

Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования  
«Полоцкий государственный университет»

**В. Э. ЗАВИСТОВСКИЙ**

# **ТЕХНИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА**

**УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС**

для студентов специальности 1-69 01 01 «Архитектура»

Новополоцк  
«ПГУ»  
2008

УДК 531/539.2/.6(075.8)  
ББК 22.2я73  
3 13

Рекомендован к изданию методической комиссией  
инженерно-строительного факультета в качестве  
учебно-методического комплекса (протокол № 8 от 31.08.2007)

**РЕЦЕНЗЕНТЫ:**

Проектный (архитектурный) отдел Новополоцкого ООО,  
фирма «БЕЛСЕРВИС» (начальник отдела – О.В. Дмитришина);  
Л. С. Турищев, канд. техн. наук, доц., зав. каф. механики

**Завистовский, В. Э.**  
3 13      Техническая механика: учеб.-метод. комплекс / В. Э. Завистовский. –  
Новополоцк: ПГУ, 2008. – 248 с.  
ISBN 978-985-418-653-5.

В комплекс включены: конспект лекций, тематика практических занятий и задачи для самостоятельного решения, содержание заданий и примеры выполнения расчетно-графической работы, примерный перечень вопросов для итогового контроля знаний и рекомендуемая литература.

Реализован комплексный подход к изучению таких взаимосвязанных дисциплин, как «Теоретическая механика» и «Соппротивление материалов».

Предназначен для студентов архитектурных специальностей.

**УДК 531/539.2/.6(075.8)**  
**ББК 22.2я73**

**ISBN 978-985-418-653-5**

© Завистовский В.Э., 2008  
© УО «Полоцкий государственный университет», 2008

## СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие .....	7
ЛЕКЦИОННЫЙ КУРС .....	9
Тема 1. Основные понятия и аксиомы статики. Виды связей и их реакции .....	10
1.1. Основные понятия и краткие исторические сведения о механике .....	10
1.2. Аксиомы статики .....	13
1.3. Разложение силы на две составляющие .....	14
1.4. Связи и реакции связей .....	16
Тема 2. Плоская система сходящихся сил .....	18
2.1. Сложение двух сил .....	18
2.2. Геометрические условия равновесия .....	19
2.3. Проекция силы на ось .....	21
2.4. Аналитические уравнения равновесия .....	22
Тема 3. Пара сил .....	24
3.1. Момент силы относительно точки на плоскости .....	24
3.2. Момент пары сил на плоскости .....	25
3.3. Эквивалентность пар .....	26
3.4. Сложение пар сил, лежащих в одной плоскости .....	27
3.5. Условие равновесия плоской системы пар сил .....	28
Тема 4. Плоская система произвольно расположенных сил .....	29
4.1. Приведение силы к данной точке .....	29
4.2. Равнодействующая плоской системы сил .....	30
4.3. Частные случаи приведения плоской системы сил .....	31
4.4. Теорема Вариньона .....	32
4.5. Условия и формы уравнений равновесия .....	33
Тема 5. Элементы графостатики .....	34
5.1. Сложение сил, лежащих в одной плоскости. Силовой и веревочный многоугольники .....	34
5.2. Графическое определение опорных реакций .....	36
Тема 6. Пространственная система сил .....	38
6.1. Момент пары сил как вектор .....	38
6.2. Момент силы относительно оси .....	39
6.3. Приведение произвольной пространственной системы сил к заданному центру .....	40
6.4. Аналитические уравнения равновесия произвольной пространственной системы сил .....	42
6.5. Уравнения равновесия пространственной системы параллельных сил .....	43
6.6. Теорема о моменте равнодействующей относительно оси (теорема Вариньона) .....	44
Тема 7. Центр тяжести .....	45
7.1. Центр тяжести материального тела .....	45
7.2. Центр тяжести линии, площади, объема .....	47
7.3. Методы определения положения центра тяжести тела .....	48
7.4. Положение центров тяжести простейших тел .....	48

7.5. Статический момент площади плоской фигуры относительно оси .....	50
Тема 8. Основные положения кинематики точки и твердого тела .....	52
8.1. Скорость точки .....	52
8.2. Способы задания движения точки .....	53
8.3. Определение скорости точки при различных способах задания ее движения .....	55
8.4. Ускорение точки .....	57
8.5. Частные случаи движения точки .....	60
8.6. Простейшие движения твердого тела .....	61
Тема 9. Динамика точки .....	64
9.1. Основные положения динамики .....	64
9.2. Законы динамики .....	65
9.3. Две основные задачи динамики материальной точки .....	66
9.4. Принцип Д' Аламбера .....	67
9.5. Общие теоремы динамики .....	68
Тема 10. Основные понятия и гипотезы в сопротивлении материалов .....	69
10.1. Внешние силы .....	70
10.2. Линейные и угловые деформации .....	71
10.3. Основные свойства материалов .....	72
10.4. Допущения и ограничения, принятые в сопротивлении материалов .....	73
10.5. Внутренние силовые факторы. Метод сечений .....	74
10.6. Напряжения .....	77
Тема 11. Растяжение и сжатие прямого бруса .....	80
11.1. Центральное растяжение прямого бруса .....	80
11.2. Эпюры продольных сил и нормальных напряжений .....	82
11.3. Продольные и поперечные деформации .....	88
11.4. Закон Гука .....	90
11.5. Напряжения в наклонных сечениях бруса .....	91
11.6. Перемещения поперечных сечений бруса .....	93
Тема 12. Механические характеристики строительных материалов и их определение	94
12.1. Строительные материалы .....	94
12.1.1. Стали .....	94
12.1.2. Алюминиевые сплавы .....	97
12.1.3. Бетон, каменные и армированные материалы .....	99
12.1.4. Древесина .....	101
12.1.5. Пластмассы .....	103
12.2. Диаграммы растяжения .....	104
12.3. Диаграммы сжатия .....	107
12.4. Понятие о ползучести и релаксации .....	110
Тема 13. Элементы теории напряженного состояния .....	111
13.1. Понятие напряженного состояния в точке .....	111
13.2. Виды напряженного состояния .....	112
13.3. Чистый сдвиг .....	114
13.4. Практические расчеты на срез и смятие .....	115
13.4.1. Расчет заклепочных соединений .....	117
13.4.2. Расчет сварных соединений .....	119

Тема 14. Вычисление моментов инерции сложных сечений .....	121
14.1. Моменты инерции, моменты сопротивления и радиусы инерции плоских сечений .....	122
14.2. Изменение моментов инерции плоских сечений при параллельном переносе и повороте осей .....	124
14.3. Главные моменты инерции. Определение направления главных осей инерции .....	126
14.4. Геометрические характеристики некоторых плоских сечений .....	128
14.5. Способы вычисления центробежного момента инерции .....	136
Тема 15. Кручение прямого бруса круглого сечения .....	138
15.1. Крутящие моменты и их эпюра .....	138
15.2. Напряжения и деформации при кручении бруса круглого поперечного сечения .....	141
15.3. Расчет на прочность и жесткость при кручении .....	145
Тема 16. Изгиб прямого бруса .....	147
16.1. Основные понятия .....	147
16.2. Построение эпюр изгибающих моментов и поперечных сил .....	150
16.2.1. Построение эпюр поперечных сил и изгибающих моментов для однопролетной балки, нагруженной сосредоточенной силой .....	151
16.2.2. Вид эпюр поперечных сил и изгибающих моментов при различных способах нагружения и закрепления балки .....	154
16.3. Дифференциальные зависимости между изгибающим моментом, поперечной силой и интенсивностью распределенной нагрузки .....	157
16.4. Нормальные и касательные напряжения при изгибе .....	158
16.5. Главные нормальные напряжения при изгибе балки и максимальные касательные напряжения .....	160
16.6. Расчет балок на прочность .....	162
16.7. Перемещения линейные и угловые. Дифференциальное уравнение изогнутой оси балки .....	163
16.8. Расчет балок на жесткость .....	166
Тема 17. Статически неопределимые стержневые системы и балки .....	166
17.1. Основные понятия .....	167
17.2. Необходимые и лишние связи .....	168
17.3. Основная и эквивалентная системы. Канонические уравнения метода сил .....	169
Тема 18. Сложное сопротивление .....	172
18.1. Понятие о теориях прочности .....	172
18.2. Косой изгиб .....	174
18.3. Одновременное действие изгиба и продольной силы .....	178
18.3.1. Внецентренное сжатие (растяжение) .....	179
18.4. Одновременное действие кручения с изгибом .....	181
18.5. Кручение с растяжением или сжатием .....	182
Тема 19. Устойчивость центально-сжатых стержней .....	183
19.1. Понятие об устойчивости .....	183
19.2. Формула Эйлера .....	185
19.3. Критические напряжения. Пределы применимости формулы Эйлера ....	187

19.4. Расчет на устойчивость .....	189
Тема 20. Основы расчета на действие динамических нагрузок .....	192
20.1. Расчет троса при подъеме груза .....	192
20.2. Приближенный способ расчета на удар .....	194
ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ .....	197
Практическое занятие 1. Плоская система сходящихся сил .....	198
Практическое занятие 2. Плоская система произвольно расположенных сил .....	200
Практическое занятие 3. Центр тяжести .....	203
Практическое занятие 4. Кинематика точки и твердого тела .....	206
Практическое занятие 5. Центральное растяжение и сжатие .....	208
Практическое занятие 6. Геометрические характеристики плоских сечений .....	211
Практическое занятие 7. Плоский изгиб .....	214
Практическое занятие 8. Устойчивость сжатых стержней .....	218
РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА .....	221
Задание 1. Определение реакций опор и усилий в стержнях плоской фермы .....	222
Задание 2. Определение геометрических характеристик плоских сечений .....	229
Задание 3. Расчет колонны на внецентренное сжатие .....	235
Примерный перечень вопросов к итоговому контролю знаний .....	241
Список условных обозначений, используемых в учебной литературе .....	244
ЛИТЕРАТУРА .....	246

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Механика является общеинженерной дисциплиной и научной основой целых отраслей промышленности и современной техники.

«Техническая механика» для студентов архитектурных специальностей – это учебная дисциплина, включающая в себя основы теоретической механики и сопротивления материалов.

Цель изучения дисциплины – получение будущими архитекторами знаний и навыков по выполнению расчетов на базе основных положений о взаимодействии твердых тел и твердых деформируемых тел, прочности материалов и методов расчета конструктивных элементов зданий и сооружений на внешнее воздействие.

При изучении дисциплины «Техническая механика» перед студентами ставятся следующие основные задачи:

- научиться производить расчеты элементов строительных конструкций на прочность, жесткость и устойчивость, выбирать более рациональные формы строительных элементов и конструкций, отвечающих как прочностным, так и экономическим и эстетическим требованиям;
- подготовиться для изучения строительной механики, металлических, деревянных, железобетонных, каменных и пластмассовых конструкций.

Учебно-методический комплекс включает в себя лекционный курс, тематику и содержание практических занятий, задания для выполнения расчетно-графической работы с примерами выполнения, примерного перечня вопросов для итогового контроля знаний и списка рекомендуемой учебно-методической литературы.

Конспект лекций представляет собой лекционный курс в объеме 32 аудиторных часов и включает в себя 20 тем по основным разделам теоретической механики и сопротивления материалов.

Раздел «Практические занятия» содержит тематику и методические рекомендации по решению задач и рассчитаны на 16 часов аудиторных занятий. По каждой теме практических занятий разработаны задачи для самостоятельного решения.

В разделе «Расчетно-графическая работа» представлены многовариантные задания, примеры выполнения и требования к оформлению и защите.

Учебно-методический комплекс решает одну из главнейших задач высшего образования – *научить студента учиться*, т.е. на базе минимального количества материала студенту надо преподнести такие знания и привить такие навыки, которые позволят ему в дальнейшем всю необходимую информацию *находить* и *усваивать самостоятельно*. Поэтому важно при изучении технической механики, пользоваться и другими учебниками и учебными пособиями, в которых творчески отражаются новейшие достижения в области науки, строительства и архитектуры. Чтобы успешно освоить и другую учебную литературу, в учебно-методический комплекс включен список возможных других условных используемых величин.

Автор выражает глубокую признательность за ценные замечания и советы по улучшению содержания учебно-методического комплекса рецензентам – кандидату технических наук, доценту, заведующему кафедрой механики Л.С. Турищеву (УО «ПГУ») и начальнику проектного отдела Новополоцкого ООО фирмы «БЕЛСЕРВИС» О.Д. Дмитришиной, а также сотрудникам кафедры механики Л.Г. Кроман и С.В. Жаворонок за техническую помощь при оформлении рукописи.

# ЛЕКЦИОННЫЙ КУРС

## Тема 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И АКСИОМЫ СТАТИКИ. ВИДЫ СВЯЗЕЙ И ИХ РЕАКЦИИ

### 1.1. Основные понятия и краткие исторические сведения о теоретической механике

*Механика* – наука о механическом движении и взаимодействии материальных тел.

*Механическое движение* – изменение с течением времени взаимного положения в пространстве материальных тел или взаимного положения частей данного тела. *Покой* есть частный случай механического движения, причем понятия *покоя* и *механического движения* являются относительными.

Термин «*механика*» ввел Аристотель. Первые научные основы учения о равновесии сил разработал Архимед. Неоценим вклад в механику Ньютона, Лагранжа, Кориолиса. На всех этапах развития механика была тесно связана с развитием производительных сил и способствовала техническому прогрессу.

Значительный вклад в развитие механики внесли русские ученые: Н.Е. Жуковский (1847 – 1921), И.В. Мещерский (1859 – 1935), К.Э. Циолковский (1857 – 1935), С.П. Королев (1906 – 1966), И.И. Артоболевский (1905 – 1977), А.Ю. Ишлинский (1913 – 2003) и многие другие.

Весом вклад и белорусской школы механиков, чья деятельность направлена на развитие фундаментальных исследований и их внедрение в практику: М.С. Высоцкий, Л.Г. Красневский, О.В. Берестнев, Ю.М. Плещачевский, С.Е. Карпович, А.В. Чигарев, Ю.В. Василевич и другие.

Можно констатировать, что ни одно явление природы не может быть в полной мере понятно без выяснения его механической стороны. Отсюда вытекает роль и место механики в современном развитии науки и техники.

*Техническая механика* – комплексная учебная дисциплина, которая включает в себя, в зависимости от требований к квалификации по разным специальностям, теоретическую механику, сопротивление материалов, теорию механизмов и машин, детали машин. Для творческих специальностей строительного профиля она объединяет теоретическую механику и сопротивление материалов.

*Теоретическая механика* – наука об общих законах механического движения и механического взаимодействия материальных тел. Она состоит из трех разделов: статики, кинематики и динамики.

*Статика* – часть теоретической механики, изучающая условия, при которых тело находится в равновесии. *Равновесием* будем считать такое

состояние, когда тело находится в покое или движется прямолинейно и равномерно. При изучении общих законов приходится отвлекаться от многих конкретных особенностей реальных тел и учитывать только их важнейшие и общие свойства. Поэтому приходится переходить от реальных физических тел к абстрактным моделям в виде материальной точки, абсолютно твердого тела, твердого деформируемого тела, идеальной жидкости, сплошной среды и т.п.

*Материальной точкой* называется воображаемое тело, не имеющее размеров, но содержащее в себе некоторое количество вещества. Чаще всего под материальной точкой понимают частицу материального тела. Кроме того, за материальную точку принимают любое тело, у которого все точки движутся одинаково (педаль велосипеда, поршень и др.).

*Абсолютно твердым* называется тело, у которого расстояния между любыми точками остаются неизменными.

Всякое физическое тело можно представить как совокупность материальных точек и абсолютно твердых тел, в которых положения и движения точек взаимосвязаны и взаимозависимы. Это – *механическая система*. Рассматривать движение или равновесие любого материального тела можно только по отношению к какому-нибудь другому физическому телу. Такое тело называется *системой отсчета*. С ним связывают какую-нибудь систему координат (чаще – прямоугольную *Oxy* или *Oxyz*). В качестве систем отсчета будем принимать тела, неизменно связанные с Землей.

Тело называется *свободным*, если никакие другие тела не препятствуют его перемещению в любом направлении, в противном случае – тело называется *несвободным* или *связанным*.

Механические взаимодействия тел, влияющие на их механические состояния, характеризуются силами. **Сила** есть мера механического взаимодействия тел. Она характеризуется тремя элементами: *числовым значением (модуль)*, *направлением*, *точкой приложения*. Сила – величина векторная. Направление силы есть направление того движения, которое получила бы покоящаяся свободная материальная точка под действием этой силы. Прямая линия, по которой направлен вектор силы, называется линией действия силы.

На рисунках будем изображать силы в виде направленных отрезков и обозначать их латинскими буквами со стрелкой над ними (рис. 1.1). Таковыми же буквами, но без стрелок, будем обозначать их числовое значение:  $\vec{F}$  – сила;  $F$  – модуль (числовое значение) силы;  $(\cdot) B$  – точка приложения силы;  $bb$  – линия действия силы.

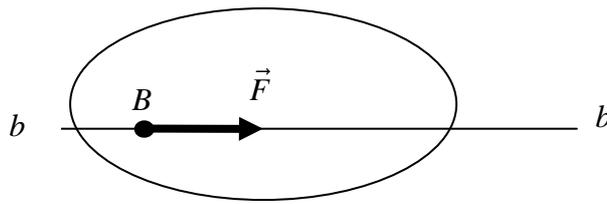


Рис. 1.1. К обозначению силы

В качестве единицы силы принят *ньютон* (Н). Ньютон – есть сила, сообщающая телу массой 1 кг ускорение  $1 \frac{\text{М}}{\text{с}^2}$  в направлении действия си-

лы. Кратные и дольные единицы силы:

тера (Т) – $10^{12}$	пико (п) – $10^{-12}$
гига (Г) – $10^9$	нано (н) – $10^{-9}$
мега (М) – $10^6$	микро (мк) – $10^{-6}$
кило (к) – $10^3$	милли (м) – $10^{-3}$
гекто (г) – $10^2$	санти (с) – $10^{-2}$
дека (да) – 10	деци (д) – $10^{-1}$

Совокупность всех сил, одновременно действующих на материальное тело, называется *системой сил* (рис. 1.2). Силы, входящие в систему, называются ее *составляющими*. Перечень составляющих сил заключают в скобки, тем самым определяя систему сил –  $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{P}, \vec{Q})$ .

Системы сил, которые производят одинаковое действие на тело, называются *эквивалентными*

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{P}, \vec{Q}) \sim (\vec{G}, \vec{Q}_1).$$

Одна сила, эквивалентная всей системе сил, называется *равнодействующей* силой данной системы.

Система сил, эквивалентная нулю, называется *уравновешивающейся*. Под действием такой системы сил абсолютно твердое тело находится в равновесии.

Совокупность тел, каким-то образом связанных между собой, называется *системой тел*. Силы взаимодействия между телами, входящими в данную систему, называются *внутренними*, а силы, с которыми действуют на данную систему другие тела – *внешними*.

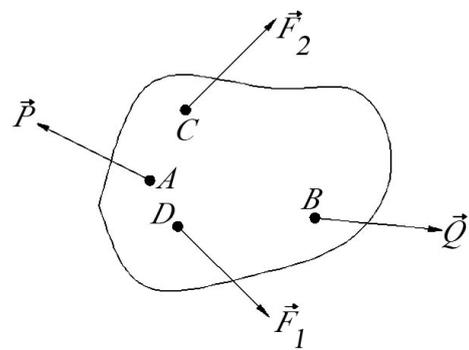


Рис. 1.2. К определению системы сил

## 1.2. Аксиомы статики

Аксиомы статики – простые исходные положения, подтверждаемые опытом и не нуждающиеся в доказательстве. Они устанавливают основные свойства сил, приложенных к материальной точке и к абсолютно твердому телу.

**Аксиома 1** (о двух уравновешивающихся силах): для равновесия двух сил, приложенных к абсолютно твердому телу, необходимо и достаточно, чтобы эти силы были равны по модулю и направлены по одной прямой в противоположные стороны (рис. 1.3).

Если  $(\vec{F}_1, \vec{F}_2) \sim 0$ , то  $F_1 = F_2$ , но  $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$ .

**Аксиома 2** (о присоединении и отбрасывании уравновешивающихся сил): не изменяя действия данной системы сил на абсолютно твердое тело, можно прибавить к этой системе (или отнять от нее) уравновешивающиеся силы (рис. 1.4).

$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{P}) \sim \vec{P}$ , если  $(\vec{F}_1, \vec{F}_2) \sim 0$ .

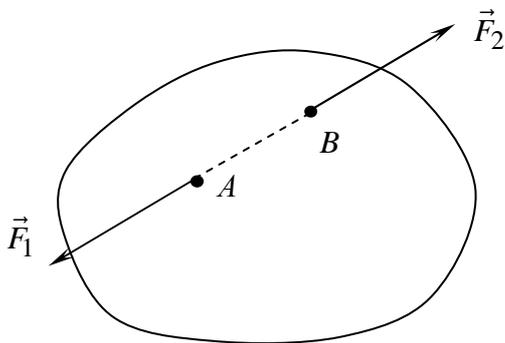


Рис. 1.3. К аксиоме 1

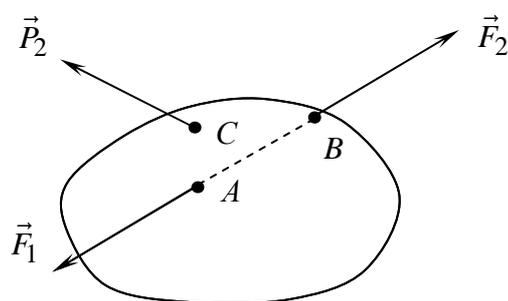


Рис. 1.4. К аксиоме 2

**Следствие:** не изменяя действия данной силы на абсолютно твердое тело, ее можно переносить по линии ее действия в любую другую точку тела, т.е. сила – скользящий вектор.

**Аксиома 3** (аксиома параллелограмма сил): равнодействующая двух сил, приложенных в одной точке тела, по величине и направлению совпадает с диагональю параллелограмма, построенного на этих силах (рис. 1.5).

$\vec{R} \sim (\vec{F}_1, \vec{F}_2)$ .

**Аксиома 4** (принцип равенства действия и противодействия): силы, с которыми два тела действуют друг на друга, всегда равны по величине и направлены по одной прямой в противоположные стороны (рис. 1.6).

$$F_{12} = F_{21}, \text{ но } \vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}.$$

Эти две силы неуравновешивающиеся, т.к. приложены к двум разным телам.

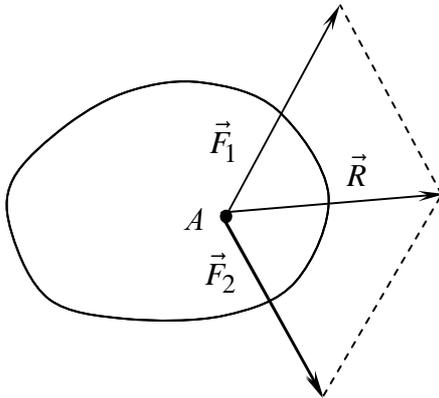


Рис. 1.5. К аксиоме 3

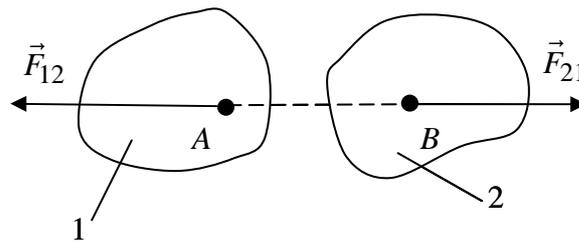


Рис. 1.6. К аксиоме 4

**Аксиома 5** (принцип отвердевания): если деформируемое (не абсолютно твердое) тело, которое находилось под действием данных сил в состоянии равновесия, станет абсолютно твердым, то его равновесие не нарушится.

### 1.3. Разложение силы на две составляющие

Разложить силу на две составляющие означает, что надо силу заменить на систему сил, эквивалентную данной силе. Чтобы задача имела определенное решение, необходимо задать два условия, определяющие либо направления, либо модули сил. Возможны четыре варианта разложения силы  $\vec{R}$  на две составляющие  $\vec{P}$  и  $\vec{Q}$  приложенные в той же точке. Во всех случаях решение сводится к построению параллелограмма сил и использованию теоремы о равновесии плоской системы трех непараллельных сил (для равновесия плоской системы трех непараллельных сил необходимо, но недостаточно, чтобы линии действия этих сил пересекались в одной точке):

- даны направления двух составляющих  $\vec{P}$  и  $\vec{Q}$  (рис. 1.7),

$$\vec{R} = \vec{P} + \vec{Q};$$

- даны модуль и направление одной составляющей  $Q$  (рис. 1.8),

$$\vec{R} = \vec{P} + \vec{Q};$$

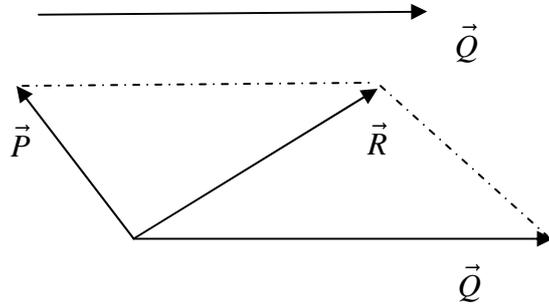
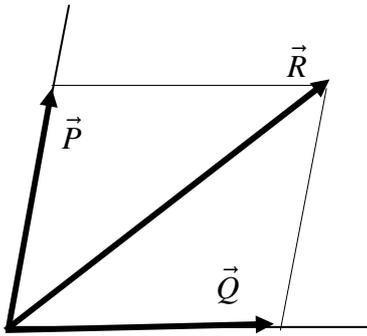


Рис. 1.7. Разложение силы на две составляющие, направления которых известны

Рис. 1.8. Разложение силы на две составляющие, если известен модуль и направление одной из составляющих

- даны модули двух составляющих  $P$  и  $Q$  (рис. 1.9):

$$\vec{R} = \vec{P} + \vec{Q} = \vec{P}' + \vec{Q}'.$$

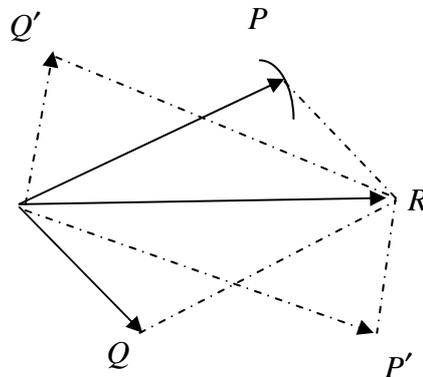
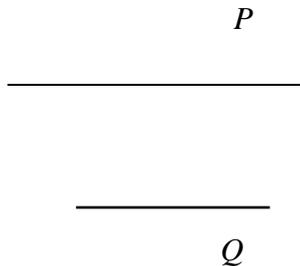


Рис. 1.9. Разложение силы на две составляющие, если известны их модули

Задача имеет два решения, если  $P + Q > R$  и  $P - Q < R$ .

Задача не имеет решения, если  $P + Q < R$  и  $P - Q > R$ .

Задача имеет одно решение, если  $P + Q = R$  и  $P - Q = R$ ;

- даны направление составляющей  $\vec{Q}$  и модуль составляющей  $P$  (рис. 1.10)

$$\vec{R} = \vec{P} + \vec{Q} = \vec{P}' + \vec{Q}'.$$

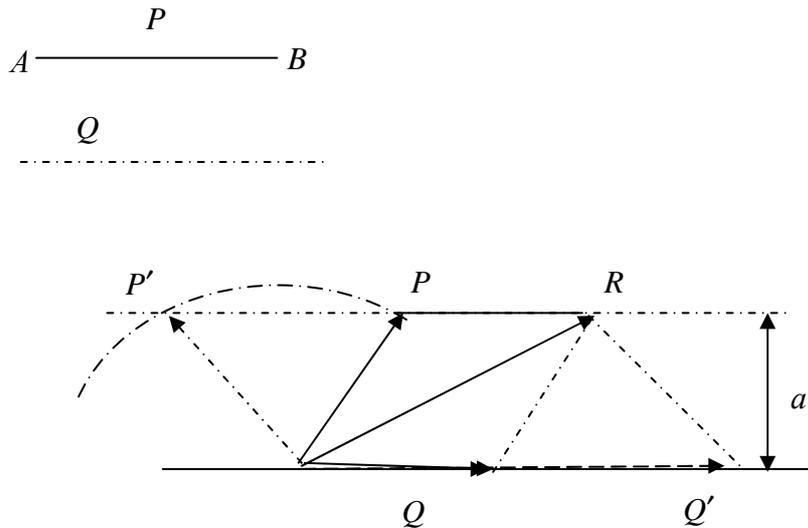


Рис. 1.10. Разложение силы на две составляющие, если известен модуль одной и направление другой составляющей

Задача имеет одно решение, если  $a = AB (PQ = 90^\circ)$ .

Задача имеет два решения, если  $a < AB$ .

Задача не имеет решения, если  $a > AB$ .

#### 1.4. Связи и реакции связей

Любые ограничения, накладываемые на движение тел, называются *связями*. Сила, с которой связь действует на рассматриваемое тело, препятствуя его перемещению в том или ином направлении, называется *силой реакции связи*. Направление силы реакции связи противоположно тому, в котором связь препятствует перемещению тела. Рассмотрим некоторые, наиболее часто встречаемые связи:

- идеальная гладкая плоскость (рис. 1.11, а).

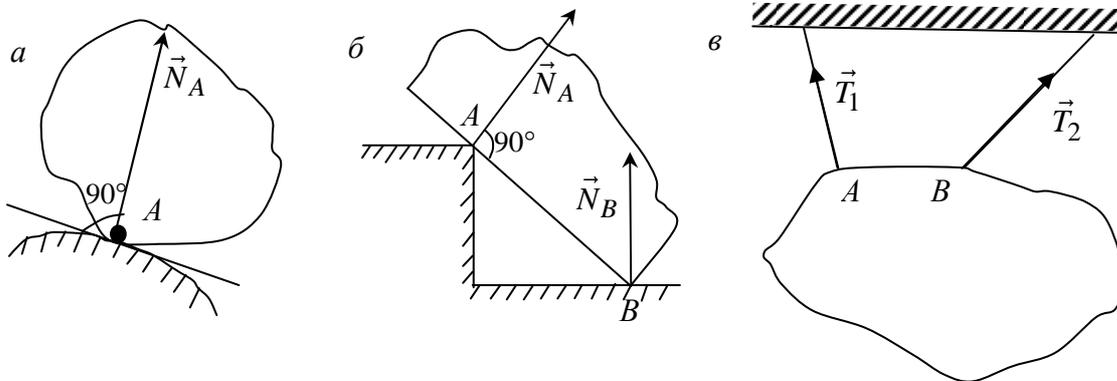


Рис. 1.11. К определению реакций связей: а – идеальная гладкая плоскость или идеальная гладкая поверхность; б – ребро угла; в – гибкая нить

Реакция связи  $\vec{N}_A$  направлена перпендикулярно опорной поверхности в сторону тела

- *идеальная гладкая поверхность* (рис. 1.11, а). Реакция связи  $\vec{N}_A$  направлена перпендикулярно касательной плоскости, т.е. по нормали к опорной поверхности в сторону тела.

- *ребро угла* (рис. 1.11, б). Реакция связи  $\vec{N}_A$  или  $\vec{N}_B$  направлена по нормали к поверхности идеально гладкого тела в сторону тела.

- *гибкая связь или нить* (рис. 1.11, в). Реакции связей  $\vec{T}_1$  и  $\vec{T}_2$  направлены вдоль связи от тела к точке подвеса.

- *неподвижная шарнирная опора* (рис. 1.12, а)

$$\vec{R}_A \sim (\vec{X}_A, \vec{Y}_A).$$

Шарниром называется такое подвижное соединение тел, которое дает им возможность свободно поворачиваться относительно друг друга, т.е. допускает только вращение вокруг общей оси.

- *сферический шарнир* (рис. 1.12, б)

$$\vec{R}_B \sim (\vec{X}_B, \vec{Y}_B, \vec{Z}_B)$$

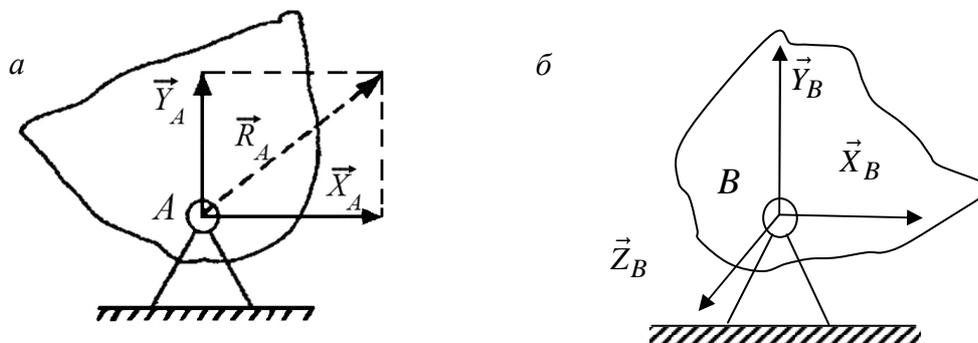


Рис. 1.12. К определению реакций связи:

а – неподвижной шарнирной опоры; б – сферического шарнира

- *подвижная шарнирная опора* (рис. 1.13, а)

Реакция связи направлена по нормали к идеально гладкой поверхности.

- *стержневая связь или стержень* (рис. 1.13, б). Реакция стержневой связи направлена по прямой, соединяющей концевые шарниры.

- *жесткая заделка или защемление* (рис. 1.14)

Тело не может свободно перемещаться в направлении указанных сил и не может поворачиваться вокруг точки А. Реакции связей –  $\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{M}_A$ .

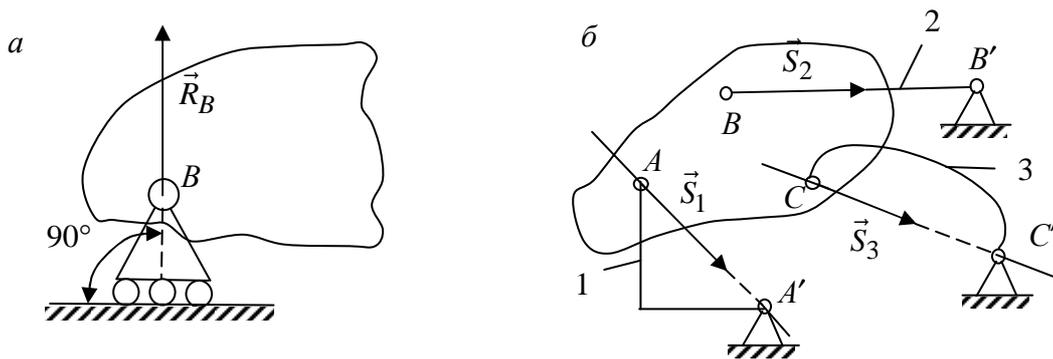


Рис. 1.13. К определению реакции связей:  
 а – подвижной шарнирной опоры; б – стержня

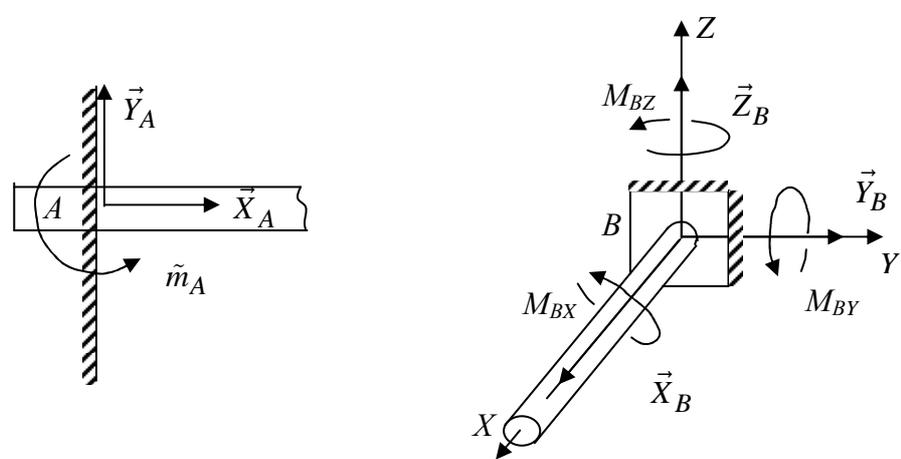


Рис. 1.14. К определению реакций связи жесткой заделки

## Тема 2. ПЛОСКАЯ СИСТЕМА СХОДЯЩИХСЯ СИЛ

**Сходящимися** называются силы, линии действия которых пересекаются в одной точке. Простейшую систему образуют две силы, сходящиеся в точке.

### 2.1. Сложение двух сил

Возьмем две силы, сходящиеся в точке (рис. 2.1, а). Из аксиомы 3 известно, что они могут быть эквивалентно заменены одной силой, величина и направление которой совпадают с диагональю параллелограмма, построенного на векторах этих сил. По этому правилу складываются векторы. Поэтому можно записать:  $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ . Этот способ сложения двух сил называется правилом параллелограмма сил.

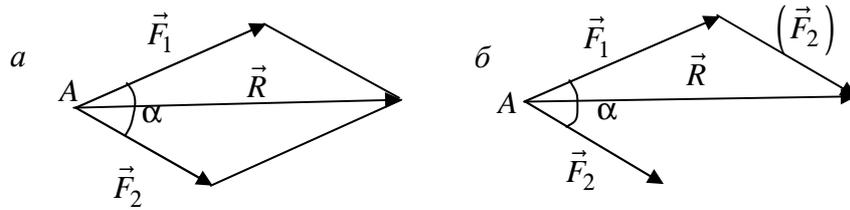


Рис. 2.1. К вопросу сложения двух сил:  
 а – правило параллелограмма сил; б – правило силового треугольника

## 2.2. Геометрические условия равновесия

Для нахождения равнодействующей не обязательно строить весь параллелограмм, достаточно к концу одной силы перенести вектор второй силы, а затем из начала первой провести вектор к концу второй силы (рис. 2.1, б). Полученный треугольник называется *силовым*, а правило нахождения равнодействующей силы – *правилом силового треугольника*.

При графическом решении задачи о сложении сходящихся сил необходимо выбрать масштаб и строго его соблюдать при изображении сил.

Равнодействующую двух сходящихся сил можно найти и аналитически. Требуется найти равнодействующую сил  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$ , приложенных в точке А и направленных под углом  $\alpha$  друг к другу (рис. 2.2).

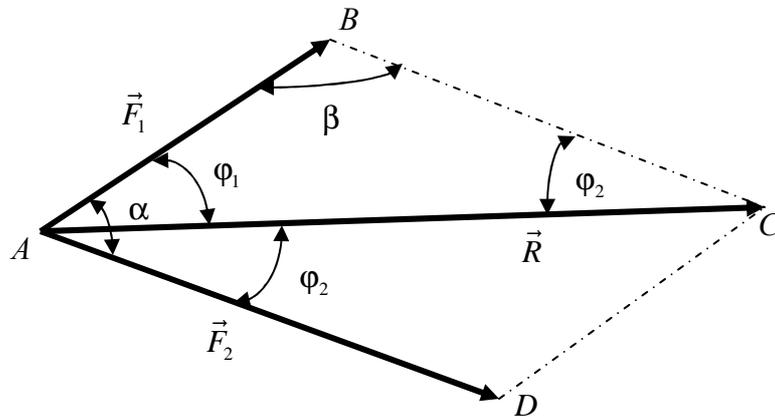


Рис. 2.2. К вопросу аналитического нахождения равнодействующей двух сил

На заданных силах строим параллелограмм  $ABCD$ . Диагональ  $AC$  – равнодействующая  $\vec{R}$ . Величину равнодействующей находим из  $\Delta ABC$  по теореме косинусов:

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2 \cos\beta},$$

где  $\beta = 180^\circ - \alpha$ .

Поэтому  $\cos \beta = -\cos \alpha$  и  $R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos \alpha}$ .

Равнодействующая сила  $\vec{R}$  составляет с направлениями заданных сил неизвестные углы  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ . Их можно определить из  $\Delta ABC$  по теореме синусов:

$$\frac{F_1}{\sin \varphi_2} = \frac{F_2}{\sin \varphi_1} = \frac{R}{\sin \beta}.$$

Так как  $\sin \beta = \sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$ , то  $\frac{F_1}{\sin \varphi_2} = \frac{F_2}{\sin \varphi_1} = \frac{R}{\sin \alpha}$ .

$$\text{Отсюда } \sin \varphi_1 = \frac{F_2}{R} \sin \alpha; \quad \sin \varphi_2 = \frac{F_1}{R} \sin \alpha.$$

Зная функции угла, можно найти и сами углы  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ .

Если необходимо найти равнодействующую, когда на тело действует большое число сходящихся сил, то, используя правило силового треугольника, последовательно складывают первую силу со второй, затем с третьей силой и т.д. (рис. 2.3). Получается силовой многоугольник, в котором вектор, проведенный из начала первой силы к концу последнего перенесенного вектора, и будет изображать равнодействующую всей системы сил (*правило силового многоугольника*).

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \sum \vec{F}_k.$$

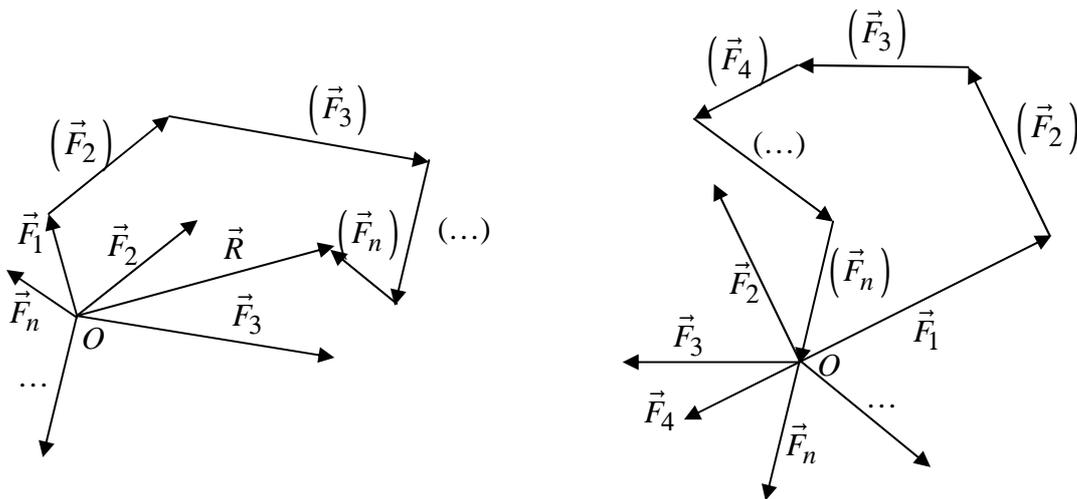


Рис. 2.3. К иллюстрации правила силового многоугольника

Если конец последней перенесенной силы попадает в начало первой, т.е. многоугольник замыкается, то данная система сил эквивалентна нулю, т.е. находится в равновесии.

Для равенства системы сходящихся сил **необходимо и достаточно**, чтобы силовой многоугольник, построенный на этих силах, был замкнут. В этом заключается *геометрическое условие равновесия системы сходящихся сил*.

Задача разложения силы на две составляющие – есть обратная задача, которая решается, используя правило параллелограмма.

Вопросы сложения, разложения и равновесия сходящихся сил решаются и аналитически – путем проецирования сил на координатные оси.

### 2.3. Проекция силы на ось

Пусть задана сила  $\vec{F}$ , изображенная вектором  $A\vec{B}$  и оси проекций  $x$  и  $y$  (рис. 2.4).

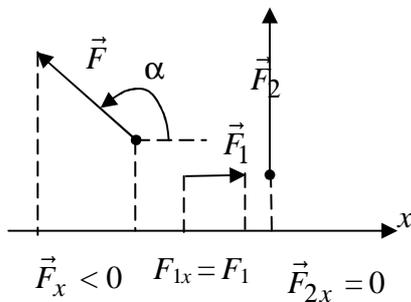


Рис. 2.4. К понятию проекции силы на ось

Проекцией силы на ось называется отрезок оси, заключенный между двумя перпендикулярами, опущенными на ось из начала и конца вектора силы. Соответственно, проекции силы  $\vec{F}$  на оси  $x$  и  $y$  будут равны:

$$F_x = F \cos \alpha; \quad F_y = F \sin \alpha.$$

Если направление проекции силы на ось совпадает с положительным направлением оси, то эта проекция положительна, и наоборот. За направление проекции примем направление от проекции начала к проекции конца вектора силы. Если вектор силы перпендикулярен оси, то его проекция на эту ось равна нулю. Если вектор силы параллелен оси, то он проецируется на эту ось в натуральную величину.

Зная две проекции  $F_x$  и  $F_y$ , из треугольника  $\Delta ABC$  определим модуль и направление силы  $\vec{F}$ :

модуль – 
$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2};$$

направляющий тангенс угла между вектором силы  $\vec{F}$  и осью  $x$  –

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{F_y}{F_x}.$$

Отметим следующее: силу  $\vec{F}$  можно представить как равнодействующую двух составляющих сил  $\vec{F}_x$  и  $\vec{F}_y$ , параллельных осям координат.

Составляющие  $\vec{F}_x$  и  $\vec{F}_y$  и проекции  $F_x$  и  $F_y$  принципиально отличны друг от друга, т.к. составляющие есть векторные величины, а проекции – алгебраические; но проекции силы на две взаимно-перпендикулярные оси  $x$  и  $y$  и модули составляющих той же силы соответственно численно равны, когда сила раскладывается по двум взаимно-перпендикулярным направлениям, параллельным осям  $x$  и  $y$ .

С помощью проекций можно определить и равнодействующую системы сходящихся сил. *Проекция равнодействующей системы сходящихся сил на ось равна алгебраической сумме проекций, составляющих эту систему.* Если задана система сходящихся сил  $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4)$ , то проекция равнодействующей на ось  $x$  будет равна

$$R_x = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + F_{4x}.$$

Если необходимо определить проекцию равнодействующей на другую ось, например ось  $y$ , то

$$R_y = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} + F_{4y},$$

т.е.  $R_x = \sum_{k=1}^n F_{kx}$ ;  $R_y = \sum_{k=1}^n F_{ky}$ ;  $R_z = \sum_{k=1}^n F_{kz}$ .

Зная проекции, можно определить модуль  $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$  и направление равнодействующей, т.е. углы, образуемые ею с осями  $Ox, Oy$  и

$$Oz: \cos(\vec{R}, \hat{x}) = \frac{R_x}{R}; \quad \cos(\vec{R}, \hat{y}) = \frac{R_y}{R}; \quad \cos(\vec{R}, \hat{z}) = \frac{R_z}{R}.$$

## 2.4. Аналитические уравнения равновесия

Ранее установили, что для равновесия сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы силовой многоугольник был замкнут, т.е.  $R = 0$ . Это значит, что одновременно и  $\sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = R = 0$ . Но, т.к. они вычисляются по известным формулам, то для равновесия пространственной системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы выполнялись три аналитических уравнений равновесия:

$$\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0, \quad \sum F_z = 0, \quad (2.1)$$

а для плоской системы – два уравнения:

$$\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0. \quad (2.2)$$

Следовательно, для равновесия системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы сумма проекций всех сил системы на каждую координатную ось равнялась нулю.

Для решения задач рекомендуется следующая последовательность действий:

1. Выделить тело (или точку), равновесие которого следует рассмотреть.
2. Показать все активные (заданные) силы, действующие на тело (или точку).
3. Освободить тело от наложенных на него связей, заменив их действие реакциями связей.
4. Построить замкнутый силовой многоугольник, выбрав масштаб для построения сил (при графическом способе решения) или систему координат (при аналитическом способе решения).
5. Определить искомые силы, используя масштаб сил (при графическом способе решения), или составить и решить уравнения равновесия (при аналитическом способе решения).

*Пример 2.1.* Однородная прямоугольная пластинка силой тяжести  $G = 10 \text{ Н}$  подвешена так, что может свободно вращаться вокруг геометрической оси, проходящей вдоль одной из ее сторон. Равномерно дующий ветер удерживает ее в наклонном положении под углом  $\alpha = 18^\circ$  к вертикальной плоскости. Определить равнодействующую  $R$  давлений, производимых ветром на пластинку перпендикулярно ее плоскости (рис. 2.5).

*Решение.* Рассмотрим равновесие пластинки. Отбросим шарнир  $O$ . Так как пластинка однородная и прямоугольной формы, то равнодействующая  $\vec{R}$  давлений ветра и силы тяжести  $\vec{G}$  пересекаются в геометрическом центре пластинки – точке  $C$ ; линия действия реакции шарнира  $\vec{R}_O$  на основании теоремы о равновесии трех непараллельных сил тоже пройдет через точку  $C$ .

Для системы трех сходящихся сил, действующих на пластинку, применим аналитическое

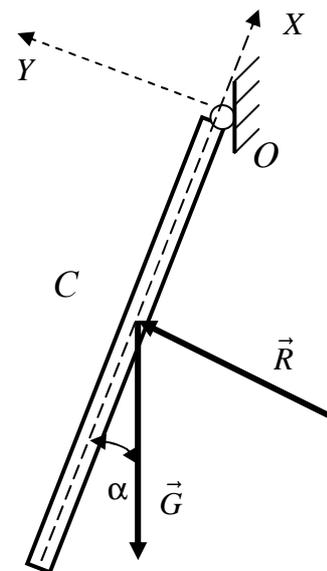


Рис. 2.5. К примеру 2.1

уравнение равновесия –  $\sum Y = 0$ , направив ось  $y$  перпендикулярно пластинке (чтобы реакция  $\vec{R}_0$ , которую не требуется определять, не вошла в уравнение равновесия).

Составим уравнение равновесия

$$\sum Y = 0. \quad R - G \sin \alpha = 0.$$

$$R = G \sin \alpha = 10 \sin 18^\circ = 10 \cdot 0,309 = 3,09 \text{ Н.}$$

Проверку решения проведем с помощью геометрического условия равновесия

$$\sum \vec{F}_k = 0. \quad \vec{G} + \vec{R} + \vec{R}_0 = 0.$$

Построим силовой многоугольник в удобном масштабе (рис. 2.6).

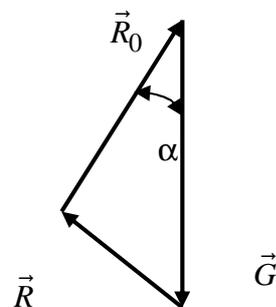


Рис. 2.6. Построение силового треугольника

$$\vec{R} = \vec{G} \sin \alpha.$$

### Тема 3. ПАРА СИЛ

#### 3.1. Момент силы относительно точки на плоскости

Алгебраическим моментом силы  $\vec{F}$  относительно точки  $O$  называется некоторое взятое со знаком «плюс» или «минус» произведение модуля силы на длину  $h$  перпендикуляра, опущенного из этой точки на линию действия силы (рис. 3.1):

$$M_o(\vec{F}) = \pm |F| \cdot h = \pm Fh. \quad (3.1)$$

Точка  $O$  называется *центром моментов*. Расстояние  $h$  от центра моментов до линии действия силы  $\vec{F}$  называется *плечом* этой силы относительно точки  $O$ .

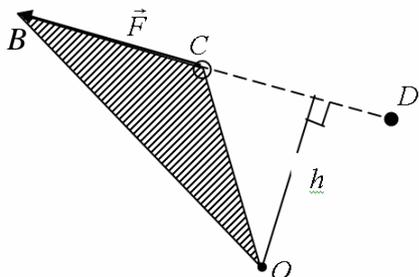


Рис. 3.1. К определению момента относительно точки

Условимся считать момент силы относительно точки *положительным*, если сила *стремится повернуть тело* вокруг центра моментов *против хода часовой стрелки*, а в противном случае – отрицательным. Момент силы измеряется в  $kH \cdot m$ .

Свойства алгебраического момента силы относительно точки:

1. При переносе силы по линии ее действия момент не изменяется, т.к. при этом сохраняются и величина силы и ее плечо относительно центра моментов.

2. Момент силы относительно точки равняется нулю, если центр моментов лежит на линии действия силы, т.к. в этом случае плечо силы равно 0.

3. Численное значение момента силы относительно точки геометрически равно удвоенной площади треугольника, одной из вершин которого является центр моментов, а основанием – вектор силы (рис. 3.2):

$$|M_o(\vec{F})| = 2A_{\Delta OCB}.$$

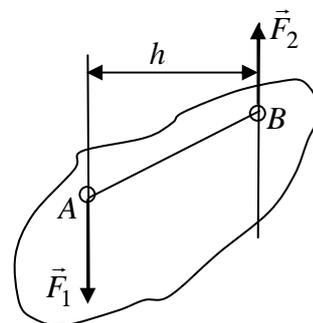


Рис. 3.2. К определению пары сил

### 3.2. Момент пары сил на плоскости

*Парой сил* называется система двух равных по модулю и противоположно направленных сил, приложенных к одному твердому телу (рис. 3.2). Пара сил не уравнивается и не может быть заменена одной силой. Это самостоятельная силовая единица, оказывающая механическое воздействие на материальное тело. Пара сил производит на тело вращательное действие. Количественной мерой этого действия является момент пары. Момент пары является алгебраической величиной.

Алгебраическим моментом пары называется, взятое со знаком «плюс» или «минус» произведение модуля одной из сил на ее плечо. *Плечом пары* называется кратчайшее расстояние между линиями действия сил пары. Момент пары обозначается буквой  $M$ .

$$M = \pm F_1 h = \pm F_2 h. \quad (3.2)$$

Момент пары будем считать положительным, если пара стремится поворачивать тело против хода часовой стрелки, и отрицательным – по ходу часовой стрелки. Момент пары обладает следующими свойствами:

1. При переносе сил по линиям их действия момент пары не изменяется, т.к. при этом не изменяется ни величина сил, образующих пару, ни ее плечо.

2. Момент пары не зависит от положения центра моментов:

$$M_o(\text{пары}) = M_B(\text{пары}) = M_C(\text{пары}) = M.$$

3. Момент пары можно рассматривать как момент одной из сил пары относительно той точки, к которой приложена другая сила пары:

$$M = M_B(\vec{F}_1) = M_A(\vec{F}_2).$$

### 3.3. Эквивалентность пар

Условие эквивалентности пар – не изменяя действия данной пары сил на твердое тело, ее можно заменить любой другой парой, расположенной в той же плоскости и имеющей тот же алгебраический момент.

Пусть на твердое тело действует пара сил  $(\vec{F}_1, \vec{F}_2)$  (рис. 3.3).

Через произвольно взятые точки  $C$  и  $D$  проводим параллельные прямые  $AC$  и  $BD$  до их пересечения с линиями действия сил заданной пары в точках  $A$  и  $B$ . Силы исходной пары перенесем в эти точки. Разложим силу  $\vec{F}_1$  по направлениям прямых  $AB$  и  $AC$  на составляющие  $\vec{P}_1$  и  $\vec{Q}_1$ , а  $\vec{F}_2$  – на составляющие  $\vec{P}_2$  и  $\vec{Q}_2$  по направлениям  $BA$  и  $BD$ .

$$\vec{F}_1 = \vec{P}_1 + \vec{Q}_1; \quad \vec{F}_2 = \vec{P}_2 + \vec{Q}_2.$$

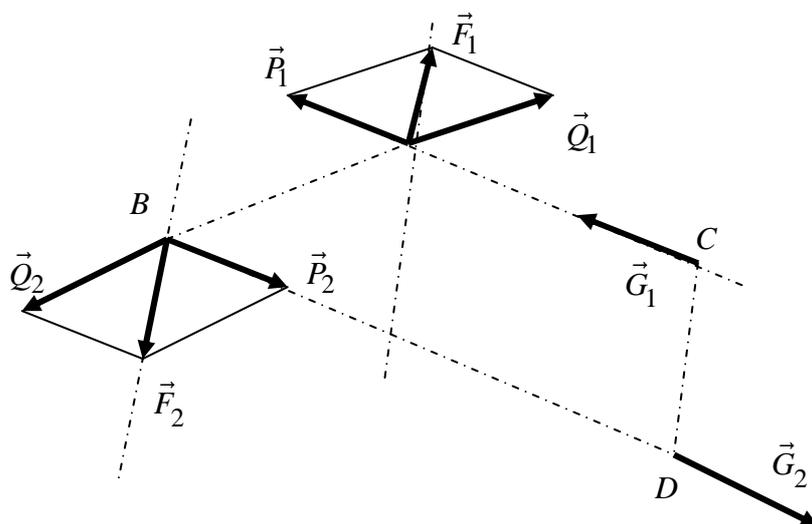


Рис. 3.3. К понятию эквивалентности пар

Через произвольно взятые точки  $C$  и  $D$  проводим параллельные прямые  $AC$  и  $BD$  до их пересечения с линиями действия сил заданной пары в точках  $A$  и  $B$ . Силы исходной пары перенесем в эти точки. Разложим силу  $\vec{F}_1$  по направлениям прямых  $AB$  и  $AC$  на составляющие  $\vec{P}_1$  и  $\vec{Q}_1$ , а  $\vec{F}_2$  – на составляющие  $\vec{P}_2$  и  $\vec{Q}_2$  по направлениям  $BA$  и  $BD$ .

$$\vec{F}_1 = \vec{P}_1 + \vec{Q}_1; \quad \vec{F}_2 = \vec{P}_2 + \vec{Q}_2.$$

Получили попарно равные и противоположно направленные силы  $\vec{P}_1 = \vec{P}_2$ ;  $\vec{Q}_1 = \vec{Q}_2$ ;  $\vec{P}_1 \updownarrow \vec{P}_2$ ;  $\vec{Q}_1 \updownarrow \vec{Q}_2$ . Силы  $\vec{Q}_1$  и  $\vec{Q}_2$  уравниваются на

основании аксиомы 1 и из дальнейшего рассмотрения, на основании аксиомы 2, их можно исключить. Силы  $\vec{P}_1$  и  $\vec{P}_2$  перенесем в точки  $C$  и  $D$  по линиям их действия (следствие из аксиом).

Обозначим их  $\vec{G}_1$  и  $\vec{G}_2$  ( $\vec{G}_1 = \vec{P}_1; \vec{G}_2 = \vec{P}_2$ ). Они образуют новую пару  $(\vec{G}_1, \vec{G}_2)$ . Таким образом, исходную пару перенесли в другое место плоскости и исходные силы заменены на  $\vec{G}_1$  и  $\vec{G}_2$ . Новая пара сил имеет иное плечо, чем исходная, но все преобразования выполнялись на основе аксиом, т.е. были эквивалентными. Таким образом, действие исходной пары на тело не изменилось и обе пары эквивалентны. Не сложно доказать, что алгебраические моменты исходной и новой пары равны. Следовательно, любые пары, расположенные в одной плоскости и имеющие одинаковые алгебраические моменты, между собой эквивалентны.

### 3.4. Сложение пар сил, лежащих в одной плоскости

*Сложением пар* называется операция замены системы пар эквивалентной, но более простой, системой сил. Установлено, что систему пар сил, действующих в одной плоскости, можно эквивалентно заменить одной парой, момент которой равен алгебраической сумме моментов исходных пар.

Пусть на тело действуют три пары сил с моментами  $M_1, M_2, M_3$  (рис. 3.4).

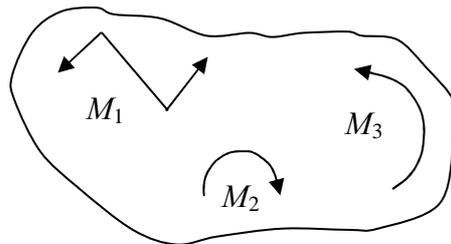


Рис. 3.4. К сложению пар

Используя положения об эквивалентности пар, заменим данные пары другими парами  $(\vec{F}_1, \vec{F}_2), (\vec{P}_1, \vec{P}_2), (\vec{Q}_1, \vec{Q}_2)$ , имеющими общее плечо  $AB$ , рис. 3.5.

Сохраняя численные значения моментов исходных пар, определим величины сил, образующих новые пары:

$$\begin{aligned} F_1 = F_2 &= |M_1| : AB; \\ P_1 = P_2 &= |M_2| : AB; \\ Q_1 = Q_2 &= |M_3| : AB. \end{aligned}$$

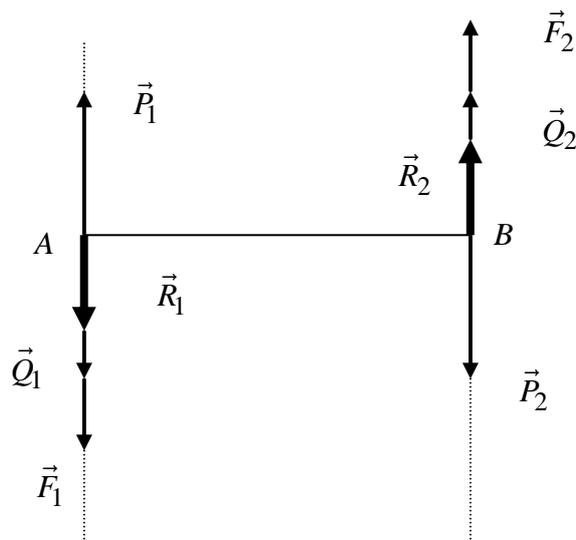


Рис. 3.5. К выводу момента результирующей пары

Силы, действующие по одной прямой, заменим их равнодействующими:

$$R_1 = F_1 - P_1 + Q_1; \quad R_2 = F_2 - P_2 + Q_2.$$

Очевидно, что  $R_1 = R_2$  и  $\vec{R}_1 \uparrow \downarrow \vec{R}_2$ .

Следовательно,  $\vec{R}_1$  и  $\vec{R}_2$  образуют новую пару сил. Момент этой результирующей пары будет равным  $M_\Sigma = R_1 \cdot AB$ , т. к.  $\vec{R}_1 \perp AB$ . Тогда  $M_\Sigma = M_1 - M_2 + M_3$ , т. е. система пар заменена одной парой, момент которой равен сумме алгебраических моментов заданных пар. Следовательно, любую систему пар, действующих на твердое тело в одной плоскости, можно заменить одной парой с моментом  $M_\Sigma = \sum_{i=1}^n M_i$ .

### 3.5. Условие равновесия плоской системы пар сил

Система пар на плоскости может находиться в равновесии только тогда, когда алгебраическая сумма моментов этих пар равна нулю

$$M_1 + M_2 + \dots + M_n = \sum_{i=1}^n M_i = 0. \quad (3.3)$$

Отсюда же следует, что плоскую систему пар можно уравновесить только парой сил, действующих в этой же плоскости.

## Тема 4. ПЛОСКАЯ СИСТЕМА ПРОИЗВОЛЬНО РАСПОЛОЖЕННЫХ СИЛ

### 4.1. Приведение силы к данной точке

Задача об эквивалентной замене произвольной плоской системы сил более простой системой решается приведением системы сил к точке (или центру). В основе этого метода лежит теорема о параллельном переносе сил – *не изменяя действие данной силы на твердое тело, ее можно перенести параллельно самой себе и приложить в любой другой точке тела, добавив при этом пару с моментом, равным моменту переносимой силы относительно новой точки ее приложения.*

Пусть на тело действует сила  $\vec{F}$ , приложенная в точке  $A$ , рис. 4.1. Действие этой силы на тело не изменится, если в произвольной точке  $B$  тела приложить к нему две уравновешивающиеся силы  $\vec{F}'$  и  $\vec{F}''$ , причем  $\vec{F}' = \vec{F}'' = \vec{F}$  и  $\vec{F}' \uparrow \downarrow \vec{F}'' \parallel \vec{F}$ . Полученную систему трех сил можно рассматривать как состоящую из силы  $\vec{F}'$ , которая равна заданной силе  $\vec{F}$ , но перенесена в точку  $B$  параллельно самой себе, и пары сил  $(\vec{F}, \vec{F}'')$  с моментом  $M = F \cdot h = M_B(\vec{F})$ .

Таким образом,  $\vec{F} \sim (\vec{F}', M)$ .

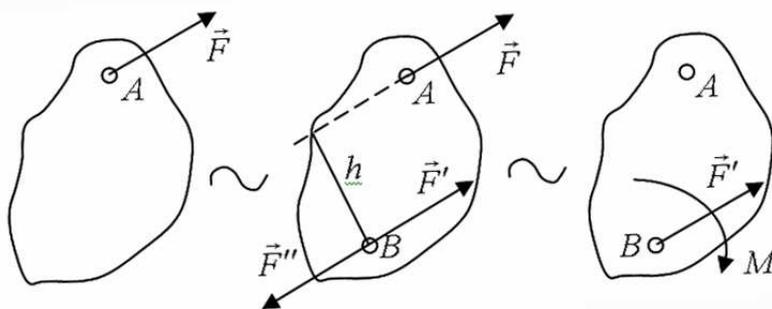


Рис. 4.1. К теореме о параллельном переносе сил

Пару сил  $(\vec{F}, \vec{F}'')$  с моментом  $M$  называют *присоединенной парой* и обозначают круговой стрелкой, показывающей направление момента.

## 4.2. Равнодействующая плоской системы сил

Рассмотрим систему сил  $(\vec{F}_1, \vec{F}_2 \dots \vec{F}_n)$ , приложенных к твердому телу в точках  $A_1, A_2, \dots, A_n$  и действующих в плоскости листа, рис. 4.2.

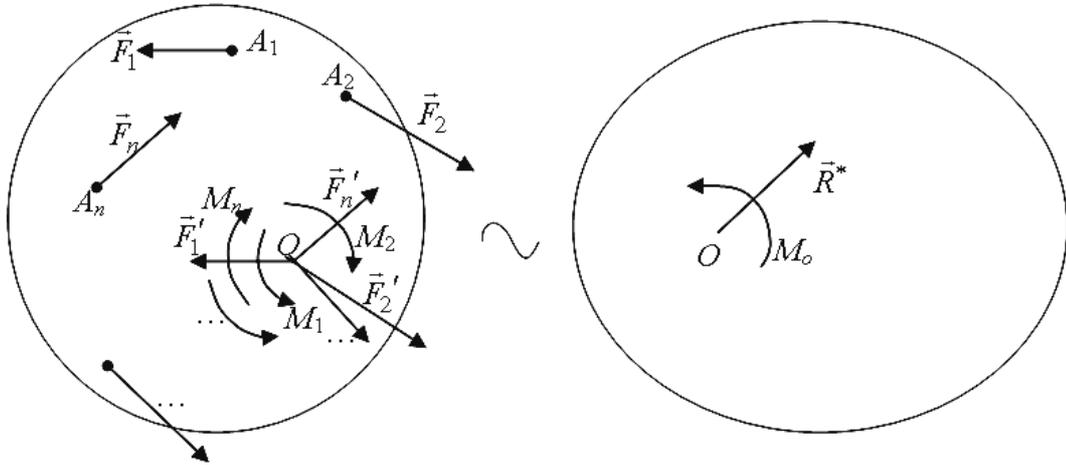


Рис. 4.2. К вопросу о равнодействующей плоской системы сил

Перенесем каждую силу в произвольную точку  $O$  – *центр приведения*. Вместо исходных сил получим геометрически равные силы  $\vec{F}'_1 = \vec{F}_1, \vec{F}'_2 = \vec{F}_2, \dots, \vec{F}'_n = \vec{F}_n$ , сходящиеся в точке  $O$ , и присоединенные пары с моментами  $M_1 = M_o(\vec{F}_1), M_2 = M_o(\vec{F}_2), \dots, M_n = M_o(\vec{F}_n)$ . Сложив силы, сходящиеся в точке  $O$ , найдем их равнодействующую

$$\vec{R}^* = \vec{F}'_1 + \vec{F}'_2 + \dots + \vec{F}'_n$$

и, учитывая равенство геометрических сил, получим

$$\vec{R}^* = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n.$$

Исходные силы заменены одной силой. Эта сила, равная геометрической сумме всех сил системы, называется ее *главным вектором*. Он не зависит от положения центра приведения.

Сложим присоединенные пары:

$$M_o^* = M_1 + M_2 + \dots + M_n = \sum_{k=1}^n M_k$$

или

$$M_o^* = M_o(\vec{F}_1) + M_o(\vec{F}_2) + \dots + M_o(\vec{F}_n) = \sum_{k=1}^n (M_k).$$

Каждый момент является алгебраической величиной. Этот момент  $M_o^*$  называется *главным моментом* системы относительно центра приведения. Он зависит от положения центра приведения.

Таким образом, в результате приведения к точке  $O$ , заданная система сил эквивалентно заменена более простой системой, состоящей из одной силы (главного вектора) и одной пары сил (главного момента) относительно центра приведения, рис. 4.2.

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n) \sim (\vec{R}^*, M_o^*). \quad (4.1)$$

Следовательно, любые плоские системы сил эквивалентны между собой, если они имеют одинаковые главные векторы и главные моменты.

Величина и направление главного вектора могут быть определены на основании теоремы о проекции равнодействующей силы на ось, приняв точку  $O$  за начало системы координат  $Oxy$

$$R_x^* = \sum_{k=1}^n F_{k_x}; \quad R_y^* = \sum_{k=1}^n F_{k_y}. \quad (4.2)$$

Зная проекции главного вектора, находим его величину и направление

$$R^* = \sqrt{(R_x^*)^2 + (R_y^*)^2}; \quad (4.3)$$

$$\cos(\widehat{\vec{R}_x^*, x}) = \frac{R_x^*}{R^*}; \quad \cos(\widehat{\vec{R}_y^*, y}) = \frac{R_y^*}{R^*}. \quad (4.4)$$

Главный момент вычисляется по известной формуле

$$M_o^* = M_o(\vec{F}_1) + M_o(\vec{F}_2) + \dots + M_o(\vec{F}_n) = \sum_{k=1}^n M_o(\vec{F}_k). \quad (4.5)$$

### 4.3. Частные случаи приведения плоской системы сил

При вычислении  $R^*$  и  $M_o^*$  могут иметь место следующие частные случаи приведения плоской системы сил:

1.  $R^* \neq 0, M_o^* = 0$ . Данная система сил эквивалентна одной силе, т.е. приводится к равнодействующей, причем эта равнодействующая по величине и направлению совпадает с главным вектором и приложена в точке приведения  $O$ .

2.  $R^* = 0, M_o^* \neq 0$ . Система приведена к одной паре сил с моментом, равным главному моменту системы.

3.  $R^* \neq 0, M_o^* \neq 0$ . Такая система сил допускает дальнейшее упрощение и в итоге приводится к равнодействующей силе.

4.  $R^* = 0, M_o^* = 0$ . Система эквивалентна нулю, т.е. находится в равновесии.

Рассмотрим частный случай приведения 3, когда  $R^* \neq 0, M_o^* \neq 0$ , рис. 4.3.

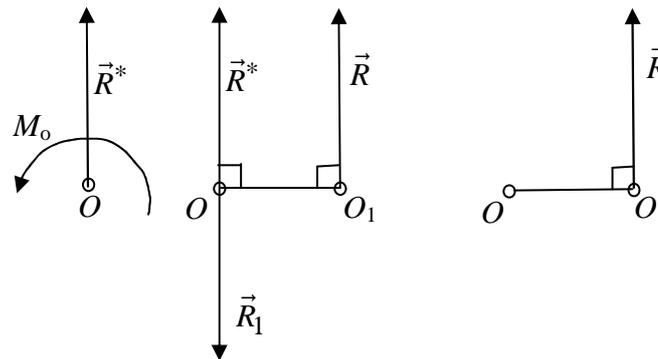


Рис. 4.3

Выполним следующие преобразования: заменим главный момент парой сил ( $\vec{R}$  и  $\vec{R}_1$ ). Силы этой пары примем равными главному вектору  $R = R_1 = R^*$  и одну из них приложим в точке  $O$ , направив ее противоположно  $\vec{R}^*$ . Линия действия другой силы пары пройдет на расстоянии  $OO_1$ ,

равным плечу пары,  $OO_1 = \frac{|M_o^*|}{R^*}$ . В полученной системе трех сил  $\vec{R}^*$  и  $\vec{R}_1$

уравновешиваются и их можно исключить из рассмотрения. После этого останется одна сила, геометрически равная главному вектору системы и приложенная в точке  $O_1$ . Так как она эквивалентна всей первоначальной системе сил, то является ее равнодействующей.

#### 4.4. Теорема Вариньона

Определим момент равнодействующей силы и при этом докажем теорему Вариньона, формулируемую так: *если произвольная плоская система сил имеет равнодействующую, то ее алгебраический момент отно-*

сительного любого центра  $O$  равен сумме алгебраических моментов сил системы относительно того же центра, т.е. если  $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n) \sim \vec{R}$ , то

$$M_o(\vec{R}) = \sum_{k=1}^n M_o(\vec{F}_k).$$

Найдем момент равнодействующей  $\vec{R}$  относительно точки  $O$  (см. рис. 4.3)  $M_o(\vec{R}) = R \cdot OO_1$ . Подставим  $OO_1 = \frac{|M_o^*|}{R^*}$ , учитывая, что  $M_o = |M_o|$ , и зная как вычисляется главный момент, получим

$$M_o(\vec{R}) = M_o(\vec{F}_1) + M_o(\vec{F}_2) + \dots + M_o(\vec{F}_n) = \sum_{k=1}^n M_o(\vec{F}_k),$$

что и требовалось доказать.

#### 4.5. Условия и формы уравнений равновесия

Для равновесия произвольной плоской системы сил необходимо, чтобы  $R^* = 0$  и  $M_o^* = 0$ . Отсюда следует *основная форма* уравнений равновесия произвольной плоской системы сил:

$$\sum_{k=1}^n F_{k_x} = 0; \quad \sum_{k=1}^n F_{k_y} = 0; \quad \sum_{k=1}^n M_o(F_k). \quad (4.6)$$

*Для равновесия произвольной плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы сумма проекций всех сил системы на каждую координатную ось и сумма их моментов относительно любого центра, лежащего в плоскости действия сил, равнялись нулю.*

*Вторая форма* уравнений равновесия:

$$\sum_{k=1}^n F_{k_x} = 0; \quad \sum_{k=1}^n M_A(F_k) = 0; \quad \sum_{k=1}^n M_B(F_k). \quad (4.7)$$

(ось  $x$  не должна быть  $\perp$  прямой  $OA$ ).

*Третья форма* уравнений равновесия:

$$\sum_{k=1}^n M_A(F_k) = 0; \quad \sum_{k=1}^n M_B(F_k) = 0; \quad \sum_{k=1}^n M_O(F_k) = 0. \quad (4.8)$$

(центры моментов  $B, A, O$  не должны находиться на одной прямой).

## Тема 5. ЭЛЕМЕНТЫ ГРАФОСТАТИКИ

*Графостатика* – раздел механики, в котором излагаются графические способы решения статических задач. Графические методы решения задач статики используют в том случае, когда все приложенные к телу силы лежат в одной плоскости. Хотя эти методы менее точны по сравнению с аналитическими, однако, они имеют то преимущество, что дают быстрое и наглядное решение задачи.

### 5.1. Сложение сил, лежащих в одной плоскости. Силовой и веревочный многоугольники

Если несколько сил действуют на одну материальную точку, то, как известно, равнодействующая выразится по величине и направлению, замыкающей стороной разомкнутого многоугольника, стороны которого равны и параллельны слагаемым силам. Многоугольник этот называется *силовым*. Если все силы будут уравниваться сами по себе, то многоугольник будет замкнутым. С помощью силового и веревочного многоугольников можно складывать силы или наоборот, разложить силу на несколько других.

Задача сложения сил, лежащих в одной плоскости, состоит в нахождении равнодействующей этих сил.

Пусть дана некоторая плоская система сил, например, система, состоящая из трех сил, изображенных на рис. 5.1. Обозначим эти силы цифрами **1**, **2** и **3**. Модуль и направление искомой равнодействующей этих сил найдем по известному правилу силового многоугольника. Для этого из произвольно взятой точки *A* проведем вектор, равный вектору изображающему силу **1**; в конце этого вектора поставим букву *B*; далее из точки *B* проводим второй вектор, равный вектору, изображающему силу **2**; в конце этого вектора ставим букву *C*; из точки *C* проводим третий вектор, равный вектору, изображающему силу **3**, и в конце его ставим букву *D*. Вектор  $\overrightarrow{AD}$ , замыкающий полученную ломаную линию, определяет по модулю и направлению равнодействующую  $\vec{R}$  данной системы сил.

Найдем точку приложения этой равнодействующей или же линию ее действия, так как точку приложения силы можно переносить по линии действия этой силы в любую точку. Для этого сделаем следующее построение: выберем произвольно какую-нибудь точку *O*, называемую *полюсом*, и соединим эту точку прямыми со всеми вершинами силового много-

угольника; полученные при этом отрезки называются *лучами*. Два крайних луча  $OA$  и  $OD$ , направленных в первую и последнюю вершины силового многоугольника, обозначим через  $\alpha$  и  $\omega$ . Луч  $OB$ , направленный в ту вершину силового многоугольника, где сходятся векторы **1** и **2**, обозначим через **1-2**, а луч  $OC$ , направленный в точку  $C$ , общую для векторов **2** и **3**, обозначим через **2-3**. Теперь возьмем где-нибудь недалеко от линии действия данной силы **1** точку  $E$  и проведем из этой точки прямую, параллельную лучу  $\alpha$ , до пересечения в точке  $a$  с линией действия силы **1**; эту прямую обозначим также через  $\alpha$ . Из точки  $a$  проводим, далее, прямую, параллельную лучу **1-2**, до пересечения в точке  $b$  с линией действия силы **2**; эту прямую обозначим через **1-2**; из точки  $b$  проводим прямую, параллельную следующему лучу **2-3**, до пересечения в точке  $c$  с линией действия силы **3**; эту прямую обозначим через **2-3**. Наконец, из точки  $c$  проведем прямую, параллельную последнему лучу  $\omega$ , и обозначим эту прямую через  $\omega$ .

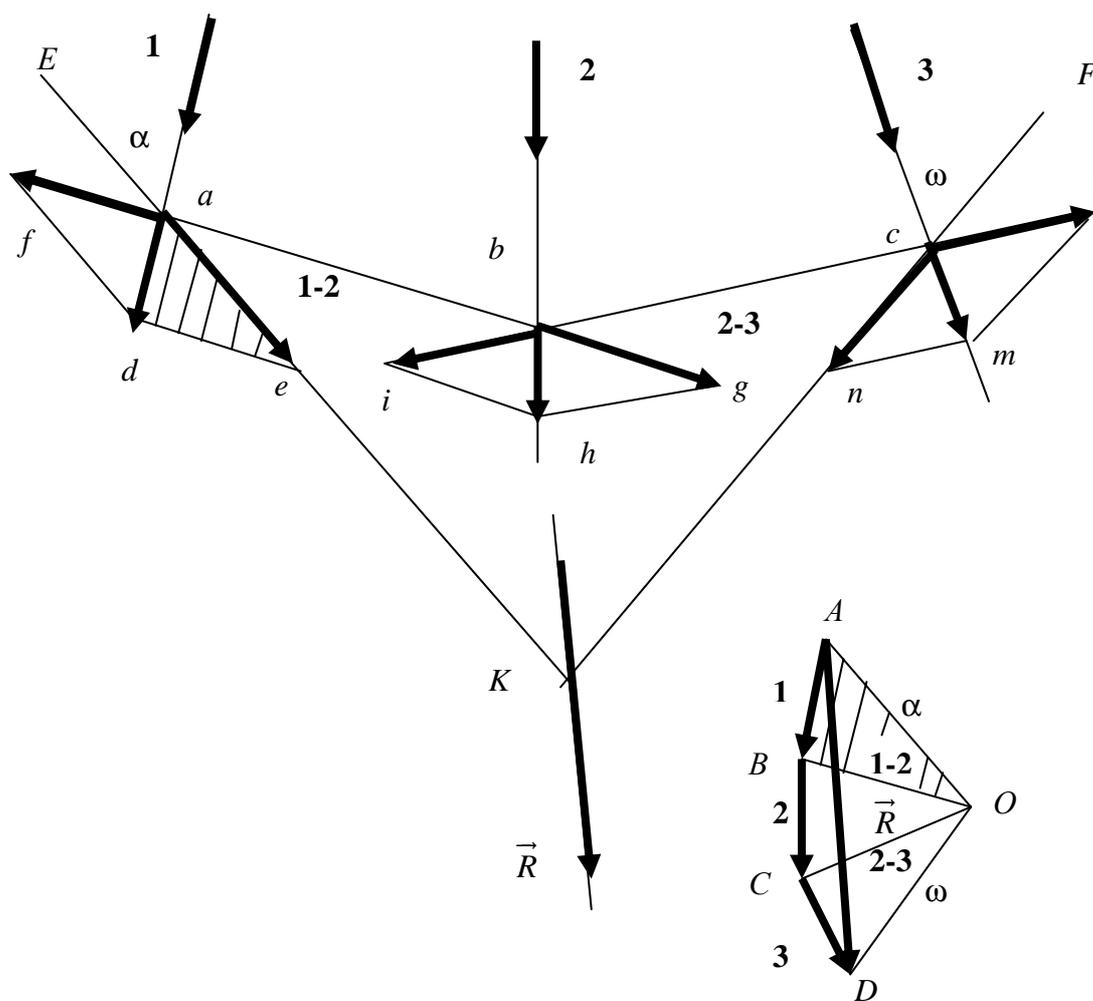


Рис. 5.1. Построение веревочного многоугольника

Построенная таким образом ломанная линия  $EabcfF$  называется *веревочным многоугольником*. Продолжим две крайние стороны веревочного многоугольника  $\alpha$  и  $\omega$  до их пересечения в точке  $K$ . Через эту точку проходит искомая линия действия равнодействующей  $\vec{R}$ . Поэтому, остается через точку  $K$  провести прямую, параллельную стороне  $AD$  силового многоугольника; эта прямая является линией действия искомой равнодействующей.

Указанное правило графического сложения сил, являясь вполне сложным, применимо и к частному случаю системы параллельных сил, направленных как в одну, так и в противоположные стороны.

Если силовой многоугольник является замкнутым, т.е. когда главный вектор данной системы сил равен нулю, а веревочный многоугольник незамкнут, то система сил приводится к паре сил. Равнодействующей в этом случае не существует.

Таким образом, графические условия равновесия плоской системы сил таковы: *для равновесия плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы совпадали и крайние лучи  $\alpha$  и  $\omega$  силового многоугольника, и крайние стороны  $\alpha$  и  $\omega$  веревочного многоугольника или, другими словами, чтобы оба многоугольника, и силовой, и веревочный, были замкнутыми.*

## 5.2. Графическое определение опорных реакций

В плоской задаче статики по заданным силам, приложенным к данному твердому телу, находящемуся в равновесии, приходится определять неизвестные реакции связей; при этом предполагается, что все заданные и неизвестные реакции связей лежат в одной плоскости. Рассмотрим графический метод решения этой задачи на примере.

**Пример.** *К горизонтальной балке, лежащей на двух опорах, приложены заданные вертикальные силы.*

*Определить реакции опор (рис. 5.2).*

**Решение.** Данные в задаче силы, приложенные к балке, обозначим цифрами **1, 2, 3, 4**. Реакции опор обозначим  $R_A$  и  $R_B$ ; эти силы направлены перпендикулярно к балке вверх; требуется найти эти реакции. Для этого строим сначала силовой многоугольник; так как все силы параллельны, то в силовом многоугольнике они лежат на одной прямой, причем силы **1, 2, 3, 4** направлены вниз, силы  $R_A$  и  $R_B$  – вверх. Так как при равновесии силовой многоугольник должен быть замкнутым, то конец силы  $R_A$  дол-

жен совпадать с началом силы **1**, т.е. с точкой *A*. Выбрав произвольно полюс *O*, проведем лучи **1-2**, **2-3**, **3-4** и **4- $R_B$** ; два крайних луча  $\alpha$  и  $\omega$  совпадают с лучом *OA*, который обозначим через  $R_A$ -**1**, так как точка *A* является концом вектора  $R_A$  и началом вектора **1**. Поскольку силы  $R_A$  и  $R_B$  нам не даны, направление луча  $R_B$ - $R_A$  пока неизвестно.

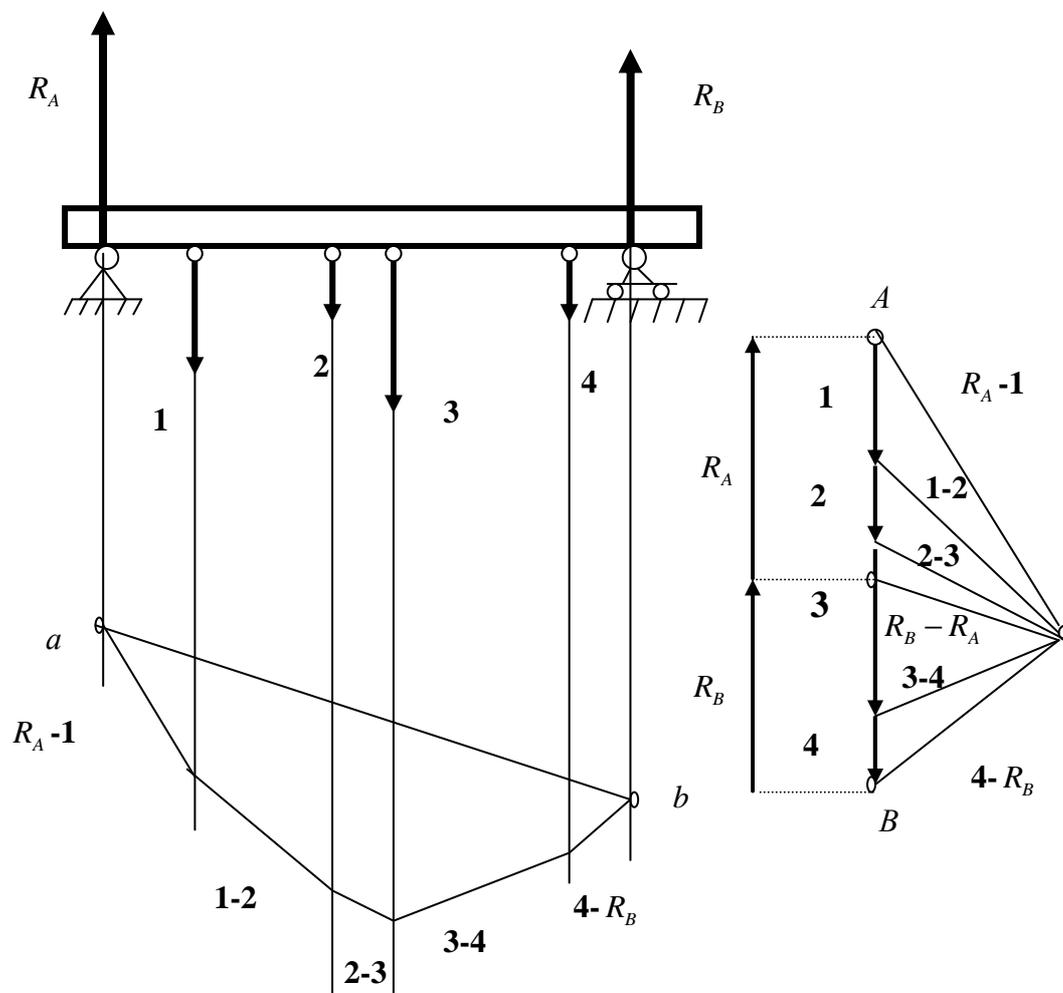


Рис. 5.2. К определению реакций опор

Строим далее вервочный многоугольник: из точки *a*, произвольно взятой на линии действия силы  $R_A$ , проводим прямую, параллельную лучу  $R_A$ -**1**, до пересечения с линией действия силы **1**; эта прямая представляет собой сторону  $R_A$ -**1** вервочного многоугольника; из точки пересечения этой прямой с линией действия силы **1** проводим прямую, параллельную лучу **1-2**, до пересечения с линией действия силы **2**; получаем сторону **1-2** вервочного многоугольника и т.д. Сторона **4- $R_B$**  вервочного много-

угольника пересечет линию действия силы  $R_B$  в некоторой точке  $b$ ; из этой точки  $b$  мы должны провести последнюю сторону  $R_B - R_A$  веревочного многоугольника до пересечения с линией действия силы  $R_A$ . Но так как при равновесии веревочный многоугольник должен быть замкнутым, то ясно, что его сторона  $R_B - R_A$  должна проходить через точку  $a$ . Поэтому, соединив прямой точки  $a$  и  $b$ , получим эту последнюю сторону  $R_B - R_A$  веревочного многоугольника. Остается теперь на силовом многоугольнике из полюса  $O$  провести луч  $R_B - R_A$ , параллельный  $ab$ . Определив направление луча, мы, тем самым, находим и модули искомых сил  $R_B$  и  $R_A$ , а именно: сила  $R_B$  равна отрезку прямой  $AB$ , заключенному между лучами  $4 - R_B$  и  $R_B - R_A$ , а сила  $R_A$  равна отрезку этой же прямой, заключенному между лучами  $R_B - R_A$  и  $R_A - 1$ . Следовательно, задача решена.

## Тема 6. ПРОСТРАНСТВЕННАЯ СИСТЕМА СИЛ

Система сил, линии действия которых расположены в различных плоскостях, называется *пространственной системой сил*.

### 6.1. Момент пары сил как вектор

Условимся направлять вектор, изображающий момент пары, перпендикулярно плоскости действия пары в такую сторону, чтобы с его конца было видно, что пара сил стремится поворачивать эту плоскость против хода часовой стрелки (рис. 6.1). Длина вектора  $\vec{M}$  принимается пропорционально модулю алгебраического момента пары в этой плоскости.

Момент силы  $\vec{F}$  относительно точки  $O$ , характеризующий ее вращательный эффект, определяется, как и момент пары сил, тремя элементами:

- численным значением (модулем);
- плоскостью действия, в которой находится центр моментов и сила;
- направлением поворота в этой плоскости.

В случае пространственной системы сил плоскости поворота для каждой силы различны и их следует указывать отдельно.

Вектор момента силы относительно точки направляется по перпендикуляру к плоскости, в которой находится сила и центр моментов  $O$  в такую сторону, чтобы с конца его было видно, что сила стремится поворачи-

вать тело против хода часовой стрелки (рис. 6.2). Длина вектора  $\vec{M}_o(\vec{F})$  пропорциональна величине момента. Такой вектор будет одновременно характеризовать и величину момента силы относительно точки, и плоскость, в которой сила стремится поворачивать тело, и направление поворота в этой плоскости. Точка приложения этого вектора – центр моментов.

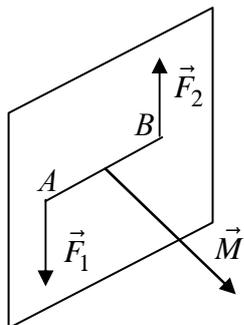


Рис. 6.1. К изображению вектора момента пары сил

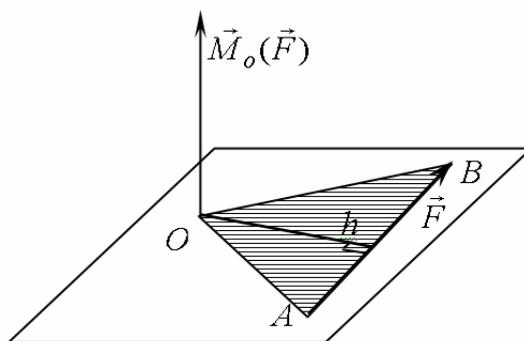


Рис. 6.2. К понятию вектора момента силы относительно точки

## 6.2. Момент силы относительно оси

Пусть сила  $\vec{F}$  и ось  $z$  занимают произвольное положение по отношению друг к другу, т.е. не параллельны и не пересекаются (рис. 6.3).

Через точку  $O$ , произвольно принятую на оси  $z$ , проведем плоскость  $\pi$ , перпендикулярную ей. Из начала и конца вектора  $\vec{AB}$ , изображающего силу  $\vec{F}$ , опустим перпендикуляры на эту плоскость, их основания являются проекциями точек  $A$  и  $B$  на плоскость  $\pi$ . Из проекции начала силы  $\vec{F}$  на плоскость  $\pi$  (точка  $a$ ) к проекции конца силы (точка  $b$ ) проведем вектор  $\vec{ab} = \vec{F}_\pi$ .

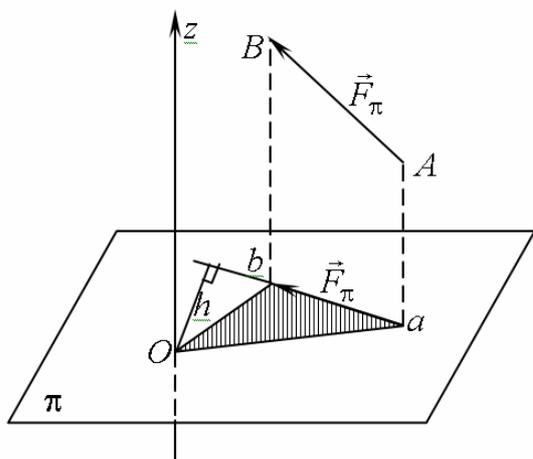


Рис. 6.3. К понятию момента силы относительно оси

Он является проекцией силы  $\vec{F}$  на плоскость  $\pi$ . Момент силы  $\vec{F}_\pi$  относительно точки  $O$  равен  $M_o(\vec{F}_\pi) = \pm F_\pi \cdot h$  и принимается за момент силы  $\vec{F}$  относительно оси  $z$  и обозначается  $M_z(\vec{F})$ .

Таким образом, *моментом силы  $\vec{F}$  относительно оси  $z$  называется*

момент проекции  $\vec{F}_\pi$  этой силы на плоскость  $\pi$ , перпендикулярной оси моментов, относительно точки их пересечения (точка  $O$ ):

$$M_z(\vec{F}) = M_o(\vec{F}_\pi) = \pm F_\pi \cdot h. \quad (6.1)$$

Момент силы относительно оси – алгебраическая величина.

Правило знаков: если с конца оси моментов видно, что сила стремится поворачивать тело вокруг этой оси против хода часовой стрелки, то ее момент относительно этой оси будем считать положительным, а если по ходу часовой стрелки – то отрицательным.

Момент силы относительно оси обращается в нуль, если сила и ось моментов лежат в одной плоскости (или такую плоскость можно провести).

Для вычисления момента силы относительно оси рекомендуется предварительно разложить силу на три взаимно-перпендикулярные составляющие, параллельные осям координат и затем воспользоваться теоремой Вариньона.

### 6.3. Приведение произвольной пространственной системы сил к заданному центру

При параллельном переносе силы в другую точку тела необходимо добавить к этой системе сил присоединенную пару. Параллельный перенос силы можно реализовать всегда, но присоединенные пары могут быть расположены в разных плоскостях, поэтому моменты присоединенных пар следует рассматривать как векторы.

Пусть имеется произвольная пространственная система сил  $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$  (рис. 6.4).

Перенесем каждую силу в точку  $O$  (центр приведения), при этом будем заменять их геометрически равными силами, приложенными в точке  $O$  и векторными моментами  $\vec{M}_k$ , т.е.  $\vec{F}_k \sim (\vec{F}'_k, \vec{M}_k)$ .

Складывая силы, сходящиеся в точке  $O$ , получим главный вектор системы:  $\vec{F}'_1 + \vec{F}'_2 + \dots + \vec{F}'_n = \vec{R}^*$ , тогда

$$\vec{R}^* = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k, \quad (6.2)$$

то есть главный вектор произвольной пространственной системы сил равен геометрической сумме сил системы.

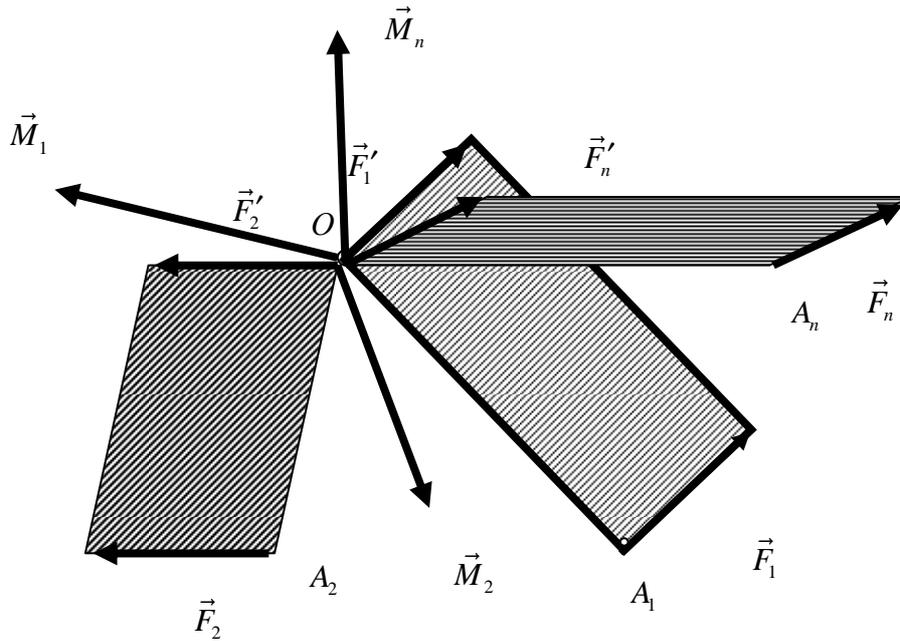


Рис. 6.4. Приведение произвольной пространственной системы сил к центру

Сложив по правилам геометрического сложения векторные моменты присоединенных пар, получим главный момент системы относительно центра приведения:

$$\vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \dots + \vec{M}_n = \vec{M}_o^*$$

или

$$\vec{M}_o^* = \vec{M}_o(\vec{F}_1) + \vec{M}_o(\vec{F}_2) + \dots + \vec{M}_o(\vec{F}_n) = \sum_{k=1}^n \vec{M}_o(\vec{F}_k), \quad (6.3)$$

то есть *главный момент произвольной пространственной системы сил относительно центра приведения равен геометрической сумме векторных моментов сил системы относительно этого центра.*

Таким образом, любая произвольная пространственная система сил может быть эквивалентно заменена системой, состоящей из одной силы и одной пары сил:

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n) \sim (\vec{R}^*, \vec{M}_o^*), \quad (6.4)$$

где  $\vec{M}_o^*$  – главный момент системы, являющийся величиной векторной.

Величина и направление главного вектора системы определяется через его проекции на оси координат по аналитическим формулам:

$$R_x^* = \sum_{k=1}^n F_{k_x}; \quad R_y^* = \sum_{k=1}^n F_{k_y}; \quad R_z^* = \sum_{k=1}^n F_{k_z}.$$

$$R^* = \sqrt{(R_x^*)^2 + (R_y^*)^2 + (R_z^*)^2}; \quad (6.5)$$

$$\cos \alpha = \frac{R_x^*}{R^*}; \quad \cos \beta = \frac{R_y^*}{R^*}; \quad \cos \gamma = \frac{R_z^*}{R^*}.$$

Для вычисления главного момента сначала вычисляются главные моменты системы сил относительно координатных осей  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$ :

$$\begin{aligned} M_x^* &= M_x(\vec{F}_1) + M_x(\vec{F}_2) + \dots + M_x(\vec{F}_n) = \sum_{k=1}^n M_x(\vec{F}_{k_x}); \\ M_y^* &= M_y(\vec{F}_1) + M_y(\vec{F}_2) + \dots + M_y(\vec{F}_n) = \sum_{k=1}^n M_y(\vec{F}_{k_y}); \\ M_z^* &= M_z(\vec{F}_1) + M_z(\vec{F}_2) + \dots + M_z(\vec{F}_n) = \sum_{k=1}^n M_z(\vec{F}_{k_z}); \end{aligned} \quad (6.6)$$

$$M_o^* = \sqrt{(M_x^*)^2 + (M_y^*)^2 + (M_z^*)^2};$$

$$\cos \alpha_1 = \frac{M_x^*}{M_o^*}; \quad \cos \beta_1 = \frac{M_y^*}{M_o^*}; \quad \cos \gamma_1 = \frac{M_z^*}{M_o^*},$$

где  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$  – углы, которые образует главный момент  $M_o^*$  с соответствующими осями координат.

#### 6.4. Аналитические уравнения равновесия произвольной пространственной системы сил

Произвольная пространственная система сил будет находиться в равновесии, если она эквивалентна нулю. Это возможно лишь тогда, когда главный вектор и главный момент системы относительно произвольно взятого центра  $O$  равны нулю. Поэтому необходимым и достаточным условием равновесия являются следующие:

$$\vec{R}^* = 0; \quad M_o^* = 0.$$

Они равносильны следующим шести аналитическим уравнениям равновесия произвольной пространственной системы сил:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (F_{k_x}) = 0; \quad \sum_{k=1}^n (F_{k_y}) = 0; \quad \sum_{k=1}^n (F_{k_z}) = 0; \\ \sum_{k=1}^n M_x(\vec{F}_k) = 0; \quad \sum_{k=1}^n M_y(\vec{F}_k) = 0; \quad \sum_{k=1}^n M_z(\vec{F}_k) = 0. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Таким образом, для равновесия произвольной пространственной системы сил необходимо и достаточно, чтобы алгебраическая сумма проекций всех сил системы на каждую координатную ось, а так же алгебраические суммы моментов всех сил системы относительно каждой из этих осей были равны нулю.

Так как условия равновесия пространственной системы сил справедливы для любых прямоугольных осей координат, то при решении задач систему координат можно изменять, т.е. часть условий равновесия составить для одних осей координат, а часть – для измененных.

### 6.5. Уравнения равновесия пространственной системы параллельных сил

Данная система сил является частным случаем произвольной пространственной системы сил, так как линии действия всех сил параллельны между собой, но не лежат в одной плоскости.

Примем систему координат так, чтобы ось  $Oz$  была параллельной линиям действия сил (рис. 6.5).

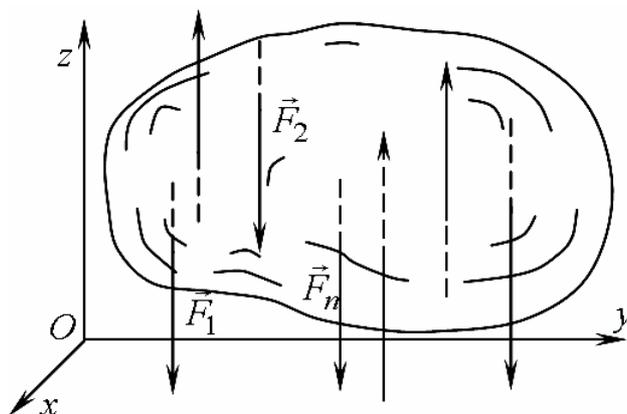


Рис. 6.5. К вопросу равновесия пространственной системы параллельных сил

Тогда оси  $Ox$  и  $Oy$  будут перпендикулярны им и проекции всех сил системы на эти оси будут равны нулю. Момент каждой силы относительно

оси  $Oz$  также будет равен нулю. В результате из шести уравнений останется только три:

$$\sum_{k=1}^n F_{k_x} = 0; \quad \sum_{k=1}^n M_x(\vec{F}_k) = 0; \quad \sum_{k=1}^n M_y(\vec{F}_k) = 0. \quad (6.8)$$

*Для равновесия пространственной системы параллельных сил необходимо и достаточно, чтобы сумма проекций их на ось, параллельную линиям действия сил системы, а также суммы моментов сил относительно двух осей, перпендикулярных им, равнялись нулю.*

### 6.6. Теорема о моменте равнодействующей относительно оси (теорема Вариньона)

**Теорема:** *момент равнодействующей относительно оси равен алгебраической сумме моментов составляющих сил относительно той же оси.*

Пусть дана пространственная система произвольно расположенных сил, приложенных к телу, равнодействующая этой системы сил (рис. 6.6):

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n) \sim \vec{R}.$$

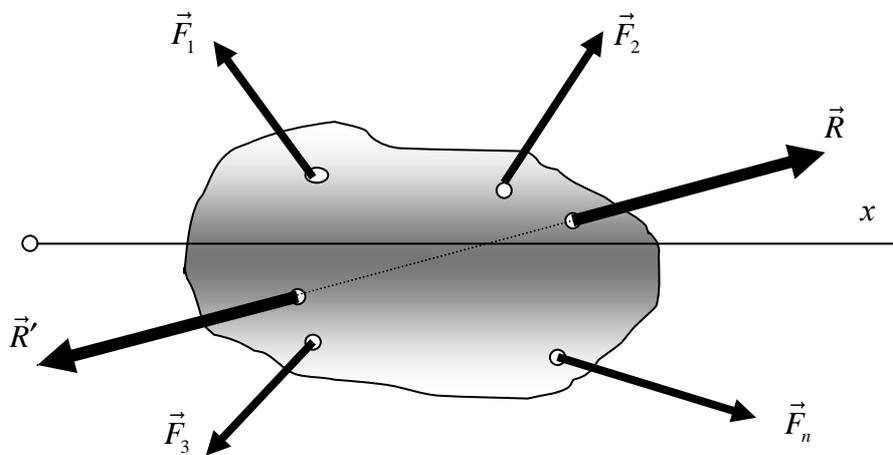


Рис. 6.6. К доказательству теоремы Вариньона

Приложим к телу другую систему сил, равнодействующая которой  $\vec{R}'$  по модулю равна силе  $\vec{R}$  и направлена по той же линии в противоположную сторону. Сила  $\vec{R}'$  для данной системы является уравновешивающей силой и вместе с данными силами образует уравновешенную систему

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n, \vec{R}') \sim 0 \quad \text{или} \quad (\vec{R}, \vec{R}') \sim 0.$$

Так как обе записанные выше системы эквивалентны нулю, т.е. уравновешены, то можно применить к ним любое условие равновесия, например

$$\sum_{k=1}^n M_x(\vec{F}_k) = 0.$$

Запишем это условие для обеих систем:

$$M_x(\vec{F}_1) + M_x(\vec{F}_2) + \dots + M_x(\vec{F}_n) + M_x(\vec{R}') = 0;$$

$$M_x(\vec{R}) + M_x(\vec{R}') = 0.$$

Так как правые части этих равенств равны, то равны будут и левые:

$$M_x(\vec{F}_1) + M_x(\vec{F}_2) + \dots + M_x(\vec{F}_n) = M_x(\vec{R}),$$

поскольку члены  $M_x(\vec{R}')$  взаимно уничтожились.

Итак,

$$\sum_{k=1}^n M_x(\vec{F}_k) = M_x(\vec{R}); \quad (6.9)$$

теорема доказана.

## Тема 7. ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ

### 7.1. Центр тяжести материального тела

На все частицы материального тела вблизи земной поверхности действуют силы притяжения Земли, называемые *силами тяжести*. Если размеры тела сравнительно невелики, то эти силы параллельны между собой и направлены в одну сторону. Их равнодействующая называется *силой тяжести* тела:

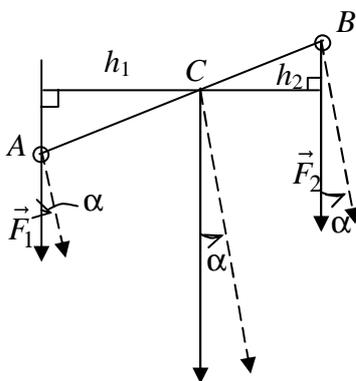


Рис. 7.1. К определению равнодействующей двух параллельных сил

Если размеры тела сравнительно невелики, то эти силы параллельны между собой и направлены в одну сторону. Их равнодействующая называется *силой тяжести* тела:

$$\vec{P} = \sum_{k=1}^n \vec{P}_k. \quad (7.1)$$

Равнодействующая двух параллельных и одинаково направленных сил проходит через одну и ту же точку  $C$  при любой ориентации сил относительно прямой, соединяющей точки их приложения (рис. 7.1).

Точка  $C$ , через которую проходит линия действия равнодействующей системы двух параллельных сил, направленных в одну и ту же сторону, делит отрезок  $AB$  между точками приложения сил системы на части, обратно-пропорциональные величинам этих сил:

$$\frac{AC}{CB} = \frac{F_2}{F_1}.$$

Если силы  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$  повернуть в одну и ту же сторону на угол  $\alpha$ , все останется без изменения и положение точки  $C$  не изменится. Точка  $C$  является геометрической характеристикой системы параллельных сил и называется *центром* системы двух параллельных сил. Очевидно, что эти действия и этот результат можно распространить на большое число параллельных сил, направленных в одну сторону.

Система сил тяжести частиц материального тела имеет свой центр тяжести, через который проходит линия действия равнодействующей элементарных сил. Эта геометрическая точка, принадлежащая телу, называется его *центром тяжести* и обозначается буквой  $C$ .

Выберем систему координат  $Oxyz$ , неизменно связанную с телом (рис. 7.2).

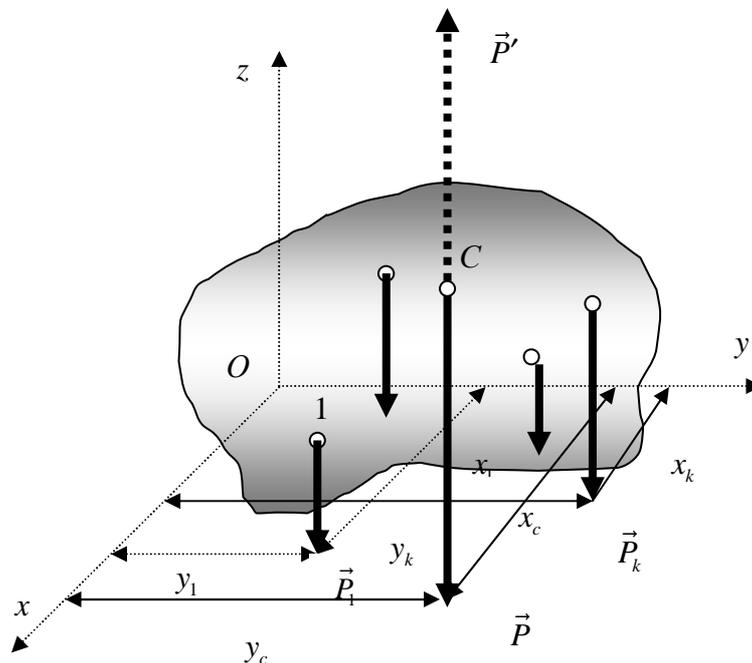


Рис. 7.2. К выводу положения центра тяжести тела

Ось  $Oz$  направим вертикально вверх, т.е. параллельно линиям действия сил тяжести. Мысленно приложим в точку  $C$  силу  $\vec{P}'$ , численно рав-

ную силе  $\vec{P}$ , но направленную противоположно ей, т.е. вертикально вверх. Очевидно, что эта сила  $\vec{P}'$  уравновесит систему сил тяжести и можно при-

менить уравнения равновесия  $\sum_{k=1}^n M_y(\vec{F}_k) = 0$ .

$$-P'x_c + P_1x_1 + P_2x_2 + \dots + P_nx_n = 0,$$

где  $x_c$  – плечо силы  $\vec{P}'$  относительно оси  $Oy$  и одновременно координата точки  $C$ ;  $x_1$  – плечо силы тяжести  $\vec{P}_1$  первой частицы тела и ее координата;  $x_2, \dots, x_n$  – аналогично.

Если  $x_k > 0$ , то момент силы положительный, если  $x_k < 0$ , то – отрицательный, т.е. в уравнении моментов складываются алгебраические величины с учетом их знаков.

Выразим  $x_c$  и, учитывая, что  $P' = P$ , получим

$$x_c = \frac{(P_1x_1 + P_2x_2 + \dots + P_nx_n)}{P}.$$

Используя положения о повороте параллельных сил на один и тот же угол, получим:

$$y_c = \frac{(P_1y_1 + P_2y_2 + \dots + P_ny_n)}{P},$$

$$z_c = \frac{(P_1z_1 + P_2z_2 + \dots + P_nz_n)}{P},$$

то есть 
$$x_c = \frac{\sum_{k=1}^n (P_k x_k)}{P}; \quad y_c = \frac{\sum_{k=1}^n (P_k y_k)}{P}; \quad z_c = \frac{\sum_{k=1}^n (P_k z_k)}{P}. \quad (7.2)$$

## 7.2. Центры тяжести линии, площади, объема

Координаты центра тяжести *геометрической линии*:

$$x_c = \frac{\sum_{k=1}^n (L_k x_k)}{L}; \quad y_c = \frac{\sum_{k=1}^n (L_k y_k)}{L}; \quad z_c = \frac{\sum_{k=1}^n (L_k z_k)}{L}, \quad (7.3)$$

где  $L_k$  – длина  $k$ -той части, на которые разбита вся линия  $L$ .

Координаты центра тяжести *плоской фигуры*:

$$x_c = \frac{\sum_{k=1}^n (A_k x_k)}{A}; \quad y_c = \frac{\sum_{k=1}^n (A_k y_k)}{A}, \quad (7.4)$$

где  $A_k$  – площадь  $k$ -той части фигуры;  $x_k, y_k$  – координаты центров тяжести  $k$ -той части фигуры;  $A$  – площадь плоской фигуры.

Координаты центра тяжести *объема*:

$$x_c = \frac{\sum_{k=1}^n (V_k x_k)}{V}; \quad y_c = \frac{\sum_{k=1}^n (V_k y_k)}{V}; \quad z_c = \frac{\sum_{k=1}^n (V_k z_k)}{V}, \quad (7.5)$$

где  $V_k$  – объем  $k$ -той частицы;  $x_k, y_k, z_k$  – координаты центров тяжести  $k$ -той части объема.

### 7.3. Методы определения положений центров тяжести тела

1. *Метод симметрии*. Если материальное тело имеет плоскость симметрии, то центр тяжести такого тела находится в этой плоскости. Если тело имеет две или три плоскости симметрии, то центр тяжести будет находиться на каждой из этих плоскостей, то есть на оси их пересечения или в центре симметрии тела.

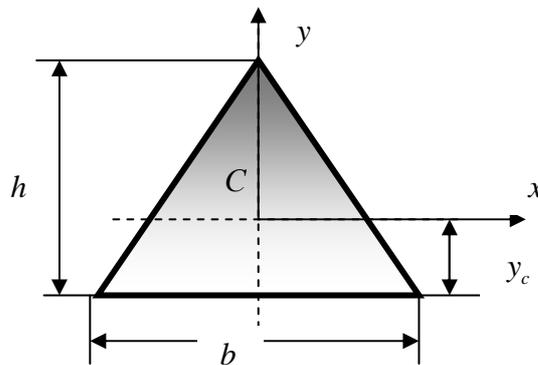
2. *Метод разбиения*. Рассматриваемое тело разбивается на несколько простейших тел, положение центров тяжести которых можно определить заранее или оно известно.

3. *Метод отрицательных масс*. Тело, имеющее свободные полости, полагают сплошным, а массу свободных полостей считают отрицательной.

### 7.4. Положение центров тяжести простейших тел

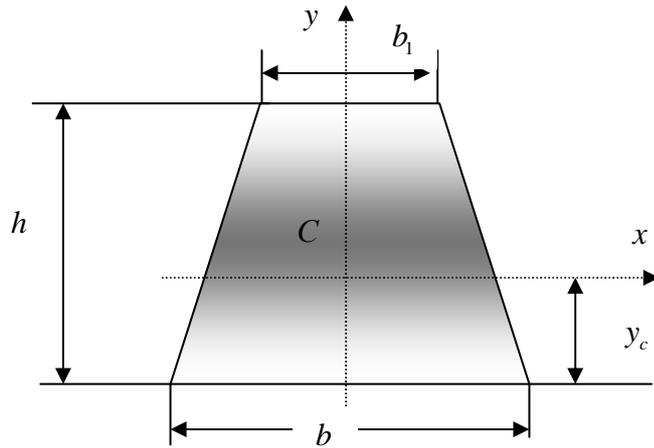
- *Треугольник*

$$y_c = \frac{h}{3}$$



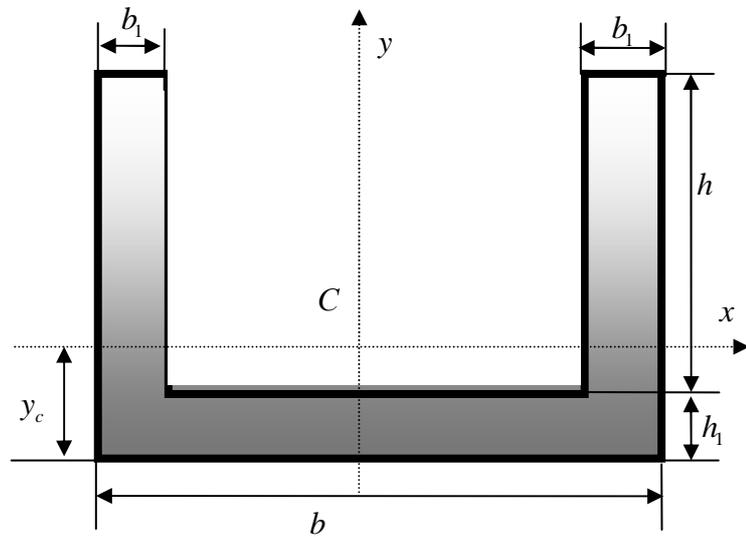
- Трапеция

$$y_c = \frac{h}{3} \cdot \frac{b + 2b_1}{b + b_1}$$



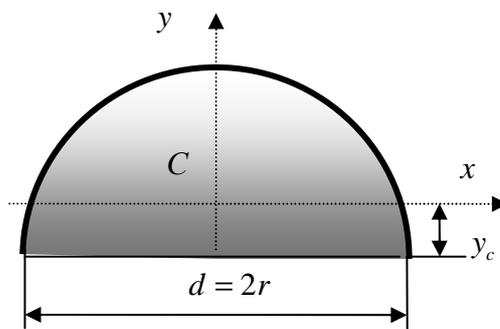
- Корытное сечение

$$y_c = \frac{bh_1^2 + 2b_1h(2h_1 + h)}{2(bh_1 + 2b_1h)}$$



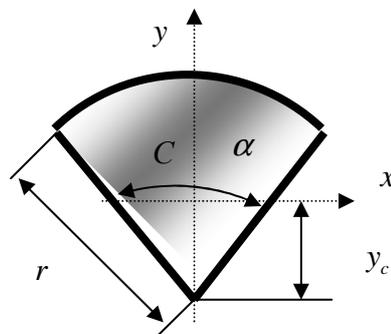
- Полуокруг

$$y_c = \frac{4r}{3\pi} \approx 0,424r$$



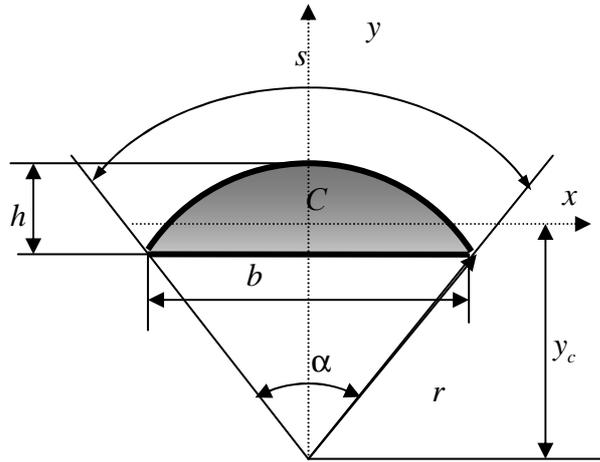
- Круговой сектор

$$y_c = \frac{4}{3}r \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{180^\circ}{\pi\alpha^\circ}$$



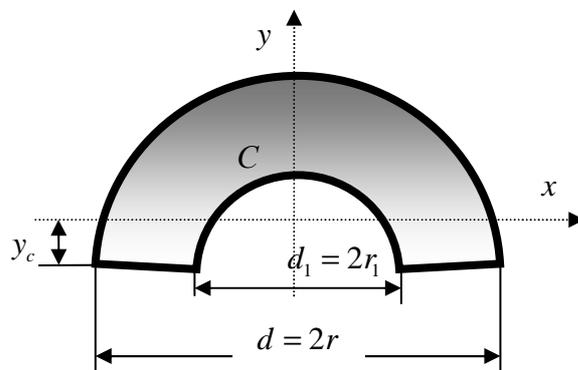
- *Круговой сегмент*

$$y_c = \frac{b^3}{12A} = \frac{4}{3} \cdot \frac{r \cdot \sin^3 \frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha^0 \pi}{180^0} - \sin \alpha}$$



- *Круговое полукольцо*

$$y_c = \frac{4}{3\pi} \frac{r^2 + rr_1 + r_1^2}{r + r_1}$$



### 7.5. Статический момент площади плоской фигуры относительно оси

Рассмотрим плоское поперечное сечение в осях координат  $Ox-Oy$  (рис. 7.3).

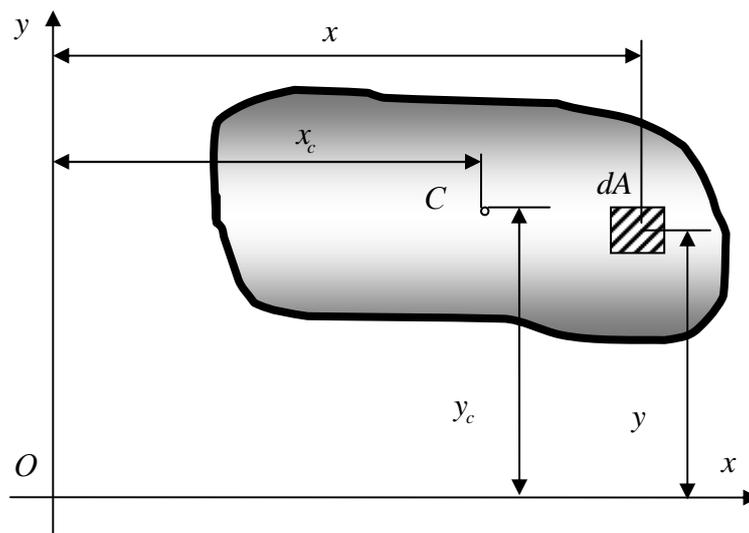


Рис. 7.3

Выделим элемент площади  $dA$  с координатами  $x$  и  $y$ . Используя положение о моменте силы относительно оси, можно составить выражение и для момента площади относительно оси, который называется *статическим моментом*:

$$dS_x = y \cdot dA; \quad dS_y = x \cdot dA.$$

Просуммировав эти произведения по всей площади, получим:

$$S_x = \int_A y \cdot dA; \quad S_y = \int_A x \cdot dA. \quad (7.6)$$

*Статическим моментом площади плоской фигуры относительно некоторой оси называется взятая по всей ее площади  $A$  сумма произведений элементарных площадок  $dA$  на их расстояния до этой оси.*

Статический момент площади относительно оси принято обозначать буквой  $S_k$  с соответствующим индексом. Его размерность –  $[\text{длина}]^3$ .

Если предположить, что  $x_c$  и  $y_c$  – координаты центра тяжести плоской фигуры, то на основании теоремы о моменте равнодействующей относительно оси статические моменты площади можно представить в виде

$$S_x = A \cdot y_c; \quad S_y = A \cdot x_c.$$

Отсюда получаем формулы для определения положения центра тяжести плоского сечения:

$$x_c = \frac{S_y}{A}; \quad y_c = \frac{S_x}{A}. \quad (7.7)$$

Если оси проходят через центр тяжести сечения ( $x_c = 0$ ;  $y_c = 0$ ), то статические моменты площади относительно этих осей равны нулю. Оси, проходящие через центр тяжести, называются *центральными*.

Статический момент может быть положительным, отрицательным или равным нулю в зависимости от расположения осей, относительно которых он определяется.

Для вычисления статических моментов площади сложной фигуры ее разбивают на простые части, для каждой из которых известны площадь  $A_k$  и положение центра тяжести  $(x_k, y_k)$ . Тогда

$$S_y = A_1 x_1 + A_2 x_2 + \dots + A_n x_n = \sum_{k=1}^n A_k x_k.$$

$$S_x = A_1 y_1 + A_2 y_2 + \dots + A_n y_n = \sum_{k=1}^n A_k y_k;$$

Отсюда можно найти положение центра тяжести сложной фигуры:

$$x_c = \frac{S_y}{A} = \frac{\sum_{k=1}^n A_k x_k}{\sum_{k=1}^n A_k}; \quad y_c = \frac{S_x}{A} = \frac{\sum_{k=1}^n A_k y_k}{\sum_{k=1}^n A_k}. \quad (7.8)$$

## Тема 8. ОСНОВНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ КИНЕМАТИКИ ТОЧКИ И ТВЕРДОГО ТЕЛА

Часть теоретической механики, в которой движение тела изучается независимо от его массы и воздействия на него окружающей среды, называется *кинематикой*. В кинематике изучаются геометрические свойства механического движения.

Механическое движение происходит в пространстве и во времени. *Время* – величина скалярная, непрерывно изменяющаяся. В кинематике оно принимается за независимую переменную, а другие переменные величины рассматриваются как изменяющиеся с течением времени. Его отсчет ведется от некоторого начального момента  $t_0 = 0$ , выбор которого определяется в каждом конкретном случае. Разность между двумя последовательными моментами времени называется *промежутком времени* и обозначается  $\Delta t = t - t_0$ .

### 8.1. Скорость точки

Рассмотрим произвольное движение точки. Непрерывная линия, которую описывает точка при своем движении, называется ее *траекторией*. Пусть в момент времени  $t$  точка находилась в положении  $M$  на своей траектории (рис. 8.1).

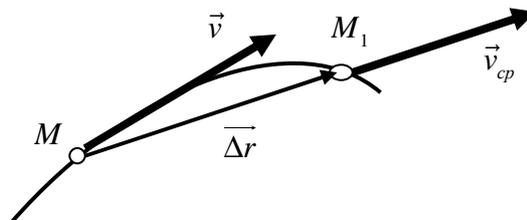


Рис. 8.1. К понятию средней скорости точки

Через промежуток времени  $\Delta t$ , т.е. в момент времени  $t_1 = t + \Delta t$ , она попадает в положение  $M_1$ . Вектор  $M\vec{M}_1$ , соединяющий положения движущейся точки в начале и в конце этого промежутка времени, называется ее *перемещением*. Оно характеризует положение точки в пространстве за промежуток времени  $\Delta t$ . Обозначим  $M\vec{M}_1 = \Delta\vec{r}$ . Отношение  $\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \vec{V}_{cp}$  называется *вектором средней скорости* точки. Вектор  $\vec{V}_{cp}$  характеризует среднюю быстроту, с которой происходит изменение положения точки в пространстве, а также – направление этого изменения.

Перемещение точки и путь как расстояние, пройденное точкой за этот промежуток времени, – разные понятия.

Если промежуток времени  $\Delta t$  уменьшать, то точка  $M_1$  будет ближе располагаться к точке  $M$ , при этом вектор  $\vec{V}_{cp}$  будет поворачиваться вокруг точки  $M$  и в пределе, когда  $\Delta t \rightarrow 0$ , он пройдет по касательной к траектории в точке  $M$  и будет иметь некоторое предельное значение:

$$\vec{V} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{V}_{cp} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \quad (8.1)$$

Вектор  $\vec{V}$  называется *скоростью* точки в момент времени  $t$ .

Итак, *скорость точки – это векторная величина, характеризующая быстроту и направление движения точки в данный момент времени. Она направлена по касательной к траектории точки.*

## 8.2. Способы задания движения точки

Движение точки может быть задано одним из следующих способов: естественным, координатным и векторным.

*Естественный* способ задания движения точки состоит в следующем (рис. 8.2). Указывается траектория точки. На траектории выбирается в качестве начала отсчета некоторая точка  $O$ , и условно принимаются направления, по которым будут откладываться вдоль траектории положительные и отрицательные дуговые координаты движения точки. Затем задается закон движения точки по траектории.

В общем виде он может быть записан так:

$$O\vec{M} = S_M = f(t). \quad (8.2)$$

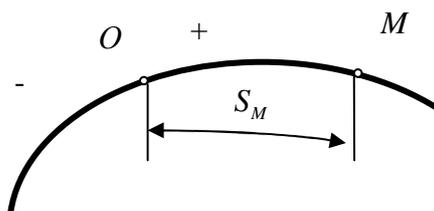


Рис. 8.2. Естественный способ задания движения точки

При *координатном* способе задания движения точки ее положение в пространстве определяется координатами  $x, y, z$  (рис. 8.3). При движении точки они изменяются с течением времени, т.е. являются функциями времени:

$$x = f_1(t); \quad y = f_2(t); \quad z = f_3(t). \quad (8.3)$$

Эти уравнения называются кинематическими уравнениями движения точки в прямоугольной пространственной системе координат  $Oxyz$ .

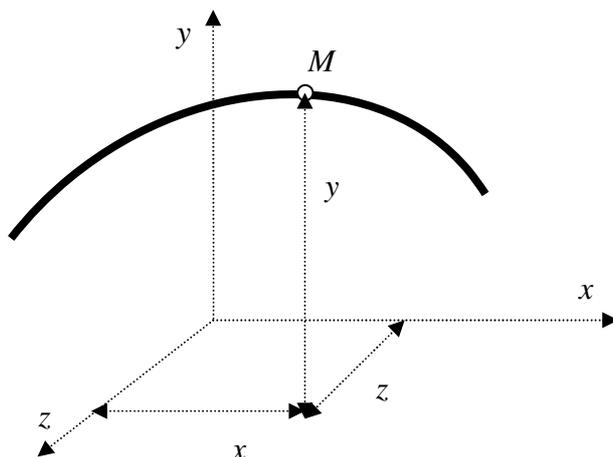


Рис. 8.3. Координатный способ задания движения точки

При *векторном* способе задания движения точки в пространстве положение точки определяется при помощи радиус-вектора  $\vec{r}$ , проведенного к движущейся точке  $M$  из некоторой точки  $O$ , принимаемой за систему отсчета (рис. 8.4). При движении точки ее радиус-вектор изменяется с течением времени и если будет известно, как это происходит, то положение точки может быть найдено в любой момент времени.

Чтобы задать радиус-вектор точки, необходимо указать его модуль, т.е. длину отрезка  $OM$  и направление луча  $OM$  (например, угол  $\varphi$  с осью  $y$ ). Изменение радиус-вектора может быть описано некоторой функцией вида

$$\vec{r} = f(t). \quad (8.4)$$

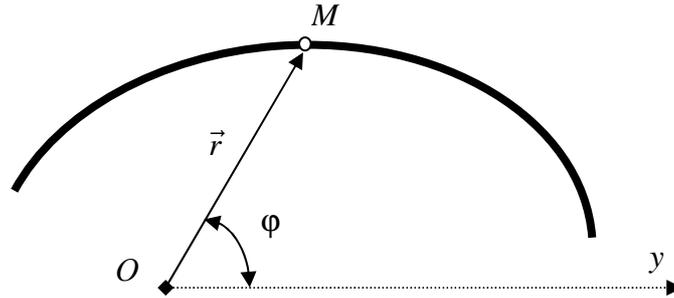


Рис. 8.4. Векторный способ задания движения точки

### 8.3. Определение скорости точки при различных способах задания ее движения

Скоростью точки называют одну из кинематических мер ее движения. Скорость показывает, как быстро и в каком направлении происходит движение точки. Выясним, каким математическим выражением можно описать это понятие. Рассмотрим естественный способ задания движения точки.

Пусть заданы траектория и закон движения точки  $S_M = f(t)$ , рис. 8.5.

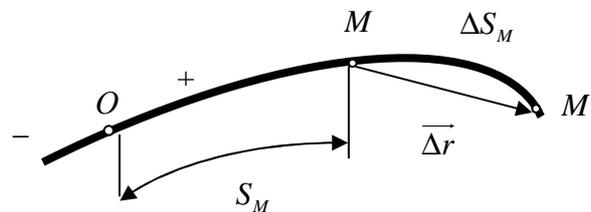


Рис. 8.5. Определение скорости движения точки при естественном способе задания ее движения

Предположим, что в моменты времени  $t$  и  $t_1 = t + \Delta t$  дуговые координаты движущейся точки равны  $f(t)$  и  $f(t_1)$ , и на траектории точка занимает в эти моменты времени положения  $M$  и  $M_1$ . Разность  $\Delta S = f(t_1) - f(t)$  называется перемещением дуговой координаты движущейся точки за промежуток времени  $\Delta t$ . Отношение  $\frac{\Delta S_M}{\Delta t} = v_{cp}$  называется средней алгебраической скоростью точки за заданный промежуток времени.

Алгебраическая скорость точки в данный момент времени

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_{cp} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S_M}{\Delta t} = \frac{dS_M}{dt} = f'(t). \quad (8.5)$$

Размерность скорости –  $\left[ \frac{\text{м}}{\text{с}} \right]$ .

При *естественном* способе задания движения точки ее скорость в данный момент времени определяется как алгебраическая величина, равная первой производной по времени от закона ее движения по траектории

$$v = f'(t) = \frac{dS_M}{dt}. \quad (8.6)$$

Если  $f'(t) > 0$ , то движение осуществляется по положительному направлению, а если  $f'(t) < 0$ , то – по принятому отрицательному.

При *координатном* способе задания движения точки рассматривается ее движение в прямоугольной системе координат  $Oxy$ , рис. 8.6.

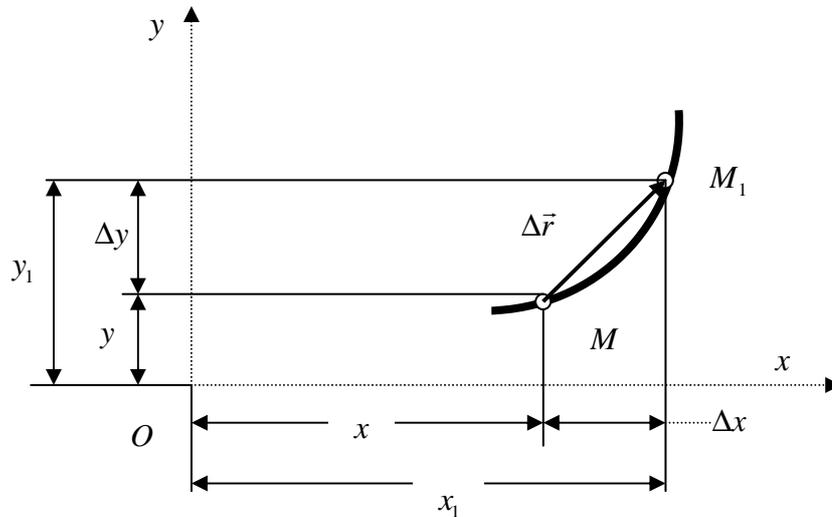


Рис. 8.6. К определению скорости точки при координатном способе задания ее движения

Будем считать, что заданы уравнения ее движения:

$$x = f_1(t); \quad y = f_2(t).$$

Пусть в момент времени  $t$  координаты точки равны  $x$  и  $y$ , и она занимает положение  $M$ , а в момент времени  $t_1 = t + \Delta t$  – положение  $M_1$  с

координатами  $x_1 = x + \Delta x$  и  $y_1 = y + \Delta y$ . Вектор средней скорости  $\vec{v}_{cp} = \frac{MM_1}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$ . Найдем его проекции на координатные оси, как и проекции вектора силы:

$$\begin{aligned} v_{cp_x} &= \frac{(\Delta \vec{r})_x}{\Delta t} = \frac{x_1 - x}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}; \\ v_{cp_y} &= \frac{(\Delta \vec{r})_y}{\Delta t} = \frac{y_1 - y}{\Delta t} = \frac{\Delta y}{\Delta t}. \end{aligned} \quad (8.7)$$

В пределе  $\Delta t \rightarrow 0$ , получим проекции вектора скорости на оси  $x$  и  $y$  в данный момент времени:  $v_x = \frac{dx}{dt}$ ;  $v_y = \frac{dy}{dt}$ . Если движение точки задано в системе координат  $Oxy$ , то по заданным уравнениям движения точки определяются проекции вектора скорости на координатные оси как первые производные по времени от этих уравнений.

Модуль и направление скорости определяются по следующим формулам:

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{(v_x)^2 + (v_y)^2}; \\ \cos(\widehat{\vec{v}, x}) &= \frac{v_x}{v}; \quad \cos(\widehat{\vec{v}, y}) = \frac{v_y}{v}. \end{aligned} \quad (8.8)$$

При *векторном* способе задания движения точки вектор скорости равен  $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$  или в проекциях на оси координат

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt} \vec{i} + \frac{dy}{dt} \vec{j} + \frac{dz}{dt} \vec{k}, \quad (8.9)$$

где  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  – единичные орты.

#### 8.4. Ускорение точки

*Векторная величина, характеризующая изменение скорости точки, называется ее ускорением.*

Пусть в момент времени  $t$  скорость точки равна  $\vec{v}$ , а в момент времени  $t_1 = t + \Delta t$  равна  $\vec{v}_1$ , рис. 8.7.

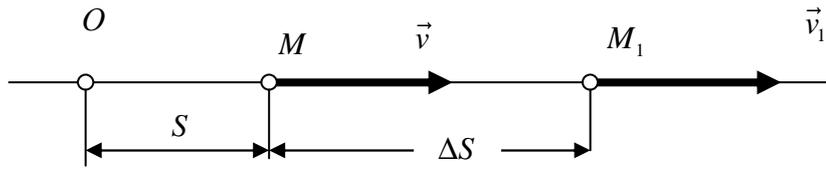


Рис. 8.7. К понятию среднего ускорения точки

Изменение скорости за промежуток времени  $\Delta t$  будет  $\Delta v = v_1 - v$ .  
 Отношение  $\frac{\Delta v}{\Delta t} = a_{cp}$  называется *средним ускорением* точки за промежуток времени  $\Delta t$ . Это алгебраическая величина и в зависимости от значений  $v_1$  и  $v$  может быть больше и меньше нуля. Предел этого отношения при  $\Delta t \rightarrow 0$  есть *ускорение* точки

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} a_{cp} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}. \quad (8.10)$$

При естественном способе задания движения точки ее ускорение равно:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 S_M}{dt^2}. \quad (8.11)$$

*При прямолинейном движении ускорение точки является первой производной по времени от ее алгебраической скорости или второй производной от закона ее движения по траектории.* Размерность ускорения –  $\left[ \frac{\text{м}}{\text{с}^2} \right]$ .

При координатном способе задания движения величина и направление ускорения определяются следующими формулами:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2}; \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2 y}{dt^2}; \quad a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}; \quad (8.12)$$

$$\cos(\widehat{\vec{a}, x}) = \frac{a_x}{a}; \quad \cos(\widehat{\vec{a}, y}) = \frac{a_y}{a}.$$

Рассмотрим равномерное движение точки по окружности, рис. 8.8. Пусть в момент времени  $t$  точка находится в положении  $M$  и имеет скорость  $\vec{v}$ . Через промежуток времени  $\Delta t$ , в момент времени  $t_1 = t + \Delta t$ , точка находится в положении  $M_1$  и имеет скорость  $\vec{v}_1$  (величина скорости не изменилась, но изменилось ее направление). Перенесем вектор  $\vec{v}_1$  точку  $M$  и покажем изменение вектора скорости  $\Delta \vec{v} = \vec{v}_1 - \vec{v}$ .

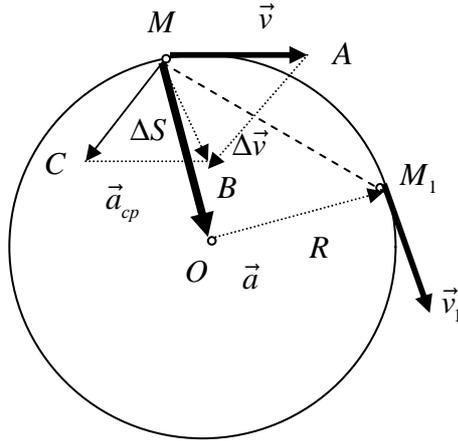


Рис. 8.8. К понятию ускорения точки

Полученный треугольник  $\triangle MAB$  достроим до параллелограмма, в котором вектор  $\overrightarrow{MB}$  является диагональю. Вектор среднего ускорения точки  $-\frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \vec{a}_{cp}$ . При делении вектора на положительное число его направление не меняется. Поэтому вектор  $\vec{a}_{cp}$  направлен вдоль вектора  $\Delta \vec{v}$ ; покажем его на рис. 8.8, приложенным в точку  $M$  по стороне  $MC$ . Если промежуток  $\Delta t$  уменьшается, то точка  $M_1$  будет все ближе располагаться к точке  $M$ ; при этом вектор  $\vec{a}_{cp}$  будет поворачиваться против хода часовой стрелки вокруг точки  $M$ . В пределе при  $\Delta t \rightarrow 0$  он пройдет по радиусу  $MO$ , т.к. окажется перпендикулярным к вектору скорости  $\vec{v}$ .

Таким образом, ускорение точки при равномерном движении по окружности направлено по радиусу этой окружности к ее центру  $O$ . Оно называется *центростремительным или нормальным ускорением точки* и равно

$$a_n = \frac{v^2}{R}. \quad (8.13)$$

При неравномерном движении по окружности полное ускорение точки будет геометрически складываться из нормального и касательного:

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau; \quad (8.14)$$

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 S}{dt^2}. \quad (8.15)$$

Нормальное ускорение  $\vec{a}_n$  характеризует изменение направления скорости. Касательное ускорение  $\vec{a}_\tau$  характеризует изменение величины скорости.

В случае криволинейного движения точки величина и направление ускорения определяются по следующим формулам:

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}; \quad (8.16)$$

направление ускорения определим через функцию угла  $\mu$ , например,

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{|a_\tau|}{a_n}; \quad (8.17)$$

величина нормального ускорения равна  $a_n = \frac{v^2}{\rho}$ .

### 8.5. Частные случаи движения точки

При равномерном движении точки не изменяется величина ее скорости. Поэтому  $a_\tau = 0 = \text{const}$  независимо от вида траектории, а движение точки происходит в одном направлении. Закон равномерного движения точки по траектории таков

$$S = S_0 + vt, \quad (8.18)$$

где  $S_0$  – начальное положение точки.

При прямолинейном движении точки ее нормальное ускорение равно нулю независимо от величины скорости.

Движение точки называется *ускоренным*, если с течением времени увеличивается величина ее скорости.

Движение точки называется *замедленным*, если с течением времени величина скорости уменьшается.

Движение точки называется *равнопеременным*, если за любые одинаковые промежутки времени скорость точки изменяется на одну и ту же величину. При этом

$$v = v_0 + a_\tau t; \quad S = S_0 + v_0 t + \frac{a_\tau t^2}{2}. \quad (8.19)$$

## 8.6. Простейшие движения твердого тела

К простейшим движениям твердого тела относятся поступательное движение и вращение вокруг неподвижной оси.

**Поступательным** называется такое движение тела, при котором любая прямая, проведенная в нем, перемещается параллельно своему первоначальному положению. При поступательном движении все его точки движутся по одинаковым траекториям и в любой момент времени имеют одинаковые скорости и ускорения. Примеры поступательного движения тел: лифт; вагон или автомобиль на прямолинейном участке дороги и др. При поступательном движении траекторией точки может быть любая линия, в том числе и пространственная; точки поступательно движущегося тела описывают одинаковые траектории и при наложении совмещающиеся друг с другом, т.е. все точки поступательно движущегося тела имеют одинаковую кинематику. Для описания движения тела достаточно определить движение одной его точки и по заданному закону движения найти все кинематические величины. *Уравнения поступательного движения* тела имеют вид:

$$x_A = x_A(t); \quad y_A = y_A(t); \quad z_A = z_A(t). \quad (8.20)$$

**Вращательным** движением твердого тела вокруг неподвижной оси называется такое движение, при котором прямая, проходящая через какие-нибудь две точки тела, во время движения, остается неподвижной. Эта прямая называется *осью вращения* тела. Чтобы определить положение тела в пространстве, через ось вращения проводим две полуплоскости, рис. 8.9. Одна из них неподвижна и может быть принята за систему отсчета, а другая неизменно связана с телом. Положение тела при вращении вокруг неподвижной оси определяется углом  $\varphi$  между полуплоскостями.

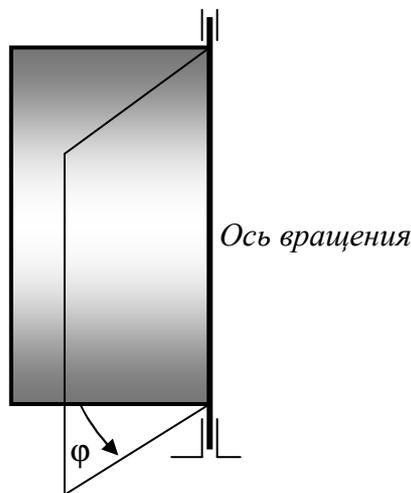


Рис. 8.9. К понятию вращательного движения твердого тела

Угол  $\varphi$  называется *углом поворота* тела и считается положительным при вращении против хода часовой стрелки, измеряется в радианах. При вращении угол поворота непрерывно изменяется во времени. *Уравнение вращательного движения* тела имеет вид

$$\varphi = f(t). \quad (8.21)$$

При известном числе  $N$  оборотов тела угол поворота определяется так  $\varphi = 2\pi N$ .

Изменение угла поворота  $\Delta\varphi$  за промежуток времени  $\Delta t$  характеризует перемещение тела в пространстве, а отношение  $\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$  – среднюю угловую скорость тела. При  $\Delta t \rightarrow 0$ , получаем *угловую скорость* тела

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}. \quad (8.22)$$

Угловая скорость измеряется в радианах в секунду. В технике угловую скорость часто задают числом оборотов в минуту  $n$ , т.е. частотой вращения. В этом случае, угловую скорость, выраженную в рад/с, определяют так:  $\omega = \frac{\pi n}{30}$ . Знак  $\omega$  совпадает со знаком  $\varphi$ .

*Угловое ускорение*

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}. \quad (8.23)$$

Угловое ускорение измеряется в рад/с<sup>2</sup> или 1/с<sup>2</sup> или с<sup>-2</sup>.

Если в расчетах знаки  $\omega$  и  $\varepsilon$  одинаковы, то вращение тела ускоренное, если противоположные – то замедленное.

***Частные случаи вращательного движения тела:***

– *равномерное вращение*

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t; \quad \omega = const; \quad (8.24)$$

– *равнопеременное вращение*

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t; \quad \varepsilon = const; \quad \varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}. \quad (8.25)$$

***Линейные скорости и ускорения точек твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси.*** Траекториями точек тела при его вращении вокруг неподвижной оси, являются окружностями, расположенными в

плоскостях перпендикулярных к оси вращения. Центры этих окружностей находятся в точках пересечения оси вращения с указанными плоскостями. Скорость любой точки  $K$  тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, называется *линейной* и определяется как

$$V_K = \omega \cdot h_K, \quad (8.26)$$

где  $h_K$  – расстояние от точки до оси вращения.

*Линейная скорость точки тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, по величине равна произведению радиуса вращения на величину угловой скорости.*

Линейная скорость направлена по касательной к окружности в сторону вращения и, таким образом, перпендикулярна радиусу вращения.

Ускорение точки определяется векторной суммой касательного и нормального ускорений, значения которых выразим через кинематические характеристики вращательного движения тела, т.е. через  $\omega$  и  $\varepsilon$ :

$$\begin{aligned} a_{n_K} &= \omega^2 \cdot h_K; \\ a_{\tau_K} &= \varepsilon \cdot h_K; \\ a_K &= \sqrt{(a_{n_K})^2 + (a_{\tau_K})^2}. \end{aligned} \quad (8.27)$$

*Нормальное ускорение точки тела при вращении его вокруг неподвижной оси равно произведению радиуса вращения на квадрат угловой скорости. Касательное ускорение равно произведению радиуса вращения на угловое ускорение. Нормальное ускорение всегда направлено по радиусу вращения к центру вращения. Касательное ускорение направлено по касательной к траектории, т.е. перпендикулярно радиусу вращения в сторону углового ускорения.*

Модуль полного ускорения определяется по формуле

$$a_K = h_K \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \quad (8.28)$$

Направление полного ускорения определим по тангенсу угла  $\mu$ , который образует вектор полного ускорения с вектором нормального ускорения. Тогда получим

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2}. \quad (8.29)$$

## Тема 9. ДИНАМИКА ТОЧКИ

*Динамикой* называется раздел теоретической механики, в котором изучаются общие свойства механического движения материальных тел с учетом причин, которые его обуславливают.

### 9.1. Основные положения динамики

В качестве движущихся объектов, в динамике, рассматриваются материальная точка и система материальных точек (механическая система). *Изолированной материальной точкой* называют такую точку, на которую не действуют другие материальные точки. Это условное понятие, т.к. изолированных тел в природе не существует. При динамических исследованиях материальная точка – абстрактный образ реального тела или его части, который имеет вид геометрической точки с массой, равной массе данного тела или части этого тела.

Различные тела по-разному реагируют на действие приложенных к ним сил: тяжелое, массивное тело труднее разогнать, но и труднее остановить. Способность тел сохранять состояние своего движения называется *инертностью*. Инертность зависит от количества вещества, содержащегося в теле.

Величина, зависящая от количества вещества в данном теле и определяющая его инертность, называется *массой* тела. В общем случае, инертность тела зависит от размеров тела и взаимного расположения его частиц, т.е. от характера распределения масс между точками тела.

Для того чтобы измерить или охарактеризовать действие силы на материальную точку вводят понятия *работа* и *импульс силы*.

*Работа силы* равна произведению ее модуля на путь и на косинус угла между направлением силы и направлением перемещения:

$$A = F \cdot s \cdot \cos \alpha. \quad (9.1)$$

Единица работы – *джоуль* (Дж). *Один джоуль – это работа силы в один ньютон на пути в один метр.*

*Импульс силы* является мерой механического воздействия на материальное тело за конечный промежуток времени. Размерность импульса – Н·с.

*Кинетической энергией* точки называется скалярная мера ее движения, равная половине произведения массы точки на квадрат ее скорости:

$$T = \frac{mv^2}{2}. \quad (9.2)$$

Кинетическая энергия измеряется в *джоулях*, как и работа силы.

*Количеством движения* материальной точки называется векторная мера ее движения, равная произведению массы точки на вектор ее скорости:

$$\vec{q} = m \cdot \vec{v}. \quad (9.3)$$

Оно имеет размерность силы, умноженной на время – Н·с.

*Механической системой* называется такая совокупность материальных точек, в которой их положения и движения взаимосвязаны и взаимозависимы.

## 9.2. Законы динамики

В основе динамики лежат четыре закона, установленные Г. Галилеем и И. Ньютоном путем обобщения результатов многочисленных опытов и наблюдений за движением тел.

**Первый закон** (закон инерции) – *изолированная материальная точка сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения.*

Любое движение можно рассматривать лишь по отношению к другим телам или системам отсчета. *Системы отсчета*, в которых выполняется закон инерции, называются *инерциальными*.

**Второй закон** (основной) – *ускорение, получаемое материальной точкой, под действием приложенной к ней силы, имеет направление силы и по величине пропорционально ей* (рис. 9.1):

$$\vec{F} = m\vec{a}. \quad (9.4)$$

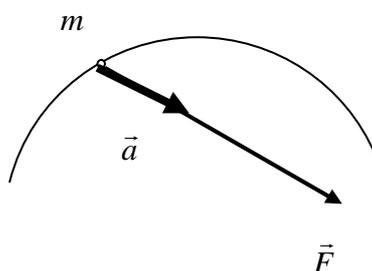


Рис. 9.1. К определению второго закона динамики

Коэффициентом пропорциональности в приведенной зависимости является масса точки; чем больше масса точки, тем меньше будет ее ускорение при действии данной силы.

**Третий закон** (принцип равенства действия и противодействия) – два материальных тела взаимодействуют друг с другом с силами, равными по величине и направленными по одной прямой в противоположные стороны (рис. 9.2).

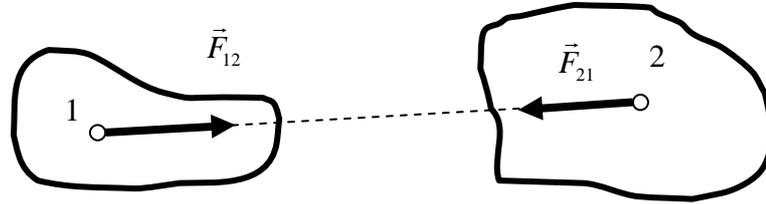


Рис. 9.2. К определению третьего закона динамики

Третий закон подтверждает, что масса точки является мерой ее инертности; при взаимодействии двух материальных точек с массами  $m_1$  и  $m_2$ , действующие на них силы численно равны; величины их ускорений определяют по второму закону динамики из следующих формул:

$$F_{12} = m_1 \cdot a_1; \quad F_{21} = m_2 \cdot a_2.$$

Откуда

$$F_{12} = F_{21} : \frac{a_1}{a_2} = \frac{m_2}{m_1}. \quad (9.5)$$

То есть величины ускорений точек обратно пропорциональны их массам, если действующие на них силы равны.

**Четвертый закон** (принцип независимости действия сил) – ускорение, получаемое материальной точкой при действии на нее нескольких сил, равно геометрической сумме тех ускорений, которые получила бы точка при действии каждой силы в отдельности:

$$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \dots + \vec{a}_n, \quad (9.6)$$

где  $\vec{a}_1 = \frac{\vec{F}_1}{m}$ ,  $\vec{a}_2 = \frac{\vec{F}_2}{m}$ , ...,  $\vec{a}_n = \frac{\vec{F}_n}{m}$ .

### 9.3. Две основные задачи динамики материальной точки

Объединяя четвертый и второй законы динамики, получаем *основное уравнение динамики материальной точки*

$$m \cdot \vec{a} = \sum \vec{F}_K. \quad (9.7)$$

С его помощью могут быть решены две основные задачи динамики точки (масса точки считается известной):

– по заданному закону движения материальной точки найти силу, обуславливающую это движение. Решение первой основной задачи динамики точки сводится к определению ее ускорения. Неизвестная сила может быть найдена из основного уравнения динамики материальной точки после подстановки в него найденного ускорения точки.

– по известным силам, действующим на материальную точку, требуется определить закон ее движения.

#### 9.4. Принцип Д'Аламбера

Рассмотрим движение несвободной точки. Пусть на нее действует заданная сила  $\vec{F}$  и сила реакции связи  $\vec{R}$  (рис. 9.3). Под действием этих сил точка получает ускорение  $\vec{a}$ , определяемое по основному уравнению динамики:

$$m \cdot \vec{a} = \vec{F} + \vec{R}.$$

Перепишем полученное уравнение в следующем виде

$$\vec{F} + \vec{R} + (-m \cdot \vec{a}) = 0.$$

Складывать можно только такие величины, которые имеют одинаковую размерность и одинаковый физический смысл. Поэтому вектор  $(-m \cdot \vec{a})$  должен быть силой. Назовем его *силой инерции* материальной точки и обозначим буквой  $\vec{\Phi}$ .

$$\vec{\Phi} = -m \cdot \vec{a}. \quad (9.8)$$

Тогда получим следующее уравнение равновесия

$$\vec{F} + \vec{R} + \vec{\Phi} = 0, \quad (9.9)$$

то есть если к точке, движущейся с ускорением под действием каких-то сил, дополнительно приложить еще и силу ее инерции, то она придет в состояние равновесия – сущность принципа Д'Аламбера.

Это искусственный прием, позволяющий уравнение движения точки записывать в виде уравнения равновесия. Он лежит в основе метода *кинетостатики*.

При криволинейном движении полное ускорение точки состоит из касательного и нормального, поэтому и силу инерции следует представлять в виде двух составляющих  $\vec{\Phi}_\tau = m \cdot \vec{a}_\tau; \vec{\Phi}_n = m \cdot \vec{a}_n$ , которые направлены противоположно касательному и нормальному ускорениям точки.

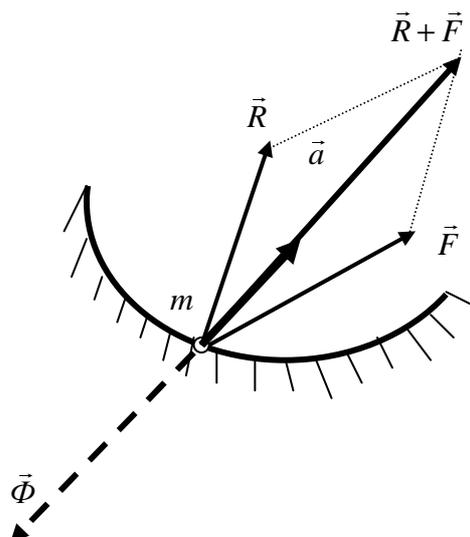


Рис. 9.3. К понятию принципа Д'Аламбера

Это искусственный прием, позволяющий уравнение движения точки записывать в виде уравнения равновесия. Он лежит в основе метода *кинетостатики*.

При криволинейном движении полное ускорение точки состоит из касательного и нормального, поэтому и силу инерции следует представлять в виде двух составляющих  $\vec{\Phi}_\tau = m \cdot \vec{a}_\tau$ ;  $\vec{\Phi}_n = m \cdot \vec{a}_n$ , которые направлены противоположно касательному и нормальному ускорениям точки.

При решении задач методом кинетостатики рекомендуется придерживаться следующей последовательности:

- изобразить точку в заданном положении и показать ее ускорение;
- приложить силы, реально действующие на точку в этом положении;
- приложить к точке ее силу инерции, направив противоположно ускорению самой точки;
- составить и решить уравнения равновесия для полученной системы сил, включая в них силу инерции наравне с реальными силами (заданными и реактивными).

## 9.5. Общие теоремы динамики

Основное уравнение динамики дает возможность определить только ускорение точки. Дальнейшее решение задачи по определению скорости, траектории и т.д. связано с применением соответствующего математического аппарата и использованием *общих теорем* динамики.

**Теорема об изменении кинетической энергии точки** – изменение кинетической энергии материальной точки при бесконечно малом перемещении последней равно элементарной работе силы, приложенной к этой точке:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = A. \quad (9.10)$$

**Теорема об изменении количества движения точки** – изменение количества движения материальной точки за конечный промежуток времени равно импульсу силы, действующей на эту точку, за данный промежуток времени:

$$\vec{q}_2 - \vec{q}_1 = \vec{I}. \quad (9.11)$$

**Теорема об изменении кинетической энергии системы** – изменение кинетической энергии системы на конечном перемещении равно сумме работ внешних и внутренних сил, приложенных ко всем точкам системы на их конечных перемещениях:

$$T_2 - T_1 = \sum A_K^{\text{внеш}} + \sum A_K^{\text{внутр}}. \quad (9.12)$$

**Теорема об изменении количества движения системы** – изменение количества движения системы за промежуток времени от  $t_1$  до  $t_2$  равно конечному импульсу внешних сил, приложенных к точкам системы, за этот же промежуток времени:

$$\vec{Q}_2 - \vec{Q}_1 = \sum \vec{F}_K^{\text{внеш}} dt = \sum \vec{I}_k^{\text{внеш}}. \quad (9.13)$$

## Тема 10. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ГИПОТЕЗЫ В СОПРОТИВЛЕНИИ МАТЕРИАЛОВ

Основное требование, предъявляемое к любой конструкции, заключается в ее надежности, т.е. в безопасности и долговечности при эксплуатации. Для достижения этого необходимо, чтобы все элементы конструкции были прочны, жестки и устойчивы.

Наука, рассматривающая вопросы расчета элементов конструкции на прочность, жесткость и устойчивость, называется *сопротивлением материалов*.

В отличие от теоретической механики, где все тела рассматриваются как абсолютно твердые, в сопротивлении материалов учитывается, что эле-

менты конструкций под действием нагрузок изменяют свою форму и размеры, т.е. деформируются, а в некоторых случаях и разрушаются.

Под *прочностью* понимается способность элементов конструкций сопротивляться внешнему воздействию, не разрушаясь. Расчеты на прочность позволяют определить форму и размеры элементов при заданных нагрузках с наименьшей затратой материала.

Под *жесткостью* понимается способность элементов конструкций противостоять образованию деформаций. Расчеты на жесткость показывают, в каких пределах возможно изменение формы и размеров элементов и конструкции в целом при внешнем воздействии.

*Устойчивостью* называется способность элементов конструкций сохранять определенную начальную форму упругого равновесия. Расчеты на устойчивость предотвращают возможность искривления и внезапной потери устойчивости длинных и тонких элементов.

### 10.1. Внешние силы

Все рабочие элементы конструкций воспринимают *внешние нагрузки* (внешние силы) и передают их действие друг другу. Внешние силы делятся на *объемные* и *поверхностные*.

*Объемные* силы (отнесенные к единице объема) или *массовые* (отнесенные к единице массы) приложены в каждой точке объема, и, следовательно, непрерывно распределены по объему тела. К ним относятся собственный вес, магнитные силы, силы инерции, центробежные силы и др.

*Поверхностные* силы – это силы контактного взаимодействия между элементами тела или между элементом и прилегающей средой (вода, воздух, пар, снег и др.). Они могут быть:

– *непрерывно распределенными по поверхности* (ветровые либо снежные нагрузки и др.). Их интенсивность измеряется нагрузкой, приходящейся на единицу площади, Па;

– *непрерывно распределенными по линии* (собственный вес балки перекрытия и др.). Их интенсивность измеряется нагрузкой, приходящейся на единицу длины, Н/м;

– *сосредоточенные силы* – те, которые передаются на элемент конструкции через бесконечно малые площадки (действие веса трамвая на рельсы и др.). Их размерность, Н. Из-за очень малых размеров площадки соприкосновения сосредоточенную силу считают приложенной в точке.

По времени действия сил бывают *постоянные* и *временные* нагрузки. *Постоянные* нагрузки действуют на протяжении всего времени работы

конструкции (собственный вес). *Временные* нагрузки действуют лишь некоторое время (вес снега, ветровая нагрузка, вес автомобиля, проезжающего по мосту и др.).

По характеру приложения сил во времени различают *статические* и *динамические* нагрузки. *Статические* нагрузки прикладываются к конструкции постепенно, ускорения элементов конструкций при этом отсутствуют, они не меняются или меняются незначительно. Такие нагрузки преобладают в гидротехнических сооружениях. Кроме того, примерами такой нагрузки могут служить кладка фундамента и стен по мере их возведения, снеговая нагрузка на кровлю и т.д.

*Динамические* нагрузки вызывают ускорения в элементах конструкций. Они подразделяются:

- на внезапно приложенные (нагрузка на мост при прохождении железнодорожного состава);
- ударные (действие копрового молота на забиваемую им сваю);
- повторно-переменные и циклические, многократно действующие на элементы конструкций (нагрузка на шатун двигателя, нагрузка на зубья зубчатых колес).

К внешним силам, действующим на элементы конструкций, кроме нагрузок – *активных* сил, относятся также реакции связей – *реактивные* силы.

## 10.2. Линейные и угловые деформации

Под действием нагрузки конструкция деформируется, т.е. ее размеры и форма изменяются. Рассмотрим, что представляют собой линейные и угловые деформации.

Мысленно через точку  $a$  тела в направлениях осей  $x$  и  $y$  проведем бесконечно малые отрезки  $ab$  и  $ac$ , длина которых  $dx$  и  $dy$  (рис. 10.1).

Обозначим  $\Delta dx$  и  $\Delta dy$  изменения длин этих отрезков после приложения нагрузки к телу (когда точки  $a, b, c$  переместятся в положения  $a', b', c'$ ). Отношение  $\frac{\Delta dx}{dx}$  представляет собой *линейную деформацию*  $\epsilon_x$  (эпсилон) в точке  $a$ , т.е.  $\epsilon_x = \frac{\Delta dx}{dx}$ .

Аналогично  $\epsilon_y = \frac{\Delta dy}{dy}$  и  $\epsilon_z = \frac{\Delta dz}{dz}$ .

Изменение первоначально прямого угла между отрезками  $ab$  и  $ac$  после приложения нагрузки к телу, выраженное в радианах, представляет собой *угловую деформацию*  $\gamma_{xy}$  (гамма) в точке  $a$  в плоскости  $xy$ . Аналогично  $\gamma_{yz}$  и  $\gamma_{zx}$  представляют собой угловые деформации в плоскостях  $yz$  и  $zx$ .

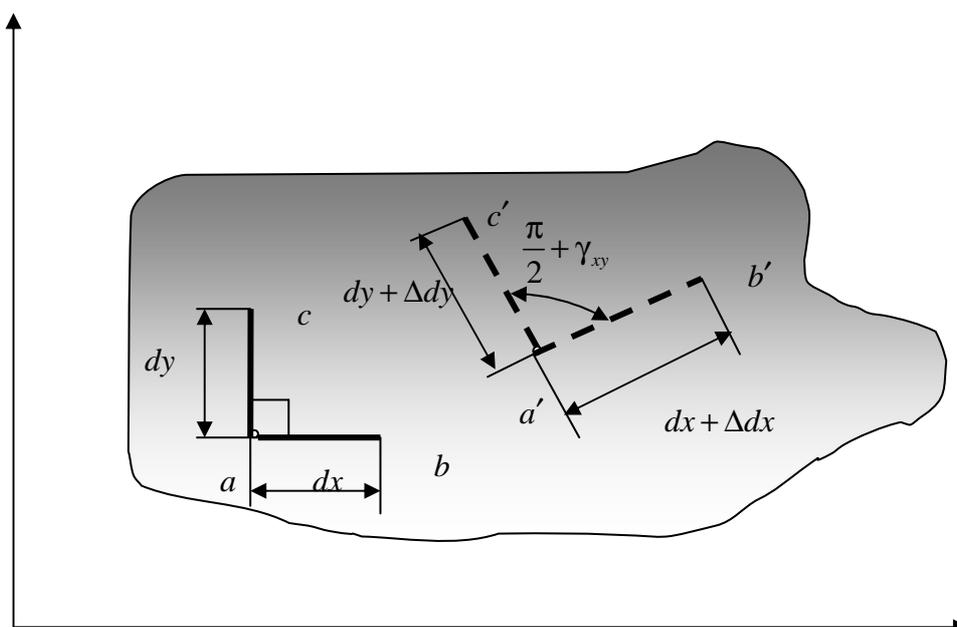


Рис. 10.1. К понятию линейных и угловых деформаций

Деформации конструкции в каждой ее точке по любым направлениям известны, если определены *линейные деформации*  $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$  в направлениях осей  $x, y, z$  прямоугольной системы координат и *угловые деформации*  $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$  в плоскостях  $xy, yz, zx$ .

Линейные и угловые деформации – величины безразмерные. Деформацию  $\epsilon$  часто называют *относительной линейной деформацией*, а деформацию  $\gamma$  – *относительным сдвигом*.

Совокупность линейных деформаций  $\epsilon$  по различным направлениям и угловых деформаций  $\gamma$  по различным плоскостям, проходящим через рассматриваемую точку, представляет собой *деформированное состояние* в этой точке.

### 10.3. Основные свойства материалов

Материалы, применяемые при изготовлении элементов конструкций, обладают очень важным свойством: под действием приложенных к ним сил они деформируются, но после удаления внешних сил восстанавливают свою первоначальную форму.

*Способность тела восстанавливать свою первоначальную форму после удаления внешних сил называют упругостью*, а деформации, исчезающие при этом – *упругими*. Тело называется *совершенно упругим*, если оно полностью восстанавливает свою первоначальную форму. В природе

таких материалов не существует, но многие материалы (сталь, дерево и др.) в пределах допустимых нагрузок можно рассматривать как упругие тела.

Тело может и не восстанавливать свою первоначальную форму, если действующие на него силы превысят некоторый предел. В этом случае, после снятия внешней нагрузки в теле появляются так называемые *остаточные или пластические деформации*.

Свойство тела получать значительные остаточные деформации, не разрушаясь, называется *пластичностью*. Многие конструкции в эксплуатации испытывают большие нагрузки (оболочка атомного реактора, корпус танкера, фюзеляж самолета и др.), поэтому изучению остаточных деформаций придается важное значение.

Пластические свойства некоторых конструкционных материалов (алюминий, титан, медь и др.) эффективно используются при изготовлении элементов конструкций методами пластического деформирования.

#### **10.4. Допущения и ограничения, принятые в сопротивлении материалов**

Реальные тела обладают многообразием физических и механических свойств, а в некоторых случаях и случайными пороками. Для построения теории в сопротивлении материалов прибегают к определенной схематизации явлений, принимают некоторые гипотезы и допущения, которые позволяют при рассмотрении реальной конструкции выделить наиболее существенные ее особенности, а второстепенные отбросить. В результате получают расчетные схемы, которые являются практически общими для большинства инженерных конструкций.

Рассмотрим эти допущения.

1. *Гипотеза об однородности и изотропности материала*. Материал предполагается однородным и изотропным, т.е. в любом объеме и в любом направлении свойства материала считаются одинаковыми.

2. *Гипотеза о «сплошности» материала*. Предполагается, что материал полностью заполняет весь объем тела без каких-либо пустот, т.е. тело рассматривается как сплошная среда. Это допущение можно рассматривать как следствие гипотезы об однородности материала.

3. *Гипотеза о совершенной (идеальной) упругости материала*. Все тела предполагаются абсолютно упругими, хотя реальные тела обладают упругостью только до определенных величин нагрузок.

4. *Гипотеза о малости деформаций*. Деформации малы по сравнению с размерами деформируемого тела.

5. *Гипотеза о линейной зависимости между деформациями и напряжениями.* Предполагается, что деформации материала в каждой его точке прямо пропорциональны напряжениям в этой точке. Эта гипотеза носит название закона Гука. Она справедлива для большинства материалов, но для каждого из них лишь при напряжениях, не превышающих предела пропорциональности.

6. *Гипотеза плоских сечений.* Поперечные сечения, проведенные в теле, плоские до приложения к нему нагрузки, остаются плоскими и при действии нагрузки.

7. *Принцип независимости действия сил.* Эффект от суммы воздействий равен сумме эффектов от каждого воздействия. В соответствии с этим принципом перемещения и деформации нагруженного тела считаются не зависящими от порядка приложения сил.

8. *Принцип Сен-Венана.* В точках тела, достаточно удаленных от места приложения внешних нагрузок, внутренние силы весьма мало зависят от способа приложения этих нагрузок.

### 10.5. Внутренние силовые факторы. Метод сечений

Под действием внешних сил в твердом теле возникают внутренние силы, стремящиеся восстановить его первоначальную форму и размеры. Величина внутренних сил растет с увеличением деформации до тех пор, пока не уравниваются внутренние и внешние силы. Если не будет равновесия между внутренними и внешними силами, то взаимная связь между частицами твердого тела нарушится и произойдет его разрушение.

Величины внутренних усилий определяются с применением *метода сечений*, суть которого заключается в следующем. Если при действии внешних сил тело находится в состоянии равновесия, то любая отсеченная часть тела вместе с приходящимися на нее внешними и внутренними силами также находится в равновесии, следовательно, к ней применимы уравнения равновесия.

Рассмотрим тело, имеющее форму бруса (рис. 10.2, *а*). Пусть к нему приложена система внешних сил  $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ , удовлетворяющая условиям равновесия, т.е. при действии указанных внешних сил тело находится в состоянии равновесия.

Если рассечь брус сечением  $A$  на две части и правую часть отбросить, то, т.к. связи между частями тела устранены, необходимо действие правой (отброшенной) части на левую заменить некоей системой внутренних сил  $(\vec{F}_A)$ , действующей в сечении  $A$  (рис. 10.2, *б*).

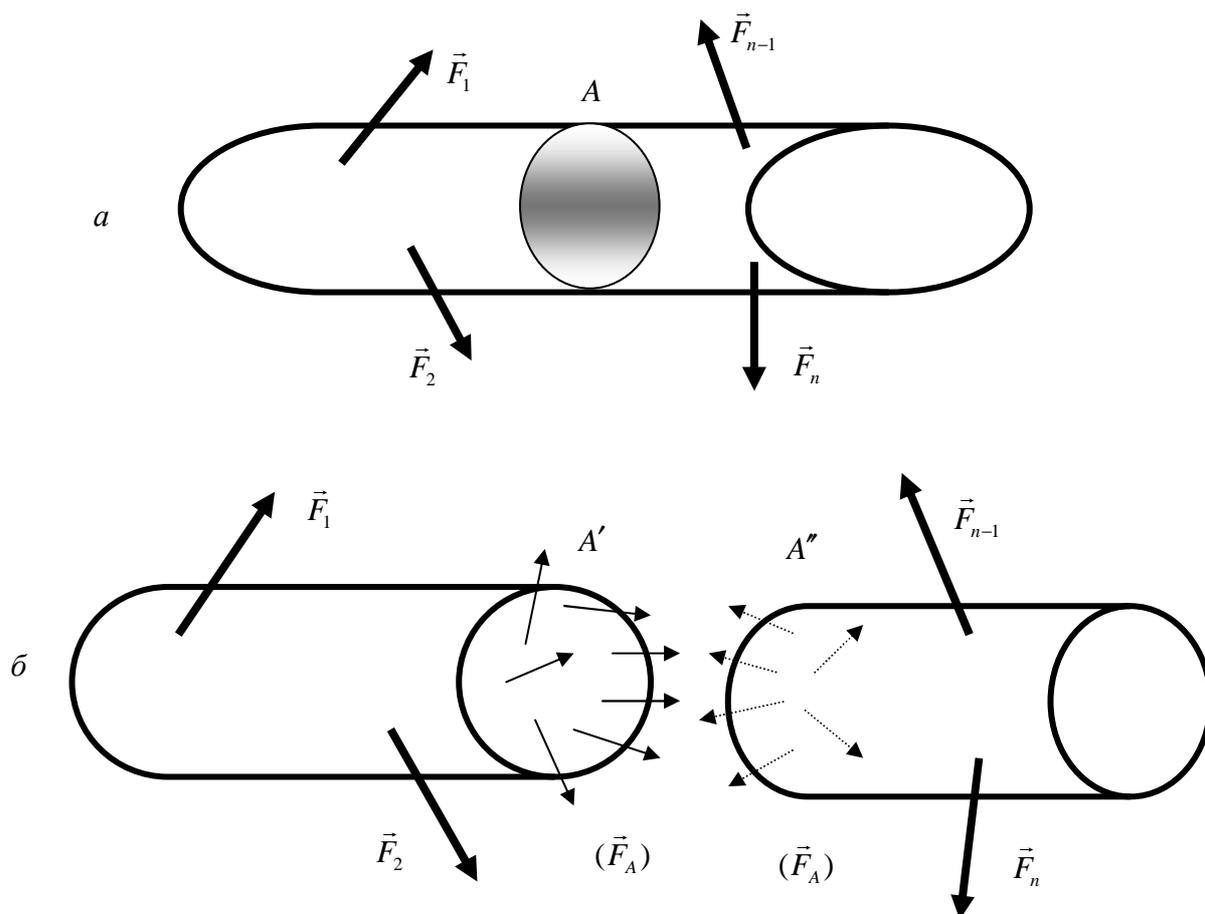


Рис. 10.2. Иллюстрация метода сечений (а, б)

Обозначим через  $F_{лев}$  и  $F_{прав}$  суммы внешних сил, приложенных соответственно к левой и правой частям бруса (относительно сечения  $A$ ), и учитывая, что

$$F_{лев} + F_{прав} = 0$$

для отсеченных частей бруса получим следующие очевидные соотношения:

$$F_{лев} + F_A = 0; \quad F_{прав} - F_A = 0.$$

Последние соотношения показывают, что равнодействующая внутренних сил  $\vec{F}_A$  в сечении  $A$  может определяться с равным успехом из условий равновесия либо левой, либо правой частей рассеченного тела. В этом заключается суть метода сечений.

Внутренние усилия должны быть так распределены по сечению, чтобы деформированные поверхности сечения  $A$  при совмещении правой и левой частей тела в точности совпадали. Это требование носит название *условие неразрывности деформации*.

Воспользуемся правилами статики и приведем систему внутренних сил ( $\vec{F}_A$ ) к центру тяжести сечения  $A$  в соответствии с правилами теоретической механики. В результате получим главный вектор сил  $\vec{R}$  и главный вектор момента  $\vec{M}$  внутренних сил (рис. 10.3). Далее выбираем прямоугольную систему координат  $x, y, z$  с началом координат, совпадающим с центром тяжести сечения  $A$ . Ось  $z$  направим по нормали к сечению, а оси  $x$  и  $y$  расположим в плоскости сечения. Спроектировав главный вектор сил  $\vec{R}$  и главный момент  $\vec{M}$  на координатные оси  $x, y, z$ , получаем шесть составляющих: три силы  $N, Q_x, Q_y$  и три момента  $M_z, M_x, M_y$ , называемых *внутренними силовыми факторами* в сечении бруса.

Составляющая  $N$  называется нормальной или продольной силой в сечении. Силы  $Q_x$  и  $Q_y$  называются поперечными усилиями. Момент  $M_z$  называется крутящим моментом, а моменты  $M_x$  и  $M_y$  – изгибающими относительно осей  $x$  и  $y$ , соответственно.

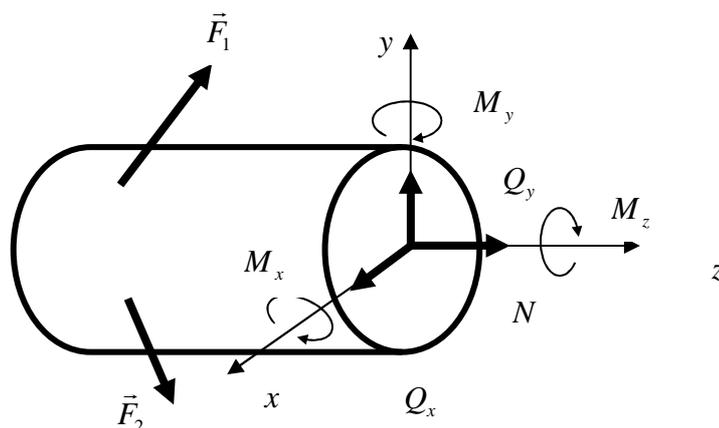


Рис. 10.3. К определению внутренних силовых факторов

При известных внешних силах все шесть внутренних силовых факторов в сечении определяются из шести уравнений равновесия, которые могут быть составлены для отсеченной части:

$$\sum F_x = 0; \sum F_y = 0; \sum F_z = 0;$$

$$\sum m_x = 0; \sum m_y = 0; \sum m_z = 0.$$

Если неизвестные внутренние силы могут быть определены только из уравнений статики, то задачу называют *статически определимой*.

Учитывая важность значения метода сечений, применяемого при изучении всех разделов сопротивления материалов, повторим краткое содержание и последовательность действий:

- рассекаем мысленно тело на две части;
- отбрасываем одну из частей;
- заменяем действие отброшенной части внутренними усилиями;
- составляем уравнения равновесия статики для оставшейся части.

В общем случае в сечении могут иметь место все шесть внутренних силовых факторов. Однако достаточно часто на практике встречаются случаи, когда некоторые внутренние усилия отсутствуют. Такие виды нагружения бруса получили специальные названия (табл. 10.1).

Сопротивления, при которых в поперечном сечении бруса действует один внутренний фактор, условно называются *простыми*. При одновременном действии в сечении бруса двух и более внутренних усилий сопротивление бруса называется *сложным*.

Таблица 10.1

#### Простейшие случаи сопротивления

Вид напряженного состояния	$N$	$Q_x$	$Q_y$	$M_z$	$M_x$	$M_y$
Растяжение / сжатие	+	0	0	0	0	0
Кручение	0	0	0	+	0	0
Чистый изгиб относительно оси $x$	0	0	0	0	+	0
Чистый изгиб относительно оси $y$	0	0	0	0	0	+
Поперечный изгиб относительно оси $x$	0	0	+	0	+	0
Поперечный изгиб относительно оси $y$	0	+	0	0	0	+

Примечание. + означает наличие усилия; 0 – его отсутствие.

## 10.6. Напряжения

Внутренние силы распределены по сечению тела сплошным образом и их величина и направление в отдельных точках сечения различны. Для оценки интенсивности внутренних сил в точках сечения тела вводится понятие «*напряжение*».

Рассмотрим внутренние силы в произвольном поперечном сечении тела, используя метод сечений (рис. 10.4). Выделим малую площадку  $\Delta A$ .

Какой бы эта площадка малой ни была, к ней приложены силы, заменяющие действие отброшенной части. Результирующая внутренних сил, действующих на эту площадку, может быть представлена силой  $\Delta F$  (рис. 10.4, *a*). Тогда отношение  $\frac{\Delta F}{\Delta A} = p_{cp}$  выразит силу, приходящуюся в среднем на единицу площадки  $\Delta A$ . Эту величину называют *средним напряжением* на площадке  $\Delta A$ .

При дальнейшем уменьшении площадки  $\Delta A$ , последняя стягивается в точку. Если взять предел этого отношения при уменьшении площадки  $\Delta A$  до нуля, то получим напряжение в данной точке сечения:

$$p = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta F}{\Delta A} \right). \quad (10.1)$$

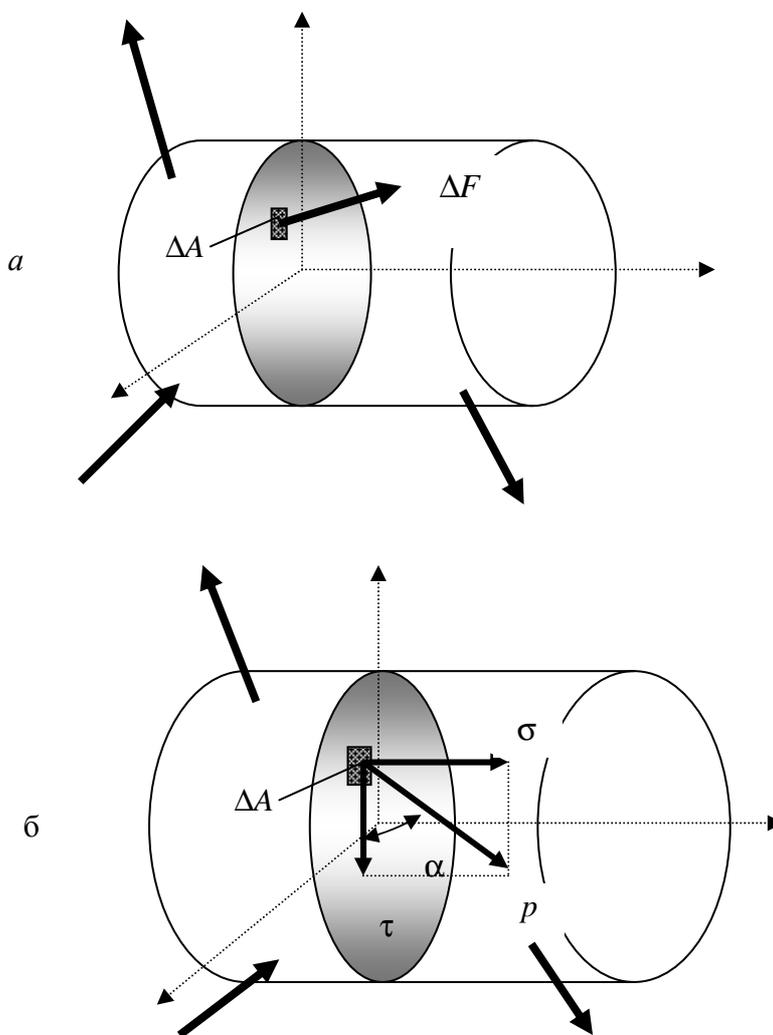


Рис. 10.4. К понятию напряжения:  
*a* – среднее напряжение; *б* – полное напряжение

Для случая равномерного распределения внутренних сил по сечению напряжение можно определить путем деления равнодействующей внутренних сил на всю площадь сечения:

$$p = \frac{F}{A}.$$

Таким образом, *напряжением в рассматриваемой точке называется величина внутренней силы, приходящейся на единицу площади сечения*. Напряжение, как и сила, имеет направление, т.е. она есть величина векторная.

Единица напряжения – *паскаль*:

$$[p] = \frac{[F]}{[A]} = \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = \text{Па}.$$

Поскольку эта единица напряжения очень мала, то применяют более крупную единицу, в частности, мегапаскаль (МПа):

$$1\text{МПа} = 10^6\text{Па} = 1\frac{\text{Н}}{\text{мм}^2}.$$

Числовые значения напряжения, выраженного в МПа и Н/мм<sup>2</sup>, совпадают.

Поскольку, через каждую точку можно провести сколько угодно сечений, может быть определено и множество векторов напряжений в данной точке. В общем случае напряжение  $p$  составляет с рассматриваемым сечением некоторый угол  $\alpha$  (рис. 10.4, б). Если разложить напряжение  $p$  по нормали (перпендикуляру) к площадке  $\Delta A$  и по направлению плоскости сечения, то получим *нормальное напряжение*, действующее перпендикулярно к данному сечению, и *касательное напряжение*, действующее в плоскости сечения. Напряжение  $p$  называется *полным* напряжением.

Нормальное напряжение обозначается греческой буквой  $\sigma$  (сигма), а касательное – греческой буквой  $\tau$  (тау). Из рис. 10.4, б видно, что величины этих напряжений будут вычисляться по формулам:

$$\sigma = p \cdot \sin \alpha; \quad \tau = p \cdot \cos \alpha. \quad (10.2)$$

Так как угол между нормальным и касательным напряжениями всегда равен  $90^\circ$ , то модуль полного напряжения  $p$  определяется по формуле

$$p = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}. \quad (10.3)$$

Разложение полного напряжения на нормальное и касательное имеет вполне определенный физический смысл. Нормальные напряжения при растяжении, как силы сопротивления, стремятся воспрепятствовать отда-

лению частиц друг от друга, а при сжатии – сближению их. Касательные напряжения также являются силами сопротивления и препятствуют сдвигу одной частицы тела относительно другой. Таким образом, в поперечном сечении бруса при растяжении, сжатии и чистом изгибе действуют только нормальные напряжения, а при сдвиге и кручении – только касательные напряжения.

## Тема 11. РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ ПРЯМОГО БРУСА

Растяжение и сжатие весьма часто встречаются в нагруженных элементах конструкций. Например, растяжение возникает в тросе подъемника, проводах линий электропередач; сжатие возникает в колоннах, поддерживающих перекрытия зданий, заводской трубе от собственного веса и т.п.

### 11.1. Центральное растяжение прямого бруса

В зависимости от способов закрепления бруса и характера воздействия нагрузок могут возникнуть различные виды растяжения и сжатия. Если все внутренние силы в поперечном сечении бруса сводятся только к одному силовому фактору – продольной силе  $N$ , а все остальные внутренние силы равны нулю, то имеет место *центральное растяжение* или *сжатие*.

Для определения внутренних сил в поперечных сечениях бруса применяем метод сечений. Сечением  $n-n$  мысленно рассечем брус на две части и одну из них, например правую, отбросим (рис. 11.1). Действие отброшенной части на оставшуюся заменим внутренними силами упругости, которые, в данном случае, будут нормальны сечению и могут быть приведены к равнодействующей  $N$ , направленной по оси бруса в сторону, противоположную действию внешней силы  $F$ .

Из условия равновесия оставшейся части бруса получим:

$$\sum Z = 0; N - F = 0; N = F.$$

Равнодействующая внутренних нормальных сил упругости в поперечном сечении бруса называется *продольной силой* и обозначается  $N$ . Условимся силу  $N$  считать положительной, если она вызывает растяжение (направлена от сечения) и отрицательной, если она вызывает сжатие (направлена к сечению).

В тех случаях, когда направление силы  $N$  неизвестно, целесообразно принять ее положительной. Если при решении уравнения равновесия сила

$N$  получится со знаком плюс, то брус в данном сечении будет растянут, если со знаком минус, то – сжат.

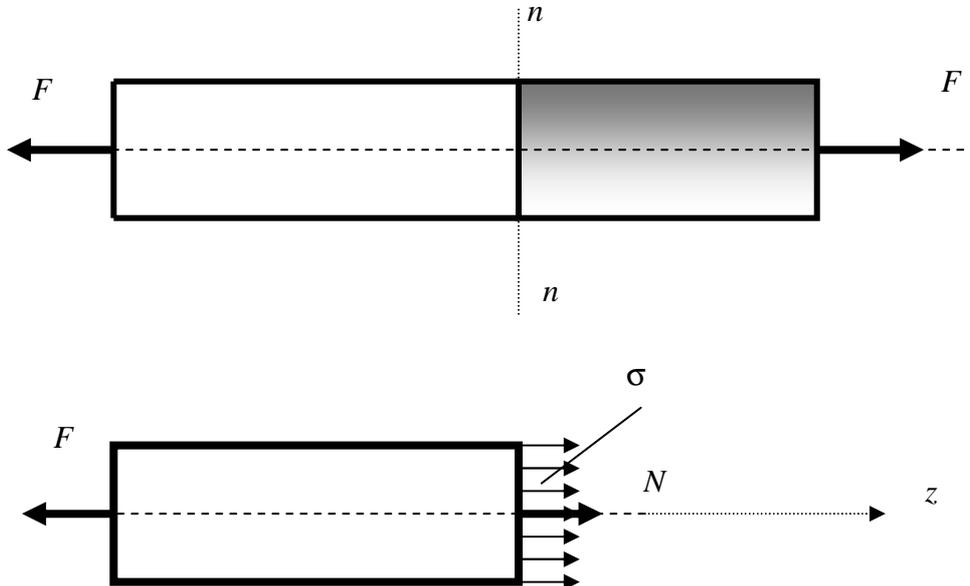


Рис. 11.1. К определению внутренних сил при растяжении

Закон распределения нормальных напряжений по сечению растягиваемого или сжимаемого бруса устанавливается на основе гипотезы плоских сечений. Сила  $N$  является равнодействующей внутренних сил  $\sigma \cdot dA$ , действующих на бесконечно малые площадки поперечного сечения и равна

$$N = \int_A \sigma \cdot dA. \quad (11.1)$$

Если предположить, что все продольные элементы, на которые можно мысленно разделить брус, находятся в одинаковых условиях и нормальные напряжения на всех площадках поперечного сечения будут распределены равномерно, то получим

$$N = \sigma \cdot A \text{ и} \\ \sigma = \frac{N}{A}. \quad (11.2)$$

Полученная формула позволяет вычислить напряжение  $\sigma$  по сечениям, перпендикулярным к оси бруса, если известны растягивающая (сжимающая) сила и размеры поперечного сечения. С другой стороны, если задается величина нормальных напряжений  $\sigma$  и известна растягивающая (сжимающая) сила, можно найти необходимую площадь поперечного сечения  $A$ .

## 11.2. Эпюры продольных сил и нормальных напряжений

При действии на брус нескольких внешних сил, приложенных в разных точках по его оси, полезно строить графики, называемые *эпюрами* продольных сил и нормальных напряжений. Они дают наглядное представление об изменении величины продольных сил и нормальных напряжений в поперечных сечениях по длине бруса. Приведем примеры построения эпюр продольных сил  $N$  и нормальных напряжений  $\sigma$ .

**Пример 11.1.** Для прямого бруса, находящегося под действием сил  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_3$  построить эпюры продольных сил  $N$  и нормальных напряжений  $\sigma$ . Принять  $F_2 = 50$  кН,  $F_1 = 40$  кН,  $F_3 = 80$  кН,  $A = 100$  мм<sup>2</sup>. Собственный вес бруса не учитывать (рис. 11.2).

**Решение.** Условно разбиваем брус на отдельные участки. Границами участков будут сечения, в которых приложены силы и изменяется площадь поперечного сечения. Следовательно, заданный брус имеет четыре участка, которые обозначены на рис. 11.2, *а* римскими цифрами.

Для определения значений продольных сил воспользуемся методом сечений. В границах первого участка проведем условное сечение и отбросим левую часть бруса (рис. 11.2, *б*). К отсеченному сечению оставшейся части бруса приложим продольную силу  $N_1$ , равную сумме внутренних сил в сечении и заменяющую действие отброшенной части бруса на оставшуюся. Составим уравнение равновесия для правой части бруса:

$$\sum F_z = 0; \sum F_z = F_1 - N_1 = 0; N_1 = F_1 = 40 \text{ кН}.$$

Продольная сила  $N_1$  будет растягивающей, так как ее значение положительное.

Очевидно, что тоже значение продольной силы будет в любом сечении участка *I*, вплоть до сечения, в котором приложена внешняя сила  $F_2 = 50$  кН.

Отбросим левую часть бруса от произвольного сечения в границах второго участка (рис. 11.2, *в*), составим уравнение равновесия для оставшейся правой части и вычислим величину продольной силы в этом сечении:

$$\sum F_z = 0; \sum F_z = F_1 - F_2 - N_2 = 0; N_2 = F_1 - F_2 = 40 - 50 = -10 \text{ кН}.$$

Сила в этом сечении будет сжимающей, так как ее значение отрицательное.

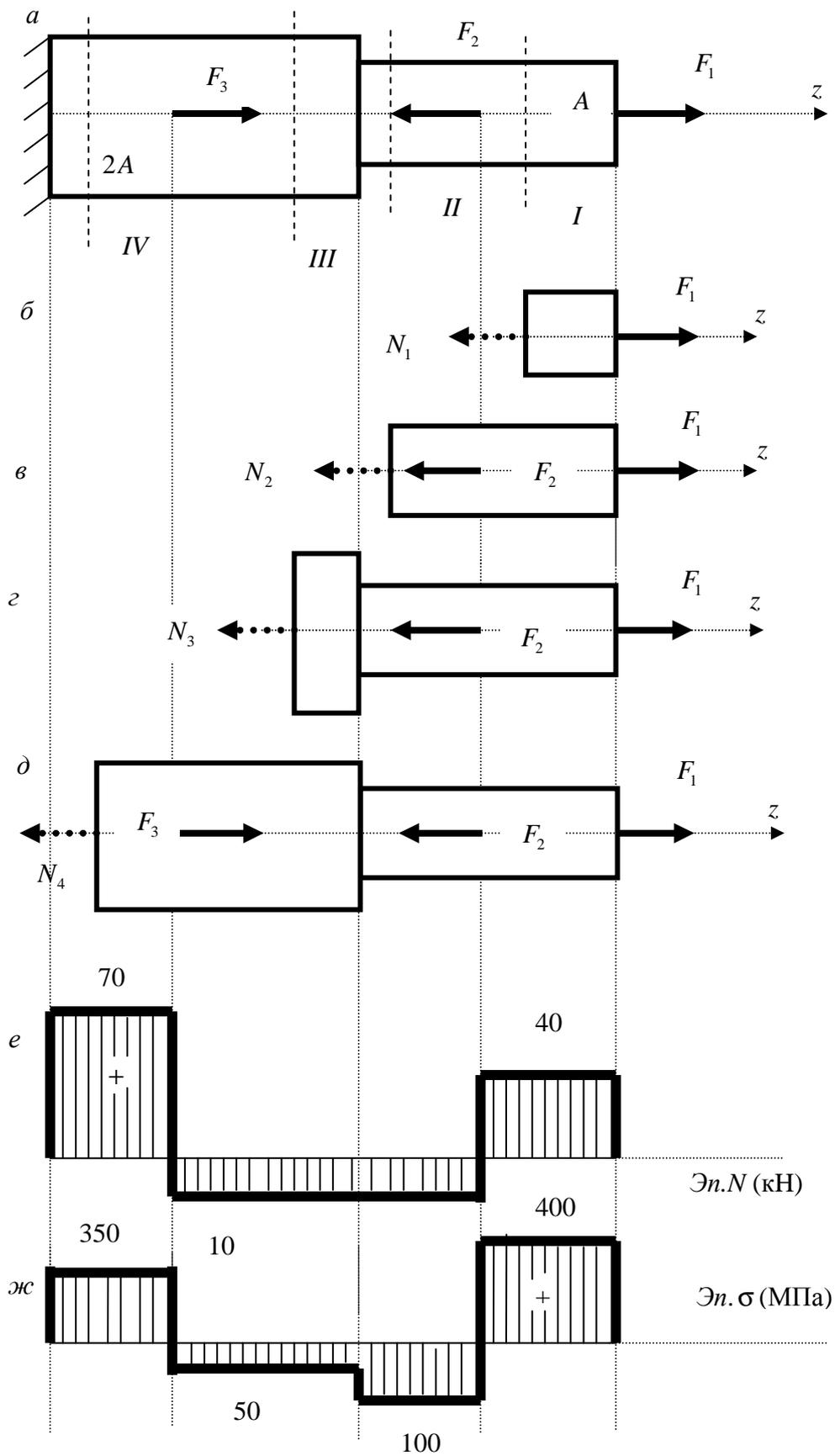


Рис. 11.2. Эпюры продольных сил и нормальных напряжений

В сечении, проведенном в границах третьего участка (рис. 11.2, *з*), значение продольной силы не изменится, так как величина продольной силы не зависит от площади поперечного сечения, а характер приложения внешних нагрузок не изменился. Тогда  $N_3 = N_2 = -10$  кН.

Соответственно, отбрасывая левую часть бруса в произвольном сечении в границах четвертого участка (рис. 11.2, *д*), получим величину продольной силы на *IV* участке:

$$\sum F_z = 0; \sum F_z = F_1 - F_2 + F_3 - N_4 = 0; N_4 = F_1 - F_2 + F_3 = 40 - 50 + 80 = 70 \text{ кН.}$$

Для построения эпюры продольных сил (рис. 11.2, *е*), проведем линию, параллельную оси бруса (ось эпюры), и отложим, в произвольном масштабе, определенные ранее продольные силы на участках, по перпендикулярам к оси эпюры. Положительные значения откладываем по одну сторону от оси эпюры, отрицательные – по другую сторону. Контур эпюры обводим жирной линией. Построенная эпюра плотно штрихуется тонкими линиями, перпендикулярными оси эпюры. Каждая линия штриховки представляет собой значение величины продольной силы в данном сечении вдоль оси бруса в принятом масштабе.

Теперь определим величину нормальных напряжений в сечении каждого из участков по известной формуле

$$\sigma = \frac{N}{A}.$$

$$\text{На участке } I: \quad \sigma_1 = \frac{N_1}{A} = \frac{40}{100} = 0,4 \frac{\text{кН}}{\text{мм}^2} = 400 \frac{\text{МН}}{\text{м}^2} = 400 \text{ МПа.}$$

$$\text{На участке } II: \quad \sigma_2 = \frac{N_2}{A} = \frac{-10}{100} = -0,1 \frac{\text{кН}}{\text{мм}^2} = -100 \text{ МПа.}$$

$$\text{На участке } III: \quad \sigma_3 = \frac{N_3}{2A} = \frac{-10}{2 \cdot 100} = -0,05 \frac{\text{кН}}{\text{мм}^2} = -50 \text{ МПа.}$$

$$\text{На участке } IV: \quad \sigma_4 = \frac{N_4}{2A} = \frac{70}{2 \cdot 100} = 0,35 \frac{\text{кН}}{\text{мм}^2} = 350 \text{ МПа.}$$

Порядок построения эпюры нормальных напряжений  $\sigma$  аналогичен порядку построения эпюры продольных сил  $N$  (рис. 11.2, *ж*).

Величины  $N$  и  $\sigma$  можно вычислять и строить их эпюры, начиная и от крайнего левого сечения бруса, от опоры, предварительно определив реакции в заделке.

**Пример 11.2.** Для стального бруса квадратного поперечного сечения сжатого силой  $F$  с учетом собственного веса (рис. 11.3) требуется:

- составить аналитические выражения для продольных сил  $N_k$ , нормальных напряжений  $\sigma_k$  и вычислить их значения для каждого из участков с учетом их собственных весов;
- построить эпюры продольных сил  $N$  и нормальных напряжений  $\sigma$ .

Принять для расчета: удельный вес стали  $\gamma = 78 \frac{\text{кН}}{\text{м}^3}$ ; модуль упругости

$$\text{стали } E = 2,1 \cdot 10^8 \frac{\text{кН}}{\text{м}^2}; F = 20 \text{ кН}; l_1 = l_2 = l_3 = 0,4 \text{ м};$$

$$A_1 = 4 \cdot 10^{-2} \text{ м}^2; A_2 = 9 \cdot 10^{-2} \text{ м}^2; A_3 = 25 \cdot 10^{-2} \text{ м}^2;$$

**Решение.** Так как продольная сила  $N$  зависит от величин внешних сил, в данном случае включающих в себя и собственный вес колонны, а последний, в свою очередь, от размеров поперечного сечения  $A_k$  и объемного веса  $\gamma$ , то границами участков следует назначать те сечения, в которых приложены внешние сосредоточенные силы, и где происходит скачкообразное изменение площади поперечного сечения или объемного веса материалов конструкции.

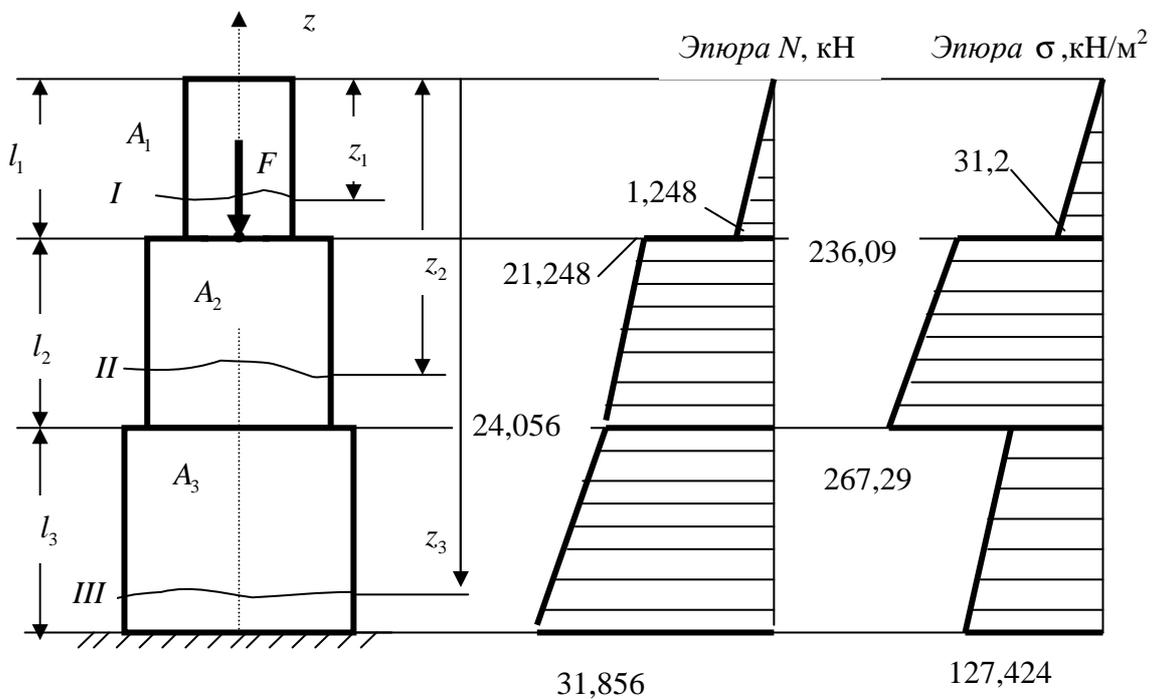


Рис. 11.3. Эпюры продольных сил и нормальных напряжений в сечениях бруса с учетом собственного веса

Составим аналитические выражения для продольных сил и нормальных напряжений для каждого из участков, с учетом их собственных весов. Для этого воспользуемся уже известным методом сечений.

*I* участок ( $0 \leq z_1 \leq 0,4\text{м}$ )

Проводим условное сечение *I* на расстоянии  $z_1$  от свободного конца бруса и рассмотрим равновесие верхней части. При этом к рассматриваемой части прикладывается собственный вес в центре тяжести и нормальная сила  $N_1$ , заменяющая действие отброшенной нижней части на рассматриваемую верхнюю. Составим уравнение равновесия рассматриваемой верхней части бруса по оси  $z$ .

$$\sum F_z = 0; \quad -N_1 - G_3 = 0; \quad N_1 = -G_3.$$

Собственный вес верхней части бруса определяется следующим образом:

$$G_3 = \gamma \cdot A_1 \cdot z_1 = 78 \cdot 4 \cdot 10^{-2} \cdot z_1 = 312 \cdot 10^{-2} \cdot z_1 \text{ кН.}$$

Тогда выражение для нормальной силы будет иметь вид

$$N_1 = -312 \cdot 10^{-2} \cdot z_1 \text{ кН,}$$

а для нормальных напряжений –

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = -\frac{312 \cdot 10^{-2} \cdot z_1}{4 \cdot 10^{-2}} = -78 \cdot z_1 \frac{\text{кН}}{\text{м}^2}.$$

Так как,  $N_1$  и  $\sigma_1$  линейно зависят от  $z_1$ , то для построения эпюр достаточно определить значения этих величин на границах участка, т.е.

$$\text{при } z_1 = 0 \quad N_1(0) = 0; \quad \sigma_1(0) = 0;$$

$$N_1(0,4) = -312 \cdot 10^{-2} \cdot 0,4 = -1,248 \text{ кН;}$$

$$\text{при } z_1 = 0,4\text{м}$$

$$\sigma_1(0,4) = -78 \cdot 0,4 = -31,2 \frac{\text{кН}}{\text{м}^2}.$$

*II* участок ( $0,4 \leq z_2 \leq 0,8\text{м}$ )

Аналогично предыдущему, в границах второго участка, проводим условное сечение на расстоянии  $z_2$ . Составляем уравнение равновесия для верхней оставшейся части бруса. В это уравнение войдут: собственный вес

первого участка  $G_1$ , собственный вес отсеченной части второго участка  $G_{z_2}$ , сосредоточенная сила  $F$  и искомая сила  $N_2$ .

$$\sum F_z = 0; \quad -G_1 - G_{z_2} - F - N_2 = 0.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} N_2 &= -G_1 - F - G_{z_2} = \\ &= -78 \cdot 4 \cdot 10^{-2} \cdot 0,4 - 20 - 78 \cdot 9 \cdot 10^{-2} (z_2 - 0,4) = 7,02(z_2 + 2,62678) \text{ кН}. \end{aligned}$$

Учитывая, что площадь поперечного сечения на втором участке постоянна, выражение для нормального напряжения будет следующим:

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = -7,02 \frac{z_2 + 2,62678}{9 \cdot 10^{-2}} = -78(z_2 + 2,62678) \frac{\text{кН}}{\text{м}^2}.$$

Вычислим значения величин продольной силы  $N_2$  и нормального напряжения  $\sigma_2$  в граничных сечениях второго участка:

$$\begin{aligned} \text{при } z_2 = 0,4 \text{ м} \quad N_2(0,4) &= -7,02(0,4 + 2,62678) = -21,248 \text{ кН}, \\ \sigma_2(0,4) &= -78(0,4 + 2,62678) = -236,09 \frac{\text{кН}}{\text{м}^2}; \\ \text{при } z_2 = 0,8 \text{ м} \quad N_2(0,8) &= -7,02(0,8 + 2,62678) = -24,056 \text{ кН}, \\ \sigma_2(0,8) &= -78(0,8 + 2,62678) = -267,29 \frac{\text{кН}}{\text{м}^2}. \end{aligned}$$

*III участок ( $0,8 \leq z_3 \leq 1,2 \text{ м}$ )*

Аналогично предыдущему, в границах третьего участка, проводим условное сечение на расстоянии  $z_3$ . Составляем уравнение равновесия для верхней части бруса:

$$\sum F_z = 0; \quad -G_1 - G_2 - F - G_{z_3} - N_3 = 0,$$

откуда

$$\begin{aligned} N_3 &= -F - G_1 - G_2 - \gamma \cdot A_3(z_3 - l_1 - l_2) = -20 - 78 \cdot 4 \cdot 10^{-2} \cdot 0,4 - \\ &- 78 \cdot 9 \cdot 10^{-2} \cdot 0,4 - 78 \cdot 25 \cdot 10^{-2} (z_3 - 0,8) = -19,5(z_3 + 0,43364) \text{ кН}. \end{aligned}$$

Выражение для напряжения:

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{A_3} = -\frac{19,5(z_3 + 0,43364)}{25 \cdot 10^{-2}} = -78(z_3 + 0,43364) \frac{\text{кН}}{\text{м}^2}.$$

Вычислим значения величин продольной силы  $N_3$  и нормального напряжения  $\sigma_3$  в граничных сечениях третьего участка:

$$\begin{aligned} \text{при } z_3 = 0,8 \text{ м} \quad N_3(0,8) &= -19,5(0,8 + 0,43364) = -24,056 \text{ кН}, \\ \sigma_3(0,8) &= 78(0,8 + 0,43364) = -96,224 \frac{\text{кН}}{\text{м}^2}; \\ \text{при } z_3 = 1,2 \text{ м} \quad N_3(1,2) &= -19,5(1,2 + 0,43364) = -31,856 \text{ кН}, \\ \sigma_3(1,2) &= -78(1,2 + 0,43364) = -127,424 \frac{\text{кН}}{\text{м}^2}. \end{aligned}$$

По полученным значениям продольных сил и нормальных напряжений строим эпюры  $N$  и  $\sigma$  (см. рис. 11.3).

Правильность построения указанных эпюр определяется следующими требованиями:

- скачок на эпюре  $N$  должен находиться в точке приложения сосредоточенной силы и равен величине этой силы;
- скачки на эпюре  $\sigma$  должны совпадать с точками приложения внешней силы и изменения площади поперечного сечения бруса.

### 11.3. Продольные и поперечные деформации

Опыты показывают, что при действии растягивающих сил по оси бруса длина его увеличивается, а поперечные размеры уменьшаются. При сжатии – поперечные размеры стержня почти у всех материалов увеличиваются, а длина стержня уменьшается. Например, при растяжении картину деформирования можно представить следующим образом (рис. 11.4).

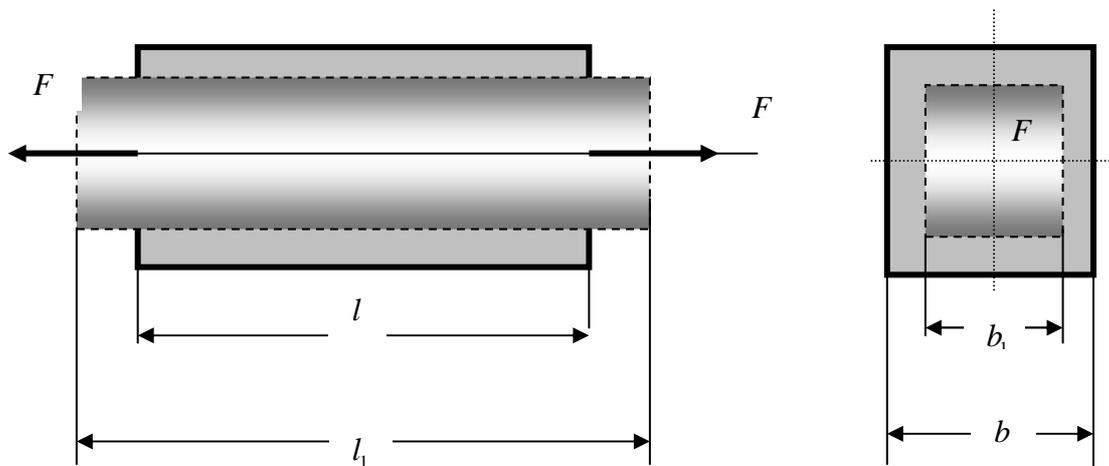


Рис. 11.4. Продольные и поперечные деформации стержня

Увеличение длины бруса называется *абсолютным удлинением*, а уменьшение – *абсолютным укорочением*:

$$\Delta l = l_1 - l, \quad (11.3)$$

где  $l$  – первоначальная длина бруса;  $l_1$  – длина бруса после деформирования.

Абсолютное удлинение (укорочение) измеряется в единицах длины – мм, см, м. При растяжении оно будет положительным, а при сжатии – отрицательным.

Величина абсолютного удлинения или укорочения, зависящая от длины бруса, не дает общего представления о значительности продольной деформации. Поэтому за характеристику продольной деформации принимается величина относительной деформации.

*Относительным удлинением* или *укорочением* называется отношение величины абсолютного удлинения или укорочения к первоначальной длине бруса:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}. \quad (11.4)$$

При растяжении бруса его размер в поперечном сечении  $b$  уменьшается, происходит *сужение*, и он становится равным  $b_1$ . Тогда *абсолютное сужение* бруса в поперечной плоскости будет равно

$$\Delta b = b_1 - b. \quad (11.5)$$

*Относительное сужение* бруса в поперечной плоскости:

$$\varepsilon' = \frac{\Delta b}{b}. \quad (11.6)$$

Частное от деления относительной поперечной деформации на относительную продольную деформацию при осевом растяжении (сжатии), взятое по абсолютной величине, называется *коэффициентом Пуассона*:

$$\mu = \left| \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \right|. \quad (11.7)$$

Коэффициент Пуассона показывает, какую часть составляет поперечная деформация от его продольной деформации. Это постоянный физический коэффициент, характеризующий упругие свойства материала. Величина  $\mu$  – безразмерная. Для различных материалов он колеблется от 0 до 0,5. Например, для стали он равен 0,25 ... 0,33, для бетона – 0,08 ... 0,18, для пробки – 0, а для парафина – 0,5. Значения коэффициента Пуассона постоянны только для изотропных материалов.

## 11.4. Закон Гука

Брусья из различных материалов деформируются неодинаково. Пока растягивающее (или сжимающее) напряжение  $\sigma$  не достигло некоторого определенного для каждого материала предела, брус остается упругим, т.е. его деформации исчезают после удаления растягивающих (или сжимающих) сил. В этих пределах напряжения и деформации связаны между собой определенной зависимостью, которая называется *законом Гука – нормальное напряжение прямо пропорционально относительному удлинению или укорочению*:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon. \quad (11.8)$$

Коэффициент пропорциональности  $E$ , неодинаковый для различных материалов и характеризующий упругие свойства материала, называется *модулем упругости первого рода* или модулем Юнга. Модули упругости и напряжения выражаются в одинаковых единицах (Па). Его значения для некоторых материалов следующее: сталь –  $(1,96 \dots 2,16) \cdot 10^5$  МПа, чугун –  $(1,5 \dots 1,6) \cdot 10^5$  МПа, стеклопластики –  $(0,18 \dots 0,40) \cdot 10^5$  МПа, резина –  $0,00008 \cdot 10^5$  МПа.

Представим формулу закона Гука в следующем виде

$$\frac{N}{A} = E \frac{\Delta l}{l},$$

откуда абсолютное удлинение (укорочение) будет равно

$$\Delta l = \frac{N \cdot l}{E \cdot A}. \quad (11.9)$$

Следовательно, абсолютное удлинение (укорочение) прямо пропорционально силе и длине бруса и обратно пропорционально модулю упругости и площади поперечного сечения бруса. Из последней формулы видно, что чем больше ее знаменатель, тем менее податлив или тем более жесток брус. Поэтому произведение  $E \cdot A$  называют *жесткостью* бруса при растяжении (сжатии).

Закон Гука можно выразить и графически. Для этого по оси абсцисс отложим в некотором масштабе величину относительной деформации  $\varepsilon$ , а по оси ординат – соответствующее ей напряжение  $\sigma$  (рис. 11.5). Тогда

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sigma}{\varepsilon}; \quad E = \frac{\sigma}{\varepsilon},$$

следовательно,

$$\operatorname{tg} \alpha = E,$$

то есть тангенс угла наклона прямой  $OA$  к горизонтальной оси может быть представлен как модуль продольной упругости  $E$ . Прямая пропорциональность между напряжением  $\sigma$  и относительной деформацией  $\varepsilon$  представляется прямой линией  $OA$ , графически выражающей закон Гука при одноосном растяжении (сжатии). Однако линейная зависимость между  $\sigma$  и  $\varepsilon$  сохраняется только до некоторого предельного значения напряжения, называемого *пределом пропорциональности*  $\sigma_{\text{пл}}$ .

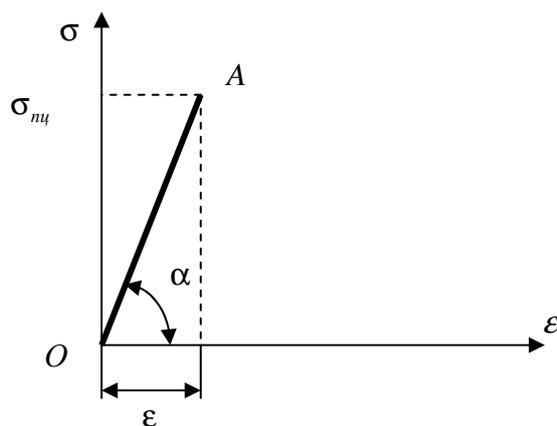


Рис. 11.5. Графическое выражение закона Гука

### 11.5. Напряжения в наклонных сечениях бруса

Возьмем прямой брус (рис. 11.6), растягиваемый силой  $F$ , и определим напряжения в нем по наклонному сечению, составляющему с поперечным сечением угол  $\alpha$ . Внешняя нормаль  $K$  (перпендикуляр к этому сечению) составит с осью бруса также угол  $\alpha$ , который отсчитывается в направлении против хода часовой стрелки от линии действия силы  $F$  до нормали к плоскости наклонного сечения.

Рассечем условно брус сечением  $m - m$ , отбросим верхнюю его часть и заменим действие отброшенной части внутренними силами, параллельными оси бруса и равномерно распределенными по всему наклонному сечению. равнодействующая этих сил будет равна растягивающей силе  $F$ .

Обозначим площадь поперечного сечения бруса  $n - n$  через  $A$ , тогда площадь наклонного сечения  $m - m$  будет равна  $A_\alpha = \frac{A}{\cos \alpha}$ , а полное на-

пряжение в наклонном сечении –  $p = \frac{F}{A_\alpha} = \frac{F \cdot \cos \alpha}{A} = \sigma \cdot \cos \alpha$ .

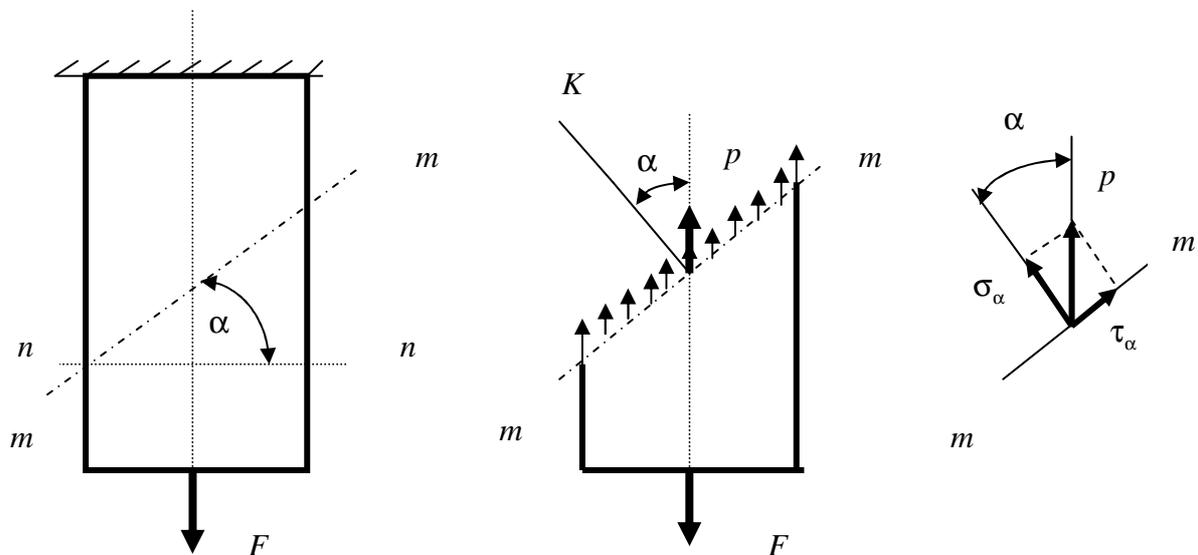


Рис. 11.6. Напряжения в наклонных сечениях бруса

Разложим полное напряжение  $p$  в наклонном сечении на составляющие:

- в плоскости  $m - m$ ;
- перпендикулярно к плоскости  $m - m$ .

Составляющая, нормальная к площадке  $m - m$ , представляет собой *нормальное напряжение к наклонной площадке*  $\sigma_\alpha$ , а составляющая в самой площадке  $m - m$  – *касательное напряжение в наклонной площадке*  $\tau_\alpha$ .

Величина нормального напряжения

$$\sigma_\alpha = p \cdot \cos \alpha = \sigma \cdot \cos \alpha \cdot \cos \alpha = \sigma \cdot \cos^2 \alpha, \quad (11.10)$$

а величина касательного напряжения

$$\tau_\alpha = p \cdot \sin \alpha = \sigma \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha = \frac{\sigma}{2} \sin 2\alpha. \quad (11.11)$$

Наибольшие нормальные напряжения возникают по площадкам, перпендикулярным к оси бруса, а наибольшие касательные напряжения – по площадкам, расположенным под углом  $\alpha = 45^\circ$  к оси бруса и равные половине нормального напряжения, т.е.

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma}{2}.$$

По площадкам, параллельным оси бруса (при  $\alpha = 90^\circ$ )  $\sigma_\alpha = \tau_\alpha = 0$ , то есть в продольных плоскостях бруса не возникает ни нормальных, ни касательных напряжений.

## 11.6. Перемещения поперечных сечений бруса

При растяжении или сжатии поперечные сечения бруса перемещаются в направлении оси. Продольная деформация бруса определяется по формуле  $\Delta l = \frac{N \cdot l}{EA}$ . Но эта формула применима лишь тогда, когда в пределах участка бруса длиной  $l$  продольные силы и жесткость  $EA$  поперечных сечений бруса постоянны.

Рассмотрим ступенчатый брус, нагруженный растягивающей силой  $F$  (рис. 11.7). Определим продольное перемещение  $\delta_k$  произвольной точки  $K$  оси бруса (собственный вес бруса не учитываем). Оно равно абсолютной деформации части бруса  $OK$ , заключенного между жесткой заделкой и сечением, проведенным через точку  $K$ , т.е.  $\delta_k = \Delta l_{ok}$ .

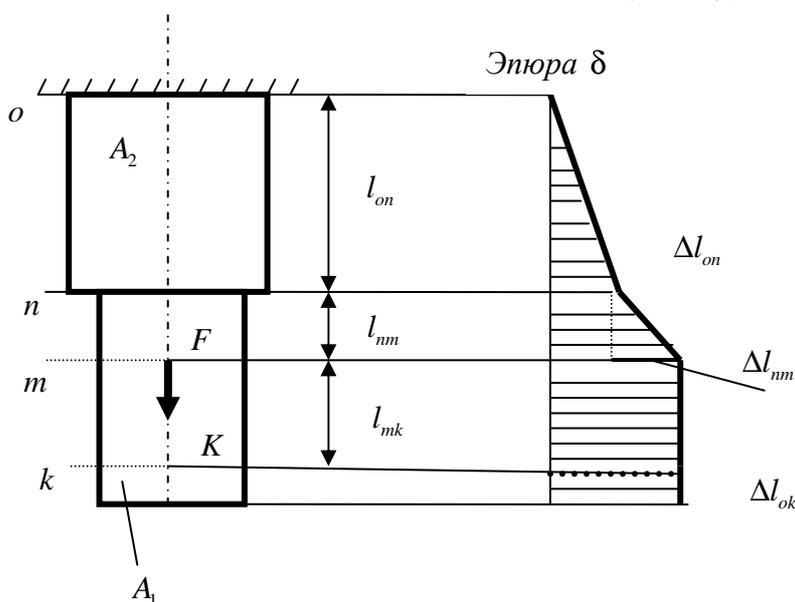


Рис. 11.7. Перемещение сечений бруса

Разобьем брус на три участка  $on$ ,  $nm$ ,  $mk$  для которых значения продольной силы  $N$  и жесткость  $EA$  постоянны по всей их длине:

$$\Delta l_{ok} = \Delta l_{on} + \Delta l_{nm} + \Delta l_{mk}.$$

Продольные силы в рассматриваемых участках бруса равны:

$$N_{km} = 0; \quad N_{nm} = N_{on} = F.$$

Абсолютные удлинения участков равны:

$$\Delta l_{mk} = 0; \quad \Delta l_{nm} = \frac{F \cdot l_{nm}}{E \cdot A_1}; \quad \Delta l_{on} = \frac{F \cdot l_{on}}{E \cdot A_2};$$

$$\delta_k = \Delta l_{ok} = \frac{F}{E} \left( \frac{l_{nm}}{A_1} + \frac{l_{on}}{A_2} \right).$$

Аналогично можно определить перемещение  $\delta$  любых точек оси бруса. График, изображающий изменение продольных перемещений по длине оси бруса, называется *эпюрой перемещений*.

## **Тема 12. МЕХАНИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СТРОИТЕЛЬНЫХ МАТЕРИАЛОВ И ИХ ОПРЕДЕЛЕНИЕ**

Архитектор, выбирая материал для проектируемой конструкции, а затем, рассчитывая и проверяя ее на прочность, жесткость, устойчивость, должен располагать данными о механических свойствах материала, т.е. его прочности, пластичности и т.п., а также знать величины упругих постоянных – модуля продольной упругости  $E$  и коэффициента Пуассона  $\mu$ .

Основными механическими свойствами, числовые характеристики которых определяются при испытаниях материалов, являются:

- *прочность* – способность материала, не разрушаясь, воспринимать внешние механические воздействия;
- *пластичность* – способность материала давать значительные остаточные деформации, не разрушаясь;
- *упругость* – способность материала восстанавливать после снятия нагрузок свои первоначальные формы и размеры;
- *твердость* – способность материала сопротивляться проникновению в него другого, практически не получающего остаточных деформаций, тела.

Механические испытания широко применяются и при создании новых строительных и конструкционных материалов, которые должны обладать определенными механическими свойствами.

### **12.1. Строительные материалы**

#### **12.1.1. Стали**

Для стальных и железобетонных конструкций применяются углеродистые и низколегированные стали повышенной и высокой прочности. Основными механическими характеристиками сталей являются:

- предел пропорциональности  $\sigma_{пц}$ ;
- предел упругости  $\sigma_y$ ;

- предел текучести  $\sigma_T$ ;
- предел прочности (временное сопротивление)  $\sigma_g$ ;
- относительное удлинение при разрыве  $\delta$ ;
- относительное сужение при разрыве  $\psi$ ;
- ударная вязкость  $a_k$ ;
- предел выносливости  $\sigma_{-1}$ ;
- твердость.

Механические свойства и области применения сталей, используемых в строительных конструкциях, приведены в табл. 12.1, 12.2.

Таблица 12.1

**Современные марки сталей, применяемые в строительстве**

Марка стали	$\sigma_b, \frac{H}{mm^2}$	$\delta, \%$	Область применения
1	2	3	4
<i>Углеродистые стали</i>			
<b>Ст0</b> ГОСТ 535-88	300	18	настилы, арматура, перила, кожухи, обшивки, подкладки
<b>Ст2кп</b> ГОСТ 14637-89	320-410	29-	малонагруженные элементы, сварных конструкций, работающие при постоянных нагрузках и при положительных температурах
<b>Ст2сп</b> ГОСТ 14637-89		32	
<b>Ст3кп</b> ГОСТ 14637-89	360-460	23-27	для второстепенных, малонагруженных и несущих элементов сварных и несварных конструкций, работающих при температуре от – 40 до + 400°С
<b>Ст3пс</b> ГОСТ 14637-89			
<b>Ст3сп</b> ГОСТ 14637-89			
<b>Ст5пс</b> ГОСТ 14637-89	490-630	17-20	детали клепаных конструкций, болты, гайки, трубные решетки, фланцы и другие детали, работающие при температуре от 0 до + 425°С
<b>Ст5сп</b> ГОСТ 14637-89			
<b>Ст6сп</b> ГОСТ 535-88	590	12-15	ломы строительные, стержневая арматура периодического профиля и др.
<b>Ст6пс</b> ГОСТ 535-88			
<i>Стали для металлических и армированных железобетонных конструкций</i>			
<b>09Г2</b> ГОСТ 19281-89	305	440	Стойки ферм, рамы кранов
<b>17ГС</b> ГОСТ 19281-89	325-345	450-490	днища, фланцы, сварные детали, работающие под давлением при температуре до 350°С
<b>10Г2С1</b> ГОСТ 19281-89	295-345	430-480	детали элементов сварных конструкций

Окончание табл. 12.1

1	2	3	4
<b>15ХСНД</b> ГОСТ 19281-89	325- 345	450- 490	детали элементов сварных конструкций
<b>18Г2С</b> ГОСТ 5781-82	295	490	для армирования обычных и предварительно напряженных железобетонных конструкций
<b>20ГС</b> ГОСТ 10884-94	590- 785	780- 980	для армирования железобетонных конструкций
<i>Стали повышенной и высокой прочности</i>			
<b>30ХГС, 30ХГСА</b> ГОСТ 4543-71	835	1080	ответственные сварные конструкции, работающие при знакопеременных нагрузках
1	2	3	4
<b>35ХГСА</b> ГОСТ 4543-71	1275	1620	ответственные сварные конструкции сложной конфигурации, работающие при знакопеременных нагрузках
<b>17Х18Н9</b> ГОСТ 5949-79		780- 1130	коррозионно-стойкие сварные детали
<p>Примечания:</p> <p>1. <b>сп</b> – спокойная сталь; <b>пс</b> – полуспокойная сталь; <b>кп</b> – кипящая сталь</p> <p>2. В обозначении марок сталей первые цифры слева указывают содержание углерода в сотых долях процента. Буквы обозначают легирующий элемент: Г – марганец, С – кремний, Х – хром, Н – никель, Д – медь. Цифры после букв указывают приблизительное процентное содержание соответствующего элемента в целых единицах. Буква А, стоящая на последнем месте, показывает, что сталь улучшенного качества</p>			

Таблица 12.2

**Механические свойства углеродистой стали при температурах от +20 до +450 °С**

Температура испытаний, °С	$\sigma_T, \frac{Н}{мм^2}$	$\sigma_b, \frac{Н}{мм^2}$	$\delta, \%$	$\psi, \%$	$E, МПа$
20	238	403	32,7	68,6	$2,02 \cdot 10^5$
+100	217	378	21,3	64,6	$1,87 \cdot 10^5$
+200	251	485	16,2	55,5	$1,79 \cdot 10^5$
+300	149	443	26	62,4	$1,70 \cdot 10^5$
+400	129	359	31	71,4	$1,61 \cdot 10^5$
+450	126	308	29,8	71,9	$1,37 \cdot 10^5$

При выполнении проектировочных расчетов принимают усредненные значения следующих физических величин, характеризующих упругие свойства:

- *удельный вес*: для стали  $\gamma = 78 \frac{\text{кН}}{\text{м}^3}$ ; для чугуна  $\gamma = 72 \frac{\text{кН}}{\text{м}^3}$ ;
- *модуль упругости первого рода E*: для углеродистой стали  $E = 2,1 \cdot 10^8 \frac{\text{кН}}{\text{м}^2}$ ; для низколегированной стали  $E = 2,0 \cdot 10^8 \frac{\text{кН}}{\text{м}^2}$ ; для холодной арматуры  $E = 1,8 \cdot 10^8 \frac{\text{кН}}{\text{м}^2}$ ; для пучков и прядей высокопрочной проволоки с параллельным расположением проволок  $E = 2,0 \cdot 10^8 \frac{\text{кН}}{\text{м}^2}$ ; для канатов стальных и канатов с металлическим сердечником  $E = 1,5 \cdot 10^8 \frac{\text{кН}}{\text{м}^2}$ ; для тросов с органическим сердечником  $E = 1,3 \cdot 10^8 \frac{\text{кН}}{\text{м}^2}$ ; для отливок из серого чугуна  $E = 1,0 \cdot 10^8 \frac{\text{кН}}{\text{м}^2}$ ;
- *модуль упругости второго рода G*: для прокатной стали  $G = 8,4 \cdot 10^7 \text{кН/м}^2$ ;
- *коэффициент Пуассона  $\mu$* : для стали  $\mu = 0,3$ .

### 12.1.2. Алюминиевые сплавы

Особенностями алюминиевого сплава как строительного материала являются следующие:

- малый удельный вес –  $\gamma = 27 \frac{\text{кН}}{\text{м}^3}$ ;
- широкие пределы изменения прочностных характеристик;
- повышенная коррозионная стойкость;
- сравнительно низкое значение модуля упругости первого рода –  $E = 0,7 \cdot 10^8 \frac{\text{кН}}{\text{м}^2}$ ;
- высокая технологичность.

Основной недостаток – высокая стоимость полуфабрикатов и конструкций, что приводит к технико-экономической целесообразности применения алюминиевых сплавов только при особых условиях компоновки зданий или сооружений, строительства и эксплуатации. Примером могут служить: конструкции, в которых собственный вес составляет незначи-

тельную часть суммарной нагрузки (например, конструкции покрытий большепролетных зданий, панели стен и покрытий) и его уменьшение обеспечивает облегчение несущих конструкций; здания, возводимые в отдаленных и труднодоступных районах, предназначенные для эксплуатации в агрессивных средах, возводимые в районах высокой сейсмичности; фасады и интерьеры зданий; подвижные, сборно-разборные конструкции; монтажное оборудование и приспособления.

Конструкции и элементы из алюминиевых сплавов удачно сочетаются с другими строительными материалами: сталью, пластмассами, стеклом, деревом и т.д.

Механические свойства алюминиевых сплавов определяются химическим составом, состоянием, видом и размерами полуфабрикатов, наличием или отсутствием плакировки и т.д. Диаграммы растяжения и сжатия разных алюминиевых сплавов мало отличаются друг от друга и в отличие от стали у них отсутствует площадка текучести (табл. 12.3).

Таблица 12.3

**Алюминиевые сплавы для строительства**

Группа сплава	Марка сплава	$\sigma_s, \frac{H}{мм^2}$	Область применения	
Алюминий технический	АД1-М	80	Ограждающие конструкции	
Алюминий – марганец	АМц-М	150		
Алюминий – магний (магналин)	АМг2-М	170		
Алюминий – магний – кремний	АД31-Т	200		
Алюминий – магний – кремний	АД31-Т	200	Для конструкций, совмещающих несущие и ограждающие функции	
	АД33-Т1	270		
	АД35-Т1	300		
	АВ-М	120		
Магналин	АМг5-М	270	Для несущих сварных конструкций	
	АМг6-М	320		
	АМг61-М	400		
Алюминий – магний – кремний	АД33-Т1	270 –		Для несущих клепаных и болтовых конструкций
	АВ-Т1	300		
Алюминий – цинк – магний	В92-Т	360		
Алюминий – медь – магний (дюралюмин)	Д1-Т	380 –		
	Д16-Т	440		
Алюминий – цинк – магний – медь	В95-Т1	520		
Магналин	АМг5-М	270		
Алюминий – магний – кремний	АД33-Т1	270 –		
	АВ-Т1	300		

### 12.1.3. Бетон, каменные и армированные материалы

Бетон – искусственный каменный материал, состоящий из цементного камня, тяжелых или легких заполнителей (гравия, щебня, керамзита, шлака, песка и пр.), пор и капилляров, заполненных воздухом и водой в жидкой и газообразной фазе.

Проектные марки бетона по прочности на сжатие и по прочности на растяжение являются характеристиками прочности бетона, назначенными при проектировании. Нормами установлены следующие проектные марки бетона по прочности на сжатие  $R_c$ : 15, 25, 35, 50, 75, 100, 150, 200, 300, 400, 600, 800.

Соответствие фактической прочности бетона его проектной марке должно устанавливаться испытанием кубов бетона; при оценке результатов испытаний следует учитывать не только средние пределы прочности бетона, но и его коэффициенты изменчивости.

Прочность бетона в конструкциях близка к прочности бетона, получаемой при испытании призмы, соотношением  $\frac{h}{d} = 4...8$ . Предел прочности при сжатии призмы сечением 20×20 см и высотой 80 см называется *призменной прочностью*  $R_{пр}$ . Расчетное сопротивление бетона определяется делением его нормативной призменной прочности на коэффициенты безопасности. Нормативные и расчетные сопротивления бетонов различных видов приведены в соответствующих СНиП.

Каменные материалы подразделяются по своему происхождению на искусственные и природные. К искусственным камням относится обыкновенный, пустотелый и пористый кирпич, силикатный кирпич, сплошные и пустотелые бетонные и легкобетонные камни, камни из ячеистых бетонов и др.

Природные камни подразделяются на камни правильной и неправильной формы. Камни правильной формы применяются для кладки стен и облицовки. Камни для кладки стен выпиливают из мягких горных пород (вулканических туфов, мягких известняков, известняков-ракушечников). Камень неправильной формы (бут рваный, бут постелистый, плитняковый бут) получают из местных горных пород всех видов, но преимущественно из известняка.

Основной вид испытаний каменных материалов – испытание на сжатие, на основании которого устанавливается марка камня.

Марки камня, принимаемые при проектировании и характеризующие предел прочности камня на сжатие в  $\text{кН/мм}^2$ , установлены следующие: 0,4; 0,7; 1,0; 1,5; 2,5; 3,5; 5,0; 7,5; 10; 12,5; 15; 20; 30; 40; 50; 60; 80; 100.

Каменная кладка хорошо сопротивляется сжатию и относительно плохо растяжению. Сопротивление кладки растяжению зависит от сцепления раствора с камнем, которое определяется рядом факторов и колеблется в широких пределах. Проектная прочность сцепления может быть обеспечена только при условии соблюдения ряда специальных производственных мероприятий. Поэтому каменные стены и столбы проектируются таким образом, чтобы эксцентриситет не превышал  $0,45h$ , где  $h$  – высота сечения; при этом в расчете не учитывают сопротивление кладки растяжению, и внутреннее продольное усилие уравнивается напряжениями одной лишь сжатой зоны.

Вследствие местных неровностей и неодинаковой плотности раствора в швах при сжатии кладки камни испытывают, кроме напряжений сжатия, также напряжения изгиба и среза. Если модуль упругости камня больше чем раствора, то в поперечном направлении в камне возникают напряжения растяжения, а в растворе – сжатия. Вертикальные швы кладки вследствие слабого сцепления раствора с камнем могут рассматриваться как узкие вертикальные щели, у концов которых возникает концентрация напряжений. Таким образом, при сжатии кладки ее элементы находятся в весьма сложном напряженном состоянии, что является причиной значительной разницы между прочностью кладки и составляющих ее камня и раствора. Например, прочность кирпичной кладки на самом прочном растворе составляет обычно лишь 35 – 40 % прочности кирпича. Средние значения предела прочности при изгибе различных марок кирпича приведены в таблице 12.4.

Таблица 12.4

**Средние значения предела прочности глиняного  
и силикатного кирпича при изгибе**

Марка кирпича	200	150	125	100	75
Предел прочности при изгибе, $\frac{H}{мм^2}$	3,4	2,8	2,5	2,2	1,8

Рациональное сочетание двух различных по своим физико-механическим свойствам материалов: бетона и стали, каменной кладки и стали, асбестоцемента и стали или стеклопластика – позволяет получить железобетон различных видов, армокаменную кладку, армированный асбестоцемент. Их свойства зависят от свойств исходных составляющих, но в них появляется ряд ценных свойств, которыми не обладали составляющие материалы.

Бетон и каменная кладка имеют предел прочности при сжатии, превышающий предел прочности при растяжении в 10 – 15 раз и более, асбестоцемент – в 4-5 раз. Использование высокой прочности при сжатии этих материалов в элементах конструкций, работающих на изгиб и внецентренное сжатие, при значительных эксцентриситетах возможно только при усилении растянутой зоны сечения арматурой.

Если обычная бетонная или каменная балка при появлении трещин в растянутой зоне разрушается, то при армировании растянутой зоны несмотря на наличие трещин в бетоне или кладке несущая способность балки того же сечения не исчерпана и нагрузка может возрасти во много раз.

В железобетонной или армокаменной сжатой колонне достижение предела текучести в арматуре еще не означает исчерпания ее несущей способности. Армированные конструкции, таким образом, обеспечивают и более рациональное использование стали. В армированном элементе арматура всех видов, кроме того, надежно защищена от механических повреждений и коррозии.

Соединение бетона, кладки или асбестоцемента со стальной арматурой обеспечивается силами сцепления между этими материалами; малая разница в величине коэффициентов линейного расширения этих материалов практически исключает внутренние напряжения при изменении температуры.

Работа конструкций из армированных материалов более сложна, чем работа конструкций из неармированных материалов.

#### **12.1.4. Древесина**

Древесина представляет собой природный материал высокомолекулярного состава. Основным веществом ее является целлюлоза, образующая утолщенные вторичные слои стенок механических волокон. Физико-механические свойства древесины обусловлены главным образом свойствами природной целлюлозы, а также микро- и макроструктурой древесины, что в целом определяет неоднородность и анизотропность этого материала.

Неоднородность древесины проявляется в различии строения и свойств годовичных слоев, образующихся в процессе роста дерева в зависимости от условий внешней среды. Вследствие анизотропности строения древесины, отклонение волокон от строгой параллельности оси ствола вызывает снижение прочности крупных элементов по сравнению с малыми образцами чистой древесины. Особенно сильно влияние местного отклонения волокон около сучков, которым и обуславливается снижение прочности конструктивных элементов.

При работе в конструкциях древесина подвергается растяжению, сжатию, скалыванию и смятию вдоль и поперек волокон на части поверхности элемента. В тонких оболочках и пластинках учитывается двухосное напряженное состояние.

В несущих конструкциях применяется древесина хвойных пород, преимущественно сосна и ель. Некоторые показатели физико-механических свойств древесины приведены в табл. 12.5.

Таблица 12.5

**Прочность и деформативность основных пород древесины**  
(средние показатели для стандартных образцов при влажности 15%)

Порода (район произрастания)	Удельный вес, $\frac{\text{кН}}{\text{м}^3}$	Предел прочности, $\frac{\text{Н}}{\text{мм}^2}$				
		Сжатие вдоль волокон	Поперечный изгиб	Растяжение вдоль волокон	Скалывание вдоль волокон	
Вариационный коэффициент, %	10	13	15	20	21	19
<i>Береза обыкновенная</i> (Западная Сибирь РФ)	6,8	46	91,7	-	8,6	9,9
<i>Бук кавказский</i>	6,8	46,1	93,8	129,1	9,9	13,1
<i>Дуб</i> (Украина)	7,2	53,5	91,6	-	-	11,8
<i>Ель обыкновенная</i>	4,9	42,8	74,7	129,5	6,2	6,5
<i>Лиственница сибирская</i> (Восточная Сибирь РФ)	6,5	55,3	96,4	118,6	9,3	8,5
<i>Осина</i> (Украина)	5,2	40,1	81,7	133,0	6,3	8,7
<i>Пихта кавказская</i>	4,7	39,1	72,2	111,8	7,7	8,2
<i>Сосна обыкновенная</i>	5,2	43,9	79,3	115,0	6,9	7,3
<i>Тополь белый</i>	4,6	30,8	53,3	86,0	5,4	7,1

Сопротивление местному смятию древесины поперек волокон характеризуется условным пределом прочности, составляющим в среднем для сосны 2,9 ...4,3, пихты 2,3...3,2, лиственницы 5,6...8,6, дуба 4,9...8,4 и березы 4,7...6,0  $\frac{\text{Н}}{\text{мм}^2}$ .

Улучшение механических показателей натуральной древесины может быть достигнуто путем ее модификации полимерами.

### **12.1.5. Пластмассы**

Пластмассы – материалы на основе высокомолекулярных веществ (полимеров). К пластмассам, применяемым в строительных конструкциях, относятся стеклопластики, оргстекло, винилпласты, пенопласты, сотопласты, древесные пластики, синтетические клеи и др.

Применение пластмасс в конструкциях наиболее целесообразно в случаях, когда необходимо уменьшить вес конструкций: при строительстве в районах вечномёрзлых грунтов, просадочных грунтов, на подрабатываемых территориях, когда надо сократить объем транспортных и строительно-монтажных работ, а также для исключения влияния магнитных свойств строительных конструкций и возможности искрообразования.

Каждый из упомянутых выше видов полимерных материалов включает большое количество разновидностей, обладающих значительным разнообразием физико-механических и других свойств. Всем пластмассам в значительной степени свойственна зависимость механических характеристик от времени.

**Стеклопластиковые материалы** применяются в основном следующих видов:

– стеклопластик на полиэфирном связующем и рубленом стекловолокне в виде волнистых и плоских листов, используемый в светопрозрачных конструкциях;

– стеклопластик конструкционный КАСТ-В на модифицированном феноло-формальдегидном связующем и стеклоткани, выпускаемый в виде листов и плит и применяемый для обшивок трехслойных панелей;

– стеклопластик листовой СВМ на эпоксидно-фенольном связующем и непрерывном ориентированном стекловолокне, выпускаемый в виде листов и применяемый для изготовления особо прочных вспомогательных изделий и деталей;

– стеклопластиковый прессовочный материал АГ-4 на модифицированном феноло-формальдегидном связующем и рубленном или непрерывном ориентированном стекловолокне, выпускаемый в виде брикетов и лент и используемый для изготовления вспомогательных конструкционных деталей.

**Органическое стекло** используется в строительных конструкциях в виде листов и блоков для создания светопрозрачных ограждающих конструкций (купольные элементы и волнистые листы).

**Винилпласт** листовой применяется для светопрозрачных ограждающих конструкций (купольные элементы и волнистые листы) марок ВП

(прозрачный) и марок ВН (непрозрачный) для обшивки панелей, перегородок и подвесных потолков.

**Пенопласты** используются в качестве среднего слоя трехслойных конструкций и изготавливаются на основе полистирольных, поливинилхлоридных, фенольных и других полимерных композиций.

Всем пластмассам в значительной степени свойственна зависимость механических характеристик от времени.

## 12.2. Диаграммы растяжения

Для подробного изучения поведения различных материалов под нагрузкой производятся лабораторные испытания образцов, изготовленных из этих материалов, на специальных испытательных машинах. Эти испытания проводятся для определения числовых характеристик, позволяющих оценить прочность и пластичность материала. Такие характеристики называют механическими.

Вид образцов и методы испытаний регламентированы государственными стандартами. При этом получают диаграмму растяжения  $F = f(\Delta l)$ . Исключив влияние размеров образца путем деления силы на начальную площадь, а удлинения – на начальную длину образца, получим диаграмму деформирования  $\sigma = f(\varepsilon)$ . Типичная диаграмма деформирования при растяжении приведена на рисунке 12.1.

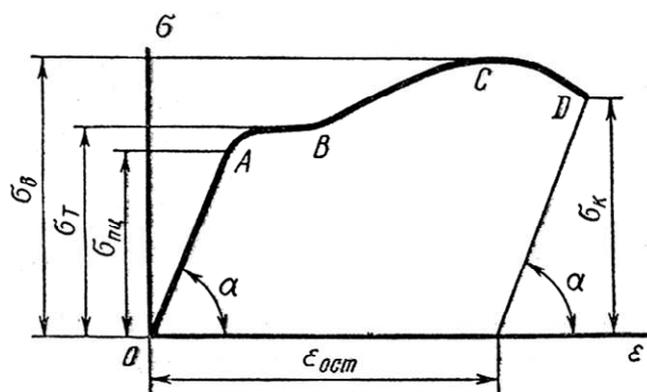


Рис. 12.1. Типичная диаграмма деформирования материала при растяжении

На диаграмме выделяются характерные участки:

- $OA$  – участок пропорциональности;
- $AB$  – участок текучести;
- $BC$  – участок упрочнения;
- $CD$  – участок местной пластической деформации (образование «шейки»).

На участке  $ABC$  деформации равномерны. Разрушение происходит в точке  $D$ . Соответствующие этим характерным участкам значения напряжений называют:  $\sigma_{mц}$  – предел пропорциональности;  $\sigma_T$  – предел текучести;  $\sigma_\sigma$  – предел прочности;  $\sigma_k$  – напряжение в момент разрушения.

*Пределом пропорциональности  $\sigma_{mц}$  называется наибольшее напряжение, при котором справедлив закон Гука.*

*Пределом текучести  $\sigma_T$  называется напряжение, при котором деформации растут без увеличения нагрузки.*

Соответственно горизонтальный участок диаграммы называют *площадкой текучести*.

*Пределом прочности (или временным сопротивлением)  $\sigma_\sigma$  называется отношение наибольшей нагрузки, выдерживаемой образцом, к первоначальной площади его поперечного сечения.*

Эти напряжения являются условными, так как при их вычислении не учитывают изменения поперечных размеров за счет эффекта Пуассона.

Если материал не имеет выраженной площадки текучести (среднеуглеродистая сталь, медь, дюралюмин), то предел текучести назначается по допуску на пластические деформации. Наиболее распространенным значением предела текучести, в этом случае, является  $\sigma_{0,2}$ , где 0,2 означает, что остаточная деформация равна 0,2 %. При повторном нагружении кривая деформирования имеет вид, как показано на рис. 12.2.

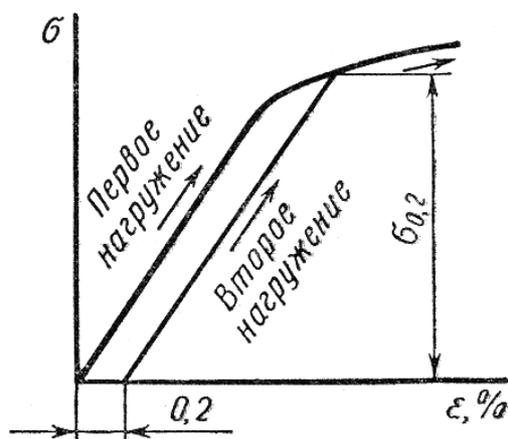


Рис. 12.2. Определение предела текучести по диаграмме деформирования при заданном допуске на остаточную деформацию

Наблюдаемое повышение предела текучести называется *упрочнением* или *наклепом*. Указанная способность материалов повышать сопротивле-

ние после предварительной пластической деформации широко используется для упрочнения деталей (стальная арматура и др.).

На рис. 12.3 показан для сравнения вид диаграмм растяжения сталей с различным содержанием углерода. Из рисунка видно, что с повышением процента содержания углерода увеличивается прочность стали и уменьшается ее пластичность.

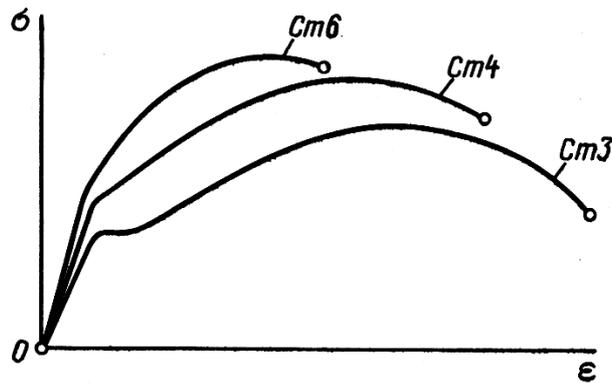


Рис. 12.3. Сравнительные диаграммы растяжения сталей, с разным содержанием углерода

Хрупкие материалы, например чугун, характерны тем, что их разрушение происходит при очень малых остаточных деформациях. На рис. 12.4 приведены диаграммы растяжения различных материалов. В частности, для чугуна (СЧ), видно, что уже даже на начальной стадии растяжения обнаруживается отклонение от закона Гука. При расчетах это отклонение не учитывают.

Строительные материалы, такие как бетон и кирпич, имеют диаграммы растяжения, подобные диаграмме чугуна.

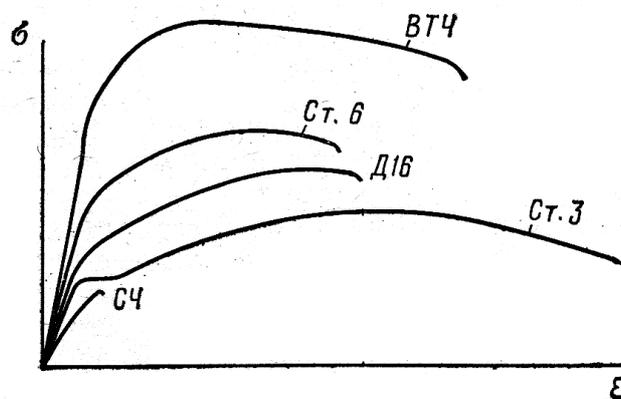


Рис. 12.4. Диаграммы растяжения различных материалов

Пределы пропорциональности  $\sigma_{пц}$ , текучести  $\sigma_T$  и прочности  $\sigma_e$  называют *характеристиками прочности* материала. В качестве *характеристик пластичности* используют относительное удлинение и относительное сужение, так как они характеризуют деформационную способность материала, доведенного до разрушения:

$$\delta = \frac{\Delta l}{l} \% ; \quad \psi = \frac{\Delta A}{A} \% .$$

Пластмассы испытывают большей частью на растяжение. У некоторых пластмасс предел прочности выше, чем у стали Ст3, но характеристики пластичности у них невелики. Некоторые пластмассы в местах наибольшей деформации меняют свой первоначальный цвет, и это позволяет судить о наиболее напряженных участках при испытании образцов сложной конфигурации.

На рис. 12.5 и 12.6 изображены диаграммы растяжения некоторых пластмасс.

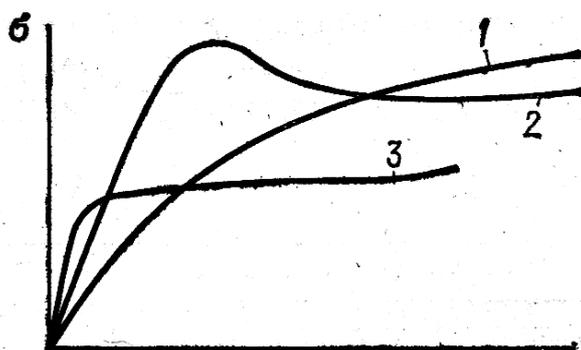


Рис. 12.5. Диаграммы растяжения термопластов:

1 – полиэтилен; 2 – полипропилен;  
3 – поливинилхлорид

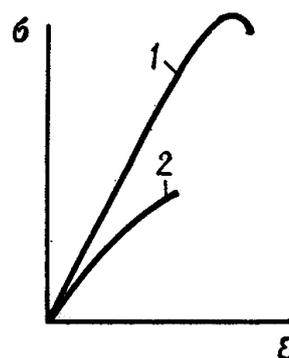


Рис. 12.6. диаграммы растяжения

пластмасс: 1 – СВАМ;  
2 – реактопласты

### 12.3. Диаграммы сжатия

Строительные материалы, такие как бетон, цемент, различные естественные камни, испытывают в основном на сжатие. Древесину испытывают на сжатие как вдоль, так и поперек волокон. Сталь испытывают на сжатие значительно реже, чем на растяжение.

Испытание металлов на сжатие производят на образцах в виде цилиндров, высота которых равна их диаметру; для других материалов применяются образцы в виде кубиков.

Рассмотрим диаграммы сжатия стали и чугуна. Для наглядности изобразим их на одном рисунке с диаграммами растяжения этих материалов (рис. 12.7). В первой четверти изображены диаграммы растяжения, а в третьей – сжатия.

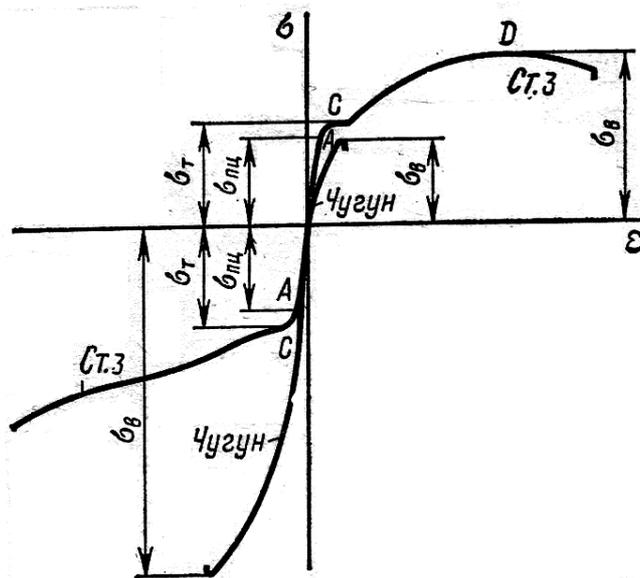


Рис. 12.7 Сравнительные диаграммы растяжения и сжатия стали и чугуна

Пределы пропорциональности  $\sigma_{пц}$  и текучести  $\sigma_T$  для стали при сжатии приблизительно такие же, как и при растяжении. Стальной образец при сжатии укорачивается, а поперечные размеры его увеличиваются, особенно в средней части, рис. 12.8. Условно принимают при сжатии такой же предел прочности, как при растяжении.

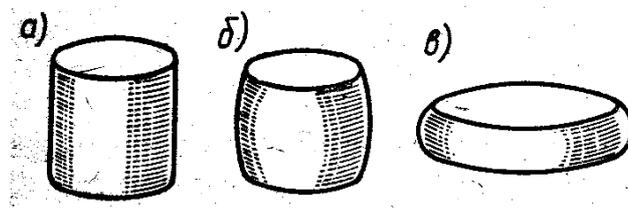


Рис. 12.8. Стадии деформирования стального образца при сжатии

Медь, алюминий и другие пластичные материалы при сжатии деформируются так же, как стальные образцы, и имеют аналогичную диаграмму напряжений при сжатии.

Диаграмма сжатия чугуна по форме похожа на диаграмму растяжения, однако, ординаты диаграммы напряжений при сжатии в несколько раз

больше, чем при растяжении. Предел прочности чугуна на сжатие в 4-5 раз больше, чем при растяжении. При сжатии чугунного образца продольные деформации его незначительны. Образец несколько выпучивается в средней части, принимая слегка бочкообразную форму, а после чего в нем появляются трещины под углом, примерно  $45^\circ$  к оси по площадкам с наибольшими касательными напряжениями. В момент разрушения боковые части образца отделяются, и он принимает вид двух усеченных конусов, рис. 12.9.

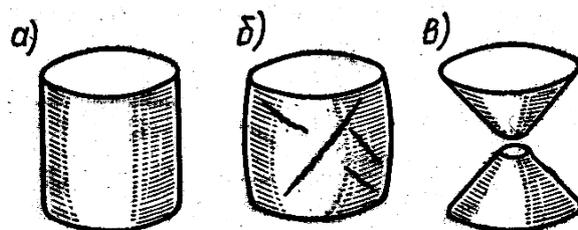


Рис. 12.9. Стадии деформирования чугунного образца при сжатии

Большинство хрупких материалов (бетон, камень) разрушаются при сжатии так же, как чугун, и имеют аналогичную диаграмму сжатия. Предел прочности этих материалов на сжатие значительно больше, чем на растяжение (для бетона примерно в 20 раз). Все хрупкие материалы плохо работают на растяжение. Поэтому, например, в растянутых зонах бетонных конструкций закладываются стальные прутья (арматура), воспринимающие растягивающее усилие.

При раздавливании бетонных или цементных кубиков они принимают вид двух усеченных пирамид, рис. 12.10, а, б. Если исключить влияние трения между сжимаемым бетонным кубиком и плоскостями испытательной машины, то бетонный кубик разрушается по плоскостям, параллельным действующему усилию, рис. 12.10, в.

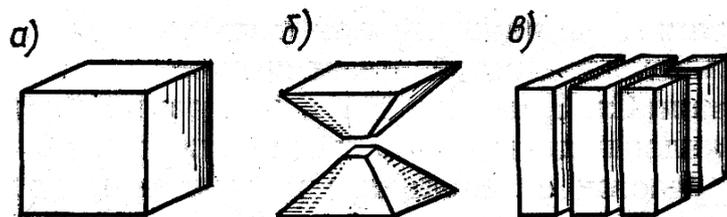


Рис. 12.10. Характер разрушения бетонного кубика

При испытании древесины на сжатие приходится учитывать, что древесина – материал анизотропный и по-разному работает вдоль и попе-

рек волокон. Диаграммы напряжений при сжатии древесины вдоль (1) и поперек (2) волокон показаны на рис. 12.11.

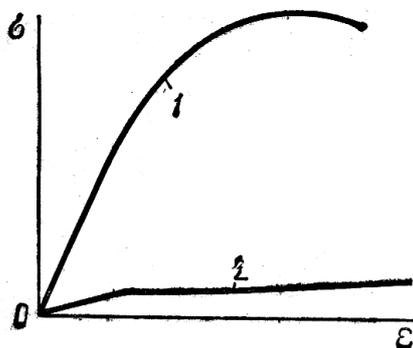


Рис. 12.11. Диаграммы сжатия древесины вдоль (1) и поперек (2) волокон

Многие породы древесины при сжатии вдоль волокон выдерживают значительные напряжения, и разрушение происходит при сдвиге одной части кубика по поверхности другой, рис. 12.12, а. При сжатии древесины поперек волокон древесина не разрушается, а сильно прессуется, рис. 12.12, б.

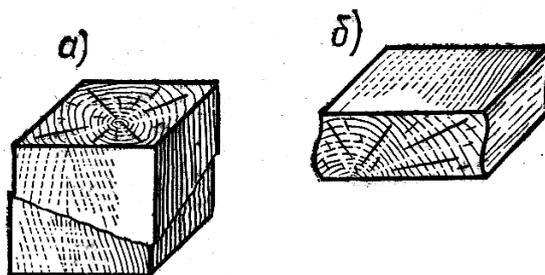


Рис. 12.12. Характер деформирования древесины при сжатии:  
а – вдоль волокон; б – поперек волокон

#### 12.4. Понятие о ползучести и релаксации

Материалы, для которых зависимость между напряжениями и деформациями включает время, называют *упруговязкими*.

К таким материалам относят полимеры и их композиции, сплавы, бетоны, горные породы, грунты, лед, металлы при повышенных температурах и др. Некоторые конструкции, такие как амортизирующие и виброзащитные, в целом ведут себя под нагрузкой как упруговязкие системы.

Характерными для таких материалов являются их релаксационные свойства: *изменение напряжений при неизменных деформациях* (релаксация) и *изменение деформаций при постоянных напряжениях* (ползучесть).

Процесс изменения деформаций тела во времени при постоянном напряжении называется *ползучестью*.

Процесс изменения напряжений в теле во времени при постоянной деформации называется *релаксацией*.

## **Тема 13. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ**

### **13.1. Понятие напряженного состояния в точке**

*Напряженным состоянием в данной точке тела называют совокупность напряжений, действующих по всевозможным площадкам, проведенным через эту точку.*

Центральное растяжение или сжатие бруса является простейшим видом деформации тела, когда напряженное состояние всех его точек одинаково (однородное напряженное состояние). В общем случае в теле напряженное состояние неоднородно – оно меняется от точки к точке, и поэтому по любому сечению этого тела напряжения распределены неравномерно. Для изучения напряженного состояния в какой-либо точке мысленно выделяют бесконечно малый элементарный параллелепипед. Ввиду малости параллелепипеда можно считать, что напряженное состояние во всех его точках одинаково и совпадает с напряженным состоянием в исследуемой точке. Будем считать, что напряжения, возникающие на его гранях, известны. Каждое из этих напряжений может быть разложено на три составляющих, параллельных координатным осям. Таким образом, в общем случае на трех исходных площадках возникают девять составляющих напряжений, показанных на рис. 13.1 (напряжения на невидимых гранях элемента не изображаем). Указанные девять величин называют компонентами напряженного состояния в данной точке.

Из условия равновесия выделенного элемента следует, что *составляющие касательных напряжений, возникающих на любых двух взаимно перпендикулярных площадках, перпендикулярные к общему ребру этих площадок, равны по абсолютной величине, т.е.*

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}; \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}; \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}. \quad (13.1)$$

Это положение называют *законом парности касательных напряжений*. Следовательно, из девяти компонентов напряженного состояния независимы лишь шесть.

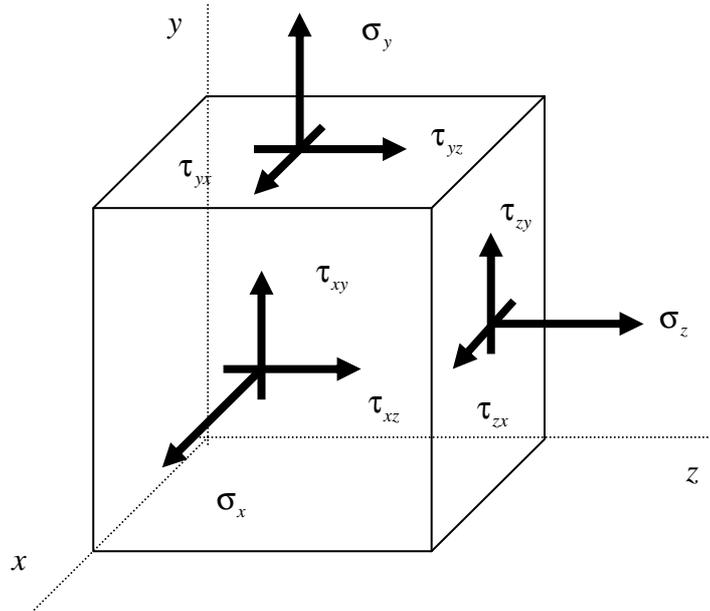


Рис. 13.1. Компоненты напряженного состояния в точке тела

*Напряженное состояние в точке тела задано, если известны напряжения на любых трех проходящих через нее взаимно перпендикулярных площадках.*

Среди бесчисленного множества площадок, которые можно провести через исследуемую точку, имеются три взаимно перпендикулярные площадки, касательные напряжения на которых отсутствуют. Эти площадки и возникающие на них нормальные напряжения называют главными.

Главные напряжения обозначают  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$ , при этом индексы проставляются лишь после того, как эти напряжения вычислены, так, чтобы выполнялись алгебраические неравенства  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ .

Для данной точки тела  $\sigma_1$  – наибольшее напряжение (в алгебраическом смысле), а  $\sigma_3$  – наименьшее. Напряжения растяжения считают положительными.

Если главные напряжения в данной точке известны, то наиболее удобно принять их за исходные.

### 13.2. Виды напряженного состояния

Классификацию видов напряженного состояния ведут по главным напряжениям.

Если все три главных напряжения отличны от нуля, напряженное состояние называется *объемным* или *трехосным*. В случае если одно из

главных напряжений равно нулю, напряженное состояние называют *плоским* или *двухосным*; если лишь одно из главных напряжений отличается от нуля, напряженное состояние называют *линейным* или *одноосным*.

Элементы, выделенные главными площадками, для разных частных случаев напряженного состояния показаны на рис. 13.2.

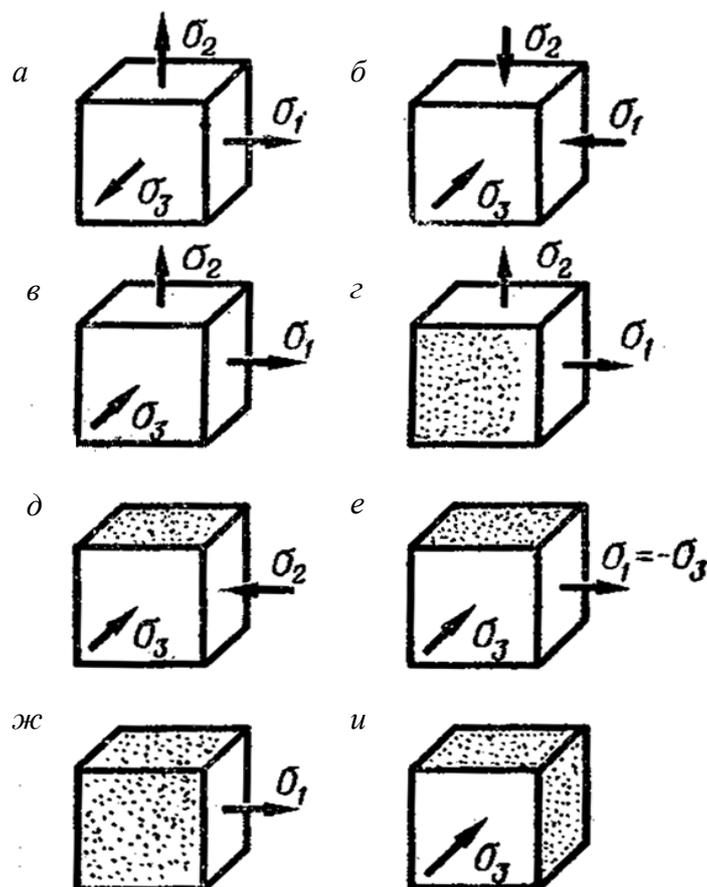


Рис. 13.2. Виды напряженного состояния: *a* – трехосное растяжение; *б* – трехосное сжатие; *в* – трехосное смешанное напряженное состояние; *г* – двухосное растяжение; *д* – двухосное сжатие; *е* – чистый сдвиг; *ж* – одноосное растяжение; *и* – одноосное сжатие

Максимальное для данной точки тела касательное напряжение  $\tau_{\max}$  возникает на площадке, параллельной вектору  $\sigma_2$  и делящей пополам прямой угол между площадками действия  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$ . Это напряжение равно полуразности максимального и минимального главных напряжений:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}.$$

### 13.3. Чистый сдвиг

Чистым сдвигом называется такое плоское напряженное состояние, при котором в окрестности данной точки можно выделить элемент таким образом, чтобы на его четырех гранях были только равные между собой касательные напряжения. При чистом сдвиге главные напряжения – сжимающее и растягивающее – равны между собой и численно равны экстремальным касательным напряжениям. Главные площадки составляют с площадками чистого сдвига угол  $45^\circ$ .

Рассмотрим деформацию элемента, ограниченного площадками чистого сдвига, рис. 13.3. Величину  $\delta$  называют *абсолютным сдвигом*, а отношение  $\frac{\delta}{a} \approx \gamma$  – *относительным сдвигом*, или *углом сдвига*. Экспериментально установлено, что в определенных пределах деформация сдвига происходит упруго, а величина ее пропорциональна касательным напряжениям  $\tau$ :

$$\gamma = \frac{\tau}{G},$$

или

$$\tau = G \cdot \gamma. \quad (13.2)$$

Это соотношение называют *законом Гука при сдвиге*.

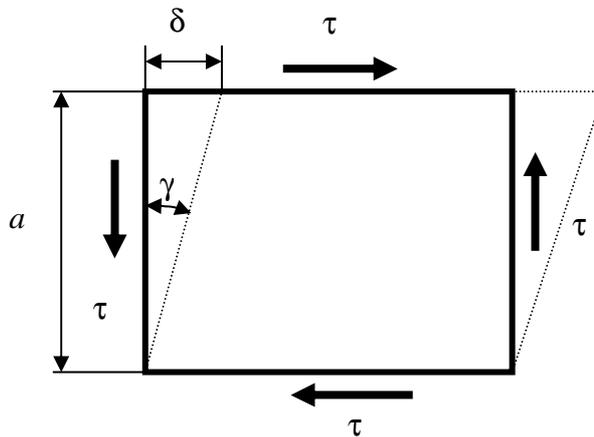


Рис. 13.3. К определению закона Гука при чистом сдвиге

Коэффициент пропорциональности  $G$  между касательным напряжением и углом сдвига называют *модулем упругости при сдвиге*, или *модулем упругости второго рода*. Размерность модуля упругости при сдвиге та же, что и напряжение.

Для изотропного тела между тремя упругими постоянными – модулем продольной упругости  $E$ , коэффициентом Пуассона  $\mu$  и модулем упругости при сдвиге  $G$  существует следующая зависимость:

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}. \quad (13.3)$$

Величина коэффициента Пуассона лежит в пределах  $0 \leq \mu \leq 0,5$ . Следовательно, величина модуля упругости при сдвиге составляет 0,33 – 0,5 от величины модуля продольной упругости. Для многих металлов и сплавов, в частности, для стали  $G \approx 0,4 \cdot E$  и значение  $G = 8,0 \cdot 10^4 \frac{\text{Н}}{\text{мм}^2}$ .

### 13.4. Практические расчеты на срез и смятие

В некоторых конструкциях по отдельным сечениям действуют значительные касательные напряжения. В этих же сечениях, как правило, участвуют и нормальные напряжения, а поэтому они не являются площадками чистого сдвига. Однако, так как нормальные напряжения в них значительно меньше касательных, то в приближенных практических расчетах учитываются лишь касательные напряжения, а указанные сечения при этом рассматриваются как площадки чистого сдвига.

Некоторые конструкции, рассчитываемые на сдвиг, показаны на рис. 13.4.

Разрушение лобовой врубки, рис. 13.4, *а* может произойти в результате скалывания дерева вдоль волокон по плоскости  $abcd$ , а разрушение врубки, показанной на рис. 13.4, *б* – в результате скалывания по плоскости  $аб$ . Разрушение заклепочного соединения, рис. 13.4, *в* и *г*, может произойти в результате среза заклепок по плоскостям  $аб$ , среза листов за крайними заклепками по плоскостям  $сd$  или между заклепками по плоскостям  $ес$ . Причиной разрушения заклепочного соединения может быть смятие листов по цилиндрической поверхности контакта их с заклепками, рис. 13.5 или разрыв листов по сечениям  $се$  на рис. 13.4, *в* и сечениям  $еf$  на рис. 13.4, *г*. Разрушение сварного соединения, рис. 13.4, *д*, может произойти в результате среза сварных швов по наименьшей площади, расположенной в биссекторной плоскости прямого угла.

Во всех рассмотренных случаях, кроме обязательного условия прочности на сдвиг (срез или скалывание)

$$\tau \leq [\tau]$$

должны удовлетворяться условия смятия и центрального растяжения и сжатия

$$\sigma_{см} \leq [\sigma_{см}] \quad \sigma \leq [\sigma],$$

где  $\tau$  – расчетное напряжение по площадке сдвига;  $[\tau]$  – допускаемое касательное напряжение на сдвиг;  $\sigma_{см}$  – расчетное напряжение смятия;  $[\sigma_{см}]$  – допускаемое напряжение на смятие;  $\sigma$  – расчетное напряжение на центральное растяжение или сжатие;  $[\sigma]$  – допускаемое напряжение на центральное растяжение или сжатие.

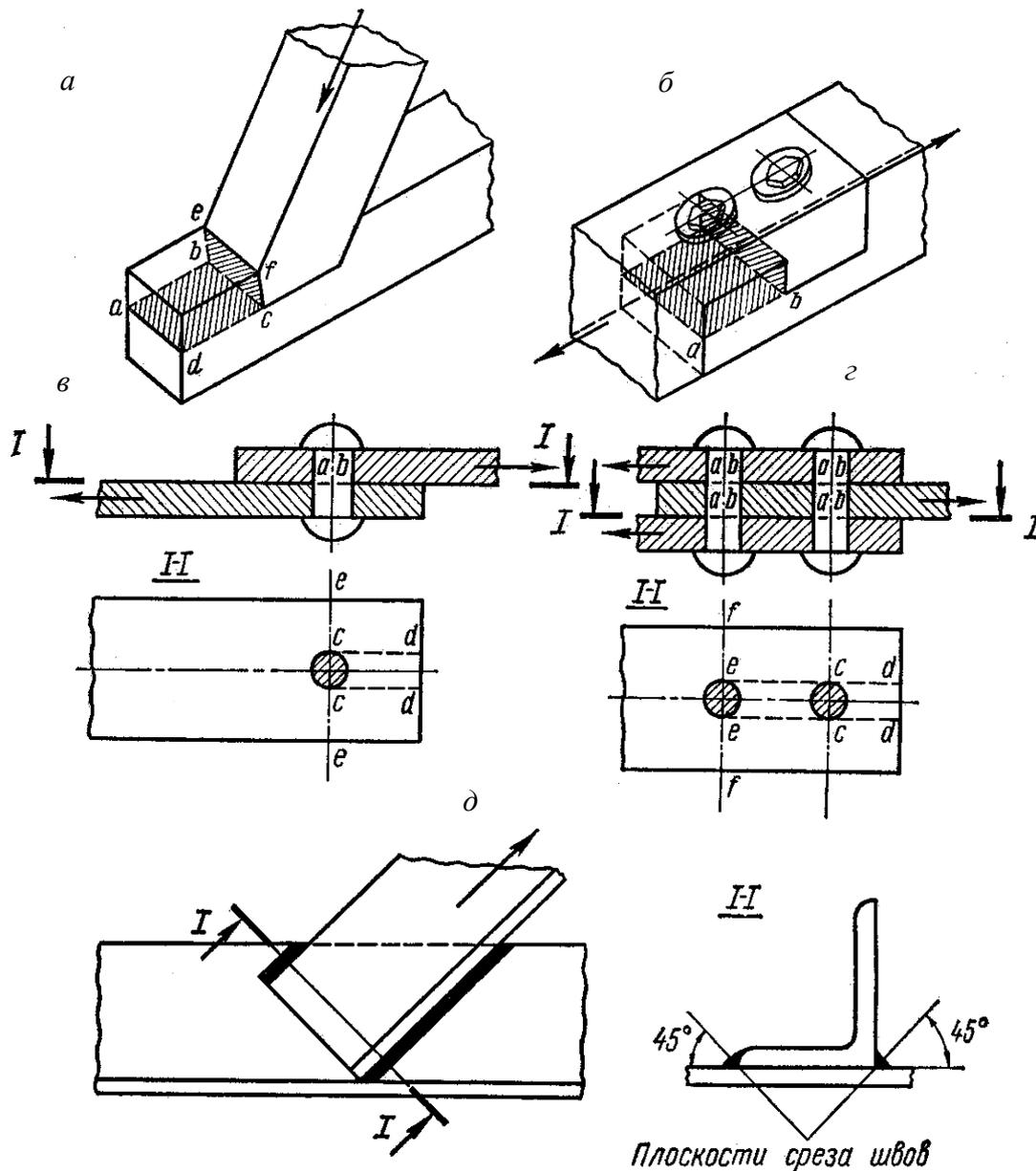


Рис. 13.4. Конструкции, рассчитываемые на сдвиг: а, б – деревянная врубка; в, з – заклепочное соединение; д – сварное соединение



Рис. 13.5. Смятие листа заклепочного соединения

### 13.4.1. Расчет заклепочных соединений

Для образования заклепочного соединения в обоих листах просверливают или продавливают отверстия, в которые закладывают нагретый *стержень*, диаметром  $d$ , с одной головкой, называемый *заклепкой*, рис. 13.6. Другой конец стержня расклепывают ударом молота или давлением прессы. Мелкие заклепки ( $d \leq 8$  мм) ставят в отверстия в холодном состоянии. Обычно заклепки изготавливаются из более податливого материала, чем соединяемые листы.

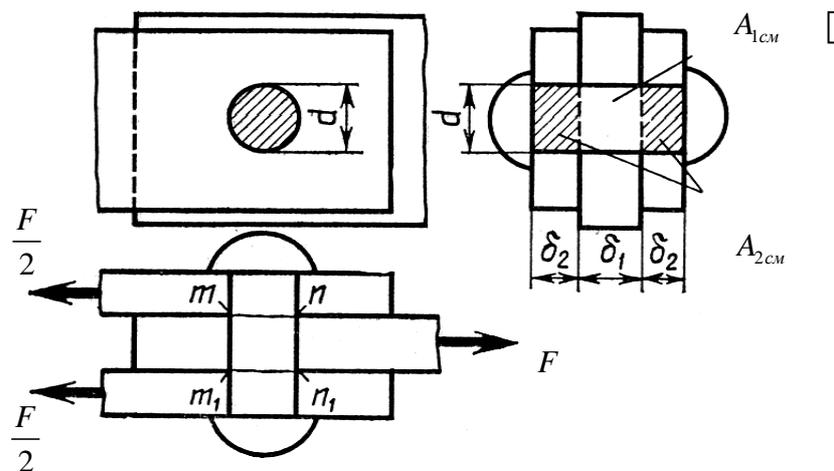


Рис. 13.6. К расчету заклепочного соединения

Минимальное расстояние от центра заклепки до края соединяемого листа по направлению воспринимаемого усилия принимают равным  $2d$ , а поперек направления усилия –  $1,5d$ . Минимальный размер шага заклепок равен  $3d$ , а максимальный –  $8d$ .

Любое заклепочное соединение работает на четыре вида деформации: срез заклепок; срез листа; разрыв листа и смятие заклепок.

Приведем формулы, необходимые для расчета заклепочного соединения.

1. Условие прочности на срез заклепок имеет вид, рис. 13.7:

$$\tau_{cp} = \frac{4F}{\pi \cdot d^2 \cdot i \cdot n} \leq [\tau_{cp}], \quad (13.4)$$

где  $d$  – диаметр заклепки;  $I$  – число заклепок в шве;  $n$  – число плоскостей среза.

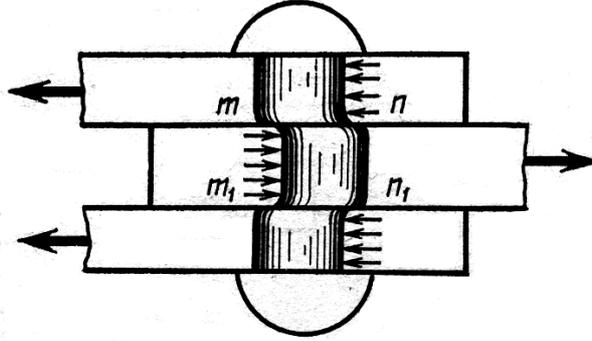


Рис. 13.7. Срез заклепки по сечениям  $m - n$  и  $m_1 - n_1$

2. Срез листа может произойти в том случае, когда заклепки будут установлены близко к краю листа. Условие прочности листа на срез:

$$\tau_{cp.л.} = \frac{F}{n \cdot e \cdot i \cdot \delta} \leq [\tau_{cp.л.}], \quad (13.5)$$

где  $\delta$  – толщина листа;  $e$  – расстояние от центра заклепки до края листа.

3. Условие прочности листа на разрыв:

$$\sigma_p = \frac{F}{(b - i \cdot d)\delta} \leq [\sigma_p], \quad (13.6)$$

где  $b$  – ширина листа.

4. Условие прочности на смятие заклепок имеет вид:

$$\sigma_{cm} = \frac{F}{d \cdot b \cdot i} \leq [\sigma_{cm}]. \quad (13.7)$$

Деформации смятия будет подвергаться верхняя и нижняя часть заклепок высотой  $\delta$ , рис. 13.8. В расчет на смятие заклепки подставляют не площадь боковой поверхности полуцилиндра, по которой происходит контакт, а площадь диаметрального сечения (условная площадь смятия) –  $d \cdot \delta$ .

В представленные четыре условия прочности входят: нагрузка, действующая на шов  $F$ ; диаметр заклепки  $d$ ; число заклепок  $i$ ; толщина листа  $\delta$ ; ширина листа  $b$ ; расстояние от края листа до центра заклепки  $e$ , т.е. шесть неизвестных величин. Для обеспечения прочности заклепочного со-

единения задаются двумя величинами, например,  $F$  и  $b$ . Решая совместно эти уравнения, находят остальные размеры заклепочного шва.

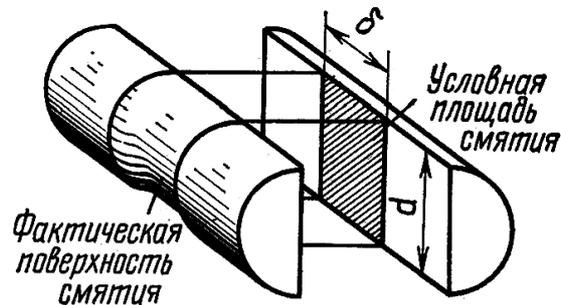


Рис. 13.8. К определению условной площади смятия заклепки

### 13.4.2 Расчет сварных соединений

При изготовлении металлических конструкций часто применяют сварку. Типичные конструкции сварных соединений – встык, лобовые и фланговые. Хотя при сварке присадочный материал часто принимается близкий к материалу соединяемых деталей, наплавленный материал уменьшает прочность сварного шва и может иметь различные дефекты: непровары, раковины и другие и поэтому является наиболее слабым местом сварного соединения.

1. *Расчет сварного шва встык.* Такие швы работают на растяжение – сжатие и изгиб, рис. 13.9.

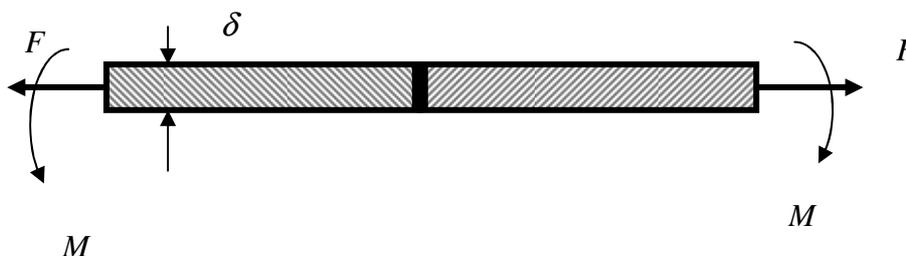


Рис. 13.9. Схема нагружения сварного соединения встык

Используя *принцип независимости действия сил*, определим действующие напряжения в материале сварного шва отдельно от силы  $F$  и изгибающего момента  $M$  :

- от растягивающей силы  $F$   $\sigma_p = \frac{F}{b \cdot \delta}$ ;
- от изгибающего момента  $M$   $\sigma_M = \frac{6M}{b \cdot \delta^3}$ .

Тогда максимальное напряжение будет равно  $\sigma_{\max} = \sigma_p + \sigma_M$  и *условие прочности* принимает вид

$$\sigma_{\max} = \frac{F}{b \cdot \delta} + \frac{6M}{b \cdot \delta^3} \leq [\sigma_p^s], \quad (13.8)$$

где  $[\sigma_p^s]$  – допустимое напряжение материала сварного шва;  $b$  – ширина сварного листа;  $\delta$  – толщина листа.

2. *Расчет лобового сварного шва.* Лобовые швы, рис. 13.10, работают на срез. Практика показывает, что такой шов разрушается по плоскости, составляющей примерно  $45^\circ$  по отношению к плоскости соединяемых деталей. Из рис. 13.10 видно, что площадь опасного сечения будет равна

$$A_{on} = b \cdot \delta \cdot \cos 45^\circ = 0,7b \cdot \delta.$$

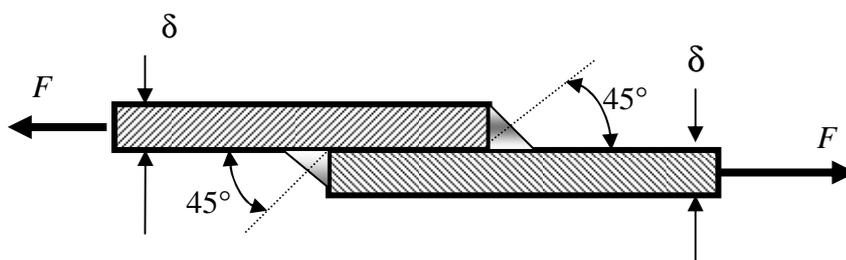


Рис. 13.10. Схема нагружения лобового сварного шва

Условие прочности для лобового сварного шва записывается в виде:

$$\tau_{cp} = \frac{F}{2A_{on}} = \frac{F}{1,4b \cdot \delta} \leq [\tau_{cp}^s], \quad (13.9)$$

где  $[\tau_{cp}^s]$  – допустимое напряжение материала сварного шва на срез.

Допускаемые напряжения для сварных швов устанавливаются в долях от допустимых напряжений для основного материала металлической конструкции:

$$[\sigma_p^s] = (0,6 \dots 0,9) [\sigma_p]; [\tau_{cp}^s] = (0,5 \dots 0,65) [\tau_{cp}].$$

## Тема 14. ВЫЧИСЛЕНИЕ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ СЛОЖНЫХ СЕЧЕНИЙ

Сопротивление твердого тела различным видам деформации зависит не только от материала и размеров тела, но и от формы, и расположения поперечных сечений по отношению к действующим силам. При растяжении-сжатии геометрической характеристикой поперечного сечения является площадь поперечного сечения  $A$ , которая полностью определяет сопротивляемость элемента конструкции деформации.

*Площадь* является простейшей геометрической характеристикой поперечного сечения. Если представить, что поперечное сечение состоит из бесконечного множества элементарных площадок  $dA$ , рис. 14.1, то площадь всего сечения будет равна

$$A = \int_A dA. \quad (14.1)$$

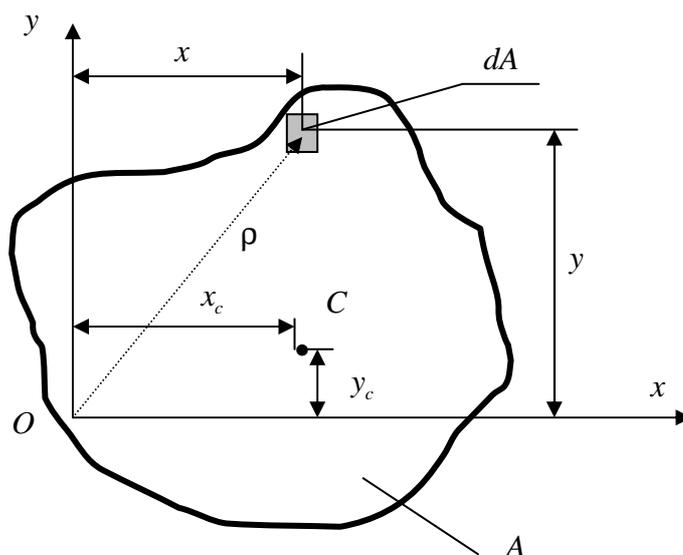


Рис. 14.1. К определению геометрических характеристик плоских сечений

При изучении же изгиба балок по величине площади поперечного сечения нельзя судить о степени их сопротивляемости изгибу, так как одна и та же балка в зависимости от положения осей поперечного сечения в направлении действия силы будет деформироваться по-разному. На рис. 14.2 изображен стержень с поперечным сечением  $A = h \cdot b$ .

В первом случае, рис. 14.2, *a*, сечение, к которому приложена сила  $P$ , переместится на величину  $f_1$ . Если стержень повернуть на  $90^\circ$  вокруг

его оси, рис. 14.2, б, то под действием той же силы исследуемое сечение стержня опустится на величину  $f_2$ , значительно большую, чем  $f_1$ . Таким образом, при одной и той же площади поперечного сечения в зависимости от его ориентации стержень по-разному сопротивляется действию силы. Следовательно, площадь поперечного сечения не может характеризовать сопротивляемость стержня изгибу.

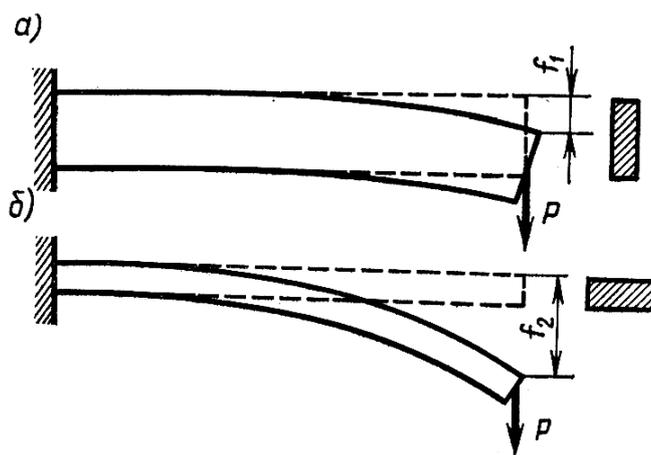


Рис. 14.2. Картина деформирования стержня при различной ориентации его поперечного сечения под действием изгибающей силы: а – в вертикальной плоскости; б – в горизонтальной плоскости

Отсюда следует, что при изучении изгиба, кручения и других случаев деформации стержня необходимо привлекать более сложные геометрические характеристики: статические моменты площади, моменты инерции и моменты сопротивления, радиусы инерции.

Статические моменты площади и методы определения положения центров тяжести плоских фигур рассмотрены в теме 7.

### 14.1. Моменты инерции, моменты сопротивления и радиусы инерции плоских сечений

Моменты инерции плоских сечений используются при определении деформаций и напряжений в каком-либо произвольном сечении твердого тела. Плоское сечение характеризуется тремя типами моментов инерции: осевым, полярным и центробежным.

*Осевым, или экваториальным, моментом инерции плоского сечения называют сумму произведений элементарных площадок на квадрат их расстояний до рассматриваемой оси.* Моменты инерции произвольного

плоского сечения, рис. 14.1, относительно осей  $Ox$  и  $Oy$  определяются выражениями:

$$I_x = \int_A y^2 \cdot dA; \quad I_y = \int_A x^2 \cdot dA. \quad (14.2)$$

*Полярным моментом инерции плоского сечения относительно полюса, лежащего в той же плоскости, точка  $O$  на рис. 14.1, называется сумма произведений элементарных площадок на квадрат их расстояний до полюса:*

$$I_\rho = \int_A \rho^2 \cdot dA. \quad (14.3)$$

Если полюс совпадает с началом системы прямоугольных координат, из которого исходят оси  $Ox$  и  $Oy$ , то  $\rho^2 = x^2 + y^2$  и

$$I_\rho = \int_A (x^2 + y^2) \cdot dA = \int_A x^2 \cdot dA + \int_A y^2 \cdot dA = I_y + I_x,$$

то есть момент инерции плоского сечения относительно полюса равен сумме моментов инерции относительно взаимно-перпендикулярных осей  $Ox$  и  $Oy$ .

*Центробежным моментом инерции плоского сечения называется сумма произведений элементарных площадок на их расстояния до координатных осей  $Ox$  и  $Oy$ :*

$$I_{xy} = \int_A x \cdot y \cdot dA. \quad (14.4)$$

Размерность моментов инерции – [длина<sup>4</sup>], то есть их измеряют в мм<sup>4</sup>, см<sup>4</sup>.

Следует отметить, что осевые и полярный моменты плоского сечения всегда положительны и не равны нулю; центробежный момент инерции может быть положительным, отрицательным и равным нулю.

*Осевым моментом сопротивления плоского сечения называется отношение осевого момента инерции относительно данной оси к расстоянию от оси до наиболее удаленной точки поперечного сечения вдоль этой оси:*

$$W_x = \frac{I_x}{y_{\max}}; \quad W_y = \frac{I_y}{x_{\max}}. \quad (14.5)$$

Размерность моментов сопротивления – [длина<sup>3</sup>], то есть их измеряют в мм<sup>3</sup>, см<sup>3</sup>.

Величины, равные

$$\sqrt{\frac{I_x}{A}} = i_x; \quad \sqrt{\frac{I_y}{A}} = i_y, \quad (14.6)$$

называются *радиусами инерции* плоского сечения.

Размерность радиуса инерции – [длина], то есть их измеряют в мм, см.

## 14.2. Изменение моментов инерции плоских сечений при параллельном переносе и при повороте осей

Пусть известны моменты инерции плоского сечения относительно центральных осей  $Ox$  и  $Oy$ :

$$I_x = \int_A y^2 \cdot dA; \quad I_y = \int_A x^2 \cdot dA; \quad I_{xy} = \int_A x \cdot y \cdot dA.$$

Требуется определить моменты инерции заданного плоского сечения, относительно осей  $O_1x_1$  и  $O_1y_1$ , параллельных центральным и находящихся от них на расстояниях  $a$  и  $b$  соответственно, рис. 14.3.

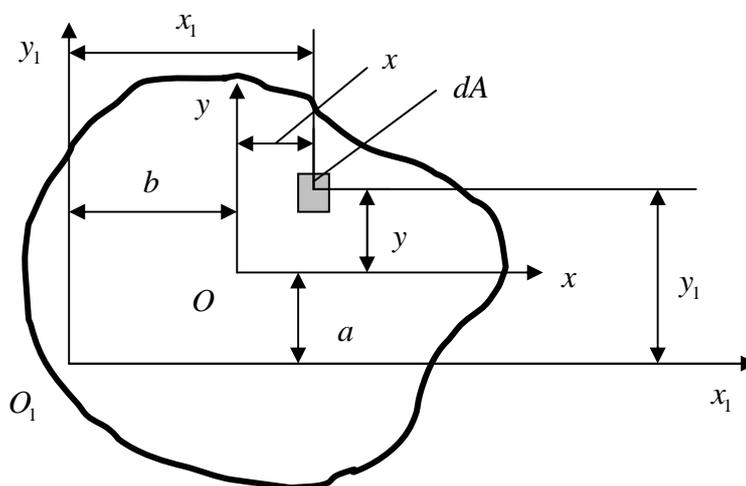


Рис. 14.3. К определению моментов инерции плоского сечения при параллельном переносе осей

Определим координаты любой площадки  $dA$  в новой системе координат  $O_1x_1y_1$ , выразив их через координаты в осях  $Ox$  и  $Oy$ :

$$x_1 = x + b; \quad y_1 = y + a.$$

Момент инерции, например, относительно оси  $Ox_1$  будет:

$$I_{x_1} = \int_A y_1^2 \cdot dA = \int_A (y + a) \cdot dA = \int_A y^2 \cdot dA + 2a \int_A y \cdot dA + a^2 \int_A dA = I_x + 0 + a^2 \cdot A;$$

то есть

$$I_{x_1} = I_x + a^2 \cdot A. \quad (14.7)$$

Интеграл  $2a \int_A y \cdot dA = 2a \cdot S_x = 0$  как статический момент площади относительно центральной оси.

Аналогично получаем

$$\begin{aligned} I_{y_1} &= I_y + b^2 \cdot A; \\ I_{x_1 y_1} &= I_{xy} + a \cdot b \cdot A. \end{aligned} \quad (14.8)$$

Таким образом:

– осевой момент инерции плоского сечения относительно любой оси, параллельной данной, равен моменту инерции относительно центральной оси плюс произведение площади плоского сечения на квадрат расстояния между осями;

– центробежный момент инерции плоского сечения относительно любой системы взаимно-перпендикулярных осей, параллельных данным, равен центробежному моменту инерции относительно системы центральных осей плюс произведение площади плоского сечения на координаты ее центра тяжести в новых осях.

Если систему координат  $Oxy$  рис. 14.3 повернуть на угол  $\alpha$  против хода часовой стрелки, и, считая такое направление поворота положительным, то моменты инерции плоского сечения относительно нового положения осей  $Ox_1y_1$ , рис. 14.4, будут равны:

$$\begin{aligned} I_{x_1} &= I_x \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha - I_{xy} \sin 2\alpha; \\ I_{y_1} &= I_y \cos^2 \alpha + I_x \sin^2 \alpha + I_{xy} \sin 2\alpha; \\ I_{x_1 y_1} &= \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\alpha + I_{xy} \cos 2\alpha. \end{aligned} \quad (14.9)$$

Складывая моменты инерции плоского сечения относительно повернутых осей  $Ox_1$  и  $Oy_1$ , получаем, что

$$I_{x_1} + I_{y_1} = I_x + I_y = I_p, \quad (14.10)$$

то есть при повороте прямоугольных осей сумма моментов инерции плоского

сечения не изменяется и равна полярному моменту инерции относительно начала системы координат.

При повороте системы взаимно-перпендикулярных осей на угол  $90^\circ$ , получаем

$$I_{x_1} = I_y; \quad I_{y_1} = I_x; \quad I_{x_1 y_1} = -I_{xy}.$$

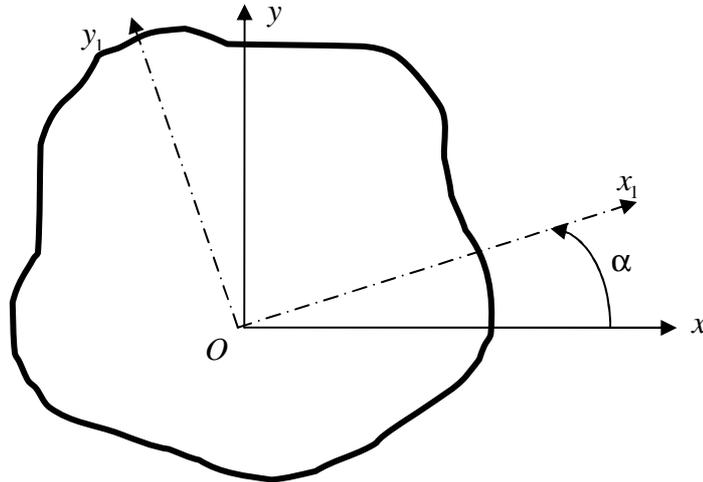


Рис. 14.4. К определению моментов инерции плоского сечения относительно осей, повернутых на угол  $\alpha$

### 14.3. Главные моменты инерции.

#### Определение направления главных осей инерции

Максимальные и минимальные значения осевых моментов инерции плоского сечения относительно данных осей называются главными моментами инерции и равны:

$$I_{\max} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2}; \quad (14.11)$$

$$I_{\min} = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2}.$$

Оси, относительно которых осевые моменты инерции плоского сечения имеют экстремальные значения, называются главными осями инерции. Направление главных осей инерции определяют по формуле

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2I_{xy}}{I_y - I_x}, \quad (14.12)$$

где  $\alpha_0$  – угол, на который надо повернуть координатные оси  $Ox$  и  $Oy$ , чтобы они совпали с главными осями.

Если просуммировать максимальный и минимальный моменты инерции плоского сечения, то получим:

$$I_{\max} + I_{\min} = I_x + I_y, \quad (14.13)$$

то есть:

- сумма моментов инерции плоского сечения не меняется при повороте осей и равна сумме главных моментов инерции;
- центробежный момент инерции плоского сечения относительно главных осей равен нулю.

**Взаимно-перпендикулярные оси, из которых хотя бы одна совпадает с осью симметрии плоского сечения, всегда являются главными осями инерции.**

Ось, относительно которой осевой момент инерции плоского сечения максимален, – ось максимум ( $U$ ), а другая ось, относительно которой осевой момент инерции сечения минимален – ось минимум ( $V$ ), рис. 14.5. Ось максимум всегда составляет меньший угол с той из осей  $Ox$  или  $Oy$ , относительно которой осевой момент инерции плоского сечения имеет большее значение.

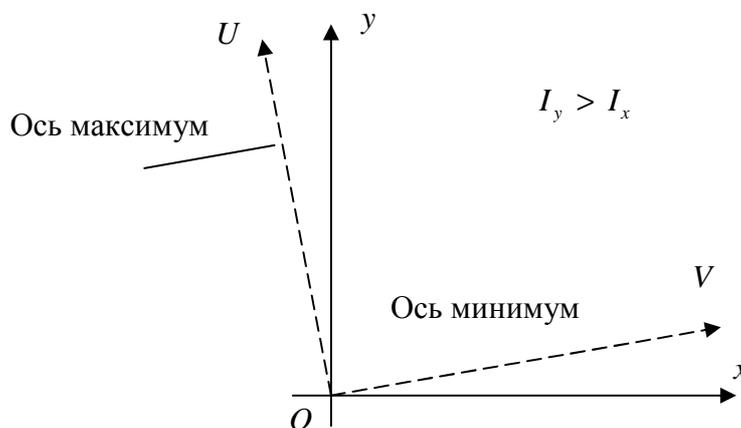


Рис. 14.5. К определению осей максимума и минимума

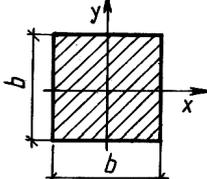
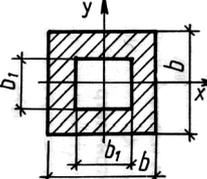
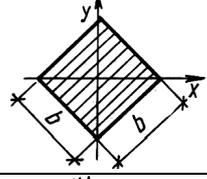
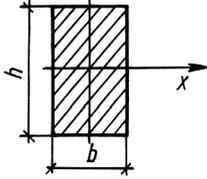
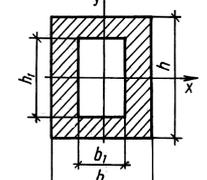
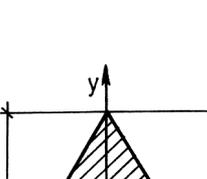
Практическое значение для расчетов элементов конструкций имеют лишь главные оси, проходящие через центр тяжести плоского сечения, то есть главные центральные оси инерции. Моменты инерции плоского сечения относительно этих осей принято называть *главными центральными моментами инерции*.

### 14.4. Геометрические характеристики некоторых плоских сечений

В табл. 14.1 – 14.6 приведены геометрические характеристики некоторых плоских сечений и стандартных профилей.

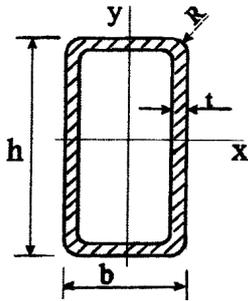
Таблица 14.1

**Геометрические характеристики плоских сечений**

Форма поперечно- го сечения	Площадь сечения	Осевой мо- мент инерции	Момент сопротивления	Радиус инерции
1	2	3	4	5
	$b^2$	$I_x = I_y = \frac{b^4}{12}$	$W_x = W_y = \frac{b^3}{6}$	$i_x = i_y = \frac{b}{\sqrt{12}}$
	$b^2 - b_1^2$	$I_x = I_y = \frac{b^4 - b_1^4}{12}$	$W_x = W_y = \frac{b^4 - b_1^4}{6b}$	$i_x = i_y = 0,289\sqrt{b^2 + b_1^2}$
	$b^2$	$I_x = I_y = \frac{b^4}{12}$	$W_x = W_y = 0,118b^3$	$i_x = i_y = 0,289b$
	$bh$	$I_x = \frac{bh^3}{12}$ $I_y = \frac{hb^3}{12}$	$W_x = \frac{bh^2}{6}$ $W_y = \frac{hb^2}{6}$	$i_x = \frac{h}{\sqrt{12}}$ $i_y = \frac{b}{\sqrt{12}}$
	$bh - b_1h_1$	$I_x = \frac{bh^3 - b_1h_1^3}{12}$ $I_y = \frac{hb^3 - hb_1^3}{12}$	$W_x = \frac{bh^3 - b_1h_1^3}{6h}$ $W_y = \frac{hb^3 - h_1b_1^3}{6b}$	$i_x = \sqrt{\frac{bh^3 - b_1h_1^3}{12(bh - b_1h_1)}}$ $i_y = \sqrt{\frac{hb^3 - h_1b_1^3}{12(bh - b_1h_1)}}$
	$\frac{1}{2}bh$	$I_x = \frac{bh^3}{36}$ $I_{x_1} = \frac{bh^3}{12}$ $I_{x_2} = \frac{bh^3}{48}$ $I_y = \frac{hb^3}{48}$	<i>При вычислении напряжения в вер- шине треугольника</i> $W_x = \frac{bh^2}{24}$ <i>При вычислении напряжения в точке основания</i> $W_x = \frac{bh^2}{12}$	$i_x = 0,236h$

1	2	3	4	5
	$\frac{1}{2}bh$	$I_x = \frac{bh^3}{48}$	$W_x = \frac{bh^2}{24}$	$i_x = 0,204b$
	$2,598a^2$	$I_x = I_y = 0,541a^4$	$W_x = 0,625a^3$ $W_y = 0,541a^3$	$i_x = i_y = 0,4565a$
	$\frac{\pi d^2}{4}$	$I_x = I_y = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi r^4}{4}$	$W_x = W_y = \frac{\pi d^3}{32} = \frac{\pi r^3}{4}$	$i_x = i_y = \frac{d}{4} = \frac{r}{2}$
	$b^2 - b_1^2$	$I_x = I_y = \frac{b^4 - b_1^4}{12}$	$W_x = W_y = \frac{b^4 - b_1^4}{6\sqrt{2} \cdot b}$	$i_x = i_y = 0,289\sqrt{b^2 + b_1^2}$
	$\frac{\pi(d - d_0)^2}{4}$	$I_x = I_y = \frac{\pi d^4}{64}(1 - c^4)$ $c = \frac{d_0}{d}$	$W_x = W_y = \frac{\pi d^3}{32}(1 - c^4)$	$i_x = i_y = \frac{1}{4}\sqrt{d^2 + d_0^2}$
	$\frac{\pi d^2}{8}$	$I_x = 0,00686d^4$ $I_y = \frac{\pi d^4}{128}$	Для нижних волокон $W_x = 0,0324d^3$ Для верхних волокон $W_x = 0,0239d^3$ $W_y = \frac{\pi d^3}{64}$	$i_x = 0,132d$ $i_y = \frac{d}{4}$
	$2Bh + b_1h$	$I_x = \frac{BH^3 - 2bh^3}{12}$ $I_y = \frac{hb_1^3 + 2hB^3}{12}$	$W_x = \frac{BH^3 - 2bh^3}{6H}$ $W_y = \frac{hb_1^3 + 2hB^3}{6B}$	$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}$ $i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$

**Профили стальные гнутые замкнутые сварные прямоугольные и квадратные**  
(извлечения из ГОСТ 25577-83)



$I$  – момент инерции;

$W$  – момент сопротивления;

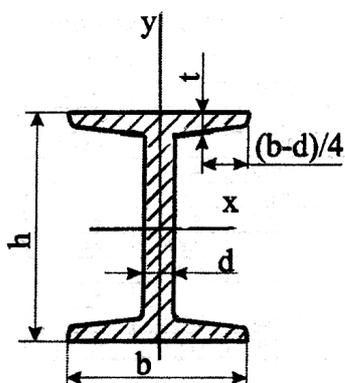
$S$  – статический момент площади полусечения

№ п/п	Размеры профиля $h \times b \times t$ , мм	Площадь сечения, $\text{см}^2$	Справочные данные для осей $X - X$ , $Y - Y$					
			$I_x$ , $\text{см}^4$	$W_x$ , $\text{см}^3$	$S_x$ , $\text{см}^3$	$I_y$ , $\text{см}^4$	$W_y$ , $\text{см}^3$	$S_y$ , $\text{см}^3$
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	97×80×3	9,87	134,73	27,78	21,99	100,45	25,11	14,50
2	120×80×4	14,54	279,35	42,33	28,63	150,46	37,62	21,27
3	120×80×6	20,71	341,47	53,83	32,28	199,52	49,88	29,86
4	150×100×6	26,71	780,90	92,96	64,80	420,07	84,01	49,27
5	150×100×8	34,42	959,61	127,96	81,39	513,87	102,77	61,77
6	160×80×4	17,87	579,88	69,03	45,32	199,05	49,76	28,14
7	160×80×7	29,12	857,47	94,75	70,02	292,90	73,22	43,43
8	160×120×4	20,94	765,50	89,01	57,24	494,73	82,45	47,19
9	160×130×7	36,06	1263,31	157,91	96,54	921,02	141,70	83,99
10	180×75×4	18,94	737,11	76,78	52,27	190,15	50,71	28,50
11	180×75×5	23,26	883,02	98,11	63,33	226,38	60,37	34,44
12	180×75×6	27,31	1005,32	101,55	73,13	256,87	68,50	39,72
13	180×125×4	22,94	601,91	87,84	54,69	1046,92	116,32	69,87
14	180×125×5	28,26	1265,94	140,66	85,20	726,58	116,25	66,63
15	220×100×5	29,71	1771,58	150,77	101,78	525,42	105,08	59,15
16	230×100×8	46,47	2804,05	243,83	159,76	770,24	154,05	89,73
17	80×4	11,43	104,21	26,05	15,69	104,21	26,05	15,69
18	80×5	13,76	121,46	30,36	18,69	121,46	30,36	18,69
19	80×6	16,01	135,47	33,87	21,19	135,47	33,87	21,19
20	100×4	14,54	215,73	43,15	25,59	215,73	43,15	25,59
21	100×5	17,76	255,57	51,11	30,76	255,57	51,11	30,76
22	100×6	20,81	290,14	58,03	35,41	290,14	58,03	35,41
23	110×3	12,40	233,59	42,47	24,70	233,59	42,47	24,70
24	110×6	23,31	398,80	72,51	43,91	398,80	72,51	43,91
25	120×8	32,27	624,02	84,33	64,58	624,02	84,33	64,58

1	2	3	4	5	6	7	8	9
26	140×5	25,76	780,54	108,62	64,01	780,54	108,62	64,01
27	140×6	30,31	873,50	110,57	74,35	873,50	110,57	74,35
28	140×7	34,66	974,21	139,17	83,87	974,21	139,17	83,87
29	140×8	38,67	1055,26	150,75	92,07	1055,26	150,75	92,07
30	150×8	41,86	1329,97	177,23	107,63	1329,97	177,23	107,63

Таблица 14.3

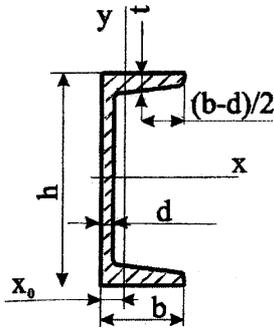
**Сталь горячекатаная. Балки двутавровые**  
(извлечения из ГОСТ 8239-89)



$I$  – момент инерции;  
 $W$  – момент сопротивления;  
 $S$  – статический момент площади полусечения

Номер профиля	Размеры, мм				Площадь сечения, $\text{см}^2$	Геометрические характеристики относительно осей				
	$h$	$b$	$d$	$t$		$X-X$			$Y-Y$	
						$I_x, \text{см}^4$	$W_x, \text{см}^3$	$S_x, \text{см}^3$	$I_y, \text{см}^4$	$W_y, \text{см}^3$
10	100	55	4,5	7,2	12,0	198	39,7	23,0	17,9	6,49
12	120	64	4,8	7,3	14,7	350	58,4	33,7	27,9	8,72
14	140	73	4,9	7,5	17,4	572	81,7	46,8	41,9	11,5
16	160	81	5	7,8	20,2	873	109	62,3	58,6	14,5
18	180	90	5,1	8,1	23,4	1290	143	81,4	82,6	18,4
20	200	100	5,2	8,4	26,8	1840	184	104	115	23,1
22	220	110	5,4	8,7	30,6	2550	232	131	157	28,6
24	240	115	5,6	9,5	34,8	3460	289	163	198	34,5
27	270	125	6	9,8	40,2	5010	371	210	260	41,5
30	300	135	6,5	10,2	45,6	7080	472	268	337	49,9
33	330	140	7	11,2	53,8	9840	597	339	419	59,9
36	360	145	7,5	12,3	61,9	13380	743	423	516	71,1
40	400	155	8	13	71,4	19062	953	545	667	86
45	450	160	9	14,2	84,7	27696	1231	708	808	101
50	500	170	10	15,2	100	39727	1589	919	1043	123
55	550	180	11	16,5	118	55962	2035	1181	1356	151
60	600	190	12	17,8	138	76806	2560	1491	1725	182

**Сталь горячекатаная. Швеллеры**  
(извлечения из ГОСТ 8239-89)



$I$  – момент инерции;

$W$  – момент сопротивления;

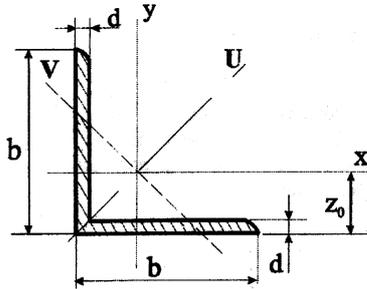
$S$  – статический момент площади полусечения;

$X_0$  – расстояние от центра тяжести до наружной грани стойки

Номер профиля	Размеры, мм				Площадь сечения, см <sup>2</sup>	Геометрические характеристики относительно осей					$X_0$ , см
	$h$	$b$	$d$	$t$		$X - X$			$Y - Y$		
						$I_x$ , см <sup>4</sup>	$W_x$ , см <sup>3</sup>	$S_x$ , см <sup>3</sup>	$I_y$ , см <sup>4</sup>	$W_y$ , см <sup>3</sup>	
5	50	32	4,4	7	6,16	22,8	9,1	5,59	5,6	2,75	1,16
6,5	65	36	4,4	7,2	7,51	48,6	15,0	9,0	8,7	3,68	1,24
8	80	40	4,5	7,4	8,98	89,4	22,4	13,3	12,8	4,75	1,31
10	100	46	4,5	7,6	10,9	174	34,8	20,4	20,4	6,46	1,44
12	120	52	4,8	7,8	13,3	304	50,6	29,6	31,2	8,52	1,54
14	140	58	4,9	8,1	15,6	491	70,2	40,8	45,4	11,0	1,67
16	160	64	5,0	8,4	18,1	747	93,4	54,1	63,3	13,8	1,8
16a	160	68	5,0	9,0	19,5	823	103	59,4	78,8	16,4	2,0
18	180	70	5,1	8,7	20,7	1090	121	69,8	86	17	1,94
18a	180	74	5,1	9,3	22,2	1190	132	76,1	105	20	2,13
20	200	76	5,2	9,0	23,4	1520	152	87,8	113	20,5	2,07
22	220	82	5,4	9,5	26,7	2110	192	110	151	25,1	2,21
24	240	90	5,6	10	30,6	2900	242	139	208	31,6	2,42
27	270	95	6,0	10,5	35,2	4160	308	178	262	37,3	2,47
30	300	100	6,5	11	40,5	5810	387	224	327	43,6	2,52
33	330	105	7,0	11,7	46,5	7980	484	281	410	51,8	2,59
36	360	110	7,5	12,6	53,4	10820	601	350	513	61,7	2,68
40	400	115	8,0	13,5	61,5	15220	761	444	642	73,4	2,75

Таблица 14.5

**Уголки стальные горячекатаные равнополочные.**  
**Сортамент (извлечения из ГОСТ 8509-86)**



$I_{xy}$  – центробежный момент инерции;

$Z_0$  – расстояние от центра тяжести до наружной грани полки

№ профилей	Размеры, мм		Площадь, см <sup>2</sup>	Справочные величины для осей						
	<i>b</i>	<i>d</i>		<i>X – X</i>	<i>U – U</i>		<i>V – V</i>		$I_{xy}$ , см <sup>4</sup>	$Z_0$ , см
				$I_x$ , см <sup>4</sup>	$I_{Umax}$ , см <sup>4</sup>	$i_{Umax}$ , см <sup>4</sup>	$I_{Vmin}$ , см <sup>4</sup>	$i_{Vmin}$ , см <sup>4</sup>		
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
4	40	3	2,35	3,55	5,63	1,55	1,47	0,79	2,08	1,09
		4	3,08	4,58	7,26	1,53	1,90	0,78	2,68	1,13
		5	3,79	5,53	8,75	1,54	2,30	0,79	3,22	1,17
4,5	45	3	2,65	5,13	8,13	1,75	2,12	0,89	3,00	1,21
		4	3,48	6,63	10,5	1,74	2,74	0,89	3,89	1,26
		5	4,29	8,03	12,7	1,72	3,33	0,89	4,71	1,30
5	50	3	2,96	7,11	11,3	1,95	2,95	1,00	4,16	1,33
		4	3,89	9,21	14,6	1,94	3,80	0,99	5,42	1,38
		5	4,80	11,2	17,8	1,92	4,63	0,98	6,57	1,42
		6	5,69	13,07	20,72	1,91	5,43	0,98	7,65	1,46
5,6	56	4	4,38	13,1	20,8	2,18	5,41	1,11	7,69	1,52
		5	5,41	16,0	25,4	2,16	6,59	1,10	9,41	1,57
6,3	63	4	4,96	18,9	29,9	2,45	7,81	1,25	11,0	1,69
		5	6,13	23,1	36,6	2,44	9,52	1,25	13,70	1,74
		6	7,28	27,1	42,9	2,43	11,2	1,24	15,90	1,78
7	70	4,5	6,20	29,0	46,0	2,72	12,0	1,39	17,0	1,88
		5	6,86	31,0	50,7	2,72	13,2	1,39	18,70	1,90
		6	8,15	37,6	59,6	2,71	15,5	1,38	22,10	1,94
		7	9,42	43,0	68,2	2,69	17,8	1,37	22,10	1,99
		8	10,7	48,2	76,4	2,68	20,0	1,37	23,10	2,02
7,5	75	5	7,39	39,5	62,6	2,91	16,4	1,49	23,10	2,02
		6	8,78	46,6	73,9	2,90	19,3	1,48	27,30	2,06
		7	10,1	53,3	84,6	2,89	22,1	1,48	31,20	2,10
		8	11,5	59,8	94,9	2,87	24,8	1,47	35,00	2,15
		9	12,8	66,1	105	2,86	27,5	1,46	38,60	2,18

Продолжение табл. 14.5

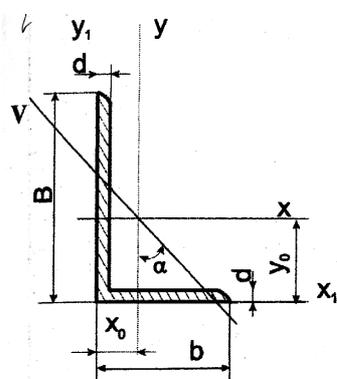
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
8	80	5,5	8,63	52,7	83,6	3,11	21,8	1,59	30,90	2,17
		6	9,38	57,0	90,4	3,11	23,5	1,58	33,40	2,19
		7	10,8	65,3	104	3,09	27,0	1,58	38,30	2,23
		8	12,3	73,4	116	3,08	30,3	1,57	43,00	2,27
9	90	6	10,6	82,1	130	3,50	34,0	1,79	48,10	2,43
		7	12,3	94,3	150	3,49	38,9	1,78	55,40	2,47
		8	13,9	106	168	3,48	43,8	1,77	62,30	2,51
		9	15,6	118	186	3,46	48,6	1,77	68,00	2,55
10	100	6,5	12,8	122	193	3,88	50,7	1,99	71,40	2,68
		7	13,8	131	207	3,88	54,2	1,98	76,40	2,71
		8	15,6	147	233	3,87	60,9	1,98	86,30	2,75
		10	19,24	178,95	284	3,84	74,1	1,96	110	2,83
		12	22,8	209	331	3,81	86,9	1,95	122	2,91
		14	26,3	237	375	3,78	99,3	1,94	138	2,99
11	110	7	15,2	176	279	4,29	72,7	2,19	106	2,96
		8	17,2	198	315	4,28	81,8	2,18	116	3,00
12,5	125	8	19,7	294	467	4,87	122	2,49	172	3,36
		9	22,0	327	520	4,86	135	2,48	192	3,40
		10	24,3	360	571	4,84	149	2,47	211	3,45
		12	28,9	422	670	4,82	174	2,46	248	3,53
		14	33,4	482	764	4,78	200	2,45	282	3,61
		16	37,8	539	853	4,75	224	2,44	315	3,68
14	140	9	24,7	466	739	5,47	192	2,79	274	3,78
		10	27,3	512	814	5,46	211	2,78	301	3,82
		12	32,5	602	957	5,43	248	2,76	354	3,90
16	160	10	31,4	774	1229	6,25	319	3,19	455	4,30
		11	34,4	844	1341	6,24	348	3,18	496	4,35
		12	37,4	913	1450	6,23	376	3,17	537	4,39
		14	43,3	1046	1662	6,20	431	3,16	615	4,47
		16	49,1	1175	1866	6,17	485	3,14	690	4,55
		18	54,8	1299	2061	6,13	537	3,13	771	4,63
18	180	20	60,4	1419	2248	6,10	589	3,12	830	4,70
		11	38,8	1216	1933	7,06	500	3,59	716	4,85
20	200	12	42,2	1317	2093	7,04	540	3,58	776	4,89
		12	47,1	1823	2896	7,84	749	3,99	1073	5,37
		13	50,9	1961	3116	7,83	805	3,98	1156	5,42
		14	54,6	2097	3333	7,81	861	3,97	1236	5,46
		16	62,0	2363	3755	7,78	970	3,96	1393	5,54
		20	76,5	2871	4560	7,72	1182	3,93	1689	5,70
		25	94,3	3466	5494	7,63	1438	3,91	2028	5,89
30	111,5	4020	6351	7,55	1688	3,89	2332	6,07		

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
22	220	14	60,4	2814	4470	8,60	1159	4,38	1655	5,93
		16	68,6	3175	5045	8,58	1306	4,36	1869	6,02
25	250	16	78,4	4717	7492	9,78	1942	4,98	2775	6,75
		18	87,7	5247	8337	9,75	2158	4,96	3089	6,83
		20	97,0	5765	9160	9,72	2370	4,94	3395	6,91
		22	106,1	6270	9961	9,69	2579	4,93	3691	7,00
		25	119,7	7006	11125	9,64	2887	4,91	4119	7,11

Таблица 14.6

## Уголки стальные горячекатаные неравнополочные. Сортамент

(извлечения из ГОСТ 8510-86)



$x_0, y_0$  – расстояния от центра тяжести до наружных граней полок

№ профиля	Размеры, мм			Площадь сечения, см <sup>2</sup>	Справочные величины для осей								
	$B$	$b$	$d$		$X-X$		$Y-Y$			$V-V$		$y_0, \text{см}$	$x_0, \text{см}$
					$I_x, \text{см}^4$	$I_y, \text{см}^4$	$I_{V \min}, \text{см}^4$	$i_{V \min}, \text{см}^4$	$I_{xy}, \text{см}^4$				
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12		
2,5/1,6	25	16	3	1,16	0,70	0,22	0,13	0,34	0,22	0,86	0,42		
3,2/2	32	20	3	1,49	1,52	0,46	0,28	0,43	0,47	1,08	0,49		
			4	1,94	1,93	0,57	0,35	0,43	0,59	1,12	0,53		
4,2/2,5	40	25	3	1,89	3,06	0,93	0,56	0,54	0,96	1,32	0,59		
			4	2,47	3,93	1,18	0,71	0,54	1,22	1,37	0,63		
			5	3,03	4,73	1,41	0,86	0,53	1,44	1,41	0,66		
4,5/2,8	40	28	3	2,14	4,41	1,32	0,79	0,61	1,38	1,47	0,64		
			4	2,80	5,68	1,69	1,02	0,60	1,77	1,51	0,68		
5/3,2	50	32	3	2,42	6,17	1,99	1,18	0,70	2,01	1,60	0,72		
			4	3,17	7,98	2,56	1,52	0,69	2,59	1,65	0,76		
5,6/3,6	56	36	4	3,58	11,40	3,70	2,19	0,78	3,74	1,82	0,84		
			5	4,41	13,80	4,48	2,66	0,78	4,50	1,86	0,88		
6,3/4	63	40	4	4,04	16,30	5,16	3,07	0,87	5,25	2,03	0,91		
			5	4,98	19,90	6,26	3,73	0,86	6,41	2,08	0,95		
			6	5,90	23,30	7,28	4,36	0,86	7,44	2,12	0,99		
			8	7,68	29,60	9,15	5,58	0,85	9,27	2,20	1,07		
7/4,5	70	45	5	5,59	27,80	9,05	5,34	0,98	9,12	2,28	1,05		

Окончание табл. 14.6

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
7,5/5	75	50	5	6,11	34,80	12,5	7,24	1,09	12,00	2,39	1,17
			6	7,25	40,90	14,6	8,48	1,08	14,10	2,44	1,21
			7	8,37	46,77	16,61	9,69	1,08	16,18	2,48	1,25
			8	9,47	52,40	18,5	10,9	1,07	17,80	2,52	1,29
8/5	80	50	5	6,36	41,60	12,7	7,58	1,09	13,20	2,60	1,13
			6	7,55	49,00	14,8	8,88	1,08	15,50	2,65	1,17
9/5,6	90	56	5,5	7,86	65,30	19,7	11,80	1,22	20,54	2,92	1,26
			6	8,54	70,70	21,2	12,70	1,22	22,23	2,95	1,28
			8	11,18	90,90	27,1	16,30	1,21	28,33	3,04	1,36
10/6,3	100	63	6	9,59	98,30	30,6	18,20	1,38	31,50	3,23	1,42
			7	11,10	113	35,0	20,80	1,37	36,10	3,28	1,46
			8	12,60	127	39,2	23,40	1,36	40,50	3,32	1,50
			10	15,50	154	47,1	28,30	1,35	48,60	3,40	1,58
11/7	110	70	6,5	11,40	142	45,6	26,90	1,53	46,80	3,55	1,58
			8	13,90	172	54,6	32,30	1,52	55,90	3,61	1,64
12,5/8	120	80	7	14,10	227	73,7	43,4	1,76	74,70	4,01	1,80
			8	16,00	256	83,0	48,8	1,75	84,10	4,05	1,84
			10	19,70	312	100	59,3	1,74	102	4,14	1,92
			12	23,40	356	117	69,5	1,72	118	4,22	2,00
14/9	140	90	8	18,00	364	120	70,3	1,98	121	4,49	2,03
			10	22,20	444	146	85,5	1,96	147	4,58	2,12
16/10	160	100	9	22,90	606	186	110	2,20	194	5,19	2,23
			10	25,30	667	204	121	2,19	213	5,23	2,28
			12	30,00	784	239	142	2,18	249	5,32	2,36
			14	34,70	897	272	162	2,16	282	5,40	2,43
18/11	180	110	10	28,30	952	276	165	2,42	295	5,88	2,44
			12	33,70	1123	324	194	2,40	348	5,97	2,52
20/12,5	200	125	11	34,87	1449	446,36	265,84	2,75	465	6,50	2,79
			12	37,89	1568	481,93	285,04	2,74	503	6,54	2,83
			14	43,87	1801	550,77	326,54	2,73	575	6,62	2,91
			16	49,77	2026	616,66	366,99	2,72	643	6,71	2,93

### 14.5. Способы вычисления центробежного момента инерции

Для определения положения главных осей и величины главных моментов инерции необходимо знать величину центробежного момента инерции сечения.

Если известны величины главных моментов инерции  $I_x$  и  $I_y$  и положение осей  $Ox_1$  и  $Oy_1$  относительно главных осей, то *центробежный момент инерции* может быть найден по формуле

$$I_{x_1y_1} = \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\alpha. \quad (14.14)$$

Если известны величины осевых моментов инерции  $I_x, I_y, I_{x_1}, I_{y_1}$  относительно главных осей  $Ox$  и  $Oy$  и относительно осей  $Ox_1$  и  $Oy_1$ , то центробежный момент инерции относительно осей  $Ox_1$  и  $Oy_1$  может быть вычислен по одной из следующих формул:

$$\begin{aligned} I_{x_1y_1} &= \pm \sqrt{I_{x_1} \cdot I_{y_1} - I_x \cdot I_y}; \\ I_{x_1y_1} &= \pm \frac{1}{2} \sqrt{(I_x - I_y)^2 - (I_{x_1} - I_{y_1})^2}; \\ I_{x_1y_1} &= \pm \sqrt{(I_x - I_{x_1})(I_y - I_{y_1})}. \end{aligned} \quad (14.15)$$

Знак в правой части этих формул перед радикалом зависит от знака центробежного момента инерции.

Если известно расположение главных осей инерции, то знак центробежного момента определяется по следующему правилу: *центробежный момент инерции положителен, если ось с максимальным моментом проходит через 2-й и 4-й квадранты, и отрицателен, если эта ось проходит через 1-й и 3-й квадранты.*

На рис. 14.6 дано четыре варианта расположения равнополочного уголка с указанием знака для центробежного момента инерции.

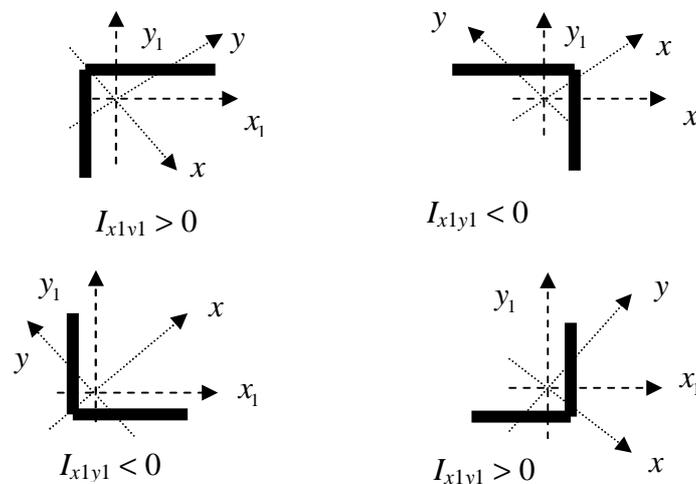


Рис. 14.6. Знак центробежного момента инерции равнополочного уголка при различном его расположении

## Тема 15. КРУЧЕНИЕ ПРЯМОГО БРУСА КРУГЛОГО СЕЧЕНИЯ

*Кручением* называют такой вид деформации стержня, при котором в его поперечных сечениях возникают только крутящие моменты; нормальная сила, изгибающие моменты и поперечные силы отсутствуют. Кручение возникает под действием пары сил, действующей в плоскостях поперечных сечений стержня. Момент этой пары  $T$  и будет искомым крутящим моментом  $M_z$ , рис. 15.1.

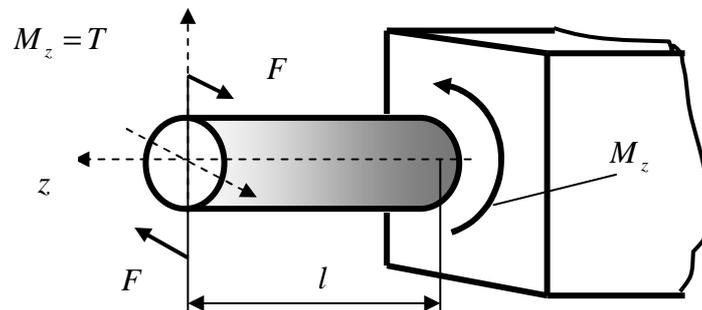


Рис. 15.1. К понятию крутящего момента

Деформации кручения подвергаются многие детали машин и сооружений: валы двигателей и станков, винтовые пружины, элементы пространственных конструкций и т.п. Характер деформации скручиваемого стержня зависит от формы его поперечного сечения.

Стержень, испытывающий деформации кручения, принято называть *валом*.

### 15.1. Крутящие моменты и их эпюра

Рассмотрим случай, когда к стержню приложены несколько внешних взаимно уравновешенных моментов, плоскость действия которых перпендикулярна оси стержня (трением в опорах пренебрегаем), рис. 15.2, а:

$$T_1 - T_2 - T_3 = 0.$$

Крутящий момент, приложенный к торцовому сечению, будем считать положительным, если, глядя на рассматриваемое сечение со стороны внешней нормали, видим момент, стремящийся скручивать стержень по направлению хода часовой стрелки.

Для определения крутящего момента в произвольном сечении, например *III*, используя метод сечения, мысленно рассежем вал по этому сечению и приложим к каждой части крутящие моменты  $M_z$ , рис. 15.2, б. Величину крутящего момента можно найти из условия равновесия любой из отсеченных частей вала. Для этого необходимо приравнять к нулю сумму внешних скручивающих моментов и крутящего момента относительно продольной оси рассматриваемой части вала.

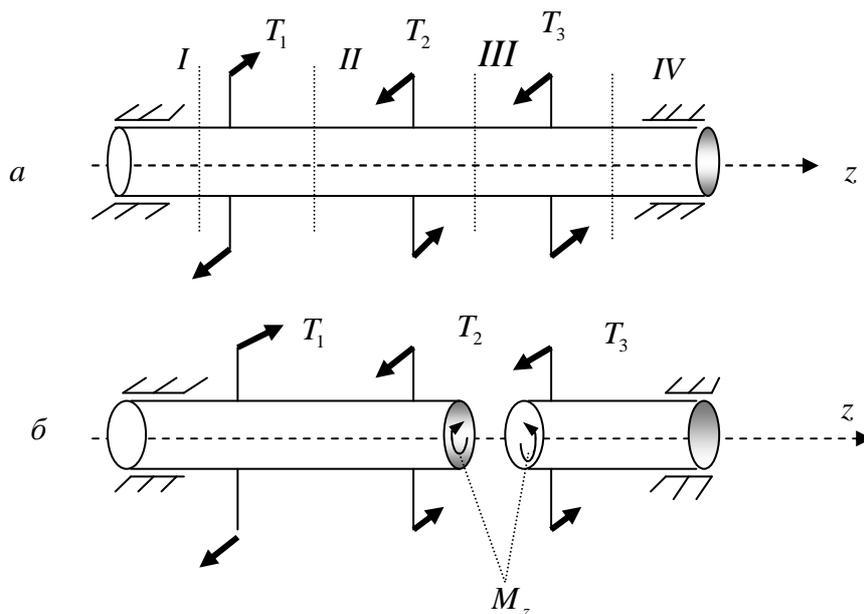


Рис. 15.2. К определению величины крутящего момента: *a* – схема нагружения вала; *б* – применение метода сечений к определению крутящего момента

Например, для левой части вала, рис. 15.2, б, из условия равновесия, имеющего вид:  $\sum T_i = 0$ , находим

$$T_1 - T_2 + M_z = 0,$$

откуда

$$M_z = T_2 - T_1.$$

Если рассматривать равновесие правой части, то получаем

$$M_z + T_3 = 0$$

и

$$M_z = -T_3.$$

Анализируя полученные равенства видно, что оба значения крутящего момента  $M_z$  равны между собой.

Таким образом, *крутящий момент  $M_z$  в поперечном сечении вала равен алгебраической сумме моментов всех внешних пар сил, действующих на часть вала по одну сторону от условного сечения.*

Если найти значения крутящих моментов в ряде сечений вдоль оси вала, то можно построить график изменения  $M_z$  по длине вала, называемый *эпюрой крутящих моментов*. Эпюру крутящих моментов строят по участкам, границами которых являются сечения, в которых приложены внешние скручивающие моменты. Для каждого участка записывается уравнение равновесия и вычисляется значение крутящего момента  $M_{z_i}$ . Будем считать, что в поперечном сечении, где приложен внешний скручивающий момент, значение крутящего момента изменяется скачкообразно.

Положительные значения крутящего момента откладывают вверх от оси эпюры, а отрицательные – вниз.

Порядок построения эпюры крутящих моментов рассмотрим на примере.

**Пример 15.1.** Построить эпюру крутящих моментов для трансмиссионного вала, изображенного на рис. 15.3, а. Трением в опорах вала пренебрегаем.  $T_1 = 100 \text{ Н} \cdot \text{м}$ ;  $T_2 = 50 \text{ Н} \cdot \text{м}$ ;  $T_3 = 200 \text{ Н} \cdot \text{м}$ ;  $T_4 = 50 \text{ Н} \cdot \text{м}$ .

**Решение.** Разбиваем вал на участки от *I* до *V*. Используя метод сечения, из равновесия левой отсеченной части найдем значения  $M_{z_i}$  на каждом участке:

- участок 0-1, сечение *I*:  $M_{z_1} = 0$ ;
- участок 0-2, сечение *II*:  $M_{z_2} = T_1 = 100 \text{ Н} \cdot \text{м}$ ;
- участок 0-3, сечение *III*:  $M_{z_3} = T_1 + T_2 = 100 + 50 = 150 \text{ Н} \cdot \text{м}$ ;
- участок 0-4 сечение *IV*:  $M_{z_4} = T_1 + T_2 - T_3 = 100 + 50 - 200 = -50 \text{ Н} \cdot \text{м}$ ;
- участок 0-5, сечение *V*:  $M_{z_5} = T_1 + T_2 - T_3 + T_4 = 100 + 50 - 200 + 50 = 0$ .

По полученным значениям строим эпюру крутящих моментов  $M_z$ , рис. 15.3, б.

На эпюре крутящих моментов  $M_z$  «скачок» численно равен значению внешнего скручивающего момента  $T_i$ , приложенного в рассматриваемом сечении.

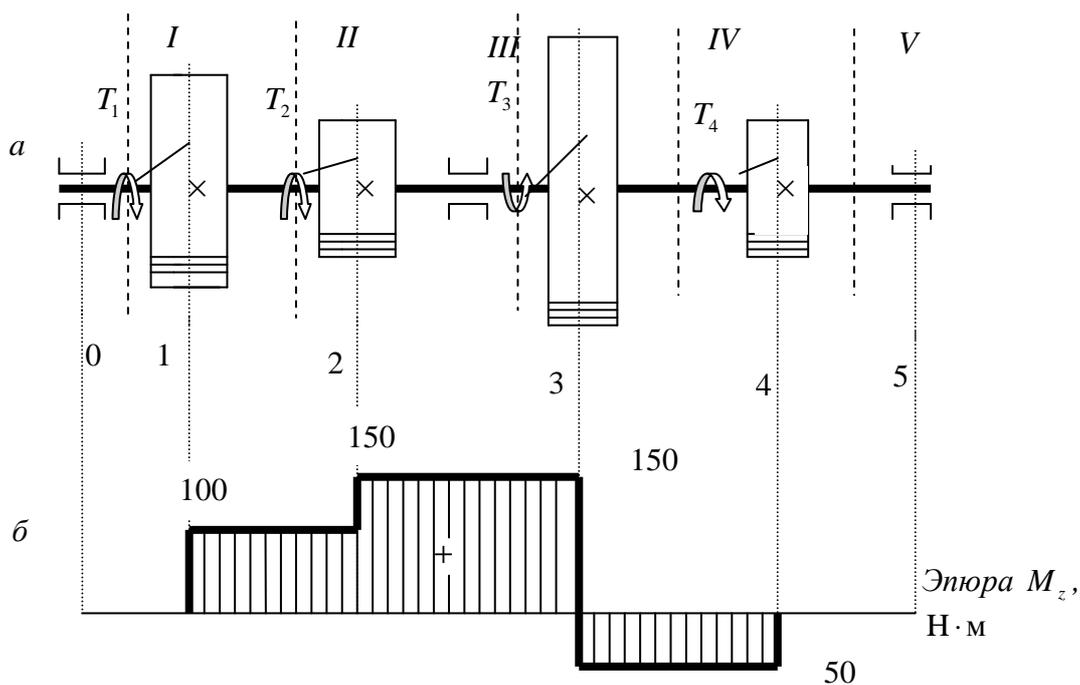


Рис. 15.3. Схема нагружения вала (а) и эюра крутящих моментов  $M_z$  (б)

## 15.2. Напряжения и деформации при кручении бруса круглого поперечного сечения

Напряжения и деформации при кручении в значительной степени зависят от формы поперечного сечения стержня. Гипотеза плоских сечений справедлива только для стержня с круглым сплошным или кольцевым поперечным сечением. У стержней, имеющих другую форму поперечного сечения, при кручении происходит искривление.

Теория кручения круглых стержней основана на следующих предположениях:

- все поперечные сечения в процессе деформации остаются плоскими, и радиусы, проведенные в них, остаются прямыми;
- ось стержня после деформации остается прямой линией, и расстояния между проведенными сечениями не изменяются;
- любое поперечное сечение поворачивается относительно другого вокруг оси стержня на некоторый угол, называемый *углом закручивания*, который пропорционален крутящему моменту и расстоянию между сечениями;
- все образующие цилиндры поворачиваются на один и тот же угол;
- в поперечных сечениях стержня возникают только касательные напряжения.

На основании принятых допущений кручение круглого стержня можно представить как результат сдвигов, вызванных взаимным поворотом поперечных сечений относительно друг друга.

Рассмотрим стержень радиуса  $r$ , жестко заделанный одним концом, рис. 15.4. На его свободном конце приложим пару сил с моментом  $T$ . На боковую поверхность стержня нанесем риску в виде образующей  $AB$ , которая после скручивания займет положение  $AB_1$ . В результате кручения стержня сечение  $I$ , взятое на расстоянии  $z$  от жесткой заделки, повернется на угол  $\varphi$ , а сечение  $II$  – на угол  $\varphi + d\varphi$ . Следовательно, сечение  $II$  повернется по отношению к сечению  $I$  на угол  $d\varphi$ .

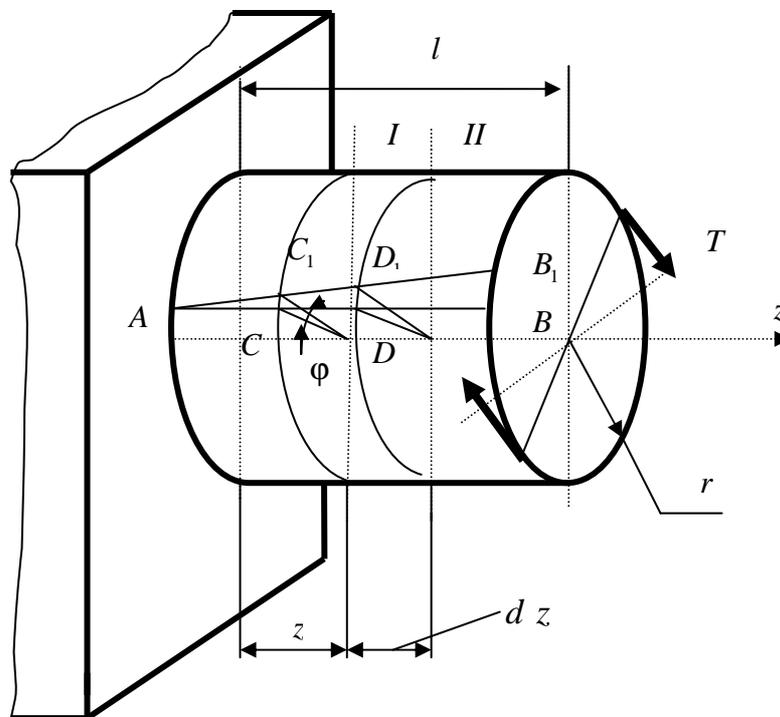


Рис. 15.4. К иллюстрации деформации при кручении

Рассмотрим отдельно часть стержня, расположенного между сечениями  $I$  и  $II$ , длина которого равна  $dz$ . Для наглядности и удобства рассмотрения будем считать, что сечение  $I$  неподвижно, рис. 15.5. Риска  $CD$  отклонится на малый угол  $\gamma$  и займет положение  $CD_1$ . Угол сдвига волокна, лежащего на поверхности стержня, ввиду его малости, определяется равенством

$$\gamma = \frac{DD_1}{CD} = \frac{r \cdot d\varphi}{dz}.$$

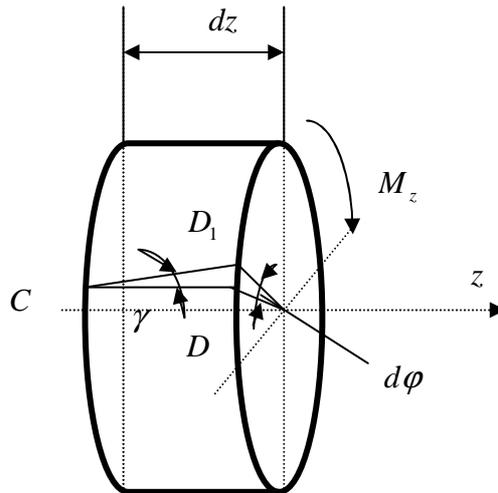


Рис. 15.5. К определению угла сдвига при кручении

Для произвольного волокна, отстоящего от центра сечения на расстоянии  $\rho$  (рис. 15.5, 15.6), будем иметь

$$\gamma_\rho = \frac{KK_1}{CD} = \rho \frac{d\varphi}{dz}.$$

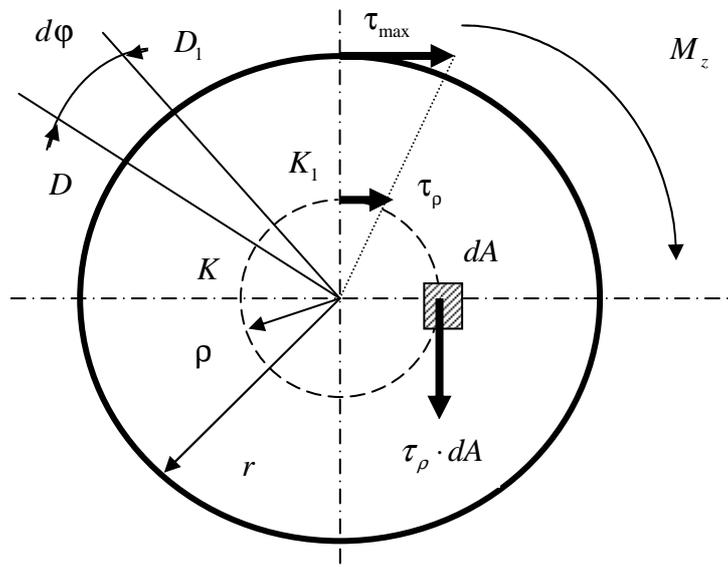


Рис. 15.6. К определению касательных напряжений при кручении

На основании закона Гука при сдвиге можно записать:

$$\begin{aligned} \tau &= G \cdot \gamma = G \frac{d\varphi}{dz} r; \\ \tau_\rho &= G \cdot \gamma_\rho = G \frac{d\varphi}{dz} \rho. \end{aligned} \tag{15.1}$$

Анализ полученных формул позволяет сделать вывод о том, что касательные напряжения в точках поперечного сечения изменяются пропорционально расстоянию этих точек от оси. Максимальные касательные напряжения будут в точках, наиболее удаленных от центра стержня, то есть при  $\rho = r$ .

Выделим вокруг произвольной точки, отстоящей от центра поперечного сечения на расстоянии  $\rho$ , элементарную площадку  $dA$ , рис. 15.6. На эту площадку будет действовать элементарная касательная сила  $\tau_\rho \cdot dA$ .

Касательные силы, действующие по поперечному сечению стержня, приводятся к паре сил, момент которой, равен крутящему моменту  $M_z$ . Момент элементарной касательной силы относительно центральной оси стержня равен:  $dM_z = \tau_\rho \cdot dA \cdot \rho$ . Тогда полный крутящий момент будет равен:

вен:  $M_z = \int_A \tau_\rho \cdot \rho \cdot dA$ . Подставим вместо  $\tau_\rho$  его значение:

$M_z = \int_A G \cdot \rho \frac{d\varphi}{dz} \rho \cdot dA$ . Величина  $G \frac{d\varphi}{dz}$  для всех точек поперечного сечения

одинакова, поэтому вынесем ее за знак интеграла:  $M_z = G \frac{d\varphi}{dz} \int_A \rho^2 \cdot dA$ . Вы-

ражение  $\int_A \rho^2 \cdot dA = I_p$  представляет собой полярный момент инерции круг-

лого сечения. Тогда

$$M_z = G \cdot I_p \frac{d\varphi}{dz} \quad \text{или} \quad \frac{M_z}{G \cdot I_p} = \frac{d\varphi}{dz}.$$

Для нахождения величины касательных напряжений в произвольной точке круглого сечения подставим найденное значение  $\frac{d\varphi}{dz}$  в выражение для касательных напряжений в произвольном волокне поперечного сечения и получим

$$\tau_\rho = \frac{M_z \cdot \rho}{I_p}. \quad (15.2)$$

Максимальное напряжение в крайних точках поперечного сечения определяются по формуле

$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{I_p} r = \frac{M_z}{W_p}. \quad (15.3)$$

Величина  $W_p = \frac{I_p}{r}$  называется *полярным моментом сопротивления* круглого сечения. Для сплошного круглого сечения  $W_p = \frac{\pi \cdot d^3}{16} \approx 0,2d^3$ ; для кольцевого сечения  $W_p = \frac{\pi D^3}{16}(1 - \alpha^4)$ , где  $\alpha = \frac{d}{D}$ .

Для определения угла закручивания воспользуемся ранее полученным уравнением, из которого находим

$$d\varphi = \frac{M_z}{G \cdot I_p} dz.$$

Если стержень имеет постоянный по длине диаметр, то после интегрирования получим

$$\varphi = \int_0^l \frac{M_z}{G \cdot I_p} dz = \frac{M_z \cdot l}{G \cdot I_p}. \quad (15.4)$$

Величину  $G \cdot I_p$  называют *жесткостью* стержня при кручении. Он характеризует сопротивление стержня закручиванию.

Полный угол закручивания не всегда может в полной мере характеризовать жесткость стержня при кручении, т. к. на протяжении длины стержня крутящие моменты могут иметь разные знаки, и при небольшом полном угле закручивания отдельные участки могут скручиваться значительно. Поэтому для оценки жесткости стержня при *кручении* вводится *относительный угол закручивания*:

$$\Theta = \frac{M_z}{G \cdot I_p}, \quad \left[ \frac{1}{\text{м}} \right]. \quad (15.5)$$

### 15.3. Расчет на прочность и жесткость при кручении

Условие прочности бруса при кручении заключается в том, что возникшие в нем максимальные касательные напряжения не должны превышать допускаемых напряжений. Величину допускаемого касательного напряжения  $[\tau]$  принимают равную 0,5...0,6 допускаемого напряжения на растяжение  $[\sigma]$  для данного материала.

*Условие прочности при кручении* имеет вид

$$\tau = \frac{M_{z_{\max}}}{W_p} \leq [\tau]. \quad (15.6)$$

Из условия прочности при кручении можно решать три рода задач, а именно:

– определение действующих касательных напряжений в поперечном сечении бруса и сравнение их с допускаемыми напряжениями (*проверочный расчет*)

$$\tau = \frac{M_z}{W_p} \leq [\tau]; \quad (15.7)$$

– определение допускаемой величины крутящего момента (*расчет на грузоподъемность*)

$$[M_z] = W_p \cdot [\tau]; \quad (15.8)$$

– подбор сечения вала (*проектный расчет*)

$$W_p = \frac{M_z}{[\tau]}. \quad (15.9)$$

Чаще всего приходится выполнять проектные расчеты. Для сплошного круглого вала  $W_p \approx 0,2d^3$ , поэтому его диаметр найдем из выражения

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{M_z}{0,2 \cdot [\tau]}} \geq 0,172 \sqrt[3]{\frac{M_z}{[\tau]}}, \text{ мм.}$$

При этом диаметр вала находится для наиболее нагруженного участка.

Для расчета наружного диаметра пустотелого вала используем выражение

$$D \geq 0,172 \sqrt[3]{\frac{M_z}{(1 - \alpha^4) \cdot [\tau]}}, \text{ мм.}$$

Условие жесткости заключается в том, что угол закручивания единицы длины вала не должен превышать определенной допускаемой величины. Это условие необходимо учитывать, чтобы избежать явления пружинения при остановках валов.

Допускаемый угол закручивания 1 м длины вала задается в градусах и обозначается  $[\varphi_0]$ .

Условие жесткости при кручении имеет вид

$$\varphi_0 = \frac{180^0}{\pi} \cdot \frac{M_z}{G \cdot I_p} \leq [\varphi_0]. \quad (15.10)$$

Величины допускаемых углов закручивания зависят от материала и служебного назначения вала и принимаются в пределах

$$[\varphi_0] = (0,25 \dots 1,0) \frac{\text{град}}{\text{м}}$$

Аналогично прочностным расчетам при расчетах на жесткость выполняют три вида расчетов: проверочный расчет, расчет на грузоподъемность и проектный расчет.

Длинные и ответственные валы рассчитывают на прочность и жесткость и окончательно принимают большее из полученных значений найденных величин.

## Тема 16. ИЗГИБ ПРЯМОГО БРУСА

*Изгиб* – один из видов деформации бруса, при которой происходит искривление оси прямого бруса или изменение кривизны оси кривого бруса. Этот вид деформации часто встречается в многочисленных строительных конструкциях и узлах машин. Изгиб связан с возникновением в поперечных сечениях бруса изгибающих моментов и часто, одновременно с ними, поперечных сил.

Брусья, работающие преимущественно на изгиб, принято называть *балками*.

### 16.1. Основные понятия

*Изгиб* называют *чистым*, если в поперечных сечениях балки возникают только изгибающие моменты. Если же совместно с изгибающими моментами в сечениях балки возникают и поперечные силы, то *изгиб* называют *поперечным*.

Деформация изгиба имеет место при воздействии на балку внешних сил, приложенных перпендикулярно к ее оси, и пар сил, плоскость действия которых проходит через ее ось.

Плоскости поперечного сечения балки, в которых лежат главные центральные оси инерции, называют *главными плоскостями* балки.

Плоскость, проходящая через ось балки, в которой действуют внешние силы, называется *силовой плоскостью*. Линия пересечения силовой плоскости с плоскостью поперечного сечения балки называется *силовой линией*. Если силовая плоскость проходит через одну из главных плоско-

стей балки и ось балки искривляется в этой же плоскости, то изгиб называют *прямым* или *плоским*. Если силовая плоскость не совпадает ни с одной из главных плоскостей балки и изогнутая ось не лежит в силовой плоскости, то изгиб называют *косым*.

Для того чтобы балка могла воспринимать нагрузку и передавать ее на основание, она должна быть соединена с ним опорными связями. На практике применяют три основных типа опор.

1. *Шарнирно-неподвижная опора*, рис. 16.1, а. Эта опора допускает свободный поворот сечения балки над опорой в одной плоскости относительно оси цилиндрического шарнира, но не дает возможности смещаться ни по вертикали, ни по горизонтали. В такой опоре возникают две составляющие опорной реакции:  $X$  и  $Y$ , рис. 16.1, б.

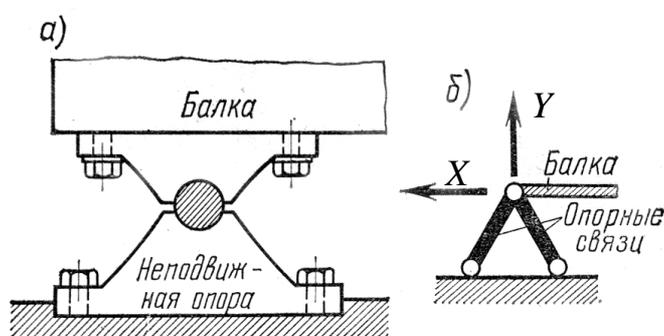


Рис. 16.1. Шарнирно-неподвижная опора: а – вид опоры; б – схематичное изображение и составляющие опорной реакции

2. *Шарнирно-подвижная опора*, рис. 16.2, а. Эта опора допускает перемещение в одном направлении, например, по горизонтали и поворот сечения над опорой вокруг шарнира. Реакция опоры направлена вдоль опорной связи или перпендикулярно плоскости опирания катков, рис. 16.2, б.

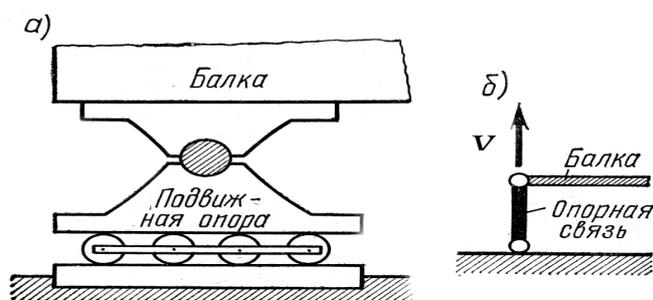


Рис. 16.2. Шарнирно-подвижная опора: а – вид опоры; б – схематичное изображение и составляющие опорной реакции

3. *Заделка*, рис. 16.3, *а*. Такая опора не допускает поворота и перемещения по двум направлениям сечения балки, примыкающего к заделке. Реакции в заделке состоят из вертикальной силы  $Y$ , горизонтальной силы  $X$  и момента  $M$ , рис. 16.3, *б*. Иногда заделку представляют в виде трех линейных связей, рис. 16.3, *в*.

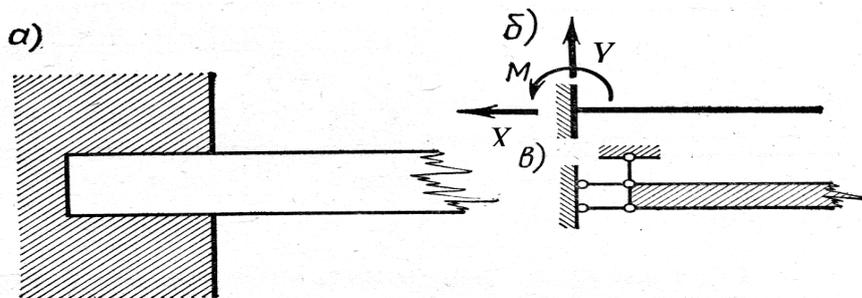


Рис. 16.3. Заделка: *а* – вид опоры; *б* – схематичное изображение и составляющие опорной реакции; *в* – иное изображение заделки

Для того чтобы балка могла воспринимать нагрузку, расположенную в одной плоскости, ее необходимо закрепить в этой плоскости с помощью описанных выше связей. Наименьшее число связей, обеспечивающее неподвижность балки по отношению к основанию в одной плоскости, равно трем.

Как отмечалось выше, в общем случае, в поперечных сечениях балки возникают изгибающий момент и поперечная сила. Для того чтобы определить внутренние силовые факторы в произвольном поперечном сечении используют метод сечения.

На рис. 16.4 показана балка, рассеченная плоскостью  $A_0$ . Воздействие правой части, изображенной пунктиром, на левую часть заменено поперечной силой  $Q_y$  и изгибающим моментом  $M_x$ .

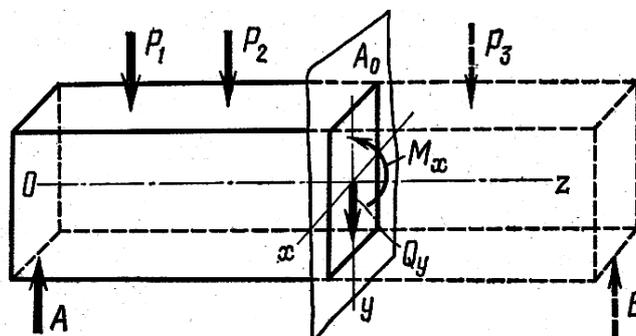


Рис. 16.4. К определению внутренних силовых факторов при изгибе балки

Установим для изгибающего момента и поперечной силы следующие правило знаков: *изгибающий момент будем считать положительным, если он вызывает растяжение нижних волокон балки. Поперечную силу будем считать положительной, если она стремится повернуть вырезанный из балки элемент бесконечно малой длины по ходу часовой стрелки*, рис. 16.5.

На рис. 16.5, б показана балка, которая двумя сечениями, проведенными нормально к оси, разрезана на три части. Действие изгибающего момента и поперечной силы на эти три части показано в положительном направлении.

На рис. 16.5, а видно, что деформация изгиба сопровождается растяжением одних волокон и сжатием других. Очевидно, что между ними есть волокно, которое не подверглось ни деформации сжатия, ни деформации растяжения. Это волокно принято называть *нейтральным слоем* балки.

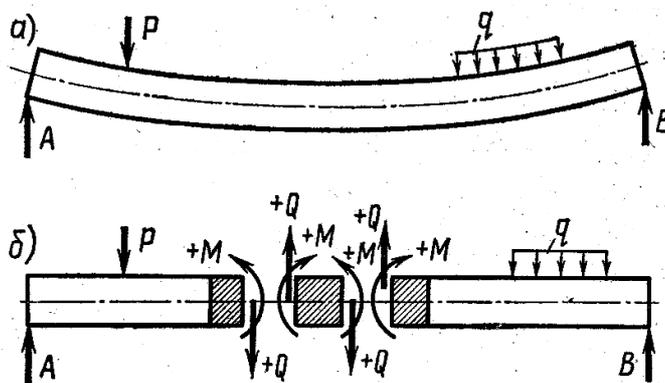


Рис. 16.5. Изогнутая балка (а) и правило знаков для поперечной силы и изгибающего момента (б)

## 16.2. Построение эпюр изгибающих моментов и поперечных сил

Графики, выражающие законы изменения поперечных сил и изгибающих моментов по длине балки, называются *эпюрами поперечных сил и изгибающих моментов*. Каждая ордината соответствующей эпюры представляет собой поперечную силу или изгибающий момент в соответствующем сечении балки.

Построение эпюр производится следующим образом. Прежде всего, по заданной нагрузке и схеме опирания балки определяют опорные реакции. Поперечные силы и изгибающие моменты зависят от положения сечения, в котором они определяются, поэтому балку необходимо разбить на условные участки, в пределах которых они будут иметь свои законы изменения.

- При построении эпюр следует придерживаться определенных правил:
- ось, на которой строится эпюра, проводят параллельно оси балки;
  - ординаты эпюры откладывают в выбранном масштабе от оси эпюры по перпендикуляру (положительные – вверх, отрицательные – вниз);
  - концы отложенных ординат соединяем толстой линией;
  - эпюру штрихуем тонкими вертикальными линиями;
  - числовое значение ординат проставляем в характерных точках эпюры;
  - в поле эпюры ставим знак (плюс или минус, обведенные кружком).

### 16.2.1. Построение эпюр поперечных сил и изгибающих моментов для однопролетной балки, нагруженной сосредоточенной силой

Дана однопролетная балка, нагруженная сосредоточенной силой  $F$ , рис. 16.6, *a*.

1. Определяем величины опорных реакций  $A$  и  $B$ . Условно направляем составляющие опорных реакций следующим образом:  $Y_A, Y_B$  – вертикально вверх,  $X_A$  – горизонтально направо, рис. 16.6, *a*.

Составляем уравнения равновесия и находим искомые величины:

$$\sum F_x = 0; \quad X_A = 0.$$

$$\sum M_A = 0; \quad F \cdot a - Y_B \cdot l = 0; \quad Y_B = F \frac{a}{l}.$$

$$\sum M_B = 0; \quad Y_A \cdot l - F \cdot b = 0; \quad Y_A = F \frac{b}{l}.$$

Правильность определения опорных реакций оцениваем следующим уравнением статики

$$\sum F_y = F \frac{b}{l} - F + F \frac{a}{l} = 0.$$

Равенство нулю говорит о том, что опорные реакции определены верно.

2. Разбиваем балку на два участка ( $I, II$ ), границами которых будут сечения, в которых приложены сосредоточенные силы, включая и реактивные.

На расстоянии  $z_1$  от опоры  $A$  (участок  $I$ ) проведем условное сечение и используя правила знаков, составим выражения для определения поперечной силы  $Q_{y1}$  и изгибающего момента  $M_{x1}$ , рис. 16.6, *б*.

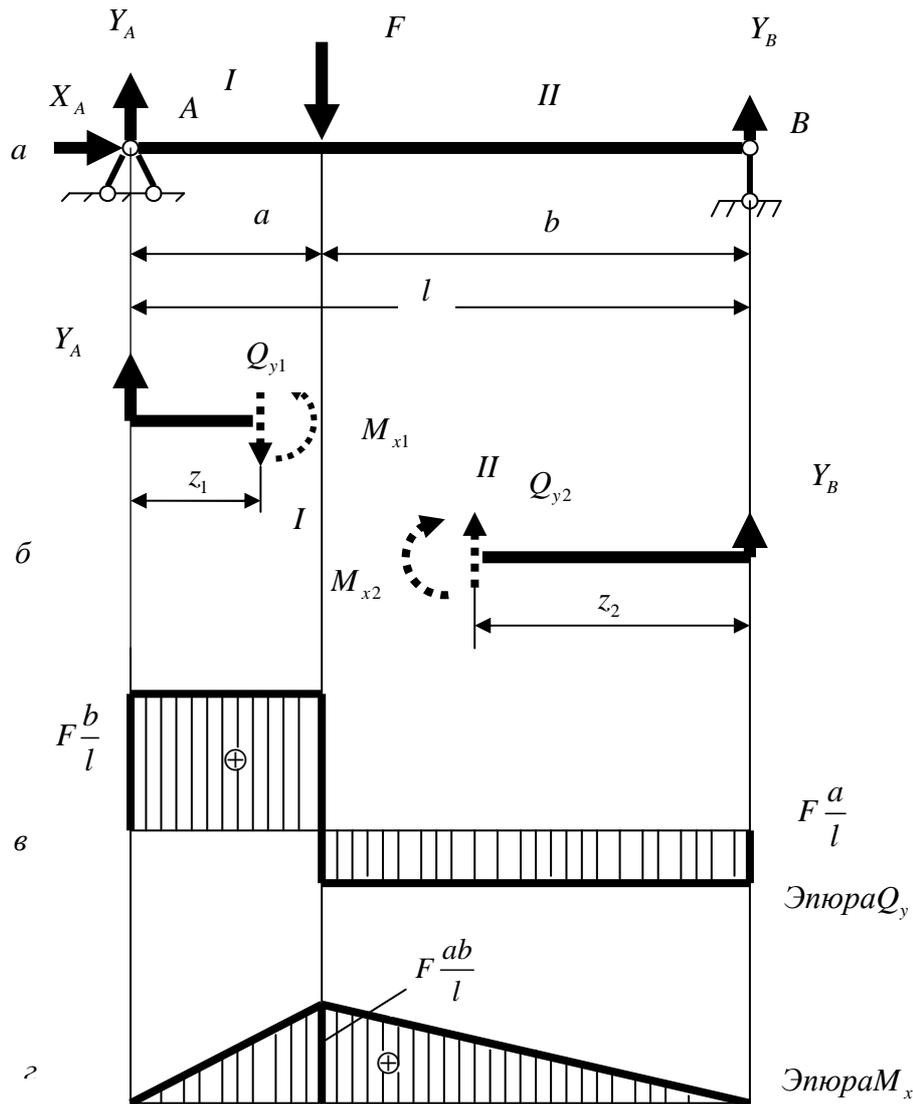


Рис. 16.6. Схема нагружения однопролетной балки (а), применение метода сечений (б), эпюры поперечных сил (в) и изгибающих моментов (г)

Для левой части I участка балки имеем:

Сумма проекций на ось Y всех сил, действующих на отсеченную часть должна равняться нулю.

$$\sum F_y = 0; Y_A - Q_{y1} = 0; Q_{y1} = Y_A = F \frac{b}{l}.$$

Полученное выражение представляет собой уравнение прямой, параллельной оси абсцисс.

Сумма моментов относительно центра тяжести отсеченного сечения левой части балки должна равняться нулю.

$$\sum M_{o1} = 0; M_{x1} - Y_A \cdot z_1 = 0; M_{x1} = Y_A \cdot z_1 = F \frac{b}{l} z_1.$$

Полученное выражение представляет собой уравнение прямой линии, следовательно, изгибающий момент на этом участке изменяется по линейному закону. В пределах  $I$  участка  $z_1$  изменяется от 0 до  $a$ .

$$\text{Тогда, при } z_1 = 0 \quad M_{x1} = 0; \quad z_1 = a \quad M_{x1} = F \frac{b}{l} a.$$

На расстоянии  $z_2$  от опоры  $B$  (участок  $II$ ) проведем условное сечение и составим аналогичные выражения для определения  $Q_{y2}$  и  $M_{x2}$ .

$$\sum F_y = 0; \quad Y_B + Q_{y2} = 0; \quad Q_{y2} = -Y_B = -F \frac{a}{l}.$$

$$\sum M_{o2} = 0; \quad M_{x2} - Y_B \cdot z_2 = 0; \quad M_{x2} = Y_B \cdot z_2 = F \frac{a}{l} z_2.$$

Величину  $z_2$  можно принимать в пределах  $II$  участка от 0 до  $b$ .

$$\text{При } z_2 = 0 \quad M_{x2} = 0; \quad z_2 = b \quad M_{x2} = F \frac{a}{l} b.$$

3. По полученным значениям строим эпюру  $Q_y$ . В удобном масштабе откладываем полученные значения  $Q_{y1}$  и  $Q_{y2}$ , обводим контур эпюры толстой линией, выполняем штриховку и проставляем соответствующие знаки, рис. 16.6, в.

4. Аналогично строим эпюру изгибающих моментов  $M_x$ , рис. 16.6, г.

Выполним анализ построенных эпюр.

Эпюра поперечных сил  $Q_y$  имеет три скачка в сечениях, в которых приложены сосредоточенные силы, включая и реактивные. Абсолютная величина скачка равна величине приложенной в этом сечении силы. При положительной поперечной силе изгибающий момент возрастает, а при отрицательной – убывает. В границах участков поперечная сила имеет постоянное значение, т. к. распределенная нагрузка отсутствует.

На эпюре изгибающих моментов  $M_x$  в сечениях, в которых приложены сосредоточенные силы, наблюдается перегиб эпюры. На участках, где поперечная сила имеет постоянное значение, изгибающий момент меняется по линейному закону. В сечении балки, в котором эпюра поперечных сил меняет знак, на эпюре изгибающих моментов наблюдается экстремум ( $M_{x\max} = F \frac{a \cdot b}{l}$ ).

### 16.2.2. Вид эюр поперечных сил и изгибающих моментов при различных способах нагружения и закрепления балки

1. Эюры поперечных сил и изгибающих моментов для однопролетной балки, нагруженной парой сил с моментом  $M$ , рис. 16.7.

Реакции опор определяются аналогичным способом, рассмотренным выше. Балка разбивается на два участка, и все действия по нахождению значений поперечных сил и изгибающих моментов аналогичны.

Анализ представленных эюр показывает, что нагрузка в виде сосредоточенной пары сил не влияет на очертание эюры поперечных сил  $Q_y$ ; она имеет постоянный характер и два скачка в сечениях, в которых приложены сосредоточенные реактивные силы  $Y_A$  и  $Y_B$ . На эюре изгибающих моментов в сечениях, в которых приложены реактивные силы, наблюдаем перегиб эюры, а в сечении, в котором приложена пара сил – скачок на величину момента пары.

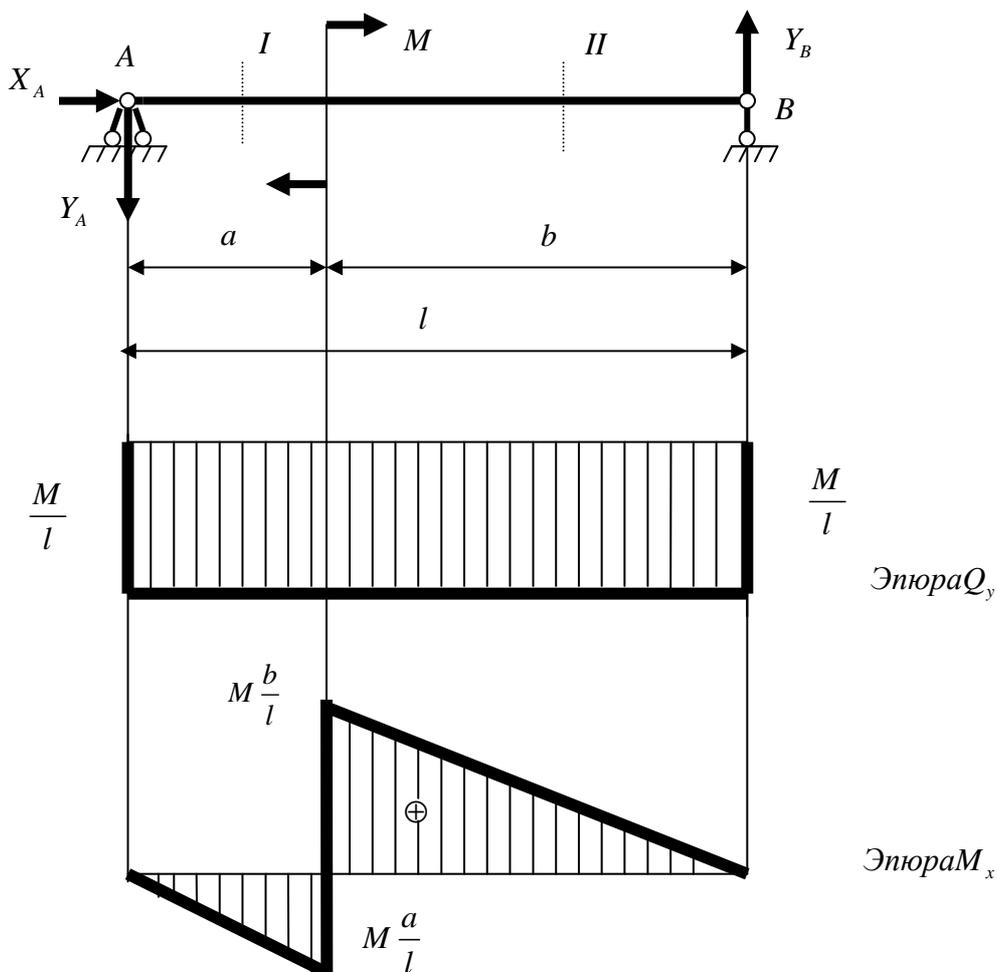


Рис. 16.7. Эюры поперечных сил и изгибающих моментов для однопролетной балки, нагруженной парой сил с моментом  $M$

2. Эпюры поперечных сил и изгибающих моментов для однопролетной балки, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой интенсивности  $q$ , рис. 16.8.

Алгоритм определения поперечных сил и изгибающих моментов тот же, что и рассмотренный выше. Внешний вид эпюр внутренних силовых факторов при этом способе нагружения и закрепления балки представлен на рис. 16.8. Анализ построенных эпюр показывает, что на пролете балки, на который действует равномерно распределенная нагрузка, поперечная сила меняется по линейному закону, а изгибающий момент – по закону квадратной параболы. Скачки на эпюре поперечных сил  $Q_y$  имеют место в сечениях, в которых действуют реактивные силы  $Y_A$  и  $Y_B$ . На эпюре изгибающих моментов  $M_x$  в сечениях, где приложены реактивные силы  $Y_A$  и  $Y_B$ , наблюдается перегиб эпюры и при положительном значении поперечной силы изгибающий момент возрастает, а при отрицательном значении – убывает.

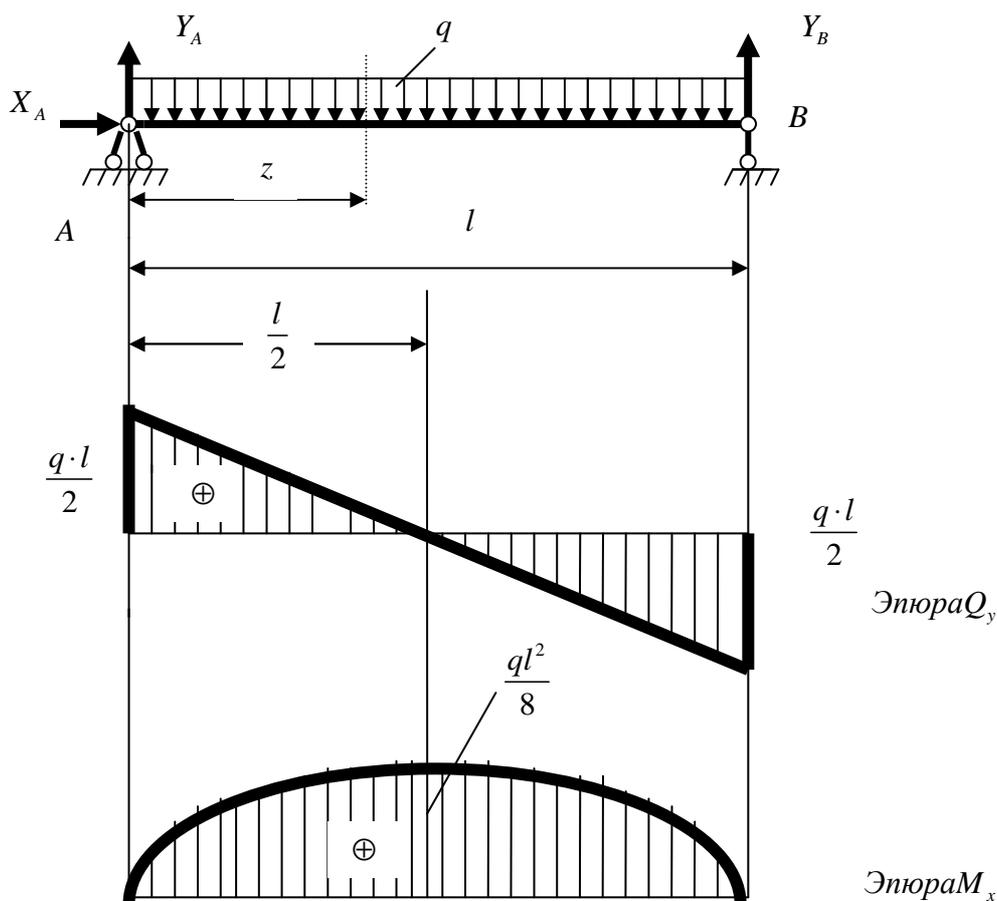


Рис. 16.8. Эпюры поперечных сил и изгибающих моментов для однопролетной балки, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой интенсивности  $q$

3. Эпюры поперечных сил и изгибающих моментов для консольной балки, нагруженной сосредоточенной силой  $F$ , рис. 16.9.

В жесткой заделке под действием вертикальной силы  $F$  возникает вертикальная составляющая  $Y_A$  и реактивный момент  $m_A$ . Горизонтальная составляющая жесткой заделки  $X_A$  будет равна нулю.

Из уравнений равновесия определяем:

$$\sum F_y = 0; Y_A - F = 0; Y_A = F.$$

$$\sum M_A = 0; m_A - F \cdot l = 0; m_A = F \cdot l.$$

Для консольных балок (жестко заделанных одним концом) предварительно реакции опор можно и не определять. Это связано с тем, что правый конец балки, в данном случае, свободен и для определения выражений внутренних силовых факторов и построения их эпюр всю балку можно рассматривать как условно отсеченную правую часть и, при  $z = l$ , значения поперечной силы и изгибающего момента будут равны значениями реактивных составляющих жесткой заделки.

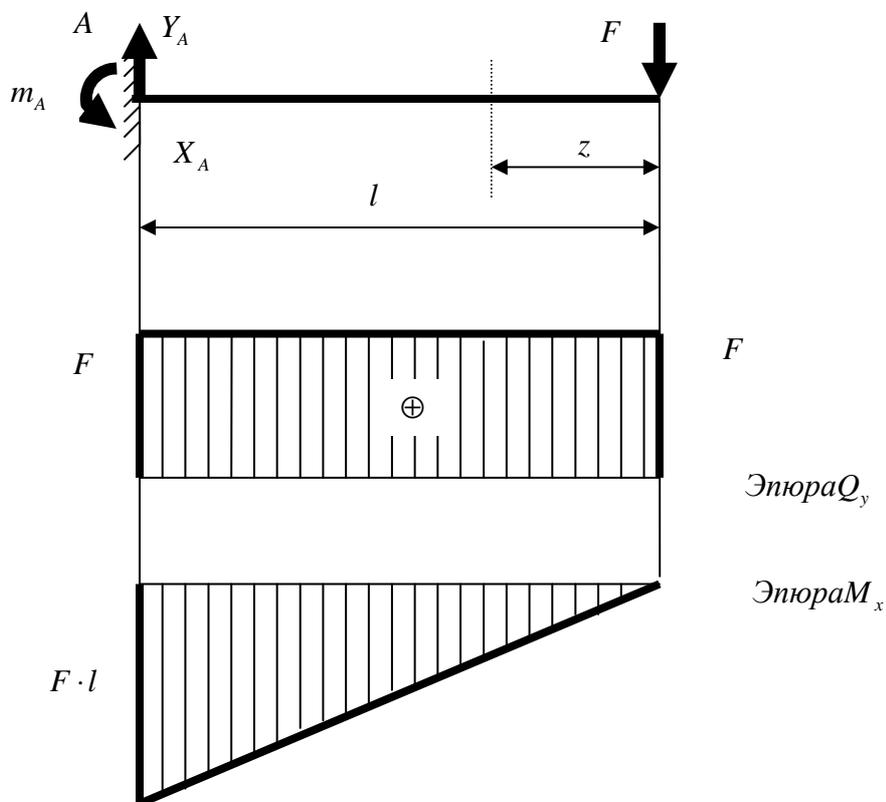


Рис. 16.9. Эпюры поперечных сил и изгибающих моментов для консольной балки, нагруженной сосредоточенной силой  $F$ .

### 16.3. Дифференциальные зависимости между изгибающим моментом, поперечной силой и интенсивностью распределенной нагрузки

Изгибающий момент  $M_x$ , поперечная сила  $Q_y$  и интенсивность внешней распределенной нагрузки  $q$  связаны между собой определенной зависимостью. Вырежем из балки, нагруженной распределенной нагрузкой  $q$ , элемент длиной  $dz$ , рис. 16.10.

Составим уравнения равновесия элемента  $dz$ :

$$\sum M_o = M_x - (M_x + dM_x) + Q_y \cdot dz + \frac{1}{2} dQ_y \cdot dz = 0;$$

$$\sum F_y = q \cdot dz + Q_y - (Q_y + dQ_y) = 0.$$

В первом уравнении произведением  $\frac{1}{2} dQ_y \cdot dz$  можно пренебречь как величиной второго порядка малости по сравнению с другими слагаемыми уравнения.

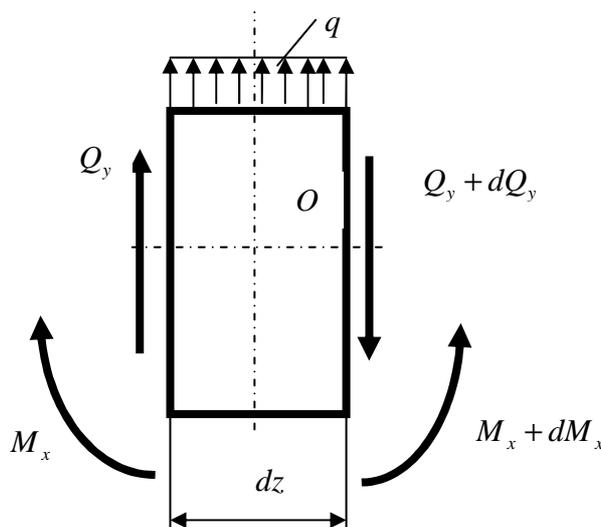


Рис. 16.10. К выводу дифференциальных зависимостей между  $Q_y, M_x, q$

После простейших преобразований находим:

$$\begin{aligned} \frac{dM_x}{dz} &= Q_y; \\ \frac{dQ_y}{dz} &= q. \end{aligned} \tag{16.1}$$

Из этих двух дифференциальных зависимостей вытекает следующая:

$$\frac{d^2 M_x}{dz^2} = q. \quad (16.2)$$

*Производная от поперечной силы по абсциссе сечения равна интенсивности распределенной нагрузки в том же сечении, а производная от изгибающего момента по абсциссе сечения равна поперечной силе в том же сечении.* Полученная дифференциальная зависимость известна как теорема Д.И. Журавского.

#### **16.4. Нормальные и касательные напряжения при изгибе**

При определении напряжений при изгибе принимают следующие основные допущения:

- поперечные сечения, плоские до деформации, остаются плоскими и после деформации;
- продольные соседние волокна балки не давят друг на друга, т.е. они испытывают только простое растяжение или сжатие;
- напряжения и деформации в балке связаны между собой законом Гука.

При чистом изгибе в поперечных сечениях балки возникают только нормальные напряжения (рис. 16.11), которые определяются по следующей формуле

$$\sigma = \frac{M_x}{I_x} y, \quad (16.3)$$

где  $\sigma$  – нормальное напряжение в произвольной точке рассматриваемого поперечного сечения;

$M_x$  – изгибающий момент в исследуемом поперечном сечении;

$I_x$  – момент инерции поперечного сечения относительно нейтральной оси;

$y$  – расстояние от нейтральной оси до данной точки исследуемого поперечного сечения.

Нейтральная ось проходит через центр тяжести поперечного сечения и перпендикулярна к силовой плоскости.

Знак эпюры нормальных напряжений определяется знаком изгибающего момента в исследуемом сечении.

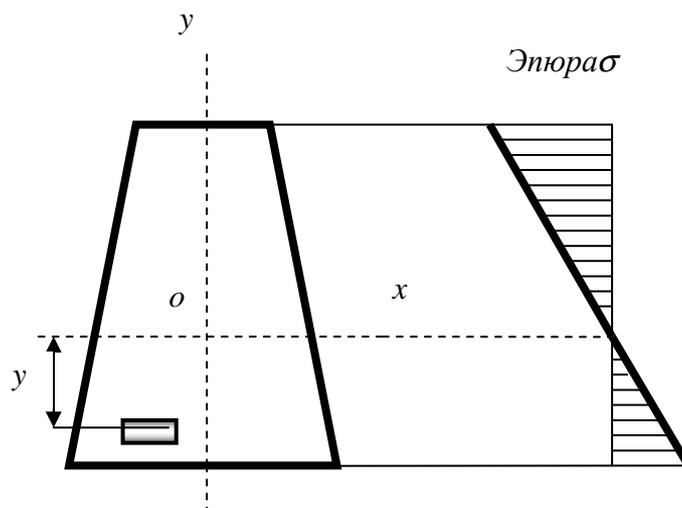


Рис. 16.11. Эпюра нормальных напряжений при изгибе

Максимальные нормальные напряжения будут возникать в наиболее удаленных от нейтральной оси волокнах:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{I_x} y_{\max} = \frac{M_x}{W_x}, \quad (16.4)$$

где  $W_x = \frac{I_x}{y_{\max}}$  – осевой момент сопротивления поперечного сечения.

При поперечном изгибе в поперечных сечениях балки возникают не только нормальные, но и касательные напряжения (рис. 16.12), которые определяются по формуле Д.И. Журавского

$$\tau = \frac{Q_y \cdot S_x^{omc}}{I_x \cdot b_y}, \quad (16.5)$$

где  $\tau$  – касательное напряжение в произвольной точке рассматриваемого поперечного сечения балки;

$Q_y$  – поперечная сила в исследуемом поперечном сечении;

$S_x^{omc}$  – статический момент относительно нейтральной оси  $Ox$  части поперечного сечения, расположенной по одну сторону от прямой, проведенной через исследуемую точку параллельно нейтральной оси;

$I_x$  – момент инерции всего поперечного сечения относительно нейтральной оси;

$b_y$  – ширина поперечного сечения балки на уровне рассматриваемой точки (для прямоугольного сечения  $b = const$ ).

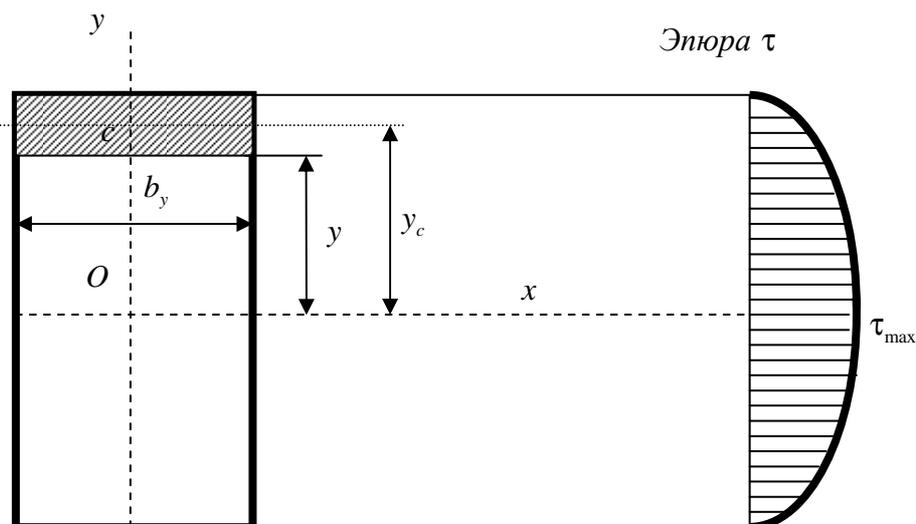


Рис. 16.12. Эпюра касательных напряжений для заданного поперечного сечения балки

Знак эпюры касательных напряжений определяется знаком поперечной силы, действующей в исследуемом поперечном сечении балки.

В отличие от нормальных напряжений распределение касательных напряжений по высоте поперечного сечения зависит от формы сечения. Для крайних слоев поперечного сечения значения касательных напряжений будут равны нулю, так как статический момент отсеченной части равен нулю. В волокнах нейтрального слоя, там, где статический момент отсеченной части наибольший, касательные напряжения достигают максимального значения.

### 16.5. Главные нормальные напряжения при изгибе балки и максимальные касательные напряжения

Так как в поперечных сечениях балки при изгибе возникают нормальные и касательные напряжения, то имеет место плоское напряженное состояние, рис. 16.13. Найдем главные напряжения, действующие по главным площадкам.

Пренебрегаем величиной нормальных напряжений в горизонтальных площадках и получаем формулы для главных напряжений:

$$\begin{aligned}\sigma_{\max} = \sigma_1 &= \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}; \\ \sigma_{\min} = \sigma_2 &= \frac{\sigma}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}.\end{aligned}\tag{16.6}$$

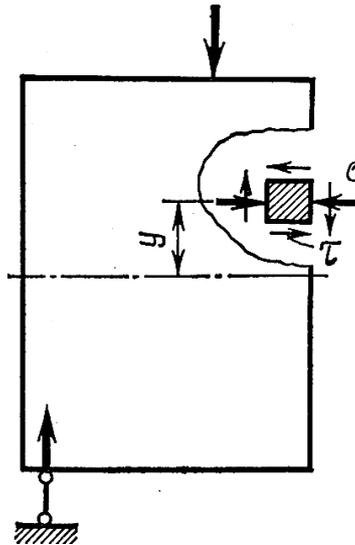


Рис. 16.13. К определению главных напряжений при изгибе

Для определения угла наклона главных площадок воспользуемся следующей формулой

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2\tau}{\sigma}. \quad (16.7)$$

Исследуем напряженное состояние в трех точках, лежащих в одном и том же поперечном сечении, но взятых на разной высоте, рис. 16.14, а именно: в верхнем сжатом волокне (точка 1), в нейтральном слое (точка 2) и в нижнем растянутом волокне (точка 3).

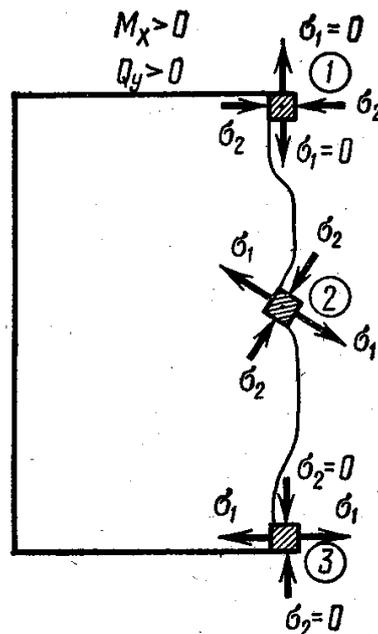


Рис. 16.14. Исследование плоского напряженного состояния при изгибе

В точке 1:

$$\begin{aligned}\tau &= 0; \\ \sigma_1 &= -\frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(-\sigma)^2} = 0; \\ \sigma_2 &= -\frac{\sigma}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(-\sigma)^2} = -\sigma; \\ \operatorname{tg} 2\alpha_0 &= \frac{0}{\sigma} = 0; \alpha'_0 = 0; \alpha''_0 = 90^\circ.\end{aligned}$$

В точке 2:

$$\begin{aligned}\tau &= \tau_{\max}; \sigma = 0; \\ \sigma_1 &= \frac{1}{2}\sqrt{0 + 4\tau_{\max}^2} = \tau_{\max}; \\ \sigma_2 &= -\frac{1}{2}\sqrt{0 + 4\tau_{\max}^2} = -\tau_{\max}; \\ \operatorname{tg} 2\alpha_0 &= \frac{2\tau_{\max}}{0} = \infty; 2\alpha_0 = 90^\circ \text{ и } 270^\circ;\end{aligned}$$

следовательно,  $\alpha'_0 = 45^\circ$  и  $\alpha''_0 = 135^\circ$ .

В точке 3:

$$\begin{aligned}\tau &= 0; \\ \sigma_1 &= \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2} = \sigma; \\ \sigma_2 &= 0; \alpha'_0 = 90^\circ; \alpha''_0 = 0.\end{aligned}$$

Наибольшие касательные напряжения равны

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}. \quad (16.8)$$

Вычисляя главные напряжения для целого ряда точек какого-либо поперечного сечения, можно построить эпюры главных растягивающих, главных сжимающих, а также наибольших касательных напряжений, которые развиваются в площадках, наклоненных к главным площадкам под углом  $45^\circ$ .

## 16.6. Расчет балок на прочность

Расчет балок на прочность обычно ведется по наибольшим нормальным напряжениям, возникающим в их поперечных сечениях. Обозначив эти напряжения  $\sigma_{\max}$ , получаем *условие прочности при изгибе* в виде

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{x \max}}{W_x} \leq [\sigma]. \quad (16.9)$$

Зная условие прочности, можно решать три рода задач.

1. *Проверочный расчет.* По известным: изгибающему моменту и моменту сопротивления поперечного сечения – определяют нормальное напряжение  $\sigma$  и сравнивают его с допустимым значением  $[\sigma]$ . Разница между ними не должна превышать  $\pm 5\%$ .

2. *Проектный расчет.* По известным: изгибающему моменту и допускаемому напряжению – находят момент сопротивления сечения, по которому подбираются рациональная форма и размеры поперечного сечения балки.

3. *Расчет грузоподъемности.* По известным: моменту сопротивления поперечного сечения и допускаемому напряжению – определяют допустимую величину изгибающего момента для рассчитываемой балки.

Максимальный изгибающий момент определяют либо расчетом, либо из эпюры изгибающих моментов.

Так как вблизи нейтральной оси материал балки напряжен незначительно, то целесообразно больше материала располагать от нейтрального слоя. Поэтому цельнометаллические балки прямоугольного поперечного сечения применяются крайне редко, а весьма распространены прокатные профильные балки двутаврового, таврового, швеллерного, замкнутого и других сечений, геометрические характеристики которых приводятся в стандартах.

Если возникает необходимость проверки прочности балки в ряде характерных точек поперечного сечения, то расчет производят по главным напряжениям, которые учитывают величины нормальных и касательных напряжений, действующих в этих точках:

$$\sigma_{\max, \min} = \frac{\sigma}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]. \quad (16.10)$$

### 16.7. Перемещения линейные и угловые.

#### Дифференциальное уравнение изогнутой оси балки

При изгибе, рис. 16.15. ось балки  $Oz$  искривляется (пунктирная линия) и точка, лежащая на ней, например  $m$ , получает некоторое перемещение  $mm_1$ , которое принято называть *прогибом*. Так как это перемещение мало по сравнению с размерами балки, то их направления можно считать перпендикулярными по отношению к первоначальному положению оси балки. Кривая линия, в которую превращается первоначально прямоли-

нейная ось балки после приложения к ней внешней нагрузки, называется *изогнутой осью* балки или ее *упругой линией*.

При деформации балки сечения, оставаясь плоскими, поворачиваются по отношению к своему прежнему положению. Угол, на который поворачивается каждое сечение по отношению к своему первоначальному положению, называется *углом поворота сечения*.

Таким образом, при плоском изгибе линейные и угловые перемещения сечений балки характеризуются двумя величинами:

- *прогибом*  $y$  центра тяжести сечения по направлению, перпендикулярному оси балки;
- *углом поворота сечения*  $\varphi$  относительно первоначального положения.

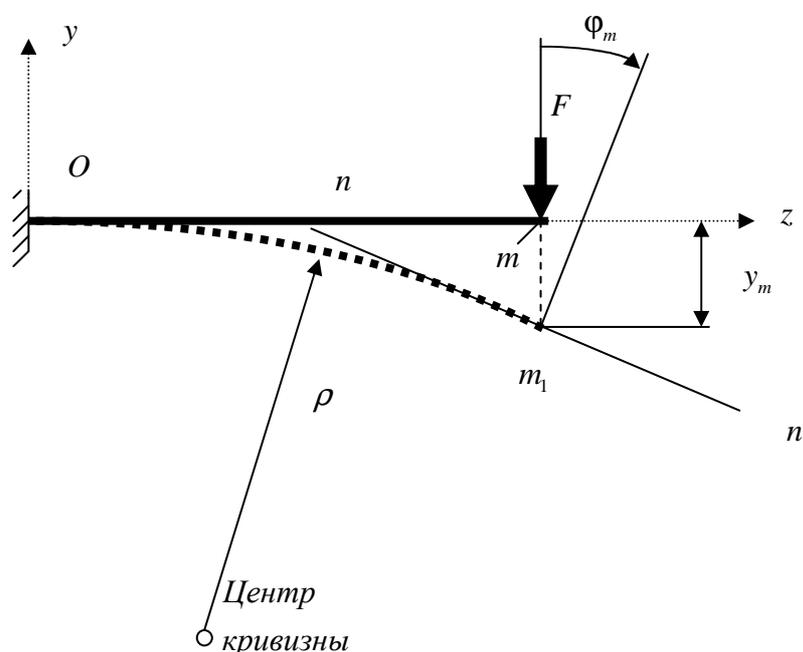


Рис. 16.15. Линейные и угловые перемещения сечений балки при изгибе

Касательная линия  $n - n$ , проведенная к изогнутой оси балки в произвольной точке  $m_1$ , составляет с осью  $Oz$  угол, равный углу поворота сечения  $\varphi$ . Для балок угол  $\varphi$  обычно не превышает  $1^\circ$ .

Максимальный прогиб называют *стрелой прогиба*.

При чистом изгибе кривизна изогнутой оси определяется по формуле

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{E \cdot I_x}, \quad (16.11)$$

где  $E \cdot I_x$  – жесткость поперечного сечения балки при изгибе.

Если ось  $Oy$  направлена вверх, а прогиб  $mm_1$  вниз, то правая часть приведенного равенства берется со знаком минус.

При малых перемещениях упругая линия представляет собой весьма пологую кривую, и с достаточной точностью можно принять, что кривизна упругой линии равна второй производной от ее уравнения

$$\frac{1}{\rho} \approx \frac{d^2 y}{dz^2} = y''.$$

Таким образом, приближенное *дифференциальное уравнение изогнутой оси* имеет вид

$$y'' = \frac{M_z}{E \cdot I_x}. \quad (16.12)$$

Практически полученным уравнением можно пользоваться, если  $\frac{y_{\max}}{l} \leq 0,05$ , где  $l$  – пролет балки.

После первого интегрирования дифференциального уравнения изогнутой оси балки получается *уравнение углов поворота* поперечных сечений

$$\phi = y' = \frac{1}{E \cdot I_x} \left[ \int M_x dz + C \right]; \quad (16.13)$$

после второго интегрирования – *уравнение прогибов*

$$y = \frac{1}{E \cdot I_x} \left[ \int dz \int M_x dz + C \cdot z + D \right]. \quad (16.14)$$

В полученных уравнениях  $C$  и  $D$  – постоянные интегрирования, которые определяются из условий на опорах и на границах ее участков:

- каждая подвижная или неподвижная опора дает *одно опорное условие* – равенство нулю прогиба в сечении балки на опоре;
- жесткая заделка дает *два опорных условия* – равенство нулю прогиба и угла поворота в сечении заделки;
- на границе двух смежных участков получаем *два граничных условия* – равенство между собой прогибов и углов поворота общих сечений на границе обоих участков.

При определении перемещений методом непосредственного интегрирования необходимо для каждого участка балки составлять выражения изгибающих моментов и производить интегрирование основного дифференциального уравнения изогнутой оси балки. Поэтому при двух и боль-

шем числе участков балки применение изложенного метода становится затруднительным. Существует ряд методов определения линейных и угловых перемещений сечений балки при изгибе, не требующих прямого интегрирования основного дифференциального уравнения изогнутой оси балки: метод начальных параметров, метод фиктивной нагрузки, метод Мора, энергетический метод и др.

### 16.8. Расчет балок на жесткость

Достаточно часто балки, хотя и удовлетворяют условиям прочности, не удовлетворяют необходимой жесткости, т.е. изогнутая ось имеет значительную кривизну и ее прогибы недопустимо велики. Такие прогибы могут нарушить нормальную эксплуатацию конструкции. Поэтому для строительных конструкций, перекрытий, ферм, мостов и других большое значение имеет соблюдение допускаемых значений прогибов, т.е. помимо расчетов на прочность, возникает необходимость выполнять расчет на жесткость, для чего задаются величиной наибольшего допускаемого прогиба

$[y] = \frac{l}{m}$ , где  $l$  – величина пролета балки;  $m$  – число, устанавливаемое нормами проектирования. Обычно  $m$  устанавливается в пределах от 200 до 1000. Для ответственных сооружений, например железнодорожных мостов, величина  $m$  принимается около 1000.

Условие жесткости выражается формулой

$$y_{\max} \leq [y], \quad (16.15)$$

то есть *наибольший прогиб балки не должен превышать допускаемого значения.*

При расчете на жесткость в формулу прогибов для заданной схемы балки и нагрузки подставляют значения величины допускаемого прогиба и определяют величину требуемого момента инерции, по которому и принимают необходимое сечение балки.

## Тема 17. СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ СТЕРЖНЕВЫЕ СИСТЕМЫ И БАЛКИ

При расчете некоторых стержневых систем и балок для определения усилий в них недостаточно использовать одни лишь уравнения равновесия статики, а необходимо составлять дополнительные уравнения – уравнения деформаций (перемещений). Такие системы называются *статически неопределимыми*.

## 17.1. Основные понятия

*Стержневой системой* называется сооружение, состоящее из стержней (или брусьев). Стержень является частным случаем стержневой системы.

Стержневые системы по способу их образования разделяются:

– на *геометрически неизменяемую* – систему соединенных между собой тел, не допускающую относительного перемещения ее частей без их деформации (рис. 17.1, а);

– *геометрически изменяемую* – систему соединенных между собой тел, допускающую относительное перемещение ее частей без их деформации (рис. 17.1, б);

– *мгновенно изменяемую* – систему соединенных между собой тел, допускающую лишь бесконечно малое относительное перемещение ее частей без их деформации (рис. 17.1, в).

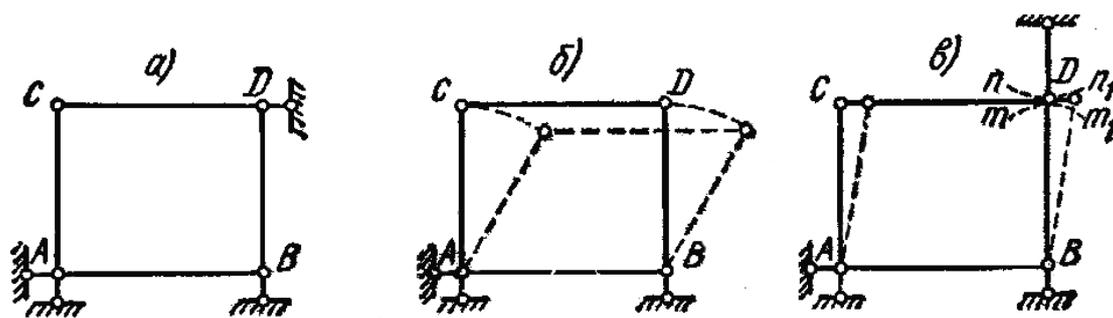


Рис. 17.1. Классификация стержневых систем по способу их образования:

а – геометрически неизменяемая; б – геометрически изменяемая;

в – мгновенно изменяемая

В несущих конструкциях применяются только геометрически неизменяемые системы.

Наиболее распространенными основными типами стержневых конструкций являются *рамы* и *фермы*.

*Рамой* называется стержневая система с жестко связанными между собой во всех или некоторых узлах стержнями, которая теряет геометрическую неизменяемость, если все узлы заменены шарнирными. У рамы стержни, ее составляющие, в основном работают на изгиб.

*Фермой* называется стержневая система, остающаяся геометрически неизменяемой, если в ней все жесткие узлы заменены шарнирными.

Стержневая геометрически неизменяемая система, у которой все узлы шарнирные, называется *шарнирной фермой*. У фермы стержни, ее составляющие, в основном работают на растяжение или сжатие.

## 17.2. Необходимые и лишние связи

*Статически неопределимой стержневой системой* называется такая геометрически неизменяемая система, у которой опорные реакции или все внутренние суммарные силовые факторы, возникающие в сечениях ее элементов при действии произвольной нагрузки, не могут быть определены из уравнений равновесия статики.

Статически неопределимые системы имеют так называемые избыточные или лишние связи. *Избыточными* или *лишними* связями называются связи, которые имеются в системе сверх необходимых и могут быть удалены из системы без нарушения ее геометрической неизменяемости и неподвижности.

Усилия, возникающие в лишних связях, называются *лишними неизвестными*. За лишние связи не могут быть приняты *абсолютно необходимые связи*, то есть такие связи, удаление которых из статически неопределимой конструкции превращает ее в геометрически изменяемую.

Число лишних неизвестных или полную степень статической неопределимости плоской системы можно определить по формуле

$$L = (C_{on} - 3) + 3K - Ш, \quad (17.1)$$

где  $L$  – число лишних неизвестных (*степень статической неопределимости*);  $C_{on}$  – число опорных стержней;  $K$  – число замкнутых контуров в предположении полного отсутствия шарниров;  $Ш$  – число одиночных (простых) шарниров.

Количество лишних неизвестных (связей) шарнирно-стержневой фермы определяется по формуле

$$L = C + C_{on} - 2U, \quad (17.2)$$

где  $C$  – число стержней фермы;  $C_{on}$  – число опорных стержней;  $U$  – количество узлов, связывающих стержни фермы друг с другом.

Для рамы, рис. 17.2,  $C_{on} = 5$  (защемление эквивалентно трем опорным стержням),  $K = 2$ ,  $Ш = 2$  и степень ее статической неопределимости равна

$$L = 5 - 3 + 3 \cdot 2 - 2 = 6.$$

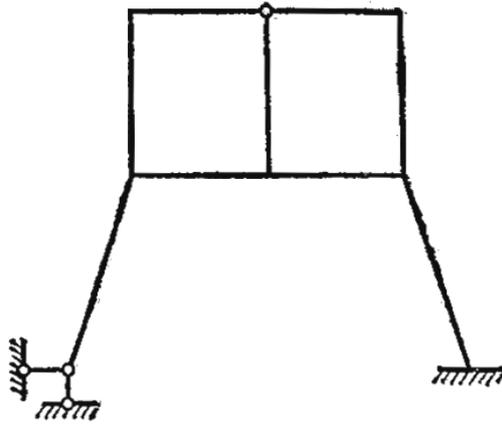


Рис. 17.2. К определению степени статической неопределимости рамы

Для балки, рис. 17.3,  $C_{on} = 6$ ,  $K = 0$ ,  $Ш = 1$  и степень ее статической неопределимости равна

$$Л = 6 - 3 - 1 = 2.$$

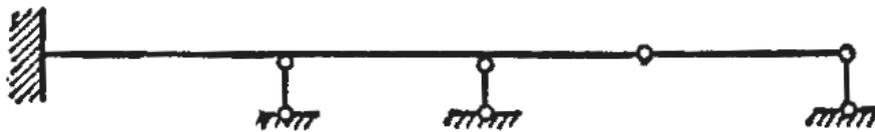


Рис. 17.3. К определению степени статической неопределимости балки

### 17.3. Основная и эквивалентная системы. Канонические уравнения метода сил

Для расчета статически неопределимых систем существует несколько методов. Основным является метод сил.

*Методом сил* называется метод определения усилий и перемещений в статически неопределимой системе, при котором в качестве *основных* неизвестных выбираются силы (усилия или реакции связей). Основными являются те неизвестные, которые должны быть найдены в первую очередь и при посредстве которых, после того как они найдены, легко определяются все остальные неизвестные.

*Основной* называется статически определимая, геометрически неизменяемая система, полученная из заданной статически неопределимой путем удаления действующей заданной нагрузки и лишних связей (внешних или внутренних). Так как за лишние связи могут быть приняты различные связи, то при выборе основной системы для заданной возможны различные варианты.

Взамен отброшенных связей вводятся неизвестные силовые факторы  $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ , представляющие собой реакции связей. Отброшенная связь, препятствующая линейному перемещению сечения, заменяется силой, а препятствующая угловому перемещению, – моментом.

Основная система, нагруженная заданной внешней нагрузкой и силами, заменяющими действие отброшенных связей, называется *эквивалентной* по отношению к заданной статически неопределимой системе.

В эквивалентной и заданной системах усилия, возникающие в соответствующих сечениях, и их перемещения тождественны.

Неизвестные силовые факторы определяются из условий перемещений. Перемещения (линейные и угловые) будем обозначать от заданной нагрузки через  $\Delta$ , а от нагрузки, равной единице (единичной нагрузки), через  $\delta$  с двумя индексами внизу. Первый индекс при  $\Delta$  и  $\delta$  указывает точку и направление перемещения, а второй – причину перемещения. Например,  $\Delta_{ik}$  – перемещение по направлению силы  $F_i$  под действием силы  $F_k$ , а  $\delta_{ik}$  – перемещение по направлению силы  $F_i$  под действием силы  $F_k = 1$ . Учитывая линейную зависимость между силами и соответствующими перемещениями, можно представить перемещение  $\Delta_{ik}$  как произведение силы  $F_k$  на перемещение от единичной силы  $\delta_{ik}$ :

$$\Delta_{ik} = F_k \delta_{ik}.$$

Неизвестные силовые факторы ( $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ ) определяются из уравнений перемещений для эквивалентной системы исходя из условий, которые накладываются связями заданной статически неопределимой системы на перемещения эквивалентной системы, а именно: абсолютные перемещения по направлению лишних неизвестных, вызываемые абсолютно жесткими внешними связями, и взаимные перемещения по направлению лишних неизвестных, вызванные внутренними связями, равны нулю.

Отсутствие перемещения в эквивалентной системе по направлению любой неизвестной  $X_i$  под действием всех заданных и лишних неизвестных сил на основании принципа независимости действия сил может быть записано в следующем виде:

$$\begin{aligned} \Delta_i [X_1, X_2, \dots, X_i, \dots, X_n, F] &= \Delta_{iX_1} + \dots + \Delta_{iX_i} + \dots + \Delta_{iX_n} + \Delta_{iF} = \\ &= X_1 \delta_{i1} + X_2 \delta_{i2} + \dots + X_i \delta_{ii} + \dots + X_n \delta_{in} + \Delta_{iF} = 0. \end{aligned} \quad (17.3)$$



## Тема 18. СЛОЖНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ

### 18.1. Понятие о теориях прочности

Важнейшей задачей, решением которой занимается наука о сопротивлении материалов, является оценка прочности конструкции по известному напряженному состоянию. Эта задача решается с помощью теории прочности, которая устанавливает решающие факторы опасного для прочности состояния материала. Та или иная теория прочности на основе определенных предпосылок указывает, когда наступает опасное состояние материала, и дает общее теоретическое условие, связывающее предельное напряжение по прочности с наибольшим действующим в конструкции напряжением. За критерий прочности принимают напряжение, деформации, энергию деформации и т.д.

Существуют различные взгляды на причины, вызывающие опасное состояние материала. Одни считают, что опасное состояние наступает при достижении нормальными напряжениями предельного значения. Другие рекомендуют за критерий опасного состояния принимать наибольшую относительную деформацию, третьи – величины касательных напряжений. Предлагаемые критерии позволяют сравнивать разнотипные напряженные состояния с опасным состоянием материала при наиболее изученной деформации – простом растяжении. Напряженные состояния считают *равнопрочными*, если при пропорциональном увеличении действующих на конструкцию нагрузок в одно и то же число раз это приводит к опасному состоянию материала. Сравнение напряженных состояний материала проводят по величине эквивалентного напряжения при растяжении. Под *эквивалентным* понимают напряжение, которое следует создать в растянутом образце, чтобы его напряженное состояние было равнопрочным заданному напряженному состоянию.

Физические процессы, происходящие при переходе в опасные состояния, сильно различаются для пластичных и хрупких материалов, поэтому существенно могут различаться и условия перехода в эти состояния.

Рассмотрим несколько классических теорий прочности.

*Первая теория прочности (теория наибольших нормальных напряжений)*: опасное состояние материала наступает в тот момент, когда наибольшее по абсолютной величине нормальное напряжение достигнет опасного значения  $\sigma_0$ . Условие нарушения прочности имеет вид

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma] = \frac{\sigma_0}{k}, \quad (18.1)$$

где  $k$  – коэффициент запаса;  $\sigma_0$  – опасное значение напряжения, устанавливаемое при простом растяжении для данного материала.

Эта теория прочности приемлема лишь для весьма хрупких материалов (кирпич, керамика и др.) и является непригодной для большинства материалов.

*Вторая теория прочности (теория наибольших деформаций):* нарушение прочности наступает при достижении наибольшей линейной деформацией своего опасного значения  $\varepsilon_0$ , которое определяется при простом растяжении. Условие нарушения прочности имеет вид

$$\varepsilon_{\max} \leq [\varepsilon] = \frac{\varepsilon_0}{k}. \quad (18.2)$$

Эта теория прочности дает удовлетворительные результаты только для хрупкого состояния материала и для большинства пластичных материалов непригодна.

*Третья теория прочности (теория наибольших касательных напряжений):* нарушение прочности наступает тогда, когда наибольшее касательное напряжение  $\tau_{\max}$  достигает своего предельного значения  $\tau_0$ , которое определяется в момент появления больших пластических деформаций при простом растяжении. Условие нарушения прочности имеет вид

$$\tau_{\max} \leq [\tau] = \frac{\tau_0}{k}. \quad (18.3)$$

Условие прочности материала по этой теории, выраженное в эквивалентных напряжениях при растяжении, имеет вид

$$\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma], \quad (18.4)$$

где  $\sigma$  и  $\tau$  – соответственно нормальное и касательное действующие напряжения.

Эта теория хорошо подтверждается опытами для пластичных материалов, одинаково работающих на растяжение и сжатие, и является непригодной для хрупких материалов.

*Четвертая теория прочности (энергетическая теория формоизменения):* опасное состояние наступает тогда, когда удельная потенциальная энергия формоизменения достигает своего предельного значения  $U_{\phi_0}$ . Условие нарушения прочности имеет вид

$$U_{\phi_0} \leq [U_{\phi}]. \quad (18.5)$$

При простом растяжении в момент наступления текучести материала

$$U_{\phi_0} = \frac{1+\mu}{3E} \sigma_T^2.$$

Условие прочности материала по этой теории, выраженное в эквивалентных напряжениях при растяжении, имеет вид

$$\sigma_{экр} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma].$$

Энергетическая теория прочности хорошо согласуется с опытными данными для пластичных материалов.

*Пятая теория прочности (теория прочности предельных состояний Мора):* нарушение прочности происходит тогда, когда на некоторой площадке материала, испытывающего напряженное состояние, возникает неблагоприятная комбинация нормального и касательного напряжений. В теории прочности Мора в отличие от изложенных теорий не рассматриваются отдельные гипотезы, а на основе экспериментальных данных устанавливается определенная зависимость прочностных свойств материала от вида напряженного состояния. Для плоского напряженного состояния расчетная формула имеет вид:

$$\sigma_{расч} = \sigma_1 - K\sigma_3 \leq [\sigma], \quad (18.6)$$

где  $K$  – коэффициент, учитывающий различные сопротивления материала растяжению и сжатию.

Эта теория прочности пригодна как для хрупких, так и для пластичных материалов.

Для практических расчетов следует рекомендовать:

- *четвертую и третью* теории прочности – для материалов, одинаково работающих на растяжение и сжатие;
- *теорию прочности Мора* – для материалов, по-разному сопротивляющихся растяжению и сжатию.

При выборе той или иной теории прочности следует иметь в виду, что хрупкое или пластичное состояние материала определяется не только его характером, но и видом напряженного состояния, температурой, скоростью нагружения и т.д.

## 18.2. Косой изгиб

Изгиб называют *косым*, если плоскость действия изгибающего момента, возникающего в поперечном сечении бруса, не совпадает ни с одной из его главных плоскостей. Различают *плоский косой изгиб* (рис. 18.1, а) и *пространственный косой изгиб* (рис. 18.1, б).

При плоском косом изгибе углы, составляемые плоскостью изгибающего момента с главными центральными осями, во всех поперечных сечениях одинаковы. В этом случае все нагрузки расположены в одной плоскости. При плоском косом изгибе упругая линия бруса *плоская кривая*, не совпадающая с силовой плоскостью.

При пространственном косом изгибе действующие на брус нагрузки расположены в разных плоскостях, соответственно углы между главными центральными осями и силовыми линиями не постоянны по длине бруса. Упругая линия бруса – *пространственная кривая*.

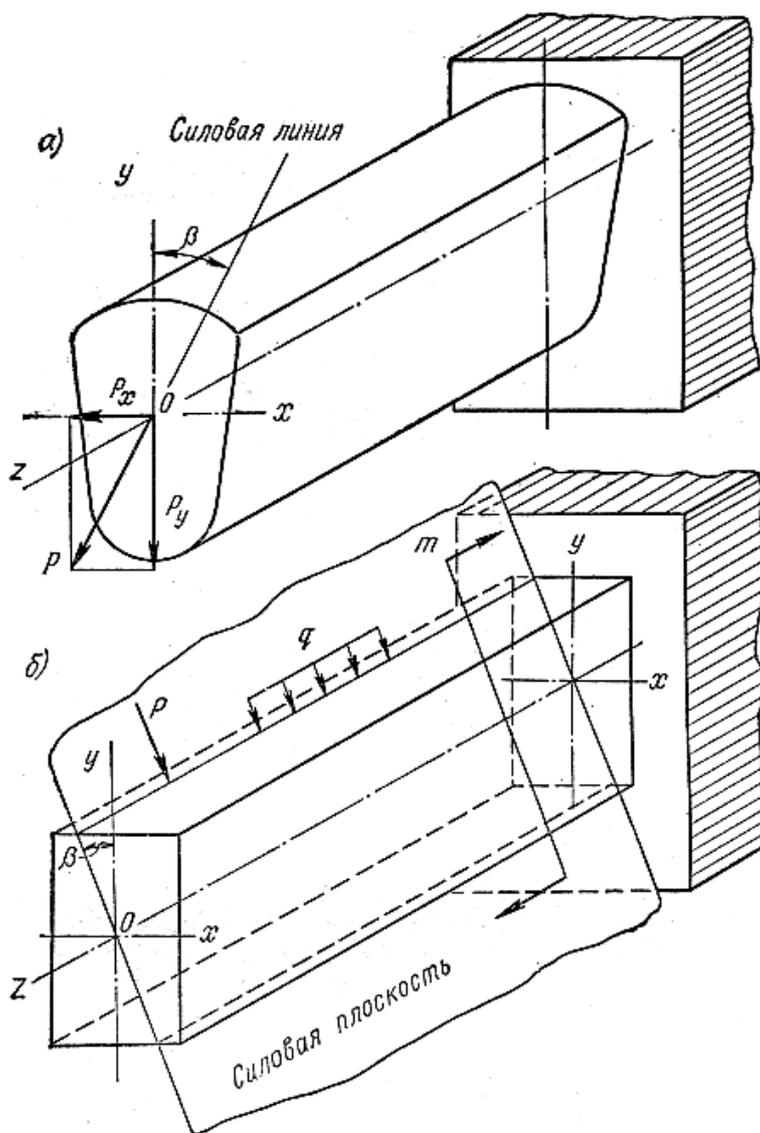


Рис. 18.1. Плоский косоизгиб

Определение напряжений и перемещений выполняют на основе замены косоизгиба сочетанием двух прямых изгибов. Каждую из приложенных к брусам нагрузок заменяют ее составляющими, действующими в

главных плоскостях (рис. 18.1, *a* и 18.2, *a*). При построении эпюр изгибающих моментов в каждой из главных плоскостей бруса (эпюры  $M_x$  и  $M_y$ ) удобно применять аксонометрическое изображение: эпюру  $M_x$  располагать в плоскости  $zOy$ , а эпюру  $M_y$  – в плоскости  $zOx$ .

При плоском косом изгибе моменты  $M_x$  и  $M_y$  достигают своих наибольших значений в одном и том же поперечном сечении, которое и является опасным.

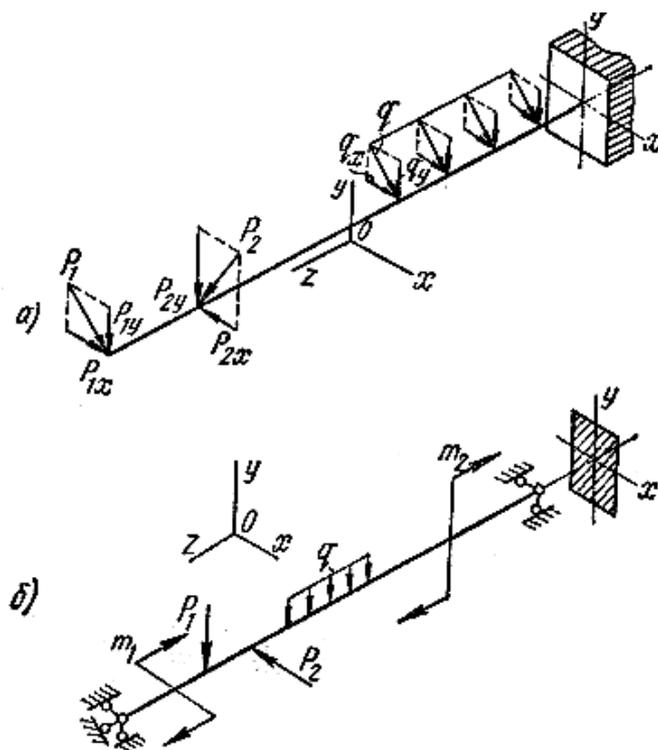


Рис. 18.2. Пространственный косой изгиб

При пространственном косом изгибе сечения, в которых  $M_x$  и  $M_y$  достигают своих наибольших значений, в общем случае не совпадают; расчет приходится выполнять для двух или более предположительно опасных сечений.

Нормальное напряжение в произвольной точке поперечного сечения, в котором возникают изгибающие моменты  $M_x$  и  $M_y$ , определяются по формуле

$$\sigma = \sigma_{M_x} + \sigma_{M_y} = \frac{M_x}{I_x} y + \frac{M_y}{I_y} x, \quad (18.7)$$

где  $I_x, I_y$  – главные центральные моменты инерции сечения;  $x, y$  – координаты точки в системе главных центральных осей.

Для расчета на прочность бруса с поперечным сечением произвольной формы следует определить положение *нулевой линии* в опасном сечении, приравняв нулю правую часть приведенного выше выражения. Нулевая линия – прямая, проходящая через центр тяжести сечения. В отличие от прямого изгиба нулевая линия не перпендикулярна силовой. Тангенс угла  $\varphi$ , составляемого нулевой линией с осью  $Ox$ , определяется из выражения

$$|\operatorname{tg} \varphi| = \left| \frac{M_y I_x}{M_x I_y} \right|. \quad (18.8)$$

Угол  $\varphi$  должен быть отложен от оси  $Ox$  в ту же сторону, что и угол  $\beta$  между силовой линией и осью  $Oy$  от этой оси (рис. 18.3).

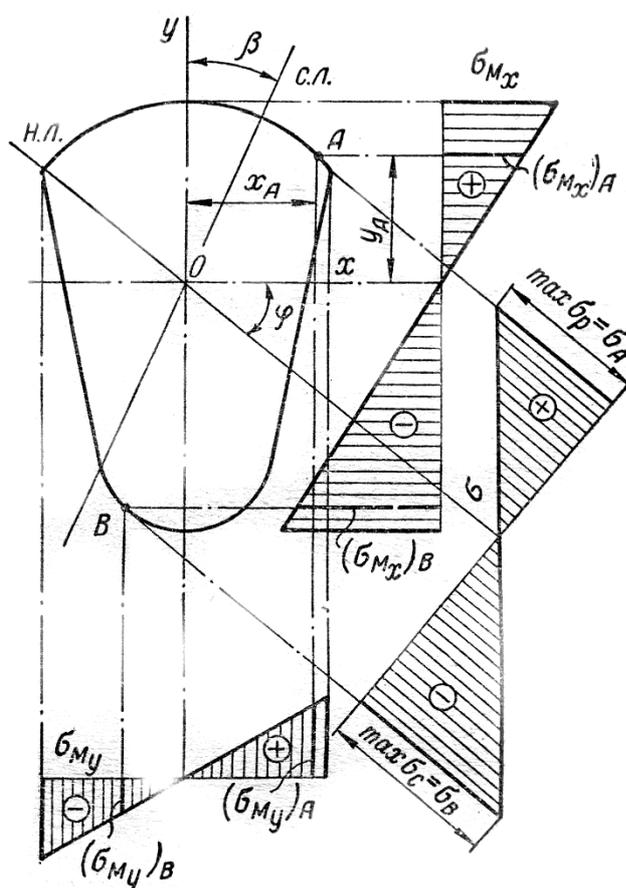


Рис. 18.3. Положение нулевой линии и эпюры напряжений в плоскости поперечного сечения произвольной формы

Максимальные растягивающее и сжимающее напряжения возникают в точках, наиболее удаленных от нулевой линии. В общем случае, должны быть составлены два условия прочности (рис. 18.3):

$$\sigma_{P_{\max}} = \frac{M_x}{I_x} y_A + \frac{M_y}{I_y} x_A \leq [\sigma_P];$$

$$|\sigma_{сж\max}| = \left| \frac{M_x}{I_x} y_B + \frac{M_y}{I_y} x_B \right| \leq [\sigma_{сж}].$$
(18.9)

### 18.3. Одновременное действие изгиба и продольной силы

Очень многие конструкции работают одновременно как на изгиб, так и на сжатие или растяжение. Простейший случай приведен на рис. 18.4, когда на колонну действует нагрузка, вызывающая в любом сечении изгибающий момент, продольную и поперечную силы. Предполагая, что колонна обладает большой жесткостью, можно пренебречь ее деформациями и не учитывать изгибающие моменты от силы  $P$ , считая, что сечения колонны не перемещаются по горизонтали.

В этом случае можно применить принцип независимости действия сил и определить напряжение в точке  $c$  как сумму напряжений от сжатия и изгиба:

$$\sigma = -\frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x} y.$$
(18.10)

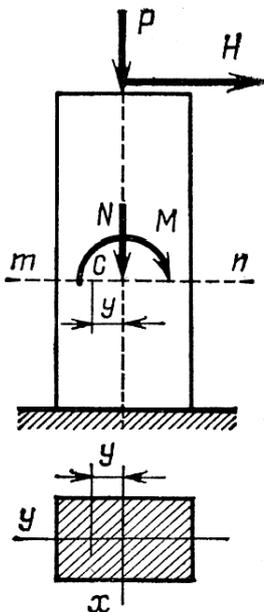


Рис. 18.4. Совместное действие изгиба и продольной силы

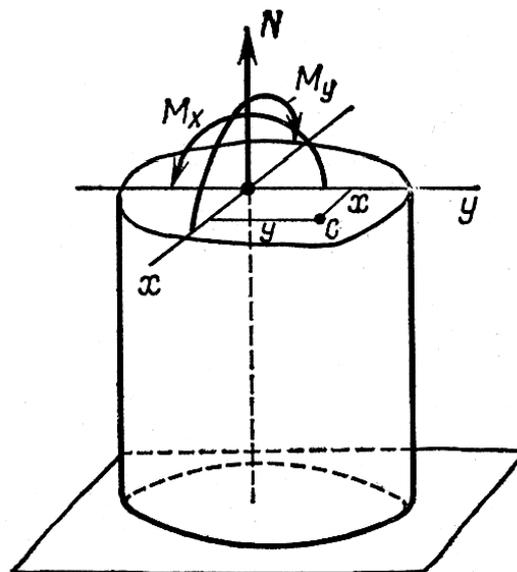


Рис. 18.5. Сложное нагружение колонны продольной силой и двумя изгибающими моментами

Если нагрузка вызывает моменты относительно двух главных осей инерции сечения, рис. 18.5, то нормальное напряжение определяется как сумма трех напряжений:

$$\sigma = +\frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x} y + \frac{M_y}{I_y} x. \quad (18.11)$$

Если поперечное сечение имеет простую форму, то для определения наибольшего напряжения следует вычислить значения напряжений для ряда характерных точек. Если же сечение имеет сложную форму, то предварительно нужно найти положение нулевой линии и отыскать наиболее удаленную точку сечения от этой линии, в ней и будет наибольшее напряжение. Для того чтобы найти положение нулевой линии, необходимо в приведенные формулы положить  $\sigma = 0$ .

### 18.3.1. Внецентренное сжатие (растяжение)

Рассмотрим случай внецентренного сжатия массивных колон, рис. 18.6. Такая схема очень часто встречается в мостостроении при расчете опор и в гражданском строительстве при расчете колонн зданий.

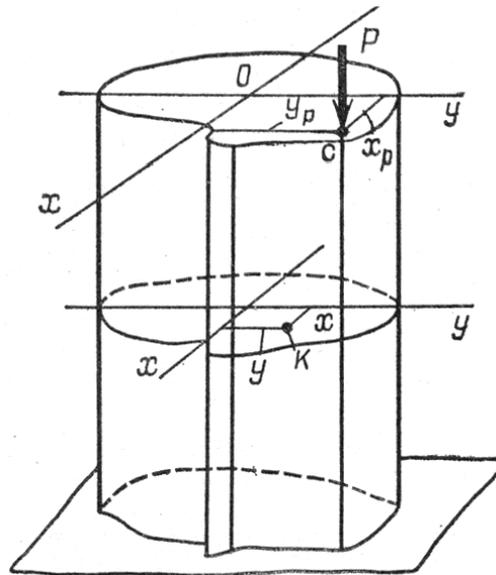


Рис. 18.6. Внецентренное действие продольной силы

Предположим, что сжимающая сила  $P$  приложена в точке  $c$ , которая имеет координаты  $x_p$  и  $y_p$ , отсчитанные относительно главных центральных осей инерции.

От этой силы, в общем случае, в произвольном сечении стержня возникают продольная сжимающая сила  $N = -P$  и два изгибающих момента  $M_x = \pm P \cdot y_p$  и  $M_y = \pm P \cdot x_p$ .

Напряжения в произвольной точке  $K$ , в общем случае, будет равно

$$\sigma = \frac{N}{A} \pm \frac{M_x}{I_x} y \pm \frac{M_y}{I_y} x. \quad (18.12)$$

Нулевая линия делит поперечное сечение на две части: в одной из них напряжения сжимающие, а в другой – растягивающие. Для того чтобы определить положение нулевой линии, преобразуем формулу для определения напряжений. Подставляя в эту формулу значения силы и моментов, в общем случае, получаем

$$\sigma = -\frac{P}{A} \pm \frac{P \cdot y_P}{I_x} y \pm \frac{P \cdot x_P}{I_y} x = -\frac{P}{A} \left[ 1 \pm \frac{y_P}{\left(\frac{I_x}{A}\right)} y \pm \frac{x_P}{\left(\frac{I_y}{A}\right)} x \right].$$

Величины, стоящие в знаменателе второго и третьего слагаемых, представляют собой квадраты радиусов инерции сечения, т.е.

$$\frac{I_x}{A} = i_x^2; \quad \frac{I_y}{A} = i_y^2.$$

Следовательно,

$$\sigma = -\frac{P}{A} \left( 1 \pm \frac{y_P}{i_x^2} y \pm \frac{x_P}{i_y^2} x \right). \quad (18.13)$$

Отрезки, отсекаемые нейтральной линией на осях координат (рис. 18,7), будут равны:

$$a_x = -\frac{i_y^2}{x_P}; \quad a_y = -\frac{i_x^2}{y_P}. \quad (18.14)$$

Положение нулевой линии не зависит от величины приложенной силы, а зависит от размеров и формы сечения, а также от координат точки приложения силы.

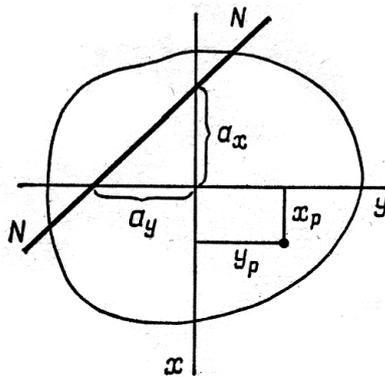


Рис. 18.7. Положение нулевой линии

*Ядром сечения* называется область, очерченная вокруг центра тяжести и характерная тем, что всякая продольная сила, приложенная внутри этой области, вызывает во всех точках поперечного сечения напряжения одного знака. Для того чтобы построить ядро сечения, необходимо рассмотреть всевозможные положения касательных к контуру сечения и, предполагая, что эти касательные представляют собой нулевые линии, найти по отношению к главным осям сечения соответствующие координаты граничных точек ядра сечения, а затем по этим точкам очертить само ядро (рис. 18.8).

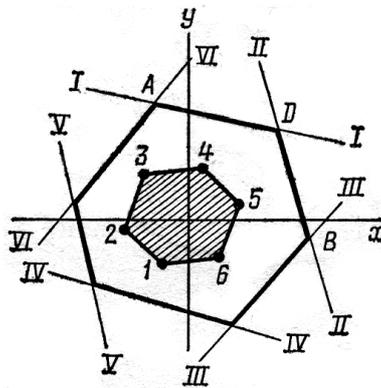


Рис. 18.8. Положение ядра сечения многоугольной колонны

#### 18.4. Одновременное действие кручения с изгибом

Совместной деформации кручения и изгиба подвергаются все валы, встречающиеся в машинах. Применяв метод сечений, найдем, что в поперечных сечениях вала одновременно возникают крутящий момент  $M_z$  и изгибающий момент  $M_x$ .

Нормальные напряжения от изгиба достигают наибольшего значения в точках сечения, наиболее удаленных от нейтральной линии, и равны:

$$\sigma = \frac{M_x}{W_x}.$$

Касательные напряжения от кручения достигают наибольшего значения во всех точках контура круглого сечения:

$$\tau = \frac{M_z}{W_p} = \frac{M_z}{2W_x}.$$

Любое из полученных напряжений, взятое в отдельности, может оказаться меньшим соответствующему ему допускаемому напряжению, но их одновременное действие может быть критическим для вала. Поэтому расчет ведут по эквивалентным напряжениям, которые по третьей теории прочности будут равны

$$\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}.$$

Тогда условие прочности принимает вид

$$\sigma_{\text{экв}} = \frac{M_{\text{экв}}}{W_x} \leq [\sigma], \quad (18.15)$$

где  $M_{\text{экв}}$  – эквивалентный момент, равный  $M_{\text{экв}} = \sqrt{M_x^2 + M_z^2}$ , определяемый из эпюр соответствующих моментов в опасном сечении вала.

### 18.5. Кручение с растяжением или сжатием

Сочетание деформаций кручения и растяжения испытывают крепежные детали (фундаментные болты, шпильки и др.), а сочетание кручения и сжатия – винты домкратов и др.

Нормальные напряжения определяются по известной формуле

$$\sigma = \frac{N}{A}.$$

Касательные напряжения равны

$$\tau = \frac{M_z}{W_p}.$$

Эквивалентное напряжение в этом случае равно

$$\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{\left(\frac{N}{A}\right)^2 + 4\left(\frac{M_z}{W_p}\right)^2}.$$

Условие прочности принимает вид

$$\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{\left(\frac{N}{A}\right)^2 + 4\left(\frac{M_z}{W_p}\right)^2} \leq [\sigma]. \quad (18.16)$$

## Тема 19. УСТОЙЧИВОСТЬ ЦЕНТРАЛЬНО-СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ

### 19.1. Понятие об устойчивости

Наряду с проблемой прочности и жесткости при определении требуемых размеров поперечного сечения стержней существует и проблема устойчивости конструкции или ее элементов, так как разрушение может произойти не только из-за нарушения прочности или жесткости, но и потому, что стержень не сохранит своего первоначального равновесного состояния. Например, если стержень, вплоть до разрушения, работает на основе сжатия, то условие проверки прочности будет следующее

$$\frac{N}{A} \leq [\sigma].$$

При увеличении длины или действующей сжимающей нагрузки стержень перейдет в новое состояние, изогнется и, в конце концов, сломается. Разрушение произойдет оттого, что стержень не сможет сохранить прямолинейную форму равновесия.

Если малые возмущения вызывают в конструкции малые отклонения от расчетного состояния, то такое состояние системы является устойчивым. Примером *устойчивого* или *неустойчивого* равновесия является равновесие тяжелого шарика, лежащего на сферической поверхности, рис. 19.1, *а* и *б*.

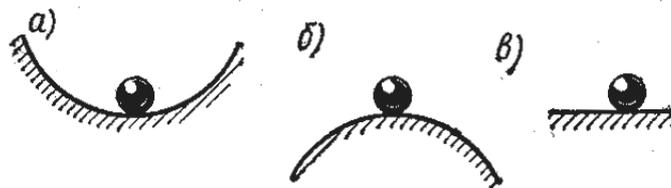


Рис. 19.1. К понятию устойчивости: *а* – устойчивое равновесие; *б* – неустойчивое равновесие; *в* – безразличное равновесие

При *безразличном* равновесии тело, будучи отклонено, остается в равновесии и в новом положении, рис. 19.1, *в*.

Под *устойчивостью* понимают свойство конструкции сохранять свое первоначальное состояние при внешних воздействиях.

Наиболее простым случаем потери устойчивости является деформирование центрально-сжатого стержня, рис. 19.2, *а*. Если приложить к стержню поперечную нагрузку, т.е. слегка изогнуть его, то при малых значениях сжимающей силы после снятия поперечной нагрузки стержень

вернется в прямолинейное состояние. Это значит, что прямолинейная форма равновесия оси стержня устойчива. При большем значении сжимающей силы слегка изогнутый поперечной нагрузкой стержень после ее устранения медленнее возвращается в прямолинейное состояние. Но все же прямолинейная форма равновесия еще устойчива. Наконец, при некотором значении сжимающей силы прямолинейная форма равновесия оси стержня становится неустойчивой и возникает новая устойчивая форма равновесия – криволинейная. Происходит выпучивание стержня, рис. 19.2, б. Деформация стержня, выражающаяся в искривлении его под действием сжимающих сил, направленных вдоль его оси, называется *продольным изгибом*.

Наибольшее значение центрально-приложенной сжимающей силы, при которой прямолинейная форма равновесия стержня устойчива, называется *критическим*.

При сжатии кольца или тонкой оболочки радиально направленными силами, рис. 19.3, а, при некотором их значении круговая форма оси кольца становится неустойчивой, и оно приобретает форму, показанную на рис. 19.3, б. Характер деформации кольца существенно изменяется: при нагрузке, меньше критической, кольцо работало на сжатие, а после потери устойчивости – на сжатие и изгиб.

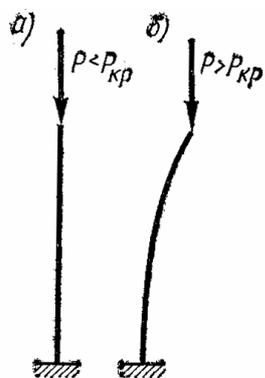


Рис. 19.2. К понятию устойчивости сжатого стержня: а – прямолинейная форма равновесия; б – криволинейная форма равновесия

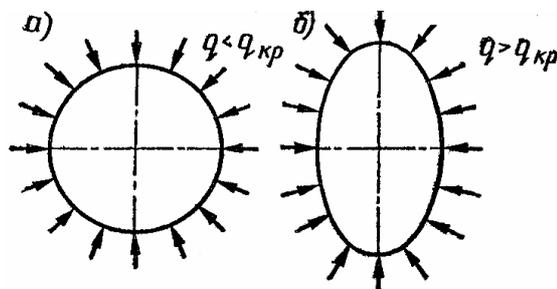


Рис. 19.3. Потеря устойчивости сжатого кольца: а – устойчивая форма равновесия; б – неустойчивая форма равновесия

Консоль вытянутого прямоугольного сечения, работающая на прямой изгиб в плоскости наибольшей жесткости, рис. 19.4, а, при критическом значении изгибающей силы закручивается, рис. 19.4, б, и вместо изгиба испытывает совместный изгиб и кручение. Этот случай называют *потерей устойчивости плоской формы изгиба*.

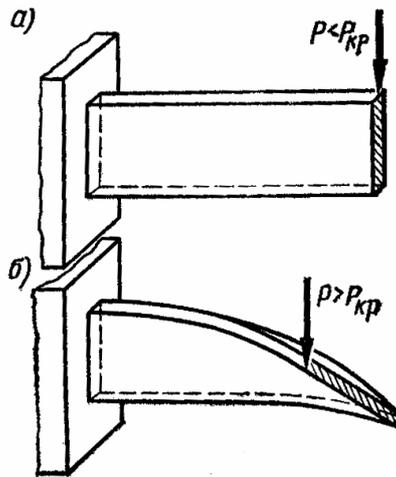


Рис. 19.4. К понятию потери устойчивости плоской формы изгиба:  
 а – устойчивая форма равновесия; б – неустойчивая форма равновесия

*Расчет на устойчивость должен обеспечить работу элемента конструкции при первоначальной форме его упругого равновесия, то есть при нагрузках меньше критических.*

Критическая сила считается разрушающей, так как малейшее ее превышение ведет к резкому отклонению элемента конструкции от первоначального положения и, следовательно, к разрушению, если элемент изготовлен из хрупкого материала или к потере устойчивости, если материал пластичен. Поэтому при расчете элементов конструкций на продольный изгиб вводится понятие *допустимой* силы, которая назначается из следующего соотношения

$$[P] = \frac{P_{кр}}{K_y}, \quad (19.1)$$

где  $P_{кр}$  – критическое значение сжимающей силы для рассчитываемого элемента конструкции;  $K_y$  – коэффициент запаса устойчивости, зависящий от материала (для стальных элементов  $K_y = 1,8 - 3,0$ ; для чугунных –  $K_y = 5,0 - 6,0$ ; для деревянных –  $K_y \geq 2,5$ ).

## 19.2. Формула Эйлера

Для расчетов сжатых стержней на устойчивость необходимо знать величину критической силы  $P_{кр}$  как наименьшую сжимающую силу, при

которой можно сохранять равновесие слегка искривленного сжатого стержня. В 1744 году Л. Эйлер, исследовав упругий стержень, шарнирно закрепленный по концам и нагруженный силой  $P$ , на основании дифференциального уравнения изогнутой оси получил выражение критической силы  $P_{кр}$ , равное

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{l_n^2}, \quad (19.2)$$

где  $E$  – модуль упругости материала стержня;  $I_{\min}$  – момент инерции поперечного сечения в плоскости минимальной жесткости;  $l_n$  – приведенная длина стержня, равная  $l_n = \mu l$ ;  $\mu$  – коэффициент приведения длины стержня  $l$ , зависящий от способа закрепления концов стержня.

Очевидно, что при различных закреплениях концов стержня, его изогнутая ось будет принимать различные очертания. На рис. 19.5 показаны наиболее часто встречающиеся способы закрепления концов стержня и соответствующие значения коэффициента приведения длины  $\mu$ .

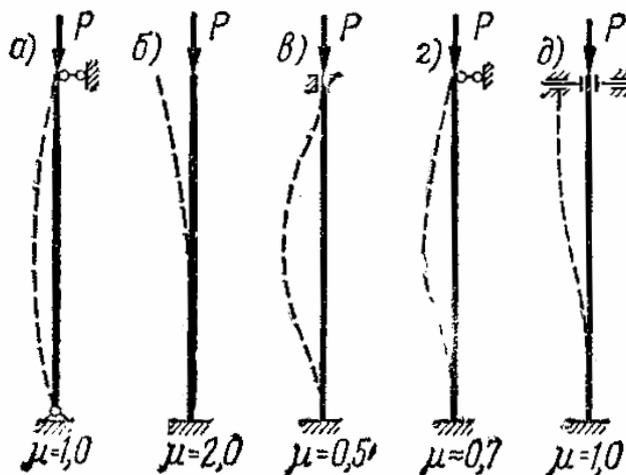


Рис. 19.5. Способы закрепления концов стержня и соответствующее значение коэффициента приведения длины  $\mu$ :  $a$  – оба конца стержня закреплены шарнирно;  $b$  – нижний конец жестко зашпелен, верхний свободен;  $v$  – оба конца жестко зашпелены;  $z$  – нижний конец закреплен жестко, верхний – шарнирно;  $d$  – нижний конец закреплен жестко, верхний имеет «плавающую» заделку

При выводе формулы для определения критической силы Л. Эйлер предполагал, что материал сжимаемого стержня подчиняется закону Гука, поэтому формулой Эйлера можно пользоваться не всегда.

### 19.3. Критические напряжения. Пределы применимости формулы Эйлера

Нормальное напряжение в поперечном сечении сжатого стержня, соответствующее критическому значению сжимающей силы, также называют критическим.

Для определения пределов применимости формулы Эйлера определим критическое напряжение

$$\sigma_{кр} = \frac{P_{кр}}{A} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{l_n^2 A} = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{l_n}{i_{\min}}\right)^2} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}, \quad (19.3)$$

где  $\lambda = \frac{l_n}{i_{\min}}$  – гибкость стержня;  $i_{\min}$  – минимальный радиус инерции сечения, равный  $i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}}$ .

Гибкость  $\lambda$  – безразмерная геометрическая характеристика сжатого стержня, показывающая его сопротивляемость потере устойчивости; она одновременно отражает и длину стержня, и жесткость его поперечного сечения.

Таким образом, формулой Эйлера можно пользоваться при выполнении условия

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \leq \sigma_{тц}. \quad (19.4)$$

Выразим величину предельной гибкости  $\lambda_{пред}$ :

$$\lambda_{пред} = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{тц}}}. \quad (19.5)$$

В отличие от гибкости стержня, *предельная гибкость зависит только от физико-механических свойств материала стержня и не зависит от его размеров*. Предельная гибкость – величина постоянная для данного материала. Формула Эйлера применима лишь в тех случаях, когда гибкость рассчитываемого стержня больше или равна предельной гибкости для материала, из которого он изготовлен.

Предельная гибкость для углеродистой стали Ст 3  $\lambda_{пред} \approx 100$ ; для чугуна –  $\lambda_{пред} \approx 80$ ; для сосны –  $\lambda_{пред} \approx 110$ .

В случае неприменимости формулы Эйлера величина критического напряжения определяется по эмпирическим формулам Ф.С. Ясинского. Для некоторых материалов формула Ф.С. Ясинского имеет вид

$$\sigma_{кр} = a - b\lambda, \quad (19.6)$$

где  $a$  и  $b$  – коэффициенты, постоянные для данного материала и имеющие размерность напряжения.

В зависимости от гибкости сжатые стержни условно делят на три категории:

1. Стержни большой гибкости, для которых расчет на устойчивость ведется по формуле Эйлера, и зависимость  $\sigma_{кр}$  от  $\lambda$  – гиперболическая:

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \text{ (гипербола Эйлера).}$$

2. Стержни средней гибкости, рассчитываемые на устойчивость по эмпирической формуле Ф.С. Ясинского. Для них зависимость  $\sigma_{кр}$  от гибкости линейна:  $\sigma_{кр} = a - b\lambda$ .

3. Стержни малой гибкости, рассчитываемые не на устойчивость, а на прочность. Для них критическое напряжение считается постоянным: для хрупких материалов  $\sigma_{кр} = \sigma_{\epsilon}$ ; для пластичных материалов  $\sigma_{кр} = \sigma_T$ .

Для низкоуглеродистых сталей характер зависимости критического напряжения от гибкости представлен на рис. 19.6. На этом графике штриховой линией показано продолжение гиперболы Эйлера в область ее неприменимости; она проходит выше линии критических напряжений, установленных опытным путем.

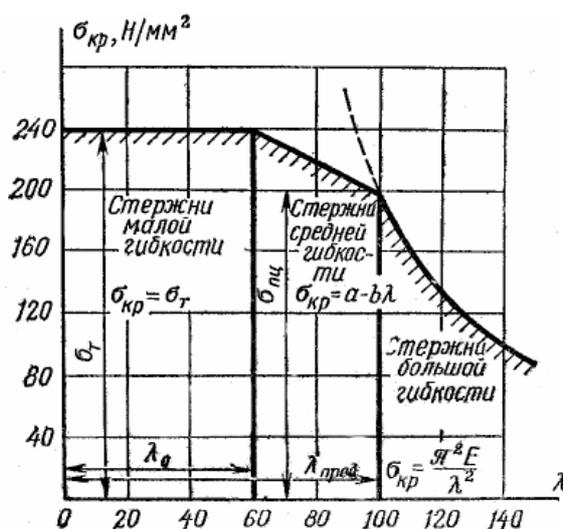


Рис. 19.6. Характер зависимости критического напряжения от гибкости для низкоуглеродистых сталей

Это значит, что при неправильном применении формула Эйлера дает преувеличенное значение критического напряжения, следовательно, и допускаемое значение сжимающей силы получается преувеличенным, что может повлечь за собой аварию конструкции.

Приведем для некоторых материалов значения коэффициентов  $a$  и  $b$ , а также значение  $\lambda_{пред}$ , при которых применима формула Ф.С. Ясинского.

Материал	$a, \frac{\text{Н}}{\text{мм}^2}$	$b, \frac{\text{Н}}{\text{мм}^2}$	$\lambda_{пред}$
Сталь Ст 2	264	0,70	105
Сталь Ст 3	310	1,14	100
Сталь 20, Ст 4	328	1,15	96
Сталь 45	449	1,67	85
Дуралюмин Д16Т	406	1,83	53
Сосна, ель	29,3	0,194	70

Для стержней из чугунного литья пользуются параболической зависимостью:

$$\sigma_{кр} = 776 - 12\lambda + 0,053\lambda^2 \left[ \frac{\text{Н}}{\text{мм}^2} \right].$$

#### 19.4. Расчет на устойчивость

Как отмечалось выше, сжатые стержни должны быть проверены по двум условиям:

– по условию прочности

$$\sigma = \frac{N}{A} \leq [\sigma] = \frac{\sigma_{он}}{K}; \quad (19.7)$$

– по условию устойчивости

$$\sigma = \frac{P}{A} \leq [\sigma_y] = \frac{\sigma_{кр}}{K_y}. \quad (19.8)$$

Допускаемое напряжение на устойчивость не является постоянным для одного и того же материала, а зависит от гибкости стержня  $\lambda$ . Чтобы выяснить, как связаны между собой допускаемые напряжения на устойчивость с допускаемыми напряжениями на прочность, составим их отношения:

$$\frac{[\sigma_y]}{[\sigma]} = \frac{\sigma_{кр} \cdot K}{K_y \cdot \sigma_{он}},$$

откуда

$$[\sigma_y] = \frac{\sigma_{кр} \cdot K}{K_y \cdot \sigma_{он}} [\sigma].$$

Обозначив  $\varphi = \frac{\sigma_{кр} \cdot K}{K_y \cdot \sigma_{он}}$ , окончательно получим:

$$[\sigma_y] = \varphi \cdot [\sigma]. \quad (19.9)$$

Коэффициент  $\varphi$  называется *коэффициентом уменьшения основного допускаемого напряжения*  $[\sigma]$  при продольном изгибе. Его величина всегда меньше единицы и зависит от гибкости стержня и его материала.

Тогда *расчетная формула на устойчивость* принимает вид

$$\sigma = \frac{P}{A} \leq \varphi [\sigma], \quad (19.10)$$

где  $[\sigma]$  – основное допускаемое напряжение при осевом сжатии.

В зависимости от поставленной задачи различают три вида расчетов на устойчивость:

1) *проверочный расчет*, при котором определяют коэффициент запаса устойчивости  $K_y$  и сравнивают полученное значение с допускаемой величиной  $[K_y]$ :

$$K_y = \frac{P_{кр}}{P} \geq [K_y], \quad (19.11)$$

где  $P$  – действующая на стержень нагрузка;

2) *проектный расчет*, при котором определяют требуемое значение минимального момента инерции поперечного сечения стержня  $I_{\min}$ :

$$I_{\min} \geq \frac{P \cdot [K_y] \cdot l_n^2}{\pi^2 E}. \quad (19.12)$$

Затем определяют гибкость стержня и сравнивают ее с предельной;

3) *Определение допускаемой нагрузки*, действующей на стержень  $[P]$ :

$$[P] = \frac{P_{кр}}{[K_y]}. \quad (19.13)$$

Форма поперечного сечения стержня имеет существенное значение. Она оказывается наиболее целесообразной и экономичной в том случае,

когда гибкость относительно обеих главных осей инерции сечения будет одинаковой. Расчеты показывают, что наиболее выгодными являются кольцевые и коробчатые тонкостенные сечения.

Значения коэффициента  $\phi$  при различной гибкости  $\lambda$  стержня для различных материалов приведены в табл. 19.1.

Таблица 19.1

**Значение коэффициента  $\phi$  в зависимости от гибкости  $\lambda$   
стержней из различных материалов**

Гибкость стержня $\lambda$	Сталь марок			Чугун: СЧ12 СЧ15 СЧ18 СЧ21	Дуралю- мин Д16Т	Дерево (незави- симо от породы)	Бетон	
	Ст0 Ст2 Ст3 Ст4	Ст5	14Г2 15ГС 10Г2С 15ХСНД				тяжелый	легкий
<b>0</b>	1,00	1,00	1,00	1,00	1,000	1,00	1,00	1,00
<b>10</b>	0,99	0,98	0,98	0,97	0,999	0,99	1,00	1,00
<b>20</b>	0,97	0,95	0,95	0,91	0,998	0,97	0,96	0,96
<b>30</b>	0,95	0,93	0,92	0,81	0,835	0,92	0,90	0,86
<b>40</b>	0,92	0,90	0,89	0,69	0,700	0,87	0,84	0,73
<b>50</b>	0,89	0,85	0,84	0,57	0,568	0,80	0,76	0,68
<b>60</b>	0,86	0,80	0,78	0,44	0,455	0,71	0,70	0,59
<b>70</b>	0,81	0,74	0,71	0,34	0,353	0,61	0,63	0,52
<b>80</b>	0,75	0,67	0,63	0,26	0,269	0,49	0,57	0,46
<b>90</b>	0,69	0,59	0,54	0,20	0,212	0,38	0,51	-
<b>100</b>	0,60	0,50	0,46	0,16	0,172	0,31	0,45	-
<b>110</b>	0,52	0,43	0,39	-	0,142	0,26	-	-
<b>120</b>	0,45	0,37	0,33	-	0,119	0,22	-	-
<b>130</b>	0,40	0,32	0,29	-	0,101	0,18	-	-
<b>140</b>	0,36	0,28	0,25	-	0,087	0,15	-	-
<b>150</b>	0,32	0,25	0,23	-	0,076	0,14	-	-
<b>160</b>	0,29	0,23	0,21	-	-	0,12	-	-
<b>170</b>	0,26	0,21	0,19	-	-	0,11	-	-
<b>180</b>	0,23	0,19	0,17	-	-	0,10	-	-
<b>190</b>	0,21	0,17	0,15	-	-	-	-	-
<b>200</b>	0,19	0,15	0,13	-	-	-	-	-
<b>210</b>	0,17	0,14	0,12	-	-	-	-	-
<b>220</b>	0,16	0,13	0,11	-	-	-	-	-

## Тема 20. ОСНОВЫ РАСЧЕТА НА ДЕЙСТВИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ НАГРУЗОК

До сих пор рассматривалось действие только статических нагрузок, величина и положение которых не изменялись во времени. Однако нередки случаи приложения нагрузки, которая зависит от времени и, быстро изменяясь, вызывает в элементах конструкций колебания, ускорения и силы инерции. Возникновение ускорения частиц рассматриваемого тела свидетельствует о воздействии динамической нагрузки. Динамическую нагрузку испытывают фундаменты машин, имеющих вращающиеся элементы, мосты и многие другие конструкции и сооружения.

К динамическим нагрузкам относятся и ударные приложения сил.

Инерционные нагрузки учитываются при подъеме груза в подъемных машинах, при проектировании сооружений. Ускорения и связанные с ними силы инерции возникают в элементах конструкций при неравномерном их движении или при равномерном, в случае, если траектории отдельных точек рассматриваемого элемента криволинейны. При больших ускорениях силы инерции могут достигать значительных величин, и их необходимо учитывать при расчетах на прочность и жесткость.

### 20.1. Расчет троса при подъеме груза

Определение напряжений и перемещений при заданных ускорениях основано на приведении задач динамики к задачам статики с помощью метода кинестатики (принципа Д'Аламбера). Напомним, что этот принцип состоит в следующем: если в любой момент времени к каждой материальной точке данной системы приложить силу инерции этой точки, то эти силы инерции будут уравниваться заданными силами, действующими на систему, и реакциями связей, т.е. система может рассматриваться как находящаяся в состоянии покоя (или равномерного прямолинейного движения).

*Сила инерции равна произведению массы материальной точки на ее ускорение и направлена в сторону, противоположную ускорению.*

Для определения напряжения, возникающего в поперечном сечении стального троса, объемный вес которого равен  $\gamma$ , при подъеме груза  $P$  с постоянным ускорением  $a$ , рис. 20.1,  $a$ , необходимо придерживаться следующей последовательности действий.

Разрезаем трос произвольным поперечным сечением и отбрасываем верхнюю часть, заменив ее действие на нижнюю продольной силой  $N$  (рис. 20.1, б).

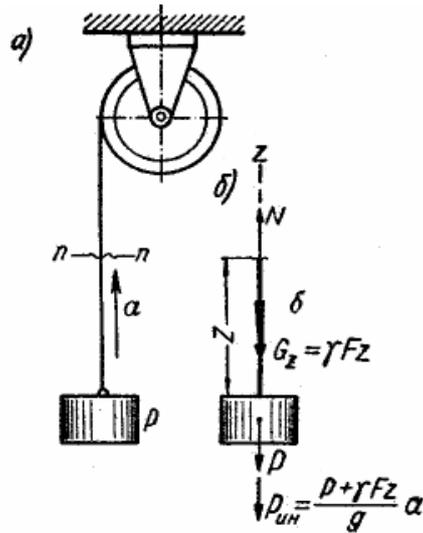


Рис. 20.1. К расчету напряжений в тросе при подъеме груза

Сила инерции  $P_{ин}$  рассматриваемой части направлена вниз (в сторону, противоположную ускорению), ее величина определяется из выражения

$$P_{ин} = m \cdot a = \frac{P + \gamma Az}{g} a, \quad (20.1)$$

где  $m$  – масса груза и части троса, расположенной ниже проведенного сечения;  $A$  – площадь поперечного сечения троса.

Составляем уравнение равновесия  $\sum Z = 0$  для оставленной части и определяем продольную силу в поперечном сечении троса:

$$N = (P + \gamma Az) \left(1 + \frac{a}{g}\right).$$

Напряжение в рассматриваемом сечении троса будут равно:

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{P + \gamma Az}{A} \left(1 + \frac{a}{g}\right). \quad (20.2)$$

При отсутствии ускорения ( $a = 0$ ) статическое напряжение в поперечном сечении троса  $\sigma_{ст} = \frac{P + \gamma Az}{A}$ , следовательно,

$$\sigma = \sigma_{ст} \left(1 + \frac{a}{g}\right) = \sigma_{ст} \cdot k_{\partial}, \quad (20.3)$$

где  $k_{\partial} = 1 + \frac{a}{g}$  – динамический коэффициент.

При равноускоренном движении  $\sigma > \sigma_{ст}$ , а при равнозамедленном движении  $\sigma < \sigma_{ст}$ .

При свободном падении груза  $a = -g$ , и напряжение в тросе равно нулю.

## 20.2. Приближенный способ расчета на удар

Явление удара наблюдается в том случае, когда скорость элемента конструкции изменяется в очень короткий промежуток времени.

Рассмотрим приближенный метод расчета на удар, базирующийся на следующих основных допущениях:

1. Материал рассчитываемого элемента конструкции при деформациях, вызванных ударной нагрузкой, следует закону Гука.

2. Работа силы тяжести ударяющего груза полностью переходит в потенциальную энергию деформации элемента конструкции, испытывающего действие удара.

3. Масса элемента конструкции, воспринимающей действие ударной нагрузки, мала по сравнению с массой ударяющего груза.

4. Удар считается неупругим, т.е. после соприкосновения ударяющего груза с упругой системой он не отскакивает и при ее деформации движется с ней совместно.

Рассмотрим удар груза весом  $Q$ , падающего с высоты  $h$  на некоторую упругую систему, например цилиндрическую винтовую пружину (рис. 20.2).

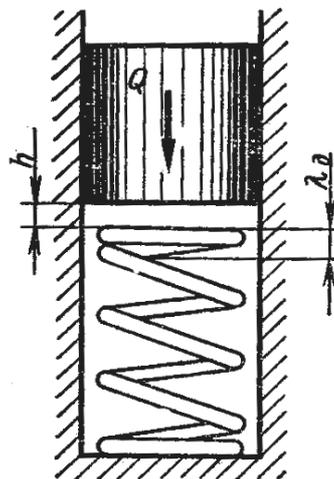


Рис. 20.2. К расчету на удар

Работа силы тяжести определяется из выражения

$$A = Q(h + \lambda_0), \quad (20.4)$$

где  $\lambda_0$  – перемещение той точки (сечения) упругой системы, по которой ударяет падающий груз.

Составим выражение для потенциальной энергии деформации упругой системы. Учитывая первое допущение, потенциальную энергию деформации можно определить как половину произведения некоторой динамически действующей силы  $P_\partial$  на соответствующее перемещение:

$$U_\partial = \frac{P_\partial \cdot \lambda_\partial}{2}.$$

Для линейно деформируемой системы  $\lambda_\partial = \frac{P_\partial}{C}$ , где  $C$  – коэффициент жесткости упругой системы.

Тогда  $P_\partial = C \cdot \lambda_\partial$ . Подставляя значение  $P_\partial$  в уравнение потенциальной энергии деформации, получаем  $U_\partial = \frac{C \cdot \lambda_\partial^2}{2}$ .

На основании второго из принятых допущений приравниваем величины работы силы тяжести падающего груза и потенциальной энергии деформации упругой системы, имеем

$$A = U_\partial.$$

Тогда

$$Q(h + \lambda_\partial) = \frac{C \cdot \lambda_\partial^2}{2},$$

откуда

$$\left(\frac{2Q}{C}\right)h + \left(\frac{2Q}{C}\right)\lambda_\partial = \lambda_\partial^2.$$

Но  $\frac{Q}{C} = \lambda_{cm}$ , где  $\lambda_{cm}$  – перемещение, вызванное силой, равной весу  $Q$  падающего груза, при ее статическом действии. Таким образом, имеем

$$2\lambda_{cm}h + 2\lambda_{cm}\lambda_\partial = \lambda_\partial^2 \text{ или } \lambda_\partial^2 - 2\lambda_{cm}\lambda_\partial - 2\lambda_{cm}h = 0.$$

Определим из этого квадратного уравнения значение  $\lambda_\partial$  :

$$\lambda_\partial = \lambda_{cm} + \sqrt{\lambda_{cm}^2 + 2\lambda_{cm}h}.$$

Второй корень квадратного уравнения, соответствующий знаку минус перед радикалом, дает отрицательное значение  $\lambda_\partial$  и поэтому не нужен.

Представим полученное выражение в виде

$$\lambda_\partial = \lambda_{cm} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\lambda_{cm}}}\right).$$

Величину, стоящую в скобках, обычно называют *динамическим коэффициентом*  $k_\partial$  или коэффициентом удара

$$k_\partial = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\lambda_{ст}}}. \quad (20.5)$$

Таким образом, *перемещение, вызванное действием ударной нагрузки, равно перемещению от статически приложенной силы, равной весу падающего груза, умноженному на динамический коэффициент*

$$\lambda_\partial = k_\partial \lambda_{ст}. \quad (20.6)$$

Линейная связь между силами и перемещениями позволяет сделать вывод, что напряжения в упругой системе от действия ударной нагрузки во столько же раз больше возникающих напряжений при статическом приложении такой же по величине нагрузки, во сколько раз динамические перемещения больше статических, т.е.

$$\sigma_\partial = k_\partial \cdot \sigma_{ст}. \quad (20.7)$$

Следовательно, определение перемещений и напряжений при ударе сводится к определению перемещений и напряжений, вызванных статически приложенной силой, равной весу падающего груза и вычислению динамического коэффициента.

Полученные формулы верны как в случае растягивающего или сжимающего, то есть продольного удара по стержню или пружине, так и в случае изгибающего – поперечного удара по балке.

В частном случае мгновенного безударного приложения нагрузки, которое может рассматриваться как действие груза, падающего с высоты  $h = 0$ , получим  $k_\partial = 2$ .

Следовательно, *перемещения и напряжения, вызванные действием мгновенно приложенной силы, вдвое больше, чем при статическом действии такой же по величине силы.*

В случае если высота падения груза велика по сравнению с величиной  $\lambda_{ст}$ , можно пользоваться упрощенной формулой для вычисления динамического коэффициента

$$k_\partial = \sqrt{\frac{2h}{\lambda_{ст}}}. \quad (20.8)$$

# ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ

## Практическое занятие 1 ПЛОСКАЯ СИСТЕМА СХОДЯЩИХСЯ СИЛ

**Цель:** Привить практические навыки в решении задач на сложение и разложение сил, теоретические основы которых изложены в теме 2 «Плоская система сходящихся сил».

*Проекцией силы на ось называется отрезок оси, заключенный между двумя перпендикулярами, опущенными на ось из начала и конца вектора силы. Соответственно, проекции силы  $\vec{F}$  на оси  $x$  и  $y$  будут равны:*

$$F_x = F \cos \alpha; \quad F_y = F \sin \alpha.$$

*Если направление проекции силы на ось совпадает с положительным направлением оси, то эта проекция положительна, и наоборот. За направление проекции примем направление от проекции начала к проекции конца вектора силы. Если вектор силы перпендикулярен оси, то его проекция на эту ось равна нулю. Если вектор силы параллелен оси, то он проецируется на эту ось в натуральную величину.*

*Проекция равнодействующей системы сходящихся сил на ось равна алгебраической сумме проекций, составляющих эту систему.*

**Задача 1.1.** Определить величину проекции силы  $\vec{F}$  на ось  $Ox$ , если  $F = 100$  Н (рис. П.1.1)

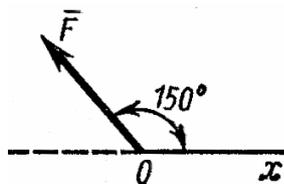


Рис. П.1.1. К задаче 1.1

**Задача 1.2.** Определить модуль равнодействующей двух сил  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$ , модули которых соответственно равны 6 и 10 Н (рис. П.1.2).

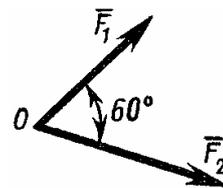


Рис. П.1.2. К задаче 1.2

**Задача 1.3.** Какой угол  $\varphi$  образуют друг с другом две приложенные в одной точке силы, модули которых равны 5 и 16 Н, если модуль их равнодействующей равен 19 Н?

**Задача 1.4.** Найти модуль равнодействующей  $R$  плоской системы сходящихся сил  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}_2$  и  $\vec{F}_3$ , если  $F_1 = F_3 = 2$  Н,  $F_2 = 2\sqrt{2}$  Н (рис. П.1.3).

**Задача 1.5.** Найти модуль равнодействующей системы четырех сходящихся сил, приложенных в точке  $O$  куба. Силы  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_4$  направлены вдоль ребер куба, силы  $\vec{F}_2$  и  $\vec{F}_3$  – вдоль диагоналей соответственно задней и нижней граней. Модули сил равны  $F_1 = F_4 = 2H$ ,  $F_2 = F_3 = 2\sqrt{2}H$  (рис. П.1.4).

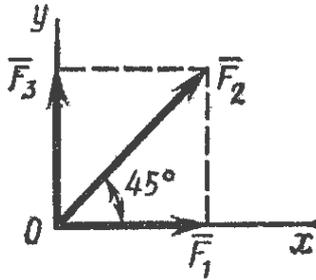


Рис. П.1.3. К задаче 1.4

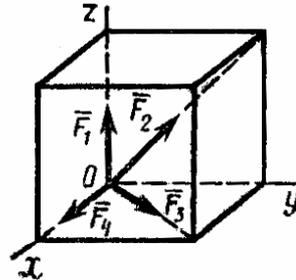


Рис. П.1.4. К задаче 1.5

**Задача 1.6.** По какому направлению должна действовать сила, уравновешивающая данную систему сходящихся сил  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}_2$  и  $\vec{F}_3$ , модули и направления которых определяются соответственно ребром  $OC$  и диагоналями  $OB$  и  $OD$  куба (рис. П.1.5)?

**Задача 1.7.** Определить проекцию силы  $\vec{F}$  на ось  $Ox$ , если  $F = 200$  Н, вектор  $\vec{F}$  наклонен к плоскости  $xOy$  под углом  $\alpha = 60^\circ$ , а его проекция  $\vec{F}_{xy}$  на эту плоскость составляет угол  $\beta = 60^\circ$  с осью  $Ox$  (рис. П.1.6).

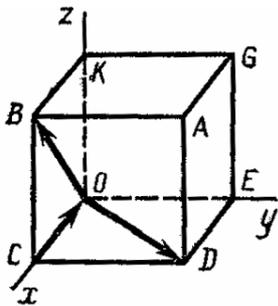


Рис. П.1.5. К задаче 1.6.

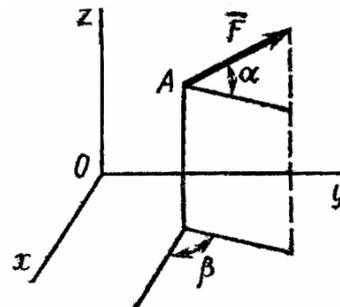


Рис. П.1.6. К задаче 1.7

**Задача 1.8.** Вдоль большой диагонали куба действует сила  $\vec{F}$ , модуль которой равен  $6H$ . Найти проекцию этой силы на ось  $Ox$  (рис. П.1.7).

**Задача 1.9.** Кронштейн, удерживающий груз веса  $P$  в вертикальной плоскости, составлен из невесомых стержней  $AB$  и  $BC$ . Определить усилие  $\vec{S}$  в стержне  $AB$  (рис. П.1.8).

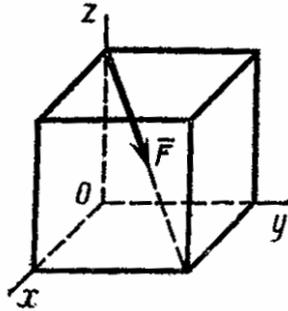


Рисунок П.1.7. К задаче 1.8.

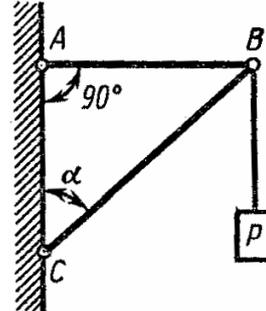


Рисунок П.1.8. К задаче 1.9.

**Задача 1.10.** Определить вес груза  $P$ , обеспечивающего равновесие диска весом  $G$  в заданном положении, если  $E$  – идеальный блок, а  $AB$  – невесомый стержень (рис. П.1.9).

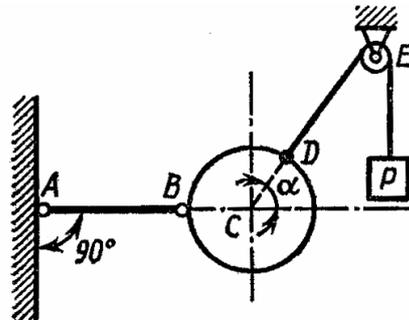


Рис. П.1.9. К задаче 1.10.

## Практическое занятие 2 ПЛОСКАЯ СИСТЕМА ПРОИЗВОЛЬНО РАСПОЛОЖЕННЫХ СИЛ

**Цель:** Привить практические навыки в решении задач на определение опорных реакций твердого тела, теоретические основы которых изложены в теме 4 «Плоская система произвольно расположенных сил».

*Для равновесия произвольной плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы сумма проекций всех сил системы на каждую координатную ось и сумма их моментов относительно любого центра, лежащего в плоскости действия сил, равнялись нулю.*

Для решения задач рекомендуется следующая последовательность действий:

- выделить тело или точку, равновесие которого следует рассмотреть;
- показать все заданные силы, действующие на тело или точку;

- освободить тело от наложенных на него связей, заменив их действие реакциями связей;
- выбрать систему координат;
- составить и решить уравнения равновесия.

**Задача 2.1.** На невесомую балку  $AB$  длины 1 м действуют две пары сил с моментами  $M_1 = 5 \text{ Н} \cdot \text{м}$ ,  $M_2 = 10 \text{ Н} \cdot \text{м}$ , рис. П.2.1. Определить проекцию  $R_{Ay}$  реакции в шарнире  $A$  при равновесии балки.

**Задача 2.2.** Балка  $ABC$  нагружена, как показано на рис. П.2.2. Пренебрегая весом балки и трением, определить реакцию шарнирно-подвижной опоры  $A$ .

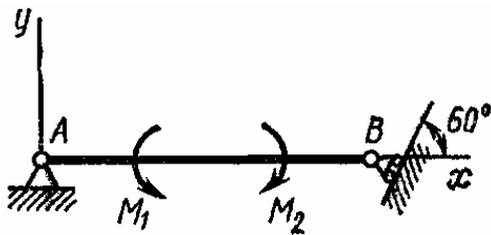


Рис. П.2.1. К задаче 2.1

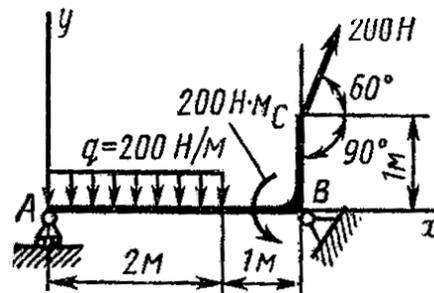


Рис. П.2.2. К задаче 2.2

**Задача 2.3.** Определить реакцию шарнирно-подвижной опоры  $A$ , если рама находится под действием распределенной нагрузки интенсивности  $q = 1 \text{ кН/м}$ , рис. П.2.3.

**Задача 2.4.** На невесомую балку  $AB$ , изогнутую по дуге окружности радиуса  $r = 2 \text{ м}$ , действует равномерно распределенная радиальная нагрузка, рис. П.2.4. Определить интенсивность этой нагрузки  $q$ , если опорная реакция  $R_A = 200 \text{ Н}$ .

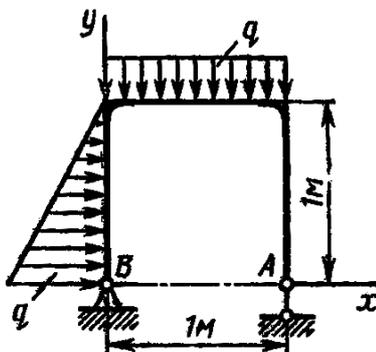


Рис. П.2.3. К задаче 2.3

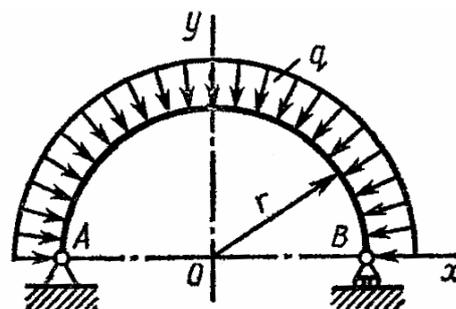


Рис. П.2.4. К задаче 2.4

**Задача 2.5.** Невесомая балка  $AB$  находится под действием радиальной равномерно распределенной нагрузки интенсивностью  $q = 2$  Н/м, рис. П.2.5. Определить реакцию опор  $A$  и  $B$  балки, если  $\alpha = 90^\circ$ .

**Задача 2.6.** На Г-образную раму  $ABC$ , конец  $A$  которой жестко заделан, действует в плоскости рамы сила  $\bar{F}$ , рис. П.2.6. Определить реакции заделки  $A$ .

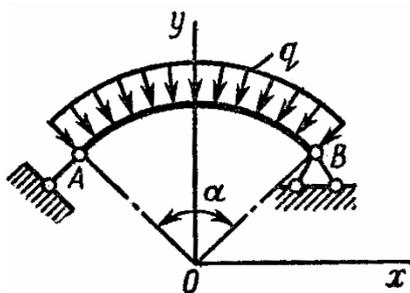


Рис. П.2.5. К задаче 2.5

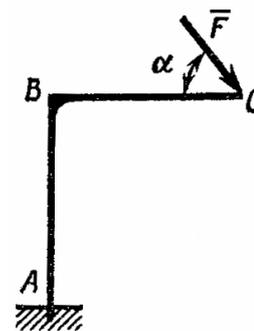


Рис. П.2.6. К задаче 2.6

**Задача 2.7.** На раму  $ABCD$  в точке  $D$  действует сила  $\bar{F}$ , лежащая в плоскости рамы, рис. П.2.7. Определить реакции заделки  $A$ .

**Задача 2.8.** Определить реакцию опоры  $D$  плоской невесомой конструкции, нагруженной парой сил с моментом  $M$ , если  $AC = CB = CD = a$ , рис. П.2.8.

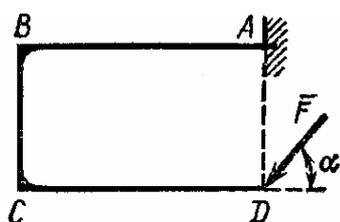


Рис. П.2.7. К задаче 2.7

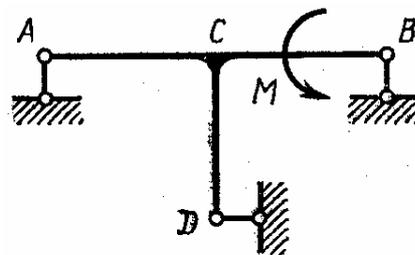


Рис. П.2.8. К задаче 2.8

**Задача 2.9.** Трехшарнирная арка находится под действием вертикальной равномерно распределенной нагрузки интенсивностью  $q = 1$  кН/м и горизонтальной силы  $F = 3$  кН, рис. П.2.9. Пренебрегая весом арки, определить реакцию  $R_A$ , если  $a = 2$  м.

**Задача 2.10.** На горизонтальную балку  $AB$  длины  $l$  действует распределенная вертикальная нагрузка, меняющаяся по закону треугольника с основанием  $q$ , и момент  $M = ql/6$ , рис. П.2.10. Определить реакции жесткой заделки  $A$ .

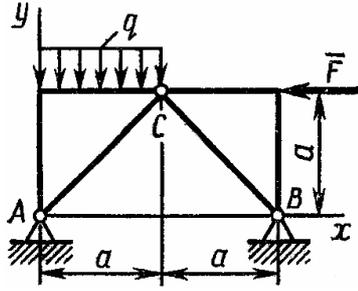


Рис. П.2.9. К задаче 2.9

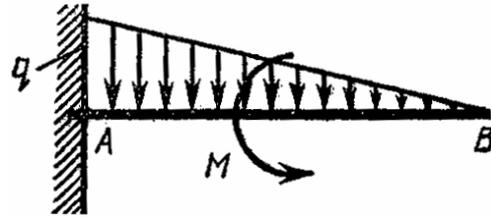


Рис. П.2.10. К задаче 2.10

### Практическое занятие 3 ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ

**Цель:** Привить практические навыки в решении задач на определение центра тяжести тела, теоретические основы которых изложены в теме 7 «Центр тяжести».

*Центр тяжести геометрической линии:*

$$x_c = \frac{\sum_{k=1}^n (L_k x_k)}{L}; y_c = \frac{\sum_{k=1}^n (L_k y_k)}{L}; z_c = \frac{\sum_{k=1}^n (L_k z_k)}{L},$$

где  $L_k$  – длина  $k$ -той части, на которые разбита вся линия  $L$ .

*Центр тяжести плоской фигуры:*

$$x_c = \frac{\sum_{k=1}^n (A_k x_k)}{A}; y_c = \frac{\sum_{k=1}^n (A_k y_k)}{A},$$

где  $A_k$  – площадь  $k$ -той части фигуры;  $x_k, y_k$  – координаты центров тяжести  $k$ -той части фигуры;  $A$  – площадь плоской фигуры.

*Центр тяжести объема:*

$$x_c = \frac{\sum_{k=1}^n (V_k x_k)}{V}; y_c = \frac{\sum_{k=1}^n (V_k y_k)}{V}; z_c = \frac{\sum_{k=1}^n (V_k z_k)}{V},$$

где  $V_k$  – объем  $k$ -той частицы;  $x_k, y_k, z_k$  – координаты центров тяжести  $k$ -той части объема.

**Статическим моментом площади** плоской фигуры относительно некоторой оси называется взятая по всей ее площади  $A$  сумма произведений элементарных площадок  $dA$  на их расстояния до этой оси.

При определении положения центра тяжести плоского сложного сечения рекомендуется придерживаться определенного порядка действия, а именно:

- выбрать координатные оси  $Ox$  и  $Oy$ , таким образом, чтобы все сечение находилось в первом квадранте;
- разбить сложное сечение на более простые составные части, площадь и координаты центра тяжести которых известны или их легко определить;
- обозначить на чертеже положение центров тяжести составных частей;
- определить расстояния от центров тяжести простых составных частей до координатных осей  $Ox$  и  $Oy$ ;
- составить выражения статических моментов площади сложного сечения относительно координатных осей  $Ox$  и  $Oy$ ;
- определить координаты центра тяжести сложной фигуры.

**Задача 3.1.** Определить координаты центра тяжести однородного линейного контура  $OABD$ , составленного из полуокружности  $OAB$  радиуса  $R$  и прямолинейного отрезка  $BD$  длины  $R$ , рис. П.3.1.

**Задача 3.2.** Определить абсциссу  $x_c$  центра тяжести полукруга, диаметр  $OA$  которого наклонен к оси  $Ox$  под углом  $45^\circ$ , а радиус  $R = 3$  см, рис. П.3.2.

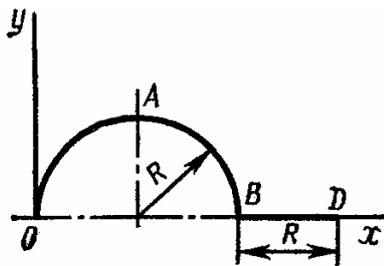


Рис. П.3.1. К задаче 3.1

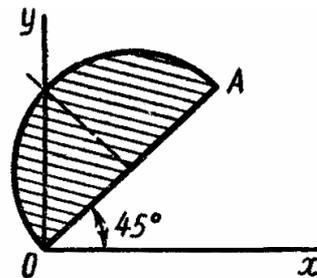


Рис. П.3.2. К задаче 3.2

**Задача 3.3.** Определить статический момент относительно оси  $Ox$  плоской фигуры, составленной из квадрата со стороной  $a$  и полукруга радиуса  $a/2$ , рис. П.3.3.

**Задача 3.4.** Определить координаты центра тяжести однородного линейного контура, составленного из полуокружности  $ODB$  радиуса  $R$ , полуокружности  $OKA$  радиуса  $r = R/2$  и прямолинейного отрезка  $AB$  длины  $r$ , рис. П.3.4.

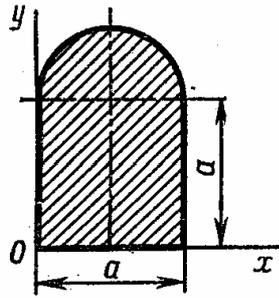


Рис. П.3.3. К задаче 3.3

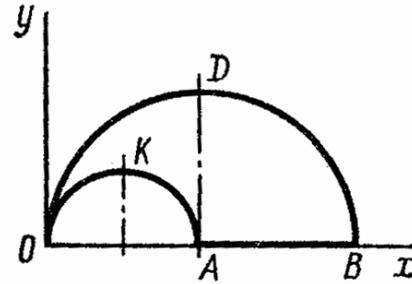


Рис. П.3.4. К задаче 3.4

**Задача 3.5.** Определить положение центра тяжести фермы, составленной из однородных стержней одинаковой плотности, рис. П.3.5.

**Задача 3.6.** Определить статический момент относительно оси  $Oy$  площади  $ABDE$ , оставшейся после удаления из равностороннего  $\triangle OAB$  со стороной  $a$  равностороннего  $\triangle OED$  со стороной  $a/2$ , рис. П.3.6.

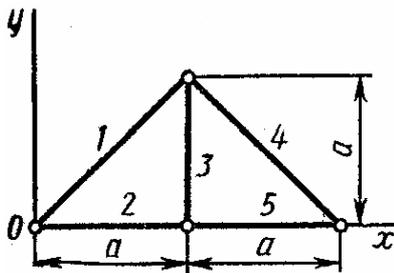


Рис. П.3.5. К задаче 3.5

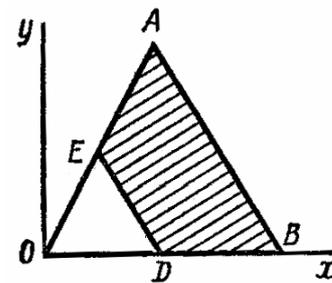


Рис. П.3.6. К задаче 3.6

**Задача 3.7.** Определить статический момент пластины, имеющей форму равностороннего треугольника со стороной  $l$ , относительно оси  $Ox$ , рис. П.3.7.

**Задача 3.8.** Определить положение центра тяжести сложного сечения, рис. П.3.8.

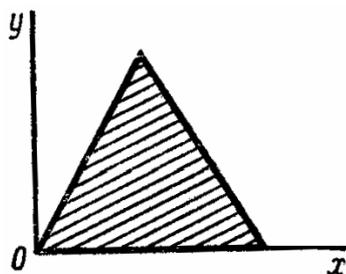


Рис. П.3.7. К задаче 3.7

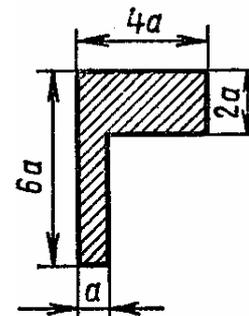


Рис. П.3.8. К задаче 3.8

**Задача 3.9.** Определить положение центра тяжести сложного сечения, рис. П.3.9.

**Задача 3.10.** Определить положение центра тяжести сложного сечения, рис. П.3.10.

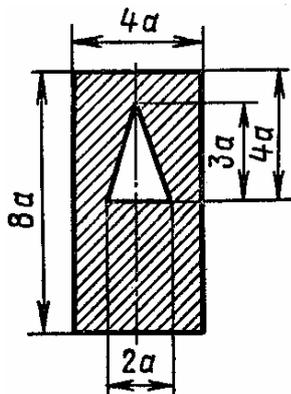


Рис. П.3.9. К задаче 3.9

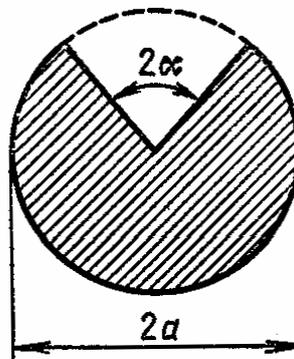


Рис. П.3.10. К задаче 3.10

#### Практическое занятие 4 КИНЕМАТИКА ТОЧКИ И ТВЕРДОГО ТЕЛА

**Цель:** Привить практические навыки в решении задач на определение кинематических характеристик точки и твердого тела, теоретические основы которых изложены в теме 8 «Основные элементы кинематики точки и твердого тела».

*Скорость точки – это векторная величина, характеризующая быстроту и направление движения точки в данный момент времени. Она направлена по касательной к траектории точки.*

*Векторная величина, характеризующая изменение скорости точки, называется ее ускорением.*

*При прямолинейном движении ускорение точки является первой производной по времени от ее алгебраической скорости или второй производной от закона ее движения по траектории.*

*При поступательном движении все его точки движутся по одинаковым траекториям и в любой момент времени имеют одинаковые скорости и ускорения.*

**Задача 4.1.** Движение точки задано уравнениями  $x = b \sin kt$ ,  $y = b \cos kt$  ( $b$  и  $k$  – постоянные величины). Установить вид траектории точки.

**Задача 4.2.** Точка движется по траектории в соответствии с уравнением  $s = t^2 - 4$  ( $s$  – в метрах,  $t$  – в секундах). Найти путь  $\Pi$ , пройденный точкой за первые 3 с от начала движения.

**Задача 4.3.** Точка движется по некоторой траектории со скоростью  $v = 4t$  ( $v$  – в метрах в секунду,  $t$  – в секундах). Указать закон движения точки, если при  $t = 0$   $S_0 = 2$  м.

**Задача 4.4.** Точка движется по окружности радиуса  $R = 1$  м по закону  $s = t^3 - 3t$  ( $s$  – в метрах,  $t$  – в секундах). Определить ускорение точки в момент времени  $t = 1$  с.

**Задача 4.5.** Движение точки задано уравнениями  $x = b \sin kt$ ,  $y = b \cos kt$  ( $b$  и  $k$  – постоянные величины). Определить касательное ускорение  $a_\tau$  точки.

**Задача 4.6.** Точка движется по окружности радиуса  $R = 1$  м по закону  $s = t^2 - t$  ( $s$  – в метрах,  $t$  – в секундах). Определить момент времени  $t_1$ , когда касательное ускорение точки равно ее нормальному ускорению.

**Задача 4.7.** Груз  $M$  приводится в движение веревкой  $ABD$ , конец  $D$  которой движется с постоянной скоростью  $v$ , рис. П.4.1. Записать уравнение поступательного движения груза вдоль оси  $Ox$ , приняв за начало отсчета начальное положение груза, если  $l_0$  – начальная длина части веревки  $A_0B$ ,  $h$  – расстояние от верхней горизонтальной поверхности груза до верхней точки  $B$  блока  $C$ .

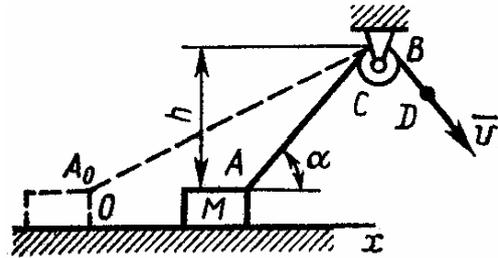


Рис. П.4.1. К задаче 4.7

**Задача 4.8.** Вал начинает вращаться вокруг неподвижной оси из состояния покоя так, что его угловое ускорение  $\epsilon = 3t \frac{\text{рад}}{\text{с}^2}$ . Определить угловую скорость  $\omega$  вала в момент времени  $t = 4$  с.

**Задача 4.9.** Пластина в виде полудиска радиуса  $R = 1$  м равномерно вращается вокруг вертикальной оси  $z$  с угловой скоростью  $\omega = 1$  рад/с, рис. П.4.2. Найти ускорение центра тяжести  $C$  пластины.

**Задача 4.10.** Диск радиуса  $R = 0,5$  м приводится в движение грузом  $P$ , который опускается вниз по наклонной плоскости согласно закону  $x = 2t$  ( $x$  – расстояние от груза до места схода веревки с диска, в метрах,  $t$  – в секундах), рис. П.4.3. Определить ускорение точек обода диска.

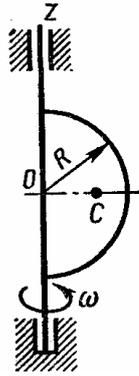


Рис. П.4.2. К задаче 4.9

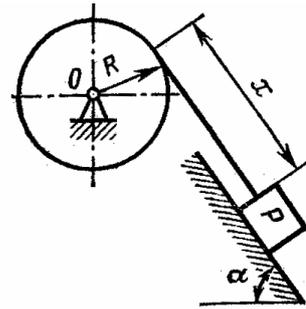


Рис. П.4.3. К задаче 4.10

## Практическое занятие 5 ЦЕНТРАЛЬНОЕ РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ

**Цель:** Привить практические навыки в решении задач по расчету стержневых систем, испытывающих центральное растяжение или сжатие, теоретические основы которых изложены в теме 11 «Растяжение и сжатие прямого бруса».

**Задача 5.1.** Для стального стержня, нагруженного сосредоточенными продольными силами, построить эпюру  $N$  и определить значение параметра сил  $P$ , при котором нормальные напряжения в опасном сечении достигнут  $\sigma = 240$  МПа. Площадь поперечного сечения стержня  $8 \text{ см}^2$ , рис. П.5.1.

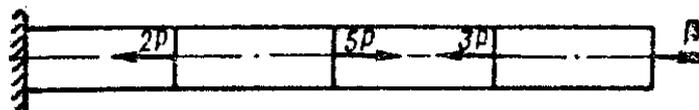


Рис. П.5.1. К задаче 5.1

**Задача 5.2.** Для медного стержня с прямоугольным поперечным сечением, нагруженного сосредоточенными продольными силами  $P_1 = 60$  кН и  $P_2 = 100$  кН (рис. П.5.2), определить наибольшее нормальное напряжение, полное удлинение и изменение размеров поперечного сечения: высоты в сечении 1 – 1 и ширины в сечении 2 – 2.

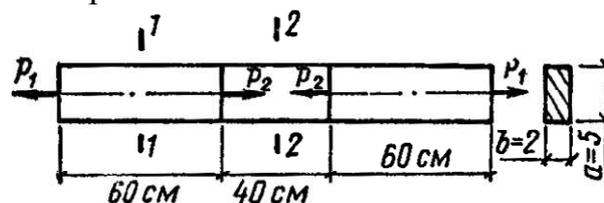


Рис. П.5.2. К задаче 5.2

**Задача 5.3.** Определить значения полного удлинения и потенциальной энергии деформации медного стержня, рис. П.5.3.

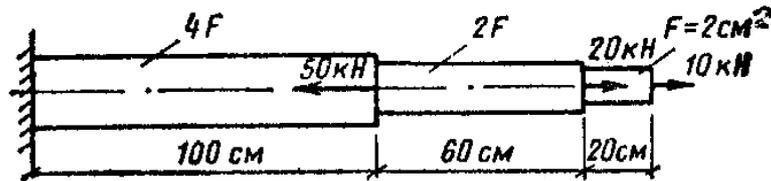


Рис. П.5.3. К задаче 5.3

**Задача 5.4.** Стержень нагружен продольными силами  $P$  и  $3P$  (рис. П.5.4). После приложения нагрузки его полная длина уменьшилась на 0,2 мм. Определить значение параметра сил  $P$ .

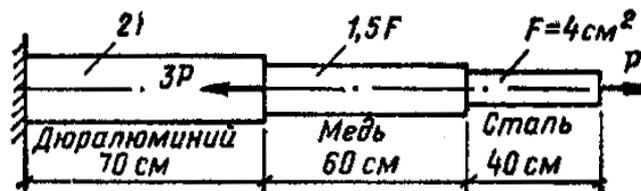


Рис. П.5.4. К задаче 5.4

**Задача 5.5.** Стержень, изображенный на рис. П.5.5, а, нагружен уравновешенной продольной нагрузкой в виде сосредоточенных и распределенных сил. Эпюра продольных сил показана на рис. П.5.5, б. Определить значения и направления приложенной к стержню нагрузки и вычислить наибольшие нормальные напряжения.

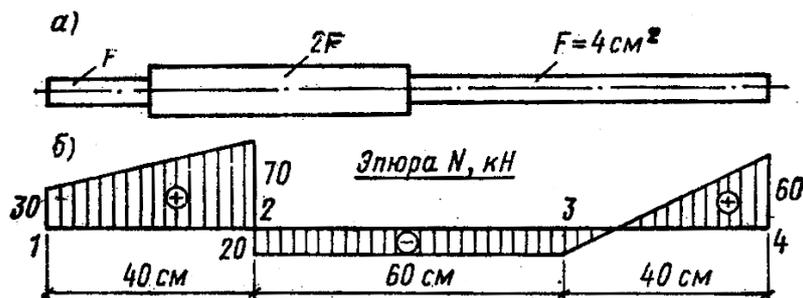


Рис. П.5.5. К задаче 5.5

**Задача 5.6.** Стержень, нагруженный, как показано на рис. П.5.6, удерживается в стене силами трения, равномерно распределенными по ее толщине. Построить эпюру продольных сил и определить полное удлинение стержня.

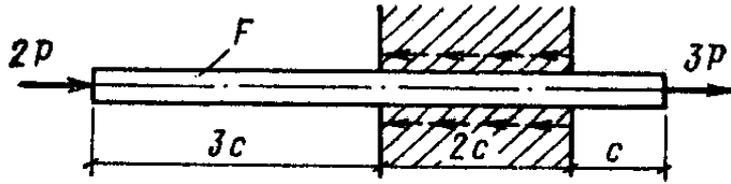


Рис. П.5.6. К задаче 5.6

**Задача 5.7.** Медный стержень, заделанный нижним концом, нагружен двумя сосредоточенными продольными силами и распределенной нагрузкой  $q(z) = qz/l$  (рис. П.5.7, а). У заделки  $q = 30$  кН/м. Площадь поперечного сечения стержня  $20 \text{ см}^2$ . Построить эпюры продольных сил и перемещений поперечных сечений.

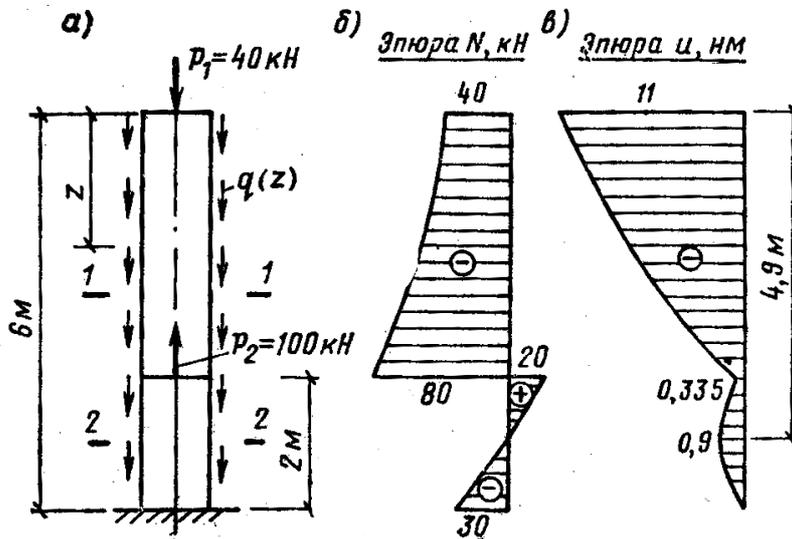


Рис. П.5.7. К задаче 5.7

**Задача 5.8.** Найти значения полного удлинения и потенциальной энергии деформации стержня, растянутого распределенной продольной нагрузкой  $q(z) = qz/l$ , рис. П.5.8.

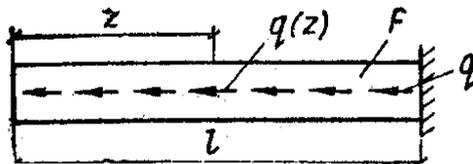


Рис. П.5.8. К задаче 5.8

**Задача 5.9.** Построить эпюру продольных сил и определить полное удлинение стержня, нагруженного распределенной продольной нагрузкой

$q(z) = qz^2/l^2$  и уравнивающей эту нагрузку сосредоточенной силой  $P$ , рис. П.5.9.

**Задача 5.10.** Стержневая система нагружена двумя силами  $P_1 = 50$  кН и  $P_2 = 30$  кН (рис. П.5.10). Стержень 1 стальной ( $F_1 = 4$  см<sup>2</sup>), стержень 2 медный ( $F_2 = 5$  см<sup>2</sup>). Определить горизонтальную проекцию полного перемещения шарнира  $A$ .

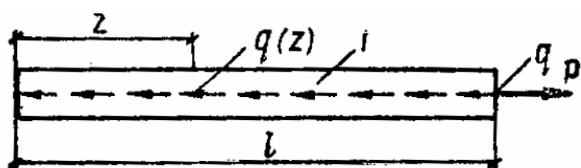


Рис. П.5.9. К задаче 5.9

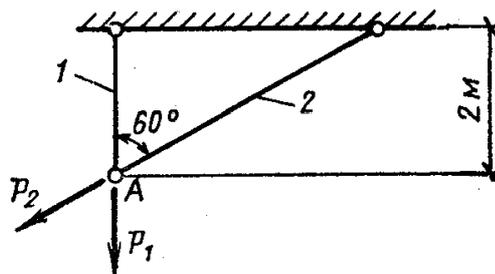


Рис. П.5.10. К задаче 5.10

### Практическое занятие 6

## ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ

**Цель:** Привить практические навыки в решении задач по расчету геометрических характеристик плоских сечений, теоретические основы которых изложены в теме 14 «Вычисление моментов инерции сложных сечений».

**Задача 6.1.** Вычислить осевые и центробежный моменты инерции прямоугольника относительно осей  $x$  и  $y$ , стороны которого равны  $h = 18$  см,  $b = 12$  см, рис. П.6.1.

**Задача 6.2.** Определить значения моментов инерции равнобедренного треугольника относительно осей  $x$ ,  $x_1$  и  $x_2$ , параллельных его основанию, рис. П.6.2.

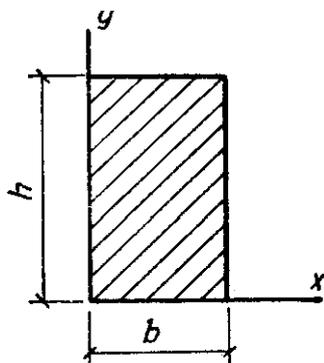


Рис. П.6.1. К задаче 6.1

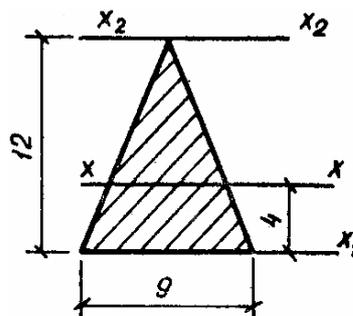


Рис. П.6.2. К задаче 6.2

**Задача 6.4.** Вычислить моменты инерции площадей фигур, изображенных на рис. П.6.4, относительно оси  $x$ , которые имеют одинаковые размеры стенок и полок.

**Задача 6.3.** Найти значения моментов инерции параллелограмма относительно центральных осей  $x$  и  $y$ , рис. П.6.3.

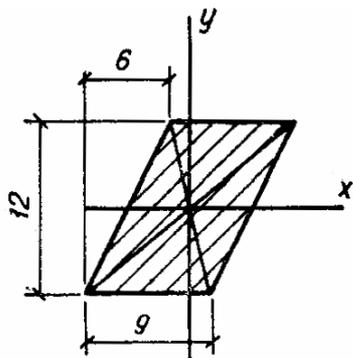


Рис. П.6.3. К задаче 6.3

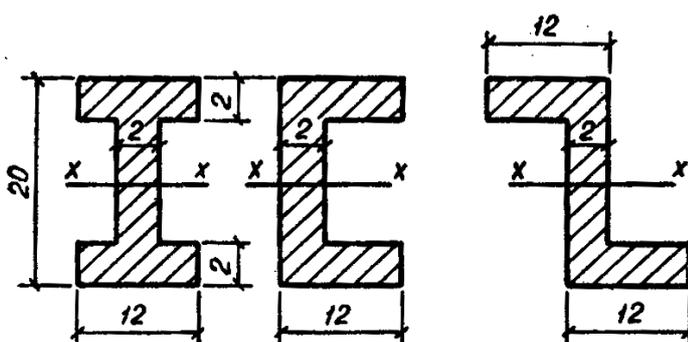


Рис. П.6.4. К задаче 6.4

**Задача 6.5.** Найти полярный момент инерции и центральный момент инерции для круга с  $d = 16$  см (рис. П.6.5).

**Задача 6.6.** Определить моменты инерции полукруга с радиусом  $r = 8$  см относительно главных центральных осей  $x_0$  и  $y_0$  (рис. П.6.6).

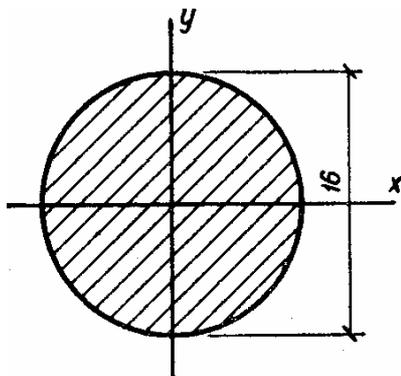


Рис. П.6.5. К задаче 6.5

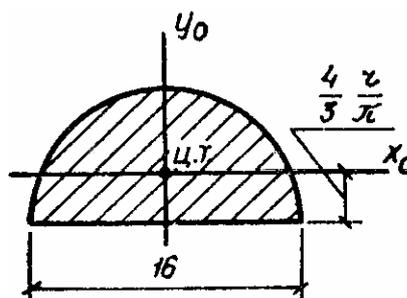


Рис. П.6.6. К задаче 6.6

**Задача 6.7.** Вычислить момент инерции прямоугольника относительно оси  $a$ , совпадающей с диагональю (рис. П.6.7).

**Задача 6.8.** Найти центробежный момент инерции прямоугольного треугольника относительно центральных осей  $x$  и  $y$ , параллельных катетам (рис. П.6.8).

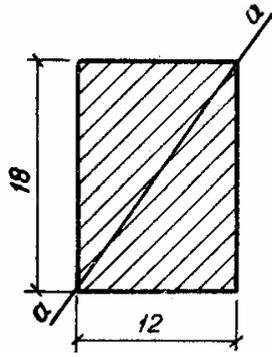


Рис. П.6.7. К задаче 6.7

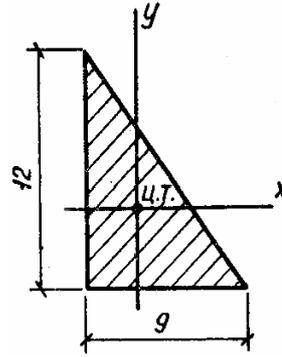


Рис. П.6.8. К задаче 6.8

**Задача 6.9.** Определить главные центральные моменты инерции площади фигур, изображенных на рис. П.6.9.

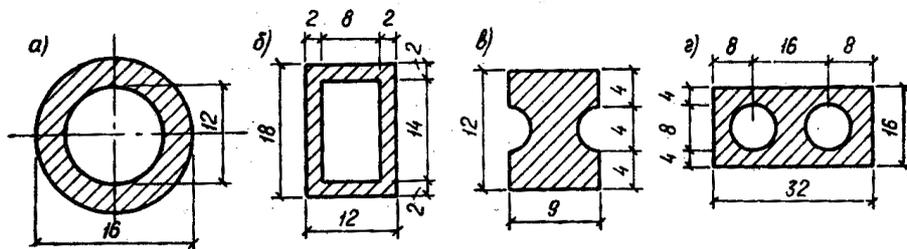


Рис. П.6.9. К задаче 6.9

**Задача 6.10.** Найти моменты инерции  $I_{\max}$  и  $I_{\min}$  сечений, изображенных на рис. П.6.10.

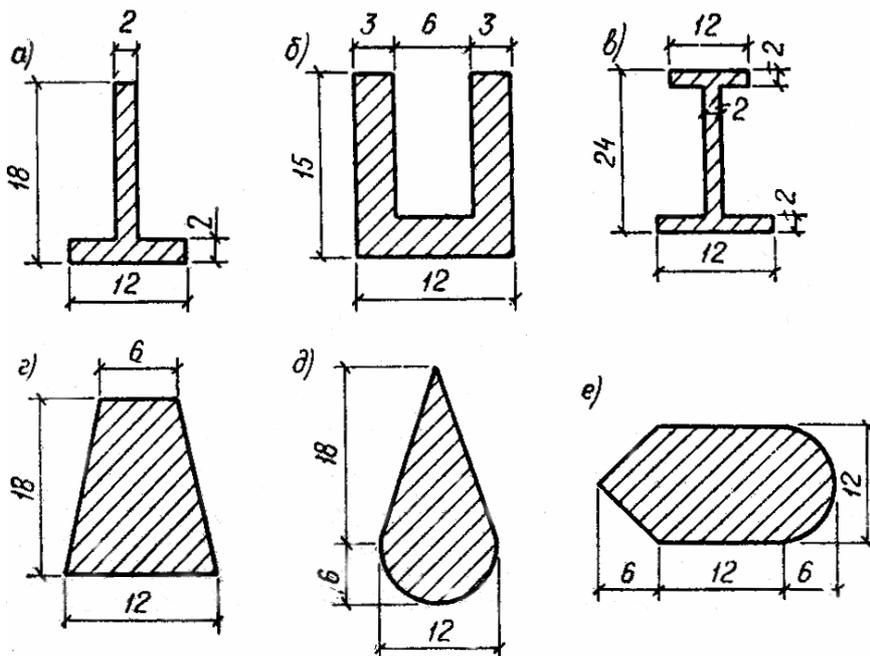


Рис. П.6.10. К задаче 6.10

## Практическое занятие 7 ПЛОСКИЙ ИЗГИБ

**Цель:** Привить практические навыки в решении задач по расчету балок на изгиб, теоретические основы которых изложены в теме 16 «Изгиб прямого бруса».

**Задача 7.1.** Построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов для консольных балок, нагруженных, как показано на рис. П.7.1.

*Указание.* В консольных балках, как правило, эпюры  $Q$  и  $M$  целесообразно строить со стороны незакрепленного конца балки, не определяя при этом опорных реакций.

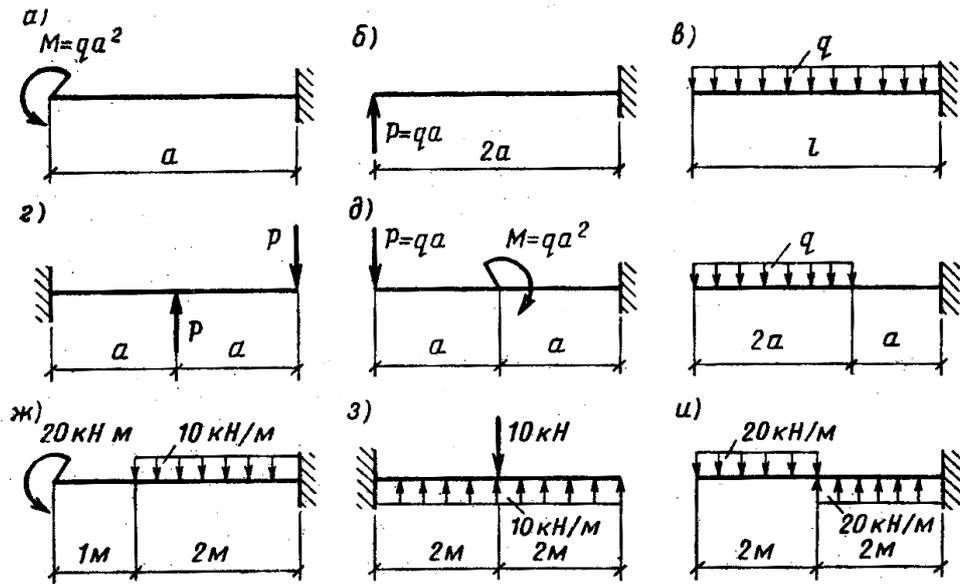


Рис. П.7.1. К задаче 7.1

**Задача 7.2.** Построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов для балок на двух опорах, нагруженных, как показано на рис. П.7.2.

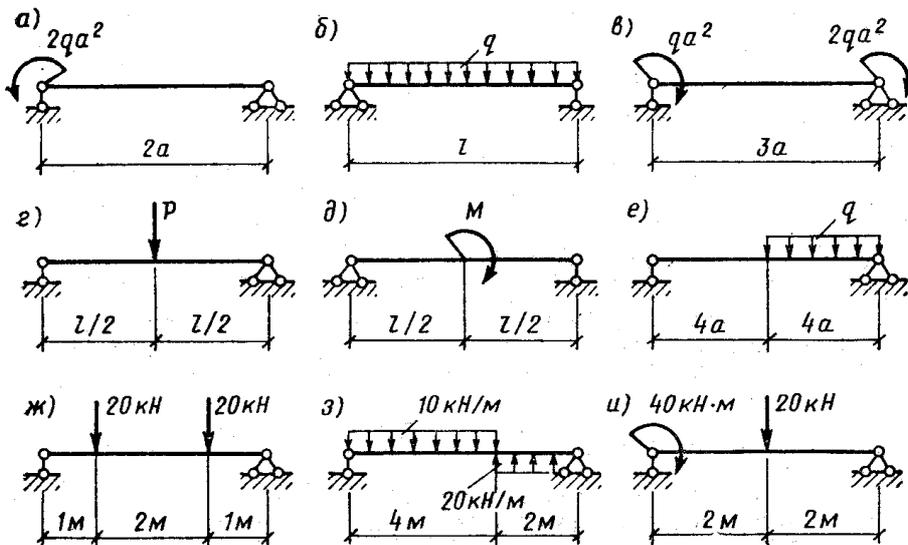


Рис. П.7.2. К задаче 7.2

**Задача 7.3.** Построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов для балок на двух опорах с консолями, которые нагружены, как показано на рис. П.7.3.

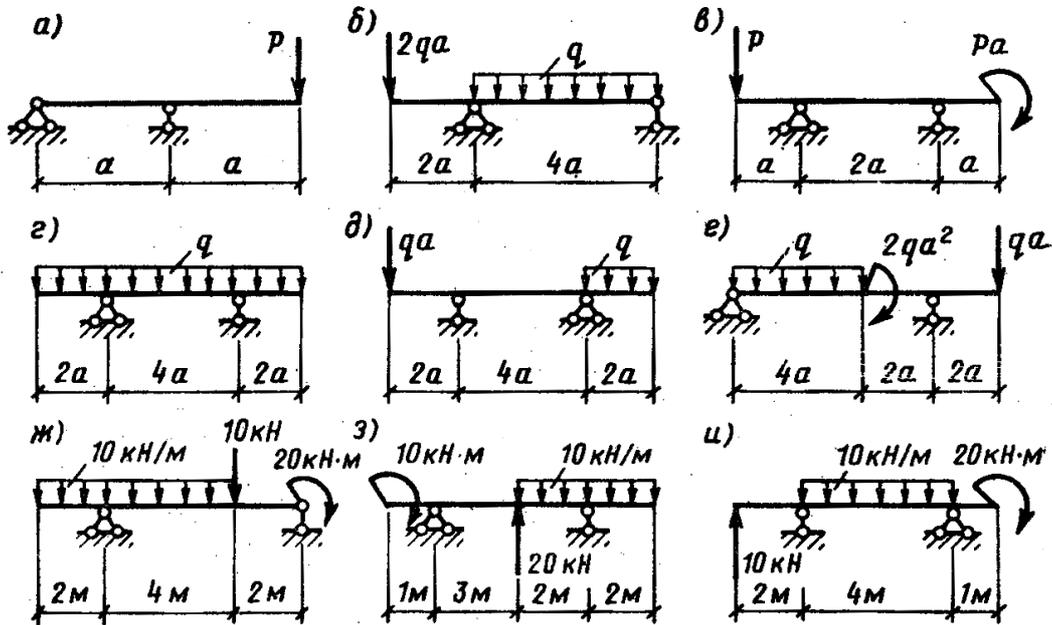


Рис. П.7.3. К задаче 7.3

**Задача 7.4.** Определить длину консоли  $a$ , если момент посередине пролета балки равен нулю, рис. П.7.4. Достроить эпюры  $Q$  и  $M$ .

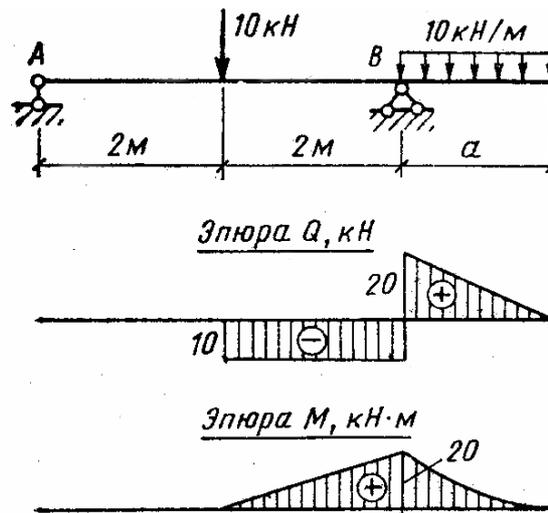


Рис. П.7.4. К задаче 7.4

**Задача 7.5.** Найти длину консоли  $a$  (рис. П.7.5) из условия, что поперечная сила посередине пролета балки равна нулю. Построить эпюры  $Q$  и  $M$ .

**Задача 7.6.** Во сколько раз пролет балки  $l$  должен быть больше длины консоли  $a$  (рис. П.7.6), чтобы изгибающие моменты в середине пролета и на правой опоре имели противоположные знаки и одинаковые значения. Построить эпюры  $Q$  и  $M$ .

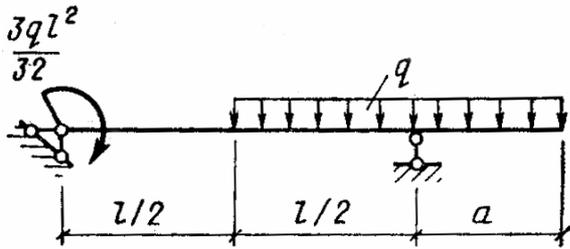


Рис. П.7.5. К задаче 7.5

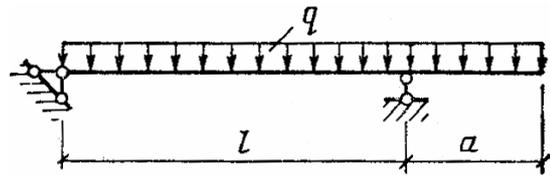


Рис. П.7.6. К задаче 7.6

**Задача 7.7.** Вычислить значение нормального напряжения в точке  $K$  поперечного сечения 1-1 балки (рис. П.7.7). Считать  $P = qa$ ,  $M = qa^2$ ,  $q = 20$  кН/м,  $a = 2$  м. Все размеры на рисунке даны в сантиметрах.

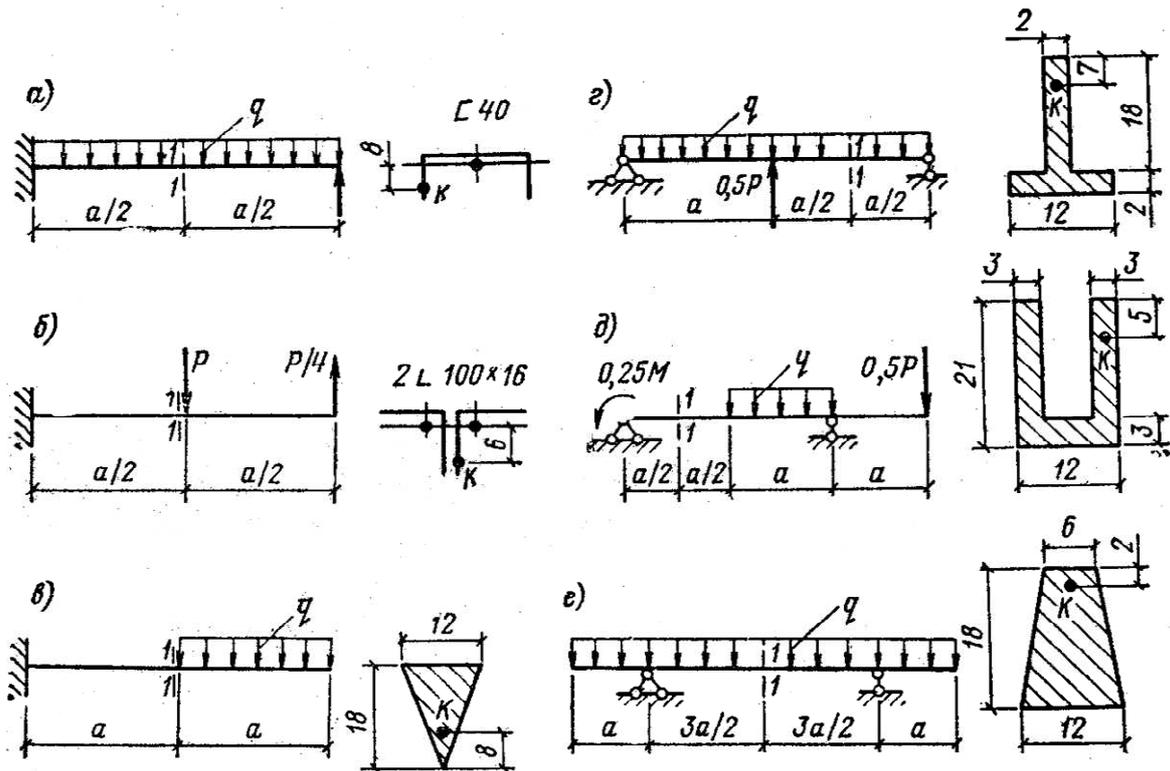


Рис. П.7.7. К задаче 7.7

**Задача 7.8.** Построить эпюру нормальных напряжений в поперечном сечении 1-1 балки (рис. П.7.8). Принять  $P = qa$ ,  $M = qa^2$ ,  $q = 5$  кН/м,  $a = 1$  м. Все размеры на рисунке даны в сантиметрах.

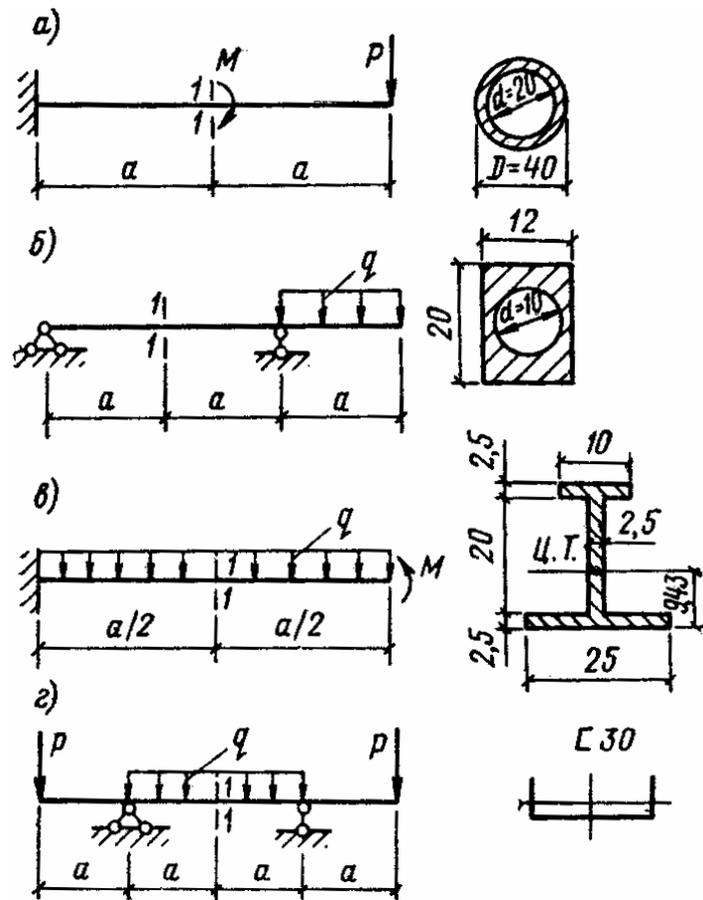


Рис. П.7.8. К задаче 7.8

**Задача 7.9.** Определить касательное напряжение в точке, расположенной на расстоянии  $4$  см от нейтральной оси в сечении  $m - n$  балки, изображенной на рис. П.7.9.

**Задача 7.10.** Вычислить значение касательного напряжения в точке  $K$  и построить эпюру  $\tau$  для прямоугольного сечения балки (рис. П.7.10), если  $Q = 600$  кН.

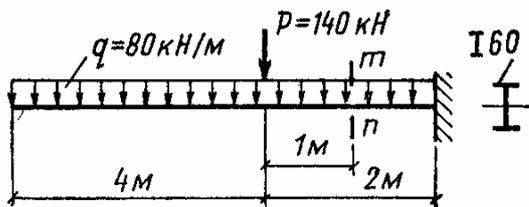


Рис. П.7.9. К задаче 7.9

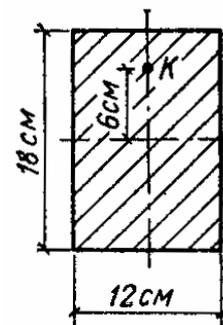


Рис. П.7.10. К задаче 7.10

## Практическое занятие 8 УСТОЙЧИВОСТЬ СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ

**Цель:** Привить практические навыки в решении задач по расчету центрально-сжатых стержней на устойчивость, теоретические основы которых изложены в теме 19 «Устойчивость центрально-сжатых стержней».

**Задача 8.1.** Определить коэффициент запаса устойчивости стального стержня прямоугольного поперечного сечения (рис. П.8.1) с пределом пропорциональности  $\sigma_{ny} = 250$  МПа.

**Задача 8.2.** Определить коэффициент запаса устойчивости стального центрально-сжатого стержня таврового сечения (рис. П.8.2), если предел пропорциональности  $\sigma_{ny} = 200$  МПа.

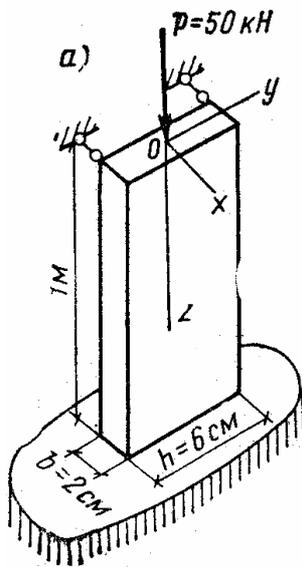


Рис. П.8.1. К задаче 8.1

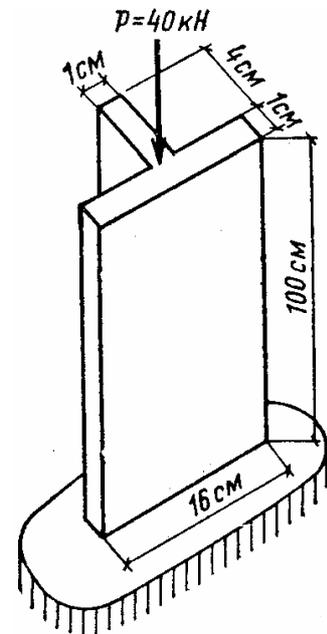
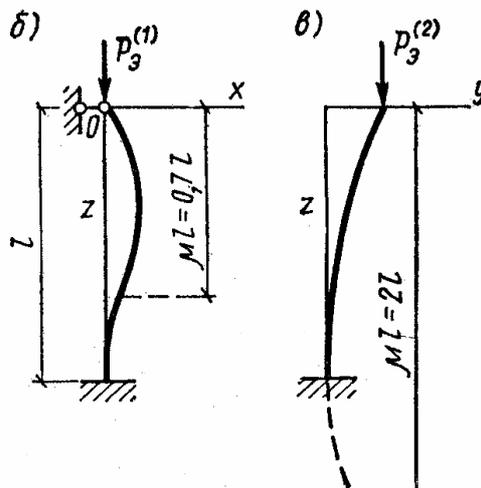


Рис. П.8.2. К задаче 8.2

**Задача 8.3.** Определить критическую нагрузку для сжатой стальной трубы, шарнирно опертой по концам (рис. П.8.3). Принять предел пропорциональности  $\sigma_{ny} = 210$  МПа. Рассмотреть два случая: 1)  $l = 3$  м; 2)  $l = 2$  м.

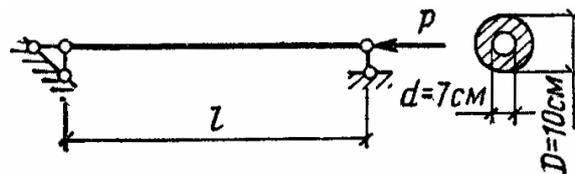


Рис. П.8.3. К задаче 8.3

**Задача 8.4.** Стальная стойка, выполненная из двутавра № 18 и шарнирно опертая по концам, сжимается с силой  $P = 200$  кН. Определить коэффициент запаса устойчивости для двух случаев: 1)  $l = 2$  м; 2)  $l = 2$  м. Принять предел пропорциональности  $\sigma_{\text{пц}} = 210$  МПа.

**Задача 8.5.** Деревянная шарнирно опертая стойка прямоугольного сечения  $8 \times 12$  см сжимается силой  $P = 30$  кН. Определить коэффициент запаса устойчивости для двух случаев: 1)  $l = 2$  м; 2)  $l = 2$  м. Принять предел пропорциональности  $\sigma_{\text{пц}} = 20$  МПа.

**Задача 8.6.** Используя таблицу коэффициентов продольного изгиба, проверить устойчивость стойки прямоугольного сечения, выполненной из стали 5 (рис. П.8.4). Допускаемое напряжение  $[\sigma] = 270$  МПа.

**Задача 8.7.** Для колонны, состоящей из четырех уголков  $250 \times 16$  (рис. П.8.5), определить расчетную сжимающую силу  $P$ . Материал – сталь 3, сечение колонны считать монолитным. Использовать таблицу коэффициентов  $\varphi$ , допускаемое напряжение  $[\sigma] = 160$  МПа.

**Задача 8.8.** Подобрать с помощью таблицы коэффициентов  $\varphi$  сечение двутавровой колонны, жестко заделанной внизу и свободной вверху. Высота колонны  $h = 2,5$  м, материал – сталь 3. Расчетная нагрузка 250 кН. Допускаемое напряжение  $[\sigma] = 200$  МПа.

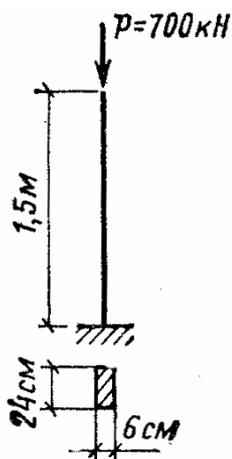


Рис. П.8.4. К задаче 8.6

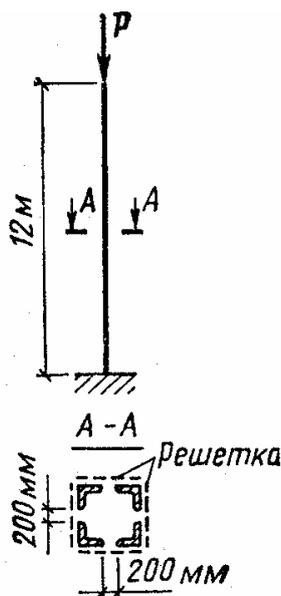


Рис. П.8.5. К задаче 8.7

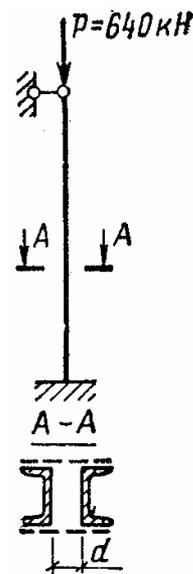


Рис. П.8.6. К задаче 8.9

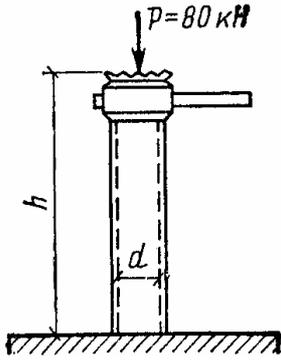


Рис. П.8.7. К задаче 8.10

**Задача 8.9.** Подобрать сечение колонны из двух швеллеров (рис. П.8.6), используя таблицу коэффициентов  $\varphi$ , и определить расстояние между швеллерами из условия равноустойчивости в обеих плоскостях. Допускаемое напряжение  $[\sigma]$  принять равным 200 МПа. Сечение колонны считать монолитным.

**Задача 8.10.** Найти диаметр  $d$  винта стального домкрата, поднимающего груз  $P = 80$  кН на высоту  $h = 1$  м (рис. П.8.7). Принять  $n_{уст} = 4$ ;  $\sigma_{пц} = 210$  МПа.

# РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА

Расчетно-графическая работа содержит три индивидуальных заданий, определенных рабочей программой курса. Каждое задание выполняется студентами в соответствии с выданным вариантом отдельно и сдается преподавателю на проверку в установленный срок. Если задание выполнено правильно, преподаватель ставит на работе отметку «к защите». Неправильно выполненное задание возвращается студенту для исправления.

Оформление заданий расчетно-графической работы выполняется на листах формата А4 в компьютерном наборе гарнитурой 14 pt. Каждое задание помещается в общую папку с файлами с приложением дискеты.

Защита заданий расчетно-графической работы проводится во внеаудиторное время в установленные кафедрой сроки по особому расписанию. При защите заданий расчетно-графической работы студент должен пояснить ход выполнения заданий, ответить на поставленные вопросы и решить предложенные ему примеры.

### Задание 1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕАКЦИЙ ОПОР И УСИЛИЙ В СТЕРЖНЯХ ПЛОСКОЙ ФЕРМЫ

Определить реакции опор фермы от заданной нагрузки, а также усилия во всех ее стержнях способом вырезания узлов. Схемы ферм приведены на рис. III-1. Необходимые данные для расчета приведены в табл. III-1.

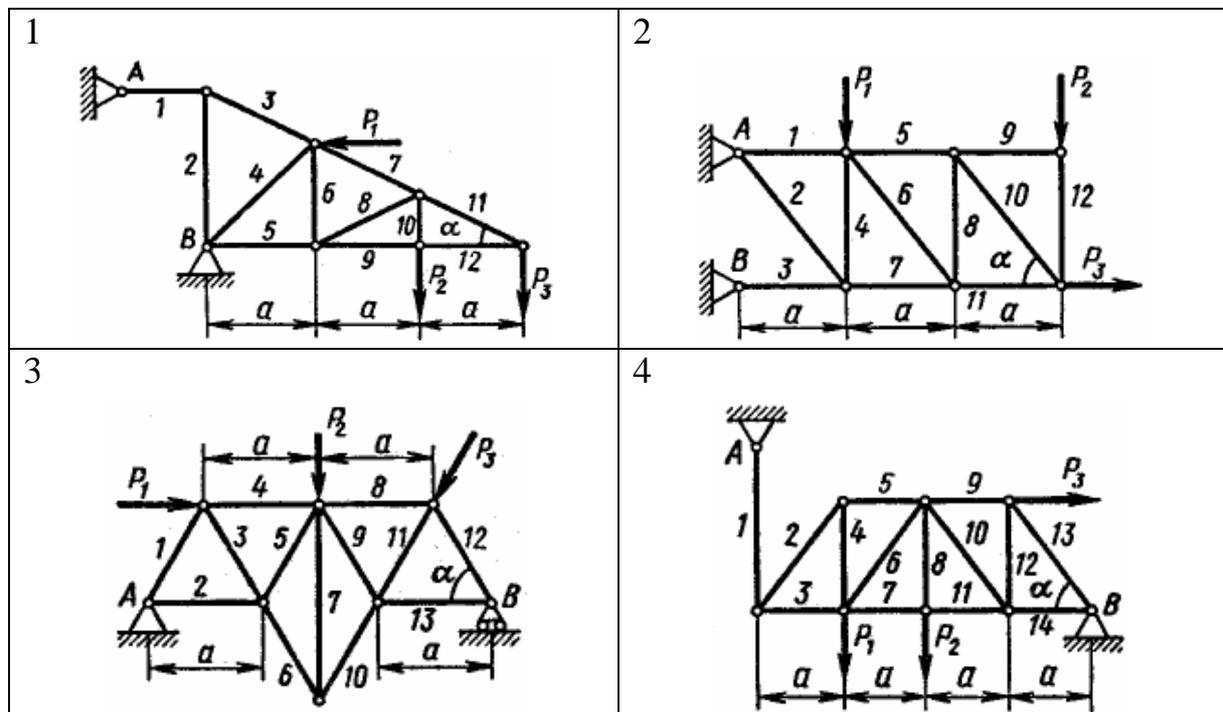


Рис. III-1. Схемы ферм (см. также с. 223 – 225)

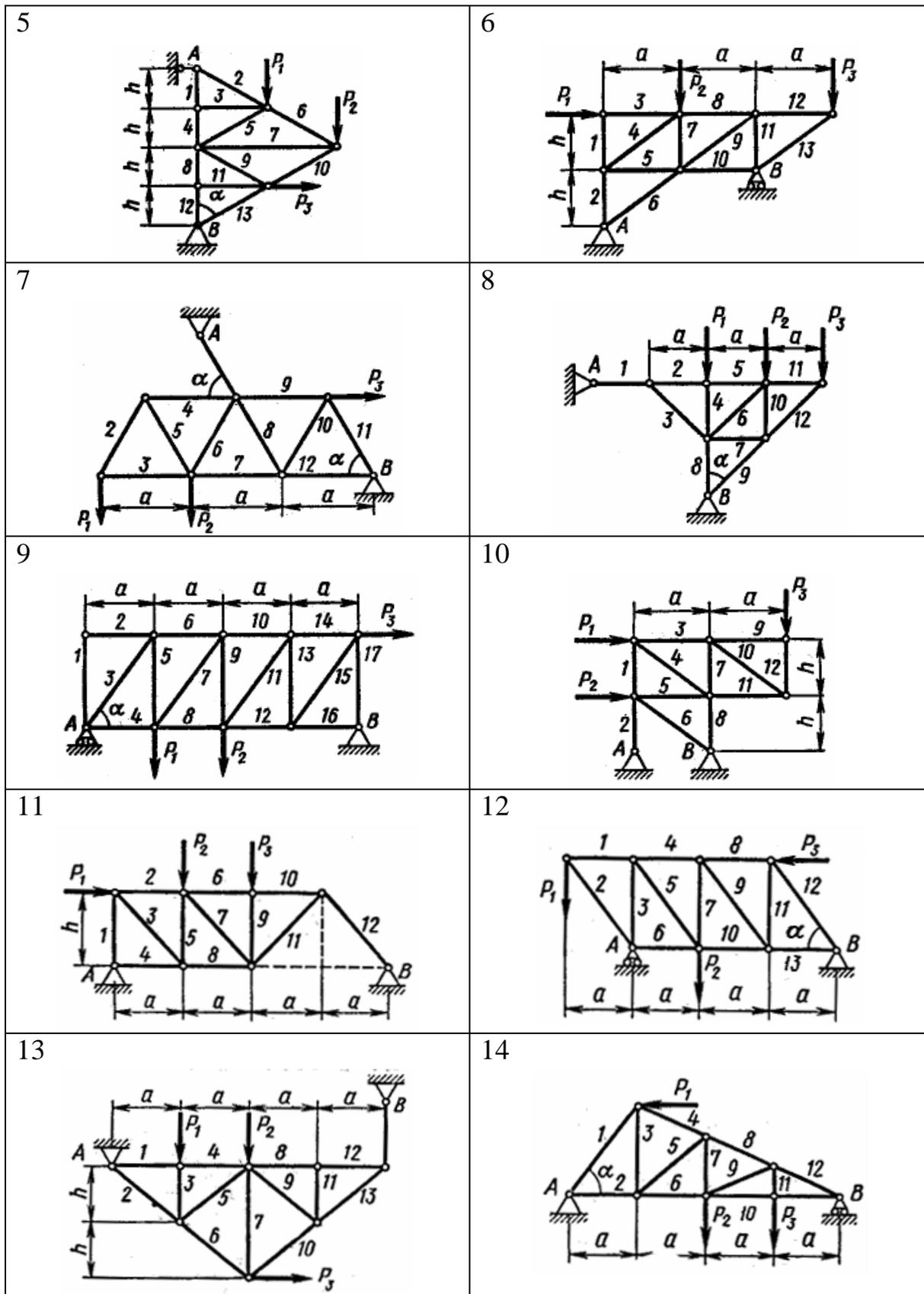


Рис. III-1. Продолжение

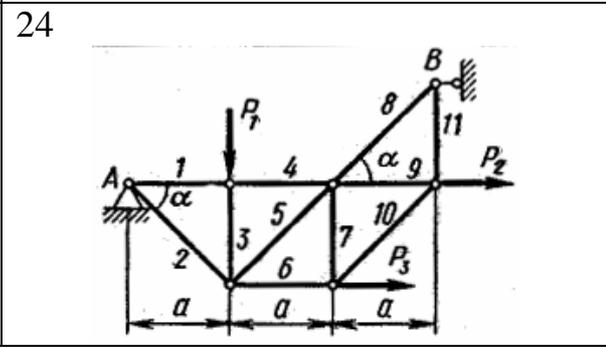
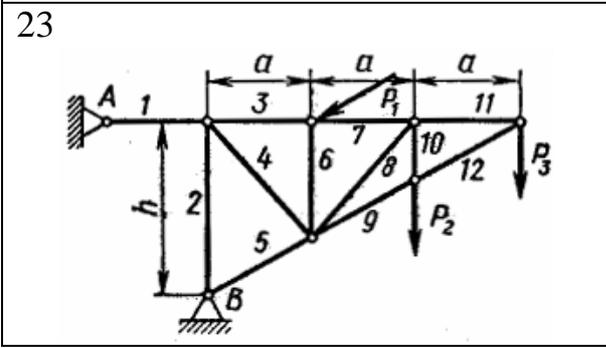
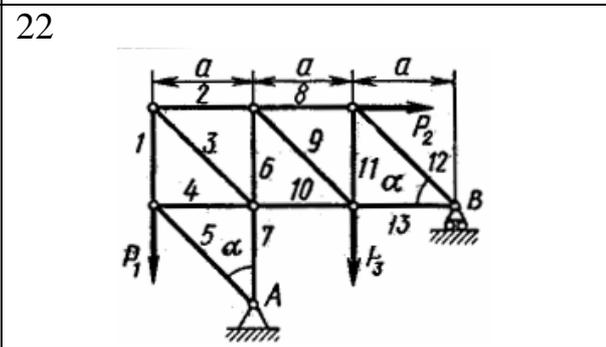
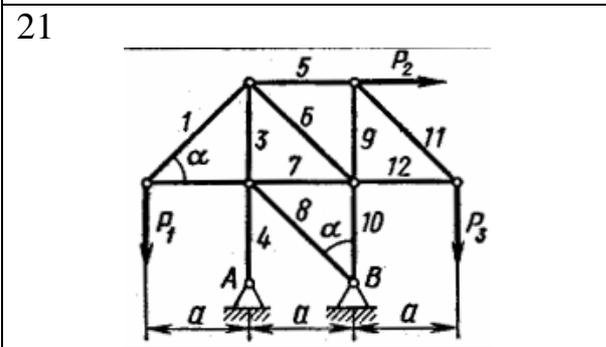
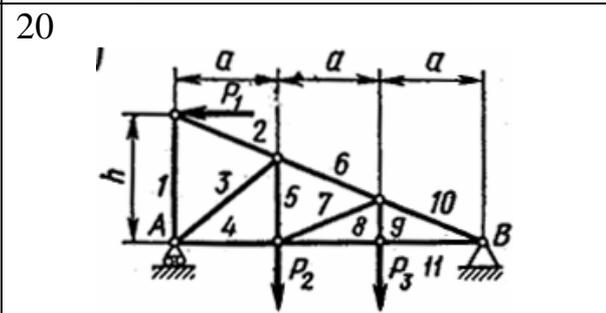
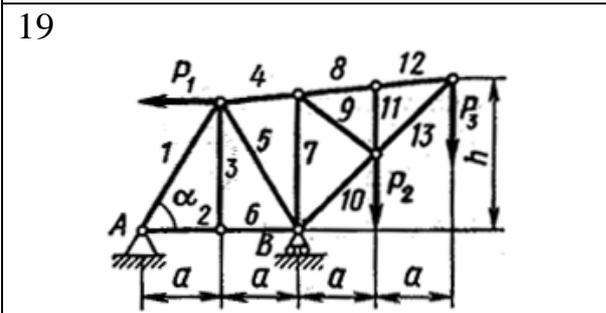
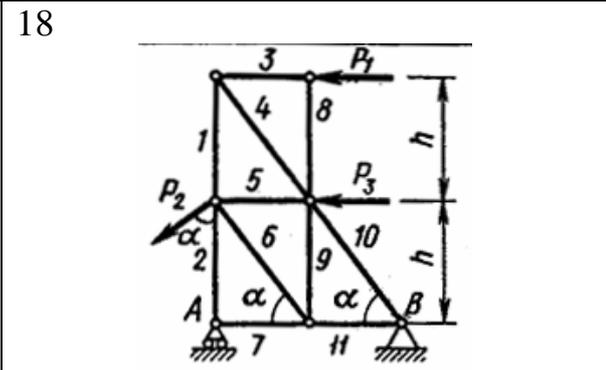
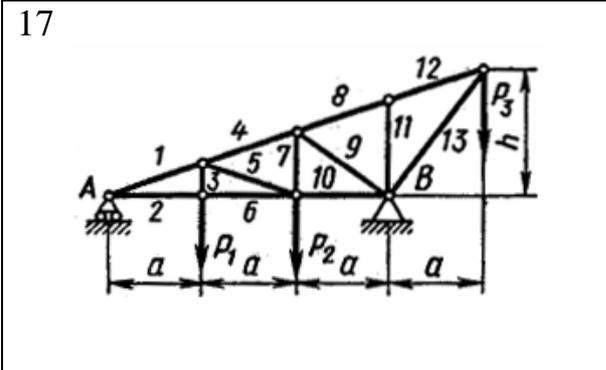
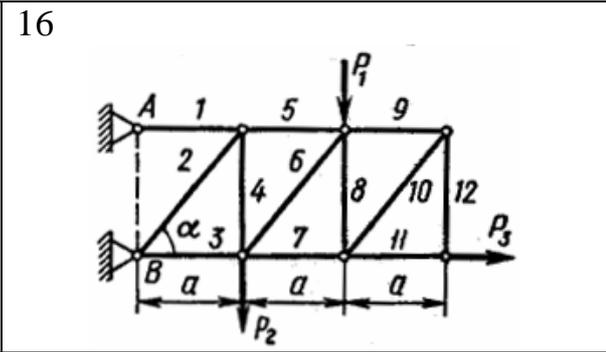
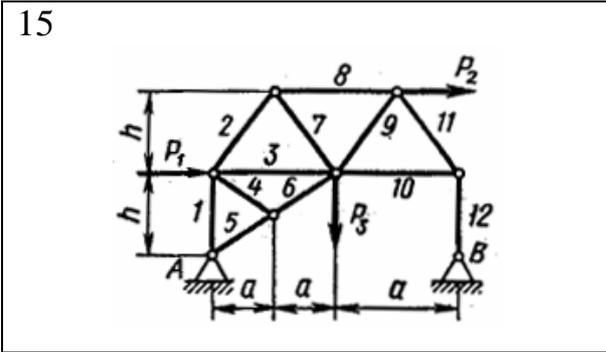


Рисунок III-1. Продолжение

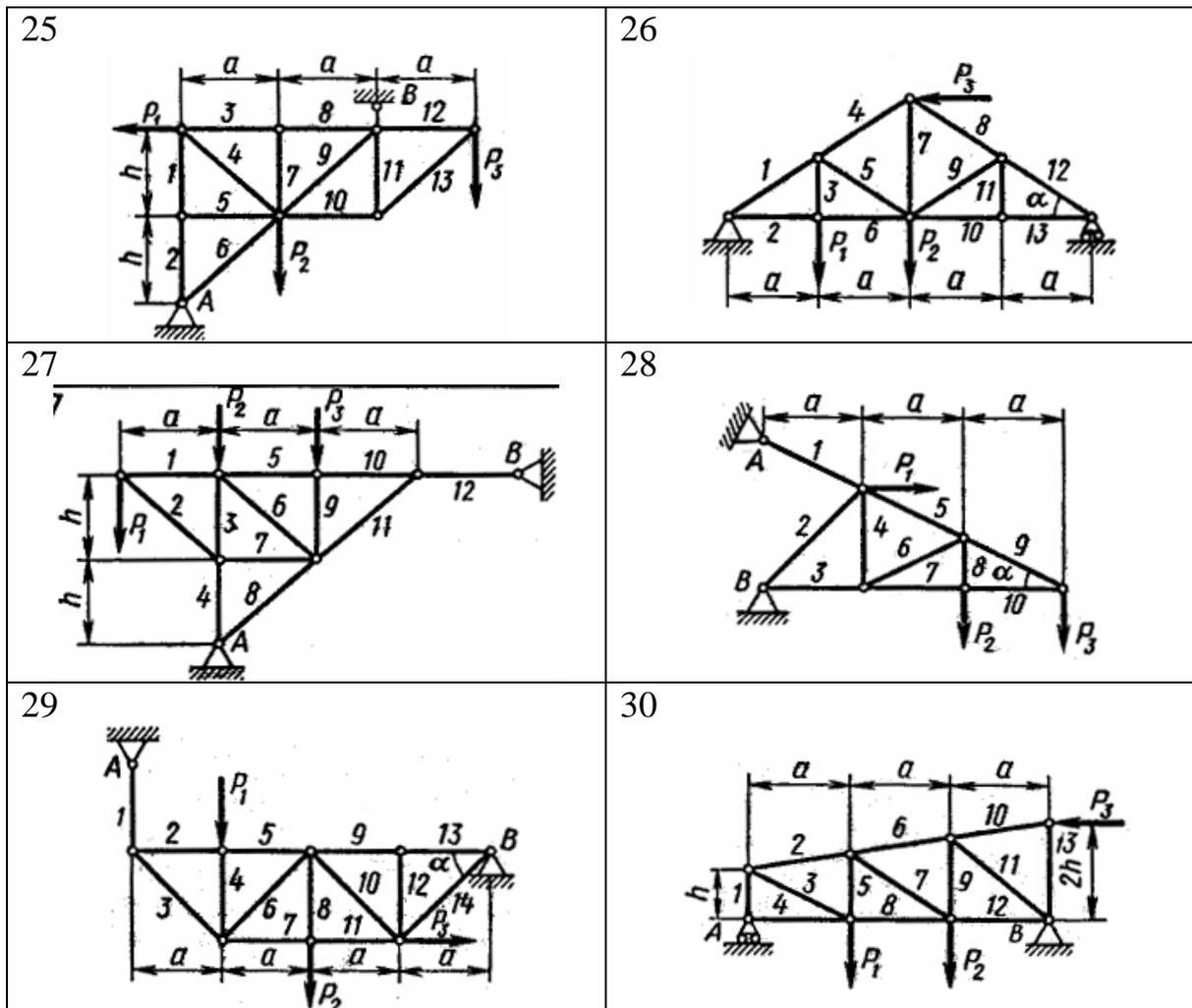


Рис. III-1. Окончание

Таблица III-1

Числовые данные к заданию 1

Номер варианта	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$a$	$h$	$\alpha$ град
	кН			м		
1	2	3	4	5	6	7
1	4,0	9,0	2,0	2,0	-	30
2	10,0	3,0	4,0	2,5	-	60
3	2,0	12,0	6,0	3,0	-	60
4	10,0	10,0	5,0	4,0	-	60
5	2,0	4,0	2,0	-	2,0	60
6	3,0	7,0	5,0	4,0	3,0	-
7	4,0	6,0	3,0	4,0	-	60
8	5,0	7,0	7,0	3,2	-	45
9	10,0	8,0	2,0	5,0	-	60
10	3,0	4,0	5,0	4,4	3,3	-
11	2,0	6,0	8,0	2,5	3,0	-

1	2	3	4	5	6	7
12	5,0	7,0	12,0	4,0	-	60
13	4,0	6,0	5,0	4,8	3,6	-
14	3,0	5,0	5,0	3,0	-	60
15	12,0	2,0	10,0	4,0	6,0	-
16	5,0	6,0	12,0	5,0	-	60
17	4,0	8,0	10,0	4,0	6,0	-
18	5,0	9,0	8,0	-	5,0	60
19	8,0	4,0	10,0	5,0	10,0	60
20	4,0	3,0	5,0	4,0	6,0	-
21	3,0	2,0	7,0	6,0	-	45
22	4,0	2,0	9,0	4,0	-	45
23	5,0	8,0	10,0	4,0	9,0	30
24	6,0	10,0	5,0	3,6	-	45
25	7,0	10,0	2,0	4,4	3,3	-
26	8,0	12,0	2,0	4,0	-	30
27	9,0	4,0	4,0	4,0	3,0	-
28	10,0	5,0	4,0	5,0	-	30
29	12,0	8,0	2,0	6,0	-	45
30	5,0	10,0	4,0	4,0	2,0	-

**Пример выполнения задания 1.** Дано: схема фермы (рис. III-2),  $P_1 = 2$  кН,  $P_2 = 4$  кН,  $P_3 = 6$  кН,  $a = 4,0$  м,  $h = 3,0$  м.

**Решение. 1. Определение реакций опор.** Покажем внешние силы, приложенные к ферме: активные (задаваемые) силы  $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3$  и реакции опор  $A$  и  $B$  (рис. III-3).

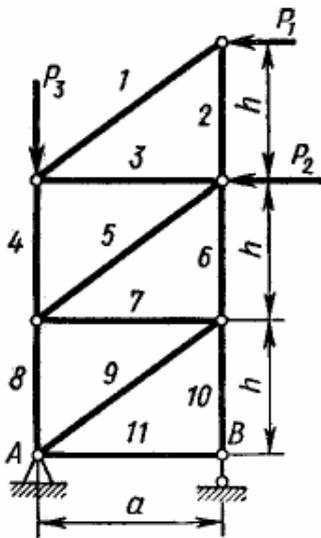


Рис. III-2. Схема плоской фермы

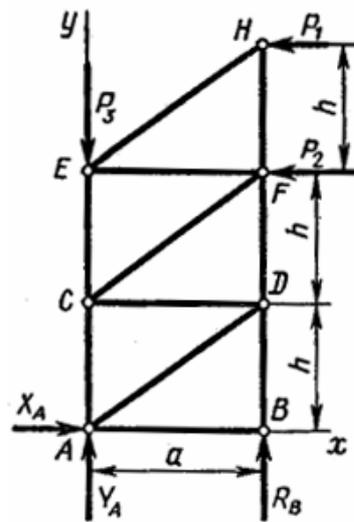


Рис. III-3. Силы активные и реактивные, приложенные к ферме

Так как линия действия реакции опоры  $A$  неизвестна, определим ее составляющие по координатным осям  $\vec{X}_A$  и  $\vec{Y}_A$ .

Опора  $B$  – стержневая; линия действия ее реакции известна: она направлена вдоль опорного стержня.

Составим уравнения равновесия сил, приложенных к ферме:

$$\left. \begin{aligned} \sum M_{iA} = 0; & \quad P_1 \cdot 3h + P_2 \cdot 2h + R_B a = 0; \\ \sum F_x = 0; & \quad X_A - P_1 - P_2 = 0; \\ \sum F_y = 0; & \quad Y_A + R_B - P_3 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (\text{III-1})$$

Из этих уравнений

$$R_B = -10,5 \text{ кН}; \quad Y_A = 6,0 \text{ кН}; \quad X_A = 16,5 \text{ кН}.$$

## 2. Определение сил в стержнях фермы способом вырезания узлов.

Стержни, сходящиеся в узле фермы, являются для узлового соединения связями. Отбросим мысленно связи и заменим их действие на узлы реакциями. На рис. III-4 показаны узлы фермы с приложенными к ним активными и реактивными силами.

Силу в стержне с номером  $i$  обозначим  $S_i$ . Реакцию стержня, приложенную к узлу  $M$ , –  $S_{iM}$ . Для стержня, соединяющего узлы  $M$  и  $N$ ,

$$\vec{S}_{iM} = -\vec{S}_{iN}, \text{ но } S_{iM} = S_{iN} = S_i.$$

Направления реакций всех стержней показаны от узлов внутрь стержней в предположении, что стержни растянуты. Если в результате решения реакция стержня получится отрицательной, это будет означать, что соответствующий стержень сжат.

Для каждого узла составим два уравнения равновесия:

$$\sum F_x = 0 \text{ и } \sum F_y = 0. \quad (\text{III-2})$$

Нетрудно убедиться, что из этих уравнений можно определить не только все силы, но и реакции опор, так что предварительное определение реакций опор не является необходимым. Действительно, узлов 7 ( $A, B, C, D, E, F, H$ ), уравнений, следовательно, 14, а неизвестных тоже 14, то

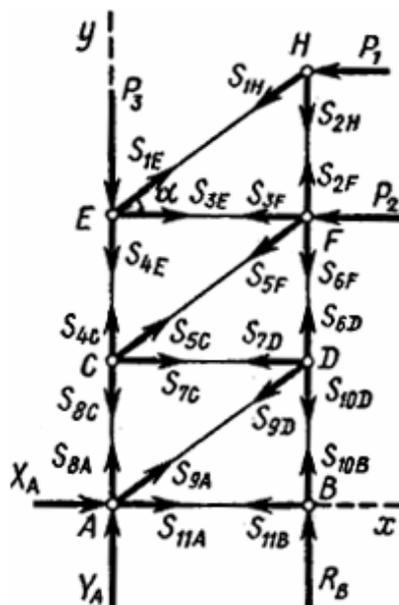


Рис. III-4. Узлы фермы с приложенными к ним силами

есть 11 усилий в стержнях и 3 составляющих опорных реакций. Ранее найденные реакции опор могут служить для проверки решения.

Рекомендуется рассматривать узлы в такой последовательности, чтобы каждый раз в уравнения (III-2) входило не более двух неизвестных.

Начнем с узла  $H$ :

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0; & \quad -P_1 - S_{1H} \cos \alpha = 0; \\ \sum F_y = 0; & \quad -S_{1H} \sin \alpha - S_{2H} = 0. \end{aligned}$$

откуда определяем

$$S_{1H} = S_1 = -2,5 \text{ кН (стержень сжат)} \text{ и } S_{2H} = S_2 = 1,5 \text{ кН.}$$

Для узла  $E$

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0; & \quad S_{1E} \cos \alpha + S_{3E} = 0; \\ \sum F_y = 0; & \quad S_{1E} \sin \alpha - P_3 - S_{4E} = 0, \end{aligned}$$

откуда находим

$$S_{3E} = S_3 = 2,0 \text{ кН, } S_{4E} = S_4 = -7,5 \text{ кН (стержень сжат).}$$

Затем составляем уравнения равновесия сил, приложенных к узлам  $F, C, D, B, A$ .

Для проверки расчета полезно для каждого узла построить многоугольник сил (рис. III-5).

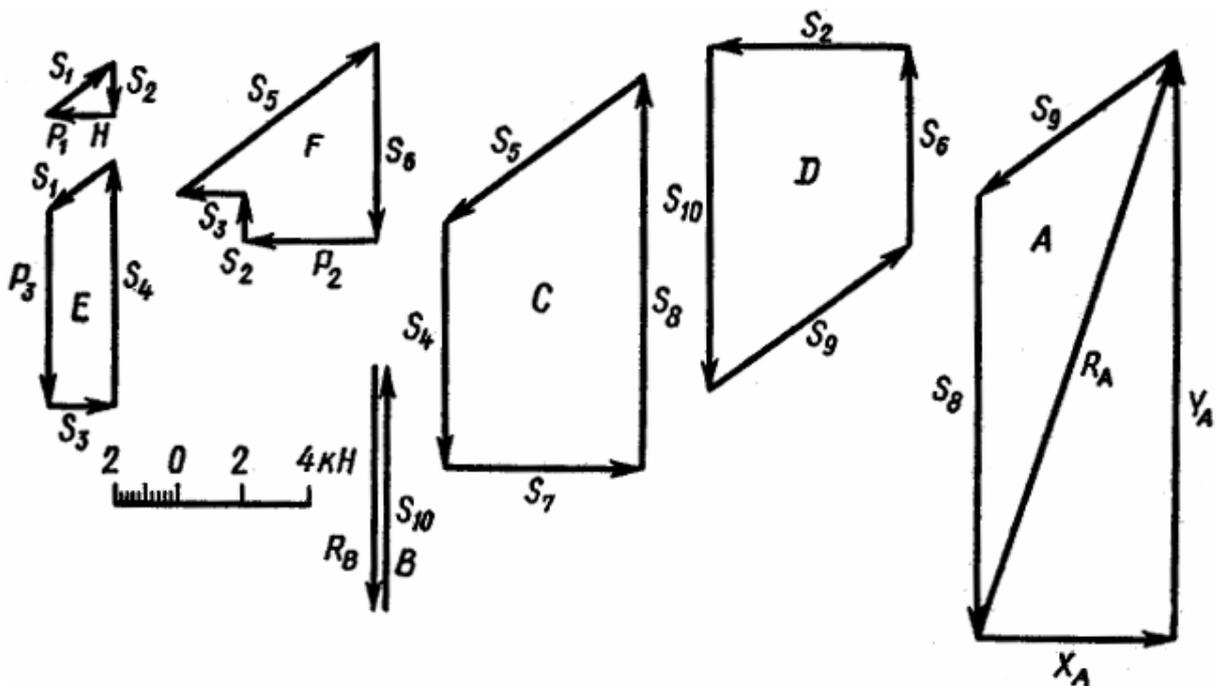


Рис. III-5. Силловые многоугольники, построенные для каждого узла фермы

Для узла  $H$  откладываем в масштабе силу  $P_1$  и проводим через конец и начало этого вектора направления реакций  $S_{1H}$  и  $S_{2H}$  до их взаимного пересечения. Стрелки векторов  $\vec{S}_{1H}$  и  $\vec{S}_{2H}$  ставим так, чтобы силовой треугольник был замкнут. Для этого на рис. III-5 стрелку  $\vec{S}_{1H}$  пришлось направить в сторону, противоположную показанной на рис. III-4, – это соответствует знаку минус в аналитическом решении. При построении многоугольника сил для узла  $E$  откладываем силы  $\vec{P}_3$  и  $\vec{S}_{1E}$  (направляется противоположно  $\vec{S}_{1H}$ ) и проводим до взаимного пересечения направления реакций  $S_{3E}$  и  $S_{4E}$  и т. д. Измеренные в масштабе построения реакции стержней должны мало отличаться от найденных аналитически.

Приводим таблицу сил в стержнях (табл. III-2).

Таблица III-2

**Таблица сил в стержнях фермы**

Номер стержня	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Знак силы	-	+	+	-	-	+	+	-	-	+	
Сила, кН	2,5	1,5	2,0	7,5	7,5	6,0	6,0	12,0	7,5	10,5	0

## **Задание 2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ**

Задано сечение, состоящее из листов (прямоугольников) и прокатных профилей. Требуется:

- определить положение центра тяжести;
- определить осевые и центробежные моменты инерции относительно центральных осей;
- определить положение главных центральных осей;
- вычислить значения главных центральных моментов инерции;
- вычертить сечение в удобном масштабе и показать все необходимые оси и размеры.

Схемы сечений приведены на рис. III-6, числовые данные – в табл. III-3.

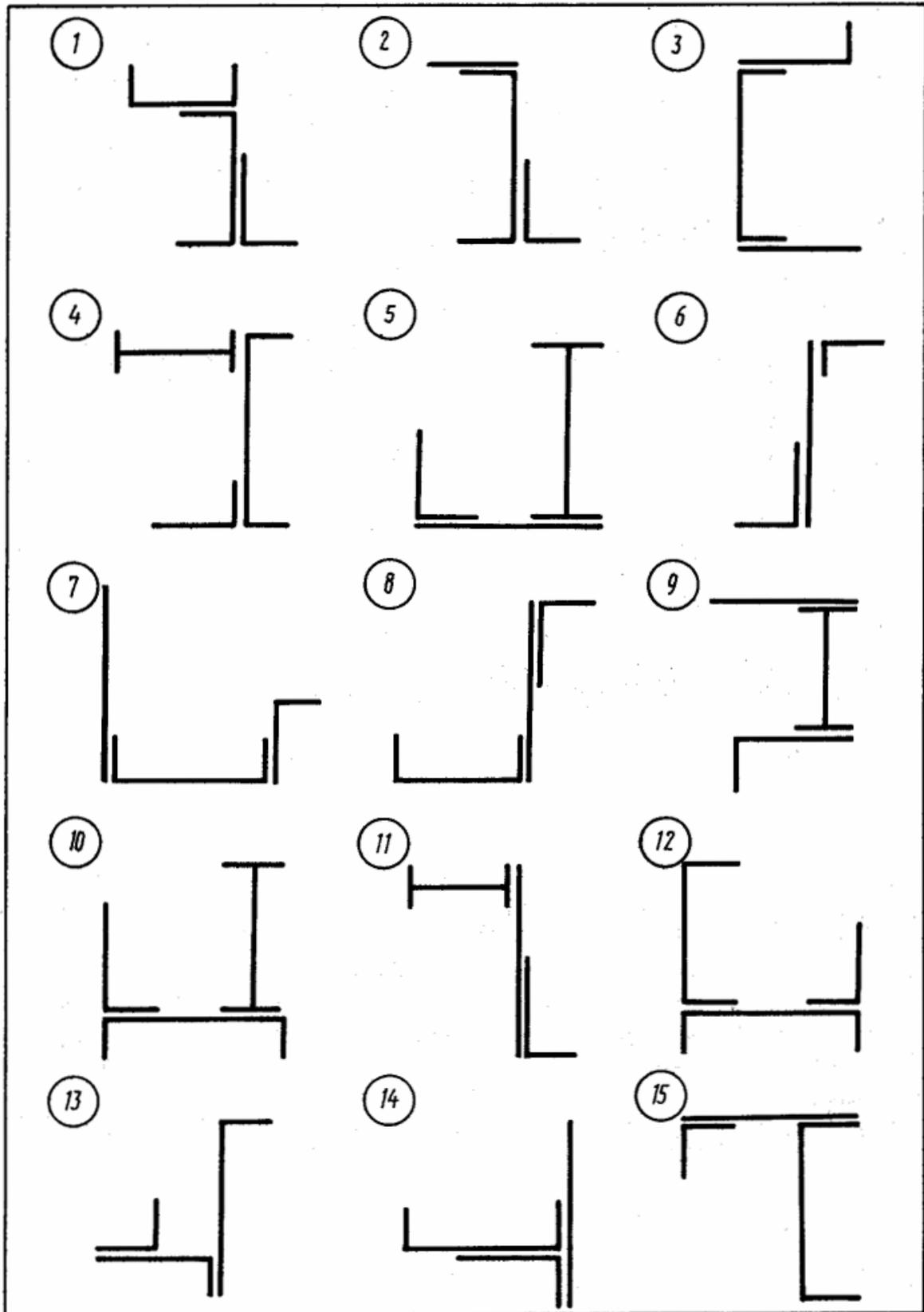


Рис. III-6. Схемы плоских сечений (см. также с. 231)

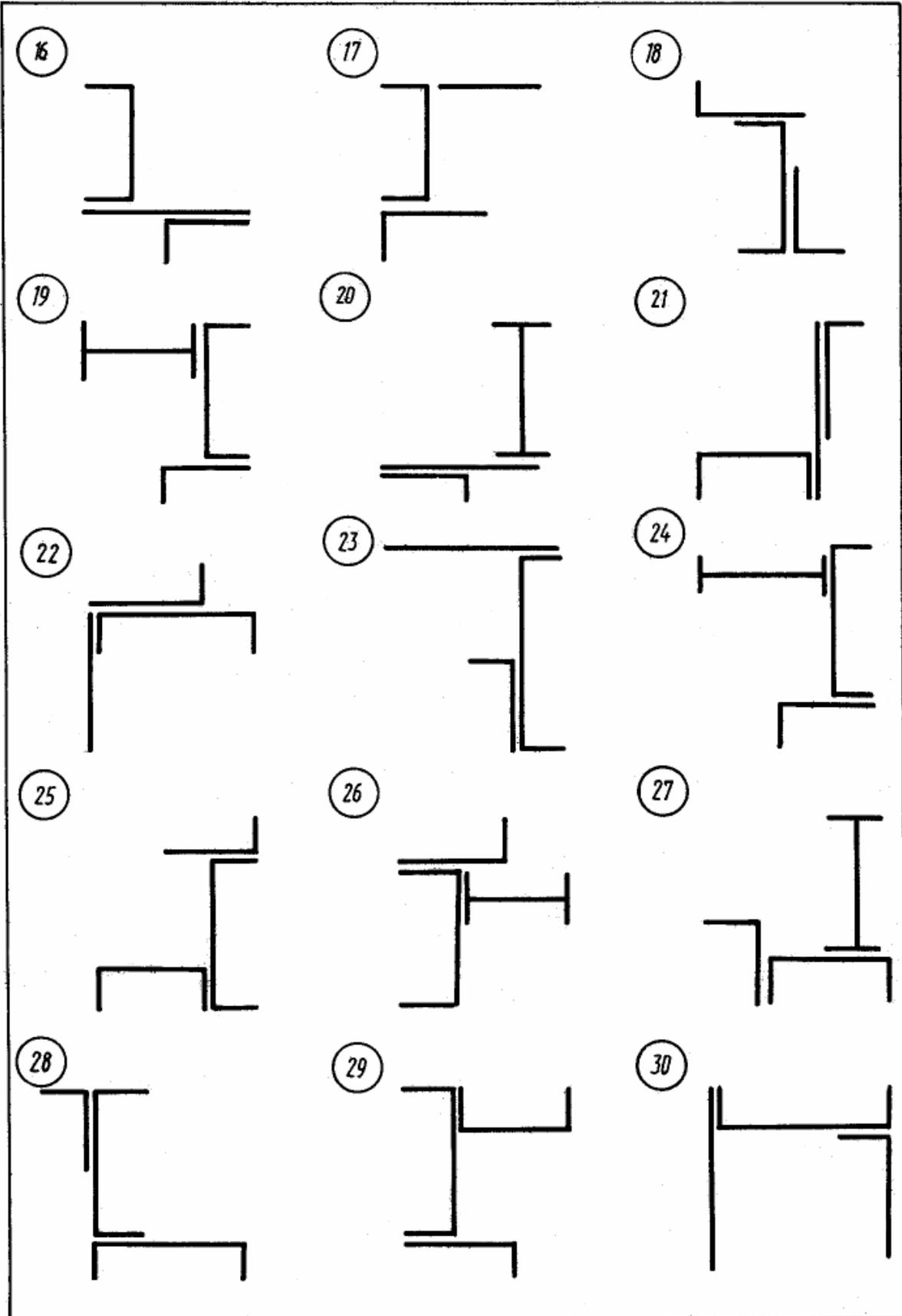


Рис. III-6. Окончание

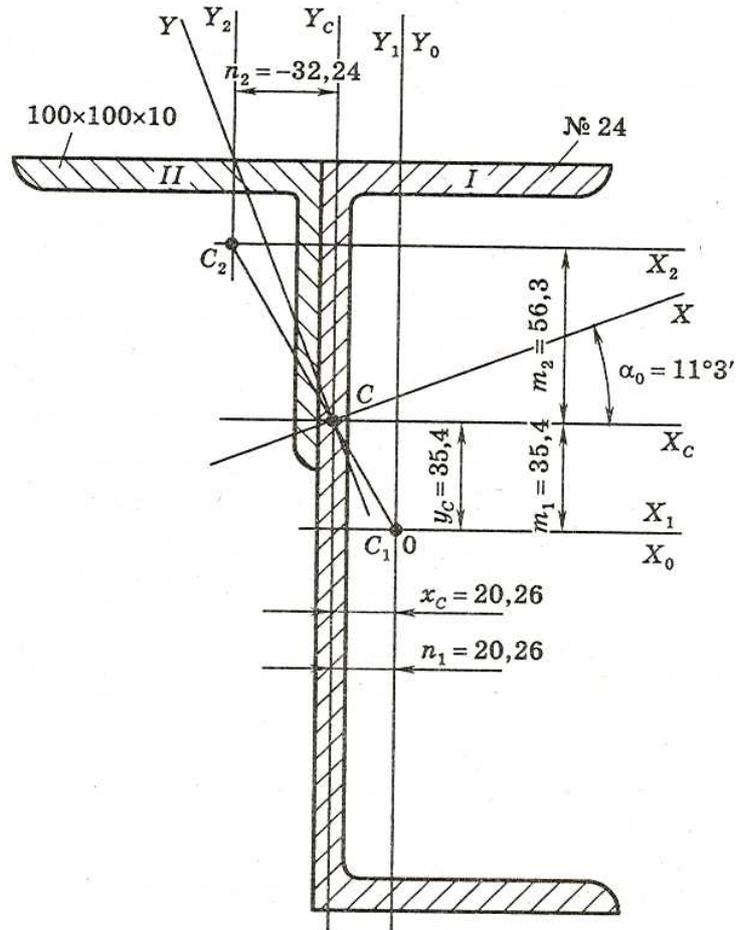
Числовые данные к заданию 2

Номер варианта	Размеры				Номер	
	листа, см		уголка, мм		двутавра ГОСТ 8239-89	швеллера ГОСТ 8240-89
	$h$	$b$	Равнобокого ГОСТ 8509-86	неравнобокого ГОСТ 8510-86		
1	16,0	2,0	80×80×8	-	18	22
2	16,0	3,0	80×80×7	-	18	20
3	16,0	4,0	80×80×6	-	16	22
4	18,0	2,0	-	100×63×6	20	22
5	18,0	2,5	-	110×70×7	16	22
6	18,0	3,5	-	90×56×6	18	22
7	20,0	2,2	110×110×7	-	20	24
8	20,0	1,8	-	110×70×7	18	22
9	20,0	1,6	100×100×8	-	18	20
10	22,0	1,4	-	125×80×10	22	24
11	22,0	1,2	-	125×80×12	30	24
12	22,0	2,0	-	125×80×8	24	20
13	24,0	2,0	125×125×12	-	27	24
14	24,0	1,8	125×125×16	-	24	27
15	24,0	2,2	125×125×10	-	27	18a
16	26,0	2,4	-	100×63×10	30	22
17	26,0	2,8	-	110×70×7	33	27
18	26,0	3,2	-	160×100×12	36	30
19	28,0	2,8	200×200×16	-	27	30
20	28,0	3,2	200×200×20	-	30	30
21	28,0	3,6	200×200×25	-	36	27
22	14,0	1,8	-	32×20×3	10	8
23	14,0	2,2	-	40×25×5	16	12
24	14,0	2,8	-	50×32×4	14	16
25	12,0	1,6	50×50×5	-	10	8
26	12,0	2,0	80×80×8	-	12	10
27	12,0	2,4	63×63×6	-	14	12
28	10,0	2,0	-	25×16×3	10	6,5
29	10,0	2,5	-	40×25×5	12	8
30	10,0	3,0	-	56×36×4	14	10

**Пример выполнения задания 2.** Для сечения, состоящего из швеллера и равнобокого уголка, рис. III-7 требуется:

- 1) определить положение центра тяжести;
- 2) найти осевые и центробежные моменты инерции относительно осей  $X_C$  и  $Y_C$ , проходящих через центр тяжести;
- 3) определить направление главных центральных осей;
- 4) найти главные центральные моменты инерции.

Решение.



Сечение состоит из двух элементов (*I* и *II*). Через центры тяжести каждого элемента проводим оси координат ( $X_1, Y_1, X_2, Y_2$ ) и выписываем все данные, которые потребуются при расчетах.

Элемент *I* (швеллер № 24 ГОСТ 8240-89):  $A_1 = 30,6 \text{ см}^2$ ,  $I_{x_1} = 2900 \text{ см}^4$ ,  $I_{y_1} = 208 \text{ см}^4$ ,  $I_{x_1 y_1} = 0$ ,  $z_{01} = 2,42 \text{ см}$ ,  $h_1 = 24 \text{ см}$ .

Элемент *II* (равнобокий уголок  $100 \times 100 \times 10$  ГОСТ 8509-86):  $A_2 = 19,24 \text{ см}^2$ ,  $I_{x_2} = I_{y_2} = 178,95 \text{ см}^4$ ,  $I_{x_2 y_2} = 110 \text{ см}^4$ ,  $z_{02} = 2,83 \text{ см}$ .

1. Определяем координаты центра тяжести всей фигуры относительно осей  $X_0$  и  $Y_0$ , совпадающих с осями элемента *I*  $X_1$  и  $Y_1$ :

$$X_C = \frac{S_y}{A} = \frac{A_1 x_1 + A_2 x_2}{A_1 + A_2} = \frac{0 + 19,24(-2,42 - 2,83)}{30,6 + 19,24} = -2,026 \text{ см};$$

$$Y_C = \frac{S_x}{A} = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2}{A_1 + A_2} = \frac{0 + 19,24\left(\frac{h_1}{2} - z_{02}\right)}{30,6 + 19,24} = \frac{0 + 19,24(12 - 2,83)}{30,6 + 19,24} = 3,54 \text{ см}.$$

Наносим положение центра тяжести (точка  $C$ ) на рис. III-7. Точка  $C$  должна лежать на линии, соединяющей центры тяжести элементов  $I$  и  $II$ , т.е. на линии  $C_1C_2$ . Проводим через точку  $C$  центральные для всего сечения оси  $X_C$  и  $Y_C$ , параллельные осям  $X_0$  и  $Y_0$ .

Координаты центров тяжести элементов  $I$  и  $II$  (точки  $C_1$  и  $C_2$ ) относительно центральных осей  $X_C$  и  $Y_C$  имеют следующие значения:

$$m_1 = -3,54 \text{ см}; \quad n_1 = +2,026 \text{ см};$$

$$m_2 = 12 - (2,83 + 3,54) = +5,63 \text{ см}; \quad n_2 = -(2,83 + 2,42 - 2,026) = -3,224 \text{ см}.$$

Находим статические моменты сечения относительно центральных осей  $X_C$  и  $Y_C$ :

$$S_{x_c} = A_1 m_1 + A_2 m_2 = 30,6(-3,54) + 19,24 \cdot 5,63 = 0;$$

$$S_{y_c} = A_1 n_1 + A_2 n_2 = 30,6 \cdot 2,026 + 19,24(-3,224) = 0,08 \text{ см}.$$

Полученные значения статических моментов  $S_{x_c}$  и  $S_{y_c}$  близки к нулю, что свидетельствует о том, что координаты центра тяжести всего сечения определены правильно.

**2.** Вычисляем осевые и центробежный моменты инерции заданного сечения относительно центральных осей:

$$\begin{aligned} I_{x_C} &= I_{x_1} + A_1 m_1^2 + I_{x_2} + A_2 m_2^2 = \\ &= 2900 + 30,6(-3,54)^2 + 178,95 + 19,24 \cdot 5,63^2 = 4072 \text{ см}^4; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{y_C} &= I_{y_1} + A_1 n_1^2 + I_{y_2} + A_2 n_2^2 = \\ &= 208 + 30,6 \cdot 2,026^2 + 178,95 + 19,24(-3,224)^2 = 714 \text{ см}^4; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{x_C y_C} &= I_{x_1 y_1} + A_1 m_1 n_1 + I_{x_2 y_2} + A_2 m_2 n_2 = \\ &= 0 + 30,6(-3,54) \cdot 2,026 + 110 + 19,24 \cdot 5,63(-3,224) = -680 \text{ см}^4. \end{aligned}$$

**3.** Определяем направление главных осей. Вычисляем:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{-2I_{x_C y_C}}{I_{x_C} - I_{y_C}} = \frac{-2(-680)}{4072 - 714} = 0,405;$$

$$2\alpha_0 = 22^\circ 6'; \quad \alpha_0 = 11^\circ 3'.$$

В нашем примере  $I_{x_C} > I_{y_C}$  и  $\alpha_0$  дает направление главной оси  $X$  с максимальным моментом инерции (рис. III-7). Так как значение  $\alpha_0 > 0$ , то поворот оси  $X_C$  до совпадения с осью  $X$  выполняется против хода часовой стрелки.

4. Вычисляем главные центральные моменты инерции:

$$I_{\begin{matrix} \max \\ \min \end{matrix}} = \frac{I_{x_C} + I_{y_C}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(I_{x_C} - I_{y_C})^2 + 4I_{x_C y_C}^2} =$$

$$= \frac{4072 + 714}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(4072 - 714)^2 + 4 \cdot (-680)^2} = 2393 \pm 1811,5;$$

$$I_{\max} = I_X = 4204,5 \text{ см}^4; \quad I_{\min} = I_Y = 581,5 \text{ см}^4.$$

Центробежный момент инерции всего сечения относительно центральных осей  $X_C$  и  $Y_C$ :

$$I_{x_C y_C} = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{2} \sin(-2\alpha_0) = \frac{4204,5 - 581,5}{2} \sin(-22^\circ 6') =$$

$$= \frac{4204,5 - 581,5}{2} (-0,374) = -680 \text{ см}^4.$$

Сравнение величины  $I_{x_C y_C}$  с полученной ранее позволяет считать, что главные центральные моменты инерции  $I_X$  и  $I_Y$  и положения главных центральных осей  $X$  и  $Y$  найдены верно.

В качестве проверки правильности определения моментов инерции может служить и следующее равенство:

$$I_{\max} + I_{\min} = I_{x_C} + I_{y_C};$$

$$4204,5 + 581,5 = 4072 + 714.$$

### Задание 3. РАСЧЕТ КОЛОННЫ НА ВНЕЦЕНТРЕННОЕ СЖАТИЕ

Жесткая колонна заданного поперечного сечения сжимается силой  $F$ , параллельной оси колонны и приложенной в точке, показанной на схеме сечения. Требуется:

- определить положение центра тяжести;
- определить геометрические характеристики поперечного сечения;

- найти положение нулевой линии;
- вычислить наибольшие сжимающее и растягивающее напряжения и построить эпюру напряжений.

Схемы поперечных сечений колонны приведены на рис. III-8, числовые данные представлены в табл. III-4.

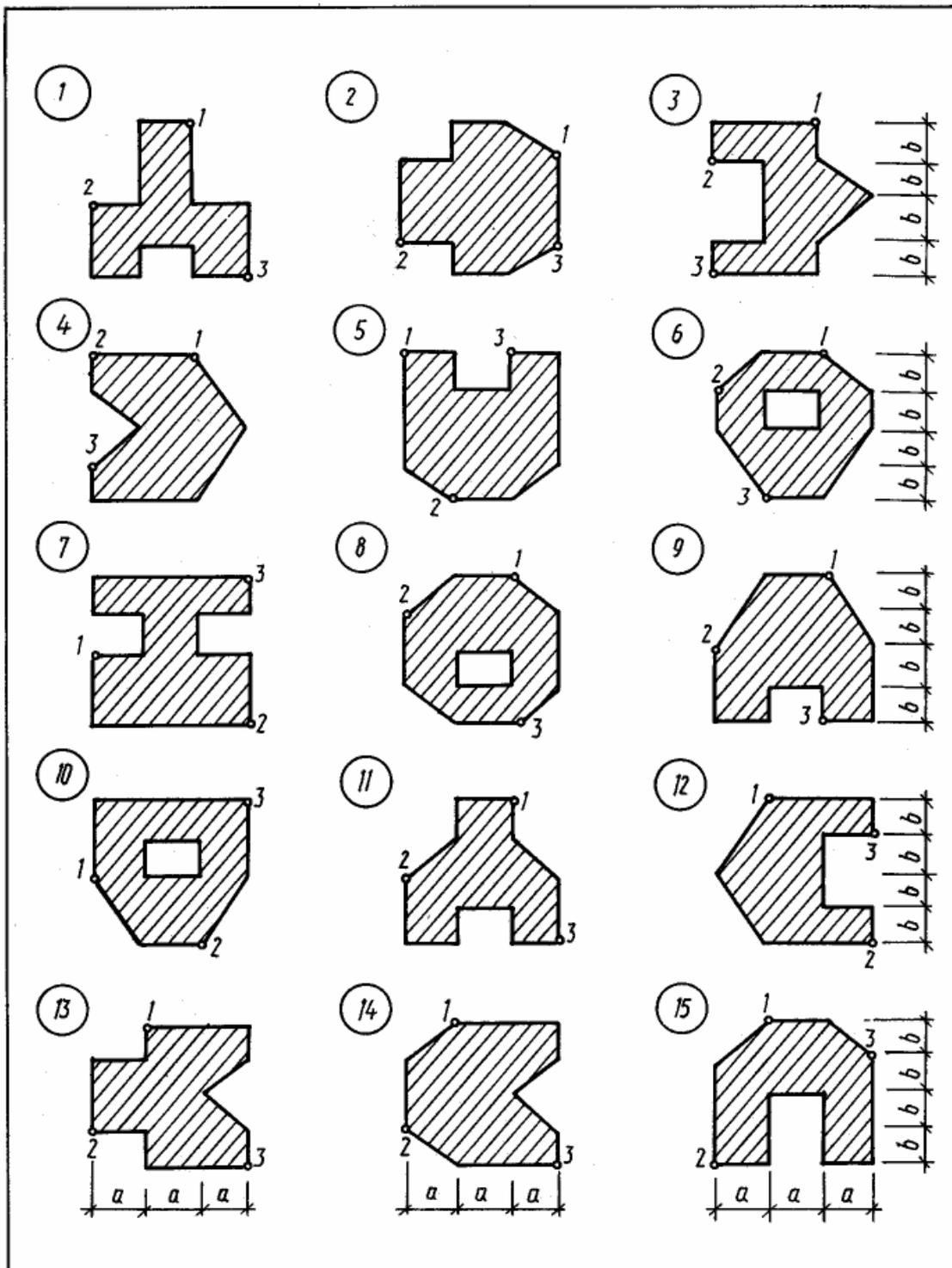


Рис. III-8 . Схема поперечного сечения колонны (см. также с. 235)

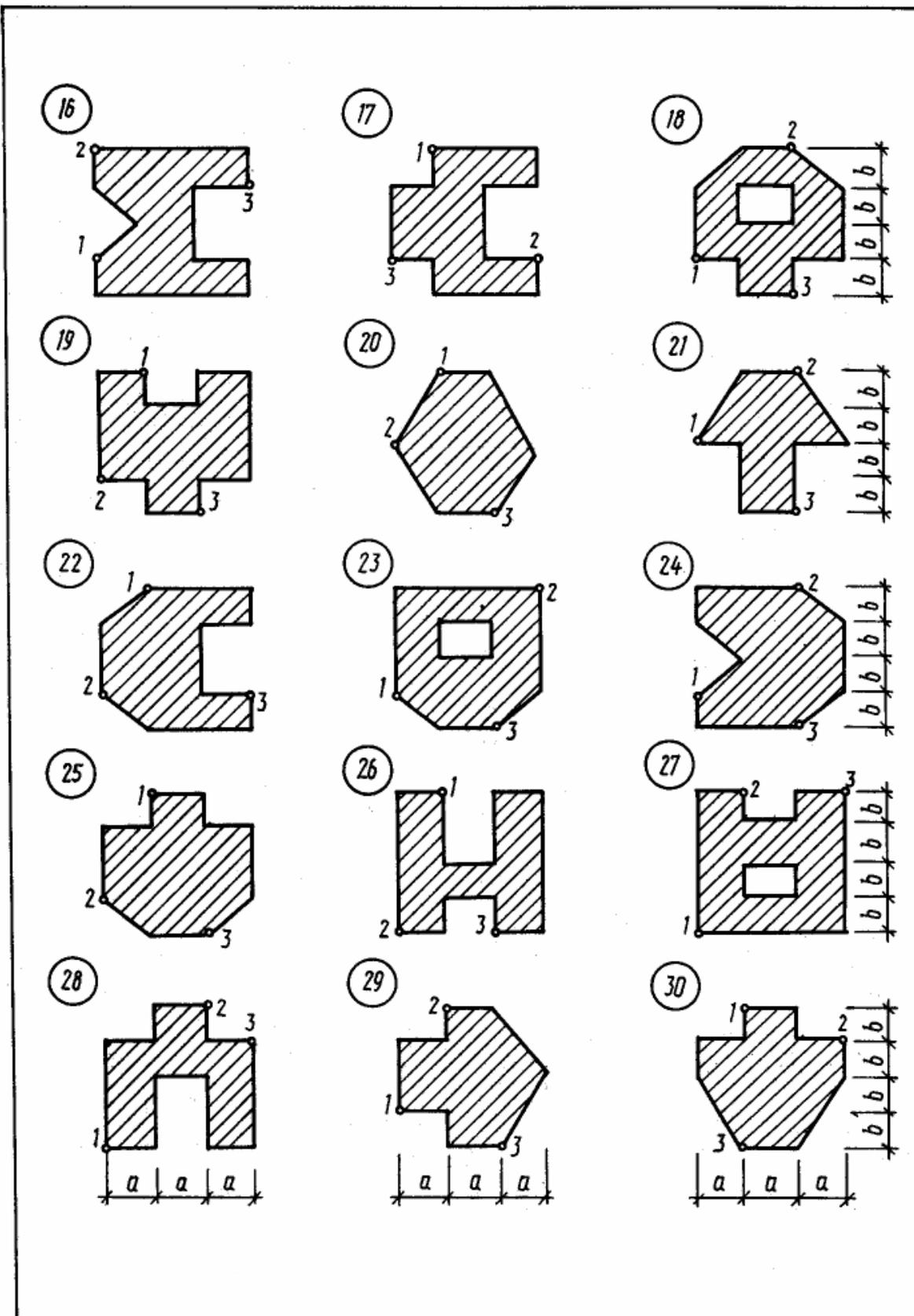


Рис. III-8. Окончание

Числовые данные к заданию 3

Номер варианта	$F$ , кН	Размеры сечения, см		Точка приложения силы
		$a$	$b$	
1	100,0	20	12	1
2	125,0	24	12	2
3	140,0	28	12	3
4	160,0	30	14	1
5	175,0	32	14	2
6	200,0	36	14	3
7	220,0	40	16	1
8	240,0	40	18	2
9	260,0	40	20	3
10	280,0	36	20	1
11	300,0	36	24	2
12	320,0	36	28	3
13	340,0	40	28	1
14	360,0	40	30	2
15	380,0	40	32	3
16	110,0	24	14	1
17	130,0	24	16	2
18	150,0	24	20	3
19	170,0	28	16	2
20	190,0	28	18	3
21	210,0	28	22	1
22	230,0	30	22	2
23	250,0	30	24	3
24	270,0	30	26	1
25	290,0	32	26	2
26	310,0	32	28	3
27	330,0	32	20	1
28	350,0	36	22	2
29	115,0	36	26	3
30	120,0	36	18	1

**Пример выполнения задания 3.** Короткая колонна (рис. III-9) сжимается продольной силой  $F$ , приложенной в точке  $B$ . Определить положение нулевой линии и построить эпюру нормальных напряжений в поперечном сечении колонны.

$$F = 200 \text{ кН}; a = 40 \text{ см}; b = 50 \text{ см}; x_F = -14 \text{ см}; y_F = 15 \text{ см}.$$

**Решение.**

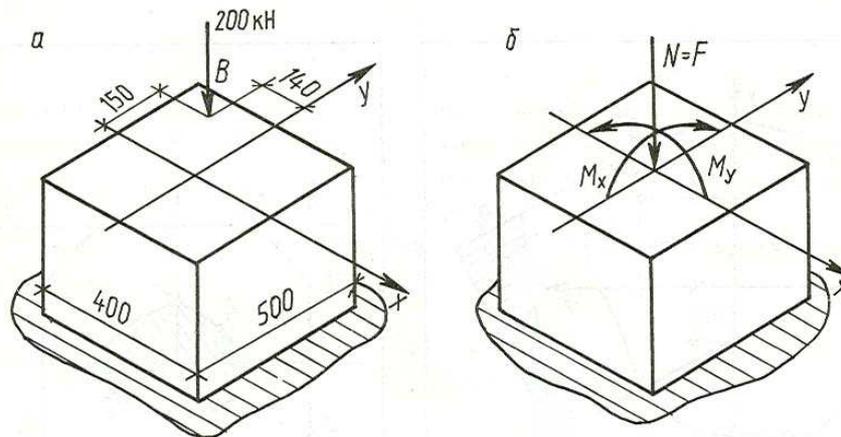


Рис. III-9. Короткая колонна: а – схема приложения нагрузки; б – усилия в поперечном сечении колонны

1. Определяем геометрические характеристики поперечного сечения колонны и квадраты главных радиусов инерции:

$$A = a \cdot b = 40 \cdot 50 = 2000 \text{ см}^2;$$

$$I_x = \frac{a \cdot b^3}{12} = \frac{40 \cdot 50^3}{12} = 416666,6 \text{ см}^4;$$

$$I_y = \frac{a^3 \cdot b}{12} = \frac{40^3 \cdot 50}{12} = 266666,6 \text{ см}^4;$$

$$i_x^2 = \frac{I_x}{A} = \frac{416666,6}{2000} = 208 \text{ см}^2;$$

$$i_y^2 = \frac{I_y}{A} = \frac{266666,6}{2000} = 133 \text{ см}^2.$$

2. Находим положение нулевой линии и с этой целью определяем длину отрезков, отсекаемых нулевой линией на главных осях инерции X и Y:

$$x_0 = -\frac{i_y^2}{x_F} = -\frac{133}{-14} = 9,5 \text{ см};$$

$$y_0 = -\frac{i_x^2}{y_F} = -\frac{208}{15} = -13,9 \text{ см}.$$

Положение нулевой линии показано на рис. III-10.

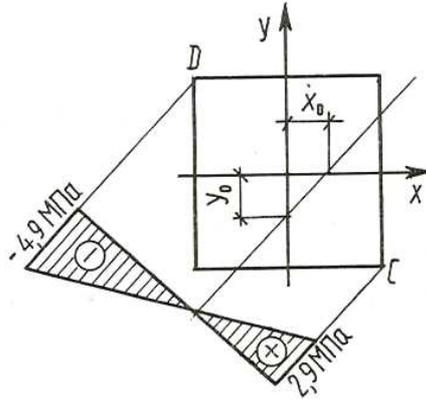


Рис. III-10. Положение нулевой линии и эпюра нормальных напряжений

3. Для построения эпюры нормальных напряжений найдем точки, которые наиболее удалены от нулевой линии:  $D(-25; 25)$  и  $C(20; -25)$ .

Нормальные напряжения в точках  $D$  и  $C$  вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned}\sigma_D &= -\frac{N}{A} \left( 1 + \frac{y_F \cdot y}{i_x^2} + \frac{x_F \cdot x}{i_y^2} \right) = \\ &= -\frac{200 \cdot 10^3}{0,2} \left( 1 + \frac{15 \cdot 10^{-2} \cdot 25 \cdot 10^{-2}}{208 \cdot 10^{-4}} + \frac{(-14) \cdot 10^{-2} \cdot (-20) \cdot 10^{-2}}{133 \cdot 10^{-4}} \right) = \\ &= -4,9 \cdot 10^6 \text{ Па} = -4,9 \text{ МПа}; \\ \sigma_C &= -\frac{200 \cdot 10^3}{0,2} \left( 1 + \frac{15 \cdot 10^{-2} \cdot (-25) \cdot 10^{-2}}{208 \cdot 10^{-4}} + \frac{(-14) \cdot 10^{-2} \cdot 20 \cdot 10^{-2}}{133 \cdot 10^{-4}} \right) = \\ &= 2,9 \cdot 10^6 \text{ Па} = 2,9 \text{ МПа}.\end{aligned}$$

Эпюра нормальных напряжений приведена на рис. III-10.

## **ПРИМЕРНЫЙ ПЕРЕЧЕНЬ ВОПРОСОВ К ИТОГОВОМУ КОНТРОЛЮ ЗНАНИЙ**

1. Краткие исторические сведения о механике.
2. Основные понятия и аксиомы статики.
3. Виды связей и их реакции.
4. Геометрические условия равновесия плоской системы сходящихся сил
5. Равновесие трех непараллельных сил.
6. Аналитическое условие равновесия плоской системы сходящихся сил.
7. Момент силы относительно точки на плоскости.
8. Момент пары сил на плоскости.
9. Эквивалентность пар.
10. Сложение пар, лежащих в одной плоскости.
11. Условие равновесия плоской системы пар.
12. Приведение силы к данной точке.
13. Равнодействующая плоской системы сил.
14. Теорема Вариньона.
15. Частные случаи приведения плоской системы сил.
16. Условия равновесия произвольной системы сил.
17. Формы уравнений равновесия.
18. Силовой многоугольник. Вевочный многоугольник.
19. Графическое определение равнодействующей для плоской произвольной системы сил.
20. Момент силы относительно оси.
21. Приведение произвольной пространственной системы сил к заданному центру.
22. Частные случаи приведения произвольной пространственной системы сил.
23. Условия равновесия произвольной пространственной системы сил.
24. Система параллельных сил.
25. Теорема Вариньона о моменте равнодействующей относительно оси.
26. Центр системы параллельных сил.
27. Сила тяжести. Центр тяжести.
28. Статический момент площади плоской фигуры относительно оси.
29. Методы нахождения координат центра тяжести.
30. Положение центров тяжести простых геометрических фигур и линий.
31. Положение центров тяжести фигур сложной формы.

32. Введение в кинематику.
33. Способы задания движения точки.
34. Скорость точки.
35. Ускорение точки.
36. Плоское движение точки.
37. Простейшие виды движения твердого тела.
38. Основные положения динамики.
39. Законы динамики.
40. Принцип Д'Аламбера.
41. Внешние силы и линейные и угловые деформации.
42. Основные свойства материалов и допущения и ограничения, принятые в сопротивлении материалов.
43. Внутренние силовые факторы и метод сечений.
44. Механические напряжения.
45. Напряжения при растяжении – сжатии.
46. Продольные и поперечные деформации.
47. Закон Гука при растяжении – сжатии.
48. Перемещения при растяжении – сжатии.
49. Влияние собственного веса бруса при растяжении.
50. Напряжения в наклонных сечениях бруса.
51. Закон парности касательных напряжений.
52. Диаграмма растяжения и диаграмма сжатия.
53. Характеристики прочности и пластичности.
54. Понятие о ползучести и релаксации.
55. Понятие о напряженном состоянии в точке тела.
56. Виды напряженных состояний и главные напряжения.
57. Закон Гука при чистом сдвиге.
58. Зависимость между модулем Юнга, модулем сдвига и коэффициентом Пуассона.
59. Практические расчеты на срез и смятие.
60. Моменты инерции сечений.
61. Изменение моментов инерции при параллельном переносе и повороте осей.
62. Главные оси и главные моменты инерции.
63. Крутящие моменты и построение их эпюр.
64. Напряжения и деформации при кручении бруса круглого поперечного сечения.

65. Расчет на прочность и жесткость при кручении.
66. Изгиб. Основные понятия.
67. Построение эпюр изгибающих моментов и поперечных сил при изгибе балок.
68. Дифференциальные зависимости между изгибающим моментом, поперечной силой и интенсивностью распределенной нагрузки.
69. Нормальные и касательные напряжения при изгибе.
70. Главные нормальные напряжения при изгибе балки и максимальные касательные.
71. Расчет балок на прочность.
72. Перемещения линейные и угловые при изгибе. Дифференциальное уравнение изогнутой оси балки.
73. Расчет балок на жесткость.
74. Статически неопределимые системы при изгибе.
75. Понятие о теориях прочности.
76. Косой изгиб.
77. Внецентренное сжатие (растяжение).
78. Расчет балок на прочность при сложном сопротивлении.
79. Устойчивость центрально-сжатых стержней. Общие положения.
80. Формула Эйлера. Влияние способа закрепления концов стержня на критическую силу.
81. Пределы применимости формулы Эйлера.
82. Расчет на устойчивость.
83. Понятие о действии динамических нагрузок.
84. Расчет троса при подъеме груза.
85. Приближенный способ расчета на удар.

## СПИСОК УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ, ИСПОЛЬЗУЕМЫХ В УЧЕБНОЙ ЛИТЕРАТУРЕ

### *Латинский алфавит*

- $A$  – площадь поперечного сечения брутто  
 $A_{net}$  – площадь поперечного сечения нетто  
 $A_{con}$  – площадь смятия  
 $b$  – ширина элемента  
 $C$  – центр тяжести сечения  
 $D_{xy}$  – центробежный момент инерции  
 $E$  – модуль продольной упругости  
 $e$  – индекс внешних сил  
 $F$  – модуль силы  
 $F_{cr}$  – критическая сила  
 $f_{tot}$  – суммарный (полный) прогиб  
 $G$  – модуль сдвига  
 $h$  – высота элемента  
 $J_x, J_y$  – осевые моменты инерции  
 $J_p$  – полярный момент инерции  
 $J_{max}, J_{min}$  – главные моменты инерции сечения  
 $i$  – индекс внутренних сил  
 $i_x, i_y$  – радиусы инерции сечения  
 $l$  – длина стержня  
 $M, m$  – сосредоточенный изгибающий момент (внешний)  
 $M_x, M_y$  – изгибающий момент относительно соответствующей оси (внутренний)  
 $M_{tot}$  – суммарный изгибающий момент  
 $M_{red}$  – эквивалентный (приведенный) момент  
 $N$  – продольная сила  
 $n$  – частота вращения  
 $P$  – мощность  
 $p$  – давление (нагрузка, распределенная по площади)  
 $Q$  – поперечная сила  
 $q$  – погонная (распределенная по длине) нагрузка  
 $S$  – статический момент площади сечения

$S'$  – статический момент площади отсеченной части сечения относительно его нейтральной оси  
 $T_e$  – скручивающий момент (внешний)  
 $T$  – крутящий момент (внутренний)  
 $W_p$  – полярный момент сопротивления  
 $W_x, W_y$  – полярный момент сопротивления относительно соответствующей оси  
 $X$  – горизонтальная ось  
 $Y$  – вертикальная ось  
 $y$  – прогиб, вертикальное перемещение центра тяжести поперечного сечения балки  
 $Z$  – продольная ось

### *Греческий алфавит*

$\alpha, \beta$  – угол между осями, линиями, направлениями  
 $\gamma$  – угол сдвига  
 $\Delta l$  – абсолютная упругая деформация  
 $\Delta l_r$  – абсолютная остаточная деформация  
 $\varepsilon$  – относительная продольная деформация  
 $\varepsilon_r$  – относительное остаточное удлинение при разрыве  
 $\varepsilon_t$  – относительная поперечная деформация  
 $\omega$  – угловая скорость  
 $\lambda$  – перемещение поперечного сечения при растяжении  
 $\theta$  – угол поворота сечения балки  
 $\varphi$  – угол закручивания бруса  
 $\mu$  – коэффициент Пуассона  
 $\sigma_e$  – предел упругости материала  
 $\sigma_t$  – предел текучести  
 $\sigma_u$  – предел прочности (временное сопротивление)  
 $\sigma_{ut}$  – предел прочности при растяжении  
 $\sigma_{uc}$  – предел прочности при сжатии  
 $\sigma_{adm}$  – допускаемое напряжение  
 $\sigma_{dan}$  – предельное (опасное) напряжение  
 $\sigma$  – нормальное напряжение  
 $\tau$  – касательное напряжение

## ЛИТЕРАТУРА

### *теоретический курс*

1. Завистовский, В.Э. Техническая механика: учеб. пособие / В.Э. Завистовский, Н.М. Захаров. – Мн.: Амалфея, 2000. – 416 с.
2. Эрдеди, А.А. Техническая механика: Теоретическая механика. Сопротивление материалов / А.А. Эрдеди, Ю.А. Медведев, Н.А. Эрдеди. – М.: Высш. шк., 1991. – 304 с.
3. Попов, М.В. Теоретическая механика: Краткий курс / М.В. Попов. – М.: Наука, 1986. – 336 с.
4. Тарг, С.М. Краткий курс теоретической механики / С.М. Тарг. – М.: Высш. шк., 2002. – 416 с.
5. Степин, П.А. Сопротивление материалов / П.А. Степин. – М.: Высш. шк., 1988. – 367 с.
6. Тимофеев, С.И. Сопротивление материалов. Серия «Шпаргалки» / С.И. Тимофеев. – Ростов н/Д: Феникс, 2004. – 192 с.
7. Гольдин, И.И. Основные сведения по теоретической механике: учеб. пособие / И.И. Гольдин. – М.: Высш. шк., 1980. – 80 с.
8. Саргсян, А.Е. Сопротивление материалов, теория упругости и пластичности / А.Е. Саргсян. – М.: Высш. шк., 2000. – 286 с.
9. Прикладная и теоретическая механика: лабораторный практикум / сост.: В.Э. Завистовский, С.В. Якубовская, Л.Г. Кроман. – Новополюк: ПГУ, 2006. – 104 с.
10. Дарков, А.В. Сопротивление материалов: учеб. / А.Ф. Смирнов [и др.]. – М.: Высш. шк., 1975. – 480 с.
11. Смирнов, А.Ф. Сопротивление материалов: учеб. / А.В. Дарков, Г.С. Шпиро. – М.: Высш. шк., 1975. – 654 с.
12. Ицкович, Г.М. Сопротивление материалов: учеб. / Г.М. Ицкович. – М.: Высш. шк., 1970. – 440 с.

### *практические занятия*

13. Будник, Ф.Г. Сборник задач по теоретической механике / Ф.Г. Будник, Ю.М. Зингерман, Е.И. Селенский. – М.: Высш. шк., 1987. – 176 с.
14. Сборник задач по сопротивлению материалов / А.В. Александров [и др.]. – М.: Стройиздат, 1977. – 335 с.
15. Пособие к решению задач по сопротивлению материалов / И.Н. Миролюбов [и др.]. – М.: Высш. шк., 1974. – 392 с.
16. Сборник задач по теоретической механике с решениями. Статика. Кинематика: учеб. пособие. В 2 ч. Ч. 1 / В.А. Акимов [и др.]. – Мн.: Технопринт, 2001. – 364 с.

17. Сборник задач по теоретической механике с решениями. Статика. Кинематика: учеб. пособие. В 2 ч. Ч. 2 / В.А. Акимов [и др.]. – Мн.: Технопринт, 2001. – 575 с.
18. Бать, М.И. Теоретическая механика в примерах и задачах. В 2 т. Т. 1: Статика и кинематика / М.И. Бать, Г.Ю. Джанелидзе, А.С. Кельзон. – М.: Наука, 1990. – 670 с.

*расчетно-графическая работа*

19. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике / А.А. Яблонский [и др.]. – М.: Высш. шк., 1985. – 367 с.
20. Винокуров, Е.Ф. Сопротивление материалов: Расчетно-проектировочные работы: учеб. пособие / Е.Ф. Винокуров, А.Г. Петрович, Л.И. Шевчук. – Мн.: Высш. шк., 1987. – 227 с.
21. Соколовская В.П. Механика. Практикум по решению задач: учеб. пособие / В.П. Соколовская. – Мн.: Новое знание, 2006. – 316 с.
22. Траймак, Н.С. Механика материалов: учеб. пособие / Н.С. Траймак [и др.]. – Мн.: УП «Технопринт», 2002. – 194 с.
23. Любошиц, М.И. Справочник по сопротивлению материалов / М.И. Любошиц, Г.М. Ицкович. – М.: Высш. шк., 1969. – 464 с.

*Учебное издание*

ЗАВИСТОВСКИЙ Владимир Эдуардович

## ТЕХНИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС  
для студентов специальности 1-69 01 01 «Архитектура»

Редактор *О.П. Михайлова*

Дизайн обложки *И.С. Васильевой*

Подписано в печать 04.03.08. Формат 60×84 1/16. Гарнитура Таймс. Бумага офсетная.  
Печать трафаретная. Усл. печ. л. 14,39. Уч.-изд. л. 13,96. Тираж 60 экз. Заказ № 353.

Издатель и полиграфическое исполнение:  
Учреждение образования «Полоцкий государственный университет»

ЛИ 02330/0133020 от 30.04.04      ЛП № 02330/0133128 от 27.05.04

211440 г. Новополоцк, ул. Блохина, 29