Министерство образования и науки, молодежи и спорта Украины
Донбасская государственная машиностроительная академия (ДГМА)

В. Н. Черномаз, Л. В. Васильева, О. А. Медведева

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

Практикум

**для студентов направления подготовки
6.050101 «Компьютерные науки»,**

Утверждено на заседании
ученого совета ДГМА
Протокол № 1 от «28» _08_ 2012

Краматорск
ДГМА
2012

УДК 519.1
ББК 22.174
Ч 49

Рецензенты:

Елисеева О. К., д-р экон. наук, доцент, Днепропетровский национальный университет;

Чальцева И. В., канд. ф.-м. наук, профессор, Краматорский экономико-гуманитарный институт.

Посібник містить розділи: множини, дії над множинами; відносини; комбінаторика; елементи математичної логіки; основи теорії графів; містить необхідні теоретичні відомості, розв'язання типових задач і задачі для самостійного розв'язання.

Практикум призначений для студентів, які навчаються за спеціальностями «Інформаційні технології проектування» і «Системи і методи прийняття рішень».

Черномаз, В. Н.

Ч 49 Дискретная математика : практикум для студентов направления подготовки 6.050101 «Компьютерные науки» / В. Н. Черномаз, Л. В. Васильева, О. А. Медведева. – Краматорск : ДГМА 2012. – 80 с.
ISBN 978-966-379-582-9

Пособие включает разделы: множества, действия над множествами; отношения; комбинаторика; элементы математической логики; основы теории графов; содержит необходимые теоретические сведения, решение типовых задач и задачи для самостоятельного решения.

Практикум предназначен для студентов, обучающихся по специальностям «Информационные технологии проектирования» и «Системы и методы принятия решений».

УДК 519.1
ББК 22.174

ISBN 978-966-379-582-9

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Дискретная математика – одна из важных составляющих современной математики. С одной стороны, она содержит фундаментальные основы математики – теорию множеств, математическую логику, теорию алгоритмов; с другой стороны – является основным математическим аппаратом информатики и вычислительной техники.

Общая компьютеризация всех отраслей нашей деятельности и жизни вообще приводит к постоянному возрастанию спроса, как на программистов, так и на специалистов, разрабатывающих математические основы компьютерных технологий. Без преувеличения можно констатировать: теоретической основой любого программного обеспечения для современных компьютеров является дискретная математика.

Дисциплина «Дискретная математика» относится к циклу дисциплин профессиональной подготовки и является составляющей профессиональной подготовки студентов по специальностям:

7.05010102 «Информационные технологии проектирования»,

7.04030302 «Системы и методы принятия решений».

Знания, полученные при изучении этой дисциплины, обеспечивают изучение следующих дисциплин:

- «Теория алгоритмов»;
- «Объектно-ориентированное программирование»;
- «Технологии защиты информации»;
- «Системный анализ»;
- «Организация баз данных и знаний»;
- «Теория принятия решений»;
- «Математические методы исследования операций».

1 ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ И ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

1.1 Множества. Действия над множествами

Под множеством будем понимать совокупность определённых, вполне различимых объектов, рассматриваемых как единое целое.

Элементы множества – отдельные объекты, из которых состоит множество. Принадлежность или непринадлежность элемента множеству обозначаются $\in$ или $\notin$, например: $x \in X$ или $x \notin Y$.

Конечное множество – это множество, содержащее конечное число элементов.

Бесконечное множество – это множество, которое содержит бесконечное число элементов.

Пустое множество – это множество, не содержащее ни одного элемента. По определению: «Пустое множество есть подмножество любого множества S». Обозначается O.

Два множества являются *равными*, если они состоят из одних и тех же элементов. Из этого определения следует, что порядок элементов в множестве не существенен.

Например, если $S_1 = \{7, 4, 5, 6\}$ и $S_2 = \{4, 5, 6, 7\}$, то $S_1 = S_2$.

Во множестве не может быть неразличимых элементов:

$\{2, 2, 3, 5, 8\}$ – множеством не является,

$\{0, 2, 5, 10\}$ – является множеством.

Для того чтобы задать некоторое множество, нужно или перечислить все элементы, принадлежащие этому множеству, или сформулировать правило определения принадлежности. Например, множеству гренадеров будут принадлежать новобранцы с благообразными лицами, рост которых не менее 2 метров.

Рассмотрим примеры задания множеств.

1. Множеству M_1 принадлежат элементы a, b, c, d, e. Это множество задано перечислением его элементов.
2. Множество Z_+ всех натуральных чисел (включая 0).
3. Множество Z всех целых чисел.
4. Множество R всех действительных чисел.

Множества 2-4 заданы общими свойствами своих элементов.

5. Множество M_5 всех решений уравнения $\sin(x) = 1$. Известно, что решения этого уравнения имеют вид: $\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$, где k – произвольный элемент множества целых чисел (Z).
6. Множество M_6 всех студенческих групп первого курса академии.

Особенностью M_6 является то, что сами студенческие группы являются множествами конкретных студентов, т. е. M_6 является множеством множеств.

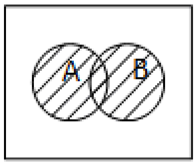
Мощностью конечного множества M называется количество его элементов (обозначается $|M|$).

Множество X является подмножеством Y, если любой элемент $x \in X$ принадлежит множеству Y, это принято записывать так: X⊆Y.

X – собственное подмножество Y, если X является подмножеством Y, и X не совпадает с Y, и X не является пустым X ⊂ Y.

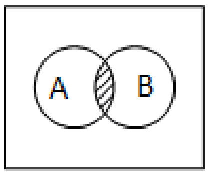
Диаграммы Эйлера – Венна. Вводится понятие *универсального* множества U (множества, содержащего все возможные элементы). Этот *универсум* для наглядности обозначается квадратом. Другие множества обозначаются овалами внутри этого квадрата.

1. *Объединением* множеств A и B называется множество всех элементов, которые являются элементами A или B:
A ∪ B={x | x ∈ A или x ∈ B}.
Некоторые свойства: A ⊆ A ∪ B, B ⊆ A ∪ B.



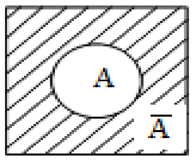
A∪B

2. *Пересечением* множеств A и B называется множество всех элементов, которые являются элементами обоих множеств, A и B:
A ∩ B = {x | x ∈ A и x ∈ B}.
Некоторые свойства: A ∩ B ⊆ A ⊆ A ∪ B,
A ∩ B ⊆ B ⊆ A ∪ B.



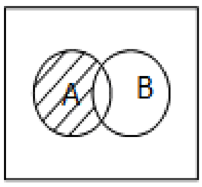
A∩B

3. *Абсолютное дополнение* (множество всех элементов, не принадлежащих множеству A:
$\overline{A}$ = {x | x ∉ A}.



4. *Вычитание* множеств или относительное дополнение множества A до множества B: A\B={x | x∈A, x∉B}.

Эта операция может быть осуществлена с помощью пересечения и дополнения: $A \setminus B = A \cap \overline{B}$.

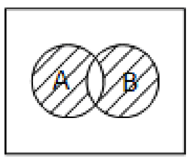


A\B

5. *Симметрическая разность*:

A∆B = (A\B) ∪ (B\A).

Есть еще один вариант обозначения: $A \oplus B$.



A∆B

Свойства действий над множествами. Алгебра теории множеств. Основные свойства действий над множествами приведены в табл. 1.1.

Таблица 1.1

№	Свойства объединения множеств	№	Свойства пересечения множеств
1	$A \cup B = B \cup A$ (коммутативность объединения $\cup$);	1′	$A \cap B = B \cap A$ (коммутативность пересечения);
2	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (ассоциативность $\cup$);	2′	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (ассоциативность $\cap$);
3	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (дистрибутивность $\cup$ относительно $\cap$);	3′	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (дистрибутивность $\cap$ относительно $\cup$);
4	$A \cup \varnothing = A$;	4′	$A \cap U = A$;
5	$A \cup \overline{A} = U$;	5′	$A \cap \overline{A} = \varnothing$;
6	$A \cup A = A$;	6′	$A \cap A = A$;
7	$A \cup U = U$;	7′	$A \cap \varnothing = \varnothing$;
8	$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ (закон де Моргана);	8′	$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ (закон де Моргана);
9	$A \cup (A \cap B) = A$ (закон поглощения);	9′	$A \cap (A \cup B) = A$ (закон поглощения).

Представление множества и его подмножеств двоичным кодом. Пусть задано некоторое конечное упорядоченное множество мощности n, например, $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $n = 7$. Будем считать, что это *универсум*. Конечное множество и все его подмножества в памяти ЭВМ удобно представлять двоичным кодом (характеристическим вектором или, что то же самое, «словом» заданной длины). Множеству U поставим в соответствие характеристический вектор (1 1 1 1 1 1 1), пустому множеству O поставим в соответствие вектор (0 0 0 0 0 0 0), множеству {2, 3, 5, 7} – характеристический вектор (0 1 1 0 1 0 1). Таким образом, между множеством всех подмножеств и множеством «слов» длины 7, записанных двумя символами «0» и «1», установлено взаимно однозначное соответствие. Следовательно, множество всех подмножеств множества из 7 элементов равно 2^7.

Утверждение. Если мощность конечного множества U равна $|U|$, то мощность множества всех его подмножеств равна $2^{|U|}$.

Пример. Пусть $A = \{a, b, c\}$. Подмножества будут иметь вид:

$\{O\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}$, т. е. $2^{|A|} = 2^3 = 8$.

Задачи с множествами, особенно на компьютере, удобно решать, используя характеристические векторы.

1. Операция объединения подмножеств $A \cup B$ может быть выполнена логическим сложением соответствующих элементов характеристических векторов этих подмножеств.

При объединении множеств $A \bigcup B$ соответствующие элементы характеристических векторов складывают по правилу:

$$0+0=0,$$
$$0+1=1,$$
$$1+0=1,$$
$$1+1=1.$$

2. Операция пересечения подмножеств $A \bigcap B$ может быть выполнена логическим умножением соответствующих элементов характеристических векторов этих подмножеств.

При пересечении множеств $A \bigcap B$ соответствующие элементы характеристических векторов считают по правилу:

$$0 \times 0 = 0,$$
$$0 \times 1 = 0,$$
$$1 \times 0 = 0,$$
$$1 \times 1 = 1.$$

3. При нахождении отрицания $\overline{A}$ нули меняют на единицы, единицы – на нули.

4. При нахождении разности $A \setminus B$, используют формулу $A \setminus B = A \bigcap \overline{B}$.

Например, пусть U = {1, 2, 3, 4, 5, 6}, A = {1, 2, 4, 5} и B = {3, 5}. Характеристическим вектором множества A является вектор $\vec{a} = (11\,0\,1\,1\,0)$. Характеристический вектор множества B равен $\vec{b} = (0\,0\,1\,0\,1\,0)$.

Вычислим характеристический вектор множества $A \bigcup \overline{B}$. Его можно записать следующим образом:

$\vec{a}$ или («не» $\vec{b}$) = (1 1 0 1 1 0) или (1 1 0 1 0 1) = (1 1 0 1 1 1).

Следовательно, $A \bigcup \overline{B}$ = {1, 2, 4, 5, 6}.

5. При нахождении симметричной разности $A \,\Delta\, B$ используют формулу $A \,\Delta\, B = (A \setminus B) \bigcup (B \setminus A)$.

Например, пусть U = {1, 2, 3, 4, 5, 6}, A = {1, 2, 4, 5} и B = {3, 5}. Характеристическим вектором множества A является вектор $\vec{a} = (11\,0\,1\,1\,0)$. Характеристический вектор множества B равен $\vec{b} = (0\,0\,1\,0\,1\,0)$.

1. Вычислим характеристический вектор множества $A \cup B$. Его можно записать следующим образом:

$$\vec{a} + \vec{b} = +\begin{array}{c} 110110 \\ \underline{001010} \\ 111110 \end{array}.$$ Следовательно, $A \bigcup B$ = {1, 2, 3, 4, 5}.

2. Вычислим характеристический вектор множества $A \bigcap B$. Его можно записать следующим образом:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \times \frac{\begin{array}{c} 110110 \\ 001010 \end{array}}{000001}. \text{ Откуда } A \bigcap B = \{6\}.$$

3. Вычислим характеристический вектор множества $\overline{A}$.

Вектор $\vec{a} = (110110)$, вектор $\overline{\vec{a}} = (0\,0\,1\,0\,0\,1)$. Тогда множество $\overline{A}$ ={3, 6}.

4. Вычислим разность $A \setminus B$, используя формулу $A \setminus B = A \bigcap \overline{B}$.

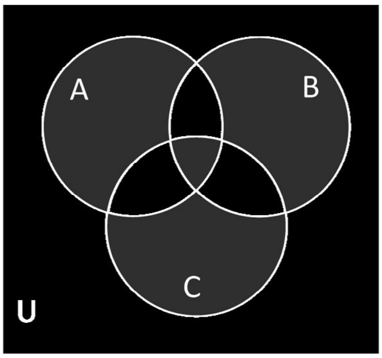
Характеристический вектор множества A: $\vec{a} = (1\,10110)$.

Характеристический вектор множества B: $\overline{\vec{b}} = (1\,10101)$.

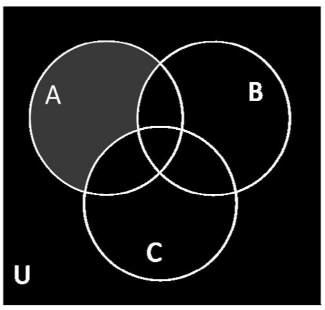
$$\vec{a} \times \overline{\vec{b}} = \times \frac{\begin{array}{c} 110110 \\ 110101 \end{array}}{110100}. \text{ Откуда A \ B = \{1, 2, 4\}.}$$

Примеры решения задач

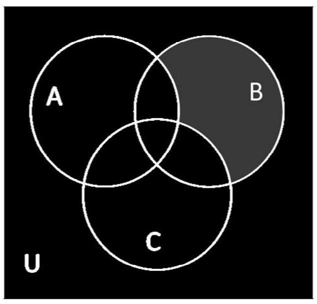
Пример 1.1.1. Опишите множества, соответствующие закрашенной части диаграммы:



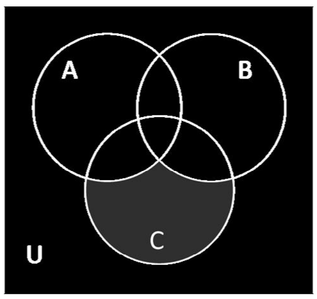
Последовательность действий:



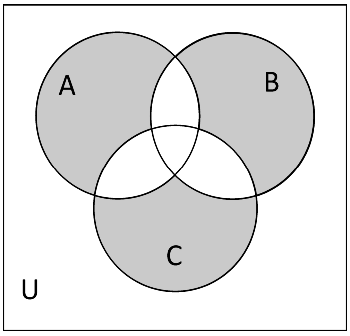
1) $A \setminus (B \bigcup C)$

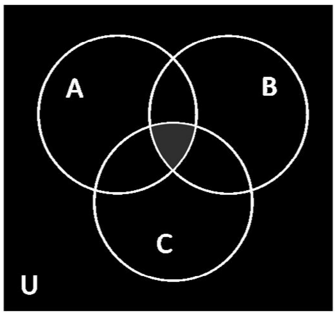


2) $B \setminus (A \bigcup C)$



3) $C \setminus (A \bigcup B)$





4) $(A\setminus(B\cup C)\cup B\setminus(A\cup C))\cup C\setminus(A\cup B))$ 5) $A\cap B\cap C$

Ответ: $(A\setminus(B\cup C))\cup B\setminus(A\cup C))\cup C\setminus(A\cup B))\cup(A\cap B\cap C)$

*Замечание***.** Очевидно, что такое описание формулой не единственно. Например, ответ можно «упростить», воспользовавшись законами булевой алгебры, и получить ответ, содержащий только операции объединения ($\cup$ – дизъюнкт), пересечения ($\cap$ – конъюнкт) и отрицания ($\neg$).

Существует единый алгоритм описания множества формулой в так называемой совершенной дизъюнктивной нормальной форме (СДНФ).

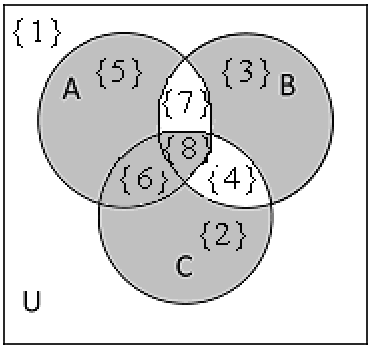
Покажем на примере.

Пример 1.1.2. Описать формулой в СДНФ множество, соответствующее закрашенной части диаграммы из примера 1.1.1.

Решение. Множества A, B, C разбивают на диаграмме Венна универсум на подмножества {1}, {2}, {3}, {4}, {5}, {6}, {7}, {8}.

Заштрихованная часть есть объединение множеств:

$$\{2\}\cup\{3\}\cup\{5\}\cup\{8\}=(\overline{A}\cap\overline{B}\cap C)\cup(\overline{A}\cap B\cap\overline{C})\cup(A\cap\overline{B}\cap\overline{C})\cup(A\cap B\cap C).$$



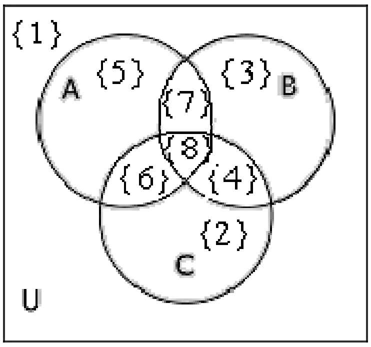
Используя возможность преобразования подмножества в СДНФ, можно решить и обратную задачу – по заданной формуле на диаграмме Венна определить область, соответствующую формуле. Рассмотрим типовой пример.

Пример 1.1.3. На диаграмме Венна указаны мощности множеств: $|\{1\}|=30$, $|\{2\}|=7$, $|\{3\}|=5$, $|\{4\}|=2$, $|\{5\}|=6$, $|\{6\}|=4$, $|\{7\}|=8$, $|\{8\}|=2$.

Необходимо:

а) заштриховать на диаграмме множество, которое задается формулой $\overline{(A\cup B)}\setminus C$;

б) определить мощность множества $\left|\overline{(A\cup B)\setminus C}\right|$.



Решение. Введем обозначения: если элемент принадлежит множеству, будем использовать символ 1 – истина, если не принадлежит, будем использовать символ 0 – ложь. Расчеты оформим в виде таблицы 1.2.

Таблица 1.2

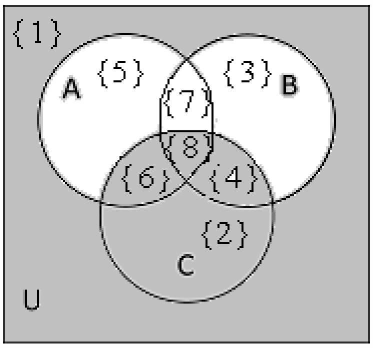
$x\in\{N\}$	$x\in A$	$x\in B$	$x\in C$	$A\cup B$	$(A\cup B)\setminus C$	$\overline{(A\cup B)\setminus C}$
{1}	0	0	0	0	0	1
{2}	0	0	1	0	0	1
{3}	0	1	0	1	1	0
{4}	0	1	1	1	0	1
{5}	1	0	0	1	1	0
{6}	1	0	1	1	0	1
{7}	1	1	0	1	1	0
{8}	1	1	1	1	0	1

Таким образом, получим следующие результаты:

а) $\overline{(A\cup B)\setminus C}=\{1\}\cup\{2\}\cup\{4\}\cup\{6\}\cup\{8\}=(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C})\cup$
$(\overline{A}\cap\overline{B}\cap C)\cup(\overline{A}\cap B\cap C)\cup(A\cap\overline{B}\cap C)\cup(A\cap B\cap C)$;

б) построим область на диаграмме Венна и найдем мощность множества:

$\left|\overline{(A\cup B)\setminus C}\right|=|\{1\}|+|\{2\}|+|\{4\}|+|\{6\}|+|\{8\}|=30+7+2+4+2=45$.



Пример 1.1.4. В комнате несколько человек, знающих хотя бы один из трех языков. Шестеро знают английский язык, шестеро немецкий, семеро французский. Четверо знают английский и немецкий, трое – немецкий и французский, двое – французский и английский. Один человек знает все три языка. Сколько человек в комнате? Сколько из них знают только английский язык?

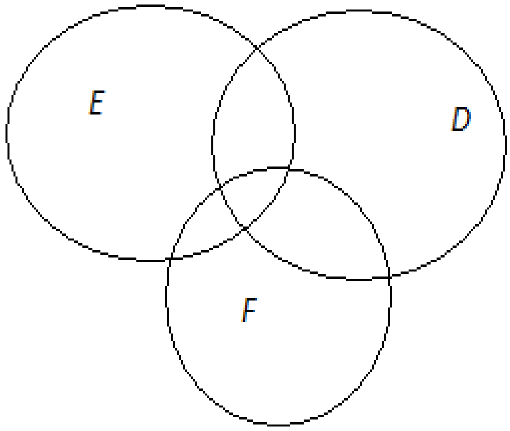
Решение. Введем в рассмотрение множества:

E = {множество людей, знающих английский язык},

D = {множество людей, знающих немецкий язык},

F = {множество людей, знающих французский язык}.

Изобразим диаграмму Венна в общем положении:



Запишем данные задачи, используя язык теории множеств. Нам известны мощности множеств:

$|E|$=6; $|D|$=6; $|F|$=7; $|E \cap D|$=4; $|D \cap F|$=3; $|E \cap F|$=2; $|E \cap D \cap F|$=1.

Из условия задачи следует, что $U = E \cup D \cup F$.

Используя информацию о мощностях, будем постепенно заполнять информацией диаграмму.

Начнем с $|E \cap D \cap F|$=1.

Тогда $|(E \cap D) \setminus (E \cap D \cap F)| = |E \cap D| - |E \cap D \cap F| = 4 - 1 = 3$;

$|(E \cap F) \setminus (E \cap D \cap F)| = 2 - 1 = 1$;

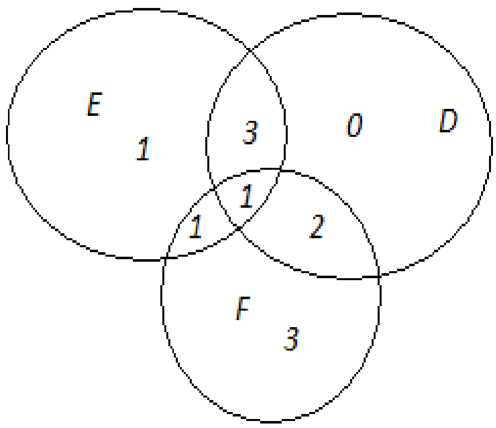
$|(F \cap D) \setminus (E \cap D \cap F)| = 3 - 1 = 2$;

$|E \setminus (D \cup F)| = |E| - (3 + 1 + 1) = 6 - 5 = 1$ – знают только английский язык.

$|F \setminus (E \cup D)| = |F| - (2 + 1 + 1) = 7 - 4 = 3$;

$|D \setminus (E \cup F)| = |D| - (3 + 1 + 2) = 6 - 6 = 0$;

$|U| = |E \cup D \cup F| = 1 + 0 + 3 + 1 + 3 + 2 + 1 = 11$ – в комнате 11 человек.



Ответ: 1 человек знает только английский язык. Всего в комнате 11 человек.

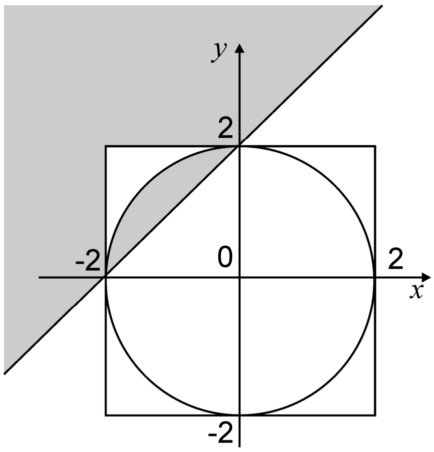
Пример 1.1.5. Пусть A, B и C — множества точек плоскости, координаты которых удовлетворяют перечисленным ниже условиям. Изобразите в системе координат $x0y$ множество D, полученное из множеств A, B и C по указанной формуле.

Условия:

$A=\{(x,y)\,|\,x+2\le y\}$; $B=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 4\}$; $C=\{(x,y)\,|\,|x|\le 2, |y|\le 2\}$,

Формула: $D=A\setminus(B\,\Delta\,C)$.

Решение. Множество B представляет собой множество точек круга радиуса 2 с центром в начале координат, включающего границу, A — множество точек плоскости, расположенных выше и на прямой $y=x+2$, и C — множество точек, лежащих внутри и на границе квадрата $|x|\le 2$ и $|y|\le 2$. Тогда:



1.2 Отношения

У элементов некоторого множества, рассматриваемого как универсум, есть «одно на всех» свойство принадлежности этому множеству. Однако если присмотреться, у подмножеств этого множества есть свои, присущие только им свойства. Более того, между различными подмножествами существуют взаимосвязи – отношения.

Отношения – один из способов задания взаимосвязей между элементами множества. Наиболее часто используют *унарные* и *бинарные* отношения.

Унарное отношение. Если всех студентов вуза рассматривать, как универсум, то при более пристальном рассмотрении их можно разбить на подмножества с особыми свойствами: быть первокурсником, быть студенткой, быть отличником, быть спортсменом и т. д. (все это примеры *унарных* отношений).

Унарные (одноместные) отношения отражают наличие определенного свойства R у элементов некоторого множества A (например, «быть студенткой» среди множества всех студентов).

Задание унарных отношений в памяти ЭВМ. Наиболее простой, но не рациональный способ, – задать унарное отношение R списком, то есть перечислить все элементы, обладающие свойством, задающим это отношение. В памяти ЭВМ такое представление является записью.

Другой, более рациональный, способ – упорядочить элементы конечного универсума и подмножеству, задающему унарное отношение, поставить в соответствие его характеристический вектор. В памяти ЭВМ такое представление является двоичным кодом. Пример показан в табл. 1.3.

Таблица 1.3

Универсум, «группа»	Иванова	Петров	Сидоров	Кузькина	Моськин	Битов
Унарное отношение «отличник», список	Иванова		Сидоров			Битов
Унарное отношение «отличник», характеристический вектор	1	0	1	0	0	1

Операции над унарными отношениями. Поскольку унарное отношение определяется подмножеством универсума U, то и операции над такими отношениями сводятся к операциям над множествами:

1. *Объединение* $R_1 \cup R_2 = \{ a \in R_1 \text{ или } a \in R_2 \}$.

Например, R_1 – «быть отличником», R_2 – «быть хорошистом». Тогда унарное отношение $R = R_1 \cup R_2$ – «учиться хорошо».

2. *Пересечение* $R_1 \cap R_2 = \{ a \in R_1 \text{ и } a \in R_2 \}$.

Например, пусть R_3 – унарное отношение «учиться на бюджете». Тогда, с учетом предыдущего примера, отношение R – «получать стипендию» можно записать так:

$R = (R_1 \cup R_2) \cap R_3$ – «учиться хорошо и учиться на бюджете».

В памяти ЭВМ составные унарные отношения можно определять как логические операции над соответствующими им характеристическими векторами. Пример показан в табл. 1.4

Таблица 1.4

Универсум, «группа»	Иванова	Петров	Сидоров	Кузькина	Моськин	Битов
Унарное отношение «отличник», список	Иванова		Сидоров			Битов
Унарное отношение «отличник», R_1, характеристический вектор	1	0	1	0	0	1
Унарное отношение «хорошист», R_2, характеристический вектор	0	1	0	0	1	0
Унарное отношение «учиться хорошо», $R_1 \cup R_2$, характеристический вектор	1	1	1	0	1	1
Унарное отношение «быть на бюджете», R_3, характеристический вектор	1	0	1	1	1	0
Унарное отношение «получать стипендию», $(R_1 \cup R_2) \cap R_3$, характеристический вектор	1	0	1	0	1	0

Таким образом, стипендию в этой группе получают Иванова, Сидоров, Моськин.

Бинарные (двухместные) отношения используются для определения взаимосвязей, которыми характеризуются пары элементов во множестве А («дружить», «любить», «быть моложе», «быть сыном», «быть подчиненным» – примеры бинарных отношений на множестве людей). Из школьной математики известны бинарные отношения (их в школе так и называли: «знаки числовых отношений»): $\leq$, $\geq$, $\neq$, =, <, >.

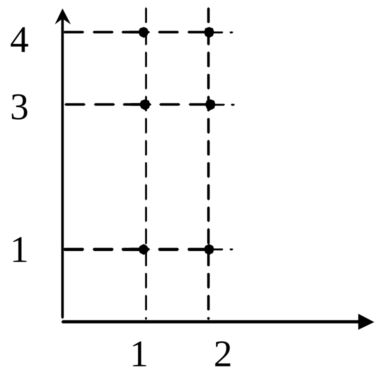
Для формального введения бинарных отношений нам понадобится понятие *прямое (декартово) произведение множеств.*

Пусть А и В – два множества.

Прямым (декартовым) произведением двух множеств A и B называется множество упорядоченных пар, в котором первый элемент каждой пары принадлежит множеству A, а второй элемент принадлежит B:

$$A \times B = \left\{ (a, b) \mid a \in A, b \in B \right\}.$$

Например**,** пусть A = {1, 2}, B = {1, 3, 4}. Тогда A ×B = {(1, 1), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 3), (2, 4)}. Геометрическое представление этого множества следующее:



Бинарное отношение. Пусть A и B – два множества. *Бинарным (двухместным) отношением R называется подмножество пар (a, b)* $\in$ *R* прямого произведения A × B, то есть R $\subseteq$ A × B. Если элементы *a* и *b* находятся в отношении *R*, то это записывают так: *a R b*.

Если A = B, то говорят, что *R есть отношение на множестве A:*

$$R \subset A \times A.$$

Обычно рассматривают бинарные отношения, заданные на одном множестве.

Замечание. Аналогично можно определить и 3-арные и вообще *n*-арные отношения, но в силу того, что информация в ЭВМ в основном подается в виде одномерного массива (вектора) и двумерного массива (матрицы), мы ограничимся бинарными отношениями.

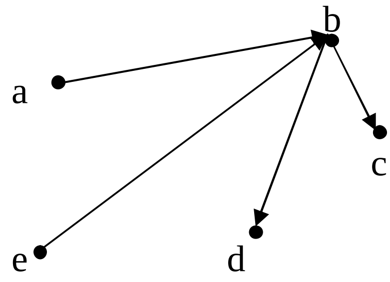
Задание бинарных отношений в памяти ЭВМ. Бинарное отношение *R* – это подмножество декартового произведения *R* $\subset$ *A* × *A*. Его можно задавать следующими способами:

1. Списком (перечислением) пар, на которых это отношение выполняется.

Например, на множестве A = {a, b, c, d, e} списком задано отношение *R* = {(a, b), (b, c), (e, b), (b, d)}.

2. Ориентированным графом. Наличие отношения между элементами $a\,R\,b$ отображают стрелкой, которая проведена из вершины a в вершину b.

Например, приведенное выше отношение R можно задать графом:



3. Характеристической матрицей (двумерным массивом), состоящей из нулей и единиц:

$$\|R\| = R[a,b] = \begin{cases} 1, & \text{если } a\,R\,b, \\ 0, & \text{если } a\,\overline{R}\,b. \end{cases}$$

Например, приведенное выше отношение R можно задать характеристической матрицей:

$$\|R\| = \begin{array}{c} \\ \begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{Bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \{a \quad b \quad c \quad d \quad e\} \\ \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \end{array}.$$

Операции над бинарными отношениями. Поскольку отношения – это подмножества декартового произведения $R \subset A \times A$, то для них определены те же операции, что и операции над множествами.

1.Объединением отношений является отношение

$$R = R_1 \cup R_2 = \left\{ (a,b) \;\middle|\; (a,b) \in R_1 \text{ или } (a,b) \in R_2 \right\}.$$

Построить отношение $R = R_1 \cup R_2$ можно, объединив соответствующим образом списки отношений R_1 и R_2 как подмножества или построив граф объединенного отношения.

Чтобы получить характеристическую матрицу объединенного отношения $\|R\| = \|R_1 \cup R_2\|$, необходимо логически сложить характеристические матрицы $\|R_1\|$ и $\|R_2\|$.

Пример 1.2.1. Отношения заданы списком: R_1 = {(a, b), (b, c), (e, b), (e, a)}, R_2 = {(a, b), (a, d), (d, e), (d, c), (c, b), (e, a)}.

Определить отношение $R = R_1 \cup R_2$.

Решение. Построим характеристические матрицы отношений R_1 и R_2:

$$\|R_1\| = \begin{array}{c} \\ \left\{\begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{matrix}\right\} \end{array} \begin{array}{c} \{\,a \quad b \quad c \quad d \quad e\,\} \\ \left\| \begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \right\| \end{array},$$

$$\|R_2\| = \begin{array}{c} \\ \left\{\begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{matrix}\right\} \end{array} \begin{array}{c} \{\,a \quad b \quad c \quad d \quad e\,\} \\ \left\| \begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \right\| \end{array}.$$

Характеристическая матрица отношения $R = R_1 \cup R_2$ равна логической сумме характеристических матриц R_1 и R_2 .

$$\|R\| = \|R_1\| + \|R_2\| = \left\| \begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \right\| + \left\| \begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \right\|$$

Получим, что $R = R_1 \cup R_2$ = {(a, b), (a, d), (b, c), (c, b), (d, c), (d, e), (e, a), (e, b)}.

2. *Пересечением отношений* является отношение:

$$R = R_1 \cap R_2 = \left\{ (a,b) \;\middle|\; (a,b) \in R_1 \; u \; (a,b) \in R_2 \right\}.$$

Построить отношение $R = R_1 \cap R_2$ можно пересечением списков отношений R_1 и R_2, рассматриваемых как подмножества.

Чтобы получить характеристическую матрицу отношения $R = R_1 \cap R_2$, необходимо поэлементно логически перемножить характеристические матрицы $\|R_1\|$ и $\|R_2\|$.

Пример 1.2.2. Используя отношения R_1 и R_2 из примера 1.2.1, найти отношение $R = R_1 \cap R_2$.

Решение:

R_1 = {(a, b), (b, c), (e, b), (e, a)},

R_2 = {(a, b), (a, d), (d, e), (d, c), (c, b), (e, a)}.

Построим характеристические матрицы отношений R_1 и R_2 .

$$\|R_1\| = \begin{array}{c c} & \{a \;\; b \;\; c \;\; d \;\; e\} \\ \begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{Bmatrix} & \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \end{array},$$

$$\|R_2\| = \begin{array}{c c} & \{a \;\; b \;\; c \;\; d \;\; e\} \\ \begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{Bmatrix} & \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \end{array}.$$

Характеристическая матрица отношения $R = R_1 \cap R_2$ равна логическому произведению характеристических матриц R_1 и R_2 .

$$\|R\| = \|R_1\| \times \|R_2\| = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Получим, что $R = R_1 \cap R_2$ = {(a, b), (e, a)}.

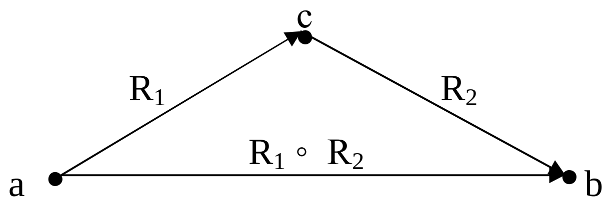
3. Композиция отношений. Пусть $R_1 \subset A \times C$ – отношение из A в C, а $R_2 \subset C \times B$ – отношение из C в B.

Композицией двух отношений $R = R_1 \circ R_2$ называется отношение $R \subset A \times B$ из A в B, определяемое следующим образом:

$$R = R_1 \circ R_2 = \left\{ (a,b) \,\middle|\, a \in A \ \text{и}\ b \in B, \textit{и существует}\ c \in C, \textit{такое, что}\ a R_1 c \ \text{и}\ c R_2 b \right\}$$

Композиция отношений на множестве А является отношением на множестве А.

Приведенное выше определение композиции можно трактовать как установление отношения между элементами a и b через обязательно существующего «посредника» c:



Чтобы получить характеристическую матрицу отношения $R = R_1 \circ R_2$, необходимо перемножить характеристические матрицы $\|R_1\|$ и $\|R_2\|$ по правилу перемножения матриц (строка на столбец), но под «суммой» и «произведением» подразумевать логические «сумму» и «произведение», то есть $r[i, j] = \sum_{k=1}^{n} r_1[i, k] \times r_2[j, k]$.

Пример 1.2.3. Используя отношения R_1 и R_2 из примера 1.2.1, найти отношение $R = R_1 \circ R_2$.

Решение:

$R_1 = \{(a, b), (b, c), (e, b), (e, a)\}$,

$R_2 = \{(a, b), (a, d), (d, e), (d, c), (c, b), (e, a)\}$.

Построим характеристические матрицы отношений R_1 и R_2.

$$\|R_1\| = \begin{array}{c} \\ \left\{\begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{matrix}\right\} \end{array} \begin{array}{c} \{\, a \quad b \quad c \quad d \quad e \,\} \\ \left\| \begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \right\| \end{array},$$

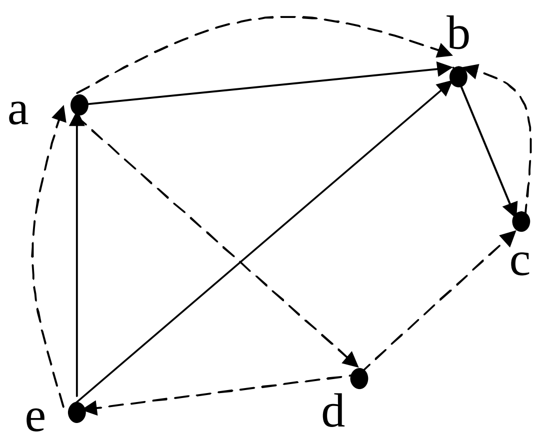
$$\|R_2\| = \begin{array}{c} \\ \left\{\begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array}\right\} \end{array} \begin{array}{c} \{\,a \quad b \quad c \quad d \quad e\,\} \\ \left\|\begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right\| \end{array}.$$

Построим характеристическую матрицу отношения $R = R_1 \circ R_2$:

$$\|R\| = \|R_1 \circ R_2\| = \left\|\begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right\| \times \left\|\begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right\| = \left\|\begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right\|.$$

Получим, что $R = R_1 \circ R_2$ = {(b, b), (e, b), (e, d)}.

Замечание. Чтобы увидеть, что отношение $R = R_1 \circ R_2$ устанавливается через «посредника», изобразим совместно ориентированные графы отношений R_1 и R_2 . При этом отношения на R_1 будем обозначать «$\longrightarrow$», отношения на R_2 будем обозначать «$\dashrightarrow$»:



«Посредник»

b $\longrightarrow$ c $\dashrightarrow$ b

e $\longrightarrow$ a $\dashrightarrow$ b

e $\longrightarrow$ a $\dashrightarrow$ d

1.3 Комбинаторика

Комбинаторика – раздел математики, посвященный решению задач выбора и расположения элементов некоторого, обычно конечного, множества в соответствии с заданными правилами. Каждое такое правило определяет способ построения некоторой конструкции из элементов исходного множества, называемого *комбинаторной конфигурацией*. Простейшими примерами комбинаторных конфигураций являются перестановки, размещения, сочетания и разбиения.

Рассмотрим алгоритмы построения некоторых комбинаторных конфигураций.

1. Если элемент a_1 можно выбрать n_1 способами, после каждого выбора следующий за ним элемент a_2 можно выбрать n_2 способами, …, после выбора элементов $a_1, \ldots, a_{k-1}$ элемент a_k выбирается n_k способами, т. е.

$$a_1 \to n_1,$$
$$a_2 \to n_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$a_m \to n_m,$$

то сколькими способами можно выбрать вектор $(a_1, \ldots, a_m)$?

Ответ: $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_m$.

Решение этой задачи называется основным принципом комбинаторики, или *принципом произведения*.

2. *Перестановки без повторений* – это число способов введения линейного порядка на множестве из n элементов.

$P_n = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!$ – перестановка n элементов в ряд.

$P_n = (n-1)!$ – перестановка n элементов в круг.

3. *Перестановки с повторениями.* Пусть имеется $\mathbf{n_1}$ предметов 1-го типа, $\mathbf{n_2}$ предметов 2-го, $\mathbf{n_m}$ предметов m-го типа и при этом $\mathbf{n_1} + \mathbf{n_2} + \ldots + \mathbf{n_m} = \mathbf{n}$. Количество разных перестановок предметов равно

$$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_m!}.$$

4. *Размещения без повторений* – это когда из n элементов множества требуется выбрать m элементов $(m \le n)$ и линейно их упорядочить:

$$A_n^m = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

При этом порядок расположения элементов в выборке важен и повторы элементов исключены.

Число A_n^m называют числом размещений без повторений из n по m.

5. *Размещения с повторениями.* Если имеется n типов предметов (количество предметов каждого типа неограниченно) и m позиций (ящиков, кучек, разрядов), то количество различных последовательностей при условии, что в позициях предметы могут повторяться, вычисляется по формуле

$$\overline{A}_n^m = n^m.$$

При этом порядок расположения элементов в выборке важен. Такие последовательности называют размещениями с повторениями.

6. *Сочетания без повторений* – это когда из n-элементного множества просто выбирается его m-элементное подмножество без упорядочивания. Число m-элементных подмножеств n-элементного множества обозначается через C_n^m и называется числом сочетаний из n по m.

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{m!} = \frac{n!}{m! \cdot (n-m)!}.$$

Порядок расположения элементов в выборке не важен, и повторы элементов исключены.

Замечание. Вышеприведенную формулу можно трактовать, как число способов разбить n-элементное множество на две группы, в одной из которых m элементов, в другой $(n – m)$ элементов.

7. Сочетания с повторениями – это когда m-элементные наборы составляются из предметов n видов.

$$\overline{C}_n^m = C_{n+m-1}^m = \frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!}.$$

Порядок расположения элементов в выборке не важен, и повторы элементов возможны.

Примеры решения задач

Пример 1.3.1. Сколько существует четырехзначных чисел, которые делятся на 5?

Решение. Четырехзначное число содержит четыре десятичных разряда. Старший разряд числа может быть заполнен любой из девяти цифр: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Нуль не может использоваться, так как иначе число будет трехзначным, а не четырехзначным. Второй и третий разряды заполняются любой цифрой из десяти. Младший разряд можно заполнить только нулем или пятеркой, так как число делится на пять, если оно оканчивается на 0 или 5. Таким образом, по правилу произведения общее число способов составления заданных чисел равно $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 2 = 1800$.

Пример 1.3.2. На книжной полке требуется расположить 12 различных книг. Сколькими способами это можно сделать?

Решение. Всего имеется 12 книг, которые надо расположить на книжной полке. Имеем дело с перестановками 12 элементов в ряд. Значит, существует 12! = 479001600 различных способов расположить книги на полке.

Пример 1.3.3. Найти количество перестановок букв слова «КОМБИНАТОРИКА».

Решение. В этом слове 2 буквы «К», 2 буквы «О», 1 буква «М», 1 буква «Б», 2 буквы «И», 1 буква «Н», 2 буквы «А», 1 буква «Т» и 1 буква «Р». Общее количество букв в слове равно 2 + 2 + 1 + 1 + 2 + 1 + 2 + 1 + 1 = 13. Количество перестановок букв этого слова определяем по формуле

$$\frac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot\ \ldots\ \cdot n_m!},$$

где $n = 13$, $n_1 = 2$, $n_2 = 2$, $n_3 = 1$, $n_4 = 1$, $n_5 = 2$, $n_6 = 1$, $n_7 = 2$, $n_8 = 1$, $n_9 = 1$.

Получаем $\dfrac{13!}{2!\cdot 2!\ \cdot 1!\cdot 1!\cdot 2!\ \cdot 1!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 1!} = \dfrac{13!}{16} = 389188800$ перестановок.

Пример 1.3.4. Из группы в 25 человек требуется выбрать старосту, заместителя старосты и профорга. Сколько существует вариантов выбора руководящего состава группы?

Решение. Так как порядок расположения элементов в выборке имеет значение и повторы элементов невозможны (один человек не может одновременно быть на нескольких должностях), то для решения задачи применяем формулу размещения без повторений

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!},$$

где $n = 25$, $m = 3$.

Получаем $A_{25}^3 = \dfrac{25!}{(25-3)!} = \dfrac{25!}{22!} = 23\cdot 24\cdot 25 = 13800$ вариантов.

Пример 1.3.5. Замок в автоматической камере хранения содержит 4 диска, на каждом из которых записаны цифры 0, 1, …, 9. Сколько различных кодов можно получить?

Решение. Так как порядок цифр в коде имеет значение и цифры могут повторяться, то для решения задачи применяем формулу размещения с повторениями

$$\overline{A}_n^m = n^m,$$

где $n = 10$, $m = 4$.

Получаем $\overline{A}_{10}^4 = 10^4 = 10000$ комбинаций.

Пример 1.3.6. Из группы в 15 человек нужно выбрать троих для организации дежурства. Сколькими способами это можно сделать?

Решение. Так как порядок расположения элементов в выборке не важен (не имеет значения, кого выбрали первым, кого – вторым, кого – третьим) и повторы элементов не возможны (один человек не может быть выбран в одну и ту же группу несколько раз), то для решения задачи применяем формулу сочетания без повторений

$$C_n^m = \frac{n!}{m! \cdot (n-m)!},$$

где n = 15, m = 3.

Получаем $C_{15}^3 = \frac{15!}{3! \cdot (15-3)!} = \frac{15!}{3! \cdot 12!} = \frac{13 \cdot 14 \cdot 15}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 455$ способов.

Пример 1.3.7. Требуется купить 7 пирожных. В магазине имеются пирожные следующих видов: эклеры, песочные, слоеные и наполеоны. Сколько существует вариантов выбора?

Решение. Так как порядок расположения элементов в выборке не важен и повторы элементов возможны, то для решения задачи применяем формулу сочетания с повторениями

$$\overline{C}_n^m = C_{n+m-1}^m = \frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!},$$

где n = 4, m = 7.

Получаем $\overline{C}_4^7 = C_{4+7-1}^7 = \frac{(4+7-1)!}{7! \cdot (4-1)!} = \frac{10!}{7! \cdot 3!} = \frac{8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 120$ вариантов.

1.4 Элементы математической логики

Логика как наука насчитывает несколько тысячелетий. Основы логики были заложены еще Аристотелем. Логику можно определить как сводку правил, позволяющих, опираясь на посылки, делать правильные умозаключения (выводы). То есть наука «Логика» учит человека «правильно думать».

«Математическая логика», как наука, имеет весьма отдаленное отношение к «Логике».

Математическая логика – это набор формальных правил, записанных специальным математическим языком и позволяющих «правильно думать» компьютеру.

Основным объектом математической логики является высказывание.

Высказывание – повествовательное предложение, о котором в заданных условиях можно однозначно сказать, является ли оно истинным или ложным. Высказывание является простым, если оно рассматривается как некое неделимое целое (аналогично элементу множества).

Примеры простых высказываний:

А – сегодня высокая влажность;

В – сегодня высокая температура;

С – я сегодня чувствую себя плохо.

Высказывание называется *сложным* (составным), если оно составлено из простых с помощью логических связок. В естественном языке роль связок играют такие грамматические средства: союзы («и», «или», «не»), слова «если… то», «тогда и только тогда».

Например: если высокая влажность или высокая температура, то я чувствую себя плохо.

При построении математической логики мы должны дать связкам точный математический смысл (определить математические операции над высказываниями).

Точный математический смысл логическим связкам придают с помощью понятия булевой функции.

Булевой функцией n аргументов называется функция вида $f: E_2^n \to E_2$, где $E = \{0,1\}$, т. е. это функция, принимающая только два значения: 0 – «ложь» и 1 – «истина», и аргументом этой функции являются n-мерные двоичные векторы.

Принято множество булевых функций от n аргументов обозначать так:

$$P_n := \{ f \mid E_2^n \to E_2 \}.$$

Поскольку число различных значений аргументов конечно, то любую булеву функцию можно просто задать таблично, указав, в какой из своих «точек» она принимает значение 0, а в какой 1. Такое табличное значение булевой функции называют *таблицей истинности*.

Если число аргументов n, то количество строк в таблице истинности булевой функции f равно 2^n.

Таблица истинности булевой функции $f(x_1, x_2, ... x_n)$:

x_1	x_2	. . . .	x_{n-1}	x_n	f – значение
0	0		0	0	
0	0		0	1	
0	0		1	0	
- - -	- - -		- - -	- - -	
1	1		1	0	
1	1		1	1	

Число различных булевых функций от n переменных тоже конечно и составляет: $|P_n| = 2^{2^n}$, т. е. с ростом n число булевых функций растет быстро.

Множество различных булевых функций одного аргумента (их всего $|P_1| = 2^{2^1} = 4$) не представляет практического интереса, так как описывает простые высказывания, а нас интересуют сложные. Среди булевых функций одной переменной отметим функцию отрицания: $f(x) = \bar{x}$.

Ее таблица истинности:

x	$\bar{x}$
0	1
1	0

Булевы функции двух переменных. Булевых функций двух переменных, x и y, всего $|P_2| = 2^{2^2} = 16$.

Перечислим их, задав их таблицы истинности:

x	y	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
Специальное обозначение		$\equiv 0$	$x \wedge y$					$x \oplus y$	$x \vee y$	$x \downarrow y$					$x \to y$	$x \mid y$	$\equiv 1$

Некоторые из этих функций в математической логике имеют специальное название и обозначение.

Выделим их особо.

$f_0(x, y) \equiv 0$ – *тождественный ноль*, эта функция при любых значениях аргументов (x, y) принимает значение «0» – ложь.

$f_{15}(x, y) \equiv 1$ – *тождественная единица*, эта функция при любых значениях аргументов (x, y) принимает значение «1» – истина.

Дизъюнкция. Функция $f_7(x, y) = x \vee y$ называется дизъюнкцией, «$\vee$» – знак связки, говорят: «Связка типа *или*». Ввиду ее важности выпишем еще раз ее таблицу истинности:

x	y	$x \vee y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

То есть дизъюнкция равна 1, если хотя бы одна переменная, x или y, равна значению 1 – истина. Часто дизъюнкцию называют *логическим сложением*.

Например, x – сегодня высокая влажность (аргумент x), y – сегодня высокая температура (аргумент y), z – чувствую себя плохо (функция f).

Тогда запись $Z = x \vee y$ – означает что данный человек чувствует себя плохо, когда x = 1 – высокая температура или y = 1 – высокая влажность, возможно и то и другое.

Конъюнкция. Функцию $f_1(x, y) = x \Lambda y$ (часто обозначают и так $x \cdot y$; $x \& y$) называют конъюнкцией, ее таблица истинности:

x	y	$x \Lambda y$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

То есть конъюнкция равна единице только в одном случае: когда x и y вместе равны 1.

Конъюнкцию часто называют логическим умножением.

Например, в условиях предыдущего примера конъюнкция $Z = x \Lambda y$ – означает «чувствую себя плохо» если x – «высокая влажность» и y – «высокая температура».

Ниже будет доказано, что любую из остальных булевых функций можно выразить, через $\bar{x}$ – отрицание, $x \vee y$ – дизъюнкцию и $x \wedge y$ – конъюнкцию, однако некоторые из других функций получили собственные имена и математические обозначения. Приведем их.

Неравнозначность: $f_6(x, y) = x \oplus y$.

Эта функция равна 1, когда значения ее аргументов различны, и равна 0, когда они равны, поэтому ее и называют неравнозначностью.

Функция истинности:

x	y	x⊕y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Например, в терминах предыдущего примера, $Z = x \oplus y$ принимает значение «истина», когда в наличии только один погодный фактор: либо высокая температура, либо высокая влажность.

Равнозначность (эквивалентность): $f_9(x, y) = x_1 \sim x_2$ (обозначают и так $x \leftrightarrow y$). Эта функция равна 1, когда значения ее аргументов равны оба «0» или оба «1».

Таблица истинности:

x	y	x~y
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Еще три функции имеют свои наименования.

Импликация $f_{13}(x, y) = x \to y$, читают: из x следует y.

Функция истинности:

x	y	x→y
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Стрелка Пирса $f_8(x, y) = x \downarrow y$.

Функция истинности:

x	y	x↓y
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Штрих Шеффера: $f_{14}(x, y) = x \mid y$.

Функция истинности:

x	y	x | y
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Формулы. Подставляя рассмотренные функции друг в друга и рассматривая функцию от функции, мы получим сложные логические формулы.

Пример 1.4.1. Записать логическими формулами следующее высказывание: если допоздна работаешь за компьютером и при этом пьешь много кофе, то утром просыпаешься в дурном расположении духа или с головной болью.

Решение. Обозначим простые высказывания:

x – допоздна работаешь за компьютером;

y – пьешь много кофе;

z – плохое настроение;

u – головная боль.

Тогда сложное высказывание, заданное в условии задачи, можно записать формулой: $(x \wedge y) \to (z \vee u)$.

Пример 1.4.2. Если социологические исследования показывают, что потребитель отдает предпочтение удобству и многообразию выбора, то фирме следует сделать упор на усовершенствование товара или увеличение многообразия новых форм.

Решение. Обозначим простые высказывания:

x – отдавать предпочтение удобству;

y – отдавать предпочтение многообразию выбора;

z – делать упор на совершенствование товара;

u – увеличивать многообразие форм.

Тогда сложное высказывание, заданное в условии задачи, можно записать формулой: $(x \wedge y) \to (z \vee u)$.

Как видно, одна и та же логическая формула может описывать разные по конкретному содержанию явления.

Верно и обратное, одно и то же явление может описываться разными по внешнему виду формулами.

Формулы, имеющие одинаковые таблицы истинности, будем называть равносильными (эквивалентными).

Проверить равносильность формул можно двумя способами.

Во-первых, способом эквивалентных преобразований, который обычно применяется в «непрерывной» математике.

Применяя этот способ, над одной из формул производят эквивалентные преобразования, пока не получат вторую.

Пример 1.4.3. Доказать равносильность формул:

$$x^3 - y^3 \Leftrightarrow (x-y)(x^2 + xy + y^2).$$

Решение:

$(x-y)(x^2 + xy + y^2) = x^3 + x^2y + xy^2 - x^2y - xy^2 - y^3 = x^3 - y^3$ – формулы равносильны.

Во-вторых, сравнением таблиц истинности формул, что обычно применяется в дискретной математике.

Две формулы эквивалентны, если они совпадают при всех возможных значениях аргумента, т. е. имеют одинаковые таблицы истинности.

Пример 1.4.4. Доказать эквивалентность формул:

$$x \downarrow y = \overline{x \vee y} = \bar{x} \wedge \bar{y}$$

Решение. Составим таблицы истинности формул.

x	y	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$x \downarrow y$	$x \vee y$	$\overline{x \vee y}$	$\bar{x} \wedge \bar{y}$
0	0	1	1	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	0	1	0	0
1	1	0	0	0	1	0	0

Формулы эквивалентны.

Приведем без доказательства список *эквивалентных формул*. Многие из них имеют место в математике вообще, как в «дискретной», так и в «непрерывной».

Список эквивалентных формул:

$$\left.\begin{matrix} x \wedge y = y \wedge x \\ x \vee y = y \vee x \end{matrix}\right\} \text{– коммутативность.}$$

$$\left.\begin{matrix} x \wedge y(y \wedge z) \\ x \vee y(y \vee z) \end{matrix} = \begin{matrix} (x \wedge y) \wedge z \\ (x \vee y) \vee z \end{matrix}\right\} \text{– ассоциативность.}$$

$$\left.\begin{matrix} x \wedge y(y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \\ x \vee y(y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \wedge z) \end{matrix}\right\} \text{– дистрибутивность.}$$

$$\left.\begin{matrix} x \wedge y = x \\ x \vee y = x \end{matrix}\right\} \text{– идемпотентность.}$$

$$\left.\begin{matrix} x \wedge 0 = 0 \\ x \vee 0 = x \end{matrix}\right\}, \left.\begin{matrix} x \wedge 1 = x \\ x \vee 1 = 1 \end{matrix}\right\} \text{– тождества с константами.}$$

$$\left.\begin{matrix} x \wedge (x \vee y = x \\ x \vee (x \wedge y = x \end{matrix}\right\} \text{– закон поглощения.}$$

$$\left.\begin{matrix} \overline{x \wedge y} = \bar{x} \vee \bar{y} \\ \overline{x \vee y} = \bar{x} \wedge \bar{y} \end{matrix}\right\} \text{– законы де Моргана (один из них доказан выше).}$$

$x \vee \bar{x} = 1$ – закон исключенного третьего.

$x \wedge \bar{x} = 0$ – закон противоречия.

$\bar{\bar{x}} = x$ – закон двойного отрицания.

$\bar{x} \wedge y \vee x = y \vee x$ – правило вычеркивания.

$x \to y = \bar{x} \vee y$.

$x \leftrightarrow y = x \wedge y \vee \bar{x} \wedge \bar{y}$.

$x \oplus y \quad x \wedge \bar{y} \vee \bar{x} \vee y$.

$x | y = \bar{x} \wedge \bar{y}$.

$x \downarrow y = \bar{x} \wedge \bar{y}$ – доказано выше.

Основные схемы логически правильных рассуждений. Еще Аристотелем был выделен набор правил (тавтологий), позволяющих делать логически правильные рассуждения.

Процесс получения новых знаний, выраженных высказываниями из других знаний, также выраженных высказываниями, называется рассуждением (умозаключением). Исходные высказывания называются посылками (причинами), а полученные высказывания – заключениями (следствиями).

Приведем в формальном виде основные приемы логически правильных рассуждений.

Пример 1.4.5. Правило заключения (Modus Ponens): $[(A \to B) \wedge A] \to B$ – если из высказывания *A* следует высказывание *B* и справедливо *A*, то справедливо и *B*.

Решение. Умозаключение логически правильное (является тавтологией), если оно истинно при любом наборе входящих в него аргументов.

Проверим это по таблице истинности:

A	B	$A \to B$	$(A \to B) \wedge A$	$[(A \to B) \wedge A] \to B$
0	0	1	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1

Булева алгебра. Совершенная дизъюнктивная нормальная форма (СДНФ). Выше мы ввели достаточно много различных операций над высказываниями: $\bar{x}$, $x \vee y$, $x \wedge y$, $x \downarrow y$, $x | y$, $x \oplus y$, $x \to y$, есть еще и другие. Возникает вопрос: не является ли этот набор избыточным? Ведь даже среди тригонометрических функций *sin(x), cos(x), tg(x),* ctg(x) можно было бы обойтись только *sin(x), cos(x),* так как $tg(x)=\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$, $ctg(x)=\dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$.

Минимально возможный набор функций, через которые можно выразить остальные, называется *функционально полной системой, или базисом*.

Базисы существуют и не единственны. На практике, особенно для реализации на компьютере, самыми удобными являются функции $\{\wedge;\ \vee;\ \neg\}$ – {конъюнкция; дизъюнкция; отрицание}. Набор этих функций образует конъюнктивно-дизъюнктивный базис.

Булевой алгеброй будем называть множество высказываний, заданных в конъюнктивно-дизъюнктивном базисе $\Omega=\{P_2;\ \wedge;\ \vee;\ \neg\}$.

Любое высказывание можно представить как некоторую функцию в конъюнктивно-дизъюнктивном базисе. Приведенный выше список эквивалентных формул называют *законами булевой алгебры*.

Способ перевода любого высказывания в совершенную дизъюнктивную нормальную формулу (СДНФ). Правило: чтобы логическое высказывание $f(x_1,x_2,...x_n)$ представить в конъюнктивно-дизъюнктивном базисе, необходимо выполнить действия:

1) составить таблицу истинности высказывания;

2) для каждого набора значений переменных $x_1,...x_n$, на котором функция $f(x_1,x_2,...x_n)$ равна 1, выписать конъюнкции всех переменных; над теми переменными, которые на этом наборе равны 0, ставятся отрицания;

3) все такие конъюнкции соединить знаком дизъюнкции.

Полученное выражение называется *совершенной дизъюнктивной нормальной формой функции* $f(x_1,x_2,...x_n)$ (СДНФ).

Пример 1.4.6. Записать функцию $x\to y$ в СДНФ.

Решение:

x	y	$x\to y$	СДНФ
0	0	1	$\bar{x}\wedge\bar{y}$
0	1	1	$\bar{x}\wedge y$
1	0	0	$\vee$
1	1	1	xy

Отсюда $x\to y=(\bar{x}\wedge\bar{y})\vee(\bar{x}\wedge y)\vee(x\wedge y)$ – это и есть совершенная дизъюнктивная нормальная форма функции $x\to y$.

Замечание. СДНФ можно упрощать, используя сводку формул. В данном случае, используя дистрибутивность и другие формулы, можно получить $x\to y=\bar{x}\vee y$.

Рекомендуется самостоятельно доказать формулы:

$$x \leftrightarrow y = xy \vee \bar{x}\;\bar{y};$$
$$x \oplus y = x\bar{y} \vee \bar{x}y;$$
$$x|y = \bar{x}\;\bar{y} + \bar{x}y + x\bar{y} = \bar{x} \vee \bar{y};$$
$$x \downarrow y = \bar{x}\;\bar{y}.$$

Пример 1.4.7. Логическую функцию $f(x, y, z) = (x \leftrightarrow \bar{y})((x \vee z) \wedge y)$ представить в СДНФ.

Решение. Для того чтобы воспользоваться описанным выше правилом построения СДНФ логической функции, построим ее таблицу истинности:

x	y	z	$\bar{y}$	$x \leftrightarrow \bar{y}$	$x \vee z$	$(x \vee z) \wedge y$	$(x \leftrightarrow \bar{y}) \to [(x \vee z) \wedge y]$	СДНФ
0	0	0	1	0	0	0	1	$\bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z}$
0	0	1	1	0	1	0	1	$\bar{x}\,\bar{y}\,z$
0	1	0	0	1	0	0	0	
0	1	1	0	1	1	1	1	$\bar{x}\,y\,z$
1	0	0	1	1	1	0	0	
1	0	1	1	1	1	0	0	
1	1	0	0	0	1	1	1	$x\,y\,\bar{z}$
1	1	1	0	0	1	1	1	$x\,y\,z$

Искомая СДНФ: $(x \to \bar{y}) \to [(x \vee z) \wedge y] = \bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z} + \bar{x}\,\bar{y}\,z + \bar{x}\,y\,z + x\,y\,\bar{z} + x\,y\,z$.

Предикаты. Предикат определяется следующим образом.

Предикат – это функция, область значений которой включена во множество $E_2 = \{0;\ 1\}$.

Более строго: *n*-местный предикат – это функция $P(x_1, x_2, \ldots x_n)$ от *n* переменных, принимающих значения из некоторых заданных предметных областей $x_1 \in B_1$; $x_2 \to B_2, \ldots x_n \in B_n$, а функция может принимать два значения: $E_2 = \{0;\ 1\} = \{$Ложь; Истина$\}$.

Понятие предиката объединяет в одно понятие высказывания, отношения, функции.

Например, высказывание «животное *x* ест пищу *y*», можно трактовать как двуместный предикат $P(x, y)$, который в зависимости от значения аргументов *x* и *y* принимает значение 0 и 1. Например: *x* = {заяц}, *y* = {морковь}. $P(x, y) = 1$, так как высказывание «животное заяц (*x*) ест морковь (*y*)» истинно.

Если же x = {волк}, y = {морковь}, то $P(x, y) = 0$, так как высказывание «животное волк (x) ест морковь (y)» ложно.

Например, отношение R «натуральное число x делится нацело на натуральное число y» можно задать как 2-местный предикат $P(x, y)$, который в зависимости от того, каковы значения x и y, принимает значения 0 или 1.

Так, $P(12; 3) = 1$ потому, что «12 делится нацело на 3» – истина; $P(13; 3) = 0$ потому, что «13 делится нацело на 3» – ложь.

Например, функцию $y = x^2$ можно также задать как двуместный предикат $P(x, y)$, который принимает значение 0, если $y \neq x^2$, и 1, если $y = x^2$, например: $P(3; 9) = 1$; $P(3; 10) = 0$.

Из простых предикатов, объединяя их логическими связками типа «$\vee$, $\wedge$, $\neg$», можно образовывать сложные предикаты – получим логику предикатов, аналогичную логике высказываний.

Кванторы общности ($\forall$) и существования ($\exists$). Логика предикатов имеет две собственные связки: ($\forall$) – квантор общности и ($\exists$) – квантор существования.

Высказывание «для всех x из ? предикат $P(x)$ истинный» с помощью квантора общности записывают так: $\forall x\ P(x) = 1$.

Высказывание «для какого-то $x \in$? предикат $P(x)$ истинный» с помощью квантора существования можно записать так: $\exists x\ P(x) = 1$.

Переход от $P(x)$ к $\forall x\ P(x)$ или $\exists x\, P(x)$ называется связыванием переменной x, или навешиванием квантора на переменную x. Навешивание квантора уменьшает местность предиката на единицу. Предикат $P(x, y, z)$ – трехместный; $\forall x\ P(x, y, z)$ – двухместный.

Предикат называется выполнимым, если на некотором наборе своих переменных он принимает значение 1 – истина, в противном случает он невыполним.

Пример 1.4.8. Выяснить местность и тип предиката $P = \forall x \exists y\ (zy = x^2)$, каждый аргумент принимает значение из множества Z целых чисел.

Решение. Так как на трехместный предикат $P(x, y, z) = (zy = x^2)$ навешено два квантора (на x и y), то предикат $P = \forall x\, \exists y\ (zy = x^2)$ – одноместный – $P(z)$.

Чтобы выяснить, является ли предикат $P(z)$ выполнимым, достаточно найти хотя бы одно z, при котором он равен 1.

В качестве такого z возьмем $z = 1$, получим $P(1) = \forall x\ \exists y\ (1 \cdot y = x^2) = 1$ для каждого $x \in Z$ $\exists\, y$ – на параболе $y = x^2$.

Замечание. Рекомендуется проверить, может ли $P(z)$ быть тождественно выполним. Оказывается, нет, так как при $z = 0$ $P(0) = 0$, потому что $P(0) = \forall x\ \exists y\ (0 \cdot y = x^2) = 0$ – не выполним.

1.5 Графы

Графы применяются при описании структуры и анализе функционирования сложных систем.

Граф – это конечное множество вершин S, некоторые из которых соединены множеством ребер U: $G\ (S, U)$ – граф.

Обычно вершины – это объекты, ребра – бинарные отношения между объектами.

$S = \{x_1, \ldots, x_n\}$ – множество вершин;

$U = \{u_1, \ldots, u_m\}$ – множество ребер.

Взаимное расположение, форма и длина ребер значения не имеют. Важно лишь то, что они соединяют вершины, т. е. отражают наличие связи между ними.

Если ребра графа – отрезки, то граф называется *неориентированным*. Если ребра графа – стрелки, указывающие направления, т. е. обозначают, какая из вершин является начальной, а какая – конечной, то граф называется *ориентированным*.

Возможен случай смешанного, частично ориентированного графа. Например, сеть автомобильных дорог в городе можно представить смешанным графом, дороги с двусторонним движением – отрезки с односторонним вектором.

Граф удобно изображать графически в виде рисунков, состоящих из точек (вершин) и линий (ребер), соединяющих некоторые из точек.

Вершины x_i и x_j называются *смежными*, если они соединены ребром (отрезком или стрелкой).

Вершина x_i *инцидентна* ребру u_j, если ребро x_i из нее выходит или в нее входит.

Для задания графов в памяти ЭВМ используют матрицы.

Пусть задан неориентированный граф $G(S,U)$, где $S = \{x_1, \ldots,\ x_n\}$ – вершины, $U = \{u_1, \ldots, u_m\}$ – ребра (отрезки).

Матрицей смежности неориентированного графа называется квадратная матрица

$S_{n\times n} = \left\| s_{ij} \right\|$ – размера $n \times n$,

где $S_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если вершины } x_i \text{ и } x_j \text{ смежны,} \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$

Матрица смежности неориентированного графа – симметрична.

Матрицей инцидентности неориентированного графа называется прямоугольная матрица

$R_{n\times m} = \left\| r_{ij} \right\|$ – размера $n \times m$, где

$$R_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если вершина } x_i \text{ инцидентна ребру } u_j, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Пусть задан ориентированный граф $G(S,U)$, где $S=\{x_1,\ldots,x_n\}$ – вершины, $U=\{u_1,\ldots,u_m\}$ – ребра (стрелки).

Матрицей смежности ориентированного графа называется квадратная матрица

$S_{n\times n}=\left\|s_{ij}\right\|$ – размера $n\times n$, где

$$S_{ij}=\begin{cases}1, & \text{если стрелка выходит из вершины } x_i \text{ и входит в вершину } x_j,\\ 0, & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

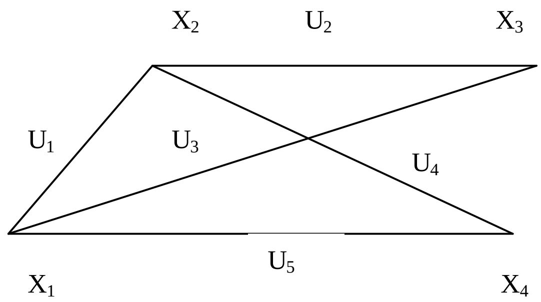
Матрица смежности ориентированного графа не симметрична.

Матрицей инцидентности ориентированного графа называется прямоугольная матрица

$R_{n\times m}=\left\|r_{ij}\right\|$ – размера $n\times m$, где

$$R_{ij}=\begin{cases}-1, & \text{если вершина } x_i \text{ – начало ребра } u_j,\\ 1, & \text{если вершина } x_i \text{ – конец ребра } u_j,\\ 0, & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Пример 1.5.1. Для заданного графа построить его матрицы смежности и инцидентности.

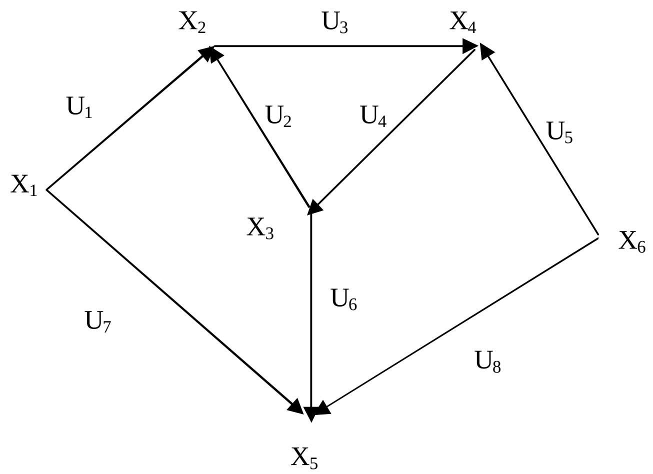


Решение. Граф неориентированный.

$$S=\begin{array}{c}\\ x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}x_1 & x_2 & x_3 & x_4\end{array}\\ \begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&0&0\\1&1&0&0\end{pmatrix}\end{array} \text{ – матрица смежности.}$$

$$R=\begin{array}{c}\\ x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc}u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5\end{array}\\ \begin{pmatrix}1&0&1&0&1\\1&1&0&1&0\\0&1&1&0&0\\0&0&0&1&1\end{pmatrix}\end{array} \text{ – матрица инцидентности.}$$

Пример 1.5.2. Для заданного графа построить его матрицы смежности и инцидентности.



Решение. Граф ориентированный.

$$S = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$ – матрица смежности.

$$R = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 & u_7 & u_8 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$ – матрица инцидентности.

1.6 Сети

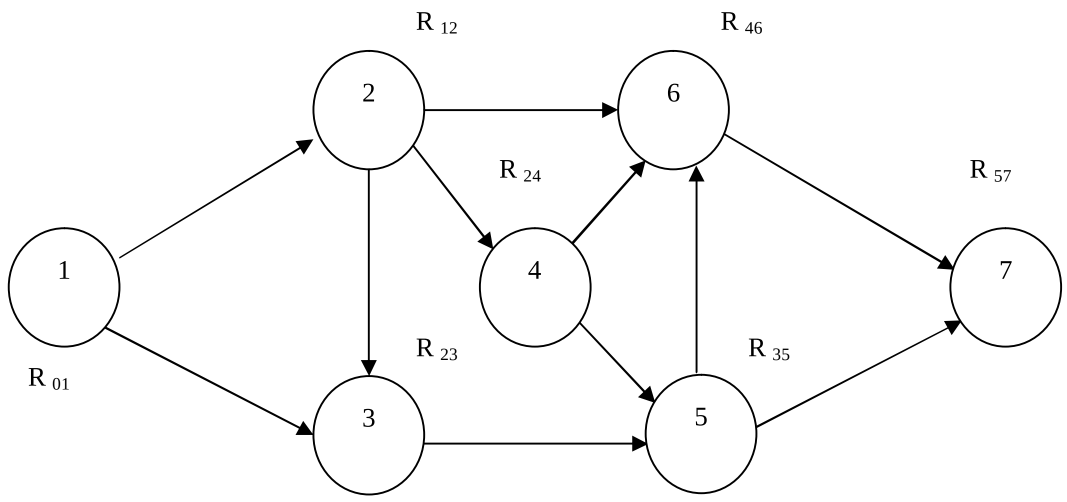
Сеть – частный случай ориентированного графа.

Сетью будем называть ориентированный граф, не содержащий циклов, у которого есть начало (источник) и конец (сток).

Алгоритм правильной нумерации вершин на сети. Во многих практических задачах на сети удобно использовать лексиграфический порядок при нумерации вершин. На сети установлен лексиграфический порядок нумерации вершин, если путь от вершины с меньшим номером к вершине с большим номером будет проходить только через вершины с возрастающими номерами.

Рассмотрим алгоритм на конкретном *примере*.

Пусть дана сеть:



1. Условно выделим все дуги, которые выходят из начальной вершины (источника). Назовем эту вершину вершиной нулевого ранга R_{01}. Рассмотрим вершины, в которые не заходят другие дуги, кроме выделенных. Эти вершины называют вершинами первого ранга. Пронумеруем их в произвольном порядке, придерживаясь непрерывной нумерации (в нашем случае это одна вершина R_{12}).

Как видим, у нас первый индекс – это номер ранга, второй индекс – номер вершины, начиная с истока.

2. Условно выделим все дуги, которые выходят из вершины первого ранга и в которые не заходят другие дуги, кроме выделенных. Назовем их вершинами второго ранга и перенумеруем их в произвольном порядке (в нашем случае это вершины R_{23}, R_{24}).

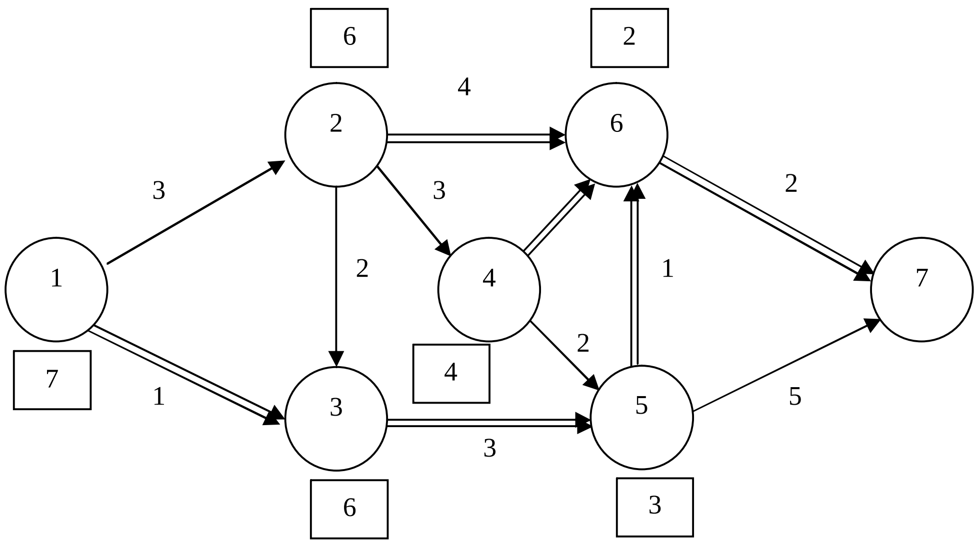
Далее поступаем индуктивно. Если мы присвоим вершинам (n – 1)-й ранг, то выделяем дуги, выходящие из вершин (n – 1)-го ранга. Множество вершин, в которые входят только ранее выделенные и никакие другие, называем вершинами n-го ранга. Перенумеруем их в произвольном порядке, используя непрерывно числа натурального ряда, начиная с наименьшего, которое не было использовано для нумерации вершин (n – 1)-го ранга.

3. Алгоритм завершается по достижении конечной вершины (стока). Каждой вершине присваиваем номер, совпадающий со вторым индексом в ранговой нумерации.

Алгоритм поиска минимального пути на сети. Сеть нагружена, если каждой дуге поставлено в соответствие, некоторое число.

Многие практические задачи (например, задача поиска минимального пути между двумя городами) сводятся к задаче поиска минимального пути на сети.

Рассмотрим реализацию алгоритма на *примере* следующего графа:



Будем двигаться из конечной вершины 7 к начальной – 1. От вершины 6 к вершине 7 ведет один путь. Он, естественно, и является минимальным. Выделим его двойной стрелкой.

Возле вершины в квадратной рамке проставим стоимость минимального пути $\boxed{2}$ к конечной вершине.

От вершины 5 к конечной вершине ведут два пути: от 5 к 6 стоимостью 1 + $\boxed{2}$ = $\boxed{3}$ и от 5 к 7 стоимостью $\boxed{5}$. Мы, естественно, выберем первый и обозначим его двойной стрелкой.

Возле вершины 5 в рамочке проставим стоимость минимального пути – $\boxed{3}$. Далее поступаем аналогично, пока не придем к начальной вершине 1.

В результате получим стоимость минимального пути, равную $\boxed{7}$. Последовательность вершин минимального пути: 1 → 3 → 5 → 6 → 7.

2 ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

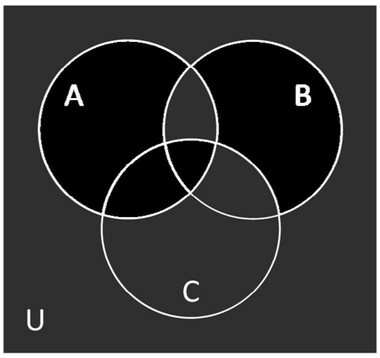
Выбор варианта

Вариант выбирается по приведенной ниже таблице в соответствии с двумя последними цифрами шифра (номера зачетной книжки студента).

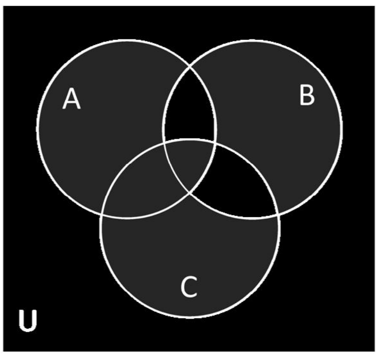
Предпоследняя цифра зачетки	Последняя цифра зачетки									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	25
1	11	12	13	14	15	16	17	18	19	10
2	21	22	23	24	25	1	2	3	4	20
3	6	7	8	9	10	11	12	13	14	5
4	16	17	18	19	20	21	22	23	24	15
5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	25
6	11	12	13	14	15	16	17	18	19	10
7	21	22	23	24	25	1	2	3	4	20
8	6	7	8	9	10	11	12	13	14	5
9	16	17	18	19	20	21	22	23	24	15

2.1 Задания к теме 1.1 «Множества. Действия над множествами»

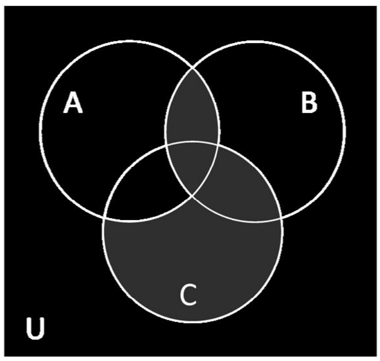
Задание 1. Опишите множества, соответствующие закрашенной части каждой диаграммы.



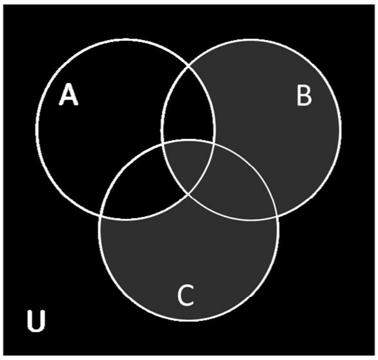
№ 1



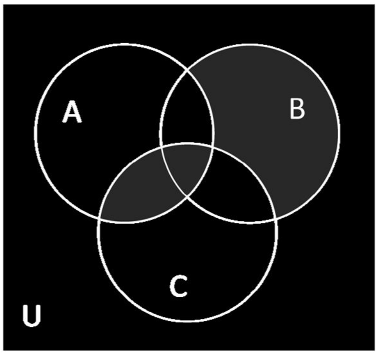
№ 2



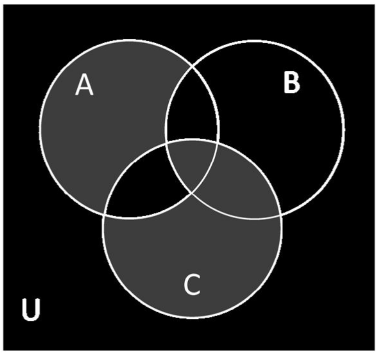
№ 3



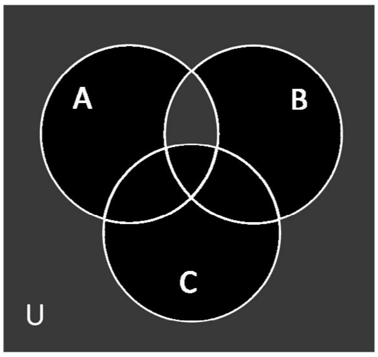
№ 4



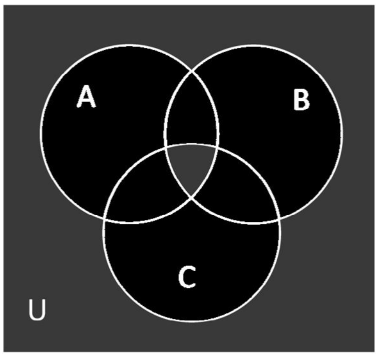
№ 5



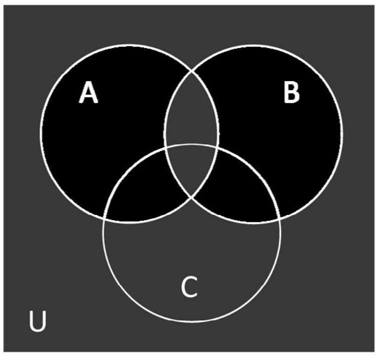
№ 6



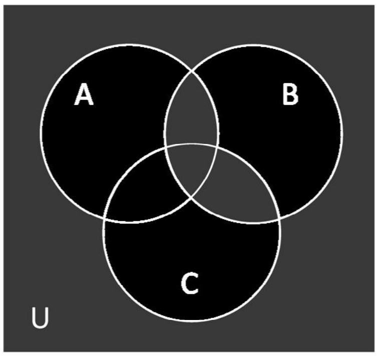
№ 7



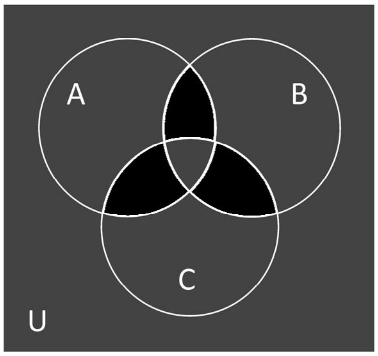
№ 8



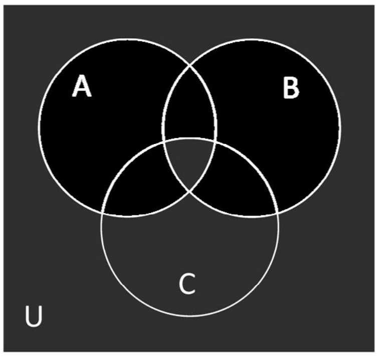
№ 9



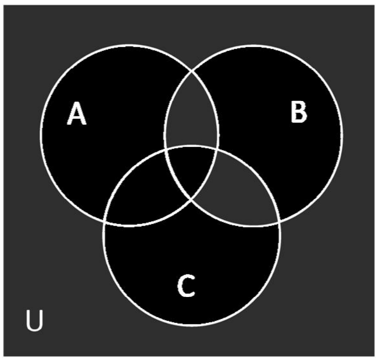
№ 10



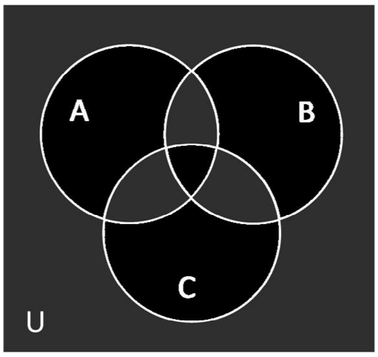
№ 11



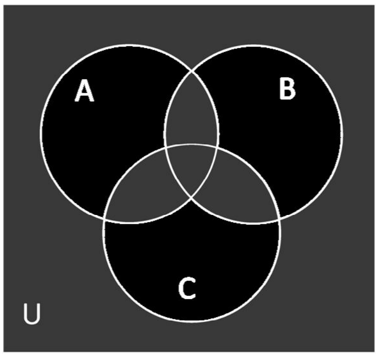
№ 12



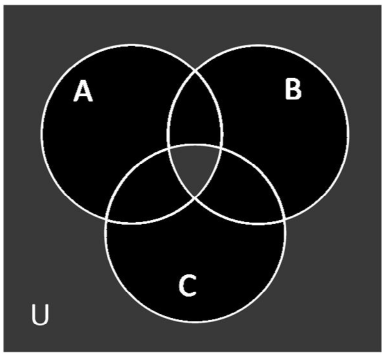
№ 13



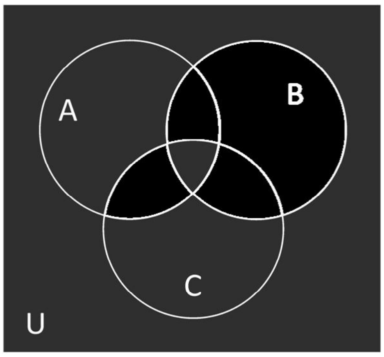
№ 14



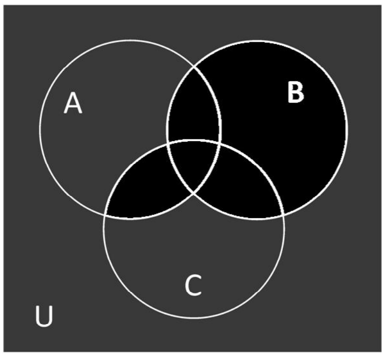
№ 15



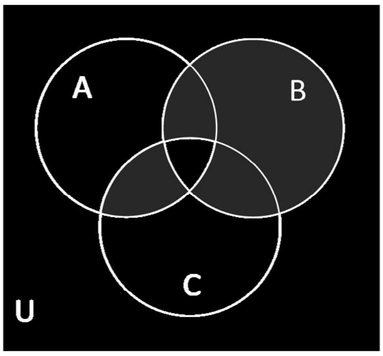
№ 16



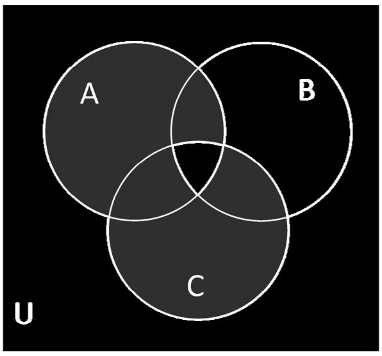
№ 17



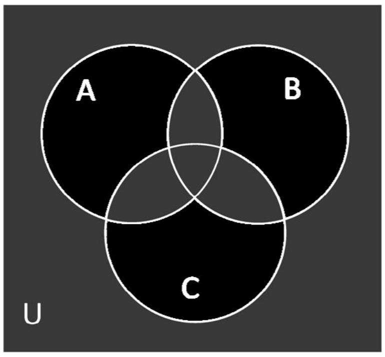
№ 18



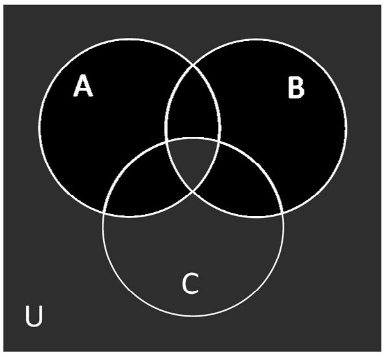
№ 19



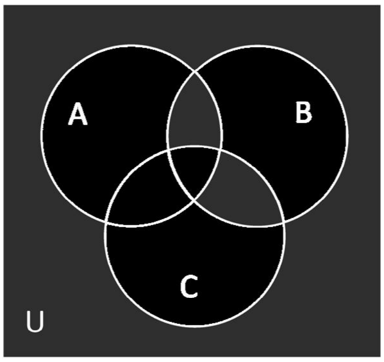
№ 20



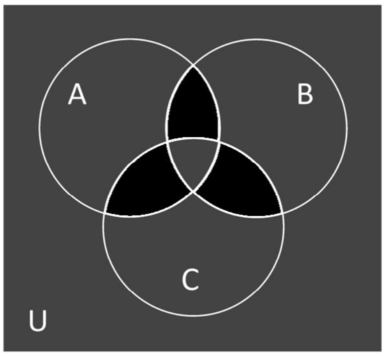
№ 21



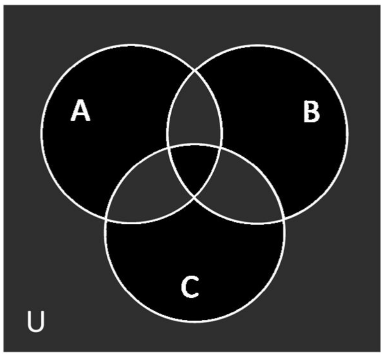
№ 22



№ 23



№ 24



№ 25

Задание 2. На диаграмме Венна обозначены множества и заданы их мощности: $|\{1\}|=30$, $|\{2\}|=7$, $|\{3\}|=5$, $|\{4\}|=2$, $|\{5\}|=6$, $|\{6\}|=4$, $|\{7\}|=8$, $|\{8\}|=2$.

Выполнить следующее задание:

а) заштриховать на диаграмме множество, которое задается формулой (табл. 2.1);

б) определить мощность этого множества.

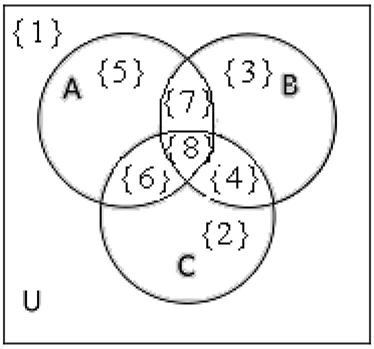


Таблица 2.1

Вариант	Формула	Вариант	Формула
1	$(\overline{A\bigcup B})\setminus C$	14	$C\setminus(\overline{A\bigcup B})$
2	$(\overline{A\bigcap B})\setminus C$	15	$\overline{C\,\Delta\,(A\bigcup B)}$
3	$(\overline{A}\bigcup B)\setminus\overline{C}$	16	$\overline{C\,\Delta\,(A\bigcap B)}$
4	$A\setminus(\overline{B\bigcup C})$	17	$(A\,\Delta\,B)\,\Delta\,C$
5	$A\setminus(\overline{B\bigcap C})$	18	$(A\,\Delta\,B)\,\Delta\,\overline{C}$
6	$\overline{A\,\Delta\,(B\bigcup C)}$	19	$A\bigcup(\overline{B\setminus C})$
7	$\overline{(A\,\Delta\,B)\bigcup C}$	20	$B\bigcup(\overline{A\setminus C})$
8	$B\setminus(\overline{A\bigcup C})$	21	$\overline{B\bigcap(C\setminus A)}$
9	$B\,\Delta\,(\overline{A\bigcup C})$	22	$\overline{(A\bigcap B)\,\Delta\,C}$
10	$\overline{B\,\Delta\,(A\bigcup C)}$	23	$(\overline{A\bigcup B})\,\Delta\,C$
11	$\overline{A}\setminus(\overline{B}\bigcup\overline{C})$	24	$(\overline{A\setminus B})\setminus C$
12	$C\setminus(\overline{A\bigcap B})$	25	$A\setminus(\overline{B\setminus C})$
13	$C\,\Delta\,(\overline{A\bigcup B})$		

Задание 3. Задано универсальное множество U и множества A, B, C, D (табл. 2.2).

Выполнить задание двумя способами:

а) вычислить элементы результирующего множества, используя непосредственно операции над множествами;

б) сформировать характеристические векторы для исходных множеств и получить результирующее множество, используя действия над характеристическими векторами.

Сравнить результаты.

Таблица 2.2

Вариант	Дано	Найти
1	$U=\{-15,-14,-13,-12,-11\}$, $A=\{-15,-13,-12,\}$; $B=\{-14,-12,-11\}$; $C=\{-15,-11,\}$; $D=\{-12\}$	$A\cup\overline{C}$; $(B\cup C)\setminus(A\setminus D)$; $(U\setminus C)\cap A$
2	$U=\{a,b,c,d,e\}$, $A=\{a,b,c\}$; $B=\{b,c,d\}$; $C=\{a,e\}$; $D=\{d\}$	$\overline{A\cap B}$; $(B\setminus D)\setminus(A\cup C)$; $(U\setminus B)\cup D$
3	$U=\{1,2,3,4,5\}$; $A=\{1,3,5\}$; $B=\{2,4\}$; $C=\{2,3,4\}$; $D=\{5\}$.	$\overline{\overline{A}\cap\overline{D}}$; $((A\setminus C)\setminus D)\cup B$; $(U\setminus A)\cup D$.
4	$U=\{2,4,6,8,10\}$, $A=\{2,4\}$; $B=\{4,6,8\}$; $C=\{2,6,10\}$; $D=\{4\}$.	$A\cap\overline{D}$; $(B\setminus C)\cap D$; $(A\setminus B)\cap(U\setminus D)$.
5	$U=\{x,y,z,t,u\}$, $A=\{t\}$; $B=\{x,u\}$; $C=\{x,y,z\}$; $D=\{y,t\}$.	$C\cup\overline{D}$; $(A\cup C)\setminus B$; $(U\setminus A)\setminus\overline{B}$.
6	$U=\{-10,-5,5,10,15\}$, $A=\{-10,10\}$; $B=\{-5,5,15\}$; $C=\{5,10,15\}$; $D=\{5\}$.	$A\cap\overline{B}$; $\overline{D\cap C}\setminus A$; $U\cap(B\setminus\overline{D})$.
7	$U=\{10,11,12,13,14\}$, $A=\{10,11,12\}$; $B=\{12,13,14\}$; $C=\{10,14\}$; $D=\{12\}$.	$(B\cup A)\setminus\overline{C}$; $\overline{B\cup D}$; $(U\setminus(B\cap C))\setminus D$.
8	$U=\{a,b,c,d,e,f,g\}$, $A=\{a,b,c,d\}$, $B=\{c,d,e,f,g\}$, $C=\{d,e,f\}$, $D=\{f,g\}$.	$(U\setminus A)\setminus B$; $C\cap\overline{D}$; $\overline{\overline{A}\cap\overline{C}}$.
9	$U=\{1,2,3,4,5,6,7\}$, $A=\{1,2,3,4\}$; $B=\{4,5,6,7\}$; $C=\{2,4,6\}$; $D=\{2,4\}$.	$(B\cup D)\setminus(A\cap C)$; $\overline{D\cup\overline{C}}$; $(U\setminus\overline{A})\setminus\overline{D}$.
10	$U=\{1,3,4,5,7,9\}$, $A=\{1,3,9\}$; $B=\{5,7,9\}$; $C=\{4,5\}$; $D=\{9\}$.	$(U\setminus D)\setminus C$; $(\overline{C\setminus B})\cup A$; $A\cap D$.
11	$U=\{-15,-14,-13,-12,-11\}$, $A=\{-15,-13,-12\}$; $B=\{-14,-12,-11\}$; $C=\{-15,-11\}$; $D=\{-12\}$.	$\overline{A\cap C}$; $(U\setminus C)\cap A$; $\overline{\overline{D}\cap\overline{C}}$.
12	$U=\{a,b,c,d,e\}$, $A=\{a,b,c\}$; $B=\{b,c,d\}$; $C=\{a,e\}$; $D=\{d\}$.	$A\cup\overline{B}$; $(U\setminus B)\cup D$; $\overline{\overline{A}\cap C}$.

Продолжение таблицы 2.2

Вариант	Дано	Найти
13	$U=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A=\{1, 3, 5\}$; $B=\{2, 4\}$; $C=\{2, 3, 4\}$; $D=\{5\}$.	$(U\setminus A)\cup D$; $\overline{\overline{C}\cap B}$; $(A\cap C)\cup B$.
14	$U=\{2, 4, 6, 8, 10\}$, $A=\{2, 4\}$; $B=\{4, 6, 8\}$; $C=\{2, 6, 10\}$; $D=\{4\}$.	$\overline{A\cup C}$; $(A\setminus B)\cap(U\setminus D)$; $\overline{\overline{B}\cup C}$.
15	$U=\{x, y, z, t, u\}$, $A=\{t\}$; $B=\{x, u\}$; $C=\{x, y, z\}$; $D=\{y, z, t\}$.	$\overline{\overline{D}\cap C}$; $(U\setminus A)\setminus\overline{B}$; $\overline{\overline{A}\cap\overline{B}}$.
16	$U=\{-10, -5, 5, 10, 15\}$, $A=\{-10, 10\}$; $B=\{-5, 5, 15\}$; $C=\{5, 10, 15\}$; $D=\{5\}$.	$\overline{A}\cup\overline{B}$; $\left(\overline{A\cap C}\right)\setminus(B\cup D)$; $U\cap\left(B\setminus\overline{D}\right)$
17	$U=\{10, 11, 12, 13, 14\}$, $A=\{10, 11, 12\}$; $B=\{12, 13, 14\}$; $C=\{10, 14\}$; $D=\{12\}$.	$A\cap\overline{C}$; $(U\setminus(B\cap C))\setminus D$; $\overline{B\cup D}$.
18	$U=\{a, b, c, d, e, f, g\}$, $A=\{a, b, c, d\}$, $B=\{c, d, e, f, g\}$, $C=\{d, e, f\}$.	$C\cap\overline{D}$; $\left(\overline{B\setminus C}\right)\cup A$; $(U\setminus A)\setminus B$.
19	$U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $A=\{1, 2, 3, 4\}$; $B=\{4, 5, 6, 7\}$; $C=\{2, 4, 6\}$; $D=\{2, 4\}$.	$A\cup\overline{C}$; $\overline{A\cap\overline{B}}$; $\left(U\setminus\overline{A}\right)\setminus\overline{D}$
20	$U=\{1, 3, 5, 7, 9\}$, $A=\{1, 3, 9\}$; $B=\{5, 7, 9\}$; $C=\{4, 5\}$; $D=\{9\}$.	$A\cap D$; $\overline{B\cup\overline{C}}$; $\overline{\overline{D}\cap\overline{B}}$; $(U\setminus D)\setminus C$.
21	$U=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A=\{1, 3, 5\}$; $B=\{2, 4\}$; $C=\{2, 3, 4\}$; $D=\{5\}$.	$\overline{\overline{A}\cap\overline{D}}$; $(U\setminus A)\cup D$; $\overline{\overline{C}\cap B}$.
22	$U=\{2, 4, 6, 8, 10\}$, $A=\{2, 4\}$; $B=\{4, 6, 8\}$; $C=\{2, 6, 10\}$; $D=\{4\}$.	$A\cap\overline{D}$; $(A\setminus B)\cap(U\setminus D)$; $\overline{\overline{B}\cup C}$.
23	$U=\{x, y, z, t, u\}$, $A=\{t\}$; $B=\{x, u\}$; $C=\{x, y, z\}$; $D=\{y, z, t\}$.	$C\cup\overline{D}$; $\overline{\overline{D}\cap C}$; $(U\setminus A)\setminus\overline{B}$.
24	$U=\{-10, -5, 5, 10, 15\}$, $A=\{-10, 10\}$; $B=\{-5, 5, 15\}$; $C=\{5, 10, 15\}$; $D=\{5\}$.	$\overline{D\cap C}\setminus A$; $\overline{A}\cup\overline{B}$; $U\cap\left(B\setminus\overline{D}\right)$.
25	$U=\{10, 11, 12, 13, 14\}$, $A=\{10, 11, 12\}$; $B=\{12, 13, 14\}$; $C=\{10, 14\}$; $D=\{12\}$.	$(B\cup A)\setminus\overline{C}$; $A\cap\overline{C}$; $(U\setminus(B\cap C))\setminus D$.

Задание 4

Варианты 1 – 5

В цехе предприятия работают 15 человек. Из них: 6 человек имеют дипломы наладчиков станков с ЧПУ, 8 имеют дипломы слесарей, 5 – фрезеровщиков, 3 человека имеют одновременно дипломы наладчиков станков с ЧПУ и слесарей, 2 человека имеют дипломы наладчика станков с ЧПУ и фрезеровщика, 4 человека имеют дипломы слесаря и фрезеровщика, 1 человек имеет все три вида дипломов.

Определить:

Вариант 1. Сколько работников цеха не имеют ни одного вида из этих трех дипломов?

Вариант 2.Сколько работников цеха имеют ровно по два диплома?

Вариант 3. Сколько работников цеха имеют только один из дипломов – наладчика станков с ЧПУ?

Вариант 4. Сколько работников цеха имеют только один из дипломов – слесаря?

Вариант 5. Сколько работников цеха имеют только один из дипломов – фрезеровщика?

Варианты 6 – 9

На одном лекционном потоке количество студентов, изучающих немецкий, французский и английский языки, таково: английский язык изучают 50 человек, французский – 30, немецкий – 20; французский и английский – 10, немецкий и французский – 8, немецкий и английский – 13 и 3 человека изучают все три языка.

Определить:

Вариант 6. Сколько студентов на потоке изучают только английский язык?

Вариант 7. Сколько студентов на потоке изучают только французский язык?

Вариант 8. Сколько студентов на потоке изучают только немецкий язык?

Вариант 9. Сколько студентов на потоке изучают ровно 2 языка?

Варианты 10 – 14

Среди 100 деталей прошли обработку на первом станке 42 штуки, на втором – 30 штук, на третьем – 28. Причем на первом и втором станке обработано 5 деталей, на первом и третьем – 10, на втором и третьем – 8, на всех трех обработано 3 детали. Определить:

Вариант 10. Сколько деталей обработано только на первом станке?

Вариант 11. Сколько деталей обработано только на втором станке?

Вариант 12. Сколько деталей обработано только на третьем станке?

Вариант 13. Сколько деталей обработано?

Вариант 14. Сколько деталей не обработано?

Вариант 15. Лекции по экономике посещают 20 студентов, по математике – 30. Найти число студентов, посещающих лекции по экономике или математике, если:

а) лекции проходят в одно и то же время;

б) лекции проходят в разные часы и 10 студентов слушают оба курса.

Варианты 16 – 20

Студенты 1 курса (60 человек) получают новые книги в библиотеке. 28 человек взяли по учебнику физики, 20 человек – информатики, 23 человека – математики; при этом у 4 студентов оказались учебники по математике и информатике, у 6 – учебники по математике и физике, у 5 – учебники по физике и информатике, а у 3 человек – учебники по всем 3 дисциплинам. Определить:

Вариант 16. Сколько студентов получили только учебник по информатике?

Вариант 17. Сколько студентов получили только учебник по физике?

Вариант 18. Сколько студентов получили только учебник по математике?

Вариант 19. Сколько студентов получили ровно 2 учебника?

Вариант 20. Сколько студентов остались без учебников?

Варианты 21 – 25

В столовой предлагаются на обед следующие блюда: I (борщ), II (рис с мясом) и чай. Группа из 30 человек делает такие заказы: 16 человек взяли борщ, 17 – II блюдо, 19 – чай, 7 – I и II блюда, 6 – I и чай, 2 – I, II и чай, 4 – II и чай.

Определить:

Вариант 21. Сколько человек взяли только I блюдо?

Вариант 22. Сколько человек взяли только II блюдо?

Вариант 23. Сколько человек взяли только чай?

Вариант 24. Сколько человек получили ровно 2 блюда?

Вариант 25. Сколько человек остались без обеда?

Задание 5. Пусть A, B и C — множества точек плоскости, координаты которых удовлетворяют перечисленным условиям. Изобразите в системе координат $x0y$ множество D, полученное из множеств Aпо указанной формуле.

Вариант 1. $A=\{(x,y)\mid x^2+y^2-6y\le 0\}$, $B=\{(x,y)\mid y+x^2+1\ge 0\}$, $C=\{(x,y)\mid |x|\le 6, -3\le y\le -2\}$. $D=(A\cup B)\Delta C$.

Вариант 2. $A=\{(x,y)\mid 0\le y\le \sqrt{x}\}$, $B=\{(x,y)\mid 2\le x\le 6, -3\le y\le 1\}$, $C=\{(x,y)\mid x^2+y^2-18x\le 0\}$. $D=(A\cup B)\setminus C$.

Вариант 3. $A=\left\{(x,y)\mid y-\dfrac{4}{x}\le 0\right\}$, $B=\{(x,y)\mid y+x^2-25\le 0\}$, $C=\{(x,y)\mid |x|\le 1, |y|\le 1\}$. $D=(A\cap B)\setminus C$.

Вариант 4. $A=\{(x,y)\mid |x|\le 5, |y|\le 1\}$, $B=\{(x,y)\mid |x|\le 1, |y|\le 1\}$, $C=\{(x,y)\mid y^2+x^2-16\le 0\}$. $D=(A\cup B)\cap C$.

Вариант 5. $A=\{(x,y)\mid y-x^2-1\le 0\}$, $B=\{(x,y)\mid y-x^2+3\ge 0\}$, $C=\{(x,y)\mid x>0\}$. $D=(A\cap B)\setminus C$.

Вариант 6. $A=\left\{(x,y)\mid y-\dfrac{4}{x}\le 0\right\}$, $B=\left\{(x,y)\mid y+\dfrac{4}{x}\ge 0\right\}$, $C=\{(x,y)\mid x^2+y^2-25\le 0\}$. $D=(A\cap B)\setminus C$.

Вариант 7. $A=\{(x,y)\mid x^2+y^2-4x\le 0\}$, $B=\{(x,y)\mid y+x^2+4x\le 0\}$, $C=\{(x,y)\mid |x|\le 2, |y|\le 2\}$. $D=(A\cup B)\,\Delta\, C$.

Вариант 8. $A=\{(x,y)\mid y-x^4-1\le 0\}$, $B=\{(x,y)\mid 0\le y\le\sqrt{x}\}$, $C=\{(x,y)\mid x^2+y^2-4x\le 0\}$. $D=(A\cap B)\Delta\, C$.

Вариант 9. $A=\{(x,y)\mid y+x^2-5\le 0\}$, $B=\{(x,y)\mid y^2+x^2-6y\le 0\}$, $C=\{(x,y)\mid x>0\}$. $D=A\setminus(B\cup C)$.

Вариант 10. $A=\{(x,y)\mid x^2+y^2-9\le 0\}$, $B=\{(x,y)\mid |y|\le 4, -6\le x\le 1\}$,

Вариант 11. $A=\{(x,y)\mid x-y>0\}$, $B=\{(x,y)\mid x+y<0\}$,

Вариант 12. $A=\{(x,y)\mid y+x^2-6\le 0\}$, $B=\{(x,y)\mid |x|>2, |y|>2\}$, $C=\{(x,y)\mid x<y\}$. $D=(A\cap B)\cap C$.

Вариант 13. $A=\{(x,y)\mid y\le\sin x\}$, $B=\{(x,y)\mid y>0{,}5\}$, $C=\{(x,y)\mid y>-2\}$. $D=(A\Delta B)\cap C$.

Вариант 14. $A=\{(x,y)\mid x<y+3\}$, $B=\{(x,y)\mid x>y-3\}$, $C=\{(x,y)\mid |x|<5, |y|<2\}$. $D=(A\cap B)\setminus C$.

Вариант 15. $A=\left\{(x,y)\mid y-\dfrac{5}{x}\le 0\right\}$, $B=\left\{(x,y)\mid y+\dfrac{2}{x}\ge 0\right\}$, $C=\{(x,y)\mid y\ge 1\}$. $D=(A\cap B)\setminus C$.

Вариант 16. $A=\{(x,y)\mid x^2+y^2+6y\le 0\}$, $B=\{(x,y)\mid y+x^2+1\ge 0\}$, $C=\{(x,y)\mid |x|\le 4, -4\le x\le -2\}$. $D=A\cap(B\setminus C)$.

Вариант 17. $A=\{(x,y)\mid x^2+y^2-25\le 0\}$, $B=\left\{(x,y)\mid y-\dfrac{4}{x}\le 0\right\}$, $C=\{(x,y)\mid x^2\,y^2-4\le 0\}$. $D=(A\setminus B)\cap C$.

Вариант 18. $A=\{(x,y)\mid 0\le y\le\sqrt{x}\}$, $B=\{(x,y)\mid 2\le x\le 6, -3\le y\le -2\}$, $C=\{(x,y)\mid x^2+y^2-18\le 0\}$. $D=(A\,\Delta\, B)\,\Delta\, C$.

Вариант 19. $A=\{(x,y)\mid |x|\le 5, |y|\le 1\}$, $B=\{(x,y)\mid |x|\le 1, |y|\le 5\}$, $C=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 16\}$. $D=(A\cup B)\Delta C$.

Вариант 20. $A=\{(x,y)\mid x^2-y-2\ge 0\}$, $B=\{(x,y)\mid x^2-y+4\ge 0\}$, $C=\{(x,y)\mid y>1\}$. $D=(A\cap B)\setminus C$.

Вариант 21. $A=\{(x,y)\mid |x|\le 5, |y|\le 1\}$, $B=\{(x,y)\mid |x|\le 1, |y|\le 1\}$,

$C=\{(x,y) \mid y^2+x^2-16\le 0\}$. $D=(A\cup B)\cup C$.

Вариант 22. $A=\{(x,y) \mid y-x^2-1\le 0\}$, $B=\{(x,y) \mid y-x^2+3\ge 0\}$, $C=\{(x,y) \mid x>0\}$. $D=(A\cap B)\setminus C$.

Вариант 23. $A=\left\{(x,y) \mid y-\dfrac{4}{x}\le 0\right\}$, $B=\left\{(x,y) \mid y+\dfrac{4}{x}\ge 0\right\}$, $C=\{(x,y) \mid x^2+y^2-25\le 0\}$. $D=(A\cap B)\setminus C$.

Вариант 24. $A=\{(x,y) \mid x^2+y^2-4x\le 0\}$, $B=\{(x,y) \mid y+x^2+4x\le 0\}$, $C=\{(x,y) \mid |x|\le 2, |y|\le 2\}$. $D=(A\cup B)\Delta C$.

Вариант 25. $A=\{(x,y) \mid y-x^4-1\le 0\}$, $B=\{(x,y) \mid 0\le y\le \sqrt{x}\}$, $C=\{(x,y) \mid x^2+y^2-4x\le 0\}$. $D=(A\cap B)\Delta C$.

2.2 Задания к теме 1.2 «Отношения»

Задание 6. Пусть есть конечное множество A (табл. 2.3).

1. Задать отношение R (табл. 2.3):
   а) списком;
   б) характеристической матрицей.
2. Сформулировать отношения $R_1 \cup R_2$ и $R_1 \cap R_3$ и задать их с помощью характеристических матриц (табл. 2.4).

Таблица 2.3

Вариант	A	R
1	{1, 2, 3, 4, 5, 6}	«быть строго больше»
2		«быть строго меньше»
3		«быть равно»
4		«быть не равно»
5		«быть делителем»
6		«иметь общий делитель, отличный от единицы»
7		«иметь один и тот же остаток от деления на 3»
8		«отличаться на 2»
9	{2, 4, 6, 8, 10, 12}	«быть строго меньше»
10		«быть строго больше»
11		«быть равно»
12		«отличаться на 6»
13		«быть не равно»
14		«быть делителем»
15		«иметь общий делитель, отличный от единицы»
16		«отличаться на 4»

Продолжение таблицы 2.3

Вариант	A	R
17	{1, 3, 5, 7, 9, 11}	«быть строго меньше»
18		«быть строго больше»
19		«быть равно»
20		«отличаться на 6»
21		«быть не равно»
22		«быть делителем»
23		«иметь общий делитель, отличный от единицы»
24		«иметь один и тот же остаток от деления на 3»
25		«отличаться на 4»

Таблица 2.4

Вариант	R_1	R_2	R_3
1	«быть строго больше»	«быть равно»	«иметь общий делитель, отличный от единицы»
2	«быть строго меньше»	«быть равно»	«иметь один и тот же остаток от деления на 3»
3	«быть равно»	«иметь общий делитель, отличный от единицы»	«иметь один и тот же остаток от деления на 3»
4	«быть не равно»	«иметь один и тот же остаток от деления на 3»	«иметь общий делитель, отличный от единицы»
5	«быть делителем»	«отличаться на 2»	«быть строго больше»
6	«иметь общий делитель, отличный от единицы»	«быть строго больше»	«быть строго меньше»
7	«иметь один и тот же остаток от деления на 3»	«быть строго меньше»	«быть строго больше»
8	«отличаться на 2»	«быть строго больше»	«быть строго меньше»
9	«быть строго меньше»	«быть равно»	«иметь общий делитель, отличный от единицы»
10	«быть строго больше»	«быть равно»	«иметь общий делитель, отличный от единицы»

Продолжение таблицы 2.4

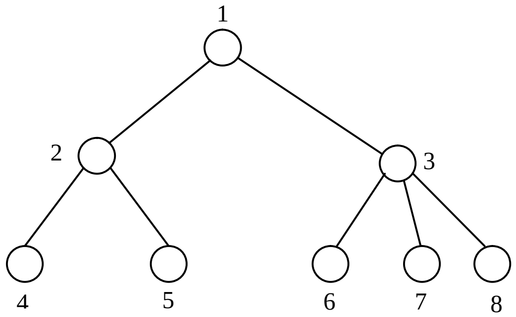
Вариант	R1	R2	R3
11	«быть равно»	«иметь общий делитель, отличный от единицы»	«иметь общий делитель, отличный от единицы»
12	«отличаться на 6»	«иметь общий делитель, отличный от единицы»	«быть делителем»
13	«быть не равно»	«быть делителем»	«отличаться на 4»
14	«быть делителем»	«отличаться на 4»	«быть строго больше»
15	«иметь общий делитель отличный от единицы»	«быть строго больше»	«быть строго меньше»
16	«отличаться на 4»	«быть строго меньше»	«иметь общий делитель, отличный от единицы»
17	«быть строго меньше»	«быть равно»	«иметь общий делитель, отличный от единицы»
18	«быть строго больше»	«быть равно»	«иметь один и тот же остаток от деления на 3»
19	«быть равно»	«быть делителем»	«иметь один и тот же остаток от деления на 3»
20	«отличаться на 6»	«быть делителем»	«быть строго больше»
21	«быть не равно»	«иметь общий делитель, отличный от единицы»	«иметь один и тот же остаток от деления на 3»
22	«быть делителем»	«иметь один и тот же остаток от деления на 3»	«быть строго меньше»
23	«иметь общий делитель, отличный от единицы»	«отличаться на 4»	«иметь один и тот же остаток от деления на 3»
24	«иметь один и тот же остаток от деления на 3»	«быть строго меньше»	«быть строго больше»
25	«отличаться на 4»	«быть строго больше»	«иметь один и тот же остаток от деления на 3»

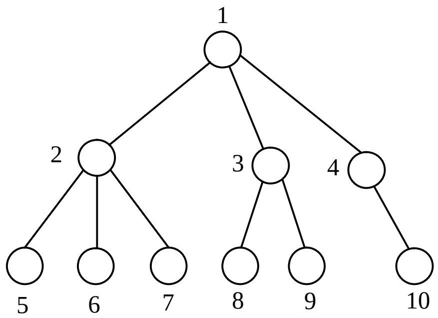
Задание 7. В соответствии со структурой A задать отношение R (табл. 2.5):

а) списком;

б) характеристической матрицей.

Таблица 2.5

<table>
<tr><th>Вариант</th><th>A</th><th>R</th></tr>
<tr><td>1</td><td rowspan="4">Иерархическая структура организации


1 – начальник организации;
2, 3 – заместители начальника;
4, 5, 6, 7, 8 – рядовые сотрудники</td><td>«быть непосредственным начальником»</td></tr>
<tr><td>2</td><td>«быть подчиненным»</td></tr>
<tr><td>3</td><td>«быть начальником»</td></tr>
<tr><td>4</td><td>«быть рядовым»</td></tr>
<tr><td>5</td><td rowspan="11">Структура семьи из нескольких поколений


1 – бабушка;
2, 3 – мамы; 4 – папа;
5, 7, 9, 10 – сыновья; 6, 8, – дочери</td><td>«быть предком»</td></tr>
<tr><td>6</td><td>«быть потомком»</td></tr>
<tr><td>7</td><td>«быть родителем»</td></tr>
<tr><td>8</td><td>«быть братом»</td></tr>
<tr><td>9</td><td>«быть сестрой»</td></tr>
<tr><td>10</td><td>«быть двоюродным братом»</td></tr>
<tr><td>11</td><td>«быть двоюродной сестрой»</td></tr>
<tr><td>12</td><td>«быть племянником»</td></tr>
<tr><td>13</td><td>«быть племянницей»</td></tr>
<tr><td>14</td><td>«быть дядей»</td></tr>
<tr><td>15</td><td>«быть тетей»</td></tr>
<tr><td>16</td><td rowspan="6">Схема расположения офисов в двухэтажном здании
<table><tr><td>1</td><td>2</td><td>3, 4</td></tr><tr><td>5</td><td>6, 7</td><td>8</td></tr></table>
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 – офисы</td><td>«находится на первом этаже»</td></tr>
<tr><td>17</td><td>«находится на втором этаже»</td></tr>
<tr><td>18</td><td>«офисы расположены в одной комнате»</td></tr>
<tr><td>19</td><td>«офисы расположены в разных комнатах»</td></tr>
<tr><td>20</td><td>«офисы расположены в соседних комнатах»</td></tr>
<tr><td>21</td><td>«офисы расположены на одном этаже»</td></tr>
</table>

Продолжение таблицы 2.5

<table>
<tr><th>Вариант</th><th>A</th><th>R</th></tr>
<tr><td>22</td><td rowspan="4">Схема расположения офисов в двухэтажном здании
<table><tr><td>1</td><td>2</td><td>3, 4</td></tr><tr><td>5</td><td>6, 7</td><td>8</td></tr></table>
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 – офисы</td><td>«офисы расположены на разных этажах»</td></tr>
<tr><td>23</td><td>«офисы расположены друг под другом»</td></tr>
<tr><td>24</td><td>«офисы расположены друг над другом»</td></tr>
<tr><td>25</td><td>«офисы расположены в угловых комнатах»</td></tr>
</table>

Задание 8. Отношения R_1 и R_2 заданы списком (табл. 2.6). Используя характеристические матрицы, построить отношения $R_3 = R_1 \cup R_2$, $R_4 = R_1 \cap R_2$, $R_5 = R_1 \circ R_2$.

Таблица 2.6

Вариант	R_1	R_2
1	{(a, b), (b, c), (b, d), (d, e), (e, b)}	{(a, d), (a, e), (b, c), (c, d), (d, b), (e, c)}
2	{(b, c), (c, d), (c, e), (e, a), (a, c)}	{(b, e), (b, a), (c, d), (d, e), (e, c), (a, d)}
3	{(c, d), (d, e), (d, a), (a, b), (b, d)}	{(c, a), (c, b), (d, e), (e, a), (a, d), (b, e)}
4	{(d, e), (e, a), (e, b), (b, c), (c, e)}	{(d, b), (d, c), (e, a), (a, b), (b, e), (c, a)}
5	{(e, a), (a, b), (a, c), (c, d), (d, a)}	{(e, c), (e, d), (a, b), (b, c), (c, a), (d, b)}
6	{(a, b), (b, c), (b, d), (d, e), (e, b), (c, d)}	{(a, d), (a, e), (b, c), (c, d), (d, b), (e, c)}
7	{(b, c), (c, d), (c, e), (e, a), (a, c), (d, e)}	{(b, e), (b, a), (c, d), (d, e), (e, c), (a, d)}
8	{(c, d), (d, e), (d, a), (a, b), (b, d), (e, a)}	{(c, a), (c, b), (d, e), (a, e), (a, d), (b, e)}
9	{(d, e), (e, a), (e, b), (b, c), (c, e), (a, b)}	{(d, b), (d, c), (e, a), (b, a), (b, e), (c, a)}
10	{(e, a), (a, b), (a, c), (c, d), (d, a), (b, c)}	{(e, c), (e, d), (a, b), (c, b), (c, a), (d, b)}
11	{(a, b), (b, c), (b, d), (d, e), (e, b), (c, d)}	{(a, d), (a, e), (b, c), (d, c), (d, b), (e, c)}
12	{(a, c), (b, d), (b, e), (d, a), (e, c)}	{(a, e), (a, b), (b, d), (c, e), (d, c), (e, d)}
13	{(a, d), (b, e), (b, a), (d, b), (e, d)}	{(a, b), (a, c), (b, e), (c, a), (d, e), (e, c)}
14	{(a, e), (b, a), (b, c), (d, c), (e, a)}	{(a, c), (a, d), (b, a), (c, b), (d, a), (e, d)}
15	{(b, e), (c, a), (c, d), (e, c), (b, a)}	{(b, c), (b, d), (c, a), (d, b), (e, a), (a, d)}
16	{(c, e), (d, a), (e, d), (a, c), (c, a)}	{(c, d), (c, e), (d, a), (e, b), (a, b), (b, d)}
17	{(d, e), (e, a), (a, d), (b, c), (d, a)}	{(b, d), (d, e), (e, a), (a, b), (b, c), (c, d)}
18	{(a, e), (a, b), (b, e), (c, d), (e, b)}	{(c, e), (e, a), (a, b), (b, c), (c, d), (d, e)}
19	{(b, a), (b, c), (c, a), (d, e), (a, c)}	{(d, a), (a, b), (b, c), (c, d), (d, e), (e, a)}
20	{(c, b), (c, d), (d, b), (e, a), (b, d)}	{(e, b), (b, c), (c, d), (d, e), (e, a), (a, b)}
21	{(d, c), (d, e), (e, c), (a, b), (c, e)}	{(a, c), (c, d), (d, e), (e, a), (a, b), (b, c)}
22	{(e, d), (e, a), (a, d), (b, c), (d, a)}	{(b, d), (d, e), (e, a), (a, b), (b, c), (c, d)}
23	{(a, d), (a, b), (b, e), (d, e), (e, b)}	{(c, e), (a, b), (c, a), (b, c), (c, d), (d, e)}
24	{(b, e), (b, c), (c, a), (e, a), (a, c)}	{(d, a), (b, c), (d, b), (c, d), (d, e), (e, a)}
25	{(c, a), (c, d), (d, b), (a, b), (b, d)}	{(e, b), (c, d), (e, c), (d, e), (e, a), (a, b)}

2.3 Задания к теме 1.3 «Комбинаторика»

Задание 9. Решить следующие задачи.

Вариант 1

1. Замок в автоматической камере хранения содержит 4 диска, на каждом из которых записаны цифры 0, 1, …, 9. Сколько различных кодов можно получить?

2. Из спортивного клуба, насчитывающего 30 членов, надо составить команду из 4 человек для участия в эстафете 4х100м. Сколькими способами это можно сделать?

3. Определить число различных бросаний двух одинаковых кубиков.

4. Сколькими способами можно сделать трехцветный флаг с горизонтальными полосами равной ширины, если имеется материя 6 цветов? Порядок следования цветов важен. Все цвета на флаге различны.

5. Сколькими способами могут встать в круг 10 человек?

6. Имеется пять видов конвертов без марок и четыре вида марок одного достоинствам. Сколькими способами можно выбрать конверт с маркой для посылки письма?

7. Сколько различных слов можно получить, переставляя буквы слова «математика»?

Вариант 2

1. Сколько различных сигналов можно подать шестью флажками различных цветов? Отличие сигналов заключается в порядке расположения разноцветных флажков на мачте.

2. Сколькими способами можно составить подразделение из 6 рабочих четырех специальностей?

3. В группе из 25 человек разыгрывается три различных приза. Призы могут достаться одному человеку, двоим, троим. Сколькими способами призы могут распределиться?

4. Сколькими способами может быть выбрано 5 номеров из 36?

5. Пусть имеется 7 языков. Сколько нужно издать словарей, чтобы был возможен непосредственный перевод с любого языка на любой?

6. Сколько различных кодовых последовательностей можно получить перестановками кода 102020030?

7. Сколько существует нечетных четырехзначных чисел, начинающихся четной цифрой?

Вариант 3

1. Из 12 слов мужского рода, 9 женского и 10 среднего нужно выбрать по одному слову каждого рода. Сколькими способами можно сделать этот выбор?

2. Сколько различных ожерелий можно составить из 10 различных бусинок?

3. В пачке 20 экзаменационных билетов. Каждый студент получает билет, отвечает на него, билет возвращается в пачку, и после этого заходит следующий студент. Сколько различных вариантов раздачи билетов существует для 10 студентов?

4. Сколько можно составить кодов из 6 цифр каждый, так, чтобы все цифры были различны?

5. В магазине продаются конфеты четырех видов. Сколькими способами можно купить 8 конфет?

6. Тренер футбольной команды желает сделать одновременную замену двух полевых игроков, у него в распоряжении 5 футболистов на скамейке запасных. Скольким способами он может это сделать?

7. Сколько различных ожерелий можно составить из 10 бусинок, если имеются бусинки двух видов – 2 черных и 8 белых?

Вариант 4

1. Сколько можно составить сигналов из шести флажков разного цвета, взятых по 2?

2. Футбольный матч закончился «вничью», и его судьба решается в серии послематчевых пенальти. Сколько у тренера возможностей представить судье список 5 пенальтистов из 11 закончивших матч футболистов при условии, что порядок игроков в списке имеет значение?

3. Сколько различных слов можно получить, переставляя буквы слова «ингредиент»?

4. Сколькими способами можно оснастить две различные фирмы тремя компьютерами разных типов?

5. У ювелира есть 5 различных изумрудов, 8 различных рубинов и 7 различных сапфиров. Сколькими способами он может выбрать из них три камня для брошки?

6. В магазине продаются конфеты двух видов. Сколькими способами можно купить четыре конфеты?

7. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, если каждая цифра входит в изображение числа один раз?

Вариант 5

1. Сколько существует возможных последовательностей выполнения проверок финансовой деятельности трех подразделений?

2. Сколько двузначных чисел можно составить из трех цифр, если каждая цифра входит в число один раз?

3. В распоряжении имеются яблоки, груши и апельсины. Сколькими способами может быть составлен подарочный набор из 5 фруктов?

4. Восемь человек разбиваются на две команды по 4 человека в каждой. Сколькими способами это можно сделать?

5. На складе имеется 7 рулонов ткани различных цветов и 5 различных стульев. Каждого рулона достаточно для обивки всех стульев. Сколькими способами можно обить стулья?

6. Из города А в город В ведут три дороги, а из города В в город С – 4 дороги. Сколькими способами можно добраться из А в С через В?

7. В студенческой группе, состоящей из 25 человек, при выборе старосты за выдвинутую кандидатуру проголосовало 12 человек, против – 10, воздержалось – 3. Сколькими способами могло быть проведено такое голосование?

Вариант 6

1. Имеется 15 различных книг и книжная полка, вмещающая 12 книг. Сколько существует способов заполнить книжную полку, используя имеющиеся книги?

2. Сколькими способами можно составить список студентов группы из 25 человек?

3. В НИИ работают 4 курьера. Сколько существует способов разослать 7 писем в 7 различных организаций, если доставка осуществляется только курьерами, работающими в НИИ?

4. Сколькими способами можно переставить буквы слова «ананас»?

5. В магазине имеется 4 сорта роз: красные, желтые, оранжевые, белые. Сколькими способами может быть куплено 5 роз?

6. У мамы 5 яблок, 7 груш и 3 апельсина. Каждый день, в течение 15 дней, она выдает сыну по одному фрукту. Сколькими способами это может быть сделано?

7. Сколькими способами можно выбрать три различные краски из имеющихся шести?

Вариант 7

1. Среди 15 участников фестиваля надо распределить дипломы: 1 – обладателю Гран-при, 3 – победителям, остальные – лауреатам. Сколькими способами это можно сделать?

2. Сколькими способами можно распределить 6 различных открыток в 4 различных конверта, если допускаются пустые конверты?

3. В продаже имеются компьютеры двух видов – стационарные и ноутбуки. Сколькими способами можно купить в офис 12 компьютеров?

4. Сколькими способами можно выбрать гласную и согласную буквы из слова «камзол»?

5. Сколькими способами можно разложить 10 одинаковых монет по двум карманам?

6. Сколько можно составить кодов из 5 цифр каждый, так, чтобы все цифры были различны?

7. Сколькими способами можно развесить на стенде 10 различных картин при условии, что они размещаются одна за другой?

Вариант 8

1. Сколькими способами можно составить список адресов семи предприятий для посещения их курьером?

2. В спортивных соревнованиях участвуют 9 команд. Сколькими способами между ними могут быть распределены первые три призовых места?

3. На вершину горы ведут пять дорог. Сколькими способами турист может подняться на гору и спуститься с нее, при условии, что спуск и подъем происходят по разным путям?

4. В кондитерском магазине продается 4 сорта пирожных: эклеры, песочные, наполеоны и слоеные. Сколькими способами можно купить 7 пирожных?

5. Если монета подброшена 10 раз, то сколько существует способов выпадения четырех «решек» и шести «орлов»?

6. В селении проживает 2000 жителей. Доказать, что по крайней мере двое из них имеют одинаковые инициалы.

7. Сколькими способами можно выбрать открытки для поздравления семи лиц, если имеется 10 различных открыток?

Вариант 9

1. Сколько трехзначных чисел можно составить из пяти цифр, если каждая цифра входит в число один раз?

2. Четверо студентов сдают экзамен. Сколькими способами могут быть поставлены им отметки, если известно, что никто из них не получил неудовлетворительной отметки?

3. Сколькими способами можно выстроить девять человек в колонну по одному?

4. Сколькими способами на пять различных конвертов можно наклеить по одной марке, если на почте имеется 7 различных марок?

5. В оранжерее имеются цветы 10 наименований. Сколькими способами можно составить букет из 21 цветка?

6. На ферме есть 20 овец и 24 свиньи. Сколькими способами можно выбрать одну овцу и одну свинью?

7. Для показа в день открытия кинофестиваля надо отобрать пять фильмов из 34, которые включены в программу. Сколькими способами это можно сделать?

Вариант 10

1. На железнодорожной станции имеется 5 светофоров. Сколько может быть дано различных сигналов, если каждый светофор имеет три состояния: красный, желтый и зеленый?

2. Сколько существует способов разделить 10 человек на две команды по 5 человек для игры в баскетбол?

3. В зрительном зале 120 мест. Сколькими способами могут занять в нем свои места 80 зрителей?

4. На собрании должны выступить 5 человек: А, Б, В, Г и Д. Сколькими способами можно расположить их в списке ораторов при условии, что А должен выступить непосредственно перед Б?

5. Из города А в город В ведут пять дорог, а из города В в город С – три дороги. Сколько путей, проходящих через В, ведут из А в С?

6. У мамы имеется 2 яблока, 3 груши и 4 апельсина. Каждый день в течение 9 дней подряд она выдает ребенку по одному фрукту. Сколькими способами это может быть сделано?

7. В почтовом отделении продаются открытки 10 сортов. Сколькими способами можно купить в нем 12 открыток?

Вариант 11

1. Сколько различных слов можно получить, переставляя буквы слова «парабола»?

2. Коробка для хранения 12 дисков имеет нумерованные отсеки, вмещающие каждый по одному диску. Сколько существует способов заполнения коробки 10 дисками?

3. Надо послать 6 срочных писем. Сколькими способами это можно сделать, если для передачи писем можно послать трех курьеров и каждое письмо можно дать любому из курьеров?

4. Сколькими способами можно выбрать гласную и согласную буквы из слова «здание»?

5. Для фестиваля выпустили футболки трех разных цветов с эмблемой фестиваля. Сколькими способами можно купить 5 футболок?

6. На книжной полке требуется расположить 5 одинаковых книг по математике, 2 различные книги по физике и 6 одинаковых книг по информатике. Сколькими способами это можно сделать, если не существует никаких ограничений на порядок расстановки?

7. Сколькими способами можно выбрать три различные краски из имеющихся пяти?

Вариант 12

1. Сколько различных кодовых последовательностей можно получить перестановками кода 234251344?

2. Пять различных грузов нужно доставить на разные этажи 9-этажного дома. Сколькими способами это можно сделать?

3. В книжный магазин поступили романы Ф. Купера «Прерия», «Зверобой», «Шпион», «Пионеры», «Следопыт» по одинаковой цене. Сколькими способами библиотека может закупить 17 экземпляров книг этого автора?

4. Сколько существует различных пятизначных чисел, составленных из цифр 1, 2, …, 9?

5. У одного человека есть 7 книг по математике, а у другого – 9 книг. Сколькими способами они могут обменять книгу одного на книгу другого?

6. Сколькими способами можно рассадить 10 человек за круглым столом, если имеет значение только порядок соседей?

7. Сколько существует способов вытащить 13 карт из стандартной колоды, содержащей 52 карты, если карта после вытаскивания не возвращается обратно? Порядок вытаскивания карт не имеет значения.

Вариант 13

1. На рояле 88 клавиш. Сколько существует аккордов из шести звуков? (Аккорд получается, если любые 6 клавиш нажаты одновременно).

2. В классе изучают 10 предметов. В понедельник – шесть уроков, причем все уроки различные. Сколькими способами можно составить расписание на понедельник?

3. Из 12 слов мужского рода, 9 – женского и 10 – среднего надо выбрать по одному слову каждого рода. Сколькими способами может быть сделан этот выбор?

4. Сколькими способами можно расположить 12 дисков на круглой вращающейся полке?

5. Сколько различных комплектов книг можно сформировать для трех библиотек из пяти одинаковых экземпляров книг Т. Шевченко, четырех одинаковых экземпляров книг Л. Толстого, шести одинаковых экземпляров книг А. Дюма? Комплект должен состоять из 15 книг.

6. На вершину горы ведут пять дорог. Сколькими способами турист может подняться на гору и спуститься с нее?

7. Ассортимент магазина состоит из мыла, шампуней, бальзамов для волос, дезодорантов. Сколькими способами можно составить гигиенические наборы, состоящие из 6 предметов?

Вариант 14

1. Из группы, состоящей из 14 человек, надо отобрать 6 человек в команду и трех членов жюри. Сколькими способами это можно сделать?

2. Сколькими способами 9 человек могут разместиться в ряд?

3. Сколько различных четырехзначных чисел можно образовать из цифр 1, 2, 3, … , 9, если все цифры в каждом четырехзначном числе различны?

4. Сколькими способами можно распределить три билета в разные театры и на разные дни среди 20 студентов, если каждый студент может получить любое (не превышающее трех) число билетов?

5. Из 3 экземпляров учебника алгебры, 7 экземпляров учебника геометрии и 7 экземпляров учебника тригонометрии надо выбрать по одному экземпляру каждого учебника. Сколькими способами это можно сделать?

6. В магазине имеются воздушные шары пяти различных цветов. Сколькими способами можно купить 20 шаров для составления гирлянды?

7. Сколько существует вариантов выбора 5 карт из стандартной колоды, содержащей 52 карты?

Вариант 15

1. Для проверки трех различных объектов надо из 12 специалистов составить три комиссии: в первой 5 человек, во второй – 4 человека, в третьей – 3 человека. Сколькими способами это можно сделать?

2. Из спортивного клуба, насчитывающего 30 членов, надо составить команду из 4 человек для участия в забеге на 100 м. Сколькими способами это можно сделать?

3. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4?

4. В студенческой группе из 25 человек надо избрать актив, состоящий из старосты, заместителя старосты, профорга, культорга и ответственного за спортивную работу. Сколькими способами это можно сделать?

5. Сколько имеется пятизначных чисел, которые делятся на 5?

6. Семь девушек водят хоровод. Сколькими различными способами они могут встать в круг?

7. В магазине продается чай шести видов. Сколькими способами можно купить 8 пачек чая?

Вариант 16

1. Сколько существует перестановок букв a, c, d, e, f, g и k, если нет никаких ограничений?

2. Сколькими способами можно сделать двухцветный флаг с горизонтальными полосами равной ширины (порядок следования цветов значения не имеет), если имеется материя 5 цветов и допускаются одноцветные полоски?

3. Сколько существует двузначных чисел, у которых обе цифры четные?

4. Всем 35 участникам фольклорного фестиваля были выданы дипломы. Дипломы первой степени получили 7 участников, дипломы второй степени – 12 участников. Остальные получили дипломы третьей степени. Сколькими способами это можно было сделать?

5. В кабину лифта 9-этажного дома вошли три пассажира, каждый из которых может выйти на любом из 8 этажей. Сколькими способами может осуществляться разгрузка лифта?

6. На рояле 88 клавиш. Сколько существует последовательностей из шести попарно различных звуков? (В последовательности звуки идут один за другим).

7. Группа состоит из 10 артистов. Сколькими способами можно выбирать из нее 6 человек для участия в спектаклях?

Вариант 17

1. Сколько можно составить телефонных номеров из 6 цифр каждый, так, чтобы все цифры были различны?

2. Сколькими способами можно раздать 7 книг трем студентам, если каждый из студентов может получить все книги?

3. В магазине продается шоколад пяти видов. Сколькими способами можно купить 7 плиток шоколада?

4. В группе 24 человека. Сколькими способами можно составить график дежурств по 4 человека?

5. Сколькими способами можно сложить 12 дисков в коробку?

6. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, если каждую из них можно использовать не более одного раза?

7. Сколько различных слов можно получить, переставляя буквы слова «программа»?

Вариант 18

1. Сколько пятизначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6?

2. Сколькими способами можно сформировать три команды по 4 человека в каждой из группы в 12 человек?

3. Если авиакомпания осуществляет 8 рейсов из Киева в Берлин и 12 рейсов из Берлина в Париж, то сколько всего рейсов из Киева в Париж проходит транзитом через Берлин?

4. Сколькими способами можно построить в шеренгу 5 человек?

5. Сколькими способами можно распределить пять билетов в разные кинотеатры среди 12 человек, если каждый человек может получить не более одного билета?

6. Сколько существует способов при зачеркивании 6 номеров из 49?

7. Сколькими способами можно сформировать праздничный комплект из 7 предметов, состоящий из товаров четырех наименований?

Вариант 19

1. Для проверки четырех различных предприятий надо из 15 инспекторов составить следующие комиссии: в первой 4 специалиста, во второй – 3, в третьей – 8. Сколькими способами это можно сделать?

2. Сколькими способами можно распределить 10 различных автомобилей между тремя предприятиями?

3. Сколько существует четных пятизначных чисел, начинающихся нечетной цифрой?

4. Среди 25 человек распределяют две путевки, одна – в Сочи, другая – в Магадан. Сколькими способами это можно сделать?

5. Сколько пятизначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5 при условии, что каждая цифра входит в изображение числа один раз?

6. В магазине продаются тетради пяти видов. Сколькими способами можно купить 12 тетрадей?

7. Сколькими способами можно выбрать две детали из ящика, содержащего 10 деталей?

Вариант 20

1. Сколько имеется шестизначных чисел, если первая цифра разряда может быть нулем, цифры не должны повторяться и последние две цифры должны быть 7 или 8?

2. В магазине канцтоваров имеются в продаже ручки, карандаши, тетради, альбомы, клей. Сколькими способами можно составить ученический набор, состоящий из 12 предметов?

3. Сколькими способами можно провести распределение 10 механизаторов по трем сушильным установкам? Один механизатор назначается на одну сушильную установку.

4. В магазине имеется 12 видов обоев. Сколькими способами можно выбрать обои различных видов для трех различных комнат? Обоев каждого вида достаточно для оклейки всех комнат.

5. В группе из 25 человек надо распределить две одинаковые путевки в один санаторий. Сколькими способами это можно сделать?

6. Сколькими способами можно расположить 9 книг на круглой вращающейся полке?

7. Сколько различных слов можно получить, переставляя буквы слова «диаграмма»?

Вариант 21

1. Сколькими способами можно разместить 12 человек по трем командам, если в первую можно поместить два, во вторую – шесть, в третью – четыре человека?

2. Сколькими способами можно заполнить полку, вмещающую 17 книг, если она используется студентом, у которого 17 различных книг?

3. В чемпионате по футболу участвуют 17 команд. Разыгрываются медали: золотые, серебряные, бронзовые. Сколькими способами они могут быть распределены?

4. В ящике лежат яблоки двух видов – красные и белые. Сколькими способами можно отобрать из него 12 яблок?

5. Сколькими способами можно выбрать четыре числа из десяти?

6. В актив студенческой группы выбрано 7 человек, из которых нужно выбрать старосту, заместителя старосты, культорга, спорторга, профорга. Сколькими способами это можно сделать?

7. Сколькими способами можно вытащить 13 карт из колоды в 52 карты, если карта после вытаскивания возвращается обратно?

Вариант 22

1. Сколько трехкнопочных комбинаций существует на кодовом замке (все три кнопки нажимаются одновременно), если на нем всего 10 цифр?

2. На собрании должны выступить 5 человек – А, Б, В, Г, Д. Сколькими способами можно составить список выступающих?

3. В спортивном клубе занимаются 20 человек. Сколько существует способов составить из них три команды для участия в разных соревнованиях? В первой команде должно быть 9 человек, во второй – 6, в третьей – 5.

4. На кинофестивале награждают лучшие фильмы года из 12 отобранных. Сколькими способами могут распределиться среди них 7 номинаций, если каждый фильм может иметь несколько наград?

5. Научное общество состоит из 25 человек. Надо выбрать президента общества, вице-президента, ученого секретаря и казначея. Сколькими

способами это можно сделать, если каждый член общества может занимать лишь один пост?

6. Если телефонный номер не может начинаться с 0 или 1, то сколько существует различных шестизначных телефонных номеров?

7. В магазине спорттоваров имеются в продаже футбольные мячи трех видов. Сколькими способами можно купить в нем 7 мячей?

Вариант 23

1. Сколькими способами можно распределить три билета в театр на один вечер среди 20 студентов, если каждый студент может получить не более одного билета?

2. На карусели четыре одинаковых места для пассажиров. Сколько способов рассадки 4 пассажиров для катания на карусели?

3. К несчастью, судья на выставке цветов не разбирается в орхидеях. Если он выбирает победителей случайным образом среди 18 участниц, то сколько имеется способов вручить первый, второй и третий приз?

4. Сколько существует различных четырехзначных чисел, составленных из цифр 1, 2, …, 9?

5. Известно, что ответ на тест, состоящий из 30 вопросов, содержит 20 утвердительных ответов и 10 отрицательных. К сожалению, больше ничего не известно. Сколько существует вариантов ответа на тест, содержащий 20 утвердительных ответов на вопросы?

6. Для участия в студенческой спартакиаде надо сформировать команду из 10 человек, состоящую из студентов 1-4-го курсов. Сколькими способами это можно сделать?

7. В кабину лифта 9-этажного дома вошли три пассажира, каждый из которых может выйти на любом из 8 этажей. Сколькими способами может осуществляться разгрузка лифта при условии, что на каждом этаже выходит не более одного пассажира?

Вариант 24

1. Сколько существует вариантов ответа на тест из 30 вопросов, если на каждый вопрос требуется ответ «да» или «нет»?

2. Сколькими способами можно расставить 7 различных книг на книжной полке?

3. Сколькими способами можно распределить три билета в разные театры среди 20 студентов, если каждый студент может получить не более одного билета?

4. Сколько различных слов можно получить, переставляя буквы слова «автоматизация»?

5. У мамы два яблока и 3 груши. Каждый день в течение пяти дней подряд она выдает по одному фрукту. Сколькими способами это может быть сделано?

6. В цветочном магазине имеются красные, белые и желтые розы. Сколькими способами составить из них букет, состоящий из 15 цветков?

7. Имеется 6 пар перчаток различных размеров. Сколькими способами можно выбрать из них одну перчатку на левую руку и одну – на правую руку, так, чтобы эти перчатки были различных размеров?

Вариант 25

1. Сколько существует способов составления программы концерта, в котором выступают 12 артистов, если каждый артист будет выступать только один раз?

2. В скачках участвуют десять лошадей. Сколько существует вариантов призовой тройки лошадей?

3. Сколькими способами можно разложить в два кармана девять монет различного достоинства?

4. В продаже имеются принтеры двух видов – струйные и лазерные. Сколькими способами можно купить в офис 9 принтеров?

5. Сколькими способами из группы в 25 человек можно сформировать 5 подгрупп по 5 человек?

6. Сколько словарей надо издать, чтобы можно было непосредственно выполнять переводы с любого из пяти языков: русского, английского, французского, немецкого, итальянского, на любой другой из этих пяти языков?

7. В почтовом отделении продаются открытки 10 сортов. Сколькими способами можно купить в нем 8 различных открыток?

2.4 Задания к теме 1.4 «Элементы математической логики»

Задание 10. Проверить составлением таблицы истинности, будут ли эквивалентны следующие формулы:

1. $x \to (y \oplus z)$ и $(x \to y) \oplus (x \to z)$.
2. $x|(y \to z)$ и $(x|y) \to (x|z)$.
3. $x \wedge (y \oplus z)$ и $(x \wedge y) \oplus (x \wedge z)$.
4. $x \vee (y \oplus z)$ и $(x \vee y) \oplus (x \vee z)$.
5. $x \wedge (y \to z)$ и $(x \wedge y) \to (x \wedge z)$.
6. $x \wedge (y \leftrightarrow z)$ и $(x \wedge y) \leftrightarrow (x \wedge z)$.
7. $x \wedge (y|z)$ и $(x \wedge y)|(x \wedge z)$.
8. $x \vee (y \to z)$ и $(x \vee y) \to (x \vee z)$.
9. $x \vee (y|z)$ и $(x \vee y)|(x \vee z)$.
10. $x \to (y \oplus z)$ и $(x \to y) \oplus (x \to z)$.
11. $x \vee (y \leftrightarrow z)$ и $(x \vee y) \leftrightarrow (x \vee z)$.
12. $x \oplus (y \leftrightarrow z)$ и $(x \oplus y) \leftrightarrow (x \oplus z)$.
13. $x \oplus (y|z)$ и $(x \oplus y)|(x \oplus z)$

14. $x \downarrow (y \leftrightarrow z)$ и $(x \downarrow y) \leftrightarrow (x \downarrow z)$
15. $x|(y \oplus z)$ и $(x|y) \oplus (x|z)$.
16. $x \to (y|z)$ и $(x \to y)|(x \to z)$.
17. $x \to (y \leftrightarrow z)$ и $(x \to y) \leftrightarrow (x \to z)$.
18. $x \vee (y \oplus z)$ и $(x \vee y) \oplus (x \vee z)$.
19. $x \downarrow (y \oplus z)$ и $(x \downarrow y) \oplus (x \downarrow z)$
20. $x \leftrightarrow (y \oplus z)$ и $(x \leftrightarrow y) \oplus (x \leftrightarrow z)$.
21. $x \wedge (y \oplus z)$ и $(x \wedge y) \oplus (x \wedge z)$.
22. $x \vee (y \oplus z)$ и $(x \vee y) \oplus (x \vee z)$.
23. $x \wedge (y \to z)$ и $(x \wedge y) \to (x \wedge z)$.
24. $x \wedge (y \leftrightarrow z)$ и $(x \wedge y) \leftrightarrow (x \wedge z)$.
25. $x \wedge (y|z)$ и $(x \wedge y)|(x \wedge z)$.

Задание 11. Проверить, что рассуждения, приведенные ниже, логически правильные.

1. Правило отрицаний (Modus Tollens).
$(A \to B) \wedge \overline{B} \to \overline{A}$.

Правило утверждения – отрицания (Modus Ponando – Tollens):

2. $(A \oplus B) \wedge A \to \overline{B}$.
3. $(A \oplus B) \wedge B \to \overline{A}$.

Правила отрицания – утверждения (Modus Tollens – Ponens):

4. $(A \oplus B) \wedge \overline{A} \to B$.
5. $(A \oplus B) \wedge \overline{B} \to A$.
6. $(A \vee B) \wedge \overline{A} \to B$.
7. $(A \vee B) \wedge \overline{B} \to A$.
8. Правило транзитивности.
$(A \to B) \wedge (B \to C) \to (A \to C)$.
9. Закон противоречия.
$(A \to B) \wedge (A \to \overline{B}) \to \overline{A}$.
10. Правило контрапозиции.
$(A \to B) \to (\overline{B} \to \overline{A})$.
11. Правило сложной контрапозиции.
$[(A \wedge B) \to C] \to [(A \wedge \overline{C}) \to \overline{B}]$.
12. Правило сечения.
$[(A \to B) \wedge [(B \wedge C) \to D]] \to [(A \wedge C) \to D]$.
13. Правило объединения посылок.
$[A \to (B \to C)] \to [(A \wedge B) \to C]$.
14. Правило разъединения посылок.
$[(A \wedge B) \to C] \to [A \to (B \to C)]$.

15. $\left[(A \wedge B) \to C\right] \to \left[A \to (B \to C)\right]$.

Правила дилемм:

16. $\left[(A \to C) \wedge (B \to C) \wedge (A \vee B)\right] \to C$.

17. $\left[(A \to B) \wedge (A \to C) \wedge (\overline{B} \vee \overline{C})\right] \to \overline{A}$.

18. $\left[(A \to B) \wedge (C \to D) \wedge (A \vee C)\right] \to (B \vee D)$.

19. $\left[(A \to B) \wedge (C \to D) \wedge (\overline{B} \vee \overline{D})\right] \to \overline{A} \vee \overline{C}$.

Проверьте, что рассуждения, приведенные ниже, логически не правильные.

20. $(A \to B) \wedge B \to A$.

21. $(A \to B) \wedge (\overline{A} \to \overline{B})$.

22. $(A \vee B) \wedge A \to B$.

23. Если рабочий отсутствовал на работе, он не выполнил задание. Рабочий не выполнил задания, следовательно, он отсутствовал на работе.

24. Этот человек студент или предприниматель. Он студент, следовательно, он не предприниматель.

25. Сегодня понедельник или вторник. Сегодня вторник. Следовательно, сегодня не понедельник.

Задание 12. При помощи составления таблицы истинности приведите формулу с СДНФ.

1. $(x \mid \overline{y}) \to (x \oplus \overline{yz})$.
2. $((x \to \overline{y}) \mid \overline{z}) \oplus \overline{xy}$.
3. $((x \mid \overline{y}) \to \overline{z}) \oplus \overline{xy})$.
4. $((x \to \overline{y}) \mid \overline{z}) \oplus \overline{xy}$.
5. $((x \leftrightarrow \overline{y}) \mid \overline{z}) \downarrow \overline{xy}$.
6. $((x \downarrow y) \leftrightarrow \overline{z}) \vee xy$.
7. $((x \mid \overline{y}) \leftrightarrow \overline{z}) \oplus \overline{xy}$.
8. $((x \mid \overline{y}) \vee \overline{z}) \leftrightarrow \overline{xy}$.
9. $((\overline{x} \mid y) \vee \overline{z}) \oplus \overline{xy}$.
10. $x \oplus ((\overline{y} \vee \overline{z}) \leftrightarrow \overline{xy})$.
11. $x \mid ((\overline{y} \vee \overline{z}) \downarrow \overline{xy}$.
12. $x \leftrightarrow ((\overline{y} \vee \overline{z}) \downarrow \overline{xy}$.
13. $x \mid ((\overline{y} \leftrightarrow \overline{z}) \oplus \overline{xy})$.
14. $x \downarrow ((\overline{y} \vee \overline{z}) \mid \overline{xy})$.
15. $(x \leftrightarrow \overline{y}) \oplus (x \to \overline{xy})$.

16. $(x \wedge \overline{y}) \vee (z \leftrightarrow \overline{x \downarrow y})$.

17. $(x | \overline{y}) \leftrightarrow (z \oplus \overline{xy})$.

18. $(x \oplus \overline{y}) \rightarrow (z| \ \overline{xy})$

19. $(x \leftrightarrow \overline{y}) \rightarrow z \vee \overline{xy})$.

20. $(x \rightarrow \overline{y}) \Big| (z \oplus \overline{x \vee y}$.

21. $(x \vee \overline{y}) \rightarrow (\overline{z} \oplus \overline{x})$.

22. $\overline{(x \vee \overline{y}) \rightarrow (z \oplus \overline{x})}$.

23. $(\overline{x} \vee \overline{y}) \rightarrow \overline{(z \oplus x)}$.

24. $(x \vee \overline{y}) \rightarrow \overline{(z \leftrightarrow x)}$.

25. $\overline{(x \vee \overline{y}) \rightarrow (z \leftrightarrow \overline{x})}$.

Задание 13. Выяснить местность предиката и его выполнимость (табл. 2.7). Каждый аргумент принимает значение из множества M = {Z – целые, *R* – действительные, N – натуральные числа}.

Таблица 2.7

№	M	P	№	M	P
1	Z	$\forall x\,(x + y - z > 2)$	14	Z	$\exists x\,(xz + yx = 1)$
2	R	$\exists x\,\forall y\,(xy = z - x)$	15	N	$\forall x\,(x^2 - y^2 > x + z)$
3	N	$\forall x\,\exists y\,(xyz = yz)$	16	R	$\exists y\,\forall x\,(yx^2 = 3yx + z)$
4	N	$\forall x\,\exists z\,(z > xy^3)$	17	Z	$\exists x\,\forall y\,(2y + x > x + z^2)$
5	N	$\exists x\,\exists y\,(xz = y^2)$	18	N	$\forall y\,(x - 2y < z - y)$
6	Z	$\forall x\,\exists y\,(xz = y)$	19	Z	$\forall x\,\exists y\,(x + y + z = 5)$
7	R	$\exists y\,\forall x\,(x + 2y > y + z)$	20	R	$\exists x\,\forall y\quad(xy - 2x^2 z > 0)$
8	Z	$\forall y\,\exists z\,(x^2 + yz > 0)$	21	Z	$\forall x\,\exists z\,(xy = xz)$
9	R	$\forall x\,\exists y\,(x^2 + z^2 > 2(x + y)^2)$	22	N	$\exists y\,\forall x\,\ (xy - zx < 0)$
10	Z	$\forall x\,\forall y\,(x + y + z > \sqrt[3]{xyz})$	23	R	$\exists z\,(xy + z^2 > 2xy)$
11	R	$\exists y\,(yx - xyz > 0)$	24	Z	$\forall y\,\exists z\,(xz = y)$
12	N	$\forall x\,\forall y\,(xz = y^2)$	25	R	$\forall x\,\exists z\,(xz - y^2 z > 0)$
13	R	$\forall x\,\exists z\,(yx + yz < 0)$			

2.5 Задания к теме 1.5 «Графы»

Задание 14. Дана матрица смежности (инцидентности) некоторого графа (табл. 2.8). Восстановить по ней геометрически граф и построить его матрицу инцидентности (смежности).

Таблица 2.8

Вариант	Матрица	Вариант	Матрица
1	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	2	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	4	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
5	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	6	$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
7	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	8	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
9	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	10	$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
11	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	12	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Вариант	Матрица	Вариант	Матрица
13	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	14	$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Продолжение табл. 2.8

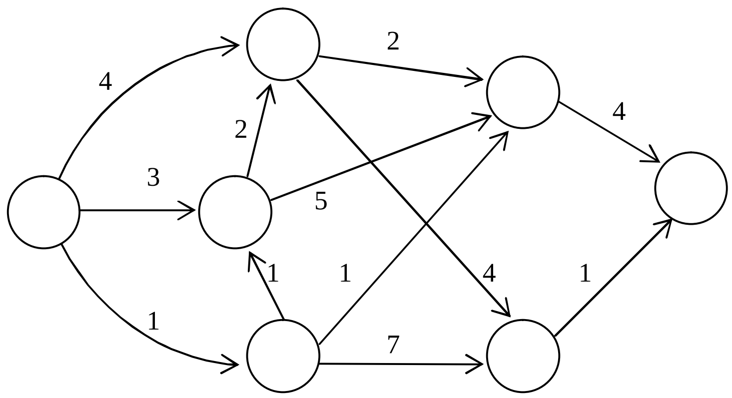
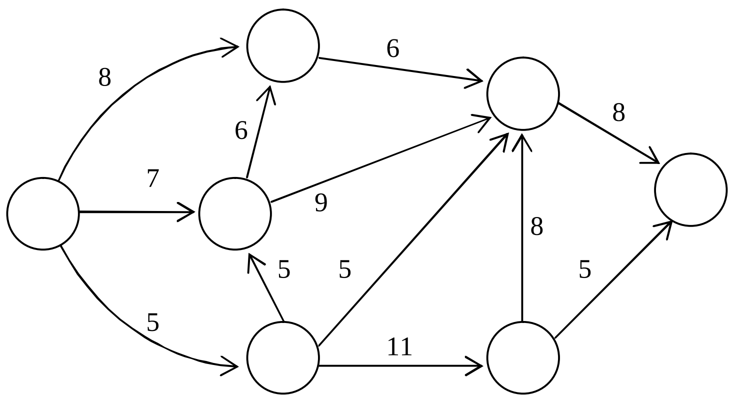
Вариант	Матрица	Вариант	Матрица
15	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	16	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
17	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	18	$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$
19	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	20	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
21	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	22	$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$
23	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	24	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

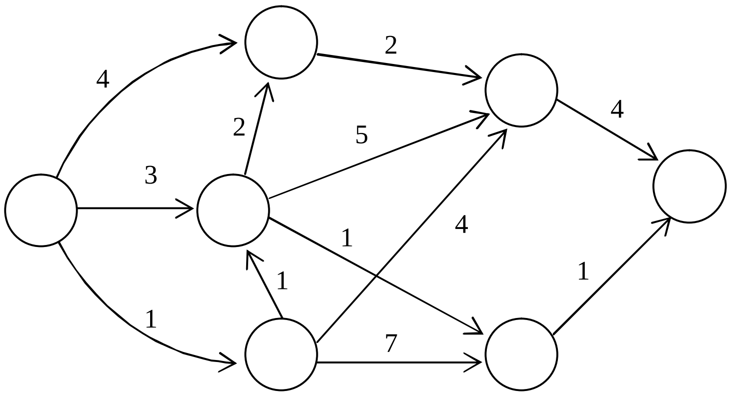
Вариант	Матрица	Вариант	Матрица
25	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$		

2.6 Задания к теме 1.6 «Сети»

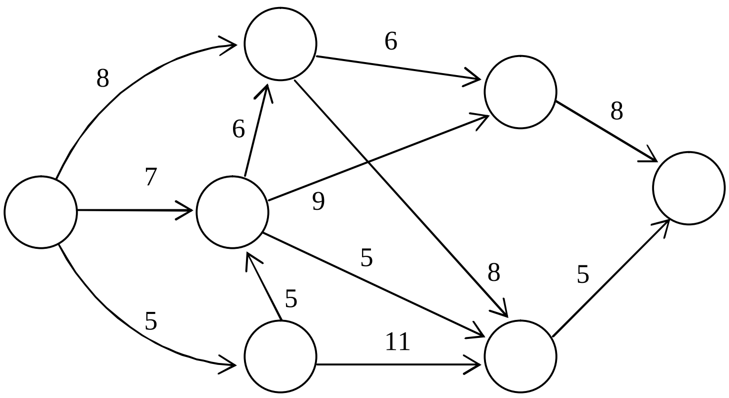
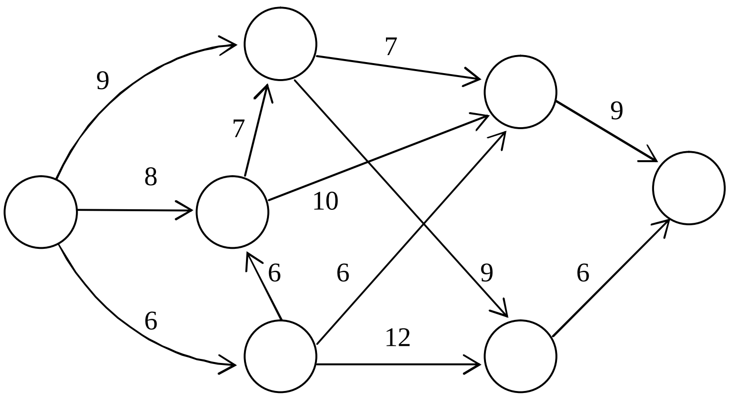
Задание 15. Пронумеровать вершины заданной сети (табл. 2.9) в лексиграфическом порядке. Найти максимальный и минимальный пути на этой сети.

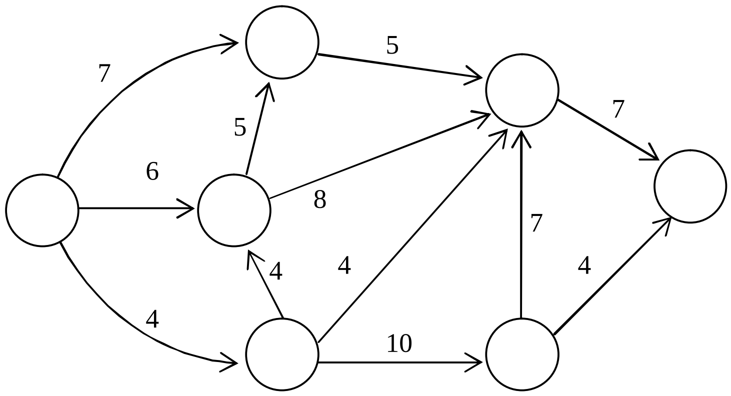
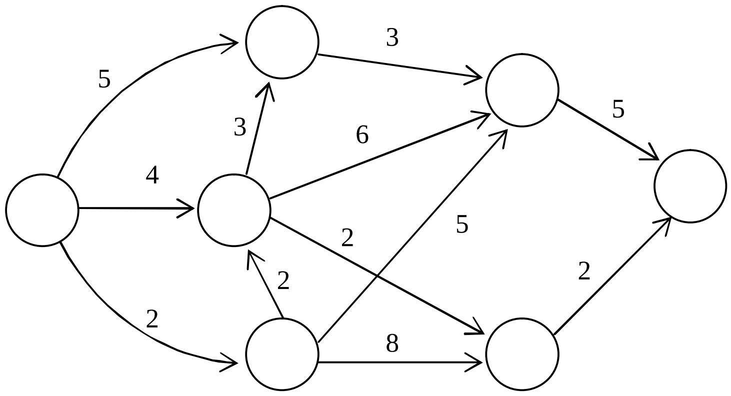
Таблица 2.9

Вариант	Сеть
1	
2	

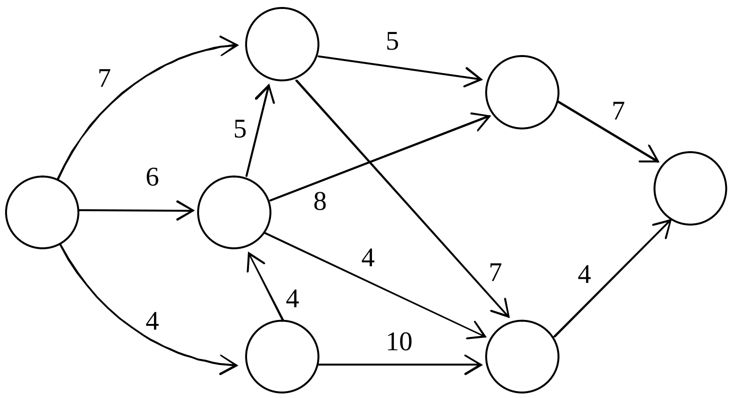
Вариант	Сеть
3	

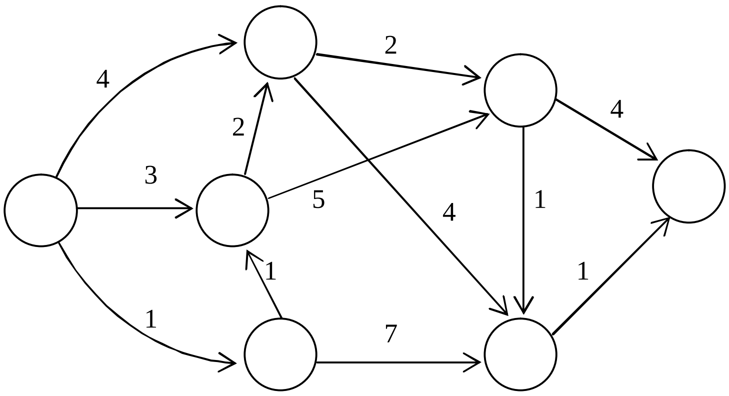
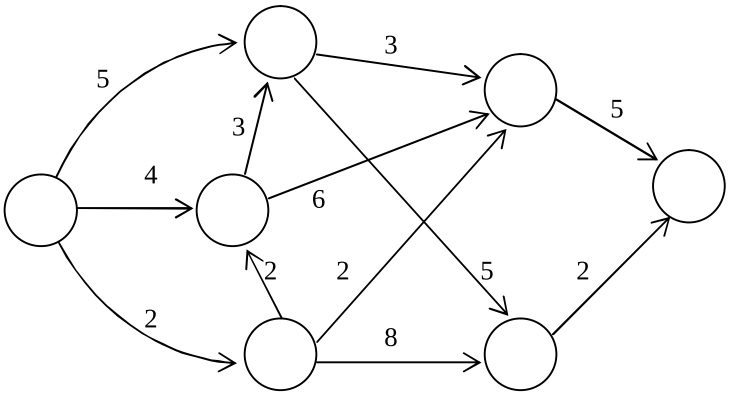
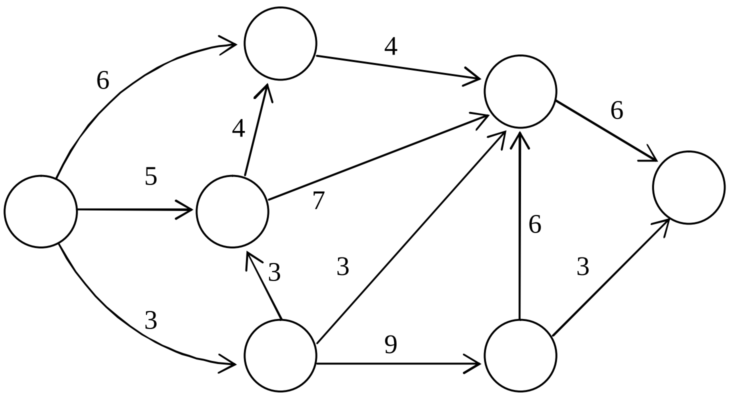
Продолжение таблицы 2.9

Вариант	Сеть
4	
5	

Вариант	Сеть
6	
7	

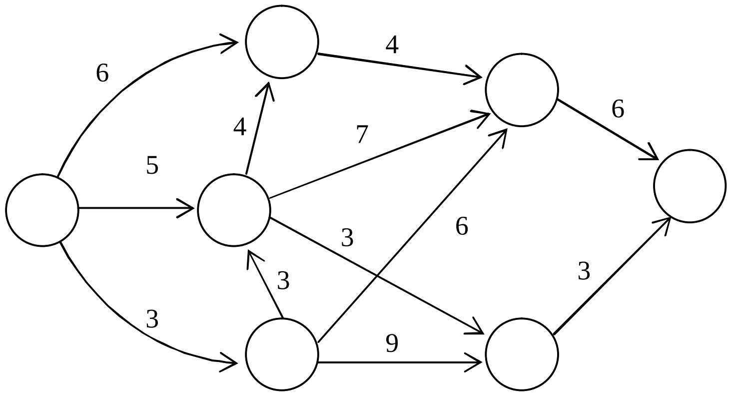
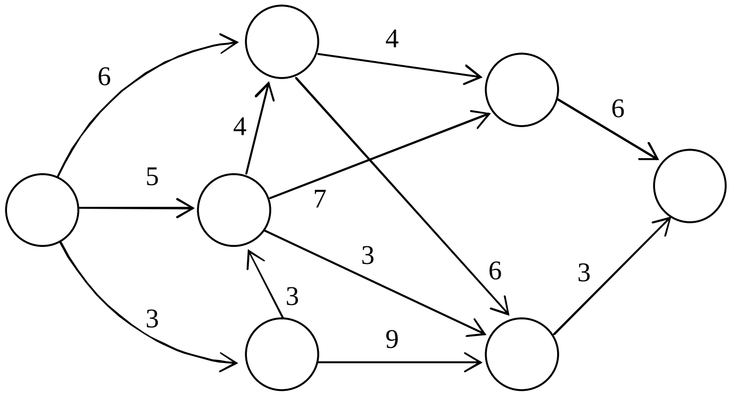
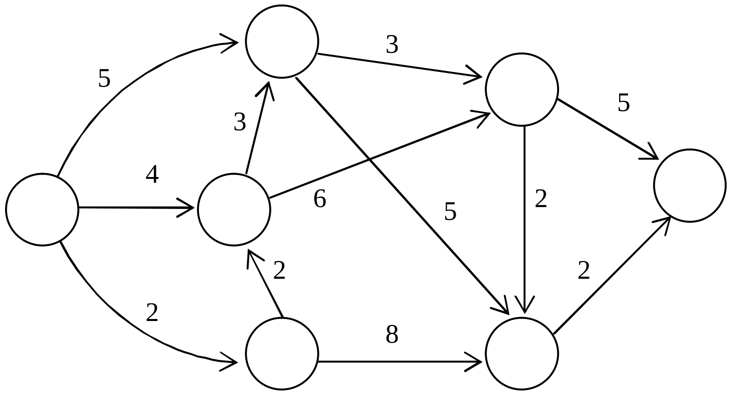
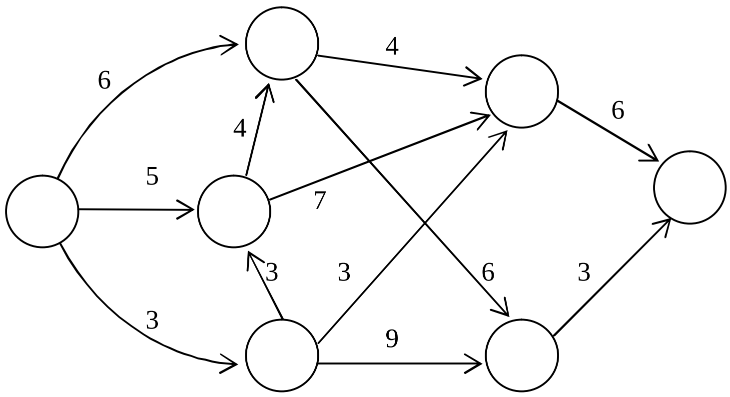
Продолжение таблицы 2.9

Вариант	Сеть
8	

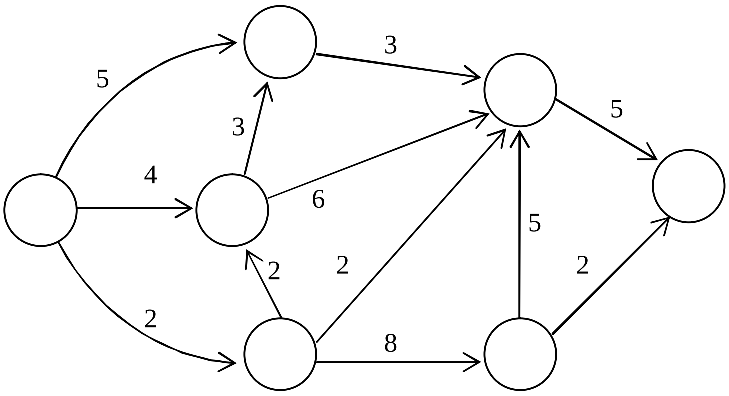
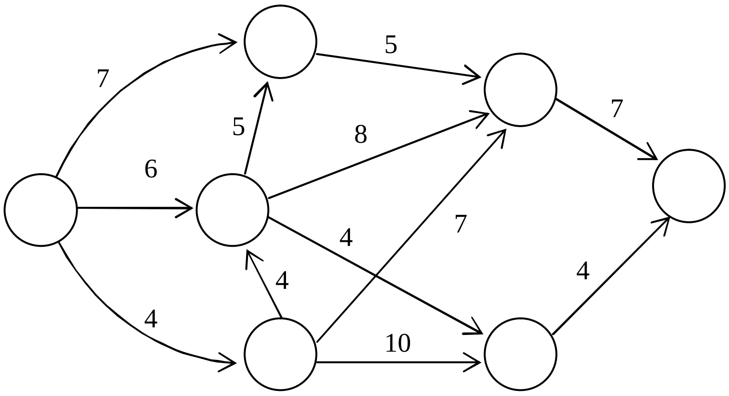
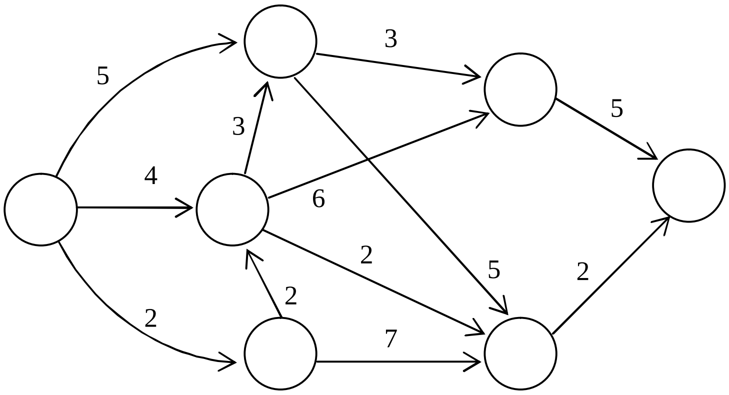
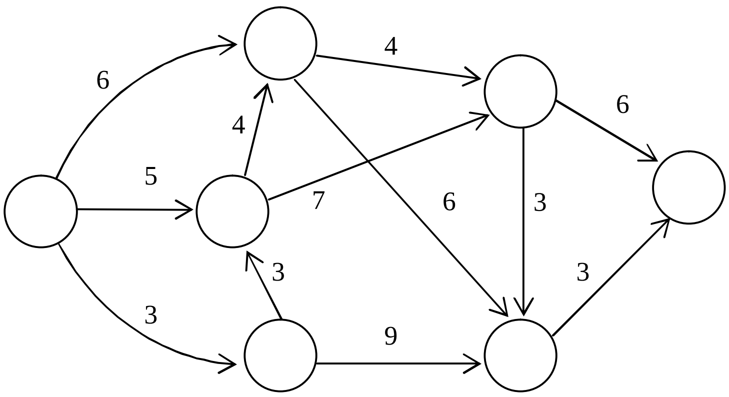
Вариант	Сеть
9	
10	
11	

Продолжение таблицы 2.9

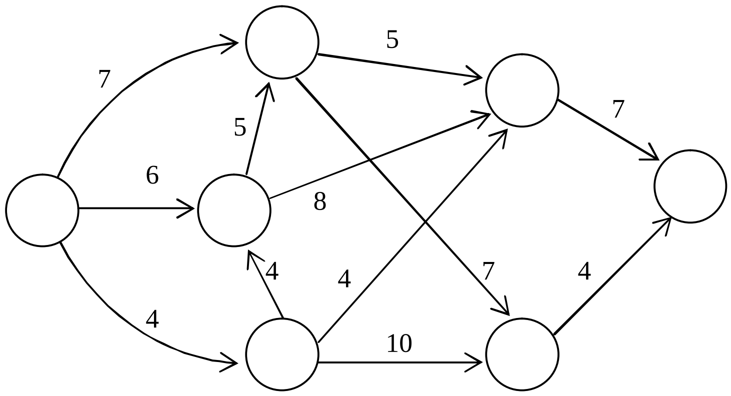
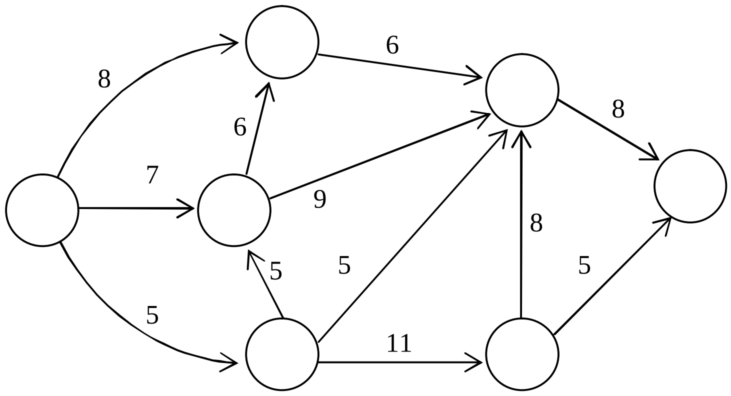
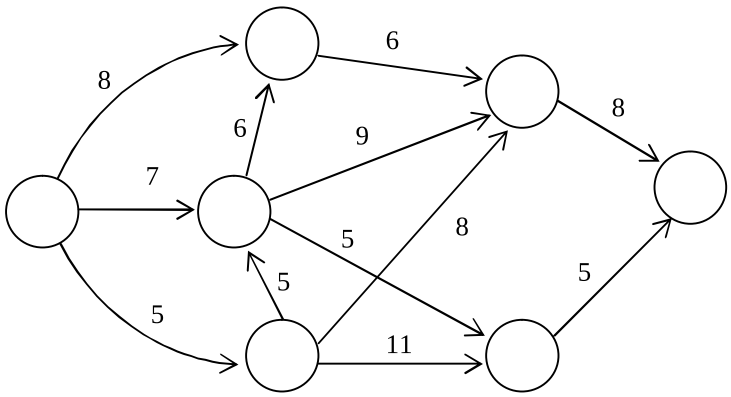
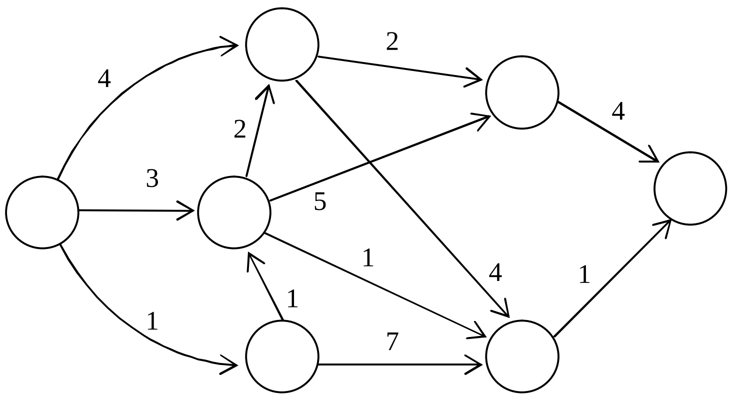
Вариант	Сеть

<table>
<tr><th>Вариант</th><th>Сеть</th></tr>
<tr><td>12</td><td>
</td></tr>
<tr><td>13</td><td>
</td></tr>
<tr><td>14</td><td>
</td></tr>
<tr><td>15</td><td>
</td></tr>
</table>

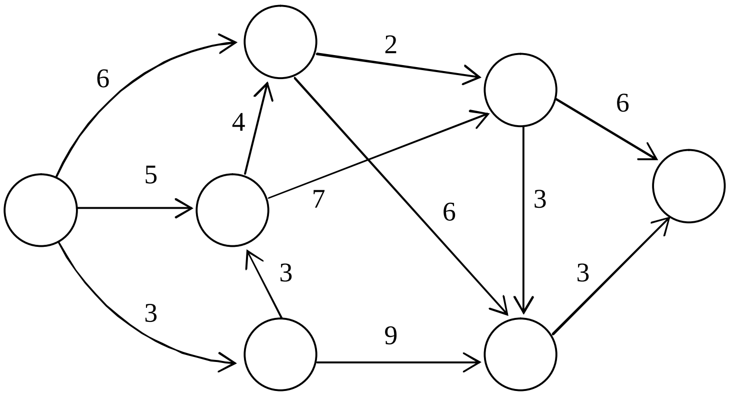
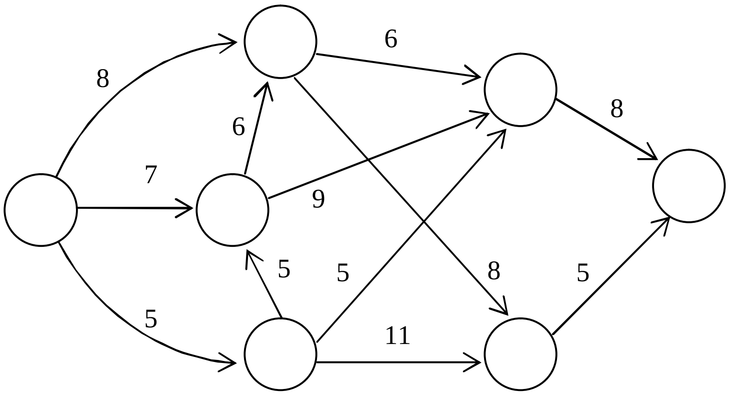
Продолжение таблицы 2.9

Вариант	Сеть
16	
17	
18	
19	

Продолжение таблицы 2.9

Вариант	Сеть
20	
21	
22	
23	

Продолжение таблицы 2.9

Вариант	Сеть
24	
25	

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Акимов, О. Е.** Дискретная математика: логика, группы, графы / О. Е. Акимов. – 2-е изд., доп. – М. : Лаборатория Базовых Знаний, 2001. – 376 с.

2. **Аляев, Ю. А.** Дискретная математика и математическая логика / Ю. А. Аляев, С. Ф. Тюрин. – М. : Финансы и статистика, 2006. – 368 с.

3. **Андерсен, Дж. А.** Дискретная математика и комбинаторика / Дж. А. Андерсен ; пер. с англ. М. М. Белова. – М. : Вильямс, 2004. – 957 с.

4. **Белоусов, А. И.** Дискретная математика : учебник / А. И. Белоусов, С. Б. Ткачев. – М. : МГТУ им. Баумана, 2001. – 744 с.

5. **Гаврилов, Г. П.** Задачи и упражнения по дискретной математике : учебное пособие / Г. П. Гаврилов. – 3-е изд., перераб. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 416 с.

6. **Горбатов, В. А.** Основы дискретной математики / В. А. Горбатов. – М. : Высшая школа, 1986. – 324 с.

7. **Донской, В. И.** Дискретная математика : учебное пособие / В. И. Донской. – Симферополь : СОНАТ, 2000. – 358 с.

8. **Ерусалимский, Я. М.** Дискретная математика: теория, задачи, приложения / Я. М. Ерусалимский. – М. : Вузовская книга, 2001. – 279 с.

9. **Кофман, А.** Введение в прикладную комбинаторику / А. Кофман; пер. с фр. В. П. Мякишева, В. Е. Тараканова ; под ред. Б. А. Севастьянова. – М. : Наука, 1975. – 480 с.

10. **Кузнецов, О. П**. Дискретная математика для инженера / О. П. Кузнецов, Г. М. Адельсон-Вельский. – М. : Энергоатомиздат, 1988. – 480 с.

11. **Липский, В.** Комбинаторика для программистов / В. Липский ; пер. с польск. В. А. Евстигнеева, О. А. Логиновой ; под ред. А. П. Ершова. – М. : Мир, 1988. – 200 с.

12. **Москинова, Г. И.** Дискретная математика, (математика для менеджера) / Г. И. Москинова. – М. : Логос, 2002. – 236 с.

13. **Новиков, Ф. А.** Дискретная математика для программистов / Ф. А. Новиков. – СПб. : Питер, 2000. – 304 с.

14. **Новиков, Ф. А.** Дискретная математика для программистов :

учебное пособие для студентов вузов, обучающихся по направлению подготовки дипломированных специалистов «Информатика и вычислительная техника» / Ф. А. Новиков. – СПб. : Питер, 2002. – 304 с.

15. **Просветов, Г. И.** Дискретная математика. Задачи и решения : учебное пособие / Г. И. Просветов – М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008. – 222 с.

16. **Соболева, Т. С.** Дискретная математика: учебник для студентов вузов / Т. С. Соболева, А. В. Чечкин. – М. : Академия, 2006. – 256 с.

17. **Судоплатов, С. В.** Дискретная математика : учебник для студентов вузов, обучающихся по техническим специальностям / С. В. Судоплатов, Е. В. Овчинникова. – 2-е изд., перераб. – М. : Инфра-М, 2005. – 255 с.

Навчальне видання

ЧЕРНОМАЗ Володимир Миколайович,
ВАСИЛЬЄВА Людмила Володимирівна,
МЕДВЕДЄВА Ольга Анатоліївна

ДИСКРЕТНА МАТЕМАТИКА

Практикум

для студентів напряму підготовки
6.050101 «Комп'ютерні науки»

(*Російською мовою*)

Редактор О. О. Дудченко

Комп'ютерна верстка О. С. Орда

71/2011. Формат 60 х 84/16. Ум. друк. арк.
Обл.-вид. арк. . Тираж пр. Зам. № .

Видавець і виготівник
Донбаська державна машинобудівна академія
84313, м. Краматорськ, вул. Шкадінова, 72.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
ДК №1633 від 24.12.03