

А. Г. Мерзляк  
В. Б. Полонський  
Ю. М. Рабінович  
М. С. Якір

10

# ГЕОМЕТРІЯ

ЗБІРНИК ЗАДАЧ  
І КОНТРОЛЬНИХ РОБІТ



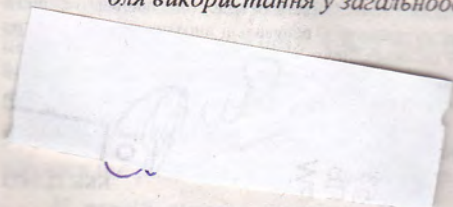
 ГИМНАЗІЯ



А.Г. Мерзляк  
В.Б. Полонський  
Ю.М. Рабінович  
М.С. Якір

Геометрія  
10 клас  
Збірник задач  
і контрольних робіт

*Схвалено  
Міністерством освіти і науки України  
для використання у загальноосвітніх навчальних закладах*



Харків  
«Гімназія»  
2010

ББК 22.1я72  
М52

Схвалено Міністерством освіти і науки України  
для використання у загальноосвітніх навчальних закладах  
(Лист № 1.4/18-Г-477 від 06.07.2010 р.)

Мерзляк А. Г.

М52 Геометрія. 10 кл. : збірник задач і контрольних робіт /  
А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, Ю. М. Рабінович, М. С. Якір. —  
Х. : Гімназія, 2010. — 144 с. : іл.  
ISBN 978-966-474-108-5.

Посібник є дидактичним матеріалом з геометрії для 10 класу загальноосвітніх шкіл. Він містить близько 1000 задач. Першу частину «Тренувальні вправи» поділено на три однотипних варіанти по 316 задач у кожному. Друга частина містить контрольні роботи (два варіанти) для оцінювання навчальних досягнень учнів. Третя частина містить завдання для підсумкових контрольних робіт за навчальним матеріалом першого і другого семестрів.

Для вчителів загальноосвітніх навчальних закладів та учнів 10 класів.

ББК 22.1я72

© А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський,  
Ю. М. Рабінович, М. С. Якір, 2010  
© ГОІ ІО «Гімназія», оригінал-макет,  
2010

ISBN 978-966-474-108-5

## ВІД АВТОРІВ

### Учням

Любі учні! У цьому році ви поширите і поглибите свої знання з геометрії, познайомитеся з багатьма новими поняттями, фактами. Ми сподіваємось, що задачі, запропоновані в цій книжці, допоможуть зробити це знайомство не лише корисним, але й цікавим.

### Учителю

Ми дуже сподіваємось, що, придбавши цю книжку не тільки для себе, а й «на клас», Ви не пошкодуєте. Навіть тоді, коли Вам пощастило і Ви пращете за підручником, який подобається, все одно задач, як і грошей, буває або мало, або зовсім мало. Ми маємо надію, що цей посібник допоможе ліквідувати «задачний дефіцит».

Першу частину — «Тренувальні вправи» — поділено на три однотипних варіанти по 316 номерів у кожному. До багатьох (найбільш складних) задач першого і другого варіантів наведено відповіді та вказівки до розв'язування. Відсутність відповідей до вправ третього варіанта, на нашу думку, розширює можливості вчителя при складанні самостійних і перевірочних робіт. На стор.6 наведено таблицю тематичного розподілу тренувальних вправ.

Друга частина посібника містить 8 контрольних робіт (два варіанти). Зміст завдань для контрольних робіт поділимо умовно на дві частини. Перша відповідає початковому і середньому рівням навчальних досягнень учнів. Завдання цієї частини позначено символом  $n^0$  ( $n$  — номер завдання). Друга частина відповідає достатньому і високому рівням. Завдання кожного з цих рівнів позначено символами  $n^+$  і  $n^{++}$  відповідно. Виконання першої частини максимально оцінюється у 6 балів. Правильно розв'язані задачі рівня  $n^+$  додають ще 4 бали, тобто учень має можливість отримати відмінну оцінку 10 балів. Якщо учневі вдалося ще розв'язати задачу  $n^{++}$ , то він отримує оцінку 12 балів.

У третій частині посібника наведено дві підсумкові контрольні роботи (чотири варіанти) за навчальним матеріалом першого і другого семестрів. Ці контрольні роботи не є обов'язковими. Вони можуть бути проведені і як залікові, і як тренувальні. Тривалість їх проведення залежно від особливостей класу може бути від 45 хв до 60 хв.

Кожен варіант контрольної роботи складається з трьох частин, які відрізняються за складністю та формою тестових завдань.

У *першій частині* контрольної роботи запропоновано 10 завдань з вибором однієї правильної відповіді. Для кожного тестового завдання з вибором відповіді подано чотири варіанти відповідей, з яких тільки одна правильна. Завдання з вибором відповіді вважається виконаним правильно, якщо в бланку відповідей указана тільки одна літера, якою позначена правильна відповідь (зразок бланка і правила його заповнення наведено в кінці посібника). При цьому учень не повинен наводити будь-які міркування, що пояснюють його вибір.

Правильне розв'язання кожного завдання цього блоку №№ 1–10 оцінюється **одним балом**.

*Друга частина* контрольної роботи складається з 4 завдань відкритої форми з короткою відповіддю. Таке завдання вважається виконаним правильно, якщо в бланку відповідей записана правильна відповідь (наприклад, число, вираз тощо). Усі необхідні обчислення, перетворення тощо учні виконують у чернетках.

Правильне розв'язання кожного із завдань №№ 11–14 цього блоку оцінюється **двома балами**.

*Третя частина* контрольної роботи складається з 2 завдань відкритої форми з розгорнутою відповіддю. Завдання третьої частини вважаються виконаними правильно, якщо учень навів розгорнутий запис розв'язування завдання з обґрунтуванням кожного етапу та дав правильну відповідь. Правильне розв'язання кожного із завдань №№ 15; 16 цього блоку оцінюється **чотирма балами**.

Сума балів, нарахованих за правильно виконані учнем завдання, переводиться у шкільну оцінку за спеціальною шкалою.

Систему нарахування балів за правильно виконане завдання для оцінювання робіт учнів наведено у таблиці 1.

Таблиця 1.

Номери завдань	Кількість балів	Усього
1 – 10	по 1 балу	10 балів
11 – 14	по 2 бали	8 балів
15; 16	по 4 бали	8 балів
Усього балів		26 балів

Відповідність кількості набраних учнем балів оцінці за 12-бальною системою оцінювання навчальних досягнень учнів наведено у таблиці 2.

Таблиця 2.

Кількість набраних балів	Оцінка за 12-бальною системою оцінювання навчальних досягнень учнів
1 – 2	1
3 – 4	2
5 – 6	3
7 – 8	4
9 – 10	5
11 – 12	6
13 – 14	7
15 – 16	8
17 – 19	9
20 – 22	10
23 – 24	11
25 – 26	12

Бажаємо Вам творчої наснаги й терпіння...

## Тематичний розподіл тренувальних вправ

Тема	Номери вправ
Систематизація та узагальнення фактів і методів планіметрії	1 – 82
Аксиоми стереометрії та наслідки з них	83 – 108
Побудова перерізів многогранників	109 – 117
Паралельні прямі в просторі. Мимобіжні прямі	118 – 130
Паралельність прямої і площини	131 – 145
Паралельні площини. Властивості паралельних площин	146 – 161
Паралельне проектування. Зображення фігур у стереометрії	162 – 181
Перпендикулярність прямої і площини	182 – 206
Перпендикуляр і похила	207 – 224
Теорема про три перпендикуляри	225 – 250
Перпендикулярні площини	251 – 264
Відстань між мимобіжними прямими	265 – 275
Кут між мимобіжними прямими	276 – 280
Кут між прямою і площиною	281 – 292
Кут між площинами	293 – 309
Площа ортогональної проекції многокутника	310 – 316

## ТРЕНУВАЛЬНІ ВПРАВИ

## Варіант 1

## Систематизація та узагальнення фактів і методів планіметрії

- Кути  $MKP$  і  $NKP$  прями. Доведіть, що точки  $M$ ,  $K$  і  $N$  лежать на одній прямій.
- Доведіть рівність трикутників за кутом, бісектрисою цього кута та кутами, які вона утворює з протилежною стороною.
- Доведіть рівність рівнобедрених трикутників за висотою, проведеною до бічної сторони, та кутом, який утворює ця висота з другою бічною стороною.
- Доведіть рівність рівнобедрених трикутників за бічною стороною та медіаною, проведеною до неї.
- Доведіть від супротивного, що з двох суміжних кутів хоча б один не більший за  $90^\circ$ .
- Доведіть від супротивного, що коли бісектриси кутів  $AOB$  і  $COD$  не лежать на одній прямій, то ці кути не вертикальні.
- Пряма  $b$  паралельна стороні  $KP$  трикутника  $LKP$ . Чи може пряма  $b$  бути паралельною сторонам  $LK$  і  $LP$ ? Відповідь обґрунтуйте.
- Доведіть від супротивного, що якщо прямі  $a$  та  $b$  перетинаються і пряма  $a$  паралельна прямій  $m$ , то прямі  $b$  і  $m$  перетинаються.
- На рисунку 1  $AC \parallel DB$  і  $CO = OD$ . Доведіть, що  $\triangle AOC = \triangle BOD$ .
- У рівнобедреному трикутнику  $ABC$   $AB = BC$ ,  $\angle B = 48^\circ$ , відрізки  $AT$  і  $AM$  — висота і бісектриса трикутника відповідно. Знайдіть кут  $TAM$ .
- Один з кутів трикутника дорівнює  $100^\circ$ . Висота та бісектриса, проведені з вершини цього кута, утворюють кут  $20^\circ$ . Знайдіть невідомі кути трикутника.
- Один з гострих кутів прямокутного трикутника дорівнює  $21^\circ$ . Знайдіть кут між бісектрисою і висотою, які проведені з вершини прямого кута.
- Точки  $E$ ,  $F$ ,  $P$  і  $K$  — середини сторін  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  і  $AD$  чотирикутника  $ABCD$  відповідно (рис. 2). Доведіть, що  $EF \parallel KP$ .

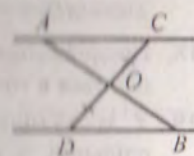


Рис. 1

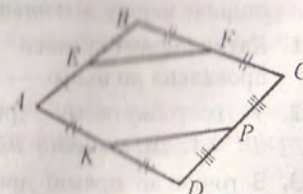


Рис. 2

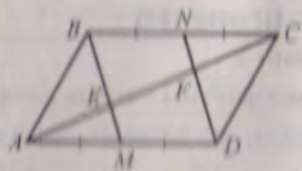


Рис. 3

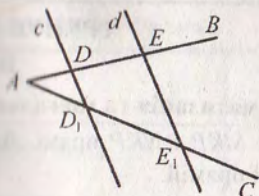


Рис. 4

14. Визначте вид чотирикутника, вершинами якого є середини сторін:
  - 1) довільного чотирикутника;
  - 2) чотирикутника, у якого діагоналі рівні.
15. Точки  $M$  і  $N$  — середини сторін  $AD$  і  $BC$  паралелограма  $ABCD$  (рис. 3). Відрізки  $BM$  і  $DN$  перетинають діагональ  $AC$  у точках  $E$  і  $F$ . Доведіть, що точки  $E$  і  $F$  поділяють відрізок  $AC$  на три рівні частини.
16. Точки  $A$  і  $B$  лежать по різні сторони від прямої  $l$  на відстані 5 см і 9 см від неї відповідно. Знайдіть відстань від середини  $C$  відрізка  $AB$  до прямої  $l$ .
17. Паралельні прямі  $c$  і  $d$  перетинають сторони кута  $BAC$  (рис. 4). Знайдіть довжину відрізка  $DE$ , якщо  $AD = 4$  см,  $D_1E_1 = 16$  см і  $DE = AD$ .
18. Продовження бічних сторін  $AB$  і  $CD$  трапеції  $ABCD$  перетинаються в точці  $F$ . Знайдіть  $AB$ , якщо  $AF = 10$  см і  $BC : AD = 2 : 5$ .
19. У трикутник  $ABC$  вписано ромб  $AKPE$  так, що кут  $A$  в них спільний, а вершина  $P$  належить стороні  $BC$ . Знайдіть сторону ромба, якщо  $AB = 6$  см,  $AC = 3$  см.
20. Одна з діагоналей трапеції дорівнює 28 см і поділяє другу діагональ на відрізки завдовжки 5 см і 9 см. Знайдіть більшу основу трапеції і відрізки, на які точка перетину діагоналей поділяє першу діагональ, якщо менша основа дорівнює 6 см.
21. Катет прямокутного трикутника дорівнює 6 см, а медіана, проведена до нього, — 5 см. Знайдіть гіпотенузу трикутника.
22. У гострокутному трикутнику  $ABC$  відомо, що  $AB = 10$  см,  $BC = 15$  см, а висота  $BD = 8$  см. Знайдіть сторону  $AC$ .
23. З точки до прямої проведено дві похилі. Довжина однієї з них дорівнює 25 см, а довжина її проєкції на цю пряму — 15 см. Знайдіть довжину другої похилої, якщо вона утворює з прямою кут  $30^\circ$ .

24. З точки до прямої проведено дві похилі, проєкції яких на цю пряму дорівнюють 5 см і 9 см. Знайдіть довжини похилих, якщо їх різниця дорівнює 2 см.
25. З точки до прямої проведено дві похилі, довжини яких дорівнюють 10 см і 6 см, а довжини їх проєкцій на цю пряму відносяться як  $5 : 2$ . Знайдіть відстань від точки до даної прямої.
26. Бісектриса прямого кута прямокутного трикутника поділяє гіпотенузу на відрізки завдовжки 15 см і 20 см. Знайдіть катети трикутника.
27. Бічна сторона рівнобедреного трикутника менша від основи на 9 см, а відрізки, на які бісектриса кута при основі поділяє висоту, проведену до основи, відносяться як  $5 : 4$ . Знайдіть висоту трикутника, проведену до основи.
28. У рівнобічній трапеції  $ABCD$  відомо, що  $AB = CD = 4$  см,  $BC = 6$  см,  $AD = 10$  см. Знайдіть кути трапеції.
29. З точки, що знаходиться на відстані 12 см від прямої, проведено до неї дві похилі, які утворюють з прямою кути  $45^\circ$  і  $60^\circ$ . Знайдіть довжини похилих і їх проєкцій на пряму.
30. З точки, що знаходиться на відстані 8 см від прямої, проведено до неї дві похилі, які утворюють з прямою кути  $30^\circ$  і  $45^\circ$ . Знайдіть відстань між основами похилих. Скільки розв'язків має задача?
31. Знайдіть площу рівнобедреного трикутника, основа якого дорівнює 6 см, а бічна сторона — 5 см.
32. Катети прямокутного трикутника дорівнюють 9 см і 12 см. Знайдіть висоту трикутника, проведену до гіпотенузи.
33. Знайдіть площу трикутника, дві сторони якого дорівнюють 4 см і 7 см, а кут між ними дорівнює: 1)  $30^\circ$ ; 2)  $120^\circ$ .
34. Знайдіть площу трикутника, сторони якого дорівнюють 26 см, 28 см і 30 см.
35. Бісектриса трикутника ділить його сторону на відрізки завдовжки 5 см і 6 см. Знайдіть площу трикутника, якщо менша з двох інших сторін дорівнює 15 см.
36. Одна сторона трикутника на 3 см більша за другу, а кут між ними дорівнює  $60^\circ$ . Знайдіть периметр трикутника, якщо його третя сторона дорівнює 7 см.
37. Дві сторони трикутника відносяться як  $5 : 3$ , а кут між ними дорівнює  $120^\circ$ . Знайдіть ці сторони, якщо периметр трикутника дорівнює 15 см.

38. У трикутнику  $ABC$  відомо, що  $BC = a$ ,  $\angle B = \beta$ ,  $\angle C = \gamma$ . Знайдіть сторони  $AC$  і  $AB$ .
39. У прямокутному трикутнику гіпотенуза дорівнює  $c$ , а гострий кут дорівнює  $\alpha$ . Знайдіть бісектрису трикутника, проведену з вершини його прямого кута.
40. Бісектриса тупого кута паралелограма ділить його сторону у відношенні  $1 : 3$ , рахуючи від вершини тупого кута. Периметр паралелограма дорівнює  $84$  см. Знайдіть його сторони.
41. Знайдіть площу паралелограма, сторони якого дорівнюють  $9$  см і  $15$  см, а одна з діагоналей перпендикулярна до його сторони.
42. Знайдіть площу ромба, якщо його сторона дорівнює  $15$  см, а сума діагоналей —  $42$  см.
43. Перпендикуляр, проведений з точки перетину діагоналей ромба до його сторони, поділяє її на відрізки завдовжки  $4$  см і  $9$  см. Знайдіть площу ромба.
44. Знайдіть площу паралелограма, сторони якого дорівнюють  $9$  см і  $12$  см, а кут між ними —  $60^\circ$ .
45. Висоти паралелограма дорівнюють  $8$  см і  $10$  см, а кут між ними —  $60^\circ$ . Знайдіть площу паралелограма.
46. Діагональ рівнобічної трапеції утворює з основою кут  $32^\circ$ , а її бічна сторона дорівнює меншій основі. Знайдіть кути трапеції.
47. У рівнобічній трапеції бісектриса тупого кута паралельна бічній стороні. Знайдіть основи трапеції, якщо її периметр дорівнює  $60$  см, а бічна сторона —  $14$  см.
48. Діагональ  $AC$  трапеції  $ABCD$  перпендикулярна до її основ. Довжина більшої основи  $AD$  дорівнює  $14$  см,  $\angle BAD = 120^\circ$ ,  $AB = 6$  см. Знайдіть середню лінію трапеції.
49. Знайдіть площу рівнобічної трапеції, більша основа якої дорівнює  $9$  см, бічна сторона —  $8$  см, а тупий кут —  $135^\circ$ .
50. Знайдіть площу рівнобічної трапеції, основи якої дорівнюють  $10$  см і  $12$  см, а діагоналі ділять її гострі кути навпіл.
51. Навколо трикутника  $ABC$  описано коло з центром у точці  $O$ . Знайдіть кут  $BOC$ , якщо: 1)  $\angle A = 78^\circ$ ; 2)  $\angle A = 128^\circ$ .
52. Знайдіть кути рівнобедреного трикутника, вписаного в коло, бічна сторона якого стягує дугу, градусна міра якої  $38^\circ$ .

53. Точки  $C$  і  $D$  кола лежать по одну сторону від діаметра  $AB$  (рис. 5). Знайдіть кут  $DCB$ , якщо  $\angle ACD = 41^\circ$ .
54. Три кути чотирикутника, вписаного в коло, взяті у порядку слідування, відносяться як  $2 : 6 : 7$ . Знайдіть кути чотирикутника.
55. Основи трапеції, у яку можна вписати коло, дорівнюють  $7$  см і  $9$  см. Знайдіть периметр трапеції.
56. У рівнобічну трапецію вписано коло, точка дотику якого з бічною стороною трапеції поділяє її на відрізки завдовжки  $3$  см і  $12$  см. Знайдіть площу трапеції.
57. У трикутнику  $ABC$  відомо, що  $AB = 6$  см,  $\angle C = 30^\circ$ . Знайдіть радіус кола, описаного навколо цього трикутника.
58. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює  $24$  см, а бічна сторона —  $13$  см. Знайдіть радіус кола, описаного навколо трикутника.
59. Довжина дуги кола дорівнює  $15$  см, а її градусна міра —  $18^\circ$ . Знайдіть радіус кола.
60. Довжина кола, радіус якого  $10$  см, дорівнює довжині дуги другого кола, яка містить  $150^\circ$ . Знайдіть радіус другого кола.
61. Площа сектора становить  $\frac{1}{8}$  площі круга. Знайдіть градусну міру центрального кута, який відповідає даному сектору.
62. Знайдіть площу круга, вписаного в рівнобедрений трикутник, основа якого дорівнює  $10$  см, а бічна сторона —  $13$  см.
63. Площі двох квадратів відносяться як  $2 : 3$ . Сторона більшого квадрата дорівнює  $8$  см. Знайдіть сторону меншого квадрата.
64. Сторона правильного трикутника дорівнює  $4$  см. Знайдіть радіуси вписаного та описаного навколо нього кіл.
65. Радіус кола, описаного навколо квадрата, дорівнює  $5\sqrt{2}$  см. Знайдіть сторону квадрата і радіус вписаного в нього кола.
66. Радіус кола, вписаного в правильний шестикутник, дорівнює  $4\sqrt{3}$  см. Знайдіть сторону шестикутника і радіус описаного навколо нього кола.
67. Обчисліть площу правильного дванадцятикутника, вписаного в коло, радіус якого дорівнює  $4$  см.

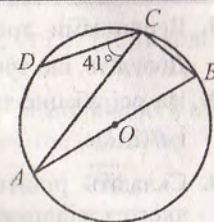


Рис. 5

68. Вершинами трикутника є точки  $A(-2; 1)$ ,  $B(-1; 5)$ ,  $C(-6; 2)$ . Доведіть, що трикутник  $ABC$  — рівнобедрений.

69. На осі абсцис знайдіть точку, рівновіддалену від точок  $A(3; -2)$  і  $B(1; 2)$ .

70. Складіть рівняння кола, діаметром якого є відрізок  $AB$ , якщо  $A(3; -6)$ ,  $B(-1; 4)$ .

71. Чотирикутник  $ABCD$  — ромб (рис. 6). Укажіть вектор, рівний вектору: 1)  $\overrightarrow{CD}$ ; 2)  $\overrightarrow{DC}$ ; 3)  $\overrightarrow{AD}$ ; 4)  $\overrightarrow{BO}$ ; 5)  $\overrightarrow{DO}$ ; 6)  $\overrightarrow{AO}$ .

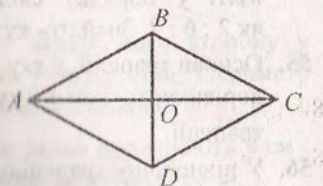


Рис. 6

72. Чотирикутник  $ABCD$  — паралелограм. Знайдіть:

1)  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BC}$ ;                      3)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{DA}$ .

2)  $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DC}$ ;

73. Діагоналі паралелограма  $ABCD$  перетинаються в точці  $O$  (рис. 7). Виразіть вектори  $\overrightarrow{AB}$  і  $\overrightarrow{AD}$  через вектори  $\overrightarrow{CO} = \vec{a}$  і  $\overrightarrow{BO} = \vec{b}$ .

74. Дано точки  $A(4; 0)$  і  $B(0; -3)$ . Знайдіть координати точки  $C$  такої, що  $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} = \vec{0}$ .

75. Знайдіть модуль вектора  $\vec{n} = 3\vec{a} - 4\vec{b}$ , де  $\vec{a}(1; -2)$ ;  $\vec{b}(-1; 3)$ .

76. На сторонах  $BC$  і  $CD$  паралелограма  $ABCD$  взято точки  $M$  і  $N$  відповідно, причому  $BM = \frac{1}{3}BC$ ,  $CN = \frac{4}{5}CD$  (рис. 8). Виразіть вектори  $\overrightarrow{AM}$  і  $\overrightarrow{AN}$  через вектори  $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$  і  $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ .

77. На сторонах  $AC$  і  $BC$  трикутника  $ABC$  взято такі точки  $D$  і  $E$  відповідно, що  $AD:DC = 3:2$ ,  $BE:EC = 1:3$ . Виразіть вектори  $\overrightarrow{BC}$ ,  $\overrightarrow{AC}$ ,  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AE}$  і  $\overrightarrow{BD}$  через вектори  $\overrightarrow{BE} = \vec{a}$  і  $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ .

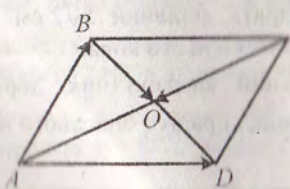


Рис. 7

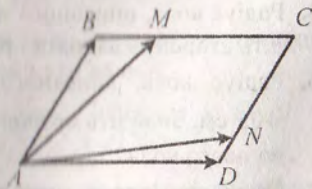


Рис. 8

78. Знайдіть значення  $k$ , при якому вектори  $\vec{m}(-2; k)$  і  $\vec{n}(3; 6)$  колінеарні.

79. Медіани  $BM$  і  $CD$  правильного трикутника  $ABC$  зі стороною 8 см перетинаються в точці  $O$ . Знайдіть скалярний добуток векторів:

1)  $\overrightarrow{AB}$  і  $\overrightarrow{AC}$ ;                      3)  $\overrightarrow{BM}$  і  $\overrightarrow{AC}$ ;                      5)  $\overrightarrow{CD}$  і  $\overrightarrow{OM}$ ;

2)  $\overrightarrow{AB}$  і  $\overrightarrow{BC}$ ;                      4)  $\overrightarrow{OM}$  і  $\overrightarrow{OC}$ ;                      6)  $\overrightarrow{OB}$  і  $\overrightarrow{OM}$ .

80. Знайдіть косинус кута між векторами  $\vec{a}(-2; 3)$  і  $\vec{b}(3; -4)$ .

81. Дано вектори  $\vec{a}(5; 2)$  і  $\vec{b}(-4; y)$ . При якому значенні  $y$  вектори  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$  перпендикулярні?

82. Дано вектори  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ ,  $|\vec{a}| = 3$ ,  $|\vec{b}| = 2$ ,  $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 60^\circ$ . Знайдіть:

1)  $|\vec{a} + \vec{b}|$ ;    2)  $|2\vec{a} - 3\vec{b}|$ .

#### Аксіоми стереометрії та наслідки з них

83. Чи можна стверджувати, що:

1) будь-які дві точки завжди лежать на одній прямій;

2) будь-які чотири точки завжди лежать в одній площині?

84. Чи можуть дві різні площини мати лише одну спільну точку?

85. Чи можна стверджувати, що будь-яка пряма, яка перетинає кожну з двох даних прямих, що перетинаються, лежить у площині, яка проходить через ці прямі?

86. Чи є правильним твердження, що пряма, яка має з колом тільки одну спільну точку, є дотичною до кола в цій точці: 1) на площині; 2) у просторі?

87. Доведіть, що коли через дві прямі не можна провести площину, то ці прямі не перетинаються.

88. Площини  $\alpha$  і  $\beta$  перетинаються по прямій  $a$ . У площині  $\beta$  проведено пряму  $b$ , яка перетинає площину  $\alpha$ . Доведіть, що точка перетину прямої  $b$  і площини  $\alpha$  належить прямій  $a$ .

89. Площини  $\alpha$  і  $\beta$  перетинаються по прямій  $m$ . Площина  $\gamma$  перетинає площини  $\alpha$  і  $\beta$  відповідно по прямим  $a$  і  $b$ , які перетинаються в точці  $A$ . Доведіть, що точка  $A$  належить прямій  $m$ .

90. Чи можна стверджувати, що через пряму і дві точки поза нею можна провести площину?

91. Доведіть, що через дві довільні точки можна провести хоча б одну площину.



92. Точки  $A, B, C$  і  $D$  не лежать в одній площині. Доведіть, що кожні три з них не лежать на одній прямій.
93. Три прями лежать у площині  $\alpha$  і перетинаються в точці  $K$ . Доведіть, що існує площина, відмінна від  $\alpha$ , яка перетинає дані прями.
94. Площини  $\alpha$  і  $\beta$  перетинаються по прямій  $c$ . Доведіть, що існує ще одна площина, відмінна від площин  $\alpha$  і  $\beta$ , яка містить пряму  $c$ .
95. Пряма  $b$  перетинає площину  $\beta$  у точці  $B$ . Пряма  $a$  належить площині  $\beta$  і не проходить через точку  $B$ . Доведіть, що прями  $a$  і  $b$  не перетинаються.
96. Точки  $A, B, C$  і  $D$  розміщені у просторі так, що продовження сторін  $AB$  і  $CD$  чотирикутника  $ABCD$  перетинаються. Доведіть, що вказані точки належать одній площині.
97. Прями  $a$  і  $b$  перетинаються в точці  $O$ . Доведіть, що всі прями, які перетинають пряму  $b$  і проходять через довільну точку прямої  $a$ , відмінну від точки  $O$ , лежать в одній площині.
98. Серед  $n$  даних прямих кожні дві перетинаються. Доведіть, що всі ці прями лежать в одній площині або проходять через одну точку.
99. Прями  $a$  і  $b$  не лежать в одній площині. Прями  $c$  і  $d$  перетинають кожну з прямих  $a$  і  $b$ . Чи є правильним твердження, що прями  $c$  і  $d$  не перетинаються?
100. Дано площину  $\alpha$  і точку  $K$ , яка їй не належить. З точки  $K$  проведено два промені, які перетинають площину  $\alpha$  в точках  $A$  і  $B$ . Пряма  $l$  перетинає промені  $KA$  і  $KB$  та площину  $\alpha$ . Доведіть, що прями  $l$  і  $AB$  перетинаються.
101. Вершина  $D$  плоского чотирикутника  $ABCD$  належить площині  $\alpha$ , а інші вершини лежать поза цією площиною. Продовження сторін  $BA$  і  $BC$  перетинають площину  $\alpha$  в точках  $M$  і  $K$  відповідно. Доведіть, що точки  $M, D$  і  $K$  лежать на одній прямій.
102. Площини  $\alpha$  і  $\beta$  перетинаються по прямій  $a$ . На площині  $\alpha$  взято точки  $M$  і  $N$  такі, що прями  $MN$  і  $a$  не паралельні, а в площині  $\beta$  вибрано точку  $K$ , яка не належить прямій  $a$ . Побудуйте ліній перетину площини  $MNK$  з площинами  $\alpha$  і  $\beta$ .
103. Дві сусідні вершини і точка перетину діагоналей паралелограма належать площині  $\beta$ . Чи належать площині  $\beta$  дві інші вершини паралелограма?

104. Чи можна стверджувати, що всі точки кола належать площині, якщо це коло має з даною площиною:  
1) дві спільні точки;                      2) три спільні точки?
105. Через три точки можна провести дві різні площини. Як розташовані ці точки?
106. Дано чотири точки, одна з яких не належить площині, яку визначають три інші. Доведіть, що жодна з точок не належить площині, яку визначають три інші.
107. Середини трьох сторін трикутника належать площині  $\alpha$ . Чи належать площині  $\alpha$  вершини трикутника?
108. Точки  $M$  і  $N$  лежать по один бік від площини  $\beta$ , а точки  $M$  і  $K$  — по різні боки. Відомо, що прями  $MN, MK$  і  $NK$  перетинають площину  $\beta$ . Доведіть, що точки їх перетину з площиною  $\beta$  лежать на одній прямій.

#### Побудова перерізів многогранників

109. Побудуйте переріз куба  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  площиною, яка проходить через точки 1)  $A_1, C_1$  і  $D$ ; 2)  $A, C$  і середину ребра  $BB_1$ .
110. Точка  $M$  — середина ребра  $SA$  піраміди  $SABC$ . Побудуйте переріз піраміди площиною, яка проходить через точки  $B, C$  і  $M$ .
111. Кожне ребро трикутної піраміди дорівнює  $a$ . Побудуйте переріз піраміди площиною, що проходить через середини трьох ребер, які виходять з однієї вершини, та обчисліть його периметр і площу.
112. Побудуйте точку перетину прямої з площиною бічної основи чотирикутної призми, якщо ця пряма проходить через дві точки, які належать: 1) бічним ребрам однієї грані, 2) бічним ребрам, які не належать одній грані, 3) бічному ребру і бічній грані, якій це ребро не належить, 4) двом сусіднім бічним граням, 5) двом протилежним бічним граням.
113. Побудуйте переріз трикутної піраміди  $SABC$  (рис. 9) площиною, що проходить через точки  $M, P$  і  $K$ , які належать ребрам  $SA, AC$  і  $SB$  відповідно.
114. Побудуйте переріз прямої призми  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  площиною, яка проходить через точки  $B, C$  і  $D_1$ , якщо прями  $AD$  і  $BC$  не паралельні.

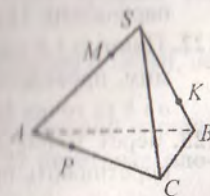


Рис. 9

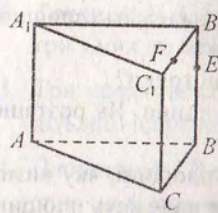


Рис. 10

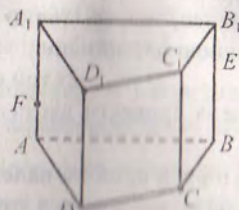


Рис. 11

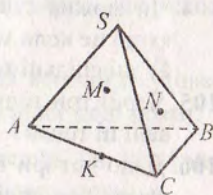


Рис. 12

115. Побудуйте переріз прямої призми  $ABCA_1B_1C_1$  (рис. 10) площиною, що проходить через точку  $A$  і точки  $E$  і  $F$ , які лежать на ребрах  $BB_1$  і  $B_1C_1$  відповідно.
116. Побудуйте переріз прямої призми  $ABCD A_1B_1C_1D_1$  (рис. 11) площиною, яка проходить через вершини  $C$ ,  $D_1$  і точку  $F$  на ребрі  $AA_1$ .
117. У трикутній піраміді  $SABC$  (рис. 12) точка  $M$  належить грані  $ASB$ , точка  $N$  — грані  $BSC$ , точка  $K$  — ребру  $AC$ . Побудуйте переріз піраміди площиною, яка проходить через точки  $M$ ,  $N$  і  $K$ .

#### Паралельні прямі в просторі. Мимобіжні прямі

118. Чи можна стверджувати, що пряма, яка перетинає одну з двох паралельних прямих, перетинає і другу:  
1) на площині; 2) у просторі?
119. Дано дві паралельні прямі. Чи можна стверджувати, що прямі, які перетинають кожен з цих прямих, лежать у площині даних прямих?
120. Точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$  і  $D$  не лежать в одній площині. Доведіть, що прямі  $AB$  і  $CD$  мимобіжні.
121. Через точки  $A$  і  $B$  прямої  $l$  проведено перпендикулярні до неї прямі  $AA_1$  і  $BB_1$ . Чи можна стверджувати, що прямі  $AA_1$  і  $BB_1$  паралельні: 1) на площині; 2) у просторі?
122. Прямі  $a$  і  $b$  паралельні. Через точку  $M$ , що не належить цим прямим, проведено пряму, яка перетинає прямі  $a$  і  $b$ . Чи лежать прямі  $a$  і  $b$  та точка  $M$  в одній площині?
123. Через точки  $A$  і  $B$  можна провести дві паралельні прямі, які перетинають пряму  $a$ . Доведіть, що точки  $A$  і  $B$  та пряма  $a$  лежать в одній площині.
124. Прямі  $a$  і  $b$  мимобіжні та прямі  $c$  і  $b$  мимобіжні. Чи є правильним твердження, що прямі  $a$  і  $c$  мимобіжні?

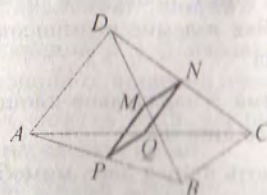


Рис. 13

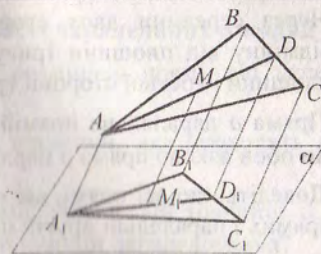


Рис. 14

125. Трикутник  $ADE$  і трапеція  $ABCD$  ( $AD$  — основа) не лежать в одній площині, точка  $K$  — середина сторони  $AE$ , точка  $P$  — середина сторони  $DE$ . Доведіть, що  $KP \parallel BC$ .
126. Дві паралельні прямі  $a$  і  $b$  відповідно паралельні прямим  $m$  і  $n$ . Чи паралельні прямі  $m$  і  $n$ ?
127. Через вершину  $A$  паралелограма  $ABCD$  проведено пряму  $a$ , яка не належить площині  $ABC$ , а через точку  $C$  — пряму  $b$ , яка паралельна прямій  $BD$ . Доведіть, що прямі  $a$  і  $b$  мимобіжні.
128. Через прямі  $a$  і  $b$  проведено площини, які перетинаються по прямої  $c$ . Доведіть, що коли пряма  $c$  не перетинає прямі  $a$  і  $b$ , то  $a \parallel b$ .
129. Точки  $M$ ,  $N$ ,  $P$  і  $Q$  — середини відрізків  $BD$ ,  $CD$ ,  $AB$  і  $AC$  відповідно (рис. 13),  $AD = 16$  см,  $BC = 18$  см. Знайдіть периметр чотирикутника  $MNPQ$ .
130. Дано трикутник  $ABC$  і площину  $\alpha$ , яка не перетинає його. Через вершини трикутника  $ABC$  і середину  $M$  медіани  $AD$  цього трикутника проведено паралельні прямі, які перетинають площину  $\alpha$  в точках  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  і  $M_1$  відповідно (рис. 14). Знайдіть довжину відрізка  $MM_1$ , якщо  $AA_1 = 3$  см,  $BB_1 = 8$  см,  $CC_1 = 6$  см.

#### Паралельність прямої і площини

131. Точка  $A$  не належить площині  $\alpha$ . Скільки існує прямих, які проходять через точку  $A$  і паралельні площині  $\alpha$ ?
132. Пряма  $a$  паралельна площині  $\alpha$ . Чи існують у площині  $\alpha$  прямі, не паралельні прямій  $a$ ?
133. Прямі  $a$  і  $b$  паралельні. Як розмішена пряма  $b$  відносно площини  $\alpha$ , якщо пряма  $a$ : 1) належить площині  $\alpha$ ; 2) перетинає площину  $\alpha$ ; 3) паралельна площині  $\alpha$ ?
134. Пряма  $a$  належить площині  $\alpha$  і паралельна площині  $\beta$ . Площини  $\alpha$  і  $\beta$  перетинаються по прямої  $m$ . Доведіть, що прямі  $a$  і  $m$  паралельні.

135. Через середини двох сторін трикутника проведено площину, відмінну від площини трикутника. Яке взаємне розміщення цієї площини і третьої сторони трикутника?
136. Пряма  $a$  паралельна прямій  $b$ , а пряма  $b$  паралельна площині  $\alpha$ . Чи обов'язково пряма  $a$  паралельна площині  $\alpha$ ?
137. Доведіть, що всі прямі, які перетинають одну з двох мимобіжних прямих і паралельні другій прямій, лежать в одній площині.
138. Площини  $\alpha$  і  $\beta$  перетинаються по прямій  $c$ . У площинах  $\alpha$  і  $\beta$  взято такі прямі  $a$  і  $b$  відповідно, що  $a \parallel b$ . Доведіть, що прямі  $a$ ,  $b$  і  $c$  попарно паралельні.
139. Діагональ  $BD$  паралелограма  $ABCD$  паралельна площині  $\gamma$ , а промені  $AD$  і  $AB$  перетинають цю площину в точках  $M$  і  $N$  відповідно. Доведіть, що трикутники  $DAB$  і  $MAN$  подібні.
140. Площина  $\alpha$  перетинає сторони  $AB$  і  $AC$  трикутника  $ABC$  у точках  $B_1$  і  $C_1$  відповідно, причому  $AC_1 : C_1C = 3 : 2$  і  $B_1C_1 = 5$  см. Знайдіть довжину відрізка  $BC$ , якщо пряма  $BC$  і площина  $\alpha$  паралельні.
141. Прямі  $MN$  і  $KP$  мимобіжні. Точка  $E$  — середина відрізка  $NP$ . Побудуйте площину, яка проходить через точку  $E$  і паралельна прямим  $MN$  і  $KP$ .
142. Трапеція  $ABCD$  ( $AB \parallel CD$ ) лежить у площині  $\alpha$ ,  $AB = 8$  см. Поза площиною  $\alpha$  взяли точку  $M$  і на відрізку  $AM$  позначили таку точку  $K$ , що  $AK : KM = 3 : 1$ . Побудуйте точку  $F$  перетину площини  $DKC$  і прямої  $MB$  та знайдіть довжину відрізка  $KF$  (рис. 15).

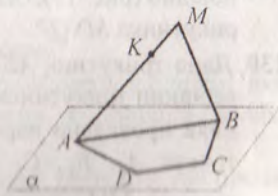


Рис. 15

143. Побудуйте переріз трикутної піраміди  $SABC$  площиною, яка проходить через вершину  $S$ , точку на ребрі  $AC$  і паралельна прямій  $BC$ .
144. Побудуйте переріз піраміди  $SABC$  (рис. 16) площиною, яка проходить через точку  $N$  на ребрі  $SA$  і паралельна прямим  $AB$  і  $BC$ .
145. Побудуйте переріз піраміди  $SABC$  площиною, яка проходить через середини  $M$  і  $K$  ребер  $SA$  і  $SB$  відповідно та точку  $N$  на ребрі  $BC$ .

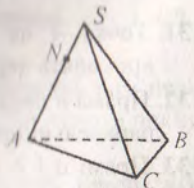


Рис. 16

## Паралельні площини. Властивості паралельних площин

146. Площини  $\alpha$  і  $\beta$  паралельні. Як розміщені прямі, які належать площині  $\alpha$ , відносно площини  $\beta$ ?
147. Чи можуть бути паралельними площини, які проходять через непаралельні прямі?
148. Дві сусідні сторони паралелограма паралельні площині  $\alpha$ . Яке взаємне розміщення площини  $\alpha$  і площини паралелограма?
149. Точка  $D$  не лежить у площині трикутника  $ABC$ . На відрізках  $DA$ ,  $DB$  і  $DC$  вибрано такі точки  $A_1$ ,  $B_1$  і  $C_1$  відповідно, що  $DA_1 : A_1A = DB_1 : B_1B = DC_1 : C_1C$ . Доведіть, що площини  $ABC$  і  $A_1B_1C_1$  паралельні.
150. Трикутник  $ABC$  лежить у площині  $\alpha$ . Через його вершини проведено паралельні прямі, які перетинають площину  $\beta$ , паралельну площині  $\alpha$ , у точках  $A_1$ ,  $B_1$  і  $C_1$ . Доведіть, що трикутники  $ABC$  і  $A_1B_1C_1$  рівні.
151. Площини  $\alpha$  і  $\beta$  паралельні. У площині  $\alpha$  вибрано точки  $M$  і  $N$ , а в площині  $\beta$  — точки  $M_1$  і  $N_1$  такі, що прямі  $MM_1$  і  $NN_1$  паралельні. Знайдіть довжини відрізків  $NN_1$  і  $M_1N_1$ , якщо  $MN = 5$  см,  $MM_1 = 6$  см.
152. Сторона  $AB$  трикутника  $ABC$  лежить у площині  $\alpha$ . Площина  $\beta$ , яка паралельна площині  $\alpha$ , перетинає сторони  $AC$  і  $BC$  у точках  $A_1$  і  $B_1$  відповідно. Знайдіть довжину відрізка  $A_1B_1$ , якщо  $A_1C = 9$  см,  $AA_1 = 3$  см,  $AB = 8$  см.
153. Через точки  $A$  і  $A_1$ , які лежать поза площиною  $\alpha$ , проведено прямі  $AB$ ,  $AC$ ,  $A_1B_1$ ,  $A_1C_1$  так, що пряма  $AB$  паралельна прямій  $A_1B_1$ , а пряма  $AC$  — прямій  $A_1C_1$ , де точки  $B$ ,  $C$ ,  $B_1$  і  $C_1$  — точки перетину відповідних прямих з площиною  $\alpha$ . Доведіть, що прямі  $BC$  і  $B_1C_1$  паралельні або збігаються.
154. Площини  $\alpha$  і  $\beta$  паралельні. Прямі  $a$  і  $b$  належать площинам  $\alpha$  і  $\beta$  відповідно. Через пряму  $a$  проведено площину, яка перетинає площину  $\beta$  по прямій  $c$ , яка паралельна прямій  $b$ . Доведіть, що  $a \parallel b$ .
155. Площини  $\alpha$  і  $\beta$  паралельні. На площині  $\alpha$  вибрано точки  $A$  і  $B$ , а на площині  $\beta$  — точки  $C$  і  $D$  так, що відрізки  $AD$  і  $BC$  перетинаються в точці  $K$ . Доведіть, що прямі  $AB$  і  $CD$  паралельні.

156. Площина  $\alpha$  паралельна площині  $\beta$  і прямій  $a$ , яка не лежить у площині  $\beta$ . Доведіть, що пряма  $a$  паралельна площині  $\beta$ .
157. Площини  $\alpha$  і  $\beta$  паралельні. Через точку  $B$  площини  $\beta$  проведено пряму  $b$ , паралельну площині  $\alpha$ . Доведіть, що пряма  $b$  належить площині  $\beta$ .
158. Основою прямокутного паралелепіпеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  є квадрат зі стороною 6 см, бічне ребро паралелепіпеда дорівнює 4 см. Побудуйте переріз паралелепіпеда площиною, яка проходить через середину  $M$  ребра  $A_1 B_1$  і пряму  $AC$ , та обчисліть периметр перерізу.
159. Побудуйте переріз прямокутного паралелепіпеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  площиною, що проходить через точки  $M$ ,  $K$  і  $N$ , які належать відповідно ребрам  $AB$ ,  $B_1 C_1$  і  $CC_1$ .
160. Побудуйте переріз прямої призми  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  площиною, що проходить через точки  $E$ ,  $F$  і  $K$ , які належать ребрам  $CD$ ,  $BB_1$  і  $A_1 D_1$  відповідно.
161. Побудуйте переріз прямої призми  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  (рис. 17) площиною, що проходить через точки  $H$  і  $M$ , які належать граням  $AA_1 B_1 B$  і  $DD_1 C_1 C$  відповідно, і точку  $E$  ребра  $AD$ .

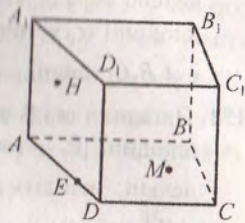


Рис. 17

- Паралельне проектування. Зображення фігур у стереометрії**
162. Які геометричні фігури можуть бути паралельними проєкціями:  
1) прямої; 2) двох паралельних прямих; 3) трикутника?
163. Чи можуть дві прямі, що перетинаються, проєктуватись:  
1) у дві прямі, що перетинаються; 2) у паралельні прямі; 3) в одну пряму;  
4) у пряму і точку на ній; 5) у пряму і точку поза нею?
164. Дано пряму і точку, що їй не належить. Чи може проєкція даної точки належати проєкції даної прямої?
165. Чи можна при паралельному проєктуванні прямокутника отримати:  
1) квадрат; 2) трапецію?
166. Чи можна при паралельному проєктуванні паралелограма отримати чотирикутник з кутами  $30^\circ$ ,  $70^\circ$ ,  $150^\circ$ ,  $110^\circ$ ?
167. Чи може паралельною проєкцією двох нерівних відрізків бути два рівних відрізки?

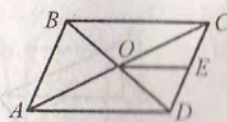


Рис. 18

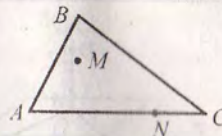


Рис. 19

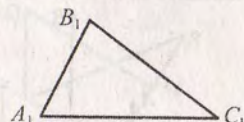


Рис. 20

168. Чи може паралельною проєкцією відрізка бути:  
1) пряма; 2) промінь; 3) точка?
169. У якому випадку трикутник проєктується:  
1) у відрізок; 2) у рівний йому трикутник?
170. За яких умов квадрат проєктується в прямокутник?
171. Чотирикутник  $ABCD$  є паралельною проєкцією ромба (рис. 18).  $OE \parallel AD$ . Який вид має чотирикутник, що проєктується, якщо  $OE$  і  $CD$  — проєкції двох перпендикулярних відрізків?
172. Трикутник  $ABC$  є паралельною проєкцією рівностороннього трикутника (рис. 19). Побудуйте зображення перпендикулярів, проведених з точок  $M$  і  $N$  до сторін  $AC$  і  $AB$  трикутника.
173. Дано проєкції вершин трикутника  $ABC$  на площину (рис. 20). Побудуйте проєкцію бісектриси кута  $B$ , якщо  $AB : BC = 3 : 5$ .
174. Точки  $A$ ,  $B$  і  $C$ , які не лежать на одній прямій, є паралельними проєкціями трьох вершин паралелограма. Побудуйте проєкцію четвертої вершини паралелограма. Скільки розв'язків має задача?
175. Трикутник  $ABC$  є паралельною проєкцією рівнобедреного прямокутного трикутника, на гіпотенузі якого зовні побудовано квадрат (квадрат лежить у площині трикутника). Побудуйте паралельну проєкцію цього квадрата.
176. Дано паралельну проєкцію кола з центром  $O$  (рис. 21). Побудуйте проєкцію діаметра кола, перпендикулярного до хорди  $AB$ .
177. Дано паралельну проєкцію кола з центром  $O$ . Побудуйте паралельну проєкцію правильного трикутника, вписаного в це коло.
178. Точки  $A$ ,  $B$  і  $C$ , які не лежать на одній прямій, є паралельними проєкціями трьох послідовних вершин правильного шестикутника. Побудуйте проєкції решти вершин цього шестикутника.
179. На зображенні рівнобічної трапеції побудуйте зображення її висот, проведених з вершин гупих кутів.

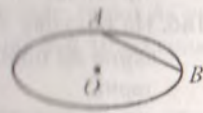


Рис. 21

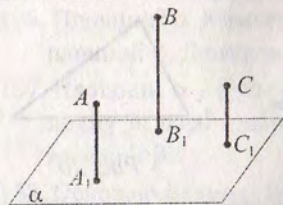


Рис. 22

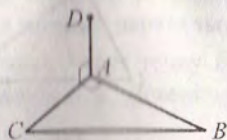


Рис. 23

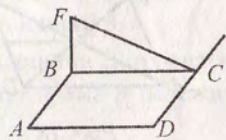


Рис. 24

180. Трикутник  $ABC$  є зображенням трикутника  $A_1B_1C_1$ , у якого  $\angle C_1 = 90^\circ$  і  $A_1C_1 : B_1C_1 = 3 : 4$ . Побудуйте зображення центра вписаного кола трикутника  $A_1B_1C_1$ .

181. Точки  $A_1$ ,  $B_1$  і  $C_1$  — паралельні проєкції точок  $A$ ,  $B$  і  $C$  на площину  $\alpha$  (рис. 22). Побудуйте пряму перетину площин  $\alpha$  і  $ABC$ .

#### Перпендикулярність прямої і площини

182. Чи є правильним твердження, що коли пряма не перпендикулярна до площини, то вона не перпендикулярна до жодної прямої цієї площини?

183. Через точку  $E$ , яка лежить поза площиною трикутника  $ABC$ , проведено пряму  $EA$ , яка перпендикулярна до прямих  $AB$  і  $AC$ . На відрітку  $BC$  взято довільну точку  $D$ . Визначте вид трикутника  $EAD$ .

184. Доведіть, що кожне ребро куба перпендикулярне до двох його граней.

185. Точка  $D$  лежить поза площиною трикутника  $ABC$  (рис. 23),  $\angle DAC = \angle BAC = 90^\circ$ . Укажіть пряму і площину, які перпендикулярні між собою.

186. На рисунку 24 зображено квадрат  $ABCD$ . Пряма  $FB$  перпендикулярна до площини  $ABC$ . Доведіть, що прями  $FC$  і  $CD$  перпендикулярні.

187. На рисунку 25 зображено куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Чи є прямокутником чотирикутник  $A_1 B C D_1$ ?

188. Визначте вид трикутника, якщо через одну з його сторін можна провести площину, перпендикулярну до другої сторони.

189. Точка  $M$  лежить поза площиною паралелограма  $ABCD$  (рис. 26),  $MA = MC$  і  $MB = MD$ ,  $O$  — точка перетину діагоналей паралелограма. Доведіть, що пряма  $MO$  перпендикулярна до площини паралелограма.

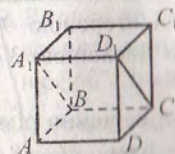


Рис. 25

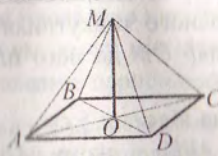


Рис. 26

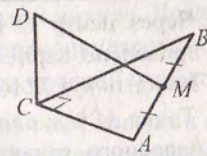


Рис. 27

190. Точка  $D$  лежить поза площиною рівнобедреного трикутника  $ABC$  і рівновіддалена від точок  $B$  і  $C$ , точка  $M$  — середина основи  $BC$ . Доведіть, що пряма  $BC$  перпендикулярна до площини  $ADM$ .

191. Пряма  $AO$  перпендикулярна до площини кола з центром  $O$ . Точка  $B$  лежить на колі. Знайдіть відстань від точки  $A$  до точки  $B$ , якщо радіус кола дорівнює 8 см і  $\angle ABO = 60^\circ$ .

192. У трикутнику  $ABC$  (рис. 27) відомо, що  $\angle C = 90^\circ$ ,  $AC = 9$  см,  $BC = 12$  см, точка  $M$  — середина  $BA$ . Пряма  $DC$  перпендикулярна до площини  $ABC$ ,  $DC = 18$  см. Знайдіть  $DM$ .

193. Через точку  $O$  перетину діагоналей квадрата  $ABCD$  до його площини проведено перпендикуляр  $SO$  і точку  $S$  з'єднано з серединою  $E$  сторони  $DC$  (рис. 28). Знайдіть довжину відрізка  $SC$ , якщо  $AB = 8$  см,  $\angle SEO = 60^\circ$ .

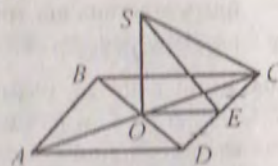


Рис. 28

194. Сторона квадрата  $ABCD$  дорівнює 6 см. Через точку  $O$  перетину діагоналей квадрата до його площини проведено перпендикуляр  $SO$ . Знайдіть довжину відрізка  $SO$ , якщо  $\angle SAO = 60^\circ$ .

195. Точка  $M$  лежить поза площиною трикутника  $ABC$  і рівновіддалена від його вершин. Як розміщена точка  $O$  — проєкція точки  $M$  на площину  $ABC$  — відносно трикутника  $ABC$ , якщо цей трикутник гострокутний?

196. З точок  $A$  і  $B$ , які лежать поза площиною  $\alpha$ , проведено до неї перпендикуляри  $AA_1$  і  $BB_1$ . Доведіть, що коли прями  $AB$  і  $A_1B_1$  паралельні, то чотирикутник  $AA_1B_1B$  — прямокутник.

197. Доведіть, що коли пряма перпендикулярна до однієї з двох паралельних площин, то вона перпендикулярна і до другої площини.

198. Пряма  $FC$  перпендикулярна до площини квадрата  $ABCD$ , сторона якого дорівнює  $a$ . Знайдіть відстань від точки  $F$  до вершин квадрата, якщо  $FC = b$ .

199. Через центр  $O$  правильного трикутника  $ABC$  зі стороною 9 см проведено перпендикуляр  $OM$  до його площини довжиною 3 см. Знайдіть кут  $MAO$ .
200. Точка  $M$  знаходиться на відстані 5 см від кожної вершини рівнобедреного трикутника  $ABC$ , у якому  $AB = BC = 6$  см,  $AC = 8$  см. Знайдіть відстань від точки  $M$  до площини трикутника.
201. Пряма  $EC$  перпендикулярна до площини квадрата  $ABCD$  (рис. 29),  $O$  — точка перетину його діагоналей. Доведіть, що пряма  $BD$  перпендикулярна до площини  $OCE$ .
202. Точка  $S$  рівновіддалена від вершини квадрата  $ABCD$ . Знайдіть кут  $ASC$ , якщо  $SA = AB$ .
203. З точки  $D$ , яка не належить площині рівностороннього трикутника  $ABC$ , проведено перпендикуляр  $AD$  до його площини. Через центр  $O$  трикутника проведено пряму  $FO$ , паралельну  $AD$ . Знайдіть відстань від точки  $F$  до вершини трикутника, якщо  $OF = 6$  см і  $BC = 8\sqrt{3}$  см.
204. Кінці відрізка, розміщеного по одній бік від площини, віддалені від неї на 5 см і 7 см. Знайдіть відстань від середини цього відрізка до площини.
205. Через вершину  $A$  квадрата  $ABCD$  проведено пряму  $AE$ , перпендикулярну до його площини. Доведіть, що пряма  $CD$  перпендикулярна до площини  $EAD$ .
206. Відрізки  $FA$  і  $CE$  — перпендикуляри до площини паралелограма  $ABCD$ . Доведіть, що площини  $FAB$  і  $ECD$  паралельні.

### Перпендикуляр і похила

207. На рисунку 30 зображено куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Укажіть проекції відрізка  $B_1 D$  на площини граней куба.
208. З точки до площини проведено перпендикуляр довжиною 9 см і похилу довжиною 11 см. Знайдіть довжину проекції цієї похилої на площину.

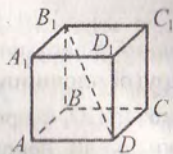


Рис. 30

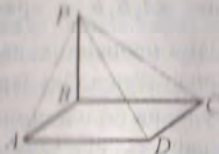


Рис. 31

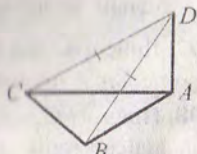


Рис. 32

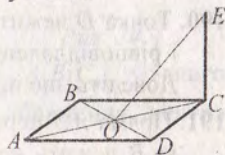


Рис. 29

209. З точки до площини проведено перпендикуляр і похилу. Довжина похилої дорівнює 8 см, а кут між нею і перпендикуляром дорівнює  $60^\circ$ . Знайдіть довжини перпендикуляра та проекції похилої.
210. З точки  $A$  до площини  $\alpha$  проведено похилі  $AB$  і  $AD$ , довжини яких дорівнюють 17 см і 10 см відповідно. Знайдіть довжину проекції похилої  $AD$ , якщо довжина проекції похилої  $AB$  дорівнює 15 см.
211. З точки  $A$  до площини  $\alpha$  проведено дві похилі  $AC$  і  $AD$  та перпендикуляр  $AB$ . Знайдіть довжини проекцій цих похилих на площину, якщо  $AC = 8$  см,  $\angle CAB = 60^\circ$ ,  $\angle DAB = 45^\circ$ .
212. З точки  $A$  до площини  $\alpha$  проведено похилі  $AB$  і  $AC$ , довжини яких 15 см і 20 см відповідно. Знайдіть відстань від точки  $A$  до площини, якщо проекції похилих на цю площину відносяться як 9 : 16.
213. Доведіть, що рівні похилі, проведені до площини з однієї точки, мають рівні проекції.
214. Чотирикутник  $ABCD$  — ромб. Пряма  $PB$  перпендикулярна до площини ромба (рис. 31). Доведіть, що кути  $PDA$  і  $PDC$  рівні.
215. Пряма  $AD$  перпендикулярна до площини трикутника  $ABC$  (рис. 32). Точка  $D$  рівновіддалена від точок  $B$  і  $C$ . Знайдіть відстань між точками  $B$  і  $C$ , якщо  $AD = 3$  см,  $\angle BDA = \angle BDC = 60^\circ$ .
216. Точка  $K$  рівновіддалена від вершини паралелограма  $ABCD$ . Доведіть, що  $ABCD$  — прямокутник.
217. Точка  $F$  знаходиться на відстані 6 см від вершини прямокутника і на відстані 4 см від його площини. Знайдіть сторони прямокутника, якщо одна з них у два рази більша за другу.
218. У ромбі  $ABCD$  відомо, що  $AB = BD = 6$  см. Пряма  $EA$  перпендикулярна до площини ромба, а точка  $E$  віддалена від його площини на 2 см. Знайдіть довжину похилої  $EC$ .
219. З точки, яка лежить поза площиною, проведено до неї дві похилі, довжини яких дорівнюють 15 см і 27 см. Сума довжин проекцій цих похилих на площину дорівнює 24 см. Знайдіть проекцію кожної з похилих.
220. Два відрізки, довжини яких дорівнюють 13 см і 20 см, спираються своїми кінцями у паралельні площини. Знайдіть відстань між площинами, якщо різниця проекцій цих відрізків на одну з площин дорівнює 11 см.

221. З точки  $A$  до площини  $\alpha$  проведено рівні похилі  $AB$  і  $AC$ , кут між якими дорівнює  $60^\circ$ . Знайдіть кут між похилою  $AB$  та її проекцією на площину  $\alpha$ , якщо проекції похилих перпендикулярні.
222. З точки  $T$  до площини  $\alpha$  проведено похилі  $TA$  і  $TB$  та перпендикуляр  $TO$ ,  $TA = 17$  см,  $OA = 15$  см,  $AB = 3\sqrt{19}$  см,  $\angle AOB = 60^\circ$ . Знайдіть довжину похилої  $TB$ .
223. Через вершину  $A$  паралелограма  $ABCD$  проведено площину  $\alpha$ , паралельну діагоналі  $BD$ . Відстань між прямою  $BD$  і площиною  $\alpha$  дорівнює 5 см, а проекції відрізків  $AB$  і  $AD$  на цю площину дорівнюють 8 см і 7 см відповідно. Знайдіть діагональ  $AC$  паралелограма, якщо діагональ  $BD$  дорівнює 9 см.
224. З точки  $A$  до площини  $\alpha$  проведено перпендикуляр  $AM$  і похилі  $AB$  і  $AC$ , причому  $\angle BAM + \angle CAM = 90^\circ$ . Доведіть, що  $MC : MB = AC^2 : AB^2$ .

#### Теорема про три перпендикуляри

225. На рисунку 33 зображено куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Доведіть, що пряма  $AO$  перпендикулярна до прямої  $D_1 C$ .
226. На рисунку 34 зображено ромб  $ABCD$ . Пряма  $FC$  перпендикулярна до його площини. Доведіть, що прямі  $AF$  і  $BD$  перпендикулярні.
227. До площини прямокутного трикутника  $ABC$  ( $\angle C = 90^\circ$ ) проведено перпендикуляр  $DA$  (рис. 35). Знайдіть відстань між точками  $D$  і  $B$ , якщо  $BC = a$ ,  $DC = b$ .
228. Точка  $M$  належить перпендикуляру до площини ромба, який проходить через точку перетину його діагоналей. Доведіть, що точка  $M$  рівновіддалена від сторін ромба.
229. Через вершину  $C$  трикутника  $ABC$  до його площини проведено перпендикуляр  $CK$ . Пряма, яка проходить через точку  $K$  і середину  $AB$ , перпендикулярна до прямої  $AB$ . Доведіть, що трикутник  $ABC$  — рівнобедрений.

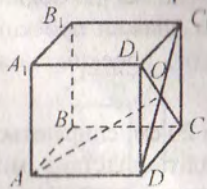


Рис. 33

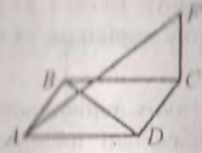


Рис. 34

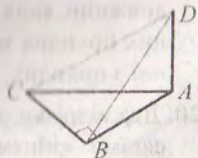


Рис. 35

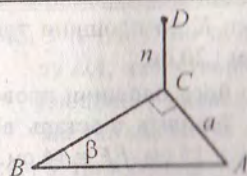


Рис. 36

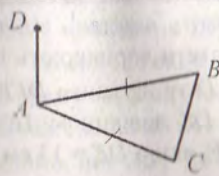


Рис. 37

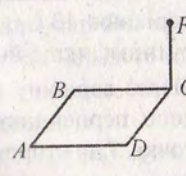


Рис. 38

230. Через вершину прямого кута  $C$  трикутника  $ABC$  (рис. 36) проведено перпендикуляр  $DC$  до його площини довжиною  $n$ . Знайдіть відстань від точки  $D$  до прямої  $AB$ , якщо  $AC = a$ ,  $\angle B = \beta$ .
231. Пряма  $AD$  перпендикулярна до площини рівнобедреного трикутника  $ABC$  ( $AB = AC$ ). Проведіть перпендикуляр з точки  $D$  до прямої  $BC$  (рис. 37).
232. Через вершину  $C$  ромба  $ABCD$  проведено перпендикуляр  $FC$  до його площини (рис. 38). Побудуйте перпендикуляр, опущений з точки  $F$  на діагональ  $BD$  ромба.
233. Через середину  $O$  гіпотенузи  $AB$  прямокутного трикутника  $ABC$  проведено перпендикуляр  $KO$  до його площини (рис. 39). Побудуйте перпендикуляри, опущені з точки  $K$  на катети трикутника.

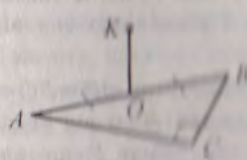


Рис. 39

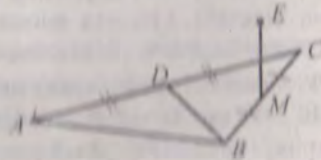


Рис. 40

234. Точка  $M$  — середина сторони  $BC$  правильного трикутника  $ABC$  (рис. 40). Через точку  $M$  проведено перпендикуляр  $ME$  до площини трикутника. Побудуйте перпендикуляри, опущені з точки  $E$  на прямі  $AB$ ,  $AC$  і  $BC$ , де точка  $D$  — середина сторони  $AC$ .
235. Через вершину прямого кута  $C$  трикутника  $ABC$  до його площини проведено перпендикуляр  $CM$  довжиною  $4\sqrt{7}$  см. Знайдіть відстань від точки  $M$  до прямої  $AB$ , якщо  $AC = BC = 8$  см.
236. Через точку  $O$  перетину діагоналей паралелограма  $ABCD$  до його площини проведено перпендикуляр  $OM$  довжиною 4 см. Знайдіть відстань від точки  $M$  до прямих, що містять сторони паралелограма, якщо  $AB = 12$  см,  $BC = 20$  см,  $\angle BAD = 30^\circ$ .
237. Через вершину прямого кута  $C$  трикутника  $ABC$  до його площини проведено перпендикуляр  $CK$ . Відстань від точки  $K$  до прямої  $AB$

- дорівнює 13 см. Знайдіть відстань від точки  $K$  до площини трикутника, якщо його катети дорівнюють 15 см і 20 см.
238. Через вершину кута  $D$  трикутника  $DFE$  до його площини проведено перпендикуляр  $DS$  довжиною 16 см. Знайдіть відстань від точки  $S$  до сторони  $EF$ , якщо  $DE = 13$  см,  $DF = 15$  см,  $EF = 14$  см.
239. У трикутник  $ABC$  вписано коло з центром  $O$ . Через точку  $O$  до площини трикутника проведено перпендикуляр  $SO$  довжиною 5 см. Точка  $S$  віддалена від сторони  $AB$  на 13 см. Знайдіть радіус вписаного кола.
240. Через центр  $O$  кола, вписаного в правильний трикутник зі стороною 6 см, до площини трикутника проведено перпендикуляр  $OM$  довжиною 3 см. Знайдіть відстань від точки  $M$  до сторін трикутника.
241. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 8 см і 18 см. Через центр  $O$  кола, вписаного в цю трапецію, до її площини проведено перпендикуляр  $OM$ . Точка  $M$  знаходиться на відстані 10 см від сторін трапеції. Знайдіть відстань від точки  $M$  до площини трапеції.
242. Діагоналі ромба дорівнюють 18 см і 24 см. Точка  $K$  знаходиться на відстані 3 см від площини ромба і рівновіддалена від його сторін. Знайдіть цю відстань.
243. У рівнобедреному трикутника  $ABC$  відомо, що  $AB = BC = 17$  см,  $AC = 16$  см. Точка  $P$  знаходиться на відстані 8 см від усіх сторін трикутника  $ABC$ . Знайдіть відстань від точки  $P$  до площини трикутника.
244. Площа ромба дорівнює  $X$ , а його гострий кут —  $\alpha$ . Точка  $F$  віддалена від площини ромба на відстань  $m$ . Знайдіть відстань від точки  $F$  до сторін ромба, якщо вона рівновіддалена від них.
245. Точка  $D$  знаходиться на однакових відстанях  $DA$  і  $DB$  від сторін прямого кута з вершиною  $C$ . Точка  $O$  — проекція точки  $D$  на площину цього кута. Доведіть, що чотирикутник  $OACB$  — квадрат.
246. Сторони прямокутника дорівнюють 15 см і 20 см. Через середину  $M$  його більшої сторони до площини прямокутника проведено перпендикуляр  $MK$  довжиною 8 см. Знайдіть відстань від точки  $K$  до діагоналей прямокутника.
247. Через вершину  $D$  прямокутника  $ABCD$  до його площини проведено перпендикуляр  $DE$ . Точка  $E$  віддалена від сторони  $AB$  на 4 см, від сторони  $BC$  — на 9 см. Знайдіть довжину відрізка  $DE$ , якщо  $BD = 7$  см.

248. З точки  $D$  до площини  $\gamma$  проведено перпендикуляр  $DO$  та похилу  $DA$ , яка утворює зі своєю проекцією кут  $\alpha$ . Через точку  $A$  в площині  $\gamma$  проведено пряму  $m$ , яка утворює з прямою  $OA$  кут  $\beta$ . Знайдіть косинус кута між похилою  $DA$  та прямою  $m$ .
249. У трикутнику  $ABC$  відомо, що  $AB = 26$  см,  $BC = 28$  см,  $AC = 27$  см. Через вершину  $B$  трикутника проведено похилу, яка утворює з променями  $BA$  і  $BC$  рівні кути. Проекція похилої перетинає сторону  $AC$  у точці  $D$ . Знайдіть довжину відрізка  $BD$ .
250. Основи трапеції дорівнюють 14 см і 18 см. Через більшу основу трапеції проведено площину, яка знаходиться на відстані 8 см від меншої основи трапеції. Знайдіть відстань від точки перетину діагоналей трапеції до проведеної площини.

#### Перпендикулярні площини

251. Чи є правильним твердження, що через точку, яка не лежить у даній площині, можна провести тільки одну площину, перпендикулярну до даної?
252. Чи є правильним твердження, що коли площина  $\alpha$  перпендикулярна до площини  $\beta$ , а площина  $\beta$  перпендикулярна до площини  $\gamma$ , то площини  $\alpha$  і  $\gamma$  паралельні?
253. Доведіть, що коли пряма перетину площин  $\alpha$  і  $\beta$  перпендикулярна до площини  $\gamma$ , то площини  $\alpha$  і  $\beta$  перпендикулярні до площини  $\gamma$ .
254. Через вершину  $C$  квадрата  $ABCD$  проведено пряму  $MC$ , перпендикулярну до його площини. Доведіть, що площини  $MAD$  і  $MDC$  перпендикулярні.
255. Два прямокутних рівнобедрених трикутника мають спільну гіпотенузу, яка дорівнює 8 см. Площини цих трикутників перпендикулярні. Знайдіть відстань між вершинами їх прямих кутів.
256. Точка  $E$  рівновіддалена від сторін квадрата  $ABCD$ . Доведіть, що площини  $AEC$  і  $BED$  перпендикулярні.
257. Точка  $Q$  рівновіддалена від вершин прямокутника  $ABCD$ . Доведіть, що площини  $AQC$  і  $ABC$  перпендикулярні.
258. Точка  $S$  рівновіддалена від вершин квадрата  $ABCD$ . Точка  $O$  — її проекція на площину квадрата. З точки  $S$  проведено перпендикуляр  $SM$  до сторони  $AB$  квадрата. Доведіть, що площини  $ASB$  і  $OSM$  перпендикулярні.
259. Площини  $\alpha$  і  $\beta$  перпендикулярні і перетинаються по прямій  $a$ . Площина  $\gamma$  перетинає площини  $\alpha$  і  $\beta$  відповідно по прямим  $b$  і  $c$ , паралельним прямій  $a$ . Відстань між прямими  $b$  і  $c$  дорівнює 8 см,



- а між прямими  $c$  і  $a$  — 15 см. Знайдіть відстань між прямою  $a$  і площиною  $\gamma$ .
260. Кінці відрізка, довжина якого дорівнює 13 см, належать двом перпендикулярним площинам, а відстані від кінців відрізка до лінії перетину площин дорівнюють 8 см і 5 см. Знайдіть відстань між основами перпендикулярів, проведених з кінців відрізка до лінії перетину площин.
261. Кінці відрізка лежать у двох перпендикулярних площинах. Проекції відрізка на площини дорівнюють 20 см і 16 см. Відстань між основами перпендикулярів, проведених з кінців відрізка до лінії перетину площин, дорівнює 12 см. Знайдіть довжину відрізка.
262. Відрізок лежить в одній з двох перпендикулярних площин і не перетинає другу. Кінці цього відрізка віддалені від прямої  $l$  перетину площин на 9 см і 5 см. У другій площині проведено пряму  $m$ , паралельну прямій  $l$ . Відстань від одного з кінців даного відрізка до прямої  $m$  дорівнює 15 см. Знайдіть відстань від середини відрізка і від його другого кінця до прямої  $m$ .
263. Прямокутник  $ABCD$  перетнули по діагоналі  $AC$  так, що площини  $ABC$  і  $ACD$  виявилися перпендикулярними. Знайдіть відстань між точками  $B$  і  $D$ , якщо сторони прямокутника дорівнюють 6 см і 8 см.
264. Доведіть, що коли площини  $\alpha$ ,  $\beta$  і  $\gamma$  попарно перпендикулярні, то лінії їх перетину також попарно перпендикулярні.

## Відстань між мимобіжними прямими

265. На рисунку 41 зображено куб з ребром  $a$ . Знайдіть відстань між прямими  $MN$  і  $PK$ .

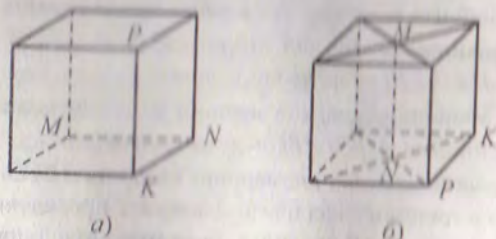


Рис. 41

266. Через вершину прямого кута  $C$  трикутника  $ABC$  проведено пряму  $l$ , яка перпендикулярна до його площини. Знайдіть відстань між прямими  $l$  і  $AB$ , якщо  $AB = 13$  см,  $AC = 5$  см.

267. Через вершину  $B$  рівнобедреного трикутника  $ABC$  проведено пряму  $a$ , перпендикулярну до його площини. Знайдіть відстань між прямими  $a$  і  $AC$ , якщо  $AB = AC = 10$  см,  $BC = 12$  см.
268. Через точку  $D$  кола з центром  $O$  і радіусом 8 см проведено пряму  $a$ , перпендикулярну до площини кола. Через центр кола в його площині проведено пряму  $b$ , яка утворює кут  $60^\circ$  з прямою  $OD$ . Знайдіть відстань між прямими  $a$  і  $b$ .
269. Через точку  $A$  кола з центром  $O$  і радіусом 6 см проведено пряму  $l$ , перпендикулярну до площини кола, а через точку  $B$  кола — пряму  $b$ , дотичну до кола. Знайдіть відстань між прямими  $b$  і  $l$ , якщо кут  $AOB$  дорівнює  $120^\circ$ .
270. У паралелограмі  $ABCD$  сторона  $CD$  дорівнює 10 см, а кут  $B$  —  $120^\circ$ . Через сторону  $AD$  паралелограма проведено площину, перпендикулярну до площини паралелограма, і в цій площині через точку  $A$  проведено пряму  $a$ , мимобіжну з прямою  $BC$ . Знайдіть відстань між прямими  $a$  і  $BC$ .
271. Через гіпотенузу  $AB$  рівнобедреного прямокутного трикутника  $ABC$  проведено площину  $\alpha$ . Відстань від точки  $C$  до площини  $\alpha$  дорівнює 3 см. Знайдіть відстань між прямою  $AB$  і прямою, яка проходить через точку  $C$  і перпендикулярна до площини  $\alpha$ , якщо  $AC = BC = 6$  см.
272. Пряма  $a$  паралельна площині  $\alpha$ . Доведіть, що відстань між прямою  $a$  і кожною прямою, яка належить площині  $\alpha$  і мимобіжна з прямою  $a$ , дорівнює відстані між прямою  $a$  і площиною  $\alpha$ .
273. Точки  $A$  і  $B$  знаходяться по один бік від площини  $\alpha$  на відстані 8 см від неї. З точки  $A$  до площини  $\alpha$  проведено перпендикуляр  $AA_1$ , а з точки  $B$  — похилу  $BB_1$  довжиною 10 см. Знайдіть відстань між прямими  $AA_1$  і  $BB_1$ , якщо  $AB = 7$  см,  $A_1B_1 = 11$  см (рис. 42).
274. Площини прямокутників  $ABCD$  і  $ABEF$  перпендикулярні. Знайдіть відстань між прямими  $DE$  і  $AB$ , якщо  $AF = 8$  см,  $BC = 15$  см (рис. 43).
275. Довжина ребра куба  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  дорівнює 2 см. Знайдіть відстань між прямими  $DB_1$  і  $AB$ .

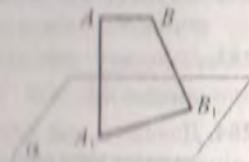


Рис. 42

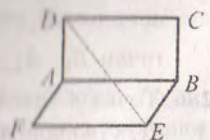


Рис. 43

## Кут між мимобіжними прямими

276. Пряма  $MA$  перпендикулярна до сторін  $AB$  і  $AC$  трикутника  $ABC$ .

Знайдіть кут між прямими  $MA$  і  $BC$ .

277. Через вершину  $A$  прямокутника  $ABCD$  до його площини проведено перпендикуляр  $AM$  (рис. 44). На відрізку  $MB$  взяли довільну точку  $K$ . Знайдіть кут між прямими  $AK$  і  $BC$ .

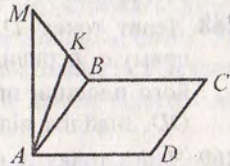


Рис. 44

278. Доведіть, що коли точка  $M$  рівновіддалена від сторін правильного трикутника  $ABC$ , то прямі  $AM$  і  $BC$  перпендикулярні.

279. На рисунку 45 зображено куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ .

Знайдіть кут між прямими: 1)  $AD$  і  $BB_1$ ; 2)  $DD_1$  і  $B_1C$ ; 3)  $B_1C$  і  $DC_1$ .

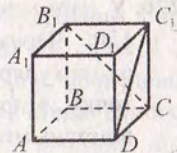


Рис. 45

280. Через центр  $O$  квадрата  $ABCD$  до його площини проведено перпендикуляр  $OM$ . Відстань від точки  $M$  до точки  $A$  дорівнює стороні квадрата. Знайдіть кут між прямими  $ME$  і  $AC$ , де точка  $E$  — середина сторони  $AB$ .

## Кут між прямою і площиною

281. Похила утворює з площиною кут  $30^\circ$ . Знайдіть довжину її проекції на цю площину, якщо довжина похилої дорівнює 4 см.

282. Знайдіть кут між похилою і площиною, якщо довжина похилої дорівнює 6 см, а довжина її проекції — 3 см.

283. Дано куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Знайдіть кут між прямою  $DC_1$  і площиною  $ABC$ .

284. Доведіть, що паралельні прямі, які перетинають площину, утворюють з нею рівні кути.

285. З точки  $A$ , яка лежить поза площиною  $\alpha$ , проведено до неї рівні похили  $AB_1, AB_2, AB_3, \dots$  і перпендикуляр  $AO$ . Доведіть, що точки  $B_1, B_2, B_3, \dots$  лежать на колі з центром  $O$ .

286. Точка  $A$  знаходиться на відстані 9 см від площини  $\alpha$ . Похили  $AB$  і  $AC$  утворюють з площиною  $\alpha$  кути  $45^\circ$  і  $60^\circ$ , а кут між проекціями похилих дорівнює  $150^\circ$ . Знайдіть відстань між точками  $B$  і  $C$ .

287. Через вершину  $B$  рівностороннього трикутника  $ABC$  до його площини проведено перпендикуляр  $DB$  довжиною  $4\sqrt{3}$  см. Знайдіть

кут між прямою  $AD$  і площиною трикутника, якщо його площа дорівнює  $4\sqrt{3}$  см<sup>2</sup>.

288. Точки  $A$  і  $B$  лежать у двох перпендикулярних площинах  $\alpha$  і  $\beta$  відповідно. З точок  $A$  і  $B$  проведено перпендикуляри  $AA_1$  і  $BB_1$  до лінії перетину площин. Знайдіть кути, які утворює відрізок  $AB$  з площинами  $\alpha$  і  $\beta$ , якщо  $AA_1 = 2\sqrt{3}$  см,  $BB_1 = 2\sqrt{6}$  см,  $A_1B = 6$  см.

289. Точки  $A$  і  $B$  лежать у двох перпендикулярних площинах. Відрізок  $AB$  утворює з цими площинами кути  $30^\circ$  і  $45^\circ$ . Знайдіть відстань між основами перпендикулярів, проведених з точок  $A$  і  $B$  до лінії перетину площин, якщо  $AB = 8$  см.

290. Через центр  $O$  правильного трикутника  $ABC$  до його площини проведено перпендикуляр  $MO$  довжиною 9 см. Перпендикуляр, проведений з точки  $M$  до прямої  $AB$ , утворює з площиною  $ABC$  кут  $30^\circ$ . Знайдіть довжину відрізка  $AB$ .

291. З точки до площини проведено дві похили, які утворюють з площиною кути по  $30^\circ$ . Знайдіть кут між проекціями похилих, якщо кут між похилими дорівнює  $60^\circ$ .

292. Через вершину прямого кута проведено пряму, яка утворює з його сторонами куту по  $60^\circ$ . Знайдіть кут, який утворює ця пряма з площиною прямого кута.

## Кут між площинами

293. Площини  $\alpha$  і  $\beta$  перетинаються по прямій  $m$ . У площинах  $\alpha$  і  $\beta$  проведено прямі  $a$  і  $b$  відповідно, які паралельні прямій  $m$ . Відстань між прямими  $a$  і  $m$  дорівнює 5 см, між прямими  $b$  і  $m$  — 3 см. Знайдіть кут між площинами  $\alpha$  і  $\beta$ , якщо відстань між прямими  $a$  і  $b$  дорівнює 7 см.

294. Площини  $\alpha$  і  $\beta$  перетинаються по прямій  $m$ , а кут між ними дорівнює  $30^\circ$ . Знайдіть відстань між прямою  $m$  і площиною  $\gamma$ , яка перетинає площини  $\alpha$  і  $\beta$  по паралельним прямим, віддаленим від лінії перетину площин на 2 см і  $2\sqrt{3}$  см.

295. Квадрат і прямокутник, площі яких відповідно дорівнюють 36 см<sup>2</sup> і 54 см<sup>2</sup>, мають спільну сторону, а кут між їх площинами дорівнює  $30^\circ$ . Знайдіть відстань між паралельними сторонами прямокутника і квадрата.

296. Сторона  $BC$  рівностороннього трикутника  $ABC$  належить площині  $\alpha$ , а відстань від вершини  $A$  до площини  $\alpha$  дорівнює 1 см.

- Знайдіть кут між площинами  $ABC$  і  $\alpha$ , якщо площа трикутника  $ABC$  дорівнює  $\frac{4\sqrt{3}}{3}$  см<sup>2</sup>.
297. Через гіпотенузу  $AB$  прямокутного трикутника  $ABC$  проведено площину, яка утворює з площиною трикутника кут  $30^\circ$ . Знайдіть відстань від вершини  $C$  до цієї площини, якщо катети трикутника дорівнюють 6 см і 8 см.
298. Рівнобедрені трикутники  $ABC$  і  $ABD$  мають спільну основу  $AB$ . Кут між їх площинами дорівнює  $60^\circ$ . Знайдіть довжину відрізка  $CD$ , якщо  $BC = 15$  см і  $BD = 13$  см,  $AB = 24$  см.
299. Рівнобедрені трикутники  $ABC$  і  $DBC$  мають спільну основу  $BC$ . Знайдіть кут між площинами  $ABC$  і  $DBC$ , якщо  $AB = 2\sqrt{21}$  см,  $AD = 2\sqrt{15}$  см,  $\angle BDC = 90^\circ$ ,  $BC = 12$  см.
300. Рівносторонній трикутник  $ABE$  і квадрат  $ABCD$  мають спільну сторону  $AB$  довжиною 4 см. Знайдіть кут між їх площинами, якщо  $EC = 2\sqrt{2}$  см.
301. На рисунку 46 зображено куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Знайдіть кут між площинами  $ABC$  і  $A_1 B_1 C_1$ .
302. Через гіпотенузу прямокутного рівнобедреного трикутника проведено площину, яка утворює з площиною трикутника кут  $45^\circ$ . Знайдіть кути, які утворюють катети трикутника з цією площиною.
303. Кут між площинами  $\alpha$  і  $\beta$ , які перетинаються по прямій  $a$ , дорівнює  $60^\circ$ . У площинах  $\alpha$  і  $\beta$  вибрано точки  $M$  і  $K$  відповідно і з них проведено перпендикуляри  $MM_1$  і  $KK_1$  до прямої  $a$ . Знайдіть довжину відрізка  $MK$ , якщо  $KK_1 = 3$  см,  $MM_1 = 8$  см,  $K_1 M_1 = \sqrt{15}$  см.
304. Площини  $\alpha$  і  $\beta$  перетинаються по прямій  $a$ . З точок  $A$  і  $B$ , які лежать у площинах  $\alpha$  і  $\beta$  відповідно, проведено перпендикуляри  $AC = 5$  см і  $BD = 8$  см до прямої  $a$ . Відстань між точками  $C$  і  $D$  дорівнює 24 см,  $AB = 25$  см. Знайдіть кут між площинами  $\alpha$  і  $\beta$ .
305. Сторона квадрата  $ABCD$  дорівнює 4 см. Через його центр  $O$  проведено пряму  $OE$ , перпендикулярну до площини квадрата. Площина, проведена через сторону  $AB$ , перетинає пряму  $OE$  в точці  $F$ . Кут між площинами  $ABF$  і  $ABC$  дорівнює  $60^\circ$ . Знайдіть довжину проекції відрізка  $OF$  на площину  $ABF$ .

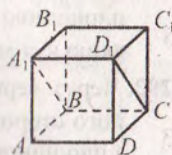


Рис. 46

306. З точки  $M$ , яка лежить поза площиною  $\alpha$ , проведено до неї дві похилі  $MA$  і  $MB$ , які утворюють з площиною  $\alpha$  кути  $30^\circ$  і  $45^\circ$  відповідно. Знайдіть кут між площинами  $\alpha$  і  $MAB$ , якщо  $\angle AMB = 90^\circ$ .
307. В одній з двох площин, що перетинаються, проведено пряму, яка утворює з другою площиною кут  $30^\circ$ , а з лінією перетину цих площин — кут  $45^\circ$ . Знайдіть кут між площинами.
308. Точка  $M$  рівновіддалена від вершин квадрата  $ABCD$ . Кут між прямою  $MA$  та площиною  $ABC$  дорівнює  $\alpha$ . Знайдіть кут між площинами  $MAB$  і  $ABC$ .
309. Точка  $P$  рівновіддалена від вершин правильного трикутника  $ABC$ . Кут між прямою  $PA$  і площиною  $ABC$  дорівнює  $\beta$ . Знайдіть кут між площинами  $APC$  і  $BPC$ .

## Площа ортогональної проекції многокутника

310. Чи може площа ортогональної проекції многокутника дорівнювати площі самого многокутника?
311. Знайдіть площу ортогональної проекції многокутника на деяку площину, якщо площа многокутника дорівнює 8 см<sup>2</sup>, а кут між площиною многокутника і площиною проекції дорівнює  $30^\circ$ .
312. Площа многокутника дорівнює 8 см<sup>2</sup>, а площа його ортогональної проекції — 4 см<sup>2</sup>. Знайдіть кут між площиною многокутника і площиною проекції.
313. Ортогональною проекцією трикутника  $ABC$  на деяку площину є прямокутний трикутник  $A_1 B_1 C_1$  з гіпотенузою 10 см і катетом 8 см. Знайдіть площу трикутника  $ABC$ , якщо кут між площинами  $ABC$  і  $A_1 B_1 C_1$  дорівнює  $45^\circ$ .
314. Площа чотирикутника дорівнює 126 см<sup>2</sup>. Його ортогональною проекцією є прямокутник, діагональ якого дорівнює  $\sqrt{130}$  см, а одна із сторін — 9 см. Знайдіть кут між площинами чотирикутника і прямокутника.
315. Площа трикутника  $A_1 B_1 C_1$  дорівнює 42 см<sup>2</sup>. Він є ортогональною проекцією трикутника  $ABC$  із сторонами 7 см, 17 см і 18 см. Знайдіть кут між площинами  $ABC$  і  $A_1 B_1 C_1$ .
316. Площа трапеції дорівнює  $48\sqrt{3}$  см<sup>2</sup>, а її ортогональна проекція — рівнобічна трапеція з основами 4 см і 20 см і бічною стороною 10 см. Знайдіть кут між площинами трапецій.

## Варіант 2

## Систематизація та узагальнення фактів і методів планіметрії

- Кути  $ABD$  і  $CBD$  прями. Доведіть, що точки  $A$ ,  $B$  і  $C$  лежать на одній прямій.
- Доведіть рівність трикутників за медіаною і кутами, які вона утворює зі стороною трикутника, до якої вона проведена, і кутами, які вона утворює зі сторонами кута, з вершини якого вона проведена.
- Доведіть рівність рівнобедрених трикутників, якщо рівні їх основи і висоти, проведені до основ.
- Доведіть рівність трикутників за двома сторонами та медіаною, проведеною до однієї з них.
- Доведіть від супротивного, що з двох суміжних кутів хоча б один не менший від  $90^\circ$ .
- Доведіть від супротивного, що кожний кут має тільки одну бісектрису.
- Пряма  $a$  паралельна стороні  $AB$  трикутника  $ABC$ . Чи може пряма  $a$  бути паралельною сторонам  $BC$  і  $AC$ ? Відповідь обґрунтуйте.
- Доведіть від супротивного, що якщо прямі  $m$  та  $n$  паралельні і пряма  $a$  перетинає пряму  $m$ , то вона перетинає й пряму  $n$ .
- На рисунку 47  $AB = CD$  і  $AB \parallel CD$ . Доведіть, що  $\triangle ADB = \triangle CBD$ .
- Відрізки  $CH$  і  $CM$  — висота і бісектриса трикутника  $ABC$  відповідно,  $\angle A = 68^\circ$ ,  $\angle B = 26^\circ$ . Знайдіть кут  $HCM$ .
- Бісектриса одного з кутів гострокутного трикутника утворює з висотою, проведеною з тієї самої вершини, кут, який дорівнює  $10^\circ$ , а один з двох інших кутів трикутника дорівнює  $70^\circ$ . Знайдіть невідомі кути трикутника.
- З вершини прямого кута прямокутного трикутника проведено бісектрису і висоту, кут між якими дорівнює  $19^\circ$ . Знайдіть гострі кути трикутника.
- У ромбі  $ABCD$  точки  $E$ ,  $F$ ,  $K$  — середини сторін  $AB$ ,  $BC$  і  $CD$  відповідно (рис. 48). Доведіть, що  $EF \perp FK$ .

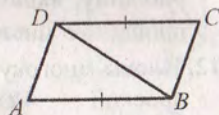


Рис. 47

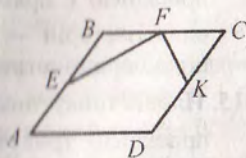


Рис. 48

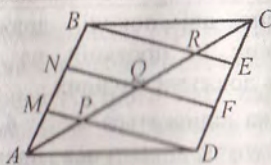


Рис. 49

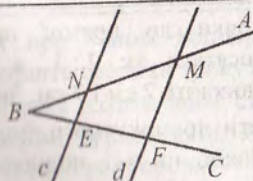


Рис. 50

- Визначте вид чотирикутника, вершинами якого є середини сторін: 1) прямокутника; 2) ромба.
- На стороні  $AB$  паралелограма  $ABCD$  (рис. 49) позначили точки  $M$  і  $N$ , а на стороні  $CD$  — точки  $E$  і  $F$  так, що  $BN = NM = MA = CE = EF = FD$ . Відрізки  $BE$ ,  $NF$ ,  $MD$  перетинають діагональ  $AC$  у точках  $R$ ,  $Q$ ,  $P$  відповідно. Доведіть, що  $AP = PQ = QR = RC$ .
- Точки  $A$  і  $B$  лежать по різні сторони від прямої  $l$ , точка  $M$  — середина відрізка  $AB$ . Точки  $A$  і  $M$  віддалені від прямої  $l$  на 6 см і 1 см відповідно. Знайдіть відстань від точки  $B$  до прямої  $l$ .
- Паралельні прямі  $c$  і  $d$  перетинають сторони кута  $ABC$  (рис. 50). Знайдіть довжину відрізка  $EF$ , якщо  $BE = 4$  см,  $MN = 9$  см,  $BN = EF$ .
- Продовження бічних сторін  $AB$  і  $CD$  трапеції  $ABCD$  перетинаються в точці  $N$ ,  $DN = 36$  см. Знайдіть  $CD$ , якщо  $AB : BN = 5 : 7$  і  $AD \parallel BC$ .
- У трикутник  $ABC$  вписано ромб  $DMNA$  так, що кут  $A$  в них спільний, а вершина  $M$  належить стороні  $BC$ . Знайдіть сторону ромба, якщо  $CM = 6$  см,  $BM = 4$  см,  $AB = 20$  см.
- Точка перетину діагоналей трапеції поділяє одну з діагоналей на відрізки завдовжки 7 см і 11 см. Знайдіть основи трапеції, якщо їх різниця дорівнює 16 см.
- У прямокутному трикутнику  $ABC$  ( $\angle C = 90^\circ$ ) катет  $AC$  дорівнює 5 см, а медіана  $AM = 13$  см. Знайдіть гіпотенузу  $AB$ .
- У трикутнику  $ABC$  кут  $C$  тупий,  $AC = 13$  см,  $AB = 15$  см, а висота  $AE$  дорівнює 12 см. Знайдіть сторону  $BC$ .
- З точки до прямої проведено дві похилі. Довжина однієї з них дорівнює 15 см, а її проекція на цю пряму — 12 см. Знайдіть довжину другої похилої, якщо вона утворює з прямою кут  $45^\circ$ .
- З точки до прямої проведено дві похилі, довжини яких дорівнюють 5 см і 7 см, а різниця їх проєкцій на цю пряму — 4 см. Знайдіть відстань від точки до даної прямої.

25. З точки до прямої проведено дві похилі, довжини яких відносяться як 2 : 3, а довжини їх проєкцій на цю пряму дорівнюють 2 см і 7 см. Знайдіть довжини похилих.
26. Катети прямокутного трикутника відносяться як 3 : 4, а різниця відрізків, на які поділяє гіпотенузу бісектриса прямого кута, дорівнює 10 см. Знайдіть периметр трикутника.
27. Відношення бічної сторони до основи рівнобедреного трикутника дорівнює 5 : 6, а різниця відрізків, на які бісектриса кута при основі поділяє висоту, проведену до основи, дорівнює 6 см. Знайдіть сторони трикутника.
28. У рівнобічній трапеції  $ABCD$  відомо, що  $AB = CD = 2$  см,  $BC = 6\sqrt{2}$  см,  $AD = 8\sqrt{2}$  см. Знайдіть кути трапеції.
29. З точки, що знаходиться на відстані 8 см від прямої, проведено до неї дві похилі, які утворюють з прямою кути  $30^\circ$  і  $45^\circ$ . Знайдіть довжини похилих та їх проєкцій на дану пряму.
30. З точки, що знаходиться на відстані 10 см від прямої, проведено до неї дві похилі, які утворюють з прямою кути  $30^\circ$  і  $60^\circ$ . Знайдіть відстань між основами похилих. Скільки розв'язків має задача?
31. Знайдіть площу рівнобедреного трикутника, бічна сторона якого дорівнює 17 см, а висота, проведена до основи, — 5 см.
32. Катет прямокутного трикутника дорівнює 10 см, а гіпотенуза — 26 см. Знайдіть висоту трикутника, проведену до гіпотенузи.
33. Знайдіть площу трикутника, дві сторони якого дорівнюють 9 см і  $3\sqrt{2}$  см, а кут між ними дорівнює: 1)  $45^\circ$ ; 2)  $150^\circ$ .
34. Знайдіть площу трикутника, сторони якого дорівнюють 13 см, 14 см і 15 см.
35. Бісектриса трикутника ділить його сторону на відрізки, один з яких на 3 см більший за другий. Дві інші сторони трикутника дорівнюють 14 см і 21 см. Знайдіть площу трикутника.
36. Сторони трикутника, одна з яких на 8 см більша за другу, утворюють кут  $120^\circ$ , а третя сторона дорівнює 28 см. Знайдіть периметр трикутника.
37. Одна сторона трикутника дорівнює 35 см, а дві інші відносяться як 3 : 8 і утворюють кут  $60^\circ$ . Знайдіть невідомі сторони трикутника.
38. У трикутнику  $ABC$  відомо, що  $AB = c$ ,  $\angle A = \alpha$ ,  $\angle C = \gamma$ . Знайдіть сторони  $BC$  і  $AC$ .

39. У рівнобедреному трикутнику кут при основі дорівнює  $\alpha$ , а бісектриса цього кута дорівнює  $l$ . Знайдіть сторони трикутника.
40. Бісектриса гострого кута паралелограма ділить його сторону у відношенні 2 : 3, рахуючи від вершини тупого кута. Периметр паралелограма дорівнює 42 см. Знайдіть його сторони.
41. Знайдіть площу паралелограма, діагоналі якого дорівнюють 16 см і 20 см, а одна з діагоналей перпендикулярна до його сторони.
42. Знайдіть площу ромба, сторона якого дорівнює 25 см, а різниця діагоналей — 10 см.
43. Перпендикуляр, проведений з вершини тупого кута ромба, поділяє сторону на відрізки завдовжки 7 см і 9 см, рахуючи від вершини тупого кута. Знайдіть площу ромба.
44. Знайдіть площу паралелограма, сторони якого дорівнюють 8 см і 14 см, а кут між ними —  $150^\circ$ .
45. Сторони паралелограма дорівнюють 24 см і 30 см, а кут між висотами —  $30^\circ$ . Знайдіть площу паралелограма.
46. У рівнобічній трапеції діагональ дорівнює більшій основі і утворює з нею кут  $38^\circ$ . Знайдіть кути трапеції.
47. У рівнобічній трапеції з тупим кутом  $120^\circ$  через вершину тупого кута проведено пряму, яка паралельна бічній стороні і відтинає від більшої основи відрізок завдовжки 12 см. Знайдіть периметр трапеції, якщо її менша основа дорівнює 16 см.
48. Бічна сторона рівнобічної трапеції дорівнює 18 см, а більша основа — 32 см. Кут між ними дорівнює  $60^\circ$ . Знайдіть середню лінію трапеції.
49. Знайдіть площу рівнобічної трапеції, менша основа якої дорівнює 10 см, бічна сторона — 6 см, а тупий кут —  $120^\circ$ .
50. Знайдіть площу рівнобічної трапеції, основи якої дорівнюють 22 см і 50 см, а діагоналі ділять її тупі кути навпіл.
51. Навколо трикутника  $DEF$  описано коло з центром у точці  $O$ . Знайдіть кут  $DOF$ , якщо: 1)  $\angle E = 38^\circ$ ; 2)  $\angle E = 148^\circ$ .
52. Знайдіть кути рівнобедреного трикутника, вписаного в коло, основа якого стягує дугу, градусна міра якої  $192^\circ$ .
53. Точки  $D$  і  $B$  кола лежать по одну сторону від діаметра  $AC$  (рис. 51). Знайдіть кут  $ABD$ , якщо  $\angle DAC = 52^\circ$ .

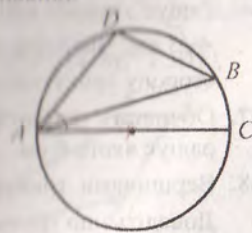


Рис. 51

54. Чотирикутник  $ABCD$  вписано в коло. Кут  $A$  більший за кут  $B$  на  $58^\circ$  і у 4 рази більший за кут  $C$ . Знайдіть кути чотирикутника.
55. Бічна сторона рівнобічної трапеції, у яку можна вписати коло, дорівнює 12 см. Знайдіть периметр трапеції.
56. Радіус кола, вписаного в рівнобічну трапецію, дорівнює 8 см, а один з відрізків, на які точка дотику вписаного кола поділяє бічну сторону, — 4 см. Знайдіть площу трапеції.
57. У трикутнику  $ABC$  відомо, що  $BC = 5\sqrt{3}$  см,  $\angle A = 120^\circ$ . Знайдіть радіус кола, описаного навколо цього трикутника.
58. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 12 см, а бічна сторона — 10 см. Знайдіть радіус кола, описаного навколо цього трикутника.
59. Довжина дуги кола дорівнює 8л см, а її градусна міра —  $24^\circ$ . Знайдіть радіус кола.
60. Дуга кола, радіус якого 6 см, містить  $240^\circ$ . Знайдіть радіус кола, довжина якого дорівнює довжині цієї дуги.
61. Площа сектора становить  $\frac{8}{15}$  площі круга. Знайдіть градусну міру центрального кута, який відповідає даному сектору.
62. Сторони трикутника дорівнюють 26 см, 28 см і 30 см. Знайдіть площі описаного та вписаного в цей трикутник кругів.
63. Сторони двох правильних трикутників відносяться як 4 : 7, а площа більшого з них дорівнює 98 см<sup>2</sup>. Знайдіть площу меншого трикутника.
64. Сторона квадрата дорівнює 6 см. Знайдіть радіуси вписаного та описаного навколо нього кіл.
65. Радіус кола, описаного навколо квадрата, дорівнює 2 см. Знайдіть сторону квадрата і радіус вписаного в нього кола.
66. Радіус кола, вписаного в правильний трикутник, дорівнює  $4\sqrt{3}$  см. Знайдіть радіус кола, описаного навколо трикутника, і сторону трикутника.
67. Обчисліть площу правильного восьмикутника, вписаного в коло, радіус якого 6 см.
68. Вершинами трикутника є точки  $A(4; -2)$ ,  $B(-4; 4)$ ,  $C(-12; 10)$ . Доведіть, що трикутник  $ABC$  — рівнобедрений.
69. На осі ординат знайдіть точку, рівновіддалену від точок  $A(4; -5)$  і  $B(2; 3)$ .

70. Складіть рівняння кола, діаметром якого є відрізок  $AB$ , якщо  $A(-3; 9)$ ,  $B(5; -7)$ .

71. Чотирикутник  $МКРЕ$  — паралелограм (рис. 52). Укажіть вектор, рівний вектору: 1)  $\overrightarrow{KP}$ ; 2)  $\overrightarrow{PK}$ ; 3)  $\overrightarrow{KM}$ ; 4)  $\overrightarrow{MO}$ ; 5)  $\overrightarrow{PO}$ ; 6)  $\overrightarrow{OE}$ .

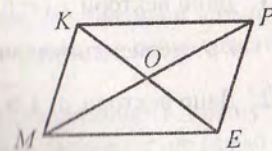


Рис. 52

72. Чотирикутник  $ABCD$  — паралелограм. Знайдіть:

- 1)  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{CD}$ ; 2)  $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{DB}$ ; 3)  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA}$ .
73. Діагоналі паралелограма  $ABCD$  перетинаються в точці  $O$  (рис. 53). Виразіть вектори  $\overrightarrow{AB}$  і  $\overrightarrow{BC}$  через вектори  $\overrightarrow{AO} = \vec{m}$  і  $\overrightarrow{OD} = \vec{n}$ .
74. Дано точки  $M(0; 5)$  і  $N(-6; 0)$ . Знайдіть координати точки  $K$  такої, що  $\overrightarrow{MK} = \overrightarrow{KN} = \vec{0}$ .
75. Знайдіть модуль вектора  $\vec{m} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$ , де  $\vec{a}(-4; 2)$ ;  $\vec{b}(1; -2)$ .
76. На сторонах  $AB$  і  $BC$  паралелограма  $ABCD$  взято такі точки  $E$  і  $F$  відповідно, що  $AE = \frac{2}{3}AB$ ,  $BF = \frac{2}{3}BC$  (рис. 54). Виразіть вектори  $\overrightarrow{DE}$  і  $\overrightarrow{DF}$  через вектори  $\overrightarrow{DA} = \vec{a}$  і  $\overrightarrow{DC} = \vec{b}$ .
77. На сторонах  $DF$  і  $EF$  трикутника  $DEF$  взято такі точки  $P$  і  $K$  відповідно, що  $DP : PF = 1 : 4$ ,  $EK : KF = 4 : 3$ . Виразіть вектори  $\overrightarrow{EF}$ ,  $\overrightarrow{FD}$ ,  $\overrightarrow{DK}$ ,  $\overrightarrow{KD}$  і  $\overrightarrow{PK}$  через вектори  $\overrightarrow{DF} = \vec{m}$  і  $\overrightarrow{EK} = \vec{n}$ .
78. Знайдіть значення  $n$ , при якому вектори  $\vec{a}(n; -8)$  і  $\vec{b}(-4; -2)$  колінеарні.
79. Діагоналі квадрата  $ABCD$  зі стороною 4 см перетинаються в точці  $O$ . Знайдіть скалярний добуток векторів: 1)  $\overrightarrow{AB}$  і  $\overrightarrow{AC}$ ; 2)  $\overrightarrow{DA}$  і  $\overrightarrow{AO}$ ; 3)  $\overrightarrow{DA}$  і  $\overrightarrow{DB}$ ; 4)  $\overrightarrow{DA}$  і  $\overrightarrow{OC}$ ; 5)  $\overrightarrow{DO}$  і  $\overrightarrow{CO}$ ; 6)  $\overrightarrow{BC}$  і  $\overrightarrow{AD}$ .

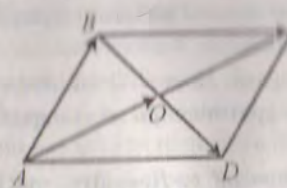


Рис. 53

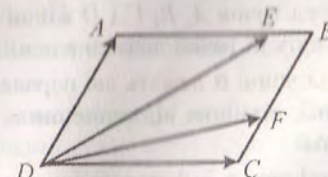


Рис. 54

80. Знайдіть косинус кута між векторами  $\vec{a}(4; -1)$  і  $\vec{b}(-6; -8)$ .
81. Дано вектори  $\vec{c}(x; 6)$  і  $\vec{d}(3; -2)$ . При якому значенні  $x$  вектори  $\vec{c}$  і  $\vec{d}$  перпендикулярні?
82. Дано вектори  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ ,  $|\vec{a}|=4$ ,  $|\vec{b}|=5$ ,  $\angle(\vec{a}, \vec{b})=135^\circ$ . Знайдіть:
- 1)  $|\vec{a} - \vec{b}|$ ;
  - 2)  $|\vec{a} + 3\vec{b}|$ .

## Аксиоми стереометрії та наслідки з них

83. Чи можна стверджувати, що:
- 1) будь-які три точки завжди лежать на одній прямій;
  - 2) будь-які три точки завжди лежать в одній площині?
84. Скільки різних площин можна провести через одну пряму?
85. Чи можна стверджувати, що будь-яка пряма, яка проходить через центри вписаного та описаного кіл даного трикутника, лежить у площині цього трикутника?
86. Чи може пряма проходити через центр кола, але не мати з колом спільних точок?
87. Чи є правильним твердження, що коли через дві прямі можна провести площину, то ці прямі паралельні?
88. Площини  $\alpha$  і  $\beta$  перетинаються по прямій  $a$ . У площинах  $\alpha$  і  $\beta$  проведено відповідно прямі  $m$  і  $n$ , які перетинаються. Де знаходиться точка їх перетину?
89. Площини  $\alpha$  і  $\beta$  перетинаються по прямій  $m$ . У площині  $\alpha$  проведено пряму  $a$ , яка перетинає пряму  $m$ . Через пряму  $a$  проведено площину  $\gamma$ , яка перетинає площину  $\beta$  по прямій  $b$ . Доведіть, що прямі  $a$  і  $b$  перетинаються.
90. Через пряму  $a$  і точку  $A$  можна провести дві різні площини. Який висновок можна зробити?
91. Точка  $A$  належить площині  $\alpha$ . Доведіть, що через точку  $A$  можна провести площину, яка не збігається з площиною  $\alpha$ .
92. Серед точок  $A, B, C$  і  $D$  жодні три не лежать на одній прямій. Чи можуть ці точки лежати в одній площині?
93. У площині  $\alpha$  лежать дві паралельні прямі. Доведіть, що існує площина, відмінна від площини  $\alpha$ , яка перетинає дві дані паралельні прямі.
94. Площини  $\alpha$  і  $\beta$  перетинаються по прямій  $c$ . Доведіть, що існує площина, яка перетинає пряму  $c$  і площини  $\alpha$  і  $\beta$ .

95. Пряма  $a$  належить площині  $\alpha$ . Доведіть, що існує пряма, яка не перетинає пряму  $a$  і не лежить з нею в одній площині.
96. Точки  $A, B, C$  і  $D$  розміщено в просторі так, що діагоналі чотирикутника  $ABCD$  перетинаються. Доведіть, що вказані точки лежать в одній площині.
97. Через точку  $A$  проведено дві прямі, які перетинають кожную з прямих  $a$  і  $b$  в точках, відмінних від точки  $A$ . Доведіть, що прямі  $a$  і  $b$  лежать в одній площині.
98. Дано пряму  $a$  і точку  $A$  поза нею. Доведіть, що всі прямі, які проходять через точку  $A$  і перетинають пряму  $a$ , лежать в одній площині.
99. Прямі  $a$  і  $b$  не лежать в одній площині. Пряма  $c$  перетинає прямі  $a$  і  $b$ . Чи існує пряма, яка перетинає прямі  $a, b$  і  $c$  у трьох різних точках?
100. Прямі  $MA, MB$  і  $MC$  перетинають площину  $\alpha$  в точках  $A, B$  і  $C$ , які не лежать на одній прямій. Чи існує пряма, яка перетинає прямі  $MA, MB$  і  $MC$  у трьох різних точках?
101. Вершина  $D$  плоского чотирикутника  $ABCD$  належить площині  $\alpha$ , а інші вершини лежать поза цією площиною. Продовження сторони  $BC$  і діагоналі  $AC$  перетинають площину  $\alpha$  в точках  $M$  і  $N$  відповідно. Доведіть, що точки  $D, M$  і  $N$  лежать на одній прямій.
102. Площини  $\alpha$  і  $\beta$  перетинаються по прямій  $a$ . Трикутник  $ABC$  розташований так, що дві його вершини  $A$  і  $C$  належать площині  $\alpha$  (прямі  $AC$  і  $a$  не паралельні), а вершина  $B$  — площині  $\beta$ . Побудуйте лінії перетину площини  $ABC$  з площинами  $\alpha$  і  $\beta$ .
103. Дві протилежні вершини трапеції і площині  $\alpha$  дві інші вершини належать площині  $\alpha$ . Чи належать площині  $\alpha$  дві інші вершини трапеції?
104. Чи можна стверджувати, що всі точки кола належать площині, якщо:
- 1) хорда і центр кола належать площині;
  - 2) дві хорди кола належать площині?
105. Скільки площин можна провести через три точки, що лежать на одній прямій?
106. Будь-які чотири точки фігури належать одній площині. Доведіть, що вся фігура належить цій площині.
107. Основи бісектрис трикутника належать площині  $\alpha$ . Чи належать площині  $\alpha$  вершини трикутника?

108. Вершини  $A$  і  $B$  трикутника  $ABC$  лежать по один бік від площини  $\alpha$ , а вершина  $C$  — по інший. Доведіть, що точки перетину сторін  $BC$  і  $AC$  і медіани  $CM$  з площиною  $\alpha$  лежать на одній прямій.

### Побудова перерізу многогранників

109. Побудуйте переріз прямокутного паралелепіпеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  площиною, яка проходить через точки: 1)  $A$ ,  $C$  і  $B_1$ ; 2)  $B_1$ ,  $D_1$  і середину ребра  $AA_1$ .

110. Точка  $M$  — середина ребра  $SB$  піраміди  $SABC$ . Побудуйте переріз піраміди площиною, яка проходить через точку  $M$  і пряму  $AC$ .

111. Ребро куба дорівнює  $a$ . Побудуйте переріз куба площиною, що проходить через середини трьох ребер, які виходять з однієї вершини, та обчисліть його периметр і площу.

112. Побудуйте точку перетину прямої з площиною основи чотирикутної піраміди, якщо ця пряма проходить через дві точки, які належать: 1) бічним ребрам однієї грані; 2) бічним ребрам, які не належать одній грані; 3) бічному ребру і бічній грані, якій це ребро не належить; 4) двом сусіднім бічним граням; 5) двом протилежним бічним граням.

113. Побудуйте переріз трикутної піраміди  $SABC$  (рис. 55) площиною, що проходить через точки  $T$ ,  $F$  і  $E$ , які належать ребрам  $SA$ ,  $AB$  і  $BC$  відповідно.

114. Побудуйте переріз прямої призми  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  площиною, яка проходить через точки  $A$  і  $B$  та точку  $M$ , яка належить ребру  $DD_1$ , якщо прямі  $AB$  і  $CD$  не паралельні.

115. Побудуйте переріз прямої призми  $ABCA_1 B_1 C_1$  (рис. 56) площиною, що проходить через точку  $C$  і точки  $P$  і  $M$ , які лежать на ребрах  $BB_1$  і  $A_1 B_1$  відповідно.

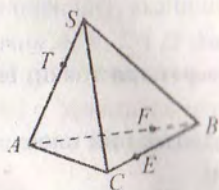


Рис. 55

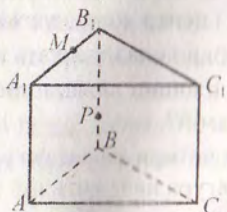


Рис. 56

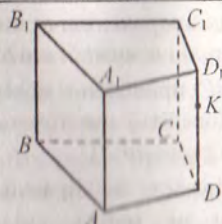


Рис. 57

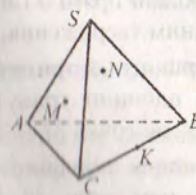


Рис. 58

116. Побудуйте переріз прямої призми  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  (рис. 57) площиною, яка проходить через вершини  $B_1$  і  $C$  і точку  $K$  на ребрі  $DD_1$ .

117. У піраміді  $SABC$  (рис. 58) точка  $M$  належить грані  $ASC$ , точка  $N$  — грані  $ASB$ , точка  $K$  — ребру  $BC$ . Побудуйте переріз піраміди площиною, яка проходить через точки  $M$ ,  $N$  і  $K$ .

### Паралельні прями в просторі. Мимобіжні прями

118. Прямі  $a$  і  $b$  не паралельні, пряма  $c$  паралельна прямій  $a$ . Чи можна стверджувати, що пряма  $b$  перетинає пряму  $c$ : 1) на площині; 2) у просторі?

119. Точки  $A$  і  $B$  належать прямій  $a$ , точки  $C$  і  $D$  — прямій  $b$ , причому  $a \parallel b$ . Доведіть, що прямі  $AC$  і  $BD$  не є мимобіжними.

120. Точка  $A$  не лежить у площині трикутника  $DEF$ . Доведіть, що прямі  $AD$  і  $EF$  мимобіжні.

121. Через точку  $A$  прямої  $l$  до неї проведено перпендикуляр  $AA_1$ . Через точку  $A_1$  проведено пряму  $m$ , перпендикулярну до прямої  $AA_1$ . Чи можна стверджувати, що прямі  $l$  і  $m$  паралельні: 1) на площині; 2) у просторі?

122. На одній з двох прямих, які перетинаються, вибрано точку і через неї проведено пряму, паралельну іншій прямій. Доведіть, що ці три прямі лежать в одній площині.

123. Чи може кожна з двох мимобіжних прямих перетинати кожен з двох прямих, які перетинаються?

124. Прямі  $a$  і  $b$  мимобіжні, пряма  $c$  паралельна прямій  $a$ . Чи є правильним твердження, що прямі  $b$  і  $c$  мимобіжні?

125. Точка  $D$  не належить площині трикутника  $ABC$ , точки  $M$ ,  $N$ ,  $P$  і  $Q$  — середини відрізків  $AD$ ,  $AB$ ,  $BC$  і  $CD$  відповідно. Доведіть, що  $MN \parallel PQ$ .



126. Дві мимобіжні прямі  $a$  і  $b$  відповідно паралельні прямим  $m$  і  $n$ . Чи є правильним твердження, що прямі  $m$  і  $n$  мимобіжні?
127. Через вершину  $A$  трикутника  $ABC$  проведено пряму  $a$ , яка не належить площині трикутника. Доведіть, що прямі  $a$  і  $BM$  — мимобіжні, де точка  $M$  — середина сторони  $AC$ .
128. Три площини попарно перетинаються по прямим  $a$ ,  $b$  і  $c$ . Доведіть, що коли ці площини не мають спільної точки, то  $a \parallel b \parallel c$ .
129. Точки  $A, B, C$  і  $D$  не лежать в одній площині, точки  $M, N, K$  і  $F$  — середини відрізків  $AB, BD, DC$  і  $AC$  відповідно. Доведіть, що відрізки  $MK$  і  $NF$  перетинаються і точкою перетину діляться навпіл.
130. Трикутник  $ABC$  не перетинає площину  $\alpha$ . Через його вершини і середини  $M$  і  $N$  відповідно сторін  $AB$  і  $AC$  проведено паралельні прямі, які перетинають площину  $\alpha$  в точках  $A_1, B_1, C_1, M_1, N_1$  (рис. 59). Знайдіть довжини відрізків  $BB_1$  і  $CC_1$ , якщо  $AA_1 = 9$  см,  $NN_1 = 8$  см,  $MM_1 = 10$  см.

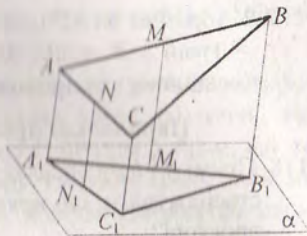


Рис. 59

### Паралельність прямої і площини

131. Через точку  $A$ , яка не належить площині  $\alpha$ , проведено пряму, паралельну площині  $\alpha$ . Скільки існує в площині  $\alpha$  прямих, паралельних прямій  $a$ ?
132. Прямі  $a$  і  $b$  паралельні площині  $\alpha$ . Чи можуть прямі  $a$  і  $b$  перетинатись?
133. Пряма  $a$  паралельна площині  $\alpha$ . Чи є правильним твердження:  
 1) пряма  $a$  не перетинає жодної прямої, яка лежить у площині  $\alpha$ ;  
 2) пряма  $a$  паралельна будь-якій прямій, що лежить у площині  $\alpha$ ;  
 3) пряма  $a$  паралельна деякій прямій, що лежить у площині  $\alpha$ ?
134. Доведіть, що коли пряма  $a$  паралельна кожній з двох площин, що перетинаються, то вона паралельна прямій їх перетину.
135. Відрізок  $AB$  лежить у площині  $\alpha$ . Точка  $M$  не належить площині  $\alpha$ . Точки  $K$  і  $P$  — середини відрізків  $MA$  і  $MB$  відповідно. Доведіть, що пряма  $KP$  паралельна площині  $\alpha$ .

136. Пряма  $a$  перетинає площину  $\alpha$ . Чи лежить у площині  $\alpha$  хоча б одна пряма, паралельна прямій  $a$ ?
137. Прямі  $a$  і  $b$  мимобіжні. Скільки існує площин, які містять пряму  $b$  і паралельні прямій  $a$ ?
138. Через паралельні прямі  $a$  і  $b$  проведено дві площини, які перетинаються по прямій  $c$ . Доведіть, що прямі  $a$  і  $b$  паралельні прямій  $c$ .
139. Через середину  $M$  сторони  $AB$  трикутника  $ABC$  проведено площину, яка паралельна прямій  $AC$  і перетинає сторону  $BC$  у точці  $N$ . Доведіть, що відрізок  $MN$  — середня лінія трикутника  $ABC$ .
140. Площина, паралельна стороні  $AC$  трикутника  $ABC$ , перетинає сторони  $AB$  і  $BC$  у точках  $A_1$  і  $C_1$  відповідно. Знайдіть відношення  $AA_1 : AB$ , якщо  $A_1C_1 = 6$  см,  $AC = 9$  см.
141. Прямі  $a$  і  $b$  належать відповідно паралельним площинам  $\alpha$  і  $\beta$ . Доведіть, що через будь-яку точку, що не належить даним площинам, можна провести площину, паралельну прямим  $a$  і  $b$ .
142. Поза площиною паралелограма  $ABCD$  вибрано точку  $E$ . На відрізку  $BE$  позначено точку  $F$  так, що  $BF : FE = 4 : 1$  (рис. 60). Побудуйте точку  $M$  перетину площини  $AFD$  і прямої  $CE$  та знайдіть довжину відрізка  $FM$ , якщо  $BC = 12$  см.
143. Побудуйте переріз трикутної піраміди  $SABC$  площиною, яка проходить через вершину  $C$ , точку на ребрі  $SB$  і паралельну прямій  $AB$ .
144. Побудуйте переріз піраміди  $SABC$  (рис. 61) площиною, яка проходить через точку  $P$  на ребрі  $SB$  і паралельно прямим  $BC$  і  $SA$ .
145. Побудуйте переріз призми  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  площиною, що проходить через точки  $K$  і  $F$ , які належать відповідно ребрам  $A_1 D_1$  і  $B_1 C_1$ , та паралельно прямій  $AA_1$ .

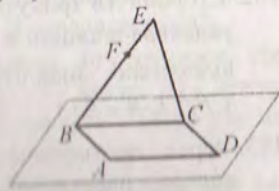


Рис. 60

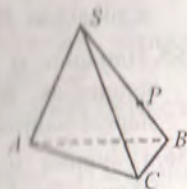


Рис. 61

### Паралельні площини. Властивості паралельних площин

146. Дві площини паралельні одній і тій самій прямій. Чи є правильним твердження, що ці площини паралельні?
147. Кожна з двох даних площин паралельна кожній з двох даних прямих, що перетинаються. Чи паралельні ці площини?

148. Основи трапеції паралельні площині  $\alpha$ . Чи можна стверджувати, що площина трапеції і площина  $\alpha$  паралельні?
149. Точка  $D$  лежить поза площиною трикутника  $ABC$ . На відрізках  $BA$ ,  $BC$  і  $BD$  вибрано відповідно точки  $K$ ,  $F$  і  $E$  так, що  $BK : BA = BF : BC = BE : BD$ . Доведіть, що площини  $KEF$  і  $ADC$  паралельні.
150. Дано паралелограм  $ABCD$  і точку  $S$  поза його площиною. Площина  $\beta$  перетинає прямі  $SA$ ,  $SB$ ,  $SC$ ,  $SD$  у точках  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$ ,  $D_1$  відповідно так, що  $AB \parallel A_1B_1$ ,  $AD \parallel A_1D_1$ . Доведіть, що чотирикутник  $A_1B_1C_1D_1$  — паралелограм.
151. Паралельні прямі  $l_1$  і  $l_2$  перетинають площину  $\alpha$  в точках  $A$  і  $B$ . Доведіть, що будь-яка пряма, яка паралельна площині  $\alpha$  і перетинає кожну з прямих  $l_1$  і  $l_2$ , перетинає ці прямі в точках, відстань між якими дорівнює  $AB$ .
152. Сторона  $AB$  трикутника  $ABC$  лежить у площині  $\alpha$ . Площина  $\beta$  паралельна площині  $\alpha$  і перетинає сторони  $AC$  і  $BC$  у точках  $A_1$  і  $B_1$  відповідно. Знайдіть довжину відрізка  $A_1B_1$ , якщо  $AB = 12$  см,  $CB_1 : B_1B = 2 : 3$ .
153. Через протилежні сторони чотирикутника  $ABCD$  проведено попарно паралельні площини. Доведіть, що чотирикутник  $ABCD$  — паралелограм.
154. Площини  $\alpha$  і  $\beta$  паралельні. Через пряму  $a$  площини  $\alpha$  проведено площини  $\gamma_1$  і  $\gamma_2$ , які перетинають площину  $\beta$  по прямим  $b_1$  і  $b_2$  відповідно. Доведіть, що  $b_1 \parallel b_2$ .
155. Площини  $\alpha$  і  $\beta$  паралельні. Відрізки  $AB$  і  $CD$ , які лежать у цих площинах, не паралельні. Чи можуть відрізки  $AD$  і  $BC$  бути паралельними?
156. Площина  $\alpha$  паралельна площині  $\beta$ , площина  $\beta$  паралельна площині  $\gamma$ . Доведіть, що площини  $\alpha$  і  $\gamma$  паралельні.
157. Площини  $\alpha$  і  $\beta$  паралельні. У площині  $\alpha$  лежить пряма  $a$ . Через точку  $B$  площини  $\beta$  проведено пряму  $b$ , паралельну прямій  $a$ . Доведіть, що пряма  $b$  лежить у площині  $\beta$ .
158. Точка  $M$  — середина ребра  $BC$  піраміди  $SABC$ . Побудуйте переріз піраміди площиною, яка проходить через точку  $M$  і паралельна площині  $ASC$ , та обчисліть площу перерізу, якщо  $SA = 24$  см,  $SC = 10$  см,  $AC = 26$  см.

159. Побудуйте переріз прямокутного паралелепіпеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  площиною, що проходить через точки  $M$ ,  $P$  і  $K$ , які належать відповідно ребрам  $C_1 D_1$ ,  $BC$  і  $DD_1$ .
160. Побудуйте переріз прямої призми  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  площиною, що проходить через точки  $M$ ,  $N$  і  $P$ , які належать ребрам  $BC$ ,  $A_1 B_1$  і  $DD_1$  відповідно.
161. Побудуйте переріз прямої призми  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  (рис. 62) площиною, що проходить через точки  $T$  і  $P$ , які належать граням  $AA_1 D_1 D$  і  $DD_1 C_1 C$  відповідно, і точку  $Q$  на ребрі  $BC$ .

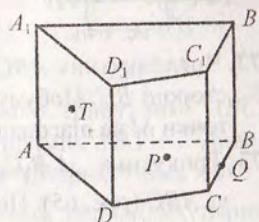


Рис. 62

#### Паралельне проектування. Зображення фігур у стереометрії

162. Які геометричні фігури можуть бути паралельними проекціями:  
1) відрізка; 2) двох паралельних відрізків; 3) паралелограма?
163. Чи можуть дві паралельні прямі проектуватися: 1) у дві прямі, що перетинаються; 2) у паралельні прямі; 3) в одну пряму; 4) у пряму і точку, що належить цій прямій; 5) у пряму і точку, що не належить цій прямій?
164. Як мають бути розмішені відносно напрямку проектування дві прямі, що перетинаються, щоб вони проектувались у пряму і точку, що їй належить?
165. Чи можна при паралельному проектуванні ромба отримати:  
1) трапецію; 2) квадрат?
166. Чи можна при паралельному проектуванні опуклого чотирикутника з кутами  $30^\circ$ ,  $100^\circ$ ,  $160^\circ$ ,  $80^\circ$  отримати ромб?
167. Чи може паралельною проекцією двох рівних відрізків бути два нерівних відрізки?
168. Чи може паралельною проекцією променя бути: 1) відрізок; 2) пряма; 3) точка?
169. У якому випадку відрізок проектується: 1) у точку; 2) у рівний йому відрізок?
170. За яких умов квадрат проектується в ромб?
171. Паралелограм  $ABCD$  є зображенням ромба з гострим кутом  $60^\circ$  (рис. 63). Побудуйте зображення висоти, проведеної з вершини тупого кута  $B$  до сторони  $AD$ .

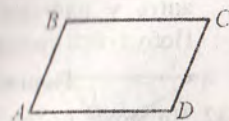


Рис. 63

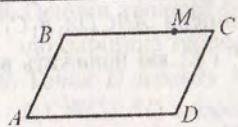


Рис. 64

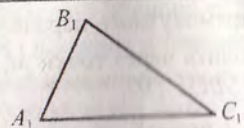


Рис. 65

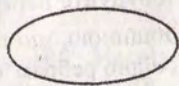


Рис. 66

172. Чотирикутник  $ABCD$  — проекція ромба (рис. 64),  $M$  — точка на стороні  $BC$ . Побудуйте зображення перпендикулярів, опущених з точки  $M$  на діагоналі ромба.
173. Трикутник  $A_1B_1C_1$  — зображення рівнобедреного трикутника  $ABC$  (рис. 65). Побудуйте зображення точки перетину бісектриси цього трикутника, якщо  $AB : BC : AC = 5 : 5 : 8$ .
174. Точки  $M_1, N_1, P_1$  є зображеннями вершин  $A$  і  $B$  і середини сторони  $CD$  паралелограма  $ABCD$ . Побудуйте зображення паралелограма. Скільки розв'язків має задача?
175. Трикутник  $ABC$  є паралельною проекцією правильного трикутника, на сторонах якого в його площині побудовано в свою чергу правильні трикутники. Побудуйте паралельні проєкції цих трикутників.
176. На зображенні кола (рис. 66) побудуйте зображення його центра.
177. Дано паралельну проєкцію квадрата з центром  $O$ . Побудуйте паралельну проєкцію квадрата, вписаного в це коло.
178. Точки  $A, B, O$ , що не лежать на одній прямій, є паралельними проєкціями двох вершин квадрата і його центра. Побудуйте зображення квадрата. Скільки розв'язків має задача?
179. Дано зображення трикутника і двох його висот. Побудуйте зображення центра кола, описаного навколо трикутника.
180. Сторони прямокутника відносяться як  $3 : 1$ . Побудуйте зображення перпендикуляра, проведеного з вершини прямокутника до його діагоналі.
181. Точки  $A_1, B_1, C_1$  — паралельні проєкції точок  $A, B, C$  на площину  $\alpha$  (рис. 67), пряма  $p_1$  — проєкція прямої  $p$ , що лежить у площині  $ABC$ , на площину  $\alpha$ . Побудуйте пряму  $p$ .

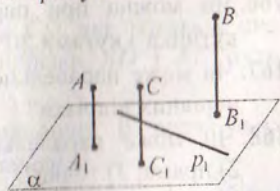


Рис. 67

182. Чи може пряма бути перпендикулярною тільки до однієї прямої площини?

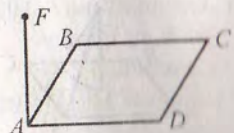


Рис. 68

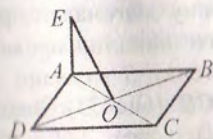


Рис. 69

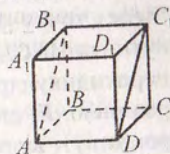


Рис. 70

183. Через точку  $M$ , яка лежить поза площиною трикутника  $ABC$ , проведено пряму  $MA$  перпендикулярну до прямих  $AB$  і  $AC$ . Доведіть, що пряма  $MA$  перпендикулярна медіані  $AN$  трикутника  $ABC$ .
184. Як розміщена відносно площини круга пряма, перпендикулярна до двох його діаметрів?
185. На рисунку 68 зображено прямокутник  $ABCD$ ,  $FA \perp AD$ . Укажіть пряму і площину, які перпендикулярні одна до одної.
186. Чотирикутник  $ABCD$  — ромб (рис. 69), пряма  $AE$  перпендикулярна до площини  $ABC$ . Доведіть, що  $EO \perp DB$ .
187. На рисунку 70 зображено куб  $ABCDA_1B_1C_1D_1$ . Доведіть, що чотирикутник  $AB_1C_1D$  — прямокутник.
188. Через одну сторону ромба проходить площина, перпендикулярна до сусідньої сторони. Доведіть, що цей ромб — квадрат.
189. Точка  $M$  лежить поза площиною рівностороннього трикутника  $ABC$  (рис. 71),  $MA = MB = MC$ , точка  $O$  — центр правильного трикутника. Доведіть, що пряма  $MO$  перпендикулярна до площини  $ABC$ .
190. Точка  $M$  лежить поза площиною рівностороннього трикутника  $ABC$  і рівновіддалена від усіх його вершин, точка  $N$  — середина сторони  $AB$ . Доведіть, що пряма  $AB$  перпендикулярна до площини  $NMC$ .
191. Пряма  $AO$  перпендикулярна до площини кола з центром  $O$ . Точка  $B$  лежить на колі. Знайдіть радіус кола, якщо  $AB = 12$  см,  $\angle ABO = 30^\circ$ .

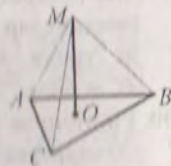


Рис. 71

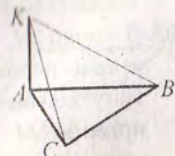


Рис. 72

192. Через вершину  $A$  правильного трикутника  $ABC$  проведено перпендикуляр  $AK$  до площини трикутника (рис. 72). Знайдіть відстань від точки  $K$  до вершин трикутника, якщо  $BC = 12\sqrt{3}$  см,  $\angle KBA = 30^\circ$ .

193. Через точку  $M$  перетину діагоналей прямокутника  $ABCD$  до його площини проведено перпендикуляр  $SM$  і точку  $S$  з'єднано з серединою  $F$  сторони  $CD$  (рис. 73). Знайдіть довжину відрізка  $SD$ , якщо  $AB = 10$  см,  $BC = 24$  см,  $\angle MSF = 60^\circ$ .

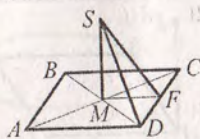


Рис. 73

194. Пряма  $SA$  перпендикулярна до площини прямокутника  $ABCD$ ,  $AD = 6$  см,  $CD = 8$  см,  $\angle SCA = 30^\circ$ . Знайдіть  $SA$ .
195. Точка  $M$  лежить поза площиною трикутника  $ABC$  і рівновіддалена від його вершин. Як розміщена точка  $O$  — проекція точки  $M$  на площину  $ABC$  — відносно трикутника  $ABC$ , якщо цей трикутник прямокутний?
196. Площина  $\alpha$  проходить через середини сторін  $AD$  і  $BC$  чотирикутника  $ABCD$  і перпендикулярна до прямих  $AD$  і  $BC$ . Доведіть, що коли  $BC = AD$ , то чотирикутник  $ABCD$  — прямокутник.
197. Чи можуть дві площини, що перетинаються, бути перпендикулярними до однієї прямої?
198. Через вершину  $B$  прямокутника  $ABCD$  до його площини проведено перпендикуляр  $SB$ . Відомо, що  $SA = a$ ,  $SC = b$ ,  $SD = c$ . Знайдіть  $SB$ .
199. Через вершину  $B$  рівнобедреного трикутника  $ABC$  проведено перпендикуляр  $SB$  до його площини довжиною 4 см. Знайдіть  $\angle SMB$ , де точка  $M$  — середина сторони  $AC$ , якщо  $AB = BC = 5$  см,  $AC = 6$  см.
200. Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює 18 см. Точка  $M$  знаходиться на відстані 15 см від усіх його вершин. Знайдіть відстань від точки  $M$  до площини трикутника.

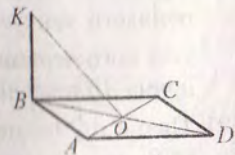


Рис. 74

201. Пряма  $BK$  перпендикулярна до площини ромба  $ABCD$  (рис. 74),  $O$  — точка перетину діагоналей ромба. Доведіть, що пряма  $AC$  перпендикулярна до площини  $KBO$ .
202. Дано ромб  $ABCD$  і точку  $S$  поза його площиною таку, що  $SA = SC$  і  $SB = SD$ . Знайдіть кут  $BSD$ , якщо  $SB = AD$  і  $\angle BAD = 60^\circ$ .
203. З точки  $M$ , що не належить площині прямокутника  $ABCD$ , проведено перпендикуляр  $AM$  до його площини. Через точку  $O$  перетину діагоналей прямокутника проведено пряму  $OK$ , паралельну прямій  $AM$ . Знайдіть відстань від точки  $K$  до вершин прямокутника, якщо  $AB = 3$  см,  $BC = 4$  см,  $OK = 6$  см.

204. Кінці відрізка, розміщеного по один бік від площини, віддалені від неї на 9 см і 11 см. Знайдіть відстань від середини відрізка до цієї площини.
205. Через вершину  $B$  квадрата  $ABCD$  проведено пряму  $BF$ , перпендикулярну прямим  $AB$  і  $BD$ . Доведіть, що пряма  $AC$  перпендикулярна до площини  $BFD$ .
206. Через вершини  $B$  і  $D$  ромба  $ABCD$  проведено перпендикуляри  $BM$  і  $DN$  до площини ромба. Доведіть, що площина  $ABM$  паралельна площині  $CDN$ .

## Перпендикуляр і похила

207. На рисунку 75 зображено куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Укажіть проєкції відрізка  $BD_1$  на площини граней куба.

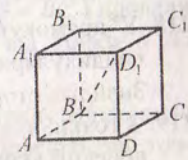


Рис. 75

208. З точки до площини проведено перпендикуляр і похилу завдовжки 12 см. Знайдіть довжину перпендикуляра, якщо довжина проєкції похилої дорівнює 7 см.
209. З точки до площини проведено перпендикуляр і похилу. Довжина проєкції похилої дорівнює 6 см. Знайдіть довжини перпендикуляра і похилої, якщо кут між перпендикуляром і похилою дорівнює  $30^\circ$ .
210. З точки  $M$  до площини  $\alpha$  проведено похилі  $MN$  і  $MK$ , а також перпендикуляр  $MP$ . Знайдіть  $MP$  і  $MK$ , якщо  $MN = 20$  см,  $NF = 16$  см,  $KF = 3$  см.
211. З точки  $M$  до площини  $\alpha$  проведено похилі  $MK$  і  $MC$  та перпендикуляр  $MD$ . Знайдіть довжини похилих, якщо  $KD = 6$  см,  $\angle MCD = 30^\circ$ ,  $\angle MKD = 60^\circ$ .
212. З точки  $M$  до площини  $\alpha$  проведено похилі  $MN$  і  $MK$ , довжини яких відносяться як 25 : 26. Знайдіть відстань від точки  $M$  до площини  $\alpha$ , якщо проєкції похилих  $MN$  і  $MK$  дорівнюють відповідно 14 см і 20 см.
213. Доведіть, що коли проєкції двох похилих, проведених до площини з однієї точки, рівні, то рівні й похилі.
214. У чотирикутнику  $ABCD$  відомо, що  $AB = AD$  (рис. 76). Пряма  $SA$  перпендикулярна до площини чотирикутника,  $\angle DSC = \angle BSC$ . Доведіть, що  $BC = CD$ .

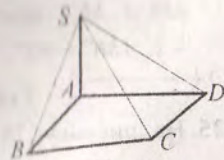


Рис. 76

215. Пряма  $FB$  перпендикулярна до площини трикутника  $ABC$  (рис. 77). Точка  $F$  рівновіддалена від точок  $A$  і  $C$ . Знайдіть довжину відрізка  $FB$ , якщо  $AC = 6$  см,  $\angle CBA = 120^\circ$ ,  $\angle CFA = 90^\circ$ .

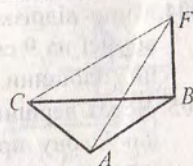


Рис. 77

216. Точка  $M$  рівновіддалена від вершин ромба  $ABCD$ . Доведіть, що  $ABCD$  — квадрат.
217. Точка  $M$  знаходиться на відстані 10 см від вершин рівнобедреного трикутника  $ABC$  ( $AB = BC$ ) і на відстані 6 см від його площини. Знайдіть сторони трикутника, якщо  $\angle BAC = 30^\circ$ .
218. У прямокутнику  $ABCD$  відомо, що  $AB = 2BC$ . Пряма  $FB$  перпендикулярна площині прямокутника,  $FB = 7$  см,  $FD = 12$  см. Знайдіть сторони прямокутника.
219. З точки, яка лежить поза площиною, проведено до неї дві похилі, проєкції яких дорівнюють 9 см і 5 см. Знайдіть довжини похилих, якщо їх різниця дорівнює 2 см.
220. Два відрізки завдовжки 10 см і 17 см спираються своїми кінцями в паралельні площини. Знайдіть відстань між площинами, якщо сума проєкцій цих похилих на одну з площин дорівнює 21 см.
221. З точки  $M$  до площини  $\alpha$  проведено дві рівні похилі, кут між якими дорівнює  $90^\circ$ . Знайдіть кут між похилими та їх проєкціями на площину  $\alpha$ , якщо кут між проєкціями похилих дорівнює  $120^\circ$ .
222. З точки  $M$  до площини  $\alpha$  проведено похилі  $MA$  і  $MB$  та перпендикуляр  $MC$ ,  $MA = 10$  см,  $MC = 8$  см,  $AB = \sqrt{316}$  см,  $\angle ACB = 120^\circ$ . Знайдіть довжину похилої  $MB$ .
223. Через вершину  $C$  трикутника  $ABC$  проведено площину  $\alpha$ , паралельну стороні  $AB$ . Відстань від прямої  $AB$  до площини  $\alpha$  дорівнює 6 см, а проєкції сторін  $CA$  і  $CB$  на цю площину дорівнюють 4 см і 8 см відповідно. Знайдіть медіану  $CM$  трикутника  $ABC$ , якщо  $AB = 10$  см.
224. З точки  $M$  до площини  $\alpha$  проведено перпендикуляр  $MA$  та похилі  $MB$  і  $MC$ , причому  $MA^2 = AC \cdot AB$ . Доведіть, що  $\angle AMB + \angle AMC = 90^\circ$ .

#### Теорема про три перпендикуляри

225. На рисунку 78 зображено куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Доведіть, що пряма  $CO$  перпендикулярна до прямої  $A_1 B$ .

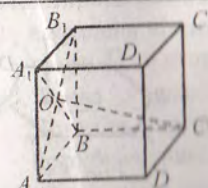


Рис. 78

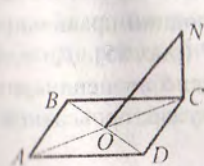


Рис. 79

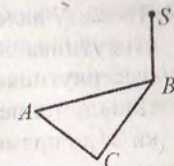


Рис. 80

226. На рисунку 79 зображено квадрат  $ABCD$ , пряма  $NC$  перпендикулярна до його площини. Доведіть, що прямі  $BD$  і  $NO$  перпендикулярні.
227. До площини рівнобедреного трикутника  $ABC$  ( $AB = BC$ ) провели перпендикуляр  $SB$  (рис. 80). Знайдіть відстань від точки  $S$  до прямої  $AC$ , якщо  $AC = c$ ,  $BC = b$ ,  $SB = a$ .
228. Точка  $S$  належить перпендикуляру до площини трикутника, який проходить через точку перетину його бісектрис. Доведіть, що точка  $S$  рівновіддалена від сторін трикутника.
229. Через вершину  $B$  трикутника  $ABC$  до його площини проведено перпендикуляр  $MB$ . Пряма, яка проходить через точку  $M$ , перпендикулярна до відрізка  $AC$  і перетинає цей відрізок у його середині. Доведіть, що трикутник  $ABC$  рівнобедрений.
230. Через вершину кута  $B$  трикутника  $ABC$  проведено перпендикуляр  $MB$  до його площини (рис. 81). Знайдіть відстань від точки  $M$  до прямої  $AC$ , якщо  $AB = c$ ,  $MB = d$ ,  $\angle BAC = \alpha$ .

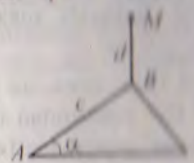


Рис. 81

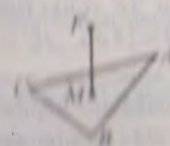


Рис. 82

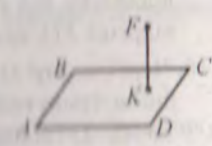


Рис. 83

231. Точка  $M$  — центр рівностороннього трикутника  $ABC$  (рис. 82). Пряма  $FM$  перпендикулярна до площини трикутника. Побудуйте перпендикуляри, опущені з точки  $F$  на сторони трикутника.
232. До площини прямокутника  $ABCD$  проведено перпендикуляр  $FK$  (рис. 83). Проведіть перпендикуляр з точки  $F$  до прямої  $AB$ .
233. З точки  $M$  до площини квадрата  $ABCD$  проведено перпендикуляр  $MN$  (рис. 84). Побудуйте перпендикуляр, проведений з точки  $M$  до прямої  $AC$ .

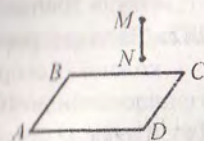


Рис. 84

234. Точка  $N$  належить площині правильного шестикутника  $ABCDEF$  (рис. 85). До площини шестикутника проведено перпендикуляр  $MN$ . Побудуйте перпендикуляр, проведений з точки  $M$  до прямої  $CD$ .

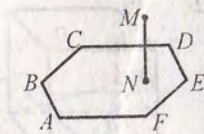


Рис. 85

235. Через вершину прямого кута  $B$  прямокутного трикутника  $ABC$  до його площини проведено перпендикуляр  $BK$  довжиною 7 см. Знайдіть відстань від точки  $K$  до прямої  $AC$ , якщо  $AC = 8\sqrt{2}$  см,  $\angle BAC = 45^\circ$ .
236. Через точку  $O$  перетину діагоналей ромба  $ABCD$  до його площини проведено перпендикуляр  $OF$  довжиною 2 см. Знайдіть відстань від точки  $F$  до сторін ромба, якщо  $AC = 16$  см,  $BD = 12$  см.
237. Через вершину кута  $C$  трикутника  $ABC$  до його площини проведено перпендикуляр  $CN$ . Відстань від точки  $N$  до прямої  $AB$  дорівнює 26 см. Знайдіть відстань від точки  $N$  до площини трикутника, якщо  $AC = 30$  см,  $AB = 28$  см,  $BC = 26$  см.
238. Через вершину  $B$  рівнобедреного трикутника  $ABC$  ( $AB = BC$ ) до площини трикутника проведено перпендикуляр  $BT$  завдовжки 5 см. Знайдіть відстань від точки  $T$  до сторони  $AC$ , якщо  $AC = 8$  см,  $AB = 6$  см.
239. У трикутник  $ABC$  вписано коло з центром  $O$ . Через точку  $O$  до площини трикутника проведено перпендикуляр  $FO$ . Точка  $F$  віддалена від сторони  $AB$  трикутника на 5 см. Знайдіть довжину відрізка  $FO$ , якщо  $AB = 15$  см,  $AC = 12$  см,  $BC = 9$  см.
240. Через центр  $O$  кола, вписаного в правильний трикутник, до площини трикутника проведено перпендикуляр  $OD$  довжиною 6 см. Точка  $D$  віддалена від сторін трикутника на відстань 14 см. Знайдіть сторону трикутника.
241. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 2 см і 14 см. Через центр  $O$  кола, вписаного в цю трапецію, проведено перпендикуляр  $OK$  до площини трапеції,  $OK = 6$  см. Знайдіть відстань від точки  $K$  до сторін трапеції.
242. Діагоналі ромба дорівнюють 60 см і 80 см. Точка  $M$  віддалена від кожної із сторін ромба на 26 см. Знайдіть відстань від точки  $M$  до площини ромба.
243. Точка  $M$  віддалена від кожної із сторін трикутника  $ABC$  на 10 см, а від його площини — на 6 см. Знайдіть периметр трикутника  $ABC$ , якщо його площа дорівнює  $96 \text{ см}^2$ .

244. Сторона ромба дорівнює  $a$ , а один з кутів дорівнює  $\alpha$ . Точка  $M$  віддалена від площини ромба на відстань  $b$ . Знайдіть відстань від точки  $M$  до сторін ромба, якщо вона рівновіддалена від них.
245. Точка  $S$  знаходиться на однаковій відстані від сторін кута. Доведіть, що проєкція точки  $S$  на площину даного кута належить його бісектрисі.
246. Сторони прямокутника дорівнюють 12 см і 16 см. Через середину  $F$  меншої сторони до площини прямокутника проведено перпендикуляр  $FT$  довжиною 2 см. Знайдіть відстань від точки  $T$  до діагоналей прямокутника.
247. Через вершину  $C$  ромба  $ABCD$  до його площини проведено перпендикуляр  $CF$ . Точка  $F$  віддалена від сторони  $AB$  на 25 см. Знайдіть відстань від точки  $F$  до площини ромба, якщо діагоналі ромба дорівнюють 30 см і 40 см.
248. З точки  $S$  до площини  $\pi$  проведено перпендикуляр  $SF$  і похилу  $SK$ , яка утворює зі своєю проєкцією кут  $\gamma$ . Через точку  $K$  в площині  $\pi$  проведено пряму  $a$ , яка утворює з похилою  $SK$  кут  $\varphi$ . Знайдіть кут між прямими  $FK$  і  $a$ .
249. У трикутнику  $ABC$  відомо, що  $AB = 18$  см,  $BC = 26$  см,  $AC = 21$  см. Через вершину  $A$  трикутника проведено похилу, яка утворює з променями  $AC$  і  $AB$  рівні кути. Проєкція похилої перетинає сторону  $BC$  у точці  $F$ . Знайдіть довжини відрізків  $BF$  і  $CF$ .
250. Основи трапеції дорівнюють 8 см і 12 см. Через меншу основу трапеції проведено площину, яка віддалена на 4 см від більшої основи. Знайдіть відстань від точки перетину діагоналей трапеції до даної площини.

## Перпендикулярні площини

251. Чи є правильним твердження, що коли площина  $\alpha$  перпендикулярна до площини  $\beta$ , то будь-яка пряма, що перпендикулярна до площини  $\alpha$ , не має спільних точок з площиною  $\beta$ ?
252. Чи є правильним твердження, що коли пряма  $a$  і площина  $\alpha$  перпендикулярні до площини  $\beta$ , то пряма  $a$  паралельна площині  $\alpha$ ?
253. Доведіть, що коли дві площини, які перетинаються, перпендикулярні до третьої, то лінія їх перетину також перпендикулярна до цієї площини.
254. Точка  $D$  рівновіддалена від вершин  $A$  і  $C$  рівнобедреного трикутника  $ABC$ ,  $AB = BC$ . Точка  $M$  — середина сторони  $AC$ . Доведіть, що площини  $ABC$  і  $BDM$  перпендикулярні.

255. Два рівносторонніх трикутники  $ABC$  і  $ABC_1$  мають спільну сторону  $AB$ , довжина якої дорівнює 10 см. Площини цих трикутників перпендикулярні. Знайдіть відстань між вершинами  $C$  і  $C_1$ .
256. Точка  $M$  рівновіддалена від сторін ромба  $ABCD$ . Доведіть, що площини  $AMC$  і  $BMD$  перпендикулярні.
257. Точка  $S$  рівновіддалена від вершин рівностороннього трикутника  $ABC$ , точка  $M$  — середина сторони  $AC$ . Доведіть, що площини  $MSB$  і  $ABC$  перпендикулярні.
258. Точка  $M$  рівновіддалена від вершин  $C$  і  $D$  прямокутника  $ABCD$ . З точки  $M$  до сторони  $AB$  проведено перпендикуляр  $MN$ . Доведіть, що площина прямокутника перпендикулярна до площини  $MNO$ , де  $O$  — точка перетину діагоналей прямокутника.
259. Площини  $\pi$  і  $\gamma$  перпендикулярні і перетинаються по прямій  $m$ . Площина  $\varphi$  перетинає площини  $\pi$  і  $\gamma$  по прямим  $k$  і  $p$ , паралельним прямій  $m$ . Відстань між прямими  $k$  і  $p$  дорівнює 20 см, а між прямими  $m$  і  $p$  — 16 см. Знайдіть відстань між прямими  $m$  і  $k$ , а також відстань від прямої  $m$  до площини  $\varphi$ .
260. Кінці відрізка, довжина якого дорівнює 25 см, належать двом перпендикулярним площинам, а відстані від кінців відрізка до лінії перетину площин дорівнюють 20 см і 9 см. Знайдіть відстань між основами перпендикулярів, проведених з кінців відрізка до лінії перетину площин.
261. Точки  $A$  і  $B$  належать двом перпендикулярним площинам  $\alpha$  і  $\beta$  відповідно,  $a$  — лінія перетину цих площин,  $AD$  і  $BC$  — перпендикуляри, проведені з точок  $A$  і  $B$  до прямої  $a$ . Знайдіть довжину відрізка  $AB$ , якщо  $AD = 5$  см,  $BC = 6$  см,  $DC = 12$  см.
262. Відрізок лежить в одній з двох перпендикулярних площин і не перетинає другу. Один з кінців відрізка віддалений від прямої  $a$  перетину площин на 12 см. У другій площині проведено пряму  $b$ , паралельну  $a$ . Кінці даного відрізка віддалені від прямої  $b$  на 13 см і  $\sqrt{41}$  см. Знайдіть відстань від середини відрізка до прямої  $a$ .
263. Прямокутник  $ABCD$  перегнули по діагоналі так, що площини  $ABD$  і  $CBD$  виявилися перпендикулярними. Знайдіть відстань між точками  $A$  і  $C$ , якщо  $AB = 30$  см,  $BD = 50$  см.
264. Доведіть, що коли прямі перетину площин  $\alpha$ ,  $\beta$  і  $\gamma$  попарно перпендикулярні, то площини попарно перпендикулярні.

## Відстань між мимобіжними прямими

265. На рисунку 86 зображено куб з ребром  $a$ . Знайдіть відстань між прямими  $AB$  і  $CD$ .

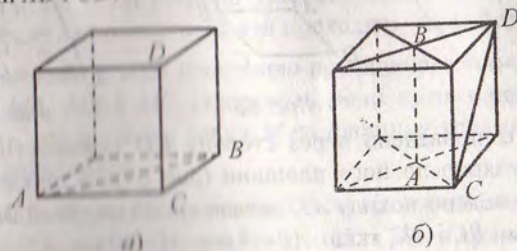


Рис. 86

266. Через вершину гострого кута  $A$  прямокутного трикутника  $ABC$  ( $\angle B = 90^\circ$ ) проведено пряму  $a$ , перпендикулярну до площини трикутника. Знайдіть відстань між прямими  $BC$  і  $a$ , якщо  $BC = 7$  см,  $AC = 25$  см.
267. Через вершину  $A$  трикутника  $ABC$  проведено пряму  $l$ , перпендикулярну до площини трикутника. Знайдіть відстань між прямими  $l$  і  $BC$ , якщо  $AB = 13$  см,  $BC = 14$  см,  $AC = 15$  см.
268. Через середину хорди  $AB$  кола радіусом 5 см проведено пряму  $n$ , перпендикулярну до площини кола. Знайдіть відстань між прямою  $n$  і діаметром  $BC$ , якщо  $AC = 8$  см.
269. Через точку  $A$  кола проведено хорди  $AB$  і  $AC$ . Через точку  $B$  проведено пряму  $m$ , перпендикулярну до площини кола, а через точку  $C$  пряму  $k$  — дотичну до кола. Знайдіть відстань між прямими  $m$  і  $k$ , якщо  $AB = 6$  см,  $AC = 8$  см,  $\angle BAC = 60^\circ$ .
270. Через вершину  $A$  рівнобедреного трикутника  $ABC$  ( $AB = AC$ ) проведено площину, перпендикулярну до площини  $ABC$ , і в цій площині через точку  $A$  проведено пряму  $m$ . Знайдіть відстань між прямими  $m$  і  $BC$ , якщо  $BC = 8$  см,  $\angle BAC = 120^\circ$ .
271. Через основу  $BC$  рівнобедреного трикутника  $ABC$  проведено площину  $\alpha$ . Відстань від точки  $A$  до площини  $\alpha$  дорівнює 4 см. Знайдіть відстань між прямою  $BC$  і прямою, яка проходить через точку  $A$  перпендикулярно до площини  $\alpha$ , якщо  $BC = 12$  см,  $AB = 10$  см.
272. Мимобіжні прямі  $a$  і  $b$  належать паралельним площинам  $\alpha$  і  $\beta$  відповідно. Доведіть, що відстань між прямими  $a$  і  $b$  дорівнює відстані між площинами  $\alpha$  і  $\beta$ .

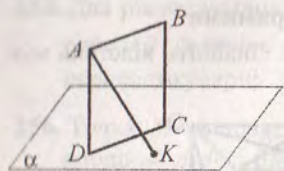


Рис. 87

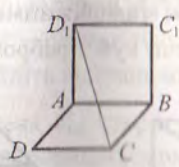


Рис. 88

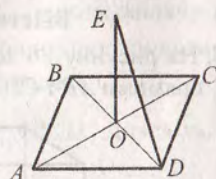


Рис. 89

273. Площину  $\alpha$  проведено через сторону  $CD$  прямокутника  $ABCD$  перпендикулярно до його площини (рис. 87). З точки  $A$  до площини  $\alpha$  проведено похилу  $AK$  довжиною 15 см. Знайдіть відстань між прямими  $BC$  і  $AK$ , якщо  $AB = 8$  см,  $AD = 9$  см,  $KC = 12$  см.
274. Площини квадратів  $ABCD$  і  $ABC_1D_1$  перпендикулярні (рис. 88). Знайдіть відстань між прямими  $CD_1$  і  $AB$ , якщо  $AB = 6$  см.
275. Довжина ребра куба  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  дорівнює 4 см. Знайдіть відстань між прямими  $AC_1$  і  $BB_1$ .

#### Кут між мимобіжними прямими

276. Відрізок  $AM$  — медіана трикутника  $ABC$ , пряма  $MK$  перпендикулярна до прямих  $AM$  і  $BC$ . Знайдіть кут між прямими  $AB$  і  $MK$ .
277. Через центр  $O$  квадрата  $ABCD$  до його площини проведено перпендикуляр  $EO$  (рис. 89). Знайдіть кут між прямими  $ED$  і  $AC$ .
278. Через центр  $O$  правильного шестикутника  $ABCDEF$  до його площини проведено перпендикулярну пряму. На цій прямій обрано точку  $K$ , яку з'єднано із серединою  $P$  сторони  $AB$ . Доведіть, що прями  $KP$  і  $FC$  перпендикулярні.
279. На рисунку 90 зображено куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Знайдіть кут між прямими: 1)  $AB$  і  $CC_1$ ; 2)  $B_1C_1$  і  $AC$ ; 3)  $A_1D$  і  $AC$ .
280. Через вершину  $B$  прямокутника  $ABCD$  до його площини проведено перпендикуляр  $FB$  довжиною 6 см. Знайдіть кут між прямими  $AB$  і  $FD$ , якщо  $AB = 9$  см,  $BC = 12$  см.

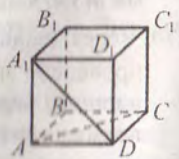


Рис. 90

#### Кут між прямою і площиною

281. Похила утворює з площиною кут  $60^\circ$ . Знайдіть довжину похилої, якщо довжина її проекції 9 см.
282. Знайдіть кут між похилою і площиною, якщо довжина похилої дорівнює 15 см, а відстань від кінця похилої до площини — 3 см.

283. Дано куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Знайдіть кут між прямою  $AC_1$  і площиною  $ABC$ .
284. Доведіть, що бічні сторони рівнобедреного трикутника утворюють рівні кути з площиною, яка проходить через його основу.
285. Точка  $M$  лежить поза площиною правильного трикутника  $ABC$ , а похилі  $MA$ ,  $MB$  і  $MC$  утворюють рівні кути з площиною  $ABC$ . Доведіть, що проекція точки  $M$  на площину трикутника — центр цього трикутника.
286. Точка  $K$  знаходиться на відстані 6 см від площини  $\alpha$ . Похилі  $KA$  і  $KB$  утворюють з площиною  $\alpha$  кути  $45^\circ$  і  $30^\circ$ , а кут між проекціями похилих дорівнює  $135^\circ$ . Знайдіть відстань між точками  $A$  і  $B$ .
287. У трикутнику  $ABC$  відомо, що  $AB = AC$ ,  $BC = 12$  см, площа трикутника дорівнює  $18$  см<sup>2</sup>. Через вершину  $A$  проведено до площини трикутника перпендикуляр  $DA$  такий, що  $DE = 3\sqrt{2}$  см, де точка  $E$  — середина  $BC$ . Знайдіть кут між прямою  $DE$  та площиною трикутника.
288. Кінці відрізка  $AB$ , довжина якого дорівнює  $2\sqrt{2}$  см, лежать у двох перпендикулярних площинах  $\alpha$  і  $\beta$  відповідно. З точок  $A$  і  $B$  опущено перпендикуляри  $AA_1$  і  $BB_1$  на лінію перетину площин,  $AB_1 = \sqrt{6}$  см,  $AA_1 = 2$  см. Знайдіть кути, які утворює відрізок  $AB$  з площинами  $\alpha$  і  $\beta$ .
289. Точки  $A$  і  $B$  лежать у двох перпендикулярних площинах. З однієї з площин відрізок  $AB$  утворює кут  $30^\circ$ . Точка  $A$  знаходиться на відстані 4 см від цієї площини, а відстань між основами перпендикулярів, проведених з точок  $A$  і  $B$  до лінії перетину площин, дорівнює  $4\sqrt{2}$  см. Знайдіть кут між відрізком  $AB$  і другою площиною.
290. Через вершину  $A$  прямокутного трикутника  $ABC$  ( $\angle ABC = 90^\circ$ ) до площини трикутника проведено перпендикуляр  $DA$ . Знайдіть відстань від точки  $D$  до прямої  $BC$ , якщо пряма  $DB$  утворює з площиною  $ABC$  кут  $\beta$ ,  $AC = e$ ,  $\angle BAC = \alpha$ .
291. Трикутники  $ABC$  і  $ADC$  лежать у різних площинах. Знайдіть кути, які утворюють прями  $AB$  і  $CB$  з площиною  $ADC$ , якщо  $AB = BC = AC$ ,  $AD = DC$ ,  $\angle ADC = 90^\circ$ , пряма  $BD$  перпендикулярна до площини  $ADC$ .



292. Через вершину кута, рівного  $60^\circ$ , проведено пряму, яка утворює з його сторонами кута по  $60^\circ$ . Знайдіть кут, який утворює ця пряма з площиною даного кута.

#### Кут між площинами

293. Кут між двома площинами дорівнює  $30^\circ$ . У кожній з площин проведено пряму, паралельну лінії їх перетину. Відстань від однієї з цих прямих до лінії перетину площин дорівнює 8 см, а від другої —  $2\sqrt{3}$  см. Знайдіть відстань між проведеними прямими.
294. Площини  $\alpha$  і  $\beta$ , кут між якими дорівнює  $60^\circ$ , перетинаються по прямої  $l$ . Площина  $\gamma$  перетинає площини  $\alpha$  і  $\beta$  відповідно по прямим  $a$  і  $b$ , які паралельні прямої  $l$ . Відстань між прямими  $a$  і  $b$  дорівнює  $2\sqrt{19}$  см, між прямими  $a$  і  $l$  — 6 см. Знайдіть відстань від прямої  $b$  до площини  $\alpha$ .
295. Квадрат і прямокутник, площі яких відповідно дорівнюють  $36 \text{ см}^2$  і  $96 \text{ см}^2$ , мають спільну сторону, а відстань між їх паралельними сторонами дорівнює 14 см. Знайдіть кут між площинами квадрата і прямокутника.
296. Сторона  $AB$  рівностороннього трикутника  $ABC$  належить площині  $\alpha$ . З точки  $C$  до площини  $\alpha$  проведено перпендикуляр  $CO$ . Відстань від точки  $O$  до прямої  $AB$  дорівнює  $3\sqrt{3}$  см, площа трикутника  $ABC$  дорівнює  $36\sqrt{3} \text{ см}^2$ . Знайдіть кут між площинами  $ABC$  і  $\alpha$ .
297. Через сторону  $AB$  трикутника  $ABC$  проведено площину, яка утворює з площиною трикутника кут  $45^\circ$ . Знайдіть відстань від вершини  $C$  до цієї площини, якщо  $AB = 14 \text{ см}$ ,  $BC = 13 \text{ см}$ ,  $AC = 15 \text{ см}$ .
298. Рівнобедрені трикутники  $ABC$  і  $ADC$  мають спільну основу  $AC$ . Кут між їх площинами дорівнює  $60^\circ$ ,  $AC = 12 \text{ см}$ ,  $\angle ABC = 60^\circ$ ,  $\angle ADC = 120^\circ$ . Знайдіть довжину відрізка  $BD$ .
299. Два рівнобедрених трикутники  $MNK$  і  $MEK$  мають спільну основу  $MK$ . Знайдіть кут між площинами  $MNK$  і  $MEK$ , якщо  $MN = 5\sqrt{3} \text{ см}$ ,  $EK = 13 \text{ см}$ ,  $EN = \sqrt{74} \text{ см}$ ,  $MK = 10 \text{ см}$ .
300. Прямокутники  $ABCD$  і  $AMKD$  мають спільну сторону  $AD$ . Знайдіть кут між площинами прямокутників, якщо  $AD = 6 \text{ см}$ ,  $DK = 16 \text{ см}$ ,  $DC = 12 \text{ см}$ ,  $MC = 10 \text{ см}$ .

301. На рисунку 91 зображено куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ .

Знайдіть кут між площинами  $ABC$  і  $AB_1 C_1$ .

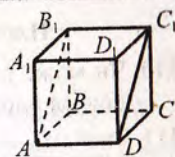


Рис. 91

302. Через сторону правильного трикутника проведено площину, яка утворює з площиною трикутника кут  $30^\circ$ . Знайдіть кути, які утворюють дві інші сторони трикутника з цією площиною.
303. Кут між площинами  $\alpha$  і  $\beta$ , які перетинаються по прямої  $a$ , дорівнює  $45^\circ$ . У площинах  $\alpha$  і  $\beta$  вибрано точки  $C$  і  $D$  відповідно і з них проведено перпендикуляри  $DA$  і  $CB$  до прямої  $a$ . Знайдіть довжину відрізка  $AB$ , якщо  $AD = 6\sqrt{2} \text{ см}$ ,  $CB = 8 \text{ см}$ ,  $DC = 11 \text{ см}$ .
304. Площини  $\alpha$  і  $\beta$  перетинаються по прямої  $l$ . З точок  $A$  і  $B$ , які лежать у площинах  $\alpha$  і  $\beta$  відповідно, проведено перпендикуляри  $AM$  і  $BN$  до прямої  $l$ . Знайдіть кут між площинами  $\alpha$  і  $\beta$ , якщо  $AM = 12 \text{ см}$ ,  $BN = 8\sqrt{3} \text{ см}$ ,  $AN = 4\sqrt{10} \text{ см}$ ,  $AB = 8 \text{ см}$ .
305. Через центр  $O$  правильного трикутника  $ABC$  проведено пряму  $l$ , перпендикулярну до площини трикутника. Площина, проведена через сторону  $AB$ , перетинає пряму  $l$  у точці  $M$ . Кут між площинами  $ABC$  і  $ABM$  дорівнює  $60^\circ$ . Знайдіть довжину сторони трикутника  $ABC$ , якщо довжина проекції відрізка  $MO$  на площину  $ABM$  дорівнює  $\frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ см}$ .
306. З точки  $M$ , яка лежить поза площиною  $\alpha$ , проведено до неї дві похилі  $MA$  і  $MB$ , які утворюють з площиною  $\alpha$  кути  $45^\circ$  і  $60^\circ$  відповідно. Знайдіть кут між площинами  $\alpha$  і  $MAB$ , якщо кут між проекціями похилих  $MA$  і  $MB$  дорівнює  $150^\circ$ .
307. Кут між двома площинами дорівнює  $60^\circ$ . В одній з площин проведена пряма, яка утворює з другою площиною кут  $30^\circ$ . Знайдіть кут, який утворює ця пряма з лінією перетину площин.
308. Точка  $M$  рівновіддалена від вершин правильного шестикутника  $ABCDEF$ . Кут між прямою  $MA$  та площиною  $ABC$  дорівнює  $\alpha$ . Знайдіть кут між площинами  $MAB$  і  $ABC$ .
309. Точка  $K$  рівновіддалена від вершин квадрата  $ABCD$ . Кут між прямою  $KA$  та площиною  $ABC$  дорівнює  $\beta$ . Знайдіть кут між площинами  $ABK$  і  $ADK$ .

## Площа ортогональної проєкції многокутника

310. Чи може площа ортогональної проєкції многокутника бути більшою за площу самого многокутника?
311. Знайдіть площу многокутника, якщо площа його ортогональної проєкції на деяку площину дорівнює  $32\sqrt{2}$  см<sup>2</sup>, а кут між площиною многокутника і площиною проєкції дорівнює  $45^\circ$ .
312. Площа многокутника дорівнює 24 см<sup>2</sup>, а площа його ортогональної проєкції — 16 см<sup>2</sup>. Знайдіть кут між площиною многокутника і площиною проєкції.
313. Ортогональною проєкцією трикутника  $ABC$  на деяку площину є прямокутний трикутник  $A_1B_1C_1$  такий, що катет  $A_1C_1$  дорівнює 30 см, медіана, проведена до гіпотенузи  $A_1B_1$ , — 17 см. Знайдіть кут між площинами  $ABC$  і  $A_1B_1C_1$ , якщо площа трикутника  $ABC$  дорівнює  $160\sqrt{3}$  см<sup>2</sup>.
314. Площа чотирикутника дорівнює  $56\sqrt{2}$  см<sup>2</sup>. Його ортогональною проєкцією на деяку площину є ромб, одна з діагоналей якого дорівнює 14 см. Знайдіть другу діагональ ромба, якщо кут між площиною чотирикутника і площиною ромба дорівнює  $45^\circ$ .
315. Площа трикутника  $A_1B_1C_1$  дорівнює 22,5 см<sup>2</sup>. Він є ортогональною проєкцією трикутника  $ABC$  зі сторонами 6 см, 10 см і 14 см. Знайдіть кут між площинами  $ABC$  і  $A_1B_1C_1$ .
316. Ортогональною проєкцією трапеції є рівнобічна трапеція, основи якої дорівнюють 4 см і 8 см, а діагоналі перпендикулярні. Знайдіть площу даної трапеції, якщо кут між її площиною і площиною проєкції дорівнює  $60^\circ$ .

## Варіант 3

## Систематизація та узагальнення фактів і методів планіметрії

- Кути  $AOB$  і  $AOC$  рівні між собою, а точки  $B$ ,  $O$  і  $C$  лежать на одній прямій. Доведіть, що кути  $AOB$  і  $AOC$  прями.
- Доведіть рівність гострокутних трикутників за висотою та кутами, які вона утворює зі сторонами кута, з вершини якого її проведено.
- Доведіть рівність рівнобедрених трикутників за висотою, проведеною до бічної сторони, та кутом, який вона утворює з основою.
- Доведіть рівність трикутників за двома сторонами та медіаною, проведеною до третьої сторони.
- Доведіть від супротивного, що коли два промені ділять розгорнутий кут на три кути, то серед цих кутів хоча б один не більший за  $60^\circ$ .
- Доведіть від супротивного, що коли різниця двох кутів дорівнює  $3^\circ$ , то вони не можуть бути вертикальними.
- Пряма  $s$  паралельна стороні  $CD$  трикутника  $CDE$ . Чи може пряма  $s$  бути паралельною сторонам  $CE$  і  $DE$ ? Відповідь обґрунтуйте.
- Доведіть від супротивного, що якщо прями  $a$  та  $b$  паралельні і пряма  $c$  не перетинає пряму  $a$ , то вона не перетинає й пряму  $b$ .
- На рисунку 92  $CE = EK$ ,  $PM \parallel KE$ . Доведіть, що  $CM = PM$ .
- Відрізки  $DH$  і  $DK$  — висота і бісектриса трикутника  $DME$  відповідно,  $\angle DME = 123^\circ$ ,  $\angle DEM = 19^\circ$ . Знайдіть кут  $HDK$ .
- У трикутнику  $ABC$   $\angle C = 126^\circ$ , відрізки  $AD$  і  $AN$  — висота і бісектриса трикутника відповідно,  $\angle DAN = 48^\circ$ . Знайдіть невідомі кути трикутника  $ABC$ .
- Різниця між гострими кутами прямокутного трикутника дорівнює  $38^\circ$ . Знайдіть кут між бісектрисою і висотою, проведеними з вершини прямого кута.
- У чотирикутнику  $ABCD$  діагоналі  $AC$  і  $BD$  перпендикулярні. Точки  $M$ ,  $F$ ,  $K$  і  $P$  — середини сторін  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  і  $DA$  відповідно. Доведіть, що  $MK = FP$ .
- Визначте вид чотирикутника, вершинами якого є середини сторін:
  - квадрата;
  - чотирикутника з перпендикулярними діагоналями.

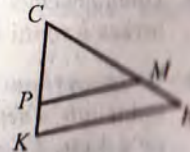


Рис. 92

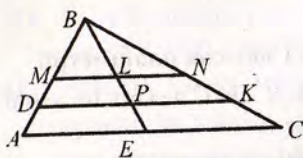


Рис. 93

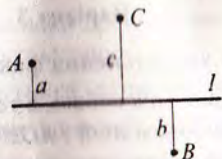


Рис. 94

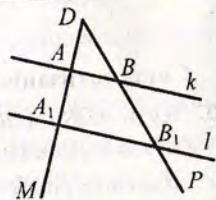


Рис. 95

15. Відрізок  $BE$  — медіана трикутника  $ABC$ ,  $\angle ABC = 90^\circ$ ,  $AC = 24$  см (рис. 93). Відомо, що  $MN \parallel AC$ ,  $DK \parallel AC$ ,  $BM = MA$ ,  $MD = DA$ . Знайдіть  $LP$ .
16. Відстані від точок  $A$ ,  $B$  і  $C$  до прямої  $l$  (рис. 94) дорівнюють відповідно  $a$ ,  $b$  і  $c$  ( $a < b < c$ ). Відомо, що середини відрізків  $AB$  і  $BC$  рівновіддалені від прямої  $l$ . Доведіть, що  $2b = a + c$ .
17. Паралельні прямі  $k$  і  $l$  перетинають сторони кута  $MDP$  (рис. 95). Знайдіть довжину відрізка  $AA_1$ , якщо  $DA = 8$  см,  $BB_1 = 9$  см,  $AA_1 = 2DB$ .
18. Продовження бічних сторін  $AB$  і  $CD$  трапеції  $ABCD$  перетинаються в точці  $M$ ,  $AM = 20$  см. Знайдіть  $AB$ , якщо  $DC : CM = 3 : 2$ .
19. У трикутник  $ABC$  вписано ромб  $DKFC$  так, що кут  $C$  у них спільний, а вершина  $K$  належить стороні  $AB$ . Сторона ромба дорівнює 4 см,  $BF = 3$  см. Знайдіть  $AC$ .
20. Основи трапеції дорівнюють 6 см і 14 см, а діагоналі — 15 см і 20 см. Знайдіть відрізки, на які точка перетину діагоналей поділяє кожну діагональ.
21. У прямокутному трикутнику  $ABC$  ( $\angle B = 90^\circ$ )  $AC = 52$  см,  $AB = 20$  см. Знайдіть медіану  $AM$  трикутника.
22. У гострокутному трикутнику  $ABC$  відомо, що  $AB = 17$  см,  $BC = 25$  см, а висота  $BD$  поділяє сторону  $AC$  на відрізки  $AD$  і  $DC$  так, що  $AD : DC = 2 : 5$ . Знайдіть  $AC$ .
23. З точки до прямої проведено дві похилі. Одна з них дорівнює 22 см і утворює з прямою кут  $45^\circ$ . Знайдіть довжину другої похилої, якщо її проекція на цю пряму дорівнює  $\sqrt{82}$  см.

24. З точки до прямої проведено дві похилі, проекції яких на цю пряму дорівнюють 5 см і 9 см. Знайдіть довжини похилих, якщо їх сума дорівнює 28 см.
25. З точки до прямої проведено дві похилі, довжини яких дорівнюють 15 см і 20 см, а довжини їх проекцій на цю пряму відносяться як 9 : 16. Знайдіть відстань від точки до даної прямої.
26. Бісектриса гострого кута прямокутного трикутника поділяє катет на відрізки завдовжки 25 см і 20 см. Знайдіть сторони трикутника.
27. Бісектриса кута при основі рівнобедреного трикутника поділяє висоту, проведену до основи, на відрізки завдовжки 6 см і 10 см. Знайдіть сторони трикутника.
28. У рівнобічній трапеції  $ABCD$  відомо, що  $AB = CD = 7$  см,  $BC = 2$  см,  $AD = 8$  см. Знайдіть синус і косинус кута  $CAD$ .
29. З точки, що знаходиться на відстані 16 см від прямої, проведено до неї дві похилі, які утворюють з прямою кути  $30^\circ$  і  $60^\circ$ . Знайдіть довжини похилих і їх проекцій на пряму.
30. З точки, що знаходиться на відстані 20 см від прямої, проведено до неї дві похилі, які утворюють з прямою кути  $60^\circ$  і  $45^\circ$ . Знайдіть відстань між основами похилих. Скільки розв'язків має задача?
31. Знайдіть площу рівнобедреного трикутника, основа якого дорівнює 16 см, а бічна сторона — 10 см.
32. Катети прямокутного трикутника дорівнюють 8 см і 15 см. Знайдіть висоту трикутника, проведену до гіпотенузи.
33. Знайдіть площу трикутника, дві сторони якого дорівнюють 6 см і 5 см, а кут між ними дорівнює: 1)  $60^\circ$ ; 2)  $135^\circ$ .
34. Знайдіть площу трикутника, сторони якого дорівнюють 3 см, 7 см і 8 см.
35. Бісектриса трикутника ділить його сторону на відрізки завдовжки 6 см і 10 см. Знайдіть площу трикутника, якщо більша з двох інших сторін дорівнює 25 см.
36. Одна сторона трикутника на 4 см менша від другої, а кут між ними дорівнює  $120^\circ$ . Знайдіть периметр трикутника, якщо третя його сторона дорівнює  $\sqrt{79}$  см.
37. Дві сторони трикутника відносяться як  $3\sqrt{2} : 7$ , а кут між ними дорівнює  $45^\circ$ . Знайдіть ці сторони, якщо третя сторона трикутника дорівнює 30 см.

38. У трикутнику  $ABC$  відомо, що  $AC = b$ ,  $\angle A = \alpha$ ,  $\angle B = \beta$ . Знайдіть сторони  $AB$  і  $BC$ .
39. Бісектриса прямокутного трикутника, проведена з вершини його прямого кута, дорівнює  $l$ , а гострий кут дорівнює  $\alpha$ . Знайдіть катети трикутника.
40. Бісектриси кутів  $A$  і  $D$  паралелограма  $ABCD$  перетинаються в точці, яка лежить на стороні  $BC$ . Знайдіть сторони паралелограма, якщо його периметр дорівнює 30 см.
41. Знайдіть площу паралелограма, сторони якого дорівнюють 25 см і 7 см, а одна з діагоналей перпендикулярна до його сторони.
42. Знайдіть площу ромба, якщо його сторона дорівнює 20 см, а різниця діагоналей — 8 см.
43. Перпендикуляр, проведений з точки перетину діагоналей ромба до його сторони, поділяє її на відрізки завдовжки 16 см і 25 см. Знайдіть площу ромба.
44. Знайдіть площу паралелограма, сторони якого дорівнюють 8 см і 14 см, а кут між ними —  $45^\circ$ .
45. Висоти паралелограма дорівнюють 14 см і 12 см, а кут між ними —  $45^\circ$ . Знайдіть площу паралелограма.
46. Діагональ рівнобічної трапеції утворює з бічною стороною прямий кут. Відомо, що бічна сторона вдвічі менша від більшої основи. Знайдіть кути трапеції.
47. У трапеції  $ABCD$  ( $AB = CD$ ) кут  $B$  — тупий, його бісектриса перетинає основу  $AD$  у точці  $K$ ,  $BK = AB = 13$  см. Знайдіть різницю основ трапеції.
48. У прямокутній трапеції  $ABCD$  ( $BC \parallel AD$ ) діагональ  $AC$  дорівнює 14 см, перпендикулярна до бічної сторони  $CD$  і поділяє кут  $A$  у відношенні 2 : 1, рахуючи від більшої основи. Знайдіть середню лінію трапеції.
49. Знайдіть площу рівнобічної трапеції, менша основа якої дорівнює 7 см, бічна сторона — 10 см, а кут при більшій основі —  $60^\circ$ .
50. Знайдіть площу рівнобічної трапеції, основи якої дорівнюють 4 см і 10 см, а діагоналі ділять її тупі кути навпіл.
51. Навколо трикутника  $ABC$  описано коло з центром у точці  $O$ . Знайдіть кут  $AOB$ , якщо: 1)  $\angle C = 54^\circ$ ; 2)  $\angle C = 136^\circ$ .

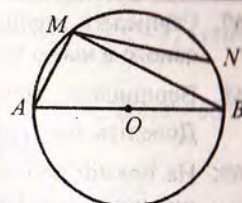


Рис. 96

52. Знайдіть кути рівнобедреного трикутника, вписаного в коло, основа якого стягує дугу, градусна міра якої дорівнює  $100^\circ$ .
53. Точки  $M$  і  $N$  кола лежать по одну сторону від діаметра  $AB$  (рис. 96). Знайдіть кут  $BMN$ , якщо  $\angle AMN = 110^\circ$ .
54. Три кути чотирикутника, вписаного в коло, взяті у порядку слідування, відносяться як 4 : 8 : 11. Знайдіть кути чотирикутника.
55. Бічні сторони трапеції, у яку можна вписати коло, дорівнюють 5 см і 11 см. Знайдіть периметр трапеції.
56. Точка дотику кола, вписаного в рівнобічну трапецію, поділяє її бічну сторону на відрізки завдовжки 9 см і 16 см. Знайдіть площу трапеції.
57. У трикутнику  $ABC$  відомо, що  $AC = 5\sqrt{2}$  см,  $\angle B = 45^\circ$ . Знайдіть радіус кола, описаного навколо цього трикутника.
58. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 70 см, а бічна сторона — 37 см. Знайдіть радіус кола, описаного навколо трикутника.
59. Довжина дуги кола дорівнює 20 см, а її градусна міра —  $15^\circ$ . Знайдіть радіус кола.
60. Довжина кола, радіус якого 12 см, дорівнює довжині дуги другого кола, яка містить  $135^\circ$ . Знайдіть радіус другого кола.
61. Площа сектора становить  $\frac{9}{20}$  площі круга. Знайдіть градусну міру центрального кута, який відповідає даному сектору.
62. Сторони трикутника дорівнюють 20 см, 34 см і 42 см. Знайдіть відношення площ описаного та вписаного у цей трикутник кругів.
63. Сторони двох правильних шестикутників відносяться як 3 : 5, а площа меншого з них дорівнює  $72 \text{ см}^2$ . Знайдіть площу більшого шестикутника.
64. Сторона правильного трикутника дорівнює 6 см. Знайдіть радіуси вписаного та описаного навколо нього кіл.
65. Радіус кола, вписаного в квадрат, дорівнює 8 см. Знайдіть сторону квадрата і радіус описаного навколо нього кола.
66. Радіус кола, описаного навколо правильного шестикутника, дорівнює  $5\sqrt{3}$  см. Знайдіть сторону шестикутника і радіус вписаного в нього кола.

67. Обчисліть площу правильного шестикутника, якщо радіус вписаного в нього кола дорівнює 4 см.
68. Вершинами трикутника є точки  $A(-3; 1)$ ,  $B(2; -5)$ ,  $C(3; 6)$ . Доведіть, що трикутник  $ABC$  — рівнобедрений.
69. На прямій, що містить бісектриси першого і третього координатних кутів, знайдіть точку, рівновіддалену від точок  $A(1; 1)$  і  $B(3; 5)$ .
70. Складіть рівняння кола, радіусом якого є відрізок  $MN$ , якщо  $M(-3; 1)$ ,  $N(1; 6)$ . Скільки розв'язків має задача?

71. Чотирикутник  $ABCD$  — прямокутник (рис. 97). Укажіть вектор, рівний вектору:

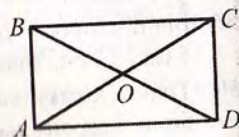


Рис. 97

- 1)  $\overline{AB}$ ; 2)  $\overline{BA}$ ; 3)  $\overline{DA}$ ; 4)  $\overline{OC}$ ; 5)  $\overline{OA}$ ; 6)  $\overline{BO}$ .
72. Чотирикутник  $ABCD$  — паралелограм. Знайдіть:
- 1)  $\overline{BA} - \overline{BC} + \overline{AD}$ ; 2)  $\overline{BC} + \overline{BA} + \overline{DB}$ ; 3)  $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CB} - \overline{DA}$ .
73. Діагоналі паралелограма  $ABCD$  перетинаються в точці  $O$  (рис. 98). Виразіть вектори  $\overline{BC}$  і  $\overline{DC}$  через вектори  $\overline{AO} = \vec{a}$  і  $\overline{OB} = \vec{b}$ .
74. Дано точки  $A(-2; 3)$  і  $B(5; 0)$ . Знайдіть координати точки  $C$  такої, що  $\overline{BA} + \overline{CA} = \vec{0}$ .
75. Знайдіть модуль вектора  $\vec{m} = 5\vec{a} - 3\vec{b}$ , де  $\vec{a}(5; 6)$ ;  $\vec{b}(1; -4)$ .
76. На сторонах  $AD$  і  $CD$  паралелограма  $ABCD$  взято точки  $P$  і  $Q$  відповідно, причому  $AP = \frac{1}{4}AD$ ,  $CQ = \frac{2}{7}CD$  (рис. 99). Виразіть вектори  $\overline{BP}$  і  $\overline{BQ}$  через вектори  $\overline{AB} = \vec{m}$  і  $\overline{BC} = \vec{n}$ .
77. На сторонах  $AB$  і  $AC$  трикутника  $ABC$  взято такі точки  $K$  і  $M$  відповідно, що  $AK:KB = 2:5$ ,  $AM:MC = 4:3$ . Виразіть вектори  $\overline{AK}$ ,  $\overline{AS}$ ,  $\overline{BC}$ ,  $\overline{CK}$  і  $\overline{MB}$  через вектори  $\overline{AK} = \vec{a}$  і  $\overline{CM} = \vec{c}$ .

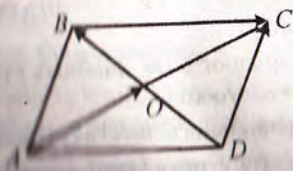


Рис. 98

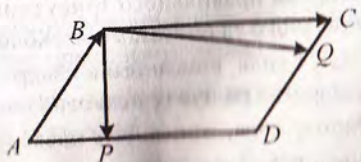


Рис. 99

78. Знайдіть значення  $m$ , при якому вектори  $\vec{a}(m; 3)$  і  $\vec{b}(5; -8)$  колінеарні.
79. Діагоналі ромба  $ABCD$  перетинаються в точці  $O$ ,  $\angle BAD = 60^\circ$ ,  $AD = 10$  см. Знайдіть скалярний добуток векторів:
- 1)  $\overline{CB}$  і  $\overline{CD}$ ; 3)  $\overline{AB}$  і  $\overline{BC}$ ; 5)  $\overline{BO}$  і  $\overline{OC}$ ;  
2)  $\overline{DC}$  і  $\overline{DA}$ ; 4)  $\overline{AO}$  і  $\overline{AB}$ ; 6)  $\overline{DO}$  і  $\overline{OB}$ .
80. Знайдіть косинус кута між векторами  $\vec{a}(5; -1)$  і  $\vec{b}(2; 6)$ .
81. Дано вектори  $\vec{a}(6; -1)$  і  $\vec{b}(x; 2)$ . При якому значенні  $x$  вектори  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$  перпендикулярні?
82. Дано вектори  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ ,  $|\vec{a}| = 5$ ,  $|\vec{b}| = 4$ ,  $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 120^\circ$ . Знайдіть:
- 1)  $|\vec{a} - \vec{b}|$ ; 2)  $|\vec{a} + 4\vec{b}|$ .

### Аксиоми стереометрії та наслідки з них

83. Чи можна стверджувати, що:
- 1) існують дві точки, які не лежать на одній прямій;  
2) будь-які дві точки завжди лежать в одній площині?
84. Скільки різних площин можна провести через дві точки?
85. Чи можна стверджувати, що будь-яка пряма, яка перетинає дві сторони трикутника, лежить у площині цього трикутника?
86. Чи може пряма перетинати хорду кола, але не перетинати саме коло?
87. Чи є правильним твердження, що коли через дві прямі можна провести площину, то ці прямі перетинаються?
88. Площини  $\alpha$  і  $\beta$  перетинаються по прямій  $a$ . У площині  $\alpha$  проведено пряму  $m$ , яка перетинає пряму  $a$  в точці  $M$ . У якій точці перетинає пряма  $m$  площину  $\beta$ ?
89. Площини  $\alpha$  і  $\beta$  перетинаються по прямій  $m$ . Площина  $\gamma$ , перетинаючи пряму  $m$ , перетинає площини  $\alpha$  і  $\beta$  по прямим  $a$  і  $b$  відповідно. Доведіть, що прямі  $a$  і  $b$  перетинаються.
90. Точка  $A$  належить прямій  $a$ , а точка  $B$  — ні. Скільки площин можна провести через пряму  $a$  і точки  $A$  і  $B$ ?

91. Пряма  $a$  належить площині  $\alpha$ . Доведіть, що через пряму  $a$  можна провести площину, відмінну від площини  $\alpha$ .
92. Серед точок  $A, B, C$  і  $D$  є три, які лежать на одній прямій. Чи є правильним твердження, що через дані чотири точки проходить єдина площина?
93. Дано пряму  $a$  і точку  $A$  поза нею. Доведіть, що існує площина, яка проходить через точку  $A$  і перетинає пряму  $a$ .
94. Площини  $\alpha$  і  $\beta$  перетинаються по прямій  $a$ . Доведіть, що існує площина  $\gamma$ , яка відмінна від площини  $\alpha$  і  $\beta$  і містить пряму  $a$ .
95. Пряма  $a$  належить площині  $\alpha$ . Пряма  $b$  перетинає площину  $\alpha$  в точці, яка не належить прямій  $a$ . Доведіть, що прямі  $a$  і  $b$  не лежать в одній площині.
96. Точки  $A, B, C$  і  $D$  розміщено в просторі так, що прямі  $AB$  і  $CD$  не перетинаються. Чи впливає з цього, що зазначені точки не лежать в одній площині?
97. Прямі  $a$  і  $b$  не перетинаються. Чи можна стверджувати, що всі прямі, які перетинають прямі  $a$  і  $b$ , лежать в одній площині?
98. Прямі  $a$  і  $b$ ,  $b$  і  $c$ ,  $a$  і  $c$  перетинаються, і точки їх перетину не збігаються. Чи лежать прямі  $a, b$  і  $c$  в одній площині?
99. Точки  $A$  і  $B$  належать прямій  $a$ , точки  $D$  і  $C$  належать прямій  $b$ . Прямі  $a$  і  $b$  не лежать в одній площині. Доведіть, що прямі  $AC$  і  $BD$  не перетинаються.
100. Промені  $MA, MB, MC$  перетинають площину  $\alpha$  в точках  $A, B, C$ . Пряма  $l$  перетинає ці промені в трьох різних точках. Доведіть, що точки  $A, B, C$  лежать на одній прямій.
101. Вершина  $A$  трикутника  $ABC$  належить площині  $\alpha$ , а вершини  $B$  і  $C$  їй не належать. Пряма  $BC$  перетинає площину  $\alpha$  в точці  $D$ , а продовження медіани  $CM$  — у точці  $N$ . Доведіть, що точки  $A, D$  і  $N$  лежать на одній прямій.
102. Вершини  $A$  і  $C$  трикутника  $ABC$  належать площині  $\alpha$ , а вершина  $B$  їй не належить. У площині  $\alpha$  вибрано точку  $D$ , яка не належить прямій  $AC$ . Усередині трикутника  $ABC$  позначено точку  $O$ . Побудуйте лінію перетину площини  $BOD$  з площиною  $\alpha$ .
103. Дві сусідні вершини і точка перетину діагоналей трапеції належать площині  $\alpha$ . Чи належать площині  $\alpha$  дві інші вершини трапеції?

104. Чи можна стверджувати, що всі точки кола належать площині, якщо: 1) дві точки кола і його центр належать площині; 2) діаметр кола належить площині?
105. Кожна з двох площин  $\alpha$  і  $\beta$  проходить через точки  $A, B$  і  $C$ . Чи впливає з цього, що площини  $\alpha$  і  $\beta$  збігаються?
106. Серед даних  $n$  точок будь-які чотири належать одній площині. Доведіть, що всі  $n$  точок лежать в одній площині.
107. Основи висот трикутника належать площині  $\alpha$ . Чи належать площині  $\alpha$  вершини трикутника?
108. Вершини  $A$  і  $B$  плоского чотирикутника  $ABCD$  лежать по один бік від площини  $\alpha$ , а вершини  $C$  і  $D$  — по інший бік. Доведіть, що точки перетину діагоналей і сторін  $BC$  і  $AD$  чотирикутника з площиною  $\alpha$  лежать на одній прямій.

#### Побудова перерізів многогранників

109. Побудуйте переріз прямокутного паралелепіпеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  площиною, яка проходить через точки: 1)  $B, D$  і  $C_1$ ; 2)  $A, C$  і середину ребра  $DD_1$ .
110. Точки  $M$  і  $K$  — середини ребер  $AC$  і  $BC$  піраміди  $SABC$  відповідно. Побудуйте переріз піраміди площиною  $SMK$ .
111. У піраміді  $SABC$  відомо, що  $SB = 26$  см,  $SC = 28$  см,  $BC = 30$  см. Побудуйте переріз піраміди площиною, що проходить через середини ребер  $SA, AC$  і  $AB$ , та обчисліть його периметр і площу.
112. Побудуйте точку перетину прямої з площиною нижньої основи трикутної призми, якщо ця пряма проходить через дві точки, які належать: 1) двом бічним ребрам; 2) бічному ребру і ребру верхньої основи, яке не має спільних точок з даним бічним ребром; 3) бічному ребру і бічній грані, якій це ребро не належить; 4) бічній грані і ребру верхньої основи, яке цій грані не належить; 5) двом бічним граням.
113. Побудуйте переріз трикутної піраміди  $SABC$  (рис. 100) площиною, що проходить через точки  $D, E$  і  $F$ , які належать ребрам  $SA, SB$  і  $BC$  відповідно.
114. Побудуйте переріз прямої призми  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  площиною, яка проходить через точку  $A$  і точки  $M$  і  $K$ , які належать відповідно ребрам  $BB_1$  і  $DD_1$ .

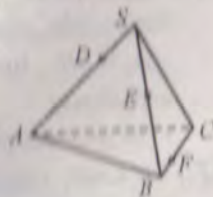


Рис. 100

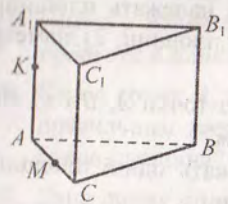


Рис. 101

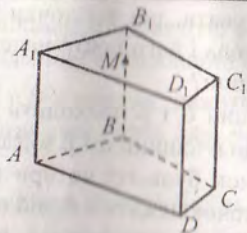


Рис. 102

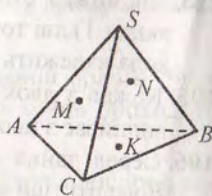


Рис. 103

115. Побудуйте переріз прямої призми  $ABCA_1B_1C_1$  (рис. 101) площиною, що проходить через точку  $B_1$  і точки  $M$  і  $K$ , які лежать на ребрах  $AC$  і  $AA_1$  відповідно.
116. Побудуйте переріз прямої призми  $ABCD A_1B_1C_1D_1$  (рис. 102) площиною, яка проходить через вершини  $A$  і  $D_1$  і точку  $M$  на ребрі  $BB_1$ .
117. У трикутній піраміді  $SABC$  (рис. 103) точка  $M$  належить грані  $ASC$ , точка  $N$  — грані  $ASB$ , точка  $K$  — грані  $CSB$ . Побудуйте переріз піраміди площиною, яка проходить через точки  $M, N$  і  $K$ .

#### Паралельні прямі в просторі. Мимобіжні прямі

118. Прямі  $a$  і  $b$  паралельні, пряма  $c$  не перетинає пряму  $a$ . Чи можна стверджувати, що пряма  $c$  не перетинає пряму  $b$ :
- 1) на площині;
  - 2) у просторі?
119. Точки  $A$  і  $B$  належать прямій  $a$ , точки  $C$  і  $D$  — прямій  $b$ , причому  $a \parallel b$ . Доведіть, що прямі  $BC$  і  $AD$  не є мимобіжними.
120. Прямі  $AB$  і  $CD$  мимобіжні. Доведіть, що прямі  $AC$  і  $BD$  також мимобіжні.
121. Через точки  $A$  і  $B$  прямої  $l$  проведено перпендикулярні до неї прямі. На них позначено відповідно такі точки  $A_1$  і  $B_1$ , що  $AA_1 = BB_1$ . Чи є правильним твердження, що прямі  $AB$  і  $A_1B_1$  паралельні:
- 1) на площині;
  - 2) у просторі?
122. На одній з двох паралельних прямих вибрали точку і через неї провели пряму, яка перетинає іншу. Доведіть, що ці три прямі лежать в одній площині.
123. Чи може кожна з двох паралельних прямих перетинати кожен з двох мимобіжних прямих?

124. Прямі  $a$  і  $b$  та прямі  $b$  і  $c$  перетинаються. Чи є правильним твердження, що прямі  $a$  і  $c$  також перетинаються?
125. Точка  $D$  не належить площині трикутника  $ABC$ , точки  $M, N, P, Q$  — середини відрізків  $AC, DC, DB, AB$  відповідно. Доведіть, що  $MN \parallel PQ$ .
126. Дві прямі  $a$  і  $b$ , що перетинаються, відповідно паралельні прямим  $m$  і  $n$ . Чи є правильним твердження, що прямі  $m$  і  $n$  перетинаються?
127. Через вершину  $B$  трикутника  $ABC$  проведено пряму  $b$ , яка не належить площині трикутника. Доведіть, що пряма  $b$  і пряма, яка містить медіану трикутника  $ABC$ , проведену з вершини  $A$ , — мимобіжні.
128. Через прямі  $a$  і  $b$ , що перетинаються, проведено дві площини, які перетинаються по прямій  $c$ . Чи може яка-небудь з прямих  $a$  і  $b$  бути паралельною прямій  $c$ ?
129. Точки  $A, B, C$  і  $D$  не лежать в одній площині. Доведіть, що відрізки, які з'єднують середини відрізків  $AB$  і  $CD, AD$  і  $BC, AC$  і  $BD$ , перетинаються в одній точці і точкою перетину діляться навпіл.
130. Трикутник  $ABC$  не перетинає площину  $\alpha$  (рис. 104). Через його вершини, середини  $M$  і  $N$  сторін  $AC$  і  $AB$  відповідно і середину  $K$  відрізка  $MN$  проведено паралельні прямі, які перетинають площину  $\alpha$  в точках  $A_1, B_1, C_1, M_1, N_1, K_1$  відповідно. Знайдіть довжину відрізка  $KK_1$ , якщо  $AA_1 = 7$  см,  $BB_1 = 9$  см,  $CC_1 = 15$  см.

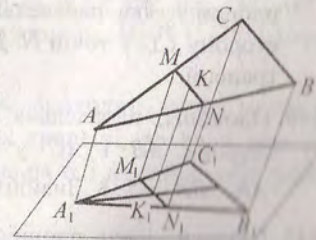


Рис. 104

#### Паралельність прямої і площини

131. Пряма  $a$  паралельна прямій  $b$ , яка лежить у площині  $\alpha$ . Чи є правильним твердження, що пряма  $a$  паралельна площині  $\alpha$ ?
132. Прямі  $a$  і  $b$  паралельні площині  $\alpha$ . Чи є правильним твердження, що  $a \parallel b$ ?

133. Прямі  $a$  і  $b$  перетинаються. Як може бути розміщена пряма  $b$  відносно площини  $\alpha$ , якщо пряма  $a$ :

- 1) належить площині  $\alpha$ ;
- 2) перетинає площину  $\alpha$ ;
- 3) паралельна площині  $\alpha$ ?

134. Точка  $M$  не належить площині паралелограма  $ABCD$ . Доведіть, що пряма  $AD$  паралельна площині  $MCB$ .

135. Точки  $A, B, C$  і  $D$  не лежать в одній площині. Точка  $M$  — середина відрізка  $AD$ , точка  $K$  — середина відрізка  $CD$ . Доведіть, що пряма  $AC$  паралельна площині  $BKM$ .

136. Пряма  $a$  перетинає площину  $\alpha$ , пряма  $b$  паралельна прямій  $a$ . Доведіть, що пряма  $b$  перетинає площину  $\alpha$ .

137. Прямі  $a$  і  $b$  мимобіжні. Чи існує площина, паралельна кожній з даних мимобіжних прямих?

138. Площини  $\alpha$  і  $\beta$  перетинаються по прямій  $c$ . У площині  $\alpha$  проведено пряму  $a$ , яка паралельна прямій  $c$ . Через пряму  $a$  проведено площину  $\gamma$ , яка перетинає площину  $\beta$  по прямій  $b$ . Доведіть, що прямі  $b$  і  $c$  паралельні.

139. Через середину  $M$  бічної сторони  $AB$  трапеції  $ABCD$  проведено площину, яка паралельна основам  $BC$  і  $AD$  та перетинає бічну сторону  $CD$  у точці  $N$ . Доведіть, що відрізок  $MN$  — середня лінія трапеції.

140. Площина, паралельна стороні  $BC$  трикутника  $ABC$ , перетинає сторони  $AB$  і  $AC$  у точках  $B_1$  і  $C_1$  відповідно, причому  $AB_1 : BB_1 = 5 : 3$ . Знайдіть  $B_1C_1$ , якщо  $BC = 6$  см.

141. Скільки існує площин, які проходять через одну з двох даних мимобіжних прямих і паралельні другій?

142. Відрізок  $MN$  — середня лінія трикутника  $ABC$  (рис. 105). Поза площиною трикутника вибрано точку  $D$ . На відрізку  $MD$  позначено точку  $E$  так, що  $ME : ED = 5 : 2$ . Побудуйте точку  $F$  перетину площини  $BEC$  і прямої  $DN$  і знайдіть довжину відрізка  $EF$ , якщо  $BC = 30$  см.

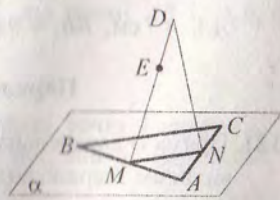


Рис. 105

143. Побудуйте переріз трикутної піраміди  $SABC$  площиною, яка проходить через вершину  $B$ , точку на ребрі  $SA$  і паралельна прямій  $AC$ .

144. Побудуйте переріз піраміди  $SABC$  (рис. 106) площиною, яка проходить через точку  $D$  на ребрі  $BC$  і паралельна прямим  $AC$  і  $SB$ .

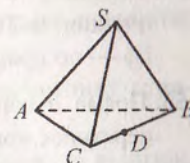


Рис. 106

145. Побудуйте переріз піраміди  $SABC$  площиною, що проходить через точки  $D$  і  $E$ , які належать відповідно ребрам  $SA$  і  $SC$ , та паралельна прямій  $BC$ .

**Паралельні площини. Властивості паралельних площин**

146. Дві прямі площини  $\alpha$  паралельні площині  $\beta$ . Чи впливає з цього, що площини  $\alpha$  і  $\beta$  паралельні?

147. Кожна з двох даних площин паралельна кожній з двох даних прямих. Чи паралельні дані площини?

148. Бічні сторони трапеції паралельні площині  $\alpha$ . Чи паралельні площина трапеції і площина  $\alpha$ ?

149. Поза площиною трикутника  $ABC$  лежить точка  $D$ . На відрізках  $AB, AC, AD$  вибрано відповідно точки  $M, N$  і  $P$  так, що  $AM : MB = AN : NC = AP : PD$ . Доведіть, що площини  $MNP$  і  $DBC$  паралельні.

150. Доведіть, що коли чотири прямі, які проходять через точку  $S$ , перетинають площину  $\alpha$  у вершинах трапеції, то вони перетинають будь-яку площину, яка паралельна  $\alpha$  і не проходить через точку  $S$ , також у вершинах трапеції.

151. Одна з двох паралельних прямих перетинає площини  $\alpha$  і  $\beta$  у точках  $A$  і  $A_1$  відповідно, а друга — відповідно в точках  $B$  і  $B_1$ ,  $AB = A_1B_1$ . Чи можна стверджувати, що площини  $\alpha$  і  $\beta$  паралельні?

152. Через точку  $C$ , що не належить двом паралельним площинам  $\alpha$  і  $\beta$ , проведено два промені, один з яких перетинає площини  $\alpha$  і  $\beta$  у точках  $A_1$  і  $B_1$  відповідно, а другий — відповідно в точках  $A_2$  і  $B_2$ . Відомо, що  $CA_1 = 4$  см,  $B_1B_2 = 9$  см,  $A_1A_2 = CB_1$ . Знайдіть  $A_1A_2$  і  $A_1B_1$ .



153. Чи можна через бічні сторони трапеції провести паралельні площини?
154. Площина  $\alpha$  паралельна площині  $\beta$ , площина  $\gamma$  паралельна площині  $\phi$ . Площини  $\alpha$  і  $\gamma$  перетинаються по прямої  $a$ , площини  $\beta$  і  $\phi$  — по прямої  $b$ . Доведіть, що  $a \parallel b$ .
155. Пряма  $a$  паралельна площині  $\alpha$ . Доведіть, що коли площина  $\beta$  перетинає пряму  $a$ , то вона перетинає і площину  $\alpha$ .
156. Пряма  $a$  паралельна площині  $\alpha$ . Площина  $\alpha$  перетинає площину  $\beta$ . Чи є правильним твердження, що пряма  $a$  перетинає площину  $\beta$ ?
157. Доведіть, що всі прямі, які проходять через дану точку паралельно даній площині, лежать в одній площині.
158. Ребро куба  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  дорівнює 4 см. На відрізку  $AC$  позначено точку  $M$  так, що  $AM : MC = 3 : 1$ . Побудуйте переріз куба площиною, яка проходить через точку  $M$  і паралельна площині  $BC_1 D$ , та обчисліть периметр перерізу.
159. Побудуйте переріз прямокутного паралелепіпеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  площиною, що проходить через точки  $K, E$  і  $F$ , які належать відповідно ребрам  $AD, AA_1$  і  $C_1 D_1$ .

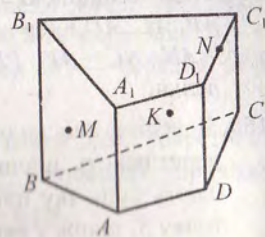


Рис. 107

160. Побудуйте переріз прямої призми  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  площиною, що проходить через точки  $E, F$  і  $K$ , які належать ребрам  $AA_1, BC$  і  $C_1 D_1$  відповідно.
161. Побудуйте переріз прямої призми  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  (рис. 107) площиною, що проходить через точки  $M$  і  $K$ , які належать граням  $AA_1 B_1 B$  і  $BB_1 C_1 C$  відповідно, і точку  $N$  на ребрі  $C_1 D_1$ .

### Паралельне проектування. Зображення фігур у стереометрії

162. Які геометричні фігури можуть бути паралельними проекціями: 1) променя; 2) двох мимобіжних прямих; 3) трапеції?
163. Чи можуть дві мимобіжні прямі проектуватися: 1) у дві прямі, що перетинаються; 2) у паралельні прямі; 3) в одну пряму; 4) у пряму і точку, що належить цій прямій; 5) у дві точки?

164. Як мають бути розміщені відносно напрямку проектування дві мимобіжні прямі, щоб вони проектувались у пряму і точку, що їй не належить?
165. Чи можна при паралельному проектуванні квадрата отримати: 1) ромб; 2) прямокутник?
166. Чи можна при паралельному проектуванні прямокутника отримати чотирикутник з кутами  $90^\circ, 90^\circ, 40^\circ, 140^\circ$ ?
167. Чи може паралельна проекція відрізка бути більшою за відрізок, який проектується?
168. Чи може паралельною проекцією прямої бути: 1) відрізок; 2) промінь; 3) точка?
169. Чи може паралельною проекцією кута бути: 1) відрізок; 2) рівний йому кут?
170. За яких умов прямокутник проектується в прямокутник?
171. Паралелограм  $ABCD$  — зображення квадрата (рис. 108). Побудуйте зображення перпендикуляра, проведеного з точки перетину діагоналей квадрата до його сторони.
172. Трикутник  $ABC$  є паралельною проекцією рівностороннього трикутника (рис. 109). Побудуйте зображення висоти трикутника, проведеної з вершини  $B$ , і перпендикуляра, опущеного з точки  $F$  на сторону  $AC$ .
173. Трикутник  $A_1 B_1 C_1$  (рис. 110) — зображення прямокутного трикутника  $ABC$ , у якого  $\angle C = 90^\circ, AC : CB = 3 : 4$ . Побудуйте зображення центра вписаного кола трикутника  $ABC$ .
174. Точки  $A_1, B_1, O_1$ , що не лежать на одній прямій, є паралельними проекціями двох вершин і точки перетину діагоналей паралелограма. Побудуйте зображення паралелограма. Скільки розв'язків має задача?
175. Паралелограм  $ABCD$  є паралельною проекцією квадрата, на сторонах якого зовні як на гіпотенузах побудовано рівнобедрені прямокутні трикутники (трикутники лежать у площині квадрата). Побудуйте паралельні проекції цих трикутників.

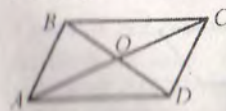


Рис. 108

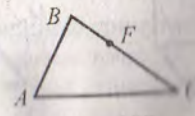


Рис. 109

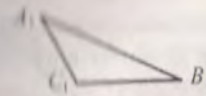


Рис. 110

176. На зображенні кола з центром  $O$  (рис. 111) побудуйте зображення двох перпендикулярних діаметрів.



Рис. 111

177. Дано паралельну проекцію кола з центром у точці  $O$ . Побудуйте паралельну проекцію вписаного в нього правильного шестикутника.

178. Точки  $A, B, O$ , що не лежать на одній прямій, є паралельними проекціями двох вершин правильного трикутника і його центра. Побудуйте зображення правильного трикутника. Скільки розв'язків має задача?

179. На зображенні ромба побудуйте зображення його висоти, проведеної з вершини тупого кута, якщо одна з діагоналей ромба дорівнює його стороні.

180. На зображенні ромба  $ABCD$  побудуйте зображення висоти, проведеної з вершини  $A$ , якщо  $\angle ABC = 120^\circ$ .

181. Точки  $A_1, B_1$  і  $C_1$  — паралельні проекції точок  $A, B$  і  $C$  на площину  $\alpha$  (рис. 112). Побудуйте проекцію на площину  $\alpha$  точки  $M$ , яка лежить у площині  $ABC$ .

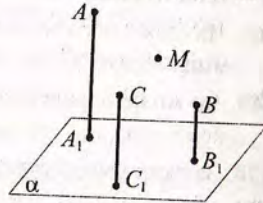


Рис. 112

### Перпендикулярність прямої і площини

182. Чи є правильним твердження, що пряма, перпендикулярна до двох прямих площини, перпендикулярна до цієї площини?

183. Через вершину  $C$  прямокутника  $ABCD$  проведено пряму  $MC$ , перпендикулярну до прямих  $BC$  і  $AC$ . Доведіть, що  $MC \perp CD$ .

184. Як розміщена відносно площини трикутника пряма, перпендикулярна до двох його сторін?

185. На рисунку 113 зображено квадрат  $ABCD$ ,  $MC \perp BC$ . Укажіть пряму і площину, які перпендикулярні між собою.

186. Чотирикутник  $ABCD$  — прямокутник (рис. 114). Пряма  $MA$  перпендикулярна до площини  $ABC$ . Доведіть, що  $MD \perp CD$ .

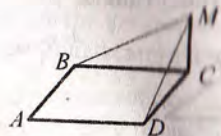


Рис. 113

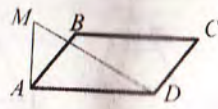


Рис. 114

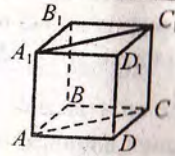


Рис. 115

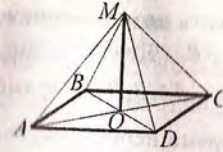


Рис. 116

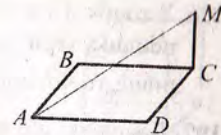


Рис. 117

187. На рисунку 115 зображено куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Доведіть, що чотирикутник  $AA_1 C_1 C$  — прямокутник.

188. Через одну сторону паралелограма проходить площина, перпендикулярна до сусідньої сторони. Доведіть, що цей паралелограм — прямокутник.

189. Точка  $M$  лежить поза площиною прямокутника  $ABCD$  (рис. 116),  $MA = MB = MC = MD$ ,  $O$  — точка перетину діагоналей прямокутника. Доведіть, що пряма  $MO$  перпендикулярна до площини  $ABC$ .

190. Точка  $M$  лежить поза площиною квадрата  $ABCD$  і рівновіддалена від його вершин. Доведіть, що пряма  $AC$  перпендикулярна до площини  $BMD$ .

191. Пряма  $AO$  перпендикулярна до площини кола з центром у точці  $O$ . Точка  $B$  лежить на колі. Знайдіть відстань від точки  $A$  до площини кола, якщо радіус кола дорівнює 6 см,  $\angle ABO = 45^\circ$ .

192. Пряма  $CM$  перпендикулярна до площини прямокутника  $ABCD$  (рис. 117). Знайдіть  $MC$ , якщо  $AB = 3$  см,  $AD = 4$  см,  $AM = 13$  см.

193. Через вершину  $B$  рівнобедреного трикутника  $ABC$  ( $AB = BC$ ) до його площини проведено перпендикуляр  $MB$  (рис. 118). Точку  $M$  з'єднано з серединою  $F$  сторони  $AC$ . Знайдіть довжину відрізка  $MF$ , якщо  $MB = 10$  см,  $\angle BMC = 60^\circ$ ,  $\angle FMC = 45^\circ$ .

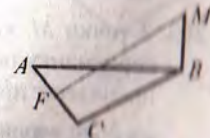


Рис. 118

194. Сторона правильного трикутника  $ABC$  дорівнює 8 см. Через центр  $O$  трикутника  $ABC$  проведено перпендикуляр  $SO$  до його площини. Знайдіть довжину відрізка  $SO$ , якщо  $\angle SAO = 30^\circ$ .

195. Точка  $M$  лежить поза площиною трикутника  $ABC$  і рівновіддалена від його вершин. Як розміщена точка  $O$  — проекція точки  $M$  на площину  $ABC$  — відносно трикутника  $ABC$ , якщо цей трикутник тупокутний?

196. З точок  $A$  і  $B$ , які лежать поза площиною  $\alpha$ , проведено до неї перпендикуляри  $AA_1$  і  $BB_1$ . Доведіть, що коли відрізки  $AB$  і  $A_1B_1$  рівні, то чотирикутник  $AA_1B_1B$  — прямокутник.
197. Доведіть, що коли пряма перпендикулярна до двох площин, то ці площини паралельні.
198. Через вершину  $B$  ромба  $ABCD$  проведено перпендикуляр  $SB$  до площини ромба. Знайдіть  $SD$ , якщо  $SB = 4$  см, сторона ромба — 3 см, а кут  $ABC$  дорівнює  $120^\circ$ .
199. У прямокутнику  $ABCD$  відомо, що  $BC = 1$  см,  $CD = \sqrt{3}$  см. Через вершину  $A$  проведено перпендикуляр  $MA$  до площини прямокутника. Знайдіть кут  $MCA$ , якщо  $MA = 2$  см.
200. У рівнобедреному трикутнику  $ABC$  відомо, що  $AB = BC = 15$  см,  $\angle ABC = 120^\circ$ . Точка  $M$  знаходиться на відстані 39 см від усіх його вершин. Знайдіть відстань від точки  $M$  до площини трикутника  $ABC$ .
201. У трикутнику  $ABC$  відомо, що  $\angle A = 48^\circ$ ,  $\angle C = 42^\circ$  (рис. 119). Через вершину  $A$  проведено перпендикуляр  $DA$  до площини трикутника. Доведіть, що  $DB \perp BC$ .
202. Точка  $S$  рівновіддалена від усіх вершин прямокутника  $ABCD$ . Знайдіть кут  $BSD$ , якщо  $AB = 3$  см,  $AD = 4$  см,  $SB = 5$  см.
203. З точки  $M$ , яка не належить площині квадрата  $ABCD$ , проведено перпендикуляр  $BM$  до його площини. Через центр  $O$  квадрата проведено пряму  $NO$  паралельно  $BM$ . Знайдіть відстань від точки  $N$  до вершин квадрата, якщо  $AB = 4\sqrt{2}$  см,  $NO = 3$  см.
204. Кінці відрізка розміщені по різні боки від площини і віддалені від неї на 5 см і 7 см. Знайдіть відстань від середини цього відрізка до площини.
205. Через вершину  $C$  прямокутника  $ABCD$  проведено пряму  $MC$  перпендикулярно до прямої  $CD$ . Доведіть, що пряма  $AB$  перпендикулярна до площини  $MCB$ .
206. Через вершини  $B$  і  $D$  трапеції  $ABCD$  ( $BC \parallel AD$ ) проведено перпендикуляри  $MB$  і  $ND$  до площини трапеції. Доведіть, що площини  $BMC$  і  $ND A$  паралельні.

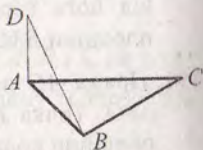


Рис. 119

## Перпендикуляр і похила

207. На рисунку 120 зображено куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Укажіть проекції відрізка  $A_1 C$  на площини граней куба.
208. З точки до площини проведено перпендикуляр довжиною 10 см і похилу. Знайдіть довжину похилої, якщо довжина її проекції дорівнює 6 см.
209. З точки до площини проведено перпендикуляр довжиною 8 см і похилу. Кут між похилою та її проекцією на площину дорівнює  $60^\circ$ . Знайдіть довжини похилої та її проекції.
210. У прямокутному трикутнику  $ABC$  ( $\angle C = 90^\circ$ ) відомо, що  $AC = 24$  см,  $BC = 10$  см. З точки  $D$  до площини трикутника проведено перпендикуляр  $AD$  такий, що  $AD = 18$  см. Знайдіть довжини похилих  $DB$  і  $DC$ .
211. З точки  $F$  до площини  $\alpha$  проведено дві похилі  $FM$  і  $FN$  та перпендикуляр  $FK$ . Знайдіть довжини похилих, якщо  $MK = 4$  см,  $\angle FMK = 30^\circ$ ,  $\angle NFK = 60^\circ$ .
212. З точки  $M$  до площини проведено дві похилі  $MB$  і  $MA$ , довжини яких відносяться як 5 : 7. Знайдіть відстань від точки  $M$  до площини, якщо проекції похилих дорівнюють 12 см і  $12\sqrt{5}$  см.
213. Дві точки знаходяться на різних відстанях від площини. З цих точок до площини проведено дві рівні похилі. Доведіть, що з проекцій цих похилих більша та, похила якої проведена з точки, розміщеної ближче до площини.
214. У чотирикутнику  $ABCD$  відомо, що  $AB = AD$ ,  $CB = CD$  (рис. 121). Пряма  $MA$  перпендикулярна до площини чотирикутника. Доведіть, що  $\angle DMC = \angle BMC$ .
215. З точки  $D$  до площини  $ABC$  проведено перпендикуляр  $DA$ ,  $DA = d$  (рис. 122). Похилі  $DB$  і  $DC$  утворюють зі своїми проекціями кути, рівні  $30^\circ$ , а їх проекції утворюють кут  $120^\circ$ . Знайдіть довжину відрізка  $BC$ .
216. Бісектриси трикутника  $ABC$  перетинаються в точці  $O$ . Пряма  $MO$  перпендикулярна до площини трикутника. Точка  $M$  рівновіддалена від вершин трикутника. Доведіть, що трикутник  $ABC$  — рівносторонній.

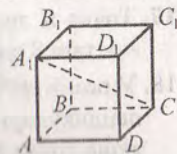


Рис. 120

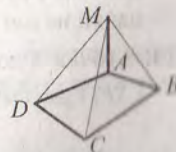


Рис. 121

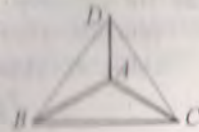


Рис. 122

217. Точка  $K$  знаходиться на відстані 17 см від вершин квадрата і на відстані 8 см від його площини. Знайдіть сторону квадрата.
218. У ромбі  $ABCD$  відомо, що  $AB = 10$  см,  $BD = 12$  см. Пряма  $MC$  перпендикулярна до площини ромба. Знайдіть довжину похилої  $MA$ , якщо точка  $M$  віддалена від площини ромба на 16 см.
219. З точки, яка не належить площині, проведено до неї дві похилі, довжини проєкцій яких дорівнюють 12 см і 16 см, а сума довжин похилих — 56 см. Знайдіть довжини похилих.
220. Два відрізки завдовжки 10 см і 17 см спираються своїми кінцями у паралельні площини. Знайдіть відстань між цими площинами, якщо сума проєкцій цих відрізків на одну з площин дорівнює 21 см.
221. З даної точки до площини проведено дві рівні похилі, кут між якими  $60^\circ$ , а їх проєкції перпендикулярні. Знайдіть довжини похилих, якщо відстань від даної точки до площини дорівнює 4 см.
222. З точки  $M$  до площини  $\alpha$  проведено дві рівні похилі  $MA$  і  $MB$  та перпендикуляр  $MO$ ,  $AB = 12$  см,  $\angle MAB = 60^\circ$ ,  $\angle ABO = 30^\circ$ . Знайдіть довжину відрізка  $MO$ .
223. Сторона ромба дорівнює 6 см, а гострий кут —  $30^\circ$ . Через вершину гострого кута проведено площину, паралельну меншій діагоналі ромба, на відстані 4 см від неї. Знайдіть проєкції діагоналей на цю площину.
224. З точки  $S$  до площини  $\alpha$  проведено перпендикуляр  $SD$  і похилі  $SK$  і  $SF$ , причому  $SD^2 = DF \cdot DK$ . Доведіть, що  $\angle FSD = \angle SKD$ .

### Теорема про три перпендикуляри

225. На рисунку 123 зображено куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Доведіть, що прямі  $B_1 O$  і  $AC$  перпендикулярні.
226. На рисунку 124 зображено рівнобедрений трикутник  $ABC$  з основою  $AC$ . Пряма  $BD$  перпендикулярна до площини трикутника,  $DM \perp AC$ . Доведіть, що точка  $M$  — середина  $AC$ .

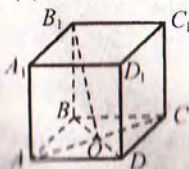


Рис. 123

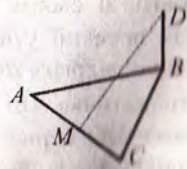


Рис. 124

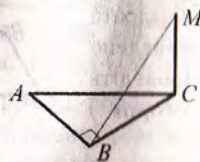


Рис. 125

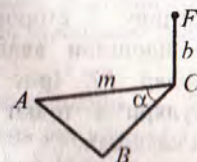


Рис. 126

227. До площини прямокутного трикутника  $ABC$  ( $\angle B = 90^\circ$ ) проведено перпендикуляр  $MC$  (рис. 125). Знайдіть відстань від точки  $M$  до прямої  $AB$ , якщо  $MC = a$ ,  $AC = b$ ,  $\angle ACB = 30^\circ$ .
228. Через вершину  $A$  ромба  $ABCD$  проведено пряму  $SA$ , перпендикулярну до площини ромба. Доведіть, що точка  $S$  рівновіддалена від прямих  $CB$  і  $CD$ .
229. Через вершину  $B$  трикутника  $ABC$  до його площини проведено перпендикуляр  $MB$ . Пряма, що проходить через точку  $M$  і середину  $AC$ , ділить кут  $AMC$  навпіл. Доведіть, що трикутник  $ABC$  — рівнобедрений.
230. Через вершину  $C$  рівнобедреного трикутника  $ABC$  до його площини проведено перпендикуляр  $FC$  (рис. 126). Знайдіть відстань від точки  $F$  до прямої  $AB$ , якщо  $AC = BC = m$ ,  $\angle ACB = \alpha$ ,  $FC = b$ .
231. Пряма  $CD$  перпендикулярна до площини прямокутного трикутника  $ABC$  ( $\angle ABC = 90^\circ$ ). Проведіть перпендикуляр з точки  $D$  до прямої  $AB$  (рис. 127).
232. Діагоналі квадрата  $ABCD$  перетинаються в точці  $O$ . Пряма  $FO$  перпендикулярна до площини квадрата (рис. 128). Проведіть перпендикуляри з точки  $F$  до сторін квадрата.
233. Точка  $O$  належить площині прямокутного трикутника  $ABC$  ( $\angle B = 90^\circ$ ). Пряма  $DO$  перпендикулярна до площини трикутника (рис. 129). Проведіть перпендикуляри з точки  $D$  до сторін  $AB$  і  $BC$ .

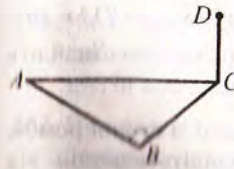


Рис. 127

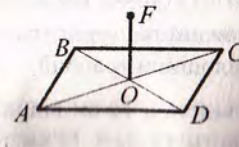


Рис. 128

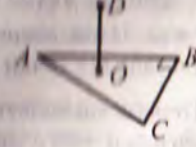


Рис. 129

234. Через середину  $E$  сторони  $DC$  квадрата  $ABCD$  до площини квадрата проведено перпендикуляр  $FE$  (рис. 130). Проведіть перпендикуляри з точки  $F$  до сторін і діагоналей квадрата.

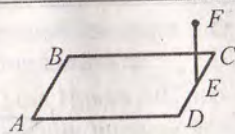


Рис. 130

235. З точки  $A$  до площини  $\alpha$  проведено перпендикуляр  $AB$  довжиною 12 см і похила  $AC$ . Знайдіть відстань від точки  $A$  до прямої  $l$ , яка належить площині  $\alpha$  і проходить через точку  $C$  перпендикулярно прямій  $BC$ , якщо  $BC = 16$  см.
236. Пряма  $FC$  перпендикулярна до площини ромба  $ABCD$ ,  $BD = FC = 20$  см,  $\angle BAD = 60^\circ$ . Знайдіть відстань від точки  $F$  до прямих, які містять сторони ромба.
237. Через вершину прямого кута  $B$  трикутника  $ABC$  до його площини проведено перпендикуляр  $BN$ . Відстань від точки  $N$  до прямої  $AC$  дорівнює 13 см. Знайдіть відстань від точки  $N$  до площини трикутника, якщо  $AC = 25$  см,  $AB = 15$  см.
238. Через вершину  $M$  трикутника  $KMN$  до його площини проведено перпендикуляр  $PM$ . Знайдіть відстань від точки  $P$  до прямої  $KN$ , якщо  $PM = 1$  см,  $MK = 2\sqrt{3}$  см,  $MN = 4$  см,  $\angle KMN = 150^\circ$ .
239. Через точку  $O$  перетину діагоналей паралелограма  $ABCD$  проведено перпендикуляр  $OM$  до його площини. Знайдіть відстань від точки  $M$  до прямих, що містять сторони паралелограма, якщо  $AB = 5$  см,  $AD = 12$  см,  $OM = 4$  см, площа паралелограма дорівнює  $30$  см<sup>2</sup>.
240. Сторона рівностороннього трикутника  $ABC$  дорівнює 6 см. Через центр  $O$  трикутника до його площини проведено перпендикуляр  $OM$  завдовжки 3 см. Знайдіть кут між перпендикуляром, проведеним з точки  $M$  до сторони  $AB$ , і проекцією цього перпендикуляра на площину  $ABC$ .
241. У трапеції  $ABCD$  ( $BC \parallel AD$ ) відомо, що  $CD = 16$  см,  $\angle CDA = 30^\circ$ . Точка  $M$  віддалена від кожної із сторін трапеції на 5 см. Знайдіть відстань від точки  $M$  до площини трапеції.
242. Точка  $N$  знаходиться на відстані 12 см від кожної із сторін ромба, діагоналі якого дорівнюють 16 см і 12 см. Знайдіть відстань від точки  $N$  до площини ромба.

243. Точка  $D$  віддалена на 5 см від кожної із сторін трикутника  $ABC$ . Знайдіть відстань від точки  $D$  до площини трикутника, якщо  $AB = 13$  см,  $BC = 14$  см,  $AC = 15$  см.
244. Сторона ромба дорівнює  $a$ , а його площа —  $S$ . Точка  $M$  не належить площині ромба і віддалена від кожної з його сторін на відстань  $b$ . Знайдіть відстань від точки  $M$  до площини ромба.
245. Проекція точки  $F$  на площину кута  $ABC$  належить бісектрисі цього кута. Доведіть, що точка  $F$  рівновіддалена від сторін кута.
246. Точка  $M$  належить діагоналі  $AC$  прямокутника  $ABCD$ . Через точку  $M$  до площини прямокутника проведено перпендикуляр  $MF$  завдовжки 4 см. Знайдіть відстань від точки  $F$  до сторони  $AB$ , якщо  $AB = 12$  см,  $BC = 16$  см,  $AM : MC = 3 : 1$ .
247. Через вершину  $D$  прямокутника  $ABCD$  проведено перпендикуляр  $DF$  до його площини. Знайдіть довжину цього перпендикуляра, якщо  $DC = 12$  см,  $FA = \sqrt{106}$  см,  $DB = 13$  см.
248. З точки  $A$  до площини  $\gamma$  проведено перпендикуляр  $AO$  та похилу  $AK$ . Через точку  $K$  у площині  $\gamma$  проведено пряму, яка утворює з прямою  $KO$  кут  $\alpha$ . Знайдіть відстань від цієї прямої до точки  $A$ , якщо  $\angle AKO = \beta$ ,  $AK = a$ .
249. Через вершину  $B$  прямого кута  $ABC$  проведено пряму, яка утворює з його сторонами кута  $\alpha$  і  $\beta$  (ця пряма не лежить у площині  $ABC$ ). Знайдіть кут між даною прямою та її проекцією на площину  $ABC$ .
250. Через середини сторін  $AB$  і  $BC$  паралелограма  $ABCD$  проведено площину, паралельну діагоналі  $AC$  і віддалену від неї на 9 см. Знайдіть відстань від точки  $D$  до даної площини.

### Перпендикулярні площини

251. Чи є правильним твердження, що коли площини  $\alpha$  і  $\beta$  перпендикулярні і пряма  $m$  паралельна площині  $\alpha$ , то пряма  $m$  перпендикулярна площині  $\beta$ ?
252. Чи є правильним твердження, що коли пряма перпендикулярна одній з двох перпендикулярних площин, то вона паралельна другій площині?
253. Прямі  $a$ ,  $b$  і  $c$  мають спільну точку  $M$ , причому  $a \perp b$ ,  $a \perp c$ ,  $b \perp c$ . Доведіть, що площина, яка проходить через прямі  $a$  і  $b$ , перпендикулярна площинам, що проходять через прямі  $a$  і  $c$  та  $b$  і  $c$ .

254. Через точку  $D$  проведено пряму  $DA$ , перпендикулярну до площини прямокутного трикутника  $ABC$  ( $\angle C = 90^\circ$ ). Доведіть, що площини  $DAC$  і  $DBC$  перпендикулярні.
255. Два рівнобедрених трикутники  $ABC$  і  $AB_1C$  мають спільну основу  $AC = 8$  см. Площини цих трикутників перпендикулярні. Знайдіть відстань між точками  $B$  і  $B_1$ , якщо  $AB = 10$  см,  $AB_1 = 17$  см.
256. Точка  $M$  не належить площині прямокутного трикутника  $ABC$  ( $\angle C = 90^\circ$ ) і рівновіддалена від його вершин. Доведіть, що площини  $AMB$  і  $ABC$  перпендикулярні.
257. У рівнобічній трапеції  $ABCD$  ( $BC \parallel AD$ ) відомо, що  $\angle CAD = 45^\circ$ ,  $O$  — точка перетину діагоналей. Пряма  $MO$  перпендикулярна до площини трапеції. Доведіть, що площини  $AMC$  і  $BMD$  перпендикулярні.
258. Точка  $S$  рівновіддалена від вершин рівностороннього трикутника  $ABC$ , точка  $O$  — центр цього трикутника. Доведіть, що площина  $SOC$  перпендикулярна до площини  $ASB$ .
259. Площини  $\beta$  і  $\phi$  перпендикулярні і перетинаються по прямої  $m$ . Площина  $\alpha$  паралельна прямої  $m$  і перетинає площини  $\beta$  і  $\phi$  по прямим  $n$  і  $p$  відповідно. Знайдіть відстань між прямими  $n$  і  $p$ , якщо відстань від прямої  $m$  до площини  $\alpha$  дорівнює 9 см, а відстань між прямими  $m$  і  $n$  — 15 см.
260. Довжина відрізка дорівнює 12 см. Його кінці належать двом перпендикулярним площинам. Відстані від кінців відрізка до лінії перетину цих площин дорівнюють 6 см і  $6\sqrt{2}$  см. Знайдіть кути, які утворює відрізок зі своїми проекціями на дані площини.
261. Довжина відрізка, кінці якого належать двом перпендикулярним площинам, дорівнює 8 см. Кути, які утворює даний відрізок зі своїми проекціями на дані площини, дорівнюють  $45^\circ$  і  $60^\circ$ . Знайдіть відстань між основами перпендикулярів, проведених з кінців відрізка до лінії перетину площин.
262. Відрізок  $AB$  лежить в одній з двох перпендикулярних площин і не перетинає другу. На цьому відрізку позначено точку  $M$  таку, що  $AM : MB = 3 : 1$ . У другій площині проведено пряму  $p$ , паралельну лінії  $a$  перетину площин. Відстань між точкою  $A$  і прямою  $p$  дорівнює 34 см, між точкою  $B$  і прямою  $p$  — 20 см, між прямими  $a$  і  $p$  — 16 см. Знайдіть відстань між точкою  $M$  і прямою  $p$ .

263. Прямокутний трикутник  $ABC$  ( $\angle B = 90^\circ$ ) перегнули по його медіані  $BM$  так, що площини  $BAM$  і  $BMC$  виявилися перпендикулярними. Знайдіть відстань між точками  $A$  і  $C$ , якщо  $AB = 12$  см,  $\cos \angle BAM = \frac{3}{5}$ .
264. Доведіть, що коли площини  $\alpha$  і  $\beta$  перпендикулярні до площини  $\gamma$  і перетинаються по прямої  $a$ , то пряма  $a$  перпендикулярна до площини  $\gamma$ .

## Відстань між мимобіжними прямими

265. На рисунку 131 зображено куб з ребром  $a$ . Знайдіть відстань між прямими  $FE$  і  $KM$ .

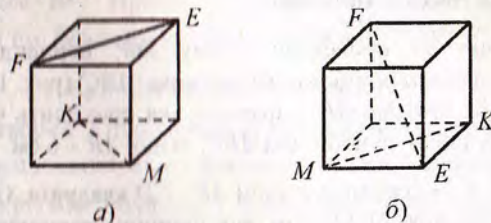


Рис. 131

266. Через вершину  $C$  прямокутника  $ABCD$  проведено пряму  $d$ , перпендикулярну до площини прямокутника. Знайдіть відстань між прямими  $d$  і  $AB$ , якщо  $AB = 16$  см,  $BD = 30$  см.
267. Через вершину  $A$  прямокутного трикутника  $ABC$  ( $\angle B = 90^\circ$ ) проведено пряму  $m$ , перпендикулярну до площини  $ABC$ . Знайдіть відстань між прямою  $m$  і прямою, яка містить медіану  $BM$  трикутника, якщо  $AC = 30$  см,  $\cos \angle ACB = \frac{4}{5}$ .
268. До кола з центром  $O$  і радіусом 8 см проведено дотичну  $l$  в точці  $M$ . Через точку  $K$  кола перпендикулярно до його площини проведено пряму  $m$ . Знайдіть відстань між прямими  $m$  і  $l$ , якщо  $\angle KOM = 60^\circ$ .
269. Через середину  $K$  сторони  $AB$  трикутника  $ABC$  проведено пряму  $n$ , перпендикулярну до площини трикутника. Знайдіть відстань від цієї прямої до прямої  $BC$ , якщо  $AB = 13$  см,  $BC = 14$  см,  $AC = 15$  см.
270. Через вершину  $A$  рівнобедреного трикутника  $ABC$  ( $AB = BC$ ) проведено площину, перпендикулярну до площини  $ABC$  і паралельну прямої  $BC$ . У цій площині через точку  $A$  проведено пряму.

Знайдіть відстань від цієї прямої до прямої  $BC$ , якщо  $AB = 25$  см,  $AC = 48$  см.

271. У рівнобедреному трикутнику  $ABC$  відомо, що  $AB = BC = 37$  см,  $AC = 70$  см. Через сторону  $AC$  трикутника проведено площину  $\alpha$ , відстань від якої до точки  $B$  дорівнює 9 см. Знайдіть відстань між прямою  $AC$  і прямою, яка проходить через точку  $B$  перпендикулярно площині  $\alpha$ .

272. Пряма  $a$  перпендикулярна до площини  $\alpha$  і перетинає її в точці  $A$ , пряма  $b$  — мимобіжна їй пряма, пряма  $c$  — проекція прямої  $b$  на площину  $\alpha$ . Доведіть, що відстань між прямими  $a$  і  $b$  дорівнює відстані від точки  $A$  до прямої  $c$ .

273. Через точку  $D$  проведено пряму  $DB$ , перпендикулярну до площини рівностороннього трикутника  $ABC$  (рис. 132). Знайдіть відстань між прямою  $AD$  і прямою, яка проходить через точку  $C$  перпендикулярно до площини  $ABC$ , якщо  $AB = 6$  см.

274. Точки  $M$  і  $N$  — середини сторін  $AB$  і  $CD$  квадрата  $ABCD$ . Квадрат перегнули по прямій  $MN$  так, що площини прямокутників  $AMND$  і  $BCNM$  виявилися перпендикулярними (рис. 133). Знайдіть відстань між прямими  $AC$  і  $MN$ , якщо  $AD = 4$  см.

275. Довжина ребра куба  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  дорівнює 6 см, точка  $M$  — середина ребра  $CD$ . Знайдіть відстань між прямими  $AM$  і  $CC_1$ .

#### Кут між мимобіжними прямими

276. Через основу  $M$  висоти  $BM$  трикутника  $ABC$  проведено перпендикуляр  $OM$  до його площини. Знайдіть кут між прямими  $BM$  і  $OC$ .

277. Через вершину  $C$  ромба  $ABCD$  проведено перпендикуляр  $EC$  до площини ромба (рис. 134). На відрізку  $AE$  вибрали довільну точку  $F$ . Знайдіть кут між прямими  $BD$  і  $FC$ .

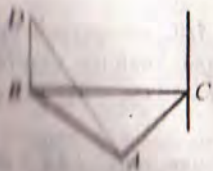


Рис. 132

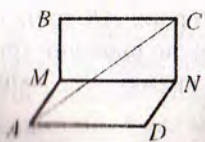


Рис. 133

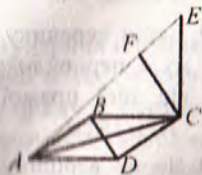


Рис. 134

278. Точка  $O$  — центр правильного трикутника  $ABC$ , точка  $D$  — середина сторони  $AB$ , відрізок  $MN$  — середня лінія цього трикутника, відрізок  $KO$  — перпендикуляр до площини  $ABC$ . Доведіть, що прямі  $KD$  і  $MN$  перпендикулярні.

279. На рисунку 135 зображено куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Знайдіть кут між прямими: 1)  $C_1 D_1$  і  $AA_1$ ; 2)  $CD$  і  $A_1 B$ ; 3)  $A_1 B$  і  $AD_1$ .

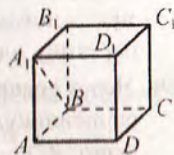


Рис. 135

280. У трикутнику  $ABC$  відомо, що  $AB = BC = 13$  см,  $AC = 10$  см, точка  $D$  — середина  $AC$ , точка  $E$  — середина  $AB$ , точка  $F$  — середина  $BC$ . Пряма  $PD$  перпендикулярна площині  $ABC$ ,  $BP = 2\sqrt{61}$  см. Знайдіть кут між прямими  $EF$  і  $PC$ .

#### Кут між прямою і площиною

281. Похила утворює з площиною кут  $45^\circ$ . Знайдіть відстань від кінця похилої до площини, якщо довжина похилої дорівнює  $\sqrt{18}$  см.

282. Знайдіть кут між похилою і площиною, якщо довжина похилої дорівнює 24 см, а відстань від кінця похилої до площини — 18 см.

283. У прямокутному паралелепіпеді  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  відомо, що  $AB = 15$  см,  $BC = 8$  см,  $A_1 C = 34$  см. Знайдіть кут між прямою  $A_1 C$  і площиною  $ABC$ .

284. Площина проходить через діагональ  $BD$  ромба  $ABCD$ . Доведіть, що сторони  $AB$  і  $CD$  утворюють з цією площиною рівні кути.

285. Точка  $M$  лежить поза площиною квадрата  $ABCD$ , а похилі  $MA$ ,  $MB$ ,  $MC$  і  $MD$  утворюють рівні кути з площиною  $ABC$ . Доведіть, що проекцією точки  $M$  на площину цього квадрата є його центр.

286. З точки  $B$  до площини  $\alpha$  провели похилі  $BA$  і  $BC$ , які утворюють з цією площиною кути  $60^\circ$  і  $30^\circ$  відповідно,  $BA = 4\sqrt{6}$  см. Знайдіть відстань між точками  $A$  і  $C$ , якщо кут між проекціями похилих дорівнює  $120^\circ$ .

287. У трикутнику  $ABC$  відомо, що  $AB = BC = 8$  см, площа цього трикутника дорівнює  $48$  см<sup>2</sup>. Через вершину  $C$  до площини трикутника проведено перпендикуляр  $FC$ . З точки  $F$  опущено перпендикуляр  $FK$  на пряму  $AB$ . Знайдіть кут між прямою  $FK$  і площиною  $ABC$ , якщо  $FK = 18$  см.

288. Точки  $M$  і  $N$  лежать у двох перпендикулярних площинах  $\alpha$  і  $\beta$  відповідно. З точок  $M$  і  $N$  опущено перпендикуляри  $ME$  і  $NK$  на

- лінію перетину площин,  $NE = 10$  см,  $EK = 8$  см,  $MK = 15$  см. Знайдіть кути, які утворює відрізок  $MN$  з площинами  $\alpha$  і  $\beta$ .
289. Кінці відрізка  $AB$  лежать у двох перпендикулярних площинах. Відрізок  $AB$  утворює з цими площинами кути  $30^\circ$  і  $45^\circ$ . Відстань між основами перпендикулярів, проведених з точок  $A$  і  $B$  до лінії перетину площин, дорівнює 8 см. Знайдіть довжину відрізка  $AB$ .
290. Через вершину  $B$  квадрата  $ABCD$  до площини квадрата проведено перпендикуляр  $KB$ . Знайдіть відстань від точки  $K$  до прямої  $AC$ , якщо  $AD = a$ , пряма  $KO$  утворює з площиною квадрата кут  $\varphi$  ( $O$  — точка перетину діагоналей квадрата).
291. Трикутники  $ABC$  і  $ADC$  лежать у різних площинах. Знайдіть кути, які утворюють прямі  $AD$  і  $CD$  з площиною  $ABC$ , якщо  $AD = CD$ ,  $AB = CB$ ,  $\angle ADC = 90^\circ$ ,  $\angle ABC = 120^\circ$ , пряма  $BD$  перпендикулярна до площини  $ABC$ .
292. Промінь  $OM$  проведено через вершину  $O$  прямого кута  $AOB$ ,  $\angle MOA = 45^\circ$ ,  $\angle MOB = 60^\circ$ . Знайдіть кут між прямою  $OM$  і площиною  $AOB$ .

## Кут між площинами

293. Площини  $\alpha$  і  $\beta$  перетинаються по прямій  $c$ . У площинах  $\alpha$  і  $\beta$  проведено прямі  $a$  і  $b$  відповідно, які паралельні прямій  $c$ . Відстань між прямими  $a$  і  $b$  дорівнює 21 см, між прямими  $a$  і  $c$  — 9 см, кут між площинами  $\alpha$  і  $\beta$  —  $60^\circ$ . Знайдіть відстань між прямими  $b$  і  $c$ .
294. Площини  $\alpha$  і  $\beta$  перетинаються по прямій  $m$ . Площина  $\gamma$  перетинає площини  $\alpha$  і  $\beta$  по прямим  $a$  і  $b$  відповідно, які паралельні прямій  $m$ . Знайдіть відстань між прямою  $m$  і площиною  $\gamma$ , якщо кут між площинами  $\alpha$  і  $\beta$  дорівнює  $60^\circ$ , відстань між прямими  $a$  і  $b$  — 35 см, а відстань між прямими  $a$  і  $m$  на 25 см більша за відстань між прямими  $b$  і  $m$ .
295. Квадрат  $ABCD$  і прямокутний трикутник  $FBC$  ( $\angle FBC = 90^\circ$ ) мають площі  $50$  см<sup>2</sup> і  $10\sqrt{2}$  см<sup>2</sup> відповідно. Відстань від точки  $F$  до прямої  $AD$  дорівнює  $\sqrt{26}$  см. Знайдіть кут між площинами квадрата і трикутника.
296. Гіпотенуза  $AB$  рівнобедреного прямокутного трикутника  $ABC$  належить площині  $\beta$ , площа цього трикутника дорівнює  $49$  см<sup>2</sup>, а відстань від точки  $C$  до площини  $\beta$  — 5 см. Знайдіть кут між площинами  $ABC$  і  $\beta$ .

297. Через сторону  $BC$  трикутника  $ABC$  проведено площину, яка утворює з площиною трикутника кут  $60^\circ$ . Знайдіть відстань від вершини  $A$  до цієї площини, якщо  $AB = BC = 13$  см,  $AC = 10$  см.
298. Кут між площинами трикутників  $ABC$  і  $ABD$  дорівнює  $60^\circ$ ,  $AC = BC = 20$  см,  $AB = 24$  см,  $AD = BD$ ,  $\angle ADB = 90^\circ$ . Знайдіть довжину відрізка  $CD$ .
299. Знайдіть кут між площинами трикутників  $ABC$  і  $AMC$ , якщо  $AB = BC = AC = a$ ,  $AM = MC$ ,  $\angle AMC = 90^\circ$ ,  $BM = \frac{a}{2}$ .
300. Знайдіть кут між площинами трикутника  $ABC$  і прямокутника  $ABDE$ , якщо  $AB = 15$  см,  $BD = 12$  см,  $AC = 17$  см,  $BC = 8$  см,  $CD = 10$  см.
301. На рисунку 136 зображено куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Знайдіть кут між площинами  $A_1 AD$  і  $B_1 BD$ .
302. Через катет прямокутного рівнобедреного трикутника проведено площину, яка утворює з площиною трикутника кут  $60^\circ$ . Знайдіть кути, які утворюють дві інші сторони трикутника з цією площиною.

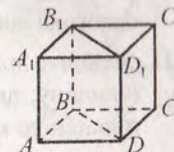


Рис. 136

303. Кут між площинами  $\alpha$  і  $\beta$ , які перетинаються по прямій  $m$ , дорівнює  $30^\circ$ . У площинах  $\alpha$  і  $\beta$  вибрано точки  $M$  і  $E$  відповідно і з них проведено перпендикуляри  $MN$  і  $EK$  до прямої  $m$ . Знайдіть довжину відрізка  $ME$ , якщо  $MN = 10\sqrt{3}$  см,  $KE = 5$  см,  $MK = 5\sqrt{14}$  см.
304. Площини  $\alpha$  і  $\beta$  перетинаються по прямій  $m$ . З точок  $A$  і  $M$ , які лежать у площинах  $\alpha$  і  $\beta$  відповідно, проведено перпендикуляри  $MK$  і  $AE$  до прямої  $m$ . Знайдіть кут між площинами  $\alpha$  і  $\beta$ , якщо  $KE = 2\sqrt{7}$  см,  $ME = 10$  см,  $MA = 2\sqrt{17}$  см,  $AE = 8$  см.
305. Через точку  $O$  перетину діагоналей прямокутника  $ABCD$  проведено пряму  $m$ , перпендикулярну до площини прямокутника. Площина, проведена через сторону  $AB$ , перетинає пряму  $m$  у точці  $E$ . Кут між площинами  $ACB$  і  $AEB$  дорівнює  $30^\circ$ . Знайдіть довжину проекції відрізка  $EO$  на площину  $AEB$ , якщо  $AD = 12$  см.
306. З точки  $A$ , яка лежить поза площиною  $\alpha$ , проведено до неї дві похилі  $AB$  і  $AC$ , які утворюють з площиною  $\alpha$  кути  $30^\circ$  і  $60^\circ$  відповідно. Знайдіть кут між площинами  $\alpha$  і  $ABC$ , якщо кут між проекціями похилених прямих



307. Кут між двома площинами дорівнює  $45^\circ$ . В одній з площин проведена пряма, яка утворює з лінією перетину кут  $30^\circ$ . Знайдіть кут, який утворює ця пряма з другою площиною.
308. Точка  $M$  рівновіддалена від вершин правильного трикутника  $ABC$ . Кут між прямою  $MA$  та площиною  $ABC$  дорівнює  $\alpha$ . Знайдіть кут між площинами  $MAB$  і  $ABC$ .
309. Точка  $S$  рівновіддалена від вершин правильного шестикутника  $ABCDEF$ . Кут між прямою  $SA$  і площиною  $ABC$  дорівнює  $\beta$ . Знайдіть кут між площинами  $SAB$  і  $SAF$ .

#### Площа ортогональної проекції многокутника

310. Чи може площа многокутника бути більшою за площу його ортогональної проекції?
311. Знайдіть площу ортогональної проекції многокутника на деяку площину, якщо площа многокутника дорівнює  $18 \text{ см}^2$ , а кут між площиною многокутника і площиною проекції дорівнює  $60^\circ$ .
312. Площа многокутника дорівнює  $46\sqrt{2} \text{ см}^2$ , а площа його ортогональної проекції —  $46 \text{ см}^2$ . Знайдіть кут між площиною многокутника і площиною проекції.
313. Ортогональною проекцією трикутника  $ABC$  на деяку площину є прямокутний рівнобедрений трикутник  $A_1B_1C_1$  з гіпотенузою  $12 \text{ см}$ . Знайдіть кут між площинами  $ABC$  і  $A_1B_1C_1$ , якщо площа трикутника  $ABC$  дорівнює  $72 \text{ см}^2$ .
314. Площа чотирикутника дорівнює  $180 \text{ см}^2$ . Його ортогональною проекцією є паралелограм, одна із сторін якого дорівнює  $12 \text{ см}$ , а кут між сторонами —  $60^\circ$ . Знайдіть невідому сторону паралелограма, якщо кут між площиною даного чотирикутника і площиною його проекції дорівнює  $30^\circ$ .
315. Площа трикутника  $ABC$  дорівнює  $75 \text{ см}^2$ . Його ортогональною проекцією на деяку площину є трикутник  $A_1B_1C_1$  зі сторонами  $8 \text{ см}$ ,  $18 \text{ см}$  і  $20 \text{ см}$ . Знайдіть кут між площинами  $ABC$  і  $A_1B_1C_1$ .
316. Ортогональною проекцією рівнобічної трапеції на площину  $\alpha$  є трапеція площею  $50 \text{ см}^2$ . Знайдіть кут між площиною  $\alpha$  і площиною даної трапеції, якщо основи цієї трапеції дорівнюють  $3 \text{ см}$  і  $15 \text{ см}$ , а діагональ перпендикулярна до бічної сторони.

## КОНТРОЛЬНІ РОБОТИ

### Варіант I

#### Контрольна робота № 1

Тема. *Систематизація та узагальнення фактів і методів планіметрії*

- 1.° На рисунку 137  $DP = PE$ ,  $DK = KE$ . Доведіть рівність кутів  $KDM$  і  $KEM$ .
- 2.° У трикутнику  $ABC$  висота  $BD$  поділяє сторону  $AC$  на відрізки  $AD$  і  $DC$ ,  $BC = 6 \text{ см}$ ,  $\angle A = 30^\circ$ ,  $\angle CBD = 45^\circ$ . Знайдіть сторону  $AB$  трикутника.
- 3.\* Продовження бічних сторін  $AB$  і  $CD$  трапеції  $ABCD$  перетинаються в точці  $M$ ,  $DC : CM = 3 : 5$ ,  $BC$  — менша основа трапеції. Знайдіть основи трапеції, якщо їх сума дорівнює  $26 \text{ см}$ .
- 4.\* З точки до прямої проведено дві похилі, довжини яких дорівнюють  $13 \text{ см}$  і  $15 \text{ см}$ . Знайдіть відстань від точки до прямої, якщо різниця проекцій похилих на цю пряму дорівнює  $4 \text{ см}$ .
- 5.\*\* Діагональ рівнобічної трапеції перпендикулярна до бічної сторони і утворює з основою трапеції кут  $\alpha$ . Знайдіть висоту трапеції, якщо радіус кола, описаного навколо трапеції, дорівнює  $R$ .

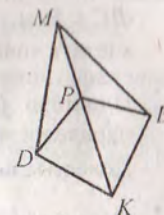


Рис. 137

## Контрольна робота № 2

Тема. Вступ до стереометрії

1.<sup>o</sup> На рисунку 138 зображено куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ .  
Укажіть пряму перетину площини  $AC_1 D$  і  $ABB_1$ .

2.<sup>o</sup> Дано точки  $A$ ,  $B$  і  $C$  такі, що  $AB = 2$  см,  $BC = 5$  см,  $AC = 3$  см. Скільки існує площин, які містять точки  $A$ ,  $B$  і  $C$ ? Відповідь обґрунтуйте.

3.\* Площина  $\alpha$  проходить через вершини  $A$  і  $D$  паралелограма  $ABCD$  і точку  $O$  перетину його діагоналей. Доведіть, що точка  $B$  належить площині  $\alpha$ .

4.\* Пряма  $m$  є лінією перетину площин  $\alpha$  і  $\beta$ . Пряма  $a$  лежить у площині  $\alpha$  і перетинає площину  $\beta$ . Доведіть, що прямі  $a$  і  $m$  перетинаються.

5.\*\* Побудуйте переріз піраміди  $SABC$  площиною, що проходить через точки  $M$ ,  $K$  і  $N$ , які належать відповідно ребрам  $SA$ ,  $SB$  і  $BC$ ; причому прямі  $MK$  і  $AB$  не паралельні.

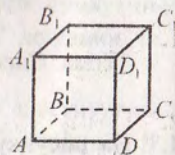


Рис. 138

## Контрольна робота № 3

Тема. Взаємне розміщення прямих у просторі.

Паралельність прямої і площини

- 1.<sup>o</sup> Прямі  $a$  і  $b$  мимобіжні і пряма  $a$  і  $c$  мимобіжні. Чи можна стверджувати, що пряма  $b$  і  $c$  мимобіжні?
- 2.<sup>o</sup> Пряма  $a$  паралельна прямій  $b$ , яка лежить у площині  $\alpha$ . Чи можна стверджувати, що пряма  $a$  обов'язково паралельна площині  $\alpha$ ?
- 3.<sup>o</sup> Через кінці відрізка  $MN$  і його середину  $K$  проведено паралельні прямі, які перетинають деяку площину  $\alpha$  в точках  $M_1$ ,  $N_1$  і  $K_1$  відповідно. Знайдіть довжину відрізка  $KK_1$ , якщо відрізок  $MN$  не перетинає площину  $\alpha$  і  $MM_1 = 22$  см,  $NN_1 = 8$  см.
- 4.\* Площина  $\alpha$  перетинає сторони  $AB$  і  $BC$  трикутника  $ABC$  у точках  $M$  і  $K$  відповідно та паралельна стороні  $AC$ ,  $MK = 4$  см,  $MB : MA = 2 : 3$ . Знайдіть довжину сторони  $AC$  трикутника.
- 5.\* Точка  $B$  не лежить у площині трикутника  $ADC$ . Точки  $M$ ,  $P$ ,  $K$  і  $E$  — середини відрізків  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  і  $AD$  відповідно,  $MK = PE = 10$  см,  $AC = 12$  см. Знайдіть довжину відрізка  $BD$ .
- 6.\*\* Через паралельні прямі  $a$  і  $b$  проведено дві площини, які перетинаються по прямій  $c$ . Доведіть, що прямі  $a$  і  $b$  паралельні прямій  $c$ .

## Контрольна робота № 4

Тема. Паралельні площини. Зображення фігур на площині

- 1.<sup>o</sup> Площини  $\alpha$  і  $\beta$  паралельні. У площині  $\alpha$  вибрано точки  $A$  і  $B$ , а в площині  $\beta$  — точки  $C$  і  $D$  такі, що прями  $AC$  і  $BD$  паралельні. Знайдіть довжини відрізків  $CD$  і  $BD$ , якщо  $AB = 4$  см,  $AC = 5,6$  см.
- 2.<sup>o</sup> Точки  $A_1, B_1$  і  $C_1$  — паралельні проєкції вершин  $A, B$  і  $C$  паралелограма  $ABCD$  на деяку площину відповідно (рис. 139). Побудуйте проєкцію вершини  $D$  паралелограма на цю площину.
- 3.\* Чотирикутники  $ABCD$  і  $DECF$  — паралелограми, причому точка  $B$  не належить площині  $AFD$  (рис. 140). Доведіть, що площини  $AFD$  і  $BCE$  паралельні.
- 4.\* Площини  $\alpha$  і  $\beta$  паралельні. З точки  $M$ , що не належить цим площинам і не знаходиться між ними, проведено два промені. Один з них перетинає площини  $\alpha$  і  $\beta$  у точках  $A_1$  і  $B_1$ , а другий — у точках  $A_2$  і  $B_2$  відповідно. Знайдіть довжину відрізка  $B_1B_2$ , якщо він на 2 см більший за відрізок  $A_1A_2$ ,  $MB_1 = 7$  см,  $A_1B_1 = 4$  см.
- 5.\*\* Точки  $A_1, B_1$  і  $C_1$  — паралельні проєкції точок  $A, B$  і  $C$  на площину  $\alpha$  (рис. 141). Побудуйте пряму перетину площини  $\alpha$  і  $ABC$ .

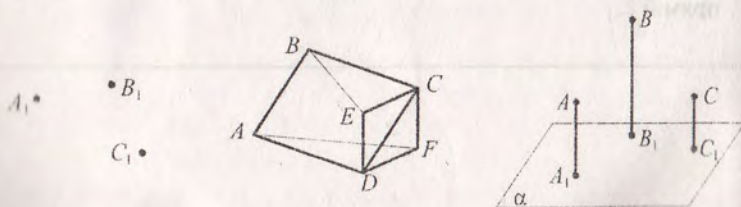


Рис. 139

Рис. 140

Рис. 141

## Контрольна робота № 5

Тема. Перпендикулярність прямої і площини

- 1.<sup>o</sup> З точки  $A$  до площини  $\alpha$  проведено похилу завдовжки 10 см. Знайдіть відстань від точки  $A$  до площини, якщо проєкція похилої на площину дорівнює 6 см.
- 2.<sup>o</sup> Через вершину прямого кута  $C$  прямокутного трикутника  $ABC$  до його площини проведено перпендикуляр  $CM$ . Знайдіть довжину сторони  $AB$  трикутника  $ABC$ , якщо  $CM = 8$  см,  $BM = 17$  см,  $\angle CAB = 30^\circ$ .
- 3.\* На рисунку 142 зображено прямокутник  $ABCD$ . Відрізок  $MC$  — перпендикуляр до площини  $ABC$ . Доведіть, що пряма  $AD$  перпендикулярна до площини  $DMC$ .
- 4.\* З точки  $A$  до площини  $\alpha$  проведено дві похилі  $AB$  і  $AD$ . Проєкції цих похилих на площину  $\alpha$  дорівнюють 7 см і 18 см. Знайдіть відстань від точки  $A$  до площини  $\alpha$ , якщо  $AB : AD = 5 : 6$ .
- 5.\*\* Пряма  $PB$  перпендикулярна до площини ромба  $ABCD$ . Доведіть, що  $\angle PDA = \angle PDC$ .

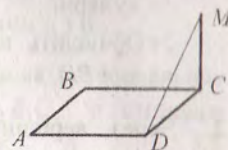


Рис. 142

## Контрольна робота № 6

Тема. Теорема про три перпендикуляри.  
Перпендикулярність площин

1.<sup>o</sup> Через вершину  $C$  квадрата  $ABCD$  проведено пряму  $MC$ , яка перпендикулярна до площини квадрата (рис. 143).

1) Доведіть, що прямі  $BD$  і  $MO$  перпендикулярні.

2) Обчисліть відстань від точки  $M$  до прямої  $BD$ , якщо  $MC = 1$  см,  $CD = 4$  см.

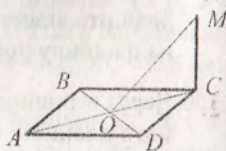


Рис. 143

2.<sup>o</sup> Через вершину  $D$  прямокутника  $ABCD$  до його площини проведено перпендикуляр  $DE$ . Точка  $E$  віддалена від сторони  $AB$  на 10 см, а від сторони  $BC$  — на 17 см. Знайдіть довжину діагоналі  $BD$ , якщо  $DE = 8$  см.

3.<sup>o</sup> Площини  $\alpha$  і  $\beta$  перпендикулярні. Пряма  $a$  — лінія їх перетину. У площині  $\alpha$  взято точку  $A$ , а в площині  $\beta$  — точку  $B$  такі, що відстані від них до прямої  $a$  дорівнюють 4 см і 5 см відповідно. Знайдіть відстань між точками  $A$  і  $B$ , якщо відстань між їх проекціями на пряму  $a$  дорівнює  $2\sqrt{2}$  см.

4.<sup>oo</sup> Сторона рівностороннього трикутника дорівнює 12 см. Точка  $P$  рівновіддалена від сторін трикутника і знаходиться на відстані 2 см від його площини. Знайдіть відстань від точки  $P$  до сторін трикутника.

## Контрольна робота № 7

Тема. Кут між прямою і площиною. Кут між площинами

1.<sup>o</sup> З точки  $A$  до площини  $\alpha$  проведено похилу, довжина якої дорівнює 6 см і яка утворює з площиною  $\alpha$  кут  $60^\circ$ . Знайдіть довжину проекції похилої на площину та відстань від точки  $A$  до площини.

2.<sup>o</sup> Площини  $\alpha$  і  $\beta$  перетинаються по прямої  $a$ . У площині  $\alpha$  вибрано точку  $A$  таку, що відстань від неї до площини  $\beta$  дорівнює 4 см, а до прямої  $a$  — 8 см. Знайдіть кут між площинами  $\alpha$  і  $\beta$ .

3.<sup>o</sup> Трикутник  $ABC$ , площа якого дорівнює  $24$  см<sup>2</sup>, є ортогональною проекцією рівностороннього трикутника  $A_1B_1C_1$  зі стороною 8 см. Знайдіть кут між площинами  $ABC$  і  $A_1B_1C_1$ .

4.<sup>o</sup> Кут між площинами трикутників  $ABC$  і  $ABD$  дорівнює  $45^\circ$ . Трикутник  $ABC$  — рівносторонній зі стороною  $4\sqrt{3}$  см, трикутник  $ABD$  — рівнобедрений,  $AD = BD = \sqrt{14}$  см. Знайдіть довжину відрізка  $CD$ .

5.<sup>oo</sup> З точки до площини проведено дві похилі, які утворюють з площиною кути по  $30^\circ$ . Знайдіть кут між проекціями похилих, якщо кут між похилими дорівнює  $60^\circ$ .

## Контрольна робота № 8

Тема. Узагальнення і систематизація знань учнів

- 1.° Пряма  $m$  паралельна прямій  $n$ , яка паралельна площині  $\beta$ . Чи можна стверджувати, що пряма  $m$  обов'язково паралельна площині  $\beta$ ?
- 2.° Площина  $\alpha$  перпендикулярна до прямої  $b$ , а пряма  $b$  перпендикулярна до площини  $\gamma$ . Яке взаємне розміщення площин  $\alpha$  і  $\gamma$ ?
- 3.° Через вершину  $B$  трикутника  $ABC$ , у якому  $AB = BC = 34$  см,  $AC = 32$  см, проведено перпендикуляр  $DB$  до площини трикутника. Знайдіть кут між площинами  $ABC$  і  $ADC$ , якщо  $DB = 20$  см.
- 4.\* Точка  $M$  рівновіддалена від усіх сторін квадрата зі стороною 6 см і знаходиться на відстані 9 см від площини квадрата. Знайдіть відстань від точки  $M$  до сторін квадрата.
- 5.\* Точка  $A$  знаходиться на відстані 9 см від площини  $\alpha$ . Похилі  $AB$  і  $AC$  утворюють з площиною  $\alpha$  кути  $45^\circ$  і  $60^\circ$  відповідно. Знайдіть відстань між точками  $C$  і  $B$ , якщо кут між проекціями похилих дорівнює  $150^\circ$ .
- 6.\*\* Через гіпотенузу прямокутного рівнобедреного трикутника проведено площину, яка утворює з площиною трикутника кут  $45^\circ$ . Знайдіть кути, які утворюють катети трикутника з цією площиною.

## Варіант 2

## Контрольна робота № 1

Тема. Систематизація та узагальнення фактів і методів планіметрії

- 1.° На рисунку 144  $AB = BC$ ,  $AD = DC$ . Доведіть рівність відрізків  $AE$  і  $EC$ .
- 2.° Висота  $BD$  трикутника  $ABC$  поділяє сторону  $AC$  на відрізки  $AD$  і  $DC$ ,  $AB = 12$  см,  $\angle A = 60^\circ$ ,  $\angle CBD = 45^\circ$ . Знайдіть сторону  $BC$  трикутника.
- 3.\* Продовження бічних сторін  $AB$  і  $CD$  трапеції  $ABCD$  перетинаються в точці  $F$ ,  $AB : BF = 3 : 7$ ,  $AD$  — більша основа трапеції. Знайдіть основи трапеції, якщо їх різниця дорівнює 6 см.
- 4.\* З точки до прямої проведено дві похилі, проекції яких на пряму дорівнюють 9 см і 16 см. Знайдіть відстань від точки до прямої, якщо одна з похилих на 5 см більша за другу.
- 5.\*\* Діагональ рівнобічної трапеції перпендикулярна до бічної сторони, а кут між бічною стороною і більшою основою трапеції дорівнює  $\alpha$ . Знайдіть радіус кола, описаного навколо трапеції, якщо її висота дорівнює  $h$ .

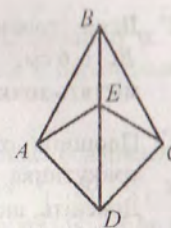


Рис. 144

## Контрольна робота № 2

Тема. Вступ до стереометрії

1.<sup>o</sup> На рисунку 145 зображено куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ .  
Укажіть пряму перетину площини  $B_1 CD$  і  $ADD_1$ .

2.<sup>o</sup> Дано точки  $A$ ,  $B$  і  $C$  такі, що  $AB = 4$  см,  
 $BC = 6$  см,  $AC = 7$  см. Скільки існує площин, які  
містять точки  $A$ ,  $B$  і  $C$ ? Відповідь обґрунтуйте.

3.\* Площина  $\alpha$  проходить через вершини  $A$  і  $B$   
трикутника  $ABC$  і середину  $D$  сторони  $AC$ .  
Доведіть, що точка  $C$  належить площині  $\alpha$ .

4.\* Відомо, що площини  $\alpha$  і  $\beta$  перетинаються. Пряма  $a$  лежить у площині  $\alpha$  і перетинає площину  $\beta$  у точці  $A$ , пряма  $b$  лежить у площині  $\beta$  і перетинає площину  $\alpha$  в точці  $B$ . Доведіть, що пряма  $AB$  є лінією перетину площин  $\alpha$  і  $\beta$ .

5.\*\* Побудуйте переріз куба  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  площиною, що проходить через вершину  $B_1$  і точки  $M$  і  $K$ , які належать відповідно ребрам  $AB$  і  $CC_1$ .

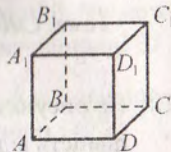


Рис. 145

## Контрольна робота № 3

Тема. Взаємне розміщення прямих у просторі.  
Паралельність прямої і площини

1.<sup>o</sup> Прямі  $a$  і  $b$  мимобіжні, а прямі  $b$  і  $c$  паралельні. Чи можна стверджувати, що прямі  $a$  і  $c$  мимобіжні?

2.<sup>o</sup> Пряма  $a$  не паралельна прямій  $b$ , яка належить площині  $\alpha$ . Чи можна стверджувати, що пряма  $a$  обов'язково не є паралельною площині  $\alpha$ ?

3.<sup>o</sup> Через кінці відрізка  $AB$  і його середину  $C$  проведено паралельні прямі, які перетинають деяку площину  $\alpha$  в точках  $A_1$ ,  $B_1$  і  $C_1$  відповідно. Знайдіть довжину відрізка  $CC_1$ , якщо відрізок  $AB$  не перетинає площину  $\alpha$  і  $AA_1 = 18$  см,  $BB_1 = 10$  см.

4.\* Площина  $\beta$  перетинає сторони  $AB$  і  $AC$  трикутника  $ABC$  у точках  $N$  і  $D$  відповідно та паралельна стороні  $BC$ ,  $AD = 6$  см,  $DN : CB = 3 : 4$ . Знайдіть довжину сторони  $AC$  трикутника.

5.\* Точка  $D$  не лежить у площині трикутника  $ABC$ . Точки  $M$ ,  $P$ ,  $K$  і  $E$  — середини відрізків  $AD$ ,  $DC$ ,  $CB$  і  $AB$  відповідно.  $AC = BD = 8$  см,  $MP = KE$ . Знайдіть довжину відрізка  $MP$ .

6.\*\* Через кожен з прямих  $a$  і  $b$  проведено площину. Ці площини перетинаються по прямій  $c$ , яка не перетинає жодну з прямих  $a$  і  $b$ . Доведіть, що прямі  $a$  і  $b$  паралельні.

## Контрольна робота № 4

## Тема. Паралельні площини. Зображення фігур на площині

- 1.<sup>o</sup> Площини  $\alpha$  і  $\beta$  паралельні. У площині  $\alpha$  вибрано точки  $A$  і  $C$ , а в площині  $\beta$  — точки  $B$  і  $D$  такі, що прямі  $AB$  і  $CD$  паралельні. Знайдіть довжини відрізків  $AB$  і  $BD$ , якщо  $AC = 7$  см,  $CD = 4,7$  см.
- 2.<sup>o</sup> Точки  $A_1, B_1$  і  $D_1$  — паралельні проєкції вершин  $A, B$  і  $D$  паралелограма  $ABCD$  на деяку площину відповідно (рис. 146). Побудуйте проєкцію вершини  $C$  паралелограма на цю площину.
- 3.\* Чотирикутники  $ABCD$  і  $BDEF$  — паралелограми, причому точка  $F$  не належить площині  $ADE$  (рис. 147). Доведіть, що площини  $ADE$  і  $BCF$  паралельні.
- 4.\* Площини  $\alpha$  і  $\beta$  паралельні. Через точку  $M$ , що знаходиться між цими площинами, проведено дві прямі. Одна з них перетинає площини  $\alpha$  і  $\beta$  у точках  $A_1$  і  $B_1$ , а друга — у точках  $A_2$  і  $B_2$  відповідно. Знайдіть довжину відрізка  $A_1A_2$ , якщо він на 1 см менший від відрізка  $B_1B_2$ ,  $MA_2 = 4$  см,  $A_2B_2 = 10$  см.
- 5.\*\* Точки  $A_1, B_1$  і  $C_1$  — паралельні проєкції точок  $A, B$  і  $C$  на площину  $\alpha$  (рис. 148). Побудуйте точку перетину прямої, що містить медіану трикутника  $ABC$ , проведеної з вершини  $A$ , з площиною  $\alpha$ .

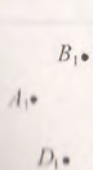


Рис. 146

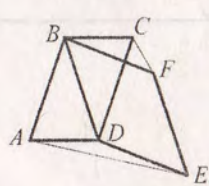


Рис. 147

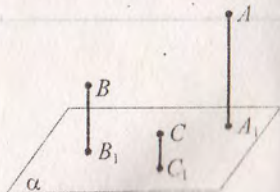


Рис. 148

## Контрольна робота № 5

## Тема. Перпендикулярність прямої і площини

- 1.<sup>o</sup> З точки  $M$  до площини  $\beta$  проведено похилу. Проекція похилої на цю площину дорівнює 5 см, а відстань від точки  $M$  до площини дорівнює 12 см. Знайдіть довжину похилої.
- 2.<sup>o</sup> Через вершину прямого кута  $C$  прямокутного трикутника  $ABC$  до його площини проведено перпендикуляр  $CD$ . Знайдіть довжину сторони  $AB$  трикутника  $ABC$ , якщо  $AD = 20$  см,  $CD = 16$  см,  $\angle CAB = 60^\circ$ .
- 3.\* На рисунку 149 трикутник  $BCE$  і прямокутник  $ABCD$  не лежать в одній площині,  $\angle ABE = 90^\circ$ . Доведіть, що пряма  $DC$  перпендикулярна до площини  $BCE$ .
- 4.\* З точки  $K$  до площини  $\beta$  проведено дві похилі  $KP$  і  $KD$ . Знайдіть відстань від точки  $K$  до площини  $\beta$ , якщо  $KD - KP = 2$  см, а довжини проєкцій похилих дорівнюють 9 см і 5 см.
- 5.\*\* Пряма  $SA$  перпендикулярна до площини чотирикутника  $ABCD$ . Відомо, що  $AB = AD$ ,  $\angle DSC = \angle BSC$ . Доведіть, що  $BC = CD$ .

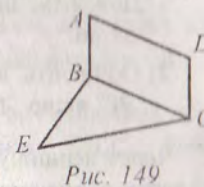


Рис. 149

## Контрольна робота № 6

Тема. *Теорема про три перпендикуляри.  
Перпендикулярність площин*

1.<sup>o</sup> Через вершину  $A$  рівностороннього трикутника  $ABC$  проведено пряму  $DA$ , яка перпендикулярна до площини трикутника, точка  $M$  — середина сторони  $BC$  (рис. 150).

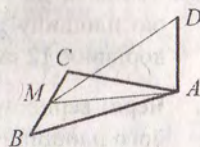


Рис. 150

1) Доведіть, що прямі  $BC$  і  $MD$  перпендикулярні.

2) Обчисліть відстань від точки  $D$  до прямої  $BC$ , якщо  $AD = 4$  см,  $AB = 6$  см.

2.<sup>o</sup> Через вершину  $A$  прямокутника  $ABCD$  до його площини проведено перпендикуляр  $AP$ . Знайдіть довжину цього перпендикуляра, якщо  $BC = 12$  см,  $DB = 13$  см, а точка  $P$  віддалена від прямої  $BC$  на  $\sqrt{106}$  см.

3.<sup>o</sup> Площини  $\alpha$  і  $\beta$  перпендикулярні. Пряма  $l$  — лінія їх перетину. У площині  $\alpha$  взято точку  $M$ , а в площині  $\beta$  — точку  $N$  такі, що відстані від них до прямої  $l$  дорівнюють 6 см і 7 см відповідно. Знайдіть відстань між основами перпендикулярів, проведених з точок  $M$  і  $N$  до прямої  $l$ , якщо відстань між точками  $M$  і  $N$  дорівнює  $\sqrt{110}$  см.

4.<sup>\*\*</sup> Сторона ромба дорівнює 4 см, а гострий кут —  $60^\circ$ . Точка  $M$  віддалена від кожної сторони ромба на 5 см. Знайдіть відстань від точки  $M$  до площини ромба.

## Контрольна робота № 7

Тема. *Кут між прямою і площиною. Кут між площинами*

1.<sup>o</sup> З точки  $P$  до площини  $\beta$  проведено похилу, яка утворює з площиною кут  $30^\circ$ . Знайдіть довжину похилої та відстань від точки  $P$  до площини  $\beta$ , якщо проекція похилої на площину дорівнює 6 см.

2.<sup>o</sup> Площини  $\alpha$  і  $\beta$  перетинаються по прямій  $l$ . У площині  $\alpha$  вибрано точку  $K$  і з неї проведено перпендикуляр  $KM$  до площини  $\beta$ . Відстань від точки  $K$  до площини  $\beta$  дорівнює  $4\sqrt{3}$  см, а відстань від точки  $M$  до прямої  $l$  — 4 см. Знайдіть кут між площинами  $\alpha$  і  $\beta$ .

3.<sup>o</sup> Площа трикутника  $ABC$  дорівнює  $36$  см<sup>2</sup>. Його ортогональна проекція — рівнобедрений прямокутний трикутник  $A_1B_1C_1$ , гіпотенуза якого дорівнює  $6\sqrt{2}$  см. Знайдіть кут між площинами  $ABC$  і  $A_1B_1C_1$ .

4.<sup>o</sup> Кут між площинами трикутників  $ABC$  і  $AKC$  дорівнює  $60^\circ$ ,  $AC = 24$  см,  $BC = BA = 20$  см,  $KC = KA = 15$  см. Знайдіть довжину відрізка  $BK$ .

5.<sup>\*\*</sup> З точки до площини проведено дві похилі, які утворюють з площиною кути по  $45^\circ$ . Знайдіть кут між похилими, якщо кут між їх проекціями дорівнює  $90^\circ$ .



## Контрольна робота № 8

Тема. Узагальнення і систематизація знань учнів

- 1.<sup>o</sup> Пряма  $p$  не паралельна прямій  $q$ , яка належить площині  $\gamma$ . Чи може пряма  $p$  бути паралельною площині  $\gamma$ ?
- 2.<sup>o</sup> Пряма  $a$  перпендикулярна до площини  $\alpha$  і паралельна площині  $\beta$ . Яке взаємне розміщення площин  $\alpha$  і  $\beta$ ?
- 3.<sup>o</sup> Через вершину  $C$  трикутника  $ABC$ , у якому  $AC = BC$ , проведено перпендикуляр  $KC$  до площини трикутника. Знайдіть кут між площинами  $ABC$  і  $ABK$ , якщо  $AB = 12$  см,  $AK = 10$  см,  $KC = 4$  см.
- 4.<sup>\*</sup> Точка  $F$  рівновіддалена від усіх вершин прямокутника зі сторонами 12 см і 16 см і знаходиться на відстані 5 см від площини прямокутника. Знайдіть відстань від точки  $F$  до вершин прямокутника.
- 5.<sup>\*</sup> Точка  $K$  знаходиться на відстані 4 см від площини  $\alpha$ . Похилі  $KA$  і  $KB$  утворюють з площиною  $\alpha$  кути  $45^\circ$  і  $30^\circ$  відповідно, а кут між похилими дорівнює  $135^\circ$ . Знайдіть відстань між точками  $A$  і  $B$ .
- 6.<sup>\*\*</sup> Через сторону правильного трикутника проведено площину, яка утворює з площиною трикутника кут  $30^\circ$ . Знайдіть кути, які утворюють дві інші сторони трикутника з цією площиною.

Відповідь на питання задачі не потребує обґрунтування.

## ПІДСУМКОВІ КОНТРОЛЬНІ РОБОТИ

## Підсумкова контрольна робота № 1

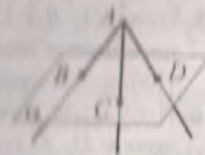
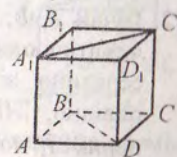
Тема. Вступ до стереометрії. Паралельність прямих і площин у просторі

## Варіант 1

## Частина перша

Завдання 1 – 10 мають по чотири варіанти відповідей, з яких тільки ОДНА відповідь ПРАВИЛЬНА. Оберіть правильну відповідь і позначте її у бланку відповідей.

1. Скільки площин можна провести через три точки?  
А) одну; Б) безліч; В) одну або безліч; Г) одну або жодної.
2. Дві прямі не паралельні і не перетинаються. Скільки площин можна провести через ці прямі?  
А) одну; Б) дві; В) жодної; Г) безліч.
3. Точка  $M$  лежить поза площиною трикутника  $ABC$ . Яке взаємне розміщення прямих  $AM$  і  $BC$ ?  
А) перетинаються; В) мимобіжні;  
Б) паралельні; Г) встановити неможливо.
4. На рисунку зображено куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Серед наведених пар прямих укажіть пару паралельних прямих.  
А)  $AB$  і  $A_1 C_1$ ; Б)  $AD$  і  $BB_1$ ; В)  $BC$  і  $A_1 D_1$ ; Г)  $A_1 B_1$  і  $BD$ .
5. Бічні сторони трапеції паралельні площині  $\alpha$ . Яке взаємне розміщення площини  $\alpha$  і площини трапеції?  
А) паралельні; В) збігаються;  
Б) перетинаються; Г) встановити неможливо.
6. Прямі  $a$  і  $b$  паралельні. Скільки існує площин, які проходять через пряму  $a$  і паралельні прямій  $b$ ?  
А) одна; Б) дві; В) безліч; Г) жодної.
7. Дано трикутник  $ABC$ . Площина, паралельна прямій  $AB$ , перетинає сторону  $AC$  у точці  $M$ , а сторону  $BC$  — у точці  $K$ . Яка довжина відрізка  $MK$ , якщо точка  $M$  — середина сторони  $AC$  і  $AB = 12$  см?  
А) 12 см; Б) 6 см; В) 4 см; Г) визначити неможливо.
8. На рисунку зображено точку  $A$ , яка лежить поза площиною  $\alpha$ , і точки  $B, C$  і  $D$ , які належать цій площині. Укажіть лінію перетину площин  $ABC$  і  $ACD$ .  
А)  $BC$ ; Б)  $CD$ ; В)  $AD$ ; Г)  $AC$ .
9. Яка з наведених фігур не може бути паралельною проекцією на площину прямокутника?  
А) відрізок; Б) квадрат; В) трапеція; Г) довільний паралелограм.



10. Яке з тверджень є правильним?

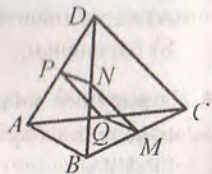
- А) якщо пряма  $a$  не паралельна прямій  $b$ , яка лежить у площині  $\alpha$ , то пряма  $a$  обов'язково не паралельна площині  $\alpha$ ;  
 Б) якщо пряма  $a$ , яка не лежить у площині  $\alpha$ , паралельна прямій  $b$  цієї площини, то пряма  $a$  обов'язково паралельна площині  $\alpha$ ;  
 В) якщо пряма  $a$  перетинає площину  $\alpha$ , а пряма  $b$  належить площині  $\alpha$ , то пряма  $a$  обов'язково перетинає пряму  $b$ ;  
 Г) якщо дві прямі у просторі не мають спільних точок, то вони паралельні.

### Частина друга

Розв'яжіть завдання 11 – 14. Запишіть відповідь у бланк відповідей.

11. Відрізок  $AB$  не перетинає площину  $\alpha$ , точки  $A$  і  $B$  віддалені від цієї площини на 9 см і 13 см. Чому дорівнює відстань від середини відрізка  $AB$  до площини  $\alpha$ ?

12. Точки  $A, B, C$  і  $D$ , зображені на рисунку, не лежать в одній площині. Точки  $M, N, P$  і  $Q$  — середини відрізків  $BC, BD, AD$  і  $AC$  відповідно,  $AB = 14$  см,  $CD = 18$  см. Обчисліть периметр чотирикутника  $MNPQ$ .



13. Через точку перетину медіан трикутника  $ABC$  паралельно прямій  $AB$  проведено площину, яка перетинає сторони  $AC$  і  $BC$  у точках  $D$  і  $E$  відповідно. Знайдіть довжину відрізка  $DE$ , якщо  $AB = 18$  см.

14. Площини  $\alpha$  і  $\beta$  паралельні. З точки  $O$ , що не належить цим площинам і не знаходиться між ними, проведено два промені. Один з них перетинає площини  $\alpha$  і  $\beta$  у точках  $C_1$  і  $D_1$ , а другий — у точках  $C_2$  і  $D_2$  відповідно. Знайдіть довжину відрізка  $C_1C_2$ , якщо він на 5 см менший від відрізка  $D_1D_2$ ,  $OC_1 = 4$  см,  $C_1D_1 = 10$  см.

### Частина третя

Розв'язання задач 15 і 16 повинно мати обґрунтування, у ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення.

15. Точки  $A, B$  і  $C$ , що не лежать на одній прямій, є паралельними проєкціями трьох послідовних вершин правильного шестикутника. Побудуйте проєкції решти трьох вершин цього шестикутника.

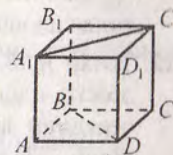
16. Побудуйте переріз піраміди  $SABC$  площиною, що проходить через точки  $D, E$  і  $F$ , які належать відповідно ребрам  $AB, BC$  і  $SC$ , причому прямі  $DE$  і  $AC$  не паралельні.

### Варіант 2

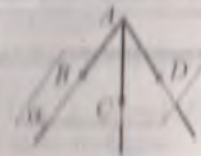
#### Частина перша

Завдання 1 – 10 мають по чотири варіанти відповідей, з яких тільки ОДНА відповідь ПРАВИЛЬНА. Оберіть правильну відповідь і позначте її у бланку відповідей.

1. Скільки площин можна провести через дві прямі?  
 А) одну; Б) безліч; В) одну або жодної; Г) одну або безліч.
2. Прямі  $a$  і  $b$  паралельні площині  $\alpha$ . Яке взаємне розміщення прямих  $a$  і  $b$ ?  
 А) обов'язково паралельні; В) обов'язково мимобіжні;  
 Б) обов'язково перетинаються; Г) встановити неможливо.
3. Точка  $M$  лежить поза площиною квадрата  $ABCD$ . Яке взаємне розміщення прямих  $MB$  і  $AC$ ?  
 А) встановити неможливо; В) паралельні;  
 Б) перетинаються; Г) мимобіжні.
4. На рисунку зображено куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Серед наведених пар прямих укажіть пару паралельних прямих.  
 А)  $A_1 D$  і  $B_1 C_1$ ; В)  $A_1 B_1$  і  $A_1 C_1$ ;  
 Б)  $AA_1$  і  $BD$ ; Г)  $DC$  і  $A_1 B_1$ .
5. Діагоналі паралелограма паралельні площині  $\alpha$ . Яке взаємне розміщення площини  $\alpha$  і площини паралелограма?  
 А) збігаються; В) паралельні;  
 Б) перетинаються; Г) встановити неможливо.
6. Прямі  $a$  і  $b$  мимобіжні. Скільки існує площин, які проходять через пряму  $a$  і паралельні прямій  $b$ ?  
 А) одна; Б) дві; В) безліч; Г) жодної.
7. Дано трикутник  $ABC$ . Площина, паралельна прямій  $BC$ , перетинає сторону  $AB$  у точці  $D$ , а сторону  $AC$  — у точці  $E$ . Яка довжина сторони  $BC$ , якщо точка  $D$  — середина відрізка  $AB$  і  $DE = 8$  см?  
 А) 8 см; Б) 12 см; В) 16 см; Г) визначити неможливо.



8. На рисунку зображено точку  $A$ , яка лежить поза площиною  $\alpha$ , і точки  $B, C$  і  $D$ , які належать цій площині. Укажіть лінію перетину площини  $ACD$  і  $ABD$ .



- А)  $BC$ ; Б)  $CD$ ; В)  $AD$ ; Г)  $AC$ .

9. Яке з тверджень є правильним?

- А) якщо пряма в просторі перетинає одну з двох паралельних прямих, то вона перетинає й другу пряму;  
 Б) якщо пряма паралельна площині, то вона паралельна будь-якій прямій цієї площини;

- В) якщо пряма перетинає одну з двох паралельних площин, то вона перетинає й другу площину;  
 Г) якщо дві прямі в просторі не перетинаються, то вони не лежать в одній площині.
10. Яка з наведених фігур не може бути паралельною проекцією на площину рівнобічної трапеції?  
 А) прямокутна трапеція; В) відрізок;  
 Б) рівнобічна трапеція; Г) паралелограм.

## Частина друга

Розв'яжіть завдання 11 – 14. Запишіть відповідь у бланк відповідей.

11. Через кінці відрізка  $DP$  і його середину  $A$  проведено паралельні прямі, які перетинають деяку площину  $\varphi$  у точках  $D_1$ ,  $P_1$  і  $A_1$  відповідно. Знайдіть довжину відрізка  $PP_1$ , якщо відрізок  $DP$  не перетинає площину  $\varphi$  і  $DD_1 = 25$  см,  $AA_1 = 13$  см.
12. Точки  $A$ ,  $B$ ,  $D$  і  $S$ , зображені на рисунку, не лежать в одній площині. Точки  $F$ ,  $Q$ ,  $N$ ,  $C$  — середини відрізків  $BS$ ,  $DB$ ,  $AD$  і  $AS$  відповідно,  $SD = AB = 30$  см. Обчисліть периметр чотирикутника  $FQNC$ .
13. Точка  $M$  лежить поза площиною паралелограма  $ABCD$ . Через пряму  $AB$  проведено площину  $\alpha$ , яка перетинає прямі  $MC$  і  $MD$  у точках  $E$  і  $F$  відповідно. Чому дорівнює довжина відрізка  $EF$ , якщо  $ME : EC = 3 : 2$  і  $AB = 20$  см?
14. Площини  $\alpha$  і  $\beta$  паралельні. Через точку  $D$ , що знаходиться між цими площинами, проведено дві прямі. Одна з них перетинає площини  $\alpha$  і  $\beta$  у точках  $M_1$  і  $N_1$ , а друга — у точках  $M_2$  і  $N_2$  відповідно. Знайдіть довжину відрізка  $M_1M_2$ , якщо він на 8 см більший за відрізок  $N_1N_2$ ,  $N_1M_1 = 30$  см,  $DN_1 = 5$  см.



## Частина третя

Розв'язання задач 15 і 16 повинно мати обґрунтування, у ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення.

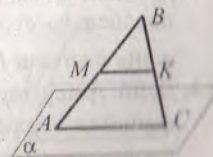
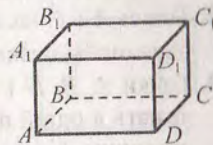
15. Точки  $A$ ,  $B$  і  $O$ , що не лежать на одній прямій, є відповідно паралельними проекціями двох сусідніх вершин квадрата і його центра. Побудуйте зображення квадрата.
16. Побудуйте переріз прямої призми  $ABCA_1B_1C_1$  площиною, що проходить через точки  $M$ ,  $K$  і  $N$ , які належать відповідно ребрам  $AB$ ,  $BC$  і  $CC_1$ , причому прямі  $MK$  і  $AC$  не паралельні.

## Варіант 3

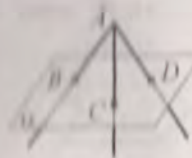
## Частина перша

Завдання 1 – 10 мають по чотири варіанти відповідей, з яких тільки ОДНА відповідь ПРАВИЛЬНА. Оберіть правильну відповідь і позначте її у бланку відповідей.

1. Скільки площин можна провести через дві точки?  
 А) одну; Б) дві; В) безліч; Г) жодної.
2. Точки  $D$ ,  $E$  і  $F$  такі, що  $DE = 10$  см,  $DF = 6$  см,  $EF = 4$  см. Скільки площин можна провести через точки  $D$ ,  $E$  і  $F$ ?  
 А) одну; Б) дві; В) жодної; Г) безліч.
3. На рисунку зображено прямокутний паралелепіпед  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Яка з даних пар прямих є парою мимобіжних прямих?  
 А)  $AA_1$  і  $CC_1$ ; Б)  $AD$  і  $B_1C_1$ ;  
 В)  $BC$  і  $DD_1$ ; Г)  $A_1B_1$  і  $BB_1$ .
4. Пряма  $m$  проходить через вершину  $A$  трикутника  $ABC$  і не лежить у його площині. Яке взаємне розміщення прямих  $m$  і  $BC$ ?  
 А) мимобіжні; Б) перетинаються; В) паралельні; Г) встановити неможливо.
5. Сторона  $AC$  трикутника  $ABC$ , зображеного на рисунку, належить площині  $\alpha$ , точки  $M$  і  $K$  — середини сторін  $AB$  і  $BC$  трикутника відповідно, точка  $B$  знаходиться поза площиною  $\alpha$ . Яке взаємне розміщення прямої  $MK$  і площини  $\alpha$ ?  
 А) пряма і площина перетинаються; Б) пряма і площина паралельні; В) пряма належить площині; Г) встановити неможливо.
6. Трикутник  $ABC$  і площина  $\alpha$  розташовані так, що прямі  $AB$  і  $BC$  паралельні площині  $\alpha$ . Яке взаємне розміщення прямої  $AC$  і площини  $\alpha$ ?  
 А) пряма перетинає площину; Б) пряма належить площині; В) пряма паралельна площині; Г) встановити неможливо.
7. Прямі  $a$  і  $b$  мимобіжні, точки  $A$  і  $A_1$  належать прямій  $a$ , точки  $B$  і  $B_1$  — прямій  $b$ . Яке взаємне розміщення прямих  $AB$  і  $A_1B_1$ ?  
 А) перетинаються; Б) мимобіжні; В) паралельні; Г) встановити неможливо.



8. На рисунку зображено точку  $A$ , яка лежить поза площиною  $\alpha$ , і точки  $B$ ,  $C$  і  $D$ , які належать цій площині. Укажіть лінію перетину площини  $\alpha$  і  $ABC$ .  
 А)  $BC$ ; Б)  $CD$ ; В)  $AD$ ; Г)  $AC$ .

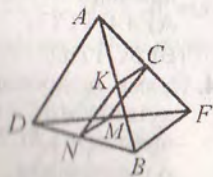


9. Пряма  $a$  і площина  $\alpha$  паралельні. Скільки площин, які паралельні площині  $\alpha$ , можна провести через пряму  $a$ ?
- А) одну; Б) дві; В) безліч; Г) жодної.
10. Яка з наведених фігур не може бути паралельною проекцією на площину пари паралельних прямих?
- А) пара точок; Б) пряма; В) дві прямі, що перетинаються; Г) дві паралельні прямі.

## Частина друга

Розв'яжіть завдання 11–14. Запишіть відповідь у бланк відповідей.

11. Точки  $A$  і  $C$  належать площині  $\alpha$ , точки  $B$  і  $D$  — площині  $\beta$ . Яка довжина відрізка  $BD$ , якщо  $AC = 14$  см,  $AB \parallel CD$ ,  $\alpha \parallel \beta$ ?
12. Точки  $A, B, D$  і  $F$ , зображені на рисунку, не лежать в одній площині. Точки  $N, M, C, K$  — середини відрізків  $BD, DF, FA$  і  $AB$  відповідно,  $BF = 24$  см,  $AD = 18$  см. Обчисліть периметр чотирикутника  $NMCK$ .
13. Площина  $\alpha$  перетинає сторони  $MF$  і  $MK$  трикутника  $MFK$  у точках  $A$  і  $B$  відповідно та паралельна стороні  $FK$ ,  $AB = 12$  см,  $AM : AF = 3 : 5$ . Знайдіть довжину сторони  $FK$  трикутника.
14. Дано трикутник  $ABC$  і площину  $\alpha$ , яка не перетинає його. Через вершини трикутника  $ABC$  і середину  $M$  його медіани  $BD$  проведено паралельні прямі, які перетинають площину  $\alpha$  в точках  $A_1, B_1, C_1$  і  $M_1$  відповідно. Знайдіть довжину відрізка  $MM_1$ , якщо  $AA_1 = 9$  см,  $BB_1 = 12$  см,  $CC_1 = 19$  см.



## Частина третя

Розв'язання задач 15 і 16 повинно мати обґрунтування, у ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення.

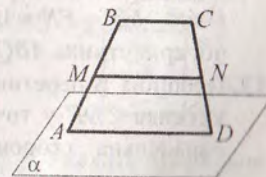
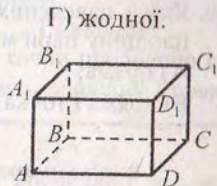
15. Точки  $A, B$  і  $O$ , що не лежать на одній прямій, є відповідно паралельними проекціями двох вершин правильного трикутника і його центра. Побудуйте зображення цього трикутника.
16. Побудуйте переріз куба  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  площиною, яка проходить через точку  $M$ , що належить ребру  $AD$ , і паралельна площині  $A_1 AC$ .

## Варіант 4

## Частина перша

Завдання 1–10 мають по чотири варіанти відповідей, з яких тільки ОДНА відповідь ПРАВИЛЬНА. Оберіть правильну відповідь і позначте її у бланку відповідей.

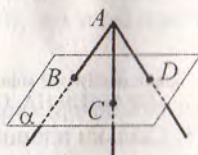
1. Скільки площин можна провести через одну пряму?
- А) одну; Б) безліч; В) жодної; Г) безліч або жодної.
2. Точки  $M, N$  і  $K$  такі, що  $MK = 8$  см,  $KN = 9$  см,  $MN = 6$  см. Скільки площин можна провести через точки  $M, K$  і  $N$ ?
- А) одну; Б) дві; В) безліч; Г) жодної.
3. На рисунку зображено прямокутний паралелепіпед  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Яка з даних пар прямих є парою паралельних прямих?
- А)  $AA_1$  і  $AB$ ; Б)  $A_1 B_1$  і  $CD$ ;  
В)  $BB_1$  і  $CD$ ; Г)  $DD_1$  і  $AB$ .
4. Пряма  $n$  паралельна стороні  $BC$  трикутника  $ABC$  і не лежить у його площині. Яке взаємне розміщення прямих  $n$  і  $AB$ ?
- А) перетинаються; Б) паралельні; В) мимобіжні; Г) встановити неможливо.
5. Основа  $AD$  трапеції  $ABCD$ , зображеної на рисунку, належить площині  $\alpha$ , а основа  $BC$  не належить цій площині. Точки  $M$  і  $N$  — середини бічних сторін трапеції. Яке взаємне розміщення прямої  $MN$  і площини  $\alpha$ ?
- А) пряма і площина перетинаються;  
Б) пряма і площина паралельні;  
В) пряма належить площині;  
Г) встановити неможливо.



6. Паралелограм  $ABCD$  і площина  $\alpha$  розташовані так, що прямі  $AC$  і  $BD$  паралельні площині  $\alpha$ . Яке взаємне розміщення прямої  $AB$  і площини  $\alpha$ ?
- А) пряма перетинає площину; Б) пряма паралельна площині;  
В) пряма належить площині; Г) встановити неможливо.
7. На рисунку зображено піраміду  $SAB CDE F$ , основою якої є правильний шестикутник  $ABCDEF$ . Площині якої бічної грані паралельна пряма  $AB$ ?
- А)  $CSD$ ; Б)  $ESF$ ;  
В)  $DSK$ ; Г) такої грані не існує.



8. На рисунку зображено точку  $A$ , яка лежить поза площиною  $\alpha$ , і точки  $B, C$  і  $D$ , які належать цій площині. Укажіть лінію перетину площин  $\alpha$  і  $ACD$ .



А)  $BC$ ; Б)  $CD$ ; В)  $AD$ ; Г)  $AC$ .

9. Точка  $A$  не належить площині  $\alpha$ . Скільки існує прямих, які проходять через точку  $A$  і паралельні площині  $\alpha$ ?

А) одна; Б) дві; В) безліч; Г) жодної.

10. Яка з наведених фігур не може бути паралельною проекцією на площину пари мимобіжних прямих?

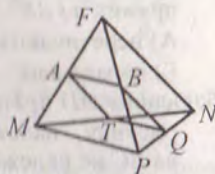
А) пряма; В) дві прями, що перетинаються;  
Б) пряма і точка поза нею; Г) дві паралельні прями.

### Частина друга

Розв'яжіть завдання 11–14. Зашпигуйте відповідь у бланк відповідей.

11. Відрізки  $AB$  і  $CD$  паралельних прямих містяться між паралельними площинами. Яка довжина відрізка  $CD$ , якщо  $AB = 5$  см?

12. Точки  $M, N, P$  і  $F$ , зображені на рисунку, не лежать в одній площині. Точки  $A, B, Q, T$  — середини відрізків  $MF, PF, PN$  і  $MN$  відповідно,  $MP = FN = 10$  см. Обчисліть периметр чотирикутника  $ABQT$ .



13. Площина  $\beta$  перетинає сторони  $CF$  і  $CD$  трикутника  $CDF$  у точках  $M$  і  $Q$  відповідно та паралельна стороні  $FD$ ,  $MQ = 6$  см,  $FD = 25$  см,  $MC = 10$  см. Знайдіть довжину сторони  $FC$  трикутника.

14. Дано паралелограм  $ABCD$  і площину  $\alpha$ , яка не перетинає його. Через вершини паралелограма проведено паралельні прями, які перетинають площину  $\alpha$  в точках  $A_1, B_1, C_1$  і  $D_1$  відповідно. Знайдіть довжину відрізка  $CC_1$ , якщо  $AA_1 = 10$  см,  $BB_1 = 16$  см,  $DD_1 = 14$  см.

### Частина третя

Розв'язання завдань 15 і 16 повинно мати обґрунтування, у ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення.

15. Точки  $A, B$  і  $M$ , які не лежать на одній прямій, є паралельними проекціями двох сусідніх вершин квадрата та середини його протилежної сторони відповідно. Побудуйте зображення цього квадрата.

16. Побудуйте переріз піраміди  $SABCD$  площиною, яка проходить через точку  $M$ , що належить ребру  $CD$ , і паралельна площині  $BSD$ .

### Підсумкова контрольна робота № 2

Тема. *Перпендикулярність прямих і площин у просторі*

#### Варіант 1

#### Частина перша

Завдання 1–10 мають по чотири варіанти відповідей, з яких тільки ОДНА відповідь ПРАВИЛЬНА. Оберіть правильну відповідь і позначте її у бланку відповідей.

1. Точка  $A$  лежить поза площиною  $\alpha$ . Скільки можна провести через точку  $A$  прямих, які перпендикулярні до площини  $\alpha$ ?

А) одну; Б) дві; В) безліч; Г) жодної.

2. Точка  $A$  віддалена від площини  $\alpha$  на 8 см. З цієї точки проведено до площини  $\alpha$  похилу  $AB$  завдовжки 10 см. Знайдіть довжину проекції похилої  $AB$  на площину  $\alpha$ .

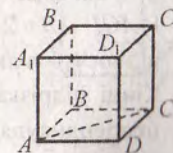
А) 2 см; Б) 8 см; В) 6 см; Г) 5 см.

3. З точки  $M$ , яка лежить поза площиною  $\alpha$ , проведено до неї перпендикуляр  $MA$  і похилі  $MB$  і  $MC$ . Відомо, що  $AB < AC$ . Порівняйте довжини похилих  $MB$  і  $MC$ .

А)  $MB > MC$ ; В)  $MB < MC$ ;  
Б)  $MB = MC$ ; Г) порівняти неможливо.

4. На рисунку зображено куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  з ребром  $a$ . Знайдіть відстань між прямими  $AC$  і  $DD_1$ .

А)  $a$ ; Б)  $\frac{a}{2}$ ; В)  $a\sqrt{2}$ ; Г)  $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ .

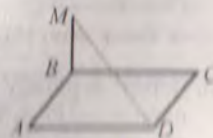


5. Дано три площини  $\alpha, \beta$  і  $\gamma$  такі, що  $\alpha \perp \beta, \beta \parallel \gamma$ . Укажіть правильне твердження.

А) площини  $\alpha$  і  $\gamma$  паралельні;  
Б) площини  $\alpha$  і  $\gamma$  перпендикулярні;  
В) кут між площинами  $\alpha$  і  $\gamma$  дорівнює  $45^\circ$ ;  
Г) жодне з тверджень А)–В) не є правильним.

6. Пряма  $MB$  перпендикулярна до площини паралелограма  $ABCD$ , зображеного на рисунку. Укажіть кут між прямою  $MD$  і площиною паралелограма.

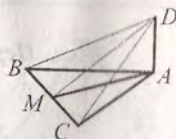
А)  $\angle MDA$ ; Б)  $\angle MBD$ ; В)  $\angle MDB$ ; Г)  $\angle MDC$ .



7. З точки  $B$  до площини  $\alpha$  проведено похилу  $BC$ , яка утворює з площиною  $\alpha$  кут  $30^\circ$ . Знайдіть відстань від точки  $B$  до площини  $\alpha$ , якщо проекція похилої  $BC$  на цю площину дорівнює 12 см.

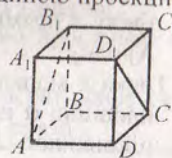
А) 6 см; Б)  $4\sqrt{3}$  см; В)  $12\sqrt{3}$  см; Г) 24 см.

8. Пряма  $DA$  перпендикулярна до площини рівнобедреного трикутника  $ABC$  з основою  $BC$ , зображеного на рисунку, точка  $M$  — середина сторони  $BC$ . Укажіть кут між площинами  $ABC$  і  $DBC$ .



- А)  $\angle DBA$ ; Б)  $\angle DMA$ ; В)  $\angle DCA$ ; Г)  $\angle DAM$ .
9. Площа многокутника дорівнює  $16 \text{ см}^2$ , а площа його ортогональної проекції на деяку площину —  $8\sqrt{2} \text{ см}^2$ . Чому дорівнює кут між площиною многокутника і площиною проекції?

- А)  $0^\circ$ ; Б)  $30^\circ$ ; В)  $45^\circ$ ; Г)  $60^\circ$ .



10. На рисунку зображено куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Знайдіть кут між прямими  $AB_1$  і  $CD_1$ .

- А)  $60^\circ$ ; Б)  $45^\circ$ ; В)  $0^\circ$ ; Г)  $90^\circ$ .

### Частина друга

Розв'яжіть завдання 11 – 14. Запишіть відповідь у бланк відповідей.

11. Точка  $D$  знаходиться на відстані 4 см від кожної з вершин правильного трикутника  $ABC$ , сторона якого дорівнює 6 см. Знайдіть відстань від точки  $D$  до площини  $ABC$ .
12. З точки  $A$  до площини  $\alpha$  проведено перпендикуляр  $AD$  і похилі  $AB$  і  $AC$ ,  $AB = 25 \text{ см}$ ,  $AC = 17 \text{ см}$ , проекції похилих на площину  $\alpha$  відносяться як  $5 : 2$ . Знайдіть відстань від точки  $A$  до площини  $\alpha$ .
13. Кінці відрізка, довжина якого дорівнює  $5\sqrt{5} \text{ см}$ , належать двом перпендикулярним площинам. Відстані від кінців цього відрізка до лінії перетину площин дорівнюють 5 см і 8 см. Знайдіть відстань між основами перпендикулярів, опущених з кінців відрізка на лінію перетину площин.
14. Точка  $M$  рівновіддалена від сторін квадрата  $ABCD$  і знаходиться на відстані  $2\sqrt{3} \text{ см}$  від площини квадрата. Знайдіть відстань від точки  $M$  до сторони квадрата, якщо сторона квадрата дорівнює 4 см.

### Частина третя

Розв'язання задач 15 і 16 повинно мати обґрунтування, у ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення.

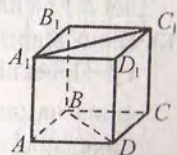
15. Через вершину  $C$  ромба  $ABCD$  до його площини проведено перпендикуляр  $CF$ . Точка  $F$  віддалена від діагоналі  $BD$  на 25 см. Знайдіть відстань від точки  $F$  до площини ромба, якщо  $BD = 20 \text{ см}$ ,  $AB = 10\sqrt{5} \text{ см}$ .
16. Через катет прямокутного рівнобедреного трикутника проведено площину, яка утворює з площиною трикутника кут  $60^\circ$ . Знайдіть кути дві утворені дві інші сторони трикутника з цією площиною.

### Варіант 2

#### Частина перша

Завдання 1 – 10 мають по чотири варіанти відповідей, з яких тільки ОДНА відповідь ПРАВИЛЬНА. Оберіть правильну відповідь і позначте її у бланку відповідей.

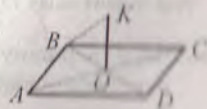
1. Точка  $A$  лежить поза площиною  $\alpha$ . Скільки можна провести через точку  $A$  площин, які перпендикулярні до площини  $\alpha$ ?
- А) одну; Б) дві; В) безліч; Г) жодної.
2. Точка  $B$  віддалена від площини  $\beta$  на 12 см. З цієї точки проведено до площини  $\beta$  похилу  $BC$ . Знайдіть довжину похилої, якщо довжина її проекції на площину  $\beta$  дорівнює 5 см.
- А) 17 см; Б) 15 см; В) 13 см; Г) 11 см.
3. З точки  $M$ , яка лежить поза площиною  $\alpha$ , проведено до неї перпендикуляр  $MK$  і похилі  $ME$  і  $MF$ , причому  $ME > MF$ . Порівняйте проекції цих похилих на площину  $\alpha$ .
- А)  $KE > KF$ ; Б)  $KE < KF$ ; В)  $KE = KF$ ; Г) порівняти неможливо.
4. На рисунку зображено куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  з ребром  $a$ . Знайдіть відстань між прямими  $BD$  і  $A_1 C_1$ .



- А)  $a$ ; Б)  $a\sqrt{2}$ ; В)  $2a$ ; Г)  $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ .

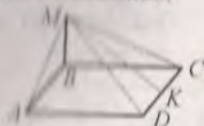
5. Дано прямі  $m$  і  $n$  та площину  $\alpha$  такі, що  $m \parallel n$ ,  $m \perp \alpha$ . Укажіть правильне твердження.
- А) пряма  $n$  паралельна площині  $\alpha$ ;  
Б) пряма  $n$  перпендикулярна до площини  $\alpha$ ;  
В) пряма  $n$  лежить у площині  $\alpha$ ;  
Г) пряма  $n$  перетинає площину  $\alpha$  під кутом  $60^\circ$ .

6. Пряма  $KO$  перпендикулярна до площини ромба  $ABCD$ , зображеного на рисунку. Укажіть кут між прямою  $BK$  і площиною ромба.
- А)  $\angle BOK$ ; Б)  $\angle ABK$ ; В)  $\angle OBK$ ; Г)  $\angle CBK$ .



7. З точки  $K$  до площини  $\phi$  проведено похилу  $KE$  завдовжки 18 см. Чому дорівнює кут між похилою  $KE$  і площиною  $\phi$ , якщо точка  $K$  віддалена від даної площини на 9 см?
- А)  $30^\circ$ ; Б)  $45^\circ$ ; В)  $60^\circ$ ; Г) визначити неможливо.

8. Пряма  $MB$  перпендикулярна до площини квадрата  $ABCD$ , зображеного на рисунку, точка  $K$  — середина сторони  $CD$ . Укажіть кут між площиною квадрата і площиною  $SMD$ .
- А)  $\angle MAB$ ; Б)  $\angle MDB$ ; В)  $\angle MKB$ ; Г)  $\angle MSB$ .



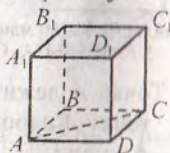
9. Площа многокутника дорівнює  $24 \text{ см}^2$ . Знайдіть площу ортогональної проєкції цього многокутника на площину, яка утворює кут  $60^\circ$  з площиною многокутника.

А)  $12 \text{ см}^2$ ; Б)  $24 \text{ см}^2$ ; В)  $36 \text{ см}^2$ ; Г)  $48 \text{ см}^2$ .

10. На рисунку зображено куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ .

Знайдіть кут між прямими  $A_1 D_1$  і  $AC$ .

А)  $30^\circ$ ; Б)  $45^\circ$ ; В)  $60^\circ$ ; Г)  $90^\circ$ .



### Частина друга

Розв'яжіть завдання 11 – 14. Запишіть відповідь у бланк відповідей.

11. Точка  $K$  знаходиться на відстані  $4 \text{ см}$  від кожної з вершин правильного трикутника  $ABC$ . Знайдіть довжину сторони трикутника, якщо точка  $K$  віддалена від площини  $ABC$  на  $2 \text{ см}$ .

12. З точки  $B$  до площини  $\gamma$  проведено перпендикуляр  $BO$  і похилі  $BA$  і  $BC$ . Відомо, що  $BA = 12 \text{ см}$ ,  $BC = 30 \text{ см}$ , проєкції похилих на площину  $\gamma$  відносяться як  $10 : 17$ . Знайдіть довжину проєкції похилої  $BA$  на площину  $\gamma$ .

13. Кінці відрізка  $AB$  належать двом перпендикулярним площинам  $\alpha$  і  $\beta$ . Проєкція відрізка  $AB$  на площину  $\alpha$  дорівнює  $5 \text{ см}$ , а його проєкція на площину  $\beta$  —  $2\sqrt{10} \text{ см}$ . Відстань між основами перпендикулярів, опущених з кінців відрізка  $AB$  на лінію перетину площин, дорівнює  $4 \text{ см}$ . Знайдіть довжину відрізка  $AB$ .

14. Точка  $P$  рівновіддалена від сторін ромба  $ABCD$  і знаходиться на відстані  $8 \text{ см}$  від його площини. Знайдіть відстань від точки  $P$  до сторін ромба, якщо висота ромба дорівнює  $12 \text{ см}$ .

### Частина третя

Розв'язання задач 15 і 16 повинно мати обґрунтування, у ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення.

15. Через вершину  $A$  прямокутника  $ABCD$  до його площини проведено перпендикуляр  $AK$ . Точка  $K$  віддалена від сторони  $BC$  на  $15 \text{ см}$ . Знайдіть відстань від точки  $K$  до сторони  $CD$ , якщо  $BD = \sqrt{337} \text{ см}$ ,  $AK = 12 \text{ см}$ .

16. Через сторону правильного трикутника проведено площину, яка утворює з двома іншими сторонами трикутника кути по  $60^\circ$ . Знайдіть кут між площиною даного трикутника і проведеною площиною.

### Варіант 3

#### Частина перша

Завдання 1 – 10 мають по чотири варіанти відповідей, з яких тільки ОДНА відповідь ПРАВИЛЬНА. Оберіть правильну відповідь і позначте її у бланку відповідей.

1. Площина перпендикулярна до однієї з двох паралельних прямих. Як розміщена друга з цих прямих відносно даної площини?

А) паралельна площині; В) лежить у площині;  
Б) перпендикулярна до площини; Г) встановити неможливо.

2. З точки  $C$  до площини  $\gamma$  проведено похилу завдовжки  $17 \text{ см}$ . Знайдіть відстань від точки  $C$  до площини  $\gamma$ , якщо проєкція проведеної похилої на цю площину дорівнює  $8 \text{ см}$ .

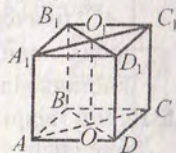
А)  $8 \text{ см}$ ; Б)  $9 \text{ см}$ ; В)  $12 \text{ см}$ ; Г)  $15 \text{ см}$ .

3. У просторі дано пряму  $a$  і точку  $A$  поза нею. Скільки можна провести через точку  $A$  прямих, перпендикулярних до прямої  $a$ ?

А) одну; Б) дві; В) жодної; Г) безліч.

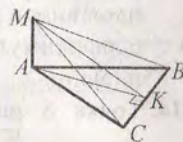
4. На рисунку зображено куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  з ребром  $a$ . Знайдіть відстань між прямими  $AB$  і  $OO_1$ .

А)  $a$ ; Б)  $\frac{a}{2}$ ; В)  $a\sqrt{2}$ ; Г)  $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ .



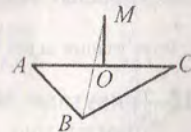
5. Через вершину  $A$  правильного трикутника  $ABC$ , зображеного на рисунку, провели пряму  $MA$ , перпендикулярну до площини трикутника, відрізок  $AK$  — висота трикутника  $ABC$ . Яка з вказаних площин перпендикулярна до площини  $MAK$ ?

А) площина  $BMC$ ; В) площина  $AMC$ ;  
Б) площина  $AMB$ ; Г) жодна з вказаних площин.



6. Через середину  $O$  сторони  $AC$  трикутника  $ABC$ , зображеного на рисунку, проведено пряму  $MO$ , яка перпендикулярна до площини трикутника. Укажіть кут між прямою  $MB$  і площиною  $ABC$ .

А)  $\angle ABM$ ; Б)  $\angle OBM$ ; В)  $\angle CBM$ ; Г)  $\angle BOM$ .

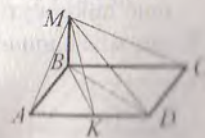


7. З точки  $P$ , яка віддалена від площини  $\alpha$  на  $4\sqrt{3} \text{ см}$ , до цієї площини проведено похилу. Знайдіть довжину похилої, якщо кут між нею і площиною  $\alpha$  дорівнює  $60^\circ$ .

А)  $8 \text{ см}$ ; Б)  $6 \text{ см}$ ; В)  $8\sqrt{3} \text{ см}$ ; Г)  $6\sqrt{3} \text{ см}$ .

8. Пряма  $MB$  перпендикулярна до площини прямокутника  $ABCD$ , зображеного на рисунку, точка  $K$  — середина сторони  $AD$ . Укажіть кут між площиною прямокутника і площиною  $AMD$ .

А)  $\angle MAR$ ; Б)  $\angle MKB$ ; В)  $\angle MDB$ ; Г)  $\angle ABM$ .



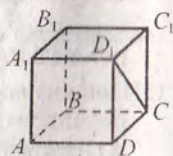
9. Площа многокутника дорівнює площі ортогональної проекції цього многокутника на деяку площину. Чому дорівнює кут між площиною многокутника і площиною проекції?

А)  $0^\circ$ ; Б)  $45^\circ$ ; В)  $90^\circ$ ; Г) такий випадок неможливий.

10. На рисунку зображено куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ .

Знайдіть кут між прямими  $AA_1$  і  $CD_1$ .

А)  $30^\circ$ ; Б)  $45^\circ$ ; В)  $60^\circ$ ; Г)  $90^\circ$ .



### Частина друга

Розв'яжіть завдання 11 – 14. Запишіть відповідь у бланк відповідей.

11. Точка  $M$  знаходиться на відстані 8 см від кожної з вершин квадрата  $ABCD$ . Знайдіть довжину сторони квадрата, якщо точка  $M$  віддалена від його площини на  $4\sqrt{3}$  см.

12. З точки  $A$  до площини  $\alpha$  проведено перпендикуляр  $AO$  і похилі  $AB$  і  $AC$ , причому похила  $AB$  на 4 см менша від похилої  $AC$ . Проекції даних похилих на площину  $\alpha$  дорівнюють 1 см і 7 см. Знайдіть відстань від точки  $A$  до площини  $\alpha$ .

13. Кінці відрізка, довжина якого дорівнює 10 см, належать двом перпендикулярним площинам. Кути між даним відрізком і цими площинами дорівнюють  $45^\circ$  і  $30^\circ$ . Знайдіть відстань між основами перпендикулярів, опущених з кінців відрізка на лінію перетину площин.

14. Точка  $S$  рівновіддалена від сторін трапеції і знаходиться на відстані  $\sqrt{7}$  см від її площини. Знайдіть відстань від точки  $S$  до сторін трапеції, якщо її висота дорівнює  $6\sqrt{2}$  см.

### Частина третя

Розв'язання задач 15 і 16 повинно мати обґрунтування, у ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення.

15. Трикутник  $ABC$  – рівнобедрений прямокутний з прямим кутом  $C$  і гіпотенузою 4 см. Відрізок  $CM$  перпендикулярний до площини трикутника і дорівнює 2 см. Знайдіть відстань від точки  $M$  до прямої  $AB$ .

16. Через вершину  $A$  прямокутника  $ABCD$  проведено перпендикуляр  $MA$  до площини прямокутника. Кут між прямою  $MC$  і площиною прямокутника дорівнює  $30^\circ$ ,  $AD = \sqrt{2}$  см,  $CD = 2$  см. Знайдіть кут між площинами  $ABC$  і  $MDC$ .

### Варіант 4

#### Частина перша

Завдання 1 – 10 мають по чотири варіанти відповідей, з яких тільки ОДНА відповідь ПРАВИЛЬНА. Оберіть правильну відповідь і позначте її у бланку відповідей.

1. Прямі  $a$  і  $b$  перпендикулярні до однієї площини. Яке взаємне розміщення прямих  $a$  і  $b$ ?

А) перетинаються; В) мимобіжні;  
Б) паралельні; Г) встановити неможливо.

2. З точки  $A$ , яка віддалена від площини  $\alpha$  на 20 см, проведено до цієї площини похилу  $AC$  завдовжки 25 см. Знайдіть довжину проекції похилої  $AC$  на площину  $\alpha$ .

А) 10 см; Б) 15 см; В) 20 см; Г) 5 см.

3. У просторі дано пряму  $a$  і точку  $A$ , яка їй належить. Скільки можна провести через точку  $A$  прямих, перпендикулярних до прямої  $a$ ?

А) одну; Б) дві; В) жодної; Г) безліч.

4. На рисунку зображено куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  з ребром  $a$ . Знайдіть відстань між прямими  $A_1 D_1$  і  $C_1 D$ .

А)  $a$ ; Б)  $\frac{a}{2}$ ; В)  $a\sqrt{2}$ ; Г)  $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ .

5. Через точку  $O$  перетину діагоналей квадрата  $ABCD$ , зображеного на рисунку, проведено пряму  $MO$ , яка перпендикулярна до площини квадрата, точка  $K$  – середина відрізка  $CD$ . Яка з вказаних площин перпендикулярна до площини  $MOK$ ?

А) площина  $MOC$ ; В) площина  $CMD$ ;  
Б) площина  $MOD$ ; Г) жодна з вказаних площин.

6. Через точку  $O$ , яка лежить всередині трикутника  $ABC$ , зображеного на рисунку, проведено пряму  $MO$ , перпендикулярну до площини трикутника. Укажіть кут між прямою  $MC$  і площиною трикутника.

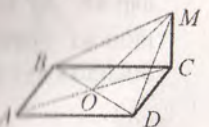
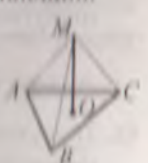
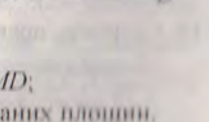
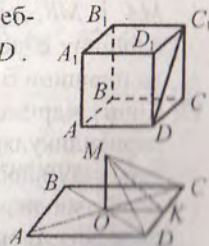
А)  $\angle MCA$ ; Б)  $\angle MCB$ ; В)  $\angle CMO$ ; Г)  $\angle MCO$ .

7. З точки  $M$  до площини  $\alpha$  проведено похилу  $MN$  під кутом  $45^\circ$  до площини. Знайдіть відстань від точки  $M$  до площини, якщо довжина похилої дорівнює 14 см.

А)  $7\sqrt{2}$  см; Б) 7 см; В)  $28\sqrt{2}$  см; Г) 14 см.

8. Через вершину  $C$  квадрата  $ABCD$ , зображеного на рисунку, проведено пряму  $MC$ , яка перпендикулярна до площини квадрата. Укажіть кут між площиною квадрата і площиною  $BMD$ .

А)  $\angle BMD$ ; Б)  $\angle MBC$ ; В)  $\angle MOD$ ; Г)  $\angle MOC$ .





9. Площа ортогональної проекції многокутника дорівнює  $6\sqrt{3}$  см<sup>2</sup>, а кут між площинами многокутника і його проекції дорівнює  $30^\circ$ .

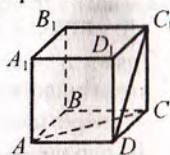
Знайдіть площу даного многокутника.

А)  $12\sqrt{3}$  см<sup>2</sup>; Б) 12 см<sup>2</sup>; В)  $9\sqrt{3}$  см<sup>2</sup>; Г) 9 см<sup>2</sup>.

10. На рисунку зображено куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ .

Знайдіть кут між прямими  $AC$  і  $C_1 D$ .

А)  $30^\circ$ ; Б)  $45^\circ$ ; В)  $60^\circ$ ; Г)  $90^\circ$ .



### Частина друга

Розв'яжіть завдання 11 – 14. Запишіть відповідь у бланк відповідей.

11. Точка  $F$  знаходиться на відстані 9 см від кожної з вершин квадрата  $ABCD$ , сторона якого дорівнює 8 см. Знайдіть відстань від точки  $F$  до площини квадрата.
12. З точки  $M$  до площини  $\alpha$  проведено перпендикуляр  $MO$  і похилі  $MA$  і  $MB$ , різниця яких дорівнює 2 см. Проекції похилих на площину  $\alpha$  дорівнюють 9 см і 5 см. Знайдіть відстань від точки  $M$  до площини  $\alpha$ .
13. Кінці відрізка, довжина якого дорівнює 25 см, належать двом перпендикулярним площинам, а відстані від його кінців до ліній перетину площин дорівнюють 16 см і 15 см. Знайдіть відстань між основами перпендикулярів, опущених з кінців відрізка на лінію перетину площин.
14. Сторона правильного трикутника дорівнює  $6\sqrt{3}$  см. Точка  $M$  рівновіддалена від сторін трикутника і знаходиться на відстані  $6\sqrt{2}$  см від його площини. Знайдіть відстань від точки  $M$  до сторін трикутника.

### Частина третя

Розв'язання задач 15 і 16 повинно мати обґрунтування, у ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення.

15. Трикутник  $ABC$  – рівнобедрений прямокутний з прямим кутом  $C$  і гіпотенузою 6 см. Відрізок  $CK$  перпендикулярний до площини трикутника. Відстань від точки  $K$  до прямої  $AB$  дорівнює 5 см. Знайдіть довжину відрізка  $CK$ .
16. Через вершину  $C$  прямокутника  $ABCD$  проведено перпендикуляр  $MC$  до площини прямокутника. Кут між прямою  $MA$  і площиною прямокутника дорівнює  $45^\circ$ ,  $AD = 2$  см,  $DC = 2\sqrt{2}$  см. Знайдіть кут між площинами  $ABC$  і  $ABM$ .

## ВІДПОВІДІ І ВКАЗІВКИ ДО ТРЕНУВАЛЬНИХ ВПРАВ

### Варіант 1

10.  $9^\circ$ . 11.  $20^\circ$ ,  $60^\circ$ . 12.  $24^\circ$ . 15. *Вказівка*. Доведіть, що  $BE \parallel DF$ , і скористайтеся теоремою Фалеса. 16. 2 см. *Вказівка*. На рисунку 151  $CC_1 = CC_2 - C_1 C_2 = \frac{BB_2}{2} - C_1 C_2$ . 19. 2 см. 24. 13 см і 15 см. 26. 21 см і 28 см. 27. 9 см. 32. 7,2 см. 35.  $22\sqrt{14}$  см<sup>2</sup>. 36. 18 см. 37. 5 см, 3 см.
38.  $\frac{a \sin \beta}{\sin(\beta + \gamma)}$ ,  $\frac{a \sin \gamma}{\sin(\beta + \gamma)}$ . 39.  $\frac{c \sin \alpha \cos \alpha}{\sin(45^\circ + \alpha)}$ . 40. 18 см, 24 см. 42. 216 см<sup>2</sup>.
45.  $\frac{160\sqrt{3}}{3}$  см<sup>2</sup>. 46.  $64^\circ$ ,  $64^\circ$ ,  $116^\circ$ ,  $116^\circ$ . 47. 9 см і 23 см. 48. 8,5 см.
54.  $40^\circ$ ,  $120^\circ$ ,  $140^\circ$ ,  $60^\circ$ . 56. 180 см<sup>2</sup>. 60. 24 см. 62.  $\frac{100\pi}{9}$  см<sup>2</sup>. 67. 48 см<sup>2</sup>.
69. (2; 0). 74.  $C(2; -1,5)$ . 82. 1)  $\sqrt{19}$ . *Вказівка*.  $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = (\vec{a} + \vec{b})^2$ .
87. *Вказівка*. Застосуйте метод доведення від супротивного. 93. *Вказівка*. Проведіть пряму, яка перетинає кожну з трьох даних прямих, і виберіть точку, яка не належить площині  $\alpha$ . Площина, яка проходить через проведену пряму і вибрану точку, — шукана. 95. *Вказівка*. Застосуйте метод доведення від супротивного. 98. *Вказівка*. Проведіть площину через дві довільні прямі. Застосуйте теорему про належність прямої площині. 101. *Вказівка*. Точки  $M$ ,  $D$  і  $K$  лежать на прямій перетину площин  $ABC$  і  $\alpha$ . 102. Прямі  $MN$  і  $KP$  (рис. 152) — шукані.

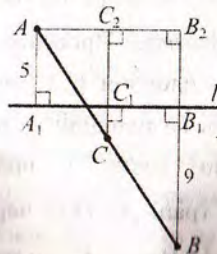


Рис. 151



Рис. 152

107. Так. 108. Вказівка. Вказані точки лежать на лінії перетину площини  $\beta$  і  $MNK$ . 111.  $\frac{3a}{2}, \frac{a^2\sqrt{3}}{16}$ . 112. Вказівка. 1) Нехай дані точки  $M$  і  $K$  належать відповідно бічним ребрам  $AA_1$  і  $BB_1$  призми  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Тоді шукана точка є точкою перетину прямих  $MK$  і  $AB$ ; 2) нехай дані точки  $M$  і  $K$  належать відповідно бічним ребрам  $AA_1$  і  $CC_1$  призми  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Тоді шукана точка є точкою перетину прямих  $MK$  і  $AC$ ; 3) нехай дані точки  $M$  і  $K$  належать відповідно бічному ребру  $AA_1$  і грані  $CC_1 D_1 D$ . У площині грані  $CC_1 D_1 D$  через точку  $K$  проведемо пряму, паралельну  $CC_1$ , яка перетне пряму  $CD$  у точці  $N$ . Тоді шукана точка є точкою перетину прямих  $MK$  і  $AN$ . 113. Вказівка. Знайдіть точку  $T$  перетину прямих  $MK$  і  $AB$ . Тоді пряма  $PT$  — лінія перетину площини перерізу і площини  $ABC$ . 114. Вказівка. Знайдіть точку  $M$  перетину прямих  $BC$  і  $AD$ . Точка перетину прямої  $MD_1$  і ребра  $AA_1$  є точкою перетину січної площини  $BCD_1$  і ребра  $AA_1$ . 115. Вказівка. Знайдіть точку  $P$  перетину прямих  $FE$  і  $CC_1$ . Тоді пряма  $AP$  — лінія перетину площини перерізу і площини грані  $AA_1 C_1 C$ . 116. Вказівка. Знайдіть точку  $E$  перетину прямих  $D_1 F$  і  $AD$ . Тоді пряма  $CE$  — лінія перетину площини перерізу і площини основи  $ABCD$ . 129. Вказівка. Доведіть, що чотирикутник  $MNQP$  — паралелограм. 130. 5 см. 140.  $8\frac{1}{3}$  см. 141. Вказівка. Через точку  $E$  проведіть прями, паралельні прямим  $MN$  і  $KP$ . 142. 2 см. 152. 6 см. 156. Вказівка. Проведіть у площині  $\alpha$  пряму  $b$ , паралельну прямій  $a$ , а в площині  $\beta$  — пряму  $c$ , паралельну прямій  $b$ . 157. Вказівка. Виберіть на площині  $\alpha$  довільну точку  $i$  і проведіть площину через цю точку  $i$  і пряму  $b$ . 188.  $(10 + 9\sqrt{2})$  см. 160. Вказівка. У площині грані  $AA_1 D_1 D$  через точку  $K$  проведіть пряму, паралельну прямій  $AA_1$ . Нехай  $K_1$  — точка перетину проведеної прямої і ребра  $AD$ . Знайдіть точку  $P$  перетину

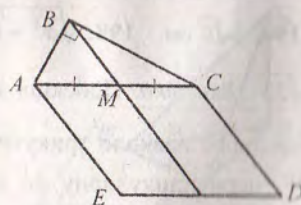


Рис. 153

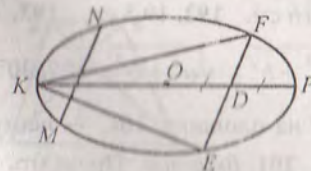


Рис. 154

прямих  $K_1 B$  і  $KF$ . Далі знайдіть точки перетину прямої  $PE$  з прямими  $BC$  і  $AD$ . 161. Вказівка. У площині грані  $AA_1 B_1 B$  через точку  $H$  проведіть пряму, паралельну  $AA_1$ . Нехай ця пряма перетинає  $AB$  у точці  $H_1$ . Аналогічно  $M_1$  — точка перетину  $CD$  і прямої, яка паралельна  $CC_1$  і проходить через точку  $M$ . Знайдіть точку  $F$  перетину прямих  $HM$  і  $H_1 M_1$ . Далі проведіть пряму  $FE$  і знайдіть точки її перетину з прямими  $AB$  і  $CD$ . 166. Ні. 171. Квадрат. 173. Вказівка. Шукана проекція бісектриси ділить відрізок  $A_1 C_1$  у відношенні 3 : 5, рахуючи від точки  $A_1$ . 174. З розв'язки. Вказівка. Побудуйте точку, симетричну одній з даних точок відносно середини відрізка, що з'єднує дві інші точки. 175. Вказівка. Сторони  $AE$  і  $CD$  проекції квадрата  $ACDE$  (рис. 153) паралельні і дорівнюють подвоєній медіані  $BM$  трикутника  $ABC$ . 177. Вказівка. Проведіть довільну хорду  $MN$  кола (рис. 154). Через її середину та центр кола проведіть діаметр  $KP$ . Через середину  $D$  відрізка  $OP$  проведіть хорду  $EF$ , паралельну  $MN$ . Трикутник  $KPE$  — шуканий. 178. Вказівка. Через точки  $A$  і  $C$  проведіть прями, паралельні прямим  $BC$  і  $AB$  відповідно. Точка перетину цих прямих — центр шуканого правильного шестикутника. 179. Вказівка. Шукані висоти паралельні прямій, яка проходить через середини основ трапеції. 180. Вказівка. При паралельному проектуванні зберігається відношення відрізків, які лежать на одній прямій. Застосуйте властивість бісектриси трикутника. 181. Вказівка. Шукана пряма проходить через точки перетину прямих  $AB$  і  $A_1 B_1$  та прямих  $BC$  і  $B_1 C_1$ . 188. Прямокутний.

191. 16 см. 192. 19,5 см. 193.  $4\sqrt{5}$  см. 194.  $3\sqrt{6}$  см. 198.  $\sqrt{a^2 + b^2}$ ,  $\sqrt{2a^2 + b^2}$ ,  $\sqrt{a^2 + b^2}$ . 199.  $30^\circ$ . 200.  $\frac{2}{3}\sqrt{55}$ . *Вказівка.* Проекція точки  $M$  на площину  $ABC$  — центр кола, описаного навколо трикутника  $ABC$ . 201. *Вказівка.* Проведіть пряму  $OF$ , перпендикулярну до площини  $ABC$ . Доведіть, що пряма  $BD$  перпендикулярна до прямих  $FO$  і  $AC$ . 202.  $90^\circ$ . 203. 10 см. 204. 6 см. 210. 6 см. 211.  $4\sqrt{3}$  см і 4 см. 212. 12 см. 215. 6 см. 217. 4 см і 8 см. 218.  $4\sqrt{7}$  см. 219. 1,5 см; 22,5 см. 220. 12 см. 221.  $45^\circ$ . 222. 10 см або  $\sqrt{145}$  см. 223.  $7\sqrt{5}$  см. *Вказівка.* Скористайтеся властивістю паралелограма:  $2(AB^2 + AD^2) = AC^2 + BD^2$ . 224. *Вказівка.* З подібності трикутників  $CMA$  і  $AMB$  (рис. 155) маємо:  $\frac{AC}{AB} = \frac{AM}{MB}$  і  $\frac{AC}{AB} = \frac{MC}{AM}$ . Перемноживши ці рівності, отримаємо:  $\frac{AC^2}{AB^2} = \frac{MC}{MB}$ . 227.  $\sqrt{b^2 - a^2}$ . 230.  $\sqrt{n^2 + a^2 \cos^2 \beta}$ . 233. *Вказівка.* Проекції шуканих перпендикулярів паралельні сторонам  $BC$  і  $AC$  трикутника  $ABC$ . 235. 12 см. 236. 5 см,  $\sqrt{41}$  см. *Вказівка.* Висота паралелограма, проведена до сторони  $CD$ , дорівнює 10 см, звідки  $OK = 5$  см (рис. 156); з  $\triangle MOK$  знайдіть відстань від точки  $M$  до сторони  $CD$ . Аналогічно знайдіть відстань від точки  $M$  до сторони  $AD$ . 237. 5 см. 238. 20 см. 239. 12 см. 240.  $2\sqrt{3}$  см. 241. 8 см. *Вказівка.* Скористайтеся властивістю сторін чотирикутника, у який вписано коло.

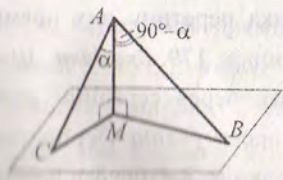


Рис. 155

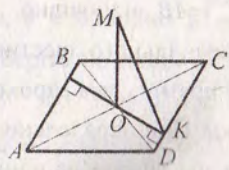


Рис. 156

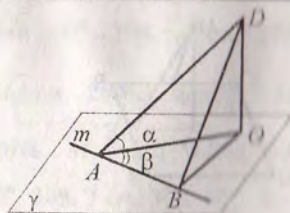


Рис. 157

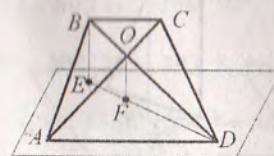


Рис. 158

242. 7,8 см. 243. 6,4 см. 244.  $\frac{1}{2}\sqrt{S \sin \alpha + 4m^2}$ . 245. *Вказівка.* Доведіть, що промінь  $CO$  — бісектриса кута  $ACB$ . 246. 10 см. 247.  $2\sqrt{6}$  см. *Вказівка.* Нехай  $DE = x$  см, тоді з  $\triangle BAD$ :  $16 - x^2 + 81 - x^2 = 49$ . 248.  $\cos \alpha \cos \beta$ . *Вказівка.* Проведіть  $DB \perp m$  (рис. 157), тоді  $OB \perp AB$ . З  $\triangle ADO$ :  $AO = AD \cos \alpha$ . З  $\triangle AOB$ :  $AB' = AO \cos \beta = AD \cos \alpha \cos \beta$ . З  $\triangle ADB$ :  $\cos \angle DAB = \frac{AB}{AD} = \cos \alpha \cos \beta$ . 249.  $\sqrt{546}$  см. *Вказівка.* Проекція похилої — бісектриса кута  $B$  трикутника  $ABC$ . 250. 4,5 см. *Вказівка.* З вершини  $B$  і точки  $O$  перетину діагоналей опустіть перпендикуляри на проведену площину (рис. 158). Далі скористайтеся подібністю трикутників  $BED$  і  $OFD$ . 255.  $4\sqrt{2}$  см. 259.  $7\frac{1}{17}$  см. 260.  $4\sqrt{3}$  см. 261.  $16\sqrt{2}$  см. 262.  $\sqrt{193}$  см і 13 см або  $\sqrt{249}$  см і  $\sqrt{281}$  см. 263.  $0,4\sqrt{337}$  см. *Вказівка.* З  $\triangle ABC$ :  $BF = \frac{AB \cdot BC}{AC}$ ,  $BF = 4,8$  см (рис. 159). З  $\triangle BFC$ :  $FC = 3,6$  см.  $EF = AC - 2FC = 2,8$  см. З  $\triangle EFD$ :  $DF^2 = DE^2 + EF^2$ ,  $DF^2 = 30,88$ . З  $\triangle BFD$ :  $BD = \sqrt{BF^2 + FD^2}$ . 264. *Вказівка.* Якщо площини  $\alpha$  і  $\beta$  перпендикулярні до площини  $\gamma$ , то лінія перетину площин  $\alpha$  і  $\beta$  перпендикулярна до площини  $\gamma$ . 265. 1)  $\alpha$ ; 2)  $0,5\alpha$ .



Рис. 159

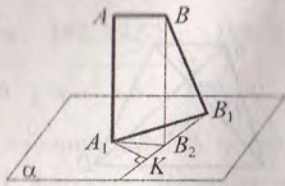


Рис. 160

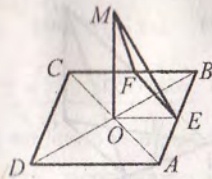


Рис. 161

266.  $4\frac{8}{13}$  см. 267. 9,6 см. 269. 9 см. *Вказівка.* Проведіть  $AD \perp b$ . Розгляньте трапецію  $AOBD$ . 270.  $5\sqrt{3}$  см. 271. 3 см. 273.  $2\sqrt{10}$  см. *Вказівка.* Проведіть  $BB_2 \perp \alpha$  (рис. 160). Висота  $A_1K$  трикутника  $A_1B_1B_2$  — шукана відстань між мимобіжними прямими. 274.  $7\frac{1}{17}$  см. *Вказівка.* Шукана відстань дорівнює висоті трикутника  $CBE$ , проведеної з вершини  $B$ . 275.  $\sqrt{2}$  см. *Вказівка.* Шукана відстань дорівнює відстані між прямою  $AB$  і площиною  $DB_1C$ . 279. 1)  $90^\circ$ ; 2)  $45^\circ$ ; 3)  $60^\circ$ . 280.  $\arccos \frac{\sqrt{6}}{6}$ . *Вказівка.* Проведіть  $EF \parallel AC$  (рис. 161). Шуканий кут дорівнює куту  $MEF$ . 286.  $3\sqrt{21}$  см. 287.  $60^\circ$ . 288.  $45^\circ$  і  $30^\circ$ . 289. 4 см. 290. 54 см. 291.  $\arccos \frac{1}{3}$ . 292.  $45^\circ$ . 293.  $60^\circ$ . *Вказівка.* Проведемо площину  $\gamma$ , перпендикулярну до прямої  $m$ . Нехай вона перетинає прямі  $a$ ,  $b$  і  $m$  у точках  $A$ ,  $B$  і  $C$  відповідно. З трикутника  $ABC$ :  $\cos \angle ACB = -0,5$ , звідки  $\angle ACB = 120^\circ$ . Тоді кут між площинами  $\alpha$  і  $\beta$

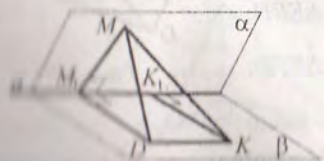


Рис. 162

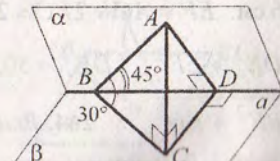


Рис. 163

- дорівнює  $60^\circ$ . 294.  $\sqrt{3}$  см. 295.  $3\sqrt{13} - 6\sqrt{3}$  см. 296.  $30^\circ$ . 297. 2,4 см. 298.  $\sqrt{61}$  см. 299.  $\arccos \frac{\sqrt{3}}{6}$ . 300.  $30^\circ$ . 302.  $30^\circ$ . 303. 8 см. *Вказівка.* Проведіть  $M_1D \perp a$ ,  $M_1D = K_1K$  (рис. 162).  $MK^2 = MD^2 + DK^2$ . 304.  $60^\circ$ . 305. 3 см. 306.  $60^\circ$ . *Вказівка.* Проведіть  $MK \perp a$  і  $MM_1 \perp AB$ . Виразіть відрізок  $MM_1$  через  $MK$ . 307.  $45^\circ$ . *Вказівка.* Нехай  $\alpha$  і  $\beta$  — дані в умові площини, пряма  $a$  — лінія їх перетину (рис. 163). Пряма  $AB$ , яка проведена в площині  $\alpha$ , утворює з прямою  $a$  кут  $45^\circ$ , а з площиною  $\beta$  — кут  $30^\circ$ . З точки  $A$  опустимо перпендикуляр  $AC$  на площину  $\beta$ . З  $\triangle ABC$ :  $AB = 2AC$ . З  $\triangle ABD$ :  $AD = \frac{AB\sqrt{2}}{2}$ . З  $\triangle ADC$ :  $\angle ADC = 45^\circ$ . 308.  $\arctg(\sqrt{2} \operatorname{tg} \alpha)$ . 309.  $2\arctg(\sqrt{3} \sin \beta)$ . *Вказівка.* Шуканий кут — це кут між висотами трикутників  $APC$  і  $BPC$ , проведеними до спільної сторони  $PC$ . 313.  $24\sqrt{2}$  см<sup>2</sup>. 314.  $60^\circ$ . 315.  $45^\circ$ . 316.  $30^\circ$ .

## Варіант 2

10.  $21^\circ$ . 11.  $60^\circ$ ,  $50^\circ$ . 12.  $64^\circ$ ,  $26^\circ$ . 13. *Вказівка.* Доведіть, що  $EF \parallel AC$  і  $FK \parallel BD$ . 19. 12 см. 22. 4 см. 24.  $2\sqrt{6}$  см. 26. 168 см. 32.  $9\frac{1}{11}$  см. 35.  $10\sqrt{110}$  см<sup>2</sup>. 36. 60 см. 37. 15 см. 40 см. 39.  $\frac{1 \sin \frac{3\theta}{2}}{\sin \alpha}$ ,  $\frac{1 \sin \frac{3\theta}{2}}{\sin 2\alpha}$ . 40. 6 см, 15 см. 42. 600 см<sup>2</sup>. 45. 360 см<sup>2</sup>. 47. 68 см. 54.  $144^\circ$ ,  $86^\circ$ ,  $36^\circ$ ,  $94^\circ$ . 56. 320 см<sup>2</sup>. 60. 4 см. 62.  $264\frac{1}{16}$  л см<sup>3</sup>, 64 л см<sup>3</sup>. 67.  $72\sqrt{2}$  см<sup>3</sup>. 69. (0; -1,75). 74.  $K(-3; 2,5)$ . 82. 1)  $\sqrt{41 + 20\sqrt{2}}$ . 99. Ні. *Вказівка.* Проведемо дві площини — через прямі  $a$  і  $c$  та через прямі  $b$  і  $c$ . Якщо припустити, що така пряма існує, то вона має належати кожній з двох проведених площин, а це означає, що вона збігається з прямою  $c$ .

101. *Вказівка.* Точки  $M$ ,  $D$  і  $N$  лежать на прямій перетину площин  $ABC$  і  $\alpha$ .

102. Прямі  $AC$  і  $BM$  — шукані

(рис. 164).

106. *Вказівка.* Проведіть площину через три точки фігури, які не належать одній прямій. Тоді кожна з решти точок фігури лежатиме з цими трьома точками в одній площині.

108. *Вказівка.* Указані точки лежать на прямій перетину площин  $ABC$  і  $\alpha$ .

111.  $\frac{3a\sqrt{2}}{2}$ ,  $\frac{a^2\sqrt{3}}{8}$ .

112. *Вказівка.* 1) Нехай дані точки  $M$  і  $K$  належать відповідно бічним ребрам  $SA$  і  $SB$  піраміди  $SABCD$ . Тоді шукана точка є точкою перетину прямих  $MK$  і  $AB$ ; 3) нехай дані точки  $M$  і  $K$  належать відповідно бічному ребру  $SA$  і грані  $SCD$ ,  $N$  — точка перетину прямих  $SK$  і  $CD$ . Тоді шукана точка є точкою перетину прямих  $MK$  і  $AN$ .

114. *Вказівка.* Знайдіть точку  $K$  перетину прямих  $AB$  і  $CD$ . Точка перетину прямої  $MK$  і ребра  $CC_1$  є точкою перетину січної площини  $ABM$  і ребра  $CC_1$ .

115. *Вказівка.* Знайдіть точку  $K$  перетину прямих  $MP$  і  $AA_1$ . Тоді пряма  $CK$  — лінія перетину площини перерізу і площини грані  $AA_1C_1C$ .

128. *Вказівка.* Застосуйте метод доведення від супротивного.

130. 11 см і 7 см.

134. *Вказівка.* Оберіть на прямій перетину площин довільну точку і проведіть площину через пряму  $a$  і цю точку. Доведіть, що ця площина містить пряму перетину даних площин.

138. *Вказівка.* Застосуйте метод доведення від супротивного.

140. 1 : 3.

142. 2,4 см.

151. 4,8 см.

157. *Вказівка.* Через пряму  $a$  і точку  $B$  проведіть площину.

158. 30 см<sup>2</sup>.

171. *Вказівка.* Основа висоти — середина сторони  $AD$ .

173. *Вказівка.* Шукана точка ділить медіану  $B_1D_1$  у відношенні 5 : 4, рахуючи від точки  $B_1$ .

174. 3 розв'язки.

176. *Вказівка.* Щоб побудувати проекцію діаметра кола, треба провести дві паралельні хорди і провести хорду через їх середини.

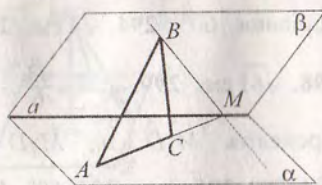


Рис. 164

177. *Вказівка.* Проведіть довільний діаметр  $AB$  кола (рис. 165). Проведіть хорду  $MN$ , паралельну  $AB$ . Через середину хорди  $MN$  і центр кола проведіть діаметр  $CD$  кола.

Чотирикутник  $ACBD$  — зображення квадрата.

178. 3 розв'язки. *Вказівка.* Нехай  $A$  і  $B$  — вершини квадрата,  $O$  — його центр. Побудуйте точки, симетричні точкам  $A$  і  $B$  відносно центра  $O$ .

179. *Вказівка.* Серединні перпендикуляри сторін трикутника паралельні його відповідним висотам.

180. *Вказівка.* Нехай у прямокутнику  $ABCD$   $AB : BC = 3 : 1$ . Тоді основа висоти  $BE$  трикутника  $ABC$  ділить сторону  $AC$  у відношенні 9 : 1, рахуючи від точки  $A$ .

181. *Вказівка.* Через точки перетину відрізків  $A_1B_1$  і  $C_1B_1$  з прямою  $p_1$  проведіть прямі, паралельні прямій  $BB_1$ . Їх точки перетину з прямими  $AB$  і  $BC$  — точки прямої  $p$ .

189. *Вказівка.* Проведіть пряму  $MO_1$ , перпендикулярну до площини  $ABC$ . Доведіть, що точка  $O_1$  збігається з точкою  $O$ .

192.  $KA = 12$  см,  $KB = KC = 24$  см.

193.  $\sqrt{217}$  см.

198.  $\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}$ .

199. 45°.

200. 12 см.

202. 60°.

203. 6,5 см.

205. *Вказівка.* Через точку  $B$  проведіть пряму, паралельну прямій  $AC$ .

211.  $MK = 12$  см,  $MC = 12\sqrt{3}$  см.

212. 50 см і 52 см.

215.  $\sqrt{6}$  см.

217. 8 см, 8 см,  $8\sqrt{3}$  см.

*Вказівка.* Проведіть пряму  $MO$ , перпендикулярну до площини  $ABC$ ,  $OA$  — радіус кола, описаного навколо трикутника  $ABC$ .

218.  $\sqrt{19}$  см,  $2\sqrt{19}$  см.

219. 13 см, 15 см.

220. 8 см.

221.  $\arccos \frac{\sqrt{6}}{3}$ .

222.  $2\sqrt{65}$  см.

223.  $\sqrt{51}$  см.

224. *Вказівка.*  $\frac{MA}{AC} = \frac{AB}{MA}$ , звідки  $\triangle MAB \sim \triangle CAM$  і  $\angle BMA = 90^\circ - \angle AMC$ .

227.  $0,5\sqrt{4a^2 + 4b^2 - c^2}$ .

230.  $\sqrt{d^2 + c^2} \sin^2 \alpha$ .

234. *Вказівка.* Проекція шуканого перпендикуляра на площину  $ABC$  паралельна діагоналі  $AC$  шестикутника.

235. 9 см.

236. 5,2 см.

237. 10 см.

238.  $3\sqrt{5}$  см.

239. 4 см.

240.  $8\sqrt{30}$  см.

241.  $\sqrt{43}$  см.

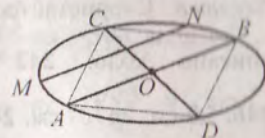


Рис. 165

- Вказівка.* Скористайтеся властивістю сторін чотирикутника, у який вписано коло. 242. 10 см. 243. 24 см. 244.  $0,5\sqrt{a^2 \sin^2 \alpha + 4b^2}$ .  
 246. 5,2 см. 247. 7 см. 248.  $\arccos \frac{\cos \varphi}{\cos \gamma}$ . 249. 12 см і 14 см. 250. 1,6 см.  
 255.  $5\sqrt{6}$  см. 258. *Вказівка.* Проекція точки  $M$  на площину  $ABC$  належить прямій, що проходить через середини сторін  $AB$  і  $CD$  прямокутника  $ABCD$ . 259. 12 см; 9,6 см. 260. 12 см. 261.  $\sqrt{205}$  см.  
 262. 8 см. 263.  $2\sqrt{337}$  см. 265. 1)  $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ ; 2)  $0,5a$ . 266. 24 см. 267. 12 см.  
 268. 2,4 см. 269.  $\sqrt{39}$  см. *Вказівка.* Скористайтеся тим, що кут між хордою і дотичною, проведеною через кінець хорди, дорівнює вписаному куту, що спирається на цю хорду. 270.  $\frac{4\sqrt{3}}{3}$  см.  
 271.  $4\sqrt{3}$  см. 273.  $\frac{16\sqrt{2}}{3}$  см. *Вказівка.* Шукана відстань дорівнює висоті трикутника  $DCK$ , проведеної до сторони  $DK$ . 274.  $3\sqrt{2}$  см.  
*Вказівка.* Шукана відстань дорівнює висоті трикутника  $C_1BC$ , проведеної з вершини  $B$ . 275.  $2\sqrt{2}$  см. *Вказівка.* Шукана відстань дорівнює відстані між прямою  $BB_1$  і площиною  $AC_1C$ . 278. *Вказівка.* Прямі  $AB$  і  $FC$  паралельні. 279. 1)  $90^\circ$ ; 2)  $45^\circ$ ; 3)  $60^\circ$ . 280.  $\arctg \frac{2\sqrt{5}}{3}$ .  
*Вказівка.* Кут між прямими  $AB$  і  $FD$  дорівнює куту між прямими  $FD$  і  $DC$ . З  $\triangle FBC$ :  $FC = 6\sqrt{5}$  см. Далі знаходимо кут  $FDC$  з трикутника  $FDC$ . 283.  $\arctg \frac{\sqrt{2}}{2}$ . 286.  $6\sqrt{4+\sqrt{6}}$  см. 287.  $45^\circ$ . 288.  $30^\circ$  і  $45^\circ$ . 289.  $30^\circ$ .  
 290.  $\frac{\cos \alpha}{\cos \beta}$ . 291.  $45^\circ$ . 292.  $\arccos \frac{\sqrt{3}}{3}$ . 293.  $2\sqrt{7}$  см. 294.  $5\sqrt{3}$  см.  
 298.  $60^\circ$ . 296.  $60^\circ$ . 297.  $6\sqrt{2}$  см. 298.  $2\sqrt{21}$  см. 299.  $45^\circ$ . 300.  $\arccos \frac{7}{8}$ .  
 301.  $\arcsin \frac{1}{3}$ . 303. 9 см. 304.  $30^\circ$ . 305. 6 см. *Вказівка.*  $MP$  — проекція

- $OM$  на площину  $MAB$  (рис. 166),  $MP = \frac{3\sqrt{3}}{2}$  см. 306.  $\arctg 2\sqrt{7}$ .  
*Вказівка.* Нехай  $MO = a$  (рис. 167). Тоді  $AO = a$ ,  $BO = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ . З  $\triangle AOB$ :  
 $AB = \frac{a\sqrt{21}}{3}$ ,  $OK = \frac{2S_{AOB}}{AB}$ ,  $OK = \frac{a}{2\sqrt{7}}$ . З  $\triangle MOK$ :  $\tg \angle MKO = 2\sqrt{7}$ .  
 307.  $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{3}$ . 308.  $\arctg \left( \frac{2 \tg \alpha}{\sqrt{3}} \right)$ . 309.  $2 \arctg(\sin \beta)$ . *Вказівка.* Шуканий кут дорівнює куту між висотами трикутників  $AKB$  і  $AKD$ , проведеними до їх спільної сторони  $AK$ . 313.  $30^\circ$ . 314. 8 см. 315.  $30^\circ$ .  
 316.  $72 \text{ см}^2$ .

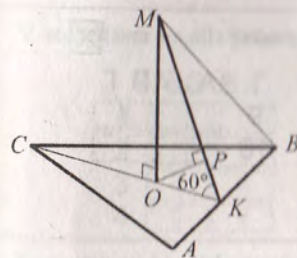


Рис. 166

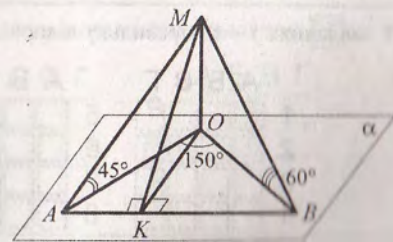


Рис. 167

**Бланк відповідей**  
**підсумкової контрольної роботи № \_\_\_\_\_**  
**з геометрії**  
 учня / учениці 10 \_\_\_\_\_ класу

назва навчального закладу \_\_\_\_\_

прізвище, ім'я, по-батькові учня (учениці) \_\_\_\_\_

Варіант № \_\_\_\_\_

**Увага!** Відмічайте тільки один варіант відповіді у рядку варіантів відповідей до кожного завдання. Будь-які виправлення у бланку недопустимі.

Якщо Ви вирішили змінити відповідь у деяких завданнях, то правильну відповідь можна зазначити в спеціально відведеному місці, розташованому внизу бланка відповідей.

У завданнях 1 – 10 правильну відповідь позначайте тільки так:

	А Б В Г		А Б В Г		А Б В Г	
1	<input type="checkbox"/>	5	<input type="checkbox"/>	9	<input type="checkbox"/>	
2	<input type="checkbox"/>	6	<input type="checkbox"/>	10	<input type="checkbox"/>	
3	<input type="checkbox"/>	7	<input type="checkbox"/>			
4	<input type="checkbox"/>	8	<input type="checkbox"/>			

У завданнях 11 – 14 упишіть відповідь.

11. \_\_\_\_\_ 13. \_\_\_\_\_

12. \_\_\_\_\_ 14. \_\_\_\_\_

Щоб виправити відповідь до завдання, запишіть його номер у спеціально відведених клітинках, а правильну, на Вашу думку, відповідь — у відповідному місці.

**Завдання 1 – 10**

**Завдання 11 – 14**

номер завдання	А Б В Г
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

номер завдання

**Бланк відповідей**  
**підсумкової контрольної роботи № \_\_\_\_\_**  
**з геометрії**  
 учня / учениці 10 \_\_\_\_\_ класу

назва навчального закладу \_\_\_\_\_

прізвище, ім'я, по-батькові учня (учениці) \_\_\_\_\_

Варіант № \_\_\_\_\_

**Увага!** Відмічайте тільки один варіант відповіді у рядку варіантів відповідей до кожного завдання. Будь-які виправлення у бланку недопустимі.

Якщо Ви вирішили змінити відповідь у деяких завданнях, то правильну відповідь можна зазначити в спеціально відведеному місці, розташованому внизу бланка відповідей.

У завданнях 1 – 10 правильну відповідь позначайте тільки так:

	А Б В Г		А Б В Г		А Б В Г	
1	<input type="checkbox"/>	5	<input type="checkbox"/>	9	<input type="checkbox"/>	
2	<input type="checkbox"/>	6	<input type="checkbox"/>	10	<input type="checkbox"/>	
3	<input type="checkbox"/>	7	<input type="checkbox"/>			
4	<input type="checkbox"/>	8	<input type="checkbox"/>			

У завданнях 11 – 14 упишіть відповідь.

11. \_\_\_\_\_ 13. \_\_\_\_\_

12. \_\_\_\_\_ 14. \_\_\_\_\_

Щоб виправити відповідь до завдання, запишіть його номер у спеціально відведених клітинках, а правильну, на Вашу думку, відповідь — у відповідному місці.

**Завдання 1 – 10**

**Завдання 11 – 14**

номер завдання	А Б В Г
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

номер завдання

ДЛЯ НОТАТОК

ДЛЯ НОТАТОК



## Зміст

Від авторів .....	3
Тематичний розподіл тренувальних вправ.....	6
Тренувальні вправи .....	7
Варіант 1 .....	7
Варіант 2 .....	36
Варіант 3 .....	65
Контрольні роботи.....	95
Варіант 1 .....	95
Варіант 2 .....	103
Підсумкові контрольні роботи .....	111
Підсумкова контрольна робота №1 .....	111
Підсумкова контрольна робота №2.....	119
Відповіді та вказівки до тренувальних вправ.....	127
Варіант 1 .....	127
Варіант 2 .....	133
Бланк відповідей підсумкової контрольної роботи .....	139

### Навчальне видання

**Мерзляк Аркадій Григорович, Полонський Віталій Борисович**  
**Рабінович Юхим Михайлович, Якір Михайло Семенович**

### Геометрія

10 клас

Збірник задач і контрольних робіт

Редактор *Г. Ф. Висоцька*. Коректор *Т. Є. Цента*. Комп'ютерне верстання *О. О. Удалова*

Формат 60х90/16. Гарнітура шкільна. Ум. друк. арк. 9,00.

Тираж 5000 прим. Замовлення № 744.

ТОВ ТО «Гімназія»,

вул. Восьмого Березня, 31, м. Харків 61052

Тел.: (057) 719-17-26, (057) 719-46-80, факс: (057) 758-83-93

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 644 від 25.10.2001

Надруковано з діапозитивів, виготовлених ТОВ ТО «Гімназія», у друкарні ПП «Молда»,

вул. Восьмого Березня, 31, м. Харків 61052. Тел. (057) 758-15-80

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ХК № 91 від 25.12.2003

# АЛГЕБРА 10

і початки аналізу клас

Навчально-методичний комплект

Підручник

Книга  
для  
вчителя

Збірник  
задач  
і контрольних  
робіт

**ДЛЯ ТИХ, ХТО ПРАГНЕ ЗНАТИ БІЛЬШЕ**

ПІДРУЧНИК ДЛЯ 10 КЛАСУ  
ЗАГАЛЬНООСВІТНІЙ  
НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАДІВ.  
ПРОФІЛЬНИЙ РІВЕНЬ



ТОВ ТО «Гімназія»

вул. Восьмого Березня, 31, м. Харків 61052

Тел.: (057) 719-17-26, 758-83-93, 719-46-80

факс: (057) 758-83-93

e-mail: [contact@gymnasia.com.ua](mailto:contact@gymnasia.com.ua)

