

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
СЫКТЫВКАРСКИЙ ЛЕСНОЙ ИНСТИТУТ – ФИЛИАЛ
ГОСУДАРСТВЕННОГО ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО УЧРЕЖДЕНИЯ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ
ЛЕСОТЕХНИЧЕСКАЯ АКАДЕМИЯ ИМЕНИ С. М. КИРОВА»

КАФЕДРА ТЕХНИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Методическое пособие
по выполнению контрольных работ
для студентов заочной формы обучения всех специальностей

СЫКТЫВКАР 2008

УДК 531
ББК 22. 21
Т33

Рассмотрено и рекомендовано к печати кафедрой технической механики Сыктывкарского лесного института 21 декабря 2007 г. (протокол № 3).

Утверждено к печати методической комиссией лесотранспортного факультета Сыктывкарского лесного института 25 декабря 2007 г. (протокол № 4).

С о с т а в и т е л ь :

С. И. Морозов, кандидат технических наук, доцент

Р е ц е н з е н т ы :

Т. В. Козару, кандидат технических наук, доцент
(Коми государственный педагогический институт);
В. Ф. Свойкин, кандидат технических наук, доцент
(Сыктывкарский лесной институт)

О т в е т с т в е н н ы й р е д а к т о р :

И. Н. Сухоруков, кандидат технических наук, доцент

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА : метод. пособие по выполнению
Т33 контрольных работ для студентов заочной формы обучения всех специальностей / сост. С. И. Морозов ; СЛИ. – Сыктывкар, 2008. – 92 с.

УДК 531
ББК 22. 21

В издании изложена рабочая программа дисциплины «Теоретическая механика», даны методические указания по изучению курса и выполнению контрольных работ. Приведены задания контрольных работ, а также примеры решения задач и список рекомендуемой литературы.

Для студентов заочной формы обучения всех специальностей.

Темплан 2007/08 учеб. г. Изд. № 202.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	4
РАБОЧАЯ ПРОГРАММА.....	5
1. ОБЩИЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ИЗУЧЕНИЮ КУРСА И ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ	8
2. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО САМОСТОЯТЕЛЬНОМУ ИЗУЧЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ.....	8
2.1. Статика	8
2.2. Кинематика	11
2.3. Динамика.....	14
3. КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ.....	20
3.1. Контрольная работа № 1	20
3.2. Контрольная работа № 2.....	26
3.3. Контрольная работа № 3	32
3.4. Контрольная работа № 4.....	35
3.5. Контрольная работа № 5.....	39
3.6. Контрольная работа № 6.....	44
4. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ИЗ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ	49
4.1. Статика	50
4.2. Кинематика	59
4.3. Динамика.....	69
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК	91

ВВЕДЕНИЕ

«Теоретическая механика» – это наука о законах механического движения и взаимодействия тел. В системе общеинженерных дисциплин, изучаемых студентами технических вузов, одно из первых мест принадлежит теоретической механике. Теоретическая механика широко применяется в технике (авиации, космонавтике, машиностроении и т. д.). На базе теоретической механики возникли и успешно развиваются многие науки, такие как сопротивление материалов, теория упругости, термодинамика, газовая динамика и др. В этих науках, как правило, к законам механики добавляются другие законы, характеризующие дополнительные свойства материальных тел.

Курс «Теоретической механики» состоит из трех разделов: статики, кинематики и динамики.

Статика – раздел теоретической механики, в котором рассматривают свойства сил и условия их равновесия.

В кинематике рассматривают движения материальных тел без учета действующих сил.

В динамике изучается движение материальных тел, но в зависимости от действующих на них сил.

Все необходимые сведения по выполнению и оформлению контрольных работ представлены непосредственно перед каждой контрольной работой. Варианты схем и условий задач определяются по последней (ПЦШ) и предпоследней (ПрЦШ) цифре шифра (две последние цифры номера зачетной книжки).

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

Теоретическая механика и ее место среди естественных наук. Объективный характер законов механики. Роль и значение аксиом и абстракций в механике. Механика как теоретическая база современной техники. Основные этапы развития теоретической механики.

СТАТИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

Тема 1. Введение в статику. Система сходящихся сил

Предмет статики. Абсолютно твердое тело. Понятие о силе. Эквивалентные и уравновешенные системы сил. Аксиомы статики. Несвободное твердое тело, связи и реакции связей. Система сходящихся сил. Геометрическое определение равнодействующей. Геометрическое условие равновесия сходящихся сил. Аналитическое определение равнодействующей. Аналитические условия равновесия сходящихся сил (уравнения равновесия). Теорема о равновесии трех непараллельных сил.

Тема 2. Моменты силы относительно центра и оси

Алгебраический момент силы относительно точки. Момент силы относительно оси. Частные случаи вычисления момента силы относительно оси. Векторный момент силы относительно точки. Теорема о проекции векторного момента силы относительно точки на ось.

Тема 3. Произвольная система пар сил

Алгебраический момент пары сил. Векторный момент пары сил. Теорема об эквивалентных парах на плоскости. Теорема об эквивалентных парах в пространстве. Теоремы о сложении двух и произвольного числа пар сил. Геометрические и аналитические условия равновесия пар сил.

Тема 4. Произвольная пространственная и произвольная плоская системы сил

Главный вектор и главный векторный момент произвольной пространственной системы сил. Лемма о приведении силы к данному центру. Основная теорема статики о приведении системы сил к данному центру (теорема Пуансо).

Главный вектор и главный алгебраический момент плоской системы сил. Частные случаи приведения плоской системы сил: приведение к паре сил, к равнодействующей и случай равновесия. Аналитические условия равновесия плоской системы сил. Три вида условий равновесия: а) одно уравнение моментов сил относительно произвольного центра, два уравнения проекций сил на декартовы оси; б) два уравнения моментов сил относительно двух центров, одно уравнение проекций сил на ось; в) три уравнения моментов относительно точек, не лежащих на одной прямой. Условия равновесия плоской системы параллельных сил. Теорема Вариньона о моменте равнодействующей.

Частные случаи приведения пространственной системы сил: приведение к паре сил, приведение к равнодействующей, к динамическому винту и случай равновесия.

Тема 5. Равновесие тела при наличии сил трения

Трение скольжения. Коэффициент трения. Угол трения. Условия равновесия тела при наличии сил трения. Равновесие катка на опорной поверхности. Момент сопротивления качению.

Тема 6. Центр параллельных сил. Центр тяжести

Определение координат центра параллельных сил. Сила тяжести и центр тяжести произвольного тела. Общие формулы для координат центра тяжести. Центр тяжести объема, площади, линии.

КИНЕМАТИКА

Тема 1. Введение в кинематику

Пространство и время как формы существования материи. Различные виды движения материи. Механическое движение. Системы отсчета. Предмет кинематики и ее значение для техники.

Тема 2. Кинематика точки

Три способа задания движения точки: естественный, координатный, векторный. Определение скорости и ускорения точки при задании ее движения векторным способом. Определение скорости и ускорения точки при задании ее движения в декартовых координатах. Определение скорости и ускорения точки при задании ее движения естественным способом. Признаки ускоренного и замедленного движения точки.

Тема 3. Простейшие движения твердого тела

Поступательное движение твердого тела. Теорема о траекториях, скоростях и ускорениях точек тела при поступательном движении. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси. Угловая скорость и угловое ускорение тела. Равномерное и равнопеременное вращение твердого тела. Траектории, скорости и ускорения точек твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси.

Тема 4. Плоское движение твердого тела

Плоскопараллельное движение твердого тела, как движение плоской фигуры в ее плоскости. Разложение движения плоской фигуры на поступательное движение вместе с полюсом и вращение вокруг полюса. Уравнения движения плоской фигуры. Теорема о скоростях точек плоской фигуры. Мгновенный центр скоростей и его свойства. Теорема об ускорениях точек плоской фигуры. Мгновенный центр ускорений.

Тема 5. Сложное движение точки

Понятие о сложном движении точки. Относительное, переносное и абсолютное движение точки. Теоремы о сложении скоростей и ускорений при переносном поступательном движении и переносном непоступательном движении (теорема Кориолиса).

Тема 6. Сложное движение твердого тела

Сложение вращений твердого тела вокруг параллельных и пересекающихся осей.

ДИНАМИКА

Тема 1. Введение в динамику

Предмет динамики. Основные законы динамики.

Тема 2. Динамика свободной материальной точки

Дифференциальные уравнения движения материальной точки. Первая и вторая задачи динамики. Движение тела, брошенного под углом к горизонту. Примеры интегрирования дифференциального уравнения в случае сил, зависящих от времени, скорости и положения точки.

Тема 3. Колебательное движение материальной точки

Виды колебательных движений. Свободные колебания материальной точки. Амплитуда, частота, период, фаза колебаний. Затухающие колебания. Влияние сопротивления на период колебаний. Закон уменьшения амплитуды колебаний. Декремент и логарифмический декремент колебаний. Вынужденные колебания при наличии сопротивления движению. Амплитуда и фаза вынужденных колебаний при наличии сопротивления.

Тема 4. Динамика относительного движения материальной точки

Дифференциальные уравнения относительного движения материальной точки. Силы инерции при относительном движении. Инерциальные системы отсчета. Случай относительного покоя.

Тема 5. Введение в динамику системы

Механическая система. Силы внешние и внутренние. Масса системы. Центр масс. Момент инерции тела относительно оси. Радиус инерции. Моменты инерции некоторых однородных тел. Моменты инерции тела относительно параллельных осей (теорема Гюйгенса – Штейнера).

Тема 6. Теоремы об изменении количества движения механической системы

Количество движения материальной точки и механической системы. Теорема об изменении количества движения механической системы в дифференциальной форме. Следствия теоремы. Импульс силы. Теорема об изменении количества движения системы в конечной форме (теорема импульсов).

Тема 7. Теорема о движении центра масс

Доказательство теоремы. Дифференциальные уравнения движения центра масс. Следствия теоремы.

Тема 8. Теорема об изменении кинетического момента механической системы

Момент количества движения материальной точки относительно центра и оси. Кинетический момент механической системы относительно центра и оси. Теорема об изменении кинетического момента системы относительно центра и оси. Следствия теоремы. Дифференциальное уравнение вращения тела вокруг неподвижной оси. Физический маятник и его малые колебания. Дифференциальные уравнения плоского движения тела.

Тема 9. Работа и мощность силы

Работа постоянной силы. Элементарная работа. Работа переменной силы на криволинейном перемещении. Работа равнодействующей. Работа силы тяжести и силы упругости. Работа сил, приложенных к вращающемуся телу. Мощность сил.

Тема 10. Теорема об изменении кинетической энергии

Кинетическая энергия материальной точки и механической системы. Теорема Кенига. Кинетическая энергия твердого тела при поступательном, вращательном и плоском движениях. Теорема об изменении кинетической энергии материальной точки. Теоремы об изменении кинетической энергии механической системы в конечной и дифференциальной формах.

Тема 11. Метод кинетостатики (принцип Даламбера)

Метод кинетостатики для материальной точки. Метод кинетостатики для механической системы. Приведение сил инерции частиц твердого тела к данному центру.

Тема 12. Принцип возможных перемещений

Возможные перемещения механической системы. Идеальные связи. Принцип возможных перемещений. Применение принципа возможных перемещений к определению реакций связей. Принцип Даламбера – Лагранжа (общее уравнение динамики).

Тема 13. Уравнения Лагранжа второго рода

Обобщенные координаты и число степеней свободы. Обобщенные силы. Общее уравнение динамики в обобщенных силах. Уравнения Лагранжа II рода.

1. ОБЩИЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ИЗУЧЕНИЮ КУРСА И ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

При изучении всех разделов курса теоретической механики может быть предложен следующий план работы над учебным материалом:

- Изучение материала учебника по данному разделу программы. Выделение главного, разбор основных определений и доказательств.

- Составление краткого конспекта по каждой теме. После разбора материала и составления конспекта рекомендуется ответить на контрольные вопросы, помещенные в учебнике А. А. Яблонского, В. М. Никифорова [11] после каждой главы.

- Решение задач по материалу изучаемой темы. Приступая к самостоятельному решению задачи, необходимо сделать аккуратный чертеж, сформулировать закон или теорему, которая будет применена для решения задачи.

2. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО САМОСТОЯТЕЛЬНОМУ ИЗУЧЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

2.1. Статика

Приступая к изучению статики, нужно знать из векторной алгебры: сложение и вычитание векторов, определение проекции вектора на ось, разложение вектора по ортам координатных осей, скалярное и векторное умножения и основные свойства скалярного и векторного произведения. При решении задач часто требуются сведения из геометрии и тригонометрии о прямоугольных и косоугольных треугольниках.

Изучение статики рекомендуется выполнять примерно в той последовательности, которая отражена в рабочей программе.

Ниже в краткой форме освещены основные узловые вопросы статики.

Перед изучением систем сил необходимо ввести понятие вращательного эффекта действия силы. Если силы расположены в одной плоскости, то мерой вращательного эффекта действия силы \vec{F} относительно центра O служит ее алгебраический момент $M_0 = \pm Fd$, где d – плечо силы относительно центра (рис. 2.1).

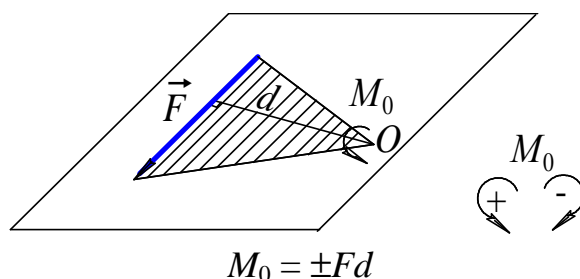


Рис. 2.1

Общей мерой вращательного эффекта действия силы \vec{F} относительно центра O служит векторный момент $\vec{M}_0 = \vec{r} \times \vec{F}$, где \vec{r} – радиус-вектор точки приложения силы \vec{F} относительно центра O (рис. 2.2).

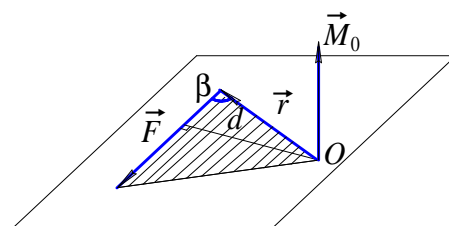


Рис. 2.2

$$\vec{M}_0 = \vec{r} \times \vec{F},$$

$$|M_0| = |\vec{r} \times \vec{F}| = rF \sin \left(\hat{\vec{r}}; \vec{F} \right) = Fr \sin \beta = Fd.$$

Момент силы в виде вектора \vec{M}_0 относительно центра O направлен перпендикулярно плоскости, проходящей через центр O и силу, в ту сторону, откуда видна сила, стремящаяся повернуть тело вокруг центра O против хода часовой стрелки.

Если сила расположена в пространстве, то мерой вращательного эффекта действия силы \vec{F} относительно оси Oz является момент спроектированной силы F_{Π} относительно данной оси:

$$M_z(F) = \pm F_{\Pi} h,$$

где F_{Π} – модуль проекции силы F на плоскость Π , перпендикулярную оси Oz ; h – плечо проекции силы относительно точки O (рис. 2.3).

Момент силы относительно оси будет иметь знак (+), когда с положительного конца оси поворот, который стремится совершить сила F_{Π} , виден происходящим против хода часовой стрелки.

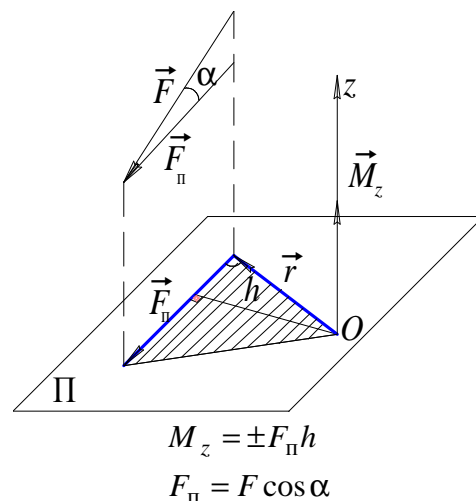


Рис. 2.3

Главное содержание статики состоит в решении двух основных задач:

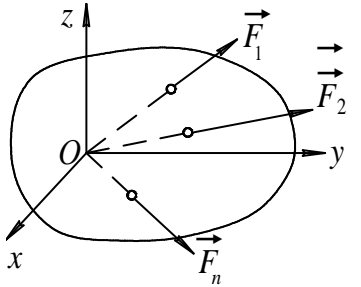
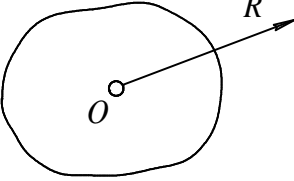
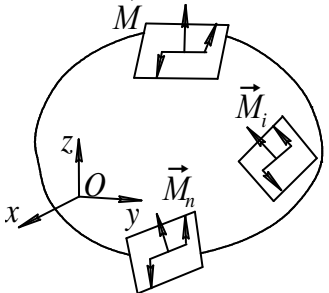
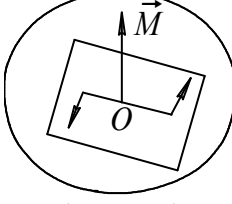
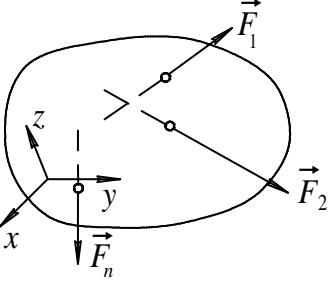
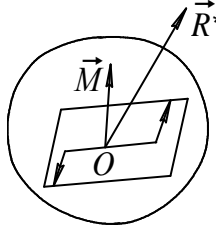
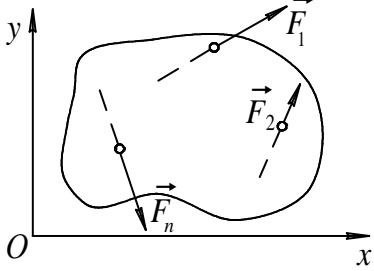
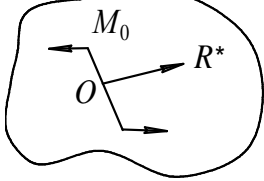
- 1) задачи о приведении системы сил, действующих на свободное твердое тело, к простейшему виду (эквивалентной системе сил);
- 2) задачи о равновесии – установлении условий и уравнений равновесия данной системы сил.

Эти две задачи последовательно решаются для системы сходящихся сил, системы пар сил и произвольной системы сил.

Перед решением указанных задач студент должен усвоить основные понятия и аксиомы статики. Необходимо обратить внимание на понятия уравновешенной и эквивалентной системы сил, понятие равнодействующей, уяснить классификацию сил на активные силы и реакции связей и запомнить правила изображения реакций связей.

Первой изучается система сходящихся сил. Результаты решения двух основных задач статики для систем сил представлены в табл. 2.1. Они таковы: система сходящихся сил приводится к одной силе – равнодействующей \vec{R} ; уравнения равновесия для сходящихся сил в общем случае представляют собой три уравнения проекций сил на декартовы оси (см. первую строчку табл. 2.1).

Таблица 2.1

Система сходящихся сил	Простейший вид или эквивалентная система	Уравнения равновесия
	 $\vec{R} = \sum \vec{F}_i$	$\sum F_{ix} = 0$ $\sum F_{iy} = 0$ $\sum F_{iz} = 0$
	 $\vec{M} = \sum \vec{M}_i$	$\sum M_{ix} = 0$ $\sum M_{iy} = 0$ $\sum M_{iz} = 0$
	 $\vec{R}^* = \sum \vec{F}_i$ $\vec{M} = \sum \vec{M}_0(F_i)$	$\sum F_{ix} = 0$ $\sum F_{iy} = 0$ $\sum F_{iz} = 0$ $\sum M_x(F_i) = 0$ $\sum M_y(F_i) = 0$ $\sum M_z(F_i) = 0$
	 $\vec{R}^* = \sum \vec{F}_i$ $\vec{M}_0 = \sum \vec{M}_{0i}(F_i)$	$\sum F_{ix} = 0$ $\sum F_{iy} = 0$ $\sum M_0(F_i) = 0$

Помимо силы, действие одного тела на другое может характеризоваться парой сил. В связи с этим изучается система пар сил. Действие пары сил на тело сводится только к вращательному эффекту.

Если пары сил лежат в одной плоскости, то мерой вращательного эффекта служит алгебраический момент пары $\tilde{M} = \pm Fd$, где d – плечо пары.

Общей мерой вращательного эффекта пары служит векторный момент пары сил $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$, где \vec{r} – радиус-вектор одной силы пары относительно точки приложения второй.

Результаты решения двух основных задач статики для пространственной системы пар сил таковы: система пар сил приводится к одной результирующей паре сил; уравнения равновесия для пар сил представляют собой три уравнения проекций векторных моментов пар сил на декартовы оси (см. вторую строку табл. 2.1).

При изучении пространственной системы сил особое внимание следует уделить основной теореме статики о приведении произвольной пространственной системы сил к данному центру (теореме Пуансо). Сущность теоремы состоит в том, что произвольную систему сил можно преобразовать в систему сходящихся сил и систему пар сил, а последние заменить соответственно силой и парой сил. Уравнения равновесия для пространственной системы сил представляют собой три уравнения проекций сил на декартовы оси и три уравнения моментов сил относительно каждой из трех декартовых осей (см. третью строку табл. 2.1).

Результаты решения двух основных задач для плоской произвольной системы сил, представленные в последней строке табл. 2.1, являются частным случаем предыдущих. Следует отметить, что два уравнения проекций сил и одно уравнение алгебраических моментов сил относительно произвольного центра являются лишь одним из трех возможных вариантов записи уравнений равновесия для плоской произвольной системы сил. Два других представляют собой два уравнения алгебраических моментов и одно уравнение проекций сил (ось проекций не должна быть перпендикулярна отрезку, соединяющему моментные точки) или три уравнения алгебраических моментов сил (моментные точки не должны лежать на одной прямой).

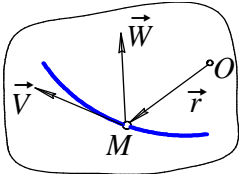
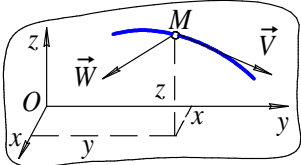
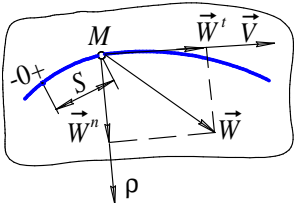
2.2. Кинематика

Кинематику – раздел теоретической механики, изучающий движение материальных тел вне зависимости от сил, вызвавших это движение, – принято делить на кинематику точки и кинематику абсолютно твердого тела. В кинематике точки изучаются способы задания движения точки: векторный, координатный, естественный; методы определения кинематических характеристик движения точки (закон движения, скорость и ускорение). В табл. 2.2 приведены основные зависимости из кинематики точки.

Различают пять видов движения твердого тела:

- 1) поступательное;
- 2) вращательное вокруг неподвижной оси;
- 3) плоскопараллельное (плоское);
- 4) сферическое, или вращение тела вокруг неподвижной точки;
- 5) свободное.

Таблица 2.2

Способ задания движения	Уравнения движения	Скорость точки	Ускорение точки
Векторный 	$\vec{r} = \vec{r}(t)$	$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt}$	$\vec{W} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$
Координатный 	$x = x(t)$ $y = y(t)$ $z = z(t)$	Проекции скорости на оси: $V_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}$; $V_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}$; $V_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}$. Модуль скорости: $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$.	Проекции ускорения на оси: $W_x = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$; $W_y = \frac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y}$; $W_z = \frac{d^2z}{dt^2} = \ddot{z}$. Модуль ускорения: $W = \sqrt{W_x^2 + W_y^2 + W_z^2}$.
Естественный 	$OM = S = S(t)$	Алгебраическая величина скорости: $\tilde{V} = \frac{dS}{dt}$. Модуль скорости: $V = \left \frac{dS}{dt} \right $.	Модуль касательного и нормального ускорения: $W^t = \left \frac{d^2S}{dt^2} \right = \left \frac{d\tilde{V}}{dt} \right $; $W^n = \frac{V^2}{\rho}$, где ρ – радиус кривизны. Модуль полного ускорения: $W = \sqrt{(W^t)^2 + (W^n)^2}$.
Векторный	$\vec{r} = \vec{r}(t)$	$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt}$	$\vec{W} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$

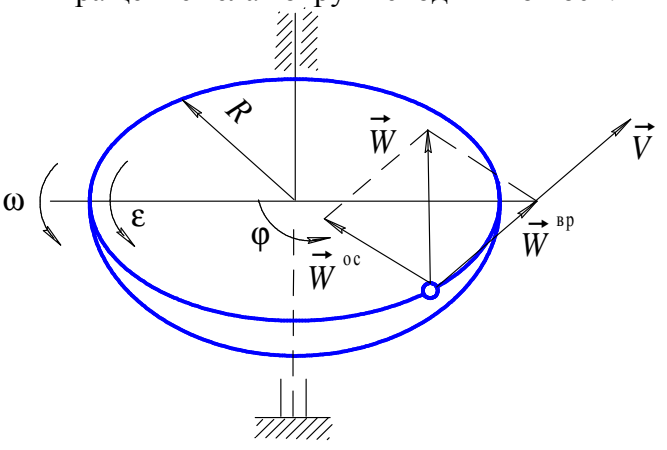
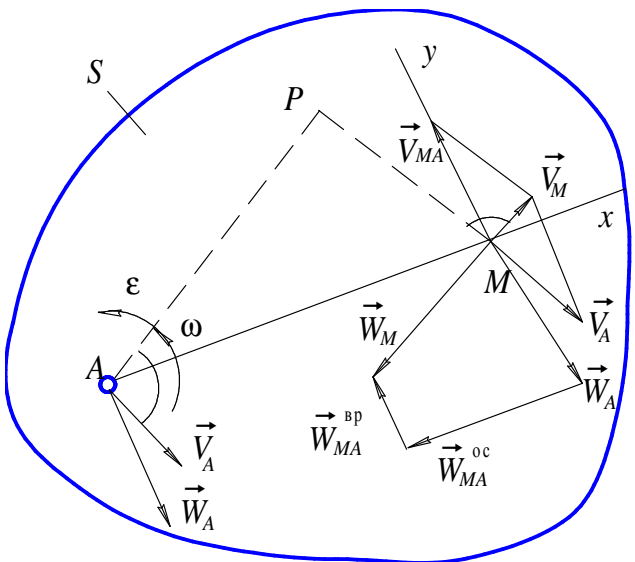
Рабочей программой предусмотрено изучение первых трех видов.

Поступательное и вращательное движение вокруг неподвижной оси называют простейшими движениями тела. Первое – полностью определяется движением одной его точки, и для изучения такого движения достаточно знать кинематику точки. При изучении вращательного движения тела вводятся новые кинематические характеристики движения: угловая скорость и угловое ускорение тела. Они должны быть твердо усвоены. Необходимо запомнить формулы для скорости, центростремительного и вращательного ускорений любой точки вращающегося тела (табл. 2.3).

При изучении движения плоской фигуры в своей плоскости, к которому сводится изучение плоскопараллельного движения тела, очень важным является то обстоятельство, что такое движение состоит из двух простейших движений: поступательного движения вместе с полюсом и вращательного движения фигуры вокруг полюса. За полюс можно принять произвольную точку тела, например точку A . Если это положение усвоено, то легко понять тот факт, что скорость и ускорение любой точки плоской фигуры геометрически складываются из скоростей и ускорений полюса и скоростей и ускорений точки тела при

вращении вокруг полюса. Основные формулы для скорости и ускорения точки плоской фигуры даны в табл. 2.3.

Таблица 2.3

Кинематические характеристики движения тела	Формулы для скорости и ускорения точки тела
<p>Вращение тела вокруг неподвижной оси:</p>  <p> $\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt} = \omega > 0, \quad \ddot{\varphi} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{d\omega}{dt} = \varepsilon > 0.$ </p> <p>Уравнение вращения: $\varphi = \varphi(t)$ рад.</p> <p>Алгебраические величины угловой скорости и углового ускорения:</p> <p>$\tilde{\omega} = \dot{\varphi}$ рад/с, $\tilde{\varepsilon} = \ddot{\varphi}$ рад/с².</p> <p>Модули угловой скорости и углового ускорения:</p> <p>$\omega = \dot{\varphi} , \quad \varepsilon = \ddot{\varphi} = \dot{\omega} ,$</p> <p>$\dot{\varphi}; \ddot{\varphi} > 0$ – ускоренное вращение, $\dot{\varphi}; \ddot{\varphi} < 0$ – замедленное вращение.</p>	<p>Модуль вращательной скорости точки тела:</p> $V = \omega R.$ <p>Модули вращательного (касательного) и осестремительного (нормального) ускорений точки тела:</p> $W^{bp} = \varepsilon R; \quad W^{oc} = \omega^2 R.$ <p>Модуль полного ускорения точки тела:</p> $W = \sqrt{(W^{bp})^2 + (W^{oc})^2} = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}.$
<p>Плоско-параллельное движение</p> 	<p>Скорость точки M:</p> <p>а) $\vec{V}_M = \vec{V}_A + \vec{V}_{MA},$ где $V_{MA} = \omega AM; \quad \vec{V}_{MA} \perp AM;$</p> <p>б) $V_M = \omega PM; \quad \vec{V}_M \perp PM.$ (·)P – мгновенный центр скоростей.</p> <p>Ускорение точки M:</p> $\vec{W}_M = \vec{W}_A + \vec{W}_{MA}^{oc} + \vec{W}_{MA}^{bp},$ $W_{MA}^{oc} = \omega^2 AM, \quad W_{MA}^{bp} = \varepsilon AM,$ $W_{MA}^{oc} \parallel AM; \quad W_{MA}^{bp} \perp AM.$ <p>Модуль полного ускорения точки M:</p> $W_M = \sqrt{W_{Mx}^2 + W_{My}^2},$ $W_{Mx} = (W_A)_x + (W_{MA}^{oc})_x + (W_{MA}^{bp})_x,$ $W_{My} = (W_A)_y + (W_{MA}^{oc})_y + (W_{MA}^{bp})_y.$

Достаточно трудным для изучения является сложное движение точки. Здесь прежде всего надо четко уяснить понятия относительного, переносного и абсолютного движений. Лишь после этого можно перейти к изучению теорем сложения скоростей и ускорений. Наиболее простое наглядное доказательство этих теорем дано в учебнике «Краткий курс теоретической механики» С. М. Тарга [10].

При изучении сложного движения точки студент знакомится с новым понятием – *кориолисовым ускорением точки*. Нужно внимательно разобраться в том, как определяются модуль и направление кориолисова ускорения, надо понять физическую причину возникновения этого ускорения ($\vec{W}_{\text{кор}}$):

$$\vec{W}_{\text{кор}} = 2 (\vec{\omega} \times \vec{V}_{\text{отн}}), \text{ по модулю } W_{\text{кор}} = 2\omega V_{\text{отн}} \sin \left(\vec{\omega}, \hat{\vec{V}}_{\text{отн}} \right).$$

2.3. Динамика

Динамика – раздел теоретической механики, изучающий движение материальных точек и тел в зависимости от сил, вызвавших движение – делится на динамику точки и динамику механической системы.

Для успешного овладения динамикой студентом должна быть хорошо усвоена статика и кинематика. Он должен владеть техникой дифференцирования и интегрирования, иметь навыки решения дифференциальных уравнений первого и второго порядка с постоянными коэффициентами и со специальной правой частью.

Раздел динамики чрезвычайно важен для формирования всех последующих инженерных знаний и навыков студента.

Динамика дает мощный и гибкий аппарат для решения разнообразных задач техники.

В табл. 2.4 приведены основные дифференциальные уравнения динамики, которые позволяют найти уравнения движения того или иного объекта, если известны характеристики его инертных свойств, действующие силы и начальные условия движения. Особое значение имеют уравнения Лагранжа II рода. Они позволяют составить дифференциальные уравнения движения самых разнообразных машин и механизмов. Студент должен освоить последовательность действий при составлении дифференциальных уравнений движения конкретной механической системы с помощью уравнений Лагранжа II рода.

В табл. 2.5 приведены дифференциальные уравнения колебаний материальной точки, общие решения и уравнения колебаний.

В табл. 2.6 даны общие теоремы динамики механической системы и сведения о величинах, входящих в уравнения, выражающие ту или иную теорему.

В табл. 2.7 выписаны уравнения, выражающие содержание метода кинестатики и принципов теоретической механики.

В табл. 2.8 приведены примеры простейшего вида систем сил инерции частиц тела. Данные этой таблицы полезно использовать при решении задач методом кинетостатики и с помощью общего уравнения динамики.

Таблица 2.4

Основные дифференциальные уравнения динамики

Вид дифференциальных уравнений	Дифференциальные уравнения
Дифференциальные уравнения движения материальной точки в декартовых координатах	$m\ddot{x} = \sum F_{ix}, \quad m\ddot{y} = \sum F_{iy}, \quad m\ddot{z} = \sum F_{iz},$ <p>где m – масса точки; F_{ix}, F_{iy}, F_{iz} – проекция силы \vec{F}_i на оси координат.</p>
Дифференциальные уравнения движения центра масс механической системы	$M\ddot{x}_c = \sum F_{ix}^e, \quad M\ddot{y}_c = \sum F_{iy}^e, \quad M\ddot{z}_c = \sum F_{iz}^e,$ <p>где M – масса системы; x_c, y_c, z_c – координаты центра масс; $F_{ix}^e, F_{iy}^e, \dots, F_{iz}^e$ – проекция внешней силы \vec{F}_i^e на оси координат.</p>
Дифференциальное уравнение вращения тела вокруг неподвижной оси	$I_z \ddot{\phi} = \sum M_z(F_i^e) = M_z^e,$ <p>где I_z – момент инерции тела относительно оси z вращения, M_z^e – главный момент внешних сил относительно оси z.</p>
Дифференциальные уравнения плоского движения тела	$M\ddot{x}_c = \sum F_{ix}^e, \quad M\ddot{y}_c = \sum F_{iy}^e, \quad I_{cz} \ddot{\phi} = M_{cz}^e,$ <p>где I_{cz} – момент инерции относительно оси cz, перпендикулярной плоскости движения; M_{cz}^e – момент внешних сил относительно оси cz.</p>
Дифференциальные уравнения движения механической системы, имеющей S степеней свободы в обобщенных координатах (уравнения Лагранжа II рода)	$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} = Q_1,$ $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_2} = Q_2,$ <p>.....</p> $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_s} = Q_s,$
<p>где T – кинетическая энергия системы; Q_1, Q_2, \dots, Q_s – обобщенные силы; $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s$ – обобщенные скорости.</p>	

Основные уравнения теории линейных колебаний материальной точки

Вид колебаний	Действующие силы	Дифференциальное уравнение	Общее решение	Уравнение колебаний
Свободные колебания	Восстанавливающая сила: $F_x = -cx$	$m\ddot{x} = -cx$ или $\ddot{x} + k^2x = 0;$ $k = \sqrt{c/m}$	$x = c_1 \cos kt + c_2 \sin kt = a \sin(kt + \alpha),$ где c_1, c_2, α – произвольные постоянные.	$x_1 = x_0 \cos kt + \frac{\dot{x}_0}{k} \sin kt =$ $= a \sin(kt + \alpha),$ $a = \sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{k^2}}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{x_0 k}{\dot{x}_0},$ где x_0, \dot{x}_0 – начальные условия.
Свободные затухающие колебания	Восстанавливающая сила F_x и сила сопротивления R_x : $F_x = -cx,$ $R_x = -\beta\dot{x}.$	$m\ddot{x} = -cx - \beta\dot{x}$ или $\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2x = 0,$ $n = \frac{\beta}{2m}; \quad k = \sqrt{c/m}$	При $n < k$ $x = e^{-nt} [c_1 \cos(k_1 t) + c_2 \sin(k_1 t)] =$ $= e^{-nt} a \sin(k_1 t + \alpha);$ $k_1 = \sqrt{k^2 - n^2}$	При $n < k \quad x = e^{-nt} a \sin(k_1 t + \alpha),$ $a = \sqrt{x_0^2 + \frac{(\dot{x}_0 + nx_0)^2}{k_1^2}},$ $\operatorname{tg} \alpha = \frac{x_0 k_1}{\dot{x}_0 + nx_0}$
Вынужденные колебания	Восстанавливающая сила F_x и возмущающая сила H_x : $F_x = -cx$ $H_x = H_0 \sin(pt + \delta).$	$m\ddot{x} = -cx + H_0 \sin(pt + \delta)$ или $\ddot{x} + k^2x = \frac{H_0}{m} \sin(pt + \delta)$	$x = x_1 + x_2,$ $x_1 = c_1 \cos kt + c_2 \sin kt = a \sin(kt + \alpha),$ $x_2 = A \sin(pt + \delta)$	$x_1 = a \sin(kt + \alpha) + A \sin(pt + \delta),$ $A = \frac{H_0}{m(k^2 - p^2)}$
Вынужденные колебания с сопротивлением	Восстанавливающая сила F_x сила сопротивления и возмущающая сила H_x : $F_x = -cx,$ $R_x = -\beta\dot{x},$ $H_x = H_0 \sin(pt + \delta).$	$m\ddot{x} = -cx - \beta\dot{x} + H_0 \sin(pt + \delta),$ $\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2x = \frac{H_0}{m} \sin(pt + \delta)$	$x = x_1 + x_2,$ $x_1 = e^{-nt} (c_1 \cos k_1 t + c_2 \sin k_1 t) =$ $= e^{-nt} a \sin(k_1 t + \alpha),$ $x_2 = A \sin(pt + \delta - \gamma),$ при $n < k \quad k_1 = \sqrt{k^2 - n^2}.$	$x = e^{-nt} a \sin(k_1 t + \alpha) +$ $+ A \sin(pt + \delta - \gamma),$ $A = \frac{H_0}{m \sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}},$ $\operatorname{tg} \gamma = \frac{2np}{k^2 - p^2}$

Общие теоремы динамики механической системы

Название теоремы		Равенство, выражающее теорему
Теорема о движении центра масс		$M\vec{W}_c = \sum \vec{F}_i^e$
Теорема об изменении количества движения	а) в дифференциальной форме	$\frac{d\vec{K}}{dt} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^e,$ где $\vec{K} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{V}_i = M\vec{V}_c$ – количество движения системы.
	б) в конечной форме	$\vec{K} - \vec{K}_0 = \sum_{i=1}^n \vec{S}_i^e,$ где \vec{K}_0, \vec{K} – количество движения системы в начальном и конечном положениях; $\vec{S}_i^e = \int_0^t \vec{F}_i^e dt$ – импульс внешней силы \vec{F}_i^e за промежуток времени t ее действия.
Теорема об изменении кинетического момента	а) относительно неподвижного центра	$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \sum_{i=1}^n \vec{M}_0(\vec{F}_i^e),$ где $\vec{L}_0 = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times m_i \vec{V}_i$ – кинетический момент системы относительно неподвижного центра O ; $\vec{M}_0(\vec{F}_i^e) = \vec{r}_i \times \vec{F}_i^e$ – векторный момент внешней силы \vec{F}_i^e относительно центра O .
	б) относительно неподвижной оси Oz	$\frac{dL_z}{dt} = \sum_{i=1}^n M_{0z}(\vec{F}_i^e),$ где L_z – кинетический момент системы относительно оси Oz ; $M_{0z}(\vec{F}_i^e)$ – момент внешней силы \vec{F}_i^e относительно оси Oz .
Теорема об изменении кинетической энергии в конечной форме	а) в общем случае	$T - T_0 = A^e + A^i,$ где T_0, T – кинетическая энергия системы в ее начальном и конечном положениях; A^e, A^i – сумма работ всех внешних и внутренних сил соответственно.
	б) для неизменяемой системы	$T - T_0 = A^e$

Дополнение к табл. 2.6.

1. Кинетический момент тела относительно неподвижной оси Oz вращения:

$$L_{oz} = I_{oz} \omega_{oz},$$

где I_{oz} – момент инерции тела относительно оси Oz ; ω_{oz} – угловая скорость вращения.

2. Основные формулы для определения кинетической энергии тела:

а) при поступательном движении:

$$T = \frac{1}{2} M V_c^2,$$

где M – масса тела, V_c – скорость центра масс;

б) при вращении тела вокруг неподвижной оси Oz :

$$T = \frac{1}{2} I_{oz} \omega^2;$$

в) при плоскопараллельном движении:

$$T = \frac{1}{2} M V_c^2 + \frac{1}{2} I_{cz} \omega^2 = \frac{1}{2} I_{pz} \omega^2,$$

где I_{cz} – момент инерции тела относительно оси, перпендикулярной плоскости движения; ω – угловая скорость вращения тела; I_{pz} – момент инерции тела относительно мгновенного центра скоростей.

3. Некоторые формулы для расчета работы:

а) работа силы тяжести тела:

$$A = \pm PH,$$

где P – сила тяжести, H – высота опускания (+) или поднятия (–) центра масс тела;

б) работа постоянного момента M , приложенного к вращающему телу:

$$A = \pm M\varphi,$$

где φ – угол поворота тела в радианах, знак (+), если направление действия момента совпадает с направлением угла поворота, и знак (–), если не совпадает;

в) работа момента сопротивления качению:

$$A = -M_{\text{с.кач}} \varphi = -\frac{f_k}{r} NS,$$

где f_k – коэффициент трения качения; r – радиус цилиндрического катка; N – нормальная реакция опорной поверхности; S – пройденный осью катка путь;

г) работа силы трения скольжения:

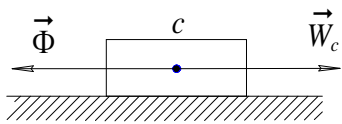
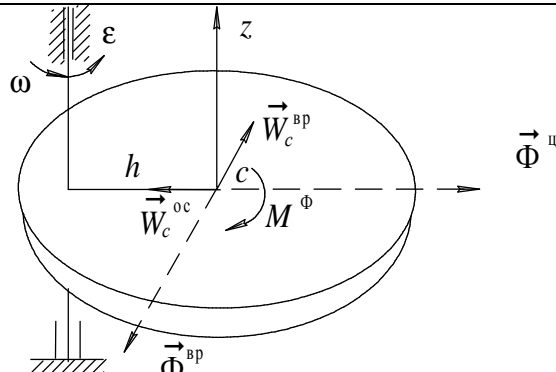
$$A = -F_m S = -fNS,$$

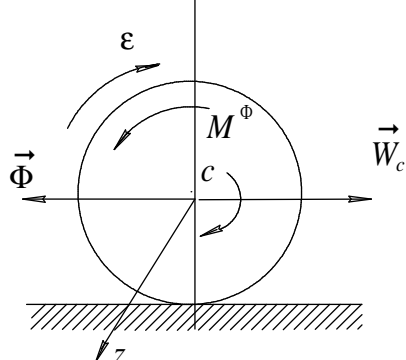
где f – коэффициент трения скольжения.

Метод кинетостатики и принципы механизма

Название метода кинетостатики или принципа	Уравнения метода кинетостатики или принципа
Метод кинетостатики для материальной точки	Векторное уравнение равновесия для сил \vec{F} , действующих на материальную точку, и условно приложенной к ней силы инерции $\vec{\Phi} = -m\vec{w}$, имеет вид $\sum \vec{F}_i + \vec{\Phi} = 0$, где m – масса точки, \vec{w} – ускорение точки.
Метод кинетостатики для механической системы	Векторные уравнения равновесия для внешних сил системы и сил инерции Даламбера, условно приложенных к точкам системы: $\vec{F}_*^e + \vec{\Phi}_* = 0$, $\vec{M}_0^e + \vec{M}_0^\Phi = 0$, где \vec{F}_*^e , $\vec{\Phi}_*$ – главные векторы внешних сил и сил инерции материальных точек системы соответственно; \vec{M}_0^e , \vec{M}_0^Φ – главные векторные моменты внешних сил и сил инерции относительно центра O соответственно.
Принцип возможных перемещений	Уравнение элементарных работ активных сил или общее уравнение статики: $\delta B^a = \sum \vec{F}_i^a \delta \vec{r}_i = \sum F_i^a \delta r_i \cos \left(\vec{F}_i^a \hat{\delta \vec{r}_i} \right) = 0,$ <p>где $\delta \vec{r}_i$ – возможное перемещение точки приложения активной силы \vec{F}_i^a.</p>
Принцип Даламбера – Лагранжа	Уравнение элементарных работ активных сил и сил инерции материальных точек механической системы, или общее уравнение динамики: $\delta B^a + \delta B^\Phi = \sum \vec{F}_i^a \delta \vec{r}_i + \sum \vec{\Phi}_i \delta \vec{r}_i =$ $= \sum F_i^a \delta r_i \cos \left(\vec{F}_i^a \hat{\delta \vec{r}_i} \right) + \sum \Phi_i \delta r_i \cos \left(\vec{\Phi}_i \hat{\delta \vec{r}_i} \right) = 0.$

Простейший вид системы сил инерции частиц тела

Вид движения тела	Простейший вид системы сил инерции частиц тела
1	2
Поступательное движение	 <p>Модуль силы инерции тела: $\Phi = MW_c.$</p>
Вращение тела вокруг неподвижной оси, перпендикулярной плоскости материальной симметрии тела	

1	2
	<p>Модули и векторы центробежной и вращательной сил инерции тела:</p> $\Phi^{\text{ц}} = MW_c^{\text{oc}} = M\omega^2 h, \quad \vec{\Phi}^{\text{ц}} = -M\vec{W}_c^{\text{oc}},$ $\Phi^{\text{вр}} = MW_c^{\text{вр}} = M\varepsilon h, \quad \vec{\Phi}^{\text{вр}} = -M\vec{W}_c^{\text{вр}}.$ <p>Модуль и вектор главного момента сил инерции (момента инерционной пары сил тела):</p> $M^{\Phi} = I_{cz}\varepsilon, \quad \vec{M}^{\Phi} = -I_{cz}\vec{\varepsilon}.$
<p>Плоское движение тела. Центр масс движется в плоскости материальной симметрии тела</p>	 <p>Модуль и вектор силы инерции тела</p> $\Phi = MW_c, \quad \vec{\Phi} = -M\vec{W}_c.$ <p>Модуль и вектор главного момента сил инерции (момента инерционной пары сил тела):</p> $M^{\Phi} = I_{cz}\varepsilon, \quad \vec{M}^{\Phi} = -I_{cz}\vec{\varepsilon}.$

3. КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ

Требования к контрольной работе

Контрольная работа выполняется в отдельной тетради, на обложке которой студент пишет свой адрес и учебный шифр. При выполнении работы следует переписать условие задачи, сделать аккуратный чертеж, пояснить решение задачи и выполнить предложенные исследования (плохо оформленная работа возвращается без рецензирования).

3.1. Контрольная работа № 1

Состоит из четырех задач по статике. Первая задача (1-1) – на равновесие плоской системы сходящихся сил, вторая (1-2) и третья (1-3) – на равновесие плоской произвольной системы сил, приложенной к одному телу, четвертая (1-4) – на равновесие плоской произвольной системы сил, приложенной к системе связанных (сочлененных) между собой тел.

Номера задач 1-2 из «Сборника задач по теоретической механике» И. В. Мещерского [5] студент найдет по двум последним цифрам своего шифра в табл. 3.2. Условия и данные задач 1-1, 1-3, 1-4 приведены в данных указаниях; по предпоследней цифре шифра (ПрЦШ) студент определяет схему, а по последней (ПЦШ) – числовые данные, приведенные в табл. 3.1, 3.3, 3.4.

Задача 1-1. Определение реакций связей твердого тела, находящегося под действием плоской системы сходящихся сил

Найти графоаналитически и аналитически реакции связей твердого тела.

Схемы конструкций представлены на рис. 3.1, исходные данные в табл. 3.1.

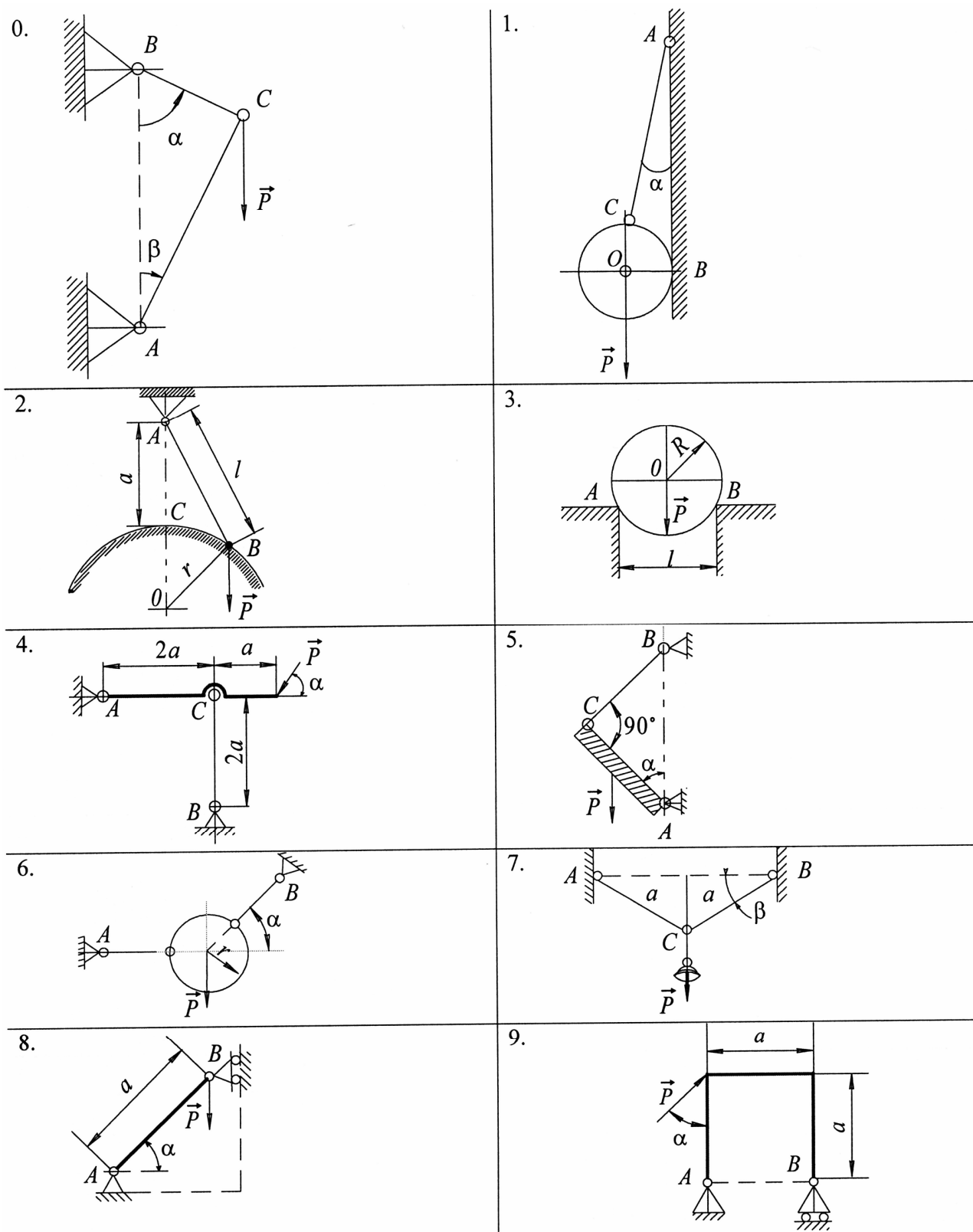


Рис. 3.1. Схемы конструкций с нагрузкой к задаче 1-1

Таблица 3.1

№ схемы	Пара- метры	ПЦШ									
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.	α°	30	30	15	30	45	60	75	90	120	135
	β°	120	90	75	60	45	30	15	30	30	15
	P, H	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000
1.	α°	15	30	45	60	75	75	60	45	30	15
	P, H	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000
2.	$r, \text{см}$	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55
	$d, \text{см}$	20	25	30	35	40	45	50	55	60	70
	$l, \text{см}$	25	30	35	40	45	50	55	60	65	80
	P, H	50	100	150	200	250	300	350	400	450	500
3.	$R, \text{м}$	1	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,2	2,4	2,8	3,0
	$l, \text{м}$	1,5	1,8	2,0	2,4	2,8	3,0	3,2	3,5	4,0	4,4
	P, H	3	3,2	3,5	3,8	4,0	4,2	4,4	4,6	4,8	5,0
4.	α°	30	45	60	120	135	150	210	225	240	300
	P, H	1,0	1,3	1,6	1,9	2,2	2,5	2,8	3,1	3,4	3,8
5.	α°	30	45	60	30	45	60	30	45	60	30
	P, H	10	12	14	16	18	20	22	24	26	30
6.	α°	30	45	60	90	120	135	150	30	45	60
	P, H	100	150	200	250	300	350	400	450	500	550
7.	β°	30	45	60	30	45	60	30	45	60	30
	P, H	100	120	140	160	180	200	220	240	260	280
8.	α°	75	60	45	30	15	30	45	60	75	60
	P, H	2,0	1,8	1,6	1,4	1,2	1,0	1,8	2,6	3,4	3,0
9.	α°	30	45	60	90	120	150	45	60	90	120
	P, H	20	40	60	80	100	120	140	160	180	200

Задача 1-2. Определение реакций связей твердого тела

Найти аналитически реакции связей твердого тела. Номера задач в табл. 3.2 из «Сборника задач по теоретической механике» И. В. Мещерского [5].

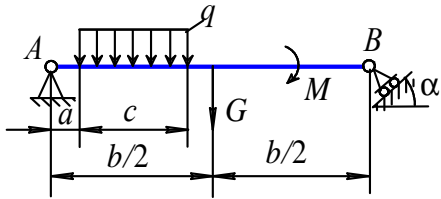
Таблица 3.2

ПрЦШ	ПЦШ									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	3.12	4.7	3.17	3.2	3.7	3.16	3.17	4.22	4.9	3.19
1	3.16	3.15	4.13	4.7	4.22	4.13	3.16	3.14	3.12	4.7
2	4.11	4.10	4.1	3.18	4.21	4.7	4.1	4.21	4.25	4.30
3	4.14	4.17	4.7	3.12	4.7	4.4	4.14	3.19	3.16	4.26
4	4.22	4.20	4.18	4.16	4.15	4.13	4.11	4.10	4.9	4.17
5	4.15	4.7	4.28	4.1	4.27	4.15	4.14	4.1	4.4	4.25
6	3.14	4.25	4.29	4.14	4.9	4.22	3.14	4.10	4.29	4.28
7	3.7	3.8	4.27	4.8	4.25	3.20	4.22	4.7	4.15	4.28
8	4.22	4.9	4.12	4.15	3.8	4.9	3.7	4.12	4.25	4.27
9	4.21	4.29	4.27	3.14	4.29	3.19	3.20	4.8	3.16	4.14

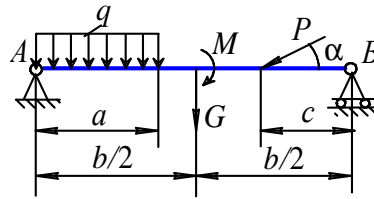
Задача 1-3. Определение реакций опор твердого тела

Найти реакции опор конструкции. Схемы конструкций с нагрузкой представлены на рис. 3.2, исходные данные – в табл. 3.3, размеры a, b, c даны в метрах.

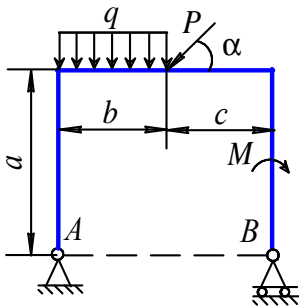
0. $G = 6 \text{ кН}$, $M = 12 \text{ кН} \cdot \text{м}$, $q = 3 \text{ кН/м}$



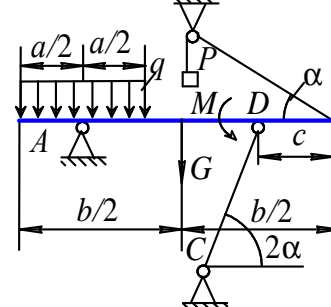
1. $G = 10 \text{ кН}$, $P = 5 \text{ кН}$, $M = 10 \text{ кН} \cdot \text{м}$, $q = 2 \text{ кН/м}$



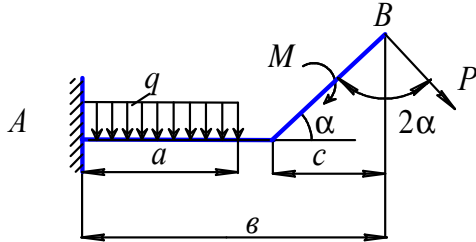
2. $P = 2 \text{ кН}$, $M = 10 \text{ кН} \cdot \text{м}$, $q = 4 \text{ кН/м}$



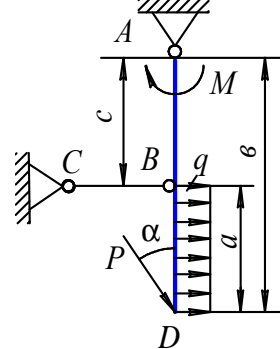
3. $P = 5 \text{ кН}$, $M = 8 \text{ кН} \cdot \text{м}$, $q = 2 \text{ кН/м}$, $G = 6 \text{ кН}$



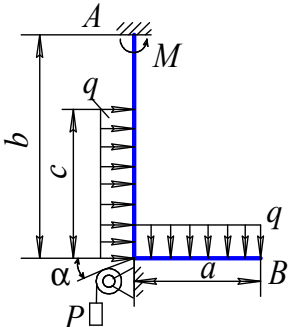
4. $P = 4 \text{ кН}$, $M = 6 \text{ кН} \cdot \text{м}$, $q = 3 \text{ кН/м}$



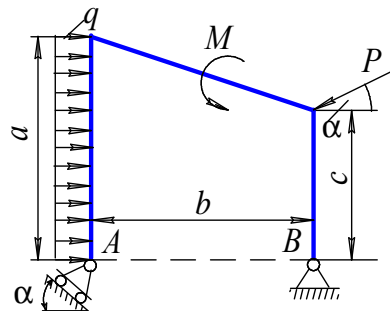
5. $P = 5 \text{ кН}$, $M = 8 \text{ кН} \cdot \text{м}$, $q = 2 \text{ кН/м}$



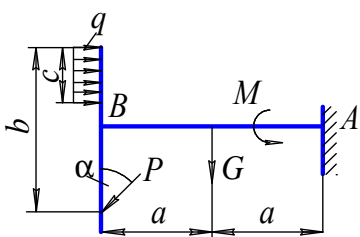
6. $P = 10 \text{ кН}$, $M = 6 \text{ кН} \cdot \text{м}$, $q = 2 \text{ кН/м}$



7. $P = 2 \text{ кН}$, $M = 10 \text{ кН} \cdot \text{м}$, $q = 4 \text{ кН/м}$



8. $G = 4 \text{ кН}$, $P = 5 \text{ кН}$, $M = 8 \text{ кН} \cdot \text{м}$, $q = 4 \text{ кН/м}$



9. $P = 7 \text{ кН}$, $M = 8 \text{ кН} \cdot \text{м}$, $q = 1 \text{ кН/м}$

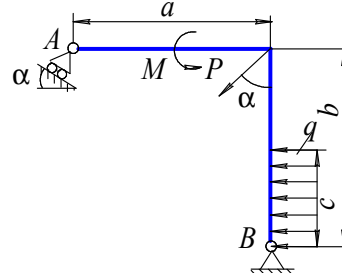


Рис. 3.2. Схемы конструкций с нагрузкой к задаче 1-3

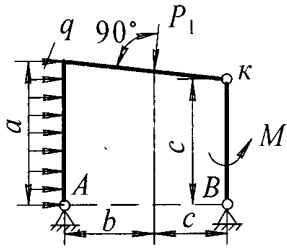
Таблица 3.3

№ схемы	Параметры	ПЦШ									
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.	a	1	1	2	1,5	2	2	0,5	0,5	0	0
	b	4	4	6	6	6	8	2	2	4	4
	c	2	1	1	2	2	4	1	0,5	2	1
	α°	45	45	30	30	60	60	45	60	45	60
1.	a	2	2	3	3	2	2	4	4	2	2
	b	4	4	6	6	6	6	6	6	4	4
	c	1	0,5	2	2	3	4	1	2	1	0,5
	α°	45	45	90	30	120	120	60	60	150	150
2.	a	2	2	2	2	3	3	3	2	2	2
	b	4	4	4	3	3	3	2	4	4	4
	c	1	2	0	1	2	1	3	1	2	0
	α°	30	45	60	90	30	45	60	90	45	60
3.	a	1	1,5	2	2	2	1	3	1	1	3
	b	4	4	5	5	6	6	8	4	4	8
	c	1,5	1	0,5	2	2	2	2	1	1,5	1
	α°	10	20	30	10	20	30	10	30	20	30
4.	a	2	4	5	3	2	4	1	3	4	5
	b	4	6	10	8	4	5	2	7	10	8
	c	1,5	2	4	2	1	1	0,5	3	3	3
	α°	30	45	60	30	45	60	30	45	60	30
5.	a	3	2	1,5	2	2	1	0,5	4	6	1
	b	4	5	2	3	4	3	2	6	8	4
	c	3	3	1	1	2	2	1	3	3	2
	α°	30	60	45	90	45	30	30	60	45	60
6.	a	2	2	2	3	3	4	4	1	1	2
	b	5	3	6	8	4	6	4	7	7	5
	c	2	2	3	3	3	2	2	5	7	3
	α°	30	45	60	30	45	60	60	45	60	30
7.	a	2	3	4	2	3	3	6	8	3	4
	b	3	4	5	2	6	4	8	10	4	6
	c	1	1	2	1,5	2	2	4	2	2	3
	α°	30	45	60	0	30	45	60	0	30	60
8.	a	2	1,5	2	2	3	3	2	2	2	3
	b	4	3	2	6	4	8	5	4	3	4
	c	1	1,5	1	4	2	5	2,5	3	2	2
	α°	30	60	45	90	30	60	45	90	30	60
9.	a	4	3	4	3	5	6	4	3	4	6
	b	4	2	3	4	6	5	4	2	4	5
	c	2	1	3	3	2	3	3	1	4	4
	α°	30	45	60	0	30	45	60	30	45	60

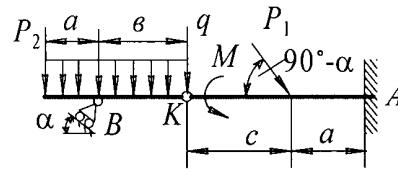
Задача 1-4. Определение реакций связей составной конструкции

Найти реакции опор и давление в промежуточном шарнире составной конструкции. Схемы конструкции с нагрузками представлены на рис. 3.3, размеры a , b , c (м) приведены в табл. 3.4.

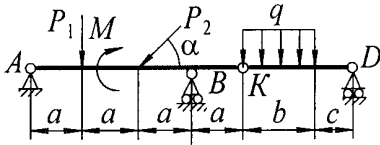
0. $P_1 = 6 \text{ кН}$, $M = 25 \text{ кН} \cdot \text{м}$, $q = 1 \text{ кН/м}$



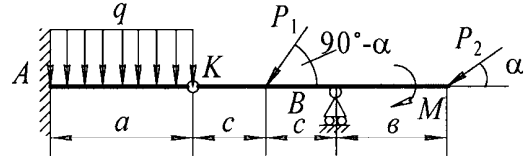
1. $P_1 = 9 \text{ кН}$, $P_2 = 10 \text{ кН}$, $M = 30 \text{ кН} \cdot \text{м}$,
 $q = 2 \text{ кН/м}$



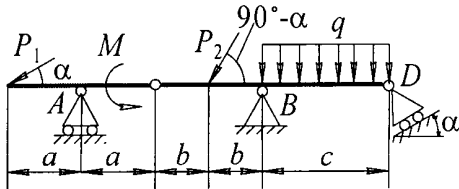
2. $P_1 = 5 \text{ кН}$, $P_2 = 8 \text{ кН}$, $M = 20 \text{ кН} \cdot \text{м}$,
 $q = 2 \text{ кН/м}$



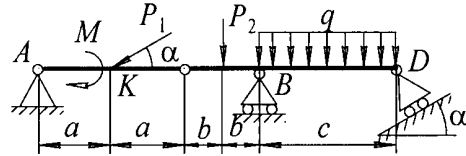
3. $P_1 = 10 \text{ кН}$, $P_2 = 9 \text{ кН}$, $M = 20 \text{ кН} \cdot \text{м}$,
 $q = 1,2 \text{ кН/м}$



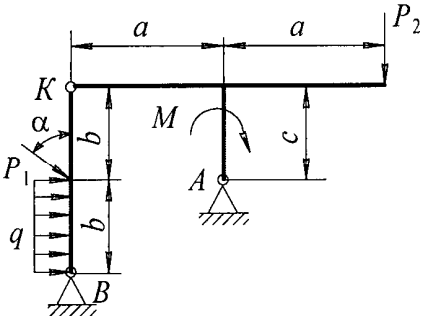
4. $P_1 = 15 \text{ кН}$, $P_2 = 15 \text{ кН}$, $M = 18 \text{ кН} \cdot \text{м}$,
 $q = 1,4 \text{ кН/м}$



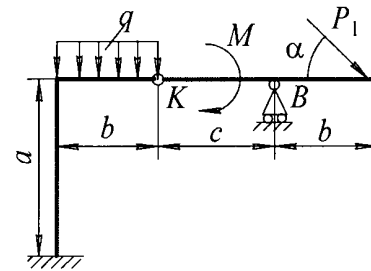
5. $P_1 = 5 \text{ кН}$, $P_2 = 10 \text{ кН}$, $M = 15 \text{ кН} \cdot \text{м}$,
 $q = 1,2 \text{ кН/м}$



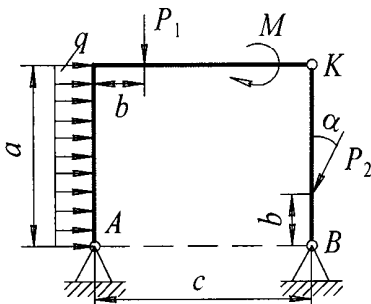
6. $P_1 = 9 \text{ кН}$, $P_2 = 15 \text{ кН}$, $M = 26 \text{ кН} \cdot \text{м}$,
 $q = 1,1 \text{ кН/м}$



7. $P_1 = 12 \text{ кН}$, $M = 25 \text{ кН} \cdot \text{м}$, $q = 1,0 \text{ кН/м}$



8. $P_1 = 8 \text{ кН}$, $P_2 = 10 \text{ кН}$, $M = 33 \text{ кН} \cdot \text{м}$,
 $q = 1,2 \text{ кН/м}$



9. $P_1 = 8 \text{ кН}$, $P_2 = 10 \text{ кН}$, $M = 30 \text{ кН} \cdot \text{м}$,
 $q = 0,8 \text{ кН/м}$

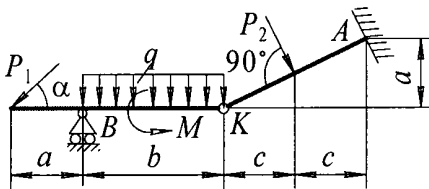


Рис. 3.3. Схемы конструкций с нагрузкой к задаче 1-4

Таблица 3.4

№ схемы	Параметры	ПЦШ									
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.	a	3,5	4	4	5	4	4	5	4	3	4
	b	4	4	3	4	3	3	4	5	3	4
	c	2	2	3	2	1	2	3	3	1	2
1.	a	2	1	2	1	2	1	1	2	1	2
	b	3	3	2	3	4	5	3	3	4	3
	c	2	2	1	1	1	1	2	1	1,5	1,5
	α°	30	45	60	0	30	45	60	0	30	60
2.	a	1	2	3	1,5	0,5	0,5	1	0,5	0,5	0,5
	b	3	3	2	3	3	2	4	3	3	4
	c	1	1	1	2	2	1	2	0,5	1	1
	α°	30	45	60	90	120	150	30	60	45	30
3.	a	1	2	3	2	3	3	4	2	3	4
	b	2	3	3	3	2	3	2	1	4	3
	c	1	1	1	1,5	0,5	0,5	0,5	0,4	0,5	0,5
	α°	30	60	45	30	60	45	30	60	45	30
4.	a	1	0,5	0,5	0,5	0,5	1	1	0,2	0,4	0,5
	b	1	1	2	0,5	1	1	0,5	0,5	0,5	2
	c	2	2	1	4	5	4	4	2	3	3
	α°	30	60	45	30	60	45	30	60	45	30
5.	a	1	0,5	0,5	1	1	0,5	0,2	0,2	0,5	0,2
	b	0,5	0,5	1	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,2
	c	3	2	3	2	4	4	1	2	3	4
	α°	60	30	60	45	30	60	45	30	60	45
6.	a	0,5	1	1	1,5	1,5	2	2	2	0,5	1
	b	0,5	1,5	1,5	2	2	2,5	2,5	2,5	1	2
	c	0,7	2	3	2	1	3	2,5	5	1	1
	α°	30	60	45	30	60	45	30	60	45	30
7.	a	2	2,5	2,5	3	4	4	2	5	2	3
	b	0,5	1	0,5	2	2	1	1	2	0,5	0,5
	c	3	3	2	3	3	2	3	1	2	2
	α°	30	45	60	45	30	60	30	60	45	30
8.	a	3	2	4	3	4	3	3	4	5	5
	b	1	1	1	0,5	1	0,5	2	3	2	4
	c	4	5	4	4	5	5	6	6	6	6
	α°	30	45	60	90	30	60	45	90	30	60
9.	a	2	2	2	1,5	1	2	3	3	4	5
	b	3	4	4	3	2	4	5	5	3	3
	c	0,5	1	0,5	0,5	0,5	1,5	1	2	1,5	2
	α°	30	60	45	90	30	45	60	90	30	60

3.2. Контрольная работа № 2

Состоит из четырех задач по статике и кинематике. Первая задача (2-1) – на равновесие плоской системы сил с учетом сцепления (трения покоя), вторая (2-2) – на равновесие пространственной системы сил, третья (2-3) – по кинематике материальной точки на определение траектории, скорости и ускорения;

четвертая (2-4) – на определение скоростей и ускорений точек твердого тела при поступательном и вращательном движениях.

Задача 2-1. Равновесие сил с учетом сцепления (трения покоя)

Найти минимальное значение силы P и реакции отмеченных на рис. 3.4 опор системы, находящейся в покое. Трением в опорных устройствах и размерами тормозной колодки пренебречь. Не учитывать веса стержней, колодок, нитей.

Указание. Номер схемы (рис. 3.4) соответствует последней цифре шифра, параметры системы берутся по табл. 3.5 по предпоследней цифре шифра.

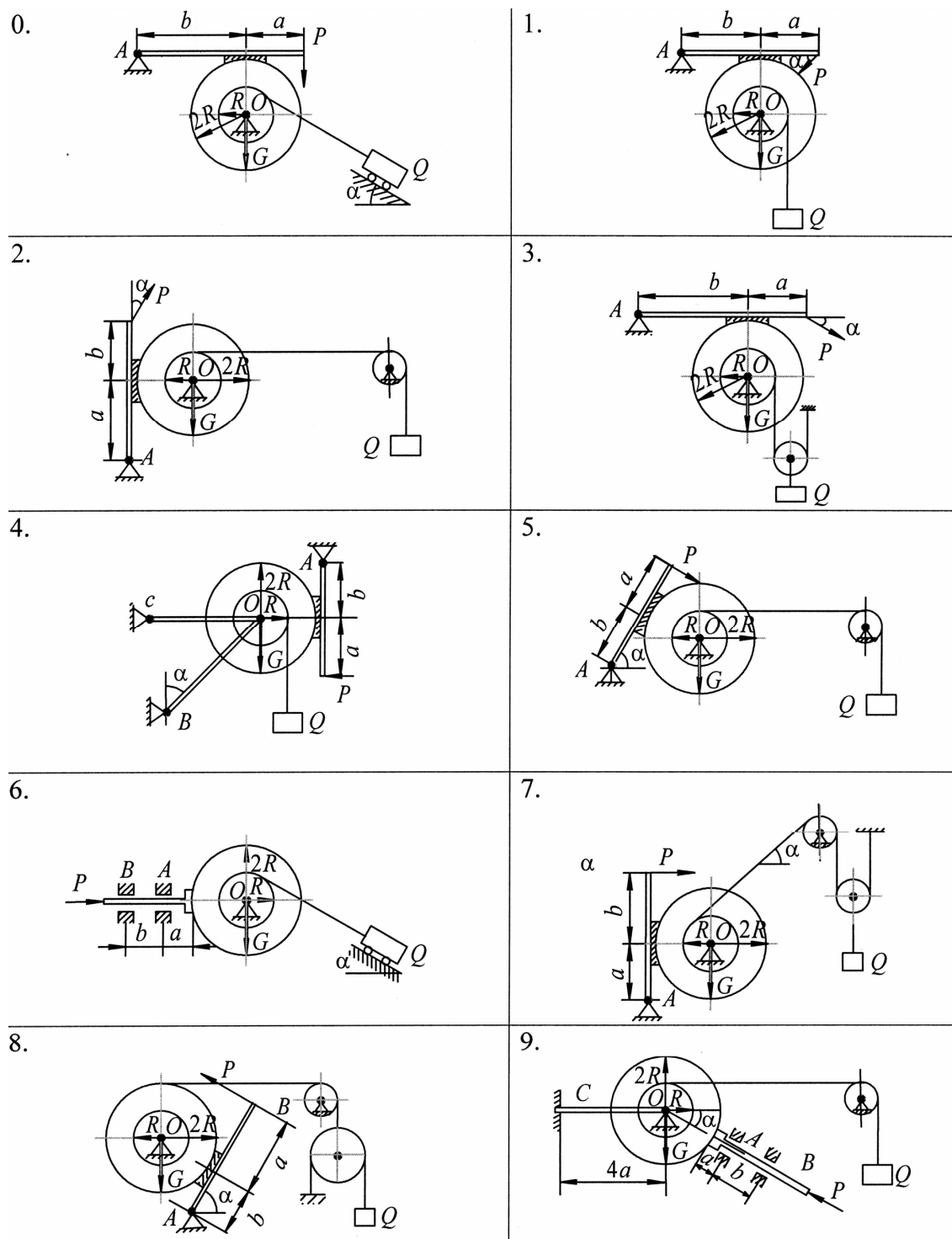


Рис. 3.4. Схемы систем к задаче 2-1

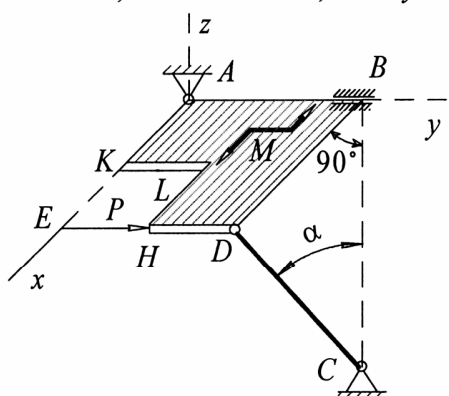
Параметры системы	ПрЦШ									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
G , кН	1	1,5	2	1,2	1,8	1,6	1,4	2,2	1,6	1,8
α°	30	45	60	30	45	60	30	45	60	30
a , м	0,2	0,25	0,3	0,2	0,25	0,3	0,4	0,1	0,2	0,25
b , м	0,1	0,40	0,2	0,4	0,2	0,3	0,3	0,25	0,1	0,3
$f_{\text{сц}}$	0,1	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,4	0,25	0,20	0,15
Q , кН	10	15	18	20	22	16	14	18	15	10

Задача 2-2. Определение реакций связей твердого тела

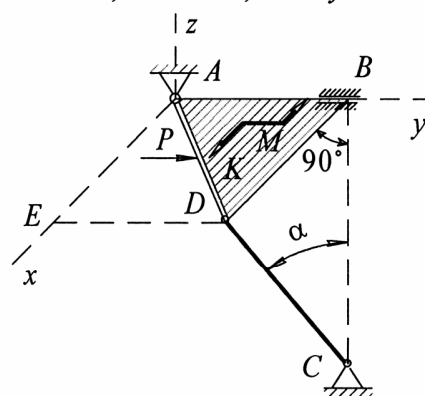
Тело в виде однородной тонкой плиты или двух сваренных под прямым углом плит закреплено сферическим шарниром, цилиндрическим шарниром и невесомым стержнем. На тело действует пара сил, сосредоточенная сила P и сила тяжести. Нужно найти реакции опорных шарниров и стержня. Для плиты с вырезами положение центра тяжести определить как центр тяжести площади плиты с учетом вырезов. Если тело состоит из двух плит, то при решении задачи учитывать силу тяжести каждой плиты отдельно.

Номер схемы (рис. 3.5) устанавливается по последней цифре шифра. Параметры системы берутся из табл. 3.6 по предпоследней цифре шифра. Величина q_s (Н/м^2) соответствует весу единицы площади плиты.

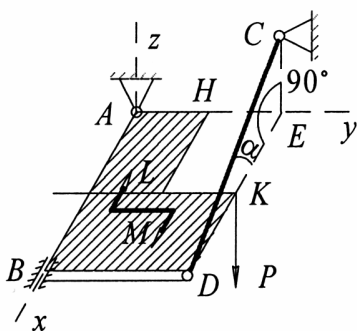
0. $AB = BD = a$, $KL = LH = a/2$, $P \parallel Ay$



1. $AB = BD = a$, $AK = KD$, $P \parallel Ay$



2. $AB = DE = 2a$, $AE = BD = a$, $KE = a$, $HE = a/2$, $P \parallel Az$



3. $BA = BD = 2a$, $DH = HE = a$, $P \parallel By$

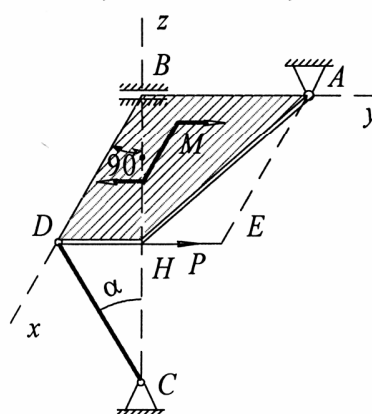
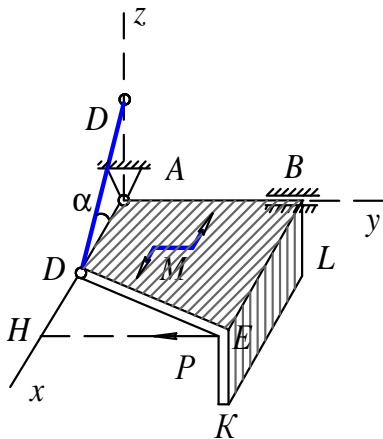
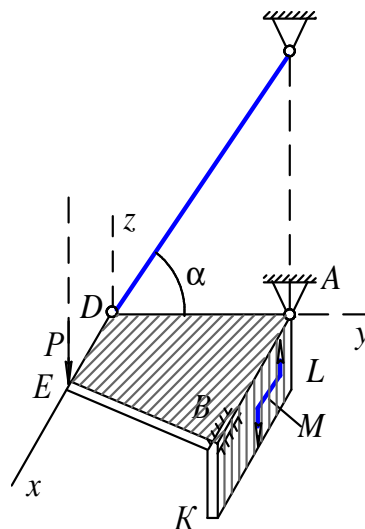


Рис. 3.5. Схемы конструкций к задаче 2-2

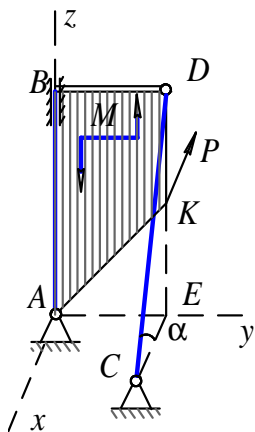
4. $AB = BE = a, AD = a/2, P \parallel Ay,$
 $BL = EK = DH = a/2$



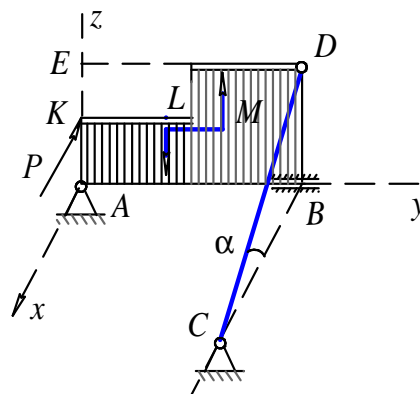
5. $AB = AD = a, DE = a/2, BK = AL = a/3,$
 $P \parallel Dz$



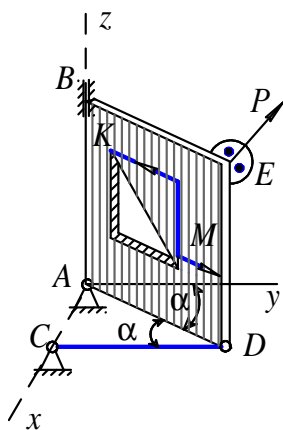
6. $AB = DE = 2a, AE = EK = BD = a, P \parallel Ax$



7. $AB = ED = 4a, BD = AE = EH = KL = 2a,$
 $EK = HL = KA = a, P \parallel Ax$



8. $AB = BE = 2a, KH = HL = a,$
 $P \perp BE, P \perp DE$



9. $AB = LD = 2a, KE = AD = ED = a, P \parallel Ax$

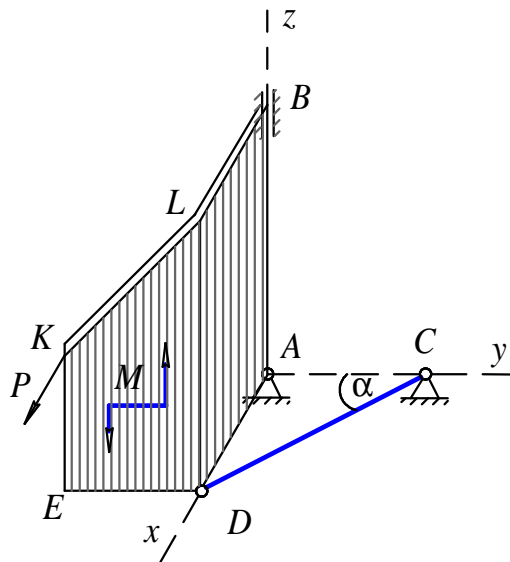


Рис. 3.5. Окончание

Таблица 3.6

Параметры	ПрЦШ									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
α°	30	45	60	30	45	60	30	45	60	30
$a, \text{ м}$	2	3	1	1	4	3	2	1	2,5	1
$P, \text{ кН}$	2	4	3	6	5	4	2	6	5	8
$M, \text{ кН} \cdot \text{ м}$	3	4	2	5	6	8	4	6	7	8
$q_s, \text{ Н/м}^2$	1	0,5	1	2	1	2	1	0,5	1	2

Задача 2-3. Определение скорости и ускорения точки по заданным уравнениям ее движения

По заданным уравнениям движения точки M найти и построить траекторию, указать на ней положение точки M в заданный момент $t = 1$ с, вычислить и построить скорость точки, полное, касательное и нормальное ускорения точки в момент $t = 1$ с.

Указание. Уравнение $x = x(t)$ берется из табл. 3.7 по предпоследней цифре шифра. Уравнение $y = y(t)$ выбирается из табл. 3.7 по последней и предпоследней цифрам шифра.

Таблица 3.7

ПрЦШ	$x = x(t), \text{ м}$	ПЦШ	$y = y(t), \text{ м}$		
			ПрЦШ		
			0, 1, 2	3, 4, 5, 6	7, 8, 9
0	$2 - 3 \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	0	$12 \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$2t^2 + 2$	$4 \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) - 2$
1	$6 \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) - 3$	1	$-4 - 6 \cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	$8 \sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)$	$14 - 16 \cos^2\left(\frac{\pi}{6}t\right)$
2	$4 \cos \frac{\pi}{6}t$	2	$-3 \sin^2\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$(2 + t)^2$	$4 \cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$
3	$2 - t$	3	$9 \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right) - 4$	$2t^3$	$-10 \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$
4	$2t$	4	$3 \cos\left(\frac{\pi}{3}t\right) - 2$	$2 + 2 \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)$	$-4 \cos^2\left(\frac{\pi}{6}t\right)$
5	$t - 4$	5	$-10 \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$2 - 3t^2$	$8 - 12 \cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$
6	$4 - 2t$	6	$2 - 6 \sin^2\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$2 - 2 \sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)$	$3 \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$
7	$12 \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	7	$2 \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right) - 2$	$(t + 1)^3$	$6 - 8 \sin\left(\frac{\pi}{3}t\right)$
8	$4 - 6 \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	8	$9 \cos\left(\frac{\pi}{3}t\right) + 5$	$2 - t^3$	$9 \cos\left(\frac{\pi}{3}t\right) - 3$
9	$8 \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right) - 2$	9	$3 - 8 \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$4 \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)$	$-6 \cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$

Задача 2-4. Определение скоростей и ускорений точек твердого тела при поступательном и вращательном движениях

По заданному уравнению прямолинейного поступательного движения груза 1 определить скорость, вращательное (касательное), осеостремительное (нормальное) и полное ускорение точки М механизма в момент времени $t = t_1$.

По последней цифре шифра в табл. 3.8 взять закон движения груза $x = x(t)$, значение времени t_1 и размеры шкивов; схемы изображены на рис. 3.6, номер схемы соответствует предпоследней цифре шифра студента.

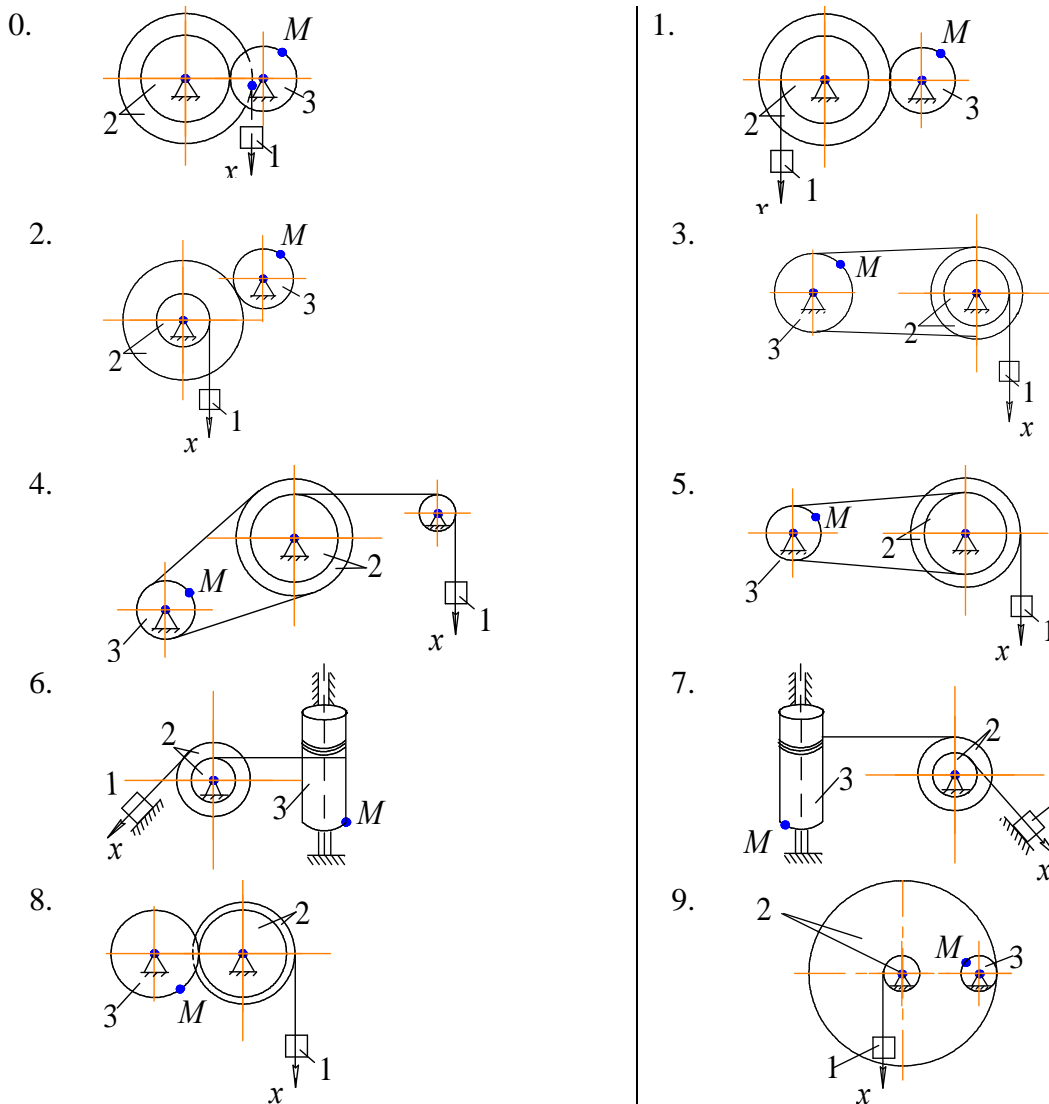


Рис. 3.6. Схемы механизмов к задаче 2-4

Таблица 3.8

Исходные данные	ПЦШ									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$x = x[t]$	$80t^2$	$40t^2$	$3 + 10t$	$2 + 50t$	$30t^2$	$50t^2$	$40 + 90t^2$	$7 + 30t^2$	$4 + 40t$	$10 + 30t^2$
t_1, c	1,0	2,0	3,0	1,0	2,0	0,5	1,5	1,0	0,5	2,0
R_2, cm	80	60	100	50	40	60	80	100	40	60
r_2, cm	40	30	40	30	20	30	40	50	20	30
R_3, cm	30	40	50	40	30	40	50	60	50	40

3.3. Контрольная работа № 3

Состоит из четырех задач по кинематике. Первые три задачи – по кинематике плоского движения точки. Четвертая задача – на определение скорости и ускорения точки в сложном движении при переносном вращательном движении.

Задача 3-1. Скорости точек твердого тела в плоском движении. Мгновенный центр скоростей

Номера задач из сборника И. В. Мещерского [5] даны в табл. 3.9.

Таблица 3.9

ПрЦШ	ПЦШ									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	16.16	16.19	16.22	16.24	16.30	16.29	16.28	16.26	16.35	16.31
1	16.25	16.23	16.7	16.9	16.10	16.15	16.16	16.17	16.18	16.19
2	16.20	16.21	16.22	16.25	16.26	16.16	16.19	16.22	16.24	16.30
3	16.31	16.35	16.26	16.28	16.29	16.25	16.23	16.7	16.9	16.10
4	16.20	16.29	16.19	16.11	16.16	16.25	16.8	16.28	16.18	16.31
5	16.16	16.22	16.30	16.28	16.33	16.19	16.24	16.29	16.26	16.35
6	16.25	16.7	16.10	16.16	16.18	16.23	16.9	16.15	16.17	16.19
7	16.20	16.22	16.26	16.19	16.24	16.21	16.25	16.16	16.22	16.30
8	16.31	16.26	16.29	16.23	16.7	16.10	16.35	16.28	16.25	16.7
9	16.20	16.19	16.16	16.8	16.18	16.29	16.11	16.25	16.28	16.31

Задача 3-2. Определение скоростей и ускорений точек тела, совершающего плоское движение

Колесо радиусом R (рис. 3.7) катится без скольжения по прямолинейному рельсу. Скорость центра колеса \vec{V}_O , ускорение \vec{W}_O . Найти скорость и ускорение точки A колеса, положение которой определяется расстоянием $OA = r$ и углом φ .

Исходные данные приведены в табл. 3.10, 3.11. Буквы «У» и «З» в табл. 3.10 указывают характер движения колеса: «У» – ускоренное движение, «З» – замедленное движение.

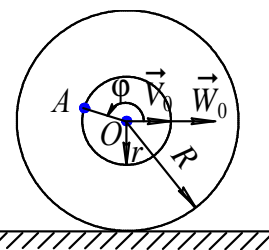


Рис. 3.7. Схема к задаче 3-2

Указание. Параметры качения колеса определяют по предпоследней и последней цифрам шифра.

Таблица 3.10

Параметры	ПрЦШ									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$R, \text{ м}$	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	0,8	0,8	0,8	0,8	0,8
$v_0, \text{ м/с}$	0,5	0,5	1,0	1,0	0,8	0,2	0,5	1,0	2,0	2,0
$w_0, \text{ м/с}^2$	1,0	0,5	0,5	1,0	0,5	0,5	0,5	2,0	2,0	0,2
Движение	У	З	У	З	У	З	У	З	У	З

Таблица 3.11

Параметры	ПЦШ									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$r, \text{ м}$	1,0	1,0	0,5	0,5	0,2	0,4	0,4	0,4	0,4	0,4
φ°	30	45	0	30	45	90	180	135	225	270

Задача 3-3. Определение скоростей и ускорений точек механизма

Кривошип $OA = r$ см кривошипно-шатунного механизма вращается вокруг неподвижной точки O с угловой скоростью ω (рис. 3.8). Шатун $AB = l$ см соединен шарнирно с кривошипом в точке A , а в точке B – с ползуном, который перемещается по прямой $c - c$. Для заданного положения механизма определить: положение мгновенного центра скоростей шатуна AB (PAB), мгновенную угловую скорость ω_{AB} и мгновенное угловое ускорение ϵ_{AB} шатуна AB , скорости точек B и M ($BM = d$, см) и ускорение точки B и M .

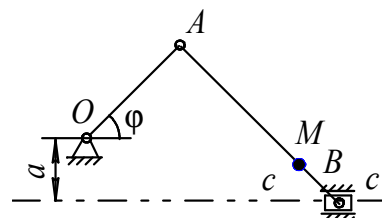


Рис. 3.8. Схема к задаче 3-3

Указание. По предпоследней цифре своего шифра студент в табл. 3.12 находит угол поворота ведущего звена кривошипа OA . По последней цифре шифра в табл. 3.13 – параметры для заданного положения механизма.

Таблица 3.12

Исходные данные	ПрЦШ									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
φ°	0	90	180	270	0	90	180	270	90	180

Таблица 3.13

Исходные данные	ПЦШ									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$r, \text{ м}$	20	20	30	30	40	40	50	50	30	25
$l, \text{ см}$	100	200	100	150	180	150	200	250	150	100
$\omega_{OA}, \text{ рад/с}$	2	4	6	8	10	2	4	6	8	10
$BM = d, \text{ см}$	10	20	25	30	50	20	50	100	10	20
$a, \text{ см}$	10	10	15	15	20	20	25	25	15	15

Задача 3-4. Определение скорости и ускорения точки в сложном движении

Прямоугольная, треугольная или круглая пластина радиусом $R = 60$ см (рис. 3.9) вращается вокруг неподвижной оси по закону $\varphi = \varphi(t)$, заданному в табл. 3.14. Положительное направление отчета угла φ показано на рисунках дуговой стрелкой. По пластине вдоль прямой BD или по окружности радиуса R движется точка M ; закон ее относительного движения, т. е. зависимость $S = AM = f(t)$, задан в табл. 3.14 отдельно для пластин прямоугольной и тре-

угольной формы и для пластин круглой формы (S – выражено в сантиметрах; t – в секундах). На рисунках точка M показана в положении, при котором $S = AM > 0$ (при $S < 0$ точка M находится по другую сторону от точки A). Размеры a и h на рис. 3.9 указаны в сантиметрах.

Найти абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки M в момент времени $t_1 = 1$ с.

Указание. По предпоследней цифре шифра определяют номер схемы, а по последней и предпоследней – уравнение движения [$\varphi = f(t)$; $S = f(t)$].

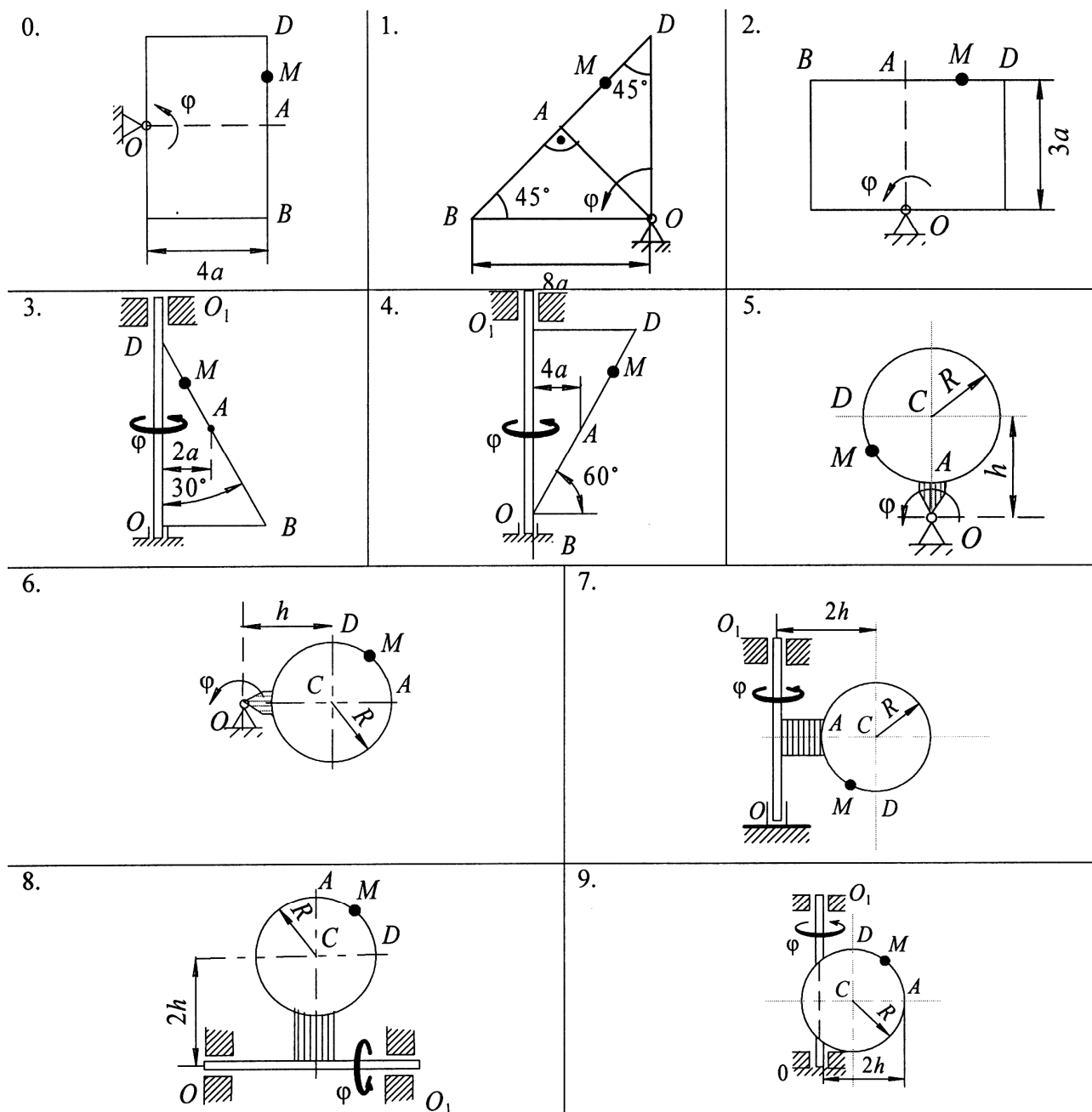


Рис. 3.9. Схемы сложного движения точки к задаче 3-4

Таблица 3.14

ПЦШ	$\varphi = \varphi(t)$	ПрЦШ 0 + 4		ПрЦШ 5 + 9	
		a	$S = AM = f(t)$	h	$S = AM = f(t)$
0	$4(t^2 - t)$	12	$50(3t - t^2) - 64$	R	$S = AM = f(t)$
1	$3t^2 - 8t$	16	$40(3t^2 - t^4) - 32$	$\frac{4}{3}R$	$\frac{\pi}{3}R(4t^2 - 2t^3)$
2	$6t^3 - 12t^2$	10	$80(t^2 - t) + 40$	R	$\frac{\pi}{2}R(2t^2 - t^3)$
3	$t^2 - 2t^3$	16	$60(t^4 - 3t^2) + 56$	R	$\frac{\pi}{3}R(2t^2 - 1)$
4	$10t^2 - 5t^3$	8	$80(2t^2 - t^3) - 48$	R	$\frac{\pi}{3}R(t^4 - 3t^2)$
5	$2(t^2 - t)$	20	$60(t^3 - 2t^2)$	R	$\frac{\pi}{6}R(3t - t^2)$
6	$5t - 4t^2$	12	$40(t^2 - 3t) + 32$	$\frac{3}{4}R$	$\frac{\pi}{3}R(t^3 - 2t)$
7	$15t - 3t^3$	8	$60(t - t^3) + 24$	R	$\frac{\pi}{2}R(t^3 - 2t^2)$
8	$2t^3 - 11t$	10	$50(t^3 - t) - 30$	R	$\frac{\pi}{3}R(3t^2 - t)$
9	$6t^2 - 3t^3$	20	$40(t - 2t)^3 - 40$	$\frac{4}{3}R$	$\frac{\pi}{2}R(t - 2t^2)$

Для решения задачи необходимо воспользоваться теоремами о сложении скоростей и ускорений. Прежде чем производить расчеты, следует по условиям задачи определить положение точки M на пластине в момент времени $t_1 = 1$ с и изобразить точку именно в этом положении (а не в произвольном, показанном на рисунках к задаче).

При решении задач с круглыми пластинами не подставлять числового значения R , пока не будут определены:

- а) положение точки M в момент времени $t_1 = 1$ с;
- б) угол между радиусами CM и CA в этот момент времени.

3.4. Контрольная работа № 4

Контрольная работа 4 состоит из пяти задач. Первая задача (4-1) – на интегрирование дифференциального уравнения движения материальной точки, вторая (4-2) – на исследование свободных и вынужденных колебаний материальной точки, третья (4-3) – на динамику относительного движения материальной точки, четвертая (4-4) – на теорему о движении центра масс, пятая (4-5) – на теорему об изменении кинетического момента и дифференциальное уравнение вращения тела вокруг неподвижной оси.

Задача 4-1. Составление и интегрирование дифференциального уравнения движения материальной точки

Груз D массой m начинает двигаться из точки A с начальной скоростью V_0 в изогнутой трубе ABC , расположенной в вертикальной плоскости (рис. 3.10).

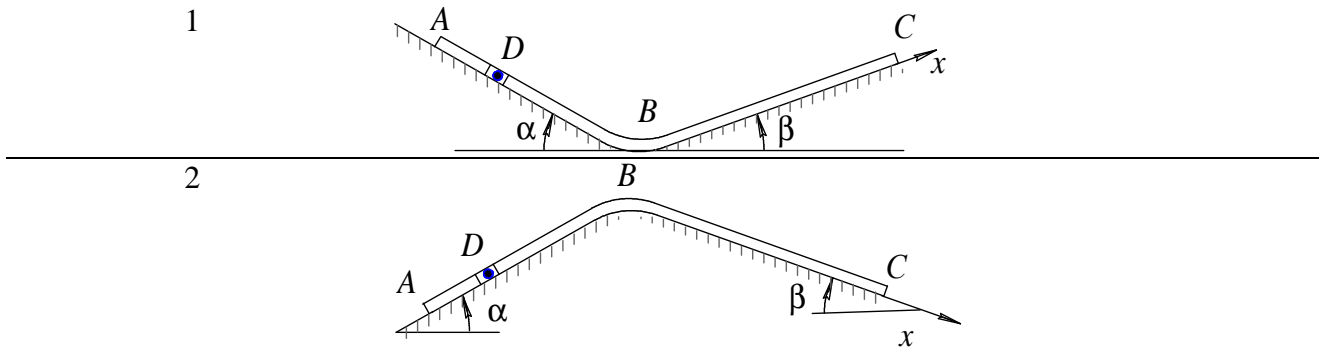


Рис. 3.10. Схемы к задаче 4-1

На участке AB на груз, кроме силы тяжести, действует сила сопротивления среды \vec{R} , зависящая от скорости v груза: $R = \mu_1 v$, или $R = \mu_2 v^2$; трением груза о трубу на участке AB пренебречь.

В точке B груз, не изменяя величины скорости, переходит на участок BC , где на него, кроме силы тяжести, действуют сила трения и переменная сила \vec{F} , проекция которой на ось x задана в табл. 3.15.

Таблица 3.15

Параметры	ПЦШ									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
α°	30	60	45	30	30	60	0	60	45	60
β°	0	30	45	60	30	45	60	0	0	30
$v_0, \text{ м/с}$	46	40	14	18	12	12	22	15	20	16
$m, \text{ кг}$	3	2	4	3	2	3	4	2	3	2
$F_x, \text{ Н}$	$6t$	$3t^2$	$2(1+t)$	$2t^2$	$3(1+t)$	$5t$	$4t^2$	$4(1+t)$	$3t^2$	$5t^2$

Считая груз материальной точкой и зная расстояние $AB = l$ или время t_1 движения груза от точки A до точки B , найти закон движения груза на участке BC .

Указание. По предпоследней цифре шифра студент в табл. 3.16 находит номер схемы (рис. 3.10), значения t_1 или l , сопротивление среды R и коэффициент сопротивления μ , коэффициент трения f . По последней цифре шифра в табл. 3.16 – углы α, β и v_0, m, F_x . При решении задачи принять во внимание, что величина конечной скорости в точки B по модулю на участке AB равна начальной скорости для участка BC .

Параметры	ПрЦШ									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
№ схемы	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
$R, Н$	$\mu_1 v$	$\mu_1 v$	$\mu_2 v^2$	$\mu_2 v^2$	$\mu_2 v^2$	$\mu_1 v$	$\mu_2 v^2$	$\mu_2 v^2$	$\mu_1 v$	$\mu_1 v$
$\mu_1, Н \cdot с/м$	0,8	0,6	–	–	–	0,5	–	–	1	0,8
$\mu_2, Н \cdot с^2/м^2$	–	–	0,4	0,3	0,7	–	0,6	0,4	–	–
$t_1, с$	2	3	–	–	–	3	–	–	2	3
$l, м$	–	–	4	3	2	–	4	3	–	–
f	0,3	0,2	0,25	0,15	0,4	0,1	0,3	0,2	0,35	0,25

Задача 4-2. Исследование свободных и вынужденных колебаний материальной точки

Тело массой m опирается на основание через две последовательно соединенные пары пружин. При силовом возбуждении колебаний тела (рис. 3.11) основание неподвижно, а на тело действует возмущающая сила $P(t) = P_{i0}\sin(\omega t) + P_{o2}\cos(\omega t)$. При кинематическом возбуждении колебаний основание совершает колебания, заданные уравнением $z_{\Pi} = a_1\sin(\omega t) + a_2\cos(\omega t)$. Необходимо исследовать свободные и вынужденные колебания тела.

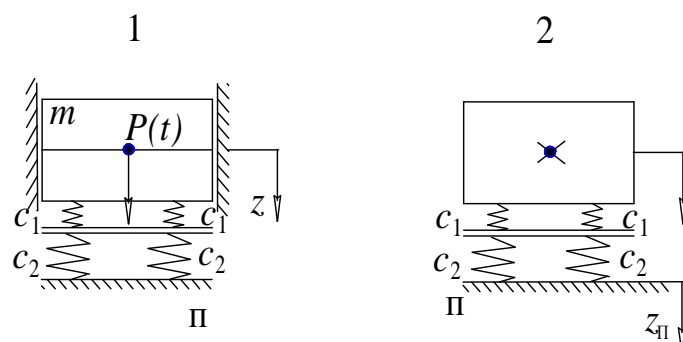


Рис. 3.11. Схемы к задаче 4-2

Для случая свободных колебаний тела принять $P(t) \equiv 0$; $z_{\Pi} \equiv 0$. Начальная координата z_0 и проекция начальной скорости груза \dot{z}_0 здесь отличны от нуля.

Для случая вынужденных колебаний тела при силовом или кинематическом возбуждении принять $z_0 = \dot{z}_0 = 0$.

Указание. По предпоследней цифре шифра студент находит в табл. 3.17 номер схемы (рис. 3.11), угловую частоту ω , P_{01} , P_{02} , a_1 , a_2 , массу m груза, коэффициенты жесткости c_1 , c_2 пружин, а также z_0 , \dot{z}_0 в табл. 3.18 (по последней цифре шифра).

Номера задач для контрольных работ 4-3, 4-4, 4-5 из сборника задач И. В. Мещерского [5] студент найдет в табл. 3.19 по двум последним цифрам шифра.

Таблица 3.17

Параметры	ПрЦШ									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
№ схемы	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
P_{01} , кН	100	–	–	–	140	–	–	–	90	–
P_{02} , кН	–	–	120	–	–	–	80	–	–	–
a_1 , м	–	0,2	–	–	–	0,25	–	–	–	0,2
a_2 , м	–	–	–	0,15	–	–	–	0,1	–	–
ω , рад/с	20	25	18	16	20	22	18	20	18	22

Таблица 3.18

Параметры	ПЦШ									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
m , кг	1000	1200	1500	1400	2000	1500	900	800	600	700
c_1 , кН/м	100	120	200	140	200	150	100	80	60	70
c_2 , кН/м	300	280	300	260	300	350	200	220	240	230
z_0 , м	0,1	0,2	0,15	0,2	0,15	0,1	0,2	0,5	0,1	0,2
\dot{z}_0 , м/с	2	1	1,5	1	1,2	1,4	1,6	1,5	1,3	1

Таблица 3.19

ПрЦШ	ПЦШ									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	33.10	33.5	33.4	33.5	33.10	33.4	33.17	33.10	33.12	33.10
	35.4	35.5	35.6	35.7	35.9	35.10	35.11	35.10	35.17	35.16
	38.44	37.43	38.48	37.50	37.51	37.52	37.53	37.9	37.58	37.14
1	33.5	33.4	33.5	33.17	33.10	33.17	33.17	33.2	33.10	33.12
	35.16	35.17	35.18	35.19	35.20	35.21	35.4	35.5	35.6	35.7
	37.14	37.9	38.47	37.9	37.6	37.5	37.4	37.12	37.14	37.15
2	33.2	33.10	33.4	33.5	33.12	33.10	33.13	33.5	33.10	33.10
	35.9	35.10	35.16	35.7	35.17	35.16	35.17	35.18	35.19	35.20
	38.44	37.43	37.48	37.9	37.51	37.5	37.53	37.12	37.58	37.14
3	33.10	33.17	33.10	33.5	33.12	33.11	33.4	33.12	33.17	33.10
	35.4	35.16	35.5	35.17	35.6	35.18	35.7	35.19	35.9	35.20
	37.14	37.3	38.47	37.5	37.6	37.2	37.4	37.9	37.14	37.14
4	33.12	33.10	33.10	33.12	33.5	33.4	33.10	33.10	37.17	33.10
	35.10	35.21	35.16	35.4	35.10	35.5	35.17	35.16	35.7	35.16
	37.14	38.44	37.9	37.43	38.47	38.48	37.9	37.50	37.6	37.51
5	33.5	33.12	33.5	33.10	33.12	33.5	33.12	33.12	33.5	33.4
	35.4	35.6	35.9	35.16	35.10	35.17	35.20	35.16	35.19	35.10
	38.44	37.43	38.48	37.50	37.51	37.52	37.53	37.9	37.58	37.14
6	33.12	33.5	33.10	33.10	33.12	33.5	33.10	33.5	33.12	33.10
	35.4	35.5	35.6	35.7	35.9	35.10	35.16	35.9	35.18	35.16
	37.14	37.9	38.47	37.9	37.6	37.5	37.4	37.12	37.14	37.15
7	33.5	33.10	33.12	33.17	33.10	33.10	33.2	33.12	33.5	33.10
	35.16	35.17	35.4	35.5	35.18	35.19	35.6	35.7	35.10	35.16
	38.44	37.17	38.48	37.9	37.51	37.5	37.53	37.12	37.58	37.14
8	33.10	33.12	33.11	33.17	33.5	33.10	33.10	33.10	33.5	33.12
	35.21	35.20	35.13	35.16	35.16	35.17	35.16	35.4	36.2	35.6
	37.14	37.14	37.9	37.4	37.2	37.6	37.5	38.47	37.1	37.4
9	33.12	33.11	33.10	33.17	33.12	33.5	33.10	33.5	33.10	33.17
	35.6	35.7	35.9	35.10	35.16	35.16	35.17	35.19	35.20	35.21
	37.51	37.6	37.50	37.9	38.48	38.47	37.43	37.9	38.44	37.14

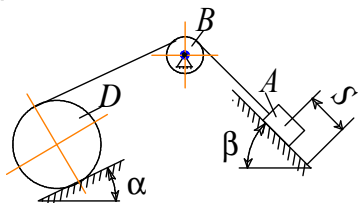
3.5. Контрольная работа № 5

Контрольная работа № 5 состоит из четырех задач по динамике механической системы. Первая задача (5-1) – на теорему об изменении кинетической энергии механической системы, вторая (5-2) – на применение принципа возможных перемещений для плоского механизма, третья (5-3) – на общее уравнение динамики механической системы, четвертая (5-4) – на уравнение Лагранжа второго рода.

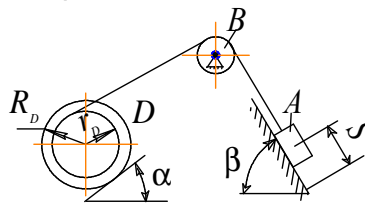
Задача 5-1. Применение теоремы об изменении кинетической энергии к изучению движения механической системы

Схемы механических систем показаны на рис. 3.12.

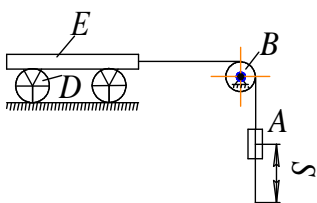
0. $\alpha = 30^\circ, \beta = 60^\circ, f = 0,15, \delta = 0,3 \text{ см}$



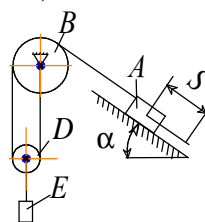
1. $\alpha = 45^\circ, \beta = 60^\circ, f = 0,2, \delta = 0,1 \text{ см}$



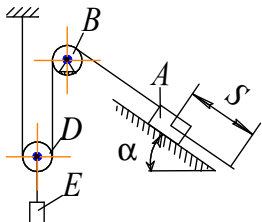
2. $\delta = 0,2 \text{ см}$



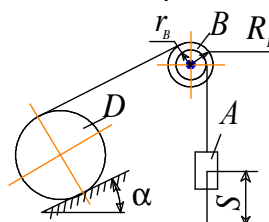
3. $\alpha = 60^\circ, f = 0,2$



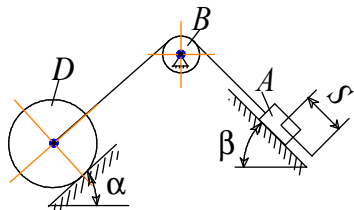
4. $\alpha = 60^\circ, f = 0,2$



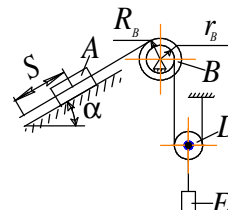
5. $\alpha = 45^\circ, \delta = 0,2 \text{ см}, \rho_{BX} = 0,8R_B$



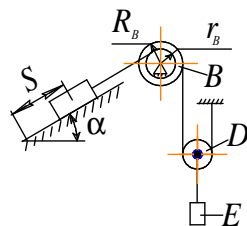
6. $\alpha = 30^\circ, \beta = 60^\circ, f = 0,15, \delta = 0,1 \text{ см}$



7. $\alpha = 30^\circ, f = 0,15$



8. $\alpha = 45^\circ, f = 0,1$



9. $\alpha = 30^\circ, \beta = 60^\circ, f = 0,15, \delta = 0,1 \text{ см}$

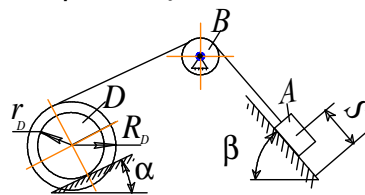


Рис. 3.12. Схемы механических систем к задачам 5-1, 5-3, 5-4

Механическая система приходит в движение из состояния покоя под действием сил тяжести. Учитывая трение скольжения тела A и сопротивление качению тела D , пренебрегая другими силами сопротивления и массой нитей, предполагаемых гибкими и нерастяжимыми, определить скорость и ускорение тела A .

Приняты обозначения: m_A, m_B, m_D, m_E – массы тел A, B, D, E ; $m_A = m$; R_B, R_D – радиусы шкивов; $\rho_{BX}; \rho_{DX}$ – радиусы инерции тел B и D относительно горизонтальных осей, проходящих через центры тяжести; f – коэффициент трения скольжения тела A ; δ – коэффициент трения качения тела D .

Блоки, катки, для которых радиусы инерции в таблице не указаны, считать однородными цилиндрами.

Указание. Номер схемы соответствует предпоследней цифре шифра студента (рис. 3.12), параметры схемы выбираются в табл. 3.20 по последней цифре шифра. Значение перемещения тела A равно $S = 2$ м во всех схемах.

Таблица 3.20

№ схемы (ПрЦШ)	Параметры	ПЦШ									
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	m_B/m	0,4	0,2	0,25	0,3	0,4	0,2	0,25	0,3	0,3	0,2
	m_D/m	0,2	0,2	0,15	0,2	0,2	0,1	0,1	0,2	0,1	0,1
	$R_B, \text{ см}$	15	20	10	10	10	15	10	15	10	15
	$R_D, \text{ см}$	30	25	20	25	20	20	15	20	20	20
1	m_B/m	0,5	0,4	0,3	0,3	0,4	0,4	0,4	0,5	0,5	0,4
	m_D/m	0,2	0,2	0,1	0,15	0,1	0,15	0,2	0,1	0,15	0,25
	$R_B, \text{ см}$	30	30	35	35	40	40	40	40	30	40
	$R_B = r_D, \text{ см}$	25	20	15	25	25	30	25	20	15	15
2	m_B/m	0,5	0,2	0,5	0,4	0,4	0,5	0,5	0,4	0,3	0,5
	m_D/m	0,1	0,5	0,2	0,1	0,2	0,8	0,5	0,2	0,1	0,2
	m_E/m	0,2	0,1	0,1	0,2	0,3	0,5	0,5	0,3	0,5	0,4
	$R_D = R_B, \text{ см}$	10	20	30	25	40	35	20	30	40	25
3	m_B/m	0,5	0,1	0,2	0,3	0,08	0,04	0,5	0,4	0,3	0,2
	$\frac{m_D}{m} = \frac{m_E}{m}$	0,2	0,05	0,01	0,02	0,04	0,02	0,08	0,05	0,1	0,01
	$R_B = R_D, \text{ см}$	40	60	80	100	20	40	60	80	100	80
4	m_B/m	0,1	0,2	0,25	0,3	0,1	0,3	0,25	0,3	0,4	0,25
	$\frac{m_D}{m} = \frac{m_E}{m}$	0,1	0,15	0,2	0,2	0,15	0,2	0,1	0,2	0,3	0,2
	$R_D, \text{ см}$	30	40	50	20	25	30	40	30	50	40
	$R_B, \text{ см}$	20	10	15	30	25	20	10	15	25	30
5	m_B/m	0,4	0,2	0,25	0,3	0,4	0,2	0,25	0,3	0,2	0,2
	m_D/m	0,2	0,2	0,1	0,15	0,2	0,1	0,1	0,15	0,1	0,1
	$r_B, \text{ см}$	25	20	15	10	10	15	10	15	10	10
	$R_B = R_D, \text{ см}$	30	40	30	25	20	20	20	20	30	20
6	m_B/m	0,5	0,5	0,4	0,4	0,3	0,3	0,4	0,3	0,25	0,3
	m_D/m	0,1	0,2	0,1	0,2	0,1	0,2	0,15	0,15	0,1	0,25
	$R_D, \text{ см}$	20	25	30	35	15	20	25	30	35	40
	$R_B, \text{ см}$	10	20	10	30	45	20	10	30	45	10

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
7	m_B/m	1,0	0,8	0,6	0,7	0,6	0,9	0,5	0,8	1,0	0,8
	$\frac{m_D}{m} = \frac{m_E}{m}$	0,2	0,5	0,5	0,3	0,2	0,6	0,5	0,5	0,3	0,4
	$R_B = 2r_B$, см	20	25	20	30	35	25	20	25	25	35
	$R_D = \rho_{BX}$, см	18	20	15	25	30	15	15	22	20	30
8	m_B/m	1,0	0,8	0,5	0,8	0,9	0,8	1,0	0,8	0,6	0,9
	$\frac{m_D}{m} = \frac{m_E}{m}$	0,5	0,6	0,5	0,6	0,5	0,4	0,6	0,5	0,2	0,4
	$R_D = R_B$, см	20	25	30	35	25	30	35	25	25	25
	$r_B = \rho_{BX}$, см	18	20	25	30	15	28	32	22	18	20
9	m_B/m	0,6	0,8	0,7	0,5	0,6	0,8	0,6	0,5	0,5	0,4
	m_E/m	0,4	0,2	0,5	0,2	0,4	0,5	0,3	0,2	0,3	0,1
	R_D , см	30	30	40	25	25	20	20	35	35	25
	$r_D = r_B = \rho_{DX}$	25	20	35	20	22	18	15	30	32	22

Задача 5-2. Применение принципа возможных перемещений к решению задачи о равновесии сил, приложенных к плоскому механизму

Дан плоский механизм (рис. 3.13), находящийся в состоянии покоя. На механизм действуют сосредоточенные активные силы P , Q и неизвестный активный момент M .

Требуется найти величину момента M из общего уравнения принципа возможных перемещений, которое нужно составить для указанного механизма.

Указание. Схему задачи студент выбирает по предпоследней цифре шифра. Исходные данные для выбранной схемы студент берет из табл. 3.21 по последней цифре шифра.

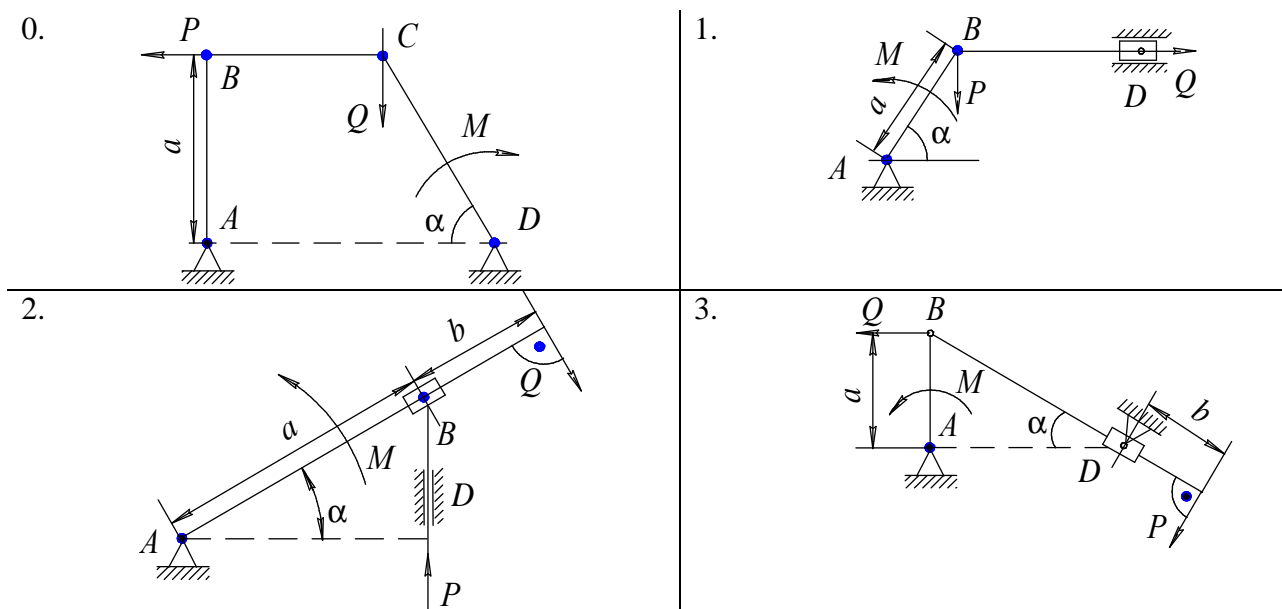


Рис. 3.13. Схемы механизмов к задаче 5-2

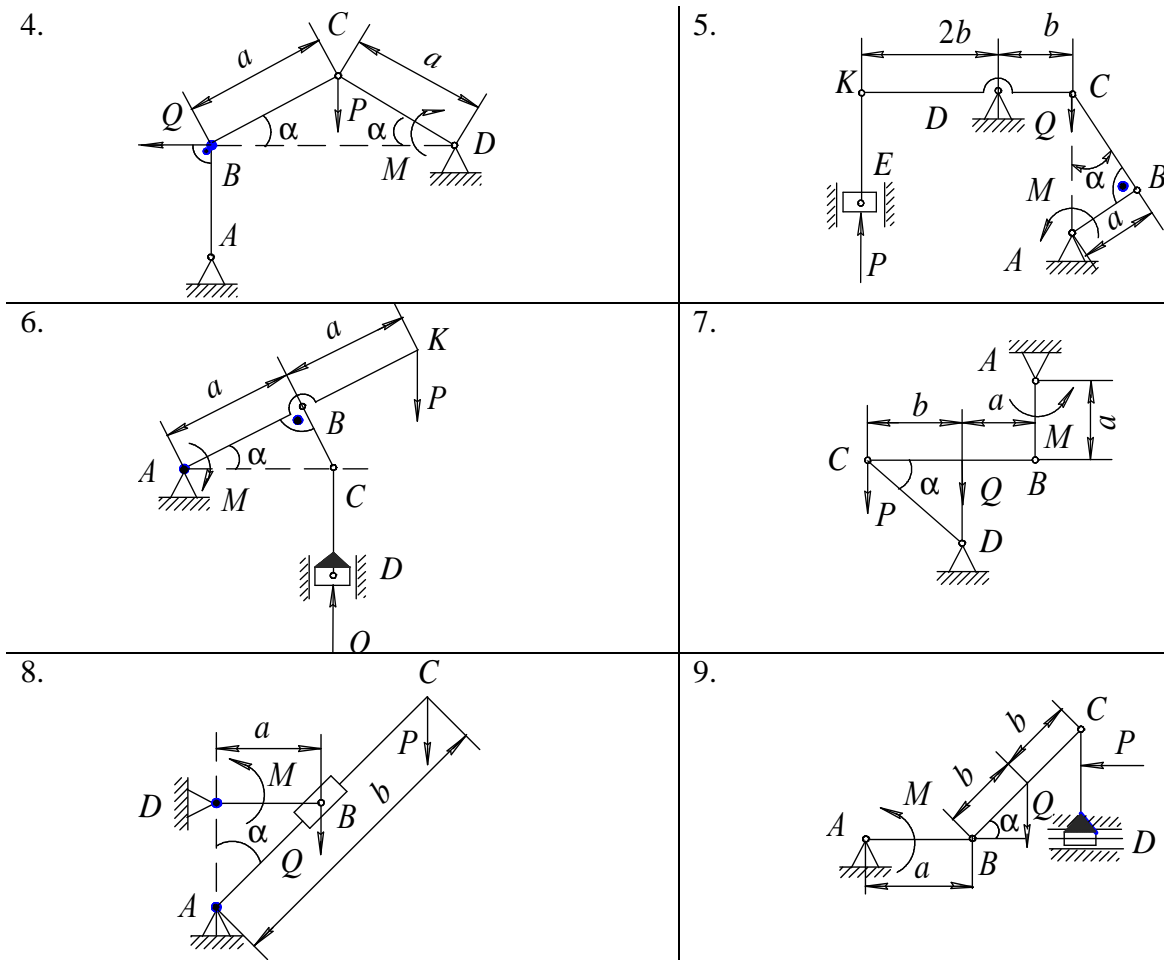


Рис. 3.13. Окончание

Таблица 3.21

ПрЦШ	Параметры	ПЦШ									
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	$P, \text{кН}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
	$Q, \text{кН}$	2,0	1,9	1,8	1,7	1,6	1,5	1,4	1,3	1,2	1,1
	α°	30	45	60	30	45	60	30	45	60	30
	$a, \text{м}$	1,0	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1
1	$P, \text{кН}$	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9
	$Q, \text{кН}$	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0
	α°	60	45	30	60	45	30	60	45	30	60
	$a, \text{м}$	0,10	0,12	0,13	0,14	0,15	0,16	0,17	0,18	0,19	0,2
2	$P, \text{кН}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
	$Q, \text{кН}$	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,2	2,4	2,6	2,8
	α°	30	45	60	30	45	60	30	45	60	30
	$a, \text{м}$	1,0	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1
	$b, \text{м}$	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
3	$P, \text{кН}$	0,8	1,2	1,6	2,0	2,4	2,6	3,0	3,4	3,8	4,2
	$Q, \text{кН}$	5,0	4,5	4,0	3,5	3,0	2,5	2,0	1,5	1,0	0,5
	α°	45	60	30	45	60	30	45	60	30	45
	$a, \text{м}$	0,5	0,45	0,4	0,35	0,3	0,25	0,20	0,15	0,1	0,05
	$b, \text{м}$	1,0	0,95	0,9	0,85	0,8	0,75	0,7	0,65	0,6	0,5

<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>4</i>	<i>5</i>	<i>6</i>	<i>7</i>	<i>8</i>	<i>9</i>	<i>10</i>	<i>11</i>	<i>12</i>
4	<i>P</i> , кН	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,0	2,5	2,0	1,5	1,0
	<i>Q</i> , кН	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	2,0	1,5	1,0	0,5	1,0
	α°	30	45	60	30	45	60	30	45	60	30
	<i>a</i> , м	1,0	0,95	0,9	0,85	0,8	0,75	0,8	0,85	0,9	0,95
5	<i>P</i> , кН	2,0	1,8	1,6	1,4	1,2	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8
	<i>Q</i> , кН	0,2	0,4	0,8	1,0	1,2	1,2	1,0	0,8	0,6	0,4
	α°	30	60	45	45	60	45	30	30	45	60
	<i>a</i> , м	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1
	<i>b</i> , м	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
6	<i>P</i> , кН	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0
	<i>Q</i> , кН	5,0	4,5	4,0	3,5	3,0	2,5	2,0	1,5	1,0	0,5
	α°	60	45	30	30	45	45	60	60	45	30
	<i>a</i> , м	0,5	0,45	0,4	0,35	0,3	0,25	0,3	0,35	0,4	0,45
7	<i>P</i> , кН	1,0	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1
	<i>Q</i> , кН	4,0	3,6	3,2	2,8	2,4	2,0	1,6	1,2	0,8	0,4
	α°	45	45	60	60	30	30	45	60	30	60
	<i>a</i> , м	0,5	0,45	0,4	0,35	0,3	0,25	0,2	0,15	0,1	0,05
	<i>b</i> , м	0,2	0,25	0,3	0,35	0,4	0,45	0,4	0,35	0,3	0,25
8	<i>P</i> , кН	5,0	4,0	3,0	2,0	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0
	<i>Q</i> , кН	2	6	4	3	2	4	2	3	4	2
	α°	30	60	45	30	45	60	30	45	60	30
	<i>a</i> , м	0,5	0,46	0,42	0,38	0,34	0,3	0,26	0,22	0,18	0,14
	<i>b</i> , м	1,2	1,15	1,1	1,05	1,0	0,95	0,9	0,85	0,8	0,75
9	<i>Q</i> , кН	2,0	1,8	1,6	1,4	1,2	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8
	<i>P</i> , кН	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	1,8	1,6	1,4	1,2
	α°	30	45	60	30	60	45	30	45	60	30
	<i>a</i> , м	0,5	0,45	0,4	0,35	0,3	0,25	0,2	0,15	0,1	0,05
	<i>b</i> , м	0,4	0,38	0,36	0,34	0,32	0,3	0,28	0,26	0,24	0,22

Задача 5-3. Применение общего уравнения динамики к исследованию движения механической системы с одной степенью свободы

Для заданной механической системы определить ускорение груза *A* и натяжение троса, к которому он прикреплен. Массой тросов пренебречь. Блоки и катки, для которых радиусы инерции не указаны, считать однородными цилиндрами.

Указание. Условие задачи 5-3 соответствует условию задачи 5-1 (схемы на рис. 3.12, числовые данные в табл. 3.20). Значения ускорений груза, найденные в задачах 5-1 и 5-3, должны совпадать.

Задача 5-4. Применение уравнения Лагранжа второго рода для исследования движения механической системы

Для заданной механической системы составить, пользуясь уравнением Лагранжа второго рода, дифференциальное уравнение движения груза и найти уравнение его движения, полагая, что $S = 0$ при $t = 0$.

Указание. Условие задачи 5-4 соответствует условию задачи 5-1 (см. схемы на рис. 3.12, числовые данные в табл. 3.20).

Общие пояснения. Показанные на рис. 3.12 механические системы имеют одну степень свободы. Если за обобщенную координату системы принимается линейная координата S груза, то уравнение Лагранжа второго рода принимает вид

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{S}} \right) - \frac{\partial T}{\partial S} = Q_s.$$

Здесь Q_s – обобщенная сила, соответствующая обобщенной координате S ; T – кинетическая энергия системы, являющаяся в общем случае функцией обобщенной скорости \dot{S} и обобщенной координаты S ; $\delta A_s = Q_s \delta S$ – элементарная работа активных (задаваемых) сил на возможном перемещении системы при идеальных связях (если есть силы трения, то они включаются в число активных сил); δS – приращение (вариация) обобщенной координаты S .

Выражение для δA_s и кинетической энергии следует взять соответственно из предварительно решенных задач 5-1 и 5-3.

После вычисления производных $\frac{\partial T}{\partial S}$; $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{S}} \right)$ и подстановки их значений,

а также Q_s в уравнение Лагранжа второго рода получим дифференциальное уравнение движения груза. Решая дифференциальное уравнение Лагранжа второго рода при заданных начальных условиях, получим закон движения груза, т. е. зависимость $S = S(t)$.

3.6. Контрольная работа № 6

Состоит из трех задач по динамике.

Первая задача (6-1) – на исследование плоско-параллельного движения с применением дифференциальных уравнений.

Вторая задача (6-2) – на применение принципа возможных перемещений к определению реакций опор составной конструкции.

Третья задача (6-3) – на применение принципа Даламбера к определению реакций опор вращающегося тела.

Задача 6-1. Исследование плоско-параллельного движения твердого тела

Цилиндрический ступенчатый барабан с наружным радиусом R и весом G имеет выточку радиусом $r = 0,5R$ (рис. 3.14, табл. 3.22). К барабану, который движется из состояния покоя без скольжения по шероховатой поверхности, приложены постоянные силы F_1 ; F_2 и пара сил с моментом M . Радиус инерции барабана относительно центральной оси, перпендикулярной его плоскости, принять равным $\rho_c = 0,8R$.

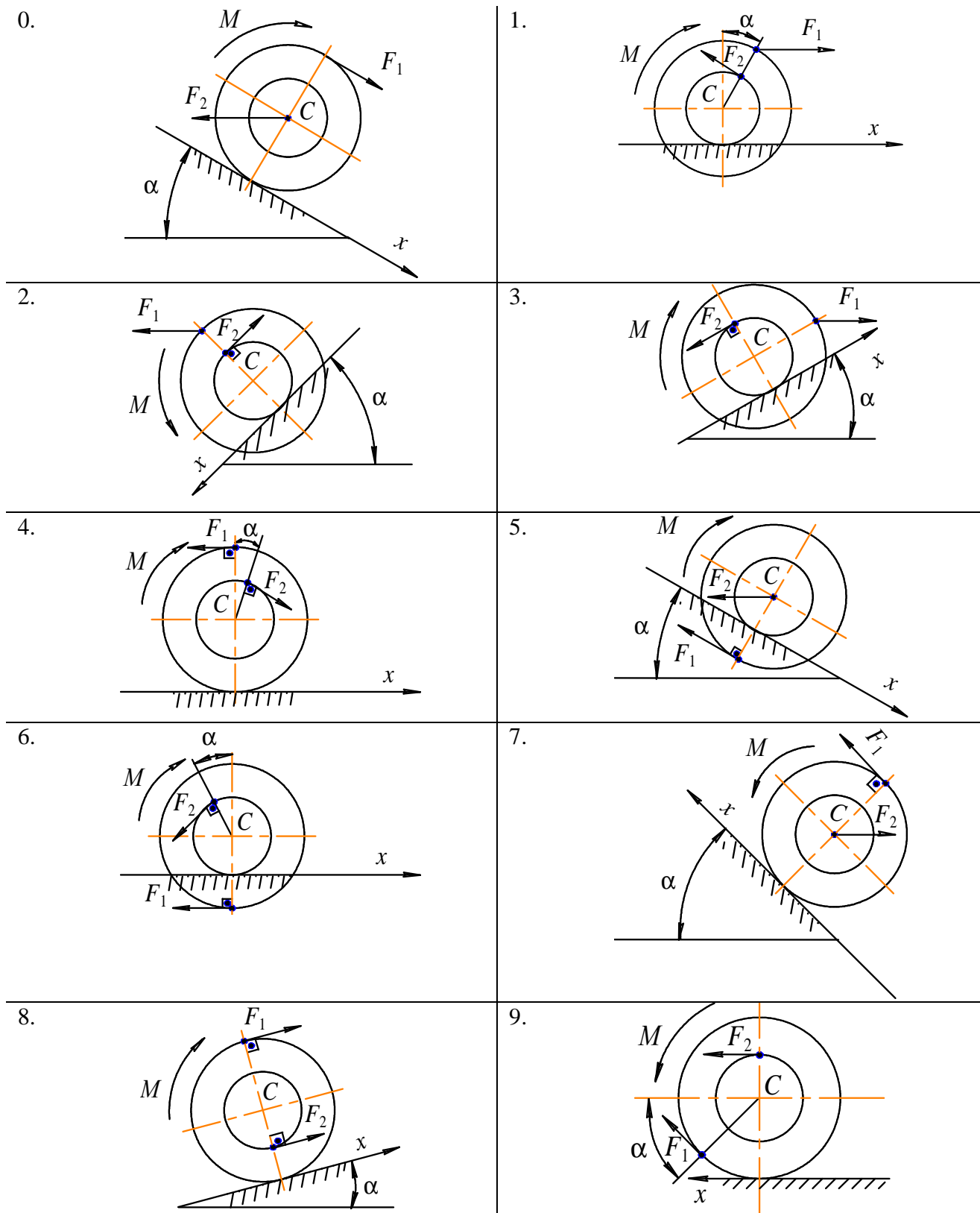


Рис. 3.14. Схемы плоскопараллельного движения твердого тела

Таблица 3.22

ПрЦШ	α°	F_1	F_2	M
0	30	0,1G	0,3G	0,2GR
1	15	0,2G	0,4G	0,1GR
2	45	0,15G	0,6G	0,3GR
3	30	0,3G	0,5G	0,2GR
4	15	0,25G	0,45G	0,4GR
5	30	0,2G	0,5G	0,1GR
6	30	0,1G	0,25G	0,3GR
7	45	0,2G	0,55G	0,2GR
8	15	0,15G	0,3G	0,3GR
9	30	0,35G	0,6G	0,1GR

Примечание. Номер схемы из рис. 3.14 студент выбирает по последней цифре шифра, а условия задачи из табл. 3.22 – по предпоследней цифре шифра.

Определить закон движения центра масс, т. е. $x_c = f(t)$, и минимальное значение коэффициента трения f_{\min} , при котором возможно еще качение без скольжения.

Указание. Предлагаемая задача – на применение дифференциальных уравнений плоско-параллельного движения твердого тела. При составлении уравнений считать, что движение барабана происходит в сторону увеличения координаты x , поэтому все моменты сил считать положительными, если они направлены в сторону вращения барабана. Если действительное направление движения барабана окажется противоположным, то в ответе получится, что проекция ускорения центра масс на ось x будет $\ddot{x}_c < 0$, но абсолютное значение будет верным.

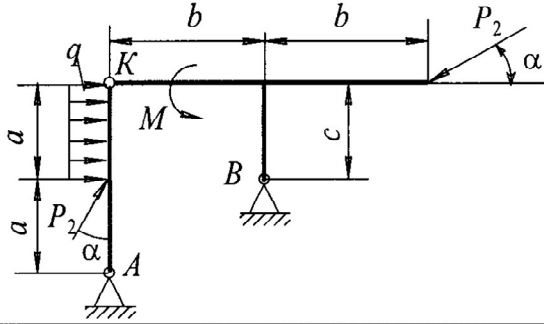
Силу трения $F_{\text{тр}}$, когда направление его не очевидно, можно направлять в любую сторону.

Задача 6-2. Применение принципа возможных перемещений к определению реакций опор составной конструкции

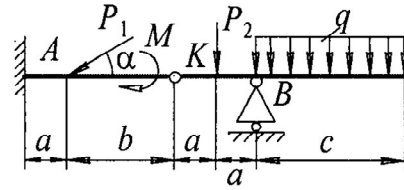
Используя принцип возможных перемещений совместно с принципом освобождаемости от связей, определить реакции опор в точках A , B , E для составных конструкций, приведенных на рис. 3.15.

По последней цифре шифра студент определяет схему, а по предпоследней цифре шифра – числовые значения, приведенные в табл. 3.23.

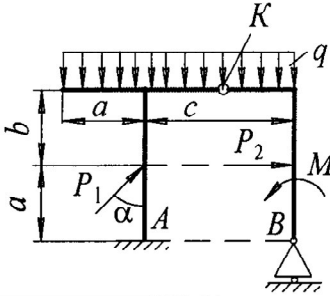
0. $P_1 = 10 \text{ кН}$, $P_2 = 20 \text{ кН}$,
 $M = 15 \text{ кН} \cdot \text{м}$, $q = 1,5 \text{ кН/м}$



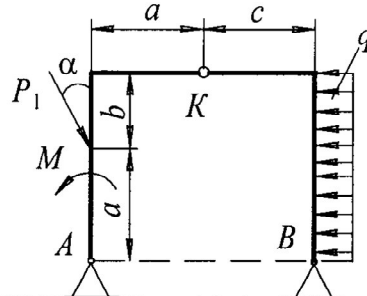
1. $P_1 = 3 \text{ кН}$, $P_2 = 8 \text{ кН}$,
 $M = 10 \text{ кН} \cdot \text{м}$, $q = 5 \text{ кН/м}$



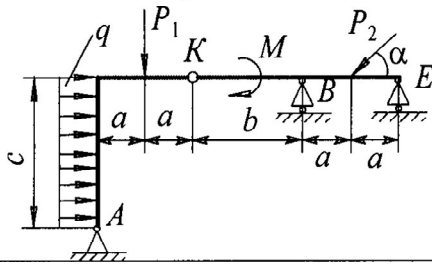
2. $P_1 = 5 \text{ кН}$, $P_2 = 3 \text{ кН}$,
 $M = 10 \text{ кН} \cdot \text{м}$, $q = 2 \text{ кН/м}$



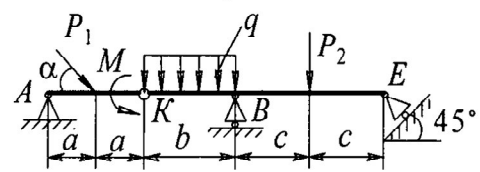
3. $P_1 = 5 \text{ кН}$, $q = 3 \text{ кН/м}$, $M = 6 \text{ кН} \cdot \text{м}$



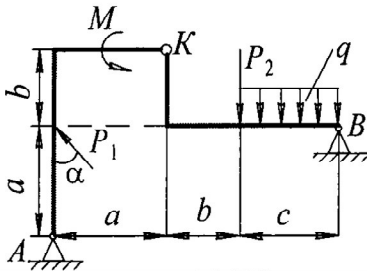
4. $P_1 = 4 \text{ кН}$, $P_2 = 10 \text{ кН}$,
 $M = 6 \text{ кН} \cdot \text{м}$, $q = 2,5 \text{ кН/м}$



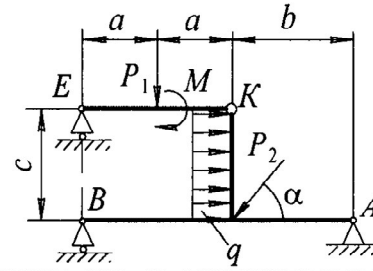
5. $P_1 = 2 \text{ кН}$, $P_2 = 3 \text{ кН}$,
 $M = 1,5 \text{ кН} \cdot \text{м}$, $q = 1 \text{ кН/м}$



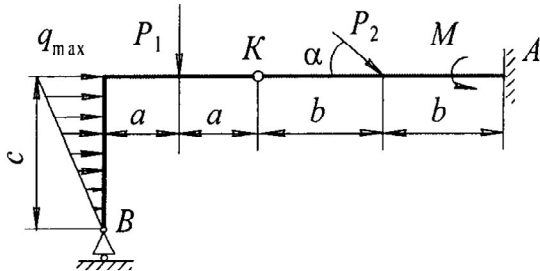
6. $q = 4 \text{ кН/м}$, $P_1 = 2 \text{ кН}$, $P_2 = 7 \text{ кН}$,
 $M = 5 \text{ кН} \cdot \text{м}$,



7. $q = 1,5 \text{ кН/м}$, $P_1 = 3 \text{ кН}$, $P_2 = 7 \text{ кН}$,
 $M = 4 \text{ кН} \cdot \text{м}$,



8. $P_1 = 3 \text{ кН}$, $P_2 = 2 \text{ кН}$,
 $M = 4 \text{ кН} \cdot \text{м}$, $q_{\text{max}} = 2 \text{ кН/м}$



9. $P_1 = 8 \text{ кН}$, $P_2 = 2 \text{ кН}$,
 $M = 3 \text{ кН} \cdot \text{м}$, $q = 3,5 \text{ кН/м}$

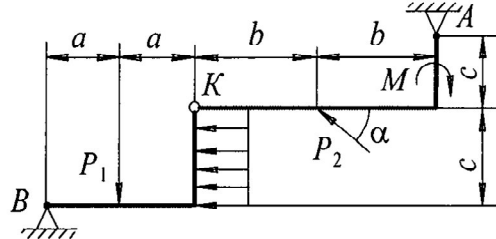


Рис. 3.15. Схемы составных конструкций

Таблица 3.23

№ схемы по ПЦШ	Параметры (м; град.)	Численные значения по ПрЦШ									
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	<i>a</i>	2	3	3	4	3	4	3	3	4	2
	<i>b</i>	3	2	4	3	3	4	2	4	2	4
	<i>c</i>	2	2	3	2	2	1	2	3	1	3
	α°	30	45	60	90	120	150	120	90	60	45
1	<i>a</i>	3	2	3	2	2	2	1	3	2	1
	<i>b</i>	2	3	1	3	2	3	2	1	2	3
	<i>c</i>	3	2	3	1	2	2	3	2	3	1
	α°	150	120	90	60	45	30	30	45	60	45
2	<i>a</i>	2	3	3	2	1	1	2	1	1	2
	<i>b</i>	2	2	1	2	2	1	3	2	2	3
	<i>c</i>	1	2	2	1	3	2	2	1	3	1
	α°	60	45	30	45	30	60	90	120	150	120
3	<i>a</i>	3	2	1	2	2	3	1	2	3	2
	<i>b</i>	2	3	3	2	3	2	2	1	2	1
	<i>c</i>	2	1	2	3	2	2	3	2	1	2
	α°	45	60	45	60	90	120	150	120	90	60
4	<i>a</i>	1	1	2	2	3	2	3	2	1	1
	<i>b</i>	2	2	3	1	2	2	1	3	2	2
	<i>c</i>	1	2	1	2	1	3	2	2	1	2
	α°	120	90	60	45	30	45	30	60	45	60
5	<i>a</i>	1	2	1	2	1	1	3	1	2	2
	<i>b</i>	2	4	4	2	2	3	2	2	4	2
	<i>c</i>	4	2	2	1	3	1	4	3	1	4
	α°	30	45	45	30	60	90	120	30	150	90
6	<i>a</i>	2	2	3	2	1	2	3	4	2	2
	<i>b</i>	2	3	2	4	2	3	1	2	3	1
	<i>c</i>	3	4	2	3	4	3	2	2	4	2
	α°	60	45	30	30	45	60	30	60	90	45
7	<i>a</i>	3	4	3	4	2	3	4	2	1	3
	<i>b</i>	2	1	3	2	4	2	3	1	2	4
	<i>c</i>	2	3	2	4	3	2	4	2	4	2
	α°	45	45	30	30	60	60	45	30	60	30
8	<i>a</i>	3	2	4	2	3	3	4	2	3	2
	<i>b</i>	1	2	1	2	2	3	1	2	2	1
	<i>c</i>	3	4	2	2	3	2	4	2	3	2
	α°	30	30	45	60	60	90	60	45	45	60
9	<i>a</i>	2	2	3	2	3	2	4	2	2	3
	<i>b</i>	3	2	2	3	3	3	2	3	2	4
	<i>c</i>	2	4	2	3	2	2	3	4	2	3
	α°	45	45	30	60	60	30	60	30	45	60

Задача 6-3. Применение принципа Даламбера к определению реакций опор вращающегося тела

Вертикальный однородный вал AB (рис. 3.16) с массой $m_0 = 20$ кг вращающийся с постоянной угловой скоростью ω , закреплен подпятником в точке A и цилиндрическим подшипником в точке B . К валу жестко прикреплены однородные стержни с длинами l_1, l_2, l_3 . На конце стержня l_1 закреплена точечная масса m_E . Масса одного метра однородного стержня равна 10 кг. Учитывая, что $AK = KD = DB = a = 0,3$ м, определить реакции в подпятнике A и подшипнике B .

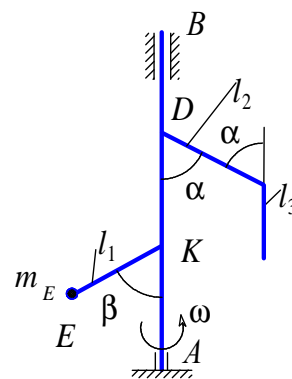


Рис. 3.16. Вертикальный однородный вал

Положение стержней и точечной массы в расчетной схеме изображается в соответствии с задаваемыми величинами табл. 3.24 по последней цифре шифра.

Примечание. Задача на применение принципа Даламбера к изучению движения системы. При решении задачи учесть, что сила инерции стержня, численно равная $\Phi = mW_c$, в общем случае не проходит через центр масс стержня (W_c – ускорение центра масс стержня).

Таблица 3.24

Величины ПЦШ	ω , рад/с	α°	β°	l_1 , м	l_2 , м	l_3 , м	m_E , м
0	5	15	75	0,6	0,3	0,2	4
1	15	30	60	0,2	0,4	0,1	2
2	8	45	30	0,4	0,7	0,3	5
3	10	60	45	0,1	0,5	0,5	1
4	18	75	120	0,3	0,2	0,4	3
5	4	60	150	0,5	0,6	0,1	2
6	20	45	75	0,7	0,1	0,3	4
7	12	30	60	0,9	0,3	0,2	3
8	16	15	45	0,6	0,4	0,4	5
9	14	60	30	0,8	0,2	0,6	3

4. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ИЗ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

Ниже дано подробное решение наиболее важных задач из контрольных работ по статике, кинематике и динамике. В ряде задач предусматриваются небольшие по объему исследования, в которых изучается влияние некоторых параметров задачи на одну из величин, определяемых при решении задачи. Выбор параметра и зависящей от него величины конечного результата предоставляется студенту.

Особое внимание при выполнении заданий студент должен уделить тем задачам, которые могут быть предложены ему на экзамене.

4.1. Статика

Методика и методы решения задач по статике освещены подробно в рекомендуемой учебной и методической литературе. Ниже описан процесс решения задач типа 1-1, 3, 4; 2-2. Задача типа 1-2, 3 будет предложена на экзамене.

Пример 1 (задача типа 1-1). Найти реакции связей для балки (рис. 4.1а), если $P = 5$ кН, $\alpha = 45^\circ$, $b = 1$ м, $a = 3$ м. Решение выполнить графоаналитическим и аналитическим способами. Исследовать влияние изменения угла α на реакции \vec{R}_A и \vec{S} .

Решение. Составим расчетную схему.

Связями для балки являются шарнирно-неподвижная опора A и невесомый стержень CB с шарнирами на концах. Освободим балку от связей, заменив действие отброшенных связей реакциями связей. Реакция \vec{S} стержня BC направлена вдоль его оси. На основании теоремы о трех силах линия действия реакции \vec{R}_A опоры A должна пройти через точку E пересечения линий действия реакции \vec{S} стержня и активной силы \vec{P} .

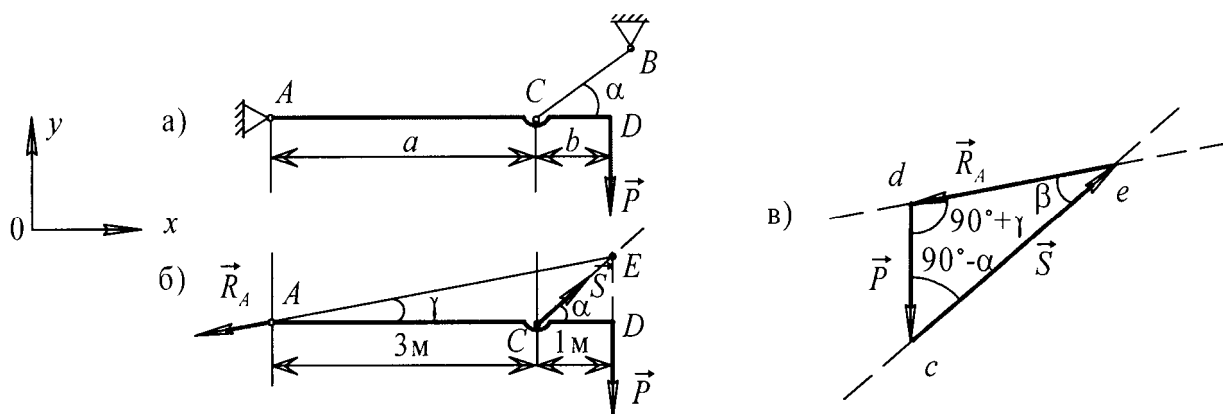


Рис. 4.1. Балка с нагрузкой (а), расчетная схема (б), замкнутый силой треугольник (в)

Графоаналитический способ решения задачи.

Так как силы \vec{P} , \vec{S} и \vec{R}_A уравновешены, то они образуют замкнутый силовой треугольник. Для его построения из произвольной точки d в принятом масштабе строим силу \vec{P} (рис. 4.1в). Из начала и конца вектора \vec{P} проводим прямые, параллельные соответственно AE и CE . Точка e пересечения прямых определяет конец \vec{S} и начало \vec{R}_A .

Численные значения реакций \vec{S} и \vec{R}_A найдем по теореме синусов. На основании рис. 4.1а и рис. 4.1в

$$\operatorname{tg} \gamma = ED/AD = 0,25; \quad \gamma = 14^\circ; \quad \beta = \alpha - \gamma = 31^\circ.$$

Из треугольника dce по теореме синусов

$$\frac{P}{\sin \beta} = \frac{R_A}{\sin(90^\circ - \alpha)} = \frac{S}{\sin(90^\circ + \gamma)},$$

тогда

$$R_A = \frac{P \sin 45^\circ}{\sin 31^\circ} = 6,85 \text{ кН}; \quad S = \frac{P \sin 104^\circ}{\sin 31^\circ} = 9,45 \text{ кН}.$$

Аналитический способ.

Построим декартовы оси Oxy и составим два уравнения проекций для уравновешенной плоской системы сходящихся сил:

$$\Sigma F_{ix} = 0; \quad S \cos \alpha - R_A \cos \gamma = 0; \quad (1.1)$$

$$\Sigma F_{iy} = 0; \quad S \sin \alpha - R_A \sin \gamma - P = 0. \quad (1.2)$$

Подставив в составленные уравнения числовые значения заданных величин и решив эти уравнения, определим искомые реакции:

$$R_A = 6,85 \text{ кН}; \quad S = 9,45 \text{ кН}.$$

По формулам (1.1) и (1.2) изучим влияние изменения угла α на величину реакции S . Для этого первое уравнение умножаем на $\sin \gamma$, второе – на $\cos \gamma$ и вычтем из последнего уравнения первое. В результате находим

$$S(\sin \alpha \cos \gamma - \cos \alpha \sin \gamma) - P \cos \gamma = 0$$

$$\text{или } S \sin(\alpha - \gamma) = P \cos \gamma,$$

откуда

$$S = P \cos \gamma / \sin(\alpha - \gamma).$$

Принимаем $\alpha = 10^\circ$, тогда находим угол γ :

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{ED}{4} = \frac{b \operatorname{tg} 10^\circ}{4} = \frac{0,176}{4} = 0,04408; \quad \gamma = 2^\circ 40';$$

$$S = \frac{5 \cdot 0,994}{0,121} = 41,074 \text{ кН}.$$

Таким образом, усилие S по сравнению со случаем, когда $\alpha = 45^\circ$, увеличилось в 4,34 раза.

Вывод. Уменьшение реакции S возможно увеличением угла α . $S_{\min} = 6,66 \text{ кН}$ при угле $\alpha = 90^\circ$.

Пример 2 (задача 1-3). Найти реакции опор для балки, изображенной на рис. 4.2, если $P = 4 \text{ кН}$; $M = 5 \text{ кНм}$; $q = 2 \text{ кН/м}$; $a = 2 \text{ м}$; $b = 1 \text{ м}$; $c = 1 \text{ м}$; $\alpha = 30^\circ$.

Решение. Составим расчетную схему для балки AB . Освободим ее от связей, заменив их действие реакциями связей: реакция шарнирно-подвижной опоры B направлена перпендикулярно плоскости опирания катков, реакцию

шарнирно-неподвижной опоры A раскладываем на две составляющие X_A и Y_A (рис. 4.2б).

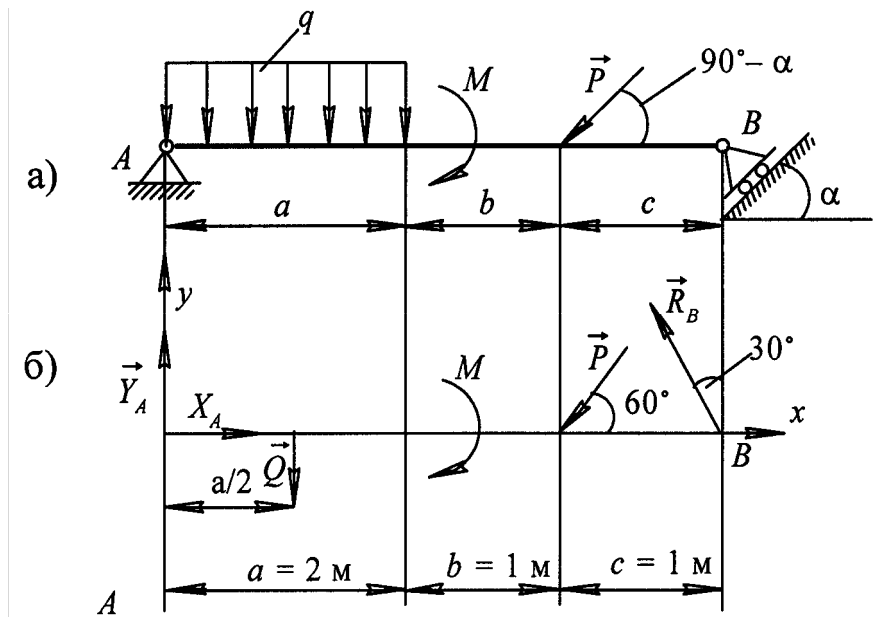


Рис. 4.2. Балка с нагрузкой (а) и расчетная схема (б)

Приложим к балке AB активные силы: сосредоточенную силу P , момент пары сил M ; равномерно распределенную нагрузку с интенсивностью q заменяем равнодействующей, равной $Q = qa = 2 \cdot 2 = 4 \text{ кН}$ и приложенной в центре тяжести эюры этой нагрузки (рис. 4.2б). Реакции опор и активные силы образуют уравновешенную плоскую произвольную систему сил. Для такой системы справедливы три уравнения равновесия (второй вариант уравнений равновесия):

$$\sum F_{ix} = 0; X_A - P \cos 60^\circ - R_B \cos 60^\circ = 0;$$

$$\sum \tilde{M}_A(\vec{F}_i) = 0; -Q \frac{a}{2} - M - P(a+b) \sin 60^\circ + R_B(a+b+c) \sin 60^\circ = 0;$$

$$\sum \tilde{M}_B(\vec{F}_i) = 0; Pc \sin 60^\circ - M + Q \left(\frac{a}{2} + b + c \right) - Y_A(a+b+c) = 0.$$

Решая полученную систему уравнений, найдем:

$$R_B = \frac{Q \frac{a}{2} + M + P(a+b) \sin 60^\circ}{(a+b+c) \sin 60^\circ} = \frac{4 \cdot 1 + 5 + 4 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = 5,6 \text{ кН};$$

$$Y_A = \frac{Pc \sin 60^\circ - M + Q \left(\frac{a}{2} + b + c \right)}{a+b+c} = \frac{4 \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 5 + 4 \cdot 3}{4} = 2,62 \text{ кН};$$

$$X_A = P \cos 60^\circ + R_B \cos 60^\circ = 4 \cdot 0,5 + 5,6 \cdot 0,5 = 4,8 \text{ кН}.$$

Для проверки полученных значений опорных реакций составим дополнительное уравнение равновесия, которое еще не использовалось, например:

$$\Sigma F_{iy} = 0; Y_A - Q - P \sin 60^\circ + R_b \cos 30^\circ = 0;$$

$$2,62 - 4 - 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 5,6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 0; \quad 7,48 - 7,48 = 0.$$

Значит, реакции найдены верно.

Ответ: $X_A = 4,8$ кН; $Y_A = 2,62$ кН; $R_B = 5,6$ кН.

Исследуем влияние угла α на величину реакции X_A . Пусть $\alpha = 0^\circ$, тогда первое уравнение проекций сил на ось OX принимает вид

$$\Sigma F_{ix} = X_A = 0,$$

т. е. реакция в точке A вдоль балки будет равна нулю. Изучим влияние момента M на реакцию R_B . Из общего решения имеем, что

$$R_B = \frac{Q \frac{a}{2} + M + P(a+b) \sin 60^\circ}{(a+b+c) \sin 60^\circ}.$$

Пусть M увеличится в 10 раз, т. е. $M = 50$ кН · м, тогда

$$R_B = \frac{4 \cdot 1 + 50 + 4 \cdot 3 \cdot 0,866}{4 \cdot 0,866} = 18,59 \text{ кН,}$$

т. е. увеличение реакции произошло в 3,32 раза.

Пример 3 (задача 1-4). Определить реакции опор и давление в промежуточном шарнире составной конструкции, изображенной вместе с нагрузкой на рис. 4.3, если $P = 1$ кН; $M = 3$ кН · м; $q = 2$ кН/м; $a = 3$ м; $b = 1$ м; $c = 2$ м; $\alpha = 30^\circ$.

Решение. Освободим конструкцию от внешних (заделка A и шарнирно-подвижная опора B) и внутренних (шарнир K) связей. К полученным свободным балкам AK и KD прикладываем реакции отброшенных связей и активные силы. Реакции заделки A представляют собой две составляющие \vec{X}_A , \vec{Y}_A опорной силы и опорную пару сил с моментом MA . Реакции внутреннего шарнира K , приложенные к балкам AK и KD , попарно равны по модулям и противоположны по направлению в соответствии с аксиомой о действии и противодействии. Реакция \vec{R}_B шарнирно-подвижной опоры направится по нормали к плоскости качения катков. Действие отброшенного троса заменим силой, равной по модулю весу груза и направленной по оси наклонной части троса. Равномерно распределенную нагрузку заменим сосредоточенной силой

$$Q = q2b = 4 \text{ кН.}$$

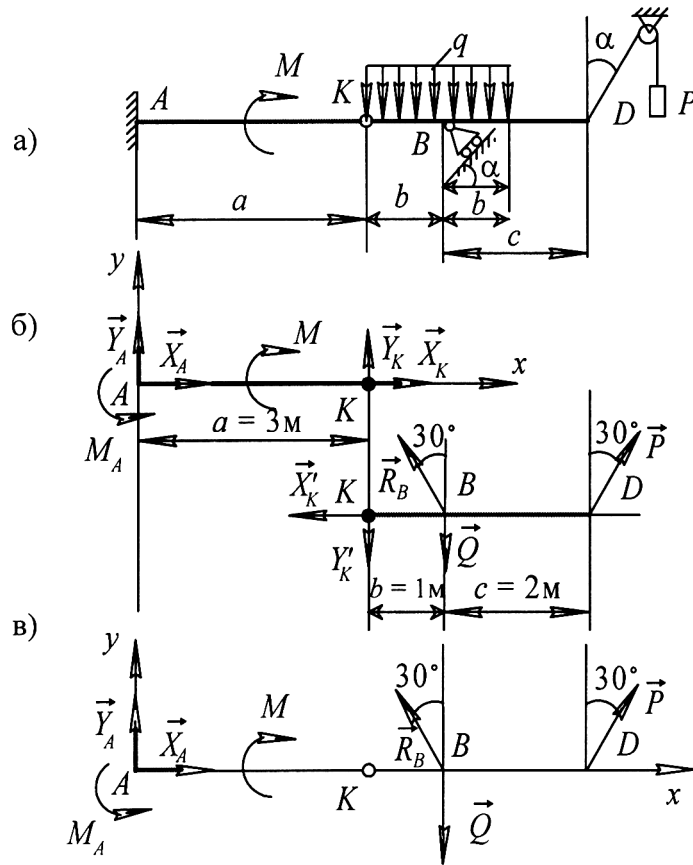


Рис. 4.3. Балка с нагрузкой (а) и расчетные схемы (б) и (в)

Для систем сил, действующих на балки AK и KD , составим уравнения равновесия.

Примечание. Некоторые задачи решаются проще, если вместо уравнений равновесия сил, приложенных к одному из тел, использовать уравнения равновесия внешних сил, приложенных ко всей конструкции.

Составим три уравнения равновесия сил, приложенных к балке AK :

$$\Sigma F_{ix} = 0; \quad X_A + X_K = 0; \quad (3.1)$$

$$\Sigma F_{iy} = 0; \quad Y_A + Y_K = 0; \quad (3.2)$$

$$\Sigma M_{iA} = 0; \quad M_A - M + Y_K a = 0. \quad (3.3)$$

Составим три уравнения равновесия сил, приложенных к балке KD :

$$\Sigma F_{ix} = 0; \quad -X'_K - R_B \sin 30^\circ + P \sin 30^\circ = 0; \quad (3.4)$$

$$\Sigma M_{iK} = 0; \quad -Qb + R_B b \cos 30^\circ + P(b+c) \cos 30^\circ = 0; \quad (3.5)$$

$$\Sigma M_{iB} = 0; \quad Y'_K b + P c \cos 30^\circ = 0. \quad (3.6)$$

Решим составленную систему уравнений.

Из (3.6):

$$Y'_K = -\frac{Pc \cos 30^\circ}{b} = -\frac{1 \cdot 2 \cdot \sqrt{3}}{2 \cdot 1} = -1,73 \text{ кН}; \quad Y_K = Y'_K = -1,73 \text{ кН}.$$

Из (3.5):

$$R_B = \frac{Qb - P(b+c)\cos 30^\circ}{b \cos 30^\circ} = \frac{4 \cdot 1 - 1(1+2)\frac{\sqrt{3}}{2}}{1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = 1,62 \text{ кН}.$$

Из (3.4):

$$X'_K = P \sin 30^\circ - R_B \sin 30^\circ = 1 \cdot 0,5 - 1,62 \cdot 0,5 = -0,31 \text{ кН};$$

$$X_K = X'_K - 0,31 \text{ кН}.$$

Из (3.3):

$$M_A = M - Y_K a = 3 - (-1,73 \cdot 3) = 8,19 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Из (3.2):

$$Y_A = -Y_K = 1,73 \text{ кН}.$$

Из (3.1):

$$X_A = -X_K = 0,31 \text{ кН}.$$

Для проверки найденных значений реакций составим одно из уравнений равновесия для всей конструкции в целом (рис. 4.3в), например:

$$\Sigma F_{iy} = 0; \quad Y_A - Q + R_B \cos 30^\circ + P \cos 30^\circ = 0;$$

$$1,73 - 4 + 1,62 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.$$

Ответ: $X_A = 0,31 \text{ кН}; X_K = -0,31 \text{ кН};$
 $Y_A = 1,73 \text{ кН}; Y_K = -1,73 \text{ кН};$
 $M_A = 8,19 \text{ кН} \cdot \text{м}; R_B = 1,62 \text{ кН}.$

Самостоятельно исследовать влияние угла α или момента M на величину реакции Y_K и момента M_A .

Пример 4 (задача 2-1). Дано: $G = 2 \text{ кН}; Q = 20 \text{ кН};$ коэффициент сцепления (трения покоя) $f_{\text{ст}} = 0,1; \alpha = 20^\circ; a = 10 \text{ см}; b = 20 \text{ см}.$ Определить минимальное значение силы P и реакции опор O, A и B для системы, изображенной на рис. 4.4а.

Решение. Рассмотрим сначала систему уравнивающих сил, приложенных к телу Q (рис. 4.4б). На тело действуют сила тяжести \vec{Q} , реакция нити \vec{T} и нормальная реакция \vec{N}_1 .

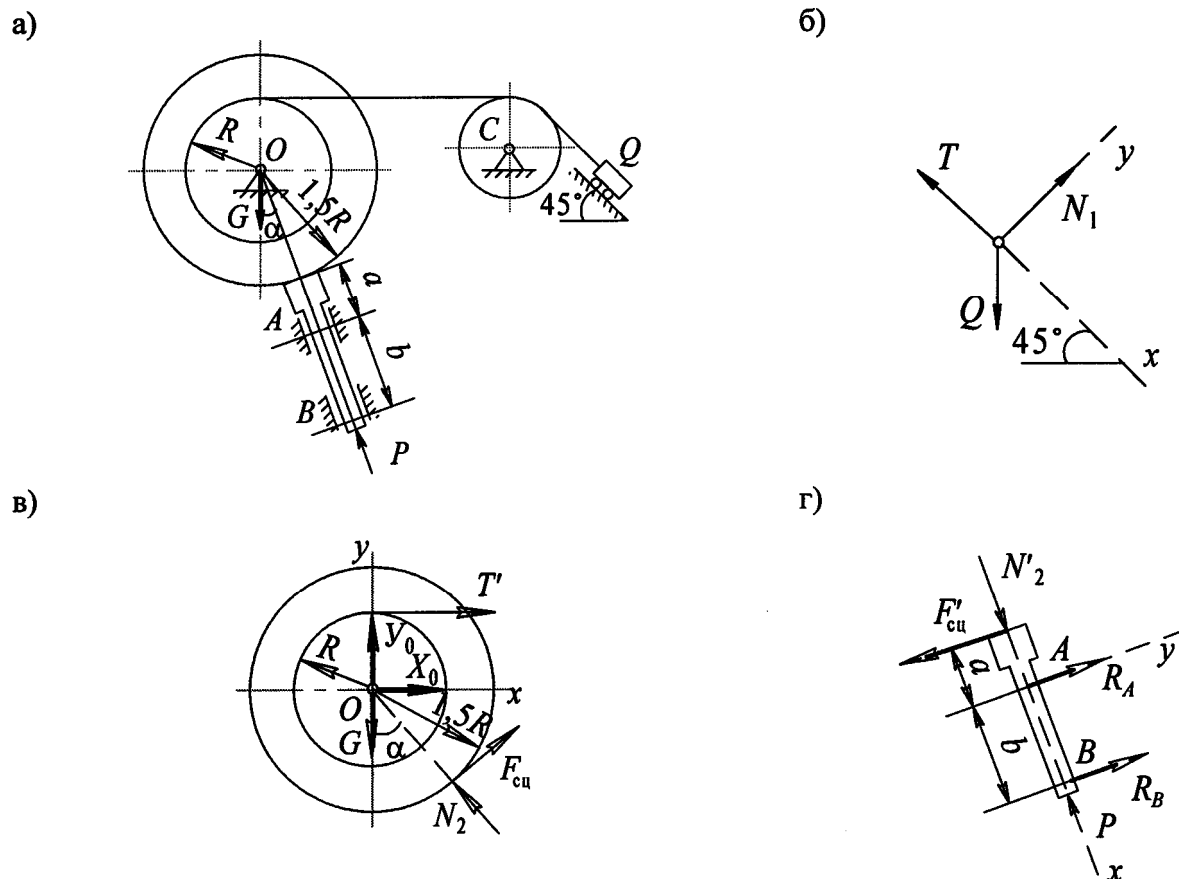


Рис. 4.4. Система уравновешивающихся сил

Рассматривая тело Q как материальную точку, составим уравнения равновесия указанных сил:

$$\Sigma F_{ix} = 0; \quad Q \cos 45^\circ - T = 0;$$

$$\Sigma F_{iy} = 0; \quad N_1 - Q \sin 45^\circ = 0.$$

Отсюда

$$T = Q \cos 45^\circ; \quad N_1 = Q \sin 45^\circ.$$

Затем рассмотрим равновесие сил, приложенных к барабану (рис. 4.4в):

$$\Sigma M_{iO} = 0; \quad -TR + F_{\text{сц}} \cdot 1,5R = 0, \quad (4.1)$$

где $F_{\text{сц}}$ – сила сцепления (сила трения покоя);

$$\Sigma F_{ix} = 0; \quad T + F_{\text{сц}} \cos \alpha - N_2 \sin \alpha + X_O = 0; \quad (4.2)$$

$$\Sigma F_{iy} = 0; \quad N_2 \cos \alpha + F_{\text{сц}} \sin \alpha + Y_O - G = 0. \quad (4.3)$$

В состоянии предельного равновесия сила P минимальна, а сила сцепления (трения покоя) между тормозной колодкой и барабаном определяется равенством

$$F_{\text{сц}} = f_{\text{сц}} N_2. \quad (4.4)$$

Из уравнений (4.1)–(4.4) получим:

$$F_{\text{сц}} = T/1,5; \quad N_2 = F_{\text{сц}}/f_{\text{сц}};$$

$$X_O = -T - F_{\text{сц}} \cos\alpha + N_2 \sin\alpha;$$

$$Y_O = -N_2 \cos\alpha - F_{\text{сц}} \sin\alpha + G.$$

Для определения минимального значения силы P и реакций опор A и B (эти реакции перпендикулярны направляющим A и B , т. к. трением здесь пренебрегаем) рассмотрим равновесие сил, приложенных к штоку тормозного устройства (рис. 4.4Г):

$$\Sigma M_{iA} = 0; \quad F'_{\text{сц}} a + R_b b = 0; \quad (4.5)$$

$$\Sigma F_{ix} = 0; \quad N_2 - P_{\text{min}} = 0; \quad (4.6)$$

$$\Sigma F_{iy} = 0; \quad R_A + R_B - F'_{\text{сц}} = 0. \quad (4.7)$$

Решая эти уравнения, получаем

$$R_B = -F'_{\text{сц}} a/b; \quad P_{\text{min}} = N'_2; \quad R_A = -R_B + F'_{\text{сц}}.$$

Учитывая заданные в условии числовые значения, получим:

$$\begin{array}{ll} N_1 = 14,1 \text{ кН}; & F_{\text{сц}} = 9,4 \text{ кН}; \\ N_2 = 94 \text{ кН}; & X_O = 9,2 \text{ кН}; \\ Y_O = -89,6 \text{ кН}; & R_B = -4,7 \text{ кН}; \\ R_A = 14,1 \text{ кН}; & P_{\text{min}} = 94 \text{ кН}. \end{array}$$

Пример 5 (задача 2-2). Горизонтальная тонкая плита $ABDE$, имеющая форму трапеции, закреплена сферическим шарниром A и невесомым стержнем EE' . На плиту действует сосредоточенная сила \vec{P} , сила тяжести плиты \vec{G} и пара сил с моментом M , расположенная в плоскости плиты (рис. 4.5).

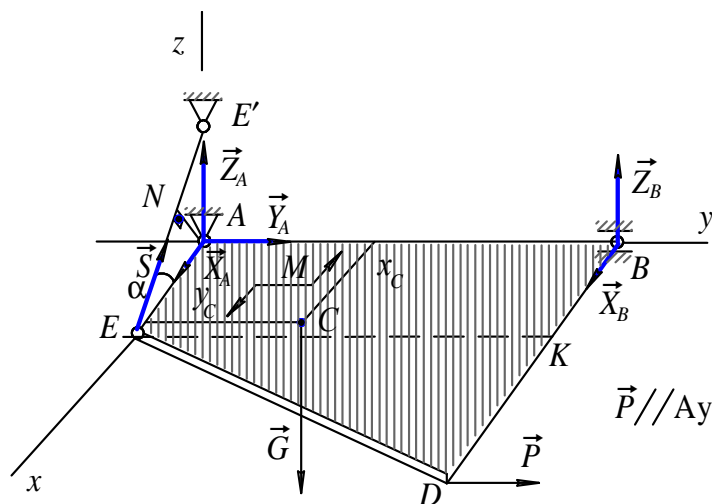


Рис. 4.5. Расчетная схема плиты

Дано: $P = 4$ кН; $M = 8$ кН м; вес единицы площади плиты $q_s = 1$ кН/м²; $\alpha = 60^\circ$; $AB = 3$ м; $BD = 2,2$ м; $AE = 1$ м. Определить:

- 1) координаты x_c, y_c центра тяжести плиты;
- 2) реакции в опорах A, B и стержня EE' .

Решение.

1. Искомые координаты x_c, y_c найдем как координаты центра тяжести площади $ABDE$:

$$x_c = \frac{S_y}{F}; \quad y_c = \frac{S_x}{F},$$

где S_x, S_y – статические моменты площади $ABDE$ относительно осей x и y ; F – площадь трапеции $ABDE$.

Трапецию $ABDE$ разделим на треугольник EKD и прямоугольник $ABKE$. Пусть $F_1, F_2, x_1, y_1, x_2, y_2$ – площади и координаты центров тяжести треугольника EKD и прямоугольника $ABKE$. Соответственно, имеем:

$$F_1 = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 1,2 = 1,8 \text{ м}^2; \quad x_1 = BK + \frac{1}{3}KD = 1,4 \text{ м}; \quad y_1 = \frac{2}{3}EK = 2 \text{ м};$$

$$F_2 = 3 \cdot 1 = 3 \text{ м}^2; \quad x_2 = \frac{1}{2}BK = 0,5 \text{ м}; \quad y_2 = \frac{1}{2}AB = 1,5 \text{ м}.$$

Тогда

$$S_x = F_1 y_1 + F_2 y_2 = 3,6 + 4,5 = 8,1 \text{ м}^3;$$

$$S_y = F_1 x_1 + F_2 x_2 = 2,52 + 1,5 = 4,02 \text{ м}^3;$$

$$x_c = \frac{4,02}{4,8} = 0,84 \text{ м}; \quad y_c = \frac{8,1}{4,8} = 1,69 \text{ м}.$$

К точке C приложим силу тяжести плиты:

$$G = q_s F = 1 \cdot 4,8 = 4,8 \text{ кН}.$$

2. Изобразим реакции связей. Реакцию сферического шарнира разложим на три составляющие: $\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{Z}_A$; цилиндрического шарнира – на две составляющие \vec{X}_B, \vec{Z}_B ; реакцию \vec{S} стержня направляем по оси стержня от E к E' , предполагая, что он растянут.

3. Составим шесть уравнений равновесия для действующей на плиту пространственной системы сил:

$$\Sigma F_{iX} = 0; \quad X_A + X_B - S \cos 60^\circ = 0; \quad (5.1)$$

$$\Sigma F_{iY} = 0; \quad Y_A + P = 0; \quad (5.2)$$

$$\Sigma F_{iZ} = 0; \quad Z_A + Z_B - G - S \cos 30^\circ = 0; \quad (5.3)$$

$$\Sigma M_X(\vec{F}_i) = 0; \quad Z_{BAB} - GY_C = 0; \quad (5.4)$$

$$\Sigma M_Y(\vec{F}_i) = 0; \quad -SAN + GX_C = 0; \quad (5.5)$$

$$\Sigma M_Z(\vec{F}_i) = 0; \quad -X_{BAB} + PBD + M = 0. \quad (5.6)$$

Определим значения реакций.

Из (5.2):

$$Y_A = -P = -4 \text{ кН.}$$

Из (5.4):

$$Z_B = G \frac{Y_C}{AB} = 4,8 \frac{1,69}{3} = 2,704 \text{ кН.}$$

Из (5.5):

$$S = G \frac{X_C}{AN} = 4,8 \frac{0,84}{0,866} = 4,66 \text{ кН.}$$

Из (5.6):

$$X_B = \frac{M + P \cdot BD}{AB} = \frac{8 + 4 \cdot 2,2}{3} = 5,6 \text{ кН.}$$

Из (5.1):

$$X_A = S \cos 60^\circ - X_B = -3,27 \text{ кН.}$$

Из (5.3):

$$Z_A = -Z_B + G + S \cos 30^\circ = 6,11 \text{ кН.}$$

Самостоятельно исследовать влияние угла α на натяжение нити.

Указание. Из уравнения

$$-SAN + GX_C = 0$$

найдем

$$S = \frac{GX_C}{AN},$$

где $AN = AE \sin \alpha = 1 \cdot \sin \alpha$.

Для самостоятельного исследования взять два угла: $\alpha = 30^\circ$ и $\alpha = 45^\circ$.

4.2. Кинематика

Ниже изложена методика решения задач типа 2-3, 3-2, 3-3, 3-4. Задачи типа 3-2 и 3-3 будут предложены на экзамене.

Пример 6 (задача 2-3). Движение точки задано уравнениями

$$x = 2t; \quad y = t^2.$$

(t – в секундах; x, y – в сантиметрах)

Найти и построить траекторию точки; скорость и ускорение ее при $t = 1$ с.

Решение.

1. Определим траекторию движения точки. Для этого из уравнений движения исключим время t :

$$t = \frac{x}{2}; \quad y = t^2 = \frac{x^2}{4}.$$

Уравнение траектории $y = \frac{x^2}{4}$ (парабола).

Построим траекторию движения точки, предварительно проверив часть параболы, которая является траекторией точки. Так как $x \geq 0$, $y \geq 0$, искомой траекторией будет лишь положительная ветвь параболы $y = \frac{x^2}{4}$ (рис. 4.6).

2. Найдем скорость точки. Так как движение задано координатным способом, то величина и направление скорости определяются следующими формулами:

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}; \quad \cos(\hat{\vec{v}}, x) = \frac{\dot{x}}{v};$$

$$\dot{x} = 2; \quad \dot{y} = 2t;$$

$$v = \sqrt{2^2 + (2t)^2} = 2\sqrt{1+t^2} \text{ см/с}; \quad \cos(\hat{\vec{v}}, x) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}.$$

При $t = 1$ с

$$v_M = 2\sqrt{1+1} = 2,82 \text{ см/с}; \quad \cos(\hat{\vec{v}}, x) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

В точке M приложим начало вектора скорости, который составляет с осью Ox угол

$$\alpha = \arccos \frac{1}{\sqrt{2}} = 45^\circ \quad \left(\alpha = \hat{\vec{v}}, x \right).$$

С другой стороны, $\dot{x} = v_x = 2$ см/с; $\dot{y} = v_y = 2t = 2 \cdot 1 = 2$ см/с (при $t = 1$ с). Покажем вектор скорости \vec{v}_M и ее составляющие по осям \vec{v}_x и \vec{v}_y .

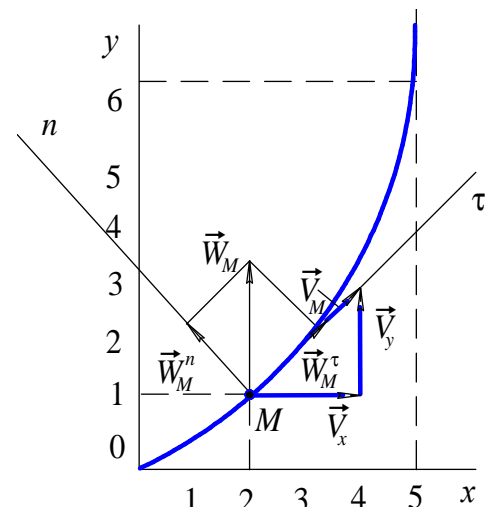


Рис. 4.6. Траектория, скорость и ускорение точки

3. Найдем ускорение точки M :

$$w_M = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2}; \quad \cos(\hat{w}, x) = \frac{\ddot{x}}{w}$$

$$\ddot{x} = w_X = 0; \quad \ddot{y} = w_Y = 2 \text{ см/с}^2; \quad w_M = 2 \text{ см/с}^2; \quad \cos(\hat{w}, x) = 0/2 = 0, \quad \vec{w}_M \parallel oy.$$

Покажем в точке M вектор ее ускорения, который в данном случае параллелен оси oy .

4. Вычислим касательное ускорение точки. Из теории естественного способа задания движения точки известно, что

$$\vec{w} = \vec{w}^n + \vec{w}^\tau; \quad \vec{w}^\tau = \frac{dv}{dt}; \quad \vec{w}^n = \frac{v^2}{\rho};$$

$$w = \sqrt{(w^\tau)^2 + (w^n)^2}; \quad \vec{w}^\tau = \frac{d}{dt} \left(2\sqrt{1+t^2} \right) = \frac{2t}{\sqrt{1+t^2}}.$$

При $t = 1$ с касательное ускорение равно $w_M^\tau = \sqrt{2}$ см/с², оно представляет собою проекцию ускорения \vec{w}_M на касательную к траектории. В данном примере это ускорение направлено по скорости.

Вычислим нормальное ускорение точки. Воспользоваться формулой

$$w^n = v^2/\rho$$

мы не можем, т. к. не знаем радиуса кривизны ρ траектории точки, поэтому определяем его из зависимости

$$w_M = \sqrt{(w_M^n)^2 + (w_M^\tau)^2} \Rightarrow w_M^n = \sqrt{(w_M)^2 - (w_M^\tau)^2}$$

при $t = 1$ с, $w_M^n = \sqrt{4-2} = \sqrt{2} = 1,41$ см/с².

Нормальное ускорение всегда направлено по нормали, проведенной к траектории в данной точке, к центру кривизны.

При необходимости, зная нормальное ускорение точки и ее линейную скорость, мы можем вычислить радиус кривизны траектории.

В нашем примере

$$c = \frac{v^2}{w_M^n}; \quad \rho_M = \frac{v_M^n}{w_M^n} = \frac{8}{\sqrt{2}} = 5,64 \text{ см.}$$

Ответ: траектория точки – парабола $y = x^2/4$; $x \geq 0$; $y \geq 0$.

При $t = 1$ с $v_M = 2\sqrt{2} = 2,82$ см/с; $w_M = 2$ см/с²;

$w_M^n = \sqrt{2} = 1,41$ см/с²; $w_M^\tau = 1,41$ см/с².

Исследовательская часть задачи типа 2-1 может быть посвящена определению направления касательного ускорения. Это ускорение может быть направлено либо по скорости, либо в противоположную сторону.

Для определения направления \vec{w}^T надо проверить закон изменения модуля скорости $v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$ в зависимости от времени. Если скорость в процессе движения по модулю возрастает, то касательное ускорение надо направить по направлению вектора скорости. В противном случае – наоборот.

Пример 7 (задача 3-2). Определить скорость и ускорение точки A , угловую скорость ω , угловое ускорение ε колеса (рис. 4.7), если $R = 1$ м; $r = 0,5$ м; $v_0 = 1$ м/с; $w_0 = 2$ м/с²; $\varphi = 240^\circ$.

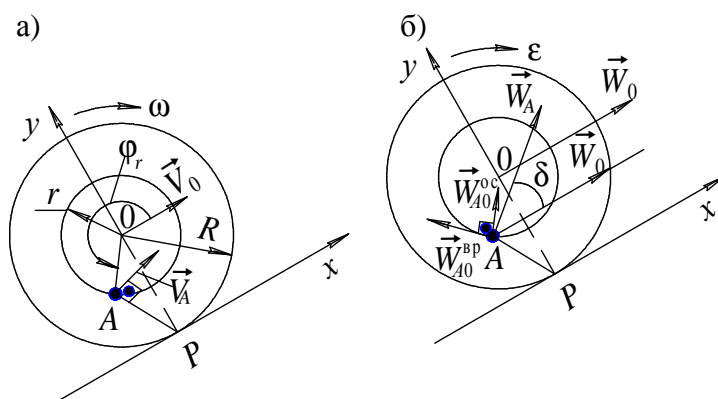


Рис. 4.7. Схемы скоростей (а) и ускорений (б) катящегося колеса

Решение. Колесо при качении по неподвижному рельсу совершает плоское движение, его мгновенный центр скоростей P совпадает с точкой касания колеса с неподвижным рельсом.

Определим угловую скорость колеса как отношение скорости полюса v_0 к расстоянию от полюса до мгновенного центра скоростей:

$$\omega = \frac{v_0}{OP} = \frac{v_0}{R} = \frac{1}{1} = 1,0 \text{ рад/с}^2.$$

Определим угловое ускорение колеса как производную от угловой скорости по времени:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{v_0}{R} \right) = \frac{1}{R} \frac{dv_0}{dt} = \frac{w_0}{R}; \quad \varepsilon = \frac{2}{1} = 2,0 \text{ рад/с}^2.$$

Вращение вокруг полюса O ускоренное и направлено по часовой стрелке, т. к. скорость \vec{v}_0 и ускорение \vec{w}_0 имеют одинаковое направление. Скорость точки A найдем как вращательную относительно мгновенного центра скоростей:

$$v_A = \omega AP; \quad AP = \sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr \cos \gamma} = \sqrt{1,0^2 + 0,5^2 - 2 \cdot 1 \cdot 0,5 \cos 30^\circ} = 0,39 \text{ м},$$

где $\gamma = \angle AOP = 30^\circ = 270^\circ - \varphi$; $v_A = \omega AP = 1 \cdot 0,39 = 0,39$ м/с.

Вектор скорости v_A направлен перпендикулярно прямой AP в сторону угловой скорости ω вращения по часовой стрелке. Вектор ускорения точки A равен

$$\vec{w}_A = \vec{w}_0 + \vec{w}_{AO}^{oc} + \vec{w}_{AO}^{bp}. \quad (7.1)$$

Строим при точке A составляющие ее ускорения:

а) ускорение полюса \vec{w}_0 :

$$w_0 = 2 \text{ м/с}^2 \text{ (дано в условии задачи);}$$

б) осеостремительное ускорение \vec{w}_{AO}^{oc} направлено по AO от точки A к полюсу O :

$$w_{AO}^{oc} = \omega^2 r = 1 \cdot 0,5 = 0,5 \text{ м/с}^2;$$

в) вращательное ускорение \vec{w}_{AO}^{bp} направлено перпендикулярно радиусу OA в сторону углового ускорения ε :

$$\vec{w}_{AO}^{bp} = \varepsilon r = 2 \cdot 0,5 = 1 \text{ м/с}^2.$$

Для определения модуля ускорения точки A применим метод проекций: свяжем с колесом систему координатных осей и спроектируем уравнение (7.1) на эти оси:

$$w_{AX} = w_{OX} + w_{AOX}^{oc} + w_{AOX}^{bp};$$

$$w_{AX} = w_O + w_{AO}^{oc} \sin 30^\circ - w_{AO}^{bp} \cos 30^\circ = 2 + 0,5 \cdot 0,5 + 1 \cdot 0,87 = 1,38 \text{ м/с}^2;$$

$$w_{AY} = w_{AO}^{oc} \cos 30^\circ + w_{AO}^{bp} \sin 30^\circ = 0,5 \cdot 0,87 + 1 \cdot 0,5 = 0,94 \text{ м/с}^2.$$

Модуль полного ускорения:

$$w_A = \sqrt{w_{AX}^2 + w_{AY}^2} = \sqrt{1,38^2 + 0,94^2} = 1,67 \text{ м/с}^2.$$

$$\delta = \arctg \frac{w_{AX}}{w_{AY}} = \arctg \frac{1,38}{0,94} = \arctg 1,468; \quad \delta = 50^\circ 35'.$$

Ответы: $\omega = 1,0$ рад/с; $\varepsilon = 2,0$ рад/с²; $v_A = 0,39$ м/с; $w_A = 1,67$ м/с².

Самостоятельно провести теоретическое исследование без проведения числовых расчетов по методике определения скорости и ускорения точки A , если скорость \vec{v}_0 и ускорение \vec{w}_0 направлены в разные стороны.

Пример 8 (задача 3-3). Для механизма, изображенного на рис. 4.8, найти мгновенный центр скоростей шатуна AB , угловую скорость ω_{AB} и угловое ускорение ϵ_{AB} шатуна AB , скорость и ускорение ползуна B , если $AB = l = 100$ см; $a = 30$ см; $OA = r = 30$ см; $\omega_{OA} = 5$ рад/с.

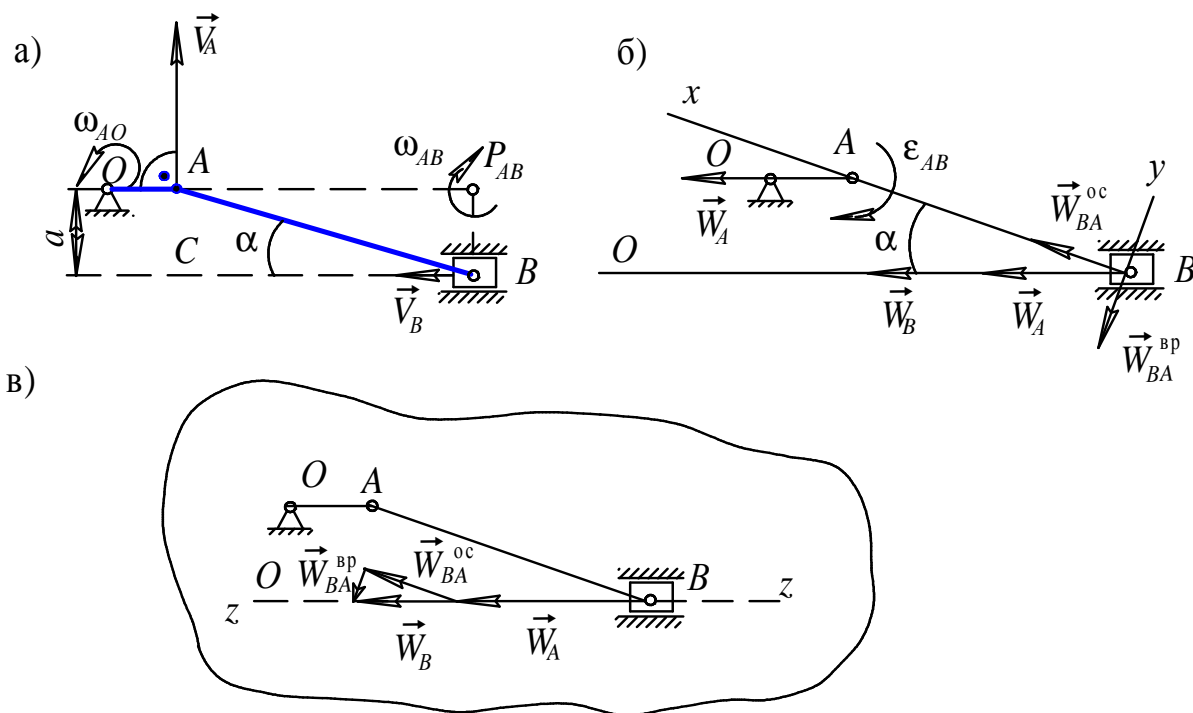


Рис. 4.8. Схемы скоростей (а) и ускорений (б) и кривошипно-шатунного механизма (в)

Решение. Механизм, изображенный на рис. 4.8, состоит из кривошипа OA , вращающегося вокруг оси O с постоянной угловой скоростью ω_{OA} , ползуна B , поступательно движущегося в направляющих $B - C$, и шатуна AB , который совершает плоское движение. Определим линейную скорость пальца кривошипа A :

$$v_A = \omega_{OA} OA = 5 \cdot 30 = 150 \text{ см/с.}$$

Вектор линейной скорости точки A направлен перпендикулярно OA в сторону угловой скорости ω_{OA} .

Для определения положения мгновенного центра скоростей (МЦС) шатуна AB восстановим перпендикуляры к скоростям двух точек A и B шатуна AB ; точка их пересечения P_{AB} – МЦС. Угловая скорость шатуна ω_{AB} равна отношению скорости точки A к расстоянию от этой точки до МЦС (AP_{AB}):

$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{AP_{AB}}; \quad \sin \alpha = \frac{a}{l} = \frac{30}{100} = 0,3; \quad \alpha = 17^\circ 30'; \quad AP_{AB} = l \cos \alpha = 95 \text{ см.}$$

где $\cos \alpha = 0,95$;

$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{AP_{AB}} = \frac{150}{95} = 1,58 \text{ рад/с.}$$

Скорость точки B определяем как вращательную вокруг мгновенного центра скоростей:

$$v_B = \omega_{AB} BP_{AB} = \omega_{AB} a = 1,58 \cdot 30 = 47,4 \text{ см/с.}$$

Вектор \vec{v}_B направлен вдоль направляющей ползуна B .

Определим ускорение точки B (рис. 4.8б, 4.8в). Ускорение любой точки плоской фигуры равно геометрической сумме ускорения полюса и ускорения точки при вращении ее вокруг полюса. Приняв за полюс точку A , напишем выражение для ускорения точки B шатуна:

$$\vec{w}_B = \vec{w}_A + \vec{w}_{BA}^{oc} + \vec{w}_{BA}^{bp}. \quad (8.1)$$

Вычислим и построим в точке B все составляющие ее ускорения согласно уравнению (8.1), свяжем с ней систему координатных осей xBy и запишем уравнение (8.1) в проекциях на эти оси. Ускорение полюса A направлено от A к точке O и равно

$$w_A = \omega_{OA}^2 OA = 5^2 \cdot 30 = 750 \text{ см/с.}$$

Осестремительное ускорение точки B направлено по AB от точки B к полюсу A и равно

$$w_{BA}^{oc} = \omega_{AB}^2 AB = 1,58^2 \cdot 100 = 250 \text{ см/с}^2.$$

Вращательное ускорение точки B (w_{BA}^{bp}) вокруг полюса направлено всегда перпендикулярно к прямой, соединяющей точку B с полюсом, т. е. $\vec{w}_{BA}^{bp} \perp AB$.

Абсолютное ускорение точки B направлено вдоль направляющей. Проекция на ось Bx равна

$$w_{Bx} = w_{Ax} + w_{BAx}^{oc} + w_{BAx}^{bp};$$

$$w_B \cos \alpha = w_A \cos \alpha + w_{BA}^{oc} \Rightarrow w_B = \frac{w_A \cos \alpha + w_{BA}^{oc}}{\cos \alpha} = \frac{750 \cdot \cos \alpha + 250}{\cos \alpha} = 1013 \text{ см/с}^2.$$

Проекция на ось By равна

$$w_{By} = w_{Ay} + w_{BAy}^{oc} + w_{BAy}^{bp};$$

$$-w_B \cdot \sin \alpha = -w_A \sin \alpha - w_{BA}^{bp};$$

$$w_{BA}^{bp} = \sin \alpha (w_B - w_A) = \sin 18^\circ (1013 - 750) = 81,3 \text{ см/с}^2.$$

Угловое ускорение шатуна AB

$$\varepsilon_{AB} = \frac{w_{BA}^{BP}}{AB} = \frac{81,3}{100} = 0,813 \text{ рад/с}^2.$$

Ответ: $\omega_{AB} = 1,58 \text{ рад/с}$; $\varepsilon_{AB} = 0,813 \text{ рад/с}^2$;
 $v_B = 47,4 \text{ см/с}$; $v_M = 66,4 \text{ м/с}$; $w_B = 1013 \text{ см/с}^2$.

Провести самостоятельное исследование по определению направления ускорения \vec{w}_B и \vec{w}_{BA}^{BP} , пользуясь только правилами векторной алгебры.

Пример 9 (задача 3-4). Пластинка (рис. 4.9), имеющая форму половины круга радиусом $R = 20 \text{ см}$, вращается вокруг вертикальной оси AB по закону $\varphi = (6t - 2t^2)$ (положительное направление отсчета угла φ показано круговой стрелкой). По контуру пластинки движется точка M по закону

$$S = \overset{\cup}{AM} = \frac{\pi R}{3} (3t - t^2).$$

(φ – рад; S – см; t – с).

Найти абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки в момент $t = 1 \text{ с}$.

Решение.

1. Определим положение точки M в момент $t = 1 \text{ с}$. Имеем:

$$S = \frac{\pi R}{3} (3 - 1) = \frac{2}{3} \pi R.$$

Тогда при $t = 1 \text{ с}$ угол

$$\angle ACM = S/R = 2\pi/3 = 120^\circ;$$

$$\angle DCM = 30^\circ; \quad DC \perp AB.$$

2. Найдем абсолютную скорость \vec{v}_a точки M . По теореме сложения скоростей

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e. \quad (9.1)$$

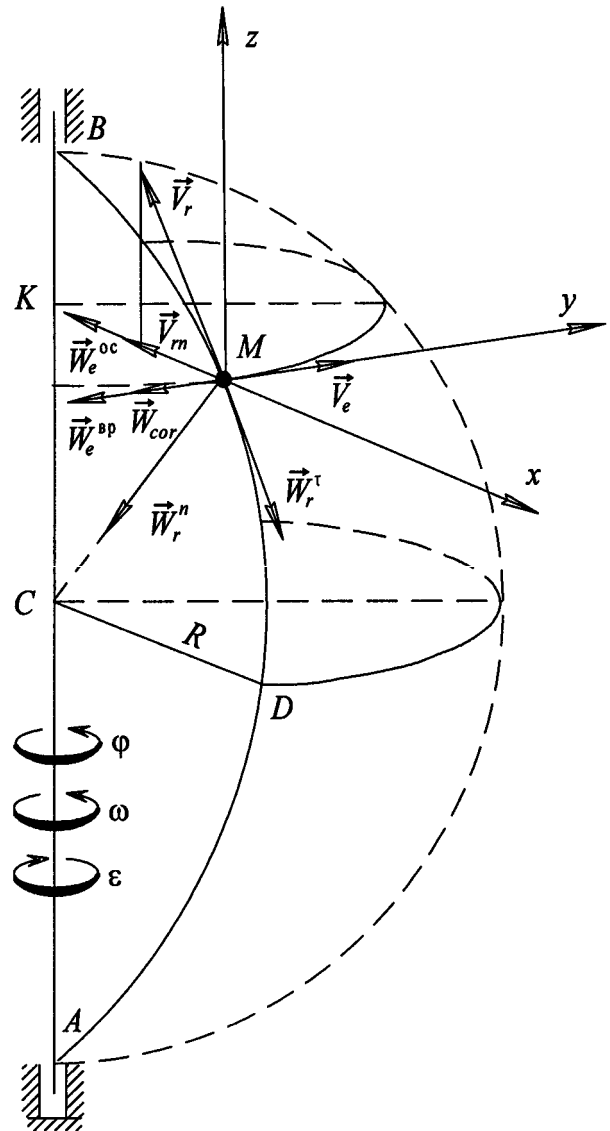


Рис. 4.9. Схемы скоростей и ускорений точки M в сложном движении

Алгебраическая величина относительной скорости

$$\tilde{v}_r = \dot{S} = \frac{\pi R}{3}(3 - 2t).$$

В момент $t = 1$ с

$$\tilde{v}_r = \frac{\pi R}{3} = 21 \text{ см/с} = v_r.$$

Так как $\tilde{v}_r > 0$, то относительная скорость направлена по касательной к траектории точки в сторону отсчета положительных S (рис. 4.9).

Алгебраическая величина угловой скорости пластинки

$$\tilde{\omega} = \dot{\phi} = 6 - 4t.$$

В момент $t = 1$ с

$$\tilde{\omega} = 6 - 4 = 2 \text{ рад/с} = \omega.$$

Так как $\tilde{\omega} > 0$, то пластинка вращается в сторону положительного отсчета угла ϕ (рис. 4.9).

Модуль переносной скорости точки

$$v_e = \omega MK = \omega R \cos 30^\circ = 2 \cdot 20 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 34,6 \text{ см/с}.$$

Переносная скорость направлена перпендикулярно MK и AB в сторону вращения. Так как $\vec{v}_r \perp \vec{v}_e$, то

$$v_a = \sqrt{v_r^2 + v_e^2} = 40,4 \text{ см/с}.$$

3. Найдем абсолютное ускорение точки по теореме сложения ускорений (теорема Кориолиса):

$$\vec{w}_a = \vec{w}_r + \vec{w}_e + \vec{w}_{cor}. \quad (9.2)$$

Так как в относительном движении точка M движется по криволинейной траектории, то

$$\vec{w}_r = \vec{w}_r^\tau + \vec{w}_r^n.$$

Алгебраическая величина относительного касательного ускорения

$$\tilde{w}_r^\tau = \frac{d\tilde{v}_r}{dt} = -\frac{\pi R}{3} 2 = -42 \text{ см/с}^2.$$

Модуль касательного ускорения

$$w_r^\tau = 42 \text{ см/с}^2.$$

Так как $\tilde{w}_r^t < 0$, то вектор \vec{w}_r^t направится по касательной к траектории в сторону отсчета отрицательных S (рис. 4.9).

Модуль нормального относительного ускорения

$$w_r^n = \frac{v_r^2}{\rho} = \frac{v_r^2}{R} = 22 \text{ см/с}^2.$$

Вектор \vec{w}_r^n направлен $\perp \vec{v}_r$ от точки M к точке C .

Переносное ускорение точки (ускорение движения точки вместе с пластинкой)

$$\vec{w}_e = \vec{w}_e^{oc} + \vec{w}_e^{bp}.$$

Модуль переносного осестремительного ускорения

$$w_e^{oc} = \omega^2 MK = 69,2 \text{ см/с}^2.$$

Вектор \vec{w}_e^{oc} направлен по MK к оси вращения ($MK \perp AB$).

Алгебраическая величина углового ускорения пластинки

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{d\omega}{dt} = -4 \text{ рад/с}^2.$$

Модуль углового ускорения

$$\varepsilon = |\tilde{\varepsilon}| = 4 \text{ рад/с}^2.$$

Так как знаки $\tilde{\omega}$ и $\tilde{\varepsilon}$ в момент $t = 1$ с различны, то вращение пластинки в этот момент замедленное. Круговую стрелку ε направим противоположно круговой стрелке ω (рис. 4.9).

Модуль переносного вращательного ускорения

$$w_e^{bp} = \varepsilon MK = 4 \cdot 20 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 69,2 \text{ см/с}^2.$$

Вектор \vec{w}_e^{bp} направлен противоположно \vec{v}_e , т. к. вращение при $t = 1$ с замедленное.

Определим кориолисово ускорение \vec{w}_{cor} точки M . Воспользуемся правилом Н. Е. Жуковского. Найдем проекцию \vec{v}_r на плоскость Π , перпендикулярную оси вращения. Имеем (рис. 4.9):

$$v_m = v_r \cos 60^\circ = 10,5 \text{ см/с}.$$

Модуль кориолисова ускорения

$$w_{cor} = 2\omega v_m = 2 \cdot 2 \cdot 10,5 = 42 \text{ см/с}^2.$$

Направление вектора получим, если повернем \vec{v}_m в указанной плоскости в сторону вращения (в сторону стрелки ω) (рис. 4.9).

Направление вектора \vec{w}_{cor} совпало с направлением вектора \vec{w}_e^{BP} . Далее имеем:

$$\vec{w}_a = \vec{w}_r^\tau + \vec{w}_r^n + \vec{w}_e^{BP} + \vec{w}_e^{oc} + \vec{w}_{cor}. \quad (9.3)$$

Построим взаимно перпендикулярные оси $Mxyz$ (рис. 4.9) и найдем на основании формулы (9.3) проекции абсолютного ускорения на эти оси. Находим

$$w_{ax} = w_r^\tau \cos 60^\circ - w_r^n \cos 30^\circ - w_e^{oc} = 67,2 \text{ см/с}^2;$$

$$w_{ay} = -w_e^{BP} - w_{cor} = 111 \text{ см/с}^2;$$

$$w_{az} = -w_r^\tau \cos 30^\circ - w_r^n \cos 60^\circ = 47,3 \text{ см/с}^2.$$

Модуль абсолютного ускорения точки $t = 1 \text{ с}$

$$w_a = \sqrt{w_{ax}^2 + w_{ay}^2 + w_{az}^2} = 134 \text{ см/с}^2.$$

Ответ: $v_a = 40,4 \text{ см/с}$; $w_a = 134 \text{ см/с}^2$.

В качестве теоретического исследования по этой задаче можно рекомендовать другой закон изменения угла $\varphi = 6t + 2t^2$. Исследование провести без выполнения расчетов.

Указание. Новый закон изменения угла φ приведет к тому, что вращение по круговой стрелке ω будет ускоренным, это только изменит направление ускорения \vec{w}_e^{BP} на противоположное.

4.3. Динамика

Ниже подробно рассмотрен процесс решения задач типа 4-1, 4-2, 5-1, 5-2, 5-3, 5-4, 6-1, 6-2, 6-3.

Задачи типа 5-2, 5-3, 5-4 будут предложены на экзамене.

Пример 10 (задача 4-1). На наклонном участке AB трубы (рис. 4.10) на груз массой m действуют сила тяжести \vec{P} и сила сопротивления \vec{R} ; расстояние от точки A до точки B равно l . На горизонтальном участке BC на груз действуют сила трения $\vec{F}_{тр}$, переменная сила $F_x = F(t)$ и реакция \vec{N}_2 .

Дано: $m = 2 \text{ кг}$; $R = \mu v^2$, где $\mu = 0,2 \text{ кг/м}$; $AB = l = 4 \text{ м}$; $F_x = 2(1 + t)H$; $f = 0,2$; $\alpha = 60^\circ$; $v_0 = 20 \text{ м/с}$; $\beta = 0$, т. к. участок BC горизонтальный.

Решение.

1. Рассмотрим движение груза на участке AB , вдоль которого направим ось x_1 . Изобразим промежуточное текущее положение груза и приложенные к нему силы $\vec{P} = m\vec{g}$, \vec{R} , \vec{N} .

Составим дифференциальное уравнение движения груза:

$$m\ddot{x}_1 = -mg \sin \alpha - R = -mg \sin \alpha - \mu v^2.$$

Примем во внимание, что $\dot{x}_1 = v$, тогда

$$\ddot{x}_1 = \frac{dx_1}{dt} = \frac{dv}{dt}.$$

Дифференциальное уравнение преобразуется к виду

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{\mu}{m} \left(\frac{mg \sin \alpha}{\mu} + v^2 \right). \quad (10.1)$$

Введем обозначение:

$$a^2 = \frac{mg \sin \alpha}{\mu} = 85 \text{ м}^2/\text{с}^2.$$

Умножим обе части равенства (10.1) на дифференциал dx_1 и затем выполним разделение переменных с переходом на интегралы.

Находим, что $dv \cdot v = -\frac{\mu}{m} (a^2 + v^2) dx_1$, где учтено, что

$$v = \frac{dx_1}{dt}.$$

Тогда

$$\int \frac{v \cdot dv}{a^2 + v^2} = -\frac{\mu}{m} \int dx_1.$$

Интегралы табличные после интегрирования получим

$$\ln(a^2 + v^2) = -\frac{2\mu}{m} x_1 + C_1,$$

где C_1 – произвольная постоянная.

По начальным условиям $x_1 = 0$; $v = v_0$ при $t = 0$ найдем

$$C_1 = \ln(a^2 + v_0^2).$$

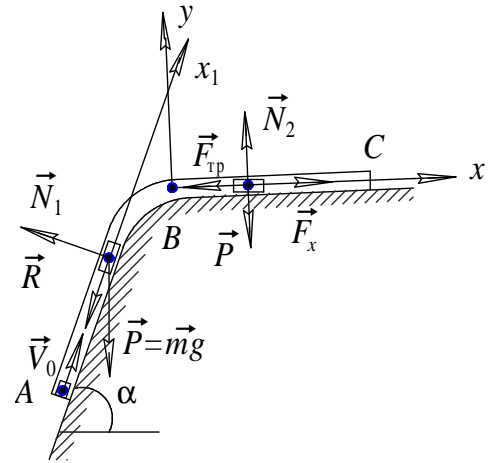


Рис. 4.10. Расчетная схема

Тогда

$$\ln(a^2 + v^2) - \ln(a^2 + v_0^2) = -\frac{2\mu}{m}x_1;$$

$$\ln \frac{a^2 + v_0^2}{a^2 + v^2} = \frac{2\mu}{m}x_1; \quad \frac{a^2 + v_0^2}{a^2 + v^2} = e^{\frac{2\mu}{m}x_1};$$

$$v = \sqrt{v_0^2 e^{-\frac{2\mu}{m}x_1} - a^2 \left(1 - e^{-\frac{2\mu}{m}x_1}\right)}.$$

Полагая здесь $x_1 = l$, найдем скорость груза в точке B , учитывая, что $e = 2,73$:

$$v_B = \sqrt{400 \cdot 0,45 - 85 \cdot 0,55} = 11,5 \text{ м/с}.$$

2. Рассмотрим движение груза на участке BC . Найденная скорость по модулю в конце участка AB , $v_B = 11,5$ м/с будет начальной скоростью для участка BC .

Изобразим промежуточное положение груза и приложенные к нему силы: $\vec{P} = m\vec{g}$; \vec{N}_2 ; $\vec{F}_{\text{тр}}$ и \vec{F} . Построим оси Bx , By и спроектируем дифференциальное уравнение движения на оси Bx и By .

Проекция на ось Bx

$$m\ddot{x} = -F_{\text{тр}} + F_x \text{ или } m \frac{d\dot{x}}{dt} = -fN_2 + 2(1+t).$$

Примем во внимание, что проекция на ось By равна $N_2 - mg = m\ddot{y} = 0$, откуда следует, что $N_2 = mg$. Поделим на массу m обе части проекции дифференциального уравнения на ось Bx , затем разделим переменные и возьмем интегралы от обеих частей уравнения.

В результате разделения переменных получаем

$$\int d\dot{x} = -2 \int dt + \int (1+t) dt,$$

где учтено, что

$$gf \approx 2.$$

Интегрирование дает

$$\dot{x} = -2t + \frac{(1+t)^2}{2} + C_2 \text{ (первый интеграл),}$$

где C_2 – произвольная постоянная.

По начальному условию $\dot{x}_0 = v_B$ при $t = 0$ найдем

$$C_2 = v_B - 0,5 = 11 \text{ м/с}.$$

Подставим в первый интеграл $\dot{x} = dx/dt$ и найденное C_2 . Разделим переменные и возьмем интеграл от обеих частей равенства:

$$\int dx = -2 \int t \cdot dt + \frac{1}{2} \int (1+t)^2 dt + 11 \int dt;$$

$$x = -t^2 + \frac{(1+t)^3}{6} + 11t + C_3 \text{ (второй интеграл).}$$

По начальному условию $x_0 = 0$ при $t = 0$ найдем произвольную постоянную C_3 :

$$C_3 = -\frac{1}{6} = -0,17.$$

Искомое уравнение движения груза на участке BC запишется так:

$$x = -0,17 + 11t - t^2 + \frac{(1+t)^3}{6}.$$

Для самостоятельного исследования рекомендуется изучить влияние коэффициента трения f на закон изменения координаты x от времени. Исследование проводить на дифференциальном уравнении движения тела вдоль оси vx . При изменении f произведение $fg \neq 2$ и это учтется при интегрировании дифференциальных уравнений.

Пример 11 (задача 4-2). Груз массой $m = 1000$ кг (рис. 4.11) опирается на основание через две пары последовательно соединенных пружин с коэффициентами жесткости $C_1 = 200$ кН/м; $C_2 = 300$ кН/м.

Решить задачу в двух вариантах.

1. Найти уравнение, амплитуду и период свободных колебаний груза, если $z_0 = 0,1$ м; $\dot{z}_0 = 2$ м/с при $t = 0$.

2. Найти уравнение движения груза, когда основание совершает колебания по закону $z_n = a_1 \sin \omega t$, где $a_1 = 0,2$ м; $\omega = 20$ рад/с. Принять, что $z_0 = 0$; $\dot{z}_0 = 0$ при $t = 0$.

Решение. Исследование свободных колебаний.

1. Заменим четыре пружины одной эквивалентной пружиной с коэффициентом жесткости C . Пусть исходные и эквивалентная недеформированные пружины сжаты силой Q .

Если деформации верхних и нижних пружин равны λ_1 и λ_2 , то деформация эквивалентной пружины

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 \text{ или } \frac{Q}{C} = \frac{Q}{2C_1} + \frac{Q}{2C_2},$$

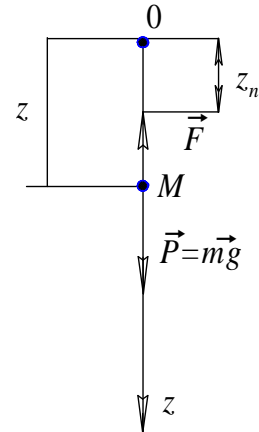


Рис. 4.11. Расчетная схема

следовательно,

$$C = \frac{2C_1C_2}{C_1 + C_2}.$$

В нашем случае

$$C = \frac{2 \cdot 200 \cdot 300}{500} = 240 \text{ кН/м.}$$

Жесткость эквивалентной пружины одинакова для рассматриваемых двух вариантов.

2. Составим расчетную схему. На расчетной схеме груз моделируем материальной точкой. Начало оси z совместим с равновесным положением материальной точки. Изобразим промежуточное положение материальной точки и действующие на точку силы: силу тяжести $\vec{P} = m\vec{g}$ и упругую силу F эквивалентной пружины (рис. 4.11). Проекция упругой силы $F_z = C(\lambda_{\text{ст}} + z)$, где $\lambda_{\text{ст}} = mg/C$ – статическое сжатие эквивалентной пружины весом груза. На рис. 4.11 точка O соответствует положению равновесия груза.

3. Запишем дифференциальное уравнение движения груза в проекциях на ось z :

$$m\ddot{z} = mg - c(\lambda_{\text{ст}} + z) = -Cz$$

или

$$z + k^2z = 0, \quad (11.1)$$

где $k = \sqrt{c/m}$ – угловая частота свободных колебаний груза. В нашем случае

$$k = \sqrt{\frac{240 \cdot 10^3}{10^3}} = 15,5 \text{ рад/с.}$$

Общее решение однородного дифференциального уравнения (11.1) известно из теории линейных дифференциальных уравнений:

$$z = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt. \quad (11.2)$$

Тогда

$$\dot{z} = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt. \quad (11.3)$$

Подставим в уравнения (11.2) и (11.3) начальные условия:

$$z = z_0; \quad \dot{z} = \dot{z}_0 \text{ при } t = 0.$$

Получим:

$$C_1 = z_0 = 0,1 \text{ м}; \quad C_2 = \dot{z}/K = 2/15,5 = 0,13 \text{ м.}$$

Уравнение свободных колебаний груза после подстановки постоянных C_1 и C_2 примет вид:

$$z = 0,1 \cos 15,5t + 0,13 \sin 15,5t.$$

Амплитуда и период свободных колебаний соответственно равны

$$a = \sqrt{0,1^2 + 0,13^2} = 0,164 \text{ м,}$$

$$T = 2\pi/k = 6,28/15,5 = 0,405 \text{ с.}$$

Переходим к исследованию вынужденных колебаний (вариант второй) при кинематическом возбуждении.

Составим дифференциальное уравнение вынужденных колебаний. В отличие от предыдущего варианта, здесь основание смещается по закону $z_n = a_1 \sin \omega t$, и проекция упругой силы пружины определится так:

$$F_z = -C(\lambda_{\text{ст}} + z - z_n) = C\lambda_{\text{ст}} - Cz + Ca_1 \sin \omega t.$$

Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний груза при кинематическом возбуждении имеет вид:

$$m\ddot{z} = mg - C\lambda_{\text{ст}} - Cz + Ca_1 \sin \omega t \quad \text{или} \quad \ddot{z} + k^2 z = k^2 a_1 \sin \omega t, \quad (11.4)$$

где учтено, что $mg = C\lambda_{\text{ст}}$; $k^2 = C/m$.

4. Общее решение полученного неоднородного дифференциального уравнения равно

$$z = z_1 + z_2,$$

где z_1 – общее решение однородного уравнения $\ddot{z} + k^2 z = 0$, т. е.

$$z_1 = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt,$$

а z_2 – частное решение уравнения (11.4).

Поскольку $k \neq \omega$, то z_2 нужно искать в виде

$$z_2 = A \sin \omega t.$$

Для определения A подставим z_2 и $\ddot{z}_2 = -A\omega^2 \sin \omega t$ в уравнение (11.4) и приравняем коэффициенты при $\sin \omega t$. Получим

$$A = \frac{a_1 k^2}{k^2 - \omega^2} = \frac{0,2 \cdot 240}{240 - 400} = -\frac{48}{160} = -0,3 \text{ м.}$$

Тогда общее решение уравнения (11.4):

$$z = C_1 \cos 15,5t + C_2 \sin 15,5t - 0,3 \sin 20t, \quad (11.5)$$

и производная от общего решения по времени:

$$\dot{z} = -C_1 \cdot 15,5 \sin 15,5t + C_2 15,5 \cos 15,5t - 6 \cos 20t. \quad (11.6)$$

Подставим в уравнения (11.5) и (11.6) начальные условия: $z_0 = 0$, $\dot{z} = 0$ при $t = 0$. Получим

$$C_1 = 0; \quad C_2 = 6/15,5 = 0,39 \text{ м.}$$

Искомый закон движения груза равен

$$z = 0,39 \sin 15,5t - 0,3 \sin 20t.$$

Примечание. При силовом возбуждении колебаний на груз будет действовать гармоническая возмущающая сила $P(t) = P_{01} \sin \omega t$ или $P(t) = P_{02} \cos \omega t$. Она должна быть показана на расчетной схеме для вынужденных колебаний груза. Основание при силовом возбуждении колебаний неподвижно. Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний при силовом возбуждении будет аналогично дифференциальному уравнению (11.4) и последовательность отыскания закона движения груза будет такой же, что и в рассмотренном примере с кинематическим возбуждением.

При проведении задания по УИРС рекомендуется получить закон изменения амплитуды частного решения z_2 в случае резонанса, приняв $k = \omega = 15,5$ рад/с.

Пример 12 (задача 5-1). Применяя теорему об изменении кинетической энергии механической системы, определить скорость и ускорение груза А (рис. 4.12), если масса груза А – m , масса блока барабанов Б – $m_2 = 0,5m$; масса катка К – $m_3 = 0,1m$; $\alpha = 60^\circ$; $\beta = 30^\circ$; $f = 0,2$; $\delta = 0,1$ см; $\rho_2 = 40$ см; $R_2 = 50$ см; $r_2 = 20$ см; $r_3 = 20$ см; $S = 2,0$ м.

Решение. Напишем теорему об изменении кинетической энергии механической системы, состоящей из абсолютно твердых тел, соединенных при помощи невесомых гибких нерастяжимых тросов:

$$T_1 - T_0 = \sum_j^n A_j^e. \quad (12.1)$$

1. Вычислим кинетическую энергию системы как сумму кинетических энергий тел, составляющих систему:

$$T = T_A + T_B + T_K.$$

Для груза А, совершающего поступательное движение:

$$T_A = \frac{mv^2}{2}.$$

Для барабана Б, вращающегося вокруг неподвижной оси:

$$T_B = \frac{I_{0x} \omega_2^2}{2}.$$

Для катка К, совершающего плоское движение:

$$T_K = \frac{m_3 v_c^2}{2} + \frac{I_c \omega_3^2}{2}.$$

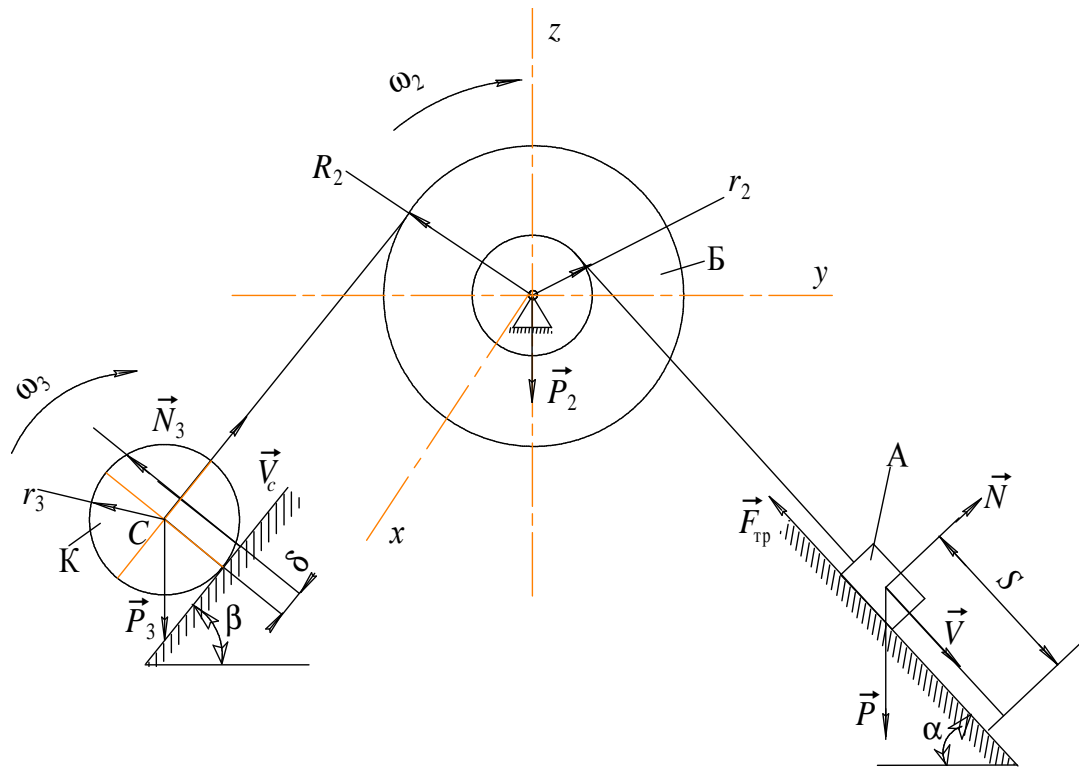


Рис. 4.12. Расчетная схема системы

Выразим скорости тел системы через скорость груза A:

$$\omega_2 = \frac{v}{r_2}; \quad v_c = \omega_2 R_2 = v \frac{R_2}{r_2}; \quad \omega_3 = \frac{v_c}{r_3} = \frac{v R_2}{r_2 r_3}.$$

Определим моменты инерции тел системы:

$$I_{oz} = m_2 \rho_2^2; \quad I_{cz} = \frac{m_3 r_3^2}{2}.$$

Тогда выражение для кинетической энергии системы, приведенной к скорости груза V , примет вид:

$$T = \frac{v^2}{2} \left(m + m_2 \frac{\rho_2^2}{r_2^2} + \frac{3}{2} m_3 \frac{R_2^2}{r_2^2} \right) = m_{\text{пр}} \frac{v^2}{2},$$

где $m_{\text{пр}}$ – приведенная масса системы: $m_{\text{пр}} = 3,94m$.

Считаем, что система приходит в движение из состояния покоя, поэтому

$$T_0 = 0; \quad T_1 = \frac{3,94mv^2}{2}. \quad (12.2)$$

Вычислим сумму работ внешних сил, приложенных к системе:

$$\sum_{j=1}^n A_j^e = A(P) + A(F_{\text{тр}}) + A(P_3) + A(M_{\text{тр.кач}})$$

Работа силы веса груза А на перемещении S равна

$$A(P) = PS \sin \alpha.$$

Работа силы трения скольжения о наклонную плоскость

$$F_{\text{тр}} = Nf = P \cos \alpha f; \quad A(F_{\text{тр}}) = -PSf \cos \alpha.$$

Работа силы веса катка К на перемещении S_3 точки С равна

$$A(P_3) = -P_3 \sin \beta S_3.$$

Момент трения качения катка

$$M_{\text{тр.кач}} = N_3 \delta = P \cos \beta \delta, \text{ т. к. } N_3 = P_3 \cos \beta.$$

Работа момента трения качения

$$A(M_{\text{тр.кач}}) = -P_3 \varphi_3 \delta \cos \beta.$$

Выразим перемещения тел системы через перемещение груза А–S:

$$S_3 = S \frac{R_2}{r_2}; \quad \varphi_3 = \frac{S_3}{r_3} = \frac{SR_2}{r_2 r_3}.$$

Тогда сумма работ всех сил, приведенная к перемещению S равна

$$\begin{aligned} \sum A_j^e &= S \left[P \sin \alpha - Pf \cos \alpha - P_3 \sin \beta \frac{R_2}{r_2} - P_3 \delta \cos \beta \frac{R_2}{r_2 r_3} \right] = \\ &= smg \left[0,866 - 0,2 \cdot 0,5 - 0,1 \cdot 0,5 \frac{50}{20} - 0,1 \cdot 0,1 \cdot 0,866 \frac{50}{20 \cdot 20} \right] = 0,64mgS. \end{aligned} \quad (12.3)$$

2. Найденные значения кинетической энергии (12.2) и суммы работ (12.3) подставим в уравнение (12.1):

$$\frac{3,94mv^2}{2} = 0,64mgS. \quad (12.4)$$

Откуда найдем скорость груза А в конце перемещения на величину S , т. е.

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,64gS}{3,94}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,64 \cdot 9,8 \cdot 2}{3,94}} = 2,54 \text{ м/с.}$$

3. Вычислим ускорение груза А.

Для определения ускорения продифференцируем по времени уравнение (12.4):

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{3,94mv^2}{2} \right) = \frac{d}{dt} (0,64mgS);$$

$$\frac{3,94m \cdot 2v}{2} \cdot \frac{dv}{dt} = 0,64mg \frac{dS}{dt}.$$

Так как $\frac{dS}{dt} = v$, $\frac{dv}{dt} = w$, то ускорение

$$w = \frac{0,64g}{3,94} = 1,63 \text{ м/с}^2.$$

Ответ: $v = 2,54 \text{ м/с}$; $w = 1,63 \text{ м/с}^2$.

В качестве темы для УИРС рекомендуется исследовать влияния радиуса инерции ρ_2 барабана Б на скорость \vec{v} и ускорение \vec{w} при прочих неизменных данных. Например, можно взять $\rho_2 = 20 \text{ см}$ вместо 40 см .

Пример 13 (задача 5-2). Для плоского механизма, изображенного на рис. 4.13, определить вращающий момент M , который необходимо приложить к кривошипу OC для того, чтобы механизм был в равновесии в положении, когда кривошип OC образует с направляющей ползуна B угол φ .

Дано: $OC = AC = CB = l = 0,5 \text{ м}$; $P = 1 \text{ кН}$; $Q = 0,5 \text{ кН}$; $\varphi = 30^\circ$. Трением в звеньях пренебречь.

Решение.

1. На механизм действуют активные силы \vec{P} , \vec{Q} и пара сил с моментом M .

2. Сообщим механизму возможное (бесконечно малое и допускаемое связями) перемещение и составим уравнение элементарных работ на возможных перемещениях или общее уравнение статики:

$$\delta A = Q\delta r_B - P\delta r_A + M\delta\varphi = 0. \quad (13.1)$$

3. Найдем соотношение между δr_B , δr_A , $\delta\varphi$. Известно, что проекции возможных перемещений точек твердого тела на ось, проходящую через эти точки, равны. На этом основании

$$\delta r_B \cos 30^\circ = \delta r_A \cos 60^\circ = \delta r_C \cos 30^\circ. \quad (13.2)$$

Из рис. 4.13 следует еще одно равенство:

$$\delta r_C = \delta\varphi l. \quad (13.3)$$

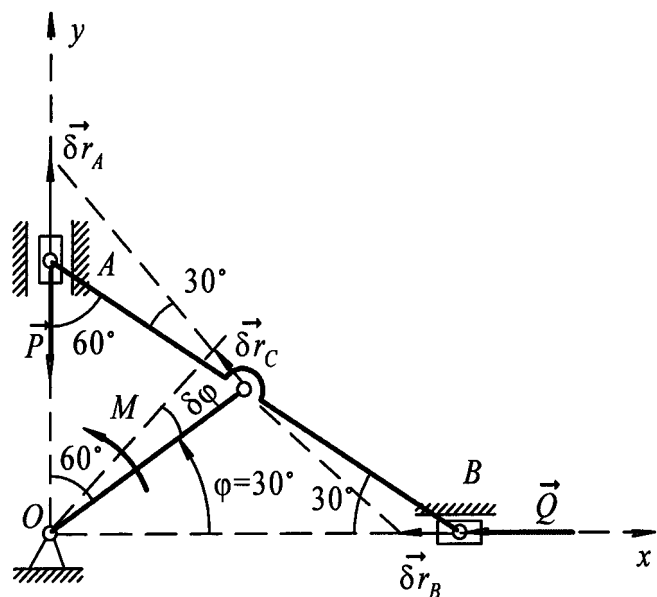


Рис. 4.13. Схема возможного перемещения механизма

С учетом соотношений (13.2) и (13.3) уравнение (13.1) запишется так:

$$Q\delta r_B - P\sqrt{3}\delta r_B + M \frac{\delta r_B}{l} = 0.$$

Следовательно,

$$M = (P\sqrt{3} - Q)l = (1,73 - 0,5)0,5 = 0,62 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Для темы УИРС рекомендуется определить момент M для угла $\varphi = 45^\circ$ и выяснить условия, когда момент $M = 0$.

Пример 14 (задача 5-3). Для механической системы, изображенной на рис. 4.14, определить ускорение груза А и натяжение тянущего его троса по данным примера 12.

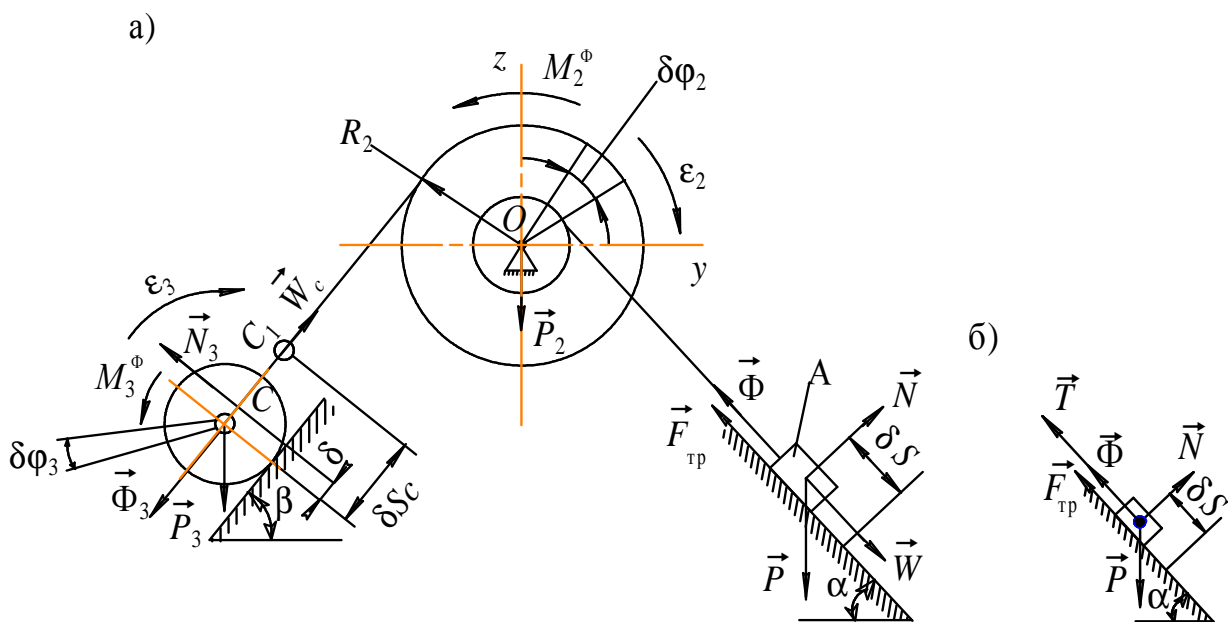


Рис. 4.14. Расчетная схема системы

Решение. Согласно принципу Даламбера – Лагранжа, для механической системы с двусторонними идеальными связями в любой момент времени сумма работ всех задаваемых сил и сил инерции материальных точек системы на любом возможном перемещении системы равна нулю:

$$\sum_{j=1}^n P_j \delta S_j \cos \left(\vec{P}_j \wedge \overrightarrow{\delta S}_j \right) + \sum_{j=1}^n \Phi_j \delta S_j \cos \left(\vec{\Phi}_j \wedge \overrightarrow{\delta S}_j \right) = 0. \quad (14.1)$$

Уравнение (14.1) называется *общим уравнением динамики*.

Для исследуемой системы задаваемыми силами будут: силы тяжести P_1 – груза ($P_1 = P$); P_2 – барабана; P_3 – катка; сила трения скольжения $F_{\text{тр}}$ – груза по наклонной плоскости и момент трения качения $M_{\text{тр.кач}}$ катка о наклонную плоскость. Вычислим и приложим к системе силы инерции. Модуль силы инерции груза, движущегося поступательно с ускорением \vec{w} , равен $\Phi = mw$. Система сил

инерции частиц барабана, вращающегося вокруг оси, эквивалентна инерционной паре, модуль момента которой (момент сил инерции) равен:

$$M_2^\Phi = I_{ox} \varepsilon_2 \left(\varepsilon_2 = \dot{\omega}_2, \text{ но } \omega_2 = \frac{v}{r_2}, \text{ тогда } \varepsilon_2 = \frac{w}{r_2} \right).$$

Система сил инерции частиц катка, совершающего плоское движение, эквивалентна силе инерции $\bar{\Phi}_3$ и инерционной паре сил M_3^Φ :

$$\Phi_3 = m_3 w_c; \quad M_{c3}^\Phi = I_{cx} \varepsilon_3.$$

Силы инерции тел приложены к центрам масс тел и направлены противоположно ускорениям центров масс тел. Инерционные пары сил стремятся повернуть тела против стрелок угловых ускорений:

$$w_c = \dot{v}_c = \frac{wR_2}{r_2}; \quad \varepsilon_3 = \dot{\omega}_3; \quad \omega_3 = \frac{vR_2}{r_2 r_3}; \quad \varepsilon = \frac{wR_2}{r_2 r_3}.$$

Сообщим системе некоторое возможное перемещение (рис. 4.14а) и составим общее уравнение динамики:

$$P\delta S \sin \alpha - \Phi\delta S - F_{\text{тр}}\delta S - M_2^\Phi \delta\varphi_2 - \Phi_3\delta S_c - P_3\delta S_c \sin \beta - M_3^\Phi \delta\varphi_3 - M_{\text{тр}}\delta\varphi_3 = 0, \quad (14.2)$$

где $\delta\varphi_2$ и $\delta\varphi_3$ – элементарные углы поворота блока шкивов 2 и катка 3;

$$\delta\varphi_2 = \frac{\delta S}{r_2}; \quad \delta\varphi_3 = \frac{\delta S_c}{r_3} = \frac{\delta S R_2}{r_2 r_3}; \quad \delta S_c = \delta S \frac{R_2}{r_2}.$$

После подстановки в уравнение (14.2) возможных перемещений δS_c ; $\delta\varphi_2$; $\delta\varphi_3$ и соответствующих ускорений получим

$$p \sin \alpha \delta S - \frac{P}{g} w \delta S - P f \cos \alpha \delta S - I_{ox} \frac{w}{r_2} \cdot \frac{\delta S}{r_2} - \\ - \frac{P_3}{g} \cdot \frac{wR_2}{r_2} \cdot \frac{\delta S R_2}{r_2} - P_3 \sin \beta \delta S \frac{R_2}{r_2} - \frac{I_{cx} w R_2}{r_2 r_3} \cdot \frac{\delta S R_2}{r_2 r_3} - \frac{P_3 \delta \cos \beta \delta S R_2}{r_2 r_3} = 0.$$

Сокращая на δS и учитывая, что $I_{ox} = m_2 \rho_2^2$ и $I_{cx} = m_3 \frac{r_3^2}{2}$, после преобразований получим

$$w = g \frac{P \sin \alpha - P f \cos \alpha - P_3 \sin \beta \frac{R_2}{r_2} - P_3 \delta \cos \beta \frac{R_2}{r_2 r_3}}{P + P_2 \frac{\rho_{2x}^2}{r_2^2} + \frac{3}{2} P_3 \frac{R_2^2}{r_2^2}},$$

или, с учетом обозначений и данных, введенных в примере 12:

$$w_1 = g \frac{0,64m}{3,94m} = \frac{9,8 \cdot 0,64}{3,94} = 1,63 \text{ м/с}^2.$$

Мы получили то же, что в примере 12 значение ускорения, что и следовало ожидать.

Для определения натяжения троса, удерживающего груз А, рассмотрим движение груза, освободив его от троса и заменив его действие реакцией T (рис. 4.14б).

Основное уравнение динамики для груза А:

$$P \sin \alpha \delta S - T \delta S - F_{\text{тр}} \delta S - \Phi \delta S = 0.$$

После сокращения на δS получаем

$$P \sin \alpha - T - P \cos \alpha f - \frac{P}{g} w = 0,$$

откуда

$$T = P \left(\sin \alpha - f \cos \alpha - \frac{w}{g} \right) = P \left(0,87 - 0,2 \cdot 0,5 - \frac{1,63}{9,8} \right) = 0,6P.$$

Ответ: ускорение груза $w = 1,63 \text{ м/с}^2$,
натяжение троса $T = 0,6P$.

Пример 15 (задача 5-4). Для механической системы, показанной на рис. 4.12 (пример 12), используя уравнение Лагранжа второго рода, составить дифференциальное уравнение движения груза и найти уравнение движения груза, если $\dot{S} = 0$; $S = 0$ при $t = 0$. Исходные данные взять из примера 12.

Запишем уравнение Лагранжа второго рода:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{S}} \right) - \frac{\partial T}{\partial S} = Q_S. \quad (15.1)$$

Обобщенную активную силу Q_S определяем из равенства

$$Q_S = \frac{\delta A_S}{\delta S}.$$

Элементарная работа активных сил P ; $F_{\text{тр}}$; P_3 ; $M_{\text{тр.кач}}$ найдена в примере 12 (задача 5-1):

$$\delta A_S = P \sin \alpha \delta S - F_{\text{тр}} \delta S - P_3 \delta S_C \sin \beta - M_{\text{тр.кач}} \delta \varphi_3.$$

В том же примере установлено:

$$\delta S_C = \delta S \frac{R_2}{r_2}; \quad \delta \varphi_3 = \delta S \frac{R_2}{r_2 r_3}; \quad F_{\text{тр}} = fP \cos \alpha; \quad M_{\text{тр.кач}} = \delta P_3 \cos \beta.$$

Тогда

$$\delta A_S = \left(P \sin \alpha - fP \cos \alpha - P_3 \frac{R_2}{r_2} \sin \beta - P_3 \cos \beta \frac{R_2 \delta}{r_2 r_3} \right) \delta S$$

и

$$Q_S = P \sin \alpha - fP \cos \alpha - P_3 \frac{R_2}{r_2} \sin \beta - P_3 \cos \beta \frac{R_2 \delta}{r_2 r_3} = 0,64 mg.$$

Кинетическая энергия системы найдена на примере 12 (задача 5-1):

$$T = \frac{1}{2} m_{\text{тп}} v^2 = \frac{1}{2} \cdot 3,94 m \dot{S}^2.$$

Здесь учтено, что $v = \dot{S}$.

Производные кинетической энергии:

$$\frac{\partial T}{\partial S} = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{S}} = 3,94 m \dot{S}; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{S}} \right) = 3,94 m \ddot{S}.$$

После подстановки $\frac{\partial T}{\partial S}$; $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{S}} \right)$ и Q_S в уравнение (15.1) получим дифференциальное уравнение движения груза:

$$3,94 m \ddot{S} = 0,64 mg \text{ или } \ddot{S} = 1,63 \text{ м/с}^2.$$

Последовательным интегрированием полученного дифференциального уравнения найдем уравнение движения груза:

$$\dot{S} = 1,63 \int_0^t dt = 1,63 t \text{ м/с}; \quad S = 1,63 \int_0^t t \cdot dt = 0,815 t^2 \text{ м}.$$

Пример 16 (задача 6-1). Дано: G ; $F_1 = 0,2G$; $F_2 = 0,1G$; $M = 0,5GR$; $\alpha = 30^\circ$; $\beta = 60^\circ$. Определить:

1. Закон движения центра масс барабана $x_c = f(t)$.

2. Минимальное значение коэффициента трения, при котором возможно еще качение без скольжения f_{min} .

Решение. Барабан совершает плоскопараллельное движение под действием сил F_1 ; F_2 ; G ; $F_{\text{тр}}$; N и пары сил с моментом M (рис. 4.15).

Проведем оси Oxy и составим дифференциальные уравнения плоского движения твердого тела:

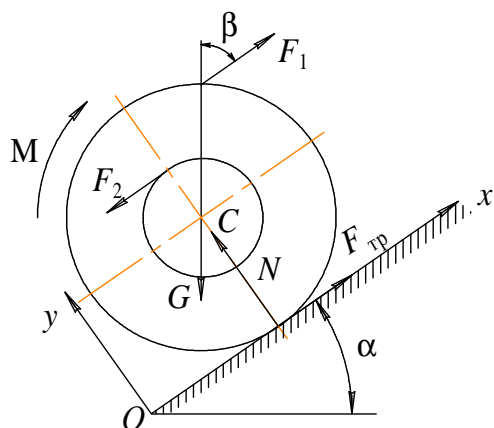


Рис. 4.15

$$m\ddot{x}_c = \sum F_{kx}, \quad m\ddot{x}_c = F_1 - F_2 - G \sin \bar{\alpha} + F_{\text{тр}}; \quad (16.1)$$

$$m\ddot{y}_c = \sum F_{ky}, \quad m\ddot{y}_c = N - G \cos \bar{\alpha}; \quad (16.2)$$

$$I_c \ddot{\varphi} = \sum m_c (F_{\kappa}), \quad I_c \ddot{\varphi} = M + F_1 \sin \beta R - F_2 r - F_{\text{тр}} R. \quad (16.3)$$

Первые два уравнения характеризуют поступательное движение тела вместе с полюсом (за полюс в динамике принимают центр масс тела), а третье уравнение – вращение тела вокруг центра масс.

За положительное направление для моментов принято направление вращения барабана по часовой стрелке.

Система трех уравнений (16.1), (16.2), (16.3) содержит пять неизвестных \ddot{x}_c ; \ddot{y}_c ; $\ddot{\varphi}$; $F_{\text{тр}}$; N . Для решения задачи составим еще два уравнения связи барабана с наклонной плоскостью:

$$y_c = R = \text{const}; \quad (16.4)$$

$$x_c = R\varphi. \quad (16.5)$$

Продифференцируем дважды по времени уравнения связи:

$$\frac{d^2 y_c}{dt^2} = \ddot{y}_c = 0, \quad (16.6)$$

$$\frac{d^2 x_c}{dt^2} = \ddot{x}_c = R\ddot{\varphi}. \quad (16.7)$$

Подставляя значение $\ddot{\varphi}$ из (16.7) в (16.3) получим:

$$I_c \frac{\ddot{x}_c}{R} = M + F_1 \sin \beta R - F_2 r - F_{\text{тр}} R. \quad (16.8)$$

Из уравнения (16.1) находим $F_{\text{тр}}$:

$$F_{\text{тр}} = m\ddot{x}_c - F_1 + F_2 + G \sin \bar{\alpha} \quad (16.9)$$

и подставим значение $F_{\text{тр}}$ в уравнение (16.8), получим:

$$I_c \frac{\ddot{x}_c}{R} = M + F_1 \sin \beta R - F_2 r - m\ddot{x}_c R + F_1 R - F_2 R - GR \sin \alpha. \quad (16.10)$$

Учитывая, что $I_c = mr_c^2 = m(0,3R)^2$, $r = 0,5R$ и подставляя исходные данные после несложных вычислений из (16.10), получим

$$\ddot{x}_c = 0,13g. \quad (16.11)$$

Интегрируя дважды дифференциальное уравнение (16.11) получим

$$\dot{x}_c = 0,13gt + c_1, \quad (16.12)$$

$$x_c = 0,065 gt^2 + c_1 t + c_2. \quad (16.13)$$

Постоянные интегрирования c_1 , c_2 находим исходя из начальных условий движения при $t = 0$; $x_c = 0$; $\dot{x}_c = 0$.

Подстановка этих величин в равенство (16.12), (16.13) дает $c_1 = c_2 = 0$.

Поэтому закон движения центра масс колеса будет иметь вид:

$$x_c = 0,065 gt^2. \quad (16.14)$$

Перейдем к определению f_{\min} . Для этого подставим значение \ddot{x}_c из (16.11) в формулу (16.9) и получим

$$F_{\text{тр}} = 0,13mg - 0,2mg + 0,1mg + mg \sin\alpha = 0,5mg = 0,53G; \quad (16.15)$$

$$F_{\text{тр}} = 0,53G.$$

Но сила трения $F_{\text{тр}}$ должна удовлетворять неравенству:

$$|F_{\text{тр}}| \leq Nf. \quad (16.16)$$

Величину нормальной реакции N найдем из (16.2) с учетом, что $\ddot{y}_c = 0$,

$$N = G \cos\alpha. \quad (16.17)$$

Подставляя значение $F_{\text{тр}}$ и N из равенств (16.15) и (16.17) в неравенство (16.16), получим $0,53G \leq Gf \cos\alpha$, откуда $f \geq 0,61$.

Таким образом, значение коэффициента трения, при котором возможно качение барабана без скольжения, $f_{\min} = 0,61$.

Пример 17 (задача 6-2). Для составной конструкции (рис.4.16а), на которую действуют:

- а) сосредоточенные силы $P_1 = 3$ кН; $P_2 = 4$ кН;
- б) равномерно распределенная нагрузка с интенсивностью $q = 1$ кН/м;
- в) пара сил с моментом $M = 2$ кН · м.

Определить реакции опор в точках A и B . Угол $\alpha = 45^\circ$; $\beta = 30^\circ$; размеры: $a = 3$ м; $b = 2$ м; $c = 4$ м.

Решение. Заменяем равномерно распределенную нагрузку сосредоточенной силой $Q = qc = 1 \cdot 4 = 4$ кН, приложенной в середине загруженного участка.

1. Найдем реакцию подвижной опоры B , для чего мысленно отбросим эту связь, препятствующую вертикальному перемещению балки, заменив ее действие реакцией R_B (рис. 4.16б). Сообщим составной конструкции возможное перемещение. Возможным перемещением левой части конструкции (DK) является ее поворот вокруг шарнира K на бесконечно малый угол $\delta\varphi$. Направление поворота может быть выбрано произвольно, правая часть конструкции при этом остается неподвижной.

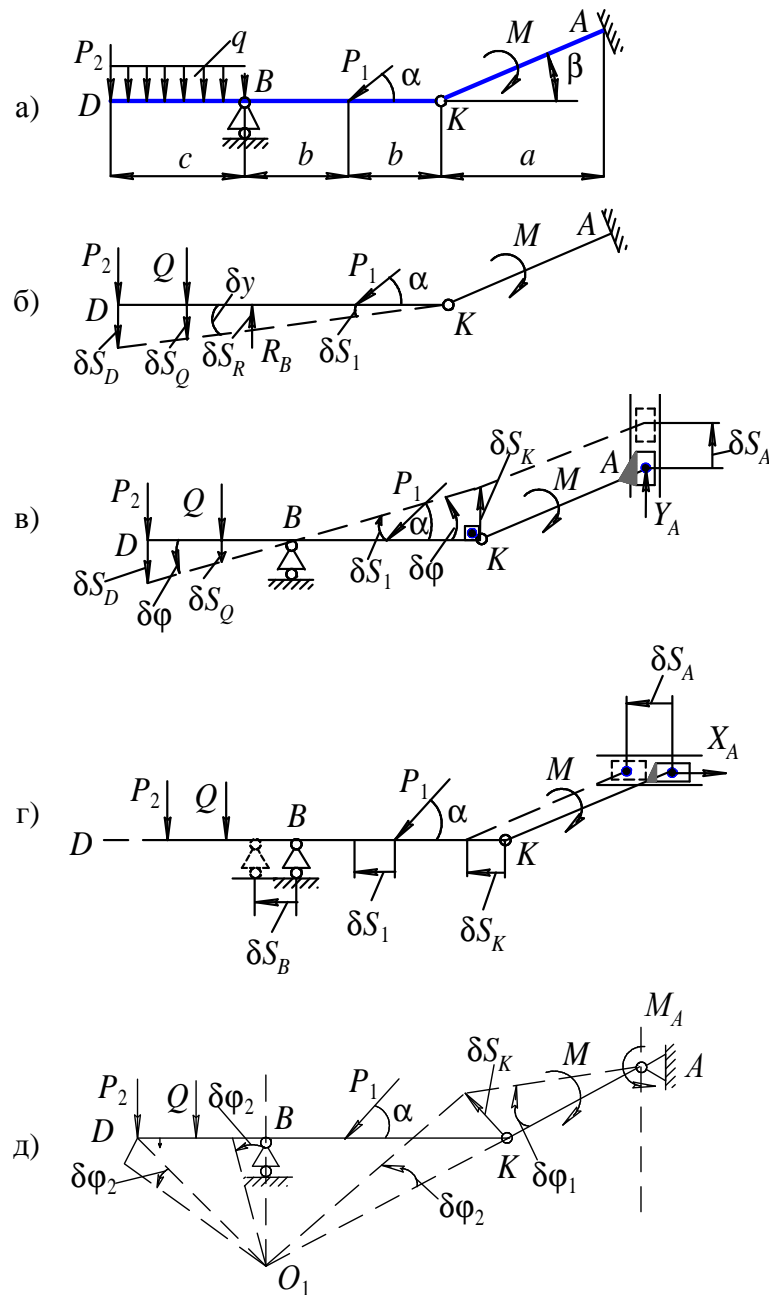


Рис. 4.16

На основании принципа возможных перемещений для равновесия механической системы с идеальными, стационарными и двусторонними связями необходимо и достаточно, чтобы сумма работ от всех задаваемых сил и реакций связей, приложенных к точкам конструкции, была бы равна нулю на любом возможном перемещении системы:

$$\sum_{k=1}^n \delta A_k^{(F)} = 0 \text{ или } \sum_{k=1}^n P_k \delta S_k \cos \left(P_k; \hat{\delta S}_k \right) = 0. \quad (17.1)$$

Составим уравнение работ всех сил на возможных перемещениях:

$$P_2 \delta S_D + Q \delta S_Q - R_B \delta S_B + P_1 \sin \alpha \delta S_1 = 0. \quad (17.2)$$

Учитывая, что

$$\delta S_D = (c + 2b)\delta\varphi; \quad \delta S_Q = \left(\frac{c}{2} + 2b\right)\delta\varphi; \quad \delta S_B = 2b\delta\varphi; \quad \delta S_1 = b\delta\varphi,$$

формула (17.2) запишется:

$$P_2(c + 2b)\delta\varphi + Q; \quad \left(\frac{c}{2} + 2b\right)\delta\varphi - R_B \cdot 2b\delta\varphi - P_1 \sin \alpha b\delta\varphi = 0. \quad (17.3)$$

Откуда

$$R_B = \frac{P_2(c + 2b) + Q\left(\frac{c}{2} + 2b\right) + P_1 \sin \alpha b}{2b} = 15 \text{ кН};$$

$$R_B = 15 \text{ кН}.$$

С другой стороны, для определения реакции R_B можно воспользоваться составлением уравнения работ при повороте тела, как произведением момента силы относительно точки вращения на угол поворота тела:

$$\underbrace{P_2(c + 2b)\delta\varphi}_{m_k(P_2)} + \underbrace{Q\left(\frac{c}{2} + 2b\right)\delta\varphi}_{m_k(Q)} - \underbrace{R_B 2b\delta\varphi}_{m_k(R_B)} + \underbrace{P_1 \sin \alpha b\delta\varphi}_{m_k(P_1)} = 0, \quad (17.4)$$

где $m_k(P_2) = P_2(c + 2b)$ – момент силы P_2 относительно точки вращения K ; $m_k(Q) = Q\left(\frac{c}{2} + 2b\right)$ – момент силы Q относительно точки K и т. д.

Переходим к определению реакции в опоре A . Опора A представляет жесткое заземление. Реакции такой опоры представляются силой R_A , направление которой заранее неизвестно, и реактивным моментом M_A .

Реакцию R_A раскладываем на составляющие Y_A, X_A .

2. Найдем вертикальную составляющую Y_A (рис. 4.16в). Для этого жесткое заземление заменяем опорой в виде ползуна жестко связанного с участком AK . Такая опора исключает горизонтальное перемещение и поворот участка AK . Система в данном случае получает одну степень свободы. Дадим системе возможное перемещение. При этом правая часть конструкции (AK) совершит поступательное движение, а левая часть (KD) совершит поворот вокруг точки B на угол $\delta\varphi$.

Уравнение работ принимает вид

$$Y_A \delta S_A - P_1 \sin \alpha \delta S_1 + Q \delta S_Q + P_2 \delta S_D = 0, \quad (17.5)$$

где $\delta S_A = \delta S_k = 2b\delta\varphi$; $\delta S_D = c\delta\varphi$; $\delta S_1 = b\delta\varphi$; $\delta S_Q = \frac{c}{2}\delta\varphi$.

Учитывая вышеприведенные соотношения, формула (17.5) запишется

$$Y_A \cdot 2b \delta\varphi - P_1 \sin \alpha b \delta\varphi + Q \frac{c}{2} \delta\varphi + P_2 c \delta\varphi = 0. \quad (17.6)$$

Откуда

$$Y_A = \frac{P_1 \sin \alpha b - Q \frac{c}{2} - P_2 c}{2b} = -4,95 \text{ кН},$$

Знак «минус» указывает на то, что истинное направление Y_A противоположно показанному на рис. 4.16в.

3. Найдем горизонтальную составляющую реакции в жестком защемлении $-X_A$ (рис. 4.16г). Для этого жесткое защемление заменяем горизонтальным ползуном, жестко связанным с участком AK . Дадим системе возможное перемещение – горизонтальное поступательное движение всей конструкции.

Уравнение работ имеет вид

$$-X_A \delta S_A + P_1 \cos \alpha \delta S_1 = 0. \quad (17.7)$$

Но при поступательном движении

$$\delta S_A = \delta S_k = \delta S_1 = \delta S_B = \delta S.$$

В результате

$$X_A = P_1 \cos \alpha = 2,1 \text{ кН}. \quad (17.8)$$

4. Для определения реактивного момента опоры A заменяем жесткое защемление шарнирно неподвижной опорой, исключающей линейное перемещение, но допускающей угловое перемещение (вращение) участка AK вокруг опоры A .

Действие отброшенной связи заменяем реактивным моментом M_A (рис. 4.16д). Дадим системе возможное перемещение. При этом участок AK совершает вращение вокруг точки A , а участок KD совершает плоскопараллельное движение, которое представим в виде вращения вокруг мгновенного центра скоростей (точка O_1).

Уравнение работ имеет вид:

$$M \delta\varphi_1 - M_A \delta\varphi_1 + P_2 c \delta\varphi_2 + Q \frac{c}{2} \delta\varphi_2 + P_1 \cos \alpha O_1 B \delta\varphi_2 - P_1 \sin \alpha b \delta\varphi_2 = 0. \quad (17.9)$$

Учитывая, что

$$\delta S_k = AK \delta\varphi_1 = O_1 K \delta\varphi_2, \quad (17.10)$$

найдем

$$\delta\varphi_1 = \frac{O_1 K}{AK} \delta\varphi_2. \quad (17.11)$$

Подставим значение $\delta\varphi_1$ из (17.10) в формулу (17.8), получим:

$$M_A = \frac{P_1 \cos \alpha O_1 B + Q \frac{c}{2} + P_2 c + M \frac{O_1 K}{AK} - P_1 \sin \alpha b}{\frac{O_1 K}{AK}} = 21,46 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Ответ: $R_B = 15 \text{ кН}$; $Y_A = -4,95 \text{ кН}$;
 $X_A = 2,1 \text{ кН}$; $M_A = 21,46 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

Пример 18 (задача 6-3). Дано: $\omega = 15 \text{ рад/с}$; длина стержней: $l_1 = 0,2 \text{ м}$; $l_2 = 0,3 \text{ м}$; $l_3 = 0,15 \text{ м}$; $m_E = 2 \text{ кг}$; $\alpha = 30^\circ$; $\beta = 60^\circ$; $a = 0,3 \text{ м}$; $m_{AB} = m_0 = 20 \text{ кг}$. Масса одного метра стержня равна 10 кг . Определить реакции в подпятнике A и подшипнике B .

Решение. Изобразим вал с жестко закрепленными стержнями и точечной массой в соответствии с исходными данными (рис. 4.17). Определим массу и вес каждого из стержней в зависимости от их длины: $m_1 = 2 \text{ кг}$; $m_2 = 3 \text{ кг}$; $m_3 = 1,5 \text{ кг}$; $G_1 = m_1 g$; $G_2 = m_2 g$; $G_3 = m_3 g$; $G_E = m_E g$; $G_0 = m_0 g$.

Для определения реакций проведем оси координат Ax так, чтобы стержни лежали в плоскости xy и изобразим действующие внешние силы (рис. 4.18):

- силы тяжести G_1 ; G_2 ; G_3 ; G_E ; G_0 приложенные в центре масс тел;
- составляющие реакций связей Y_A ; X_A ; X_B .

К действующим внешним силам присоединим силы инерции стержней и точечной массы E . Поскольку вал вращается с постоянной угловой скоростью ($\omega = \text{const}$), то возникнут только осеостремительные составляющие ускорения (вращательные составляющие ускорения равны нулю, т. к. $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = 0$).

При этом силы инерции элементарных масс будут направлены противоположно осеостремительным ускорениям и пропорциональны расстояниям до оси вращения. Поэтому эпюры от сил инерции этих масс будут параллельными силами и образуют для стержней 1 и 2 треугольники, а для стержня 3 – прямоугольник.

Полученную систему параллельных сил инерции для каждого из стержней и точечной массы заменим равнодействующей, равной главному вектору этих сил, которая по модулю имеет значение $\Phi = m W_c$, где m – масса тела; W_c – ускорение центра масс тела.

Силы инерции соответствующих стержней и точечной массы имеют значения:

$$\Phi_1 = m_1 W_{c1}; \quad \Phi_2 = m_2 W_{c2}; \quad \Phi_3 = m_3 W_{c3}; \quad \Phi_E = m_E W_E,$$

где W_{c1} ; W_{c2} ; W_{c3} ; W_E – осеостремительные составляющие ускорения центра масс стержней и точечной массы, которые равны

$$W_{c1} = \omega^2 b_1; \quad W_{c2} = \omega^2 b_2; \quad W_{c3} = \omega^2 b_3; \quad W_E = \omega^2 b_E.$$

Расстояния от оси вращения до центра масс определяются:

$$b_1 = \frac{l_1}{2} \sin \beta; \quad b_2 = \frac{l_2}{2} \sin \alpha; \quad b_3 = l_2 \sin \alpha; \quad b_E = l_1 \sin \beta.$$

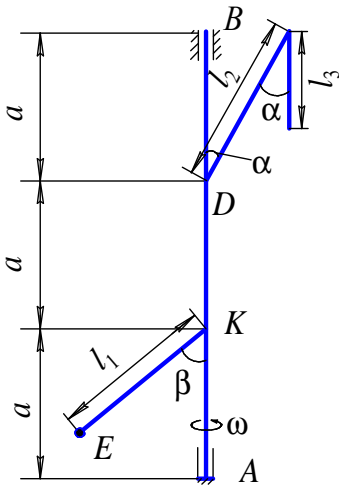


Рис. 4.17

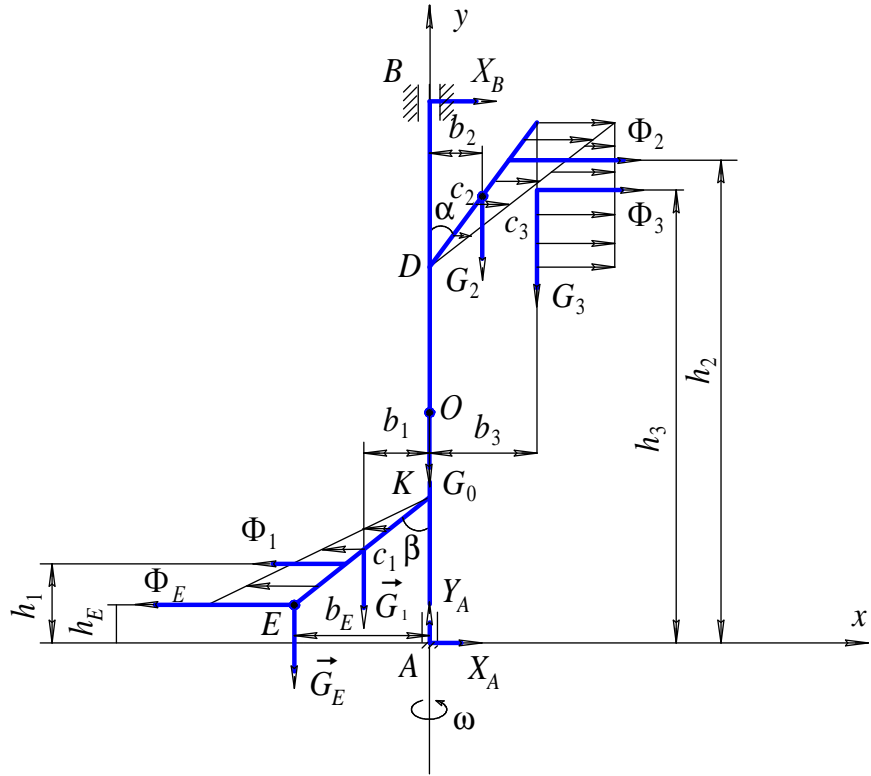


Рис. 4.18

С учетом полученных значений вычислим величины сил инерции:

$$\Phi_1 = m_1 W_{c_1} = m_1 \omega^2 b_1 = m_1 \omega^2 \frac{l_1}{2} \sin \beta = 39,2 \text{ Н},$$

$$\Phi_2 = m_2 W_{c_2} = m_2 \omega^2 b_2 = m_2 \omega^2 \frac{l_2}{2} \sin \alpha = 50,6 \text{ Н},$$

$$\Phi_3 = m_3 W_{c_3} = m_3 \omega^2 b_3 = m_3 \omega^2 l_2 \sin \alpha = 50,6 \text{ Н},$$

$$\Phi_E = m_E W_E = m_E \omega^2 b_E = m_E \omega^2 l_1 \sin \beta = 78,3 \text{ Н}.$$

Линии действия сил инерции Φ_1 и Φ_2 пройдут через центры тяжести соответствующих треугольников, силы инерции Φ_3 – через середину стержня l_3 , силы инерции Φ_E – через точку E .

Согласно принципу Даламбера, добавлением сил инерции к действующим внешним силам образуется уравновешенная система сил. Для полученной плоской системы сил составим три уравнения равновесия:

$$1. \sum F_{kx} = 0; \quad X_B + X_A + \Phi_2 + \Phi_3 - \Phi_1 - \Phi_E = 0;$$

$$2. \sum F_{ky} = 0; \quad Y_A - G_E - G_1 - G_0 - G_2 - G_3 = 0; \quad (18.1)$$

$$3. \sum m_A(F_k) = 0; \quad G_1 b_1 + G_E b_E - G_2 b_2 - G_3 b_3 + \Phi_1 h_1 + \Phi_E h_E - \Phi_2 h_2 - \Phi_3 h_3 - x_B AB = 0,$$

где $G_0 = m_0g$ – вес однородного вала AB ;

$$h_1 = AK - \frac{2}{3}l_1 \cos \beta = a - \frac{2}{3}l_1 \cos 60^\circ = 0,23 \text{ м};$$

$$h_E = AK - l_1 \cos \beta = a - l_1 \cos 60^\circ = 0,2 \text{ м};$$

$$h_2 = AD + \frac{2}{3}l_2 \cos \alpha = 2a + \frac{2}{3}l_2 \cos 30^\circ = 0,43 \text{ м};$$

$$h_3 = AD + l_2 \cos \alpha - \frac{l_3}{2} = 2a + l_2 \cos 30^\circ - \frac{l_3}{2} = 0,79 \text{ м};$$

$$AB = 3a = 0,9 \text{ м}.$$

С учетом вышеприведенных значений вычислим из уравнений (18 .1)

$$Y_A = 279 \text{ Н}; \quad X_A = 10,57 \text{ Н}; \quad X_B = -5,73 \text{ Н}.$$

Знак «минус» при X_B говорит о том, что действительное направление реакции X_B противоположно указанному на рис. 4.18.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Айзенберг, Т. Б.* Руководство к решению задач по теоретической механике [Текст] / Т. Б. Айзенберг, И. М. Воронков, В. М. Осецкий. – Изд. 6-е. – М. : Высш. шк., 1968. – 392 с.
2. *Бать, М. И.* Теоретическая механика в примерах и задачах [Текст] : учеб. пособие для студ. втузов. Т. 1. Статика и кинематика / М. И. Бать, Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон. – 9-е изд., перераб. – М. : Наука, 1990. – 672 с.
3. *Бать, М. И.* Теоретическая механика в примерах и задачах [Текст] : учеб. пособие для студ. вузов. Т. 2. Динамика / М. И. Бать. – 8-е изд., перераб. – М. : Наука, 1991. – 640 с.
4. *Бутенин, Н. В.* Курс теоретической механики [Текст] / Н. В. Бутенин. – СПб. : Лань, 2007. – 736 с.
5. *Мещерский, И. В.* Задачи по теоретической механике [Текст] : учеб. пособие для студ. вузов, обучающихся по техн. спец. / И. В. Мещерский. – 46-е изд., стер. – СПб. ; М. ; Краснодар : Лань, 2006. – 448 с.
6. Теоретическая механика [Текст] : метод. указания и рабочая программа курса для студ.-заоч. спец. 0519 / сост. С. А. Осмаков, С. И. Морозов, М. С. Сергеев. – Л. : ЛТА, 1987. – 28 с.
7. Теоретическая механика [Текст] : метод. указания и контр. работы с элементами УИРС для студ.-заоч. спец. 0519 / сост. С. А. Осмаков, С. И. Морозов, М. С. Сергеев. – Л. : ЛТА, 1987. – 36 с.
8. Теоретическая механика [Текст] : метод. указания по выполнению контр. работ с элементами УИРС для студ.-заоч. спец. 0519 / сост. С. А. Осмаков, С. И. Морозов, М. С. Сергеев. – Л. : ЛТА, 1987. – 40 с.
9. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике [Текст] : учеб. пособие для техн. вузов / под общ. ред. А. А. Яблонского. – 7-е изд., испр. – М. : Интеграл-Пресс, 2002. – 384 с.
10. *Тарг, С. М.* Краткий курс теоретической механики [Текст] : учебник для студ. втузов / С. М. Тарг. – 15 изд., стер. – М. : Высш. шк., 2005. – 416 с.
11. *Яблонский, А. А.* Курс теоретической механики. Статика. Кинематика. Динамика [Текст] : учеб. для студ. техн. вузов / А. А. Яблонский, В. М. Никифорова. – 11-е изд., стер. – СПб. : Лань, 2004. – 768 с.
12. Теоретическая механика: контрольная работа VI [Текст] : метод. указания и контр задания для студ.-заоч. спец. 1704 «Машины и оборудование лесного комплекса» / сост. С. И. Морозов. – Сыктывкар, 1990. – 22 с.

Учебное издание

Составитель МОРОЗОВ Станислав Иванович

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

**Методическое пособие
по выполнению контрольных работ
для студентов заочной формы обучения всех специальностей**

Сыктывкарский лесной институт – филиал государственного образовательного учреждения
высшего профессионального образования «Санкт-Петербургская государственная лесотехническая академия
имени С. М. Кирова» (СЛИ)
167982, г. Сыктывкар, ул. Ленина, 39
institut@sfi.komi.com, www.sli.komi.com

Подписано в печать 16.06.08. Формат 60 × 90 1/16. Усл. печ. л. 5,7. Тираж 300. Заказ № .

Редакционно-издательский отдел СЛИ.
Отпечатано в типографии СЛИ