. од.).

При нескінченному скороченні строків приєднання відсотків нарощений капітал не росте нескінченно, а наближається до деякої границі, що дорівнює приблизно 271. Більш ніж у 2,71 разів капітал, покладений під 100% річних, збільшитися не може, навіть якби відсотки приєднувалися до капіталу щосекунди, тому що

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e.$$

2.2 НЕПЕРЕРВНІСТЬ ФУНКЦІЇ. ТОЧКИ РОЗРИВУ

Означення 1

Функція $f(x)$ називається **неперервною в точці x_0**, якщо вона відповідає трьом умовам:

1) функція $f(x)$ визначена в точці x_0 (тобто, в цій точці існує $f(x_0)$);

2) функція $f(x)$ має скінчену границю при $x \to x_0$;

3) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. (2.23)

Умову (2.23) можна подати у вигляді

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(\lim_{x \to x_0} x) = f(x_0),$$

тобто можливий граничний перехід під знаком функції, якщо вона неперервна в даній точці.

Означення 2

Функція $f(x)$ називається **неперервною праворуч у точці x_0**, якщо

$$\lim_{x \to x_{0+0}} f(x) = f(x_0),$$

і неперервною ліворуч у точці x_0, якщо

$$\lim_{x \to x_{0-0}} f(x) = f(x_0).$$

Отже, функція $f(x)$ неперервна в точці x_0, якщо вона неперервна в цій точці одночасно праворуч і ліворуч. Або **функція $f(x)$ неперервна в точці x_0,** якщо існує **скінчене значення $f(x_0)$** і виконується подвійна рівність

$$\lim_{x \to x_{0-0}} f(x) = \lim_{x \to x_{0+0}} f(x) = f(x_0). \qquad (2.24)$$

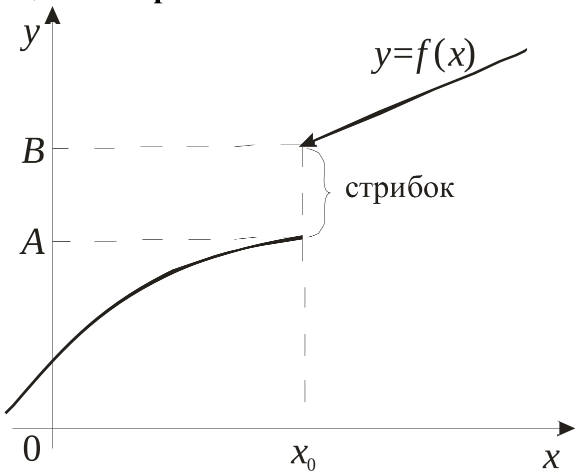
Якщо хоча б одна з умов неперервності функції порушена, то говорять, що в точці x_0 **функція $f(x)$ має розрив**.

Класифікація точок розриву функції

1.Якщо однобічні границі функції в точці $\boldsymbol{x_0}$ існують, скінчені, але нерівні, тобто

$$\lim_{x\to x_{0-0}} f(x)=A; \quad \lim_{x\to x_{0+0}} f(x)=B; \quad A\neq B,$$

то точка $\boldsymbol{x_0}$ називається **точкою розриву першого роду**, в цій точці функція має **стрибок**.



$$\lim_{x\to x_0-} f\left(x\right)= f\left(x_0\right)=A$$

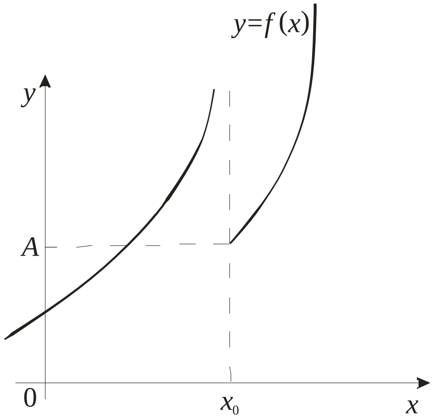
$$\lim_{x\to x_0+} f\left(x\right)=B; \;\; A\neq B$$

Рисунок 2.4 – Стрибок

2. Якщо хоча б одна з однобічних границь функції в точці $\boldsymbol{x_0}$ нескінчена, тобто

$$\lim_{x\to x_{0-0}} f(x)=\pm\infty \quad \textit{або} \quad \lim_{x\to x_{0+0}} f(x)=\pm\infty,$$

то точка $\boldsymbol{x_0}$ називається **точкою розриву другого роду, або точкою неусувного розриву.**



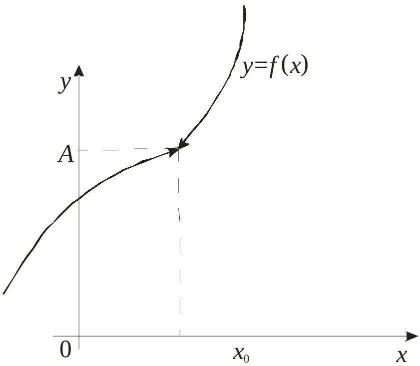
$$\lim_{x\to x_0-} f(x)=+\infty\,;\ \lim_{x\to x_0+} f(x)=f(x_0)=A$$

Рисунок 2.5 – Неусувний розрив

3. Якщо однобічні границі функції в точці $\boldsymbol{x_0}$ існують, скінчені, рівні між собою, але не дорівнюють значенню $\boldsymbol{f(x_0)}$, тобто

$$\lim_{x\to x_{0-0}} f(x)=\lim_{x\to x_{0+0}} f(x)\neq f(x_0),$$

то точка $\boldsymbol{x_0}$ називається точкою **усувного розриву**.

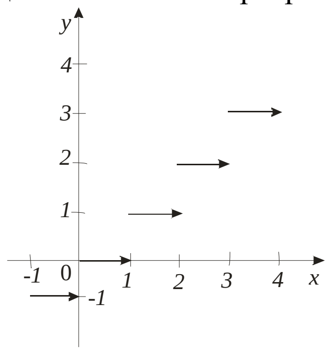


$$\lim_{x\to x_0-} f(x)=\lim_{x\to x_0+} f(x)=A$$

$f(x_0)$ – не існує

Рисунок 2.6 – Усувний розрив

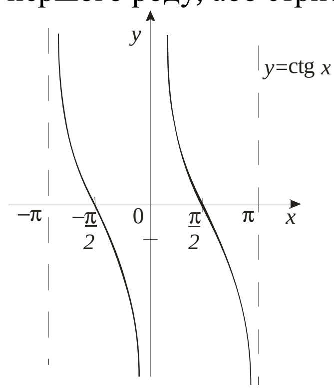
Наприклад, функція $\boldsymbol{y = \mathrm{ctg} x}$ при $\boldsymbol{x \to +0}$ має границю, рівну **+∞**, тобто, у точці $\boldsymbol{x = 0}$ вона має розрив другого роду.



$y = E(x)$ – ціла частина числа

Рисунок 2.7

Функція $\boldsymbol{y = E(x)}$ (ціла частина від $\boldsymbol{x}$) у точках із цілими абсцисами має розрив першого роду, або стрибок.



для $x = \pi k, \quad k \in z \quad y = ctgx$ не існує

Рисунок 2.8

Означення 3

Функція, **неперервна в кожній точці замкненого інтервалу [a,b]**, називається **неперервною на інтервалі** $[\boldsymbol{a,b}]$. Неперервна функція зображується суцільною кривою.

Основні властивості неперервних функцій

1. Алгебраїчна сума скінченого числа неперервних функцій є неперервною функцією.

2. Добуток скінченого числа неперервних функцій є функцією неперервною.

3. Відношення неперервних функцій є неперервною функцією за умови, що знаменник не дорівнює **0.**

4. Суперпозиція (комбінація) неперервних функцій є функцією неперервною.

5. **Перша теорема Вейєрштрасса**

Якщо функція $\boldsymbol{f(x)}$ **неперервна** на інтервалі $[\boldsymbol{a,b}]$, то вона на цьому інтервалі **обмежена,** тобто $\forall x \in [a,b]\ \exists M > 0:$

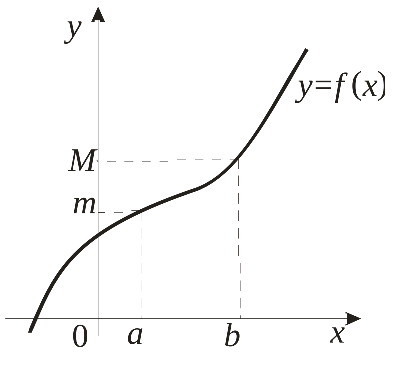
$$|\boldsymbol{f(x)}| \le \boldsymbol{M}.$$

6. **Друга теорема Вейєрштрасса**

Якщо функція $\boldsymbol{f(x)}$ неперервна на інтервалі $[\boldsymbol{a,b}]$, то вона досягає своїх меж, тобто існують такі точки x_1 та x_2 з інтервалу $[\boldsymbol{a,b}]$, що

$f(x_1) = \sup\limits_{[a,b]} f(x)$ – найбільше значення $\boldsymbol{f(x)}$ на інтервалі $[\boldsymbol{a,b}]$,

$f(x_2) = \inf\limits_{[a,b]} f(x)$ – найменше значення $\boldsymbol{f(x)}$ на інтервалі $[\boldsymbol{a,b}]$.



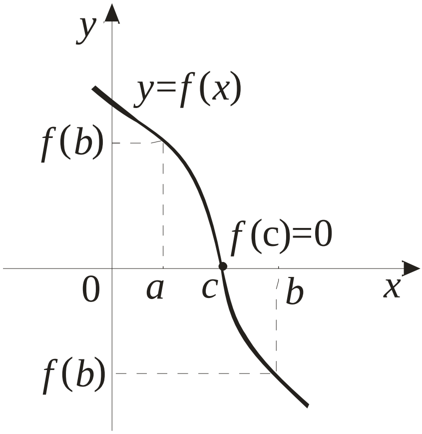
$$M = \sup_{[a,b]} f(x)$$

$$m = \inf_{[a,b]} f(x)$$

Рисунок 2.9 – Друга теорема Вейєрштрасса

7. **Перша теорема Больцано-Коши**

Якщо функція $\boldsymbol{f(x)}$ неперервна на інтервалі $[\boldsymbol{a,b}]$ і на кінцях інтервалу вона приймає значення різних знаків, то існує точка $\boldsymbol{c\in(a,b)}$, в якій $\boldsymbol{f(c)=0}$.



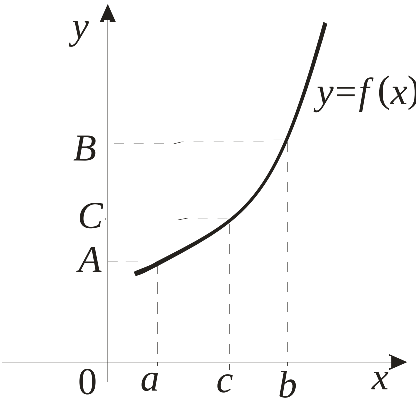
$\boldsymbol{f(a)\cdot f(b)}<0$

$\boldsymbol{c}\in[\boldsymbol{a,b}]$

Рисунок 2.10 - Перша теорема Больцано-Коши

8. **Друга теорема Больцано-Коші**

Якщо функція $\boldsymbol{f(x)}$ неперервна на інтервалі $[\boldsymbol{a,b}]$, причому $\boldsymbol{f(a)=\mathrm{A},\ f(b)=\mathrm{B}}$, то для будь якого числа **C**, що міститься між **A** і **B**, знайдеться така точка $\boldsymbol{c\in[a,b]}$, в якій $\boldsymbol{f(c)=\mathrm{C}}$.



$\mathbf{A}=\boldsymbol{f(a)};\ \mathbf{B}=\boldsymbol{f(b)}$

$\mathbf{C}=\boldsymbol{f(c)}$

$\boldsymbol{A<C<B}$

$\boldsymbol{a<c<b}$

Рисунок 2.11 - Друга теорема Больцано-Коши

§ 3 ПОХІДНА

3.1 ЗАДАЧІ, ЩО ПРИВОДЯТЬ ДО ПОХІДНОЇ

3.1.1 ЗАДАЧА ПРО ДОТИЧНУ

Нехай на площині в декартовій системі координат $\boldsymbol{Oxy}$ дана крива – графік неперервної функції $\boldsymbol{y = f(x)}$. Необхідно знайти рівняння дотичної до цієї кривої у точці $\boldsymbol{M_0(x_0, y_0)}$ (рис. 3.1).

Відомо, що $y_0 = f(x_0)$.

Розв'язання.

Дамо аргументу $\boldsymbol{x_0}$ приріст $\Delta \boldsymbol{x}$. Розглянемо точку $\boldsymbol{M_1}$ з координатами $\boldsymbol{x_1} = \boldsymbol{x_0} + \Delta \boldsymbol{x}$ та $\boldsymbol{y_1} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_0} + \Delta \boldsymbol{x})$. Проведемо січну $\boldsymbol{M_0 M_1}$.

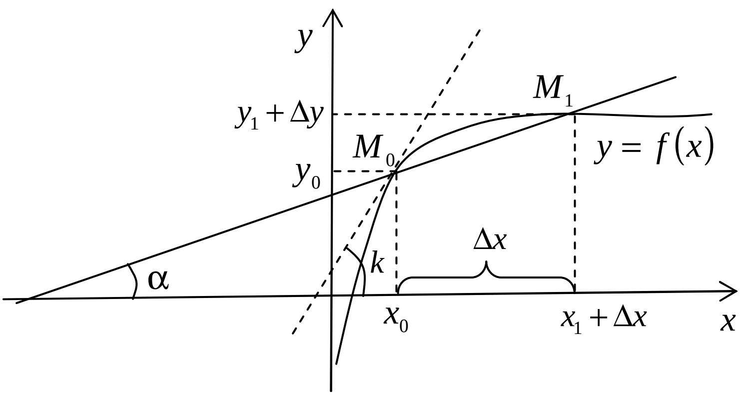


Рисунок 3.1

Означення

Дотичною до кривої $\boldsymbol{y = f(x)}$ в точці $\boldsymbol{M_0(x_0, y_0)}$ називають граничне положення січної $\boldsymbol{M_0 M_1}$ за умови, що точка $\boldsymbol{M_1}$ прямує до точки $\boldsymbol{M_0}$ (тобто $\boldsymbol{\Delta x \to 0}$).

Рівняння $\boldsymbol{M_0M_1}$ має вигляд

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}, \text{ або } y=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}(x-x_0)+y_0=\frac{\Delta y}{\Delta x}(x-x_0)+y_0.$$

Відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x}=k$ – є кутовим коефіцієнтом нахилу січної $\boldsymbol{M_0M_1}$ до осі $\boldsymbol{Ox}$, $k=tg(\alpha)$ – тангенс кута нахилу січної $\boldsymbol{M_0M_1}$ до осі $\boldsymbol{Ox}$. Якщо точка $\boldsymbol{M_1}$ прямує до точки $\boldsymbol{M_0}$ ($\boldsymbol{\Delta x \to 0}$), то гранична величина $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=k$ буде кутовим коефіцієнтом, або тангенсом кута нахилу прямої, **дотичної до графіку функції** $\boldsymbol{y=f(x)}$ **в точці** $\boldsymbol{M_0}$.

Отже рівнянням дотичної буде

$$y=f(x_0)+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}(x-x_0).$$

3.1.2 Задача про швидкість руху матеріальної точки

Нехай матеріальна точка рухається відповідно до якогось закону $S=S(t)$, де S – шлях, який пройшла точка; t – час, за який цей шлях було пройдено.

Необхідно знайти швидкість точки в момент t_0.

До моменту t_0 шлях, що був пройдений, дорівнює $S(t_0)=S_0$. А через деякий час, що дорівнює $t=t_0+\Delta t$ він стане $S=S(t_0+\Delta t)$, зміниться на $\Delta S=S(t_0+\Delta t)-S(t_0)$. Отже, за проміжок часу Δt точка буде рухатися з середньою швидкістю $v=\Delta s/\Delta t$.

Якщо проміжок часу Δt зменшувати до 0, то можна отримати граничне значення відношення, або **миттєву швидкість матеріальної точки** $v=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\Delta s/\Delta t$.

3.1.3 Задача про маргінальні вартість, доход, прибуток

Маргінальними витратами (або маргінальною вартістю продукції) називають гранично можливі витрати на виготовлення продукції в умовах хоча б постійного її відтворення. Аналогічно визначаються **маргінальний доход** і **прибуток**. Виробництво продукції та наведені економічні величини зв'язані між собою відповідними законами:

$\boldsymbol{V = V(x)}$ – залежність **витрат** від виробництва $\boldsymbol{x}$ **од.** продукції;

$\boldsymbol{D = D(x)}$ – залежність **доходу** від виробництва $\boldsymbol{x}$ **од.** продукції;

$\boldsymbol{P = P(x)}$ – залежність **прибутку** від виробництва $\boldsymbol{x}$ **од.** продукції.

Якщо підприємство підвищить випуск продукції на Δx од., то ці функції отримають приріст:

$$\boldsymbol{\Delta V(x) = V(x+\Delta x) - V(x)};$$

$$\boldsymbol{\Delta D(x) = D(x+\Delta x) -} D(\boldsymbol{x});$$

$$\boldsymbol{\Delta P(x) = P(x+\Delta x) - P(x)}.$$

Відношення цих величин до зміни випуску продукції характеризує приріст відповідних функцій на одиницю приросту продукції. Якщо приріст продукції прямує до **0**, то, якщо існує граничне значення відношення, воно і буде **маргінальною величиною**. Отже,

маргінальна вартість(або витрати) – $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta V(x)}{\Delta x}$ **грош. од.,**

маргінальний доход - $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta D(x)}{\Delta x}$ **грош. од.,**

маргінальний прибуток – $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{P(x)}{\Delta x}$ **грош. од.**

Отже, в даному розділі був розглянутий ряд задач на динаміку процесів, які звелися до задачі знаходження границі відношення

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x_0+\Delta x) - f(x_0)/\Delta x .$$

3.2 Похідна, рівняння дотичної, диференціал функції

Нехай функція $y = f(x)$ визначена та неперервна на замкненому інтервалі $[a,b]$. Візьмемо довільну точку $x_0 \in [a,b]$ і надамо аргументу довільний приріст $\Delta x \neq 0$ такий, що $x_0 + \Delta x$ не виходить за ОВФ *f(x)*. Функція $y = f(x)$ отримає приріст: $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Означення 1

Похідною функції $y = f(x)$ **за аргументом** $\boldsymbol{x}$ у точці x_0 називається границя відношення приросту функції $\boldsymbol{f(x)}$ до приросту аргументу $\boldsymbol{x}$ за умови, що приріст аргументу прямує до 0

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},. \tag{3.1}$$

якщо ця границя існує.

Якщо ця границя **скінчена**, то функція $\boldsymbol{f(x)}$ називається **диференційованою** за змінною (аргументом) $\boldsymbol{x}$ у точці x_0.

Якщо функція диференційована у кожній точці інтервалу $[a,b]$, то вона називається **диференційованою за змінною $\boldsymbol{x}$ на замкненому інтервалі** $[a,b]$.

Якщо вищевизначена границя в точці x_0 дорівнює ∞ (або $-\infty$), то за умови, що функція в цій точці неперервна, будемо говорити, що функція $\boldsymbol{f(x)}$ має в точці x_0 **нескінченну похідну**.

Похідна позначається символами

$$\boldsymbol{y', \quad f'(x_0), \quad \frac{dy}{dx}, \quad \frac{df(x_0)}{dx}}.$$

Інколи, якщо необхідно підкреслити за яким аргументом відбувається диференціювання, похідну позначають виразом з індексом. Наприклад, диференціювання за аргументом x підкреслюється так $\boldsymbol{y'_x}$.

Знаходження похідної називається **диференціюванням** функції за даним аргументом.

Наведені вище задачі зводяться до знаходження похідної від відповідних функцій за змінною $\boldsymbol{x}$.

Геометричний зміст похідної

Похідна $\boldsymbol{y'}$ дорівнює **тангенсу кута нахилу до осі $\boldsymbol{Ox}$ прямої, що є дотичною** до кривої $\boldsymbol{y = f(x)}$ у даній точці $\boldsymbol{x_0}$.

Звідси **рівняння дотичної** буде

$$y = f(x_0) + y'(x_0)(x - x_0). \tag{3.2}$$

Механічний зміст - миттєва швидкість матеріальної точки, що рухається за законом $\boldsymbol{s = s(t)}$ у момент часу $\boldsymbol{t_0}$

$$v = s'(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s(t)}{\Delta t}.$$

Економічний зміст – маргінальні значення вартості, доходу або прибутку.

Маргінальна вартість – $V'(x_0)$ грош. од.

Маргінальний доход - $D'(x_0)$ грош. од.

Маргінальний прибуток – $P'(x_0)$ грош. од.

Диференціал функції

Нехай функція $y = f(x)$ диференційована в інтервалі ***(a,b).*** Згідно з означенням похідної цієї функції маємо

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x).$$

Змінна величина відрізняється від своєї границі на нескінченно малу величину $\alpha(x)$ ($\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(x) = 0$)

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(x) \Rightarrow$$

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x)\Delta x + \alpha(x)\Delta x.$$

Функція $\boldsymbol{y = f(x)}$ неперервна, отже, за умови, що $\Delta x \to 0$ величини $\boldsymbol{\Delta f(x)}$, $\boldsymbol{f'(x)\Delta x}$ та $\boldsymbol{\alpha(x)\Delta x}$ – нескінченно малі. Але величина $\boldsymbol{\alpha(x)\Delta x}$ має більший порядок малості ніж дві перші, оскільки є добутком двох нескінченно малих величин. Отже, складова $\boldsymbol{\alpha(x)\Delta x}$ у формулі приросту функції несуттєва. Величина $\boldsymbol{f'(x)\Delta x}$ – є головною частиною приросту функції. Вона лінійна відносно $\boldsymbol{\Delta x}$.

Означення 2

Головну лінійну частину приросту функції називають **диференціалом функції** $\boldsymbol{y = f(x)}$ та позначають $\boldsymbol{dy}$ або $\boldsymbol{df(x)}$. $\boldsymbol{\Delta x}$ за умови $\boldsymbol{\Delta x \to 0}$ позначають $\boldsymbol{dx}$.
Таким чином,

$$\boldsymbol{df(x) = f'(x)dx}. \tag{3.3}$$

Звідси, $f'(x) = \dfrac{df}{dx}$ – **похідна дорівнює відношенню диференціала функції до диференціала незалежної змінної.**

На практиці часто застосовують формулу диференціала функції для наближеного обчислення значення функції для малих змін аргументу

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x, \quad \Delta x \to 0. \tag{3.4}$$

Теорема (про зв'язок неперервності з диференціюванням функції)
Якщо функція $\boldsymbol{y = f(x)}$ **диференційована** в деякій точці $\boldsymbol{x_0}$, то вона в цій точці **неперервна** (але не навпаки).

Наслідок

У точках розриву функція $\boldsymbol{y = f(x)}$ не має похідних, отже, в цих точках вона **не диференційована**.

3.3 Основні правила диференціювання функцій

Якщо $\boldsymbol{c}$ - довільне стале число, $\boldsymbol{u = u(x)}$, $\boldsymbol{v = v(x)}$ – деякі диференційовані функції від змінної $\boldsymbol{x}$, то справедливі такі правила диференціювання.

1) Похідна сталої дорівнює 0

$$(\boldsymbol{c})' = \boldsymbol{0}. \tag{3.5}$$

2) Сталу можна виносити за знак похідної. Якщо $\boldsymbol{u = u(x)}$, $\boldsymbol{c = const}$

$$(\boldsymbol{cu})' = \boldsymbol{cu'}. \tag{3.6}$$

3) Похідна алгебраїчної суми функцій дорівнює алгебраїчній сумі похідних цих функцій

$$(u(x) \pm v(x))' = u'(x) \pm v'(x). \tag{3.7}$$

4) Похідна добутку двох функцій

$$(u(x) \cdot v(x))' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x). \tag{3.8}$$

Узагальнення: похідна добутку $\boldsymbol{n}$ функцій. Якщо $f_1 = f_1(x)$, $f_2 = f_2(x)$, ..., $f_n = f_n(x)$, то

$$\begin{aligned}(f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \ldots \cdot f_n(x))' &= f_1'(x) \cdot f_2(x) \cdot \ldots \cdot f_n(x) + \\ &+ f_1(x) \cdot f_2'(x) \cdot \ldots \cdot f_n(x) + \ldots + f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \ldots \cdot f_n'(x).\end{aligned} \tag{3.9}$$

5) Похідна частки двох функцій

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}. \tag{3.10}$$

6) Похідна складеної функції.

Якщо $\boldsymbol{y = f(u)}$, $\boldsymbol{u = \varphi(x)}$, тобто $\boldsymbol{y = f(\varphi(x))}$ – **складена функція**, або **суперпозиція**, складена з диференційованих функцій $\boldsymbol{\varphi}$ і $\boldsymbol{f}$, то

$y_x' = y_u' \cdot u_x'$, або

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}\,. \tag{3.11}$$

7) Зв'язок похідної функції $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ за змінною $\boldsymbol{x}$ та похідної оберненої функції $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y})$ за змінною $\boldsymbol{y}$.

Якщо для функції $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ існує обернена диференційована функція $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y})$, причому $\dfrac{dg}{dy}=x'_y\neq 0$, то

$$y'_x=\frac{1}{x'_y}\,. \tag{3.12}$$

3.4 Таблиця похідних основних елементарних функцій

На основі визначення похідної і правил диференціювання можна скласти таблицю похідних основних елементарних функцій. Нехай $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$

1. $\left(u^n(x)\right)'=n\cdot u^{n-1}(x)\cdot u'(x);$
2. $\left(a^{u(x)}\right)'=a^{u(x)}\cdot\ln(a)\cdot u'(x),\quad a\in(0;1)\cup(1;+\infty);$
3. $\left(e^{u(x)}\right)'=e^{u(x)}\cdot u'(x);$
4. $\left(\log_a u(x)\right)'=\dfrac{u'}{u\ln a},\quad a\in(0;1)\cup(1;+\infty);$
5. $\left(\ln u(x)\right)'=\dfrac{u'(x)}{u};$
6. $\left(\sin u(x)\right)'=\cos u(x)\cdot u'(x);$
7. $\left(\cos u(x)\right)'=-\sin u(x)\cdot u'(x);$
8. $\left(tg\,u(x)\right)'=\dfrac{u'(x)}{\cos^2(u)};$
9. $\left(ctg\,u(x)\right)'=-\dfrac{u'(x)}{\sin^2(u)};$

10. $\left(\arcsin u(x)\right)' = \dfrac{u'(x)}{\sqrt{1-u^2}}$;

11. $\left(\arccos\ u(x)\right)' = -\dfrac{u'(x)}{\sqrt{1-u^2}}$;

12. $\left(arctg\, u(x)\right)' = \dfrac{u'(x)}{1+u^2}$;

13. $\left(arcctg\, u(x)\right)' = -\dfrac{u'(x)}{1+u^2}$.

3.5 ПРИКЛАДИ ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ ФУНКЦІЙ

Приклад 1

Довести, що функція $y = |x|$ не диференційована в точці $x = 0$.

Доведення

Розглянемо графік функції $y = |x|$.

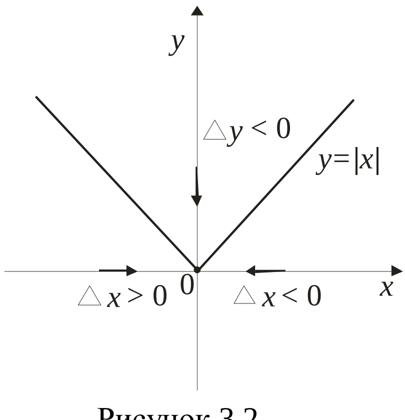


Рисунок 3.2

Похідна $y = |x|$ у точці $x = 0$ за означенням дорівнює

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|x + \Delta x| - |x|}{\Delta x}.$$

Ця границя існує, якщо існують рівні однобічні границі. Перевіримо. Виходячи із знаку Δx в разі, коли наближаємося до точки $\boldsymbol{x=0}$ ліворуч і праворуч, можемо записати

$$\lim_{\Delta x\to 0_{-0}}\frac{|0+\Delta x|-|0|}{\Delta x}=1;\quad \lim_{\Delta x\to 0_{+0}}\frac{|0+\Delta x|-|0|}{\Delta x}=-1,$$

отже, однобічні границі нерівні і можна зробити висновок, що в точці $\boldsymbol{x=0}$ границя $\boldsymbol{lim}_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ не існує, відповідно не існує і похідна функції $y=|x|$.

Що і потрібно було довести.

Відмітимо, що сама функція $y=|x|$ у точці $\boldsymbol{x=0}$ існує і **неперервна**. Отже, даний приклад ілюструє, що **неперервність** функції у деякій точці **не є запорукою існування в цій точці похідної функції.**

Приклад 2

Знайти похідну таких функцій

$$y=x^2,\ y=5x,\ y=\sqrt{x},\ y=5\left(x^2+3x+1\right)^3-\frac{5}{\sqrt[3]{(3x+5)}}.$$

Розв'язання

1. Функція $y=x^2$ – степенева функція з показником степені $\boldsymbol{n=2}$. За таблицею похідних (п.1) $\left(x^n\right)'=nx^{n-1}$. Отже, $y'=\left(x^2\right)'=2x^{2-1}=2x$.

2. Функція $y=5x$. Цю функцію можна розглядати як степеневу із показником степені $n=1$ та з постійним коефіцієнтом 5 перед функцією. Отже, за властивістю 2, сталу 5 можна винести за знак диференціювання, а від функції y = x взяти похідну як табличну, п.1.

$$y'=5\left(x^1\right)'=5\cdot 1\cdot x^{1-1}=5\cdot x^0=5\cdot 1=5.$$

3. Функція $y = \sqrt{x}$. Цю функцію можна розглядати як степеневу із показником степені $n = \frac{1}{2}$. Отже, будемо мати

$$y' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

4. Функція $y = 5\left(x^2 + 3x + 1\right)^3 - \frac{5}{\sqrt[3]{(3x+5)}}$. Маємо різницю двох функцій. Функція $u(x) = 5\left(x^2 + 3x + 1\right)^3$ та функція $v(x) = \frac{5}{\sqrt[3]{(3x+5)}}$.

Отже, за властивістю (3) будемо мати

$$y' = \left(u(x) - v(x)\right)' = u'(x) - v'(x).$$

Тепер розглянемо знаходження u' та v'

а) функцію $u(x)$ можна подати як функцію аргументу s: $u = 5s^3$, який у свою чергу є функцією аргументу x: $s = x^2 + 3x + 1$. Отже, це складена функція і за правилом диференціювання складеної функції (властивість 6) будемо мати

$$u'(x) = u'(s) \cdot s'(x).$$

Знайдемо $\boldsymbol{u'(s)}$: $u'(s) = \left(5s^3\right)' = 5\left(s^3\right)' = 5 \cdot 3 \cdot s^{3-1} = 15s^2$.

Знайдемо $\boldsymbol{s'(x)}$:

$$s'(x) = \left(x^2 + 3x + 1\right)' = \left(x^2\right)' + (3x)' + (1)' = 2x + 3 + 0 = 2x + 3.$$

Отже, $u'(x) = u'(s) \cdot s'(x) = 15 \cdot s^2 \cdot (2x+3)$, або, враховуючи, що $\boldsymbol{s = x^2 + 3x + 1}$, отримаємо

$$u'(x) = 15 \cdot s^2 \cdot (2x+3) = 15 \cdot \left(x^2 + 3x + 1\right)^2 \cdot (2x+3).$$

б) функція $v(x)=\dfrac{5}{\sqrt[3]{(3x+5)}}$ – степенева функція із сталим коефіцієнтом 5. Її можна подати у вигляді $v(x)=5(3x+5)^{-\frac{1}{3}}$. Ця функція теж складна: $v=v(r)=5\cdot r^{-\frac{1}{3}}$, $r=r(x)=(3x+5)$. Отже,

$$v'(x)=v'(r)\cdot r'(x);\quad v'(r)=\left(5\cdot r^{-\frac{1}{3}}\right)'=5\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)r^{-\frac{1}{3}-1}=$$

$$=-\frac{5}{3}r^{-\frac{4}{3}}=\frac{-5}{3\cdot\sqrt[3]{r^4}}=\frac{-5}{3\cdot r\cdot\sqrt[3]{r}};$$

$$r'(x)=(3x+5)'=(3x)'+(5)'=3x;$$

$$v'(x)=v'(r)\cdot r'(x)=\frac{-5}{3\cdot r\cdot\sqrt[3]{r}}\cdot(3x). \qquad (**)$$

Враховуючи, що $r(x)=(3x+5)$, і виконавши у (**) спрощення, отримаємо кінцевий результат

$$v'(x)=\frac{-5x}{(3x+5)\cdot\sqrt[3]{(3x+5)}}.$$

Приклад 3 (економічний)

Для функцій витрат підприємства (у грн) $V(x)=0.001x^3-0.3x^2+40x+1000$ знайти маргінальну вартість як функцію $\boldsymbol{x}$ та обчислити маргінальну вартість, коли $x_1=50$, $x_2=100$, $x_3=150$ од. прод.

Розв'язання

Згідно з визначенням маргінальної вартості у п. 3.1.3, маргінальна вартість продукції є похідною функції витрат на виготовлення продукції. Отже,

$$V'(x)=\left(0.001x^3-0.3x^2+40x+1000\right)'=$$

$$=0.001\cdot 3\cdot x^2-0.3\cdot 2\cdot x+40=0.003x^2-0.6x+40.$$

Отримана формула вірна для будь - якої кількості продукції. Обчислимо тепер значення маргінальної вартості для $x_1 = 50,\ x_2 = 100,\ x_3 = 150$ од. прод.

$$V'(50) = 0.003 \cdot (50)^2 - 0.6 \cdot 50 + 40 = 7.5 - 30 + 40 = 17.5;$$
$$V'(100) = 0.003 \cdot (100)^2 - 0.6 \cdot 100 + 40 = 30 - 50 + 40 = 10;$$
$$V'(150) = 0.003 \cdot (150)^2 - 0.6 \cdot 150 + 40 = 67.5 - 90 + 40 = 17.5.$$

Отже, вартість виготовлення 51-ї та 151-ї одиниць продукції складатимуть по 17,5 гривень, а вартість 101-ї одиниці продукції – 10 гривень.

3.6 Диференціювання деяких видів функцій

3.6.1 Диференціювання функції, заданої неявно

Якщо функціональна залежність між **y** та **x** задана неявно, тобто рівністю

$$\boldsymbol{F(x, y) = 0}, \qquad (*)$$

тоді для знаходження $\boldsymbol{y'_x}$ необхідно продиференціювати рівняння (*) за аргументом x, враховуючи, що $\dfrac{dy}{dx} = y', \dfrac{dx}{dx} = 1$.

Отримаємо рівняння

$$\frac{d}{dx} F(x, y) = 0. \qquad (3.13)$$

Потім розв’яжемо це рівняння відносно $\boldsymbol{y'}$.

Приклад

Знайти похідну $\boldsymbol{y'}$ для функції

$$F(x, y) = \ln(xy) + 2x^2 + y + 3x^2 y^3.$$

Розв’язання

Функція задана неявно. Знайдемо $\dfrac{d}{dx} F(x, y) = 0$.

$$\frac{d}{dx}\left(\boldsymbol{ln(}\,xy\,\boldsymbol{)}+2x^2+y+3x^2y^3\right)=\frac{d\,\boldsymbol{ln}(xy)}{dx}+\frac{d\left(2x^2\right)}{dx}+\frac{dy}{dx}+\frac{d\left(3x^2y^3\right)}{dx}=0$$

З таблиці похідних елементарних функцій беремо похідну для $y=\ln(u)$: $y'=\dfrac{u'}{u}$ та похідну для $y=u^n$: $y'=ny^{n-1}$. З правил диференціювання беремо правило диференціювання добутку 2-х функцій.

Отримаємо

$$\frac{d}{dx}\left(\boldsymbol{ln(}\,xy\,\boldsymbol{)}+2x^2+y+3x^2y^3\right)=\frac{(xy)'}{xy}+2\cdot 2x+y'+3\left(x^2y^3\right)'=$$

$$=\frac{y+xy'}{xy}+4x^2+y'+3\left(2xy^3+x^2\cdot 3y^2y'\right)=$$

$$=\frac{1}{x}+\frac{y'}{y}+4x^2+y'+6xy^3+9x^2y^2y'=0;$$

Об'єднаємо доданки, які мають y′ і перенесемо їх у праву частину

$$\frac{1}{x}+4x^2+6xy^3=-y'\left(\frac{1}{y}+1+9x^2y^2\right).$$

Звідси,

$$y'=-\frac{y\left(1+4x^3+6x^2y^3\right)}{x\left(1+y+9x^2y^3\right)}.$$

3.6.2 Диференціювання функції, заданої параметрично

Нехай функція $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x}\right)$ задана параметрично

$$\begin{cases}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{t})\\ \boldsymbol{y}=\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{t}),\end{cases}$$

де $\boldsymbol{t}$ – параметр, $\varphi(t)$, $\psi(t)$ - неперервні функції від параметра $\boldsymbol{t}$.

Якщо надати приросту змінній $\boldsymbol{t}$, приріст отримають і функції $\boldsymbol{x}$ та $\boldsymbol{y}$, а точка з координатами $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ буде рухаться із зміною $\boldsymbol{t}$ на площині $\boldsymbol{Oxy}$ траєкторією $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$. Якщо за приріст $\boldsymbol{t}$ взяти $\boldsymbol{\Delta t}$, то приріст $\boldsymbol{x}$ і $\boldsymbol{y}$ можна виразити так: $\boldsymbol{\Delta x} = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{t} + \boldsymbol{\Delta t}) - \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{t})$ та $\boldsymbol{\Delta y} = \boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{t} + \boldsymbol{\Delta t}) - \boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{t})$. Причому $\boldsymbol{\Delta x} \xrightarrow[\Delta t \to 0]{} \boldsymbol{0}$ та $\boldsymbol{\Delta y} \xrightarrow[\Delta t \to 0]{} \boldsymbol{0}$. Тому

$$y'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\dfrac{\Delta y}{\Delta t}}{\dfrac{\Delta x}{\Delta t}} = \frac{\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta t}}{\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta x}{\Delta t}} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

Отже, похідну функції, яка задана параметрично, знаходять за формулою

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}. \tag{3.14}$$

Приклад

Знайти похідну y′ функції, заданої параметрично

$$\begin{cases} x = t^5 + 2t \\ y = t^3 + 8t - 1. \end{cases}$$

Розв'язання

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t};$$

$$x'_t = \left(t^5 + 2t\right)' = 5t^4 + 2;$$

$$y'_t = \left(t^3 + 8t - 1\right)' = 3t^2 + 8;$$

$$y'_x = \frac{3t^2 + 8}{5t^4 + 2}.$$

3.6.3 Диференціювання степенево - показникової функції $y=f(x)^{\varphi(x)}$

Для спрощення процесу диференціювання прологарифмуємо функцію $y=f(x)^{\varphi(x)}$ за основою $\boldsymbol{e}$ (візьмемо натуральній логарифм від даної функції). Отримаємо

$$\boldsymbol{ln}(y)=\boldsymbol{ln}\left(f(x)^{\varphi(x)}\right)=\varphi(x)\boldsymbol{ln}(f(x)).$$

Тепер візьмемо похідну лівої і правої частин виразу як похідну неявної функції. Правий вираз являє собою добуток двох функцій $u(x)=\varphi(x)$; $v(x)=\boldsymbol{ln}(f(x))$, тому праву частину диференціюємо за властивостю 4: $(u(x)\cdot v(x))'=u'v+uv'$.

З таблиці похідних візьмемо похідну натурального логарифма: $(\ln u)'=\dfrac{u'}{u}$.

Отримаємо

$$(\ln(y))'=(\varphi(x)\cdot\ln(f(x)))'\Rightarrow\frac{y'}{y}=\varphi'(x)\cdot\ln(f(x))+\frac{\varphi(x)\cdot f'(x)}{f(x)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y'=y\cdot\varphi'(x)\cdot\ln(f(x))+y\cdot\frac{\varphi(x)\cdot f'(x)}{f(x)}.$$

Враховуючи, що $y=f(x)^{\varphi(x)}$, отримаємо

$$y'=f(x)^{\varphi(x)}\cdot\boldsymbol{ln}|f(x)|\varphi'(x)+\varphi(x)\cdot f(x)^{\varphi(x)-1}f'(x). \quad (3.15)$$

Формулу (3.15) можна отримати ще й іншим шляхом, якщо від вихідної степенево-показникової функції $f(x)^{\varphi(x)}$ взяти спочатку похідну, як від показникової функції $a^{\varphi(x)}$ з основою $a=f(x)$ і степенем $\varphi(x)$ (п.2 таблиці похідних), а потім похідну, як від степеневої функції $f(x)^n$, де $n=\varphi(x)$ (п.1 таблиці похідних). Доданок отриманих похідних і дасть нам похідну y' для вихідної функції.

Приклад

Знайти похідну y' функції $y=(\sin 3x)^{5x^3-4}$.

Розв'язання

1. Логарифмуємо функцію $\ln(y)=\left(5x^3-4\right)\cdot\ln(\sin 3x)$. Диференціюємо праву і ліву частини

$$\frac{y'}{y}=\left(5x^3-4\right)'\cdot\ln(\sin 3x)+\left(5x^3-4\right)\left(\ln(\sin 3x)\right)';$$

$$\frac{y'}{y}=15x^2\cdot\ln(\sin 3x)+\frac{\left(5x^3-4\right)(\sin 3x)'}{\sin(3x)}=15x^2\cdot\ln(\sin 3x)+$$

$$+\frac{\left(5x^3-4\right)\cdot\cos(3x)\cdot(3x)'}{\sin(3x)}=15x^2\cdot\ln(\sin 3x)+3\cdot\left(5x^3-4\right)\cdot ctg(3x);$$

$$y'=y\cdot\left(15x^2\cdot\ln(\sin 3x)+3\cdot\left(5x^3-4\right)\cdot ctg(3x)\right)=$$

$$=(\sin 3x)^{5x^3-4}\cdot\left(15x^2\cdot\ln(\sin 3x)+3\cdot\left(5x^3-4\right)\cdot ctg(3x)\right).$$

2. Тепер розглянемо інший шлях.

а) розглядаємо вихідну функцію $y=(\sin 3x)^{5x^3-4}$ як показникову з основою $a=\boldsymbol{\sin} 3x$. Похідна такої функції згідно з таблицею похідних буде

$$\left(a^{5x^3-4}\right)'=a^{5x^3-4}\cdot\boldsymbol{\ln}(a)\cdot\left(5x^3-4\right)'=(\boldsymbol{\sin} 3x)^{5x^3-4}\cdot\boldsymbol{\ln}(\boldsymbol{\sin} 3x)\cdot 15x^2;$$

б) розглядаємо вихідну функцію $y=(\sin 3x)^{5x^3-4}$ як степеневу з показником степені $n=5x^3-4$. Похідна такої функції згідно з таблицею похідних буде

$$\left((\boldsymbol{\sin} 3x)^n\right)'=n\cdot(\boldsymbol{\sin} 3x)^{n-1}\cdot(\boldsymbol{\sin} 3x)'=\left(5x^3-4\right)\cdot(\boldsymbol{\sin} 3x)^{5x^3-5}\cdot 3\cdot\boldsymbol{\cos} 3x;$$

в) додамо отримані похідні

$$(\boldsymbol{\sin} 3x)^{5x^3-4}\cdot\boldsymbol{\ln}(\boldsymbol{\sin} 3x)\cdot 15x^2+\left(5x^3-4\right)\cdot(\boldsymbol{\sin} 3x)^{5x^3-5}\cdot 3\cdot\boldsymbol{\cos} 3x=$$

$$=(\boldsymbol{\sin} 3x)^{5x^3-4}\cdot\left(\boldsymbol{\ln}(\boldsymbol{\sin} 3x)\cdot 15x^2+\left(5x^3-4\right)\cdot(\boldsymbol{\sin} 3x)^{-1}\cdot 3\cdot\boldsymbol{\cos} 3x\right)=$$

$$=(\boldsymbol{\sin} 3x)^{5x^3-4}\cdot\left(15x^2\cdot\boldsymbol{\ln}(\boldsymbol{\sin} 3x)+3\cdot\left(5x^3-4\right)\cdot ctg 3x\right).$$

Отримані обома способами результати диференціювання співпали, тобто

$$y' = (\sin 3x)^{5x^3-4} \cdot \left(15x^2 \cdot \ln(\sin 3x) + 3 \cdot \left(5x^3 - 4\right) \cdot ctg 3x\right).$$

3.7 Похідні вищих порядків

Нехай ми знайшли для функції $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ її похідну $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})$. Якщо отримана функція $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})$ є неперервною функцією від аргументу $\boldsymbol{x}$ і $\boldsymbol{y}' \neq \boldsymbol{0}$, то можна розглянути приріст цієї функції і границю частки

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x+\Delta x) - f'(x)}{\Delta x}.$$

Якщо така границя існує, то вона носить назву похідної другого порядку функції $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ за аргументом $\boldsymbol{x}$, або другої похідної функції $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$. Позначається друга похідна одним із способів

$$y''; \; f''(x); \; \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right); \; \frac{d^2 y}{dx^2}. \tag{3.16}$$

Аналогічно визначаються й позначаються похідні:

3-го порядку – $y'''; \; f'''(x); \; \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{d^2 y}{dx^2}\right); \; \dfrac{d^3 y}{dx^3};$

4-го порядку – $y^{IV}; \; f^{IV}(x); \; \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{d^3 y}{dx^3}\right); \; \dfrac{d^4 y}{dx^4}$

і взагалі похідна n-го порядку - $y^{(n)}; \; f^{[n]}(x); \; \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\right); \; \dfrac{d^n y}{dx^n}.$

Головною умовою розглядання кожної наступної похідної є неперервність попередньої. Але існування наступної похідної забезпечує **тільки** існування границі відношення приросту попередньої похідної до приросту аргументу за умови, що приріст аргументу прямує до 0.

Якщо з'ясовується, що чергова похідна від функції $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ є тотожна 0, тобто $f^{(n)}(x) = 0 \;\; \forall x \in D\left(f^{(n)}(x)\right)$, то похідні старших порядків, ніж ***n*** для такої функції розглядати немає сенсу, не дивлячись на те, що $f^{(n)}(x) = 0$ є неперервною функцією на всій області визначення.

Приклад 1

Обчислити всі похідні функції $y = x^5 + 5x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 1$.

Розв'язання

$$y' = 5 \cdot x^4 + 5 \cdot 4 \cdot x^3 + 2 \cdot 3 \cdot x^2 - 3 \cdot 2 \cdot x;$$

$$y'' = (y')' = 20 \cdot x^3 + 60 \cdot x^2 + 12 \cdot x - 6;$$

$$y''' = (y'')' = 60 \cdot x^2 + 120 \cdot x + 12;$$

$$y^{IV} = (y''')' = 120 \cdot x + 120;$$

$$y^{V} = \left(y^{IV}\right)' = 120 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5! = const;$$

$$y^{VI} = (120)' = 0.$$

Процес диференціювання функції припиняється. Вихідна функція $y = x^5 + 5x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 1$ має ненульові похідні з 1-го по 5-й порядок.

Приклад 2

Обчислити похідну $\boldsymbol{y''}$ функції $y = (3x^3 - 2x + 1)\sin x$.

Розв'язання

Знайдемо y' за правилом диференціювання добутку функцій

$$u(x) = (3x^2 - 2x + 1); \quad v(x) = \sin x \Rightarrow f' = (uv)' = u'v + v'u,$$

$$u' = (3x^2 - 2x + 1)' = 3 \cdot 2 \cdot x - 2; \quad v' = (\sin 5x)' = \cos 5x \cdot 5 = 5\cos 5x,$$

$$y' = (6x - 2) \cdot \sin 5x + (3x^2 - 2x + 1) \cdot 5\cos 5x =$$

$$= (6x - 2) \cdot \sin 5x + 5 \cdot (3x^2 - 2x + 1) \cdot \cos 5x.$$

Тепер візьмемо першу похідну від функції y', яка є першою похідною від даної

$$y'' = (y')' = \left((6x-2)\cdot\sin 5x + 5\cdot\left(3x^2-2x+1\right)\cdot\cos 5x\right)' =$$

$$= \left((6x-2)\cdot\sin 5x\right)' + \left(5\cdot\left(3x^2-2x+1\right)\cdot\cos 5x\right)' =$$

$$= 6\cdot\sin 5x + (6x-2)\cdot 5\cos 5x + 5(6x-2)\cdot\cos 5x +$$

$$+5\left(3x^2-2x+1\right)\cdot 5\cdot(-\sin 5x) = \sin 5x\left(6-25\left(3x^2-2x+1\right)\right) +$$

$$+20\cos 5x\cdot(3x-1) = \left(6-75x^2+50x-25\right)\sin 5x + 20(3x-1)\cos 5x =$$

$$= 20(3x-1)\cos 5x - \left(75x^2-50x+19\right)\sin 5x\,.$$

Відповідь $y'' = 20(3x-1)\cos 5x - \left(75x^2-50x+19\right)\sin 5x$.

3.8 Основні теореми диференціального числення

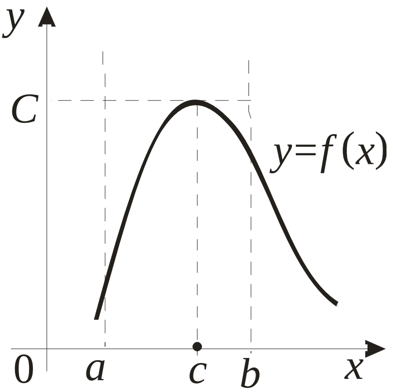
Застосування похідної на практиці було б неможливим без теорем, які були доведені великими математиками Франції під час розквіту природничих наук у 17-му та 18-му сторіччах.

Теорема Ферма

Якщо функція $\boldsymbol{y = f(x)}$ диференційована на проміжку $[\boldsymbol{a,b}]$ і досягає свого **найбільшого** або **найменшого** значення у **внутрішній** точці інтервалу $\boldsymbol{c \in [a,b]}$, то її похідна в цій точці дорівнює нулю

$$\boldsymbol{y'(c) = 0}\,. \tag{3.17}$$

Геометричний зміст теореми – дотична до точки найбільшого або найменшого значення функції, яке досягається в середині інтервалу в точці $c \in [a,b]$, паралельна осі абсцис. Кут нахилу дотичної до $y = f(x)$ у точці з координатами $(c, y(c))$ - $\alpha = 0$, отже, $y'(c) = tg\alpha = 0$.



$$\sup_{[a,b]} f(x) = C$$
$$C = f(c)$$
$$a < c < b$$

Рисунок 3.3 – Теорема Ферма

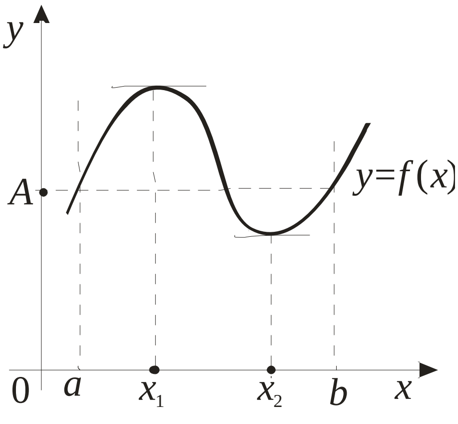
Теорема Ролля

Нехай функція $\boldsymbol{y = f(x)}$ задовольняє таким умовам:

1. Неперервна на замкненому інтервалі $[\boldsymbol{a,b}]$.
2. Диференційована на відкритому інтервалі $(\boldsymbol{a,b})$.
3. На кінцях інтервалу набуває рівні значення $\boldsymbol{f(a) = f(b)}$.

Тоді всередині інтервалу існує хоча б одна точка $\boldsymbol{x_0}$, в якій похідна від функції дорівнює **0**

$$\boldsymbol{f'(x_0) = 0}.$$



$$f(a) = f(b) = A$$
$$f'(x_1) = 0; \quad f'(x_2) = 0$$
$$x_1, x_2 \in [a,b]$$

Рисунок 3.4 – Теорема Ролля

Теорема Ролля є частинним випадком теореми Лагранжа.

Теорема Лагранжа (про скінчений приріст функції)

Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на інтервалі замкненому $[a,b]$ і має похідну в кожній точці відкритого інтервалу (a,b), то у середині цього інтервалу існує хоча б одна точка $\xi\ (a < \xi < b)$ така, що виконується рівність

$$\frac{f(b) - f(a)}{b-a} = f'(\xi), \tag{3.18}$$

або

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a). \tag{3.18*}$$

Формулу (3.14) називають **формулою Лагранжа**.

Механічний зміст теореми Лагранжа

$\boldsymbol{f(b) - f(a)}$ – зміна функції на інтервалі $[a,b]$;

$\dfrac{f(b) - f(a)}{b-a}$ - середня швидкість зміни функції на $[\boldsymbol{a,b}]$;

$\boldsymbol{y'}$ - це миттєва швидкість зміни функції в точках інтервалу $[\boldsymbol{a,b}]$.

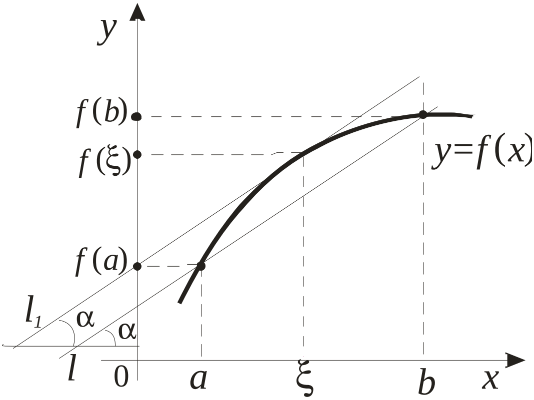
Отже, теорема Лагранжа стверджує, **що всередині інтервалу $[\boldsymbol{a,b}]$ існує хоча б одна точка $\boldsymbol{c}$, миттєва швидкість зміни функції в якій дорівнює середній швидкості зміни функції на цьому інтервалі.**

Геометричний зміст теореми Лагранжа.

Якщо через точки графіка $\boldsymbol{A = f(a)}$ та $\boldsymbol{B = f(b)}$ провести січну $\boldsymbol{AB}$, то її кутовий коефіцієнт буде дорівнювати $k = \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a}$.

Будемо зміщати січну паралельно собі самій до тих пір, доки вона не перетвориться на дотичну в деякій точці $\boldsymbol{x_0}$. Коефіцієнт дотичної в точці $\boldsymbol{x_0}$, як відомо, дорівнює $\boldsymbol{k = y'(x_0)}$. З іншого боку, оскільки ми переміщували січну паралельно собі самій, то кутовий коефіцієнт її залишився рівним $k=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Отже, якщо така точка $\boldsymbol{x_0}$ існує, то в ній $y'(x_0)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Теорема Лагранжа твердить, що ***така точка існує.***



$$l: tg\alpha=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$l_1: tg\alpha=f'(\xi)$$

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Рисунок 3.5 – Теорема Лагранжа

Слідство з теореми Лагранжа

Якщо похідна функції $y=f(x)$ дорівнює нулю на деякому інтервалі $[a,b]$, то функція на цьому інтервалі тотожно стала.

Правило Лопіталя

Теорема

Границя відношення двох нескінченно малих або двох нескінченно великих дорівнює границі відношення їх похідних (скінченій або нескінченній) якщо така границя існує.

Отже,

1) якщо $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=0\, ma \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} g(x)=0,$

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\frac{f(x)}{g(x)}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\frac{f'(x)}{g'(x)}; \qquad (3.19)$$

2) якщо $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=\infty$ *та* $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} g(x)=\infty$,

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\frac{f(x)}{g(x)}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{3.19*}$$

За допомогою правила Лопіталя розкриваються невизначеності типу $\left\{\frac{0}{0}\right\}$, $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$, $\{0\cdot\infty\}$ в границях (п.2.1.6).

Приклад

Знайти границі 1. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}$; 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^4}{a^x}$.

$$1.\ \lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x)'}{(e^x)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^x}=\frac{1}{\infty}=0;$$

$$2.\ \lim_{x\to\infty}\frac{x^4}{a^x}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^4)'}{(a^x)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{4\cdot x^3}{a^x\ln(a)}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(4\cdot x^3)'}{(a^x\cdot\ln(a))'}=\lim_{x\to\infty}\frac{4\cdot 3\cdot x^2}{a^x\ln^2(a)}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{x\to\infty}\frac{(12\cdot x^2)'}{(a^x\ln^2(a))'}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{12\cdot 2\cdot x}{a^x\ln^3(a)}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{x\to\infty}\frac{(24\cdot x)'}{(a^x\ln^3(a))'}=\lim_{x\to\infty}\frac{24}{a^x\ln^4(a)}=\frac{24}{\infty}=0.$$

3.9 Застосування похідної для дослідження функції

Для дослідження характеру поведінки графіка функції $\boldsymbol{y=f(x)}$ важливим є визначення:

– інтервалів монотонності функції (інтервалів зростання та спадання);

– характерних точок функції – точок локальних екстремумів функції і точок найбільшого або найменшого значення функції на інтервалі дослідження;

– інтервалів опуклості та угнутості функції та точок перегину;

– характеру поведінки функції на безкінечності та за умов існування точок розриву (дослідження на наявність асимптот функції).

За умов наявності інформації про функцію за всіма цими пунктами графік функції можна легко побудувати на координатній площині. Всі указані пункти можуть бути визначені за допомогою похідних функції 1-го та 2-го порядку $\boldsymbol{y'} = \boldsymbol{f'}(\boldsymbol{x})$ та $\boldsymbol{y''} = \boldsymbol{f''}(\boldsymbol{x})$.

3.9.1 Зростання, спадання та екстремум функції

Згадаємо, що функція $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ називається строго монотонною на деякому інтервалі $[a,b]$, якщо на цьому інтервалі для неї виконуються умови $\forall x_1, x_2 \in [a,b]: x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$ – умови зростання, або умови

$\forall x_1, x_2 \in [a,b]: x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$ – умови спадання.

Теорема про достатню умову зростання(спадання) функції

Якщо похідна диференційованої функції $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ додатна (від'ємна) на деякому інтервалі $[x_1, x_2]$, то сама функція на цьому інтервалі **монотонно зростає** (спадає).

Доведення

Нехай функція $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ диференційована і має додатну (від'ємну) похідну на інтервалі $[x_1, x_2]$, $x_1 < x_2$.

Оскільки функція диференційована на інтервалі $[x_1, x_2]$, для неї виконується теорема Лагранжа

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1),$$

де $\boldsymbol{\xi} \in [\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}]$, оскільки $\boldsymbol{\xi} \in [\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}] \Rightarrow \boldsymbol{f'}(\boldsymbol{\xi}) > \boldsymbol{0}$ $(f'(\xi) < 0)$.

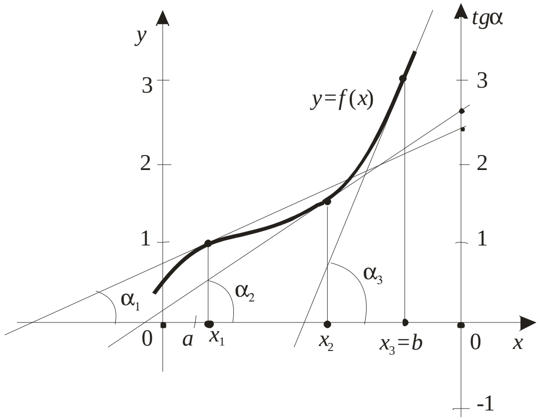
Тобто добуток $\boldsymbol{f'}(\boldsymbol{\xi}) \cdot (\boldsymbol{x_2} - \boldsymbol{x_1}) > \boldsymbol{0}$ $(f'(\xi) \cdot (x_2 - x_1) < 0)$ і отже,

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_2}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_1}) > \boldsymbol{0} \quad (f(x_2) - f(x_1) < 0) \Rightarrow$$

$\Rightarrow \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_2) > \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1) \quad \left(f(x_2) < f(x_1)\right)$.

Необхідна умова зростання (спадання) функції на інтервалі

Якщо функція $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ монотонно зростає (спадає) на інтервалі $[\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2]$, то її похідна на цьому інтервалі набуває не від’ємне (не додатне) значення, тобто $\forall \boldsymbol{x} \in [\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2]\boldsymbol{:}\ \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}) \geq \boldsymbol{0} \quad \left(f'(x) \leq 0\right)$.



$$\left.\begin{aligned} tg\alpha_1 &= f'(x_1) > 0 \\ tg\alpha_2 &= f'(x_2) > 0 \\ tg\alpha_3 &= f'(x_3) > 0 \end{aligned}\right\} f(x)\uparrow$$

Рисунок 3.6

Означення 1

Інтервали (проміжки), в яких функція зростає або спадає називаються **інтервалами (проміжками) монотонності** даної функції.

Екстремум функції

Означення 2

Точка $\boldsymbol{x}_0$ називається **точкою максимума** функції $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$, якщо у будь -якому достатньо малому околі $\boldsymbol{\delta}$ цієї точки для всіх $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{\delta}$ виконується нерівність

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \leq \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0).$$

Точка x_0 називається **точкою мінімума** функції $f(x)$, якщо у будь -якому достатньо малому околі δ цієї точки для всіх $x \in \delta$ виконується нерівність

$$f(x) \geq f(x_0).$$

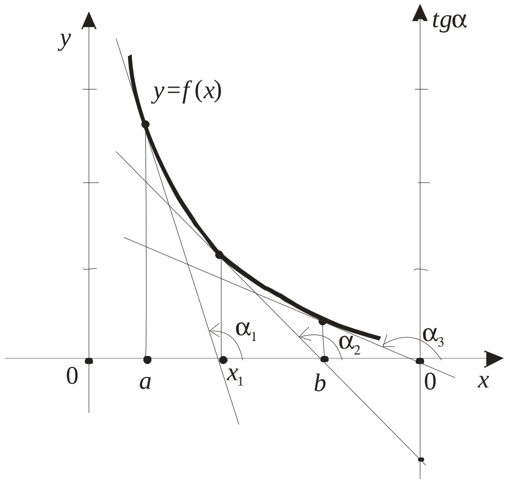
Значення функції $f(x)$ у цих точках називають відповідно **максимумом** і **мінімумом** функції $f(x)$. Позначають відповідно $f_{max}(x)$ та $f_{min}(x)$. Можна записати

$$f_{\max}(x) = f(x_0) : \left(\forall x \in |x_0 - x| < \delta,\ \delta \to 0\right) : \left(f(x) < f(x_0)\right); \qquad (3.20)$$

$$f_{\min}(x) = f(x_0) : \left(\forall x \in |x_0 - x| < \delta,\ \delta \to 0\right) : \left(f(x) > f(x_0)\right). \qquad (3.20^*)$$

Мінімум і максимум функції $y = f(x)$ об'єднуються загальною назвою **екстремум функції**.

Виходячи з визначення екстремума, можна зробити висновок, що екстремум є найбільшим (найменшим) значенням функції в деякому малому околі точки x_0, тому екстремум функції називають **локальним екстремумом функції.** На інтервалі дослідження функції, який значно відрізняється від 0, функція може мати декілька максимумів (мінімумів).



$$\left.\begin{aligned} tg\alpha_1 &= f'(a) < 0 \\ tg\alpha_2 &= f'(x_1) < 0 \\ tg\alpha_3 &= f'(b) < 0 \end{aligned}\right\} f(x)\downarrow$$

Рисунок 3.7

В економіці поширена назва локального екстремума **локальний оптимум.** А процес його знаходження – **оптимізацією.**

Необхідна умова існування екстремума. Якщо диференційована функція $y = f(x)$ в точці x_0 має локальний екстремум, то для неї виконані умови теореми Ферма (досягає найбільшого (найменшого) значення у внутрішній точці деякого інтервалу). Отже, за цією теоремою, в екстремальній точці

$$\boldsymbol{f'(x_0) = 0}. \tag{3.21}$$

Але функція може досягати екстремума і в точках, в яких похідна не існує, або дорівнює безкінечності. Наприклад, функція $\boldsymbol{f(x) = |x|}$ у точці $\boldsymbol{x = 0}$ похідної немає (див. п. 3.5, приклад 1), а екстремум у цій точці є – $\boldsymbol{f_{min} = 0}$.

Функція $y = \sqrt[3]{x^2}$ має похідну $y' = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$. В точці $\boldsymbol{x = 0}$, $\boldsymbol{y' = \infty}$, але екстремум у цій точці є.

Отже, виходячи із вищесказаного, **необхідні умови існування екстремума** можуть бути сформульовані таким чином.

Для того, щоб функція $y = f(x)$ мала екстремум у точці $\boldsymbol{x_0}$ необхідно, щоб її похідна в цій точці дорівнювала $\boldsymbol{0}$ $\left(\boldsymbol{f'(x_0) = 0}\right)$, або не існувала.

Точки, в яких виконується необхідна умова існування екстремума називаються **критичними**, або **стаціонарними**. **Вони повинні належати області визначення функції $D(f(x))$.**

Отже, якщо в якихось точках інтервалу дослідження функції є екстремум, то ці точки критичні (наведені умови виконуються).

Але не навпаки. Треба відзначити, що виконання необхідних умов не дає гарантії існування екстремума. Критична точка може **не бути** точкою екстремума.

Приклад 1

Знайти критичні точки і впевнитися в існуванні екстремумів у цих точках для функцій $y = \frac{x^2}{9} - 4;\ \ y = x^3 + 8$.

Розв'язання

1. Функція $y = \frac{x^2}{9} - 4$. Знайдемо критичні точки

$$y' = \frac{2x}{9} = 0; \qquad x_k = 0.$$

Функція $y' = \frac{2x}{9}$ - це пряма лінія, яка набуває від'ємного значення для всіх точок $\boldsymbol{x < 0}$ і додатне для всіх точок $\boldsymbol{x > 0}$. Отже, після критичної точки функція $y = \frac{x^2}{9} - 4$ змінює свій тип із спадаючої на зростаючу. Очевидно, що в точці $\boldsymbol{x = 0}$ вона має найменше значення, тобто $\boldsymbol{y_{min} = y(0) = -4}$.

2. Функція $y = x^3 + 8$. Знайдемо критичні точки

$$y' = 3x^2 = 0; \qquad x_k = 0.$$

Функція $y' = 3x^2$ на всій ОВФ набуває тільки додатні значення, отже, дана функція $y = x^3 + 8$ завжди монотонно зростає і у неї не може бути найбільшого чи найменшого значення на інтервалі $(-\infty; +\infty)$.

Висновок: Функція $y = x^3 + 8$ у точці $\boldsymbol{x_k = 0}$ екстремума не має.

Таким чином, щоб знайти дійсні точки екстремума, треба додатково проаналізувати критичні точки, тобто ввести ще **достатні умови** існування екстремума.

Достатні умови існування екстремума.

Перша достатня умова. Нехай функція $y = f(x)$ диференційована і має критичну точку x_0. Якщо похідна y' переходячи через критичну точку:

1) змінює свій **знак з „+” на „-”**, то в точці $y = x_0$ знаходиться максимум функції $y = f(x)$. $y_{max} = y(x_0)$;

2) змінює свій **знак з „-” на „+”**, то в точці $y = x_0$ знаходиться мінімум функції $y = f(x)$. $y_{min} = y(x_0)$;

3) не змінює свій **знак,** то в точці $y = x_0$ **екстремума немає.**

Доведення

Якщо на якомусь проміжку похідна функції $y = f(x)$ додатна, то цей проміжок, згідно з достатньою умовою монотонного зростання функції, – проміжок зростання цієї функції. Від'ємна похідна визначає проміжок спадання.

Отже, якщо процес зростання функції змінюється на спадання, то в точці зміни характеру процесу функція набуває максимального значення; якщо спадання змінюється на зростання, то – мінімального, а коли процес не змінюється, похідна не змінює знак, то функція не має екстремального значення.

Звернемо увагу, що для доведення не використовувалася умова існування похідної в критичній точці.

Друга достатня умова існування екстремума функції в точці.

Нехай функція $y = f(x)$ двічі диференційована в деякій точці x_0. Якщо перша похідна цієї функції $y'(x_0) = 0$, а друга – $y''(x_0) \neq 0$, то за умови $y''(x_0) > 0$, маємо, що x_0 **– точка мінімуму** функції $y = f(x)$, а в разі, коли $y''(x_0) < 0$, маємо, що x_0 – **точка максимуму** функції $y = f(x)$ Якщо ж $y''(x_0) = 0$**, то в точці** x_0 **екстремума немає.**

Схема дослідження функції на екстремум та проміжки монотонності функції $y = f(x)$.

1° Знайти похідну функції: $y' = f'(x)$;

2° Знайти критичні точки, в яких $f'(x) = 0$ або не існує;

3° Дослідити знак похідної на проміжках, на які критичні точки розбили ОВФ, визначити проміжки зростання (спадання) функції.

4° Дослідити функцію на наявність і тип екстремумів у критичних точках. Це можна зробити двома шляхами:

а) дослідити зміну знаків похідної при переході через критичні точки. Використовуючи **першу достатню умову існування екстремума**, зробити висновки про існування і характер екстремумів;

б) знайти другу похідну функції $y''(x)$. Опираючись на **другу достатню умову існування екстремума**, дослідити знак другої похідної в критичних точках і зробити висновки про існування і характер екстремумів в цих точках.

5° Знайти екстремуми – значення функції $y = f(x)$ в екстремальних точках.

Приклад 2

Витрати виробництва задані функцією $V(x) = 2x^3 - 6x + 7$.

Дослідити функцію виробництва на екстремуми та інтервали монотонності.

Розв'язання

Функція визначена на інтервалі (-∞; +∞).

1. Знайдемо похідну функції $V'(x) = 6x^2 - 6$.

2. Використовуючи необхідну умову існування екстремума, знайдемо критичні точки для фунуції виробництва: $V'(x) = 6x^2 - 6 = 0$

$x^2 = 1; \quad x_{1,2} = \pm 1$.

Отже, отримали 2 критичні точки $x_1 = -1$ та $x_2 = 1$.

3. Критичні точки розбили ОВФ (-∞; +∞) на 3 інтервали монотонності

1-ий – (-∞; -1), 2-ий – (-1; 1) та 3-ій – (1; +∞).

Дослідимо характер монотонності функції виробництва на кожному з інтервалів монотонності. Для цього визначемо знак похідної $V'(x)$ на кожному з інтервалів монотонності та використаємо достатню умову зростання (спадання)функції.

Візьмемо довільну точку з 1-го інтервалу $x=-2$

$\boldsymbol{V'(-2)=6\cdot 4-6=24>0}$,

отже, згідно з достатньою умовою на інтервалі (-∞; -1) функція **зростає.**

Візьмемо довільну точку з 2-го інтервалу $x=0$.

$\boldsymbol{V'(0)=-6<0}$,

отже, згідно з достатньою умовою на інтервалі (-1; 1) функція **спадає**.

Візьмемо довільну точку з 3-го інтервалу $x=2$.

$\boldsymbol{V'(2)=6\cdot 4-6=24>0}$,

отже, згідно з достатньою умовою на інтервалі (1;∞) функція **зростає**.

4. Дослідимо критичні точки на існування в них екстремума функції виробництва:

а) відповідно до **першої достатньої умови** існування екстремума, дослідимо зміну знаку похідної у критичних точках.

При переході через критичну точку $x_1=-1$, виходячи з п. 3, похідна даної функції міняє знак з „+” на „-”, отже, в точці $x_1=-1$ функція $\boldsymbol{V(x)=2x^3-6x+7}$ набуває максимального значення.

При переході через критичну точку $x_2=1$, виходячи з п. 3, похідна даної функції міняє знак з „-” на „+”, отже, в точці $x_2=1$ функція $\boldsymbol{V(x)=2x^3-6x+7}$ набуває мінімального значення;

б) відповідно до **другої достатньої умови** існування екстремума, дослідимо знак другої похідної у критичних точках:

$V''(x)=(V'(x))'=(6x^2-6)'=12x$ – друга похідна функції витрат.

Критична точка $x=-1$,

$V''(-1)=12\cdot(-1)=-12<0$, отже, згідно другої достатньої умови існування екстремума в критичній точці, точка $x=-1$ є точкою максимуму.

Критична точка $x=1$,

$V''(1)=12\cdot 1=12>0$, отже, згідно другої достатньої умови існування екстремума в критичній точці, точка x = -1 є точкою мінімуму.

Результати дослідження функції на наявність і тип екстремума обома способами співпали.

5. Знайдемо екстремальні значення функції в критичних точках:

$$\boldsymbol{x=-1:\ \mathbf{V}_{\max}=\mathbf{V}(-1)=2\cdot(-1)^3-6\cdot(-1)+7=-2+6+7=11};$$

$$\boldsymbol{x=1:\ \mathbf{V}_{\min}=\mathbf{V}(1)=2\cdot(1)^3-6\cdot(1)+7=2-6+7=3}.$$

6. Математична задача розв'язана, але якщо згадати про її економічний зміст, то, очевидно, треба ОВФ звузити до інтервалу [0, ∞).

На цьому проміжку функція $\boldsymbol{\mathbf{V}(x)=2x^3-6x+7}$ має одну точку екстремума – $x=1$ та екстремальне значення $\boldsymbol{\mathbf{V}_{\min}=\mathbf{V}(1)=2\cdot(1)^3-6\cdot(1)+7=2-6+7=3}$; інтервалом спадання буде інтервал (0; 1), зростання – (1, ∞).

Розв'язана задача підвела нас до чергової характеристики функції - найбільше та найменше значення функції.

3.9.2 Найбільше та найменше значення функції

Для розв'язання прикладних задач, зокрема оптимізаційних задач у математичних моделях економічних процесів, набуває дуже важливого значення знаходження так званого **глобального екстремума** на інтервалі [a, b] дослідження функції.

Означення

Глобальним екстремумом функції $y = f(x)$ на інтервалі [a, b] називається її **найбільше***(супремум)* $\left(\sup\limits_{x\in[a,b]}(f(x))\right)$ або **найменше***(інфімум)* $\left(\inf\limits_{x\in[a,b]}(f(x))\right)$ **значення** на цьому інтервалі.

Існування найбільшого і найменшого значення неперервної функції на інтервалі [a,b] гарантує 2-га теорема Вейєрштрасса (див. п.п. 2.2, властивості неперервних функцій, п.6). Свого найбільшого (найменшого) значення функція може набувати або в точках локального максимуму (мінімуму), або на границях інтервалу дослідження функції.

Схема розшуку найбільшого (найменшого) значення функції на інтервалі [a,b].

1°Знайти ОВФ функції та дослідити належність інтервалу **[a,b]** до ОВФ.

2° Знайти похідну функції $y = f(x)$.

3° Використавши необхідну умову існування екстремума, знайти критичні точки функції $y = f(x)$.

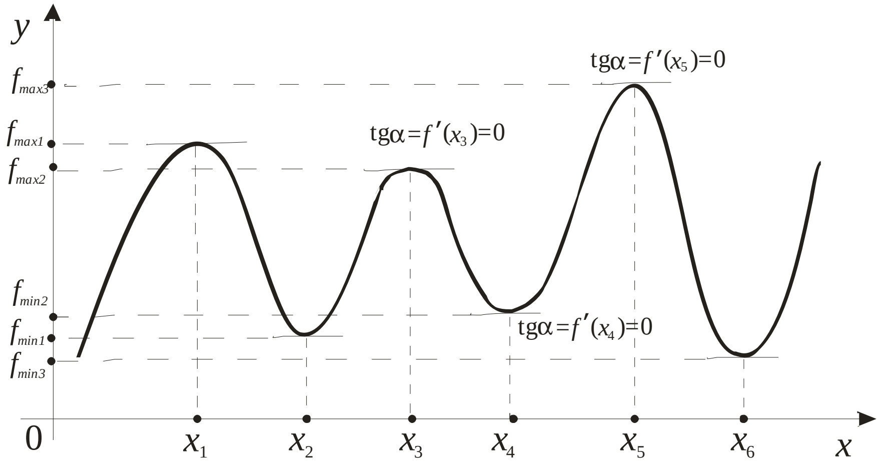
4° Обчислити значення функції в критичних точках.

5° Обчислити значення функції в точках $x = a$ та $x = b$.

6° Серед отриманих значень функції знайти найбільше $y_{найб}$ та найменше $y_{найм}$ значення функції.

Зауваження

Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на незамкненому інтервалі (a,b), то вона може і не мати свого найбільшого, або найменшого значення. Зокрема, якщо на незамкненому інтервалі (a,b), функція має лише **один максимум** або **один мінімум**, то ці екстремуми і будуть **найбільшим** або **найменшим значенням функції на** (a,b).



точки $\begin{array}{l} \min f(x): x_2,\ x_4,\ x_6, \\ \min f(x):\ f(x_2), f(x_4), f(x_6), \end{array}$

точки $\begin{array}{l} \max f(x): x_1,\ x_3,\ x_5, \\ \max f(x):\ f(x_1), f(x_3), f(x_5), \end{array}$

Рисунок 3.8

Приклад

Знайти найбільше та найменше значення функції $y = x^3 - 2x^2 - 7x + 4$ на інтервалі $[-2;2]$

Розв'язання

1° Функція $y = x^3 - 2x^2 - 7x + 4$ існує для $\forall x \in (-\infty;\infty)$. Отже, інтервал дослідження $[-2;2]$ входить до ОВФ.

2° Знаходим похідну функції:

$y' = 3x^2 - 4x - 7$.

3° Знаходимо критичні точки:

$y' = 3x^2 - 4x - 7 = 0$; $\quad D = 16 + 4 \cdot 3 \cdot 7 = 100$, $\sqrt{D} = \sqrt{100} = 10$

$x_1 = \dfrac{4+10}{6} = \dfrac{7}{3} \approx 2{,}33$ $\; x_2 = \dfrac{4-10}{6} = -1$.

4° Обчислюємо значення функції $y = x^3 - 2x^2 - 7x + 4$ у критичних точках:

а) критична точка $x_1 \approx 2{,}33 \notin [-2{,}2]$, отже, цю точку можна до уваги не брати.

б) критична точка $x_2 = -1 \in [-2{,}2]$. Обчислимо для неї функцію

$$y(-1) = (-1)^3 - 2\cdot(-1)^2 - 7\cdot(-1) + 4 = -1 - 2 + 7 + 4 = 8 = y_1$$

5°Обчислимо функцію на кінцях інтервалу $[-2;2]$

$$y(-2) = -8 - 2\cdot 4 + 7\cdot 2 + 4 = -16 + 18 = 2 = y_2$$

$$y(2) = 8 - 2\cdot 4 - 7\cdot 2 + 4 = -22 + 12 = -10 = y_3 .$$

6° Порівняємо знайдені значення функції на кінцях інтервалу і у критичній точці.

$x_1 = -1;\ y_1 = 8$ $\qquad$ $x_2 = -2;\ y_2 = 2$ $\qquad$ $x_3 = 2;\ y_3 = -10$.

Отже, найбільше значення функція $y = x^3 - 2x^2 - 7x + 4$ набуває у критичній точці $x_{найб} = -1$. Його величина $y_{найб} = 8$; найменше значення функція $y = x^3 - 2x^2 - 7x + 4$ набуває у межевій точці $x_{найм} = 2$. Його величина $y_{найм} = -10$.

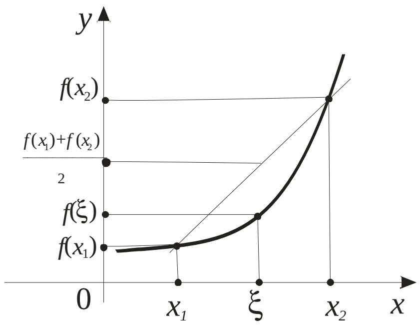
3.9.3 Опуклість та угнутість графіка, точки перегину

Однією з основних характеристик графіка функції під час його дослідження є відхилення графіка функції від прямої лінії, тобто його кривизна. Досліджуючи графік нелінійної функції можна помітити, що є 2 роди відхилення лінії графіка від прямої лінії: якщо з’єднати 2 будь - які точки графіка прямою лінією, то лінія графіка може відхилятися або вгору, над прямою, або вниз, нижче прямої. Отже, можна дослідити графік функції на 2 типи кривизни.

Означення 1

Функція $\boldsymbol{y = f(x)}$ називається **угнутою** (викривлення униз) на інтервалі $[a,b]$, якщо $\forall x_1, x_2 \in [a,b]$, виконується нерівність (рис. 3.9 а)

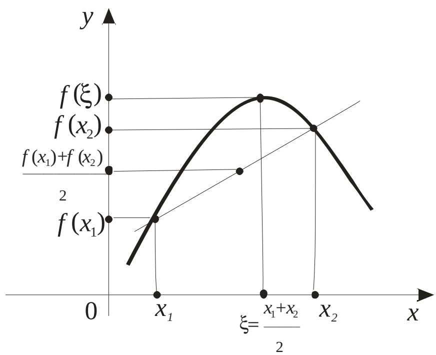
$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \le \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \tag{3.22}$$



$$\xi = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} > f(\xi) \text{ - угнутість}$$

Рисунок 3.9 а)



$$\xi = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} < f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \text{ - опуклість}$$

Рисунок 3.9 б)

Означення 2

Функція $\boldsymbol{y = f(x)}$ називається **опуклою** (викривлення вгору) на інтервалі $[a,b]$, якщо $\forall \boldsymbol{x_1, x_2 \in [a,b]}$, виконується нерівність (рис. 3.9 б)

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \ge \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}. \tag{3.23}$$

З рис 3.9 а) видно, що графік **угнутої** функції розміщений повністю **нижче** прямої, яка з'єднує точки $(x_1, f(x_1))$ *і* $(x_2, f(x_2))$ на деякому інтервалі $[\boldsymbol{a,b}]$, $x_1, x_2 \in [a,b]$. Графік **опуклої** функції навпаки розміщений повністю **вище** такої прямої.

Дослідження функції на опуклість, угнутість та точки зміни кривизни відбувається за допомогою другої похідної функції, що досліджується.

Теорема 1

Функція $y = f(x)$ **опукла** (угнута) на інтервалі $[a,b]$ тоді й тільки тоді, коли її перша похідна $y' = f'(x)$ на цьому інтервалі **монотонно спадає** (зростає).

Геометрично це означає, що у випадку **угнутості** (опуклості) функції тангенс кута нахилу дотичної до точок функції на інтервалі $[a,b]$ буде **збільшуватися** (зменшуватися).

Використовуючи умови монотонності, визначимо **достатні умови угнутості** (опуклості) функції $y = f(x)$.

Теорема 2

Якщо друга похідна $y'' = f''(x)$ двічі диференційованої функції **додатна** (від'ємна) всередині інтервалу $[a,b]$, то на цьому інтервалі функція **угнута** (опукла).

Означення 3

Точкою перегину (точкою зміни кривизни) графіка неперервної функції $y = f(x)$ називається точка, яка розділяє інтервали опуклості та угнутості цієї функції**.**

З урахуванням інтервалів монотонності першої похідної $f'(x)$ та зміни знаку другої похідної при переході через критичну точку, яка розділяє інтервали монотонності $f'(x)$, можна визначити **точку перегину функції** $y = f(x)$, як точку **екстремума першої похідної** $y' = f'(x)$.

Теорема 3 (необхідна умова перегину)

У точці перегину функції $y = f(x)$ друга похідна двічі диференційованої функції $y = f(x)$ дорівнює 0, тобто $y''(x_0) = 0$. Точка x_0 носить назву **критична точка**.

Теорема 4 (достатня умова перегину)

Якщо друга похідна $\boldsymbol{y''} = \boldsymbol{f''(x)}$ двічі диференційованої функції при переході через деяку критичну точку $\boldsymbol{x_0}$ міняє свій знак, то точка $\boldsymbol{x_0}$ є точкою перегину функції $\boldsymbol{y = f(x)}$.

Зауваження

Якщо критична точка функції $\boldsymbol{y = f(x)}$ не є точкою екстремума цієї функції, тоді вона є **точкою перегину** функції.

Схема дослідження функції на опуклість, угнутість і точки перегину.

1° Знайти другу похідну функції $\boldsymbol{y'' = f''(x)}$.

2° Використавши необхідну умову перегину, знайти критичні точки, в яких $\boldsymbol{y''(x_0) = 0}$.

3° Дослідити знак другої похідної на інтервалах, на які критичні точки розбили ОВФ, визначити проміжки опуклості (угнутості) функції.

4° Дослідити зміну знаків другої похідної при переході через критичні точки. Використовуючи **достатню умову існування перегину**, зробити висновки про існування точок перегину.

5° Знайти значення функції $\boldsymbol{y = f(x)}$ у точках перегину.

Приклад

Знайти точки перегину і інтервали опуклості та угнутості функції $y = x \cdot e^x$.

Розв'язання

1° Знаходимо другу похідну функції

$$\boldsymbol{y'} = \left(xe^x\right)' = e^x + xe^x = e^x(1+x)$$

$$\boldsymbol{y''} = \left(y'\right)' = \left(e^x(1+x)\right)' = e^x(1+x) + e^x = e^x(2+x).$$

2° Використавши необхідну умову перегину, знайдемо критичні точки, в яких $\boldsymbol{y''(x_0) = 0}$.

$$\boldsymbol{y''} = e^x(2+x) = 0\boldsymbol{;}\ \ e^x \neq 0\ \ \forall x \in (-\infty\boldsymbol{;}\infty) \Rightarrow 2 + x = 0.$$

Критична точка, в якій виконується необхідна умова існування точки перегину $x=-2$.

3° Дослідимо знак другої похідної на інтервалах, на які критична точка $x=-2$ розбила ОВФ=$(-\infty;\infty)$.

Інтервал $(-\infty;-2)$: $x=-3,\quad y''(-3)=e^{-3}(2-3)=-\dfrac{1}{e^3}<0$.

Отже, згідно з достатніми умовами опуклості на інтервалі $(-\infty;-2)$ функція $y=x\cdot e^x$ **опукла**.

Інтервал $(-2;\infty)$: $x=0,\quad y''(0)=e^0(2+0)=2>0$.

Отже, згідно з достатніми умовами угнутості на інтервалі $(-2;\infty)$ функція $y=x\cdot e^x$ **угнута**.

4° Дослідимо зміну знака другої похідної при переході через критичну точку $x=-2$.

Згідно з попереднім дослідженням при переході через критичну точку $x=-2$ y'' змінила знак з „-” на „+”.

Використовуючи достатню умову існування перегину, можна зробити висновок, що **точка** $x=-2$ **є точкою перегину** для функції $y=x\cdot e^x$. У цій точці **функція змінює характер кривизни з опуклості на угнутість.**

5° Знаходимо значення функції $y=x\cdot e^x$ в точці $x=-2$

$$y(-2)=-2\cdot e^{-2}=-\frac{2}{e^2}\approx-\frac{2}{7.4}\approx-0.27.$$

Висновок: Графік функції $y=x\cdot e^x$ змінює характер кривизни з опуклості на угнутість у точці з координатами $x=-2;\ y\approx-0.27$.

3.9.4 АСИМПТОТИ КРИВОЇ

Розглянемо тепер характерні лінії графіку функції. Такими лініями є **асимптоти** графіку функції.

Означення

Пряма $\boldsymbol{l}$ називається **асимптотою графіка функції** $\boldsymbol{y = f(x)}$, якщо відстань від цієї прямої до точки на графіку функції прямує до $\mathbf{0}$ за умови, що точка на графіку необмежено віддаляється від початку координат (0,0).

Асимптоти розділяють на вертикальні, горизонтальні та похилі.

Теорема 1

Нехай функція $\boldsymbol{y = f(x)}$ визначена у деякому околі точки $\boldsymbol{x_0}$ (крім самої точки $\boldsymbol{x_0}$) і хоча б одна з однобічних границь функції $\lim\limits_{x \to x_{0-0}} f(x) = \infty$, *або* $\lim\limits_{x \to x_{0+0}} f(x) = \infty$. Тоді пряма $\boldsymbol{x = x_0}$ називається **вертикальною асимптотою** графіка функції $\boldsymbol{y = f(x)}$.

Вертикальні асимптоти шукають у *точках розриву функції та на границях інтервалу дослідження* $(\boldsymbol{a,b})$, якщо $\boldsymbol{a}$ і $\boldsymbol{b}$ скінчені числа.

Теорема 2

Нехай функція $\boldsymbol{y = f(x)}$ визначена для $x \to \infty$. І нехай $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b$. Тоді пряма $\boldsymbol{y = b}$ буде **горизонтальною асимптотою** графіка функції $\boldsymbol{y = f(x)}$.

Зауваження

Якщо скінченою є тільки границя $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b$ або $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b$, то тоді існує однобічна горизонтальна асимптота, відповідно **права асимптота** $\boldsymbol{y_{\text{пр}} = b}$ або **ліва асимптота** $\boldsymbol{y_{\text{лів}} = b}$.

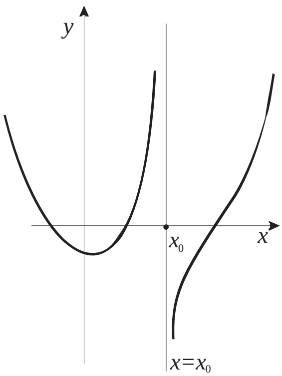
Теорема 3

Нехай $\boldsymbol{y = f(x)}$ визначена для достатньо великих $\boldsymbol{x}$. Якщо існують скінчені границі

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} \quad b = \lim_{x\to\infty}\left[f(x) - kx\right],$$

то пряма $\boldsymbol{y = kx + b}$, буде **похилою асимптотою** графіка функції $\boldsymbol{y = f(x)}$.

Похила асимптота, також як горизонтальна, може бути **лівою** і **правою**.

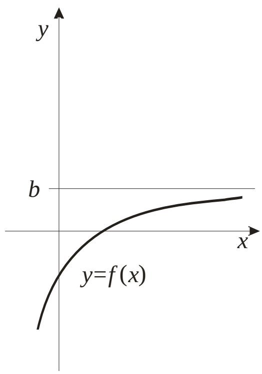


$y = f(x)$

ОВФ: $(-\infty; x_0)\cup(x_0;\infty)$

x_0 - вертикальна асимптота

Рисунок 3.10 а)

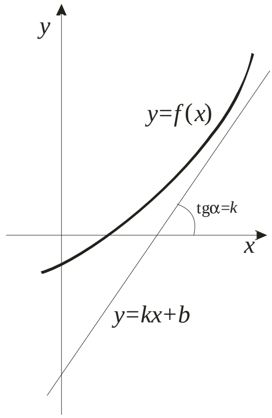


$\lim_{x\to\infty} f(x) = b$

$y = b$ –

горизонтальна асимптота

Рисунок 3.10 б)



похила асимптота

Рисунок 3.10 в)

Приклад 1

Знайти асимптоти функції $y = \dfrac{3}{x^2 - 4}$.

Розв'язання

а) знайдемо ОВФ

$x^2 - 4 \neq 0 \Rightarrow x \neq \pm 2$, тобто функція $y = \dfrac{3}{x^2-4}$ визначена для всіх x з інтервалів

$x \in (-\infty;-2) \cup (-2;2) \cup (2;\infty)$;

б) перевіримо існування вертикальних асимптот. За означенням вертикальними асимптотами будуть прямі $x = x_0$, де x_0 - точка. в якій функція $y = f(x)$ має хоча б одну з однобічних границь безкінечну

$\boldsymbol{x = -2}$,

$$\lim_{x\to -2_-} \frac{3}{x^2-4} = \lim_{x\to -2_-} \frac{3}{\underbrace{(x-2)}_{<0}\underbrace{(x+2)}_{н.м.в.<0}} = \infty;$$

$$\lim_{x\to -2_+} \frac{3}{x^2-4} = \lim_{x\to -2_+} \frac{3}{\underbrace{(x-2)}_{<0}\underbrace{(x+2)}_{н.м.в.>0}} = -\infty,$$

отже, пряма $x = -2$ є вертикальною асимптотою функції $y = \dfrac{3}{x^2-4}$.

$\boldsymbol{x = 2}$,

$$\lim_{x\to 2_-} \frac{3}{x^2-4} = \lim_{x\to 2_-} \frac{3}{\underbrace{(x-2)}_{н.м.в.<0}\underbrace{(x+2)}_{>0}} = -\infty;$$

$$\lim_{x\to 2_+} \frac{3}{x^2-4} = \lim_{x\to 2_+} \frac{3}{\underbrace{(x-2)}_{н.м.в.>0}\underbrace{(x+2)}_{>0}} = \infty,$$

отже, пряма $x = 2$ є другою вертикальною асимптотою функції $y = \dfrac{3}{x^2-4}$;

в) перевіримо існування асимптот на безкінечності:

$$\lim_{x\to \pm\infty} \frac{3}{x^2-4} = 0.$$

Причому для $|x|>2 \quad y>0$. Отже, вісь $\boldsymbol{Ox}$ є горизонтальною асимптотою графіка вихідної функції. Причому гафік наближається до осі $\boldsymbol{Ox}$ з безкінечно малими, але додатними значеннями $\boldsymbol{y}$, прямуючи за $\boldsymbol{x}$ як до ∞, так і до $-\infty$

г) перевіримо наявність похилих асимптот. Для цього спочатку обчислимо кутовий коефіцієнт асимптоти. Він дорівнює $k=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$ в разі, якщо $k\neq 0$ і має скінчене значення

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{3}{\left(x^2-4\right)x}=0,$$

отже, похилих асимптот немає.

Висновок

Функція $y=\frac{3}{x^2-4}$ має дві вертикальні асимптоти $x=\pm 2$ і одну горизонтальну $y=0$ (або вісь $\boldsymbol{Ox}$).

Приклад 2

Знайти асимптоти функції $y=e^x$.

Розв'язання

а) ОВФ функції: $x\in(-\infty,\infty)$;

б) аналізуємо існування вертикальних асимптот. За означенням вертикальними асимптотами будуть прямі $x=x_0$, де x_0 - точка, в якій функція $y=e^x$ має хоча б одну з однобічних границь безкінечну, тобто точка розриву 2-го роду функції. Функція $y=e^x$ немає точок розриву 2-го роду, бо вона неперервна на всій ОВФ;

в) перевіримо існування асимптот на безкінечності:

$$\boldsymbol{\lim_{x\to\infty}} e^x=\infty\boldsymbol{;}\quad \boldsymbol{\lim_{x\to-\infty}} e^x=0.$$

Отже, графік функції $y=e^x$ має ліву асимптоту $y=0$;

г) перевіримо наявність похилих асимптот. Для цього спочатку обчислимо кутовий коефіцієнт асимптоти. Він дорівнює $k=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$ в разі, якщо $k\neq 0$ і має скінчене значення.

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\},$$

в границі маємо невизначеність типу $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$. Цю невизначеність розкриємо за допомогою правила Лопіталя:

$k=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\left(e^x\right)'}{(x)'}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{1}=\infty$ - значення кутового коєфіцієнта безкінечне, отже, похилих асимптот немає.

Висновок

Функція $y=e^x$ має тільки одну горизонтальну **ліву** асимптоту $y=0$.

Приклад 3

Знайти асимптоти функції $y=\frac{x^2-4}{x-3}$.

Розв'язання

а) знайдемо ОВФ функції: $x-3\neq 0\Rightarrow x\neq 3$.

Отже, функція $y=\frac{x^2-4}{x-3}$ задана на інтервалах: $x\in(-\infty;3)\cup(3;\infty)$;

б) аналізуємо існування вертикальних асимптот. За означенням вертикальними асимптотами будуть прямі $x=x_0$, де x_0 - точка, в якій функція має хоча б одну з однобічних границь безкінечну, тобто точка розриву 2-го роду. Такою точкою для $y=\frac{x^2-4}{x-3}$ буде $x=3$

Знайдемо границю функції, якщо $x\to 3$

$$\lim_{x\to 3_{-0}}\frac{x^2-4}{x-3}=\lim_{x\to 2_{-}}\frac{5}{\underbrace{(x-3)}_{н.м.в.<0}}=-\infty$$ - лівобічна границя безкінечна.

Отже, графік функції $y=\frac{x^2-4}{x-3}$ має одну вертикальну асимптоту $x=3$;

в) перевіримо існування асимптот на безкінечності:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-4}{x-3}=\infty$$ - горизонтальних асимптот немає;

г) перевіримо наявність похилих асимптот. Для цього спочатку обчислимо кутовий коефіцієнт асимптоти. Він дорівнює $k=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$ в разі, якщо $k\neq 0$ і має скінчене значення

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-4}{(x-3)\cdot x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-4}{x^2-3x}=1$$

Кутовий коефіцієнт похилої асимптоти $k=1\Rightarrow\ tg\alpha=1$. Отже, кут нахилу похилої асимптоти до осі ***Ox*** дорівнює $\alpha=45^\circ$.
Рівняння похилої асимптоти - $y=kx+b$
У нашому разі $k=1$ $y=x+b$. Знайдемо значення ***b***:

$$b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-4}{x-3}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-4-x^2+3x}{x-3}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x-4}{x-3}\right)=3.$$

Отже, рівня похилої асимптоти є $y=x+3$

Висновок

Функція $y=\dfrac{x^2-4}{x-3}$ має одну вертикальну асимптоту $x=3$ і одну похилу асимптоту $y=x+3$.

3.9.5 Загальна схема дослідження функції і побудова її графіка

Дамо загальну схему дослідження довільної функції $\boldsymbol{y=f(x)}$ та побудови її графіка:

1° знайти ОВФ для $\boldsymbol{y=f(x)}$;

2° дослідити парність-непарність функції та її періодичність;

3° знайти асимптоти (якщо вони існують) та точки перетину з осями координат (якщо це не надто складно);

4° дослідження функції за допомогою першої похідної (інтервали монотонності, екстремуми функції);

5° дослідження функції із застосуванням другої похідної (інтервали опуклості, угнутості та точки перегину);

6° побудова графіку.

Приклад

Дослідити функцію $y=\dfrac{1}{4}x^4-\dfrac{2}{3}x^3+1$.

Розв'язання

1° ОВФ для $y=\dfrac{1}{4}x^4-\dfrac{2}{3}x^3+1$ є $x\in(-\infty;\infty)$;

2° досліджуємо парність функції та її періодичність

$$f(-x)=\frac{1}{4}(-x)^4-\frac{2}{3}(-x)^3+1=\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3+1.$$

Маємо $f(-x)\neq f(x)$; $f(-x)\neq -f(x)$ - функція загального вигляду.

$$f(x+T)=\frac{1}{4}(x+T)^4-\frac{2}{3}(x+T)^3+1\neq f(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3+1.$$

Отже, функція не періодична;

3° знаходимо асимптоти та точку перетину $y=\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3+1$ з віссю ***Oy***;

а) вертикальні асимптоти.

Оскільки ОВФ функції $x\in(-\infty;\infty)$, вертикальних асимптот функція немає;

б) горизонтальні асимптоти

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3+1\right)=\infty$ - горизонтальних асимптот немає;

в) похилі асимптоти

$k=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3+1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{4}x^3-\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{x}\right)=\infty$ - похилих асимптот немає.

Висновок

Графік функції $y=\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3+1$ асимптот немає.

г) $f(0)=\frac{1}{4}0^4-\frac{2}{3}0^3+1=1$ - графік функції $y=\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3+1$ перетинає вісь ***Oy*** у точці $y=1$;

4° досліджуємо функцію за допомогою першої похідної (інтервали монотонності, екстремуми функції):

а) знаходимо першу похідну від функції $y=\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3+1$

$$y'=x^3-2x^2=x^2(x-2).$$

б) використовуючи необхідну умову існування екстремуму $y'(x_k)=0$, знаходимо критичні точки x_k

$$x^2(x-2)=0\Rightarrow x_1=0;\ x_2=2.$$

Отже, маємо дві критичні точки $x_1 = 0$ та $x_2 = 2$, в яких виконуються достатні умови існування еустремуму (дотична до графіка функції у цих точках паралельна осі ***Ox***);

в) критичні точки розбили ОВФ функції на три інтервали: $(-\infty;0)$; $(0;2)$; $(2;\infty)$.

З'ясуємо знак 1-ї похідної на цих інтервалах і визначимо інтервали монотонності функції $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + 1$:

- $x \in (-\infty;0) \quad x = -1, \quad y'(-1) = 1 \cdot (-1-2) = -3 < 0$,

отже, виходячи з достатньої умови спадання функції, функція $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + 1$ на інтервалі $(-\infty;0)$ спадає:

- $x \in (0;2) \quad x = 1, \quad y'(1) = 1 \cdot (1-2) = -1 < 0$,

отже, виходячи з достатньої умови спадання функції, функція $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + 1$ на інтервалі $(0;2)$ теж спадає:

- $x \in (2;\infty) \quad x = 10, \quad y'(10) = 10^2 \cdot (10-2) = 80 > 0$,

отже, виходячи з достатньої умови зростання функції, функція $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + 1$ на інтервалі $(2;\infty)$ зростає.

Висновок

Функція $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + 1$ монотонно спадає на інтервалі $(-\infty;2)$ і монотонно зростає на інтервалі $(2;\infty)$;

г) використовуючи 1-шу достатню умову існування екстремуму дослідимо критичні точки на наявність і тип екстремуму.

$x_1 = 0: \ \forall x < x_1 \Rightarrow y'(x) < 0; \ \forall x \in (0;2) \Rightarrow y'(x) < 0$,

отже, переходячи через критичну точку x_1 похідна не міняє знак. Згідно з достатніми умовами в точці x_1 екстремуму немає.

$x_2 = 2: \ \forall x \in (0;2) \Rightarrow y'(x) < 0; \ \forall x > 2 \Rightarrow y'(x) > 0$, отже, переходячи через критичну точку x_2 похідна змінює свій знак на протилежний. Згідно з достатніми умовами в точці x_2 екстремум є і це локальний мінімум функції $y=\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3+1$

$$y_{min}=y(2)=\frac{1}{4}2^4-\frac{2}{3}2^3+1=4-5\frac{1}{3}+1=-\frac{1}{3}.$$

Висновок

Функція $y=\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3+1$ має один локальний екстремум – мінімум – в точці $x_{min}=2$. Значення мінімуму - $y_{min}=-1/3$;

5° досліджуємо функцію $y=\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3+1$ із застосуванням другої похідної (інтервали опуклості, угнутості та точки перегину).

а) знайдемо 2-гу похідну функції

$$y''=(y')'=\left(x^3-2x^2\right)'=3x^2-4x=x(3x-4);$$

б) використовуючи необхідну умову існування точок перегину $y''(x_k)=0$, знаходимо критичні точки

$$x(3x-4)=0\Rightarrow x_1=0;\ x_2=\frac{4}{3};$$

в) критичні точки розбили ОВФ функції $y=\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3+1$ на три інтервали: $(-\infty;0)$; $\left(0;\frac{4}{3}\right)$; $\left(\frac{4}{3};\infty\right)$.

Дослідимо знак y'' на цих інтервалах і, використовуючи достатню умову, зробимо висновок про опуклість і угнутість функції.

Інтервал $(-\infty;0)$: $x=-1;\ y''(-1)=(-1)\cdot(-3-4)=7>0$, отже, на цьому інтервалі згідно з достатньою умовою угнутості функція $y=\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3+1$ угнута.

Інтервал $\left(0;\frac{4}{3}\right)$: $x=1$; $y''(1)=1\cdot(3-4)=-1<0$, отже, на цьому інтервалі згідно з достатньою умовою опуклості функція $y=\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3+1$ опукла.

Інтервал $\left(\frac{4}{3};\infty\right)$: $x=2$; $y''(2)=(2)\cdot(6-4)=4>0$, отже, на цьому інтервалі згідно з достатньою умовою угнутості функція $y=\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3+1$ угнута;

г) використовуючи достатню умову існування точки перегину, дослідимо критичні точки на наявність у них перегину функції $y=\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3+1$ (зміни типу кривизни):

- точка $x_1=0$: згідно попереднього дослідження, переходячи через цю критичну точку y'', змінює знак з „+” на „-”. Отже, точка $x_1=0$ є точкою перегину. У цій точці функція змінює характер кривизни з угнутості на опуклість

$x_1=0$,
$y_1(0)=1$;

- точка $x_2=\frac{4}{3}$: згідно попереднього дослідження, переходячи через цю критичну точку y'', змінює знак з „-” на „+”. Отже, точка $x_2=\frac{4}{3}$ теж є точкою перегину. У цій точці функція змінює характер кривизни з опуклості на угнутість

$x_2=\frac{4}{3}\approx 1.33$,

$$y_2\left(\frac{4}{3}\right)=\frac{1}{4}\cdot\frac{4^4}{3^4}-\frac{2}{3}\cdot\frac{4^3}{3^3}+1=\frac{64}{81}-\frac{128}{81}+\frac{81}{81}=\frac{145-128}{81}=\frac{17}{81}\approx 0.21;$$

6° Використовуючи знання, отримані у попередньому дослідженні, побудуємо схематичний графік функції

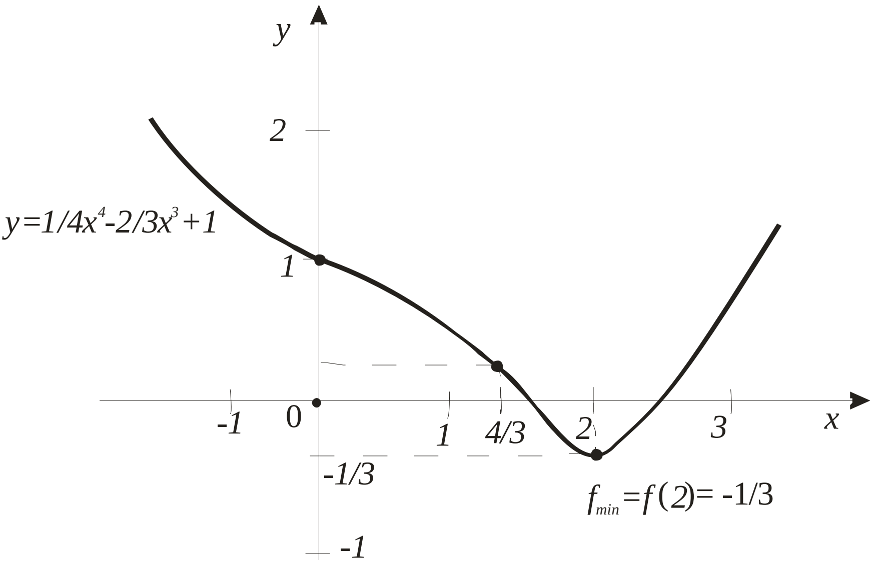


Рисунок 3.11

§ 4 ФУНКЦІЇ КІЛЬКОХ ЗМІННИХ

У попередній частині розглядалися функції, які співвідносили значення однієї незалежної змінної (аргументу) одному значенню залежної змінної (функції) типу $y = f(x)$.

У цьому розділі будуть вивчатися функції, які ставлять у відповідність декільком аргументам одне значення залежної змінної. Саме такі функції часто використовуються в моделях управління, маркетингу та економіки підприємства.

4.1 Функції декількох змінних, способи їх завдання. Область визначення. Границя та неперервність

4.1.1 Поняття функції кількох змінних та області її визначення

Означення

Нехай $D(x_1, x_2, ..., x_n)$ – деяка множина точок простору R^n. Якщо кожній точці $M(x_1, x_2, ..., x_n)$ з області D відповідає певне число $z \in Z \subset R$, то говорять, що z є ***функція n незалежних змінних*** $x_1, x_2, ..., x_n$. Незалежні змінні $x_1, x_2, ..., x_n$ є ***рівноправними*** і називаються ***аргументами функції***, Функціональну залежність z від $x_1, x_2, ..., x_n$ позначають так

$$z = F(x_1, x_2, ..., x_n), \quad z = z(x_1, x_2, ..., x_n), \text{ і т. ін.}$$

Множину точок $M(x_1, x_2, ..., x_n) \in R^n$, які створюють область D, називають ***областю визначення***, або ***існування функції***, а множина Z всіх значень функції – ***областю її значень***. Якщо функція $z = F(x_1, x_2, ..., x_n)$ задана у деякій області D і на її межі dD, то область визначення функції називається ***замкненою областю*** $\overline{D} = D \cup dD$. Якщо функція задана тільки всередені області $\boldsymbol{D}$, то область визначення називається ***відкритою областю D визначення функції.***

Не порушуючи загальних понять теорії функції декількох змінних, розглянемо ці функції на прикладі функції двох змінних – $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$. Таке обмеження дасть нам можливість проілюструвати деякі положення графічно.

Наприклад, об’єм циліндра $\boldsymbol{V = \pi r^2 h}$ є функція від радіуса $\boldsymbol{r}$ його основи й від висоти $\boldsymbol{h}$, тобто $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{h})$, що дає можливість обчислювати об’єм циліндра $\boldsymbol{V}$ для довільних відомих $\boldsymbol{r}$ і $\boldsymbol{h}$.

В економічних дослідженнях часто використовується виробнича функція Кобба-Дугласа

$$z = Ax^{\alpha} y^{\beta},$$

де $\boldsymbol{z}$ - величина *суспільного продукту*, $\boldsymbol{x}$ - *витрати праці*; $\boldsymbol{y}$ - *об’єм виробничих фондів* (як правило, $\boldsymbol{z}$ і $\boldsymbol{y}$ виміряються у вартісних одиницях; $\boldsymbol{x}$ – у людино-годинах); $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ - сталі.

Функція Кобба-Дугласа є функцією двох незалежних змінних $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$.

В економіці розглядаються функції не тільки від двох, але й більшого числа незалежних змінних. Наприклад, рівень рентабельності R залежить від прибутку *П* на реалізовану продукцію, величин основних (*a*) і оборотних (*b*) фондів, $R = \dfrac{П}{a+b}$, тобто $\boldsymbol{R}$ є функцією трьох незалежних змінних $R = F(П, a, b)$. Областю визначення функції трьох змінних є множина точок простору $\boldsymbol{R}^3$, але безпосередньої геометричної інтерпретації для функцій із числом аргументів більше двох не існує, однак для них уводяться за аналогією всі визначення (частинні похідні, границя, безперервність і т. ін.), сформульовані для $\boldsymbol{F(x,y)}$.

Прикладом функцій *багатьох змінних* в економіці є *виробничі функції*. При розгляді будь-якого виробничого комплексу як відкритої системи (***входами*** якої служать ***витрати*** ресурсів - людських й матеріальних, а ***виходами - продукція***) *виробнича функція виражає стійке кількісне співвідношення між входами* *й виходами*. Виробнича функція, як правило задається рівнянням $\boldsymbol{z = F\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)}$, де всі компоненти випуску об'єднані (за вартістю або в натурі) в одну скалярну величину $\boldsymbol{z}$, а різнорідні виробничі ресурси позначені як $\boldsymbol{x_i}$.

Частинне значення функції $\boldsymbol{z = F\left(x, y\right)}$ при $\boldsymbol{x = x_0}$, $\boldsymbol{y = y_0}$ позначається $\boldsymbol{z_0 = F\left(x_0, y_0\right)}$. Геометрично область визначення функції $\boldsymbol{D}$ являє собою скінчену або нескінчену частину площини $\boldsymbol{Oxy}$, обмежену лініями, які можуть належати (в разі $\overline{D}$) або не належати (в разі D) цій області.

На зразок того, як функція $\boldsymbol{y = f\left(x\right)}$ геометрично задається лінією на площині $\boldsymbol{Oxy}$, функцію $\boldsymbol{z = F\left(x, y\right)}$ можна геометрично задати в трьохвимірній системі координат $\boldsymbol{Oxyz}$ поверхнею. Візьмемо в просторі $\boldsymbol{R}^3$ прямокутну систему координат і зобразимо на площині $\boldsymbol{Oxy}$ область $\boldsymbol{D}$. У кожній точці $\boldsymbol{M\left(x, y\right) \in D}$ відновимо перпендикуляр до площини $\boldsymbol{Oxy}$ і відкладемо на ньому значення $\boldsymbol{z = F\left(x, y\right)}$. Геометричне місце отриманих у такий спосіб точок простору $\boldsymbol{R}^3$ створюватиме поверхню, яка і буде свого роду графіком нашої функції у просторі. Відповідно рівняння функції $\boldsymbol{z = F\left(x, y\right)}$ називається ***рівнянням поверхні***.

Пари значень $\boldsymbol{x}$ і $\boldsymbol{y}$ визначають на площині $\boldsymbol{Oxy}$ точку $\boldsymbol{M\left(x, y\right)}$, а $\boldsymbol{z = F\left(x, y\right)}$ – аплікату відповідної точки $\boldsymbol{P\left(x, y, z\right)}$ на поверхні. Тому функцію двох змінних можна розглядати, як функцію змінної точки $\boldsymbol{M\left(x, y\right)}$ і позначати $\boldsymbol{z = F\left(M\right)}$.

Приклад

Знайти область визначення функції $z = \ln\left(4x^2 + 9y^2 - 36\right)$.

Розв'язання

Як відомо, логарифмічна функція існує тільки коли аргумент додатний і не дорівнює 0

$4x^2 + 9y^2 - 36 > 0$, або $4x^2 + 9y^2 > 36$.

Розглянемо рівняння

$4x^2+9y^2=36$ – рівняння еліпсу.

$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ – канонічний вигляд рівняння.

Якщо замість рівності ми розглянемо нерівність $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}>1$, то побачимо, що областю визначення ***D*** буде площина ***Oxy*** без внутрішньої частини і самої кривої даного еліпса.

Висновок

Область визначення функції $z=\ln\left(4x^2+9y^2-36\right)$ є незамкненою і являє собою множину точок $D=\left\{\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}>1\right\}$.

4.1.2 Способи завдання функції декількох змінних

Аналогічно із функцією однієї змінної, функція декількох змінних задається аналітично, таблично, графічно, мовно, програмно.

Функцію двох змінних $\boldsymbol{z=F\left(x,y\right)}$ можна задавати графічно, ще в один спосіб – за допомогою так званих ***ліній рівня.***

Означення

Криві лінії ***L***, що лежать у площині ***Oxy*** і мають рівняння $\boldsymbol{f\left(x,y\right)}=C\boldsymbol{,}\ C=const$ називаються ***лініями рівня*** функції $\boldsymbol{z=F\left(x,y\right)}$.

Розглянемо графік функції $\boldsymbol{z=F\left(x,y\right)}$. Нехай це буде деяка поверхня. Якщо зробити перерізи функції паралельно координатній площині ***Oxy*** для значень $\boldsymbol{z=h_1}$, $\boldsymbol{z=h_2},\ldots$, то отримаємо сліди від функції на перерізах у вигляді кривих ліній $\boldsymbol{L=f\left(x,y\right)=C}$, де $\boldsymbol{C=h_1,h_2},\ldots$

Спроектуємо криві на координатну площину ***Oxy***. Отримаємо пласкі криві лінії, які називаються *лініями рівня* функції $\boldsymbol{z=F\left(x,y\right)}$. **Отже,** ***лінія рівня*** – це множина усіх точок площини функції $\boldsymbol{Oxy}$, для яких функція ***функції*** $\boldsymbol{z = F(x, y)}$ ***набуває одне певне значення.***

Приклад

Визначити лінії рівня функції $\boldsymbol{z = (x - 2)^2 + (y + 3)^2}$.

Розв'язання

За означенням лінії рівня даної функції задаються рівнянням

$\boldsymbol{C = (x - 2)^2 + (y + 3)^2}$, де $\boldsymbol{C = \mathrm{const}}$.

Задамо значення $\boldsymbol{C : C = 1, C = 4,\ C = 9,\ldots}$ Отримаємо ряд концентричних кіл з загальним центром у точці $\boldsymbol{O(2, -3)}$ і радіусами $\boldsymbol{r_1 = 1, r_2 = 2,\ \ r_3 = 3, \ldots}$ Ці концентричні кола і будуть лініями рівня кривої.

В економіці застосовується *функція статку* населення залежно від набору товарів та послуг. Якщо нам відомий аналітичний вигляд функції, то використовуючи лінії рівня можна проаналізувати множину кількостей товарів та послуг, необхідних для досягнення того чи іншого статку населення.

4.1.3 Границя та неперервність функції декількох змінних

Означення 1

Околом радіуса $\boldsymbol{r}$ точки $\boldsymbol{M_0(x_0, y_0)}$ називають сукупність усіх точок $\boldsymbol{M(x, y)}$ площини, відстань яких від точки $\boldsymbol{M_0(x_0, y_0)}$ не перевищує радіус $\boldsymbol{r}$, тобто для яких виконується нерівність:

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \le r .$$

Означення 2

Число $\boldsymbol{A}$ називають **границею функції** $\boldsymbol{z = F(x, y)}$ (або $\boldsymbol{z = F(M)}$) у точці $\boldsymbol{M_0(x_0, y_0)}$, якщо для будь - якого достатньо малого $\varepsilon > 0$ існує такий окіл радіуса $r = r(\varepsilon)$ точки $\boldsymbol{M_0(x_0, y_0)}$

на площині $\boldsymbol{Oxy}$, що для всіх точок $M(x, y)$ з цього околу значення функції $\boldsymbol{z = F(M)}$ належить до ε-околу точки $\boldsymbol{A}$ на осі $\boldsymbol{Oz}$**.** Границя функції двох змінних позначається:

$$\lim_{M \to M_0} F(M) = A, \quad \textit{або} \quad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} F(x, y) = A.$$

Мовою формальної логіки границя функції $\boldsymbol{z = F(M)}$ у точці

$$\left(A = \lim_{M \to M_0} F(M)\right) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists r = r(\varepsilon) > 0),$$

$$(\forall M(x, y) : |M(x, y) - M_0(x_0, y_0)| < r) \Rightarrow (|F(M) - A| < \varepsilon).$$

Або з використанням координат точки $M(x, y)$,

$$\left(A = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} F(x, y)\right) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists r = r(\varepsilon) > 0),$$

$$\left(\forall (x, y) : \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \le r\right) \Rightarrow (|F(x, y) - A| < \varepsilon).$$

Означення 3

Функція $\boldsymbol{F(x, y)}$ називається ***неперервною*** в точці $\boldsymbol{M_0}$, якщо вона визначена в цій точці і $\lim_{M \to M_0} F(M) = F(M_0)$ незалежно від способу прямування $\boldsymbol{M}$ до $\boldsymbol{M_0}$.

Функція, неперервна в кожній точці області $\boldsymbol{D}$**,** називається ***неперервною в цій області***. Якщо функція неперервна в деякій області $\boldsymbol{D}$ і на її межі $\boldsymbol{dD}$, то кажуть, що функція ***неперервна на замкненій області*** $\overline{D}$.

Властивості неперервних функцій

1. Область *визначення* і *неперервності* функцій ***збігаються***.

2. (Теорема Вейєрштрасса). Функція, неперервна в замкненій області $\overline{D}$, ***обмежена***, тобто існують такі $\boldsymbol{M}$ та $\boldsymbol{m}$, що виконується співвідношення

$$m \le F(x, y) \le M \quad \forall (x, y) \in \overline{D}.$$

4.2 ЧАСТИННІ ПОХІДНІ, ДИФЕРЕНЦІАЛ ФУНКЦІЇ ДЕКІЛЬКОХ ЗМІННИХ. ГРАДІЄНТ

4.2.1 ЧАСТИННІ ПОХІДНІ

Розглянемо диференціювання функції декількох змінних на прикладі функції двох змінних $z = F(x, y)$.

Візьмемо точку, $M_0(x_0, y_0) \in D$, $F(x_0, y_0) = z_0$. Надамо аргументу x_0 приріст Δx, а аргументу y_0 – приріст Δy. Функція отримає прирощене значення $z = F(x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta y)$. Величина $\Delta z = F(x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta y) - F(x_0, y_0)$ називається ***повним приростом функції*** $z = F(x, y)$ у точці M_0.

Якщо ж задати зміну тільки одного аргументу, наприклад x, то отримаємо приріст функції тільки відповідно цієї змінної. Приріст функції за одним з аргументів позначають відповідним індексом. Отже, можна записати:

$$\Delta_x\ z = F(x_0 + \Delta x,\ y_0) - F(x_0, y_0).$$

Приріст функції за аргументом y подасться формулою $\Delta_y\ z = F(x_0,\ y_0 + \Delta y) - F(x_0, y_0)$. Прирости функції z за одним аргументом називають ***частинними приростами.***

Треба відмітити, що повний приріст функції загалом не дорівнює сумі частинних приростів, або

$$\Delta z \neq \Delta_x z + \Delta_y z.$$

Означення

Частинною похідною функції двох (декількох) змінних по одній з цих змінних називається границя відношення частинного приросту функції за цією змінною до приросту самої змінної за умови, що приріст змінної прямує до 0 (якщо така границя існує). Позначається частинна похідна так:

$$\frac{\partial z}{\partial x}; \frac{\partial z}{\partial y},\ \textit{або}\ z'_x; z'_y,\ \textit{або}\ \frac{\partial F(x, y)}{\partial x}; \frac{\partial F(x, y)}{\partial y},\ \textit{або}\ F'_x(x, y); F'_y(x, y)$$

Отже, за означенням частинні похідні функції $\boldsymbol{z = F(x, y)}$ є:

$$z'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x_0 + \Delta x, y_0) - F(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

$$z'_y = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{F(x_0, y_0 + \Delta y) - F(x_0, y_0)}{\Delta y}. \tag{4.1}$$

Виходячи з означення, можна сформулювати ***правило знаходження частинних похідних:*** щоб знайти частинну похідну $\boldsymbol{z'_x}$ необхідно розглядати за аргумент функції змінну $\boldsymbol{x}$, а ***змінну у вважати за сталу***, а для знаходження частинної похідної $\boldsymbol{z'_y}$ навпаки, за аргумент функції розглядаємо змінну ***y, за сталу – змінну x.***

При цьому ***зберігаються всі правила диференціювання функції однієї змінної.***

Приклад 1

Знайти частинні похідні $\boldsymbol{z'_x}$ та $\boldsymbol{z'_y}$ функцій $z = x\,\boldsymbol{ln}\, y + \dfrac{y}{x}$***;*** $z = x^y$.

Розв'язання

1. Функція $z = x\,\boldsymbol{ln}\, y + \dfrac{y}{x}$.

Знаходимо $\boldsymbol{z'_x}$, розглядаючи змінну $\boldsymbol{x}$ як аргумент, а змінну $\boldsymbol{y}$ - як сталу:

$$z'_x = \left(x \ln y + \frac{y}{x}\right)'_x = (x \ln y)'_x + \left(\frac{y}{x}\right)'_x = \ln y (x)'_x + y\left(\frac{1}{x}\right)'_x = \ln y - \frac{y}{x^2}.$$

Знаходимо $\boldsymbol{z'_y}$, розглядаючи змінну $\boldsymbol{y}$ як аргумент, а змінну $\boldsymbol{x}$- як сталу:

$$z'_y = \left(x \ln y + \frac{y}{x}\right)'_y = (x \ln y)'_y + \left(\frac{y}{x}\right)'_y = x(\ln y)'_y + \frac{1}{x}(y)'_y =$$

$$= x \cdot \frac{1}{y} + \frac{1}{x} \cdot 1 = \frac{x}{y} + \frac{1}{x}.$$

2. Функція $z = x^y$.

Якщо ***y*** – стала, то маємо степеневу функцію. Її похідна обчислюється за табличною формулою: $z'_x = \left(x^y\right)'_x = y \cdot x^{y-1}$.

Якщо ж стала ***x***, то функція розглядається, як показникова, отже, її похідна обчислюється за іншою табличною формулою

$$z'_y = \left(x^y\right)'_y = x^y \cdot \ln x.$$

Приклад 2

Міжміський потік пасажирів аналітично виражається формулою $z = x^2 / y$, де x – кількість мешканців регіону; у – відстань між містами. Знайти частинні похідні функції потоку пасажирів і пояснити їх зміст.

Розв'язання

1. $z'_x = \left(\dfrac{x^2}{y}\right)'_x = \dfrac{1}{y} \cdot 2x = \dfrac{2x}{y}$ - цей результат означає, що для сталої відстані між містами збільшення потоку пасажирів прямо пропорційно подвоєній кількості мешканців.

2. $z'_x = \left(\dfrac{x^2}{y}\right)'_y = x^2 \cdot \left(-\dfrac{1}{y^2}\right) = -\dfrac{x^2}{y^2}$ - для сталої кількості мешканців регіону збільшення потоку пасажирів зворотно пропорційно квадрату відстані між містами.

4.2.2 Диференціал функції декількох змінних

Означення 1

Диференціалом функції декількох змінних називається сума добутків її частинних похідних на прирости відповідних незалежних змінних. Для функції двох змінних формула для диференціала буде мати вигляд

$$dz = z'_x \cdot \Delta x + z'_y \cdot \Delta y\,. \tag{4.2}$$

Як відомо з теорії функції однієї змінної $\Delta x = dx + \alpha(\Delta x)\Delta x;\ \Delta y = dy + \beta(\Delta y)\Delta y$,
де $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(x) = 0$ та $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \beta(x) = 0$.
Отже, за умови, що $\Delta x \to 0,\ \Delta y \to 0$ (4.2) можна переписати у вигляді

$$dz = z'_x \cdot dx + z'_y \cdot dy,\ \textit{або}\ dz = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot dy\,. \tag{4.3}$$

Означення 2

Функція $\boldsymbol{z = F(x, y)}$ називається ***диференційованою в точці*** $\boldsymbol{M_0(x_0, y_0)}$, якщо її ***повний приріст*** може бути поданим у вигляді

$$\Delta z = dz + \alpha\Delta x + \beta\Delta y\,, \tag{4.4}$$

де $\boldsymbol{\alpha = \alpha(x, y)}$ та $\boldsymbol{\beta = \beta(x, y)}$ – нескінченно малі величини за умов, що $\boldsymbol{\Delta x \to 0}$ і $\boldsymbol{\Delta y \to 0}$.

Існування частинних похідних в точці для функції двох (декількох) змінних є ***необхідною***, але не достатньою умовою диференційованості функції в точці. ***Достатню умову*** декларує така теорема.

Теорема

Якщо ***частинні похідні*** функції $\boldsymbol{z = F(x, y)}$ ***існують*** у деякому малому околі точки $\boldsymbol{M_0(x_0, y_0)}$, а функція $\boldsymbol{z = F(x, y)}$ ***неперервна*** в самій точці $\boldsymbol{M_0(x_0, y_0)}$, то функція $\boldsymbol{z = F(x, y)}$ ***диференційована*** в цій точці.

Отже, в разі виконання достатніх умов граничне значення $\boldsymbol{\Delta z}$ дорівнює $\boldsymbol{dz}$, якщо $\boldsymbol{\Delta x \to 0}$ і $\boldsymbol{\Delta y \to 0}$.

4.2.3 Градієнт функції двох змінних. Похідна за напрямом

Означення 1

Градієнтом функції $\boldsymbol{z = F(x, y)}$ називається ***вектор, координати якого складаються з частинних похідних*** даної функції. Позначається градієнт знаком ∇z**,** або $grad\ z$.

Якщо згадаємо, що у звичайному ортонормованому базисі площини (у Декартовій системі координат) базисними векторами є вектори $\boldsymbol{i = (1{,}0)}$ та $\boldsymbol{j = (0{,}1)}$, то градієнт функції $\boldsymbol{z = F(x, y)}$ можна записати так

$$gradF(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y}\vec{j} = z'_x\vec{i} + z'_y\vec{j} = (z'_x,\ z'_y). \tag{4.4}$$

Нехай функція $\boldsymbol{z = F(x, y)}$ визначена в деякому околі точки $\boldsymbol{M_0(x_0, y_0)}$, ***e*** – деякий одиничний вектор, що виходить з точки $\boldsymbol{M_0(x_0, y_0)}$ і задає напрям зміни функції $\boldsymbol{z = F(x, y)}$. Його напрямляючі косинуси – $\boldsymbol{\cos\alpha}$ ($\boldsymbol{\alpha}$ - кут між вектором і віссю ***Ox***) та $\boldsymbol{\cos\beta}$ ($\boldsymbol{\beta}$ - кут між вектором і віссю ***Oy***), координати одиничного вектора ***e*** збігаються з значенням його напрямляючих косинусів: $\boldsymbol{e_x = \cos\alpha}$, $\boldsymbol{e_y = \cos\beta}$. До того ж $\cos\beta = \sin\alpha$, довжина вектора $|e| = \sqrt{\cos^2\alpha + \cos^2\beta} = 1$. Якщо переміститися в напрямі вектора ***e*** до точки $\boldsymbol{M(x, y)}$ і з'єднати точки $\boldsymbol{M_0}$ та ***M*** вектором ***l*** з напрямком від $\boldsymbol{M_0}$ до ***M*,** то аргументи ***x*** та ***y*** набудуть приросту

$$\boldsymbol{\Delta x = l_x = |l|\cos\alpha;\ \Delta y = l_y = |l|\cos\beta},$$

функція в той же час набуває ***повного*** приросту

$$\boldsymbol{F(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - F(x_0, y_0) =}$$

$$\boldsymbol{= F(x_0 + |l|\cos\alpha, y_0 + |l|\cos\beta) - F(x_0, y_0) = \Delta_l z}\ .$$

Означення 2

Похідною z'_l ***за напрямком l функції двох змінних*** $z = F(x, y)$ називається ***границя відношення повного приросту функції в напрямі l до величини переміщення*** Δl ***за умови, що останнє прямує до 0. Або***

$$z'_l = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta_l z}{\Delta l}.$$

Похідна z'_l характеризує швидкість зміни значення функції за напрямком ***l***.

Оскільки повний приріст функції $z = F(x, y)$ в граничному значенні дорівнює першому диференціалу цієї функції, то можна записати:

$$z'_l = z'_x dx + z'_y dy = z'_x \cos\alpha + z'_y \cos\beta. \qquad (4.5)$$

Враховуючи координати напрямляючого вектора $e = (cos\alpha, cos\beta)$, z'_l можна подати як скалярний добуток двох векторів: вектора $e = (cos\alpha, cos\beta)$ та вектора (z'_x, z'_y). Останній вектор, згідно з означенням, є градієнтом функції $z = F(x, y)$.

Отже, похідна функції $z = F(x, y)$ за напрямком ***є скалярним добутком напрямляючого вектора і градієнта цієї функції***

$$z'_l = (\vec{e}, \nabla z) \text{ або } z'_l = (\vec{e}, grad\, z). \qquad (4.6)$$

Як відомо з векторної алгебри скалярний добуток двох векторів набуває найбільшого значення, коли напрями векторів збігаються, тобто $\cos \widehat{ab} = 0$. Отже, напрям найшвидшого росту функції в дані точці збігається з його градієнтом у цій точці.

Висновок

Градієнт функції в даній точці M_0 є характеристикою напряму найскорішого зростання функції у цій точці.

Якщо відомі градієнти функції $\boldsymbol{z = F(x, y)}$ в точках ОВФ, то можна, хоча б приблизно будувати лінії рівня цієї функції. Має місце теорема.

Теорема

Нехай задана диференційована функція $\boldsymbol{z = F(x, y)}$, і нехай значення ***grad z*** в околі точки $\boldsymbol{M_0}$ відрізняється від 0.

Тоді ***градієнт є нормаллю до лінії рівня функції*** $\boldsymbol{z = F(x, y)}$ ***у цій точці.*** Іншими словами, ***grad z*** є перпендикуляром до лінії рівня в точці $\boldsymbol{M_0}$ і вказує напрям найскорішого зростання функції.

Приклад

Знайти напрям і величину найбільшого зростання функції $\boldsymbol{U(x, y, z)}$ в точці $M_0(1, 0, 3)$

$$U = 7x^2y - \frac{7}{2}y^2z + \frac{14}{3}x^3.$$

Розв’язання

1. Знайдемо $grad\,U(x, y, z)$. Для цього обчислимо спочатку частинні похідні

$$U'_x = 14xy + \frac{14}{3}3x^2 = 14xy + 14x^2; \quad U'_y = 7x^2 + 7yz; \quad U'_z = \frac{7}{2}y^2.$$

Отже, загальна формула градієнта –

grad $\boldsymbol{U = \left(14\left(xy + x^2\right), 7\left(x^2 + yz\right), \left(7/2y^2\right)\right)}$.

У точці М(1, 0, 3) він набуде значення

grad $\boldsymbol{U(1,0,3) = (14(1 \cdot 0 + 1), 7(1 + 0 \cdot 3), (7/2 \cdot 0)) = (14,7,0)}$.

Отже, напрямок найбільшого зростання функції $U = 7x^2y - \frac{7}{2}y^2z + \frac{14}{3}x^3$ задає вектор grad $\boldsymbol{U(1,0,3)} = (14,7,0)$.

Величиною найбільшої швидкості зростання буде $\left|grad\,\boldsymbol{U(1,0,3)}\right|$, тобто величина

$$\left|grad\,U(x,y,z)\right|_{M(1,0,3)} = \sqrt{14^2 + 7^2} = 7\sqrt{4+1} = 7\sqrt{5} \approx 7 \cdot 2{,}24 \approx 15{,}65.$$

4.3 ЧАСТИННІ ПОХІДНІ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ. ДИФЕРЕНЦІАЛ ДРУГОГО ПОРЯДКУ ФУНКЦІЇ ДВОХ ЗМІННИХ

Нехай у деякій області $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ задана диференційована функція $\boldsymbol{z}=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$. Отже, в цій області існують частинні похідні функції $\boldsymbol{z}'_x$ та $\boldsymbol{z}'_y$. Якщо ці частинні похідні є неперервними функціями від аргументів $\boldsymbol{x}$ та $\boldsymbol{y}: \boldsymbol{z}'_x=\boldsymbol{F}'_x(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y});\ \ \boldsymbol{z}'_y=\boldsymbol{F}'_y(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$, то, очевидно, їх теж можна продиференціювати за аргументами $\boldsymbol{x}$ та $\boldsymbol{y}$.

Означення

Частинними похідними другого порядку функції $\boldsymbol{z}=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ називаються частинні похідні від її частинних похідних першого порядку.

Оскільки кожну з похідних можна диференціювати за обома змінними, то отримаємо чотири похідні 2-го порядку. Отже, функція двох змінних $\boldsymbol{z}=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ має дві частинні похідні першого порядку $\boldsymbol{z}'_x=\boldsymbol{F}'_x(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y});\ \ \boldsymbol{z}'_y=\boldsymbol{F}'_y(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ і чотири (2^2) похідні другого порядку:

$\left(\boldsymbol{F}'_x(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\right)'_x;\left(\boldsymbol{F}'_x(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\right)'_y;\left(\boldsymbol{F}'_y(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\right)'_x;\left(\boldsymbol{F}'_y(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\right)'_y$. Позначаються похідні другого порядку так

$$I.\ \left(F'_x\right)'_x: \qquad \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=z''_{xx}.$$

$$II.\ \left(F'_x\right)'_y: \qquad \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=z''_{xy}.$$

$$III.\ \left(F'_y\right)'_x: \qquad \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=z''_{yx}.$$

$$IV.\ \left(F'_y\right)'_y: \qquad \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=z''_{yy}.$$

Похідні І та IV називаються *частинними похідними 2-го порядку функції* $\boldsymbol{z = F(x, y)}$ *за* ***однією*** *змінною*. Похідні II та III називаються ***мішаними*** *частинними похідними 2-го порядку*.

Якщо мішані похідні $\boldsymbol{z''_{xy}}$ та $\boldsymbol{z''_{yx}}$ ***неперервні*** в деякій точці $M_0(x, y)$, то вони ***рівні*** між собою. Тобто в їх точках неперервності виконується рівність:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}, \quad \text{або } z''_{xy} = z''_{yx}. \tag{4.7}$$

Повний диференціал другого порядку функції має вигляд

$$d^2F(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} dxdy + \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial y^2} dy^2,$$

$$\text{або} \tag{4.8}$$

$$d^2 z = z''_{xx} dx^2 + 2z''_{xy} dxdy + z''_{yy} dy^2.$$

Все викладене про частинні похідні другого порядку функції двох змінних залишається вірним для частинних похідних цієї функції більш вищих порядків. Кількість частинних похідних з ростом порядку ***подвоюється.*** Отже, *частинних похідних* ***третього порядку*** є 8 видів. З них ***2*** частинні похідні 3-го порядку від однієї змінної, а ***6 – мішані.*** Похідних 4-го порядку – 12 і т.п.

Все викладене про частинні похідні другого порядку функції двох змінних залишається вірним для ***частинних похідних функції більшої кількості змінних***. *Кількість частинних похідних функції багатьох змінних з ростом порядку збільшується* ***за геометричною прогресією, основою якої є кількість цих змінних.***

4.4 ЕКСТРЕМУМ ФУНКЦІЇ ДЕКІЛЬКОХ ЗМІННИХ

Розглянемо задачу існування екстремума функцій декількох змінних на прикладі функції двох змінних.

Візьмемо точку $\boldsymbol{M_0(x_0, y_0) \in D}$ функції $\boldsymbol{z = F(x, y)}$. Виберемо довільний окіл цієї точки радіусом $\boldsymbol{r}$.

Означення

Точка $\boldsymbol{M_0(x_0, y_0)}$ називається ***точкою мінімуму (максимуму)*** функції $\boldsymbol{z = F(x, y)}$, якщо існує такій окіл $\boldsymbol{\delta}$ точки $\boldsymbol{M_0(x_0, y_0)}$, що для будь якої точки $\boldsymbol{M(x, y)}$ із цього околу виконується нерівність: $\boldsymbol{F(x_0, y_0) \le F(x, y)}$ $\boldsymbol{(F(x_0, y_0) \ge F(x, y))}$, або

$$\exists\delta(r) : \forall\left(M(x, y) : |M_0 - M| \le r\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F(M_0) \le F(M) \ \left(F(M_0) \ge F(M)\right). \qquad (4.9)$$

Загальна назва мінімуму і максимуму функції в точці – ***локальні екстремуми*** функції в точці. Точка $\boldsymbol{M_0(x_0, y_0)}$ мінімуму і максимуму функції називається ***точкою екстремуму***.

Сформулюємо необхідні умови існування екстремуму функції двох змінних у точці $\boldsymbol{M_0(x_0, y_0)}$.

Теорема (необхідні умови існування екстремуму)

Якщо точка $\boldsymbol{M_0(x_0, y_0)}$ є точкою екстремуму функції $\boldsymbol{z = F(x, y)}$, то всі частинні похідні першого порядку цієї функції в даній точці дорівнюють **0**

$$\begin{cases} z'_x\big|_{(x_0, y_0)} = \dfrac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial x} = 0; \\ z'_y\big|_{(x_0, y_0)} = \dfrac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial y} = 0. \end{cases} \qquad (4.10)$$

Ця теорема є двовимірним аналогом теореми Ферма. Її зміст полягає у тому, що якщо зафіксувати одну із незалежних змінних, то функція $\boldsymbol{z = F(x, y)}$ буде поводити себе, як функція однієї змінної (тієї, що не зафіксована) і для неї буде виконуватися необхідна умова існування екстремуму однієї змінної.

Точки, в яких виконані умови (4.10), називаються ***критичними***, або ***стаціонарними*** точками.

Враховуючи, що частинні похідні функції двох змінних є компонентами вектора $grad\,F(x,y)$, необхідні умови існування екстремума, можна перефразувати так.

Якщо в точці $\boldsymbol{M_0(x_0, y_0)}$ ***функція*** $\boldsymbol{z=F(x,y)}$ ***має екстремум, то*** $grad\,F(x_0,y_0)=\Theta$. ($\Theta=(0{,}0)$ - нульвий вектор).

Але виконання умов (4.10) не гарантує існування екстремуму в точці $\boldsymbol{M_0(x_0, y_0)}$. Оскільки функція $\boldsymbol{z=F(x,y)}$ має два незалежні аргументи і при фіксованому одному з них розглядається як функція одного незалежного аргумента, ймовірні випадки, коли по одній змінній точка $\boldsymbol{M_0(x_0, y_0)}$ є точкою ***мінімуму***, а по іншій – точкою ***максимуму***. До того ж ця точка може бути і просто точкою перегину функції однієї змінної. В усіх цих випадках в околі точки $\boldsymbol{M_0(x_0, y_0)}$ умови (4.10) виконуються, а умови (4.9) – не виконуються і точка $\boldsymbol{M_0(x_0, y_0)}$ не є точкою екстремуму. Отже, для коректного аналізу критичних точок на наявність у них екстремуму функції необхідно додати ***достатні умови існування екстремуму.***

Теорема (достатні умови існування екстремуму)

Нехай функція $\boldsymbol{z=F(x,y)}$ така:

– визначена і двічі диференційована в деякому околі δ точки $\boldsymbol{M_0(x_0, y_0)}$;

– має в цій точці частинні похідні рівними 0: $\boldsymbol{z'_x=0}$ і $\boldsymbol{z'_y=0}$;

– має в цій точці частинні похідні другого порядку рівними

$$z''_{xx}\big|_{(x_0,y_0)}=A; \qquad z''_{xy}\big|_{(x_0,y_0)}=z''_{yx}\big|_{(x_0,y_0)}=B; \qquad z''_{yy}\big|_{(x_0,y_0)}=C.$$

Складемо з других похідних визначник

$$\Delta=\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}=A\cdot C-B^2.$$

Тоді

▪ якщо $\Delta>0$, то екстремум існує. Тип екстремуму залежить від знаку $\boldsymbol{A: A>0}$ – точка $\boldsymbol{M_0(x_0, y_0)}$ є точкою ***мінімуму***, і $z_{min} = F(x_0, y_0)$; $A < 0$ – точка $M_0(x_0, y_0)$ є точкою ***максимуму***, і $z_{max} = F(x_0, y_0)$;

- якщо $\Delta < 0$, то в точці $M_0(x_0, y_0)$ екстремум ***не існує***;
- якщо $\Delta = 0$, то для висновків для наявності екстремуму ***інформації недостатньо.***

Схема дослідження функції двох змінних на наявність екстремумів

1° Знайти частинні похідні функції $z = F(x, y)$ – z'_x та z'_y;

2° Використовуючи необхідні умови існування екстремуму, знайти критичні точки функції $z = F(x, y)$, розв'язавши систему рівнянь

$$\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0; \end{cases}$$

3° Знайти частинні похідні другого порядку z''_{xx}, $z''_{xy} = z''_{yx}$ та z''_{yy} . z''_{yy} ;

4° Для кожної критичної точки $M(x_k, y_k)$:

а) обчислити значення z''_{xx}, $z''_{xy} = z''_{yx}$ та z''_{yy} в цій точці, отримавши тим самим значення ***A, B, C***;

б) обчислити $\Delta = AC - B^2$. Зробити висновок про наявність і тип екстремуму в точці $M_0(x_0, y_0)$;

в) якщо екстремум у точці $M_k(x_k, y_k)$ є, обчислити його значення $z_{екстр} = F(x_k, y_k)$.

Приклад

Дослідити на екстремум функцію $z = x^2 - 4xy + 5y^2 + 2x - 4y + 50$.

Розв'язання

1° Згідно зі схемою знайдемо частинні похідні даної функції

$$z'_x = \left(x^2 - 4xy + 5y^2 + 2x - 4y + 50\right)'_x = 2x - 4y + 2,$$
$$z'_y = \left(x^2 - 4xy + 5y^2 + 2x - 4y + 50\right)'_y = -4x + 10y - 4.$$

2° Використовуючи необхідні умови існування екстремуму, знаходимо критичні точки, розв'язавши систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x - 4y + 2 = 0 & (\times 2) \\ -4x + 10y - 4 = 0 \end{cases} \begin{cases} 4x - 8y + 4 = 0 \\ -4x + 10y - 4 = 0 \end{cases} + \begin{cases} 4x - 8y + 4 = 0 \\ 2y = 0. \end{cases} \begin{cases} x = -1; \\ y = 0. \end{cases}$$

Знайшли одну критичну точку $\boldsymbol{M_k(-1,0)}$.

3° Знайдемо всі частинні похідні другого порядку

$$z''_{xx} = (2x - 4y + 2)'_x = 2, \quad z''_{xy} = (2x - 4y + 2)'_y = -4,$$
$$z''_{yy} = (-4x + 10y - 4)'_y = 10.$$

Для критичної точки $\boldsymbol{M_k(-1,0)}$ обчислимо визначник з других похідних:

а) другі похідні в нашому разі є сталими для будь - якої точки, отже,

$$\boldsymbol{A = 2;\ B = -4;\ C = 10}.$$

б) $\boldsymbol{\Delta = AB - C^2 = 2 \cdot 10 - (-4)^2 = 20 - 16 > 0}$, отже, екстремум у точці $\boldsymbol{M_k(-1,0)}$ існує. $\boldsymbol{A=2>0}$, отже, точка $\boldsymbol{M_k(-1,0)}$ є точкою мінімуму функції $z = x^2 - 4xy + 5y^2 + 2x - 4y + 50$.

с) $z_{\min} = z(-1,0) = (-1)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 0 + 5 \cdot 0 + 2(-1) - 4 \cdot 0 + 50 =$
$= 1 - 2 + 50 = 49.$

4.5 Умовний екстремум функції декількох змінних. Метод множників Лагранжа

Розглянемо задачу, коли екстремум функції двох змінних $\boldsymbol{z = F(x, y)}$ на множині точок, що належать ОВФ функції та відповідають додатковим умовам.

Задача

Знайти екстремум функції $\boldsymbol{z=F(x,y)}$ за умови, що її аргументи $(\boldsymbol{x,y})$ пов'язані між собою рівнянням $\varphi(\boldsymbol{x,y})=\boldsymbol{0}$, яке називається ***рівнянням зв'язку.***

Означення

Точка $\boldsymbol{M_0(x_0,y_0)}$ називається ***точкою умовного мінімуму (максимуму)*** функції $\boldsymbol{z=F(x,y)}$ за умови $\varphi(\boldsymbol{x,y})=\boldsymbol{0}$, якщо існує такій окіл малого радіуса $\boldsymbol{r}$ цієї точки, що для всіх точок $\boldsymbol{M(x,y)}$ з цього околу, які задовольняють даному рівнянню зв'язку, виконується нерівність

$$F(M_0)\le F(M)\ \left(F(M_0)\ge F(M)\right).$$

Для знаходження умовного екстремуму в загальному випадку використовується ***метод множників Лагранжа***. Зміст цього методу у зведенні пошуку умовного екстремуму до пошуку безумовного шляхом приєднання до функції $\boldsymbol{z=F(x,y)}$ заданої функції зв'язку $\varphi(\boldsymbol{x,y})=\boldsymbol{0}$ через невідомий множник λ. Метод множників Лагранжа складається з таких етапів:

1. Будується функція Лагранжа

$$\boldsymbol{L(x,y,\lambda)=F(x,y)+\lambda\cdot\varphi(x,y)}.$$

Якщо екстремум шукати тільки на множині точок, що задовольняють умові $\varphi(\boldsymbol{x,y})=\boldsymbol{0}$, то фактично ми додаємо до вихідної функції 0.

Таким чином, побудована функція $\boldsymbol{L(x,y,\lambda)}$ є функцією від трьох змінних x,y,λ. Отже, задача пошуку умовного екстремуму зведена до задачі безумовного екстремуму для функції 3-х змінних.

2. Для побудованої функції $\boldsymbol{L(x,y,\lambda)}$ знайдемо критичні точки, використовуючи необхідні умови існування екстремуму для функції 3-х змінних

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \\ \varphi(x, y) = 0. \end{cases} \tag{4.11}$$

3. Аналізуємо факт існування і тип екстремума в критичних точках за допомогою достатніх умов існування екстремуму багатьох змінних.

Достатня умова існування екстремуму функції 3-х змінних може бути подана у двох виглядах:

1° Якщо функція $\boldsymbol{L(x, y, \lambda)}$ неперервна і двічі диференційована в критичній точці $\boldsymbol{M_k(x_k, y_k, \lambda_k)}$, то існування і тип екстремуму в цій точці визначається знаком визначника 3-го порядку, складеного із значень других частинних похідних функції $\boldsymbol{L(x, y, \lambda)}$ ***у точці*** $\boldsymbol{M_k(x_k, y_k, \lambda_k)}$

$$\Delta\Big|_{(x_k, y_k, \lambda_k)} = \begin{vmatrix} L''_{\lambda\lambda} & L''_{\lambda x} & L''_{\lambda y} \\ L''_{\lambda x} & L''_{xx} & L''_{xy} \\ L''_{\lambda y} & L''_{yx} & L''_{yy} \end{vmatrix}_{(x_k, y_k, \lambda_k).} \tag{4.12}$$

З урахуванням того, що $L'_\lambda = \varphi(x, y)$ можна записати

$$L''_{\lambda\lambda} = \varphi'_\lambda(x, y) = 0;\ L''_{\lambda x} = \varphi'_x(x, y)\ L''_{\lambda y} = \varphi'_y(x, y),$$

визначник (4.12) набире вигляду

$$\Delta\Big|_{(x_k, y_k, \lambda_k)} = \begin{vmatrix} 0 & \varphi'_x & \varphi'_y \\ \varphi'_x & L''_{xx} & L''_{xy} \\ \varphi'_y & L''_{yx} & L''_{yy} \end{vmatrix}_{(x_k, y_k, \lambda_k).} \tag{4.13}$$

Ознаки екстремальних точок:

– якщо $\Delta > 0$, то точка $\boldsymbol{M_k(x_k, y_k, \lambda_k)}$ відповідає точці умовного максимуму $\boldsymbol{M_k(x_k, y_k)}$ для функції $\boldsymbol{z = F(x, y)}$. Умовний максимум $\boldsymbol{z_{max} = F(x_k, y_k)}$;

– якщо $\Delta < 0$, то точка $\boldsymbol{M_k\left(x_k, y_k, \lambda_k\right)}$ відповідає точці умовного мінімуму $\boldsymbol{M_k\left(x_k, y_k\right)}$ для функції $\boldsymbol{z = F\left(x, y\right)}$. Умовний мінімум $\boldsymbol{z_{min}} = \boldsymbol{F\left(x_k, y_k\right)}$;

– якщо $\Delta = 0$, то екстремуму в точці $\boldsymbol{M_k\left(x_k, y_k\right)}$ немає;

2° Існування і тип умовного екстремуму функції $\boldsymbol{z = F\left(x, y\right)}$ за умови $\varphi\left(\boldsymbol{x, y}\right) = \boldsymbol{0}$ визначає знак другого диференціала функції $\boldsymbol{L\left(x, y\right)}$

$$d^2L\left(x, y\right) = L''_{xx}dx^2 + 2L''_{xy}dxdy + L''_{yy}dy^2,$$

який визначається з використанням двох умов

$$\varphi'_x dx + \varphi'_y dy = 0; \qquad dx^2 + dy^2 > 0.$$

У цьому разі

– якщо $\boldsymbol{d^2F\left(x, y\right)} > 0 \Rightarrow$ точка $\boldsymbol{M_k\left(x_k, y_k\right)}$ є точкою умовного мінімуму для функції $\boldsymbol{z = F\left(x, y\right)}$. Умовний мінімум $\boldsymbol{z_{min}} = \boldsymbol{F\left(x_k, y_k\right)}$;

– якщо $\boldsymbol{d^2F\left(x, y\right)} < 0 \Rightarrow$ точка $\boldsymbol{M_k\left(x_k, y_k\right)}$ є точкою умовного максимуму для функції $\boldsymbol{z = F\left(x, y\right)}$. Умовний максимум $\boldsymbol{z_{max}} = \boldsymbol{F\left(x_k, y_k\right)}$;

– якщо $\boldsymbol{d^2F\left(x, y\right)} = 0 \Rightarrow$ точка $\boldsymbol{M_k\left(x_k, y_k\right)}$ не є точкою умовного екстремума.

Приклад

Знайти екстремум функції $\boldsymbol{z = xy}$ за умови $\boldsymbol{x^2 + y^2} = 2$.

Розв'язання

Визначимо функцію зв'язку $\varphi\left(x, y\right)$: $\varphi\left(\boldsymbol{x, y}\right) = \boldsymbol{x^2 + y^2 - 2 = 0}$. Згідно зі схемою

1. Будуємо функцію Лагранжа

$$\boldsymbol{L\left(x, y, \lambda\right) = z + \lambda \cdot \varphi\left(x, y\right) = xy + \lambda\left(x^2 + y^2 - 2\right)}.$$

2. Для побудованої функції $\boldsymbol{L(x, y, \lambda)}$ знайдемо критичні точки, використовуючи необхідні умови існування екстремуму для функції 3-х змінних

$$\begin{cases} L'_x = 0 \\ L'_y = 0 \\ L'_\lambda = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (xy)'_x + \lambda\left(x^2 + y^2 - 2\right)'_x = y + \lambda \cdot 2x = 0, \\ (xy)'_y + \lambda\left(x^2 + y^2 - 2\right)'_y = x + \lambda \cdot 2y = 0, \\ x^2 + y^2 - 2 = 0. \end{cases}$$

3. Розв’яжемо систему

$$\begin{cases} \lambda = -\dfrac{y}{2x}, \\ x + 2y\left(-\dfrac{y}{2x}\right) = x - \dfrac{y^2}{x} = 0, \\ x^2 + y^2 = 2. \end{cases} \begin{cases} \lambda = -\dfrac{y}{2x}, \\ x^2 - y^2 = 0, \\ x^2 + y^2 = 2. \end{cases} \begin{cases} \lambda = -\dfrac{y}{2x}, \\ 2x^2 = 2, \\ x^2 - y^2 = 0. \end{cases} \begin{cases} \lambda = -\dfrac{y}{2x}, \\ x^2 = 1, \\ y^2 = 1. \end{cases}$$

Отже, отримаємо 4 розв’язки системи

$$\begin{cases} \lambda = -\dfrac{1}{2}, \\ x = 1, \\ y = 1. \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda = \dfrac{1}{2}, \\ x = -1, \\ y = 1. \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda = \dfrac{1}{2}, \\ x = 1, \\ y = -1, \end{cases}$$

і відповідно 4 критичні точки: $M_1(1, 1, -1/2)$; $M_2(-1, -1, -1/2)$; $M_3(-1,\ 1,\ 1/2)$; $M_4(1,\ -1,\ 1/2)$.

4. Дослідимо критичні точки на існування і тип екстремуму. Знайдемо другі частинні похідні за змінними $\boldsymbol{x}$ та $\boldsymbol{y}$ функції Лагранжа і перші частинні похідні функції зв’язку

$$L''_{xx} = (y + 2x\lambda)'_x = 2\lambda; \; L''_{yy} = (x + 2y\lambda)'_x = 2\lambda; \; L''_{xy} = (y + 2x\lambda)'_y = 1;$$

$$\varphi'_x = \left(x^2 + y^2\right)'_x = 2x; \; \varphi'_y = \left(x^2 + y^2\right)'_y = 2y.$$

Будемо досліджувати точки на екстремум за першим виглядом достатніх умов.

Складемо визначник третього порядку

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 2x & 2y \\ 2x & 2\lambda & 1 \\ 2y & 1 & 2\lambda \end{vmatrix}.$$

5. Перевіримо знак визначника Δ у кожній критичній точці

a) $M_1(1,1,-1/2)$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 4 \cdot 4 = 16 > 0,$$

отже, $M_1(1,1)$ – точка умовного максимуму функції.

$\boldsymbol{z_{max} = z(1,1) = 1}$;

b) $M_2(-1,-1,-1/2)$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & 1 \\ -4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-4)\cdot(-4) = 16 > 0,$$

отже, $M_2(-1,-1)$ – точка умовного максимуму функції.

$\boldsymbol{z_{max} = z(-1,-1) = 1}$;

c) $M_3(-1, 1, 1/2)$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-4) = -16 < 0,$$

отже, $M_3(-1, 1)$ – точка умовного мінімуму функції.

$\boldsymbol{z_{min} = z(-1,1) = -1}$;

d) $M_4(1, -1, 1/2)$

$$\Delta=\begin{vmatrix}0&2&-2\\2&1&1\\-2&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&2&-2\\2&1&1\\-4&0&0\end{vmatrix}=(-4)\cdot 4=-16<0,$$

отже, $M_4(1,\ -1)$ – точка умовного мінімуму функції.

$\boldsymbol{z_{min}=z(1,-1)=-1}$.

Дослідимо точки на екстремум за другим виглядом достатніх умов.

Побудуємо другий диференціал функції $\boldsymbol{L(x,y)}$ і допоміжні умови

$$d^2L=L''_{xx}dx^2+2L''_{xy}dxdy+L''_{yy}dy^2=2\lambda dx^2+2dxdy+2\lambda dy^2.$$

Для визначення співвідношення dx та dy використаємо перший диференціал функції зв’язку

$$\varphi'_x dx+\varphi'_y dy=0;\ 2xdx+2ydy=0\Rightarrow dy=-\frac{x}{y}dx.$$

Підставимо отримане співвідношення у другий диференціал функції $\boldsymbol{L(x,y)}$

$$d^2L=2\lambda dx^2-2\frac{x}{y}dx^2+2\lambda\frac{x^2}{y^2}dx^2=2dx^2\left(\lambda-\frac{x}{y}+\lambda\frac{x^2}{y^2}\right).$$

З умови $dx^2+dy^2>0$ випливає, що $\boldsymbol{dx>0}$, отже, знак другого диференціала залежить від знаку виразу в дужках.

Перевіримо цей знак у кожній з 4 критичних точок

а) $M_1(1,1,-1/2)$

$$\lambda-\frac{x}{y}+\lambda\frac{x^2}{y^2}=-\frac{1}{2}-1+\left(-\frac{1}{2}\right)=-2<0,$$

отже, $M_1(1,1)$ – точка умовного максимуму функції.

$\boldsymbol{z_{max}=z(1,1)=1}$;

b) $M_2(-1,-1,-1/2)$

$$\lambda - \frac{x}{y} + \lambda\frac{x^2}{y^2} = -\frac{1}{2} - 1 + \left(-\frac{1}{2}\right) = -2 < 0,$$

отже, $M_2(-1,-1)$ – точка умовного максимуму функції.

$\boldsymbol{z_{max} = z(-1,-1) = 1}$;

c) $M_3(-1, 1, 1/2)$,

$$\lambda - \frac{x}{y} + \lambda\frac{x^2}{y^2} = \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2}(-1) = 1 > 0,$$

отже, $M_3(-1, 1)$ – точка умовного мінімуму функції.

$\boldsymbol{z_{min} = z(-1,1) = -1}$;

d) $M_4(1, -1, 1/2)$,

$$\lambda - \frac{x}{y} + \lambda\frac{x^2}{y^2} = \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2}(-1) = 1 > 0,$$

отже, $M_4(1, -1)$ – точка умовного мінімуму функції.

$\boldsymbol{z_{min} = z(1,-1) = -1}$.

Зауважимо, що екстремальні точки визначені за обома формами достатніх умов ***збіглися.***

4.6 НАЙБІЛЬШЕ ТА НАЙМЕНШЕ ЗНАЧЕННЯ ФУНКЦІЇ В ЗАМКНЕНІЙ ОБЛАСТІ

У разі необхідності знаходження ***найбільшого*** або ***найменшого*** значення функції двох змінних $\boldsymbol{z = F(x, y)}$ в замкненій області $\overline{D}$ (***глобального екстремуму)*** треба пам'ятати, що ці значення досягаються або ***в точках локального екстремуму***, або ***на межі*** області $\overline{D}$. Найбільше значення функції позначають $\max\limits_{D} F(x, y)$, найменше – $\min\limits_{D} F(x, y)$.

Існування найбільшого та найменшого значення для неперервної функції двох змінних гарантує відома нам теорема Вейєрштрасса. Нагадаємо її.

Теорема Вейєрштрасса

Функція, неперервна в замкненій області $\overline{D}$, є ***обмеженою***, тобто існують такі $\boldsymbol{M}$ та $\boldsymbol{m}$, що виконується співвідношення

$$m \le F(x,y) \le M \quad \forall (x,y) \in \overline{D}.$$

Отже, ***знаходження найбільшого та найменшого значення функції*** $\boldsymbol{z = F(x,y)}$ ***в замкненій області*** $\overline{D}$ можна проводити за такою ***схемою.***

1. Перевірити функцію $\boldsymbol{z = F(x,y)}$ на неперервність в області $\overline{D}$.

2. Знайти критичні точки функції в області $\boldsymbol{D}$ за відомою схемою (п. 4.4).

3. Знайти найбільше та найменше значення функції на границях області $\boldsymbol{D}$.

4. Вибрати з множини отриманих найбільших (найменших) значень єдині найбільше $\max\limits_{\overline{D}} F(x,y)$ і найменше – $\min\limits_{\overline{D}} F(x,y)$ значення функції.

Приклад

Знайти найбільше та найменше значення функції $Z = x^2 y(4 - x - y)$ у трикутнику, обмеженому лініями $dD = \{x = 0, y = 0, x + y = 6\}$.

Розв'язання

1. Область визначення даної функції - $D = \{x \in (-\infty;\infty); y \in (-\infty;\infty)\}$. Дана функція *неперервна* на всій області визначення. Отже, згідно з теоремою Вейєрштрасса, вона обмежена і має $\max\limits_{\overline{D}} F(x,y)$ і $\min\limits_{\overline{D}} F(x,y)$.

2. Знайдемо значення функції в точках, підозрілих на екстремум. Для цього

a) знайдемо критичні точки

$$z'_x = \left(x^2y(4-x-y)\right)'_x = 8xy - 3x^2y - 2xy^2,$$

$$z'_y = \left(x^2y(4-x-y)\right)'_y = 4x^2 - x^3 - 2x^2y,$$

$$\begin{cases} 8xy - 3x^2y - 2xy^2 = 0, \\ 4x^2 - x^3 - 2x^2y = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy(8 - 3x - 2y) = 0, \\ x^2(4 - x - 2y) = 0. \end{cases}$$

У середині області D маємо, що $x \neq 0,\ y \neq 0$, отже, система набире вигляду

$$\begin{cases} 8 - 3x - 2y = 0 \\ 4 - x - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 2y = 8; \\ x + 2y = 4. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 4; \\ x + 2y = 4. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2; \\ y = 1. \end{cases}$$

Знайшли критичну точку $M_k(2,1)$;

b) обчислимо значення функції $\boldsymbol{z}$ у цій точці без дослідження на тип екстремуму.

$$z(2,1) = \left(x^2y(4-x-y)\right)\Big|_{\substack{x=2\\y=1}} = 4(4-2-1) = 4.$$

3. Дослідимо функцію $Z = x^2y(4-x-y)$ на межі області - $dD = \{x = 0, y = 0, x + y = 6\}$:

a) знайдемо значення функції на грані трикутника $x = 0$: $Z(0, y) = 0$;

b) знайдемо значення функції на грані трикутника $y = 0$: $Z(x,0) = 0$;

c) знайдемо вигляд функції на грані трикутника $x + y = 6$:

$$y = 6 - x; \quad Z = x^2(6-x)(4-x-6+x) = -2x^2(6-x) = -12x^2 + 2x^3;$$

d) знайдемо найбільше і найменше значення функції однієї змінної $Z(x) = -2x^2(6-x) = -12x^2 + 2x^3$ на інтервалі $x \in [0,6]$:

– значення в критичних точках:

$$z' = -24x + 6x^2 = 0; \quad 6x(x-4) = 0; \quad x_1 = 0;\ x_2 = 4.$$

Знайшли дві критичні точки $x_1 = 0$ та $x_2 = 4$.

У точці $x_1 = 0$ $z(0) = 0$;

У точці $x_2 = 4$ $z(4) = 2 \cdot 4^3 - 12 \cdot x^2 = 128 - 192 = -64$;

– значення на границях інтервалу $x \in [0,6]$:

$$z(0) = 0; z(6) = 2 \cdot 6^3 - 12 \cdot 6^2 = 432 - 432 = 0.$$

Отже, на межі $x + y = 6$ *функція* $Z = x^2 y(4 - x - y)$ *має найбільше значення* $\max\limits_{x+y=6} z = z(0) = 0$ у точці $\boldsymbol{x = 0}$; $\boldsymbol{y = 6 - x = 6}$ *і найменше значення* $\min\limits_{x+y=6} z = z(4) = -64$ у *точці* $\boldsymbol{x = 4}$; $\boldsymbol{y = 6 - x = 2}$.

4. Порівняємо значення функції $z(x, y)$ у всіх знайдених точках

$M_k(2,1) \in D$: $\quad z(2,1) = 4$,

$\{x = 0\} \subset \overline{D}$: $\quad z(0, y) = 0$,

$\{y = 0\} \subset \overline{D}$: $\quad z(x,0) = 0$,

$\{x + y = 6\} \subset \overline{D}$: $\quad z(4,2) = -64$.

Висновок

Функція $Z = x^2 y(4 - x - y)$ має ***найбільше значення*** всередині області $\overline{D}$ у точці $\boldsymbol{M = (2,1)}$, $\max\limits_{\overline{D}} z = z(2,1) = 4$ і ***найменше значення*** на межі $\boldsymbol{x + y = 6}$ у точці $\boldsymbol{M(4,2)}$, $\min\limits_{\overline{D}} z = z(4,2) = -64$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Вища математика для економістів / *В. В. Барковський, Н. В. Барковська.* – К.: ЦУЛ, 2002. - 400 с.
2. Курс аналитической геометри и линейной алгебры / *Д. В. Беклемешев.* – М.: Наука, 1980. - 432 с.
3. Дифференциальное и интегральное исчисление / *Я. С. Бугров, С. М. Никольский.* – М.: Наука, 1980. - 432 с.
4. Элементы линейной алгебры и аналитической геометри / *Я. С. Бугров, С. М. Никольский.* – М.: Наука, 1980. - 176 с.
5. Высшая математика для экономистов / *Н. Ш. Кремер, Путко Б. А. і др.* – М.: «Банки и биржи» Издательское объединение «ЮНИТИ», 1988. - 471 с.

Навчальне видання

Вища математика

Конспект лекцій
для напрямів підготовки 0501,0502
зі спеціальностей
6.050104 „Фінанси”, 6.050107 „Економіка підприємства”,
6.050108 „Маркетинг”, 6.050201 „Менеджмент організацій”
для студентів денної та заочної форм навчання

У трьох частинах
Частина 2

Відповідальний за випуск зав. кафедри прикладної та обчислювальної математики д-р. фіз.-мат. наук, проф. Л. А. Фильштинський
Редактор Н. М. Мажуга
Комп’ютерне верстання Г. О. Кладієнко

Підписано до друку 28.01.2010, поз.
Формат 60×84/16. Ум. друк. арк. 6,51. Обл.-вид. арк. 4,79. Тираж 150 пр. Зам. №
Собівартість видання грн к.

Видавець і виготовлювач
Сумський державний університет
вул. Римського-Корсакова, 2, м. Суми, 40007
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи ДК № 3062 від 17.12.2007.