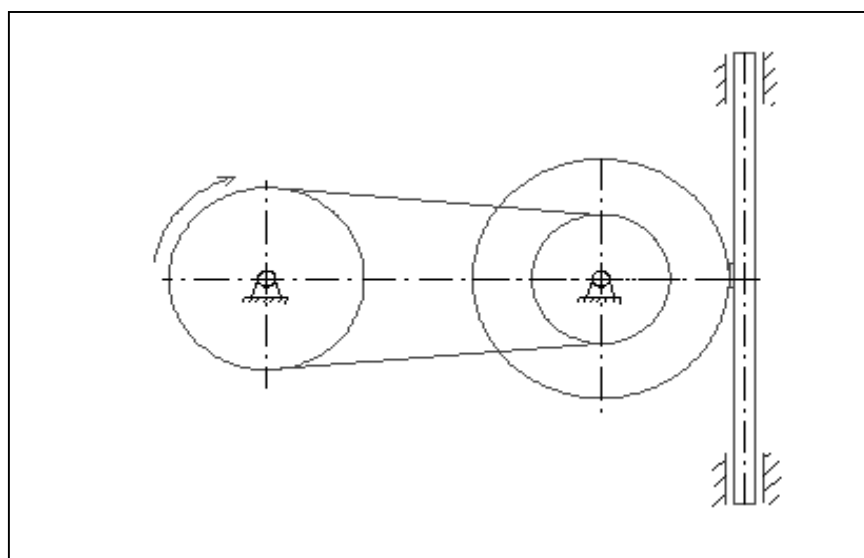


В. О. Приятельчук, В. І. Риндюк, В. О. Федотов

Теоретична механіка
Динаміка матеріальної системи

Розрахунково-графічні та контрольні завдання



Міністерство освіти і науки України
Вінницький національний технічний університет

В. О. Приятельчук, В. І. Риндюк, В. О. Федотов

Теоретична механіка
Динаміка матеріальної системи

Розрахунково-графічні та контрольні завдання

Затверджено Вченою радою Вінницького національного технічного університету як навчальний посібник для студентів напрямів підготовки: 0921 - “Будівництво”; 0902 – “Інженерна механіка”; 0923 – “Зварювання”; 0922 – “Електромеханіка”; 0905 – “Енергетика”; 0906 – “Електротехніка”; 0907 – “Радіотехніка”. Протокол №2 від 30 вересня 2004р.

Вінниця ВНТУ 2005

УДК 531 (075)

П 77

Рецензенти :

В.Ф. Анісімов, доктор технічних наук, професор

І.О. Сивак, доктор технічних наук, професор

В.І. Савуляк, кандидат технічних наук, професор

Рекомендовано до видання Ученою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України

Приятельчук В.О., Риндюк В.І., Федотов В.О.

П77 **Теоретична механіка. Динаміка матеріальної системи.**
Розрахунково – графічні та контрольні завдання. Навчальний посібник. – Вінниця: ВНТУ, 2005. – 78с.

В посібнику приведені сім завдань із розділу “Основні (загальні) теореми динаміки”. Кожне завдання має триста варіантів з прикладом виконання.

Для студентів денної та заочної форми навчання.

УДК 531(075)

©, В. Приятельчук, В. Риндюк, В. Федотов, 2005

Зміст

1. Порядок та основні вимоги до виконання роботи.....	4
2. Розрахунково-графічні та контрольні завдання.....	5
ДС.1 Використання теореми про рух центра мас для визначення переміщення тіл.....	5
1.1 Приклад виконання завдання.....	11
ДС.2 Використання теореми про зміну кінетичного моменту для дослідження руху матеріальної системи.....	13
1.2 Приклад виконання завдання.....	19
ДС.3 Визначення реакцій в'язей тіла, що обертається навколо нерухомої осі.....	23
3.1 Приклад виконання завдання.....	23
3.1.1 Визначення кутового прискорення ϵ системи тіл.....	30
3.1.2 Визначення кутової швидкості.....	31
3.1.3 Визначення реакції опор.....	32
ДС.4 Використання теорем про рух центра мас та кінетичного моменту для дослідження руху матеріальної системи.....	33
4.1 Приклад виконання завдання.....	39
4.1.1 Визначення прискорення тіла 3.....	39
4.1.2 Визначення реакції в'язей циліндричних шарнірів та зусиль між тілами.....	43
ДС.5 Визначення прискорення точок та кутових прискорень тіл за допомогою теореми про зміну кінетичної енергії системи.....	45
5.1 Приклад виконання завдання.....	45
ДС.6 Дослідження планетарного механізму з паралельними осями.....	48
6.1 Приклад виконання завдання.....	48
ДС.7 Використання теореми про зміну кінетичної енергії для вивчення руху матеріальної системи.....	58
7.1 Приклад виконання завдання.....	64
ДС.8 Додаткові динамічні реакції в'язей твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі.....	69
8.1 Приклад виконання завдання.....	69
Література.....	84

1 Порядок та основні вимоги до виконання роботи

З розділу “Кінематика” студенти виконують одну розрахунково – графічну або контрольну роботу. Студенти заочної форми навчання вибирають варіант схеми (рисунок) за двома останніми цифрами залікової книжки (шифр) з таблиці 1, а дані для розрахунку – за останньою цифрою шифру з таблиць, що приведені в завданнях. Варіанти завдання для студентів денної форми навчання вказує викладач.

Таблиця 1

Варіант	Шифр
1	01, 31, 61, 91
2	02, 32, 69, 92
...
29	09, 39, 69, 99
30	00, 30, 60, 90

Студенти денної форми навчання оформляють розрахунково – графічне завдання у відповідності до діючих стандартів ЄСКД(2.105 і 2.106 для текстових конструкторських документів та 2.104 – для основних надписів).

Студенти заочної форми навчання виконують завдання в зошитах. На титульній сторінці зошита вказується номер контрольної роботи, назва дисципліни, прізвище та ініціали студента, шифр, факультет, група і домашня адреса.

Розв’язання кожної задачі потрібно починати на розвороті зошита (з лівої сторінки), так, щоб розрахункова схема та формули, складені за нею, знаходились поряд. На початку сторінки пишеться номер завдання, варіант і приводиться коротка умова задачі (що відомо та що потрібно знайти). Розрахункові схеми (рисунок) виконуються за допомогою креслярських приладів. Розрахунки необхідно супроводжувати короткими поясненнями. На кожній сторінці залишають поля для зауважень рецензента. Якщо робота висилається на повторну перевірку (при виконанні її у другому зошиті) обов’язково прикладається не зарахована робота.

Після зарахування усіх задач студент повинен до іспиту захистити роботу. Графік захисту планується деканатом.

2 Розрахунково-графічні та контрольні завдання

ДС.1 Використання теореми про рух центра мас для визначення переміщення тіл

Визначити переміщення призми 1 по горизонтальній гладенькій поверхні, якщо центр мас тіла 2 опустився на відстань S відносно призми 1 (вар. 1.1-1.19) або тіло 2 повернулося на заданий кут навколо горизонтальної осі (вар. 1.20-1.30). В початковий момент часу матеріальна система знаходиться у спокої.

Дані для розрахунків приведені в табл. 1.1. ($b = 90 - a$)

Таблиця 1.1

Варіант	Рисунок 1-20							Рисунок 21-30				
	S , м	m_1 , кг	m_2 , кг	m_3 , кг	a град. д.	R ,М	r ,М	m_1 , кг	m_2 , кг	m_3 , кг	a град. д.	l , м
1	0,3	2	4	3	30	0,4	0,3	1	2	3	60	0,3
2	0,2	3	2	1	45	0,3	0,2	2	1	1.5	45	0,4
3	0,4	4	1	2	60	0,2	0,15	3	4	2	30	0,5
4	0,1	5	3	4	30	0,1	0,05	4	3	1	60	0,2
5	0,5	6	5	3	45	0,15	0,1	5	2	3	45	0,1
6	0,6	7	2	4	60	0,25	0,2	6	4	5	30	0,15
7	0,7	8	3	2	30	0,35	0,3	7	3	4	60	0,25
8	0,15	9	4	3	45	0,45	0,4	6	2	5	45	0,35
9	0,35	8	5	4	60	0,5	0,25	5	4	3	30	0,45
0	0,25	7	3	2	30	0,3	0,15	4	3	2	60	0,55

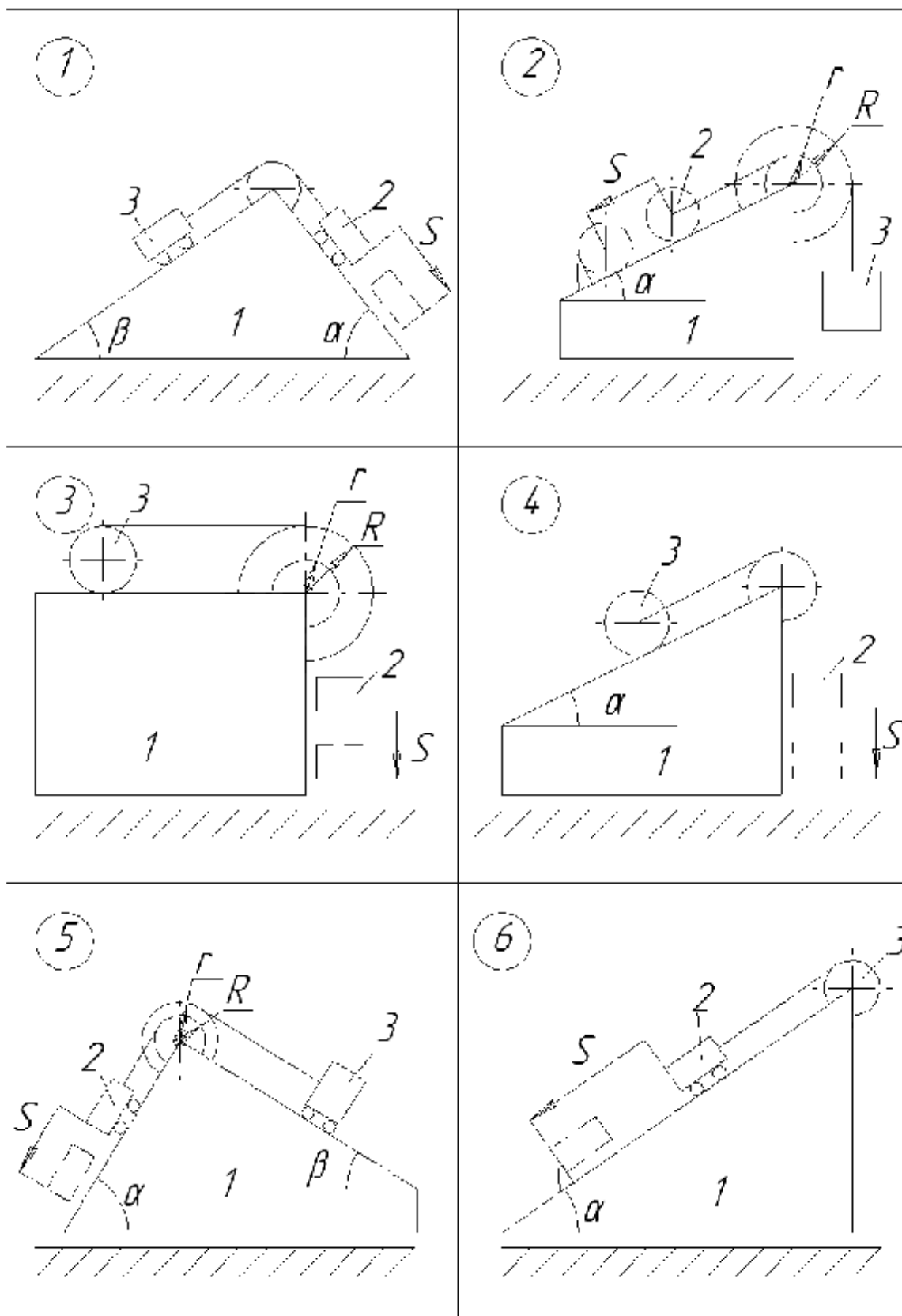


Рисунок 1.1

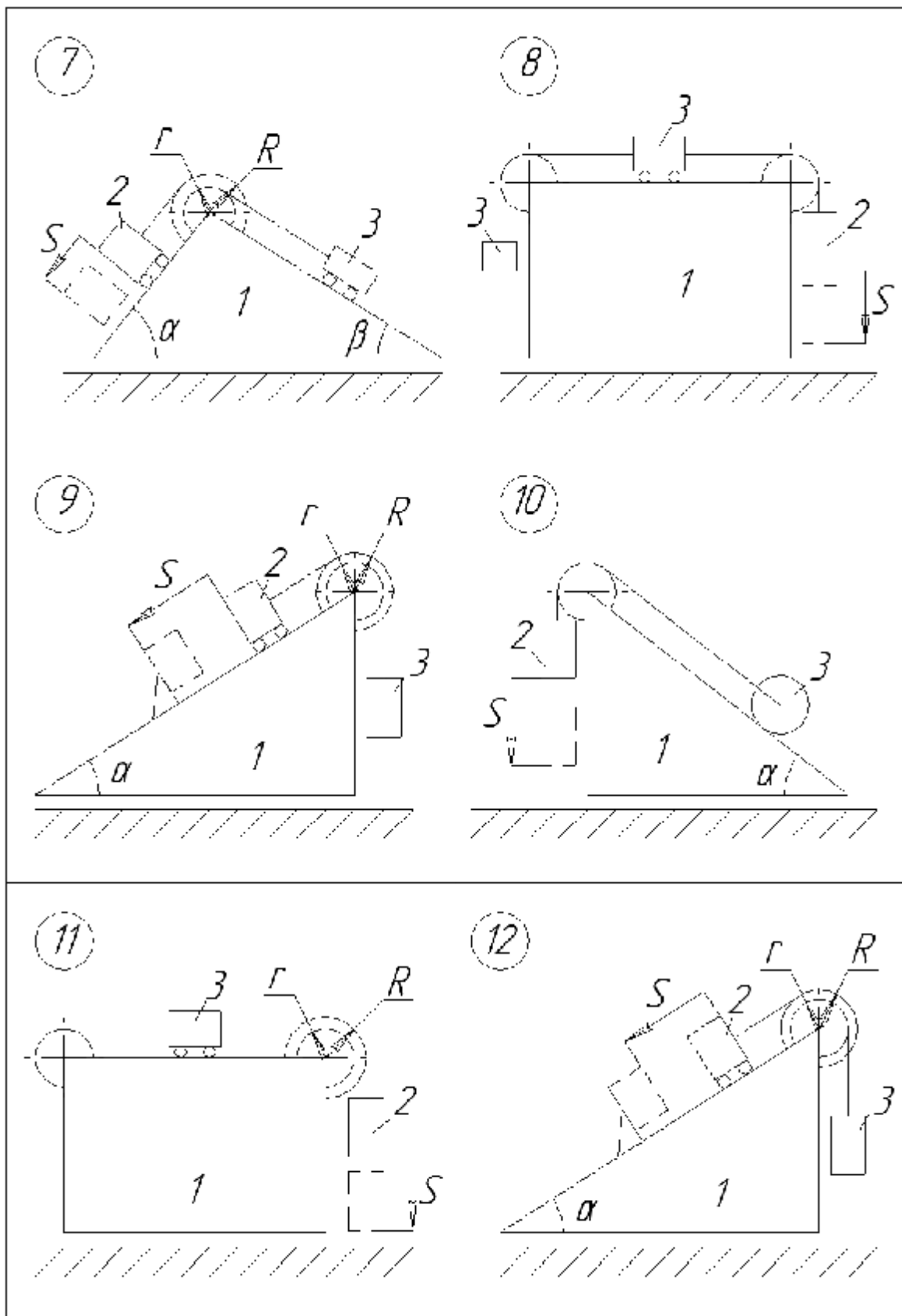


Рисунок 1.2

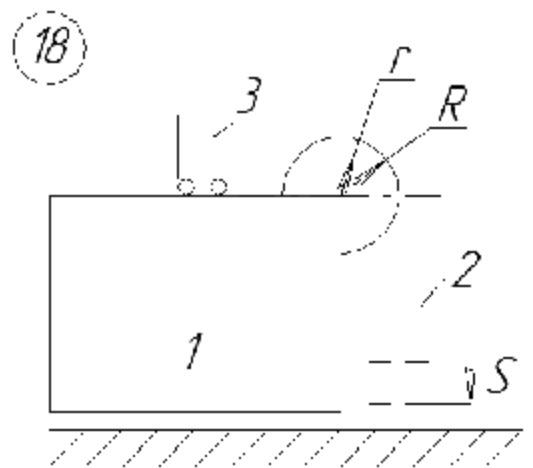
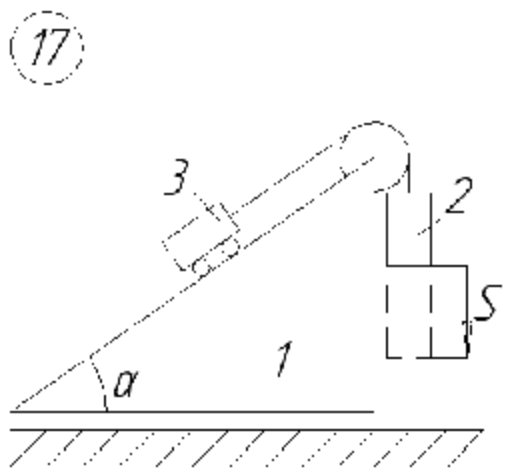
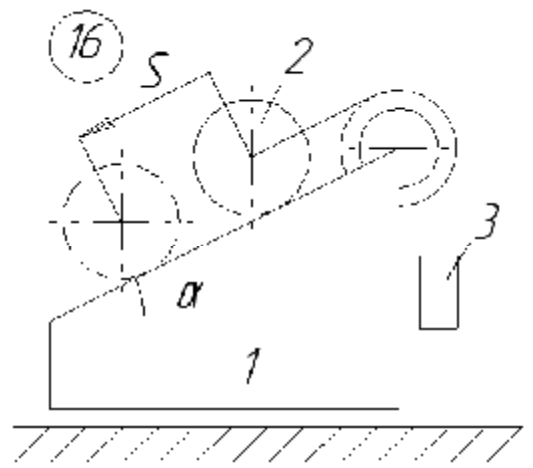
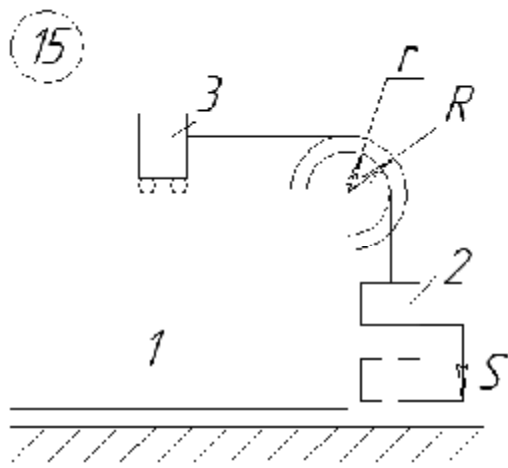
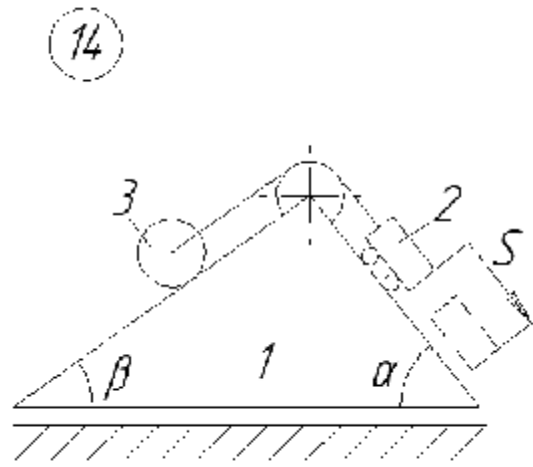
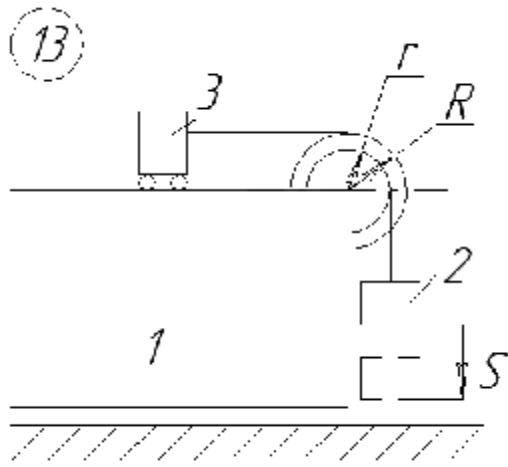


Рисунок 1.3

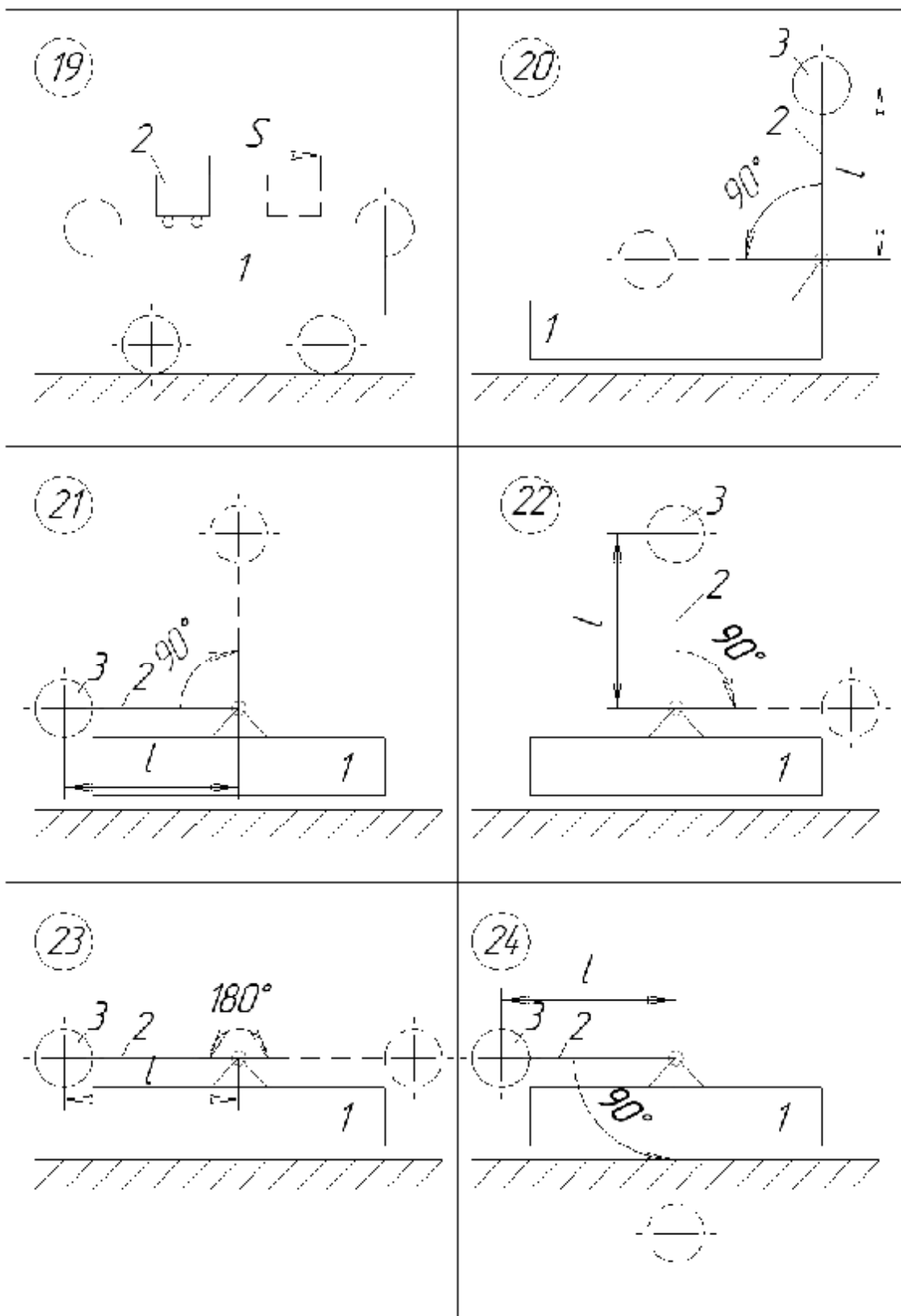


Рисунок 1.4

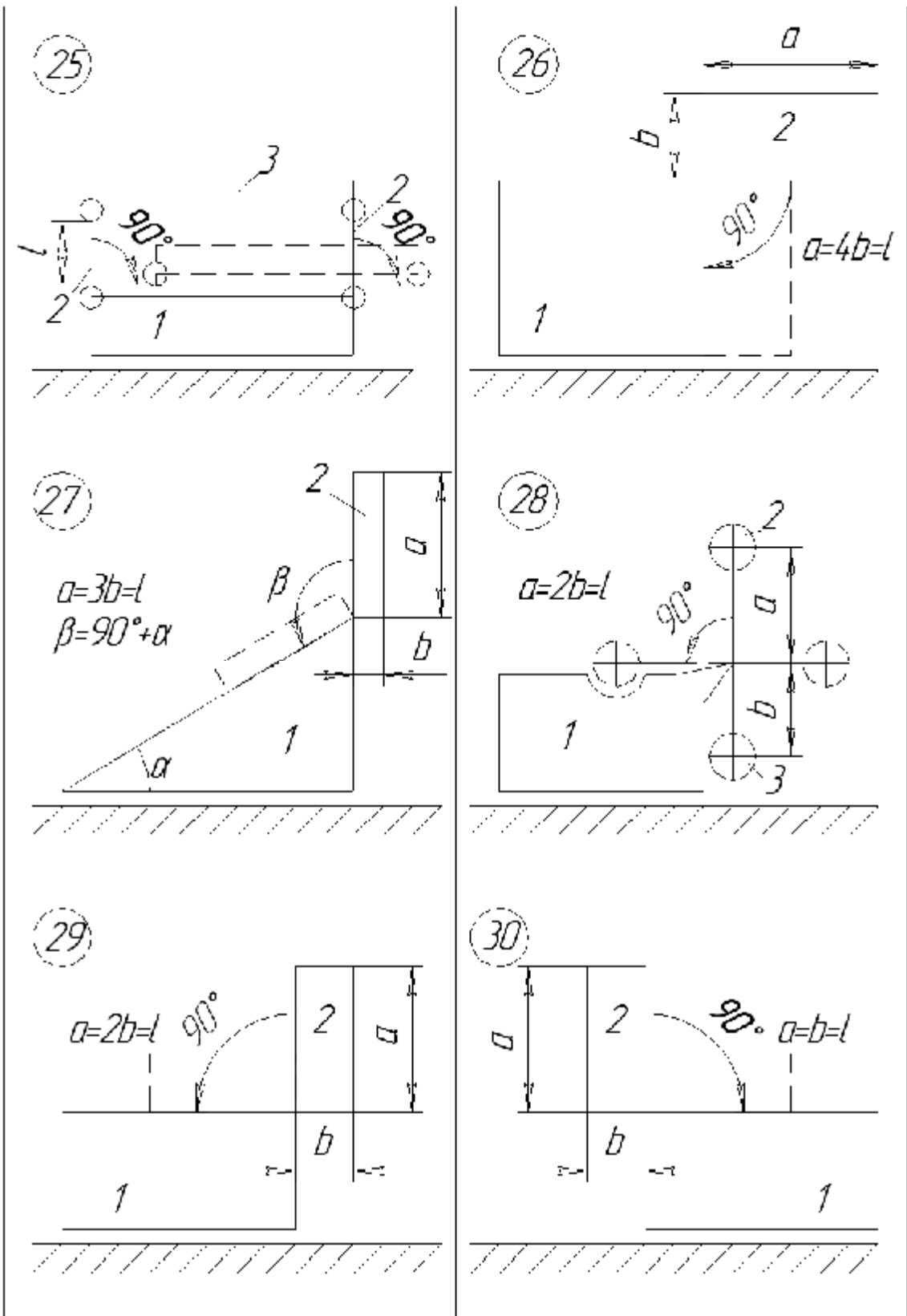


Рисунок 1.5

1.1 Приклад виконання завдання

По похилій площині (рис. 1.6) призми 1 маси $m_1=10\text{кг}$ спускається вантаж 2 ($m_2=6\text{кг}$), який тягне за допомогою невагомої вантаж 3 масою $m_3=4\text{кг}$.

Знайти переміщення призми 1 по гладенькій горизонтальній площині, якщо тіло M_2 опустилось по похилій площині на $S=0,5\text{м}$.

Розв'язання. Покажемо зовнішні сили, які прикладені до матеріальної системи, що складається з призми 1 та тіл 2, 3. Такими самими є: $P_1=m_1g$ – сила ваги призми, $P_2=m_2g$ і $P_3=m_3g$ – вага відповідно другого та третього вантажів, N – реакція гладенької горизонтальної поверхні.

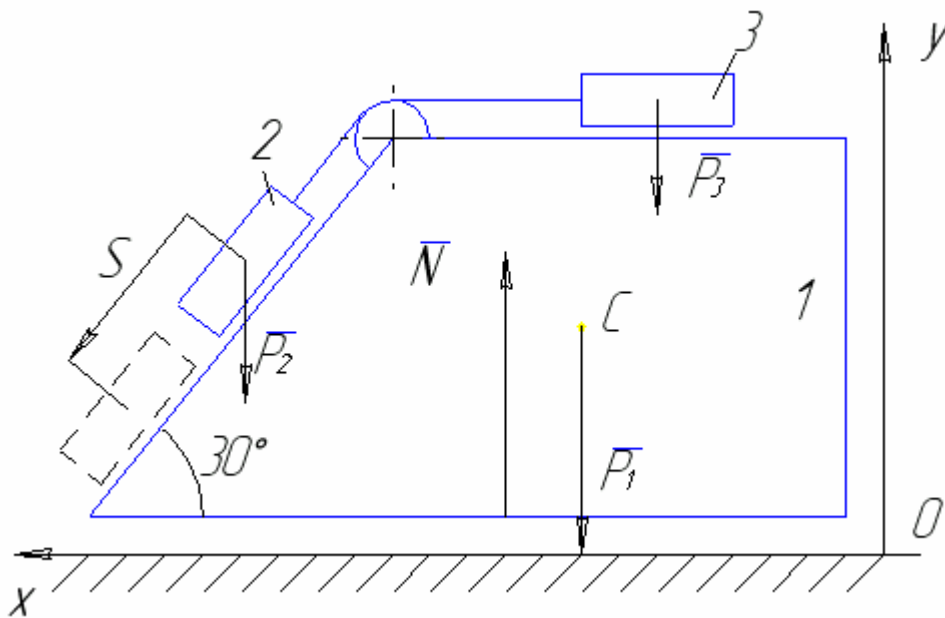


Рисунок 1.6

Запишемо теорему про рух центра мас матеріальної системи в проекціях на вісь X :

$$M \ddot{x}_C = F_x^e \quad (1.1)$$

де $M = m_1 + m_2 + m_3$, F_x^e - проекція головного вектора зовнішніх сил на вісь X .

Оскільки $F_x^e = 0$, то $M \ddot{x}_C = 0$. Тоді $\ddot{x}_C = 0$

В початковий момент часу система знаходилась у спокої і тому $\dot{x}_C = 0$. Із формули (1.1) маємо:

$$x_C = C_2.$$

Таким чином, координата x_C центра мас матеріальної системи залишається сталою незалежно від переміщень тіл, що входять у систему.

Визначимо положення центра мас системи в початковий момент часу:

$$X_C = \frac{\sum_{k=2}^n m_k \cdot x_k}{M} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{M} \quad (1.2)$$

Якщо вантаж 2 переміститься на величину ΔX_2 , тоді тіло 3 – на ΔX_3 , а призма 1 - ΔX_1 і положення X_C центра мас знайдемо за формулою:

$$X_C = \frac{m_1(x_1 + \Delta x_1) + m_2(x_2 + \Delta x_2) + m_3(x_3 + \Delta x_3)}{M}. \quad (1.3)$$

Враховуючи (1.2), із формули (1.3) отримаємо:

$$m_1 \cdot \Delta x_1 + m_2 \Delta x_2 + m_3 \Delta x_3 = 0. \quad (1.4)$$

Переміщення ΔX_2 та ΔX_3 складається із відносного по призмі і переносного разом із призмою.

$$\Delta x_2 = S \cdot \cos 30^\circ + \Delta x_1,$$

$$\Delta x_3 = S + \Delta x_1.$$

Тепер із формули (1.4) знаходимо переміщення призми.

$$10 \cdot \Delta x_1 + 6(S \cdot \cos 30^\circ + \Delta x_1) + 4(S + \Delta x_1) = 0,$$

$$\Delta x_1 = -\frac{(6 \cdot \cos 30^\circ + 4)S}{10 + 6 + 4} = -0,229m.$$

Знак “мінус” вказує на те, що призма 1 перемістилася в сторону протилежну додатному напрямку осі X.

ДС.2 Використання теореми про зміну кінетичного моменту для дослідження руху матеріальної системи

Матеріальна система (рис. 2.1-2.5) приводиться до руху моментом M , що прикладений до однорідного тіла 3. Знайти закон руху тіла 1, якщо на тіло 2 діє постійний момент опору $M_{оп}$.

В початковий момент часу кутова швидкість тіла 3 - ω_{30} . Масами пасів та їх ковзанням по шківках знехтувати. Тіла 2 та 3, обертаються навколо горизонтальних осей.

Дані для розрахунку приведені в таблиці 2.1. Де R_2, r_2, R_3 – розміри тіла 2 та 3, i_2 – момент інерції тіла 2 відносно осі обертання, m_1, m_2, m_3 – маси тіл 1, 2 та 3.

Таблиця 2.1

Варіант	$R_2, \text{ м}$	$R_3, \text{ м}$	$r_2, \text{ м}$	$i_2, \text{ м}$	$m_1, \text{ кг}$	$m_2, \text{ кг}$	$m_3, \text{ кг}$	$w_{30}, \frac{1}{\text{с}}$	$M, \text{ Н}\cdot\text{м}$	$M_{оп}, \text{ Н}\cdot\text{м}$
1	0,4	0,25	0,2	0,3	10	0,5	1,0	2	$65+t$	10
2	0,3	0,2	0,1	0,2	20	1,5	2,0	3	$50+t^2$	8
3	0,5	0,3	0,2	0,4	30	2,5	3,0	4	$25+4t^2$	7
4	0,6	0,5	0,4	0,5	40	3,5	4	5	$75+2t^2$	9
5	0,55	0,3	0,25	0,35	50	4,5	5	6	$65+t$	6
6	0,3	0,15	0,2	0,3	15	1	1,5	1	$85+6t^2$	5
7	0,35	0,25	0,2	0,25	25	2	2,5	8	$15+3t$	4
8	0,25	0,1	0,2	0,2	35	3	3,5	9	$20+7t^2$	11
9	0,15	0,05	0,2	0,1	45	4	4,5	10	$95+7t$	9
0	0,55	0,4	0,35	0,4	7,5	5	5,5	11	$13+9t$	8

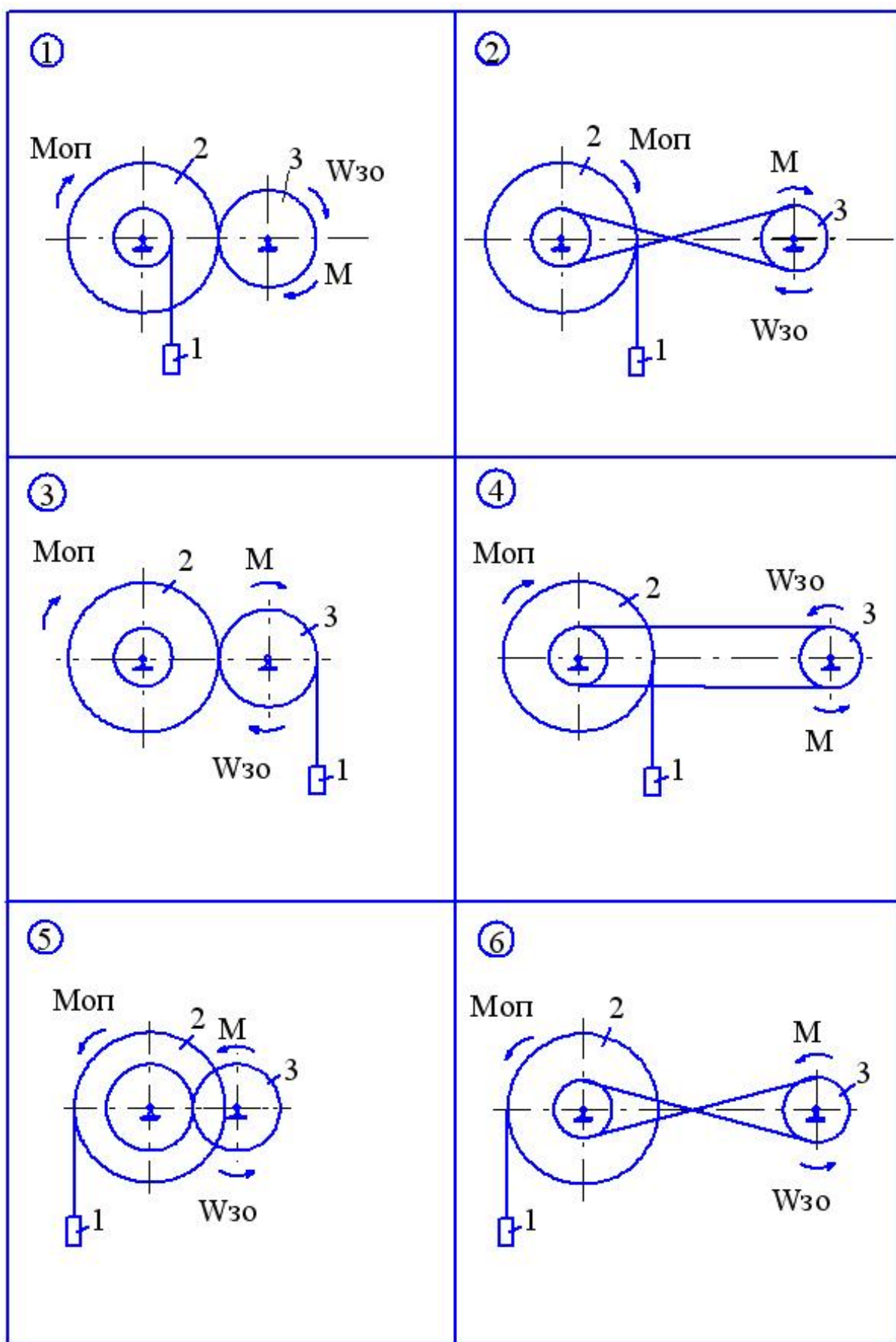


Рисунок 2.1

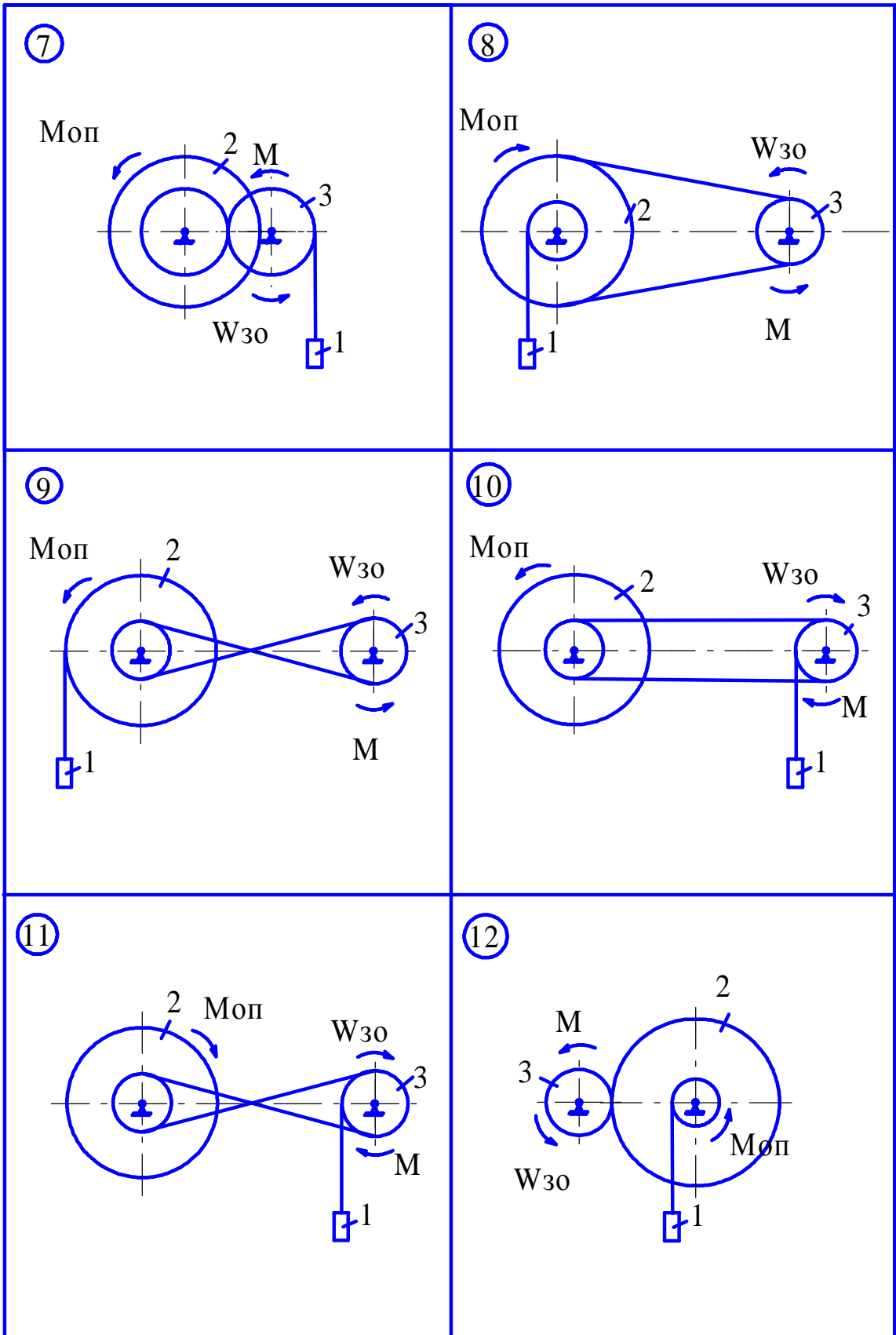


Рисунок 2.2

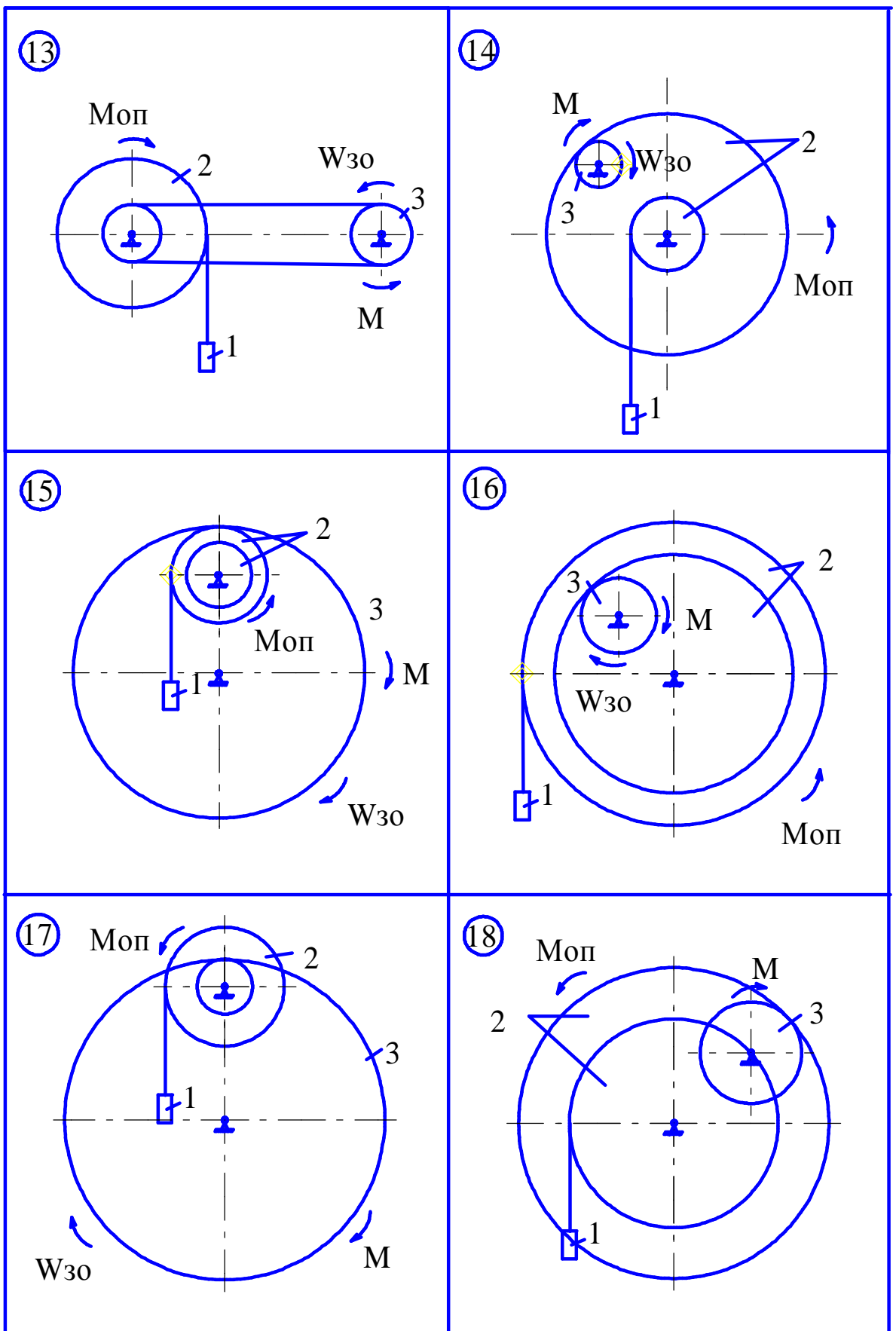


Рисунок 2.3

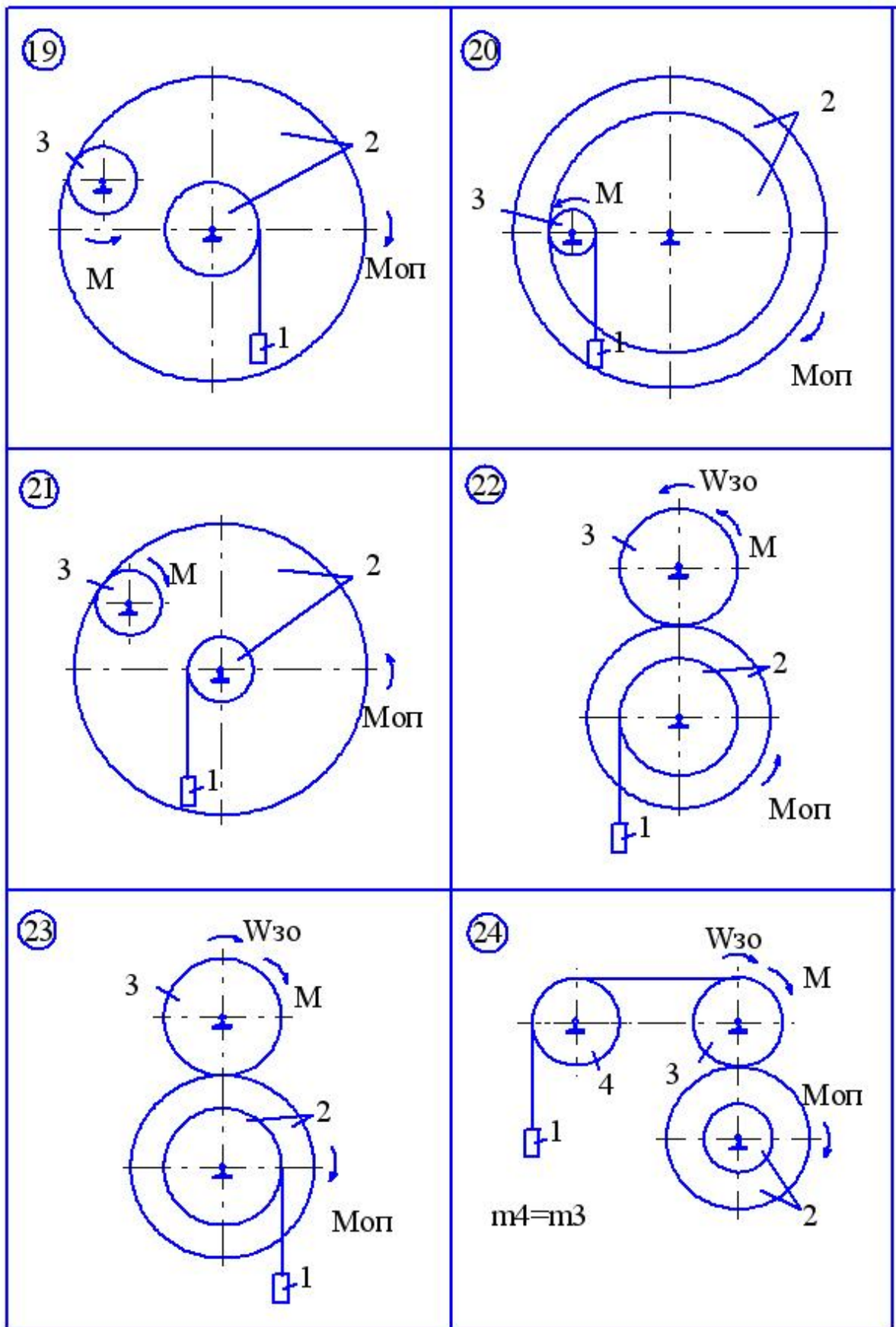


Рисунок 2.4

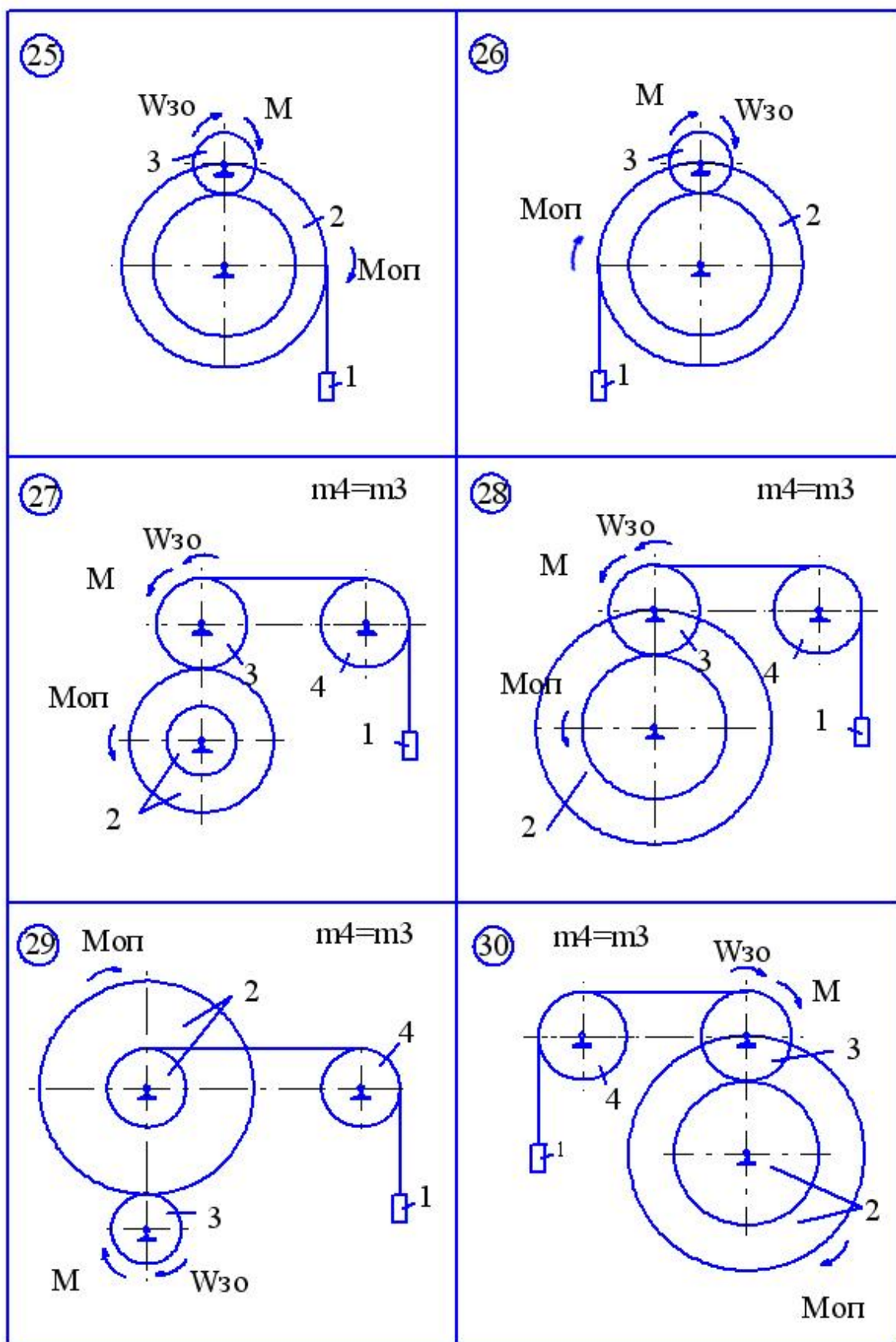


Рисунок 2.5

2.1 Приклад виконання завдання

До вантажу 1 (рис. 2.6) масою $m_1=20\text{кг}$ прив'язаний трос, який перекинутий через нерухомий блок 4 і другий кінець якого закріплений на поверхні шківа 2 радіусом r_2 ($m_2=2\text{кг}$). Механічна система приводиться до руху моментом $M = (16 + 11t^2)\text{Н} \cdot \text{м}$ прикладеним до ступінчатого шківа 3 масою $m_3=3\text{кг}$.

Знайти закон руху вантажу 1, якщо на тіло 2 діє момент опору $M_{\text{оп}} = 15 \text{ Н} \cdot \text{м}$ і при $t=0$ кутова швидкість тіла 3 - $\omega_{30} = 5 \frac{1}{\text{с}}$. Більший радіус у шківа 2, $R_2=0,4\text{м}$, менший - $r_2 = 0,2\text{м}$, радіус інерції - $i_2=0,3\text{м}$. Тіла 3 та 4 мають однакові маси $m_3=m_4$ і розміри $R_3=R_4=0,3\text{м}$. Тіла 2,3 та 4 обертаються навколо горизонтальних нерухомих осей, а тіло 1 переміщується поступально.

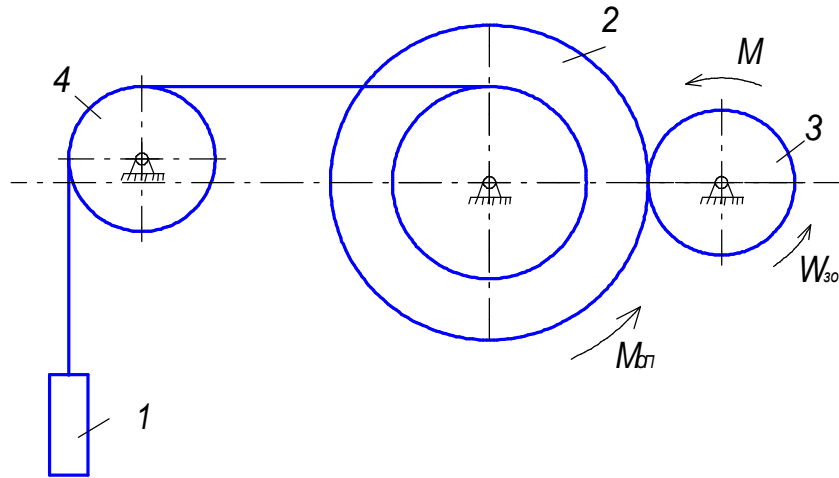


Рисунок 2.6

Розв'язання. Розглянемо окремо рух тіл 2 і 3 та рух тіл 1 і 4.

До тіла 3 (рис. 2.7) прикладені зовнішні сили : пара сил з моментом M , сила тяжіння $P_3=m_3g$, реакції циліндричного шарніра X_3 і Y_3 , реакції тіла 2 – колове зусилля S_3 і сила нормального тиску N_3 .

Запишемо диференціальне рівняння обертання тіла 3 навколо нерухомої осі враховуючи, що якщо момент зовнішніх сил діє у напрямку руху тіла, тоді записуємо його з додатним знаком.

$$I_{z3} \ddot{\varphi}_3 = M_{z3}^e$$

де $I_{z3} = \frac{1}{2} m_3 R_3^2$ - момент інерції тіла відносно осі z , $\ddot{\varphi}_3$ - кутове прискорення тіла 3, $M_{z3}^e = M - S_3 R_3$ - момент зовнішніх сил, прикладених до тіла 3, відносно осі z .

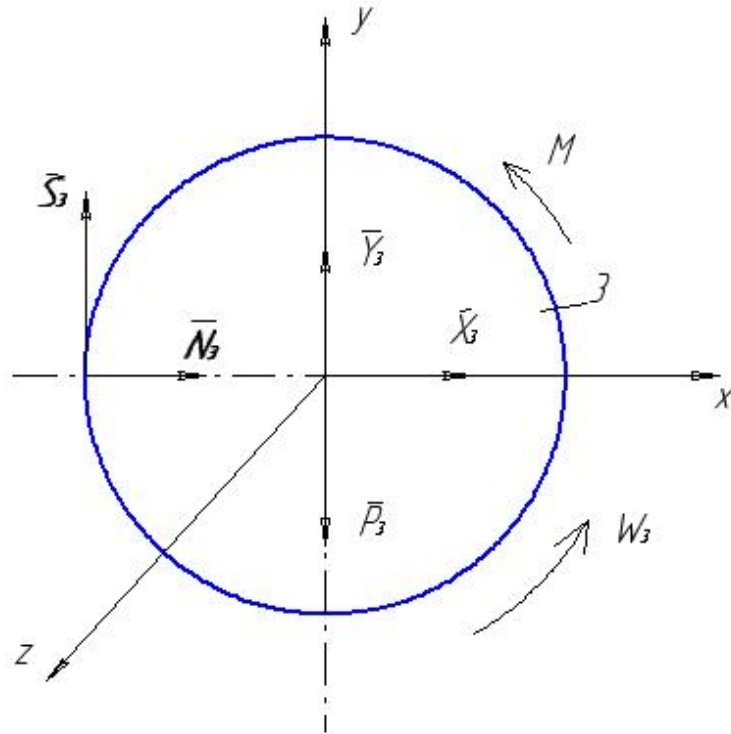


Рисунок 2.7

$$\frac{1}{2} m_3 R_3^2 \ddot{\varphi}_3 = M - S_3 R_3. \quad (2.1)$$

Початкові умови :

$$\text{при } t=0, \dot{\varphi}_3 = 0, \quad \ddot{\varphi}_3 = \dot{w}_3. \quad (2.2)$$

На тіло 2 діють такі зовнішні сили: сила тяжіння $P_2 = m_2 g$, реакції циліндричного шарніра X_2 та Y_2 , натяг троса S_2 (трос працює тільки на розтяг), реакції тіла 3 – S'_3 та N'_3 , які за третім законом Ньютона направлені в протилежні сторони сил S_3 та N_3 (рис. 2.7).

Диференціальне рівняння обертання тіла 2 (рис. 2.8) навколо горизонтальної осі Z.

$$I_{Z2} \ddot{\varphi}_2 = S'_3 R_2 - S_2 r_2 - M_{оп} \quad (2.3)$$

де $I_{Z2} = m_2 i_2^2$ - момент інерції тіла 2 відносно осі Z.

Оскільки $S'_3 = S_3$, то рівняння (2.3) запишеться у вигляді

$$m_2 i_2^2 \ddot{\varphi}_2 = S_3 R_2 - S_2 r_2 - M_0 \quad (2.4)$$

До тіл 1 та 4 (рис . 2.9) прикладені зовнішні сили: сили тяжіння $P_1 = m_1 g$ та $P_4 = m_4 g$, реакція троса S'_2 ($S'_2 = S_2$), реакції циліндричного шарніра X_4 та Y_4 .

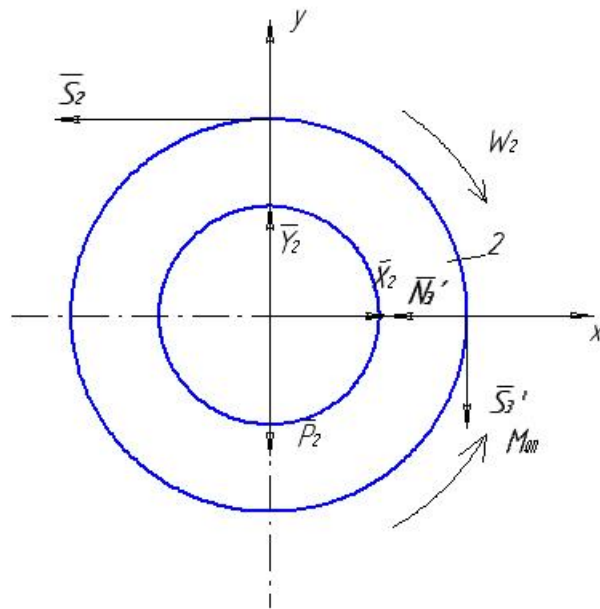


Рисунок 2.8

Теорема про зміну кінетичного моменту для тіл 1 та 4 (рис. 2.9) в проєкціях на вісь Z запишеться:

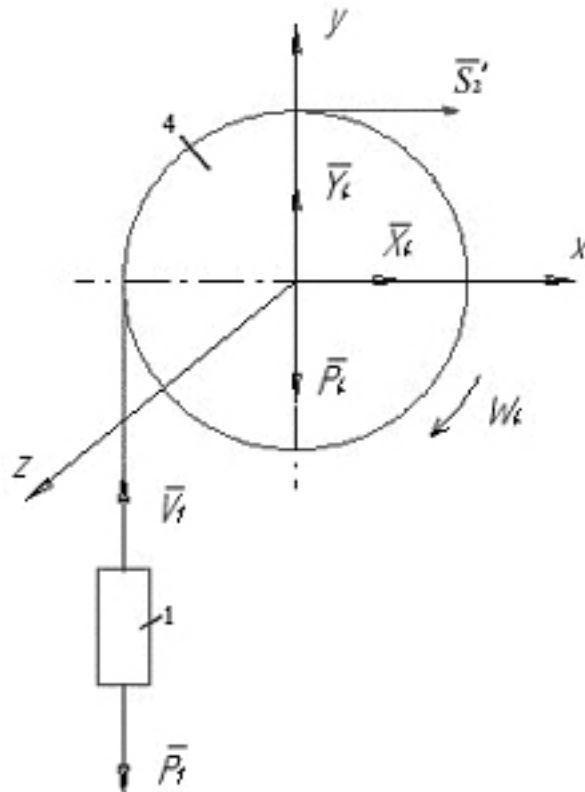


Рисунок 2.9

$$\frac{dl_z}{dt} = M_z^e \quad (2.7)$$

де L_Z – кінетичний момент системи тіл 1 та 4 відносно осі Z, $M_Z^e = S_2' \cdot R_4 - P_1 \cdot R_4 = S_2 R_4 - P_1 R_4$ – головний момент зовнішніх сил.

Кінетичний момент L_Z складається із моменту кількості руху L_{Z1} тіла 1 та кінетичного моменту L_{Z4} тіла 4 відносно осі Z

$$L_{Z1} = m_1 V_1 R_4,$$

$$L_{Z4} = I_{Z4} \cdot \omega_4.$$

Враховуючи, що $V_1 = \omega_4 R_4$, а $I_{Z4} = \frac{1}{2} m_4 R_4^2$, кінетичний момент системи L_Z визначимо за формулою

$$L_Z = m_1 \omega_4 R_4^2 + \frac{1}{2} m_4 \omega_4 R_4^2 = \frac{1}{2} \omega_4 R_4^2 (2m_1 + m_4).$$

Тепер диференціальне рівняння (2.7) набуває вигляду

$$\frac{1}{2} J_4 (2m_1 + m_4) R_4^2 = (S_2 - m_1 g) R_4 \quad (2.8)$$

Якщо до диференціальних рівнянь (2.1), (2.4), (2.8) додати кінематичні співвідношення

$$J_3 R_3 = J_2 R_2, \quad J_2 r_2 = J_4 R_4, \quad \omega_1 = \omega_4 R_4 \quad (2.9)$$

тоді отримаємо систему шести рівнянь в які входять невідомі: $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, S_2, S_3$.

Розв'язуючи систему рівнянь (2.1), (2.4), (2.8), (2.9) маємо:

$$\omega_1 \left(m_1 + \frac{1}{2} m_4 + m_2 \frac{i_2^2}{r_2^2} + \frac{1}{2} m_3 \frac{R_2^2}{r_2^2} \right) = M \frac{R_2}{r_2 R_3} - \frac{M_0}{r_2} - m_1 g$$

З урахуванням того, що $m_1=20\text{кг}$, $m_2=2\text{кг}$, $m_3=m_4=3\text{кг}$, $r_2=0,2\text{м}$, $R_2=0,4\text{м}$, $i_2=0,3\text{м}$, $R_3=R_4=0,3\text{м}$, $M=(16+11t^2)\text{Н}\cdot\text{м}$, $M_0=15\text{Н}\cdot\text{м}$, $g=9,81\text{ м/с}^2$, отримаємо

$$\omega_1 = 2,29t^2 - 5,15. \quad (2.20)$$

Для визначення закону руху тіла 1, інтегруємо двічі диференціальне рівняння (2.20), беручи до уваги початкові умови (2.2)

$$\omega_1 = \omega_{30} \cdot \frac{r_2 R_3}{R_2} = 0,15 \omega_{30},$$

$$x_{10} = 0.$$

Перший інтеграл диференціального рівняння (2.20)

$$\omega_1 = 0,75 - 5,15 \cdot t + 0,76 \cdot t^3.$$

Закон руху тіла 1: $x_1 = 0,75 \cdot t - 2,575 \cdot t^2 + 0,19 \cdot t^4 \text{ м.}$

ДС.3 Визначення реакцій в'язей тіла, що обертається навколо нерухомої осі

Тонкий стержень вагою P (рис. 3.1-3.5) жорстко скріплений з круговим диском (парні варіанти) або тонким кільцем (непарні варіанти) вагою Q та радіусом r . Система обертається навколо горизонтальної осі в вертикальній площині із стану спокою під дією моменту M . Знайти кутове прискорення, кутову швидкість та зусилля в опорах осі при повороті системи на кут α .

Стержень, диск, кільце вважати однорідними тілами; тертям в підшипниках знехтувати. Дані для розрахунку приведені в таблиці 3.1.

Таблиця 3.1.

Варіант	P , Н	Q , Н	r , м	AB , м	M , Н м	α , град
1	5	2	0,1	0,3	4	30
2	10	3	0,3	0,9	8	120
3	15	4	0,4	1,0	5	60
4	20	5	0,1	0,4	30	45
5	5	6	0,2	0,6	20	90
6	6	7	0,3	1,0	15	30
7	7	1	0,4	1,2	2	45
8	8	2	0,1	0,3	20	60
9	9	3	0,2	0,5	4	90
0	10	4	0,3	0,8	2	120

3.1. Приклад виконання завдання

Система тіл, що складається з стержня 1 вагою P , однорідного диска 2 та кільця 3, що мають відповідно вагу Q_2 та Q_3 та радіус R , обертається навколо горизонтальної осі O (рис. 3.6.) під дією пари сил з моментом M . Знайти кутове прискорення, кутову швидкість та зусилля в опорах осі при повороті матеріальної системи на кут α , якщо в початковий момент часу система знаходилася в спокої.

Прийняти: $P=10\text{Н}$; $Q_2=20\text{Н}$; $M=30\text{Нм}$; $Q_3=10\text{Н}$; $R=0,2\text{м}$; $AO=0,8\text{м}$;
 $\alpha=60^\circ$.

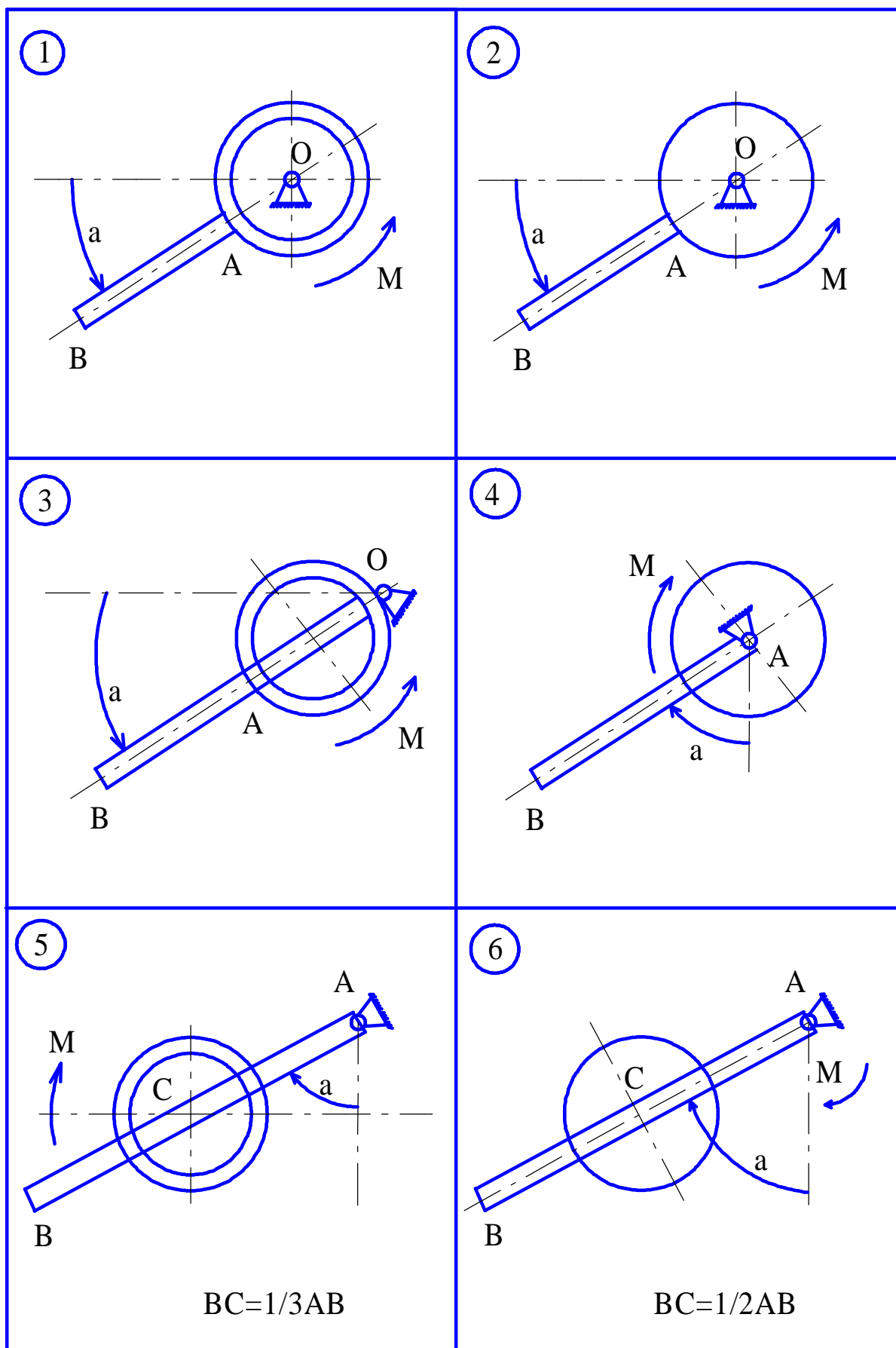


Рисунок 3.1

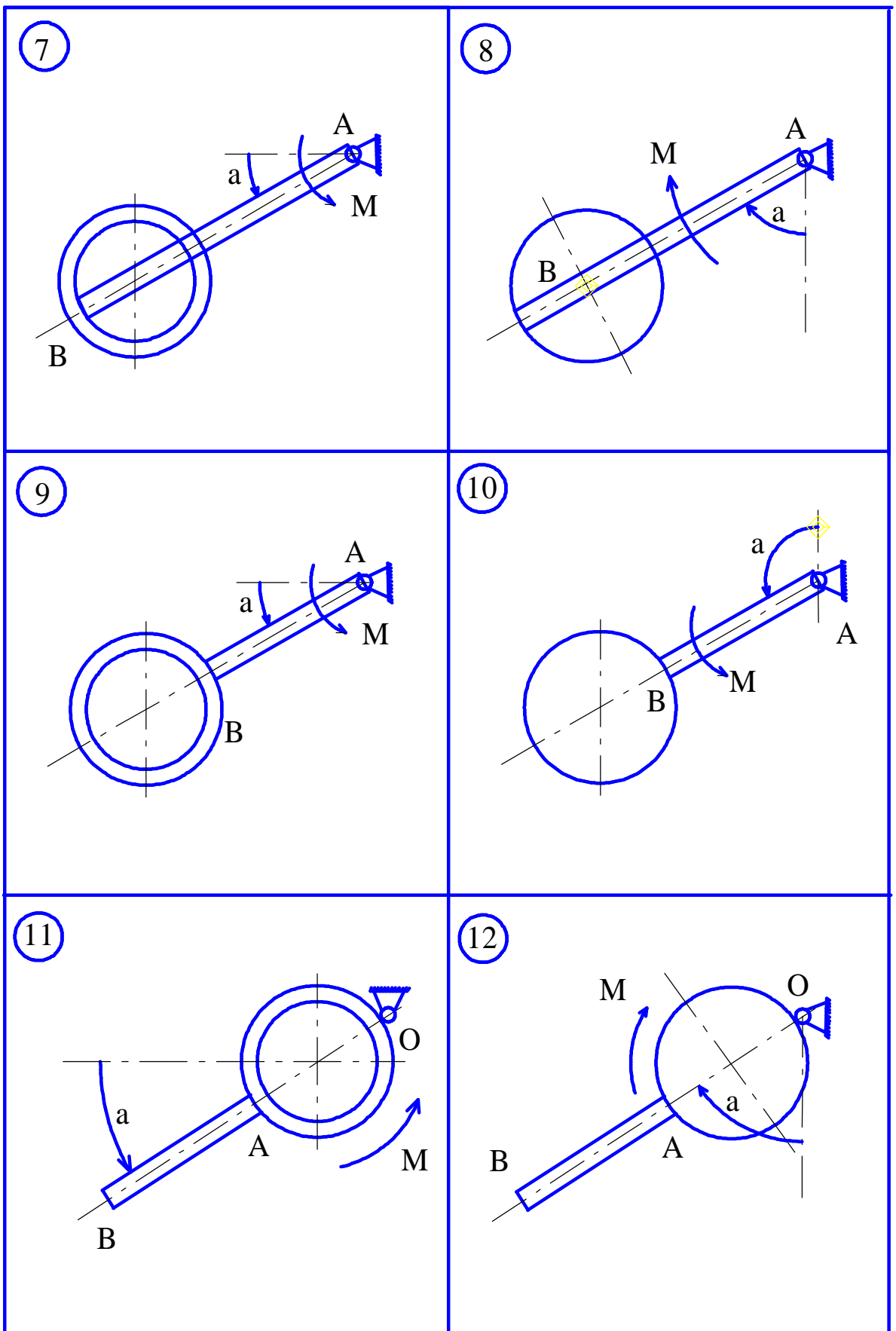


Рисунок 3.2

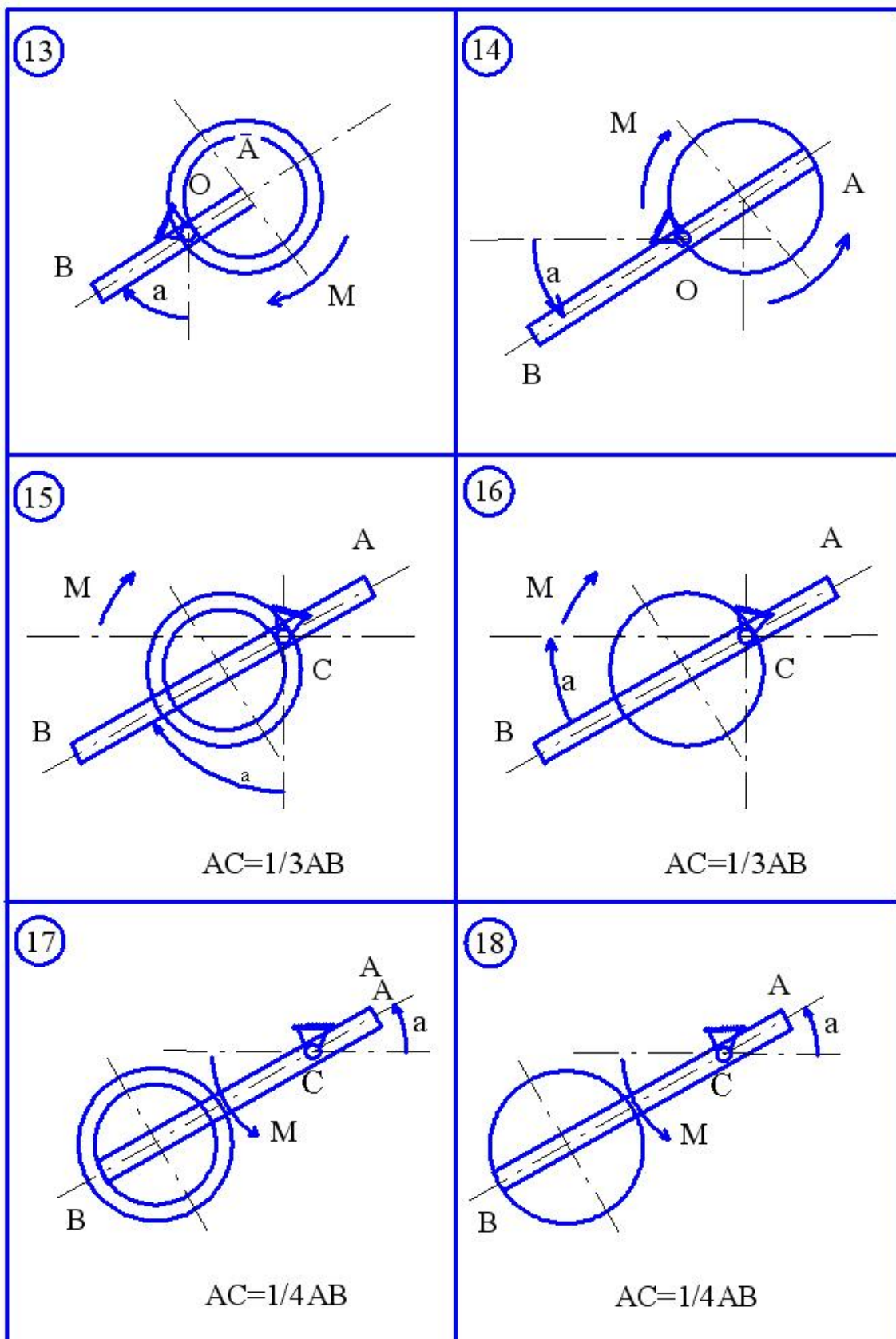


Рисунок 3.3

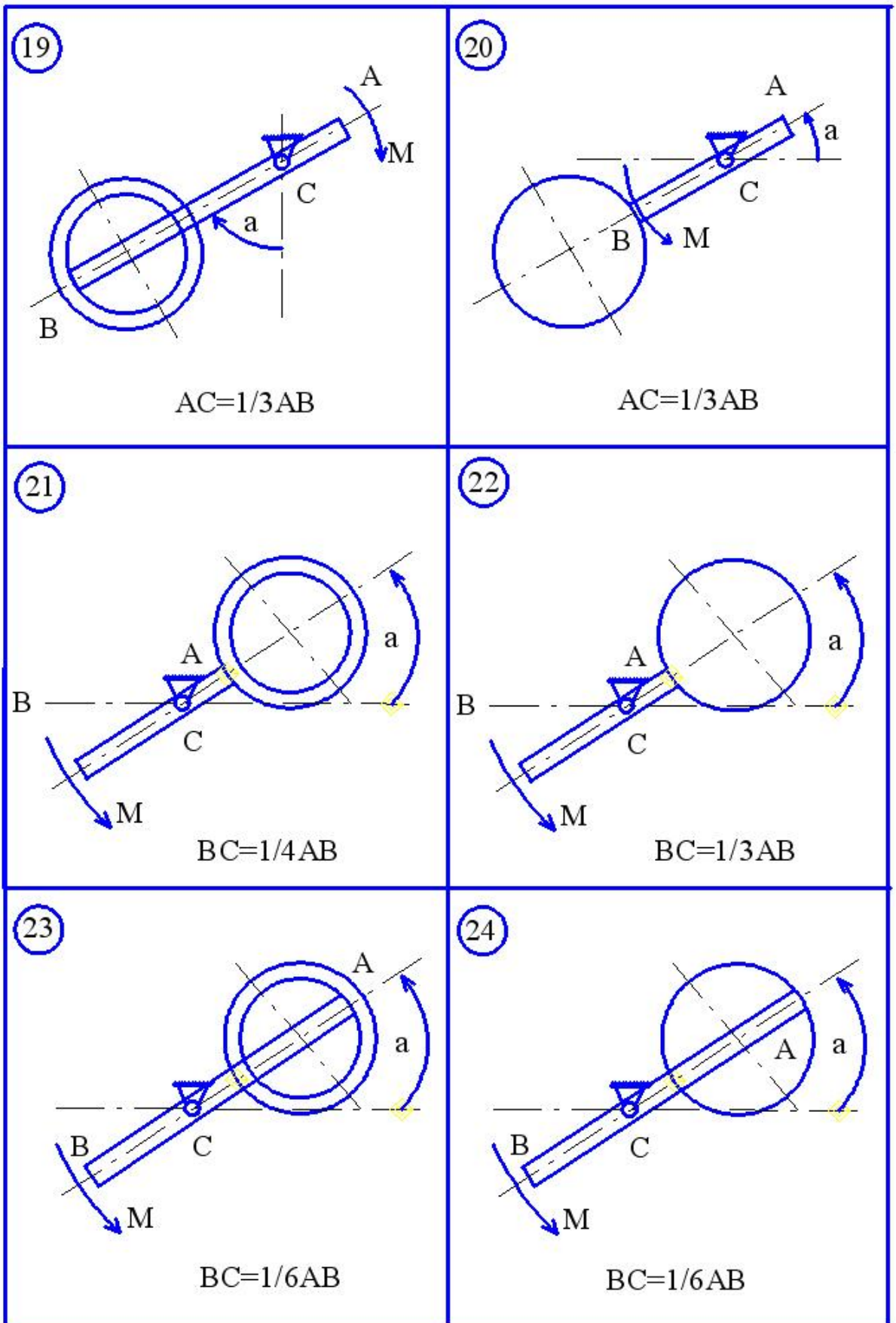


Рисунок 3.4

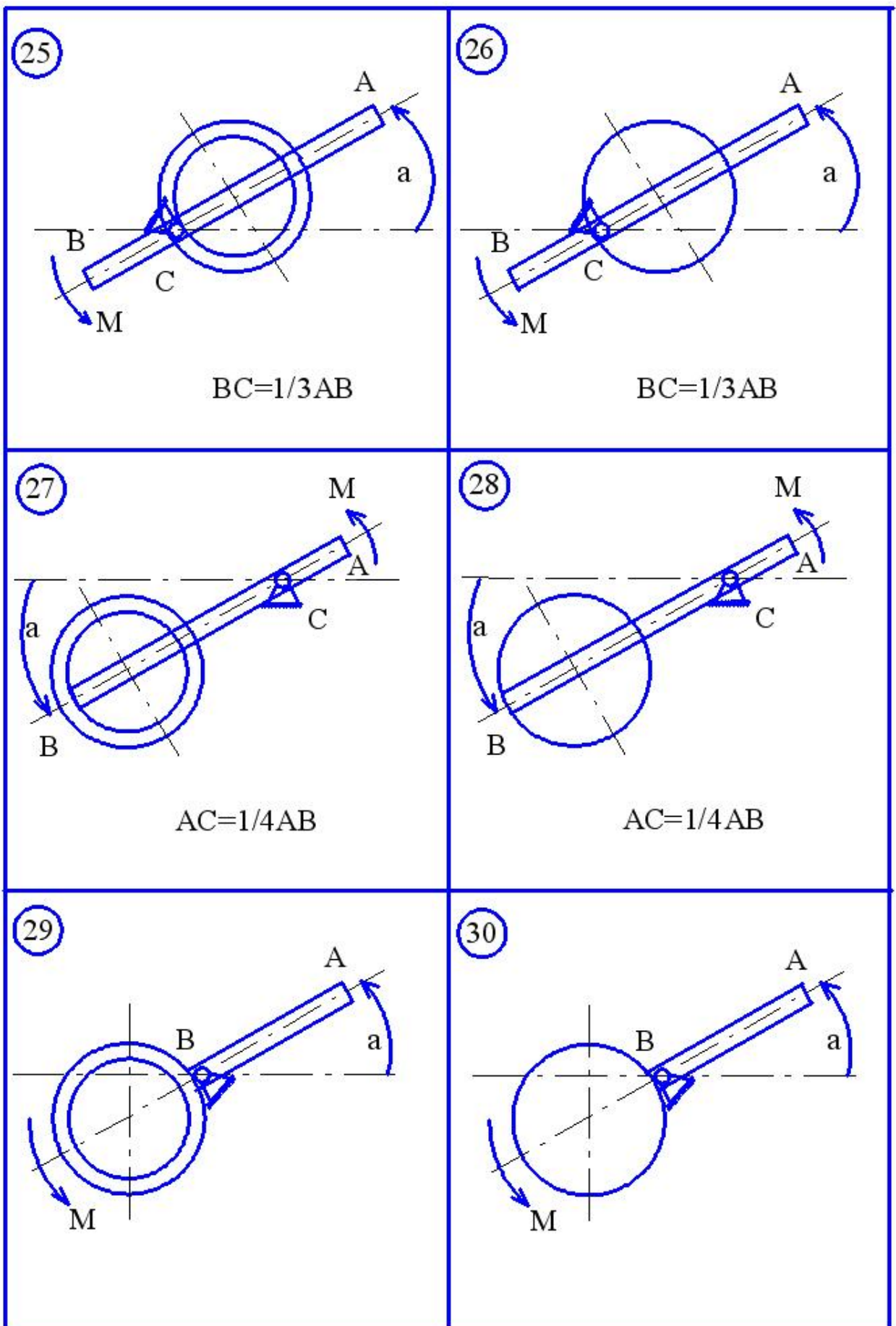


Рисунок 3.5

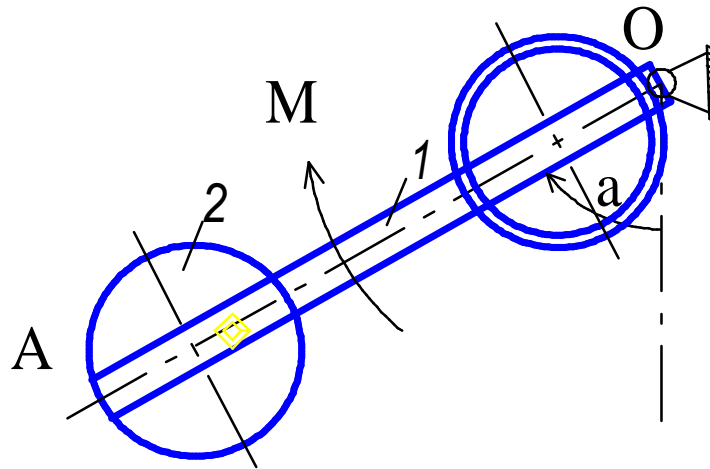
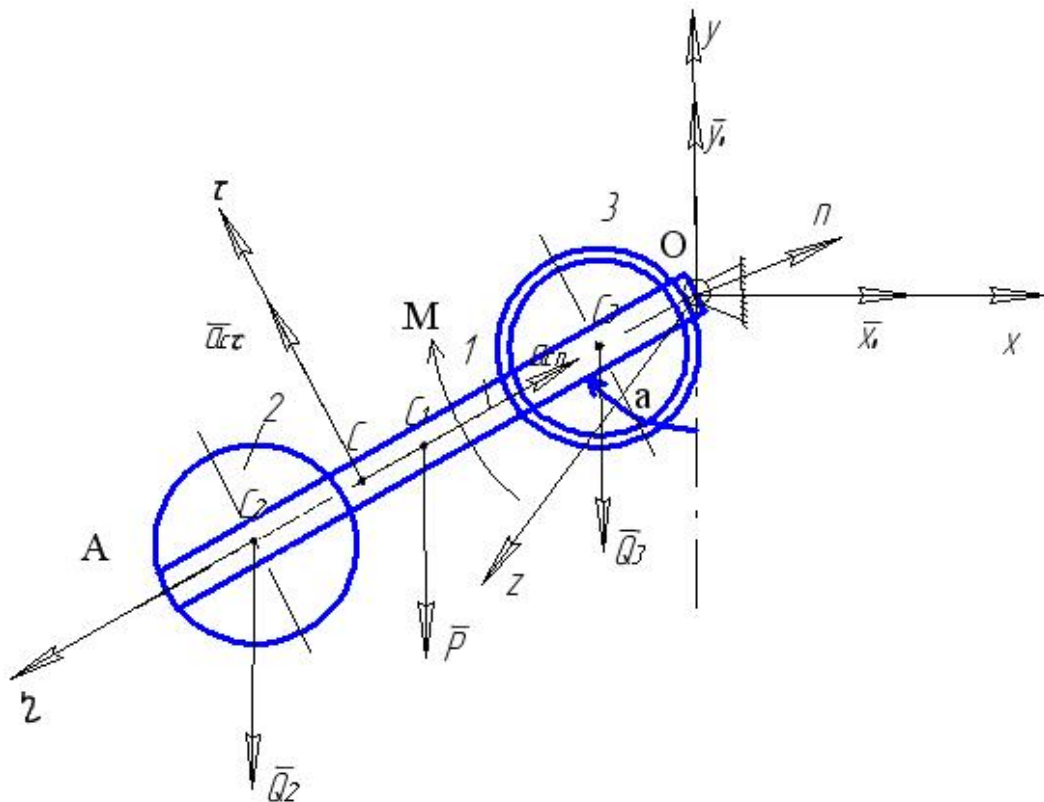


Рисунок 3.6

Розв'язання. На систему тіл діють активні сили \bar{Q}_3 , \bar{Q}_2 , \bar{P} та пара сил з моментом M (рис.3.7)

Переміщенню тіл перешкоджає в'язь: циліндричний шарнір O , дію якого на тіло, на підставі аксіоми звільнення від в'язів, замінюємо реакціями в'язей \bar{X}_0 , \bar{Y}_0 .



Для визначення сил \bar{X}_0 , \bar{Y}_0 запишемо теорему про рух центра мас системи в проекціях на осі X та Y .

$$\begin{aligned} M \ddot{x}_c &= F_x^e, \\ M \ddot{y}_c &= F_y^e, \end{aligned} \quad (3.1)$$

де $M=m_1+m_2+m_3$ - маса системи тіл ($m_1=\frac{p}{q}$, $m_2=\frac{Q_2}{q}$, $m_3=\frac{Q_3}{q}$), \ddot{X}_0 і \ddot{Y}_0 - проекція прискорення центра мас системи на осі X та Y, F_x^e і F_y^e - проекція головного вектора зовнішніх сил системи на осі X та Y.

$$\begin{aligned} F_x^e &= X_0, \\ F_y^e &= Y_0 - P - Q_2 - Q_3. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Тепер із диференціальних рівнянь (3.1) отримаємо

$$\begin{aligned} X_0 &= M \ddot{X}_c, \\ Y_0 &= M \ddot{Y}_c + P \end{aligned} \quad (3.3)$$

Щоб знайти реакції в'язей необхідно визначити прискорення центра мас $\overline{a_c}$ системи тіл

$$\overline{a_c} = \overline{a_{cn}} + \overline{a_{ct}} \quad (3.4)$$

де $a_{cn} = W^2 \cdot oc$, $a_{ct} = e \cdot oc$, W -кутова швидкість тіла, e - кутове прискорення тіла (системи тіл.)

3.1.1 Визначення кутового прискорення e системи тіл

Кутове прискорення тіл знайдемо на підставі диференціального рівняння обертального руху тіла навколо осі Z.

$$I_z \ddot{\varphi} = M_z^e \quad (3.5)$$

де I_z – момент інерції системи тіл відносно осі Z, M_z^e - головний момент зовнішніх сил системи відносно осі Z.

Момент інерції тіл I_z відносно осі дорівнює сумі моментів інерції тіл 1, 2, 3 відносно осі Z.

$$I_z = I_{z1} + I_{z2} + I_{z3}$$

Момент інерції диска 2 відносно осі Z:

$$\begin{aligned} I_{z2} &= \frac{1}{2} m_2 R^2 + m_2 (OA - R)^2 = \frac{Q_2}{g} \left[\frac{1}{2} R^2 + (OA - R)^2 \right] = \\ &= \frac{20}{9,81} \left[\frac{1}{2} 0,2^2 + (0,8 - 0,2)^2 \right] = 0,775 \text{ кг} \cdot \text{м}^2 \end{aligned}$$

Момент інерції кільця 3 відносно осі Z:

$$I_{z3} = m_3 R^2 + m_3 R^2 = 2 \frac{Q_3}{g} R^2 = 2 \frac{10}{9,81} \cdot 0,2^2 = 0,082 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

Момент інерції стержня 1 відносно осі Z:

$$I_{z1} = \frac{1}{3} m_1 \cdot OA^2 = \frac{1}{3} \cdot 1,02 \cdot 0,8^2 = 0,217 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

Тоді: $I_z = 0,775 + 0,082 + 0,217 = 1,074 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$.

Момент зовнішніх сил матеріальної системи (рис.3.7) відносно осі Z

$$M_Z^e = M - (Q_2 \cdot OC_2 + P \cdot OC_1 + Q_3 \cdot OC_3) \cdot \sin a. \quad (3.6)$$

де OC_1 , OC_2 і OC_3 відстань осі обертання до центра мас відповідного тіла.

Момент сили або момент пари сил беремо з додатним знаком, якщо він діє у напрямку обертання системи тіл.

Диференціальне рівняння (3.5), враховуючи (3.6), запишеться:

$$I_Z \cdot \ddot{\varphi} = M - (Q_2 \cdot OC_2 + P \cdot OC_1 + Q_3 \cdot OC_3) \sin a.$$

Звідки:

$$\ddot{\varphi} = e = \frac{M - (Q_2 \cdot OC_2 + P \cdot OC_1 + Q_3 \cdot OC_2) \cdot \sin a}{I_Z},$$

$$e = \frac{30 - (20 \cdot 0,6 + 10 \cdot 0,4 + 10 \cdot 0,2) \cdot \sin a}{1,074} = 27,93 - 16,76 \sin a \quad (3.7)$$

$$\text{При } a = 60^\circ, e = 27,93 - 16,76 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 13,4 (c^{-2})$$

3.1.2 Визначення кутової швидкості

Оскільки $e = \frac{dw}{dt} = \frac{dw}{dt} \cdot \frac{da}{da} = \frac{da}{dt} \cdot \frac{dw}{da} = w \frac{dw}{da}$, то вираз (3.7.) запишеться

$$w \frac{dw}{da} = 27,93 - 16,76 \cdot \sin a \quad (3.8)$$

$$\text{При } t=0; w_0 = 0; a = 0$$

$$\text{При } t=t_1; w_1 = w_2; a = \frac{p}{3}$$

Інтегруємо рівняння (3.8)

$$\int_0^{w_a} w \cdot dw = \int_0^{\frac{p}{3}} 27,93 \cdot da - \int_0^{\frac{p}{3}} 16,76 \cdot \sin a \cdot da$$

$$\frac{w_a^2}{2} = 27,93 \cdot \frac{p}{3} + 16,76 \cdot \cos \frac{p}{3} - 16,76$$

$$w_a = \sqrt{2 \cdot (27,93 \cdot \frac{3,14}{3} + 16,76 \cdot \frac{1}{2} - 16,76)} = 6,46 \frac{1}{c}$$

$$w_a \cong 6,5 \frac{1}{c}$$

3.1.3 Визначення реакцій опори

Знайдемо координати центра мас системи тіл (рис.3.7)

$$h_c = \frac{\sum_{k=1}^n m_i h_i}{\sum m_i} = \frac{m_1 \cdot OC_1 + m_2 \cdot OC_2 + m_3 \cdot OC_3}{m_1 + m_2 + m_3},$$

$$h_c = \frac{P \cdot 0,4 + Q_2 \cdot 0,6 + Q_3 \cdot 0,2}{P + Q_2 + Q_3} = \frac{10 \cdot 0,4 + 20 \cdot 0,6 + 10 \cdot 0,2}{10 + 20 + 10} = 0,45 \text{ м.}$$

Проекції прискорення центра мас (при $a = \frac{P}{3}$) на натуральні та декартові осі координат.

$$\text{Осі } n \text{ та } t : a_{ct} = e \cdot h_c = e \cdot OC = 134 \cdot 0,45 = 6,03 \text{ м/с}^2,$$

$$a_{cn} = w_a^2 \cdot OC = 6,5^2 \cdot 0,45 = 19,01 \text{ м/с}^2$$

$$\text{Осі } x \text{ та } y : \overset{\ominus}{x}_c = a_{cn} \cdot \sin a - a_{ct} \cdot \cos a = 13,45 \text{ м/с}^2$$

$$\overset{\oplus}{y}_c = a_{cn} \cdot \cos a + a_{ct} \cdot \sin a = 14,72 \text{ м/с}^2.$$

Визначаємо проекції реакції в'язей циліндричного шарніра 0 (рис.3.6) на осі x та y (3.3).

$$X_0 = \frac{P + Q_2 + Q_3}{g} \cdot \overset{\ominus}{x}_c = 54,8 \text{ Н,}$$

$$Y_0 = \frac{P + Q_2 + Q_3}{g} \overset{\oplus}{y}_c + P + Q_2 + Q_3 = 99,98 \text{ Н.}$$

Реакція в'язі R шарніра 0.

$$R = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} = 114,0 \text{ Н.}$$

ДС. 4 Використання теорем про рух центра мас та кінетичного моменту для дослідження руху матеріальної системи

Матеріальна система (рис 4.1-4.5) приводиться до руху моментом M . Знайти прискорення тіла 3, натяг пасів, зусилля між тілами, реакції в'язей в момент часу $t=t_1$.

Масами пасів та їх ковзанням по шківках знехтувати.

Натяг у ведучій частині нескінченного паса (варіанти 2, 5, 6, 11, 14, 17, 23, 24, 28) вдвічі більший від натягу у веденій частині. Однорідний диск 1 та ступінчатий шків 2 обертаються навколо горизонтальних осей.

В точках контакту тіл ковзання відсутнє. Коефіцієнт тертя ковзання f .

Дані для розрахунків взяти з таблиці 4.1 де прийняті такі позначення: m_1, m_2, m_3 – маси тіл 2 та 3; i_2 – радіус інерції тіла 2 відносно горизонтальної осі, що проходить через центр мас тіла; R_1, R_2, r_2 – розміри тіл 1 та 2; l – відстань між опорами тіла 3.

Таблиця 4.1

Варіант	R_1 , м	R_2 , м	r_2 , м	i_2 , м	l , м	m_1 , кг	m_2 , кг	m_3 , кг	M , $H \cdot M$	t_1 , с	f
1	0,2	0,3	0,1	0,2	0,4	0,2	2	1	$1+3t$	2	0,2
2	0,3	0,4	0,2	0,3	0,5	0,3	3	2	$2+t^2$	1	0,3
3	0,4	0,5	0,3	0,4	0,6	0,4	4	3	$3+2t^2$	3	0,4
4	0,5	0,6	0,4	0,5	0,7	0,5	5	4	$4+t^2$	4	0,1
5	0,6	0,55	0,25	0,4	0,8	0,6	6	3	$6+5t$	5	0,15
6	0,1	0,15	0,1	0,1	0,9	0,1	1	1	$2+3t^2$	6	0,25
7	0,15	0,2	0,15	0,2	0,85	0,15	1,5	1	$4+5t$	2	0,35
8	0,25	0,3	0,2	0,25	0,75	0,25	2,5	2	$5+3t^2$	1	0,45
9	0,35	0,4	0,2	0,3	0,65	0,35	3,5	3	$7+2t$	3	0,4
0	0,45	0,5	0,4	0,45	0,5	0,45	4,5	4	$9+t^2$	2	0,15

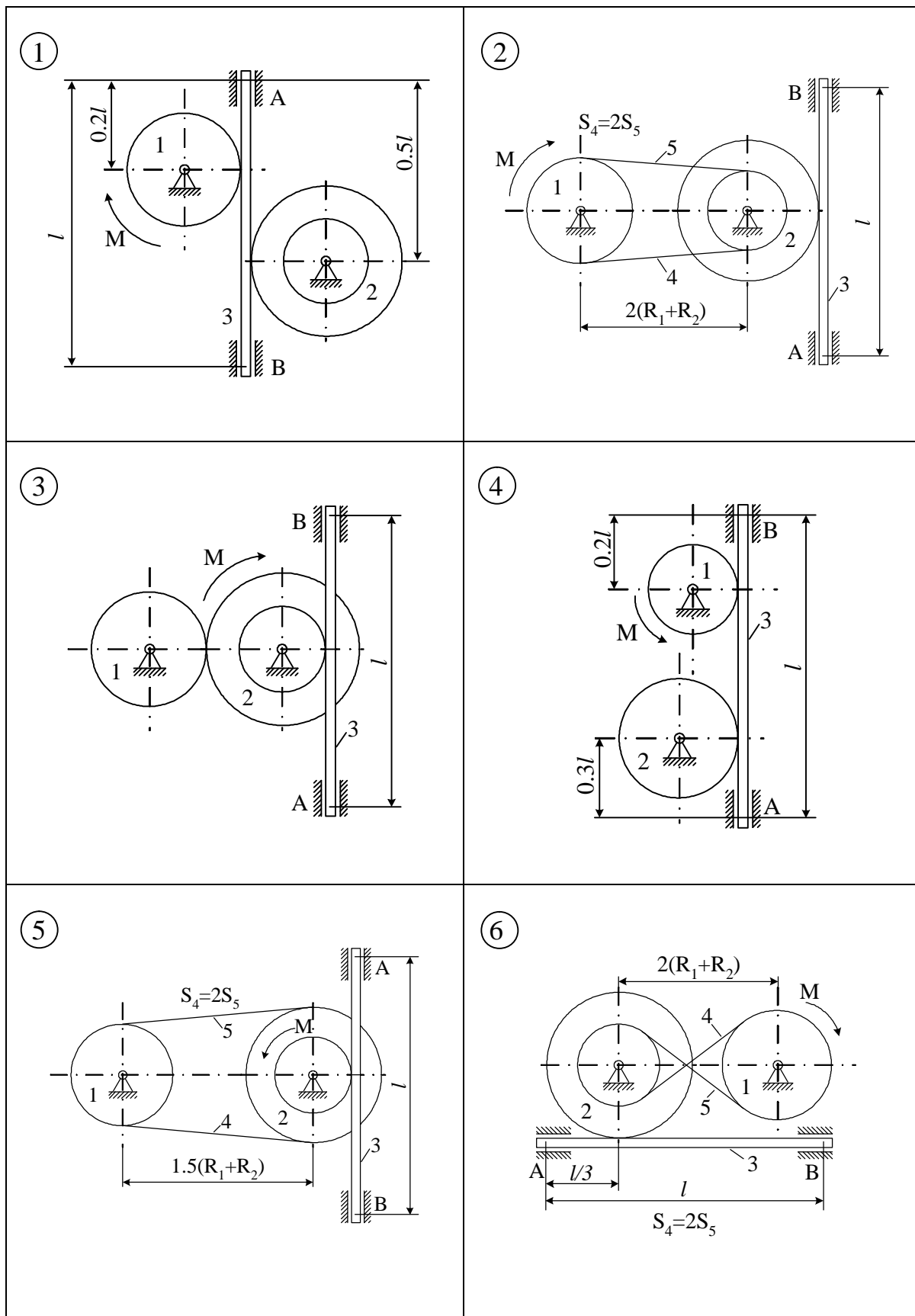


Рисунок 4.1

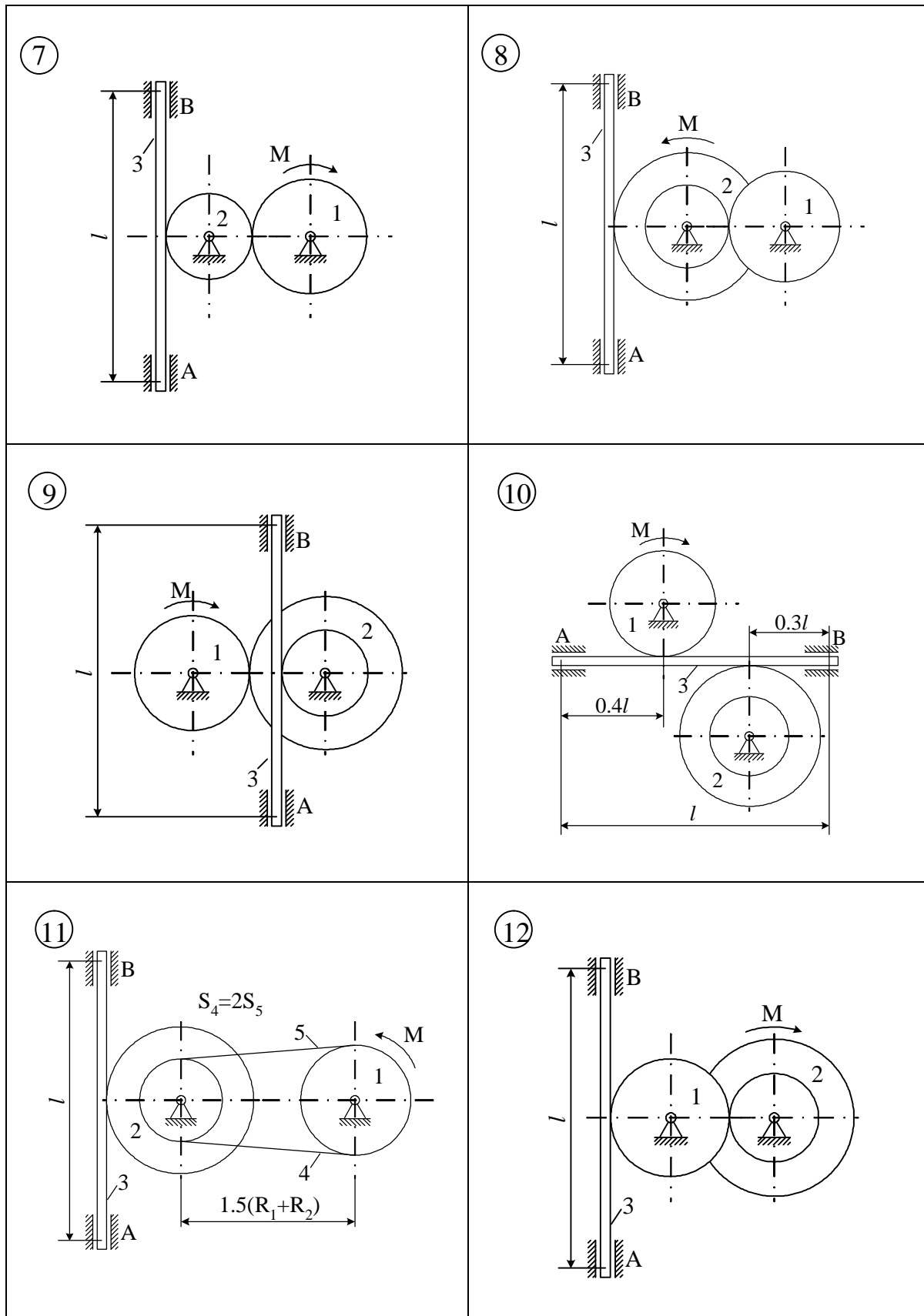


Рисунок 4.2

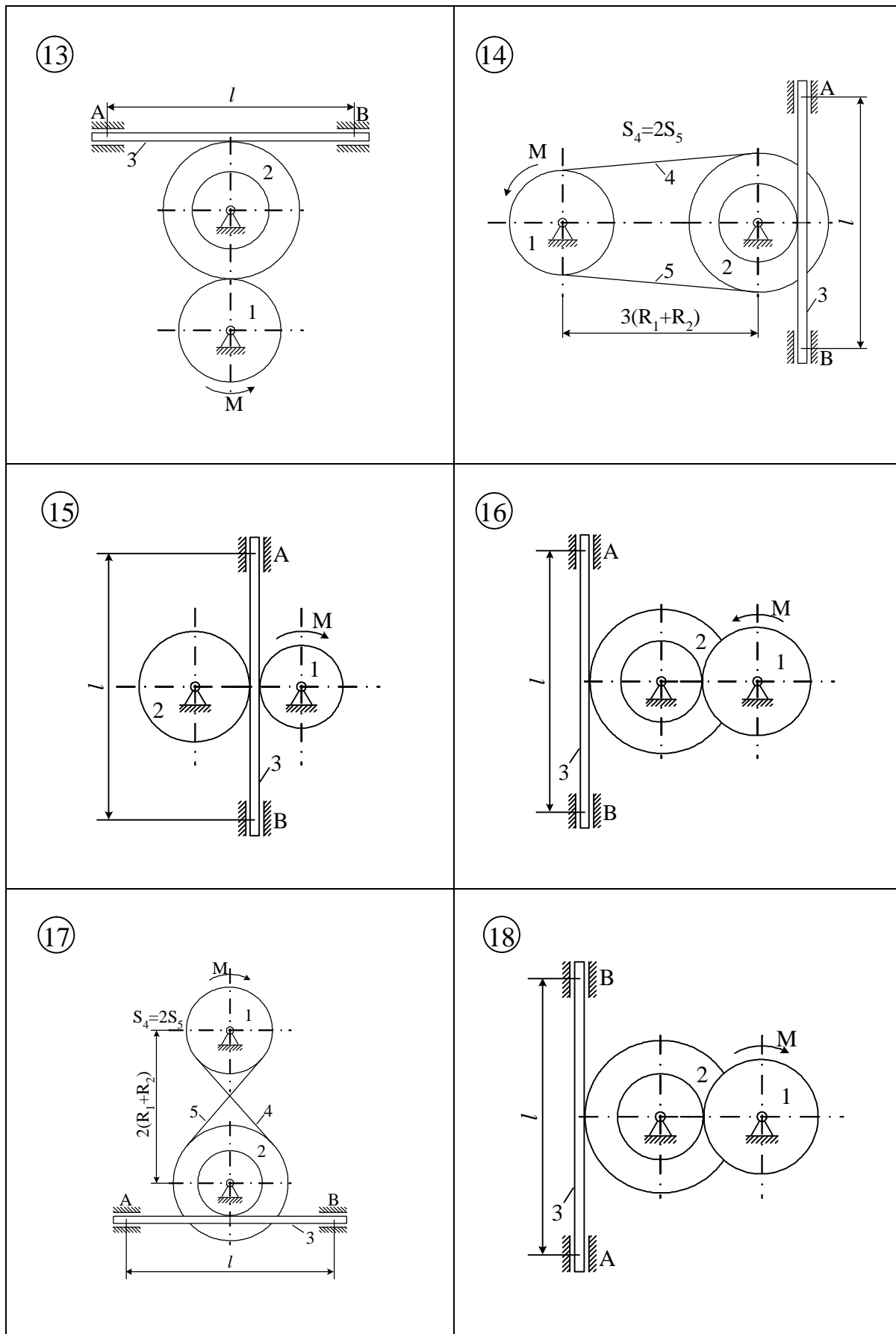


Рисунок 4.3

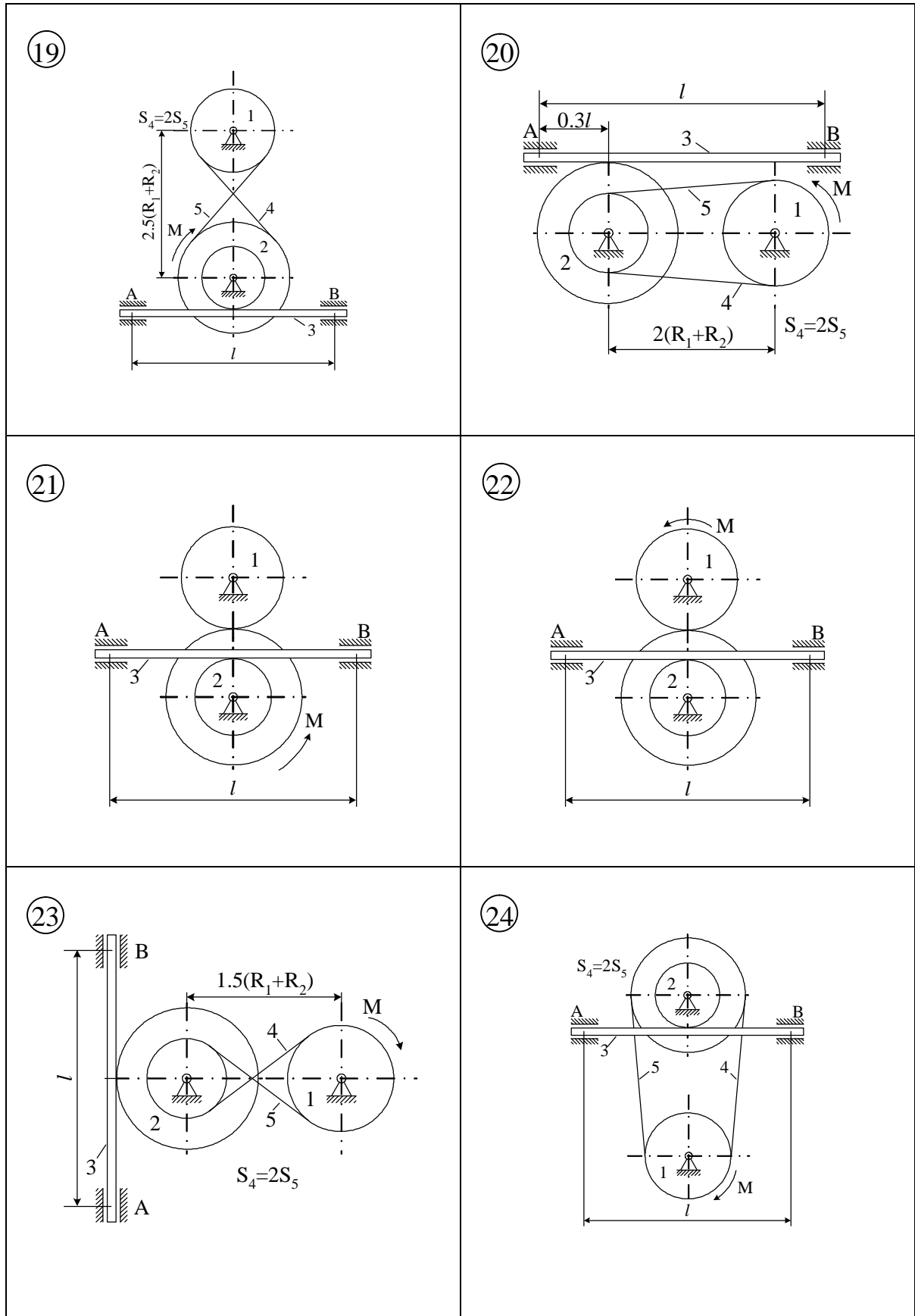


Рисунок 4.4

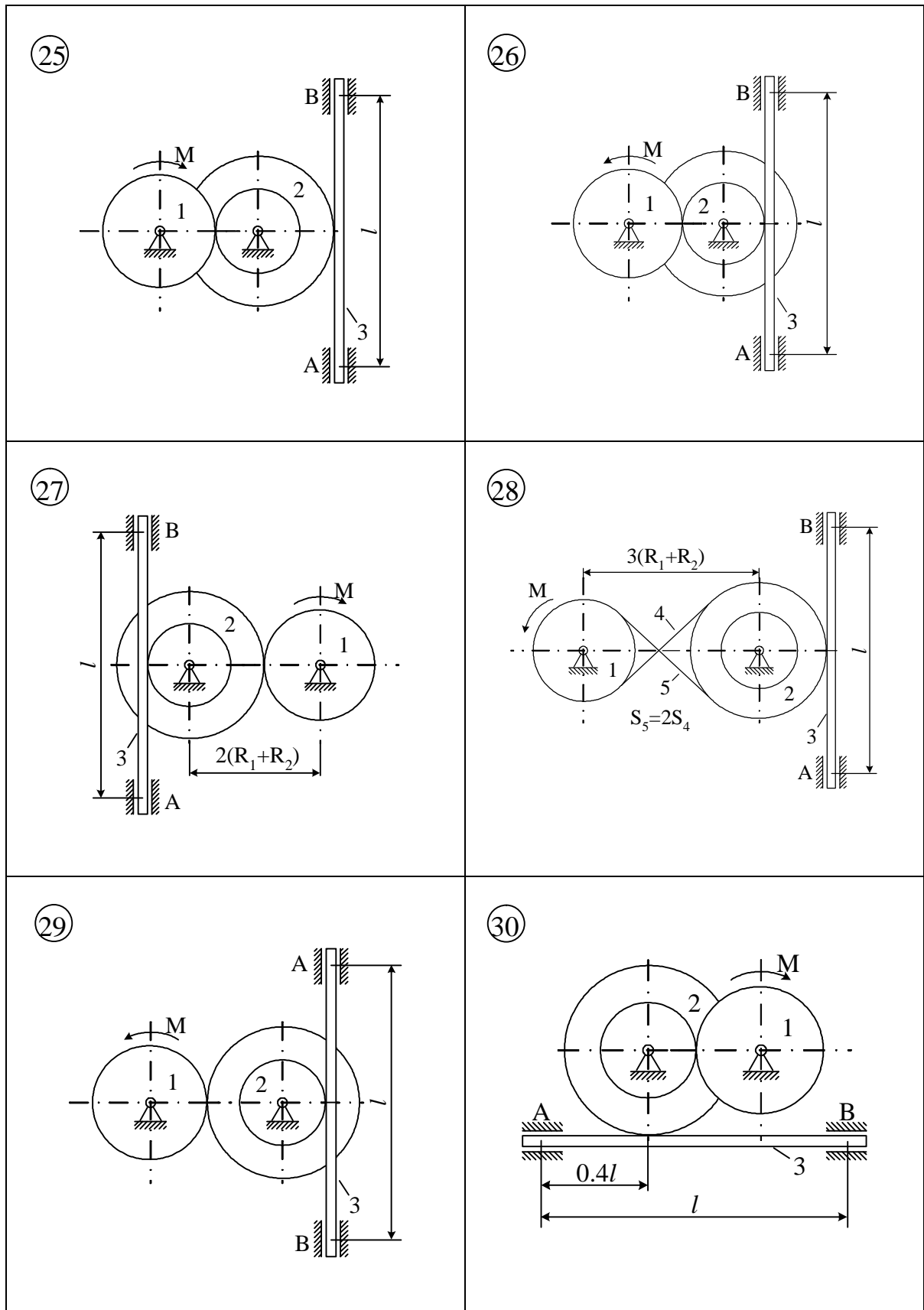


Рисунок 4.5

4.1 Приклад виконання завдання

Матеріальна система (рис. 4.6) починає рухатись із стану спокою під дією моменту M , що прикладається до тіла 1. Осі тіл 1 та 2 горизонтальні. Коефіцієнт тертя ковзання f . В точках контакту тіл ковзання відсутнє. Масою паса знехтувати. Тіло 1 – однорідний циліндр.

Визначити прискорення тіла 3, натяг S_5 у веденій 5 та ведучій 4 (S_4) частині паса (прийняти $S_4=2S_5$), зусилля в точці контакту тіл 1 та 2, реакції в'язей циліндричних (нерухомих) шарнірів тіл 1, 2 та 3.

Прийняти : $R_1=0,25\text{м}$; $R_2=0,45\text{м}$; $r_2=0,15\text{м}$; $i_2=0,4\text{м}$; $L=0,7\text{м}$; $m_1=0,5\text{кг}$; $m_2=5\text{кг}$; $m_3=4\text{кг}$; $M=3\text{т}^3 \text{ Н М}$; $t_1=2\text{с}$; $f=0,4$.

Розв'язання. Розглянемо окремо рух кожного тіла матеріальної системи (рис. 4.6).

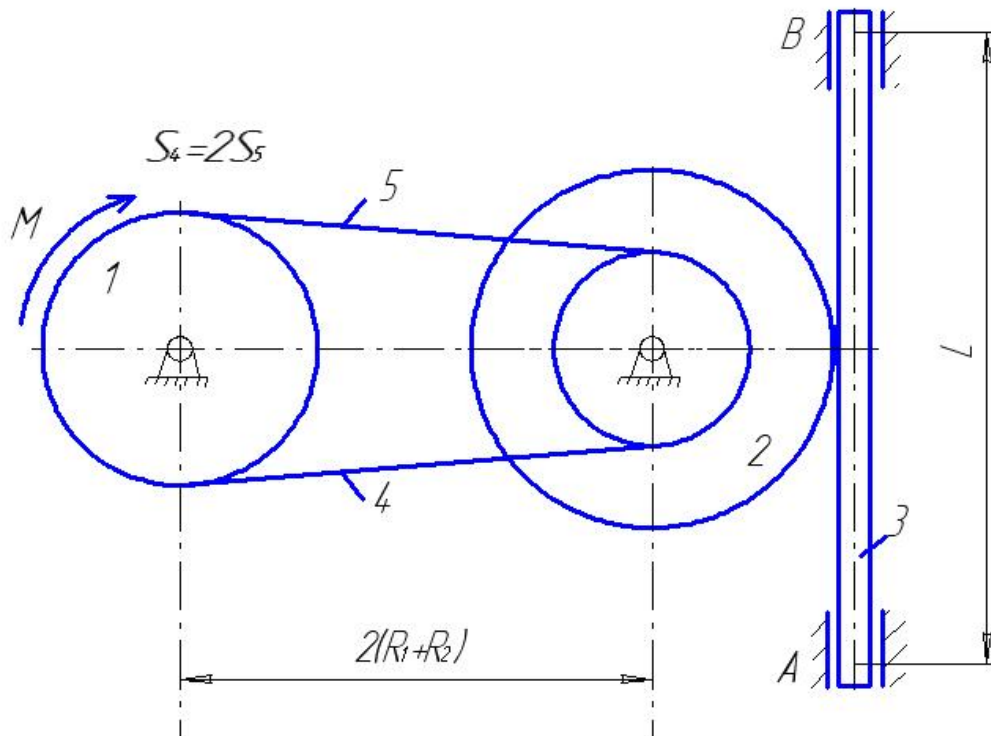


Рисунок 4.6

4.1.1 Визначення прискорення тіла 3

Однорідне тіло 1 обертається навколо горизонтальної осі під дією моменту M (рис. 4.7) і до нього прикладені зовнішні сили: сила тяжіння $P_1=m_1g$; реакції циліндричного шарніра X_1 та Y_1 , зусилля у ланках паса S_5 та S_4 .

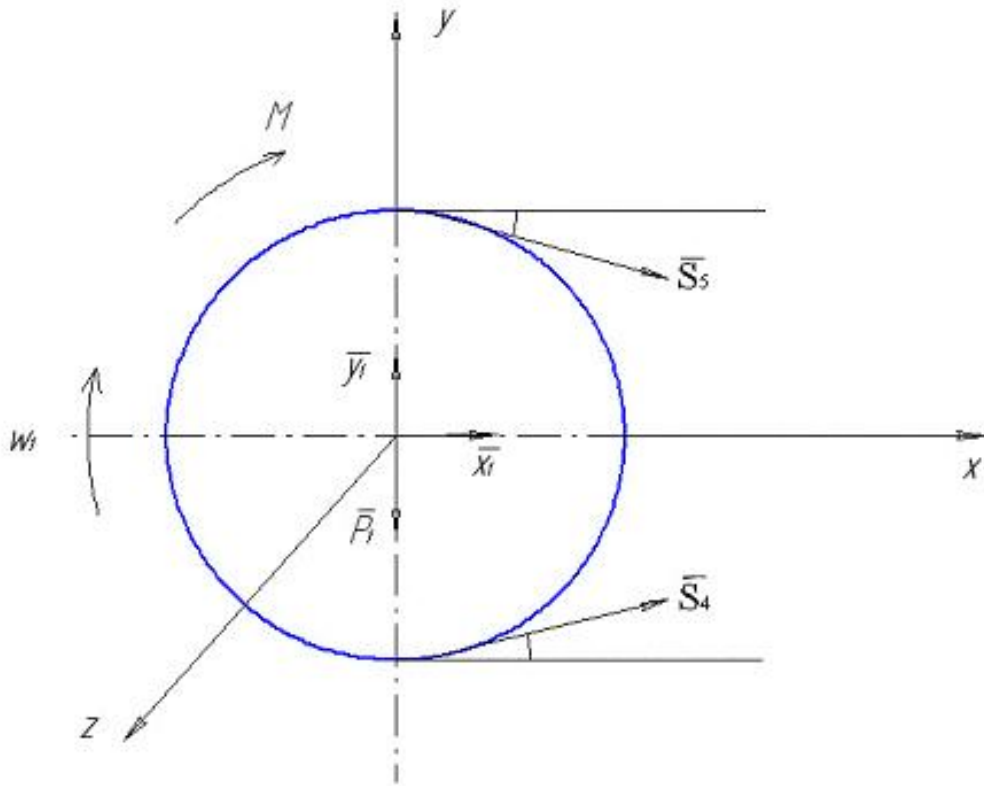


Рисунок 4.7

Запишемо диференціальне рівняння обертання тіла 1 навколо нерухомої осі Z.

$$I_{z1} \cdot \ddot{\varphi} = M + S_5 R_1 - S_4 \cdot R_1 . \quad (4.1)$$

Необхідно врахувати, що момент сили або пари сил буде додатним, якщо він діє у напрямку руху тіла. Так, у рівнянні (4.1) момент сили S_5 та пари сил з моментом M беремо із додатним знаком, а момент сили S_4 – з від’ємним.

Момент інерції тіла 1 відносно осі Z

$$I_{z1} = \frac{1}{2} m_1 R_1^2 \quad (4.2)$$

На тіло 2 (рис 4.8) під час руху діють зовнішні сили: сила тяжіння $P_2 = m_2 g$, реакції нерухомого шарніра X_2 та Y_2 , зусилля у ланках паса S'_5 та S'_4 , реакції тіла 1 – S_2 та N_2 .

У диференціальному рівнянні руху тіла 2 (рис. 4.8) навколо горизонтальної осі Z

$$I_{z2} \cdot \ddot{\varphi} = -S'_5 r_2 + S'_4 r_2 - S_2 R_2 \quad (4.3)$$

сили $S'_5 = S_5$ та $S'_4 = S_4$, а момент інерції тіла 2 відносно осі Z знайдемо через радіус інерції i_2

$$I_{i_2} = m_2 i_2^2 \quad (4.4)$$

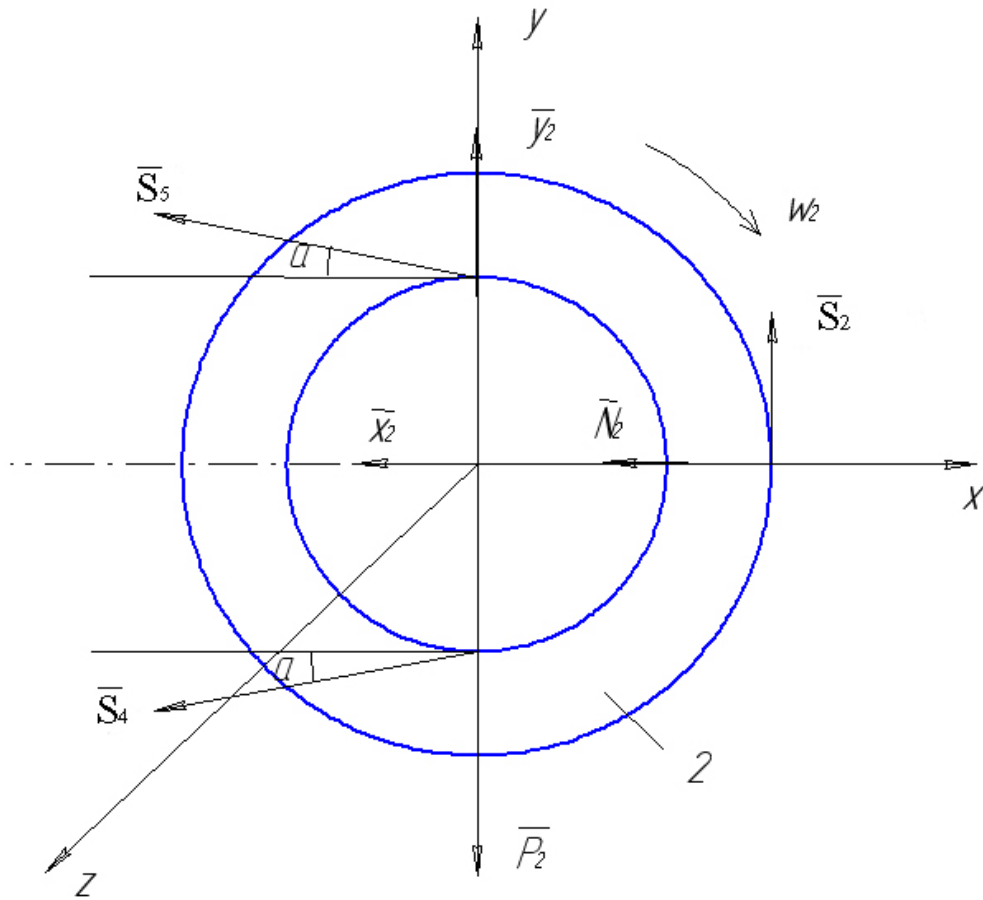


Рисунок 4.8

Для тіла 3 (рис. 4.9), що переміщується під дією сили тяжіння $P_3 = m_3 g$, реакції нерухомих шарнірів N_A та N_B , реакції S'_2 та N'_2 тіла 2, запишемо теорему про рух центра мас в проекціях на вісь Y (вісь Y направляється в сторону руху тіла 3)

$$m_3 \ddot{y}_3 = P_3 + S'_2 \quad (4.5)$$

Звичайно $S'_2 = S_2$

Якщо диференціальні рівняння (4.1), (4.3) і (4.5) розглянути з кінематичними співвідношеннями

$$\ddot{y}_3 = \ddot{y}_2 R_2, \quad \ddot{y}_2 r_2 = \ddot{\varphi}_1 R_1. \quad (4.6)$$

Тоді отримаємо п'ять рівнянь з невідомими $\ddot{y}_3, \ddot{y}_2, \ddot{\varphi}_1, S_5, S_2 (S_4 = 2S_5)$.

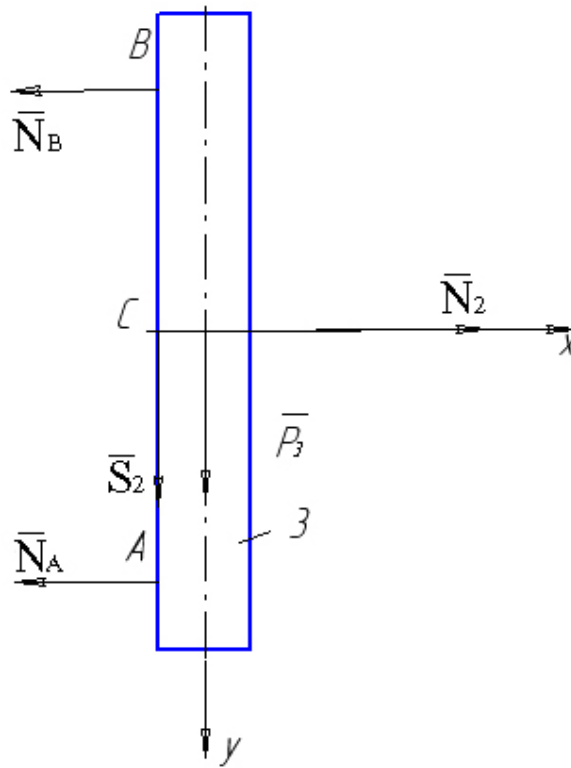


Рисунок 4.9

Розв'язуючи систему рівнянь (4.1), (4.3), (4.5), (4.6), і, враховуючи (4.2) та (4.4), маємо

$$S_5 = \frac{M}{R_1} - \frac{1}{2} m_1 \frac{r_2}{R_2} \ddot{y}_3,$$

$$S_2 = m_3 (\ddot{y}_3 - g),$$

$$\ddot{y}_3 = \frac{M \cdot r_2 + m_3 R_1 R_2 \cdot g}{R_1 (m_2 \frac{i_2^2}{R_2} + \frac{1}{2} m_1 \frac{r_2^2}{R_2} + m_3 R_2)}.$$

Або, підставляючи дані умови задачі, отримаємо

$$\ddot{y}_3 = 4,92 + 0,5t^3,$$

$$S_2 = 4 y_3^3 - 39,24 \ddot{y}_3,$$

$$S_5 = 12 t^3 - 0,083 \ddot{y}_3.$$

При $t_1=2c$, $\ddot{y}_3 = 8.92 \frac{M}{c^2}$, $S_5 = 95.26H$, $S_2 = -3.6H$.

4.1.2 Визначення реакцій в'язей циліндричних шарнірів та зусиль між тілами

Для тіл 1 та 2 запишемо теорему про рух центра мас в проекціях на осі x та y .

Тіло 1 (рис. 4.7)

$$m_1 \ddot{x}_{C1} = x_1 + S_4 \cos a + S_5 \cos a, \quad (4.7)$$

$$m_1 \ddot{y}_{C1} = y_1 + S_4 \sin a - S_5 \sin a - P_1.$$

Тіло 2 (рис 4.8)

$$m_2 \ddot{x}_{C2} = -x_2 - N_2 - S'_5 \cos a - S'_4 \cos a, \quad (4.8)$$

$$m_2 \ddot{y}_{C2} = y_2 - P_2 + S_2 + S'_5 \sin a - S_4 \sin a.$$

Для тіла 3 (рис. 4.9) в проекціях на вісь X :

$$m_3 \ddot{x}_{C3} = N'_2 - N_B - N_A. \quad (4.9)$$

В рівняннях (4.7) – (4.9) $\ddot{x}_{C1} = \ddot{y}_{C1} = \ddot{x}_{C2} = \ddot{y}_{C2} = \ddot{x}_{C3} = 0$ оскільки центри мас тіл 1, 2 знаходяться на нерухомих осях обертання тіл, а координати X_{C3} тіла 3 є сталою величиною.

Отримали систему п'яти рівнянь

$$\begin{aligned} x_1 + (S_4 + S_5) \cos a &= 0, \\ y_1 + (S_4 - S_5) \sin a - P_1 &= 0, \\ x_2 + N_2 + (S_4 + S_5) \cos a &= 0, \\ y_2 - P_2 + S_2 + (S_5 - S_4) \sin a &= 0, \\ N_2 - N_B - N_A &= 0. \end{aligned} \quad (4.8)$$

в якій сім невідомих величин: $x_1, y_1, x_2, y_2, N_2, N_B, N_A$.

Додаткові два рівняння отримаємо, використовуючи закон Амонтока-Кулона

$$S_2 = fN_2 \quad (4.9)$$

та диференціальне рівняння обертального руху тіла 3 навколо осі Z що проходить через центр мас C (рис. 4.9) тіла 3

$$I_{C3} \ddot{g}_3 = N_B \cdot \frac{AB}{2} - N_A \cdot \frac{AB}{2}. \quad (4.10)$$

Тіло 3 рухається поступально і тому $\ddot{g}_3 = 0$. Таким чином, із (4.10) маємо

$$N_B = N_A. \quad (4.11)$$

Розв'язуючи систему рівнянь (4.6), (4.9) і (4.11), отримаємо

$$x_1 = -(S_4 + S_5) \cos a,$$

$$y_1 = m_1 g - (S_4 - S_5) \sin a,$$

$$x_2 = -N_2 - (S_4 + S_5) \cdot \cos a,$$

$$y_2 = m_2 g - S_2 + (S_4 - S_5) \sin a,$$

$$N_2 = \frac{S_2}{f}, N_B = N_A = \frac{S_2}{2f}$$

$$\text{де } \sin a = \frac{R_1 - r_2}{\sqrt{4(R_1 + R_2)^2 + (R_1 - r_2)^2}} = 0.071,$$

$$\cos a = \frac{2(R_1 + R_2)}{\sqrt{4(R_1 + R_2)^2 + (R_1 - r_2)^2}} = 0.997.$$

$$\text{При } e_1 = 2c,$$

$$y_1 = -1,86H;$$

$$x_1 = -284,92H;$$

$$y_2 = 59,41H;$$

$$x_2 = -293,92H;$$

$$N_2 = 9H;$$

$$N_B = N_A = 4,5H.$$

ДС. 5 Визначення прискорення точок та кутових прискорень тіл за допомогою теореми про зміну кінетичної енергії системи

Матеріальна система (рис. 4.1-4.5) приводиться до руху моментом M . Знайти прискорення тіла 3 та кутові прискорення тіл в момент часу $t=t_1$.

Масами пасів та їх ковзанням по шківів знехтувати. В точках контакту тіл ковзання відсутнє. Однорідний диск 1 та ступінчатий шків 2 обертаються навколо горизонтальних осей.

Дані для розрахунку приведені в таблиці 4.1 де m_1, m_2, m_3 – маси тіл 1, 2 та 3; R_1, R_2, r_2 – розміри тіл 1 та 2; i_2 – радіус і перці тіла 2 відносно горизонтальної осі.

5.1 Приклад виконання завдання

Матеріальна система (рис. 5.1) рухається під дією моменту M , що діє на тіло 1. Осі тіл 1 та 2 горизонтальні. В точках контакту тіл та паса ковзання відсутнє. Масою тіл знехтувати. Тіло 1 – однорідний циліндр.

Визначити прискорення тіла 3 та кутові прискорення тіл 1 та 2 якщо: $R_1=0,25m$; $R_2=0,45m$; $r_2=0,15m$; $i_2=0,4m$; $l=0,7m$; $m_1=0,5\text{кг}$; $m_2=5\text{кг}$; $m_3=4\text{кг}$; $M=3t^3\text{Нм}$; $t_2=2\text{с}$.

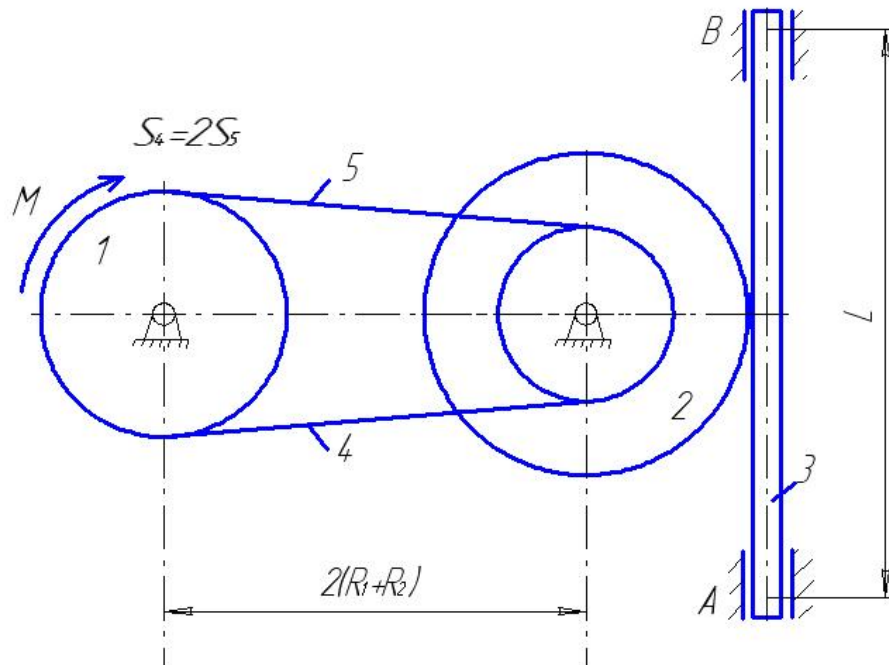


Рисунок 5.1

Розв'язання. Для дослідження руху матеріальної системи (рис. 5.1) використаємо теорему про зміну кінетичної енергії в диференціальній формі

$$\frac{dT}{dt} = N^e + N^i, \quad (5.1)$$

де T – кінетична енергія системи, N^e – потужність зовнішніх сил системи, N^i – потужність внутрішніх сил системи, $N^i = 0$ – тіла тверді, а пас абсолютно гнучкий та нерозтяжний.

Кінетична енергія системи складається із кінетичної енергії тіл, що входять в систему

$$T = T_1 + T_2 + T_3.$$

Тіла 1 та 2 обертаються навколо нерухомих горизонтальних осей і їх кінетична енергія знаходиться за формулами:

$$T_1 = \frac{1}{2} I_1 \cdot \omega_1^2, T_2 = \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2, \quad (5.2)$$

де $I_1 = \frac{1}{2} m_1 R_1^2$, $I_2 = m_2 i_2^2$ – моменти інерції відповідно тіл 1 та 2, ω_1 , ω_2 – кутові швидкості тіл.

Тіло 3 переміщується поступально із швидкістю V_3 , тоді

$$T_3 = \frac{1}{2} m_3 V_3^2. \quad (5.3)$$

Взаємозв'язок між кінематичними характеристиками руху тіл (рис. 5.2)

$$\omega_2 = \frac{V_3}{R_2}, \omega_1 = \omega_2 \frac{r_2}{R_1} = V_3 \frac{r_2}{R_1 \cdot R_2}. \quad (5.4)$$

Запишемо кінетичну енергію системи, враховуючи (5.2), (5.3) та (5.4), як функцію швидкості V_3 тіла 3

$$T = \frac{V_3^2}{4R_2^2} (m_1 r_2^2 + 2m_2 i_2^2 + 2m_3 R_2^2). \quad (5.5)$$

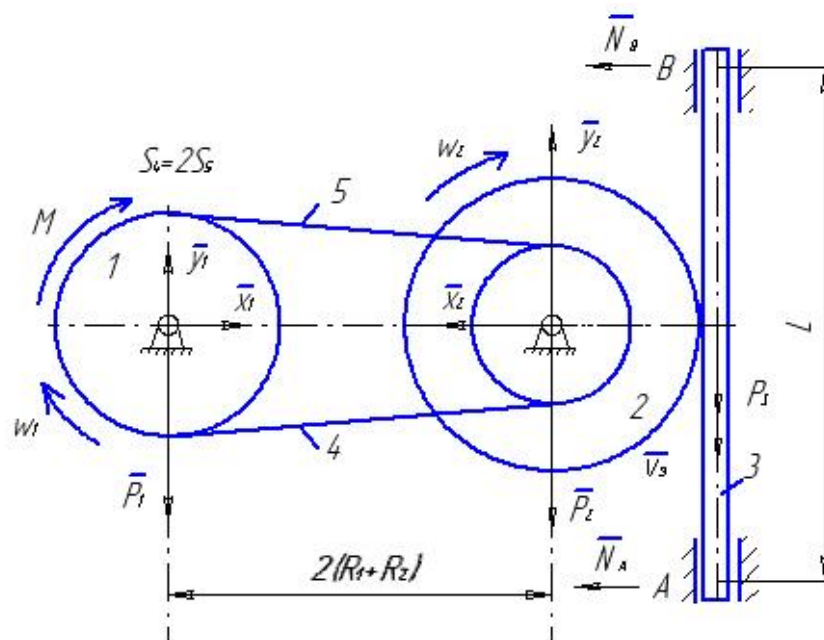


Рисунок 5.2

Знайдемо потужність зовнішніх сил (рис. 5.2) матеріальної системи: сили тяжіння $P_1=m_1g$, $P_2=m_2g$, $P_3=m_3g$ моменту M ; реакції в'язей нерухомих (циліндричних) шарнірів $X_1, Y_1, X_2, Y_2, N_A, N_B$.

Потужність сил $X_1, Y_1, P_1, X_2, Y_2, P_2, N_A$ і N_B дорівнює нулю тому, що точки прикладення сил не переміщуються. Тоді потужність N^e зовнішніх сил буде складатися із потужності моменту M та сили тяжіння тіла 3 - P_3 .

$$N^e = N(M) + N(\bar{P}_3)$$

$$\text{де } N(M) = M \cdot w_1 = MV_3 \frac{r_2}{R_1 R_2},$$

$$N(\bar{P}_3) = P_3 \cdot V_3 = m_3 g V_3.$$

Або

$$N^e = V_3 \left(m_3 g + M \frac{r_2}{R_1 \cdot R_2} \right). \quad (5.6)$$

Теорема про зміну кінетичної енергії матеріальної системи (5.1) з врахуванням (5.5) та (5.6) запишеться:

$$\frac{1}{4R_2^2} (m_2 r_2^2 + 2m_2 i_2^2 + 2m_3 R_2^2) \frac{dV_3^2}{dt} = V_3 \left(m_3 g + M \frac{r_2}{R_1 \cdot R_2} \right)$$

Оскільки $\frac{dV_3^2}{dt} = 2V_3 \cdot a_3$, тоді

$$a_3 = \frac{4R_2^2 \left(m_3 g + M \frac{r_2}{R_1 \cdot R_2} \right)}{m_1 r_2^2 + 2m_2 i_2^2 + 2m_3 R_2^2}. \quad (5.7)$$

Кутові прискорення тіл

$$j_{\&\&} = \frac{a_3}{R_2}, \quad j_{\&\&} = a_3 \frac{r_2}{R_1 \cdot R_2}.$$

Підставляючи дані умови задачі, отримаємо :

$$a_3 = (4,93 + 0,50t^3) \frac{M}{c},$$

$$j_{\&\&} = (10,96 + 1,11t^3) \frac{1}{c^2},$$

$$j_{\&\&} = (6,57 + 0,67t^3) \frac{1}{c^2}.$$

При $t_1=2c$, $a_3 = 8,93 \frac{M}{c^2}$, $j_{\&\&} = 19,84 \frac{1}{c^2}$, $j_{\&\&} = 11,9 \frac{1}{c^2}$.

ДС.6 Дослідження планетарного механізму з паралельними осями

До вала I планетарного механізму (рис. 6.1 – 6.5), розташованого в горизонтальній площині (вал I вертикальний), прикладений обертальний момент M . Знайти кутову швидкість w вала I при $t=t_1$. В початковий момент система знаходиться у спокої. Силами тертя знехтувати. Дані для розрахунків приведено в табл. 6.1. Вагою рухомих, нерухомих осей та водила знехтувати. Колеса з рухомими та нерухомими осями вважати однорідними круглими дисками. Радіус r_3 зубчастого колеса визначається із схеми механізму (рис. 6.1 – 6.5).

Таблиця 6.1

Варіант	Радіус, м			Маса, кг			Момент, Н·м	Час, с
	r_1	r_2	r_3	m_1	m_2	m_3	M	t_1
1	0.15	0.20	0.45	0.5	0.4	0.6	$8+3t$	2
2	0.30	0.35	0.60	1.0	0.9	0.8	$4-w_I$	1
3	0.35	0.45	0.70	1.5	1.4	1.0	$6+zt^2$	3
4	0.35	0.40	0.65	1.25	1.2	0.9	$5+3w_I$	2
5	0.45	0.50	0.95	0.75	0.6	0.8	$12+5t$	1
6	0.30	0.35	0.90	0.8	0.5	0.6	$1+6w_I$	3
7	0.40	0.45	1.00	0.6	0.4	0.5	$2+9t^2$	2
8	0.45	0.50	1.2	0.7	0.6	0.9	$8+w_I$	1
9	0.20	0.30	0.50	0.4	0.3	0.5	$2+3t$	3
0	0.50	0.60	1.2	0.3	0.4	0.6	$9+2w_I$	2

6.1 Приклад виконання завдання

Вертикальний вал I (рис 6.6) із стану спокою приводиться до руху моментом $M=(12-5w)$ Н·м.

Знайти кутову швидкість вала I (води́ло) при $t_1=2$ с, якщо $r_1=0,4$ м; $r_2=0,2$ м; $r_4=1,0$ м. Зубчасті колеса з нерухою віссю 1 та рухою 2 і 3 – однорідні суцільні диски масами: $m_1=1$ кг, $m_2=2$ кг, $m_3=3$ кг. Силами тертя, масами рухомих осей та водила (вала I) знехтувати.

Розв'язання. Планетарний механізм (рис 6.6) покажемо в площині його руху – горизонтальній (рис 6.7) Механізм рухається під дією зовнішніх сил: обертального моменту M ; реакції циліндричного шарніра x_1 та y_1 ; реакції нерухомого колеса 4 – S_A, N_A, S_B, N_B ; сили тяжіння P_1, P_2, P_3 (направлені перпендикулярно до площини рис. 6.7).

Для визначення кутової швидкості водила I застосуємо теорему про зміну кінетичної енергії матеріальної системи в диференціальному вигляді

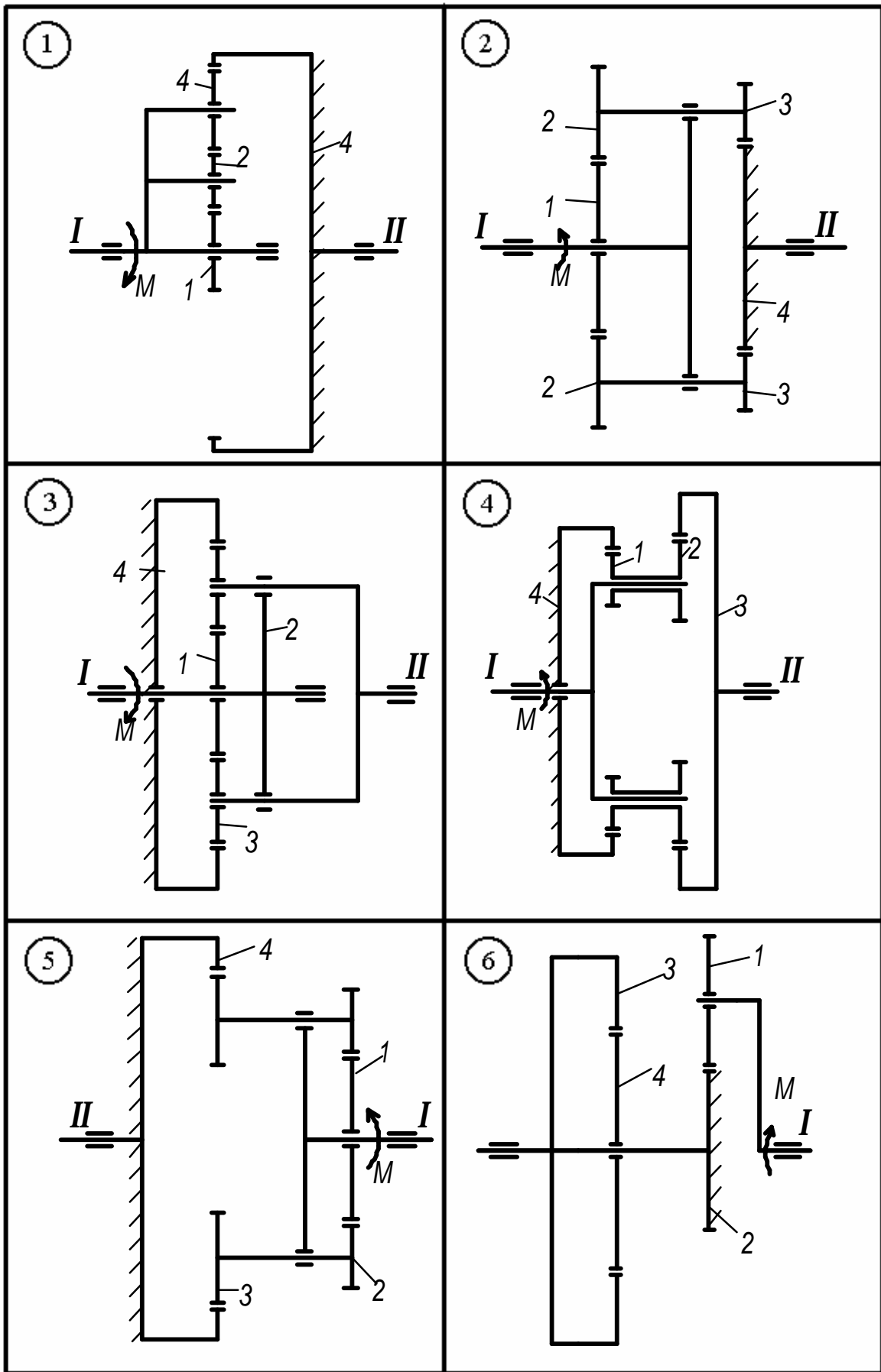


Рисунок 6.1

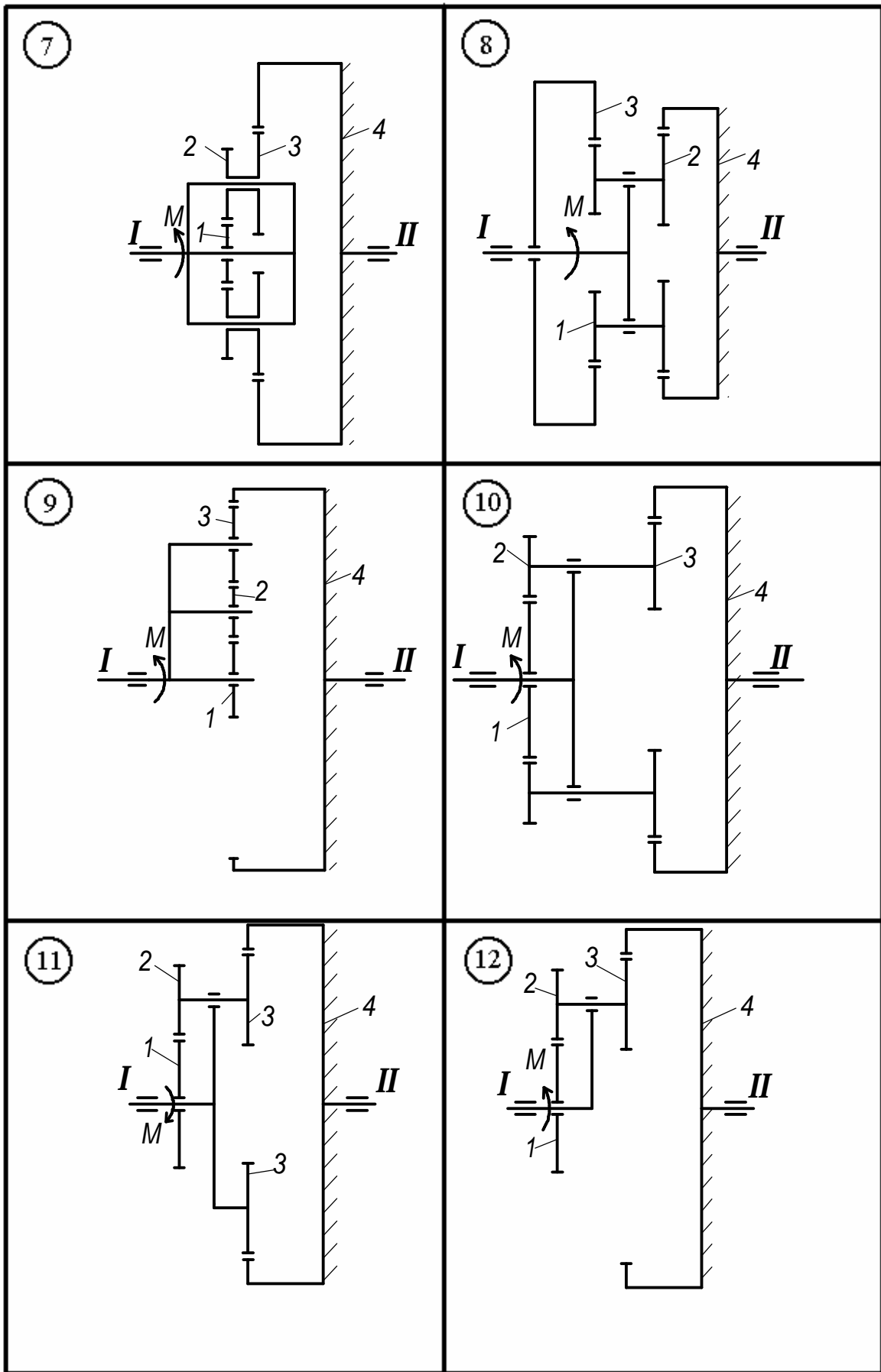


Рисунок 6.2

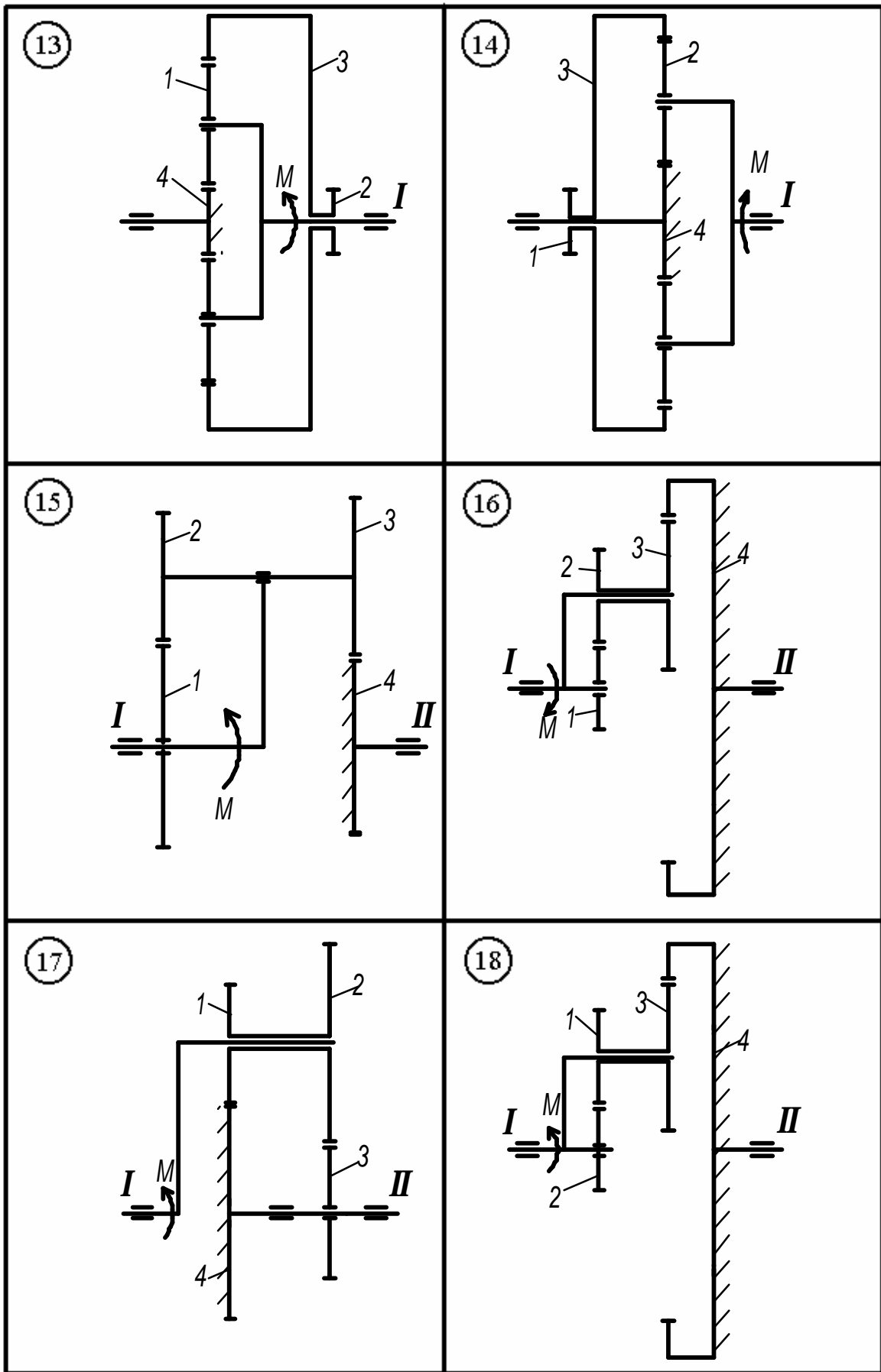


Рисунок 6.3

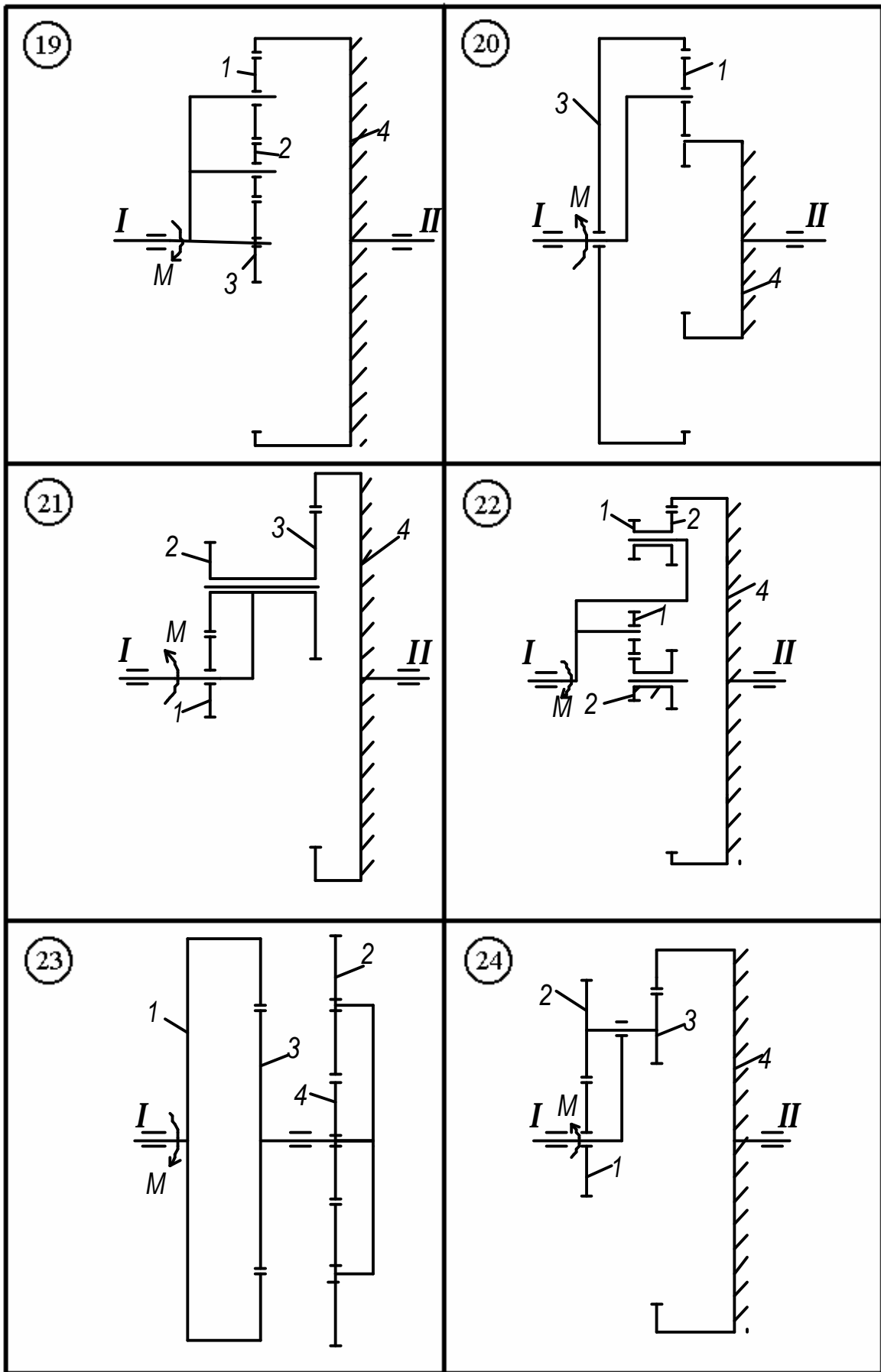


Рисунок 6.4

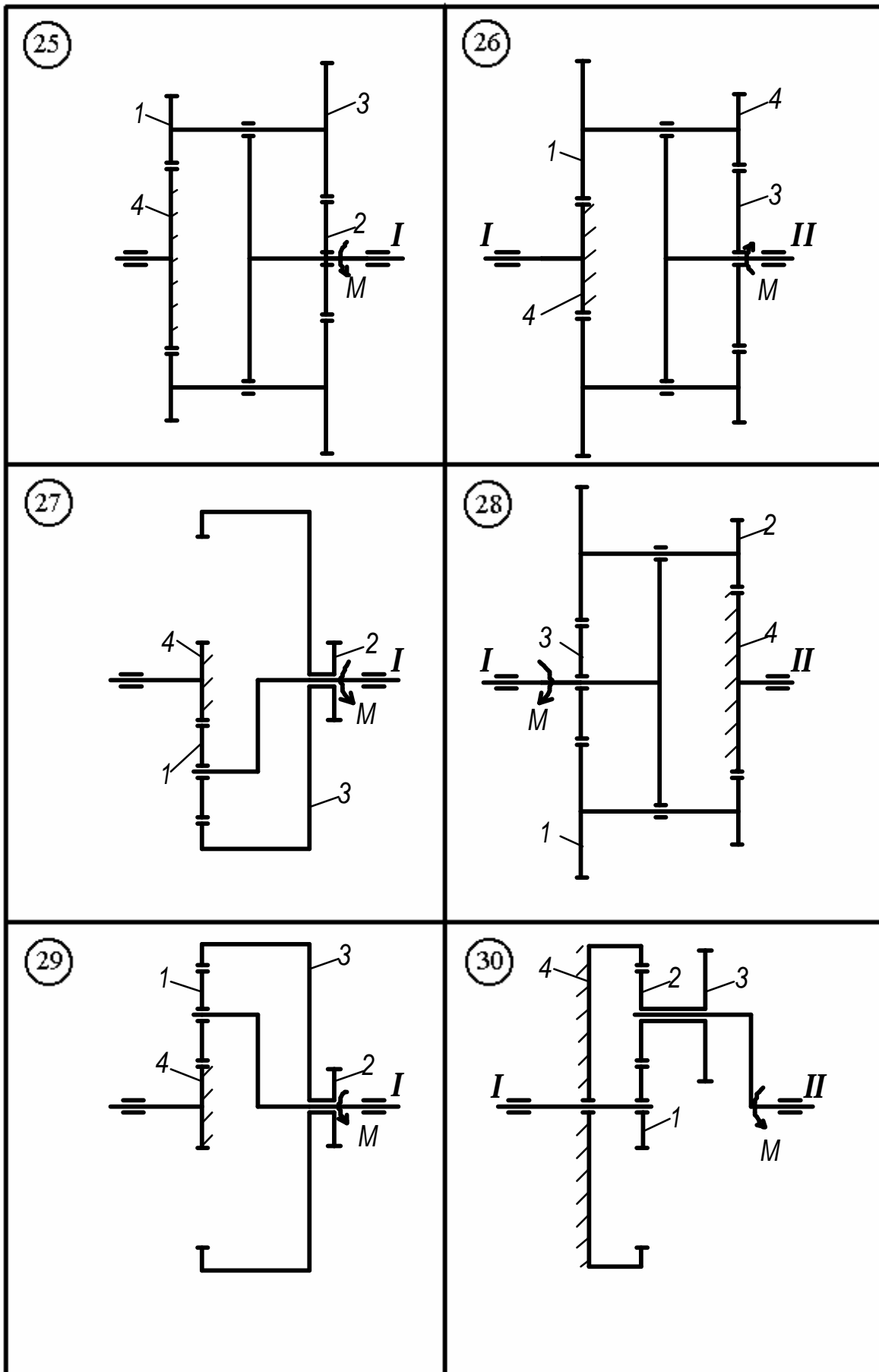


Рисунок 6.5

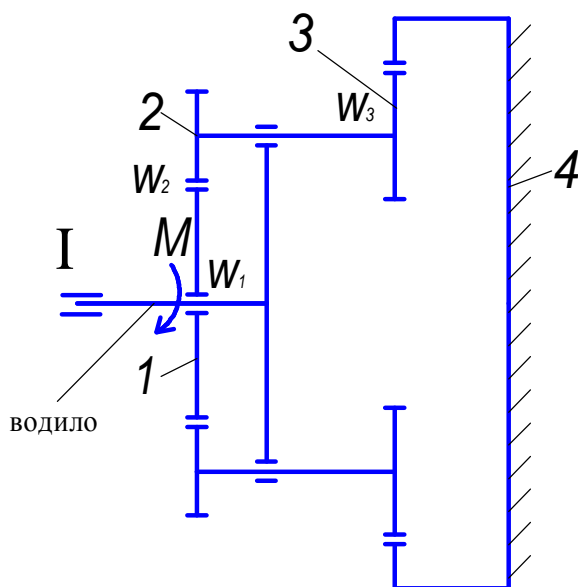


Рисунок 6.6

$$\frac{dT}{dt} = N^e + N^i \quad (6.1)$$

де T – кінетична енергія планетарного механізму, N^e та N^i потужність зовнішніх та внутрішніх сил системи.

Оскільки в планетарному механізмі тіла тверді, то потужність внутрішніх сил дорівнює нулю ($N^i=0$).

Кінетична енергія системи в даний момент часу складається з кінетичної енергії зубчастого колеса 1, кінетичних енергій рухомих зубчастих коліс (сателітів) 2 та 3.

$$T = T_1 + 2T_2 + 2T_3 \quad (6.2)$$

Оскільки зубчасте колесо 1 обертається навколо нерухомої осі, то його кінетична енергія визначається за формулою

$$T_1 = \frac{1}{2} I_1 \cdot \omega_1^2 \quad (6.3)$$

де $I_1 = \frac{1}{2} m_1 r_1^2$ - момент інерції колеса відносно головної центральної осі, що є віссю обертання тіла 1, ω_1 – кутова швидкість тіла 1.

Сателіти (рухомий блок зубчастих коліс 2 та 3) переміщується плоскопаралельно і їх кінетична енергія визначається таким чином:

$$\begin{aligned} T_2 &= \frac{1}{2} m_2 V_c^2 + \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2, \\ T_3 &= \frac{1}{2} m_3 V_c^2 + \frac{1}{2} I_3 \omega_3^2 \end{aligned} \quad (6.4)$$

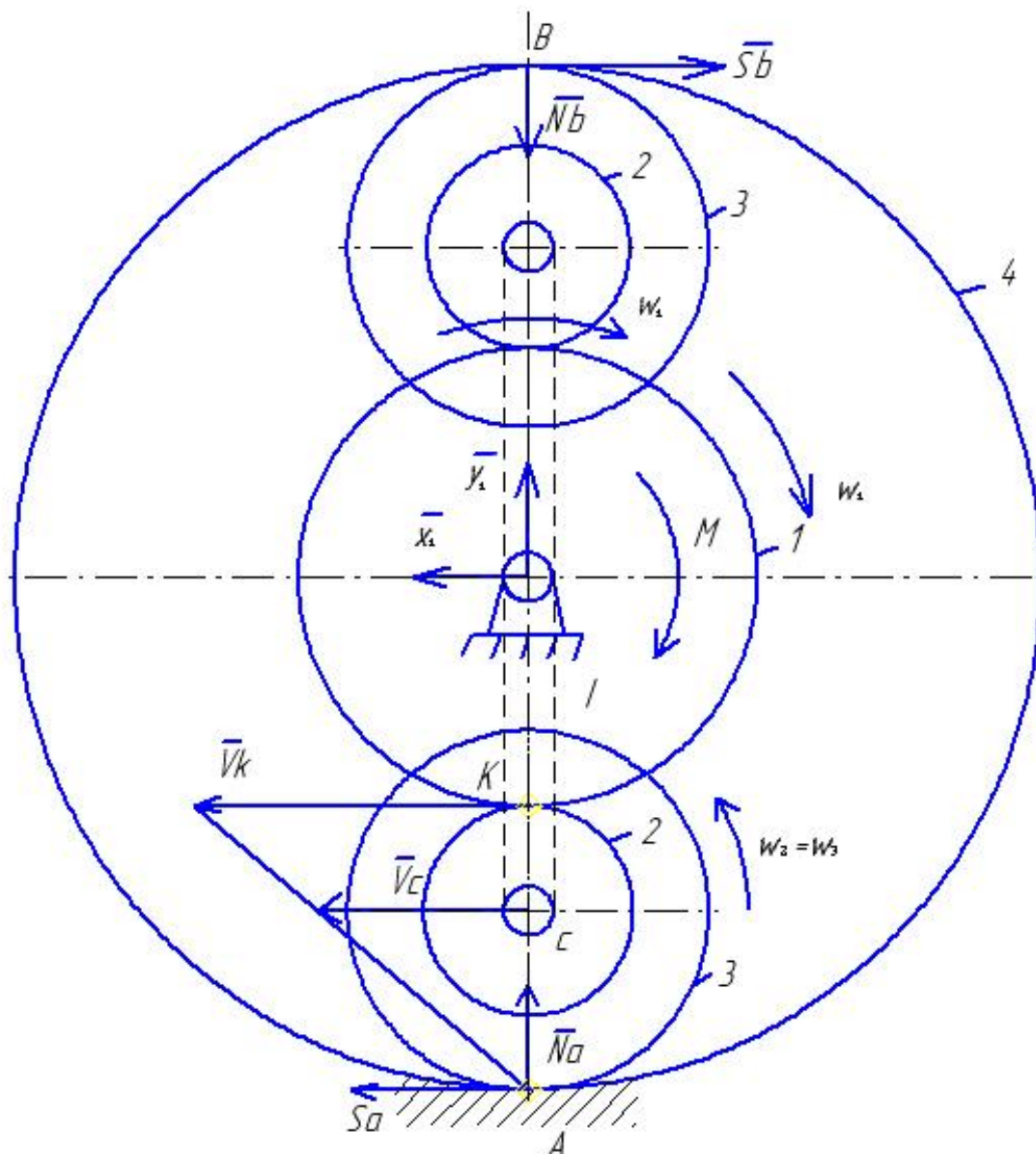


Рисунок 6.7

де V_c – швидкість центра мас тіл 2 та 3, $I_2 = \frac{1}{2}m_2r_2^2$ та $I_3 = \frac{1}{2}m_3r_3^2$ - моменти інерції тіл 2 та 3 відносно головної центральної осі, $w_2=w_3$ – кутова швидкість сателітів (блока коліс 2 та 3).

Знайдемо співвідношення між кутовими швидкостями тіл та швидкістю V_c , записавши їх через кутову швидкість водила I. Оскільки точка A (рис. 6.7) є миттєвим центром швидкостей сателітів 2 та 3, тоді очевидно що,

$$V_c = w_2r_3, V_k = w_2(r_2 + r_3), w_1 = \frac{V_k}{r_1} \quad (6.5)$$

точка C також належить водилу I.

$$V_c = w(r_1 + r_2) \quad (6.6)$$

Тоді з (6.5), враховуючи (6.6).

$$w_2 = w \frac{r_1 + r_2}{r_3}, \quad w_1 = \frac{w}{r_1 r_3} (r_2 + r_3)(r_1 + r_2) \quad (6.7)$$

Таким чином, кінетична енергія механічної системи (6.2), після підстановки в неї (6.3) і (6.4), та маючи на увазі (6.6) і (6.7), запишеться

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} m_1 r_1^2 \cdot \frac{w^2}{r_1^2 r_3^2} (r_2 + r_3)^2 (r_1 + r_2)^2 + \\ &+ m_2 \cdot w^2 (r_1 + r_2)^2 + \frac{1}{2} m_2 r_2^2 \cdot \frac{w^2}{r_3^2} (r_1 + r_2)^2 + \\ &+ m_3 \cdot w^2 (r_1 + r_2)^2 + \frac{1}{2} m_3 r_3^2 \cdot \frac{w^2}{r_3^2} (r_1 + r_2)^2. \end{aligned}$$

Або

$$T = w^2 (r_1 + r_2)^2 \left(\frac{m_1}{4r_3^2} (r_2 + r_3) + m_2 \left(1 + \frac{r_2^2}{2r_3^2} \right) + \frac{3}{2} m_3 \right). \quad (6.8)$$

Потужність зовнішніх сил

$$N^e = M \cdot w. \quad (6.9)$$

На підставі теореми (6.1) і формул (6.8) та (6.9) отримаємо:

$$I_{np} \frac{dw^2}{dt} = (12 - 5w) \cdot w \quad (6.10)$$

де $I_{np} = (r_1 + r_2)^2 \left(\frac{m_1}{4r_3^2} (r_2 + r_3) + m_2 \left(1 + \frac{r_2^2}{2r_3^2} \right) + \frac{3}{2} m_3 \right)$, $M = (12 - 5w)$ – обертальний

момент, що діє на водило I.

Оскільки $\frac{dw^2}{dt} = 2w \frac{dw}{dt}$, тоді $2I_{np} \frac{dw}{dt} = 12 - 5w$. (6.11)

Початкові умови:

При $t=0, w=0$. (6.12)

В диференціальному рівнянні (6.11) розділимо змінні w та t .

$$2I_{np} \frac{dw}{12 - 5w} = dt \quad (6.13)$$

Інтегруємо диференціальне рівняння (6.13) при початкових умовах (6.12).

$$-\frac{2}{5} I_{np} (\ln(12 - 5w) - \ln 12) = t$$

Або

$$\ln \frac{12}{12 - 5w} = \frac{5t}{2I_{np}}.$$

Виконуємо подальші перетворення:

$$\begin{aligned}
\frac{12}{12-5w} &= e^{\frac{5t}{2I_{np}}}, \\
12-5w &= 12e^{-\frac{5t}{2I_{np}}}, \\
5w &= 12(1-e^{-\frac{5t}{2I_{np}}}), \\
w &= 2.4(1-e^{-\frac{5t}{2I_{np}}}).
\end{aligned}
\tag{6.14}$$

Кутова швидкість водила I при $t_1=2\text{с}$

$$w = 2.4(1 - e^{-2.5 \cdot \frac{2}{2.6}}) = 2,1 \frac{1}{\text{с}}$$

де $I_{np} = (\frac{1}{4 \cdot 0.4^2} (0.2 + 0.4)^2 + 2(1 + \frac{0.2^2}{2 \cdot 0.4^2}) + \frac{3}{2} \cdot 3)(0.4 + 0.2)^2 = 2,6 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$,

$r_3 = r_4 - r_2 - r_1 = 1 - 0.4 - 0.2 = 0.4 \text{ м}$ - радіус зубчастого колеса 3.

ДС.7 Використання теореми про зміну кінетичної енергії для вивчення руху матеріальної системи

Матеріальна система (рис.7.1-7.5) рухається із стану спокою під дією сили тяжіння. Знайти прискорення та швидкість тіла 1 у момент часу, коли воно пройде шлях S . Масами шнурів, силами опору в шарнірах знехтувати. Тіла котяться по поверхнях без ковзання.

Величини для розрахунків наведені в табл. 7.1 де прийнято такі позначення: m_1, m_2, m_3 – маси тіл 1, 2, 3; R_2, r_2, R_3, r_3 — найбільші та найменші розміри ступінчастих шківів тіл 2 та 3; ρ_{2x}, ρ_{3x} — радіуси інерції ступінчастих шківів 2 та 3 відносно осі обертання; α, β кути нахилу площин до горизонту. Якщо тіла (шківів) 2 або 3 однорідні, тоді при розрахунках брати R_2, R_3 . Шнури над похилими площинами паралельні цим площинам.

Таблиця 7.1

Варіант	m_1 , кг	m_2 , кг	m_3 , кг	R_2 , М	r_2 , М	R_3 , М	r_3 , М	ρ_{2x} , М	ρ_{3x} , М	α
1	6	1	2	0.6	0.5	0.5	0.3	0.6	0.4	30
2	8	2	2	0.8	0.6	0.7	0.4	0.7	0.6	45
3	10	3	3	0.65	0.5	0.6	0.4	0.5	0.5	60
4	5	0.5	1.5	0.5	0.4	0.45	0.2	0.45	0.3	30
5	4	0.75	1.25	0.4	0.3	0.3	0.15	0.35	0.2	45
6	9	4	1	0.4	0.35	0.35	0.25	0.3	0.3	60
7	3	0.3	1	0.3	0.2	0.25	0.15	0.2	0.2	30
8	2	0.2	0.3	0.2	0.15	0.25	0.2	0.2	0.25	45
9	11	4	2	0.7	0.6	0.6	0.3	0.65	0.5	60
0	12	5	1	0.75	0.65	0.65	0.45	0.7	0.5	30

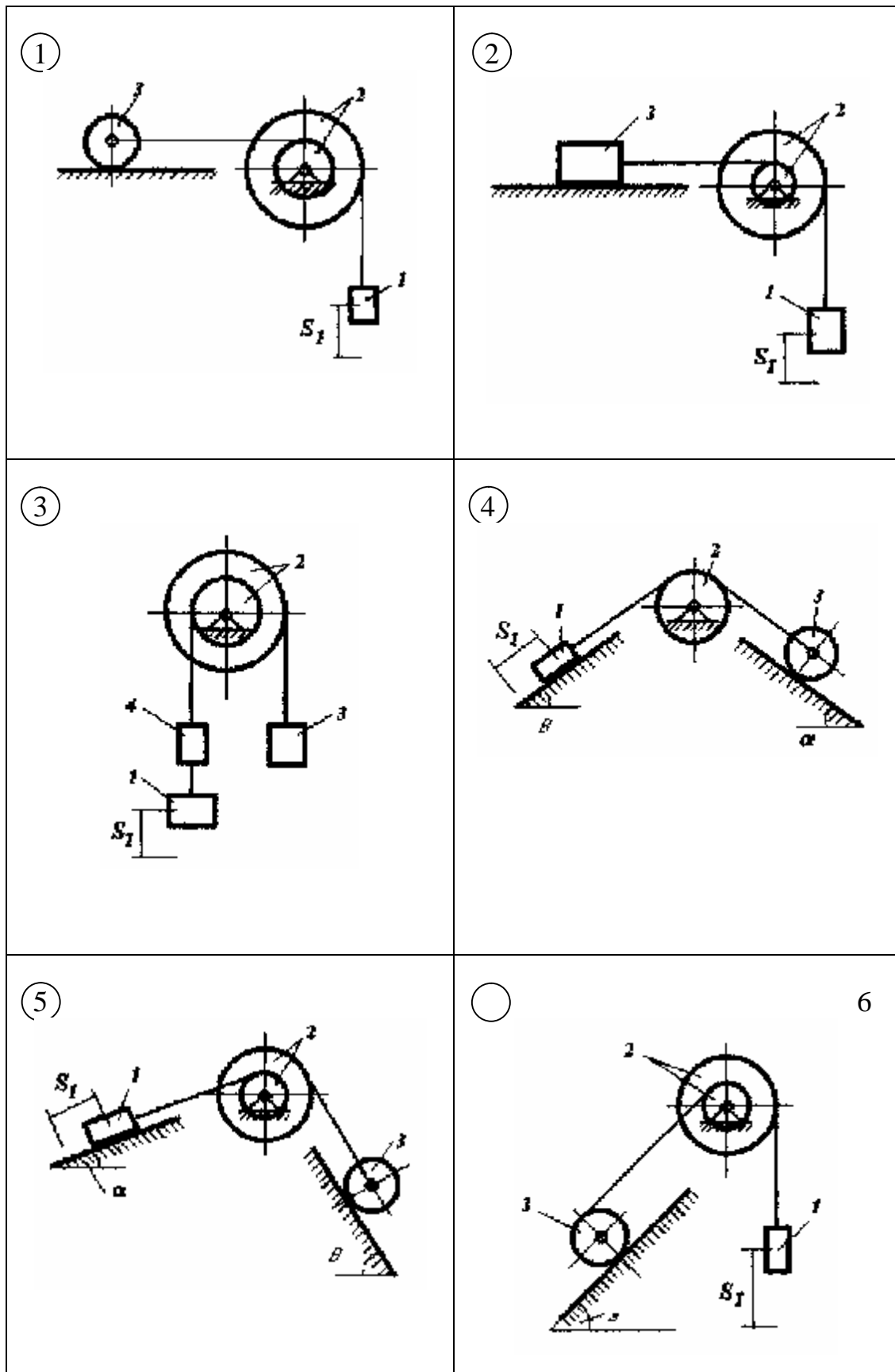


Рисунок 7.1

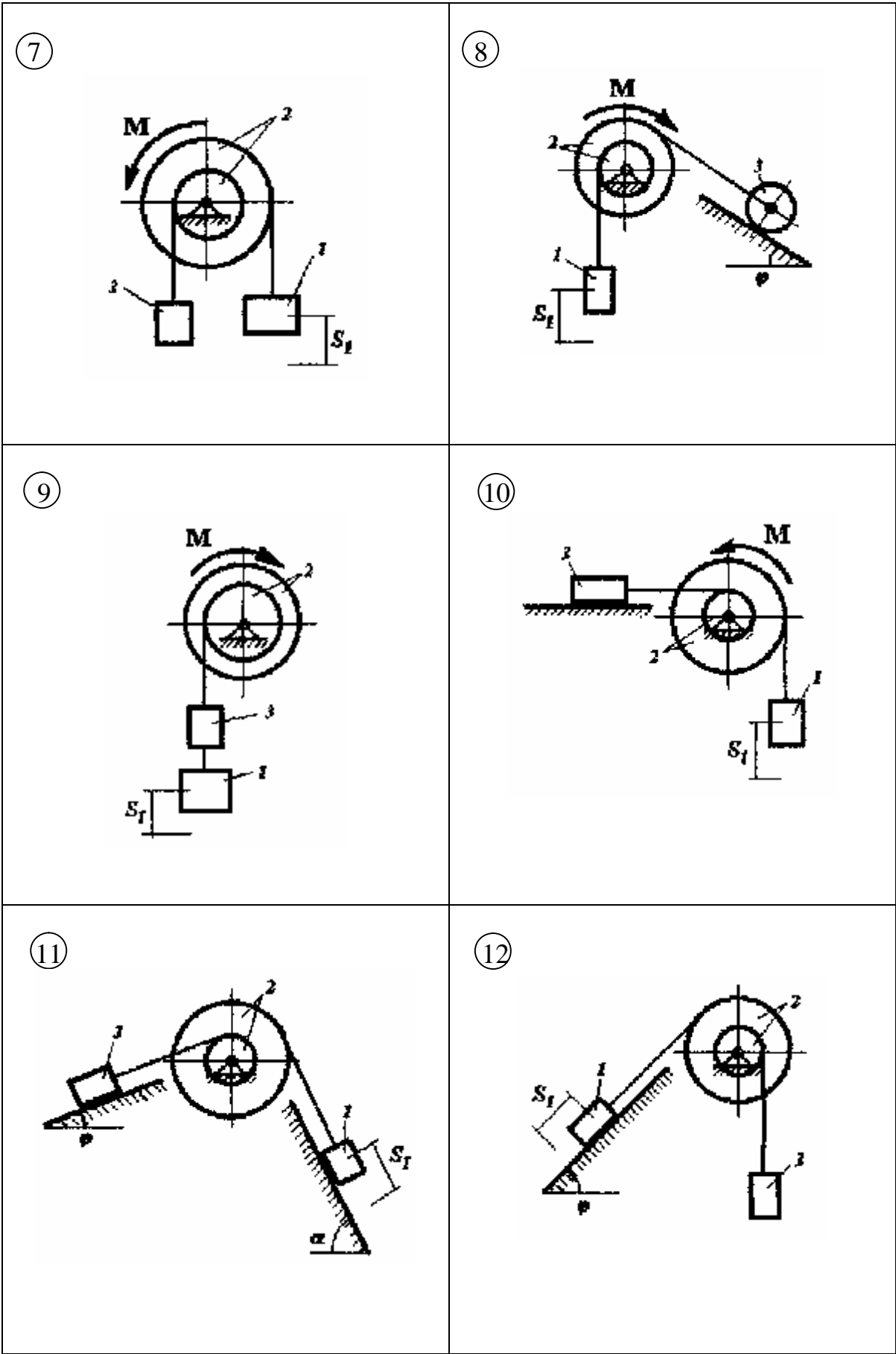


Рисунок 7.2

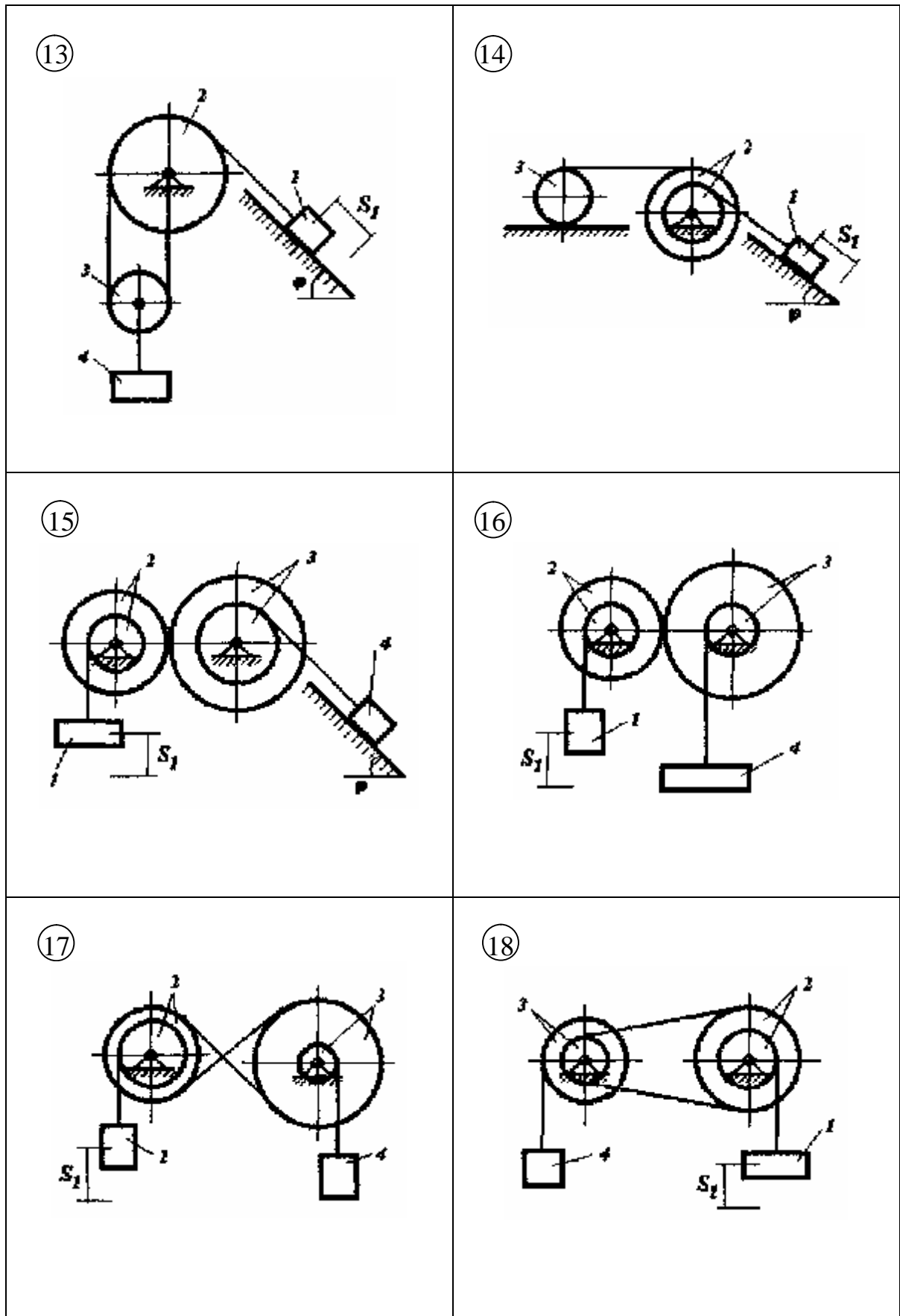


Рисунок 7.3

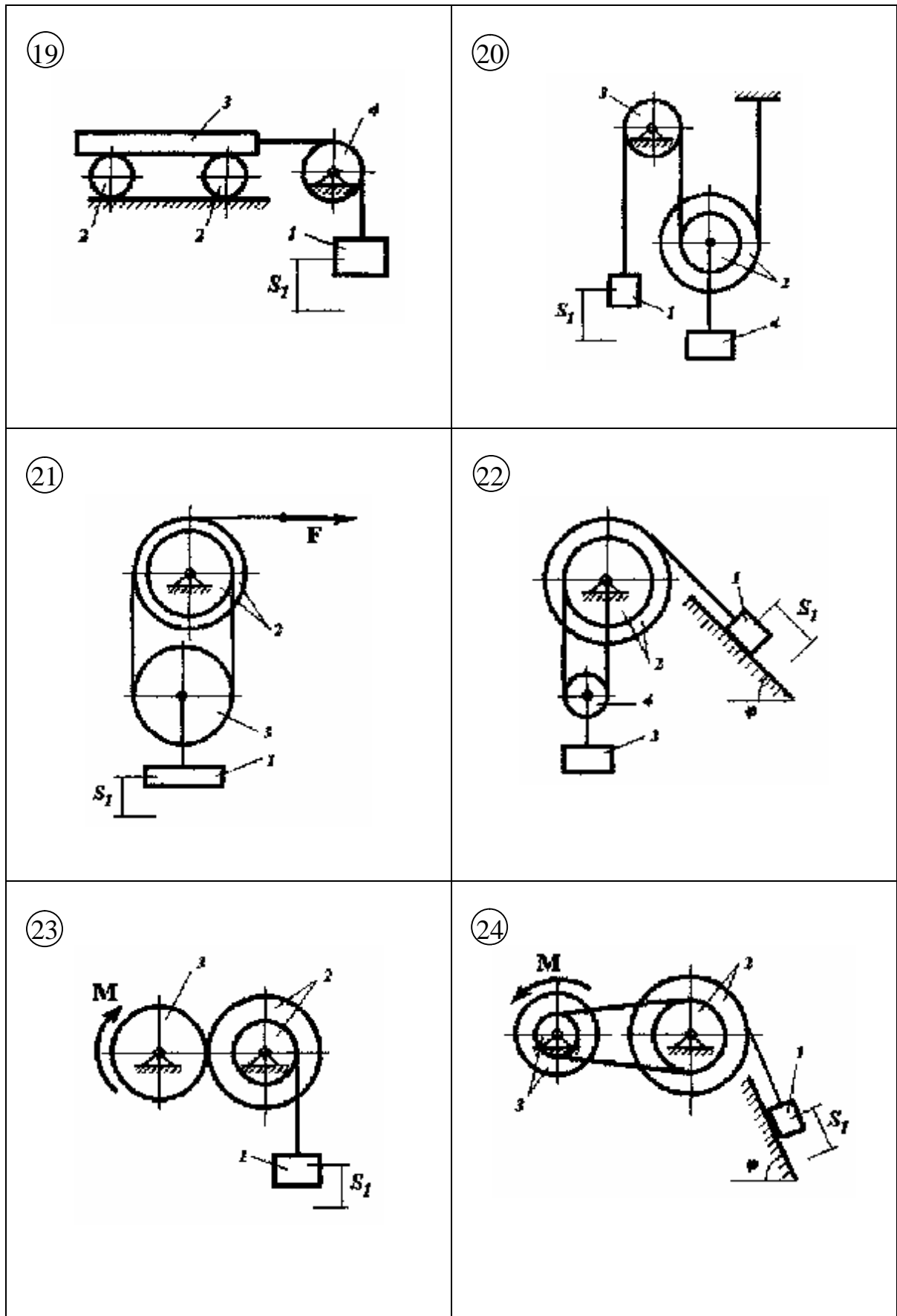


Рисунок 7.4

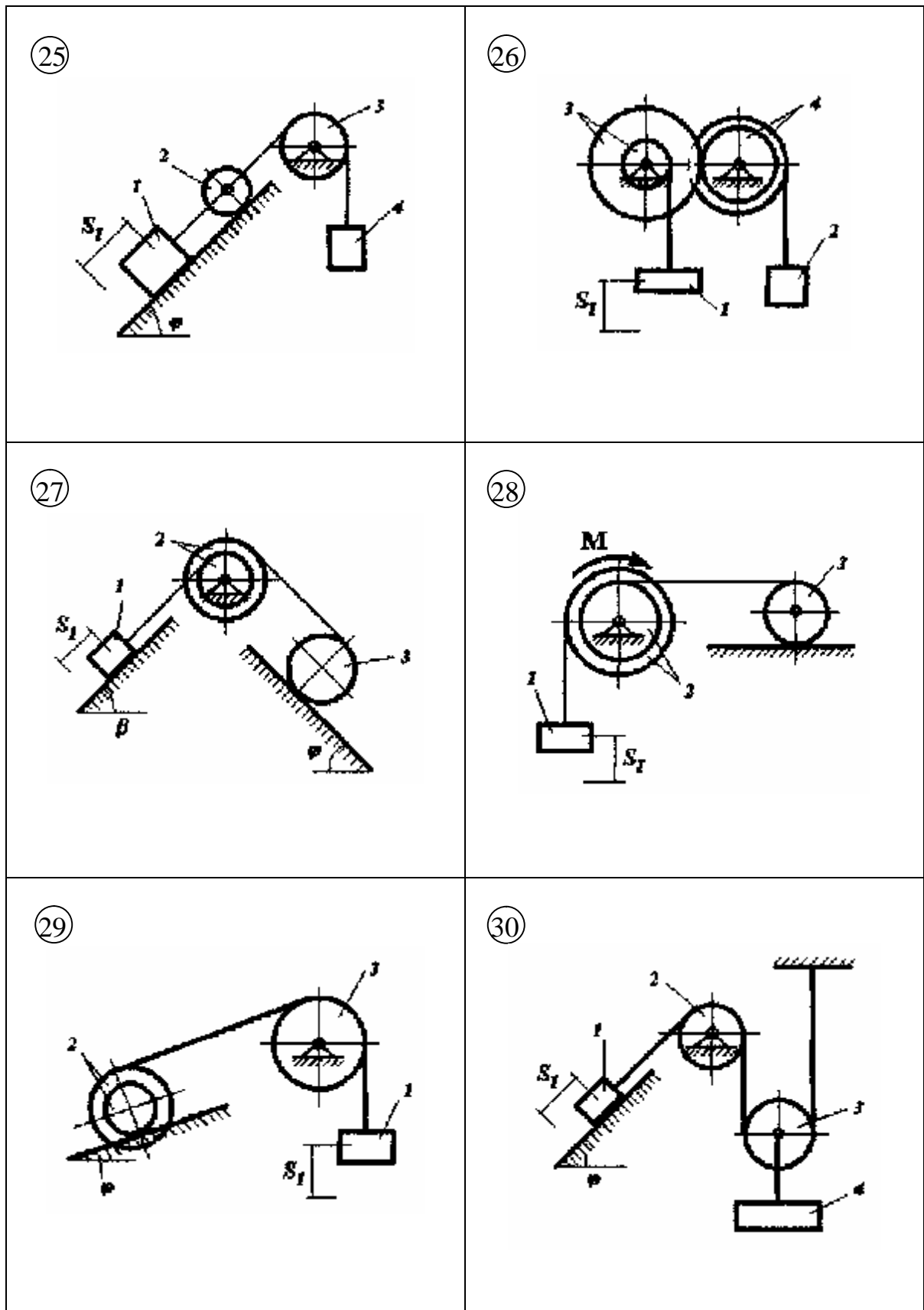


Рисунок 7.5

7.1 Приклад виконання завдання

Визначити прискорення та швидкість центра мас тіла 1 у момент часу, коли він пройде шлях S_1 , якщо матеріальна система (рис.7.6) починає рухатися із стану спокою. Масами шнурів знехтувати. Тіла 1 та 3 рухаються без ковзання. Дано: $m_1=10\text{кг}$; $m_2=2\text{кг}$; $m_3=1\text{кг}$; $R_2=0.4\text{М}$; $r_2=0.3\text{М}$; $R_3=0.3\text{М}$; $r_3=0.2\text{М}$; $\rho_2=0.35\text{М}$; $\rho_3=0.25\text{М}$; $\alpha=30^\circ$; $\beta=45^\circ$; $S_1=0.4\text{М}$

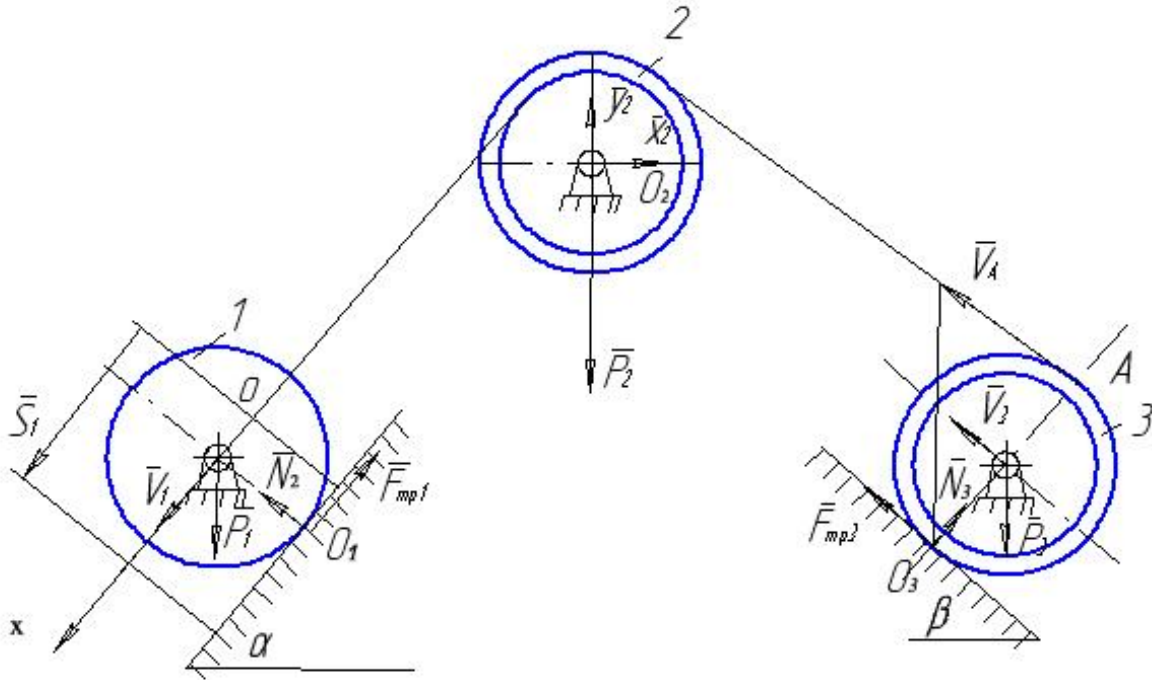


Рисунок 7.6

Розв'язання. Для дослідження руху матеріальної систем (рис.7.6) застосуємо теорему про зміну кінетичної енергії механічної системи в диференціальній формі.

$$\frac{dT}{dt} = \sum N^e + \sum N^i \quad (7.1)$$

де T — кінетична енергія системи при $0 < x \leq S_1$; $\sum N^i$ та $\sum N^e$ — сума потужностей внутрішніх та зовнішніх сил системи. Матеріальна система (рис.7.6) складається із твердих тіл та нерозтяжних шнурів, тоді

$$\sum N^i = 0. \quad (7.2)$$

I диференціальне рівняння (6.1) набуває вигляду

$$(7.3) \quad \frac{dT}{dt} = \sum N^e.$$

Знайдемо кінематичні співвідношення між швидкостями точок, кутовими швидкостями тіл записавши їх через швидкість V_1 центра мас тіла 1.

Кутова швидкість тіла 1, враховуючи, що миттєвий центр швидкості тіла 1 знаходиться в точці O_1 (рис.7.6)

$$w_1 = \frac{V_1}{R_1} \quad (7.4)$$

де R_1 – радіус однорідного суцільного диска (тіла) 1.

Кутова швидкість тіла 2

$$w_2 = \frac{V_1}{r_2} \quad (7.5)$$

Швидкість точки А, враховуючи, що тіла 2 та 3 з'єднані нерозтяжним шнуром.

$$V_A = w_2 \cdot R_2. \quad (7.6)$$

Оскільки точка O_3 – миттєвий центр швидкості тіла 3, тоді

$$V_A = w_3 \cdot 2R_3 \quad (7.7)$$

Із (7.6) та (7.7) визначаємо кутову швидкість тіла 3

$$w_3 = w_2 \frac{R_2}{2R_3} = V_1 \frac{R_2}{2r_2 R_3}. \quad (7.8)$$

Швидкість V_3 центра мас тіла 3

$$V_3 = w_3 \cdot R_3 = V_1 \frac{R_2}{2r_2}. \quad (7.9)$$

Знайдемо переміщення центра мас тіла 3.

Оскільки

$$V_1 = \frac{dS_1}{dt}, \quad V_3 = \frac{dS_3}{dt}$$

(7.10)

і, враховуючи (7.9), отримаємо

$$\frac{dS_3}{dt} = \frac{dS_1}{dt} \cdot \frac{R_2}{2r_2}$$

або

$$dS_3 = \frac{R_2}{2r_2} \cdot dS_1 .$$

(7.11)

При $t = 0$, $S_1 = 0$, та $S_3 = 0$ і після інтегрування (7.11) маємо

$$S_3 = S_1 \cdot \frac{R_2}{2r_2} . \quad (7.12)$$

Знайдемо кінетичну енергію матеріальної системи як суму кінетичних енергій тіл 1, 2 та 3.

$$T = T_1 + T_2 + T_3 \quad (7.13)$$

Кінетична енергія тіла 1, що рухається плоскопаралельно,

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 V_1^2 + \frac{1}{2} I_1 \cdot \omega_1^2$$

де $I_1 = \frac{1}{2} m_1 R_1^2$ – момент інерції тіла 1 відносно центральної осі. Тоді, враховуючи (7.4),

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 V_1^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} m_1 R_1^2 \cdot \frac{V_1^2}{R_1^2} = \frac{3}{4} m_1 V_1^2 . \quad (7.14)$$

Тіло 2 обертається навколо горизонтальної осі і кінетична енергія знаходиться за формулою

$$T_2 = \frac{1}{2} I_2 \cdot \omega_2$$

де $I_2 = m_2 r_2^2$ – момент інерції тіла 2 відносно головної центральної осі, ω_2 – кутова швидкість тіла 2 (7.5). Тоді

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 V_1^2 \frac{r_2^2}{r_2^2} . \quad (7.15)$$

Кінетична енергія тіла 3

$$T_3 = \frac{1}{2} m_3 V_3^2 + \frac{1}{2} I_3 \cdot \omega_3^2$$

де $I_3 = m_3 r_3^2$ – момент інерції тіла 3 відносно головної центральної осі,
 $w_3 = V_1 \frac{R_2}{2r_2 R_3}$ - (7.8), $V_3 = w_3 \cdot R_3$ – швидкість центра мас тіла 3.

$$T_3 = \frac{1}{8} m_3 V_1^2 \frac{R_2^2}{r_2^2} + \frac{1}{8} m_3 V_1^2 \cdot \frac{R_2^2 \cdot r_3^2}{r_2^2 R_3^2}. \quad (7.16)$$

Тепер кінетичну енергію (7.13) системи, враховуючи (7.14) – (7.16), визначимо за формулою

$$T = V_1^2 \left(\frac{3}{4} m_1 + \frac{1}{2} m_2 \frac{r_2^2}{r_2^2} + \frac{1}{8} m_3 \frac{R_2^2}{r_2^2} \left(1 + \frac{r_3^2}{R_3^2} \right) \right). \quad (7.17)$$

Потужність зовнішніх сил під дією яких рухається матеріальна система (рис. 7.6)

$$\sum N^e = N(\bar{P}_1) + N(\bar{P}_3),$$

де $N(\bar{P}_1) = P_1 \cdot V_1 \cdot \sin a$; $N(\bar{P}_3) = -P_3 V_3 \cdot \sin b$; $P_1 = m_1 g$; $P_3 = m_3 g$.

Тоді, враховуючи що (7.9)

$$V_3 = V_1 \frac{r_2}{2r_2}$$

отримаємо

$$\sum N^e = V_1 \left(m_1 \sin a - m_3 \frac{R_2}{2r_2} \sin b \right) \cdot g. \quad (7.18)$$

Підставляючи (7.17) і (7.18) в (7.3), маємо

$$\left(\frac{3}{4} m_1 + \frac{1}{2} m_2 \frac{r_2^2}{r_2^2} + \frac{1}{8} m_3 \frac{R_2^2}{r_2^2} \left(1 + \frac{r_3^2}{R_3^2} \right) \right) \cdot \frac{dV_1^2}{dt} = V_1 \left(m_1 \sin a - m_3 \frac{R_2}{2r_2} \sin b \right) \cdot g. \quad (7.19)$$

Оскільки $\frac{dV_1^2}{dt} = 2V_1 \cdot a_1$ (a_1 – прискорення центра мас тіла 1), тоді

$$a_1 = \sqrt{\frac{m_1 \sin a - m_3 \frac{R_2}{2r_2} \sin b}{\frac{3}{2} m + m_2 \frac{r_2^2}{r_2^2} + \frac{1}{4} m_3 \frac{R_2^2}{r_2^2} \left(1 + \frac{r_3^2}{R_3^2} \right)}} \cdot g$$

Або, підставляючи дані умови задачі,

$$a_1 = \sqrt{\frac{10 \cdot \sin 30^\circ - 1 \cdot \frac{0.4}{2 \cdot 0.3} \cdot \sin 45^\circ}{\frac{3}{2} \cdot 10 + 2 \cdot \frac{0.35^2}{0.3^2} + \frac{1}{4} \cdot 1 \cdot \frac{0.4^2}{0.3^2} \left(1 + \frac{0.25^2}{0.3^2} \right)}} \cdot 9.81 = 1.5 \frac{m}{c^2}$$

Знайдемо швидкість центра мас тіла 1.

Рівняння (7.19) запишемо у вигляді:

$$\left(\frac{3}{4}m_1 + \frac{1}{2}m_2 \frac{r_2^2}{r_2^2} + \frac{1}{8}m_3 \frac{R_2^2}{r_2^2} \left(1 + \frac{R_3^2}{R_2^2}\right)\right) \cdot dV_1^2 = g(m_1 \sin a - m_3 \frac{R_2}{2r_2} \sin b) \cdot V_1 \cdot dt.$$

(7.20)

При $t=0$, $V_{10}=0$, $S_{10}=0$.

При $t=\tau$, $V_{1\tau}=V_1$, $S_{1\tau}=S_1$ (7.21)

де τ - час, за який центр мас тіла 1 пройде шлях S_1 .

Інтегруючи рівняння (7.20) за умовами (7.21), визначаємо швидкість центра мас тіла 1 за час τ .

$$V_1 = \sqrt{\frac{S_1 g (m_1 \sin a - m_3 \frac{R_2}{2r_2} \sin b)}{\frac{3}{4}m_1 + \frac{1}{2}m_2 \frac{r_2^2}{r_2^2} + \frac{1}{8}m_3 \frac{R_2^2}{r_2^2} \left(1 + \frac{R_3^2}{R_2^2}\right)},$$

або підставляючи числові дані, отримаємо:

$$V_1 = \sqrt{\frac{0.4 \cdot 9.81(10 \cdot \sin 30^\circ - 1 \cdot \frac{0.4}{2 \cdot 0.3} \sin 45^\circ)}{\frac{3}{4} \cdot 10 + 2 \cdot \frac{0.35^2}{0.3^2} + \frac{1}{4} \cdot 1 \cdot \frac{0.4^2}{0.3^2} \left(1 + \frac{0.25^2}{0.3}\right)}} = 1,3 \frac{m}{c}.$$

ДС.8 Додаткові динамічні реакції в'язей твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі

Однорідні тіла 1 та 2 (рис. 8.1 - 8.10) обертаються навколо нерухомої осі z під дією моменту M . Центри мас тіл зміщені від осі обертання (статична неврівноваженість тіл) на величини e_1 та e_2 , відповідно. Знайти додаткові динамічні реакції циліндричних шарнірів A і B при $t = t_1$, і порівняти їх зі статичними, якщо при $t = 0$ кутова швидкість тіл w_0 .

Дані для розрахунку приведені в табл. 8.1. Якщо w_0 (табл. 8.1) має від'ємний знак, то початкова кутова швидкість направлена в протилежну сторону моменту M .

Таблиця 8.1

Варіант	m_1 , кг	m_2 , кг	e_1 , мм	e_2 , мм	a , град	l_1 , м	l_2 , м	a , м	b , м	M , Н·м	w_0 , с ⁻¹	R_1 , м	R_2 , м	t_1 , с
1	2	3	0,1	0,2	30	0,2	0,3	0,1	0,15	$6+4t^2$	10	0,2	0,35	2
2	3	4	0,15	0,19	45	0,3	0,4	0,15	0,14	$4+3t$	-5	0,22	0,33	3
3	4	5	0,18	0,1	60	0,4	0,5	0,13	0,13	$8+3t^2$	0	0,24	0,31	4
4	1	2	0,19	0,11	30	0,1	0,2	0,12	0,12	$8t$	15	0,26	0,29	1
5	2	3	0,2	0,12	45	0,2	0,3	0,11	0,11	$7+3t^3$	-10	0,28	0,26	2
6	3	4	0,1	0,13	60	0,3	0,4	0,1	0,1	$3+t^2$	5	0,3	0,25	2
7	4	2	0,11	0,18	30	0,4	0,35	0,2	0,2	$2+3t^2$	0	0,32	0,23	3
8	5	2	0,12	0,17	45	0,5	0,2	0,19	0,19	$1+6t^3$	-15	0,34	0,21	4
9	1	3	0,13	0,16	60	0,1	0,3	0,18	0,18	$5+3t^2$	10	0,36	0,19	2
0	2	4	0,14	0,15	30	0,2	0,4	0,17	0,17	$3+5t$	-5	0,4	0,15	3

8.1 Приклад виконання завдання

До системи однорідних тіл 1 та 2 (рис. 8.11), що обертаються з кутовою швидкістю $w_0 = 6\text{ с}^{-1}$, прикладається обертальний момент $M = (3 + 7t)\text{ Н} \cdot \text{м}$. Знайти статичні та додаткові динамічні реакції циліндричних шарнірів A і B при $t_1 = 2\text{ с}$, якщо:

$m_1=3\text{ кг}$; $m_2=5\text{ кг}$; $e_1=0,1\text{ мм}$; $e_2=0,3\text{ мм}$; $l_1=0,25\text{ м}$; $l_2=0,25\text{ м}$; $a=0,05\text{ м}$; $b=0,15\text{ м}$; $R_1=0,1\text{ м}$; $R_2=0,2\text{ м}$.

Розв'язання. Переміщенню тіл 1 та 2 (рис 8.11) перешкоджають в'язі: нерухомі (циліндричні) шарніри A і B . На підставі аксіоми звільнення від

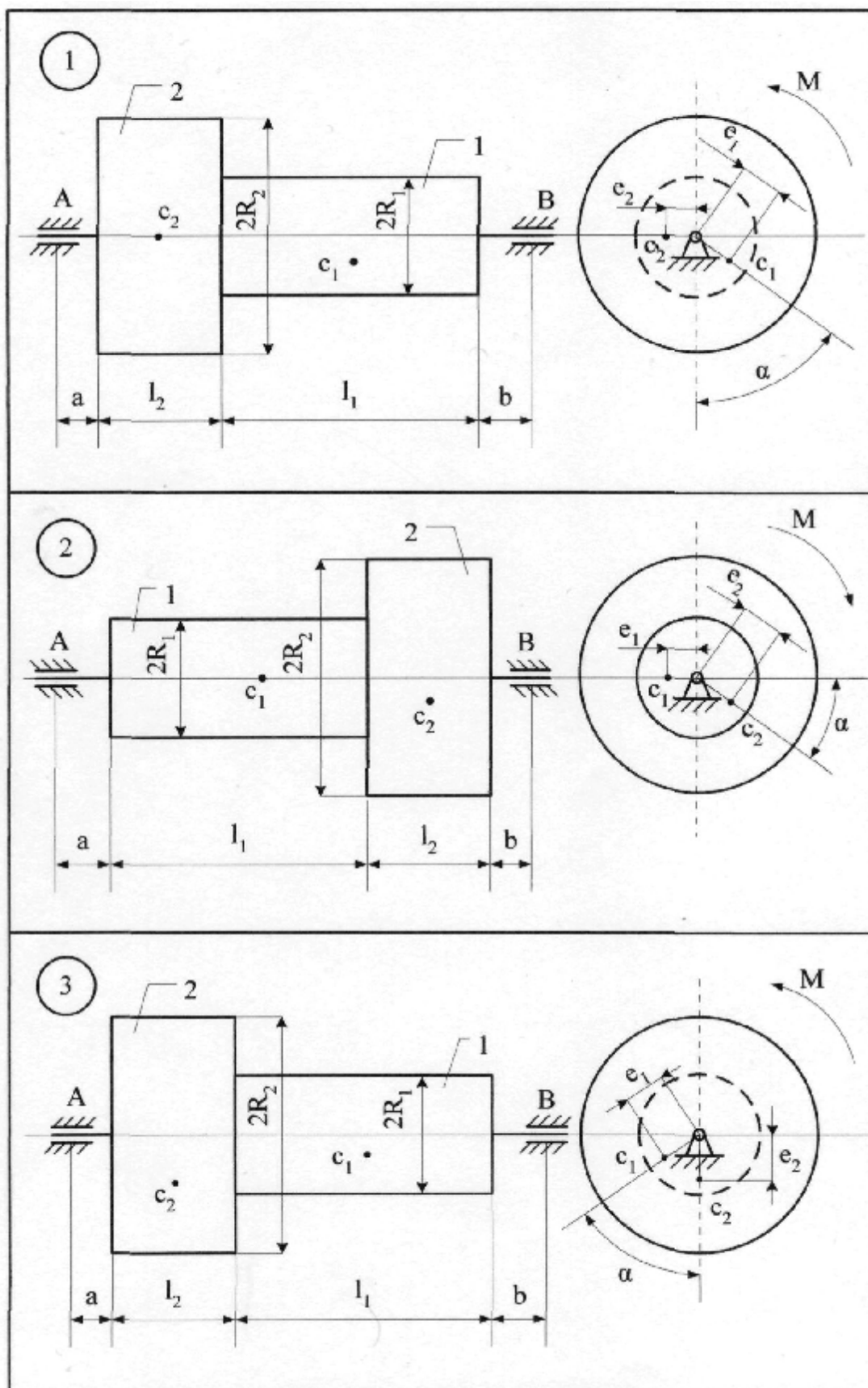


Рисунок 8.1

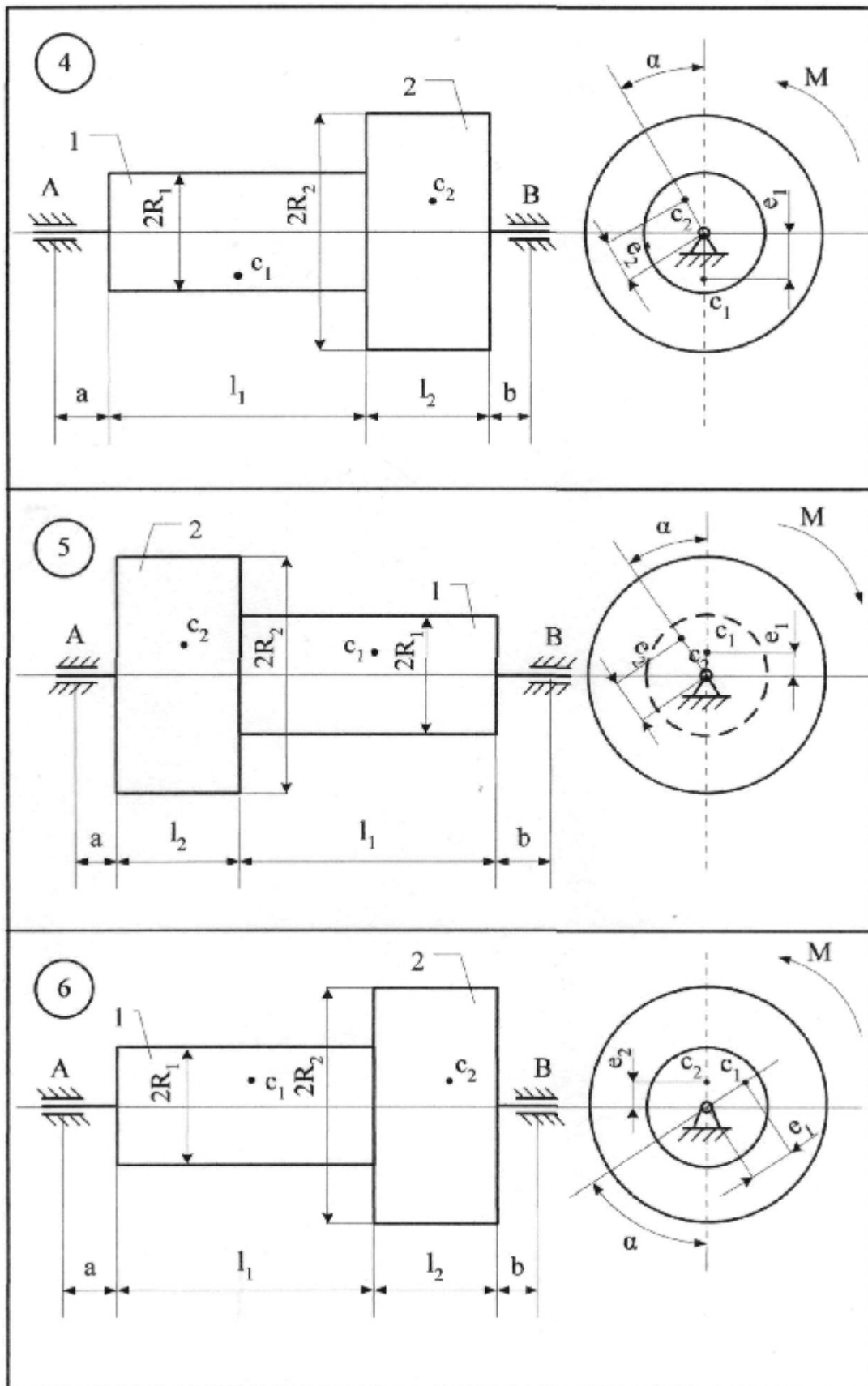


Рисунок 8.2

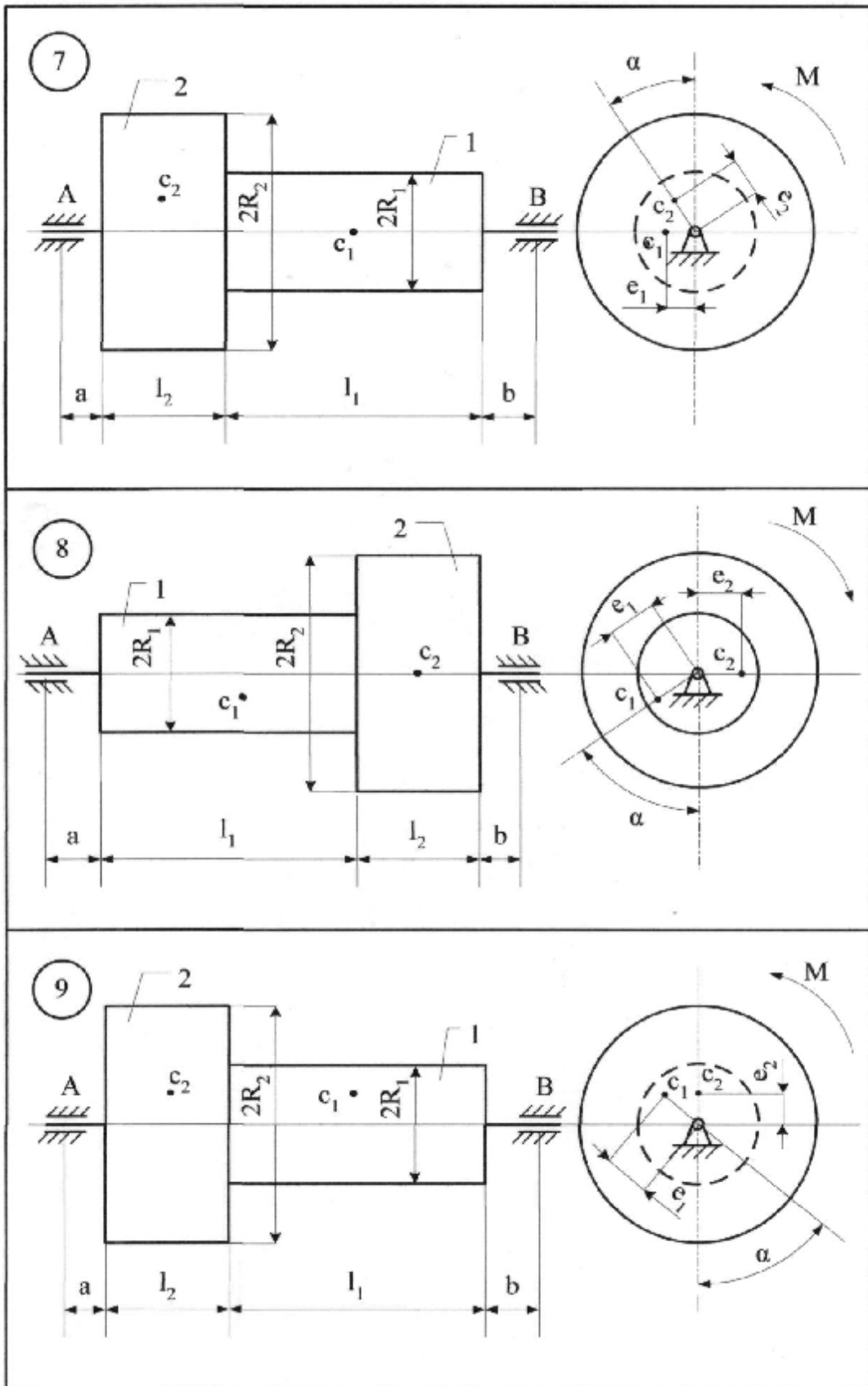


Рисунок 8.3

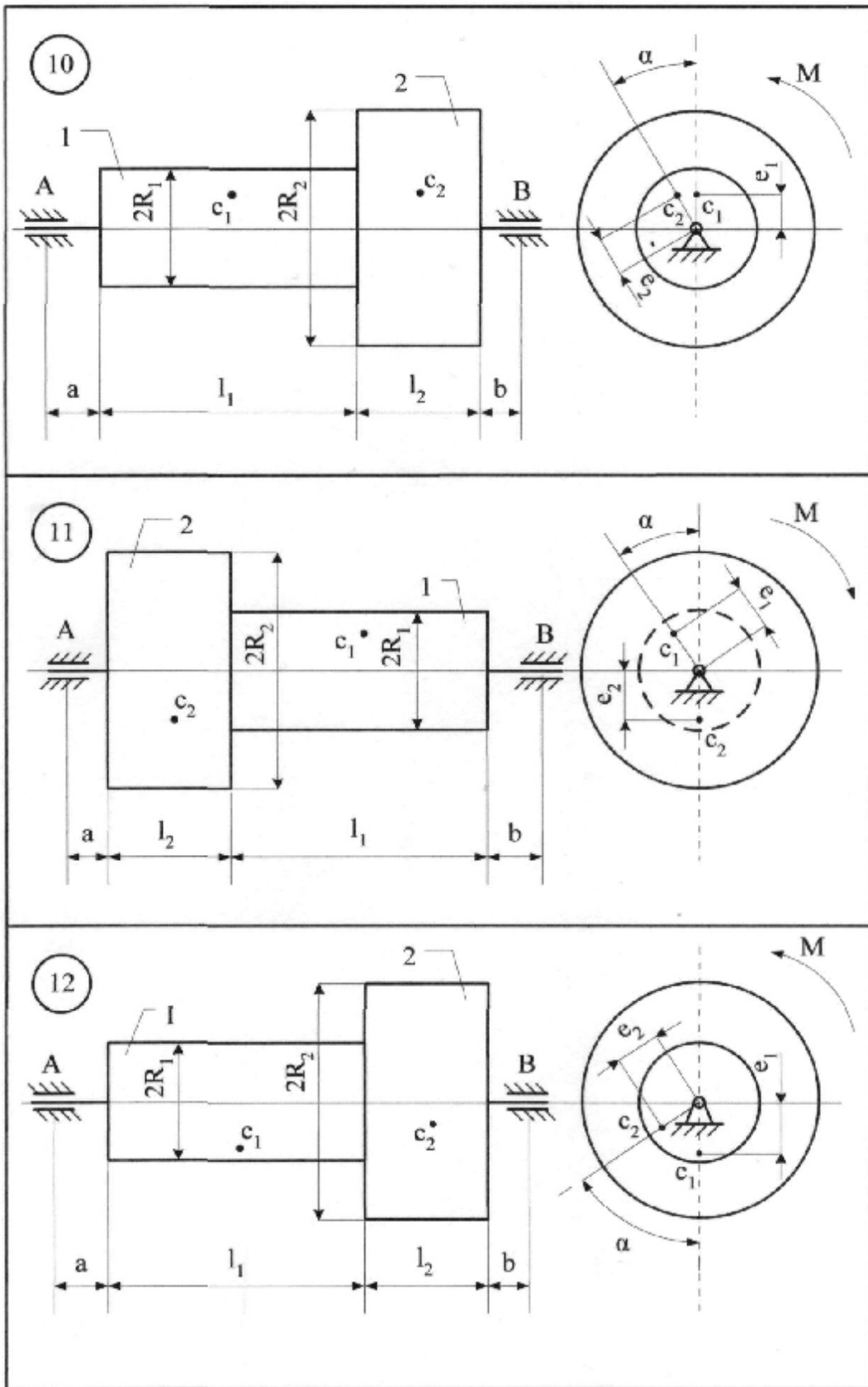


Рисунок 8.4

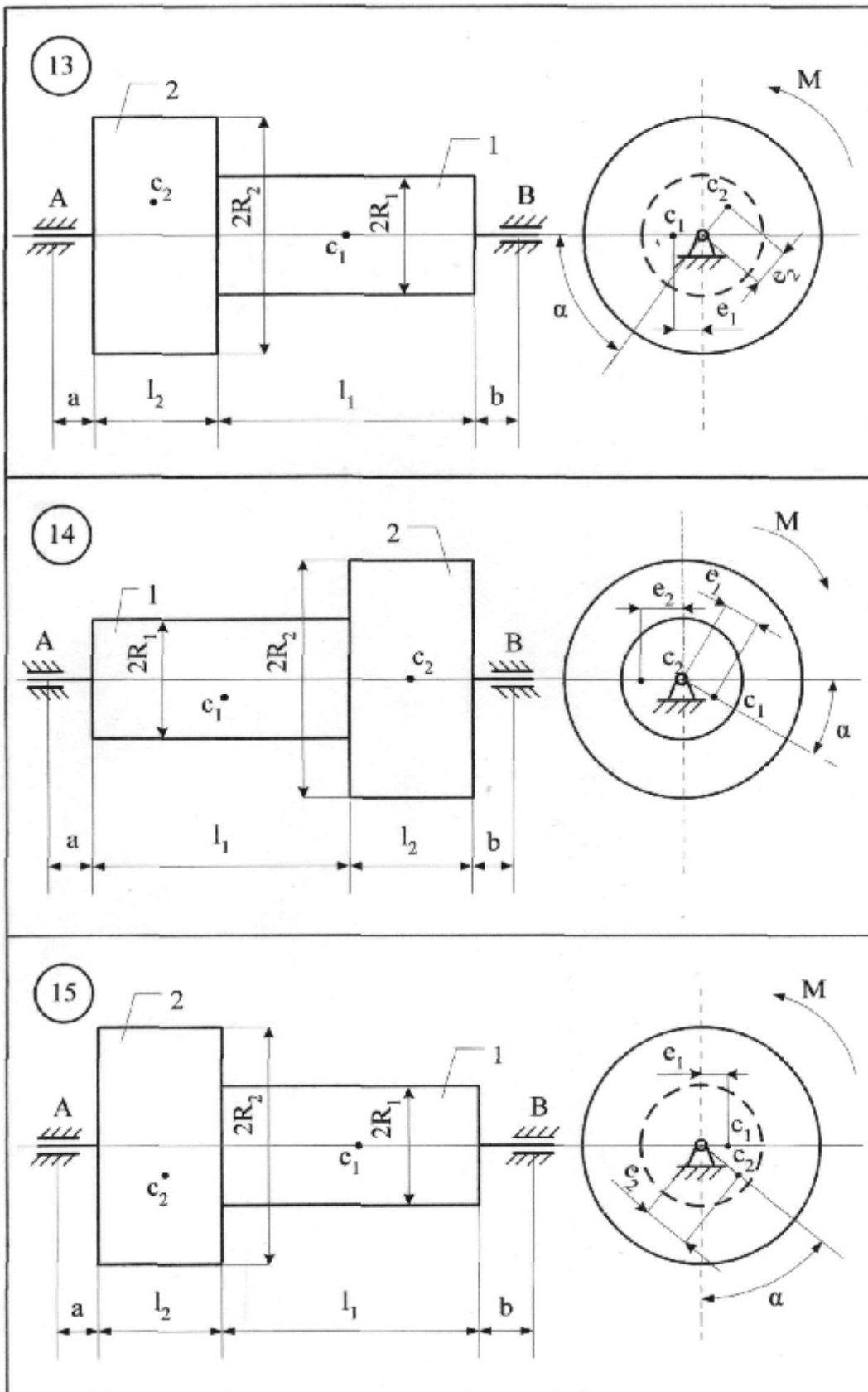


Рисунок 8.5

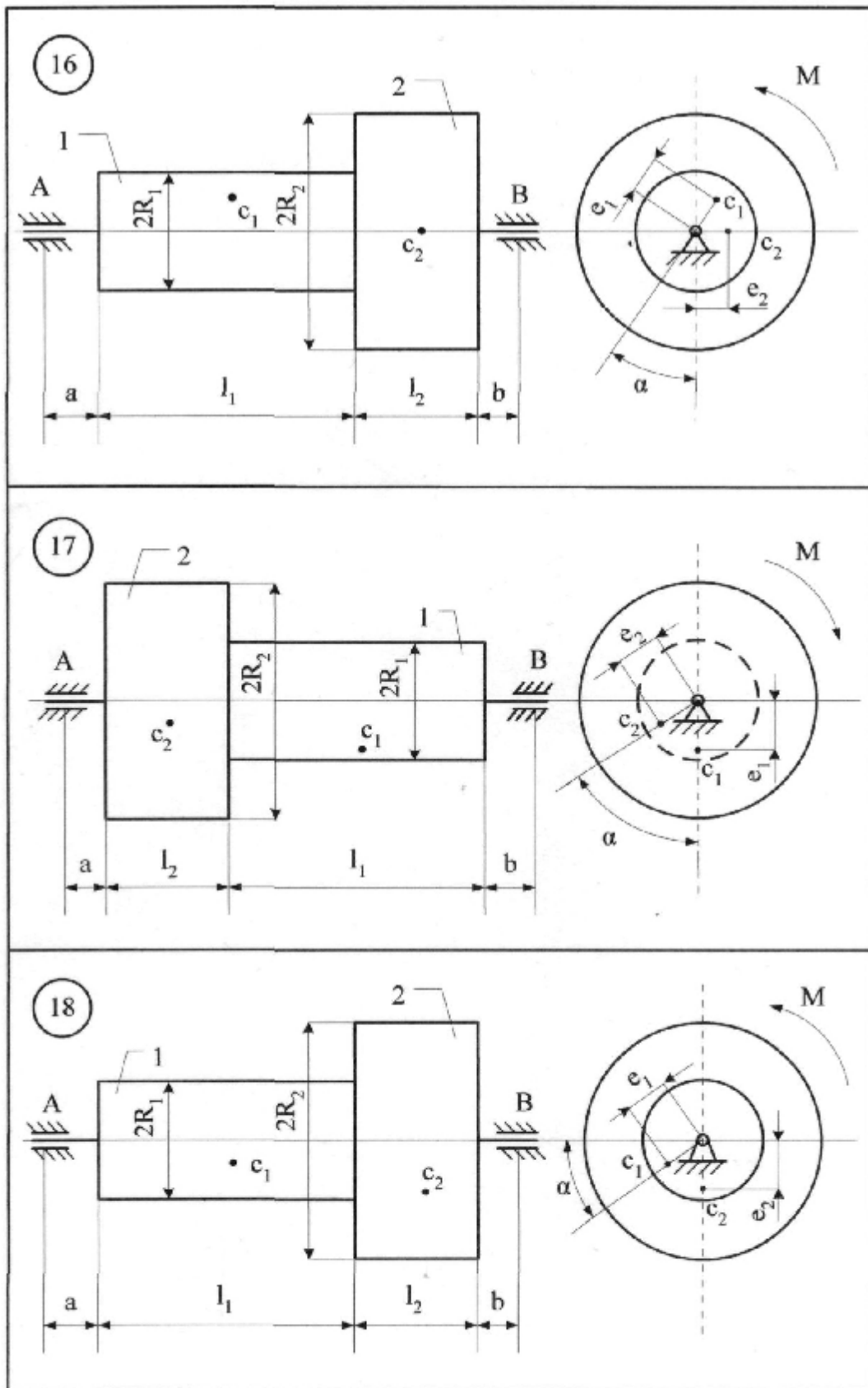


Рисунок 8.6

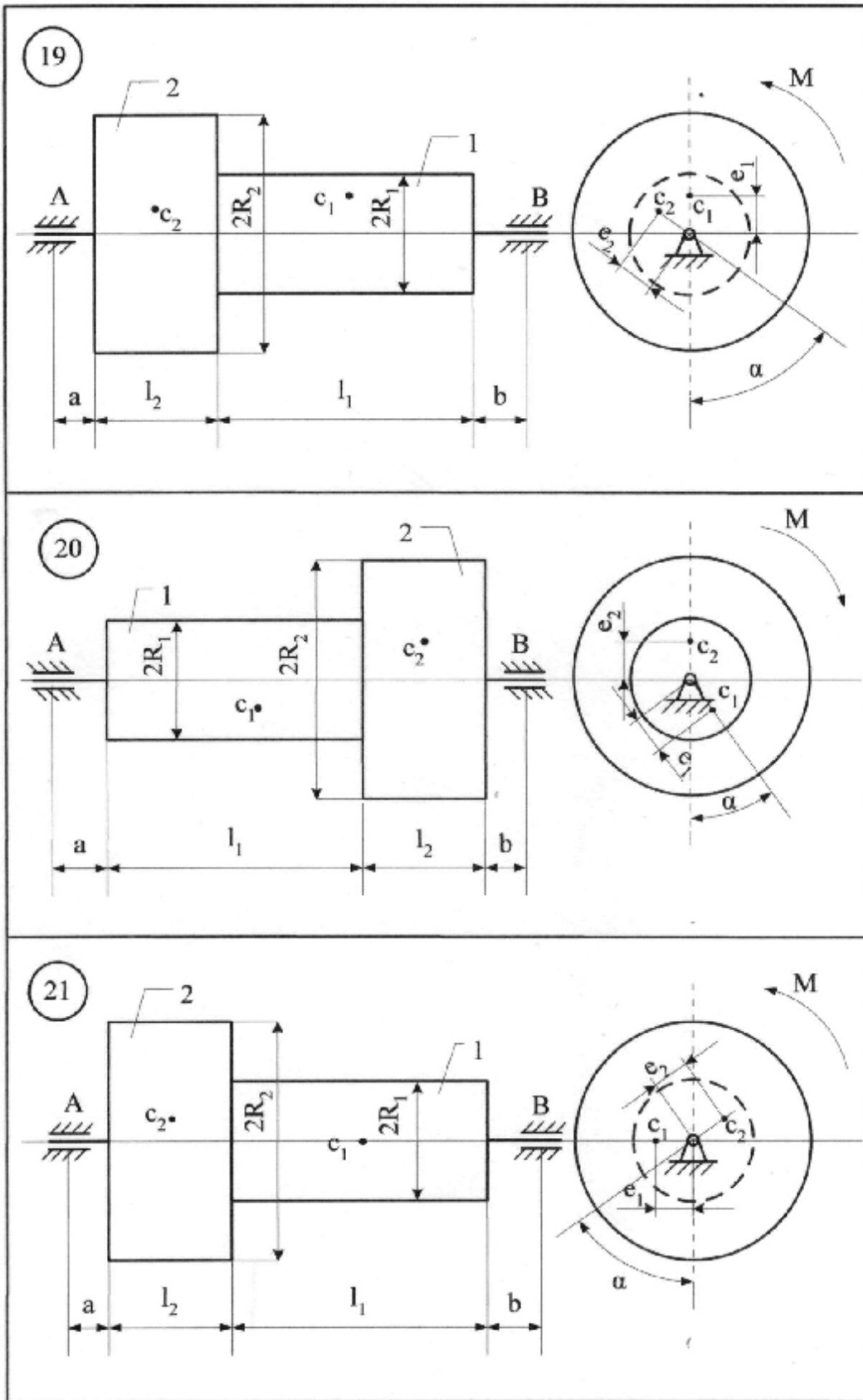


Рисунок 8.7

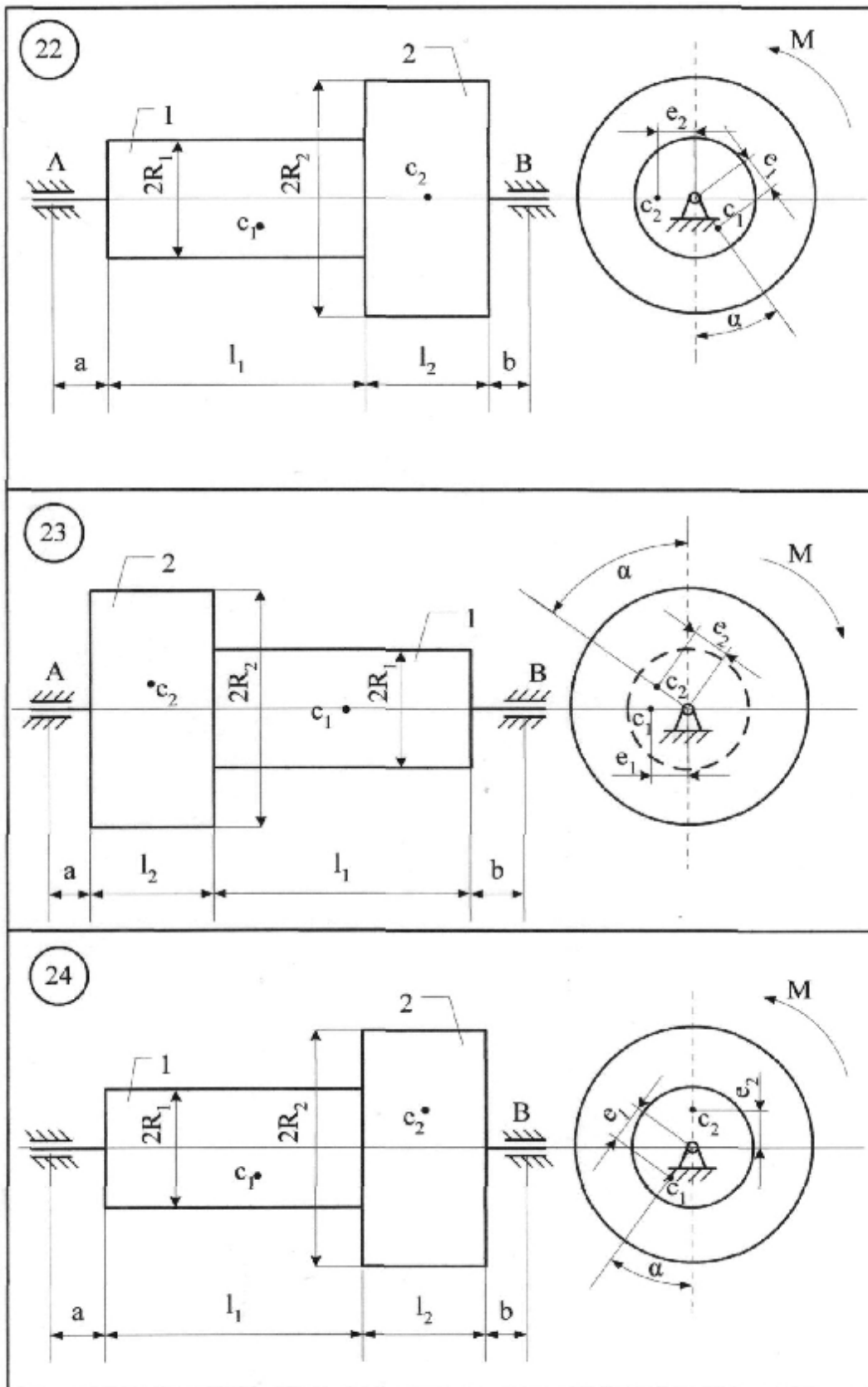


Рисунок 8.8

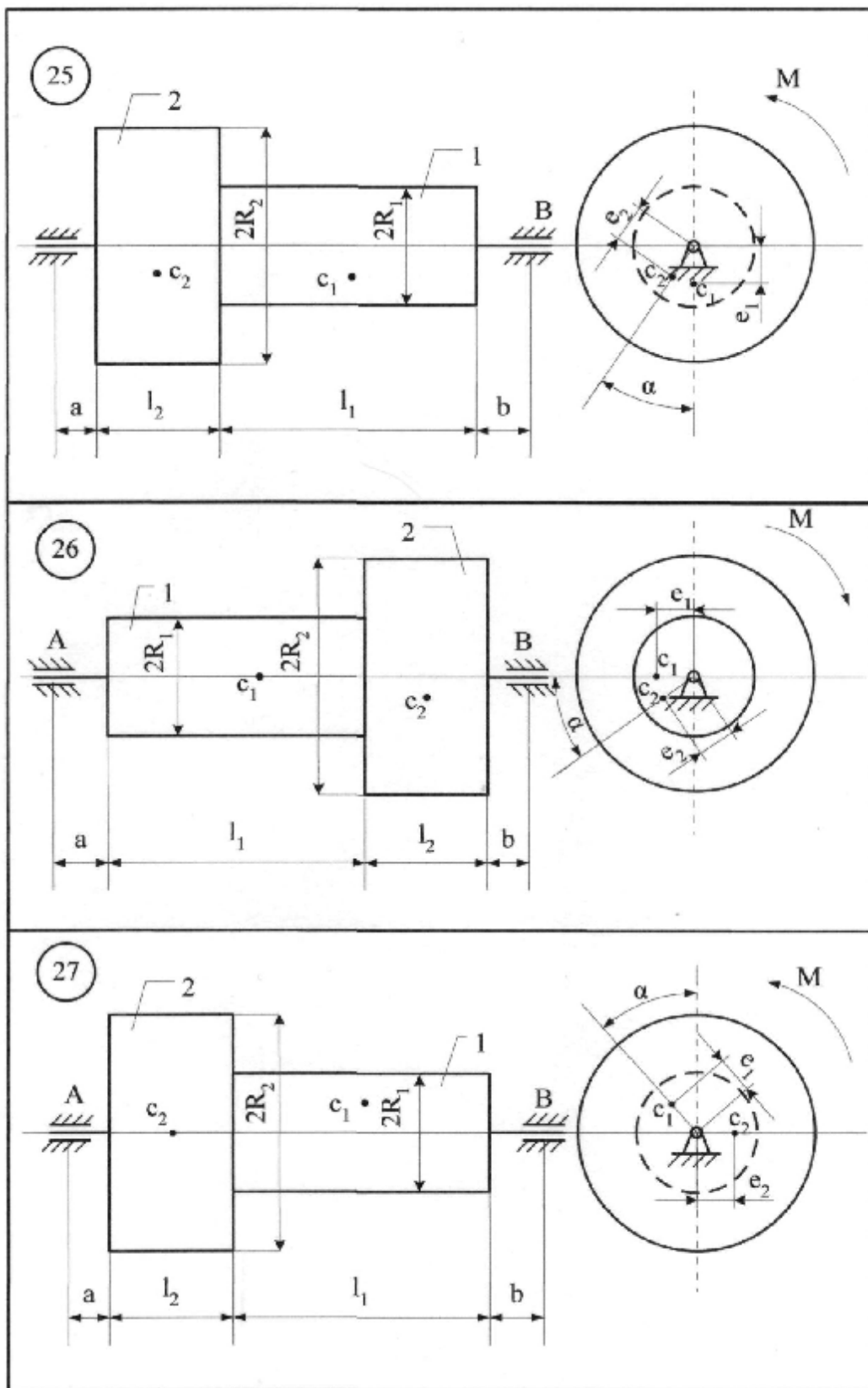


Рисунок 8.9

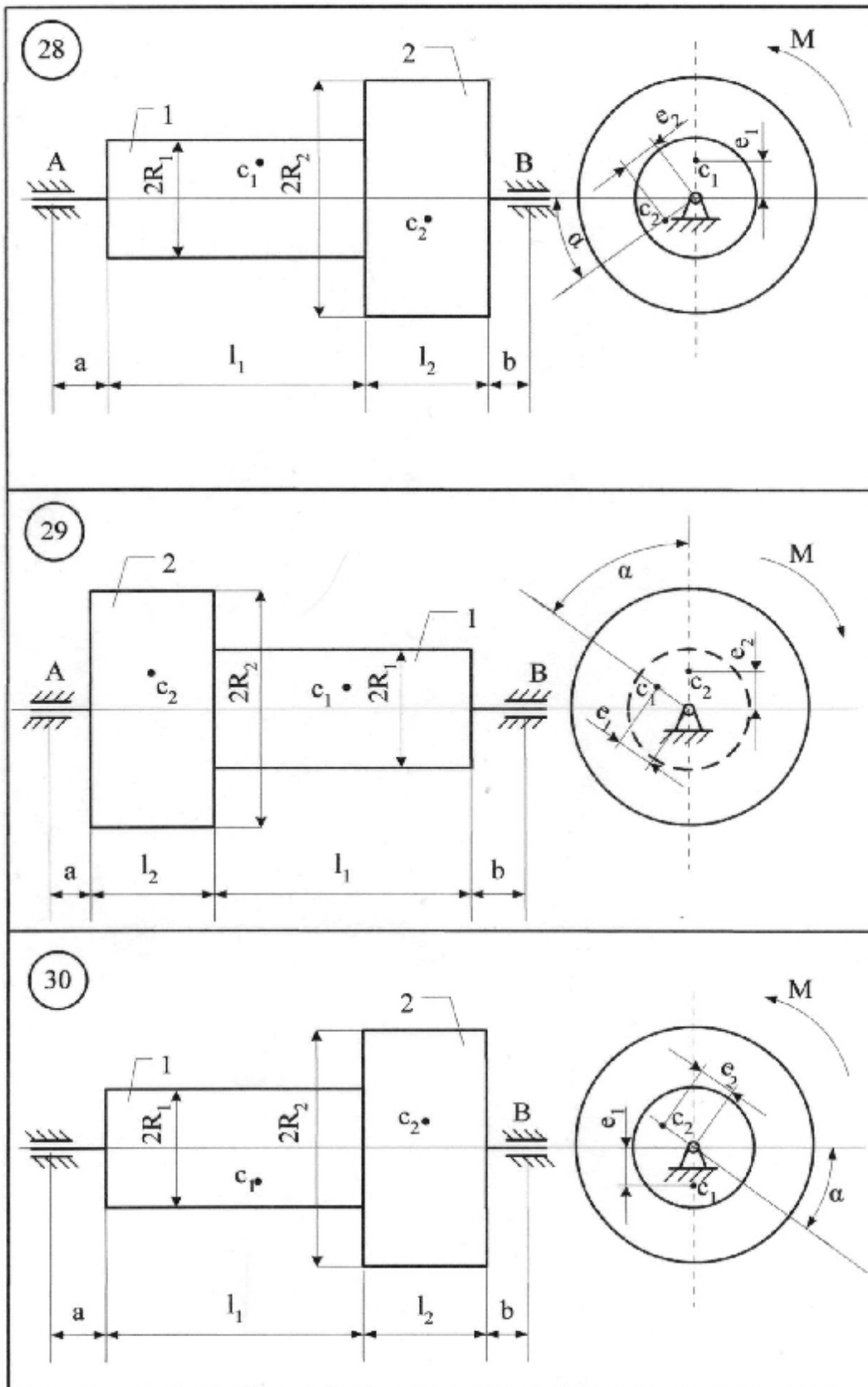


Рисунок 8.10

в'язей, дію шарнірів А і В та тіла замінюємо реакціями в'язей – Y_A, X_A, Y_B, X_B (рис. 8.12).

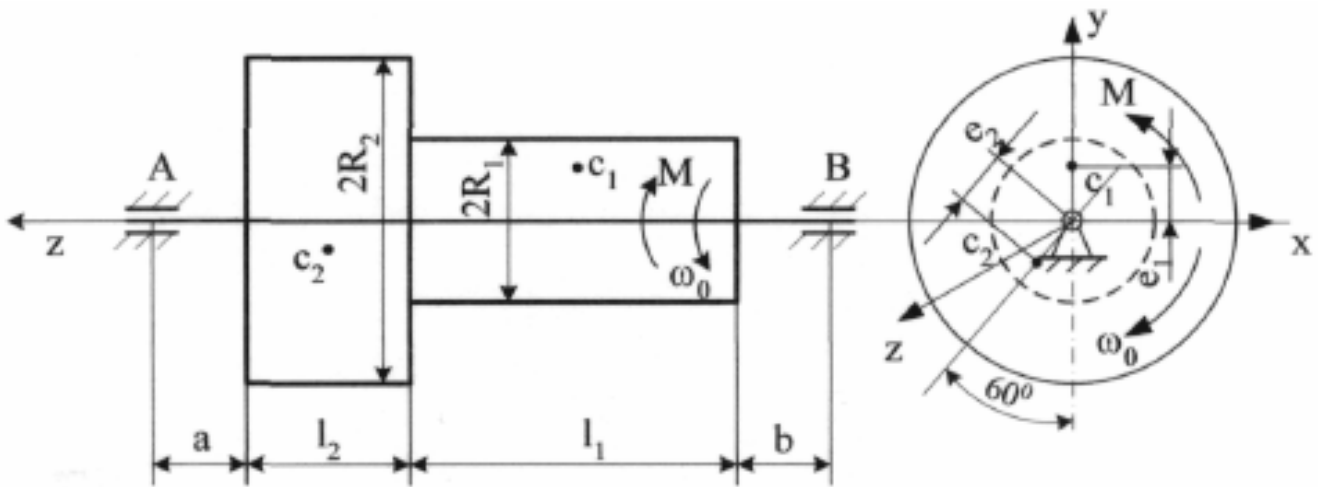


Рисунок 8.11

Реакції Y_A, X_A, Y_B, X_B запишемо як суму статичних $Y_A^C, X_A^C, Y_B^C, X_B^C$ та додаткових динамічних реакцій $Y_A^D, X_A^D, Y_B^D, X_B^D$.

$$\begin{aligned} Y_A &= Y_A^C + Y_A^D, & X_A &= X_A^C + X_A^D, \\ Y_B &= Y_B^C + Y_B^D, & X_B &= X_B^C + X_B^D. \end{aligned} \quad (8.1)$$

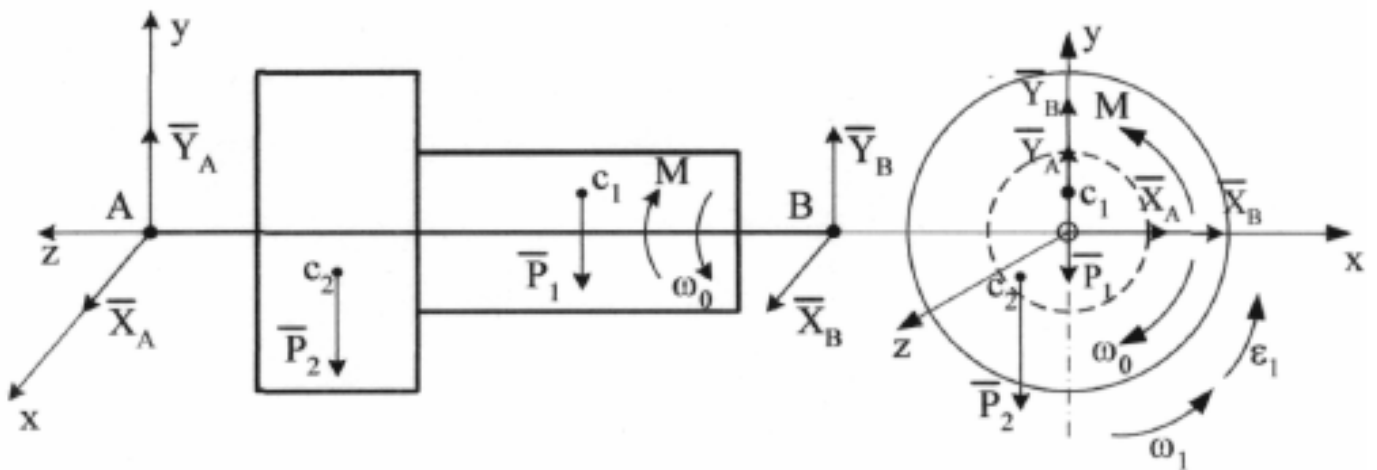


Рисунок 8.12

Статичні реакції в'язей визначаються при $w = 0, e = 0$ з рівнянь (рис.8.12):

$$\sum F_y = 0; Y_A^C - P_1 - P_2 + Y_B^C = 0;$$

$$\sum F_x = 0; X_A^C + X_B^C = 0;$$

$$\sum m_x \bar{F} = 0; -P_2 \left(a + \frac{l_2}{2} \right) - P_1 \left(a + l_2 + \frac{l_1}{2} \right) + Y_B^C (a + b + l_1 + l_2) = 0$$

$$\sum m_y \bar{F} = 0; -X_B^C (a + b + l_1 + l_2) = 0$$

$$\text{де } P_1 = m_1 g, P_2 = m_2 g.$$

Розв'язуючи систему рівнянь, маємо:

$$X_B^C = 0, X_A^C = 0,$$

$$Y_B^C = g \frac{m_2(a + 0,5l_1) + m_1(a + l_2 + 0,5l_1)}{a + b + l_1 + l_2} =$$

$$= 9,81 \frac{5(0,05 + 0,05) + 3(0,05 + 0,1 + 0,125)}{0,05 + 0,15 + 0,25 + 0,1} = 23,63 \text{ Н}$$

$$Y_A^C = g(m_1 + m_2) - Y_B^C = 9,81(3 + 5) - 23,63 = 54,85 \text{ Н}$$

таким чином маємо: $R_A^C = 54,85 \text{ Н}$, $R_B^C = 23,63 \text{ Н}$.

Запишемо рівняння для визначення додаткових динамічних реакцій в'язей:

$$\left. \begin{aligned} -(m_1 Y_{C1} + m_2 Y_{C2}) \varepsilon_1 - (m_1 X_{C1} + m_2 X_{C2}) \omega_1^2 &= X_A^D + X_B^D, \\ (m_1 X_{C1} + m_2 X_{C2}) \varepsilon_1 - (m_1 Y_{C1} + m_2 Y_{C2}) \omega_1^2 &= Y_A^D + Y_B^D, \end{aligned} \right\} \quad (8.2)$$

$$-(I_{xz1} + I_{xz2}) \varepsilon_1 + (I_{yz1} + I_{yz2}) \omega_1^2 = (a + l_1 + l_2 + b) \cdot Y_B^D,$$

$$-(I_{yz1} + I_{yz2}) \varepsilon_1 - (I_{xz1} + I_{xz2}) \omega_1^2 = -(a + l_1 + l_2 + b) \cdot X_B^D,$$

де ε_1 - кутове прискорення і ω_1 - кутова швидкість тіл при $t_1 = 2c$, I_{xzi} і I_{yzi} - доцентрові моменти інерції тіл ($i = 1, 2$).

Кутову швидкість ω та кутове прискорення ε тіл знайдемо із диференціального рівняння руху тіл навколо осі z

$$I_z \ddot{\varphi} = -M \quad (8.3)$$

де I_z - момент інерції тіл відносно осі z .

Оскільки $\dot{w} = \frac{dw}{dt}$, тоді

$$I_z = \frac{dw}{dt} = -(3 + 7t). \quad (8.4)$$

Інтегруємо диференціальне рівняння (8.4) при початкових умовах:
при

$$t_1=0, \quad w_0 = 3 \text{ c}^{-1}$$

$$I_z (w - 3) = -t(3 + 3.5t), \quad (8.5)$$

$$\text{Звідки: } w = 3 - \frac{t}{I_z} (3 + 3.5t)$$

Визначимо кутове прискорення $\varepsilon = \dot{\dot{\varphi}}$ (8.3) та кутову швидкість (8.5)
при

$$t_1 = 2 \text{ c}.$$

$$\varepsilon_1 = -\frac{3 + 7t_1}{I_z} = -\frac{3 + 7 \cdot 2}{0.115} = -147.8 \text{ c}^{-2},$$

$$\omega_1 = 3 - \frac{2}{0.115} (3 + 3.5 \cdot 2) = -170.9 \text{ c}^{-1}$$

$$dI_z = \frac{1}{2} m_1 R_1^2 + m_1 e_1^2 + \frac{1}{2} m_2 R_2^2 + m_2 e_2^2 \cong 0.115 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

Оскільки значення ε_1 і ω_1 , від'ємні, то кутове прискорення та кутова швидкість тіл при $t_1 = 2 \text{ c}$ направлені в протилежну сторону ю0(у напрямку крутного моменту M).

Координати центра мас та доцентрові моменти I_{xzi} і I_{yzi} тіл 1 і 2 (рис. 8.11):

$$\begin{aligned} X_{c1} &= 0, \quad Y_{c1} = e_1, \quad X_{c2} = -e_2 \cdot \sin 60^\circ, \quad Y_{c2} = -e_2 \cdot \cos 60^\circ \\ I_{xz1} &= 0, \quad I_{yz1} = -m_1 e_1 (a + l_2 + 0.5 \cdot l_1), \quad I_{xz2} = \\ &= m_2 e_2 (a + 0.5 l_2) \sin 60^\circ, \quad I_{yz2} = m_2 e_2 (a + 0.5 l_2) \cos 60^\circ \end{aligned}$$

Або, підставляючи числові дані, отримаємо:

$$\begin{aligned}
Y_{C1} &= 10^{-4} \text{ м}, X_{C2} = -2,6 \cdot 10^{-4} \text{ м}, Y_{C2} = -1,5 \cdot 10^{-4} \text{ м}, \\
I_{YZ1} &= -8,25 \cdot 10^{-5} \text{ кг} \cdot \text{м}^2, I_{XZ2} = 1,3 \cdot 10^{-4} \text{ кг} \cdot \text{м}^2, \\
I_{YZ2} &= -0,75 \cdot 10^{-4} \text{ кг} \cdot \text{м}^2,
\end{aligned}$$

Тепер із рівнянь (8.2) знаходимо додаткові динамічні реакції шарнірів А і В через їх проекції на осі Х та У.

$$\begin{aligned}
Y_B^D &= \frac{(I_{YZ1} + I_{YZ2})\omega_1^2 - (I_{XZ1} + I_{XZ2})\varepsilon_1}{a + l_1 + l_2 + b} = \\
&= \frac{(-8,25 + 7,5) \cdot 10^{-5} \cdot 170,9^2 - 1,3 \cdot 10^{-4} \cdot 147,8}{0,05 + 0,25 + 0,1 + 0,15} = -0,43 \text{ Н}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X_B^D &= \frac{(I_{YZ1} + I_{YZ2})\varepsilon_1 - (I_{XZ1} + I_{XZ2})\omega_1^2}{a + l_1 + l_2 + b} = \\
&= \frac{(-8,25 + 7,5) \cdot 10^{-5} \cdot 147,8 + 1,3 \cdot 170,9^2 \cdot 10^{-4}}{0,05 + 0,25 + 0,1 + 0,15} = 6,9 \text{ Н}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Y_A^D &= (m_1 X_{C1} + m_2 X_{C2})\varepsilon_1 - (m_1 Y_{C1} + m_2 Y_{C2})\omega_1^2 - Y_B^1 = \\
&= -5 \cdot 2,6 \cdot 10^{-4} \cdot 147,8 - (3 - 5 \cdot 1,5) \cdot 10^{-4} \cdot 170,9^2 + 0,43 = 13,38 \text{ Н}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X_A^D &= -(m_1 Y_{C1} + m_2 Y_{C2})\varepsilon_1 - (m_1 X_{C1} + m_2 X_{C2})\omega_1^2 - X_B^1 = \\
&= -(3 - 5 \cdot 1,5) \cdot 10^{-4} \cdot 147,8 + 5 \cdot 2,6 \cdot 170,9^2 \cdot 10^{-4} - 6,9 = 31,4 \text{ Н}
\end{aligned}$$

Додаткові динамічні реакції циліндричних шарнірів А і В

$$R_A^D = \sqrt{(X_A^D)^2 + (Y_A^D)^2} = \sqrt{31,4^2 + 13,38^2} = 34,12 \text{ Н}$$

$$R_B^D = \sqrt{(X_B^D)^2 + (Y_B^D)^2} = \sqrt{6,9^2 + 0,43^2} = 6,91 \text{ Н}$$

При $t_1 = 2 \text{ с}$ додаткові динамічні реакції шарнірів складають 62,2% для шарніра А та 29,2% для шарніра В від статичних реакцій в'язей.

Література

1. Айзенберг Т.Б., Воронов Н.М., Осецкий В.М. Руководство к решению задач по теоретической механике.-М.:Высш.шк., 1968. – 436 с.
2. Бать М.Н., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах: В 3 т.-Т.2.: Наука, 1985. – 560 с.
3. Березова О.В., Друшляк Г.Е., Солодовников Р.В. Теоретическая механика: Сб. задач. – К.: Висш. шк. Головное изд-во, 1980. –324 с.
4. Бражниченко Н.А. и др. Сборник задач по теоретической механике / Н.А. Бражниченко, Н.Л. Кац, Б.Л. Минцберг, В.Н. Морозов. –М.: Судпромгиз, 1963. – 562 с.
5. Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р. Курс теоретической механики: В 2 т. – Т.2. – М.: Наука, 1979. –461 с.
6. Бухгольц Н.Н. Основной курс теоретической механики: В 2 ч. – М.: Наука, 1967. – ч.1. – 468 с.; ч.2. – 332 с.
7. Гернет М.М. Курс теоретической механики. – М.: Высш. шк., 1981. – 303 с.
8. Добронравов В.В., Никитин Н.Н., Дворников А.Л. Курс теоретической механики. – М.: Высш. шк., 1974. – 528 с.
9. Кильчевский Н.А. Курс теоретической механики: В 2т. –М.: Наука, 1972 – 1977. – Т.1. – 456 с.; Т.2. – 462 с.
10. Лойценский Л.Г., Лурье А.И. Курс теоретической механики: В 2 т. – М.: Наука, 1984. – Т.1. – 352 с.; Т.2. – 640 с.
11. Павловский М.А. Теоретична механіка: Підручник. – К.: Техніка, 2002. –512 с.
12. Савин Г.Н., Путята Т.В., Фрадлин Б.Н. Курс теоретической механики. –К.: Высш. шк., 1973. – 359 с.
13. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике: Учеб. пособ. для техн. вузов/ Яблонский А.А., Норейко С.С., Вольфсон С.А. и др.; Под ред. А.А. Яблонского. – 4-е изд., пере раб. и доп. – М.: Высш. шк., 1985. – 367 с.
14. Тарг С.М. Кратный курс теоретической механіки. – М.: Наука, 1974. – 400 с.
15. Технічна механіка. Кн..1. Теоретична механіка: Підручник/ Д.В. Чернілевський, Я.Т. Кіницький, В.М. Колосов та ін. За ред. Д.В. Чернілевського. –К.: НМК ВО, 1992. – 384 с.
16. Яблонський А.А., Никифорова В.М. Курс теоретической механики: В 2т. – М.: Высш. шк., 1977. – Т.1. – 431 с.; Т.2. – 532 с.
17. Яскілка М.Б. Збірник завдань для розрахунково-графічних робіт з теоретичної механіки: Посібник. – К.: Вища. шк.: Веселка, 1999. – 351с.

Навчальне видання

Володимир Олексійович Приятельчук
Володимир Іванович Риндюк
Валерій Олександрович Федотов

**ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА
ДИНАМІКА МАТЕРІАЛЬНОЇ СИСТЕМИ
РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНІ ТА КОНТРОЛЬНІ ЗАВДАННЯ**

Навчальний посібник

Оригінал-макет підготовлений В.О. Федотовим

Навчально-методичний відділ ВНТУ
Свідоцтво Держкомінформу України
серія ДК № 746 від 25.12.2001
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, ВНТУ

Підписано до друку
Формат 29.7x42 $\frac{1}{4}$
Друк різнографічний
Тираж прим.
Зам №

Гарнітура Times New Roman
Папір офсетний
Ум. др. арк.

Віддруковано в комп'ютерному інформаційно-видавничому центрі
Вінницького національного технічного університету
Свідоцтво Держкомінформу України
серія ДК № 746 від 25.12.2001р.
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95