ДЕРЖАВНИЙ ЕКОНОМІКО-ТЕХНОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ТРАНСПОРТУ

Кафедра теоретичної та прикладної механіки

Л.Г. Лобас, В.В. Ковальчук

ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА У ПРИКЛАДАХ І ЗАДАЧАХ

Частина 1

Статика

Для студентів технічних спеціальностей
денної та заочної форм навчання

Видання друге, виправлене і доповнене

Київ 2008

УДК 51:517

Лобас Л.Г., Ковальчук В.В. Теоретична механіка у прикладах і задачах. Частина 1. Статика. – Видання. друге, виправлене і доповнене. – К.: ДЕТУТ, 2008. – 96 с.

Розглянуто і затверджено на засіданні кафедри теоретичної та прикладної механіки (протокол № від 17.04.2008 р.) та на засіданні методичної комісії факультету ІРСЗТ (протокол № від .04.2008 р.).

У посібнику наведені завдання і методичні вказівки до практичних занять і самостійної роботи студентів над курсом теоретичної механіки. Кожен розділ починається з відповідних основних понять, формул і теорем. Мета посібника – навчити читача сомостійно розв'язувати основні типи задач зі статики.

Призначено для студентів технічних спеціальностей університету денної та заочної форм навчання.

Укладачі: Л.Г. Лобас, доктор фізико-математичних наук, професор, дійсний член Нью-Йоркської академії наук,

В.В. Ковальчук, кандидат фізико-математичних наук, доцент.

Рецензенти: О.І. Барабаш, доктор фізико-математичних наук наук, професор,

В.Б. Ларін, доктор фізико-математичних наук наук, професор,

О.О. Рассказов, доктор технічних наук, професор.

ЗМІСТ

ВСТУП

Теоретична механіка – фундаментальна дисципліна фізико-математичного циклу, розвиває не лише загальноінженерну, а й загальнонаукову базу майбутнього фахівця. Невелика кількість законів і теорем, що лежать в основі теоретичної механіки, мають досить широке застосування. Тому у тих, хто вивчає або використовує у своїй діяльності теоретичну механіку, найбільше складнощів виникає при застосуванні загальних положень теорії до розв’язання конкретних задач. Аналіз і знаходження розв’язків практичних завдань дозволяють краще зрозуміти і запам’ятати основні теореми та формули даного курсу.

Головна мета даного навчального посібника – сприяти глибокому засвоєнню студентами теорії завдяки самостійній роботі, напрацюванню навичок і опануванню методики розв’язання задач із теоретичної механіки.

У посібнику подано велику кількість задач, які імітують реальні процеси і механізми, та абстрактні задачі. Такі задачі корисні для закріплення набутих теоретичних знань, ознайомлення з різними способами їх розв’язання, а також для формування творчого підходу, логічного мислення.

Для полегшення активного засвоєння матеріалу (а саме таке навчання і має сенс) у кожному розділі посібника наведені рекомендації щодо послідовності розв’язання тих або інших типів задач, детально розглянуто конкретні приклади, а також підібрані завдання для самостійної роботи.

Доцільним буде для кращого засвоєння матеріалу дотримуватися принципу послідовності та систематичності. Роботу над кожним з розділів необхідно починати з вивчення теоретичного матеріалу даного розділу [1, 2, 6].

Порівнянно з попереднім виданням посібник доповнений великою кількістю задач як із поясненнями щодо розв’язання, так і задачами для самостійного опрацювання. Видання містить також два нових розділи (про рівновагу просторової системи сил і розрахунок плоских ферм). Крім того, в посібнику виправлені деякі неточності в поясненнях і відповідях.

РОЗДІЛ 1. **РІВНОДІЙНА СИСТЕМИ СИЛ**

У випадку, коли на тіло діють лише дві непаралельні сили, рівнодійну цих сил визначають за ***правилом паралелограма:*** *рівнодійна двох непаралельних сил, прикладених в одній точці, прикладена в тій самій точці, направлена вздовж діагоналі паралелограма, побудованого на цих силах, і дорівнює за модулем довжині цієї діагоналі* (рис. 1.1)

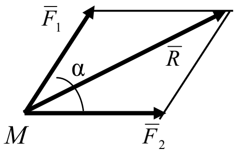


Рис.1.1

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2 \cdot F_1 \cdot F_2 \cos\alpha} \ .$$

Якщо на тіло діють більше ніж дві сили, то їх рівнодійна дорівнює векторній сумі цих сил:

$$\overline{R} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \ldots + \overline{F}_n \ .$$

При розв'язанні задач на знаходження рівнодійної такої системи сил застосовують один зі способів:

- ***геометричний*** (рівнодійна $\overline{R}$ системи сил є замикальною стороною силового многокутника, побудованого на даних силах);
- ***аналітичний*** (координати рівнодійної сили задовольняють рівнянню $R_x = \sum F_{kx}$, $R_y = \sum F_{ky}$, $R_z = \sum F_{kz}$).

Розв'язання типових задач

Задача 1. Визначити величину рівнодійної двох однакових за модулем сил $F_1 = F_2 = 5$ Н, що утворюють між собою кут $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$.

Р о з в' я з а н н я. За правилом паралелограма маємо:

$$R=\sqrt{5^2+5^2+2\cdot5\cdot5\cdot\cos\frac{\pi}{4}}=5\sqrt{2+\sqrt{2}}\approx 9{,}24\ \text{(Н).}$$

Відповідь: R = 9,24 Н.

Задача 2. Знайти модуль рівнодійної двох сил $\vec{F}_1=5\,\vec{i}+7\,\vec{j}+9\,\vec{k}$ і $\vec{F}_2=4\,\vec{i}+9\,\vec{j}-11\,\vec{k}$, прикладених у початку O прямокутної системи координат, і визначити кут, який вона утворює з віссю Ox.

Р о з в' я з а н н я. Знайдемо координати рівнодійної сили:

$$\vec{R}=\vec{F}_1+\vec{F}_2=\left(5\vec{i}+7\,\vec{j}+9\vec{k}\right)+\left(4\vec{i}+9\,\vec{j}-11\,\vec{k}\right)=9\vec{i}+16\vec{j}-2\,\vec{k}\ .$$

Модуль рівнодійної сили дорівнює:

$$R=\sqrt{9^2+16^2+(-2)^2}=\sqrt{341}\approx 18{,}47\ \text{(Н).}$$

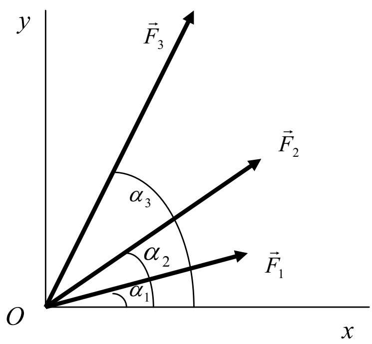
Визначимо кут між цією силою і віссю Ox. Оскільки

$$\cos\alpha=\frac{R_x}{R}=\frac{9}{\sqrt{341}}\approx 0{,}4873,$$

то $\alpha=\arccos 0{,}4873\approx 61^0$.

Відповідь: R = 18,47 Н, α = 61^0.

Задача 3. Визначити модуль рівнодійної системи сил $F_1=10$ Н, $F_2=15$ Н, $F_3=20$ Н, прикладених у початку O системи координат Oxy, якщо вектори цих сил утворюють із віссю Ox кути $\alpha_1=30^0$, $\alpha_2=45^0$ і $\alpha_3=60^0$ відповідно.



Р о з в' я з а н н я. Рівнодійна даної системи сил $\overline{R}=\overline{F}_1+\overline{F}_2+\overline{F}_3$ має координати $R_x=F_{1x}+F_{2x}+F_{3x}$, $R_y=F_{1y}+F_{2y}+F_{3y}$, тобто

$$R_x = F_1 \cos\alpha_1 + F_2 \cos\alpha_2 + F_3 \cos\alpha_3 , \qquad R_y = F_1 \sin\alpha_1 + F_2 \sin\alpha_2 + F_3 \sin\alpha_3 .$$

Підставимо числові значення й отримаємо:

$$R_x = 10 \cos 30^0 + 15 \cos 45^0 + 20 \cos 60^0 ,$$

$$R_y = 10 \sin 30^0 + 15 \sin 45^0 + 20 \sin 60^0 .$$

Отже, $R_x \approx$ 29,28 Н, $R_y \approx$ 32,93 Н. Тоді модуль рівнодійної дорівнює:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{29{,}28^2 + 32{,}93^2} \approx 44{,}05 \text{ (Н)} .$$

Відповідь: R = 44,05 Н.

Завдання для самостійної роботи

1.1. Знайти модуль сили $\vec{F} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}$ і кут, який ця сила утворює з віссю Oz.

Відповідь: F = 7,07 Н, α = arccos 0,707 = 45^0.

1.2. Визначити величину рівнодійної двох сил F_1 = 8 Н і F_2 = 6 Н, які утворюють між собою кут $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$.

Відповідь: R = 12,17 Н.

1.3. Знайти модуль рівнодійної двох сил $\vec{F}_1 = 2\vec{i} - 5\vec{j} + \vec{k}$ і $\vec{F}_2 = \vec{i} + 3\vec{j} - 6\vec{k}$, прикладених у початку O прямокутної системи координат.

Відповідь: R = 6,16 Н.

1.4. Який кут утворюють між собою сили $\vec{F}_1 = 8\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$ і $\vec{F}_2 = 2\vec{i} + 4\vec{j} + 12\vec{k}$, прикладені в початку O прямокутної системи координат?

Відповідь: α = arccos 0,0356 $\approx$ 88^0.

1.5. Визначити модуль рівнодійної системи сил $F_1 = 8$ Н, $F_2 = 10$ Н, $F_3 = 4$ Н, прикладених у початку O системи координат Oxy, якщо вектори цих сил утворюють із віссю Ox кути $\alpha_1 = 30^0$, $\alpha_2 = 60^0$ і $\alpha_3 = 90^0$ відповідно.

Відповідь: 20,49 Н.

1.6. Для двох сил $\vec{F}_1 = 6\,\vec{i} + 8\,\vec{j}$ і $\vec{F}_2 = 4\,\vec{i} - 3\,\vec{j}$ визначити кут, який вони утворюють між собою, і знайти рівнодійну.

Відповідь: $\alpha = 90^0$, $R = 11{,}18$ Н.

1.7. Визначити, який кут утворює з віссю *Ox* рівнодійна сил $\vec{F}_1 = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{F}_2 = 2\,\vec{i} + \vec{j} + 2\,\vec{k}$ і $\vec{F}_3 = -\,\vec{i} + 2\,\vec{j} + 2\,\vec{k}$, прикладених у початку *O* прямокутної системи координат.

Відповідь: $\alpha = \arccos 0{,}348 \approx 70^0$.

1.8. Знайти рівнодійну сил $F_1 = 6$ кН, $F_2 = 6$ кН і $F_3 = 5$ кН, які прикладені у вершині *A* квадрата *ABCD* і направлені до вершин *B*, *D* і *C* відповідно.

Відповідь: R = 13,49 кН, прикладена у вершині *A* і направлена вздовж діагоналі *AC*.

1.9. У центрі квадрата прикладені сили 2, 4, 6 і 8 Н, направлені до вершин *A*, *B*, *C* і *D* відповідно. Знайти рівнодійну цих сил.

Відповідь: R = 5,66 Н, направлена від центру до середини сторони *CD*.

1.10. У центрі правильного шестикутника прикладені сили 1, 3, 5, 7, 9 і 11 Н, направлені до його вершин. Знайти величину і напрям рівнодійної та зрівноважуючої сил.

Відповідь: 12 Н; напрямок зрівноважуючої сили протилежний до напряму заданої сили в 9 Н.

1.11. Силу $\vec{P}$, яка утворює з віссю *x* кут 60^0 і має модуль 6 Н, розкласти на дві складові, паралельні осям координат.

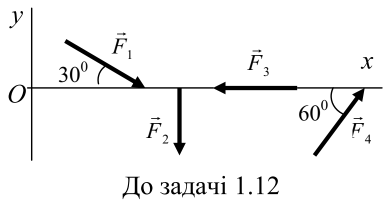
Відповідь: $\vec{P} = \vec{P}_x + \vec{P}_y$, де $P_x = 3$ Н, $P_y = 3\sqrt{3}$ Н.

1.12. Для сил $F_1 = 4$ Н, $F_2 = 6$ Н, $F_3 = 8$ Н, $F_4 = 10$ Н, напрямки яких показані на рисунку, знайти суму проекцій:

а) на вісь *x*; б) на вісь *y*.

Відповідь: а) $\sum F_{ix} = 0{,}46$ Н;

б) $\sum F_{iy} = 0{,}66$ Н.



До задачі 1.12

РОЗДІЛ 2. **СИСТЕМА ЗБІЖНИХ СИЛ**

Для успішного розв’язання задач даного розділу необхідно попередньо уважно ознайомитися з основними видами в’язів і напрямами їх реакцій (розділ 1.9 [1], § 3 глави 1 [2] та ін.), а також умовами рівноваги збіжної системи сил (розділи 2.1 – 2.4 [1], § 6 глави II [2] та ін.).

Розв’язання задач на рівновагу твердого тіла, до якого прикладена система збіжних сил, доцільно проводити так:

1) виділити тверде тіло, рівновагу якого необхідно розглянути для знаходження невідомих величин;

2) показати активні сили, що діють на тіло;

3) якщо тверде тіло є невільним, то, застосовуючи закон звільнюваності від в’язів, замінити в’язі їх відповідними реакціями;

4) розглянути рівновагу даного невільного тіла, як вільного, що перебуває під дією активних сил і реакцій в’язів;

5) застосовуючи необхідні і достатні умови рівноваги в аналітичній або геометричній формі, визначити шукані величини.

Аналітична умова рівноваги полягає в тому, що всі сили, прикладені до тіла, задовільняють рівнянню $\sum \vec{F}_k = 0$ або (в проекціях на координатні осі):

$$\sum F_{kx} = 0, \quad \sum F_{ky} = 0, \quad \sum F_{kz} = 0. \qquad (2.1)$$

Геометричною умовою рівноваги є замкненість силового багатокутника, побудованого на заданих силах. Застосування умов рівноваги в геометричній формі є більш зручним у випадках, коли на тіло діють лише три сили.

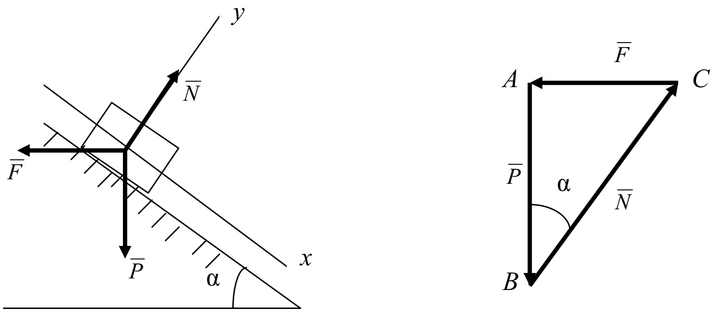
Розв’язання типових задач

Задача 1. Тіло вагою P = 10 Н лежить на гладенькій похилій площині з кутом нахилу α = 30^0. Визначити величину горизонтальної сили $\overline{F}$, яку треба прикласти до тіла, щоб утримати його в рівновазі. Яким буде при цьому тиск Q тіла на площину.

Р о з в ’я з а н н я. Розглянемо рівновагу заданого тіла. Активними силами, що на нього діють, є сила ваги $\overline{P}$ і шукана сила $\overline{F}$ (рис. 2.1, *а*).

Дане тіло є невільним. Скористаємось принципом звільнення від в’язів і замінимо опору (похилу площину) її реакцією $\overline{N}$, направленою перпендикулярно до площини.

Для визначення шуканої сили $\overline{F}$, розглянемо рівновагу даного тіла, як вільного, на яке діють сил $\overline{F}$, $\overline{P}$ і $\overline{N}$. Друга шукана сила – тиск $\overline{Q}$ кулі діє не на тіло, а на площину. За законом рівності дії та протидії $\overline{Q} = -\overline{N}$, тому замість сили тиску $\overline{Q}$ тіла на площину шукаємо реакцію площини $\overline{N}$.



а *б*

Рис. 2.1

Для визначення сил $\overline{F}$ і $\overline{N}$ можна застосувати або геометричний, або аналітичний спосіб. Розглянемо обидва способи.

Геометричний спосіб. При рівновазі тіла трикутник, побудований із сил $\overline{F}$, $\overline{P}$ і $\overline{N}$, повинен бути замкненим. Побудову трикутника починаємо із заданої сили ваги. Від довільної точки *A* у вибраному масштабі відкладаємо силу $\overline{P}$ (рис.2.1, *б*). Через початок і кінець цієї сили проводимо прямі, паралельні напрямам сил $\overline{F}$ і $\overline{N}$. Точка перетину цих прямих дає третю вершину *C* замкненого силового трикутника *ABC*, в якому сторони *BC* і *CA* дорівнюють у вибраному масштабі шуканим величинам. Напрями сил визначаємо за правилом стрілок: з однієї вершини силового трикутника повинна виходити лише одна сила і в цю вершину повинна приходити лише одна сила.

Модулі шуканих сил можна знайти з трикутника ABC і за допомогою числового розрахунку (у цьому випадку дотримуватися масштабу при зображенні сил не обов'язково). Оскільки $AB \perp AC$ і $\angle ABC = \alpha$, то знаходимо:

$$F = P\,tg\alpha, \qquad N = \frac{P}{\cos\alpha} .$$

Отже, $F = 10\,tg\,30^0 = \frac{10}{\sqrt{3}} = \frac{10\sqrt{3}}{3} \approx 5,77$ (Н), $Q = N = \frac{10}{\cos 30^0} = \frac{10 \cdot 2}{\sqrt{3}} = \frac{20\sqrt{3}}{3} \approx 11,55$ (Н).

Аналітичний спосіб. При рівновазі тіла сили, що діють на нього, повинні задовольняти умові рівноваги $\overline{F} + \overline{P} + \overline{N} = 0$. Оскільки маємо плоску систему сил, то цій умові будуть відповідати лише перші два з рівнянь (2.1). Направимо осі так, як показано на рис. 2.1, *а*. Тоді отримаємо систему рівнянь:

$$\sum F_{k\,x} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad -F\cos\alpha + P\sin\alpha = 0;$$

$$\sum F_{k\,y} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad -F\sin\alpha - P\cos\alpha + N = 0.$$

Розв'язуючи ці рівняння відносно шуканих величин, знаходимо:

$$F = P\,tg\alpha, \qquad N = F\sin\alpha + P\cos\alpha = P\,tg\alpha \cdot \sin\alpha + P\cos\alpha = \frac{P}{\cos\alpha}.$$

Остаточно маємо $F = 10\,tg\,30^0 \approx 5,77$ (Н), $Q = N = \frac{10}{\cos 30^0} \approx 11,55$ (Н).

Задача 2. Однорідна куля вагою P = 20 кН спирається в точці A на гладеньку похилу площину, що утворює кут $\alpha = 60^0$ із горизонтом, а в точці B на виступ, який розташований на одній горизонталі з точкою A (рис. 2.2, *а*). Визначити опорні реакції похилої площини і виступа.

Р о з в' я з а н н я. Розглянемо рівновагу кулі.

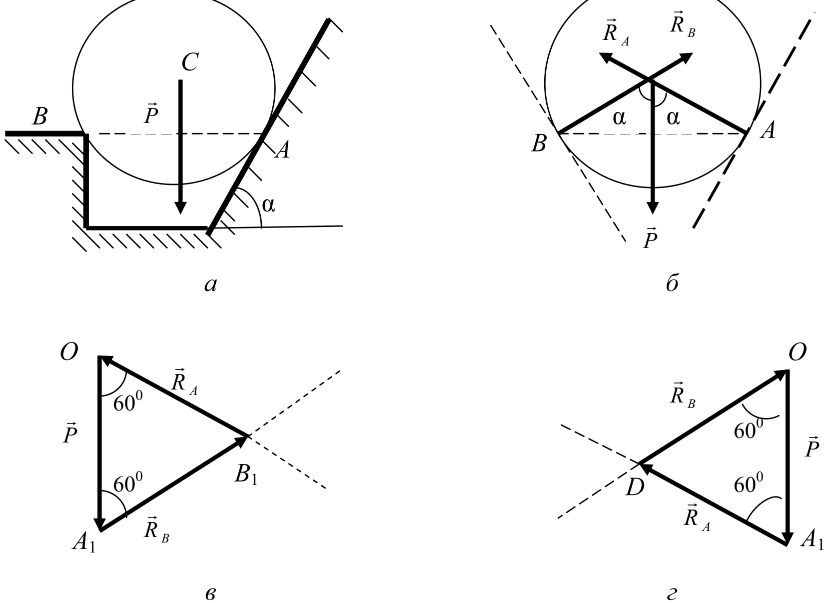


Рис. 2.2

На кулю діє одна активна сила – сила ваги $\vec{P}$, направлена вертикально вниз. В'язями для кулі є похила площина і виступ. Застосовуючи принцип звільнення від в'язів, замінимо в'язі відповідними реакціями $\vec{R}_A$ і $\vec{R}_B$ (рис. 2.2, *б*).

Розглянемо кулю як вільне тверде тіло, що перебуває в рівновазі під дією плоскої системи трьох сил $\vec{P}$, $\vec{R}_A$ і $\vec{R}_B$, лінії дії яких перетинаються в точці *C*. Для рівноваги кулі необхідно і достатньо виконання умови $\vec{P}+\vec{R}_A+\vec{R}_B=0$. Тому сили утворюють замкнений силовий трикутник.

Побудову силового трикутника почнемо із сили $\vec{P}$, для якої відомі величина і напрям. Із довільної точки *O* (рис. 2.2, *в*) проведемо вектор, який дорівнює силі $\vec{P}$. Через кінець A_1 цієї сили проводимо пряму, паралельну лінії дії сили $\vec{R}_B$, а через точку *O* проведемо пряму паралельно лінії дії сили $\vec{R}_A$.

Точка B_1 перетину побудованих прямих є третьою вершиною силового трикутника OA_1B_1, в якому має бути єдиний напрям стрілок, тобто в кожній вершині трикутника розташований кінець лише однієї з трьох сил.

Для визначення модулів опорних реакцій $\vec{R}_A$ і $\vec{R}_B$ неважко помітити на рис. 2.2, *б*, що лінія дії сили $\vec{P}$ утворює з лініями дії сил $\vec{R}_A$ і $\vec{R}_B$ кути $\alpha = 60^0$. Отже, трикутник OA_1B_1 є рівностороннім і тому $R_A = R_B = P = 20$ кН.

Відмітимо, що побудову силового трикутника можна виконати й інакше: провести через точку A_1 пряму, паралельну лінії дії сили $\vec{R}_A$, а через точку O – паралельну лінії дії сили $\vec{R}_B$. В результаті отримаємо силовий трикутник OA_1D (рис. 2.2, *г*), який рівний силовому трикутникові OA_1B_1. Зрозуміло, що розв'язання цього трикутника привело б до отриманих вище значень модулів реакцій опор.

Задача 3. Два абсолютно тверді стержні *AB* і *AC* з'єднані шарніром у точці *A* і прикріплені до підлоги шарнірами *B* і *C*, утворюючи з підлогою відповідно кути 45^0 і 60^0 (рис. 2.3, *а*). До валика шарніру *A* підвішений на нерозтяжній нитці вантаж *D*, вага якого $P = 100$ кН. Визначити зусилля, що виникають у стержнях *AB* і *AC*. Вагою стержнів знехтувати.

Р о з в' я з а н н я. Для визначення зусиль у стержнях *AB* і *AC* необхідно розглянути рівновагу шарніра *A*. Він перебуває в рівновазі під дією трьох сил: реакцій стержнів *AB* і *AC* і реакції нитки *AD*. Оскільки всі ці сили є невідомими, то попередньо розглянемо рівновагу вантажу *D* для визначення реакції нитки.

Вантаж *D* перебуває в рівновазі під дією двох сил: ваги $\vec{P}$ і реакції нитки $\vec{T}$ (рис. 2.3, *б*). Ці сили протилежно направлені вздовж однієї прямої. Враховуючи умову рівноваги вантажу, маємо $T = P = 100$ кН.

Розглянемо рівновагу шарніра *A*. До нього прикладена одна вже відома сила – реакція нитки $\vec{T}_1$, яка направлена по вертикалі вниз, (за законом рівності дії та протидії $\vec{T}_1 = -\vec{T}$) і реакції стержнів *AB* і *BC*, які направлені вздовж стержнів (рис. 2.3, *в*). У загальному випадку заздалегідь важко вказати, як саме направлені реакції $\vec{S}_B$ і $\vec{S}_C$ вздовж стержнів (угору чи вниз). Це буде з'ясовано під час розв'язання задачі.

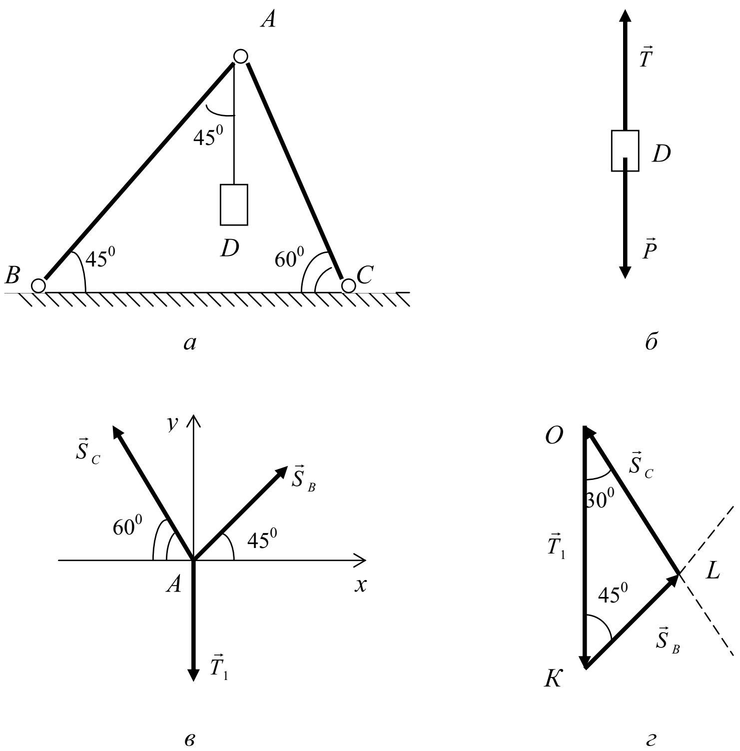


Рис. 2.3

Покажемо два способи визначення невідомих зусиль S_B і S_C.

Геометричний спосіб. При рівновазі шарніра *A* сили $\vec{T}_1$, $\vec{S}_B$ і $\vec{S}_C$ утворюють замкнений силовий трикутник. Побудову цього трикутника показано на рис. 2.3, *г*. Вибираємо довільну точку *O* і прикладаємо до неї силу $\vec{T}_1$, відому як за напрямом, так і за величиною. Через точки *O* і *K* проводимо прямі, паралельні напрямам сил $\vec{S}_C$ і $\vec{S}_B$ відповідно. Точка *L* перетину цих прямих є третьою вершиною силового трикутника. Вектори $\vec{S}_B$ і $\vec{S}_C$ направлені так, що в кожну вершину трикутника приходить лише один вектор.

Розв'язуючи силовий трикутник, враховуємо, що $\angle KOL = \angle DAC = 30^0$ і $\angle OKL = \angle BAD = 45^0$, як кути з відповідно паралельними сторонами. Отже, $\angle OLK = 105^0$. За теоремою синусів маємо:

$$\frac{S_B}{\sin 30^0} = \frac{S_C}{\sin 45^0} = \frac{T_1}{\sin 105^0} \ ,$$

звідки

$$S_B = T_1 \frac{\sin 30^0}{\sin 105^0}, \qquad S_C = T_1 \frac{\sin 45^0}{\sin 105^0} \ .$$

Підставляючи числові значення, знаходимо: $S_B \approx$ 51,8 кН, $S_C \approx$ 73,2 кН.

Аналітичний спосіб. Направимо осі координат так, як показано на рис. 2.3, *в*, і запишемо умови (2.1) рівноваги шарніра *A*:

$$\sum F_{k\,x} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad S_B \cos 45^0 - S_C \cos 60^0 = 0\,;$$

$$\sum F_{k\,y} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad S_B \sin 45^0 + S_C \sin 60^0 - T_1 = 0\,.$$

Віднімаючи від другого рівняння перше, отримаємо:

$$S_C \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \right) - T_1 = 0 \ \text{, звідки} \ \ S_C = \frac{2T_1}{\sqrt{3}+1}\,.$$

Із першого рівняння знаходимо:

$$S_B = S_C \cdot \frac{\cos 60^0}{\cos 45^0} = \frac{S_C}{\sqrt{2}}\,.$$

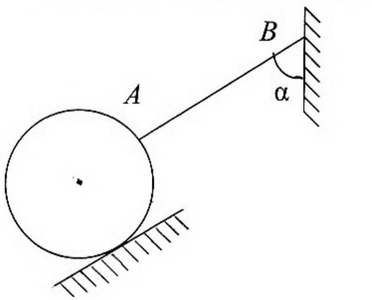
Остаточно маємо:

$$S_C \approx 73{,}2 \text{ кН}, \qquad S_B \approx 51{,}8 \text{ кН}.$$

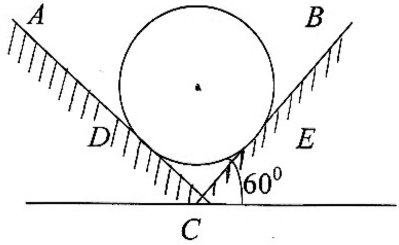
Завдання для самостійної роботи

2.1. Однорідну кулю вагою 12 Н утримує в рівновазі на гладенькій похилій площині канат AB. Визначити тиск кулі на площину, якщо канат із вертикальною стіною утворює кут $\alpha = 60^0$ і він розташований паралельно похилій площині.

Відповідь: $Q =$ 10,39 кН.



До задачі 2.1



До задачі 2.2

2.2. На двох взаємно перпендикулярних гладких похилих площинах AB і BC лежить однорідна куля, вага якої становить 60 Н. Визначити тиск кулі на кожну площину, знаючи, що площина BC утворює з горизонтом кут $\alpha = 60^0$.

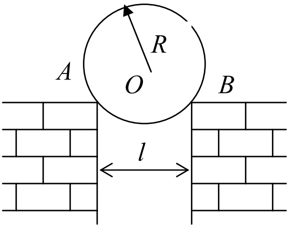
Відповідь: N_D = 52 Н, N_E = 30 Н.

2.3. Циліндрична труба вагою 60 кН і радіуса 1 м лежить на виступах цегляної кладки. Нехтуючи тертям, визначити тиск труби на кладку в точках A і B, якщо відстань між стінками кладки l = 1,6 м.

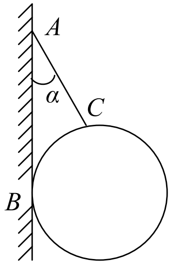
Відповідь: $N_A = N_B$ = 50 кН.

2.4. До вертикальної гладкої стіни AB підвішена на тросі AC однорідна куля вагою 90 Н. Трос утворює зі стіною кут $\alpha = 30^0$. Визначити натяг тросу T і тиск Q кулі на стіну.

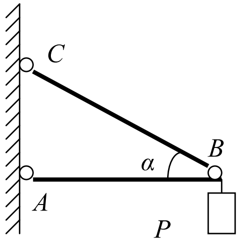
Відповідь: T = 103,92 Н, Q = 51,96 Н.



До задачі 2.3



До задачі 2.4



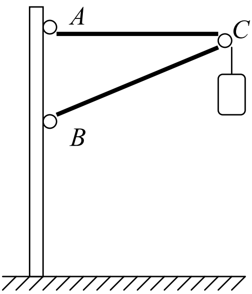
До задачі 2.5

2.5. Тіло вагою 2 кН необхідно підвісити на кронштейні, у якого стержень *AB* горизонтальний, а стержень *CB* утворює з *AB* кут $\alpha = 30^0$. Визначити зусилля в стержнях кронштейна.

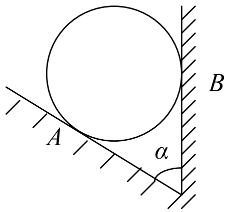
Відповідь: $S_{AB} = 3{,}46$ кН, $S_{BC} = 4$ кН.

2.6. Вуличний ліхтар вагою 300 Н підвішений до вертикального стовпа за допомогою кронштейна *ABC*, в якому *AC* = 1,2 м і *BC* = 1,5 м. Визначити зусилля в стержнях *AC* і *BC*, вважаючи кріплення в точках *A*, *B* і *C* шарнірними.

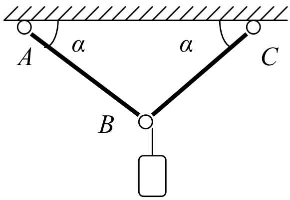
Відповідь: $S_{AC} = 400$ Н, $S_{BC} = 500$ Н.



До задачі 2.6



До задачі 2.7



До задачі 2.8

2.7. Однорідний гладкий циліндр, вага якого становить 120 Н, спирається на вертикальну і похилу площини, що утворюють між собою кут $\alpha = 60^0$. Визначити тиск циліндра на обидві площини.

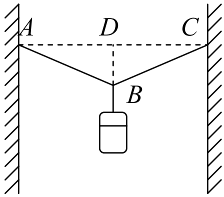
Відповідь: $Q_A = 138{,}56$ Н, $Q_B = 69{,}28$ Н.

2.8. Визначити зусилля в стержнях *AB* і *BC*, що з'єднані між собою та зі стелею за допомогою шарнірів і утримують вантаж вагою 2 кН, якщо $\alpha = 45^0$.

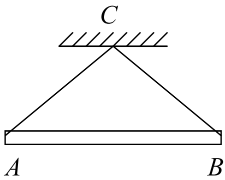
Відповідь: $S_{AB} = S_{BC} = 1414$ Н.

2.9. Вуличний ліхтар підвішений у точці *B* до середини тросу *ABC*, що прикріплений кінцями до гаків *A* і *C*, які розташовані на одній горизонталі. Визначити натяги T_1 і T_2 ділянок *AB* і *AC* троса, якщо довжина всього тросу *ABC* дорівнює 20 м, вага ліхтаря становить 150 Н і відхилення від горизонталі точки його підвісу є *BD* = 0,1 м. Вагою тросу знехтувати.

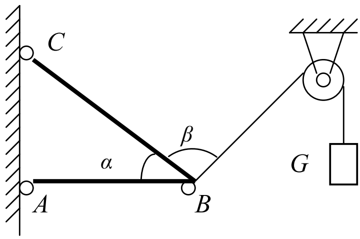
Відповідь: $T_1 = T_2 = 7{,}5$ кН.



До задачі 2.9



До задачі 2.10



До задачі 2.11

2.10. Однорідний стержень *AB*, вага якого становить 160 Н, а довжина – 1,2 м, підвішений у точці *C* на двох тросах *AC* і *BC* по 1 м кожний. Визначити натяги тросів.

Відповідь: Натяг кожного тросу дорівнює 100 Н.

2.11. До шарніра *B* кронштейна *ABC* прикріплений трос, перекинутий через блок. До другого кінця тросу підвішений вантаж вагою *G* = 1,5 кН. Визначити зусилля в стержнях *AB* і *BC* кронштейна, якщо кріплення в точках *A* і *C* шарнірні, $\alpha = 35^0$, $\beta = 100^0$.

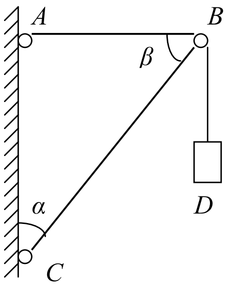
Відповідь: $S_{AB} = 2{,}57$ кН, $S_{BC} = 1{,}85$ кН.

2.12. Стержні *AB* і *BC* з'єднані між собою та з вертикальною стіною за допомогою шарнірів. До шарнірного болта *B* підвішений вантаж *D*, вага якого становить 1000 Н. Визначити зусилля в стержнях, якщо $\alpha = 30^0$, $\beta = 60^0$.

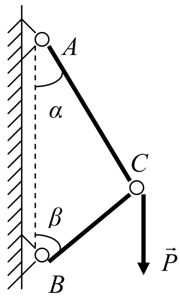
Відповідь: $S_{AB} = 577$ Н, $S_{BC} = 1154$ Н.

2.13. Стержні AC і BC з'єднані між собою та з вертикальною стіною за допомогою шарнірів. На шарнірний болт C діє вертикальна сила P = 1 кН. Визначити реакції стержнів на шарнірний болт C, якщо стержні утворюють зі стіною кути $\alpha = 30^0$ і $\beta = 60^0$.

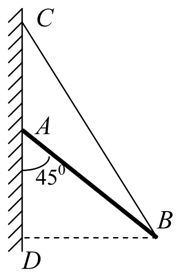
Відповідь: R_{AC} = 866 Н, R_{BC} = 500 Н.



До задачі 2.12



До задачі 2.13



До задачі 2.14

2.14. Однорідний брус AB, вага якого дорівнює 50 Н, а довжина 2 м, спирається верхнім кінцем A на гладку вертикальну стіну, утворюючи з нею кут $BAD = 45^0$. До нижнього кінця B прив'язаний трос BC. Визначити, на якій висоті AC необхідно прикріпити трос до стіни, щоб утримати брус в рівновазі, і якими при цьому будуть натяг тросу і тиск бруса на стіну.

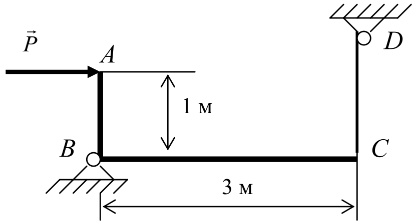
Відповідь: $AC = AD$ = 1,41 м, T = 55,9 Н, Q = 25 Н.

2.15. Рамка ABC, яка зігнута під прямим кутом над шарнірно-нерухомою опорою B, в точці C підвішена за допомогою ланцюга CD. На точку A рамки діє горизонтальна сила P = 6 кН. Нехтуючи вагою рамки і ланцюга, визначити реакцію шарніру B і натяг ланцюга.

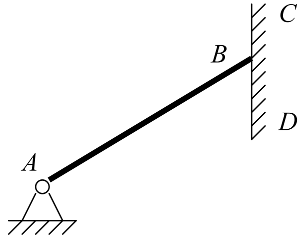
Відповідь: R_B = 6,32 Н, T_{CD} = 2 кН.

2.16. Сила тиску однорідного стержня AB, вага якого становить 8 Н, на вертикальну гладку стіну CD дорівнює 6 Н. Визначити реакцію шарніра A.

Відповідь: R_A = 10 Н.



До задачі 2.15



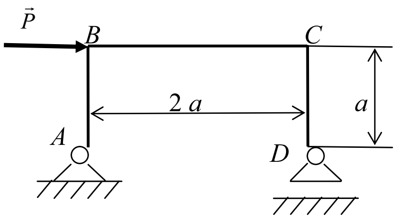
До задачі 2.16

2.17. Два трактори, що йдуть берегами прямого канала зі сталою швидкістю, тягнуть барку за допомогою двох канатів. Сили натягу канатів дорівнюють 0,8 кН і 0,96 кН, кут між ними дорівнює 60^0. Знайти, чому дорівнює опір води рухові барки, і визначити кути α і β, які утворюють канати з берегами каналу, якщо барка рухається паралельно берегам.

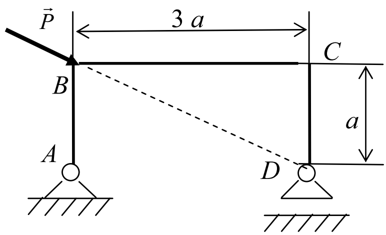
Відповідь: R = 1,53 кН, $\alpha = 33^0$, $\beta = 27^0$.

2.18. Визначити реакції опор *A* і *D* рами *ABCD*, до вершини *B* якої прикладена горизонтальна сила $\vec{P}$. Вагою рами знехтувати.

Відповідь: $R_A = \dfrac{P\sqrt{5}}{2}$, $\quad R_D = \dfrac{P}{2}$.



До задачі 2.18



До задачі 2.19

2.19. До вершини *B* рами *ABCD* прикладена сила $\vec{P}$, яка направлена до опори *D* і має модуль 10 кН. Визначити реакції опор *A* і *D*.

Відповідь: $R_A = 3\sqrt{10}$ кН, $\quad R_D = \sqrt{10}$ кН.

РОЗДІЛ 3. **ТЕОРІЯ ПАР СИЛ. МОМЕНТ СИЛИ**

При вивченні теоретичної механіки необхідно чітко усвідомити, що в статиці розглядають два найпростіші елементи: силу і пару сил. Дія пари сил на тіло дає обертальний ефект (розділ 5 [1], § 9 глави III [2] та ін.). ***Алгебраїчний момент пари сил*** визначають співвідношенням:

$$M\left(\vec{F},\ \vec{F}'\right) = \pm\, F \cdot d\,.$$

Тут d – ***плече пари***, тобто відстань між лініями дії сил. Знак *“+”* вибирають, якщо пара намагається повернути тіло проти годинникової стрілки. Знак “–“ вибирають, якщо під дією пари тіло повертається за годинниковою стрілкою.

Моментом сили $\vec{F}$ **відносно точки *О*** називають векторну величину $\vec{M}_O\left(\vec{F}\right) = \vec{r} \times \vec{F}$, де $\vec{r}$ – радіус-вектор точки прикладання сили.

При визначенні ***алгебраїчного моменту сили відносно точки*** доцільно дотримуватися такої послідовності:

1) виділити силу, момент якої треба знайти, і точку, відносно якої визначаємо момент;
2) визначити плече h сили, провівши через точку O перпендикуляр до лінії дії сили;
3) визначити знак моменту (так само, як і для моменту пари сил);
4) знайти числове значення алгебраїчного моменту сили відносно точки за формулою: $M_O\left(\vec{F}\right) = \pm\, F \cdot h$.

У деяких випадках, коли визначення плеча сили не є очевидним, доцільно розкласти силу на дві складові, для кожної з яких значно простіше знайти плече, і застосувати теорему Варіньйона.

ТЕОРЕМА (Варіньйона). *Якщо система сил має рівнодійну, то момент рівнодійної відносно довільної точки O дорівнює сумі моментів сил системи відносно цієї ж точки*:

$$\vec{M}_O\left(\vec{R}\right) = \sum \vec{M}_O\left(\vec{F}_i\right)\,.$$

Розв’язання типових задач

Задача 1. До вершин квадрата зі стороною 0,5 м (рис. 3.1) прикладені однакові за модулем сили по 12 Н кожна, які утворюють пари сил $\left(\vec{P}_1, \vec{P}_3\right)$ і $\left(\vec{P}_2, \vec{P}_4\right)$. Визначити момент рівнодійної пари.

Р о з в ’ я з а н н я. Для обох пар сил плече дорівнює стороні квадрата. Тому, враховуючи, що обидві пари сил лежать в одній площині та діють в одному напрямку, для моменту рівнодійної пари сил маємо:

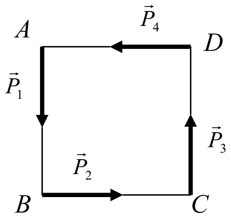


Рис. 3.1

$$M_{\text{рівн}} = M_{13} + M_{24} = P_1 \cdot AD + P_2 \cdot AB .$$

Підставимо числові дані:

$$M_{\text{рівн}} = 12 \cdot 0{,}5 + 12 \cdot 0{,}5 = 12 \text{ (Н·м)}.$$

Задача 2. На раму $ABCD$ (рис. 3.2) діють сили $F_1 = 2$ Н, $F_2 = 4$ Н, $F_3 = 6$ Н, $F_4 = 8$ Н. Знайти моменти цих сил відносно точки A, якщо $\alpha = 30^0$, $\beta = 60^0$. Розміри рами вказані на рисунку.

Р о з в ’я з а н н я. Розглянемо силу $\vec{F}_1$. Оскільки лінія дії цієї сили проходить через точку A, то $h_1 = 0$. Отже, $M_A\left(\vec{F}_1\right) = 0$.

Плече сили $\vec{F}_2$ дорівнює:

$h_2 = AB \cdot \sin\alpha = 2 \cdot \sin 30^0 = 1$ (м).

Під дією сили $\vec{F}_2$ поворот навколо точки A відбувається за годинниковою стрілкою, отже, момент сили буде від’ємним.

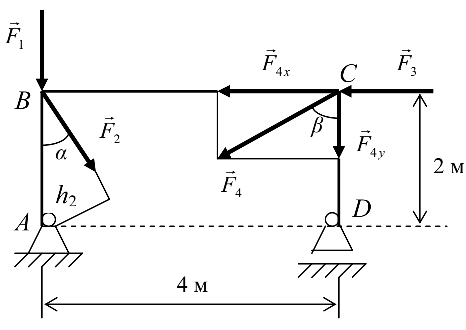


Рис. 3.2

Остаточно маємо:

$$M_A(\vec{F}_2) = -F_2 \cdot h_2 = -4 \text{ (Н·м)}.$$

Для сили $\vec{F}_3$ плечем відносно точки A є відрізок AB, тобто h_3 = 2 м. Враховуючи, що момент цієї сили відносно точки A є додатнім, маємо:

$$M_A(\vec{F}_3) = F_3 \cdot h_3 = 6 \cdot 2 = 12 \text{ (Н·м)}.$$

Для сили $\vec{F}_4$ простіше не знаходити плече, а розкласти $\vec{F}_4$ на горизонтальну $\vec{F}_{4x}$ і вертикальну $\vec{F}_{4y}$ складові, для яких плечі відповідно дорівнюють AB = 2 м і AD = 4 м. За теоремою Варіньйона маємо:

$$M_A(\vec{F}_4) = M_A(\vec{F}_{4x}) + M_A(\vec{F}_{4y}) = F_{4x} \cdot AB - F_{4y} \cdot AD\,.$$

Оскільки $F_{4x} = F_4 \cdot \sin\beta$, $F_{4y} = F_4 \cdot \cos\beta$, то $M_A(\vec{F}_4) = F_4\,(AB\sin\beta - AD\cos\beta)$. Вираз у дужках є плечем сили $\vec{F}_4$ відносно точки A. Підставимо числові значення:

$$M_A(\vec{F}_4) = 8 \cdot (2\sin 60^0 - 4\cos 60^0) = -2{,}14 \text{ (Н·м)}.$$

Задача 3. Визначити моменти відносно осей координат x, y і z сили $\vec{F}$, направленої по діагоналі бокової грані прямокутного паралелепіпеда (рис. 3.3), якщо довжина ребра, паралельного осі x, дорівнює a.

Р о з в 'я з а н н я. Лінія дії сили $\vec{F}$ перетинає вісь x, тому момент сили $\vec{F}$ відносно цієї осі дорівнює нулю: $M_x(\vec{F}) = 0$.

Для визначення моменту сили $\vec{F}$ відносно осі y спроектуємо силу на площину xz, яка перпендикулярна до вказаної осі. Модуль проекції $\vec{F}_{xz}$ дорівнює $F_{xz} = F \cdot \sin 60^0$. Знайдемо момент сили $\vec{F}_{xz}$ відносно точки O перетину осі y і площини xz. Плечем сили $\vec{F}_{xz}$ є ребро $OA = a$.

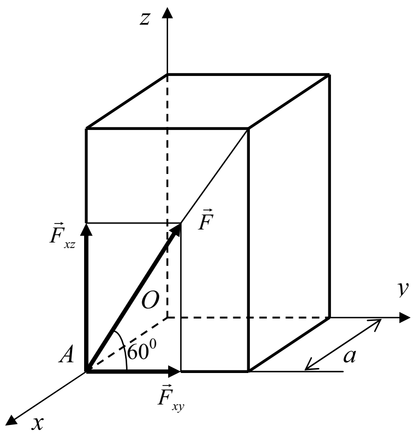


Рис. 3.3

Оскільки з кінця осі y видно, що сила $\vec{F}_{xz}$ намагається повернути тіло навколо точки O за годинниковою стрілкою, то момент сили беремо зі знаком "мінус". Отже,

$$M_y(\vec{F}) = M_O(\vec{F}_{xz}) = -F_{xz}\,a = -F\,a\sin 60^0,$$

звідки

$$M_y(\vec{F}) = -\frac{F\,a\sqrt{3}}{2}.$$

Визначимо момент сили $\vec{F}$ відносно осі z. Спочатку проектуємо силу на площину xy, перпендикулярну до осі z. Далі знаходимо момент сили $\vec{F}_{xy}$ відносно точки O перетину осі z і площини xy. Плечем у цьому випадку є відрізок $OA = a$. Знак моменту додатній, оскільки з кінця осі z видно, що сила $\vec{F}_{xy}$ намагається повернути тіло навколо точки O проти годинникової стрілки. Таким чином,

$$M_z(\vec{F}) = M_O(\vec{F}_{xy}) = F_{xy}\,a.$$

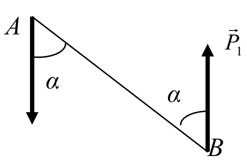
Враховуючи, що $F_{xy} = F \cdot \cos 60^0$, остаточно маємо:

$$M_z(\vec{F}) = \frac{F\,a}{2}.$$

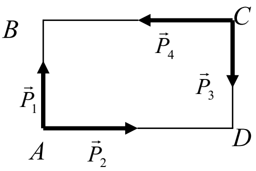
Завдання для самостійної роботи

3.1. На балку AB, довжина якої становить 3 м, діє пара сил. Визначити момент цієї пари, якщо $P = P_1 = 12$ кН, $\alpha = 45^0$.

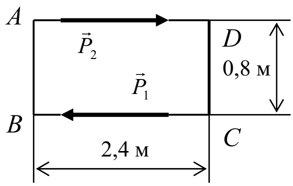
Відповідь: $M = 25{,}46$ кН·м.



До задачі 3.1



До задачі 3.2



До задачі 3.3

3.2. До вершин A і C прямокутника $ABCD$ прикладені по дві сили таким чином, що вони утворюють дві пари сил: $(\vec{P}_1, \vec{P}_3)$ і $(\vec{P}_2, \vec{P}_4)$. Визначити момент рівнодійної пари сил, якщо $P_1 = P_3 = 10$ Н, $P_2 = P_4 = 15$ Н, $AB = CD = 0{,}2$ м, $AD = BC = 0{,}5$ м.

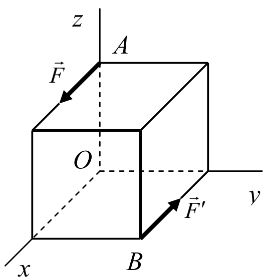
Відповідь: $M_R = -2$ Н·м.

3.3. На прямокутник $ABCD$ вздовж його довгих сторін діє пара сил $(\vec{P}_1, \vec{P}_2)$, в якій $P_1 = 60$ Н. Яку пару сил треба прикласти до прямокутника, направивши сили вздовж його коротких сторін, щоб зрівноважити пару $(\vec{P}_1, \vec{P}_2)$?

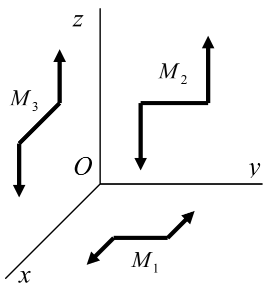
Відповідь: треба прикласти пару сил $(\vec{P}_3, \vec{P}_4)$, в якій $P_3 = P_4 = 20$ Н, сила $\vec{P}_3$ направлена вздовж AB від A до B, сила $\vec{P}_4$ направлена вздовж CD від C до D.

3.4. На куб діє пара сил $(\vec{F}, \vec{F}')$. Який кут α утворює її вектор-момент $\vec{M}$ із віссю Oy?

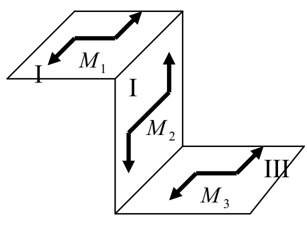
Відповідь: $\alpha = 45^0$.



До задач 3.4, 3.5



До задачі 3.6



До задачі 3.7

3.5. На куб, ребро якого дорівнює 1 м, діє пара сил $(\vec{F}, \vec{F}')$. Враховуючи, що F = 2 Н, визначити модуль моменту цієї пари.

Відповідь: $M = 2\sqrt{2}$ Н·м.

3.6. Дана система трьох пар сил, що діють у взаємно перпендикулярних площинах. Моменти пар мають модулі M_1 = 2 Н·м, M_2 = 3 Н·м, M_3 = 6 Н·м. Визначити момент результуючої пари.

Відповідь: M = 7 Н·м.

3.7. У площинах I, II, III діють пари сил, моменти яких відповідно дорівнюють M_1 = 1 Н·м, M_2 = 2 Н·м, M_3 = 1 Н·м. Визначити модуль M моменту пари, еквівалентної заданій системі пар, якщо площина I паралельна площині III, а площина II перпендикулярна площині I.

Відповідь: $M = 2\sqrt{2}$ Н·м.

3.8. Для сили $\vec{F} = 3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$, прикладеної в точці A (–1; 1; 2), знайти момент $\vec{M}_O$ відносно початку координат і визначити момент M_y відносно осі Oy.

Відповідь: $\vec{M}_O(\vec{F}) = 4\,\vec{i} + 8\vec{j} - 2\vec{k}$, M_y = 8 Н·м.

3.9. До точок A, B, C і D тіла прикладені п’ять сил: P_1 = 5 кН, P_2 = 8 кН, P_3 = 3 кН, P_4 = 2 кН, P_5 = 4 кН, $\alpha = 30^0$, $\beta = 60^0$. Знайти моменти кожної сили:

а) відносно точки A;

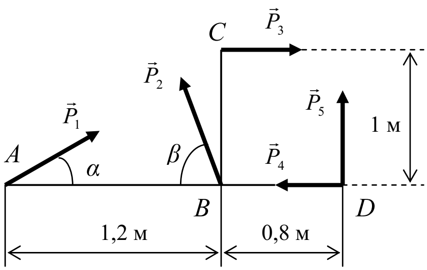
б) відносно точки C.

Відповідь: а) $M_A(\vec{P}_1)$ = 0, $M_A(\vec{P}_2) = 4{,}8\sqrt{3}$ кН·м, $M_A(\vec{P}_3)$ = – 3 кН·м, $M_A(\vec{P}_4)$ = 0, $M_A(\vec{P}_5)$ = 8 кН·м;

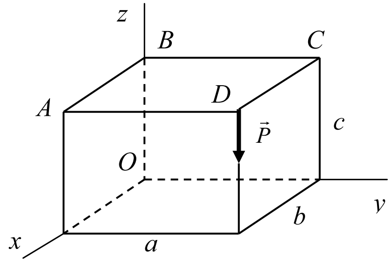
б) $M_C(\vec{P}_1)$ = 1,33 кН·м, $M_C(\vec{P}_2)$ = 4 кН·м, $M_C(\vec{P}_3)$ = 0, $M_C(\vec{P}_4)$ = – 2 кН·м, $M_C(\vec{P}_5)$ = 3,2 кН·м.

3.10. До вершини D прямокутного паралелепіпеда прикладена сила $\vec{P}$, яка направлена вздовж ребра вниз. Враховуючи, що ребра паралелепіпеда дорівнюють a, b і c, знайти моменти сили відносно точок A, B, C , D і O.

Відповідь: $M_A(\vec{P}) = -P{\cdot}a$, $M_B(\vec{P}) = -P\sqrt{a^2+b^2}$, $M_C(\vec{P}) = P{\cdot}b$, $M_D(\vec{P}) = 0$, $M_O(\vec{P}) = -P\sqrt{a^2+b^2}$.



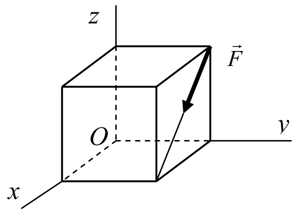
До задачі 3.9



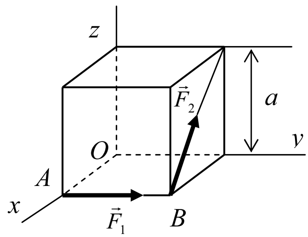
До задачі 3.10

3.11. До куба, ребро якого дорівнює 1 м, прикладена сила $\vec{F}$, яка направлена по діагоналі правої бокової грані куба. Визначити момент цієї сили відносно осі Ox, якщо F = 2 Н.

Відповідь: $-\sqrt{2}$ Н·м.



До задачі 3.11



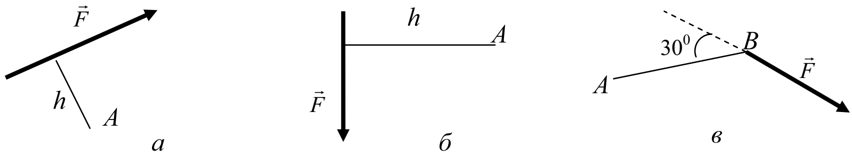
До задачі 3.12

3.12. Для сил $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$, прикладених у вершинах A і B куба, визначити моменти відносно осей x, y, z, якщо F_1 = 10 Н, $F_2 = 12\sqrt{2}$ Н, a = 2 м.

Відповідь: $M_x(\vec{F}_1) = M_y(\vec{F}_1) = 0$, $M_z(\vec{F}_1) = 20$ Н·м, $M_x(\vec{F}_2) = 24$ Н·м, $M_y(\vec{F}_2) = -24$ Н·м, $M_z(\vec{F}_2) = 24$ Н·м.

3.13. Визначити алгебраїчні моменти сили $\vec{F}$ відносно точки A, якщо
а) F = 3 Н, h = 0,2 м; б) F = 2,5 Н, h = 0,6 м; в) F = 2 кН, AB = 0,4 м.

Відповідь: а) – 0,6 Н·м; б) 1,5 Н·м; в) – 0,4 кН·м.



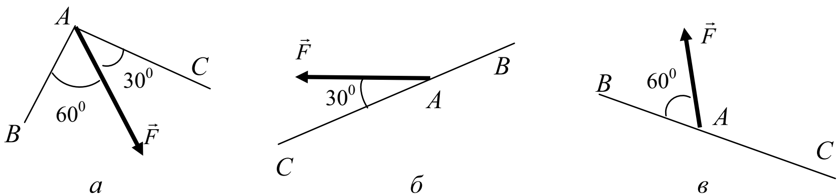
До задачі 3.13

3.14. Визначити алгебраїчні моменти сили $\vec{F}$ відносно точок B і C, якщо
а) F = 20 Н, AB = 0,3 м; AC = 0,5 м; б) F = 4 Н, AB = 0,2 м; AC = 0,4 м;
в) F = 2 кН, AB = 0,8 м; AC = 1,2 м.

Відповідь: а) $M_B(\vec{F}) = -3\sqrt{3}$ Н·м, $M_C(\vec{F}) = 5$ Н·м;

б) $M_B(\vec{F}) = -0{,}4$ Н·м, $M_C(\vec{F}) = 0{,}8$ Н·м;

в) $M_B(\vec{F}) = 0{,}8\sqrt{3}$ кН·м, $M_C(\vec{F}) = -1{,}2\sqrt{3}$ кН·м.

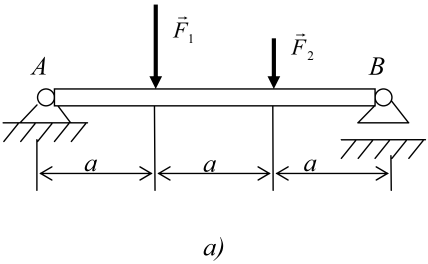


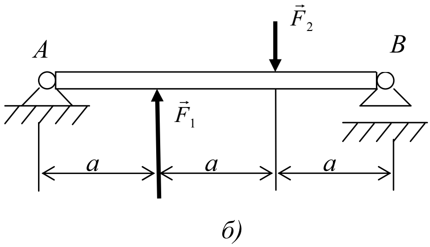
До задачі 3.14

3.15. Визначити суму алгебраїчних моментів сил $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$ відносно точок A і B, якщо F_1 = 2 кН, F_2 = 1 кН, a = 0,25 м.

Відповідь: а) $\sum M_A(\vec{F}_i) = -1$ кН·м, $\sum M_B(\vec{F}_i) = 1{,}25$ кН·м;

б) $\sum M_A(\vec{F}_i) = 0$, $\sum M_B(\vec{F}_i) = -0{,}75$ кН·м





До задачі 3.15

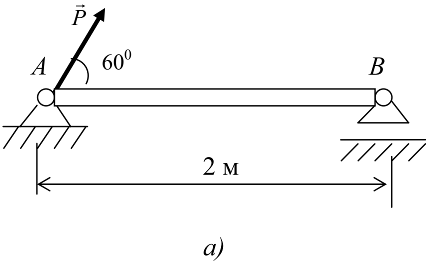
3.16. Визначити алгебраїчні моменти сили $\vec{P}$ відносно точок A і B, якщо модуль сили дорівнює P = 4 кН.

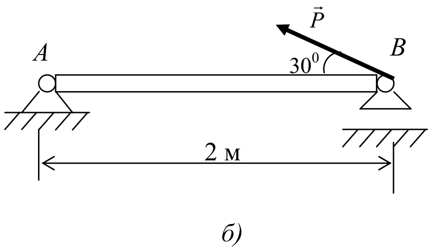
Відповідь: а) $M_A(\vec{P}) = 0$, $M_B(\vec{P}) = -4\sqrt{3}$ кН·м;

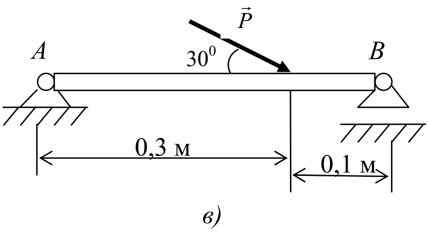
б) $M_A(\vec{P})$ = 4 кН·м, $M_B(\vec{P}) = 0$;

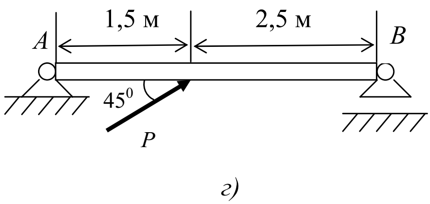
в) $M_A(\vec{P})$ = – 0,6 кН·м, $M_B(\vec{P})$ = 0,2 кН·м;

г) $M_A(\vec{P}) = 3\sqrt{2}$ Н·м, $M_B(\vec{P}) = -5\sqrt{2}$ Н·м.









До задачі 3.16

РОЗДІЛ 4. **ПЛОСКА СИСТЕМА СИЛ**

Плоскою називають (розділ 7 [1], § 14 глави V [2] та ін.) систему сил, прикладених до одного тіла, які розташовані в одній площині. Умови рівноваги такої системи сил задають три рівняння:

$$\sum F_{ix} = 0, \quad \sum F_{iy} = 0, \quad \sum M_O(\vec{F}_i) = 0.$$

Перше і друге рівняння є рівняннями проекцій, третє – рівняння моментів.

При розв’язанні деяких задач одне чи обидва рівняння рівноваги доцільно замінити рівняннями моментів відносно певних точок, тобто умови рівноваги можна записати у вигляді:

$$\sum F_{ix} = 0, \quad \sum M_A(\vec{F}_i) = 0, \qquad \sum M_B(\vec{F}_i) = 0$$

або

$$\sum M_A(\vec{F}_i) = 0, \qquad \sum M_B(\vec{F}_i) = 0, \qquad \sum M_C(\vec{F}_i) = 0.$$

У запропонованих нижче задачах застосовуються три види навантажень: зосереджені сили, рівномірно розподілені сили і пари сил.

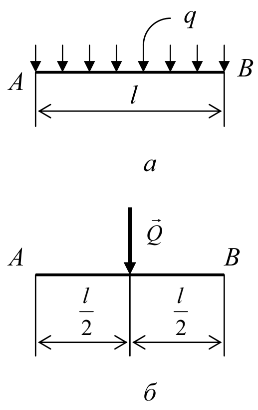


Рис. 4.1

При статичних розрахунках рівномірно розподілену силу з інтенсивністю q можна замінити рівнодійною $\vec{Q}$. Наприклад, силу, рівномірно розподілену на відрізку AB , довжина якого l (рис.4.1, *а*), можна замінити зосередженою силою $\vec{Q}$ (рис. 4.1, *б*), прикладеною в середині відрізка. Модуль цієї сили $Q = ql$.

Для деяких задач, коли на тіло діють лише паралельні сили, достатньо скласти два рівняння рівноваги: $\sum F_{ix} = 0,$ $\sum M_A(\vec{F}_i) = 0,$ або $\sum M_A(\vec{F}_i) = 0,$ $\sum M_B(\vec{F}_i) = 0.$

Розв'язання типових задач

Задача 1. На горизонтальну балку *AB*, лівий кінець якої має шарнірно-нерухому опору, а правий – шарнірно-рухому, в точках *C* і *D* діють дві сили: P_1 = 10 кН, P_2 = 20 кН (рис. 4.2, *а*).. Визначити реакції опор балки.

Р о з в 'я з а н н я. Розглянемо рівновагу балки *AB*, на яку в точках *C* і *D* діють дві вертикальні сили $\vec{P}_1$ і $\vec{P}_2$. Звільнимо правий кінець балки від в'язі, замінивши її дією реакції $\vec{R}_B$, направленої перпендикулярно до опорної поверхні (рис. 4.2, *б*). Бачимо, що на балку діє система паралельних сил. Тому, якщо звільнити і лівий кінець балки від шарнірно нерухомої опори, то її реакція буде також направлена вертикально.

Складемо два рівняння рівноваги, прийнявши для одного рівняння за центр моментів точку *A*, а для другого – точку *B*:

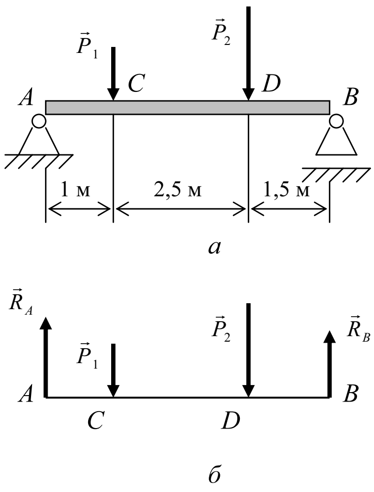


Рис. 4.2

$$\sum M_A(\vec{F}_i) = 0, \quad -P_1 \cdot AC - P_2 \cdot AD + R_B \cdot AB = 0;$$
$$\sum M_B(\vec{F}_i) = 0, \quad P_2 \cdot BD + P_1 \cdot BC - R_A \cdot AB = 0.$$

Розв'язуючи перше рівняння, знаходимо:

$$R_B = \frac{P_1 \cdot AC + P_2 \cdot AD}{AB} = \frac{10 \cdot 1 + 20 \cdot 3{,}5}{5} = 16 \text{ (кН)}.$$

Із другого рівняння маємо:

$$R_A = \frac{P_1 \cdot BC + P_2 \cdot BD}{AB} = \frac{10 \cdot 4 + 20 \cdot 1{,}5}{5} = 14 \text{ (кН)}.$$

Перевіримо правильність отриманих результатів, склавши рівняння проекцій сил на вертикальну вісь *y*:

$$\sum F_{i\,y} = 0; \qquad R_A - P_1 - P_2 + R_B = 0.$$

Після підстановки у це рівняння числових значень отримаємо тотожність:

$$14 - 10 - 20 + 16 = 0 \quad \text{або} \quad 0 = 0.$$

Отже, задача розв'язана вірно. Реакції опор: R_A = 14 кН, R_B = 16 кН.

При розв'язанні задач краще не нехтувати перевіркою.

Задача 2. Консольна балка *AD* вагою *P* = 4 кН має шарнірно-рухому опору *B* і шарнірно-нерухому опору *D* (рис. 4.3). До кінця *A* балки прикладена вертикальна зосереджена сила *F* = 8 кН. На ділянці *CD* на балку діє рівномірно розподілене навантаження інтенсивності *q* = 0,5 кН ⁄ м. На ділянці *AB* до балки прикладена пара сил із моментом *M* = 6 кН·м. Визначити реакції опор.

Р о з в 'я з а н н я. Розглянемо рівновагу балки *AD*.

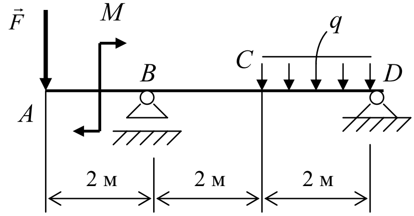


Рис. 4.3

Замінимо рівномірно розподілене навантаження зосередженою силою $\vec{Q}$, яка прикладена в середині відрізка *CD* і направлена вертикально вниз (рис. 4.4). Модуль цієї сили $Q = q{\cdot}CD$ = 1 кН, Отже, на балку діють такі активні сили: сила ваги $\vec{P}$, прикладена в її середині, вертикальні сили $\vec{F}$ і $\vec{Q}$ та пара сил із моментом *M.*

Звільнюючись від в'язів, направляємо реакцію $\vec{R}_B$ по вертикалі вгору. Тоді всі сили, що діють на балку, є паралельними. Відповідно для рівноваги балки

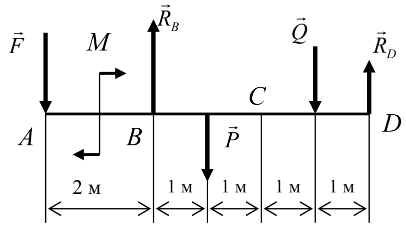


Рис. 4.4

реакція $\vec{R}_D$ також має бути направленою вертикально. Таким чином, балка перебуває в рівновазі під дією системи паралельних сил. Для визначення невідомих реакцій опор достатньо двох рівнянь рівноваги.

Складаємо два рівняння моментів відносно точок B і D, в яких прикладені невідомі сили $\vec{R}_B$ і $\vec{R}_D$:

$$\sum M_B\left(\vec{F}_i\right) = 0, \qquad F \cdot 2 - M - P \cdot 1 + P_1 \cdot 3 + R_D \cdot 4 = 0;$$

$$\sum M_D\left(\vec{F}_i\right) = 0, \qquad F \cdot 6 - M - R_B \cdot 4 + P \cdot 3 + P_1 \cdot 1 = 0.$$

Кожне із цих рівнянь містить лише одну невідому величину. Розв’язуючи рівняння, знаходимо:

$$R_D = -\,0{,}75 \text{ кН}, \quad R_B = 13{,}75 \text{ кН}.$$

Від’ємне значення R_D вказує на те, що напрям сили $\vec{R}_D$ протилежний тому, який зображений на рисунку, тобто опорна реакція $\vec{R}_D$ направлена по вертикалі вниз.

Задача 3. Консольна балка має в точці A шарнірно-нерухому, а в точці B шарнірно-рухому опори (рис. 4.5). У точці C до балки прикладена вертикальна сила P_1 = 18 кН. На правий кінець балки діє сила P_2 = 50 кН, яка утворює з віссю балки кут $\alpha = 40^0$. Визначити реакції опор балки.

Р о з в ’я з а н н я. Розглянемо рівновагу балки, на яку діють дві активні сили $\vec{P}_1$ і $\vec{P}_2$.

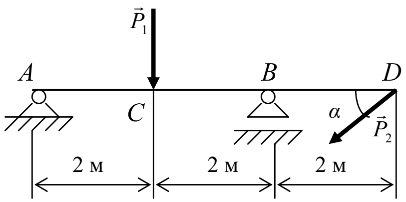


Рис. 4.5

Звільнимося від в’язів. Реакція $\vec{R}_B$ шарнірно-рухомої опори направлена вертикально (рис. 4.6). Напрям реакції шарнірно-рухомої опори в даному випадку безпосередньо визначити неможливо, тому замінюємо цю реакцію її двома складовими $\vec{X}_A$ і $\vec{Y}_A$.

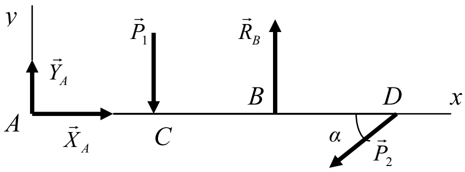


Рис. 4.6

Відповідна розрахункова схема показана на рис. 4.6.

Для отриманої системи з п’яти сил, три з яких невідомі, складемо рівняння рівноваги. При цьому направимо одну з координатних осей (вісь x) вздовж балки, а за центри моментів виберемо точки A і B, в яких прикладені невідомі сили:

$$\sum F_{ix} = 0, \qquad X_A - P_2 \cos\alpha = 0;$$

$$\sum M_A(\vec{F}_i) = 0, \qquad -P_1 \cdot AC + R_B \cdot AB - P_2 \cdot AD \sin\alpha = 0;$$

$$\sum M_B(\vec{F}_i) = 0, \qquad -Y_A \cdot BA + P_1 \cdot BC - P_2 \cdot BD \sin\alpha = 0.$$

Розв’язуючи ці рівняння, знаходимо:

$$X_A = P_2 \cos\alpha = 50 \cos 40^0 = 38{,}3 \text{ (кН)};$$

$$R_B = \frac{P_1 \cdot AC + P_2 \cdot AD \sin\alpha}{AB} = \frac{18 \cdot 2 + 50 \cdot 6 \sin 40^0}{4} = 57{,}2 \text{ (кН)};$$

$$Y_A = \frac{P_1 \cdot BC - P_2 \cdot BD \sin\alpha}{AB} = \frac{18 \cdot 2 - 50 \cdot 2 \sin 40^0}{4} = -7{,}1 \text{ (кН)}.$$

Від’ємне значення Y_A показує, що вертикальна складова реакції нерухомого шарніра направлена вниз, а не вгору, як припускалося на рис. 4.6.

При необхідності реакцію $\vec{R}_A$ шарніра A легко визначити, оскільки $\vec{R}_A = \vec{X}_A + \vec{Y}_A$. Модуль цієї реакції дорівнює $R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = \sqrt{38{,}3^2 + 7{,}1^2} \approx 39$ (кН).

Для перевірки правильності отриманих значень реакцій опор складемо рівняння проекцій на вісь y (рис. 4.6):

$$\sum F_{iy} = 0, \qquad Y_A - P_1 + R_B - P_2 \sin\alpha = 0.$$

Після підстановки в це рівняння числових значень отримаємо:

$$-7{,}1 - 18 + 57{,}2 - 50 \sin 40^0 = 0, \text{ тобто } 0 = 0.$$

У даному випадку перевірка за допомогою рівняння проекцій на вісь y дозволила підтвердити лише правильність визначення реакції R_B. Для перевірки правильності знайдених значень X_A і Y_A можна скласти рівняння моментів відносно точки D, що рекомендуємо зробити самостійно.

Задача 4. Консольна балка AB жорстко закріплена на лівому кінці. В точці C до балки прикладена зосереджена сила P = 12 кН (рис. 4.7, *а*). На балку діють також рівномірно розподілене навантаження інтенсивності q = 5 кН / м і пара сил із моментом M = 20 кН·м. Визначити реакцію жорсткого кріплення.

Р о з в 'я з а н н я. На балку діють три навантаження: на правому кінці – пара сил із моментом M; у точці C – вертикальна сила $\vec{P}$; по всій довжині балки – рівномірно розподілене навантаження. При побудові розрахункової схеми замінимо розподілене навантаження зосередженою силою $\vec{Q}$ (рис. 4.7, *б*), яка має модуль $Q = q \cdot AB$ = 20 кН і прикладена в середині балки.

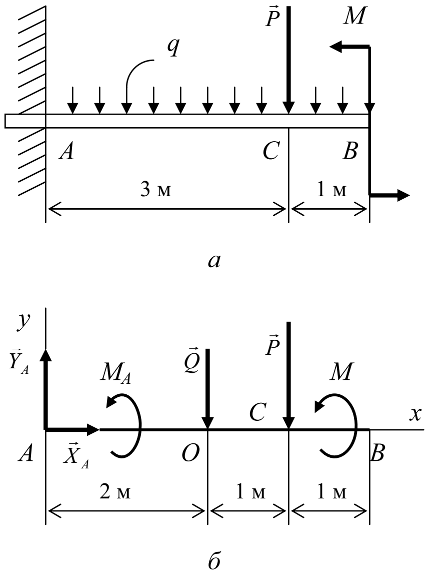


Рис. 4.7

Рівновагу балки забезпечує жорстке закріплення в точці A. Звільнимо балку від в'язі, замінюючи її дію реакцією $\vec{R}_A$ і реактивним моментом M_A, який зрівноважує намагання навантажень повернути балку (вивернути її із закріплення). Оскільки напрям реакції $\vec{R}_A$ заздалегідь невідомий (з тих же причин, що і напрям реакції нерухомого шарніра), замінимо $\vec{R}_A$ її складовими $\vec{X}_A$ і $\vec{Y}_A$ (рис. 4.7, *б*), направленими вздовж осей *x* і *y* відповідно.

Складемо умови рівноваги – рівняння проекцій на осі *x* і *y* та рівняння моментів відносно точки *A*, в якій прикладені невідомі сили:

$$\sum F_{ix} = 0, \qquad X_A = 0;$$

$$\sum F_{iy} = 0, \qquad Y_A - Q - P = 0;$$

$$\sum M_A(\vec{F}_i) = 0, \qquad M_A - Q \cdot AO - P \cdot AC + M = 0.$$

Із першого рівняння бачимо, що горизонтальна складова реакції жорсткого закріплення $\vec{R}_A$ дорівнює нулю, оскільки в даному випадку нема зусиль, які б зміщували балку *AB* у горизонтальному напрямку.

Із другого рівняння маємо:

$$Y_A = Q + P = 20 + 12 = 32 \text{ (кН)}.$$

Отже, $R_A = Y_A = 32$ кН.

Реактивний момент жорсткого закріплення визначаємо з останнього рівняння:

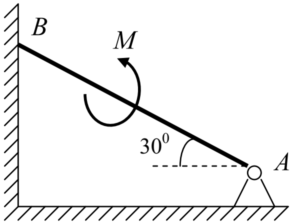
$$M_A = Q \cdot AO + P \cdot AC - M = 20 \cdot 2 + 12 \cdot 3 - 20 = 56 \text{ (кН·м)}.$$

Перевірку рекомендуємо провести самостійно, склавши рівняння моментів відносно точки *C* або *B*. В обох випадках у рівняння будуть входити всі знайдені величини.

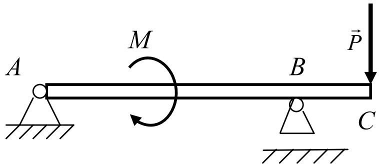
Завдання для самостійної роботи

4.1. Невагомий стержень *AB* довжиною 6 м спирається в точці *B* на гладку вертикальну стіну. До стержня прикладена пара сил, момент якої дорівнює $M = 12$ Н·м. Визначити реакцію опори *A*

Відповідь: $R_A = 4$ Н.



До задачі 4.1



До задачі 4.2

4.2. На консольну балку діє пара сил із моментом M = 6 кН·м, а в точці C прикладена вертикальна сила P = 2 кН. Враховуючи, що AB = 3,5 м, BC = 0,5 м, визначити реакції опор.

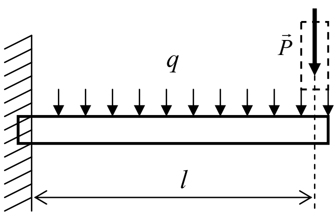
Відповідь: R_A = 2 кН – направлена вниз, R_B = 4 кН – направлена вгору.

4.3. На горизонтальну балку, що підтримує балкон, діє рівномірно розподілене навантаження інтенсивністю q = 2 кН / м. На балку також у вільного кінця діє навантаження P = 2 кН, яке передається від колони. Відстань осі колони від стіни l = 1,5 м. Визначити реакції жорсткого закріплення балки.

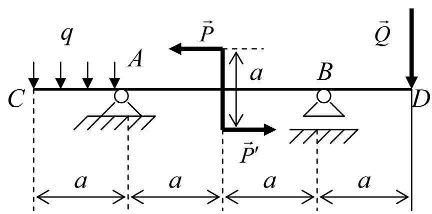
Відповідь: R = 5 кН, M = 5,25 кН·м.

4.4. На двоконсольну горизонтальну балку діє пара сил $(\vec{P}, \vec{P}')$, на ліву консоль – рівномірно розподілене навантаження інтенсивності q, а в точці D правої консолі – вертикальне навантаження $\vec{Q}$. Визначити реакції опор, якщо P = 1 кН, Q = 2 кН, q = 2 кН / м, a = 0,8 м.

Відповідь: R_A = 1,5 кН, R_B = 2,1 кН.



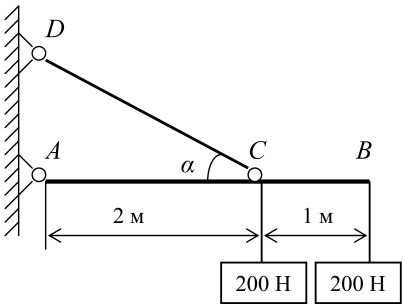
До задачі 4.3



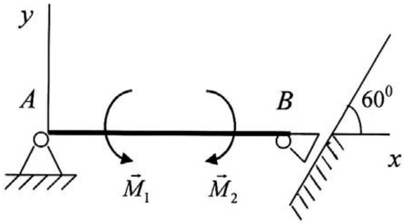
До задачі 4.4

4.5. Горизонтальна балка *AB* прикріплена до стіни шарніром *A* і утримується в рівновазі невагомим стержнем *CD*, який утворює з балкою кут $\alpha = 30^0$. У точках *C* і *D* до балки підвішені вантажі вагою 200 Н кожний. Нехтуючи вагою балки, визначити зусилля *S* у стержні.

Відповідь: $S = 1000$ Н.



До задачі 4.5



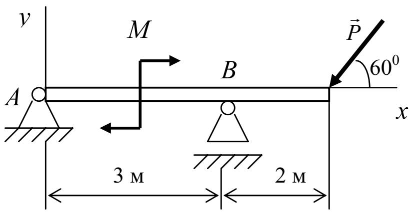
До задачі 4.6

4.6. На невагому балку *AB* довжиною 1 м діють дві пари сил із моментами $M_1 = 5$ Н·м, $M_2 = 10$ Н·м. Визначити проекцію Y_A реакції у шарнірі *A* при рівновазі балки.

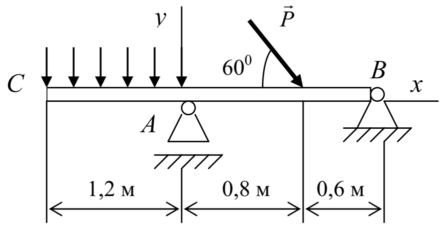
Відповідь: $Y_A = -5$ Н.

4.7. Визначити реакції опор *A* і *B* балки, на яку діють пара сил із моментом $M = 6$ кН·м і зосереджена сила $P = 4$ кН, що утворює з віссю балки кут $\alpha = 60^0$.

Відповідь: $X_A = 2$ кН, $Y_A = -4{,}32$ кН, $Y_B = 7{,}78$ кН.



До задачі 4.7



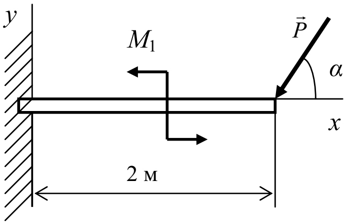
До задачі 4.8

4.8. На консольну частину AC горизонтальної балки BC діє рівномірно розподілене навантаження інтенсивністю q = 0,5 кН / м. Під кутом 60^0 до балки прикладена сила P = 2 кН. Нехтуючи вагою балки, визначити реакції опор.

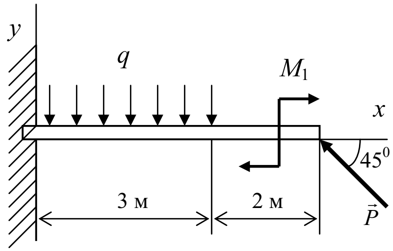
Відповідь: R_A = 1,6 кН, X_B = – 1 кН, Y_B = 0,73 кН.

4.9. До вільного кінця жорстко закріпленої консольної балки прикладена зосереджена сила P = 2 кН, що утворює кут $\alpha = 60^0$ із горизонтальною віссю x. На балку діє пара сил, момент якої дорівнює M_1 = 3 кН·м. Визначити реакції жорсткого закріплення.

Відповідь: X = 1 кН, Y = 1, 73 кН, M = 0,47 кН·м.



До задачі 4.9



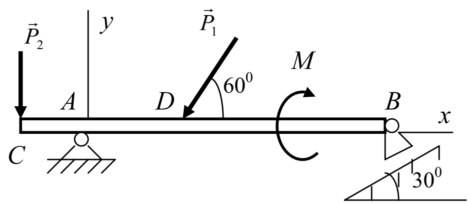
До задачі 4.10

4.10. Визначити реакції жорсткого закріплення консольної балки, на яку діють зосереджена сила P = 4 кН, рівномірно розподілене навантаження інтенсивності q = 1,5 кН / м і пара сил із моментом M_1 = 2 кН·м.

Відповідь: X = 2,8 кН, Y = 1,7 кН, M = – 5,35 кН·м.

4.11. На консольну балку CB діють сили P_1 = 120 Н, P_2 = 80 Н, прикладені в точках D і C відповідно, і пара сил з моментом M = 69 Н·м. Враховуючи, що AC = 60 см, AD = 80 см, BD = 160 см, а також нехтуючи вагою балки і тертям, визначити реакції опор.

Відповідь: X_A = 82,9 Н, Y_A = 144,3 Н, R_B = 45,8 Н.



До задачі 4.11

РОЗДІЛ 5. **РІВНОВАГА СИСТЕМИ ТВЕРДИХ ТІЛ**

У даному розділі розглянуто системи матеріальних тіл, які спираються одне на одне своїми поверхнями або з'єднані між собою шарнірами, нитками (ланцюгами) чи стержнями.

При розв'язуванні задач на рівновагу системи твердих тіл доцільно виділити окремо тверді тіла, що належать системі, та проаналізувати всі сили, які на них діють. При цьому в місці з'єднання тіл виникають дві сили, одна з яких прикладена до одного тіла, а інша – до другого. Ці сили однакові за модулем і мають протилежні напрями вздовж однієї прямої (закон рівності дії та протидії). Для подальшого розв'язання задачі доцільно дотримуватися такої послідовності дій:

1) упевнитись, що кількість невідомих величин дорівнює кількості незалежних рівнянь рівноваги, щоб задача була статично означеною;
2) вибрати найбільш зручні системи координат; при цьому для кожного тіла і для всієї системи тіл можна вибрати свою систему координат;
3) скласти рівняння рівноваги для кожного твердого тіла або для всієї системи тіл і окремих її частин;
4) розв'язати систему всіх рівнянь рівноваги.

Якщо за умовою задачі треба визначити лише деякі невідомі величини, то слід складати лише ті з рівнянь рівноваги, які необхідні для отримання відповіді.

Розв'язання типових задач

Задача 1. Два гладких циліндри *A* і *B* поклали в ящик, ширина якого дорівнює 250 мм (рис. 5.1, *а*). Циліндр *A* має вагу Q = 40 кН і радіус R = 80 мм. Вага циліндра *B* дорівнює P = 30 кН і його радіус r = 50 мм. Визначити реакції вертикальних стін у точках *C* і *E*, дна ящика в точці *D* і тиск між циліндрами.

Р о з в ’я з а н н я. Застосовуючи принцип звільнення від в’язів, відкинемо подумки стіни і дно ящика та розглянемо рівновагу кожного циліндра окремо.

Циліндр B перебуває в рівновазі під дією трьох сил: ваги $\vec{P}$, горизонтальної реакції $\vec{N}_E$ стіни і реакції $\vec{N}$ циліндра A, направленої по прямій, що з’єднує центри O і O_1 обох циліндрів (рис. 5.1, *б*).

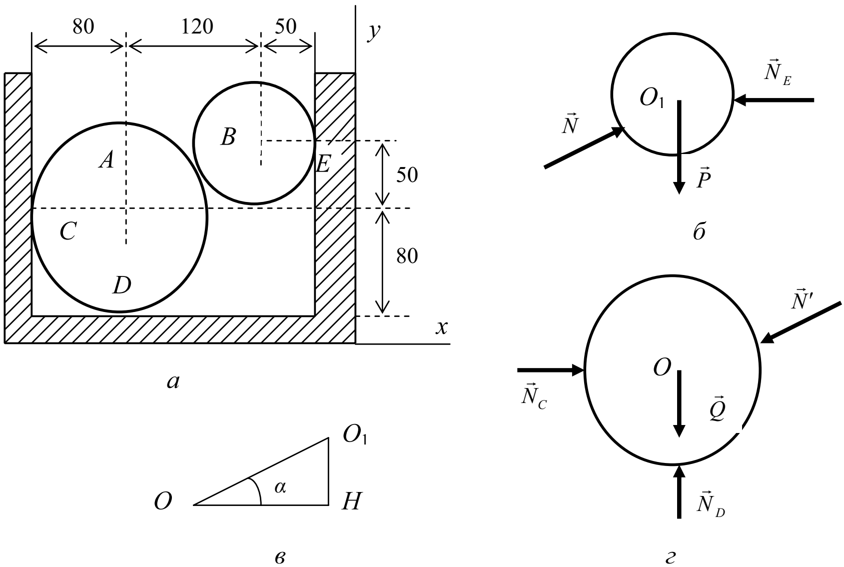


Рис. 5.1

Щоб знайти кут α, який реакція $\vec{N}$ утворює з горизонтом, розглянемо трикутник OO_1H (рис. 5.1, *в*). Сторони цього трикутника дорівнюють:

$$OO_1 = R + r = 130 \text{ мм}, \qquad OH = 120 \text{ мм}, \qquad O_1H = 50 \text{ мм}.$$

Таким чином, $\sin\alpha = \dfrac{5}{13}$, $\cos\alpha = \dfrac{12}{13}$.

Складемо рівняння рівноваги для циліндра B. Оскільки лінії дії сил, прикладених до циліндра, перетинаються в центрі циліндра, то достатньо скласти два рівняння, прирівнюючи до нуля суми проекцій усіх сил на осі x і y, направлені так, як показано на рис. 5.1, *а*. Отже, маємо:

$$\sum F_{ix} = 0, \qquad N\cos\alpha - N_E = 0;$$

$$\sum F_{iy} = 0, \qquad N\sin\alpha - P = 0.$$

Підставляючи значення P = 30 кН, знаходимо N = 78 кН, N_E = 72 кН.

Циліндр A перебуває в рівновазі під дією чотирьох сил: ваги $\vec{Q}$, горизонтальної реакції стіни $\vec{N}_C$, вертикальної реакції дна $\vec{N}_D$ і реакції $\vec{N}'$ циліндра B, яка дорівнює за величиною і направлена протилежно силі $\vec{N}$. Усі чотири сили (рис. 5.1, *г*) перетинаються в центрі циліндра A. Складаємо два рівняння рівноваги цих сил:

$$\sum F_{ix} = 0, \qquad N_C - N\cos\alpha = 0;$$

$$\sum F_{iy} = 0, \qquad N_D - Q - N\sin\alpha = 0,$$

звідки знаходимо N_C = 72 кН, N_D = 70 кН.

Задача 2. Балки AC і BC, довжиною по 4 м кожна, з'єднані між собою шарніром C і прикріплені до нерухомих опор у точках A і B за допомогою шарнірів (рис. 5.2, *а*). До балки AC прикладені вертикальна сила P_1 = 100 кН у точці D і горизонтальна сила P_2 = 80 кН у точці E. На балку BC діє перпендикулярна до неї сила P_3 = 200 кН, прикладена і точці F. Визначити реакції шарнірів A і B, якщо $\alpha = 50^0$, AD = 1 м, AE = 3 м, BF = 2,5 м.

Р о з в 'я з а н н я. Звільнимо балки від в'язів у точках A і B. Дію шарнірів A і B замінимо їх реакціями, розклавши кожну реакцію на дві складові по осях x і y (рис. 5.2, *б*).

При рівновазі обох балок сили взаємодії, що виникають у проміжному

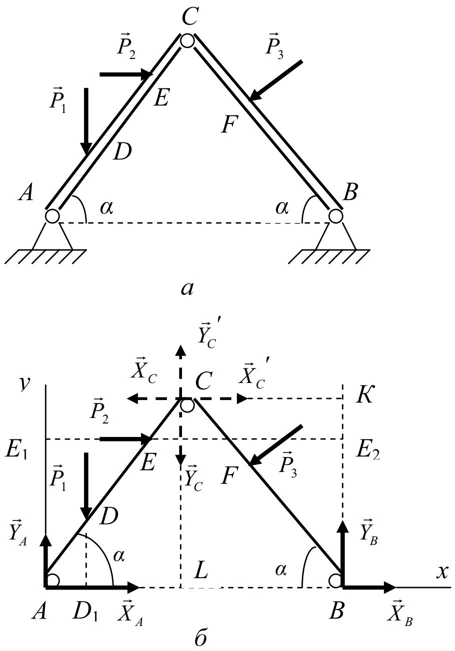


Рис. 5.2

шарнірі C (складові цих сил показані на рис. 5.2, *б* штриховою лінією), одна одну зрівноважують і тому їх можна не враховувати при складанні рівнянь рівноваги всієї системи.

Таким чином, на систему балок AC і BC діють сім сил, розташованих в одній площині: $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$, $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$, $\vec{X}_B$ і $\vec{Y}_B$, із яких чотири останні сили невідомі. Для визначення цих сил необхідно скласти чотири рівняння.

З умови рівноваги системи балок складемо три рівняння рівноваги, прийнявши для третього рівняння за центр моментів точку B. Четверте рівняння складемо з умови рівноваги балки BC (на неї діють менше сил, ніж на балку AB). При цьому за центр моментів виберемо точку C.

Отже, для невідомих величин маємо систему рівнянь:

$$\sum F_{ix} = 0, \qquad X_A + P_2 - P_3 \sin\alpha + X_B = 0; \tag{5.1}$$

$$\sum F_{iy} = 0, \qquad Y_A - P_1 - P_3 \cos\alpha + Y_B = 0; \tag{5.2}$$

$$\sum M_B\left(\vec{F}_i\right) = 0, \qquad -Y_A \cdot BA + P_1 \cdot BD_1 - P_2 \cdot BE_2 + P_3 \cdot BF = 0; \tag{5.3}$$

$$\sum M_C\left(\vec{F}_i\right) = 0, \qquad Y_B \cdot CK + X_B \cdot CL - P_3 \cdot CF = 0. \tag{5.4}$$

Знайдемо плечі сил, що входять у два останні рівняння системи:

$$BA = 2 \cdot AL = 2 \cdot AC \cos\alpha = 2 \cdot 4 \cos 50^0 = 5{,}14 \text{ м};$$

$BD_1 = BA - AD_1 = BA - AD \cos\alpha = 5{,}14 - 1 \cdot \cos 50^0 = 4{,}50$ м;

$BE_2 = AE_1 = AE \sin\alpha = 3 \sin 50^0 = 2{,}30$ м;

$BF = 2{,}5$ м;

$CK = BC \cos\alpha = 4 \cos 50^0 = 2{,}57$ м;

$CL = BC \sin\alpha = 4 \sin 50^0 = 3{,}06$ м;

$CF = BC - BF = 4 - 2{,}5 = 1{,}5$ м.

Визначаємо реакції опор, розв'язавши систему (5.1)–(5.4). Із третього рівняння системи знаходимо:

$$Y_A = \frac{P_1 \cdot BD_1 - P_2 \cdot BE_2 + P_3 \cdot BF}{BA} = \frac{100 \cdot 4{,}50 - 80 \cdot 2{,}30 + 200 \cdot 2{,}5}{5{,}14} = 149 \text{ (кН)}.$$

Після підстановки цього значення в рівняння (5.2) отримаємо:

$$Y_B = P_1 + P_3 \cos\alpha - Y_A = 100 + 200 \cos 50^0 - 149 = 79{,}5 \text{ (кН)}.$$

Тоді з рівняння (5.4) знаходимо:

$$X_B = \frac{P_3 \cdot CF - Y_B \cdot CK}{CL} = \frac{200 \cdot 1{,}5 - 79{,}5 \cdot 2{,}57}{3{,}06} = 31{,}1 \text{ (кН)}.$$

Із першого рівняння маємо:

$$X_A = -P_2 + P_3 \sin\alpha - X_B = -80 + 200 \sin 50^0 - 31{,}1 = 41{,}9 \text{ (кН)}.$$

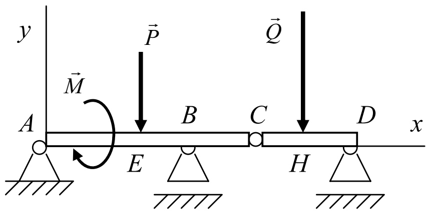
Перевірку рекомендуємо виконати самостійно за допомогою рівняння моментів відносно точки *C*, складеного для всієї системи.

Якби за умовами задачі ще необхідно було б визначити силу взаємодії між балками в шарнірі *C*, то її неважко було б знайти, розглянувши рівновагу однієї з балок. З двох рівнянь проекцій на осі x і y всіх сил, що діють на одну з балок, можна визначити невідомі X_C та Y_C.

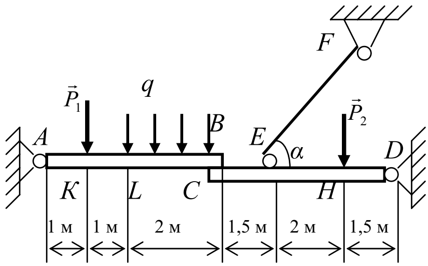
Завдання для самостійної роботи

5.1. Балки AC і CD з’єднані шарніром C. Балка AC закріплена шарнірно в точці A. В точках B і D – шарнірно-рухомі опори. На балки діють: пара сил із моментом $M = 20$ кН·м, сила $P = 8$ кН і сила $Q = 12$ кН. Враховуючи, що $AE = 4$ м, $BE = 2$ м, $BC = 3$ м, $CH = HD = 2$ м, визначити реакції опор A, B, D і зусилля в шарнірі C.

Відповідь: $X_A = 0$, $Y_A = -3{,}66$ кН, $R_B = 17{,}66$ кН, $R_D = 6$ кН, $X_C = 0$, $Y_C = -6$ кН.



До задачі 5.1



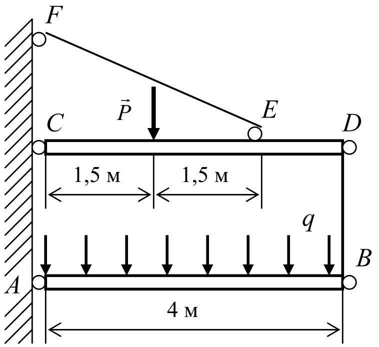
До задачі 5.2

5.2. Балка AB має в точці A шарнірно-нерухому опору і в точці B спирається на балку CD, яка утримується в рівновазі стержнем EF і шарніром D. На балки діють вертикальні сили $P_1 = P_2 = 20$ кН, прикладені відповідно в точках K і H. На ділянці BL на балку AB діє розподілене навантаження інтенсивності $q = 12$ кН / м. З’єднання в точках E і F шарнірні. Враховуючи, що $\alpha = 45^0$, визначити реакції шарнірів A, D і стержня EF.

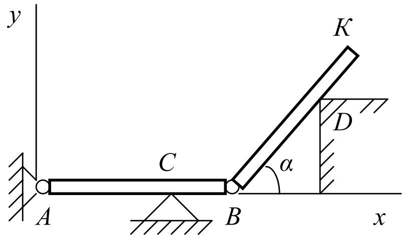
Відповідь: $X_A = 0$, $Y_A = 21$ кН, $X_D = 41{,}4$ кН, $Y_D = 1{,}6$ кН, $R_{EF} = 58{,}6$ кН.

5.3. Балки *AB* і *CD* за допомогою шарнірів прикріплені до вертикальної стіни та з'єднані між собою стержнем *BD*. Балка *CD* утримується в горизонтальному положенні стержнем *EF* і на неї діє сила P = 50 кН, направлена вертикально вниз. При цьому *CF* = 1,2 м. На балку *AB* діє розподілене навантаження інтенсивності q = 20 кН / м. Нехтуючи вагою балок і стержнів, визначити реакції шарнірів *A* і *C*, а також зусилля в стержнях *BD* і *EF*.

Відповідь: $X_A = 0$, $Y_A = 40$ кН, $X_C = 115$ кН, $Y_C = 45$ кН, $R_{BD} = 40$ кН, $R_{EF} = 121$ кН (обидва стержні розтягнуті).



До задачі 5.3



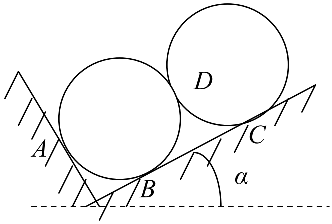
До задачі 5.4

5.4. Горизонтальна балка *AB* вагою Q = 200 Н прикріплена до стіни шарніром *A* і спирається на опору *C*. До її кінця *B* шарнірно прикріплений брус *BK* вагою P = 400 Н, який спирається на виступ *D*. При цьому *CB* = *AB* / 3, *DK* = *BK* / 3, кут $\alpha = 45^0$. Вважаючи балку та брус однорідними, визначити реакції опор.

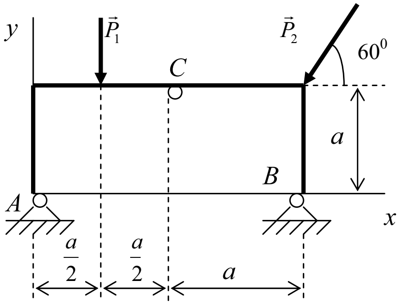
Відповідь: $X_A = X_B = 150$ Н, $Y_A = -75$ Н, $Y_B = 250$ Н, $N_C = 525$ Н, $N_D = 212$ Н.

5.5. Дві циліндричні труби, що мають вагу $P_1 = P_2 = 200$ кН і однакові радіуси, спираються на гладкі взаємно перпендикулярні похилі площини, одна з яких утворює з горизонтом кут $\alpha = 30^0$. Знайти реакції похилих площин і тиск труб одна на одну.

Відповідь: $N_A = 200$ кН, $N_B = N_C = 100\sqrt{3}$ кН, $N_D = 100$ кН.



До задачі 5.5



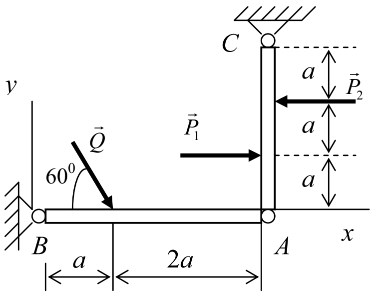
До задачі 5.6

5.6. До тришарнірної арки *ACB* прикладені вертикальна сила P_1 = 2 кН і сила P_2 = 4 кН, нахилена під кутом 60^0 до горизонту. Нехтуючи вагою арки, визначити реакції шарнірів *A*, *B*, *C*.

Відповідь: X_A = 1,5 кН, Y_A = 2,5 кН, X_B = 0,5 кН, Y_B = 2,96 кН, $X_C = \pm$ 1,5 кН, $Y_C = \pm$ 0,5 кН.

5.7. Стержні *AB* і *AC* скріплені під прямим кутом шарніром *A* і шарнірно прикріплені до опор *B* і *C*. До стержня *AC* прикладена пара сил $P_1 = P_2$ = 2 Н. На стержень *AB* діє сила *Q* = 3 Н. Нехтуючи вагою стержнів, визначити реакції опор *B*, *C* і шарніра *A*.

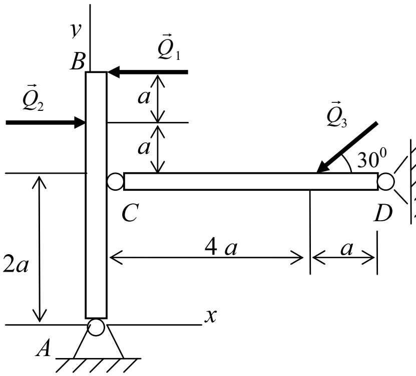
Відповідь: X_B = – 2,17 Н, Y_B = 1,73 Н, X_C = 0,67 Н, Y_C = 0,87 Н, $X_A = \pm$0,67 Н, $Y_A = \pm$ 0,87 Н.



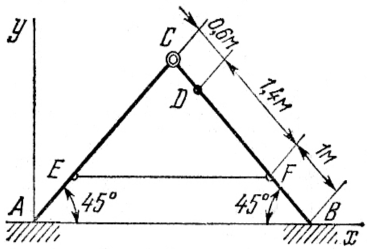
До задачі 5.7

5.8. Стержні *AB* і *CD* шарнірно скріплені під прямим кутом в точці *C* і прикріплені до опор *A* і *D* за допомогою шарнірів. До стержнів прикладені три сили, які мають однакові величини по 10 Н кожна. Нехтуючи вагою стержнів, визначити реакції опор.

Відповідь: X_A = – 5 Н, Y_A = 1 Н, X_D = 13,66 Н, Y_D = 4 Н.



До задачі 5.8



До задачі 5.9

5.9. На гладкій горизонтальній площині стоїть пересувна драбина, що складається з двох частин *AC* і *BC*, довжиною 3 м і вагою 120 Н кожна. Частини з'єднані шарніром *C* і мотузкою *FE*. Центр ваги кожної з частин розташований в її середині. У точці *D* на відстані *CD* = 0,6 м стоїть людина вагою 720 Н. Визначити реакції підлоги та шарніру, а також натяг *T* мотузки *FE*, якщо *AE* = *BF* = 1 м і частини драбини утворюють із підлогою кути по 45^0.

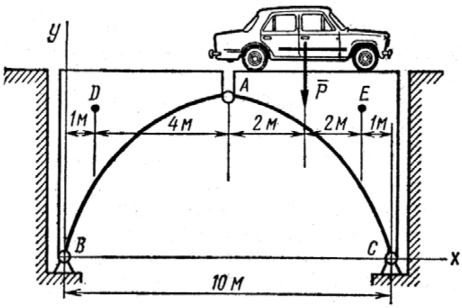
Відповідь: R_A = 408 Н, R_B = 552 Н, $X_C = \pm 522$ Н, $Y_C = \pm 288$ Н, T = 522 Н.

5.10. Міст складається з двох частин, з'єднаних між собою шарніром *A* і прикріплених до берегових стійок шарнірами *B* і *C*. Вага кожної частини 40 кН, їх центри ваги *D* і *E*. Визначити силу взаємодії в шарнірі *A* та реакції опор *B* і *C*, якщо на правій частині стоїть автомобіль вага якого *P* = 20 кН.

Відповідь: $X_B = -X_C$ = 17,5 кН,

Y_B = 46 кН, Y_C = 54 кН,

$X_A = \pm 17{,}5$ кН, $Y_A = \pm 6$ кН.



До задачі 5.10

РОЗДІЛ 6. **ЗВЕДЕННЯ СИСТЕМИ СИЛ ДО БІЛЬШ ПРОСТОГО ВИГЛЯДУ**

Якщо задана система сил $\vec{F}_i$ (i = 1, 2, … , n), розташованих як завгодно у просторі, то ці сили можна привести до довільно вибраного центру O. В результаті такого приведення отримаємо (розділ 6.2 [1], § 12 глави IV [2] та ін.) одну силу $\vec{F}$, яка прикладена в центрі приведення O і дорівнює головному вектору даної системи сил, і одну пару з моментом $\vec{M}_O$, який дорівнює головному моменту цієї системи сил відносно центра O.

Головний вектор $\vec{F}$ і ***головний момент*** $\vec{M}_O$ системи сил визначають за формулами:

$$\vec{F} = \sum \vec{F}_s \,; \qquad \vec{M}_O = \sum \vec{M}_O\left(\vec{F}_i\right).$$

Не слід ототожнювати силу $\vec{F}$ із рівнодійною силою $\vec{R}$, оскільки рівнодійна $\vec{R}$ – це одна сила, яка еквівалентна даній просторовій системі сил, а сила $\vec{F}$ еквівалентна даній системі сил лише в сукупності з парою сил, момент якої дорівнює головному моменту $\vec{M}_O$.

Розв’язання задач на приведення довільної просторової системи сил до більш простого вигляду доцільно проводити в такій послідовності:

1) вибрати осі декартових координат;
2) вибрати центр приведення системи сил у початку координат O;
3) обчислити проекції F_x, F_y, F_z головного вектора $\vec{F}$ системи за формулами:

$$F_x = \sum F_{ix} \;, \qquad F_y = \sum F_{iy} \,, \qquad F_z = \sum F_{iz} \,; \tag{6.1}$$

4) для головного вектора $\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}$ визначити модуль і напрямні косинуси;
5) знайти проекції M_x, M_y, M_z головного моменту $\vec{M}_O$ за формулами:

$$M_x = \sum M_x\left(\vec{F}_i\right) = \sum\left(y_i F_{iz} - z_i F_{iy}\right), \qquad M_y = \sum M_y\left(\vec{F}_i\right) = \sum\left(z_i F_{ix} - x_i F_{iz}\right),$$

$$M_z = \sum M_z\left(\vec{F}_i\right) = \sum\left(x_i F_{iy} - y_i F_{ix}\right); \tag{6.2}$$

6) для головного моменту $\vec{M}_O = M_x \vec{i} + M_y \vec{j} + M_z \vec{k}$ визначити модуль і його напрямні косинуси;
7) з'ясувати, до якого більш простого вигляду можна привести дану систему сил:

   а) якщо $\vec{F} = 0$ і $\vec{M}_O = 0$, то система сил зрівноважена і тверде тіло, до якого прикладена дана система сил, перебуває в рівновазі;

   б) якщо $\vec{F} = 0$ і $\vec{M}_O \neq 0$, то систему сил можна привести до пари сил із моментом $\vec{M}_O$;

   в) якщо $\vec{F} \neq 0$ і $\vec{M}_O = 0$, то систему сил можна привести до рівнодійної $\vec{R} = \vec{F}$;

   г) якщо $\vec{F} \neq 0$ і $\vec{M}_O \neq 0$, то необхідно з'ясувати, чи є вектори $\vec{F}$ і $\vec{M}_O$ взаємно перпендикулярними. У випадку, коли має місце рівність

$$F_x M_x + F_y M_y + F_z M_z = 0,$$

   вектори $\vec{F}$ і $\vec{M}_O$ взаємно перпендикулярні, тому систему сил можна звести до рівнодійної $\vec{R}$. Якщо ж вказана вище рівність не виконується, то дану систему сил можна звести до динами (розділ 11.5 [1]).

Розв'язання типових задач

Задача 1. Привести до початку координат систему сил $\vec{P}_1 = 3\vec{i} + 5\vec{j} + 4\vec{k}$, $\vec{P}_2 = -2\vec{i} + 2\vec{j} - 6\vec{k}$, $\vec{P}_3 = -\vec{i} - 7\vec{j} + 2\vec{k}$, прикладених відповідно у точках A_1 (0; 2; 1), A_2 (1; – 1; 3), A_3 (2; 3; 1) . Координати точок задані в метрах, координати сил – в ньютонах.

Р о з в 'я з а н н я. Визначимо проекції головного вектора на координатні осі:

$$F_x = \sum F_{ix} = 3 - 2 - 1 = 0;$$

$$F_y = \sum F_{iy} = 5 + 2 – 7 = 0;$$

$$F_z = \sum F_{iz} = 4 – 6 + 2 = 0.$$

Для визначення моментів сил $\vec{P}_i$ відносно координатних осей застосуємо формули (8.4):

$$M_x = \sum\left(y_i F_{iz} - z_i F_{iy}\right) = (2 \cdot 4 – 1{\cdot}5) + ((– 1) \cdot (– 6) – 3 \cdot 2) + (3 \cdot 2 – 1 \cdot (– 7)) = 16;$$

$$M_y = \sum\left(z_i F_{ix} - x_i F_{iz}\right) = (1 \cdot 3 – 0 \cdot 4) + (3 \cdot (– 2) – 1 \cdot (–6)) + (1 \cdot (–1) – 2 \cdot 2) = – 2;$$

$$M_z = \sum\left(x_i F_{iy} - y_i F_{ix}\right) = (0 \cdot 5 – 2{\cdot}3) + (1 \cdot 2 – (–1) \cdot (–2)) + (2 \cdot (–7) – 3 \cdot (– 1)) = –17.$$

За проекціями знаходимо модулі головного вектора і головного моменту системи:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} = 0,$$

$$M_O = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} = \sqrt{16^2 + (-2)^2 + (-17)^2} = 23{,}4 \text{ (Н·м)}.$$

Оскільки головний вектор даної системи дорівнює нулю, то систему сил можна привести до однієї пари з моментом $\vec{M}_O$, причому цей момент не зміниться при зміні центру приведення.

Задача 2. Привести до простішого вигляду систему сил $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$, $\vec{F}_4$, $\vec{F}_5$, прикладених у вершинах *A*, *K* і *C* прямокутного паралелепіпеда *OABCDEKL* (рис. 6.1), якщо

$$F_1 = F_3 = F_4 = F_5 = F, \qquad F_2 = 2\,F,$$

$$OC = a,\ \ OA = a / 2.$$

Р о з в ’я з а н н я. Приймемо за центр приведення точку *O*. Визначимо проекції головного вектора на осі координат:

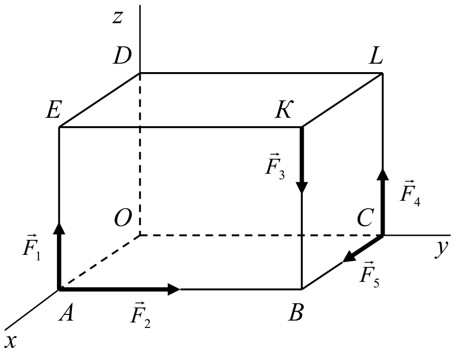


Рис. 6.1

$$F_x = \sum F_{ix} = F_5, \quad F_y = \sum F_{iy} = F_2,$$
$$F_z = \sum F_{iz} = F_1 - F_3 + F_4 .$$

Підставимо значення модулів сил:

$$F_x = F, \quad F_y = 2\,F, \quad F_z = F.$$

Таким чином, головний вектор $\vec F = F\,\vec i + 2F\,\vec j + F\,\vec k$, а його модуль $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} = \sqrt{6}\,F.$

Знайдемо проекції головного моменту даної системи сил:

$$M_x = -\,F_3\,a + F_4\,a, \qquad M_y = F_3\,\frac{a}{2} - F_1\,\frac{a}{2}, \qquad M_z = F_2\,\frac{a}{2} - F_5\,a.$$

Після підстановки значень модулів сил отримаємо:

$$M_x = 0, \qquad M_y = 0, \qquad M_z = 0.$$

Отже, головний момент $\vec M_O$ відносно центра приведення O дорівнює нулю. Таким чином, для даної системи сила $\vec F$ є рівнодійною, тобто дану систему сил можна привести до рівнодійної $\vec R$, лінія дії якої проходить через точку O, причому $R = F = \sqrt{6}\,F$.

Задача 3. У вершинах A, O, K призми прикладені сили P_1 = 40 Н, P_2 = P_5 = 10 Н, P_3 = 15 Н, P_4 = 5 Н, які діють вздовж ребер (рис. 6.2). Враховуючи, що $OA = 2\,OK$ = 20 см, $\alpha = 30^0$, привести систему сил до простішого вигляду.

Р о з в ’я з а н н я. Виберемо систему координат із початком у точці O і знайдемо проекції головного вектора системи на координатні осі:

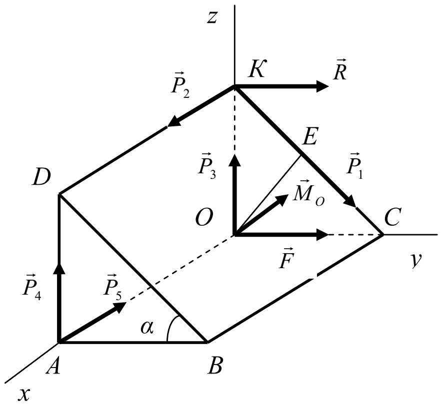


Рис. 6.2

$$F_x = \sum P_{ix} = P_2 - P_5\ ;$$

$$F_y = \sum P_{iy} = P_1 \cos\alpha\ ;$$

$$F_z = \sum P_{iz} = P_3 + P_4 - P_1 \sin\alpha.$$

Підставимо числові значення:

$F_x = 10 - 10 = 0;$

$F_y = 40 \cos 30^0 = 20\sqrt{3}\,;$

$F_z = 15 + 5 - 40 \cdot \frac{1}{2} = 0.$

Отже, головний вектор $\vec{F}$ направлений по осі y і його модуль дорівнює $F = 20\sqrt{3}$ Н.

Визначимо проекції M_x, M_y, M_z на координатні осі головного моменту $\vec{M}_O$ відносно точки O.

Оскільки сили $\vec{P}_3$, $\vec{P}_4$, $\vec{P}_5$ перетинають вісь x, а сила $\vec{P}_2$ паралельна цій осі, то моменти цих сил відносно осі x дорівнюють нулю і тому

$$M_x = \sum M_x\left(\vec{P}_i\right) = M_x\left(\vec{P}_1\right).$$

Сила $\vec{P}_1$ лежить в площині yOz, причому з кінця осі x видно, що ця сила намагається повернути тіло навколо точки O за годинниковою стрілкою. Таким чином для моменту сили $\vec{P}_1$ відносно осі x маємо:

$$M_x = M_x\left(\vec{P}_1\right) = -P_1 \cdot OE = -P_1 \cdot OK \cos\alpha = -40 \cdot 0{,}1\,\frac{\sqrt{3}}{2} = -2\sqrt{3} \approx -3{,}46 \text{ (Н·м)}.$$

При визначенні моменту M_y відмітимо, що лінії дії сил $\vec{P}_1$, $\vec{P}_3$, $\vec{P}_5$ перетинають вісь y, тому моменти цих сил відносно осі y дорівнюють нулю. Тому

$$M_y = M_y\left(\vec{P}_2\right) + M_y\left(\vec{P}_4\right).$$

Враховуючи, що сили $\vec{P}_2$ і $\vec{P}_4$ лежать в площині xOz, яка перпендикулярна до осі y, маємо:

$$M_y\left(\vec{P}_2\right) = P_2 \cdot OK = 1 \text{ (Н·м)};$$

$$M_y\left(\vec{P}_4\right) = -P_4 \cdot OA = -1 \text{ (Н·м)},$$

звідки

$$M_y = 1 + (-1) = 0.$$

Оскільки сили $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$, $\vec{P}_5$ перетинають вісь z, а сила $\vec{P}_4$ паралельна цій осі, то момент кожної з цих сил відносно осі z дорівнює нулю. Таким чином,

$$M_z = \sum M_z\left(\vec{P}_i\right) = 0.$$

Остаточно, головний момент $\vec{M}_O$ направлений по осі x і має модуль

$$M_O = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} = 3{,}46 \text{ (Н·м)}.$$

Отже, дана система сил еквівалентна силі $\vec{F}$, прикладеної в точці O, і парі сил із моментом $\vec{M}_O$.

З'ясуємо, до якого простішого вигляду можна привести дану систему сил: до однієї рівнодійної сили, чи до динами. Оскільки $F_x M_x + F_y M_y + F_z M_z = 0$, то головний вектор $\vec{F}$ перпендикулярний до головного моменту $\vec{M}_O$, тобто сила $\vec{F}$ і пара (з моментом $\vec{M}_O$) лежать в одній площині yOz. Таким чином, їх можна привести до однієї рівнодійної сили $\vec{R}$, яка дорівнює і паралельна силі $\vec{F}$. Рівняння лінії дії сили $\vec{R}$ (§ 2 глави II [5]) має вигляд:

$$\frac{M_x - yF_z + zF_y}{F_x} = \frac{M_y - zF_x + xF_z}{F_y} = \frac{M_z - xF_y + yF_x}{F_z} \ ,$$

тобто

$$\frac{-2\sqrt{3} + z \cdot 20\sqrt{3}}{0} = \frac{0}{20\sqrt{3}} = \frac{-20\sqrt{3}\,x}{0},$$

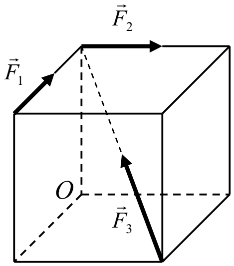
звідки $x = 0$, $z = \dfrac{2\sqrt{3}}{20\sqrt{3}} = 0{,}1$. Отже, лінія дії рівнодійної $\vec{R}$ лежить у площині yOz, паралельна осі y і віддалена від неї на відстань $z = 0{,}1$ м. Це означає, що точкою прикладання рівнодійної сили є точка K (рис. 6.2).

Остаточно, дану систему сил можна привести до рівнодійної сили $\vec{R}$, прикладеної в точці K і направленої паралельно осі y, причому $R = 20\sqrt{3}$ Н.

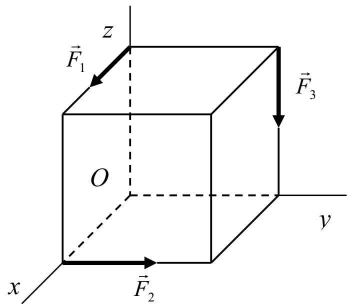
Завдання для самостійної роботи

6.1. До якого простішого вигляду можна привести систему трьох сил, прикладених у вершинах куба?

Відповідь: до рівнодійної.



До задачі 6.1



До задачі 6.2

6.2. До вершин куба, ребро якого дорівнює 1 м, прикладені сили $F_1 = 5$ Н, $F_2 = 10$ Н, $F_3 = 8$ Н, направлені вздовж ребер. Указати результат приведення цієї системи сил до вершини O.

Відповідь: $\vec{F} = 5\,\vec{i} + 10\,\vec{j} - 8\,\vec{k}$, $\vec{M}_O = -8\,\vec{i} + 5\,\vec{j} + 10\,\vec{k}$, $\vec{F} \cdot \vec{M}_O \neq 0$.

6.3. Для системи сил, прикладених до твердого тіла, відомі головний вектор $\vec{F}$ (3 Н; 0; 2 Н) і головний момент $\vec{M}_O$ (– 4 Н·м; 6 Н·м; 6 Н·м). До якого простішого вигляду можна привести дану систему сил?

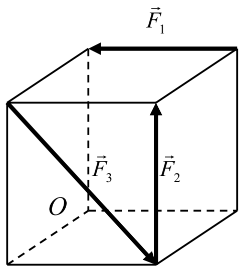
Відповідь: до рівнодійної.

6.4. Для системи сил, прикладених до твердого тіла, відомі головний вектор $\vec{F}$ (0; 3 Н; 4 Н) і головний момент $\vec{M}_O$ (2 Н·м; – 1 Н·м; 2 Н·м). До якого простішого вигляду можна привести дану систему сил?

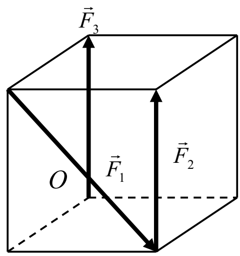
Відповідь: до динами (динамічного гвинта).

6.5. На куб діють сили $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$. Модулі і напрями сил $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$ визначаються відповідними ребрами куба, а $\vec{F}_3$ – діагоналлю його передньої грані. До якого простішого вигляду можна привести дану систему сил, якщо за центр приведення прийняти вершину O куба?

Відповідь: $\vec{F} = 0$, $\vec{M}_O \neq 0$.



До задачі 6.5



До задачі 6.6

6.6. До вершин куба прикладені сили $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$. Модулі і напрями сил $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$ визначаються відповідними ребрами куба, а $\vec{F}_3$ – діагоналлю його передньої грані. До якого простішого вигляду можна привести дану систему сил, якщо за центр приведення прийняти вершину O куба?

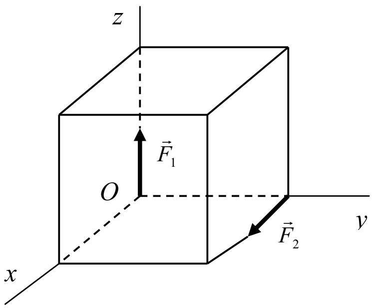
Відповідь: $\vec{F} \neq 0$, $\vec{M}_O \neq 0$, $\vec{F} \cdot \vec{M}_O \neq 0$.

6.7. Система сил відносно початку системи координат приведена до головного вектора $\vec{F}$ (0; 3 Н; 4 Н) і головного моменту $\vec{M}_O$ (0 ; 4 Н·м; 0). Визначити кут φ між цими векторами.

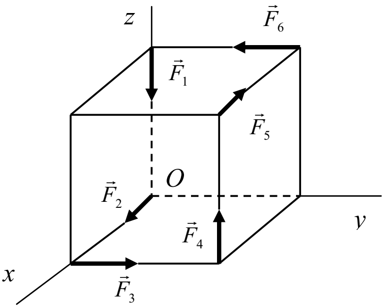
Відповідь: φ = arccos 0,6.

6.8. У вершинах куба, ребра якого дорівнюють 2 м, прикладені дві сили $F_1 = F_2 = 2$ Н. Знайти головний вектор і головний момент цієї системи сил відносно точки O і визначити кут між ними.

Відповідь: $\vec{F} = 2\vec{i} + 2\vec{k}$, $\vec{M}_O = -4\vec{k}$, $\varphi = 135^0$.



До задачі 6.8



До задачі 6.9

6.9. До вершин куба, ребра якого дорівнюють 5 см, прикладені шість однакових за модулем сил, по 2 Н кожна. Привести цю систему до простішого вигляду.

Відповідь: систему можна привести до пари сил, момент якої дорівнює $20\sqrt{3}$ Н·см і має напрямні косинуси $\cos\alpha = -\cos\beta = \cos\gamma = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

6.10. До якого простішого вигляду можна привести довільну систему сил, якщо для трьох точок O, A і B, які не лежать на одній прямій, $\vec{M}_O = \vec{M}_A = \vec{M}_B = 0$?

Відповідь: систему можна привести до рівнодійної.

РОЗДІЛ 7. **ЦЕНТР ВАГИ**

Центр ваги твердого тіла – це незмінно пов'язана з цим тілом точка, через яку проходить лінія дії рівнодійної елементарних сил ваги, прикладених до частинок цього тіла (розділ 10 [1], глава VIII [2] та ін.). ***Вагою** P* твердого тіла називають суму сил ваги всіх його матеріальних частинок:

$$P = \sum_{i=1}^{n} P_i .$$

При розв'язанні задач на визначення центру ваги однорідного тіла ***доцільно розбити це тіло на такі частини, положення центру ваги кожної з яких відомо аба ж його легко можна знайти.***

Для фігури, що складається з відрізків ліній, координати центру ваги визначають за формулами:

$$x_C = \frac{\sum x_i l_i}{\sum l_i}, \quad y_C = \frac{\sum y_i l_i}{\sum l_i}, \quad z_C = \frac{\sum z_i l_i}{\sum l_i}, \tag{7.1}$$

де x_i, y_i, z_i – координати центру ваги відповідного відрізка, а l_i – його довжина.

Для плоскої фігури, що складається з декількох частин, кожна з яких має відповідно площу S_i і координати центру ваги x_i, y_i, z_i , маємо:

$$x_C = \frac{\sum x_i S_i}{\sum S_i}, \quad y_C = \frac{\sum y_i S_i}{\sum S_i}, \quad z_C = \frac{\sum z_i S_i}{\sum S_i}. \tag{7.2}$$

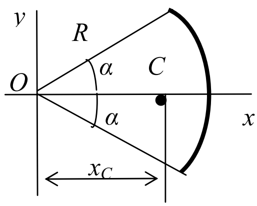
Для тіла, що складається з однорідних частин із об'ємами V_i координати центру ваги визначають за формулами:

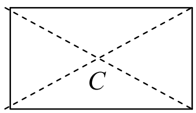
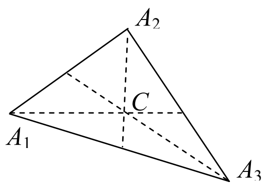
$$x_C = \frac{\sum x_i V_i}{\sum V_i}, \quad y_C = \frac{\sum y_i V_i}{\sum V_i}, \quad z_C = \frac{\sum z_i V_i}{\sum V_i}. \tag{7.3}$$

Відмітимо, що за означенням центр ваги – це точка геометрична; вона може бути розташована поза межами даного тіла (наприклад, для кільця).

Положення центрів ваги деяких однорідних тіл наведені в таблиці 7.1.

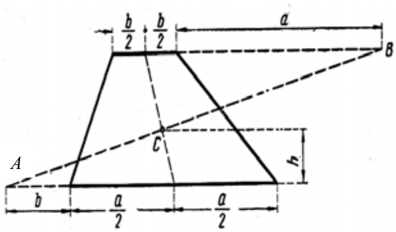
Таблиця 7.1

<table>
<tr><th>№</th><th>Тіло</th><th>Положення центру ваги</th></tr>
<tr><td>1</td><td>Дуга кола радіуса R

</td><td>Центр ваги дуги кола розташований на її осі симетрії:

$$x_C = R\frac{\sin\alpha}{\alpha}, \quad y_C = 0.$$</td></tr>
<tr><td>2</td><td>Прямокутна пластина

</td><td>Центр ваги C розташований у центрі прямокутника – точці перетину діагоналей.</td></tr>
<tr><td>3</td><td>Трикутна пластина

</td><td>Центр ваги розташований у точці перетину медіан:

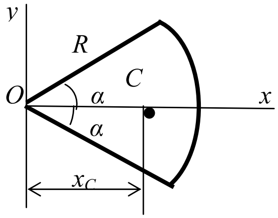
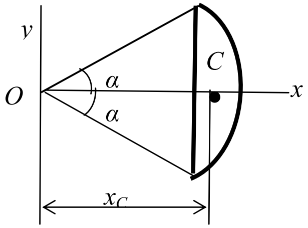
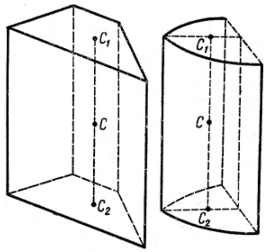
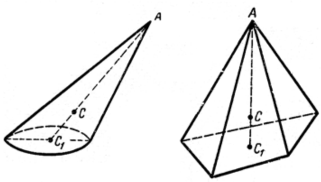
$$x_C = \frac{1}{3}\,(x_1 + x_2 + x_3),$$

$$y_C = \frac{1}{3}\,(y_1 + y_2 + y_3),$$

де x_i, y_i – координати вершин трикутника.</td></tr>
<tr><td>4</td><td>Пластина, обмежена трапецією

</td><td>Центр ваги розташований у точці перетину прямої AB і прямої, що з’єднує середини паралельних сторін,

$$h = \frac{H}{3}\cdot\frac{a+2b}{a+b},$$

де H – висота трапеції.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>№</th><th>Тіло</th><th>Положення центру ваги</th></tr>
<tr><td>5</td><td>Пластина у вигляді кругового сектора

</td><td>Центр ваги C кругового сектора розташований на його осі симетрії:
$$x_C = OC = \frac{2}{3} R \frac{\sin\alpha}{\alpha},$$
$$y_C = 0.$$</td></tr>
<tr><td>6</td><td>Пластина у вигляді кругового сегмента

</td><td>Центр ваги C кругового сегмента розташований на його осі симетрії:
$$x_C = OC = \frac{4}{3} \frac{R \sin^2\alpha}{2\alpha - \sin^2\alpha},$$
$$y_C = 0.$$</td></tr>
<tr><td>7</td><td>Призма або циліндр

</td><td>Центр ваги C розташований в середині відрізка, що з'днує центри ваги C_1 і C_2 верхньої та нижньої основ,
$$C_1C = \frac{1}{2} C_1C_2.$$</td></tr>
<tr><td>8</td><td>Піраміда або конус

</td><td>Центр ваги C розташований на відрізку, що з'єднує вершину A з центром ваги C_1 основи,
$$C_1C = \frac{1}{4} AC_1.$$</td></tr>
</table>

Розв'язання типових задач

Задача 1. Визначити положення центра ваги плоскої фігури (рис. 7.1) зігнутої з тонкого дроту.

Р о з в 'я з а н н я. Дана фігура складається з чотирьох прямих відрізків: $AB = l_1 = 8$ см, $BD = l_2 = 10$ см, $DE = l_3 = 6$ см, $EF = l_4 = 4$ см. На ці частини і розділимо всю фігуру.

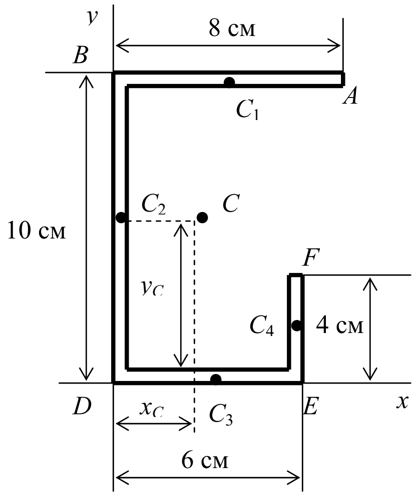


Рис. 7.1

Осі координат розташуємо так, щоб вони співпадали з відрізками *DE* (вісь *x*) і *DB* (вісь *y*).

Для центрів ваги C_1, C_2, C_3 і C_4 кожного відрізка відповідно знайдемо їх координати, враховуючи розміри фігури. Для координат точки C_1 маємо:

$$x_1 = \frac{AB}{2} = 4 \text{ (см)}; \quad y_1 = BD = 10 \text{ см}.$$

Для відрізка *BD* координати центру ваги C_2 дорівнюють:

$$x_2 = 0; \quad y_2 = \frac{BD}{2} = 5 \text{ (см)}.$$

Координати точки C_3:

$$x_3 = \frac{DE}{2} = 3 \text{ (см)}; \quad y_3 = 0 .$$

Координати точки C_4:

$$x_4 = DE = 6 \text{ см}; \quad y_4 = \frac{EF}{2} = 2 \text{ (см)}.$$

За формулами (7.1) знаходимо координати центру ваги всієї фігури:

$$x_C = \frac{\sum x_i l_i}{\sum l_i} = \frac{4\cdot 8 + 0\cdot 10 + 3\cdot 6 + 6\cdot 4}{8+10+6+4} = 2{,}64 \text{ (см)};$$

$$y_C = \frac{\sum y_i l_i}{\sum l_i} = \frac{10\cdot 8 + 5\cdot 10 + 0\cdot 6 + 2\cdot 4}{8+10+6+4} = 4{,}93 \text{ (см)}.$$

Відклавши вздовж осей x і y знайдені координати, відмічаємо положення центру ваги C даної фігури (рис. 7.1). У даному випадку центр ваги не належить самому тілу.

Задача 2. Визначити положення центру ваги плоскої фігури OAB, зігнутої з дроту у вигляді квадранта (рис. 7.2).

Р о з в ’я з а н н я. Фігура складається з трьох частин: двох прямолінійних відрізків OA і OB довжиною R і дуги $\overset{\cup}{AB}$, що дорівнює чверті кола.

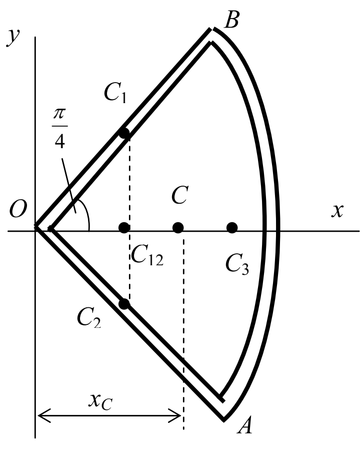


Рис. 7.2

Оскільки фігура має одну вісь симетрії, що проходить по бісектрисі прямого кута, одну з осей координат (наприклад, вісь x) доцільно сумістити з віссю симетрії (рис. 7.2). В цьому випадку спільний центр ваги відрізків OA і OB (точка C_{12}) лежить на осі симетрії.

Визначаємо вихідні дані для застосування формул (7.1):

$$l_1 + l_2 = 2\,R,, \qquad C_{12}\left(\frac{1}{2}R\cdot\sin\frac{\pi}{4};\ 0\right).$$

За формулами (7.4) знаходимо координати центру ваги дуги $\overset{\cup}{AB}$:

$$l_3 = \frac{1}{2}\,\pi R\,, \qquad C_3\left(\frac{4}{\pi}R\cdot\sin\frac{\pi}{4};\ 0\right).$$

Остаточно, для координат центру ваги C всієї фігури маємо:

$$x_C = \frac{2R\cdot\frac{1}{2}R\cdot\sin\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\pi R\cdot\frac{4}{\pi}R\cdot\sin\frac{\pi}{4}}{2R + 0{,}5\pi R} = 0{,}595\,R, \qquad y_C = 0.$$

Задача 3. Визначити положення центру ваги C площі поперечного перерізу однорідного штампу, зображеного на рис. 7.3.

Р о з в ’я з а н н я. Зважаючи, що переріз має вісь симетрії, проведемо вісь x вздовж осі симетрії. Оскільки центр ваги C перерізу розташований на осі симетрії, тобто на осі x, то необхідно визначити лише координату x_C.

Допоміжними лініями MP і NS розіб’ємо площу перерізу на три прямокутники. Позначимо прямокутник $MDBA$ номером *1*, прямокутник $ENLK$ номером *2* і прямокутник $NMPS$ – номером *3*. Тоді за формулою (7.2) маємо:

$$x_C = \frac{x_1 S_1 + x_2 S_2 + x_3 S_3}{S_1 + S_2 + S_3}\ .$$

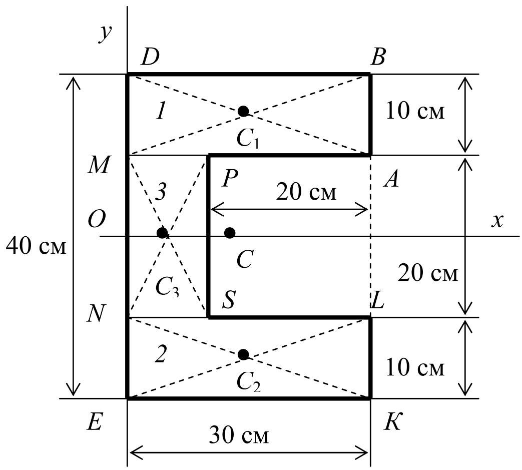


Рис. 7.3

Оскільки центри ваги C_1, C_2 і C_3 прямокутників розташовані в точках перетину їх діагоналей, то

$$x_1 = x_2 = 15 \text{ см},\ \ x_3 = 5 \text{ см}.$$

Площі прямокутників

дорівнюють:

$$S_1 = S_2 = 300 \text{ см}^2, \qquad S_3 = 200 \text{ см}^2.$$

Отже,

$$x_C = \frac{15 \cdot 300 + 15 \cdot 300 + 5 \cdot 200}{300 + 300 + 200} = 12{,}5 \text{ (см)}.$$

Таким чином, центр ваги площі перерізу штампу розташований у точці C з координатами x_C =12,5 см, $y_C = 0$.

Цю задачу можна розв'язати ***іншим способом***, провівши допоміжну пряму AL (рис. 7.3) і розглянувши площу даного перерізу як різницю площ прямокутників $EDBK$ і $APSL$. При цьому для координати x_C центру ваги маємо:

$$x_C = \frac{x_1^* S_1^* - x_2^* S_2^*}{S_1^* - S_2^*},$$

де x_1^* – абсциса центру ваги прямокутника $EDBK$ і x_2^* – абсциса центру ваги прямокутника $APSL$, а S_1^* і S_2^* – відповідно площі цих прямокутників. Враховуючи, що

$$x_1^* = 15 \text{ см}, \qquad x_2^* = 20 \text{ см},$$
$$S_1^* = 1200 \text{ см}^2, \qquad S_2^* = 400 \text{ см}^2,$$

знаходимо

$$x_C = \frac{15 \cdot 1200 - 20 \cdot 400}{1200 - 400} = 12{,}5 \text{ (см)}.$$

Другий спосіб розв'язання задачі заміною площі даної фігури різницею двох площ є в деяких випадках більш зручним.

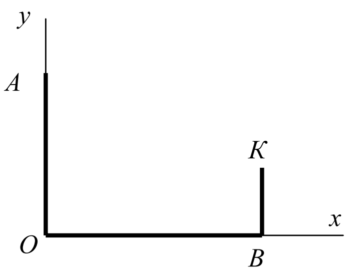
Завдання для самостійної роботи

7.1. Визначити положення центру ваги тонкого дроту, зігнутого під прямими кутами, якщо $OA = a$, $OB = b$, $BK = c$.

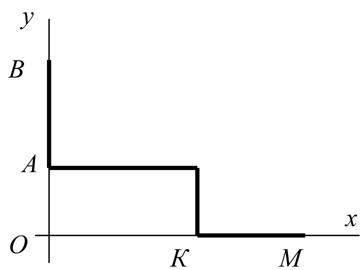
Відповідь: $x_C = \dfrac{b\,(b+2c)}{2\,(a+b+c)}$, $y_C = \dfrac{a^2+c^2}{2\,(a+b+c)}$.

7.2. Враховуючи, що OA = 8 см, AB = 14 см, OK = 16 см, KM = 12 см, визначити положення центру ваги однорідного тонкого дроту, зігнутого під прямими кутами.

Відповідь: x_C = 10,4 см, y_C = 7,4 см.



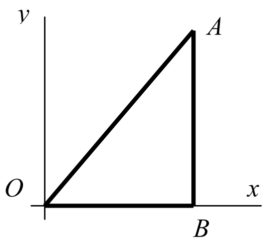
До задачі 7.1



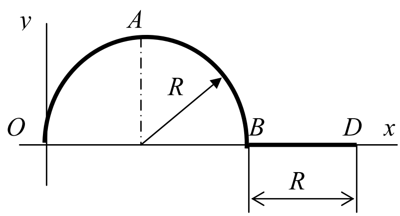
До задачі 7.2

7.3. Визначити положення центру ваги контуру трикутника AOB, в якому AB = 8 см, OB = 6 см.

Відповідь: x_C = 4 см, y_C = 3 см.



До задачі 7.3



До задачі 7.4

7.4. Визначити координати центру ваги однорідного лінійного контуру *OABD*, який складається з напівкола *OAB* радіуса *R* і прямолінійного відрізка *BD* довжиною *R*.

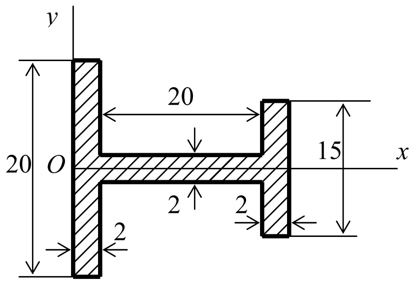
Відповідь: $x_C = \dfrac{\pi + 2{,}5}{\pi + 1} R$, $y_C = \dfrac{2R}{\pi + 1}$.

7.5. Визначити положення центру ваги площі фігури, що складається з трьох прямокутників. Розміри вказані в сантиметрах.

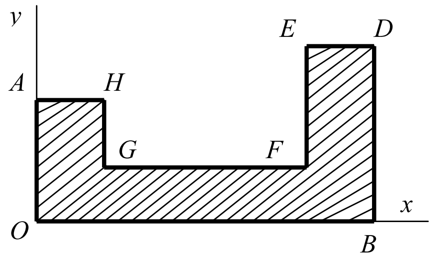
Відповідь: $x_C = 11$ см, $y_C = 0$ см.

7.6. Визначити положення центру ваги плоскої фігури *AOBDEFGH*, в якій *AO* = 3 см, *AH* = 2 см, *HG* = 1,5 см, *EF* = 4 см, *DE* = 2 см, *FG* = 6 см.

Відповідь: $x_C = 5{,}77$ см, $y_C = 1{,}77$ см.



До задачі 7.5



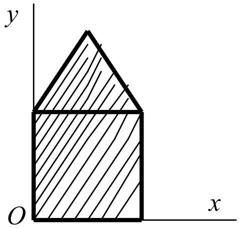
До задачі 7.6

7.7. Визначити положення центру ваги плоскої фігури, що складається з квадрата і рівностороннього трикутника зі стороною *a*.

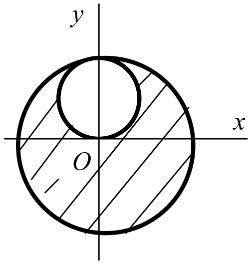
Відповідь: $x_C = \dfrac{a}{2}$, $y_C = 0{,}738\, a$.

7.8. З однорідного диска радіуса *R* вирізано круглий отвір радіуса $\dfrac{R}{2}$. Визначити положення центру ваги фігури.

Відповідь: $x_C = 0$, $y_C = -\dfrac{R}{6}$.



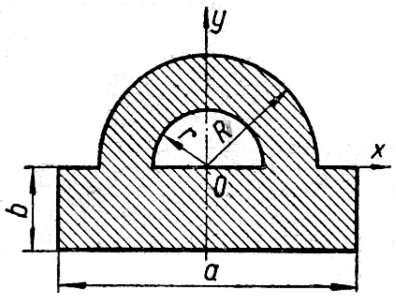
До задачі 7.7



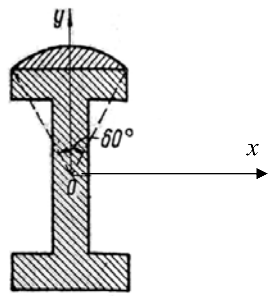
До задачі 7.8

7.9. Визначити положення центру ваги транспортира, розміри якого $a = 14$ см, $b = 3$ см, $R = 6$ см, $r = 4$ см.

Відповідь: $x_C = 0$, $y_C = 0{,}522$ см.



До задачі 7.9



До задачі 7.10

7.10. Визначити координати центру ваги плоскої фігури, яка складається із сегменту кола радіуса $r = 10$ см і двотаврового профілю площею 40 см^2. Центр кола співпадає з центром двотаврового профілю.

Відповідь: $x_C = 0$, $y_C = 1{,}70$ см.

РОЗДІЛ 8. **РІВНОВАГА ПРОСТОРОВОЇ СИСТЕМИ СИЛ**

Для рівноваги довільної просторової системи сил необхідно і достатньо виконання шести рівностей:

$$\sum F_{kx} = 0, \qquad \sum F_{ky} = 0, \qquad \sum F_{kz} = 0, \tag{8.1}$$

$$\sum M_x\left(\vec{F}_i\right) = 0, \qquad \sum M_y\left(\vec{F}_i\right) = 0, \qquad \sum M_z\left(\vec{F}_i\right) = 0. \tag{8.2}$$

При цьому (8.1) виражають рівняння проекцій, а (8.2) – рівняння моментів відносно трьох координатних осей.

У випадку довільної просторової системи сил задача є статично означеною, якщо число алгебраїчних невідомих не більше ніж шість. У частинних випадках кількість рівнянь рівноваги може бути меншою, оскільки деякі з рівнянь (8.1)–(8.2) перетворюються в тотожності. Наприклад, якщо лінії дії сил, прикладених до твердого тіла, є паралельними, то одну з координатних осей доцільно направити паралельно силам, а дві інших осі розмістити у площині, перпендикулярній до ліній дії сил. Тоді два рівняння проекцій із (8.1) і одне рівняння моментів із (8.2) перетворяться в тотожності вигляду 0 = 0.

У деяких випадках складання рівнянь рівноваги можна полегшити, якщо показати тіло та сили, які до нього прикладені, в проекціях на координатні площини. Доцільно також розкладати силу на складові, паралельні координатним осям.

Розв’язання типових задач

Задача 1. Однорідна прямокутна плита вагою 300 Н підвішена горизонтально на трьох вертикальних тросах (рис. 8.1, *а*). До плити підвішені тягарі вагою P = 200 Н і Q = 100 Н. Визначити реакції тросів. Розміри на рисунку вказані в сантиметрах.

Р о з в ’я з а н н я. Розглянемо рівновагу пластини, в’язями для якої є троси, прикріплені в точках *A*, *O*, *B*. Покажемо на схемі відповідні реакції , а також силу ваги $\vec{G}$, враховуючи, що центр ваги *C* прямокутника розташований у точці перетину його діагоналей. Дію на плиту тягарців зображуємо відповідними силами їх ваги $\vec{P}$ і $\vec{Q}$.

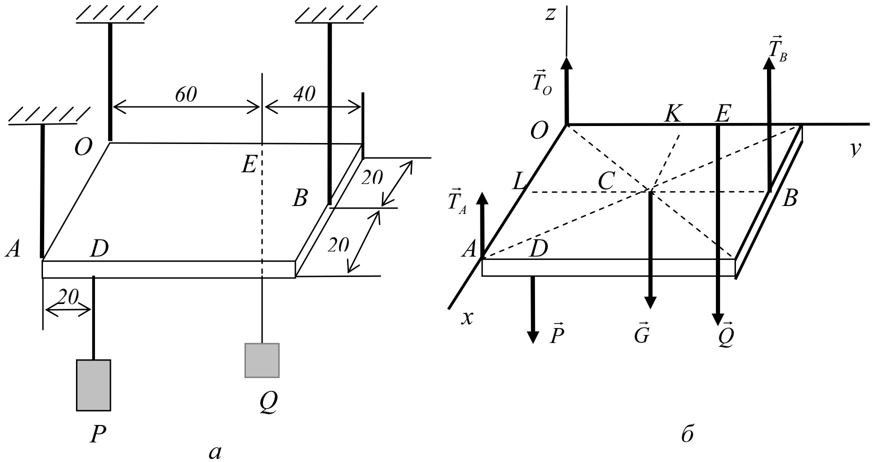


Рис. 8.1

Розташовуємо осі координат так, як показано на рис. 8.1, *б*, і складемо умови рівноваги. Оскільки всі сили, що діють на плиту, паралельні осі z, то їх проекції на осі x та y дорівнюють нулю, а також їх моменти відносно осі z дорівнюють нулю. Отже, перші два рівняння в (8.1) і останнє рівняння в (8.2) перетворяться в тотожності 0 = 0. Таким чином, умови рівноваги набувають вигляду:

$$\sum F_{kz} = 0, \qquad T_A + T_B + T_C - P - G - Q = 0;$$

$$\sum M_x\left(\vec{F}_i\right) = 0, \qquad -P \cdot AD - G \cdot LC - Q \cdot OE + T_B \cdot LB = 0;$$

$$\sum M_y\left(\vec{F}_i\right) = 0, \qquad -T_A \cdot AO + P \cdot AO + G \cdot KC - T_B \cdot KC = 0.$$

Для визначення натягів тросів розв’язуємо цю систему рівнянь, враховуючи, що AD = 0,2 м, LC = 0,5 м, OE = 0,6 м, LB = 1 м, AO = 0,4 м, KC = 0,2 м. З другого рівняння маємо:

$$T_B = P \cdot 0{,}2 + G \cdot 0{,}5 + Q \cdot 0{,}6\ ,$$

тобто $T_B = 200 \cdot 0{,}2 + 300 \cdot 0{,}5 + 100 \cdot 0{,}6 = 250$ (Н).

Підставивши це значення у третє рівняння, знаходимо:

$$T_A \cdot 0{,}4 = P \cdot 0{,}4 + G \cdot 0{,}2 - T_B \cdot 0{,}2,$$

звідки

$$T_A = (200 \cdot 0{,}4 + 300 \cdot 0{,}2 - 250 \cdot 0{,}2\,)/\ 0{,}4 = 225 \text{ (Н)}.$$

Відповідно з першого рівняння маємо:

$$T_C = P + G + Q - T_A - T_B\,,$$

отже, $T_C = 200 + 300 + 100 - 225 - 250 = 125$ (Н).

Відповідь: $T_A = 225$ Н, $T_B = 250$ Н, $T_C = 125$ Н.

Задача 2. Багажна поличка залізничного вагону прикріплена до стіни вагону двома завісами (циліндричними шарнірами) A і B та стержнем MS. Стержень прикріплений до полички та стіни за допомогою шарнірів і утворює з горизонтальною площиною кут 30^0. Визначити реакції завіс A і B та стержня MS , якщо вага полички $P = 10$ кН. Розміри вказані на рис. 8.2.

Р о з в ’я з а н н я. Для визначення реакцій завіс A і B та стержня MS розглянемо рівновагу полички $KLMN$. На неї діє одна активна сила – сила ваги $\vec{P}$, прикладена в центрі ваги C полички (в точці перетину діагоналей прямокутника $KLMN$).

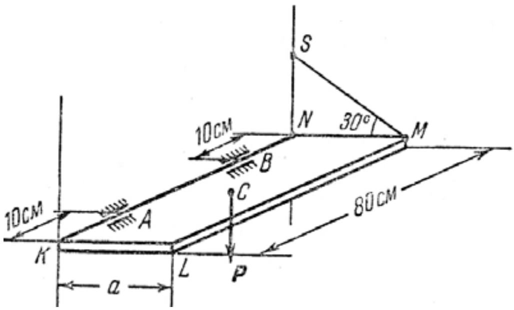


Рис. 8.2

За законом звільнення від в’язів замінимо завіси A і B та стержень MS відповідними реакціями. Реакція $\vec{R}$ стержня направлена вздовж стержня (рис. 8.2, *б*). Напрямки реакцій завіс заздалегідь невідомі. Але оскільки завіси – циліндричні шарніри – не заважають переміщенню полички вздовж осі AB, то будуть відсутні складові відповідних реакцій, направлені вздовж цієї осі. Тому реакція завіси A на рис. 8.3

зображена двома складовими $\vec{Y}_A$ і $\vec{Z}_A$, а для реакції завіси *B* маємо $\vec{Y}_B + \vec{Z}_B$. Отже, необхідно визначити п’ять величин: R, Y_A, Z_A, Y_B, Z_B. Враховуючи, що поличка перебуває в рівновазі під дією просторової системи сил, можемо скласти умови рівноваги з шести рівнянь (8.1)–(8.2), одне з яких перетвориться в тотожність (проекції всіх сил на вісь *x* дорівнюють нулю). Таким чином, задача є статично означеною.

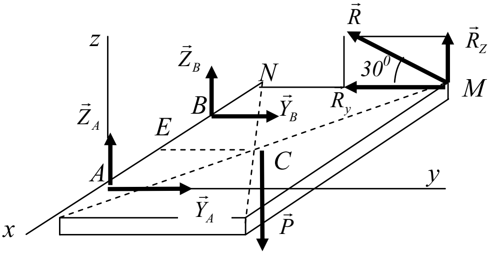


Рис. 8.3

При складанні умов рівноваги для зручності розкладемо силу $\vec{R}$ на дві складові: $\vec{R} = \vec{R}_y + \vec{R}_Z$ (рис. 8.3). Тут

$$R_y = R \cos 30^0, \quad R_z = R \sin 30^0.$$

Тоді умови рівноваги набувають вигляду:

$$\sum F_{k\,y} = 0, \qquad Y_A + Y_B - R_y = 0; \tag{8.3}$$

$$\sum F_{k\,z} = 0, \qquad Z_A + Z_B + R_z - P = 0; \tag{8.4}$$

$$\sum M_x\left(\vec{F}_i\right) = 0, \qquad -P \cdot CE + R_z \cdot MN = 0; \tag{8.5}$$

$$\sum M_y\left(\vec{F}_i\right) = 0, \qquad Z_B \cdot AB - P \cdot AE + R_z \cdot AN = 0; \tag{8.6}$$

$$\sum M_z\left(\vec{F}_i\right) = 0, \qquad -Y_B \cdot AB + R_y \cdot AN = 0. \tag{8.7}$$

При складанні рівняння (8.5) враховуємо, що лінії дії сил $\vec{Y}_A$, $\vec{Z}_A$, $\vec{Y}_B$, $\vec{Z}_B$ і $\vec{R}_y$ перетинають вісь *x* і тому їх моменти відносно цієї осі дорівнюють нулю.

При складання рівняння (8.6) враховуємо, що моменти сил $\vec{Y}_A$, $\vec{Z}_A$, $\vec{Y}_B$ і $\vec{R}_y$ відносно осі *y* дорівнюють нулю (сили $\vec{Y}_B$ і $\vec{R}_y$ паралельна осі *y*, а лінії дії сил $\vec{Y}_A$ та $\vec{Z}_A$ перетинають цю вісь).

Моменти сил $\vec{P}$, $\vec{Y}_A$, $\vec{Z}_A$, $\vec{Z}_B$, $\vec{R}_Z$ відносно осі z дорівнюють нулю (сили $\vec{P}$, $\vec{Z}_A$, $\vec{Z}_B$ і $\vec{R}_Z$ паралельні осі z, а лінія дії сили $\vec{Y}_A$ перетинає цю вісь). Тому в рівнянні (8.7) враховуємо лише моменти сил $\vec{Y}_B$ та $\vec{R}_y$.

Для визначення реакцій завіс і стержня розв'яжемо систему алгебраїчних рівнянь (8.3)–(8.7), враховуючи, що $AB = 0{,}6$ м, $AE = 0{,}3$ м, $AN = 0{,}7$ м, $MN = 2\cdot CE = a$. Тоді з (8.5) маємо:

$$R\sin 30^0 = \frac{P\cdot CE}{MN} = \frac{P\cdot CE}{2CE} = \frac{P}{2}, \qquad \text{тому} \quad R = \frac{P}{2\sin 30^0} = P = 10\ (\text{кН}).$$

Відповідно із (8.7) знаходимо:

$$Y_B = \frac{R_y\cdot AN}{AB}, \qquad \text{отже,}\ Y_B = \frac{R\cos 30^0\cdot 0{,}7}{0{,}6} = \frac{10\sqrt{3}\cdot 7}{2\cdot 6} = \frac{35}{6}\sqrt{3} \approx 10{,}09\ (\text{кН}).$$

З рівняння (8.6) маємо:

$$Z_B = \frac{P\cdot AE - R_z\cdot AN}{AB},$$

тому $$Z_B = \frac{P\cdot 0{,}3 - R\sin 30^0\cdot 0{,}7}{0{,}6} = \frac{10\cdot 0{,}3 - 10\cdot 0{,}5\cdot 0{,}7}{0{,}6} = -\frac{5}{6} \approx -0{,}83\ (\text{кН}).$$

Підставивши ці значення в рівняння (8.3), отримаємо:

$$Y_A = R_y - Y_B = R\cos 30^0 - Y_B,$$

отже, $$Y_A = 10\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{35}{6}\sqrt{3} = -\frac{5}{6}\sqrt{3} \approx -1{,}44\ (\text{кН}).$$

Із рівняння (8.4) знаходимо

$$Z_A = P - Z_B - R_z = P - Z_B - R\sin 30^0,$$

звідки $Z_A = 10 - (-0{,}83) - 10\cdot 0{,}5 = 5{,}83$ кН.

Знаки мінус у значеннях величин Y_A та Z_B показують, що дійсні напрями сил $\vec{Y}_A$ та $\vec{Z}_B$ протилежні тим, що зображені на рис. 8.3.

Відповідь: $R = 10$ кН, $Y_A = -1{,}44$ кН, $Z_A = 5{,}83$ кН, $Y_B = 10{,}09$ кН, $Z_B = -0{,}83$ кН.

Задача 3. Квадратну кришку вагою 400 Н утримують напіввідчиненою за допомогою тягарця *Q* (рис. 8.4, *а*). Кришка утворює з горизонтальною площиною кут $\alpha = 60^0$. Нехтуючи тертям на блоці *D* , визначити вагу тягарця та реакції шарнірів *A* і *B*, якщо блок *D* закріплений на одній вертикалі з шарніром *A* і $AD = AC$.

Р о з в ’я з а н н я. Розглянемо рівновагу кришки. На рис. 8.4, *б* показані сили, які на неї діють: сила ваги $\vec{G}$ прикладена в точці *E* (в центрі симетрії квадрату) і реакція $\vec{T}$ нитки *CD*, яка прикладена в точці *C* і направлена вздовж нитки. Величина сили $\vec{T}$ дорівнює значенню ваги *Q* тягарця.

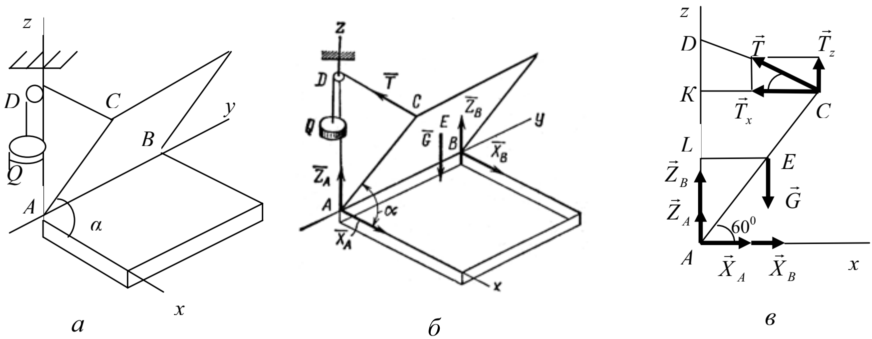


Рис. 8.4

За законом звільнення від в’язів шарніри *A* і *B* замінили їх реакціями. Оскільки сили $\vec{G}$ і $\vec{T}$ діють в площинах, перпендикулярних до осі *y*, то й реакції шарнірів лежать у площинах, перпендикулярних до тієї ж осі. Тому реакція шарніру *A* на рис. 8.4, *б* показана двома складовими $\vec{X}_A$ і $\vec{Z}_A$, а реакція шарніру *B* – складовими $\vec{X}_B$ і $\vec{Z}_B$. Таким чином, маємо п’ять невідомих величин: $Q = T$, X_A, Z_A, X_B , Z_B. Усі сили, що діють на кришку, утворюють просторову систему сил, тому можемо скласти шість рівнянь рівноваги, одне з яких перетвориться в тотожність 0 = 0 (проекції всіх сил на вісь *y* дорівнюють нулю). Отже, задача статично означена.

Направимо осі координат із точки *A* так, як показано на рис. 8.4, і складемо умови рівноваги. Попередньо зображуємо кришку разом із силами, що на неї діють, в проекції на координатну площину *xAz*. На рис. 8.4, *в* показаний вигляд зліва, вісь *y* перпендикулярна до площини проекції. Для зручності силу $\vec{T}$ розклали на дві складові:

$$\vec{T} = \vec{T}_x + \vec{T}_z,$$

де

$$T_x = T\cos\beta, \quad T_z = T\sin\beta. \tag{8.8}$$

Тут $\beta = \angle DCK$ – кут, який сила $\vec{T}$ утворює з віссю *x*.

Умови рівноваги кришки набувають вигляду:

$$\sum F_{k\,x} = 0, \qquad X_A + X_B - T_x = 0\,. \tag{8.9}$$

$$\sum F_{k\,z} = 0, \qquad Z_A + Z_B + T_z - G = 0, \tag{8.10}$$

$$\sum M_x\left(\vec{F}_i\right) = 0, \qquad -G\cdot\frac{AB}{2} + Z_B\cdot AB = 0, \tag{8.11}$$

$$\sum M_y\left(\vec{F}_i\right) = 0, \qquad G\cdot LE - T_x\cdot AK - T_z\cdot CK = 0, \tag{8.12}$$

$$\sum M_z\left(\vec{F}_i\right) = 0, \qquad -X_B\cdot AB = 0. \tag{8.13}$$

При складанні рівняння (8.11) враховуємо, що моменти сил $\vec{X}_A$, $\vec{Z}_A$, $\vec{X}_B$, $\vec{T}_x$ і $\vec{T}_z$ відносно осі *x* дорівнюють нулю (сили $\vec{X}_A$, $\vec{X}_B$ і $\vec{T}_x$ паралельні осі *x*, а сили $\vec{Z}_A$ і $\vec{T}_z$ перетинають її).

У рівнянні (8.12) враховані тільки моменти відносно осі *y* сил $\vec{G}$ і $\vec{T}$, оскільки всі інші сили перетинають вісь *y*.

Оскільки сили $\vec{X}_A$, $\vec{Z}_A$ і $\vec{T}$ перетинають вісь *z*, а сили $\vec{G}$ і $\vec{Z}_B$ паралельні цій осі, то в рівняння (8.13) входить лише момент сили $\vec{X}_B$ відносно осі *z*.

Для визначення невідомих реакцій шарнірів *A* і *B* та нитки *CD* розв'язуємо систему рівнянь (8.9)–(8.13). Із останнього рівняння визначаємо:

$$X_B = 0.$$

Із рівняння (8.11) маємо:

$$Z_B = \frac{G}{2} = \frac{400}{2} = 200 \text{ (Н).}$$

При розв’язанні рівняння (8.12) враховуємо, що (рис. 8.4, *в*)

$$LE = AE\cos 60^0 = \frac{AB}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{AB}{4}\ , \qquad CK = AC\sin 30^0, \qquad AK = AC\cos 30^0.$$

Оскільки кришка квадратна, то $AC = AB$. Тому, враховуючи (8.8), запишемо рівняння (8.12) у вигляді:

$$G\cdot\frac{AB}{4} - T\cos\beta\cdot AB\cos 30^0 - T\sin\beta\cdot AB\sin 30^0 = 0.$$

Поділивши обидві частини рівняння на AB, знаходимо:

$$T = \frac{G}{4\left(\cos\beta\cdot\cos 30^0 + \sin\beta\cdot\sin 30^0\right)} = \frac{G}{4\cos\left(30^0 - \beta\right)}.$$

Трикутник ACD (рис. 8.4, *в*) рівнобедрений (за умовою $AD = AC$) і в ньому кут при вершині A дорівнює 30^0. Тому в цьому трикутнику кути при вершинах C і D однакові та дорівнюють $\frac{180^0 - 30^0}{2} = 75^0$. Тоді згідно рисунку маємо $\beta = 75^0 - 60^0 = 15^0$. Отже, остаточно маємо:

$$T = \frac{G}{4\cos\left(30^0 - 15^0\right)} = \frac{400}{4\cos 15^0} \approx 103{,}5\ (\text{Н}).$$

Підставляючи знайдені величини в рівняння (8.9), знаходимо:

$$X_A = -X_B + T_x = T\cos\beta = 103{,}5\cdot\cos 15^0 = 100\ (\text{Н}).$$

Із рівняння (8.10) маємо:

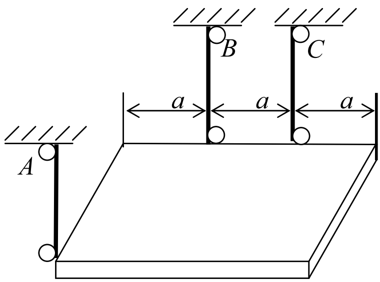
$$Z_A = G - Z_B - T_z = 400 - 200 - 103{,}5\cdot\sin 15^0 \approx 173{,}2\ (\text{Н}).$$

Відповідь: щоб кришка перебувала в рівновазі, вага тягарця повинна дорівнювати $Q = T = 103{,}5$ Н, а реакції шарнірів A і B при цьому дорівнюють відповідно $X_A = 100$ Н, $Z_A = 173{,}2$ Н, $X_B = 0$, $Z_B = 200$ Н.

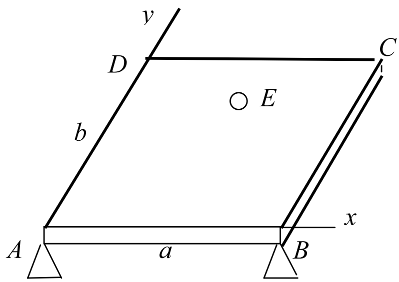
Завдання для самостійної роботи

8.1. Однорідну прямокутну плиту, вага якої 18 кН, утримують в горизонтальному положенні трьома невагомими вертикальними стержнями. Визначити зусилля в стержнях.

Відповідь: $S_A = 9$ кН, $S_B = -9$ кН, $S_C = 18$ кН.



До задачі 8.1



До задачі 8.2

8.2. Однорідна прямокутна пластина $ABCD$ перебуває в горизонтальному положенні, спираючись на три точкові опори, дві з яких розташовані у вершинах A і B прямокутника, а третя – в деякій точці E. Пластина має вагу P і довжини сторін a та b. Тиск на опори в точках A і B відповідно дорівнює $\frac{P}{4}$ і $\frac{P}{5}$. Визначити тиск N_E на опору в точці E та координати цієї точки.

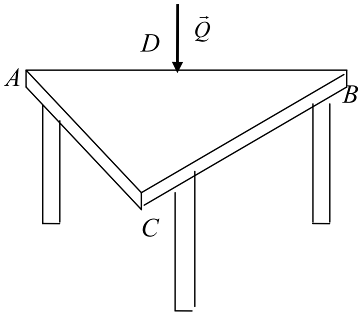
Відповідь: $N_E = \frac{11}{20}P$, $x_E = \frac{6}{11}a$, $y_E = \frac{10}{11}b$.

8.3. До однорідного столика, який має три ніжки та вагу P = 9 кН, прикладена в точці D вертикальна сила Q = 12 кН. Визначити тиск кожної ніжки на підлогу, якщо $AD = DB$, $AB = BC = AC$.

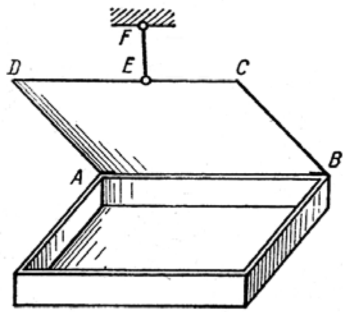
Відповідь: $N_A = N_B$ = 9 кН, N_C = 3 кН.

8.4. Однорідну кришку ящика, вага якої становить 10 кН, утримують за допомогою стержня EF , розташованого вертикально. Визначити реакції завіс A і B, якщо CE = 20 см, DE = 80 см.

Відповідь: R_A = 4 кН, R_B = 1 кН.



До задачі 8.3



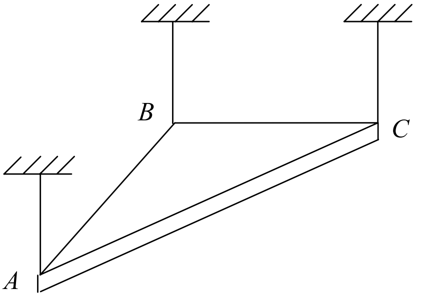
До задачі 8.4

8.5. Однорідну плиту, основою якої є трикутник, утримують в горизонтальному положенні трьома вертикальними невагомими тросами. Визначити натяги тросів, якщо вага плити дорівнює P.

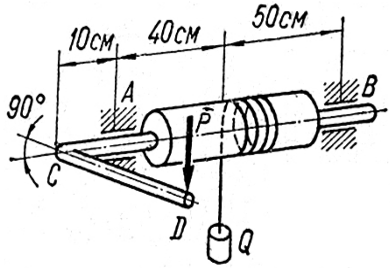
Відповідь: $T_A = T_B = T_C = \dfrac{P}{3}$.

8.6. Вантаж Q = 100 кН рівномірно піднімають за допомогою коловороту. Нехтуючи вагою коловороту, визначити реакції підшипників A і B та величину сили $\vec{P}$, яку треба прикласти перпендикулярно до рукоятки CD при її горизонтальному положенні. Довжина рукоятки дорівнює 50 см, а радіус вала r = 11 см.

Відповідь: P = 22 кН, R_A = 80 кН, R_B = 42 кН.



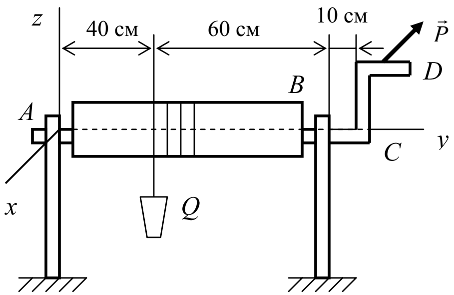
До задачі 8.5



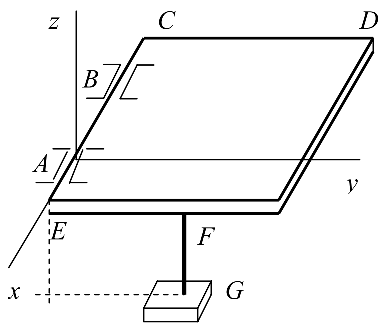
До задачі 8.6

8.7. З колодязя за допомогою коловороту рівномірно піднімають вантаж вагою Q = 90 кН. Нехтуючи вагою коловороту, визначити тиск на підшипники A і B та величину сили $\vec{P}$, яку треба прикласти перпендикулярно до рукоятки CD довжиною 54 см при її вертикальному положенні. Радіус барабана r = 12 см.

Відповідь: P = 20 кН, X_A = 2 кН, Z_A = – 54 кН, X_B = – 22 кН, Z_B = –36 кН.



До задачі 8.7



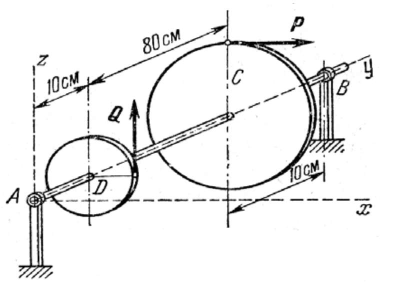
До задачі 8.8

8.8. Кришку машинного люка утримують в горизонтальному положенні за допомогою стійки FG та завіс A і B. Вага кришки P = 180 Н; її довжина CD = 2,3 м; ширина CE = 0,75 м; відстані шарнірів A і B від країв кришки дорівнюють $AE = BC = 0{,}15$ м. Визначити реакції шарнірів A і B і зусилля S в стійці FG, якщо вона розташована на відстані $EF = 1{,}5$ м від краю CE кришки.

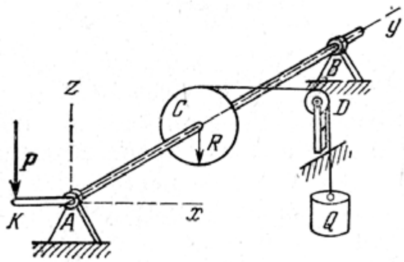
Відповідь: $Z_A = -94$ Н, $Z_B = 136$ Н, $Y_A = Y_B = 0$, $S = 138$ кН.

8.9. На горизонтальний вал AB насаджені зубчасте колесо C радіусом 1 м і шестерня D радіусом 10 см. До колеса C прикладена направлена по дотичній горизонтальна сила $P = 100$ Н, а до шестерні D прикладена вертикальна сила $\vec{Q}$, яка також направлена по дотичній. Визначити величину сили $\vec{Q}$ і реакції підшипників A і B у положенні рівноваги.

Відповідь: $Q = 1$ Н, $X_A = -1$ Н, $X_B = -90$ Н, $Z_A = -900$ Н, $Z_B = -100$ Н.



До задачі 8.9



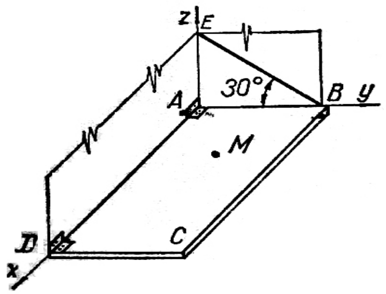
До задачі 8.10

8.10. Робітник утримує вантаж $Q = 800$ Н за допомогою коловороту, схематично зображеного на рисунку. Радіус барабану дорівнює $R = 5$ см; довжина рукоятки $AK = 40$ см; $AC = CB = 50$ см. Визначити тиск P на рукоятку і тиск осі коловороту на опори A і B при тому положенні коловороту, коли рукоять AK горизонтальна. Вважати, що сила $\vec{P}$ вертикальна.

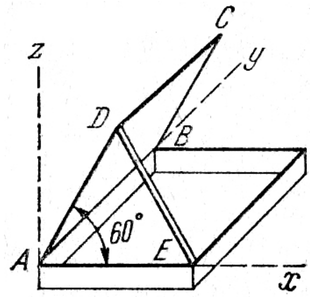
Відповідь: $P = 100$ Н, $X_A = 400$ Н, $X_B = 400$ Н, $Z_A = -100$ Н, $Z_B = 0$.

8.11. У вагоні полицю $ABCD$ утримують в рівновазі завіси A і D та ланцюг BE. Вага полиці і розташованого на ній вантажу разом становить 90 кН і прикладена в точці M, координати якої $x_M = 0{,}8$ м і $y_M = 0{,}3$ м. Визначити реакції завіс і натяг ланцюга, якщо $AB = 0{,}6$ м, $AD = 1{,}8$ м і ланцюг утворює з горизонтам кут 30^0.

Відповідь: $T = 90$ к:Н, $Y_A = 77{,}94$ кН, $Z_A = 5$ кН, $Y_D = 0$, $Z_D = 40$ кН.



До задачі 8.11



До задачі 8.12

8.12. Кришку *ABCD* прямокутного ящика підтримують з одного боку стержнем *DE*. Кришка утворює з горизонтом кут 60^0 і має вагу 120 Н. Враховуючи, що $AD = AE$, визначити реакції шарнірів *A* і *B*, а також зусилля *S* в стержні. Вагою стержня знехтувати.

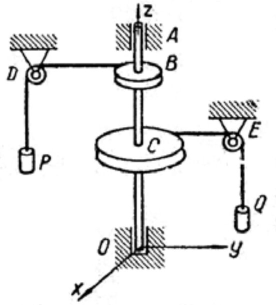
Відповідь: $X_A = 17{,}3$ Н, $Z_A = 30$ Н, $X_B = 0$, $Z_B = 60$ Н, $S = 34{,}5$ Н.

8.13. Однорідні горизонтальні блоки *B* і *C* прикріплені до вертикального валу *OA*. На блоки намотані мотузки, що перекинуті через блоки *D* і *E*. До кінців мотузок прикріплені вантажі вагою *P* і *Q*. Загальна вага вала і горизонтальних блоків дорівнює 6 кН. Нехтуючи тертям у блоках *D* і *E*, визначити вагу вантажу *Q* при рівновазі системи, а також реакції підшипника *A* та підп'ятника *O*, якщо $P = 10$ кН, $AB = 30$ см, $BC = 55$ см, $CO = 45$ см, радіуси блоків $r_B = 10$ см, $r_C = 50$ см.

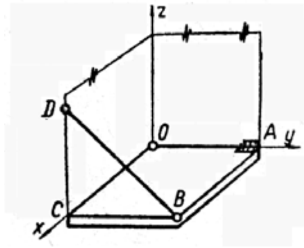
Відповідь: $Q = 2$ кН, $X_A = X_O = 0$, $Y_A = 7$ кН, $Y_O = 1$ кН, $Z_O = 6$ кН.

8.14. Однорідну прямокутну плиту, вага якої 16 кН, утримують у горизонтальному положенні за допомогою сферичного шарніру *O*, завіси *A* та невагомого тросу *BD*. Визначити реакції в'язів, якщо $OC = 1$ м, $CB = CD = 0{,}8$ м.

Відповідь: $T = 8\sqrt{2}$ кН, $X_O = -X_A = 10$ кН, $Y_O = Z_O = 8$ кН, $Z_A = 0$.



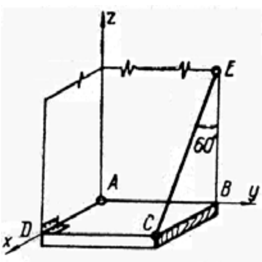
До задачі 8.13



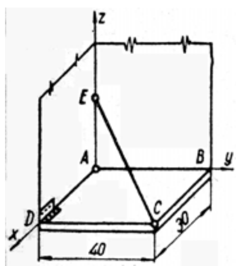
До задачі 8.14

8.15. Однорідну прямокутну полицю, вага якої 10 кН, утримують у горизонтальному положенні сферичний шарнір *A*, завіса *D* і невагома мотузка *CE*, що утворює з вертикаллю *BE* кут 60^0. Визначити реакції в'язів, якщо *AB* = 120 см, *AD* = 100 см.

Відповідь: $T = 10$ кН, $X_A = 5\sqrt{3}$ кН, $Y_A = -Y_D = 6\sqrt{3}$ кН, $Z_A = 5$ кН, $Z_D = 0$.



До задачі 8.15



До задачі 8.16

8.16. При умові попередньої задачі та іншому розташуванні мотузки визначити реакції в'язів, якщо довжина мотузки *CE* = 1 м, а розміри полички *BC* = 0,3 м, *CD* = 0,4 м.

Відповідь: $T = 10\sqrt{3}$ кН, $X_A = 3\sqrt{3}$ кН, $Y_A = 4\sqrt{3}$ кН, $Z_A = 15$ кН, $Y_D = Z_D = 0$.

РОЗДІЛ 9. **РОЗРАХУНОК ПЛОСКИХ ФЕРМ**

Фермою називають (розділ 2.5 [1], § 22 глави V [2] та ін.) плоску або просторову незмінну конструкцію, що складається зі стержнів, з'єднаних між собою на кінцях за допомогою шарнірів.

Якщо число вузлів (шарнірів) ферми n, а число стержнів k, то у простій плоскій фермі виконується співвідношення:

$$k = 2 \cdot n - 3.$$

Ферму називають *статично визначуваною*, якщо зусилля у всіх стержнях ферми, навантаженої в шарнірах, можна визначити за допомогою рівнянь рівноваги. Усі плоскі прості ферми є статично визначуваними.

Розрахунок ферми полягає у визначенні реакцій опор, а також у визначенні зусиль у стержнях ферми. Для визначення зусиль у стержнях ферми застосовують графічні або аналітичні методи. Розглянемо аналітичний метод — *метод вирізання вузлів.* При застосуванні цього метода розв'язання задач доцільно проводити в наступній послідовності:

1) проаналізувати, які навантаження діють на ферму, як вони направлені й де прикладені;
2) розглядаючи ферму як тверде тіло і застосовуючи принцип звільнення від в'язів, визначити реакції опор, склавши умови рівноваги;
3) визначити зусилля в стержнях ферми, починаючи з того вузла, на який діють не більше двох невідомих сил;
4) "вирізавши вузол", необхідно замінити дію на вузол відкинутої частини ферми зусиллями, які діють вздовж стержнів, вважаючи при цьому, що всі стержні розтягнуті (зусилля направлені вздовж стержнів "від вузла") ;
5) розглянути рівновагу вирізаного вузла, на який діють зовнішні сили і реакції розрізаних стержнів; з умов рівноваги визначити невідомі зусилля в стержнях;
6) переходячи від одного вузла до іншого, визначити зусилля в усіх стержнях; один з вузлів при цьому залишається нерозглянутим;

складвши умови рівноваги для цього вузла, можна *перевірити* правильність проведених розрахунків.

Розв'язання типових задач

Задача 1. Визначити реакції опор і зусилля в стержнях ферми, на яку діє горизонтальна сила P = 10 кН (рис. 9.1, *а*). Розміри ферми показані на рисунку.

Р о з в ' я з а н н я. <u>I *етап*</u>*:* визначимо реакції опор ферми, розглянувши її як тверде тіло. Ферму утримують у рівновазі задане горизонтальне навантаження $\vec{P}$, прикладене у вузлі D, а також шарнірно-рухома опора A та

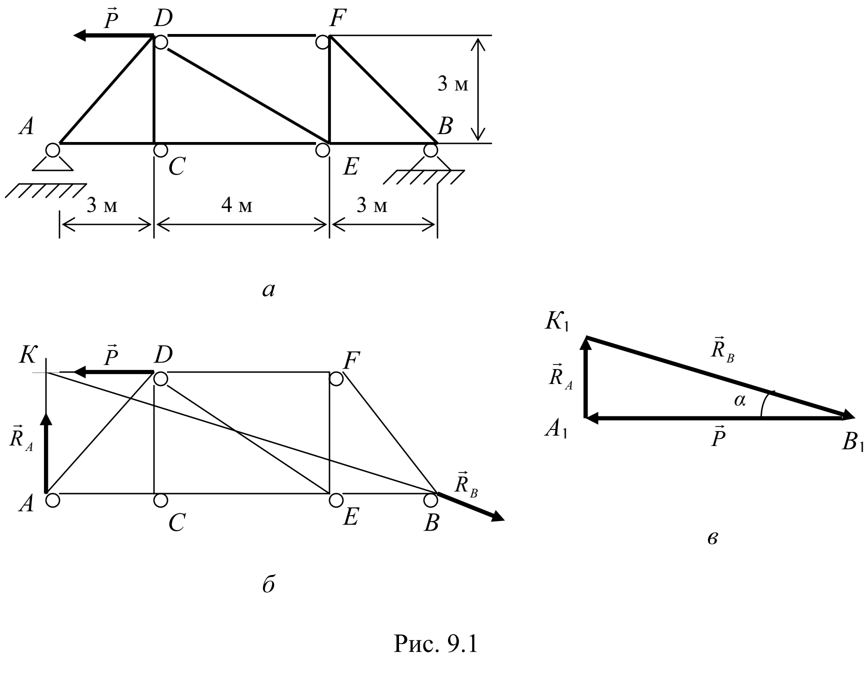


Рис. 9.1

нерухомий циліндричний шарнір B. Звільнимося від в'язів, замінивши їх реакціями $\vec{R}_A$ та $\vec{R}_B$.

Напрям реакції $\vec{R}_A$ шарнірно-рухомої опори показаний на рис. 9.1, *б*. Напрям реакції $\vec{R}_B$ нерухомого шарніра заздалегідь невідомий. За теоремою про три сили ця реакція має бути направлена вздовж прямої, що проходить через точку *K* перетину ліній дії сил $\vec{P}$ і $\vec{R}_A$. Отже, $\vec{R}_B$ направлена вздовж прямої *KB*.

Для визначення напрямів і модулів невідомих реакцій опор будуємо силовий трикутник (рис. 9.1, *в*), відклавши спочатку з довільної точки B_1 задану силу $\vec{P}$. Оскільки трикутник $A_1B_1K_1$ подібний до трикутника *ABK*, то

$$\frac{P}{AB}=\frac{R_A}{AK}=\frac{R_B}{BK},\ \text{звідки}\quad R_A=\frac{P\cdot AK}{AB}\ ,\quad R_B=\frac{P\cdot BK}{AB}.$$

За теоремою Піфагора з $\Delta\,ABK$ маємо:

$$BK=\sqrt{AB^2+AK^2}=\sqrt{10^2+3^2}\approx 10{,}44\ \text{(м)}.$$

Таким чином, для реакцій опор ферми знаходимо:

$$R_A=\frac{P\cdot AK}{AB}=\frac{10\cdot 3}{10}=3\ \text{(кН)},\qquad R_B=\frac{P\cdot BK}{AB}=\frac{10\cdot 10{,}44}{10}=10{,}44\ \text{(кН)}.$$

<u>II *етап*</u>: визначимо зусилля в стержнях ферми, пронумерувавши їх для зручності так, як показано на рис. 9.2, *а*.

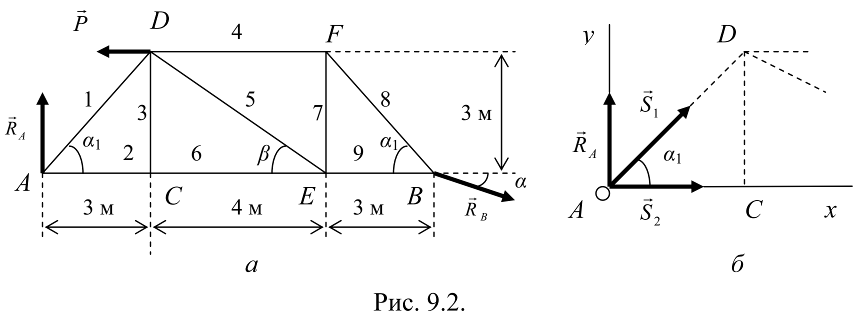


Рис. 9.2.

Виріжемо <u>вузол *A*</u>, замінюючи дію на вузол відкинутої частини ферми силами $\vec{S}_1$ і $\vec{S}_2$, направленими вздовж стержнів *1* і *2* від вузла *A* (рис. 9.2, *б*). Направимо вісь *x* горизонтально вправо, а вісь *y* – вертикально вгору. Відмітимо, що в трикутнику *ACD* (рис. 9.1, *а*) кут *DAC* дорівнює $\alpha_1 = 45^0$ (оскільки *AC* = *DC*). Для сил, прикладених у вузлі *A*, складемо умови рівноваги:

$$\sum F_{kx} = 0 \quad \Rightarrow \quad S_1 \cos\alpha_1 + S_2 = 0;$$

$$\sum F_{ky} = 0 \quad \Rightarrow \quad R_A + S_1 \sin\alpha_1 = 0.$$

Розв'язуючи систему цих двох рівнянь, знаходимо:

$$S_1 = -\frac{R_A}{\sin\alpha_1} = -3\sqrt{2} \approx -4{,}24 \text{ (кН)}, \qquad S_2 = -S_1 \cos\alpha_1 = 3 \text{ (кН)}.$$

Отже, стержень *1* стиснутий ($S_1 < 0$), а стержень *2* – розтягнутий.

Виріжемо <u>вузол *C*</u>, замінюючи дію на вузол відкинутої частини ферми силами $\vec{S}_2$ ($S_2 = 3$ кН), $\vec{S}_3$ і $\vec{S}_6$. Направимо осі *x* і *y* так, як показано на рис. 9.3, *а*.

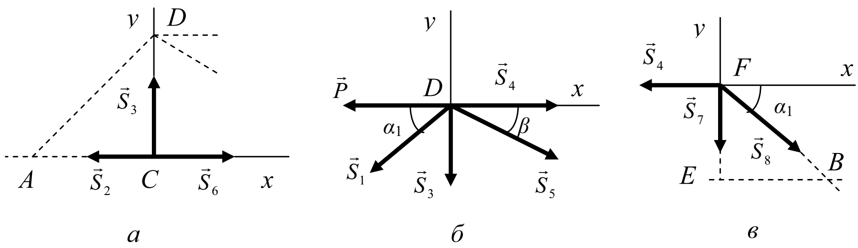


Рис. 9.3

Складаємо умови рівноваги сил, прикладених у вузлі *C*:

$$\sum F_{kx} = 0 \quad \Rightarrow \quad -S_2 + S_6 = 0;$$

$$\sum F_{ky} = 0 \quad \Rightarrow \quad S_3 = 0.$$

Таким чином, $S_6 = S_2 = 3\,\text{кН}$ (стержень *6* розтягнутий), а стержень *3* ненапружений.

Виріжемо вузол *D*. В цьому випадку вузол перебуває в рівновазі під дією п'яти сил, величини трьох із них відомі: P = 10 кН, S_1 = – 4,24 кН, S_3 = 0. Величини сил $\vec{S}_4$ і $\vec{S}_5$ треба визначити. Направимо осі координат так, як показано на рис. 9.3, *б*. Відмітимо, що сила $\vec{S}_1$ утворює з горизонтальною віссю x кут $\alpha_1 = 45^0$, а сила $\vec{S}_5$ утворює кут β. Складемо умови рівноваги:

$$\sum F_{k\,x} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad -P - S_1 \cos\alpha_1 + S_4 + S_5 \cos\beta = 0;$$

$$\sum F_{k\,y} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad -S_1 \sin\alpha_1 - S_3 - S_5 \sin\beta = 0.$$

Із трикутника DFE (рис. 9.2, *б*) знаходимо:

$$\sin\beta = \frac{FE}{DE} = \frac{3}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{3}{5}\ ; \quad \cos\beta = \frac{DF}{DE} = \frac{4}{5}.$$

Отже,

$$S_5 = -\frac{S_1 \sin\alpha_1}{\sin\beta} = 5\,(\text{кН}) \ \text{ – стержень } \mathit{5} \text{ розтягнутий,}$$

$$S_4 = P + S_1 \cos\alpha_1 - S_5 \cos\beta = 10 - 3 - 4 = 3\ (\text{кН}) \ \text{ – стержень } \mathit{4} \text{ розтягнутий.}$$

Виріжемо вузол *F*, до якого прикладені три сили: S_4 = 3 кН і невідомі S_7 та S_8. Направимо осі координат так, як показано на рис. 9.3, *в*. Оскільки трикутники ACD і BEF (рис. 9.2, *а*) рівні, то $\angle\, FBE = \angle\, DAC = \alpha_1$, тобто сила $\vec{S}_8$ утворює з віссю x кут $\alpha_1 = 45^0$. З рівнянь рівноваги

$$\sum F_{k\,x} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad -S_4 + S_8 \cos\alpha_1 = 0;$$

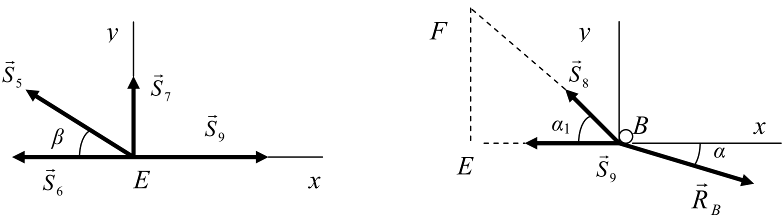
$$\sum F_{k\,y} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad S_7 - S_8 \sin\alpha_1 = 0$$

знаходимо:

$$S_8 = \frac{S_4}{\cos\alpha_1} = 3\sqrt{2} \approx 4{,}24 \text{ кН}$$ – стержень *8* розтягнутий,

$$S_7 = -S_8 \sin\alpha_1 = -3 \text{ кН}$$ – стержень 7 стиснутий.

Виріжемо <u>вузол *E*</u>, який перебуває в рівновазі під дією чотирьох сил: S_6 = 3 кН, S_5 = 5 кН, S_7 = – 3 кН і невідомої сили S_9 (рис. 9.4, *а*). Направляючи осі *x* і *y* так, як показано на рисунку, відмітимо, що сила $\vec{S}_5$ утворює з віссю *x* кут β (рис. 9.2, *а*).



а *б*

Рис. 9.4

Оскільки невідомою є лише одна сила, то складаємо одне рівняння рівноваги:

$$\sum F_{kx} = 0 \quad \Rightarrow \quad -S_6 - S_5 \cos\beta + S_{9_1} = 0,$$

з якого маємо:

$$S_9 = S_6 + S_5 \cos\beta = 3 + 5 \cdot \frac{4}{5} = 7 \text{ (кН)}$$ – стержень *9* розтягнутий.

Зусилля, які виникають у всіх стержнях під дією зовнішніх навантажень, визначені. Розглянемо ***для перевірки*** правильності розрахунків <u>вузол *B*</u>. Вирізавши цей вузол (рис. 9.4, *б*), складемо рівняння рівноваги для сил, які на нього діють:

$$\sum F_{kx} = 0 \quad \Rightarrow \quad -S_9 - S_8 \cos\alpha_1 + R_B \cos\alpha = 0;$$

$$\sum F_{ky} = 0 \quad \Rightarrow \quad S_8 \sin\alpha_1 - R_B \sin\alpha = 0.$$

Із силового трикутника $A_1B_1K_1$ (рис. 9.1, *в*) знаходимо:

$$\sin\alpha = \frac{R_A}{R_B}\ , \ \ \cos\alpha = \frac{P}{R_B}\,.$$

Після підстановки цих співвідношень, а також знайдених вище числових значень реакцій опор і зусиль у рівняння рівноваги вузла B отримаємо:

$$-7 - 3\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + 10 = 0\ ; \qquad\qquad 3\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} - 3 = 0\,.$$

Отже, розрахунки проведено правильно.

Отримані значення зусиль у стержнях ферми доцільно подати у вигляді таблиці:

№ стержня	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Зусилля, кН	– 4,24	3	0	3	5	3	– 3	4,24	7

Знак “мінус” вказує на те, що відповідний стержень є стиснутим.

Оскільки в наведеній вище задачі до ферми прикладена лише одна зовнішня сила $\vec{P}$, то реакції опор визначали за допомогою теореми про три сили. Зауважимо, що реакції опор ферми можна визначати також, склавши умови рівноваги ферми як одного твердого тіла (див. *примітку* до задачі 2). Цей спосіб є більш загальним, оскільки його можна застосовувати у випадках будь-якої кількості зовнішніх навантажень.

Задача 2. Визначити реакції опор ферми, що перебуває під дією трьох сил (рис. 9.5), величини яких дорівнюють P_1 = 10 кН, P_2 = 20 кН, P_3 = 30 кН.

Р о з в ’ я з а н н я. Розглянемо ферму як одне тверде тіло і звільнимо її від в’язів, замінивши їх відповідними реакціями. В’язями для даної ферми є рухомий циліндричний шарнір у точці *A*, реакція якого $\vec{R}_A$ направлена перпендикулярно до опорної площини (рис. 9.5, б), а також нерухомий шарнір у точці *B*, напрямок реакції якого заздалегідь невідомий. Оскільки всі стержні ферми та сили, що на неї діють, розташовані в одній площині, то й реакція $\vec{R}_B$ шарніру B направлена в цій самій площині. Розкладемо цю реакцію (рис 9.5,б) на дві складові: $\vec{R}_B = \vec{X}_B + \vec{Y}_B$. Отже, ферма перебуває в рівновазі під дією плоскої системи сил. Для визначення трьох невідомих величин R_A, X_B та Y_B складемо три рівняння рівноваги, два з яких є рівняннями проекцій на координатні осі. Третім складаємо рівняння моментів усіх сил відносно точки A:

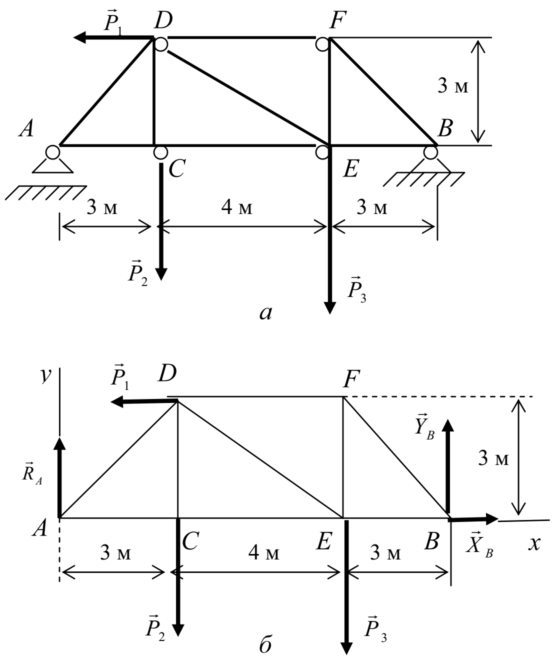


Рис.9.5

$$\sum F_{ix} = 0, \qquad X_B - P_1 = 0; \qquad (9.1)$$

$$\sum F_{iy} = 0, \qquad R_A - P_2 - P_3 + Y_B = 0; \qquad (9.2)$$

$$\sum M_A(\vec{F}_i) = 0, \qquad P_1 \cdot CD - P_2 \cdot AC - P_3 \cdot AE + Y_B \cdot AB = 0. \qquad (9.3)$$

Розв’язавши ці рівняння відносно шуканих величин і підставивши числові дані (розрахунки рекомендуємо провести самостійно), отримаємо

$$X_B = 10 \text{ кН}, \quad Y_B = 24 \text{ кН}, \quad R_A = 26 \text{ кН}.$$

Для перевірки можна скласти рівняння моментів відносно точки C (або D, або E). Повна реакція шарніру B відповідно дорівнює:

$$R_B = \sqrt{X_B^2 + Y_B^2} = 26 \text{ (кН)}.$$

<u>Примітка.</u> Порівнюючи рис. 9.4 і рис. 9.5, зауважимо, що при $P_2 = P_3 = 0$ рівняння (9.1)–(9.3) будуть виражати умови рівноваги ферми із задачі 1. Тоді з рівнянь знайдемо:

$$X_B = P_1 = 10 \text{ кН}, \qquad Y_B = \frac{P_1 \cdot CD}{AB} = 3 \text{ (кН)}.$$

Отже, $R_B = \sqrt{X_B^2 + Y_B^2} = \sqrt{10^2 + 3^2} \approx 10{,}44$ (кН),

$R_A = Y_B = 3$ кН.

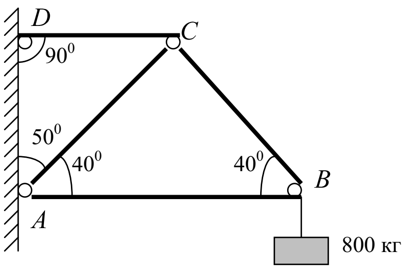
Ці результати співпадають зі значеннями реакцій опор задачі 1, знайденими за допомогою теореми про три сили.

Завдання для самостійної роботи

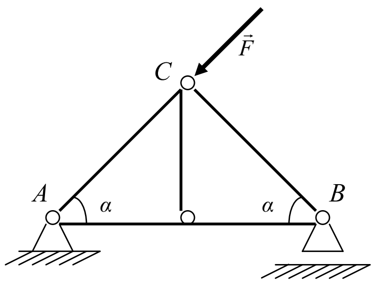
9.1. Кронштейн *ABCD* виготовлений з чотирьох шарнірно з'єднаних між собою стержнів. На опорі кронштейн закріплений також за допомогою шарнірів. До шарніра *A* прикріплений вантаж, маса якого становить 800 кг. Визначити зусилля в усіх стержнях.

Відповідь:

Стержні	*AB*	*AC*	*BC*	*DC*
Зусилля, кН	– 9,35	12,2	– 12,2	18,7



До задачі 9.1



До задачі 9.2

.

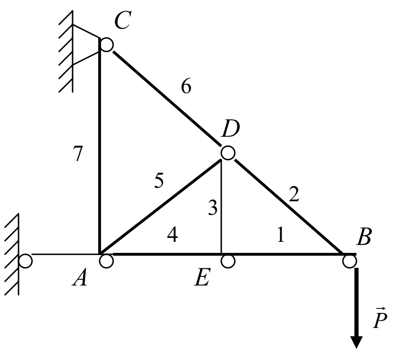
9.2. Визначити реакцію опори B, якщо сила $\vec{F}$ діє вздовж стержня AC ферми.

Відповідь: $R_B = 0$.

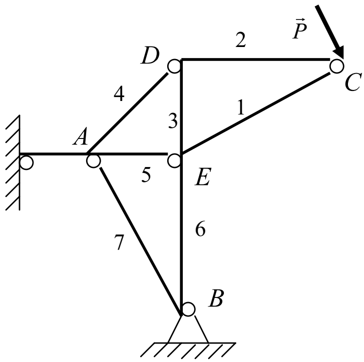
9.3. У вузлі B ферми ABC прикладене навантаження P = 120 кН. Враховуючи, що $AE = BE = 2$ м, $DE = 1{,}5$ м, визначити реакції опор і зусилля в стержнях. Вісь x направити горизонтально вправо, вісь y – вертикально вгору.

Відповідь: $R_A = 160$ кН, $R_C = 200$ кН.

№ стержня	1	2	3	4	5	6	7
Зусилля, кН	– 160	200	0	– 160	0	200	0



До задачі 9.3



До задачі 9.4

9.4. На ферму $ABECD$ у вузлі C діє сила P = 90 кН, направлена перпендикулярно до стержня CE. Враховуючи, що $AE = DE$, $AB = CE$, $AB = 2AE$, визначити реакції опор і зусилля в стержнях ферми. Осі проекцій направити, як і в попередній задачі.

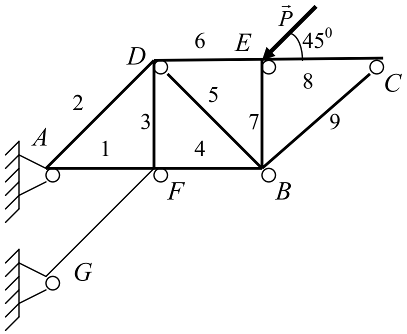
Відповідь: $R_A = -148{,}9$ кН, $R_B = 129{,}9$ кН.

№ стержня	1	2	3	4	5	6	7
Зусилля, кН	– 155,9	180	– 180	254,6	– 135	– 257,9	207,8

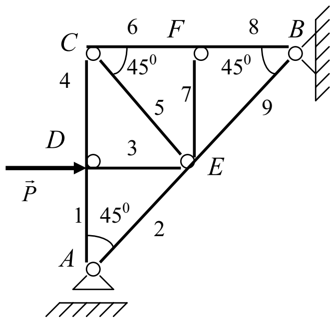
9.5. На ферму *ABCD* діє сила P = 2 Н, прикладена у вузлі *E*. Враховуючи, що $AF = FB = BE = EC$ і $\angle AFG = 45^0$, знайти реакції опор і зусилля в стержнях ферми.

Відповідь: $R_A = 0$, $R_{GF} = 2$ Н.

№ стержнів	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Зусилля, кН	0	0	– 1,41	– 1,41	2	– 1,41	– 1,41	0	0



До задачі 9.5



До задачі 9.6

9.6. У вузлі *D* ферми *ABC* прикладена горизонтальна сила P = 20 кН. Стержні ферми утворюють однакові рівнобедрені прямокутні трикутники. Визначити реакції опор і зусилля в стержнях ферми.

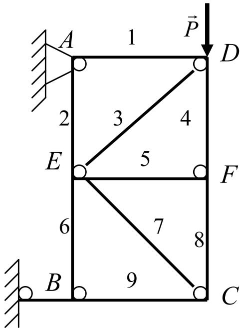
Відповідь: $R_A = 10$ кН, $R_B = 22{,}36$ кН.

№ стержня	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Зусилля, кН	– 10	0	– 20	– 10	14,14	– 10	0	– 14,14	– 10

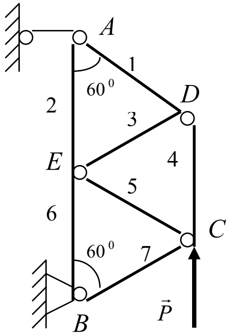
9.7. У вузлі *D* ферми *ABCD* прикладена сила P = 2 кН, направлена вертикально вниз. Враховуючи, що $AE = BE = AD$, визначити реакції опор і зусилля в стержнях ферми.

Відповідь: $R_A = 2{,}24$ кН, $R_B = 1$ кН.

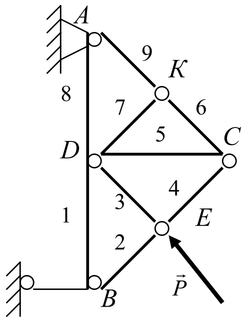
№ стержня	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Зусилля, кН	1	2	– 1,41	– 1	0	0	1,41	– 1	– 1



До задачі 9.7



До задачі 9.8



До задачі 9.9

9.8. На ферму *ABCD* діє сила P = 4 кН, прикладена у вузлі C і направлена вертикально вгору. Враховуючи, що всі стержні ферми однакові, визначити реакції опор і зусилля в стержнях ферми.

Відповідь: R_A = 1,73 кН, R_B = 4,36 кН.

№ стержня	1	2	3	4	5	6	7
Зусилля, кН	– 2	1	2	– 2	– 2	3	2

9.9. На ферму *ABC* діє сила P = 10 Н, прикладена у вузлі E і направлена перпендикулярно до стержня *BE*. Враховуючи, що $AD = BD = CD$ і $DE \perp BC$, $DK \perp AC$, визначити реакції опор і зусилля в стержнях ферми.

Відповідь: R_A = 7,91 кН, R_B = 3,54 кН.

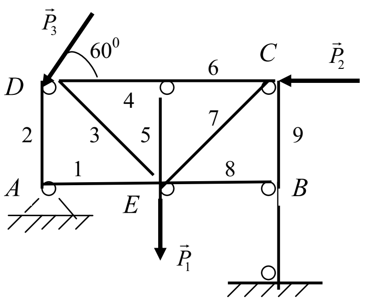
№ стержня	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Зусилля, кН	3,54	– 5	– 10	– 5	7,07	– 5	0	– 3,54	– 5

9.10. На ферму *ABCD* діють сили $P_1 = P_2 = P_3 = 2$ кН, прикладені у вузлах *E*, *C* і *D*, причому $AE = BE = AD$. Визначити реакції опор і зусилля в стержнях ферми.

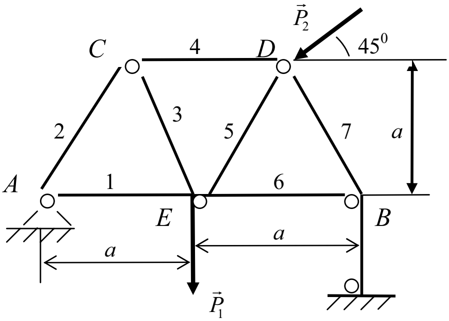
Відповідь: $X_A = 3$ кН, $Y_A = 4{,}23$ кН, $Y_B = -0{,}5$ кН.

.

№ стержня	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Зусилля, кН	– 3	– 4,23	3,53	– 1,5	0	– 1,5	– 0,71	0	0,50



До задачі 9.10



До задачі 9.11

9.11. На ферму *ABCD* діють сили $P_1 = 2$ кН, $P_2 = 1$ кН, прикладені у вузлах *E* і *D*. Визначити реакції опор і зусилля в стержнях ферми.

Відповідь: $X_A = 0{,}71$ кН, $Y_A = 1{,}53$ кН, $Y_B = 1{,}18$ кН.

.

№ стержня	1	2	3	4	5	6	7
Зусилля, кН	0,06	– 1,71	3,53	– 1,53	0	0,59	– 1,32

ЛІТЕРАТУРА

ОСНОВНА

1. *Лобас Л.Г.* Теоретична механіка. Том 1. – К.: КІЗТ, 2001. – 217 с. – № 732.
2. *Тарг С.М.* Краткий курс теоретической механики. – М.: Высш. шк., 1986. – 416 с.
3. *Мещерский И.Б.* Сборник задач по теоретической механике. – М.: Наука, 1986. – 448 с.

ДОДАТКОВА

4. *Аркуша А.И.* Руководство к решению задач по теоретической механике. – М.: Высш. шк., 1976. – 288 с.
5. *Бать М.И., Джанилидзе Г.Ю., Кельзон А.С.* Теоретическая механика в примерах и задачах. Ч. I. – М.: Наука, 1964. – 512 с.
6. *Яблонский А.А., Никифорова В.М.* Курс теоретической механики – Ч. I. – М.: Высш. шк., 1962. – 368 с.

Навчально-методичне видання

Леонід Григорович Лобас
Вікторія Валентинівна Ковальчук

ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА У ПРИКЛАДАХ І ЗАДАЧАХ

Частина 1. Статика

Для студентів технічних спеціальностей денної і заочної форм навчання
Видання друге, виправлене і доповнене

Відповідальний за випуск: В.В. Ковальчук

Редактори: О.Д. Дьордійчук
Ю.В. Задерновська

Підписано до друку 16.05.2008 р. Формат паперу $60 \times 84/16$, папір офс., спосіб друку –різографія. Замовлення № 219-08 тираж 100 прим.

Редакційно-видавничий центр
Державного економіко-технологічного університету транспорту
Свідоцтво про реєстрацію від 27.12.2007р. Серія ДК № 3079
03049, м. Київ-49, вул. Миколи Лукашевича, 19.