Міністерство аграрної політики України

О.І.Єременко

ІНЖЕНЕРНА МАХАНІКА

Частина 2.

ТЕОРІЯ МЕХАНІЗМІВ І МАШИН

Рекомендовано Міністерством аграрної політики України
як підручник для підготовки бакалаврів
із спеціальності 6.091900 "Механізація сільського господарства"
у вищих навчальних закладах II-IV рівнів акредитації
Мінагрополітики України

"Нова книга" 2009

УДК 69.04(075.8)
ББК 38.112я73
Є 70

Гриф надано Міністерством аграрної політики України
(лист № 18-128-13/738 від 04.07.2006 р.)

Рецензенти:

Булгаков В.М. – д-р техн. наук, проф. (Національний аграрний університет);
Панов С.Л. – канд. техн. наук, доц. (Київський інститут економіки і технологій транспорту)

Редактор: О.І. Єременко

О.І. Єременко
Інженерна механіка. Частина 2. Теорія механізмів і машин.
Є 70 Підручник.– Вінниця: Нова книга, 2009. – 368 с.
ISBN 978-966-382-217-4

Підручник "Інженерна механіка. Частина 2. Теорія механізмів і машин" написаний на основі досвіду викладання на кафедрі механіки і ТММ Національного університету біоресурсів і природокористування України протягом ряду років. Він відповідає програмі для технічних спеціальностей вищих аграрних навчальних закладів освіти II – IV рівнів акредитації. Може бути використаний студентами та викладачами машинобудівних і механічних спеціальностей вищих технічних закладів.

УДК 69.04(075.8)
ББК 38.112я73

ISBN 978-966-382-217-4

© Єременко О.І., 2009
© «Нова книга», 2009

ПЕРЕДМОВА

Підручник "Інженерна механіка. Частина 2. Теорія механізмів і машин" написаний на основі досвіду викладання на кафедрі механіки і ТММ механіко-технологічного факультету Національного університету біоресурсів і природокористування України протягом ряду років. Він відповідає програмі із спеціальності "механізація сільського господарства". Частина матеріалу призначена для самостійного опрацювання.

Суттєво по новому викладені: аналітична кінематика та аналітичний силовий аналіз важільних механізмів, динаміка важільних механізмів, працюючих від електроприводу, синтез планетарних передач та деякі інші питання.

Переважна більшість графіків виконана в середовищі комп'ютерної програми Mathcad.

Підручник може бути використаний студентами та викладачами машинобудівних і механічних спеціальностей вищих технічних навчальних закладів.

ВСТУП

Предмет ТММ

Теорія механізмів і машин (ТММ) – наука про загальні методи дослідження властивостей механізмів і машин та проектування їх схем.

ТММ відноситься до групи загальноінженерних дисциплін і за змістом стоїть на межі між циклами загальнонаукових і спеціальних дисциплін. За методами викладання ТММ базується на теоретичних основах дисциплін, які її забезпечують, – математиці, фізиці, теоретичній механіці, нарисній геометрії, машинобудівному кресленні, технології конструкційних матеріалів, а за цільовим призначенням готує студентів до вивчення наступних загальноінженерних і профілюючих дисциплін – деталей машин і підйомно-транспортних машин, тракторів, сільськогосподарських машин, та до розв'язування інженерних задач проектування схем механізмів і машин.

Метою викладання ТММ є ознайомлення студентів з методами дослідження існуючих механізмів (аналіз механізмів) та проектування механізмів за даними властивостями (синтез механізмів). На відміну від спеціальних інженерних дисциплін, які вивчають конкретні види машин різних галузей, ТММ розглядає в першу чергу загальні питання дослідження та проектування механізмів незалежно від галузі застосування, розкриває загальні основи будови, кінематики та динаміки, які використовуються при вивченні конкретних механізмів і машин.

Основні поняття ТММ

Машиною називається пристрій, який здійснює механічний рух для перетворення енергії, матеріалів чи інформації.

Машини поділяються на енергетичні, робочі, інформаційні, кібернетичні.

Енергетичні машини призначені для перетворення будь-якого виду енергії в механічну чи навпаки. У першому випадку маємо двигуни, у другому – генератори.

Робочі машини призначені для перетворення матеріалів чи об'єктів. Їх поділяють на технологічні, у яких змінюється форма, властивості й положення об'єкта, та транспортні, у яких змінюється тільки його положення.

Механізмом називається система тіл, призначена для перетворення руху одного чи кількох тіл в потрібні рухи інших тіл.

Механізми складаються з ланок. Ланкою називається жорстке з'єднання твердих тіл, яке рухається в складі механізму як єдине ціле.

Сукупність взаємно зв'язаних механізмів утворюють машину.

Розділ 1. СТРУКТУРНИЙ АНАЛІЗ І КЛАСИФІКАЦІЯ МЕХАНІЗМІВ

Структурний аналіз і класифікація механізмів необхідні для вибору методів їх розрахунку.

1.1. Кінематичні пари та їх класифікація

Кінематичною парою називається рухоме з'єднання двох стичних ланок. Тобто таких, які стикаються, дотикаються чи перебувають у контакті.

Стикання ланок може бути геометричним – за рахунок їх геометричної форми або конструкції, чи силовим – за рахунок сили притискання, яка забезпечується пружиною, силою тяжіння і т.п.

Кінематичні пари поділяються на нижчі, у яких стикання відбувається по поверхні, і вищі, у яких по лініях або в точках.

Вільне абсолютно тверде тіло має в просторі 6 ступенів вільності. Ступені вільності – це незалежні параметри, які однозначно визначають положення тіла чи системи тіл. Тіло може рухатись поступально вздовж кожної з координатних осей та повертатись навколо них (рис. 1.1).

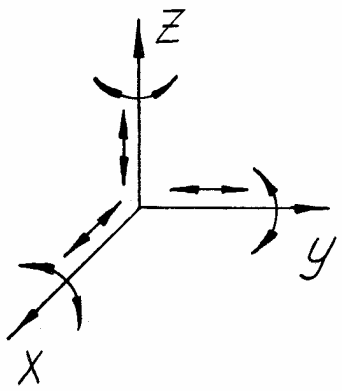


Рис. 1.1

Входження ланок у кінематичну пару накладає на їх відносний рух умови в'язі. Наприклад, кінематична пара може перешкодити ланці рухатись вздовж осі y.

Тому кількість ступенів вільності H ланки відносно іншої, які утворюють кінематичну пару, становить

$$H = 6 - S,$$

де S – кількість умов в'язі.

Звідси $$S = 6 - H.$$

По числу ступенів вільності H кінематичні пари поділяються на одно–, дво–, три–, чотири– і п'ятирухомі. Крім того кінематичні пари поділяються на п'ять класів. Номер класу пари дорівнює числу умов в'язі S, які накладаються парою на рух однієї ланки відносно іншої.

Умовні позначення основних кінематичних пар (КП) показані на рис. 1.2.

У п'ятирухомій вищій КП I класу куля – площина (рис. 1.2, а) куля може повертатись навколо кожної з координатних осей і рухатись поступально вздовж двох осей, тобто має 5 ступенів вільності ($H = 5$). Куля не може відірватись від площини, бо тоді ланки не будуть дотикатись і це утворення

не буде КП, а ми розглядаємо тільки КП. Тобто число умов в'язі $S = 1$. Тому за визначенням маємо п'ятирухому пару I класу. Номери класів пар позначають римськими цифрами. Стикання ланок відбувається в точці. Тому пара вища.

Для чотирирухомої вищої КП II класу куля – циліндр (рис. 1.2, б) число ступенів вільності $H = 4$, а кількість умов в'язі $S = 2$. Оскільки стикання відбувається в точці або по лінії, то пара вища.

Чотирирухома вища КП II класу циліндр – площина (рис. 1.2, в) має $H = 4,\ S = 2$.

У трирухомій нижчій КП III класу площинній (рис. 1.2, г) $H = 3,\ S = 3$. Стикання ланок відбувається по поверхні.

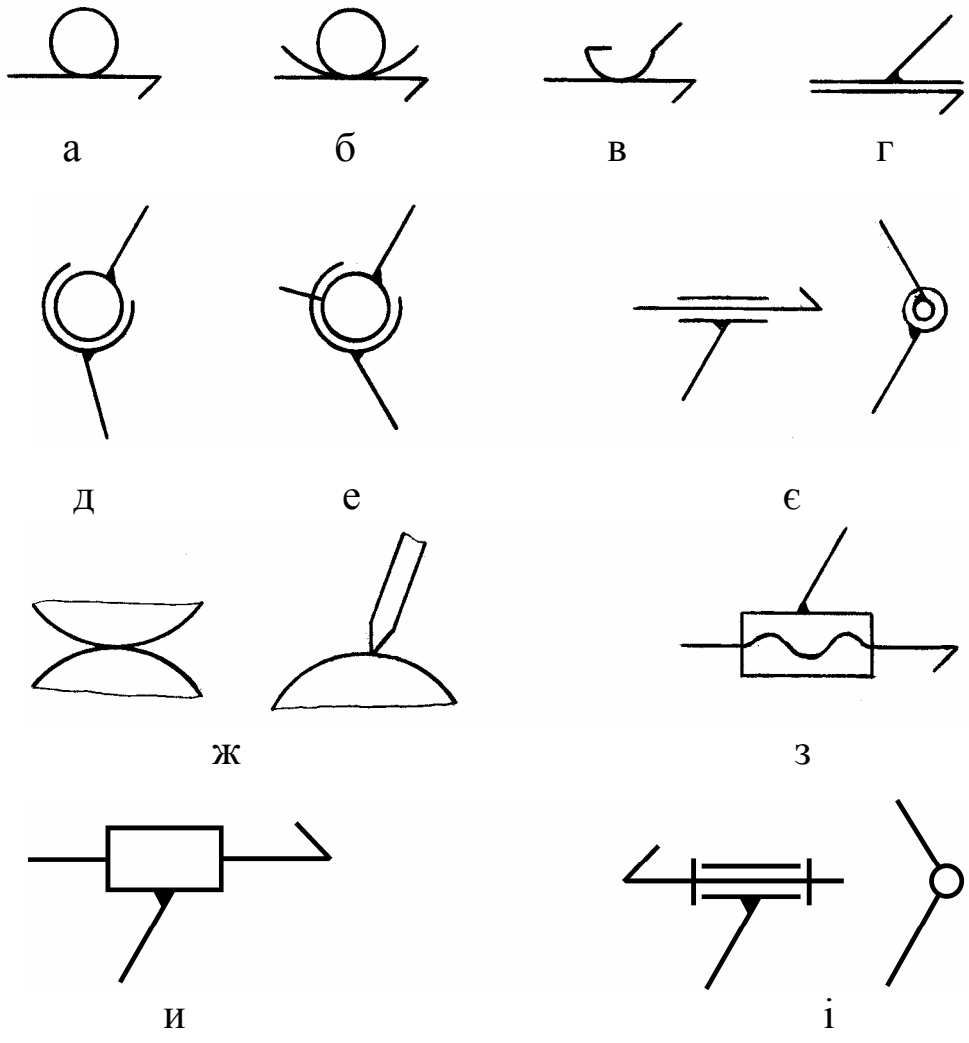


Рис. 1.2

Для трирухомої нижчої КП III класу сферичної (рис. 1.2, д) $H = 3,\ S = 3.$

Дворухома нижча КП IV класу сферична з пальцем (рис. 1.2, е) являє собою кулю всередині ланки зі сферичною поверхнею. Куля може повертатись навколо осі пальця та разом з ним повертатись вздовж паза, прорізаного в сферичній поверхні охоплюючої ланки. Тоді $H = 2$, $S = 4$.

У дворухомої нижчої КП IV класу циліндричної (рис. 1.2, є) внутрішня ланка є циліндром, а зовнішня – втулкою з циліндричним отвором. Циліндр може обертатися в отворі втулки та пересуватись вздовж неї. Тобто $H = 2,\ S = 4.$

У двох дворухомих вищих КП IV класу плоских (рис. 1.2, ж) одна ланка відносно іншої може ковзати та перекочуватись без ковзання або похитуватись в одній площині. Просторові рухи ланок неможливі, бо тоді пари не були б плоскими. Для них $H = 2,\ S = 4.$

Для однорухомої нижчої пари V класу гвинтової (рис. 1.2, з) одна ланка може рухатись тільки вздовж гвинтової поверхні іншої. У цьому випадку $H = 1,\ S = 5.$

Внутрішня ланка однорухомої нижчої КП V класу поступальної (рис. 1.2, и) може пересуватись тільки вздовж отвору зовнішньої. Обертання виключається конструктивно, наприклад, шпоночним чи шліцевим з'єднанням. Для цієї пари $H = 1,\ S = 5.$

Одна ланка однорухомої нижчої пари V класу обертальної (рис. 1.2, і) може тільки обертатись відносно іншої. Тому для неї $H = 1,\ S = 5.$

Кінематичні пари входять до складу кінематичних ланцюгів.

Питання та завдання для самоконтролю

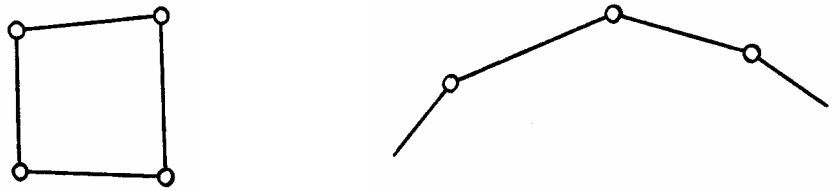
1. Яке місце займає ТММ серед інженерних курсів?
2. Що називається механізмом?
3. Дати визначення кінематичної пари. Указати можливі та неможливі рухи в одно- та дворухомих парах.
4. Навести приклади нижчих та вищих пар.

1.2. Кінематичні ланцюги і з’єднання

Кінематичним ланцюгом називається система ланок, з’єднаних між собою кінематичними парами.

Кінематичні ланцюги поділяють на просторові і плоскі. Точки ланок останніх теоретично рухаються в паралельних площинах. Насправді в цих механізмах точки ланок рухаються в просторі, але при високій точності виготовлення їх можна розглядати як плоскі.

Кінематичні ланцюги поділяються на замкнені і незамкнені. У перших ланки утворюють один або кілька замкнених контурів (рис. 1.3, а), у других – ні (рис. 1.3, б).



а б

Рис. 1.3

Кожний механізм, складений тільки з твердих тіл, являє собою деякий кінематичний ланцюг. Але є механізми, наприклад, гідравлічні, в яких кінематичного ланцюга може і не бути.

Кінематичну пару інколи зручніше або компактніше замінити кінематичним ланцюгом з числом ланок більше двох. Кінематичний ланцюг, який конструктивно замінює в механізмі кінематичну пару, називається кінематичним з’єднанням. Прикладом кінематичного з’єднання є шарикопідшипник, який в порівнянні з еквівалентною обертальною парою зменшує тертя.

Основною властивістю механізму є число ступенів вільності його рухомих ланок відносно нерухомої ланки, яка називається стояком. Це число визначають за допомогою структурних формул.

1.3. Структурні формули кінематичних ланцюгів

Структурні формули називають ще формулами рухомості.

Знайдемо число ступенів вільності W просторового механізму відносно стояка, яке називається числом ступенів рухомості чи, коротко, ступенем рухомості.

Нехай просторовий механізм складається з n рухомих ланок. Якби його ланки не були зв'язані між собою, то загальне число ступенів рухомості ланок відносно стояка складало б $6n$. Кожна однорухома кінематична пара V класу зменшує це число на 5 умов в'язі. А всі пари V класу на $5p_1$, де p_1 – кількість однорухомих пар V класу. Дворухома пара IV класу зменшує на 4 умови в'язі. А всі пари IV класу на $4p_2$, де p_2 – кількість дворухомих пар. І т.д. Тоді

$$W = 6n - 5p_1 - 4p_2 - 3p_3 - 2p_4 - p_5 = 6n - \sum_{i=1}^{5}(6-i)p_i,$$

де $p_1, p_2, \ldots, p_5$ – кількість одно–, дво–, ... , п'ятирухомих пар V, IV, … , I класу.

Це структурна формула просторових механізмів чи формула Сомова – Малишева.

Визначимо за цією формулою число ступенів рухомості механізму маніпулятора (рис. 1.4), не враховуючи руху губок захвату.

$$W = 6 \cdot 4 - 5 \cdot 3 - 4 \cdot 1 - 3 \cdot 0 - 2 \cdot 0 - 0 = 5.$$

Останню формулу можна застосувати тільки для просторових механізмів у випадку, якщо на рух ланок не накладені загальні умови в'язі.

Наприклад, ланки плоского механізму (рис. 1.5) не можуть рухатись вздовж осі x та повертатись навколо осей y і z. Тобто на їх рух накладені три загальні умови в'язі. Число ступенів рухомості ланок і умов в'язі в площині буде на 3 менше, ніж у просторі. Тому структурна формула запишеться

$$W = (6-3)n - (5-3)p_1 - (4-3)p_2.$$

Пар I, II, III класів у плоских механізмів не буває, бо їх ланки здійснюють просторові рухи.

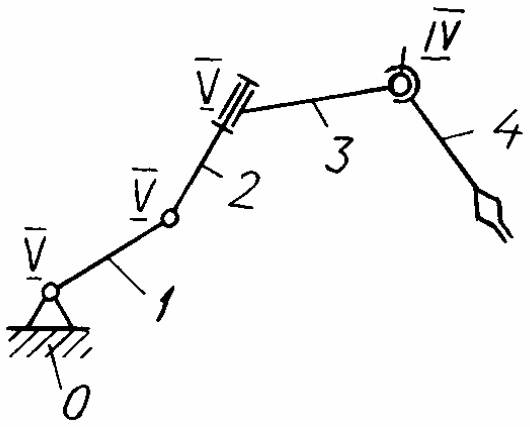


Рис. 1.4

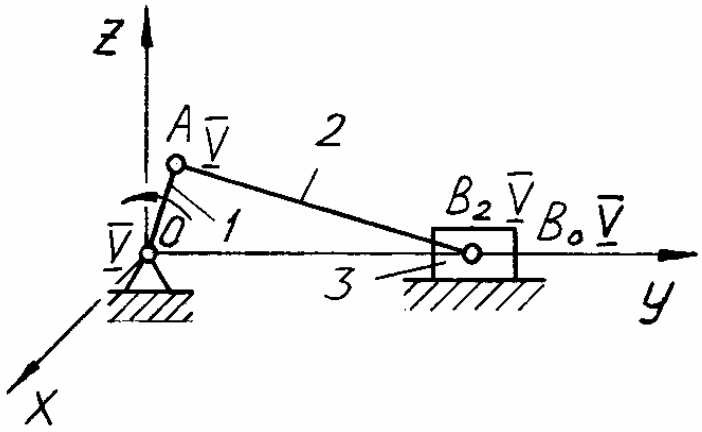


Рис. 1.5

Остаточно, ступінь рухомості плоских механізмів

$$W = 3n - 2p_1 - p_2.$$

Це структурна формула для плоских механізмів з не тільки поступальними парами чи формула Чебишева.

Для механізму на рис. 1.5

$$W = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 - 0 = 1.$$

Ланки плоского механізму з тільки поступальними парами (рис. 1.6) не можуть переміщуватись вздовж осі x та повертатись навколо осей x, y, z. На їх рух накладені чотири загальні умови в'язі. Число ступенів рухомості ланок і умов в'язі при поступальному русі в площині буде на 4 менше, ніж у просторі. Структурна формула прийме вигляд

$$W = (6-4)n - (5-4)p_1.$$

Пар IV класу в таких механізмах не буває, бо їх ланки здійснюють обертальні рухи. Тобто, число ступенів рухомості

$$W = 2n - p_1.$$

Це структурна формула для плоских механізмів з тільки поступальними парами чи формула Добровольського.

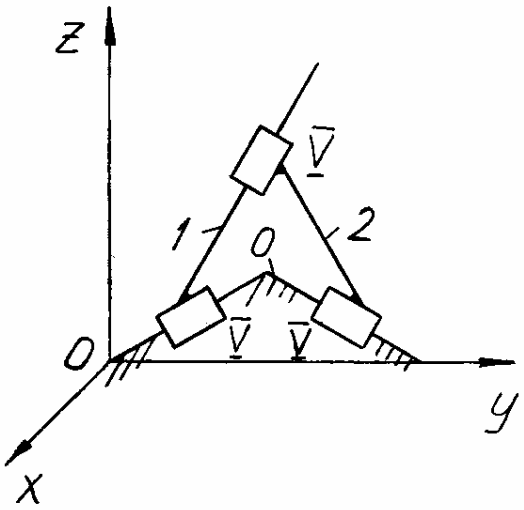


Рис. 1.6

У механізмі на рис. 1.6

$$W = 2 \cdot 2 - 3 = 1.$$

Число ступенів рухомості, знайдене за цими формулами, дорівнює кількості незалежних координат, які однозначно визначають положення механізму відносно стояка.

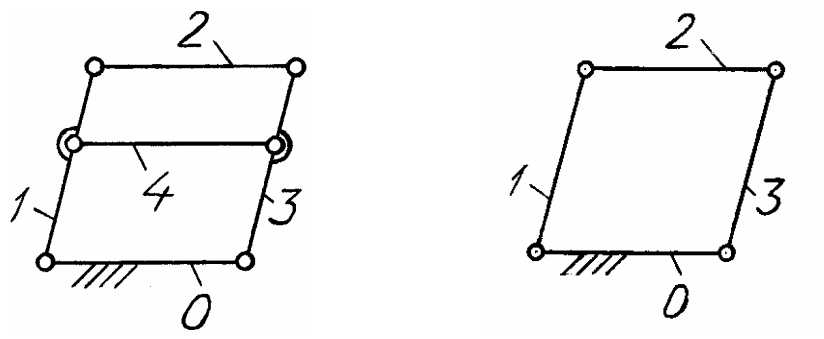
Розглянемо випадки, у яких ця рівність не виконується.

Питання та завдання для самоконтролю

1. Дати визначення кінематичного ланцюга.
2. Які бувають кінематичні ланцюги?
3. Що називається кінематичним з’єднанням?
4. Вивести формулу Сомова-Малишева.
5. Одержати формулу Чебишева.
6. Указати область застосування останніх формул.

1.4. Надлишкові в’язі та зайві ступені вільності

Розглянемо механізм (рис. 1.7, а), ланки якого утворюють два паралелограма.



а б

Рис. 1.7

Розрахунковий ступінь рухомості

$$W = 3n - 2p_1 = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 6 = 0,$$

а дійсний – $W = 1$. Це протиріччя пояснюється тим, що ланка 4 не впливає на загальний характер руху механізму. Такі в’язі називаються надлишковими чи пасивними. Вони вводяться для підвищення жорсткості, зменшення впливу деформацій на рух механізму, поліпшення розподілу зусиль, які діють на ланки, і т.п. Якщо вилучити ланку 4, то одержимо механізм (рис. 1.7, б), для якого розрахунковий ступінь рухомості $W = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 = 1$ співпадає з дійсним.

Для кулачкового механізму з роликовим штовхачем (рис. 1.8, а), для якого

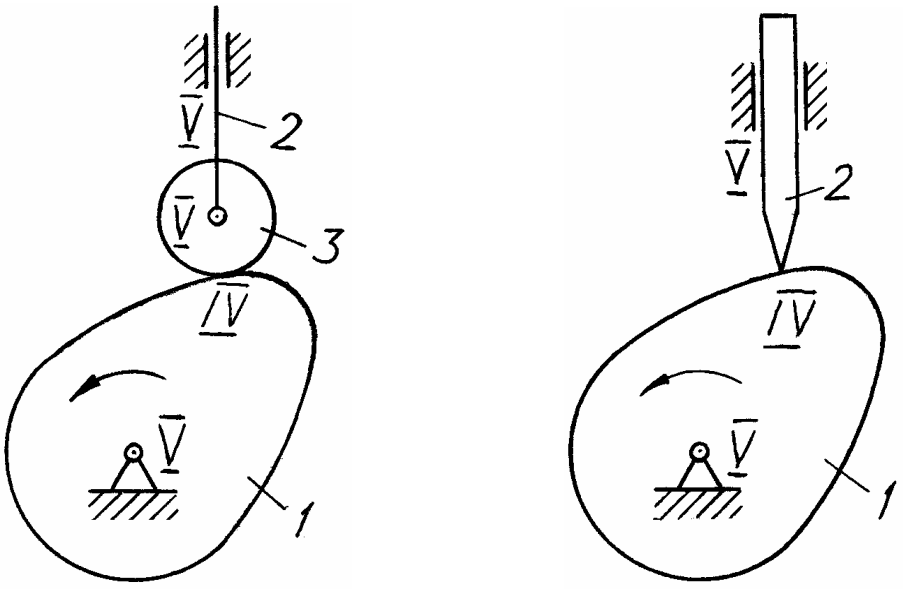
$$W = 3n - 2p_1 - p_2 = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 3 - 1 = 2,$$

один ступінь вільності відповідає повороту кулачка 1, другий ролика 3. Поворот ролика не впливає на роботу механізму. Такі ступені вільності називаються зайвими. Вони можуть бути введені для зменшення тертя та зношування.

Якщо ролик вилучити, то одержимо механізм з загостреним штовхачем (рис. 1.8, б), для якого

$$W = 3n - 2p_1 - p_2 = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 2 - 1 = 1.$$

Надлишкові в'язі та зайві ступені вільності при аналізі механізму вилучаються, бо ускладнюють його.



а б

Рис. 1.8

1.5. Структурна класифікація плоских механізмів

Механізм I класу чи початковий складається з кривошипа 1 (рис. 1.9, а) або повзуна 1 (рис. 1.9, б), стояка 0 і відповідно однорухомої обертальної або поступальної кінематичної пари *O* V класу між ними.

Число ступенів рухомості механізму I класу

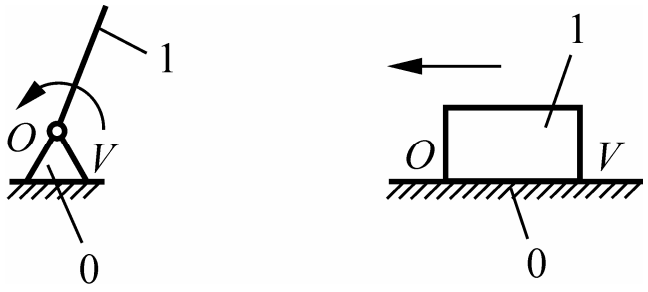
$$W = 3n - 2p_1 - p_2 = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 1 - 0 = 1.$$

Далі будемо розглядати механізм I класу тільки з кривошипом.

Механізми з вищими кінематичними парами IV класу замінюються для структурного аналізу механізмами з парами тільки V класу.

Структурною групою Ассура називається плоский кінематичний ланцюг, який:

1. має число ступенів вільності, рівне нулю, якщо його приєднати до стояка вільними елементами кінематичних пар;
2. він не ділиться на більш прості з нульовим ступенем рухомості.



а б

Рис. 1.9

Тобто, ступінь рухомості групи Ассура

$$W = 3n - 2p_1 = 0,$$

звідки $p_1 = 3n/2$.

Оскільки число рухомих ланок n і число однорухомих пар p_1 є цілими числами, то n – парне. Тобто, до складу структурної групи входить тільки парне число ланок.

За останньою формулою n і p_1 приймають ряд послідовних значень:

n	2	4	6	8	...
p_1	3	6	9	12	...

Групи Ассура поділяються на класи. Номер класу структурної групи дорівнює найбільшому номеру класу контура, який входить до її складу. А номер класу контура дорівнює кількості кінематичних пар, які утворюють ланки контура. Контури різних класів показані на рис. 1.10, де поступальні пари V класу, якщо вони є, умовно замінені на обертальні.

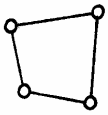
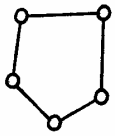
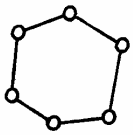
Клас контура	II	III	IV	V	VI	. . .
Умовне зображення						. . .

Рис. 1.10

Контури II і III класів – жорсткі фігури. Жорсткі фігури позначаються штриховкою.

Номери класів структурних груп і контурів позначаються римськими цифрами.

Порядок групи Ассура дорівнює числу вільних елементів кінематичних пар, якими група приєднується до інших ланок.

Класифікація структурних груп та механізмів не залежить від розмірів та розташування ланок.

Найпростішими є групи II класу чи двоповодкові групи – діади. Вони складаються з двох ланок. Поводок, на відміну від ланки, має вільний елемент кінематичної пари. При з'єднанні його з вільним елементом іншої ланки утворюється кінематична пара.

Групи II класу поділяються на 5 видів (рис. 1.11). Для груп 2 ... 5 видів показані частинні випадки. У групі 1 виду спільна кінематична пара і вільні елементи – обертальні. Інші види груп II класу можна одержати заміною окремих обертальних пар чи їх вільних елементів поступальними.

Ступінь рухомості кожної з цих груп

$$W = 3n - 2p_1 = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 3 = 0.$$

Усі ці групи 2–го порядку, бо мають по 2 вільні елементи кінематичних пар.

Наведемо приклади структурних груп більших класів. У них поступальні пари V класу, якщо вони є, умовно замінені на обертальні. Вільні елементи кінематичних пар умовно показані збільшеними.

Групи III класу можуть бути 3–го (рис. 1.12, а), 4–го (рис. 1.12, б), 5–го (рис. 1.12, в) та більших порядків.

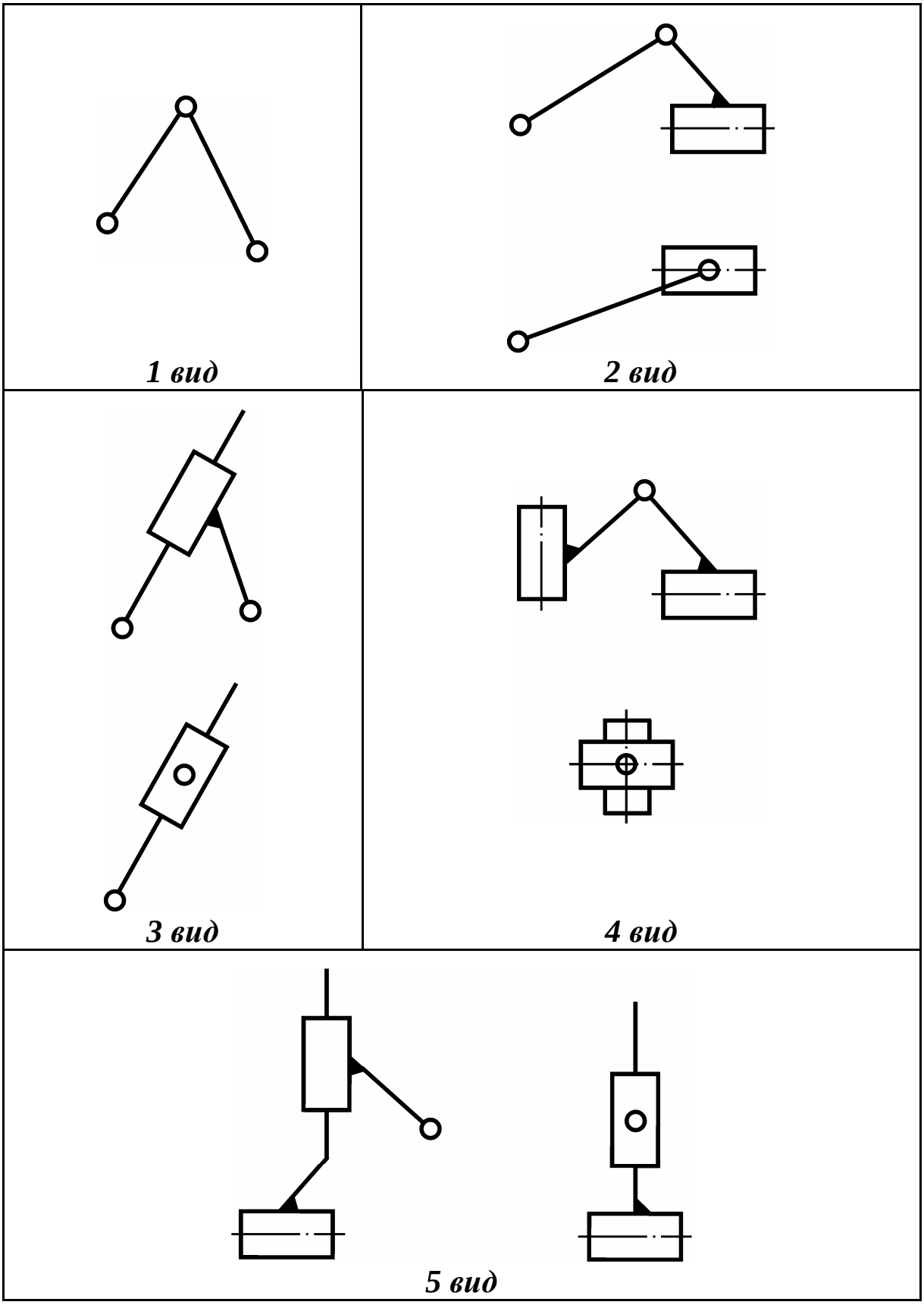
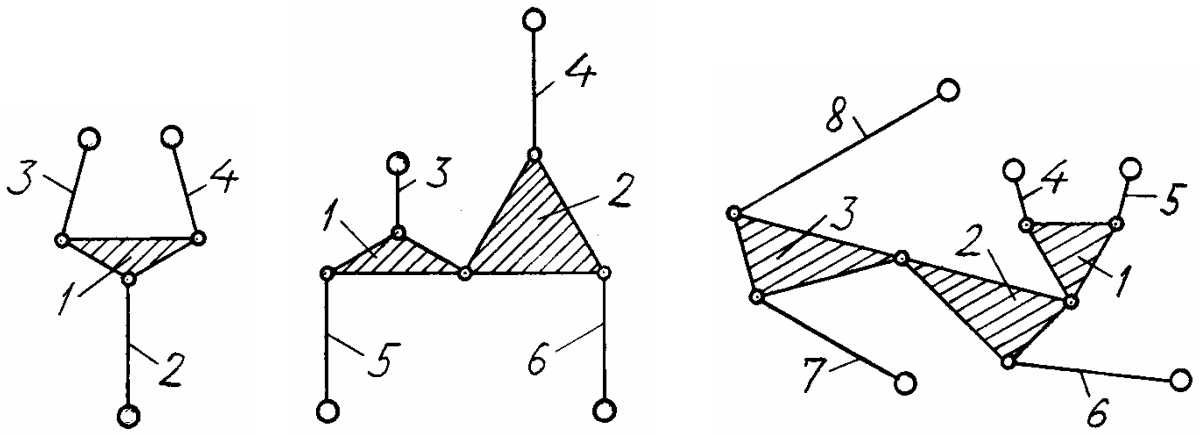


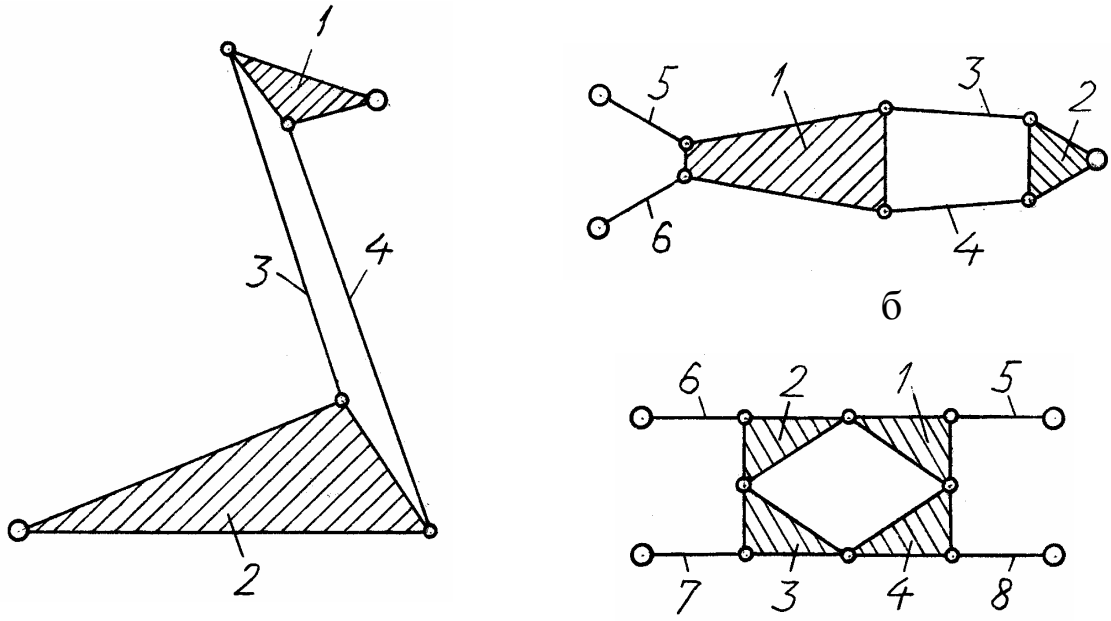
Рис. 1.11



а б в

Рис. 1.12

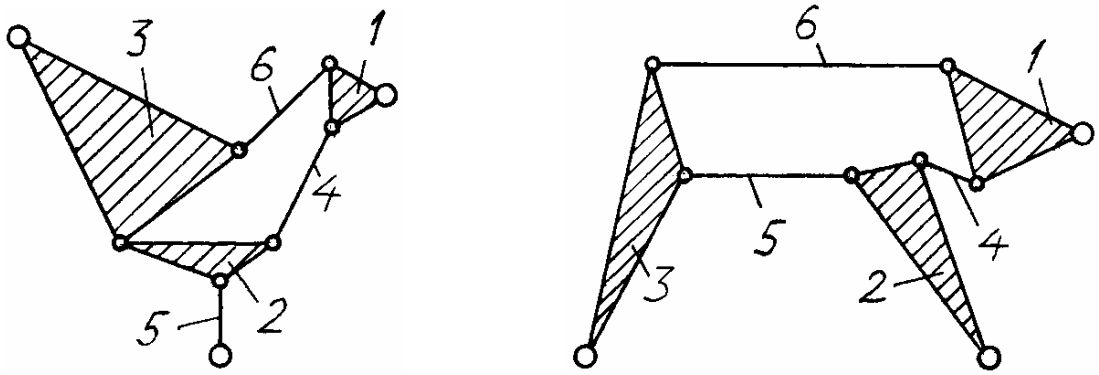
Групи IV–го класу бувають 2–го (рис. 1.13, а), 3–го (рис. 1.13, б), 4–го (рис. 1.13, в) та більших порядків.



а б в

Рис. 1.13

Можна утворити групу V класу 3–го порядку (рис. 1.14, а), групу VI класу 3–го порядку (рис. 1.14, б) та інші.



а б

Рис. 1.14

Легко перевірити, що число ступенів рухомості кожної з наведених груп Ассура $W = 0$.

Структурні групи входять до складу механізмів. Розглянемо принцип утворення плоских механізмів.

До механізму (рідко кількох механізмів) I класу приєднуються групи Ассура вільними елементами кінематичних пар. Спочатку перша група приєднується одним вільним елементом до початкової ланки (найчастіше кривошипа), а другим чи іншими – до стояка. Початковою називається ланка, положення якої визначає положення інших ланок механізму. Наступні групи, 2, 3 і т.д., приєднуються послідовно до вже створеного механізму, але обов'язково не до однієї ланки.

Наприклад, механізм на рис. 1.15 утворений послідовним приєднанням до механізму I класу, який складається з ланок 0, 1, спочатку групи III класу 3–го порядку, яка складається з ланок 2, 3, 4, 5, а тоді групи II класу 1 виду, яка складається з ланок 6, 7.

Склад і послідовність приєднання груп Ассура виражають формулою будови механізму. Для розглядуваного механізму вона запишеться

I кл. (0,1) ← III кл. 3 пор. (2,3,4,5) ← II кл. 1 в. (6,7).

Номер класу механізму дорівнює найбільшому номеру класу групи, яка входить до його складу. Згідно з визначенням, у прикладі розглянуто механізм III класу.

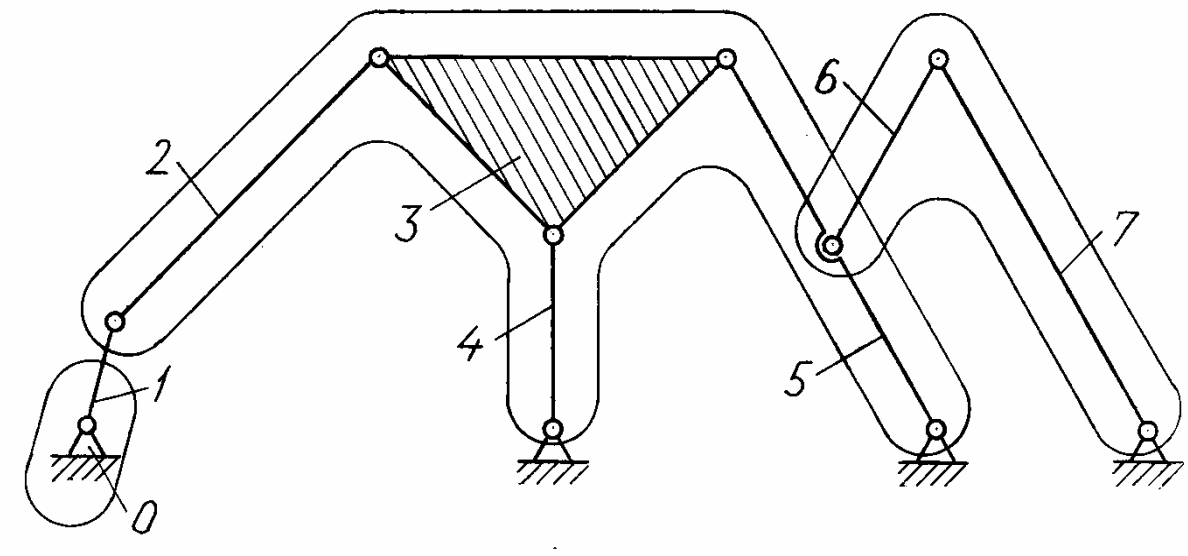


Рис. 1.15

У техніці найбільшого розповсюдження набули механізми II класу.

Розглянемо назви ланок важільних механізмів.

Ланка, яка обертається навколо нерухомої осі на кут, який більше або дорівнює 2π, називається кривошипом, а на кут менше 2π – кормислом (важелем).

Повзуном називається ланка, яка рухається вздовж напрямної.

Кулісою називається коромисло, вздовж якого рухається повзун. Повзун куліси називається кулісним каменем.

Шатуном називається ланка з двома обертальними парами на кінцях, яка здійснює одночасно поступальні та обертальні рухи.

Наведемо приклади структурного аналізу механізмів.

Розглянемо механізм преса (рис. 1.16, а).

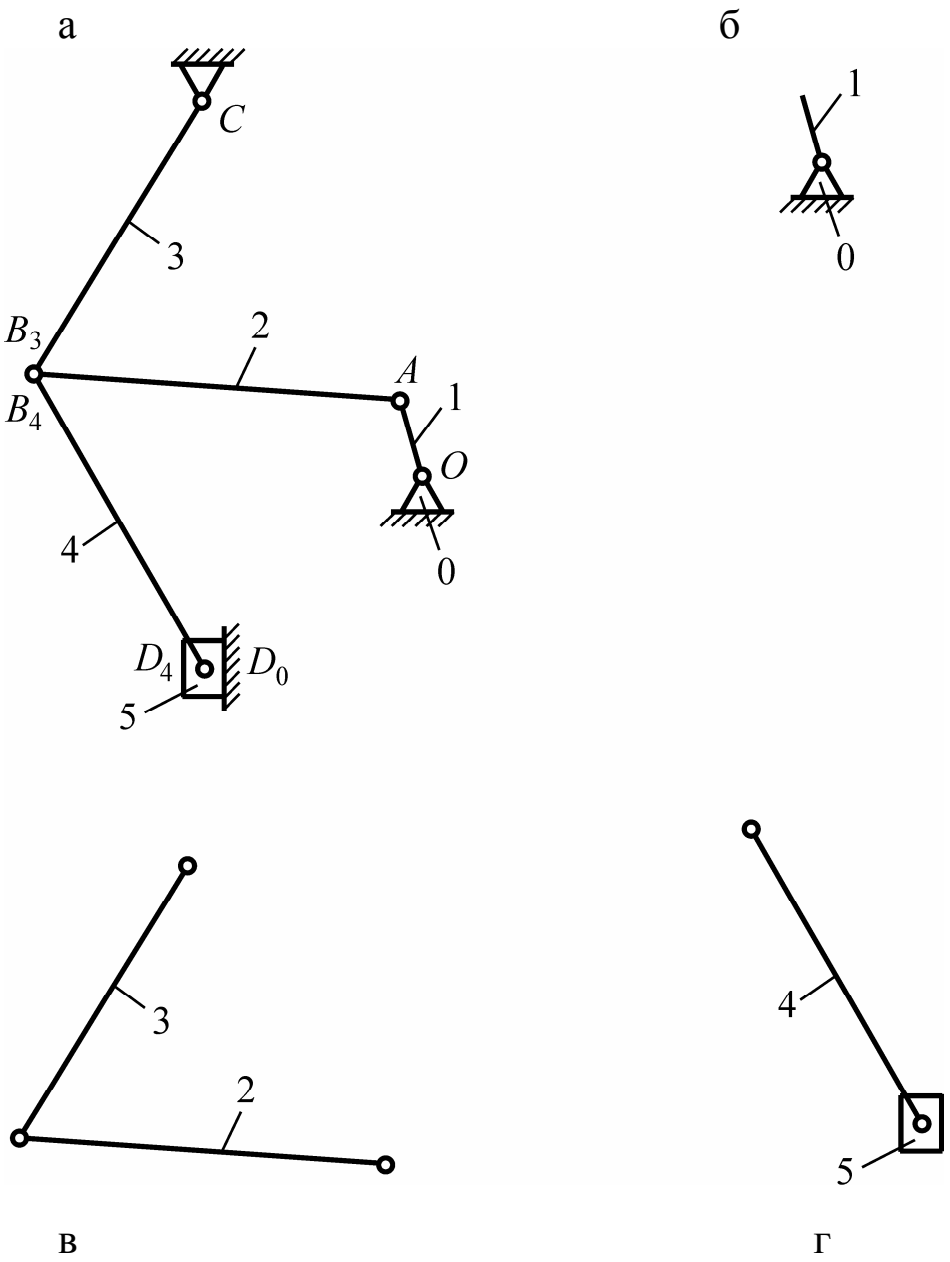


Рис. 1.16

Нумеруємо ланки та позначаємо кінематичні пари в найкоротшому напрямі від механізму I класу до стояка.

Механізм складається зі стояка 0, кривошипа 1, шатуна 2, коромисла 3, шатуна 4 та повзуна 5.

Ланка 2 утворює пари з ланками 3 та 4, які позначаються відповідно B_3 та B_4. Ланка 5 утворює пари з ланками 4 та 0. Вони позначаються D_4 та D_0.

Ступінь рухомості

$$W = 3n - 2p_1 - p_2 = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 7 - 0 = 1.$$

Виділяємо механізм I класу (рис. 1.16, б), першу приєднану структурну групу (рис. 1.16, в) та другу (рис. 1.16, г).

Формула будови

I кл. (0,1) ← II кл. 1 в. (2,3) ← II кл. 2 в. (4,5).

За визначенням маємо механізм II класу.

Механізм інерційного конвеєра (рис. 1.17, а) використовується для танспортування сипучих вантажів.

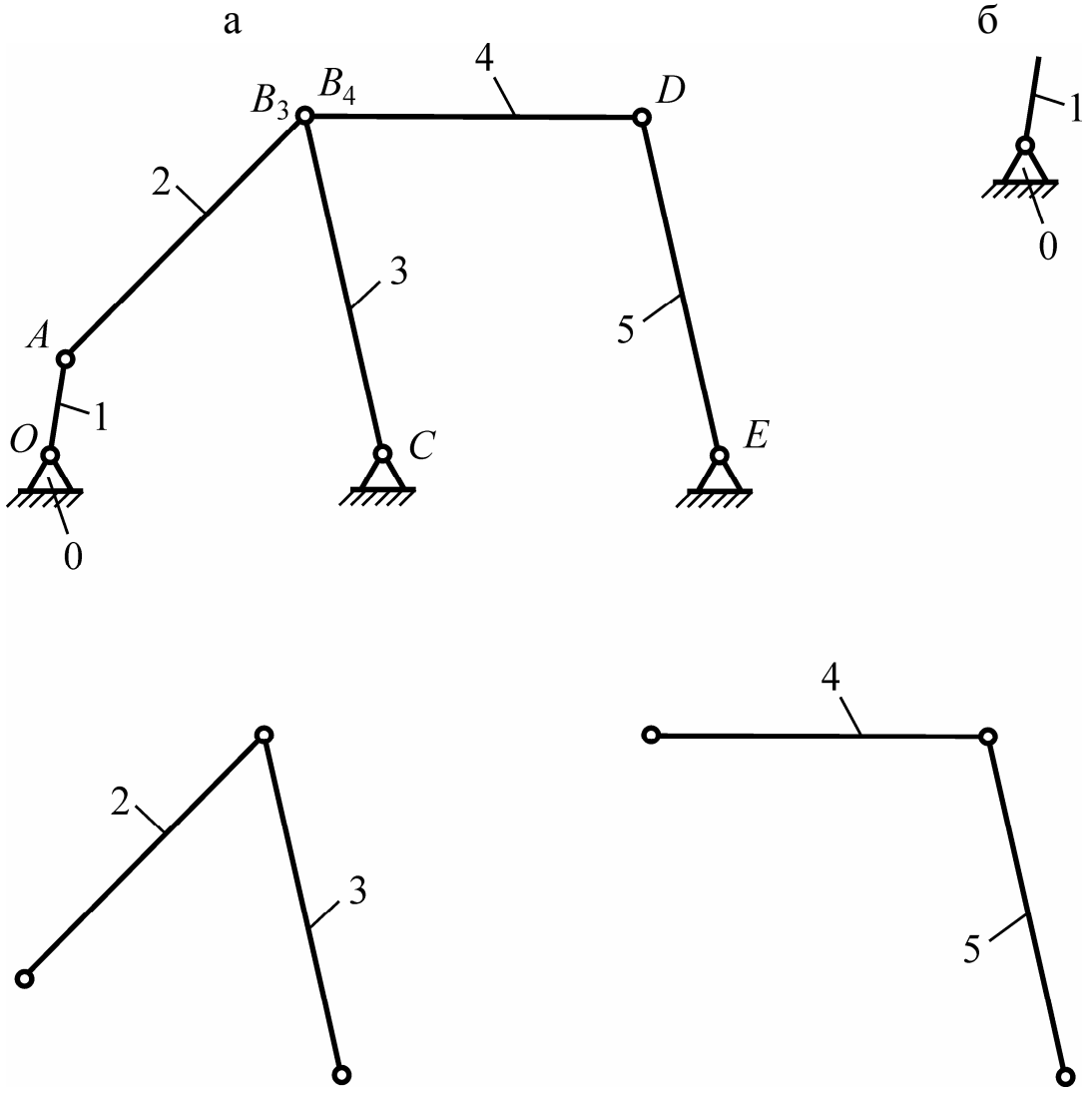


Рис. 1.17

Нумеруємо ланки та позначаємо кінематичні пари в найкоротшому напрямі від механізму I класу до стояка.

Механізм складається зі стояка 0, кривошипа 1, шатунів 2, 4 та коромисел 3, 5.

Ланка 2 утворює пари з ланками 3 та 4. Вони позначаються відповідно B_3 та B_4.

Ступінь рухомості

$$W = 3n - 2p_1 - p_2 = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 7 - 0 = 1.$$

Виділяємо механізм I класу (рис. 1.17, б), першу приєднану структурну групу (рис. 1.17, в) та другу (рис. 1.17, г).

Формула будови

I кл. (0,1) ← II кл. 1 в. (2,3) ← II кл. 1 в. (4,5).

Маємо механізм II класу.

Ще один приклад структурного аналізу наведений у розділі 13.

Питання та завдання для самоконтролю

1. Навіщо вводяться надлишкові в’язі та зайві ступені вільності?
2. Скільки ланок входить до складу структурної групи?
3. Який принцип утворення плоских механізмів?
4. Дати визначення механізму I класу та групи Ассура.
5. Навести приклади контурів різних класів.
6. Для механізму на рис. 1.5 написати формулу будови.

Розділ 2. ГРАФОАНАЛІТИЧНІ МЕТОДИ КІНЕМАТИЧНОГО ДОСЛІДЖЕННЯ МЕХАНІЗМІВ

При кінематичному дослідженні механізмів рух ланок розглядається з чисто геометричної точки зору, без урахування сил, які є причиною цього руху.

Для цього використовується кінематична схема механізму, якою називається його умовне зображення в масштабі.

Основними задачами кінематичного аналізу є визначення положень, переміщень, траєкторій, швидкостей та прискорень точок і ланок механізму.

Кінематичний аналіз механізмів проводиться починаючи з механізму I класу в порядку приєднання груп Ассура. Тобто, спочатку розглядається перша приєднана структурна група, тоді друга і т.д. до останньої.

2.1. Визначення швидкостей та прискорень механізму I класу

Кінематична схема механізму, включаючи механізм I класу (рис. 2.1, а), будується в масштабі довжин

$$\mu_l = l_{OA} / OA, \text{ м/мм},$$

де l_{OA}, м, – довжина кривошипа; OA, мм, – довжина відповідного відрізка на кресленні.

Якщо кутова швидкість ω_1 кривошипа безпосередньо не задана, то вона визначається за формулою

$$\omega_1 = \pi n_1 / 30, \text{ с}^{-1},$$

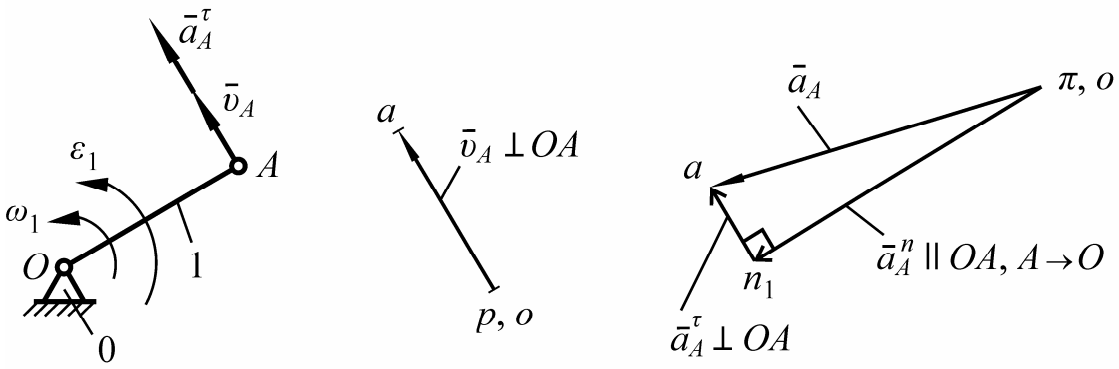
де n_1, хв$^{-1}$ – частота обертання кривошипа або число обертів.

Розглянемо побудову плану швидкостей. Швидкість точки A кривошипа

$$\upsilon_A = \omega_1 l_{OA}, \text{ м·с}^{-1}.$$

Масштаб швидкостей усього механізму

$$\mu_\upsilon = \upsilon_A / pa\,,\ \text{м}\cdot\text{с}^{-1}/\text{мм}.$$



а б в

Рис. 2.1

Довжина відрізка *pa*, мм, вибирається так, щоб розміри плану всього механізму були в прийнятних межах і масштаб μ_υ мав по можливості одну значущу цифру. На площині вибираємо точку – полюс *p* (рис. 2.1, б). Від полюса *p* відкладаємо перпендикулярно *OA* в бік обертання відрізок $\overline{pa}$, який зображає в масштабі μ_υ швидкість точки *A* кривошипа. Швидкість точки *O* дорівнює нулю, тому відповідна точка *o* на плані співпадає з полюсом *p*.

Побудовано план швидкостей. Переходимо до плану прискорень.

Нормальне прискорення точки *A* кривошипа

$$a_A^n = \omega_1^2 l_{OA},\ \text{м}\cdot\text{с}^{-2}.$$

Масштаб прискорень усього механізму

$$\mu_a = a_A^n / \pi n_1,\ \text{м}\cdot\text{с}^{-2}/\text{мм},$$

де πn_1, мм, – довжина відрізка на плані, який зображає нормальне прискорення точки *A*. Вона вибирається таким же чином, як довжина відрізка *pa* на плані швидкостей.

На площині вибираємо полюс π. Від полюса π відкладаємо паралельно *OA*, у напрямі від *A* до *O* відрізок $\overline{\pi n_1}$ (рис. 2.1, в). Оскільки прискорення точки *O* дорівнює нулю, то відповідна точка *o* співпадає з полюсом π.

Тангенціальне прискорення точки A

$$a_A^\tau = \varepsilon_1 l_{OA}, \text{ м·с}^{-2},$$

де ε_1, с$^{-2}$, – кутове прискорення кривошипа. Тангенціальне прискорення зображається відрізком $\overline{n_1 a}$, довжина якого

$$n_1 a = a_A^\tau / \mu_a, \text{ мм}.$$

Відкладаємо перпендикулярно OA в напрямі тангенціального прискорення відрізок $\overline{n_1 a}$. Повне прискорення точки A

$$a_A = \pi a \cdot \mu_a, \text{ м·с}^{-2},$$

де πa, мм, – довжина відрізка $\overline{\pi a}$, який зображає повне прискорення точки A.

Переходимо до побудови планів для груп Ассура. Підкреслимо, що методика побудови планів у межах кожної приєднаної групи не залежить від її розмірів та розташування.

2.2. План швидкостей групи II класу 1 виду

Розглянемо двоповодкову групу 1 виду (рис. 2.2, а). Нехай з попередніх планів механізму I класу чи структурних груп відомі швидкість $\overline{v}_A$, прискорення $\overline{a}_A$ точки A та відрізки на планах, які їх зображають.

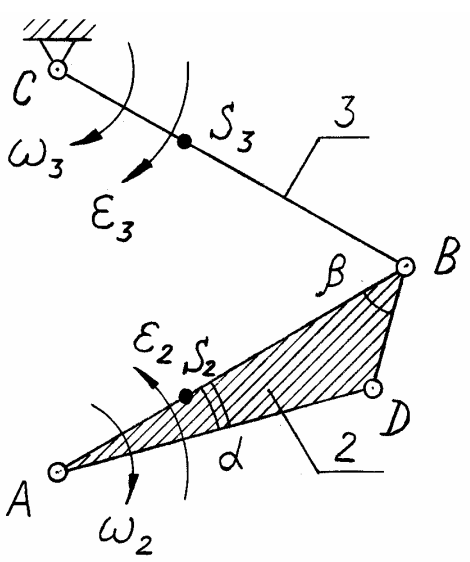
Швидкість точки B визначається відповідно до векторного рівняння

$$\underset{\perp BC}{\overline{v}_B} = \overline{v}_A + \underset{\perp AB}{\overline{v}_{BA}},$$

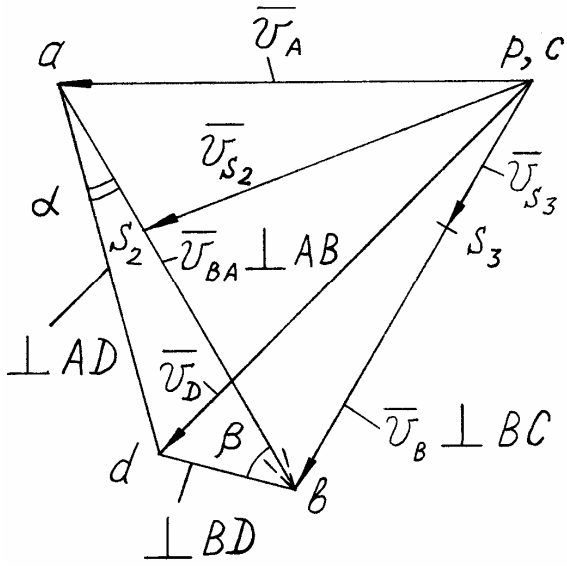
де $\overline{v}_{BA}$ – швидкість точки B відносно A, перпендикулярна до AB. Оскільки точка B лежить на коромислі 3, то її швидкість перпендикулярна BC. Швидкість $\overline{v}_B$ зображається на плані відрізком $\overline{pb}$, а $\overline{v}_{BA} - \overline{ab}$, так що останнє рівняння у відрізках плану запишеться

$$\overline{pb} = \overline{pa} + \overline{ab}.$$

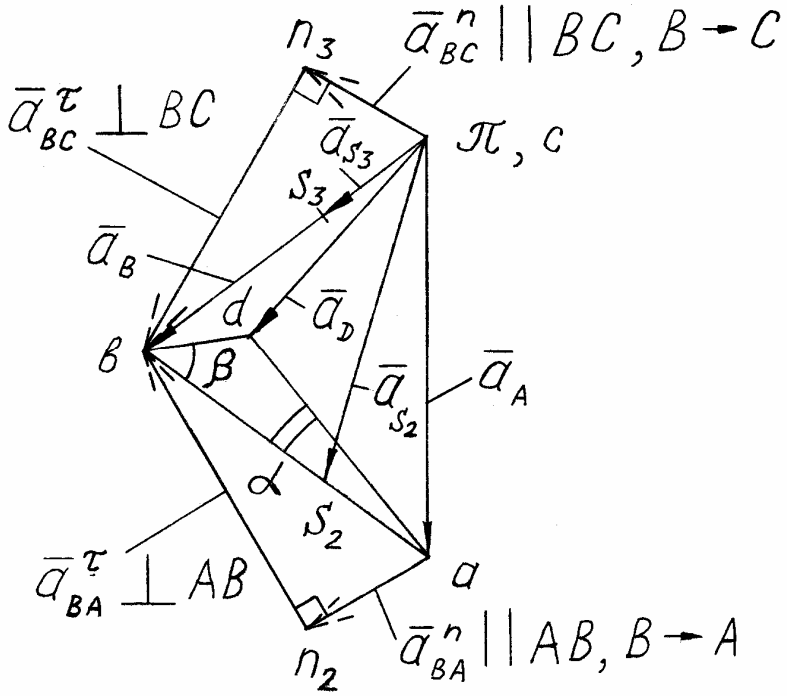
Проводимо перпендикуляри: з точки A – до AB, а з полюса p – до BC (рис. 2.2, б). На їх перетині знаходиться точка b.



а



б



в

Рис. 2.2

Швидкості $\upsilon_B = pb \cdot \mu_\upsilon$, $\upsilon_{BA} = ab \cdot \mu_\upsilon$.

Швидкість точки *C* дорівнює нулю, тому відповідна точка *c* співпадає з полюсом *p*.

Кутові швидкості шатуна 2 і коромисла 3

$$\omega_2 = \upsilon_{BA} / l_{AB}, \quad \omega_3 = \upsilon_B / l_{BC}, \text{ с}^{-1},$$

де l_{AB}, l_{BC}, м, – відстані між відповідними точками.

Визначимо їх напрями. Виділяємо ланку 2 (рис. 2.3, а). Точка *B* разом з ланкою 2 рухається навколо нерухомої у відносному русі точки *A* в напрямі швидкості $\bar{\upsilon}_{BA}$. Тоді для даного положення шатун 2 обертається за стрілкою годинника з кутовою швидкістю ω_2.

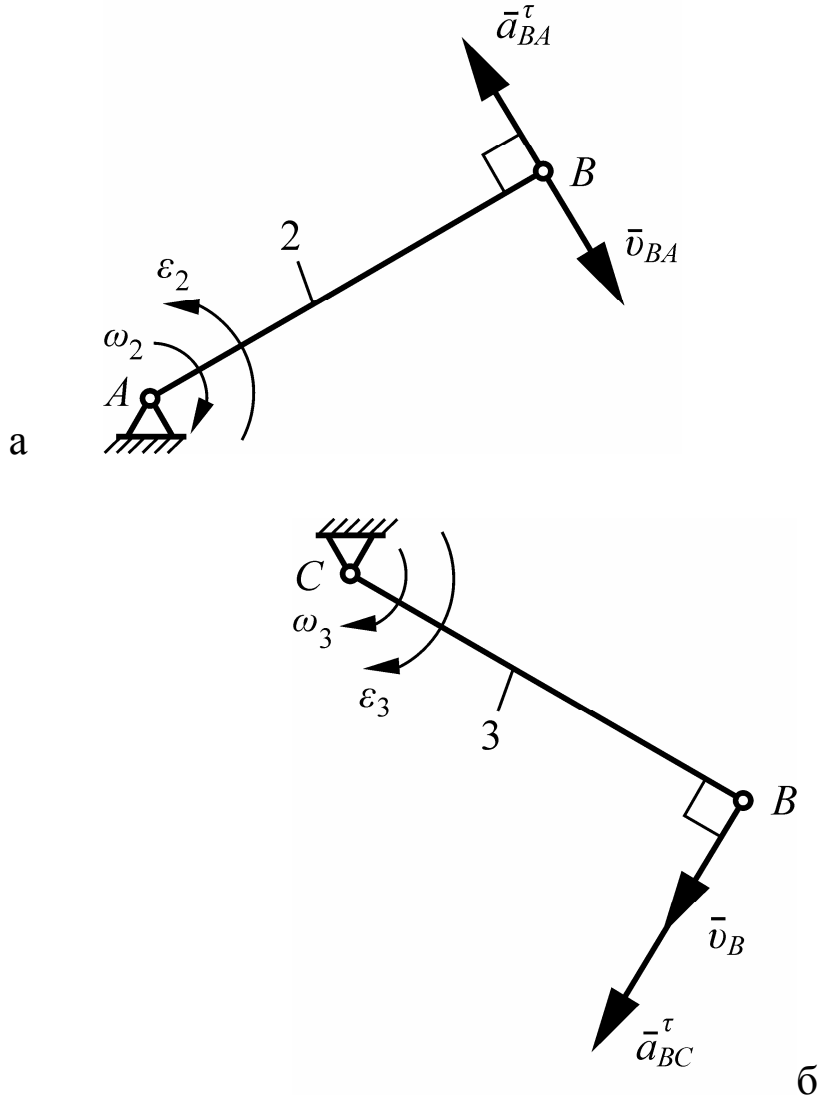


Рис. 2.3

Виділяємо ланку 3 (рис. 2.3, б). Точка B разом з ланкою 3 рухається навколо нерухомої точки C у напрямі швидкості $\overline{\upsilon}_B$. У цьому випадку коромисло 3 повертається за стрілкою годинника з кутовою швидкістю ω_3.

Питання та завдання для самоконтролю

1. Дати визначення кінематичної схеми механізму.
2. Назвати основні задачі кінематичного дослідження механізмів.
3. У якій послідовності проводиться кінематичний аналіз механізмів?
4. Схематично без розрахунків побудувати плани швидкостей і прискорень механізму I класу для іншого положення кривошипа.
5. Побудувати схематично без розрахунків план швидкостей групи II класу 1 виду для іншого її розташування. Показати напрями кутових швидкостей ланок.

2.3. Теорема подібності для планів швидкостей

Теорема подібності для планів швидкостей: план швидкостей ланки подібний їй і повернутий відносно неї на 90° у бік миттєвого обертання.

Використаємо цю теорему для визначення швидкостей точки D і центра мас шатуна S_2 (рис. 2.2, а).

Проводимо перпендикуляри (рис. 2.2, б): з точки a – до AD, а з точки b – до BD. На їх перетині знаходиться точка d.

Трикутник abd подібний трикутнику ABD, бо у них кути з взаємно перпендикулярними сторонами, і відповідно розташований. Останнє означає, що при обході по контуру ланки і плану швидкостей у певному напрямі, проти чи за стрілкою годинника, зустрічаємо однойменні точки.

На прямій ab відкладаємо відрізок

$$as_2 = ab \cdot AS_2 / AB, \text{ мм.}$$

Точки d і s_2 сполучаємо з полюсом p.

Швидкості точок D і S_2

$$\upsilon_D = pd \cdot \mu_\upsilon, \quad \upsilon_{S_2} = ps_2 \cdot \mu_\upsilon.$$

Так само за цією теоремою визначаються швидкості будь-яких точок ланок механізмів.

2.4. Побудова плану прискорень двоповідкової групи 1 виду

Прискорення точки B визначається у відповідності з системою векторних рівнянь:

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \underbrace{\bar{a}^n_{BA}}_{\parallel AB,\ B\to A} + \underbrace{\bar{a}^\tau_{BA}}_{\perp AB}, \quad \bar{a}_B = \underbrace{\bar{a}^n_{BC}}_{\parallel BC,\ B\to C} + \underbrace{\bar{a}^\tau_{BC}}_{\perp BC};$$

$$\overline{\pi b} = \overline{\pi a} + \overline{an_2} + \overline{n_2 b}, \quad \overline{\pi b} = \overline{\pi n_3} + \overline{n_3 b},$$

де $\bar{a}^n_{BA}, \bar{a}^\tau_{BA}$ та $\bar{a}^n_{BC}, \bar{a}^\tau_{BC}$ – нормальні і тангенціальні прискорення точки B відносно точок відповідно A та C.

Останніми написані рівняння у відрізках плану, які зображають відповідні прискорення.

Нормальні прискорення

$$a^n_{BA} = \omega_2^2 l_{AB}, \quad a^n_{BC} = \omega_3^2 l_{BC}$$

зображаються на плані відрізками

$$an_2 = a^n_{BA} / \mu_a, \quad \pi n_3 = a^n_{BC} / \mu_a, \text{ мм}.$$

Від точки a відкладаємо в напрямі від B до A відрізок $\overline{an_2}$, а від полюса π у напрямі від B до C відрізок $\overline{\pi n_3}$ (рис. 2.2, в). З точки n_2 проводимо лінію, перпендикулярну AB, а з точки n_3 – перпендикулярну BC. На їх перетині знаходимо точку b.

Прискорення

$$a^\tau_{BA} = n_2 b \cdot \mu_a, \quad a^\tau_{BC} = n_3 b \cdot \mu_a, \quad a_B = \pi b \cdot \mu_a.$$

Оскільки прискорення точки C дорівнює нулю, то відповідна точка c знаходиться в полюсі π.

Кутові прискорення ланок 2 і 3

$$\varepsilon_2 = a^\tau_{BA} / l_{AB}, \quad \varepsilon_3 = a^\tau_{BC} / l_{BC}, \ \text{с}^{-2}.$$

Визначимо напрями кутових прискорень. Виділяємо ланку 2 (рис. 2.3, а). Точку B разом з шатуном 2 рухаємо уявно навколо нерухомої у відносному русі точки A в напрямі тангенціального прискорення $\bar{a}_{BA}^{\tau}$. Ланка 2 буде повертатись для цього положення проти стрілки годинника. Одержаний таким чином уявний напрям обертання співпадає з напрямом ε_2. Виділяємо ланку 3 (рис. 2.3, б). Для визначення напряму ε_3 точку B разом з коромислом 3 повертаємо уявно навколо нерухомої точки C у напрямі $\bar{a}_{BC}^{\tau}$. Тоді ланка 3 буде повертатись уявно за стрілкою годинника, що є напрямом ε_3.

2.5. Теорема подібності для планів прискорень

Теорема подібності для планів прискорень: план прискорень ланки подібний їй і повернутий відносно неї.

Визначимо за цією теоремою прискорення точки D та центрів мас ланок S_2 і S_3 (рис. 2.2, а).

На плані прискорень будуємо трикутник abd, подібний трикутнику ABD та, як і для плану швидкостей, відповідно розташований. Для цього кути α і β з кінематичної схеми відкладаємо на плані (рис. 2.2, в) так, щоб при обході по контуру в одному напрямі ланки 2 та її плану прискорень зустріти однойменні точки.

На прямій ab відкладаємо відрізок

$$as_2 = ab \cdot AS_2 / AB, \text{мм},$$

а на прямій πb – відрізок

$$\pi s_3 = bc \cdot CS_3 / BC, \text{мм}.$$

Прискорення точки D та центрів мас шатуна 2 і коромисла 3

$$a_D = \pi d \cdot \mu_a, \quad a_{S_2} = \pi s_2 \cdot \mu_a, \quad a_{S_3} = \pi s_3 \cdot \mu_a.$$

Аналогічно за теоремою подібності визначаються прискорення будь-яких точок ланок механізмів.

Питання та завдання для самоконтролю

1. Як формулюються теореми подібності для планів швидкостей та прискорень?
2. Як застосовуються теореми подібності для визначення швидкостей та прискорень точок ланок?
3. Схематично без розрахунків побудувати план прискорень групи II класу 1 виду для іншого її розташування. Показати напрями кутових прискорень ланок.

2.6. Визначення швидкостей і прискорень груп II класу 2 та 3 видів методом планів

Побудуємо плани швидкостей та прискорень для двохповідкової групи 2 виду (рис. 2.4, а), для якої відомі швидкість $\overline{\upsilon}_A$ та прискорення $\overline{a}_A$ точки A.

Векторне рівняння для визначення швидкості точки B та відповідне рівняння у відрізках плану

$$\underset{\parallel xx}{\overline{\upsilon}_B} = \overline{\upsilon}_A + \underset{\perp AB}{\overline{\upsilon}_{BA}},$$

$$\overline{pb} = \overline{pa} + \overline{ab},$$

де $\overline{\upsilon}_{BA}$ – швидкість точки B відносно A, перпендикулярна AB. Точка B рухається вздовж напрямної xx, тому її швидкість та прискорення паралельні напрямній.

З точки a проводимо перпендикуляр до AB, а з полюса p – лінію, паралельну xx. На перетині знаходиться точка b (рис. 2.4, б).

Швидкості $\upsilon_B = pb \cdot \mu_\upsilon$, $\upsilon_{BA} = ab \cdot \mu_\upsilon$.

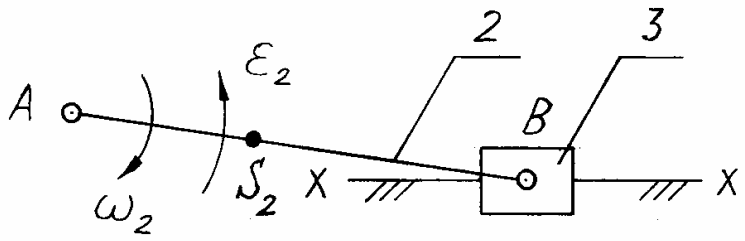
Кутова швидкість шатуна 2

$$\omega_2 = \upsilon_{BA} / l_{AB}, \text{ с}^{-1},$$

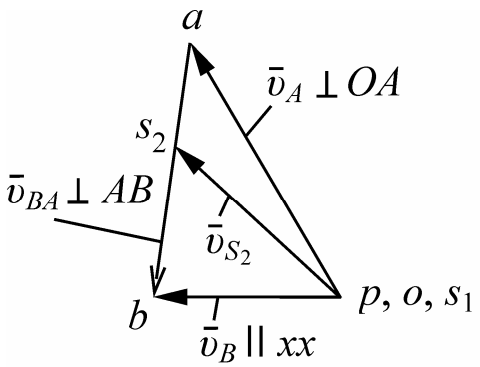
де l_{AB}, м, – довжина шатуна.

Для визначення напряму кутової швидкості виділяємо ланку 2 (рис. 2.4, в). Точка B разом з ланкою 2 рухається навколо нерухомої у відносному русі точки A в напрямі швидкості $\overline{\upsilon}_{BA}$.

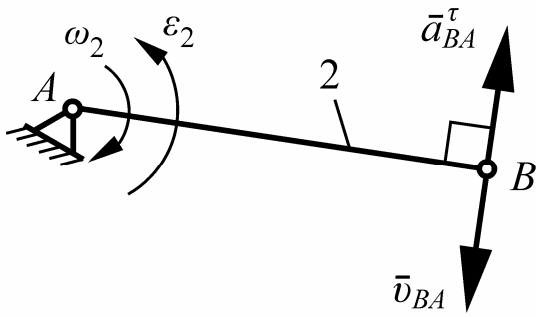
Тоді для даного положення шатун 2 повертається за стрілкою годинника з кутовою швидкістю ω_2.



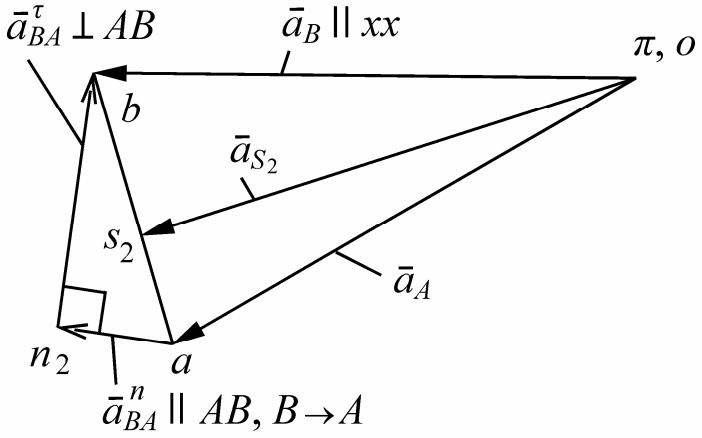
а



б



в



г

Рис. 2.4

Для визначення швидкості центра мас шатуна S_2 використаємо теорему подібності. На прямій ab відкладаємо відрізок

$$as_2 = ab \cdot AS_2 / AB, \text{ мм.}$$

Точку s_2 сполучаємо з полюсом p.

Швидкість точки S_2

$$\upsilon_{S_2} = ps_2 \cdot \mu_\upsilon .$$

Для визначення прискорення точки B складаємо векторне та відповідне рівняння у відрізках плану

$$\underset{\|xx}{\overline{a}_B} = \overline{a}_A + \underset{\substack{\|AB,\\ B\to A}}{\overline{a}^n_{BA}} + \underset{\perp AB}{\overline{a}^\tau_{BA}},$$

$$\overline{\pi b} = \overline{\pi a} + \overline{a n_2} + \overline{n_2 b},$$

де $\overline{a}^n_{BA}, \overline{a}^\tau_{BA}$ – нормальне і тангенціальне прискорення точки B відносно A.

Нормальне прискорення

$$a^n_{BA} = \omega_2^2 l_{AB}$$

зображається на плані відрізком

$$an_2 = a^n_{BA} / \mu_a, \text{ мм.}$$

Від точки a відкладаємо паралельно AB у напрямі від B до A відрізок $\overline{an_2}$ (рис. 2.4, г). З точки n_2 проводимо лінію, перпендикулярну AB, а з полюса π – паралельну xx. На їх перетині знаходиться точка b.

Прискорення

$$a^\tau_{BA} = n_2 b \cdot \mu_a, \quad a_B = \pi b \cdot \mu_a .$$

Кутове прискорення шатуна 2

$$\varepsilon_2 = a^\tau_{BA} / l_{AB} .$$

Для визначення напряму кутового прискорення виділяємо ланку 2 (рис. 2.4, в). Точку B разом з шатуном 2 повертаємо уявно навколо нерухомої у відносному русі точки A в напрямі тангенціального прискорення $\overline{a}^\tau_{BA}$. Одержаний для даного положення уявний напрям обертання проти стрілки годинника співпадає з напрямом ε_2.

На прямій ab відкладаємо відрізок

$$as_2 = ab \cdot AS_2 / AB .$$

Прискорення центра мас S_2 шатуна 2

$$a_{S_2} = \pi s_2 \cdot \mu_a.$$

Розглянемо групу II класу 3 виду (рис. 2.5, а). Точка A кривошипа 1 співпадає для будь–якого з положень з фізичною точкою A_3 куліси 3. Тобто розташування точки A_3 на кулісі залежить від положення механізму.

З попередніх планів відомі швидкість $\overline{\upsilon}_A$ та прискорення $\overline{a}_A$ точки A.

Швидкість точки A_3 знаходимо згідно векторного рівняння

$$\underset{\perp A_3B}{\overline{\upsilon}_{A_3}} = \overline{\upsilon}_A + \underset{\parallel A_3B}{\overline{\upsilon}_{A_3A}},$$

$$\overline{pa_3} = \overline{pa} + \overline{aa_3},$$

де $\overline{\upsilon}_{A_3A}$ – швидкість точки A_3 відносно A, паралельна A_3B. Швидкість точки A_3, яка належить кулісі, перпендикулярна до неї. Останнім записане відповідне векторне рівняння у відрізках плану.

З точки a плану проводимо лінію, паралельну A_3B, а з полюса p – лінію, перпендикулярну A_3B. На перетині знаходимо точку a_3 (рис. 2.5, б).

Швидкості $\upsilon_{A_3} = pa_3 \cdot \mu_\upsilon, \quad \upsilon_{A_3A} = aa_3 \cdot \mu_\upsilon.$

Кутова швидкість куліси 3

$$\omega_3 = \upsilon_{A_3} / l_{A_3B},$$

де l_{A_3B} , м, – відстань між точками A_3 і B.

Визначимо напрям кутової швидкості. Виділяємо ланку 3 (рис. 2.6). Точка A_3 разом з кулісою 3 рухається навколо нерухомої точки B у напрямі $\overline{\upsilon}_{A_3}$. Тоді куліса повертається для даного положення за стрілкою годинника з кутовою швидкістю ω_3.

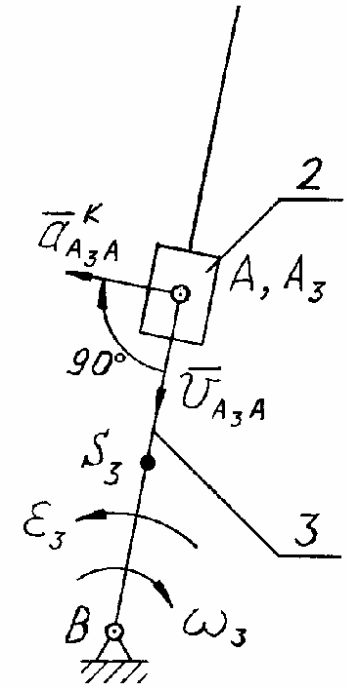
На прямій pa_3 відкладаємо відрізок

$$ps_3 = pa_3 \cdot BS_3 / A_3B, \text{ мм}.$$

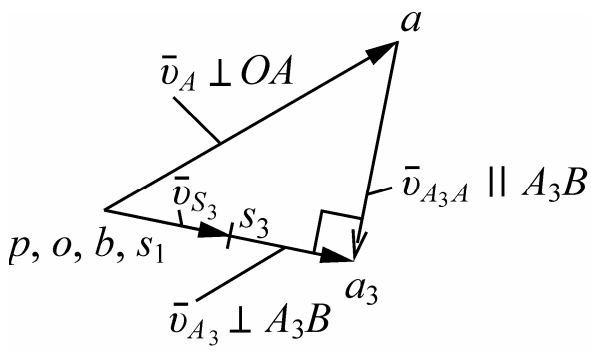
Точку s_3 сполучаємо з полюсом p.

Швидкість точки S_3

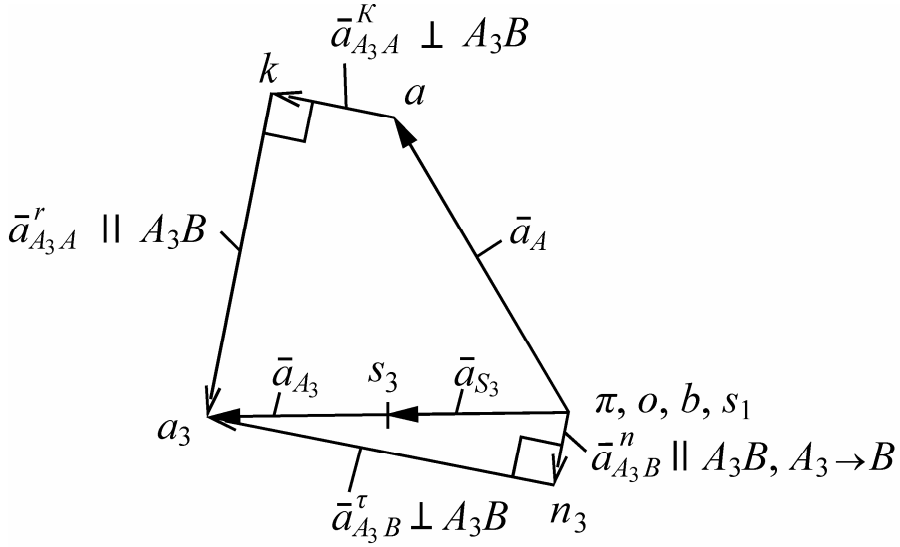
$$v_{S_3} = ps_3 \cdot \mu_v .$$



а



б



в

Рис. 2.5

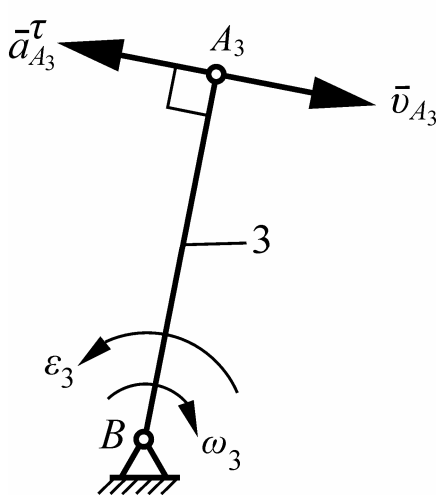


Рис. 2.6

Система векторних рівнянь та відповідна система у відрізках плану для визначення прискорення точки A_3 запишеться

$$\bar{a}_{A_3} = \bar{a}_A + \underbrace{\bar{a}^{\text{К}}_{A_3A}}_{\perp A_3B} + \underbrace{\bar{a}^{r}_{A_3A}}_{\parallel A_3B}, \; \bar{a}_{A_3} = \underbrace{\bar{a}^{n}_{A_3B}}_{\substack{\parallel A_3B,\\ A_3\to B}} + \underbrace{\bar{a}^{\tau}_{A_3B}}_{\perp A_3B};$$

$$\overline{\pi a_3} = \overline{\pi a} + \overline{ak} + \overline{ka_3}, \quad \overline{\pi a_3} = \overline{\pi n_3} + \overline{n_3 a_3},$$

де $\bar{a}^{\text{К}}_{A_3A}, \bar{a}^{r}_{A_3A}$ – прискорення Коріоліса та відносне точки A_3 відносно A; $\bar{a}^{n}_{A_3B}, \bar{a}^{\tau}_{A_3B}$ – нормальне і тангенціальне прискорення точки A_3 відносно B.

Напрям прискорення Коріоліса визначається поворотом вектора $\bar{\upsilon}_{A_3A}$ на 90° у бік обертання куліси (рис. 2.5, а).

Прискорення Коріоліса

$$a^{\text{К}}_{A_3A} = 2\omega_3 \upsilon_{A_3A}$$

зображається на плані відрізком

$$ak = a^{\text{К}}_{A_3A} / \mu_a \text{ , мм.}$$

Нормальне прискорення

$$a^{n}_{A_3B} = \omega_3^2 l_{A_3B}$$

зображається відрізком

$$\pi n_3 = a^n_{A_3B} / \mu_a, \text{ мм.}$$

Від точки a відкладаємо перпендикулярно A_3B у напрямі прискорення Коріоліса відрізок $\overline{ak}$, а від полюса π паралельно A_3B у напрямі від A_3 до B відрізок $\overline{\pi n_3}$ (рис. 2.5, в). З точки k проводимо лінію, паралельну A_3B, а з точки n_3 – перпендикулярну A_3B. На їх перетині знаходимо точку a_3.

Прискорення

$$a^\tau_{A_3B} = n_3 a_3 \cdot \mu_a, \quad a_{A_3} = \pi a_3 \cdot \mu_a.$$

Кутове прискорення куліси 3

$$\varepsilon_3 = a^\tau_{A_3B} / l_{A_3B}.$$

Для визначення напряму кутового прискорення куліси виділяємо ланку 3 (рис. 2.6). Повертаємо точку A_3 разом з кулісою 3 уявно навколо нерухомої точки B у напрямі тангенціального прискорення $\bar{a}^\tau_{A_3B}$. Одержуємо уявний напрям обертання проти стрілки годинника, який співпадає з напрямом кутового прискорення ε_3.

Відкладаючи на прямій πa_3 відрізок

$$\pi s_3 = \pi a_3 \cdot S_3B / A_3B,$$

знаходимо прискорення центра мас куліси 3

$$a_{S_3} = \pi s_3 \cdot \mu_a.$$

Аналогічно будуються плани швидкостей та прискорень для двоповідкових груп 4 та 5 видів.

Питання та завдання для самоконтролю

1. Як знаходиться напрям прискорення Коріоліса?
2. Як визначаються напрями кутових швидкостей і прискорень?
3. Схематично без розрахунків побудувати плани швидкостей і прискорень для груп II класу 2 і 3 видів при інших розташуваннях ланок.

2.7. Побудова планів положень механізмів

Розглянемо побудову планів положень на прикладі кривошипно – повзунного механізму.

Плани положень будуються в масштабі довжин μ_l. Зображаємо траєкторію точки A кривошипа (рис. 2.7). Знаходимо крайні положення механізму. Для них кривошип і шатун знаходяться на одній лінії. Позначаємо їх O і O'. З них початкове чи нульове положення O відповідає початку робочого ходу механізму. Траєкторію точки A ділимо на довільне число рівних частин, починаючи з нульового. Нумеруємо точки поділу 0, 1,…, 7 у напрямі обертання кривошипа. Положення точки B знаходимо методом засічок. Від точки A радіусом AB робимо дугові засічки на траєкторії точки B. Нумеруємо відповідно точки перетину 0, 1, … , 7. Сполучаємо відповідні точки A з точками B. Одержуємо план положень ланок механізму.

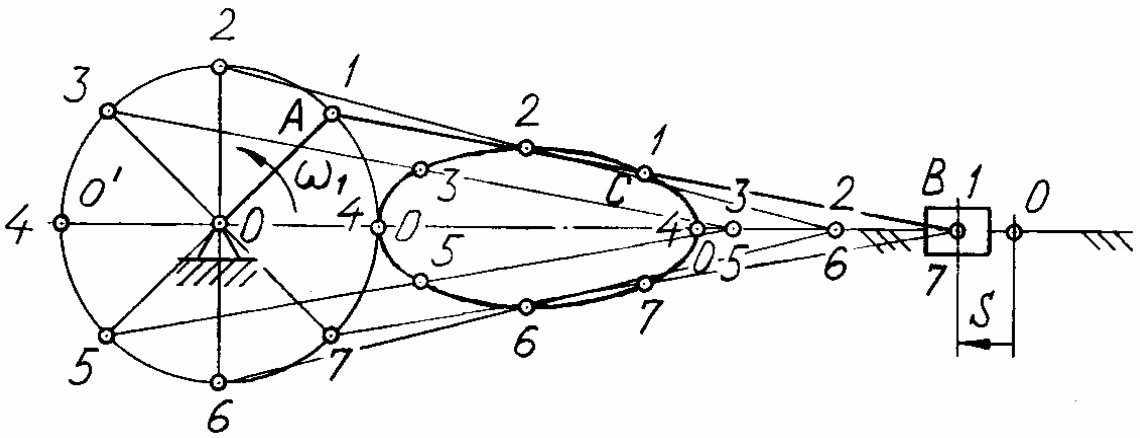


Рис. 2.7

Знайдемо крайні положення кривошипно – коромислового механізму (рис. 2.8). Показуємо траєкторії точок A кривошипа та B коромисла. З точки O радіусами $OA + AB$ і $AB - OA$ робимо дугові засічки на траєкторії точки B. Через одержані точки перетину B_0 і B'_0 та точку O кривошипа проводимо прямі. Ці

прямі перетинають траєкторію точки A в точках A_0 і A_0'. Для даного напряму обертання кривошипа точка A_0 відповідає початку робочого ходу механізму. Робочий хід відбувається на більшому куті повороту кривошипа. Побудова проміжних положень механізму проводиться аналогічно попередньому випадку.

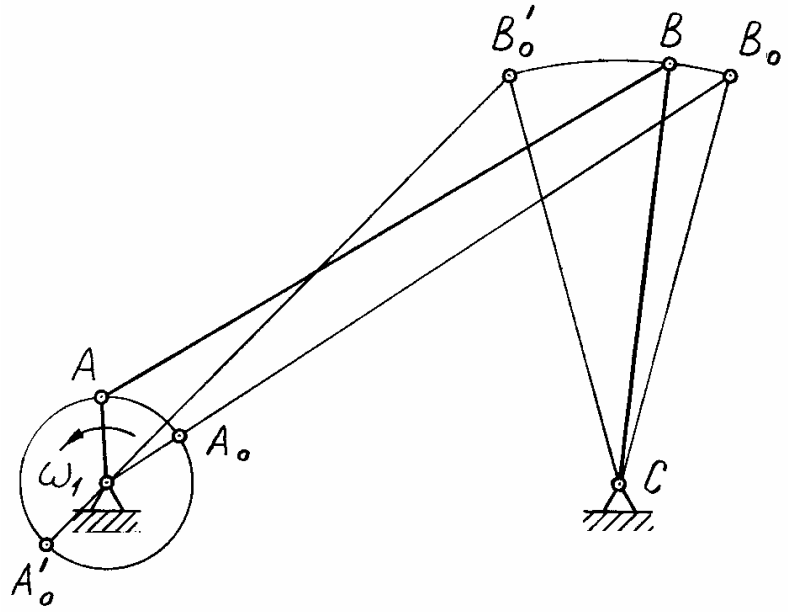


Рис. 2.8

Розглянемо кулісний механізм з хитною кулісою (рис.2.9). У крайніх положеннях куліса буде дотична до траєкторії точки A кривошипа. Побудуємо точки дотику. Відрізок OB ділимо точкою C пополам. З точки C радіусом OC проводимо дугу до перетину з траєкторією точки A. На перетині одержуємо точки A_0 і A_0'. Для даного напряму обертання кривошипа точка A_0 відповідає початку робочого ходу.

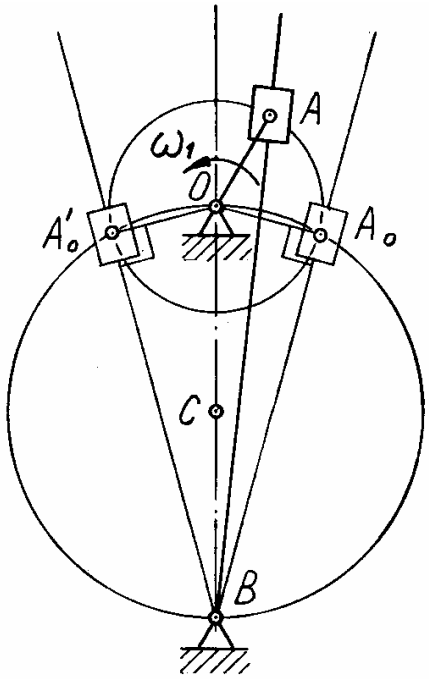


Рис. 2.9

2.8. Побудова траєкторій точок механізмів

Побудову траєкторій точок розглянемо на прикладі кривошипно – повзунного механізму. Нехай треба знайти траєкторію якої-небудь точки C, яка лежить на шатуні (рис. 2.7).

На відповідних положеннях шатуна робимо дугові засічки радіусом AC. Послідовно з'єднуючи точки C в різних положеннях механізму плавною кривою, одержуємо траєкторію точки C.

Траєкторії точок, які лежать на шатуні називаються шатунними кривими. Шатунні криві широко використовуються при проектуванні механізмів з відповідними рухами робочих органів.

2.9. Кінематичні діаграми

Графіки переміщень, швидкостей і прискорень від часу називаються кінематичними діаграмами. Вони використовуються для аналізу впливу розмірів ланок на кінематичні параметри. При побудові кінематичних діаграм кутова швидкість кривошипа приймається сталою.

Розглянемо побудову діаграми лінійних переміщень повзуна кривошипно – повзунного механізму.

По осі абсцис відкладаємо відрізок довжиною l, мм, який відповідає повному оберту кривошипа (рис. 2.10). Цей відрізок ділимо на таке саме число рівних частин, як при побудові планів положень механізму. Нумеруємо точки поділу 0, 1, … , 7, 0. Номер точки відповідає номеру положення механізму.

Час повного оберту кривошипа (період кінематичної діаграми)

$$T = 2\pi/\omega_1 \text{, с,}$$

де ω_1, с$^{-1}$, – кутова швидкість кривошипа.

Масштаб часу $\mu_t = T/l$, с/мм.

Масштаб кута повороту кривошипа $\mu_\varphi = 2\pi/l$, 1/мм.

По осі ординат відкладаємо переміщення повзуна s (рис. 2.7) від його початкового положення в масштабі $\mu_s = 2l_{OA}/h$, м/мм, де l_{OA}, м, – довжина кривошипа; h, мм, – хід повзуна на діаграмі.

Одержані точки 0_1, 1_1, 2_1, … сполучаємо плавною кривою, яка називається діаграмою переміщень повзуна $s(t)$.

Аналогічно будуються діаграми лінійних переміщень точок і кутових переміщень ланок інших механізмів.

Діаграми швидкостей і прискорень можуть бути одержані аналітично чи за допомогою планів. Розглянемо їх побудову методом графічного диференціювання.

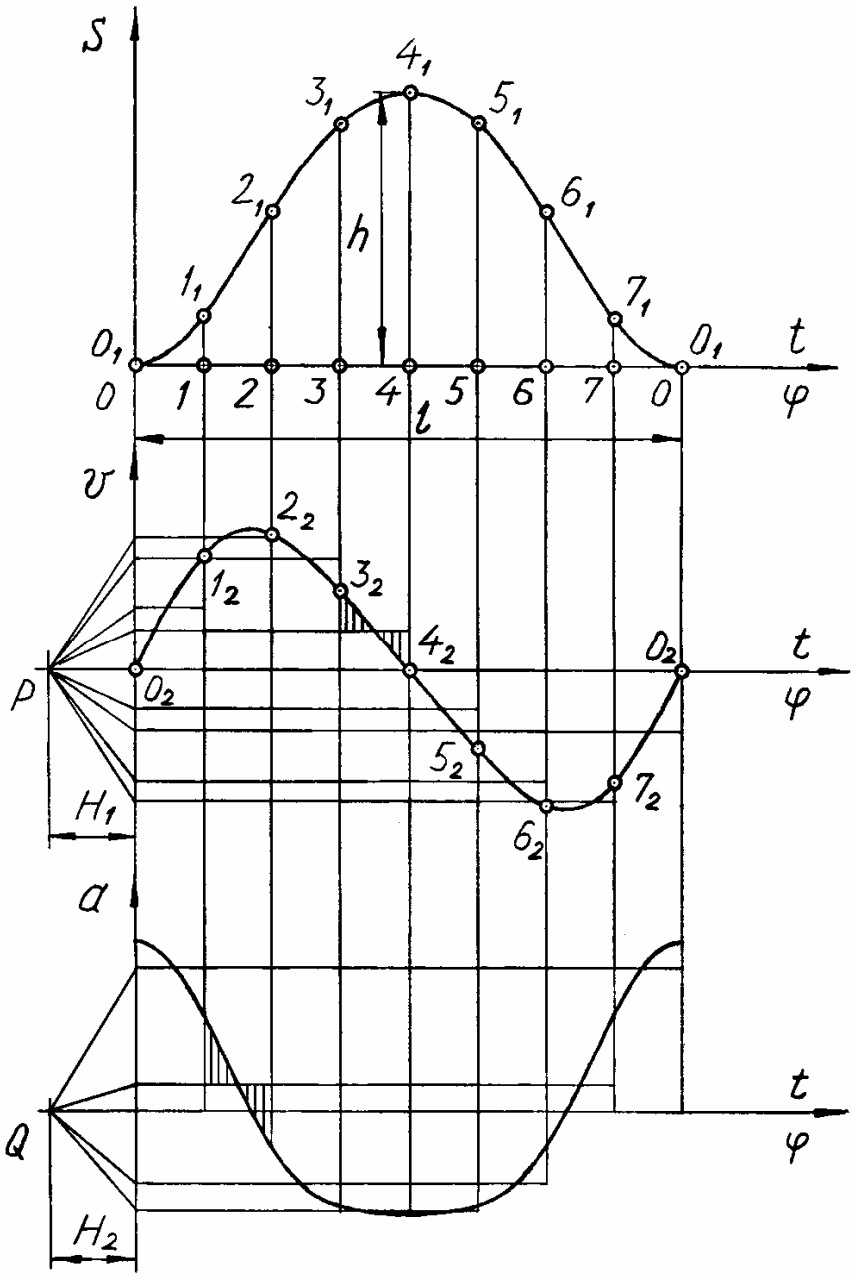


Рис. 2.10

Вибираємо полюсну відстань H_1, мм (рис. 2.10). З полюса P проводимо лінію, паралельну хорді $0_1 1_1$ до перетину з віссю ординат. З одержаної точки перетину проводимо горизонталь до ділянки 01. З полюса P проводимо лінію, паралельну хорді $1_1 2_1$ до перетину з віссю ординат. З точки перетину проводимо горизонталь до ділянки 12, і т.д. Ці горизонталі на ділянках 01, 12, 23, … ділимо пополам. Точки поділу сполучаємо плавною тонкою лінією. А тоді цю лінію проводимо трохи вище чи нижче, щоб площі криволінійних трикутників (на рис. 2.10 заштриховані) над і під горизонталями на ділянках 01, 12, 23,… були рівні. Одержуємо діаграму швидкостей.

Діаграма прискорень будується аналогічно. Відмінність у тому, що з полюса Q проводяться лінії, паралельні хордам $0_2 1_2$, $1_2 2_2$, …

Масштаби швидкостей і прискорень

$$\mu_v = \frac{\mu_s}{\mu_t H_1}, \text{ м·с}^{-1}/\text{мм},$$

$$\mu_a = \frac{\mu_v}{\mu_t H_2}, \text{ м·с}^{-2}/\text{мм},$$

де H_2, мм, – полюсна відстань діаграми прискорень.

Питання та завдання для самоконтролю

1. У якій послідовності будуються плани положень механізмів? Що називається шатунною кривою?
2. Як визначаються крайні положення кривошипно-коромислового, кривошипно-повзунного та кулісного механізмів?
3. Викласти послідовність побудови діаграм переміщень, швидкостей та прискорень.

Розділ 3. АНАЛІТИЧНА КІНЕМАТИКА ВАЖІЛЬНИХ МЕХАНІЗМІВ

При дослідженні та розрахунках важільних механізмів використовуються аналітичні методи. Графічні методи мають тепер допоміжне значення для контролю правильності обчислень [12].

Серед методів аналітичного визначення положень важільних механізмів існує тільки два загальні, застосовувані до будь-яких механізмів [12]. Це метод перетворення координат Ю.Ф.Морошкіна та замкнених векторних контурів В.А.Зіновьєва [6]. Для плоских механізмів останній є простішим [1, 13, 18]. Тому його застосуємо для найбільш розповсюджених у техніці плоских механізмів II класу.

На детальному аналізі літературних джерел не зупиняємось, оскільки це займає багато місця та виходить за рамки цієї роботи. Для спрощення розв'язування та його сприйняття в цьому розділі зроблено наступне.

Алгоритми кінематичного розрахунку механізмів II класу будуються на основі алгоритмів найпростіших механізмів, які містять одну структурну групу, без повторення аналогічних викладок. Для цього механізм ділиться на частини, кожна з яких являє собою найпростіший механізм та складається з одного або кількох замкнених контурів.

В алгоритмах найпростіших механізмів, для виключення диференціювання, швидкості та прискорення визначаються безпосередньо з векторних рівнянь, які використовуються для побудови планів. Аналоги швидкостей та прискорень не застосовуються, оскільки не дають переваг для розглядуваних задач. Виведені формули для визначення скалярних добутків базисних ортів, які дозволяють уникнути багаторазового використання формул зведення. Сформульоване правило для найпростішого знаходження швидкостей і прискорень. Серед можливих варіантів визначення положень механізмів вибрані ті, які дають найпростіші розрахункові формули та не мають точок

розриву, в околах яких необхідно проводити додаткове дослідження. Позначення по можливості наближені до методу планів.

3.1. Скалярні добутки та похідні базисних ортів

Кут повороту одиничного вектора (орта) $\bar{l}_{i,}\ i = 0, 1, 2,...,$ відносно орта $\bar{l}_j, j = 0, 1, 2,...,$ позначається через φ_{ij} (рис. 3.1). Додатні значення кутів відповідають повороту $\bar{l}_i$ відносно $\bar{l}_j$ проти стрілки годинника, від'ємні – в іншому випадку. Звідси випливає:

$$\varphi_{ij} = -\varphi_{ji}. \tag{3.1}$$

Кут φ_{ij} виражається через кути повороту відносно орта $\bar{l}_k, k = 0, 1, 2,...$:

$$\varphi_{ij} = \varphi_{ik} - \varphi_{jk} = \varphi_{ik} + \varphi_{kj}. \tag{3.2}$$

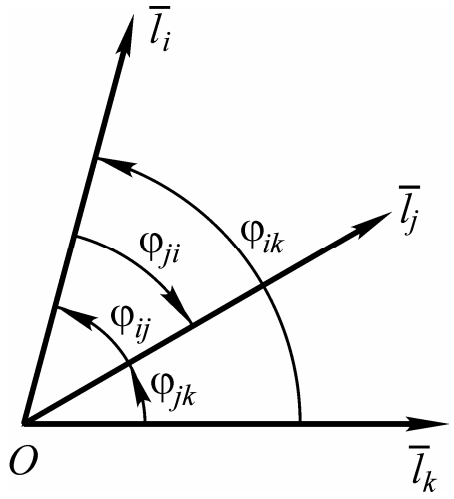


Рис. 3.1

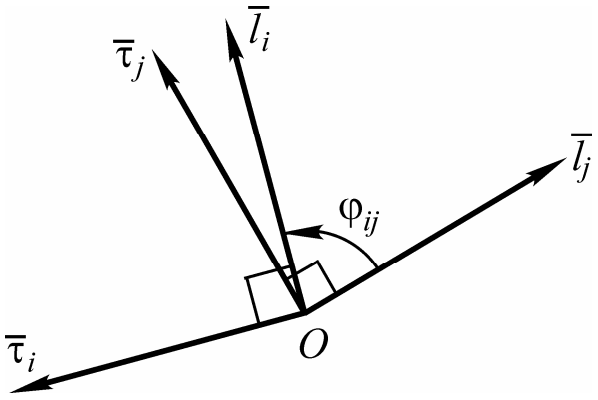


Рис. 3.2

Розглянемо дві праві прямокутні системи базисних ортів: i-ту та j-ту. Перша утворюється ортами $\bar{l}_i, \bar{\tau}_i$, друга – ортами $\bar{l}_j, \bar{\tau}_j$ (рис. 3.2). У правих системах найкоротший поворот від першого орта $\bar{l}_i$ базису до другого $\bar{\tau}_i$ здійснюється проти стрілки

годинника. Напрями ортів $\bar{l}_i, \bar{l}_j$ визначаються їх кутами повороту відповідно $\varphi_{ik}, \varphi_{jk}$ відносно орта $\bar{l}_k$.

Скалярні добутки різнойменних ортів різних базисів

$$\bar{l}_i \bar{\tau}_j = \cos(\pi/2 - \varphi_{ij}).$$

Остаточно, *скалярні добутки* відповідно *однойменних та різнойменних ортів* різних базисів

$$\bar{l}_i \bar{l}_j = \bar{\tau}_i \bar{\tau}_j = \cos\varphi_{ij}, \qquad \bar{l}_i \bar{\tau}_j = \sin\varphi_{ij}, \tag{3.3}$$

де $\cos\varphi_{ij} = \cos(-\varphi_{ji}) = \cos\varphi_{ji}$; $\sin\varphi_{ij} = \sin(-\varphi_{ji}) = -\sin\varphi_{ji}$.

Для ортів одного базису

$$\bar{l}_i \bar{l}_i = \bar{\tau}_i \bar{\tau}_i = 1, \qquad \bar{l}_i \bar{\tau}_i = 0. \tag{3.4}$$

Для знаходження *похідних ортів по куту*, останні повертаються на 90° проти стрілки годинника (рис. 3.3), тобто

$$\frac{d\bar{l}_i}{d\varphi_{ik}} = \bar{\tau}_i, \quad \frac{d\bar{\tau}_i}{d\varphi_{ik}} = -\bar{l}_i. \tag{3.5}$$

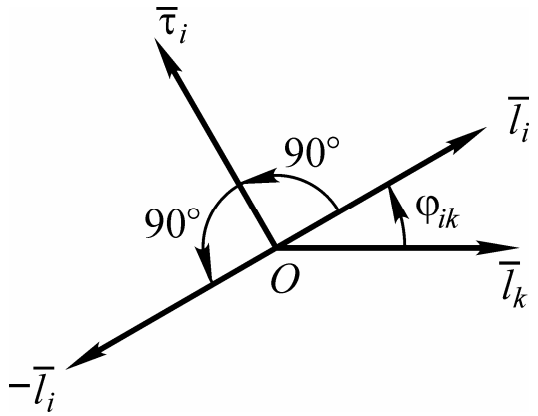


Рис. 3.3

3.2. Механізми II класу з одною структурною групою

Розглянемо **зміщений кривошипно-повзунний механізм** (рис. 3.4).

Рухомі ланки зв'яжемо з правими прямокутними системами базисних ортів $\bar{l}_i, \bar{\tau}_i, i = 1, 2, 3$. Орти $\bar{l}_1$, $\bar{l}_2$ напрямлені вздовж ланок

від центрів обертання в абсолютному чи відносному русі, а орт $\bar{l}_3$ – вздовж напрямної від кривошипа.

Ланки подамо у вигляді векторів, виражених через базисні орти. Ці вектори утворюють замкнений многокутник *OABCO*, для якого за правилом додавання векторів

$$\underline{l_{OC}}\bar{l}_3 + l_{BC}\bar{\tau}_3 = l_{OA}\bar{l}_1 + l_{AB}\underline{\bar{l}_2}, \qquad (3.6)$$

де $l_{OA}, l_{AB}, l_{BC}, l_{OC}$ – відстані між відповідними точками механізму.

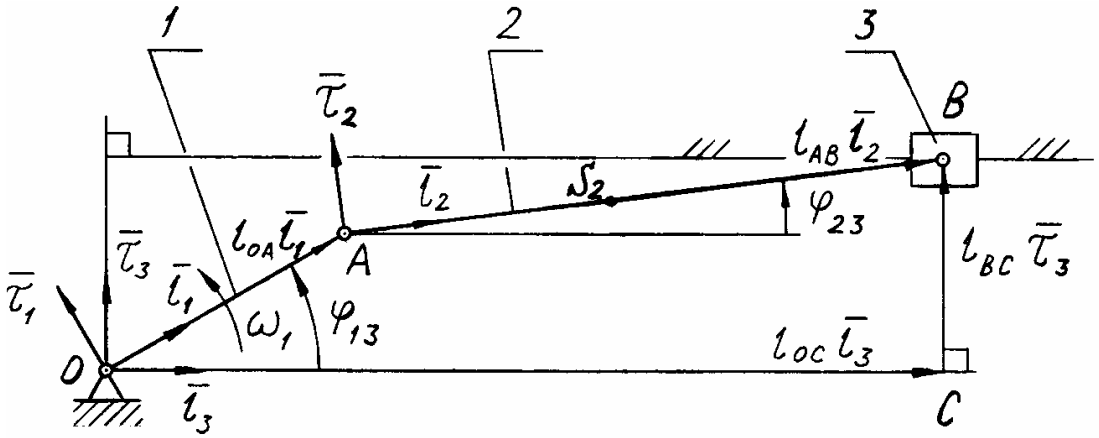


Рис. 3.4

Положення механізму в базисі $\bar{l}_3, \bar{\tau}_3$ визначаються однозначно кутом повороту кривошипа φ_{13}, який вважаємо заданим. Тоді в останньому рівнянні невідомими є відстань l_{OC} та напрям орта $\bar{l}_2$, який визначається кутом φ_{23}. Тут і далі невідомі підкреслюються.

Останнє рівняння множимо скалярно на орт $\bar{\tau}_3$, використовуючи формули (3.3), (3.4) для скалярних добутків. Одержимо

$$l_{BC} = l_{OA}\sin\varphi_{13} + l_{AB}\sin\varphi_{23}.$$

Звідси кут повороту шатуна

$$\varphi_{23} = \arcsin\frac{l_{BC} - l_{OA}\sin\varphi_{13}}{l_{AB}}. \qquad (3.7)$$

Рівняння (3.6) помножимо скалярно на орт $\bar{l}_3$. Знаходимо відстань

$$l_{OC} = l_{OA}\cos\varphi_{13} + l_{AB}\cos\varphi_{23}. \qquad (3.8)$$

Покажемо, як з рівняння (3.6) одержуються відомі векторні рівняння для швидкостей та прискорень.

Для визначення швидкостей продиференціюємо рівняння (3.6) по часу, враховуючи, що $l_{OA}, l_{AB}, l_{BC}, \bar{l}_3, \bar{\tau}_3$ – сталі. Маємо

$$\frac{dl_{OC}}{dt}\bar{l}_3 = l_{OA}\frac{d\bar{l}_1}{d\varphi_{13}}\frac{d\varphi_{13}}{dt} + l_{AB}\frac{d\bar{l}_2}{d\varphi_{23}}\frac{d\varphi_{23}}{dt}$$

чи, використовуючи формули (3.5),

$$\frac{dl_{OC}}{dt}\bar{l}_3 = l_{OA}\omega_1\bar{\tau}_1 + l_{AB}\omega_2\bar{\tau}_2.$$

Тут $\frac{dl_{OC}}{dt} = v_B^{l_3}$, $l_{OA}\omega_1 = v_A^{\tau_1}$, $l_{AB}\omega_2 = v_{BA}^{\tau_2}$ є проекціями векторів швидкостей точок *B*, *A* та *B* відносно *A* на відповідні орти; $\omega_i, i = 1, 2$ – кутова швидкість *i*-тої ланки відносно стояка.

Тут і далі індекси над швидкостями та прискореннями вказують на проекції векторів цих швидкостей та прискорень на відповідні орти. Наприклад, $v_B^{l_3}$ є проекцією вектора швидкості $\bar{v}_B$ точки *B* на орт $\bar{l}_3$.

Тоді останнє рівняння виглядатиме

$$\underline{v_B^{l_3}}\bar{l}_3 = v_A^{\tau_1}\bar{\tau}_1 + \underline{v_{BA}^{\tau_2}}\bar{\tau}_2 \qquad (3.9)$$

чи

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{BA}.$$

Диференціюючи рівняння (3.9) по часу, аналогічно одержимо

$$\frac{dv_B^{l_3}}{dt}\bar{l}_3 = \frac{dv_A^{\tau_1}}{dt}\bar{\tau}_1 + v_A^{\tau_1}\frac{d\bar{\tau}_1}{d\varphi_{13}}\frac{d\varphi_{13}}{dt} + \frac{dv_{BA}^{\tau_2}}{dt}\bar{\tau}_2 + v_{BA}^{\tau_2}\frac{d\bar{\tau}_2}{d\varphi_{23}}\frac{d\varphi_{23}}{dt}$$

чи

$$\underline{a_B^{l_3}}\bar{l}_3 = a_A^{\tau_1}\bar{\tau}_1 - a_A^{n_1}\bar{l}_1 + \underline{a_{BA}^{\tau_2}}\bar{\tau}_2 - a_{BA}^{n_2}\bar{l}_2, \qquad (3.10)$$

де $a_B^{l_3} = \frac{d\upsilon_B^{l_3}}{dt}$, $a_A^{\tau_1} = \frac{d\upsilon_A^{\tau_1}}{dt}$, $a_{BA}^{\tau_2} = \frac{d\upsilon_{BA}^{\tau_2}}{dt}$ – проекції прискорень точки *B*, *A* та *B* відносно *A* на відповідні орти; $a_A^{n_1} = \upsilon_A^{\tau_1}\omega_1$, $a_{BA}^{n_2} = \upsilon_{BA}^{\tau_2}\omega_2$ – величини нормальних прискорень точки *A* та точки *B* відносно *A*.

Тоді рівняння (3.10) запишеться:

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A^{n_1} + \bar{a}_A^{\tau_1} + \bar{a}_{BA}^{n_2} + \bar{a}_{BA}^{\tau_2}.$$

Аналогічно виводяться векторні рівняння швидкостей і прискорень для механізмів з іншими групами Ассура.

Для виключення диференціювання надалі будемо виходити безпосередньо з відомих векторних рівнянь, які використовуються для побудови планів.

Додатні напрями кутових швидкостей і кутових прискорень приймаються скрізь проти стрілки годинника. Їм відповідають додатні напрями лінійних швидкостей при обертальному русі ланок та тангенціальних прискорень. Це дозволяє по знакам кутової швидкості та кутового прискорення визначати їх напрями. Знак "+" відповідає напряму проти стрілки годинника, а "–" – за.

Швидкість точки *A* кривошипа $\bar{\upsilon}_A = \upsilon_A^{\tau_1}\bar{\tau}_1$, де

$$\upsilon_A^{\tau_1} = \omega_1 l_{OA}. \qquad (3.11)$$

Якщо кривошип обертається за стрілкою годинника, то в формулу треба підставляти від'ємне значення його кутової швидкості ω_1.

У рівнянні (3.9) невідомими є величини швидкостей $\upsilon_B^{l_3}$ і $\upsilon_{BA}^{\tau_2}$.

При розв'язуванні, *векторні рівняння для швидкостей і прискорень в усіх випадках множаться скалярно на орти, перпендикулярні невідомим векторам.* Це приводить до найпростіших розв'язків.

Рівняння (3.9) множимо скалярно по черзі на орти $\bar{l}_2, \bar{\tau}_3$. Використовуючи формули (3.3), (3.4) одержимо

$$\upsilon_B^{l_3}\cos\varphi_{23} = -\upsilon_A^{\tau_1}\sin\varphi_{12},$$

$$0 = \upsilon_A^{\tau_1}\cos\varphi_{13} + \upsilon_{BA}^{\tau_2}\cos\varphi_{23}.$$

Звідси

$$\upsilon_B^{l_3} = -\upsilon_A^{\tau_1}\frac{\sin\varphi_{12}}{\cos\varphi_{23}}, \tag{3.12}$$

$$\upsilon_{BA}^{\tau_2} = -\upsilon_A^{\tau_1}\frac{\cos\varphi_{13}}{\cos\varphi_{23}}. \tag{3.13}$$

Кутова швидкість шатуна

$$\omega_2 = \upsilon_{BA}^{\tau_2}/l_{AB}. \tag{3.14}$$

Для визначення швидкості точки S_2 шатуна складаємо векторне рівняння

$$\overline{\upsilon}_{S_2} = \overline{\upsilon}_A + \overline{\upsilon}_{S_2A},$$

де $\overline{\upsilon}_{S_2A}$ – швидкість точки S_2 відносно A.

Швидкість $\overline{\upsilon}_{S_2}$ розкладемо на складові по базису $\bar{l}_2$, $\bar{\tau}_2$:

$$\overline{\upsilon}_{S_2} = \upsilon_{S_2}^{l_2}\bar{l}_2 + \upsilon_{S_2}^{\tau_2}\bar{\tau}_2.$$

Підставимо її в останнє рівняння разом з $\overline{\upsilon}_A = \upsilon_A^{\tau_1}\bar{\tau}_1$ і $\overline{\upsilon}_{S_2A} = \upsilon_{S_2A}^{\tau_2}\bar{\tau}_2$, де

$$\upsilon_{S_2A}^{\tau_2} = \omega_2 l_{AS_2}. \tag{3.15}$$

Маємо

$$\underline{\upsilon_{S_2}^{l_2}}\bar{l}_2 + \underline{\upsilon_{S_2}^{\tau_2}}\bar{\tau}_2 = \upsilon_A^{\tau_1}\bar{\tau}_1 + \upsilon_{S_2A}^{\tau_2}\bar{\tau}_2.$$

Це рівняння помножимо скалярно послідовно на $\bar{l}_2$ і $\bar{\tau}_2$. Знаходимо

$$\upsilon_{S_2}^{l_2} = -\upsilon_A^{\tau_1}\sin\varphi_{12}, \tag{3.16}$$

$$\upsilon_{S_2}^{\tau_2} = \upsilon_A^{\tau_1}\cos\varphi_{12} + \upsilon_{S_2A}^{\tau_2}. \tag{3.17}$$

Нормальне і тангенціальне прискорення точки A кривошипа

$$a_A^{n_1} = \omega_1^2 l_{OA}, \tag{3.18}$$

$$a_A^{\tau_1} = \varepsilon_1 l_{OA}, \tag{3.19}$$

де кутове прискорення кривошипа ε_1 вважаємо заданим. Якщо ε_1 напрямлене за стрілкою годинника, то в формулу треба підставляти від'ємне значення.

Нормальне прискорення точки B відносно A

$$a_{BA}^{n_2} = \omega_2^2 l_{AB}. \tag{3.20}$$

У рівнянні (10) невідомими є прискорення $a_B^{l_3}$ та $a_{BA}^{\tau_2}$. Для їх визначення це рівняння множимо скалярно по черзі на $\bar{l}_2$ та $\bar{\tau}_3$:

$$a_B^{l_3}\cos\varphi_{23} = -a_A^{n_1}\cos\varphi_{12} - a_A^{\tau_1}\sin\varphi_{12} - a_{BA}^{n_2},$$

$$0 = -a_A^{n_1}\sin\varphi_{13} + a_A^{\tau_1}\cos\varphi_{13} - a_{BA}^{n_2}\sin\varphi_{23} + a_{BA}^{\tau_2}\cos\varphi_{23}.$$

Звідси

$$a_B^{l_3} = -(a_A^{n_1}\cos\varphi_{12} + a_A^{\tau_1}\sin\varphi_{12} + a_{BA}^{n_2})/\cos\varphi_{23}, \tag{3.21}$$

$$a_{BA}^{\tau_2} = (a_A^{n_1}\sin\varphi_{13} - a_A^{\tau_1}\cos\varphi_{13} + a_{BA}^{n_2}\sin\varphi_{23})/\cos\varphi_{23}. \tag{3.22}$$

Кутове прискорення шатуна

$$\varepsilon_2 = a_{BA}^{\tau_2}/l_{AB}. \tag{3.23}$$

Прискорення точки S_2 визначається з векторного рівняння

$$\bar{a}_{S_2} = \bar{a}_A + \bar{a}_{S_2A},$$

де $\bar{a}_{S_2A}$ – прискорення точки S_2 відносно A.

Прискорення $\bar{a}_A$ розкладемо на складові по базису $\bar{l}_1, \bar{\tau}_1$, а прискорення $\bar{a}_{S_2}, \bar{a}_{S_2A}$ – по базису $\bar{l}_2, \bar{\tau}_2$ і підставимо в останнє рівняння. Одержимо

$$\underline{a_{S_2}^{l_2}}\,\bar{l}_2 + \underline{a_{S_2}^{\tau_2}}\,\bar{\tau}_2 = -a_A^{n_1}\bar{l}_1 + a_A^{\tau_1}\bar{\tau}_1 - a_{S_2A}^{n_2}\bar{l}_2 + a_{S_2A}^{\tau_2}\bar{\tau}_2.$$

Нормальне і тангенціальне прискорення точки S_2 відносно A

$$a_{S_2A}^{n_2} = \omega_2^2 l_{AS_2}, \tag{3.24}$$

$$a_{S_2A}^{\tau_2} = \varepsilon_2 l_{AS_2}. \tag{3.25}$$

Помножимо останнє рівняння послідовно на $\bar{l}_2$ та $\bar{\tau}_2$. Знаходимо складові прискорення точки S_2

$$a_{S_2}^{l_2} = -a_A^{n_1}\cos\varphi_{12} - a_A^{\tau_1}\sin\varphi_{12} - a_{S_2A}^{n_2}, \tag{3.26}$$

$$a_{S_2}^{\tau_2} = -a_A^{n_1}\sin\varphi_{12} + a_A^{\tau_1}\cos\varphi_{12} + a_{S_2A}^{\tau_2}. \tag{3.27}$$

У кінематичному аналізі кривошипно-повзунного механізму послідовно визначаються φ_{23}, l_{OC}, $v_A^{\tau_1}$, $v_B^{l_3}$, $v_{BA}^{\tau_2}$, ω_2, $v_{S_2A}^{\tau_2}$, $v_{S_2}^{l_2}$, $v_{S_2}^{\tau_2}$, $a_A^{n_1}$, $a_A^{\tau_1}$, $a_{BA}^{n_2}$, $a_B^{l_3}$, $a_{BA}^{\tau_2}$, ε_2, $a_{S_2A}^{n_2}$, $a_{S_2A}^{\tau_2}$, $a_{S_2}^{l_2}$, $a_{S_2}^{\tau_2}$ відповідно по формулам (3.7), (3.8), (3.11)…(3.27).

Для зручності користування наводимо ці формули в порядку розрахунків **кривошипно-повзунного механізму**:

$$\varphi_{23} = \arcsin\frac{l_{BC} - l_{OA}\sin\varphi_{13}}{l_{AB}};\quad l_{OC} = l_{OA}\cos\varphi_{13} + l_{AB}\cos\varphi_{23};$$

$$v_A^{\tau_1} = \omega_1 l_{OA};\quad v_B^{l_3} = -v_A^{\tau_1}\frac{\sin\varphi_{12}}{\cos\varphi_{23}};\quad v_{BA}^{\tau_2} = -v_A^{\tau_1}\frac{\cos\varphi_{13}}{\cos\varphi_{23}};\quad \omega_2 = v_{BA}^{\tau_2}/l_{AB};$$

$$v_{S_2A}^{\tau_2} = \omega_2 l_{AS_2};\quad v_{S_2}^{l_2} = -v_A^{\tau_1}\sin\varphi_{12};\quad v_{S_2}^{\tau_2} = v_A^{\tau_1}\cos\varphi_{12} + v_{S_2A}^{\tau_2};$$

$$a_A^{n_1} = \omega_1^2 l_{OA};\quad a_A^{\tau_1} = \varepsilon_1 l_{OA};\quad a_{BA}^{n_2} = \omega_2^2 l_{AB};$$

$$a_B^{l_3} = -(a_A^{n_1}\cos\varphi_{12} + a_A^{\tau_1}\sin\varphi_{12} + a_{BA}^{n_2})/\cos\varphi_{23};$$

$$a_{BA}^{\tau_2} = (a_A^{n_1}\sin\varphi_{13} - a_A^{\tau_1}\cos\varphi_{13} + a_{BA}^{n_2}\sin\varphi_{23})/\cos\varphi_{23};\quad \varepsilon_2 = a_{BA}^{\tau_2}/l_{AB};$$

$$a_{S_2A}^{n_2} = \omega_2^2 l_{AS_2};\quad a_{S_2A}^{\tau_2} = \varepsilon_2 l_{AS_2};\quad a_{S_2}^{l_2} = -a_A^{n_1}\cos\varphi_{12} - a_A^{\tau_1}\sin\varphi_{12} - a_{S_2A}^{n_2};$$

$$a_{S_2}^{\tau_2} = -a_A^{n_1}\sin\varphi_{12} + a_A^{\tau_1}\cos\varphi_{12} + a_{S_2A}^{\tau_2}.$$

Кривошипно-коромисловий механізм показаний на рис. 3.5. Його ланки зв'яжемо з базисними ортами аналогічно попередньому випадку.

Векторне рівняння замкненості контуру *OACO*

$$l_{OA}\bar{l}_1 + \underline{l_{AC}}\,\underline{\bar{l}_4} = l_{OC}\bar{l}_5$$

множимо скалярно по черзі на орти $\bar{\tau}_5, \bar{l}_5$. Одержимо

$$\begin{aligned} l_{OA}\sin\varphi_{15} + l_{AC}\sin\varphi_{45} &= 0,\\ l_{OA}\cos\varphi_{15} + l_{AC}\cos\varphi_{45} &= l_{OC}. \end{aligned} \tag{3.28}$$

Звідси

$$\operatorname{tg}\varphi_{45} = \frac{l_{AC}\sin\varphi_{45}}{l_{AC}\cos\varphi_{45}} = \frac{-l_{OA}\sin\varphi_{15}}{l_{OC} - l_{OA}\cos\varphi_{15}},$$

$$\varphi_{45} = \operatorname{arctg}\frac{l_{OA}\sin\varphi_{15}}{l_{OA}\cos\varphi_{15} - l_{OC}}. \tag{3.29}$$

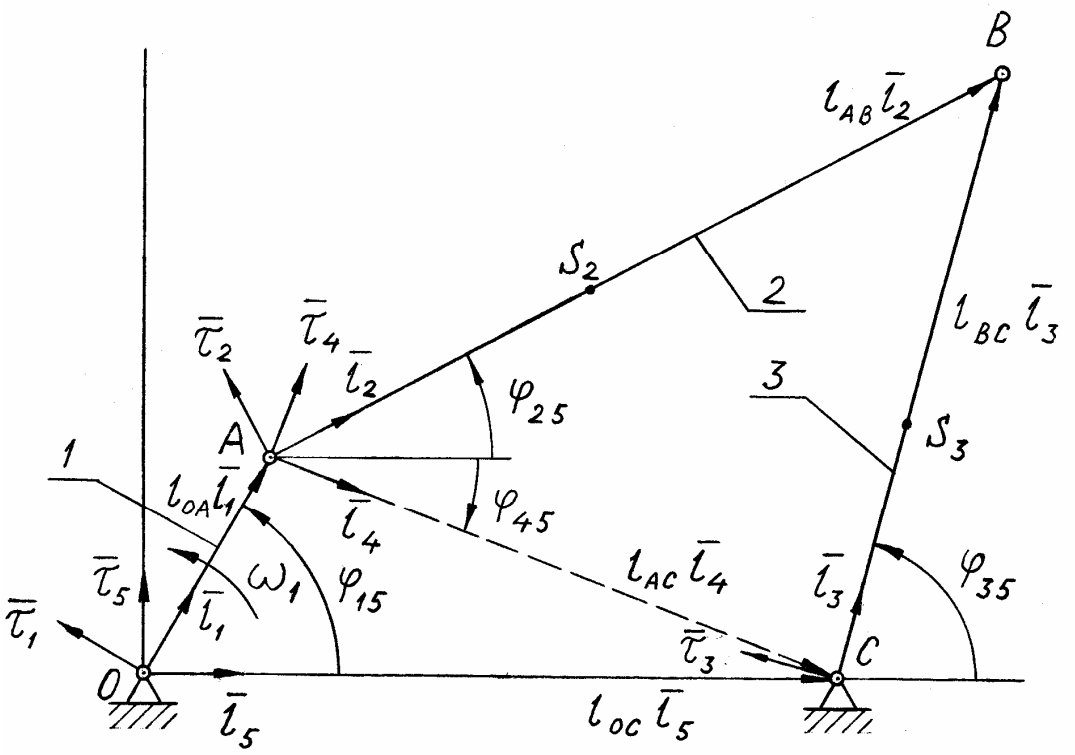


Рис. 3.5

З рівняння (3.28) відстань

$$l_{AC} = \frac{l_{OC} - l_{OA}\cos\varphi_{15}}{\cos\varphi_{45}}. \qquad (3.30)$$

Для контуру *ABCA* векторне рівняння замкненості

$$l_{AC}\bar{l}_4 + l_{BC}\bar{l}_3 = l_{AB}\bar{l}_2. \qquad (3.31)$$

Це рівняння піднесемо до скалярного квадрата. Маємо

$$l_{AC}^2 + l_{BC}^2 + 2l_{AC}l_{BC}\bar{l}_3\bar{l}_4 = l_{AB}^2$$

чи

$$2l_{AC}l_{BC}\cos\varphi_{34} = l_{AB}^2 - l_{AC}^2 - l_{BC}^2.$$

Оскільки косинус є парною функцією, звідси одержимо

$$\cos|\varphi_{34}| = \frac{l_{AB}^2 - l_{AC}^2 - l_{BC}^2}{2l_{AC}l_{BC}}.$$

Абсолютна величина кута

$$|\varphi_{34}| = \arccos\frac{l_{AB}^2 - l_{AC}^2 - l_{BC}^2}{2l_{AC}l_{BC}}. \qquad (3.32)$$

Рівняння (3.31) запишемо у вигляді

$$l_{BC}\bar{l}_3 = l_{AB}\bar{l}_2 - l_{AC}\bar{l}_4.$$

Останнє рівняння піднесемо до скалярного квадрата:

$$l_{BC}^2 = l_{AB}^2 + l_{AC}^2 - 2l_{AB}l_{AC}\cos\varphi_{24}.$$

Звідси аналогічно знаходимо

$$|\varphi_{24}| = \arccos\frac{l_{AB}^2 + l_{AC}^2 - l_{BC}^2}{2l_{AB}l_{AC}}. \qquad (3.33)$$

Використовуючи формулу (3.2), визначаємо кути

$$\varphi_{35} = \varphi_{45} \pm |\varphi_{34}|, \qquad (3.34)$$

$$\varphi_{25} = \varphi_{45} \pm |\varphi_{24}|, \qquad (3.35)$$

де знаки "+" відповідають розглядуваній схемі збирання, а "–" – схемі, показаній на рис. 3.6 суцільною лінією.

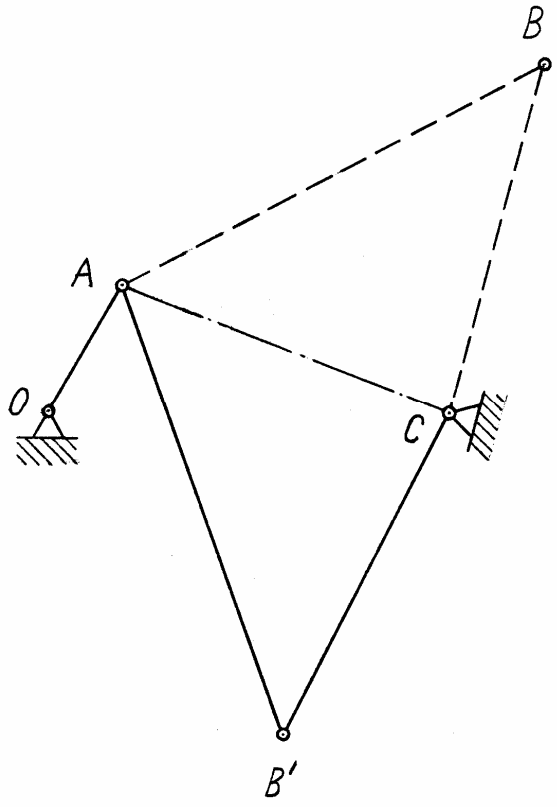


Рис. 3.6

Швидкість точки *A* кривошипа одержуємо по формулі (3.11).

У векторному рівнянні для визначення швидкості точки *B*

$$\overline{\upsilon}_B = \overline{\upsilon}_A + \overline{\upsilon}_{BA}$$

швидкості виразимо через відповідні орти та їх проекції на орти.

Маємо

$$\underline{\upsilon_B^{\tau_3}}\,\overline{\tau}_3 = \upsilon_A^{\tau_1}\overline{\tau}_1 + \underline{\upsilon_{BA}^{\tau_2}}\,\overline{\tau}_2 .$$

Останнє рівняння множимо скалярно на орти $\bar{l}_3$ і $\bar{l}_2$. Одержимо

$$0 = -\upsilon_A^{\tau_1}\sin\varphi_{13} + \upsilon_{BA}^{\tau_2}\sin\varphi_{32},$$

$$-\upsilon_B^{\tau_3}\sin\varphi_{32} = -\upsilon_A^{\tau_1}\sin\varphi_{12}.$$

Звідси швидкості

$$\upsilon_{BA}^{\tau_2} = \upsilon_A^{\tau_1}\frac{\sin\varphi_{13}}{\sin\varphi_{32}}, \tag{3.36}$$

$$\upsilon_B^{\tau_3} = \upsilon_A^{\tau_1}\frac{\sin\varphi_{12}}{\sin\varphi_{32}}. \tag{3.37}$$

Кутова швидкість шатуна ω_2 визначається по формулі (3.14), а коромисла:

$$\omega_3 = \upsilon_B^{\tau_3}/l_{BC}. \tag{3.38}$$

Швидкість точки S_2 шатуна знаходимо як для кривошипно-повзунного механізму

$$\overline{\upsilon}_{S_2} = \underline{\upsilon_{S_2}^{l_2}}\,\bar{l}_2 + \underline{\upsilon_{S_2}^{\tau_2}}\,\overline{\tau}_2,$$

де її проекції визначаються за формулами (3.15)…(3.17).

Швидкість точки S_3 коромисла

$$\overline{\upsilon}_{S_3} = \upsilon_{S_3}^{\tau_3}\overline{\tau}_3,$$

де

$$\upsilon_{S_3}^{\tau_3} = \omega_3 l_{CS_3}. \tag{3.39}$$

У векторному рівнянні для визначення прискорення точки B

$$\overline{a}_B = \overline{a}_A + \overline{a}_{BA}$$

прискорення розкладемо на нормальні і тангенціальні складові

$$\overline{a}_B^{n_3} + \overline{a}_B^{\tau_3} = \overline{a}_A^{n_1} + \overline{a}_A^{\tau_1} + \overline{a}_{BA}^{n_2} + \overline{a}_{BA}^{\tau_2},$$

які виразимо через відповідні орти. Знаходимо

$$-a_B^{n_3}\bar{l}_3 + \underline{a_B^{\tau_3}}\,\overline{\tau}_3 = -a_A^{n_1}\bar{l}_1 + a_A^{\tau_1}\overline{\tau}_1 - a_{BA}^{n_2}\bar{l}_2 + \underline{a_{BA}^{\tau_2}}\,\overline{\tau}_2 .$$

Нормальне прискорення точки B

$$a_B^{n_3} = \omega_3^2 l_{BC}. \tag{3.40}$$

Прискорення $a_A^{n_1}$, $a_A^{\tau_1}$, $a_{BA}^{n_2}$ визначаються по формулам (3.18)…(3.20) попереднього випадку.

Помножимо останнє рівняння скалярно по черзі на орти $\bar{l}_3$ і $\bar{l}_2$.Одержимо

$$-a_B^{n_3} = -a_A^{n_1}\cos\varphi_{13} - a_A^{\tau_1}\sin\varphi_{13} - a_{BA}^{n_2}\cos\varphi_{32} + \underline{a_{BA}^{\tau_2}}\sin\varphi_{32},$$

$$-a_B^{n_3}\cos\varphi_{32} - \underline{a_B^{\tau_3}}\sin\varphi_{32} = -a_A^{n_1}\cos\varphi_{12} - a_A^{\tau_1}\sin\varphi_{12} - a_{BA}^{n_2}.$$

Звідси

$$a_{BA}^{\tau_2} = (a_A^{n_1}\cos\varphi_{13} + a_A^{\tau_1}\sin\varphi_{13} + a_{BA}^{n_2}\cos\varphi_{32} - a_B^{n_3})/\sin\varphi_{32}, \tag{3.41}$$

$$a_B^{\tau_3} = (a_A^{n_1}\cos\varphi_{12} + a_A^{\tau_1}\sin\varphi_{12} - a_B^{n_3}\cos\varphi_{32} + a_{BA}^{n_2})/\sin\varphi_{32}. \tag{3.42}$$

Кутове прискорення ε_2 шатуна визначаємо по формулі (3.23), а коромисла – по формулі

$$\varepsilon_3 = a_B^{\tau_3}/l_{BC}. \tag{3.43}$$

Прискорення точки S_2 шатуна одержується як у попередньому випадку за формулою

$$\bar{a}_{S_2} = a_{S_2}^{l_2}\bar{l}_2 + a_{S_2}^{\tau_2}\bar{\tau}_2,$$

де його проекції визначаються по формулам (3.24)…(3.27).

Прискорення точки S_3 коромисла

$$\bar{a}_{S_3} = -a_{S_3}^{n_3}\bar{l}_3 + a_{S_3}^{\tau_3}\bar{\tau}_3,$$

де її нормальне і тангенціальне прискорення

$$a_{S_3}^{n_3} = \omega_3^2 l_{CS_3}, \tag{3.44}$$

$$a_{S_3}^{\tau_3} = \varepsilon_3 l_{CS_3}. \tag{3.45}$$

Для розрахунку кривошипно-коромислового механізму послідовно визначаються φ_{45}, l_{AC}, $|\varphi_{34}|$, $|\varphi_{24}|$, φ_{35}, φ_{25}, $v_A^{\tau_1}$, $v_{BA}^{\tau_2}$, $v_B^{\tau_3}$, ω_2, ω_3, $v_{S_2A}^{\tau_2}$, $v_{S_2}^{l_2}$, $v_{S_2}^{\tau_2}$, $v_{S_3}^{\tau_3}$, $a_A^{n_1}$, $a_A^{\tau_1}$, $a_{BA}^{n_2}$, $a_B^{n_3}$, $a_{BA}^{\tau_2}$, $a_B^{\tau_3}$, ε_2, ε_3, $a_{S_2A}^{n_2}$, $a_{S_2A}^{\tau_2}$, $a_{S_2}^{l_2}$, $a_{S_2}^{\tau_2}$, $a_{S_3}^{n_3}$, $a_{S_3}^{\tau_3}$ відповідно за формулами (3.29), (3.30), (3.32)…(3.35), (3.11), (3.36), (3.37), (3.14), (3.38),

(3.15)…(3.17), (3.39), (3.18)…(3.20), (3.40)…(3.42), (3.23), (3.43), (3.24)…(3.27), (3.44), (3.45).

Наводимо алгоритм кінематичного розрахунку **кривошипно-коромислового механізму**:

$$\varphi_{45} = \operatorname{arctg}\frac{l_{OA}\sin\varphi_{15}}{l_{OA}\cos\varphi_{15} - l_{OC}};\quad l_{AC} = \frac{l_{OC} - l_{OA}\cos\varphi_{15}}{\cos\varphi_{45}};$$

$$|\varphi_{34}| = \arccos\frac{l_{AB}^2 - l_{AC}^2 - l_{BC}^2}{2l_{AC}l_{BC}};\quad |\varphi_{24}| = \arccos\frac{l_{AB}^2 + l_{AC}^2 - l_{BC}^2}{2l_{AB}l_{AC}};$$

$$\varphi_{35} = \varphi_{45} \pm |\varphi_{34}|;\quad \varphi_{25} = \varphi_{45} \pm |\varphi_{24}|;\quad \upsilon_A^{\tau_1} = \omega_1 l_{OA};\quad \upsilon_{BA}^{\tau_2} = \upsilon_A^{\tau_1}\frac{\sin\varphi_{13}}{\sin\varphi_{32}};$$

$$\upsilon_B^{\tau_3} = \upsilon_A^{\tau_1}\frac{\sin\varphi_{12}}{\sin\varphi_{32}};\quad \omega_2 = \upsilon_{BA}^{\tau_2}/l_{AB};\quad \omega_3 = \upsilon_B^{\tau_3}/l_{BC};\quad \upsilon_{S_2A}^{\tau_2} = \omega_2 l_{AS_2};$$

$$\upsilon_{S_2}^{l_2} = -\upsilon_A^{\tau_1}\sin\varphi_{12};\quad \upsilon_{S_2}^{\tau_2} = \upsilon_A^{\tau_1}\cos\varphi_{12} + \upsilon_{S_2A}^{\tau_2};\quad \upsilon_{S_3}^{\tau_3} = \omega_3 l_{CS_3};$$

$$a_A^{n_1} = \omega_1^2 l_{OA};\quad a_A^{\tau_1} = \varepsilon_1 l_{OA};\quad a_{BA}^{n_2} = \omega_2^2 l_{AB};\quad a_B^{n_3} = \omega_3^2 l_{BC};$$

$$a_{BA}^{\tau_2} = (a_A^{n_1}\cos\varphi_{13} + a_A^{\tau_1}\sin\varphi_{13} + a_{BA}^{n_2}\cos\varphi_{32} - a_B^{n_3})/\sin\varphi_{32};$$

$$a_B^{\tau_3} = (a_A^{n_1}\cos\varphi_{12} + a_A^{\tau_1}\sin\varphi_{12} - a_B^{n_3}\cos\varphi_{32} + a_{BA}^{n_2})/\sin\varphi_{32};$$

$$\varepsilon_2 = a_{BA}^{\tau_2}/l_{AB};\quad \varepsilon_3 = a_B^{\tau_3}/l_{BC};\quad a_{S_2A}^{n_2} = \omega_2^2 l_{AS_2};\quad a_{S_2A}^{\tau_2} = \varepsilon_2 l_{AS_2};$$

$$a_{S_2}^{l_2} = -a_A^{n_1}\cos\varphi_{12} - a_A^{\tau_1}\sin\varphi_{12} - a_{S_2A}^{n_2};$$

$$a_{S_2}^{\tau_2} = -a_A^{n_1}\sin\varphi_{12} + a_A^{\tau_1}\cos\varphi_{12} + a_{S_2A}^{\tau_2};\quad a_{S_3}^{n_3} = \omega_3^2 l_{CS_3};\quad a_{S_3}^{\tau_3} = \varepsilon_3 l_{CS_3}.$$

Кулісний механізм показаний на рис. 3.7. Точка A належить кривошипу 1, а точка A_3 – кулісі 3. У даному положенні вони співпадають.

Рівняння замкненості векторного контуру $OABO$

$$l_{AB}\bar{l}_3 = l_{OB}\bar{\tau}_4 + l_{OA}\bar{l}_1. \qquad (3.46)$$

Кулісний механізм може бути або з хитною, або з обертальною кулісою. У першому випадку $l_{OA} < l_{OB}$, у другому $l_{OA} > l_{OB}$.

Розглянемо *механізм з хитною кулісою*, для якого можливі два варіанти визначення геометричних параметрів.

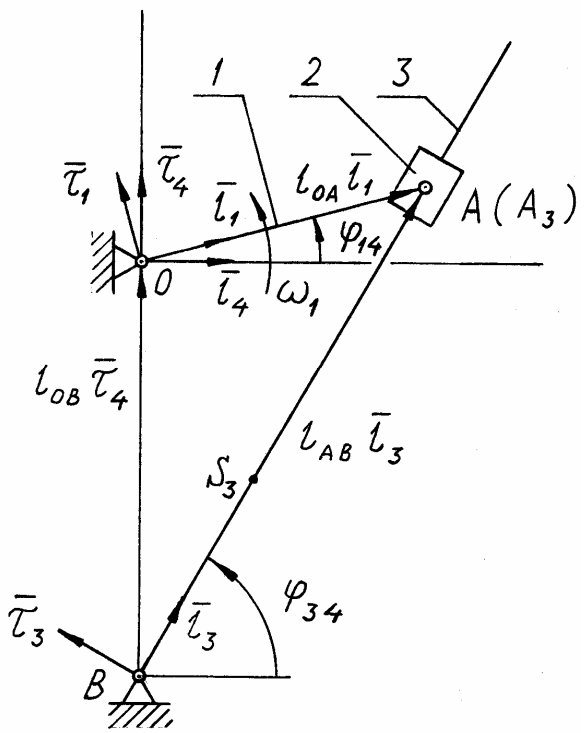


Рис. 3.7

1. Рівняння (3.46) множимо скалярно послідовно на орти $\bar{l}_4$ і $\bar{\tau}_4$. Маємо

$$l_{AB}\cos\varphi_{34} = l_{OA}\cos\varphi_{14}, \tag{3.47}$$

$$l_{AB}\sin\varphi_{34} = l_{OB} + l_{OA}\sin\varphi_{14}. \tag{3.48}$$

Звідси

$$\operatorname{ctg}\varphi_{34} = \frac{l_{AB}\cos\varphi_{34}}{l_{AB}\sin\varphi_{34}} = \frac{l_{OA}\cos\varphi_{14}}{l_{OB} + l_{OA}\sin\varphi_{14}},$$

$$\varphi_{34} = \operatorname{arcctg}\frac{l_{OA}\cos\varphi_{14}}{l_{OB} + l_{OA}\sin\varphi_{14}}. \tag{3.49}$$

З рівняння (3.48) відстань

$$l_{AB} = \frac{l_{OB} + l_{OA}\sin\varphi_{14}}{\sin\varphi_{34}}, \tag{3.50}$$

де

$$\sin\varphi_{34} \neq 0.$$

2. Якщо у використовуваній мові програмування немає функції arcctg *x*, то рівняння (3.46) підносимо до скалярного квадрата:

$$l_{AB}^2 = l_{OB}^2 + l_{OA}^2 + 2l_{OB}l_{OA}\sin\varphi_{14}.$$

Звідси відстань

$$l_{AB} = \sqrt{l_{OB}^2 + l_{OA}^2 + 2l_{OB}l_{OA}\sin\varphi_{14}}\,. \qquad (3.51)$$

З рівняння (3.47) знаходимо кут повороту куліси

$$\varphi_{34} = \arccos\frac{l_{OA}\cos\varphi_{14}}{l_{AB}}. \qquad (3.52)$$

Розглянемо послідовність розв'язування для *механізму з обертальною кулісою.*

Визначаємо відстань l_{AB} по формулі (3.51).

Рівняння (3.46) множимо скалярно на орт $\bar{\tau}_1$. Одержимо

$$l_{AB}\sin\varphi_{31} = l_{OB}\cos\varphi_{14},$$

звідки кут

$$\varphi_{31} = \arcsin\frac{l_{OB}\cos\varphi_{14}}{l_{AB}}. \qquad (3.53)$$

Можна довести, що $|\varphi_{31}| < \pi/2$. Тому за формулою (3.2)

$$\varphi_{34} = \varphi_{31} + \varphi_{14}. \qquad (3.54)$$

Швидкість точки *A*, яка належить кривошипу, знаходимо по формулі (3.11).

Швидкість точки A_3, яка належить кулісі 3, визначається з векторного рівняння

$$\bar{v}_{A_3} = \bar{v}_A + \bar{v}_{A_3A},$$

де $\bar{v}_{A_3A}$ – швидкість точки A_3 відносно *A*.

У цьому рівнянні швидкості виразимо через відповідні орти. Одержимо

$$v_{A_3}^{\tau_3}\bar{\tau}_3 = v_A^{\tau_1}\bar{\tau}_1 + v_{A_3A}^{l_3}\bar{l}_3.$$

Останнє рівняння помножимо скалярно по черзі на орти $\bar{l}_3$ і $\bar{\tau}_3$. Знаходимо

$$v_{A_3A}^{l_3} = v_A^{\tau_1}\sin\varphi_{13}, \qquad (3.55)$$

$$\upsilon_{A_3}^{\tau_3} = \upsilon_A^{\tau_1} \cos\varphi_{13}. \tag{3.56}$$

Кутова швидкість куліси

$$\omega_3 = \upsilon_{A_3}^{\tau_3} \big/ l_{A_3B}. \tag{3.57}$$

Швидкість точки S_3 куліси

$$\bar{\upsilon}_{S_3} = \upsilon_{S_3}^{\tau_3} \bar{\tau}_3,$$

де

$$\upsilon_{S_3}^{\tau_3} = \omega_3 l_{BS_3}. \tag{3.58}$$

Прискорення точки A_3 визначається з векторного рівняння

$$\bar{a}_{A_3} = \bar{a}_A + \bar{a}_{A_3A}^K + \bar{a}_{A_3A}^r, \tag{3.59}$$

де $\bar{a}_{A_3A}^K, \bar{a}_{A_3A}^r$ – прискорення Коріоліса і відносне точки A_3 відносно A.

Прискорення $\bar{a}_{A_3}$, $\bar{a}_A$ розкладемо на нормальні і тангенціальні складові і підставимо в рівняння (3.59). Маємо

$$\bar{a}_{A_3}^{n_3} + \bar{a}_{A_3}^{\tau_3} = \bar{a}_A^{n_1} + \bar{a}_A^{\tau_1} + \bar{a}_{A_3A}^K + \bar{a}_{A_3A}^r.$$

Складові прискорень в останньому рівнянні виразимо через відповідні орти.

Одержимо

$$-a_{A_3}^{n_3}\bar{l}_3 + \underline{a_{A_3}^{\tau_3}}\bar{\tau}_3 = -a_A^{n_1}\bar{l}_1 + a_A^{\tau_1}\bar{\tau}_1 + a_{A_3A}^K\bar{\tau}_3 + \underline{a_{A_3A}^r}\bar{l}_3. \tag{3.60}$$

Прискорення $a_A^{n_1}$, $a_A^{\tau_1}$ визначаються по формулам (3.18), (3.19).

Нормальне прискорення точки A_3

$$a_{A_3}^{n_3} = \omega_3^2 l_{A_3B}. \tag{3.61}$$

Прискорення Коріоліса

$$a_{A_3A}^K = 2\omega_3 \upsilon_{A_3A}^{l_3}. \tag{3.62}$$

Рівняння (3.60) множимо скалярно послідовно на орти $\bar{l}_3$ і $\bar{\tau}_3$. Знаходимо

$$a_{A_3A}^r = a_A^{n_1}\cos\varphi_{13} + a_A^{\tau_1}\sin\varphi_{13} - a_{A_3}^{n_3}, \tag{3.63}$$

$$a_{A_3}^{\tau_3} = a_{A_3A}^K - a_A^{n_1}\sin\varphi_{13} + a_A^{\tau_1}\cos\varphi_{13}. \tag{3.64}$$

Кутове прискорення куліси

$$\varepsilon_3 = a_{A_3}^{\tau_3} \big/ l_{A_3B}. \tag{3.65}$$

Прискорення точки S_3 куліси

$$\bar{a}_{S_3} = -a_{S_3}^{n_3}\bar{l}_3 + a_{S_3}^{\tau_3}\bar{\tau}_3,$$

де нормальне і тангенціальне прискорення

$$a_{S_3}^{n_3} = \omega_3^2 l_{BS_3}, \tag{3.66}$$

$$a_{S_3}^{\tau_3} = \varepsilon_3 l_{BS_3}. \tag{3.67}$$

Розрахунок кулісного механізму проводиться в наступній послідовності. Для механізму з хитною кулісою знаходяться φ_{34}, l_{AB} по формулам (3.49), (3.50) або l_{AB}, φ_{34} по (3.51), (3.52), а з обертальною кулісою – l_{AB}, φ_{31}, φ_{34} по формулам (3.51), (3.53), (3.54). Далі в обох випадках визначаються $v_A^{\tau_1}$, $v_{A_3A}^{l_3}$, $v_{A_3}^{\tau_3}$, ω_3, $v_{S_3}^{\tau_3}$, $a_A^{n_1}$, $a_A^{\tau_1}$, $a_{A_3}^{n_3}$, $a_{A_3A}^{K}$, $a_{A_3A}^{r}$, $a_{A_3}^{\tau_3}$, ε_3, $a_{S_3}^{n_3}$, $a_{S_3}^{\tau_3}$ відповідно за формулами (3.11), (3.55) … (3.58), (3.18), (3.19), (3.61) … (3.67).

Наводимо алгоритм кінематичного розрахунку **кулісного механізму**.

Для механізму з хитною кулісою знаходимо

$$\varphi_{34} = \operatorname{arcctg}\frac{l_{OA}\cos\varphi_{14}}{l_{OB} + l_{OA}\sin\varphi_{14}};\quad l_{AB} = \frac{l_{OB} + l_{OA}\sin\varphi_{14}}{\sin\varphi_{34}},$$

або

$$l_{AB} = \sqrt{l_{OB}^2 + l_{OA}^2 + 2l_{OB}l_{OA}\sin\varphi_{14}};\quad \varphi_{34} = \arccos\frac{l_{OA}\cos\varphi_{14}}{l_{AB}}.$$

Для механізму з обертальною кулісою визначаємо

$$l_{AB} = \sqrt{l_{OB}^2 + l_{OA}^2 + 2l_{OB}l_{OA}\sin\varphi_{14}};\quad \varphi_{31} = \arcsin\frac{l_{OB}\cos\varphi_{14}}{l_{AB}};$$

$$\varphi_{34} = \varphi_{31} + \varphi_{14}.$$

Далі знаходимо:

$$v_A^{\tau_1} = \omega_1 l_{OA};\quad v_{A_3A}^{l_3} = v_A^{\tau_1}\sin\varphi_{13};\quad v_{A_3}^{\tau_3} = v_A^{\tau_1}\cos\varphi_{13};\quad \omega_3 = v_{A_3}^{\tau_3} \big/ l_{A_3B};$$

$$v_{S_3}^{\tau_3} = \omega_3 l_{BS_3};\quad a_A^{n_1} = \omega_1^2 l_{OA};\quad a_A^{\tau_1} = \varepsilon_1 l_{OA};\quad a_{A_3}^{n_3} = \omega_3^2 l_{A_3B};$$

$$a^K_{A_3A} = 2\omega_3 \upsilon^{l_3}_{A_3A};\ \ a^r_{A_3A} = a^{n_1}_A \cos\varphi_{13} + a^{\tau_1}_A \sin\varphi_{13} - a^{n_3}_{A_3};$$

$$a^{\tau_3}_{A_3} = a^K_{A_3A} - a^{n_1}_A \sin\varphi_{13} + a^{\tau_1}_A \cos\varphi_{13};\ \ \varepsilon_3 = a^{\tau_3}_{A_3} \big/ l_{A_3B};\ \ a^{n_3}_{S_3} = \omega_3^2 l_{BS_3};$$

$$a^{\tau_3}_{S_3} = \varepsilon_3 l_{BS_3}.$$

У **синусному механізмі** (рис. 3.8) точка A належить кривошипу 1, а точка A_3 – повзуну 3. У даний момент часу вони співпадають.

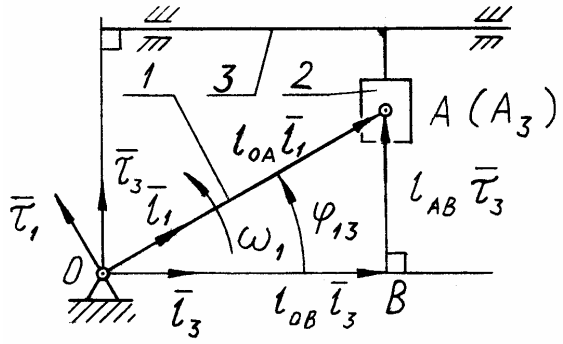


Рис. 3.8

Рівняння замкненості векторного контуру $OABO$ запишеться

$$\underline{l_{OB}}\bar{l}_3 + \underline{l_{AB}}\bar{\tau}_3 = l_{OA}\bar{l}_1.$$

Множимо його скалярно по черзі на орти $\bar{l}_3$ і $\bar{\tau}_3$. Одержимо

$$l_{OB} = l_{OA}\cos\varphi_{13}, \qquad (3.68)$$

$$l_{AB} = l_{OA}\sin\varphi_{13}. \qquad (3.69)$$

По формулі (3.11) знаходимо швидкість точки A, яка належить кривошипу.

Точка A_3 належить повзуну 3. Абсолютний рух точки A_3 відносно нерухомої системи координат, зв'язаної зі стояком, складається з переносного та відносного рухів. Відносним рухом точки A_3 є її рух відносно рухомої системи координат, зв'язаної з повзуном 2. Тобто, відносним рухом є рух точки A_3 відносно точки A. Переносним рухом точки A_3 є рух тієї точки рухомої системи, у якій в даний момент часу знаходиться точка A_3. Тобто, переносним рухом є рух точки A.

Згідно теореми про складання швидкостей, швидкість точки A_3 визначається з векторного рівняння

$$\overline{v}_{A_3} = \overline{v}_A + \overline{v}_{A_3A},$$

де $\overline{v}_{A_3A}$ – швидкість точки A_3 відносно A.

Виражаючи у цьому рівнянні швидкості через відповідні орти, одержимо

$$\underline{v_{A_3}^{l_3}}\,\bar{l}_3 = v_A^{\tau_1}\bar{\tau}_1 + \underline{v_{A_3A}^{\tau_3}}\,\bar{\tau}_3.$$

Це рівняння помножимо скалярно на орти $\bar{l}_3$, $\bar{\tau}_3$. Маємо

$$v_{A_3}^{l_3} = -v_A^{\tau_1}\sin\varphi_{13}, \tag{3.70}$$

$$v_{A_3A}^{\tau_3} = -v_A^{\tau_1}\cos\varphi_{13}. \tag{3.71}$$

Швидкості та прискорення всіх точок повзуна 3 однакові, оскільки він рухається поступально.

Прискорення точки A_3 визначаємо за теоремою Коріоліса. Оскільки рухома система координат, зв'язана з повзуном 2, не повертається, то прискорення Коріоліса рівне нулю. Тоді прискорення точки A_3

$$\overline{a}_{A_3} = \overline{a}_A + \overline{a}_{A_3A},$$

де $\overline{a}_{A_3A}$ – прискорення точки A_3 відносно A.

У цьому рівнянні прискорення $\overline{a}_A$ розкладемо на нормальну і тангенціальну складові, які виразимо через відповідні орти разом з прискореннями $\overline{a}_{A_3A}$ і $\overline{a}_{A_3}$. Одержимо

$$\underline{a_{A_3}^{l_3}}\,\bar{l}_3 = -a_A^{n_1}\bar{l}_1 + a_A^{\tau_1}\bar{\tau}_1 + \underline{a_{A_3A}^{\tau_3}}\,\bar{\tau}_3.$$

Визначаємо прискорення $a_A^{n_1}$, $a_A^{\tau_1}$ по формулам (3.18), (3.19).

Останнє рівняння множимо скалярно по черзі на орти $\bar{l}_3$, $\bar{\tau}_3$. Знаходимо

$$a_{A_3}^{l_3} = -a_A^{n_1}\cos\varphi_{13} - a_A^{\tau_1}\sin\varphi_{13}, \tag{3.72}$$

$$a_{A_3A}^{\tau_3} = a_A^{n_1}\sin\varphi_{13} - a_A^{\tau_1}\cos\varphi_{13}. \tag{3.73}$$

При розрахунку синусного механізму визначаються послідовно l_{OB}, l_{AB}, $v_A^{\tau_1}$, $v_{A_3}^{l_3}$, $v_{A_3A}^{\tau_3}$, $a_A^{n_1}$, $a_A^{\tau_1}$, $a_{A_3}^{l_3}$, $a_{A_3A}^{\tau_3}$ по

формулам (3.68), (3.69), (3.11), (3.70), (3.71), (3.18), (3.19), (3.72), (3.73).

Наводимо алгоритм кінематичного розрахунку **синусного механізму**:

$l_{OB} = l_{OA}\cos\varphi_{13}$; $l_{AB} = l_{OA}\sin\varphi_{13}$; $v_A^{\tau_1} = \omega_1 l_{OA}$; $v_{A_3}^{l_3} = -v_A^{\tau_1}\sin\varphi_{13}$;

$v_{A_3A}^{\tau_3} = -v_A^{\tau_1}\cos\varphi_{13}$; $a_A^{n_1} = \omega_1^2 l_{OA}$; $a_A^{\tau_1} = \varepsilon_1 l_{OA}$;

$a_{A_3}^{l_3} = -a_A^{n_1}\cos\varphi_{13} - a_A^{\tau_1}\sin\varphi_{13}$; $a_{A_3A}^{\tau_3} = a_A^{n_1}\sin\varphi_{13} - a_A^{\tau_1}\cos\varphi_{13}$.

Визначимо кінематичні параметри **тангенсного механізму**, який містить групу II класу 4 виду (рис. 3.9). Точка A належить кулісі 1, а точка A_3 – повзуну 3. У даному положенні вони співпадають.

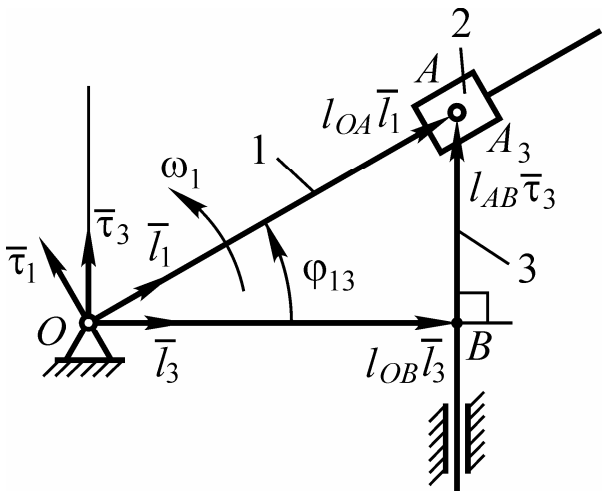


Рис. 3.9

Рівняння замкненості векторного контуру $OABO$ запишеться

$$\underline{l_{OB}}\bar{l}_3 + \underline{l_{AB}}\bar{\tau}_3 = l_{OA}\bar{l}_1.$$

Множимо це рівняння скалярно по черзі на орти $\bar{l}_3$ і $\bar{\tau}_3$. Знаходимо

$$l_{OB} = l_{OA}\cos\varphi_{13}, \qquad (3.74)$$

$$l_{AB} = l_{OA}\sin\varphi_{13}. \qquad (3.75)$$

За формулою (3.11) знаходимо швидкість точки A, яка належить кулісі 1.

Точка A_3 належить повзуну 3. Абсолютний рух точки A_3 відносно нерухомої системи координат, яка зв'язана зі стояком, складається з переносного та відносного рухів. Відносним рухом точки A_3 є її рух відносно рухомої системи координат, зв'язаної з кулісою 1. Тобто, відносним рухом є рух точки A_3 відносно точки A. Переносним рухом точки A_3 є рух тієї точки рухомої системи, у якій в даний момент часу знаходиться точка A_3. Тобто, переносним рухом є рух точки A.

За теоремою про складання швидкостей, швидкість точки A_3

$$\overline{\upsilon}_{A_3} = \overline{\upsilon}_A + \overline{\upsilon}_{A_3A},$$

де $\overline{\upsilon}_{A_3A}$ – швидкість точки A_3 відносно A.

Виразимо в цьому рівнянні швидкості через відповідні орти. Маємо

$$\underline{\upsilon_{A_3}^{\tau_3}}\,\overline{\tau}_3 = \upsilon_A^{\tau_1}\overline{\tau}_1 + \underline{\upsilon_{A_3A}^{l_1}}\,\bar{l}_1.$$

Останнє рівняння помножимо скалярно на орти $\bar{l}_3$, $\bar{\tau}_1$. Знаходимо

$$\upsilon_{A_3A}^{l_1} = \upsilon_A^{\tau_1}\,\mathrm{tg}\,\varphi_{13}, \tag{3.76}$$

$$\upsilon_{A_3}^{\tau_3} = \upsilon_A^{\tau_1}/\cos\varphi_{13}. \tag{3.77}$$

За теоремою Коріоліса прискорення точки A_3

$$\overline{a}_{A_3} = \overline{a}_A + \overline{a}_{A_3A}^K + \overline{a}_{A_3A}^r, \tag{3.78}$$

де $\overline{a}_{A_3A}^K, \overline{a}_{A_3A}^r$ – прискорення Коріоліса і відносне точки A_3 відносно A.

Прискорення $\overline{a}_A$ розкладемо на нормальну і тангенціальну складові і підставимо в рівняння (3.78). Маємо

$$\overline{a}_{A_3} = \overline{a}_A^{n_1} + \overline{a}_A^{\tau_1} + \overline{a}_{A_3A}^K + \overline{a}_{A_3A}^r.$$

Складові прискорень в останньому рівнянні виразимо через відповідні орти.

Одержимо

$$\underline{a_{A_3}^{\tau_3}}\,\overline{\tau}_3 = -a_A^{n_1}\bar{l}_1 + a_A^{\tau_1}\overline{\tau}_1 + a_{A_3A}^K\overline{\tau}_1 + \underline{a_{A_3A}^r}\,\bar{l}_1. \tag{3.79}$$

Прискорення $a_A^{n_1}$, $a_A^{\tau_1}$ визначаються по формулам (3.18), (3.19).

Прискорення Коріоліса

$$a^K_{A_3A} = 2\omega_1 \upsilon^{l_1}_{A_3A}. \qquad (3.80)$$

Рівняння (3.79) множимо скалярно послідовно на орти $\bar{l}_3$ і $\bar{\tau}_1$. Знаходимо

$$a^r_{A_3A} = a^{n_1}_A + (a^{\tau_1}_A + a^K_{A_3A})\operatorname{tg}\varphi_{13}, \qquad (3.81)$$

$$a^{\tau_3}_{A_3} = (a^{\tau_1}_A + a^K_{A_3A})/\cos\varphi_{13}. \qquad (3.82)$$

При розрахунку тангенсного механізму знаходяться послідовно l_{OB}, l_{AB}, $\upsilon^{\tau_1}_A$, $\upsilon^{l_1}_{A_3A}$, $\upsilon^{\tau_3}_{A_3}$, $a^{n_1}_A$, $a^{\tau_1}_A$, $a^K_{A_3A}$, $a^r_{A_3A}$, $a^{\tau_3}_{A_3}$ по формулам (3.74), (3.75), (3.11), (3.76), (3.77), (3.18), (3.19), (3.80), (3.81), (3.82).

Наводимо алгоритм кінематичного розрахунку **тангенсного механізму**:

$l_{OB} = l_{OA}\cos\varphi_{13}$; $l_{AB} = l_{OA}\sin\varphi_{13}$; $\upsilon^{\tau_1}_A = \omega_1 l_{OA}$; $\upsilon^{l_1}_{A_3A} = \upsilon^{\tau_1}_A \operatorname{tg}\varphi_{13}$,

$\upsilon^{\tau_3}_{A_3} = \upsilon^{\tau_1}_A/\cos\varphi_{13}$; $a^{n_1}_A = \omega_1^2 l_{OA}$; $a^{\tau_1}_A = \varepsilon_1 l_{OA}$; $a^K_{A_3A} = 2\omega_1\upsilon^{l_1}_{A_3A}$;

$a^r_{A_3A} = a^{n_1}_A + (a^{\tau_1}_A + a^K_{A_3A})\operatorname{tg}\varphi_{13}$; $a^{\tau_3}_{A_3} = (a^{\tau_1}_A + a^K_{A_3A})/\cos\varphi_{13}$.

3.3. Алгоритми кінематичного розрахунку механізмів II класу

У попередньому параграфі для найпростіших механізмів розроблені алгоритми розрахунку. Покажемо на прикладах, як ці алгоритми застосувати до більш складних механізмів II класу. Це дозволяє позбавитись від повторення аналогічних викладок.

Розглянемо *механізм преса* (рис. 3.10, а).

Поділяємо механізм на дві *частини, які містять в собі по одній структурній групі* (рис. 3.10, б, в). *У частинах нумеруємо ланки та позначаємо точки саме так, як на даному механізмі. Показуємо базисні орти* $\bar{l}_i$ *у відповідності з нумерацією ланок. Їх напрями вибираємо так само, як для найпростіших механізмів з одною структурною групою.*

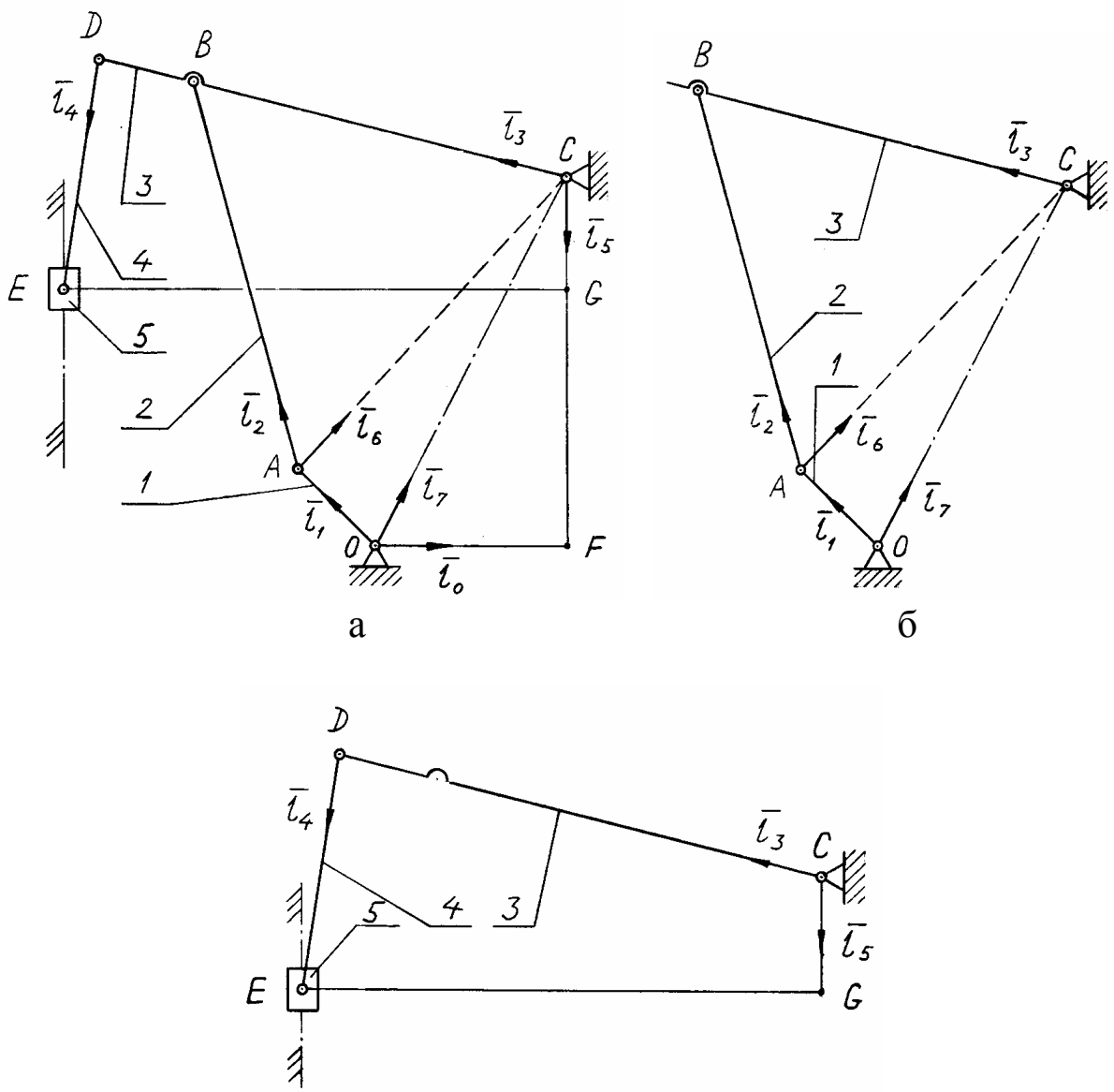


Рис. 3.10

Порівнюємо ці частини механізму з найпростішими (рис. 3.4, 3.5). Вони відрізняються кутами повороту відносно стояка, позначеннями точок та індексів ортів.

Для зведення задачі до попередніх визначаємо невідомі кути повороту.

По формулі (3.2) кут

$$\varphi_{17} = \varphi_{10} - \varphi_{70},$$

де $\varphi_{70} = \text{arctg}(CF/OF)$.

Замінюємо позначення в найпростіших механізмах так, щоб вони співпадали з тими, що в частинах вихідного механізму. Таку ж заміну робимо в розрахункових формулах.

У даному випадку в схемі кривошипно-коромислового механізму (рис. 3.5) та його алгоритмі розрахунку замінюємо індекси ортів 4, 5 відповідно на 6, 7. *Одержуємо алгоритм першої частини механізму* (рис.3.10, б).

Використовуючи формулу (3.2), знаходимо кути

$$\varphi_{i0} = \varphi_{i7} + \varphi_{70},\ i = 2, 3;$$

$$\varphi_{35} = \varphi_{30} - \varphi_{50},$$

де $\varphi_{50} = -\pi/2$.

У схемі та алгоритмі розрахунку кривошипно-повзунного механізму (рис.3.4) замінюємо точки *O*, *A*, *B*, *C* та індекси ортів 1, 2, 3 відповідно на *C*, *D*, *E*, *G* та 3, 4, 5. Також покладемо $l_{EG} < 0$. *Одержуємо алгоритм другої частини механізму* (рис. 3.10, в).

Визначаємо кут

$$\varphi_{40} = \varphi_{45} + \varphi_{50}.$$

Механізм довбального верстата показаний на рис. 3.11, а. Ділимо його на дві частини (рис. 3.11, б, в), у яких нумеруємо ланки та позначаємо точки як на даному механізмі.

Показуємо базисні орти. Їх індекси відповідають нумерації ланок крім ортів $\bar{l}_6, \bar{\tau}_6$ (останній не показаний) частини куліси, введених для спрощення задачі. Напрями ортів вибираємо, як у розглянутих найпростіших механізмів.

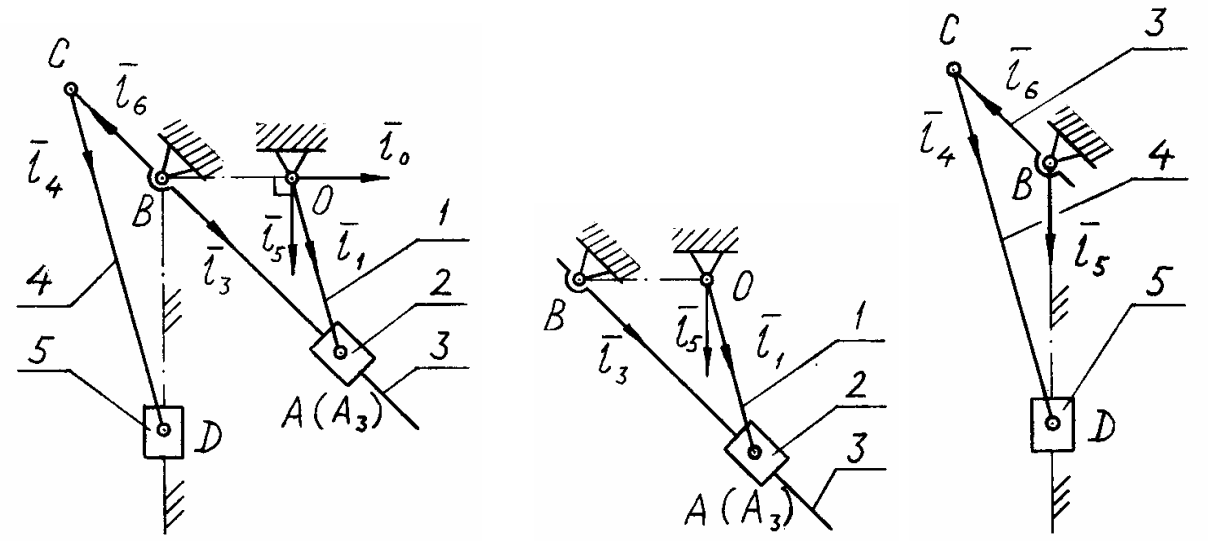
Частини даного механізму відрізняються від найпростіших кутами повороту відносно стояка, позначеннями точок та індексів ортів.

Зводимо задачу до попередніх. Визначаємо кут

$$\varphi_{15} = \varphi_{10} + \varphi_{05},$$

де $\varphi_{05} = \pi/2$.

У схемі та алгоритмі кулісного механізму (рис. 3.7) замінимо індекс 4 на 5. Одержуємо алгоритм розрахунку першої частини механізму (рис. 3.11, б).



а б в

Рис. 3.11

Знаходимо кути

$$\varphi_{30} = \varphi_{35} - \varphi_{05}, \quad \varphi_{65} = \varphi_{63} + \varphi_{35},$$

де $\varphi_{63} = -\pi$.

У схемі та алгоритмі розрахунку кривошипно-повзунного механізму (рис. 3.4) замінимо точки *O*, *A*, *B*, *C* та індекси ортів 1, 2, 3 відповідно на *B*, *C*, *D*, *D* та 6, 4, 5, і покладемо відстань $l_{DD} = 0$. Одержуємо алгоритм другої частини механізму (рис. 3.11, в).

Після цього визначається кут

$$\varphi_{40} = \varphi_{45} - \varphi_{05}.$$

Механізм компресора та його дві частини показані на рис. 3.12, а, б, в.

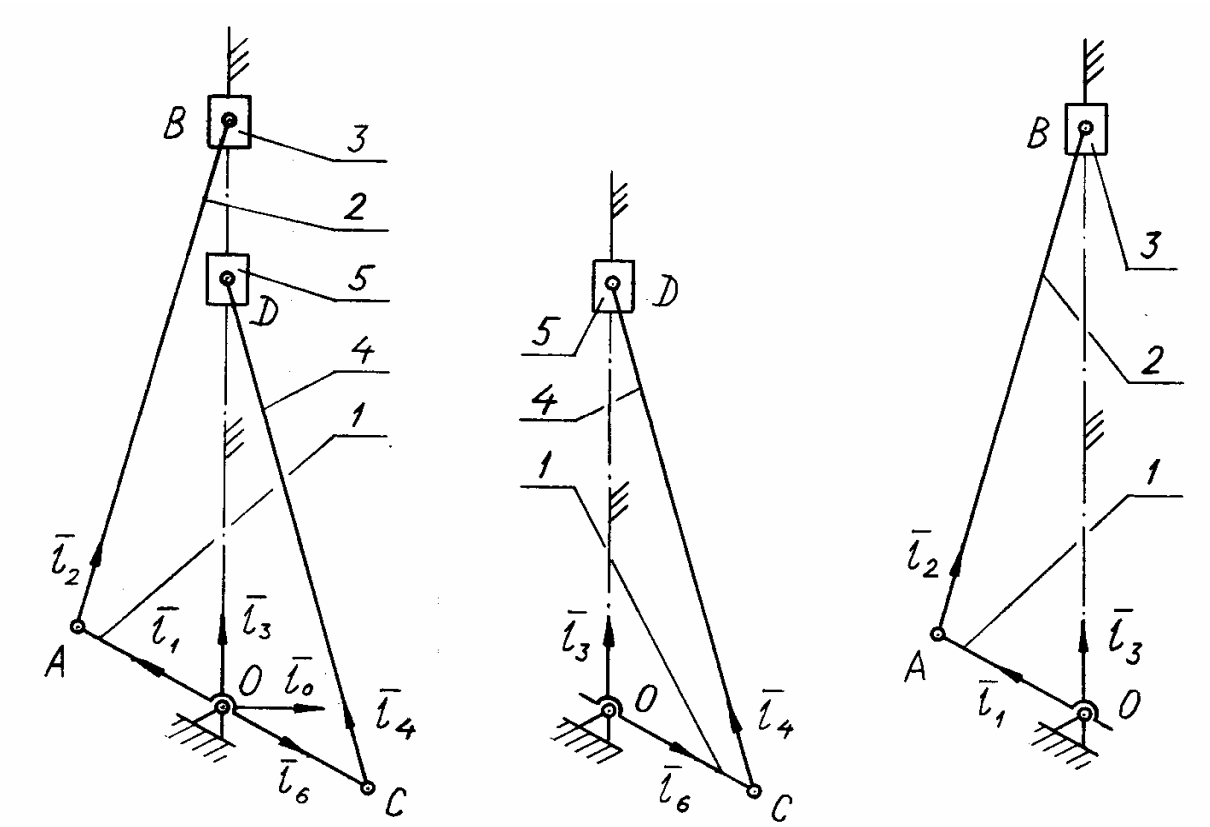
Знаходимо кути

$$\varphi_{13} = \varphi_{10} - \varphi_{30}, \quad \varphi_{63} = \varphi_{61} + \varphi_{13},$$

де $\varphi_{30} = \pi/2$; $\varphi_{61} = -\pi$.

У схемі та алгоритмі кривошипно-повзунного механізму (рис. 3.4) замінюємо точку *C* на *B* і покладаємо відстань $l_{BB} = 0$. Одержуємо алгоритм розрахунку першої частини механізму (рис. 3.12, в). Ще раз у схемі і алгоритмі найпростішого механізму (рис. 3.4) замінюємо точки *A*, *B*, *C* та індекси ортів 1, 2

відповідно на C, D, D та $6, 4$, і підставляємо відстань $l_{DD} = 0$. Одержуємо алгоритм другої частини механізму (рис. 3.12, б).



а б в

Рис. 3.12

Визначаємо кути

$$\varphi_{20} = \varphi_{23} + \varphi_{30}, \quad \varphi_{40} = \varphi_{43} + \varphi_{30}.$$

Аналогічно складаються алгоритми розв'язування для інших плоских механізмів.

Більш детальний приклад побудови алгоритму кінематичного аналізу наводиться в розділі 13.

Питання та завдання для самоконтролю

1. Написати формули для визначення скалярних добутків однойменних та різнойменних ортів одного та різних базисів.
2. Як складаються алгоритми аналітичних розрахунків механізмів II класу з двома чи кількома структурними групами?

3.4. Побудова кінематичних діаграм

Метод графічного диференціювання, який може бути використаний для побудови кінематичних діаграм, має низьку точність та пов'язаний із значними витратами часу.

Розглянемо побудову кінематичних діаграм із використанням комп'ютерних програм.

Лінійне переміщення s_i деякої i–тої точки важільного механізму є функцією кута повороту φ кривошипа, який в свою чергу залежить від часу. Тобто s_i є складною функцією від часу: $s_i = s_i(\varphi(t))$. За правилами диференціювання складної функції швидкість цієї точки

$$\upsilon_i = \frac{ds_i}{dt} = \frac{ds_i}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \omega\frac{ds_i}{d\varphi}.$$

Тут похідна $\frac{ds_i}{d\varphi}$ називається аналогом лінійної швидкості точки. При попередньому аналізі кінематичних параметрів кутова швидкість ω кривошипа приймається сталою. У цьому випадку лінійне прискорення точки

$$a_i = \frac{d\upsilon_i}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\omega\frac{ds_i}{d\varphi}\right) = \frac{d}{d\varphi}\left(\omega\frac{ds_i}{d\varphi}\right)\frac{d\varphi}{dt} = \omega^2\frac{d^2s_i}{d\varphi^2},$$

де $\frac{d^2s_i}{d\varphi^2}$ – аналог лінійного прискорення i–тої точки.

Кут повороту φ_i i–тої ланки механізму є функцією кута повороту φ кривошипа. Кутова швидкість цієї ланки

$$\omega_i = \frac{d\varphi_i}{dt} = \frac{d\varphi_i}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \omega\frac{d\varphi_i}{d\varphi}.$$

Похідна $\frac{d\varphi_i}{d\varphi}$ називається аналогом кутової швидкості ланки. Для сталої кутової швидкості ω кривошипа кутове прискорення i–тої ланки

$$\varepsilon_i = \frac{d\omega_i}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\omega\frac{d\varphi_i}{d\varphi}\right) = \frac{d}{d\varphi}\left(\omega\frac{d\varphi_i}{d\varphi}\right)\frac{d\varphi}{dt} = \omega^2\frac{d^2\varphi_i}{d\varphi^2},$$

де $\frac{d^2\varphi_i}{d\varphi^2}$ – аналог кутового прискорення *i*–тої ланки.

Аналоги кутових швидкостей $\frac{d\varphi_i}{d\varphi}$ і прискорень $\frac{d^2\varphi_i}{d\varphi^2}$ є безрозмірними величинами, аналоги лінійних швидкостей $\frac{ds_i}{d\varphi}$ і прискорень $\frac{d^2s_i}{d\varphi^2}$ мають розмірність довжини.

Розглянемо побудову кінематичних діаграм для центрального кривошипно-повзунного механізму (рис. 3.13). На рисунку показані: φ_2 – кут повороту шатуна, *s* – переміщення повзуна від його нульового положення.

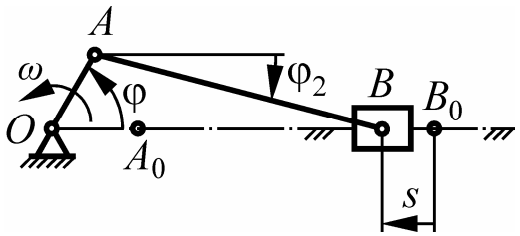


Рис. 3.13

Використовуючи формули (3.7), (3.8), знаходимо

$$\varphi_2 = \arcsin\left(-\frac{l_{OA}\sin\varphi}{l_{AB}}\right),\ s = l_{OA}(1-\cos\varphi) + l_{AB}(1-\cos\varphi_2),$$

де l_{OA}, l_{AB} – відстані між відповідними точками механізму.

На рис. 3.14 наведена програма у середовищі Mathcad та графіки переміщення повзуна *s*, аналогів його лінійної швидкості $\frac{ds}{d\varphi}$ і прискорення $\frac{d^2s}{d\varphi^2}$ в залежності від кута повороту φ, град, кривошипа.

$$l_{OA} := 0.1 \qquad l_{AB} := 0.4$$

$$\phi_2(\phi) := asin\left(\frac{-l_{OA} \cdot sin(\phi)}{l_{AB}}\right)$$

$$s(\phi) := l_{OA} \cdot (1 - cos(\phi)) + l_{AB} \cdot (1 - cos(\phi_2(\phi)))$$

$$\phi_I(\phi) := \frac{\phi \cdot 180}{\pi} \qquad \phi := 0, 0.5deg .. 360deg$$

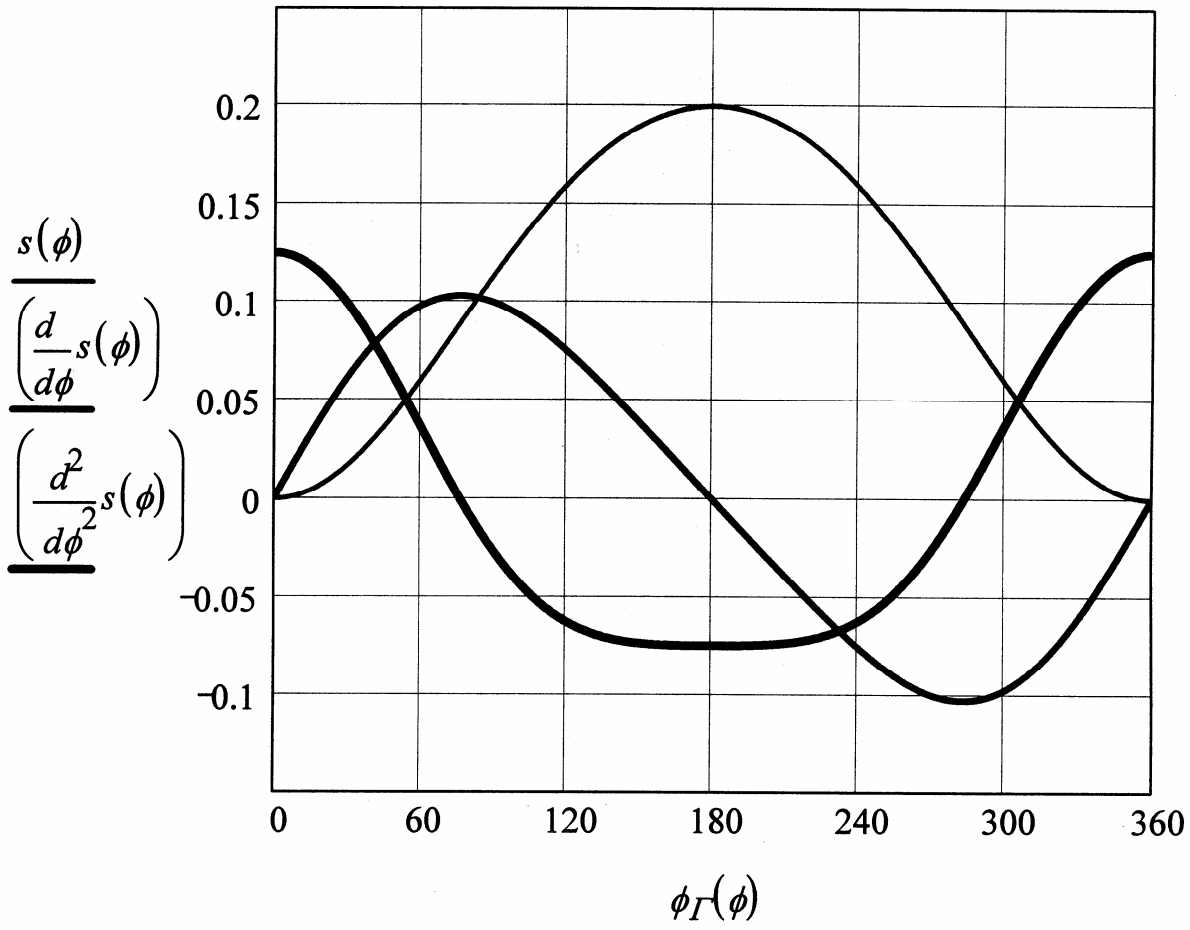


Рис. 3.14

3.5. Універсальний шарнір

Універсальний шарнір, або шарнір Кардана, Гука, призначений для передачі обертального руху від одного вала до другого, осі яких перетинаються. Універсальний шарнір, як правило, входить до складу карданної передачі. Остання складається з двох універсальних шарнірів, з'єднаних між собою телескопічним валом.

Карданні передачі широко використовуються, наприклад, в сільськогосподарських машинах, які працюють від вала відбору потужності трактора, в автомобілях для передачі обертального руху від коробки передач до ведучих мостів, у металорізальних верстатах, металургійних машинах, гіроскопах.

Універсальний шарнір передає обертальний рух від вилки 1 через хрестовину 3 до вилки 2 (рис. 3.15). Сторони хрестовини утворюють прямі кути між собою та з відповідними валами вилок. Осі валів вилок перетинаються під кутом α. Кожна вилка з'єднується з хрестовиною однорухомою обертальною кінематичною парою V класу. Вилка 1 з'єднується зі стояком обертальною кінематичною парою V класу. Вилка 2 утворює зі сферичною опорою 4 дворухому циліндричну кінематичну пару IV класу. Опора 4 з'єднується зі стояком дворухомою кінематичною парою IV класу сферичною з пальцем.

Ступінь рухомості універсального шарніра за формулою Сомова – Малишева

$$W = 6n - 5p_1 - 4p_2 = 6 \cdot 4 - 5 \cdot 3 - 4 \cdot 2 = 1.$$

Визначимо передаточне відношення універсального шарніра для двох окремих випадків положення вилок. У першому випадку (рис. 3.16, а) вилка 1 лежить у площині рисунку, у другому (рис. 3.16, б) – перпендикулярна їй.

Вектори кутових швидкостей вилок $\overline{\omega}_1$ і $\overline{\omega}_2$ паралельні їх осям обертання. Кутову швидкість $\overline{\omega}_2$ визначаємо у відповідності з векторним рівнянням для складного обертального руху тіла, яке має нерухому точку. Остання є точкою перетину осей обертання вилок. Маємо

$$\overline{\omega}_2 = \overline{\omega}_1 + \overline{\omega}_{21},$$

де $\overline{\omega}_{21}$ – кутова швидкість вилки 2 відносно вилки 1.

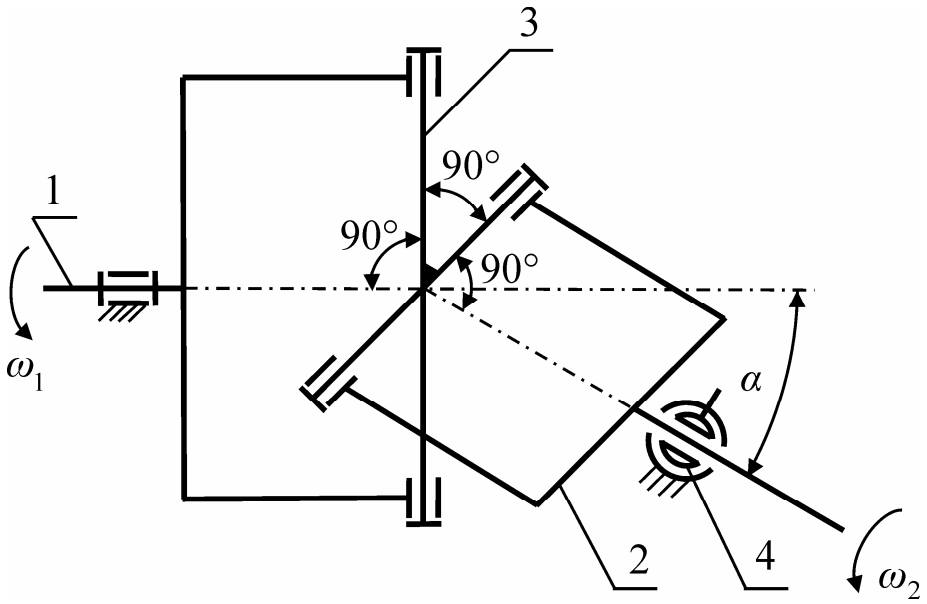


Рис. 3.15

У розглядуваних випадках вилка 2 в русі відносно вилки 1 обертається навколо осі хрестовини, яка лежать у площині рисунку. Вектор $\overline{\omega}_{21}$ є паралельним цій осі, оскільки кінематичні пари перешкоджають обертанню навколо іншої осі хрестовини, яка перпендикулярна площині рисунку.

Для схеми на рис 3.16, а величина вектора

$$\omega_2 = \omega_1 / \cos\alpha,$$

а для схеми на рис 3.16, б –

$$\omega_2 = \omega_1 \cos\alpha.$$

У першому випадку маємо передаточне відношення

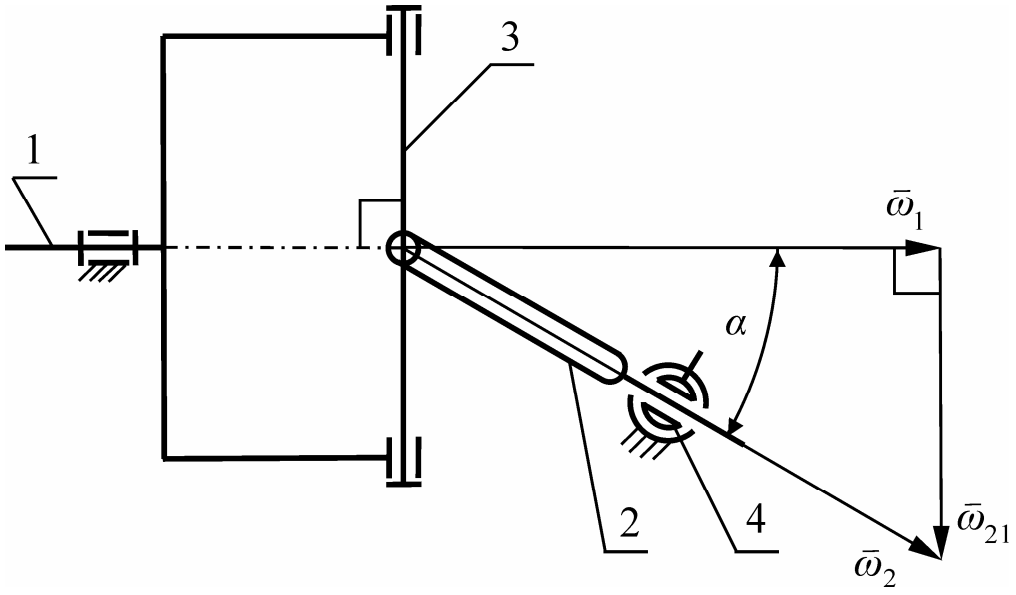
$$u_{21} = \omega_2 / \omega_1 = 1/\cos\alpha,$$

у другому –

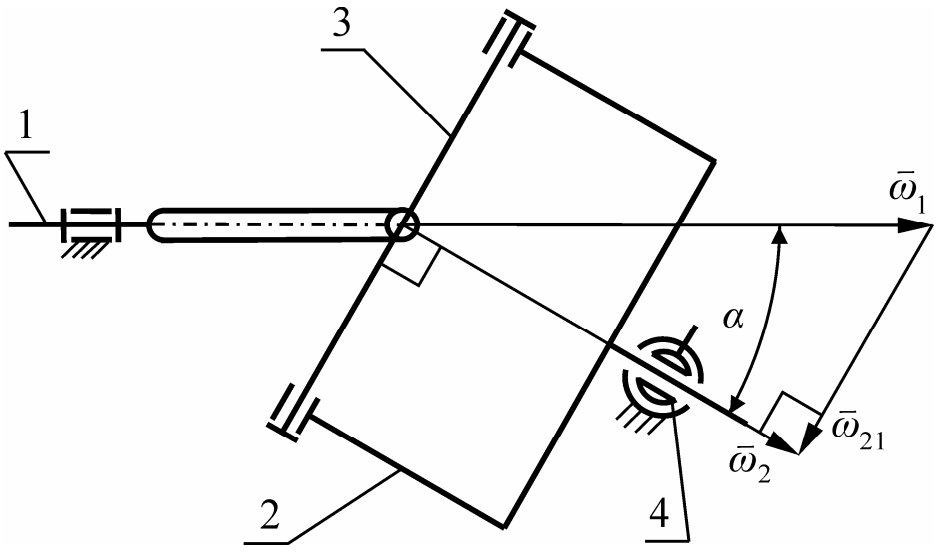
$$u_{21} = \omega_2 / \omega_1 = \cos\alpha.$$

Оскільки $\cos\alpha$ є парною функцією, то при зміні знака кута α передаточні відношення не змінюються.

Знайдемо зв'язок між кутами повороту валів вилок. Розмістимо універсальний шарнір так, щоб кут повороту α між осями валів вилок було видно в натуральну величину (рис. 3.17).



а



б

Рис. 3.16

Візьмемо на осях хрестовини точки B і C, однаково віддалені від точки O перетину осей. При обертанні вилок ці точки будуть описувати кола з однаковими радіусами.

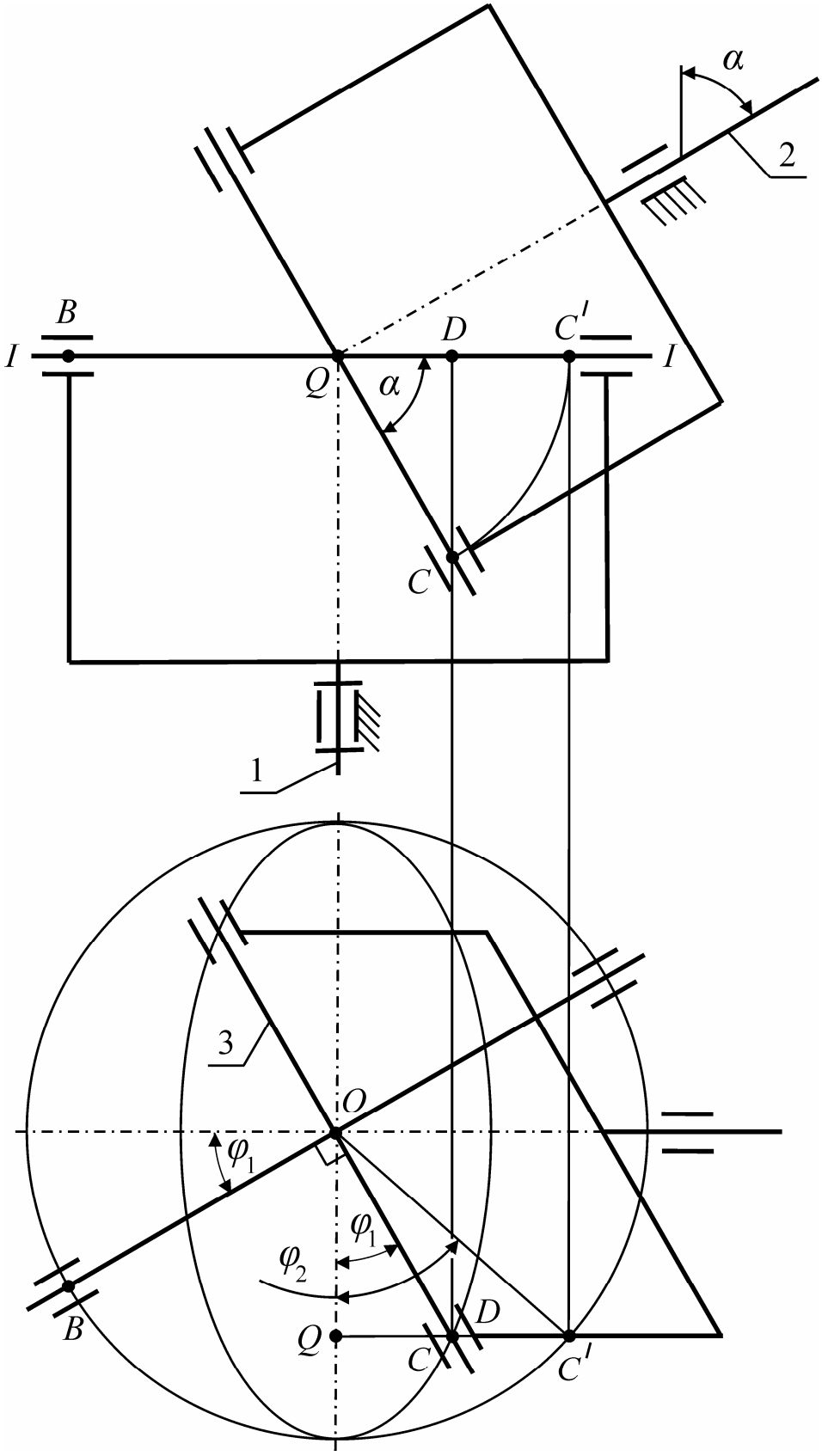


Рис. 3.17

Спроектуємо ці точки та кола на площину $I-I$, яка перпендикулярна осі обертання вилки 1 та проходить через точку O. Коло точки B проектується в натуральну величину, а коло точки C – в еліпс. Показаному положенню точки B відповідає кут повороту вилки φ_1. Оскільки кут BOC між осями хрестовини прямий, то він проектується на площину $I-I$ в натуральну величину. Проекція точки C лежить на перетині еліпса з перпендикуляром до OB, проведеним через точку O. Площині $I-I$ належить точка D, яка співпадає з проекцією точки C на цю площину.

Точку C повернемо навколо великої осі еліпса так, щоб вона перемістилася в точку C', яка належить площині $I-I$. Кут $C'OQ$ дорівнює куту φ_2 повороту вилки 2.

З трикутника DOQ

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{QD}{OQ},$$

а з трикутника $C'OQ$

$$\operatorname{tg}\varphi_2 = \frac{QC'}{OQ}.$$

Поділимо почленно передостанню рівність на останню. Одержимо

$$\frac{\operatorname{tg}\varphi_1}{\operatorname{tg}\varphi_2} = \frac{QD}{QC'}.$$

З трикутника CDQ

$$\frac{QD}{QC'} = \cos\alpha.$$

Підставимо відношення з останньої рівності в передостанню. Маємо

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = \operatorname{tg}\varphi_2 \cos\alpha, \qquad (3.83)$$

чи

$$\operatorname{ctg}\varphi_2 = \operatorname{ctg}\varphi_1 \cos\alpha. \qquad (3.84)$$

Обчислення кута φ_2 в залежності від кутів φ_1 та α проводиться за формулою

$$\varphi_2(\varphi_1,\alpha)=\begin{cases}\varphi_1, \quad \varphi_1=\pi\,\text{floor}(\varphi_1/\pi);\\ \pi\,\text{floor}(\varphi_1/\pi)+\text{arcctg}(\text{ctg}\,\varphi_1\cos\alpha),\\ \qquad\qquad \varphi_1\neq\pi\,\text{floor}(\varphi_1/\pi).\end{cases}$$

Значення функції floor(y) дорівнює найближчому до y цілому числу, яке менше або дорівнює y. При неперервному зростанні кута φ_1 від нуля функція $\text{floor}(\varphi_1/\pi)$ послідовно набуває значень 0, 1, 2, 3, ...

Утворимо різницю кутів

$$\Delta\varphi_2(\varphi_1,\alpha)=\varphi_2(\varphi_1,\alpha)-\varphi_1.$$

На рис. 3.18, 3.19 показані графіки залежностей $\varphi_2(\varphi_1,\alpha)$ та $\Delta\varphi_2(\varphi_1,\alpha)$ на інтервалі $0°\le\varphi_1\le 360°$ для кутів $\alpha=0°, 40°, 80°$.

Програма розрахунків та графіки цього параграфу виконуються в середовищі Mathcad. У програмі запис "deg" справа від значення кута означає, що одиницею вимірювання є градус.

Різниця кутів $\Delta\varphi_2(\varphi_1,\alpha)$ періодично змінюється з періодом π (рис. 3.19).

Диференціюємо рівність (3.84) по часу на інтервалах неперервності функцій. Одержимо

$$\frac{\omega_2}{\omega_1}=\frac{\sin^2\varphi_2}{\sin^2\varphi_1}\cos\alpha.$$

З останньої рівності виключимо кут φ_2 за допомогою рівності (3.84). Маємо передаточне відношення

$$u_{21}(\varphi_1,\alpha)=\frac{\omega_2}{\omega_1}=\frac{\cos\alpha}{1-\sin^2\alpha\cos^2\varphi_1}.$$

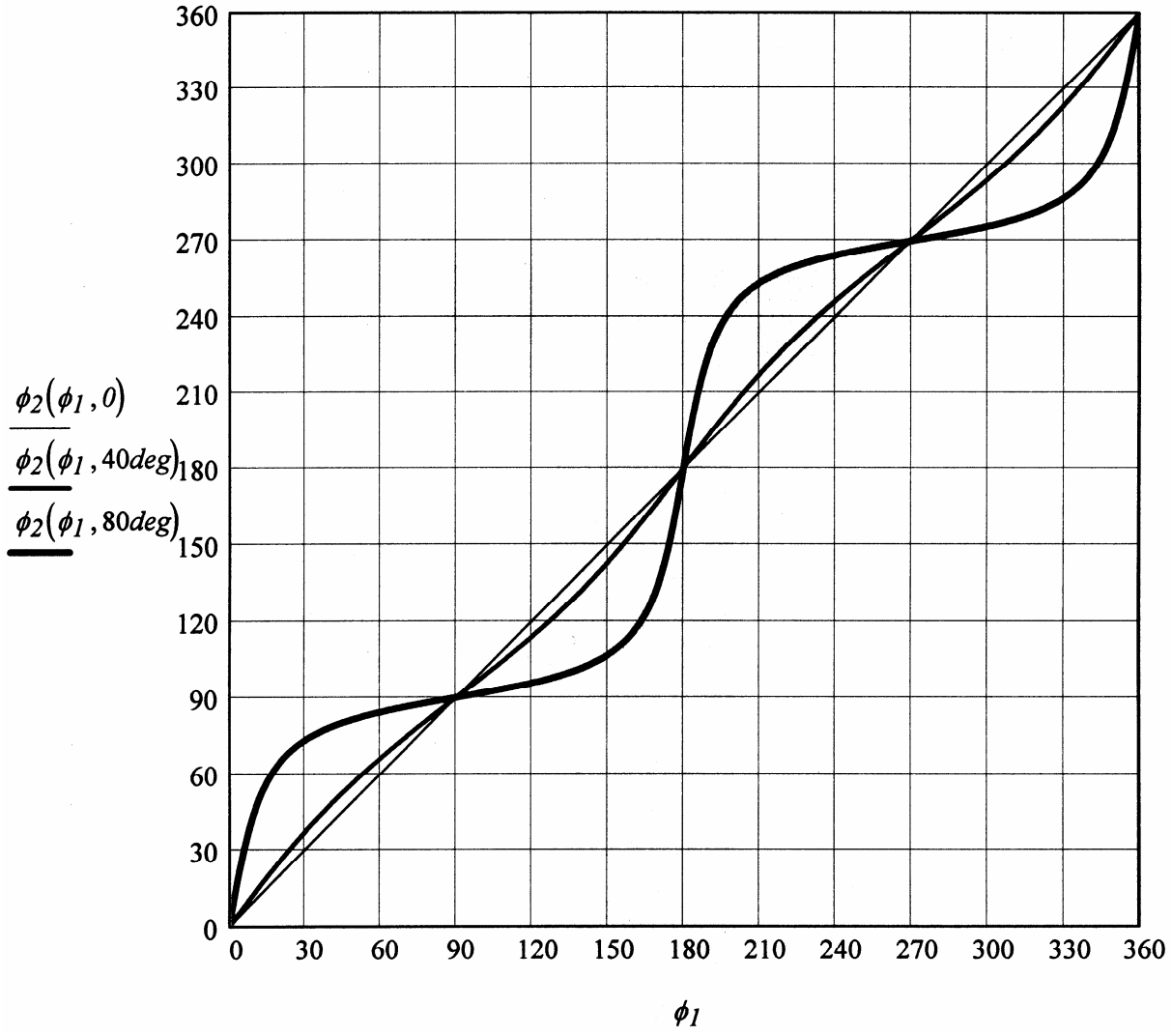


Рис. 3.18

В околах точок розриву функцій $\mathrm{ctg}\,\varphi_1$ та $\mathrm{ctg}\,\varphi_2$ диференціюємо рівність (3.83). Одержуємо останню формулу для передаточного відношення.

Найменшому значенню знаменника останньої формули (при $\varphi_1 = 0, \pi, 2\pi, ...$) відповідає найбільше значення передаточного відношення

$$u_{21\max} = \frac{1}{\cos\alpha},$$

а найбільшому значенню знаменника (при $\varphi_1 = \pi/2, 3\pi/2, \ ...$) – найменше значення

$$u_{21\min} = \cos\alpha.$$

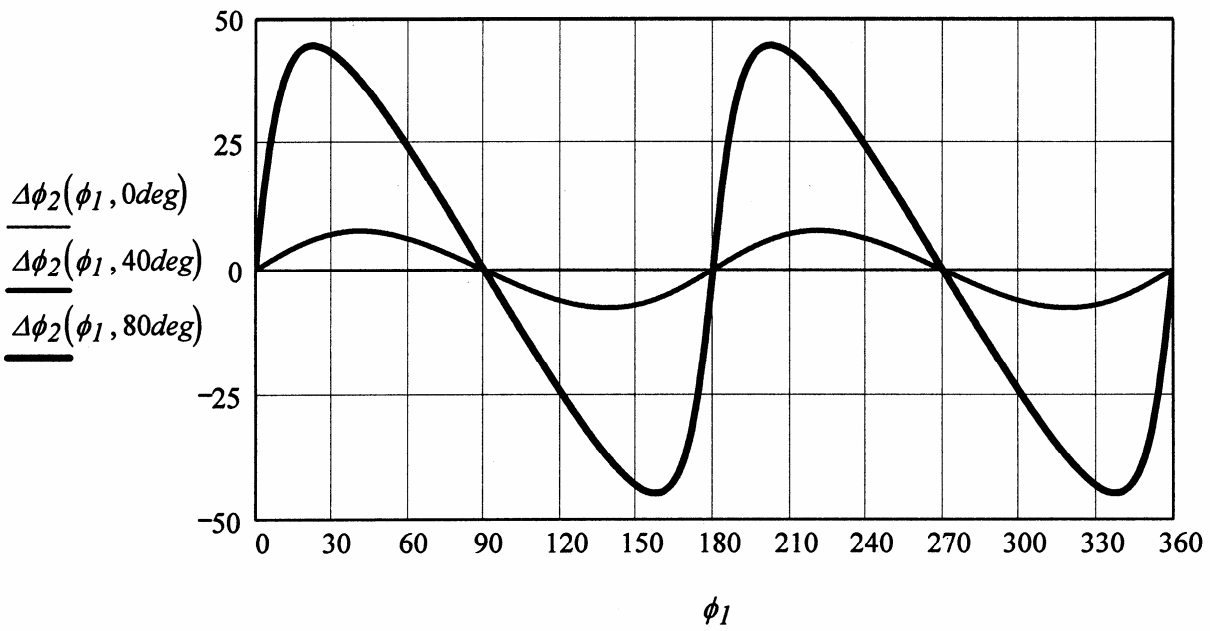


Рис. 3.19

На рис. 3.20 наведений графік залежності $u_{21}(\varphi_1, \alpha)$ на інтервалі $0° \le \varphi_1 \le 360°$ для кутів $\alpha = 0°, 40°, 80°$. Передаточне відношення періодично змінюється з періодом π.

Коефіцієнт нерівномірності руху

$$\delta(\alpha) = \frac{\omega_{2\max} - \omega_{2\min}}{\omega_1} = u_{21\max} - u_{21\min} = \frac{1}{\cos\alpha} - \cos\alpha.$$

Оскільки $\cos\alpha$ є парною функцією, то при зміні знака кута α коефіцієнт нерівномірності δ не змінюються. На рис. 3.21 показаний графік коефіцієнта нерівномірності δ в залежності від кута α, град.

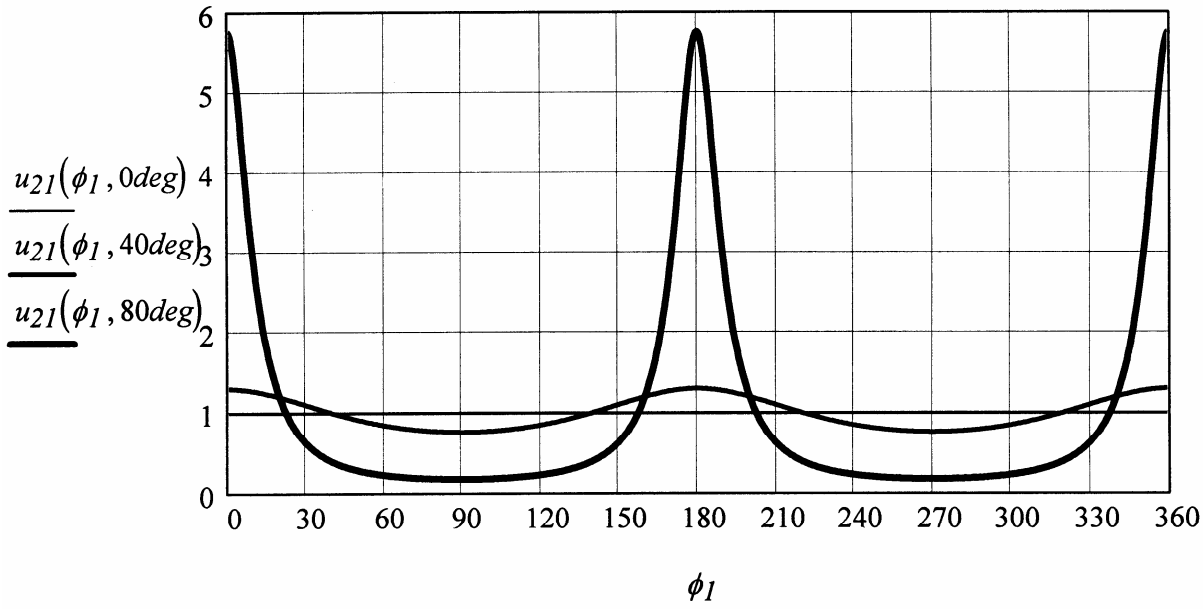


Рис. 3.20

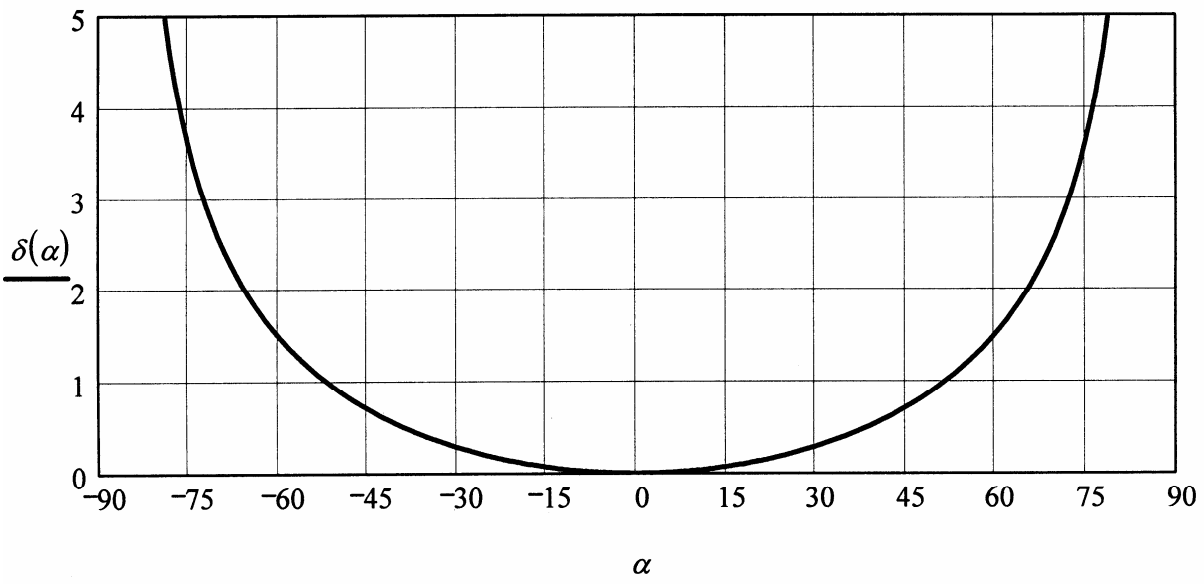
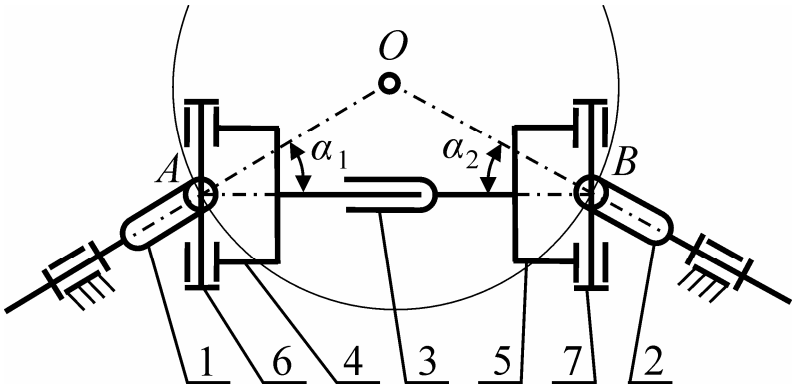


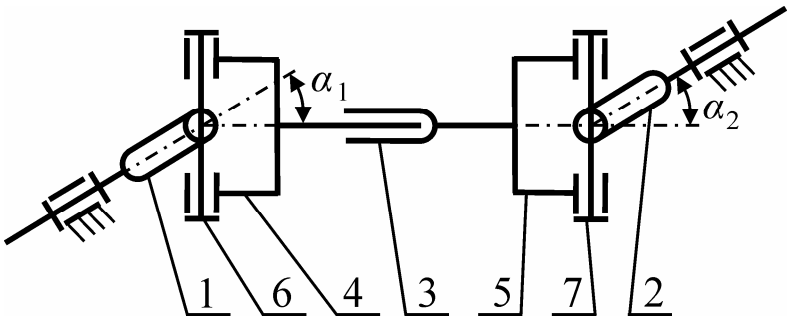
Рис. 3.21

Подвійний універсальний шарнір чи карданна передача (рис. 3.22) містить у собі два універсальні шарніри: один складено з вилок 1 і 4, другий – з вилок 2 і 5. Перші і другі попарно з'єднані між собою хрестовинами 6 і 7. Вилки 4 і 5

розташовані в одній площині та закріплені на телескопічному валі 3, який має можливість змінювати свою довжину. Осі валів вилок 1 і 4 перетинаються під кутом α_1, а вилок 2 і 5 – під кутом α_2.



а



б

Рис. 3.22

Кожна вилка з'єднується зі своєю хрестовиною однорухомою кінематичною парою V класу. Вилки 4 і 5 утворюють між собою однорухому поступальну кінематичну пару V класу. Вилки 1 і 2 з'єднуються зі стояком кінематичними парами V класу.

Ступінь рухомості карданної передачі

$$W = 6n - 5p_1 = 6 \cdot 6 - 5 \cdot 7 = 1.$$

Кути повороту вилок 1, 2, 4, 5 позначимо відповідно через $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_4, \varphi_5$. Для них запишемо рівності, аналогічні (3.83). Маємо

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = \operatorname{tg}\varphi_4 \cos\alpha_1, \quad \operatorname{tg}\varphi_2 = \operatorname{tg}\varphi_5 \cos\alpha_2.$$

Оскільки кут $\varphi_4 = \varphi_5$, то відношення

$$\frac{\operatorname{tg}\varphi_1}{\operatorname{tg}\varphi_2} = \frac{\cos\alpha_1}{\cos\alpha_2}, \text{ чи } \frac{\operatorname{ctg}\varphi_2}{\operatorname{ctg}\varphi_1} = \frac{\cos\alpha_1}{\cos\alpha_2}.$$

Якщо кути α_1 і α_2 рівні за абсолютною величиною, то з останніх формул одержимо

$$\varphi_1 = \varphi_2, \ \omega_1 = \omega_2, \ u_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = 1.$$

Тобто вали вилок 1 і 2 обертаються з однаковою кутовою швидкістю. Нерівномірність обертання веденої вилки 2 буде максимальною, якщо площини, у яких лежать вилки 4 і 5, розташувати під прямим кутом.

Рівність кутів α_1 і α_2 за абсолютною величиною відповідає двом схемам. У схемі на рис. 3.22, а осі валів вилок 1 і 2 перетинаються, а трикутник *AOB* є рівнобедреним. Вилка 1 утворює обертальну кінематичну пару, наприклад, з рамою трактора, а вилка 2 – з рамою сільгоспмашини. Рами трактора та сільгоспмашини утворюють між собою в точці *O* трирухоме сферичне з'єднання. Останнє є послідовним з'єднанням трьох обертальних пар V класу, осі яких перетинаються під прямими кутами. За числом ступенів рухомості це з'єднання еквівалентне трирухомій сферичній кінематичній парі III класу. З'єднання припускає поворот осей валів вилок 1 і 2 на кут, який менше 90°. При русі трактора та сільгоспмашини точки *A* і *B* переміщуються по сфері з центром у точці *O*, що забезпечує рівність кутів α_1 і α_2.

У схемі на рис. 3.22, б осі валів вилок 1 і 2 паралельні. Вилка 1 утворює обертальну кінематичну пару, наприклад, з рамою автомобіля, а вилка 2 – з його ведучим мостом, так що при їх відносному переміщенні осі валів вилок 1 і 2 залишаються паралельними. Це забезпечує рівність кутів α_1 і α_2 та сталість передаточного відношення карданної передачі.