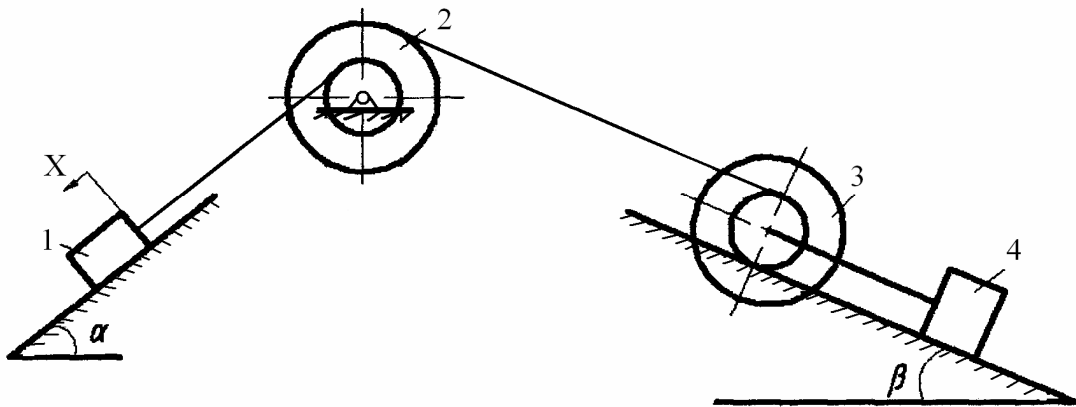


В. О. Приятельчук, В. І. Риндюк, В. О. Федотов



**ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА
АНАЛІТИЧНА МЕХАНІКА**

Розрахунково-графічні та контрольні завдання



Міністерство освіти і науки України
Вінницький національний технічний університет

В. О. Приятельчук, В. І. Риндюк, В. О. Федотов

Теоретична механіка. Аналітична механіка
Розрахунково-графічні та контрольні завдання

Навчальний посібник

Вінниця
ВНТУ
2011

УДК 531 (075)
ББК 22.213я73
П77

Рекомендовано до видання Вченою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України (протокол № 6 від 29.01.2009 р.)

Рецензенти :

В. Ф. Анісімов, доктор технічних наук, професор

І. О. Сивак, доктор технічних наук, професор

В. І. Савуляк, доктор технічних наук, професор

Приятельчук В.О.

П77 Теоретична механіка. Аналітична механіка. Розрахунково – графічні та контрольні завдання: навчальний посібник / В. О. Приятельчук, В. І. Риндюк, В. О. Федотов. – Вінниця: ВНТУ, 2011. – 71с.

В посібнику наведені п'ять завдань з розділу теоретичної механіки: Аналітична механіка. Кожне із завдань розв'язується відповідно за допомогою методу кінетостатики, принципу можливих переміщень, загального рівняння динаміки та рівняння Лагранжа другого роду. Кожне завдання має триста варіантів з прикладом виконання. Рекомендується для студентів денної та заочної форм навчання.

УДК531 (075)
ББК 22.21я73

Зміст

1	Порядок та основні вимоги до виконання роботи	4
2	Розрахунково-графічні та контрольні завдання.....	5
	АМ1 Використання принципу Д'Аламбера для визначення реакцій в'язей.....	5
	2.1 Приклад виконання завдання	6
	АМ2 Використання принципу Д'Аламбера для визначення реакцій в'язей балки.....	16
	2.2 Приклад виконання завдання	22
	АМ3 Використання принципу можливих переміщень до механічної системи з одним ступенем вільності	26
	3.1 Приклад виконання завдання	32
	АМ4 Дослідження руху механічної системи за допомогою загального рівняння динаміки	36
	4.1 Приклад виконання завдання	42
	АМ5 Використання рівняння Лагранжа другого роду для дослідження руху матеріальної системи з однією ступеню вільності.....	47
	5.1 Приклад виконання завдання	48
	АМ6 Використання рівняння Лагранжа другого роду для..... дослідження руху матеріальної системи з двома ступенями вільності	56
	6.1 Приклад виконання завдання	57
	Словник найбільш вживаних термінів.....	68
	Література.....	70

1 ПОРЯДОК ТА ОСНОВНІ ВИМОГИ ДО ВИКОНАННЯ РОБОТИ

З розділу „Аналітична механіка” студенти виконують одну розрахунково-графічну або контрольну роботу. Студенти вибирають варіант схеми (рисунок) за двома останніми цифрами (шифр) залікової книжки з таблиці 1, а дані для розрахунку – за останньою цифрою шифру.

Таблиця 1

Дві останні цифри шифру	Варіант
01, 31, 61, 91,	1
02, 32, 62, 92,	2
.....	...
29, 59, 89,	29
30, 60, 90,	30

Студенти денної форми навчання оформляють розрахунково-графічне завдання відповідно до діючих стандартів ЄСКД (ГОСТ 2.105–95) або (ДСТУ3008–95).

Студенти заочної форми навчання можуть виконувати завдання в зошитах. На титульній сторінці зошита вказується номер контрольної роботи, назва дисципліни, прізвище та ініціали студента, шифр, факультет, назва академічної групи і домашня адреса.

Розв’язання кожної задачі потрібно починати на розвороті зошита (з лівої сторони) так, щоб розрахункова схема та формули, складені за нею, находилися поряд. На початку сторінки пишеться номер завдання, варіант і наводиться коротка умова задачі (що відомо та що потрібно знайти). Розрахункові схеми (рисунок) виконуються за допомогою креслярських приладів або комп’ютера. Розрахунки потрібно супроводжувати короткими поясненнями. На кожній сторінці залишаються поля для зауважень рецензента. Якщо робота подається на повторну перевірку після виправлення помилок (при виконанні її в другому зошиті) обов’язково прикладається незарахована робота.

Після зарахування усіх задач студент повинен до іспиту захистити контрольну роботу. Графік захисту планується деканатом. Пояснення до розв’язування дається стисло у вигляді простих речень.

2 РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНІ ТА КОНТРОЛЬНІ ЗАВДАННЯ

АМ1 Використання принципу Д'Аламбера для визначення реакцій в'язей

Визначити реакції зовнішніх в'язей механічної системи в довільний момент часу, яка складається з двох тіл масою m_1 і m_2 рис.АМ1.5 - АМ1.8 (у варіантах 6, 7, 8 і 20 m_2 - точкова маса).

Система приводиться в рух під дією пари сил з моментом M , а при відсутності моменту в умові задачі (табл.АМ1.1) задається кутова швидкість ω .

Таблиця АМ1.1

Варіант	m_1	m_2	l	R	M	ω
	кг		м		Нм	рад/с
1	20	5	0,6	0,3	1	-
2	25	10	0,5	0,2	0	-
3	30	6	0,8	0,3	-	3,0
4	35	7	0,8	0,4	2	-
5	20	4	0,6	0,2	2	-
6	25	6	0,7	0,3	-	2,0
7	20	8	0,4	0,2	1	5,0
8	40	9	0,9	0,4	3	-
9	20	10	0,6	0,2	1	-
10	45	15	1,0	0,3	4	-

l – відповідні довжини елементів фігур на рисунках;

R – радіуси елементів фігур на рисунках.

1.1 Приклад виконання завдання

$$\text{Дано: } m_1 = \frac{P}{g}; \quad m_2 = \frac{2P}{g}; \quad l_1 = l; \quad \omega = \text{const.}$$

Схема системи і необхідні розміри наведені на рисунку АМ1.1.

Знайти: а) реакцію шарніра А;

б) додатковий динамічний тиск в підшипниках при умові, що стержень 1 відхилений від осі обертання на кут α .

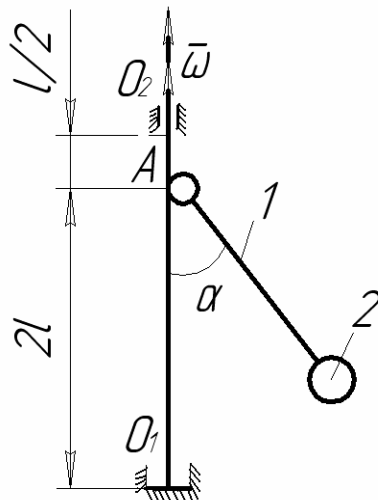


Рисунок АМ1.1

Розв'язання. Для визначення реакції в'язей використаємо принцип Д'Аламбера. Оскільки $\omega = const$, розглянемо тільки відцентрові сили інерції частинок стержня 1 та силу інерції точкового вантажу 2. Відомо, що головний вектор сил інерції точок тіла, що звершує обертальний рух, визначаємо за формулою:

$$\Phi = m a_c,$$

де m - маса тіла,

a_c - прискорення центра ваги тіла.

Рівнодійна сил інерції точок тіла дорівнює їх головному вектору. Тому рівнодійна сил інерції точок стержня

$$\Phi_1 = m_1 a_c = m_1 \omega^2 \frac{l}{2} \sin \alpha = \frac{P}{g} \omega^2 \frac{l}{2} \sin \alpha. \quad (1.1)$$

Для точкового вантажу 2

$$\Phi_2 = \frac{2P}{g} \omega^2 l \sin \alpha. \quad (1.2)$$

Для визначення реакцій опор необхідно знати точку прикладання сили Φ_1 . Оскільки сума моментів паралельних сил інерції точок стержня відносно точки А дорівнює моменту рівнодійної цих сил, то

$$\Phi_1 h = \int_0^l \xi \cos \alpha d\Phi_1, \quad (1.3)$$

де h - плече сили $\bar{\Phi}_1$ відносно точки A ;

$d\Phi_1$ - сила інерції елемента стержня довжиною $d\xi$;

ξ - координата елемента стержня (рис.АМ1.2).

Нехай γ - маса ділянки стержня одиничної довжини, тоді

$$d\Phi_1 = \xi \sin \alpha \omega^2 \gamma d\xi. \quad (1.4)$$

Підставимо (1.1) і (1.3) в (1.4), отримаємо:

$$\frac{D}{g} \omega^2 \frac{l}{2} h \sin \alpha = \int_0^l \xi^2 \cos \alpha \sin \alpha \omega^2 \gamma d\xi = \int_0^l \xi^2 d\xi \frac{P}{gl} \omega^2 \cos \alpha \sin \alpha.$$

$$\text{Звідки } h = \frac{2l \cos \alpha}{3}.$$

Для визначення реакції шарніра A розглядаємо рівновагу стержня, на який діють сили $\bar{X}_A, \bar{Y}_A, \bar{\Phi}_1, \bar{\Phi}_2$ (Рис.АМ1.3).

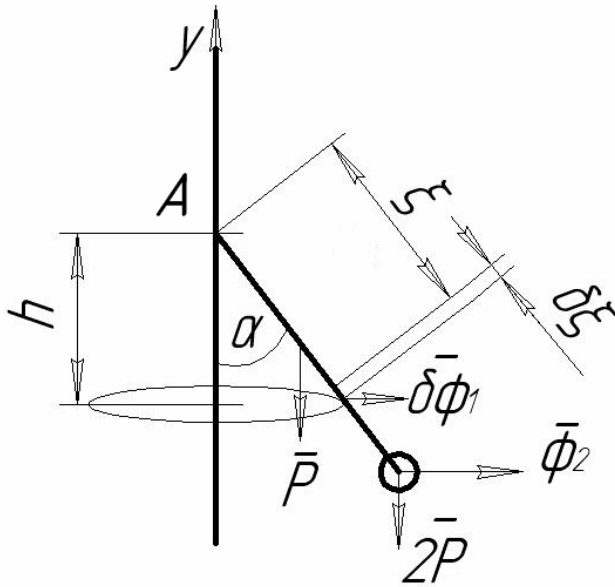


Рисунок АМ1.2

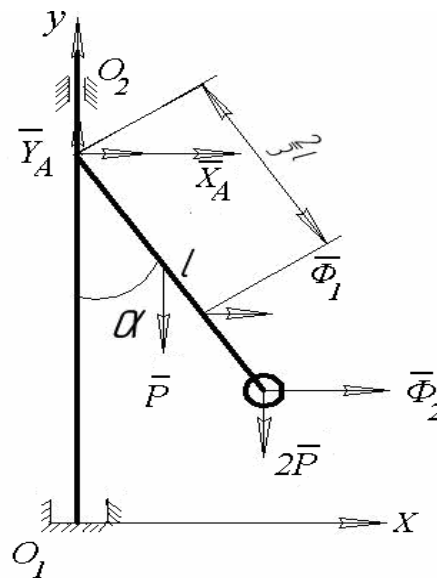


Рисунок АМ1.3

Ці сили задовольняють такі рівняння рівноваги:

$$\Sigma X_k = 0 \quad X_A + \Phi_1 + \Phi_2 = 0; \quad (1.5)$$

$$\Sigma Y_k = 0 \quad Y_A - 2P - P = 0; \quad (1.6)$$

$$\Sigma M_A(F) = 0 \quad -P \frac{l}{2} \sin \alpha - 2Pl \sin \alpha + \frac{2}{3} l \cos \alpha \Phi_1 + l \cos \alpha \Phi_2 = 0. \quad (1.7)$$

Підставимо в (1.7) формули (1.1) і (1.2), маємо:

$$\begin{aligned} & -P \frac{l}{2} \sin \alpha - 2Pl \sin \alpha + \frac{1}{3} l^2 \cos \alpha \sin \alpha \frac{P}{g} \omega^2 + l^2 \cos \alpha \sin \alpha \frac{2P}{g} \omega^2 = 0, \\ \text{або } & -\frac{\sin \alpha}{2} - 2 \sin \alpha + \frac{l \omega^2 \cos \alpha \sin \alpha}{3g} + \frac{2l \omega^2 \cos \alpha \sin \alpha}{g} = 0. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Виконуючи в (1.8) відповідні математичні операції, отримаємо таке рівняння:

$$-15g + 14l \omega^2 \cos \alpha = 0.$$

Звідки
$$\cos \alpha = \frac{15g}{14l \omega^2}.$$

Тепер, використовуючи формулу $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, знаходимо:

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \frac{225g^2}{196l^2 \omega^4}}. \quad (1.9)$$

Підставляючи (1.1), (1.2), (1.8) і (1.9) в рівняння (1.5) визначаємо реакцію в'язей X_A :

$$X_A = \left(\frac{P \omega^2 l}{2g} + \frac{2P \omega^2 l}{g} \right) \frac{\sqrt{196l^2 \omega^4 - 225g^2}}{14l \omega^2} = \frac{5P \omega^2 l}{28g l \omega^2} \sqrt{196l^2 \omega^4 - 225g^2}.$$

З рівняння (1.6) отримуємо реакцію в'язей Y_A : $Y_A = 3P$.

Визначимо додатковий динамічний тиск на під'ятник O_1 і підшипник O_2 (рис. АМ1.4).

Складаємо такі рівняння рівноваги для цієї конструкції:

$$\Sigma X = 0 \quad X_{01} + X_{02} + \Phi_1 + \Phi_2 = 0; \quad (1.10)$$

$$\Sigma Y = 0 \quad Y_{01} - P - 2P = 0; \quad (1.11)$$

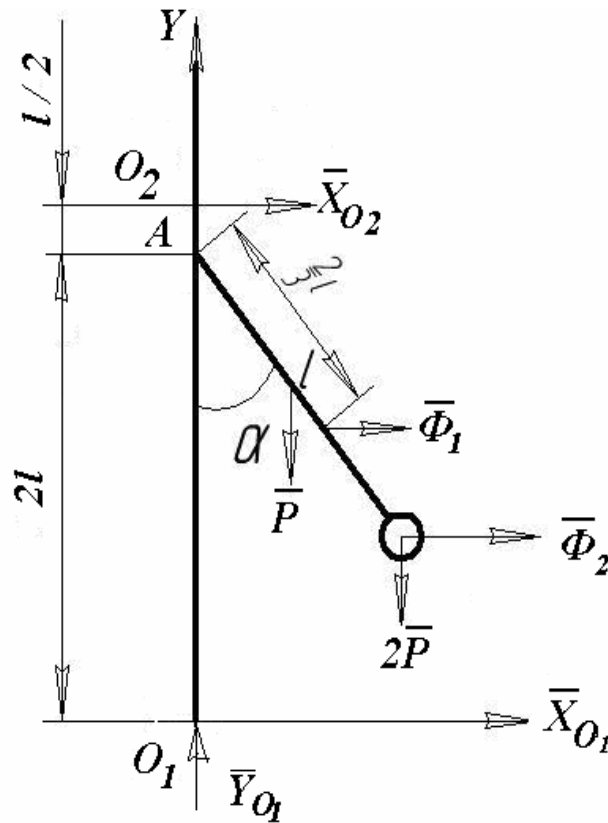


Рисунок АМ1.4

$$\Sigma M_{O_1} = 0$$

$$-X_{O_2} 2l - P \frac{l}{2} \sin \alpha - 2Pl \sin \alpha - \Phi_2 \left(\frac{3}{2}l - l \cos \alpha \right) - \Phi_1 \left(\frac{3}{2}l - \frac{2}{3}l \cos \alpha \right) = 0. \quad (1.12)$$

З врахуванням формул (1.1) і (1.2), розв'язуючи рівняння (1.10) - (1.12), отримаємо відповідні значення динамічного тиску на підшипники:

$$Y_{O_1} = 3D(H),$$

$$X_{O_2} = \frac{\frac{5P}{2} \sin \alpha + \Phi_2 \left(\frac{3-2 \cos \alpha}{2} \right) + \Phi_1 \left(\frac{9-4 \cos \alpha}{6} \right)}{2} =$$

$$= \frac{\frac{5P}{2} \sin \alpha + \frac{2P}{2g} \omega^2 l \sin \alpha (3-2 \cos \alpha) + \frac{P}{2} \omega^2 \frac{l}{6} \sin \alpha (9-4 \cos \alpha)}{2} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{30Pg \sin \alpha + 12P\omega^2 l \sin \alpha (3 - 2 \cos \alpha) + P\omega^2 l \sin \alpha (9 - 4 \cos \alpha)}{24g} = \\
&= \frac{30Pg \sin \alpha + 45P\omega^2 l \sin \alpha - 28P\omega^2 l \sin \alpha \cos \alpha}{24g} = \\
&= \frac{30Pg \sin \alpha + 45P\omega^2 l \sin \alpha - 30Pg \sin \alpha}{24g} = \\
&= \frac{45P\omega^2 l \sqrt{196l^2 \omega^4 - 225g^2}}{24g \cdot 14l\omega^2} = \\
&= \frac{15P \sqrt{196l^2 \omega^4 - 225g^2}}{112g} \quad (H).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X_{01} = -X_{02} - \Phi_1 - \Phi_2 &= -\frac{15P \sqrt{196l^2 \omega^4 - 225g^2}}{112g} - \frac{P\omega^2 \frac{l}{2} \sin \alpha}{g} - \frac{2P}{g} \omega^2 l \sin \alpha = \\
&= -\frac{15P \sqrt{196l^2 \omega^4 - 225g^2}}{112g} - \frac{5P}{2g} \omega^2 l \sin \alpha \quad (H).
\end{aligned}$$

Аналізуючи отримані значення реакцій в'язей, можна зробити висновок про пропорційну залежність їх величин від значення сили P і кутової швидкості ω . Мінімальне значення реакцій в'язей X_{01} і X_{02} отримаємо при $\alpha = 0$ і $\omega = \sqrt{\frac{15g}{14l}}$, тобто $X_{01} = 0$ і $X_{02} = 0$. Максимальне значення реакцій в'язей X_{01} і X_{02} отримаємо при $\alpha = 90^\circ$:

$$X_{01} = X_{02} = \frac{15P \sqrt{196l^2 \omega^4 - 225g^2}}{112g} \quad (H).$$

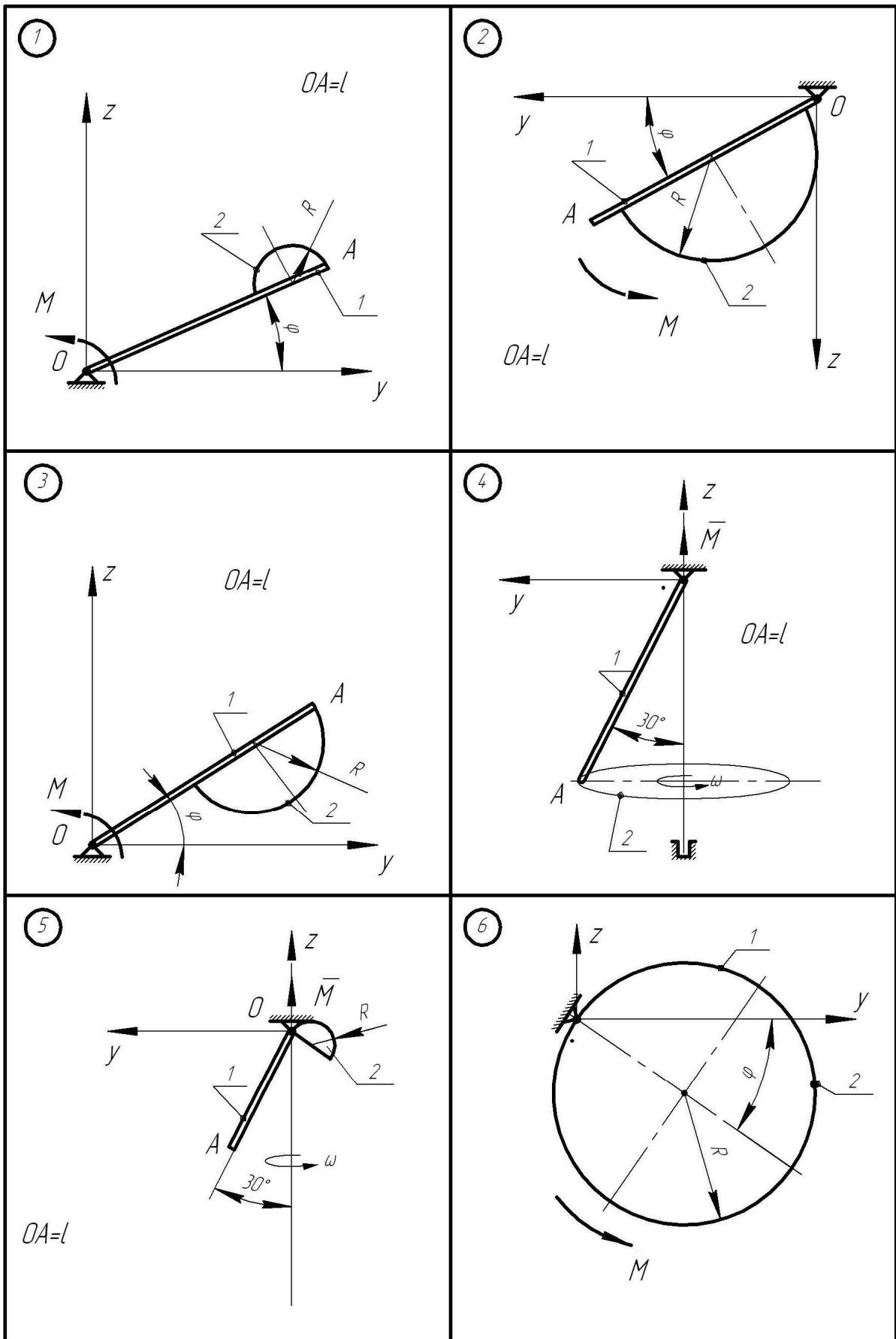


Рисунок АМ1.5

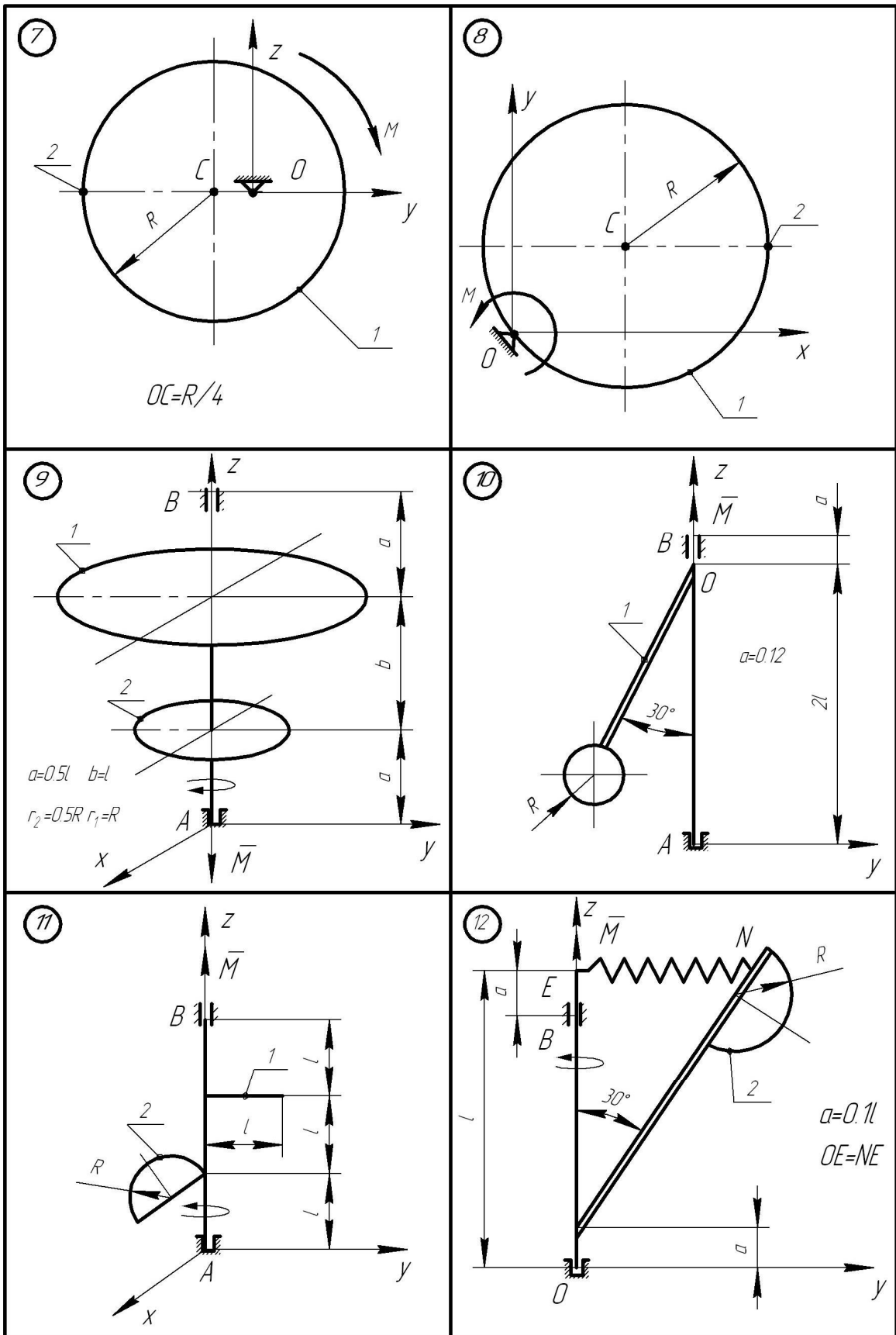


Рисунок АМ1.6

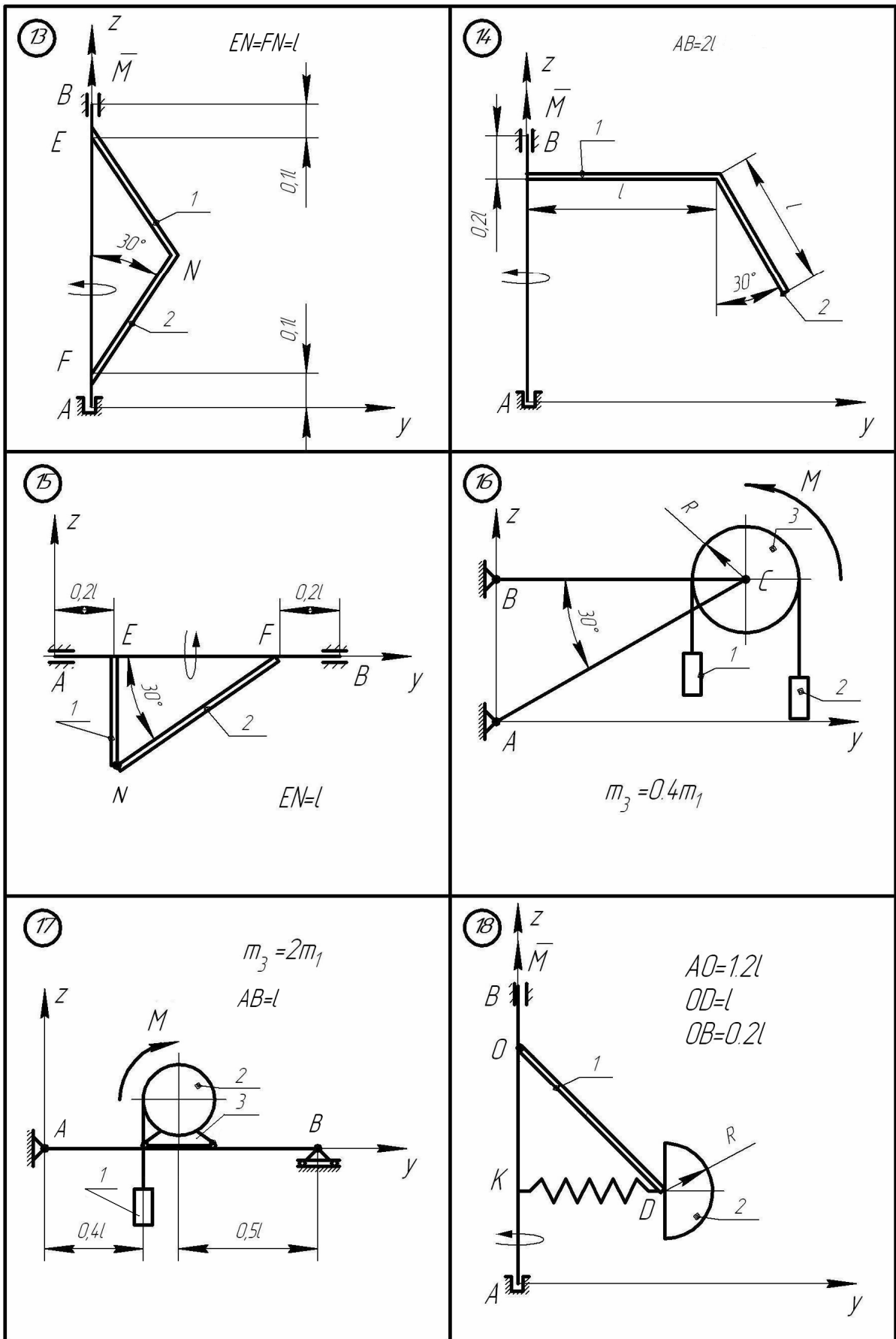


Рисунок АМ1.7

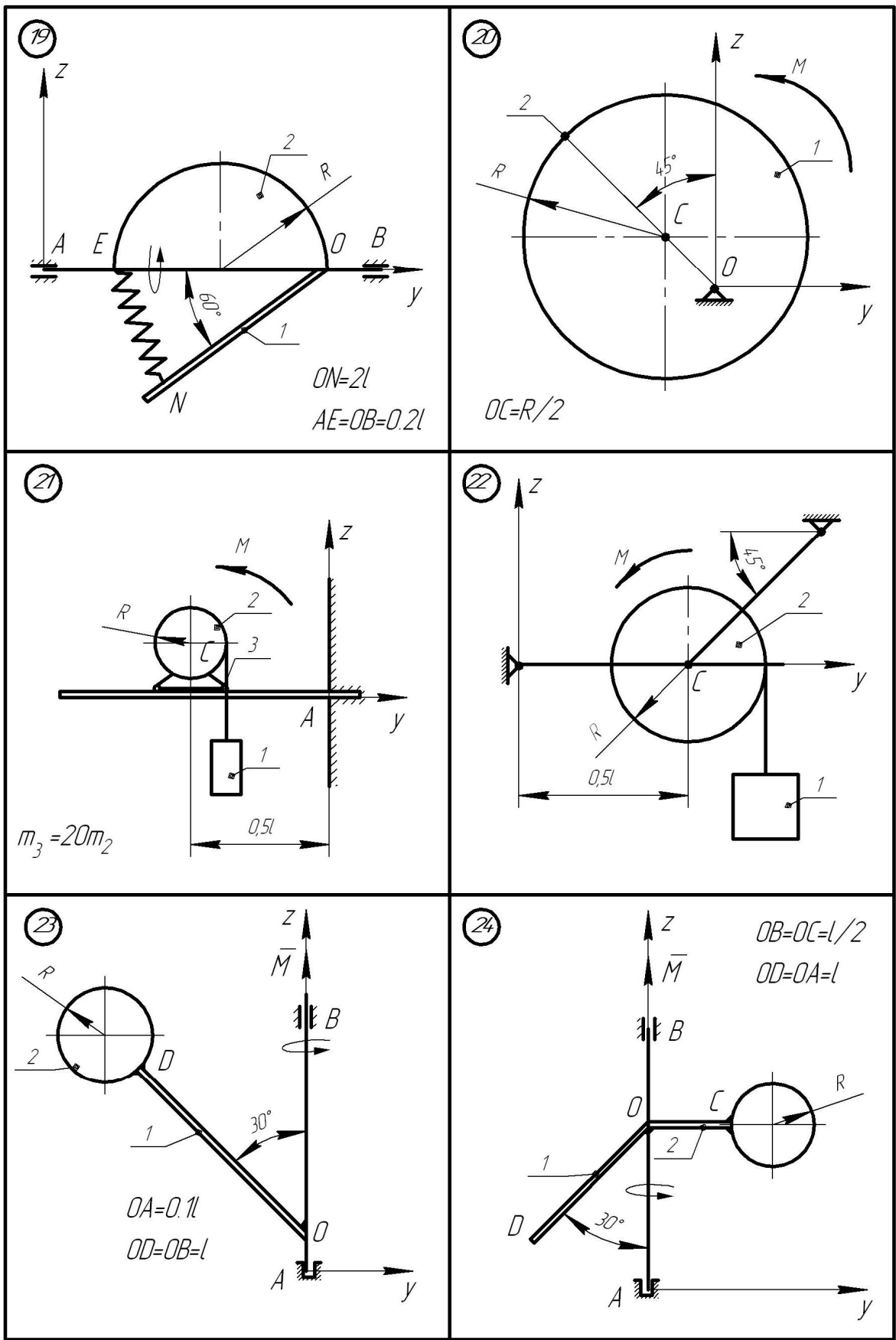


Рисунок АМ1.8

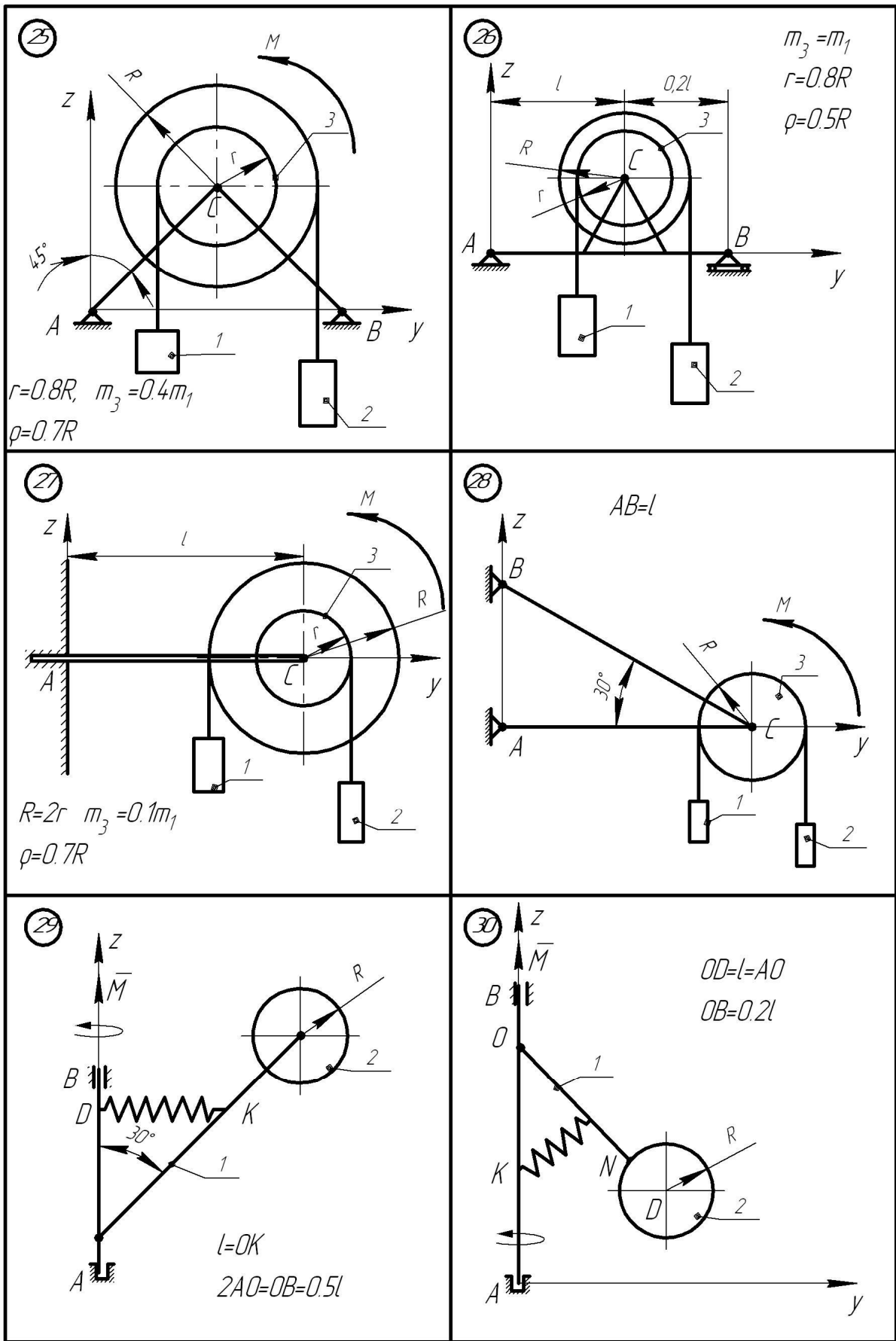


Рисунок АМ1.9

АМ2 Використання принципу Д'Аламбера для визначення реакцій в'язей балки

Для підйому вантажу 1 (рис. АМ2.1 – АМ2.5) використовується електродвигун з моментом M , що приводить до руху барабан 2, маса якого розподілена по ободу радіусом R_2 . Знайти реакції в'язей балки АВ вагою P та довжиною l .

Масою абсолютно гнучких тросів знехтувати. Ковзання тросів по шківам відсутнє. В схемах 6,13, 21,25 похила площина гладенька. Ковзання тіла 1 в точці контакту з похилою площиною (схеми 8, 9, 11, 15, 18, 23, 24) відсутнє.

Дані для розрахунку взяти з таблиці АМ2.1, де прийняті такі позначення: I_p - момент інерції ротора електродвигуна відносно осі обертання; m_d - маса електродвигуна; m_1 - маса вантажу; m_6 — маса барабана.

Таблиця АМ2.1

Варіант	I_p кгм ²	R_2 , м	P , Н	l , м	m_1 , кг	m_6 , кг	m_d кг	M , Нм
1	0,2	0,22	200	1,2	200	8	40	550
2	0,15	0,2	190	1,2	180	7,6	38	420
3	0,13	0,18	180	1,0	160	7,2	36	350
4	0,12	0,16	170	1,2	140	6,8	32	280
5	0,11	0,14	160	1,1	120	6,4	28	220
6	0,1	0,12	150	1,0	110	6,0	24	180
7	0,08	0,10	140	1,2	100	5,6	18	140
8	0,06	0,095	130	1,1	90	5,2	16	120
9	0,05	0,09	120	1,0	80	4,8	14	115
10	0,04	0,08	110	1,2	70	4,2	12	110

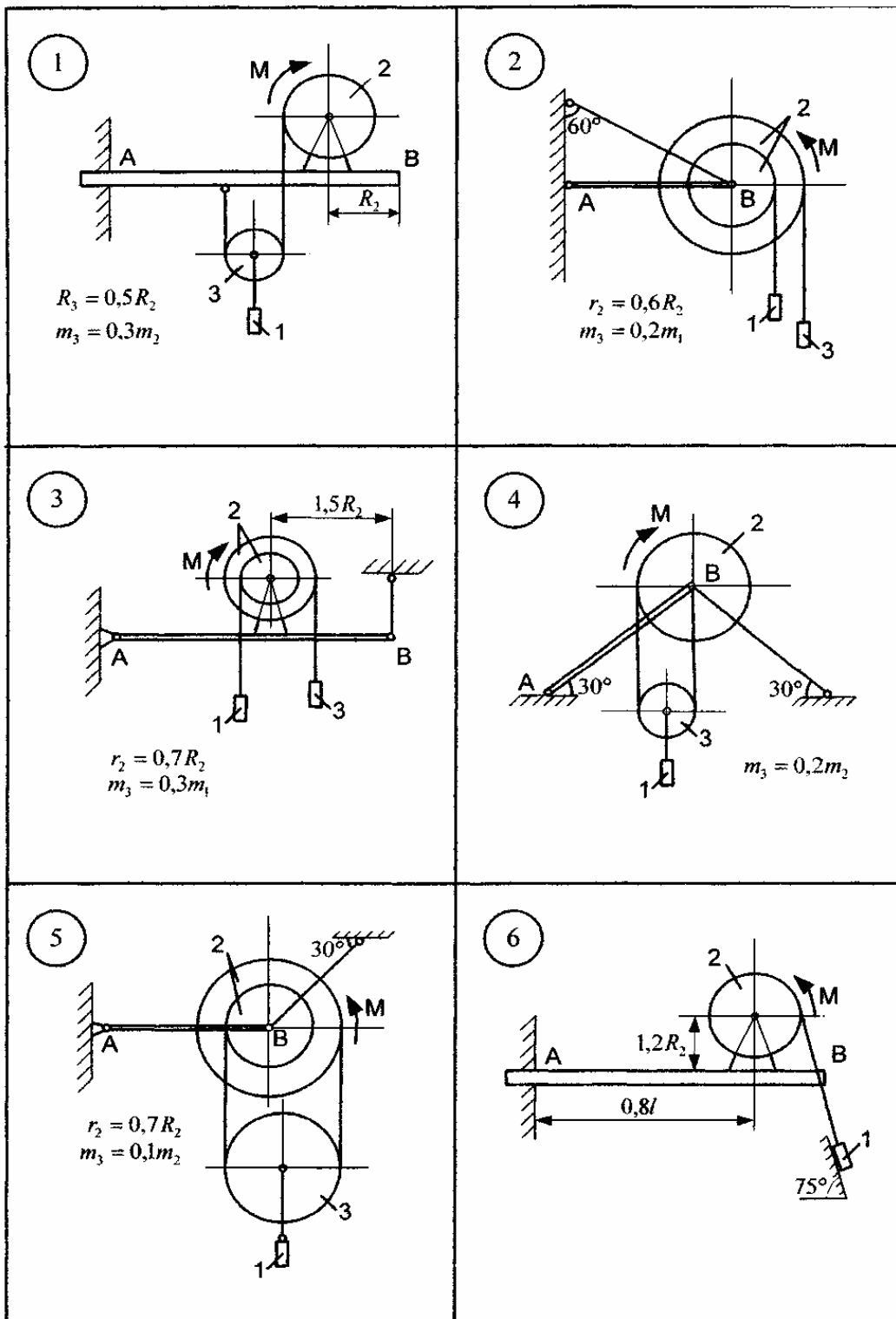


Рисунок АМ2.1

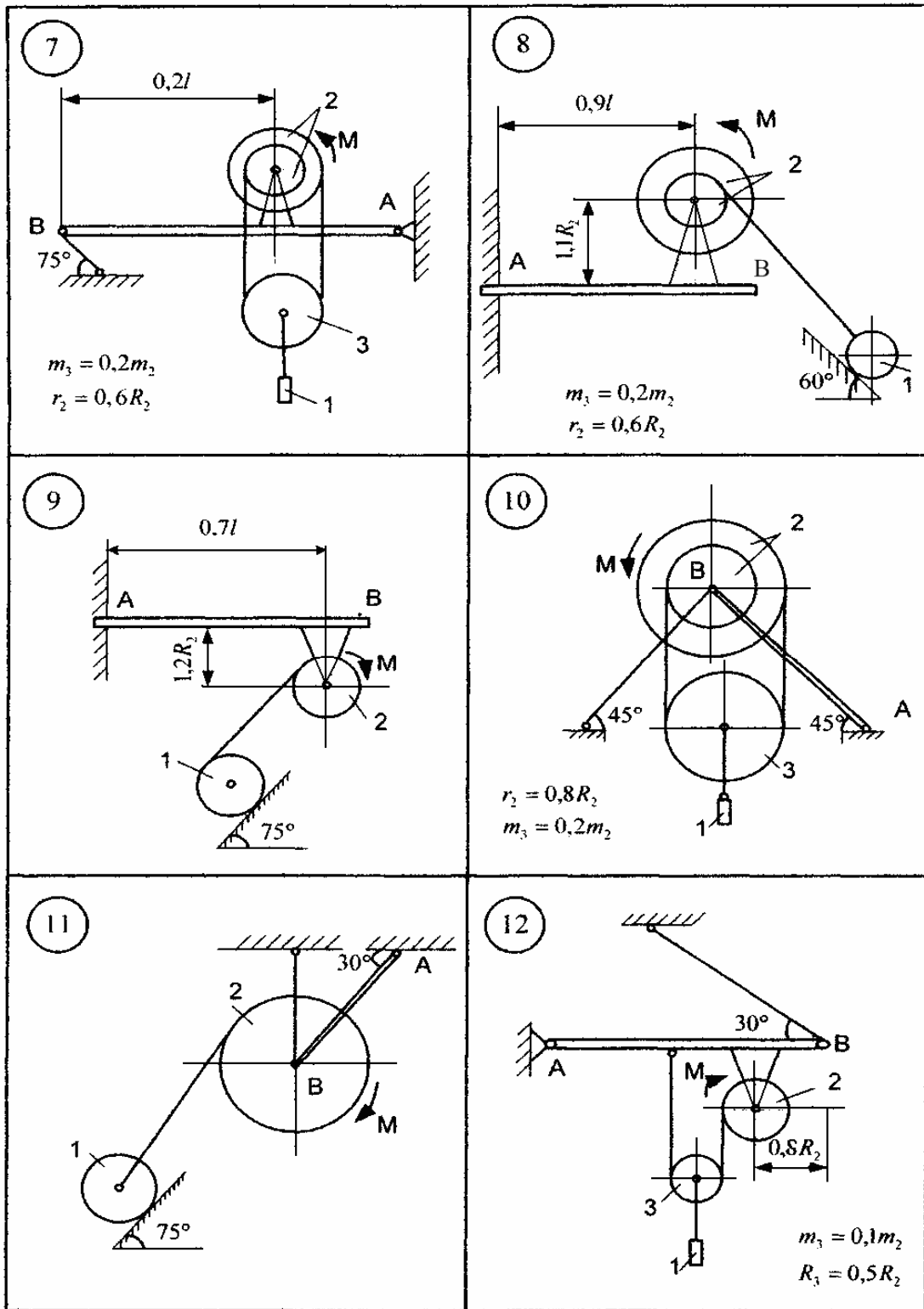


Рисунок АМ2.2

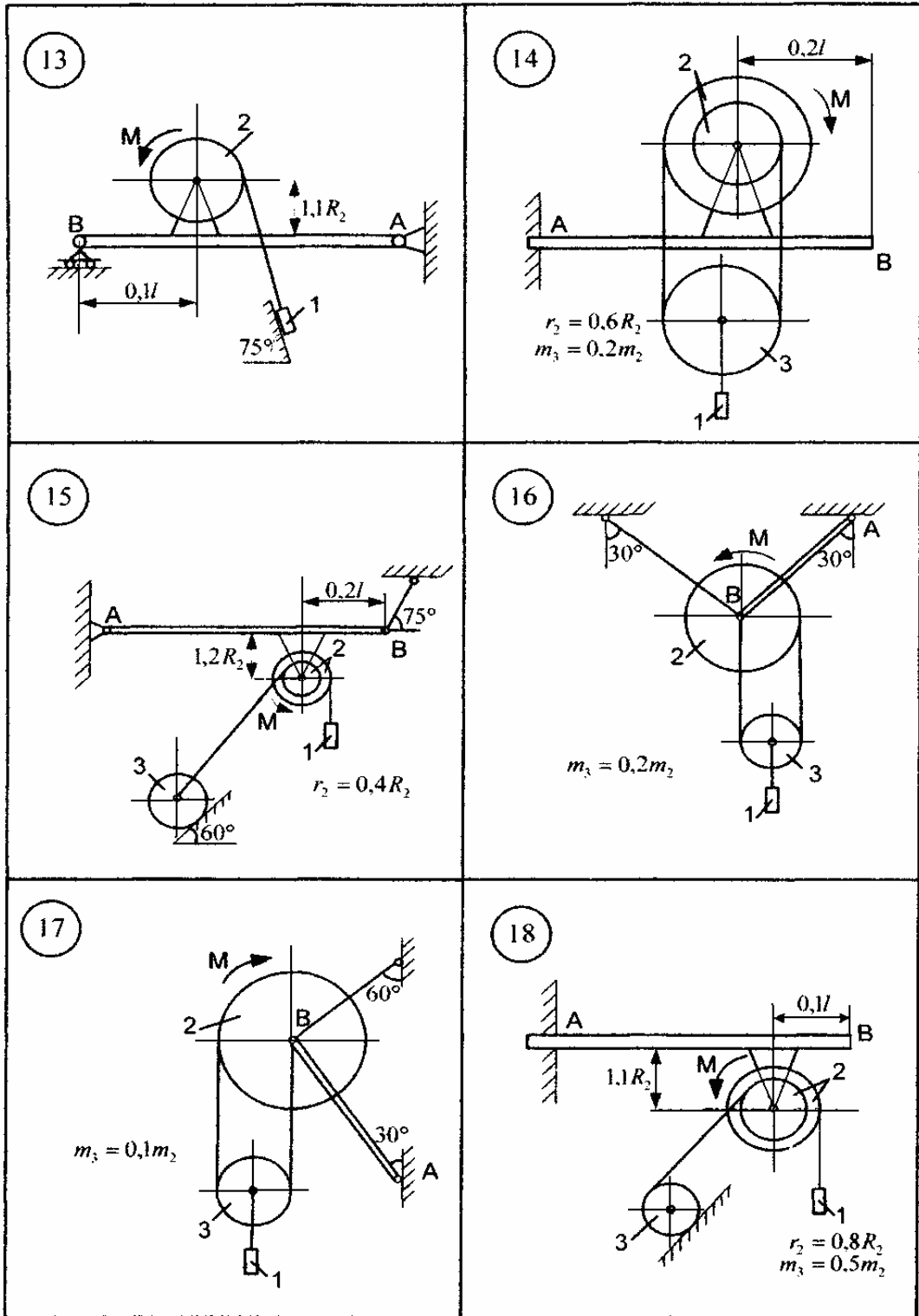


Рисунок АМ2.3

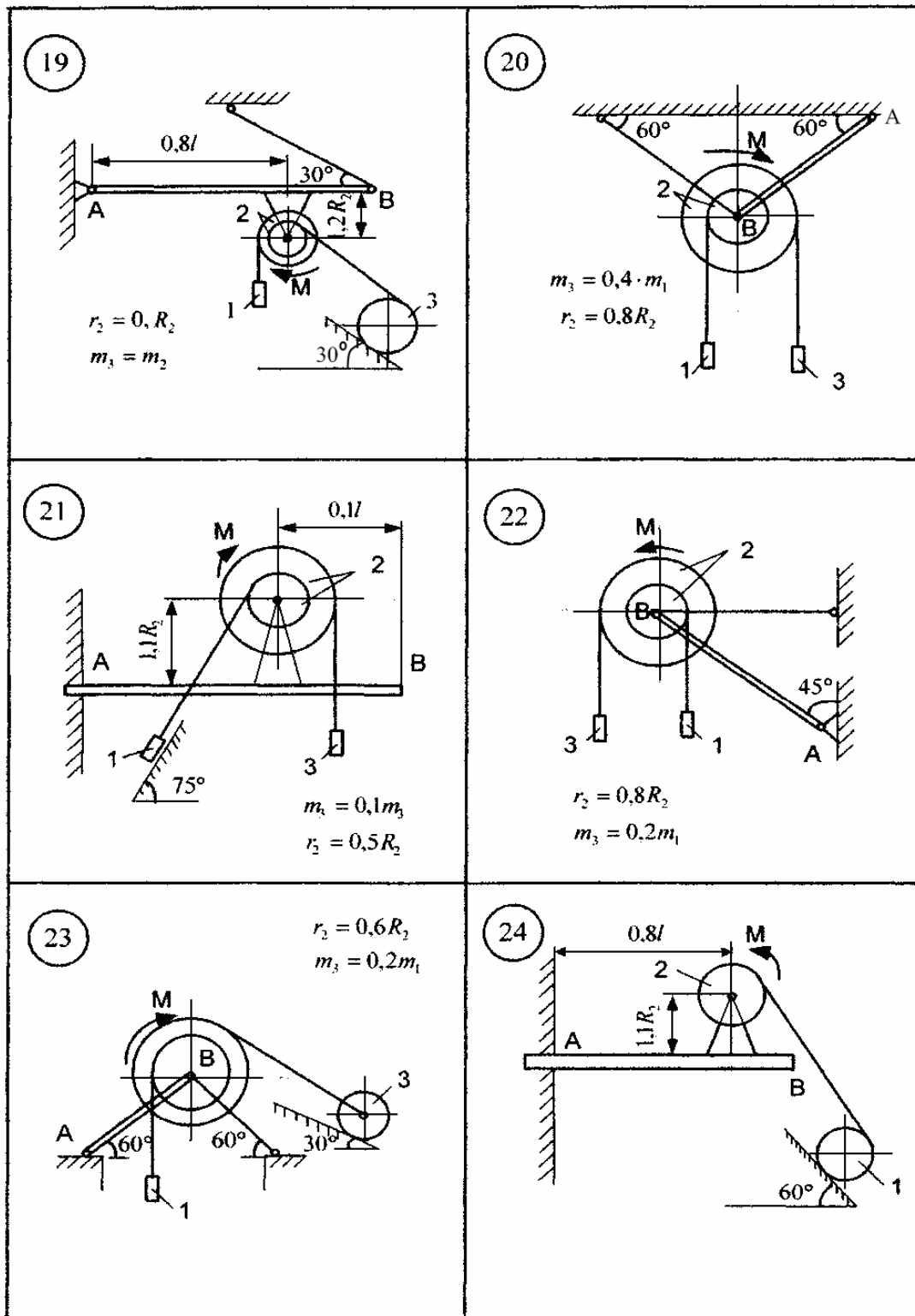


Рисунок АМ2.4

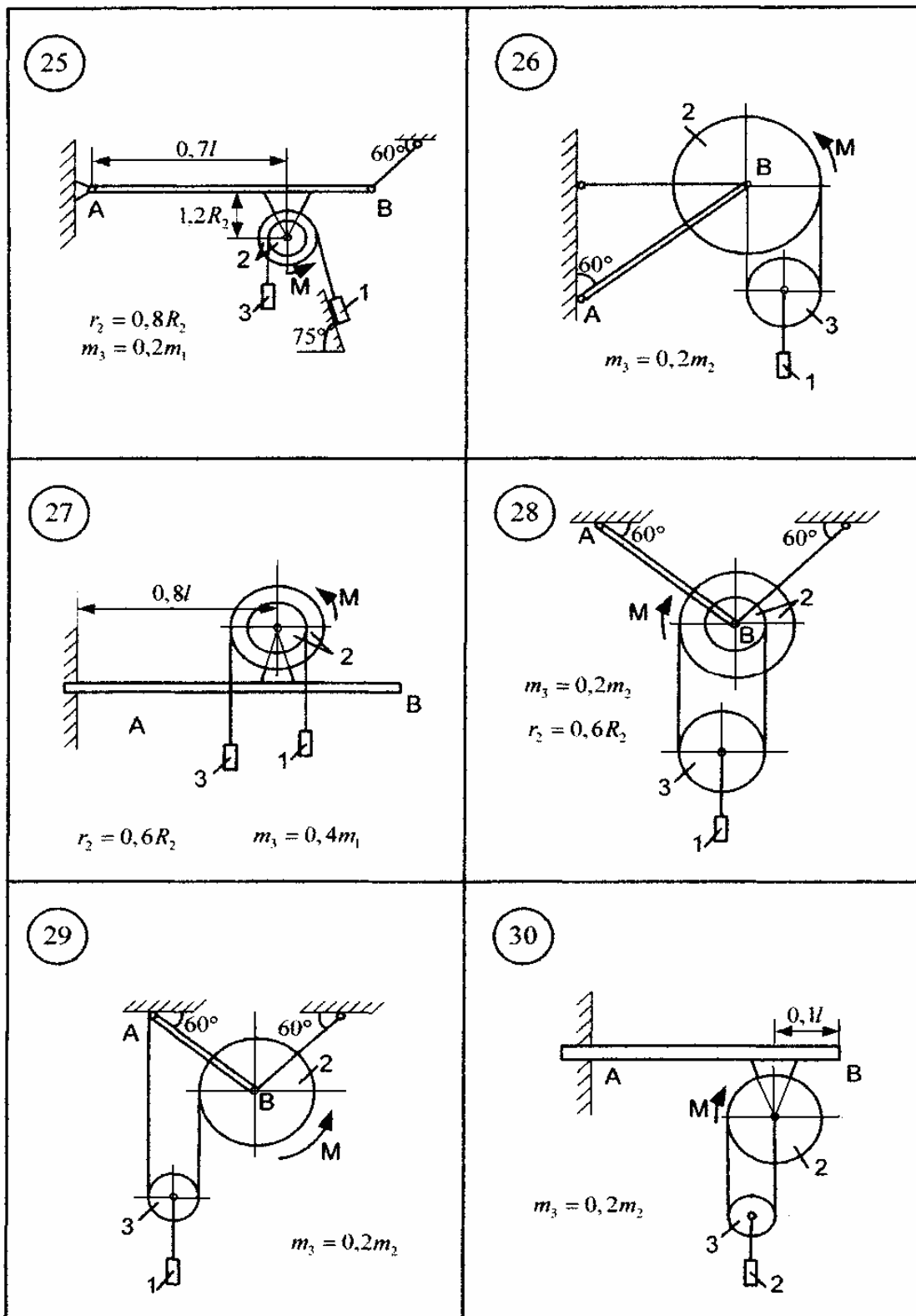


Рисунок АМ2.5

2.1 Приклад виконання завдання

Вантаж 1 (рис. 2.6) тросом з'єднаний з центром мас рухомого блока 3, який приводиться до руху пасом, один кінець якого закріплений в точці С, а другий перекинутий через нерухомий блок 4 і зафіксований на барабані 2 масою m_2 , що приводиться до руху електродвигуном з моментом M . Знайти реакції жорсткого защемлення А однорідної балки АВ довжиною l і вагою P . Масою блока 4, троса та паса знехтувати. Маса електродвигуна m_d , момент інерції ротора - I_p . Тіло 3 - однорідний диск, а маса барабана 2 розподілена по ободу радіуса R_2 .

Дані для розрахунку: $m_1 = 300$ кг; $I_p = 0,25$ кг·м²; $m_3 = 10$ кг; $m_2 = 15$ кг; $m_d = 35$ кг; $P = 250$ Н; $l = 1$ м; $R_2 = 0,2$ м; $M = 320$ Н·м; $\alpha = 30^\circ$.

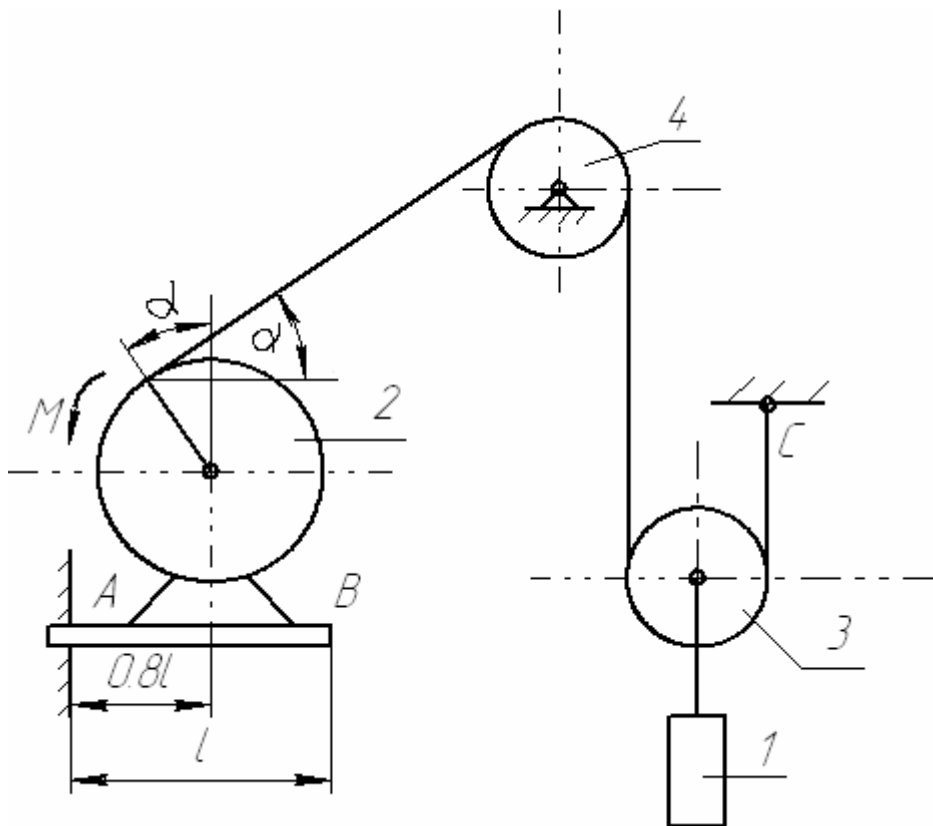


Рисунок АМ2.6

Розв'язування. Розглянемо матеріальну систему, що складається з балки АВ, електродвигуна і барабана 2 (рис. 2.7).

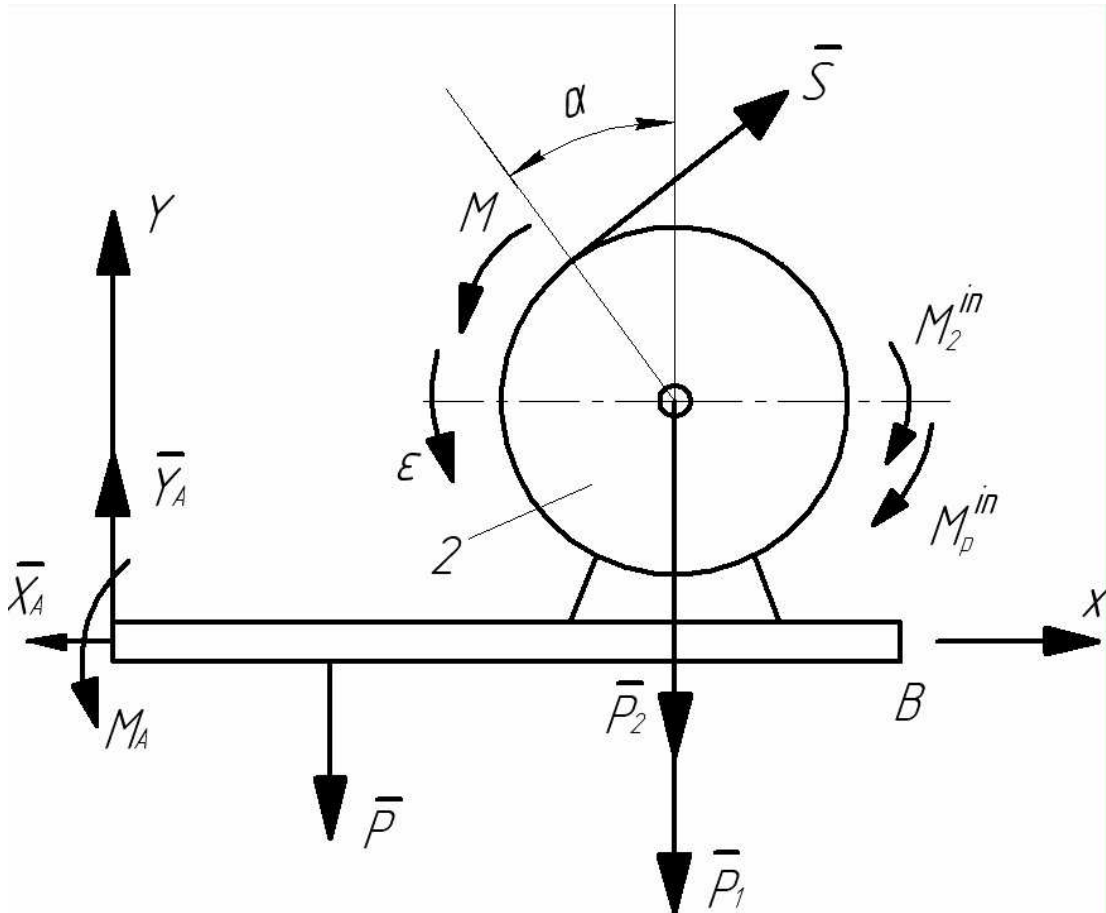


Рисунок АМ2.7

Запишемо принцип Д'Аламбера для плоскої довільної системи сил в проекціях на осі X та Y .

$$F_x + R_x + F_x^{in} = 0,$$

$$F_y + R_y + F_y^{in} = 0, \quad (2.1)$$

$$M_A^F + M_A^R + M_A^{in} = 0.$$

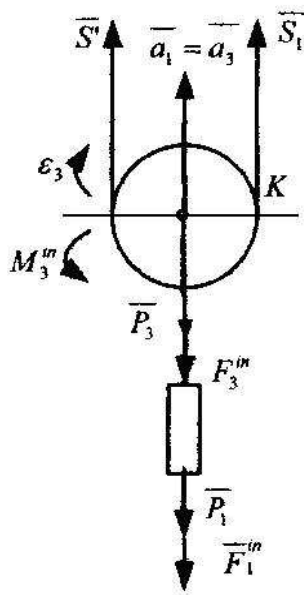
Рівняння рівноваги (2.1) для механічної системи (рис. АМ2.7) записуються у вигляді:

$$-X_A + S \cos \alpha = 0,$$

$$\begin{aligned}
 Y_A - P - P_D - P_2 + S \sin \alpha &= 0, \\
 M_A - 0,5P - 0,8(P_1 + P_D) + M - M_2^{in} - M_P^{in} - (1,2 + \cos \alpha)R_2 S \cos \alpha + \\
 + (0,8l - R_2 \sin \alpha)S \sin \alpha &= 0,
 \end{aligned}
 \tag{2.2}$$

де S - реакція паса, $M_2^{in} = I_2 \varepsilon$ - головний момент сил інерції барабана; ε - кутове прискорення ротора електродвигуна та барабана; $M_P^{in} = I_P \varepsilon$ - головний момент сил інерції ротора електродвигуна; X_A, Y_A, M_A - реакції жорсткого защемлення; $P_D = m_D g$; $P_2 = m_2 g$.

В трьох рівняннях (2.2) п'ять невідомих : $X_A, Y_A, M_A, \varepsilon, S$. Додаткові рівняння отримаємо, якщо використаємо принцип Д'Аламбера для визначення моментів сил відносно точки D (рис. АМ2.8) та точки К (рис.



АМ2.9).

Рисунок АМ2.8

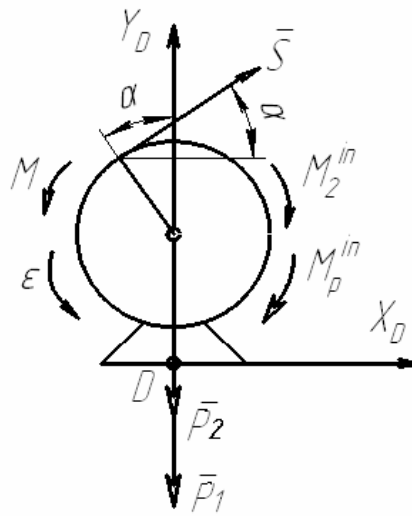


Рисунок АМ2.9

Рівняння рівноваги блока 3:

$$\begin{aligned}
 M_K^F + M_K^R + M_K^{in} &= 0 \text{ (рис. АМ2.8),} \\
 -2S' \cdot R_3 + M_3^{in} + R_3(P_1 + P_3 + F_1^{in} + F_3^{in}) &= 0,
 \end{aligned}
 \tag{2.3}$$

де $S' = S$, R_3 - радіус шківів 3, $P_3 = m_3 g$, $P_1 = m_1 g$, $F_1^{in} = m_1 a_1$, $F_3^{in} = m_3 a_3$, $M_3^{in} = I_3 \varepsilon_3$, $I_3 = \frac{m_3}{2} R_3^2$, $\varepsilon_3 = \varepsilon \frac{R_2}{2R_3}$, $a_3 = a_1 = \frac{1}{2} \varepsilon R_2$.

З врахуванням значень складових формули (2.3), маємо:

$$-8S + \varepsilon R_2(3m_3 + 2m_1) + 4g(m_1 + m_3) = 0. \quad (2.4)$$

Рівняння рівноваги електромотора (рис. АМ2.9):

$$M_D^F + M_D^R + M_D^{in} = 0,$$

$$M - M_2^{xi} - M_P^{xi} - (1,2 + \cos \alpha)R_2 S \cos \alpha + (0,8l - R_2 \sin \alpha)S \sin \alpha = 0, \quad (2.5)$$

де x_D, y_D – реакції в'язі балки АВ в точці D, $M_2^{in} = m_2 R_2^2$, $M_P^{in} = I_P \varepsilon$.

Після елементарних перетворень рівняння (2.5) має вигляд:

$$M - m_2 R_2^2 \varepsilon - I_P \varepsilon - (1,2 + \cos \alpha)SR_2 \cos \alpha - SR_2 \sin^2 \alpha = 0. \quad (2.6)$$

Із рівнянь (2.4) і (2.6) визначаємо натяг S паса:

$$S = \frac{MR_2(3m_3 + 2m_1) + 4(m_1 + m_3)(m_2 R_2^2 + I_P)g}{8(m_2 R_2^2 + I_P) + R_2^2(1 + 1,2 \cos \alpha)(3m_3 + 2m_1)}. \quad (2.7)$$

Або, підставляючи дані умови задачі, отримаємо:

$$S = \frac{320 \cdot 0,2 \cdot 630 + 4 \cdot 310 \cdot (15 \cdot 0,04 + 0,25) \cdot 9,81}{8 \cdot (15 \cdot 0,04 + 0,25) + 0,04(1 + 1,2 \cdot 0,8660) \cdot 630} = 870,6 (H).$$

Враховуючи значення S, з рівняння (2.6) знаходимо кутове прискорення ротора електродвигуна та барабана:

$$\varepsilon = \frac{M - SR_2(1,2 \cos \alpha + 1)}{m_2 R_2^2 + I_P} = \frac{320 - 870,6 \cdot 0,2 \cdot (1 + 1,2 \cdot 0,866)}{15 \cdot 0,04 + 0,25} = -41,25 (c^{-2}).$$

Величину сил X_A , Y_A і реактивний момент M_A визначаємо з рівнянь рівноваги (2.2):

$$X_A = 870,6 \cdot 0,866 = 753,94(H);$$

$$Y_A = P + P_{\bar{A}} + P_2 - S \cdot \sin \alpha = 250 + (35 + 15) \cdot 9,81 - 870,6 \cdot 0,5 = 305,2(H);$$

$$M_A = 0,5 \cdot P + (m_2 + m_{\bar{A}}) \cdot g \cdot 0,8 - M + m_2 \cdot R_2^2 \cdot \varepsilon + S \cdot R_2 + S \cdot (1,2 \cdot R_2 \cdot \cos \alpha - 0,8 \cdot \sin \beta) = \\ = 197,4 + 0,85 \cdot \varepsilon + S \cdot (0,408 - 0,4) = 169,16(H).$$

АМЗ Використання принципу можливих переміщень до механічної системи з одним степенем вільності

Схеми механізмів, які знаходяться під дією взаємоврівноважених сил, показані на рис. АМЗ.1-АМЗ.5, а необхідні для розв'язання дані наведені в таблиці АМЗ.1.

Використовуючи принцип можливих переміщень і нехтуючи силами опору, визначити величину, яка вказана "зірочкою" у відповідній графі таблиці АМЗ.1 .

Примітка. Механізми у варіантах 19, 28, 29 і 30 розміщені в горизонтальній площині, а інші - у вертикальній .

Таблиця АМЗ.1

Варіант	R_1 , м	R_2 , м	АО , м	Р , Н	Q , Н	М , Нм	С , Н/м
1	0,25	0,4	0,5	*	3	6	200
2	0,2	0,3	0,4	3	2	*	100
3	0,3	0,5	0,6	2	*	5	300
4	0,5	0,6	1	4	3	*	200
5	0,3	0,56	0,6	*	4	6	250
6	0,15	0,3	0,3	1	*	4	150
7	0,25	0,36	0,5	*	3	4	120
8	0,1	0,26	0,2	3	*	3	300
9	0,15	0,38	0,3	*	6	7	320
10	0,4	0,6	0,8	2	5	*	150

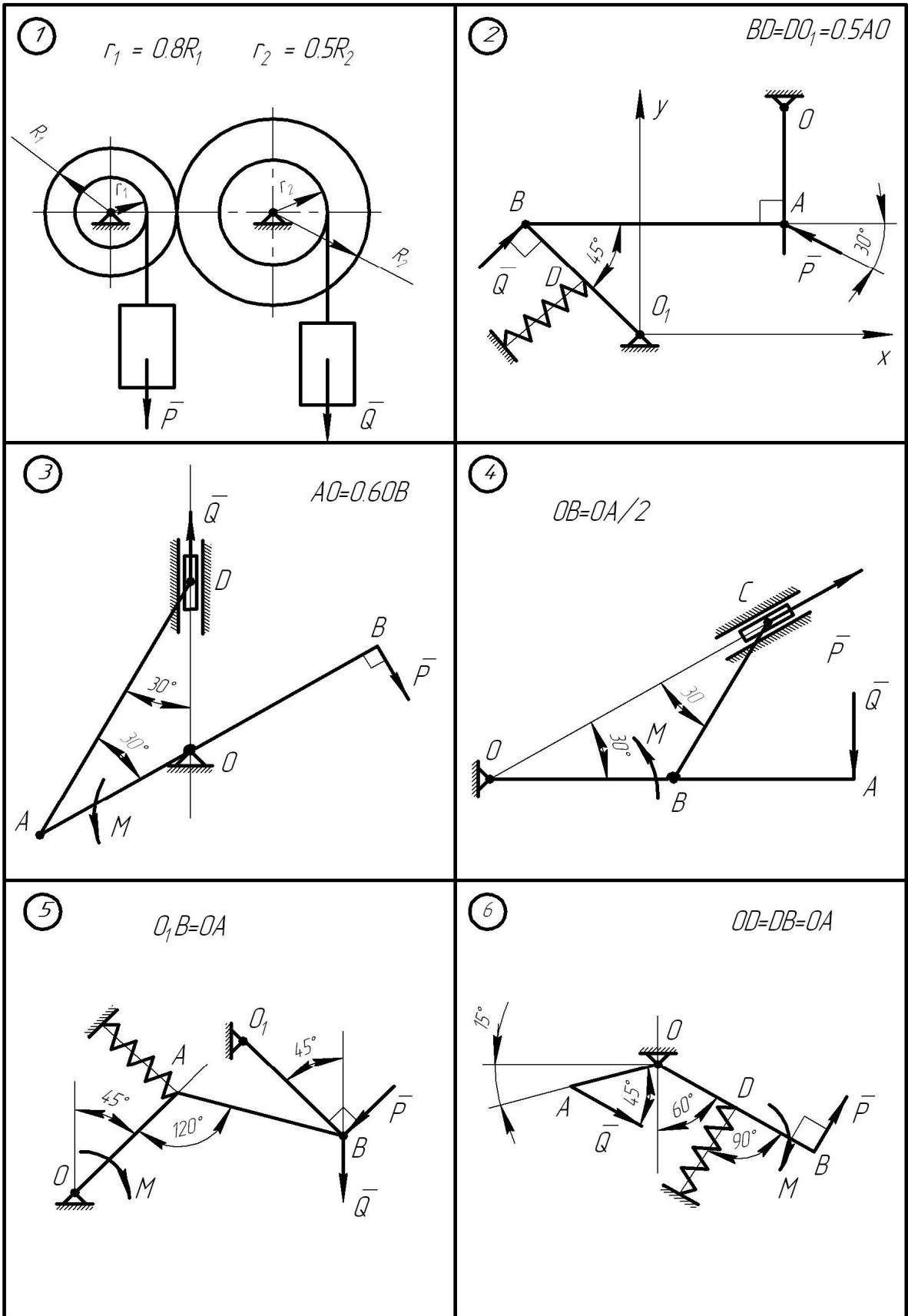


Рисунок АМ3.1

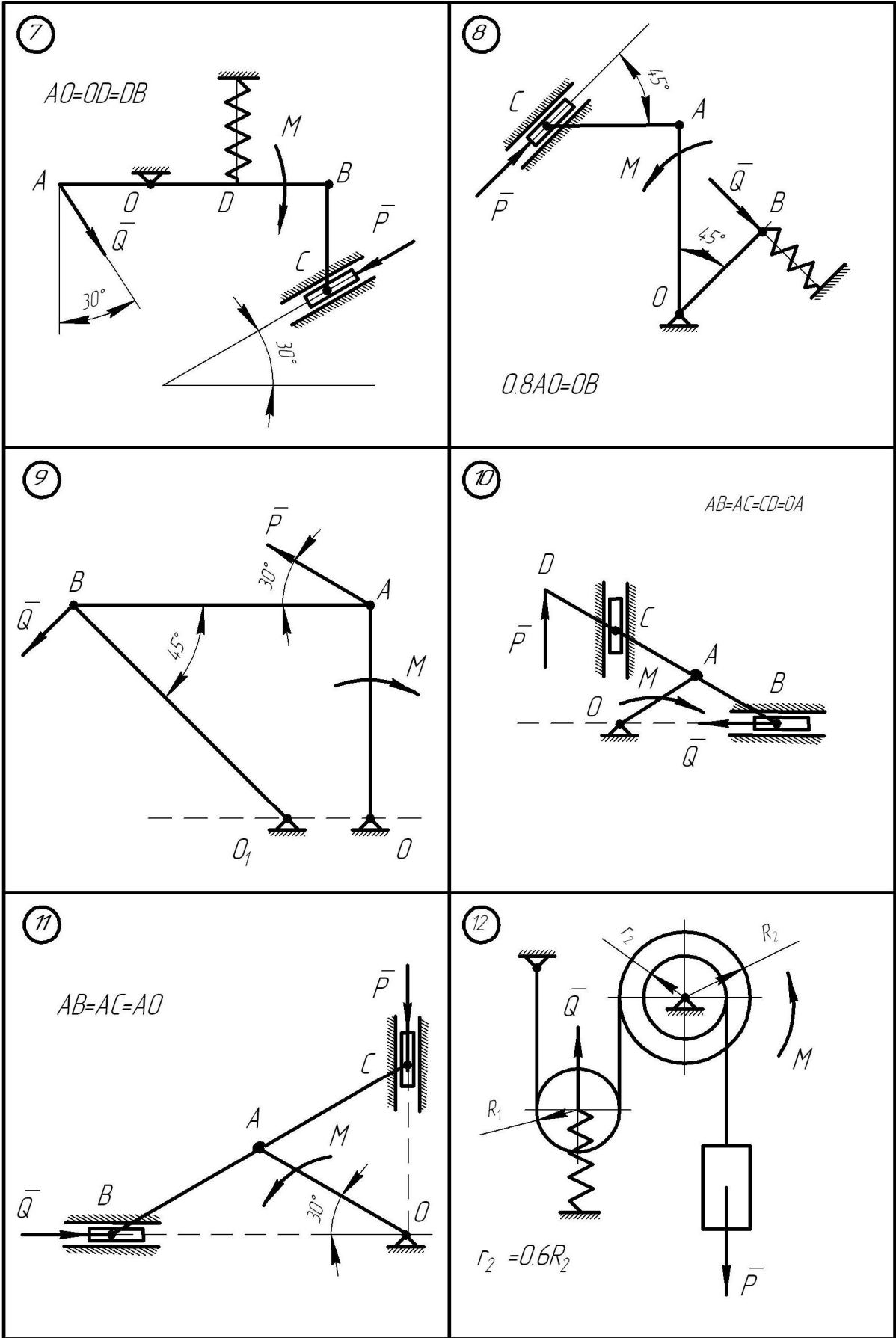


Рисунок АМ3.2

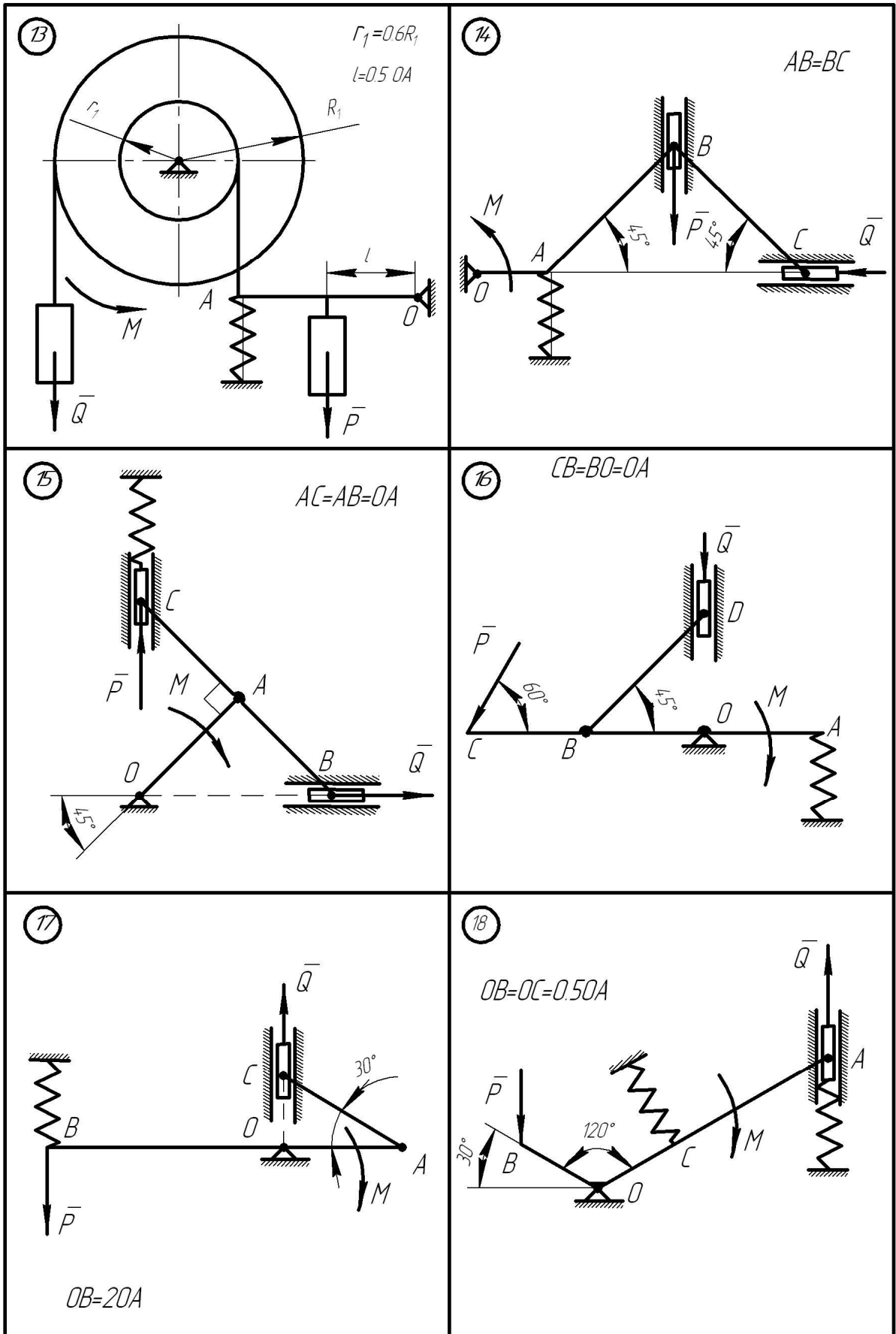


Рисунок АМ3.3

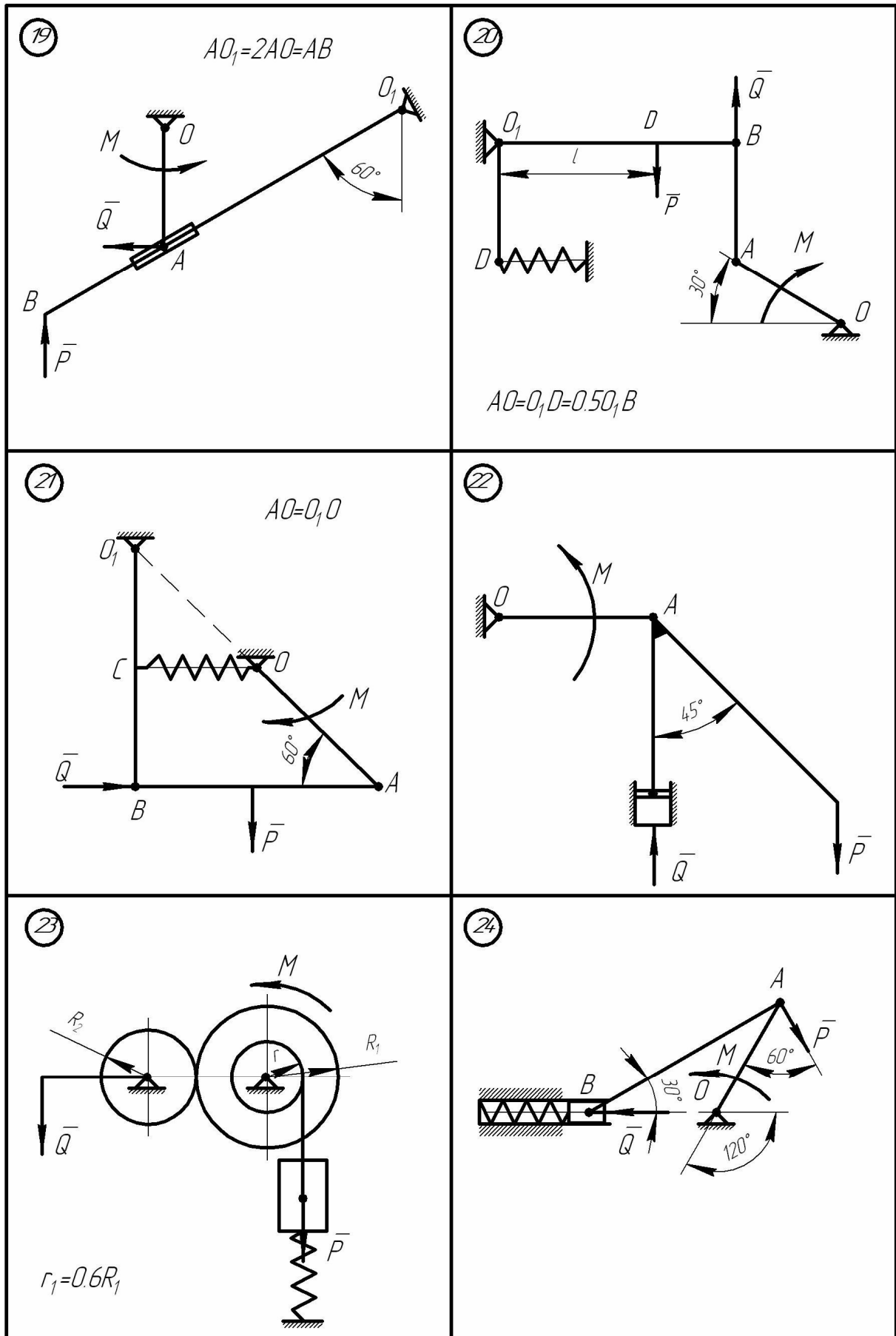


Рисунок АМ3.4

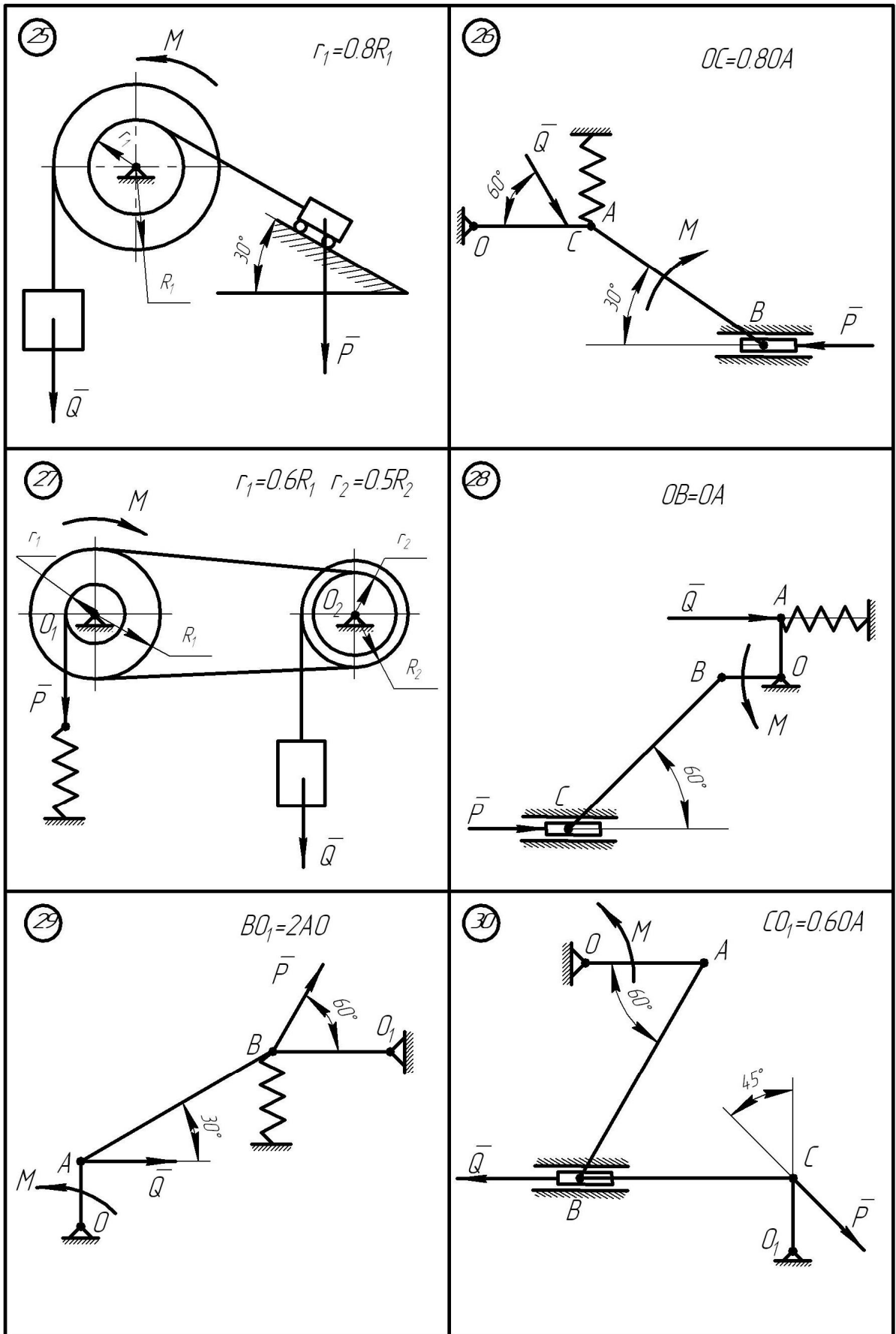


Рисунок АМ3.5

3.1 Приклад виконання завдання

Дано: $M = 6 \text{ Нм}$; $OA = 0,15 \text{ м}$; $OO_1 = 0,2 \text{ м}$; $O_1B = 0,5 \text{ м}$; $BC = 0,78 \text{ м}$
 (рис. АМ3.6). Нехтуючи тертям, визначити величину P , яку необхідно прикласти до повзуна C , щоб механізм знаходився в рівновазі, коли $OA \perp OO_1$.

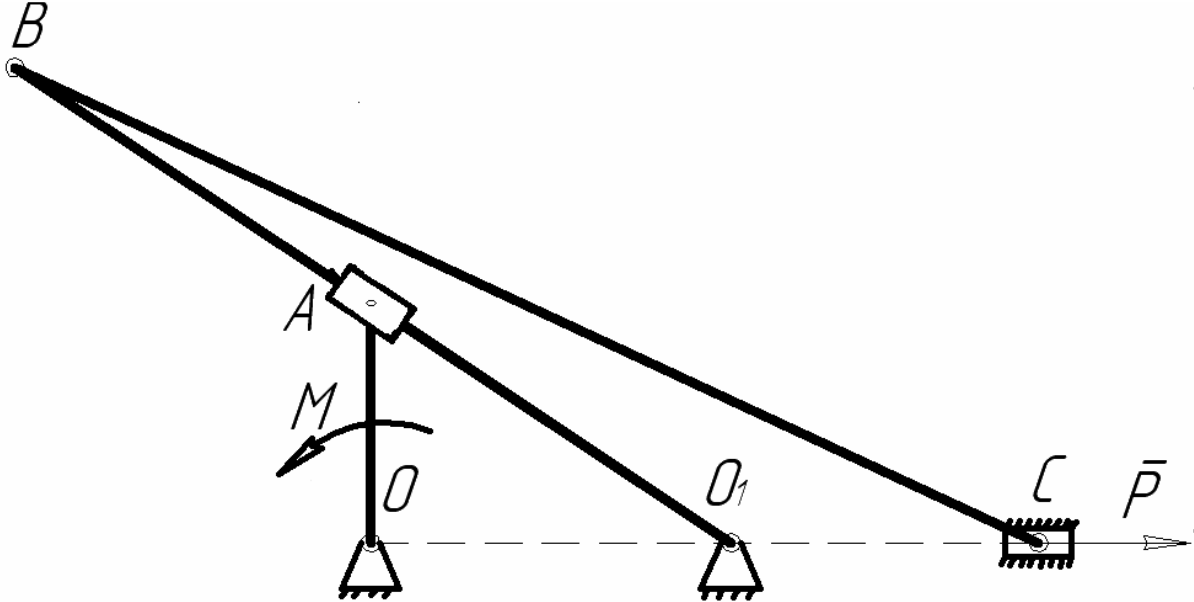


Рисунок АМ3.6

Розв'язання. Конструкція знаходиться в рівновазі під дією пари сил M і сили P . В'язі, які діють на неї, допускають переміщення повзуна C на δS_C , кривошипа OA – на $\delta \varphi$.

Знайдемо залежність між можливими переміщеннями точок системи. За рахунок шарнірного з'єднання з кривошипом OA трубка (точка) A переміщується на δS_A - абсолютне переміщення, одночасно переміщується по стержню BO_1 на $\delta S_A^{\text{відн.}}$ - відносне переміщення і зі стержнем BO_1 на $\delta S_A^{\text{пер.}}$ - відносне переміщення (рис. АМ3.7).

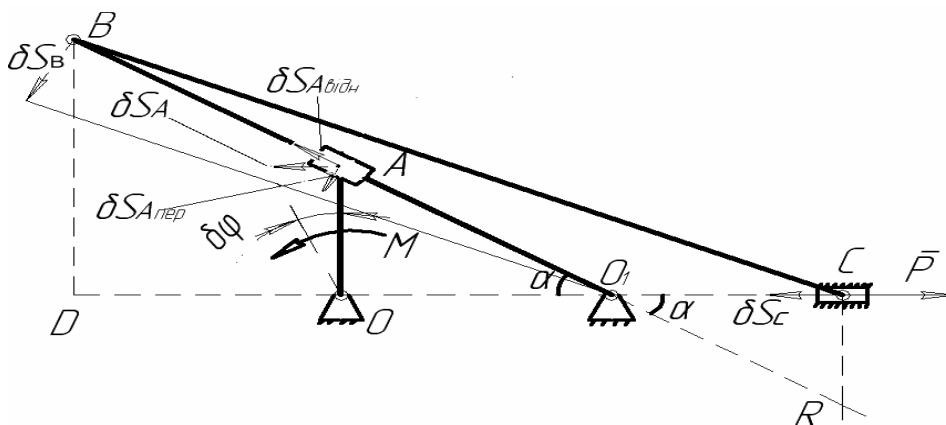


Рисунок АМ3.7

Визначимо можливе переміщення δS_C через переміщення кривошипа $\delta\varphi$. Для цього необхідно знайти переміщення вузла (точки) В – δS_B шатуна ВС. На рис. АМ3.7 позначимо кут $\angle OO_1B$ через α . Оскільки точка В теж належить коромислу BO_1 , то знайдемо залежність δS_B через $\delta S_A^{\text{пер}}$.

$$\delta S_A^{\text{пер}} = \delta S_A \cdot \sin \alpha, \text{ де } \delta S_A = \delta\varphi \cdot OA, \sin \alpha = \frac{AO}{AO_1}.$$

$$\text{Відстань } AO_1 = \sqrt{OO_1^2 + OA^2} = \sqrt{0,2^2 + 0,15^2} = 0,25 \text{ (м)}.$$

Оскільки $O_1B = 50 \text{ см} = 0,5 \text{ м}$, а $AO_1 = 0,25 \text{ м}$, то переміщення

$$\delta S_B = 2 \delta S_A^{\text{пер}} = 2 \delta S_A \sin \alpha = \frac{6}{5} \delta S_A, \text{ де } \sin \alpha = \frac{AO}{AO_1} = \frac{3}{5}.$$

Для визначення залежності між можливими переміщеннями δS_B і δS_C знайдемо положення миттєвого центра обертання ланки ВС – точка R.

$$\text{Тоді } \frac{\delta S_B}{\delta S_C} = \frac{BR}{CR}, \text{ звідки } \delta S_C = \frac{\delta S_B \cdot CR}{BR}.$$

Визначаємо BR і CR. Для цього розглянемо трикутники $\triangle DBO_1$, $\triangle DBC$ і $\triangle DRO_1$.

$$\text{З } \triangle DBO_1 \Rightarrow BD = 2 AO = 0,3 \text{ м}.$$

$$\text{З } \triangle DBC \Rightarrow DC = \sqrt{BC^2 - BD^2} = \sqrt{0,78^2 - 0,3^2} = 0,72 \text{ (м)}.$$

$$\text{Тоді } O_1C = DC - DO_1 = 0,72 - 0,4 = 0,32 \text{ (м)}.$$

$$\text{З } \triangle CO_1R \Rightarrow CR = O_1C \cdot \operatorname{tg} \alpha = 0,32 \cdot \frac{3}{4} = 0,24 \text{ м, де } \operatorname{tg} \alpha = \frac{AO}{OO_1} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}.$$

$$O_1R = \frac{CR}{\sin \alpha} = \frac{0,24}{0,6} = 0,4 \text{ м, BP} = O_1P + O_1R = 0,5 + 0,4 = 0,9 \text{ (м)}.$$

$$\text{Тоді } \delta S_C = 1,2 \delta S_A \frac{0,24}{0,9} = 0,32 \delta S_A = 0,32 \cdot 0,15 = 0,048 \delta\varphi.$$

Рівняння робіт, яке виражає принцип можливих переміщень, має вигляд:

$$M \delta\varphi - P \delta S_C = 0, \quad (3.1)$$

або $6 \cdot \delta\varphi - 0,048 \cdot P \cdot \delta\varphi = 0$. Звідки $P = \frac{6}{0,048} = 125$ (Н).

Розглянемо розв'язання задачі з врахуванням того, що сума потужностей сил, які діють на механічну систему у випадку рівноваги дорівнює нулю.

Надаємо кривошипу OA можливу кутову швидкість ω (рис. АМ3.8). Тоді вузлові точки A , B і C ланок механізму набувають відповідно швидкості V_A , V_B і V_C . На рис. АМ3.8 покажемо напрям швидкостей вузлових точок механізму, застосовуючи поняття миттєвого центра швидкостей для кожної його ланки (точка A -миттєвий центр швидкостей (МЦШ) для ланки OA , O_1 – МЦШ для ланки O_1B , R - МЦШ для ланки BC).

Запишемо рівняння потужностей: $M\omega - PV_C = 0$. (3.2)

Оскільки повзун A зверхує складний рух, то абсолютна швидкість V_A дорівнює сумі переносної швидкості $V_A^{пер}$ і відносної швидкості $V_A^{відн}$ (рис. АМ3.8).

$$\bar{V}_A = \bar{V}_A^{пер} + \bar{V}_A^{відн}.$$

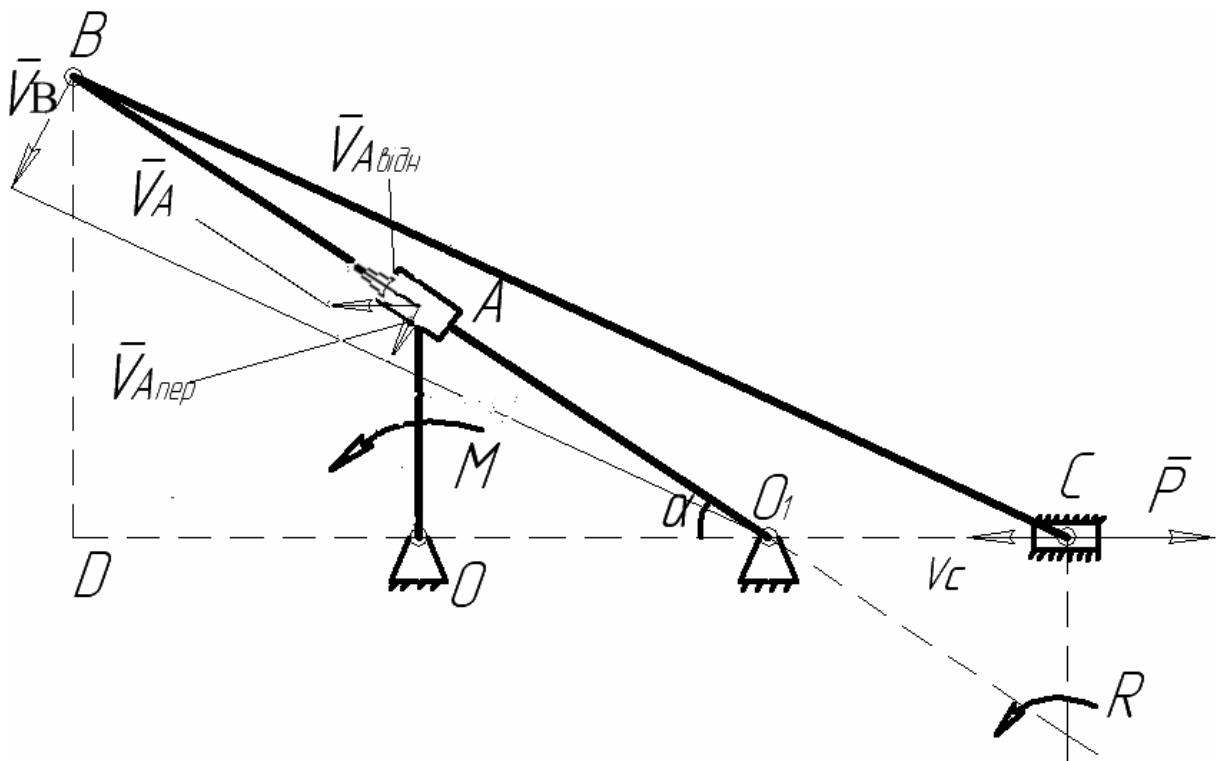


Рисунок АМ3.8

З попередніх розрахунків маємо: $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $AO_1 = 0.25\text{ м}$. Отже, відстань точки В до центра обертання O_1 вдвічі більша, тоді $V_B = 2 \cdot V_A^{nep} = 2 \cdot V_A \cdot \sin\alpha = \frac{6}{5} V_A$.

Для визначення кутової швидкості ланки BC знайдемо відстань BR , де R - миттєвий центр швидкостей ланки BC .

$$\begin{aligned} BR &= O_1B + O_1R, \\ O_1R &= \sqrt{O_1C^2 + CR^2}, \\ O_1C &= DC - DO_1, \\ DC &= \sqrt{BC^2 - BD^2}, \\ BD &= 2 \cdot OA = 0,3 \text{ м}, \\ DC &= \sqrt{0,78^2 - 0,3^2} = 0,72 \text{ м}, \\ DO_1 &= 2 \cdot OO_1 = 0,4 \text{ м}, \\ O_1C &= 0,72 - 0,4 = 0,32 \text{ м}, \\ RC &= O_1C \cdot \operatorname{tg}\alpha = 0,32 \cdot \frac{3}{4} = 0,24 \text{ м}, \\ O_1R &= \sqrt{0,32^2 + 0,24^2} = 0,4 \text{ м}, \\ BR &= 0,5 + 0,4 = 0,9 \text{ м}. \end{aligned}$$

В результаті маємо, що кутова швидкість ланки BC

$$\omega_R = \frac{V_B}{BR} = \frac{6V_A}{0,9} (C^{-1}).$$

Тоді швидкість точки С

$$V_C = \omega_R \cdot CR = \frac{6V_A}{0,9} \cdot 0,24 = 0,32 \cdot V_A.$$

Кутова швидкість кривошипа OA :

$$\omega = \frac{V_A}{OA} = \frac{V_A}{0,15} (C^{-1}).$$

Підставимо значення ω і V_C в формулу (3.2), маємо:

$$M \cdot \frac{V_A}{0,15} = 0,32 \cdot P \cdot V_A.$$

Звідки $P = 125$ (Н).

АМ4 Дослідження руху механічної системи за допомогою загального рівняння динаміки

Для заданої механічної системи визначити прискорення вантажів і натяг ниток до яких вони прикріплені. Масами ниток та їх розтягом нехтувати.

Варіанти механічних систем показані на рис. АМ4.1 - АМ4.5, а необхідні для розв'язання дані наведені в таблиці 4.1. Якщо блоки та катки однорідні, то при розрахунках брати радіуси R_2 , R_3 і R_4 . Шнури над похилими площинами паралельні цим площинам. В варіантах 1, 3, 4, 5, 13, 19, 29 шорсткі поверхні з коефіцієнтом тертя $f = 0.2$.

Таблиця АМ4.1

Варіан	Сили тяжіння				R_2/r_2	R_3/r_3	Радіуси інерції	
	G_1	G_2	G_3	G_4			ρ_{2x}	ρ_{3x}
1	2G	G	0.5G	0.5G	2	2	r_2	r_3
2	3G	0.2G	0.4G	0.6G	2	1.5	r_2	$1.2r$
3	3G	0.3G	G	0.7G	3	2	$2r_2$	r_3
4	4G	0.5G	0.5G	2G	1.5	2	$1.2r$	r_3
5	5G	G	G	G	3	2	$2r_2$	r_3
6	6G	2G	G	0.5G	2	3	$r_2\sqrt{2}$	$2r_3$
7	4G	2G	G	0.5G	4	2	$2r_2$	$r_3\sqrt{2}$
8	2G	G	0.5G	0.5G	3	3	$2r_2$	$2r_3$
9	3G	0.5G	0.6G	0.4G	2	2	r_2	r_3
10	2G	G	0.5G	0.5G	2	2	r_2	r_3

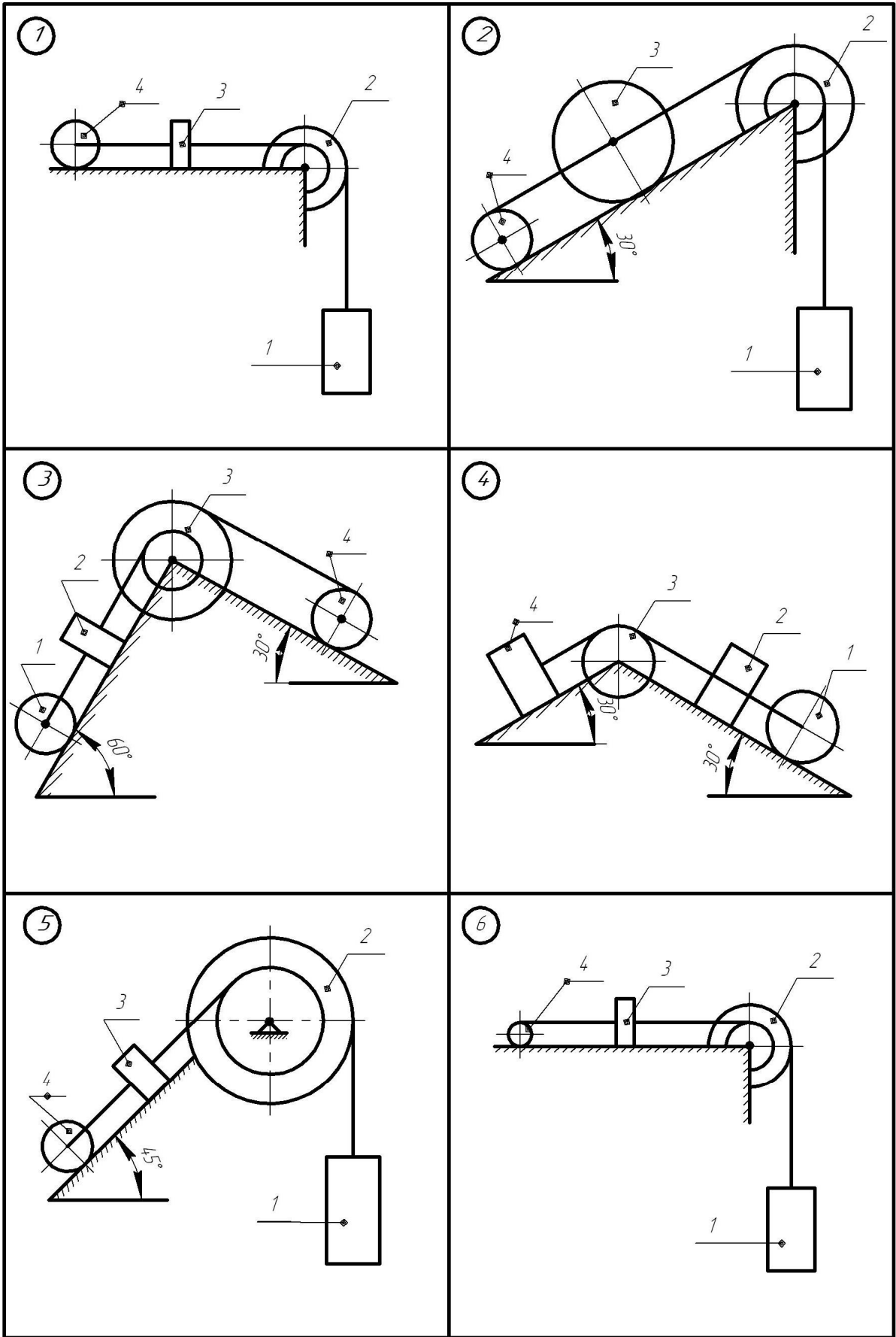


Рисунок АМ4.1

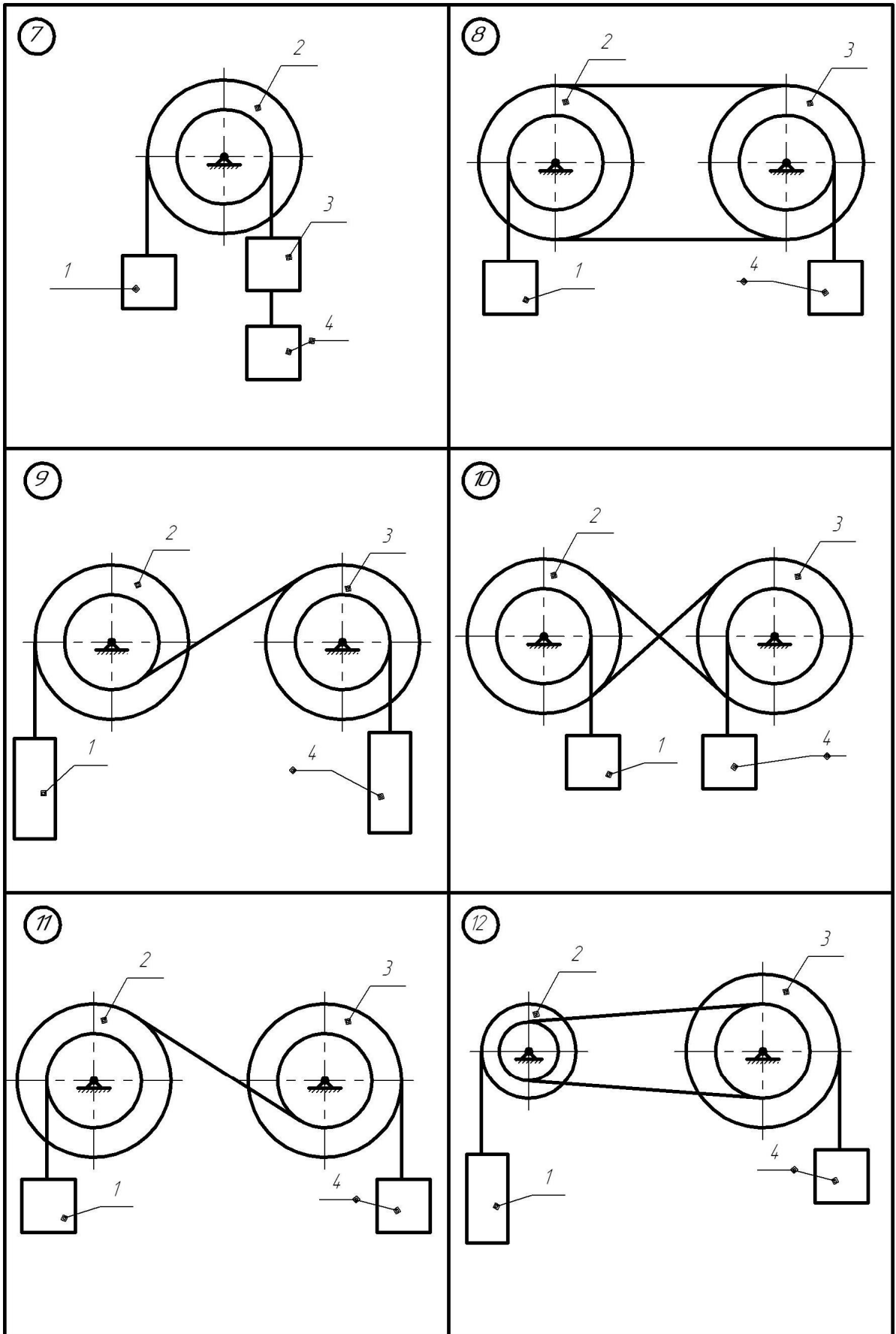


Рисунок АМ4.2

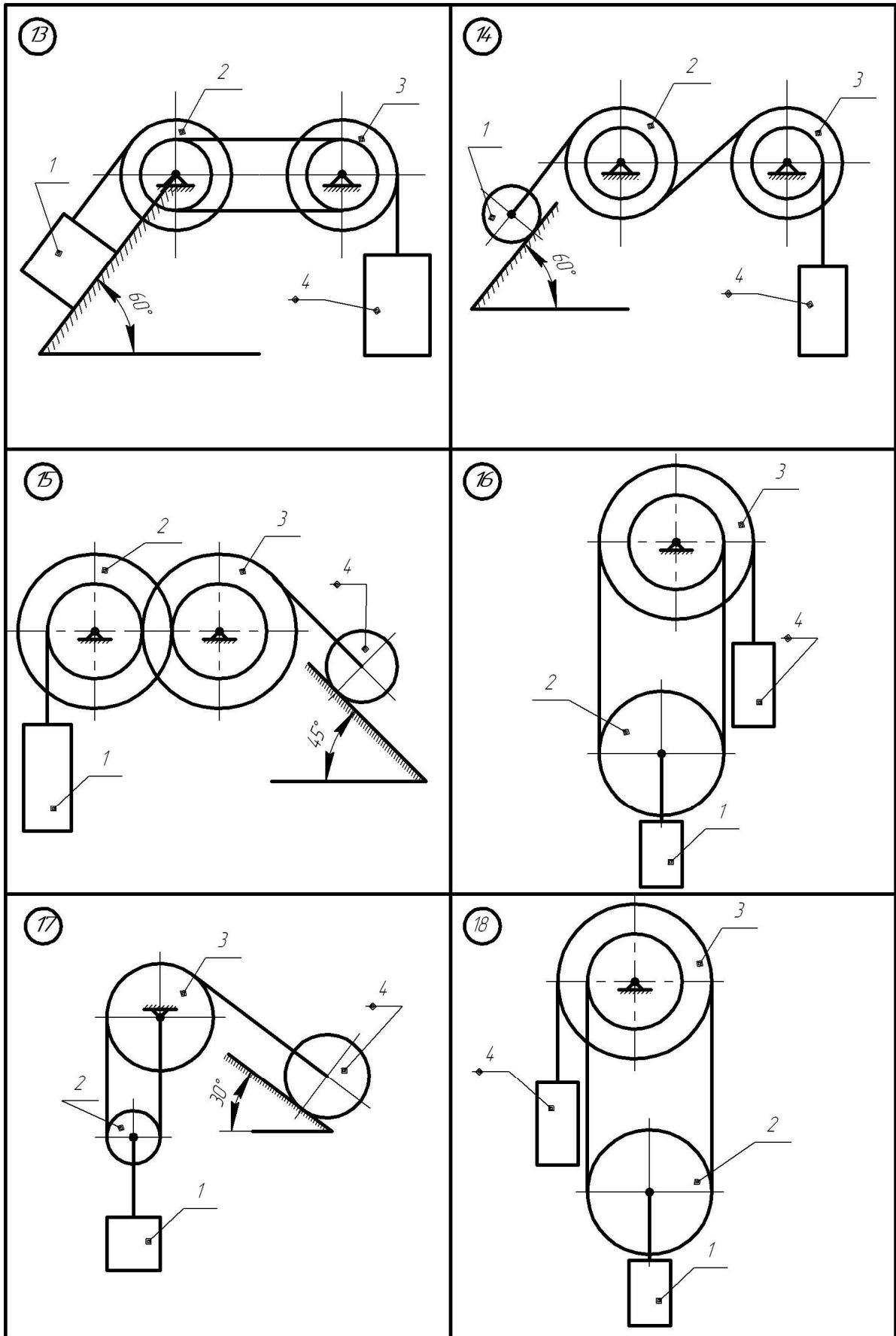


Рисунок АМ4.3

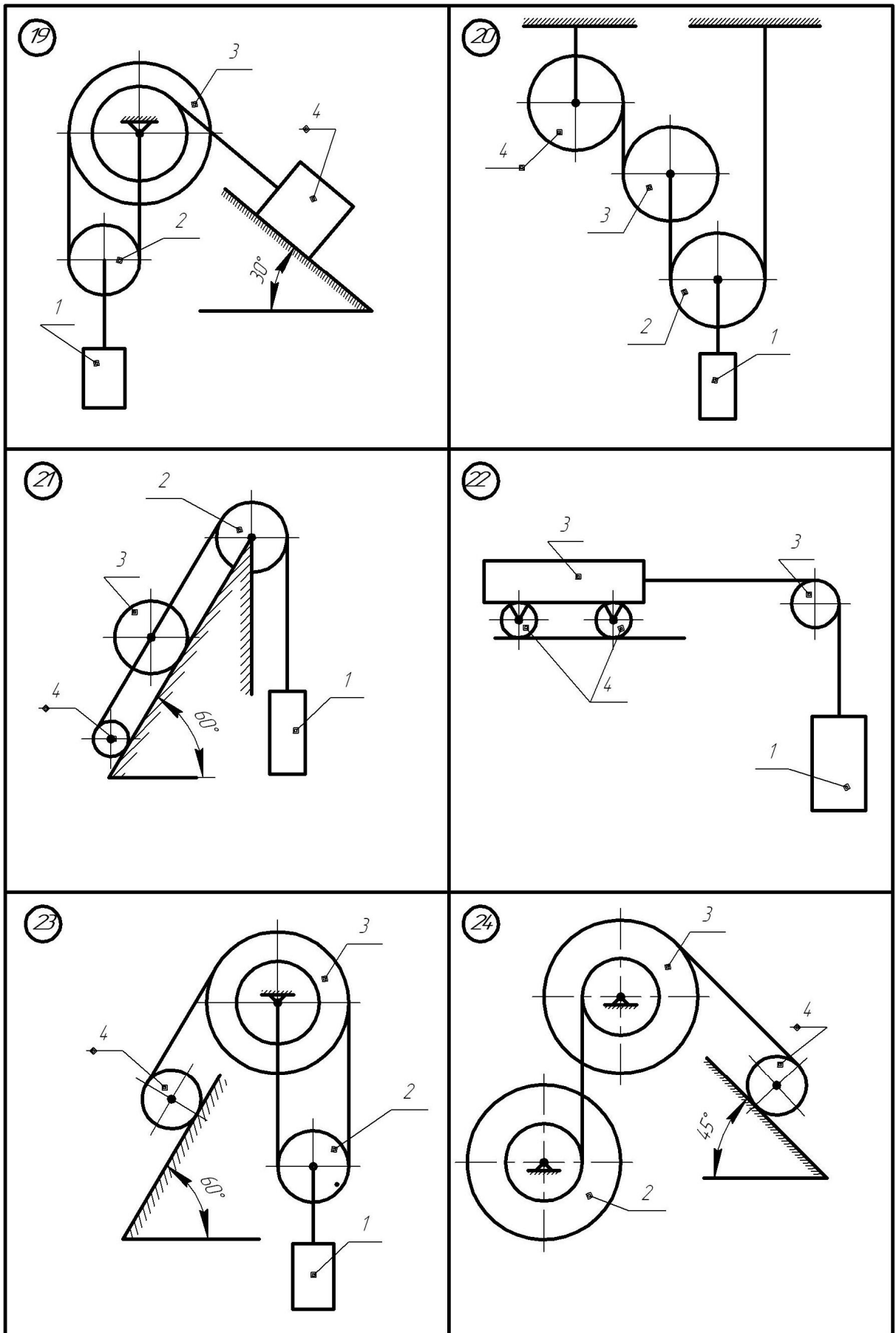


Рисунок АМ4.4

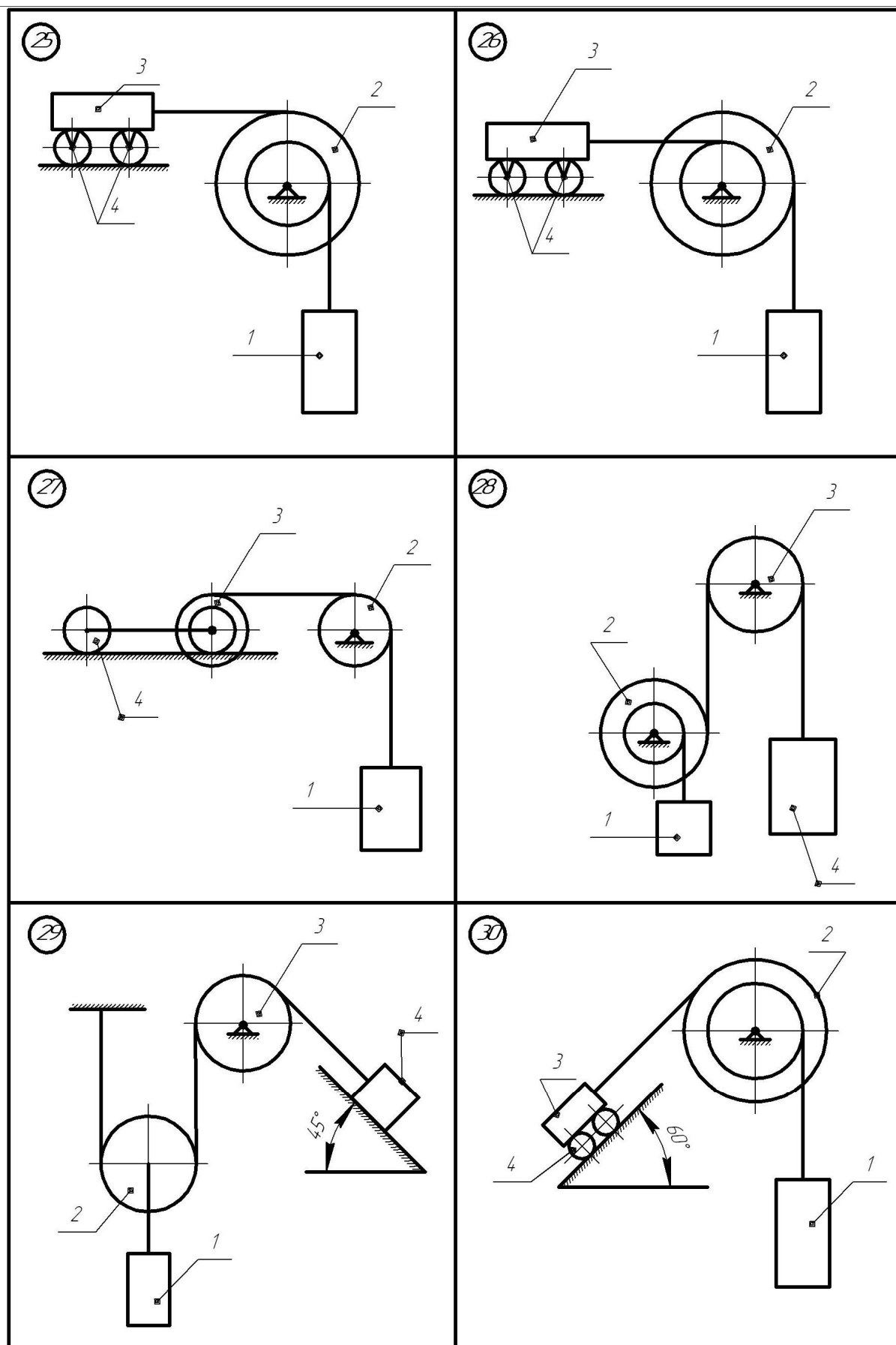


Рисунок АМ4.5

4.1 Приклад виконання завдання

Дано: $G_1 = 2G$; $G_2 = G$; $G_3 = 3G$; $G_4 = G$; $R_2 = R$; $R_3 = 2R$; $r_3 = R$;
 $f = 0.2$; $\rho_3 = 1.5 R$; $\alpha = 30^\circ$ (рис. АМ4.6).

Визначити прискорення вантажу 1 і натяг T_{1-2} , T_{3-4} , T_{2-3} .

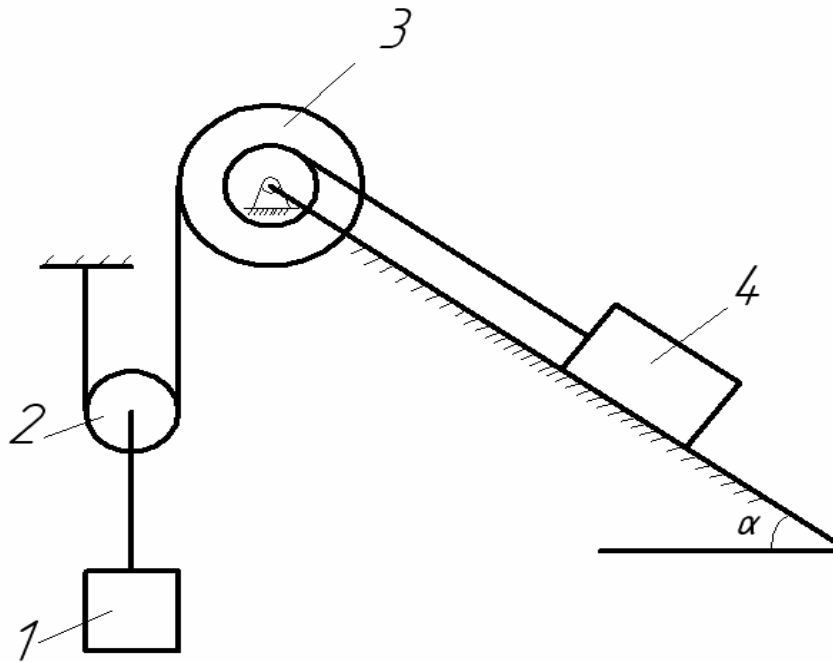


Рисунок АМ4.6

Для розв'язання задачі використаємо загальне рівняння динаміки. Покажемо задані сили: сили ваги G_1 - вантажу 1, G_2 - блока 2, G_3 - блока 3 і G_4 - вантажу 4, а також силу тертя ковзання F - вантажу по похилій площині (рис. АМ4.7).

Прикладемо сили інерції. Сила інерції вантажу 1, який рухається поступально з прискоренням a_1 , виражається вектором

$$\vec{\Phi}_1 = -m_1 \vec{a}_1$$

Сила інерції блока 2, який рухається плоско-паралельно, зводиться до вектора

$$\vec{\hat{O}}_2 = -m_2 \vec{a}_2,$$

де \bar{a}_2 - прискорення центра ваги блока, і пари сил, момент якої

$$\dot{l}_2^{\circ} = -2_{2\delta} \cdot \xi_2.$$

Сила інерції вантажу 4, який рухається поступально з прискоренням \bar{a}_4 , виражається вектором $\bar{\Phi}_4 = -m_4 \bar{a}_4$.

Надаємо системі можливе переміщення (рис. АМ4.7) і складемо загальне рівняння динаміки:

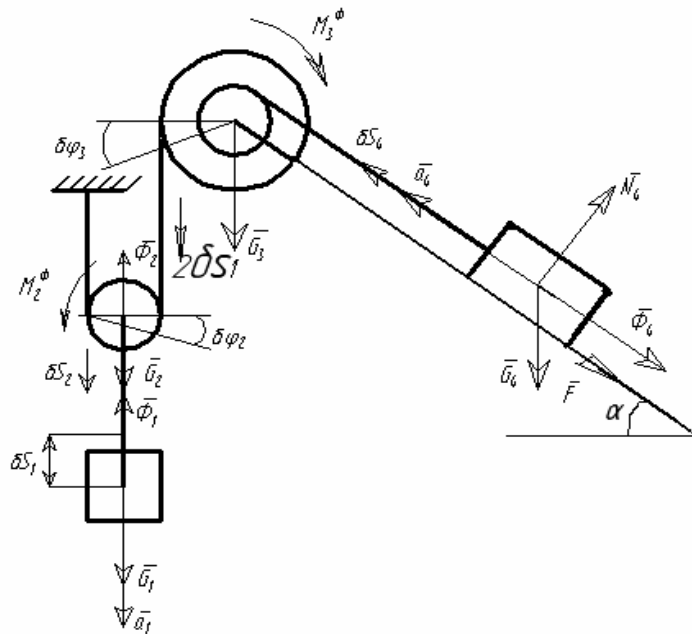


Рисунок АМ4.7

$$G_1 \delta S_1 + G_2 \delta S_2 - G_4 \sin \alpha \delta S_4 - F \delta S_4 - \Phi_1 \delta S_1 - \Phi_2 \delta S_2 - M_2^{\phi} \delta \varphi_2 - M_3^{\phi} \delta \varphi_3 - \Phi_4 \delta S_4 = 0 \quad (4.1)$$

Згідно з умовою задачі розтягом нитки нехтуємо, тоді прискорення центра мас вантажу 1, блока 2 та кутове прискорення блока 2 і 3 такі :

$$a_2 = a_1, \quad (4.2)$$

$$\varepsilon_2 = a_1/R, \varepsilon_3 = 2a_1/R_3 = a_1/R,$$

де a_1 - прискорення вантажу 1.

Кутове прискорення нерухомого блока 3 :

$$\varepsilon_3 = 2a_1/R_3 \quad (4.3)$$

Прискорення вантажу 4: $a_4 = \varepsilon_3 \cdot r_3 = \frac{a_1}{R} \cdot R = a_1$ (4.4)

Тоді з врахуванням (4.2)-(4.4) запишемо вирази для сил інерції Φ_1 і Φ_2 та моментів сил інерції M_2^ϕ і M_3^ϕ :

$$\Phi_1 = m_1 a_1 = \frac{2G}{g} a_1, \quad (4.5)$$

$$\Phi_2 = m_2 a_2 = \frac{2G}{g} \cdot a_2 = \frac{G}{g} \cdot a_1, \quad (4.6)$$

$$\Phi_4 = m_4 a_4 = \frac{G}{g} \cdot a_1, \quad (4.7)$$

$$M_2^\phi = I_{2x} \varepsilon_2 = \frac{G_2 R^2}{2g} \cdot \frac{a_1}{R} = \frac{GRa_1}{2g}, \quad (4.8)$$

$$M_3^\phi = I_{3x} \varepsilon_3 = \frac{G_3 \rho_3^2}{g} \cdot \frac{a_1}{R} = \frac{6.75GRa_1}{g}. \quad (4.9)$$

де $I_{2x} = \frac{G_2 R^2}{2g}$ - момент інерції однорідного блока 2 відносно центральної осі X;

$I_{3x} = \frac{G_3 \rho_3^2}{g}$ - момент інерції східчастого шківa 3.

Сила тертя ковзання вантажу 4 :

$$F = f G_4 \cos \alpha = f G \cos \alpha. \quad (4.10)$$

Виразимо переміщення δS_2 , δS_4 , $\delta \varphi_2$, $\delta \varphi_4$ через δS_1 .

$$\begin{aligned} \delta S_2 &= \delta S_1, \quad \delta \varphi_2 = \delta S_2/R = \delta S_1/R, \\ \delta \varphi_3 &= \frac{2\delta S_2}{2R} = \frac{\delta S_1}{R}, \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$\delta S_4 = \delta \varphi_3 \cdot r_3 = \frac{\delta S_1}{R} \cdot R = \delta S_1.$$

Рівняння (4.1) має вигляд:

$$2G \delta S_1 + G \delta S_1 - G \sin \alpha \cdot \delta S_1 - f G \cos \alpha \cdot \delta S_1 - \frac{2G}{g} a_1 \delta S_1 - \frac{G}{g} a_1 \delta S_1 - \frac{6,75 R G a_1}{g} \cdot \frac{\delta S_1}{R} - \frac{G R a_1}{2g} \cdot \frac{\delta S_1}{R} - \frac{G a_1}{g} \cdot \delta S_1 = 0. \quad (4.12)$$

Після ділення отриманого рівняння на $G \delta S_1$ отримаємо :

$$3 - 0,5 - 0,2 \cdot 0,86 - \frac{2a_1}{g} - \frac{a_1}{g} - \frac{a_1}{2g} - \frac{6,75a_1}{g} - \frac{a_1}{g} = 0,$$

$$2,328 - \frac{21,5a_1}{2g} = 0.$$

Звідки

$$a_1 = \frac{4,656g}{21,5} = 0,21g.$$

Для визначення натягу нитки в дільницях 1-2, 2-3, 3-4 (рис. АМ4.6) умовно розріжемо її і замінимо відповідно реакціями T_{1-2} , T_{2-3} , T_{3-4} .

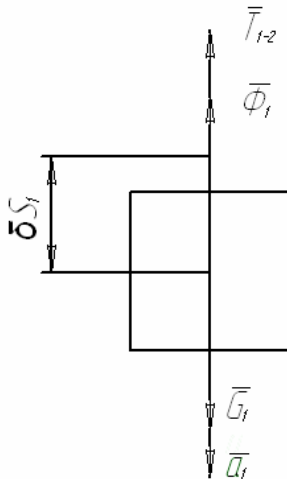


Рисунок АМ4.8

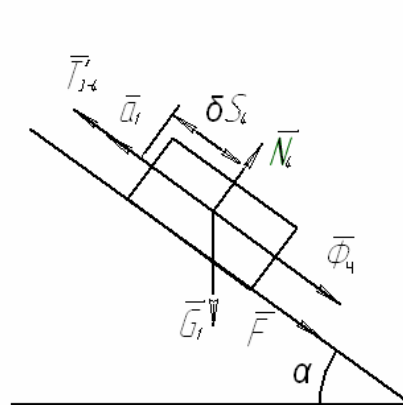


Рисунок АМ4.9

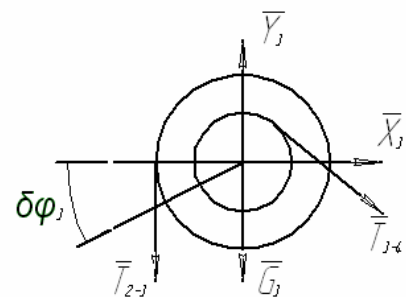


Рисунок АМ4.10

Показавши на кожному рисунку сили інерції з врахуванням відповідних переміщень кожної частини даної механічної системи, складаємо загальні рівняння динаміки.

Для рис. АМ4.8 :

$$G_1 \delta S_1 - \Phi_1 \delta S_1 - T_{1-2} \delta S_1 = 0. \quad (4.13)$$

Підставивши значення сили інерції Φ_1 в (4.13), та скоротивши отримане рівняння на δS_1 , знаходимо натяг нитки на ділянці 1-2:

$$T_{1-2} = G_1 - \Phi_1 = 2G - \frac{2g}{g} a_1 = 2G - \frac{2G \cdot 4.656}{21.5} = 1,57G.$$

Для рис. АМ4.9 :

$$T_{3-4} \delta S_4 - G \sin \alpha \delta S_4 - G f \cos \alpha \delta S_4 - \Phi_4 \delta S_4 = 0. \quad (4.14)$$

Підставивши значення сили інерції Φ_4 в (4.14), та скоротивши отримане рівняння на δS_4 , знаходимо натяг нитки на ділянці 3-4:

$$T_{3-4} = G \sin \alpha + G f \cos \alpha + \frac{G}{g} a_1 = G \left(0,5 + 0,2 \cdot 0,86 + \frac{4.656}{21.5} \right) = 0,89G.$$

Для рис. 4.10 :

$$T_{2-3} \cdot 2 \delta S_1 - T_{3-4} \cdot \delta S_4 = 0, \quad (4.15)$$

Враховуючи, що $\bar{T}'_{3-4} = -\bar{T}_{3-4}$ і $\delta S_4 = \delta S_1$, отримаємо:

$$(T_{2-3} \cdot 2 - T_{3-4}) \delta S_1 = 0,$$

Скорочуючи отримане рівняння на δS_1 , знаходимо значення натягу нитки на ділянці 2-3:

$$T_{2-3} = T_{3-4} / 2 = 0,55G.$$

AM5 Використання рівняння Лагранжа другого роду для дослідження руху матеріальної системи з одним ступенем вільності

Матеріальна система (рис. AM5.11-AM5.15) приводиться під дією сили тяжіння. Знайти прискорення тіла 1 та його закон руху. Масами шнурів, силами опору в шарнірах знехтувати. Тіла котяться по поверхні без ковзання.

Величини для розрахунків наведені в табл. AM5.1, де прийнято такі позначення: m_1, m_2, m_3 - маси тіл 1, 2, 3; R_2, r_2, R_3, r_3 - найбільші та найменші розміри ступінчастих шківів тіл 2 та 3; ρ_{2x}, ρ_{3x} - радіус інерції ступінчастих шківів 2 та 3 відносно осі обертання; α, β - кути нахилу площин до горизонту. Якщо шківів 2 або 3 однорідні, тоді при розрахунках брати R_2, R_3 . Шнури над похилими площинами паралельні цим площинам.

Таблиця AM5.1

Варіант	$m_1, \text{кг}$	$m_2, \text{кг}$	$m_3, \text{кг}$	$R_2, \text{м}$	$r_2, \text{м}$	$R_3, \text{м}$	$r_3, \text{м}$	$\rho_{2x}, \text{м}$	$\rho_{3x}, \text{м}$	$\alpha, ^\circ$	$\beta, ^\circ$
1	6	1	2	0,6	0,5	0,5	0,3	0,6	0,4	30	45
2	8	2	2	0,8	0,6	0,7	0,4	0,7	0,6	45	60
3	10	3	3	0,65	0,5	0,6	0,4	0,5	0,5	60	30
4	5	0,5	1,5	0,5	0,4	0,45	0,2	0,45	0,3	30	60
5	4	0,75	1,25	0,4	0,3	0,3	0,15	0,35	0,2	45	45
6	9	4	1	0,4	0,35	0,35	0,25	0,3	0,3	60	30
7	3	0,3	1	0,3	0,2	0,25	0,15	0,2	0,2	30	60
8	2	0,2	0,3	0,2	0,15	0,25	0,2	0,2	0,25	45	45
9	11	4	2	0,7	0,6	0,6	0,3	0,65	0,5	60	30
10	12	5	1	0,75	0,65	0,65	0,45	0,7	0,5	30	60

5.1 Приклад виконання завдання

Визначити прискорення та закон руху центра мас тіла 1, якщо матеріальна система (рис.АМ5.1) починає рухатися із стану спокою, масами шнурів знехтувати. Тіла 1 та 3 рухаються без ковзання.

Дано: $m_1 = 10 \hat{e} \tilde{a}$; $m_2 = 2 \hat{e} \tilde{a}$; $m_3 = m_4 = 1 \hat{e} \tilde{a}$;
 $R_2 = 0,4 \text{ м}$; $r_2 = 0,2 \text{ м}$; $R_3 = 0,3 \text{ м}$; $r_3 = 0,2 \text{ м}$; $\rho_2 = 0,35 \text{ м}$; $\rho_3 = 0,29 \text{ м}$; $\alpha = 30^\circ$;
 $\beta = 60^\circ$.

Початкові умови: $q_{10} = 0$; $\dot{q}_{10} = 0$.

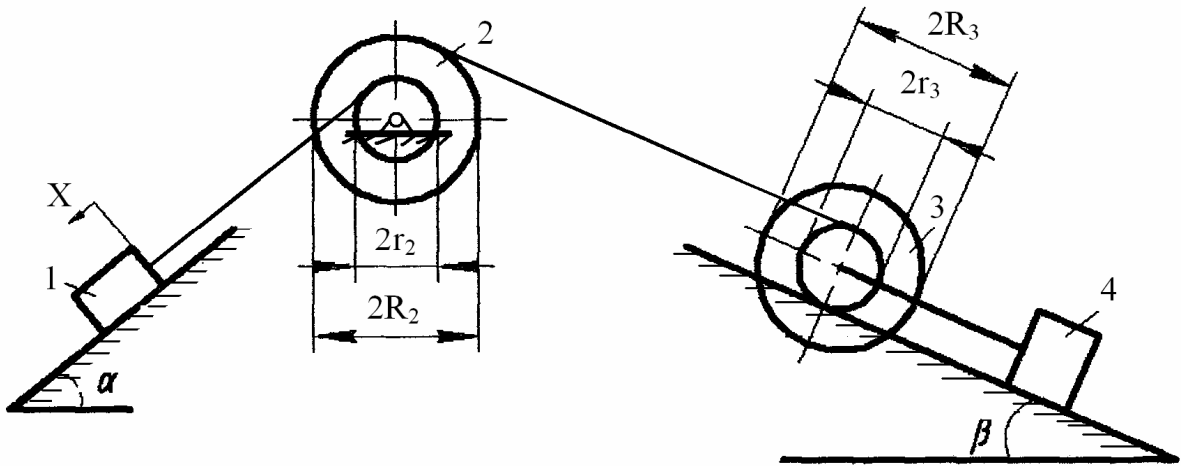


Рисунок АМ5.1

Розв'язання. За узагальнену координату виберемо переміщення x тіла 1 вздовж похилої площини. Для розв'язання задачі використаємо рівняння Лагранжа другого роду

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial T}{\partial x} = Q, \quad (5.1)$$

де T - кінетична енергія системи;

Q - узагальнена сила.

Визначаємо швидкості центрів мас та нульові швидкості твердих тіл системи через узагальнену швидкість \dot{x} :

$$V_1 = \dot{x}, \quad \omega_2 = \frac{V_1}{r_2} = \frac{\dot{x}}{r_2} - \text{кутова швидкість блока 2,}$$

$$\omega_3 = \frac{\omega_2 \cdot R_2}{2r_3} = \frac{V_1}{r_3} = \frac{\dot{x}}{r_3} - \text{кутова швидкість блока 3.}$$

$$V_3 = \omega_3 \cdot r_3 = \dot{x}$$

$$V_4 = V_3 = \dot{x}$$

Моменти інерції блоків відносно центральних осей:

$$I_2 = m_2 \rho_2^2, \quad I_3 = m_3 \rho_3^2.$$

Кінетична енергія тіл 1-4:

$$T_1 = m_1 \frac{\dot{x}^2}{2} - \text{поступальний рух тіла 1};$$

$$T_2 = \frac{I_2 \omega_2^2}{2} = \frac{m_2 \rho_2^2 \cdot \dot{x}^2}{2r_2^2} - \text{обертальний рух блока 2};$$

$$T_3 = \frac{I_3 \omega_3^2}{2} + \frac{m_3 V_3^2}{2} = \frac{m_3 \rho_3^2 \cdot \dot{x}^2}{2r_3^2} + \frac{m_3 \dot{x}^2}{2} - \text{блок 3 звершує плоско-паралельний}$$

рух

$$T_4 = \frac{m_4 V_4^2}{2} = \frac{m_4 \dot{x}^2}{2} - \text{поступальний рух тіла 4.}$$

Для даної системи

$$T = \sum_{i=1}^4 T_i ; \quad (5.2)$$

Підставимо знайдені кінетичні енергії в формулу (5.2), маємо:

$$\begin{aligned} T &= \frac{m_1 \dot{x}^2}{2} + \frac{m_2 \rho_2^2 \dot{x}^2}{2r_2^2} + \frac{m_3 \rho_3^2 \dot{x}^2}{2r_3^2} + \frac{m_3 \dot{x}^2}{2} + \frac{m_4 \dot{x}^2}{2} = \\ &= \dot{x}^2 (5 + 3.0625 + 1.0512 + 0.5 + 0.5) = 10.1137 \dot{x}^2; \end{aligned} \quad (5.3)$$

$$\text{Тоді } \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = 20.2274 \dot{x}; \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = 20.2274 \ddot{x};$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0. \quad (5.4)$$

Знайдемо узагальнену силу Q за формулою:

$$Q = \frac{\delta A}{\delta q} = \frac{\delta A}{\delta x}. \quad (5.5)$$

Для знаходження елементарної роботи δA спочатку визначаємо роботу сил, діючих на механічну систему з врахуванням переміщення x .

$$A = A_{m_1 g} + A_{m_2 g} + A_{m_3 g} + A_{m_4 g} .$$

$$A_{m_1 g} = m_1 g x \sin \alpha ;$$

$$A_{m_2 g} = 0 - \text{центр мас блока 2 не переміщується.}$$

Оскільки $V_3 = V_4 = V_1 = \dot{x}$, то $S_4 = S_3 = x$, тоді

$$A_{m_3 g} = -m_3 g S_3 \sin \beta = -m_3 g x \sin \beta .$$

$$A_{m_4 g} = -m_4 g S \sin \beta = -m_4 g x \sin \beta .$$

Отже, робота зовнішніх сил, які діють на механічну систему, має вигляд:

$$A = x g (m_1 \sin \alpha - m_3 \sin \beta - m_4 \sin \beta) . \quad (5.6)$$

$$\text{Звідки} \quad \delta A = g (m_1 \sin \alpha - m_3 \sin \beta - m_4 \sin \beta) \delta x . \quad (5.7)$$

Підставимо (5.7) в формулу (5.5):

$$Q = g (m_1 \sin \alpha - m_3 \sin \beta - m_4 \sin \beta) = g (10 \cdot 0.5 - 1 \cdot 0.87 - 1 \cdot 0.87) = 31.98 H \quad (5.8)$$

Тоді з врахуванням (5.4) і (5.8) рівняння Лагранжа (5.1) запишеться у вигляді:

$$20,2274 \ddot{x} = 31,98 . \quad (5.9)$$

Звідки знаходимо прискорення тіла 1:

$$\ddot{x} = 1,58 \text{ м/с}^2 . \quad (5.10)$$

Проінтегруємо двічі рівняння (5.9) з врахуванням початкових умов.

$$\int_0^{V_K} d \dot{x} = 1,58 \int_0^t dt ,$$

$$V_x = 1,58 t ,$$

$$V_x = \frac{dx}{dt} ,$$

$$\int_0^{x(t)} dx = 1,58 \int_0^t t dt ,$$

$$x(t) = 0,79 t^2 \text{ (м)} .$$

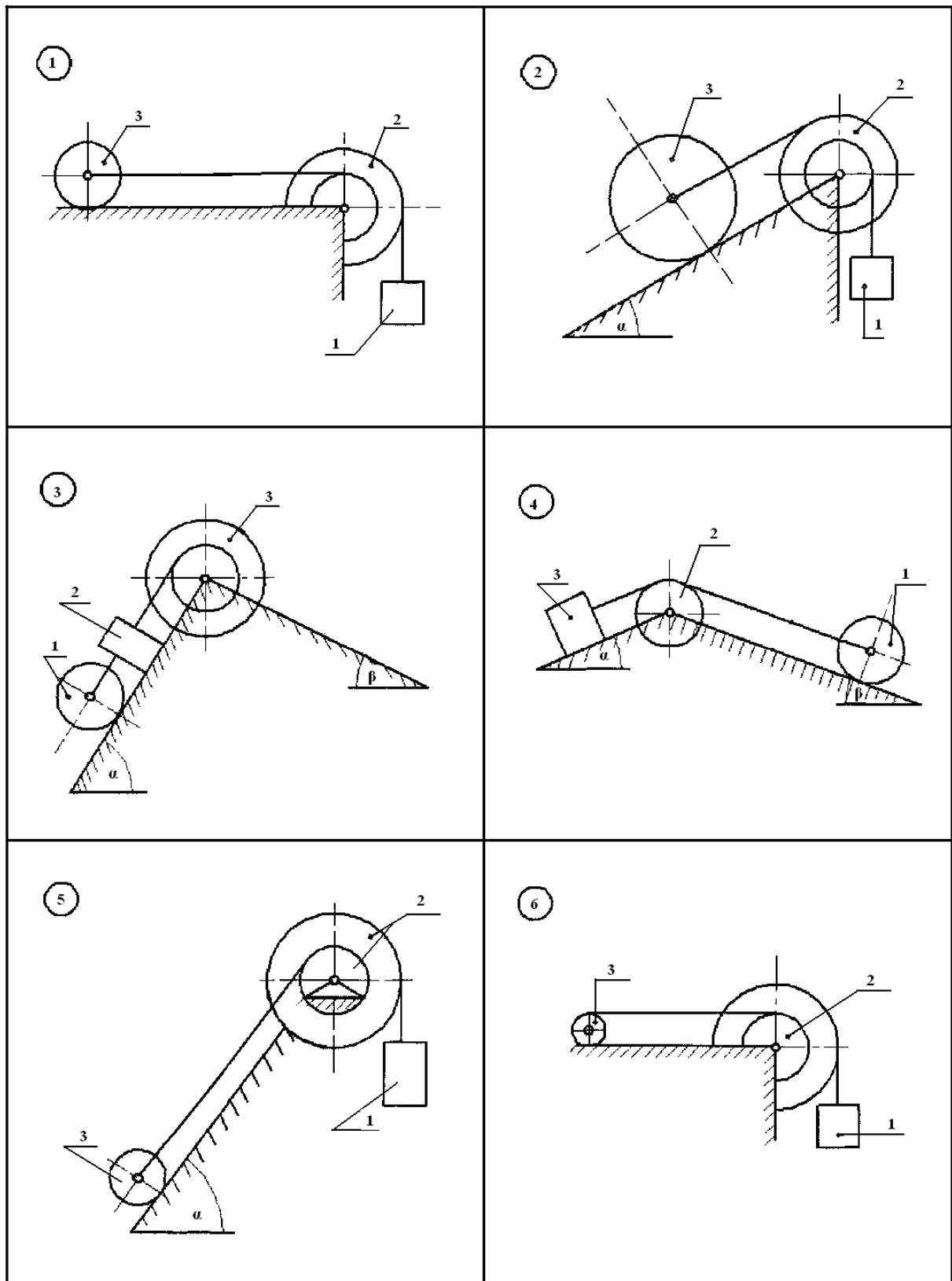


Рисунок АМ5.11

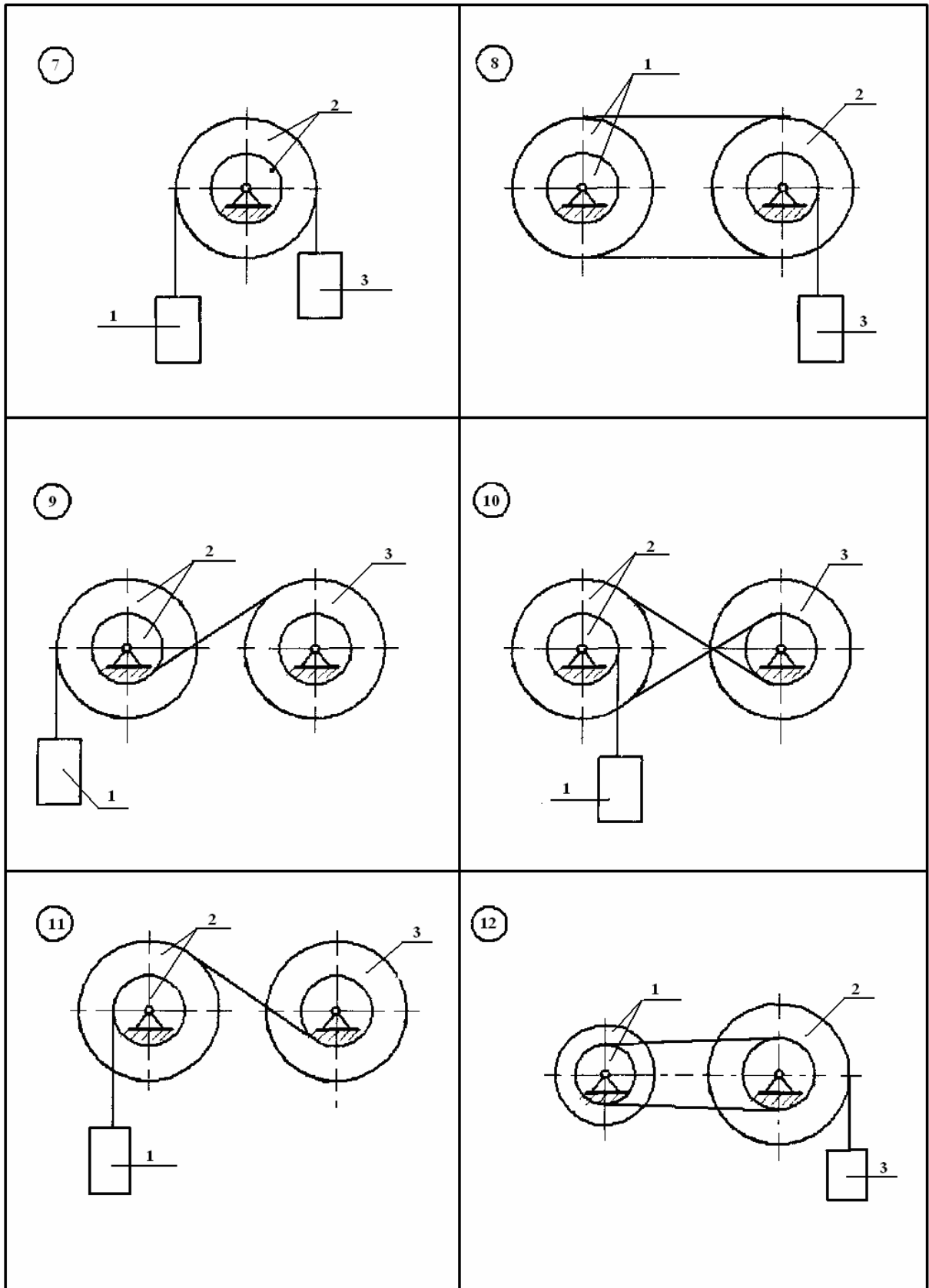


Рисунок АМ5.12

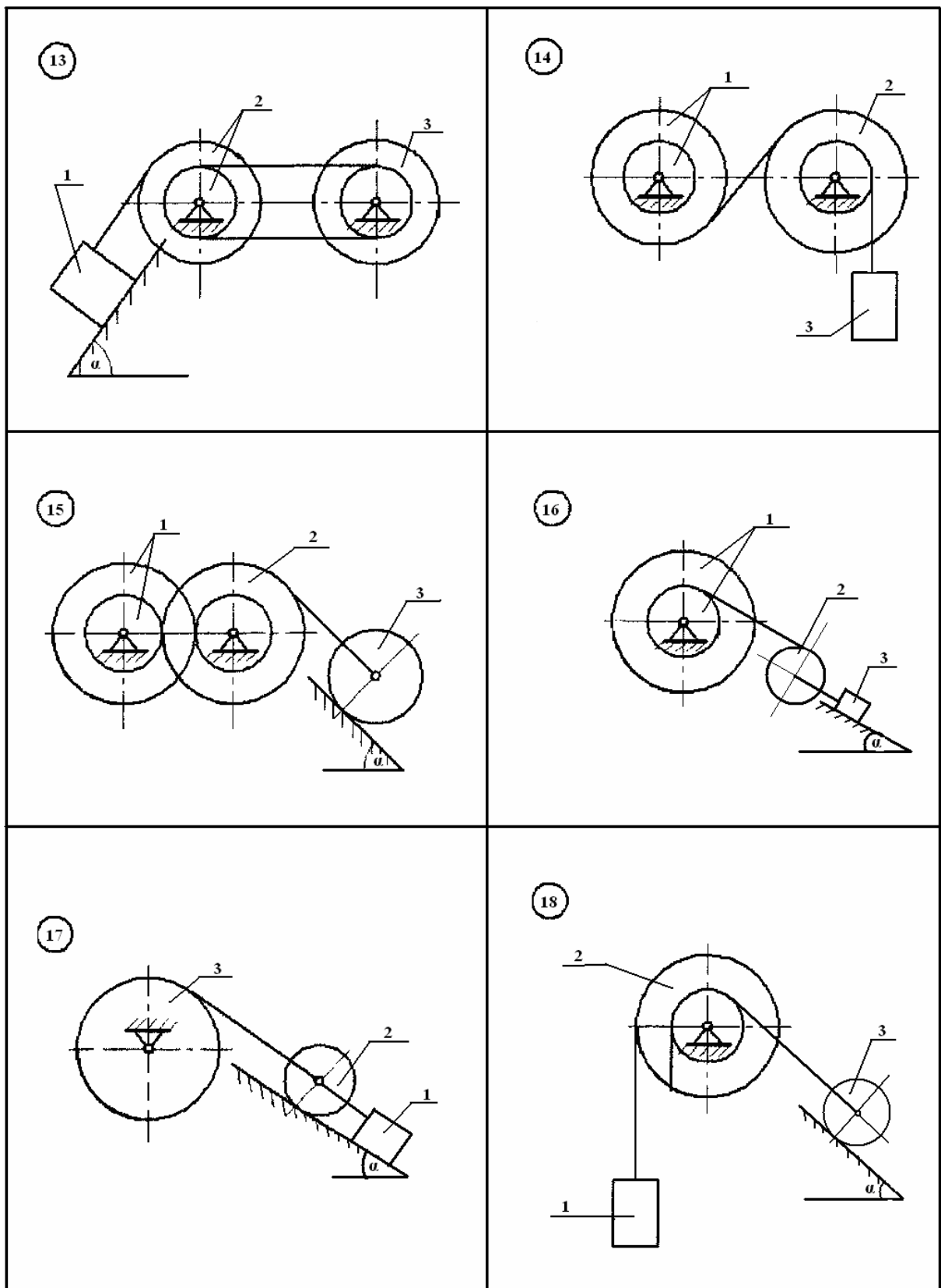


Рисунок АМ5.13

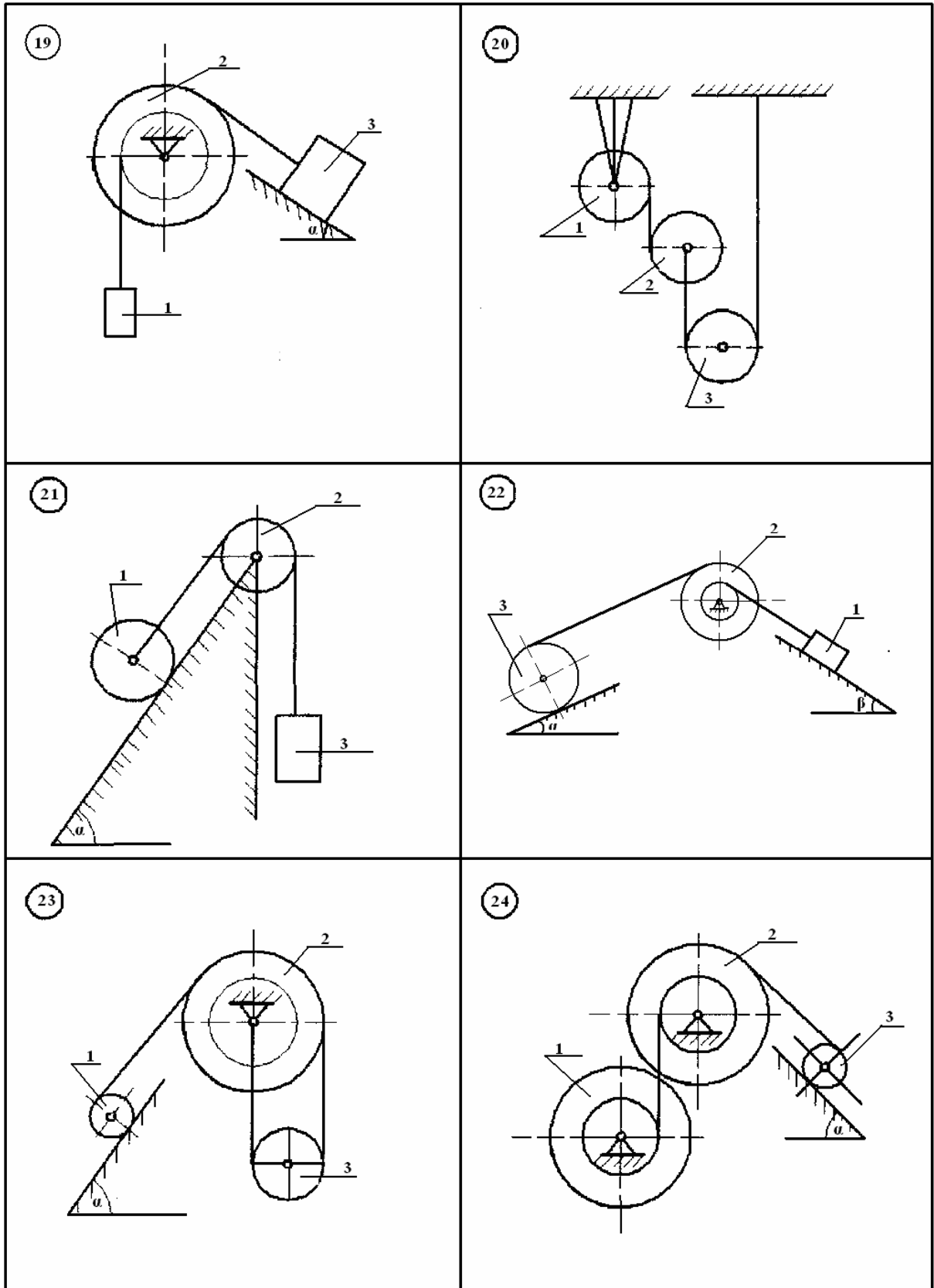


Рисунок АМ5.14

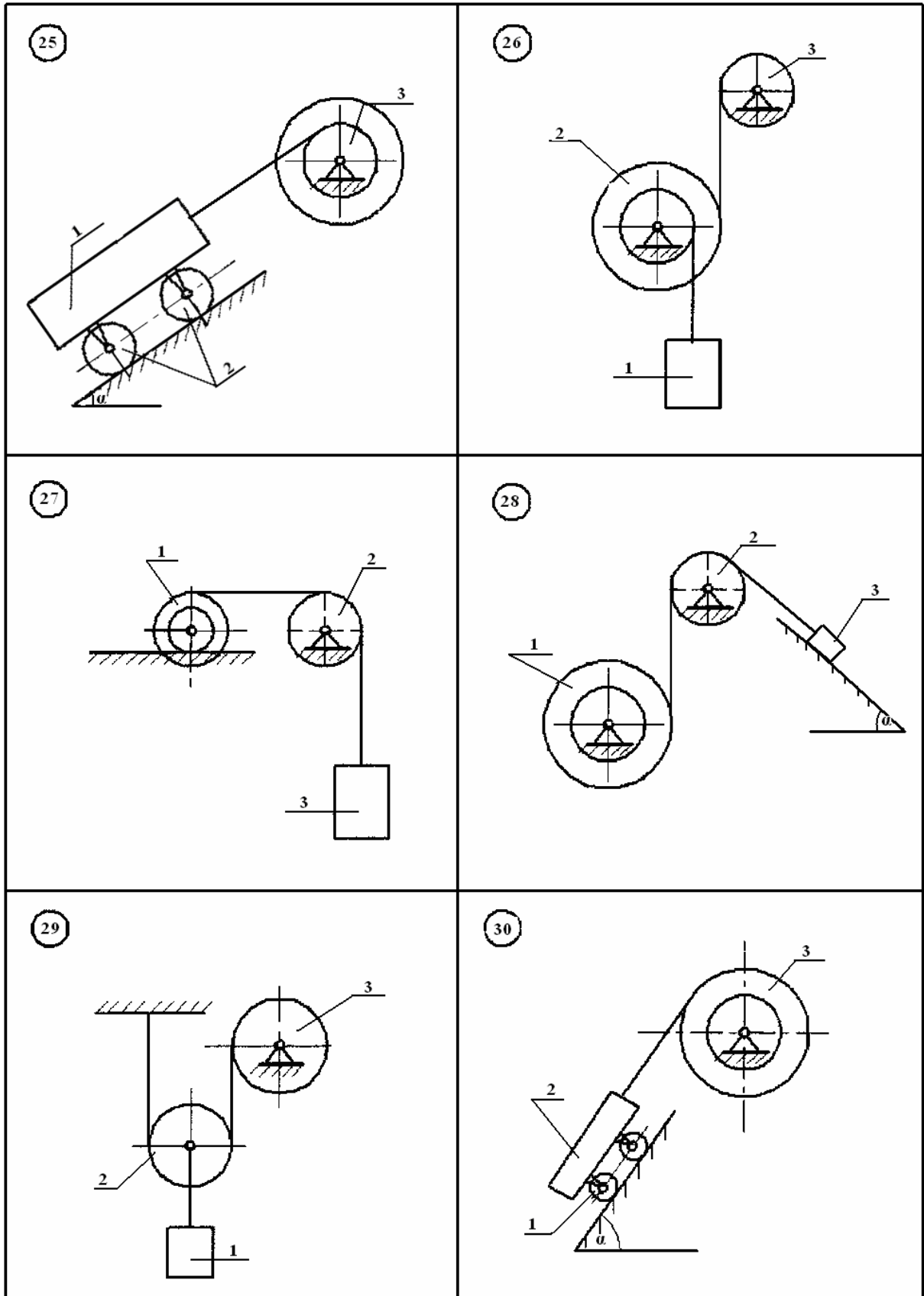


Рисунок АМ5.15

АМ6 Використання рівняння Лагранжа другого роду для дослідження руху матеріальної системи з двома ступенями вільності

Матеріальна система (рис. АМ6.1-АМ6.5) приводиться в рух під дією постійних сил або тільки сил тяжіння.

Знайти рівняння руху системи в узагальнених координатах q_1 і q_2 при заданих початкових умовах. Необхідні дані наведені в табл. АМ6.1, де x і φ - узагальнені координати для абсолютного руху, а ξ - для відносного руху. Враховуючи той факт, що кочення коліс відбувається без ковзання. Тертя кочення та сили опору в підшипниках не враховувати. Колеса, для яких в таблиці радіуси інерції не вказані, вважати однорідними дисками. Водила (кривошипи) розглядати як тонкі однорідні стержні. При розв'язанні масою ниток нехтувати.

Таблиця АМ6.1

Варіант	Маси тіл					Радіус інерції		Узагальнені координати		Початкові умови			
	1	2	3	4	5	$\overset{3}{2}\delta$	$\overset{3}{3}\delta$	q_1	q_2	q_{10}	q_{20}	\ddot{q}_{10}	\ddot{q}_{20}
1	2m	3m	m	m	m	$R\sqrt{2}$	1.2R	x	ξ	0	0	0	0
2	3m	2m	m	m	m	$R\sqrt{2}$	$R\sqrt{2}$	x	ξ	x_0	0	0	ξ_0
3	2m	2m	m	2m	m	1.2R	$R\sqrt{2}$	φ_2	ξ	0	0	0	0
4	m	2m	m	m	m	1.5R	$R\sqrt{2}$	x	ξ	0	0	$\dot{\varphi}_{20}$	0
5	4m	3m	2m	m	2m	$R\sqrt{2}$	1.2R	φ_2	ξ	x_0	ξ_0	0	0
6	3m	m	2m	m	m	1.3R	1.3R	x	φ_4	0	0	\dot{x}_0	0
7	2m	3m	m	m	m	$R\sqrt{2}$	1.5R	φ_2	ξ	0	0	0	ξ_0
8	5m	2m	2m	2m	m	$R\sqrt{2}$	1.2R	x	φ_4	0	φ_{40}	0	0
9	4m	2m	2m	m	m	$R\sqrt{2}$	$R\sqrt{2}$	φ_2	ξ	0	0	0	0
10	3m	m	m	m	m	$R\sqrt{2}$	1.2R	x	ξ	x_0	0	0	0

6.1 Приклад виконання завдання

Дано: маси тіл механічної системи (рис. АМ6.1):

$$m_1=2m; m_2=m; m_3=m; m_4=m; m_5=3m;$$

M - постійний момент, який прикладений до колеса 5;

$$\bar{R} = -b\bar{V}_2 - \text{ сила опору руху тіла 2,}$$

де b - коефіцієнт пропорційності;

$$\bar{V}_2 - \text{ швидкість тіла 2;}$$

$$\xi - \text{ відносний рух тіла 1.}$$

Всі колеса вважаються однорідними суцільними дисками.

Знайти рівняння руху системи в узагальнених координатах $q_1 = x$; $q_2 = \xi$, (x – переносний рух тіла 1, ξ - відносний рух тіла 1).

Початкові умови: $q_{10} = 0$; $q_{20} = \xi_0$; $\dot{q}_{10} = 0$; $\dot{q}_{20} = 0$. На рис. АМ6.1 система зображена в початковому стані.

Розв'язання. Для розв'язання задачі використаємо рівняння Лагранжа другого роду:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{\partial \Pi}{\partial x} + Q_1, \quad (6.1)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}} - \frac{\partial T}{\partial \xi} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \xi} + Q_2, \quad (6.2)$$

де T - кінетична енергія системи;

Π - потенціальна енергія;

Q_1 і Q_2 – узагальнені сили, які відповідні узагальненим координатам x і ξ .

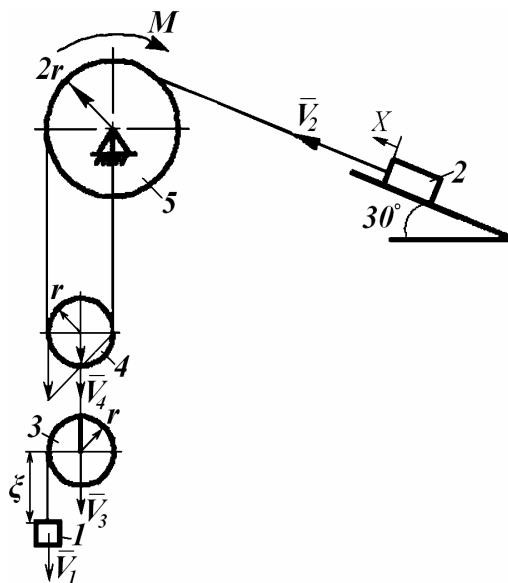


Рисунок АМ6.1

Виразимо швидкості центрів мас твердих тіл системи через узагальнені швидкості:

$$V_2 = \dot{x}, V_4 = \dot{x}/2, V_3 = \dot{x}/2,$$

$$V_1 = V_3 + \dot{\xi} = \dot{x}/2 + \dot{\xi}.$$

Блок 4 звершує плоско-паралельний рух (миттєвий центр швидкостей - точка P_4), тому швидкість центра мас блока буде вдвічі менша ніж швидкість \dot{x} .

Тягарець 1 звершує складний рух, де V_3 – переносна швидкість, $\dot{\xi}$ - відносна швидкість, тому абсолютна швидкість V_1 дорівнює алгебраїчній сумі даних швидкостей.

Визначимо кутові швидкості тіл 5, 4 і 3:

$$\omega_5 = \frac{V_2}{2r} = \frac{\dot{x}}{2r};$$

$$\omega_4 = \frac{V_2}{2r} = \frac{\dot{x}}{2r},$$

$$\omega_3 = \frac{\dot{\xi}}{r}.$$

Моменти інерції коліс відносно центральних осей:

$$I_5 = \frac{m_5(2r)^2}{2} = 2m_5r^2;$$

$$I_4 = \frac{m_4 \cdot r^2}{2};$$

$$I_3 = \frac{m_3 \cdot r^2}{2}.$$

Кінетична енергія тіл 1-5:

$$T_1 = \frac{m_1 V_1^2}{2} = \frac{m_1 (\dot{x}/2 + \dot{\xi})^2}{2};$$

$$T_2 = \frac{m_2 V_{21}^2}{2} = \frac{m_2 \dot{x}^2}{2};$$

$$T_3 = \frac{m_3 V_3^2}{2} + \frac{I_3 \omega_3^2}{2} = \frac{m_3 \dot{x}^2}{8} + \frac{m_3 r^2 \dot{\xi}^2}{4r^2} = \frac{m_3 \dot{x}^2}{8} + \frac{m_3 \dot{\xi}^2}{4};$$

$$T_4 = \frac{m_4 V_4^2}{2} + \frac{I_4 \omega_4^2}{2} = \frac{m_4 \dot{x}^2}{8} + \frac{m_4 r^2 \dot{x}^2}{4 \cdot 4r^2} = \frac{3m_4 \dot{x}^2}{16};$$

$$T_5 = \frac{I_3 \omega_3^2}{2} = \frac{2m_5 r^2 \dot{x}^2}{2 \cdot 4r^2} = \frac{m_5 \dot{x}^2}{4}.$$

Для даної системи

$$T = \sum_{i=1}^5 T_i. \quad (6.3)$$

Підставимо знайдені кінетичні енергії тіл в (6.3), маємо:

$$\begin{aligned} T &= \frac{m_1 (\dot{x}/2 + \dot{\xi})^2}{2} + \frac{m_2 \dot{x}^2}{2} + \frac{m_3 \dot{x}^2}{8} + \frac{m_3 \dot{\xi}^2}{4} + \frac{3m_4 \dot{x}^2}{16} + \frac{m_5 \dot{x}^2}{4} = \\ &= \frac{x}{16} (2m_1 + 8m_2 + 2m_3 + 3m_4 + 4m_5) + m_1 \dot{x} \dot{\xi} / 2 + \dot{\xi}^2 (2m_1 + m_3) / 4. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Потенціальну енергію системи знаходимо як роботу сил ваги твердих тіл 1, 3, 4, 2 при їх переміщенні з даного положення, що характеризується координатами x і ξ :

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 + \Pi_4; \quad (6.5)$$

$$\Pi_1 = -m_1 g (x + \xi); \quad \Pi_2 = -m_2 g \sin 30^\circ x;$$

$$\Pi_3 = -m_3 g y_3 = -m_3 g x / 2,$$

Оскільки швидкість центр мас тіла $V_3 = \frac{dy_3}{dt} = \dot{x} / 2$, то інтегруючи цей вираз при нульових початкових умовах, отримаємо: $y_3 = x / 2$.

Аналогічно розмірковуючи, маємо

$$\Pi_4 = -m_4 g y_4 = -m_4 g x / 2.$$

Підставляючи отримані значення в (6.5), маємо:

$$\begin{aligned} \Pi &= -m_1 g (x + \xi) - m_2 g x / 2 - m_3 g x / 2 - m_4 g x / 2 = \\ &= -2mg(x + \xi) - m g x / 2 - m g x / 2 - m g x / 2 = -3,5mgx - 2mg \xi. \end{aligned}$$

$$\text{Тоді } \frac{\partial \dot{I}}{\partial x} = -3,5mg, \frac{\partial \dot{I}}{\partial \xi} = -2mg. \quad (6.6)$$

Узагальнені сили Q_1 і Q_2 можна визначити з виразу роботи неконсервативних сил на елементарних переміщеннях системи, які відповідають варіації кожної узагальненої координати, або з виразів потужностей N_1 і N_2 неконсервативних сил на можливих швидкостях системи, які відповідають зростанню кожної узагальненої координати.

Оскільки до блока 5 прикладено постійний момент M , а до тіла 2 сила в'язкого опору $R = b\dot{x}$, то $Q_1 = N_1 / \dot{x}$ і $N_1 = -M\omega - R\dot{x} = -M\frac{\dot{x}}{2r} - b\dot{x}\dot{x}$,

де N_1 - потужність пари сил M з врахуванням швидкості \dot{x} та сили в'язкого опору R .

В результаті маємо:

$$Q_1 = -\frac{M}{2r}\dot{x} - b\dot{x}. \quad (6.7)$$

Узагальнена сила $Q_2 = 0$, оскільки неконсервативних сил на елементарному переміщенні $\delta\xi$ немає.

Тепер за рахунок (6.4) запишемо складові лівих частин (6.1) і (6.2):

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = \frac{x}{8}(2m_1 + 8m_2 + 2m_3 + 3m_4 + 4m_5) + m_1\dot{\xi} = \frac{29xm}{8} + m\dot{\xi};$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = \frac{29xm}{8} + m\ddot{\xi}; \quad (6.8)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}} = m\dot{x} + 2,5m\dot{\xi};$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}} = m\dot{x} + 2,5m\ddot{\xi}.$$

З врахуванням (6.6) - (6.8) рівняння (6.1) - (6.2) запишуться у вигляді:

$$\frac{29}{8}m\ddot{x} + m\ddot{\xi} = 3,5mg - \frac{M}{2r} - b\dot{x}; \quad (6.9)$$

$$\ddot{x} + 2,5\ddot{\xi} = 2g.$$

Для розв'язання рівнянь (6.9) виразимо $\ddot{\xi}$ через \ddot{x} :

$$\ddot{\xi} = \frac{2g - \ddot{x}}{2,5}. \quad (6.10)$$

Підставимо (6.10) в перше рівняння (6.9), маємо:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= k - c \dot{x}, \\ \text{де} \quad k &= \frac{0,837mgr - 0,155M}{mr}, \quad \tilde{n} = \frac{0,316b}{m}. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Проінтегруємо двічі (6.11) з врахуванням початкових умов $x_0 = 0, \dot{x}_0 = 0$:

$$\begin{aligned} \int_0^{V_x} \frac{d\dot{x}}{k - c\dot{x}} &= \int_0^t dt; \quad -\frac{1}{c} \ln \left| \frac{k - cV_x}{k} \right| = t; \quad V_x = \frac{k(1 - e^{-ct})}{c}; \\ V_x &= \frac{dx}{dt}; \quad \int_0^{x(t)} dx = \frac{k}{c} \int_0^t (1 - e^{-ct}) dt; \\ x(t) &= \frac{k}{c} t + \frac{k}{c^2} e^{-ct} - \frac{k}{c^2}. \end{aligned} \quad (6.12)$$

Отже рівняння (6.12) характеризує переносний рух тіла 1,

$$\text{Підставимо } \ddot{x} \text{ від (6.12) в (6.10), маємо: } \ddot{\xi} = \frac{2g - ke^{-ct}}{2,5}. \quad (6.13)$$

Проінтегруємо двічі (6.13) з врахуванням початкових умов: $\xi_0 = const, \dot{\xi}_0 = 0$:

$$\begin{aligned} \int_0^{V_\xi} d\dot{\xi} &= \frac{2g}{2,5} \int_0^t dt - \frac{k}{2,5} \int_0^t e^{-ct} dt; \\ V_\xi &= 0,8gt + 0,4 \frac{k}{c} (e^{-ct} - 1); \quad V_\xi = \frac{d\xi}{dt}; \\ \int_{\xi_0}^{\xi(t)} d\xi &= 0,8g \int_0^t t dt + 0,4 \frac{k}{c} \int_0^t (e^{-ct} - 1) dt; \\ \xi(t) &= \xi_0 + 0,4gt^2 - 0,4 \frac{k}{c^2} (e^{-ct} - 1) - \frac{0,4kt}{c}. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Отже, (6.12), (6.14) є рівняннями руху даної механічної системи.

Примітка. Якщо відсутня сила в'язкого опору, то

$$Q_I = -M/2r.$$

Тоді рівняння (6.11) запишеться у вигляді

$$\ddot{x} = k. \quad (6.15)$$

Інтегруючи (6.15) з врахуванням початкових умов, маємо:

$$\int_0^{V_x} d\dot{x} = k \int_0^t dt;$$

$$V_x = kt,$$

$$\int_0^x dx = k \int_0^t t dt; \quad x = \frac{kt^2}{2},$$

$$\text{або } x = \frac{0,419mgr - 0,078M}{mr} t^2. \quad (6.16)$$

Підставимо з (6.15) вираз \ddot{x} в (6.10) отримаємо таке диференціальне рівняння:

$$\ddot{\xi} = \frac{0,465mgr + 0,062M}{mr}. \quad (6.17)$$

Проінтегруємо двічі рівняння (6.17) з врахуванням початкових умов

$$\int_0^{V_\xi} d\dot{\xi} = \frac{0,465mgr + 0,062M}{mr} \int_0^t dt,$$

$$V_\xi = \frac{0,465mgr + 0,062M}{mr} t;$$

$$V_\xi = d\xi / dt,$$

$$\int_{\xi_0}^{\xi} d\xi = \frac{0,465mgr + 0,062M}{mr} \int_0^t t dt;$$

$$\xi = \xi_0 + \frac{0,233mgr + 0,031M}{mr} t^2.$$

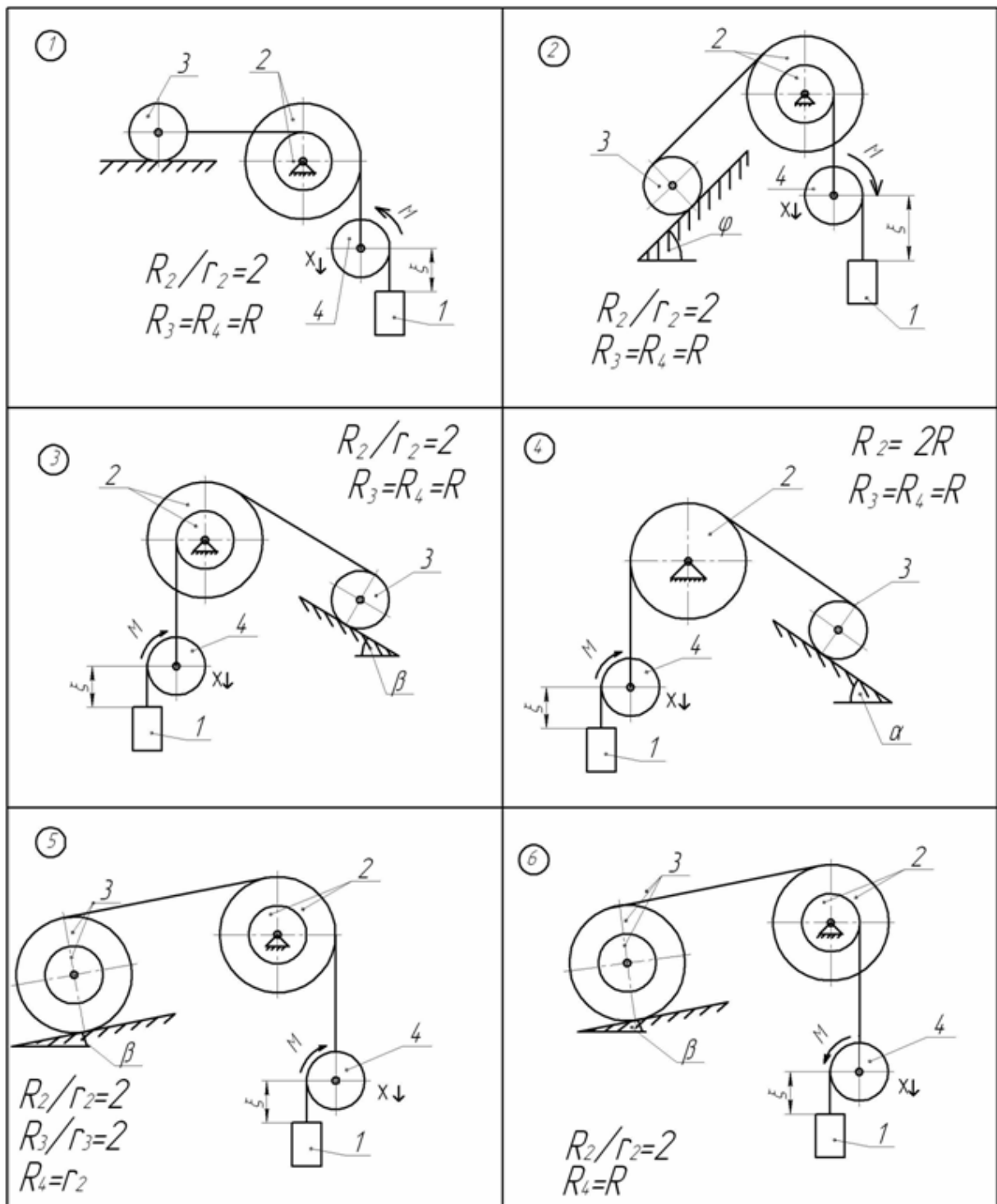


Рисунок АМ6.2

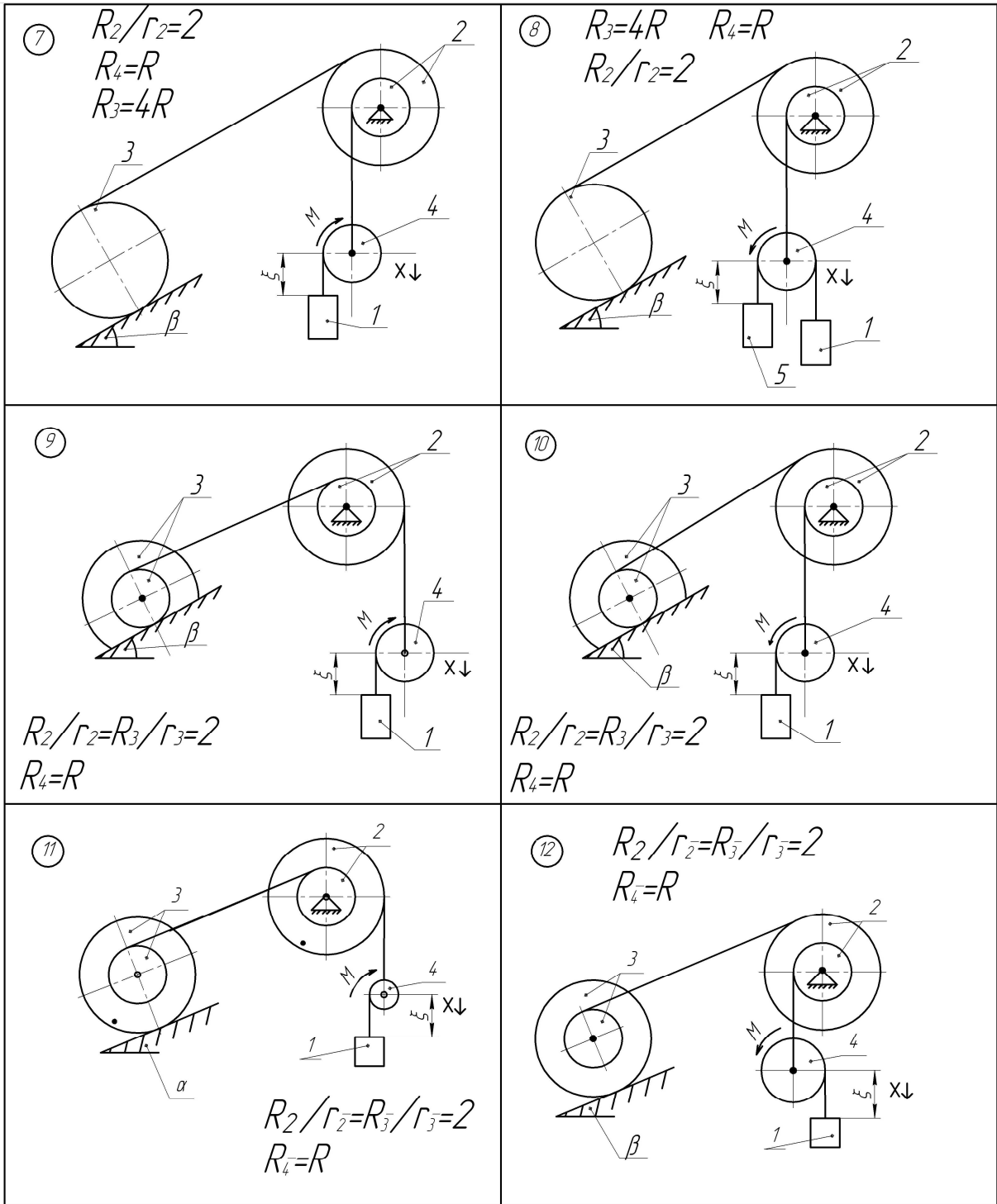


Рисунок АМ6.3

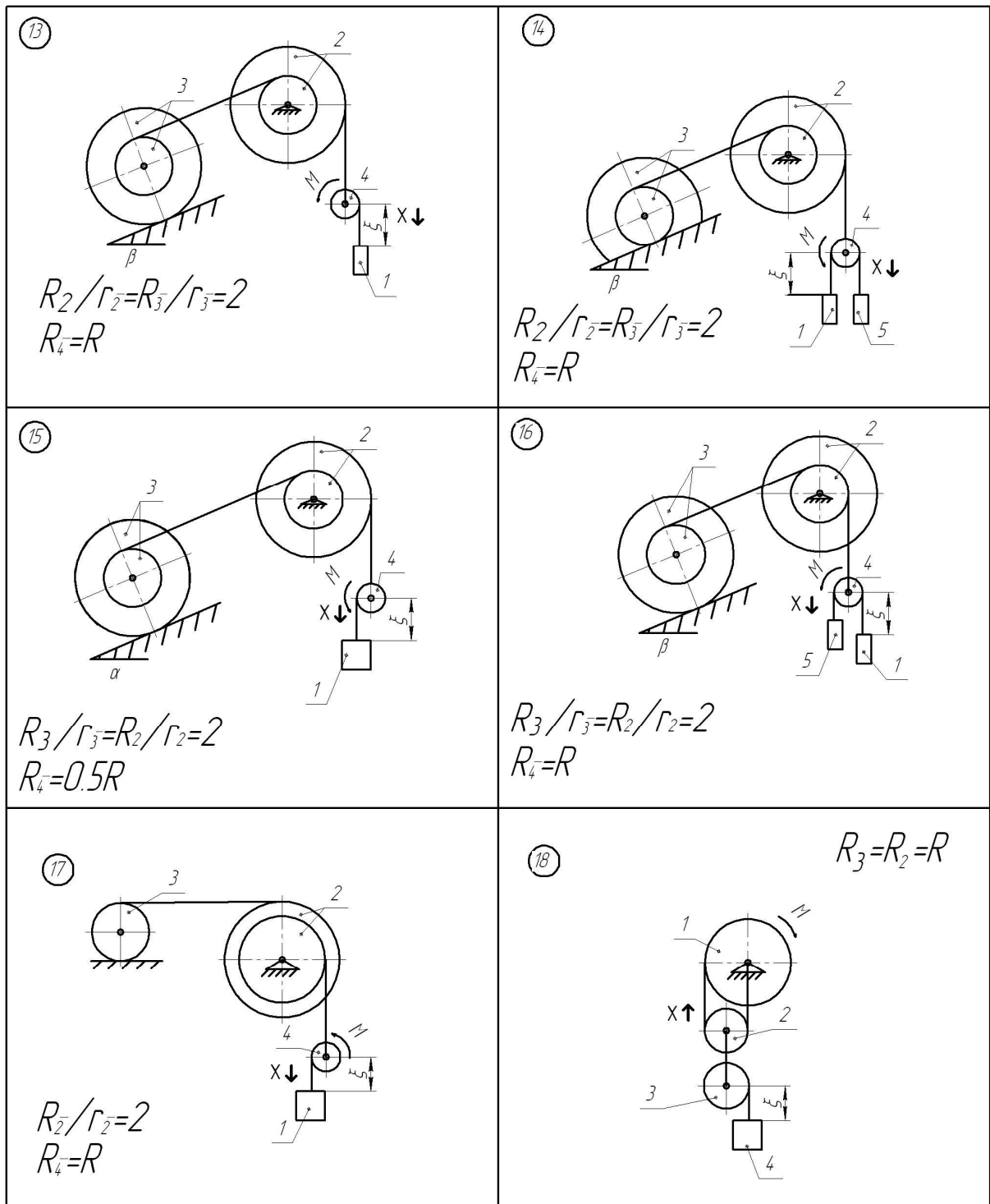


Рисунок АМ6.4

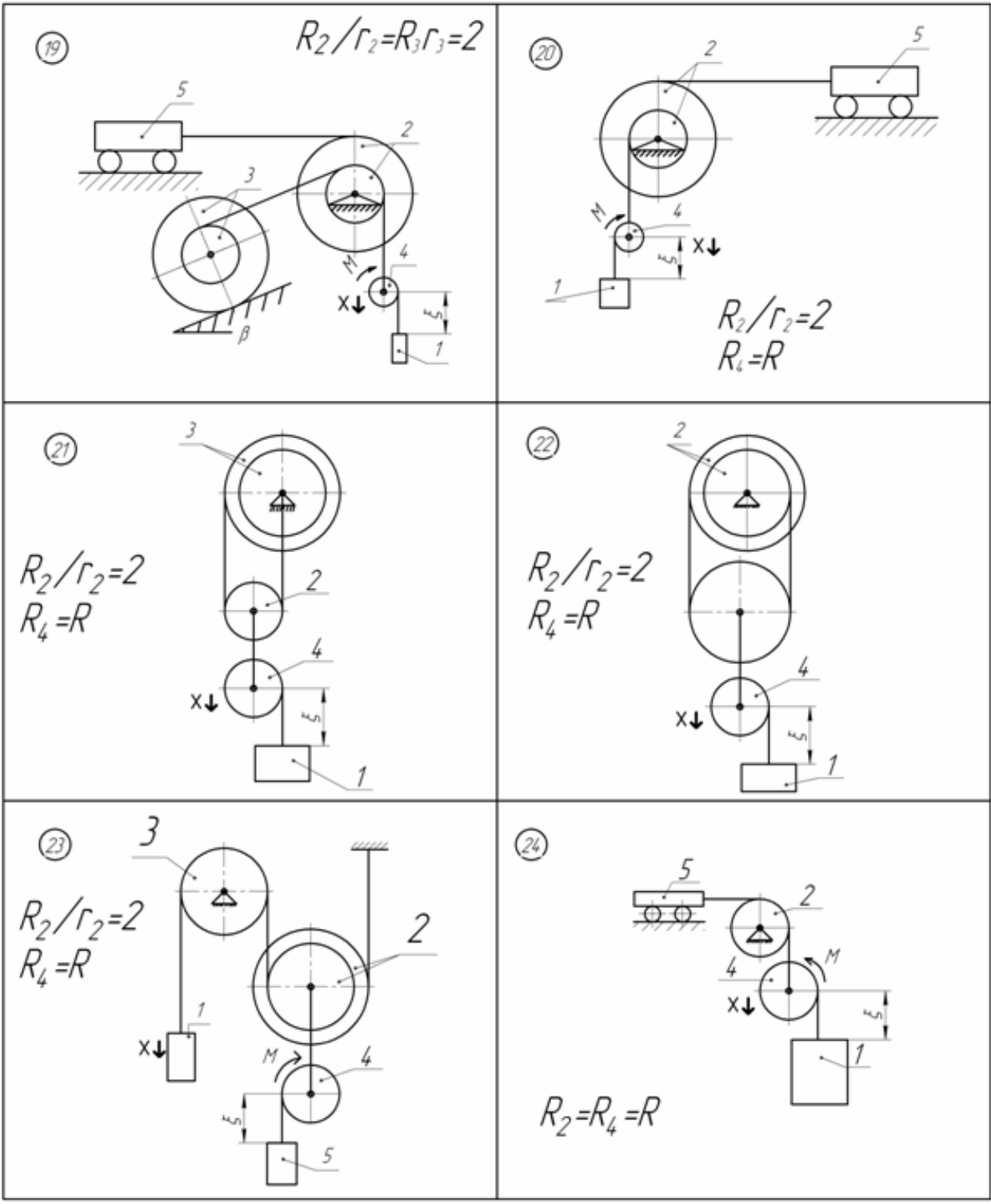


Рисунок АМ6.5

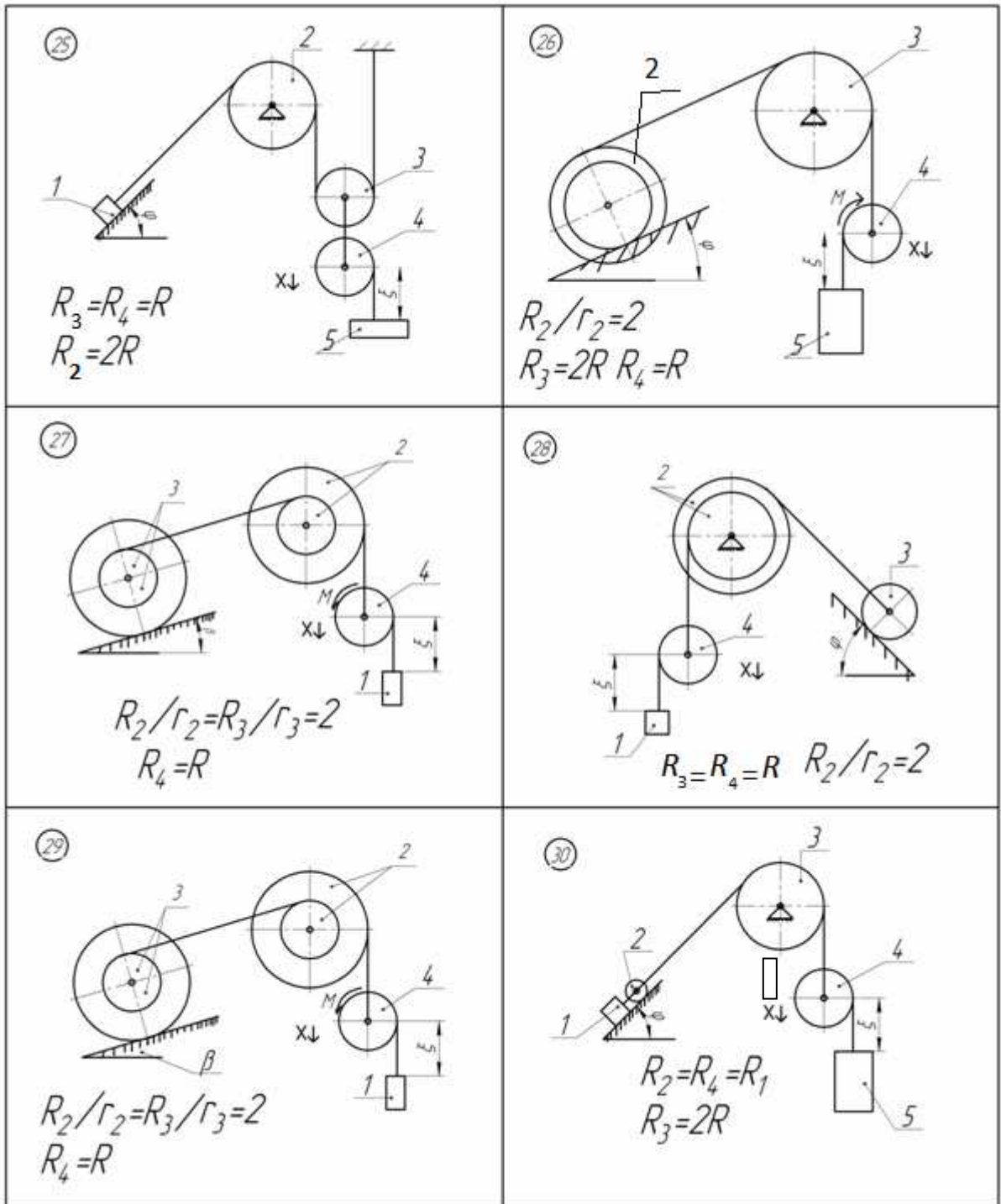


Рисунок АМ6.6

Словник найбільш вживаних термінів

Активні сили	force activity
Амплітуда	amplitude
Барабан	drum
Варіант	version
Вектор	vector
Вертикальна лінія	vertical line
Відстань	distance
Віртуальні (можливі) переміщення	virtual move
Горизонт	horizon
Графік	graph
Деформація	deformation
Ділянка	district
Жорстке зацімлення	hard hinch
Жорсткий	hard
Закон	law
Збурення	perturbation
Зведена маса	reduce mass
Звільнення від в'язей	liberation from tie
Зовнішні сили	outward forces
Зусилля	effort (force)
Зусилля в опорах	effort in the bearing
Ідеальне тверде тіло	hard solid
Кінетичний момент	kinetic moment
Ковзання	slip
Коефіцієнт тертя	friction coefficient
Колове зусилля	district effort
Координата	coordinate
Кулька	point
Кут	corner
Метод кінетостатики	cinetostatics method
Момент інерції	moment inertia
Момент сил інерції	moment of force inertia
Напрямок руху	direcion motion
Натуральні осі	natural axle
Натяг паса	force belt
Невільна матеріальна точка	constrained material point
Невільна матеріальна точка	constrained material point
Нездеформована пружина	undeformation spring
Нормальний тиск	normal force
Однорідне тіло	solid bodi
Опір рідини	liquid resistance

Параметр	parameter
Пас	belt
Перешкода	obstacle
Період	period
Перпендикулярно	perpendicularly
Плоска рама	flat frame
Плоский механізм	flat mechanism
Площина	plane
Повітря	air
Постійна швидкість	constant speed
Поступально	translational movelment
Початкова швидкість	elementary speed
Призма	prism
Прискорення	acceleranian
Промінь, пучок	beam
Пружна муфта	elastic muff
Радіус інерції	radius inertia
Реакції в'язей	force tie
Реакція	answer
Результат	result
Рівняння	equation
Рідина	liquid
Рух	motion
Сила Архімеда	force of Archmad
Сила опору	force resistance
Сила тертя	force fiction
Сила тяжіння	force gravity
Стержень	pivot
Стійкість	steadfastness
Східчастий шків	sttpped pulley
Таблиця	table
Траєкторія	trajektory
Трос	rope
Узагальнена координата	generalize coordinate
Центр мас	centr of mass
Циклічна частота	frequency cyclical
Циліндричний шарнір	immovable bearing
Час	time
Частота	frequency
Швидкість	speed
Шнур	flex (string)
Шорстка поверхня	not smoothly surfase
Шорстка поверхня	not smoothly surfase

Література

1. Павловський М. А. Теоретична механіка: Підручник. – К.: Техніка, 2002. - 512 с. – ISBN 966-575-164-0.
2. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике: Учебное пособие для техн. вузов / А. А. Яблонский, С. С. Норейко, С. А. Вольфзон и др.; под редакцией А. А. Яблонского. – 4-е изд. Перераб. и дополн. – М.: ВШ, 1085. – 367 с.
3. Теоретическая механика. Методические указания и контрольные задания. Под ред. С. М. Тарга – 4-е изд. – М.: Высш. шк., 1989. - 111с.
4. Яскілка М. Б. Збірник завдань для розрахунково-графічних робіт з теоретичної механіки. Посібник. – К.: Вища школа: Веселка, 1999. – 351 с. –ISBN 5-11-004833-9.
5. Приятельчук В. О., В. І. Риндюк , В. О. Федотов . Теоретична механіка. Динаміка точки. Розрахунково-графічні контрольні завдання. Навчальний посібник. – Вінниця : ВНТУ , 2009 . – 97 с.
6. Теоретична механіка: Збірник задач/О.С. Апостолук, В.М. Воробйов, Д.І. Ільчишина та ін.; За ред. М.А. Павловського. – К.: Техніка. 2007. – 400 с. – SSBN 966-575-059-3.

Навчальне видання

**Володимир Олексійович Приятельчук
Володимир Іванович Риндюк
Валерій Олександрович Федотов**

**ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА
АНАЛІТИЧНА МЕХАНІКА**
Розрахунково-графічні та контрольні завдання

Збірник завдань

Редактор В. Дружиніна
Коректор З. Поліщук
Оригінал-макет підготовлено В. Риндюком

Підписано до друку
Формат 29.7x421/4. Папір офсетний
Гарнітура Times New Roman.
Друк різнографічний. Ум. друк. арк.
Наклад прим. Зам.№

Вінницький національний технічний університет,
науково-методичний відділ ВНТУ.
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе,95,
ВНТУ, к. 2201.
Тел. (0432) 59-87-36.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.

Віддруковано у Вінницькому національному технічному університеті
в комп'ютерному інформаційно-видавничому центрі.
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе,95,
ВНТУ, ГНК, к. 114.
ТЕЛ. (0432) 59-81-59.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.