

КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

**Б. О. Іванов, М. В. Максюта**

# **КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ ІЗ ТЕОРЕТИЧНОЇ МЕХАНІКИ**

**Навчальний посібник**



УДК 531(075.8)  
ББК 22.2я73  
І-20

Рецензент  
д-р фіз.-мат. наук, проф. В. Ф. Коваленко

*Рекомендовано до друку вченою радою радіофізичного факультету  
(протокол № 3 від 11 жовтня 2010 року)*

**Іванов Б. О.**

І-20 Конспект лекцій із теоретичної механіки : навчальний посібник / Б. О. Іванов, М. В. Максютя. – К. : Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2012. – 207 с.

ISBN 978-966-439-500-4

Викладено основи теоретичної механіки, починаючи з основних постулатів Ньютона, далі переходячи до методу Лагранжа і завершуючи дослідженням руху механічних систем у межах формалізму Гамільтона. Суттєвим моментом є те, що в багатьох лекціях акцентується на ідеї інтегрованості динамічних систем.

Для студентів, аспірантів і викладачів фізичних спеціальностей.

УДК 531(075.8)  
ББК 22.2я73

ISBN 978-966-439-500-4

© Іванов Б. О., Максютя М. В., 2012  
© Київський національний університет імені Тараса Шевченка,  
ВПЦ "Київський університет", 2012

## ПЕРЕДМОВА

Навчальний посібник "Конспект лекцій з теоретичної механіки" складається з 18-ти лекцій, які належать до основного матеріалу з курсу "Теоретична механіка" (34 год.). Матеріал посібника подано в компактній україномовній формі, ілюстровано багатьма рисунками та графіками, що дозволяє студентам краще опановувати складні теоретичні питання цього курсу, а лектору економити час при підготовці до занять.

За змістом лекції розбиті на п'ять розділів. *Перший розділ* (лекції 1 ÷ 5) присвячений вивченню руху матеріальних точок у межах формалізму Лагранжа, що є подальшим розвитком механіки Ньютона, в основі якої лежать принцип інерції, принцип відносності Галілея та принцип детермінізму Ньютона, які, у свою чергу, приводять до трьох законів (постулатів) Ньютона, зокрема, у першій лекції на основі постулатів Ньютона досліджується рух системи матеріальних точок. У другій лекції на основі принципу Гамільтона виводяться рівняння Лагранжа другого роду, які інваріантні щодо довільних перетворень координат; з'ясовуються загальні властивості функції Лагранжа; приводяться вирази для функції Лагранжа однієї матеріальної точки та системи матеріальних точок. У третій лекції приводиться узагальнений вираз для кінетичної енергії, зокрема наголошується на існуванні гіроскопічних доданків. На основі принципу Д'Аламбера виводяться рівняння руху, за допомогою яких розраховуються реакції в'язей, що важливо в технічних застосуваннях. У четвертій лекції вводиться поняття циклічної координати і показується, що її існування пов'язане з наявністю деякого інтеграла руху, що вказує на існування деякої внутрішньої симетрії. Показано також, що закони збереження енергії, імпульсу та моменту імпульсу пов'язані з властивостями симетрії простору-часу. У п'ятій лекції за допомогою законів збереження досліджується одновимірний рух однієї матеріальної точки (показується,

що у випадку консервативних систем задача буде інтегрованою завжди); розглядається механічна подібність і теорема віріалу; аналізуються малі коливання, а також розглядається метод фазової площини.

У *другому розділі* (лекції 6 ÷ 8) вивчаються лінійні та нелінійні коливання систем з одним ступенем вільності за наявності сил тертя; досліджується зображення згасаючих процесів на фазовій площині за "додатного" і "від'ємного" тертя (лекція 6). Вивчається знакозмінне тертя (метод Ван дер Поля), аналізуються стійкі та нестійкі граничні цикли на фазовій площині; вивчаються також вимушені коливання та різні резонансні явища (лекція 7). У лекції 8 розглядаються коливання з багатьма ступенями вільності як за відсутності, так і за наявності сил тертя, а також вплив змушувальних сил.

*Третій розділ* (лекції 9 ÷ 11) присвячений інтегрованості динамічних систем з декількома ступенями вільності. На прикладі гармонічного осцилятора з двома ступенями вільності у дев'ятій лекції аналізуються питання щодо інтегрованості динамічних систем, що важливо при переході до більш загальних випадків. Зокрема, у випадку нелінійної системи Хенона–Хейнса її поведінка при перевищенні деякої критичної енергії стає навіть хаотичною. Слід зазначити, що дев'ята лекція є центральною не тільки за змістом, але й за формою, оскільки вона деякою мірою є узагальненням попередніх лекцій, і тому до неї ми апелюємо й в подальшому. Зокрема, у десятій лекції ця задача розглядається для довільних центральних полів, яка, у свою чергу, є частинним випадком більш загальної задачі з двома ступенями вільності, в якій у зв'язку з наявністю циклічної змінної існує як мінімум два незалежних інтеграли руху. У цій лекції вивчається і задача Кеплера, на основі якої аналізуються траєкторії матеріальних тіл за різних початкових умов; розглядається падіння на центр, а також акцентується увага на зв'язок між існуванням специфічного для цієї задачі третього інтеграла руху (вектор Лапласа–Рунге–Ленца) і замкненістю траєкторій руху. Підкреслюється також, що при переході до декартової системи координат ця задача зводиться до ізотропного двовимірного осцилятора, який розглядається в дев'ятій лекції. У лекції одинадцятій розглядаються багаточастинкові задачі, а саме:

детально аналізується задача двох тіл, схематично описується задача трьох тіл, вивчаються пружні зіткнення, а також розсіювання частинок, приділяється значна увага доведенню формули Резерфорда, на основі якої Бором була запропонована "планетарна модель атома".

*У четвертому розділі* вивчається рух абсолютно твердого тіла (лекції 12÷14), рух у неінерціальних системах відліку (лекція 15). У лекції 12 у межах формалізму ортогональних перетворень координат (параметризація за допомогою напрямних косинусів) розглядається кінематика та динаміка обертального руху твердого тіла. При цьому одержані вирази для тензорів інерції різних типів твердих тіл (дзиг), розраховані щодо системи центра інерції, записується кінетична енергія обертального руху та момент імпульсу твердого тіла, вводиться функція Лагранжа твердого тіла, а також записуються рівняння Лагранжа. У лекції 13 розглядаються ще дві параметризації обертального руху твердого тіла, а саме, параметризація поворотів за допомогою кутів Ейлера та векторна параметризація поворотів твердого тіла. При їх порівнянні далі в лекції виводяться кінематичні рівняння Ейлера, за допомогою яких у поєднанні з динамічними рівняннями Ейлера, записаними щодо головної системи координат, у лекції 14 вивчається вільний рух симетричної та асиметричної дзиг Ейлера. У лекції 15 вивчається рух матеріальних точок відносно систем відліку, які здійснюють, у свою чергу, поступальний або обертальний рух з довільними лінійними або кутовими швидкостями відносно інерціальних систем відліку. Вводяться поняття "сил інерції", аналізується рівномірне обертання, а також виводиться закон перетворення повної енергії для цього випадку.

*П'ятий розділ* (лекції 16÷18) присвячений формалізму Гамільтона, який є найбільш потужним методом дослідження механічних систем. Лекція 16 розпочинається з побудови функції Гамільтона за допомогою перетворення Лежандра. Далі виводяться канонічні рівняння Гамільтона, дається визначення функції Рауса, розглядаються канонічні перетворення та відповідні їм твірні функції, вводяться дужки Пуассона і показується, що вони інваріантні щодо довільних канонічних перетворень, аналізуються їх властивості. У лекції 17 розглядається один із головних мето-

дів дослідження динамічних систем – метод Гамільтона–Якобі. Це пояснюється тим, що випадки спрощення інтегрування рівнянь руху, які базуються на використанні циклічних змінних, охоплюються методом відокремлення змінних у рівнянні Гамільтона–Якобі, але до них ще приєднується низка випадків, коли відокремлення змінних можливе, але координати не циклічні. Далі в цій лекції досліджуються інтегральні інваріанти Пуанкаре, тобто показується, що вони інваріантні щодо довільних канонічних перетворень. Нарешті, наведено доведення про останній із інваріантів Пуанкаре, який описує фазовий об'єм, що займає механічна система у процесі руху (рух виступає як канонічне перетворення), тобто показано, що фазовий об'єм залишається незмінним за величиною, але може змінюватися за формою. Останнє твердження є суттю теореми Ліувілля, яка має важливе фундаментальне значення в статистичній фізиці. У лекції 18 розглядаються адіабатичні інваріанти, які є основою введення змінних "дія–кут", за допомогою яких опис інтегрованих динамічних систем можливий на більш високому теоретичному рівні (спираємось на теорему Колмогорова–Арнольда–Мозера), ніж їх розгляд, наприклад, у лекції 9. Адіабатичні інваріанти, як констатується в цій лекції, є основою введення у квантовій механіці квантових чисел, що характеризують квантові стани систем. Завершується ця лекція, а, відповідно, і сам навчальний посібник вивченням структури фазового простору гамільтонових інтегрованих механічних систем (багатовимірний фазовий простір можна уявляти у вигляді багатовимірного тору, який, у свою чергу, являє собою прямий добуток кіл), що спирається на загальні теореми геометрії та топології й пов'язує інтегрованість гамільтонових систем з інваріантністю цих торів щодо довільних неперервних перетворень.

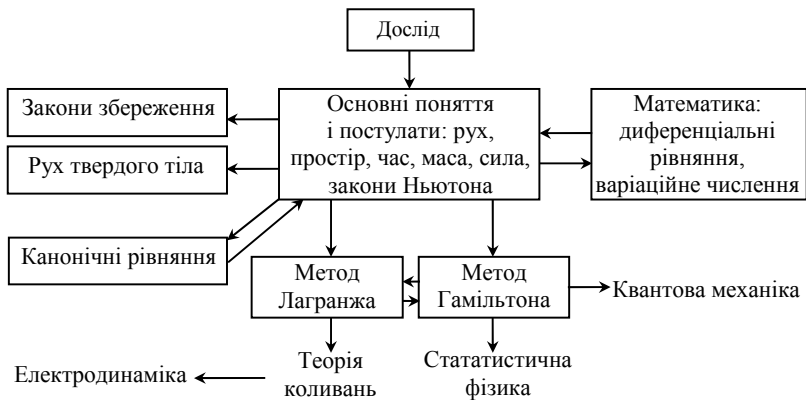
# Розділ I

## РУХ МАТЕРІАЛЬНИХ ТОЧОК У МЕЖАХ ФОРМАЛІЗМУ ЛАГРАНЖА

### Лекція 1. Основні постулати Ньютона

#### § 1. Вступ

Класична механіка є першим із чотирьох розділів загального курсу теоретичної фізики, який містить електродинаміку, квантову механіку, статистичну фізику та термодинаміку. В основі класичної механіки лежать експериментальні факти, узагальнені у вигляді трьох законів Ньютона, сформульованих у книзі "*Philosophiae naturalis principia mathematica*" (Лондон, 1686). Ці закони вивчались у курсі загальної фізики, і припускаємо, що основні поняття, на яких базується класична механіка (маса, сила, імпульс тощо) уже відомі читачу. Розпочинаючи вивчення теоретичної механіки, вважаємо за необхідне чітко собі уявляти, що класична механіка не застосовна для вивчення рухів зі швидкостями, порівняними зі швидкістю світла, а також до опису динаміки мікросвіту. Ньютонівське формулювання механіки не є єдино можливим. За більш ніж три століття розвитку класичної механіки було запропоновано багато інших підходів, формалізм яких часто сильно відрізняється від ньютонівського. Ці підходи цінні тим, що, по-перше, дозволяють вирішити значну кількість реальних механічних проблем і, по-друге, дозволяють легше перейти до опису релятивістської динаміки та квантової механіки. Цей розвиток класичної механіки і взаємозв'язки з іншими теоретичними курсами відображений на рис. 1.



**Рис. 1.** Схематичне зображення структурно-логічної схеми теоретичної механіки

Далі дуже важливо привести ті основні моменти, які обов'язково існують у всіх формулюваннях класичної механіки. Ці моменти можна відобразити у вигляді трьох принципів класичної механіки.

**1.** Динаміку механічної системи можна описати за допомогою координат матеріальних точок у тривимірному просторі у вигляді векторних функцій  $\vec{r}_a(t)$ , залежних від часу  $t$ . Час у класичній механіці вважається абсолютним, функції  $\vec{r}_a(t)$  неперервні та диференційовні, тобто можна визначати швидкості матеріальних точок, їх прискорення тощо. Вибір координат і часу визначає деяку інерціальну систему відліку, щодо якої вільний рух довільної матеріальної точки відбувається з постійною за величиною та напрямком швидкістю. Це твердження є змістом принципу інерції.

**2.** Будь-яка інша система відліку, що рухається щодо якоїсь обраної інерціальної системи з постійною швидкістю, також є інерціальною, а закони руху в усій нескінченній сукупності таких інерціальних систем відліку виглядають однаково. Це твердження про еквівалентність усіх інерціальних систем відліку є суттю принципу відносності Галілея. Це означає, що координати



$\vec{r}_A$  і  $\vec{r}'_A$  однієї і тієї самої точки  $A$  у двох різних системах відліку  $K$  і  $K'$ , остання з яких рухається щодо першої зі швидкістю  $\vec{V}$ , пов'язані перетворенням  $\vec{r}_A = \vec{r}'_A + \vec{V}t$ . При цьому вважаємо, що час в обох цих системах однаковий:  $t = t'$ .

3. Закони механічного руху такі, що вибір координат і швидкостей усіх матеріальних точок системи в якийсь конкретний момент часу (напр., задаємо значення координат і швидкостей за  $t = 0$ ) визначає всю подальшу еволюцію механічної системи. У цьому постулаті закладений принцип механічного детермінізму, або детермінізму Ньютона.

Ці принципи мають лежати в основі будь-яких формулювань класичної механіки, але їх конкретна реалізація може бути різною. Історично першим було формулювання Ньютона, відповідно до якого механічний рух визначається трьома законами (постулатами). У сучасному вигляді ці закони можна сформулювати таким чином:

- 1) існують інерціальні системи відліку, щодо яких тіло, на яке не діють сили, рухається прямолінійно й рівномірно. Довільна система відліку, яка рухається щодо інерціальної системи з постійною швидкістю, також є інерціальною;
- 2) сила, яка діє на тіло, викликає зміну його кількості руху (імпульсу  $\vec{p} = m\vec{v}$ ), тобто

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}.$$

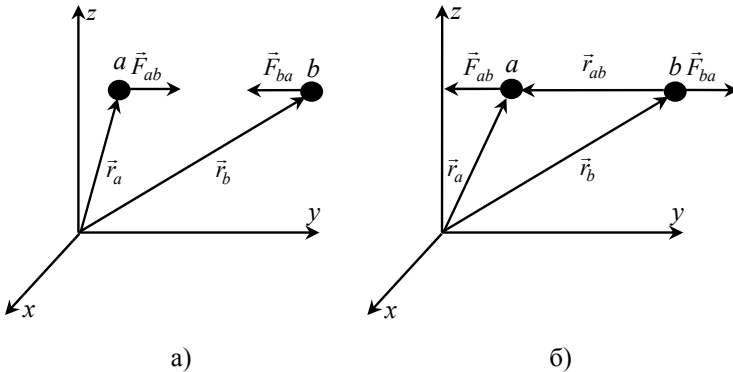
Оскільки в класичній механіці маса тіла не залежить від його швидкості, маємо

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F},$$

тобто прискорення тіла, помножене на його сталу масу, дорівнює прикладеній силі. Звідси випливає, що за  $\vec{F} = 0$  маємо  $\vec{v} = \text{const}$ , тобто другий закон Ньютона не суперечить першому закону Ньютона;

- 3) механічна взаємодія тіл одне на одне зводиться до парних сил. Якщо тіло  $a$  діє на тіло  $b$  із силою  $\vec{F}_{ab}$ , то тіло  $b$  діє

на тіло  $a$  з силою  $\vec{F}_{ba}$ , причому  $\vec{F}_{ab} = -\vec{F}_{ba}$ , що є змістом третього закону Ньютона. Очевидно, що сили  $\vec{F}_{ab}$  і  $\vec{F}_{ba}$  колінеарні вектору  $\vec{r}_{ab} = \vec{r}_a - \vec{r}_b$ , що важливо для аналізу закону збереження моменту імпульсу. Зокрема, у випадку сил притягування сила  $\vec{F}_{ba}$  паралельна вектору  $\vec{r}_{ab}$ , а сила  $\vec{F}_{ab}$  відповідно антипаралельна (рис. 2, а). Проте для випадку сил відштовхування все буде навпаки (рис. 2, б).



**Рис. 2.** Ілюстрація дії третього закону Ньютона у двох випадках: а) за наявності сил притягування; б) за наявності сил відштовхування

Застосуємо закони Ньютона до опису руху системи матеріальних точок.

## § 2. Механіка системи матеріальних точок

Матеріальна точка – це тіло, розмірами якого можна знехтувати.

**1. Теорема про збереження кількості руху (імпульсу) системи.** Якщо сума зовнішніх сил, що діють на систему, дорівнює нулю, то повна кількість руху системи залишається незмінною. У випадку однієї матеріальної точки це вже було доведено (перший закон Ньютона). При розгляді системи з багатьма матеріальними точками необхідно розрізняти зовнішні й внутрішні сили. Під зовнішніми силами ми будемо розуміти такі сили, які діють на матеріальні точки системи зовні (сила  $\vec{F}_a^{(e)}$  діє на  $a$ -ту точку), а під внутрішніми розумітимемо парні сили взаємодії матеріальних точок одна з одною

(відповідно до третього закону Ньютона інших сил взаємодії не існує). Тоді рівняння руху для  $a$ -ї матеріальної точки набуває вигляду  $\dot{\vec{p}}_a = \sum_b \vec{F}_{ba} + \vec{F}_a^{(e)}$ . Тепер підсумуємо це рівняння за  $a$ :

$$\frac{d^2}{dt^2} \sum_a m_a \vec{r}_a = \sum_{\substack{a,b \\ a \neq b}} \vec{F}_{ba} + \sum_a \vec{F}_a^{(e)}.$$

Перша сума у правій частині дорівнює нулю, оскільки  $\vec{F}_{ab} = -\vec{F}_{ba}$ , тобто звідси випливає, що

$$\frac{d}{dt} \vec{P} = \sum_a \vec{F}_a^{(e)} = \vec{F}^{(e)},$$

тобто зміна імпульсу пов'язана тільки з дією на систему зовнішніх сил. Якщо повна зовнішня сила  $\vec{F}^{(e)}$  дорівнює нулю, то  $d\vec{P}/dt = 0$ , звідки випливає  $\vec{P} = \text{const}$ , тобто імпульс системи зберігається. Значимо також, що у випадку, коли відомо, що проекція повної зовнішньої сили на деякий напрямок  $\vec{n}$  дорівнює нулю, тобто  $(\vec{n}, \vec{F}^{(e)}) = 0$ , то зберігається проекція повного імпульсу на цей напрямок, тобто  $(\vec{n}, \vec{P}) = \text{const}$ .

З урахуванням збереження імпульсу зручно ввести поняття центра мас системи матеріальних точок. Вводимо середній радіус-вектор

$$\vec{R} = \frac{\sum_a m_a \vec{r}_a}{\sum_a m_a} = \frac{\sum_a m_a \vec{r}_a}{M}$$

системи матеріальних точок, що схематично зображено на рис. 3. Цей вектор визначає точку, яка називається *центром мас системи*. Оскільки маємо

$$M \frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_a \vec{F}_a^{(e)} = \vec{F}^{(e)},$$

то можна стверджувати, що центр мас рухається так, наче в ньому зосереджена маса всієї системи, і до нього прикладена сумарна зовнішня сила. Внутрішні сили при цьому не мають ніякого впливу на рух центра мас.

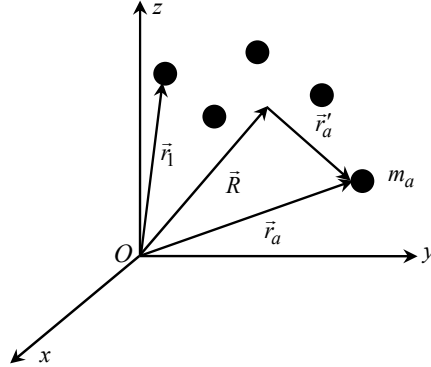


Рис. 3. Центр мас системи матеріальних точок

**2. Теорема про збереження моменту кількості руху (моменту імпульсу) системи.** Момент кількості руху  $a$ -ї матеріальної точки дорівнює  $\vec{L}_a = \vec{r}_a \times \vec{p}_a$ . Під повним моментом імпульсу системи будемо розуміти суму  $\vec{L} = \sum_a \vec{L}_a = \sum_a (\vec{r}_a \times \vec{p}_a)$ . Беремо те-

пер повну похідну за часом від  $\vec{L}$ , тобто

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}}{dt} &= \sum_a (\dot{\vec{r}}_a \times \vec{p}_a) + \sum_a (\vec{r}_a \times \dot{\vec{p}}_a) = \\ &= \sum_a (\vec{r}_a \times \dot{\vec{p}}_a) = \sum_a (\vec{r}_a \times \vec{F}_a^{(e)}) + \sum_{a,b} (\vec{r}_a \times \vec{F}_{ba}) = \vec{N}^{(e)}. \end{aligned}$$

Перша сума в цьому співвідношенні дорівнює нулю, оскільки імпульс  $a$ -ї матеріальної точки дорівнює  $\vec{p}_a = m_a \dot{\vec{r}}_a$ , а остання сума в цьому виразі дорівнює нулю внаслідок рівності  $\vec{r}_a \times \vec{F}_{ba} + \vec{r}_b \times \vec{F}_{ab} = (\vec{r}_a - \vec{r}_b) \times \vec{F}_{ba} = \vec{r}_{ab} \times \vec{F}_{ba} = 0$  (саме тут і важливе повне формулювання третього закону Ньютона, згідно з яким сили  $\vec{F}_{ab}$  і  $\vec{F}_{ba}$  колінеарні вектору  $\vec{r}_{ab} = \vec{r}_a - \vec{r}_b$ ). Якщо повний момент зовнішніх сил  $\vec{N}^{(e)}$ , що діють на систему, дорівнює нулю, то вектор  $\vec{L}$  залишається незмінним у часі.

З'ясуємо, як момент імпульсу визначається в різних системах координат. Нехай момент імпульсу системи щодо початку відліку деякої системи координат дорівнює  $\vec{L} = \sum_a (\vec{r}_a \times \vec{p}_a)$ . Оскільки

$\vec{r}_a = \vec{r}'_a + \vec{R}$  (рис. 3), маємо  $\vec{v}_a = \vec{v}'_a + \vec{V}$ , де  $\vec{v}'_a = d\vec{r}'_a/dt$ ,  $\vec{V} = d\vec{R}/dt$ . Тоді вектор  $\vec{L}$  дорівнює

$$\vec{L} = \sum_a \vec{R} \times m_a \vec{V} + \sum_a \vec{r}'_a \times m_a \vec{v}'_a + \left( \sum_a m_a \vec{r}'_a \right) \times \vec{V} + \vec{R} \times \frac{d}{dt} \sum_a m_a \vec{r}'_a.$$

За означенням радіус-вектора центра мас у системі координат, початок якої збігається із цим центром мас, впливає рівність  $\sum_a m_a \vec{r}'_a = 0$ .

Таким чином, момент імпульсу системи матеріальних точок щодо центра системи координат ( $x, y, z$ ) складається з двох частин: з моменту кількості руху цієї системи з припущенням, що вся її маса зосереджена в центрі мас, і з моменту кількості руху, що виникає внаслідок руху цієї системи щодо центра мас. Тільки в тому випадку, коли центр мас нерухомий щодо центра координат (точки  $O$ ), момент кількості руху  $\vec{L}$  не залежить від вибору цієї точки.

**3. Теорема про збереження енергії системи матеріальних точок.** Робота сили  $\vec{F}$ , що діє на матеріальну точку, записується

у вигляді  $W_{12} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{l}$ . З урахуванням другого закону Ньютона

звідси впливає, що для матеріальної точки масою  $m$  одержуємо  $\int \vec{F} \cdot d\vec{l} = m \int \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} dt = \frac{m}{2} \int \frac{d}{dt} (v^2) dt$ , тобто виконується рівність

$$W_{12} = \frac{m}{2} (v_2^2 - v_1^2) = T_2 - T_1, \text{ де скалярна величина } T = mv^2/2 \text{ називається кінетичною енергією матеріальної точки.}$$

Отже, робота  $W_{12}$  дорівнює зміні кінетичної енергії  $\Delta T = T_2 - T_1$ .

Якщо силове поле таке, що робота, яка здійснюється силою на довільному замкненому контурі, дорівнює нулю, то матимемо  $\oint \vec{F} \cdot d\vec{l} = 0$ . Така сила називається *консервативною*. Згідно з теоремою Стокса  $\oint_l \vec{A} \cdot d\vec{S} = \int_S \text{rot } \vec{A} \cdot d\vec{S}$  умову консервативності сил можна записати у вигляді  $\text{rot } \vec{F} = 0$ . Звідси впливає, що силу можна представляти у вигляді градієнта деякої скалярної функції  $\vec{F} = -\text{grad } U$ , де величина  $U(x, y, z)$  називається *потенціальною*

енергією. Існування функції  $U(x, y, z)$  може бути доведено без застосування теорем векторного аналізу. З умови консервативності випливає, що робота не залежить від шляху, яким проводиться інтегрування між точками 1 і 2. Звідси випливає, що  $W_{12} = U_1 - U_2$ , оскільки  $\vec{F} \cdot d\vec{l} = -dU$ . Отже, маємо  $T_1 + U_1 = T_2 + U_2$ , тобто, якщо сили, що діють на матеріальну точку, консервативні, її повна енергія  $E = T + U$  залишається незмінною.

Тепер розглянемо систему матеріальних точок. Якщо зовнішні сили мають потенціал, то їх робота буде

$$\sum_a \int_1^2 \vec{F}_a^{(e)} \cdot d\vec{l}_a = - \sum_a \int_1^2 \nabla_a U_a \cdot d\vec{l}_a = - \sum_a (U_a(2) - U_a(1)).$$

Якщо внутрішні сили також консервативні, то сили  $\vec{F}_{ab}$  і  $\vec{F}_{ba}$  можна отримати за допомогою деякої потенціальної функції  $U_{ab}$ . Щоб задовольнити третій закон Ньютона, потенціал  $U_{ab}$  має бути функцією відстані між частинками, тобто  $U_{ab} \equiv U_{ab}(|\vec{r}_a - \vec{r}_b|)$ . Тоді сили  $\vec{F}_{ab}$  і  $\vec{F}_{ba}$  будуть рівні та протилежні за напрямком:  $\vec{F}_{ba} = -\nabla_a U_{ab} = \nabla_b U_{ab} = -\vec{F}_{ab}$ :

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{a,b \\ a \neq b}} \int_1^2 \vec{F}_{ba} \cdot d\vec{l}_a &= -\frac{1}{2} \sum_{\substack{a,b \\ a \neq b}} \int_1^2 (\nabla_a U_{ab} \cdot d\vec{l}_a + \nabla_b U_{ab} \cdot d\vec{l}_b) = \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{\substack{a,b \\ a \neq b}} \int_1^2 \nabla_a U_{ab} \cdot (d\vec{l}_a - d\vec{l}_b) = -\frac{1}{2} \sum_{\substack{a,b \\ a \neq b}} \int_1^2 \nabla_a U_{ab} \cdot d\vec{r}_{ab} = \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{\substack{a,b \\ a \neq b}} (U_{ab}(2) - U_{ab}(1)). \end{aligned}$$

Якщо внутрішні сили також мають потенціал, то можна казати про повну потенціальну енергію системи, розуміючи під нею суму  $U = \sum_a U_a + \frac{1}{2} \sum_{\substack{a,b \\ a \neq b}} U_{ab}$ . При цьому повна енергія  $E = T + U$

консервативної системи залишиться незмінною.

## Контрольні запитання та завдання

1. Визначення інерціальної системи відліку.
2. Принцип інерції та принцип відносності.
3. Основні постулати Ньютона.
4. Закони збереження імпульсу та моменту імпульсу.
5. Теорема про збереження енергії системи матеріальних точок.

## Лекція 2. Принцип Гамільтона і рівняння Лагранжа

### § 1. В'язі. Узагальнені координати

Для визначення положення  $N$  матеріальних точок у просторі потрібно задати  $N$  радіус-векторів, тобто  $3N$  координат. Кількість незалежних величин, які необхідно задати для однозначного визначення положення системи, називається *кількістю її ступенів вільності*. Наприклад, у цьому випадку ця кількість дорівнює  $3N$ . Проте часто необхідно враховувати в'язі, які обмежують рух системи.

В'язі можна класифікувати за різними ознаками. Якщо обмеження, що спричинені в'язями, можна виразити у вигляді рівностей

$$f(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t) = 0,$$

то такі в'язі називаються *голономними*. Прикладом голономних в'язей можуть слугувати в'язі у твердому тілі, які виражаються рівняннями вигляду

$$(\vec{r}_a - \vec{r}_b)^2 - c_{ab}^2 = 0.$$

В'язі, які не можна виразити у вигляді таких рівностей, називаються *неголономними*. Наприклад, розглянемо частинку, що рухається по поверхні кулі, яка має радіус  $a$ , її центр розташований у початку системи координат. У цьому випадку неголономна в'язь може бути виражена за допомогою нерівності

$$r^2 - a^2 \geq 0.$$

Якщо в'язь залежить явно від часу, то її називають *реономною* (напр., намистина рухається вздовж рухомого дроту). Якщо не буде явної залежності від часу, то така в'язь називається *склерономною*.





## § 2. Принцип Гамільтона

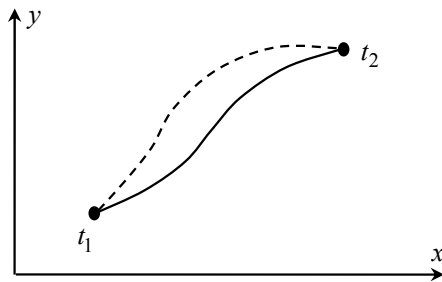
Рівняння руху механічної системи можна одержати як із "диференціального принципу" (принципу Д'Аламбера на основі другого закону Ньютона), так і з "інтегрального принципу" (принципу Гамільтона). В останньому підході розглядається рух системи за скінченний проміжок часу. Принцип Гамільтона стверджує, що дійсним рухом механічної системи в проміжку від  $t_1$  до  $t_2$  є такий рух, який приводить до екстремального значення (максимуму чи мінімуму) механічну дію системи, яка виражається таким інтегралом:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) dt,$$

де  $\mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$  – функція Лагранжа механічної системи. Іншими словами, для дійсного руху (на рис. 1 наведено схематичне зображення траєкторій матеріальної точки в просторі конфігурацій  $(x, y)$  для дійсного та віртуально-можливого рухів) варіація цього інтеграла за фіксованих значень  $t_1$  і  $t_2$  дорівнює нулю, а саме:

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q_1, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s, t) dt = 0.$$

У цьому й полягає суть принципу Гамільтона.



**Рис. 1.** Схематичне зображення траєкторій матеріальної точки в просторі конфігурацій для дійсного руху (суцільна крива) і для віртуально-можливого зміщеного на  $\delta \vec{r}(t)$  руху (пунктирна крива)

Покажемо, що механіку консервативних систем можна побудувати, виходячи з принципу Гамільтона як із основного постулату, який замінює закони Ньютона. Таке формулювання законів механіки має відповідні переваги. По-перше, ми одержали принцип, який не залежить від вибору узагальнених координат. По-друге, цей принцип вказує шлях, яким необхідно йти при розгляді з математичною строгістю інших фізичних систем (напр., релятивістської механіки, теорії поля тощо).

Переходимо до одержання умов, що розв'язують задачу про визначення екстремуму дії. Розглянемо задачу з одним ступенем вільності. У цьому разі необхідно визначити лише одну функцію  $q(t)$ , яка в інтервалі  $t_1 \leq t \leq t_2$  реалізує екстремум криволінійного інтеграла від функції Лагранжа  $\mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$ , де  $\dot{q} = dq/dt$ . Тобто для шуканої функції  $q(t)$  інтеграл дії повинен мати екстремум (мінімум або максимум). Будемо шукати лише такі криві  $q(t)$ , для яких  $q(t_1) = q_1$ ,  $q(t_2) = q_2$ .

Щоб розв'язати цю задачу, представляємо її в такій формі, яка дозволяє користуватися апаратом диференціального числення. Розглядаємо однопараметричну сукупність кривих

$$q(t, \alpha) = q(t) + \alpha \eta(t),$$

де  $\eta(t)$  – довільна функція часу з нульовими граничними умовами  $\eta(t_1) = \eta(t_2) = 0$ . Сукупність кривих  $q(t, \alpha)$ , що неперервна щодо параметра  $\alpha$ , називається *гомотопією*, або *деформацією*, якщо всі початкові точки сукупності збігаються між собою. Якщо параметр  $\alpha$  змінюється в межах  $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$ , то кажемо, що гомотопія з'єднує дві криві  $q(t, \alpha_1)$  і  $q(t, \alpha_2)$ . Дві *криві*, що починаються в точці  $q_1$ , а закінчуються в точці  $q_2$ , називаються *гомотопними*, якщо можна здійснити неперервну деформацію однієї кривої в іншу. Використовуючи  $q(t, \alpha)$ , одержимо інтеграл  $S$  як функцію параметра  $\alpha$ :

$$S(\alpha) = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q(t, \alpha), \dot{q}(t, \alpha), t) dt,$$

а умова екстремуму набуває такого вигляду:  $(\partial S/\partial \alpha)_{\alpha=0} = 0$ .

Виконуючи диференціювання під знаком інтеграла, дістаємо

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha} = \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \frac{\partial \dot{q}}{\partial \alpha} \right) dt.$$

Обчислюючи другий інтеграл у правій частині цього виразу частинами, одержуємо

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \frac{\partial \dot{q}}{\partial \alpha} dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \frac{\partial^2 q}{\partial t \partial \alpha} dt = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \frac{\partial q}{\partial \alpha} \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) \frac{\partial q}{\partial \alpha} dt,$$

де  $\partial q/\partial \alpha = \eta(t)$ . Оскільки  $\eta(t_1) = \eta(t_2) = 0$ , вираз для  $\partial S/\partial \alpha$  переписується у вигляді

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha} = \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) \frac{\partial q}{\partial \alpha} dt.$$

Очевидно, що  $\delta q = (\partial q/\partial \alpha)_{\alpha=0} \delta \alpha$  являє собою довільну варіацію функції  $q(t)$ , яку можна одержати при варіюванні довільного параметра  $\alpha$  в околі значення  $\alpha = 0$ . Звідси випливає, що рівність

$$\delta S = (\partial S/\partial \alpha)_{\alpha=0} \delta \alpha = \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) \delta q dt = 0$$

можлива лише тоді, коли

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) = 0.$$

Отже, дія  $S$  набуває екстремальних значень тільки для таких кривих  $q(t)$ , які задовольняють це диференціальне рівняння. Це рівняння в механіці називають *рівнянням Лагранжа* (деякі автори називають його *рівнянням Лагранжа другого роду*).

У випадку  $s$  ступенів вільності в інтегралі дії мають незалежно варіюватись  $s$  різних функцій  $q_i(t)$ . Очевидно, що тоді ми одержимо  $s$  рівнянь, які мають вигляд

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0, \quad (i = 1, \dots, s).$$

Щоб знайти  $2s$  довільних сталих, необхідно задати такі початкові умови:

$$q_i(t_0) = q_{i0}, \dot{q}_i(t_0) = \dot{q}_{i0}, (i = 1, \dots, s).$$

Таким чином, принцип Гамільтона приводить до системи диференціальних рівнянь другого порядку. Ясно, що ці рівняння мають бути еквівалентними рівнянню Ньютона, а при використанні декартових координат матеріальних точок збігатися з рівнянням Ньютона. Це дозволяє встановити зв'язок між цими підходами, зокрема, знайти вигляд функції Лагранжа. До цього питання можна підійти по-різному. Можна записати явний вигляд функції Лагранжа, використовуючи тільки постулати класичної механіки, не звертаючись до рівняння Ньютона. Такий підхід використаний у книзі Л. Д. Ландау й Е. М. Ліфшиця [1]. Проте можна йти іншим шляхом (це зроблено в книгах Г. Голдстейна [2] і А. М. Федорченка [3]): урахувати рівняння в'язей і вивести рівняння Лагранжа з рівнянь Ньютона, а потім відновити й явний вигляд функції Лагранжа. У теоретичній фізиці часто буває так, що рівняння, які описують динаміку даної системи, невідомі й аналіз починається з їх побудови. Тому корисно виконати саме такий аналіз у нашому випадку, коли результат уже відомий.

Почнемо зі з'ясування загальних властивостей функції Лагранжа, якими вона має характеризуватися в будь-якій теорії, що допускає лагранжевий опис.

### **Властивості функції Лагранжа**

**1.** Нехай механічна система складається з двох частин  $A$  та  $B$ , кожна з яких за умови замкненості мала б функції Лагранжа  $\mathcal{L}_A$  та  $\mathcal{L}_B$ , відповідно. Якщо ці системи розвести так далеко, що між ними можна знехтувати взаємодією, то функція Лагранжа всієї системи прямує до границі  $\lim \mathcal{L} = \mathcal{L}_A + \mathcal{L}_B$ . Це є властивістю адитивності функції Лагранжа.

**2.** Якщо помножити функцію Лагранжа на довільну сталу, то це не впливає на рівняння руху. Звідси можна було б зробити висновок, що функції Лагранжа різних ізольованих механічних систем могли б помножатися на різні сталі. Але властивість ади-

тивності не допускає цю невизначеність. Лагранжеві функції всіх систем можна множити тільки на однакові константи, що зводиться до вибору систем одиниць вимірювань.

3. Функція Лагранжа визначена лише з точністю до адитивної складової, а саме, повної похідної від деякої функції координат і часу. Дійсно, нехай маємо співвідношення

$$\mathcal{L}'(q, \dot{q}, t) = \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) + \frac{d}{dt} f(q, t).$$

Тоді дія  $S'$  обчислюється таким чином:

$$\begin{aligned} S' &= \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}'(q, \dot{q}, t) dt = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{df}{dt} dt = \\ &= S + f(q_2, t_2) - f(q_1, t_1), \end{aligned}$$

тобто два додаткові члени зникають при варіюванні. Отже, умова  $\delta S' = 0$  збігається з умовою  $\delta S = 0$  і вигляд рівнянь руху залишається незмінним.

### § 3. Принцип відносності Галілея. Функції Лагранжа однієї матеріальної точки та системи матеріальних точок

Існують такі системи, щодо яких простір є однорідним і ізотропним, а час – однорідним. Такі системи називаються *інерціальними*.

Функція Лагранжа матеріальної точки в інерціальній системі координат має вигляд

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(v^2),$$

оскільки внаслідок однорідності простору не має бути залежності від  $\vec{r}$ , унаслідок однорідності часу не входить  $t$ , а внаслідок ізотропності простору не може бути залежності від напрямку вектора  $\vec{v}$ . Це приводить до такого ланцюжка рівностей:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{r}} = 0 \rightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{v}} \right) = 0 \rightarrow \vec{v} = \text{const}.$$

Таким чином, в інерціальній системі відліку вільний рух матеріальної точки відбувається зі сталою за величиною і напрямком швидкістю. У цьому полягає закон інерції. У всіх цих сис-

темах відліку властивості простору й часу однакові. Відповідно однакові і закони механіки. Це твердження лежить в основі принципу відносності Галілея: не існує "абсолютної" системи відліку, яку можна було б виділити серед інших систем. Як наслідок, у разі руху інерціальної системи відліку  $K'$  зі швидкістю  $\vec{V}$  щодо інерціальної системи відліку  $K$  спостерігається таке перетворення Галілея:  $\vec{r} = \vec{r}' + \vec{V}t$ ,  $t = t'$ .

Перейдемо тепер до одержання функції Лагранжа вільної матеріальної точки. Нехай інерціальна система відліку  $K$  рухається щодо інерціальної системи відліку  $K'$  з нескінченно малою швидкістю  $\vec{\varepsilon}$ , тобто  $\vec{v}' = \vec{v} + \vec{\varepsilon}$ . Оскільки рівняння руху в усіх системах відліку повинні мати один і той самий вигляд, функція Лагранжа  $\mathcal{L}(v^2)$  має перейти у функцію  $\mathcal{L}'$ , яка відрізняється від  $\mathcal{L}(v^2)$  лише на повну похідну від деякої функції координат і часу, тобто маємо

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L}(\vec{v}'^2) = \mathcal{L}(\vec{v}^2 + 2\vec{v} \cdot \vec{\varepsilon} + \vec{\varepsilon}^2) \approx \mathcal{L}(v^2) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v^2} 2\vec{v} \cdot \vec{\varepsilon}.$$

Останній член цієї рівності буде повною похідною за часом лише в тому випадку, коли він залежить від швидкості  $\vec{v}$  лінійно. Тому  $\partial \mathcal{L} / \partial v^2$  від швидкості не залежить, тобто функція Лагранжа має вигляд

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} v^2,$$

де величина  $m$  називається *масою матеріальної точки*.

Ураховуючи властивість адитивності функції Лагранжа для системи матеріальних точок, що не взаємодіють, маємо

$$\mathcal{L} = \sum_a \frac{m_a}{2} v_a^2.$$

Слід підкреслити, що лише за врахування цієї властивості таке визначення маси має реальний зміст: функцію Лагранжа можна множити на довільну константу, а відношення мас при цьому не змінюється. Окрім того, маса не може бути від'ємною, оскільки в цьому випадку не мав би мінімуму такий інтеграл:

$$S = \int_1^2 \frac{mv^2}{2} dt.$$

Розглянемо тепер систему матеріальних точок, які взаємодіють лише між собою. Допустима також і наявність зовнішніх сил, які можна трактувати як наслідок взаємодії частинок системи з деякими нерухомими "зовнішніми тілами", динаміка яких не обговорюється. Ясно, що в цьому випадку просторова однорідність буде порушена, і функція Лагранжа стає залежною від координат частинок. Щоб зробити це якомога простіше, слід додати до функції Лагранжа деяку функцію координат частинок, що прийнято записувати у вигляді

$$\mathcal{L} = \sum_a \frac{m_a}{2} v_a^2 - U(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_a, \dots, \vec{r}_N).$$

Слід зазначити, що принцип відносності Галілея виключає можливість доданків іншої структури, а саме, залежних одночасно від координат і швидкостей.

Як було показано раніше, загальна форма потенціальної енергії  $U(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_a, \dots, \vec{r}_N) \equiv U(\vec{r}_a)$  може бути записана у вигляді

$$U(\vec{r}_a) = U^{(e)}(\vec{r}_a) + \frac{1}{2} \sum_{\substack{a,b \\ a \neq b}} U_{ab}(|\vec{r}_a - \vec{r}_b|).$$

У результаті для функції Лагранжа системи матеріальних точок, узгодженої із законами Ньютона, ми приходимо до виразу

$$\mathcal{L} = \sum_a \frac{m_a}{2} v_a^2 - U(\vec{r}_a).$$

Очевидно, що ця функція Лагранжа інваріантна щодо заміни  $t$  на  $-t$ , тобто всі механічні рухи є зворотними. Нарешті, покажемо, що для такої функції Лагранжа система рівнянь Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{v}_a} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{r}_a}$$

приводить до системи рівнянь Ньютона  $m_a \frac{d\vec{v}_a}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}_a}$  для координат усіх матеріальних точок.

## Контрольні запитання та завдання

1. Класифікація в'язей механічних систем.
2. Суть варіаційного принципу найменшої дії (принципу Гамільтона).
3. Рівняння Лагранжа другого роду.
4. Властивості функції Лагранжа.
4. Функція Лагранжа системи матеріальних точок.

## Лекція 3. Узагальнення методу Лагранжа

### § 1. Узагальнений вираз для кінетичної енергії

У попередній лекції на основі інтегрального принципу Гамільтона для консервативних систем і на основі довільності величини варіації  $\delta q(t)$  (у випадку одного ступеня вільності) або  $s$  таких функцій  $\delta q_1(t), \dots, \delta q_s(t)$  (у випадку  $s$  ступенів вільності) із рівності

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^s \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt = 0$$

впливає система рівнянь Лагранжа–Ейлера

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0, \quad (i = 1, \dots, s).$$

Раніше ми переконались, що для системи матеріальних точок рівняння Лагранжа збігаються зі стандартними рівняннями руху, які визначаються другим законом Ньютона. Однак перевага формалізму Лагранжа полягає в тому, що його можна застосовувати для довільного вибору узагальнених координат. Для цього достатньо записати функцію Лагранжа через ці координати.

Із визначення  $\mathcal{L} = T - U$  випливає, що функція Лагранжа  $\mathcal{L}$  є функцією узагальнених координат  $q_i$ , узагальнених швидкостей  $\dot{q}_i$ , а також часу  $t$ , який може входити у функцію Лагранжа явно внаслідок нестационарності в'язей або зовнішніх сил.

Знайдемо вираз кінетичної енергії  $T$  через узагальнені координати та швидкості. Декартові координати матеріальних точок системи виражаються через узагальнені координати й час таким чином:



$$x_a = f_{xa}(q_1, \dots, q_s; t), \quad y_a = f_{ya}(q_1, \dots, q_s; t), \quad z_a = f_{za}(q_1, \dots, q_s; t).$$

Звідси знаходимо

$$\dot{x}_a = \frac{\partial f_{xa}}{\partial t} + \sum_{k=1}^s \frac{\partial f_{xa}}{\partial q_k} \dot{q}_k, \quad \dot{y}_a = \frac{\partial f_{ya}}{\partial t} + \sum_{k=1}^s \frac{\partial f_{ya}}{\partial q_k} \dot{q}_k, \quad \dot{z}_a = \frac{\partial f_{za}}{\partial t} + \sum_{k=1}^s \frac{\partial f_{za}}{\partial q_k} \dot{q}_k.$$

Підставляючи ці значення у формулу для кінетичної енергії

$$T = \frac{1}{2} \sum_{a=1}^N m_a \dot{r}_a^2 = \frac{1}{2} \sum_{a=1}^N m_a (\dot{x}_a^2 + \dot{y}_a^2 + \dot{z}_a^2),$$

одержуємо

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^s a_{kl}(q;t) \dot{q}_k \dot{q}_l + \sum_{k=1}^s g_k(q;t) \dot{q}_k + T_0,$$

де

$$a_{kl}(q;t) \equiv a_{kl}(q_1, \dots, q_s; t) = \sum_{a=1}^N m_a \left( \frac{\partial f_{xa}}{\partial q_k} \frac{\partial f_{xa}}{\partial q_l} + \frac{\partial f_{ya}}{\partial q_k} \frac{\partial f_{ya}}{\partial q_l} + \frac{\partial f_{za}}{\partial q_k} \frac{\partial f_{za}}{\partial q_l} \right),$$

$$g_k(q;t) \equiv g_k(q_1, \dots, q_s; t) = \sum_{a=1}^N m_a \left( \frac{\partial f_{xa}}{\partial q_k} \frac{\partial f_{xa}}{\partial t} + \frac{\partial f_{ya}}{\partial q_k} \frac{\partial f_{ya}}{\partial t} + \frac{\partial f_{za}}{\partial q_k} \frac{\partial f_{za}}{\partial t} \right),$$

$$T_0(q_1, \dots, q_s; t) = \frac{1}{2} \sum_{a=1}^N m_a \left[ \left( \frac{\partial f_{xa}}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial f_{ya}}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial f_{za}}{\partial t} \right)^2 \right].$$

У випадку стаціонарних в'язей час у функції  $f_{xa, ya, za}$  явно не входить; тому маємо  $\partial f_{xa, ya, za} / \partial t = 0$ , звідки випливає, що  $g_k$  і  $T_0$  також дорівнюють нулю, тобто кінетична енергія системи стає однорідною квадратичною функцією узагальнених швидкостей  $\dot{q}_i$ , а саме:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k,l} a_{kl}(q) \dot{q}_k \dot{q}_l,$$

де коефіцієнти  $a_{kl}$  є функціями узагальнених координат  $q_i$  (тобто ці коефіцієнти утворюють додатно визначену матрицю узагальнених мас). Функція ж Лагранжа записується в такому вигляді:

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^s a_{kl}(q) \dot{q}_k \dot{q}_l - U(q).$$

Як приклад, наведемо вираз для функції Лагранжа матеріальної точки у сферичних координатах

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) - U(r, \theta, \varphi).$$

Звідси видно, що матриця узагальнених мас діагональна й додатно визначена, тобто  $a_{rr} = m$ ,  $a_{\theta\theta} = mr^2$ ,  $a_{\varphi\varphi} = mr^2 \sin^2 \theta$ .

Якщо ж розглядати загальний випадок в'язей, залежних від часу, то з'являються як доданки  $g_k$ , так і величина  $T_0$ . Фактично, величина  $-T_0$  є динамічним доповненням до потенціальної енергії. Щодо доданків  $g_k$  слід зазначити, що інколи їх вдається позбутися введенням повної похідної за часом від деякої функції координат і часу. Наприклад, це завжди можна зробити у випадку одного ступеня вільності. У цьому випадку функція Лагранжа знову ж таки набуває вигляду  $\mathcal{L} = T - U$ . Якщо ж не вдається позбутися лінійних доданків, то така механічна система називається *гіроскопічною*. У цьому випадку її функція Лагранжа набуває вигляду  $\mathcal{L} = T + G - U$ , де  $G = \sum_{k=1}^s g_k(q; t) \dot{q}_k$  являє собою гіроскопічний доданок.

Як було зазначено, при одержанні рівнянь руху Лагранжа–Ейлера застосовувався метод виключення залежних координат за допомогою введення узагальнених координат. Їх обирається стільки, скільки має ступенів вільності система. При цьому, поперше, декартові координати в будь-який момент часу однозначно виражаються через узагальнені координати і, по-друге, рівняння в'язей задовольняються тотожно. Наприклад, нехай на рух матеріальної точки накладена в'язь

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0.$$

Це означає, що матеріальна точка рухається по поверхні кулі радіуса  $a$ . Очевидно, що узагальненими координатами доцільно вибрати сферичні кути  $0 \leq \theta \leq \pi$  і  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ . Тоді за

допомогою формул  $x = a \cos \varphi \sin \theta$ ,  $y = a \sin \varphi \sin \theta$ ,  $z = a \cos \theta$  декартові координати  $x, y, z$  однозначно виражаються через кути  $\theta, \varphi$ , а рівняння в'язі при цьому задовольняється автоматично. Проте це не єдиний метод виключення залежних координат.

## § 2. Сили реакцій

Шукаємо рівняння руху для системи  $N$  матеріальних точок за наявності  $k$  голономних в'язей

$$f_{\sigma}(x_1, y_1, z_1, \dots, x_N, y_N, z_N; t) = 0, \quad (\sigma = 1, \dots, k).$$

Переміщуємо матеріальні точки на відстані  $\delta x_a, \delta y_a, \delta z_a$ , вважаючи їх віртуальними, тобто вони задовольняють  $k$  рівнянь в'язей  $f_{\sigma}(x_1 + \delta x_1, y_1 + \delta y_1, z_1 + \delta z_1, \dots; t) = 0$  у той самий момент часу. Розкладаємо цю функцію в ряд Тейлора й обмежуємося першими членами розкладу

$$f_{\sigma}(x_1, y_1, z_1, \dots; t) + \sum_{a=1}^N \left( \frac{\partial f_{\sigma}}{\partial x_a} \delta x_a + \frac{\partial f_{\sigma}}{\partial y_a} \delta y_a + \frac{\partial f_{\sigma}}{\partial z_a} \delta z_a \right) = 0.$$

Ураховуючи  $f_{\sigma}(x_1, y_1, z_1, \dots, x_N, y_N, z_N; t) = 0$ , одержуємо

$$\sum_{a=1}^N \left( \frac{\partial f_{\sigma}}{\partial x_a} \delta x_a + \frac{\partial f_{\sigma}}{\partial y_a} \delta y_a + \frac{\partial f_{\sigma}}{\partial z_a} \delta z_a \right) = \sum_{a=1}^N \nabla_a f_{\sigma} \delta \vec{r}_a = 0,$$

тобто  $3N$  віртуальних переміщень задовольняють такі  $k$  рівнянь. При цьому кількість незалежних віртуальних переміщень, яка називається *кількістю ступенів вільності механічної системи*, дорівнює  $s = 3N - k$ .

Далі звільнюємо систему від в'язей, замінюючи їх такими силами, щоб рух відбувався таким самим чином, як і за наявності в'язей. Ці додаткові сили називаються *силами реакцій*. Тоді рівняння руху набувають вигляду

$$m_a \ddot{\vec{r}}_a = \vec{F}_a + \vec{R}_a,$$

де  $\vec{R}_a$  – сили реакцій. Будемо розглядати тільки ідеальні в'язі, коли сили реакцій задовольняють умову

$$\sum_{a=1}^N \vec{R}_a \cdot \delta \vec{r}_a = 0,$$

тобто вважаємо, що робота сил реакцій на віртуальних переміщеннях дорівнює нулю.

Доведемо, що цю систему рівнянь руху можна отримати на основі принципу Д'Аламбера–Лагранжа (динамічного принципу віртуальних переміщень): для того, щоб були справедливими рівняння руху, необхідно й достатньо, щоб робота всіх сил, включаючи сили інерції  $-m_a \ddot{\vec{r}}_a$ , на довільних віртуальних переміщеннях  $\delta \vec{r}_a$  дорівнювала нулю, тобто

$$\sum_{a=1}^N (-m_a \ddot{\vec{r}}_a + \vec{F}_a) \cdot \delta \vec{r}_a = 0.$$

**Необхідність.** Помножуючи  $m_a \ddot{\vec{r}}_a = \vec{F}_a + \vec{R}_a$  на  $\delta \vec{r}_a$  і підсумовуючи за всіма матеріальними точками, одержуємо

$$\sum_a (m_a \ddot{\vec{r}}_a) \cdot \delta \vec{r}_a = \sum_a \vec{F}_a \cdot \delta \vec{r}_a + \sum_a \vec{R}_a \cdot \delta \vec{r}_a.$$

Використовуючи  $\sum_{a=1}^N \vec{R}_a \cdot \delta \vec{r}_a = 0$ , цим доводимо необхідність.

**Достатність.** Помножуємо систему рівнянь  $\sum_{a=1}^N \nabla_a f_\sigma \delta \vec{r}_a = 0$

на довільні множники  $\lambda_\sigma$  і підсумовуємо їх за  $\sigma$ :

$$\sum_{\sigma=1}^k \lambda_\sigma \sum_{a=1}^N \nabla_a f_\sigma \cdot \delta \vec{r}_a = 0.$$

Додаючи останнє співвідношення до  $\sum_{a=1}^N (-m_a \ddot{\vec{r}}_a + \vec{F}_a) \cdot \delta \vec{r}_a = 0$ ,

дістаємо

$$\sum_{a=1}^N \left( -m_a \ddot{\vec{r}}_a + \vec{F}_a + \sum_{\sigma=1}^k \lambda_\sigma \nabla_a f_\sigma \right) \cdot \delta \vec{r}_a = 0.$$

Серед  $3N$  віртуальних переміщень маємо  $s = 3N - k$  незалежних і  $k$  залежних. Оскільки ми маємо також  $k$  довільних множ-

ників Лагранжа  $\lambda_\sigma$ , то їх можна вибрати так, щоб усі коефіцієнти при залежних віртуальних переміщеннях дорівнювали нулю. Оскільки тепер в останній сумі залишились лише доданки з  $3N - k$  незалежними віртуальними переміщеннями, і ця сума за принципом Д'Аламбера–Лагранжа має дорівнювати нулю, то це буде тоді й лише тоді, коли всі коефіцієнти при цих незалежних віртуальних переміщеннях дорівнюють нулю, тобто

$$-m_a \ddot{\vec{r}}_a + \vec{F}_a + \sum_{\sigma=1}^k \lambda_\sigma \nabla_a f_\sigma = 0.$$

Отже, ми одержуємо систему  $N$  векторних рівнянь Лагранжа першого роду

$$m_a \ddot{\vec{r}}_a = \vec{F}_a + \sum_{\sigma=1}^k \lambda_\sigma \nabla_a f_\sigma.$$

Порівнюючи цю систему із системою  $m_a \ddot{\vec{r}}_a = \vec{F}_a + \vec{R}_a$ , знаходимо вираз для сили реакції

$$\vec{R}_a = \sum_{\sigma=1}^k \lambda_\sigma \nabla_a f_\sigma.$$

Щоб кількість невідомих збігалася з кількістю рівнянь, доповнюємо  $3N$  скалярних рівнянь Лагранжа  $k$  рівняннями в'язей.

Таким чином, рівняння Лагранжа першого роду дають можливість визначати сили реакцій в'язей, що дуже важливо в техніці.

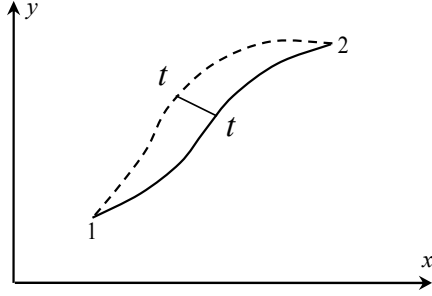
### § 3. Узагальнення принципу Гамільтона на неконсервативні системи

Узагальнений принцип Гамільтона записується таким чином:

$$\delta S = \delta \int_1^2 (T + W) dt = 0,$$

причому кінцеві точки 1 і 2, як і раніше, фіксовані. Величина  $W$  визначається рівністю  $W = \sum_a \vec{F}_a \cdot \vec{r}_a$ . Варіація  $\delta W$  є роботою сил,

які діють на систему під час віртуальних переміщень від дійсної траєкторії (суцільна крива) до сусідньої віртуально можливої траєкторії (пунктирна крива), отриманої в результаті варіації (рис. 1).



**Рис. 1.** Варіація траєкторії в просторі конфігурацій

Оскільки кожне віртуальне переміщення відбувається в конкретний момент часу (час не варіюється), то сили, що діють на систему, мають конкретні значення. Отже, маємо

$$\delta W = \sum_a \vec{F}_a \cdot \delta \vec{r}_a = \sum_a \vec{F}_a \cdot \sum_i \frac{\partial \vec{r}_a}{\partial q_i} \delta q_i = \sum_i \delta q_i \sum_a \vec{F}_a \cdot \frac{\partial \vec{r}_a}{\partial q_i} = \sum_i Q_i \delta q_i,$$

де  $Q_i = \sum_a \vec{F}_a \cdot \frac{\partial \vec{r}_a}{\partial q_i}$  – узагальнені сили. Тепер принцип Гамільтона

можна записати в такому вигляді:

$$\delta \int_1^2 T dt + \int_1^2 \sum_i Q_i \delta q_i dt = 0.$$

Можна показати, що коли сили  $Q_i$  обчислюються за допомогою функції  $U(q_i, \dot{q}_i)$  на основі рівності

$$Q_i = -\frac{\partial U}{\partial q_i} + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i} \right),$$

то приходимо до принципу Гамільтона у звичайній формі. Дійсно, інтеграл від віртуальної роботи тоді дорівнюватиме

$$\int_1^2 Q_i \delta q_i dt = -\int_1^2 \sum_i \delta q_i \left( \frac{\partial U}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i} \right) \right) dt,$$

і, інтегруючи частинами, матимемо

$$-\int_1^2 \sum_i \delta q_i \left( \frac{\partial U}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i} \right) \right) dt = -\delta \int_1^2 U dt,$$

тобто приходимо до принципу

$$\delta \int_1^2 T dt - \delta \int_1^2 U dt = \delta \int_1^2 \mathcal{L} dt = 0,$$

який збігається з принципом Гамільтона у випадку консервативних систем.

Перейдемо тепер до більш загального випадку. Оскільки кінетична енергія  $T$  є функцією  $q_i$  і  $\dot{q}_i$ , то інтеграл  $\delta \int_1^2 T dt$  можна записати у вигляді

$$\int_1^2 \sum_i \left( \frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) \right) \delta q_i dt.$$

Принцип Гамільтона записується тепер у вигляді

$$\int_1^2 \sum_i \left( \frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) + Q_i \right) \delta q_i dt = 0.$$

Звідси випливає, що у випадку голономних в'язей інтеграл, що розглядається, дорівнює нулю тоді й тільки тоді, коли всі коефіцієнти при  $\delta q_i$  дорівнюють нулю. Отже, одержуємо такі рівняння Лагранжа для неконсервативних сил:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i.$$

Ці рівняння можна записати також в іншій формі, якщо врахувати, що на кожен матеріальну точку системи в загальному випадку діють як потенціальні, так і непотенціальні сили  $\vec{F}_a = -\nabla_a U + \vec{f}_a$ , де  $U$  – повна потенціальна енергія системи, тобто сума внутрішньої потенціальної енергії взаємодії матеріальних точок і потенціальної енергії системи в полі зовнішніх сил, а  $\vec{f}_a$  – сума всіх непотенціальних сил, які діють на  $a$ -ту матеріальну точку. Тоді вираз для узагальненої сили  $Q_i$  можна записати у вигляді

$$Q_i = -\sum_a \nabla_a U \cdot \frac{\partial \vec{r}_a}{\partial q_i} + \sum_a \vec{f}_a \cdot \frac{\partial \vec{r}_a}{\partial q_i} = -\frac{\partial U}{\partial q_i} + Q'_i,$$

де  $Q'_i = \sum_a \vec{f}_a \cdot \frac{\partial \vec{r}_a}{\partial q_i}$  – узагальнені непотенціальні сили. Дописую-

чи явно нульовий член  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i} \right)$ , можна одержати

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = - \frac{\partial U}{\partial q_i} + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i} \right) + Q'_i \quad \text{або} \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = Q'_i.$$

### **Контрольні запитання та завдання**

1. Вираз для кінетичної енергії у випадку нестационарних в'язей.
2. Вираз для функції Лагранжа у випадку стаціонарних в'язей.
3. Суть віртуальних переміщень і принципу Д'Аламбера.
4. Вираз для сил реакцій і поняття ідеальних в'язей.
5. Рівняння Лагранжа для неконсервативних сил.

## **Лекція 4. Закони збереження**

### **§ 1. Циклічні координати**

До цього моменту ми головним чином цікавилися одержанням рівнянь руху, але майже не йшлося про методи їх розв'язування. Система із  $s$  ступенями вільності, як ми бачили, описується  $s$  диференціальними рівняннями другого порядку щодо часу. Це є рівняння Лагранжа–Ейлера

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0, \quad (i = 1, \dots, s).$$

Розв'язок кожного із рівнянь цієї системи потребує двократного інтегрування, що згідно із загальною теорією диференціальних рівнянь приводить до появи для  $s$  рівнянь  $2s$  сталих. У кожному конкретному випадку ці  $2s$  сталі задаються початковими значеннями  $s$  узагальнених координат  $q_i(t)$  і  $s$  узагальнених швидкостей  $\dot{q}_i(t)$ . У деяких випадках ці рівняння можна розв'язати



ти в елементарних функціях, але це вдається зробити в дуже малій кількості задач. У багатьох задачах можливо прийти до диференціальних рівнянь першого порядку

$$f(q_1, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s, t) = \text{const.}$$

Така комбінація  $f(q_1, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s, t)$  узагальнених координат і узагальнених швидкостей (а також і часу в загальному випадку), яка зберігає в процесі руху незмінне значення, називається *механічним інтегралом руху* (або *просто інтегралом руху*).

Зауважимо, що інформація, яка міститься в інтегралах руху, буває більш цінною, ніж точне знання функцій  $q_i(t)$ . Достатньо зазначити, що більшість інтегралів руху, відомих у класичній механіці, переносяться й у квантову механіку. Для класичної механіки важливо те, що для даної системи можна черпати інформацію, не інтегруючи повністю рівнянь руху. Наприклад, якщо в лагранжіан не входить деяка координата  $q_i$  (швидкість  $\dot{q}_i$  має бути при цьому), то цю *координату* називають *циклічною*. Рівняння Лагранжа для такої координати має вигляд

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0 \quad \text{або} \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = p_i = \text{const.}$$

Таким чином, можна сформулювати загальну теорему про збереження: якщо координата  $q_i$  циклічна, то відповідний їй узагальнений імпульс  $p_i$  залишається сталим. Очевидно, що чим більш вдалим буде вибір узагальнених координат  $q_i$ , тим більше буде циклічних координат і відповідно більше буде інтегралів руху.

Наявність деякого інтеграла руху вказує на існування деякої внутрішньої симетрії для системи, тобто, наприклад, якщо координата, що описує переміщення системи, циклічна, то система буде інваріантною щодо переміщення вздовж цього напрямку, тобто щодо перетворення  $q \rightarrow q' = q + \delta$ .

Далі на прикладі трьох уже відомих законів збереження (енергії, імпульсу та моменту імпульсу) з'ясуємо, з якими перетвореннями та симетріями вони пов'язані. Окрім того, розгляд цих інтегралів необхідний з точки зору їх особливої важливості в ме-

ханіці: усі вони мають спільну властивість – адитивність, тобто їх значення для системи, що складається із окремих частин, взаємодією яких можна знехтувати, дорівнює сумі значень для кожної з частин окремо.

## § 2. Закони збереження

**1. Закон збереження енергії.** Покажемо, що можна пов'язати закон збереження енергії з властивістю симетрії часу – його однорідністю. Припустимо, що  $\mathcal{L}(q, \dot{q}, t) = \mathcal{L}(q, \dot{q})$ , тобто  $\partial\mathcal{L}/\partial t = 0$ . Це означає, що функція Лагранжа не залежить явно від часу. Тому повна похідна за часом цієї функції записується таким чином:

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt} = \sum_i \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i.$$

Замінюючи тут похідні  $\partial\mathcal{L}/\partial q_i$  на  $d(\partial\mathcal{L}/\partial \dot{q}_i)/dt$  (згідно з рівнянням Лагранжа–Ейлера), одержуємо

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt} = \sum_i \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i = \sum_i \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right)$$

або

$$\frac{d}{dt} \left( \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \mathcal{L} \right) = 0.$$

Звідси видно, що величина

$$E = \sum_{i=1}^s \dot{q}_i \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \mathcal{L}$$

залишається незмінною для замкненої системи, тобто є одним із її інтегралів руху. Ця величина називається *повною енергією системи*.

Запишемо функцію Лагранжа в загальному вигляді

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) + G(q, \dot{q}) - U(q).$$

Оскільки кінетична енергія  $T = \frac{1}{2} \sum_{i,k} a_{ik}(q) \dot{q}_i \dot{q}_k$  є однорідною

функцією другого порядку щодо  $\dot{q}_i$ , то, застосовуючи до неї теорему Ейлера про однорідні функції, одержуємо

$$\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = 2T.$$

Аналогічно одержуємо для гіроскопічної складової  $\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial G}{\partial \dot{q}_i} = G$ .

Підставляючи ці вирази в  $E = \sum_{i=1}^s \dot{q}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \mathcal{L}$ , одержуємо

$E = 2T + G - \mathcal{L} = T + U$ , тобто енергія системи дорівнює сумі двох суттєво різних членів: кінетичної енергії, яка залежить від узагальнених координат та узагальнених швидкостей, і потенціальної енергії, яка залежить тільки від узагальнених координат матеріальних точок. Очевидно, що гіроскопічна складова внеску в енергію системи не робить. У декартових координатах одержуємо вже відомий вираз

$$E = \sum_a \frac{m_a \vec{v}_a^2}{2} + U(\vec{r}_a).$$

**2. Нескінченно малі перетворення координат. Закони збереження імпульсу та моменту імпульсу.** Нехай мале перетворення координат має такий вигляд:

$$q'_i = q_i + \varepsilon \kappa_i,$$

де  $\varepsilon$  – нескінченно малий (інфінітезимальний) параметр, а  $\kappa_i$  – функції  $l$  параметрів  $\alpha_1, \dots, \alpha_l$ ,  $s$  узагальнених координат  $q_1, \dots, q_s$  і часу  $t$ , тобто  $\kappa_i = \kappa_i(\alpha_1, \dots, \alpha_l, q_1, \dots, q_s, t)$ . Якщо функція Лагранжа інваріантна щодо цих перетворень, тобто

$$\mathcal{L}(q', \dot{q}', t) = \mathcal{L}(q, \dot{q}, t),$$

то й рівняння Лагранжа будуть інваріантними щодо цих перетворень. Розкладаючи ліву частину останнього виразу в ряд Тейлора за степенями  $\varepsilon$ :

$$\mathcal{L}(q', \dot{q}', t) = \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) + \varepsilon \sum_{i=1}^s \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \kappa_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{\kappa}_i \right) + \dots,$$

одержуємо в наближенні  $O(\varepsilon)$  із  $\mathcal{L}(q', \dot{q}', t) = \mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$  таку умову:

$$\sum_{i=1}^s \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \kappa_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{\kappa}_i \right) = 0.$$

Після застосування рівнянь Лагранжа звідси випливає рівність

$$\sum_{i=1}^s \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) \kappa_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \dot{\kappa}_i \right] = \frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^s \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \kappa_i \right) = 0,$$

з якої, у свою чергу, одержуємо

$$\sum_{i=1}^s \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \kappa_i = \text{const}.$$

Обираючи належним чином функції  $\kappa_i$  в останньому виразі, дістаємо незалежні інтеграли руху.

Далі на основі отриманої загальної формули розглянемо різні конкретні перетворення симетрій. Якщо система інваріантна щодо трансляції вздовж деякої осі, заданої одиничним вектором  $\vec{e}$ , то функція Лагранжа не змінюється при перетворенні  $\vec{r}_a \rightarrow \vec{r}'_a = \vec{r}_a + \vec{e}$ . Звідси випливає, що зберігається величина  $\sum_a m_a (\vec{v}_a, \vec{e})$ , тобто проекція імпульсу на цю вісь. У більш симетричному випадку, коли існує повна однорідність простору і функція Лагранжа інваріантна щодо зміщення на нескінченно малий вектор  $\vec{e}$  довільного напрямку, одержуємо збереження повного імпульсу

$$\vec{P} = \sum_a m_a \vec{v}_a.$$

Інваріантність системи щодо поворотів, пов'язаних із ізотропією простору, також веде до деякого інтеграла руху. Розглянемо перетворення координат, пов'язаних з поворотом на малий кут  $\delta\varphi$  навколо деякої осі, заданої одиничним вектором  $\vec{n}$ , тобто маємо  $\vec{r}_a \rightarrow \vec{r}'_a = \vec{r}_a + \delta\varphi [\vec{n}, \vec{r}_a]$ . Зрозуміло, що при цьому  $\vec{\kappa}_a = [\vec{n}, \vec{r}_a]$ . У цьому випадку  $\sum_a \vec{p}_a [\vec{n}, \vec{r}_a] = \vec{n} \sum_a [\vec{r}_a, \vec{p}_a] = \text{const}$ , тобто зберігається проекція моменту імпульсу  $\vec{L} = \sum_a [\vec{r}_a, \vec{p}_a]$  на дану вісь.

Довільний нескінченно малий поворот можна представити век-

тором  $\delta\vec{\varphi} = \vec{n}\delta\varphi$ . Якщо, як для замкненої системи матеріальних точок, система інваріантна щодо довільного повороту, ми прийдемо до збереження моменту імпульсу  $\vec{L}$ .

Наведені загальні міркування застосуємо й до більш загальних перетворень координат. Розглянемо систему, що характеризується гвинтовою симетрією. Функція Лагранжа такої системи не змінюється при зміщенні вздовж деякої осі (напр., осі  $z$ ) на величину  $\delta z$  й одночасним поворотом навколо цієї ж осі на кут  $\delta\varphi$ , зв'язок між якими є  $h\delta\varphi = 2\pi\delta z$ , де  $h$  – крок гвинта. Переконаємось, що в цьому випадку  $\vec{\kappa}_a = [\vec{e}_z, \vec{r}_a] + h\vec{e}_z/2\pi$  і зберігається така комбінація  $z$ -ї проекції моменту імпульсу та  $z$ -ї проекції імпульсу:  $L_z + \frac{h}{2\pi} p_z = \text{const}$ .

### § 3. Механічна подібність

Якщо перейти від функції  $L$  до функції  $CL$ , де  $C$  – довільна константа, то рівняння Лагранжа не змінюється. Ця обставина дозволяє в ряді випадків зробити суттєві висновки про властивості руху, не виконуючи конкретного інтегрування рівнянь руху.

Нехай потенціальна енергія є однорідною функцією координат, тобто функцією, яка задовольняє умову

$$U(\alpha\vec{r}_1, \dots, \alpha\vec{r}_n) = \alpha^k U(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n),$$

де  $\alpha$  – довільна константа, а  $k$ -й – степінь однорідності функції. Виконаємо далі перетворення, за якого поряд зі зміною всіх координат в  $\alpha$  разів одночасно змінюється в  $\beta$  разів час

$$\vec{r}_a \rightarrow \alpha\vec{r}_a, \quad t \rightarrow \beta t.$$

Усі швидкості  $\vec{v}_a = d\vec{r}_a/dt$  змінюються в  $\alpha/\beta$  разів, а кінетична енергія відповідно в  $\alpha^2/\beta^2$  разів. Якщо  $\alpha$  і  $\beta$  зв'язати умовою  $\alpha^2/\beta^2 = \alpha^k$ ,  $\beta = \alpha^{1-k/2}$ , то в результаті такого перетворення функція Лагранжа множиться на постійну величину  $\alpha^k$ , тобто рівняння Лагранжа залишаються незмінними.

Зміна всіх координат матеріальних точок в однакову кількість разів означає перехід від одних траєкторій до інших, які

є геометрично подібними першим і відрізняються від них лише лінійними розмірами.

Таким чином, якщо потенціальна енергія є однорідною функцією  $k$ -го степеня щодо координат (декартових), то рівняння руху допускають подібні траєкторії, причому всі часи руху (між відповідними точками траєкторій) співвідносяться як  $t'/t = (l'/l)^{1-k/2}$ , де  $l'/l$  – відношення лінійних розмірів двох траєкторій. Можна знайти також відношення у відповідних точках інших механічних величин:

$$\frac{v'}{v} = \frac{l'}{t'} \cdot \frac{t}{l} = \frac{l'}{l} \cdot \left(\frac{l'}{l}\right)^{\frac{k}{2}-1} = \left(\frac{l'}{l}\right)^{\frac{k}{2}}, \quad \frac{E'}{E} = \frac{v'^2}{v^2} = \left(\frac{l'}{l}\right)^k,$$

$$\frac{L'}{L} = \frac{l'}{l} \cdot \frac{v'}{v} = \frac{l'}{l} \cdot \left(\frac{l'}{l}\right)^{\frac{k}{2}} = \left(\frac{l'}{l}\right)^{\frac{k}{2}+1}.$$

Приклади: 1)  $U = -\vec{F} \cdot \vec{r}$ ,  $k=1$ ,  $t'/t = (l'/l)^{1/2}$ , тобто в полі тяжіння квадрати часів падіння відносяться як їх початкові висоти ( $t = \sqrt{2gh}$ ); 2)  $U = kx^2/2$  (малі коливання)  $k=2$ ,  $t'/t = 1$ , тобто період таких коливань не залежить від амплітуди; 3)  $U \propto r^{-1}$ ,  $k=-1$ ,  $t'/t = (l'/l)^{3/2}$  (третій закон Кеплера), тобто квадрати часів обертання по орбітах пропорційні кубам їх розмірів.

## § 4. Теорема віріалу

Нехай рух системи відбувається в обмеженій області простору. Тоді існує просте співвідношення між середніми за часом значеннями кінетичної та потенціальної енергій. Оскільки кінетична енергія  $T$  є квадратичною функцією швидкостей, то згідно з теоремою Ейлера про однорідні функції маємо

$$\sum_a \frac{\partial T}{\partial \vec{v}_a} \cdot \vec{v}_a = 2T,$$

або після заміни  $\vec{p}_a = \partial T / \partial \vec{v}_a$  маємо

$$2T = \sum_a \vec{p}_a \cdot \vec{v}_a = \frac{d}{dt} \left( \sum_a \vec{p}_a \cdot \vec{r}_a \right) - \sum_a \vec{r}_a \cdot \dot{\vec{p}}_a .$$

Усреднюємо це рівняння за часом. Середнім значенням якої-небудь функції за часом називається величина

$$\bar{f} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau f(t) dt .$$

Можна показати, якщо  $f(t)$  є похідною за часом  $f(t) = dF/dt$  від обмеженої функції  $F(t)$ , то її середнє значення перетворюється на нуль. Дійсно,

$$\bar{f} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \frac{dF}{dt} dt = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{F(\tau) - F(0)}{\tau} = 0 .$$

Оскільки величина  $\sum_a \vec{r}_a \cdot \vec{p}_a$  обмежена, то її середнє значення дорівнює нулю. З урахуванням  $\dot{\vec{p}}_a = -\partial U / \partial \vec{r}_a$  одержуємо

$$2\bar{T} = \sum_a \vec{r}_a \cdot \overline{\frac{\partial U}{\partial \vec{r}_a}} .$$

Це співвідношення у 1870 р. отримав німецький фізик Р. Клаузіус. Праву частину цієї рівності він назвав *віріалом* (лат. *vires* – сила), а саме співвідношення називається *теоремою віріалу*.

Якщо потенціальна енергія є однорідною функцією  $k$ -го степеня, то ця рівність переходить у таку:  $2\bar{T} = k\bar{U}$ . Оскільки  $\bar{T} + \bar{U} = \bar{E} = E$ , останнє співвідношення можна представити в еквівалентних формах  $\bar{U} = \frac{2E}{k+2}$ ,  $\bar{T} = \frac{kE}{k+2}$ .

Приклади: 1) в однорідному силовому полі ( $k=1$ ):  $2\bar{T} = \bar{U}$ ; 2) для малих коливань ( $k=2$ ):  $\bar{T} = \bar{U}$ , тобто середні значення кінетичної і потенціальної енергій збігаються; 3) для ньютонівської взаємодії ( $k=-1$ ):  $2\bar{T} = -\bar{U}$ . При цьому  $E = -\bar{T}$  згідно з тим, що за такої взаємодії рух відбувається в обмеженій області простору лише за від'ємної повної енергії.

## Контрольні запитання та завдання

1. Циклічні координати.
2. Що називається інтегралом руху.
3. Суть механічної подібності системи.
4. Доведення теореми Ейлера про однорідні функції.
5. Теорема віріалу.

## Лекція 5. Одновимірний рух матеріальної точки

### § 1. Інтегрування рівнянь руху матеріальної точки

Одним із простих модельних випадків є рух однієї матеріальної точки під дією зовнішніх сил. Наступним спрощенням є опис руху лише за допомогою однієї змінної. Такий випадок виникає тоді, коли рух механічної системи обмежується деякою в'яззю (або в'язями). Наведемо приклади.

1. Жолоб Галілея (рух по похилій площині вздовж одного напрямку під дією сили тяжіння та сили тертя), рис. 1.

Якщо частинка масою  $m$  ковзає без тертя, тобто розглядається ідеалізований випадок, то рівняння руху по такому безмежно довгому (це також ідеалізація) жолобу має такий вигляд:

$$\ddot{s} = g \cos \alpha .$$

2. Плоский математичний маятник (рис. 2).

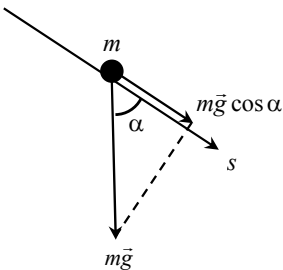


Рис. 1. Жолоб Галілея

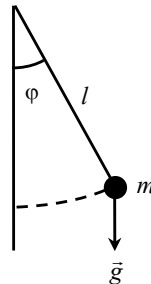


Рис. 2. Математичний маятник

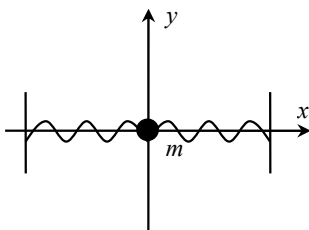


Матеріальна точка масою  $m$  прикріплена до кінця невагомго й недеформованого стрижня довжиною  $l$  (невагомість – це ідеалізація). Другий кінець стрижня є нерухомим центром обертання, що також є ідеалізацією. І якщо допустити ще ідеалізацію про відсутність тертя матеріальної точки в повітрі й відсутність тертя в точці підвісу, то тоді рівняння руху цієї матеріальної точки в цій системі координат запишеться в такому вигляді:

$$\ddot{\varphi} + \frac{m}{l} \sin \varphi = 0.$$

### 3. Гармонічний осцилятор (рис. 3).

Нехай матеріальна точка масою  $m$  рухається вздовж горизонтального стрижня під дією двох пружин.



**Рис. 3.** Гармонічний осцилятор

Вводимо такі ідеалізації: по-перше, нехтуємо тертям матеріальної точки в процесі руху вздовж стрижня, по-друге, допускаємо, що сили пружин пропорційні зміщенням від положення стійкої рівноваги (справедливий закон Гука  $F = -kx$ ) і, по-третє, вважаємо, що в пружинах відсутнє внутрішнє тертя. Тоді рух такої системи (коливальної лінійної системи) описується таким лінійним рівнянням другого порядку:

$$\ddot{x} + \frac{k}{m} x = 0.$$

*Означення:* Одновимірним називається рух систем з одним ступенем вільності.

Найбільш загальний вигляд функції Лагранжа для систем з одним ступенем вільності, які перебувають у нестационарних зовнішніх умовах (неконсервативні системи), такий:

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}, t) = \frac{1}{2} a(q, t) \dot{q}^2 - U(q, t).$$

Підставляючи цю функцію в рівняння Лагранжа, одержуємо одне нелінійне диференціальне рівняння другого порядку

$$a\ddot{q} + \frac{\partial a}{\partial t} \dot{q} + \frac{1}{2} \frac{\partial a}{\partial q} \dot{q}^2 + \frac{\partial U}{\partial q} = 0,$$

$$\left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = a\dot{q}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = \frac{1}{2} \frac{\partial a}{\partial q} \dot{q}^2 - \frac{\partial U}{\partial q}, \frac{d}{dt}(a\dot{q}) = \frac{da}{dt} \dot{q} + a\ddot{q} = \frac{\partial a}{\partial t} \dot{q} + \frac{\partial a}{\partial q} \dot{q}^2 + a\ddot{q} \right\}.$$

Користуючись поняттям узагальненого імпульсу  $p = \partial \mathcal{L} / \partial \dot{q} = a(q, t) \dot{q}$ , можна перейти до такої системи двох нелінійних диференціальних рівнянь першого порядку:

$$\dot{q} = g(p, q, t), \quad \dot{p} = f(p, q, t),$$

де

$$g(p, q, t) = \frac{p}{a(q, t)}, \quad f(p, q, t) = \frac{p^2}{2a(q, t)} \frac{\partial a(q, t)}{\partial q} - \frac{\partial U(q, t)}{\partial q}.$$

Точний розв'язок одержаного нелінійного диференціального рівняння другого порядку або системи двох нелінійних диференціальних рівнянь першого порядку вдається знайти не завжди. Тут йдеться не тільки про те, що його неможливо записати в елементарних функціях, але й про те, що запис розв'язання неможливо звести до обчислення визначених інтегралів, тобто, як часто кажуть, його не можна принаймні записати у квадратурах.

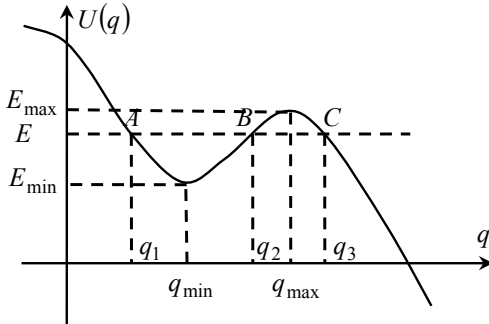
Однак у випадку консервативних систем точні розв'язки існують завжди, до розгляду яких ми зараз і перейдемо. При цьому відпадає, навіть, потреба у використанні самого рівняння руху. Із самого початку необхідно скористатися уже знайденим інтегралом руху: повною енергією системи

$$E = \dot{q} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} - \mathcal{L} = \frac{1}{2} a(q) \dot{q}^2 + U(q).$$

Це є диференціальним рівнянням першого порядку щодо узагальненої координати  $q$ . Інтегруючи це рівняння шляхом відокремлення змінних, одержуємо розв'язок  $q(t)$  у неявній формі

$$\pm \int_{q(t_0)}^{q(t)} \sqrt{\frac{a(q')}{2}} \frac{dq'}{\sqrt{E-U(q')}} = \int_{t_0}^t dt' = t - t_0.$$

Оскільки кінетична енергія  $T = a(q)\dot{q}^2/2$  завжди є невід'ємною величиною, рух відбувається тільки в тих областях простору, в яких справедлива нерівність  $U(q) \leq E$ . Нехай, наприклад, залежність  $U(q)$  має вигляд, як зображено на рис. 4.



**Рис. 4.** Схематичне зображення потенціалу  $U(q)$

Провівши на цьому графіку горизонтальну пряму, яка відповідає заданому значенню повної енергії  $E$ , виявимо можливі області руху. Рух можливий лише в області  $AB$  або в області праворуч від  $C$ . При цьому рух в області  $AB$  обмежений (фінітний). Граничні точки  $(q_1, q_2)$  цієї області називаються *точками зупинки* (швидкість  $\dot{q}$  у них стає рівною нулю) або *точками повороту*, і вони визначаються з рівняння

$$U(q) = E,$$

тобто за умови рівності між повною та потенціальною енергіями. Обмежений рух буде завжди, якщо  $E$  буде меншою за  $E_{\max}$ , а початкове значення координати задовольняє нерівність  $q(t_0) < q_{\max}$ .

Якщо ж область руху буде необмеженою або обмеженою лише з одного боку, то такий рух називається *інфінітним*. Це стосується випадків, коли  $E > E_{\max}$  або  $q(t_0) > q_{\max}$ .

Одновимірний фінітний рух є коливальним, тобто матеріальна точка здійснює періодичний рух між двома граничними точками. При цьому у зв'язку з інваріантністю рівнянь руху консервативної системи щодо заміни  $t \rightarrow -t$  час руху від  $q_1$  до  $q_2$  дорівнює часу зворотного руху від  $q_2$  до  $q_1$ . Тому період коливань буде таким:

$$\tau(E) = \sqrt{2} \int_{q_1(E)}^{q_2(E)} \frac{\sqrt{a(q)} dq}{\sqrt{E - U(q)}},$$

причому межі інтегрування  $q_1(E)$  і  $q_2(E)$  є розв'язками рівняння  $U(q) = E$ .

Зазначимо, що у випадку декартових координат необхідно замінити  $q(E)$  на  $x(E)$ , а  $U(q)$  на  $U(x)$  і взяти замість  $a(q)$  величину  $m$  – масу матеріальної точки.

Значення координати  $q_{\min} = q(E_{\min})$ , за якого потенціальна енергія  $U(q)$  набуває мінімального значення, визначає положення рівноваги (стійкої); у цій точці  $dU(q)/dq$  дорівнює нулю, тобто сила, а отже, і прискорення  $\ddot{q}$  дорівнюють нулю. Перейдемо до більш детального розгляду руху матеріальної точки поблизу цього положення рівноваги.

## § 2. Малі коливання

Розкладемо потенціальну енергію  $U(q)$  у ряд Тейлора за степенями  $(q - q_{\min})$  таким чином:

$$U(q) = U(q_{\min}) + \frac{dU(q)}{dq} \Big|_{q=q_{\min}} (q - q_{\min}) + \frac{1}{2} \frac{d^2U(q)}{dq^2} \Big|_{q=q_{\min}} (q - q_{\min})^2 + \dots$$

Відраховуючи потенціальну енергію від її мінімального значення, тобто, покладаючи  $U(q_{\min})=0$  і враховуючи, що  $dU(q)/dq|_{q=q_{\min}}=0$ , після введення позначення  $x=q-q_{\min}$  для відхилення координати від її рівноважного значення одержуємо

$$U(x)=\frac{kx^2}{2},$$

де  $k=d^2U(q)/dq^2|_{q=q_{\min}}>0$ . Кінетична енергія систем з одним ступенем вільності описується виразом

$$T=\frac{1}{2}m\dot{x}^2,$$

у якому величина  $m$  є значенням функції  $a(q)$  за  $q=q_{\min}$ , тобто маємо  $a(q_{\min})=m$ . Слід зазначити, що величина  $m$  збігається з масою тільки тоді, коли  $x$  є декартовою координатою матеріальної точки. Отже, функція Лагранжа матиме вигляд

$$\mathcal{L}(x, \dot{x})=\frac{m\dot{x}^2}{2}-\frac{kx^2}{2}.$$

Відповідне цій функції рівняння руху записується таким чином:

$$m\ddot{x}+kx=0 \quad \text{або} \quad \ddot{x}+\omega_0^2x=0,$$

де введено позначення  $\omega_0=\sqrt{k/m}$ . Одержане рівняння точно збігається з рівнянням для гармонічного осцилятора, тобто поблизу рівноваги система поводить себе як гармонічний осцилятор. Два незалежних розв'язки цього лінійного диференціального рівняння записуються так:  $\cos\omega_0t$  і  $\sin\omega_0t$ . Тому його загальний розв'язок є лінійною суперпозицією цих фундаментальних розв'язків:

$$x(t)=C_1\cos\omega_0t+C_2\sin\omega_0t,$$

де  $C_1$  і  $C_2$  визначаються з початкових умов  $x(0)=x_0$ ,  $\dot{x}(0)=\dot{x}_0$ . Одержуємо

$$x(t)=x_0\cos\omega_0t+\frac{\dot{x}_0}{\omega_0}\sin\omega_0t.$$

Цей вираз можна переписати також в іншому вигляді

$$x(t) = a \cos(\omega_0 t + \alpha),$$

де

$$a = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = \sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{\omega_0^2}}, \quad \operatorname{tg} \alpha = -\frac{C_2}{C_1} = -\frac{\dot{x}_0}{\omega_0 x_0}.$$

Використовуючи формулу Ейлера  $\exp(iz) = \cos z + i \sin z$ , розв'язок, який описує лінійне коливання, можна записати в такій формі:

$$x(t) = \operatorname{Re}\{A \exp(-i\omega_0 t)\},$$

де введена комплексна амплітуда  $A = a \exp(-i\alpha)$ . Таке зображення зручне тим, що в реальних розрахунках, які включають тільки лінійні операції, можна опустити знак дійсної частини, а відновити її тільки в кінцевому результаті. Цей прийом буде неодноразово використовуватися в наступних розділах теоретичної фізики.

Таким чином, поблизу положення стійкої рівноваги система здійснює гармонічний коливальний рух, амплітуда якого –  $a$ , частота –  $\omega_0$  і початкова фаза –  $\alpha$ . Частота є основною характеристикою коливань і не залежить від початкових умов руху. Згідно із формулою  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$  вона (на відміну від частоти  $\omega(E) = 2\pi/\tau(E)$  для довільних (немалих) коливань) не залежить від амплітуди або повної енергії механічної системи. Підкреслимо, що ця властивість пов'язана з мализною коливань, а з математичної точки зору з квадратичною залежністю потенціальної енергії від координати. Енергія системи, яка здійснює малі коливання, записується у вигляді

$$E = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \omega_0^2 x^2).$$

Підставляючи сюди розв'язок  $x(t) = a \cos(\omega_0 t + \alpha)$ , одержуємо

$E = \frac{1}{2} m \omega_0^2 a^2$ , тобто енергія  $E$  пропорційна квадрату амплітуди коливань.

Ми розглянули приклад лінійної консервативної системи. Однак при збільшенні повної енергії  $E > E_{\min}$  систему вже не можна вважати лінійною. Отже, переходимо до нелінійної консервативної системи, кількісний аналіз якої значно ускладнюється. На зміну кількісним методам приходять у цьому випадку якісні методи (методи якісного інтегрування).

### § 3. Метод фазової площини

Механічний стан матеріальної точки з одним ступенем вільності задається значеннями її координати  $q(t)$  і швидкості  $\dot{q}(t)$ . Кожному стану нашої системи відповідає точка на фазовій площині (рис. 5). Цю точку називають *зображувальною*. Зміні станів систем із часом відповідає на фазовій площині  $(q, \dot{q})$  рух зображувальної точки по деякій траєкторії, яку називають фазовою траєкторією. Швидкість такої зображувальної точки *називають фазовою або діаграмною швидкістю*. Вектор цієї швидкості дотичний до фазової траєкторії. Зазначимо, що траєкторію і швидкість зображувальної точки не слід змішувати з дійсними траєкторією і швидкістю матеріальної точки. Для наочності вводимо радіус-вектор  $\vec{r}_\Phi = \vec{e}_q q + \vec{e}_{\dot{q}} \dot{q}$ . Тоді можна ввести поняття фазової

швидкості, яка записується у вигляді  $\vec{v}_\Phi = \frac{d\vec{r}_\Phi}{dt} = \vec{e}_q \dot{q} + \vec{e}_{\dot{q}} \ddot{q}$ .

Наприклад, для гармонічного осцилятора фазова швидкість на фазовій площині  $(x, \dot{x})$  записується у вигляді

$$\vec{v}_\Phi = \vec{e}_x \{-a\omega_0 \sin(\omega_0 t + \alpha)\} + \vec{e}_{\dot{x}} \{-a\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \alpha)\}.$$

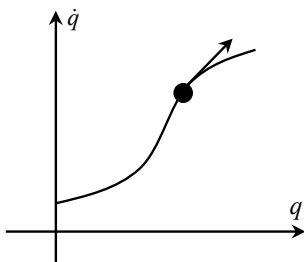
Звідси видно, що фазова швидкість, за винятком випадку  $a = 0$ , не дорівнює нулю, оскільки функції синуса і косинуса одночасно не дорівнюють нулю.

Зобразимо тепер цілі фазові траєкторії для гармонічного осцилятора. Цілою фазовою траєкторією будемо називати таку криву, яку описує зображувальна точка за весь час свого руху

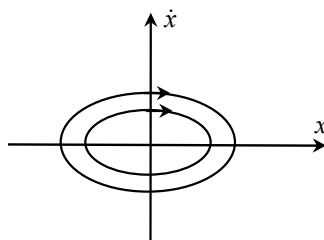
(від  $t = -\infty$  до  $t = +\infty$ ). Це буде сукупність подібних еліпсів з півосями  $\sqrt{2E/k}$  і  $\sqrt{2E/m}$ , тобто маємо

$$\frac{x^2}{(\sqrt{2E/k})^2} + \frac{\dot{x}^2}{(\sqrt{2E/m})^2} = 1.$$

Вони зображені на рис. 6. Усі ці еліпси являють собою траєкторії руху зображувальної точки. Рух цієї точки на фазовій траєкторії відбувається за годинниковою стрілкою, оскільки швидкості  $\dot{x} = +\sqrt{2E/m - \omega_0^2 x^2}$  відповідає зростання  $x$  із часом, а швидкості  $\dot{x} = -\sqrt{2E/m - \omega_0^2 x^2}$  відповідає зменшення  $x$  із часом. Цей напрямок показаний на рис. 6.



**Рис. 5.** Схематичне зображення руху зображувальної точки по фазовій траєкторії



**Рис. 6.** Зображення цілих фазових траєкторій в околі особливої точки типу "центр"

Таким чином, уся допустима область площини  $(x, \dot{x})$  заповнюється вкладеними один у одний еліпсами. Фазові траєкторії (за винятком однієї точки  $x = 0, \dot{x} = 0$ ) ніде не перетинаються. Еліпс, який проходить через цю точку, сам вироджується в точку. Ця особлива точка називається *центром* або *еліптичною особливою точкою*.

Ізольована особлива точка, поблизу якої фазові траєкторії являють собою замкнені криві, які не мають особливостей, називається *центром* (напр., еліпси, які вкладені один у одний і охоплюють цю особливу точку).



Точка, у якій напрямок дотичної до фазової траєкторії не визначений або, що еквівалентно, у ній не визначена фазова швидкість, називається *особливою*. Дійсно, у випадку гармонічного осцилятора зі співвідношень

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x}, \quad \frac{d\dot{x}}{dt} = -\omega_0^2 x$$

впливає, що за  $x = \dot{x} = 0$  відношення  $\frac{\ddot{x}}{\dot{x}} = \frac{d\dot{x}}{dx} = -\omega_0^2 \frac{x}{\dot{x}}$  не визначені. І в загальному випадку особливі точки виникають тоді, коли не буде визначене відношення  $d\dot{q}/dq|_{p_0, q_0}$ , тобто це буде тоді, коли  $g(p_0, q_0) = 0$  і  $f(p_0, q_0) = 0$ , що приводить до  $p(q)|_{q=q_0} = 0$ ,  $\partial U / \partial q|_{q=q_0} = 0$ . Тобто всі особливі точки розташовані на осі  $q$  фазової площини  $(q, \dot{q})$  і в тих місцях, де потенціальна енергія набуває екстремальних значень. Локальним мінімумам, як уже було показано вище, відповідають особливі точки типу "центр".

Проаналізуємо тепер, якого типу особливі точки відповідають локальним максимумам на графіку потенціальної енергії. Для цього розкладаємо функцію  $U(q)$  в околі точки  $q_{\max} = q(E_{\max})$  і відраховуємо потенціальну енергію від її локального максимуму  $U_{\max} \equiv U(q_{\max})$ . Вводячи позначення  $x = q - q_{\max}$ ,  $d^2U(q)/dq^2|_{q=q_{\max}} = -\kappa$  ( $\kappa > 0$  для максимуму), маємо

$$U(x) = -\frac{\kappa x^2}{2}.$$

Функція Лагранжа тоді матиме такий вигляд:  $\mathcal{L}(x, \dot{x}) = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{\kappa x^2}{2}$ .

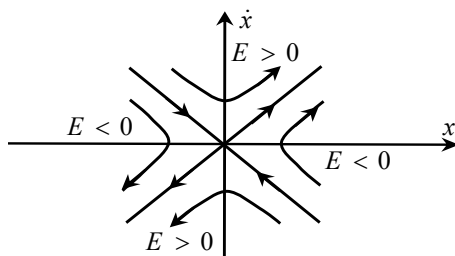
Із інтеграла повної енергії  $E = \dot{x} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} - \mathcal{L} = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{\kappa x^2}{2}$  випливає, що фазовими траєкторіями на фазовій площині є дві системи гіпербол (рис. 7). За  $E = 0$  вони вироджуються у дві прямі (особливі)  $\dot{x} = \pm \gamma_0 x$ ,  $\gamma_0 = \sqrt{k/m}$ , які є асимптотами для інших фазових

траекторій. Щоб знайти напрямок руху зображувальної точки на цих траекторіях, випишемо розв'язки для  $x$  і  $\dot{x}$ :

$$x = C_1 \exp(\gamma_0 t) + C_2 \exp(-\gamma_0 t),$$

$$\dot{x} = \gamma_0 C_1 \exp(\gamma_0 t) - \gamma_0 C_2 \exp(-\gamma_0 t),$$

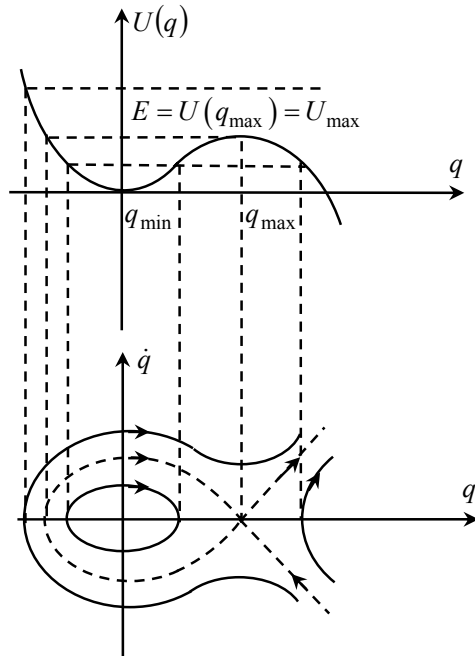
які впливають із рівняння руху  $m\ddot{x} - kx = 0$ , яке, у свою чергу, характеризує лінійні системи з відштовхувальною силою. Особливі траекторії можна одержати із загального розв'язку, якщо в ньому покласти  $C_1 = 0$  або  $C_2 = 0$ . Бачимо, що за  $t \rightarrow -\infty$  фазові траекторії наближаються до розв'язку, у якому  $C_1 = 0$ , тобто  $\dot{x} = -\gamma_0 x$ . За  $t \rightarrow +\infty$ , відповідно, фазові траекторії наближаються до розв'язку, у якому  $C_2 = 0$ , тобто  $\dot{x} = \gamma_0 x$ . Особлива точка описаного вище типу називається *особливою точкою типу "сідло"* (або *гіперболічною особливою точкою*).



**Рис. 7.** Зображення фазових траекторій в околі особливої точки типу "сідло"

Нанесемо тепер фазові траекторії у більш загальному випадку (рис. 8). Бачимо, що на цій фазовій площині існують три типи фазових траекторій. Їх розділяє особлива траекторія, яка називається *сепаратрисою* (на рис. 8 це пунктирна лінія). Сепаратриса ділить фазову площину на області з принципово різним характером руху. Вона завжди виходить із сідла або в нього входить, тобто джерелом сепаратриси є лише сідло. Рівняння сепаратриси записується у вигляді

$$E = U_{\max} = U(q_{\max}).$$



**Рис. 8.** Схематичне зображення фазових траєкторій у загальному випадку

З'ясуємо тепер на прикладі декартових координат поведінку фазових траєкторій поблизу точок повороту, а також визначимо характер руху на сепаратрисі. Запишемо рівняння траєкторії поблизу якої-небудь точки повороту

$$\dot{q} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}} \sqrt{E - U(q)}.$$

Розкладемо  $U(q)$  в околі точки повороту  $q_i$  й обмежимося першими двома членами розкладу

$$U(q) = U(q_i) + \frac{\partial U(q_i)}{\partial q} (q - q_i) + \dots \approx E + \frac{\partial U(q_i)}{\partial q} (q - q_i).$$

Таким чином, поблизу точок повороту фазові траєкторії мають такі кореневі особливості:  $\dot{q} \propto (q - q_1)^{1/2}$ ,  $\dot{q} \propto (q_2 - q)^{1/2}$ ,  $\dot{q} \propto (q - q_3)^{1/2}$ . Рух на сепаратрисі аперіодичний, оскільки за умови  $E \rightarrow U_{\max}$  період руху  $\tau(E)$  прямує до нескінченності. Очевидно, що це прямування до нескінченності відбувається за логарифмічним законом, оскільки за  $U(q) \approx U_{\max} + \frac{\kappa}{2}(q - q_{\max})^2$  і за  $q \rightarrow q_{\max}$ :

$$\tau(E) \propto \int_{q_{\max}}^q \frac{dq}{q - q_{\max}} = \ln|q - q_{\max}| \Big|_{q_{\max}}^q \rightarrow \infty.$$

### **Контрольні запитання та завдання**

1. Який рух називається одновимірним?
2. Приклади механічних систем з одним ступенем вільності.
3. Як розраховується частота малих коливань?
4. Де розташовуються особливі точки на фазовій площині?
5. Означення сепаратриси та її рівняння.

## Розділ II

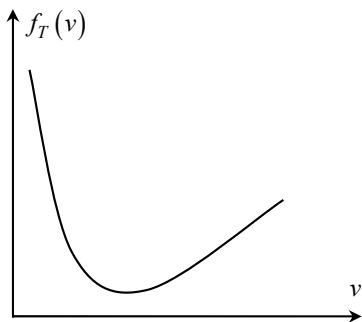
# ЛІНІЙНІ ТА НЕЛІНІЙНІ КОЛИВАННЯ ЗА НАЯВНОСТІ СИЛ ТЕРТЯ

### Лекція 6. Одновимірний рух матеріальної точки за наявності сил тертя

#### § 1. Сили тертя та їх види

На рух тіла в середовищі діють сили опору. Енергія рухомого тіла при цьому переходить у тепло, тобто відбувається процес дисипації. Таким чином, рух за цих умов уже не є суто механічним, тобто потребує врахування руху самого середовища та внутрішнього теплового стану як середовища, так і тіла. Рівняння ж руху уже не будуть інваріантними щодо заміни  $t \rightarrow -t$ . Прискорення тіла є функцією уже не тільки координат і швидкостей у даний момент часу, тобто не існує рівнянь руху в тому сенсі, який вони мають у механіці.

Проте існують такі умови, коли рух у середовищі може бути наближено описаний за допомогою механічних рівнянь шляхом введення в них деяких додаткових членів. Сюди належать коливання із частотами, малими порівняно з частотами, характерними для внутрішніх дисипативних процесів у середовищі. За виконання цих умов можна вважати, що на тіло, окрім сили  $F(x) = -\partial U(x)/\partial x$ , діє ще сила тертя  $f_T(\dot{x})$ , яка залежить лише від швидкості тіла, тобто рівняння руху матиме вигляд  $m\ddot{x} = -\partial U/\partial x + f_T(\dot{x})$ . Для сили в'язкого тертя характерна лінійна залежність щодо швидкості,  $\vec{f}_T = -\alpha\vec{v}$ . Можливі й більш складні залежності. Наприклад, залежність сили тертя від швидкості для сухої поверхні зображена схематично на рис. 1.



**Рис. 1.** Залежність сили тертя від швидкості для сухої поверхні

За малих швидкостей сила тертя круто спадає майже за лінійним законом (це той інтервал швидкостей, за яких можливо реалізувати режим з "від'ємним тертям"). У випадках великих швидкостей маємо звичайний режим з "додатним тертям". Як у випадку "додатного тертя", так і у випадку "від'ємного тертя" спостерігаються режими

слабкого та сильного тертя (це визначається співвідношенням між параметрами механічної системи та характеристиками сил тертя). Крім того, існують системи зі знакозмінним тертям.

## § 2. Лінійний осцилятор за наявності сили тертя

Допустимо, що сила тертя пропорційна швидкості. Зрозуміло, що таке припущення являє собою деяку ідеалізацію, а саме, – ідеалізацію реальних законів тертя. Проте будь-який інший закон тертя порушував би лінійність осцилятора. Таким чином, узагальнену силу тертя  $f_T$ , що діє на систему, яка, у свою чергу, здійснює одновимірні малі коливання з узагальненою координатою  $x$ , записуємо у вигляді

$$f_T = -b\dot{x},$$

де  $b$  – додатний коефіцієнт, а знак мінус показує, що сила тертя діє в бік, протилежний швидкості  $\dot{x}$ . Тоді рівняння руху лінійного осцилятора за наявності сили тертя записується у вигляді

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0.$$

Розділивши його на масу  $m$  і використовуючи позначення  $k/m = \omega_0^2$ ,  $b/m = 2\lambda$ , де  $\omega_0$  – частота вільних коливань системи за відсутності тертя,  $\lambda$  – коефіцієнт згасання, одержуємо

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = 0.$$

Розв'язок цього рівняння записується в такому вигляді:

$$x(t) = C_1 \exp(r_1 t) + C_2 \exp(r_2 t),$$

де  $r_1, r_2$  – корені квадратного рівняння  $r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2 = 0$ , а саме,  $r_{1,2} = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}$ . За  $\lambda^2 < \omega_0^2$  (випадок слабого тертя) одержуємо згасаючий осциляторний процес, а за  $\lambda^2 > \omega_0^2$  (випадок сильного згасання) одержуємо згасаючий аперіодичний процес.

Розглянемо спочатку згасаючий осциляторний процес. Позначаючи  $\omega^2 = \omega_0^2 - \lambda^2$ , дістаємо розв'язок у вигляді

$$x(t) = \exp(-\lambda t) (A \cos \omega t + B \sin \omega t),$$

де  $A$  і  $B$  визначаються початковими умовами. Наприклад, за  $t = 0$  маємо  $x(0) = x_0, \dot{x}(0) = \dot{x}_0$ . Тоді одержуємо

$$x(t) = \exp(-\lambda t) \left\{ x_0 \cos \omega t + \frac{(\dot{x}_0 + \lambda x_0)}{\omega} \sin \omega t \right\}.$$

Цей розв'язок можна також записати також у вигляді  $x(t) = a \exp(-\lambda t) \cos(\omega t + \alpha)$ , де

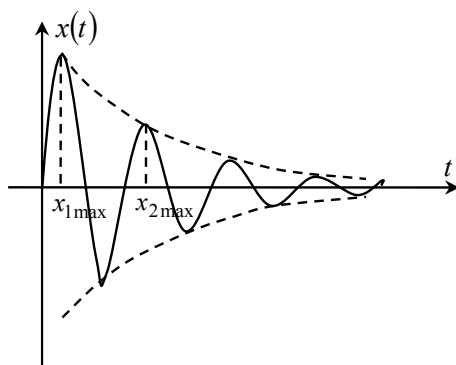
$$a = \sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{x_0^2 + \left( \frac{\dot{x}_0 + \lambda x_0}{\omega} \right)^2}, \quad \operatorname{tg} \alpha = -\frac{B}{A} = -\frac{\dot{x}_0 + \lambda x_0}{\omega x_0}.$$

Одержана функція  $x(t)$  не є періодичною. Але відстані в часі між двома послідовними проходженнями системи через положення рівноваги постійні та дорівнюють  $T = 2\pi/\omega$ . Такий самий інтервал у часі буде і між двома послідовними максимумами. Цей проміжок часу будемо називати *умовним періодом*. Залежність  $x(t)$  зображена на рис. 2.

Швидкість згасання осциляторного процесу характеризується величиною  $\lambda$ . Але можна дати й іншу, кращу, характеристику згасання такого процесу, яка не залежить від вибору одиниць вимірювання. Розглянемо відношення двох послідовних максимумів

$$\frac{x_{1\max}}{x_{2\max}} = \exp\left(\frac{2\pi\lambda}{\omega}\right) = \exp(\lambda T) = \exp(d).$$

Логарифм цього відношення має назву логарифмічного декременту згасання  $d$ , причому  $d = T\lambda$ . Обернена величина  $1/d$  дає кількість умовних періодів, після яких амплітуда зменшується в  $e$  разів ( $A(t) = a \exp(-\lambda t)$ ,  $A(t)/A(t + Tn) = \exp(-\lambda Tn) = e^{-1}$ ,  $n = 1/T\lambda = 1/d$ ). Видно, що одержаний закон згасання коливань тісно пов'язаний із прийнятим нами ідеалізованим законом тертя. Тільки припустивши, що сила тертя пропорційна швидкості, ми одержуємо закон спадання максимумів згідно з геометричною прогресією зі знаменником прогресії  $\exp(-d)$ . Таким чином, згасаючі коливання характеризуються чотирма величинами: умовним періодом (або умовною частотою), логарифмічним декрементом згасання, амплітудою та фазою.



**Рис. 2.** Згасаючий осциляторний процес

Повна енергія системи визначається за формулою

$$E = \frac{1}{2} ka^2 \exp(-2\lambda t) \left\{ 1 + \frac{\lambda}{\omega_0} \sin \left( 2\omega t + 2\alpha + \arctg \left( \frac{\lambda}{\omega} \right) \right) \right\}.$$

За  $\lambda \ll \omega_0$  дістаємо звідси  $E = E_0 \exp(-2\lambda t)$ , де  $E_0 = ka^2/2$  – значення повної енергії в початковий момент часу. Похідна за часом від повної енергії визначається таким чином:



$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{m\dot{x}^2}{2} + U(x) \right) = m\dot{x}\ddot{x} + \frac{\partial U}{\partial x} \dot{x} = \left( m\ddot{x} + \frac{\partial U}{\partial x} \right) \dot{x} = -b\dot{x}^2,$$

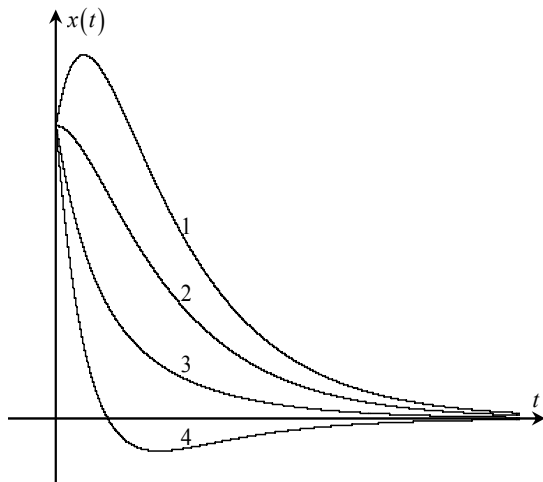
де використовується рівність  $m\ddot{x} + b\dot{x} = -\partial U/\partial x$ . Нехай тепер  $\lambda > \omega_0$ . Тоді обидва значення  $r$  є дійсними та від'ємними:

$$r_1 = -\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} = -\lambda_1, \quad r_2 = -\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} = -\lambda_2, \quad 0 < \lambda_1 < \lambda_2.$$

Загальний вигляд розв'язку у цьому випадку є таким:

$$x(t) = C_1 \exp(-\lambda_1 t) + C_2 \exp(-\lambda_2 t).$$

Видно, що функція  $x(t)$  асимптотично (за  $t \rightarrow \infty$ ) наближається до нуля (до рівноваги). Цей тип руху називається *аперіодичним згасанням*. Характер цього руху задається початковими умовами, а саме, величинами  $x(0) = x_0$  і  $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$ . На рис. 3 схематично зображені характеристики аперіодичного згасання для  $x_0 > 0$  і за різних значень  $\dot{x}_0$ .



**Рис. 3.** Характеристики аперіодичного згасання за таких початкових умов:

$$x_0 > 0; \quad 1 - \dot{x}_0 > 0, \quad 2 - \dot{x}_0 = 0, \quad 3 - \lambda_2 x_0 \leq \dot{x}_0 < 0, \quad 4 - \dot{x}_0 < -\lambda_2 x_0$$

Нарешті, коли  $\lambda = \omega_0$ , маємо  $r = -\lambda$  і загальний розв'язок у цьому випадку матиме вигляд  $x(t) = (C_1 + C_2 t) \exp(-\lambda t)$ . Це особливий випадок аперіодичного згасання. Він також не має коливального характеру, а його характеристики визначаються початковими умовами й аналогічні характеристикам, зображеним на рис. 3.

Вираз для сили тертя можна записати у вигляді похідної за швидкістю  $\dot{x}$  від деякої функції  $F$ , яка називається *дисипативною функцією*. Для розглядуваного випадку

$$f_T = -\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = -b\dot{x},$$

тобто дисипативна функція буде  $F = b\dot{x}^2/2$ . Сила тертя має бути додана до правої частини рівняння Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}.$$

Дисипативна функція визначає інтенсивність дисипації в системі, оскільки згідно з  $dE/dt = -b\dot{x}^2$  маємо  $dE/dt = -2F$ .

### § 3. Зображення згасаючих процесів на фазовій площині за "додатного тертя"

Перейдемо тепер до дослідження фазової площини системи, тобто до побудови її "фазового портрета", що відображає всю сукупність можливих рухів. Почнемо з випадку слабого тертя, коли  $\lambda < \omega_0$ . Тоді, розв'язуючи систему параметричних рівнянь

$$x(t) = x_0 \exp(-\lambda t) \cos \omega t + \frac{(\dot{x}_0 + \lambda x_0)}{\omega} \exp(-\lambda t) \sin \omega t,$$

$$\dot{x}(t) = \dot{x}_0 \exp(-\lambda t) \cos \omega t - \frac{[\lambda \dot{x}_0 + x_0 (\lambda^2 + \omega^2)]}{\omega} \exp(-\lambda t) \sin \omega t$$

щодо невідомих  $\exp(-\lambda t) \cos \omega t$  і  $\exp(-\lambda t) \sin \omega t$ , а потім виключаючи час, можемо побудувати фазові траєкторії  $\dot{x} = \dot{x}(x)$  на основі такого трансцендентного рівняння:

$$\frac{1}{\omega} \operatorname{arctg} \left( \frac{f_2}{f_1} \right) + \frac{1}{2\lambda} \ln(f_1^2 + f_2^2) = 0,$$

де

$$f_1 = \frac{xx_0(\lambda^2 + \omega^2) + \dot{x}_0(2\lambda x + \dot{x})}{(\lambda x_0 + \dot{x}_0)^2 + x_0^2 \omega^2}, \quad f_2 = \frac{(x\dot{x}_0 - x_0\dot{x})\omega}{(\lambda x_0 + \dot{x}_0)^2 + x_0^2 \omega^2}.$$

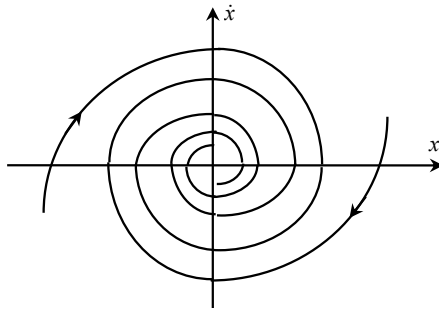
Проте, якщо будемо розглядати дуже мале тертя, тобто  $\lambda \ll \omega_0$ , то експоненту  $\exp(-\lambda t)$  можна вважати сталою при диференціюванні за часом. Тоді, використовуючи  $x(t) = a \exp(-\lambda t) \cos(\omega t + \alpha)$ , одержуємо таку систему параметричних рівнянь траєкторій:

$$x(t) \approx a \exp(-\lambda t) \cos(\omega t + \alpha), \quad \dot{x}(t) \approx -a\omega \exp(-\lambda t) \sin(\omega t + \alpha).$$

Використовуючи полярні координати на площині  $(x, -\dot{x}/\omega)$  і виключаючи далі з  $\rho = a \exp(-\lambda t)$  та  $\varphi = \omega t + \alpha$  час  $t$ , одержуємо

$$\rho(\varphi) = a \exp\left(\frac{\lambda}{\omega} \alpha\right) \exp\left(-\frac{\lambda}{\omega} \varphi\right) = \rho_0 \exp\left(-\frac{\lambda}{\omega} \varphi\right),$$

тобто на фазовій площині  $(x, \dot{x})$  ми маємо сукупність логарифмічних спіралей, для яких початок координат є асимптотичною точкою. На рис. 4 зображені дві з таких траєкторій.



**Рис. 4.** Особлива точка типу "стійкий фокус"

Таким чином, особлива точка типу "центр" за малого тертя переходить в особливу точку типу "стійкий фокус".

Розглянемо тепер випадок сильного тертя, коли  $\lambda > \omega_0$ . У цьому випадку фазові траєкторії  $\dot{x} = \dot{x}(x)$  шукаємо з такої системи параметричних рівнянь:

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1 \exp(-\lambda_1 t) + C_2 \exp(-\lambda_2 t), \\ \dot{x}(t) &= -\lambda_1 C_1 \exp(-\lambda_1 t) - \lambda_2 C_2 \exp(-\lambda_2 t), \end{aligned}$$

де  $C_{1,2} = (\lambda_{2,1} x_0 + \dot{x}_0) / (\lambda_2 - \lambda_1)$ . Дійсно, розв'язуючи щодо невідомих  $\exp(-\lambda_1 t)$  і  $\exp(-\lambda_2 t)$  і виключаючи час, ці траєкторії можна одержати з такого трансцендентного рівняння:

$$\left( \frac{\lambda_1 x_0 + \dot{x}_0}{\lambda_1 x + \dot{x}} \right)^{\lambda_1} = \left( \frac{\lambda_2 x_0 + \dot{x}_0}{\lambda_2 x + \dot{x}} \right)^{\lambda_2}.$$

Знайдемо тепер асимптотики цих траєкторій за  $t \rightarrow \pm\infty$ . Оскільки  $\lambda_1 < \lambda_2$ , то за  $t \rightarrow -\infty$  другі доданки швидше прямують до нескінченності, ніж перші, тобто можна покласти  $C_1 = 0$ , і тоді маємо таку асимптотику:  $\dot{x} = -\lambda_2 x$ . За  $t \rightarrow +\infty$  асимптотикою буде пряма  $\dot{x} = -\lambda_1 x$ . На рис. 5 зображений фазовий портрет у цьому випадку сильного тертя. У цьому випадку особлива точка типу "центр" переходить в особливу точку типу "стійкий вузол". Криві сукупності мають вертикальні дотичні (паралельні осі  $\dot{x}$ ) у точках перетину з віссю  $x$ , а також мають горизонтальні дотичні (паралельні осі  $x$ ) у точках перетину з прямою  $\dot{x} = -\lambda_1 \lambda_2 x / (\lambda_1 + \lambda_2)$ .

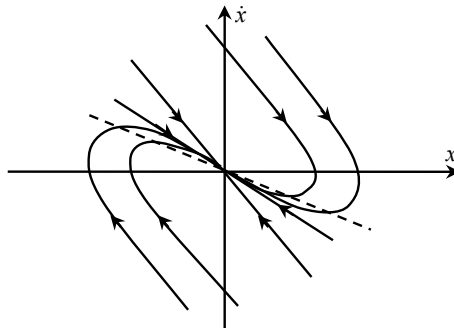


Рис. 5. Особлива точка типу "стійкий вузол"

## § 4. Механічні системи з "від'ємним тертям"

Першим прикладом механічної системи з "від'ємним тертям" може слугувати пристрій, що зображений на рис. 6.

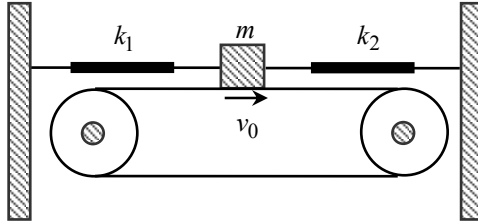


Рис. 6. Приклад механічної системи з від'ємним тертям

На стрічці, яка рівномірно рухається зі швидкістю  $v_0$ , лежить тіло з масою  $m$ , що закріплене двома пружинами з коефіцієнтами пружності  $k_1$  і  $k_2$ . Сила тертя між стрічкою та тілом є складною функцією відносної швидкості. Якщо позначити зміщення тіла через  $x$ , а його швидкість – через  $\dot{x}$ , то силу тертя, яка діє на це тіло, можна вважати деякою функцією відносної швидкості  $(v_0 - \dot{x})$ , тобто  $f_T = f(v_0 - \dot{x})$ . Якщо позначити сумарний коефіцієнт пружності через  $k$  і вважати пропорційними першому степеню швидкості всі інші сили тертя (напр., опір повітря, внутрішнє тертя в пружинах тощо), то рівняння руху тіла масою  $m$  запишеться таким чином:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = f(v_0 - \dot{x}).$$

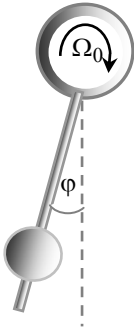
Можна обмежити наш розгляд областю, у якій  $\dot{x} \ll v_0$  (напр., обираючи велике значення  $v_0$ ). У цій області розкладаємо функцію  $f(v_0 - \dot{x})$  у ряд в околі значення  $v_0$  й обмежуємось першими членами розкладу:

$$f(v_0 - \dot{x}) = f(v_0) - \dot{x}f'(v_0) + \dots,$$

тобто при цьому обмеженні рівняння руху набуває такого вигляду:

$$m\ddot{x} + [b + f'(v_0)]\dot{x} + kx = f(v_0).$$

Член  $f(v_0)$ , що стоїть у правій частині цього рівняння, обумовлює лише зміщення стану рівноваги на величину  $f(v_0)/k$  у напрямку руху стрічки. Величина і знак коефіцієнта  $b + f'(v_0)$ , що стоїть при  $\dot{x}$ , залежать від вигляду характеристики тертя. Величина  $f'(v_0)$  є кутом нахилу характеристики тертя в точці  $v_0$  й у разі спадаючої характеристики тертя буде від'ємною  $f'(v_0) < 0$  (рис. 1). Якщо характеристика тертя в околі  $v_0$  спадає достатньо круто, то може реалізуватися випадок, коли справедливою буде нерівність  $b + f'(v_0) < 0$ . Тоді рівняння руху описуватиме систему з "від'ємним тертям".



**Рис. 7.** Маятник Фроуда

Другим прикладом механічної системи, у якій "тертя" може бути від'ємним, є маятник Фроуда (рис. 7). Розглянемо принцип дії такого маятника. На вал, що обертається рівномірно з кутовою швидкістю  $\Omega_0$ , підвішується звичайний маятник. Рівняння руху цього маятника відрізняється від руху звичайного маятника лише тим, що в цьому рівнянні враховується момент сили тертя між валом і підшипником, на який підвішений маятник. Оскільки сила тертя залежить від відносної кутової швидкості  $(\Omega_0 - \dot{\phi})$  вала й маятника, то момент сили тертя розкладаємо в ряд в околі значення  $\Omega_0$  й обмежуємось першими членами розкладу:

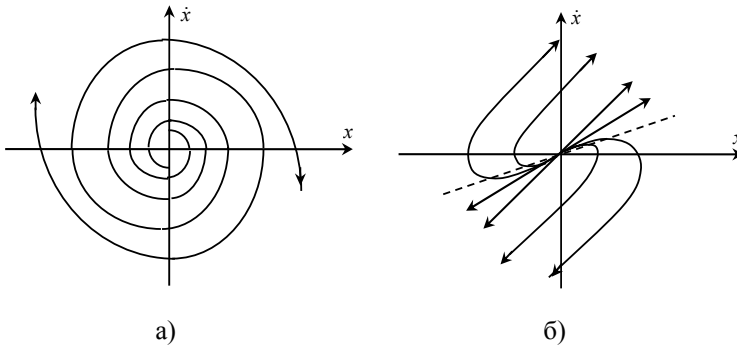
$$f(\Omega_0 - \dot{\phi}) = f(\Omega_0) - \dot{\phi}f'(\Omega_0) + \dots$$

Оскільки член  $f(\Omega_0)$  викликає тільки зміщення положення рівноваги, кутову змінну можна відраховувати від цього нового зміщеного положення рівноваги. Рівняння ж руху набуває вигляду

$$ml^2\ddot{\phi} + [b + f'(\Omega_0)]\dot{\phi} + mgl\phi = 0.$$

Якщо буде справджуватися нерівність  $b + f'(\Omega) < 0$ , то ми знову одержуємо механічну систему з "від'ємним тертям".

Таким чином, у цих двох прикладах особлива точка типу "центр" за малого тертя переходить в особливу точку типу "нестійкий фокус" (рис. 8, а), а у випадку сильного тертя переходить в особливу точку типу "нестійкий вузол" (рис. 8, б), на якому нанесено пунктиром лінію  $\dot{x} = \lambda_1\lambda_2x/(\lambda_1 + \lambda_2)$ , що проходить через максимуми та мінімуми фазових траєкторій). Особлива ж точка типу "сідло" як за слабого додатного і від'ємного тертя, так і при сильному додатному та від'ємному терті не змінює своєї природи й залишається особливою точкою типу "сідло".



**Рис. 8:** а) особлива точка типу "нестійкий фокус";  
 б) особлива точка типу "нестійкий вузол"

### **Контрольні запитання та завдання**

1. Залежність сили тертя від швидкості для сухих поверхонь.
2. Коли реалізується випадок слабого (сильного) тертя?
3. У якому випадку виникає особлива точка типу "стійкий фокус"?
4. У якому випадку реалізується особлива точка типу "нестійкий вузол"?
5. Приклади механічних систем, у яких "тертя" від'ємне.

## Лекція 7. Вимушені коливання. Нелінійне тертя

### § 1. Метод Ван дер Поля. Знакозмінне тертя. Граничний цикл

Можна кількісно розглянути нелінійні системи, які будуть близькими до консервативних систем, зокрема, обмежимося випадком близьким до лінійних консервативних систем. Рівняння руху такої системи можна записати у вигляді рівняння другого порядку  $\ddot{x} + \omega_0^2 x = \mu f(x, \dot{x})$  або, якщо ввести позначення  $y = \dot{x}$ , – у вигляді системи двох рівнянь першого порядку

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -x\omega_0^2 + \mu f(x, y).$$

Тут  $\mu$  – безрозмірний додатний параметр, який ми вважаємо малим (цей параметр визначає ступінь близькості нелінійної системи до лінійної консервативної).

Розглянемо, наприклад, рівняння руху другого порядку з функцією  $f(x, \dot{x}) = \dot{x}(1 - x^2/a^2)$ :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \mu \dot{x} \left( \frac{x^2}{a^2} - 1 \right) = 0,$$

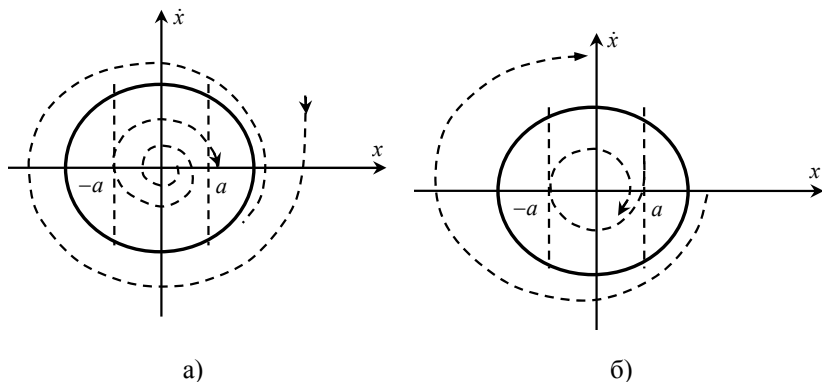
яке описує лінійний осцилятор із частотою  $\omega_0$  і з нелінійною та знакозмінною силою тертя. Це рівняння називається *рівнянням Ван дер Поля* (або *генератором Ван дер Поля*). Якщо помножити це рівняння на  $m\dot{x}$ , то його можна переписати у вигляді

$$\frac{dE}{dt} = -\mu m \dot{x}^2 \left( \frac{x^2}{a^2} - 1 \right),$$

звідки видно, що за  $x < a$  величина  $dE/dt > 0$ , а за  $x > a$  маємо  $dE/dt < 0$ . Тобто за  $x < a$  система характеризується від'ємним тертям і особливою точкою буде особлива точка типу "нестійкий фокус", а за  $x > a$  навпаки, фазові траєкторії поведуться так, як у випадку особливої точки типу "стійкий фокус". Ці дві системи фазових траєкторій (пунктирні криві) асимптотично наближаються на фазовій площині до деякої особливої траєкторії (суцільна



крива), яку називають *стійким граничним циклом* (рис. 1, а). Якщо ж сили тертя мають вигляд  $f_T(x, \dot{x}) = \mu \dot{x} \left( \frac{x^2}{a^2} - 1 \right)$ , то виникає нестійкий граничний цикл (рис. 1, б).



**Рис. 1.** Граничні цикли: а) стійкий, б) нестійкий

Знайдемо тепер рівняння фазової траєкторії граничного циклу, застосовуючи метод усереднення за часом, вважаючи при цьому коливання осцилятора швидким рухом, а зміну енергії в системі повільним рухом. Якщо візьмемо  $x = \kappa \cos \omega_0 t$ ,  $\dot{x} = -\kappa \omega_0 \sin \omega_0 t$ , то, вимагаючи виконання такої рівності:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \frac{dE}{dt} dt = -\mu m \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \dot{x}^2 \left( \frac{x^2}{a^2} - 1 \right) dt = 0,$$

одержуємо  $\kappa = 2a$ , тобто траєкторією граничного циклу є еліпс, який перетинає вісь  $x$  у точках  $x_{1,2} = \pm 2a$ .

## § 2. Вимушені коливання

Нехай зовнішня сила змінюється за періодичним законом  $F(t) = f \cos \gamma t$ . У цьому випадку, як і за наявності тертя, енергія не зберігається. Однак задачу вже не можна проаналізувати за допомогою методу фазової площини, оскільки в ній явно присутній час. У цьому випадку аналіз значно більш складніший, і його проведення виходить за межі даного курсу лекцій. Винятком є лінійний випадок, коли рівняння руху записується у вигляді

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f}{m} \cos \gamma t .$$

Розв'язок зручно шукати, якщо переписати це рівняння в комплексній формі, а саме:

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f}{m} \exp(i\gamma t) .$$

Частинний розв'язок шукаємо у вигляді  $x(t) = B \exp(i\gamma t)$ , оскільки цього вимагає вигляд сили. Підставляючи його в комплексне рівняння, одержуємо

$$B = \frac{f}{m(\omega_0^2 - \gamma^2 + 2i\lambda\gamma)} = b \exp(i\delta) ,$$

де  $b = f / m \sqrt{(\omega_0^2 - \gamma^2)^2 + 4\lambda^2 \gamma^2}$ ,  $\operatorname{tg} \delta = 2\lambda\gamma / (\gamma^2 - \omega_0^2)$ . Нехай  $\lambda < \omega_0$ . Тоді загальний розв'язок дійсного рівняння руху запишеться у вигляді

$$x(t) = a \exp(-\lambda t) \cos(\omega t + \alpha) + b \cos(\gamma t + \delta) .$$

Перший доданок у цьому виразі спадає за експоненціальним законом. Тому через великий проміжок часу залишається лише другий доданок, який не залежить від початкових умов, оскільки всі рухи такого осцилятора, навіть, якщо вони відрізняються початковими значеннями  $x$  і  $\dot{x}$ , приводять до одного асимптотичного стану.

Амплітуда вимушених коливань максимальна на частоті  $\gamma = \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2} \equiv \gamma_m$ , що випливає з рівняння

$$\frac{db}{d\gamma} = -\frac{1}{2m} \frac{[2(\omega_0^2 - \gamma^2)(-2\gamma) + 8\lambda^2 \gamma]}{[(\omega_0^2 - \gamma^2)^2 + 4\lambda^2 \gamma^2]^{3/2}} = 0 .$$

На рис. 2 зображена залежність амплітуди  $b(\gamma)$  від частоти  $\gamma$ . Видно, що за  $\gamma \rightarrow 0$   $b(\gamma) \rightarrow b_0 = f/m\omega_0^2$ , а за  $\gamma = \gamma_m$  амплітуда  $b(\gamma)$  набуває максимального значення  $b_m = b(\gamma_m) = f / 2m\lambda \sqrt{\omega_0^2 - \lambda}$ . Явище зростання амплітуди вимушених ко-

ливань при наближенні частоти змушувальної сили до частоти власних коливань системи називається *резонансом*.

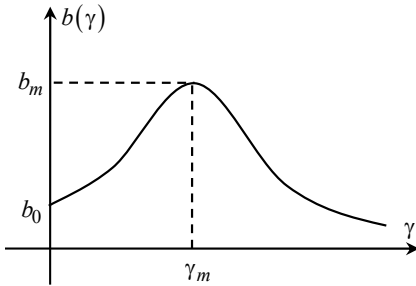
Розглянемо область поблизу резонансу за умови  $\lambda \ll \omega_0$ . У цьому випадку виконується рівність

$$\gamma_m = \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2} \approx \omega_0 \left(1 - \lambda^2/\omega_0^2\right) = \omega_0 - \lambda^2/\omega_0 \approx \omega_0,$$

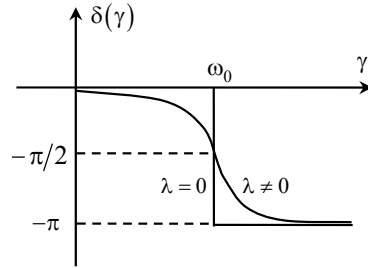
тобто можна покласти  $\gamma = \omega_0 + \varepsilon$ , де  $\varepsilon$  – мала величина. Тоді, враховуючи наближення

$$\gamma^2 - \omega_0^2 = (\gamma - \omega_0)(\gamma + \omega_0) \approx 2\omega_0\varepsilon, \quad 2i\lambda\gamma \approx 2i\lambda\omega_0,$$

одержуємо  $B = -f/2m\omega_0(\varepsilon - i\lambda)$ , звідки випливають такі формули:  $b = f/2m\omega_0\sqrt{\varepsilon^2 + \lambda^2}$ ,  $\text{tg } \delta = \lambda/\varepsilon = \lambda/(\gamma - \omega_0)$ . Звідси видно, що різниця фаз між коливанням і силою, що спонукає це коливання, завжди від'ємна, тобто коливання запізнюється щодо зовнішньої сили (рис. 3).



**Рис. 2.** Частотна залежність амплітуди вимушених коливань



**Рис. 3.** Частотна залежність різниці фаз між коливанням і змушувальною силою

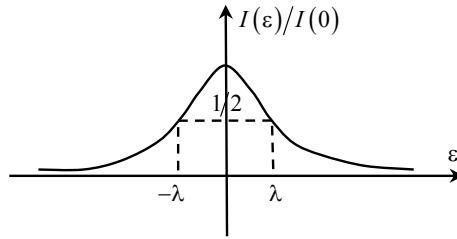
Зміна  $\delta$  від нуля до  $-\pi$  відбувається у вузькій смузі частот  $\sim \lambda$  в околі  $\omega_0$ . За відсутності тертя зміна фази вимушеного коливання відбувається стрибкоподібно за  $\gamma = \omega_0$ . У стані динамічної рівноваги, коли система здійснює вимушені коливання, її енергія залишається незмінною за рахунок балансу в системі між неперервним поглинанням енергії від джерела зовнішньої сили та процесом її дисипації внаслідок наявності тертя. Усереднюючи швидкість зміни енергії

$$\dot{E} = -2\lambda m \dot{x}^2 = -2\lambda m \gamma^2 b^2 (\gamma) \sin^2(\gamma t + \delta)$$

за часом, одержуємо кількість енергії  $I(\gamma)$ , що поглинається в середньому в одиницю часу, тобто маємо

$$I(\gamma) = \frac{\lambda \gamma^2 f^2}{4m \omega_0^2 [(\gamma - \omega_0)^2 + \lambda^2]} \approx \frac{f^2}{4m} \cdot \frac{\lambda}{[(\gamma - \omega_0)^2 + \lambda^2]},$$

оскільки  $\gamma \approx \omega_0$ . Такий вигляд залежності поглинання від частоти називається *лоренцевим* (рис. 4).



**Рис. 4.** Залежність поглинальної потужності від частоти

*Півшириною резонансної кривої* на рис. 4 називається значення  $|\varepsilon|$ , за яким величина  $I(\varepsilon)$  зменшується в два рази порівняно з її максимальним значенням  $I_{\max} = I(0) = f^2/4m\lambda$  за  $\varepsilon = 0$ . Із залежності  $I(\varepsilon)$  випливає, що ця півширина дорівнює показнику згасання  $\lambda$ . Висота ж максимуму  $I(0) = f^2/4m\lambda$  обернено пропорційна  $\lambda$ . Таким чином, при зменшенні показника згасання резонансна крива стає вужчою і вищою, але площа при цьому не змінюється. Дійсно,

$$\int_0^{\infty} I(\gamma) d\gamma = \int_{-\omega_0}^{\infty} I(\varepsilon) d\varepsilon \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} I(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{f^2}{4m} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda d\varepsilon}{\lambda^2 + \varepsilon^2} = \frac{\pi f^2}{4m},$$

тобто за умови  $\lambda \rightarrow 0$  одержуємо

$$I(\gamma - \omega_0) \rightarrow \left(\frac{\pi f^2}{4m}\right) \cdot \delta(\gamma - \omega_0),$$

де  $\delta(x)$  – дельта-функція Дірака.

### § 3. Катастрофа резонансу

Для коливань, що не згасають (за  $\lambda = 0$ ) амплітуда  $b$  згідно з одержаною вище формулою прямує до нескінченності, коли частота  $\gamma$  прямує до  $\omega_0$ . Рівняння руху в цьому випадку можна записати таким чином:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f}{m} \sin \gamma t,$$

а його частинний розв'язок записується у вигляді

$$x_q(t) = -\frac{f}{m(\gamma^2 - \omega_0^2)} \sin \gamma t.$$

Об'єднуючи цей розв'язок із розв'язком  $x_0(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t$  однорідного рівняння, одержуємо за початкових умов  $x(0) = x_0$ ,  $\dot{x}(0) = 0$  розв'язок рівняння руху

$$x(t) = x_0 \cos \omega_0 t + \frac{f}{m(\gamma^2 - \omega_0^2)} \left( \frac{\gamma}{\omega_0} \sin \omega_0 t - \sin \gamma t \right).$$

При наближенні частоти  $\gamma$  до частоти власних коливань  $\omega_0$  одержуємо

$$x(t) = x_0 \cos \omega_0 t + \frac{f}{m\omega_0} \left( \frac{1}{\omega_0} \sin \omega_0 t - t \cos \omega_0 t \right).$$

Дійсно, використовуючи правило Лопітала, обчислюємо  $x(t)$  за умови  $\gamma \rightarrow \omega_0$ :

$$\begin{aligned} \lim_{\gamma \rightarrow \omega_0} \left[ \frac{1}{(\gamma^2 - \omega_0^2)} \left( \frac{\gamma}{\omega_0} \sin \omega_0 t - \sin \gamma t \right) \right] &= \lim_{\gamma \rightarrow \omega_0} \left[ \frac{1}{2\gamma} \left( \frac{1}{\omega_0} \sin \omega_0 t - t \cos \gamma t \right) \right] = \\ &= \frac{1}{2\omega_0} \left( \frac{1}{\omega_0} \sin \omega_0 t - t \cos \omega_0 t \right). \end{aligned}$$

Оскільки залежність від часу лінійна, то з часом величина  $x(t)$  необмежено зростає, тобто рух стає неперіодичним. У цьому – суть катастрофи резонансу.

З'ясуємо ще, як поведуть себе коливання поблизу резонансу, коли  $\gamma = \omega_0 + \varepsilon$ , де  $\varepsilon$  – мала величина. Беремо розв'язок у комплексній формі

$$x(t) = A \exp(i\omega_0 t) + B \exp[i(\omega_0 + \varepsilon)t] = (A + B \exp(i\varepsilon t)) \exp(i\omega_0 t).$$

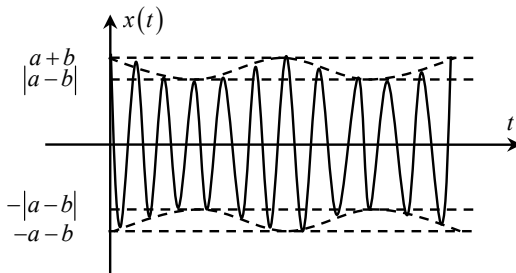
Величина  $A + B \exp(i\varepsilon t)$  мало змінюється протягом періоду  $2\pi/\omega_0$ , а тому рух поблизу резонансу можна розглядати як малі коливання, але зі змінною амплітудою. Позначаючи її через  $C$ , маємо

$$C = |A + B \exp(i\varepsilon t)|.$$

Використовуючи позначення  $A = a \exp(i\alpha)$ ,  $B = b \exp(i\beta)$ , одержуємо:

$$\begin{aligned} C^2 &= |a \cos \alpha + b \cos(\varepsilon t + \beta) + ia \sin \alpha + ib \sin(\varepsilon t + \beta)|^2 = \\ &= \left\{ [a \cos \alpha + b \cos(\varepsilon t + \beta)]^2 + [a \sin \alpha + b \sin(\varepsilon t + \beta)]^2 \right\} = \\ &= a^2 + b^2 + 2ab \cos(\varepsilon t + \beta - \alpha). \end{aligned}$$

Таким чином, розв'язок можна записати як коливання з амплітудою, яка періодично з частотою  $\varepsilon$  змінюється між двома граничними значеннями  $|a - b| \leq C \leq a + b$ . Це явище називається *явищем биття* (на рис. 5 наведено залежність  $x(t)$ ).



**Рис. 5.** Ілюстрація явища биття

Рівняння руху може бути зінтегроване і в загальному випадку за довільної змушувальної сили  $F(t)$ , якщо це рівняння

$$m\ddot{x} + kx = F(t)$$

перепишемо у вигляді

$$\frac{d}{dt}(\dot{x} + i\omega_0 x) - i\omega_0(\dot{x} + i\omega_0 x) = \frac{1}{m}F(t) \quad \text{або} \quad \frac{d\xi}{dt} - i\omega_0\xi = \frac{1}{m}F(t),$$

де введена комплексна величина  $\xi = \dot{x} + i\omega_0 x$ . Зазначимо, що таке перетворення має дуже велике значення, оскільки при заміні  $\dot{x} \rightarrow p/m$  воно може бути використане у квантовій механіці. Ми перейшли, таким чином, до рівняння першого порядку. Без правої частини розв'язок однорідного рівняння буде  $\xi(t) = A \exp(i\omega_0 t)$ . Шукаючи далі розв'язок неоднорідного рівняння у вигляді  $\xi(t) = A(t) \exp(i\omega_0 t)$ , одержуємо рівняння для  $A(t)$ :

$$\dot{A}(t) = \frac{1}{m}F(t) \exp(-i\omega_0 t).$$

Інтегруючи це рівняння, дістаємо розв'язок  $\xi(t)$  у такому вигляді:

$$\xi(t) = \exp(i\omega_0 t) \left[ \int_0^t \frac{1}{m} F(t) \exp(-i\omega_0 t) dt + \xi_0 \right],$$

де  $\xi_0 = \xi(0)$ . Це й є шуканий загальний розв'язок. Функція ж  $x(t)$  дається уявною частиною  $\xi(t)$ , розділеною на  $\omega_0$ , тобто

$$x(t) = \frac{1}{\omega_0} \operatorname{Im} \left\{ \exp(i\omega_0 t) \left[ \int_0^t \frac{1}{m} F(t) \exp(-i\omega_0 t) dt + \xi_0 \right] \right\}.$$

При цьому сила  $F(t)$  має бути записана в дійсному вигляді.

Енергія системи, яка здійснює вимушені коливання, не зберігається; надходження енергії в систему відбувається за рахунок джерела зовнішньої сили. Визначимо повну енергію, що передається системі за весь час дії сили (від  $-\infty$  до  $+\infty$ ), вважаючи початкову енергію такою, що дорівнює нулю. Оскільки маємо  $\xi(-\infty) = 0$ , то за  $t \rightarrow \infty$  буде

$$|\xi(\infty)|^2 = \frac{1}{m^2} \left| \int_{-\infty}^{\infty} F(t) \exp(-i\omega_0 t) dt \right|^2.$$

Таким чином, енергія, яка передається від джерела системі за весь час його дії, подається таким виразом:

$$E = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \omega_0^2 x^2) = \frac{m}{2} |\xi(\infty)|^2 = \frac{1}{2m} \left| \int_{-\infty}^{\infty} F(t) \exp(-i\omega_0 t) dt \right|^2,$$

тобто вона визначається квадратом модуля компонента Фур'є сили  $F(t)$  із частотою, що дорівнює власній частоті системи.

Якщо сила  $F(t)$  діє лише протягом короткого проміжку часу (малого порівняно з  $\omega_0^{-1}$ ), то в підінтегральному виразі можна вважати, що  $\exp(-i\omega_0 t) \approx 1$ . Тоді

$$E = \frac{1}{2m} \left( \int_{-\infty}^{\infty} F(t) dt \right)^2 = \frac{p^2}{2m},$$

тобто короткодіюча сила привносить у систему імпульс, не встигаючи призвести до помітного зміщення.

### **Контрольні запитання та завдання**

1. Записати рівняння Ван дер Поля.
2. Зобразити залежність амплітуди коливань у випадку резонансу.
3. У якій частотній смузі змінюється фаза коливань за наявності гармонічної змушувальної сили?
4. Що таке катастрофа резонансу?
5. За яких умов виникає явище биття?

## **Лекція 8. Коливання систем з багатьма ступенями вільності**

### **§ 1. Вільні коливання систем з багатьма ступенями вільності. Нормальні координати**

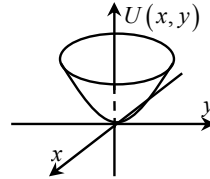
Розглянемо ті коливання, які виникають за невеликих відхилень системи від положення стійкої рівноваги. Насамперед це такі системи, потенціал  $U$  яких є функцією координат  $q_i$  ( $i=1, \dots, s$ ), де  $s$  – кількість ступенів вільності. Очевидно, що



система перебуває у стані рівноваги, якщо діючі на неї узагальнені сили дорівнюють нулю, тобто

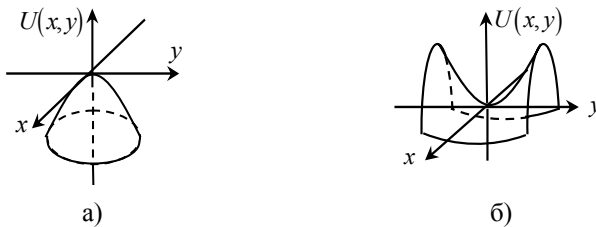
$$Q_i = \left( \frac{\partial U}{\partial q_i} \right)_{q=q_0} = 0.$$

*Рівновага* називається *стійкою*, якщо рух, який виникає в результаті невеликого збурення, не виходить за межі деякого невеликого околу початкової конфігурації системи (виникає точка мінімуму). Наприклад, у випадку двох ступенів вільності функція потенціальної енергії поблизу точки мінімуму має вигляд, що зображений на рис. 1.



**Рис. 1.** Вигляд функції потенціальної енергії поблизу точки мінімуму у випадку двох ступенів вільності

Якщо ж за нескінченно малого збурення система починає необмежено віддалятися від початкової конфігурації, то рівновага називається *нестійкою* (реалізується точка максимуму або точка мінімаксу (сідлова точка)). У випадку систем з двома ступенями вільності функції потенціальних енергій поблизу цих точок мають вигляд, як на рис. 2.



**Рис. 2.** Вигляд функцій потенціальних енергій у випадку двох ступенів вільності поблизу точок нестійкої рівноваги: а) точки максимуму; б) точки мінімаксу

Далі нас буде цікавити рух системи поблизу положення стійкої рівноваги, тобто безпосередньо поблизу точки мінімуму  $q = q_0$ . Вводимо малі відхилення  $x_i = q_i - q_{i0}$  і розклада-

емо потенціальну енергію  $U(q_1, \dots, q_s)$  в околі точки  $q_0 = (q_{10}, \dots, q_{s0})$  у ряд Тейлора

$$U(q_1, \dots, q_s) \equiv U(q_{10} + x_1, \dots, q_{s0} + x_s) \approx U(q_{10}, \dots, q_{s0}) + \sum_{i=1}^s \left( \frac{\partial U}{\partial q_i} \right)_{q=q_0} x_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^s \left( \frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j} \right)_{q=q_0} x_i x_j + \dots$$

Якщо потенціальну енергію відрахувати від її мінімального значення, то з урахуванням того, що в стані рівноваги виконуються рівності  $(\partial U / \partial q_i)_{q=q_0} = 0$ , одержуємо

$$U(q_1, \dots, q_s) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^s k_{ij} x_i x_j,$$

де

$$k_{ij} = \left( \frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j} \right)_{q=q_0} = \left( \frac{\partial^2 U}{\partial q_j \partial q_i} \right)_{q=q_0} = k_{ji}.$$

Таким чином, потенціальна енергія є додатно визначеною квадратичною формою.

Кінетичну енергію в загальному вигляді можна записати таким чином:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,j}^s a_{ij}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j.$$

Розкладаючи величини  $a_{ij}(q)$  у ряд Тейлора в околі точки  $q = q_0$  і залишаючи тільки перші члени розкладу  $a_{ij}(q_0) = m_{ij}$ , матимемо

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,j}^s m_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j,$$

де, очевидно,  $m_{ij} = m_{ji}$ . Зрозуміло, що кінетична енергія також є додатно визначеною квадратичною формою. Функція Лагранжа цієї системи має вигляд

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^s (m_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j - k_{ij} x_i x_j).$$

Підрахуємо тепер повний диференціал від цієї функції Лагранжа:

$$\begin{aligned} d\mathcal{L} &= \frac{1}{2} \sum_{i,j}^s (m_{ij} \dot{x}_i d\dot{x}_j + m_{ij} \dot{x}_j d\dot{x}_i - k_{ij} x_i dx_j - k_{ij} x_j dx_i) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j}^s (m_{ji} \dot{x}_j d\dot{x}_i + m_{ij} \dot{x}_j d\dot{x}_i - k_{ji} x_j dx_i - k_{ij} x_j dx_i) = \\ &= \sum_{i,j}^s (m_{ij} \dot{x}_j d\dot{x}_i - k_{ij} x_j dx_i) = \sum_{i=1}^s \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} d\dot{x}_i \right), \end{aligned}$$

тобто звідси маємо

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = - \sum_{j=1}^s k_{ij} x_j, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} = \sum_{j=1}^s m_{ij} \dot{x}_j.$$

Тому рівняння Лагранжа записуються у вигляді

$$\sum_{j=1}^s (m_{ij} \ddot{x}_j + k_{ij} x_j) = 0.$$

Це є системою  $s$  лінійних однорідних диференціальних рівнянь другого порядку зі сталими коефіцієнтами, розв'язок якої шукаємо у вигляді

$$x_j = \operatorname{Re} [CA_j \exp(i\omega t)],$$

де  $CA_j$  – комплексна амплітуда коливання, яка відповідає координаті  $x_j$ , а величина  $C$  тут введена для зручності, як деякий масштабний коефіцієнт, однаковий для всіх координат. Для спрощення подальшого розгляду будемо користуватися комплексною формою запису шуканого розв'язку, тобто  $x_j = A_j \exp(i\omega t)$ , а до дійсного розв'язку перейдемо на завершальній стадії. Таким чином, підставляючи розв'язок  $x_j = A_j \exp(i\omega t)$  у систему рівнянь

Лагранжа, одержуємо таку систему лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь, яким задовольняють амплітуди  $A_j$ :

$$\sum_{j=1}^s (k_{ij} - \omega^2 m_{ij}) A_j = 0.$$

Ця система має нетривіальний розв'язок, якщо її визначник дорівнює нулю, тобто маємо

$$\det(k_{ij} - \omega^2 m_{ij}) = 0.$$

Одержане рівняння називається *характеристичним рівнянням* і воно є рівнянням степеня  $s$  щодо змінної  $\omega^2$ . Дійсні додатні розв'язки  $\omega_\alpha^2$ ,  $\alpha = 1, \dots, s$  цього рівняння є квадратами власних частот системи.

Дійсність і додатність розв'язків уже впливає з фізичних міркувань, але це можна показати й математично. Помножаємо систему рівнянь Лагранжа на  $A_i^*$  і підсумовуємо за індексом  $i$ :

$$\sum_{i,j=1}^s (k_{ij} - \omega^2 m_{ij}) A_i^* A_j = 0,$$

звідки маємо

$$\omega^2 = \frac{\sum_{i,j=1}^s k_{ij} A_i^* A_j}{\sum_{i,j=1}^s m_{ij} A_i^* A_j}.$$

Дійсність квадратичної форми  $\sum_{i,j=1}^s k_{ij} A_i^* A_j$  впливає із таких

перетворень:

$$\left( \sum_{i,j} k_{ij} A_i^* A_j \right)^* = \sum_{i,j} k_{ij} A_i A_j^* = \sum_{i,j} k_{ji} A_j A_i^* = \sum_{i,j} k_{ij} A_i^* A_j.$$

Аналогічно можна показати дійсність і квадратичної форми  $\sum_{i,j=1}^s m_{ij} A_i^* A_j$ , тобто дійсність величин  $\omega^2$  доведена.

Тепер покажемо, що величини  $\omega^2$  є не тільки дійсними, а ще й додатними. Для цього розбиваємо  $A_i^*, A_j$  на дійсні та уявні частини, переписуючи при цьому одну із сум таким чином:

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} k_{ij} A_i^* A_j &= \sum_{i,j} k_{ij} (a_i - ib_i)(a_j + ib_j) = \\ &= \sum_{i,j} k_{ij} a_i a_j + \sum_{i,j} k_{ij} b_i b_j + i \sum_{i,j} k_{ij} (a_i b_j - a_j b_i), \end{aligned}$$

де внаслідок симетричності чисел  $k_{ij}$  остання сума дорівнює нулю (оскільки при зміні місцями індексів  $i, j$  змінюється її знак), а внаслідок додатної визначеності матриці  $\hat{K} = (k_{ij})$  інші суми додатні.

Після того, як числа  $\omega_\alpha^2$  знайдені, підставляємо замість  $\omega^2$  кожне з них (напр.,  $\omega_l^2$ ) у систему рівнянь  $\sum_{j=1}^s (k_{ij} - \omega_l^2 m_{ij}) A_j = 0$ , щоб знайти відповідні значення амплітуд  $A_{jl}$ . Якщо припустити, що всі  $\omega_\alpha^2$  різні, то одне із рівнянь у цій системі є наслідком усіх інших (нехай це буде останнє рівняння), тобто амплітуди  $A_{jl}$  ( $j=1, \dots, s$ ) виражаються через амплітуду  $A_{sl}$  із такої системи  $s-1$  неоднорідних рівнянь:

$$\sum_{j=1}^{s-1} (k_{ij} - \omega_l^2 m_{ij}) A_{jl} = -A_{sl} (k_{is} - \omega_l^2 m_{is}).$$

Використовуючи формули Крамера, одержуємо

$$A_{jl} = A_{sl} \frac{\Delta_j(\omega_l^2)}{\Delta(\omega_l^2)}, \quad j=1, \dots, s-1,$$

де  $\Delta(\omega_l^2)$  – визначник системи, а  $\Delta_j(\omega_l^2)$  – визначник, утворений підстановкою на місце  $j$ -го стовпчика визначника  $\Delta(\omega_l^2)$  стовпчика вільних членів цієї системи, за винятком спільного множника  $A_{sl}$ . Звідси ще випливає, що всі шукані амплітуди будуть дійсними, якщо дійсною буде амплітуда  $A_{sl}$ .

Встановимо тепер властивості матриці  $\hat{A}$ , утвореної з усіх амплітуд. Для цього виконуємо таку процедуру:

$$\sum_{j=1}^s (k_{ij} - \omega_l^2 m_{ij}) A_{jl} = 0 \cdot A_{ip},$$

$$\sum_{i=1}^s (k_{ij} - \omega_p^2 m_{ij}) A_{ip} = 0 \cdot A_{jl}.$$

Віднімаючи далі від рівнянь першої системи рівняння другої системи, одержуємо таку рівність:

$$(\omega_l^2 - \omega_p^2) \sum_{i,j} m_{ij} A_{jl} A_{ip} = 0.$$

Якщо всі корені характеристичного рівняння будуть різними, то за  $l \neq p$  маємо

$$\sum_{i,j} m_{ij} A_{jl} A_{ip} = 0.$$

Оскільки величини  $A_{jl}$  як розв'язки лінійного однорідного рівняння визначені тільки з точністю до сталого множника, то накладемо таку додаткову умову:

$$\sum_{i,j} m_{ij} A_{jl} A_{il} = 1.$$

Об'єднуючи дві останні рівності, одержуємо

$$\sum_{i,j} m_{ij} A_{jl} A_{ip} = \delta_{lp}.$$

Останню умову можна записати також і в матричному вигляді

$$\hat{A}^T \hat{M} \hat{A} = \hat{E}$$

– це умова ортогональності матриці  $\hat{A}$  в просторі конфігурацій з метричним тензором  $\hat{M}$ . Перепишемо тепер систему рівнянь

$$\sum_{j=1}^s (k_{ij} - \omega_l^2 m_{ij}) A_{jl} = 0 \text{ у вигляді}$$

$$\sum_j k_{ij} A_{jl} = \omega_l^2 \sum_j m_{ij} A_{jl} = \sum_{j,p} m_{ij} A_{jp} \Lambda_{lp},$$

де  $\Lambda_{lp} = \omega_l^2 \delta_{lp}$ , або в такому матричному вигляді:

$$\hat{K}\hat{A} = \hat{M}\hat{A}\hat{\Lambda}.$$

Звідси одержуємо  $\hat{A}^T \hat{K}\hat{A} = \hat{A}^T \hat{M}\hat{A}\hat{\Lambda} = \hat{E}\hat{\Lambda} = \hat{\Lambda}$ , тобто матриця  $\hat{A}$  приводить до діагонального вигляду й матрицю  $\hat{K}$ , елементами якої є власні значення  $\omega_l^2$ . Матриця  $\hat{A}$  є матрицею лінійного перетворення, яке переводить косокутну систему координат у прямокутну (матриця метричного тензора стає одиничною матрицею). Осі нової системи координат є головними осями, а матриця  $\hat{K}$  стає діагональною.

Оскільки розв'язок рівнянь руху являє собою суперпозицію  $s$  коливань із частотами  $\omega_1, \dots, \omega_s$ , то загальний розв'язок рівнянь руху можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} x_j &= \operatorname{Re} \sum_l C_l A_{jl} e^{i\omega_l t} = \operatorname{Re} \sum_l (\operatorname{Re} C_l + i \operatorname{Im} C_l) A_{jl} (\cos \omega_l t + i \sin \omega_l t) = \\ &= \sum_l A_{jl} [\operatorname{Re} C_l \cos \omega_l t - \operatorname{Im} C_l \sin \omega_l t]. \end{aligned}$$

Ортогональність матриці  $\hat{A}$  полегшує відшукування коефіцієнтів  $C_l$  за заданих початкових умов. За  $t=0$   $x_j(0) = \sum_l A_{jl} \operatorname{Re} C_l$ .

Аналогічно маємо  $\dot{x}_j(0) = -\sum_l A_{jl} \omega_l \operatorname{Im} C_l$ . Із цієї системи  $2s$  рівнянь можна отримати  $\operatorname{Re} C_l$  і  $\operatorname{Im} C_l$  для всіх  $s$  коефіцієнтів  $C_l$ . Будемо діяти таким чином. Помножуючи  $x_j(0)$  і  $\dot{x}_j(0)$  на  $m_{ij} A_{ip}$  і підсумовуючи за  $i$  та  $j$ , одержуємо

$$\begin{aligned}
& \sum_{i,j} m_{ij} A_{ip} x_j(0) = \sum_{i,j,l} \operatorname{Re} C_l m_{ij} A_{jl} A_{ip} = \\
& = \sum_l \operatorname{Re} C_l \sum_{i,j} m_{ij} A_{jl} A_{ip} = \sum_l \operatorname{Re} C_l \delta_{lp} = \operatorname{Re} C_p, \\
& \sum_{i,j} m_{ij} A_{ip} \dot{x}_j(0) = - \sum_{i,j,l} \operatorname{Im} C_l m_{ij} A_{jl} A_{ip} \omega_l = \\
& = - \sum_l \omega_l \operatorname{Im} C_l \sum_{i,j} m_{ij} A_{jl} A_{ip} = - \sum_l \omega_l \operatorname{Im} C_l \delta_{lp} = - \omega_p \operatorname{Im} C_p.
\end{aligned}$$

Таким чином, одержуємо

$$\operatorname{Re} C_l = \sum_{i,j} m_{ij} A_{il} x_j(0) \quad \text{і} \quad \operatorname{Im} C_l = -\omega_l^{-1} \sum_{i,j} m_{ij} A_{il} \dot{x}_j(0).$$

Оскільки загальний розв'язок дорівнює

$$x_j = \sum_l A_{jl} [\operatorname{Re} C_l \cos \omega_l t - \operatorname{Im} C_l \sin \omega_l t] = \sum_l A_{jl} \zeta_l,$$

то це означає, що зміна кожної координати із часом являє собою суперпозицію  $s$  простих періодичних коливань  $\zeta_1, \dots, \zeta_s$  з довільними амплітудами і фазами, але з цілком визначеними частотами.

Під час аналізу динаміки механічних систем з декількома ступенями вільності виникає запитання: "Чи не можна вибрати узагальнені координати таким чином, щоб кожна з них здійснювала лише одне просте коливання?" У загальному вигляді це дуже складна задача, яка розв'язується шляхом введення змінних "дія-кут". Проте в нашому випадку лінійної динаміки ситуація виглядає простішою, оскільки форма загального розв'язку вказує шлях до вирішення цієї задачі. Запишемо потенціальну та кінетичну енергії та загальний розв'язок у матричній формі

$$U(q) = \frac{1}{2} \hat{x}^T \hat{K} \hat{x}, \quad T(\dot{q}) = \frac{1}{2} \hat{x}^T \hat{M} \hat{x}, \quad \hat{x} = \hat{A} \hat{y}.$$

Користуючись співвідношеннями

$$\hat{A}^T \hat{M} \hat{A} = \hat{E} \quad \text{і} \quad \hat{A}^T \hat{K} \hat{A} = \hat{A}^T \hat{M} \hat{A} \hat{\Lambda} = \hat{E} \hat{\Lambda} = \hat{\Lambda},$$

одержуємо



$$U(q) = \frac{1}{2} \dot{y}^T \hat{A}^T \hat{K} \hat{A} \dot{y} = \frac{1}{2} \dot{y}^T \hat{\Lambda} \dot{y} \rightarrow U = \frac{1}{2} \sum_l \omega_l^2 y_l^2,$$

$$T(\dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{y}^T \hat{A}^T \hat{M} \hat{A} \dot{y} = \frac{1}{2} \dot{y}^T \dot{y} \rightarrow T = \frac{1}{2} \sum_l \dot{y}_l^2.$$

У лінійній алгебрі така процедура називається *одночасним зведенням двох квадратичних форм до діагонального вигляду*. Лагранжіан системи тепер дорівнює

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_l (\dot{y}_l^2 - \omega_l^2 y_l^2) = 0,$$

а система рівнянь Лагранжа набуває вигляду  $\ddot{y}_l + \omega_l^2 y_l = 0$ , розв'язуючи яку, одержуємо  $y_l = C_l \exp(i\omega_l t)$ , а

$$\zeta_l = \operatorname{Re} y_l = \operatorname{Re} C_l \cos \omega_l t - \operatorname{Im} C_l \sin \omega_l t.$$

Таким чином, величини  $\zeta_l$  можна розглядати як нові узагальнені координати. Ці координати називаються *нормальними* (або *головними*), а періодичні коливання, що здійснюються ними, – *нормальними коливаннями системи*. У нормальних координатах рівняння руху розпадаються на  $s$  незалежних один від одного рівнянь. Прискорення кожної нормальної координати залежить тільки від значення цієї ж координати, тобто для повного визначення цієї координати необхідно знати початкові значення тільки цієї координати та її швидкості.

## § 2. Коливання системи з багатьма ступенями вільності за наявності сили тертя

Нехай узагальнена сила тертя, що відповідає координаті  $x_i$ , є лінійною функцією швидкостей, тобто

$$f_{iT} = - \sum_k \alpha_{ik} \dot{x}_k.$$

Методами статистичної фізики можна показати, що  $\alpha_{ik} = \alpha_{ki}$ .

Цю силу тертя можна записати у вигляді похідної  $f_{iT} = - \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}$

від квадратичної форми  $F = \frac{1}{2} \sum_{i,k} \alpha_{ik} \dot{x}_i \dot{x}_k$ , яка називається *дисипативною функцією Релея*. Додаючи такі сили до правих частин рівнянь Лагранжа, одержуємо

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} - \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}.$$

Дисипативна функція має сама по собі важливий фізичний зміст – вона визначає інтенсивність дисипації енергії в системі. У цьому легко переконатися, підраховуючи похідну за часом від повної енергії системи. Маємо

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \sum_i \dot{x}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} - \mathcal{L} \right) = \sum_i \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} \right) \dot{x}_i = - \sum_i \dot{x}_i \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}.$$

Оскільки  $F$  – квадратична функція швидкостей, то, виходячи з теореми Ейлера про однорідні функції, маємо

$$\frac{dE}{dt} = -2F,$$

тобто швидкість зміни енергії системи подається подвоєною дисипативною функцією. Оскільки дисипативні процеси призводять до зменшення енергії, то має бути  $F > 0$ , тобто квадратична форма  $F = \frac{1}{2} \sum_{i,k} \alpha_{ik} \dot{x}_i \dot{x}_k$  додатно визначена.

Рівняння малих коливань за наявності тертя будуть такими:

$$\sum_j (m_{ij} \ddot{x}_j + k_{ij} x_j + \alpha_{ij} \dot{x}_j) = 0.$$

Покладаючи в цих рівняннях  $x_j = A_j \exp(i\omega t)$ , одержуємо таку систему лінійних алгебраїчних рівнянь для знаходження  $A_j$ :

$$\sum_j (m_{ij} \omega^2 + \alpha_{ij} i\omega + k_{ij}) A_j = 0.$$

Прирівнюючи до нуля визначник цієї системи, знаходимо характеристичне рівняння

$$\det(m_{ij}\omega^2 + \alpha_{ij}\omega + k_{ij}) = 0,$$

з якого визначаються значення  $\omega$ . Це є рівняння степеня  $2s$  щодо  $\omega$ . Оскільки всі коефіцієнти дійсні, то його корені або дійсні, або попарно комплексно-спряжені. При цьому дійсні корені від'ємні, а комплексні мають від'ємну дійсну частину. У протилежному випадку координати та швидкості, а з ними й енергія системи мали б експоненціальне зростання з часом. Між іншим, наявність дисипативних сил має призводити до зменшення енергії.

### § 3. Вимушені коливання системи з багатьма ступенями вільності

Рівняння вимушених малих коливань за наявності дисипативних сил записуються у вигляді

$$\sum_j (m_{ij}\ddot{x}_j + k_{ij}x_j + \alpha_{ij}\dot{x}_j) = f_i e^{i\omega t}.$$

Шукаючи частинний розв'язок цих рівнянь у вигляді  $x_j = B_j \exp(i\omega t)$ , одержуємо таку систему лінійних алгебраїчних рівнянь щодо амплітуд  $B_j$ :

$$\sum_j B_j (k_{ij} + i\omega\alpha_{ij} - \omega^2 m_{ij}) - f_i = 0.$$

Розв'язуючи цю систему, одержуємо  $B_j = D_j(\omega)/D(\omega)$ , де  $D(\omega)$  – визначник, складений із коефіцієнтів при  $B_j$ , а  $D_j(\omega)$  одержаний із  $D(\omega)$  у результаті заміни  $j$ -го стовпчика на  $f_1, \dots, f_s$ .  $D(\omega)$  можна представити у вигляді  $D(\omega) = G(\omega - \omega_1) \cdot \dots \cdot (\omega - \omega_s)$ , де  $\omega_1, \dots, \omega_s$  – комплексні частоти вільних коливань, а  $G$  – деяка константа.  $D(\omega)$  можна також записати у вигляді

$$D(\omega) = G \prod_{i=1}^s \{(\omega - \operatorname{Re} \omega_i) + i \operatorname{Im} \omega_i\}.$$

Якщо відокремити дійсну та уявну частини коефіцієнтів  $B_j$ , то тоді новий знаменник буде таким:

$$D(\omega)D^*(\omega) = GG^* \prod_{i=1}^s \left\{ (\omega - \operatorname{Re} \omega_i)^2 + (\operatorname{Im} \omega_i)^2 \right\} \equiv \\ \equiv GG^* \prod_{i=1}^s \left\{ 4\pi^2 (v - v_i)^2 + \kappa_i^2 \right\},$$

звідки видно, що резонанс спостерігається в тому випадку, коли частота  $v$  буде збігатися з однією з резонансних частот  $v_i$ . Якщо  $\kappa_i = 0$ , то резонансні амплітуди прямують до нескінченності (виникає катастрофа резонансу).

### ***Контрольні запитання та завдання***

1. У яких випадках система з багатьма ступенями вільності перебуває у стані рівноваги?
2. Зобразити точку мінімаксу.
3. Записати квадратичні форми кінетичної і потенціальної енергій у випадку системи з багатьма ступенями вільності.
4. Звідки випливає, що квадрати власних частот системи з багатьма ступенями вільності є додатними величинами?
5. Дати вираз для функції Лагранжа, поданої через нормальні координати.

## Розділ III

# ІНТЕГРОВАНІСТЬ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ З ДЕКІЛЬКОМА СТУПЕНЯМИ ВІЛЬНОСТІ

### Лекція 9. Інтегрованість динамічних систем

Як було показано в попередній лекції, у нормальних координатах рівняння руху для лінійної системи із  $s$  ступенями вільності розпадаються на  $s$  незалежних одне від одного диференціальних рівнянь  $\ddot{\zeta}_k + \omega_k^2 \zeta_k = 0$ . Зроблений висновок значною мірою спирається на лінійність системи, тобто наперед не зрозуміло, чи можуть такі закономірності проявлятися в інших випадках. Аналіз питання щодо того, якою мірою результати, отримані для лінійних систем, справедливі й з урахуванням нелінійності дуже складний. Слід зазначити, що детальне вирішення цієї проблеми отримано тільки в середині ХХ ст. Воно спирається на теорему Колмогорова–Арнольда–Мозера, розгляд якої виходить за межі цього курсу, але корисно обговорити цю проблему хоча б якісно. Тут суттєвим є поняття точної інтегрованості динамічної системи. Ще Ж. Ліувільль сформулював таке твердження: якщо динамічна система із  $s$  ступенями вільності має  $s$  незалежних інтегралів руху, то її розв'язок зводиться до обчислення невизначених інтегралів. Тобто розв'язок такої динамічної системи, яка називається *інтегрованою*, можна записати у квадратурах. Більш точне математичне формулювання цього твердження дається в теоремі Ліувільля–Арнольда. Ряд тверджень цієї важливої теореми може бути сформульований тільки в межах формалізму Гамільтона, і ми повернемось до її обговорення в останній лекції цього курсу, а зараз доречно обговорити деякі властивості траєкторій інтегрованих систем на простому прикладі лінійного осцилятора з двома ступенями вільності.

## § 1. Двовимірний анізотропний гармонічний осцилятор

Використовуючи замість змінних  $\zeta_1, \zeta_2$  більш звичні змінні  $x, y$ , запишемо систему двох не пов'язаних між собою таких лінійних диференціальних рівнянь:

$$\ddot{x} + \omega_1^2 x = 0, \quad \ddot{y} + \omega_2^2 y = 0.$$

Рух розподіляється на два одновимірних рухи вздовж координат  $x, y$ . Отже, енергії руху вздовж цих напрямків є першими такими інтегралами руху:

$$\frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \omega_1^2 x^2) = E_1, \quad \frac{m}{2}(\dot{y}^2 + \omega_2^2 y^2) = E_2.$$

Замість інтегралів  $E_1, E_2$  можна вибирати як незалежні величини й інші інтеграли руху, а саме, повну енергію

$$E = E_1 + E_2 = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \omega_1^2 x^2 + \omega_2^2 y^2)$$

та енергію  $E_2$ . Для більшої зручності аналізу в подальшому змінимо масштаб часу таким чином, що  $\omega_1 t = \tilde{t}$  стає безрозмірним часом, а  $\omega_2 t$  замінюється на  $\nu \tilde{t}$ , де  $\nu = \omega_2 / \omega_1$  – відношення частот. Очевидно, що залежно від значення величини  $\nu$  траєкторіями в конфігураційному просторі  $(x, y)$  будуть різні фігури Ліссажу.

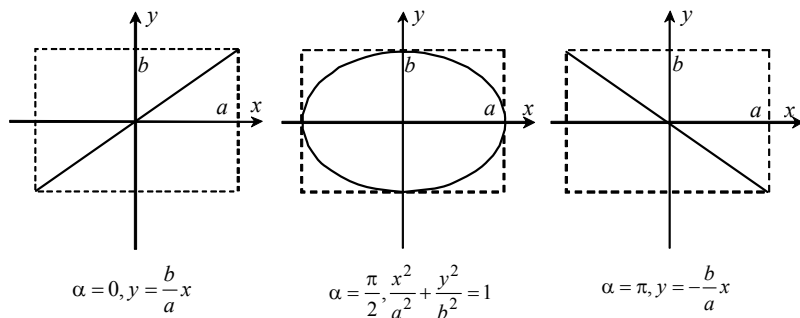
Загальний розв'язок зміненої системи диференціальних рівнянь  $\ddot{x} + x = 0, \quad \ddot{y} + \nu^2 y = 0$  можна записати у такому вигляді:

$$x(\tilde{t}) = a \cos(\tilde{t} - \tilde{t}_0), \quad y(\tilde{t}) = b \cos[\nu(\tilde{t} - \tilde{t}_0) + \alpha],$$

де  $\tilde{t}_0$  – початок відліку часу. Оскільки цей параметр може бути довільним, у подальшому покладаємо  $\tilde{t}_0 = 0$ . Розглядаємо траєкторії системи в конфігураційному просторі, тобто на площині  $(x, y)$ . Зрозуміло, що всі траєкторії мають лежати всередині

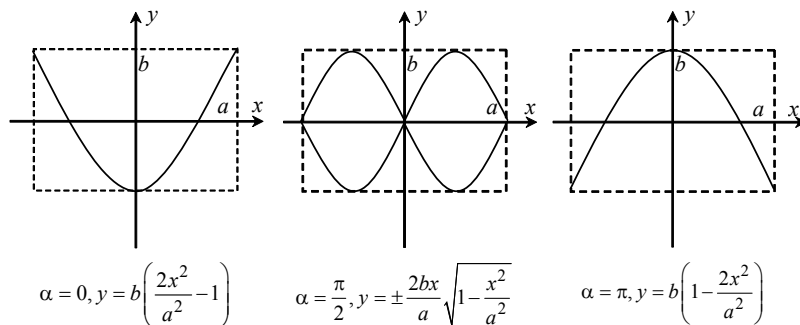
прямокутника  $-a \leq x \leq a, -b \leq y \leq b$ . Проте характер руху суттєво залежить від того, чи є величина  $\nu$  раціональним числом, чи ні. Щоб у цьому пересвідчитись, розглянемо два найбільш простих характерних приклади.

**1.** Ізотропний двовимірний осцилятор ( $\nu = 1$ ). На рис. 1 зображені фігури Ліссажу для трьох значень  $\alpha$ :  $0, \pi/2$  і  $\pi$ .



**Рис. 1.** Зображення траєкторій у конфігураційному просторі для ізотропного двовимірного осцилятора

**2.** Анізотропний двовимірний осцилятор (за  $\nu = 2$ ). На рис. 2 також зображені фігури Ліссажу в конфігураційному просторі  $(x, y)$  для трьох випадків.



**Рис. 2.** Зображення траєкторій у конфігураційному просторі для анізотропного двовимірного осцилятора

Для обох вищерозглянутих випадків траєкторії замкнені. Зрозуміло, що ця властивість зберігається і за довільних інших раціональних значень  $\nu = k/n$ , де  $k, n$  – цілі числа. Дійсно, при зміні  $\tilde{t}$  на величину загального періоду  $T_0 = 2\pi n$  для обох коливань величини  $x$  та  $y$  не змінюються, незважаючи на те, що траєкторія при збільшенні чисел  $k$  і  $n$  стає все більш складною. Якщо ж  $\nu \neq k/n$ , то траєкторія не замкнеться ніколи, тобто для достатньо великих інтервалів часу траєкторія покриває весь указаний прямокутник. Це означає, що загального періоду в даному випадку не існує, тобто можна формально вважати, що  $T_0 \rightarrow \infty$ .

*Функції*, які мають подібні властивості, у математиці називають *майже періодичними*, або *умовно періодичними*. У даній задачі маємо справу з майже періодичним рухом. Необхідно нагадати, що для одновимірної механічної системи був характерний періодичний рух. Майже періодичний рух є характерною особливістю інтегрованих динамічних систем з кількістю ступенів вільності, більшою за одиницю. Для уточнення цих закономірностей корисно обговорити фазовий простір цієї задачі.

Фазовий простір двовимірного руху матеріальної точки є чотиривимірним, а саме,  $(x, y, \dot{x}, \dot{y})$ . Зрозуміло, що в цьому просторі фазова траєкторія розташована на енергетичних гіперповерхнях

$$\frac{m\omega_1^2}{2}(\dot{x}^2 + x^2) = E_1 \quad \text{і} \quad \frac{m\omega_1^2}{2}(\dot{y}^2 + \nu^2 y^2) = E_2.$$

На двовимірних площинах  $(\dot{x}, x)$  та  $(\dot{y}, y)$  ці поверхні являють собою еліпси, а їх об'єднання, тобто допустима за даних значень  $E_1$  і  $E_2$  область фазового простору, являє собою двовимірний тор  $T^{(2)} = S^1 \times S^1$  (прямий добуток двох кіл). Отже, стає зрозумілою основна відмінність задач з  $s=1$  і  $s>1$ , зокрема для  $s=2$ . Якщо для  $s=1$  скористатися звичним інтегралом руху  $E = \text{const}$ , то повністю визначається вигляд фазової траєкторії. Для повного ж визначення вигляду фазової траєкторії за  $s=2$  необхідно мати ще третій інтеграл руху. Якщо такий інтеграл руху існує і є ізольованим інтегралом руху (ми обговоримо це поняття нижче), то вигляд фазової траєкторії визначається по-



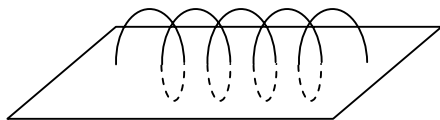
вністю, тобто ситуація є такою ж, як і в одновимірному випадку: рух буде періодичним, а траєкторії руху в координатному просторі стають замкненими. Якщо ж третій інтеграл руху не існує, то фазова траєкторія неперервно заповнює двовимірний багатovid – тор  $T^{(2)}$ . При цьому рух буде майже періодичним, а траєкторії руху на площині  $(x, y)$  будуть незамкненими. Ці закономірності мають достатньо загальний характер. У наступній лекції ми обговоримо їх на прикладі руху в центрально-симетричному полі. Виникає запитання, як можна визначити наперед, не знаючи повного розв'язку, чи існують у деякій системі два незалежних інтеграли руху, тобто, чи є система інтегрованою. І далі, як дізнатись, чи існує третій (додатковий) інтеграл руху. Для осцилятора існування двох незалежних інтегралів очевидне, але не зрозуміло, як відшукати третій інтеграл руху. У загальному випадку не завжди зрозуміло, чи існують у даній системі два інтеграли руху, тобто, чи вона інтегрована (питання про неінтегровані системи ми обговоримо в кінці наступної лекції на конкретному прикладі). Для непростих випадків А. Пуанкаре запропонував інтуїтивно очевидну програму.

Оскільки чотиривимірний простір зобразити наочно складно, то використаємо один інтеграл руху для зменшення вимірності від 4 до 3. Скориставшись для цього виразом для повної енергії  $E$ , запишемо змінну  $\dot{x}$  через решту величин  $x, y, \dot{y}$ :

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{2E}{m\omega_1^2} - \dot{y}^2 - x^2 - v^2 y^2},$$

тобто перейдемо до редукованого фазового простору  $(x, y, \dot{y})$ . Проте працювати в цьому просторі також непросто, оскільки умова  $E = \text{const}$  вказує на те, що простір  $(x, y, \dot{y})$  може бути неевклідовим. Наприклад, для осцилятора в змінних  $x, \dot{x}, y, \dot{y}$  таким простором є тривимірна сфера  $S^3$  з радіусом  $\sqrt{2E/m\omega_1^2}$  у чотиривимірному фазовому просторі. Тому надалі для спрощення ілюстрації руху у фазовому просторі Пуанкаре запропонував перетинати редукований фазовий простір  $(x, y, \dot{y})$  поверхнею і розглядати лише послідовність точок перетину фазової

траєкторії з цією поверхнею. Ця поверхня називається *поверхнею Пуанкаре* (рис. 3). Вибір поверхні Пуанкаре наперед не є очевидним, і необхідно виходити з інтуїтивних міркувань.



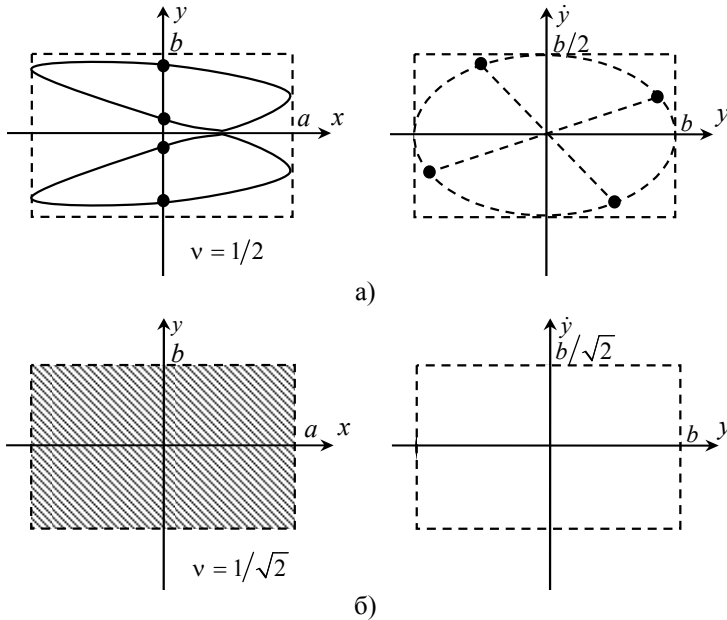
**Рис. 3.** Схематичне зображення поверхні Пуанкаре

У випадку осцилятора із  $s = 2$  за таку поверхню можна обрати площину  $x = 0$ . Оскільки ця площина лежить у "центрі" руху, то є надія, що будуть охоплені всі фазові траєкторії. Тепер рух у фазовому просторі характеризується послідовністю точок  $(y, \dot{y})$  (обираємо тільки ті точки перетину, які відповідають конкретному напрямку швидкості  $\dot{x}$ , напр.,  $\dot{x} > 0$ ). Для осцилятора лінія перетину площини Пуанкаре з поверхнею  $E_2 = m\omega_1^2(y^2 + v^2 y^2)/2 = mb^2\omega_2^2/2$  є еліпсом. Отже, кожна траєкторія у фазовому просторі має бути зображена послідовністю точок на цьому еліпсі.

На рис. 4 зображені траєкторії для двох різних випадків:  $v = 1/2$  і  $v = 1/\sqrt{2}$ . Із рис. 4, а видно, що кількість точок перетину траєкторій Ліссажу з прямою  $x = 0$  збігається з кількістю точок перетину фазової траєкторії з площиною Пуанкаре. Із рис. 4, б видно, що за ірраціональних значень  $v$  фазова траєкторія повністю заповнює конфігураційний простір, але вона не заповнює фазовий простір.

Для завершення аналізу руху анізотропного двовимірного осцилятора знайдемо третій інтеграл руху. Зокрема, для ізотропного осцилятора ( $v = 1$ ) потенціал можна записати як  $U(x, y) = k(x^2 + y^2)/2$ , тобто система має симетрію щодо поворотів у площині  $(x, y)$ , що вказує на збереження моменту імпульсу вздовж осі  $z$ , тобто  $M_z \equiv M = m(\dot{x}y - y\dot{x})$ . Маємо в цьому

випадку три незалежних інтеграли руху:  $E_1$ ,  $E_2$  та  $M$ . Для випадку, коли  $\nu \neq 1$  і  $\nu \in \mathbb{Q}$  або не  $\in \mathbb{Q}$ , питання стає більш складним.



**Рис. 4.** Зображення траєкторій Лиссажу в конфігураційному просторі та відповідних точок перетину у площині Пуанкаре

Доречно зазначити, що механічна система із  $s$  ступенями вільності, яка описується системою  $s$  диференціальних рівнянь другого порядку, має  $2s$  інтегралів руху. Це твердження, безумовно, вірне й базується на тому, що в такій системі на основі теорії диференціальних рівнянь існує загальний розв'язок, який залежить від  $2s$  довільних констант. Тому важливо встановити властивості інтегралів руху, які б забезпечували вказані раніше вимоги. Питання про інтегрованість системи непросте, і тому ми повернемося до нього в останній лекції після вивчення формалізму Гамільтона. Тепер звернемося до питання про додатковий

інтеграл руху, існування якого приводить до замикання всіх траєкторій системи.

Щоб побудувати інтеграл руху для анізотропного лінійного осцилятора, запишемо розв'язок у вже відомому вигляді  $x = a \cos \tilde{t}$ ,  $y = b \cos(\tilde{t} + \alpha)$ . Звідси випливають такі співвідношення:

$$-\frac{\dot{x}}{x} = \operatorname{tg} \tilde{t}, \quad -\frac{\dot{y}}{y} = v \operatorname{tg}(\tilde{t} + \alpha).$$

У результаті, виключаючи час  $\tilde{t}$ , одержуємо третій інтеграл руху

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{\dot{x}}{x}\right) - \frac{1}{v} \operatorname{arctg}\left[\frac{\dot{y}}{vy}\right] = \frac{\alpha}{v} = \operatorname{const}.$$

Для раціональних значень  $v$  із останнього алгебраїчного рівняння можна знайти траєкторію руху  $y = y(x)$ . Наприклад, якщо  $v = 1$ , то можна взяти  $\operatorname{tg}$  від обох частин попередньої рівності, що приводить до такої рівності:

$$\frac{\dot{x}y - \dot{y}x}{\dot{x}y + \dot{y}x} = \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{const}.$$

Цей вираз можна пов'язати з більш звичною умовою  $M_z = \dot{x}y - \dot{y}x = \operatorname{const}$  за допомогою деяких процедур, які ми обговоримо в межах формалізму Гамільтона.

Подібні перетворення можна здійснити й для довільного раціонального  $v$ . Вони зводяться до застосування формул для запису  $\operatorname{tg} nz$  через  $\operatorname{tg} z$ . Проте принципово важливо, що в цих формулах фігурує  $n$ -й степінь  $\operatorname{tg} z$ , тобто в інтеграл руху входять поліноми  $n$ -го степеня від змінних величин. Як наслідок, можна розв'язати відповідне алгебраїчне рівняння і визначити зв'язок між змінними  $x$  та  $y$ . Для ірраціональних значень  $v$  розв'язки щільно заповнюють задану повною енергією частину конфігураційного простору і кількість гілок необмежено зростає. Відповідне рівняння в цьому випадку буде трансцендентним, задаючи неізолюваний інтеграл руху. Цим інтегралом руху не можна скористатися при розв'язуванні задачі, оскільки в явній формі не виражаються ні  $y$  як функція  $x$ , ні  $x$  як функція  $y$ . Інтеграли руху  $E_1 = m\omega_1^2 (x^2 + x^2)/2$ ,

$E_2 = m\omega_1^2 (\dot{y}^2 + y^2) / 2$ , а також величина  $M = m(\dot{x}y - x\dot{y})$  для випадку  $\nu = 1$ , – це ізольовані інтеграли руху.

Отже, двовимірний гармонічний осцилятор є прикладом інтегрованої механічної системи. Для двовимірної нелінійної системи (а тим більше для тривимірної і т. д.) це не завжди справедливо. У випадку, який ми далі розглянемо на конкретному прикладі, не можна стверджувати, що у фазовому просторі траєкторії лежать на якомусь двовимірному багатовиді (як кажуть, інваріантні тори порушені). Поведінка системи у цьому випадку буде більш складна.

## § 2. Система Хенона–Хейнеса. Динамічний хаос

Розглянемо таку систему диференціальних нелінійних рівнянь:

$$\ddot{x} = -x - 2xy, \quad \ddot{y} = -y + y^2 - x^2.$$

Їх можна трактувати як рівняння, що описують динаміку двовимірного нелінійного гармонічного осцилятора, функція Лагранжа якого має вигляд

$$L(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - U(x, y),$$

$$U(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + x^2y - \frac{y^3}{3}.$$

Тут ми поклали  $m = 1$ . У лінійному випадку система відповідає ізотропному осцилятору з  $\nu = 1$ , для якої існують описані вище інтеграли руху  $E_1$  і  $E_2$ .

Однак у загальному нелінійному випадку крім повної енергії  $E = (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) / 2 + U(x, y)$  інші інтеграли руху невідомі. Для потенціалу  $U(x, y)$  рух буде обмеженим лише за енергій, менших максимального значення  $E = 1/6$ , яке збігається зі значенням  $U(x, y)$  у трьох сідлових точках  $A(0, 1)$ ,  $B(\sqrt{3}/2, -1/2)$

і  $C(-\sqrt{3}/2, -1/2)$ . Сідлові точки і локальний мінімум  $O(0,0)$

потенціалу  $U(x, y)$  визначаються з таких рівнянь:

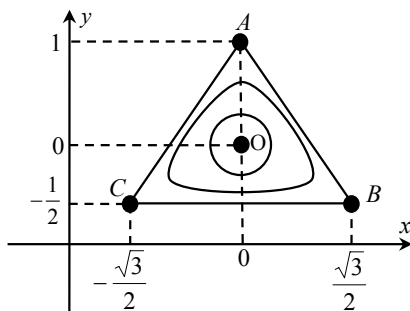
$$\frac{\partial U}{\partial x} = \ddot{x} = -x - 2xy = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = \ddot{y} = -y + y^2 - x^2 = 0.$$

Вони одночасно є й стаціонарними точками рівняння для траєкторії у фазовому просторі за  $\dot{x} = 0$ ,  $\dot{y} = 0$ . Покажемо також, що потенціал  $U(x, y)$  набуває значення  $1/6$  на трьох лініях  $y = -1/2$ ,  $y = \pm x\sqrt{3} + 1$ , які проходять через ці стаціонарні точки (для  $E = 1/6$  рух у конфігураційному просторі обмежений рівностороннім трикутником).

На рис. 5 схематично зображені ще дві еквіпотенціальні лінії системи Хенона–Хейнеса. Оскільки фазовий простір чотиривимірний, виражаємо  $\dot{x}$  через  $x, y, \dot{y}$  за допомогою єдиного інтеграла руху – повної енергії  $E$ :

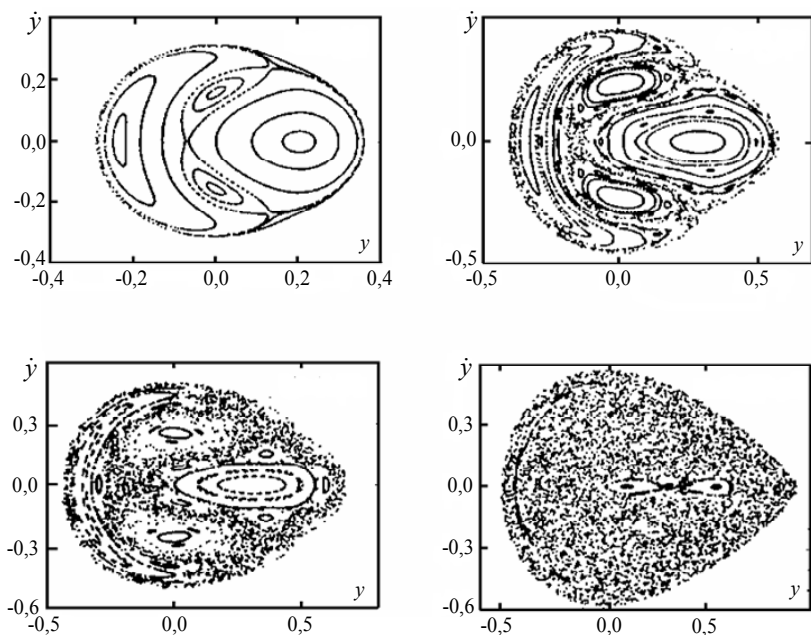
$$\dot{x} = \pm \sqrt{2[E - U(x, y)] - \dot{y}^2}.$$

Обираємо площину  $x = 0$  за поверхню Пуанкаре. Для заданої енергії  $E$  ділянка, у якій можуть розташовуватися точки перетину, задається максимальними і мінімальними значеннями  $y$  та  $\dot{y}$  за  $\dot{x} = 0$ . Отже, точки  $(y, \dot{y})$  мають задовольняти нерівності  $E \geq \dot{y}^2/2 + U(0, y)$ .



**Рис. 5.** Зображення еквіпотенціальних ліній системи Хенона–Хейнеса

Інтегруючи чисельно рівняння руху, можна знайти як траєкторії в конфігураційному просторі, так і точки перетину у площині Пуанкаре  $(y, \dot{y})$  у фазовому просторі. Розрахунок показує, що для енергій, менших критичної енергії  $E_c \approx 0,11$ , поведінка траєкторій регулярна. Точки перетину площини Пуанкаре концентруються вздовж деяких кривих, тобто поведінка системи така сама, як і у випадку інтегрованої задачі. Починаючи з цієї критичної енергії за певних початкових умов існує невпорядкована (хаотична) послідовність точок перетину, які належать до однієї траєкторії в конфігураційному просторі. За малого перевищення порогової енергії площі області хаотичної поведінки будуть малими, але зі збільшенням енергії вони зростають. Тобто для енергій  $E_c < E < 1/6$  область хаотичного руху практично заповнює всю область фінітного руху. На рис. 6 зображені чисельно розраховані перетини Пуанкаре для різних енергій у системі Хенона–Хейнса.



**Рис. 6.** Зображення чисельно розрахованих перетинів Пуанкаре для різних енергій у системі Хенона–Хейнса

Ряд точок, які спочатку були розташовані близько, у подальшому розташовуються у фазовому просторі далеко одна від одної. Навіть невелика невизначеність у початкових умовах приводить до певної невизначеності в подальшій поведінці матеріальної точки. Спостерігаємо т. зв. батерфляй-ефект: метелик помахав крилами і пішов дощ (змінилася різко погода).

Слід зазначити принципово важливу обставину: за малих енергій поведінка неінтегрованої системи дуже схожа на поведінку інтегрованої. Ця обставина є наслідком теореми Колмогорова–Арнольда–Мозера (її скорочено називають КАМ-теорема), яка визначає поведінку динамічної системи, близької до точно інтегрованої. "Близькість" двох динамічних систем вказує на те, що їх функції Лагранжа відрізняються доданками, які пропорційні деякому малому параметру  $\varepsilon$ . Можна вважати нелінійний осцилятор близьким до лінійного за малої амплітуди коливань  $a$ , коли нелінійні доданки мають порядок  $a^4$ , а їх внесок менший від лінійних доданків (тут  $\varepsilon \propto a^2$ ). Згідно з КАМ-теоремою в таких системах із  $\varepsilon \ll 1$  більшість тих інваріантних торів, які існують за умови  $\varepsilon = 0$ , трохи деформуються, але залишаються торами. Тільки в експоненціально малій області фазового простору (об'ємом порядку  $\exp(-1/\varepsilon)$ ) система інваріантних торів порушена, тобто може спостерігатися хаотична поведінка. Оскільки навіть за помірно малих значень  $\varepsilon$  (напр.,  $\varepsilon = 0,25$ ) величина  $\exp(-1/\varepsilon)$  достатньо мала ( $e^{-4} \approx 0,02$ ), то впливає, що й за не дуже малих значень  $\varepsilon$  стохастична динаміка практично непомітна. У чисельних розрахунках це проявляється як існування критичного значення енергії  $E_c \approx 0,11$ .

Поведінка розв'язання системи буде хаотичною, якщо часова еволюція траєкторій у фазовому просторі цілком нерегулярна (випадкова) й істотно залежить від початкових умов. Це означає, що для траєкторій, що були розташовані спочатку близько, унаслідок різного ходу відстань між ними зростатиме за локально експоненціальним законом. Якщо за обмеженого руху доступна область фазового простору також обмежена, тенденція двох траєкторій до розходження призводить хоча і до детермінованої поведінки, але саме хаотичної, щоб виграти у відстані.



Коли може виникнути динамічний хаос? Хаос може виникнути у чотирирівнірному фазовому просторі двовимірної системи, але не у двовимірному фазовому просторі одновимірної системи. У загальному випадку справедливе таке твердження. Нехай часова залежність  $n$  змінних  $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$  задається системою  $n$  диференціальних рівнянь першого порядку

$$\dot{x}_a = G_a(x).$$

Тоді хаос може виникнути за умови  $n \geq 3$ .

Таким чином, єдиний випадок, коли динамічний хаос у консервативній системі не виникає, відповідає задачі з одним ступенем вільності. Значенню  $n = 3$  формально відповідає "система з  $3/2$  ступенями вільності", причому такою задачею є система рівнянь Ейлера для компонентів кутової швидкості (це випадок вільної дзиги, який є інтегрованим). Іншим прикладом системи з  $n = 3$  є система з однією узагальненою координатою під дією зовнішньої сили, яка залежить від часу. Для такої системи (напр., нелінійного осцилятора під дією періодичної зовнішньої сили) також може виникнути хаотична поведінка.

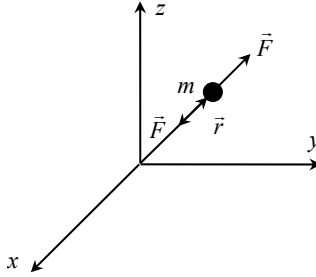
### **Контрольні запитання та завдання**

1. Вигляд фігур Ліссажу у випадку ізотропного двовимірного осцилятора.
2. Редукований фазовий простір.
3. Як розуміти поверхню Пуанкаре?
4. Ізольовані та неізольовані інтеграли руху.
5. За яких умов виникає динамічний хаос?

## **Лекція 10. Інтегрованість у центральних полях**

### **§ 1. Рух у центральному полі**

*Поле*, у якому потенціальна енергія  $U(\vec{r})$  рухомої частинки залежить тільки від відстані  $r$  до деякої нерухомої точки, тобто  $U = U(r)$ , називається *центральним*. Нехай центр декартової системи координат збігається із цим нерухомим центром (рис. 1).



**Рис. 1.** Рух матеріальної точки в центральному полі

Знайдемо напрямок сили

$$\begin{aligned}\vec{F} &= -\nabla U(r) = -\left(\vec{e}_x \frac{\partial U}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial U}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial U}{\partial z}\right) = \\ &= -\frac{\partial U}{\partial r} \left(\vec{e}_x \frac{\partial r}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial r}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial r}{\partial z}\right) = -\frac{\vec{r}}{r} \frac{\partial U}{\partial r} = -\vec{n} \frac{\partial U}{\partial r},\end{aligned}$$

де  $\vec{r} = \vec{e}_x x + \vec{e}_y y + \vec{e}_z z$ ,  $\partial r / \partial x = \partial \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} / \partial x = x/r$  і т. д. Отже, сила також залежить тільки від  $r$  і направлена в кожній точці траєкторії вздовж радіус-вектора (до центра чи від центра залежно від знака похідної  $\partial U / \partial r$ ).

Оскільки потенціальна енергія залежить лише від відстані  $r$ , то ми маємо справу з випадком сферичної симетрії, за якої допустимий довільний поворот навколо будь-якої осі. Зі сферичної симетрії випливає, що момент імпульсу частинки щодо центра поля має бути інтегралом руху

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m(\vec{r} \times \dot{\vec{r}}).$$

Це можна довести і безпосередньо, взявши повну похідну за часом від  $\vec{L}$ :

$$\dot{\vec{L}} = m(\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}}) + m(\vec{r} \times \ddot{\vec{r}}) = \vec{r} \times \vec{F} = -\frac{1}{r} \frac{dU}{dr} (\vec{r} \times \vec{r}) = 0.$$

Знайдемо тепер скалярний добуток вектора  $\vec{L}$  на вектор  $\vec{r}$ :

$$(\vec{L} \cdot \vec{r}) = (\vec{r} \times \vec{p}) \cdot \vec{r} = (\vec{r} \times \vec{r}) \cdot \vec{p} = 0,$$

тобто траєкторія руху частинки в центральному полі цілком лежить в одній площині, перпендикулярній до вектора  $\vec{L}$ .

Зазначимо, що за  $\vec{L} = 0$  це твердження втрачає сенс, оскільки в цьому випадку ми маємо справу з рухом уздовж прямої, що проходить через центр сили. Дійсно, із  $\vec{L} = 0$  випливає, що вектор  $\vec{r}$  колінеарний вектору  $\dot{\vec{r}}$ , що можливо у випадку прямолінійного руху. Таким чином, рух під дією центральної сили завжди буде плоским, тобто від задачі з трьома ступенями вільності можна прийти до задачі з двома ступенями вільності.

Направляємо вісь  $z$  уздовж постійного вектора  $\vec{L}$ , а у площині  $(x, y)$  вводимо полярні координати  $\rho, \varphi$ . Тоді функція Лагранжа матеріальної точки запишеться у вигляді

$$\mathcal{L}(\rho, \dot{\rho}, \varphi) = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2) - U(\rho).$$

Оскільки  $\varphi$  – циклічна координата, тобто  $\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = 0$ , то ми знову приходимо до закону збереження моменту імпульсу  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = \text{const} = p_{\varphi} = m\rho^2\dot{\varphi} = L_z \equiv L$ .

Шукаємо тепер повний розв'язок задачі про рух частинки в центральному полі. Цей розв'язок найпростіше знайти на основі законів збереження енергії та моменту імпульсу, не виписуючи при цьому самих рівнянь руху, а саме, підставляючи  $\dot{\varphi} = L/m\rho^2$  у вираз для енергії  $E = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2) + U(\rho)$ , дістаємо диференціальне рівняння першого порядку щодо змінної  $\rho$ :

$$E = \frac{m}{2} \left( \dot{\rho}^2 + \frac{L^2}{m^2 \rho^2} \right) + U(\rho).$$

Користуючись методом відокремлення змінних, одержуємо

$$\dot{\rho} \equiv \frac{d\rho}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m} [E - U(\rho)] - \frac{L^2}{m^2 \rho^2}};$$

$$t = \int \frac{d\rho}{\sqrt{\frac{2}{m} [E - U(\rho)] - \frac{L^2}{m^2 \rho^2}}} + C.$$

З урахуванням  $d\varphi = \left( L/m\rho^2 \right) dt$  приходимо до такого виразу:

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = \frac{L}{m\rho^2} \sqrt{\frac{2}{m} [E - U(\rho)] - \frac{L^2}{m^2\rho^2}},$$

звідки знаходимо

$$\varphi - \varphi_0 = \int \frac{\frac{L}{\rho^2} d\rho}{\sqrt{2m[E - U(\rho)] - \frac{L^2}{\rho^2}}}.$$

Зазначимо, що кут  $\varphi$  завжди монотонно змінюється із часом, оскільки похідна  $\dot{\varphi}$  не змінює знак.

Радіальну частину руху можна розглядати як одновимірний рух у полі з "ефективним" потенціалом

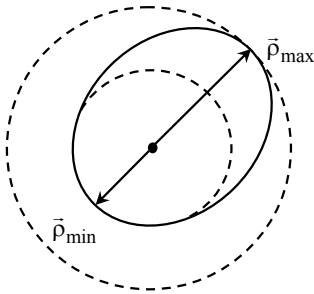
$$U_{\text{еф}}(\rho) = U(\rho) + \frac{L^2}{2m\rho^2}.$$

Величину  $L^2/2m\rho^2$  називають *доцентровою енергією*. Значення  $\rho$ , за яких  $E = U(\rho) + L^2/2m\rho^2 = U_{\text{еф}}(\rho)$ , що справедливо за  $\dot{\rho} = 0$ , визначають межі області руху за відстанню від центра. Однак це не вказує на зупинку частинки (як у випадку одновимірного руху), оскільки кутова швидкість  $\dot{\varphi}$  не є нульовою. Рівність  $\dot{\rho} = 0$  означає "точку повороту" траєкторії, у якій функція  $\rho(t)$  переходить від збільшення до зменшення, і навпаки.

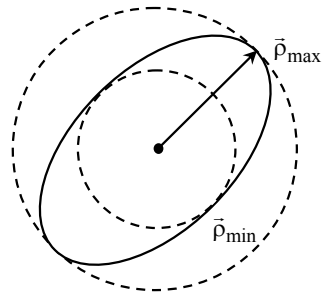
Якщо область допустимої зміни  $\rho$  обмежена лише однією умовою  $\rho \geq \rho_{\min}$ , то рух буде інфінітним. Якщо область зміни  $\rho$  має дві межі  $\rho_{\min}$  і  $\rho_{\max}$  (ці відстані називаються *апсидальними*), то рух буде фінітним і траєкторія повністю лежатиме в кільці  $\rho_{\min} \leq \rho \leq \rho_{\max}$ . Звідси ще не випливає, що траєкторія має бути замкненою. За час, протягом якого  $\rho$  змінюється від  $\rho_{\min}$  до  $\rho_{\max}$  і потім до  $\rho_{\min}$ , радіус-вектор повернеться на кут  $\Delta\varphi$ , який згідно з виразом для  $\varphi(\rho)$  дорівнює

$$\Delta\varphi = 2 \int_{\rho_{\min}}^{\rho_{\max}} \frac{\frac{L}{\rho^2} d\rho}{\sqrt{2m[E - U(\rho)] - \frac{L^2}{\rho^2}}}$$

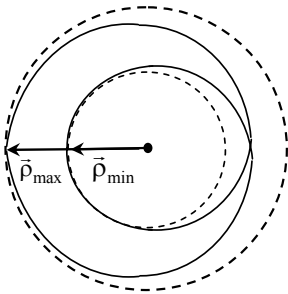
Умова замкненості траєкторії вимагає, щоб цей кут дорівнював раціональній частині числа  $2\pi$ , тобто має бути  $\Delta\varphi = 2\pi m/n$ , де  $m$  і  $n$  – цілі числа. Тоді через  $n$  періодів зміни  $\rho$  (від  $\rho_{\min}$  до  $\rho_{\max}$  і потім до  $\rho_{\min}$ ) радіус-вектор  $\vec{\rho}$ , зробивши  $m$  повних обертів, збігається зі своїм початковим значенням. Наведемо приклади (рис. 2, а–г).



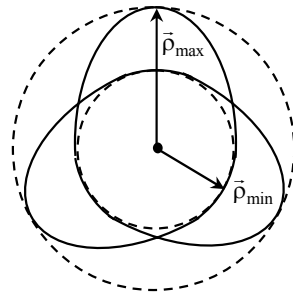
а)  $m = 1, n = 1, \Delta\varphi = 2\pi$



б)  $m = 1, n = 2, \Delta\varphi = \pi$



в)  $m = 2, n = 1, \Delta\varphi = 4\pi$

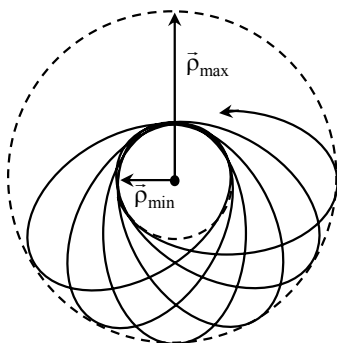


г)  $m = 2, n = 3, \Delta\varphi = 4\pi/3$

**Рис. 2.** Приклади замкнених траєкторій для різних центральних полів

У загальному випадку, коли  $\Delta\phi \neq 2\pi m/n$ , траєкторії фінітного руху за нескінченний час заповнюють все кільце між двома граничними колами. На рис. 3 це зображено схематично у вигляді розетки.

Зауважимо, що існують лише два типи центральних полів, у яких всі траєкторії фінітних рухів замкнені. Це поля, у яких потенціальна енергія частинки пропорційна  $1/r$  або  $r^2$ . Причину цього ми з'ясуємо в наступному розділі.



**Рис. 3.** Приклад незамкненої траєкторії

Із наведених міркувань можна зробити висновок, що траєкторія руху в центральному полі симетрична щодо апсидальних векторів. У точці повороту квадратний корінь

$$\sqrt{\frac{2}{m}[E - U(\rho)] - \frac{L^2}{m^2\rho^2}}$$

змінює знак. Якщо відраховувати кут  $\phi$  від напрямку радіус-вектора, проведеного в точку повороту, то відрізки траєкторії з двох сторін будуть відрізнятися лише знаком  $\phi$  за однакових значень  $\rho$ , тобто траєкторія симетрична щодо цього напрямку. Це стосується й інфінітних траєкторій, які утворюються двома симетричними гілками, що йдуть від точки повороту  $\rho_{\min}$  до нескінченності. Це можна довести і більш строго. Випишемо рівняння Лагранжа

$$m\ddot{\rho} - \frac{L^2}{m\rho^3} = -\frac{\partial U}{\partial \rho} = f(\rho).$$

З урахуванням  $d/dt = (L/m\rho^2)d/d\varphi$  це рівняння щодо змінної  $u = 1/\rho$  переписується у такому вигляді:

$$\frac{L^2 u^2}{m} \left( \frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u \right) = -f(u).$$

Обираючи систему координат таким чином, щоб полярна вісь проходила через один із апсидальних напрямків (кут  $\varphi$  дорівнює нулю в цьому напрямку), виконуємо відбиття від полярної осі, тобто замінюємо  $\varphi$  на  $-\varphi$ . Одержане диференціальне рівняння інваріантне щодо такого перетворення, що й доводить симетричність траєкторії щодо апсидальних векторів.

"Падіння" частинки в центр можливе лише тоді, коли потенціальна енергія достатньо швидко прямує до  $-\infty$  за  $\rho \rightarrow 0$ . Із нерівності

$$\frac{m\dot{\rho}^2}{2} = E - U(\rho) - \frac{L^2}{2m\rho^2} > 0$$

або

$$\rho^2 U(\rho) + \frac{L^2}{2m} < E\rho^2$$

впливає, що  $\rho$  може набувати малих значень лише за умови  $\lim_{\rho \rightarrow 0} \rho^2 U(\rho) < -L^2/2m$ , тобто  $U(\rho)$  має прямувати до  $-\infty$  або як  $-\alpha/\rho^2$  з  $\alpha > L^2/2m$ , або як  $-1/\rho^n$  з  $n > 2$ .

Зауважимо, що випадок центрально-симетричного поля є частинним випадком важливої задачі з двома ступенями вільності, в якій у зв'язку з наявністю циклічної змінної існує, як мінімум, два незалежних інтеграли руху. Нехай функція Лагранжа записується таким чином:

$$\mathcal{L}(q_1, \dot{q}_1, \dot{q}_2) = \frac{1}{2} \left[ a_{11}(q_1) \dot{q}_1^2 + 2a_{12}(q_1) \dot{q}_1 \dot{q}_2 + a_{22}(q_1) \dot{q}_2^2 \right] - U(q_1),$$

тобто  $q_2$  – циклічна координата. Тоді відповідний узагальнений імпульс  $p_2 = \partial \mathcal{L} / \partial \dot{q}_2 = a_{22}(q_1) \dot{q}_2 + a_{12}(q_1) \dot{q}_1$  буде інтегралом

руху. Виражаючи з нього швидкість  $\dot{q}_2$  і підставляючи її в інший інтеграл руху – повну енергію, одержуємо

$$E = \frac{a_{\text{еф}}(q_1)}{2} \dot{q}_1^2 + U_{\text{еф}}(q_1),$$

де

$$a_{\text{еф}}(q_1) = (a_{11}a_{22} - a_{12}^2) / a_{22}, \quad U_{\text{еф}}(q_1) = U(q_1) + p_2^2 / 2a_{12}(q_1).$$

При цьому слід зазначити, що  $a_{\text{еф}}(q_1)$  має бути додатним. Ця умова, очевидно, виконується, оскільки кінетична енергія є додатно визначеною квадратичною формою узагальнених швидкостей, що за критерієм Сильвестра можливо лише за умов  $a_{11}(q_1) > 0$ ,  $a_{22}(q_1) > a_{12}^2(q_1) / a_{11}(q_1)$ . Для центрального поля  $U(r)$  маємо  $q_1 = \rho$ ,  $q_2 = \varphi$ ,  $p_2 = L = m\rho^2\dot{\varphi}$ ,  $a_{12} = 0$ ,  $a_{\text{еф}} = a_{11} = m$ ,  $a_{22} = m\rho^2$ , і ми повертаємось до вже одержаних вище формул.

## § 2. Задача Кеплера

У багатьох випадках рух відбувається під дією сили, що має вигляд  $\vec{F} = k\vec{r}/r^3$ . Таким є рух у ньютонівій теорії гравітації, коли точка з масою  $m$  рухається в полі тяжіння іншої, нерухомої точки з масою  $M$ , розташованої в центрі системи координат. У цьому випадку  $k = -GMm$ . Таким є і рух частинки з електричним зарядом  $q$  у електричному полі іншого, нерухомого заряду  $Q$ , розташованого в центрі системи координат. Сили такого типу називаються *ньютонівськими* (або *кулонівськими*). Задача про рух матеріальної точки в полі ньютонівських сил називається *задачею Кеплера*. Уперше її розв'язав у 1740 р. швейцарець Й. Бернуллі.

Розглянемо спочатку поле притягування з потенціалом взаємодії

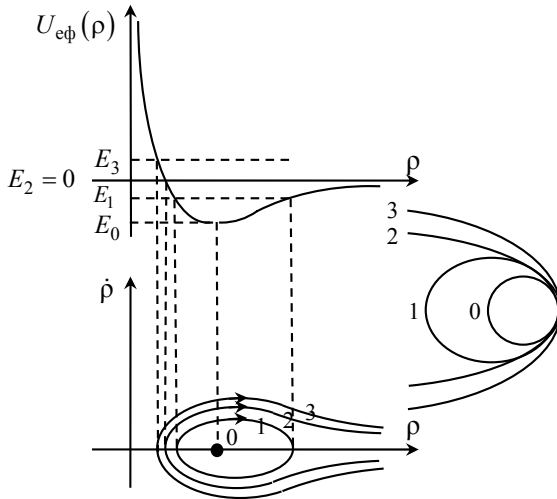
$$U(r) = -\frac{\alpha}{r},$$

де  $\alpha > 0$ . Тоді у площині  $(x, y)$  "ефективна" потенціальна енергія записується у вигляді



$$U_{\text{эф}}(\rho) = -\frac{\alpha}{\rho} + \frac{L^2}{2m\rho^2}.$$

Вона зображена на рис. 4, з якого видно, що за  $\rho \rightarrow 0$  функція  $U_{\text{эф}}(\rho) \rightarrow +\infty$ , а за  $\rho \rightarrow +\infty$  функція  $U_{\text{эф}}(\rho) \rightarrow 0$ . За  $\rho_0 = L^2/\alpha m$  вона набуває мінімального значення  $E_0 = U_{\text{эф}}(\rho_0) = -\alpha^2 m/2L^2$ . Очевидно, що за  $E \geq 0$  рух буде інфінітним, а за  $E_0 \leq E < 0$  – фінітним. Це можна простежити і за поведінкою фазових траєкторій у площині  $(\rho, \dot{\rho})$  при зміні енергії від  $E_0$  до  $+\infty$ . Вони також зображені на рис. 4. За енергії  $E_0$  величина  $\dot{\rho} = 0$ , а  $\rho = \text{const}$ . Зрозуміло, що фазовій траєкторії (точка 0) за цієї енергії відповідає рівномірний рух по колу. Покажемо тепер, що фазовій траєкторії 1 за енергії  $E_1$  відповідає рух по еліпсу, фазовій траєкторії 2 за  $E_2 = 0$  відповідає рух по параболі, а траєкторії 3 за  $E_3$  відповідає рух по гіперболі. Ця відповідність відображена також на рис. 4.



**Рис. 4.** Схематичне зображення ефективного потенціалу  $U_{\text{эф}}(\rho)$  фазових траєкторій і відповідних їм траєкторій руху у випадку ньютонівського центрального поля

Форму траєкторії можна знайти за допомогою загальної формули

$$\varphi - \varphi_0 = \int \frac{L d\rho}{\rho^2 \sqrt{2m[E - U(\rho)] - \frac{L^2}{\rho^2}}}.$$

Підставляючи в неї  $U(\rho) = -\alpha/\rho$ , виконуємо таке інтегрування:

$$\begin{aligned} \varphi - \varphi_0 &= \int \frac{\frac{L}{\rho^2} d\rho}{\sqrt{2mE - \left(\frac{L^2}{\rho^2} - \frac{2m\alpha}{\rho}\right)}} = \int \frac{\frac{L}{\rho^2} d\rho}{\sqrt{2mE - \left(\frac{L^2}{\rho^2} - \frac{2m\alpha}{\rho} + \frac{m^2\alpha^2}{L^2} - \frac{m^2\alpha^2}{L^2}\right)}} = \\ &= \int \frac{\frac{L}{\rho^2} d\rho}{\sqrt{2mE + \frac{m^2\alpha^2}{L^2} - \left(\frac{L}{\rho} - \frac{m\alpha}{L}\right)^2}} = - \int \frac{d\left(\frac{L}{\rho} - \frac{m\alpha}{L}\right) / \sqrt{2mE + \frac{m^2\alpha^2}{L^2}}}{\sqrt{1 - \left(\frac{L}{\rho} - \frac{m\alpha}{L}\right) / \sqrt{2mE + \frac{m^2\alpha^2}{L^2}}}} = \\ &= - \int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad x = \frac{\frac{L}{\rho} - \frac{m\alpha}{L}}{\sqrt{2mE + \frac{m^2\alpha^2}{L^2}}}. \end{aligned}$$

Обираючи початок відліку кута  $\varphi$  так, щоб  $\varphi_0 = 0$ , одержуємо

$$x = \cos \varphi, \text{ або } \frac{L}{\rho} - \frac{m\alpha}{L} = \sqrt{2mE + \frac{m^2\alpha^2}{L^2}} \cos \varphi.$$

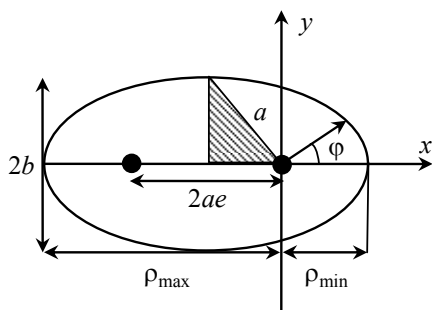
Розв'язуючи далі щодо  $\rho$ , дістаємо

$$\rho = \frac{L}{\frac{m\alpha}{L} + \sqrt{2mE + \frac{m^2\alpha^2}{L^2}} \cos \varphi} = \frac{\frac{L^2}{m\alpha}}{1 + \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{m\alpha^2}} \cos \varphi} = \frac{p}{1 + e \cos \varphi},$$

де  $p = L^2/m\alpha$  і  $e = \sqrt{1 + 2EL^2/m\alpha^2}$  – т. зв. параметр і ексцентриситет траєкторії. Із останньої формули видно, що  $\rho = p = L^2/m\alpha$  за  $e = 0$ . Це відповідає енергії  $E = E_0 = -\alpha^2 m/2L^2$ , тобто маємо фінітний рух по колу радіуса  $\rho = p = L^2/m\alpha$ . За  $E_0 < E < 0$  ексцентриситет  $0 < e < 1$ , тобто також маємо фінітний рух, який відбувається по еліпсу (рис. 5). Із формули  $\rho = p/(1 + e \cos \varphi)$  і рис. 5 видно, що найменша та найбільша відстані (відповідно перигелій та афелій) дорівнюють

$$\rho_{\min} = \frac{p}{1+e} = a(1-e), \quad \rho_{\max} = \frac{p}{1-e} = a(1+e),$$

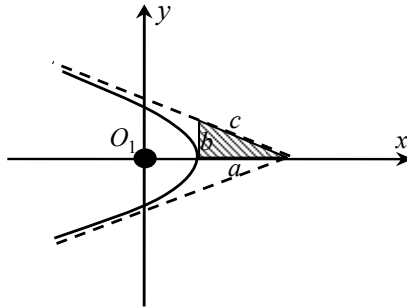
де  $a = p/(1 - e^2) = \alpha/2|E|$  – велика піввісь еліпса. Мала ж піввісь визначається із трикутника, виділеного на рис. 5, і дорівнює  $b = p/\sqrt{1 - e^2} = L/\sqrt{2m|E|}$ .



**Рис. 5.** Схематичне зображення еліптичної орбіти

За  $E \geq 0$  маємо інфінітний рух. Якщо  $E > 0$ , то  $e > 1$  і траєкторією руху є гіпербола, яка огинає центр поля, розташований у фокусі  $O_1$  (рис. 6). Використовуючи формули  $c^2 = a^2 + b^2$ ,  $e = c/a > 1$ , одержуємо перигелій  $\rho_{\min} = p/(e+1) = a(e-1)$ ,

де  $a = p/(e^2 - 1) = \alpha/2E$  – "піввісь" гіперболи. У випадку  $E = 0$  ексцентриситет  $e = 1$ , тобто частинка рухається по параболі, перигелій якої дорівнює  $\rho_{\min} = p/2$ . Цей випадок реалізується, якщо частинка починає свій рух зі стану спокою на нескінченності.



**Рис. 6.** Схематичне зображення гіперболічної траєкторії

Звертаємось тепер до руху матеріальної частинки в полі відштовхування  $U(\rho) = \alpha/\rho$ , де  $\alpha > 0$ . У цьому випадку ефективна потенціальна енергія

$$U_{\text{еф}}(\rho) = \frac{\alpha}{\rho} + \frac{L^2}{2m\rho^2}$$

монотонно зменшується від  $+\infty$  до нуля при зміні  $\rho$  від нуля до  $+\infty$ . Енергія частинки завжди більша нуля, а рух завжди інфінітний. Траєкторією є гіпербола  $\rho = p/(-1 + e \cos \varphi)$ . Вона проходить повз центр поля на відстані  $\rho_{\min} = p/(e - 1) = a(e + 1)$  від нього.

Знайдемо тепер залежність координат частинки від часу:

$$t = \sqrt{\frac{m}{2|E|}} \int \frac{\rho d\rho}{\sqrt{-\rho^2 + \frac{\alpha\rho}{|E|} - \frac{L^2}{2m|E|}}} = \sqrt{\frac{m}{2|E|}} \int \frac{\rho d\rho}{\sqrt{a^2 e^2 - (\rho - a)^2}},$$

оскільки  $a = \alpha/2|E|$ ,  $b = L/\sqrt{2m|E|}$ ,  $a^2 - b^2 = a^2 e^2$ . За допомогою підстановки  $\rho - a = -ae \cos \xi$  цей інтеграл приводиться до вигляду

$$t = \sqrt{\frac{ma^3}{\alpha}} \int (1 - e \cos \xi) d\xi = \sqrt{\frac{ma^3}{\alpha}} (\xi - e \sin \xi) + C.$$

Обираючи початок відліку часу так, щоб  $C = 0$ , одержуємо параметричне представлення залежності  $\rho$  від  $t$ :

$$\rho = a(1 - e \cos \xi), \quad t = \sqrt{\frac{ma^3}{\alpha}} (\xi - e \sin \xi), \quad 0 \leq \xi \leq 2\pi.$$

Через цей параметр  $\xi$  можна виразити і декартові координати частинки  $x = \rho \cos \varphi$ ,  $y = \rho \sin \varphi$ :

$$\begin{aligned} \rho(1 + e \cos \varphi) &= p, & \rho + ex &= p, & ex &= p - \rho = \\ &= a(1 - e^2) - a(1 - e \cos \xi) &= ae(\cos \xi - e), \end{aligned}$$

$$x = a(\cos \xi - e), \quad y = \sqrt{\rho^2 - x^2} = a\sqrt{1 - e^2} \sin \xi.$$

Особливістю задачі Кеплера є те, що в полі  $U(\rho) = \alpha/r$  (незалежно від  $\alpha$ ) існує ще один інтеграл руху, специфічний для цього поля. Це т. зв. вектор Лапласа–Рунге–Ленца:

$$\vec{A} = \vec{v} \times \vec{L} + \frac{\alpha \vec{r}}{r}.$$

Щоб продемонструвати сказане, знайдемо повну похідну від вектора  $\vec{A}$  за часом

$$\begin{aligned} \dot{\vec{A}} &= \dot{\vec{v}} \times \vec{L} + \frac{\alpha \vec{v}}{r} - \frac{\alpha \vec{r} (\vec{v} \cdot \vec{r})}{r^3} = m(\dot{\vec{v}} \times (\vec{r} \times \vec{v})) + \frac{\alpha \vec{v}}{r} - \frac{\alpha \vec{r} (\vec{v} \cdot \vec{r})}{r^3} = \\ &= m\vec{r} (\dot{\vec{v}} \cdot \vec{v}) - m\vec{v} (\dot{\vec{v}} \cdot \vec{r}) + \frac{\alpha \vec{v}}{r} - \frac{\alpha \vec{r} (\vec{v} \cdot \vec{r})}{r^3}. \end{aligned}$$

Ураховуючи рівняння руху  $m\dot{\vec{v}} = \alpha \vec{r}/r^3$ , одержуємо  $\dot{\vec{A}} = 0$ , тобто цей вектор зберігається. Знайдемо величину та напрямок цього вектора, обчислюючи скалярний добуток вектора  $\vec{\varepsilon} = \vec{A}/\alpha$  з вектором  $\vec{r}_{\min} = p/(1+e)$  при  $\alpha < 0$ :

$$\begin{aligned}\vec{\varepsilon} \cdot \vec{r}_{\min} &= \frac{1}{\alpha} \vec{r}_{\min} \times (\dot{\vec{r}}_{\min} \times \vec{L}) + \frac{\vec{r}_{\min}^2}{r_{\min}} = \frac{L^2}{m\alpha} + r_{\min} = \\ &= -p + r_{\min} = r_{\min} - r_{\min}(1-e) = r_{\min}e,\end{aligned}$$

тобто модуль вектора  $\vec{A}$  дорівнює  $|\vec{A}| = e\alpha$ , а за напрямком він паралельний  $\vec{r}_{\min}$ . Наявність цього додаткового інтеграла (незалежного від двох стандартних інтегралів – енергії  $E$  і моменту імпульсу  $L$ ) визначає той факт, що всі траєкторії фінітного руху для задачі Кеплера є замкненими. Механічні системи, які мають додаткові інтеграли руху і замкнені траєкторії, називаються *системами з випадковим виродженням*.

Ще один приклад такої задачі у випадку центрально-симетричного поля відповідає потенціалу  $U(r) = kr^2/2$ . Походження додаткового інтеграла в цьому випадку легко зрозуміти, розглянувши цю задачу в декартових координатах, у яких вона зводиться до випадку ізотропного двовимірного осцилятора (див. лекцію 9). Тут можна сказати, що два інтеграли руху – це енергії  $E_1$  і  $E_2$ , які зберігаються незалежно, а додатковим інтегралом руху є проекція моменту імпульсу на вісь  $z$ , що пропорційна  $x\dot{y} - y\dot{x}$ .

Поняття про випадкове виродження відіграє велику роль у фізиці й за межами класичної механіки. Справа в тому, що відповідні інтеграли руху існують і у квантовій механіці. У результаті обидві вищевказані задачі у квантовій механіці (особливо важлива квантово-механічна задача Кеплера, рішення якої визначає енергетичний спектр атома водню) мають важливі особливості.

### **Контрольні запитання та завдання**

1. Інтеграли руху у випадку центральних полів.
2. Типи центральних полів, в яких всі траєкторії фінітних рухів є замкненими. Випадкове виродження.
3. Умови "падіння" частинки в центр.
4. Види траєкторій руху у випадку задачі Кеплера.
5. Вектор Лапласа–Рунге–Ленца.

## Лекція 11. Задача двох тіл. Розсіювання частинок

### § 1 Багаточастинкові задачі з ньютонівською взаємодією

Розглядаючи задачу Кеплера, ми вважали одне із взаємодіючих тіл нерухомим. Однак здебільшого це не так, зокрема, коли кілька тіл взаємодіють між собою й кожне з них рухається під дією інших. Задача про рух таких тіл називається *багаточастинковою задачею*. У переважній більшості випадків її точні розв'язки невідомі. Переходимо до найпростіших багаточастинкових задач.

**1. Задача двох тіл.** Розглянемо дві матеріальні точки з масами  $m_1$  і  $m_2$ , які взаємодіють одна з одною. У цьому випадку згідно з третім законом Ньютона потенціальна енергія залежить лише від відстані між ними, тобто від абсолютної величини різниці їх радіус-векторів  $\vec{r}_1$  і  $\vec{r}_2$  (рис. 1). Тому функція Лагранжа такої системи записується у вигляді

$$\mathcal{L}(\vec{r}_1, \dot{\vec{r}}_1, \vec{r}_2, \dot{\vec{r}}_2) = \frac{m_1 \dot{\vec{r}}_1^2}{2} + \frac{m_2 \dot{\vec{r}}_2^2}{2} - U(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|).$$

Вводимо тепер радіус-вектор центра інерції системи двох тіл  $\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}$  і поміщаємо початок системи координат у центр інерції, тобто переходимо в систему координат  $(x', y', z')$ . Щодо системи центра інерції ( $\mathcal{C}$ -система) функція Лагранжа і радіус-вектор центра інерції записуються у вигляді

$$\mathcal{L}(\vec{r}'_1, \dot{\vec{r}}'_1, \vec{r}'_2, \dot{\vec{r}}'_2) = \frac{m_1 \dot{\vec{r}}'^2_1}{2} + \frac{m_2 \dot{\vec{r}}'^2_2}{2} - U(|\vec{r}'_1 - \vec{r}'_2|), \quad \vec{R}' = \frac{m_1 \vec{r}'_1 + m_2 \vec{r}'_2}{m_1 + m_2} = 0.$$

Вводячи вектор взаємної відстані між матеріальними точками  $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 = \vec{r}'_1 - \vec{r}'_2$  і враховуючи  $m_1 \vec{r}'_1 + m_2 \vec{r}'_2 = 0$ , знаходимо радіус-вектори  $\vec{r}'_1$  і  $\vec{r}'_2$ :

$$\vec{r}'_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r}, \quad \vec{r}'_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}.$$

З урахуванням цих обчислень функція Лагранжа тепер набуває такого вигляду:

$$\mathcal{L}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) = \frac{\mu \dot{r}^2}{2} - U(r),$$

де  $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$  – зведена маса. Отже, одержана функція Лагранжа формально описує рух деякої фіктивної точки з масою  $\mu$  і радіус-вектором  $\vec{r}$  у зовнішньому центральному полі  $U(r)$ . Цю фіктивну точку називають  $\mu$ -точкою. Рух  $\mu$ -точки репрезентує відносний рух реальних матеріальних точок. Знайшовши радіус-вектор  $\vec{r}$ , можна знайти радіус-вектори  $\vec{r}'_1$  і  $\vec{r}'_2$  обох матеріальних точок у  $\zeta$ -системі за формулами

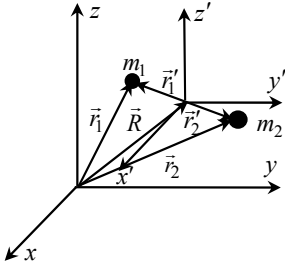
$$\vec{r}'_1 = \vec{R} + \frac{\mu}{m_1} \vec{r}, \quad \vec{r}'_2 = \vec{R} - \frac{\mu}{m_2} \vec{r}$$

у лабораторній системі координат  $(x, y, z)$  ( $l$ -система). Із формул  $\vec{r}'_1 = \mu \vec{r} / m_1$ ,  $\vec{r}'_2 = -\mu \vec{r} / m_2$  видно, що радіус-вектори частинки в  $\zeta$ -системі направлені протилежно, а їхні довжини обернено пропорційні масам ( $r'_1 / r'_2 = m_2 / m_1$ ), тобто радіус-вектор частинки з більшою масою менший, і навпаки.

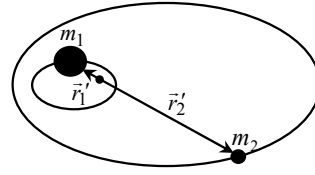
Якщо траєкторія руху  $\mu$ -точки є еліпсом, то і реальні частинки рухаються еліптичними орбітами, причому обидва еліпси мають спільний фокус, розташований у центрі інерції (рис. 2). Наприклад, для Сонця і Землі  $m_1 / m_2 \approx 3 \cdot 10^{-6}$ , тобто Сонце відхиляється від центра мас на відстань 450 км, що дуже мало з астрономічної точки зору. Тому можна вважати, що Сонце практично розташоване у фокусі.

Перший закон Кеплера можна сформулювати таким чином: кожна планета Сонячної системи рухається по еліпсу, в одному із фокусів якого розташоване Сонце. В узагальненій формі (на випадок параболи і гіперболи) цей закон формулюється так: у ньютонівському полі матеріальна точка рухається кінчним перетином.





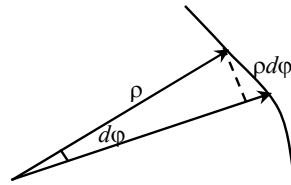
**Рис. 1.** Координатні системи до задачі двох тіл



**Рис. 2.** Схематичне зображення еліптичних траєкторій двох взаємодіючих матеріальних тіл з різними масами

Закон збереження моменту імпульсу  $L = m\rho^2\dot{\phi} = \text{const}$  допускає геометричну інтерпретацію, а саме, вираз  $\rho^2 d\phi/2$  являє собою площу сектора (рис. 3), що утворюється двома нескінченно близькими радіус-векторами та елементом дуги траєкторії. Позначаючи її як  $df$ , запишемо момент частинки у вигляді  $L = 2m\dot{f}$ ,

де похідну  $\dot{f}$  називають *секторною швидкістю*. Тому збереження моменту вказує на постійність секторної швидкості. Другий закон Кеплера можна сформулювати так: за рівні проміжки часу радіус-вектор Землі описує рівні площі.



**Рис. 3.** Площа, яка описується радіус-вектором за час  $dt$

Інтегруючи тепер рівність  $L = 2m\dot{f}$  за часом від нуля до періоду  $T$ , одержуємо  $2mf = TL$ . Для еліпса площа  $f = \pi ab$  і, враховуючи, що

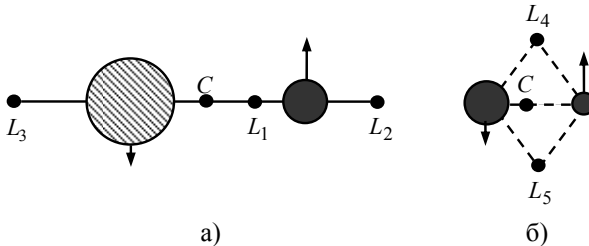
$$a = \frac{p}{1-e^2} = \frac{\alpha}{2|E|}, \quad b = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}} = \frac{L}{\sqrt{2m|E|}},$$

знаходимо  $T = \pi\alpha\sqrt{m/2|E|^3}$ , а з урахуванням знову виразу для великої півосі  $a$  і того, що  $\alpha = GMm$ , одержуємо  $T = 2\pi a^{3/2}/\sqrt{GM}$ .

Звідси можна сформулювати третій закон Кеплера: відношення куба великої півосі еліпса планети до квадрата її періоду обертання навколо Сонця є величиною сталою (вона не залежить від маси планети  $m$ , тобто однакова для всіх планет Сонячної системи).

**2. Задача трьох тіл.** Загальний розв'язок задачі трьох тіл, який виражається через відомі функції, знайти не вдається. У кінці ХІХ ст. А. Пуанкаре і Х. Брунс показали, що такого розв'язку у вигляді алгебраїчних або однозначних трансцендентних функцій від координат швидкостей взаємодіючих тіл не існує. Знайдено загальний розв'язок цієї задачі у вигляді рядів, але ці ряди збігаються дуже повільно. Були знайдені деякі частинні розв'язки задачі трьох тіл. У 1772 р. Ж. Л. Лагранж показав, що рівняння руху будуть справджуватися, якщо до двох тіл, що обертаються, додати третє, помістивши його в одну із п'яти точок, які називаються *точками лібрації* (лат. *libra* – терези). Колінеарні точки лібрації  $L_1, L_2, L_3$ , які зображені на рис. 4, а, є точками нестійкої рівноваги. Трикутні точки лібрації  $L_4, L_5$  утворюють з двома тілами рівносторонні трикутники (рис. 4, б); рівноважне положення третього тіла в цих точках стійке.

У трикутних точках лібрації системи Сонце–Юпітер розташовані дві групи астероїдів, які були названі – Греки і Троянці. У трикутних точках лібрації системи Земля–Місяць польський астроном К. Кордилевський у 1961 р. виявив скупчення метеорного пилу.



**Рис. 4.** Схематичне зображення колінеарних (а) і трикутних (б) точок лібрації

## § 2. Пружні зіткнення частинок

Зіткнення двох частинок називається *пружним*, якщо воно не супроводжується зміною їх внутрішнього стану. Найпростіше зіткнення розглядаються в  $\zeta$ -системі. Згідно з  $\vec{r}'_1 = \mu\vec{r}/m_1$ ,  $\vec{r}'_2 = -\mu\vec{r}/m_2$  швидкості частинок до зіткнення в  $\zeta$ -системі пов'язані з їх швидкостями  $\vec{v}_{10}$  і  $\vec{v}_{20}$  у  $l$ -системі співвідношеннями

$$\vec{v}'_{10} = \frac{\mu}{m_1} \vec{v}_0, \quad \vec{v}'_{20} = -\frac{\mu}{m_2} \vec{v}_0,$$

де  $\vec{v}_0 = \vec{v}_{10} - \vec{v}_{20}$ . У силу закону збереження імпульсу імпульси обох частинок залишаються після зіткнення рівними за величиною і протилежними за напрямком, а в силу закону збереження енергії залишаються незмінними й їх абсолютні величини.

Таким чином, результат зіткнення зводиться в  $\zeta$ -системі до повороту швидкостей обох частинок, які залишаються взаємно протилежними і незмінними за величиною. Якщо позначити через  $\vec{n}$  одиничний вектор у напрямку швидкості частинки з масою  $m_1$  після зіткнення, то швидкості обох частинок після зіткнення будуть

$$\vec{v}'_1 = \frac{\mu}{m_1} v \vec{n}, \quad \vec{v}'_2 = -\frac{\mu}{m_2} v \vec{n}.$$

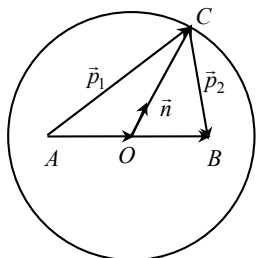
Для швидкостей цих частинок в  $l$ -системі одержуємо такі вирази:

$$\vec{v}_1 = \vec{v}'_1 + \vec{V} = \frac{\mu}{m_1} v \vec{n} + \frac{m_1 \vec{v}_{10} + m_2 \vec{v}_{20}}{m_1 + m_2},$$

$$\vec{v}_2 = \vec{v}'_2 + \vec{V} = -\frac{\mu}{m_2} v \vec{n} + \frac{m_1 \vec{v}_{10} + m_2 \vec{v}_{20}}{m_1 + m_2}.$$

Одержані результати можна інтерпретувати геометрично. При цьому зручно перейти від швидкостей до імпульсів. Помноживши швидкості  $\vec{v}_1$  і  $\vec{v}_2$  на  $m_1$  і  $m_2$ , дістанемо:  $\vec{p}_1 = \mu v \vec{n} + \mu(\vec{p}_{10} + \vec{p}_{20})/m_2$ ,  $\vec{p}_2 = -\mu v \vec{n} + \mu(\vec{p}_{10} + \vec{p}_{20})/m_1$ . Побудуємо коло з радіусом  $OC = \mu v$  ( $\vec{OC} = \mu \vec{v}$ ,  $\vec{AO} = \mu(\vec{p}_{10} + \vec{p}_{20})/m_2$ ,

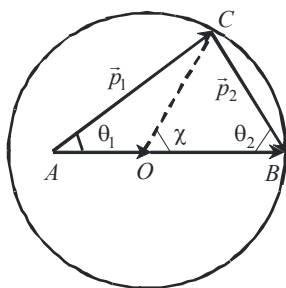
$\vec{OB} = \mu(\vec{p}_{10} + \vec{p}_{20})/m_1$ ) (рис. 5). Якщо одиничний вектор  $\vec{n}$  направлений уздовж  $\vec{OC}$ , то вектори  $\vec{AC}$  і  $\vec{CB}$  дають імпульси  $\vec{p}_1$  і  $\vec{p}_2$ , відповідно. За заданими  $\vec{p}_{10}$  і  $\vec{p}_{20}$  радіус кола і положення точок  $A$  і  $B$  залишаються незмінними, а точка  $C$  може мати довільне положення на колі.



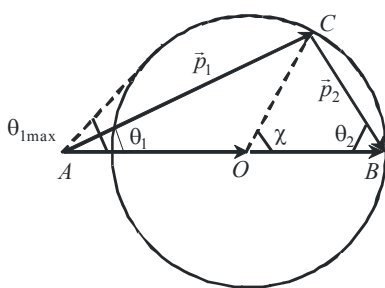
**Рис. 5.** Геометрична ілюстрація процесу пружного зіткнення частинок у  $\zeta$ -системі

до розсіювання. При цьому точка  $A$  лежить усередині круга, якщо  $m_1 < m_2$ , і – зовні, якщо  $m_1 > m_2$  (рис. 6). Кути  $\theta_1$  і  $\theta_2$  являють собою кути відхилення частинки після зіткнення щодо напрямку удару (напрямок  $\vec{p}_{10}$ ). Центральний кут  $\chi$  являє собою кут повороту першої частинки в системі центра інерції.

Розглянемо тепер детальніше випадок, коли одна із частинок (нехай це буде частинка з масою  $m_2$ ) до зіткнення перебувала у стані спокою. Тоді довжина  $OB = \frac{m_2}{m_1 + m_2} p_{10} = \mu v$  збігається з радіусом, тобто точка  $B$  лежить на колі, а вектор  $\vec{AB} = \vec{AO} + \vec{OB}$  збігається з імпульсом  $\vec{p}_{10}$  першої частинки



$m_1 < m_2$



$m_1 > m_2$

**Рис. 6.** Діаграми, що ілюструють процес пружного зіткнення частинок у  $\zeta$ -системі, одна з яких, що має масу  $m_2$ , перебувала до зіткнення в стані спокою

Із рис. 6 видно, що кути  $\theta_1$  і  $\theta_2$  можна виразити через кут  $\chi$  за такими формулами:

$$\operatorname{tg} \theta_1 = \frac{m_2 \sin \chi}{m_1 + m_2 \cos \chi}, \quad \theta_2 = \frac{\pi - \chi}{2}.$$

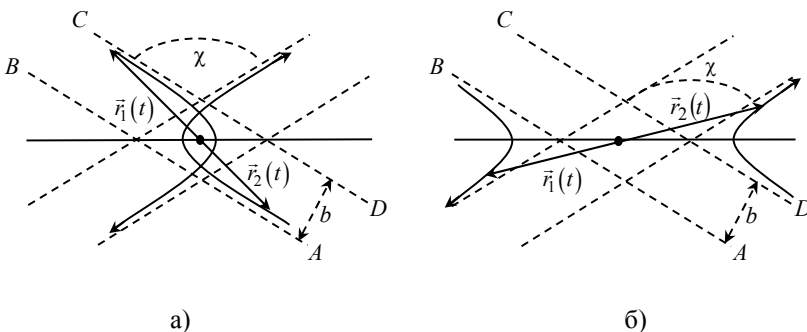
За  $m_1 < m_2$  швидкість частинки з масою  $m_1$  після зіткнення має довільний напрямок. Якщо ж  $m_1 > m_2$ , то, як видно із рис. 6, кут відхилення цієї частинки не перевищує кут  $\theta_{1\max}$ , який обчислюється за формулою

$$\theta_{1\max} = \arcsin \left( \frac{m_2}{m_1} \right).$$

За  $m_1 = m_2$  маємо  $\theta_1 = \chi/2$ ,  $\theta_2 = (\pi - \chi)/2$ , тобто частинки розлітаються під прямим кутом одна щодо іншої.

### § 3. Розсіювання частинок

Процеси розсіювання двох частинок зображені на рис. 7. Найкоротша відстань між асимптотами  $AB$  і  $CD$  називається *прицільною відстанню*. Цю відстань можна обчислити таким чином:  $b = \lim_{r \rightarrow \infty} \left\{ r \sin(\widehat{\vec{r}, \vec{v}}) \right\}$ .



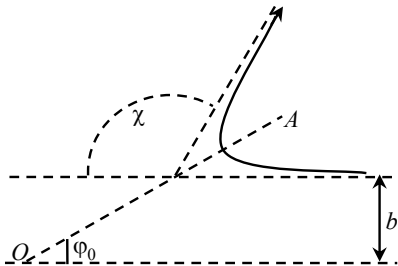
**Рис. 7.** Схематичне зображення процесів розсіювання двох частинок: а) взаємне притягування; б) взаємне відштовхування

Будемо розглядати еквівалентну задачу про відхилення однієї частинки з ефективною масою  $\mu$  у полі  $U(r)$  нерухомого силового центра, розташованого в центрі інерції частинок. Траєкторія частинки в центральному полі симетрична щодо прямої, проведеної в найближчу до центра точку орбіти ( $OA$  на рис. 8). Тому обидві асимптоти орбіти перетинають вказану пряму під однаковими кутами. Якщо позначити ці кути як  $\varphi_0$ , то кут відхилення частинки під час її прольоту повз центр, як видно із рис. 8, дорівнюватиме  $\chi = |\pi - 2\varphi_0|$ . Кут же  $\varphi_0$  визначається інтегралом

$$\varphi_0 = \int_{\rho_{\min}}^{\infty} \frac{\frac{L}{\rho^2} d\rho}{\sqrt{2\mu[E - U(\rho)] - \frac{L^2}{\rho^2}}}.$$

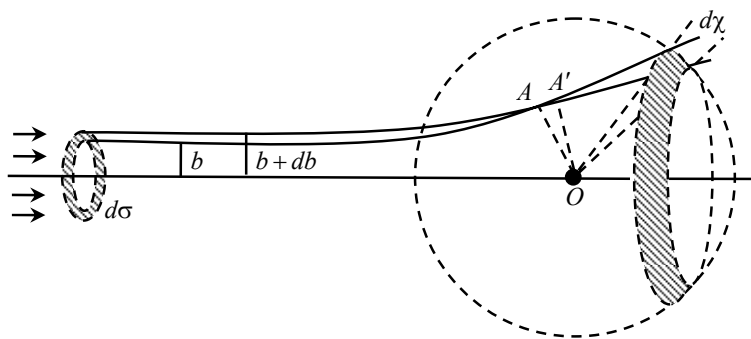
У випадку інфінітного руху зручно ввести замість  $E$  і  $L$  інші величини – швидкість  $v_{\infty}$  частинки на нескінченності й прицільну відстань  $b$ . Енергія і момент імпульсу виражаються через ці величини відповідно  $E = \mu v_{\infty}^2/2$  і  $L = \mu b v_{\infty}$ , а кут  $\varphi_0$  тоді дається інтегралом

$$\varphi_0 = \int_{\rho_{\min}}^{\infty} \frac{b \frac{d\rho}{\rho^2}}{\sqrt{1 - \frac{b^2}{\rho^2} - \frac{2U}{\mu v_{\infty}^2}}}.$$



**Рис. 8.** Траєкторія частинки при розсіюванні під дією відштовхувальної сили

Нехай пучок однакових частинок з однаковою швидкістю  $v_\infty$  падає на центр розсіювання, як показано на рис. 9. Різні частинки в пучку мають різні прицільні відстані, і тому розсіюються під різними кутами. Позначимо через  $dN$  кількість частинок, що розсіюються в одиницю часу на кути, які лежать в інтервалі від  $\chi$  до  $\chi + d\chi$ . Ця кількість не може бути зручною для характеристики процесу розсіювання, оскільки вона залежить від густини пучка. Тому зручно ввести відношення  $d\sigma = \frac{dN}{n}$ , де  $n$  – кількість частинок, які проходять в одиницю часу через одиницю площі поперечного перерізу пучка. Це відношення має розмірність площі і називається *ефективним перерізом розсіювання*. Воно повністю визначається виглядом поля розсіювання.



**Рис. 9.** Розсіювання пучка елементарних частинок під дією центральної сили

Як видно із рис. 9, зв'язок між  $\chi$  і  $b$  є взаємно однозначний; це так, оскільки кут розсіювання є монотонною функцією прицільної відстані. У такому випадку розсіюються в інтервал кутів між  $\chi$  і  $\chi + d\chi$  лише ті частинки, які летять з прицільними відстанями між  $b(\chi)$  і  $b(\chi) + db(\chi)$ . Кількість

таких частинок дорівнює добутку  $n$  на площу кільця між колами з радіусами  $b$  і  $b+db$ , тобто  $dN = 2\pi b db n$ . Тому ефективний переріз дорівнює  $d\sigma = 2\pi b db$ . Щоб знайти залежність ефективного перерізу від кута розсіювання, достатньо переписати цей вираз у вигляді

$$d\sigma = 2\pi b(\chi) \left| \frac{db(\chi)}{d\chi} \right| d\chi.$$

Тут записуємо абсолютне значення похідної  $db/d\chi$ , оскільки вона може набувати і від'ємного значення. Якщо віднести  $d\sigma$  до елементу тілесного кута  $d\Omega = 2\pi \sin \chi d\chi$ , то дістанемо

$$d\sigma = \frac{b(\chi)}{\sin \chi} \left| \frac{db}{d\chi} \right| d\Omega.$$

Для визначення ефективного перерізу залежно від кута розсіювання  $\theta$  в  $l$ -системі необхідно виразити кут  $\chi$  через кут  $\theta$  згідно із формулами  $\text{tg } \theta_1 = m_2 \sin \chi / (m_1 + m_2 \cos \chi)$  і  $\theta_2 = (\pi - \chi) / 2$ .

#### § 4. Формула Резерфорда

Одним із найважливіших застосувань отриманих вище формул є розсіювання заряджених частинок у кулонівському полі

$$U(\rho) = \frac{\alpha}{\rho}.$$

Інтеграл для знаходження кута  $\varphi_0$  у цьому конкретному випадку записується в такому вигляді:

$$\varphi_0 = \int_{\rho_{\min}}^{\infty} \frac{b \frac{d\rho}{\rho^2}}{\sqrt{1 - \frac{b^2}{\rho^2} - \frac{2\alpha}{\mu v_{\infty}^2 \rho}}},$$



де  $\rho_{\min}$  знаходимо із рівняння  $1 - b^2/\rho^2 - 2\alpha/\mu v_\infty^2 \rho = 0$ , тобто  $\rho_{\min} = b^2 / \left( \sqrt{b^2 + \alpha^2/\mu^2 v_\infty^4} - \alpha/\mu v_\infty^2 \right)$ . Ураховуючи це, обчислимо  $\varphi_0$ :

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= - \int_{\rho_{\min}}^{\infty} \frac{bd \left( \frac{1}{\rho} + \frac{\alpha}{\mu b^2 v_\infty^2} \right)}{\sqrt{1 - b^2 \left( \frac{1}{\rho^2} + \frac{2\alpha}{\mu v_\infty^2 b^2 \rho} + \frac{\alpha^2}{\mu^2 v_\infty^4 b^4} \right) + \frac{\alpha^2}{\mu^2 v_\infty^4 b^2}}} = \\ &= - \int_{\rho_{\min}}^{\infty} \frac{bd \left( \frac{1}{\rho} + \frac{\alpha}{\mu b^2 v_\infty^2} \right)}{\sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{\mu^2 v_\infty^4 b^2}} \sqrt{1 - \frac{b^2}{1 + \frac{\alpha^2}{\mu^2 v_\infty^4 b^2}} \left( \frac{1}{\rho} + \frac{\alpha}{\mu b^2 v_\infty^2} \right)^2}}. \end{aligned}$$

З урахуванням заміни  $x = b \left( 1/\rho + \alpha/\mu v_\infty^2 b^2 \right) / \sqrt{1 + \alpha^2/\mu^2 v_\infty^4 b^2}$  продовжимо обчислення:

$$\varphi_0 = - \int_1^{\left( \alpha/\mu v_\infty^2 b \right) / \sqrt{1 + \alpha^2/\mu^2 v_\infty^4 b^2}} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arccos \frac{\frac{\alpha}{\mu v_\infty^2 b}}{\sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{\mu^2 v_\infty^4 b^2}}}.$$

Звідси одержуємо  $b^2 = \frac{\alpha^2}{\mu^2 v_\infty^4} \operatorname{tg}^2 \varphi_0$  або згідно з  $\varphi_0 = \frac{\pi - \chi}{2}$  має-

мо  $b^2 = \frac{\alpha^2}{\mu^2 v_\infty^4} \operatorname{ctg}^2 \frac{\chi}{2}$ . Диференціюючи цей вираз за  $\chi$  і підстав-

ляючи після цього у формулу  $d\sigma = \frac{b(\chi)}{\sin \chi} \left| \frac{db}{d\chi} \right| d\sigma$ , приходимо до

$$d\sigma = \left( \frac{\alpha}{2\mu v_\infty^2} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\chi}{2}} d\sigma.$$

Цей результат збігається з тим, який у свій час одержав Е. Резерфорд для розсіювання  $\alpha$ -частинок атомним ядром. Квантова механіка (без урахування релятивістських ефектів) також приводить до цього ж результату. На основі цієї формули Резерфорд запропонував *планетарну модель атома*. Ця формула дає можливість також визначити заряд ядра. Дійсно, кількість розсіяних  $\alpha$ -частинок пропорційна квадрату заряду ядра. За допомогою цього факту було встановлено, що заряд ядра атома, виражений в одиницях заряду електрона, відповідає номеру в періодичній системі Менделєєва.

### ***Контрольні запитання та завдання***

1. Записати функцію Лагранжа для задачі двох тіл.
2. Сформулювати три закони Кеплера.
3. Задача трьох тіл.
4. Описати процес пружного зіткнення частинок з однаковими масами.
5. Означення диференціального перерізу.

## Розділ IV

# РУХ АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТІЛА

### Лекція 12. Кінематика і динаміка руху твердого тіла

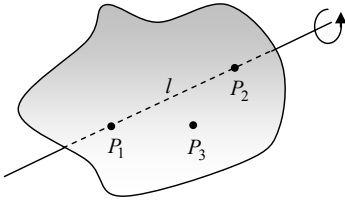
#### § 1. Кінематика руху твердого тіла

**1. Незалежні координати твердого тіла. Ортогональні перетворення.** Раніше ми розглядали механічний рух таких матеріальних об'єктів, які наближено вважалися матеріальними точками. Зрозуміло, що реальні тіла, з якими має справу класична механіка, мають скінченні розміри. У цьому випадку, коли стає суттєвим врахування орієнтації тіла в просторі, розгляд тіла як матеріальної точки стає недостатнім. Для опису динаміки в механіці вводиться поняття твердого тіла. *Тверде тіло* – це така модельна система, у якій відстані між її точками не змінюються під час руху. Іншими словами, тверде тіло – це система матеріальних точок з прикладеними голономними в'язями вигляду  $(\vec{r}_i - \vec{r}_j)^2 - c_{ij}^2 = 0$ .

З'ясуємо, скільки ступенів вільності має тверде тіло. Зафіксуємо спочатку одну точку  $P_1$ . Маємо три координати  $x_{1P_1}, x_{2P_1}, x_{3P_1}$ . Після фіксації другої точки  $P_2$  тіло може тільки обертатися навколо осі  $P_1P_2$  (рис. 1). Між точками  $P_1$  і  $P_2$  буде існувати одне рівняння голономної в'язі

$$(x_{1P_1} - x_{1P_2})^2 + (x_{2P_1} - x_{2P_2})^2 + (x_{3P_1} - x_{3P_2})^2 = l^2,$$

а тому незалежних координат буде п'ять. Для фіксації ще однієї точки  $P_3$  твердого тіла необхідний лише один параметр – це, наприклад, кут повороту навколо осі  $P_1P_2$ .



**Рис. 1.** Фіксація положення твердого тіла за допомогою трьох точок

Таким чином, абсолютно тверде тіло має шість ступенів вільності, тобто для визначення його механічного стану необхідні шість узагальнених координат і шість узагальнених швидкостей, відповідно.

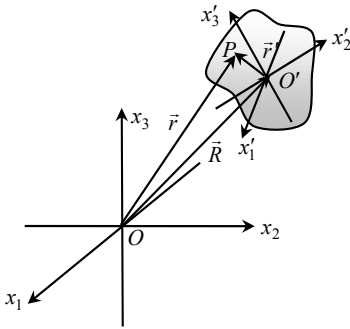
Для розгляду руху твердого тіла вводимо дві системи координат: "нерухому", тобто інерціальну систему координат  $(x_1, x_2, x_3)$

і рухому систему координат  $(x'_1, x'_2, x'_3)$ , яку жорстко пов'язуємо з твердим тілом (рис. 2). Початок координат  $O'$  рухомої системи координат зручно вибрати в центрі інерції твердого тіла, радіус-вектор якого в нерухомій системі координат обчислюється за формулою

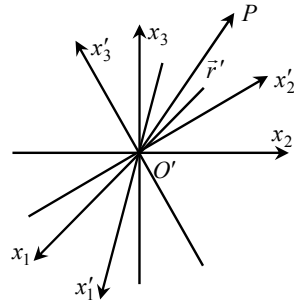
$$\vec{R} = \frac{1}{M} \iiint \vec{r} \rho(\vec{r}) d\vec{r},$$

де  $M = \iiint \rho(\vec{r}) d\vec{r}$  – маса твердого тіла,  $\rho(\vec{r})$  – об'ємна густина маси твердого тіла. Тоді координати довільної точки  $P$  твердого тіла в цих двох системах пов'язані між собою таким співвідношенням:  $\vec{r} = \vec{r}' + \vec{R}$ . Звідси випливає, що довільне переміщення твердого тіла можна уявляти як результат двох рухів – поступального руху центра інерції щодо нерухомої системи координат (описується трьома параметрами) і повороту рухомої системи координат щодо нерухомої (описується трьома незалежними один від одного кутами). Це суть теореми Шаля.

Розглянемо докладніше обертальний рух твердого тіла, оскільки поступальний рух матеріальної точки вже детально вивчався раніше. Для цього необхідно об'єднати центри  $O$  та  $O'$  і далі розглядати рух рухомої системи координат  $(x'_1, x'_2, x'_3)$  навколо цієї спільної нерухомої точки  $O \equiv O'$  (полюса) або, що еквівалентно, навколо нерухомої системи координат  $(x_1, x_2, x_3)$  (рис. 3). Радіус-вектор довільної точки  $P$  твердого тіла розкладаємо по осях цих систем координат  $\vec{r} = x_i \vec{e}_i = x'_j \vec{e}'_j = \vec{r}'$ .



**Рис. 2.** Зображення нерухомої системи координат  $(x_1, x_2, x_3)$  і системи координат  $(x'_1, x'_2, x'_3)$ , жорстко пов'язаної з твердим тілом



**Рис. 3.** Положення рухомої системи координат  $(x'_1, x'_2, x'_3)$  щодо нерухомої  $(x_1, x_2, x_3)$

Покажемо тепер, як можна однозначно виразити координати  $x_i$  точки  $P$  у системі  $(x_1, x_2, x_3)$  через координати  $x'_j$  цієї точки в системі координат  $(x'_1, x'_2, x'_3)$ , і навпаки. Із аналітичної геометрії відомо, що орієнтацію однієї декартової системи щодо іншої можна задавати за допомогою напрямних косинусів  $\alpha_{ij} = \cos(\vec{e}_i, \vec{e}'_j) = (\vec{e}_i \cdot \vec{e}'_j)$ , які наведені в табл. 1. Як видно з цієї таблиці, ми можемо виразити орт  $\vec{e}_i$  через орти  $\vec{e}'_j$ , а саме,  $\vec{e}_i = \alpha_{ij} \vec{e}'_j$  (і навпаки, орт  $\vec{e}'_i$  можна виразити через орти  $\vec{e}_j$ , а саме,  $\vec{e}'_i = \alpha_{ji} \vec{e}_j$ ).

**Таблиця 1**

**Напрямні косинуси**

	$\vec{e}'_1$	$\vec{e}'_2$	$\vec{e}'_3$
$\vec{e}_1$	$\alpha_{11}$	$\alpha_{12}$	$\alpha_{13}$
$\vec{e}_2$	$\alpha_{21}$	$\alpha_{22}$	$\alpha_{23}$
$\vec{e}_3$	$\alpha_{31}$	$\alpha_{32}$	$\alpha_{33}$

Матриця повороту  $\alpha_{ij}$  ортогональна. Дійсно, зі скалярного добутку векторів  $\vec{e}_i$  і  $\vec{e}_k$  одержуємо, по-перше,

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_k = \delta_{ik} = \alpha_{ij} \vec{e}'_j \cdot \alpha_{kl} \vec{e}'_l = \alpha_{ij} \alpha_{kl} \vec{e}'_j \cdot \vec{e}'_l = \alpha_{ij} \alpha_{kl} \delta_{jl} = \alpha_{ij} \alpha_{kj},$$

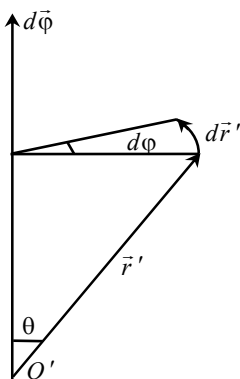
тобто  $\alpha \tilde{\alpha} = E$ , а, по-друге, оскільки визначник транспонованої матриці  $\tilde{\alpha}$  дорівнює визначнику матриці  $\alpha$ , а визначник добутку матриць дорівнює добутку визначників матриць, то з цієї рівності випливає  $\det \alpha = \pm 1$ . Як буде показано нижче, у цьому співвідношенні необхідно вибрати знак "+". Звідси випливає  $\tilde{\alpha} \alpha = \alpha^{-1} \alpha = E$  або  $\alpha^{-1} = \tilde{\alpha}$ , тобто матриця  $\alpha_{ij}$  ортогональна.

Зазначимо, що ортогональні перетворення зберігають скалярний добуток, тобто це такі перетворення координат, які залишають декартову систему координат декартовою.

Як було вже зазначено, поворот твердого тіла описують три незалежні координати, які пов'язані з наявністю трьох обертальних ступенів вільності. Ці координати можуть бути пов'язані з компонентами матриці  $\alpha_{ij}$ . Дійсно, ця матриця описується дев'ятьма числами  $\alpha_{ij}$  ( $i, j$  пробігають значення 1, 2, 3), але на ці дев'ять чисел накладені умови  $\alpha_{ij} \alpha_{kj} = \delta_{ik}$ . Зрозуміло, що існують шість таких умов, оскільки матриця  $\alpha_{ij} \alpha_{kj}$  за означенням симетрична за індексами  $i, k$ . Отже, поворот твердого тіла описується трьома незалежними величинами, на виборі яких ми зупинимось у наступній лекції.

За допомогою дев'яти величин  $\alpha_{ij}$  можна однозначно виразити координати  $x_i$  довільної точки твердого тіла через координати  $x'_j$ , якщо підставити в праву частину рівності  $x_i \vec{e}_i = x'_j \vec{e}'_j$  орти  $\vec{e}'_j = \alpha_{ij} \vec{e}_i$ , що виражаються через орти  $\vec{e}_i$  (табл. 1). Із рівності коефіцієнтів при однакових ортах маємо  $x_i = \alpha_{ij} x'_j$ . Можна записати й обернене співвідношення  $x'_i = \alpha_{ji} x_j$  ( $x'_j \vec{e}'_j = x_i \vec{e}_i = x_i \alpha_{ij} \vec{e}'_j$ ).

**2. Кутова швидкість.** Диференціюючи співвідношення  $\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}'$ , одержуємо  $d\vec{r} = d\vec{R} + d\vec{r}'$ . Звідси видно, що нескінченно мале зміщення  $d\vec{r}$  точки  $P$  складається зі зміщення  $d\vec{R}$  точки  $P$  разом із центром інерції та переміщення  $d\vec{r}'$  щодо центра інерції. Це переміщення  $d\vec{r}'$  шукаємо таким чином. Вводимо вектор  $d\vec{\phi}$  нескінченно малого повороту, абсолютна величина якого дорівнює куту  $d\phi$ , а напрямок збігається з віссю повороту (причому так, щоб напрямок повороту відповідав правилу правого гвинта щодо напрямку  $d\vec{\phi}$ ). Тоді лінійне переміщення кінця радіус-вектора  $\vec{r}'$  пов'язане з кутом  $d\phi$  таким співвідношенням (рис. 4):  $|d\vec{r}'| = r' \sin \theta d\phi$ . Напрямок цього вектора перпендикулярний до площини, яка проходить через  $\vec{r}'$  і  $d\vec{\phi}$ . Тому очевидно, що  $d\vec{r}' = d\vec{\phi} \times \vec{r}'$ . У результаті одержуємо  $d\vec{r} = d\vec{R} + d\vec{\phi} \times \vec{r}'$ , а розділивши його на час  $dt$ , за який відбулося це переміщення, дістаємо  $\vec{v} = \vec{V} + \vec{\omega} \times \vec{r}'$ . Тут  $\vec{V}$  – швидкість центра інерції твердого тіла, яку ще називають *швидкістю поступального руху*, вектор  $\vec{\omega}$  називають *кутовою швидкістю обертання* твердого тіла. Її напрямок збігається з напрямком осі обертання.



**Рис. 4.** Нескінченно малий поворот навколо осі  $z$

Таким чином, швидкість  $\vec{v}$  довільної точки тіла щодо нерухомої системи координат може бути виражена через поступальну швидкість твердого тіла і кутову швидкість його обертання.

## § 2. Динаміка твердого тіла

**1. Тензор інерції.** При обчисленні кінетичної енергії твердого тіла вважатимемо його системою дискретних матеріальних точок. Тоді маємо

$$T = \sum_a \frac{m_a v_a^2}{2}.$$

Далі не будемо писати індекс "a". Підставляючи в цю формулу швидкість  $\vec{v} = \vec{V} + \vec{\omega} \times \vec{r}'$ , одержуємо

$$T = \sum \frac{m}{2} (\vec{V} + \vec{\omega} \times \vec{r}')^2 = \sum \frac{m}{2} \vec{V}^2 + \sum m \vec{V} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}') + \sum \frac{m}{2} (\vec{\omega} \times \vec{r}')^2.$$

Швидкості  $\vec{V}$  і  $\vec{\omega}$  однакові для всіх точок твердого тіла. Тому в першому доданку вираз  $\vec{V}^2/2$  виноситься за знак суми. Беручи до уваги, що  $\sum m = M$  – маса тіла, цей доданок записується у вигляді  $MV^2/2$ . Другий доданок перетворюємо таким чином:

$$\sum m \vec{V} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}') = \sum m \vec{r}' \cdot (\vec{V} \times \vec{\omega}) = (\vec{V} \times \vec{\omega}) \cdot \sum m \vec{r}'.$$

Сума  $\sum m \vec{r}'$  визначає вектор центра мас у  $\zeta$ -системі координат і тому дорівнює нулю. Нарешті, розкриваючи квадрат векторного добутку в третьому доданку кінетичної енергії, одержуємо

$$T = \frac{MV^2}{2} + \frac{1}{2} \sum m \left[ \omega^2 r'^2 - (\vec{\omega} \cdot \vec{r}')^2 \right].$$

Таким чином, кінетична енергія твердого тіла представлена у вигляді двох частин. Перший доданок є кінетичною енергією поступального руху твердого тіла – він має такий вигляд, начебто вся маса твердого тіла зосереджена в його центрі інерції.



Другий доданок є кінетичною енергією обертального руху з кутовою швидкістю  $\vec{\omega}$  навколо осі, яка проходить через центр інерції. Тут необхідно ще раз акцентувати, що такі прості співвідношення справедливі тільки в тому випадку, коли початок рухомої системи координат обраний у центрі мас тіла.

Перепишемо кінетичну енергію обертального руху в тензорних позначеннях, тобто через компоненти  $x'_i, \omega'_i$  векторів  $\vec{r}', \vec{\omega}'$ :

$$T_{об} = \frac{1}{2} \sum m \{ \omega'_i{}^2 x'_i{}^2 - \omega'_i x'_i \omega'_k x'_k \} =$$

$$= \frac{1}{2} \sum m \{ \omega'_i \omega'_k \delta_{ik} x'_i{}^2 - \omega'_i \omega'_k x'_i x'_k \} = \frac{1}{2} \omega'_i \omega'_k \sum m (x'_i{}^2 \delta_{ik} - x'_i x'_k).$$

Вводячи тензор другого рангу  $I_{ik} = \sum m (x'_i{}^2 \delta_{ik} - x'_i x'_k)$ , записуємо кінцевий вираз для кінетичної енергії твердого тіла у вигляді (для зручності далі не будемо писати штрихи, але матимемо на увазі, що компоненти  $x_i, \omega_i$  – це складові відповідних векторів щодо рухомої системи координат)

$$T = \frac{M\vec{V}^2}{2} + \frac{1}{2} I_{ik} \omega_i \omega_k.$$

Тензор  $I_{ik}$  називається *тензором моментів інерції* або просто *тензором інерції* тіла. Як видно з означення, він симетричний, тобто  $I_{ik} = I_{ki}$ . Запишемо для наочності його компоненти в явному вигляді у вигляді такої матриці:

$$I_{ik} = \begin{pmatrix} \sum m(y^2 + z^2) & -\sum mxy & -\sum mxz \\ -\sum myx & \sum m(x^2 + z^2) & -\sum myz \\ -\sum mzx & -\sum mzy & \sum m(x^2 + y^2) \end{pmatrix}.$$

Тензор інерції характеризується властивістю адитивності: моменти інерції тіла дорівнюють сумах моментів інерції його частин. Для суцільного тіла вираз для тензора інерції записується у вигляді такого інтеграла:

$$I_{ik} = \int \rho (x_l^2 \delta_{ik} - x_i x_k) dV.$$

Знайдемо тепер закон перетворення тензора при повороті системи координат із такої рівності:

$$T = \frac{1}{2} I_{ik} \omega_i \omega_k = \frac{1}{2} I_{ik} \alpha_{ij} \omega'_j \alpha_{kl} \omega'_l = \frac{1}{2} I'_{jl} \omega'_j \omega'_l,$$

а саме,  $I'_{jl} = I_{ik} \alpha_{ij} \alpha_{kl}$ . Із цього перетворення випливає, що існують системи координат, щодо яких всі недіагональні компоненти тензора інерції дорівнюють нулю. Такі спеціальні системи координат називаються *головними системами координат*, а їх координатні осі – *головними осями інерції*, а компоненти тензора інерції – *головними моментами інерції* (позначимо їх  $I_1, I_2, I_3$ ). Тоді кінетична енергія обертального руху тіла щодо головної системи координат виражається таким чином:

$$T_{\text{об}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 I_i \omega_i^2 \equiv \frac{1}{2} I_i \omega_i^2.$$

Зауважимо, що знаходження головної системи координат – це задача на власні значення і власні вектори симетричної матриці. Власні значення – це головні моменти інерції, а нормовані власні вектори – це орти головних осей інерції. Матриця ж, яка будується з цих ортонормованих власних векторів, є матрицею того лінійного ортогонального перетворення, яке трансформує недіагональний тензор інерції в діагональний.

Залежно від співвідношення між  $I_1, I_2, I_3$  розрізняють такі типи твердих тіл (традиційно в класифікації твердих тіл використовується слово "дзига"): а)  $I_1 \neq I_2 \neq I_3$  – асиметрична дзига, б)  $I_1 = I_2 \neq I_3$  – симетрична дзига, в)  $I_1 = I_2 = I_3$  – кульова дзига. Пошук власних векторів і головних моментів інерції зводиться до математичної задачі про діагоналізацію симетричної матриці  $3 \times 3$ . Розв'язання цієї задачі не складне, але може виявитись досить громіздким у загальному вигляді.

Велику роль при знаходженні головної системи координат відіграє симетрія. Якщо тіло має вісь симетрії, то одна із головних осей збігається з цією віссю симетрії, а дві інші будуть ортогональними до неї. Тобто, якщо тіло має дві ортогональні осі симетрії (простий випадок – прямокутний паралелепіпед зі сторонами  $a \neq b \neq c$ ), то ці осі симетрії і є головними осями. Тензор моментів інерції, обчислений у цих осях, буде діагональним  $I_{ij} = \text{diag}(I_1, I_2, I_3)$ , якщо густина однорідна, то  $I_1 \neq I_2 \neq I_3$ . Очевидно, якщо порядок осі симетрії буде вищим, ніж другий, то головні моменти інерції вздовж осей, перпендикулярних цій осі симетрії, дорівнюватимуть один одному, і тіло, як мінімум, буде симетричною дзигною. Якщо в попередньому прикладі вважати, що  $a = b \neq c$ , то  $I_1 = I_2 \neq I_3$ . Якщо ж таких осей декілька, то тіло буде кульовою дзигною (напр., куб).

Якщо система частинок розташована в одній площині (напр.,  $xy$ , яка є площиною симетрії для цієї системи), то тензор інерції  $I_{ik}$  можна переписати у вигляді

$$I_{ik} = \begin{pmatrix} \sum my^2 & -\sum mxy & 0 \\ -\sum mxy & \sum mx^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sum m(x^2 + y^2) \end{pmatrix}.$$

У цьому випадку необхідно привести до діагонального вигляду тільки матрицю  $2 \times 2$ , що набагато простіше.

Бачимо, що для головних моментів інерції виконується співвідношення  $I_1 + I_2 = I_3$ . Якщо ж частинки розташовані на одній прямій (напр., уздовж осі  $x$ ), то тензор інерції такої системи (ротора) має вигляд

$$I_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sum mx^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sum mx^2 \end{pmatrix}.$$

Тензор інерції інколи зручно обчислювати щодо системи координат (позначимо її тильдою), у якій центр цієї системи може

не збігатися із центром інерції тіла. Тоді перехід від  $\tilde{I}_{ik}$  до тензора інерції  $I_{ik}$ , побудованого в  $u$ -системі координат тіла, здійснюється таким чином:

$$\tilde{I}_{ik} = I_{ik} + \mu(\tau_l^2 \delta_{ik} - \tau_i \tau_k),$$

де  $\tau_l$  – компоненти вектора трансляції  $\vec{\tau}$ , проведеного від початку координат у центр мас.

**2. Момент імпульсу твердого тіла.** При виборі початку координат у центрі інерції тіла його момент імпульсу  $\vec{L}$  збігається з "власним моментом", пов'язаним лише з рухом точок тіла щодо центра інерції

$$\vec{L} = \sum m(\vec{r} \times \vec{v}) = \sum m(\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})) = \sum m\{r^2 \vec{\omega} - \vec{r}(\vec{r} \cdot \vec{\omega})\}.$$

У компонентах цей вираз записується таким чином:

$$L_i = \sum m\{x_l^2 \omega_l - x_i x_k \omega_k\} = \omega_k \sum m\{x_l^2 \delta_{ik} - x_i x_k\} = I_{ik} \omega_k.$$

Оскільки  $L_i = \alpha_{ij} L'_j$ ,  $\omega_k = \alpha_{kl} \omega'_l$ , то маємо  $L'_j = I_{ik} \alpha_{kl} \alpha_{ij} \omega'_l = I'_{jl} \omega'_l$ , тобто, якщо осі  $x'_1, x'_2, x'_3$  будуть направлені вздовж головних осей інерції, то матимемо такі співвідношення:

$$L'_1 = I'_1 \omega'_1, \quad L'_2 = I'_2 \omega'_2, \quad L'_3 = I'_3 \omega'_3.$$

Слід зазначити, що у випадку довільного тіла вектор  $\vec{L}$  не збігається за напрямком з вектором  $\vec{\omega}$  і тільки при обертанні тіла навколо якої-небудь із його головних осей інерції  $\vec{L}$  і  $\vec{\omega}$  мають однаковий напрямок.

**3. Рівняння руху твердого тіла.** Функція Лагранжа твердого тіла записується у вигляді

$$\mathcal{L} = \frac{M\vec{V}^2}{2} + \frac{1}{2} I_{ik} \omega_i \omega_k - U.$$

Потенціальна енергія  $U$  є у загальному випадку функцією шести змінних, які визначають положення твердого тіла. Це, наприклад, три координати  $X_1, X_2, X_3$  центра інерції твердого тіла і

три змінні, які визначають орієнтацію рухомої системи координат щодо нерухомої. Запишемо диференціал функції Лагранжа у такому вигляді:

$$d\mathcal{L} = M\vec{V}d\vec{V} + I_{ik}\omega_k d\omega_i - dU,$$

$$\begin{aligned} dU &= \sum \frac{\partial U}{\partial \vec{r}} d\vec{r} = -\sum \vec{f} \cdot d\vec{r} = -\sum \vec{f} \cdot d\vec{R} - \sum \vec{f} \cdot d\vec{r}' = \\ &= -d\vec{R} \cdot \sum \vec{f} - \sum \vec{f} \cdot (d\vec{\varphi} \times \vec{r}') = -d\vec{R} \cdot \vec{F} - d\vec{\varphi} \cdot \vec{K}, \end{aligned}$$

де  $\vec{F} = \sum \vec{f}$ ,  $\vec{K} = \sum (\vec{r}' \times \vec{f})$  – відповідно суми всіх сил і всіх моментів сил, що діють на тверде тіло. Випишемо тепер необхідні частинні похідні:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{V}} &= M\vec{V}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{R}} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{R}} = \vec{F}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega_i} = I_{ik}\omega_k = L_i, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{\varphi}}} &= \vec{L}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{\varphi}} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{\varphi}} = \vec{K}. \end{aligned}$$

Підставляючи ці похідні в рівняння Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{V}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{R}} = 0, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{\varphi}}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{\varphi}} = 0,$$

одержуємо

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}, \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{K}.$$

### **Контрольні запитання та завдання**

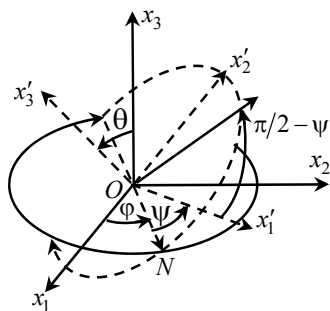
1. Скільки ступенів вільності має абсолютно тверде тіло?
2. Суть теореми Шаля.
3. Щодо якої системи відліку записується тензор інерції?
4. Чи завжди вектор моменту імпульсу збігається за напрямком з кутовою швидкістю?
5. Головна система координат і головні компоненти тензора інерції.

## Лекція 13. Параметризації обертального руху твердого тіла

### § 1. Параметризація поворотів кутами Ейлера

Опис поворотів являє собою досить складну математичну задачу, суттєво більш складнішу, ніж опис трансляцій. Достатньо зазначити, що трансляції описуються звичайним вектором  $\vec{t}$  у тривимірному просторі, а результат послідовного здійснення двох трансляцій  $\vec{t}_1$  і  $\vec{t}_2$  визначається вектором  $\vec{t}_1 + \vec{t}_2$ . Результат трансляцій не залежить від послідовності їх здійснення, що вказує на властивість комутативності трансляцій.

Повороти описуються ортогональною матрицею  $\alpha_{ij}$ . Результат двох поворотів, спочатку  $\hat{\alpha}_1$ , а потім  $\hat{\alpha}_2$ , визначається добутком цих матриць  $\hat{\alpha} = \hat{\alpha}_2 \hat{\alpha}_1$ . У загальному випадку  $\hat{\alpha}_1 \hat{\alpha}_2 \neq \hat{\alpha}_2 \hat{\alpha}_1$ , що вказує на некомутативність поворотів. Більш складний характер "додавання" поворотів, особливо внаслідок їх некомутативності, суттєво ускладнює опис обертального руху. Оскільки ці проблеми виникають і у квантовій механіці, корисно розглянути властивості поворотів більш детально.



**Рис. 1.** Куты Ейлера

При описанні обертального руху зручно використовувати куты Ейлера. Рухома площина  $x'_1 x'_2$  перетинає нерухому  $x_1 x_2$  по деякій прямій  $ON$ , яку називають *лінією вузлів* (рис. 1). Кут  $\varphi$  між лінією вузлів  $ON$  і віссю  $x_1$  називається *кутом прецесії*, кут  $\theta$  між віссю  $x_3$  і віссю  $x'_3$  називають *кутом нутації*, а кут  $\psi$  між лінією вузлів  $ON$  і віссю  $x'_1$  називається *кутом власного обертання*. Ці куты змінюються в таких межах:  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$ ,  $0 \leq \psi \leq 2\pi$ .

Перехід від нерухомої системи  $S(x_1x_2x_3)$  до рухомої  $S'(x'_1x'_2x'_3)$  можна здійснити шляхом трьох послідовних поворотів. Спочатку повертаємо систему  $S$  навколо осі  $x_3$  на кут  $\varphi$ . Він описується матрицею

$$\hat{R}_\varphi = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Другий поворот на кут  $\theta$  відбувається навколо осі  $x_1$  в її новому положенні, що збігається з лінією вузлів, і йому відповідає матриця

$$\hat{R}_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Матриця третього повороту на кут  $\psi$  навколо осі  $x_3$  в її новому положенні записується таким чином:

$$\hat{R}_\psi = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матриця повного перетворення, яке переводить систему  $S$  у систему  $S'$ , є добутком цих трьох матриць:

$$\begin{aligned} \hat{R} &= \hat{R}_\psi \hat{R}_\theta \hat{R}_\varphi = \\ &= \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \varphi - \cos \theta \sin \varphi \sin \psi & \cos \psi \sin \varphi + \cos \theta \cos \varphi \sin \psi & \sin \psi \sin \theta \\ -\sin \psi \cos \varphi - \cos \theta \sin \varphi \cos \psi & -\sin \psi \sin \varphi + \cos \theta \cos \varphi \cos \psi & \cos \psi \sin \theta \\ \sin \theta \sin \varphi & -\sin \theta \cos \varphi & \cos \theta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Координати  $x'_i$  довільної точки  $P$  твердого тіла виражаються через координати  $x_i$  таким чином:

$$x'_i = R_{ij}x_j.$$

Оскільки  $x'_i = \alpha_{ji} x_j$ , то звідси випливає такий зв'язок між напрямними косинусами матриці  $\hat{\alpha} = \hat{R}^T = \hat{R}^{-1}$  та елементами матриці  $\hat{R}$ , які виражаються через кути Ейлера:  $\alpha_{ij} = R_{ji}$ .

## § 2. Векторна параметризація поворотів

**Теорема Ейлера.** Довільне переміщення твердого тіла, яке має нерухому точку, можна виконати шляхом повороту навколо деякої осі, яка проходить через цю точку. Тобто існує такий зв'язаний з тілом вектор, у якого координати не змінюються. У матричному записі це означає, що для кожної матриці повороту  $\hat{R}$  існує такий вектор  $\vec{x}$ , для якого справедлива така рівність:

$$\hat{R}\vec{x} = \vec{x}.$$

Умову існування цього розв'язку можна переписати таким чином:  $(\hat{R} - \hat{I})\vec{x} = 0$ , де  $\hat{I}$  – одинична матриця, і нагадати, що ця однорідна система має нетривіальний розв'язок лише тоді, коли  $\det(\hat{R} - \hat{I}) = 0$ . Доведемо це, беручи до уваги, що визначник матриці збігається з визначником транспонованої матриці, визначник добутку матриць дорівнює добутку визначників матриць, а визначник матриці  $\hat{R}$  дорівнює одиниці. Тоді приходимо до такого ланцюжка рівностей:

$$\begin{aligned} \det(\hat{R} - \hat{I}) &= \det(\hat{R}^T - \hat{I}^T) = \det(\hat{R}^{-1} - \hat{I}) = \det \hat{R} \cdot \det(\hat{R}^{-1} - \hat{I}) = \\ &= \det[\hat{R}(\hat{R}^{-1} - \hat{I})] = \det(\hat{I} - \hat{R}) = (-1)^3 \det[\hat{R} - \hat{I}] = -\det(\hat{R} - \hat{I}). \end{aligned}$$

Цим завершується доведення теореми Ейлера.

Розглянемо знову дві декартові системи координат  $S$  і  $S'$  зі спільною початковою точкою. Система  $S'$  повернута щодо системи  $S$ , і цей поворот описується ортогональною матрицею  $\hat{R}$ . Вектори  $\vec{x}$  і  $\vec{x}'$  однієї і тієї самої точки в системах  $S$  і  $S'$  пов'язані співвідношенням



$$\vec{x}' = \hat{R}\vec{x} \quad \text{або} \quad \vec{x} = \hat{R}^{-1}\vec{x}' = \hat{R}^T\vec{x}'.$$

Коли рухома система  $S'$  здійснює нескінченно малий поворот, то матриця  $\hat{R}$  одержує нескінченно малий приріст  $d\hat{R}$  і стає рівною  $\hat{R} + d\hat{R}$ . Обираємо в системі  $S'$  нерухому точку з вектором  $\vec{x}'$ . Під час повороту системи  $S'$  вектор  $\vec{x}'$  не змінюється. Водночас вектор  $\vec{x}$  цієї самої точки в системі  $S$  зазнає зміни. Розглянемо цю зміну докладніше.

Після додаткового повороту  $d\hat{R}$  координата вектора  $\vec{x}$  змінюється на таку величину:

$$d\vec{x} = d\hat{R}^{-1}\vec{x}' + \hat{R}^{-1}d\vec{x}' = d\hat{R}^{-1}\vec{x}' = d\hat{R}^{-1}\hat{R}\hat{R}^{-1}\vec{x}' = d\hat{R}^{-1}\hat{R}\vec{x}.$$

Використовуючи позначення  $d\hat{\Phi} = d\hat{R}^{-1}\hat{R} = d\hat{R}^T\hat{R}$ , одержуємо  $d\vec{x} = d\hat{\Phi}\vec{x}$ . Матриця  $d\hat{\Phi}$  є оператором, що діє в нерухомій системі  $S$ . За допомогою цієї матриці для кожного вектора  $\vec{x}$  визначається його приріст  $d\vec{x}$ . Ця матриця називається *матрицею нескінченно малого обертального переміщення*. Матриця  $d\hat{\Phi}$  кососиметрична, тобто

$$d\hat{\Phi} = -d\hat{\Phi}^T.$$

Дійсно, з умови ортогональності  $\hat{R}^T\hat{R} = \hat{I}$  матриці  $\hat{R}$  впливає

$$d\hat{R}^T\hat{R} + \hat{R}^Td\hat{R} = d\hat{R}^T\hat{R} + (d\hat{R}^T\hat{R})^T = d\hat{\Phi} + d\hat{\Phi}^T = 0.$$

Наприклад, матриця  $d\hat{\Phi}$  для матриці  $\hat{R}_\varphi$ , яка описує поворот системи  $S'$  навколо осі  $x_3$  системи  $S$ , має вигляд

$$d\hat{\Phi} = d\hat{R}^T\hat{R} = \begin{pmatrix} -\sin\varphi d\varphi & -\cos\varphi d\varphi & 0 \\ \cos\varphi d\varphi & -\sin\varphi d\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -d\varphi & 0 \\ d\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Покажемо тепер, що серед власних значень матриці  $d\hat{\Phi}$  є нульове власне значення, тобто  $d\hat{\Phi}\vec{x} = 0$ . Формально це означає, що ця система рівнянь, яка в розгорнутому записі має вигляд

$$\begin{pmatrix} 0 & -d\Phi_{21} & d\Phi_{13} \\ d\Phi_{21} & 0 & -d\Phi_{32} \\ -d\Phi_{13} & d\Phi_{32} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \rightarrow \begin{cases} -d\Phi_{21}x_2 + d\Phi_{13}x_3 = 0, \\ d\Phi_{21}x_1 - d\Phi_{32}x_3 = 0, \\ -d\Phi_{13}x_1 + d\Phi_{32}x_2 = 0, \end{cases}$$

завжди має нетривіальний розв'язок, оскільки визначник  $d\hat{\Phi}$  дорівнює нулю. Таким розв'язком буде кожний вектор, який орієнтований уздовж осі повороту системи  $S'$ , тому що в результаті повороту такий вектор не зазнає ніяких змін. Із цієї системи рівнянь випливає, що такими розв'язками є колінеарні вектори  $d\vec{\varphi}$  з координатами

$$d\varphi_1 = \alpha d\Phi_{32}, d\varphi_2 = \alpha d\Phi_{13}, d\varphi_3 = \alpha d\Phi_{21},$$

де  $\alpha$  – довільний множник. Ці співвідношення можна записати в більш компактному вигляді

$$d\varphi_i = \alpha \varepsilon_{ijk} d\Phi_{kj},$$

де ми використали абсолютно антисиметричний тензор  $\varepsilon_{ijk}$ . Його властивості такі:  $\varepsilon_{123} = 1$ ;  $\varepsilon_{ijk}$  залишається незмінними, якщо індекси  $i, j, k$  утворюють циклічну перестановку; при перестановці довільних двох індексів  $\varepsilon_{ijk}$  змінює знак (напр.,  $\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{ikj}$ ). Легко переконатися, що один із цих векторів, а саме, за  $\alpha = 1$  можна використати для параметризації надмалих поворотів, якщо додатково пов'язати довжину та один із двох можливих напрямків цього вектора з величиною кута повороту та напрямком повороту системи  $S'$  щодо системи  $S$ . Матриця  $d\hat{\Phi}$  у цьому випадку має такий вигляд:

$$d\hat{\Phi} = \begin{pmatrix} 0 & -d\varphi_3 & d\varphi_2 \\ d\varphi_3 & 0 & -d\varphi_1 \\ -d\varphi_2 & d\varphi_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Проаналізуємо, як змінюються в системі  $S$  координати вектора, нерухомого в системі  $S'$ , під дією цієї матриці. Обираємо

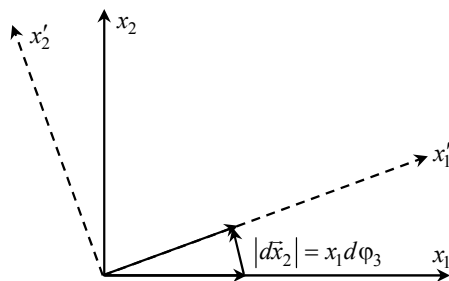
нерухому систему  $S$  таким чином, щоб вісь  $x_3$  була направлена вздовж вектора  $d\vec{\varphi}$ , тобто

$$d\vec{\varphi} = d\varphi_3 \vec{e}_3.$$

Це означає, що поворот системи  $S'$  відбувається навколо осі  $x_3$ . Проаналізуємо, який приріст виникає внаслідок повороту координати вектора, орієнтованого до повороту вздовж осі  $x_1$ :

$$d\vec{x} = d\hat{\Phi}\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 & -d\varphi_3 & 0 \\ d\varphi_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 d\varphi_3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Звідси видно, що після повороту координата  $x_2$  набула додатного приросту  $x_1 d\varphi_3$ . Якщо система  $S$  права, то система  $S'$  повернулася проти годинникової стрілки, якщо дивитися з кінця вектора  $d\vec{\varphi}$  (рис. 2), тобто напрямком повороту і напрямком вектора  $d\vec{\varphi}$  пов'язані правилом правого гвинта. Кут, на який повертається система  $S'$ , дорівнює  $d\varphi = \arctg(|d\vec{x}_2|/x_1) = \arctgd \varphi_3$ , а оскільки  $d\varphi \ll 1$ , то  $d\varphi = d\varphi_3$ . Отже, кут надмалого повороту системи  $S'$  дорівнює довжині вектора  $d\vec{\varphi}$ .



**Рис. 2.** Ілюстрація надмалого повороту системи  $S'$  щодо системи  $S$

Таким чином, кожному нескінченно малому повороту системи  $S'$ , який описується матрицею  $d\hat{\Phi}$ , зіставляється векторний параметр  $d\vec{\varphi}$  за правилом  $d\varphi_i = \varepsilon_{ijk} d\Phi_{kj}$ . Поворот відбувається навколо осі, колінеарній вектору  $d\vec{\varphi}$ , а напрямком повороту щодо правої системи координат пов'язаний з напрямком  $d\vec{\varphi}$  за правилом правого гвинта. Кут повороту дорівнює довжині вектора  $d\vec{\varphi}$ . Операцію  $d\vec{x} = d\hat{\Phi} \vec{x}$ , яка ставить вектор  $d\vec{x}$  у відповідність кососиметричному тензору  $d\hat{\Phi}$  і вектору  $\vec{x}$ , можна ще розглядати як таку, що ставить у відповідність вектор  $d\vec{x}$  двом векторам  $d\vec{\varphi}$  і  $\vec{x}$ , тобто  $d\vec{x} = d\vec{\varphi} \times \vec{x}$ .

Очевидно, що результат  $d\vec{\varphi}$  двох нескінченно малих поворотів  $d\vec{\varphi}_1$  і  $d\vec{\varphi}_2$  дорівнює звичайній сумі векторів, тобто  $d\vec{\varphi} = d\vec{\varphi}_1 + d\vec{\varphi}_2$ . Таке спрощення пов'язане з тим, що дія нескінченно малих поворотів комутативна.

### § 3. Кінематичні рівняння Ейлера

Якщо переміщення  $d\vec{x}$ , яке пов'язане з нескінченно малим поворотом, відбувається за час  $dt$ , то точка з радіус-вектором  $\vec{x}$  має в системі  $S$  швидкість

$$\vec{v} = d\dot{\vec{x}} = \frac{d\hat{\Phi}}{dt} \vec{x} \equiv \hat{\Phi} \vec{x}.$$

Матриця  $\hat{\Omega} = \hat{\Phi} = \hat{R}^{-1} \dot{\hat{R}}$  називається *матрицею кутової швидкості* твердого тіла (або вмороженої системи  $S'$ ) щодо системи  $S$ . Отже, маємо  $\vec{v} = \hat{\Omega} \vec{x}$ . Відповідно, з кососиметричним тензором  $\hat{\Omega}$  пов'язується вектор кутової швидкості  $\vec{\omega}$ :  $\omega_i = \varepsilon_{ijk} \Omega_{kj}$ . Очевидно, що зв'язок між вектором лінійної швидкості точок твердого тіла та вектором його кутової швидкості можна зобразити у вигляді

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{x}.$$

Знайдемо тепер матрицю кутової швидкості щодо рухомої системи координат  $S'$ . З урахуванням перетворень  $\vec{x}' = \hat{R}\vec{x}$ ,  $\vec{v}' = \hat{R}\vec{v}$  та  $\vec{v} = \hat{\Omega}\vec{x}$ ,  $\vec{v}' = \hat{\Omega}'\vec{x}'$  одержуємо

$$\begin{aligned}\hat{R}\vec{v} = \hat{\Omega}'\hat{R}\vec{x} &\rightarrow \vec{v} = \hat{R}^{-1}\hat{\Omega}'\hat{R}\vec{x} \rightarrow \hat{\Omega} = \hat{R}^{-1}\hat{\Omega}'\hat{R} \rightarrow \\ &\rightarrow \hat{\Omega}' = \hat{R}\hat{\Omega}\hat{R}^{-1} = \hat{R}\dot{\hat{R}}^{-1}\hat{R}\hat{R}^{-1} = \hat{R}\dot{\hat{R}}^{-1} = \hat{R}\dot{\hat{R}}^T.\end{aligned}$$

Підставляючи тепер в останній вираз матрицю повороту  $\hat{R} = \hat{R}_\psi \hat{R}_\theta \hat{R}_\phi$ , знаходимо матрицю  $\hat{\Omega}'$ :

$$\begin{aligned}\hat{\Omega}' = \hat{R}\dot{\hat{R}}^{-1} &= \hat{R}_\psi \hat{R}_\theta \hat{R}_\phi \frac{d\hat{R}_\phi^{-1}}{d\phi} \hat{R}_\theta^{-1} \hat{R}_\psi^{-1} \dot{\phi} + \hat{R}_\psi \hat{R}_\theta \frac{d\hat{R}_\theta^{-1}}{d\theta} \hat{R}_\psi^{-1} \dot{\theta} + \hat{R}_\psi \frac{d\hat{R}_\psi^{-1}}{d\psi} \dot{\psi} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -\dot{\phi} \cos \theta - \dot{\psi} & \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi \\ \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi} & 0 & -\dot{\phi} \sin \theta \sin \psi - \dot{\theta} \cos \psi \\ -\dot{\phi} \sin \theta \cos \psi + \dot{\theta} \sin \psi & \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi & 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

При цьому між компонентами вектора кутової швидкості  $\omega'_i = R_{ij} \omega_j$  й елементами матриці  $\Omega'_{kj}$  зберігається той самий зв'язок, що й між  $\omega_i$  та  $\Omega_{kj}$ , тобто  $\omega'_i = \varepsilon_{ijk} \Omega'_{kj}$ . Порівнюючи цей вираз із елементами матриці  $\hat{\Omega}'$ , знаходимо координати вектора кутової швидкості щодо системи  $S'$ :

$$\omega'_1 = \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi,$$

$$\omega'_2 = \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi,$$

$$\omega'_3 = \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi}.$$

Ці співвідношення називаються *кінематичними рівняннями Ейлера*. Якщо відомі кути Ейлера як функції часу, то за допомогою цих рівнянь можна знайти координати вектора кутової швидкості у вмероженій системі координат. І навпаки, якщо відомі значення координат кутової швидкості у системі  $S'$ , то можна знайти кути Ейлера за допомогою кінематичних рівнянь. Вони описують миттєве положення вмерженої системи  $S'$  щодо нерухомої системи  $S$ .

## Контрольні запитання та завдання

1. Які назви мають кути Ейлера?
2. У яких межах змінюється кут нутації?
3. Записати матрицю повороту для кута власного обертання.
4. Який зв'язок існує між напрямними косинусами та елементами матриці повного обертання, вираженої через кути Ейлера?
5. Що можна сказати про матрицю надмалого обертання?

## Лекція 14. Дзиги

### § 1. Динамічні рівняння Ейлера. Типи дзиг

Із функції Лагранжа  $\mathcal{L} = \frac{M\vec{V}^2}{2} + \frac{1}{2}I_{ik}\omega_i\omega_k - U$  твердого тіла, записаної щодо системи координат  $S$ , були одержані рівняння  $\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}$ ,  $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{K}$ . Зупинимося на останньому рівнянні, яке характеризує обертальний рух.

Зручно перейти до головної системи координат  $S'$ , щодо якої тензор інерції твердого тіла є діагональним тензором. Вектори  $\vec{L}$  і  $\vec{K}$  у системах  $S$  і  $S'$  пов'язані таким чином:

$$\vec{L}' = \hat{R}\vec{L}, \quad \vec{L} = \hat{R}^{-1}\vec{L}', \quad \vec{K}' = \hat{R}\vec{K}, \quad \vec{K} = \hat{R}^{-1}\vec{K}'.$$

Знайдемо тепер зв'язок між швидкістю зміни координат вектора  $\vec{L}$  у системі  $S$  і швидкістю зміни його координат у системі  $S'$ :

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}}{dt} &= \frac{d\hat{R}^{-1}}{dt}\vec{L}' + \hat{R}^{-1}\frac{d\vec{L}'}{dt} = \\ &= \hat{R}^{-1}\hat{R}\frac{d\hat{R}^{-1}}{dt}\vec{L}' + \hat{R}^{-1}\frac{d\vec{L}'}{dt} = \hat{R}^{-1}\left(\hat{\Omega}'\vec{L}' + \frac{d\vec{L}'}{dt}\right). \end{aligned}$$

Підставляючи останнє співвідношення і  $\vec{K} = \hat{R}^{-1}\vec{K}'$  у рівняння  $d\vec{L}/dt = \vec{K}$ , одержуємо у векторній формі динамічні рівняння Ейлера

$$\frac{d\vec{L}'}{dt} + \hat{\Omega}'\vec{L}' = \vec{K}' \quad \text{або} \quad \frac{d\vec{L}'}{dt} + \vec{\omega}' \times \vec{L}' = \vec{K}' .$$

Спроектувавши останнє рівняння на осі головної системи координат, одержуємо систему динамічних рівнянь Ейлера (далі не будемо писати штрихи)

$$I_1 \dot{\omega}_1 - (I_2 - I_3) \omega_2 \omega_3 = K_1 ,$$

$$I_2 \dot{\omega}_2 - (I_3 - I_1) \omega_3 \omega_1 = K_2 ,$$

$$I_3 \dot{\omega}_3 - (I_1 - I_2) \omega_1 \omega_2 = K_3 .$$

Ці рівняння вперше одержав і опублікував у 1743 р. французький математик Ж. Л. Д'Аламбер. За допомогою їх визначається кутова швидкість  $\vec{\omega}$  щодо системи координат  $S'$ . Далі з кінематичних рівнянь Ейлера

$$\omega_1 = \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi ,$$

$$\omega_2 = \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi ,$$

$$\omega_3 = \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi} ,$$

підставляючи в них кутові швидкості  $\omega_i$ , одержуємо диференціальні рівняння для знаходження кутів  $\phi, \psi, \theta$ , які і характеризують положення системи  $S'$  щодо системи  $S$ .

Повну систему кінематичних і динамічних рівнянь уперше описав Л. Ейлер, тому і динамічні рівняння називаються *рівняннями Ейлера*. Ця система нелінійна, має три ступені вільності, і знайти її розв'язок у загальному вигляді не вдається. Лише для трьох випадків Л. Ейлер (1758), Ж. Л. Лагранж (1788) і С. В. Ковалевська (1888) знайшли розв'язки цих рівнянь, які справедливі за довільних початкових умов. Знайдено також багато частинних розв'язків, справедливих за певних початкових умов. У 1906 р. Е. Хюссон довів, що крім випадків Ейлера, Лагранжа та Ковалевської не існує інших розв'язків, справедливих за довільних початкових умов і таких, які можна виражати через елементарні або однозначні трансцендентні функції.

Розв'язок Ейлера стосується того випадку, коли  $\vec{K} = 0$ , тобто якщо на тіло не діють моменти зовнішніх сил або всі такі моменти зовнішніх сил взаємно врівноважуються. Ця умова реалізується, наприклад, для дзиги в однорідному полі тяжіння, якщо центр мас дзиги збігається з її точкою опори. У цьому випадку дія сили тяжіння компенсується реакцією опори. Прикладом такого тіла є, наприклад, дитяча іграшка Іван-покиван.

Зауважимо, що розв'язок Ейлера застосовний як у випадку симетричної дзиги, для якої реалізується одне із таких співвідношень між головними моментами інерції:

$$I_1 = I_2 \neq I_3, \quad I_1 \neq I_2 = I_3, \quad I_1 = I_3 \neq I_2,$$

так і у випадку асиметричної дзиги, для якої співвідношення між головними моментами інерції має вигляд  $I_1 \neq I_2 \neq I_3$ . На рис. 1 показано дзигу Ейлера для цього більш загального випадку.

Розв'язок Лагранжа поширюється на той випадок, коли тіло з віссю симетрії рухається в однорідному полі тяжіння, і його нерухома точка, на якій лежить центр мас, але не збігається з центром мас (точкою опори) (рис. 2). Зрозуміло, що в цьому випадку тіло є симетричною дзигою, і для головних моментів у цьому випадку справедливе співвідношення  $I_1 = I_2$ .

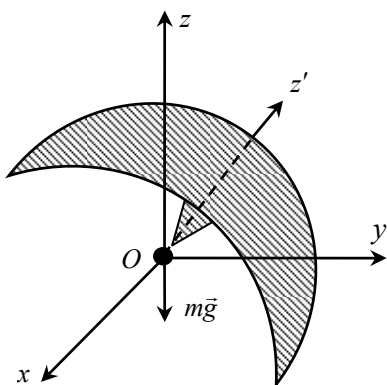


Рис. 1. Асиметрична дзига Ейлера

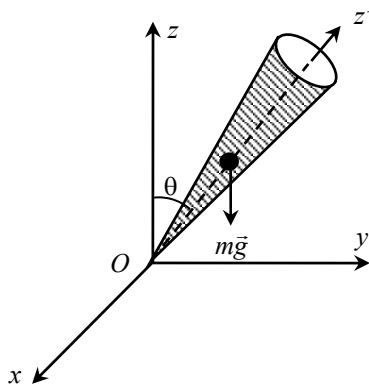


Рис. 2. Дзига Лагранжа



Розв'язок Ковалевської стосується того випадку, коли дзига симетрична і рухається в однорідному полі тяжіння, але має такий нерівномірний розподіл мас, що центр мас не лежить на головній осі. Окрім того, для дзиги Ковалевської має виконуватися специфічне співвідношення між головними моментами  $I_1 = I_2 = 2I_3$ . Тому дзига Ковалевської має радше математичний, ніж фізичний інтерес.

## § 2. Вільна динаміка асиметричної дзиги Ейлера. Лінійний випадок

У випадку вільної динаміки асиметричної дзиги Ейлера момент дзиги зберігається і динамічні рівняння Ейлера мають вигляд

$$I_1 \dot{\omega}_1 - (I_2 - I_3) \omega_2 \omega_3 = 0,$$

$$I_2 \dot{\omega}_2 - (I_3 - I_1) \omega_3 \omega_1 = 0,$$

$$I_3 \dot{\omega}_3 - (I_1 - I_2) \omega_1 \omega_2 = 0.$$

У цьому випадку ми маємо замкнені рівняння тільки для компонентів кутової швидкості. Це три рівняння першого порядку, на відміну від загального випадку, коли повна система рівнянь являє собою систему трьох рівнянь другого порядку. Таким чином, можна сказати, що у випадку Ейлера ефективною кількістю ступенів вільності є  $3/2$ , що дозволяє провести аналіз проблеми до кінця.

Наведені рівняння мають такі частинні розв'язки:

$$\omega_1 = \omega_{10} = \text{const}, \quad \omega_2 = 0, \quad \omega_3 = 0;$$

$$\omega_2 = \omega_{20} = \text{const}, \quad \omega_1 = 0, \quad \omega_3 = 0;$$

$$\omega_3 = \omega_{30} = \text{const}, \quad \omega_1 = 0, \quad \omega_2 = 0.$$

Ці розв'язки описують обертання тіла з довільною сталою кутовою швидкістю навколо однієї з трьох головних осей тензора інерції.

Проведемо дослідження на стабільність обертання навколо головних осей. При цьому співвідношення між головними моментами тензора інерції вибираємо такими:

$$I_1 < I_2 < I_3.$$

Додаємо по чергово до частинних розв'язків малі збурення й аналізуємо їх поведінку в часі. Наприклад, перший розв'язок шукаємо у вигляді

$$\omega_1 = \omega_{10} + \Delta\omega_1, \quad \omega_2 = \Delta\omega_2, \quad \omega_3 = \Delta\omega_3,$$

де  $\Delta\omega_i \ll \omega_{10}$ . Підставляємо ці вирази в динамічні рівняння Ейлера й нехтуємо малими квадратичними членами:

$$I_1 \Delta \dot{\omega}_1 = 0,$$

$$I_2 \Delta \dot{\omega}_2 - (I_3 - I_1) \Delta\omega_3 \omega_{10} = 0,$$

$$I_3 \Delta \dot{\omega}_3 - (I_1 - I_2) \Delta\omega_2 \omega_{10} = 0.$$

Перше рівняння дає розв'язок  $\Delta\omega_1 = \text{const}$ , який описує обертання навколо осі  $x_1$  з кутовою швидкістю  $\omega_{10} + \Delta\omega_1$ . Зводимо два інші рівняння системи до такого рівняння:

$$\Delta \ddot{\omega}_3 + \frac{(I_1 - I_2)(I_1 - I_3)}{I_2 I_3} \omega_{10}^2 \Delta\omega_3 = 0.$$

Розв'язок цього рівняння записується у вигляді  $\Delta\omega_3 = A \sin \tilde{\omega}_1 t$ ,  $\Delta\omega_2 = A \cos \tilde{\omega}_1 t$ , де  $\tilde{\omega}_1^2 = \omega_{10}^2 (I_1 - I_2)(I_1 - I_3) / I_2 I_3$ . Ураховуючи записане вище співвідношення  $I_1 < I_2 < I_3$ , помічаємо, що величина  $(I_1 - I_2)(I_1 - I_3)$  завжди додатна. Отже, збурення  $\Delta\omega_2$ ,  $\Delta\omega_3$  у часі осцилюють з постійною амплітудою  $A$ . Тобто, якщо початкові відхилення від частинного розв'язку  $\omega_1 = \text{const}, \omega_2 = 0, \omega_3 = 0$  малі, то вони залишаються малими і надалі. У цьому випадку кажуть, що такий рух, який відповідає обертанню твердого тіла навколо осі з найменшим моментом інерції  $I_1$ , стійкий.

Аналогічний результат одержуємо й для обертання навколо осі  $x_3$  з найбільшим моментом інерції  $I_3$ . У цьому випадку

частота визначається виразом  $\tilde{\omega}_3^2 = \omega_{30}^2 (I_3 - I_1)(I_3 - I_2)/I_1 I_2$ , і рух також буде стійким. Випадок обертання навколо осі  $x_2$  кардинально інший. У цьому разі рівняння для  $\Delta\omega_1$  можна звести до вигляду

$$\Delta\ddot{\omega}_1 - \gamma^2 \Delta\omega_1 = 0,$$

де  $\gamma^2 = \omega_{20}^2 (I_1 - I_2)(I_2 - I_3)/I_1 I_3$  є додатною величиною. Загальний розв'язок цього рівняння можна записати у вигляді  $\Delta\omega_1 = C_1 \exp(\gamma t) + C_2 \exp(-\gamma t)$ , тобто  $\Delta\omega_1$  у загальному випадку зростає експоненційно з часом. Таким чином, обертання навколо осі  $x_2$  із середнім моментом інерції  $I_2$  буде нестійким.

Таким чином, дзига Ейлера має дві сталі осі обертання – головні осі тензора інерції з найменшим і найбільшим моментами інерції. Почавши обертання навколо однієї із цих осей, дзига в подальшому прагне зберегти незмінним напрямком осі обертання щодо інерційної системи відліку  $S$ . Очевидною є можливість використати цю властивість дзиги Ейлера для "запам'ятовування" певного напрямку в просторі. Першим цю властивість використав французький фізик Ж. Фуко. Свій прилад він назвав гіроскопом.

### § 3. Вільна динаміка симетричної дзиги Ейлера

Перейдемо тепер до більш загального випадку, коли дзига обертається навколо довільної осі й можливі невеликі повороти тіла. У цьому випадку необхідно розглядати нелінійний рух, що складніше. Тому спочатку для спрощення розглянемо рух симетричної дзиги, тобто такої, у якій  $I_1 = I_2 = I$ ,  $I_3 \neq I$ . Очевидно, що в кожний момент часу напрямки векторів  $\vec{L}, \vec{\omega}$  і вісь дзиги Ейлера лежать в одній площині, що спрощує аналіз. Динамічні рівняння Ейлера в цьому випадку набувають такого вигляду:

$$I\dot{\omega}_1 - (I - I_3)\omega_2\omega_3 = 0,$$

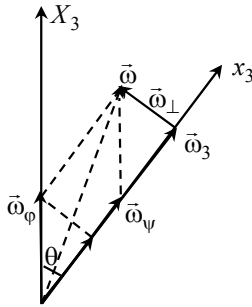
$$I\dot{\omega}_2 - (I_3 - I)\omega_3\omega_1 = 0,$$

$$I_3\dot{\omega}_3 = 0.$$

Звідси видно, що  $\omega_3 = \text{const}$ . Диференціюючи далі перше рівняння системи за часом і підставляючи в нього  $\dot{\omega}_2$  із другого рівняння, одержуємо таке диференціальне рівняння другого порядку щодо  $\omega_1$ :

$$\ddot{\omega}_1 + \left( \frac{I - I_3}{I} \omega_3 \right)^2 \omega_1 = 0.$$

Розв'язок цього рівняння і розв'язок аналогічного рівняння щодо  $\omega_2$  записуються у вигляді  $\omega_1 = \omega_{\perp} \sin(\omega_{\psi} t + \psi_0)$ ,  $\omega_2 = \omega_{\perp} \cos(\omega_{\psi} t + \psi_0)$ , де  $\omega_{\psi} = (I - I_3)\omega_3 / I$ , а величини  $\omega_{\perp}, \psi_0, \omega_3$  задаються початковими умовами.



**Рис. 3.** Розклад кутової швидкості за компонентами

Кутову швидкість  $\vec{\omega}$  можна зобразити у вигляді двох складових (рис. 3). Одна з них направлена вздовж осі дзиги і має величину  $\omega_3$ . Інша лежить у площині, яка перпендикулярна до осі дзиги, і має величину  $\omega_{\perp}$ , обертаючись навколо осі  $x_3$  із частотою  $\omega_{\psi}$  ( $\vec{\omega} = \vec{\omega}_3 + \vec{\omega}_{\perp}$ ).

Оберемо нерухому систему так, щоб вісь  $X_3$  була направлена вздовж постійного вектора  $\vec{L}$ . Тоді проекцією  $\vec{L}$  на вісь  $x_3$  буде величина  $L_3 = I_3\omega_3 = L \cos \theta$ , а величини  $\omega_{\psi}$  і  $\omega_3$  пов'язані між собою співвідношенням  $\omega_3 = \omega_{\psi} + \omega_{\phi} \cos \theta$ . Далі стали  $\omega_{\perp}$  пов'яжемо зі сталою  $\omega_{\phi}$ :  $L_{\perp}^2 = I^2\omega_1^2 + I^2\omega_2^2 = I^2\omega_{\perp}^2 \rightarrow L_{\perp} = I\omega_{\perp}$ .

З іншого боку,  $L_{\perp} = L \sin \theta$ . Отже,  $\omega_{\perp} = L \sin \theta / I = \omega_{\varphi} \sin \theta$ . Тепер розв'язок динамічних рівнянь Ейлера запишемо у вигляді

$$\omega_1 = \omega_{\varphi} \sin \theta \sin(\omega_{\psi} t + \psi_0),$$

$$\omega_2 = \omega_{\varphi} \sin \theta \cos(\omega_{\psi} t + \psi_0),$$

$$\omega_3 = \omega_{\varphi} \cos \theta + \omega_{\psi}.$$

Порівнюючи ці рішення з кінематичними рівняннями Ейлера, знаходимо  $\psi = \omega_{\psi} t + \psi_0$ ,  $\varphi = \omega_{\varphi} t + \varphi_0$ ,  $\theta = \theta_0$ . Таким чином, кут  $\theta$  під час руху тіла залишається сталим, а кути  $\psi$  і  $\varphi$  рівномірно змінюються з часом. Це відповідає рівномірному обертанню тіла навколо осі  $x_3$  з кутовою швидкістю  $\omega_{\psi}$  і водночас рівномірному обертанню осі  $x_3$  навколо осі  $X_3$  з кутовою швидкістю  $\omega_{\varphi}$ . Перше обертання називається *власним обертанням*, а друге – *регулярною прецесією*. З огляду на це повну кутову швидкість  $\vec{\omega}$ , на додаток до  $\vec{\omega} = \vec{\omega}_3 + \vec{\omega}_{\perp}$ , можна зобразити у вигляді векторної суми  $\vec{\omega} = \vec{\omega}_{\psi} + \vec{\omega}_{\varphi}$ . Зазначимо, що в кожний момент часу напрямки векторів  $\vec{L}, \vec{\omega}$  і вісь дзиги лежать в одній площині.

#### **§ 4. Вільний рух асиметричної дзиги Ейлера. Загальний випадок**

Перейдемо тепер до загального випадку, коли дзига Ейлера несиметрична (вважатимемо, що  $I_1 < I_2 < I_3$ ) й обертається навколо довільної осі. Знайдемо два інтеграли руху системи

$$I_1 \dot{\omega}_1 - (I_2 - I_3) \omega_2 \omega_3 = 0,$$

$$I_2 \dot{\omega}_2 - (I_3 - I_1) \omega_3 \omega_1 = 0,$$

$$I_3 \dot{\omega}_3 - (I_1 - I_2) \omega_1 \omega_2 = 0.$$

Один із них дістанемо, якщо помножимо ці рівняння відповідно на  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  і додамо:

$$\frac{1}{2}(I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2) = E = \text{const}.$$

Це закон збереження кінетичної енергії обертального руху дзиги.

Другий інтеграл знайдемо, якщо помножимо рівняння системи відповідно на  $I_1\omega_1, I_2\omega_2, I_3\omega_3$  і також додамо:

$$I_1^2\omega_1^2 + I_2^2\omega_2^2 + I_3^2\omega_3^2 = L^2 = \text{const}.$$

Цей інтеграл виражає збереження абсолютного моменту дзиги. Ці інтеграли можна виразити через складові вектора  $\vec{L}$  у вимороженій системі координат:

$$\frac{L_1^2}{I_1} + \frac{L_2^2}{I_2} + \frac{L_3^2}{I_3} = 2E, \quad L_1^2 + L_2^2 + L_3^2 = L^2.$$

Звідси можна зробити деякі висновки про характер руху дзиги. Кінець вектора  $\vec{L}$  рухається вздовж лінії перетину поверхонь кулі та еліпсоїда. Сама наявність перетину забезпечується нерівностями

$$2EI_1 < L^2 < 2EI_3.$$

Коли  $L^2$  не дуже відрізняється від  $2EI_1$ , сфера перетинає еліпсоїд по двох замкнених кривих, які оточують вісь  $x_1$  поблизу відповідних двох полюсів еліпсоїда (за  $L^2 \rightarrow 2EI_1$  ці криві стягуються в точки – полюси). У міру збільшення  $L^2$  до величини  $2EI_2$  ці криві перетворюються на дві плоскі криві (еліпси), які перетинаються в полюсах еліпсоїда на осі  $x_2$ . При подальшому збільшенні  $L^2$  знову виникають відокремлені траєкторії, але вони вже локалізовані поблизу осі  $x_3$ .

Для знаходження залежності компонентів  $\vec{\omega}$  від часу за допомогою одержаних інтегралів руху дзиги виразимо компоненти  $\omega_1, \omega_3$  як функції компонента  $\omega_2$ , а саме:

$$\omega_1 = \left\{ \frac{1}{I_1(I_3 - I_1)} \left[ (2EI_3 - L^2) - I_2(I_3 - I_2)\omega_2^2 \right] \right\}^{1/2},$$

$$\omega_3 = \left\{ \frac{1}{I_3(I_3 - I_1)} \left[ (L^2 - 2EI_1) - I_2(I_2 - I_1)\omega_2^2 \right] \right\}^{1/2}.$$

Підставляючи ці вирази в друге рівняння системи динамічних рівнянь Ейлера, одержуємо

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_2 \equiv \frac{d\omega_2}{dt} &= \frac{(I_3 - I_1)}{I_2} \omega_1 \omega_3 = \frac{1}{I_2 \sqrt{I_1 I_3}} \left\{ \left[ (2EI_3 - L^2) - I_2(I_3 - I_2)\omega_2^2 \right] \cdot \right. \\ &\quad \left. \cdot \left[ (L^2 - 2EI_1) - I_2(I_2 - I_1)\omega_2^2 \right] \right\}^{1/2} = \\ &= \left[ \frac{(I_3 - I_2)(I_2 - I_1)}{I_1 I_3} \right]^{1/2} \left\{ \left[ \frac{2EI_3 - L^2}{I_2(I_3 - I_2)} - \omega_2^2 \right] \left[ \frac{L^2 - 2EI_1}{I_2(I_2 - I_1)} - \omega_2^2 \right] \right\}^{1/2}. \end{aligned}$$

За умови  $L^2 > 2EI_2$  при введенні в цьому рівнянні замість змінних  $t$  і  $\omega_2$  нових змінних

$$\tau = t \left[ \frac{(I_3 - I_2)(L^2 - 2EI_1)}{I_1 I_2 I_3} \right]^{1/2} = \Omega t, \quad s = \omega_2 \left[ \frac{I_2(I_3 - I_2)}{2EI_3 - L^2} \right]^{1/2}$$

і додатного параметра  $k^2 < 1$  згідно з

$$k^2 = (I_2 - I_1)(2EI_3 - L^2) / (I_3 - I_2)(L^2 - 2EI_1),$$

одержуємо після відокремлення змінних такий інтеграл:

$$\tau = \int_0^s \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)}}.$$

Початок відліку часу умовно вибираємо в той момент, коли  $\omega_2 = 0$ . При оберненні одержаного вище інтеграла виникає еліптична функція Якобі (еліптичний синус), а саме,  $s = \operatorname{sn} \tau$ , чим

і визначається залежність  $\omega_2$  від часу. Ураховуючи означення ще двох еліптичних функцій

$$\operatorname{cn} \tau = \sqrt{1 - \operatorname{sn}^2 \tau}, \quad \operatorname{dn} \tau = \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 \tau},$$

згідно з вищенаведеними виразами для  $\omega_1$ ,  $\omega_3$  і  $s$  одержуємо

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \sqrt{\frac{2EI_3 - L^2}{I_1(I_3 - I_1)}} \operatorname{cn} \tau, \\ \omega_2 &= \sqrt{\frac{2EI_3 - L^2}{I_2(I_3 - I_2)}} \operatorname{sn} \tau, \\ \omega_3 &= \sqrt{\frac{L^2 - 2EI_1}{I_3(I_3 - I_1)}} \operatorname{dn} \tau. \end{aligned}$$

Покажемо тепер, що ці функції періодичні. Інтеграл для  $\tau$  можна переписати у вигляді

$$\tau = \int_0^{\arcsin s} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}},$$

якщо перейдемо від змінної  $s$  до змінної  $\varphi$ :  $s = \sin \varphi$ . Це є еліптичний інтеграл першого роду

$$\tau = F(k, \arcsin s).$$

Обернена до  $F$  функція називається *амплітудою*  $F$  і записується таким чином:

$$\kappa = \arcsin s = \operatorname{am} \tau \quad \text{або} \quad s = \sin \kappa = \operatorname{sinam} \tau = \operatorname{sn} \tau.$$

Обчислюємо

$$\begin{aligned} \tau(\kappa + 2\pi) &= \int_0^{\kappa + 2\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} + \\ &+ \int_{2\pi}^{2\pi + \kappa} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = \tau(\kappa) + 4K\left(k, \frac{\pi}{2}\right), \end{aligned}$$

тобто маємо



$$\begin{aligned}\operatorname{sn}(\tau + 4K) &\equiv \sin(\kappa + 2\pi) = \sin \kappa = \operatorname{sn} \tau, \\ \operatorname{cn}(\tau + 4K) &\equiv \cos(\kappa + 2\pi) = \cos \kappa = \operatorname{cn} \tau,\end{aligned}$$

де  $K\left(k, \frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}$  – повний еліптичний інтеграл

першого роду. Звідси випливає, що функції  $\operatorname{sn}, \operatorname{cn}, \operatorname{dn}$  за змінною  $\tau$  є періодичними з періодом  $4K(k, \pi/2)$ , причому цей період у часі  $t$  дається таким виразом:

$$T = 4K \sqrt{\frac{I_1 I_2 I_3}{(I_3 - I_2)(L^2 - 2EI_1)}}.$$

Через цей час вектор кутової швидкості  $\vec{\omega}$  повертається у своє початкове положення (але дзига у своє початкове положення в загальному випадку не повертається).

Визначимо тепер положення тіла щодо нерухомої системи  $S$ . Обираємо нерухому вісь  $X_3$  уздовж напрямку постійного вектора  $\vec{L}$ . Оскільки полярний і азимутальний кути напрямку  $X_3$  щодо осей  $x_1, x_2, x_3$  дорівнюють відповідно  $\theta$  і  $\pi/2 - \psi$  (див. рис. 1 в лекції 13), то, проєктуючи вектор  $\vec{L}$  на осі  $x_1, x_2, x_3$ , одержуємо

$$L \sin \theta \sin \psi = L_1 = I_1 \omega_1,$$

$$L \sin \theta \cos \psi = L_2 = I_2 \omega_2, \quad L \cos \theta = L_3 = I_3 \omega_3$$

Звідси маємо  $\cos \theta = I_3 \omega_3 / L$  і  $\operatorname{tg} \psi = I_1 \omega_1 / I_2 \omega_2$ , а використовуючи явні вирази для  $\omega_{1,2,3}$ , знаходимо

$$\cos \theta = \sqrt{\frac{I_3(L^2 - 2EI_1)}{L^2(I_3 - I_1)}} \operatorname{dn} \tau, \quad \operatorname{tg} \psi = \sqrt{\frac{I_1(I_3 - I_2)}{I_2(I_3 - I_1)}} \frac{\operatorname{cn} \tau}{\operatorname{sn} \tau},$$

чим і визначається залежність кутів  $\theta$  і  $\psi$  від часу; разом з компонентами вектора  $\vec{\omega}$  вони є періодичними функціями з періодом  $T = 4K(k, \pi/2)$ .

Виключаючи далі  $\dot{\theta}$  із таких кінематичних рівнянь Ейлера:

$$\omega_1 = \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi, \quad \omega_2 = \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi,$$

одержуємо

$$\dot{\phi} = \frac{\omega_1 \sin \psi + \omega_2 \cos \psi}{\sin \theta},$$

після чого, використовуючи формули  $L \sin \theta \sin \psi = I_1 \omega_1$ ,  $L \sin \theta \cos \psi = I_2 \omega_2$  і  $L \cos \theta = I_3 \omega_3$ , знаходимо

$$\frac{d\phi}{dt} = L \frac{I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2}{I_1^2 \omega_1^2 + I_2^2 \omega_2^2}.$$

Оскільки  $\dot{\phi} > 0$ , то кут  $\phi$  монотонно зростає, але швидкість цього зростання періодично змінюється, тому що періодичною функцією часу є права частина виразу для  $\dot{\phi}$ . Що стосується кута  $\theta$ , то, як видно з  $\cos \theta = I_3 \omega_3 / L$  і з того факту, що функція  $dn$  змінюється в інтервалі  $\sqrt{1-k^2} \leq dn \tau \leq 1$ , він періодично змінюється між двома граничними значеннями (за винятком випадку  $L^2 = 2EI_2$ ):

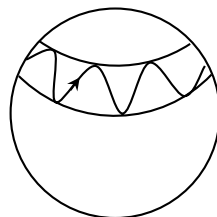
$$\theta_1 = \arccos \sqrt{\frac{I_3(L^2 - 2EI_1)}{L^2(I_3 - I_1)}} \quad \text{та} \quad \theta_2 = \arccos \sqrt{\frac{I_3(L^2 - 2EI_2)}{L^2(I_3 - I_2)}}.$$

Звідси випливає, що необхідно вважати  $L^2 > 2EI_2$  (це періциклоїдний рух). При іншому співвідношенні між головними моментами інерції  $I_1 > I_2 > I_3$  необхідно було б вважати  $L^2 < 2EI_2$  (це епіциклоїдний рух). Така зміна кутів  $\theta$  і  $\phi$  означає, що вісь  $x_3$  постійно обертається навколо нерухомої осі  $X_3$

(це обертання називається *прецесією*, але вона нерегулярна, як у випадку симетричної дзиги, оскільки її швидкість не постійна) і коливається в меридіанному напрямку (цей коливний рух називається *нутацією*).

Отже, у загальному випадку рух асиметричної дзиги Ейлера складається з власного обертання навколо осі  $x_3$  (кут  $\psi$ ), прецесії (кут  $\varphi$ ) і нутації (кут  $\theta$ ). Під час такого руху вісь  $x_3$  описує на поверхні уявної сфери криву, зображену на рис. 4.

Оскільки  $\omega_{1,2,3}$  є періодичними функціями (окрім випадку  $L^2 = 2EI_2$ ), то  $\cos\theta$  і  $\operatorname{tg}\psi$  за час  $4K/\Omega$  повертаються до своїх попередніх значень. Отже, і кути  $\theta$  та  $\psi$ , змінившись на ціле число  $2\pi$ , також повертаються до своїх попередніх значень.



**Рис. 4.** Рух осі  $x_3$  асиметричної дзиги Ейлера

На відміну від цього, кут  $\varphi$  у загальному випадку не змінюється за цей час на ціле число  $2\pi$ , оскільки із

$$\dot{\varphi}(\Omega t + 4K) = \dot{\varphi}(\Omega t)$$

одержуємо

$$\varphi(\Omega t + 4K) = \varphi(\Omega t) + C.$$

Тут  $C$  – стала інтегрування. Вона визначається початковими умовами. Якщо  $C = 2\pi m/n$ , де  $m$  і  $n$  – цілі числа, то за  $n$  періодів тіло повертається до свого початкового положення. Рух у цьому винятковому випадку буде періодичним. У загальному ж випадку  $C/2\pi$  не є раціональним числом, і тіло ніколи не повертається до своєї початкової орієнтації в нерухомій системі, хоча й перебуває в деякі моменти часу як завгодно близько до неї. Такий рух називається *майже періодичним*.

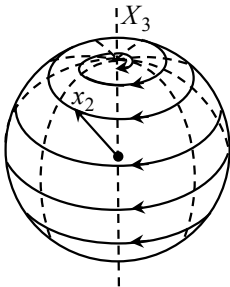
У випадку  $L^2 = 2EI_2$  модуль  $k$  дорівнює одиниці, а функції Якобі переходять у гіперболічні функції, тобто

$$\operatorname{sn} \tau = \operatorname{th} \tau, \quad \operatorname{cn} \tau = \operatorname{dn} \tau = \frac{1}{\operatorname{ch} \tau}.$$

Таким чином, розв'язок динамічних рівнянь Ейлера записуються у вигляді

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{2E(I_3 - I_2)}{I_1(I_3 - I_1)}} \frac{1}{\operatorname{ch} \Omega t}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{2E}{I_2}} \operatorname{th} \Omega t, \quad \omega_3 = \sqrt{\frac{2E(I_2 - I_1)}{I_3(I_3 - I_1)}} \frac{1}{\operatorname{ch} \Omega t}.$$

Звідси видно, що рух дзиги в цьому випадку неперіодичний. Для великих значень  $t$  компоненти  $\omega_1$  і  $\omega_3$  прямують до нуля, тобто дзига обертається навколо осі  $x_2$ . При цьому кутова швидкість  $\omega_2$  за  $t \rightarrow -\infty$  від'ємна, а за  $t \rightarrow +\infty$  додатна. Тобто для  $t \rightarrow -\infty$



**Рис. 5.** Рух осі  $x_2$  асиметричної дзиги Ейлера у випадку  $L^2 = 2EI_2$

середня головна вісь (вісь  $x_2$ ) орієнтована протилежно вектору  $\vec{L}$ , а для  $t \rightarrow +\infty$  – уздовж цього вектора. Оскільки вектор  $\vec{L}$  весь час зберігає сталий напрямок у нерухомій системі координат, то дзига під час руху перекидається. На поверхні уявної сфери вісь  $x_2$  описує гвинтоподібну криву, яка називається *локсодромією* (рис. 5).

### **Контрольні запитання та завдання**

1. Як виражається матриця кутової швидкості через матрицю повного обертання?
2. Зв'язок між вектором лінійної швидкості точок твердого тіла та вектором його кутової швидкості.
3. Теорема Ейлера про довільне переміщення твердого тіла, яке має нерухому точку.
4. Типи дзиг.
5. Обертання навколо яких осей у випадку асиметричної дзиги стійке?

## Лекція 15. Рух у неінерціальних системах відліку

Системи, що рухаються з прискоренням щодо інерціальних систем відліку або обертаються навколо них, називаються *неінерціальними системами відліку*. Закони Ньютона у звичайній формі в таких системах не виконуються. Формально другий закон Ньютона можна зберегти і в неінерціальних системах відліку, але для цього треба до реальних сил ввести фіктивні сили, що не пов'язані із взаємодією тіл між собою. Такі сили називаються *силами інерції*.

В інерціальній системі відліку функція Лагранжа однієї частинки в зовнішньому полі має вигляд

$$\mathcal{L}_0 = \frac{m\vec{v}_0^2}{2} - U(\vec{r}_0),$$

а відповідне рівняння руху записується у такому вигляді:

$$m \frac{d\vec{v}_0}{dt} = - \frac{\partial U}{\partial \vec{r}_0}$$

(індексом 0 тут відмічаємо величини, які належать до інерціальних систем відліку).

Розглянемо тепер питання про те, який вигляд мають рівняння руху частинки в неінерціальних системах відліку. При вирішенні цього питання знову можна скористатись принципом найменшої дії, який інваріантний щодо переходу до довільних систем координат. При цьому залишаються в силі й рівняння Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{v}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{r}} = 0,$$

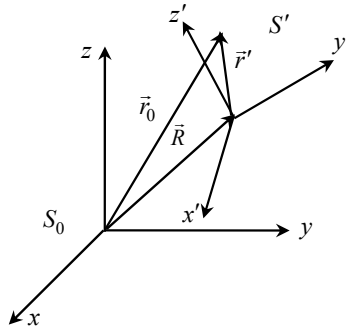
але із функцією Лагранжа, відмінною від  $\mathcal{L}_0$ . Знайдемо її.

Нехай система  $S'$  рухається щодо системи  $S_0$  поступально зі швидкістю  $\vec{V}(t) = d\vec{R}/dt$  (рис. 1). Швидкості  $\vec{v}_0$  і  $\vec{v}'$  частинки

щодо систем  $S_0$  і  $S'$  пов'язані співвідношенням  $\vec{v}_0 = \vec{v}' + \vec{V}(t)$ . Підставивши цей вираз у функцію Лагранжа  $\mathcal{L}_0$ , одержимо функцію Лагранжа в системі  $S'$ :

$$\mathcal{L}' = \frac{m\vec{v}'^2}{2} + m\vec{v}'\vec{V} + \frac{m}{2}\vec{V}^2 - U,$$

де  $\vec{V}^2(t)$  – задана функція часу, і тому може бути записана у вигляді повної похідною за часом від деякої функції (цей член виключаємо із функції Лагранжа  $\mathcal{L}'$ ).



**Рис. 1.** Рух неінерціальної системи відліку  $S'$  щодо інерціальної  $S_0$

Запишемо тепер другий доданок таким чином:

$$m\vec{v}'\vec{V} = m\vec{V} \frac{d\vec{r}'}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{r}'\vec{V}) - m\vec{r}' \frac{d\vec{V}}{dt}.$$

Тепер функція Лагранжа  $\mathcal{L}'$  записується в канонічному вигляді

$$\mathcal{L}' = T' - U',$$

де  $U' = U - m\vec{W}\vec{r}'$  – нова форма потенціальної енергії,  $\vec{W} = d\vec{V}/dt$  – прискорення поступального руху системи відліку  $S'$  щодо системи  $S_0$ . Рівняння Лагранжа із цією спрощеною функцією Лагранжа тепер набуває вигляду

$$m \frac{d\vec{v}'}{dt} = -\frac{\partial U'}{\partial \vec{r}'} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}'} - m\vec{W}(t).$$

Звідси видно, що прискорений поступальний рух системи відліку еквівалентний появі однорідного силового поля, причому сила, що виникає, дорівнює добутку маси на прискорення  $\vec{W}$  і направлена в протилежному напрямку до цього прискорення.

Введемо ще одну систему координат  $S$ , яка має спільний із системою  $S'$  початок, але обертається навколо неї з кутовою швидкістю  $\vec{\omega}(t)$ . Швидкість  $\vec{v}'$  частинки щодо системи  $S'$  є сумою швидкості  $\vec{v}$  щодо системи  $S$  і швидкості  $[\vec{\omega}, \vec{r}]$  її обертання разом із системою  $S$ :

$$\vec{v}' = \vec{v} + [\vec{\omega}, \vec{r}],$$

(радіус-вектори  $\vec{r}$  і  $\vec{r}'$  частинки в системах  $S$  і  $S'$  збігаються). Підставляючи далі цей вираз у функцію Лагранжа  $\mathcal{L}'$ , одержуємо

$$\mathcal{L} = \frac{mv^2}{2} + m\vec{v} \cdot [\vec{\omega}, \vec{r}] + \frac{m}{2} [\vec{\omega}, \vec{r}]^2 - m\vec{W}\vec{r} - U.$$

Зазначимо, що третій і четвертий доданки в цьому виразі залежать лише від координат частинки. Їх можна вважати додатковою "потенціальною енергією", пов'язаною з неінерціальністю системи відліку. Другий же доданок, який лінійний як щодо координати, так і щодо швидкості частинки, являє собою приклад гіроскопічного доданка. Він не приналежний ні до кінетичної енергії, ні до потенціальної.

Зупинимось далі на характеристиці зв'язку між швидкостями  $\vec{v}$  і  $\vec{v}_0$  у системах  $S$  і  $S_0$ :

$$\vec{v}_0 = \vec{v} + \vec{V} + [\vec{\omega}, \vec{r}].$$

Тут  $\vec{v}$  – вектор, що характеризує швидкість переміщення частинки щодо неінерціальної системи координат. Він називається *відносною швидкістю*. Сума  $\vec{V} + [\vec{\omega}, \vec{r}]$  є швидкістю тієї точки системи  $S$ , у якій перебуває в даний момент матеріальна точка.

Якщо  $\vec{v} = 0$ , то матеріальна точка нерухома щодо системи  $S$ , а щодо системи  $S_0$  вона має величину  $\vec{V} + [\vec{\omega}, \vec{r}]$ . Ця швидкість називається *переносною швидкістю*, у якій перший доданок обумовлений поступальним рухом неінерціальної системи відліку, а другий її обертанням. З такою швидкістю, нерухома в системі  $S$  матеріальна точка, переноситься разом із цією системою щодо системи  $S_0$ .

Отже, швидкість матеріальної точки в системі  $S_0$  є сумою переносної та відносної швидкостей:

$$\vec{v}_0 = \vec{v}_n + \vec{v}_b.$$

Для обчислення частинних похідних, що входять у рівняння Лагранжа, випишемо повний диференціал від  $\mathcal{L}$ :

$$\begin{aligned} d\mathcal{L} &= m\vec{v}d\vec{v} + md\vec{v}[\vec{\omega}, \vec{r}] + m\vec{v}[\vec{\omega}, d\vec{r}] + m[\vec{\omega}, \vec{r}][\vec{\omega}, d\vec{r}] - m\vec{W}d\vec{r} - \frac{\partial U}{\partial \vec{r}}d\vec{r} = \\ &= m\vec{v}d\vec{v} + md\vec{v}[\vec{\omega}, \vec{r}] + md\vec{r}[\vec{v}, \vec{\omega}] + m[[\vec{\omega}, \vec{r}], \vec{\omega}]d\vec{r} - m\vec{W}d\vec{r} - \frac{\partial U}{\partial \vec{r}}d\vec{r}. \end{aligned}$$

Групуючи у цьому виразі доданки, що мають  $d\vec{v}$  і  $d\vec{r}$ , знаходимо

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{v}} = m\vec{v} + m[\vec{\omega}, \vec{r}], \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{r}} = m[\vec{v}, \vec{\omega}] + m[[\vec{\omega}, \vec{r}], \vec{\omega}] - m\vec{W} - \frac{\partial U}{\partial \vec{r}}.$$

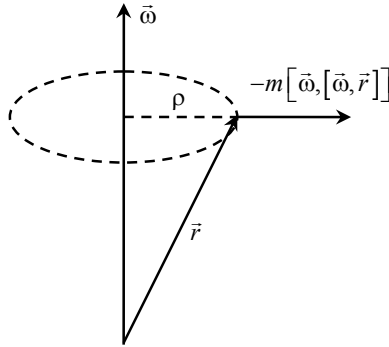
Підставляючи ці вирази в  $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{v}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{r}} = 0$ , приходимо до шуканого рівняння руху

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}} - m\vec{W} + m[\vec{r}, \dot{\vec{\omega}}] + 2m[\vec{v}, \vec{\omega}] + m[\vec{\omega}, [\vec{r}, \vec{\omega}]].$$

Звідси видно, що "сили інерції", які обумовлені обертанням системи відліку, складаються з трьох частин. Сила  $m[\vec{r}, \dot{\vec{\omega}}]$  викликана нерівномірністю обертального руху, а дві інші сили наявні й при рівномірному русі. Сила  $m[\vec{\omega}, [\vec{r}, \vec{\omega}]]$  називається *доцентровою*. Вектор цієї сили лежить у площині, яка проходить через вектори  $\vec{r}$  і  $\vec{\omega}$ , а напрямок цього вектора перпендикуляр-



ний осі обертання, а саме, в бік від осі (рис. 2). За величиною ця сила дорівнює  $m\rho\omega^2$ , де  $\rho$  – відстань частинки від осі обертання. Сила  $2m[\vec{v}, \vec{\omega}]$  називається *силою Кориоліса*. Вона залежить від швидкості частинки й являє собою гіроскопічну силу.



**Рис. 2.** Схематичне зображення відцентрової сили

Розглянемо тепер окремо випадок рівномірного обертання системи координат без поступального прискорення, тобто запишемо функцію Лагранжа та відповідне їй рівняння руху за  $\vec{\omega} = \text{const}$ ,  $\vec{W} = 0$ :

$$\mathcal{L} = \frac{mv^2}{2} + m\vec{v}[\vec{\omega}, \vec{r}] + \frac{m}{2}[\vec{\omega}, \vec{r}]^2 - U,$$

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}} + 2m[\vec{v}, \vec{\omega}] + m[\vec{\omega}, [\vec{r}, \vec{\omega}]].$$

Якщо в цьому випадку  $U$  не залежить явно від часу, то функція Лагранжа також не залежить від часу. Тобто відбувається збереження деякої фізичної величини, а саме, механічної енергії. Обчислимо енергію частинки в цьому випадку. Підставляючи  $\vec{p} = \partial\mathcal{L}/\partial\vec{v} = m\vec{v} + m[\vec{\omega}, \vec{r}]$  в  $E = \vec{p}\vec{v} - \mathcal{L}$ , одержуємо

$$E = \frac{mv^2}{2} - \frac{m}{2}[\vec{\omega}, \vec{r}]^2 + U.$$

Звідси видно, що вплив обертання системи відліку зводиться до додавання до енергії частинки члена (другий доданок), який залежить лише від координати частинки. Ця додаткова потенціальна енергія називається *доцентровою*.

Зауважимо, що швидкість  $\vec{v}$  частинки щодо системи відліку, що рівномірно обертається, пов'язана зі швидкістю  $\vec{v}_0$  щодо інерціальної системи  $S_0$  співвідношенням  $\vec{v}_0 = \vec{v} + [\vec{\omega}, \vec{r}]$ . Тому імпульс  $\vec{p}$  частинки в системі  $S$  збігається з її імпульсом  $\vec{p}_0 = m\vec{v}_0$  у системі  $S_0$ . Разом з цим збігаються і моменти імпульсів  $\vec{L}_0 = [\vec{r}, \vec{p}_0]$  та  $\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}]$ . Проте енергії частинки в системах  $S_0$  і  $S$  різні. Дійсно, підставляючи  $\vec{v} = \vec{v}_0 - [\vec{\omega}, \vec{r}]$  в  $E = mv^2/2 - m[\vec{\omega}, \vec{r}]^2/2 + U$ , одержуємо

$$E = \frac{mv_0^2}{2} - m\vec{v}_0 [\vec{\omega}, \vec{r}] + U = \frac{mv_0^2}{2} + U - m[\vec{r}, \vec{v}_0] \vec{\omega} = E_0 - \vec{L} \vec{\omega}.$$

Цією формулою встановлюється закон перетворення енергії при переході до системи координат, що рівномірно обертається.

### **Контрольні запитання та завдання**

1. Які сили називаються силами інерції?
2. Сила Коріоліса.
3. Який напрямок має доцентрова сила?
4. Яка швидкість називається переносною?
5. Закон перетворення енергії при переході до системи координат, що рівномірно обертається.

## Розділ V ФОРМАЛІЗМ ГАМІЛЬТОНА

### Лекція 16. Рівняння Гамільтона

#### § 1. Виведення рівнянь Гамільтона на основі перетворення Лежандра та за варіаційним принципом

Формулювання законів механіки за допомогою функції Лагранжа  $\mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t)$  і відповідних їй  $s$  рівнянь Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0$$

не єдино можливе. Існують і більш потужні методи дослідження механічних систем.

Перейдемо від змінних  $q, \dot{q}, t$  до змінних  $q, p, t$  за допомогою процедури Лежандра (тривіальної математичної процедури – додавання нуля в необхідній формі). У результаті повний диференціал функції Лагранжа (як функції координат і швидкостей) трансформується таким чином:

$$\begin{aligned} d\mathcal{L} &= \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} dq_i + \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i = \sum_i \dot{p}_i dq_i + \sum_i p_i d\dot{q}_i = \\ &= \sum_i \dot{p}_i dq_i + \sum_i p_i d\dot{q}_i + \sum_i dp_i \dot{q}_i - \sum_i dp_i \dot{q}_i = \\ &= \sum_i \dot{p}_i dq_i + d \left( \sum_i p_i \dot{q}_i \right) - \sum_i \dot{q}_i dp_i. \end{aligned}$$

Переносячи тепер повні диференціали вліво, одержуємо рівність

$$d\left(\sum_i p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}\right) = -\sum_i \dot{p}_i dq_i + \sum_i \dot{q}_i dp_i.$$

Величина, яка міститься в цьому виразі під знаком диференціалу, називається *гамільтоною функцією* (або *гамільтоніаном*). Оскільки величина  $p_i$  дорівнює  $\partial\mathcal{L}/\partial\dot{q}_i$ , бачимо, що функція Гамільтона збігається з енергією системи. З іншого боку, оскільки диференціал  $dH$  виражається через диференціали  $dq_i$  і  $dp_i$ , звідси випливає, що гамільтонова функція – це енергія системи, яка виражається через координати та імпульси

$$H(p, q, t) = \sum_i p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}(\dot{q}, q, t).$$

Важливо підкреслити, що гамільтонова функція завжди дорівнює енергії системи, яку можна записувати різними способами: або через координати та швидкості, або через координати та імпульси. Енергія тільки тоді має сенс функції Гамільтона, коли вона записана лише через координати та імпульси, унаслідок чого із диференціальних рівностей

$$dH = -\sum_i \dot{p}_i dq_i + \sum_i \dot{q}_i dp_i = \sum_i \left( \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i \right)$$

безпосередньо можна отримати такі рівняння Гамільтона:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}.$$

Ці рівняння, які ще називають *канонічними*, складають замість  $s$  рівнянь другого порядку систему  $2s$  диференціальних рівнянь першого порядку щодо  $2s$  невідомих незалежних функцій  $q(t)$  і  $p(t)$ .

Опис динаміки механічної системи за допомогою рівнянь Гамільтона є суттю гамільтонового формалізму класичної механіки. Очевидно, усі формалізми класичної механіки базуються на одних і тих самих постулатах. Їх використання приводить до еквівалентних результатів, а вибір того чи іншого із формалізмів є лише питанням зручності. Щодо цього формалізм Гамільтона (а також тісно пов'язаний з ним формалізм Гамільтона–Якобі) найбільш абстрактні. Вони переважно відходять від наочного

і звичного формалізму Ньютона. Водночас формалізм Гамільтона допускає більш прямий перехід до квантової механіки. Уже в силу цих обставин вивчення формалізмів Гамільтона та Гамільтона–Якобі є однією з найважливіших задач механіки, яка розглядається як частина сучасної теоретичної фізики. Проте, навіть залишаючись у межах класичної механіки, формалізм Гамільтона зручний і важливий, оскільки дозволяє найбільш повно й природно враховувати наявність циклічних змінних і роль пов'язаних з ними інтегралів руху. Дійсно, якщо деяка координата  $q_i$  циклічна (не входить до функції Лагранжа), то вона не входить і до функції Гамільтона. Тоді  $p_i = -\partial H/\partial q_i = 0$ , тобто величина  $p_i$  зберігається і збігається зі своїм початковим значенням  $p_i(0) = \alpha_i$ . Тоді у функції Гамільтона можна замінити  $p_i$  на це початкове значення:

$$\begin{aligned} H(p_1, \dots, p_i, \dots, p_s, q_1, \dots, q_{i-1}, q_{i+1}, \dots, q_s) &= \\ = H(p_1, \dots, \alpha_s, \dots, p_s, q_1, \dots, q_{i-1}, q_{i+1}, \dots, q_s), \end{aligned}$$

тобто фактично необхідно розв'язувати задачу, у якій кількість ступенів вільності зменшено на одиницю.

Зауважимо, що за наявності циклічної координати  $q_i$  лагранжіан має вигляд

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(q_1, \dots, q_{i-1}, q_{i+1}, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s, t),$$

тобто ми повинні все ще розв'язувати задачу із  $s$  ступенями вільності. На протигагу цьому, у межах гамільтонового підходу циклічною координатою вважається така змінна, яку можна проігнорувати, оскільки ми маємо задачу із  $s-1$  ступенями вільності. Циклічна координата  $p_s$  проявляється лише у вигляді сталої інтегрування  $\alpha_s$ , яка визначається початковими умовами. Після цього можна знайти й циклічну координату  $q_s$ , інтегруючи рівняння

$$\dot{q}_s = \frac{\partial H}{\partial \alpha_s}.$$

Повна похідна за часом від функції Гамільтона записується у вигляді

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial H}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial H}{\partial p_i} \dot{p}_i.$$

Скориставшись рівняннями Гамільтона, це співвідношення перепишеться у такий спосіб:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}.$$

Якщо  $H$  не залежить явно від часу, то  $dH/dt = 0$ , тобто  $H = \text{const}$ , і ми знову приходимо до закону збереження енергії.

Зазначимо, що рівняння Гамільтона можна також отримати із принципу Гамільтона для дії. Оскільки  $\mathcal{L} = \sum_i p_i \dot{q}_i - H$ , маємо

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt = \int_{t_1}^{t_2} \left( \sum_i p_i dq_i - H dt \right).$$

Знайдемо варіацію дії для більш простого випадку (одна координата та один імпульс)

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \delta p dq + p \delta q - \frac{\partial H}{\partial q} \delta q dt - \frac{\partial H}{\partial p} \delta p dt \right\}.$$

Інтегруючи другий доданок у цьому виразі частинами, одержуємо

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \delta p \left( dq - \frac{\partial H}{\partial p} dt \right) + p \delta q \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \delta q \left( dp + \frac{\partial H}{\partial q} dt \right).$$

Оскільки  $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$ , то другий доданок дорівнює нулю. Тоді  $\delta S$  може дорівнювати нулю за довільних незалежних варіацій  $\delta p$  і  $\delta q$  лише тоді, коли вирази під інтегралами перетворюються на нулі, тобто одержуємо рівняння Гамільтона

$$dq = \frac{\partial H}{\partial p} dt, \quad dp = -\frac{\partial H}{\partial q} dt.$$

## § 2. Функція Рауса

Іноколи доцільно при переході до нових змінних замінити не всі узагальнені швидкості, а лише деякі з них. Розглянемо функцію Лагранжа  $\mathcal{L}(q, \xi, \dot{q}, \dot{\xi})$ . Її диференціал можна записати у вигляді

$$d\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q}dq + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}}d\dot{q} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\xi}d\xi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\xi}}d\dot{\xi} = pdq + p\dot{q} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\xi}d\xi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\xi}}d\dot{\xi}.$$

Далі цей вираз за допомогою процедури Лежандра переписується у вигляді

$$d(\mathcal{L} - p\dot{q}) = pdq - \dot{q}dp + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\xi}d\xi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\xi}}d\dot{\xi}.$$

Вводимо функцію Рауса  $R(q, p, \xi, \dot{\xi}) = p\dot{q} - \mathcal{L}$ , у якій швидкість  $\dot{q}$  виражена через імпульс  $p$  за допомогою рівності  $p = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{q}$ . Диференціал  $R$  тепер набуде вигляду

$$dR = -pdq + \dot{q}dp - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\xi}d\xi - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\xi}}d\dot{\xi}.$$

Звідси випливають такі рівняння:

$$\dot{q} = \frac{\partial R}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial R}{\partial q}, \quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\xi} = -\frac{\partial R}{\partial\xi}, \quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\xi}} = -\frac{\partial R}{\partial\dot{\xi}}.$$

Підставляючи останні рівності в рівняння Лагранжа для координати  $\xi$ , одержуємо

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial R}{\partial\dot{\xi}}\right) - \frac{\partial R}{\partial\xi} = 0.$$

Отже, функцію Рауса можна представляти як своєрідну гібридну функцію, оскільки вона є гамільтоною щодо координати  $q$  і лагранжевою щодо координати  $\xi$ .

Застосування функції Рауса може бути доцільним тоді, коли є циклічні координати. Якщо координата  $q$  циклічна, то вона не входить безпосередньо до функції Лагранжа, а тому й до функції Рауса. Імпульс  $p$ , який відповідає циклічній координаті, сталий.

Після заміни імпульсу  $p$  його сталим значенням  $\alpha$  рівняння

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial R(\alpha, \xi, \dot{\xi})}{\partial\dot{\xi}}\right) - \frac{\partial R(\alpha, \xi, \dot{\xi})}{\partial\xi} = 0$$

перетворюється на рівняння тільки щодо змінної  $\xi$ . Після знаходження  $\xi(t)$  підставляємо його в рівняння

$$\dot{q} = \frac{\partial R(\alpha, \xi, \dot{\xi})}{\partial \alpha},$$

а далі безпосереднім інтегруванням знаходимо і функцію  $q(t)$ .

### § 3. Канонічні перетворення

Переваги методу Гамільтона полягають у тому, що він більш глибоко проникає у структуру механіки, оскільки рівноправність координат та імпульсів як незалежних змінних дає більшу свободу вибору величин, які ми приймаємо за узагальнені координати та узагальнені імпульси. Таким чином, ми приходимо до нових, більш абстрактних форм класичної механіки, які є початковими пунктами при побудові статистичної механіки та квантової теорії.

Уже у формалізмі Лагранжа вибір узагальнених координат  $q$  не обмежений ніякими умовами – ними можуть бути довільні  $s$  нових величин, наприклад,  $Q_1, \dots, Q_s$ , які пов'язані зі старими величинами  $q_1, \dots, q_s$  т. зв. точковими перетвореннями

$$Q_i = Q_i(q, t).$$

Як уже зазначалось, рівняння Лагранжа інваріантні щодо цих точкових перетворень. Цей факт впливає з того, що рівняння Лагранжа виводяться з умови екстремуму дії, а ця умова, очевидно, не залежить від того, у яких змінних ми її шукаємо. Щодо властивості інваріантності можна переконатися й безпосередньо з ряду таких рівностей:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} &= 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q} \frac{\partial Q}{\partial q} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}} \frac{\partial \dot{Q}}{\partial q}, \quad \dot{Q} = \frac{dQ}{dt} = \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial q} \dot{q}, \quad \frac{\partial \dot{Q}}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial Q}{\partial q}, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q} \frac{\partial Q}{\partial \dot{q}} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}} \frac{\partial \dot{Q}}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}} \frac{\partial Q}{\partial q}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q} \frac{\partial Q}{\partial q} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial Q}{\partial q} \right) - \frac{\partial Q}{\partial q} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}} \right) + \\ &+ \frac{\partial Q}{\partial q} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}} \right) = \frac{\partial Q}{\partial q} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}} \right) \right) + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}} \frac{\partial Q}{\partial q} \right) \rightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q} = 0. \end{aligned}$$



Очевидно, що й рівняння Гамільтона також інваріантні щодо цих точкових перетворень, але в гамільтоновому підході поняття перетворення може бути розширене таким чином, що воно буде включати в себе перетворення всіх  $2s$  незалежних змінних  $p$  і  $q$  до нових незалежних змінних  $P$  і  $Q$  за формулами

$$P_i = P_i(p, q, t), \quad Q_i = Q_i(p, q, t).$$

Розширення класу допустимих перетворень є однією з суттєвих переваг гамільтонового методу механіки. Проте не для всіх допустимих перетворень рівняння Гамільтона зберігають свій канонічний вигляд. Серед таких перетворень особливо важливими є т. зв. канонічні перетворення. Виведемо тепер умови, яким мають задовольняти ці перетворення, щоб рівняння руху в нових змінних  $P$  і  $Q$  мали вигляд

$$\dot{Q} = \frac{\partial H'}{\partial P_i}, \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial H'}{\partial Q_i}$$

з деякою новою функцією Гамільтона  $H'(P, Q, t)$ . До формул для канонічних перетворень можна дійти таким чином. Як було показано, рівняння Гамільтона можна отримати на основі принципу найменшої дії у формі

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} \left( \sum_i p_i dq_i - H dt \right) = 0.$$

Для нових змінних  $P$  і  $Q$  також необхідне виконання принципу найменшої дії, щоб вони задовольняли рівняння Гамільтона, тобто маємо

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left( \sum_i P_i dQ_i - H' dt \right) = 0.$$

Два цих принципи еквівалентні один одному, якщо їх підінтегральні вирази відрізняються на повний диференціал довільної функції  $F_1$  старих і нових координат (і часу), тобто приходимо до такого співвідношення:

$$dF_1(q, Q, t) = \sum_i p_i dq_i - \sum_i P_i dQ_i + (H' - H) dt.$$

*Перетворення*, яке задовольняє це співвідношення, називається *канонічним*. Це перетворення характеризується функцією  $F_1$ , яка називається *твірною функцією* даного канонічного перетворення. За допомогою цієї функції можемо обчислити старі й нові імпульси, а також нову функцію Гамільтона:

$$p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i}, \quad P_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i}, \quad H' = H + \frac{\partial F_1}{\partial t}.$$

Ці формули за заданої функції  $F_1 = F_1(q, Q, t)$  дають зв'язок між старими  $p, q$  і новими  $P, Q$  змінними, а також дають вираз для нової гамільтонової функції.

Часто зручніше виражати твірну функцію через старі координати  $q$  і нові імпульси  $P$ . Для одержання формул відповідних канонічних перетворень виконаємо таке перетворення Лежандра:

$$dF_1 = \sum_i p_i dq_i - \sum_i P_i dQ_i - \sum_i Q_i dP_i + \sum_i Q_i dP_i + (H' - H) dt.$$

Перепишучи це співвідношення у вигляді

$$dF_2(q, P, t) = d\left(F_1 + \sum_i P_i Q_i\right) = \sum_i p_i dq_i + \sum_i Q_i dP_i + (H' - H) dt,$$

одержуємо

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}, \quad Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i}, \quad H' = H + \frac{\partial F_2}{\partial t}.$$

Аналогічним чином можна перейти до формул канонічних перетворень, які виражаються через твірні функції, що залежать від змінних  $p, Q$  та  $p, P$ . Після застосування до виразу

$$dF_1 = \sum_i p_i dq_i - \sum_i P_i dQ_i + (H' - H) dt$$

необхідного перетворення Лежандра, маємо

$$dF_3(p, Q, t) = d\left(F_1 + \sum_i p_i q_i\right) = -\sum_i q_i dp_i - \sum_i P_i dQ_i + (H' - H) dt,$$

тобто одержуємо

$$q_i = -\frac{\partial F_3}{\partial p_i}, \quad P_i = -\frac{\partial F_3}{\partial Q_i}, \quad H' = H + \frac{\partial F_3}{\partial t}.$$

I, нарешті, застосовуючи до цього ж співвідношення подвійне перетворення Лежандра, приходимо до рівності

$$\begin{aligned} dF_4(p, P, t) &= d\left(F_1 + \sum_i P_i Q_i - \sum_i p_i q_i\right) = \\ &= -\sum_i q_i dp_i + \sum_i Q_i dP_i + (H' - H) dt, \end{aligned}$$

на основі якої одержуємо такі рівняння:

$$q_i = -\frac{\partial F_4}{\partial p_i}, \quad Q_i = \frac{\partial F_4}{\partial P_i}, \quad H' = H + \frac{\partial F_4}{\partial t}.$$

Отже, твірну функцію  $F$  можна записати в одному із чотирьох видів:

$$F_1(q, Q, t), \quad F_2(q, P, t), \quad F_3(p, Q, t), \quad F_4(p, P, t).$$

Оскільки перетворення  $Q_i = Q_i(p, q, t)$ ,  $P_i = P_i(p, q, t)$  пов'язують кожен з величин  $P, Q$  як із координатами  $q$ , так і з імпульсами  $p$ , то змінні  $Q$  уже не мають значення суто просторових координат. Відмінність між обома групами змінних стає в основному питанням номенклатурним, тобто ми самі називаємо їх. Наприклад, у канонічному перетворенні  $Q_i = p_i$ ,  $P_i = -q_i$ , якому відповідає твірна функція  $F_1 = \sum_i q_i Q_i$ , відбувається перейменування координат та імпульсів.

Розглянемо ще два простих приклади канонічних перетворень. Нехай твірна функція має вигляд  $F_2 = \sum_i q_i P_i$ . Така функція

приводить до тотожного канонічного перетворення, а саме:

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} = P_i, \quad Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i} = q_i, \quad H' = H.$$

Інший приклад, який важливий у подальшому при переході до змінних "дія-кут", пов'язаний із твірною функцією

$F_1 = \frac{m}{2} \omega q^2 \operatorname{ctg} Q$ , де константи  $m$  і  $\omega$  позначають масу та власну частоту лінійного гармонічного осцилятора. Тоді старі та нові імпульси набувають вигляду

$$p = \frac{\partial F_1}{\partial q} = m\omega q \operatorname{ctg} Q, \quad P = -\frac{\partial F_1}{\partial Q} = \frac{m\omega q^2}{2\sin^2 Q}.$$

Користуючись цими співвідношеннями, виражаємо старі змінні через нові, а саме:

$$q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \sin Q, \quad p = \sqrt{2m\omega P} \cos Q.$$

Підставляючи далі ці вирази в гамільтоніан гармонічного осцилятора  $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}q^2$ , одержуємо його в нових змінних:

$$H = \omega P \cos^2 Q + \omega P \sin^2 Q = \omega P.$$

Бачимо, що цей гамільтоніан циклічний щодо  $Q$ , і тому новий імпульс  $P$  має бути величиною сталою. Очевидно, що він дорівнює повній енергії, поділеній на  $\omega$ :  $P = E/\omega$ . Після цього з рівняння  $\dot{Q} = \partial H / \partial P = \omega$  знаходимо  $Q = \omega t + \alpha$ , де  $\alpha$  – стала інтегрування, яка визначається початковими умовами.

Таким чином, у зв'язку з умовністю термінології узагальнених координат та узагальнених імпульсів у гамільтоновому методі їх називають *спряженими величинами*. Умову канонічної спряженості можна виразити за допомогою т. зв. дужок Пуассона. Вони, як і рівняння Гамільтона, інваріантні щодо канонічних перетворень.

Нехай  $f(p, q, t)$  – деяка функція координат, імпульсів і часу. Запишемо її повну похідну за часом

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_k \left( \frac{\partial f}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial f}{\partial p_k} \dot{p}_k \right).$$

Підставляючи сюди замість  $\dot{q}_k$  і  $\dot{p}_k$  їх вирази із рівнянь Гамільтона, одержуємо

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{H, f\},$$

де введено позначення

$$\{H, f\} = \sum_k \left( \frac{\partial H}{\partial p_k} \frac{\partial f}{\partial q_k} - \frac{\partial H}{\partial q_k} \frac{\partial f}{\partial p_k} \right).$$

Цей вираз називається *дужкою Пуассона* для величин  $H$  і  $f$ .  
Те, що  $f$  є інтегралом руху, можна записати у вигляді

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \{H, f\} = 0.$$

Якщо ж інтеграл не залежить явно від часу, то  $\{H, f\} = 0$ , тобто дужка Пуассона із функцією Гамільтона має перетворюватись на нуль. Для довільної пари величин  $f$  і  $g$  дужка Пуассона визначається аналогічно

$$\{f, g\} = \sum_k \left( \frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial g}{\partial q_k} - \frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial g}{\partial p_k} \right).$$

Звідси випливають такі властивості дужок Пуассона:

- 1)  $\{f, g\} = -\{g, f\}$ ;
- 2)  $\{f, c\} = 0$ ;
- 3)  $\{f_1 + f_2, g\} = \{f_1, g\} + \{f_2, g\}$ ;
- 4)  $\{f_1 f_2, g\} = f_1 \{f_2, g\} + f_2 \{f_1, g\}$ ;
- 5)  $\frac{\partial}{\partial t} \{f, g\} = \left\{ \frac{\partial f}{\partial t}, g \right\} + \left\{ f, \frac{\partial g}{\partial t} \right\}$ ,

де  $c = \text{const}$ . Якщо, наприклад, функція  $g$  збігається з однією з координат  $q_k$  (або з  $p_k$ ), то дужки Пуассона зводяться до таких частинних похідних:

$$\{f, q_k\} = \frac{\partial f}{\partial p_k}, \quad \{f, p_k\} = -\frac{\partial f}{\partial q_k},$$

оскільки  $\partial q_k / \partial q_l = \delta_{kl}$ ,  $\partial q_k / \partial p_l = 0$ . Якщо в цих формулах замість функції  $f$  візьмемо змінні  $q_i, p_i$ , то одержимо такі рівності:  $\{q_i, q_k\} = 0$ ,  $\{p_i, p_k\} = 0$ ,  $\{p_i, q_k\} = \delta_{ik}$ . Слід зазначити ще одну важливу властивість дужок Пуассона: між дужками Пуассона, складеними із трьох функцій, існує співвідношення

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0,$$

яке називається *тотожністю Якобі*.

Покажемо тепер, що дужка Пуассона інваріантна щодо канонічних перетворень, тобто  $\{f, g\}_{p,q} = \{f, g\}_{P,Q}$ . Розглядаючи  $p_k$  і  $q_k$  як функції нових змінних  $P_i$  і  $Q_i$ , запишемо дужку Пуассона  $\{f, g\}_{p,q}$  у вигляді

$$\begin{aligned} \{f, g\}_{p,q} &= \sum_k \left( \frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial g}{\partial q_k} - \frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial g}{\partial p_k} \right) = \\ &= \sum_{k,i} \left[ \frac{\partial f}{\partial p_k} \left( \frac{\partial g}{\partial Q_i} \frac{\partial Q_i}{\partial q_k} + \frac{\partial g}{\partial P_i} \frac{\partial P_i}{\partial q_k} \right) - \frac{\partial f}{\partial q_k} \left( \frac{\partial g}{\partial Q_i} \frac{\partial Q_i}{\partial p_k} + \frac{\partial g}{\partial P_i} \frac{\partial P_i}{\partial p_k} \right) \right] = \\ &= \sum_{k,i} \left[ \frac{\partial g}{\partial Q_i} \left( \frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial Q_i}{\partial q_k} - \frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial Q_i}{\partial p_k} \right) + \frac{\partial g}{\partial P_i} \left( \frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial P_i}{\partial q_k} - \frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial P_i}{\partial p_k} \right) \right] = \\ &= \sum_i \left[ \frac{\partial g}{\partial Q_i} \{f, Q_i\}_{p,q} + \frac{\partial g}{\partial P_i} \{f, P_i\}_{p,q} \right]. \end{aligned}$$

Дужки Пуассона в цьому виразі обчислюємо за допомогою цього самого виразу. Дійсно, замінивши спочатку в цьому виразі  $f$  на  $Q_j$ , а  $g$  на  $f$ , одержуємо

$$\begin{aligned} \{Q_j, f\}_{p,q} &= \sum_i \left[ \frac{\partial f}{\partial Q_i} \{Q_j, Q_i\}_{p,q} + \frac{\partial f}{\partial P_i} \{Q_j, P_i\}_{p,q} \right] = \\ &= - \sum_i \frac{\partial f}{\partial P_i} \delta_{ji} = - \frac{\partial f}{\partial P_j} \quad \text{або} \quad \{f, Q_i\}_{p,q} = \frac{\partial f}{\partial P_i}. \end{aligned}$$

Далі, замінюючи  $f$  на  $P_j$ , а  $g$  на  $f$ , приходимо до виразу

$$\{P_j, f\}_{p,q} = \sum_i \left[ \frac{\partial f}{\partial Q_i} \{P_j, Q_i\}_{p,q} + \frac{\partial f}{\partial P_i} \{P_j, P_i\}_{p,q} \right] = \sum_i \frac{\partial f}{\partial Q_i} \delta_{ji} = \frac{\partial f}{\partial Q_j}$$

або

$$\{f, P_i\}_{p,q} = - \frac{\partial f}{\partial Q_i}.$$

Підставляючи вирази для  $\{f, Q_i\}_{p,q}$  і  $\{f, P_i\}_{p,q}$  у вираз для  $\{f, g\}_{p,q}$  доводимо інваріантність дужок Пуассона щодо каноніч-

них перетворень. Використовуючи цю властивість, можемо отримати такі рівності:

$$\{Q_i, Q_k\}_{p,q} = 0, \quad \{P_i, P_k\}_{p,q} = 0, \quad \{P_i, Q_k\}_{p,q} = \delta_{ik}.$$

Цим співвідношенням мають задовольняти нові змінні  $Q, P$ , щоб перетворення  $Q_i = Q_i(q, p, t)$ ,  $P_i = P_i(q, p, t)$  були канонічними.

Важливою властивістю дужок Пуассона є така: якщо  $f$  і  $g$  – два інтеграли руху, то й  $\{f, g\}$  є інтегралом руху (*теорема Пуассона*). Доводимо її за допомогою тотожності Якобі  $\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0$ . Якщо  $f$  і  $g$  не залежать явно від часу, то, беручи в цьому виразі  $h = H$ , одержуємо  $\{f, \{g, H\}\} + \{g, \{H, f\}\} + \{H, \{f, g\}\} = 0$ . Звідси видно, якщо  $\{H, g\} = 0$  і  $\{H, f\} = 0$ , то і  $\{H, \{f, g\}\} = 0$ . Нехай тепер інтеграли руху  $f$  і  $g$  залежать явно від часу. Тоді, скориставшись властивостями дужок Пуассона і тотожністю Якобі, маємо

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\{f, g\} &= \frac{\partial}{\partial t}\{f, g\} + \{H, \{f, g\}\} = \\ &= \left\{ \frac{\partial f}{\partial t}, g \right\} + \left\{ f, \frac{\partial g}{\partial t} \right\} - \{f, \{g, H\}\} - \{g, \{H, f\}\} = \\ &= \left\{ \frac{\partial f}{\partial t} + \{H, f\}, g \right\} + \left\{ f, \frac{\partial g}{\partial t} + \{H, g\} \right\} = \left\{ \frac{df}{dt}, g \right\} + \left\{ f, \frac{dg}{dt} \right\}. \end{aligned}$$

Якщо  $df/dt = dg/dt = 0$ , то і  $d\{f, g\}/dt = 0$ , тобто одержуємо  $\{f, g\} = \text{const}$ .

Теорема Пуассона інколи дозволяє знайти інтеграли руху системи. Розглянемо нетривіальний приклад, пов'язаний зі збереженням моменту імпульсу деякої механічної системи. Можна показати, що для декартових компонентів моменту справедливі тотожності  $\{M_i, M_j\} = -\varepsilon_{ijk} M_k$ , де індекси  $i, j, k = 1, 2, 3$  позначають проекції на ортогональні осі. Із теореми Пуассона випливає: якщо  $M_1 = \text{const}$  і  $M_2 = \text{const}$ , то і  $M_3 = \text{const}$ . Отже, якщо

зберігаються проекції моменту імпульсу на дві які-небудь осі, то зберігається й повний момент імпульсу.

Можна запропонувати ще один корисний приклад. Як було зазначено в лекції 9, для ізотропного двовимірного осцилятора існують два незалежних інтеграли руху –  $E_1$  і  $E_2$ , а також додатковий інтеграл руху – момент імпульсу  $M = p_x y - p_y x$ . Записуючи  $E_1$  через гамільтонові змінні,  $E_1 = p_x^2/2m + m\omega_0^2 x^2/2$ , переконуємось, що дужка Пуассона  $\{M, E_1\}$  відмінна від нуля й дорівнює  $\{M, E_1\} = m\omega_0^2 xy + p_x p_y/m$ , тобто величина  $\dot{x}y + \omega_0^2 xy$  також є інтегралом руху. Це пояснює збереження величини  $\text{tg } \alpha$ , отриманої в лекції 9. Однак можливість одержання нових нетривіальних інтегралів руху за допомогою теореми Пуассона радше виняток, ніж правило.

На завершення зауважимо, що в усіх міркуваннях час розглядався як інваріантний параметр, що не перетворювався разом з координатами та імпульсами.

### **Контрольні запитання та завдання**

1. Вираз для функції Гамільтона.
2. Від яких змінних залежить функція Гамільтона?
3. Рівняння Гамільтона.
4. Вираз для повної похідної за часом від деякої функції координат, імпульсів і часу.
5. Властивості дужок Пуассона.

## **Лекція 17. Метод Гамільтона–Якобі. Теорема Ліувілля**

### **§ 1. Дія як функція координат. Рух як канонічне перетворення**

При формулюванні принципу найменшої дії ми розглядали інтеграл

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt,$$



варіацію якого у випадку одного ступеня вільності можна записувати у вигляді

$$\delta S = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \delta q \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) \right) \delta q dt .$$

Маючи задані  $t_1$  і  $t_2$  за умов  $\delta S = 0$  і  $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$ , були одержані рівняння руху Лагранжа–Ейлера  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = 0$ .

Розглянемо тепер поняття дії  $S$  у дещо іншому аспекті. Вважатимемо інтеграл дії для дійсних траєкторій як функцію значень координат у верхній межі інтегрування. Тоді вираз для  $\delta S$  являє собою зміну дії при переході від однієї траєкторії до близької до неї іншої траєкторії. Оскільки траєкторії дійсного руху задовольняють рівняння Лагранжа, то другий доданок у виразі для  $\delta S$  зникає, а перший член переписується у вигляді  $p \delta q$ , оскільки  $\delta q(t_1) = 0$ , а  $\delta q(t_2) = \delta q(t) \equiv \delta q$ ,  $p = \partial \mathcal{L} / \partial \dot{q}$ . У загальному випадку  $s$  ступенів вільності аналогічно маємо

$$\delta S = \sum_{i=1}^s p_i \delta q_i .$$

Звідси випливає, що частинні похідні функції дії за узагальненими координатами відповідно дорівнюють узагальненим імпульсам

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i} .$$

Розглянемо тепер, що відбувається з інтегралом дії, якщо змінюється час у кінцевій точці (тобто розглядаються траєкторії, які починаються в заданий момент часу  $t_1$  із заданого положення  $q_1$ , а закінчуються в заданому положенні  $q_2$ , але в довільний момент часу  $t_2 \equiv t$ ). Для визначення явної залежності від часу функції дії  $S(q, t)$ , по-перше, зазначимо, що її повна похідна за часом уздовж траєкторії руху дорівнює

$$\frac{dS}{dt} = \mathcal{L} .$$

По-друге, розглядаючи дію як функцію координат і часу з використанням формули  $p_i = \partial S / \partial q_i$ , одержуємо

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial S}{\partial q_i} \dot{q}_i = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_i p_i \dot{q}_i .$$

Порівнюючи два останні співвідношення, знаходимо  $\frac{\partial S}{\partial t} = \mathcal{L} - \sum_i p_i \dot{q}_i = -H$ . Скориставшись цією формулою, можна

повний диференціал дії записати у вигляді

$$dS = \sum_i p_i dq_i - H dt ,$$

тобто дія є функцією координат і часу щодо верхньої межі інтегрування.

Якщо допустити, що змінюються координата та час не тільки в кінці руху, але й на його початку, то відповідну зміну  $S$  будемо задавати такою різницею:

$$dS = \sum_i p_i^{(2)} dq_i^{(2)} - H^{(2)} dt^{(2)} - \sum_i p_i^{(1)} dq_i^{(1)} + H^{(1)} dt^{(1)} .$$

Це співвідношення показує, що за довільного зовнішнього впливу на систему під час руху її кінцевий стан не може бути довільною функцією початкового стану, а можливі лише такі рухи, за яких вираз у правій частині цього виразу є повним диференціалом.

Останнє співвідношення можна трактувати й з іншого боку. Можна стверджувати, що зміна величин  $p, q$  у процесі руху є канонічним перетворенням. Дійсно, нехай  $q^{(1)}, p^{(1)}$  – значення канонічних змінних у момент часу  $t^{(1)} \equiv t$ , а  $q^{(2)}, p^{(2)}$  – їх значення в момент часу  $t^{(2)} = t + \tau$ . Останні є деякими функціями щодо перших (і щодо величини  $\tau$  як параметра):

$$q^{(2)} = q^{(2)}(q^{(1)}, p^{(1)}, t, \tau), \quad p^{(2)} = p^{(2)}(q^{(1)}, p^{(1)}, t, \tau) .$$

Якщо розглядати ці формули як перетворення від змінних  $q^{(1)}, p^{(1)}$  до змінних  $q^{(2)}, p^{(2)}$ , то це перетворення буде канонічним із твірною функцією  $-S$  типу  $F_1(q, Q, t)$ .

Виконаємо тепер щодо диференціала  $dS$  таке перетворення Лежандра:

$$d\left(S + \sum_i p_i^{(1)} q_i^{(1)}\right) = \sum_i p_i^{(2)} dq_i^{(2)} + \sum_i q_i^{(1)} dp_i^{(1)} + (H^{(1)} - H^{(2)}) dt.$$

Далі, замінюючи змінні  $q_i^{(2)}, p_i^{(2)}$  на значення координат та імпульсів  $q_i(t), p_i(t)$  у момент часу  $t$ , а канонічно пов'язані з ними змінні  $q_i^{(1)}, p_i^{(1)}$  на початкові значення цих координат та імпульсів, а саме,  $q_i(0) = q_{i0}$  і  $p_i(0) = p_{i0}$  (при цьому  $H^{(2)}$  замінимо на  $H$ , а  $H^{(1)}$  на  $H'$ ), прийдемо до цікавого погляду на механічний рух. У цьому випадку розв'язок  $q_i(t), p_i(t)$  механічної задачі, записаний у неявному вигляді

$$q_{i0} = q_i(q_i(t), p_i(t), t), \quad p_{i0} = p_i(q_i(t), p_i(t), t),$$

можна трактувати як деяке канонічне перетворення від старих змінних  $q_i(t), p_i(t)$  (залежних від часу) до нових величин  $q_i(0), p_i(0)$  (від часу незалежних, і такими, що збігаються з  $q_i(t), p_i(t)$  за умови  $t=0$ ). При цьому функція  $S(q_i, t) + \sum_i p_i(0) q_i(0)$  є твірною функцією такого перетворення

(питання про те, як найбільш вдало ввести у функцію дії залежність від "нових" імпульсів, постійних величин  $p_i(0)$ , ми розглянемо нижче). Адже зворотний рух системи, тобто перехід від динамічних змінних у момент часу  $t$  до їх початкових значень також можна розглядати як канонічне перетворення, але тепер із твірною функцією типу  $F_2(q, P, t)$ . При цьому з урахуванням співвідношення  $\partial S / \partial t = -H$  нова функція Гамільтона  $H' = H + \partial F_2 / \partial t = H + \partial S / \partial t$  тотожно дорівнює нулю. Цей ре-

зультат є фундаментальним для більш глибокого розуміння основ класичної механіки, але цим його роль не вичерпується. Як ми покажемо в наступному параграфі, це дозволяє побудувати дуже сильний метод аналізу динамічних систем. При цьому важливу роль відіграє той факт, що можна знайти функцію дії на основі специфічного рівняння в частинних похідних. Це рівняння називається *рівнянням Гамільтона–Якобі*, до розгляду якого ми й переходимо.

## § 2. Рівняння Гамільтона–Якобі

Як було показано, частинна похідна від функції  $S(q, t)$  пов'язана із функцією Гамільтона співвідношенням

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H(q_1, \dots, q_s; p_1, \dots, p_s; t) = 0.$$

Замінюючи в цьому виразі імпульси  $p_i$  похідними  $\partial S / \partial q_i$ , приходимо до рівняння

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q_1, \dots, q_s; \frac{\partial S}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_s}; t\right) = 0,$$

яке має задовольняти функція  $S(q, t)$ . Це є рівнянням у частинних похідних першого порядку. Воно називається *рівнянням Гамільтона–Якобі*. Поряд з рівняннями Лагранжа і рівняннями Гамільтона рівняння Гамільтона–Якобі також є основою деякого загального методу інтегрування рівнянь руху.

У загальній теорії диференціальних рівнянь встановлено, що диференціальне рівняння в частинних похідних першого порядку має розв'язок, який залежить від довільної функції. Такий розв'язок називається *загальним інтегралом рівняння*. Проте основну роль у класичній механіці відіграє не загальний інтеграл, а *повний інтеграл*. Так називається розв'язок диференціального рівняння в частинних похідних, який містить стільки незалежних довільних сталих, скільки існує незалежних змінних. У рівнянні Гамільтона–Якобі незалежними змінними є час і координати. Тому для системи із  $s$  ступенями вільності в повний інтеграл цього рівняння входять  $s + 1$  довільних сталих. При цьому,

оскільки функція дії  $S(q, t)$  входить у рівняння Гамільтона–Якобі тільки через свої частинні похідні, одна із довільних сталих входить у повний інтеграл адитивним чином, тобто повний інтеграл рівняння Гамільтона–Якобі має вигляд  $S = f(q_1, \dots, q_s; \alpha_1, \dots, \alpha_s; t) + A$ , де  $\alpha_1, \dots, \alpha_s$  і  $A$  – довільні сталі.

З'ясуємо тепер зв'язок між повним інтегралом рівняння Гамільтона–Якобі та розв'язком рівнянь руху. Для цього виконаємо канонічне перетворення від змінних  $q, p$  до нових змінних: нових імпульсів  $\alpha_1, \dots, \alpha_s$  і нових координат  $\beta_1, \dots, \beta_s$ . Оскільки за твірну функцію вибирається функція  $f(q, \alpha, t)$ , необхідно користуватись такими формулами:

$$p_i = \frac{\partial f}{\partial q_i}, \quad \beta_i = \frac{\partial f}{\partial \alpha_i}, \quad H' = H + \frac{\partial f}{\partial t},$$

причому внаслідок того, що функція  $f(q, \alpha, t)$  задовольняє рівняння Гамільтона–Якобі, нова функція Гамільтона  $H'$  буде тожжно дорівнювати нулю

$$H' = H + \frac{\partial S}{\partial t} = 0.$$

Тому канонічні рівняння в нових змінних мають вигляд  $\dot{\alpha}_i = 0$ ,  $\dot{\beta}_i = 0$ , звідки впливають  $\alpha_i = \text{const}$ ,  $\beta_i = \text{const}$ . З іншого боку,  $s$  рівнянь  $\partial S / \partial \alpha_i = \beta_i$  дають можливість виразити  $s$  координат  $q$  через час і  $2s$  сталих  $\alpha, \beta$ . Тим самим ми знаходимо загальний розв'язок рівняння руху.

Таким чином, розв'язок задачі до рух механічної системи за методом Гамільтона–Якобі зводиться до таких операцій. За функцією Гамільтона складаємо рівняння Гамільтона–Якобі і знаходимо повний інтеграл цього рівняння. Диференціюючи його за довільними сталими  $\alpha$ , а далі прирівнюючи до нових сталих  $\beta$ , одержуємо систему  $s$  алгебраїчних рівнянь

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = \beta_i,$$

розв'язуючи яку, знаходимо координати  $q$  як функції часу та  $2s$  довільних сталих. Залежність імпульсів від часу далі можна знайти з рівнянь  $p_i = \partial S / \partial q_i$ .

Якщо функція  $H$  не залежить явно від часу, рівняння Гамільтона–Якобі набуває вигляду

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}\right) = 0.$$

Повний інтеграл цього рівняння можна шукати у вигляді  $S(q_i, \alpha_i, t) = W(q_i, \alpha_i) - \alpha_1 t$ . Підставляючи цей вираз у попереднє рівняння, одержуємо

$$H\left(q_i, \frac{\partial W}{\partial q_i}\right) = \alpha_1,$$

що являє собою диференціальне рівняння, у яке вже не входить час. Отже, одна із констант, яка входить у  $S$ , дорівнює постійному значенню гамільтоніана  $H$  (тобто  $\alpha_1 = E$ ). Функція  $W$  відома як характеристична функція Гамільтона.

За деяких умов змінні рівняння Гамільтона–Якобі можна відокремити, і тоді розв'язок задачі вдається звести до квадратур. У цьому випадку метод Гамільтона–Якобі стає корисним на практиці. Часткове відокремлення змінних уже застосовувалось у випадку, коли функція  $H$  не залежала явно від часу.

Вважатимемо, що деяка координата  $q_1$  і відповідна їй похідна  $\partial S / \partial q_1$  входять у рівняння Гамільтона–Якобі тільки у вигляді деякої комбінації  $\Phi(q_1, \partial S / \partial q_1)$ , тобто рівняння має вигляд

$$\Phi\left\{q_j, t, \frac{\partial S}{\partial q_j}, \frac{\partial S}{\partial t}, \Phi\left(q_1, \frac{\partial S}{\partial q_1}\right)\right\} = 0,$$

де через  $q_j$  позначена сукупність усіх координат за винятком  $q_1$ . Шукаємо розв'язок у цьому випадку у вигляді суми

$$S = S'(q_j, t) + S_1(q_1).$$

Підставляючи цей вираз у попереднє співвідношення, маємо

$$\Phi \left\{ q_j, t, \frac{\partial S'}{\partial q_j}, \frac{\partial S'}{\partial t}, \Phi \left( q_1, \frac{\partial S_1}{\partial q_1} \right) \right\} = 0.$$

Якщо допустити, що розв'язок  $S = S'(q_j, t) + S_1(q_1)$  уже знайдений, то після підстановки його в цю рівність вона має перетворитись на тотожність, яка буде справедливою за довільного значення  $q_1$ . Однак при зміні  $q_1$  може змінюватися тільки функція  $\Phi(q_1, \partial S/\partial q_1)$ . Тому ця тотожність вимагає, щоб і функція  $\Phi$  була постійною. Отже, останнє рівняння розпадається на два таких рівняння:

$$\Phi \left( q_1, \frac{\partial S_1}{\partial q_1} \right) = \alpha_1, \quad \Phi \left\{ q_j, t, \frac{\partial S'}{\partial q_j}, \frac{\partial S'}{\partial t}, \alpha_1 \right\} = 0,$$

де  $\alpha_1$  – довільна стала. Перше з них є звичайним диференціальним рівнянням, із якого функція  $S_1(q_1)$  може бути визначена простим інтегруванням. Після цього залишається диференціальне рівняння у частинних похідних (інше рівняння), але з меншою кількістю незалежних змінних.

При повному відокремленні шуканий інтеграл рівняння Гамільтона–Якобі має вигляд

$$S = \sum_k S_k(q_k, \alpha_1, \dots, \alpha_s) - Et,$$

де кожна із функцій  $S_k$  залежить лише від однієї координати, а енергія  $E$  як функція довільних сталих  $\alpha_1, \dots, \alpha_s$  може бути одержана підстановкою  $W = \sum_k S_k$  у рівняння

$$H \left( q_1, \dots, q_s; \frac{\partial W}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial W}{\partial q_s} \right) = E.$$

Частинним випадком відокремлення є випадок циклічної змінної. Оскільки циклічна координата  $q_1$  зовсім не входить у рівняння Гамільтона–Якобі, функція  $\Phi(q_1, \partial S/\partial q_1)$  зводиться до  $\partial S/\partial q_1$  і отже, маємо  $S_1 = \alpha_1 q_1$ , тому

$$S = S'(q_j, t) + \alpha_1 q_1,$$

де постійна  $\alpha_1$  у цьому випадку є не що інше, як постійне значення імпульсу  $p_1 = \partial S / \partial q_1$ . Зазначимо, що відокремлення часу у вигляді члена  $-Et$  для консервативної системи також відповідає методу відокремлення змінних для "циклічної змінної"  $t$ .

Таким чином, усі випадки спрощення інтегрування рівнянь руху, що розглядалися раніше і ґрунтувалися на використанні циклічних змінних, охоплюються методом відокремлення змінних у рівнянні Гамільтона–Якобі. Окрім того, до них приєднується ще ряд випадків, коли відокремлення змінних можливе, але координати нециклічні. Це призводить до того, що метод Гамільтона–Якобі є найбільш потужним методом аналізу механічних систем.

### § 3. Інтегральні інваріанти Пуанкаре. Теорема Ліувілля

Розглянемо фазовий простір, під яким розумітимемо  $2s$ -вимірний декартовий простір з координатами  $q_1, \dots, q_s, p_1, \dots, p_s$ . Тоді кожному стану даної механічної системи буде відповідати цілком визначена точка цього простору. У процесі руху системи її фазова зображувальна точка описує у фазовому просторі відповідну лінію, яку називають *фазовою траєкторією*. Добуток диференціалів  $d\Gamma = dq_1 \cdot \dots \cdot dq_s dp_1 \cdot \dots \cdot dp_s$  можна розглядати як "елемент об'єму" фазового простору.

Поняття фазового простору дозволяє сформулювати цікаві загальні властивості механічного руху в термінах геометричних перетворень цього простору. Зупинимось спочатку на фазовому просторі, який відповідає системі з одним ступенем вільності, тобто фазову площину  $(p, q)$ . Розглянемо деяку область цього простору, і покажемо, що інтеграл  $\int dpdq$ , узятий по цій області, дорівнює її площі. Покажемо також, що ця площа не змінюється за довільного канонічного перетворення, що є частинним (за  $s = 1$ ) випадком теореми Ліувілля (далі розглянемо загальний випадок для довільного  $s$ ).



Нехай  $P = P(p, q, t)$ ,  $Q = Q(p, q, t)$  є канонічним перетворенням, що переводить область  $S$  на площині  $(p, q)$  у відповідну їй область  $S'$  на площині  $(P, Q)$ . Правило перетворення інтегралів при заміні змінних таке:

$$\iint_{S'} dPdQ = \iint_S dpdq \frac{D(P, Q)}{D(p, q)},$$

де  $D(P, Q)/D(p, q)$  – якобіан переходу. Легко переконатися, що в явному вигляді якобіан переходу дорівнює дужці Пуассона  $\{P, Q\}_{p, q}$ , яка, у свою чергу, дорівнює одиниці для довільного канонічного перетворення, що і доводить зроблене припущення  $\iint_{S'} dPdQ = \iint_S dpdq$ .

Перейдемо тепер до дослідження більш загальних систем із  $s > 1$ . У цьому випадку справедливий цілий ряд тверджень щодо інваріантності інтегралів у двовимірних, чотиривимірних і т. д. підпросторах повного фазового простору. Почнемо з доведення теореми Пуанкаре, яка стверджує, що подвійний інтеграл

$$J_1 = \iint_S \sum_i dp_i dq_i$$

буде інваріантним щодо довільного канонічного перетворення. Символ  $S$  у цьому випадку означає довільну двовимірну поверхню у фазовому просторі.

Положення точки на двовимірній поверхні можна задавати двома будь-якими параметрами  $u$  і  $v$ . Тоді матимемо

$$q_i = q_i(u, v), \quad p_i = p_i(u, v).$$

Зв'язок між елементом площі  $dq_i dp_i$  та елементом площі  $dudv$  має вигляд

$$dq_i dp_i = \frac{\partial(q_i, p_i)}{\partial(u, v)} dudv = \begin{vmatrix} \frac{\partial q_i}{\partial u} & \frac{\partial p_i}{\partial u} \\ \frac{\partial q_i}{\partial v} & \frac{\partial p_i}{\partial v} \end{vmatrix} dudv.$$

Тому рівність  $\iint_S \sum_i dq_i dp_i = \iint_S \sum_k dQ_k dP_k$ , яка виражає інваріантність інтеграла  $J_1$  щодо канонічних перетворень, можна записати у вигляді

$$\iint_S \sum_i \frac{\partial(q_i, p_i)}{\partial(u, v)} dudv = \iint_S \sum_k \frac{\partial(Q_k, P_k)}{\partial(u, v)} dudv.$$

Оскільки область інтегрування довільна, ці інтеграли можуть бути рівними лише за умови виконання рівності

$$\sum_i \frac{\partial(q_i, p_i)}{\partial(u, v)} = \sum_k \frac{\partial(Q_k, P_k)}{\partial(u, v)}.$$

Таким чином, доведення інваріантності інтеграла  $J_1$  зводиться до доведення інваріантності суми якобіанів.

Розглянемо канонічне перетворення, яке можна одержати за допомогою твірної функції типу  $F_2(q, P, t)$  (ця вимога не обов'язкова, оскільки доведення можна провести і для іншої твірної функції). У цьому випадку матимемо

$$\frac{\partial p_i}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{\partial F_2}{\partial q_i} \right) = \frac{\partial^2 F_2}{\partial u \partial q_i} = \frac{\partial^2 F_2}{\partial q_i \partial u} = \sum_k \frac{\partial^2 F_2}{\partial q_i \partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial u} + \sum_k \frac{\partial^2 F_2}{\partial q_i \partial P_k} \frac{\partial P_k}{\partial u}.$$

Аналогічний вираз можна отримати для частинної похідної  $\partial p_i / \partial v$ . Підставляючи тепер їх у суму детермінантів, які містяться в лівій частині останнього співвідношення, знаходимо

$$\begin{aligned} \sum_i \frac{\partial(q_i, p_i)}{\partial(u, v)} &= \sum_i \left| \frac{\partial q_i}{\partial u} \quad \sum_k \frac{\partial^2 F_2}{\partial q_i \partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial u} + \sum_k \frac{\partial^2 F_2}{\partial q_i \partial P_k} \frac{\partial P_k}{\partial u} \right| = \\ &= \sum_{i,k} \frac{\partial^2 F_2}{\partial q_i \partial q_k} \begin{vmatrix} \frac{\partial q_i}{\partial u} & \frac{\partial q_k}{\partial u} \\ \frac{\partial q_i}{\partial v} & \frac{\partial q_k}{\partial v} \end{vmatrix} + \sum_{i,k} \frac{\partial^2 F_2}{\partial q_i \partial P_k} \begin{vmatrix} \frac{\partial q_i}{\partial u} & \frac{\partial P_k}{\partial u} \\ \frac{\partial q_i}{\partial v} & \frac{\partial P_k}{\partial v} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Перша сума у цьому виразі дорівнює нулю, оскільки при перестановці місцями індексів  $i, k$  одержуємо

$$\sum_{i,k} \frac{\partial^2 F_2}{\partial q_i \partial q_k} \begin{vmatrix} \frac{\partial q_i}{\partial u} & \frac{\partial q_k}{\partial u} \\ \frac{\partial q_i}{\partial v} & \frac{\partial q_k}{\partial v} \end{vmatrix} = \sum_{i,k} \frac{\partial^2 F_2}{\partial q_k \partial q_i} \begin{vmatrix} \frac{\partial q_k}{\partial u} & \frac{\partial q_i}{\partial u} \\ \frac{\partial q_k}{\partial v} & \frac{\partial q_i}{\partial v} \end{vmatrix} = - \sum_{i,k} \frac{\partial^2 F_2}{\partial q_i \partial q_k} \begin{vmatrix} \frac{\partial q_i}{\partial u} & \frac{\partial q_k}{\partial u} \\ \frac{\partial q_i}{\partial v} & \frac{\partial q_k}{\partial v} \end{vmatrix},$$

у той час як сума не повинна залежати від порядку написання індексів  $i, k$ . Замість цієї нульової суми можна поставити будь-яку іншу, яка має таку саму структуру, і тому також дорівнює нулю. Наприклад, можна написати

$$\begin{aligned} \sum_i \frac{\partial(q_i, P_i)}{\partial(u, v)} &= \sum_{i,k} \frac{\partial^2 F_2}{\partial P_i \partial P_k} \begin{vmatrix} \frac{\partial P_i}{\partial u} & \frac{\partial P_k}{\partial u} \\ \frac{\partial P_i}{\partial v} & \frac{\partial P_k}{\partial v} \end{vmatrix} + \sum_{i,k} \frac{\partial^2 F_2}{\partial q_i \partial P_k} \begin{vmatrix} \frac{\partial q_i}{\partial u} & \frac{\partial P_k}{\partial u} \\ \frac{\partial q_i}{\partial v} & \frac{\partial P_k}{\partial v} \end{vmatrix} = \\ &= \sum_k \begin{vmatrix} \sum_i \frac{\partial^2 F_2}{\partial P_i \partial P_k} \frac{\partial P_i}{\partial u} + \sum_i \frac{\partial^2 F_2}{\partial q_i \partial P_k} \frac{\partial q_i}{\partial u} & \frac{\partial P_k}{\partial u} \\ \sum_i \frac{\partial^2 F_2}{\partial P_i \partial P_k} \frac{\partial P_i}{\partial v} + \sum_i \frac{\partial^2 F_2}{\partial q_i \partial P_k} \frac{\partial q_i}{\partial v} & \frac{\partial P_k}{\partial v} \end{vmatrix} = \sum_k \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{\partial F_2}{\partial P_k} \right) & \frac{\partial P_k}{\partial u} \\ \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{\partial F_2}{\partial P_k} \right) & \frac{\partial P_k}{\partial v} \end{vmatrix} = \\ &= \sum_k \begin{vmatrix} \frac{\partial Q_k}{\partial u} & \frac{\partial P_k}{\partial u} \\ \frac{\partial Q_k}{\partial v} & \frac{\partial P_k}{\partial v} \end{vmatrix} = \sum_k \frac{\partial(Q_k, P_k)}{\partial(u, v)}, \end{aligned}$$

що й доводить теорему Пуанкаре.

Аналогічним чином можна довести, що й інтеграл

$$J_2 = \iiint_S \sum_{i,k} dq_i dp_i dq_k dp_k$$

також є інваріантом щодо канонічних перетворень ( $S$  – довільна чотиривимірна поверхня фазового простору). Продовжуючи так і далі, отримуємо ряд інтегральних інваріантів Пуанкаре, останній з яких має вигляд

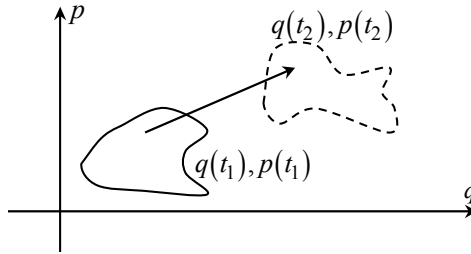
$$J_s = \int \dots \int dq_1 \dots dq_s dp_1 \dots dp_s .$$

У цьому інваріанті інтегрування здійснюється за довільною областю фазового простору, і тому інваріантність інтеграла  $J_s$  еквівалентна твердженню, що об'єм будь-якої частини фазового простору не змінюється при канонічних перетвореннях.

Оскільки сам рух механічної системи є канонічним перетворенням, то фазовий об'єм, який відповідає їй у фазовому просторі, залишається із часом незмінним, тобто

$$\int d\Gamma = \Gamma = \text{const} .$$

Це твердження виражає зміст *теорема Ліувілля*, тобто з часом об'єм набуває тільки іншої форми (рис. 1).



**Рис. 1.** Рух елементу фазового об'єму у фазовому просторі

Слід зауважити, що теорема Ліувілля є основною теоремою статистичної механіки. За допомогою цієї теореми можна вивести рівняння для густини  $D = dN/d\Gamma$  множини точок у фазовому просторі, яким відповідає ансамбль однакових механічних систем. Фазовий об'єм  $d\Gamma$  на основі теореми Ліувілля залишається з часом незмінним. Незмінним з часом залишається і кількість  $dN$  зображувальних точок усередині цього об'єму. Дійсно, якщо б яка-небудь із точок проникла через поверхню цього об'єму, то вона зайняла б те положення, яке в цей момент має яка-небудь зображувальна точка на поверхні. Оскільки рух кожної зображувальної точки однозначний щодо її положення у фазовому просторі та часі, то дві вказані точки вийшли б з об'єму разом. Отже, жодна із зображувальних точок усередині цього

об'єму не може його покинути. І навпаки, зовнішні зображувальні точки не можуть потрапити в цей об'єм.

Таким чином, густина  $D(q, p, t)$  також має бути незмінною в часі, що можна записати у вигляді рівності

$$\frac{dD}{dt} = \frac{\partial D}{\partial t} + \{H, D\} = 0.$$

Це є рівнянням для густини множини зображувальних точок, які лежать в околі точки, що зображує дану механічну систему ансамблю.

### ***Контрольні запитання та завдання***

1. Вираз для твірної функції руху.
2. Рівняння Гамільтона–Якобі.
3. Відокремлення змінних у методі Гамільтона–Якобі.
4. Інтегральні інваріанти Пуанкаре.
5. Суть теореми Ліувілля.

## **Лекція 18. Гамільтонові інтегровані системи. Змінні "дія–кут"**

### **§ 1. Адіабатичні інваріанти**

Розглянемо систему, що здійснює одновимірний фінітний рух і характеризується деяким параметром  $\lambda$ , який визначає властивості самої системи або зовнішнього поля, у якому вона розташована. Припустимо, що параметр  $\lambda$  під дією зовнішніх чинників повільно (адіабатично) змінюється з часом. Під повільною зміною розумітимемо таку зміну, за якої  $\lambda$  мало змінюється за період руху системи  $T$ :

$$T \frac{d\lambda}{dt} \ll \varepsilon \lambda,$$

де  $\varepsilon \ll 1$  – малий параметр. За постійного параметра  $\lambda$  система була б замкненою й здійснювала б строго періодичний рух з постійною енергією  $E$  і періодом  $T(E)$ . За змінного параметра  $\lambda$  система не буде замкненою, тобто її енергія не зберігатиметься.

Оскільки  $\lambda$  змінюється повільно, то швидкість  $\dot{E}$  також мала (можна очікувати, що  $\dot{E} \sim \epsilon E$ ). Якщо усереднимо  $\dot{E}$  за періодом  $T$ , то її швидкість буде пропорційною  $\dot{\lambda}$  (згладжуються "швидкі" коливання).  $E$  є функцією  $\lambda$ . Залежність  $E$  від  $\lambda$  можна представляти у вигляді постійності деякої комбінації  $E$  і  $\lambda$ . Таку величину, що залишається постійною в процесі руху системи, у якій повільно змінюються параметри, називають *адіабатичним інваріантом*.

Нехай  $H(q, p, \lambda)$  – функція Гамільтона системи, що залежить від параметра  $\lambda$ . Тоді швидкість зміни енергії системи

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} \frac{d\lambda}{dt} \equiv \frac{\partial H}{\partial \lambda} \dot{\lambda}.$$

Права частина цієї формули залежить не тільки від адіабатичного параметра  $\lambda$ , але й від змінних  $q$  і  $p$ , які швидко змінюються. Для виділення систематичного ходу зміни енергії потрібно усереднити цю рівність за періодом руху. При цьому виносимо за знак усереднення величину  $\dot{\lambda}$ , оскільки  $\lambda$  змінюється повільно:

$$\overline{\frac{dE}{dt}} = \dot{\lambda} \overline{\frac{\partial H}{\partial \lambda}},$$

а у функції  $\partial H / \partial \lambda$  припускаємо, що змінюються лише  $q$  і  $p$ , а не  $\lambda$ . Записуємо усереднення в явному вигляді

$$\overline{\frac{\partial H}{\partial \lambda}} = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial H}{\partial \lambda} dt.$$

Згідно з рівнянням Гамільтона  $\dot{q} = \partial H / \partial p$  маємо таке співвідношення:

$$dt = \frac{dq}{\partial H / \partial p}.$$

За допомогою цієї рівності замінюємо інтегрування за часом на інтегрування за координатою. Тепер період  $T$  запишемо у вигляді

$$T = \int_0^T dt = \oint \frac{dq}{\partial H / \partial p}.$$

Таким чином, вираз для  $\overline{dE/dt}$  набуває вигляду  $\frac{\overline{dE}}{dt} = \dot{\lambda} \oint \frac{\partial H / \partial \lambda}{\partial H / \partial p} dq / \oint \frac{dq}{\partial H / \partial p}$ . Інтегрування в цій формулі здійснюється за траєкторією руху за даним сталим  $\lambda$ . Уздовж такої траєкторії функція Гамільтона зберігає постійне значення  $E$ , а імпульс є деякою функцією змінної  $q$  і двох незмінних параметрів  $E$  і  $\lambda$ , тобто  $p = p(q, E, \lambda)$ . Диференціюючи рівність  $H(p, q, \lambda) = E$  за параметром  $\lambda$ , одержуємо

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda} + \frac{\partial H}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \lambda} = 0, \quad \frac{\partial H / \partial \lambda}{\partial H / \partial p} = - \frac{\partial p}{\partial \lambda}.$$

Підставляємо цей вираз у верхній інтеграл попереднього співвідношення, а нижню підінтегральну функцію записуємо у вигляді  $\partial p / \partial E$ :

$$\frac{\overline{dE}}{dt} = -\dot{\lambda} \oint \frac{\partial p}{\partial \lambda} dq / \oint \frac{\partial p}{\partial E} dq \quad \text{або} \quad \oint \left( \frac{\partial p}{\partial E} \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial \lambda} \frac{d\lambda}{dt} \right) dq = 0.$$

Цю рівність можна записати також у вигляді  $\overline{dI/dt} = 0$ , де  $I$  позначає такий інтеграл:

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint p dq,$$

який береться за траєкторією руху за заданими  $E$  та  $\lambda$ . Цей результат показує, що величина  $I$  залишається у розглядуваному наближенні постійною при зміні параметра  $\lambda$ , тобто є адіабатичним інваріантом. Величина  $I$  є функцією енергії системи (і параметра  $\lambda$ ). Її частинна похідна за енергією визначає період руху. Згідно із формулою  $T = \int_0^T dt = \oint \frac{dq}{\partial H / \partial p}$  маємо

$$2\pi \frac{\partial I}{\partial E} = \oint \frac{\partial p}{\partial E} dq = T \quad \text{або інакше} \quad \frac{\partial E}{\partial I} = \omega,$$

де  $\omega = 2\pi/T$  – частота коливань системи. Інтегралу  $I = (1/2\pi) \int p dq$  можна надати й наочної геометричної інтер-

претації, якщо скористатися поняттям фазової траєкторії системи. Траєкторія замкнена оскільки рух періодичний. Інтеграл, який береться вздовж цієї кривої, дає площу, що обмежується цією траєкторією. Його можна написати і як двовимірний інтеграл

$$I = \frac{1}{2\pi} \int dpdq$$

за площею  $S$ , що обмежується на фазовій площині фазовою траєкторією  $p = p(q, E, \lambda)$ .

Використання адіабатичних інваріантів дозволяє аналізувати ряд важливих задач фізики та техніки. Слід зазначити, що при цьому виведенні ми використовували тільки повільність зміни параметрів задачі, тобто умову  $\dot{\lambda} \leq \lambda \varepsilon \omega$ , де  $\omega$  – характерна частота,  $\varepsilon \ll 1$ ; але упродовж значного часу саме значення  $\lambda$  (а також енергія системи  $E$ ) може змінитись суттєво.

Проведене вище виведення гарантує лише те, що, якщо  $\dot{\lambda} \propto \varepsilon$  і  $\dot{E} \propto \varepsilon$ , то виконуватиметься оцінка  $\dot{I} \sim \varepsilon I$ . Більш точний аналіз, який є достатньо складним і виходить за межі нашого курсу, показує, що точність збереження адіабатичного інваріанта значно вища. Можна показати, якщо зміна параметра  $\lambda$  така, що за весь час еволюції системи фазова траєкторія ніколи не з'явиться поблизу сідлової точки (тобто не буде близька до сепаратриси), то швидкість зміни адіабатичного інваріанта повільніша, ніж довільний степінь  $n$  малого параметра  $\varepsilon$  ( $\dot{I} \sim \varepsilon^n I$ ), і характеризується експоненціальною мализною  $\dot{I} \sim I \exp(-C/\varepsilon)$ , де константа  $C \sim 1$ . Особлива роль сепаратриси тут зрозуміла: на сепаратрисі поблизу особливої точки типу "сідло" характерна частота руху  $\omega$  прямує до нуля і, навіть умови, використані для спрощення виведення, свідомо порушуються.

Водночас збереження величини  $I$  при повільній зміні параметрів системи дозволяє розв'язувати важливі прикладні задачі, сама величина  $I = (1/2\pi) \int dpdq$  має глибокий фізичний зміст.

Як було вже показано, величина  $\int dpdq$  збігається з одним із



інтегральних інваріантів Пуанкаре, тобто не змінюється при канонічних перетвореннях координат та імпульсів.

У квантовій механіці величина адіабатичного інваріанта  $I$ , поділена на фундаментальну константу (сталу Планка  $\hbar$ ), задає квантові числа, які, у свою чергу, визначають стан квантової системи. У межах класичної механіки адіабатичні інваріанти є основою введення змінних "дія–кут", деяких канонічних пар, за допомогою яких опис динаміки інтегрованої системи є найбільш універсальним (ми вже вводили поняття інтегрованої системи в лекції 9, а нижче наведемо уточнення цього важливого поняття). Але перед тим, як вводити ці змінні, корисно розглянути один важливий конкретний приклад.

Знайдемо адіабатичний інваріант для одновимірного осцилятора. Його функція Гамільтона така:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2},$$

де  $\omega$  – власна частота осцилятора. Рівняння фазової траєкторії дається законом збереження енергії

$$H(p, q) = E.$$

Це еліпс з півосями  $\sqrt{2mE}$  і  $\sqrt{2E/m\omega^2}$ , а його площа, поділена на  $2\pi$ , дорівнює

$$I = \frac{E}{\omega}.$$

Це й є шукана величина, адіабатична інваріантність якої означає, що за повільної зміни параметрів осцилятора його енергія змінюється пропорційно частоті (зазначимо, що теорія адіабатичних інваріантів в основному розвивалась у другій половині ХХ ст., але цей результат сформулював А. Ейнштейн ще в 1911 р.). Для нас важливо те, що співвідношення  $E = \omega I$  між енергією та адіабатичним інваріантом збігається зі співвідношенням  $H = \omega P$ , яке пов'язує функцію Гамільтона (знову таки, енергію) з імпульсом  $P$  для змінних "дія–кут". Це вказує шлях побудови таких змінних для інших динамічних систем.

## § 2. Змінні "дія–кут"

Перейдемо до введення змінних "дія–кут" для інтегрованих гамільтонових систем. Почнемо з найпростішого випадку – руху з одним ступенем вільності, коли величиною, яка зберігається, є повна енергія системи (функція Гамільтона). Як вже йшлося, у цьому випадку можна перейти до нових канонічних змінних  $(P, Q)$ , для яких координата  $Q$  буде циклічною, тобто  $H = H(P)$ , а імпульс  $P$  постійний,  $\dot{P} = -\partial H/\partial Q = 0$ . При переході до всіх таких координат твірна функція являє собою т. зв. укорочену дію  $S_0(q, P) = \int p(q, P) dq$ , яка є функцією координати  $q$  і сталої величини  $P$ , яку ми прийемо за новий імпульс  $P$ . Оскільки величина  $p$  під інтегралом виражається через  $E$  за допомогою співвідношення  $H(p, q) = E = \text{const}$ , а  $P$  пов'язаний із  $H$  залежністю  $H(P) = E$ , таке перетворення неважко знайти. Далі, нова координата  $Q$ , яка спряжена щодо  $P$ , визначається за формулою  $Q = \partial S_0/\partial P$ .

Ідея введення змінних "дія–кут" містить у собі використання як нового імпульсу зміну дії  $S_0$  за період руху, поділену на  $2\pi$ :  $I = \Delta S_0/2\pi = (1/2\pi) \oint pdq$ . Саме ця величина й є значенням адіабатичного інваріанта  $I$ . Спряжена змінна, кут  $\theta$ , визначається як  $\partial S_0(q, I)/\partial I$ . Бачимо, що зміна  $\theta$  за період руху дорівнює  $\Delta\theta = \Delta(\Delta S_0/\partial I) = \partial\Delta S_0/\partial I = 2\pi$ . Рівняння ж руху для  $\theta$  має вигляд

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\partial H(I)}{\partial I} \equiv \omega(I),$$

тобто кутова змінна лінійно залежить від часу:  $\theta(t) = \omega(I)t + \theta(0)$ , де величина  $\omega(I)$  має зміст нелінійної частоти.

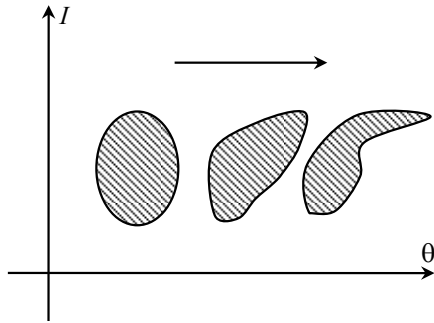
Отже, у термінах змінних "дія–кут"  $(I, \theta)$  рух довільної нелінійної системи схожий на рух лінійного осцилятора: "ампліту-

да"  $I$  залишається постійною, а "фаза" (кутова змінна  $\theta$ ) лінійно зростає з часом. При цьому координата  $q$  і швидкість  $\dot{q}$  (або імпульс  $p$ ) є періодичними функціями  $\theta$  з періодом  $2\pi$  (порівняйте зі стандартними формулами для лінійного осцилятора:  $q = a \cos \varphi$ ,  $\dot{q} = -a\omega \sin \varphi$ , фаза  $\varphi = \omega t + \alpha$ ). Звичайно, тут існує й принципова відмінність, яка пов'язана із залежністю частоти від амплітуди, тобто  $\omega = \omega(I)$ . Власне кажучи, динамічна змінна  $\theta$  має ті самі властивості, що і кутові змінні в геометрії, що й визначає її назву. Тому будь-який періодичний рух у цих змінних можна вважати рівномірним рухом зображувальної точки по колу радіуса  $I = \text{const}$  з частотою  $\omega(I)$ . При цьому адиабатичний інваріант  $\int Id\theta \equiv 2\pi I$  за допомогою теореми Ліувілля відтворює стандартне визначення  $2\pi I = \oint pdq$ .

Зупинимось ще на відмінностях нелінійного руху, описуваного в змінних  $(I, \theta)$ , від руху лінійного осцилятора. По-перше, вони виявляються при записі фізичних величин типу координат та імпульсів через  $(I, \theta)$ . Умова періодичності щодо  $\theta$  дозволяє записати їх у вигляді рядів Фур'є

$$q = q(I, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{(n)}(I) e^{in\theta}, \quad p = p(I, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} p^{(n)}(I) e^{in\theta},$$

де  $q^{(n)} = q^{*(-n)}$ ,  $p^{(n)} = p^{*(-n)}$ , у той час як для лінійного осцилятора достатньо однієї гармоніки:  $q = \sqrt{2I/m\omega_0} \sin \theta$ ,  $p = \sqrt{2I\omega_0 m} \cos \theta$ . По-друге, ще одна відмінність виявляється в поведінці деякої обмеженої області ("краплини") на фазовій площині  $(I, \theta)$ . Для лінійного осцилятора відбувається переміщення "краплини" вздовж осі  $\theta$  з постійною швидкістю без зміни її форми. У загальному випадку внаслідок залежності  $\omega(I)$  відбувається спотворення форми цієї "фазової краплини" (зрозуміло, що в силу теореми Ліувілля площа "краплини" залишається сталою, рис. 1).



**Рис. 1.** Еволюція форми "фазової краплини" при нелінійному русі

Для інтегрованої динамічної системи із  $s$  ступенями вільності також можна ввести змінні "дія-кут"  $I_1, \theta_1; \dots; I_s, \theta_s$ . У цьому випадку функція Гамільтона залежить від  $s$  постійних величин  $I_i = \text{const}$ , тобто  $H = H(I_1, \dots, I_s)$ , а  $\dot{\theta}_i \equiv \partial H / \partial I_i \equiv \omega_i(I_1, \dots, I_s) = \text{const}$ , а значить всі кутові змінні залежать від часу:  $\theta_i(t) = \omega_i t + \theta_i(0)$ . При цьому всі координати  $q_i$  та імпульси  $p_i$  матеріальних точок ( $i = 1, \dots, s$ ) є періодичними функціями  $\theta_i$  з періодом  $2\pi$ , тобто можна записати  $q_i = q_i(I_1, \dots, I_s, \theta_1, \dots, \theta_s)$ ;  $p_i = p_i(I_1, \dots, I_s, \theta_1, \dots, \theta_s)$ , і величини  $q_i, p_i$  не змінюються при додаванні  $2\pi$  до будь-якої з кутових змінних  $\theta_i$ . У результаті довільну функцію  $F$  динамічних змінних (зокрема, самі координати та імпульси) можна записати у вигляді ряду Фур'є:

$$F = \sum_{l_1=-\infty}^{+\infty} \dots \sum_{l_s=-\infty}^{+\infty} F(l_1, \dots, l_s) \exp[i(l_1 \omega_1 + \dots + l_s \omega_s) t],$$

де  $l_1, \dots, l_s$  – цілі числа. Знову виникають властивості, які схожі на властивості в лінійних системах: у лінійній системі з  $s$  ступенями вільності можна ввести нормальні координати  $Q_i(t)$ , кожна з яких є періодичною функцією часу

$Q_i(t) = a \cos(\omega_i t + \varphi_i)$  зі своєю частотою  $\omega_i = \partial E / \partial I_i$ , але залежності узагальнених координат  $q_i = \sum_j \Delta_{ij} Q_j$  і відповідних їм

узагальнених імпульсів від часу неперіодичні, оскільки в загальному випадку частоти  $\omega_i$  неспівмірні. У загальному випадку рух майже періодичний і траєкторії в координатному просторі не замикаються.

У випадку інтегрованої системи з  $s$  ступенями вільності можна зазначити ще одну відмінність довільної системи від лінійної: для лінійної системи частоти  $\omega_i$  сталі, а для нелінійної вони залежать від змінних  $I_1, \dots, I_s$ , тобто  $\omega_i = \omega_i(I)$ . Якщо спробувати провести точну аналогію між цими двома задачами, то дійдемо висновку, що частота даного нормального коливання залежить не тільки від її власної амплітуди, але й від усієї решти амплітуд. Тому для нелінійних систем ситуація більш складна, ніж для лінійних. Однак їх схожість виявляється в багатьох принципово важливих аспектах, насамперед у геометричних властивостях траєкторій у фазовому просторі.

Таким чином, якщо механічна система допускає введення змінних "дія-кут", то її можна розглядати (із застереженнями, зробленими вище) як сукупність  $s$  незалежних систем з одним ступенем вільності, тобто  $s$  незалежних нелінійних осциляторів. По суті, це є одне із визначень інтегрованої системи. Обміркуємо тепер умови інтегрованості деякої механічної системи.

Властивості інтегрованих систем у межах формалізму Лагранжа уже розглядалися у лекції 9. Тоді ми пов'язали інтегрованість деякої системи із  $s$  ступенями вільності з наявністю  $s$  незалежних інтегралів руху. Тепер можна уточнити умову інтегрованості, зазначивши, що їх можна було б обрати як імпульси при переході до змінних "дія-кут". Проте для цього необхідно, щоб ці інтеграли (чи спеціально підібрані їх комбінації) могли б мати сенс нових узагальнених імпульсів.

Відомо, що для узагальнених імпульсів дужки Пуассона мають дорівнювати нулю. Тому умову точної інтегрованості, тобто

можливості введення змінних "дія–кут" і повного відокремлення різних динамічних змінних необхідно доповнити, а саме, динамічна система вважається інтегрованою, якщо для неї існує  $s$  незалежних інтегралів руху, для яких всі дужки Пуассона дорівнюють нулю. Ця умова яскраво виражена у квантовій механіці, де умовою інтегрованості є наявність  $s$  інтегралів руху, оператори яких попарно комутують один з одним. Інше визначення інтегрованості можна отримати, допускаючи, що рівняння Гамільтона–Якобі для механічної задачі допускає повне відокремлення змінних, а вкорочену дію можна записати у вигляді суми

$$S_0(q_1, \dots, q_s) = \sum_{i=1}^s S_{0i}(q_i),$$

де функції  $S_{0i}$  залежить тільки від однієї змінної  $q_i$ . Далі, змінні дії  $I_i$  визначаються як  $I_i = \frac{1}{2\pi} \oint p_i dq_i$ . Отже, маємо ще одне

визначення: система вважається інтегрованою, якщо для неї за деякого вибору координат рівняння Гамільтона–Якобі допускає повне відокремлення змінних. Зрозуміло, що ці обидва визначення еквівалентні. Для останнього також можливо вказати відповідність у квантовій механіці: можливість відокремлення змінних у рівнянні Гамільтона–Якобі зазвичай вказує на те, що можна відокремити змінні в рівнянні Шредінгера, яке є основою квантової механіки.

### § 3. Структура фазового простору гамільтонових механічних систем

На завершення коротко обговоримо загальні закономірності динаміки механічних систем з кількістю ступенів вільності  $s \geq 2$  (у випадку  $s=1$  довільний фінітний рух періодичний). Почнемо з конкретного випадку  $s=2$ , детально поданого для лінійних систем у лекції 9. Розглянемо нелінійну інтегровану систему з  $s=2$ . У змінних "дія–кут" фазовий чотиривимірний простір можна представляти як прямий добуток двох двовимірних багатovidів  $(I_1, \theta_1)$  і  $(I_2, \theta_2)$ . Вважатимемо  $I_i, \theta_i$  полярни-

ми координатами на цих багатовидах. Тоді динаміка кожної пари канонічних змінних відображається на "власних" багатовидах у вигляді кіл з радіусами  $I_i = \text{const}$ . Отже, ми природно переходимо до картини, характерної для лінійних систем: фазова траєкторія лежить на двовимірному торі  $T^{(2)}$ , який можна розглядати як прямий добуток двох кіл. У загальному випадку, коли частоти  $\omega_1$  і  $\omega_2$  неспівмірні, фазова траєкторія ніколи не замикається і за достатньо великий проміжок часу повністю покриває цей тор.

Вище ми обговорювали фазовий простір системи в термінах змінних "дія–кут". Проте така сама структура фазового простору має існувати і для довільного набору канонічних змінних. При цьому прості тори перетворюються на більш складні поверхні, але ці поверхні є також торами щодо топології (*s*-вимірним *тором* називається *s*-вимірна поверхня, на якій можна ввести *s* простих контурів, які неможливо стягнути в точки або перевести один у одний шляхом неперервної деформації поверхні). Строге математичне доведення цього твердження непросте. Зокрема, воно спирається на загальні теореми геометрії та топології, з яких випливає, що за довільних неперервних перетворень координат тор залишається тором, тобто не може перейти, скажемо, у сферу тієї самої розмірності. Важливу роль тут відіграють вже розглянуті нами інтегральні інваріанти канонічних перетворень.

У результаті приходимо до картини фазового простору інтегрованої системи з  $s \geq 2$  кількістю ступенів вільності. У цьому  $2s$ -вимірному фазовому просторі всі фазові траєкторії лежать на *s*-вимірних торах, кожному з яких відповідає фіксоване значення *s* незалежних однозначних інтегралів руху  $I_1, \dots, I_s$ . У загальному випадку рух майже періодичний, оскільки фур'є-компоненти довільних фізичних величин є періодичними функціями часу із частотою  $l_1\omega_1 + \dots + l_s\omega_s$ , де  $l_1, \dots, l_s$  – цілі числа, а всі частоти  $\omega_i$  не є цілими кратними (або раціональними частинами) якої-небудь однієї з них. Якщо ж деякі з них співмірні (за довільних значень  $I_i$ ), то кількість незалежних частот буде мен-

шою. Нехай, наприклад, дві частоти  $\omega_i, \omega_k$  пов'язані співвідношенням  $n_i \omega_i = n_k \omega_k$ , де  $n_i, n_k$  – цілі числа. У цьому випадку кажуть про виродження системи. Якщо співмірні всі частоти, то система повністю вироджена. У цьому випадку рух буде строго періодичним, а траєкторії всіх матеріальних точок замкненими.

Умова виродження  $n_i \omega_i = n_k \omega_k$  у межах змінних "дія-кут" має важливий фізичний наслідок. Оскільки  $\omega_i = \partial E / \partial I_i$ , із рівності  $n_i \omega_i = n_k \omega_k$  випливає, що енергія залежить не від величин  $I_i$  і  $I_k$  окремо, а тільки від їх комбінації вигляду  $n_i I_k + n_k I_i$ . Дійсно,

$$\begin{aligned} n_i \omega_i &= n_i \frac{\partial E}{\partial I_i} = n_i \frac{\partial E}{\partial(n_i I_k + n_k I_i)} \frac{\partial(n_i I_k + n_k I_i)}{\partial I_i} = n_i \frac{\partial E}{\partial(n_i I_k + n_k I_i)} n_k = \\ &= n_k \frac{\partial E}{\partial(n_i I_k + n_k I_i)} n_i = n_k \frac{\partial E}{\partial(n_i I_k + n_k I_i)} \frac{\partial(n_i I_k + n_k I_i)}{\partial I_k} = n_k \frac{\partial E}{\partial I_k} = n_k \omega_k. \end{aligned}$$

Структура фазового простору найбільш проста для інтегрованих систем із  $s = 2$ . У цьому випадку в чотиривимірному фазовому просторі всі фазові траєкторії лежать на двовимірних торах. Двовимірний тор достатньо наочно можна зобразити у тривимірному просторі, як показано на рис. 2. Кожний із цих торів визначає значення двох інтегралів руху, існування яких необхідне для інтегрованості системи. Тори, які відповідають різним значенням інтегралів руху для випадку  $s = 2$ , вкладені один у одний і не перетинаються.

Слід зазначити, що для системи з кількістю ступенів вільності  $s > 2$  це не так, і задача виглядає складнішою. Виродженню відповідає співмірність двох частот  $\omega_1$  і  $\omega_2$ , тобто за умови  $n_1 \omega_1 = n_2 \omega_2$  рух буде періодичним, а всі траєкторії замкненими. Властивість виродження визначається наявністю (або відсутністю) додаткового (незалежного від  $I_1, I_2$ ) однозначного інтеграла руху. Щоб у цьому переконатись, виконаємо таке канонічне перетворення:



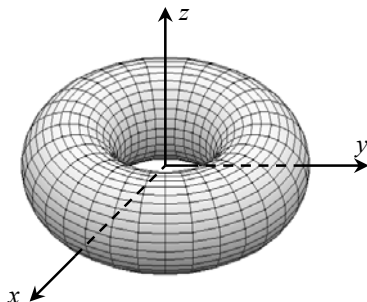
$$q_1 = \sqrt{2I_1/m\omega_1} \sin \theta_1, \quad p_1 = \sqrt{2I_1 m\omega_1} \cos \theta_1,$$

$$q_2 = \sqrt{2I_2/m\omega_2} \sin \theta_2, \quad p_2 = \sqrt{2I_2 m\omega_2} \cos \theta_2.$$

Далі, використовуючи умови  $\theta_1 = \omega_1 t$  і  $\theta_2 = \omega_2 t$ , можна виключити час і переконатися в збереженні такої величини:

$$\frac{1}{\omega_1} \operatorname{arctg} \left( \frac{m\omega_1 q_1}{p_1} \right) - \frac{1}{\omega_2} \operatorname{arctg} \left( \frac{m\omega_2 q_2}{p_2} \right) = \operatorname{const}.$$

Вираз такого типу ми вже аналізували в лекції 9; де показано, що інтеграл руху, що виникає, однозначний лише за раціонального відношення частот  $\omega_1$  і  $\omega_2$ , тобто за умови  $n_1\omega_1 = n_2\omega_2$ .



**Рис. 2.** Зображення двовимірного тору в декартовій системі координат

Таким чином, можна сформулювати загальне правило: якщо для динамічної системи з  $s = 2$  усі фазові траєкторії замкнені, то для неї існує додатковий (третій) однозначний інтеграл руху. Ми вже вказували на цю властивість під час аналізу динаміки в центрально-симетричному полі (замкненість траєкторій спостерігається для задачі Кеплера з потенціалом  $U(r) \propto -1/r$ , а також у випадку двовимірного гармонічного осцилятора з потенціалом  $U(r) \propto r^2$ ).

Якщо ж система неінтегрована, то характер фазових траєкторій суттєво ускладнюється. Для найбільш простого випадку неінтегрованої гамільтонової системи з  $s = 2$  єдиним інтегралом руху є енергія. Умова  $H(p_1, q_1; p_2, q_2) = E = \text{const}$  виділяє у чотиривимірному фазовому просторі тривимірний багатовид, а фазові траєкторії можуть заповнювати його. У цьому випадку може виникнути хаотична поведінка (див. лекцію 9).

### ***Контрольні запитання та завдання***

1. Що називається адіабатичним інваріантом?
2. Явний вираз для адіабатичного інваріанта та його геометрична інтерпретація.
3. Адіабатичний інваріант гармонічного осцилятора.
4. Суть змінних "дія–кут".
5. Визначення інтегрованості динамічної системи.

## РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

### **Основна**

1. *Ландау Л. Д.* Механика / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – М. : Наука, 1988.
2. *Голдстейн Г.* Классическая механика / Г. Голдстейн. – М. : Наука, 1975.
3. *Федорченко А. М.* Классическая механика / А. М. Федорченко. – К. : Вища шк., 1983.
4. *Сборник задач по теоретической физике / Л. Г. Гречко, В. И. Сугаков, О. Ф. Томасевич, А. М. Федорченко.* – М. : Высшая шк., 1984.
5. *Иванов Б. О.* Задачі з класичної механіки для самостійної роботи студентів / Б. О. Иванов, М. В. Максютя. – К. : ВПЦ "Київський університет", 2004.
6. *Максютя М. В.* Додатковий матеріал до курсу лекцій з теоретичної механіки : методична розробка для самостійної роботи студентів / М. В. Максютя. – К. : КНУ РФФ, 2006.

### **Додаткова**

7. *Барьяхтар В. Г.* Механика / В. Г. Барьяхтар, И. В. Барьяхтар, Л. П. Гармаш, С. А. Довгий. – К. : Ин-т Магнетизма НАН Украины, 2004.
8. *Іро Г.* Класична механіка / Г. Іро. – Л. : Львів. нац. ун-т ім. І.Франка, 1999.
9. *Карплюк К. С.* Механіка / К. С. Карплюк. – К. РВЦ "Київський університет", 1998.
10. *Павленко Ю. Г.* Задачи по теоретической механике / Ю. Г. Павленко. – М. : изд-во Моск. ун-та, 1988.

# З М І С Т

<b>ПЕРЕДМОВА</b> .....	3
<b>Розділ I. РУХ МАТЕРІАЛЬНИХ ТОЧОК</b>	
<b>У МЕЖАХ ФОРМАЛІЗМУ ЛАГРАНЖА</b> .....	7
<b>Лекція 1. Основні постулати Ньютона</b> .....	7
§ 1. Вступ.....	7
§ 2. Механіка системи матеріальних точок.....	10
<i>Контрольні запитання та завдання</i> .....	15
<b>Лекція 2. Принцип Гамільтона і рівняння Лагранжа</b> .....	15
§ 1. В'язі. Узагальнені координати .....	15
§ 2. Принцип Гамільтона .....	17
§ 3. Принцип відносності Галілея. Функції Лагранжа однієї матеріальної точки та системи матеріальних точок .....	21
<i>Контрольні запитання та завдання</i> .....	24
<b>Лекція 3. Узагальнення методу Лагранжа</b> .....	24
§ 1. Узагальнений вираз для кінетичної енергії .....	24
§ 2. Сили реакцій .....	27
§ 3. Узагальнення принципу Гамільтона на неконсервативні системи .....	29
<i>Контрольні запитання та завдання</i> .....	32
<b>Лекція 4. Закони збереження</b> .....	32
§ 1. Циклічні координати .....	32
§ 2. Закони збереження.....	34
§ 3. Механічна подібність .....	37
§ 4. Теорема віріалу .....	38
<i>Контрольні запитання та завдання</i> .....	40
<b>Лекція 5. Одновимірний рух матеріальної точки</b> .....	40
§ 1. Інтегрування рівнянь руху матеріальної точки.....	40
§ 2. Малі коливання .....	44
§ 3. Метод фазової площини .....	47
<i>Контрольні запитання та завдання</i> .....	52

<b>Розділ II. ЛІНІЙНІ ТА НЕЛІНІЙНІ КОЛИВАННЯ</b>	
<b>ЗА НАЯВНОСТІ СИЛ ТЕРТЯ</b> .....	53
<b>Лекція 6. Одновимірний рух матеріальної точки</b>	
<b>за наявності сил тертя</b> .....	53
§ 1. Сили тертя та їх види.....	53
§ 2. Лінійний осцилятор за наявності сили тертя.....	54
§ 3. Зображення згасаючих процесів	
на фазовій площині за "додатного тертя" .....	58
§ 4. Механічні системи з "від'ємним тертям" .....	61
<i>Контрольні запитання та завдання</i> .....	63
<b>Лекція 7. Вимушені коливання. Нелінійне тертя</b> .....	64
§ 1. Метод Ван дер Поля. Знакозмінне тертя.	
Граничний цикл.....	64
§ 2. Вимушені коливання.....	65
§ 3. Катастрофа резонансу .....	69
<i>Контрольні запитання та завдання</i> .....	72
<b>Лекція 8. Коливання систем</b>	
<b>з багатьма ступенями вільності</b> .....	72
§ 1. Вільні коливання систем	
з багатьма ступенями вільності.	
Нормальні координати .....	72
§ 2. Коливання системи з багатьма	
ступенями вільності за наявності сили тертя.....	81
§ 3. Вимушені коливання системи	
з багатьма ступенями вільності.....	83
<i>Контрольні запитання та завдання</i> .....	84
<b>Розділ III. ІНТЕГРОВАНІСТЬ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ</b>	
<b>З ДЕКІЛЬКОМА СТУПЕНЯМИ ВІЛЬНОСТІ</b> .....	85
<b>Лекція 9. Інтегрованість динамічних систем</b> .....	85
§ 1. Двовимірний анізотропний гармонічний осцилятор ...	86
§ 2. Система Хенона–Хейнеса. Динамічний хаос.....	93
<i>Контрольні запитання та завдання</i> .....	97

<b>Лекція 10. Інтегрованість у центральних полях</b> .....	97
§ 1. Рух у центральному полі.....	97
§ 2. Задача Кеплера .....	104
<i>Контрольні запитання та завдання</i> .....	110
<b>Лекція 11. Задача двох тіл. Розсіювання частинок</b> .....	111
§ 1 Багаточастинкові задачі	
з ньютонівською взаємодією.....	111
§ 2. Пружні зіткнення частинок .....	115
§ 3. Розсіювання частинок .....	117
§ 4. Формула Резерфорда .....	120
<i>Контрольні запитання та завдання</i> .....	122
<b>Розділ IV. РУХ АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТІЛА</b> .....	123
<b>Лекція 12. Кінематика і динаміка руху твердого тіла</b> .....	123
§ 1. Кінематика руху твердого тіла.....	123
§ 2. Динаміка твердого тіла.....	128
<i>Контрольні запитання та завдання</i> .....	133
<b>Лекція 13. Параметризації обертального руху</b>	
<b>твердого тіла</b> .....	134
§ 1. Параметризація поворотів кутами Ейлера.....	134
§ 2. Векторна параметризація поворотів.....	136
§ 3. Кінематичні рівняння Ейлера.....	140
<i>Контрольні запитання та завдання</i> .....	142
<b>Лекція 14. Дзигі</b> .....	142
§ 1. Динамічні рівняння Ейлера. Типи дзигі .....	142
§ 2. Вільна динаміка асиметричної дзигі Ейлера.	
Лінійний випадок.....	145
§ 3. Вільна динаміка симетричної дзигі Ейлера.....	147
§ 4. Вільний рух асиметричної дзигі Ейлера.	
Загальний випадок .....	149
<i>Контрольні запитання та завдання</i> .....	156
<b>Лекція 15. Рух у неінерціальних системах відліку</b> .....	157
<i>Контрольні запитання та завдання</i> .....	162

<b>Розділ V. ФОРМАЛІЗМ ГАМІЛЬТОНА</b> .....	163
<b>Лекція 16. Рівняння Гамільтона</b> .....	163
§ 1. Виведення рівнянь Гамільтона на основі перетворення Лежандра та за варіаційним принципом.....	163
§ 2. Функція Рауса.....	166
§ 3. Канонічні перетворення .....	168
<i>Контрольні запитання та завдання</i> .....	176
<b>Лекція 17. Метод Гамільтона–Якобі.</b>	
<b>Теорема Ліувілля</b> .....	176
§ 1. Дія як функція координат. Рух як канонічне перетворення .....	176
§ 2. Рівняння Гамільтона–Якобі .....	180
§ 3. Інтегральні інваріанти Пуанкаре. Теорема Ліувілля .....	184
<i>Контрольні запитання та завдання</i> .....	189
<b>Лекція 18. Гамільтонові інтегровані системи.</b>	
<b>Змінні "дія–кут"</b> .....	189
§ 1. Адіабатичні інваріанти.....	189
§ 2. Змінні "дія–кут" .....	194
§ 3. Структура фазового простору гамільтонових механічних систем.....	198
<i>Контрольні запитання та завдання</i> .....	202
<b>РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА</b> .....	203

**Навчальне видання**

**ІВАНОВ Борис Олексійович  
МАКСЮТА Микола Васильович**

# **КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ ІЗ ТЕОРЕТИЧНОЇ МЕХАНІКИ**

Навчальний посібник

Редактор Л. П. Львова

Виконавець Т. С. Яшкова

Оригінал-макет виготовлено Видавничо-поліграфічним центром "Київський університет"



Формат 60x84<sup>1/16</sup> Ум. друк. арк. 12,1. Наклад 150. Зам. № 212-6033.  
Вид. № Рф6. Гарнітура Times New Roman. Папір офсетний. Друк офсетний.  
Підписано до друку 15.05.12

Видавець і виготовлювач  
Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет"  
01601, Київ, б-р Т. Шевченка, 14, кімн. 43  
☎ (044) 239 32 22; (044) 239 31 72; тел./факс (044) 239 31 28  
e-mail: vpc\_div.chief@univ.kiev.ua  
<http://vpc.univ.kiev.ua>

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 1103 від 31.10.02