Г.П.Бевз, В.Г.Бевз, Н.Г.Владімірова

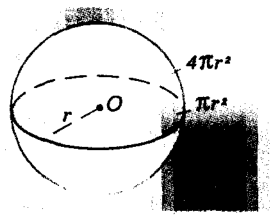
ГЕОМЕТРІЯ

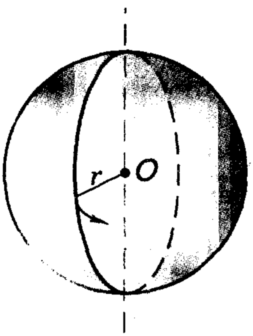
10-11

Г.П.Бевз, В.Г.Бевз, Н.Г.Владімірова

ГЕОМЕТРІЯ

Підручник
для 10-11 класів
загальноосвітніх навчальних
закладів





*Рекомендовано
Міністерством освіти
і науки України*

КИЇВ
«ВЕЖА»
2002

ББК 22.1я72
Б 36

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України (протокол №1/11–4284, 3 листопада 2001 р.)

Рецензенти:
О. С. Рубашова — вчитель-методист середньої школи № 125 м. Києва
В. О. Швець — завідувач кафедри математики і методики викладання математики НПУ ім. М. Драгоманова

В оформленні обкладинки використано фрагменти картин М. К. Ешера і В. Вазарелі

Умовні позначення

⇨ – початок доведення теореми

□ – закінчення доведення

▶ – аксіоми і важливі твердження

◩ – задачі для розв'язування

➡ – розв'язання задачі

● – практичне завдання

ISBN 966-7091-31-7

Шановні старшокласники!

Ви починаєте вивчати стереометрію — геометрію тривимірного простору. За змістом вона багатша від планіметрії і цікавіша.

Основна мета вивчення стереометрії — дати мінімум знань про геометричні фігури в просторі, необхідні для більшості спеціалістів. А ще — розвивати просторову уяву і логічне мислення учнів.

Уявіть роботу інженера-конструктора. Перш ніж створити автомобіль, комбайн, корабель, необхідно спочатку уявити його загальний вигляд, окремі вузли та деталі. Не тільки уявити, а й описати уявлювану конструкцію, щоб задум конструктора могли зрозуміти креслярі і відповідно відобразити його на кресленнях. Тут також стає в пригоді просторова уява. Навіть рядові робітники — токарі, фрезерувальники, слюсарі, монтажники, складальники, столярі, мулярі — використовують її, щоб правильно прочитати креслення і створити потрібні деталі та вузли.

Ось що писав про геометрію відомий архітектор XX ст. Ле Корбюзьє: «Тільки дотримуючись законів геометрії, архітектори давнини могли створити свої шедеври. Не випадково говорять, що піраміда Хеопса — німий трактат з геометрії, а грецька архітектура — зовнішнє відображення геометрії Евкліда. Минули віки, але роль геометрії не змінилась. Як і раніше, вона залишається граматикою архітектора». І не тільки архітектора чи інженера-конструктора, геометрія є своєрідною граматикою кожного спеціаліста, який використовує геометричні форми.

Філософам та іншим гуманітаріям також потрібні знання з геометрії. Платон не був геометром, а стверджував: «Геометрія, безперечно, наука про пізнання вічного буття». А над входом до його школи було написано: «Хай не ввійде сюди той, хто не знає геометрії!» Такої самої думки дотримувався і Феофан Прокопович: «Для занять філософією не годиться розум, не осяяний яскравим світлом геометричних знань». Високо цінили геометрію й інші відомі діячі.

У підручнику подано тільки частину сучасної геометрії. Підручник містить передбачений програмою теоретичний матеріал і достатню кількість задач.

Знати геометрію — це насамперед уміти користуватись нею. Вчитися користуватися геометричними знаннями найкраще під час розв'язування геометричних задач. У підручнику є задачі до кожної теми, до кожного параграфа. Кілька перших задач кожного параграфа бажано розв'язати усно. Задачі обов'язкового рівня позначено нуликами (^{0}), а порівняно важчі — зірочками (*).

Добре, якщо зможете відтворити доведення важливих теорем. Але якщо вам це важко дається, намагайтеся хоча б зрозуміти суть теореми, спробуйте проілюструвати її відповідним малюнком і навчіться застосовувати до відповідних задач обов'язкового рівня. Доведення, позначене зірочкою (*), — не обов'язкове для відтворення.

Вивчення геометрії істотно полегшується, якщо геометричні фігури вивчати не ізольовано одна від одної, а розглядати їх роди і види. Намагайтеся зрозуміти, наприклад, що куб — окремий вид паралелепіпедів, паралелепіпед — вид призм, призма — вид многогранників, многогранник — вид геометричних тіл і т. д. У підручнику вміщено класифікаційні схеми і діаграми, щоб допомогти під час засвоєння змісту теми. Вивчаючи ту чи іншу тему, намагайтесь і ви систематизувати виучуваний матеріал: малюйте відповідні діаграми і схеми.

Іноді вважають, що найважливіше в геометрії — доведення теорем. Звичайно, вчитися доводити теореми — справа корисна. Але не меншу роль у геометрії відіграють також поняття, їх означення і класифікації, геометричні фігури, їх побудова і перетворення, геометричні величини, їх вимірювання та обчислення. Один з відомих геометрів XX ст. Д. Гільберт писав: «У величезному саду геометрії кожний може підібрати собі букет за смаком».

Запрошуємо вас у цей багатий і дивний світ Геометрії.

Автори

ВСТУП ДО СТЕРЕОМЕТРІЇ

§1 Основні поняття стереометрії

Геометрія складається з двох частин: *планіметрії* і *стереометрії*. У попередніх класах вивчали в основному планіметрію, тепер переходимо до вивчення стереометрії. У стереометрії (від грецького στερεός — просторовий) розглядаються властивості геометричних фігур у просторі. Стереометрія вивчає властивості як плоских геометричних фігур, так і неплоских.

Фігура називається *неплоскою* (просторовою), якщо не всі її точки лежать в одній площині. Приклади неплоских фігур: куб, паралелепіпед, куля.

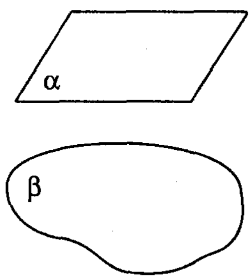
Розглядають у стереометрії не тільки фігури, а й інші геометричні поняття: співвідношення між фігурами, геометричні перетворення, геометричні величини тощо. Зміст більшості наукових понять звичайно розкривають за допомогою означень. Щоб дати означення якомусь поняттю, треба підвести його під інше поняття, зміст якого уже відомий. Наприклад, формулюючи означення: «паралелограмом називається чотирикутник, у якого протилежні сторони попарно паралельні», означуване поняття «паралелограм» підводять під уже відоме поняття «чотирикутник». А під які геометричні поняття можна підвести такі поняття геометрії, як «точка», «пряма», «площина»? Їх вводять без означень і називають *основними* або *неозначуваними поняттями*.

Властивості неозначуваних понять розкривають за допомогою аксіом. Далі ми сформулюємо аксіоми стереометрії. Але спочатку зробимо кілька зауважень щодо поняття «площина», яке зустрічається в кожній аксіомі.

Про площину говорять і в планіметрії (згадайте хоча б означення паралельних прямих). Тільки там ідеться про одну площину: усі фігури, які вивчають у планіметрії, розглядають в одній площині. У стереометрії ж доводиться розрізняти багато площин.

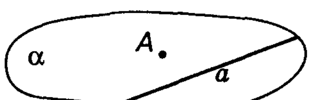
Матеріальними моделями частини площини є, наприклад, поверхня шибки, мармурової плити, аеродрому тощо. У геометрії площину уявляють необмеженою, ідеально рівною і гладенькою, що не має ніякої товщини.

Зображають площини на малюнках у вигляді паралелограмів або довільних замкнених областей (мал. 1). Позначають їх звичайно грецькими буквами α, β, γ, δ, ω тощо. Як і будь-яка геометрична фігура, площина є деякою множиною точок. Якщо A — точка площини α, говорять, що *точка A лежить у площині* α, а *площина α проходить через точку A*. Записують: $A \in \alpha$. Запис $A \notin \omega$ означає, що точка A не лежить у площині ω.

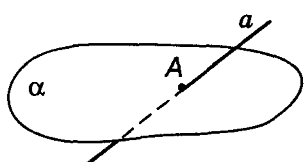


Мал. 1

Якщо кожна точка прямої a належить площині α, то говорять, що *пряма a лежить у площині* α, а *площина α проходить через пряму a*. Записують: $a \subset \alpha$. Запис $b \not\subset \alpha$ означає, що пряма b не лежить у площині α. На малюнку 2 зображено площину α, яка проходить через пряму a і точку A.



Мал. 2



Мал. 3

Якщо пряма a і площина α мають тільки одну спільну точку A, говорять, що вони *перетинаються у точці* A. Записують: $a \cap \alpha = A$. На відповідному малюнку невидиму частину прямої зображають штриховою лінією (мал. 3).

Якщо через пряму c проходять дві різні площини α і β, говорять, що ці площини *перетинаються по прямій* c. Записують: $\alpha \cap \beta = c$ (мал. 4).

1^0. Чи є геометричними фігурами точка, площина, простір?

2^0. Чи відрізняються поняття «площина» і «площа»?

3^0. Намалюйте площину α і точку M, що лежить в α. Запишіть це символічно.

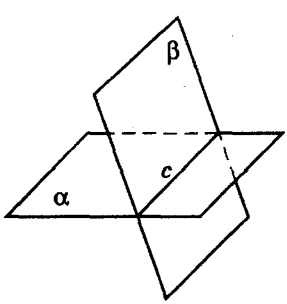
4^0. Намалюйте площину β, що проходить через пряму c. Запишіть це символічно.

5^0. Намалюйте площину γ і пряму x, які перетинаються у точці M. Скільки точок прямої x лежить у площині γ?

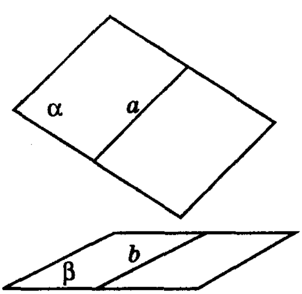
6^0. Намалюйте площини α і ω, які перетинаються по прямій m.

7. Пряма a лежить у площині α, а пряма b — у площині β (мал. 5). Чи випливає з цього, що прямі a і b не лежать в одній площині?

8. Пряма a проходить через точку A площини α. Чи випливає з цього, що пряма a перетинає площину α?



Мал. 4



Мал. 5

9. Зобразіть на малюнку площини α, β, пряму a і точку A, якщо $a \subset \alpha$, $a \subset \beta$, $A \in \beta$, $A \notin \alpha$.

10. Площини α, β, γ попарно перетинаються по прямих a, b і c, причому $a \parallel b$ і $b \parallel c$. Зобразіть це на малюнку.

11. Точки A і B лежать у площині α, а точка C — поза нею. Намалюйте площину, в якій лежать усі три точки.

12^0. Намалюйте куб. Чи є грань куба площиною? А частиною площини?

13. На скільки частин можуть розділити простір дві площини? А три площини?

● **14.** Практичне завдання. Зробіть з цупкого паперу модель площин, які перетинаються.

§ 2 *Аксіоми стереометрії і наслідки з них*

У справедливості математичних тверджень переконуються за допомогою доведень. Твердження, які доводять, називають *теоремами*. Не кожне геометричне твердження можна довести. Адже коли виклад геометрії тільки починається, неможливо вивести наслідки з інших тверджень, оскільки їх ще немає. Тому кілька перших тверджень приймають без доведення, їх називають *аксіомами*. Звичайно за геометричні аксіоми приймають такі твердження, які відповідають формам і відношенням, що спостерігаються у матеріальному світі.

Планіметричні аксіоми, які розглядалися в 7–9 класах, виконуються на будь-якій площині, як би вона не була розміщена в просторі. Але для стереометрії цих аксіом недостатньо. Потрібні аксіоми, що виражають основні властивості точок, прямих і площин у просторі. Сформулюємо їх.

C_1. У просторі існують площина і точка, що не лежить у цій площині.

▶ C_2. **Через будь-які три точки, що не лежать на одній прямій, можна провести площину, і до того ж тільки одну.**

▶ C_3. **Якщо дві точки прямої лежать у площині, то і вся пряма лежить у цій площині.**

▶ C_4. **Якщо дві площини мають спільну точку, то *вони перетинаються по прямій, яка проходить через цю точку.***

● Зауваження. Ніяких інструментів, якими можна було б проводити у просторі площини, немає. Тому вираз «можна провести» в аксіомі C_2 вжито в розумінні «існує». В аксіомі C_4 слова «яка проходить через цю точку» не обов'язкові. Але так сформульованою аксіомою зручніше користуватись.

Розглянемо найважливіші наслідки з аксіом стереометрії.

У просторі є безліч точок. Адже простір містить площину (розуміється: принаймні одну), а множина точок площини нескінченна.

З аксіом C_1 і C_2 випливає, що *в просторі є безліч різних площин*. У кожній з них існують прямі, відрізки, кути, кола та інші плоскі фігури. Отже, всі відомі з планіметрії фігури є і в просторі.

Два наслідки з аксіом стереометрії сформулюємо у вигляді теорем.

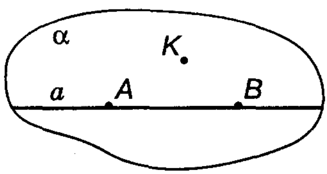
ТЕОРЕМА 1. **Через пряму і точку, що не лежить на ній, можна провести площину, і до того ж тільки одну.**

⇨ *ДОВЕДЕННЯ.* Нехай дано пряму a і точку K, що не лежить на ній (мал. 6). Позначимо на прямій a дві довільні точки A і B. Точки A, B і K не лежать на одній прямій, тому через них можна провести площину α (аксіома C_2). Точки A і B прямої a лежать у площині α, отже, і вся пряма a лежить у цій площині (аксіома C_3). Як бачимо, через пряму a і точку K одну площину провести можна. А чи можна провести ще одну? Якби це було можливо, то через точки A, B і K проходили б дві різні площини. Останнє суперечить аксіомі C_2. Отже, через пряму і точку, що не лежить на ній, можна провести тільки одну площину. □

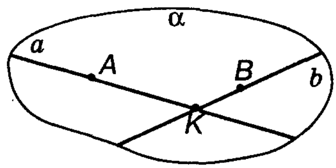
ТЕОРЕМА 2. **Через дві прямі, що перетинаються, можна провести площину, і до того ж тільки одну.**

ДОВЕДЕННЯ. Нехай дано прямі a і b, які перетинаються в точці K (мал. 7). Позначимо на них точки A, B, відмінні від K. Через точки A, B і K можна провести площину α (аксіома C_2). Прямі a і b лежать у площині α (аксіома C_3). Отже, через прямі a і b площину провести можна.

Припустимо, що через дані прямі a і b можна провести ще площину β, відмінну від α. У такому разі через точки A, B і K, які не лежать на одній прямій, проходять дві площини. Це суперечить аксіомі C_2. Отже, через дві прямі, які перетинаються, можна провести тільки одну площину. □



Мал. 6



Мал. 7

З аксіоми C_2 і доведених теорем випливає, *що площину можна задати*:

1) *трьома точками, що не лежать на одній прямій*;

2) *прямою і точкою, що не лежить на ній*;

3) *двома прямими, які перетинаються.*

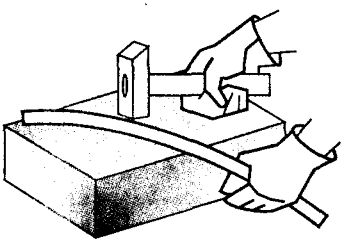
15^0. Чи можна провести площину через три точки, які лежать на одній прямій? А через чотири точки однієї прямої?

16⁰. Щоб перевірити, чи добре оброблено плоску поверхню, у різних її місцях прикладають вивірену лінійку і дивляться, чи немає зазору між ними. У яких випадках говорять, що поверхня «не плоска»? Чому?

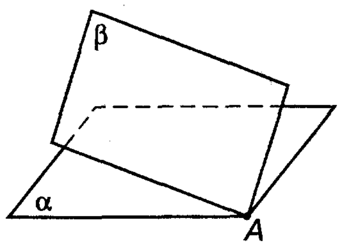
17⁰. Якщо тільки деякі точки дроту дотикаються до плоскої поверхні ковадла, дріт «не прямий». Чому? Щоб вирівняти його, б'ють молотком, як показано на малюнку 8. При цьому дріт повертають. Навіщо?

18. Доведіть, що у просторі існує безліч різних площин.

19. Площини α і β мають спільну точку A (мал. 9). Чи мають ці площини інші спільні точки? Скільки? Позначте їх на малюнку.



Мал. 8



Мал. 9

20. Точки A, B, C, D не лежать в одній площині. Доведіть, що ніякі три з них не лежать на одній прямій.

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Припустимо, що три з даних точок, наприклад A, B, C, лежать на одній прямій. Через цю пряму і точку D можна провести площину (згідно з доведеною теоремою 1). У цій площині лежать усі чотири дані точки, що суперечить умові задачі. Отже, припущення призводить до суперечності. Тому ніякі три з даних точок не можуть лежати на одній прямій.

21⁰. Прямі a і b не перетинаються. Чи випливає з цього, що через них не можна провести площину?

22^0. Скільки площин можна провести через одну точку? А через дві?

23. Три вершини трикутника лежать у площині α. Доведіть, що кожна точка цього трикутника лежить у площині α.

24. Три різні точки трикутника ABC лежать у площині α. Чи випливає з цього, що кожна точка $\triangle ABC$ лежить у площині α?

25. Прямі MA і MB перетинаються у точці M. Доведіть, що всі прямі, які їх перетинають, але не проходять через M, лежать в одній площині.

26. Прямі AB, AK і KP перетинають площину α у точках B, C і P, як показано на малюнку 10. Чи перетинаються прямі AB і KP?

27. Дано пряму a і точку B, що не лежить на ній. Доведіть, що всі прямі, які проходять через точку B і перетинають a, лежать в одній площині.

28. Точка A належить площині α, а B не належить. Чи належить площині α середина відрізка AB? Чому?

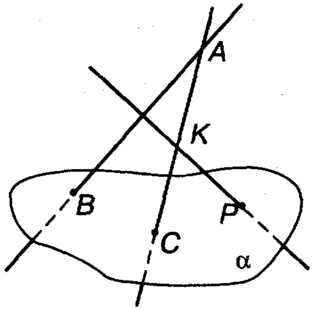
29. Доведіть, що через будь-які дві різні точки простору можна провести пряму, і до того ж тільки одну.

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Нехай A і B дві довільні точки простору. Через них і будь-яку третю точку проведемо площину α. У цій площині через точки A і B можна провести єдину пряму a (відомо з планіметрії).

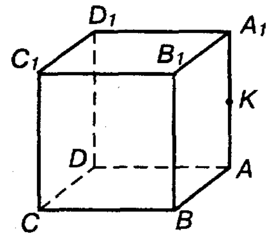
Припустимо, що через точки A і B у просторі проходить ще пряма a_1, відмінна від a. Її точки A і B лежать у площині α, тому і пряма a_1 лежить в α (аксіома C_3). Таким чином, через точки A і B у площині α проходять дві різні прямі a і a_1. Це суперечить аксіомі планіметрії. Отже, через точки A і B у просторі можна провести тільки одну пряму.

30. Доведіть, що існує пряма, яка перетинає дану площину.

31. Доведіть, що існує площина, яка перетинає дану площину.



Мал. 10

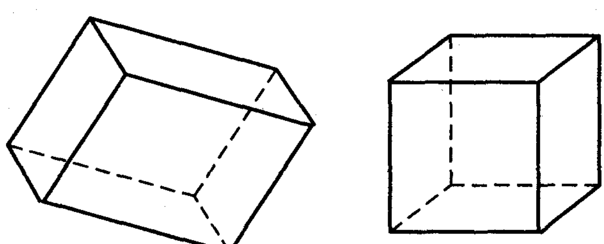


Мал. 11

32. На малюнку 11 зображено куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, точка K — середина ребра AA_1. Чи належить грані BB_1C_1C точка D? Площини яких граней куба перетинає пряма BK? А пряма CK?

§ 3 *Перерізи*

Розглянуті у попередньому параграфі способи задання площини часто використовують під час побудови перерізів многогранників. Обмежимось двома прикладами: паралелепіпедами і тетраедрами.



а   *б*

Мал. 12

Паралелепіпед має 6 граней, 12 ребер, 8 вершин (мал. 12). Усі грані паралелепіпеда — паралелограми. Якщо всі грані паралелепіпеда — прямокутники, його називають *прямокутним паралелепіпедом*.

Окремий вид прямокутного паралелепіпеда — *куб* (мал. 12, *б*). Усі грані куба — рівні квадрати. Записуючи «паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$», мають на увазі, що його основа — $ABCD$, а бічні ребра — AA_1, BB_1, CC_1, DD_1.

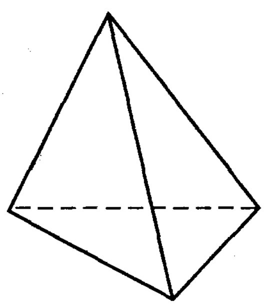
Тетраедр інакше називають трикутною пірамідою. Він має 4 грані, 6 ребер, 4 вершини (мал. 13). Кожна грань тетраедра — трикутник. Якщо всі ребра тетраедра рівні, його називають *правильним тетраедром*.

Що таке переріз многогранника?

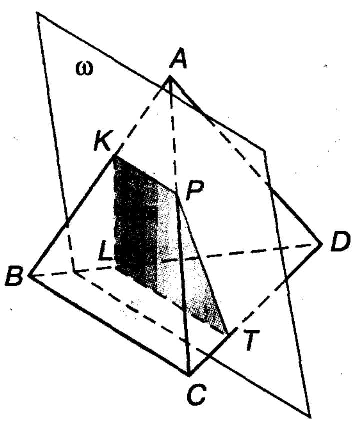
Якщо жодна з двох точок не належить площині, а відрізок, що їх сполучає, має з цією площиною спільну точку, то говорять, що дані точки лежать по різні боки від площини. А якщо принаймні дві точки многогранника лежать по різні боки від деякої площини ω, говорять, що площина ω перетинає многогранник. У цьому разі площину ω називають *січною площиною*.

Фігура, яка складається з усіх точок, спільних для многогранника і січної площини, називається *перерізом многогранника* даною площиною.

На малюнку 14 зображено тетраедр $ABCD$ і січну площину ω, їх переріз — чотирикутник $KPTL$.



Мал. 13

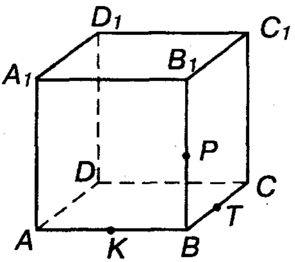


Мал. 14

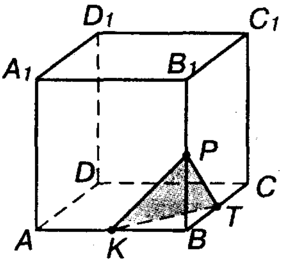
Щоб побудувати переріз многогранника площиною, треба задати цю площину: трьома точками, що не лежать на одній прямій, прямою і точкою тощо.

Приклад 1. Побудуйте переріз куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною, що проходить через точки K, P, T — середини ребер AB, BB_1 і BC (мал. 15, *а*).

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Точки K і P лежать у площині грані ABB_1A_1 куба і в січній площині. Отже, ці площини перетинаються по прямій KP. Січна площина перетинає квадрат ABB_1A_1 по відрізку KP. Аналогічно переконуємося, що дві інші грані куба січна площина перетинає по відрізках KT і TP. Побудувавши їх, дістанемо трикутник KPT. Це і є шуканий переріз (мал. 15, *б*).



а



б

Мал. 15

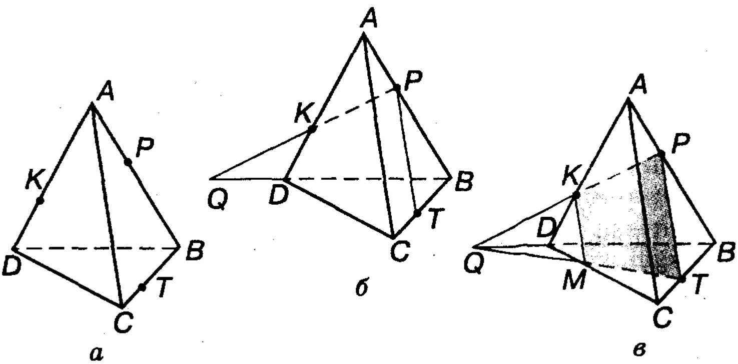
Іноді в задачі вимагається не тільки побудувати переріз, а й знайти його площу або периметр. Для цього треба знати розміри даного многогранника.

Наприклад, якщо довжина ребра розглядуваного куба дорівнює a, то $BK = BP = BT = \frac{a}{2}$, $KP = PT = TK = \frac{a}{\sqrt{2}}$. Отже, площа знайденого перерізу

$$S = \frac{KP^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{8}.$$

П р и к л а д 2. На ребрах тетраедра $ABCD$ дано точки K, P, T, як показано на малюнку 16, *а*. Побудуйте переріз тетраедра площиною, що проходить через дані точки.

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Проводимо відрізки KP і PT. Щоб побудувати інші сторони перерізу, знайдемо точку, в якій січна площина KPT перетинає ребро CD. Прямі KP і BD лежать у площині ABD і не паралельні, отже, перетинаються у деякій точці Q (мал. 16, *б*). Точка Q належить площинам KPT і BCD. І точка T належить цим площинам. Тому кожна точка прямої QT належить січній площині, у тому числі і точка M, в якій перетинаються прямі CD і QT. Відшукавши точку M, сполучаємо її відрізками з K і T. Чотирикутник $KPTM$ — шуканий переріз (мал. 16, *в*).



Мал. 16

33⁰. Чи перетинає відрізок AB площину, якщо її перетинає пряма AB?

34. Відрізки AB і AC перетинають площину α. Чи перетинає її відрізок BC? А пряма BC?

35⁰. Побудуйте переріз прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною, яка проходить через: 1) точки A, B_1 і D_1; 2) точки A, C і середину ребра DD_1.

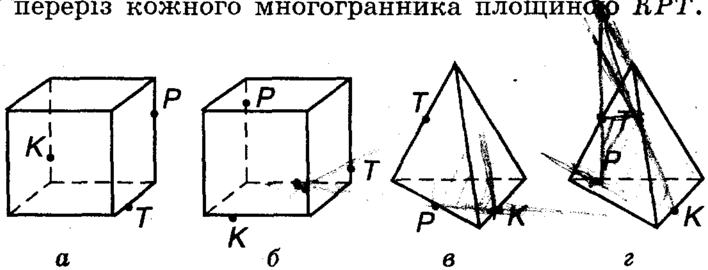
36^0. Чи може перерізом куба бути рівнобедрений трикутник, правильний трикутник, прямокутник, квадрат, трапеція?

37^0. Точка K — середина ребра AD тетраедра $ABCD$. Побудуйте переріз тетраедра площиною, яка проходить через точки B, C і K.

38^0. Точка M — середина ребра CD тетраедра $ABCD$. Побудуйте переріз тетраедра площиною, яка проходить через пряму AB і точку M.

39^0. $ABCD$ — тетраедр. Точки K і M — середини ребер AD і CD. Побудуйте переріз тетраедра площиною BKM.

40. Перемалюйте малюнок 17 у зошит і побудуйте переріз кожного многогранника площиною KPT.



Мал. 17

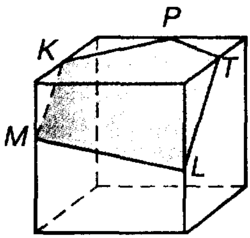
41. Доведіть, що перерізом тетраедра не може бути п'ятикутник.

42. Довжина ребра правильного тетраедра дорівнює a. Побудуйте його переріз площиною, що проходить через середини трьох ребер, які виходять з однієї вершини. Знайдіть периметр і площу перерізу.

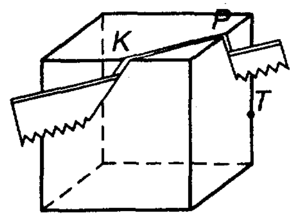
43. Довжини трьох ребер прямокутного паралелепіпеда, що виходять з однієї вершини, дорівнюють 6 см, 6 см і 8 см. Побудуйте переріз паралелепіпеда площиною, яка проходить через середини цих ребер, і знайдіть його площу.

44. Учень намалював переріз куба площиною (мал. 18). Чи є помилка на малюнку?

45. Дерев'яний куб розпилюють так, що пилка проходить через точки K, P, T (мал. 19). Яка фігура буде у перерізі?



Мал. 18



Мал. 19

● **46.** Практичне завдання. Зробіть з цупкого паперу модель тетраедра.

Самостійна робота 1

Варіант 1

1. Намалюйте площини α і β, які перетинаються по прямій a.

2. Доведіть, що у просторі існує безліч точок, які не належать даній площині α.

3. Скільки спільних точок можуть мати площина і промінь, початок якого цій площині не належить?

4. Побудуйте переріз правильного тетраедра $ABCD$ площиною, яка проходить через вершину D і середини ребер AB і AC. Знайдіть периметр і площу перерізу, якщо $AB = c$.

Варіант 2

1. Намалюйте прямі a і b, які перетинають площину α в точці M.

2. Доведіть, що у просторі існує безліч відрізків, які не лежать у даній площині α.

3. Три точки кута лежать у площині α. Чи правильно, що кожна точка цього кута належить площині α?

4. Побудуйте переріз куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною, яка проходить через точки A, C і середину ребра BB_1. Знайдіть периметр і площу перерізу, якщо $AB = m$.

Запитання для самоперевірки

1. Що таке стереометрія?

2. Які фігури називають неплоскими? Наведіть приклади.

3. Сформулюйте аксіоми стереометрії.

4. Сформулюйте і доведіть наслідки з аксіом стереометрії.

5. Як можна задати площину в просторі?

6. Намалюйте паралелепіпед. Назвіть його елементи.

7. Який паралелепіпед називають прямокутним? Що таке куб?

8. Намалюйте тетраедр. Назвіть його елементи.

9. Який тетраедр називають правильним?

10. Що таке переріз многогранника площиною? Наведіть приклади.

ІСТОРИЧНА ДОВІДКА

Геометрія виникла як наука про вимірювання землі. Але вже античні давньогрецькі математики відірвали її від вимірювань земельних ділянок та різних споруд, перетворивши геометрію на абстрактну науку. А оскільки потреба вимірювати земельні ділянки залишалась, то створили ще одну науку — *геодезію* (γῆ — земля і δαίω — поділяю). Тепер геодезія — це наука про визначення форми і розмірів Землі, про зображення земної поверхні на планах і картах, а також про методи вимірювання на місцевості під час проведення наукових та інженерних робіт. Геодезисти використовують здобутки геометрії.

Сучасна геометрія займається здебільшого дослідженням абстрактних геометричних фігур, розміщених в абстрактних геометричних просторах. Таких просторів відомо багато: двовимірні, тривимірні, чотиривимірні, n-вимірні, евклідові, неевклідові тощо.

Стереометрія — це розділ геометрії про властивості фігур тривимірного евклідового простору.

Майже всі питання, розглянуті в цьому розділі, були відомі геометрам понад два тисячоліття тому. Тільки формулювалися тоді вони інакше. Наприклад, аксіоми C_3 і C_4 відповідають першому і другому твердженням книги XI «Основ» Евкліда: «Частини прямої лінії не можуть лежати одна над площиною, а друга — в самій площині», «Дві площини перетинаються по прямій лінії». Тетраедри, паралелепіпеди, куби та багато інших геометричних тіл також були добре відомі стародавнім грецьким геометрам. І вивченням перерізів вони також займалися. Так, понад 22 століття тому Аполлоній Пергський написав праці «Про просторові перерізи» і «Конічні перерізи».

Евклід
(бл. 365–300 до н. е.)

Давньогрецький математик, учень Платона, автор праці «Основи», у якій систематизовано майже всі попередні математичні відомості. Після 1482 р. цю книгу передруковували понад 500 разів багатьма мовами. В Англії і деяких інших країнах «Основи» Евкліда аж до XX ст. були підручником геометрії для середніх шкіл.

РОЗДІЛ **2**

ПАРАЛЕЛЬНІСТЬ ПРЯМИХ І ПЛОЩИН

§ 4 *Прямі в просторі*

Якщо дві прямі лежать в одній площині, вони або перетинаються, або паралельні. У стереометрії можливий і третій випадок. Наприклад, якщо $ABCD$ — тетраедр, то прямі AB і CD не перетинаються і не паралельні. Вони не лежать в одній площині.

Означення. *Дві прямі, які не лежать в одній площині, називають* ***мимобіжними.***

На малюнку 20 зображено десятки пар матеріальних моделей мимобіжних прямих.

Спочатку розглянемо властивості паралельних прямих у просторі.

Означення. *Дві прямі називаються* ***паралельними,*** *якщо вони лежать в одній площині і не перетинаються.*

З цього означення випливає, що через дві різні паралельні прямі завжди можна провести площину, і до того ж тільки одну. Адже якщо припустити, що через паралельні прямі a і b проведено дві різні площини, то з цього випливало б, що через пряму a і деяку точку прямої b проведено дві різні площини. А цього не може бути.

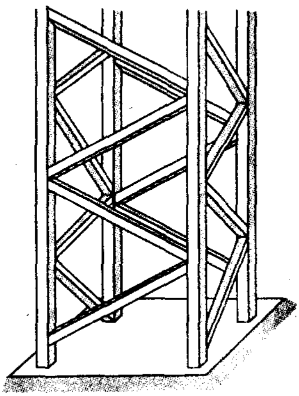
Отже, до перелічених у § 2 способів задання площини можна додати ще один: *площину можна задати двома паралельними прямими.*

Як відомо, в площині через дану точку можна провести тільки одну пряму, паралельну даній прямій. А скільки таких прямих можна провести в просторі?

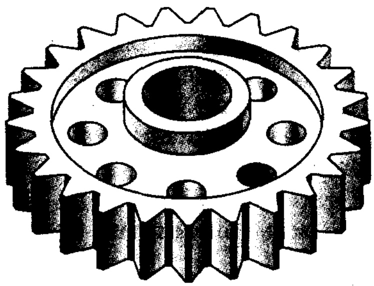
ТЕОРЕМА 3. **Через будь-яку точку простору, яка не лежить на даній прямій, можна провести пряму, паралельну даній, і до того ж тільки одну.**

ДОВЕДЕННЯ. Нехай дано пряму a і точку A, що не лежить на ній. Через них можна провести єдину площину. У цій площині можна провести пряму, паралельну a, до того ж тільки одну. Отже, у просторі через дану точку A можна провести тільки одну пряму, паралельну даній прямій a. □

Дві паралельні прямі завжди лежать в одній площині. А три чи більше? Можуть і не лежати в одній площині. Наприклад, усі ребра прямозубої циліндричної шестерні лежать на паралельних прямих, але не належать одній площині (мал. 21).



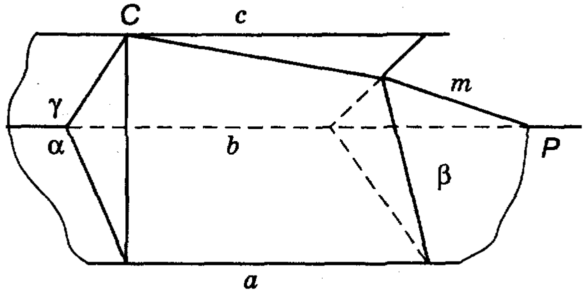
Мал. 20



Мал. 21

ТЕОРЕМА 4. **Дві прямі, паралельні третій, паралельні.**

ДОВЕДЕННЯ.* Нехай $a \parallel b$ і $c \parallel b$. Доведемо, що $a \parallel c$. Прямі a і c не можуть перетинатися. Інакше через точку їх перетину проходили б дві різні прямі, паралельні b, що суперечило б попередній теоремі.



Мал. 22

Припустимо, що прямі a і c мимобіжні (мал. 22). Через паралельні прямі a і b, b і c проведемо площини α і γ, а через пряму a і яку-небудь точку C прямої c — площину β. Нехай площини γ і β перетинаються по прямій m. Прямі b, c і m лежать в одній площині γ, причому $b \parallel c$. Тому пряма m, яка перетинає c, перетинає в деякій точці P і пряму b. Прямі m і b лежать відповідно в площинах β і α. Тому їх спільна точка P належить цим площинам, а отже, і їх спільній прямій a. Як бачимо, з припущення випливає, що паралельні (за умовою) прямі a і b мають спільну точку P. Це — суперечність.

Отже, прямі a і c не можуть ні перетинатись, ні бути мимобіжними. Залишається єдино можливе: $a \parallel c$. □

Доведену теорему називають теоремою про *транзитивність паралельних прямих* (від лат. transitivus — перехідний), оскільки в ній говориться про перехід паралельності прямих двох пар на третю.

Паралельними бувають не тільки прямі, а й відрізки і промені.

Два відрізки або *промені* називають *паралельними*, якщо вони лежать на паралельних прямих.

47⁰. На малюнку 16, *а* зображено тетраедр $ABCD$. Чи паралельні його ребра AB і CD? Чи перетинаються прямі AC і BD?

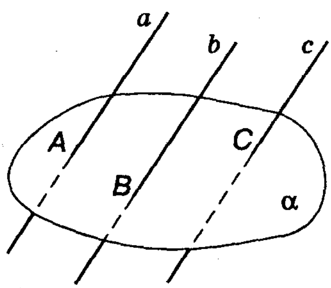
48⁰. Точки A, B, C і D розміщені так, що $AB \parallel CD$. Чи можуть бути мимобіжними прямі AC і BD? Чому?

49. Прямі AB і CD мимобіжні. Чи можуть бути паралельними прямі AC і BD? А перетинатись?

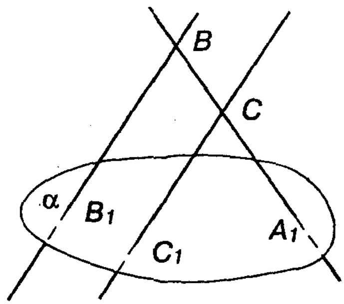
РОЗВ'ЯЗАННЯ. Якби прямі AC і BD були паралельними або перетиналися, то через них можна було б провести площину. У цій площині лежали б точки A, B, C, D, а отже, і прямі AB і CD, що суперечить умові задачі. Виходить, прямі AC і BD не можуть ні бути паралельними, ні перетинатись.

50⁰. Чи можна вважати правильним таке означення: «Дві прямі називаються мимобіжними, якщо вони не перетинаються і не паралельні»?

51. Попарно паралельні прямі a, b і c перетинають площину α у точках A, B, C так, як показано на малюнку 23. Чи належать дані прямі одній площині?



Мал. 23

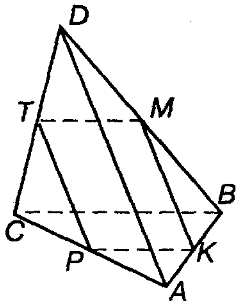


Мал. 24

52. Прямі BB_1 і CC_1, зображені на малюнку 24, перетинають пряму A_1B у точках B і C, а площину α — у точках B_1 і C_1. Чи паралельні прямі BB_1 і CC_1?

53⁰. Паралелограми $ABCD$ і ABC_1D_1 лежать у різних площинах. Доведіть, що чотирикутник CDD_1C_1 — теж паралелограм.

54. K, P, T, M — середини ребер AB, AC, CD, DB тетраедра $ABCD$. Доведіть, що чотирикутник $KPTM$ — паралелограм.



Мал. 25

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Відрізки KP і MT — середні лінії трикутників ABC і DBC (мал. 25). Тому кожний з них паралельний ребру BC і дорівнює його половині. За властивістю транзитивності відрізки KP і MT паралельні і рівні. Отже, чотирикутник $KPTM$ — паралелограм.

55^0. Відрізки OA і OB перетинають площину α в точках A_1 і B_1, які є серединами цих відрізків. Знайдіть відстань AB, якщо $A_1B_1 = 3{,}8$ см.

56^0. Вершинами трикутника ABC є середини відрізків OA_1, OB_1, OC_1. Точка O не лежить у площині $\triangle ABC$. У скільки разів периметр $\triangle A_1B_1C_1$ більший від периметра $\triangle ABC$?

57. З точок A і B площини α проведено поза нею паралельні відрізки $AK = 16$ см і $BM = 12$ см. Пряма KM перетинає площину α в точці C. Знайдіть відстань AC, якщо $AB = 9$ см. Розгляньте два випадки.

58. Через кінці відрізка AB і його середину M проведено паралельні прямі, які перетинають деяку площину в точках A_1, B_1 і M_1. Знайдіть відстань MM_1, якщо $AA_1 = 6{,}5$ м, $BB_1 = 8{,}5$ м. Розгляньте всі можливі випадки.

59. Точка C ділить відрізок AB у відношенні $AC : CB = 2 : 3$. Паралельні прямі, які проходять через точки A, C, B, перетинають площину в точках A_1, C_1 і B_1. Знайдіть відношення $A_1B_1 : A_1C_1$.

60. Через вершину D паралелограма $ABCD$ проведено площину α, яка не перетинає його, а через точки A, B, C — паралельні прямі, які перетинають α в точках A_1, B_1, C_1. Знайдіть BB_1, якщо $AA_1 = 15$ см, $CC_1 = 17$ см.

61. Нехай O — точка перетину діагоналей паралелограма $ABCD$, а α — площина, яка не перетинає паралелограм. Через точки A, B, C, D, O проведено паралельні прямі, які перетинають α в точках A_1, B_1, C_1, D_1, O_1. Доведіть, що $AA_1 + BB_1 + CC_1 + DD_1 = 4 \cdot OO_1$ і $AA_1 + CC_1 = BB_1 + DD_1$.

§ 5 Паралельність прямої і площини

Означення. *Пряма і площина називаються* ***паралельними****, якщо вони не мають спільних точок.*

Якщо пряма a паралельна площині α, то пишуть: $a \parallel \alpha$.

ТЕОРЕМА 5 (ознака паралельності прямої і площини). **Якщо пряма, яка не лежить у площині, паралельна якій-небудь прямій цієї площини, то вона паралельна і самій площині.**

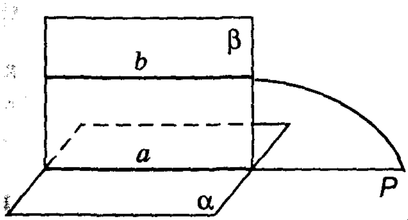
ДОВЕДЕННЯ. Нехай пряма b не лежить у площині α, а пряма a лежить в α і $b \parallel a$. Доведемо, що $b \parallel \alpha$.

Припустимо, що пряма b не паралельна α, а перетинає площину α у деякій точці P (мал. 26). Ця точка лежить у площині α і в площині β, яка проходить через паралельні прямі a і b. Отже, точка P лежить на прямій a, по якій перетинаються площини α і β. Прийшли до суперечності: паралельні прямі a і b мають спільну точку P. Виходить, що пряма b не може перетинати площину α. Вона і не лежить у площині α. Отже, $b \parallel \alpha$. □

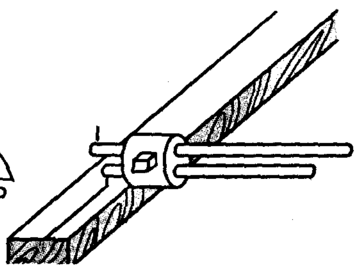
Відрізок називається *паралельним площині*, якщо він є частиною прямої, паралельної площині.

Приклади. Кожне ребро паралелепіпеда паралельне площинам двох його граней (покажіть це на малюнку).

Пряма, проведена в грані бруска за допомогою рейсмуса (мал. 27), паралельна площинам трьох



Мал. 26


Мал. 27

його граней. Горизонтальні планки мотовила зернозбирального комбайна паралельні площині поля. Усе це — матеріальні моделі паралельності прямої і площини.

62^0. Кожна з прямих a і b паралельна площині α. Чи випливає з цього, що прямі a і b паралельні?

63^0. Пряма a паралельна прямій b, а b паралельна площині α. Чи випливає з цього, що $a \parallel \alpha$?

64. Кожна з площин α і β паралельна прямій a. Чи можуть ці площини перетинатись?

65. Пряма a перетинає площину α. Скільки можна провести прямих: 1) що перетинають площину α і паралельні прямій a; 2) що перетинають пряму a і паралельні площині α?

66^0. Скільки прямих, паралельних площині α, можна провести через дану точку A, якщо $A \notin \alpha$? А якщо $A \in \alpha$?

67^0. Скільки площин, паралельних даній прямій, можна провести через дану точку?

68^0. $ABCD$ — паралелограм. Площина ω проходить через його вершини A, B і не проходить через вершину C. Доведіть, що $CD \parallel \omega$.

69^0. Доведіть, що коли площина перетинає трапецію по її середній лінії, то вона паралельна основам трапеції.

70^0. Точки A і B лежать у площині α, а O — поза площиною. Доведіть, що пряма, яка проходить через середини відрізків AO і OB, паралельна площині α.

71. Площина α перетинає відрізки AB і AC в їх серединах — точках K і P. Доведіть, що $BC \parallel \alpha$. Як відносяться площі $\triangle ABC$ і $\triangle AKP$?

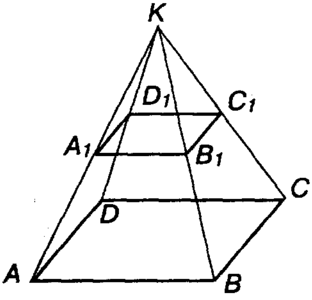
72. $ABCD$ — квадрат; точка K не лежить в його площині. Знайдіть периметр чотирикутника $A_1B_1C_1D_1$, якщо A_1, B_1, C_1, D_1 — середини відрізків AK, BK, CK, DK і $AB = 8$ см.

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Відрізки A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1, D_1A_1 — середні лінії трикутників KAB, KBC, KCD, KDA (мал. 28). Довжина кожного з них дорівнює половині довжини сторони квадрата. Їх сума дорівнює 4 см · 4 = 16 см.

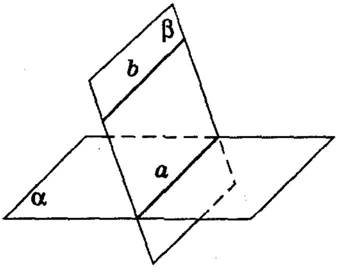
Відповідь. 16 см.

73. Точки B і C не лежать на прямій a. Скільки існує площин, паралельних a, які проходять через B і C? Розгляньте всі випадки.

74. Якщо площина проходить через пряму, паралельну другій площині, і перетинається з цією площиною, то пряма їх перетину паралельна даній прямій. Доведіть.



Мал. 28



Мал. 29

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Нехай $b \parallel \alpha$, $b \subset \beta$, $\alpha \cap \beta = a$ (мал. 29). Доведемо, що $a \parallel b$. Якби прямі a і b перетинались, їх точка перетину була б спільною для прямої b і площини α. Це неможливо, оскільки $b \parallel \alpha$. Отже, прямі a і b не перетинаються. А лежать вони в одній площині β. Тому $a \parallel b$.

75. Дано неплоску замкнену ламану $ABCDA$. Доведіть, що середини всіх її ланок лежать в одній площині.

76. $PABC$ — тетраедр, кожне ребро якого 6 см. Побудуйте переріз тетраедра площиною, яка проходить через середину ребра PB паралельно ребрам PA і PC. Знайдіть площу перерізу.

77. Побудуйте переріз тетраедра $PABC$ площиною, паралельною ребру AB, яка проходить через вершину P і середину ребра BC. Знайдіть площу перерізу, якщо $AB = BC = CA = a$, $PA = PB = PC = b$.

78. Побудуйте переріз куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною, яка проходить через середини ребер AB і AD і паралельна прямій CC_1. Знайдіть периметр і площу перерізу, якщо $AB = l$.

79*. Якщо через кожну з двох паралельних прямих проведено площину, причому ці площини перетинаються, то лінія їх перетину паралельна кожній з даних прямих. Доведіть.

§ 6 *Паралельність площин*

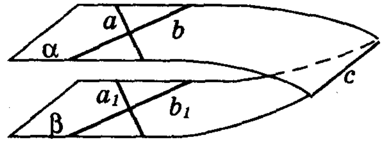
Означення. ***Дві площини називаються паралельними, якщо вони не перетинаються.***

Якщо площини α і β паралельні, пишуть: $\alpha \parallel \beta$.

ТЕОРЕМА 6 (ознака паралельності площин). **Якщо дві прямі, які перетинаються і лежать в одній площині, паралельні двом прямим другої площини, то такі площини паралельні.**

ДОВЕДЕННЯ. Нехай прямі a і b, що перетинаються, лежать у площині α, а паралельні їм прямі a_1 і b_1 — у площині β (мал. 30). Доведемо, що $\alpha \parallel \beta$.

Припустимо, що площини α і β не паралельні, тобто перетинаються по якійсь прямій c. Оскільки прямі a і b паралельні прямим a_1 і b_1 площини β, то $a \parallel \beta$ і $b \parallel \beta$.

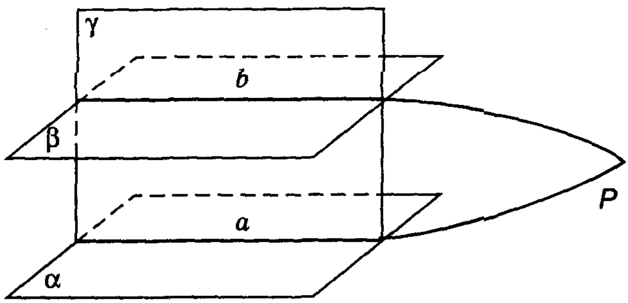


Мал. 30

Прямі a і b не перетинають c, оскільки пряма c лежить у площині β, з якою a і b не мають спільних точок. Лежать усі ці прямі в одній площині α. Виходить, $a \parallel c$ і $b \parallel c$, тобто дві прямі, які перетинаються, паралельні третій прямій. Це суперечить аксіомі паралельності. Отже, площини α і β не можуть перетинатись: $\alpha \parallel \beta$. □

ТЕОРЕМА 7. **Паралельні площини перетинаються січною площиною по паралельних прямих.**

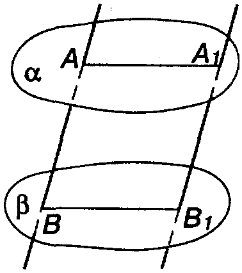
⇨ *ДОВЕДЕННЯ.* Нехай площина γ перетинає паралельні площини α і β по прямих a і b (мал. 31). Доведемо, що $a \parallel b$.



Мал. 31

Припустимо, що прямі a і b не паралельні. Тоді вони перетинаються в деякій точці P, оскільки лежать в одній площині γ. Точка P належить прямим a і b, отже, і площинам α і β, в яких лежать ці прямі. Прийшли до суперечності: паралельні площини α і β мають спільну точку P. Отже, прямі a і b не можуть перетинатись. А лежать вони в одній площині γ. Тому $a \parallel b$. □

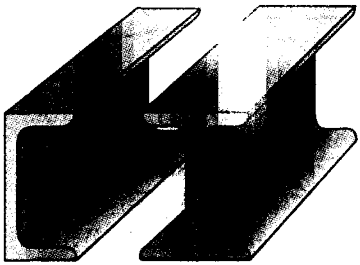
ТЕОРЕМА 8. **Паралельні площини, перетинаючи паралельні прямі, відтинають від них рівні відрізки.**



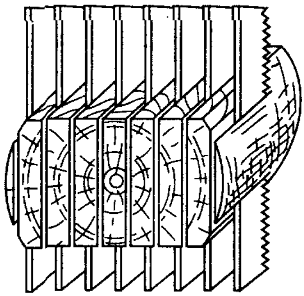
Мал. 32

⇨ *ДОВЕДЕННЯ*. Нехай паралельні площини α і β відтинають від паралельних прямих AB і A_1B_1 відрізки AB і A_1B_1 (мал. 32). Площина, яка проходить через дані паралельні прямі, перетинає площини α і β по паралельних прямих AA_1 і BB_1. Тому чотирикутник AA_1B_1B — паралелограм, його протилежні сторони рівні: $AB = A_1B_1$. А це й треба було довести. □

Моделі паралельних площин: підлога і стеля кімнати, підлога і поверхня стола, шибки подвійних вікон. Паралельні шари фанери, протилежні грані цеглини, швелера, двотаврової балки (мал. 33), пилки пилорами (мал. 34) та ін.



Мал. 33



Мал. 34

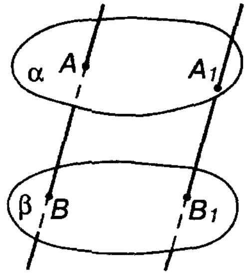
80⁰. Дві прямі площини α паралельні двом прямим площини β. Чи випливає з цього, що $\alpha \parallel \beta$?

81⁰. Площини α і β паралельні. Доведіть, що кожна пряма площини α паралельна площині β.

82⁰. Відрізки OA, OB, OC не лежать в одній площині. Доведіть, що площина, яка проходить через їх середини, паралельна площині ABC.

83⁰. Точка O — спільна середина кожного з відрізків AA_1, BB_1, CC_1, які не лежать в одній площині. Доведіть, що площини ABC і $A_1B_1C_1$ паралельні.

84⁰. Чи паралельні прямі AB і A_1B_1, якщо паралельні площини α і β перетинають їх у точках A, B, A_1, B_1, як показано на малюнку 35?

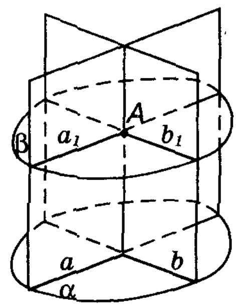


Мал. 35

85. Пряма a паралельна площині α. Як через пряму a провести площину, паралельну α?

86. Як через точку A поза даною площиною α провести площину, паралельну площині α?

РОЗВ'ЯЗАННЯ. У даній площині α проведемо прямі a і b, які перетинаються (мал. 36). Через дану точку A проведемо паралельні їм прямі a_1 і b_1. Прямі a_1 і b_1 перетинаються, тому через них можна провести площину β. За ознакою паралельності площин $\beta \parallel \alpha$.



Мал. 36

87. Чи можуть паралельні площини відтинати рівні відрізки від непаралельних прямих?

88. Площина γ перетинає площини α і β по паралельних прямих. Чи випливає з цього, що площини α і β паралельні?

89. Чи можуть перетинатись площини α і β, якщо кожна з них паралельна площині γ?

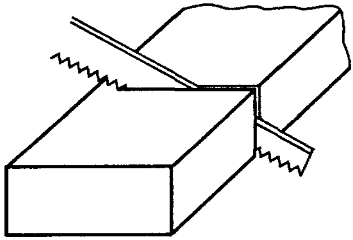
90. Доведіть, що коли пряма або площина перетинає одну з двох паралельних площин, то вона перетинає і другу площину.

91. Площини α і β перетинаються. Доведіть, що будь-яка площина простору перетинає хоча б одну з цих площин.

92.* Доведіть, що через дві будь-які мимобіжні прямі можна провести єдину пару паралельних площин.

93. Точка X ділить ребро AB куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ у відношенні $AX : XB = 2 : 3$. Побудуйте переріз цього куба площиною, яка паралельна площині AA_1C_1 і проходить через X. Знайдіть периметр перерізу, якщо $AB = a$.

94. Кожна грань дошки — прямокутник (мал. 37). Доведіть, що в якому б напрямі не розпилювали дошку, перетинаючи всі її поздовжні ребра, у перерізі завжди буде паралелограм.



Мал. 37

95. Доведіть, що коли перерізом паралелепіпеда є шестикутник, то його протилежні сторони паралельні.

96. Чи може перерізом куба бути правильний п'ятикутник?

97*. $ABCDEFA$ — неплоска замкнена ламана з шести ланок. Доведіть, що коли $AB \parallel DE$, $BC \parallel EF$ і $CD \parallel FA$, то $AB = DE$, $BC = EF$ і $CD = FA$.

98. Точка A_1 ділить ребро PA правильного тетраедра $PABC$ у відношенні $PA_1 : A_1A = 2 : 3$. Побудуйте переріз тетраедра площиною, яка паралельна площині ABC і проходить через A_1. Знайдіть площу перерізу, якщо $AB = 20$ см.

99. Дано три паралельні площини α, α_1 і α_2, прямі a і b перетинають їх відповідно в точках A, A_1, A_2 і B, B_1, B_2. Доведіть, що $AA_1 : A_1A_2 = BB_1 : B_1B_2$.

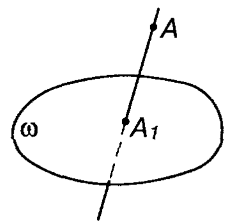
● **100.** П р а к т и ч н е   з а в д а н н я. Зробіть з картону або цупкого паперу модель до теореми про перетин двох паралельних площин третьою площиною.

§ 7 Паралельне проектування і паралельне перенесення

Розглянуті в попередніх параграфах властивості паралельних прямих і площин широко використовуються при паралельному проектуванні і паралельному перенесенні фігур у просторі.

Паралельне проектування вам відоме з креслення. Пригадаємо, що це таке.

Нехай дано довільну площину ω і точку A. Проведемо через A пряму, яка перетинає площину ω у деякій точці A_1 (мал. 38). Знайдену таким способом точку A_1 називають *проекцією точки* A на площину ω; пряму AA_1 — *проектуючою прямою*, ω — *площиною проекцій.*



Мал. 38

Щоб побудувати проекцію будь-якої фігури, треба спроектувати на площину проекцій кожну точку даної фігури. Якщо проектуючі прямі проводять через одну точку, говорять про *центральне проектування.* Якщо ж проектування здійснюється паралельними прямими, його називають *паралельним проектуванням*, а побудовані проекції — *паралельними проекціями.* У стереометрії звичайно користуються паралельним проектуванням.

Властивості паралельного проектування випливають з такої теореми.

▶ **Якщо відрізки, які проектуються, не паралельні проектуючій прямій, то при паралельному проектуванні:**

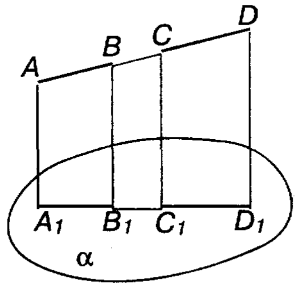
1) відрізки фігури зображаються відрізками;

2) паралельні відрізки — паралельними відрізками або відрізками однієї прямої;

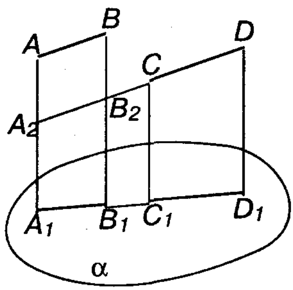
3) довжини проекцій паралельних відрізків або відрізків однієї прямої відносяться, як довжини проектованих відрізків.

Доведення цієї теореми досить громіздке, тому ми його не наводимо. Третю частину теореми (якщо

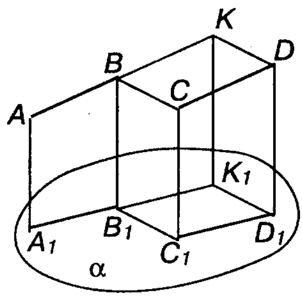
A_1B_1 і C_1D_1 — проекції паралельних відрізків AB і CD, то $A_1B_1 : C_1D_1 = AB : CD$) пропонуємо довести самостійно, скориставшись малюнками 39–41.



Мал. 39



Мал. 40



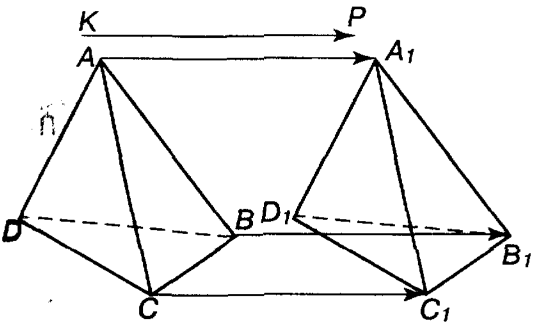
Мал. 41

У стереометрії фігури зображають, користуючись паралельним проектуванням.

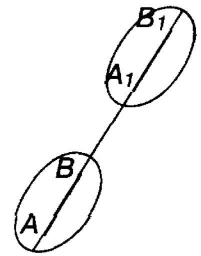
Зображенням фігури називають будь-яку фігуру, подібну проекції даної фігури на деяку площину.

Паралельне перенесення фігур у просторі багато чим схоже на відоме вам паралельне перенесення фігур на площині.

Нехай дано тетраедр $ABCD$ і напрямлений відрізок KP (мал. 42). Якщо кожну точку даного тетраедра перенесемо в напрямі $\overrightarrow{KP}$ на відстань KP, дістанемо тетраедр $A_1B_1C_1D_1$. Говорять, що паралельне перенесення на вектор $\overrightarrow{KP}$ відображає тетраедр $ABCD$ на тетраедр $A_1B_1C_1D_1$. Подібним способом можна виконувати паралельні перенесення інших фігур.



Мал. 42



Мал. 43

ТЕОРЕМА 9. **Паралельне перенесення зберігає відстані між точками.**

ДОВЕДЕННЯ. Нехай при паралельному перенесенні точки A і B відображаються відповідно на A_1 і B_1. Доведемо, що $A_1B_1 = AB$.

Можливі два випадки. Якщо точки A, B, A_1 не лежать на одній прямій, то ABB_1A_1 — паралелограм (див. мал. 42) і, отже, $A_1B_1 = AB$.

Якщо точки A, B, A_1 лежать на одній прямій (мал. 43), то з рівності $AA_1 = BB_1$ випливає:

$$A_1B_1 = AB_1 - AA_1 = AB_1 - BB_1 = AB.$$

Отже, при паралельному перенесенні завжди $A_1B_1 = AB$. □

З доведеної теореми випливає, що

▶ ***паралельне перенесення в просторі відображає відрізок на рівний йому відрізок, пряму — на паралельну їй або на цю саму пряму, будь-яку фігуру — на рівну їй фігуру.***

Доведення цих тверджень аналогічні до доведень відповідних властивостей паралельного перенесення на площині, з яким ви ознайомилися у 8 класі.

Нехай дано в просторі довільний кут ABC (мал. 44). Позначимо на його сторонах точки A, C і сполучимо їх відрізком. Паралельне перенесення відображає $\triangle ABC$ на $\triangle A_1B_1C_1$, який дорівнює даному, бо $A_1B_1 = AB$, $A_1C_1 = AC$, $B_1C_1 = BC$. При цьому кут ABC відображається на кут $A_1B_1C_1$, що дорівнює даному. Взагалі,

▶ **паралельне перенесення відображає кут на рівний йому кут.**

У розглядуваному випадку $A_1B_1 \parallel AB$ і $A_1C_1 \parallel AC$. Тому площина α, в якій лежать прямі AB і AC, паралельна площині (або збігається з площиною) β, в якій лежать прямі A_1B_1 і A_1C_1. Отже,

▶ **паралельне перенесення відображає площину на паралельну їй (або на цю саму) площину.**

101⁰. Чим є проекція[1] відрізка, паралельного проектуючій прямій?

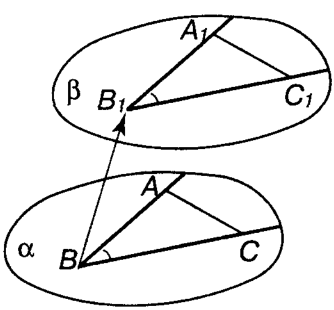
102⁰. Проекція фігури — точка. Назвіть цю фігуру.

103⁰. Чи можуть непаралельні прямі проектуватися у паралельні прямі?

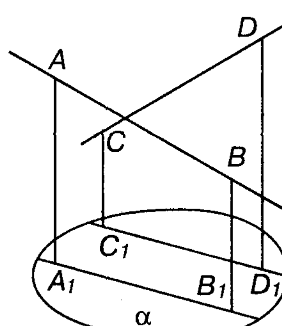
104⁰. Чи може бути ромб проекцією квадрата? А трапеції?

105. Чи може рівнобічна трапеція проектуватись у нерівнобічну трапецію? А навпаки?

106. Чи існує неплоска фігура, проекція якої — відрізок?



Мал. 44



Мал. 45

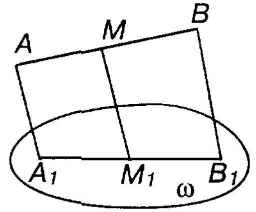
[1] Тут і далі йдеться тільки про паралельні проекції.

107⁰. Чи перетинаються прямі AB і CD, зображені на малюнку 45, якщо A_1B_1 і C_1D_1 — їхні проекції на площину α?

108⁰. Якою фігурою може бути проекція прямого кута?

109. Доведіть, що проекцією середини відрізка є середина його проекції.

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Нехай точка M — середина відрізка AB, а M_1 і A_1B_1 — проекції точки M і відрізка AB на площину ω (мал. 46). Оскільки довжини проекцій відрізків однієї прямої відносяться, як і довжини проектованих відрізків, то $A_1M_1 : M_1B_1 = AM : MB = 1 : 1$. Тому $A_1M_1 = M_1B_1$, тобто M_1 — середина відрізка A_1B_1. А це й треба було довести.



Мал. 46

110⁰. Трикутник $A_1B_1C_1$ — проекція трикутника ABC. Побудуйте проекції середніх ліній і медіан трикутника ABC.

111. Намалюйте довільну трапецію $A_1B_1C_1D_1$. Нехай вона — проекція деякої рівнобічної трапеції $ABCD$. Побудуйте проекцію висоти трапеції $ABCD$, проведеної з вершини B її тупого кута.

112. Накресліть довільний паралелограм. Нехай він — проекція ромба з кутом $120°$. Побудуйте проекцію висоти ромба, проведеної з вершини цього кута.

113⁰. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дорівнює 6 см. Знайдіть площу проекції трикутника AB_1C при проектуванні його на площину: 1) ABC у напрямі BB_1; 2) ABB_1 у напрямі CB; 3) CBB_1 у напрямі AB.

114⁰. Чи можна паралельним перенесенням відобразити одну з мимобіжних прямих на другу?

115. Скільки існує паралельних перенесень, що відображають одну з двох паралельних прямих або площин на другу?

116. Чи існує паралельне перенесення, яке відображає: 1) сторону паралелограма на протилежну сторону; 2) сторону правильного п'ятикутника на іншу його сторону; 3) ребро тетраедра на інше його ребро?

117^0. Побудуйте фігуру, на яку відображається тетраедр $PABC$ паралельним перенесенням на вектор AB.

118. Дано зображення куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Побудуйте зображення фігури, на яку відображається цей куб паралельним перенесенням: 1) на вектор $\overrightarrow{AB}$; 2) на вектор $\overrightarrow{AB_1}$; 3) на вектор $\overrightarrow{AC_1}$.

119. Відрізок m паралельним перенесенням відображається на n. Чи рівні проекції цих двох відрізків на одну й ту саму площину? Чому?

Самостійна робота 2

Варіант 1

1. Прямокутники $ABCD$ і $ABKP$ лежать у різних площинах. Доведіть, що точки C, K, P, D — вершини паралелограма і що пряма AB паралельна площині цього паралелограма.

2. $ABCD$ — тетраедр. Скільки прямих, паралельних його грані ABC, можна провести через його вершину D? Чи правильно, що всі ці прямі лежать в одній площині? В якій?

3. Накресліть куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ і фігуру, на яку він відображається паралельним перенесенням, що відображає точку A на середину ребра BC.

Варіант 2

1. Ромби $ABCD$ і $ABKP$ лежать у різних площинах. Доведіть, що точки P, K, C, D — вершини паралелограма. Чи перетинає площину цього паралелограма пряма AB? Чому?

2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. Скільки прямих, паралельних його грані $ABCD$, можна провести через середину K його ребра AA_1? Чи правильно, що всі ці прямі лежать в одній площині? В якій?

3. Накресліть правильний тетраедр $ABCD$ і фігуру, на яку він відображається паралельним перенесенням, що відображає вершину A на середину ребра BC.

Запитання для самоперевірки

1. Які прямі називають мимобіжними?
2. Які прямі називають паралельними?
3. Сформулюйте теорему про транзитивність паралельних прямих.
4. Дайте означення прямої, паралельної площині.
5. Сформулюйте і доведіть ознаку паралельності прямої і площини.
6. Сформулюйте означення паралельних площин.
7. Сформулюйте і доведіть ознаку паралельності двох площин.
8. Сформулюйте і доведіть властивості паралельних площин.
9. Що таке паралельне проектування?
10. Перелічіть властивості паралельних проекцій відрізків.
11. Що таке паралельне перенесення фігур у просторі?
12. Чи зберігає паралельне перенесення відстані між точками?
13. Перелічіть властивості паралельного перенесення в просторі.

ІСТОРИЧНА ДОВІДКА

Паралельність прямих і площин розглядали ще давньогрецькі геометри. В «Основах» Евкліда доведено 9 теорем про паралельність прямих і площин.

Центральне проектування часто називають також перспективою. Першими досліджували його художники, шукаючи способи зображень просторових сюжетів. Леонардо да Вінчі писав: «Живописець і є той, хто з необхідності свого мистецтва породив перспективу». Художники багато років намагалися виявити важливі властивості перспективи. А. Дюрер згадував: «Пізнати закони перспективи я бажав більше, ніж отримати королівство». Паралельне проектування з'явилося пізніше. Один з його видів досить ефективно використовував Г. Монж (див. с. 70).

Паралельне перенесення окремих фігур для розв'язування деяких задач здійснювали в XIX ст. Як один з видів геометричних перетворень його часто використовували з початку XX ст.

РОЗДІЛ **3**

ПЕРПЕНДИКУЛЯРНІСТЬ ПРЯМИХ І ПЛОЩИН

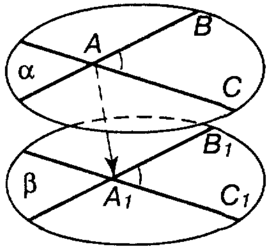
§ 8 *Кут між прямими. Перпендикулярність прямих*

Дві прямі, які перетинаються, утворюють чотири кути. Якщо всі ці кути рівні, то дані прямі називаються *перпендикулярними*, кут між ними дорівнює $90°$. Якщо не всі ці кути рівні, то кутову міру меншого з них називають кутом між даними прямими. Вважається також, що кут між паралельними прямими дорівнює $0°$. Кут між прямими, що перетинаються, не перевищує $90°$. Усе це відомо з планіметрії і залишається правильним для прямих, які перетинаються в просторі. Щоб ввести поняття кута між мимобіжними прямими, доведемо таку теорему.

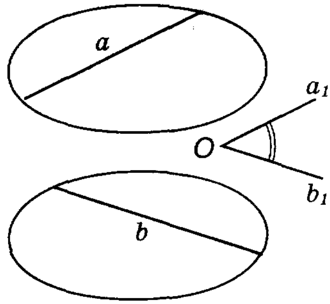
ТЕОРЕМА 10. **Якщо дві прямі, які перетинаються, паралельні іншим прямим, що перетинаються, то кут між першими прямими дорівнює куту між другими прямими.**

ДОВЕДЕННЯ. Нехай прямі AB і AC, які перетинаються, паралельні відповідно прямим A_1B_1 і A_1C_1 (мал. 47). Доведемо, що кут між прямими AB і AC дорівнює куту між прямими A_1B_1 і A_1C_1.

Паралельне перенесення на вектор $\overrightarrow{AA_1}$ відображає пряму AB на паралельну їй пряму, що проходить через точку A_1, тобто — на A_1B_1, Те саме паралельне перенесення відображає пряму AC на



Мал. 47



Мал. 48

паралельну їй пряму A_1C_1. Тому менший із кутів, утворених при перетині прямих AB і AC, дорівнює меншому з кутів, утворених при перетині прямих A_1B_1 і A_1C_1. А це й треба було довести. □

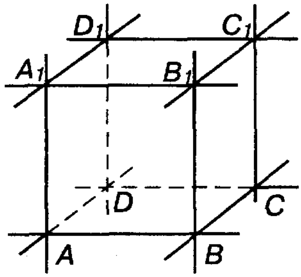
Доведена теорема дає можливість ввести поняття кута між мимобіжними прямими. Нехай a і b — довільні мимобіжні прямі (мал. 48). Через будь-яку точку O простору проведемо прямі a_1 і b_1, паралельні a і b. Кут між прямими a_1 і b_1, які перетинаються, приймається за кут між даними мимобіжними прямими a і b. Цей кут не залежить від вибору точки O. Адже якщо через будь-яку іншу точку простору провести прямі, паралельні даним мимобіжним прямим a і b, то за доведеною теоремою кут між ними буде такий самий. Тому можна сформулювати таке означення.

Означення. ***Кутом між мимобіжними прямими*** *називається кут між прямими, які перетинаються і паралельні даним мимобіжним прямим.*

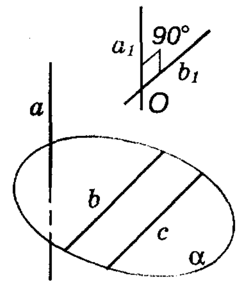
Отже, можна говорити про кут між будь-якими двома прямими простору. Кут між прямими a і b позначають $\angle(ab)$.

Означення. *Дві прямі називаються* ***перпендикулярними,*** *якщо кут між ними дорівнює 90°.*

Перпендикулярними можуть бути як прямі, що перетинаються, так і мимобіжні прямі. Наприклад, якщо $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб, то кожна з прямих AB, BC, CD, DA, A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1, D_1A_1 перпендикулярна до прямої AA_1 (мал. 49).



Мал. 49



Мал. 50

Означення. ***Два відрізки називаються перпендикулярними, якщо вони належать перпендикулярним прямим.***

ТЕОРЕМА 11. **Якщо пряма перпендикулярна до однієї з двох паралельних прямих, то вона перпендикулярна і до другої прямої.**

ДОВЕДЕННЯ. Нехай пряма a перпендикулярна до b і $b \parallel c$ (мал. 50). Доведемо, що $a \perp c$. Через довільну точку простору O проведемо прямі a_1 і b_1 такі, що $a_1 \parallel a$, $b_1 \parallel b$. Тоді і $c \parallel b_1$. $\angle (a_1 b_1)$ — кут як між прямими a і b, так і між прямими a і c: $\angle (ac) = \angle (a_1 b_1) = \angle (ab) = 90^\circ$. Отже, $a \perp c$, що й треба було довести. □

120^0. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. Знайдіть кут між прямими: 1) AB і C_1D_1; 2) AB і CC_1; 3) AB_1 і AD_1.

121. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямокутний паралелепіпед. Знайдіть кут між прямими AD_1 і B_1C, якщо: 1) $\angle B_1CB = 50^\circ$; 2) $BC = a$, $BC_1 = 2a$.

122^0. Скільки прямих, перпендикулярних до даної прямої, можна провести через дану точку?

123. Дано чотири прямі: $a \parallel a_1$ і $b \parallel b_1$. Доведіть, що коли $a \perp b$, то $a_1 \perp b_1$.

124^0. З планіметрії відомо: дві прямі, перпендикулярні до третьої, паралельні. Чи правильне це твердження для прямих простору?

125⁰. Чи можуть бути перпендикулярними прямі OB і OC, якщо $\angle AOB = \angle AOC = 60^\circ$?

126⁰. Чи можуть бути перпендикулярними прямі c і b, якщо $\angle(ab) = 30^\circ$ і $\angle(ac) = 40^\circ$?

127. Чи існує замкнена неплоска ламана з п'яти ланок, кожна ланка якої перпендикулярна до суміжної?

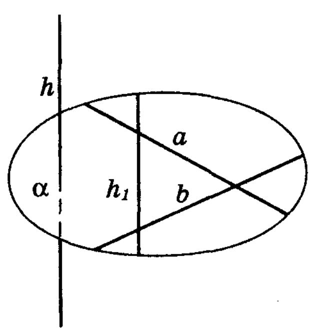
128⁰. A, B, C — точки на попарно перпендикулярних променях OA, OB, OC. Знайдіть кути трикутника ABC, якщо $OA = OB = OC$.

129⁰. Промені OA, OB, OC попарно перпендикулярні. Знайдіть периметр трикутника ABC, якщо: 1) $OA = OB = OC = 4$ см; 2) $OA = OB = 3$ дм, $OC = 4$ дм; 3) $OA = a$, $OB = 2a$, $OC = 3a$.

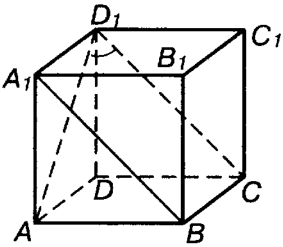
130. Точки K і M — середини ребер AB і CD правильного тетраедра $ABCD$. Доведіть, що $KM \perp AB$ і $KM \perp CD$. Знайдіть KM, якщо $AB = a$.

131. Доведіть, що пряма, перпендикулярна до двох прямих, які перетинаються, перетинає площину, що проходить через ці прямі.

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Припустимо, що пряма h перпендикулярна до прямих a і b, які перетинаються, не перетинає площину α, що проходить через прямі a і b (мал. 51). Тоді $h \parallel \alpha$ або $h \subset \alpha$. В обох випадках у площині α знайдеться пряма h_1, паралельна h. Виходить, що в площині α є пряма h_1, яка перпендикулярна до двох прямих a і b, які перетинаються. Цього не може бути. Отже, пряма h перетинає площину α.



Мал. 51



Мал. 52

132. Знайдіть кут між мимобіжними діагоналями двох суміжних граней куба.

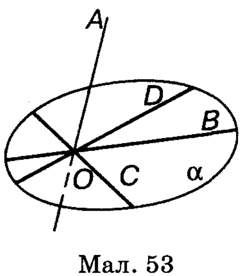
РОЗВ'ЯЗАННЯ. Знайдемо кут між діагоналями AD_1 і BA_1 граней куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (мал. 52). Оскільки $BA_1 \parallel CD_1$, то шуканий кут дорівнює куту AD_1C. А $\angle AD_1C = 60°$, бо $\triangle AD_1C$ — рівносторонній.

Відповідь. 60°.

§ 9 *Перпендикулярність прямої і площини*

Якщо пряма не лежить у площині і не паралельна їй, то вона перетинає площину.

Нехай пряма AO перетинає площину α в точці O, а прямі OB, OC, OD, ... лежать у площині α (мал. 53). Кути AOB, AOC, AOD, ... можуть бути різними. Заслуговує уваги випадок, коли всі ці кути прямі. В цьому випадку говорять, що пряма AO перпендикулярна до площини α. Пишуть: $AO \perp \alpha$, або $\alpha \perp AO$.

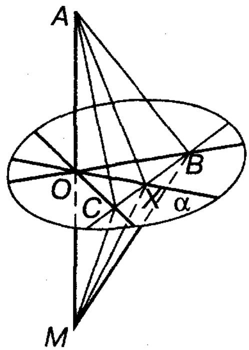


Мал. 53

Означення. *Пряма називається* ***перпендикулярною до площини****, якщо вона перетинає цю площину і перпендикулярна до кожної прямої, яка лежить у площині і проходить через точку перетину.*

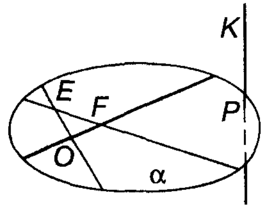
ТЕОРЕМА 12** (ознака перпендикулярності прямої і площини). **Якщо пряма, яка перетинає площину, перпендикулярна до двох прямих цієї площини, що проходять через точку перетину, то вона перпендикулярна до площини.**

⇨ *ДОВЕДЕННЯ.* Нехай пряма AO, яка перетинає площину α в точці O, перпендикулярна до прямих OB і OC цієї площини (мал. 54). Доведемо, що пряма AO перпендикулярна до будь-якої прямої OX, яка лежить у площині α. Для цього проведемо довільну пряму, яка перетинає прямі OB, OC і OX у точках B, C і X. А на прямій OA у різні боки від O відкладемо рівні відрізки OA і OM. Сполучивши відрізками точки A і M з точками B, C, X, дістанемо кілька пар трикутників. $\triangle ABM$ і $\triangle ACM$ рівнобедрені, бо їх медіани BO і CO є також висотами. Отже, $AB = MB$ і $AC = MC$. За трьома сторонами $\triangle ABC = \triangle MBC$, тому $\angle ABC = \angle MBC$. Рівні також трикутники ABX і MBX — за двома сторонами і кутом між ними. Отже, $AX = MX$. Оскільки трикутник AXM рівнобедрений, то його медіана XO є і висотою, тобто $AO \perp OX$. А це й треба було довести. □

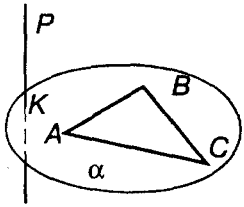


Мал. 54

Доведену теорему можна узагальнити. На основі останньої теореми з попереднього параграфа пряму AO можна замінити будь-якою прямою KP, паралельною їй, а пряму OX — будь-якою прямою EF, що лежить у площині α і паралельна OX (мал. 55). Варто також врахувати твердження задачі 131. Тому з доведеної теореми випливають такі н а с л і д к и.



Мал. 55



Мал. 56

Пряма, перпендикулярна до двох прямих, що перетинаються, перпендикулярна до площини, що проходить через ці дві прямі.

Пряма, перпендикулярна до площини, перпендикулярна до будь-якої прямої, що лежить у цій площині.

Якщо пряма, перпендикулярна до двох сторін трикутника, то вона перпендикулярна і до третьої його сторони (мал. 56).

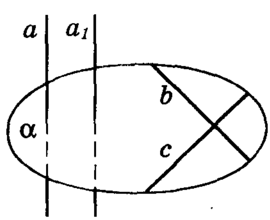
ТЕОРЕМА 13. **Якщо одна з двох паралельних прямих перпендикулярна до площини, то і друга пряма перпендикулярна до цієї площини.**

ДОВЕДЕННЯ. Нехай прямі a, a_1 і площина α такі, що $a \parallel a_1$ і $a \perp \alpha$ (мал. 57). Доведемо, що $a_1 \perp \alpha$.

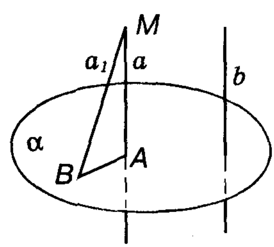
Оскільки $a \perp \alpha$, то в площині α знайдуться прямі b і c, які перетинаються і перпендикулярні до a. Оскільки $a \parallel a_1$, то прямі b і c перпендикулярні і до прямої a_1. Отже, пряма a_1 перпендикулярна до прямих b і c площини α, які перетинаються, тому $a_1 \perp \alpha$. □

ТЕОРЕМА 14. **Дві прямі, перпендикулярні до однієї площини, паралельні.**

ДОВЕДЕННЯ. Нехай прямі a, b і площина α такі, що $a \perp \alpha$ і $b \perp \alpha$ (мал. 58). Доведемо, що $a \parallel b$.



Мал. 57



Мал. 58

Припустимо, що прямі a і b не паралельні. Тоді через яку-небудь точку M прямої a проведемо пряму a_1, паралельну b. Оскільки $b \perp \alpha$, то і $a_1 \perp \alpha$ — згідно з попередньою теоремою. А за умовою $a \perp \alpha$. Якщо A і B — точки перетину прямих a і a_1 з площиною α, то з припущення випливає, що в $\triangle MAB$ два прямих кути. Цього не може бути. Тому прямі a і b паралельні. □

Означення. *Відрізок називається **перпендикулярним до площини**, якщо він лежить на прямій, перпендикулярній до даної площини.*

133⁰. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямокутний паралелепіпед. Назвіть прямі, перпендикулярні до площини грані ABB_1A_1.

134⁰. Пряма a перпендикулярна до двох прямих площини α. Чи випливає з цього, що $a \perp \alpha$?

135⁰. Скільки площин, перпендикулярних до даної прямої, можна провести через дану точку?

136⁰. Скільки прямих, перпендикулярних до даної площини, можна провести через дану точку? А відрізків?

137⁰. Пряма a перпендикулярна до площини α. Чи існують у площині α прямі, не перпендикулярні до прямої a?

138⁰. Побудуйте переріз куба площиною, яка проходить через середину його ребра перпендикулярно до цього ребра. Знайдіть площу перерізу, якщо ребро куба дорівнює a.

139. Відстані від точки M до всіх вершин квадрата однакові, точка O — центр квадрата. Доведіть, що пряма MO перпендикулярна до площини квадрата.

140. Площина α перпендикулярна до катета AC прямокутного трикутника ABC і ділить його у відношенні $m : n$. У якому відношенні площина α ділить гіпотенузу AB?

141. Прямі AA_1 і BB_1, перпендикулярні до площини α, перетинають її у точках A_1 і B_1, а пряма AB — у точці C. Знайдіть відстань B_1C, якщо $AA_1 = 12$ см, $A_1B_1 = BB_1 = 3$ см.

142. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. Доведіть, що пряма AC перпендикулярна до площини, яка проходить через точки B, B_1, D_1.

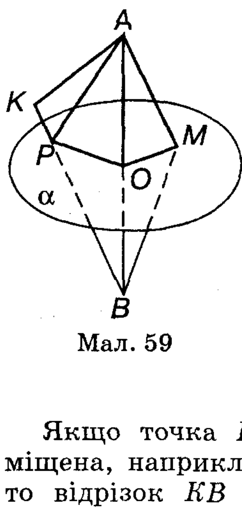
143. Побудуйте переріз правильного тетраедра $ABCD$ площиною, яка перпендикулярна до ребра AB і проходить через його середину. Знайдіть площу перерізу, якщо $AB = 12$ см.

144. Доведіть, що дві площини, перпендикулярні до однієї і тієї самої прямої, паралельні.

145. Чи можуть бути паралельними прямі, перпендикулярні до двох площин, які перетинаються?

146. Як через дану точку провести пряму, перпендикулярну до даної площини?

147. Доведіть, що геометричним місцем точок, рівновіддалених від кінців відрізка, є площина, яка перпендикулярна до даного відрізка і проходить через його середину.



Мал. 59

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Нехай площина α перпендикулярна до відрізка AB і проходить через його середину O (мал. 59). Точка O рівновіддалена від A і B. Якщо M — будь-яка інша точка площини α, то $\triangle MOA = \triangle MOB$ (за двома катетами). Тому $MA = MB$. Як бачимо, кожна точка площини α рівновіддалена від кінців відрізка AB.

Якщо точка K не лежить у площині α, а розміщена, наприклад, з точкою B по різні боки від α, то відрізок KB перетинає α у такій точці P, що $PA = PB$. Тоді $BK = BP + PK = AP + PK > AK$, тобто $BK \neq AK$. Отже, тільки точки площини α рівновіддалені від A і B.

148. На даній прямій a знайдіть точки, рівновіддалені від даних у просторі точок A і B.

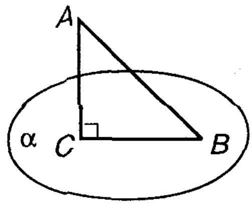
149. Знайдіть геометричне місце точок простору, рівновіддалених від усіх вершин квадрата.

150. Відрізок AM перпендикулярний до площини рівностороннього трикутника ABC. Знайдіть периметр і площу трикутника MBC, якщо: 1) $AB = 3$ см і $AM = 4$ см; 2) $AB = AM = c$.

● **151.** Практичне завдання. Зробіть з дроту і картону моделі до теорем, доведених у цьому параграфі.

§ 10 *Перпендикуляр і похила до площини*

Означення. ***Перпендикуляром, опущеним з даної точки на дану площину,*** *називають відрізок прямої, перпендикулярної до площини, що міститься між даною точкою і площиною.*



Мал. 60

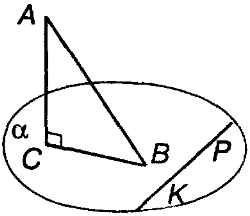
Наприклад, якщо пряма AC перпендикулярна до площини α і перетинає її у точці C, то відрізок AC — перпендикуляр, опущений з точки A на площину α. Точка C — *основа перпендикуляра* (мал. 60).

Якщо AC — перпендикуляр до площини α, а B — відмінна від C точка цієї площини, то відрізок AB називають *похилою, проведеною з точки A на площину* α. Точка B — *основа похилої*, а відрізок CB — *проекція похилої AB* на площину α.

Зауважимо, що тут ідеться про *прямокутну проекцію* похилої[1]. Такі проекції дістають за умови, що всі проектуючі прямі перпендикулярні до площини проекцій. Далі, говорячи про проекції, матимемо на увазі тільки прямокутні проекції.

ТЕОРЕМА 15 (про три перпендикуляри). **Пряма, проведена на площині перпендикулярно до проекції похилої, перпендикулярна до цієї похилої. І навпаки, якщо пряма на площині перпендикулярна до похилої, то вона перпендикулярна і до проекції похилої.**

[1]Детальніше про прямокутні проекції див. на с. 65.



Мал. 61

ДОВЕДЕННЯ. Нехай AC і AB — перпендикуляр і похила до площини α (мал. 61). Якщо пряма KP лежить у площині α, то $KP \perp AC$. Якщо, крім того, пряма KP перпендикулярна до BC або AB, то вона перпендикулярна до площини трикутника ABC. Тобто якщо $KP \perp BC$, то $KP \perp AB$; а якщо $KP \perp AB$, то $KP \perp BC$. Це й вимагалось довести. □

З наведених міркувань випливає, що коли пряма KP не перпендикулярна до BC, то вона не перпендикулярна і до AB. Тому теорему про три перпендикуляри можна сформулювати й одним реченням:

Пряма, яка лежить у площині, перпендикулярна до похилої тоді і тільки тоді, коли ця пряма перпендикулярна до проекції похилої.

Теоремою про три перпендикуляри її називають, маючи на увазі перпендикуляри $AC \perp \alpha$, $BC \perp KP$, $AB \perp KP$.

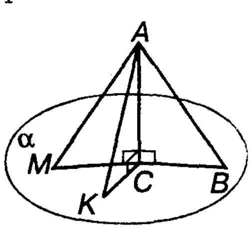
ТЕОРЕМА 16. **Якщо з однієї точки, взятої поза площиною, проведені до цієї площини перпендикуляр і похилі, то:**

1) проекції рівних похилих рівні;

2) з двох похилих та більша, проекція якої більша;

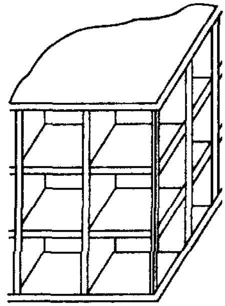
3) перпендикуляр коротший за будь-яку похилу.

Теорема випливає з властивостей прямокутних трикутників. Спробуйте довести її самостійно, скориставшись малюнком 62.



Мал. 62

Приклади матеріальних моделей перпендикулярів до площини: стовп, телевізійна вежа. Перпендикулярно до площини звичайно забивають палі та бурять свердловини. Будуючи багатоповерховий будинок, спочатку зводять каркас, в якому кожна вертикальна колона перпендикулярна до площини горизонту і до кожної горизонтальної балки (мал. 63).



Мал. 63

Довжина перпендикуляра, опущеного з точки на площину, — це *відстань від даної точки до площини*. Зверніть увагу: під *відстанню між будь-якими двома геометричними фігурами* розуміють відстань між їх найближчими точками (якщо такі існують). Тому за *відстань між паралельними площинами* приймають довжину перпендикуляра, опущеного з будь-якої точки однієї площини на другу.

Відстань між мимобіжними прямими дорівнює довжині їх спільного перпендикуляра, тобто такого відрізка, кінці якого лежать на даних прямих і який перпендикулярний до кожної з цих прямих. Відстань між мимобіжними прямими дорівнює відстані між паралельними площинами, яким належать ці прямі.

152^0. З точки A до площини α проведено перпендикуляр $AC = 40$ см і похилу $AB = 50$ см. Знайдіть довжину проекції похилої.

153^0. З точки A до площини α проведено перпендикуляр AC і похилу $AB = l$, причому $\angle BAC = \alpha$. Знайдіть довжину перпендикуляра.

154^0. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. Знайдіть кут між прямими AC_1 і BD.

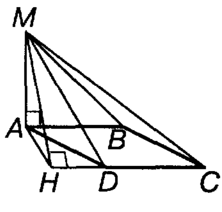
155. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямокутний паралелепіпед, $AC_1 \perp BD$. Доведіть, що грань $ABCD$ — квадрат.

156. Учень каже: «Пряма, перпендикулярна до похилої, перпендикулярна і до проекції цієї похилої». Наведіть контрприклад.

157. MA — перпендикуляр до площини рівностороннього трикутника ABC. K — середина сторони BC. Доведіть, що $MK \perp BC$.

158. MB — перпендикуляр до площини прямокутника $ABCD$. Доведіть, що трикутники AMD і MCD прямокутні.

159. MA — перпендикуляр до площини ромба $ABCD$, $\angle BAD = 60^\circ$. Побудуйте висоту MH трикутника MCD.



Мал. 64

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Треба побудувати перпендикуляр MH до прямої CD (мал. 64). За теоремою про три перпендикуляри $AH \perp CD$. Оскільки $\angle ADH = 60^\circ$, то точка H повинна лежати на прямій CD поза відрізком CD так, що $HD = 0{,}5\ CD$. Побудувавши точку H, проводимо відрізок MH. Він і є висотою трикутника MCD, яку треба було побудувати.

160⁰. Через вершину A ромба $ABCD$ проведено пряму AM, перпендикулярну до його площини. Знайдіть відстані MB і MC, якщо $MA = AB = a$ і $\angle ABC = 120^\circ$.

161⁰. AM — перпендикуляр до площини квадрата $ABCD$. Знайдіть відстань від точки M до прямих AB, BC і BD, якщо $AB = 3$ дм, $MB = 4$ дм.

162. Рівнобедрені трикутники ABC і ADC мають спільну основу і лежать у різних площинах. Доведіть, що $AC \perp BD$.

163. $KABC$ і $PABC$ — правильні тетраедри. Доведіть, що пряма KP перпендикулярна до площини трикутника ABC.

164. Точка O — центр грані ABC правильного тетраедра $PABC$. Доведіть, що пряма PO перпендикулярна до площини грані ABC.

165⁰. Через середину відрізка AB проведено площину. Доведіть, що відстані від точок A і B до цієї площини дорівнюють одна одній.

166⁰. Кінці відрізка віддалені від площини на 7 см і 13 см. Як віддалена від площини середина цього відрізка?

167. Точки C і D, які ділять відрізок на три рівні частини, віддалені від площини на 4 см і 8 см. Як віддалені від площини кінці відрізка? Розгляньте всі можливі випадки.

168. Відрізок завдовжки a перетинає площину, а його кінці віддалені від неї на c і d. Знайдіть довжину проекції відрізка.

169⁰. Площина α проходить через сторону AB паралелограма $ABCD$ і віддалена на a від точки перетину його діагоналей. Знайдіть відстань від прямої CD до площини α.

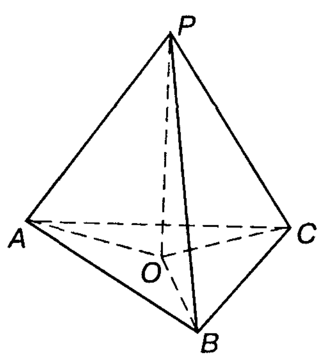
170. Вершини A, B, C квадрата $ABCD$ віддалені від площини, яка не перетинає його, на 13 м, 14 м, 17 м. Як віддалена від площини вершина D і центр квадрата?

171. Вершини трикутника віддалені від площини, яка не перетинає його, на 6 м, 8 м і 10 м. Як віддалена від площини точка перетину медіан трикутника?

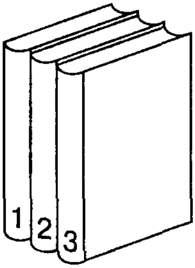
172. Ребро правильного тетраедра дорівнює a. Знайдіть відстань від його вершини до протилежної грані.

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Нехай $PABC$ — правильний тетраедр, $AB = a$ і PO — перпендикуляр до площини ABC (мал. 65). За катетом і гіпотенузою $\triangle POA = \triangle POB = \triangle POC$, тому $OA = OB = OC$. Точка O — центр кола, описаного навколо правильного трикутника ABC. Тому $OA = \frac{a}{\sqrt{3}}$,

$$PO = \sqrt{PA^2 - OA^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}a.$$



Мал. 65



Мал. 66

173. Відстань між двома паралельними площинами дорівнює 40 см. Відрізок завдовжки 50 см своїми кінцями впирається в ці площини. Знайдіть довжини проекцій відрізка на кожну з площин.

174. Задача з несподіваною відповіддю. На книжковій полиці стоїть тритомник (мал. 66). Товщина кожної книжки 40 мм, а книжки без обкладинки — 35 мм. Знайдіть відстань від першої сторінки першого тому до останньої сторінки третього тому.

175. Ребро куба дорівнює a. Знайдіть відстань між мимобіжними діагоналями його протилежних граней.

176. Ребро правильного тетраедра дорівнює a. Знайдіть відстань між його протилежними ребрами.

177. Два відрізки завдовжки 13 дм і 37 дм упираються кінцями у дві паралельні площини. Проекція меншого з них на площину дорівнює 5 дм. Знайдіть довжину проекції більшого відрізка.

Самостійна робота 3

Варіант 1

1. Доведіть, що пряма, перпендикулярна до діагоналей паралелограма, перпендикулярна і до його сторін.

2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. Знайдіть кут між прямими: а) BC і AA_1; б) AC і B_1D_1.

3. Точки A і B віддалені від площини α на 13 см і 25 см. Як віддалена від площини α середина відрізка AB?

4. Знайдіть відстань між протилежними ребрами куба. Ребро дорівнює a.

Варіант 2

1. Доведіть, що пряма, перпендикулярна до бічних сторін трапеції, перпендикулярна і до її основ.

2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. Знайдіть кут між прямими: а) BC_1 і CD; б) BC_1 і A_1D.

3. Кінці відрізка віддалені від площини на 8 м і 14 м. Знайдіть відстань від середини даного відрізка до площини.

4. Знайдіть ребро куба, якщо відстань між його протилежними ребрами дорівнює d.

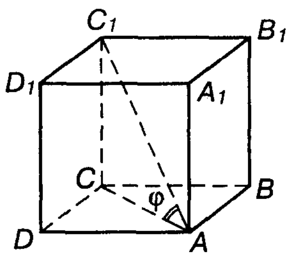
§ 11 *Кут між прямою і площиною*

Вище ми розглянули такі випадки розміщення прямої і площини: 1) пряма лежить у площині; 2) пряма паралельна площині; 3) пряма перпендикулярна до площини. Залишається дослідити випадок, коли пряма перетинає площину, але не перпендикулярна до неї. Такі прямі можуть бути нахилені до площини під різними кутами.

Що ж розуміють під кутом між прямою і площиною?

Якщо пряма паралельна площині або належить їй, то вважають, що кут між такою прямою і площиною дорівнює $0°$. Якщо пряма перпендикулярна до площини, то кут між ними дорівнює $90°$. У решті випадків *кутом між прямою і площиною* називають кут між прямою і її проекцією на площину.

Приклад. Нехай $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб (мал. 67). Знайдіть кут між прямою AC_1 і площиною його грані $ABCD$.



Мал. 67

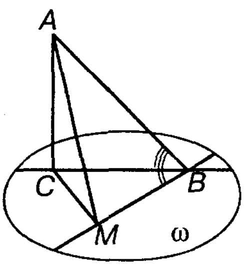
Проекція відрізка AC_1 на площину грані $ABCD$ — відрізок AC. Тому шуканий кут $\varphi = \angle C_1AC$. Його тангенс

$$\text{tg}\,\varphi = \frac{CC_1}{CA} = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}707, \text{ звідки } \varphi \approx 35^\circ 16'.$$

Означення. ***Кутом між похилою і площиною*** *називають кут між похилою і її проекцією на площину.*

Йдеться про прямокутну проекцію. Якщо φ — кут між прямою і площиною, то $0^\circ \leqslant \varphi \leqslant 90^\circ$; якщо φ — кут між похилою і площиною, то $0^\circ < \varphi < 90^\circ$.

ТЕОРЕМА 17. **Кут між похилою і площиною найменший з усіх кутів, які похила утворює з прямими, проведеними на площині через основу похилої.**



Мал. 68

ДОВЕДЕННЯ. Нехай AB — похила, AC — перпендикуляр до площини ω, BM — будь-яка відмінна від BC пряма площини ω, $\angle ABM$ — кут між прямими AB і BM (мал. 68). Доведемо, що $\angle ABC < \angle ABM$.

Якщо прямі BM і BC не перпендикулярні, то опустимо перпендикуляр CM на BM і проведемо відрізок AM. За теоремою про три перпендикуляри $AM \perp MB$. Отже,

$$\sin \angle ABC = \frac{AC}{AB}, \quad \sin \angle ABM = \frac{AM}{AB}.$$

Оскільки $AC < AM$, то $\sin \angle ABC < \sin \angle ABM$. Ці кути не перевищують 90°, тому $\angle ABC < \angle ABM$.

Якщо $BM \perp BC$, то за теоремою про три перпендикуляри $\angle ABM = 90^\circ$. Кут ABC менший від 90°. Тому і в цьому випадку $\angle ABC < \angle ABM$. □

Поняття кута між прямою і площиною або між похилою і площиною використовується на практиці. Під певними кутами до площини горизонту споруджують ескалатори на станціях метро, шахтні уклони, фунікулери тощо.

Кут між похилою і горизонтальною площиною геодезисти і маркшейдери вимірюють *еклімeтром* (мал. 69). У його циліндричному корпусі при натиснутій кнопці вільно обертається і встановлюється за виском градуйований диск. Якщо кнопку відпустити, диск закріплюється, і на його шкалі можна прочитати градусну міру кута, який вимірюють. Якщо потрібна більша точність, кути вимірюють *теодолітами*.

178⁰. Скільки прямих, які перетинають дану площину під кутом 50°, можна провести через дану точку?

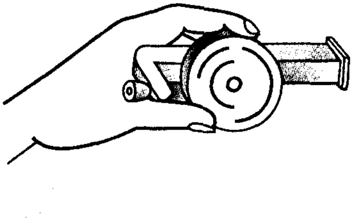
179⁰. Пряма AB з площиною α утворює кут 60°. Знайдіть довжину проекції похилої AB на площину α, якщо $AB = 48$ см.

180⁰. Довжина похилої AB дорівнює 50 см, а точка A віддалена від площини на 25 см. Знайдіть кут між похилою і площиною.

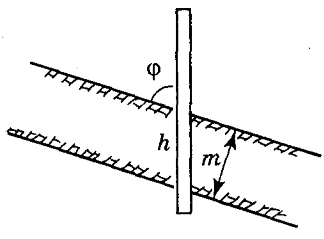
181. Доведіть, що коли пряма перетинає одну з двох паралельних площин під кутом α, то і другу площину вона перетинає під кутом α.

182. Доведіть, що паралельні прямі нахилені до однієї і тієї самої площини під рівними кутами. Чи правильне обернене твердження?

183⁰. Знайдіть товщину m вугільного пласта, якщо вертикальна свердловина нахилена до нього під кутом $\varphi = 72^\circ$ і проходить по вугіллю відстань $h = 2{,}50$ м (мал. 70).



Мал. 69



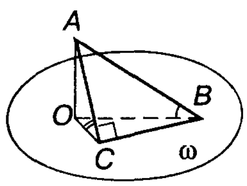
Мал. 70

184⁰. На якій глибині знаходиться станція метро, якщо її ескалатор довжиною 85 м нахилений до площини горизонту під кутом 42°?

185. Знайдіть кут між мимобіжними прямими, якщо одна з них перпендикулярна до деякої площини, а друга перетинає цю площину під кутом φ.

186. AH — перпендикуляр до площини трикутника ABC, $AB = AC$. Доведіть, що похилі HB і HC з площиною трикутника утворюють рівні кути.

187. Один з катетів рівнобедреного прямокутного трикутника лежить у площині ω, а другий нахилений до неї під кутом 45°. Знайдіть кут між гіпотенузою і площиною ω.



Мал. 71

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Нехай ABC — трикутник, у якого $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = CB$, а AO — перпендикуляр до площини ω, яка проходить через BC (мал. 71). Якщо $AC = a$, то $BC = a$, $AO = \frac{a}{\sqrt{2}}$,

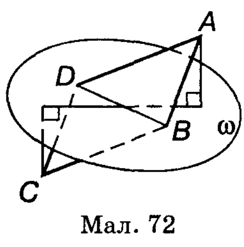
$$AB = a\sqrt{2},\ \sin\angle ABO = \frac{AO}{AB} = \frac{a}{\sqrt{2}} : a\sqrt{2} = \frac{1}{2}.$$

Отже, $\angle ABO = 30^\circ$.

Відповідь. 30°.

188. Сторона квадрата $ABCD$ дорівнює 6 см, точка M знаходиться на відстані 6 см від кожної з його вершин. Знайдіть кут між прямою MA і площиною квадрата.

189. Сторона рівностороннього трикутника ABC дорівнює $3a$, точка M віддалена від кожної з його вершин на $2a$. Під якими кутами нахилені прямі MA, MB і MC до площини даного трикутника.



Мал. 72

190. Площина ω проходить через вершини B і D ромба $ABCD$ (мал. 72). Доведіть, що прямі AB, CB, AD і CD утворюють з площиною ω рівні кути.

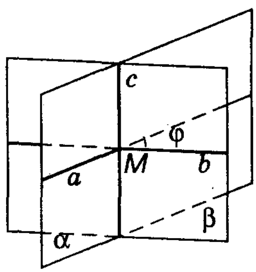
191. З однієї точки до площини проведено дві рівні похилі. Кут між ними 60°, а між їх проекціями 90°. Знайдіть кути між похилими і площиною.

192*. З однієї точки проведено до площини дві похилі, проекції яких дорівнюють 4,5 м і 1,5 м. Знайдіть довжини похилих, якщо одна з них утворює з площиною кут у два рази більший, ніж друга.

● **193.** П р а к т и ч н е з а в д а н н я. Зробіть модель екліметра, приладнавши до транспортира висок.

§ 12 *Перпендикулярні площини*

Спочатку введемо поняття кута між площинами. Нехай α і β — площини, які перетинаються по прямій c (мал. 73). Проведемо в цих площинах через точку M прямі a і b, перпендикулярні до c. Не-



Мал. 73

хай кут між ними $\angle(ab) = \varphi$. Якщо в площинах α і β провести які-небудь інші прямі, перпендикулярні до c, то кут між ними також дорівнюватиме φ (Чому?). Отже, можна прийняти таке означення.

Означення. ***Кутом між площинами, які перетинаються, називається кут між прямими, проведеними в цих площинах перпендикулярно до лінії їх перетину.***

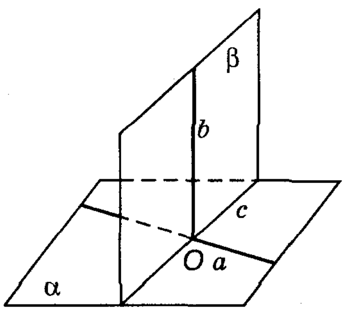
Якщо площини паралельні, то вважають, що кут між ними дорівнює 0°. Кут між площинами α і β позначають: $\angle(\alpha\beta)$. $0° \leqslant \angle(\alpha\beta) \leqslant 90°$.

Означення. *Дві площини називаються перпендикулярними, якщо кут між ними дорівнює 90°.*

Якщо площини α і β перпендикулярні, пишуть: $\alpha \perp \beta$.

ТЕОРЕМА 18 (ознака перпендикулярності площин). **Якщо одна з двох площин проходить через *пряму, перпендикулярну до другої площини,* то такі площини перпендикулярні.**

ДОВЕДЕННЯ. Нехай площина β проходить через пряму b, перпендикулярну до площини α (мал. 74). Доведемо, що $\beta \perp \alpha$.



Мал. 74

Пряма b перетинає площину α у деякій точці O. *Ця точка спільна для площин α і β. Тому дані* площини перетинаються по прямій c, яка проходить через точку O. Проведемо у площині α через O пряму a, перпендикулярну до c. Оскільки $b \perp \alpha$, а прямі a і c лежать у площині α, то $b \perp a$ і $b \perp c$. Крім того, $a \perp c$. Отже, $\angle(\alpha\beta) = \angle(ab) = 90°$, тобто $\beta \perp \alpha$. А це й треба було довести. □

ТЕОРЕМА 19. **Пряма, проведена в одній з двох перпендикулярних площин перпендикулярно до прямої їх перетину, перпендикулярна до другої площини.**

ДОВЕДЕННЯ. Нехай перпендикулярні площини α і β перетинаються по прямій c і в площині β проведено пряму b перпендикулярно до c (див. мал. 74). Доведемо, що $b \perp \alpha$.

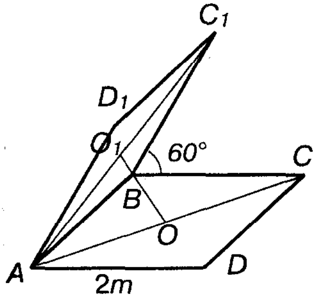
Проведемо у площині α перпендикулярно до c пряму a. Кожна з прямих a і b перпендикулярна до c — прямої перетину площин α і β. Тому кут між прямими a і b дорівнює куту між площинами α і β, тобто 90°. Отже, пряма b перпендикулярна до прямих a і c площини α, які перетинаються. За ознакою перпендикулярності прямої і площини $b \perp \alpha$. А це й треба було довести. □

194^0. Скільки площин, які перетинають дану площину під кутом 50°, можна провести через дану точку?

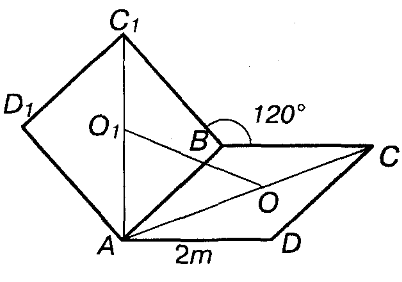
195. Пряма a перетинає площину α під кутом 45°. Чи можна через пряму a провести площину, яка перетинається з α під кутом 30°?

196. Чи можна через дві перпендикулярні прямі провести площини, які перетинаються під кутом 30°?

197^0. Квадрати $ABCD$ і ABC_1D_1 лежать у площинах, кут між якими 60°. Знайдіть відстань між їх центрами, якщо $AB = 2m$ (мал. 75, 76).



Мал. 75



Мал. 76

198. Скільки пар перпендикулярних площин можна провести через дві паралельні прямі?

199. Чи можна через пряму a, перпендикулярну до площини α, провести площину, не перпендикулярну до α?

200. Чи правильно, що площина, перпендикулярна до однієї з двох паралельних площин, перпендикулярна і до другої площини?

201^0. Чи правильно, що дві площини, перпендикулярні до третьої, паралельні?

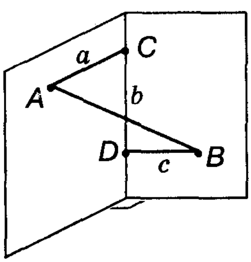
202. Площини квадратів $ABCD$ і ABC_1D_1 перпендикулярні, $AB = a$. Знайдіть: 1) відстань CC_1; 2) відстань C_1D; 3) кут CAC_1.

203. З точок A і B, які лежать у перпендикулярних площинах, опущено перпендикуляри AC і BD на пряму CD перетину цих площин. Знайдіть відстань AB, якщо $AC = a$, $CD = b$, $BD = c$ (мал. 77).

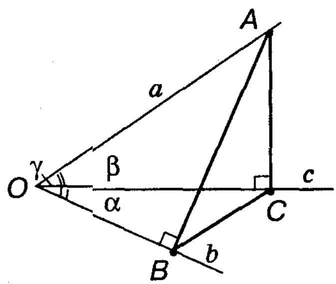
204. Трикутники ABC і ABD лежать у перпендикулярних площинах. Знайдіть відстань CD, якщо $AB = AC = AD = a$, $BC = BD = b$.

205. Три промені, які виходять з однієї точки, утворюють три гострих кути: α, β, γ. Доведіть, що коли площини кутів α і β перпендикулярні, то $\cos\alpha \cos\beta = \cos\gamma$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Нехай $\angle(bc) = \alpha$, $\angle(ca) = \beta$, $\angle(ab) = \gamma$ (мал. 78). З довільної точки A променя a опустимо перпендикуляр AC на промінь c і AB на промінь b. Оскільки площини кутів α і β перпендикулярні, то CB — проекція AB на площину кута α. За теоремою про три перпендикуляри $CB \perp b$. Отже,



Мал. 77



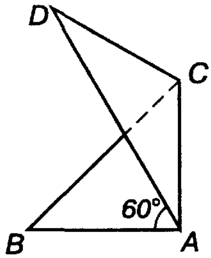
Мал. 78

трикутники ACO, CBO, ABO прямокутні. Тому $\cos\alpha \cos\beta = \frac{BO}{CO} \cdot \frac{CO}{AO} = \frac{BO}{AO} = \cos\gamma$.

206^0. Площини рівносторонніх трикутників ABC і ABD перпендикулярні, $AB = a$. Знайдіть відстань CD і кут $\varphi = \angle CAD$.

207. Знайдіть кут між площинами двох граней правильного тетраедра.

208*. Паралелограм $ABCD$, в якого $AB = AC$ і $AB \perp AC$, зігнули по діагоналі AC так, що кут BAD став дорівнювати $60°$ (мал. 79). Знайдіть кут між площинами трикутників ABC і ADC.



Мал. 79

● **209.** Практичне завдання. Зробіть з цупкого паперу модель трьох попарно перпендикулярних площин.

§ 13 *Ортогональне проектування*

Про паралельне проектування йшлося у § 7.

Якщо проектуючі прямі перпендикулярні до площини проекцій, то таке проектування називають *прямокутним* або *ортогональним*.

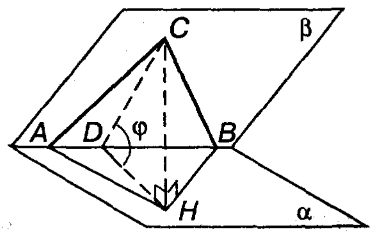
Ортогональне проектування — окремий вид паралельного проектування, тому воно має всі властивості паралельного проектування. У кресленні воно — основне. І ми, говорячи далі про проекції, матимемо на увазі тільки ортогональні проекції. Тобто *проекцією точки* називатимемо основу перпендикуляра, опущеного з даної точки на площину. Якщо точка лежить на площині проекцій, то вона збігається зі своєю проекцією.

Проекцією фігури на площину називають множину проекцій усіх точок даної фігури на дану площину. Зокрема, проекцією n-кутника є n-кутник (якщо площини проекцій і многокутника не перпендикулярні).

ТЕОРЕМА 20. **Площа проекції многокутника дорівнює площі проектованого многокутника, помноженій на косинус кута між їх площинами.**

Тобто якщо S і $S_{пр}$ — площі многокутника і його проекції, а кут між їх площинами дорівнює φ, то $S_{пр} = S\cos\varphi$.

ДОВЕДЕННЯ. Розглянемо спочатку випадок, коли даний многокутник — трикутник ABC, сторона AB якого лежить у площині проекцій α (мал. 80). Якщо CH — перпендикуляр до площини α і $CD \perp AB$, то $HD \perp AB$ (Чому?).



Мал. 80

Отже,

$$S_{ABH} = \frac{1}{2} AB \cdot HD = \frac{1}{2} AB \cdot CD \cos\varphi = S_{ABC} \cos\varphi.$$

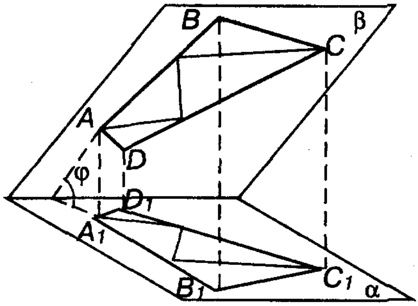
Якщо за площину проекцій взяти будь-яку іншу площину, паралельну α, то результат буде такий самий. Бо проекції тієї самої фігури на паралельні площини рівні, а рівні фігури мають рівні площі.

Тепер розглянемо загальний випадок. Нехай дано довільний многокутник (на малюнку 81 — це чотирикутник $ABCD$). Його можна розбити на скінченне число трикутників таких, що одна із сторін кожного з них паралельна площині проекцій. Якщо площі таких трикутників S_1, S_2, ..., S_m, то площі їх проекцій $S_1\cos\varphi$, $S_2\cos\varphi$, ..., $S_m\cos\varphi$, де φ — кут між площиною даного многокутника і площиною проекцій. Отже,

$$S_{пр} = S_1 \cos\varphi + S_2 \cos\varphi + \ldots + S_m \cos\varphi =$$
$$= (S_1 + S_2 + \ldots + S_m) \cos\varphi = S \cos\varphi,$$

тобто

$$S_{пр} = S \cos\varphi. \square$$



Мал. 81

■ Наслідок. ***Якщо** S **і** Q **— площі многокутників площини** α**, а** $S_{пр}$ **і** $Q_{пр}$ **— площі їх проекцій на площину** α**, то*** $S_{пр} : Q_{пр} = S : Q$.

210⁰. Знайдіть довжину проекції відрізка AB на площину α, якщо $AB = a$, а пряма AB нахилена до площини α під кутом 30°.

211⁰. Чи може проекцією трикутника бути: а) відрізок; б) квадрат?

212. Доведіть, що проекції будь-якого трикутника на дві паралельні площини дорівнюють одна одній.

213⁰. Площа трикутника дорівнює 48 см^2, а його проекції — 24 см^2. Знайдіть кут між площиною проекцій і площиною даного трикутника.

214. S — площа грані правильного тетраедра, а Q — площа її проекції на другу грань. Знайдіть відношення $Q : S$.

215⁰. Чи може бути площа ортогональної проекції фігури більшою за площу фігури?

216⁰. Знайдіть площу проекції фігури F на площину α, яка з площиною даної фігури утворює кут 60°, якщо фігурою F є:

а) квадрат, діагональ якого дорівнює 2 см;

б) трикутник зі сторонами 3 дм, 4 дм і 5 дм;

в) правильний трикутник зі стороною a;

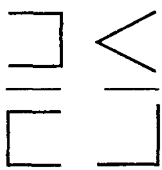
г) ромб, сторона якого дорівнює c , а кут 45°;

ґ) правильний шестикутник зі стороною a.

217⁰. Дві похилі, проведені з однієї точки, мають довжини 15 см і 20 см. Проекція однієї з них 16 см. Знайдіть проекцію другої похилої.

218. Кожна з похилих AB і CD дорівнює 10 см, а їх проекції HB і HD — 6 см і 8 см. Знайдіть відстань AC.

219. Кожна з проекцій фігури F на дві взаємно перпендикулярні площини — квадрат. Чи слідує з цього, що F — куб?



а б

Мал. 82

220. Намалюйте фігури з дроту, проекції яких на дві взаємно перпендикулярні площини зображені на малюнку 82.

221. $\triangle A_1B_1C_1$ — проекція на площину α трикутника ABC, що лежить у площині β. $\triangle A_2B_2C_2$ — проекція $\triangle A_1B_1C_1$ на площину β. Знайдіть відношення площ трикутників $A_2B_2C_2$ і ABC, якщо кут між площинами α і β дорівнює: а) 60°; б) 45°; в) 30°.

222. Рівнобедрені трикутники ABC і ABD із спільною основою AB лежать у різних площинах, кут між якими 30°. Знайдіть площу проекції кожного з цих трикутників на площину другого трикутника, якщо:

а) $AB = 24$ см, $AC = 13$ см, $AD = 37$ см;

б) $AB = a$, $AC = 2a$, $AD = 4a$.

223*. З точки поза площиною проведено перпендикуляр і дві рівні похилі, які з перпендикуляром утворюють кути α. Знайдіть кут φ між проекціями похилих, якщо кут між похилими дорівнює β.

224*. Діагоналі опуклого чотирикутника розбивають його на чотири трикутники, площі трьох із яких дорівнюють 2 дм², 3 дм² і 4 дм². Площа проекції четвертого на площину α дорівнює 5 дм². Знайдіть:

а) площу всього даного чотирикутника;

б) площу його проекції на площину α;

в) косинус кута між площинами даного чотирикутника і α.

Самостійна робота 4

Варіант 1

1. *CA*, *CB* і *CP* — рівні і попарно перпендикулярні відрізки. Знайдіть: а) кут між площинами трикутників *ABC* і *ABP*; б) відстань від точки *C* до площини трикутника *ABP*.

2. Площини квадратів *ABCD* і *ABKP* перпендикулярні, $AB = a$. Знайдіть відстані від центра одного квадрата до сторін другого.

3. Сторона рівностороннього трикутника дорівнює 4 см. Знайдіть площу його проекції на площину, яка з площиною цього трикутника утворює кут 30°.

Варіант 2

1. *ABCD* — квадрат, *KA* — перпендикуляр до його площини, $KA = AB$. Знайдіть: а) кут між площинами трикутників *ABD* і *PBD*; б) відстань від вершини *A* до площини трикутника *PBD*.

2. Площини квадрата *ABCD* і правильного трикутника *ABP* перпендикулярні, $AB = c$. Знайдіть відстані від вершини *P* до сторін квадрата.

3. Сторона ромба дорівнює 6 см, а кут 30°. Знайдіть площу проекції ромба на площину, яка з площиною ромба утворює кут 60°.

Запитання для самоперевірки

1. Дайте означення кута між прямими в просторі.
2. Які прямі називають перпендикулярними?
3. Яку пряму називають перпендикулярною до площини?
4. Доведіть ознаку перпендикулярності прямої і площини.
5. Сформулюйте наслідки з ознаки перпендикулярності прямої і площини.
6. Що таке перпендикуляр до площини, основа перпендикуляра?
7. Що таке похила, основа похилої, проекція похилої на площину?
8. Сформулюйте і доведіть теорему про три перпендикуляри.

9. Що таке відстань між фігурами?
10. Як знаходять відстань між мимобіжними прямими?
11. Що таке кут між прямою і площиною?
12. Якими приладами вимірюють кути в просторі?
13. Сформулюйте означення перпендикулярних площин.
14. Сформулюйте і доведіть ознаку перпендикулярності площин.

ІСТОРИЧНА ДОВІДКА

Перпендикулярність прямих і площин давньогрецькі геометри розглядали ще двадцять три століття тому. В «Основах» Евкліда про перпендикулярність прямих і площин доведено 11 теорем.

Ортогональне проектування європейським математикам було відоме в XVIII ст. Французький геометр і громадський діяч Г. Монж запропонував здійснювати ортогональне проектування одночасно на дві взаємно перпендикулярні площини, створивши тим самим окрему галузь геометричної науки — нарисну геометрію. Метод Монжа виявився настільки важливим і корисним для військової справи, що його впродовж багатьох років тримали засекреченим, як військову таємницю. Розсекретили тільки в 1794 р. Тепер нарисну геометрію вивчають у кожному вищому технічному навчальному закладі.

Монж Гаспар
(1746–1818)

Французький геометр і політичний діяч, творець нарисної геометрії і один з основоположників диференціальної геометрії. Досліджував проблеми креслення, математичного аналізу, метрології, хімії, механіки. Палкий прихильник французької революції, морський міністр, організатор національної оборони, товариш Наполеона. Математичну освіту здобував самостійно, навчався, а потім і працював у школі військових інженерів.

РОЗДІЛ 4

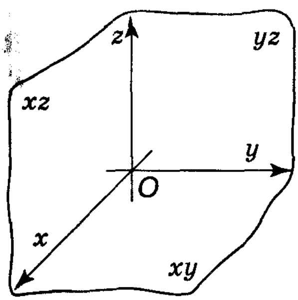
КООРДИНАТИ І ВЕКТОРИ В ПРОСТОРІ

§ 14 *Координати в просторі*

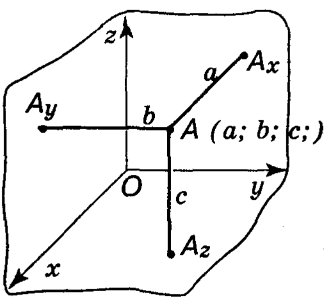
З прямокутною системою координат на площині ви вже знайомі. Аналогічну систему координат можна ввести і для простору.

Нехай x, y, z — три попарно перпендикулярні координатні прямі, які перетинаються в точці O, їх спільному *початку координат* (мал. 83). Назвемо їх *координатними осями:* «вісь x», «вісь y», «вісь z». Кожна вісь точкою O розбивається на дві півосі — додатну, позначену стрілкою, і від'ємну. Площини, які проходять через осі x і y, x і z, y і z — *координатні площини*. Позначають їх відповідно: xy, xz і yz. Координатні площини розбивають весь простір на 8 частин, *октантів*.

Якщо задано таку систему координат, кожній точці простору можна поставити у відповідність єдину впорядковану трійку дійсних чисел, а кожній трійці чисел — єдину точку. Нехай, наприклад, дано точку A. Опустимо з неї на площини yz, xz, xy перпендикуляри AA_x, AA_y, AA_z (мал. 84). Довжини



Мал. 83



Мал. 84

a, b, c цих перпендикулярів, узяті з відповідними знаками, називають *координатами точки A*. Записують $A(a; b; c)$. Якщо точка лежить в якій-небудь координатній площині, її відповідна координата дорівнює нулю. Наприклад, точка $B(0; 2; -3)$ лежить у площині yz, точка $C(5; 0; 0)$ — на осі x. Точка $O(0; 0; 0)$ — початок координат.

З планіметрії відомо: якщо на координатній площині дано точки $A(a_1; a_2)$ і $B(b_1; b_2)$, то середина $C(c_1; c_2)$ відрізка AB має координати $c_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}$, $c_2 = \frac{a_2 + b_2}{2}$, а $AB^2 = (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2$.

Аналогічні твердження правильні й для простору.

ТЕОРЕМА 21. **Якщо $C(c_1; c_2; c_3)$ — середина відрізка з кінцями $A(a_1; a_2; a_3)$ і $B(b_1; b_2; b_3)$, то $c_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}$, $c_2 = \frac{a_2 + b_2}{2}$, $c_3 = \frac{a_3 + b_3}{2}$.**

ДОВЕДЕННЯ. Спроектуємо точки A, B і C на площину xy; їх проекціями є точки $A_z(a_1; a_2; 0)$, $B_z(b_1; b_2; 0)$, $C_z(c_1; c_2; 0)$ (мал. 85). Оскільки проекцією середини відрізка є середина його проекції, то точка C_z — середина відрізка A_zB_z. А з планіметрії відомо, що на площині xy координати середини відрізка виражаються через координати його кінців за формулами

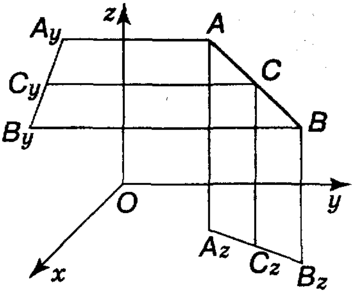
$$c_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}, \quad c_2 = \frac{a_2 + b_2}{2}.$$

Спроектувавши точки A, B, C на площину xz, аналогічно знайдемо

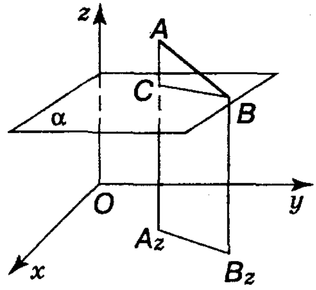
$$c_3 = \frac{a_3 + b_3}{2}. \ \square$$

Наприклад, якщо $C(c_1; c_2; c_3)$ — середина відрізка з кінцями $A(3; 6; 5)$ і $B(1; 0; -7)$, то

$$c_1 = \frac{3 + 1}{2} = 2, \quad c_2 = \frac{6 + 0}{2} = 3, \quad c_3 = \frac{5 - 7}{2} = -1.$$



Мал. 85



Мал. 86

ТЕОРЕМА 22. **Квадрат відстані між двома точками дорівнює сумі квадратів різниць їх відповідних координат:** $AB^2 = (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2$.

ДОВЕДЕННЯ. Нехай дано точки $A\ (a_1;\ a_2;\ a_3)$ і $B\ (b_1;\ b_2;\ b_3)$. Доведемо, що

$$AB^2 = (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2.$$

Розглянемо випадок, коли дані точки розміщені, як показано на малюнку 86. Прямі AA_z і BB_z паралельні осі z, перетинають площину xy у точках $A_z\ (a_1;\ a_2;\ 0)$ і $B_z\ (b_1;\ b_2;\ 0)$. Проведемо через точку B площину α, паралельну площині xy. Вона перетне пряму AA_z у деякій точці C. За теоремою Піфагора $AB^2 = AC^2 + CB^2$. Відрізки CB і A_zB_z рівні і, як відомо з планіметрії, $A_zB_z^{\ 2} = (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2$.

Довжина відрізка $AC = |\, b_3 - a_3 \,|$, тому

$$AB^2 = (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2.$$

Якщо відрізок AB паралельний, наприклад, осі z, то $AB = |\, b_3 - a_3 \,|$. Такий самий результат дає і загальна формула при $b_1 = a_1$ і $b_2 = a_2$.

Аналогічно можна розглянути й інші випадки і переконатись, що завжди

$$AB^2 = (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2. \ \square$$

Розглянута система координат часто використовується у прикладних науках і на виробництві. У трьох взаємно перпендикулярних напрямах (по осях координат) переміщуються робочі вузли багатьох сучасних верстатів. Існують координатно-розточні та інші верстати з числовим програмним керуванням. І сучасні ЕОМ у принципі можуть тільки обчислювати. А якщо комп'ютери видають різні траєкторії, графіки та інші геометричні образи, то здійснюється це завдяки обчисленням координат їх багатьох точок.

225^0. Дано точки $A\,(0;\,3;\,1)$, $B\,(-2;\,0;\,0)$, $K\,(0;\,0;\,4)$, $P\,(0;\,-3;\,0)$. Які з них лежать на осі x, на осі z, у площині xy, у площині yz?

226^0. Знайдіть відстані від точки $M\,(2;\,3;\,1)$ до координатних площин.

227^0. Дано точку $K\,(2;\,3;\,1)$. Знайдіть координати основ перпендикулярів, опущених з цієї точки на координатні площини.

228^0. Дано точки $A\,(1;\,2;\,3)$ і $B\,(3;\,-6;\,7)$. Знайдіть координати середини відрізка AB.

229. Дано точки $A\,(3;\,5;\,-1)$ і $C\,(2;\,1;\,0)$. Знайдіть координати такої точки B, щоб точка C була серединою відрізка AB.

230^0. Знайдіть відстань між точками $B\,(-2;\,0;\,3)$ і $K\,(3;\,4;\,-2)$.

231^0. Яка з точок $A\,(2;\,1;\,5)$ чи $B\,(-2;\,1;\,6)$ лежить ближче до початку координат?

232. Чи є точки $A\,(1;\,2;\,3)$, $B\,(2;\,3;\,4)$ і $C\,(3;\,4;\,5)$ вершинами трикутника?

233^0. Дано точки $A\,(1;\,2;\,3)$, $B\,(2;\,3;\,1)$ і $C\,(3;\,1;\,2)$. Знайдіть периметр трикутника ABC.

234. Дано точки $K\,(0;\,1;\,1)$, $P\,(2;\,-1;\,3)$ і $T\,(-1;\,y;\,0)$. При якому значенні y $KT = PT$?

235. Знайдіть координати точки, яка лежить на осі y і рівновіддалена від точок $A\,(4;\,-1;\,3)$ і $B\,(1;\,3;\,0)$.

236. Дано точки $A\,(1;\,1;\,1)$ і $B\,(1;\,4;\,5)$. Знайдіть довжини проекцій відрізка AB на координатні площини.

237. Складіть рівняння геометричного місця точок простору, рівновіддалених від точки $A\,(1;\,2;\,3)$ і початку координат.

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Нехай $M(x; y; z)$ — довільна точка шуканого геометричного місця точок. Тоді $MA^2 = MO^2$, або

$$(1 - x)^2 + (2 - y)^2 + (3 - z)^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

звідки $x + 2y + 3z = 7$. Це і є шукане рівняння.

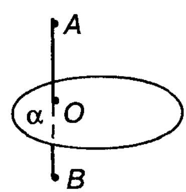
238. Зобразіть у системі координат пряму, яка проходить через точки $A(0; 0; 5)$ і $B(0; 5; 0)$. Знайдіть кути між прямою AB і осями координат.

239. Зобразіть у системі координат площину, яка проходить через точки $A(0; 0; 4)$, $B(0; 4; 0)$ і $C(4; 0; 0)$. Знайдіть: 1) периметр і площу трикутника ABC; 2) довжину його медіани AA_1; 3) відстань від початку координат до площини ABC.

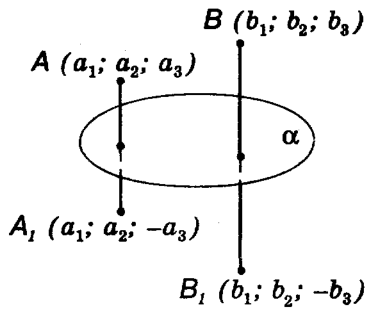
§ 15 *Рухи і перетворення подібності в просторі*

Нагадаємо, що в геометрії *рухом* називають таке перетворення, при якому зберігаються відстані між точками. Прикладом руху у просторі є паралельне перенесення (див. § 7). Далі розглянемо деякі інші види рухів у просторі: перетворення симетрії відносно площини, відносно точки, відносно прямої і повороти навколо прямої.

Точки A і B називаються *симетричними відносно площини*, якщо ця площина перпендикулярна до відрізка AB і ділить його навпіл (мал. 87). Якщо ж точка лежить у площині, то вона вважається симетричною сама собі відносно цієї площини. Перетворення, при якому кожна точка простору відображається на симетричну їй точку відносно деякої площини, називають *перетворенням симетрії відносно цієї площини*. Таке перетворення — рух. Щоб переконатися в цьому, розглянемо перетворення симетрії відносно площини α і розмістимо систему



Мал. 87



Мал. 88

координат у просторі так, щоб її осі x і y були в площині α (мал. 88). Якщо $A\,(a_1;\ a_2;\ a_3)$, $B\,(b_1;\ b_2;\ b_3)$ — довільні точки простору, то симетричні їм відносно площини α будуть точки $A_1\,(a_1;\ a_2;\ -a_3)$ і $B_1\,(b_1;\ b_2;\ -b_3)$. Оскільки

$$AB^2 = (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2,$$

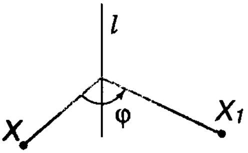
$$A_1B_1{}^2 = (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (-b_3 - (-a_3))^2,$$

то $AB = A_1B_1$. Отже, при перетворенні симетрії відносно площини відстані між точками зберігаються. А це означає, що

▶ **перетворення симетрії відносно площини — рух.**

Точки A і B простору називаються *симетричними відносно точки O*, якщо O — середина відрізка AB. Перетворення, при якому кожна точка простору відображається на точку, симетричну їй відносно деякої точки O, називається *перетворенням симетрії відносно точки.*

Якщо перпендикуляри, опущені з точок X і X_1 на пряму l, рівні і мають спільну основу, а кут між ними дорівнює φ, то говорять, що поворот навколо прямої l на кут φ відображає точку X на X_1 (мал. 89). Перетворення, при якому кожна точка простору повертається навколо тієї самої прямої на той самий кут, також називають *поворотом.* Поворот навколо пря-



Мал. 89

мої l на кут 180° називають ще *перетворенням симетрії відносно прямої.*

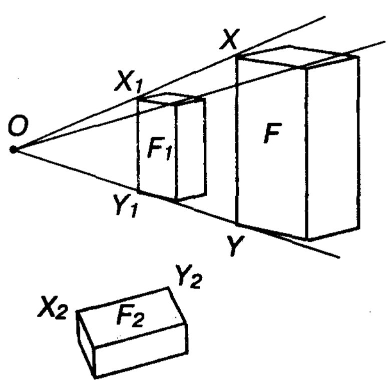
Можна довести, що поворот, перетворення симетрії відносно точки і відносно прямої — рухи, що в результаті кожного руху пряма відображається на пряму, площина — на площину, трикутник — на рівний йому трикутник і т. д.

Дві фігури простору називаються *рівними*, якщо одним чи кількома рухами їх можна сумістити.

Гомотетією відносно центра O з коефіцієнтом гомотетії k називають перетворення, яке відображає кожну точку простору X на точку X_1 променя OX таку, що $OX_1 = k \cdot OX$ (мал. 90).

Мал. 90

Якщо за допомогою гомотетії і руху фігуру F можна відобразити на F_2, то ці дві фігури називають *подібними* одна одній (мал. 91). При перетворенні подібності відстані між точками змінюються в одному й тому самому відношенні. Тобто якщо X і Y — довільні точки фігури F, а X_2 і Y_2 — відповідні їм точки фігури F_2, подібної F, то $X_2Y_2 = k \cdot XY$, де k — *коефіцієнт подібності.*



Мал. 91

240^0. Знайдіть координати точки C, відносно якої симетричні точки K (3; 4; 5) і P (5; −2; 1).

241^0. Користуючись малюнком, знайдіть координати точки, симетричної точці A (3; 2; 0) відносно: а) осі x; б) площини xy; в) початку координат.

242. Знайдіть координати точки, симетричної точці A (a_1; a_2; a_3) відносно: а) площини xy; б) площини xz; в) площини yz.

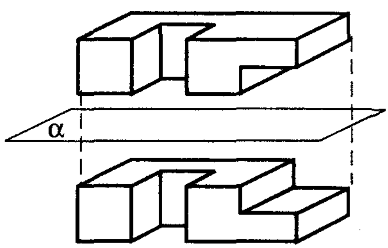
243^0. Зобразіть на малюнку точку A (1; 1; 1) і точки, симетричні їй відносно координатних площин, осей і початку координат. Вершинами якої фігури є всі ці точки?

244. Доведіть, що перетворення симетрії відносно точки — рух.

245^0. Намалюйте куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ і фігуру, симетричну йому відносно: а) грані $ABCD$; б) ребра AA_1; в) вершини A.

246^0. Намалюйте правильний тетраедр $ABCD$ і фігуру, симетричну йому відносно: а) грані ABC; б) вершини A; в) ребра AB.

247. Зображені на малюнку 92 фігури симетричні відносно площини α. Чи рівні вони? Якщо таку форму має деталь механізму, то чи можна замінити її симетричною?



Мал. 92

248^0. Площини α і β перпендикулярні і перетинаються по прямій a. Поворот на 40° навколо a відображає площину α на α_1. Знайдіть кут між площинами α_1 і β.

249^0. Площини α і β паралельні. Площину α_1 одержано поворотом площини α навколо прямої, що лежить у ній, на кут 110°. Знайдіть кут між площинами α_1 і β.

250. Намалюйте куб і фігуру, одержану в результаті повороту цього куба навколо його ребра на кут: а) 90°; б) 180°; в) 45°.

251. Знайдіть координати точки, гомотетичної точці A (4; 6; −2) відносно початку координат, якщо коефіцієнт гомотетії: а) $k = 3$; б) $k = \frac{1}{2}$.

252^0. Користуючись малюнком, з'ясуйте, чи гомотетичні точки A (1; 4; 3) і B (1; 7; 5) відносно точки P (1; 1; 1). Якщо так, вкажіть коефіцієнт гомотетії.

253^0. Намалюйте тетраедр $ABCD$ і фігуру, гомотетичну йому відносно вершини A з коефіцієнтом гомотетії: а) $k = 3$; б) $k = 0{,}5$.

254. Намалюйте куб і фігуру, гомотетичну йому відносно середини його ребра з коефіцієнтом гомотетії $k = 0{,}5$.

Самостійна робота 5

Варіант 1

1. Дано точки A (3; −4; 2) і B (−5; 6; 0). Знайдіть: а) довжину відрізка AB; б) координати середини відрізка AB; в) точку осі x, рівновіддалену від точок A і B.

2. Накресліть правильний тетраедр $ABCD$ і фігуру, симетричну йому відносно: а) вершини D; б) ребра AD; в) центра грані ABC.

Варіант 2

1. Дано точки K (0; 2; −5) і P (6; −6; 7). Знайдіть: а) довжину відрізка KP; б) координати середини відрізка KP; в) координати точки на осі z, рівновіддаленої від K і P.

2. Накресліть куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ і фігуру, симетричну йому відносно: а) вершини C_1; б) ребра BC; в) центра грані $ABCD$.

§ 16 Вектори в просторі

Перед опрацюванням даного параграфа радимо повторити матеріал про вектори, який розглядався у 8 класі. Бо майже все, що говорилось про вектори на площині, поширюється і на вектори в просторі. Тут їх також зображують напрямленими відрізками, позначають символами $\overrightarrow{AB}$, $\vec{a}$ тощо, так само означають поняття модуля вектора, нульового вектора, колінеарних векторів, суми векторів, різниці векторів, добутку вектора на число. І в просторі вектори можна додавати за правилами трикутника або паралелограма, завжди

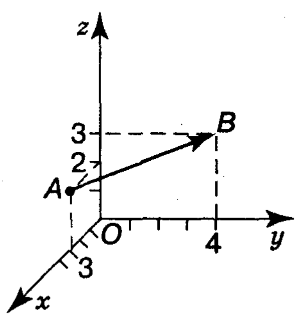
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}, \quad \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}.$$

Тільки якщо на площині вектор задається двома координатами, то в просторі — трьома координатами.

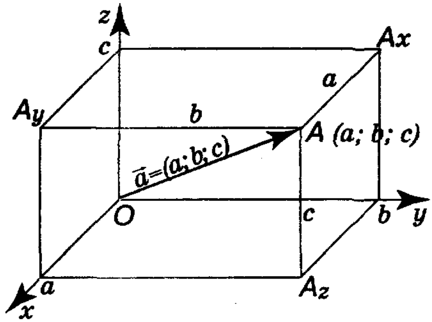
Означення. ***Координатами вектора*** $\overrightarrow{AB}$, *початок якого* $A(x_1; y_1; z_1)$, *а кінець* $B(x_2; y_2; z_2)$, *називають числа* $a_1 = x_2 - x_1$, $a_2 = y_2 - y_1$, $a_3 = z_2 - z_1$.

Записують: $\overrightarrow{AB} = (a_1; a_2; a_3)$, або $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$.

Наприклад, якщо точки $A(3; 0; 2)$ і $B(0; 4; 3)$ — початок і кінець напрямленого відрізка $\overrightarrow{AB}$ (мал. 93), то $a_1 = 0 - 3 = -3$, $a_2 = 4 - 0 = 4$, $a_3 = 3 - 2 = 1$. Отже, $\overrightarrow{AB} = (-3; 4; 1)$. Числа -3, 4 і 1 — координати вектора $\overrightarrow{AB}$.



Мал. 93



Мал. 94

Якщо O — початок координат, а числа a_1, a_2, a_3 — координати точки A, то ці самі числа є і координатами вектора $\overline{OA}$ (мал. 94).

Сумою векторів $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ і $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ називають вектор

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3).$$

Різниця даних векторів

$$\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1; a_2 - b_2; a_3 - b_3).$$

Для будь-яких векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$

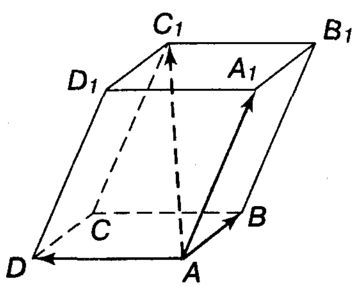
$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} \text{ і } (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}).$$

Як би не були розміщені в просторі точки A, B, C, D, завжди

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}.$$

Зокрема, якщо $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — паралелепіпед, (мал. 95), то $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC_1}$ (правило паралелепіпеда). Адже в цьому випадку $\overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{AA_1}$ і $\overrightarrow{B_1C_1} = \overrightarrow{AD}$, тому

$$\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{B_1C_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AD}.$$



Мал. 95

Модуль (довжину) вектора $\vec{a}$ позначають **символом** $|\vec{a}|$. Завжди, якщо $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$, то

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

Модуль будь-якого ненульового вектора — число додатне. Тільки модуль нульового вектора дорівнює нулю: $\vec{0} = (0; 0; 0)$, $|\vec{0}| = 0$.

Щоб помножити вектор на число, треба на це число помножити кожну координату вектора: якщо $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$, то $m\vec{a} = (ma_1; ma_2; ma_3)$.

Для будь-яких векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і чисел m, n завжди

$$m(\vec{a} + \vec{b}) = m\vec{a} + m\vec{b}, \quad (m + n)\vec{a} = m\vec{a} + n\vec{a},$$

$$|m\vec{a}| = |m| \cdot |\vec{a}|.$$

Ці властивості безпосередньо випливають з правила множення вектора на число.

255⁰. Точки A, B, C, D, E, F — вершини заданого у просторі правильного шестикутника. Назвіть за їх допомогою пару векторів: 1) рівних; 2) протилежно напрямлених; 3) співнапрямлених, але не рівних.

256⁰. Точка B — середина відрізка AC, а C — середина відрізка BD. Чи рівні вектори: 1) $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{DB}$; 2) $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{DC}$?

257⁰. Дано точки $A(1; 2; 3)$ і $B(3; 7; 6)$. Знайдіть координати векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{BA}$.

258⁰. Дано вектор $\overrightarrow{AB} = (a; b; c)$. Знайдіть координати вектора $\overrightarrow{BA}$.

259⁰. Знайдіть модуль вектора: 1) $\vec{a} = (2; 3; -1)$; 2) $\vec{c} = (1; 2; 6)$.

260. Модулі векторів $\vec{a} = (2; 1; 3)$ і $\vec{b} = (-1; x; 2)$ рівні. Знайдіть x.

261. Знайдіть координати вектора $\vec{a} = (a; 2a; -a)$, якщо $|\vec{a}| = \sqrt{54}$.

262⁰. Дано вектори $\vec{a} = (2; 1; -2)$ і $\vec{b} = (3; -2; 5)$. Знайдіть їх суму і різницю.

263⁰. Знайдіть суму векторів

$$\vec{x} = \left(0;\ 3;\ \frac{1}{4}\right), \quad \vec{y} = \left(1;\ \frac{1}{2};\ \frac{3}{4}\right), \quad \vec{z} = \left(1;\ \frac{1}{2};\ 2\right).$$

264. Знайдіть суму векторів: 1) $\overrightarrow{CX}$ і $\overrightarrow{XP}$; 2) $\overrightarrow{BT}$ і $\overrightarrow{AB}$; 3) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ і $\overrightarrow{DE}$; 4) $\overrightarrow{KP}$, $\overrightarrow{PT}$, $\overrightarrow{TM}$, $\overrightarrow{MC}$ і $\overrightarrow{CK}$.

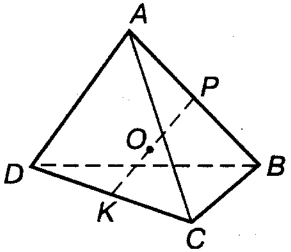
265. Доведіть, що коли O — точка перетину діагоналей паралелограма $ABCD$, то
$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$.

266. Доведіть, що коли O — центр правильного шестикутника $ABCDEF$, то
$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF} = \vec{0}$.

267. Доведіть, що коли O — точка перетину медіан трикутника ABC, то $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$.

268. Нехай K і P — середини ребер AB і CD тетраедра $ABCD$, а O — середина відрізка KP. Доведіть, що $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Вектори $\overrightarrow{OK}$ і $\overrightarrow{OP}$ протилежні, їх сума дорівнює $\vec{0}$ (мал. 96). Тому $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 2 \cdot \overrightarrow{OK} + 2 \cdot \overrightarrow{OP} = 2\,(\overrightarrow{OK} + \overrightarrow{OP}) = \vec{0}$.



Мал. 96

269. Дано вектор $\vec{a} = (3;\ -4;\ 2)$. Знайдіть координати векторів: 1) $3\vec{a}$; 2) $\frac{3}{4}\vec{a}$; 3) $-0{,}5\vec{a}$.

270. Дано вектори $\vec{p} = (-1;\ 3;\ 7)$ і $\vec{q} = (6;\ 2;\ -8)$. Знайдіть координати векторів: 1) $2\vec{p} + 3\vec{q}$; 2) $\vec{p} + \frac{3}{2}\vec{q}$; 3) $2\vec{q} - 3\vec{p}$.

271. Знайдіть модулі векторів $3\vec{a} - \vec{b}$ і $2\vec{a} + 3\vec{b}$, якщо $\vec{a} = (2;\ 0;\ -3)$ і $\vec{b} = (5;\ -1;\ 2)$.

§ 17 Скалярний добуток векторів

Досі ми множили вектор на число. Виявляється, можна множити і вектор на вектор. Оскільки ми розглядатимемо таке множення, при якому добуток двох векторів дорівнює числу (скаляру), то його називають скалярним добутком. Для введення цього поняття пояснимо спочатку, що розуміють під кутом між двома ненульовими векторами.

Кутом між двома ненульовими векторами називають кут між відповідними їм напрямленими відрізками, які виходять з однієї точки. Кут між протилежно напрямленими векторами дорівнює 180°, а між співнапрямленими — 0°. Наприклад, якщо ABC — рівносторонній трикутник, то кут між векторами $\overline{AB}$ і $\overline{AC}$ дорівнює 60°, а між $\overline{AB}$ і $\overline{BC}$ — 120° (мал. 97).

Означення. ***Скалярним добутком*** *двох ненульових векторів називається добуток модулів цих векторів на косинус кута між ними.*

Якщо хоч один з двох векторів нульовий, їх добуток дорівнює нулю.

Якщо кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ дорівнює φ, то їх скалярний добуток

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\varphi.$$

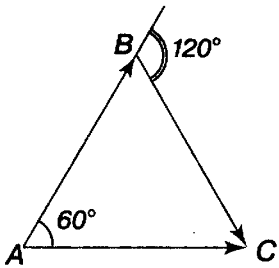
ТЕОРЕМА 23. **Скалярний добуток векторів $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ і $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ дорівнює $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$.**

ДОВЕДЕННЯ. Відкладемо дані вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ від початку координат (мал. 98). Їм відповідають напрямлені відрізки $\overline{OA}$ і $\overline{OB}$, кінці яких — точки $A\ (a_1; a_2; a_3)$ і $B\ (b_1; b_2; b_3)$. Якщо ABO — трикутник, то за теоремою косинусів

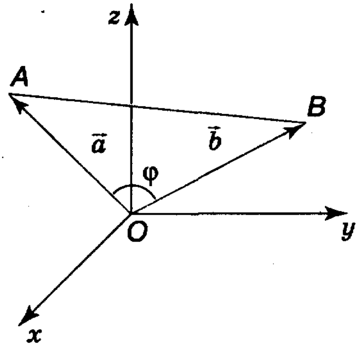
$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2\cdot OA\cdot OB\cdot\cos\varphi,$$

звідки

$$OA\cdot OB\cdot\cos\varphi = \frac{1}{2}(OA^2 + OB^2 - AB^2).$$



Мал. 97



Мал. 98

Виразимо квадрати модулів векторів $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ і $\overrightarrow{AB}$ через їх координати:

$$OA^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2, \quad OB^2 = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2,$$

$$AB^2 = (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2.$$

Тому

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi = OA \cdot OB \cdot \cos\varphi =$$
$$= \frac{1}{2}(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 - (b_1 - a_1)^2 -$$
$$- (b_2 - a_2)^2 - (b_3 - a_3)^2) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні або принаймні один з них нульовий, теорема також справджується (переконайтесь у цьому самостійно). Отже, якщо $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ і $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$, то завжди

$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$. □

З доведеної властивості випливає, що для будь-яких векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ завжди $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ і $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a}\,\vec{c} + \vec{b}\,\vec{c}$. Враховуючи ці векторні рівності, а також властивості додавання векторів і множення вектора на число, бачимо, що векторні вирази можна перетворювати майже так само, як і многочлени. Отже, обчислювати скалярні добутки неважко. А знаючи скалярний добуток векторів та їх модулі, можна обчислити косинус кута між даними векторами. Так можна розв'язувати багато задач.

272⁰. Дано трикутник ABC, у якого $\angle C = 90°$, $\angle A = 50°$. Знайдіть кут між векторами: 1) $\overrightarrow{BA}$ і $\overrightarrow{BC}$; 2) $\overrightarrow{CA}$ і $\overrightarrow{AB}$; 3) $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{BC}$.

273⁰. Знайдіть скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо їх модулі 5 і 12, а кут між ними 60°.

274⁰. Трикутник ABC рівносторонній, $AB = 12$. Знайдіть скалярний добуток: 1) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$; 2) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$.

275⁰. Знайдіть скалярний добуток векторів: 1) $\vec{a} = (1; 2; 4)$ і $\vec{b} = (-8; 2; 1)$; 2) $\vec{m} = (-2; -3; 1)$ і $\vec{n} = (2; 3; 1)$.

276. Дано вектори $\vec{p} = (1; -5; 2)$ і $\vec{q} = (3; 1; 2)$. Знайдіть скалярний добуток векторів $2\vec{p} + \vec{q}$ і $3\vec{p} - 2\vec{q}$.

277⁰. Знайдіть косинус кута між векторами $\vec{a} = (1; 2; 2)$ і $\vec{c} = (2; 3; 6)$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ. За означенням

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = |\vec{a}| \cdot |\vec{c}| \cdot \cos\varphi.$$

Тому

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{c}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{c}|} = \frac{1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 6}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} \cdot \sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2}} = \frac{20}{21}.$$

В і д п о в і д ь. $\cos\varphi = \frac{20}{21}$.

278⁰. Знайдіть кут між векторами:
1) $\vec{a} = (0; 3; -3)$ і $\vec{c} = (1; 0; -1)$;
2) $\vec{x} = (3; 2; -2)$ і $\vec{y} = (0; 4; 4)$.

279⁰. Доведіть, що трикутник з вершинами в точках A (2; 1; 3), B (7; 4; 5) і C (4; 2; 1) прямокутний.

280. Доведіть, що при будь-яких дійсних значеннях m, n і k ненульові вектори $\vec{a} = (m; n; k)$ і $\vec{b} = (n; -m; 0)$ перпендикулярні.

281. При яких значеннях x кут між векторами $\vec{a} = (1; 2; 3)$ і $\vec{b} = (x; 3; 1)$ дорівнює 90°?

282. Дано три точки: A (0; 2; –1), B (1; 0; 1) і C (–1; 1; 2). Знайдіть координати такої точки D осі z, щоб виконувалась умова: $AD \perp BC$.

283. Дано точки $A(1; 4; 8)$ і $B(-4; 0; 3)$. Під яким кутом відрізок AB видно з початку координат?

§ 18 *Застосування векторів*

Вектори часто застосовують у математиці і багатьох прикладних науках. Розв'язуючи геометричну задачу векторним методом, її спочатку немовби перекладають на «мову векторів», враховуючи таке:

$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB}$ означає, що точки A і B збігаються;

$\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}$ — прямі AB і CD паралельні або збігаються;

$\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$ — точки A, B, C лежать на одній прямій;

$\overrightarrow{OA} = k\overrightarrow{OB} + p\overrightarrow{OC}$ — точки O, A, B, C однієї площини;

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$ — прямі AB і CD перпендикулярні;

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi$ — кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ дорівнює φ.

Одержані векторні рівності перетворюють за відомими правилами дій над векторами, після чого їх знову перекладають на звичайну мову геометрії. Особливо часто при цьому застосовують таку теорему.

ТЕОРЕМА 24. **Якщо G — середина відрізка AB, або точка перетину медіан трикутника ABC, а X — довільна точка простору, то**

$$\overrightarrow{XG} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB}) \text{ або}$$

$$\overrightarrow{XG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XC}).$$

ДОВЕДЕННЯ. Завжди істинні такі векторні рівності:

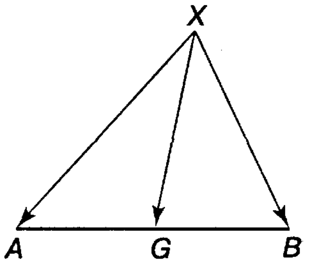
$$\overrightarrow{XG} + \overrightarrow{GA} = \overrightarrow{XA}, \quad \overrightarrow{XG} + \overrightarrow{GB} = \overrightarrow{XB}, \quad \overrightarrow{XG} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{XC}.$$

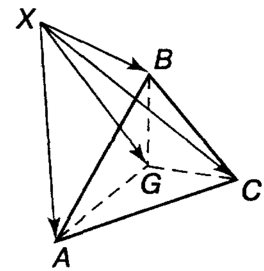
Додавши дві перші з цих рівностей і врахувавши, що коли G — середина відрізка AB, то $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = \vec{0}$ (мал. 99, *а*), дістанемо $2 \cdot \overrightarrow{XG} = \overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB}$, звідки

$$\overrightarrow{XG} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB}).$$

Якщо додати всі три рівності і врахувати, що $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ (задача 267), то дістанемо $3 \cdot \overrightarrow{XG} = \overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XC}$, звідки

$$\overrightarrow{XG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XC})$$ (див. мал. 99, *б*). □





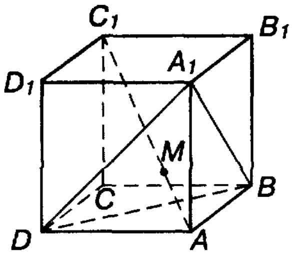
Мал. 99

Задача. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — паралелепіпед, M — точка перетину медіан $\triangle A_1BD$ (мал. 100). Доведіть, що пряма AC_1 проходить через точку M. У якому відношенні точка M ділить відрізок AC_1?

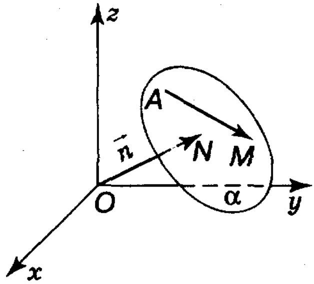
РОЗВ'ЯЗАННЯ. Оскільки M — точка перетину медіан трикутника A_1BD, то за доведеною теоремою $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1})$. А за правилом паралелепіпеда $\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1}$. Отже, $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC_1}$. А це означає, що точка M лежить на прямій AC_1. Оскільки $AC_1 = 3 \cdot AM$, то $AM : MC_1 = 1 : 2$.

Задача. Доведіть, що рівняння площини, перпендикулярної до вектора $\vec{n} = (a; b; c)$, має вигляд $ax + by + cz + d = 0$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Нехай площина α проходить через точку $A(x_0; y_0; z_0)$ перпендикулярно до вектора $\vec{n} = (a; b; c)$, а $M(x; y; z)$ — довільна точка



Мал. 100



Мал. 101

площини α (мал. 101). Вектори $\vec{n} = (a;\ b;\ c)$ і $\overline{AM} = (x - x_0;\ \ y - y_0;\ \ z - z_0)$ перпендикулярні. Отже, їх скалярний добуток дорівнює нулю:

$$a\,(x - x_0) + b\,(y - y_0) + c\,(z - z_0) = 0.$$

Це й є шукане рівняння площини α. Якщо позначити число $ax_0 + by_0 + cz_0 = -d$, то дістанемо рівняння $ax + by + cz + d = 0$.

284^0. Складіть рівняння площини, яка перпендикулярна до вектора $\vec{n} = (5;\ 0;\ -3)$ і проходить через точку $A\ (2;\ -1;\ 4)$.

285^0. Дано точки $A\ (1;\ 2;\ -3)$ і $B\ (4;\ -2;\ 4)$. Складіть рівняння площини, яка перпендикулярна до прямої AB і проходить через точку A.

286^0. Дано точку $A\ (a;\ b;\ c)$. Напишіть рівняння площини, яка проходить через початок координат O перпендикулярно до прямої OA.

287. Напишіть рівняння площини, яка проходить через точку $A\ (1;\ -3;\ 5)$ і паралельна площині, рівняння якої $2x - 3y + z + 10 = 0$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Дана площина перпендикулярна до вектора $\vec{n} = (2;\ -3;\ 1)$. Тому і паралельна їй площина, рівняння якої треба скласти, перпендикулярна до цього вектора, тобто її рівняння має вигляд $2x - 3y + z + d = 0$. Залишається знайти d. Оскільки точка $A\ (1;\ -3;\ 5)$ належить цій площині, то $2 \cdot 1 - 3 \cdot (-3) + 5 + d = 0$, звідки $d = -16$.

Відповідь. $2x - 3y + z - 16 = 0$.

288. Доведіть, що як би не були розміщені у просторі паралелограми $ABCD$ і $A_1B_1C_1D_1$, середини відрізків AA_1, BB_1, CC_1 і DD_1 — вершини паралелограма або лежать на одній прямій.

289. Доведіть за допомогою векторів, що коли пряма перпендикулярна до двох сторін трикутника, то вона перпендикулярна і до третьої його сторони (мал. 56).

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Якщо $KP \perp AB$ і $KP \perp BC$, то $\overrightarrow{KP} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{KP}\,(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{KP} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{KP} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$.

Отже, $\overrightarrow{KP} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$, звідки $KP \perp AC$.

290. $ABCD$ — тетраедр, у якого $AB \perp CD$ і $AC \perp BD$. Доведіть, що $AD \perp BC$.

291. Точки K, L, M, N — середини ребер AB, BC, CD, DA тетраедра $ABCD$. Доведіть, що точки перетину медіан трикутників AML і CNK збігаються.

292. Доведіть, що всі три середні лінії тетраедра проходять через одну точку і поділяються нею навпіл. (Середньою лінією тетраедра називається відрізок, який сполучає середини протилежних ребер тетраедра.)

293. Дано неплоску замкнену ламану $ABCDA$. Довжини ланок AB і CD дорівнюють a і b, а кут між мимобіжними прямими AB і CD дорівнює φ. Знайдіть відстань між серединами ланок AD і BC.

294. Кінці відрізка AB лежать на перпендикулярних площинах, які перетинаються по прямій m. Відстані AA_1 і BB_1 від точок A і B до m дорівнюють відповідно a і b, а $A_1B_1 = c$. Знайдіть довжину AB.

295. Три ребра тетраедра, які виходять з однієї вершини, рівні, кути між ними теж рівні. Доведіть, що кожне його ребро перпендикулярне до протилежного ребра.

296. 1) Точка K — середина ребра AC правильного тетраедра $ABCD$. Знайдіть косинус кута між прямими AB і KD.

2) Знайдіть косинус кута між прямими, яким належать мимобіжні медіани двох граней правильного тетраедра.

297. Під дією сили 20 Н, прикладеної під кутом 30° до напряму переміщення, фізичне тіло перемістилося на 3 м. Знайдіть виконану цією силою роботу.

Самостійна робота 6

Варіант 1

1. Дано точки A (1; −3; 0) і B (4; 2; 3). Знайдіть координати вектора $\overline{AB}$ і його модуль.

2. Знайдіть суму, різницю і скалярний добуток векторів $\vec{a}$ = (3; 0; 1) і $\vec{b}$ = (2; −2; 1), а також косинус кута між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

3. Доведіть методом векторів, що протилежні ребра правильного тетраедра перпендикулярні.

Варіант 2

1. Дано точки K (−3; 0; 4) і P (1; 4; 2). Знайдіть координати вектора $\overline{KP}$ і його модуль.

2. Знайдіть суму, різницю і скалярний добуток векторів $\vec{x}$ = (1; −3; 2) і $\vec{y}$ = (4; 1; 0), а також косинус кута між даними векторами.

3. Користуючись векторним методом, знайдіть кут між мимобіжними діагоналями двох сусідніх граней куба.

Запитання для самоперевірки

1. Що таке прямокутна система координат у просторі?
2. Що таке координати точки у просторі? Наведіть приклади.
3. Сформулюйте і доведіть теорему про координати середини відрізка.
4. Доведіть теорему про квадрат відстані між точками.
5. Що таке рух? Наведіть приклади рухів у просторі.
6. Які точки простору називають симетричними відносно точки, відносно прямої, відносно площини?
7. Що таке перетворення симетрії відносно точки, площини?
8. Які геометричні фігури називаються рівними?

9. Що таке гомотетія, коефіцієнт гомотетії?

10. Які фігури називаються подібними?

11. Що таке координати вектора? Поясніть запис $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$.

12. Сформулюйте правила додавання векторів (правила трикутника, паралелограма, паралелепіпеда).

13. Як помножити вектор на число? Перелічіть властивості добутку вектора і числа.

14. Що таке кут між векторами?

15. Дайте означення скалярного добутку двох векторів.

16. Сформулюйте і доведіть теорему про вираження скалярного добутку векторів через їх координати.

17. Поясніть, у чому суть векторного методу розв'язування задач.

ІСТОРИЧНА ДОВІДКА

Метод координат на площині вперше розробили Р. Декарт і П. Ферма в XVII ст. На тривимірний простір його поширили тільки у XVIII ст. Й. Бернуллі, А. Клеро та ін.

Поняття «вектор» увів у 1846 р. ірландський математик В. Гамільтон. Позначення $\vec{r}$ запропонував у 1887 р. О. Коші. Першу працю «Теорія векторного числення» надрукував у 1853 р. професор Київського університету В. П. Єрмаков.

Спочатку вектори використовували переважно у фізиці для зображення сили, швидкості та інших векторних величин, тому вектори ототожнювали з напрямленими відрізками. В сучасній математиці поняття вектора набагато змістовніше. Вектор — це елемент векторного простору. А векторним простором називається будь-яка множина, для елементів якої визначені операції додавання і множення на число (при цьому мають виконуватися 4 закони додавання і 4 закони множення). Приклади векторних просторів: множина всіх пар точок простору; множина всіх трійок дійсних чисел; множина всіх паралельних перенесень площини чи простору тощо.

Властивості векторів можна використовувати і в алгебрі.

Приклад. Доведіть, що коли $a > 3$, то

$$\sqrt{a+1} + \sqrt{a+2} + \sqrt{a-3} \leqslant 3\sqrt{a}.$$

Доведення. Розглянемо вектори $\vec{n} = (1;\ 1;\ 1)$ і $\vec{m} = \left(\sqrt{a+1};\ \sqrt{a+2};\ \sqrt{a-3}\right)$.

Оскільки $|\vec{n}| = \sqrt{3}$,

$|\vec{m}| = \sqrt{a+1+a+2+a-3} = \sqrt{3a}$

і $\vec{n} \cdot \vec{m} \leqslant |\vec{n}| \cdot |\vec{m}|$, то

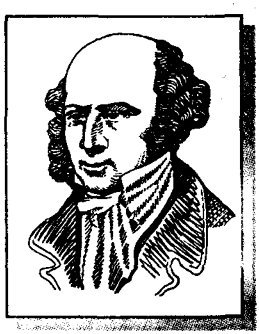
$1 \cdot \sqrt{a+1} + 1 \cdot \sqrt{a+2} + 1 \cdot \sqrt{a-3} \leqslant \sqrt{3} \cdot \sqrt{3a}$

або

$$\sqrt{a+1} + \sqrt{a+2} + \sqrt{a-3} \leqslant 3\sqrt{a}.$$

У цьому доведенні використано властивості векторів, але не напрямлених відрізків.

Гамільтон Вільям Рован
(1805–1865)



Ірландський математик. Читати навчився в 3 роки, в 10 років став студентом, у 12 років знав 10 мов. З 22 років — професор астрономії і директор астрономічної обсерваторії. Його основні праці стосуються механіки, диференціальних рівнянь і функціонального аналізу. Досліджував числові множини, створив систему кватерніонів, ввів термін «вектор». У геометрії досліджував хвильові поверхні, в алгебрі — групи, одну з них називають групою Гамільтона.

Задачі підвищенної складності

298. Чи через будь-яку точку простору можна провести пряму, яка перетинає дві дані мимобіжні прямі?

299. На скільки частин можуть розділити простір чотири площини?

300. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб, точка B_1 — середина відрізка BB_2. Побудуйте переріз куба площиною, яка проходить через точки A, B_2 і C. Знайдіть периметр перерізу, якщо $AB = a$.

301. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. Точка B_1 — середина відрізка BB_2, а C — середина відрізка BC_2. Побудуйте переріз куба площиною AB_2C_2. Знайдіть периметр перерізу, якщо $AB = a$.

302. Яку фігуру утворюють усі відрізки, що сполучають будь-які точки двох мимобіжних відрізків?

303. Дано два мимобіжних відрізки. Знайдіть геометричне місце середин усіх відрізків, що сполучають будь-яку точку одного з них з будь-якою точкою другого.

304. Знайдіть відстань між мимобіжними діагоналями двох сусідніх граней куба, якщо його ребро дорівнює a.

305. Знайдіть геометричне місце точок простору, рівновіддалених від сторін трикутника.

306. Знайдіть геометричне місце точок простору, рівновіддалених від трьох прямих, на яких лежать сторони трикутника.

307. Прямі OA, OB і OC не лежать в одній площині. Доведіть, що кожна площина перетинає хоча б одну з цих прямих.

308. Площини α, β і γ проходять через одну точку, але не мають спільної прямої. Доведіть, що будь-яка пряма перетинає хоча б одну з цих площин.

309. Чи кожний шестикутник $ABCDEF$, у якого кожна сторона паралельна протилежній стороні, є проекцією деякого правильного шестикутника?

310. Точки K і M — середини ребер AB і CD правильного тетраедра $ABCD$. Знайдіть на ребрі AC точку P, для якої $KP \perp PM$.

311. Прямі OA, OB і OC попарно перпендикулярні. Знайдіть кут ABC трикутника, якщо $OA = OB = 2OC$.

312. Ромби $ABCD$ і $AKCM$ розміщені так, що $KM \perp BD$. Доведіть, що пряма KM перпендикулярна до площини ромба $ABCD$.

313. Трикутник ABC рівносторонній, його площина перпендикулярна до відрізка AM. Знайдіть відношення косинусів кутів ABM і CBM.

314. Точка K — середина ребра DB правильного тетраедра $ABCD$. Знайдіть кут нахилу прямої AK до площини грані ABC.

315. Кожний з гострих кутів AOB, BOC і COA дорівнює α. Знайдіть кути між площинами даних кутів.

316. Кожний з кутів AOB, BOC і COA дорівнює $60°$. Знайдіть кут між прямою OA і площиною кута BOC.

317. Знайдіть косинус кута між площинами двох граней правильного тетраедра.

318. У прямокутному трикутнику дано гіпотенузу c і гострий кут $30°$. Знайдіть відстань від вершини прямого кута до площини, яка проходить через гіпотенузу під кутом $45°$ до площини трикутника.

319. З однієї точки проведено до площини дві похилі, довжини яких 3 см і 8 см. Знайдіть проекції похилих на площину, якщо різниця кутів, утворених похилими з площиною, дорівнює $60°$.

320. Знайдіть відстань від початку координат до площини, яка проходить через точки $A\,(3;\,0;\,0)$, $B\,(0;\,3;\,0)$ і $C\,(0;\,0;\,3)$.

321. Точки $A\,(a;\,0;\,0)$, $B\,(0;\,b;\,0)$ і $C\,(0;\,0;\,c)$ — вершини трикутника. Знайдіть координати точки перетину медіан цього трикутника.

322. Точки A, B, C і D розміщені в просторі так, що $AD \perp BC$. Доведіть, що $AB^2 + DC^2 = AC^2 + DB^2$.

323. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб, M — середина ребра AA_1, K — центр грані CC_1D_1D. У якому відношенні площина B_1MK ділить ребра CC_1 і DD_1?

324. Площина проходить через точки M, N і K куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, причому $M \in AA_1$, $N \in B_1C_1$, $K \in CD$, $AM : MA_1 = 1 : 2$, $B_1N : NC_1 = 3 : 2$, $CK = KD$. У якому відношенні ця площина ділить ребро AD?

325. Знайдіть площу проекції правильного тетраедра, ребро якого дорівнює a, на площину: а) перпендикулярну до його ребра; б) паралельну двом його протилежним ребрам.

326. Доведіть, що сума відстаней від довільної точки, що знаходиться всередині правильного тетраедра, до всіх його граней стала.

327. Знайдіть довжину відрізка, проекції якого на три попарно перпендикулярні площини дорівнюють a, b, c.

328. Знайдіть кут між площинами AA_1C_1 і ABC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

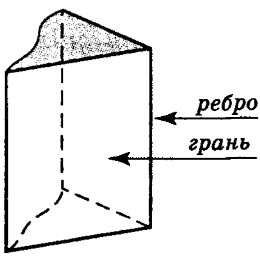
МНОГОГРАННИКИ

§ 19 Двогранні і многогранні кути

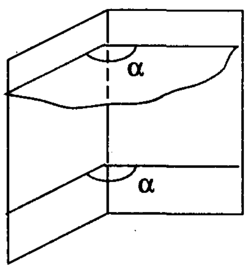
У цьому розділі розглядатимуться такі геометричні фігури, як куб, тетраедр, призма тощо. Кожна з них має двогранні і многогранні кути. Тому є потреба ввести ці поняття.

Означення. ***Двогранним кутом називається частина простору, обмежена двома півплощинами, які виходять з однієї прямої.***

Півплощини, які обмежують двогранний кут, називають його *гранями*, а їх спільну пряму — *ребром* двогранного кута (мал. 102).

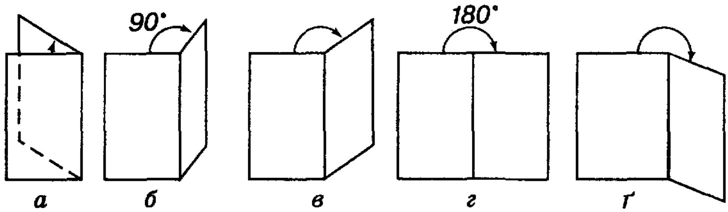


Мал. 102



Мал. 103

Кут, утворений перетином двогранного кута з площиною, перпендикулярною до його ребра, називають *лінійним кутом* даного двогранного кута. Будь-які два лінійних кути двогранного кута рівні, бо їх можна сумістити паралельним перенесенням (мал. 103). Тому двогранні кути можна характеризувати відповідними лінійними кутами. Якщо,



Мал. 104

наприклад, лінійний кут деякого двогранного кута дорівнює 60°, то говорять, що це — двогранний кут 60°. Двогранний кут називають гострим, прямим, тупим, розгорнутим чи більшим від розгорнутого залежно від того, чи є його лінійний кут гострим, прямим, тупим, розгорнутим чи більшим від розгорнутого (мал. 104).

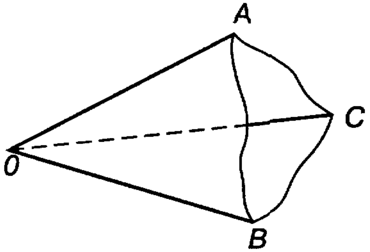
Нагадаємо, що фігура називається *опуклою*, якщо разом з кожними своїми двома точками вона містить і відрізок, що їх сполучає. Всі інші фігури — *неопуклі*. Оскільки двогранний кут, більший від розгорнутого, фігура неопукла, то його називають також неопуклим двогранним кутом.

Означення. ***Тригранним кутом*** *називають частину простору, обмежену трьома плоскими кутами, кожні два з яких мають одну спільну сторону* (мал. 105).

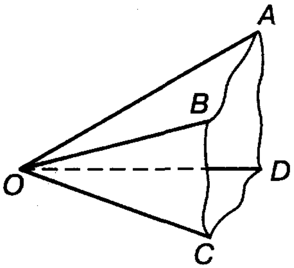
Кути, які обмежують тригранний кут, називають його *гранями*, сторони кутів — *ребрами*, а їх спільну вершину — *вершиною* даного тригранного кута. Всі три грані тригранного кута (разом з його ребрами і вершиною) становлять його *поверхню*. Поверхня тригранного кута розбиває весь простір на дві просторові області. Тригранний кут може містити будь-яку з цих просторових областей. Тому тригранні кути також можуть бути як опуклими, так і неопуклими. Але звичайно (коли додатково не уточнюється) розглядають тільки опуклі тригранні кути.

Опуклий тригранний кут, усі плоскі кути якого прямі, називають *прямим тригранним кутом*. Наприклад, куб має 8 прямих тригранних кутів і 12 прямих двогранних кутів. Кожний октант прямокутної системи координат у просторі — прямий тригранний кут.

Аналогічно можна ввести поняття *чотиригранного кута* (мал. 106), *п'ятигранного* і т. д. Усі вони разом, починаючи з тригранного, називаються *многогранними кутами*.



Мал. 105



Мал. 106

329⁰. Кут між двома площинами 70°. Знайдіть градусні міри двогранних кутів, утворених перетином цих площин.

330⁰. Дано двогранний кут 60°. Точка *A* однієї його грані віддалена на 12 см від другої. Знайдіть відстань від точки *A* до ребра даного двогранного кута.

331⁰. Точка *A* прямого двогранного кута віддалена від його граней на 3 дм і 4 дм. Знайдіть її відстань від ребра двогранного кута.

332⁰. На зображенні правильного тетраедра побудуйте зображення лінійного кута одного з його двогранних кутів.

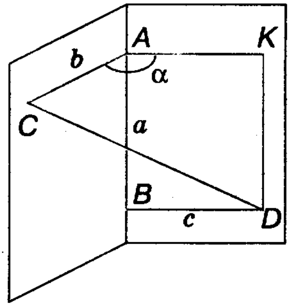
333⁰. З точки *C* на ребрі двогранного кута 90° у його гранях проведені перпендикуляри до ребра: $CA = 3{,}5$ дм і $CB = 1{,}2$ дм. Знайдіть відстань від *A* до *B*.

334. Знайдіть кут між двома прямими, перпендикулярними до граней двогранного кута 100°.

335. Знайдіть кут між однією гранню двогранного кута 100° і прямою, перпендикулярною до другої грані.

336. A і B — точки на ребрі двогранного кута міри α, AC і BD — перпендикуляри до ребра, проведені у різних гранях. Знайдіть відстань CD, якщо $AB = a$, $AC = b$ і $BD = c$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Нехай $AK \parallel BD$ і $AK = BD$ (мал. 107). Тоді $AK \perp AB$ і $\angle CAK = \alpha$. За теоремою косинусів $CK^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$.



Мал. 107

Оскільки $AB \perp AC$ і $AB \perp AK$, то $AB \perp KC$. Тоді і $KD \perp KC$. За теоремою Піфагора $CD^2 = KD^2 + KC^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$.

Відповідь. $CD = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha}$.

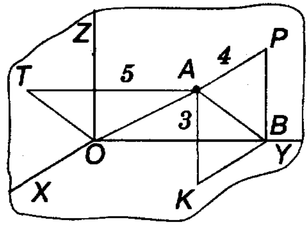
Зауваження. Задачу можна розв'язати і векторним методом, піднісши скалярно до квадрата векторну рівність $\overline{CD} = \overline{CA} + \overline{AB} + \overline{BD}$.

337^0. З точок A і B однієї грані гострого двогранного кута опущено перпендикуляри AA_1 і BB_1 на другу грань і AA_2, BB_2 — на ребро. Знайдіть довжину BB_2, якщо $AA_1 = 3$ дм, $AA_2 = 5$ дм і $BB_1 = 9$ дм.

338. Доведіть, що всі двогранні кути правильного тетраедра рівні.

339. Чи існує тригранний кут з плоскими кутами 20°, 30° і 60°?

340. Точка прямого тригранного кута віддалена від його граней на 3 см, 4 см і 5 см. Як вона віддалена від вершини тригранного кута?



Мал. 108

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Нехай OX, OY, OZ — ребра прямого тригранного кута, а його точка A віддалена від його граней на відстані $AK = 3$, $AP = 4$, $AT = 5$ (мал. 108). Якщо площина APK перетинає ребро OY у точці B, то $APBK$ і $ABOT$ — прямокутники (доведіть). Отже,

$$OA^2 = AB^2 + OB^2 = AP^2 + AK^2 + AT^2 =$$
$$= 4^2 + 3^2 + 5^2 = 50.$$

Відповідь. $5\sqrt{2}$ см.

341. На ребрах OA, OB, OC прямого тригранного кута позначено довільні точки A, B, C. Доведіть, що трикутник ABC гострокутний.

342. Кожний плоский кут тригранного кута дорівнює $60°$. Знайдіть кут між його ребром і бісектрисою протилежного плоского кута.

343. Скільки існує різних чотиригранних кутів, всі плоскі кути яких мають по $40°$?

344. Чи існує опуклий чотиригранний кут з плоскими кутами $50°$, $70°$, $110°$ і $140°$?

345. Учень говорить: «Кути бувають плоскі, двогранні і многогранні». Чи це правильно?

Відповідь. Ні, неправильно. Кутом називається частина площини, обмежена двома променями із спільною вершиною. Жоден з двогранних чи многогранних кутів не підходить під це означення, тому не є кутом.

● **346.** Практичне завдання. 1) Зробіть з цупкого паперу модель поверхні двогранного кута, накресліть будь-який його лінійний кут і продемонструйте, як змінюється двогранний кут із зміною його лінійного кута.

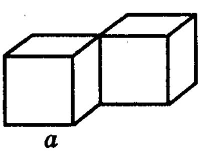
2) Зробіть модель поверхні тригранного кута.

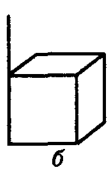
§ 20 *Геометричні тіла і многогранники*

Кожний двогранний чи многогранний кут — це об'єднання деякої нескінченної просторової області і її поверхні. Об'єднання скінченної просторової області і її поверхні називають *геометричним тілом*. Щоб не ускладнювати виклад, ми не наводимо строгих означень понять «просторова область» і «поверхня просторової області», а обмежимось прикладами.

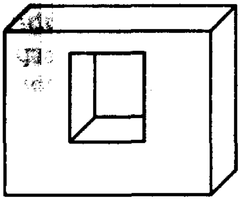
Нехай маємо деякий куб. Його поверхня складається з шести квадратів. Усі точки куба, які не належать його поверхні, становлять скінченну просторову область. Скінченну — бо відстань між її найвіддаленішими точками не перевищує деякої скінченної відстані. Отже, куб є об'єднанням певної скінченної просторової області і її поверхні. Те саме можна сказати про будь-який паралелепіпед, тетраедр, циліндр і т. п. Кожна з цих фігур — геометричне тіло. І будь-яка фігура у формі картоплини або бублика — теж геометричне тіло. Кожне геометричне тіло — це фігура (множина точок), яка складається з однієї скінченної просторової області, усієї її поверхні і не має ніяких інших точок. Наприклад, об'єднання двох кубів з одним спільним ребром (мал. 109, *а*) — не геометричне тіло, бо містить дві просторові області (відкиньте поверхню цієї фігури, і дві її просторові області виявляться не зв'язаними). І куб з відрізком (мал. 109, *б*) — не геометричне тіло, бо всі точки відрізка, крім одного кінця, не належать ні поверхні куба, ні його просторовій області.

Оскільки, крім геометричних тіл, у геометрії ніяких інших тіл не розглядають, далі ми їх будемо називати *тілами*.

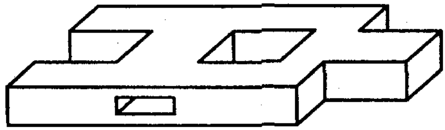

а


б

Мал. 109



Мал. 110



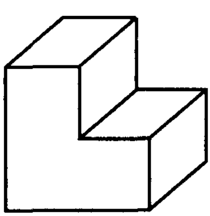
Мал. 111

Означення. ***Многогранником*** *називається тіло, поверхня якого складається із скінченної кількості многокутників.*

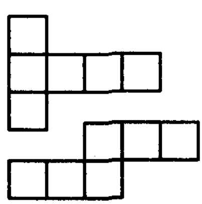
Многокутники, які обмежують многогранник, називають *гранями*, їх сторони — *ребрами*, а кінці ребер — *вершинами* многогранника. Відрізок, який сполучає дві вершини, що не належать одній грані, — *діагональ* многогранника.

Бувають многогранники з многогранними «отворами». Таку форму мають, наприклад, залізобетонні стіни з отворами для вікон (мал. 110), столярні вироби і окремі їх деталі (мал. 111). Деякі грані подібних многогранників мають многокутні «отвори». Зрозуміло, що кожний з таких многогранників — фігура неопукла. Але й многогранники без отворів можуть бути неопуклими (мал. 112). Найпростіші многогранники — опуклі. Опуклий многогранник розміщений з одного боку від площини кожної його грані. Усі грані опуклого многогранника — опуклі многокутники.

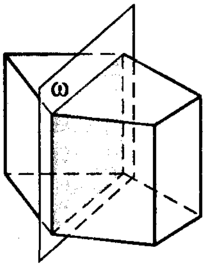
Якщо поверхню многогранника розрізати по кількох його ребрах і розпластати на площині, дістанемо *розгортку* даного многогранника. На малюнку 113 зображено дві різні розгортки куба.



Мал. 112



Мал. 113



Мал. 114

Площа поверхні многогранника — це сума площ усіх його граней. Вона дорівнює площі розгортки даного многогранника.

Якщо принаймні дві точки многогранника лежать по різні боки від площини, говорять, що площина перетинає многогранник. У цьому разі її називають *січною площиною*. Фігура, яка складається з усіх точок, спільних для многогранника і січної площини, — *переріз многогранника* даною площиною (мал. 114). Кожний переріз опуклого многогранника — опуклий многокутник.

347⁰. Намалюйте многогранник, який має 4 грані. Скільки ребер і вершин він має? Як називається такий многогранник?

348⁰. Намалюйте многогранник, який має: 1) 5 граней і 5 вершин; 2) 5 граней і 6 вершин.

349. Чи існує многогранник, відмінний від тетраедра, всі грані якого — трикутники?

350. Многогранник має 9 ребер. Доведіть, що його гранню не може бути п'ятикутник.

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Якщо многогранник має п'ятикутну грань, то кожна її вершина є вершиною деякого многогранного кута і з неї виходить не менше трьох ребер. Такий многогранник має 10 або більше ребер. Тому якщо многогранник має тільки 9 ребер, він не може мати п'ятикутної грані.

351⁰. Намалюйте розгортку правильного тетраедра, ребро якого дорівнює 2 см. Знайдіть площу розгортки.

352⁰. Площа поверхні правильного тетраедра дорівнює 36 см^2. Знайдіть довжину його ребра.

353⁰. Площі трьох граней паралелепіпеда дорівнюють 2 м^2, 3 м^2 і 4 м^2. Знайдіть площу його поверхні.

354. Знайдіть площу поверхні прямокутного паралелепіпеда, якщо одне його ребро дорівнює a, а площі прилеглих до нього граней S_1 і S_2.

355. Якщо від куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ відрізати тетраедр $A_1AB_1D_1$, залишиться многогранник $ABCDD_1B_1C_1$. Скільки граней, ребер і вершин він матиме? Знайдіть площу його найбільшої грані, якщо $AB = a$.

356. На ребрах прямого тригранного кута з вершиною O відкладено відрізки $OA = OB = OC = a$ і через точки A, B, C проведено площину. Знайдіть площу поверхні утвореного многогранника.

357. Площі трьох граней прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 10 см^2, 15 см^2 і 24 см^2. Знайдіть довжини його ребер.

358. Знайдіть площу поверхні тетраедра $ABCD$, якщо $AC = CB = BD = DA = DC = a$ і $\angle ACB = \varphi$. Обчисліть, якщо $a = 1{,}2$ м, $\varphi = 50°$.

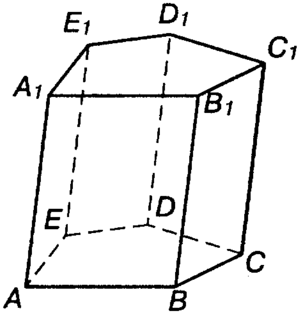
● **359.** Практичне завдання. Виріжте з паперу розгортку: 1) тетраедра; 2) прямокутного паралелепіпеда.

§ 21 *Призми*

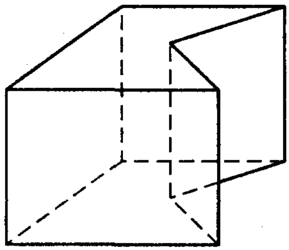
Означення. ***Призмою називається многогранник, у якого дві грані — рівні n-кутники, а решта n граней — паралелограми.***

Рівні n-кутники, про які йдеться в цьому означенні, називають *основами призми*. Їх відповідні сторони попарно рівні і паралельні. Всі грані призми, які не є основами, називають *бічними гранями*. *Бічними ребрами* призми називають усі її ребра, які не є сторонами основ. Усі бічні ребра призми рівні і паралельні. На малюнку 115 зображено п'ятикутну призму з основами $ABCDE$ і $A_1B_1C_1D_1E_1$ і бічними ребрами AA_1, BB_1, CC_1, DD_1, EE_1.

Призма називається *прямою*, якщо її бічні ребра перпендикулярні до площини основи. Всі інші призми — *похилі*. Кожна бічна грань прямої призми — прямокутник. *Висота призми* — відстань



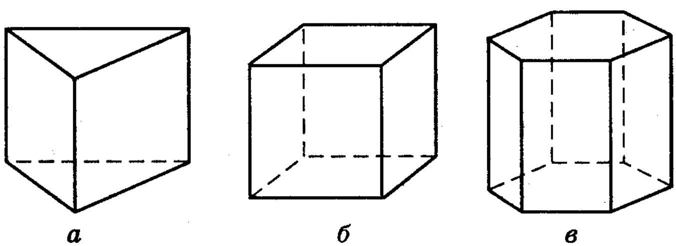
Мал. 115



Мал. 116

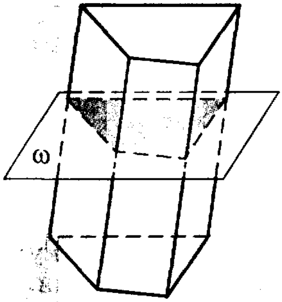
між площинами її основ. Висота прямої призми дорівнює довжині її бічного ребра.

Призми бувають *опуклі* (див. мал. 115) і *неопуклі* (мал. 116). Призма називається *правильною*, якщо вона пряма і її основами є правильні многокутники. На малюнку 117 зображено правильні трикутну, чотирикутну і шестикутну призми. Кожна правильна призма опукла. Усі бічні грані правильної призми — рівні прямокутники.

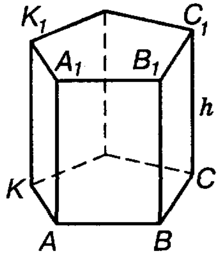


Мал. 117

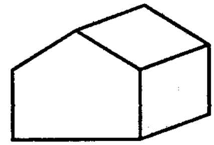
Площина, що проходить через два бічних ребра призми, які не лежать в одній грані, називається *діагональною площиною*, а переріз призми цією площиною — *діагональним перерізом* (див. мал. 114). Діагональний переріз будь-якої опуклої призми — паралелограм, а прямої призми — прямокутник. Січна площина, паралельна основам призми, перетинає її по многокутнику, що дорівнює основі. Такий переріз паралельним перенесенням можна відоб-



Мал. 118



Мал. 119



Мал. 120

разити на будь-яку з основ призми (мал. 118).

Площею бічної поверхні призми називають суму площ її бічних граней.

ТЕОРЕМА 25. **Площа бічної поверхні прямої призми дорівнює добутку периметра її основи на висоту призми:**

$$S_б = Ph.$$

ДОВЕДЕННЯ. Нехай висота даної призми дорівнює h, а периметр основи $AB + BC + \ldots + KA = P$ (мал. 119). Доведемо, що площа її бічної поверхні $S_б = Ph$.

Кожна бічна грань прямої призми — прямокутник. Його основа дорівнює відповідній стороні основи призми, а висота — висоті призми. Тому

$$S_б = AB \cdot h + BC \cdot h + \ldots + KA \cdot h =$$
$$= (AB + BC + \ldots + KA)\, h = Ph.$$

Отже,

$$S_б = Ph. \ \square$$

Щоб знайти площу бічної поверхні похилої призми, треба знайти площу кожної її бічної грані і результати додати.

Площа поверхні призми дорівнює сумі площ її бічної поверхні і двох основ:

$$S = S_б + 2S_о.$$

Чи можна вважати призмою зображений на малюнку 120 многогранник? Так, це призма, хоч і поставлена на бічну грань. Назва фігури не залежить від того, як вона розміщена в просторі.

360. Чи існує призма, яка має рівно 100 ребер?

361. Доведіть, що n-кутна призма має $n + 2$ грані, $3n$ ребер і $2n$ вершин.

362. Скільки діагоналей і діагональних площин має опукла семикутна призма?

363. Знайдіть градусну міру двогранного кута при бічному ребрі правильної п'ятикутної призми.

364^0**.** Бічне ребро призми дорівнює l і нахилене до площини основи під кутом α. Знайдіть висоту призми.

365^0**.** Чи рівні діагональні перерізи правильної чотирикутної призми? А правильної п'ятикутної?

366^0**.** Висота правильної чотирикутної призми дорівнює h, а сторона основи a. Знайдіть: а) площу її поверхні; б) діагональ призми.

367^0**.** Діагональ правильної чотирикутної призми дорівнює d і нахилена до площини основи під кутом φ. Знайдіть площу: а) діагонального перерізу; 2) бічної поверхні призми.

368. Знайдіть площу діагонального перерізу правильної чотирикутної призми, висота якої дорівнює 10 см, а площа основи 144 см^2.

369. Площа поверхні правильної чотирикутної призми 40 см^2, а бічної поверхні 32 см^2. Знайдіть висоту призми.

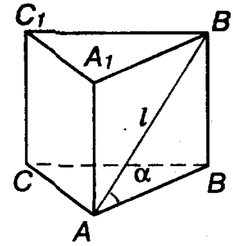
370^0**.** Три грані призми — квадрати зі стороною 2 см, а дві інші — трикутники. Накресліть цю призму і її розгортку.

371^0**.** У прямій трикутній призмі всі ребра рівні. Площа її бічної поверхні дорівнює 27 см^2. Знайдіть площу основи.

372. Площа діагонального перерізу правильної чотирикутної призми дорівнює S. Знайдіть площу її бічної поверхні.

373. Діагональ бічної грані правильної трикутної призми дорівнює l і нахилена до площини основи під кутом α. Знайдіть площу бічної поверхні призми. Обчисліть, якщо $l = 28$ см, $\alpha = 53°$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Нехай призма $ABCA_1B_1C_1$ правильна, а діагональ B_1A її бічної грані має довжину l (мал. 121). Сторона основи BA — проекція цієї діагоналі на площину основи, тому $\angle B_1AB = \alpha$.



Мал. 121

Площа бічної поверхні правильної трикутної призми $S = 3ah$, де a — сторона основи, а h — висота призми. З прямокутного $\triangle B_1AB$ знаходимо:

$$a = AB = l\cos\alpha, \quad h = B_1B = l\sin\alpha.$$

Отже,

$$S = 3l\cos\alpha \cdot l\sin\alpha = 1{,}5\, l^2 \sin 2\alpha.$$

При даних числових значеннях

$$S = 1{,}5 \cdot 28^2 \sin 106^\circ \approx 1130.$$

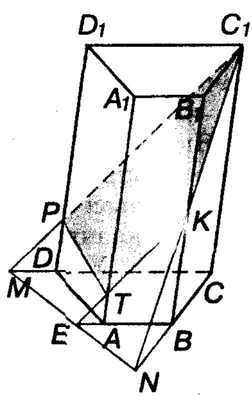
Відповідь. $S = 1{,}5\, l^2 \sin 2\alpha$; $S \approx 11{,}3$ дм^2.

374. Через середини двох сторін основи правильної трикутної призми під кутом α до основи проведено площину, яка перетинає два бічних ребра. Знайдіть площу перерізу, якщо сторона основи дорівнює a. Обчисліть, якщо $a = 15{,}7$ см, $\alpha = 30^\circ$.

375. Дано правильну шестикутну призму, кожне ребро якої дорівнює a. Через дві протилежні сторони основ побудуйте переріз цієї призми і знайдіть його площу.

376. Побудуйте переріз трикутної призми $ABCA_1B_1C_1$ площиною, яка проходить через вершини A, B і середину ребра A_1C_1.

377. Дано чотирикутну призму $ABCDA_1B_1C_1D_1$ і на її бічних ребрах точки $K \in BB_1$, $P \in DD_1$. Опишіть за малюнком 122, як можна побудувати переріз даної призми площиною, що проходить через точки K, P, C_1.



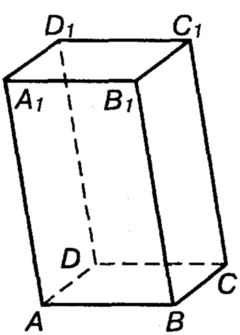
Мал. 122

378. У похилій призмі проведено переріз, який перетинає всі бічні ребра і перпендикулярний до них. Доведіть, що коли P — периметр перерізу, а l — довжина бічного ребра, то площа бічної поверхні призми $S = Pl$.

● **379.** Практичне завдання. Виріжте з цупкого паперу розгортку трикутної призми і зробіть з неї модель призми.

§ 22 *Паралелепіпеди*

Означення. ***Паралелепіпедом*** *називається призма, основа якої — паралелограм.*



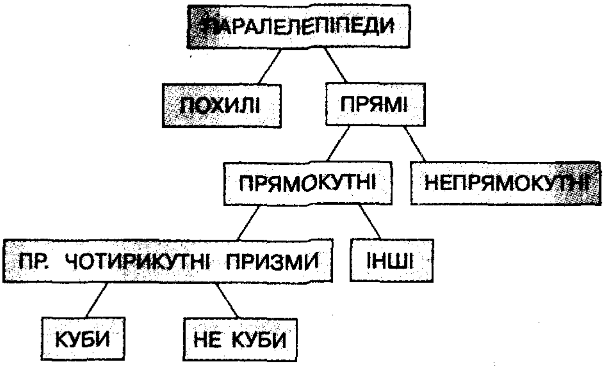
Мал.123

Усі шість граней паралелепіпеда — паралелограми (мал. 123). Протилежні грані рівні і лежать у паралельних площинах, протилежні ребра рівні і паралельні.

Паралелепіпед, бічні ребра якого перпендикулярні до площини основи, називається *прямим паралелепіпедом*. Його чотири грані — прямокутники. Такий паралелепіпед вважатимемо прямим незалежно від того, як він розміщений у просторі. Вважаємо також, що кожний паралелепіпед має 6 діагональних перерізів, хоч чотирикутна призма, відмінна від паралелепіпеда,— тільки 2.

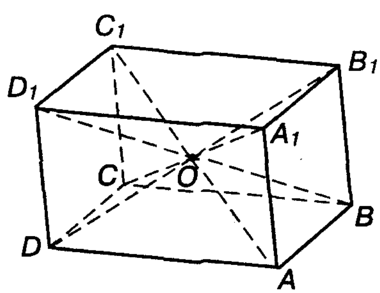
Якщо всі грані паралелепіпеда — прямокутники, його називають *прямокутним паралелепіпедом*. Довжини трьох його ребер, які виходять з однієї вершини, називають *вимірами* прямокутного паралелепіпеда. Усі двогранні і тригранні кути прямокутного паралелепіпеда прямі. Правильна чотирикутна призма — окремий вид такого паралелепіпеда.

Прямокутний паралелепіпед, усі три виміри якого рівні, називається *кубом*. Співвідношення між різними видами паралелепіпедів подано на схемі.

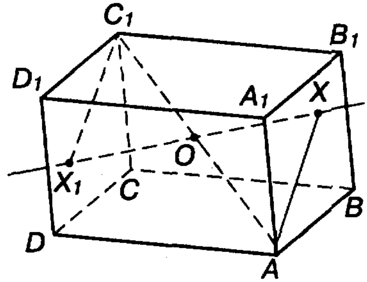


ТЕОРЕМА 26. **Діагоналі паралелепіпеда перетинаються в одній точці і діляться цією точкою пополам.**

ДОВЕДЕННЯ. Нехай $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — довільний паралелепіпед (мал. 124). Його ребра AB, DC, D_1C_1, A_1B_1 рівні і паралельні. Отже, чотирикутники ABC_1D_1 і DCB_1A_1 — паралелограми, їх діагоналі перетинаються. Нехай діагоналі AC_1 і BD_1 першого паралелограма перетинаються в точці O, а діагоналі DB_1 і CA_1 другого — у точці O_1. Оскільки точкою перетину кожна діагональ паралелограма ділиться пополам, то O і O_1 — середини відрізків AC_1 і DB_1 відповідно. Ці відрізки — діагоналі паралелограма ADC_1B_1, їх середини збігаються. Таким чином, середина кожної діагоналі паралелепіпеда — одна й та сама точка O. А це й треба було довести.



Мал. 124



Мал. 125

Якщо пряма проходить через точку O перетину діагоналей паралелепіпеда і перетинає його поверхню в точках X і X_1, то $OX = OX_1$ (мал. 125). Це випливає, наприклад, з рівності трикутників OAX і OC_1X_1. Тому говорять, що точка перетину діагоналей паралелепіпеда є його центром симетрії. □

ТЕОРЕМА 27. **Квадрат діагоналі прямокутного паралелепіпеда дорівнює сумі квадратів трьох його вимірів:**

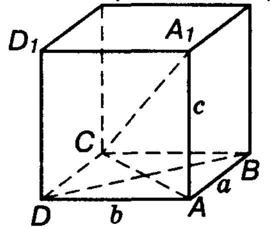
$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

ДОВЕДЕННЯ. Нехай $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямокутний паралелепіпед, виміри якого: $AB = a$, $AD = b$, $AA_1 = c$ (мал. 126). У ньому $AC = BD$, а кути A_1AC і BAD прямі. Тому за теоремою Піфагора

$$A_1C^2 = AA_1^2 + AC^2 = AA_1^2 + BD^2 = AA_1^2 + AB^2 + AD^2.$$

Отже, $A_1C^2 = a^2 + b^2 + c^2$. □

Наслідок. ***Усі чотири діагоналі прямокутного паралелепіпеда рівні.***



Мал. 126

З а у в а ж е н н я. Зверніть увагу на те, що під «діагоналлю» в одному випадку розуміють відрізок, а в другому — довжину цього відрізка. Назви «висота», «бічне ребро», «сторона основи» теж вживають для позначення двох різних понять: відрізка і його довжини. Замість «довжина діагоналі дорівнює d» пишуть також коротше: «діагональ дорівнює d», або «діагональ d».

380^0. Чи може основою похилого паралелепіпеда бути прямокутник?

381^0. Три грані паралелепіпеда — прямокутники. Чи випливає з цього, що даний паралелепіпед прямокутний?

382^0. Розміри цеглини $250 \times 120 \times 65$ мм. Знайдіть відстань між її найвіддаленішими точками.

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Цеглина має форму прямокутного паралелепіпеда. Найвіддаленіші його точки — кінці діагоналі паралелепіпеда. Тому шукана відстань

$$d = \sqrt{250^2 + 120^2 + 65^2} \approx 285.$$

В і д п о в і д ь. 285 мм.

383^0. Знайдіть площу поверхні прямокутного паралелепіпеда за трьома його вимірами: 1) 10 см, 16 см і 22 см; 2) a, b, c.

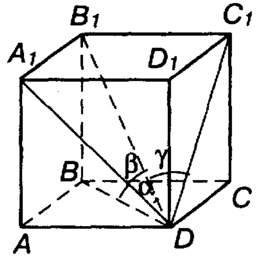
384^0. Знайдіть виміри прямокутного паралелепіпеда, якщо площі трьох його граней дорівнюють 42 см^2, 72 см^2 і 84 см^2.

385. Дано паралелепіпед, кожна грань якого — ромб із стороною a і кутом α. Знайдіть площу його поверхні.

386. Виміри прямокутного паралелепіпеда 3, 4 і 5. Знайдіть кут між діагоналлю паралелепіпеда і його найменшою гранню.

387. Доведіть, що коли діагональ прямокутного паралелепіпеда з площинами його граней утворює кути α, β і γ, то

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 1.$$



Мал. 127

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Нехай діагональ даного прямокутного паралелепіпеда $DB_1 = d$ (мал. 127). З прямокутних трикутників B_1DA_1, B_1DB і B_1DC_1 знайдемо виміри паралелепіпеда:

$$B_1A_1 = d \sin \alpha, \quad B_1B = d \sin \beta, \quad B_1C_1 = d \sin \gamma.$$

Тому

$$d^2 \sin^2 \alpha + d^2 \sin^2 \beta + d^2 \sin^2 \gamma = d^2,$$

звідки

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 1.$$

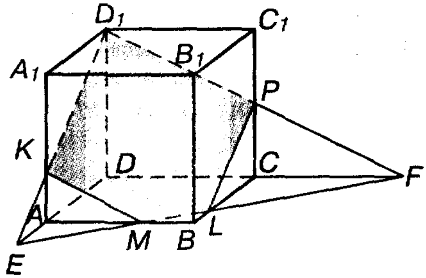
388. Діагональ прямокутного паралелепіпеда дорівнює d і нахилена до площини двох його граней під кутами α і β. Знайдіть довжини ребер паралелепіпеда.

389^0. Доведіть, що сума квадратів діагоналей будь-якого паралелепіпеда дорівнює сумі квадратів усіх його ребер.

390. Чи правильні означення: а) «Паралелепіпед називається прямокутним, якщо він має прямий тригранний кут»; б) «Паралелепіпед називається прямим, якщо він має тригранний кут з двома прямими плоскими кутами»?

391*. Чи можна перетнути прямокутний паралелепіпед площиною так, щоб у перерізі утворився прямокутний трикутник?

392. На ребрах AA_1 і CC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взято точки K і P такі, що $AK : KA_1 = 2 : 3$ і $CP = PC_1$. У якому відношенні площина D_1KP ділить ребро AB?



Мал. 128

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Нехай прямі AD і KD_1 перетинаються в точці E, DC і D_1P — у точці F, а AB і EF — у точці M (мал. 128). Пряма EF, а отже, і точка M належать площині D_1KP. При цьому $\triangle CPF = \triangle C_1PD_1$, $\triangle EAM \sim \triangle EDF$ і $\triangle EAK \sim \triangle EDD_1$. Тому якщо $AB = a$ і $AM = x$, то

$$CF = C_1D_1 = a, \quad DF = 2a,$$

$$\frac{AM}{DF} = \frac{EA}{ED} = \frac{AK}{DD_1} = \frac{2}{5}, \quad \frac{x}{2a} = \frac{2}{5}, \quad x = \frac{4}{5}a.$$

Отже, $MB = \frac{a}{5}$, $AM : MB = \frac{4}{5}a : \frac{a}{5} = 4$.

Відповідь. $AM : MB = 4 : 1$.

393. У якому відношенні площина D_1KP (див. задачу 392) ділить ребро BC?

394. Задача для кмітливих. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — правильна призма, в якої $AA_1 = 15$ см, $AB = BC = 5$ см. Знайдіть найкоротшу відстань між серединами ребер AB і C_1D_1 по поверхні призми.

● **395.** Практичне завдання. Зробіть модель похилого паралелепіпеда.

Самостійна робота 1

Варіант 1

1. Точка A двогранного кута віддалена від його ребра на 10 см, а від граней на 5 см і 5 см. Знайдіть міру двогранного кута.

2. Скільки вершин, граней і ребер має 12-кутна призма?

3. Кожне ребро правильної трикутної призми дорівнює a. Знайдіть площу її поверхні.

4. Знайдіть довжини ребер прямокутного паралелепіпеда, якщо площі його граней дорівнюють 6 см^2, 14 см^2 і 21 см^2.

Варіант 2

1. В одній грані двогранного кута 60° на відстані 9 см від його ребра дано точку A. Знайдіть відстань від точки A до другої грані.

2. Скільки вершин має призма, якщо число її ребер на 12 більше від числа граней?

3. Кожне ребро правильної шестикутної призми дорівнює a. Знайдіть площу поверхні призми.

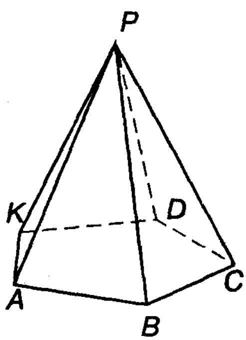
4. Ребра прямокутного паралелепіпеда пропорційні числам 1, 2 і 3. Знайдіть їх довжини, якщо площа його поверхні дорівнює 484 см^2.

§ 23 *Піраміди*

Розглянемо многогранник $PABCDK$ (мал. 129).

Означення. ***Пірамідою*** *називається многогранник, одна грань якого — довільний многокутник, а інші грані — трикутники, що мають спільну вершину.*

Ці трикутники зі спільною вершиною називають *бічними гранями*, їх спільну вершину — *вершиною піраміди*. Грань, яка не є бічною, — *основа піраміди*. Залежно від числа сторін основи розрізняють трикутні, чотирикутні, ..., n-кутні піраміди. Трикутну піраміду називають ще *тетраедром*.



Мал. 129

Кожне ребро піраміди, яке не є стороною основи, називають *бічним ребром*. Якщо піраміда опукла і $n > 3$, то площина, що проходить через бічне ребро і діагональ основи, ділить її на дві інші піраміди. Така площина називається *діагональною площиною*, а переріз піраміди цією площиною — *діагональним перерізом*. Кожний діагональний переріз піраміди — трикутник. Тетраедр діагональних перерізів не має.

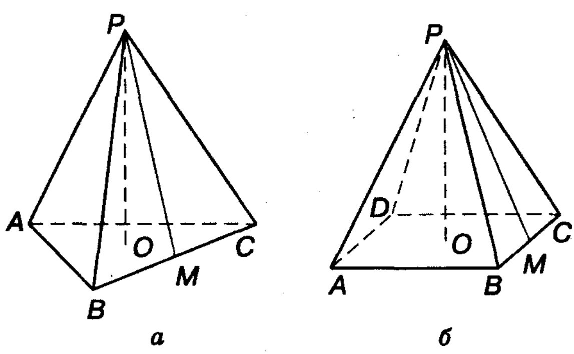
Висота піраміди — перпендикуляр, опущений з вершини піраміди на площину її основи або довжина цього перпендикуляра.

Піраміда називається *правильною*, якщо її основа — правильний многокутник, а його центр збігається з основою висоти піраміди. Усі бічні ребра правильної піраміди рівні, всі бічні грані — рівні рівнобедрені трикутники.

Висоту грані правильної піраміди, проведену з її вершини, називають *апофемою піраміди*.

Неправильна піраміда апофем не має. На малюнку 130 зображено правильні трикутну (див. мал. 130, *а*) і чотирикутну (див. мал. 130, *б*) піраміди. Відрізки PO — їх висоти, а PM — апофеми.

Бічна поверхня піраміди складається з усіх її бічних граней.



Мал. 130

ТЕОРЕМА 28. **Площа бічної поверхні правильної піраміди дорівнює добутку півпериметра її основи на апофему піраміди:**

$$S_б = \frac{1}{2}Pl.$$

ДОВЕДЕННЯ. Якщо сторона основи правильної піраміди a, а апофема l, то площа однієї її бічної грані дорівнює $\frac{1}{2}al$. Бічна поверхня піраміди складається з n таких граней. Тому якщо периметр основи піраміди дорівнює P, то

$$S_б = \frac{1}{2}aln = \frac{1}{2}Pl. \square$$

Площа поверхні піраміди дорівнює сумі площі її бічної поверхні і площі основи:

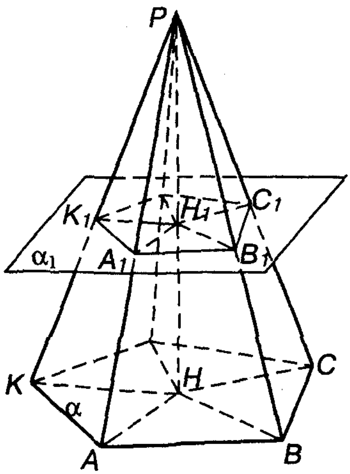
$$S = S_б + S_о.$$

ТЕОРЕМА 29. Переріз піраміди площиною, паралельною площині основи, є многокутник, подібний основі піраміди.

ДОВЕДЕННЯ*. Нехай $PABC...K$ — довільна піраміда, а площина α_1, паралельна площині α основи, перетинає піраміду по многокутнику $A_1B_1C_1...K_1$, а її висоту PH — у точці H_1 (мал. 131). Оскільки $\alpha_1 \parallel \alpha$, то $H_1A_1 \parallel HA$, $H_1B_1 \parallel HB$, $H_1C_1 \parallel HC$, ..., $H_1K_1 \parallel HK$.

Тому

$$\triangle PH_1A_1 \sim \triangle PHA,\ \triangle PH_1B_1 \sim \triangle PHB,\ ...,\ \triangle PH_1K_1 \sim \triangle PHK,$$



Мал. 131

$$\frac{PH_1}{PH} = \frac{H_1A_1}{HA} = \frac{H_1B_1}{HB} = \ldots = \frac{H_1K_1}{HK} = k.$$

Якщо $A_2B_2C_2...K_2$ — проекція многокутника $A_1B_1C_1...K_1$ на площину α, то ці многокутники рівні і

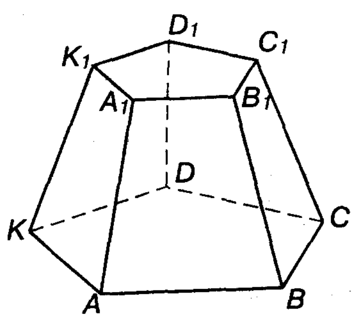
$$\frac{HA_2}{HA} = \frac{HB_2}{HB} = \frac{HC_2}{HC} = \ldots = \frac{HK_2}{HK} = k.$$

Отже, многокутники $A_2B_2C_2...K_2$ і $ABC...K$ гомотетичні відносно H, а перший з них дорівнює перерізу $A_1B_1C_1...K_1$. Тому цей переріз подібний основі $ABC...K$ даної піраміди. Коефіцієнт подібності k дорівнює відношенню відстаней площин перерізу і основи від вершини піраміди. □

Оскільки площі подібних многокутників відносяться, як квадрати їх відповідних лінійних елементів, то з теореми 29 випливає такий наслідок.

■ Наслідок. ***Площа основи піраміди і паралельного їй перерізу відносяться, як квадрати відстаней їх площин від вершини піраміди.***

Частина піраміди, що міститься між її основою і січною площиною, паралельною основі, називається *зрізаною пірамідою*. На малюнку 132 — зрізана п'ятикутна піраміда $ABCDKA_1B_1C_1D_1K_1$. Паралельні грані зрізаної піраміди називають її *основами*, всі інші — *бічними гранями*. *Висота зрізаної піраміди* — відстань між площинами її основ. Зрізану піраміду називають *правильною*, якщо вона є частиною правильної піраміди. Основи зрізаної піраміди — подібні многокутники, а бічні грані — трапеції.



Мал. 132

396^0. Скільки граней, вершин і ребер має n-кутна піраміда?

397^0. Бічне ребро правильної чотирикутної піраміди дорівнює b і нахилене до площини основи під кутом α. Знайдіть: 1) висоту піраміди; 2) діагональ основи; 3) сторону основи.

398^0. Апофема правильної трикутної піраміди дорівнює l і нахилена до площини основи під кутом α. Знайдіть: 1) висоту піраміди; 2) медіану основи; 3) сторону основи; 4) площу поверхні піраміди.

399. Відома піраміда Хеопса в Єгипті має форму правильної чотирикутної піраміди. Її висота 147 м, а площа основи 5,3 га. Знайдіть кут нахилу її бічного ребра до площини основи.

400. Площа діагонального перерізу правильної чотирикутної піраміди вдвічі менша за площу основи. Доведіть, що її протилежні бічні ребра перпендикулярні.

401^0. Основа піраміди — прямокутник із сторонами 12 см і 16 см. Кожне бічне ребро дорівнює 26 см. Знайдіть висоту піраміди.

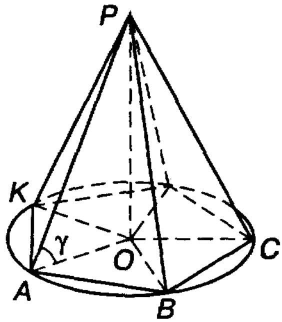
402^0. Знайдіть площу поверхні тетраедра, вершини якого — точки O (0; 0; 0), A (2; 0; 0), B (0; 2; 0) і C (0; 0; 2).

403. Основа піраміди — правильний трикутник; одна з бічних граней перпендикулярна до основи, а дві інші нахилені до неї під кутом 60°. Як нахилене до площини основи найбільше бічне ребро?

404. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди, основа якої — квадрат із стороною a, а висота проходить через одну з вершин основи і дорівнює h.

405. Основа піраміди — ромб, гострий кут якого 45°, а радіус вписаного кола 3 см. Висота піраміди проходить через центр цього кола і дорівнює 4 см. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.

406. Доведіть, що коли всі бічні ребра піраміди нахилені до площини основи під рівними кутами, то основа її висоти — центр кола, описаного навколо основи піраміди.



Мал. 133

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Якщо всі бічні ребра піраміди *PABC...K* нахилені до площини основи під кутом γ (мал. 133), то прямокутні трикутники *POA*, *POB*, ..., *POK* рівні (за катетом *PO* і протилежним кутом). Тоді рівні і відрізки *OA*, *OB*, ..., *OK*. Отже, всі вершини основи піраміди лежать на колі радіуса *OA* і з центром у точці *O*.

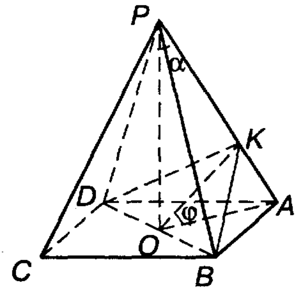
407. Доведіть, що коли всі двогранні кути при ребрах основи піраміди рівні, то основа її висоти — центр кола, вписаного в основу піраміди.

408. Сторона основи правильної шестикутної піраміди дорівнює a, а бічне ребро нахилене до площини основи під кутом α. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди. Обчисліть, якщо $a = 7$ см, $\alpha = 45^\circ$.

409. Через середини двох суміжних сторін основи правильної чотирикутної піраміди проведено площину, перпендикулярну до площини основи. Знайдіть площу перерізу, якщо сторона основи піраміди дорівнює a, а бічне ребро — b.

410. Висота правильної чотирикутної піраміди дорівнює h і утворює з бічним ребром кут α. Через діагональ основи піраміди проведено площину під кутом φ до основи. Знайдіть площу перерізу.

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Нехай *PABCD* — дана піраміда (мал. 134); $PO = h$ — її висота, $\angle OPA = \alpha$, $\angle KOA = \varphi$. Знайдемо площу трикутника *KBD*.



Мал. 134

Оскільки $BD \perp OA$ і $BD \perp OP$, то $BD \perp OK$. Тому шукана площа

$$S = \frac{1}{2}BD \cdot OK = OB \cdot OK.$$

З прямокутного $\triangle POA$ знаходимо: $OB = OA = h \operatorname{tg} \alpha$.

Довжину відрізка OK знайдемо за теоремою синусів з $\triangle POK$.

$$\angle POK = 90^\circ - \varphi,$$

$$\angle PKO = 180^\circ - (90^\circ - \varphi) - \alpha = 90^\circ + \varphi - \alpha.$$

Отже,

$$\frac{OK}{\sin \alpha} = \frac{h}{\sin (90^\circ + \varphi - \alpha)}, \quad OK = \frac{h \sin \alpha}{\cos (\varphi - \alpha)},$$

$$S = OB \cdot OK = h \operatorname{tg} \alpha \cdot \frac{h \sin \alpha}{\cos (\varphi - \alpha)} = \frac{h^2 \operatorname{tg} \alpha \sin \alpha}{\cos (\varphi - \alpha)}.$$

Відповідь. $\frac{h^2 \operatorname{tg} \alpha \sin \alpha}{\cos (\varphi - \alpha)}$, де α і φ — міри гострих кутів.

411. Через середину висоти піраміди паралельно основі проведено переріз. Знайдіть площу перерізу, якщо площа основи піраміди Q.

412. Площина, паралельна основі піраміди, ділить її висоту у відношенні 2 : 3 (від вершини до основи). Знайдіть площу перерізу, знаючи, що вона на 84 см^2 менша від площі основи піраміди.

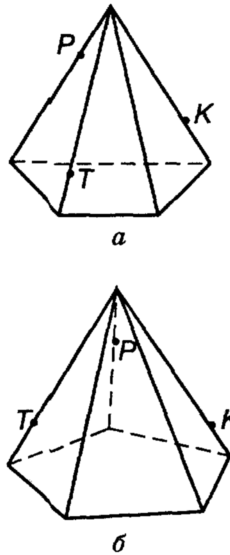
413. Знайдіть площі діагональних перерізів правильної шестикутної піраміди, якщо її висота і сторона основи дорівнюють по 6 дм.

414. Побудуйте перерізи пірамід площиною, що проходять через точки K, P і T (мал. 135).

415. Висота правильної чотирикутної зрізаної піраміди дорівнює 12 см. Сторони основ 20 см і 38 см. Знайдіть: 1) довжину її бічного ребра; 2) площу діагонального перерізу; 3) площу поверхні.

416. Доведіть, що площа бічної поверхні правильної зрізаної піраміди дорівнює добутку півсуми периметрів її основ на апофему, тобто на висоту бічної грані.

417. Основа піраміди — ромб зі стороною a і гострим кутом $60°$. Висота піраміди дорівнює h і проходить через вершину гострого кута основи. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.



Мал. 135

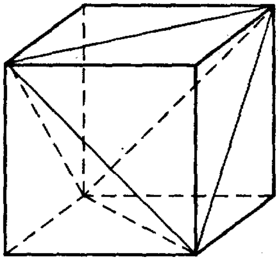
418*. Основа піраміди — прямокутний трикутник з катетами 12 см і 16 см. Кожний з двогранних кутів при ребрах основи дорівнює $60°$. Знайдіть висоту піраміди.

419*. $PABC$ — правильна піраміда, $AP = b$, $\angle APB = 90°$. Точка K ділить ребро BC у відношенні $1 : 2$. Знайдіть площу трикутника APK.

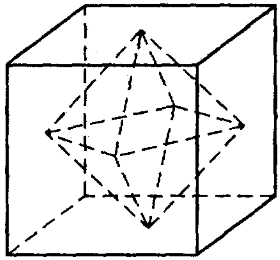
§ 24 *Правильні многогранники*

Означення. *Многогранник називається* ***правильним****, якщо всі його грані — рівні правильні многокутники, а всі вершини рівновіддалені від деякої точки. Цю точку називають* ***центром правильного многогранника****.*

Наприклад, куб — правильний многогранник, оскільки всі його грані — рівні квадрати, а всі вершини рівновіддалені від точки перетину діагоналей куба. Інша назва куба — *правильний гексаедр*.

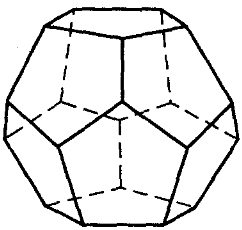


Мал. 136

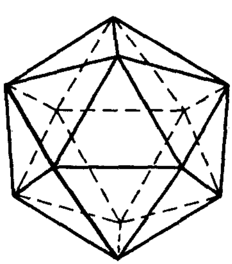


Мал. 137

Якщо сполучити відрізками кінці двох мимобіжних діагоналей протилежних граней куба, дістанемо каркас *правильного тетраедра* (мал. 136). Кожна його грань — рівносторонній трикутник, а кожна вершина однаково віддалена від центра куба. Сполучивши відрізками центри всіх суміжних граней куба (мал. 137), утворимо каркас *правильного октаедра*. Кожна його грань — рівносторонній трикутник, а кожна вершина однаково віддалена від центра даного куба.



а

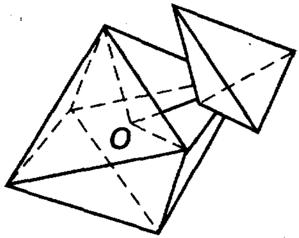


б

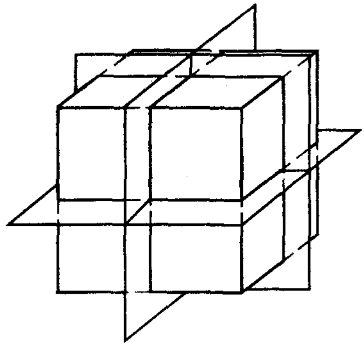
Мал. 138

Існує всього п'ять видів правильних многогранників. Крім трьох названих, ще *правильний додекаедр* (мал. 138, *а*) і *правильний ікосаедр* (мал. 138, *б*). Назви тетраедр, гексаедр, октаедр, додекаедр, ікосаедр у перекладі з грецької означають: чотиригранник, шестигранник, восьмигранник, дванадцятигранник і двадцятигранник.

Якщо центр O правильного n-гранника сполучити відрізками з усіма його вершинами, його можна розбити на n правильних пірамід, основами яких є грані даного многогранника, а спільною вершиною — точка O (мал. 139). Усі ці піраміди в кожному правильному многограннику рівні (їх можна сумістити



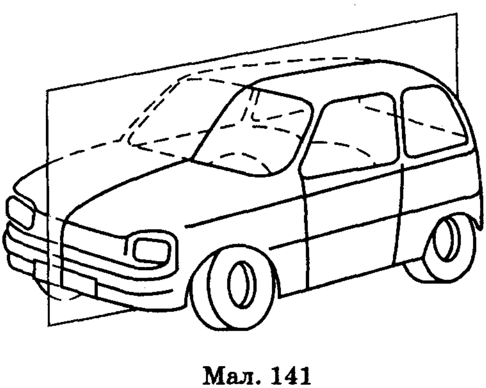
Мал. 139



Мал. 140

одна з одною, оскільки рівні їх основи і бічні ребра). Тому в кожному правильному многограннику кожна грань однаково віддалена від центра і всі двогранні кути рівні.

Центр O кожного правильного многогранника, крім тетраедра, є центром його симетрії. Кожний правильний многогранник має кілька площин симетрії. Наприклад, куб має 9 площин симетрії; з них 6 проходять через пари протилежних ребер, а 3 — через середини паралельних ребер (мал. 140). Нагадаємо, що фігура F називається симетричною відносно деякої площини, якщо відносно цієї площини кожна точка фігури F симетрична точці цієї ж фігури (мал. 141). Правильний тетраедр має 6 площин симетрії.



Мал. 141

Форму куба мають кристали кухонної солі, деякі алмази. Інші алмази кристалізуються у формі правильних октаедрів. Кристали піриту (залізного колчедану) мають форму правильного додекаедра. Властивості правильних (і похідних від них) многогранників використовують також архітектори і будівельники, які створюють просторові конструкції.

420^0. З яких двох чотирикутних пірамід можна скласти правильний октаедр? Як відносяться сторона основи і висота такої піраміди?

421^0. Чи є правильним многогранник, вершини якого — центри всіх граней: 1) куба; 2) правильного тетраедра; 3) правильного октаедра?

422^0. Чи є правильним многогранник, вершини якого — середини всіх ребер: 1) куба; 2) правильного тетраедра; 3) правильного октаедра?

423^0. Учень міркує: «Кожна призма — многогранник. Отже, кожна правильна призма — правильний многогранник». Чи це так?

424. Доведіть, що сума відстаней від довільної внутрішньої точки куба до всіх його граней стала для даного куба.

425. Скільки площин симетрії має правильний октаедр?

426. Чи може перерізом правильного октаедра бути дев'ятикутник?

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Октаедр має 8 граней. Якщо січна площина перетинає навіть усі його грані, то в перерізі — восьмикутник, а не дев'ятикутник.

Відповідь. Не може.

427. Намалюйте розгортку правильного октаедра з ребром 2 см.

428. Доведіть, що гранню правильного многогранника не може бути шестикутник. А n-кутник, якщо $n > 6$?

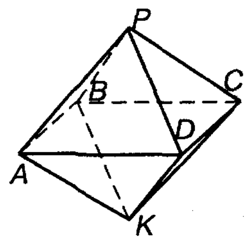
429^0. Ребро правильного октаедра дорівнює 4 см. Знайдіть площу його перерізу площиною симетрії.

430^0. Знайдіть площу поверхні правильного многогранника, якщо його ребро дорівнює a і цей многогранник: 1) тетраедр; 2) октаедр; 3) ікосаедр; 4) додекаедр.

431. Під яким кутом з центра куба видно його ребро? А з центра правильного октаедра?

432. *Доведіть, що протилежні грані правильного октаедра лежать у паралельних площинах.*

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Нехай $PABCDK$ — правильний октаедр (мал. 142). Усі його ребра рівні і всі діагоналі рівні, тому чотирикутники $PBKD$ і $PAKC$ — квадрати. $PD \parallel BK$ і $PC \parallel AK$. Отже, дві пересічні прямі площини PDC відповідно паралельні двом прямим площини ABK, тому грані PDC і ABK лежать у паралельних площинах.



Мал. 142

Так само можна довести, що $PAD \parallel KCB$, $PAB \parallel KCD$ і $PBC \parallel KDA$.

433. Ребро правильного октаедра дорівнює a. Знайдіть відстань між площинами його протилежних граней.

434. Чи можна перерізати правильний тетраедр площиною так, щоб у перерізі дістати квадрат?

435. Чи можна перерізати правильний октаедр площиною так, щоб у перерізі дістати правильний шестикутник?

● **436.** Практичне завдання. Виріжте з цупкого паперу розгортки правильних: октаедра, додекаедра, ікосаедра.

Самостійна робота 2

Варіант 1

1. Скільки ребер має піраміда, число граней якої 12?

2. Знайдіть площу поверхні правильної чотирикутної піраміди, якщо її бічне ребро дорівнює b, а плоский кут при вершині 45°.

3. Знайдіть площу поверхні правильної зрізаної трикутної піраміди, якщо її бічна грань — трапеція зі сторонами a, a, a і $2a$.

4. Ребро правильного октаедра 4 дм завдовжки. Знайдіть відстань від центра октаедра до ребра.

Варіант 2

1. Скільки граней має піраміда, число граней якої на 7 менше від числа ребер?

2. Знайдіть площу поверхні правильної трикутної піраміди, якщо її бічне ребро дорівнює b, а плоский кут при вершині 30°.

3. Знайдіть площу поверхні правильної зрізаної чотирикутної піраміди, якщо її бічна грань — трапеція зі сторонами c, c, c і $0,5c$.

4. Грань правильного октаедра має площу 10 см^2. Знайдіть відстань між найвіддаленішими точками октаедра.

? Запитання для самоперевірки

1. Що таке геометричне тіло? поверхня тіла?

2. Сформулюйте означення многогранника. Назвіть його елементи.

3. Які многогранники називають опуклими?

4. Дайте означення призми. Які бувають призми?

5. Доведіть теорему про площу бічної поверхні прямої призми.

6. Що таке паралелепіпед? Які бувають паралелепіпеди?

7. Доведіть теорему про перетин діагоналей паралелепіпеда.

8. Доведіть теорему про діагональ прямокутного паралелепіпеда.

9. Дайте означення піраміди. Назвіть елементи піраміди.

10. Які піраміди називають правильними?

11. Як знаходять площу поверхні правильної піраміди?

12. Сформулюйте теорему про переріз піраміди площиною, паралельною основі.

13. Що таке зрізана піраміда? Назвіть її елементи.

14. Сформулюйте означення правильного многогранника. Назвіть усі 5 видів правильних многогранників.

ІСТОРИЧНА ДОВІДКА

Майже всі відомості про многогранники, які є в цьому розділі, добре знали давньогрецькі геометри. Для прикладу наведемо кілька означень з «Основ» Евкліда: «Тілом називається те, що має довжину, ширину і глибину. Межі тіла є поверхні... Призма є тіло, обмежене площинами, з яких дві протилежні рівні, подібні і паралельні, решта ж є паралелограми... Куб є тіло, обмежене шістьма рівними квадратами...»

В «Основах» також доведено, що існує тільки 5 видів правильних многогранників, і показано, як можна побудувати кожний з них. Архімед відкрив існування 13 видів напівправильних многогранників, тобто таких, які обмежені правильними, але не однойменними многокутниками.

Оригінальне і досить цінне дослідження, пов'язане з многогранниками, проробив всесвітньо відомий український математик Георгій Феодосійович Вороний. У праці «Дослідження про примітивні паралелоедри» він показав, якими рівними опуклими многогранниками можна заповнити простір.

Вороний Георгій Феодосійович
(1868—1908)

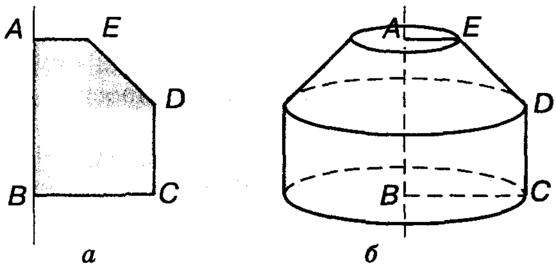
Український математик. Народився в с. Журавка Чернігівської області, досліджував проблеми геометричної теорії чисел, геометрії многогранників. Математики всього світу все частіше використовують поняття: алгоритм Вороного, клітини Вороного, метод Вороного, многокутники Вороного, діаграми Вороного, розбиття Вороного, мозаїка Вороного та ін.

РОЗДІЛ 6

ФІГУРИ ОБЕРТАННЯ

§ 25 *Тіла і поверхні обертання*

Уявіть, що плоский многокутник $ABCDE$ обертається навколо нерухомої прямої AB (мал. 143, *а*). При цьому кожна його точка, що не лежить на прямій AB, описує коло з центром на цій прямій, а весь многокутник $ABCDE$ описує деяке *тіло обертання* (мал. 143, *б*). Пряма AB — вісь цього тіла.

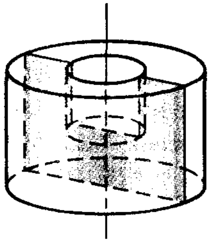


Мал. 143

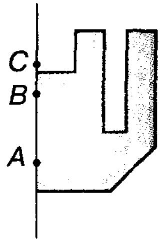
Площина, яка проходить через вісь тіла обертання, є його площиною симетрії. Вона перетинає дане тіло обертання. Утворений переріз називають *осьовим перерізом* (мал. 144).

Перерізом тіла обертання площиною, перпендикулярною до його осі, є круг, або плоске кільце, або кілька кілець і т. д.

Уявімо тіло, утворене обертанням навколо прямої AB фігури, зображеної на малюнку 145. Якщо це тіло перерізати перпендикулярними до AB площинами, які проходять через точки A, B, C, то в перерізах матимемо відповідно: круг, круг і кільце, два



Мал. 144



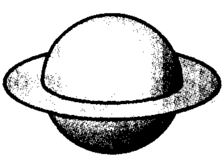
Мал. 145

кільця. Якщо ж тіло обертання опукле, то січна площина, перпендикулярна до осі обертання, перетинає його по кругу.

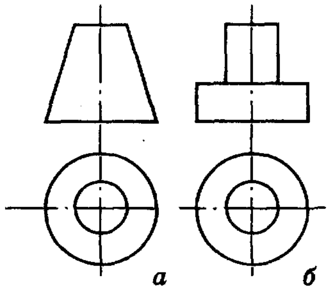
Щоб задати тіло обертання, досить вказати його вісь і фігуру, обертанням якої утворюється дане тіло. Описуючи таке тіло, замість осі часто вказують тільки відрізок, що лежить на цій осі. Наприклад, замість «тіло, утворене обертанням трикутника навколо осі, якій належить сторона цього трикутника», говорять і коротше: «тіло, утворене обертанням трикутника навколо його сторони».

Слід розрізняти поняття «тіло обертання» і «фігура обертання». Не кожна фігура обертання є тілом. Наприклад, коло, круг, сфера — фігури обертання, але не тіла. Співвідношення між різними видами фігур обертання можна зобразити такою схемою:

«Іншими» тут названо зокрема такі фігури обертання, як коло, кільце, об'єднання кулі і плоского кільця (мал. 146). Ця фігура — ні поверхня, ні тіло, оскільки, крім просторової області і її поверхні, містить ще й інші точки.



Мал. 146



Мал. 147

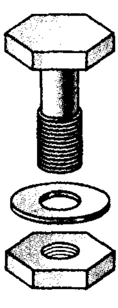
Приклади матеріальних моделей тіл обертання: хокейна шайба, лінза, котушка, звичайна пляшка, колба, пробірка, спортивний диск, обруч і т. п. Більшість деталей, зроблених на токарному верстаті, мають форму тіл обертання. Але, наприклад, свердло, деталь з різьбою — не тіла обертання.

437^0. Намалюйте тіло, утворене обертанням прямокутника навколо його сторони.

438^0. Намалюйте тіло, утворене обертанням прямокутного трикутника навколо його катета.

439^0. Намалюйте тіло, утворене обертанням рівностороннього трикутника навколо його сторони.

440. У площині прямокутника зовні нього і паралельно одній з його сторін проведено пряму. Намалюйте тіло, утворене обертанням цього прямокутника навколо даної прямої.



Мал. 148

441. Чи може бути неопуклим тіло, утворене обертанням навколо осі опуклої плоскої фігури?

442. Намалюйте тіла обертання, проекції яких на дві взаємно перпендикулярні площини зображено на малюнку 147.

443^0. Які з зображених на малюнку 148 деталей мають форму тіл обертання?

444⁰. Знайдіть площу осьового перерізу тіла, утвореного обертанням рівностороннього трикутника навколо його сторони, довжина якої 2 дм.

445. Тіло утворене обертанням прямокутного трикутника навколо меншого катета, який з гіпотенузою c утворює кут α. Знайдіть відношення площі круга, описаного більшим катетом, до площі осьового перерізу даного тіла.

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Нехай у трикутнику ABC $AC \perp BC$, $AB = c$ і $\angle CAB = \alpha$ (мал. 149). Осьовий переріз даного тіла — рівнобедрений $\triangle ABK$, у якого висота $AC = c \cos \alpha$, половина основи $CB = c \sin \alpha$. Площа осьового перерізу

$$S_{ABK} = CB \cdot AC = c \sin \alpha \cdot c \cos \alpha = c^2 \sin \alpha \cos \alpha.$$

Площа круга радіуса CB

$$S_{CB} = \pi CB^2 = \pi c^2 \sin^2 \alpha.$$

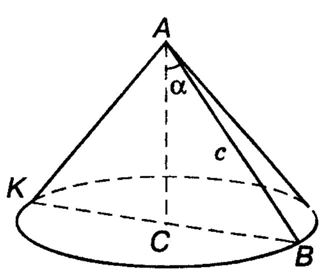
Отже,

$$S_{CB} : S_{ABK} = \pi c^2 \sin^2 \alpha : c^2 \sin \alpha \cos \alpha = \pi \operatorname{tg} \alpha.$$

Відповідь. $\pi \operatorname{tg} \alpha$.

446. Знайдіть площу осьового перерізу тіла, утвореного обертанням: 1) рівнобедреного трикутника з кутом 120° навколо бічної сторони b; 2) ромба з кутом α і стороною a навколо його сторони.

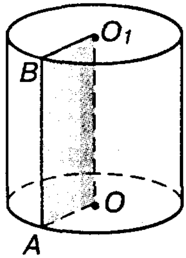
447. Чи є тілом обертання фігура, утворена обертанням кола навколо його дотичної?



Мал. 149

§ 26 Циліндри

Означення. ***Циліндром** називається тіло, утворене обертанням прямокутника навколо його сторони.*

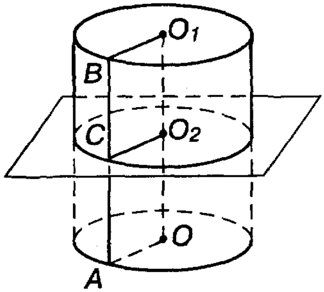


Мал. 150

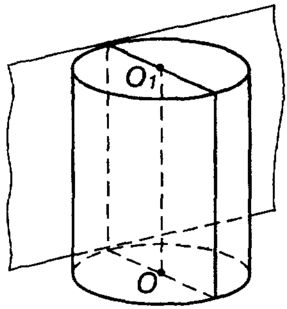
Якщо прямокутник $OABO_1$ обертається навколо осі OO_1 (мал. 150), то його сторони OA і O_1B описують рівні круги, які лежать у паралельних площинах. Ці круги називають *основами*, а їх радіус — *радіусом циліндра*. Сторона AB, паралельна осі циліндра, описує криву поверхню, яку називають *бічною поверхнею циліндра*. Кожний відрізок цієї поверхні, що дорівнює AB, — *твірна циліндра*. Усі твірні одного циліндра рівні і паралельні одна одній (чому?). Довжина твірної — *висота циліндра*; вона дорівнює відстані між площинами основ.

Усі осьові перерізи циліндра — рівні прямокутники. Кожна січна площина, перпендикулярна до осі циліндра, перетинає його по кругу, який дорівнює основі (мал. 151). Адже будь-яка точка C твірної AB віддалена від осі OO_1 на відстань CO_2, що дорівнює радіусу циліндра. Отже, площа кожного перерізу циліндра площиною, паралельною його основі, дорівнює площі основи.

Площина, яка проходить через твірну циліндра і не має з ним інших спільних точок, називається *дотичною площиною* до циліндра. Вона перпендикулярна до осьового перерізу циліндра, проведеного через ту саму твірну (мал. 152).

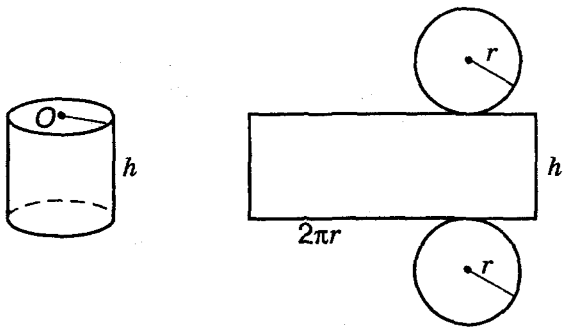


Мал. 151



Мал. 152

Якщо поверхню циліндра розрізати по колах основ і якій-небудь твірній, а потім розгорнути на площині, дістанемо *розгортку циліндра* (мал. 153).



Мал. 153

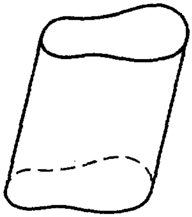
Вона складається з прямокутника — розгортки бічної поверхні циліндра — і двох рівних кругів. Якщо радіус циліндра дорівнює r, а висота h, то його бічна поверхня розгортається у прямокутник із сторонами $2\pi r$ і h. Площу цієї розгортки $2\pi rh$ приймають за *площу бічної поверхні циліндра.* Тому якщо r і h — радіус і висота циліндра, то площа його бічної поверхні

$$S_{б.ц} = 2\pi rh.$$

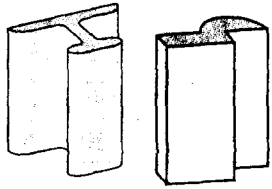
Щоб знайти *площу поверхні* циліндра $S_ц$, треба до площі його бічної поверхні додати площі двох основ: $S_ц = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r\,(r + h)$.

Отже,

$$S_ц = 2\pi r\,(r + h).$$



Мал. 154



Мал. 155

З а у в а ж е н н я. Тіло, утворене обертанням прямокутника навколо його сторони, часто називають прямим круговим циліндром. *Циліндр у широкому розумінні* — це тіло, яке складається з двох обмежених плоских областей, які можна сумістити паралельним перенесенням, і всіх відрізків, які сполучають їх відповідні точки (мал. 154). Під це означення підходить і кожна призма, і тіла, подібні зображеним на малюнку 155. Якщо твірні такого циліндра перпендикулярні до площини основи, його називають *прямим циліндром*. Якщо його основи — круги, його називають *круговим циліндром*. З усіх циліндрів у широкому розумінні тільки прямий круговий є тілом обертання. Далі ми розглядатимемо тільки прямі кругові циліндри, називаючи їх *циліндрами*.

448^0. Радіус циліндра r, а висота h. Знайдіть довжину діагоналі осьового перерізу циліндра.

449^0. Радіус циліндра r, а діагональ осьового перерізу d. Знайдіть: 1) висоту циліндра; 2) площу осьового перерізу; 3) площу бічної поверхні; 4) площу поверхні циліндра.

450^0. Діагональ осьового перерізу циліндра дорівнює d і нахилена до площини основи під кутом α. Знайдіть: 1) висоту циліндра; 2) радіус циліндра; 3) площу бічної поверхні циліндра.

451^0. Скільки існує площин, які ділять даний циліндр: 1) на два рівних циліндри; 2) на дві рівні фігури?

452. Площа осьового перерізу циліндра S. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра.

453. Осьові перерізи двох різних циліндрів — рівні прямокутники із сторонами 4 м і 6 м. Знайдіть площу поверхні того циліндра, у якого вона більша.

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Знайдемо за формулою $S_ц = 2\pi r(r + h)$ площі поверхонь обох циліндрів.

1) Якщо $r = 2$ і $h = 6$, то $S = 2\pi \cdot 2 \cdot 8 = 32\pi$;

2) якщо $r = 3$ і $h = 4$, то $S = 2\pi \cdot 3 \cdot 7 = 42\pi$.

Відповідь. 42π м^2.

454. Доведіть, що площина, яка проходить через твірну циліндра, але не дотикається до нього, перетинає циліндр по прямокутнику.

455. Площа поверхні і площа бічної поверхні циліндра дорівнюють 50 см^2 і 30 см^2. Знайдіть радіус і висоту циліндра.

456. З квадрата, площа якого Q, згорнули бічну поверхню циліндра. Знайдіть площу основи цього циліндра.

457. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра, якщо його радіус r, а твірну з центра основи видно під кутом α.

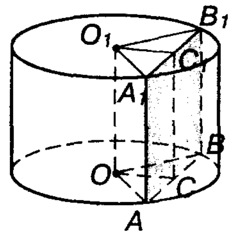
458. Знайдіть площу поверхні циліндра, якщо діаметр його основи d з центра другої основи видно під кутом α.

459. Дано прямокутник з *нерівними сторонами*. Доведіть, що площі бічних поверхонь циліндрів, утворених обертанням цього прямокутника навколо нерівних сторін, рівні.

460. Висота циліндра дорівнює 16 см, радіус 10 см. Знайдіть площу його перерізу площиною, паралельною осі циліндра і віддаленою від осі на 60 мм.

461. Як відносяться площі перерізів циліндра площинами, які проходять через твірну, якщо кут між цими площинами $30°$, а одна з них проходить через вісь циліндра?

462. Радіус циліндра r, а висота h. Знайдіть площу перерізу циліндра площиною, яка перпендикулярна до основи і відтинає від кола основи дугу $60°$.



Мал. 156

463. Циліндр з радіусом 1 і висотою 0,5 перетинається площиною, паралельною осі циліндра і віддаленою від неї на x. Як залежить площа і периметр перерізу від x?

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Нехай переріз ABB_1A_1 циліндра віддалений від осі OO_1 на $OC = x$ (мал. 156). Тоді

$$AC = \sqrt{OA^2 - OC^2} = \sqrt{1 - x^2}.$$

Шукана площа перерізу

$$S = AA_1 \cdot AC \cdot 2 = \sqrt{1 - x^2},$$

а периметр перерізу

$$P = 2\,(AA_1 + AB) = 1 + 4\sqrt{1 - x^2}.$$

464. Скільки квадратних метрів жерсті піде на виготовлення ринви довжиною 5 м і діаметром 20 см, якщо на шви додають 3 % її площі?

465. Чи вистачить 8500 м^2 ізоляційної стрічки для двократного покриття нею кілометра газопроводу діаметром 1420 мм?

466. Усі вершини квадрата, сторона якого дорівнює a, лежать на бічній поверхні циліндра, вісь якого перпендикулярна до сторони квадрата і утворює з його площиною кут $\alpha \neq 0$. Знайдіть радіус циліндра.

467*. Дві вершини куба з ребром a лежать у центрах основ циліндра, всі інші — на його бічній поверхні. Знайдіть радіус циліндра.

● **468.** Практичне завдання. Зробіть з цупкого паперу розгортку циліндра, осьовий переріз якого — квадрат із стороною 16 см.

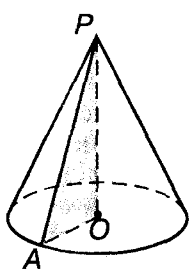
§ 27 *Конуси*

Означення. ***Конусом** називається тіло, утворене обертанням прямокутного трикутника навколо його катета.*

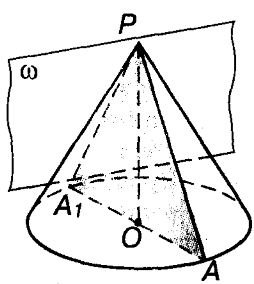
Якщо прямокутний трикутник OPA обертати навколо катета PO, його гіпотенуза PA опише *бічну поверхню*, а катет OA — круг — *основу конуса* (мал. 157). Радіус цього круга називають *радіусом конуса*, точку P, відрізок PO, пряму PO — відповідно *вершиною, висотою* і *віссю конуса*. Всі осьові перерізи конуса — рівні рівнобедрені трикутники. Кожна площина, яка проходить через вісь конуса, є площиною його симетрії. Центра симетрії конус не має.

Відрізок, який сполучає вершину конуса з будь-якою точкою кола його основи — *твірна конуса*. Усі твірні конуса рівні, бо кожна з них дорівнює гіпотенузі трикутника, обертанням якого утворено даний конус. Площина, яка проходить через твірну конуса і не має з ним інших спільних точок, називається *дотичною площиною до конуса*. Вона перпендикулярна до осьового перерізу, проведеного через ту саму твірну (мал. 158).

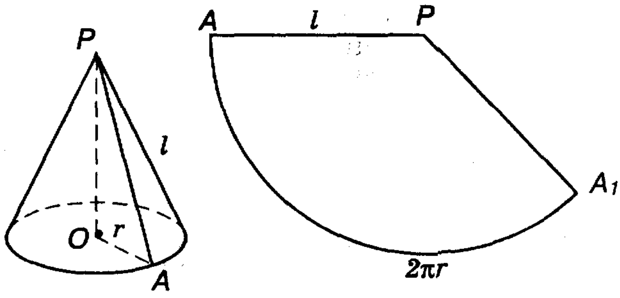
Якщо бічну поверхню конуса розрізати по будь-якій твірній і розгорнути на площині, дістанемо її *розгортку*. Розгортка бічної поверхні конуса радіуса r



Мал. 157



Мал. 158



Мал. 159

з твірною l є сектором круга радіуса l, довжина дуги якого $2\pi r$ (мал. 159). Площу такої розгортки приймають за площу бічної поверхні конуса. Вона у стільки разів менша за площу круга радіуса l, у скільки разів $2\pi r$ менше, ніж $2\pi l$. Тому

$$S_{б.к} : \pi l^2 = 2\pi r : 2\pi l,$$

звідки

$$S_{б.к} = \pi r l.$$

Щоб знайти площу поверхні конуса, треба до площі його бічної поверхні додати площу основи:

$$S_к = \pi r l + \pi r^2 = \pi r (r + l).$$

Отже,

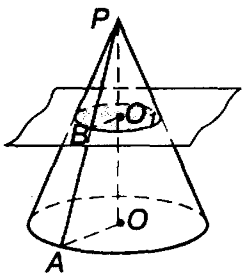
$$S_к = \pi r (r + l).$$

Січна площина, паралельна основі конуса, перетинає його по кругу (мал. 160). Оскільки $\triangle POA \sim \triangle PO_1B$, то $OA : O_1B = PO : PO_1$ звідки

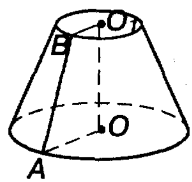
$$\pi OA^2 : \pi O_1B^2 = PO^2 : PO_1^2,$$

тобто **площі основи конуса і паралельного їй перерізу відносяться, як квадрати їх відстаней від вершини конуса.**

Січна площина, паралельна основі конуса, ділить його на два тіла обертання: менший конус і *зрізаний конус*. Зрізаний конус обмежений двома кругами — його *основами*, і *бічною поверхнею* (мал. 161). Відстань між основами — *висота* зрізаного конуса. Відрізок, який сполучає найближчі точки кіл основ зрізаного конуса — його *твірна*. Зрізаний конус



Мал. 160



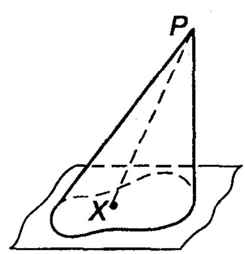
Мал. 161

можна розглядати і як тіло, утворене обертанням прямокутної трапеції навколо меншої її бічної сторони.

Примітка. Зрізаний конус — не конус, як і зрізана піраміда — не піраміда. Жоден зрізаний конус не відповідає означенню конуса. Тому неправильно говорити, що конуси бувають повні і зрізані.

Форму конусів мають насипані на горизонтальній поверхні купи піску, зерна, вугілля, щебеню тощо. Кожному такому матеріалу відповідає певний *кут природного укосу* — кут нахилу твірної до площини основи конуса. Для піску він дорівнює приблизно 30°, для вугілля — 42°.

Зауваження. У курсах вищої геометрії *конусом* (у широкому розумінні) називають тіло, утворене всіма відрізками, які сполучають дану точку — вершину конуса — з точками деякої обмеженої плоскої області — основи конуса (мал. 162). При цьому конус, в основі якого круг, називають *круговим*. Якщо пряма, яка проходить через вершину такого конуса і центр основи, перпендикулярна до основи, його називають *прямим круговим конусом*. З усіх конусів у широкому розумінні тільки прямі кругові є тілами обертання. Вище йшлося про такі конуси. І далі розглядатимемо тільки прямі кругові конуси, називаючи їх *конусами*.



Мал. 162

469⁰. Висота конуса 8 м, радіус 6 м. Знайдіть твірну.

470⁰. Осьовий переріз конуса — правильний трикутник* із стороною 10 см. Знайдіть радіус і висоту конуса.

471⁰. Висота конуса дорівнює радіусу основи. Знайдіть кут при вершині його осьового перерізу.

472⁰. Доведіть, що з усіх перерізів конуса площинами, які проходять через вершину, найбільший периметр має осьовий переріз.

473. Чи правильно, що з усіх перерізів конуса площинами, які проходять через вершину, найбільшу площу має осьовий переріз?

474⁰. Твірна конуса 5 см, висота 4 см. Знайдіть площу його поверхні.

475⁰. Скільки квадратних метрів тканини потрібно, щоб пошити конусоподібну палатку висотою 3 м і діаметром 4 м?

476⁰. Твірна конуса дорівнює l і нахилена до площини основи під кутом α. Знайдіть: 1) висоту конуса; 2) радіус основи; 3) площу осьового перерізу; 4) площу поверхні конуса.

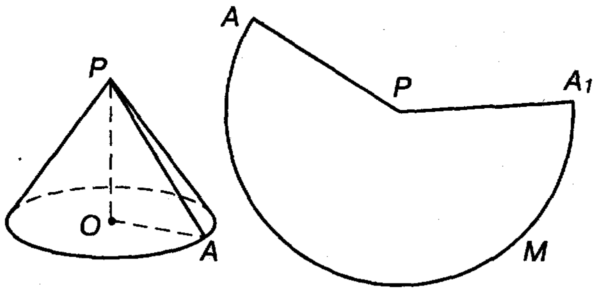
477. Площа основи конуса Q, а площа його поверхні $3Q$. Під яким кутом його твірна нахилена до площини основи?

478. Висота конуса h, радіус r. Знайдіть площу перерізу, який проходить через вершину конуса і хорду основи, що стягує дугу $60°$.

479. Висота конуса 4, твірна 5. Знайдіть кут сектора, який є розгорткою бічної поверхні цього конуса.

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Радіус основи конуса $OA = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$ (мал. 163). Тому довжина кола його основи $C = 2\pi \cdot 3 = 6\pi$. Така сама довжина дуги сектора AMA_1. Ця довжина у стільки разів менша за

*Такий конус іноді називають рівностороннім.



Мал. 163

довжину кола радіуса $PA = 5$, у скільки разів шуканий кут φ сектора менший від 360°. Отже, $\varphi : 360^\circ = 6\pi : 10\pi$, звідки $\varphi = 216^\circ$.

Відповідь. 216°.

480. Знайдіть кут при вершині осьового перерізу конуса, якщо розгорткою його бічної поверхні є: 1) півкруг; 2) чверть круга.

481. Твірні двох конусів нахилені до площин їх основ під рівними кутами. Як відносяться площі їх поверхонь?

482. Висота конуса дорівнює h. На якій відстані від вершини треба провести площину паралельно основі, щоб площа перерізу була вдвічі менша від площі основи?

483. Радіуси основ зрізаного конуса дорівнюють 3 дм і 6 дм, а твірна 5 дм. Знайдіть: 1) висоту зрізаного конуса; 2) площу його осьового перерізу; 3) кут нахилу його твірної до площини основи.

484. Доведіть, що площа бічної поверхні зрізаного конуса

$$S = \pi l\,(r + r_1),$$

де l — його твірна, а r і r_1 — радіуси основ.

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Нехай дано зрізаний конус, зображений на малюнках 160, 161. $OA = r$, $O_1B = r_1$, $AB = l$. Площа його бічної поверхні дорівнює різниці площ бічних поверхонь конусів з твірними PA і PB (див. мал. 160). Якщо $PB = x$, то $PA = x + l$. З подібності трикутників PBO_1 і PAO маємо:

$$\frac{x}{r_1} = \frac{x + l}{r}, \quad x = \frac{r_1 l}{r - r_1}.$$

Отже,

$$S = \pi r\,(x + l) - \pi r_1 x = \pi l\,(r + r_1).$$

485. Знайдіть площу бічної поверхні зрізаного конуса, якщо площі його основ відносяться, як 1 : 4, а твірна дорівнює l і нахилена до площини основи під кутом α.

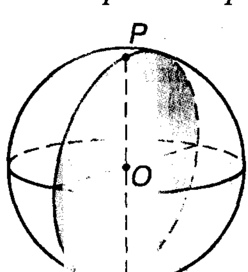
486. Через вершину конуса проведено площину, яка відтинає від кола основи дугу 90° і нахилена до площини основи конуса під кутом 60°. Знайдіть кут при вершині перерізу.

● **487.** Практичне завдання. Зробіть з цупкого паперу розгортки конуса і зрізаного конуса.

§ 28 *Куля і сфера*

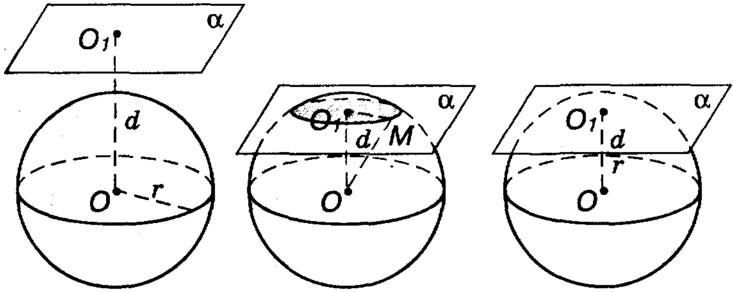
Означення. *Кулею називається тіло, утворене обертанням круга навколо його діаметра* (мал. 164). *Центр круга, обертанням якого утворено кулю,— **центр** цієї кулі.*

Відрізок, що сполучає центр кулі з будь-якою точкою її поверхні, називають *радіусом кулі*. Відрізок, який сполучає дві точки поверхні кулі і проходить через центр, — *діаметр кулі*, його кінці — *діаметрально протилежні точки кулі*.



Мал. 164

Площина, яка проходить через діаметр кулі, — *діаметральна площина*. Вона є площиною симетрії кулі і розбиває її на дві рівні *півкулі*. Переріз кулі її діаметральною площиною називають *великим кругом*. Коло одного з великих кругів називають *екватором кулі;* кінці P і P_1 діаметра, перпендикулярного до площини екватора, — *полюсами*.



Мал. 165

Як можуть розміщуватись у просторі куля і площина? Нехай відстань від центра кулі до площини дорівнює d, а радіус кулі r. Можливі три випадки (мал. 165).

1. Якщо $d > r$ (мал. 165, *а*), площина і куля не мають спільних точок.

2. Якщо $d < r$ (мал. 165, *б*), то площина перетинає кулю по кругу радіуса

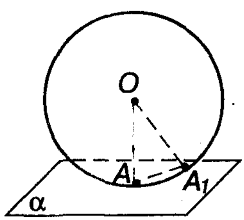
$$O_1M = \sqrt{r^2 - d^2}.$$

З цієї формули випливає, що переріз кулі тим більший, чим менше d, і що рівновіддалені від центра площини перетинають кулю по рівних кругах.

3. Якщо $d = r$ (мал. 165, *в*), то площина і куля мають тільки одну спільну точку. У цьому випадку говорять, що площина *дотикається* до кулі, а їх спільну точку називають *точкою дотику*.

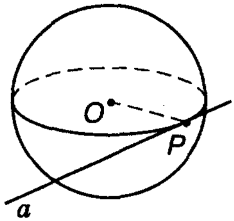
ТЕОРЕМА 30. **Дотична до кулі площина перпендикулярна до радіуса, проведеного в точку дотику.**

ДОВЕДЕННЯ. Нехай дано кулю з центром у точці O і площину α, яка дотикається до цієї кулі у точці A (мал. 166). Доведемо, що $OA \perp \alpha$.



Мал. 166

Припустимо, що OA — похила до площини α. Тоді повинен існувати і перпендикуляр OA_1 до



Мал. 167

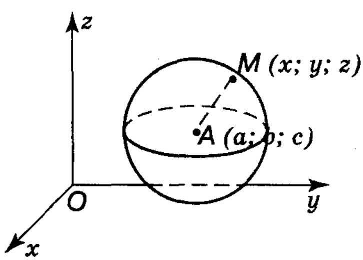
цієї площини. Оскільки за припущенням $A_1 \in \alpha$ і $OA > OA_1$, то точка A_1 спільна для площини і кулі. Отже, A не єдина їх спільна точка. У такому випадку площина α не дотична до кулі, що суперечить умові теореми. Тому радіус OA кулі не може бути похилою до площини α, тобто $OA \perp \alpha$. ☐

Пряма, яка має з кулею тільки одну спільну точку, називається *дотичною до кулі*. Вона перпендикулярна до радіуса, проведеного в точку дотику. Доведіть це за малюнком 167.

Поверхню кулі називають *сферою*. Січна площина перетинає сферу по колу. Центр, радіус, діаметр, діаметральна площина, екватор і полюс кулі є також *центром, радіусом, діаметром, діаметральною площиною, екватором* і *полюсом* відповідної *сфери*.

Сфера радіуса r з центром у точці $A(a; b; c)$ — це множина точок простору, віддалених від A на відстань r (мал. 168). Тому координати кожної точки $M(x; y; z)$ даної сфери задовольняють рівняння

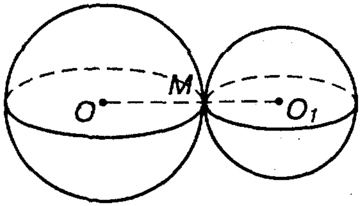
$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2.$$



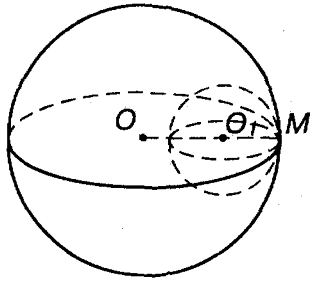
Мал. 168

Це — рівняння сфери радіуса r з центром у точці $A(a; b; c)$. Якщо $a = b = c = 0$, то маємо рівняння сфери радіуса r з центром у початку координат:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$



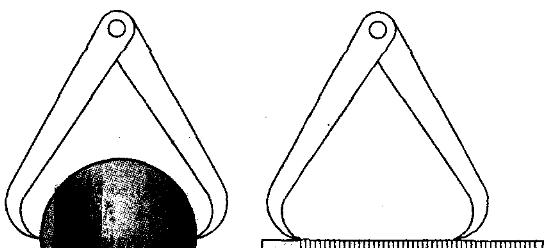
Мал. 169



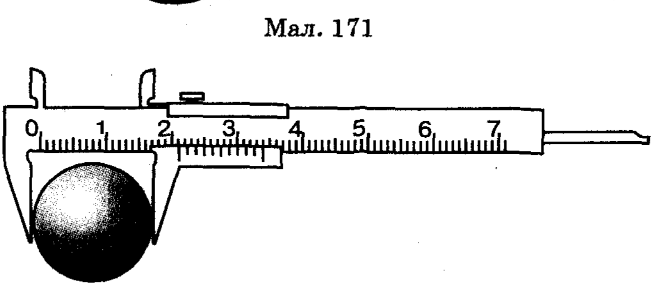
Мал. 170

Якщо дві сфери мають тільки одну спільну точку, то говорять, що вони *дотикаються* в цій точці. Дотик сфер може бути зовнішнім (мал. 169) і внутрішнім (мал. 170).

Приклади матеріальних куль: кульки підшипника, спортивні ядра, дробини, цукерки-драже тощо. Діаметри таких куль вимірюють кронциркулем (мал. 171) або штангенциркулем (мал. 172). З деяким наближенням форму кулі мають Земля, Місяць, Сонце, інші планети сонячної системи, зірки.



Мал. 171



Мал. 172

488^0. Знайдіть площу великого круга кулі і довжину її екватора, якщо радіус кулі дорівнює 2 м.

489^0. Діаметр кулі 38 дм, а площина віддалена від її центра на 20 дм. Чи має ця площина з кулею спільні точки?

490^0. Точки A і B лежать на поверхні кулі радіуса 50 см. Знайдіть відстань від центра кулі до відрізка AB, якщо $AB = 80$ см.

491^0. Кулю радіуса 10 см перетинає площина, віддалена від її центра на 6 см. Знайдіть площу перерізу.

492^0. Через середину радіуса кулі проведено перпендикулярну до нього площину. Знайдіть площу перерізу, якщо радіус кулі r.

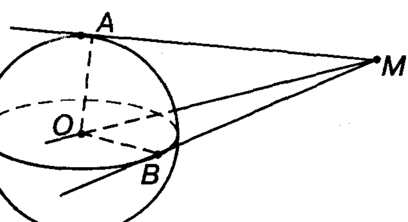
493. На поверхні кулі радіуса r дано дві точки, відстань між якими дорівнює r. Знайдіть найкоротшу відстань між цими точками по поверхні кулі.

494. Радіус кулі дорівнює 2. Січна площина віддалена від її центра на x. Як залежить площа перерізу S від x?

495. Знайдіть геометричне місце центрів сфер радіуса r, які: 1) дотикаються до даної площини; 2) проходять через дану точку.

496. З однієї точки до кулі проведено дві дотичні прямі. Доведіть, що відстані від даної точки до точок дотику рівні.

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Нехай MA і MB — відрізки дотичних, проведених до кулі з точки M, а O — центр даної кулі (мал. 173). Трикутники AMO і BMO рівні за спільною гіпотенузою OM і катетами OA і OB. Тому $MA = MB$.



Мал. 173

497^0. Сфери радіусів r і r_1 дотикаються. Знайдіть відстань між їх центрами.

498^0. Складіть рівняння сфери радіуса $r = 5$ з центром у точці A (1; 2; 3).

499. Скільки існує сфер радіуса $r = 2$, які дотикаються до трьох координатних площин? Напишіть рівняння однієї з них.

500. Радіус Землі 6,4 тис. км. Який шлях проходять за добу внаслідок обертання Землі міста Одеса і Київ, широти яких $46°29'$ і $50°27'$?

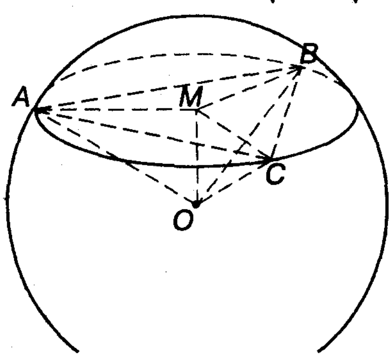
501. Задача з несподіваною відповіддю. Уявіть, що дві кулі — одна велика, як Земля, а друга, як м'яч, по екваторах обтягнуті обручами. Якщо кожний обруч продовжити на 1 м, вони відійдуть від поверхонь куль на деякі відстані. Де ця відстань буде більшою: у більшої чи меншої кулі?

502. Радіус кулі r. Через кінець радіуса проведено площину під кутом α до нього. Знайдіть площу перерізу.

503. Вершини рівностороннього трикутника із стороною 10 см лежать на сфері радіуса 10 см. Знайдіть відстань від центра сфери до площини трикутника.

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Нехай точки A, B, C лежать на сфері з центром O, $AB = BC = CA = OA = OB = OC$ і OM — шукана відстань (мал. 174). Тоді трикутники OMA, OMB і OMC рівні за спільним катетом OM і гіпотенузами. Отже,

$$MA = MB = MC = \frac{AB}{\sqrt{3}} = \frac{10}{\sqrt{3}}.$$



Мал. 174

За теоремою Піфагора

$$OM^2 = OA^2 - AM^2 = 100 - \frac{100}{3} = \frac{200}{3}.$$

Відповідь. $OM = \frac{10}{3}\sqrt{6}$ см.

504. На сфері радіуса 26 см дано три точки. Прямолінійні відстані між ними 12 см, 16 см і 20 см. Знайдіть відстань від центра сфери до площини, яка проходить через ці точки.

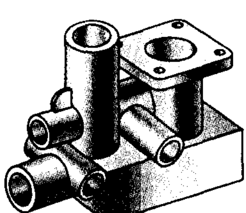
505. Сфера проходить через точки $A\,(2;\,0;\,1)$, $B\,(2;\,0;\,3)$, $C\,(1;\,4;\,0)$, $D\,(1;\,2;\,2)$. Знайдіть радіус сфери і координати її центра.

506. Два кола радіусів 30 см і 40 см лежать у паралельних площинах і на поверхні кулі радіуса 50 см. Знайдіть відстань між площинами.

507. Радіус Землі 6400 км. На яку висоту над Землею слід піднятися, щоб лінія горизонту проходила на відстані 100 км від спостерігача?

§ 29 *Комбінації тіл*

Досі ми розглядали властивості таких геометричних тіл, як призма, піраміда, циліндр, конус, куля. Але багатьом спеціалістам часто доводиться мати справу з тілами, які є різними *комбінаціями* (об'єднаннями) названих тіл. Наприклад, на малюнку 143 зображено тіло, яке складається із зрізаного конуса і циліндра, на малюнку 144 — циліндр, з якого вирізано менший циліндр. А ливарникам, токарям, слюсарям, фрезерувальникам, столярам, будівельникам, архітекторам та іншим спеціалістам часто доводиться мати справу з деталями і виробами й складніших конфігурацій (мал. 175).



Мал. 175

З різноманітних комбінацій геометричних фігур особливої уваги заслуговують вписані й описані тіла. З'ясуємо деякі з цих понять.

Означення. ***Куля*** *називається* ***вписаною в многогранник****, якщо вона дотикається до кожної грані многогранника.*

Означення. ***Многогранник*** *називається* ***вписаним у сферу****, якщо всі його вершини лежать на сфері.*

Означення. ***Призма*** *називається* ***вписаною в циліндр****, якщо основи призми вписано в основи циліндра.*

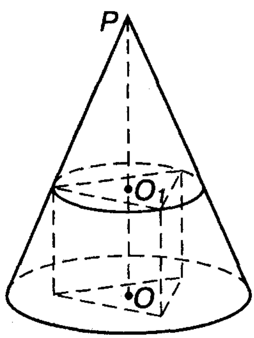
Означення. ***Циліндр*** *називається* ***вписаним у призму****, якщо кола його основ вписані в основи призми.*

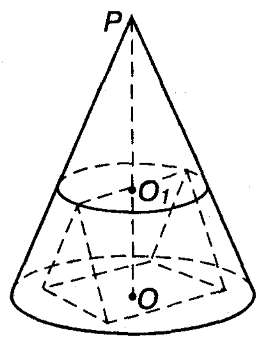
Означення. ***Піраміда*** *називається* ***вписаною в конус****, якщо їх вершини збігаються, а основа піраміди вписана в коло основи конуса.*

Означення. ***Конус*** *називається* ***вписаним у піраміду****, якщо їх вершини збігаються, а коло основи конуса дотикається всіх сторін основи піраміди.*

Якщо одне тіло вписане в інше, друге тіло називають описаним навколо першого.

Аналогічні означення можна сформулювати і для інших фігур, вписаних або описаних. Але слід мати на увазі, що подібних означень треба було б формулювати досить багато, до того ж не всі вони гарантували б однозначність розміщення розглядуваних фігур. Наприклад, правильну трикутну призму в конус можна вписати кількома різними способами (мал. 176). Тому для однозначного задання таких комбінацій фігур слід кожного разу уточнювати, як саме вони розміщені.

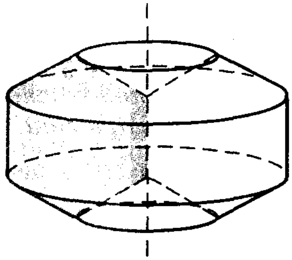




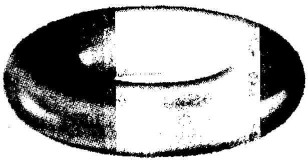
Мал. 176

Як комбінації циліндрів, конусів і зрізаних конусів можна розглядати тіла, утворені обертанням многокутників. Наприклад, тіло, утворене обертанням правильного шестикутника навколо його сторони, є об'єднанням циліндра і двох зрізаних конусів, з якого вилучено два конуси (мал. 177).

Тіло, утворене обертанням круга навколо осі, яка лежить у його площині, але не перетинає круг, називається *тором* (мал. 178). Форму тора мають бублик, спортивний обруч, надута камера автомобільної шини і т. ін.



Мал. 177



Мал. 178

508^0. Знайдіть діагональ куба, вписаного в сферу радіуса 8 см.

509. Намалюйте описану навколо кулі правильну призму: 1) чотирикутну; 2) трикутну; 3) шестикутну.

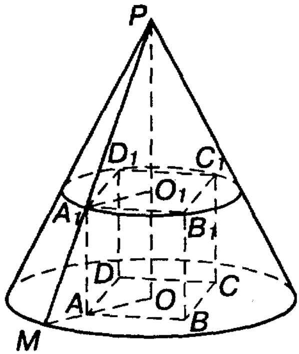
510. Намалюйте описану навколо кулі правильну піраміду: 1) чотирикутну; 2) трикутну; 3) шестикутну.

511. Намалюйте вписану в конус правильну піраміду: 1) трикутну; 2) чотирикутну; 3) шестикутну.

512. Впишіть у правильну чотирикутну піраміду куб так, щоб одна його грань лежала на основі піраміди, а вершини протилежної грані: 1) на бічних ребрах піраміди; 2) на апофемах піраміди.

513. В основі прямої призми — прямокутний трикутник. Опишіть навколо неї: 1) циліндр; 2) сферу.

514. Площа бічної поверхні правильної трикутної призми 27 см^2. Знайдіть площу бічної поверхні вписаного в неї циліндра.



Мал. 179

515. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дорівнює a; точка A_1 — середина відрізка AP. Знайдіть площу поверхні тіла, яке є спільною частиною даного куба і піраміди $PABCD$.

516. Знайдіть діаметр сфери: 1) описаної навколо прямокутного паралелепіпеда з вимірами a, b, c; 2) описаної навколо прямої призми, якщо висота призми дорівнює c, а в її основі лежить прямокутний трикутник з катетами a і b; 3) описаної навколо трикутної піраміди, бічні ребра якої попарно перпендикулярні, а їх довжини a, b, c.

517. Твірна конуса дорівнює l і нахилена до площини основи під кутом α. Знайдіть довжину ребра куба, вписаного в конус так, що чотири його вершини лежать на основі конуса, а чотири інші — на його бічній поверхні.

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Нехай PM — твірна конуса, яка проходить через вершину A_1 вписаного куба (мал. 179). Вершина A куба лежить на радіусі OM. За умовою задачі $PM = l$, $\angle PMO = \alpha$. Якщо ребро куба дорівнює x, то $OA = \frac{x}{\sqrt{2}}$. З прямокутного $\triangle POM$ маємо:

$$OM = PM \cdot \cos\alpha = l\cos\alpha,$$

$$MA = MO - OA = l\cos\alpha - \frac{x}{\sqrt{2}}.$$

Оскільки $\frac{A_1A}{MA} = \operatorname{tg}\alpha$, то $\frac{x}{l\cos\alpha - \frac{x}{\sqrt{2}}} = \operatorname{tg}\alpha$,

звідки $x = \frac{\sqrt{2}\, l \sin\alpha}{\sqrt{2} + \operatorname{tg}\alpha}$.

Відповідь. $x = \frac{\sqrt{2}\, l \sin\alpha}{\sqrt{2} + \operatorname{tg}\alpha}$.

518. Площа бічної поверхні конуса Q, а його радіус r. Знайдіть довжину бічного ребра вписаної у цей конус правильної піраміди: 1) трикутної; 2) чотирикутної; 3) шестикутної.

519. Навколо кулі радіуса r описано конус, твірна якого нахилена до площини основи під кутом α. Знайдіть площу осьового перерізу конуса. Обчисліть, якщо $r = 2$ м, $\alpha = 50°$.

520. Ребро правильного октаедра дорівнює a. Знайдіть радіус кулі: 1) вписаної в цей октаедр; 2) описаної навколо нього.

521. Знайдіть радіус кулі, вписаної у правильну n-кутну піраміду, сторона основи якої дорівнює a, а двогранний кут при ребрі основи α.

522. У сферу радіуса r вписано правильну чотирикутну піраміду, бічне ребро якої нахилене до площини основи під кутом α. Знайдіть висоту піраміди.

523. Ребро правильного тетраедра дорівнює a. Знайдіть радіус кулі, яка дотикається до всіх ребер тетраедра.

524. Знайдіть площу поверхні тіла, утвореного обертанням квадрата із стороною a навколо прямої, яка проходить через вершину квадрата і паралельна його діагоналі.

Самостійна робота 3

Варіант 1

1. Знайдіть площу поверхні і площу осьового перерізу циліндра, радіус якого 5 дм, а висота 6 дм.

2. Знайдіть площу поверхні тіла, утвореного обертанням прямокутного трикутника з катетами 20 см і 15 см навколо гіпотенузи.

3. Осьовий переріз конуса — прямокутний рівнобедрений трикутник площі Q. Знайдіть висоту конуса і площу його бічної поверхні.

4. Знайдіть радіус сфери, описаної навколо куба, ребро якого дорівнює a.

Варіант 2

1. Знайдіть площу поверхні і площу осьового перерізу циліндра, радіус якого дорівнює a, а висота $3a$.

2. Знайдіть площу поверхні тіла, утвореного обертанням рівнобедреного трикутника з кутом 120° навколо бічної сторони, яка дорівнює 2 см.

3. Знайдіть відношення площі основи конуса до площі його поверхні, якщо осьовий переріз конуса — правильний трикутник.

4. Радіус сфери дорівнює r. Знайдіть площу поверхні описаного навколо неї куба.

? Завдання для самоперевірки

1. Що таке тіло обертання? Наведіть приклади.

2. Сформулюйте означення циліндра. Назвіть його елементи.

3. Сформулюйте означення конуса. Назвіть його елементи.

4. Як обчислюють площі поверхонь циліндра? конуса?

5. Як відносяться площі основи конуса і паралельного їй перерізу?

6. Сформулюйте означення кулі, сфери. Назвіть їх елементи.

7. Як можуть бути розміщені дві сфери? А сфера і площина?

8. Доведіть теорему про площину, дотичну до сфери.

9. Що таке зрізаний конус, його твірна і висота?

10. Сформулюйте означення кулі, вписаної у многогранник, *і кулі, описаної навколо многогранника.*

11. Сформулюйте означення призми, вписаної в циліндр, і піраміди, вписаної в конус.

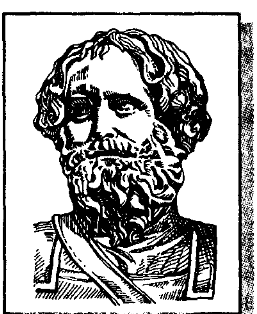
ІСТОРИЧНА ДОВІДКА

Назви *циліндр, конус, сфера* — грецького походження. В «Основах» Евкліда їх зміст описано такими реченнями: «Циліндр походить від обертання прямокутника навколо нерухомої сторони», «Конус описано прямокутним трикутником, який обертається навколо нерухомої перпендикулярної сторони», «Сферу описано півкругом, який обертається навколо нерухомого діаметра». Як бачимо, стародавні греки сферою називали не поверхню кулі, а всю кулю. Розрізняти ці два поняття стали пізніше.

Архімед тілам обертання присвятив дві праці: «Про кулю і циліндр» та «Про коноїди і сфероїди». Він розглядав властивості і таких фігур, які утворюються обертанням еліпса, частини параболи і т.п.

Властивості конічних поверхонь досить глибоко дослідив Аполлоній Пергський (бл. 262 — бл. 190 до н.е.) у праці «Конічні перерізи». Під конічною поверхнею розуміють поверхню, утворену обертанням однієї з двох прямих, які перетинаються, навколо другої. Аполлоній дослідив, коли перерізом такої поверхні і площини є коло, еліпс, гіпербола чи парабола. Ці дослідження сприяли розвитку математики, астрономії, механіки й оптики.

Архімед
(бл. 287–212 до н.е.)



Давньогрецький учений, винахідник, конструктор. Показав, як можна обчислювати площі параболічного сегмента, об'єми різних тіл обертання, як знаходити суми членів геометричної прогресії, суми квадратів натуральних чисел. Найважливіші праці Архімеда: «Про квадратуру параболи», «Про спіралі», «Метод», «Про вимірювання круга», «Книга лем», «Про коноїди і сфероїди», «Про число пісчинок», «Про плаваючі тіла». В останній обґрунтовано закон Архімеда.

РОЗДІЛ 7

ОБ'ЄМИ І ПЛОЩІ ПОВЕРХОНЬ ТІЛ

§ 30 *Поняття об'єму*

Кожне тіло займає деяку частину простору: цеглина — меншу, ніж будинок, куб з ребром 1 см — меншу, ніж з ребром 1 дм. Щоб можна було порівнювати такі частини простору, вводять поняття об'єму.

Строгий виклад теорії об'ємів досить складний, ми обмежимось розглядом тільки простих тіл: многогранників, відомих тіл обертання і різних їх комбінацій. Для таких тіл *об'єм* — це величина, яка задовольняє такі умови (властивості об'єму).

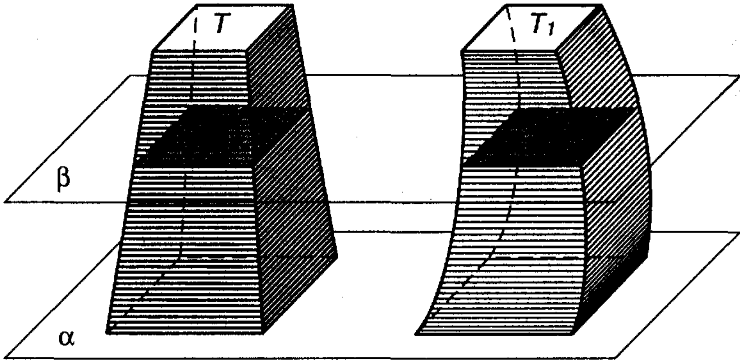
▶ **Кожне тіло має певний об'єм, виражений додатним числом.**

▶ **Якщо тіло розбито на кілька частин, то його об'єм дорівнює сумі об'ємів усіх цих частин.**

▶ **Об'єм куба, ребро якого дорівнює одиниці довжини, дорівнює одиниці.**

▶ **Якщо два тіла можна розмістити так, що кожна площина, паралельна деякій даній площині, перетинаючи одне з тіл, перетинає і друге по фігурі такої самої площі, то об'єми цих тіл рівні.**

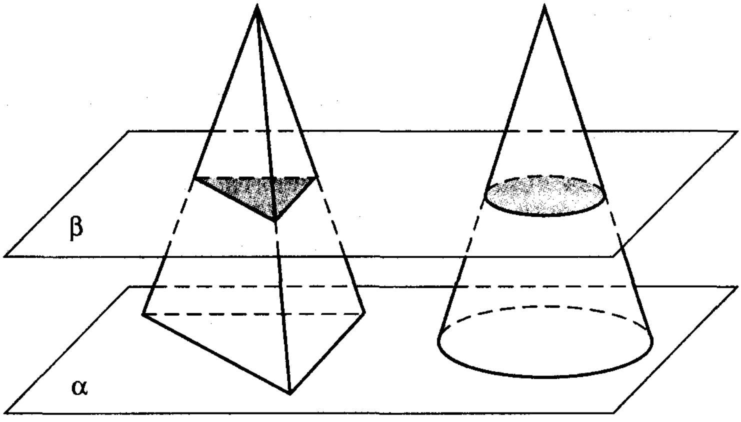
Останню властивість називають *аксіомою Кавальєрі*. Пояснимо її на прикладі. Уявіть, що з пачки паперу, наприклад 1000 аркушів, вирізали дві однакові зрізані піраміди T. Поставивши їх на стіл, одну деформували так, що вона набула форми



Мал. 180

тіла T_1 (мал. 180). Висоти тіл T і T_1 рівні, тому кожна площина, паралельна площині стола, перетинаючи яке-небудь одне з цих тіл, обов'язково перетинає і друге. І будь-які їх перерізи тією самою площиною, паралельною площині стола, рівні. Отже, ці тіла задовольняють аксіому Кавальєрі, їх об'єми рівні. Це й зрозуміло, бо вони складені з попарно рівних аркушів однакового паперу.

У прикладі, що розглядається, всі відповідні перерізи тіл T і T_1 — рівні многокутники. Це необов'язково, досить, щоб вони мали однакові площі (мал. 181).

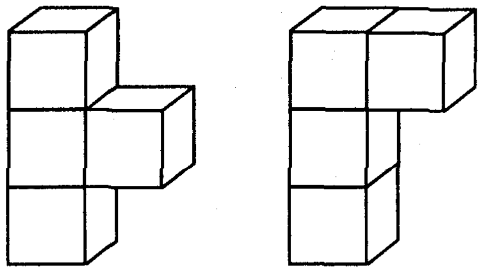


Мал. 181

З аксіоми Кавальєрі випливає, що **рівні тіла мають рівні об'єми.**

Два тіла називають *рівними,* якщо одне з них можна відобразити на друге рухом (паралельним перенесенням, симетрією відносно точки чи площини і т. п.).

А чи можуть нерівні тіла мати рівні об'єми? Можуть. Наприклад, зображені на малюнку 182 многогранники, складені з чотирьох рівних кубів, не рівні, але об'єми їх рівні. Два тіла, які мають рівні об'єми, називають *рівнооб'ємними* (або *рівновеликими*).



Мал. 182

Об'єм, як і довжина, міра кута, площа, — величина. Значення об'єму задається не тільки числом, а й найменуванням. Наприклад, об'єм 1 $дм^3$ можна подати як 1000 $см^3$ і як 0,001 $м^3$. У теоретичних міркуваннях за одиницю довжини беруть довжину деякого (одиничного) відрізка і залежно від неї вводять відповідні одиниці площі і об'єму. Площа квадрата, сторона якого дорівнює одиничному відрізку, — одиниця площі, а об'єм куба, ребро якого дорівнює одиничному відрізку, — одиниця об'єму. За такої домовленості найменувань можна не писати.

Об'єми тіл вимірюють або обчислюють. Наприклад, об'єм невеликої деталі можна виміряти за допомогою мензурки з поділками, об'єм відра — наливаючи в нього воду квартою відомого об'єму. Зрозуміло, що в результаті таких вимірювань дістають тільки наближені значення об'ємів. Точні значення об'ємів геометричних тіл обчислюють за формулами, які ми виведемо в наступних параграфах.

525⁰. Бічне ребро прямої призми поділено на 3 рівні частини і через точки поділу проведено площини, паралельні основі. Знайдіть об'єми утворених при цьому многогранників, якщо об'єм даної призми V.

526⁰. Знайдіть об'єми двох трикутних призм, на які паралелепіпед з об'ємом V поділяється його діагональною площиною.

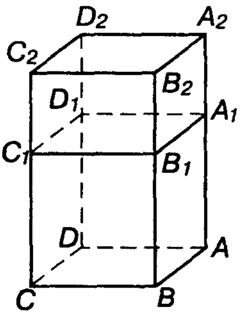
527⁰. Об'єм правильної чотирикутної призми дорівнює 14 дм^3. Знайдіть об'єми многогранників, на які дана призма поділяється двома перпендикулярними діагональними площинами.

528. Висоти двох прямокутних паралелепіпедів з рівними основами відносяться, як 3 : 5. Як відносяться їх об'єми?

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Розглянемо два паралелепіпеди із спільною основою $ABCD$ і висотами AA_1 і AA_2 (мал. 183). Покажемо, що об'єми V_1 і V_2 цих паралелепіпедів відносяться, як їх висоти, тобто як 3 : 5.

Поділимо ребро AA_2 на 5 рівних частин, тоді в ребрі AA_1 вміститься 3 такі частини. Площини, проведені через точки поділу паралельно основам паралелепіпедів, один з них поділять на 5, а другий на 3 рівних паралелепіпеди. Якщо об'єм одного такого паралелепіпеда дорівнює V, то $V_1 = 3V$, $V_2 = 5V$ і

$$V_1 : V_2 = 3V : 5V = 3 : 5.$$



Мал. 183

529⁰. Ребра двох кубів відносяться, як 1 : 3. Як відносяться їх об'єми? Проілюструйте це малюнком.

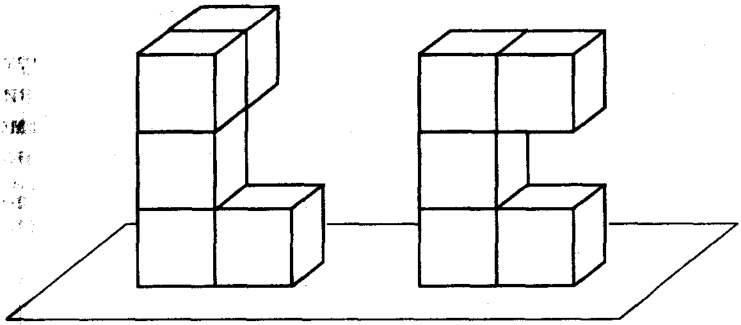
530⁰. Обґрунтуйте співвідношення:

1) $1\ м^3 = 1000\ дм^3$; 2) $1\ дм^3 = 1000\ см^3$.

531⁰. Скільки кубів з ребром 1 дм можна вкласти в коробку, розміри якої $3 \times 4 \times 5$ дм?

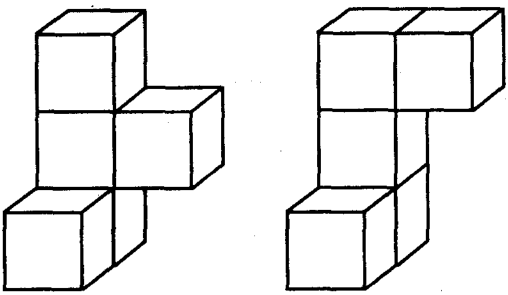
532. Доведіть, що коли одне тіло є частиною другого, то об'єм першого тіла менший від об'єму другого.

533. Чи задовольняють аксіому Кавальєрі зображені на малюнку 184 тіла, складені з рівних кубів?



Мал. 184

534. Чи можна зображені на малюнку 185 тіла розмістити так, щоб вони задовольняли аксіому Кавальєрі?



Мал. 185

535. Основою піраміди є грань куба, а вершиною — його центр. Знайдіть об'єм цієї піраміди, якщо ребро куба дорівнює 3 дм.

§ 31 Об'єм прямокутного паралелепіпеда

Доведемо спочатку лему про об'єми прямокутних паралелепіпедів. (Лемою називають допоміжне твердження, яке використовується для доведення якоїсь важливої теореми.)

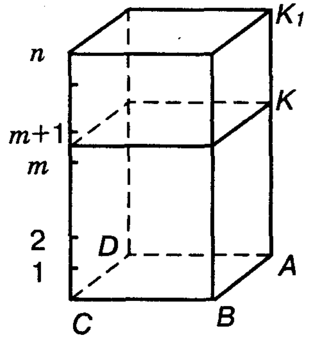
Л е м а. **Об'єми прямокутних паралелепіпедів з рівними основами відносяться як їх висоти.**

*ДОВЕДЕННЯ**. Нехай P і P_1 — два прямокутні паралелепіпеди із спільною основою $ABCD$ і висотами AK і AK_1, де $AK < AK_1$ (мал. 186). Розіб'ємо ребро AK_1 на n рівних частин. Довжина кожної з цих частин дорівнює $\frac{AK_1}{n}$. Якщо на ребрі AK лежить m точок поділу, то

$$\frac{AK_1}{n} \cdot m \leqslant AK \leqslant \frac{AK_1}{n} (m + 1),$$

звідки

$$\frac{m}{n} \leqslant \frac{AK}{AK_1} \leqslant \frac{m}{n} + \frac{1}{n}. \qquad (*)$$



Мал. 186

Проведемо через усі точки поділу площини, паралельні основам даних паралелепіпедів. Вони паралелепіпед P_1 розіб'ють на n рівних малих паралелепіпедів. Якщо об'єми паралелепіпедів P і P_1 дорівнюють відповідно V і V_1, то об'єм одного малого паралелепіпеда дорівнює $\frac{V_1}{n}$. Оскільки паралелепіпед P містить m малих паралелепіпедів і міститься в паралелепіпеді, складеному з $m + 1$ малих, то

$$\frac{V_1}{n} \cdot m \leqslant V \leqslant \frac{V_1}{n}(m + 1),$$

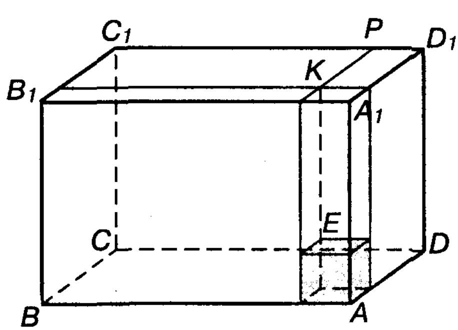
звідки

$$\frac{m}{n} \leqslant \frac{V}{V_1} \leqslant \frac{m}{n} + \frac{1}{n}. \qquad (**)$$

Як видно з подвійних нерівностей (*) і (**), числа $\frac{V}{V_1}$ і $\frac{AK}{AK_1}$ належать проміжку $\left[\frac{m}{n};\ \frac{m}{n} + \frac{1}{n}\right]$, тобто відрізняються одне від одного не більше, ніж на $\frac{1}{n}$. Число n можна взяти як завгодно великим, тому $\frac{1}{n}$ може як завгодно мало відрізнятись від 0. А це можливо тільки тоді, коли $\frac{V}{V_1} = \frac{AK}{AK_1}$. □

ТЕОРЕМА 31. **Об'єм прямокутного паралелепіпеда дорівнює добутку трьох його вимірів.**

*ДОВЕДЕННЯ**. Нехай дано довільний прямокутний паралелепіпед з вимірами $AB = a$, $AD = b$ і $AA_1 = c$ (мал. 187). Побудуємо при його вершині A



Мал. 187

прямокутні паралелепіпеди з вимірами 1, 1, 1 (одиничний куб), 1, 1, c і 1, b, c (їх діагоналі AE, AK і AP). Якщо об'єми цих паралелепіпедів дорівнюють відповідно 1, V_c і V_{bc}, а об'єм даного паралелепіпеда V, то за доведеною лемою

$$\frac{V}{V_{bc}} = \frac{a}{1}, \quad \frac{V_{bc}}{V_c} = \frac{b}{1}, \quad \frac{V_c}{1} = \frac{c}{1}.$$

Перемноживши почленно ці три рівності, дістанемо: $V = abc$. □

■ Наслідки. 1. ***Якщо ребро куба дорівнює a, то його об'єм $V = a^3$.***

2. ***Об'єм прямокутного паралелепіпеда дорівнює добутку площі його основи на висоту.***

536^0. Розміри цеглини $250 \times 120 \times 65$ мм. Знайдіть її об'єм.

537^0. Знайдіть об'єм куба, якщо площа його грані дорівнює Q.

538^0. Знайдіть об'єм правильної чотирикутної призми, якщо площа її основи дорівнює 49 см^2, а площа бічної грані 56 см^2.

539^0. Діагональ куба дорівнює d. Знайдіть його об'єм.

540^0. Об'єм куба дорівнює V. Знайдіть площу його поверхні.

541. Поле прямокутної форми площею 5 га зорано на глибину 35 см. Скільки кубометрів ґрунту перевернули?

542^0. Діагональ правильної чотирикутної призми дорівнює d і нахилена до площини основи під кутом α. Знайдіть об'єм призми. Обчисліть, якщо $d = 37$ см, $\alpha = 58^\circ$.

543^0. Три свинцевих куби з ребрами 1 см, 6 см і 8 см переплавили в один куб. Знайдіть довжину ребра утвореного куба.

544^0. На кожного учня класу повинно припадати не менш як 6 м^3 повітря. На скількох учнів розрахована класна кімната, розміри якої $10 \times 6 \times 3{,}5$ м?

545^0. Виміри прямокутного паралелепіпеда 15 дм, 36 дм і 50 дм. Знайдіть довжину ребра куба такого самого об'єму.

546. Якщо кожне ребро куба збільшити на 3 см, то його об'єм збільшиться на 513 см^3. Знайдіть довжину ребра куба.

547. Площі трьох нерівних граней прямокутного паралелепіпеда дорівнюють S_1, S_2 і S_3. Знайдіть його об'єм.

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Якщо виміри паралелепіпеда x, y, z, то

$$xy = S_1, \quad xz = S_2, \quad yz = S_3.$$

Перемноживши почленно ці рівності, дістанемо $x^2y^2z^2 = S_1S_2S_3$, звідки $V = xyz = \sqrt{S_1S_2S_3}$.

Відповідь. $\sqrt{S_1S_2S_3}$.

548. Сторони основи прямокутного паралелепіпеда дорівнюють a і b, а його діагональ нахилена до площини основи під кутом α. Знайдіть об'єм паралелепіпеда.

549. Знайдіть об'єм правильної чотирикутної призми, якщо її діагональ дорівнює d, а діагональ бічної грані d_1.

550. Знайдіть об'єм правильної чотирикутної призми, якщо її діагональ дорівнює d і з бічною гранню утворює кут φ.

551. Знайдіть об'єм прямокутного паралелепіпеда, якщо два його виміри a і b, а радіус описаної кулі r.

552. В основі прямої призми лежить прямокутник. Діагональ призми утворює з площиною основи кут α, а діагональ однієї з бічних граней дорівнює l і нахилена до площини основи під кутом φ. Знайдіть об'єм призми. Обчисліть, якщо $l = 2\sqrt{6}$ см, $\alpha = 45^\circ$, $\varphi = 60^\circ$.

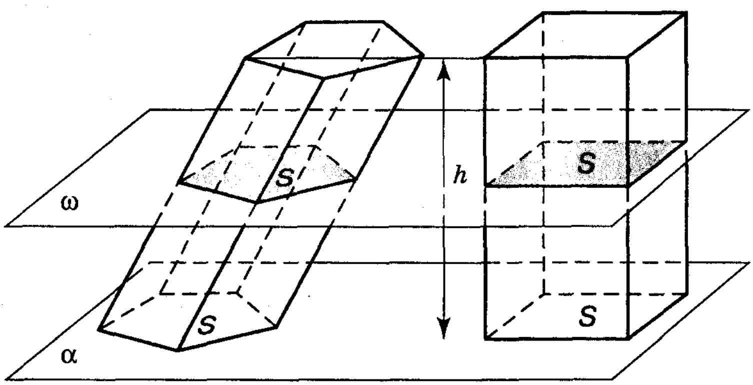
§ 32 *Об'єм призми*

ТЕОРЕМА 32. **Об'єм призми дорівнює добутку площі її основи на висоту:**

$$V_п = Sh.$$

ДОВЕДЕННЯ. Нехай дано довільну призму з площею основи S і висотою h. Доведемо, що її об'єм $V = Sh$. Уявімо, що на площині α поруч з даною призмою поставлено прямокутний паралелепіпед з площею основи S і висотою h (мал. 188). Оскільки висоти цих двох тіл рівні, то кожна площина ω, паралельна α, яка перетинає одне з них, перетинає і друге тіло. І всі відповідні площі їх перерізів рівні. Адже переріз кожної призми площиною, паралельною площині основи, дорівнює основі призми (див. § 21). Отже, два тіла, що розглядаються, задовольняють аксіому Кавальєрі, їх об'єми рівні. Оскільки, як уже доведено, об'єм прямокутного паралелепіпеда $V = Sh$, то і об'єм призми

$$V = Sh. \ \square$$



Мал. 188

553⁰. Знайдіть об'єм правильної трикутної призми, якщо сторона її основи дорівнює a, а висота h.

554^0. В основі прямої призми — прямокутний трикутник з катетами 3 см і 4 см. Більша бічна грань — квадрат. Знайдіть об'єм призми.

555^0. Діагональ грані правильної трикутної призми дорівнює d і нахилена до сторони основи під кутом α. Знайдіть об'єм призми.

556^0. Площа основи призми Q, бічне ребро дорівнює l і нахилене до площини основи під кутом α. Знайдіть об'єм призми.

557^0. Сторони основи паралелепіпеда дорівнюють 6 дм і 8 дм, кут між ними 45°. Бічне ребро дорівнює 7 дм і нахилене до площини основи під кутом 45°. Знайдіть об'єм паралелепіпеда.

558^0. Дві грані паралелепіпеда — ромби із стороною a і кутом α, решта граней — квадрати. Знайдіть об'єм паралелепіпеда.

559^0. Переріз залізничного насипу має вигляд трапеції з основами 18 м і 8 м і висотою 3 м. Знайдіть об'єм 1 км такого насипу.

560. У правильній шестикутній призмі площа найбільшого діагонального перерізу 4 см^2, а відстань між протилежними бічними гранями 4 см. Знайдіть об'єм призми.

561. Площа основи прямої трикутної призми дорівнює 24 см^2, а площі бічних граней 3 см^2, 4 см^2 і 5 см^2. Знайдіть об'єм призми.

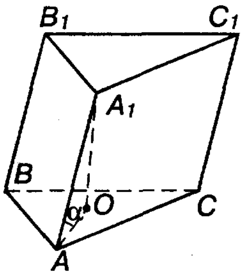
562. Знайдіть об'єм правильної п'ятикутної призми, кожне ребро якої дорівнює a.

563. Кожне ребро прямого паралелепіпеда дорівнює 1 см, а одна з його діагоналей 2 см. Знайдіть об'єм.

564. Намалюйте довільну трикутну призму. Побудуйте її переріз площиною, яка проходить через бічне ребро і ділить її на дві частини, об'єми яких відносяться, як 1 : 2.

565. Основою призми є правильний трикутник із стороною a. Одна з бічних граней перпендикулярна до площини основи і є ромбом з гострим кутом α. Знайдіть об'єм призми. Обчисліть, якщо $a = 17$ см, $\alpha = 65^\circ$.

566. Основою призми є правильний трикутник ABC із стороною a. Вершина A_1 проектується в центр нижньої основи, а ребро AA_1 утворює з площиною основи кут α. Знайдіть об'єм призми. Обчисліть, якщо $a = 25{,}3$ см, $\alpha = 68°12'$.



Мал. 189

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Задачу задовольняє призма $ABCA_1B_1C_1$, у якої O — центр правильного $\triangle ABC$, A_1O — висота призми, $\angle A_1AO = \alpha$ (мал. 189).

Об'єм призми знаходимо за формулою $V = Sh$, де S — площа її основи, h — висота. Оскільки $\triangle ABC$ правильний, то $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

З прямокутного трикутника A_1AO знаходимо висоту призми:

$$OA = \frac{a}{\sqrt{3}}, \quad h = A_1O = OA \cdot \operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{\sqrt{3}} \operatorname{tg} \alpha.$$

Отже, шуканий об'єм призми

$$V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a}{\sqrt{3}} \operatorname{tg} \alpha = \frac{a^3}{4} \operatorname{tg} \alpha.$$

Якщо $a = 25{,}3$ і $\alpha = 68°12'$, то

$$V = \frac{25{,}3^3}{4} \cdot \operatorname{tg} 68{,}2° \approx 10119.$$

Відповідь. $V = \frac{a^3}{4} \operatorname{tg} \alpha$; $V \approx 10{,}1$ дм^3.

567. Сторона основи прямого паралелепіпеда дорівнює a. Через неї і протилежну їй сторону верхньої основи проведено переріз під кутом α до площини основи. Площа перерізу дорівнює S. Знайдіть об'єм паралелепіпеда.

568. Основа прямого паралелепіпеда — ромб. Одна з діагоналей паралелепіпеда дорівнює d і нахилена до площини основи під кутом α; друга — під кутом β. Знайдіть об'єм паралелепіпеда.

569. Знайдіть об'єм прямого паралелепіпеда, сторона основи якого дорівнює a, а радіус вписаної кулі r.

570. У похилій трикутній призмі площа однієї з бічних граней Q, а відстань від її площини до протилежного бічного ребра m. Знайдіть її об'єм.

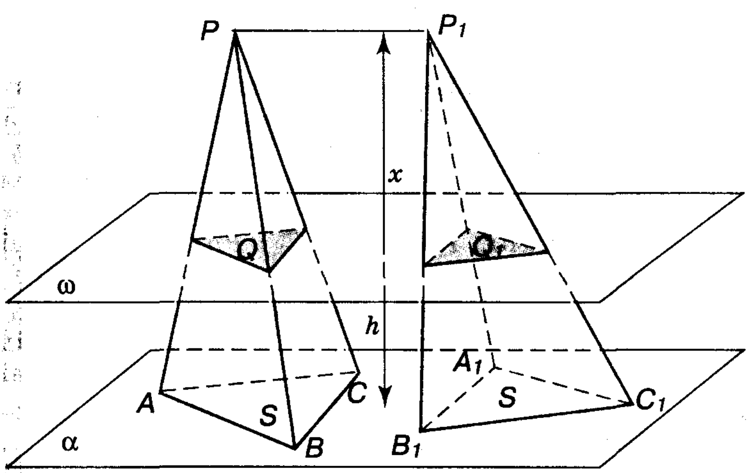
571. Знайдіть об'єм похилої призми, якщо її бічне ребро дорівнює l, а площа перерізу, який перетинає всі бічні ребра і перпендикулярний до них, Q.

572. Знайдіть об'єм правильної восьмикутної призми, кожне ребро якої має довжину a.

§ 33 *Об'єм піраміди*

Лема. **Трикутні піраміди з рівними площами основ і рівними висотами мають рівні об'єми.**

ДОВЕДЕННЯ. Розглянемо дві трикутні піраміди $PABC$ і $P_1A_1B_1C_1$, кожна з яких має площу основи S і висоту h. Розмістимо їх основи в одній площині α (мал. 190). Оскільки висоти обох пірамід рівні, то кожна січна площина ω, паралельна α, перетинаючи одну з пірамід, перетинає і другу. Нехай



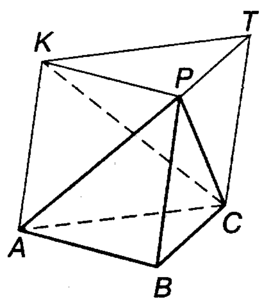
Мал. 190

площина ω віддалена від P і P_1 на відстань x, а площі утворених нею перерізів дорівнюють Q і Q_1. Оскільки площі основ піраміди і паралельного їй перерізу відносяться як квадрати відстаней їх площин від вершини піраміди (див. с. 119), то $\frac{S}{Q} = \frac{h^2}{x^2}$ і $\frac{S}{Q_1} = \frac{h^2}{x^2}$, звідки $Q = Q_1$.

Отже, піраміди, що розглядаються, задовольняють аксіому Кавальєрі, тому їх об'єми рівні. □

ТЕОРЕМА 33. **Об'єм піраміди дорівнює третині добутку площі її основи на висоту:**

$$V_п = \frac{1}{3} Sh.$$

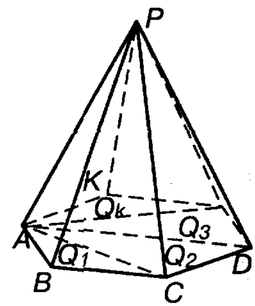


Мал. 191

ДОВЕДЕННЯ. Нехай дано довільну трикутну піраміду *PABC* (мал. 191). Проведемо відрізки *AK* і *CT*, рівні і паралельні ребру *BP*, і сполучимо відрізками точки *K*, *P*, *T*. У результаті утвориться призма *KPTABC*. Ця призма є об'єднанням трьох трикутних пірамід: *PABC*, *CKPT* і *PKAC*. Дві перші з них мають рівні основи, бо $\triangle ABC = \triangle KPT$, і рівні висоти (відстань між площинами цих трикутників). За доведеною лемою об'єми цих пірамід рівні. Піраміди *PKAC* і *PCTK* також мають рівні площі основ, бо $\triangle KAC = \triangle CTK$, і рівні висоти. Тому і їх об'єми рівні. Як бачимо, всі три піраміди, з яких складається призма *KPTABC*, мають рівні об'єми. Отже, об'єм даної піраміди *PABC* становить третину об'єму цієї призми. Об'єм призми Sh, а об'єм даної піраміди $V = \frac{1}{3} Sh$.

Теорему для довільної трикутної піраміди доведено.

Розглянемо довільну n-кутну піраміду з площею основи S і висотою h. Її можна розбити на скінченне число k трикутних пірамід (мал. 192). Висота кожної з них дорівнює h, а сума площ їх основ $Q_1 + Q_2 + Q_3 + ... + Q_k = S$.



Мал. 192

Сума об'ємів усіх цих трикутних пірамід дорівнює об'єму даної піраміди V. Тому

$$V = \frac{1}{3} Q_1 h + \frac{1}{3} Q_2 h + ... + \frac{1}{3} Q_k h =$$

$$= \frac{1}{3} h (Q_1 + Q_2 + ... + Q_k) = \frac{1}{3} Sh.$$

Отже, об'єм будь-якої піраміди можна обчислювати за формулою

$$V = \frac{1}{3} Sh,$$

де S — площа основи, а h — висота піраміди. □

573⁰. Знайдіть об'єм правильної чотирикутної піраміди, сторона основи якої дорівнює 5 см, а висота 4 см.

574⁰. Знайдіть об'єм правильної чотирикутної піраміди, висота якої дорівнює h, а діагональ основи d.

575⁰. Знайдіть об'єм правильної чотирикутної піраміди, кожне ребро якої дорівнює 1 дм.

576⁰. Знайдіть об'єм піраміди Хеопса, якщо площа її основи дорівнює 5,3 га, а висота 147 м.

577⁰. Знайдіть об'єм правильної трикутної піраміди, бічне ребро якої дорівнює b, а плоский кут при вершині 90°. Розв'яжіть усно.

578⁰. Бічні ребра трикутної піраміди попарно перпендикулярні, а їх довжини дорівнюють a, b, c. Знайдіть об'єм.

579. Знайдіть об'єм трикутної піраміди, якщо кожне її бічне ребро дорівнює a, а плоскі кути при вершині 60°, 90° і 90°.

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Візьмемо за основу піраміди її грань, яка є рівностороннім трикутником. Його площа $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, а висота піраміди a. Тому об'єм піраміди

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot a = \frac{\sqrt{3}}{12} a^3.$$

Відповідь. $\frac{\sqrt{3}}{12} a^3$.

580. Знайдіть об'єм правильної чотирикутної піраміди, якщо її бічне ребро дорівнює b і утворює: 1) з площиною основи кут α; 2) з висотою піраміди кут β; 3) із стороною основи піраміди кут φ.

581. Знайдіть об'єм тетраедра, вершинами якого є точки P (1; 2; 6), O (0; 0; 0), A (2; 0; 0), B (0; 5; 0).

582. Діагональний переріз правильної шестикутної піраміди ділить її на дві нерівні частини. Як відносяться їх об'єми?

583. Знайдіть об'єм правильного тетраедра, ребро якого дорівнює a.

584. Основа піраміди — паралелограм із сторонами a, b і кутом φ. Висота піраміди h. Знайдіть об'єм піраміди.

585. Знайдіть об'єм правильного октаедра, ребро якого дорівнює a.

586. За бічним ребром b і плоским кутом 2α при вершині знайдіть об'єм правильної піраміди: 1) трикутної; 2) n-кутної.

587. Основою піраміди є правильний трикутник із стороною a. Знайдіть об'єм піраміди, якщо двогранні кути при її основі 90°, 45°, 45°.

588. Основа піраміди — трикутник із сторонами 13 см, 14 см і 15 см. Двогранні кути при кожному ребрі основи по $45°$. Знайдіть об'єм.

589. Основа піраміди — рівнобічна трапеція із сторонами 4, 7, 7 і 10. Двогранні кути при всіх ребрах основи по $60°$. Знайдіть об'єм.

590. Через середини кожних трьох ребер куба, які виходять з однієї вершини, проведено перерізи. Знайдіть об'єм утвореного 14-гранника, якщо ребро куба дорівнює a.

591. Доведіть, що коли многогранник, описаний навколо кулі радіуса r, має площу поверхні S, то його об'єм $V = \frac{1}{3} Sr$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Сполучимо центр кулі з кожною вершиною описаного n-гранника, дістанемо n пірамід. Висота кожної з них дорівнює r, а площа основи — площі відповідної грані даного многогранника. Тому якщо S_1, S_2, ..., S_n — площі граней описаного многогранника, то його об'єм

$$V = \frac{1}{3} S_1 r + \frac{1}{3} S_2 r + \ldots + \frac{1}{3} S_n r =$$
$$= \frac{1}{3} r (S_1 + S_2 + \ldots + S_n) = \frac{1}{3} Sr.$$

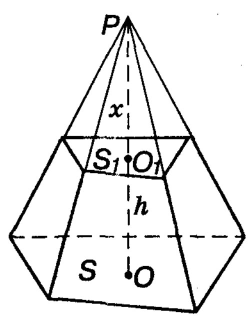
592. Через середину висоти піраміди проведено площину, паралельну основі. Як відносяться об'єми утворених частин піраміди?

593. Доведіть, що коли h, S і S_1 — висота і площі основ зрізаної піраміди, то її об'єм

$$V = \frac{1}{3} h (S + \sqrt{SS_1} + S_1).$$

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Нехай P — вершина піраміди, частиною якої є дана зрізана піраміда, а PO і PO_1 — перпендикуляри до її основ (мал. 193). Якщо $PO_1 = x$, то $PO = x + h$ і $(x + h)^2 : x^2 = S : S_1$, звідки

$$\frac{x + h}{x} = \frac{\sqrt{S}}{\sqrt{S_1}}, \quad x = \frac{h\sqrt{S_1}}{\sqrt{S} - \sqrt{S_1}}.$$



Мал. 193

Об'єм V даної зрізаної піраміди дорівнює різниці об'ємів двох пірамід:

$$V = \frac{1}{3}(x + h)\,S - \frac{1}{3}\,xS_1 = \frac{1}{3}\left(hS + x\,(S - S_1)\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(hS + \frac{h\sqrt{S_1}}{\sqrt{S} - \sqrt{S_1}} \cdot (S - S_1)\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\,h\,(S + \sqrt{SS_1} + S_1).$$

594. З а д а ч а з є г и п е т с ь к о г о п а п і р у с у. Знайдіть об'єм зрізаної піраміди, якщо її основи — квадрати зі сторонами 2 і 4, а висота 6.

595. Знайдіть об'єм правильної чотирикутної зрізаної піраміди, площі граней якої дорівнюють 1, 1, 1, 1, 1 і 4.

596. Площина, паралельна площині основи піраміди, ділить її на два многогранники рівних об'ємів. У якому відношенні ця площина ділить висоту піраміди?

● **597.** П р а к т и ч н е з а в д а н н я. Знайдіть об'єм даної моделі піраміди.

Самостійна робота 4

Варіант 1

1. Знайдіть об'єм куба, діагональ грані якого дорівнює d.

2. Знайдіть об'єм прямої трикутної призми, кожне ребро якої 12 см завдовжки.

3. Діагональний переріз правильної чотирикутної піраміди — рівносторонній трикутник площі S. Знайдіть об'єм піраміди.

4. Знайдіть об'єм правильного октаедра, ребро якого 20 см.

Варіант 2

1. Об'єм куба дорівнює V. Знайдіть довжину його діагоналі.

2. Знайдіть об'єм правильної шестикутної призми, кожне ребро якої 2 дм завдовжки.

3. Діагональний переріз правильної чотирикутної піраміди — прямокутний трикутник з гіпотенузою 10 см. Знайдіть об'єм піраміди.

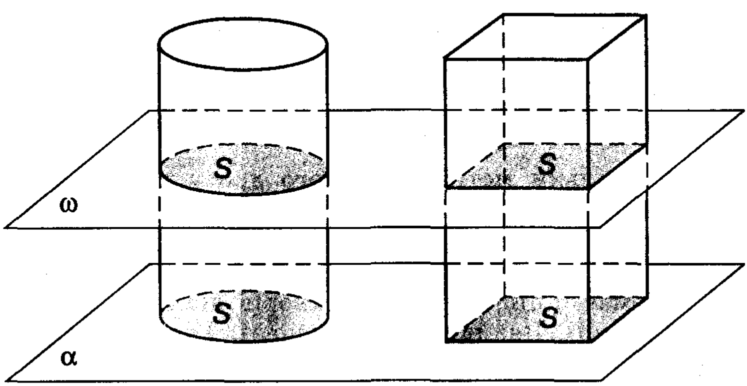
4. Знайдіть об'єм правильного тетраедра, площа поверхні якого дорівнює 12 дм^2.

§ 34 Об'єм циліндра

ТЕОРЕМА 34. **Об'єм циліндра дорівнює добутку площі його основи на висоту:**

$$V_ц = Sh.$$

ДОВЕДЕННЯ. Нехай дано довільний циліндр з площею основи S і висотою h. Уявімо, що його поставлено на площину α поруч з призмою такої самої площі основи S і висоти h (мал. 194). Кожна площина ω, паралельна α, яка перетинає одне з цих тіл, перетинає і друге. Всі відповідні площі їх перерізів рівні, бо кожен з них дорівнює S. Отже, тіла, що розглядаються, задовольняють аксіому Кавальєрі, їх об'єми рівні. Оскільки об'єм призми дорівнює Sh, то і об'єм даного циліндра $V = Sh$. □



Мал. 194

Якщо радіус циліндра дорівнює r, то площа його основи πr^2, а об'єм $V = \pi r^2 h$.

Зауваження. Доведення теореми про об'єм циліндра майже дослівно повторює доведення теореми про об'єм призми. Бо кожне з цих тіл — окремий випадок циліндра в широкому розумінні (див. с. 136). А об'єм кожного такого циліндра також дорівнює добутку площі його основи на висоту. Спробуйте довести це твердження самостійно.

598^0. Знайдіть об'єм циліндра, висота якого дорівнює 8 см, а радіус 5 см.

599^0. Осьовий переріз циліндра — квадрат[1] із стороною a. Знайдіть об'єм циліндра.

600^0. Діагональ осьового перерізу циліндра дорівнює d і нахилена до площини основи під кутом α. Знайдіть об'єм циліндра.

601^0. У циліндричну посудину, внутрішній діаметр якої 20 см, опущено деталь. При цьому рівень рідини в посудині піднявся на 12 см. Який об'єм має деталь?

602^0. Розгортка бічної поверхні циліндра — квадрат із стороною 1,8 дм. Знайдіть об'єм циліндра.

603^0. Довжини двох круглих колод рівні, а їх діаметри відносяться, як 2 : 3. Як відносяться їх об'єми?

604^0. Знайдіть площу круглої плями на поверхні моря, утвореної кубометром вилитої нафти, якщо товщина її плівки 1 мм.

605. Як відносяться об'єми циліндрів: вписаного в правильну трикутну призму і описаного навколо неї?

606. Скільки метрів сталевого дроту в мотку масою 30 кг? Діаметр дроту 6 мм. Густина сталі 7600 кг/м^3.

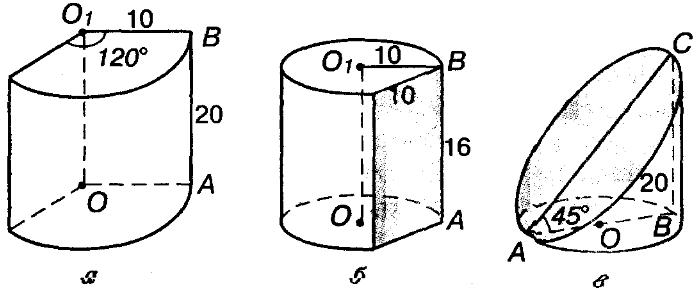
607. Залізобетонна панель розміром $600 \times 120 \times$ $\times$ 22 см має 6 циліндричних отворів діаметром 14 см (по довжині). Знайдіть масу панелі. Густина залізобетону 2,5 т/м^3.

[1] Такий циліндр іноді називають рівностороннім.

608. Скільки квадратних метрів паперу в рулоні, висота якого 85 см, а радіуси 45 см і 2 см? Товщина паперу 0,1 мм.

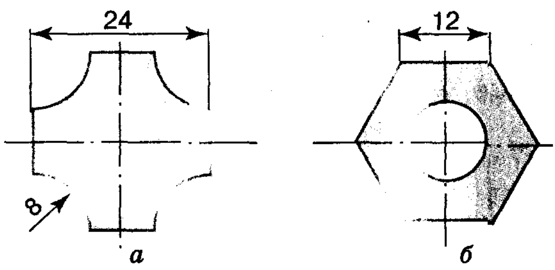
609. Переріз циліндра площиною, паралельною його осі, — квадрат, який відтинає від кола основи радіуса r дугу $120°$. Знайдіть об'єм циліндра.

610. Знайдіть об'єм частини циліндра, зображеної на малюнку 195.



Мал. 195

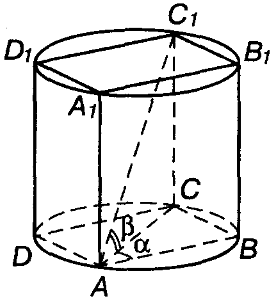
611. Знайдіть об'єм двометрового прута, форму і розміри поперечного перерізу якого (в мм) зображено на малюнку 196.



Мал. 196

612. Основою прямої призми є прямокутник із стороною a і кутом α, який утворює ця сторона з діагоналлю основи. Діагональ призми утворює з площиною основи кут β. Знайдіть об'єм циліндра, описаного навколо даної призми. Обчисліть, якщо $a = 6$ см, $\alpha = 30°$, $\beta = 60°$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Дана в задачі призма — прямокутний паралелепіпед (мал. 197). Тому якщо $AB = a$, то $\angle BAC = \alpha$, $\angle CAC_1 = \beta$, CC_1 — висота описаного циліндра, а AC — діаметр його основи.



Мал. 197

Об'єм циліндра визначатимемо за формулою $V = \pi r^2 h$, де $r = \frac{AC}{2}$ і $h = CC_1$.

Оскільки трикутники ABC і ACC_1 прямокутні, то $AC = \frac{AB}{\cos\alpha} = \frac{a}{\cos\alpha}$, $CC_1 = AC \operatorname{tg}\beta = \frac{a}{\cos\alpha}\operatorname{tg}\beta$.

Отже,

$$V = \pi\left(\frac{a}{2\cos\alpha}\right)^2 \cdot \frac{a}{\cos\alpha}\operatorname{tg}\beta = \frac{\pi a^3}{4\cos^3\alpha}\operatorname{tg}\beta.$$

Якщо $a = 6$, $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 60^\circ$, то

$$V = \frac{\pi 6^3 \cdot 8}{4 \cdot 3\sqrt{3}} \cdot \sqrt{3} = 144\pi.$$

Відповідь. $V = \frac{\pi a^3}{4\cos^3\alpha}\operatorname{tg}\beta$; $V = 144\pi$ см^3.

613. Довжина хорди нижньої основи циліндра, яку видно з центра цієї основи під кутом β, дорівнює a. Відрізок, що сполучає середину цієї хорди з центром верхньої основи, утворює з площиною основи кут α. Знайдіть об'єм циліндра. Обчисліть, якщо $a = 4$ см, $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 120^\circ$.

● **614.** Практичне завдання. Знайдіть об'єм даної моделі циліндра.

§ 35 Об'єм конуса

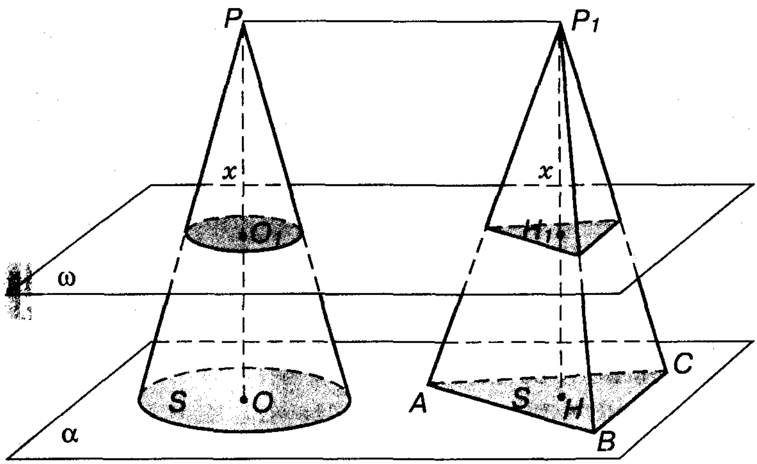
ТЕОРЕМА 35. **Об'єм конуса дорівнює третині добутку площі його основи на висоту:**

$$V_к = \frac{1}{3} Sh.$$

ДОВЕДЕННЯ. Нехай дано конус з площею основи S і висотою h. Уявімо, що його поставлено на площину α поруч з пірамідою такої самої площі основи S і висоти h (мал. 198). Кожна площина ω, паралельна α, яка перетинає одне з цих тіл, перетинає і друге, бо висоти тіл рівні. Нехай площі перерізів дорівнюють S_1 і S_2, а площина ω віддалена від вершини конуса (і піраміди) на відстань x. Тоді

$$S_1 : S = x^2 : h^2 \quad \text{і} \quad S_2 : S = x^2 : h^2,$$

звідки $S_1 = S_2$. Отже, тіла, які розглядаються, задовольняють аксіому Кавальєрі, їх об'єми рівні. Оскільки об'єм піраміди дорівнює $\frac{1}{3} Sh$, то і об'єм даного конуса $V = \frac{1}{3}Sh$. □



Мал. 198

Якщо радіус конуса дорівнює r, то площа його основи $S = \pi r^2$, а об'єм

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

Зауваження. Зрізаний конус і зрізана піраміда, зображені на малюнку 131 між площинами α і ω, також задовольняють аксіому Кавальєрі. Тому об'єм зрізаного конуса, як і зрізаної піраміди (див. задачу 593), можна обчислювати за формулою $V = \frac{1}{3}h\,(S + \sqrt{SS_1} + S_1)$. Якщо радіуси основ зрізаного конуса r і r_1, то $S = \pi r^2$, $S_1 = \pi r_1^2$ і його об'єм

$$V = \frac{1}{3}\pi h\,(r^2 + rr_1 + r_1^2).$$

615^0. Знайдіть об'єм конуса, радіус якого дорівнює 6 см, а висота 8 см.

616^0. Знайдіть об'єм конуса, якщо його твірна дорівнює l і нахилена до площини основи під кутом α.

617^0. Свинцевий конус, висота якого 18 см, переплавили в циліндр з такою самою основою. Знайдіть висоту циліндра.

618^0. Купа щебеню має форму конуса, твірна якого 4 м. Знайдіть її об'єм, якщо кут природного укосу для щебеню 30°.

619. Є два конуси однакового зерна одного сорту, один удвічі вищий від другого. У скільки разів у першому конусі більше зерна, ніж у другому?

620. Знайдіть об'єм конуса, розгортка бічної поверхні якого — півкруг радіуса 12 см.

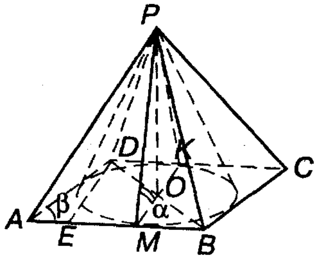
621. Доведіть, що об'єм конуса, вписаного в правильну трикутну піраміду, в чотири рази менший від об'єму конуса, описаного навколо цієї піраміди.

622. У кулю радіуса $2r$ вписано конус радіуса r. Знайдіть його об'єм.

623. Через дві твірні конуса, кут між якими 2α, проведено площину. Площа утвореного перерізу дорівнює Q. Знайдіть об'єм конуса, якщо його твірна нахилена до площини основи під кутом β.

624. Основою піраміди є рівнобедрений трикутник з бічною стороною b і гострим кутом β при вершині. Двогранні кути при основі піраміди дорівнюють α. Знайдіть об'єм конуса, вписаного в цю піраміду.

625. В основі піраміди лежить ромб із стороною a і гострим кутом β. Усі бічні грані піраміди нахилені до площини основи під кутом α. Знайдіть об'єм конуса, вписаного в цю піраміду.



Мал. 199

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Задачу задовольняє піраміда $PABCD$, в якої $ABCD$ — ромб, $AB = a$, $\angle BAD = \beta$ (мал. 199). Нехай O — центр кола, вписаного в основу піраміди. Тоді PO — висота піраміди. Якщо коло основи конуса дотикається до сторони AB в точці M, то $OM \perp AB$. За теоремою про три перпендикуляри і $PM \perp AB$, тому $\angle PMO = \alpha$.

Діаметр MK основи конуса дорівнює висоті DE ромба $ABCD$. З $\triangle DAE$ $DE = DA \sin\beta = a \sin\beta$. Отже, радіус конуса $r = \frac{1}{2} a \sin\beta$.

З прямокутного $\triangle POM$ $PO = OM \operatorname{tg}\alpha = r \operatorname{tg}\alpha$. Тому шуканий об'єм конуса

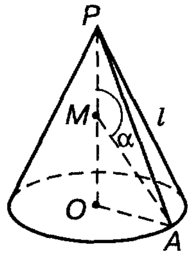
$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot PO = \frac{1}{3}\pi r^3 \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{24}\pi a^3 \sin^3\beta \operatorname{tg}\alpha.$$

В і д п о в і д ь. $\frac{1}{24}\pi a^3 \sin^3\beta \operatorname{tg}\alpha$.

626. Твірна конуса нахилена до площини основи під кутом α. Відстань від вершини конуса до центра вписаної в нього кулі дорівнює d. Знайдіть об'єм конуса. Обчисліть, якщо $d = 2$ см, $\alpha = 60^\circ$.

627. Знайдіть об'єм конуса, твірну якого l видно із середини висоти конуса під кутом α.

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Нехай $PA = l$ — твірна конуса, PO — його висота, M — середина висоти і $\angle PMA = \alpha$ (мал. 200). Позначимо $OA = x$. Тоді з прямокутного трикутника AMO маємо:



Мал. 200

$MO = x \text{ ctg} \angle AMO = x \text{ ctg}(180° - \alpha) = -x \text{ ctg}\, \alpha.$
$PO = 2MO = -2x \text{ ctg}\, \alpha.$
З $\triangle POA$ за теоремою Піфагора:

$$x^2 + (-2x \text{ ctg}\, \alpha)^2 = l^2, \quad x = \frac{l}{\sqrt{1 + 4 \text{ ctg}^2 \alpha}}.$$

Це — радіус основи конуса. Знайдемо ще його висоту:

$$h = -2x \text{ ctg}\, \alpha = -\frac{2l \text{ ctg}\, \alpha}{\sqrt{1 + 4 \text{ ctg}^2 \alpha}}.$$

Отже, об'єм конуса

$$V = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{l}{\sqrt{1 + 4 \text{ ctg}^2 \alpha}}\right)^2 \left(-\frac{2l \text{ ctg}\, \alpha}{\sqrt{1 + 4 \text{ ctg}^2 \alpha}}\right) =$$

$$= -\frac{2\pi l^3 \text{ ctg}\, \alpha}{3\sqrt{(1 + 4 \text{ ctg}^3 \alpha)^3}}.$$

Тут $90° < \alpha < 180°$, адже кут AMO гострий.

Відповідь. $V = -\dfrac{2\pi l^3 \text{ ctg}\, \alpha}{3\sqrt{(1 + 4 \text{ ctg}^2 \alpha)^3}}$,

де $90° < \alpha < 180°$.

628*. У правильній трикутній піраміді апофема дорівнює m, а плоский кут при вершині α. Знайдіть об'єм конуса, описаного навколо піраміди. Обчисліть, якщо $m = 3\sqrt{6}$ см, $\alpha = 60°$.

629. У сферу радіуса r вписано конус, твірна якого з висотою утворює кут φ. Знайдіть об'єм конуса.

630. Знайдіть об'єм тіла, утвореного обертанням прямокутного трикутника з катетами a і b навколо гіпотенузи.

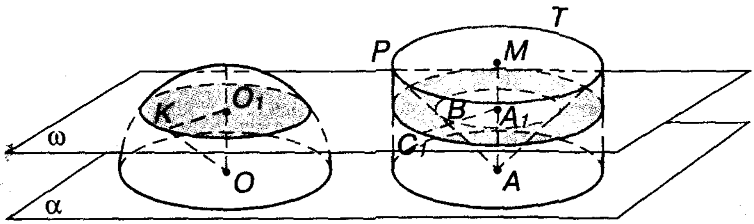
631. Радіуси основ зрізаного конуса 10 см і 16 см, а твірна нахилена до площини основи під кутом 45°. Знайдіть його об'єм.

● **632.** Практичне завдання. Знайдіть об'єм даної моделі конуса.

§ 36 *Об'єм кулі*

ТЕОРЕМА 36. **Об'єм кулі радіуса r дорівнює $\frac{4}{3}\pi r^3$.**

ДОВЕДЕННЯ. Поставимо на площину α півкулю радіуса r і тіло T, яке утворюється, якщо з циліндра радіуса r і висоти r вирізати конус радіуса r і висоти r (мал. 201). Тут $OK = AM = MP = A_1C_1 = r$.



Мал. 201

Розглянемо ще січну площину ω, паралельну площині α і віддалену від неї на відстань $OO_1 = x$. Площина ω перетинає дану півкулю по кругу радіуса O_1K, а тіло T — по кільцю радіусів A_1C_1

і A_1B. Покажемо, що площі цих перерізів рівні при кожному значенні x.

Оскільки $MP = MA$, то і $A_1B = A_1A = O_1O = x$.

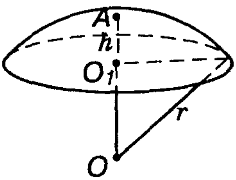
Площа круга радіуса O_1K дорівнює $\pi O_1K^2 = \pi (OK^2 - OO_1)^2 = \pi (r^2 - x^2)$.

Площа кільця радіусів A_1C_1 і A_1B дорівнює $\pi (A_1C_1^2 - A_1B^2) = \pi (r^2 - x^2)$.

Як бачимо, дана півкуля і тіло T задовольняють аксіому Кавальєрі, їх об'єми рівні. Об'єм тіла T дістанемо, якщо від об'єму циліндра $\pi r^2 \cdot r$ віднімемо об'єм конуса $\frac{1}{3} \pi r^2 \cdot r$, він дорівнює $\frac{2}{3} \pi r^3$. Такий об'єм має і півкуля радіуса r. Об'єм кулі радіуса r у два рази більший:

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3. \square$$

Тіло, відтяте від кулі січною площиною, називається *кульовим сегментом*. Його поверхня складається із *сферичного сегмента* і круга — основи кульового сегмента. Відстань від основи до найвіддаленішої точки A кульового сегмента називають його *висотою*. Радіусом кульового сегмента називають радіус кулі, від якої його відтято площиною. На малюнку 202 зображено кульовий сегмент радіуса r і висоти h.



Мал. 202

Подивімось на малюнок 201. Кульовий сегмент і частина тіла T, розміщені над площиною ω, задовольняють аксіому Кавальєрі, їх об'єми рівні. Отже, об'єм кульового сегмента радіуса r і висоти h дорівнює різниці об'ємів циліндра радіуса r і висоти h і зрізаного конуса висоти h і радіусів r і $r - h$:

$$V = \pi r^2 h - \frac{1}{3}\pi h(r^2 + r(r-h) + (r-h)^2) = \pi h^2 \left(r - \frac{h}{3}\right).$$

Отже, якщо радіус кульового сегмента r, а висота h, то його об'єм

$$V = \pi h^2 \left(r - \frac{h}{3}\right).$$

633^{0}. Знайдіть об'єм кулі, діаметр якої дорівнює 4 см.

634^{0}. Знайдіть радіус кулі, об'єм якої дорівнює 36π дм^3.

635^{0}. Ребро куба дорівнює a. Знайдіть об'єм вписаної кулі.

636^{0}. Ребро куба дорівнює a. Знайдіть об'єм описаної кулі.

637^{0}. Як відносяться об'єми двох куль, якщо їх радіуси відносяться, як 2 : 3?

638^{0}. Скільки кульок діаметра 0,6 см можна відлити з куска свинцю масою 1 кг? Густина свинцю 11,4 кг/дм^3.

639^{0}. Діаметр одного кавуна вдвічі більший від діаметра другого. У скільки разів перший кавун важчий за другий?

640^{0}. Пересипаючи пісок з порожнистої півкулі радіуса r у конус, радіус і висота якого дорівнюють r, учень дійшов висновку, що об'єм півкулі у два рази більший від об'єму конуса. Чи відповідає результат цього експерименту теорії?

641^{0}. Доведіть теорему Архімеда: об'єм кулі в півтора раза менший від об'єму описаного навколо неї циліндра.

642^{0}. З циліндра, осьовий переріз якого — квадрат із стороною 10 см, коваль викував кулю. Знайдіть радіус цієї кулі.

643. З циліндра, висота якого дорівнює діаметру, виточили кулю найбільшого об'єму. Скільки процентів матеріалу сточено?

644^{0}. Із свинцевої кулі радіуса 10 см роблять циліндричний диск завтовшки 3 см. Знайдіть діаметр диска.

645. Маса порожнистої чавунної кулі 1,57 кг, її зовнішній діаметр — 10 см. Знайдіть внутрішній діаметр, якщо густина чавуну 7,3 кг/дм^3.

646. Якою має бути загальна маса космічного апарата, що має форму кулі радіуса 1 м, щоб він не тонув у воді?

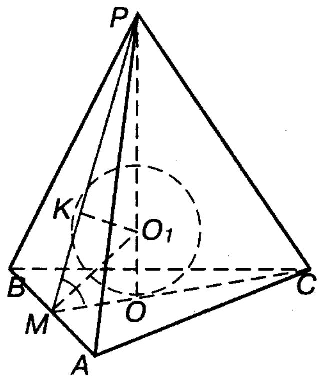
647. З краплини мильного розчину діаметра 6 мм хлопчик видув бульбашку діаметра 30 см. Знайдіть товщину плівки цієї бульбашки.

648. Куля плаває у воді так, що занурена у воду тільки її половина. Знайдіть густину матеріалу, з якого виготовлено кулю.

649. Центр кулі радіуса r лежить на ребрі прямого двогранного кута. Знайдіть об'єми тіл, на які дана куля розтинається гранями двогранного кута.

650. З центра кулі радіуса r проведено попарно перпендикулярні промені OA, OB і OC. Знайдіть об'єм меншої частини кулі, обмеженої площинами кутів AOB, BOC і COA.

651. Знайдіть об'єм кулі, вписаної у правильну трикутну піраміду, сторона основи якої a, а двогранний кут при ребрі основи α.



Мал. 203

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Центр O_1 кулі, вписаної у правильну трикутну піраміду $PABC$, лежить на її висоті PO (мал. 203). Куля дотикається до бічної грані PAB у деякій точці K, яка лежить на апофемі піраміди PM.

Якщо $AB = a$, то $OM = \frac{1}{2}OC = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

$\triangle O_1OM = \triangle O_1KM$, тому $\angle O_1MO = \frac{1}{2}\angle PMO = \frac{\alpha}{2}$.

З прямокутного трикутника O_1OM знаходимо:

$$OO_1 = OM \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{3}}{6} a \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

Отже, об'єм кулі

$$V = \frac{4}{3}\pi \cdot OO_1^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{6} a \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}\right)^3 = \frac{\sqrt{3}}{54} \pi a^3 \operatorname{tg}^3 \frac{\alpha}{2}.$$

Відповідь. $\frac{\sqrt{3}}{54} \pi a^3 \operatorname{tg}^3 \frac{\alpha}{2}$.

652. Знайдіть об'єм кулі, описаної навколо конуса, твірна якого дорівнює l і нахилена до площини основи під кутом α.

653. Знайдіть об'єм кулі, описаної навколо правильної трикутної піраміди, висота якої дорівнює h, а кут між бічним ребром і площиною основи φ. Обчисліть, якщо $h = 3$ см, $\varphi = 30°$.

654. Навколо кулі описано правильну чотирикутну піраміду, кожна з бічних граней якої утворює з площиною основи кут α. Знайдіть об'єм кулі, якщо висота піраміди дорівнює h. Обчисліть, якщо $h = 9$ см, $\alpha = 60°$.

655. Знайдіть об'єм кулі, вписаної у правильний октаедр, ребро якого дорівнює a.

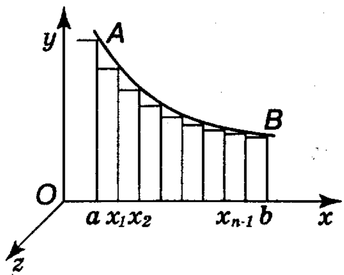
656. Знайдіть об'єм кульового сегмента, радіус якого $r = 29$ см, а висота $h = 12$ см.

657*. Доведіть, що об'єм тіла, утвореного обертанням сектора з радіусом r і кутом α навколо радіуса, обчислюється за формулою $V = \frac{4}{3}\pi r^3 (1 - \cos \alpha)$.

§ 37 *Загальна формула для об'ємів тіл обертання**

Нехай дано підграфік[1] функції $y = f(x)$ на проміжку $[a; b]$. Якщо цей підграфік обертати навколо осі x, утвориться тіло обертання T. Як визначити об'єм цього тіла?

[1] Підграфік часто називають криволінійною трапецією.



Мал. 204

Розіб'ємо проміжок $[a; b]$ точками x_1, x_2, x_3, ..., x_{n-1} на n рівних частин і в підграфіки функції $y = f(x)$ на $[a; x_1]$, $[x_1; x_2]$, ..., $[x_{n-1}; b]$ впишемо прямокутники, як це роблять при визначенні площі підграфіка (мал. 204). При обертанні навколо осі x усі ці n прямокутників опишуть деяке тіло T_1, складене з n циліндрів. Висота кожного циліндра дорівнює $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$, а їх радіуси $f(x_1)$, $f(x_2)$, ..., $f(b)$. Отже, об'єм тіла T_1 дорівнює сумі

$$\pi f^2(x_1)\,\Delta x + \pi f^2(x_2)\,\Delta x + \ldots + \pi f^2(b)\,\Delta x.$$

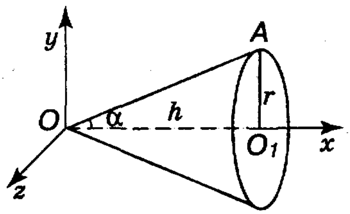
Це — інтегральна сума, вона дорівнює наближеному значенню об'єму тіла T. Якщо число n необмежено збільшувати, то $\Delta x \to 0$, а значення інтегральної суми прямуватиме до точного значення об'єму V тіла T. Отже, шуканий об'єм

$$V = \int_a^b \pi f^2(x)\,dx, \quad \text{або} \quad V = \pi\int_a^b f^2(x)\,dx.$$

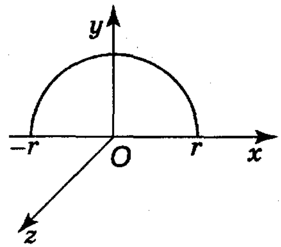
З цієї загальної формули неважко дістати уже відомі нам формули для визначення об'ємів конуса, зрізаного конуса, кулі та інших тіл обертання.

Приклад 1. Знайдемо об'єм конуса, радіус якого r, а висота h.

Розмістимо даний конус у системі координат, як показано на малюнку 205. Пряма OA з віссю x утворює кут, тангенс якого дорівнює $\dfrac{r}{h}$, тому пряма OA — графік функції $y = \dfrac{r}{h}x$. Об'єм даного конуса



Мал. 205



Мал. 206

$$V = \pi\int_0^h \left(\frac{r}{h}\,x\right)^2 dx = \frac{\pi r^2}{h^2}\cdot\frac{x^3}{3}\,\Big|_0^h = \frac{1}{3}\,\pi r^2 h.$$

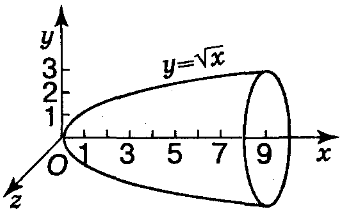
П р и к л а д 2. Знайдемо об'єм кулі радіуса r. Така куля — це тіло, утворене обертанням підграфіка функції $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ на проміжку $[-r; r]$ навколо осі x (мал. 206). Тому її об'єм

$$V = \pi\int_{-r}^{r}\left(r^2 - x^2\right)dx = \pi\left(r^2x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-r}^{r} = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

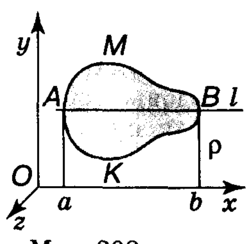
П р и к л а д 3. Знайдемо об'єм фігури, утвореної обертанням підграфіка функції $y = \sqrt{x}$ на проміжку $[0; 9]$ навколо осі x (мал. 207).

$$V = \pi\int_0^9 x\,dx = \pi\,\frac{x^2}{2}\,\Big|_0^9 = 40{,}5\pi.$$

П р и к л а д 4. Нехай дано симетричну відносно прямої l опуклу фігуру F і в її площині пряму x, яка паралельна l і не перетинає F (мал. 208). Дове-



Мал. 207



Мал. 208

демо, що об'єм тіла, утвореного обертанням фігури F навколо осі x, можна знаходити за формулою $V = 2\pi\rho S$, де ρ — відстань між прямими l і x, а S — площа фігури F.

Справді, якщо крива AMB, що обмежує фігуру F, вище від прямої l — графік функції $y = \rho + f(x)$, то симетрична їй відносно l крива AKB — графік функції $y = \rho - f(x)$. Тому об'єм тіла обертання

$$V = \pi\int_a^b (\rho + f(x))^2\,dx - \pi\int_a^b (\rho - f(x))^2\,dx = 4\pi\rho\int_a^b f(x)\,dx.$$

Інтеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ виражає площу підграфіка функції $y = f(x)$ на $[a; b]$, він дорівнює $0{,}5S$. Отже,

$$V = 4\pi\rho \cdot 0{,}5S = 2\pi\rho S.$$

Зокрема об'єм тора, утвореного обертанням круга радіуса r навколо осі, віддаленої від центра круга на відстань ρ (мал. 178)

$$V = 2\pi\rho \cdot \pi r^2 = 2\pi^2\rho r^2.$$

658. Знайдіть об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі x підграфіка функції:

а) $y = x^2$ на $[0; 2]$; б) $y = x + 2$ на $[0; 3]$;

в) $y = \sqrt{x}$ на $[4; 9]$; г) $y = \sin x$ на $[0; \pi]$.

659. Знайдіть об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі x фігури, обмеженої лініями:

а) $y = 2x$, $y = x + 3$, $y = 0$;

б) $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$;

в) $y = 2 - x^2$, $y = 1$;

г) $y = x^2$, $y = x + 2$.

660. Кулю радіуса 5 см циліндрично просвердлено вздовж осі. Діаметр отвору 6 см. Знайдіть об'єм частини кулі, що залишилась.

661. Знайдіть об'єм тіла, утвореного обертанням квадрата навколо осі, яка проходить через його вершину, паралельно діагоналі. Довжина діагоналі дорівнює d.

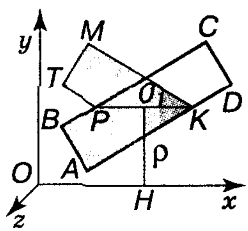
662. Знайдіть об'єм тіла, утвореного обертанням правильного шестикутника із стороною a навколо його сторони.

663. Знайдіть об'єм тіла, утвореного обертанням круга радіуса r навколо дотичної до його кола.

664*. Дано круговий сегмент радіуса r і висоти $0{,}5r$. Знайдіть об'єм тіла, утвореного обертанням цього сегмента навколо осі, яка проходить через кінець дуги сегмента, паралельно його осі симетрії.

665. Доведіть, що об'єм тіла, утвореного обертанням прямокутника навколо осі, яка лежить в його площині і не перетинає його, дорівнює добутку площі прямокутника на довжину кола, описаного його центром.

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Нехай прямокутник $ABCD$ з центром O_1 обертається навколо осі x, віддаленої від O_1 на відстань ρ (мал. 209), а пряма, яка проходить через O_1 паралельно осі x, перетинає сторони прямокутника в точках K і P. Трапецію $KPCD$ рухом можна відобразити на трапецію $PKMT$. Ці рівні трапеції при обертанні навколо осі x опишуть тіла рівних об'ємів. Тому шуканий об'єм тіла дорівнює об'єму тіла, утвореного обертанням навколо осі x многокутника $ABPTMK$. Якщо площа цього многокутника і площа трикутника BPT дорівнюють відповідно S і S_1, то за твердженням з прикладу 4 шуканий об'єм



Мал. 209

$$V = 2\pi\rho\,(S + S_1) - 2\pi\rho S_1 = 2\pi\rho S.$$

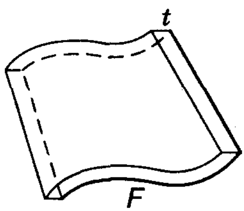
666. Знайдіть об'єм тіла, утвореного обертанням квадрата зі стороною a навколо осі, яка лежить у площині цього квадрата і віддалена від його центра на відстань a.

667*. Чи можна в твердженні задачі 665 прямокутник замінити будь-якою центрально-симетричною плоскою фігурою?

§ 38 Площі поверхонь

Формули для обчислення площ поверхонь циліндра і конуса в § 26 і § 27 виведено через розгортки цих поверхонь. Такі міркування не зовсім строгі, до того ж сферу розгорнути на площину неможливо. Тому потрібно розширити поняття площі поверхні.

Якщо на многокутник чи круг площі S нанести шар фарби товщиною t, то об'єм нанесеної фарби дорівнюватиме St. Досвід показує, що з досить великою точністю це правильно для будь-яких поверхонь. Яка б не була поверхня площі S (циліндрична, конічна, сферична та ін.), то для нанесення на неї шару фарби товщиною t необхідно затратити фарби об'ємом $V = St$.



Мал. 210

Розглянемо математичну модель цього фізичного факту. Нехай дано довільну поверхню F, але таку, що в кожній її точці можна побудувати площину, дотичну до даної поверхні. Саме такими є поверхні циліндра, конуса, кулі, тора. Уявімо, що від кожної точки поверхні F в один бік проведено відрізок довжини t, перпендикулярний до площини, яка дотикається поверхні у цій точці. Утворену всіма такими відрізками фігуру називають шаром товщини t на поверхні F (мал. 210). Якщо V_t — об'єм цього шару, а S — площа даної поверхні, то $V_t \approx St$, звідки $S \approx \frac{V_t}{t}$. Ці наближені рівності тим точніші, чим менша товщина шару t. Тому є рація прийняти таке означення.

***Площею поверхні** називається границя відношення об'єму шару на цій поверхні до його товщини, якщо товщина шару прямує до нуля.* Тобто

$$S = \lim_{t \to 0} \frac{V_t}{t}.$$

Якщо дана поверхня — многокутник або круг площі S, то шар товщини t на ній — призма або циліндр об'єму St. У цьому випадку

$$\lim_{t \to 0} \frac{V_t}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{St}{t} = S.$$

Для бічної поверхні циліндра радіуса r і висоти h

$$V_t = \pi (r + t)^2 h - \pi r^2 h = \pi h\,(2rt + t^2).$$

Тому її площа

$$S = \lim_{t \to 0} \frac{V_t}{t} = \lim_{t \to 0} \pi h\,(2r + t) = 2\pi rh.$$

Для бічної поверхні конуса, твірна якого $AD = l$, а радіус $DD_1 = r$, об'єм V_t шару товщини t дорівнює об'єму тіла, утвореного обертанням прямокутника $ABCD$ навколо осі x (мал. 211). Нехай $\rho = OO_1$ — відстань від центра прямокутника до осі x. Тоді $V_t = 2\pi\rho lt$ (див. задачу 665). Якщо $t \to 0$, то $C \to D$ і $\rho \to 0{,}5r$. Отже,

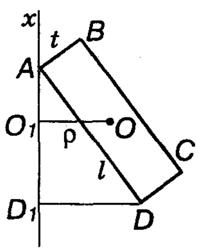
$$S = \lim_{t \to 0} \frac{V_t}{t} = \lim_{t \to 0} 2\pi\rho l = 2\pi \cdot 0{,}5rl = \pi rl.$$

Як бачимо, нове означення площі поверхні не суперечить попереднім його трактуванням.

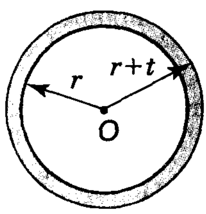
ТЕОРЕМА 37. **Площа сфери радіуса r дорівнює $4\pi r^2$.**

ДОВЕДЕННЯ. Нехай дано сферу радіуса r (мал. 212). Шар товщини t для неї — тіло, що міститься між двома концентричними сферами радіусів r і $r + t$. Його об'єм

$$V_t = \frac{4}{3}\pi\,(r + t)^3 - \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi\,(3r^2t + 3rt^2 + t^3).$$



Мал. 211



Мал. 212

Отже, площа поверхні даної сфери

$$S = \lim_{t \to 0} \frac{V_t}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{4}{3}\pi\,(3r^2 + 3rt + t^2) = 4\pi r^2. \ \square$$

Зверніть увагу, що, доводячи теорему, ми знаходили границю відношення приросту об'єму кулі до відповідного приросту її радіуса, якщо приріст радіуса прямує до нуля. А це ж — похідна. Тому міркувати можна й так:

$$S = \left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)' = \frac{4}{3}\pi \cdot 3r^2 = 4\pi r^2.$$

668^{0}. Знайдіть площу поверхні кулі радіуса 2 дм.

669^{0}. Знайдіть площу сфери, діаметр якої дорівнює 20 см.

670^{0}. Площа сфери дорівнює 3,14 дм^2. Знайдіть її радіус.

671^{0}. Об'єм кулі дорівнює V. Знайдіть площу її поверхні.

672^{0}. Площа поверхні кулі дорівнює S. Знайдіть її об'єм.

673^{0}. Знайдіть відношення площі поверхні кулі до площі її великого круга.

674^{0}. На фарбування круга радіуса 1 м треба 20 г фарби. Скільки такої фарби піде на фарбування кулі діаметром 1 м?

675^{0}. Знайдіть площу сфери, вписаної в куб, ребро якого 10 см.

676. Як відносяться площі сфер: вписаної в куб і описаної навколо нього?

677. Як відносяться площі сфер: вписаної в правильний октаедр і описаної навколо нього?

678. Об'єми двох куль відносяться, як $m : n$. Як відносяться площі їх поверхонь?

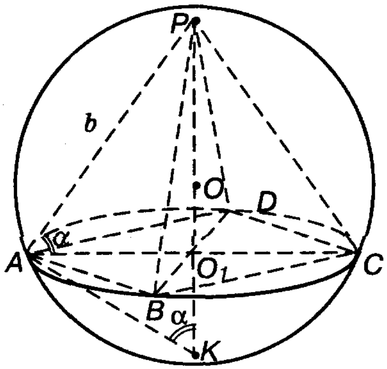
679^{0}. Точки A (2; 0; 3) і B (0; 4; 7) — кінці діаметра сфери. Знайдіть її площу.

680. Знайдіть площу сфери, описаної навколо прямокутного паралелепіпеда з вимірами 3 дм, 4 дм і 5 дм.

681. Знайдіть площу сфери, описаної навколо циліндра, радіус якого 5 см, а висота 10 см.

682. Знайдіть площу сфери, вписаної в правильну піраміду, апофема якої дорівнює m і нахилена до площини основи під кутом α. Обчисліть, якщо $m = 15$ см, $\alpha = 60°$.

683. У правильній чотирикутній піраміді бічне ребро дорівнює b і нахилене до площини основи під кутом α. Знайдіть площу сфери, описаної навколо піраміди.



Мал. 213

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Висота PO_1 даної піраміди $PABCD$ лежить на діаметрі PK описаної сфери (мал. 213). Кут PAK прямий, бо спирається на діаметр кола, яке проходить через точки A, P і K. Кути PKA і PAO_1 рівні, оскільки кожний з них доповнює кут APK до 90°. Якщо радіус сфери дорівнює r, то $PK = 2r$. З прямокутного трикутника PAK маємо:

$$2r = \frac{AP}{\sin \angle PKA} = \frac{b}{\sin \alpha}; \quad r = \frac{b}{2 \sin \alpha}.$$

Отже, площа сфери

$$S = 4\pi r^2 = 4\pi \frac{b^2}{4 \sin^2 \alpha} = \frac{\pi b^2}{\sin^2 \alpha}.$$

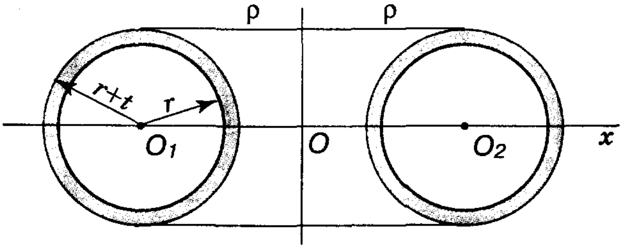
Відповідь. $S = \dfrac{\pi b^2}{\sin^2 \alpha}$.

684. У правильній трикутній піраміді сторона основи дорівнює a, а двогранний кут при ребрі основи α. Знайдіть площу вписаної сфери.

685*. У правильній чотирикутній піраміді сторона основи дорівнює a, а плоский кут при вершині піраміди α. Знайдіть площу вписаної сфери.

686. Доведіть, що площа сферичного сегмента радіуса r і висоти h дорівнює $2\pi rh$ (скористайтесь задачею 657).

687. Доведіть, що площу поверхні тора, радіуси якого ρ і r, можна визначати за формулою $S = 4\pi^2\rho r$.



Мал. 214

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Об'єм даного тора $V = 2\pi^2\rho r^2$ (див. с. 190).

$$V_t = 2\pi^2\rho\,(r + t)^2 - 2\pi^2\rho r^2 = 2\pi^2\rho\,(2rt + t^2)$$

(мал. 214). Тому

$$S = \lim_{t \to 0} \frac{V_t}{t} = \lim_{t \to 0} 2\pi^2\rho\,(2r + t) = 4\pi^2\rho r.$$

Інший спосіб.

$$S = (2\pi^2\rho r^2)' = 2\pi^2\rho \cdot 2r = 4\pi^2\rho r.$$

688. Знайдіть площу поверхні надутої велосипедної камери, радіуси якої 30 см і 30 мм.

689. Знайдіть площу частини сфери радіуса r, яка вирізається гранями прямого тригранного кута, якщо його вершина — центр сфери.

690. Знайдіть площу поверхні кулі, вписаної у тіло, яке утворене обертанням прямокутного трикутника з катетами 6 см і 12 см навколо гіпотенузи.

Самостійна робота 5

Варіант 1

1. Знайдіть об'єм циліндра, описаного навколо кулі радіуса r.

2. Знайдіть об'єм тіла, утвореного обертанням прямокутного трикутника з гіпотенузою c і гострим кутом α навколо гіпотенузи.

3. Площа поверхні кулі дорівнює S. Знайдіть об'єм кулі.

4. Знайдіть об'єм кулі, вписаної у правильний тетраедр, ребро якого дорівнює α.

Варіант 2

1. Знайдіть об'єм циліндра, вписаного в куб, ребро якого a.

2. Знайдіть об'єм тіла, утвореного обертанням трикутника ABC навколо прямої BC, якщо $AB = BC = b$ і $\angle ABC = 90° + \varphi$.

3. Знайдіть площу поверхні кулі, об'єм якої дорівнює V.

4. Знайдіть об'єм кулі, описаної навколо правильного тетраедра, ребро якого дорівнює a.

Запитання для самоперевірки

1. Що таке об'єм тіла? Перелічіть властивості об'єму.

2. Доведіть теореми про об'єм прямокутного паралелепіпеда, призми, піраміди, циліндра, конуса, кулі. Напишіть відповідні формули.

3. Що розуміють під площею поверхні?

4. Доведіть формули для визначення площ поверхонь циліндра, конуса, кулі.

ІСТОРИЧНА ДОВІДКА

Об'єми деяких многогранників уміли знаходити ще в Стародавньому Єгипті. В одному папірусі, який дійшов до наших днів, крім інших, розв'язується задача про визначення об'єму зрізаної чотирикутної піраміди з висотою 6 і сторонами основ 4 і 2. Архімед умів знаходити об'єми навіть параболоїда, гіперболоїда і еліпсоїда обертання, а також площі поверхонь циліндра, конуса, кулі.

Нові методи визначення об'ємів геометричних тіл розробив італійський математик Б. Кавальєрі. Його міркування були нестрогими, інтуїтивними, бо посилався він на ще не доведені твердження, які вважав очевидними. Тільки згодом їх було доведено методами математичного аналізу. У даному підручнику основне твердження Кавальєрі прийнято за аксіому, тому всі теореми про визначення об'ємів доведені цілком коректно.

Строгу сучасну теорію об'ємів, площ та інших величин розробив відомий французький математик А. Лебег. На основі загального поняття міри він ввів нове, загальніше поняття інтеграла, який тепер називають інтегралом Лебега.

Кавальєрі Бонавентура
(1598—1647)

Італійський математик, викладач Болонського університету, автор «Геометрії», в якій викладено метод неподільних. По суті, він умів розв'язувати задачі, які тепер розв'язують, обчислюючи інтеграли $\int_a^b x^n dx$ при натуральних $n < 10$. Інші його праці: «Сто різних задач...», «Тригонометрія плоска і сферична, лінійна і логарифмічна».

Лебег Анрі Луї
(1875—1941)

Французький математик, доктор філософії. Один із засновників сучасної теорії функцій, створив теорію міри, ввів нове розуміння інтеграла — інтеграл Лебега. Нове поняття інтеграла дає можливість інтегрувати досить широкий клас функцій, а отже, розв'язувати багато важливих прикладних задач. З проблем середньої школи опублікував книги «Лекції про геометричні побудови», «Конічні перерізи», «Про вимірювання величин».

Задачі підвищеної складності

691. Кожний з гострих кутів AOB, BOC і COA дорівнює α. Знайдіть кути між площинами даних кутів.

692. Знайдіть лінійний кут двогранного кута правильного тетраедра.

693. Намалюйте многогранник, відмінний від куба, всі грані якого — квадрати.

694. Чи існує многогранник, який однією площиною можна розітнути на 5 многогранників?

695. Доведіть, що коли всі грані опуклого многогранника — трикутники, то їх число парне.

696. Доведіть, що коли всі грані многогранника — чотирикутники, то ребер він має у два рази більше, ніж граней.

697. Доведіть теорему Ейлера. Сума числа граней і вершин кожного опуклого многогранника на 2 більша від числа його ребер.

698. Чи існує многогранник, який має тільки сім ребер?

699. Знайдіть суму всіх плоских кутів опуклого многогранника, що має n вершин.

700. Дано зображення куба. Побудуйте спільний перпендикуляр для діагоналі цього куба і мимобіжного з нею ребра.

701. Через середину діагоналі куба перпендикулярно до неї проведено площину. Знайдіть площу перерізу, якщо ребро куба дорівнює a.

702. Яким може бути двогранний кут при бічному ребрі правильної п'ятикутної піраміди?

703. Доведіть, що в трикутній піраміді з прямим тригранним кутом при вершині квадрат площі основи дорівнює сумі квадратів площ бічних граней.

704. Доведіть, що коли всі грані тетраедра мають рівні площі, то всі вони рівні.

705. Дано довільний тетраедр. Чи може його перерізом бути ромб?

706. Стереометрія допомагає планіметрії. На площині дано три паралельні прямі і три точки. Побудуйте трикутник так, щоб його вершини лежали на даних прямих, а сторони або їх продовження проходили через дані точки.

707. Чотири площини, перетинаючись між собою, утворюють тетраедр. Скільки існує сфер, які дотикаються до всіх чотирьох площин?

708. Доведіть, що сума квадратів відстаней від довільної точки сфери до всіх вершин описаного куба стала.

709. Доведіть, що сума квадратів відстаней від довільної точки сфери до всіх вершин описаного правильного октаедра стала.

710. Через середину висоти зрізаної піраміди проведено переріз, паралельний основам. Знайдіть площу перерізу, якщо площі основ S і Q.

711. Доведіть, що кожна площина, яка проходить через середини протилежних ребер довільного тетраедра, ділить його на два многогранники рівних об'ємів.

712. Доведіть, що сума відстаней від будь-якої точки основи правильної піраміди до площин усіх її бічних граней стала. Чому вона дорівнює?

713. Доведіть, що сума відстаней від будь-якої внутрішньої точки правильного тетраедра до всіх його граней стала.

714. Доведіть, що коли h_1, h_2, h_3, h_4 — висоти тетраедра, а r — радіус вписаної кулі, то

$$h_1^{-1} + h_2^{-1} + h_3^{-1} + h_4^{-1} = r^{-1}.$$

715. Дві вершини куба лежать на осі циліндра, шість — на колах його основ. Знайдіть об'єм циліндра, якщо ребро куба дорівнює a.

716. Дві рівні сфери радіуса r дотикаються одна до одної і до граней двогранного кута $60°$. Знайдіть радіус третьої сфери, яка дотикається до граней двогранного кута і двох даних сфер.

717. Три кулі радіуса r дотикаються кожна до кожної і до площини. Знайдіть радіус кулі, яка дотикається до тієї ж площини і до кожної з даних куль.

718. Знайдіть плоский кут при вершині правильної n-кутної піраміди, якщо центри її вписаної і описаної куль збігаються.

719. Дві площини, паралельні основі піраміди, ділять її на три рівновеликих многогранники. У якому відношенні вони ділять висоту піраміди?

720. Знайдіть об'єм тіла, утвореного обертанням тупокутного трикутника з найменшою стороною a і протилежним кутом α навколо найбільшої його висоти, що дорівнює h.

721. З усіх конусів даного об'єму знайдіть конус, площа бічної поверхні якого найменша.

722. Який найменший об'єм може мати конус, описаний навколо кулі радіуса r?

723. Відношення висоти конуса до радіуса описаної кулі дорівнює n. Як відносяться об'єми цих тіл? При яких n задача має розв'язки?

724. Покажіть, що об'єми призми, піраміди, зрізаної піраміди, циліндра, конуса, зрізаного конуса, кулі можна обчислювати за формулою Сімпсона $V = \frac{1}{6}h\,(S_1 + 4S_c + S_2)$, де h, S_1, S_2, S_c — висота тіла, площі основ і середнього перерізу.

725. Всередині куба з ребром a міститься конус, вершина якого збігається з вершиною куба, а коло основи дотикається до трьох граней куба, які сходяться в протилежній вершині. Твірна конуса утворює з його віссю кут α. Знайдіть об'єм конуса.

726. Бічне ребро правильної чотирикутної піраміди дорівнює l і утворює з площиною основи кут α. У цю піраміду вписано рівносторонній циліндр так, що одна з його твірних лежить на діагоналі основи піраміди, а коло кожної основи дотикається до двох суміжних бічних граней піраміди. Знайдіть об'єм циліндра.

727. В Антарктиді близько 30 млн. км^3 льоду. На скільки метрів піднялась би вода в океанах і морях, якби він весь розтанув?

728. Знайдіть об'єм тіла, утвореного обертанням квадрата навколо осі, яка проходить через середини його сусідніх сторін. Сторона квадрата дорівнює a.

729. Тор дотикається до площини по колу радіуса r. Дотична до цієї площини куля радіуса r дотикається до тора також по колу. Знайдіть довжину цього кола і об'єм тора.

Додаток 1

Трикутники

Якщо сторони трикутника a, b, c, а протилежні їм кути α, β, γ, то

$$|b - c| < a < b + c,$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ,$$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$ — теорема косинусів;

$\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma} = 2R$ — теорема синусів.

Якщо c — гіпотенуза, а a, b — катети прямокутного трикутника, то:

$c^2 = a^2 + b^2$ — теорема Піфагора;

$$\frac{a}{c} = \sin\alpha, \quad \frac{b}{c} = \cos\alpha, \quad \frac{a}{b} = \operatorname{tg}\alpha, \quad \frac{b}{a} = \operatorname{ctg}\alpha.$$

Коло

1. Якщо A, B, C — точки кола з центром O, то $\angle ABC = \frac{1}{2}\angle AOC$.

2. Якщо AB і AC — дотичні до кола, а C і B — точки дотику, то $AC = AB$.

3. Центр кола, вписаного в трикутник, — точка перетину бісектрис.

Центр кола, описаного навколо трикутника,— точка перетину серединних перпендикулярів до сторін даного трикутника.

4. Якщо чотирикутник $ABCD$ вписаний у коло, то

$$\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180^\circ.$$

5. Якщо чотирикутник $ABCD$ описаний навколо кола, то

$$AB + CD = AD + BC.$$

6. Якщо a_3, a_4, a_6 — довжини сторін правильних трикутника, чотирикутника, шестикутника, вписаних у коло радіуса r, то

$$a_3 = r\sqrt{3}, \quad a_4 = r\sqrt{2}, \quad a_6 = r.$$

7. Якщо радіус кола r, то його довжина $C = 2\pi r$, а довжина дуги в n°

$$l = \frac{\pi r n}{180}.$$

Координати і вектори

1. Які б не були точки $A(a_1; a_2; a_3)$ і $B(b_1; b_2; b_3)$, то

$$AB^2 = (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2.$$

2. Якщо точки $A(a_1; a_2; a_3)$ і $B(b_1; b_2; b_3)$ — кінці відрізка, а $C(c_1; c_2; c_3)$ — його середина, то

$$c_1 = \frac{1}{2}(a_1 + b_1), \quad c_2 = \frac{1}{2}(a_2 + b_2), \quad c_3 = \frac{1}{2}(a_3 + b_3).$$

3. Рівняння площини, перпендикулярної до вектора $\vec{n} = (a; b; c)$

$$ax + by + cz + d = 0.$$

4. Рівняння сфери радіуса r з центром у точці $C(a; b; c)$

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2.$$

5. Для кожної точки $A(a_1; a_2; a_3)$ і початку координат $O(0; 0; 0)$

$$\overrightarrow{OA} = (a_1; a_2; a_3).$$

6. Якщо $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$, то $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$.

7. Для будь-яких векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і дійсних чисел m, n

$$m(\vec{a} + \vec{b}) = m\vec{a} + m\vec{b}, \quad (m + n)\vec{a} = m\vec{a} + n\vec{a},$$

$$|m\vec{a}| = |m| \cdot |\vec{a}|.$$

8. Які б не були вектори $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ і $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$, то

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3),$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1; a_2 - b_2; a_3 - b_3),$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\varphi = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

9. Якщо $ABCD$ — паралелограм, $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — паралелепіпед, то

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ — правило паралелограма,

$\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AD}$ — правило паралелепіпеда.

10. Завжди

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}, \quad \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}.$$

11. Якщо M — середина відрізка AB або точка перетину медіан $\triangle ABC$, то відповідно

$$\overrightarrow{XM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB}), \quad \overrightarrow{XM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XC}).$$

12. Якщо: $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB}$, то точки A і B збігаються;

$\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}$ — прямі AB і CD паралельні або збігаються;

$\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$ — точки A, B, C лежать на одній прямій;

$\overrightarrow{OA} = k\overrightarrow{OB} + p\overrightarrow{OC}$ — точки O, A, B, C однієї площини;

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$ — прямі AB і CD перпендикулярні.

Площі плоских фігур

прямокутника	$S = ab$ (a, b — сторони)
паралелограма	$S = ah$ (a, h — основа і висота)
	$S = ab \sin \alpha$ (a, b, α — сторони і кут)
ромба	$S = a^2 \sin \alpha$ (a, α — сторона і кут)
	$S = \frac{1}{2} dd_1$ (d, d_1 — діагоналі)
трикутника	$S = \frac{1}{2} ah$ (a, h — основа і висота)
	$S = \frac{1}{2} ab \sin \gamma$ (a, b, γ — сторони і кут)
	$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (a, b, c, $2p$ — сторони і периметр)
	$S = pr$ (p, r — півпериметр і радіус вписаного кола)

	$S = \frac{abc}{4R}$ (a, b, c, R — сторони і радіус описаного кола)
трапеції	$S = \frac{a + b}{2} h$ (a, b, h — основи і висота)
многокутника	$S = pr$ (p, r — півпериметр і радіус вписаного кола)
круга	$S = \pi r^2$ (r — радіус)

Площі поверхонь

циліндра	$S_б = 2\pi rh$, $S = 2\pi r(r + h)$
конуса	$S_б = \pi rl$, $S = \pi r(r + l)$
зрізаного конуса	$S_б = \pi l(r + r_1)$
кулі	$S = 4\pi r^2$
сферичного сегмента	$S = 2\pi rh$

Об'єми

призми	$V = Sh$
піраміди	$V = \frac{1}{3} Sh$
зрізаної піраміди	$V = \frac{1}{3} h (S + \sqrt{SS_1} + S_1)$
циліндра	$V = \pi r^2 h$
конуса	$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$
зрізаного конуса	$V = \frac{1}{3} \pi h (r^2 + rr_1 + r_1^2)$
кулі	$V = \frac{4}{3} \pi r^3$
кульового сегмента	$V = \pi h^2 \left(r - \frac{h}{3}\right)$

Таблиця квадратів

Додаток 2

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
3	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
4	1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
5	2500	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
6	3600	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
7	4900	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
8	6400	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
9	8100	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801
10	10 000	10 201	10 404	10 609	10 816	11 025	11 236	11 449	11 664	11 881
11	12 100	12 321	12 544	12 769	12 996	13 225	13 456	13 689	13 924	14 161
12	14 400	14 641	14 884	15 129	15 376	15 625	15 876	16 129	16 384	16 641
13	16 900	17 161	17 424	17 689	17 956	18 225	18 496	18 769	19 044	19 321
14	19 600	19 881	20 164	20 449	20 736	21 025	21 316	21 609	21 904	22 201
15	22 500	22 801	23 104	23 409	23 716	24 025	24 336	24 649	24 964	25 281

10 клас

1. Так. **2.** Так. **7.** Ні. **8.** Ні. **13.** Три різні площини — на 4, 6, 7 або 8 частин. **15.** Можна. **21.** Ні, якщо $a \parallel b$. **22.** Безліч. **24.** Ні. **26.** Ні. **28.** Ні. **33.** Не обов'язково. **34.** Відрізок BC не перетинає, а пряма BC може перетинати. **36.** Може. **41.** Врахуйте, що тетраедр має чотири грані. **42.** $P = 1{,}5a$, $S = a^2\sqrt{3} : 16$. **43.** $\approx 9{,}6$ см^2. **44.** Є. **45.** Шестикутник. **47.** Ні. **48.** Ні. **50.** Можна. **51.** Ні. **52.** Ні. **55.** 7,6 см. **56.** У 2 рази. **57.** 36 см; $5\frac{1}{7}$ см. **58.** 1 м; 7,5 м. **59.** 5 : 2. **60.** 32 см. **61.** Скористайтесь властивістю середньої лінії трапеції. **62.** Ні. **63.** Випливає, якщо $a \not\subset \alpha$. **64.** Можуть. **65.** Безліч. **67.** Безліч, якщо дана точка не лежить на даній прямій. **70.** Скористайтесь властивістю середньої лінії трикутника. **71.** 4 : 1. **76.** $\frac{9\sqrt{3}}{4}$ см^2. **77.** $\frac{a}{16}\sqrt{16b^2 - 5a^2}$. **78.** $(2 + \sqrt{2})\,l$, $\frac{l^2}{\sqrt{2}}$. **80.** Ні. **84.** Ні. **87.** Можуть. **88.** Ні. **89.** Ні. **93.** $2a + \frac{6\sqrt{2}}{5}a$. **96.** Ні. **98.** $16\sqrt{3}$ см^2.

102. Точка, відрізок, промінь, пряма. **103.** Можуть. **104.** Квадрата — може, трапеції — ні. **105.** Може. **106.** Ні. **107.** Ні. **108.** Променем, прямою або довільним кутом, меншим від розгорнутого. **113.** 1) 18 см^2. **114.** Ні. **116.** 1) Так; 2) ні; 3) ні. **119.** Так. **120.** 1) 0°; 2) 90°; 3) 60°. **121.** 1) 80°; 2) 60°. **122.** Безліч. **124.** Ні. **125.** Можуть. **126.** Ні. **127.** Так. **128.** По 60°. **129.** 1) $12\sqrt{2}$ см. **134.** Ні. **135.** Одну. **136.** Відрізків безліч. **137.** Ні. **138.** a^2. **140.** $m : n$.

141. 1 см або 0,6 см. **143.** $36\sqrt{2}$ см^2. **145.** Ні. **149.** Пряма, яка проходить через центр квадрата перпендикулярно до його площини. **150.** 1) 13 см; $0{,}75\sqrt{91}$ см^2. **152.** 30 см. **153.** $l\cos\alpha$. **154.** 90°. **160.** $a\sqrt{2}$, $2a$. **161.** $\sqrt{7}$ дм, 4 дм, 4 дм. **166.** На 10 см або 3 см. **167.** 12 см і 0 см або 16 см і 20 см. **168.** $\sqrt{a^2-(c+d)^2}$. **169.** $2a$. **170.** 16 м, 15 м. **171.** 8 м. **174.** 45 мм. **175.** a. **176.** $\frac{\sqrt{2}}{2}a$. **177.** 35 дм. **178.** Безліч. **179.** 24 см. **180.** 30°. **183.** $\approx 2{,}38$ м. **184.** ≈ 57 м. **185.** $90^\circ-\varphi$. **188.** 45°. **189.** 30°. **191.** По 45°. **192.** 3 м, $3\sqrt{3}$ м. **194.** Безліч. **195.** Ні. **196.** Можна. **197.** m, $m\sqrt{3}$. **198.** Безліч. **199.** Ні.

200. Так. **201.** Ні. **202.** 1) $a\sqrt{2}$; 2) $a\sqrt{3}$; 3) 60°. **203.** $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. **204.** $\frac{b}{2a}\sqrt{8a^2-2b^2}$. **206.** $a\sqrt{1{,}5}$, $\cos\varphi = 0{,}25$. **207.** $\cos\varphi = \frac{1}{3}$. **208.** 45°. **210.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **211.** а) Так; б) ні. **213.** 60°. **214.** $\frac{1}{3}$. **215.** Ні. **216.** а) 1 см^2; б) 3 дм^2. **217.** 9 см. **218.** 2 см. **219.** Ні. **221.** а) 1 : 4; б) 1 : 2. **222.** а) $30\sqrt{3}$ см^2, $210\sqrt{3}$ см^2. **223.** $\cos\varphi = \frac{\cos\beta-\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}$. **224.** а) 15 дм^2; б) 12,5 дм^2. **226.** 1, 3 і 2. **227.** $K_z\,(2;\,3;\,0)$, $K_y\,(2;\,0;1)$, $K_x\,(0;\,3;1)$. **228.** $C\,(2;\,-2;\,5)$. **229.** $B\,(1;\,-3;\,1)$. **230.** $\sqrt{66}$. **231.** Точка A. **232.** Ні. **233.** $3\sqrt{6}$. **234.** -4. **235.** $M\,(0;\,-2;\,0)$. **236.** 3; 4; 5. **238.** 0°, 45° і 45°. **239.** 1) $12\sqrt{2}$; $8\sqrt{3}$; 2) $2\sqrt{6}$; 3) $4:\sqrt{3}$. **240.** $C\,(4;\,1;\,3)$. **241.** а) $A_1\,(3;\,-2;\,0)$; б) $A\,(3;\,2;\,0)$. **242.** а) $A_1\,(a_1;\,a_2;\,-a_3)$. **243.** Куб. **247.** Рівні; не можна. **248.** 50°. **249.** 70°. **252.** Так; $k=2$. **256.** 1) Ні; 2) ні. **257.** $\overrightarrow{AB}=(2;\,5;\,3)$, $\overrightarrow{BA}=(-2;\,-5;\,-3)$. **258.** $\overrightarrow{BA}=(-a;\,-b;\,-c)$. **259.** 1) $\sqrt{14}$; 2) $\sqrt{41}$. **260.** 3 або -3. **261.** $\vec{a}=(3;\,6;\,-3)$ або $\vec{a}=(-3;\,-6;\,3)$. **262.** $\vec{a}+\vec{b}=(5;\,-1;\,3)$; $\vec{a}-\vec{b}=(-1;\,3;\,-7)$. **263.** $\vec{x}+\vec{y}+\vec{z}=(2;\,4;\,3)$. **264.** 1) $\overrightarrow{CP}$; 2) $\overrightarrow{AT}$; 3) $\overrightarrow{AE}$; 4) $\vec{0}$. **267.** Розгляньте паралелограм $BOCD$. Вектори $\overrightarrow{OA}$ і $\overrightarrow{OD}$ протилежні, тому $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$.

269. 1) $3\vec{a} = (9; -12; 6)$. **270.** 1) $2\vec{p} + 3\vec{q} = (16; 12; -10)$. **271.** $|3\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{123}$. **272.** 2) $130°$. **273.** 30. **274.** 2) -72. **275.** 1) 0; 2) -12. **276.** 150. **279.** Покажіть, що $\overline{CA} \cdot \overline{CB} = 0$. **280.** $mn - nm + 0 = 0$. **281.** -9. **282.** $D\ (0; 0; 1)$. **283.** Кут φ такий, що $\cos\varphi = \frac{4}{9}$. **284.** $5x - 3z + 2 = 0$. **285.** $3x - 4y + 7z + 26 = 0$. Врахуйте, що $\overline{AB} = (3; -4; 7)$. **286.** $ax + by + cz = 0$. **288.** Якщо A_0, B_0, C_0, D_0 — середини даних у задачі відрізків, то $\overline{A_0B_0} = \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{A_1B_1}) = \frac{1}{2}(\overline{DC} + \overline{D_1C_1}) = \overline{D_0C_0}$. **290.** $\overline{AD} \cdot \overline{BC} = (\overline{AC} + \overline{CD})(\overline{BA} + \overline{AC}) = \overline{AC} \cdot \overline{BA} + \overline{AC}^2 + \overline{CD} \times \times \overline{BA} + \overline{CD} \cdot \overline{AC} = \overline{AC}\ (\overline{BA} + \overline{AC} + \overline{CD}) = \overline{AC} \cdot \overline{BD} = 0$. **291.** Нехай G і G_1 — точки перетину медіан трикутників AML і CNK, а X — довільна точка простору. Доведіть, що $\overline{XG} = \overline{XG_1} = \frac{1}{6}(2\overline{XA} + 2\overline{XC} + \overline{XB} + \overline{XD})$. **292.** Якщо G, G_1 і G_2 — середини середніх ліній, а X — довільна точка простору, то $\overline{XG} = \overline{XG_1} = \overline{XG_2} = \frac{1}{4}(\overline{XA} + \overline{XB} + \overline{XC} + \overline{XD})$. **293.** $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\varphi}$. **294.** $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. Знайдіть скалярний квадрат вектора $\overline{AB} = \overline{AA_1} + \overline{A_1B_1} + \overline{B_1B}$. **296.** 1) $\frac{\sqrt{3}}{6}$; 2) $\frac{2}{3}$ або $\frac{1}{6}$. **297.** ≈ 52 Дж. **298.** Так, якщо дана точка не лежить в одній з паралельних площин, що проходять через дані мимобіжні прямі. **299.** Найбільше — на 15 частин.

300. $(1{,}5\sqrt{2} + \sqrt{5})\ a$. **301.** $2\sqrt{5}\ a$. **302.** Тетраедр. **303.** Паралелограм. **304.** $a : \sqrt{3}$. **306.** Чотири прямі, перпендикулярні до площини трикутника; одна з них проходить через центр вписаного кола. **307.** Якщо площина не перетинає прямих OA і OB, то вона перетинає пряму OC. **309.** Ні. **310.** $AP = PC$. **311.** $\cos\angle ABC = \sqrt{0{,}4}$. **313.** 2 : 1. **314.** $\sin\varphi = \sqrt{2} : 3$, $\varphi \approx 28{,}13°$. **315.** Кут φ такий, що $\cos\varphi = \operatorname{ctg}\alpha\ \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. **316.** $\cos\varphi = 1 : \sqrt{3}$. **317.** $\frac{1}{3}$. **318.** $c\sqrt{3} : 8$. **320.** $\sqrt{3}$. **321.** $G\left(\frac{a}{3}; \frac{b}{3}; \frac{c}{3}\right)$. **322.** $0 = \overline{AD} \cdot \overline{BC} = \overline{AD}\ (\overline{AC} -$

$- \overline{AB}) = \overline{AD} \cdot \overline{AC} - \overline{AD} \cdot \overline{AB}$. Застосуйте теорему косинусів до трикутників ACD і ABD. **323.** 1 : 3; 3 : 1. **324.** 7 : 13. Позначте точки, в яких січна площина перетинає прямі AD і BC, і розгляньте дві пари подібних трикутників. **325.** а) $\frac{\sqrt{2}}{4} a^2$. **327.** $\sqrt{\frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2)}$. **328.** $60°$.

11 клас

329. $70°$ і $110°$. **330.** $8\sqrt{3}$ см. **331.** 5 дм. **333.** 3,7 дм. **334.** $80°$. **335.** $10°$. **337.** 15 дм. **339.** Ні. **342.** $\arccos \frac{1}{\sqrt{3}}$. **343.** Безліч. **344.** Ні. **347.** Тетраедр. **349.** Існує. **351.** $4\sqrt{3}$ см^2. **353.** 18 м^2. **355.** 7 граней, 7 вершин, 12 ребер; a^2. **356.** $\frac{a^2}{2}(3+\sqrt{3})$. **357.** 4 см, 2,5 см, 6 см. **358.** $a^2\left(\sin\varphi + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. **360.** Ні. **362.** 28 і 14. **363.** $108°$. **364.** $l \sin\alpha$. **365.** Так. **366.** а) $2a^2 + 4ah$; б) $\sqrt{2a^2 + h^2}$. **367.** а) $d^2 \sin\alpha \cos\alpha$. **368.** $120\sqrt{2}$ см^2. **369.** 4 см. **371.** $2{,}25\sqrt{3}$ см^2. **372.** $2\sqrt{2}\ S$. **374.** $\frac{3\sqrt{3}\ a^2}{16 \cos\alpha}$. **375.** $3a^2$. **378.** Нехай a, b, c — довжини сторін перерізу. Тоді $S = al + bl + cl = (a + b + c)\,l = Pl$. **380.** Може. **381.** Ні. **383.** 2) $2\,(ab + ac + bc)$. **384.** 6 см, 7 см, 12 см. **385.** $6a^2 \sin\alpha$. **386.** $45°$. **388.** $d \sin\alpha$, $d \sin\beta$, $d\sqrt{\cos^2\alpha - \sin^2\beta}$. **390.** а), б) Так. **391.** Ні. **393.** 1 : 5. **394.** $5\sqrt{13}$ см. Розгляньте розгортку призми. **396.** Ребер $2n$, граней і вершин по $n + 1$. **397.** 1) $b \sin\alpha$; 2) $2b \cos\alpha$. **398.** 2) $3l \cos\alpha$; 4) $3\sqrt{3}\ l^2(\cos\alpha + \cos^2\alpha)$. **399.** $\approx 42°$.

401. 24 см. **402.** $2\,(3 + \sqrt{3})$. **403.** $\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{2}$. **404.** $a\,(h + \sqrt{a^2 + h^2})$. **405.** $60\sqrt{2}$ см^2. **408.** $\frac{3a^2}{2\cos\alpha}\sqrt{4 - \cos^2\alpha}$. **409.** $\frac{a}{8}\sqrt{2b^2 - a^2}$. **411.** $0{,}25Q$. **412.** 16 см^2. **413.** 36 дм^2, $\approx$ 35 дм^2. **415.** 1) $3\sqrt{34}$ см; 2) $348\sqrt{2}$ см^2; 3) 3584 см^2.

417. $ah + \frac{a}{2}\sqrt{4h^2 + 3a^2}$. **418.** $4\sqrt{3}$ см. **419.** $\frac{\sqrt{5}}{6}b^2$. **420.** $2 : \sqrt{2}$. **421.** Так. **422.** 1) Ні; 2) так; 3) ні. **423.** Ні. **425.** 9. **429.** 16 см^2 і $8\sqrt{2}$ см^2. **430.** 1) $a^2\sqrt{3}$. **431.** $\arccos\frac{1}{3}$, 90°. **433.** $\sqrt{2}a : \sqrt{3}$. **434.** Можна. **441.** Так. **443.** Тільки шайба. **444.** $2\sqrt{3}$ дм^2. **446.** 1) $\frac{\sqrt{3}}{2}b^2$; 2) $2a^2 \sin\alpha$. **447.** Ні. **448.** $\sqrt{h^2 + 4r^2}$. **449.** 1) $\sqrt{d^2 - 4r^2}$; 2) $2r\sqrt{d^2 - 4r^2}$. **450.** 1) $d \sin\alpha$; 2) $0{,}5d \cos\alpha$. **451.** 1) Одна; 2) безліч. **452.** πS. **455.** $\sqrt{\frac{10}{\pi}}$, $\frac{15}{\sqrt{10\pi}}$. **456.** $Q : 4\pi$. **457.** $2\pi r^2 \operatorname{tg}\alpha$. **458.** $\frac{\pi}{2}d^2 \cdot \left(1 + \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right)$. **460.** 256 см^2. **461.** $2 : \sqrt{3}$. **462.** rh. **464.** $\approx 3{,}5$ м^2. **465.** Ні. **466.** $\frac{a}{2}\sqrt{1 + \sin^2\alpha}$. **467.** $a\sqrt{\frac{2}{3}}$. **469.** 10 м. **470.** 5 см, $5\sqrt{3}$ см. **471.** 90°. **473.** Ні, якщо кут при вершині осьового перерізу тупий. **474.** 24π см^2. **475.** ≈ 22 м^2. **476.** 1) $l \sin\alpha$; 3) $l^2 \sin\alpha \cos\alpha$. **477.** 60°. **478.** $\frac{r}{4}\sqrt{3r^2 + 4h^2}$. **480.** 1) 60°; 2) $2 \arcsin\frac{1}{4}$. **481.** Як квадрати радіусів, або квадрати твірних, або як площі основ. **482.** $h : \sqrt{2}$. **483.** 1) 4 дм; 2) 36 дм^2; 3) arccos 0,6. **485.** $3\pi l^2 \cos\alpha$. **486.** arccos 0,6. **488.** 4π м^2, 4π м. **489.** Ні. **490.** 30 см. **491.** 64π см^2. **492.** $0{,}75\pi r^2$. **493.** $\frac{\pi}{3}r$. **494.** $S = \pi(4 - x^2)$. **495.** 1) Дві площини, паралельні даній площині і віддалені від неї на r; 2) сфера радіуса r з центром у даній точці. **497.** $r + r_1$ або $|r - r_1|$. **498.** $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z = 11$. **499.** 8 сфер; рівняння однієї з них $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 4y - 4z = -8$.

500. Місто Київ проходить відстань $\approx$ 25,6 тис. км. **501.** Ці відстані рівні. **502.** $\pi r^2 \cos^2\alpha$. **504.** 24 см. **505.** O_1 (8; 4; 2), $\sqrt{53}$. **506.** 10 см або 70 см. **507.** $\approx 0{,}8$ км. **508.** 16 см. **514.** $3\pi\sqrt{3}$ см^2. **515.** $\frac{11+3\sqrt{5}}{4}a^2$. **516.** $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

518. $Q : \pi r$. **519.** $r^2 \operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2}$; ≈ 22 м^2. **520.** 1) $\frac{\sqrt{6}}{6} a$; 2) $\frac{\sqrt{2}}{2} a$.
521. $\frac{a}{2} \operatorname{ctg} \frac{180°}{n} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$. **522.** $2r \sin^2 \alpha$. **523.** $\frac{\sqrt{2}}{4} a$. **524.** $4\pi a^2 \sqrt{2}$.
525. $\frac{1}{3} V$. **526.** $\frac{1}{2} V$. **527.** 3,5 дм^3. **529.** 1 : 27. **531.** 60.
533. Так. **534.** Так. **535.** 4,5 дм^3. **536.** 1,95 дм^3. **537.** $Q\sqrt{Q}$.
538. 392 см^3. **539.** $\frac{\sqrt{3}}{9} d^3$. **540.** $6V^{\frac{2}{3}}$. **541.** ≈ 17500 м^3.
542. $\frac{1}{2} d^2 \cos^2 \alpha \sin \alpha$. **543.** 9 см. **544.** На 35 учнів.
545. 30 дм. **546.** 6 см. **548.** $ab\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \operatorname{tg} \alpha$.
549. $(d^2 - d_1^2)\sqrt{2d_1^2 - d^2}$. **550.** $d^3 \sin^2 \varphi \sqrt{\cos 2\varphi}$. **551.** $ab \times$
$\times \sqrt{4r^2 - a^2 - b^2}$. **552.** $l^3 \sin \varphi \cos \varphi \sqrt{\sin^2 \varphi \operatorname{ctg}^2 \alpha - \cos^2 \varphi}$,
36 см^3. **553.** $\frac{\sqrt{3}}{4} a^2 h$. **554.** 30 см^3. **555.** $\frac{\sqrt{3}}{4} d^3 \cos^3 \alpha \sin \alpha$.
556. $Ql \sin \alpha$. **557.** 168 дм^3. **558.** $a^3 \sin \alpha$. **559.** 39 000 м^3.
560. 12 см^3. **561.** 12 см^3. **562.** $\frac{5}{4} a^3 \operatorname{tg} 54°$. **563.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ см^3.
565. $\frac{\sqrt{3}}{4} a^3 \sin \alpha$. **567.** $\frac{S^2}{a} \cos \alpha \sin \alpha$. **568.** $\frac{1}{2} d^3 \sin^2 \alpha \cos \alpha$
$\operatorname{ctg} \beta$. **569.** $4ar^2$. **570.** $0{,}5\, Qm$. **571.** Ql. **573.** $33\frac{1}{3}$ см^3.
574. $\frac{1}{6} d^2 h$. **575.** $\frac{\sqrt{2}}{6}$ дм^3. **577.** Прийміть за основу піраміди
її бічну грань. **578.** $\frac{1}{6} abc$. **580.** 1) $\frac{1}{3} b^3 \sin 2\alpha \cos \alpha$;
3) $\frac{4}{3} b^3 \cos^2 \varphi \sqrt{-\cos 2\varphi}$. **581.** 10. **582.** 1 : 5. **583.** $\frac{\sqrt{2}}{12} a^3$.
584. $\frac{1}{3} abh \sin \varphi$. **585.** $\frac{\sqrt{2}}{3} a^3$. **586.** $\frac{1}{3} b^3 \sin^2 \alpha \sqrt{3 - 4\sin^2 \alpha}$.
587. $\frac{a^3}{16}$. **588.** 112 см^3. **589.** $\frac{140}{3}\sqrt{3}$. **590.** $\frac{5}{6} a^3$. **592.** 1 : 7.
594. 56. **595.** $\frac{7\sqrt{7}}{18}$. **596.** $1 : \left(\sqrt[3]{2} - 1\right)$. **598.** 200π см^3.
599. $\frac{\pi}{4} a^3$.

600. $\frac{\pi}{8} d^3 \sin 2\alpha \cos\alpha$. **601.** $\approx 3{,}77$ дм^3. **603.** 4 : 9. **604.** 1000 м^2. **605.** 1 : 4. **608.** 5400 м^2. Поділіть об'єм всього паперу на товщину. **609.** $\sqrt{3}\pi r^3$. **610.** а) 15π; б) $3\pi r^3$. **613.** $\pi a^3 \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} \operatorname{tg}\alpha : 8\sin^2\frac{\beta}{2}$. **615.** 96π см^3. **617.** 6 см. **619.** У 8 разів. **620.** $72\sqrt{3}\,\pi$ см^3. **622.** $\frac{\pi}{3} r^3 (2 \pm \sqrt{3})$. **623.** $\frac{\pi}{3}\left(\frac{2Q}{\sin 2\alpha}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \cos^2\beta \sin\beta$. **624.** $\frac{\pi}{3} b^3 \sin^3\frac{\beta}{2} \operatorname{tg}^3 \times \left(45° - \frac{\beta}{4}\right) \operatorname{tg}\alpha$. **626.** $\frac{\pi}{3} d^3 \cos^2\alpha \cdot (1 + \cos\alpha) \operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}$. **628.** $32\pi \cdot \sqrt{3}$. **629.** $\frac{2}{3}\pi r^3 \sin^2 2\varphi \cos^2\varphi$. **631.** 1032π см^3. **633.** $10\frac{2}{3}\pi$ см^3. **635.** $\frac{\pi}{6} a^3$. **636.** $\frac{\sqrt{3}}{2}\pi a^3$. **637.** 8 : 27. **639.** У 8 разів. **640.** Так. **642.** $\approx 5{,}7$ см. **643.** $33\frac{1}{3}$ %. **644.** ≈ 42 см. **645.** $\approx 8{,}4$ см. **646.** Менше від 4,18 т. **647.** 0,0004 мм. **648.** 0,5 кг/дм^3. **649.** $\frac{\pi}{3} r^3$ і πr^3. **650.** $\frac{\pi}{6} r^3$. **652.** $\frac{\pi l^3}{6\sin^3\alpha}$. **653.** $\frac{\pi h^3}{6\sin^6\varphi}$; 228π. **654.** $\frac{4}{3}\pi\left(h \operatorname{ctg}\alpha \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)^3$; 36π см^3. **655.** $\frac{\sqrt{6}}{27}\pi a^3$. **656.** 3600π см^3. **657.** Якщо кут α гострий, то шуканий об'єм V дорівнює сумі об'ємів кульового сегмента $\frac{\pi}{3} r^3(1 - \cos\alpha)^2 \cdot (2 + \cos\alpha)$ і конуса $\frac{\pi}{3} r^3 \sin^2\alpha \cos\alpha$. Розгляньте ще випадки, коли кут α прямий або тупий. **658.** а) $6{,}4\pi$; г) $0{,}5\pi^2$. **659.** б) $0{,}3\pi$. **660.** $85\frac{1}{3}\pi$ см^3. **661.** $0{,}5\pi d^3$. **662.** $4{,}5\pi a^3$. **663.** $2\pi^2 r^3$. **664.** $\frac{\pi}{12}\cdot(4\sqrt{3}\pi - 9)\, r^3$. **666.** $2\pi a^3$. **667.** Можна. **668.** 16π дм^2. **669.** 400π см^2. **670.** $\approx 0{,}5$ дм. **671.** $\sqrt[3]{36\pi V^2}$. **672.** $\frac{1}{6\pi}\sqrt{S^3\pi}$. **673.** 4. **674.** 20 г. **675.** 100π см^2. **676.** 1 : 3. **677.** 1 : 3. **678.** $m^{\frac{2}{3}} : n^{\frac{2}{3}}$. **679.** 36π. **680.** 50π дм^2. **681.** 200π см^2.

682. $4\pi\left(m\cos\alpha\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}\right)^2$. **684.** $\frac{\pi}{3}a^2\,\mathrm{tg}^2\,\frac{\alpha}{2}$. **685.** $\pi a^2\,\mathrm{tg}\times\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$. **688.** $360\pi^2$ см^2. **689.** $0{,}5\pi r^2$. **690.** 64π см^2.

691. $\arccos\left(\mathrm{ctg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}\right)$. **692.** $\arccos\frac{1}{3}$. **693.** Побудуйте на кожній грані куба зовні нього рівний йому куб. **694.** Існує. **695.** Якщо такий многогранник має n граней, то ребер у нього $3n : 2$. Це число ціле, тому n парне. **696.** Якщо такий многогранник має n граней, то ребер у нього $4n : 2$, тобто $2n$. **697.** Нехай многогранник має Г граней, В вершин і Р ребер. Число Г + В − Р не зміниться, якщо будь-яку його n-кутну грань (при $n > 3$) замінити n трикутними гранями, бо при цьому кожне з чисел Г + В і Р збільшиться на n. Тому досить обмежитись розглядом многогранників з трикутними гранями. Вилучимо з поверхні такого многогранника одну грань і підрахуємо число (Г − 1) + В − Р. Це число не змінюватиметься, якщо з утвореної сітки трикутників вилучати по одному крайньому трикутнику. Таким способом прийдемо до трикутника, для якого (Г − 1) + В − Р = 1. Отже, Г + В − Р = 2. **698.** Ні. **699.** $(n-2)\cdot 360^\circ$.

701. $3\sqrt{3}\,a^2 : 4$. **702.** $108^\circ < \alpha < 180^\circ$. **703.** Якщо бічні ребра піраміди a, b, c, то квадрат площі її основи дорівнює $a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2$. **704.** Добудуйте до даного тетраедра $ABCD$ піраміду $ABCC_1B_1$ таку, щоб утворилась призма $BCDAB_1C_1$. Якщо A_1 — центр паралелограма BCC_1B_1, то AA_1 — висота піраміди $ABCC_1B_1$. Далі покажіть, що $AB = DC$, $AC = BD$ і $AD = BC$. **705.** Може. **706.** Вважайте, що три дані прямі — бічні ребра трикутної призми, а дані точки лежать у площинах бічних граней. Побудуйте переріз такої призми площиною, що проходить через дані точки. Задача може мати 6 розв'язків. **707.** 5, 6, 7 або 8. **708.** Нехай A_i — вершина куба, O — його центр, M — точка на вписаній сфері. Тоді $\overline{MA_i} = \overline{MO} + \overline{OA_i}$. Піднесіть до квадрата 8 таких векторних рівностей і додайте їх.

710. $\frac{1}{4}(\sqrt{S} + \sqrt{Q})^2$. **711.** Якщо переріз — чотирикутник, то кожну з двох частин тетраедра розбийте на трикутну і чотирикутну піраміди. **712.** Скористайтесь формулою об'єму піраміди. **715.** $\frac{2\sqrt{3}}{9}\pi a^3$. **716.** $\frac{1}{3}(5 \pm \sqrt{13})\, r$. **717.** $\frac{1}{3} r$. **718.** $180^\circ : n$. **719.** $1 : \left(\sqrt[3]{2} - 1\right) : \left(\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}\right)$. **723.** $\frac{2 - n}{4} n^2$, $0 < n < 2$. **725.** $\frac{\sqrt{3}\,\pi a^3 \operatorname{ctg} \alpha}{\left(\sqrt{2} + \operatorname{ctg} \alpha\right)^3}$. **726.** $\frac{2\pi l^3 \cos^3 \alpha}{\left(1 + \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}\right)^2}$. **728.** $\frac{25\sqrt{2}}{48}\pi a^3$. **729.** $1{,}6\pi r$; $\frac{1}{8}\pi^2 r^3$.

ЗМІСТ

11 клас

РОЗДІЛ 5. МНОГОГРАННИКИ

РОЗДІЛ 6. ФІГУРИ ОБЕРТАННЯ

РОЗДІЛ 7. ОБ'ЄМИ І ПЛОЩІ ПОВЕРХОНЬ ТІЛ

Навчальне видання

БЕВЗ Григорій Петрович
БЕВЗ Валентина Григорівна
ВЛАДІМІРОВА Наталія Григорівна

ГЕОМЕТРІЯ

Підручник для 10–11 класів
загальноосвітніх навчальних закладів

Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України

Редактор *Г. В. Брезницька*
Художнє оформлення *С. В. Лопарєв*
Художній редактор *В. Б. Лопарєв*
Технічний редактор *І. Є. Гнатюк*
Комп'ютерна верстка *К. А. Сервецький*
Коректор *Т. О. Северина*

Підписано до друку 19.02.2002. Формат 84×108/32. Папір офсетний. Гарнітура шкільна. Друк офсетний. Умов. друк. арк. 11,76. Ум. фарбо-відб. 23,72. Обл.-вид. арк. 11,29. Наклад 50 000 пр. (1-й завод — 5 000 пр.). Вид. № 41. Зам. № 2-57. Ціна договірна.

«Вежа». 02125, Київ, вул. Старосільська, 2
тел. 512-25-09, 510-59-03

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру
видавців ДК № 362, 15.03.2001 р.

Віддруковано на ВАТ "Білоцерківська книжкова фабрика"
09117, м. Біла Церква, вул. Леся Курбаса, 4

ВЕЖА