

**О.І. ЛИТВИНОВ, В.С. ЛУКАЧ, Л.О. ШЕЙКО,
Л.І. МОРОЗ, О.М. КИРИЧЕНКО**

ІНЖЕНЕРНА МЕХАНІКА

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

НІЖИН-2011

**НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ БІОРЕСУРСІВ
І ПРИРОДОКОРИСТУВАННЯ УКРАЇНИ**

НІЖИНСЬКИЙ АГРОТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ

**О.І. Литвинов, В.С. Лукач, Л.О. Шейко, Л.І. Мороз,
О.М. Кириченко**

ІНЖЕНЕРНА МЕХАНІКА

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

**НІЖІН
2011**

УДК 531.(075.8)
ББК 22.21Я 73
Б81

Друкується за рішенням Вченої ради
Ніжинського агротехнічного інституту
(Протокол №4 від 24. 11. 2011р.)

Рецензенти:

Ю.М. Андрєєв, доктор технічних наук, професор НТУ «ХП».

О.К. Морачковський, доктор технічних наук, професор НТУ «ХП».

О.І. Литвинов, В.С. Лукач, Л.О. Шейко, Л.І. Мороз, О.М. Кириченко
Інженерна механіка: Навчальний посібник. – Ніжин: ПП Лисенко М.М., 2011.
650 с.

Навчальний посібник «Інженерна механіка» складається із п'яти частин, в яких висвітлюються матеріали із курсів теоретичної механіки, теорії механізмів і машин, опору матеріалів, деталей машин і підйомно-транспортних машин.

У матеріалах навчального посібника викладаються основні теоретичні положення цих розділів, надається багато прикладів розв'язування задач, які охоплюють різноманітні технічні питання. Логіка побудови і методика висвітлення курсу сприяє засвоєнню теоретичного матеріалу, а також допомагає у самостійній роботі студентів, розв'язуванні задач, виконанні лабораторно-практичних і розрахунково-графічних робіт.

Для студентів вузів технічного і технологічного профілів, а також може бути корисний аспірантам, викладачам, інженерно-технічним працівникам.

- © О.І. Литвинов, В.С. Лукач,
Л.О. Шейко, Л.І. Мороз,
О.М. Кириченко, 2011
- © Ніжинський агротехнічний
інститут, 2011
- © Кафедра загальнотехнічних
дисциплін, оригінал-макет, 2011

ЗМІСТ

Передмова	15
ЧАСТИНА I. ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА	
1. Вступ. Предмет теоретичної механіки. Структура курсу	20
2. Короткий історичний нарис розвитку механіки	24
РОЗДІЛ I. СТАТИКА ТВЕРДОГО ТІЛА	
1.1. Предмет і задачі статички. Механічні в'язі, реакції в'язей	32
1.1.1. Предмет статички. Основні поняття.	32
1.1.2. Задачі статички. Основні визначення	33
1.1.3. Аксиоми статички	35
1.1.4. Невільне тверде тіло. Механічна в'язь і реакція в'язі. Реакції основних типів в'язей	38
1.1.5. Класифікація систем сил. Метод перерізів.....	44
<i>Запитання для самоконтролю</i>	46
1.2. Система збіжних сил. Визначення рівнодійної.	
Умови рівноваги тіл	46
1.2.1. Зведення системи збіжних сил до рівнодійної. Векторний спосіб додавання сил.....	46
1.2.2. Умова рівноваги системи збіжних сил у геометричній формі... ..	48
1.2.3. Проекція сили на вісь і на площину.....	49
1.2.4. Визначення сили за її проекціями	51
1.2.5. Теорема про проекцію рівнодійної сили на вісь.....	52
1.2.6. Аналітичний спосіб додавання системи збіжних сил	53
1.2.7. Умови рівноваги системи збіжних сил	54
1.2.8. Методика розв'язування задач статички. Приклади	54
<i>Запитання для самоконтролю</i>	61
1.3. Теорія моментів і пар сил на площині	61
1.3.1. Алгебраїчний момент сили відносно центра (точки).....	61
1.3.2. Момент сили відносно центра (точки) як вектор	63
1.3.3. Теорема Варіньйона про момент рівнодійної збіжних сил	65
1.3.4. Система паралельних сил. Додавання двох паралельних сил....	67
1.3.5. Пара сил. Момент пари сил.....	69
Властивості пари сил	71
Теорема про еквівалентність пар сил.....	72
Умови рівноваги тіла під дією системи пар сил на площині	74
<i>Запитання для самоконтролю</i>	75

1.4. Плоска система довільних сил. Додавання сил і умови рівноваги	75
1.4.1. Система сил, довільно розміщених на площині. Теорема про паралельне перенесення лінії дії сили.....	75
1.4.2. Зведення плоскої системи довільних сил до заданого центра. Основна теорема статички	76
1.4.3. Умови рівноваги твердого тіла під дією плоскої системи довільних сил.....	79
1.4.4. Умови рівноваги твердого тіла під дією плоскої системи паралельних сил	80
1.4.5. Приклади розв'язування задач для плоскої системи довільних сил.....	81
<i>Запитання для самоконтролю</i>	85
1.5. Розрахунок системи із декількох тіл	86
1.5.1. Зосереджені сили і розподілені навантаження	86
1.5.2. Статично визначені і статично невизначені задачі	88
1.5.3. Рівновага системи із декількох твердих тіл	88
1.5.4. Методика і приклади розв'язування задач на рівновагу системи тіл	89
<i>Запитання для самоконтролю</i>	91
1.6. Розрахунок плоских ферм	91
1.6.1. Характеристика ферм. Порядок розрахунку	91
1.6.2. Метод вирізування вузлів.....	93
1.6.3. Метод Ріттера (метод перетину).....	97
<i>Запитання для самоконтролю</i>	99
1.7. Тертя ковзання і тертя кочення	100
1.7.1. Рівновага тіла з урахуванням тертя. Сили тертя ковзання	100
1.7.2. Кут і конус тертя ковзання.....	101
1.7.3. Рівновага тіла на похилій площині	105
1.7.4. Тертя кочення	106
1.7.5. Тертя нитки і шорсткої циліндричної поверхні.....	107
<i>Запитання для самоконтролю</i>	111
1.8. Просторова система сил.	
Момент сили відносно осі	111
1.8.1. Система сил у просторі.....	111
1.8.2. Момент сили відносно осі.....	112
<i>Запитання для самоконтролю</i>	114

1.9. Просторова система пар сил. Головний вектор	
і головний момент системи сил	114
1.9.1. Пари сил у просторі	114
1.9.2. Теорема про перенесення пари сил у паралельну площину.....	114
1.9.3. Умови еквівалентності пар сил у просторі.....	115
1.9.4. Додавання просторової системи пар.....	116
1.9.5. Умови рівноваги системи пар у просторі	117
1.9.6. Зведення просторової системи довільних сил до центра. Головний вектор і головний момент системи.....	117
1.9.7. Обчислення головного вектора і головного моменту просторової системи довільних сил	119
<i>Запитання для самоконтролю</i>	120
1.10. Рівновага тіла під дією просторових систем сил	
1.10.1. Умови рівноваги тіла у просторі	120
1.10.2. Умови рівноваги тіла під дією просторової системи паралельних сил	121
1.10.3. Методика і приклади розв'язання задач просторової системи довільних сил.....	122
<i>Запитання для самоконтролю</i>	124
1.11. Центр паралельних сил і центр ваги	
1.11.1. Центр паралельних сил.....	124
1.11.2. Координати центра паралельних сил.....	126
1.11.3. Центр ваги тіла, об'єму, площі, лінії	127
<i>Запитання для самоконтролю</i>	131
1.11.4. Способи визначення координат центра ваги тіла.....	131
1.11.5. Центр ваги деяких однорідних тіл	134
Центр ваги дуги кола	134
Центр ваги трикутника.....	135
Центр ваги сектора.....	136
<i>Запитання для самоконтролю</i>	137
РОЗДІЛ II. КІНЕМАТИКА	
2.1. Вступ. Кінематика матеріальної точки	
2.1.1. Предмет кінематики.....	138
2.1.2. Основні положення кінематики точки.....	140
2.1.3. Способи задання руху матеріальної точки. Векторний спосіб	141
2.1.4. Координатний спосіб завдання руху точки.....	145

Траєкторія точки	146
Швидкість точки	147
Прискорення точки	148
<i>Запитання для самоконтролю</i>	149
2.1.5. Натуральний спосіб завдання руху матеріальної точки	149
2.1.6. Зв'язок між координатним і натуральним способами	151
2.1.7. Натуральний тригранник і натуральні осі координат	152
2.1.8. Кривина кривої.....	153
2.1.9. Прискорення точки в натуральних осях координат	154
2.1.10. Окремі випадки руху матеріальної точки.....	158
<i>Запитання для самоконтролю</i>	164
2.2. Кінематика твердого тіла	165
2.2.1. Поступальний рух твердого тіла	165
2.2.2. Обертальний рух твердого тіла навколо нерухомої осі.	
Закон обертального руху.....	167
Кутова швидкість і кутове прискорення обертового тіла.....	169
Окремі випадки обертання тіла навколо нерухомої осі.....	170
Розподіл лінійних швидкостей і прискорень точок обертового тіла.....	172
Вектори кутової швидкості і кутового прискорення обертового тіла.....	176
Векторний вираз лінійної швидкості точки обертового тіла. Формула Ейлера	177
Передача обертального руху.....	180
Методика і приклади розв'язування задач	182
<i>Запитання для самоконтролю</i>	183
2.2.3. Плоскопаралельний рух твердого тіла.....	183
Розкладання руху плоскої фігури на поступальний і обертальний рухи.....	184
Аналітичні дослідження плоскопаралельного руху тіла	185
Визначення швидкостей точок плоскої фігури	187
Визначення прискорень точок плоскої фігури	188
<i>Запитання для самоконтролю</i>	190
Миттєвий центр швидкостей	190
Окремі випадки визначення положення миттєвого центра швидкостей	191
Визначення швидкостей точок фігури за допомогою	

миттєвого центра швидкостей	193
<i>Запитання для самоконтролю</i>	196
РОЗДІЛ III. ДИНАМІКА	
3.1. Динаміка матеріальної точки	197
3.1.1. Вступ. Задачі динаміки. Динаміка вільної матеріальної точки	197
Закони динаміки матеріальної точки	199
Диференціальні рівняння руху вільної матеріальної точки	206
Дві задачі динаміки матеріальної точки	207
Інтегрування диференціальних рівнянь руху вільної точки	210
3.1.2. Диференціальні рівняння руху невільної матеріальної точки	218
3.1.3. Принцип д'Аламбера для невільної матеріальної точки	219
<i>Запитання для самоконтролю</i>	223
3.1.4. Коливання матеріальної точки	223
Кінематика гармонічних коливань	224
Класифікація коливань	225
Динаміка коливань. Вільні коливання матеріальної точки	226
Згасаючі коливання матеріальної точки	232
<i>Запитання для самоконтролю</i>	236
Змушені коливання точки без урахування опору	237
Явище механічного резонансу	240
Змушені коливання точки з урахуванням в'язкого тертя	242
Загальні властивості змущених коливань	247
<i>Запитання для самоконтролю</i>	248
3.2. Матеріальна система. Геометрія мас	248
3.2.1. Маса і центр мас матеріальної системи	249
3.2.2. Моменти інерції матеріальної системи (тіла)	250
3.2.3. Радіус інерції тіла	252
3.2.4. Теорема про моменти інерції відносно паралельних осей	252
3.2.5. Приклади обчислювання моментів інерції тіл простої форми	253
3.2.6. Відцентрові моменти інерції тіла	255
3.2.7. Момент інерції тіла відносно довільної осі, що перетинає задану точку	256
<i>Запитання для самоконтролю</i>	259
3.3. Теорема про рух центра мас матеріальної системи	259
3.3.1. Класифікація сил і їхні властивості	259
3.3.2. Диференціальні рівняння руху матеріальної системи	260

3.3.3. Теорема про рух центра мас матеріальної системи.....	261
3.3.4. Закон збереження руху центра мас	263
<i>Запитання для самоконтролю.....</i>	264
3.4. Основні (загальні) теореми динаміки	264
3.4.1. Міри механічного руху і міри дії сил.....	265
3.4.2. Кількість руху матеріальної точки і матеріальної системи	266
3.4.3. Імпульс сили	267
3.4.4. Теорема про зміну кількості руху матеріальної точки.....	268
3.4.5. Теорема про зміну кількості руху матеріальної системи	269
3.4.6. Закон збереження кількості руху матеріальної системи.....	270
<i>Запитання для самоконтролю.....</i>	271
3.5. Теореми про зміну моменту кількості руху точки і кінетичного моменту системи	271
3.5.1. Момент кількості руху матеріальної точки відносно центра і осі	271
3.5.2. Теорема про зміну моменту кількості руху матеріальної точки і закон його збереження.....	273
3.5.3. Кінетичний момент системи відносно центра і осі	275
3.5.4. Кінетичний момент твердого тіла відносно осі обертання	276
3.5.5. Теорема про зміну кінетичного моменту матеріальної системи і закон його збереження.....	277
<i>Запитання для самоконтролю.....</i>	279
3.6. Динаміка твердого тіла.	279
3.6.1. Основні задачі. Диференціальні рівняння поступального руху твердого тіла	279
3.6.2. Диференціальні рівняння обертального руху твердого тіла	280
3.6.3. Диференціальні рівняння плоского руху твердого тіла.....	283
<i>Запитання для самоконтролю.....</i>	285
3.7. Робота і потужність сили	286
3.7.1. Елементарна робота сили	286
3.7.2. Робота сили на кінцевому переміщенні. Потужність сили	287
3.7.3. Теорема про роботу рівнодійної сили.....	289
3.7.4. Робота сили в окремих випадках.....	290
<i>Запитання для самоконтролю.....</i>	294
3.8. Кінетична енергія матеріальних точки і системи	295
3.8.1. Визначення кінетичної енергії. Теорема Кьоніга	295
3.8.2. Теорема про зміну кінетичної енергії матеріальної точки	297

3.8.3. Обчислення кінетичної енергії твердого тіла	293
3.8.4. Теорема про зміну кінетичної енергії матеріальної системи ...	301
<i>Запитання для самоконтролю</i>	305
3.9. Кінестатика невільної матеріальної системи	305
3.9.1. Принцип д'Аламбера для матеріальної системи	306
3.9.2. Зведення сил інерції системи матеріальних точок до центра. Головний вектор і головний момент сил інерції	308
3.9.3. Визначення динамічних реакцій підшипників	314
3.9.4. Поняття про статичне і динамічне балансування	316
<i>Запитання для самоконтролю</i>	317

ЧАСТИНА II. ТЕОРІЯ МЕХАНІЗМІВ І МАШИН

2.1. Вступ. Предмет теорії механізмів і машин. Роль у розвитку машинобудування і приладобудуванні	318
2.1.1. Зміст курсу і методи теорії механізмів і машин	318
2.1.2. Загальні поняття теорії механізмів і машин.....	319
2.2. Структурний аналіз механізмів	320
2.2.1. Кінематичні пари і їх класифікація	320
<i>Запитання для самоконтролю</i>	323
2.2.2. Кінематичні ланцюги і з'єднання.....	324
2.2.3. Механізм як замкнений кінематичний ланцюг.....	325
2.2.4. Структурний аналіз і класифікація механізмів.....	327
<i>Запитання для самоконтролю</i>	331
2.3. Кінематичний аналіз механізмів	331
2.3.1. Побудова планів положень механізмів.....	331
2.3.2. Побудова траєкторій точок механізму.....	332
2.3.3. Кінематичні діаграми. Побудова діаграм переміщень.....	333
2.3.4. Діаграми швидкостей і прискорень.....	334
2.3.5. Визначення швидкостей і прискорень механізму I класу.....	334
2.3.6. План швидкостей групи II класу 1 типу	336
2.3.7. Теорема подібності для плану швидкостей.....	337
2.3.8. Побудова плану прискорень двоповодкової групи 1 типу	338
2.3.9. Теорема подібності для планів прискорень	339
2.3.10. Плани швидкостей і прискорень групи II класу 2 типу	339
<i>Запитання для самоконтролю</i>	341
2.4. Тертя в механізмах і машинах	341

2.4.1. Сухе тертя ковзання тіл	342
2.4.2. Тертя поступальної кінематичної пари.....	344
2.4.3. Тертя клинчастого повзуна	346
2.4.4. Тертя обертальної кінематичної пари.....	347
2.4.5. Тертя ковзання змащених тіл.....	348
2.4.6. Тертя кочення	349
<i>Запитання для самоконтролю.....</i>	<i>350</i>
2.5. Динаміка машини	350
2.5.1. Сили, які діють у машинах	350
2.5.2. Механічні характеристики машин	351
2.5.3. Кінетична енергія механізмів і машин. Зведення мас в механізмах	353
2.5.4. Рівняння руху машини	357
2.5.5. Дослідження руху машин. Стадії руху	359
2.5.6. Коефіцієнт корисної дії машин.....	362
2.5.7. Регулювання руху машин.....	363
<i>Запитання для самоконтролю.....</i>	<i>368</i>

ЧАСТИНА ІІІ. ОПІР МАТЕРІАЛІВ

3.1. Основні положення	369
3.1.1. Головні гіпотези і припущення в курсі опору матеріалів.....	370
3.1.2. Метод перерізів. Внутрішні силові фактори і основні види деформацій	371
3.1.3. Поняття про напруження.....	374
3.2. Розтяг і стиск.....	377
3.2.1. Епюри поздовжніх сил і нормальних напружень	379
3.2.2. Деформації при розтягу або стиску.....	382
3.2.3. Діаграма розтягу. Механічні характеристики матеріалів	384
3.2.4. Розрахунки на міцність і жорсткість при розтягу або стиску ..	387
<i>Запитання для самоконтролю.....</i>	<i>388</i>
3.3. Зсув.....	389
3.3.1. Розрахунки на зріз і зминання	392
3.4. Кручення	394
3.4.1. Побудова епюри крутних моментів	397
3.4.2. Напруження і деформації при крученні	398

Умови міцності і жорсткості при крученні	402
<i>Запитання для самоконтролю</i>	403
3.5. Згин	403
3.5.1. Внутрішні силові фактори при плоскому згині балок	405
3.5.2. Побудова епюр поперечних сил і згинаючих моментів.....	406
3.5.3. Загальні закономірності в епюрах поперечних сил і згинаючих моментів.....	417
3.5.4. Нормальні напруження при згині.....	418
3.5.5. Розрахунки на міцність при згині.....	424
3.5.6. Дотичні напруження при згині	424
<i>Запитання для самоконтролю</i>	428

ЧАСТИНА IV. ДЕТАЛІ МАШИН

4.1. Основні положення	429
4.1.1. Вимоги, що ставляться до машин та їх деталей	430
4.1.2. Короткі відомості про машинобудівні матеріали.....	432
4.1.3. Стандартизація і взаємозамінність деталей машин.....	434
4.1.4. Нероз'ємні з'єднання	435
4.1.5. Заклепочні з'єднання	436
4.1.6. Зварні з'єднання	439
4.1.7. Клейові і інші нероз'ємні з'єднання	443
<i>Запитання для самоконтролю</i>	445
4.2. Роз'ємні з'єднання	446
4.2.1. Різьбові з'єднання	446
4.2.2. Розрахунок різьбових з'єднань.....	451
4.2.3. Шпонкові з'єднання.....	455
4.2.4. Шліцьові з'єднання.....	459
4.2.5. Клинові і штифтові з'єднання.....	461
<i>Запитання для самоконтролю</i>	464
4.3. Загальні відомості про передачі	464
4.3.1. Фрикційні передачі	469
4.3.2. Пасові передачі.....	473
4.3.3. Ланцюгові передачі.....	481
<i>Запитання для самоконтролю</i>	485
4.4. Зубчасті передачі. Загальні відомості	486
4.4.1. Елементи теорії зубчастого зачеплення.....	488

4.4.2. Геометрія стандартного евольвентного зубчастого зачеплення	491
4.4.3. Виготовлення зубчастих коліс і види їх руйнування	494
4.4.4. Прямозуба циліндрична передача	495
4.4.5. Косозубі і шевронні циліндричні передачі.....	499
<i>Запитання для самоконтролю.....</i>	<i>503</i>
4.5. Просторові зубчасті передачі.....	504
4.5.1. Конічні зубчасті передачі.....	504
4.5.2. Черв'ячні передачі	509
<i>Запитання для самоконтролю.....</i>	<i>517</i>
4.6. Осі, вали, муфти	518
4.6.1. Опори валів і осей. Підшипники ковзання	520
4.6.2. Підшипники кочення	523
4.6.3. Муфти.....	529
4.6.4. Редуктори	535
<i>Запитання для самоконтролю.....</i>	<i>539</i>

ЧАСТИНА V. ПІДЙОМНО-ТРАНСПОРТНІ МАШИНИ

5.1. Умови застосування підйомно-транспортних машин	540
5.1.1. Класифікація і характеристика вантажів.....	540
5.1.2. Основи застосування підйомно-транспортних машин у сільському господарстві	542
5.1.3. Класифікація підйомно-транспортних машин.....	543
5.1.4. Техніко-економічні характеристики підйомно-транспортних машин	544
<i>Запитання для самоконтролю.....</i>	<i>545</i>
5.2. Стрічкові транспортери.....	546
5.2.1. Призначення, класифікація і застосування	546
5.2.2. Транспортуючі стрічки.....	547
5.2.3. Визначення ширини стрічки	548
5.2.4. Пристрій для підтримування стрічки. Барабани. Натяжні пристрої та привід	550
5.2.5. Завантажувальні і розвантажувальні пристрої	551
5.2.6. Розрахунок потужності привода. Розрахунок стрічки на міцність.....	554
<i>Запитання для самоконтролю.....</i>	<i>555</i>
5.3. Ковшові елеватори.....	556

5.3.1. Призначення, будова і класифікація ковшових елеваторів	556
5.3.2. Ковші і основні вузли елеватора	556
5.3.3. Завантажування і розвантажування ковшів	557
5.3.4. Силовий розрахунок елеватора	561
5.3.5. Зупинник елеватора	564
<i>Запитання для самоконтролю</i>	564
5.4. Скребокві транспортери	565
5.4.1. Тягові, робочі і допоміжні органи	565
5.4.2. Визначення продуктивності транспортера	565
5.4.3. Силовий розрахунок транспортера	566
5.4.4. Перевірка ланцюга на міцність.....	570
5.4.5. Муфти	571
<i>Запитання для самоконтролю</i>	571
5.5. Гвинтові транспортери	572
5.5.1. Призначення та будова	572
5.5.2. Основні параметри вертикальних і крутопохилих транспортерів.....	573
5.5.3. Основні параметри горизонтальних і пологопохилих транспортерів	576
<i>Запитання для самоконтролю</i>	577
5.6. Коливальні транспортери	577
5.6.1. Призначення та принцип дії.....	577
5.6.2. Інерційні транспортери.....	578
5.6.3. Вібраційні транспортери	579
<i>Запитання для самоконтролю</i>	581
5.7. Пневмотранспортні установки	581
5.7.1. Призначення і класифікація	581
5.7.2. Основи теорії і розрахунку.....	582
5.7.3. Основні частини пневматичних конвеєрів.....	585
<i>Запитання для самоконтролю</i>	586
5.8. Бункери і самопливний транспорт	587
5.8.1. Призначення і класифікація бункерів.....	587
5.8.2. Основи теорії і розрахунку бункерів.....	587
5.8.3. Самопливний транспорт.....	590
<i>Запитання для самоконтролю</i>	592
5.9. Характеристика вантажопідійомних машин	593
5.9.1. Класифікація і основні параметри вантажопідійомних машин	593

<i>Запитання для самоконтролю</i>	594
5.10. Деталі та вузли вантажопідйомних машин	594
5.10.1. Тягові органи	594
5.10.2. Вантажозахватні пристрої	598
5.10.3. Блоки зірочки і барабани	601
<i>Запитання для самоконтролю</i>	605
5.11. Механізми вантажопідйомних машин	605
5.11.1. Механізми підйому і тяги.....	605
5.11.2. Талі	607
5.11.3. Домкрати	608
5.11.4. Лебідки	611
5.11.5. Крановий механізм підйому	613
5.11.6. Механізми пересування	614
5.11.7. Механізми повороту	616
<i>Запитання для самоконтролю</i>	619
5.12. Пристрої вантажопідйомних машин	619
5.12.1. Зупинники	619
5.12.2. Гальма	621
<i>Запитання для самоконтролю</i>	629
5.13. Особливості конструкції кранів	629
5.13.1. Навантаження на остов.....	629
5.13.2. Балки і ферми кранів	630
5.13.3. Стійкість крана	632
<i>Запитання для самоконтролю</i>	634
5.14. Навантажувальні машини	634
5.14.1. Призначення та класифікація навантажувачів	634
5.14.2. Навантажувальні машини періодичної дії	634
5.14.3. Навантажувачі безперервної дії	639
<i>Запитання для самоконтролю</i>	641
5.15. Рейковий та безрейковий транспорт	641
5.15.1. Безрейковий транспорт	641
5.15.2. Рейковий транспорт	642
<i>Запитання для самоконтролю</i>	642
Список літератури	643
Додатки	646

ПЕРЕДМОВА

Навчальний посібник з курсу інженерної механіки написаний, спираючись на багаторічний досвід викладання цього предмету фахівцями кафедри механіки і ТММ НУБіП України і кафедри загально-технічних дисциплін Ніжинського агротехнічного інституту. У матеріалах видання опрацьована українська технічна термінологія не тільки теоретичної і прикладної механіки, але і інших інженерно-технічних дисциплін.

Матеріал посібника відповідає сучасним вимогам до курсу інженерної механіки для вищих навчальних техніко-технологічних закладів освіти і викладений таким чином, що може бути корисним як для студентів денної та дистанційної форм навчання, які вивчають курс у повному обсязі, так і для студентів, які навчаються за скороченими програмами. Частина матеріалу призначена для самостійного опрацювання.

Метою вивчення дисципліни є дослідження рухів фізичних об'єктів та умов їхньої рівноваги, методи їх аналізу та синтезу, орієнтовані на забезпечення практичних і лабораторних занять, розрахунково-графічних робіт та інших видів самостійної роботи студентів. Вивчення курсу допомагає формуванню у студентів інженерного розуміння фізичної сутності роботи механізмів, умінь і навичок її оцінювати, вмінню визначати та розраховувати основні кінематичні і динамічні характеристики для керування технологічними процесами і режимами, спроможності передбачати розвиток цих процесів.

Прогрес сучасної техніки незаперечно засвідчує, що інженерна механіка є актуальною в наш час не тільки як засіб інформації про основні закони природи, на підставі яких моделюються механічні процеси, але і як засіб виховання у майбутніх інженерів навичок щодо наукових узагальнень і розвитку творчих здібностей.

Автори намагались поєднати ємність матеріалу з лаконічністю викладення. Поряд з доступністю і чіткістю викладення матеріалу особливу увагу в посібнику приділено тлумаченню основних понять і положень інженерної механіки та їхнього зв'язку з реальною дійсністю та виробничо-технічною практикою.

Запитання для самоконтролю і методичні вказівки, що наводяться після кожної глави, сприятимуть після їх опрацювання засвоєнню курсу інженерної механіки та застосуванню її методів в інженерній практиці. У кінці посібника додано список літератури, з якої використано фактичний матеріал.

За змістом посібник складається із п'яти частин. Перша частина – Теоретична механіка; друга частина – Опір матеріалів; третя частина – Теорія механізмів і машин; четверта частина – Деталі машин; п'ята

частина – Підйомно-транспортні машини.

Перша частина, теоретична механіка, складається із вступу і трьох основних розділів: статика, кінематика, динаміка. Зміст посібника наведений на початку, список літератури – наприкінці. Тут висвітлюються основні теоретичні положення цих розділів, надається багато прикладів розв'язування задач, які охоплюють різноманітні технічні питання. Логіка побудови і методика висвітлення курсу сприяє засвоєнню теоретичного матеріалу, а також допомагає студентам у самостійній роботі, розв'язуванні задач, виконанні лабораторно-практичних та розрахунково-графічних робіт. Значне місце відводиться розв'язанню практичних інженерно-технічних задач, у тому числі і в галузі машинобудування, тут наводяться оригінальні авторські розрахунки.

Структура розташування параграфів відповідає програмі дисципліни і загальноприйнятій схемі викладання курсу. Спочатку подаються загальні відомості про предмет висвітлення, означення, а далі викладається теорія і практичні методи їх аналізу, орієнтування студентів на самостійну роботу. Така побудова дозволяє краще розуміти фізичну сутність процесів і явищ, полегшує вивчення предмету.

Матеріали інженерної механіки досить повно висвітлені у вітчизняній літературі і на високому науковому рівні. Проте, посібників українською мовою, які могли б задовольнити всю гаму спеціальностей технічного профілю, недостатньо. Крім того, сучасні тенденції розвитку вищої освіти в країні викликають необхідність більш спрямованого орієнтування курсу на творчу самостійну роботу студентів і наближення його до майбутньої спеціальності. У посібнику поряд з теоретичним матеріалом наведено багато прикладів з типових задач, надається методика їх розв'язування різними способами, що повинно сприяти розвитку у студентів навичок моделювання реальних технічних об'єктів.

У розділі «Статика» у традиційному стилі викладено основні поняття механіки, аксіоми та теореми статички, розглянуто рівновагу тіл і систем тіл під дією різних систем сил і наведено умови їхньої рівноваги. Наведено методику і приклади розв'язування задач статички твердого тіла. У відповідних місцях посібника нагадуються і пояснюються відомості з векторної алгебри і векторного аналізу, що необхідно для викладення тих чи інших положень теоретичної механіки.

Розділ «Кінематика» складається з кінематики точки і кінематики твердого тіла для простого і складного рухів. У цьому розділі механічний рух досліджується незалежно від сил і без урахування мас тіл, тобто як чиста геометрія, як опис руху. Підходячи до розв'язання задач механіки, необхідно перш за все розглянути методи опису рухів. Розділ механіки, в якому розглядаються тільки методи опису рухів, а не ставиться питання про знаходження законів руху під дією сил, називається кінематикою.

Кінематика вважається, з одного боку, вступом до динаміки, а, з другого боку, методи кінематики мають і самостійне практичне значення. Саме під впливом машинобудування кінематика і виділилась у самостійний розділ теоретичної механіки.

У природі не існує ні матеріальних точок, ні абсолютно твердих тіл, ні абсолютно пружних тіл, якими оперує інженерна механіка. Все це абстракції, якими користується наука за для того, щоб правильно відобразити ті властивості реальних об'єктів, які обов'язково необхідно врахувати під час розв'язання даної конкретної задачі. Зазначені абстракції не можуть повністю відображати всі властивості реальних тіл, але це і не обов'язково, якщо це помітно не відбивається на характері явища, що вивчається. Застосування абстракції суттєво спрощує розв'язання будь-якої задачі. Проте, треба намагатись застосовувати ті абстракції, які правильно відображають тільки ті властивості реальних об'єктів, які відіграють головну роль в розглянутих рухах. Але слід зауважити, що в самій теорії не можуть міститися докази правомірності застосування цих абстракцій. Тільки узгодженість теорії з дослідом слугує саме таким доказом. Тому в механіці, як і у всіх дослідних науках, під час співвіднесення теорії з дослідом визначальне слово належить останньому.

У третьому розділі «Динаміка» викладається динаміка матеріальної точки, твердого тіла, матеріальної системи. Розв'язується багато прикладів і задач за основних тем.

Метою посібника є надання студентам можливостей отримання знань та вмінь для проектування механічних систем, засвоєння методів їх аналізу і синтезу і методології наукових досліджень.

Послідовність висвітлення матеріалу, компоновка посібника, теоретичні обґрунтування основних положень, що підкріплені великою кількістю прикладів з їх розв'язками і прикладів для самостійного опрацювання, створюють необхідні передумови для успішного засвоєння матеріалу студентами.

Основним завданням навчального процесу під час вивчення інженерної механіки є отримання міцних знань, які широко використовується студентами не тільки у подальшому навчанні, але і у розв'язанні інженерних задач після закінчення університету. Безперервний процес ускладнення машин і технічних пристроїв, поява нових принципів і схем технологічних процесів потребують глибокого розуміння основ інженерної механіки.

Розумне наближення навчальних задач до сучасної техніки сприяє розвитку відношення до інженерної механіки з боку студента як до засадничої дисципліни. І чим ближче навчальні задачі до задач практики, тим ефективніше процес навчання.

Друга частина посібника присвячена дослідженням механізмів і

машин і тому називається «Теорія механізмів і машин».

Теорія механізмів і машин (ТММ) – наука про загальні методи дослідження властивостей механізмів і машин та проектування їх схем.

ТММ розглядає проблеми аналізу механізмів, що дозволяє визначити структуру механізмів и закон руху веденої ланки за заданим законом ведучої ланки або за заданими зовнішніми силами, методи кінестатики механізмів і методи синтезу окремих механізмів, а також інші питання, що виникають у конструктора під час створення і дослідження нових машин.

Технічний прогрес у машинобудуванні, створення нових більш удосконалених типів машин стали можливим завдяки використанню досягнень науки і, перш за все, теорії механізмів і машин. ТММ вирішують головні задачі проектування – вибір раціональних схем і доцільних законів руху ланок машин, визначення кінематичних і динамічних параметрів для нормальної роботи механізмів в умовах заданого технологічного процесу.

Таким чином, ТММ є теоретичною базою для розвитку машинобудування, надає можливість виконати початковий найважливіший етап проектування машин, роботів і маніпуляторів, на підставі якого в подальшому розв'язуються задачі розрахунку на міцність і конкретного конструювання усіх ланок і деталей механізмів.

Отже, предметом теорії механізмів і машин є структурне, кінематичне і динамічне дослідження механізмів і проектування нових механізмів і машин.

Третя частина посібника присвячена курсу «Опір матеріалів». Це наука про інженерні методи розрахунку елементів машин і споруд на міцність, жорсткість і стійкість. За методами опору матеріалів виконуються не тільки проектувальні розрахунки, але проводиться перевірка міцності елементів існуючих конструкцій, визначення допустимих навантажень тощо.

Елементи конструкцій не мають працювати на межі руйнування або втрати стійкості, а повинні мати необхідний запас міцності. Недостатній запас міцності може спричинити аварію, а надмірний запас визначає недосконалість конструкції, збільшує витрати матеріалів і собівартість.

Опір матеріалів є розділом більш загальної науки про міцність, яка називається будівельною механікою, де крім опору матеріалів розглядається теорія пружності, теорія пластичності, будмеханіка стрижневих систем.

Опір матеріалів тісно поєднує теорію і дослід. Для розрахунків на міцність треба добре знати властивості матеріалу, із якого буде виготовлений елемент, що розраховується. Ці властивості вивчаються в лабораторії шляхом механічних випробувань на спеціальних машинах.

Четверта частина навчального посібника присвячена курсу «Деталі машин». Це завершальний курс загально-технічних дисциплін для

інженерів, в якому повністю використовується інформація від попередніх курсів: теоретична механіка, теорія механізмів і машин, опір матеріалів.

Той факт, що машини складаються із деталей, не можна спростувати. Найважливішими критеріями, яким повинні відповідати деталі машин є міцність, жорсткість, зносостійкість, термостійкість, вібростійкість. Для забезпечення таких критеріїв необхідно правильно визначати розміри деталей і обирати відповідні матеріали. Тільки тоді деталі будуть задовольняти умови експлуатаційної надійності машин, здатності виконувати задані функції протягом розрахункового терміну експлуатації при збереженні мінімально необхідної вартості виготовлення.

Тому від кваліфікації розраховувача безпосередньо залежить якість конструкцій машин, споруд і приладів, що експлуатуються в країні.

П'ята частина інженерної механіки присвячується вантажопідйомним машинам, якими забезпечені будь-які підприємства, де можуть працювати інженери різного профілю. Звідси і важливість цієї частини інженерної механіки. К тому ж згадані машини і пристрої електрифіковані, представляють певну небезпеку для персоналу. Вивчення конструкцій вантажопідйомних машин, правил безпечної експлуатації є необхідним для кожного інженера.

За останній час стає проблемою у світі дефіцит сільськогосподарської продукції. Особливості сільськогосподарських вантажів полягають у тому, що протягом часу в них можуть проходити біологічні процеси, що змінюють їх якісні властивості і приводять до втрат при перевантаженнях та транспортуванні.

Способи проведення навантажувально-розвантажувальних робіт та транспортування також значно впливають на втрати, якість та тривалість послідуєчого зберігання сільськогосподарської продукції. Проведені дослідження показують, що 40-50% загальних втрат сільськогосподарської продукції пов'язано з процесами їх навантаження та транспортування. Знання конструкції підйомно-транспортних машин і їх експлуатаційних характеристик є актуальною для інженера задачею.

ЧАСТИНА І

ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА

1. ВСТУП. ПРЕДМЕТ ТЕОРЕТИЧНОЇ МЕХАНІКИ. СТРУКТУРА КУРСУ

Теоретична механіка – це природнича фундаментальна наука, яка вивчає найбільш загальні закономірності механічного руху і рівноваги матеріальних тіл і систем.

Під механічним рухом матеріальних тіл розуміють зміну у просторі протягом часу положень одних матеріальних тіл і систем відносно іншого тіла, з яким пов'язана система відліку.

Теоретична механіка є однією з фундаментальних загальнонаукових дисциплін фізико-математичного циклу і є, фактично, науковою базою майже всіх галузей сучасної техніки.

Традиційно теоретична механіка ділиться на чотири основні розділи: статику, кінематику, динаміку та аналітичну механіку.

Статика вивчає умови рівноваги тіла під дією різних систем сил, умови спільної дії останніх на тіло або систему тіл, а також розробляє методи спрощення складних систем сил.

Кінематика вивчає геометричні властивості руху матеріальних тіл без урахування їх мас і незалежно від діючих сил. Цей розділ складається з кінематики точки і кінематики твердого тіла для простого і складного рухів. У цьому розділі механічний рух досліджується незалежно від сил і без урахування мас тіл, тобто як чиста геометрія, як опис руху. Підходячи до розв'язання задач механіки, необхідно перш за все розглянути методи опису рухів. Розділ механіки, в якому розглядаються тільки методи опису рухів, а не ставиться питання про знаходження законів руху під дією сил, називається кінематикою. Кінематика вважається, з одного боку, вступом до динаміки, тому що тут потрібні кінематичні залежності і закони руху, а, з другого боку, методи кінематики мають і самостійне практичне значення. Саме під впливом машинобудування кінематика і виділилась у самостійний розділ теоретичної механіки.

У природі не існує ні матеріальних точок, ні абсолютно твердих тіл, ні абсолютно пружних тіл, якими оперує теоретична механіка. Все це абстракції, якими користується наука за для того, щоб правильно відобразити ті властивості реальних об'єктів, які обов'язково необхідно врахувати під час розв'язання даної конкретної задачі.

Динаміка вивчає закони руху матеріальних тіл під дією прикладених

сил, які цей рух спричинюють.

Предметом теоретичної або загальної механіки є матеріальні тіла у вигляді простіших моделей, які розглядаються у зв'язку зі зміною їхнього взаємного розміщення. Теоретична механіка вивчає спільні закономірності механічного руху матеріальних тіл і механічних, силових взаємодій між ними, а також взаємодій тіл з фізичними силовими полями. Основним завданням теоретичної механіки є пізнання кількісних і якісних закономірностей, що спостерігаються у природі. Тому теоретична механіка належить до фундаментальних природознавчих наук. У той же час, на відміну від ряду загально-інженерних дисциплін теоретична механіка вивчає найбільш загальні властивості руху і взаємодії тіл як абстрактних моделей.

У загальнонауковому контексті механіка охоплює цілий комплекс дисциплін, що вивчають рух і взаємодію різних матеріальних тіл і середовищ. Це, наприклад, аеромеханіка, небесна механіка; теорія коливань; електродинаміка; біомеханіка, що вивчає рух і взаємодію біологічних об'єктів тощо. Теоретичні положення механіки допомагають зрозуміти життєві явища, а також передбачати їх закономірності. Отже, критерієм істинності наших знань є практика.

Теоретична механіка широко застосовує у своїх теоремах методи математики і формальної логіки, методи подібності і абстракції. Предметом її досліджень є не самі матеріальні об'єкти, а їхні еквівалентні моделі. Як відомо, розвиток науки, у тому числі і природознавчої, йде від живого спостереження до абстрактного мислення, а від останнього – до практики. Це є справжній шлях пізнання істини.

Теоретична механіка має велике значення у підготовці інженерів усіх галузей народного господарства. Вона є науковим фундаментом для вивчення таких загально-інженерних дисциплін як опір матеріалів, теорія механізмів і машин, приладів і роботів, теорія коливань, гідравліка, теорія пружності, аеродинаміка, гідромеханіка, електродинаміка, біомеханіка, теорія автоматичного керування тощо.

Розуміння положень, методів і законів теоретичної механіки, які правильно відображають об'єктивні реалії механічних процесів, існуючих взаємозв'язків механічних рухів і перетворення енергії, дає змогу науково передбачати закономірності у нових задачах, що виникають у процесі розвитку науки, техніки і технології. Таким чином, задача механіки – відкриття, пізнання і наступне практичне застосування кількісних і якісних закономірностей механічного руху, який має місце в природі та здійснюється людиною в його практичній діяльності. Механіка збагачує людей новими методами розкриття таємниць природи, справжнього змісту її різноманітних явищ і технічної практики.

Всесвіт – це матерія, яка закономірно і взаємопов'язано рухається у

Частина перша

просторі і часі. Знаючи про такі зв'язки між матеріальними об'єктами світу, М.В. Ломоносов писав: «Для изучения явлений природы необходимо выпрашивать у осторожной и догадливой геометрии, советоваться с точною и замысловатою механикой, выведывать через проницательную оптику». У сучасної науки арсенал засобів дослідження явищ природи незрівнянно ширший.

Матерія вічно перебуває у неперервному русі і безперервно розвивається. Рух є основним атрибутом матерії і формою її існування. Світ є безмежними у просторі і нескінченними у часі формами існування матерії. Притаманний матерії рух є способом збереження матерії, переконливим доказом нерозривності матерії та руху, матерії та енергії, взаємозв'язку та взаємного переходу різних форм матерії. Відмінність форм руху матерії становить об'єктивну базу для окремих відповідних галузей науки, що вивчають окремі закономірності природи. Закономірності найпростішої механічної форми руху матерії вивчає механіка, проте вона має відношення до всіх явищ природи і творень техніки, до всього природознавства, тому що механічний рух тією чи іншою мірою супроводжує всі інші форми руху матерії.

Загальна механіка пронизує всі механічні процеси у мікро- і макросвіті. Вона необхідна при вивченні поведінки плазми у магнітному полі і вона становить значну частину науки про Землю, без неї неможливе проектування і будівництво. Без знання механіки неможливо провести розрахунки технологічних процесів у машинобудуванні, металургії, легкій промисловості тощо. Теоретична механіка – це частина загальної механіки, яка вивчає найбільш загальні закономірності механічного руху макроскопічних тіл.

Оскільки наукові уявлення про простір і час розвиваються у зв'язку з розвитком понять про матерію, рух і взаємодію, то з відносних уявлень про всесвіт наука поступово наближається до абсолютної істини. Наблизитись до абсолютної істини в принципі можливо, якщо наша технічна цивілізація зможе не руйнувати своїми «могутніми силами» наданий їй у тимчасове користування найдорожчий для нас «простір і час».

На думку І. Ньютона, засновника класичної механіки, простір існує сам по собі, незалежно від речей, і є необмеженою порожниною, абсолютним вакуумом, що має три виміри: довжину, ширину й висоту. Простір вважається нерухомим і незмінним, абсолютно проникним, який не впливає на рух тіл і сам не зазнає впливу з боку тіл, що його наповнюють. А час – це тривалість, яка існує незалежно від подій, що відбуваються, і спливає безперервно і рівномірно від минулого до майбутнього. Різні моменти часу відрізняються один від одного лише подіями, що відбуваються в ці моменти.

Методом ідеалізації Ньютон пропонує упорядкувати уявлення про

простір і час як деякі вмістища тіл, які не залежать від цих тіл та їх руху. За сучасними уявленнями цей абсолютний евклідів тривимірний однорідний та ізотропний простір і абсолютний арифметизований час лише наближено відображає реальні властивості природи. Але кількісні відхилення законів сучасної механіки від законів класичної виявляються під час руху тіл поблизу великих мас зірок або при швидкостях, близьких до швидкості світла. За багатовіковим досвідом під час руху тіл зі швидкостями, значно меншими від швидкості світла, ідеалізація Ньютона дає достатню для практики точність як перше наближення до реального простору і часу. Тому класична механіка є надійним фундаментом і апаратом для теоретичних і практичних висновків сучасної науки і техніки.

Традиційно склалося, що за характером задач теоретична механіка поділяється на статику, кінематику, динаміку та аналітичну механіку. Такий розподіл значно полегшує вивчення механічного руху тіл і дозволяє пов'язати вивчення теоретичної механіки з іншими дисциплінами інженерно-технічних спеціальностей.

Основою теоретичної механіки є закони І. Ньютона, тому вона називається ньютонівською класичною механікою, на відміну від інших напрямів у механіці як, наприклад, релятивістська механіка. Класична механіка спирається на систему аксіом, які накопичені у галузі механіки історичною практикою. Сформулюємо коротко закони Ньютона, які є фундаментом класичної механіки.

Перший закон Галілея – Ньютона

Існує така система відліку, в якій ізольована матеріальна точка зберігає стан спокою або рівномірного і прямолінійного руху доти, доки вплив з боку зовнішніх факторів не змінить цей стан.

Цей закон, який називають законом інерції, встановлює головну властивість реальних фізичних тіл: зберігати свій рух або спокій, якщо тіла перебувають у цих станах. Закон передбачає інерціальну Галілеєву систему відліку.

Вважається, що стан матеріальної точки або тіла визначається відносно системи координат, що рухається поступально, прямолінійно і рівномірно по відношенню до деякої умовно нерухомої системи координат. Наявність абсолютно нерухомої системи координат є одним із постулатів, на якому ґрунтується класична механіка.

Причиною зміни стану матеріальної точки є рух, який у механічній формі передається від одного тіла до іншого під час їхньої взаємодії і називається силою. Оскільки переважна більшість точок у наших умовах не рухається рівномірно і прямолінійно, то поняття ізольованої матеріальної точки є граничною абстракцією.

Другий закон Ньютона

Швидкість зміни кількості руху матеріальної точки дорівнює вектору

сили, прикладеної до точки.

Під кількістю руху матеріальної точки, за визначенням Ньютона, розуміється векторна величина, яка дорівнює добутку маси точки на швидкість. Цей закон, що встановлює зв'язок між силою і прискоренням точки у випадку незмінної маси точки, називають основним законом динаміки.

Третій закон Ньютона

Кожній дії відповідає рівна за модулем і протилежна за напрямом протидія.

Третій закон стосується системи матеріальних точок. Поширення законів Ньютона на систему матеріальних точок і тіл, на які діє система довільних сил, пристосування їх до неінерціальних систем відліку і становить головний зміст курсу теоретичної механіки. У курсі поєднуються методи поширення дії законів Ньютона з таким математичним апаратом як алгебраїчні та диференціальні рівняння, що дає можливість застосовувати аналітичні методи і комп'ютерні технології.

Четвертий закон Ньютона

Прискорення, яке отримує точка під дією декількох сил, дорівнює геометричній сумі прискорень, які отримувала б точка під дією кожної сили окремо.

Тобто, у випадку, якщо сили, що діють на точку, не залежать від її прискорення, то *кожна із сил надає точці прискорення, не залежне від дії інших сил.* Четвертий закон називається законом незалежності дії сил або принципом суперпозиції.

2. КОРОТКИЙ ІСТОРИЧНИЙ НАРИС РОЗВИТКУ МЕХАНІКИ

Історично механіка як відомості про найпростіші машини і механізми починається з глибокої давнини. Важіль, клин, похила площина, коток, які надавали значний вигаш у силі, використовувались у Стародавньому Єгипті і Вавилоні. Проте, на наш погляд, справжні умови будівництва єгипетських пірамід і вавилонської вежі у значній мірі приховані часом.

Перші трактати з механіки, що збереглися, де розглядався устрій найпростіших машин, ґрунтуючись на досвіді застосування різних механічних пристроїв, з'явилися у Стародавній Греції. У грецькій філософії існували різні механічні концепції. За однією з них матерії властивий саморух, без якого вона не може існувати, а природа нічого не містить, крім матерії, яка рухається у порожньому просторі. Послідовними представниками цієї концепції були атомисти Геракліт, Демокріт, Епікур, Лукрецій.

Слово «механіка» у перекладі з грецького означає «хитромудрість». Цей термін вперше був вжитий в III в. до н. е. учнем видатного давньогрецького філософа Аристотеля, вихователя Олександра Македонського, у момент спостереження роботи важеля, коли здавалося, що «мале долає велике». В працях Аристотеля (384–322 рр. до н. е.) «Фізика», «Про небо», «Про виникнення і знищення», «Метафізика» містяться загальні поняття механіки. Проте, система механіки Аристотеля побудована не на дослідах, а на абстрактних міркуваннях і висновках його філософії: осмислити все суще і подати все у найбільш простій і гармонічній формі.

Нехтування дослідом, який, на думку давніх греків, є справою рабів, призвело до отримання Аристотелем результатів, які не підтверджуються практикою. Він вважав, що в околі земної поверхні важкі тіла падають швидше, а легкі повільніше, навіть якщо нехтувати опором повітря. Механічний рух Аристотель поділяв на прямолінійний і криволінійний, останній з яких є більш досконалим, а найдосконалішими кривими є кола, вздовж яких рухаються створені Богом планети сонячної системи. Теологічні моменти у фізичному вченні Аристотеля були роздуті середньовічною схоластиком і догматизовані церковними декретами, будь-які заперечення проти них проголошувалися ересью.

Історики науки одногласно вважають, що початок механіки як науки пов'язаний з ім'ям видатного механіка і математика усіх часів Архімедом (287–212 рр. до н. е.). Він заклав основи механіки як точної науки, зробив відкриття в математиці, гідростатиці, створив теорію рівноваги важеля і вчення про центр ваги тіл, збагатив античну техніку значною кількістю чудових винаходів.

У наступні півтори тисячі років розвиток механіки був зупинений. Дешева людська праця і низький рівень техніки не створювали умов для розквіту цієї науки. Приватне господарство було розраховано лише на персональні потреби.

Тільки з XII ст. відкрились перші університети Європи, але готували вони переважно служителів духовництва та правників. Навіть у Парижі викладати геометрію було дозволено лише по святах у 1355 р. Основою наук вважались праці Аристотеля, з яких було вилучено живий зміст. Теоретична традиція античного наукового спадку була втрачена остаточно і під механікою розуміли тільки будівельне й інженерне мистецтво.

Проте, поступово у середині другого тисячоліття нашої ери, починають розвиватися торговельні відносини, а з ними й промисловість. Перед механікою постали проблеми в галузі техніки, пароплавства, у військовій справі. Для ефективної експлуатації шахт і копалин необхідно було піднімати руду з великої глибини, будувати вентиляційні пристрої, відкачувати воду. Артилерія потребувала від механіки розв'язати такі

Частина перша

питання як міцність гармати при найменшій вазі, залежність опору повітря від швидкості снаряда, визначення траєкторії руху снаряда в повітрі і порожнині.

Епоха величезних відкриттів, бурхливий розвиток теоретичної традиції починається після середньовічного застою з перших десятиліть XV ст. у галузі механіки і суміжних галузях (машинознавство, гідравліка, астрономія, математика). Значний внесок у механіку зробили такі видатні вчені як Кузанський, Леонардо да Вінчі, Стевін, Тарталья, Бенедетті, Кардано, Кеплер та ін.

Один із попередників Коперника Микола Кузанський висунув ідеї про відносний рух і обертання Землі, а в галузі динаміки він зробив перші кроки до поняття інерціального руху.

Славнозвісний художник і геніальний вчений, механік та інженер Леонардо да Вінчі (1452–1519) досліджував тертя в машинах, рух тіла по похилій площині, працював над проблемами теорії механізмів, увів нове поняття в механіці – момент сили, намагався будувати літальні апарати. Він вважав, що рівновага блока з нерухомою віссю можлива тільки за умови, що сума моментів сил відносно точки підвісу блока дорівнює нулю.

Виключне значення для науки мало відкриття видатним вченим Миколою Коперником (1473–1543) геліоцентричної системи світу. На відміну від геоцентричної системи Птолемея (II ст. н.е.), яка була догматизована католицькою церквою, М. Коперник вважав, що Земля і всі інші планети рухаються по кругових орбітах навколо Сонця. Результати сорокарічної праці були узагальнені Коперником у книзі «Про обертання небесних сфер», з появи якої починається поступове звільнення природознавства від теології.

У праці «Нова наука» Нікколо Тарталья (1499–1557) зробив першу пробу математизації питань балістики і перші кроки до розуміння єдності аристотелівських «природного» і «насильницького» рухів.

Німецький астроном Йоганн Кеплер (1571–1630), обчисливши результати наполегливих спостережень датського астронома Тіхо Браге, відкрив закони руху планет, завершивши створення кінематики сонячної системи, і довів, що планети рухаються по еліпсах, в одному із фокусів яких перебуває Сонце. Це був початок небесної механіки і революція у світогляді людей.

З ім'ям Джеронімо Кардано (1501–1576) пов'язують подальшу розробку кінематичного напрямку у статиці, зі створенням карданної передачі і карданного підвісу.

Учень Тарталі Джованні Бенедетті (1530–1590) завдав вирішального удару по аристотелівській теорії щодо двох його фундаментальних положень: досконалого «природного» руху не існує; у природі змінного «природного» і «насильницького» рухів немає принципової різниці.

Послідовним представником геометричної статички був Сімон Стевін (1548–1620), голландський математик і механік, який зіграв завершальну роль у розвитку геометричного напрямку елементарної статички і гідростатички, ґрунтуючись на основних постулатах Архімеда. Він встановив закон додавання і розкладання сил, довів теорему про три непаралельні сили, побудував силовий трикутник.

Сучасник Кеплера Галілео Галілей (1564–1642), геніальний вчений, підтримавши систему світу Коперніка, поставив під сумнів двотисячолітній авторитет Аристотеля.

Галілей не міг мириться з поглядами Аристотеля, він застосовував наукові методи замість звичайних схоластичних міркувань у той час.

Завдяки працям Галілея розвиток механіки безпосередньо пов'язується із запитами тогочасної техніки, і ці праці мали фундаментальне значення для розвитку динаміки. Він вперше сформулював принцип відносності класичної механіки, встановив закон інерції і закони вільного падіння матеріальних тіл. Галілей увів поняття про швидкість і прискорення і довів, що траєкторією руху снаряда, кинутого у порожнині під деяким кутом до горизонту, є парабола. Таким чином, він є засновником не тільки загальної механіки, але й зовнішньої балістики, науки про рух снаряда у повітрі. Галілей експериментально довів закон падіння тіл у порожнині, закон пропорційності між вагою тіла і його масою, досліджував рух математичного маятника.

Галілея вважають засновником експериментальних методів досліджування в механіці. Саме методом ретельних дослідів він встановив закон ізохронності коливання маятника, закони руху точки по похилій площині, а також закони падіння тіл.

Французький філософ, математик, фізик Рене Декарт (1596–1650) вперше впроваджує у механіці поняття кількості руху тіла як міри механічного руху і відкриває закон збереження кількості руху. У працях Декарта вперше досліджується питання про додавання довільного числа рухів матеріальної точки.

Видатний голландський вчений Хрiстiан Гюйгенс (1629–1695) довів ряд теорем про відцентрову силу, теорію удару, повну теорію фізичного маятника, визначивши центр хитань. Вперше впровадив у механіку поняття осьового моменту інерції. Гюйгенс створив конструкції маятникових годинників і винайшов регулятор ходу кишенькових годинників. Недарма І. Ньютон, посилаючись на твори Гюйгенса, називав його «Щонайвищий Гюйгенс».

Роберт Гук (1635–1703), англійський природознавець, відкрив закон пропорційності між силою, прикладеною до пружного тіла, і його деформацією. Цей закон і у наш час застосовується при розрахунках конструкцій на жорсткість, міцність і стійкість.

Німецький математик, філософ і механік Вільгельм Лейбніц (1646–1716) вперше ввів термін «динаміка», впровадив у механіку поняття «живої сили» (кінетичної енергії) як міри механічного руху і встановив закон збереження «живих сил», що є першим формулюванням закону збереження енергії.

Видатний англійський математик і механік Ісаак Ньютон (1642–1727) є справжнім засновником класичної механіки. Він створив гармонічну систему механіки; чітко сформулював її основні закони, що відомі в сучасній літературі як перший, другий і третій закони Ньютона; ввів поняття маси і узагальнив поняття сили; розв'язав цілий ряд проблем у механіці. Більшість відкриттів Ньютон зробив замолоду: на початку 1665 р. він відкрив біном, у травні – метод дотичних, у листопаді – диференціальне числення; у січні 1666 р. – теорію кольорів, у травні – інтегральне числення, у серпні – відкрив Закон всесвітнього тяжіння.

Користуючись законом всесвітнього тяжіння, Ньютон розв'язав ряд задач теоретичної і небесної механіки. Головний твір Ньютона, в якому подано чітке і систематичне викладення класичної механіки, називається «Математичні засади натуральної філософії». Твір написаний латиницею і вперше виданий у 1687 р. На російську мову його переклав в 1936 р. академік О.М. Крилов, який зробив численні примітки.

Ньютон сформулював основний закон динаміки у диференціальній формі, що дало можливість розглянути численні задачі, де рух визначається змінними силами. Після цих праць задачі Галілея перетворилися в прості окремі випадки. Ньютон сформулював закон паралелограма сил і закон додавання рухів, вперше звернув увагу на різницю між поняттями інертної і гравітаційної мас. Разом з видатним німецьким вченим Вільгельмом Лейбніцем (1646 – 1716) Ньютон є фундатором диференціального й інтегрального числення.

Швидкий розвиток набула механіка в XVIII столітті. Багато відкриттів у механіці і математиці зробив видатний вчений Леонард Ейлер (1707–1783), академік Санкт-Петербурзької академії наук, швейцарець за походженням, який справив значний вплив на розвиток фізико-математичних наук у цьому столітті.

Ейлер уперше аналітично виклав механіку, довів одну з основних теорем динаміки – теорему про зміну кінетичного моменту; побудував теорію моментів інерції; ввів поняття потенціального силового поля. Заслуги Ейлера в небесній механіці, прикладній механіці, механіці суцільних середовищ, теорії стійкості надзвичайно великі.

Перший трактат Ейлера мав назву «Механіка або наука про рух в аналітичному викладенні», в якому він дав математичне формулювання другого закону Ньютона в диференціальній формі, розглядаючи пропорційність сили до приросту швидкості, розвив теорію вільного і

невільного рухів матеріальної точки в натуральних координатах. У праці «Теорія руху твердих тіл» Ейлер розробив кінематику і динаміку твердого тіла, подаючи в загальному вигляді диференціальні рівняння руху твердого тіла. Титанічна творча сила Ейлера є неперевершеною в історії науки.

Працями Ньютона і Ейлера було в основному завершено побудову наукової теорії механічних явищ. У галузі механіки матеріальної точки були вирішені всі принципові проблеми і подальший інтерес учених зосередився на питаннях механіки системи матеріальних точок. Наступний розвиток механіки був зосереджений у напрямку пошуку найбільш зручного математичного апарата для отримання і розв'язку диференціальних рівнянь опису руху матеріальних систем.

Сучасник Ейлера перший російський академік М.В. Ломоносов (1711–1765), геніальний вчений, мав великий вплив на розвиток всієї науки і, зокрема, на розвиток механіки як основи природознавства. Йому належить відкриття загального закону природи – закону збереження матерії і руху, з якого всі інші закони збереження механіки випливають як окремі випадки.

Французький математик і механік Жан Лерон д'Аламбер (1717 – 1783) видав у 1743 р свій видатний твір «Трактат із динаміки», в якому довів, як звести рівняння руху матеріальної системи до задачі динамічної рівноваги, відкривши важливий принцип теоретичної механіки.

Протягом XVIII ст. було успішно розв'язано багато проблем теоретичної механіки і на порядку денному встала задача надати загального методу аналітичного розв'язання всіх механічних проблем. І такий метод відшукав Жозеф Луї Лагранж (1736–1813). Його видатна праця «Аналітична механіка» (1788) викладена без жодного креслення на базі відкритого ним методу узагальнених координат. Лагранж не обмежується застосуванням принципу можливих переміщень для задач статички, а поєднує останній з принципом Д'Аламбера і отримує в загальному вигляді диференціальні рівняння руху матеріальної системи, які носять його ім'я, застосовуючи їх для розв'язання важливої задачі про малі коливання механічних систем. Російський переклад цієї книги був здійснений в 1950 р.

Паралельно з аналітичними методами розвивались геометричні методи механіки. Саме видатний французький геометр Луї Пуансо (1777–1859) вперше в 1803 р. виклав статику у науковій праці «Елементи статички» в такій формі, в якій вона і тепер викладається у вищих технічних навчальних закладах. Пуансо впроваджує в механіку поняття пари сил, розробляє теорію пар і застосовує цю теорію для розв'язання в загальному випадку задачі про зведення до найпростішого вигляду систем сил, прикладених до твердого тіла, і для здобуття умов рівноваги твердого тіла. Багато відкриттів і геометричних інтерпретацій законів механіки зробив

Частина перша

Л. Пуансо в кінематиці і динаміці. Він завершує оформлення геометричного напрямку в статиці, початок якого пов'язаний з ім'ям Архімеда. Подальший розвиток аналітична механіка набула у працях П.С. Лапласа (1749–1827), К.Г. Якобі (1804–1851), В.Р. Гамільтона (1805–1865), Г.Р. Герца (1857–1894) тощо.

Видатним представником аналітичного напрямку в теоретичній механіці був наш земляк академік М.В. Остроградський (1801–1861), автор багатьох праць з аналітичної механіки, математики і математичної фізики. Він узагальнив принцип можливих переміщень для односторонніх в'язей і вперше застосував його в загальній теорії удару, а також в загальній формі встановив один з основних принципів механіки – принцип найменшої дії. Його учень І.А. Вишнеградський є засновником теорії автоматичного регулювання.

Багато праць в галузі механіки машин і механізмів написав видатний математик і механік академік П.Л. Чебишев (1821–1894) – засновник російської школи теорії механізмів.

Видатних результатів у самих різних галузях механіки досягнув геніальний вчений М.Є. Жуковський (1847–1921), засновник авіаційних наук: експериментальна аеродинаміка, динаміка літака (стійкість і керованість), розрахунок літака на міцність. Його твори збагатили всі розділи теоретичної механіки: рух маятника, теорія дзиги, обчислення планетних орбіт, теорія диференціальних рівнянь, хитання кораблів на океанських хвилях, рух твердого тіла з порожнинами, заповненими рідиною, гідравлічний таран, коливання паровоза на ресорах, будівельна механіка, динаміка автомобіля тощо. Професор М.Є. Жуковський протягом 50 років був мозковим центром, навколо якого групувались інженери, розв'язуючи різні теоретичні проблеми механіки.

Видатним учнем М.Є. Жуковського був С.О. Чаплигін (1863–1945), який виконав нові дослідження з механіки рідини і газу, створив теорію крила (крила з передкрилком і крила з щитком) і заснував сучасні положення гідроаеромеханіки.

Видатне значення для теоретичної механіки мають твори геніального математика О.М. Ляпунова (1857–1918). Найбільш значуща його праця – створення теорії стійкості руху. Вона має великі технічні застосування і сьогодні багато вчених різних країн продовжують її розвивати.

Серед великих вчених і педагогів слід відмітити І.В. Мещерського (1859–1935), творця динаміки тіл змінної маси. Цей розділ науки він створив ще в 1897 р., але застосування затрималось на півстоліття до часів розвитку ракетобудування. Тепер механіка тіла змінної маси є основою теорії реактивних двигунів і динаміки ракет, а на його творі “Сборник задач по теоретической механике” і сьогодні вчать інженери країн СНД.

Видатною у всіх відношеннях є постать геніального вченого

академіка О.М. Крилова (1863–1945). Він є автором праць з теорії корабля, теорії пружності, балістики, теорії диференціальних рівнянь математичної фізики. О.М. Крилов є фундатором російської школи механіків-кораблебудівників, який започаткував дослідження і створення теорії плавучості і остійності корабля, хитавиці корабля. О.М. Крилов – видатний вчений, інженер, винахідник і педагог вищої школи.

Засновником динаміки космічного польоту був видатний вчений К.Є. Ціолковський (1857–1935). Його праці мали великий вплив на подальший розвиток досліджень з ракетодинаміки. Вони відкрили шлях ґрунтовним дослідженням Ф.А. Цандлера (1887–1933) і Ю.В. Кондратюка (1897–1942). Найбільш видатним продовжувачем ідей К.Є. Ціолковського був С.П. Корольов (1906–1966), геніальний вчений і конструктор в галузі ракетної і космічної техніки.

Теоретична механіка продовжує швидко розвиватись і тепер. Перед сучасними вченими постають великі задачі: засвоєння космосу, автоматика і телемеханіка, робототехніка і сучасні технології, машинобудування тощо. У другій половині ХХ ст. з'явився новий напрям науки і технологій – робототехніка, основою якого стала теоретична механіка та теорія механізмів і машин. Особливістю робототехніки є те, що вона об'єднує такі науки як механіка, кібернетика і комп'ютерні технології. Великий внесок у розвиток цього напрямку мають: К.В. Фролов, Е.І. Воробйов, А.Г. Овакімов, Р. Уікер, М. Вулкобратович, М.З. Згуровський та ін.

Бурхливо розвинулась у минулому столітті механіка нелінійних коливань. Великий внесок у розвиток теорії нелінійних коливань належить українським вченим: М.М. Боголюбову, Ю.О. Митропольському, М.М. Крилову та ін.

РОЗДІЛ I СТАТИКА ТВЕРДОГО ТІЛА

1.1. Предмет і задачі статички.

В'язі, реакції в'язей

1.1.1. Предмет статички. Основні поняття

Теоретична механіка як наука, вивчаючи певну форму руху матерії, розглядає не реальну природу з усім її різноманіттям, а ідеальні об'єкти – моделі: матеріальну точку, матеріальну систему, абсолютно тверде тіло.

Згадаємо про ці основні поняття теоретичної механіки, які добре відомі з елементарного курсу фізики. Найпоширенішою моделлю, яка відображає протяжність, тобто, геометричну форму матеріального тіла і розподіл маси у деякому геометричному об'ємі, є абсолютно тверде тіло.

Абсолютно тверде тіло – це матеріальне тіло, в якому в процесі взаємодії з іншими тілами відстані між двома довільними точками не змінюються, тобто, деформації тіла під дією сил вважаються малими і можуть не враховуватися.

Розглядаючи матеріальні тіла як абсолютно тверді, можна значно спростити дослідження умов взаємодії цих тіл, а також умов збереження свого початкового механічного стану. Ця модель є достатньо досконалою лише для вивчення окремого випадку руху тіла – стану спокою, оскільки рух окремих точок тіла у загальному випадку не однаковий. Тому доводиться починати дослідження руху з найбільш простої моделі – матеріальної точки.

Матеріальна точка – це матеріальне тіло певної маси, розмірами і формою якого, вивчаючи його рух, можна знехтувати в умовах певної задачі.

Чи можливо розглядати заданий об'єкт як матеріальну точку, визначається не розмірами цього об'єкта, а ступенем ідеалізації і властивостями руху. Так, рух планет сонячної системи відносно і навколо Сонця можна розглядати як рух взаємопов'язаних точок, що доведено багаторічною практикою астрономів.

Система матеріальних точок (матеріальна система) – це сукупність матеріальних точок, положення і рух яких взаємопов'язані і взаємозумовлені.

Матеріальні системи або механічні системи, можуть бути *змінними і незмінними*. У змінній системі відстані між точками в процесі руху або спокою можуть змінюватися.

У незмінній системі взаємне розміщення точок під час її руху або спокою зберігається. Оскільки кожне матеріальне тіло є системою матеріальних точок, то абсолютно тверде тіло є незмінною системою точок, які безперервно заповнюють деяку частину простору.

Вивчення руху рідини, газів, повітряних потоків, а також механічного руху тіл, який суттєво залежить від їхньої деформації, ґрунтується на такій абстракції, як *суцільне середовище*. Найпростішим прикладом суцільного середовища є модель абсолютно твердого тіла. Більш загальний образ суцільного середовища об'єднує пружні, рідинні, газові та інші тіла. Серед таких моделей можна відзначити *абсолютно пружне тіло, пластичне тіло, ідеальну рідину, в'язку рідину*.

1.1.2. Задачі статички. Основні визначення

Перш, ніж вивчати перший розділ теоретичної механіки – статику, сформулюємо задачі статички:

- визначення умов рівноваги тіл під дією різних систем сил як на площині, так і у просторі;
- розробка методів перетворення довільних векторних систем сил з метою їх спрощення і заміни найменшою кількістю силових факторів.

В основу цього розділу механіки покладено аксіоми статички, які розглянемо далі. А зараз зупинимося на основних поняттях статички, серед яких одним із головних є поняття сили, а також – на деяких визначеннях.

Дослідами доведено, якщо рух матеріальної точки в інерціальній системі відліку відхиляється від рівномірного і прямолінійного руху, то ця точка взаємодіє з навколишніми тілами

Сила, прикладена до конкретного тіла, – це кількісна міра механічної взаємодії двох тіл, яка визначає характер, інтенсивність і напрямок взаємодії.

З цього класичного визначення сили і з спостережень випливає, що *сила* є величиною векторною, а тому має **три** визначальних **параметри**: чисельне значення або **величина** сили (модуль), **напрямок** дії у просторі і **точку прикладання**. Дія сили на точку залежить від напрямку сили і від чисельного значення сили.

Напрямок сили визначається тим напрямком, за яким починає рухатися точка, що була у стані спокою, якщо до неї прикладається сила. Чисельне значення сили (модуль сили) є величиною, що дорівнює добутку маси

точки на модуль прискорення, яке надає тілу ця сила (закон Ньютона).

Взаємодія означає **залежність руху** однієї частки матерії **від руху** і наявності **інших часток** матерії. Це перше, що виступає перед нами, коли ми розглядаємо рухому матерію загалом. Фізичні властивості простору і часу, пов'язані з фізичними полями, не враховуються в початкових уявленнях класичної механіки про простір і час у тій формі, в якій вона реалізується в реальному світі. Класична механіка не розглядає фізичних причин впливу матерії на рух і тому вводить ще одну ідеалізацію – **силову взаємодію**. Заслугою І. Ньютона є те, що він поклав в основу механіки кількісні закони дії сил незалежно від їхньої фізичної природи. Лише механічний ефект взаємодії між матеріальними тілами пов'язаний зі зміною кінематичного стану тіл.

На розрахункових силових схемах **силу зображують у вигляді вектора** довільної довжини (крім випадків графічної статистики, де силу креслять у масштабі). Покажемо, наприклад, (рис. 1.1) довільну силу \vec{F} , зображену вектором \overline{AB} і прикладену у точці A , яка діє вздовж лінії дії сили MN .

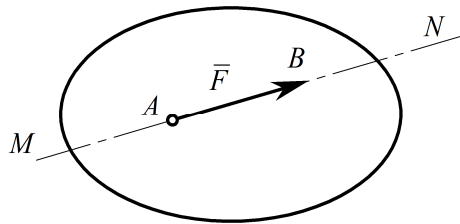


Рис. 1.1

У Міжнародній системі одиниць (СИ) одиницею вимірювання сили є ньютон (H) або кілоньютон (kH). Один ньютон – це така величина сили, яка тілу масою 1 кг надає прискорення 1 м с^{-2} .

Зосереджені сили – це сили, що **прикладаються** до тіла у будь-якій окремій його **точці**. **Сили**, що діють **на всі точки** цієї частини поверхні або об'єму тіла, називаються **розподіленими**.

Поняття зосередженої сили є умовним: практично неможливо прикласти силу в одній точці. Зосереджені сили є, фактично, рівнодійними деяких систем розподілених сил. Наприклад, сила ваги твердого тіла прикладається у центрі ваги рівнодійною сил ваги окремих частинок тіла.

Система сил – це **сукупність декількох сил**, які діють на це тіло або матеріальну систему одночасно. Окремі сили системи сил – **складові** цієї системи.

Еквівалентні системи сил – це такі системи сил, які в разі заміни на таку саму іншу **не порушують** кінематичного **стану тіла**. Еквівалентність систем означає, що ці системи викликають однаковий кінематичний стан тіла. Якщо система сил еквівалентна нулю, то така система називається

зрівноваженою системою сил.

Рівнодійна сила системи сил – це така сила, дія якої еквівалентна дії заданої системи сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$.

$$\vec{R} \Leftrightarrow (\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n).$$

Зрівноважувальна сила – це сила, яка за величиною дорівнює рівнодійній силі, розміщена з нею на одній прямій, але протилежна за напрямом.

1.1.3. Аксиоми статички

В основу статички покладено аксиоми, тобто, деякі твердження, що приймаються без доведення, тому що вони підтверджені багатовіковою практичною діяльністю, дослідями і спостереженнями. В аксіомах статички про сили відображено властивості сил, що діють на тверде тіло.

Перша аксіома (про дві сили)

Абсолютно тверде тіло перебуває в рівновазі під дією двох сил, якщо вектори цих сил рівні за модулем (числовим значенням), спрямовані на одній прямій у протилежних напрямках.

Це аксіома про дві сили, які є найпростішою системою зрівноваженої системи сил. На рис. 1.2 показане довільне тіло, яке перебуває у стані рівноваги під дією двох сил \vec{F}_1 і \vec{F}_2 , які мають однакові модулі $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2|$, розміщені на одній прямій MN і мають протилежні напрямки. Точки прикладання сил можуть збігатися. Таким чином, $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$. Ця аксіома справедлива тільки для абсолютно твердого тіла. У разі деформованого твердого тіла вона не завжди справедлива.

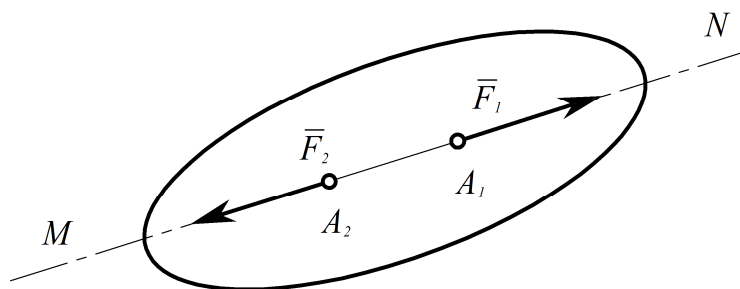


Рис. 1.2

Друга аксіома (про виключення сил).

Первісний стан рівноваги тіла не порушиться, якщо до тіла приєднати або відкинути зрівноважену систему сил.

Систему зрівноважених сил (\vec{F}_1, \vec{F}_2) показано на рис. 1.2. Ця аксіома носить назву аксиоми виключення сил. Аксиома надає можливість побудови

Частина перша

еквівалентних систем сил, вводючи поняття *векторного нуля* як простішої системи двох рівних за величиною і протилежних за напрямом сил, якою користуються під час доведення теорем.

Наслідок

Дія сили на тіло не зміниться, якщо точку прикладання сили перенести в іншу довільну точку вздовж лінії дії сили в межах цього тіла.

Наслідок з двох перших аксіом інформує, що **вектор сили є ковзним вектором**, тобто точка його прикладання може бути перенесена в іншу довільну точку вздовж лінії дії сили без порушення рівноваги. Доведемо це твердження.

Припустимо, що на тіло (рис. 1.3) діє вектор сили \vec{F}_1 , який прикладений в точці A і має лінію дії MN . Прикладемо в довільній точці B на лінії дії MN дві рівні за модулем сили \vec{F}_2 і \vec{F}_3 , такі, що $\vec{F}_2 = \vec{F}_1$, а $\vec{F}_3 = -\vec{F}_1$. Згідно з першою аксіомою ці сили зрівноважені, а згідно з другою – їх можна приєднати, не змінюючи кінематичного стану тіла.

Але цю систему трьох сил можна розглядати по-іншому: як силу \vec{F}_2 , яка дорівнює силі \vec{F}_1 і перенесена з точки A в точку B , і зрівноважену систему двох сил (\vec{F}_1, \vec{F}_3) , яку можна відкинути. Наслідок доведений.

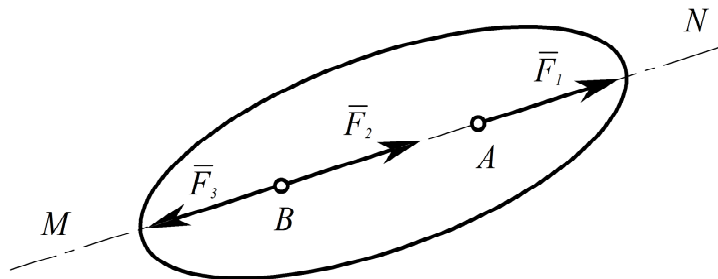


Рис. 1.3

Третя аксіома (про паралелограм сил).

Рівнодійна двох непаралельних сил, прикладених до тіла в одній точці, визначається діагоналлю паралелограма, побудованого на цих силах як на сторонах і прикладена в точці їх перетину.

Припустимо, що до тіла (рис. 1.4) у точці A прикладені дві непаралельні сили \vec{F}_1 і \vec{F}_2 .

Побудуємо на цих силах, як на сторонах, паралелограм і проведемо крізь точку A діагональ, яка і буде рівнодійною $\vec{R}_{1,2}$ цих сил.

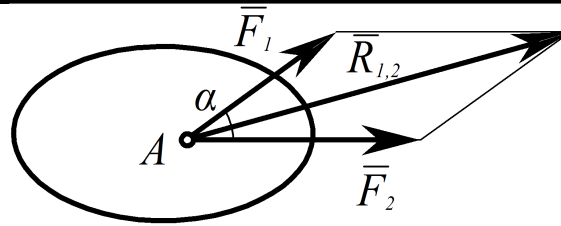


Рис. 1.4

Таким чином, третя аксіома статички дає можливість геометрично, векторно додати дві сили, що прикладені в одній точці, тобто, визначає модуль, точку прикладання і напрямок рівнодійної як векторної суми двох сил

$$\bar{R}_{1,2} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 \quad (1.1)$$

Заміна двох сил однією рівнодійною силою за правилом паралелограма називають **векторним додаванням** сил.

З курсу геометрії відомо, що діагональ паралелограма, тобто, модуль рівнодійної, визначається за допомогою теореми косинусів

$$R_{1,2} = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos \alpha}. \quad (1.2)$$

Пропонується самостійно визначити рівнодійну, якщо сили прикладено в одній точці і розміщено під прямим кутом, а також, якщо вони збігаються за напрямком або спрямовані у протилежні боки.

Більш зручним способом визначення модуля і напрямку рівнодійної сили відносно до прямокутних осей координат для кількості сил більше за дві є аналітичний метод проєкцій, який розглядається далі.

Четверта аксіома (про дію і протидію).

Ця аксіома носить назву аксіоми про рівність дії і протидії і є одним із основних законів механіки. Ньютон сформулював її так: «будь-якій силі дії є рівна, але протилежна сила протидії». У статистиці цю аксіому застосовують для твердих тіл, які контактують шляхом стикання або на відстані за допомогою силових полів.

|| **Сили взаємодії, з якими два тіла діють одне на одне, дорівнюють за модулем, спрямовані вздовж спільної прямої у протилежні сторони.**

Слід зазначити, що сили взаємодії ніколи не зрівноважуються, вони не утворюють зрівноважену систему сил, тому що вони прикладені до різних тіл або до різних точок одного і того самого тіла, що взаємодіють одна з одною. Під дією цих сил вільні тіла рухатимуться, віддаляючись чи наближаючись одне до одного.

П'ята аксіома (принцип затвердіння).

Якщо деформоване (нетверде) тіло перебуває у стані рівноваги під дією системи сил, то цей стан не порушиться, якщо, не змінюючи форми, розмірів і положення цього тіла у просторі, подати його у вигляді відповідного абсолютно твердого тіла.

Ця аксіома має назву принципу *затвердіння* і дає змогу розв'язувати задачі статички гнучких тіл (нитка, трос, пас, канат, ланцюг тощо) методами статички твердого тіла.

Із аксіоми випливає, що умови рівноваги твердого тіла є необхідними і для рівноваги деформованого тіла, але ці умови не достатні для рівноваги деформованого тіла.

Сформульовані у цьому параграфі аксіоми є тією основою, на якій будується вся статика сил, що прикладені до твердого тіла. Аксіоми статички характеризують властивості сил, прикладених до тіла. Але вони не враховують матеріальних властивостей тіла, пов'язаних з наявністю маси чи її розподілом, що суттєво впливає під час руху тіла. У повному обсязі згадане врахування міститься в законах динаміки.

1.1.4. Невільне тверде тіло. Механічна в'язь і реакція в'язі. Реакції основних типів в'язей

У теоретичній механіці тверді тіла і матеріальні системи поділяються на вільні і невідільні. **Тіло або матеріальна система вважаються вільними**, якщо вони мають можливість під дією прикладених сил рухатись у просторі в будь-якому напрямі, Це означає, що на рух тіла або системи не накладені обмеження, тобто, вони не контактують з іншими тілами або фізичними полями.

Тіло, свобода переміщення якого у просторі обмежується іншими тілами або умовами, вважається **невідільним**.

Тіла, фізичні поля або умови, які обмежують рух цього тіла і зберігаються за будь-яких сил, прикладених до твердого тіла, називаються в'язями.

Якщо тіло невідільне, то вважають, що на нього накладені в'язі. **Силова, механічна дія в'язі на це тверде тіло має назву сили реакції в'язі** (в подальшому «реакція»). Це виходить з того, що ефект дії в'язі такий самий, як і дія сили, внаслідок чого дії в'язей можна замінити відповідними силами, які і називаються **реакціями в'язей**. Слід зауважити, що за законом про дію і протидію і тіло діє на в'язь із силою, яка дорівнює реакції, але їй протилежна.

Реакції в'язей за своєю природою відрізняються від інших сил, які

діють на тіла і які прийнято називати **активними**. Ця різниця полягає у тому, що реакція в'язі не завжди визначається самою в'яззю, її модуль, а іноді і напрямок залежить ще і від інших сил, що діють на систему.

Активні ж сили, діючи на систему у стані спокою, можуть надати їй той чи інший рух. Реакції в'язей цією властивістю не володіють, внаслідок чого їх називають **пасивними силами**.

Напрямок сили реакції в'язі збігається з тим напрямком, за яким в'язь перешкоджає переміщенню тіла (якщо таких напрямків декілька, то напрямок реакції визначається залежно від характеру активних сил). У загальному вигляді встановити напрям вектора реакції на підставі лише геометричних властивостей поверхонь тіл і опор неможливо. Тому потрібно розглядати деякі окремі випадки в'язей, що частіше зустрічаються на практиці і під час розв'язування задач. У статиці розглядаються найпростіші в'язі у формі різних твердих і гнучких тіл. Розглянемо основні типи в'язей як розрахункові моделі, які зустрічаються під час розв'язання задач механіки. Кожна з цих в'язей має свою назву, умовне графічне зображення і свої реакції.

1. **Ідеально гладенька поверхня** (рис. 1.5а) перешкоджає поступальному переміщенню тіла у середину поверхні за нормаллю до неї, на самій же поверхні тіло може ковзати. Реакція цієї в'язі \bar{R} спрямована перпендикулярно до поверхні в точці дотику, вздовж нормалі у бік від поверхні до тіла. **Гладенька поверхня накладає одну в'язь**: вона унеможливує рух за нормаллю до поверхні, тому реакція спрямована проти напрямку втраченого переміщення внаслідок накладання в'язі. Якщо гладенька поверхня сферична (рис. 1.5б), то реакція \bar{R}_A прямує крізь центри сфер O і O_1 вздовж нормалі n (перпендикулярно до дотичної τ).

2. **Точкова опора** (рис. 1.5в). Якщо гладенька площина вироджується у лінію або точку, то реакції в'язей \bar{R}_A і \bar{R}_B спрямовані вздовж перпендикуляра до лінії (поверхні) тіла, яке утримується в цій точці.

3. **Шарнірно-нерухома опора** або нерухомий циліндричний шарнір (підшипник) (рис. 1.5г) перешкоджає переміщенню тіла у площині, що є перпендикулярною до осі шарніра. Реакція шарнірно-нерухомої опори прикладена у центрі шарніра і заздалегідь невідома за напрямком.

Невідомий вектор реакції у разі аналітичного визначення уявляється двома складовими вздовж осей координат \bar{R}_x і \bar{R}_y . Зрозуміло, що ця опора накладає дві в'язі: перешкоджає вертикальному і горизонтальному переміщенням, а тому і потребує двох складових реакції у заданій площині.

4. **Шарнірно-рухома опора** або коток (рис. 1.5д).

Реакція цієї в'язі \bar{R} спрямована перпендикулярно до площини, якою рухається коток або перпендикулярно до площини встановлення шарніра.

5. Жорстке закріплення (глухе защемлення) перешкоджає поступальному лінійному переміщенню за будь-яким напрямком і повороту тіла відносно будь-якої осі у загальному випадку.

Реакція цієї в'язі для плоскої системи (рис. 1.5е) уявляється двома складовими вектора сили \bar{R}_{Ax} , \bar{R}_{Ay} і реактивної пари сил з моментом M_R . Це відповідає кількості в'язей, які накладає ця опора: вона перешкоджає вертикальному і горизонтальному лінійним переміщенням і повороту навколо осі, перпендикулярній площині рисунка.

6. Ідеальний стрижень – це жорсткий однорідний невагомий тонкий стрижень, на кінцях якого встановлено точкові шарніри, розмірами яких можна знехтувати (рис. 1.5ж).

Реакція цієї в'язі \bar{R} спрямована вздовж прямої, що з'єднує центри кінцевих шарнірів стрижня і прикладена у центрі шарніра за напрямком: від вузлів (точок A і B), якщо стрижень розтягнутий, і до вузлів, якщо стрижень стиснутий.

7. Ідеальна нитка – це невагома нерозтяжна нитка, в'язь, яка здійснюється ідеальними гнучкими тілами: канатами, пасами, ланцюгами (рис. 1.5з).

Ця в'язь є **однобічною** і працює тільки за умови розтягу.

Реакція цієї в'язі \bar{T} заважає поступальному переміщенню тіла від точки підвісу, тому вона спрямована вздовж нитки від тіла і прикладена у точці A закріплення нитки.

У пасовій передачі (рис. 1.5з) натяги в її гілках \bar{T}_1 і \bar{T}_2 є реакціями гнучкої в'язі.

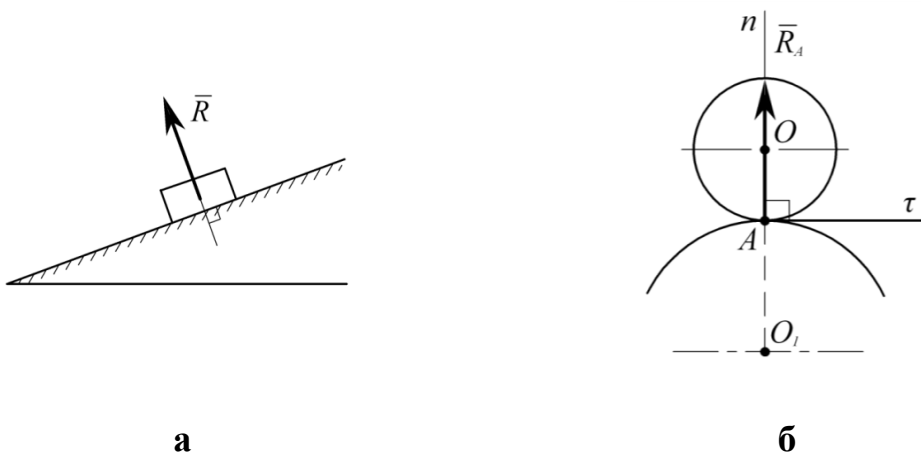
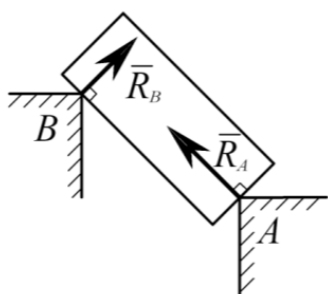
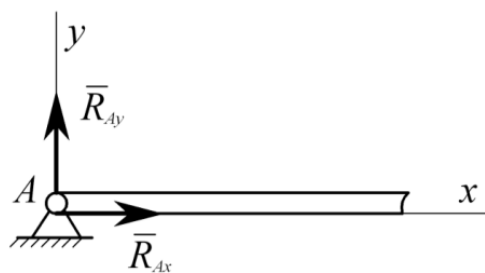


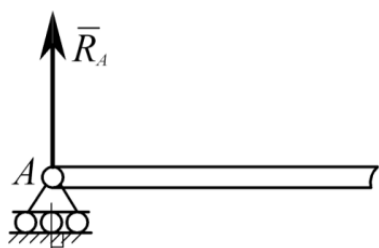
Рис. 1.5



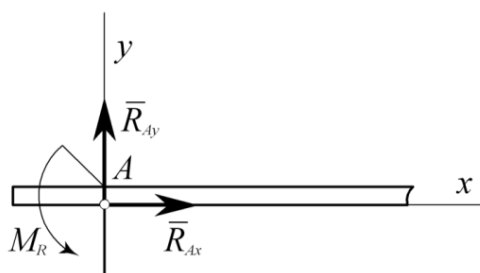
В



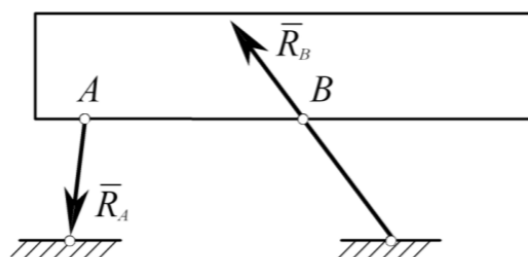
Г



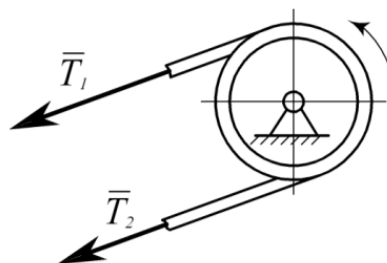
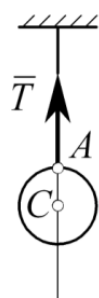
Д



е



Ж



З

Рис. 1.5 (продовження)

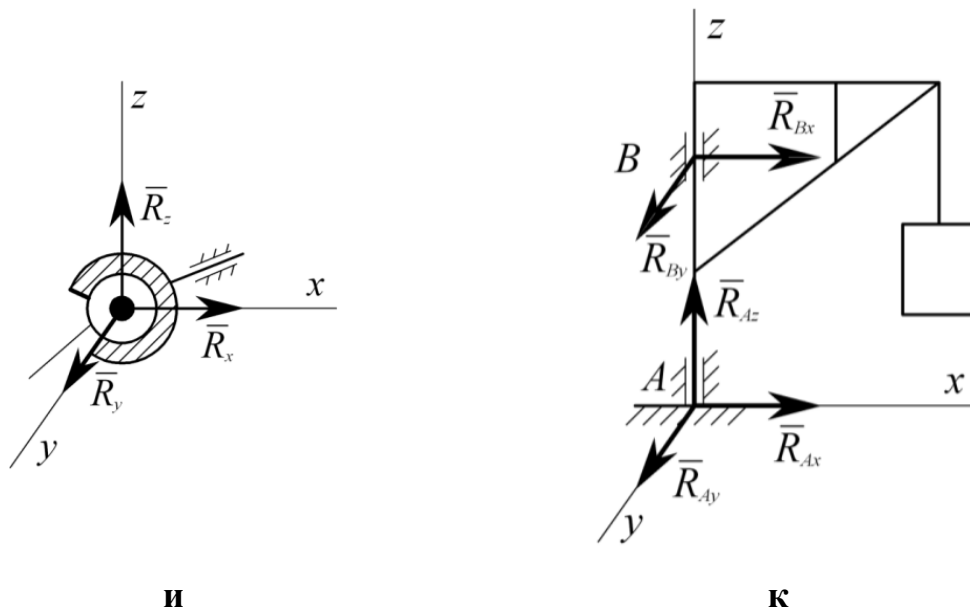


Рис. 1.5 (продовження)

8. **Просторовий сферичний шарнір** або його окремий випадок – **підп'ятник** (рис. 1.5 и, к).

Ця в'язь забезпечує нерухомість центра сфери або опорного центра підп'ятника, тому у випадку ідеально гладких поверхонь вектори реакцій прикладені у згаданих центрах, але напрямок цих векторів невідомий.

Відповідні реакції цих в'язей зображуються трьома складовими $\vec{R}_x, \vec{R}_y, \vec{R}_z$, спрямованими вздовж осей прямокутної просторової системи декартових координат x, y, z з початком у центрі сферичного шарніра або центрі підп'ятника.

9. **Криволінійний стрижень** (рис. 1.6). Наприклад, тіло зв'язано з опорою в точці A криволінійним стрижнем.

Конструкцію цієї невагомої в'язі, яка може бути криволінійною з двома зовнішніми точковими шарнірами на кінцях, можна розглядати як стрижень, напрямок реакції якого \vec{S} проходить вздовж прямої, що з'єднує точкові шарніри A і B.

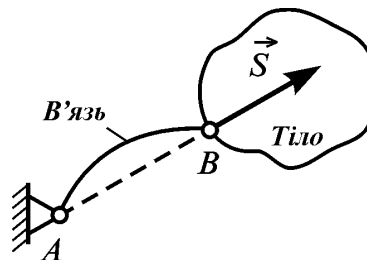


Рис. 1.6

10. **Просторове жорстке закріплення.** На відміну від плоскої

системи (рис. 1.5e) у випадку просторової задачі (рис. 1.7) вектор реакції жорсткого закріплення (защемлення) \vec{R}_A подають *трьома* складовими відносно просторової системи координат, а вектор-момент реактивної пари \vec{M}_p – *трьома* відповідними складовими на ті самі осі.

$$\vec{R}_A = \vec{X}_A + \vec{Y}_A + \vec{Z}_A, \quad \vec{M}_p = \vec{M}_{px} + \vec{M}_{py} + \vec{M}_{pz}.$$

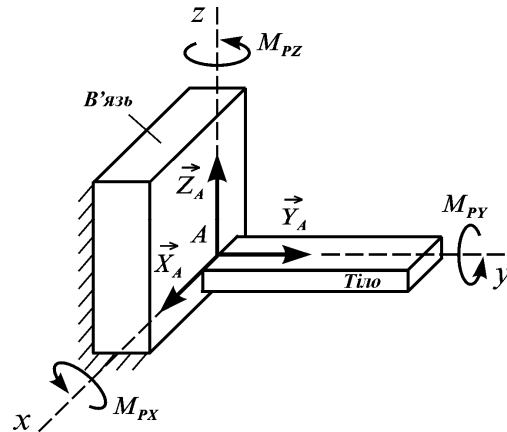


Рис. 1.7

Зауважимо, що ідеальною називають в'язь, лінія дії реакції якої відома (гладенька поверхня, невагомий мотузок і стрижень, коток тощо). У зв'язку з розгляданням поняття в'язей вводиться шоста і сьома аксіоми статички, які носять назви аксіоми про звільнення від в'язей і аксіоми про накладення нових в'язей.

Шоста аксіома (про звільнення від в'язей).

Первісна рівновага невільного матеріального тіла не порушиться, якщо відкинути фізичні в'язі, накладені на тіло, і замінити їх дію силами реакцій в'язей.

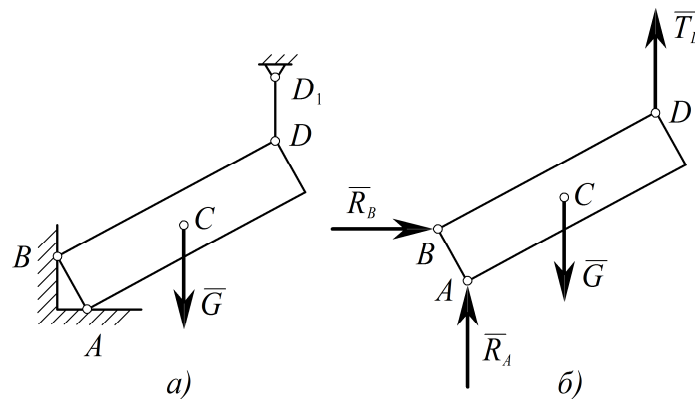


Рис. 1.8

Проілюструємо аксіому на прикладі (рис. 1.8а). Згідно з цією аксіомою дане невідільне тіло (наприклад, брус вагою \bar{G}), що перебуває під дією прикладеної до нього активної сили (сила ваги \bar{G} , яка прикладена в центрі ваги точці C) і накладених в'язей (горизонтальна площина в точці A , вертикальна стінка в точці B і вертикальний трос у точці D) можна розглядати як вільне, якщо відкинути накладені в'язі (опори, троси, тобто, фізичні конструкції) і прикласти реакції цих відкинутих в'язей, рисунок 1.8б (реакції опор \bar{R}_A, \bar{R}_B і натяг тросу \bar{T}), а потім вже застосовувати до тіла закони і методи теоретичної механіки.

Сьома аксіома (про накладання нових в'язей)

|| *Рівновага невідільного матеріального тіла не порушиться, якщо на нього накласти нові в'язі.*

1.1.5. Класифікація систем сил. Метод перерізів

За характером розміщення всі системи сил, прикладені до одного тіла або системи тіл, можна поділити на плоскі і просторові системи сил. Плоска система сил відрізняється тим, що вектори всіх сил розміщені тільки в одній заданій площині. У просторовій системі сил вектори сил розміщуються як завгодно у просторі.

Крім того, кожна з цих систем сил може бути поділена на систему збіжних сил, систему паралельних сил і систему довільних сил. Зробимо такі визначення:

– **система збіжних сил** (пучок сил) на площині або у просторі, прикладена до твердого тіла, характеризується тим, що **лінії дії** усіх сил **перетинаються в одній точці** (центрі пучка);

– **система паралельних сил** на площині або у просторі: лінії дії всіх сил паралельні;

– **система довільних сил** на площині і система довільних сил у просторі: **лінії дії сил розміщені як завгодно** на площині або у просторі.

Отже, можна констатувати, що маємо **шість** різних **систем сил**, беручи до уваги як плоску, так і просторову системи сил, під дією яких тіло може перебувати у стані рівноваги або рухатись за певним законом.

За характером дії сил, незважаючи їх фізичне походження, у теоретичній механіці існує ще два способи класифікації сил.

Згідно з першим способом, розрізняють сили активні або задані і реакції в'язей.

Активними називають сили, які викликають як прискорення точок системи, так і реакції в'язей.

Другий спосіб полягає у поділі всіх сил на зовнішні і внутрішні сили щодо системи.

Зовнішніми називають сили, з якими точки, що входять до матеріальної системи, взаємодіють з тілами, які системі не належать.

Внутрішніми називають сили взаємодії між точками однієї системи.

Наведені класифікації сил існують незалежно одна від одної. Так, наприклад, у невідільній системі реакції в'язей є внутрішніми силами. Внутрішні сили взаємодії двох зарядів, якщо їх розглядати разом, – активні сили.

Внутрішні сили задовольняють третій закон І. Ньютона незалежно від стану матеріальної системи:

Взаємодія двох матеріальних точок, що входять до системи, завжди відбувається з однаковими за величиною і протилежно напрямленими силами, які мають спільну лінію дії.

Помилкою буде ототожнювати це з аксіомою про абсолютно тверде тіло, бо вона справджується лише для стану рівноваги одного абсолютно твердого тіла. Отже, **внутрішні сили утворюють систему сил, еквівалентну нулю.**

На підставі означень такі сили не можуть змінити кінематичний стан абсолютно твердого тіла, тому їх не можна визначити з рівнянь руху або рівноваги твердого тіла. Але визначення внутрішніх сил дуже важливе, особливо в механіці деформованих тіл. У цьому випадку застосовують метод перерізів, за допомогою якого задача визначення внутрішніх сил зводиться до визначення зовнішніх сил. Припустимо, що треба визначити внутрішні сили в шарнірі A , який з'єднує два тіла AB і AC , що знаходяться під дією зовнішніх сил $\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_4$ (рис. 1.9а).

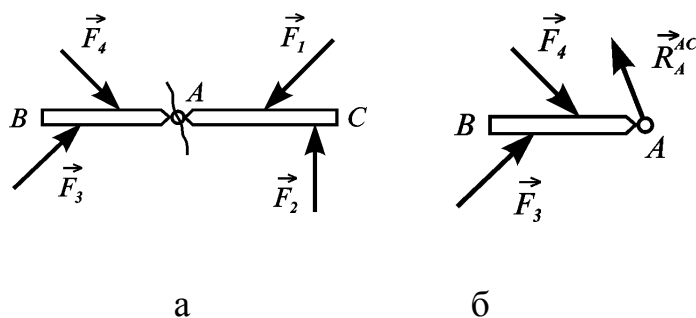


Рис. 1.9

Проведемо переріз крізь шарнір A і розглядатимемо, наприклад, тіло AC як в'язь відносно тіла BA . Застосовуючи аксіому про звільнення від в'язей, прикладемо в точці A силу реакції \vec{R}_A^{AC} відкинутого тіла AC як

механічну дію відкинутого тіла на шарнір A .

Тепер внутрішня сила реакції згаданого шарніра (рис. 1.9а) стає зовнішньою силою відносно тіла BA (рис. 1.9б) і може бути визначена звичайними методами для даної системи сил (у цьому разі – це плоска система довільних сил).

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Що вивчає теоретична механіка? Що таке механічний рух?
2. Що вивчає статика? Задачі статички.
3. У чому полягає суть понять матеріальна точка і абсолютно тверде тіло?
4. Що таке сила? Назвіть три параметри, що характеризують силу.
5. Що таке система сил? Які системи сил Ви знаєте?
6. Яка сила є рівнодієюю системи сил? Як формулюються аксіоми статички?
7. Якими є поняття про простір і час у класичній механіці?
8. Що таке матеріальна система?
9. За якими умовами сила може розглядатись як ковзний вектор?
10. Як формулюється теорема про паралелограм сил?
11. Як розуміти вільне і невільне матеріальні тіла?
12. Що таке механічні в'язі і які типи в'язей Ви знаєте?
13. Що таке реакції в'язей і як вони спрямовуються?
14. Які реакції в'язей утворює жорстке закріплення у площині?
15. Які реакції утворюють підп'ятник і сферичний шарнір?
16. Які реакції в'язей утворює жорстке закріплення у просторі?
17. Як спрямувати силу реакції криволінійного стрижня?
18. Чим відрізняються внутрішні сили від зовнішніх і які властивості мають перші?
19. Що таке метод перетину і як внутрішні сили перетворити у зовнішні?
20. За якими силами відбувається взаємодія двох матеріальних точок?

1.2. Система збіжних сил. Визначення рівнодійної.

Умови рівноваги тіла

1.2.1. Зведення системи збіжних сил до рівнодійної.

Векторний спосіб додавання сил

Якщо вектори всіх сил, прикладені до твердого тіла, розміщені в одній площині або у просторі і лінії їх дії перетинаються в одній точці, то така система сил носить назву *системи збіжних сил* (пучок сил).

Для ілюстрації вищезгаданого покажемо на рис. 1.10 довільне тіло, до

якого прикладений просторовий пучок системи збіжних сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots, \vec{F}_n)$. При цьому лінії дії всіх сил перетинаються у центрі пучка точці A .

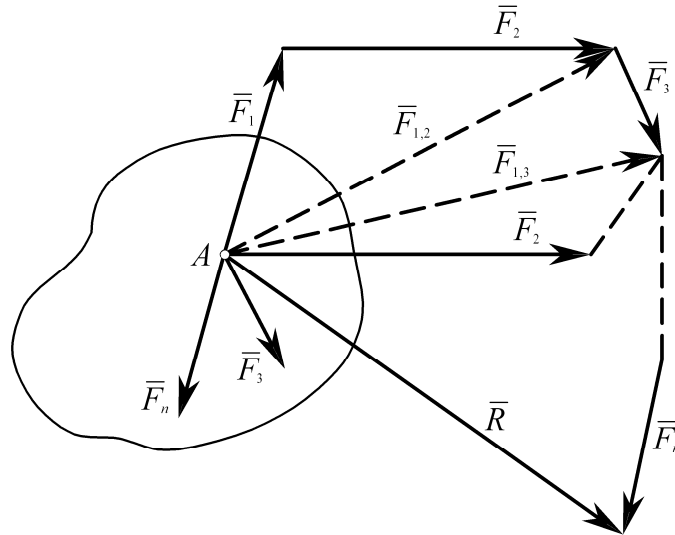


Рис. 1.10

Спробуємо провести еквівалентне перетворення просторової системи збіжних сил, $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots, \vec{F}_n)$, зображеної на рис. 1.10, у більш просту систему.

Візьмемо (умовно) дві перші сили \vec{F}_1 і \vec{F}_2 і на підставі третьої аксіоми статички про паралелограм сил знайдемо їх рівнодійну $\vec{R}_{1,2}$, для чого на векторах цих сил \vec{F}_1 і \vec{F}_2 , як на сторонах, побудуємо паралелограм¹, діагональ якого, прикладена у точці A , і є їхньою рівнодійною $\vec{R}_{1,2} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$.

Далі векторно додамо дві наступні сили $\vec{R}_{1,2}$ і \vec{F}_3 і на векторах цих сил, як на сторонах, побудуємо другий паралелограм, діагональ якого дорівнює

$$\vec{R}_{1,3} = \vec{R}_{1,2} + \vec{F}_3 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3.$$

Продовжуємо цей процес до останньої сили \vec{F}_n . Ще побудуємо паралелограм і остання діагональ буде рівнодійною \vec{R} системи заданих збіжних сил, оскільки під час перетворень системи використовувалися засоби, які не призводять до зміни кінематичного стану твердого тіла.

Якщо уважно придивитися до геометричної побудови трикутників, то можна побачити, що до кінця вектора сили \vec{F}_1 було приєднано вектор сили

¹ Тут показаний не паралелограм, а його половина, тобто трикутник сил.

\vec{F}_2 (тобто в кінець вектора \vec{F}_1 перенесено паралельно вектор \vec{F}_2) і так далі. Зрозуміло, що тут не потрібні проміжні рівнодійні $\vec{R}_{1,2} \dots$

Так, на підставі третьої аксіоми можна прийти до **правила многокутника сил** або **силового многокутника**.

Отже, векторний спосіб додавання збіжних сил зводиться до побудови **силового многокутника** для визначення рівнодійної.

Він будується шляхом паралельного перенесення у деякому масштабі векторів сил, де початок вектора наступної сили приєднується до кінця вектора попередньої сили.

Тоді вектор рівнодійної з'єднує початок вектора першої сили з кінцем вектора останньої сили (рис. 1.10), тобто, **вектор рівнодійної є замикальною стороною силового многокутника**. Підсумок процесу додавання пучка збіжних сил у векторній формі можна записати алгебраїчно

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots + \vec{F}_n \quad (1.3)$$

Рівнодійну сил визначили як векторну суму сил, а дію системи збіжних тіл звели до дії однієї сили, рівнодійної, яку визначили геометричним або векторним додаванням сил.

Величина рівнодійної сили не зміниться, якщо буде змінено порядок приєднання (додавання) сил до сторін многокутника, але конфігурація силового многокутника буде іншою.

Для просторової системи збіжних сил силовий многокутник є **просторовою фігурою**, а для плоскої системи – **плоскою фігурою**.

Для плоскої системи рівнодійну можна визначити графічно шляхом побудови у вибраному для сил масштабі замикальної сторони силового многокутника.

Для просторової системи збіжних сил потрібно було б будувати силовий многокутник у просторі із жорстких стрижнів або проектувати його на прямокутний декартов тригранник.

Отже, система збіжних сил у загальному випадку зводиться до однієї сили – рівнодійної цієї системи сил, яка зображується замикальною стороною силового многокутника, побудованого на силах системи, і прикладена в центрі пучка.

1.2.2. Умова рівноваги системи збіжних сил у векторній формі

Якщо до вільного матеріального тіла прикладена одна сила, то про рівновагу цього тіла, згідно з першою аксіомою, не може бути мови. Розглядаючи систему збіжних сил, зведену до рівнодійної, яка не дорівнює нулю, можна сказати, що і в цьому разі тіло не може бути у рівновазі.

Для рівноваги твердого тіла під дією системи збіжних сил, прикладеної до цього тіла, необхідно і достатньо, щоб рівнодійна цієї системи сил дорівнювала нулю.

$$\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{F}_3 + \dots + \bar{F}_n = 0. \quad (1.4)$$

Отже, *рівнодійна системи сил дорівнюватиме нулю, якщо силовий багатокутник цієї системи буде замкненим*, тобто, якщо початок вектора першої сили збігається з кінцем вектора останньої сили (див. рис. 1.10: якщо рівнодійна дорівнює нулю, то кінець останнього вектора \bar{F}_n збігатиметься з точкою A , а замикальна сторона \bar{R} перетвориться в точку). Ця умова рівноваги називається векторною або графічною умовою рівноваги (у векторній або графічній формах).

Необхідність умови рівноваги випливає з того, що дана система збіжних сил еквівалентна одній силі – рівнодійній, проте, очевидно, що під дією однієї сили тверде тіло може перебувати у стані рівноваги тільки тоді, коли ця сила дорівнює нулю.

Достатність цієї умови рівноваги: оскільки система сил має рівнодійну, що дорівнює нулю, то діюча на тверде тіло система сил є зрівноваженою або еквівалентною нулю, тому вона не може змінити кінематичного стану цього тіла. Якщо тіло перебувало у стані рівноваги до моменту дії сил, то воно залишиться у цьому стані і під дією цієї системи сил.

1.2.3. Проекція сили на вісь і на площину

Уявимо силу \bar{P} , вектор якої довільно розміщений у площині креслення (рис. 1.11).

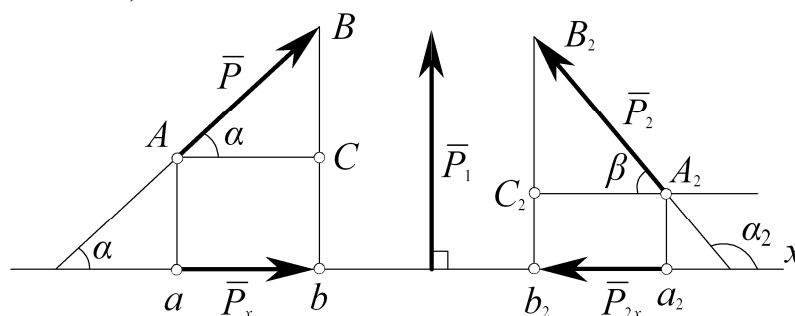


Рис. 1.11

Виберемо у цій площині вісь, наприклад вісь x , і спроектуємо вказану силу \bar{P} на цю вісь.

Позначимо спочатку кінці вектора сили \bar{P} літерами A, B і опустимо з

Частина перша

них на вісь x перпендикулярні. Точки перетину перпендикулярів з віссю x (позначимо їх відповідними малими літерами a і b) утворили на осі x напрямлений відрізок, який і буде проекцією сили \vec{P} на вісь x . За величиною цей відрізок, що можна побачити із трикутника ΔABC , дорівнює добутку модуля сили $|\vec{P}|$ на косинус кута, під яким вектор сили перетинає вісь:

$$P_x = (ab) = (AC) = (AB) \cdot \cos \alpha = P \cdot \cos \alpha. \quad (1.5)$$

За знаком проекція сили на вісь додатна, якщо кут α (кут між вектором сили і віссю) є гострим. Цілком зрозуміло, якщо цей кут дорівнює 90° , то проекція сили \vec{P}_1 на вісь x дорівнюватиме нулю. Легко зрозуміти, якщо кут між вектором сили і віссю дорівнює нулю, то цей вектор проектується в натуральну величину.

Якщо кут α_2 буде тупий, то проекція сили \vec{P}_2 на вісь x матиме від'ємний знак. Значення проекції у такому випадку:

$$P_{2x} = (a_2 b_2) = (A_2 C_2) = P_2 \cdot \cos \alpha_2.$$

Але практично більш зручно використовувати не тупий кут α_2 , а гострий доповняльний кут β між вектором сили \vec{P}_2 і напрямком осі x . Знак проекції легко при цьому визначається зі схеми

$$P_{2x} = -P_2 \cdot \cos \beta.$$

Отже, проекція сили на вісь – це спрямований відрізок на осі між перпендикулярами, опущеними з кінців вектора сили на задану вісь.

Проекція вектора сили на вісь – це скалярна величина, яка дорівнює добутку модуля сили на косинус кута між напрямком вектора сили і додатним напрямком осі.

Далі знайдемо проекцію вектора сили на площину і на осі координат.

Візьмемо силу \vec{F} , вектор якої довільно розташований у просторі (рис. 1.12). Виберемо у просторі прямокутну систему декартових координат $Oxyz$, початок відліку якої (точка O) суміщений з точкою прикладення вектора сили \vec{F} .

Визначимо проекцію вектора сили \vec{F} на площину xOy . Для цього опустимо з точки A (кінець вектора сили) перпендикуляр на вказану площину, який перетне останню в точці a .

На заданій площині xOy утворено вектор \vec{Oa} , який і є проекцією \vec{F}_{xy} вектора сили на площину. За модулем ця проекція дорівнює:

$$F_{xy} = F \cos \alpha, \quad (1.6)$$

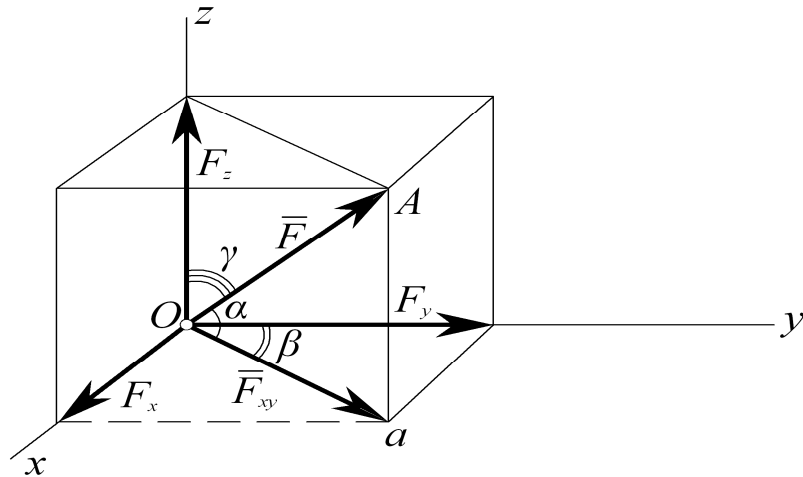


Рис. 1.12

де α – кут між напрямком вектора сили \vec{F} та площиною xOy .

Слід зазначити:

проекція вектора сили на площину є вектором, який розміщений між проекціями початку і кінця вектора сили на цю площину.

Спроектуємо вектор сили \vec{F} на координатні осі x і y за відомим правилом:

$$F_x = F_{xy} \cdot \cos(90^\circ - \beta) = F \cdot \cos \alpha \cdot \sin \beta, \quad (1.7)$$

$$F_y = F_{xy} \cdot \cos \beta = F \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta. \quad (1.8)$$

Аналізуючи вирази (1.7) і (1.8), можна помітити, що для здобуття проекції сили на координатну вісь необхідно провести подвійне проектування: спочатку знайти проекцію вектора сили на площину, в якій розміщені ці осі, а вже потім – на самі осі.

Що стосується третьої осі z , то є можливість спроектувати вектор сили \vec{F} на цю вісь безпосередньо за відомим правилом (1.5):

$$F_z = F \cdot \cos \gamma, \quad (1.9)$$

де γ – кут між вектором сили \vec{F} і віссю z .

1.2.4. Визначення сили за її проекціями

Припустимо, що маємо в площині рисунка прямокутну систему декартових координат Oxy , задані дві проекції сили – F_x і F_y (рис. 1.14). Треба за даними проекціями обчислити модуль вектора самої сили \vec{F}_{xy} , а також його напрямок.

На заданих проекціях, як на сторонах, будуємо прямокутник, діагональ якого, що проходить крізь точку перетину проекцій, і є шуканим

Частина перша

вектором сили \bar{F}_{xy} . Модуль вектора сили \bar{F}_{xy} можна визначити з виразу:

$$F_{xy} = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}. \quad (1.10)$$

Кути між вектором сили \bar{F}_{xy} і осями x, y можна визначити за допомогою напрямних косинусів:

$$\cos \alpha = \cos (x, \wedge \bar{F}) = \frac{F_x}{F_{xy}}, \quad \cos \beta = \cos (y, \wedge \bar{F}) = \frac{F_y}{F_{xy}}. \quad (1.11)$$

Знаючи напрямні косинуси, є можливість знайти величини кутів за допомогою функції арккосинуса.

Аналогічно для просторової системи сил (рис. 1.14) можна побудувати паралелепіпед на проєкціях як на сторонах, а модуль сили \bar{F} визначити як діагональ цього паралелепіпеда

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}.$$

Напрямок вектора цієї сили визначається за напрямними косинусами його кутів з відповідними осями координат x, y, z :

$$\cos (x, \wedge \bar{F}) = \frac{F_x}{F}, \quad \cos (y, \wedge \bar{F}) = \frac{F_y}{F}, \quad \cos (z, \wedge \bar{F}) = \frac{F_z}{F}.$$

Далі, за функціями арккосинусів визначають величини самих кутів.

1.2.5. Теорема про проєкцію рівнодійної сили на вісь

Маємо систему сил $(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3, \bar{F}_4)$, яка зведена до рівнодійної \bar{R} за допомогою силового многокутника (рис. 1.13). Введемо на площині прямокутну систему декартових координат Oxy і спроектуємо на вісь x всі сили.

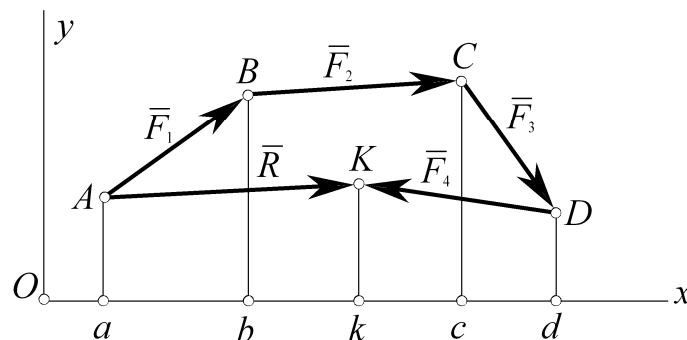


Рис. 1.13

Для цього позначимо кінці векторів всіх сил літерами A, B, C, D, K і проведемо перпендикуляри з кожної точки на вісь x . Точки перетину

перпендикулярів з віссю, що позначені відповідними малими літерами a, b, c, d, k , утворили на осі x спрямовані відрізки, які і є проєкціями всіх сил на цю вісь:

$$|ab| = F_{1x}; \quad |bc| = F_{2x}; \quad |cd| = F_{3x}; \quad |-dk| = F_{4x}. \quad (1.12)$$

Додамо алгебраїчно всі проєкції і підрахуємо, чому ця сума дорівнює:

$$ab + bc + cd - dk = ak. \quad (1.13)$$

Але відрізок ak і є проєкцією рівнодійної сили \bar{R} на вісь x . Цей підрахунок стосувався чотирьох сил, але, поширюючи цю суму на n сил, можна записати:

$$R_x = F_{1x} + F_{2x} + \dots + F_{nx} = \sum_{k=1}^n F_{kx}. \quad (1.14)$$

1.2.6. Аналітичний спосіб додавання системи збіжних сил

Для можливості аналітичного додавання сил скористуємося теоремою векторної алгебри:

проєкція підсумкового вектора або рівнодійної сили на вісь дорівнює алгебраїчній сумі проєкцій векторів складових сил на ту саму вісь.

На підставі теореми

$$R_x = F_{1x} + F_{2x} + \dots + F_{nx} = \sum_{k=1}^n F_{kx}. \quad (1.15)$$

Аналогічно проєкції рівнодійної сили на осі y і z дорівнюють:

$$R_y = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} + \dots + F_{ny} = \sum_{k=1}^n F_{ky}, \quad (1.16)$$

$$R_z = F_{1z} + F_{2z} + F_{3z} + \dots + F_{nz} = \sum_{k=1}^n F_{kz}. \quad (1.17)$$

Модуль рівнодійної:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}.$$

Кути між вектором рівнодійної \bar{R} і осями координат x, y, z визначимо через функції напрямних косинусів кутів між відповідною віссю та рівнодійною:

$$\cos(x, \hat{\bar{R}}) = \frac{R_x}{R}, \quad \cos(y, \hat{\bar{R}}) = \frac{R_y}{R}, \quad \cos(z, \hat{\bar{R}}) = \frac{R_z}{R}. \quad (1.18)$$

1.2.7. Умови рівноваги системи збіжних сил

Систему збіжних сил можна звести до однієї рівнодійної сили. Для рівноваги системи збіжних сил необхідно і достатньо, щоб рівнодійна цієї системи дорівнювала нулю (вираз 1.4). А якщо рівнодійна сила дорівнює нулю, то і її проекції на осі x, y, z теж дорівнюють нулю. Оскільки проекції рівнодійної дорівнюють алгебраїчним сумах проекцій складових сил (вирази 1.14 – 1.17), то умови рівноваги просторової системи збіжних сил мають такий вигляд:

$$R_x = \sum_{k=1}^n F_{kx} = 0, \quad R_y = \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0, \quad R_z = \sum_{k=1}^n F_{kz} = 0. \quad (1.19)$$

Для рівноваги твердого тіла, що перебуває під дією просторової системи збіжних сил, необхідно і достатньо, щоб алгебраїчні суми проекцій сил на кожну із трьох координатних осей дорівнювали нулю.

У випадку плоскої системи збіжних сил одну із осей координат, частіше oz , вибирають перпендикулярною до площини дії сил. Тоді третя умова із системи умов (1.19) перетворюється у тотожність. Відкидаючи її, отримуємо умови рівноваги тіла під дією плоскої системи збіжних сил:

$$R_x = \sum_{k=1}^n F_{kx} = 0, \quad R_y = \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0. \quad (1.20)$$

Для рівноваги твердого тіла під дією прикладеної до нього плоскої системи збіжних сил необхідно і достатньо, щоб алгебраїчні суми проекцій цих сил на кожну із двох координатних осей, розміщених у цій площині, дорівнювали нулю.

1.2.8. Методика розв'язування задач статки. Приклади

Задачі статки, що потребують розв'язування, можуть бути одного з двох типів. У задачах першого типу відомі діючі на тіло активні сили і необхідно знайти, в якому положенні або за яких співвідношень між діючими силами задане тіло може перебувати у стані рівноваги. У задачах другого типу попередньо відомо, що задане тіло перебуває у стані рівноваги, а необхідно визначити, чому при цьому дорівнюють деякі діючі сили і реакції опор. Реакції в'язей завжди є величинами, попередньо невідомими у всіх задачах статки. Алгоритм розв'язування задач статки твердого тіла наступний.

1. З'ясувати, рівновагу якого твердого тіла або точки потрібно розглянути.

Для розв'язання задачі розглядається рівновага тіла, до якого

прикладені задані і шукані сили. Якщо ж на тіло діє система збіжних сил, то необхідно визначити точку, в якій перетинаються лінії дії сил і реакцій. Якщо задані сили діють на одне тіло, а шукані сили – на друге або ці сили діють одночасно на декілька тіл, то може бути необхідним розглянути послідовно рівновагу кожного тіла окремо.

2. Скласти розрахунково-силову схему.

Важливе значення має охайне креслення, навіть чернетка рисунка, що може допомогти швидше знайти правильний шлях розв'язування задачі і уникнути помилок під час складання умов рівноваги.

а) показати на схемі задані активні сили, що діють на тверде тіло;

з'ясувавши, рівновагу якого тіла потрібно розглянути, слід зобразити на рисунку всі діючі на задане тіло зовнішні сили, включаючи як задані, так і шукані сили;

б) показати на схемі сили реакцій в'язей, що обмежують рух твердого тіла;

відкинути за аксіомою про звільнення від в'язей задані фізичні опорні елементи, конструкції і замінити їхню дію реакціями в'язей згідно з рекомендаціями щодо основних типів в'язей (див. пп. 1.1.4). Напрямок стрілок невідомих реакцій задаємось довільно. Таким чином, до тіла або точки прикладатимуться задані активні сили і сили реакцій в'язей;

в) раціонально вибрати систему координат;

особливо це важливо для системи збіжних сил, прикладеної до твердого тіла. Для зручності початок координат розміщуємо в точці рівноваги. Бажано, щоб одна із осей координат збігалася з перпендикуляром до напрямку шуканої сили – в цьому разі одне з рівнянь рівноваги опиниться з одним невідомим, з якого легко визначити шукану величину.

3. Встановити, яка система сил за класифікацією діє на задане тверде тіло.

Це необхідно, щоб з'ясувати, якими умовами рівноваги тіла під дією заданих сил і реакцій в'язей необхідно користуватися, і вибрати відповідну систему умов рівноваги.

4. На підставі відповідної системи умов рівноваги скласти рівняння рівноваги твердого тіла.

Геометричні умови рівноваги слід застосовувати, якщо на тіло діє не більше трьох заданих і шуканих сил, розміщених на площині. У випадку рівноваги силовий трикутник, побудований з цих сил, має бути замкненим, з нього і визначають шукані сили.

Частина перша

Аналітичними умовами рівноваги можна користуватися за будь-якої кількості сил, що діють на тверде тіло. Корисно при цьому, особливо на початку вивчення матеріалу, попередньо обчислювати проекції всіх сил і заносити їх в окрему таблицю.

5. Розв'язати складені рівняння рівноваги, визначити шукані величини, провести перевірку і аналіз результатів.

Усі розрахунки під час розв'язання алгебраїчних рівнянь статички рекомендується проводити у загальному вигляді, отримуючи для шуканих величин формули, що дає можливість аналізу знайдених результатів.

Крім того, розв'язок у загальному вигляді дозволяє виявити зроблені помилки шляхом перевірки вимірності. Визначені аналітично шукані величин можуть бути перевірені на підставі геометричних умов рівноваги побудовою силового трикутника або многокутника.

Якщо одна із знайдених реакцій отримала знак «мінус», то це означає, що фактичний її напрямок є протилежним, ніж це показано на розрахунковій схемі.

Конкретні методичні вказівки для розв'язання задач надаються в кожному окремому випадку, адже будь-яка задача зберігає свою індивідуальну особливість.

Приклад 1.1

Невагомий ідеальний стрижень AB утримується в рівновазі нерозтяжним гнучким тросом BC .

До шарніра B стрижня на гнучкій нерозтяжній нитці підвішене тіло вагою G (рис.1.16).

Визначити натяг нитки BC і силу реакції стрижня AB , якщо кути і вага дорівнюють, відповідно:

$$\alpha = 45^\circ; \beta = 105^\circ; G = 500 \text{ Н}.$$

Розв'язання

Розглянемо рівновагу вузла B , де збігаються вектори усіх сил (рис. 1.14). До вузла прикладено: сила натягу нитки, що рівна силі ваги \bar{G} , перенесена вздовж лінії дії від центра мас тіла до точки B , натяг троса \bar{T} і сила реакції стрижня \bar{S} . Таким чином, вузол B перебуває у рівновазі під дією трьох сил: \bar{G} , \bar{T} і \bar{S} , розміщених в одній площині і прикладених у центрі пучка точці B .

Величину зусиль \bar{S} і \bar{T} визначимо геометричним методом, скориставшись векторною умовою рівноваги плоскої системи збіжних сил:

$$\sum \bar{F}_k = \bar{T} + \bar{G} + \bar{S} = 0.$$

Для цього з довільної точки a (рис. 1.15) відкладаємо в деякому масштабі відомий вектор \vec{G} , отримавши дві точки a і b , крізь які проводимо послідовно прямі, паралельні відомим лініям дії невідомих за

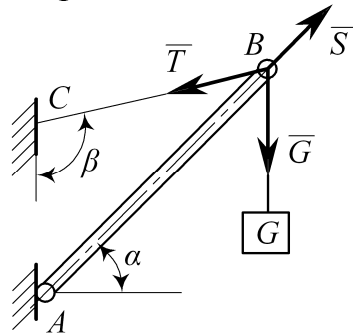


Рис. 1.14

модулем сил \vec{S} і \vec{T} .

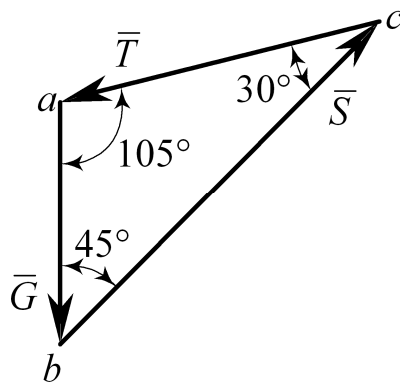


Рис. 1.15

На перетині останніх отримаємо точку c , з допомогою якої утворюється силувий трикутник abc . Сторони цього трикутника у вибраному масштабі уявляють собою модулі задіяних сил.

Знайти невідомі величини можна, якщо заміряти відповідні сторони силового трикутника і помножити їхню довжину на вибраний масштабний коефіцієнт, або за теоремою синусів:

$$\frac{G}{\sin 30^\circ} = \frac{T}{\sin 45^\circ} = \frac{S}{\sin 105^\circ}.$$

Звідси:

$$T = G \frac{\sin 45^\circ}{\sin 30^\circ} = 500 \frac{0,707}{0,5} = 707 \text{ Н};$$

$$S = G \frac{\sin 105^\circ}{\sin 30^\circ} = G \frac{\sin 75^\circ}{\sin 30^\circ} = 500 \frac{0,954}{0,5} = 954 \text{ Н.}$$

Відповідь: $T = 707 \text{ Н}; S = 954 \text{ Н}.$

Приклад 1.2

Гнучкий трос з двома тілами на кінцях вагою F і \bar{Q}_1 перекинтий через блоки A і B (рис.1.16). В точці O збігання тросів прикріплено вантаж вагою $G = 27,3 \text{ Н}$. В умовах рівноваги системи нитка OA утворила кут 60° з горизонталлю, а нитка OB – кут 45° .

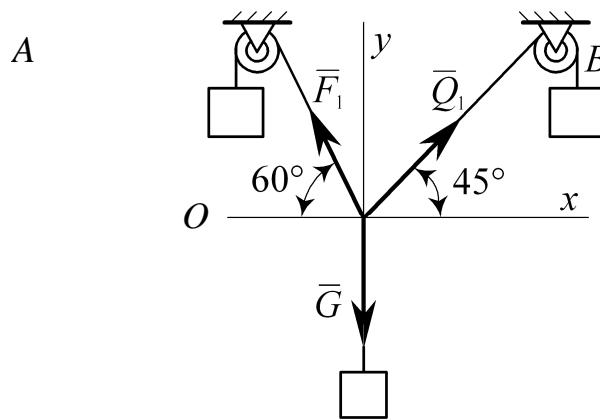


Рис. 1.16

Визначити вагу тіл F і Q . Силами тертя в блоках знехтувати.

Розв'язання

Спочатку з'ясуємо, рівновагу якої точки потрібно розглянути при розв'язуванні задачі. За умовою задачі потрібно визначити вагу тіл F і Q , прикладених до центрів мас тіл і спрямованих вертикально вниз. Кожне тіло натягує нитку з силою, яка дорівнює його вазі. Блоки змінюють напрямки ниток, а, відповідно, і напрями сил натягу. Сили натягу F_1 і \bar{Q}_1 за модулем дорівнюють вазі тіл F і Q , але спрямовані вздовж тросів OA і OB .

Оскільки прямі OA і OB перетинаються в точці O , до якої можна прикласти і задану силу G , то під час розв'язання задачі треба розглядати рівновагу точки O .

Таким чином, на точку O (рис.1.16) діють: сила натягу \bar{F}_1 вітки нитки OA ; сили натягу \bar{Q}_1 вітки нитки OB ; вага тіла G .

Складемо рівняння рівноваги. Для цього оберемо систему координат Oxy з початком у точці O , спроекуємо сили на осі координат і складемо

рівняння рівноваги.

Для суми проекцій на вісь Ox дістанемо:

$$\sum F_{kx} = Q_1 \cos 45^\circ - F_1 \cos 60^\circ = 0.$$

Знак проекції \bar{Q}_1 – додатний, оскільки вона спрямована за додатним напрямом осі Ox . Знак проекції сили F_1 – від’ємний, оскільки вона спрямована за від’ємним напрямом осі Ox . Проекція сили \bar{G} на вісь Ox дорівнює нулю (вектор сили перпендикулярний до осі).

Сума проекцій усіх сил на вісь Oy дорівнює:

$$\sum F_{ky} = Q_1 \sin 45^\circ + F_1 \sin 60^\circ - G = 0.$$

Проекції сил \bar{F}_1 і \bar{Q}_1 мають додатні знаки, оскільки вони спрямовані за додатним напрямом осі Oy . Проекція сили \bar{G} має знак «мінус», оскільки спрямована за від’ємним напрямом осі.

З урахуванням чисельних значень тригонометричних функцій та величини заданої сили G рівняння набувають вигляду:

$$0,707Q_1 - 0,5F_1 = 0;$$

$$0,707Q_1 + 0,866F_1 - 27,3 = 0.$$

Визначивши з першого рівняння $F_1 = 1,41 Q_1$

і підставивши в друге, дістанемо: $Q_1 = 14,1 \text{ Н}$; $F_1 = 20 \text{ Н}$.

Приклад 1.3

Три невагомих стрижні AB , AC і AD , розміщені в різних площинах, закріплені шарнірно в точці A і за допомогою шарнірів B , C , D прикріплені до горизонтальної підставки (рис. 1.17). Площини трикутників ABC і AOD вертикальні і взаємно перпендикулярні. На вузол A паралельно OD діє сила $P = 0,6 \text{ кН}$. Знайти зусилля в стрижнях, якщо $\angle ABO = \angle ACO = 45^\circ$; $\angle ADO = 60^\circ$.

Розв’язання

1. Виділимо тіло або точку, умови рівноваги якої дадуть можливість розв’язати задачу. Це точка A , до якої збігаються всі стрижні, зусилля в яких потрібно визначити. Отже, розглянемо рівновагу вузла A , користуючись аксіомою про звільнення від в’язей.

2. Аналізуємо сили, які прикладені до вузла A . На вузол A діє активна сила \bar{P} , а також три реакції стрижнів, які діють уздовж них, оскільки стрижні ідеальні. Припустимо, що всі стрижні розтягнуті, тому на рис. 1.19

Частина перша

їхні реакції спрямовані від вузла A . Задачі має три невідомі $\bar{R}_B, \bar{R}_D, \bar{R}_C$, для відшукування яких можна скласти три рівняння рівноваги. Таким чином, задача статично визначена.

Початок системи координат виберемо в точці O , додатні напрями осей позначено на рисунку.

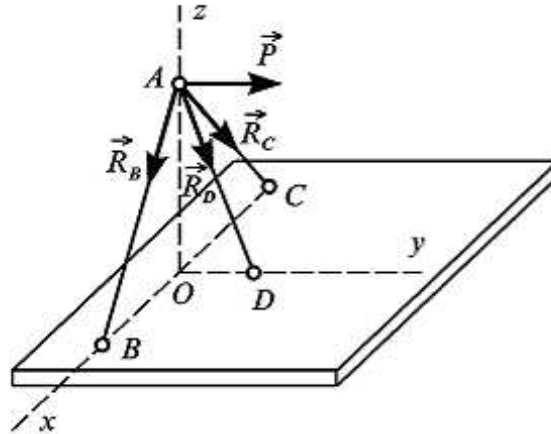


Рис. 1.17

3. Складаємо рівняння рівноваги:

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = R_B \cdot \cos 45^\circ - R_C \cdot \cos 45^\circ = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = P + R_D \cos 60^\circ = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iz} = -R_B \cdot \cos 45^\circ - R_C \cdot \cos 45^\circ - R_D \cdot \cos 30^\circ = 0.$$

На підставі першого рівняння робимо висновок, що $R_B = R_C$, з другого рівняння знаходимо R_D :

$$R_D = -\frac{P}{\cos 60^\circ} = -2P.$$

Від'ємний знак свідчить, що цей стрижень стиснутий, оскільки спочатку припускали, що він розтягнутий. Нарешті, з третього рівняння знайдемо:

$$R_B = R_C = -\frac{R_D \cdot \cos 30^\circ}{2 \cos 45^\circ}; \quad R_B = R_C = \frac{P \cdot \cos 30^\circ}{\cos 45^\circ} = P \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Додатний знак цих реакцій вказує на те, що стрижні AB і AC розтягнуті.

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Яку систему сил називають системою збіжних сил?
2. Для чого і яким чином будується силовий багатокутник?
3. Як формулюється умова рівноваги системи збіжних сил у геометричній (векторній) формі?
4. Як формулюється теорема про рівновагу тіла під дією трьох непаралельних сил?
5. Як визначаються проекції сили на вісь і площину?
6. Який напрям має сила, якщо її проекція на вісь дорівнює нулю?
7. Як визначити силу за її проекціями?
8. Чому дорівнює проекція рівнодійної сили на вісь через її складові?
9. Як знайти аналітично рівнодійну силу?
10. Яка методика розв'язання задач за теоремою про три сили?

1.3. Теорія моментів і пар сил на площині

1.3.1. Алгебраїчний момент сили відносно центра (точки)

Із практики відомо, що тіло під дією сили може не тільки переміщуватися, але і повертатися. Що ж створює цей обертальний ефект? Введемо важливе поняття механіки про *момент сили відносно центра* або точки, які називають центром моменту.

Якщо тіло під дією прикладеної сили обертається відносно центра, то обертальний ефект сили характеризується її моментом відносно цього центра. Під час розгляду плоскої системи сил, прикладених до твердого тіла, використовується поняття алгебраїчного моменту сили відносно центра.

Розглянемо довільне тіло (рис. 1.18), яке може повертатися відносно точки O (точніше навколо осі, що є перпендикулярною площині рисунка і перетинає точку O).

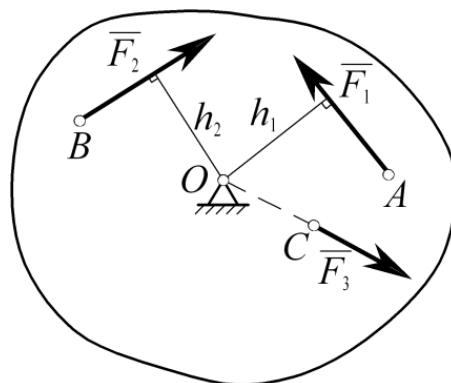


Рис. 1.18

Прикладемо в точках A , B , C тіла вектори сил \vec{F}_1 , \vec{F}_2 , \vec{F}_3 і визначимо

Частина перша

спочатку, чи зможуть вони повертати тіло навколо точки O .

Як можна побачити з рисунка, сила \vec{F}_1 , прикладена у точці A , може повернути тіло навколо точки O проти ходу стрілки годинника. Сила \vec{F}_2 – за ходом стрілки годинника.

Власне, тут інтуїтивно виявляється здатність сили повертати тіло і створювати обертальний ефект. Проте сила \vec{F}_3 , якою б великою вона не була, не має можливості повернути тіло навколо точки O , оскільки лінія дії сили \vec{F}_3 перетинає цю точку.

Таким чином, сили \vec{F}_1 і \vec{F}_2 створюють обертальний ефект (момент) відносно точки O , а сила \vec{F}_3 – ні. Із цього прикладу випливає висновок, що для рівноваги тіла поряд з силами необхідно розглядати і добутки цих сил на відстані ліній їхньої дії від опор.

Алгебраїчним моментом сили відносно центра (точки) називається взятий з відповідним знаком добуток модуля сили на плече.

Плече сили відносно центра – це найкоротша відстань між цим центром і лінією дії сили (перпендикуляр із центра на лінію дії сили).

У курсі теоретичної механіки алгебраїчний момент вважається додатним, якщо сила намагається повернути тіло відносно цієї точки проти ходу стрілки годинника і від'ємним – за ходом стрілки.

Алгебраїчний момент сили \vec{F} відносно точки O позначається $m_o(\vec{F})$.

Покажемо на рис. 1.18 плечі h_1 і h_2 сил, які створюють моменти відносно точки O , і визначимо алгебраїчні величини моментів цих сил:

$$m_o(\vec{F}_1) = F_1 \cdot h_1, \quad m_o(\vec{F}_2) = -F_2 \cdot h_2, \quad m_o(\vec{F}_3) = F_3 \cdot 0 = 0.$$

Алгебраїчний момент сили – це добуток сили на лінійну величину – довжину плеча.

Звідси одиницею виміру моменту у системі $СИ$ є добуток ньютон на метр ($Нм$).

Із аналізу визначення алгебраїчного моменту сили відносно центра випливають його властивості.

1. Момент не залежить від перенесення в межах цього тіла точки прикладання вектора сили вздовж лінії дії сили, оскільки плече сили залишається при цьому незмінним.

2. Якщо лінія дії вектора сили перетинає центр моменту, то момент цієї сили відносно цього центра дорівнює нулю.

3. Сума алгебраїчних моментів відносно центра двох рівних за модулем, але протилежних за напрямом сил, що діють вздовж однієї прямої, дорівнює нулю.

1.3.2. Момент сили відносно центра як вектор

Під час розгляду просторової системи сил, прикладеної до твердого тіла, плідно використовується поняття векторного моменту сили відносно центра.

Розглянемо силу \vec{F} , вектор якої довільно розташований у просторі і прикладений в точці A (рис. 1.19).

Алгебраїчний момент сили \vec{F} відносно центра O дорівнюватиме

$$m_o(\vec{F}) = Fh. \quad (1.21)$$

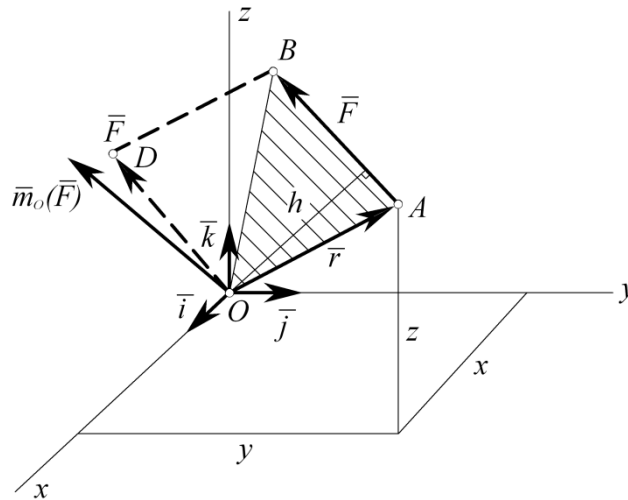


Рис. 1.19

Із трикутника AOB визначимо плече $h = r \cdot \sin(\vec{r} \wedge \vec{F})$. Тоді для виразу алгебраїчного моменту (1.21) отримаємо:

$$m_o(\vec{F}) = Fh = F \cdot r \cdot \sin(\vec{r} \wedge \vec{F}). \quad (1.22)$$

Позначимо літерами A і B кінці вектора сили \vec{F} і з'єднаємо їх з точкою O . Основою трикутника AOB є вектор сили \vec{F} , а одна із вершин розміщена в точці O .

Плече h є висотою трикутника AOB . Тоді алгебраїчний момент сили \vec{F} відносно центра O є подвійною площею трикутника AOB , якщо розглядати його геометричну інтерпретацію:

$$m_o(\vec{F}) = 2S_{\Delta AOB}. \quad (1.23)$$

Далі проведемо крізь точку O прямокутну систему декартових координат $Oxyz$ з ортами \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} . Вважаємо, що відстань OA є радіусом-вектором \vec{r} точки A відносно центра O прикладання вектора сили \vec{F} .

Оскільки алгебраїчний момент сили \vec{F} відносно центра O , як визначено виразом (1.23), є площею двох трикутників AOB , то побудуємо

Частина перша

рівновеликий їм паралелограм $OABD$. Легко побачити, що тепер в точці O прикладені два вектори \bar{r} і \bar{F} , на яких і побудовано паралелограм, площа якого (вираз 1.22) дорівнює модулю векторного добутку двох векторів $\bar{r} \times \bar{F}$.

Таким чином, векторний момент сили відносно центра $\bar{m}_o(\bar{F})$, що проведений перпендикулярно до площини паралелограма, є третім підсумковим вектором добутку двох векторів \bar{r} і \bar{F} :

$$\bar{m}_o(\bar{F}) = \bar{r} \times \bar{F}. \quad (1.24)$$

Остаточно сформулюємо визначення вектора-моменту сили.

Векторний момент сили $\bar{m}_o(\bar{F})$ відносно центра O є підсумковим вектором векторного добутку $\bar{r} \times \bar{F}$, прикладеним в цьому центрі і спрямованим перпендикулярно до площини трикутника OAB , утвореного вектором сили і центром моменту. Векторний момент напрямлений перпендикулярно площині у той бік, з якого можна побачити, що поворот тіла під дією заданої сили \bar{F} відносно центра O відбувається проти годинникової стрілки.

За модулем векторний момент дорівнює подвійній площі трикутника AOB , який утворюють кінці вектора сили \bar{F} і центр O . У підсумку можна зазначити, що векторний момент характеризується модулем, площиною дії і напрямком повороту.

Векторний момент сили відносно центра становить повну характеристику статичної дії цього моменту на тверде тіло, тому дії над моментами можна замінити еквівалентними векторними операціями над їхніми моментами.

Векторний момент сили $\bar{m}_o(\bar{F})$ відносно центра є зв'язаним вектором, тобто, закріпленим у центрі моменту, і за всіма трьома параметрами визначає обертальний ефект сили, прикладеної до твердого тіла: лінія дії векторного моменту визначає **площину дії моменту** (за перпендикуляром); спрямованість вектора (перпендикуляра) визначає **напрямок повороту** «за» чи «проти» годинникової стрілки; довжина вектора у певному масштабі визначає **модуль моменту**.

Визначимо аналітично проєкції на осі координат і модуль векторного моменту сили відносно центра. У прийнятій системі координат вектори \bar{r} і \bar{F} можна виразити через відповідні проєкції на осі координат:

$$\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}, \quad (1.25)$$

$$\bar{F} = F_x\bar{i} + F_y\bar{j} + F_z\bar{k}, \quad (1.26)$$

де x, y, z – проєкції радіуса-вектора \bar{r} на осі координат; F_x, F_y, F_z – проєкції вектора сили \bar{F} на відповідні осі.

Як відомо із векторної алгебри, векторний добуток можна записати у вигляді визначника третього порядку, підставляючи проєкції радіуса-вектора и сили із виразів (1.25) і (1.26):

$$\bar{m}_o(\bar{F}) = \bar{r} \times \bar{F} = \begin{vmatrix} \bar{i}, & \bar{j}, & \bar{k} \\ x, & y, & z \\ F_x, & F_y, & F_z \end{vmatrix}. \quad (1.27)$$

Розкривши визначник (1.27) за елементами першого рядка, отримаємо:

$$\bar{m}_o(\bar{F}) = (yF_z - zF_y)\bar{i} + (zF_x - xF_z)\bar{j} + (xF_y - yF_x)\bar{k}. \quad (1.28)$$

Коефіцієнти перед одиничними векторами у виразі (1.28) є проєкціями вектора-моменту сили відносно точки на осі координат x, y, z , тобто, алгебраїчними величинами і аналітичними виразами проєкцій:

$$m_x(\bar{F}) = yF_z - zF_y; m_y(\bar{F}) = zF_x - xF_z; m_z(\bar{F}) = xF_y - yF_x. \quad (1.29)$$

Якщо проєкції векторного моменту відомі, то його модуль неважко обчислити аналітично із виразу (1.29), визначивши корінь квадратний із суми квадратів проєкцій, а якщо потрібно, то і напрямні косинуси.

$$m_o(\bar{F}) = \sqrt{m_x^2(\bar{F}) + m_y^2(\bar{F}) + m_z^2(\bar{F})}; \quad (1.30)$$

$$\cos(\bar{m}_o(\bar{F}), \wedge \bar{i}) = \frac{m_x(\bar{F})}{m_o(\bar{F})}; \quad \cos(\bar{m}_o(\bar{F}), \wedge \bar{j}) = \frac{m_y(\bar{F})}{m_o(\bar{F})};$$

$$\cos(\bar{m}_o(\bar{F}), \wedge \bar{k}) = \frac{m_z(\bar{F})}{m_o(\bar{F})}. \quad (1.31)$$

Вирази (1.30) і (1.31) аналітично визначають модуль і напрямок векторного моменту сили, прикладеної до твердого тіла, відносно заданого центра.

1.3.3. Теорема Варіньйона про момент рівнодійної збіжних сил

Момент рівнодійної системи збіжних сил відносно будь-якого центра (точки) дорівнює алгебраїчній сумі моментів складових сил відносно того самого центра.

Частина перша

Доведення. Припустимо, що до тіла в точці A прикладена система збіжних сил $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3, \dots, \vec{P}_n$, зведена до рівнодійної сили \vec{R} (рис. 1.20). Оберемо довільний центр O і визначимо відносно нього моменти всіх сил. Починаємо з першої сили \vec{P}_1 . Знайдемо її момент відносно центра O . Спочатку з'єднаємо прямими лініями початок і кінець вектора сили \vec{P}_1 з точкою O .

Проведемо крізь точку O перпендикуляр до прямої OA , і вважаємо цю пряму віссю x (тобто задамо її напрямком).

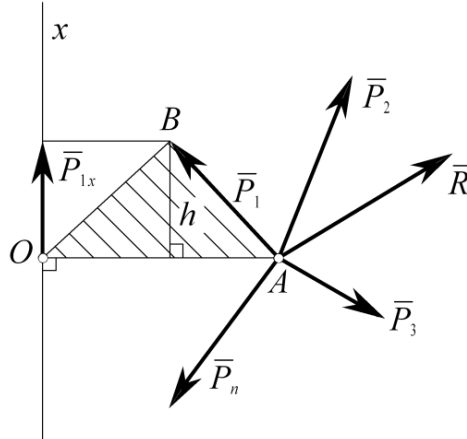


Рис. 1.20

Момент сили \vec{P}_1 відносно точки O є подвійною площею трикутника OAB :

$$m_o(\vec{P}_1) = 2S\Delta OAB.$$

Визначимо площу цього трикутника. Як відомо, це є половина добутку основи (у нашому випадку це сторона OA) на висоту трикутника h . А висота у такому випадку дорівнює проекції вектора сили \vec{P}_1 на вісь x – P_{1x} .

Таким чином, момент сили \vec{P}_1 відносно точки O дорівнює добутку основи трикутника OA на проекцію сили на вісь x :

$$m_o(\vec{P}_1) = 2 \cdot \frac{1}{2} OA \cdot P_{1x} = OA \cdot P_{1x}.$$

Аналогічно обчислимо моменти інших сил системи:

$$m_o(\vec{P}_2) = OA \cdot P_{2x}, m_o(\vec{P}_3) = OA \cdot P_{3x}, \dots, m_o(\vec{P}_n) = OA \cdot P_{nx}.$$

Далі переходимо до рівнодійної \vec{R} системи сил і таким же чином визначимо її момент відносно точки O :

$$m_o(\vec{R}) = OA \cdot R_x,$$

де R_x – проекція рівнодійної сили \bar{R} на вісь x .

Згідно з теоремою про проекцію рівнодійної сили на вісь (вираз 1.14), яка дорівнює алгебраїчній сумі проекцій складових сил на цю вісь, можна записати:

$$m_o(\bar{R}) = OA \cdot R_x = OA (P_{1x} + P_{2x} + P_{3x} + \dots + P_{nx}).$$

Розкриваючи дужки, отримаємо:

$$m_o(\bar{R}) = OA \cdot P_{1x} + OA \cdot P_{2x} + OA \cdot P_{3x} + \dots + OA \cdot P_{nx}.$$

Права частина даного виразу містить моменти складових сил $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3, \dots, \bar{P}_n$ відносно точки O . Остаточо:

$$m_o(\bar{R}) = m_o(\bar{P}_1) + m_o(\bar{P}_2) + m_o(\bar{P}_3) + \dots + m_o(\bar{P}_n) = \sum_{k=1}^n m_o(\bar{P}_k). \quad (1.32)$$

Вираз (1.32) свідчить, що **момент рівнодійної** сили відносно будь-якого центра дійсно **дорівнює алгебраїчній сумі моментів складових** системи збіжних сил відносно того самого центра.

Теорема Варіньйона може бути застосована і для інших систем сил, що зводяться до рівнодійної.

1.3.4. Система паралельних сил. Додавання двох паралельних сил

Якщо лінії дії системи сил паралельні, то такі сили носять назву системи паралельних сил. Додавання їх здійснюється на підставі відомих з курсу елементарної фізики положень. Система двох паралельних сил, спрямованих в один бік, має рівнодійну (рис. 1.21).

Рівнодійна двох паралельних сил, спрямованих в один бік, за числовим значенням є арифметичною сумою модулів цих сил, паралельна лінії дії сил і спрямована в той самий бік.

$$R = P_1 + P_2$$

Точка прикладання рівнодійної сили ділить внутрішньо відрізок, що з'єднує точки прикладання сил, на частини, які є обернено пропорційними модулям цих сил.

Оскільки система двох сил зводиться до рівнодійної, застосуємо теорему Варіньйона, вираз (1.32), вибравши точку C за центр моментів:

$$m_c(R) = m_c(P_1) + m_c(P_2); \Rightarrow 0 = P_1 \cdot AC - P_2 \cdot BC; \Rightarrow \quad (1.33)$$

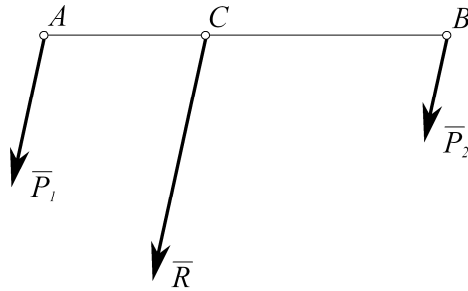


Рис. 1.21

$$\Rightarrow \frac{P_1}{P_2} = \frac{BC}{AC} \Rightarrow AC = BC \frac{P_2}{P_1}, \quad (1.34)$$

де \vec{P}_1 і \vec{P}_2 – вектори паралельних сил, що додаються;

A, B, C – точки прикладання паралельних сил і рівнодійної, відповідно.

AC – відстань від точки A до точки C , де прикладена рівнодійна двох паралельних сил, яку називають центром паралельних сил, спрямованих в один бік.

У виразі (1.33) момент рівнодійної відносно точки прикладання C дорівнює нулю, функції синусів рівновеликих кутів, за якими визначались плечі, скоротилися. Тому, під яким би кутом до лінії AB не були нахилені вектори сил, положення центра паралельних сил, де прикладається вектор рівнодійної, завжди залишається незмінним.

Для додавання двох антипаралельних сил (рис. 1.22), лінії дії яких паралельні, але їхні вектори спрямовані у протилежні боки, існує наступне правило.

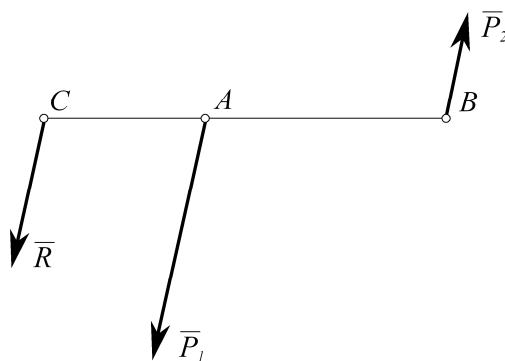


Рис. 1.22

Рівнодійна двох паралельних сил, спрямованих у протилежні боки, дорівнює за числовим значенням різниці модулів цих сил, паралельна лінії дії сил і спрямована у бік більшої сили.

$$R = P_1 - P_2,$$

де \bar{P}_1 – найбільша із двох антипаралельних сил ($\bar{P}_1 > \bar{P}_2$).

Точка прикладання рівнодійної сили ділить зовнішньо відстань між точками прикладання заданих сил на відрізки, які є обернено пропорційними величинам цих сил, що впливає із аналогічного виразу (1.33).

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{BC}{AC}; \quad AC = BC \frac{P_2}{P_1}; \quad (1.35)$$

де C – точка прикладання рівнодійної \bar{R} або центр антипаралельних сил, що розміщується поза межами відрізка AB (рис. 1.22), у кінцевих точках якого прикладені задані антипаралельні сили.

1.3.5. Пара сил. Момент пари сил

Поряд з поняттям сили в механіці існує другий основний силовий фактор – пара сил, яку прикладають до твердого тіла, щоб примусити його до обертання.

Звернувшись до рис. 1.22, складемо суму моментів усіх сил відносно точки A за теоремою Варінійона. Тоді отримаємо довжину плеча (важеля) AC , у точці C якого має бути прикладена рівнодійна \bar{R} :

$$AC \cdot R \cdot \sin \alpha = AB \cdot P_2 \cdot \sin \alpha \Rightarrow R = P_1 - P_2 \Rightarrow AC = AB \frac{P_2}{P_1 - P_2} \quad (1.36)$$

де α – кут між лінією AB і векторами паралельних сил $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{R}$.

Чи мають рівнодійну ці антипаралельні сили, якщо $\bar{P}_1 = -\bar{P}_2$? Аналізуючи вираз (1.36), легко побачити, що за поступового зменшення рівнодійної або різниці між модулями антипаралельних сил, знаменник виразу наближається до нуля, а тому довжина плеча AC наближатиметься до нескінченності. Таким чином, рівнодійної двох рівних антипаралельних сил не існує, тому тут виникає новий силовий фактор – пара сил.

Пара сил, прикладена до твердого тіла, – це сукупність двох рівних за величиною, паралельних і протилежно спрямованих сил, що мають різні лінії дії.

З першої аксіоми про дві сили впливає, що тіло під дією системи сил, які створюють пару, не може перебувати у стані рівноваги. Крім того, пара не має рівнодійної, оскільки підсумковий вектор системи двох таких сил дорівнює нулю.

Розглянемо довільне тіло (рис. 1.23), до якого в точках A і B прикладені сили \bar{F}_1 і \bar{F}_2 , такі, що: $F_1 = F_2$ і $\bar{F}_1 // \bar{F}_2$. Це означає, що до тіла

прикладена пара сил (\vec{F}_1, \vec{F}_2) .

Площина, в якій розміщені сили пари, має назву площини дії пари. Пара сил характеризується моментом, що викликає поворот тіла парою у площині її дії, тобто, пара створює обертальний ефект.

Алгебраїчним моментом пари називається взятий з відповідним знаком добуток однієї із сил пари на плече пари. Плече пари h (рис. 1.23) – це найкоротша відстань (за перпендикуляром) між лініями дії сил, що становлять пару.

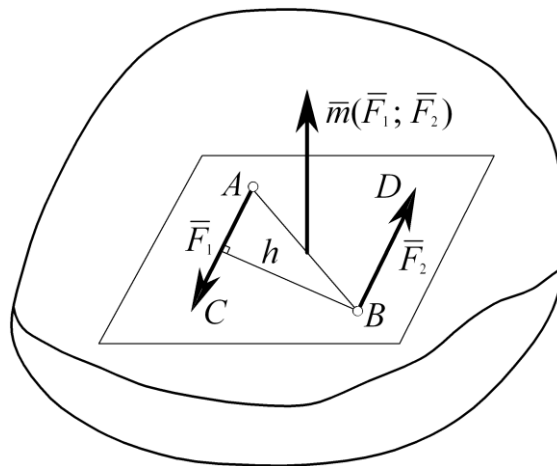


Рис. 1.23

Момент пари вважається додатним, якщо пара намагається повернути тіло проти ходу годинникової стрілки і, навпаки, – від’ємним, якщо пара намагається повертати тіло за годинниковою стрілкою. Момент пари за модулем або алгебраїчний момент позначається так: $m(\vec{F}_1, \vec{F}_2)$. Визначимо алгебраїчний момент пари сил, зображеної на рис. 1.23:

$$m(\vec{F}_1, \vec{F}_2) = F_1 \cdot h = F_1 \cdot AB \cdot \sin(\vec{F}_1, \wedge AB) = F_2 \cdot h. \quad (1.37)$$

Згідно з виразом (1.37), модуль моменту пари у геометричній інтерпретації дорівнює площі паралелограма $ACBD$ або подвійній площі трикутника ABC .

Одиницею виміру моменту пари сил, як і моменту сили відносно центра, є у системі СІ добуток ньютонна на метр ($Нм$).

Момент пари сил можна уявити вектором. Цей вектор-момент, за аналогією з векторним моментом сили відносно центра, спрямовується перпендикулярно до площини дії пари у той бік, з якого здається, що поворот тіла або площини під дією пари відбувається проти ходу годинникової стрілки (правило свердлика). Векторний момент пари

$m(\bar{F}_1, \bar{F}_2)$ показаний на рис. 1.23. На відміну від векторного моменту сили відносно центра, **векторний момент пари сил є вільним вектором**: він не має ні фіксованої точки прикладання, ні фіксованої лінії дії сил, що становлять пару (див. нижче).

Властивості пари сил

Оскільки система двох рівних антипаралельних сил не може бути зведена до рівнодійної, то, як наслідок, **пару сил неможливо зрівноважити однією силою**. Це ще раз нагадує про новий силовий фактор, який становить пара. Це перша властивість пари сил.

Друга властивість пари сил: **сума проекцій сил, що становлять пару, на будь-яку вісь дорівнює нулю** – це очевидно. Тому пара сил не може входити до рівнянь суми проекцій сил на вісь, а входить тільки до рівнянь суми моментів сил відносно центра. Слід зазначити, що точки прикладання сил пари можна переміщувати вздовж ліній дії сил у межах цього тіла.

Векторним моментом пари називається момент будь-якої із сил, що створюють пару, відносно точки прикладання другої сили за виразом (1.24):

$$\bar{m}(\bar{F}_1, \bar{F}_2) = \bar{m}_A(\bar{F}_2) = \bar{m}_B(\bar{F}_1) = \overline{AB} \times \bar{F}_2 = \overline{BA} \times \bar{F}_1, \quad (1.38)$$

де \overline{AB} – радіус-вектор точки прикладання сили \bar{F}_2 відносно точки A ;

\overline{BA} – радіус-вектор точки прикладання сили \bar{F}_1 відносно точки B .

Векторний момент пари становить повну характеристику статичної дії пари сили на тверде тіло, тому дії над парами можна замінити еквівалентними векторними операціями над їхніми моментами.

Модуль векторного моменту для виразу (1.38) з урахуванням виразу (1.37) дорівнює (рис. 1.23):

$$|\overline{AB} \times \bar{F}_2| = AB \cdot F_2 \sin(\overline{AB}, \bar{F}_2) = F_2 \cdot h = F_1 \cdot h$$

Із виразу (1.38) можна побачити, що для визначення моменту пари вибирались точки A і B , але немає принципової різниці, якщо за центр моментів вибрати будь-яку іншу точку на площині або у просторі. Із цього положення випливає і третя властивість пари сил, яку можна вважати теоремою про суму моментів сил пари:

сума векторних моментів сил, що становлять пару, відносно довільної точки дорівнює векторному моменту цієї пари і від вибору положення точки не залежить.

Математично це твердження можна записати наступним чином для подібної пари сил (\bar{P}_1, \bar{P}_2) :

$$\bar{m}_O(\bar{P}_1) + \bar{m}_O(\bar{P}_2) = \bar{m}(\bar{P}_1, \bar{P}_2). \quad (1.39)$$

Доведемо, що це твердження має місце у дійсності, для чого звернемося до рис. 1.24 і визначимо ліву частину виразу (1.39):

$$\bar{m}_O(\bar{P}_1) + \bar{m}_O(\bar{P}_2) = \bar{r}_1 \times \bar{P}_1 + \bar{r}_2 \times \bar{P}_2 = (\bar{r}_2 - \bar{r}_1) \times \bar{P}_2 = \overline{AB} \times \bar{P}_2 = \bar{m}(\bar{P}_1, \bar{P}_2), \quad (1.40)$$

оскільки $\bar{r}_2 - \bar{r}_1 = \overline{AB}$ і ця відстань не залежить від вибору точки O у просторі.

Ця теорема має практичне значення під час розв'язування задач: для будь-якої точки достатньо взяти момент пари сил, не обчислюючи суму моментів кожної сили.

Якщо точка O як центр моменту обирається у площині дії пари, то справедлива не векторна, а алгебраїчна сума моментів сил:

$$m_O(\bar{P}_1) + m_O(\bar{P}_2) = m(\bar{P}_1, \bar{P}_2) = m_B(\bar{P}_1) + m_A(\bar{P}_2). \quad (1.41)$$

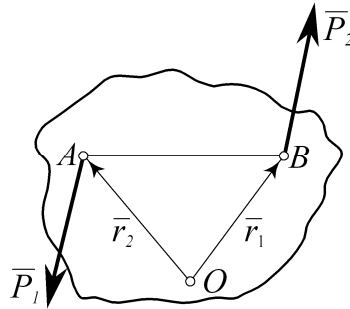


Рис. 1.24

Отже, вираз (1.41) свідчить про те, що алгебраїчний момент пари сил дорівнює моменту однієї із сил пари відносно точки, що розміщується на лінії дії другої сили цієї пари.

Теорема про еквівалентність пар сил

До тіла можуть бути прикладені декілька пар сил. Дві пари сил вважаються еквівалентними, якщо після заміни цих пар одна на одну механічний стан твердого тіла не порушиться. Пари сил, розміщені в одній площині, будуть еквівалентними, якщо вони мають однакові алгебраїчні моменти. Розглянемо теорему про еквівалентність пар сил на площині.

Не змінюючи дії на тверде тіло, пару сил можна замінити будь-якою іншою парою, що розміщена довільно в одній площині і має однаковий алгебраїчний момент.

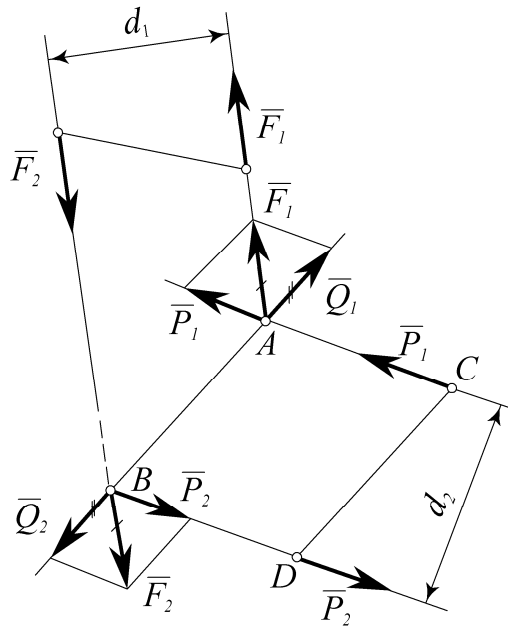


Рис. 1.25

Припустимо, що задана пара сил (\bar{F}_1, \bar{F}_2) (рис. 1.25), з плечем d_1 і алгебраїчним моментом $m_1 = F_1 \cdot d_1$ площина дії якої на тверде тіло збігається з площиною рисунка.

Розкладемо вектори заданої пари (\bar{F}_1, \bar{F}_2) на два напрямки: вздовж лінії, що з'єднує точки A і B , і вздовж ліній дії векторів другої пари (\bar{P}_1, \bar{P}_2) . Розкладання відбувається за аксіомою про паралелограм сил:

$$\bar{F}_1 = \bar{P}_1 + \bar{Q}_1; \quad \bar{F}_2 = \bar{P}_2 + \bar{Q}_2. \quad (1.42)$$

Як легко побачити з рис. 1.25, сили \bar{Q}_1 і \bar{Q}_2 на підставі першої аксіоми про рівновагу двох рівних сил зрівноважуються і можуть бути виключені, а точки прикладання векторів сил \bar{P}_1 і \bar{P}_2 , що залишились, можна перенести в довільні точки C і D на площині. Щоб остаточно довести еквівалентність проведеного перетворення, залишається підтвердити, чи дорівнюють алгебраїчні моменти цих двох пар.

Із виразу (1.42) випливає, що сили \bar{F}_1, \bar{F}_2 є рівнодійними двох інших сил, тому застосуємо теорему Варіньйона, склавши суми моментів відносно точки B :

$$m_B(F) = m_B(P) + m_B(Q); \Rightarrow F \cdot d_1 = P \cdot d_2 + Q \cdot 0; \Rightarrow F \cdot d_1 = P \cdot d_2. \quad (1.43)$$

Вираз (1.43) переконливо доводить, що момент заданої пари дорівнює алгебраїчному моменту еквівалентно перетвореної пари:

$$m(\bar{F}_1, \bar{F}_2) = F \cdot d_1 = m(\bar{P}_1, \bar{P}_2) = P \cdot d_2. \quad (1.44)$$

Отже, зроблено еквівалентне перетворення пари сил у площині: задану пару перенесли в інше місце на тілі, повернули на довільний кут, змінили модулі векторів сил і плечі пар сил, залишивши незмінним лише два головних параметри пар: алгебраїчний момент і площину дії.

Таким чином, пара сил, що діє на тверде тіло, становить новий самостійний елемент статички, новий силовий фактор, який поряд із силою є важливішим поняттям механіки. Основні властивості нового силового фактора і основні правила перетворення, яким підпорядкований цей фактор, встановлені доведеними теоремами про пари.

З доведених теорем випливають **умови еквівалентності пар сил:**

– не змінюючи дії на тіло, пару сил можна повертати на будь-який кут та переносити як завгодно в площині її дії в межах цього тіла;

– дія пари на тіло не зміниться, якщо складові сили і плече пари змінювати, але так, щоб момент пари і площина дії залишалися незмінними;

– пара сил на площині вважається заданою, якщо заданий її алгебраїчний момент і площина дії;

– якщо на тіло діє система пар сил, то пари і моменти пар можна додавати.

Якщо всі пари цієї системи пар розміщені в одній площині, то момент підсумкової або рівнодійної пари дорівнює алгебраїчній сумі моментів складових пар:

$$M = m_1 + m_2 + \dots + m_n = \sum_{k=1}^n m_k; \quad (1.45)$$

– сума моментів сил, що становлять пару, відносно довільної точки не залежить від положення точки і дорівнює моменту пари.

– питання про те, який рух буде здійснювати тверде тіло під дією пари сил, належить до задач динаміки.

Умови рівноваги тіла під дією системи пар сил на площині

Допустимо, що до тіла прикладена система пар сил з алгебраїчними моментами m_1, m_2, \dots, m_n і момент підсумкової або рівнодійної пари дорівнює алгебраїчній сумі моментів складових пар M .

Тоді для рівноваги тіла необхідно і достатньо, щоб момент рівнодійної пари дорівнював нулю. У такому разі і алгебраїчна сума моментів складових пар теж повинна дорівнювати нулю:

$$M = \sum_{k=1}^n m_k = 0. \quad (1.46)$$

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Чому дорівнює рівнодійна двох однаково спрямованих паралельних сил? Де знаходиться точка її прикладання?
2. Чому дорівнює рівнодійна двох антипаралельних сил? Де знаходиться точка її прикладання?
3. Що таке момент сили відносно центра (точки)?
4. Як спрямований векторний момент сили відносно точки?
5. Що таке пара сил або просто пара?
6. Які властивості має пара сил?
7. Як визначити момент пари? Як спрямований векторний момент пари?
8. Як формулюється теорема про еквівалентність пар сил?
9. Як формулюється теорема Варіньйона?
10. Як вибираються точки прикладання векторних моментів пари сил і сили відносно центра?

1.4. Плоска система сил.

Зведення сил і умови рівноваги тіл

1.4.1. Система сил, довільно розміщених на площині.

Теорема про паралельне перенесення лінії дії сили

Якщо лінії дії сил, прикладених до тіла, довільно розміщені в одній площині, то така система сил є плоскою системою довільних сил. Розглянемо лему про паралельне перенесення лінії дії сили, прикладеної до тіла. Візьмемо довільне тіло, до якого в точці A прикладена сила \bar{P}_1 з лінією дії MN (рис. 1.26а). Виберемо на тілі другу точку B і проведемо крізь неї пряму, паралельну прямій MN . Прикладемо на цій прямій у точці B зрівноважену систему двох сил $\bar{P}_2 = -\bar{P}_3$, яка еквівалентна нулю, модулі ж усіх трьох сил виберемо однаковими: $P_1 = P_2 = P_3$. Тоді статичний стан твердого тіла на рис. 1.26 а є еквівалентним стану тіла на рис. 1.26б. Як легко побачити з рис. 1.26 б, сили \bar{P}_1 і \bar{P}_3 можна об'єднати у пару сил (\bar{P}_1, \bar{P}_3) , адже $P_1 = P_3$, $\bar{P}_1 \parallel \bar{P}_3$, і замінити моментом $\bar{m}(\bar{P}_1, \bar{P}_3)$ пари. Слід зазначити, що модуль моменту цієї пари дорівнює моменту цієї сили \bar{P}_1 відносно точки B :

$$m(\bar{P}_1, \bar{P}_3) = P_1 \cdot h = m_B(\bar{P}_1). \quad (1.47)$$

Отже, остаточно маємо силу \bar{P}_1 , яка перенесена паралельно в точку B (сили дорівнюють $\bar{P}_2 = \bar{P}_1$) і, так звану, «приєднану» пару (\bar{P}_1, \bar{P}_3) , момент

якої дорівнює моменту сили заданої \bar{P}_1 , що переноситься, відносно точки переносу B (рис. 1.26в). Тому задана сила \bar{P}_1 , прикладена в точці A , еквівалентна рівній їй силі \bar{P}_2 , прикладеній у точці B , і парі сил (\bar{P}_1, \bar{P}_3) з моментом, який дорівнює моменту заданої сили відносно точки перенесення.

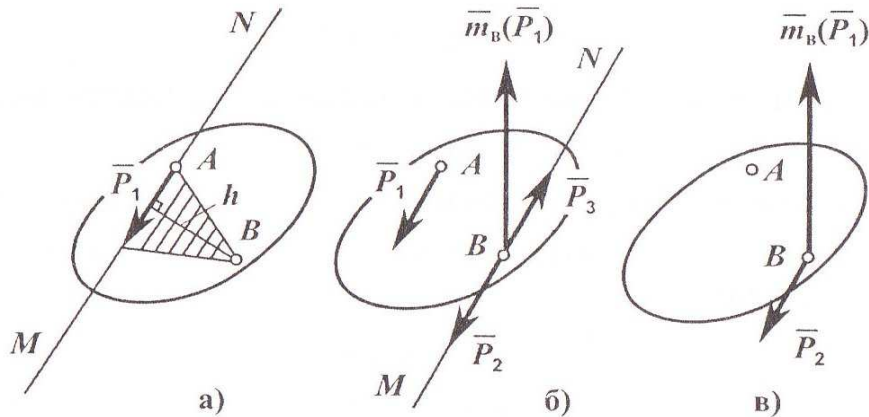


Рис. 1.26

Таким чином, теорему можна сформулювати так.

У разі паралельного перенесення лінії дії прикладеної до твердого тіла сили у довільну точку на тілі статичний стан тіла не зміниться, якщо при цьому додати, так звану, «приєднану» або компенсаційну пару, момент якої дорівнює моменту заданої сили відносно точки перенесення.

1.4.2. Зведення плоскої системи довільних сил до заданого центра. Основна теорема статички

Уявимо довільне тверде тіло, що знаходиться під дією системи сил $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3, \dots, \bar{P}_n$, лінії дії яких розміщені у площині рисунка і розташовані довільно (рис. 1.27а). Виберемо на тілі довільну точку O як центр зведення. Перенесемо у центр зведення всі сили, які діють на тіло, паралельно самім собі (якщо лінія дії сили перетинає точку O , то ця сила просто переноситься вздовж лінії дії у центр зведення).

Розпочнемо з сили \bar{P}_1 . Лінія дії сили переноситься паралельно самій собі у точку O , за нею відкладається сила, при цьому до тіла додається момент «приєднаної» пари сил, який дорівнює моменту сили \bar{P}_1 відносно точки O :

$$m_1 = P_1 h_1 = m_o(\bar{P}_1). \quad (1.48)$$

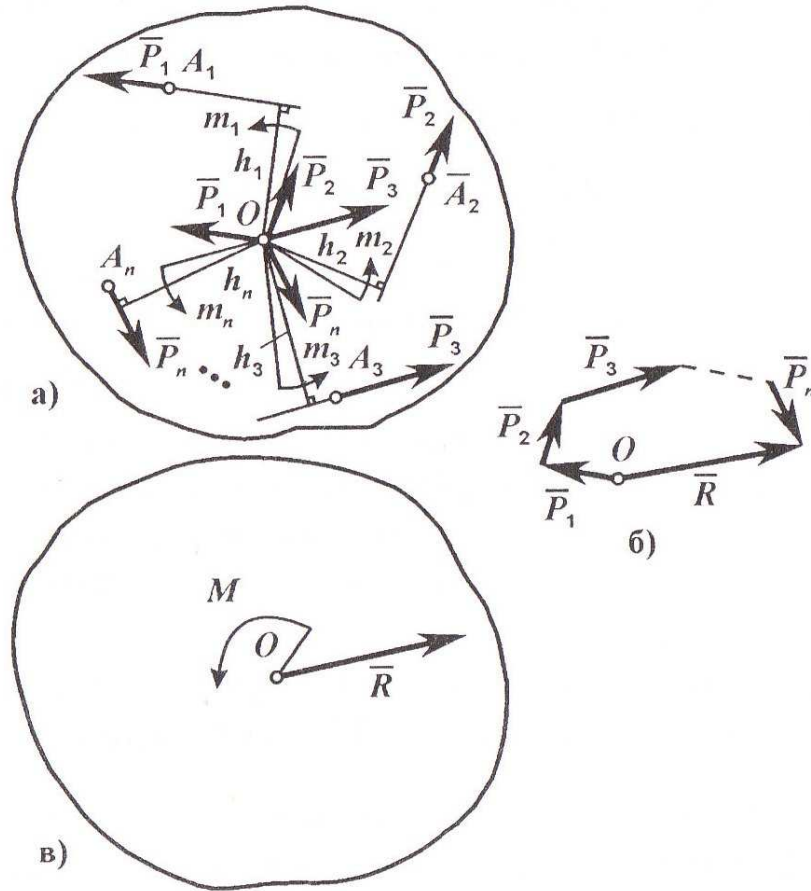


Рис. 1.27

Тепер маємо, згідно з лемою, силу \bar{P}_1 , яка прикладена до тіла у центрі зведення O , та «приєднану» до тіла пару сил з моментом m_1 . Подібне вчинимо і з рештою сил $\bar{P}_2, \bar{P}_3, \dots, \bar{P}_n$. Всі вони переносяться паралельно самим собі у центр зведення O і при цьому до тіла додаються «приєднані» пари сил:

$$\begin{aligned} m_2 &= P_2 h_2 = m_o(\bar{P}_2), \\ m_3 &= P_3 h_3 = m_o(\bar{P}_3), \\ m_n &= P_n h_n = m_o(\bar{P}_n). \end{aligned} \tag{1.49}$$

У підсумку таких операцій до тіла в точці O прикладатиметься плоский пучок системи збіжних сил $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3, \dots, \bar{P}_n$ і система «приєднаних» пар сил з моментами $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$.

Пучок збіжних сил у точці O можна замінити однією силою \bar{R} , яку називають головним вектором плоскої системи довільних сил. Для цього необхідно додати векторно систему збіжних сил, прикладених у центрі зведення o , будуючи силовий багатокутник (рис. 1.27б):

$$\bar{R} = \bar{P}_1 + \bar{P}_2 + \dots + \bar{P}_n = \sum_{k=1}^n \bar{P}_k. \quad (1.50)$$

Систему пар сил, яка тепер прикладена до тіла, також можна додати, отримавши головний момент плоскої системи довільних сил, який дорівнює алгебраїчній сумі моментів складових пар:

$$M = m_1 + m_2 + \dots + m_n = \sum_{k=1}^n m_k = \sum_{k=1}^n m_o(\bar{P}_k). \quad (1.51)$$

Таким чином, плоска система довільних сил може бути зведена до двох силових факторів: однієї сили \bar{R} – головного вектора системи – і однієї пари сил з моментом M – головного моменту системи (рис. 1.27в).

Головний вектор системи дорівнює геометричній сумі векторів складових сил, а головний момент системи дорівнює алгебраїчній сумі моментів системи сил відносно центра зведення.

Головний вектор \bar{R} і головний момент M плоскої системи довільних сил мають деякі особливості.

Так, величина головного вектора \bar{R} не залежить від положення центра зведення, а величина головного моменту M залежить від зміни положення центра зведення.

Якщо ж головний вектор \bar{R} дорівнює нулю, то головний момент M буде незалежним від вибору центра зведення. Якщо ж головний момент M дорівнює нулю, то головний вектор \bar{R} буде рівнодієюною плоскої системи сил. Визначимо аналітично головний вектор і головний момент плоскої системи довільних сил.

Для обчислення головного вектора \bar{R} спочатку визначимо його проекції на осі плоскої прямокутної системи декартових координат (відповідно до теореми про проекцію рівнодіючої сили на вісь):

$$\left. \begin{aligned} R_x &= P_{1x} + P_{2x} + \dots + P_{nx} = \sum_{k=1}^n P_{kx}, \\ R_y &= P_{1y} + P_{2y} + \dots + P_{ny} = \sum_{k=1}^n P_{ky}, \end{aligned} \right\} \quad (1.52)$$

де P_{kx} , P_{ky} – проекції k -ї сили системи на відповідні осі координат.

Визначивши проекції головного вектора на осі координат, отримаємо модуль головного вектора:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}. \quad (1.53)$$

Головний момент M визначається алгебраїчним додаванням моментів складових сил відносно центра зведення O :

$$M = \sum_{k=1}^n m_k = m_o(\bar{P}_1) + m_o(\bar{P}_2) + \dots + m_o(\bar{P}_n) = \sum_{k=1}^n m_o(\bar{P}_k). \quad (1.54)$$

Розглянемо окремі випадки, які можуть мати місце під час зведення плоскої системи довільних сил до визначеного центра.

1. Головний вектор $\bar{R} = 0$, а головний момент $M \neq 0$. У цьому випадку величина головного моменту M не залежить від вибору центра зведення;

2. Головний момент $M = 0$, а головний вектор $\bar{R} \neq 0$. У такому випадку головний вектор \bar{R} є рівнодієюною силою системи сил.

1.4.3. Умови рівноваги твердого тіла під дією плоскої системи довільних сил

Визначимо умови рівноваги твердого тіла під дією плоскої системи довільних сил, за яких ця система сил буде зрівноваженою. Це одна із двох основних задач статички.

Як доведено, плоска система довільних сил завжди може бути зведена до однієї сили, яка має назву головного вектора системи, і однієї пари – головного моменту системи.

Тоді для рівноваги плоскої системи довільних сил необхідно і достатньо, щоб головний вектор \bar{R} і головний момент M системи дорівнювали нулю.

$$\left. \begin{aligned} \bar{R} = \sum \bar{P}_k = 0, \\ M_o = \sum m_o(\bar{P}_k) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.55)$$

Це означає, що кожний доданок під радикалом виразу (1.53) як сума проєкцій (1.52) має дорівнювати нулю. Звідси отримуємо аналітичні умови рівноваги:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^n P_{kx} = 0, \quad \sum_{k=1}^n P_{ky} = 0, \quad \sum_{k=1}^n m_o(\bar{P}_k) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.56)$$

Таким чином, для рівноваги твердого тіла, що перебуває під дією плоскої системи довільних сил, необхідно і достатньо, щоб алгебраїчні суми проєкцій всіх сил на дві осі координат і сума моментів всіх сил відносно довільного центра дорівнювали нулю.

Умови рівноваги у формі (1.56) є основною формою умов рівноваги тіла під дією плоскої системи довільних сил, оскільки не накладають ніяких обмежень ні на розташування осей системи координат, ні на положення центра, відносно якого складаються моменти прикладених сил.

Існують дві інші додаткові форми умов рівноваги тіла для плоскої системи довільних сил:

$$\left. \sum_{k=1}^n P_{kx} = 0, \quad \sum_{k=1}^n m_A(\bar{P}_k) = 0, \quad \sum_{k=1}^n m_B(\bar{P}_k) = 0. \right\} \quad (1.57)$$

На цю форму умов рівноваги (1.57) накладається обмеження: пряма, що може з'єднувати точки A і B , відносно яких визначаються суми моментів сил, не повинна бути перпендикулярною до осі, на яку проектується ці сили.

Необхідність умов рівноваги (1.57) очевидна: якщо будь-яка одна умова із системи умов не виконується, то рівноваги не буде.

Розглянемо достатність умов рівноваги. Якщо виконуються, наприклад, дві останні умови, то головний момент системи сил дорівнює нулю і така система може бути зведена до однієї еквівалентної сили – рівнодійної, лінія дії якої буде проходити крізь точки A і B . Проте, згідно з першою умовою має бути $R_x = 0$. Оскільки вісь x не перпендикулярна до прямої AB , то остання умова може бути виконана тільки тоді, якщо рівнодійна системи сил дорівнюватиме нулю, тобто коли тіло буде зрівноваженим. Третя форма умов рівноваги має такий вигляд:

$$\left. \sum_{k=1}^n m_A(\bar{P}_k) = 0, \quad \sum_{k=1}^n m_B(\bar{P}_k) = 0, \quad \sum_{k=1}^n m_C(\bar{P}_k) = 0. \right\} \quad (1.58)$$

На цю форму умов рівноваги також накладається обмеження: точки A , B і C , відносно яких складаються суми моментів сил, не повинні бути розміщені на одній прямій.

Необхідність форми умов (1.58) очевидна, оскільки під час рівноваги алгебраїчна сума моментів усіх сил відносно довільного центра дорівнює нулю. Достатність цих умов впливає з того, що, коли за одночасного виконання цих умов ця система сил не була б зрівноваженою, то вона мала б рівнодійну, лінія дії якої одночасно проходила б крізь точки A, B, C , що неможливо, тому що ці точки не розміщені на одній прямій. Отже, у разі виконання умов (1.58) тіло під дією плоскої системи довільних сил буде зрівноваженим.

1.4.4. Умови рівноваги тіла під дією плоскої системи паралельних сил

Якщо лінії дії усіх сил паралельні, то завжди у площині можна так розташувати осі координат, що одна з них буде паралельною заданим силам, а друга – перпендикулярною. Тому, щоб тіло під дією плоскої системи паралельних сил перебувало у рівновазі, необхідно прирівняти до нуля алгебраїчну суму проекцій усіх сил на паралельну вісь і алгебраїчну суму моментів усіх сил відносно довільної точки. У такому випадку система умов рівноваги (1.56) спрощується і матиме такий вигляд:

$$\left. \sum_{k=1}^n P_{kx} = 0, \quad \sum_{k=1}^n m_A(\bar{P}_k) = 0. \right\} \quad (1.59)$$

Для рівноваги тіла, що перебуває під дією системи паралельних сил на площині, необхідно і достатньо, щоб алгебраїчна сума проєкцій усіх сил на вісь, яка паралельна силам, і алгебраїчна сума моментів усіх сил відносно довільної точки площини дорівнювали нулю.

Для системи паралельних сил на площині можна використовувати і такі умови рівноваги:

$$\left. \sum_{k=1}^n m_A(\bar{P}_k) = 0, \quad \sum_{k=1}^n m_B(\bar{P}_k) = 0. \right\} \quad (1.60)$$

Для рівноваги тіла, що перебуває під дією системи паралельних сил на площині, необхідно і достатньо, щоб алгебраїчні суми моментів усіх сил відносно будь-яких двох точок площини дорівнювали нулю.

Проте, для цих умов існує обмеження: лінія AB , якою можна з'єднати центри моментів, не повинна бути паралельною векторам сил.

Такі умови (1.60) найбільш придатні під час розрахунків двоопорних балок. Використовуючи ці умови, складають алгебраїчні суми моментів усіх сил відносно точок A і B , у яких встановлені опори балки.

1.4.5. Приклади розв'язування задач для плоскої системи довільних сил

Приклад 1.4

Однорідна балка AB прямокутного перерізу вагою 400 Н у точці A закріплена шарнірно, а у точці O опирається на точкову опору (рис. 1.28). До другого кінця балки B підвішений вантаж вагою 200 Н . Довжина балки 4 м , точкова опора розміщена на відстані $\frac{3}{4}$ довжини балки від шарнірної опори. Кут нахилу балки до горизонту $\alpha = 30^\circ$. Визначити реакції опор балки.

Розв'язання

Складаємо розрахунково-силову схему задачі. Прикладемо до осі балки задані активні сили: силу ваги \bar{G} самої балки і силу ваги \bar{Q} вантажу. Сила ваги балки \bar{G} прикладена посередині балки у точці C (балка однорідна) і спрямована вертикально вниз. Сила ваги вантажу \bar{Q} прикладена в точці B балки і спрямована вертикально вниз.

Далі умовно звільняємо балку від в'язей і замінюємо їх відповідними реакціями в'язей.

У точці A розміщена шарнірно-нерухома опора, напрям її реакції невідомий, тому розкладаємо останню на дві складові \bar{X}_A і \bar{Y}_A , які спрямуємо вздовж відповідних осей координат. У точці O – точкова

опора, яка дає одну реакцію \bar{R}_o , спрямовану перпендикулярно до балки.

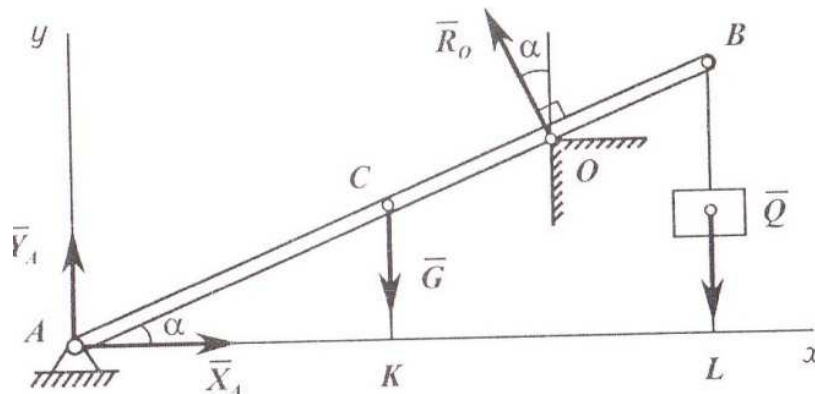


Рис. 1.28

Таким чином, балка перебуває у рівновазі під дією плоскої системи довільних сил. Для розв'язання цієї задачі використовуємо умови рівноваги (1.56). Оскільки осі координат x і y задані за умовою задачі, то складемо відповідні рівняння рівноваги:

Якщо підставити значення відомих величин у ці рівняння рівноваги, то отримаємо:

$$\left. \begin{aligned} X_A - 0,5R_o &= 0, \\ Y_A - 400 - 200 + 0,866R_o &= 0, \\ -400 \cdot 2 \cdot 0,866 + 3R_o - 200 \cdot 4 \cdot 0,866 &= 0. \end{aligned} \right\}$$

З третього рівняння обчислимо реакцію R_o :

$$R_o = \frac{692,8 + 692,8}{3} = 461,86 \text{ Н}$$

і підставимо її значення у перші два рівняння:

$$X_A = \frac{1}{2}R_o = 230,93 \text{ Н}; \quad Y_A = 400 + 200 - 0,866 \cdot 461,86 = 160,04 \text{ Н}.$$

Оскільки визначені складові реакції, що прикладені в точці A , то векторним додаванням можна обчислити модуль повної реакції R_A :

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = \sqrt{230,93^2 + 160,04^2} = \sqrt{78941,5} = 280,97 \text{ Н}.$$

Приклад 1.5

Визначити реакції опори однорідної балки AB (рис. 1.29) прямокутного перерізу, один кінець якої A жорстко закріплений у стіні і

яка перебуває під дією зосередженої сили $P = 4,0 \text{ kH}$, пари сил з моментом $m = 2,0 \text{ kHm}$ і рівномірно розподіленого навантаження інтенсивністю $q = 1,5 \frac{\text{kH}}{\text{м}}$. Довжина балки AB дорівнює 5 м , рівномірно-розподілене навантаження діє на ділянці 3 м від точки A . Кут нахилу зосередженої сили \bar{P} до горизонту становить $\alpha = 30^\circ$, осі x і y показані на рис. 1.29.

Розв'язання

Складаємо розрахунково-силову схему. Покажемо всі сили, прикладені до балки AB .

Насамперед, це задані активні сили: сила \bar{P} , прикладена до кінця балки B і спрямована під кутом α до горизонту; рівномірно розподілене навантаження замінюємо зосередженою силою:

$$Q = q \cdot AC = 1,5 \cdot 3 = 4,5 \text{ kH} .$$

Сила \bar{Q} прикладена посередині ділянки AC і спрямована у той самий бік, що і саме навантаження – вертикально вниз.

Покажемо на силовій схемі пару сил, яка задається моментом m .

Далі умовно звільняємо балку від в'язі і замінюємо її відповідними реакціями.

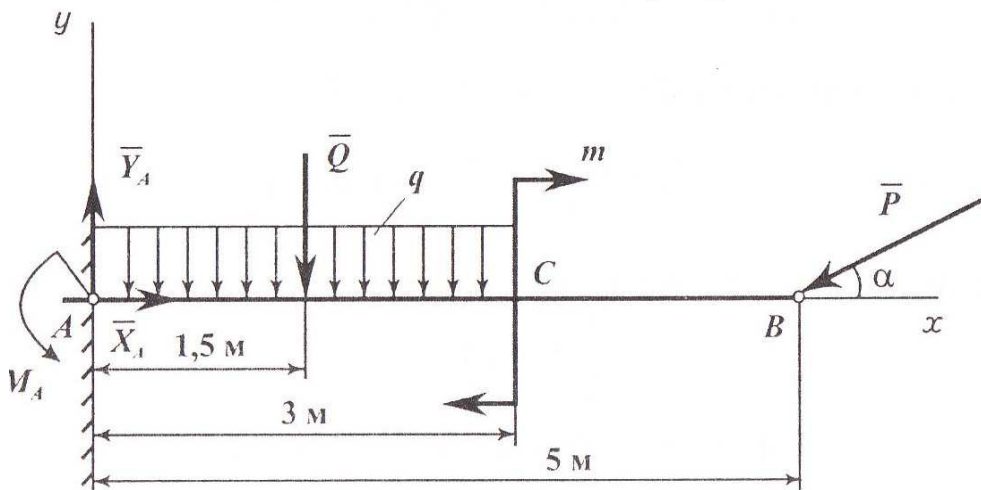


Рис. 1.29

У точці A маємо жорстке закріплення балки у стіні, а тому воно створює дві складові реакції: \bar{X}_A та \bar{Y}_A , розміщені вздовж відповідних осей координат, і реактивний момент M_A .

Напрямок цього невідомого моменту показано на силовій схемі довільно, наприклад, проти ходу стрілки годинника.

Частина перша

Якщо ж під час остаточного визначення моменту M_A отримаємо від'ємний знак, то це інформує про те, що дійсний напрямок моменту є протилежним.

Покажемо на силовій схемі лінійні параметри і осі прямокутної системи декартових координат.

Як легко побачити з побудованої розрахунково-силової схеми, балка перебуває у стані рівноваги під дією плоскої системи довільних сил.

Використовуємо умови рівноваги (1.56). На підставі цих умов складемо відповідні рівняння рівноваги:

$$\left. \begin{aligned} X_A - P \cos \alpha = 0, \quad Y_A - Q - P \sin \alpha = 0, \\ -Q \cdot \frac{AC}{2} - P \sin \alpha \cdot AB + M_A - m = 0. \end{aligned} \right\}$$

З першого рівняння $X_A = 4,0 \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} = 3,46 \text{ kH}$.

З другого рівняння $Y_A = 4,5 + 4,0 \cdot \frac{1}{2} = 6,50 \text{ kH}$.

З третього рівняння

$$M_A = 2,0 + 4,5 \frac{3}{2} + 4,0 \frac{1}{2} \cdot 5 = 2,0 + 6,75 + 10,0 = 18,75 \text{ kHm}$$

Модуль R_A повної реакції у точці A дорівнює:

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = \sqrt{(3,46)^2 + (6,5)^2} = \sqrt{54,22} = 7,36 \text{ kH}$$

Приклад 1.6

Визначити реакції опор жорсткої конструкції, показаної на рис. 1.30.

$$F = 10 \text{ kH}; \quad M = 4 \text{ kHm}; \quad q = 2 \text{ kH}/\text{m}; \quad \alpha = 60^\circ; \quad a = 3 \text{ m}; \quad b = 4 \text{ m}; \quad d = 5 \text{ m}$$

Розв'язання

Складемо розрахунково-силову схему (рис. 1.30). Для цього спочатку зосередимо рівномірно-розподілене навантаження інтенсивністю $q = 2 \text{ kH}/\text{m}$, визначивши загальну силу $Q = q \cdot b = 2 \cdot 4 = 8 \text{ kH}$ і приклавши її посередині ділянки довжиною b .

Далі покажемо реакції опори – це жорстке закріплення в точці A . Реакція цієї опори складається із двох складових \bar{R}_A^x і \bar{R}_A^y , а також реактивного моменту M_R , які і є шуканими невідомими. Виберемо систему координат xAy . Аналізуючи розрахункову схему (рис. 1.30), можна побачити, що жорсткий тавр ABC навантажений плоскою системою довільних сил. Умови рівноваги (1.56).

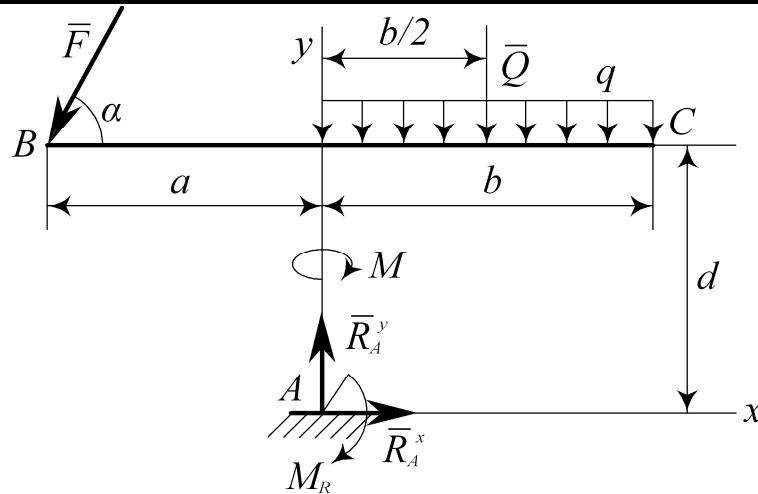


Рис. 1.30

$$\sum F_{kx} = 0; \quad R_{Ax} - F \cos \alpha = 0; \quad (a)$$

$$\sum F_{ky} = 0; \quad R_{Ay} - F \sin \alpha - Q = 0; \quad (б)$$

$$\sum M_A = 0; \quad -M_R - M - Q \frac{b}{2} + F \cos \alpha \cdot d + F \sin \alpha \cdot a = 0. \quad (в)$$

Із рівняння (а) шукаємо величину реакції R_{Ax} :

$$R_{Ax} = P \cos \alpha = 10 \cdot 0,866 = 8,66 \text{ кН}.$$

Із рівняння (б) шукаємо величину реакції R_{Ay} :

$$R_{Ay} = P \sin \alpha + Q = 10 \cdot 0,5 + 8 = 13 \text{ кН}.$$

Із рівняння (в) шукаємо величину реактивного моменту

$$\begin{aligned} M_R &= P \cos \alpha \cdot d + P \sin \alpha \cdot a - Q \cdot \frac{b}{2} - M = \\ &= 10 \cdot 0,866 \cdot 5 + 10 \cdot 0,5 \cdot 10 - 8 \cdot \frac{4}{2} - 4 = 38,98 \text{ Нм}. \end{aligned}$$

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Сформулюйте теорему про паралельне перенесення сили.
2. Що таке головний вектор і головний момент плоскої системи довільних сил?
3. В якому випадку плоска система сил зводиться до рівнодійної?
4. В якому випадку плоска система довільних сил зводиться до однієї

- пари?
5. Чи залежить головний вектор від вибору центра зведення?
 6. В якому випадку головний момент не залежить від вибору центра зведення?
 7. Сформулюйте теорему Варіньйона про момент рівнодійної.
 8. Які умови рівноваги тіла під дією плоскої системи довільних сил?
 9. З'ясуйте три форми умов рівноваги плоскої системи довільних сил?
 10. Які обмеження накладені на другу і третю форми умов рівноваги для плоскої системи довільних сил?

1.5. Розрахунок системи із декількох тіл

1.5.1. Зосереджені сили і розподілені навантаження

У попередніх розділах розглядалися сили, які були представлені у вигляді зосередженого вектора, прикладеного до точки. Проте, у природі існує велика кількість взаємодій тіл, які здійснюються не в точці і які не можна уявити у вигляді вектора, прикладеного до точки.

Прикладами розподілених сил є сили тиску рідини або газу, сили ваги як масові сили, електромагнітні сили тощо. А тому, у теоретичній механіці вводиться поняття про розподілені сили, які діляться на поверхневі і об'ємні. Поверхневі сили діють на деяку поверхню тіла, об'ємні – на кожний елемент об'єму тіла. Прикладом останніх сил є сила ваги.

Під час розв'язування задач розподілене навантаження необхідно замінити його рівнодійною, тобто, зосередженою силою.

Введемо декілька загальних положень. Розподілене навантаження характеризується його інтенсивністю q , тобто, величиною сили, яка припадає на одиницю об'єму тіла, на одиницю площі або на одиницю довжини. В останньому випадку розподілене навантаження має назву плоского, на силових схемах воно зображується у вигляді епюри елементарних сил, тобто, графіка інтенсивності навантаження, яке прикладене до лінійного елемента тіла.

У загальному випадку плоске розподілене навантаження зображується у вигляді певної кривої, що відображає заданий закон зміни інтенсивності навантаження на ділянці тіла (балки) (рис. 1.31).

Розглянемо рівномірно розподілене навантаження та навантаження, яке розподілене за лінійним законом.

1. Рівномірно розподілене навантаження (розподілене за законом прямокутника) зображується на схемах у вигляді прямокутника: висота – це інтенсивність навантаження q , довжина – це довжина l ділянки тіла. Стрілки показують напрямок дії навантаження (рис. 1.32).

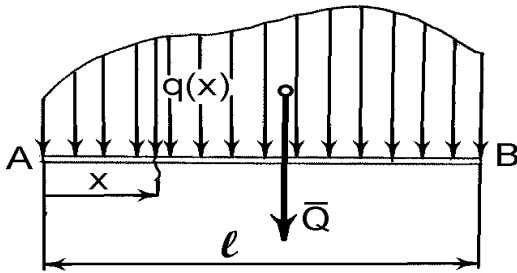


Рис. 1.31

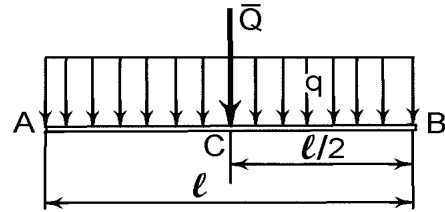


Рис. 1.32

Для того, щоб замінити це навантаження рівнодієюю силою \bar{Q} , треба її визначити:

$$Q = ql, \quad (1.61)$$

де q – інтенсивність навантаження, H/m ; l – довжина ділянки тіла, на якій прикладене навантаження, m .

Точка C прикладання рівнодіючої сили \bar{Q} розміщується посередині ділянки тіла, на якій діє рівномірно-розподілене навантаження.

2. Навантаження, розподілене за лінійним законом, зображується трикутником (рис. 1.33).

У цьому випадку інтенсивність розподіленого навантаження на ділянці l змінюється від 0 до максимального значення q_{\max} . Рівнодіяна сила \bar{Q} від цього навантаження за величиною пропорційна площі трикутника:

$$Q = \frac{1}{2} q_{\max} l. \quad (1.62)$$

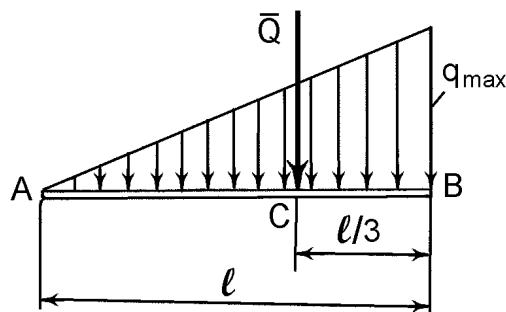


Рис. 1.33

Точка C прикладання рівнодіючої \bar{Q} розміщена на відстані від центра

площі трикутника (центра ваги): $AC = \frac{2}{3}l$ або $BC = \frac{1}{3}l$, а напрямок рівнодійної збігається з напрямком навантаження.

1.5.2. Статично визначені і статично невизначені задачі

Задача є статично визначеною, якщо для неї можна скласти таку кількість рівнянь у відповідності до умов рівноваги статички для матеріальної системи, яка не менша, ніж число невідомих.

Теоретична механіка розглядає тільки статично визначені матеріальні системи.

Із раніше наведених прикладів можна зробити з цього приводу такі висновки. Так, для тіла, навантаженого плоскою системою збіжних сил, можна скласти тільки два рівняння рівноваги, тому і невідомих повинно бути не більше двох.

Балка на двох опорах, навантажена паралельними силами в площині, буде статично визначеною, а на трьох – ні, адже рівнянь рівноваги, що можна скласти для цієї системи, тільки два.

Для плоскої системи довільних сил можливо визначити тільки три невідомих реакції у зв'язку з кількістю умов рівноваги для цієї системи, на підставі яких складаються рівняння рівноваги.

Причина невизначеності, тобто, недостатності рівнянь статички для визначення шуканих величин полягає у тому, що в статистиці твердого тіла розглядаються абсолютно тверді тіла, без врахування деформацій.

Якщо врахувати пружні властивості тіл, тобто, їхні деформації, то невизначені задачі можуть бути розв'язані. Але подібні задачі виходять за межі курсу статички.

Таким чином, задача є статично невизначеною, якщо кількість умов рівноваги системи менше, ніж число невідомих.

1.5.3. Рівновага системи із декількох твердих тіл

У попередніх задачах розглядалась рівновага одного твердого тіла під дією прикладених зовнішніх сил.

Системою тіл називається сукупність декількох тіл, які або спираються одне на одне, або з'єднані шарнірами, які не заважають можливості відносного руху тіл.

Зовнішні сили – це сили взаємодії тіл заданої системи з іншими тілами, які не входять до складу цієї системи.

Під час розрахунку системи декількох тіл потрібно розглядати рівновагу кожного тіла окремо, враховуючи сили їхньої взаємодії.

Сили взаємодії згідно з аксіомою про дію і протидію рівні за модулем

і протилежні за напрямком.

Внутрішні сили системи – це сили взаємодії між окремими тілами, які входять до складу цієї системи. Внутрішні сили існують попарно, як дія і протидія. Більш детально – у наступному підрозділі.

1.5.4. Методика і приклад розв’язування задач на рівновагу системи тіл

Рівновагу системи тіл можна розглядати загалом під дією тільки зовнішніх сил. Але може так статись, що кількість рівнянь рівноваги буде меншою, ніж кількість невідомих. Тоді необхідно розглядати рівновагу окремих тіл системи, умовно розділяючи її по внутрішніх в’язях. До того ж, необхідно враховувати, що внутрішні сили реакцій розділених в’язей існують попарно, як сили дії та протидії.

Розглянемо приклади розв’язування задач на рівновагу системи тіл.

Приклад 1.7

На тришарнірну арку ABC (рис. 1.34) діє вертикальна сила $P = 10 \text{ кН}$. Вага кожної частини балки $Q_1 = Q_2 = 6 \text{ кН}$.

Визначити реакції шарнірів A, B, C арки, розміри якої дані на рисунку.

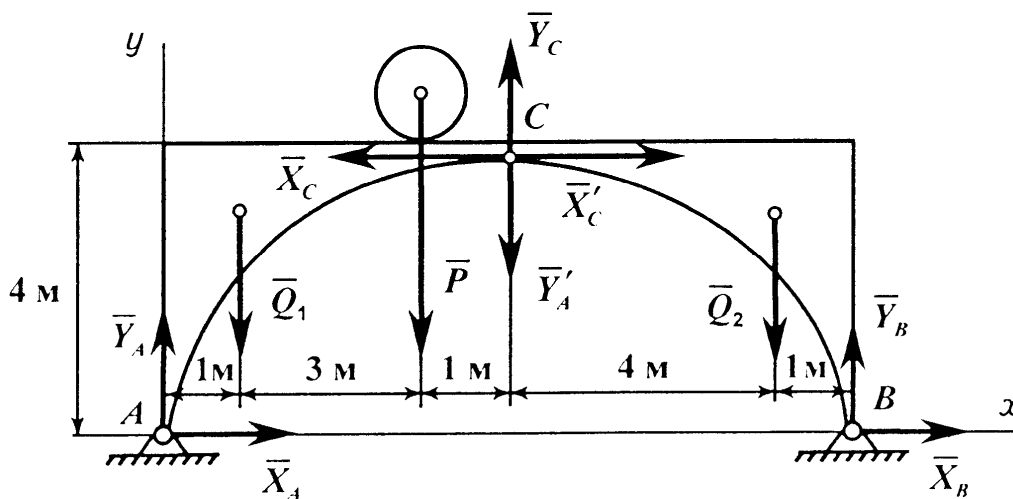


Рис. 1.34

Розв’язання

Як видно зі схеми, задана система тіл складається з двох піварок AC і BC , з’єднаних шарніром у точці C . Складемо розрахунково-силову схему, де покажемо задані активні сили $\bar{Q}_1, \bar{Q}_2, \bar{P}$ і реакції в’язей: у точках A і B

Частина перша

(нерухомі шарнірні опори) $-\bar{X}_A, \bar{Y}_A, \bar{X}_B, \bar{Y}_B$ і у точці C (шарнірне з'єднання) $-\bar{X}_C, \bar{X}'_C, \bar{Y}_C, \bar{Y}'_C$. Невідомі реакції у точці C є внутрішніми силами системи тіл, а тому $\bar{X}_C = -\bar{X}'_C$ і $\bar{Y}_C = -\bar{Y}'_C$. Покажемо осі прямокутної системи декартових координат Ax, y . Умовно розділяємо систему тіл на два окремих тіла по шарніру C . Дію відкинутої частини замінюємо двома реакціями \bar{X}_C, \bar{Y}_C , які дорівнюють:

Тепер розглянемо окремо рівновагу кожного тіла, для чого складемо дві системи рівнянь рівноваги. Використаємо умови рівноваги (1.56).

Для першого тіла (ліва половина арки):

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^n P_{kx} &= 0; X_A - X_C = 0, \\ \sum_{k=1}^n P_{ky} &= 0; Y_A + Y_C - Q_1 - P = 0, \\ \sum_{k=1}^n m_A(\bar{P}_k) &= 0; X_C \cdot 4 + Y_C \cdot 5 - Q_1 \cdot 1 - P \cdot 4 = 0. \end{aligned} \right\}$$

Для другого тіла (права половина арки):

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^n P_{kx} &= 0; X_B + X'_C = 0, \\ \sum_{k=1}^n P_{ky} &= 0; Y_B - Y'_C - Q_2 = 0, \\ \sum_{k=1}^n m_B(\bar{P}_k) &= 0; Q_2 \cdot 1 - X'_C \cdot 4 + Y'_C \cdot 5 = 0. \end{aligned} \right\}$$

Як видно з отриманих шести рівнянь рівноваги, в них містяться шість невідомих: $X_A, X_B, X_C, Y_A, Y_B, Y_C$.

Визначимо ці невідомі величини. З третього рівняння другої системи визначимо Y'_C :

$$Y'_C = \frac{4X'_C - Q_2}{5};$$

$$X_C = \frac{6 + 6 + 40}{8} = \frac{52}{8} = 6,5 \text{ kH};$$

$$Y'_C = \frac{4X_C - Q_2}{5} = \frac{4 \cdot 6,5 - 6,0}{5} = 4,0 \text{ kH}.$$

З першого рівняння першої системи маємо: $X_A = X_C = 6,5 \text{ kH}$.

А з першого рівняння другої системи дістаємо:

$$Y_A = Q_1 + P - Y_C = 6,0 + 10,0 - 4,0 = 12,0 \text{ kH}.$$

З другого рівняння другої системи:

$$Y_B = Y'_C + Q_2 = 4,0 + 6,0 = 10,0 \text{ kH}.$$

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Як замінити рівномірно розподілене навантаження зосередженою силою?
2. Як замінити розподілене за лінійним законом навантаження зосередженою силою?
3. Що таке статично означені і статично неозначені задачі?
4. Які особливості має метод розв'язування задач на рівновагу системи тіл?
5. Як спрямувати внутрішні сили взаємодії між тілами системи?
6. Скільки рівнянь рівноваги можна скласти для плоскої системи паралельних сил?
7. Що таке зосереджене та розподілене навантаження?
8. Які додаткові умови рівноваги паралельних сил Ви знаєте?
9. Як визначити реакцію у внутрішньому шарнірі системи тіл?
10. Яка основна умова рівноваги плоскої системи паралельних сил?

1.6. Розрахунок плоских ферм

1.6.1. Характеристика ферм і порядок розрахунку

Фермою називається геометрично незмінна жорстка конструкція, яка складається із прямолінійних стрижнів, сполучених між собою шарнірами.

Місце, де стрижні з'єднуються один з одним, носить назву **вузла ферми**. Зовнішнє навантаження прикладається до ферми тільки в її вузлах.

Допускається, що ферма складається із ідеальних стрижнів: тонких, однорідних, невагомих, на кінцях яких є шарніри, внаслідок чого ці стрижні працюють тільки на розтяг або на стиск. У підручнику розглядаються **плоскі ферми**, в яких осі всіх **стрижнів** і вектори зовнішніх **сил**, що навантажують вузли ферми, розміщуються **в одній площині**.

Слід зазначити, що конструктивно ферма складається із стрижнів, які утворюють жорсткі трикутники, а це означає, що в конструкції ферми немає зайвих стрижнів. Такі ферми будуть статично визначеними, якщо

Частина перша

кількість стрижнів n і кількість вузлів m відповідають співвідношенню:

$$n = 2m - 3. \quad (1.63)$$

Розрахунок ферми зводиться до визначення реакцій зовнішніх опор і внутрішніх реакцій (зусиль) у стрижнях. Зусилля і реакція стрижня співвідносяться між собою як дія і протидія: вони рівні за модулем і протилежні за напрямком. Розглянемо просту плоску ферму (рис. 1.35).

Як можна побачити зі схеми – це плоска конструкція, що складається із 7 стрижнів, що з'єднуються у 5 вузлах. У вузлах I та V ферма має зовнішні опори (у I вузлі – шарнірно-нерухома опора; у V – шарнірно-рухома опора), до II і до IV вузлів ферми прикладені зовнішні навантаження як зосереджені сили \bar{P}_1 і \bar{P}_2 ($P_1 = 30 \text{ kH}$; $P_2 = 10 \text{ kH}$).

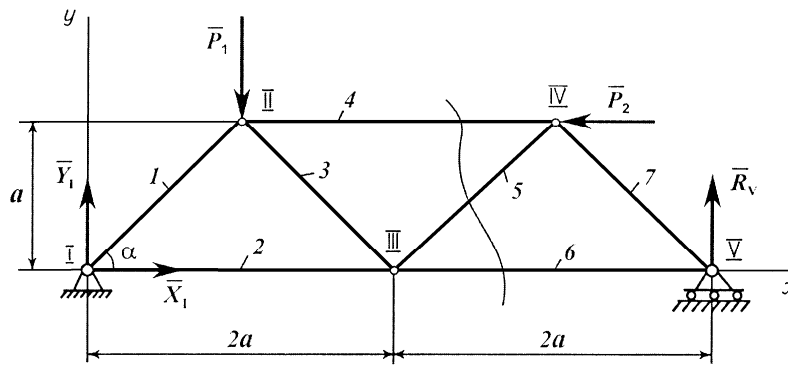


Рис. 1.35

Лінійні розміри ферми і система координат Ix показані на схемі ферми ($\alpha = 45^\circ$).

Перший етап розрахунку ферми – це визначення її опорних реакцій. Для знаходження опорних реакцій ферму розглядають загалом як тверде тіло з прикладеними зовнішніми силами.

Тоді, умовно звільнюючи ферму від в'язей (опор) і замінюючи їх відповідними реакціями (у вузлі I це реакції \bar{X}_I, \bar{Y}_I ; у вузлі V – \bar{R}_V), отримуємо плоску систему довільних сил, для якої можна використати умови рівноваги (1.56) і скласти систему рівнянь.

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^n P_{kx} &= 0; \quad X_I - P_2 = 0, \\ \sum_{k=1}^n P_{ky} &= 0; \quad Y_I - P_1 + R_V = 0, \\ \sum_{k=1}^n m_I(\bar{P}_k) &= 0; \quad R_V \cdot 4a + P_2 \cdot a - P_1 \cdot a = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.64)$$

З першого рівняння системи обчислюємо невідому реакцію $X_I = P_2 = 10 \text{ kH}$. З останнього рівняння обчислюємо реакцію шарнірно-

рухомої опори:

$$R_V = \frac{P_1 - P_2}{4} = \frac{30 - 10}{4} = 5 \text{ кН}.$$

Далі, з другого рівняння є можливість обчислити останню невідому величину:

$$Y_I = P_1 - R_V = 30 - 5 = 25 \text{ кН}.$$

Таким чином, обчислено шукані реакції опор ферми. Тепер необхідно визначити невідомі зусилля у стрижнях ферми.

Існує декілька способів визначення цих зусиль: графічні і аналітичні. Ми розглянемо два аналітичних методи: **метод вирізування вузлів** і **метод перетинів** (метод Риттера). Розглянемо послідовно ці методи.

1.6.2. Метод вирізування вузлів

Цей метод полягає в послідовному вирізуванні (уявно) вузлів ферми, починаючи з вузла, де збігаються **два стрижні** з невідомими внутрішніми зусиллями (реакціями). Таким чином, **кожний вузол – це плоска система збіжних сил**, для якої можна скласти два рівняння рівноваги і визначити дві реакції.

За правилом реакції стрижнів спрямовуються від вузлів. Якщо ж реакція стрижня отримає від'ємний знак, то це свідчить про те, що дійсний напрямок його реакції протилежний.

Визначимо цим методом зусилля у стрижнях ферми, поданої на рис. 1.35. **Спочатку вирізаємо вузол I, де збігаються тільки два стрижні** (рис. 1.36): кількість рівнянь рівноваги повинна відповідати кількості невідомих. Крім визначених реакцій опор \bar{X}_I і \bar{Y}_I до нього прикладаються невідомі реакції перетнутих стрижнів 1 і 2, які позначаються \bar{S}_1 та \bar{S}_2 і спрямовуються, за прийнятим правилом, від вузла.

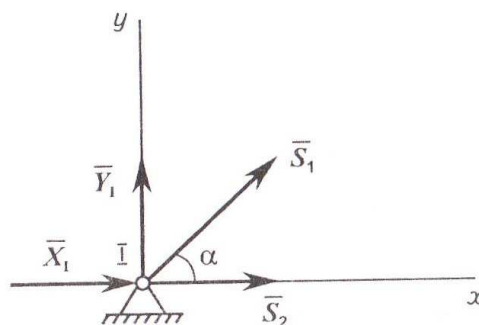


Рис. 1.36

Покажемо на схемі осі плоскої прямокутної системи декартових координат xIy та кут α . Як видно зі схеми, вузол I перебуває у рівновазі

Частина перша

під дією плоскої системи збіжних сил з двома невідомими зусиллями \bar{S}_1 і \bar{S}_2 .

Складемо для вузла I рівняння рівноваги, використовуючи умови рівноваги для плоскої системи збіжних сил у вигляді (1.20):

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^n P_{kx} = 0; \quad X_I + S_2 + S_1 \cos \alpha = 0, \\ \sum_{k=1}^n P_{ky} = 0; \quad Y_I + S_1 \sin \alpha = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.65)$$

З другого рівняння визначаємо:

$$S_1 = -\frac{Y_I}{\sin \alpha} = -\frac{25}{0,707} = -35,3 \text{ kH} .$$

Як легко побачити, стрижень 1 є стиснутим із зусиллям $35,3 \text{ kH}$, про що інформує знак «мінус». З першого рівняння визначимо величину другої невідомої реакції:

$$S_2 = -X_I - S_1 \sin \alpha = -10 - (-35,3 \cdot 0,707) = -10 + 25,00 = 15,00 \text{ kH} .$$

Отже, стрижень 2 перебуває у стані розтягу, що здійснюється із зусиллям $15,0 \text{ kH}$.

Далі можна вирізати тільки вузол II (рис. 1.37). У цьому вузлі зосереджені зовнішня сила \bar{P}_1 і реакції трьох стрижнів \bar{S}_1 , \bar{S}_3 і \bar{S}_4 . До того ж, невідомими є реакції тільки у двох стрижнях: 3 (\bar{S}_3) і 4 (\bar{S}_4).

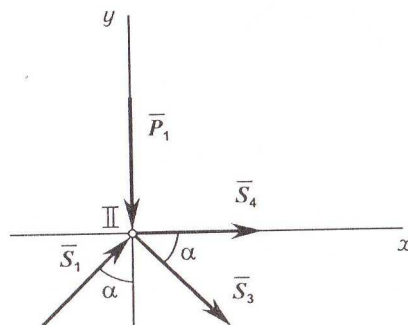


Рис. 1.37

Попередньо вважаємо, що стрижні 3 і 4 розтягнуті і їхні реакції \bar{S}_3 і \bar{S}_4 спрямуємо від вузла II.

Зусилля ж у стрижні 1 вже визначено раніше під час вирізання першого вузла і не тільки встановлено його значення, але й те, що він є стиснутим, а тому його реакція \bar{S}_1 буде спрямована до вузла II. Проведемо

крізь вузол II осі координат і покажемо кути α .

Слід ще раз підкреслити, що в кожному вузлі повинно бути не більше двох невідомих, тому що для плоскої системи збіжних сил можна скласти тільки два рівняння рівноваги. Складемо для вузла II рівняння суми проекцій на осі координат, використовуючи умови, аналогічні (1.20):

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^n P_{kx} = 0; \quad S_4 + S_3 \cos \alpha + S_1 \sin \alpha = 0, \\ \sum_{k=1}^n P_{ky} = 0; \quad -S_3 \sin \alpha + S_1 \cos \alpha - P_1 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.66)$$

З другого рівняння визначаємо зусилля:

$$S_3 = \frac{S_1 \cos \alpha - P_1}{\sin \alpha} = \frac{35,3 \cdot 0,707 - 30}{0,707} = -\frac{5,00}{0,707} = -7,00 \text{ kH}.$$

Як легко побачити, стрижень 3 є стиснутим із зусиллям 7 kH . Напрямок реакції S_3 – до вузла II. З першого рівняння знаходимо:

$$\begin{aligned} S_4 &= -S_1 \sin \alpha - S_3 \cos \alpha = -35,30 \cdot 0,707 - (-7,00)0,707 = \\ &= -25,00 + 5,0 = -20,00 \text{ kH}. \end{aligned}$$

Таким чином, стрижень 4 теж стиснутий із зусиллям $20,00 \text{ kH}$. Далі вирізаємо вузол IV (рис. 1.38).

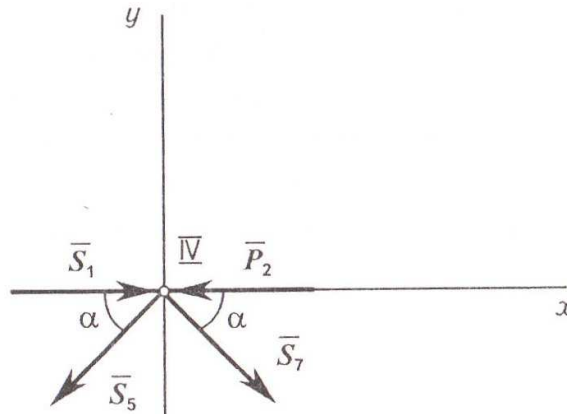


Рис. 1.38

Він перебуває в рівновазі під дією зовнішньої сили \overline{P}_2 і зусиль у стрижнях 4, 5 і 7. Зусилля у стрижні 4 визначено раніше і його напрямок – до вузла, а тому шуканими невідомими є тільки зусилля \overline{S}_5 і \overline{S}_7 .

Проведемо крізь вузол IV осі координат xu та покажемо кути α . Напрямки зусиль у стрижнях 5 і 7 – від вузла IV.

Складемо для вузла IV рівняння рівноваги, також використовуючи

Частина перша

умови рівноваги (1.20):

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^n P_{kx} = 0; \quad S_4 - P_2 - S_5 \cos \alpha + S_7 \cos \alpha = 0, \\ \sum_{k=1}^n P_{ky} = 0; \quad -S_5 \sin \alpha - S_7 \sin \alpha = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.67)$$

Розв'язуємо систему рівнянь (1.67), для чого з другого рівняння виразимо зусилля S_5 через зусилля S_7 :

$$S_5 = -\frac{S_7 \sin \alpha}{\sin \alpha} = -S_7.$$

Тепер підставимо значення S_5 у перше рівняння системи:

$$S_7 \cos \alpha - (-S_7) \cos \alpha - P_2 + S_4 = 0. \text{ Звідки}$$

$$S_7 = \frac{P_2 - S_4}{2 \cos \alpha} = \frac{10 - 20}{2 \cdot 0,707} = -7,00 \text{ kH}.$$

Стрижень 7 є стиснутим із зусиллям $7,00 \text{ kH}$. Тепер маємо можливість знайти зусилля $S_5 = -S_7 = 7,00 \text{ kH}$. Стрижень 5 розтягнутий.

Для остаточного визначення зусиль у стрижнях ферми, що розглядається, необхідно вирізати вузол V (рис. 1.29).

До вузла V прикладена реакція зовнішньої опори \bar{R}_V , відоме зусилля \bar{S}_7 , спрямоване до вузла, та невідоме зусилля \bar{S}_6 , яке слід направити від вузла. Складемо для вузла V рівняння рівноваги, використовуючи умови рівноваги (1.20):

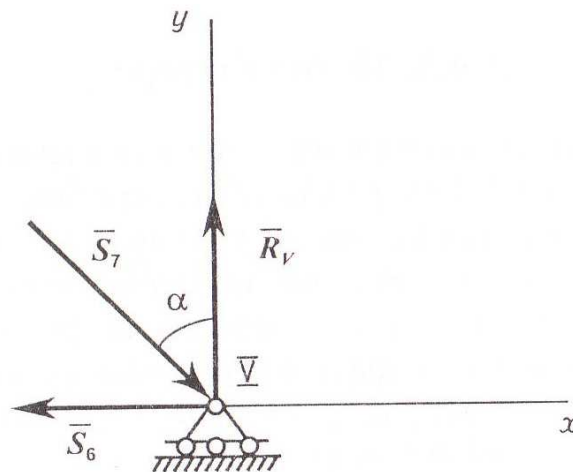


Рис. 1.39

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^n P_{kx} = 0; \quad S_7 \sin \alpha - S_6 = 0, \\ \sum_{k=1}^n P_{ky} = 0; \quad R_V - S_7 \cos \alpha = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.68)$$

Як легко побачити, для визначення останнього невідомого зусилля S_6 достатньо розв'язати перше рівняння системи (1.68):

$$S_6 = S_7 \cos \alpha = 7,00 \cdot 0,707 = 5,00 \text{ кН}.$$

Стрижень 6 розтягнутий із зусиллям $5,0 \text{ кН}$.

Дані розрахунків заносимо у табл. 1.1. Знак обчисленого зусилля у стрижні визначає характер його навантаження. Якщо знак додатний («плюс»), то стрижень розтягнутий, а якщо від'ємний – то стиснутий.

Таблиця 1.1

№ стрижнів	1	2	3	4	5	6	7
Зусилля в кН	-35,30	+15,00	-7,00	-20,00	+7,00	+5,00	-5,00

1.6.3. Метод Ріттера (метод перетину)

Розглянемо інший аналітичний метод визначення зусиль у стрижнях плоскої ферми, метод Ріттера або метод перетину.

Цей метод має декілька переваг порівняно з розглянутим раніше методом вирізування вузлів. У цьому разі ставиться інша мета. Необхідно визначити реакції у стрижнях того перерізу ферми, який здається найбільш небезпечним. Тоді немає необхідності розглядати послідовно велику кількість вузлів, особливо, якщо ферма є складною. Крім того, у разі неточності розрахунку величини реакції у стрижнях, помилка в подальшому накопичуватиметься. Метод Ріттера позбавлений цих незручностей.

Особливості застосування цього **методу** полягають у тому, що умовно робиться **перетин усієї ферми**, при цьому в зоні перетину повинно бути **не більше, ніж три стрижні** з невідомими зусиллями. Потім розглядається рівновага однієї з частин ферми, а друга частина відкидається.

Дію стрижнів, які потрапили під перетин, замінюють їхніми реакціями. Попередньо вважається, що ці стрижні розтягнуті, тобто, їх зусилля спрямовуються від вузлів.

Частина перша

Опорні реакції ферми визначаються так само, як і під час застосування методу вирізування вузлів.

Визначимо зусилля у 4, 5 і 6 стрижнях ферми, зробивши перетин і розглядаючи рівновагу простої правої частини ферми (рис. 1.40).

Замість переріжаних стрижнів прикладаємо у вузлі IV зусилля \bar{S}_4 і \bar{S}_5 , а у вузлі V – зусилля \bar{S}_6 . Напрямки вказаних зусиль – від вузлів. До цієї частини ферми прикладена зовнішня сила \bar{P}_2 і реакція опори \bar{R}_V . Покажемо осі прямокутної системи декартових координат Vx у і кути α .

Як можна побачити, ця частина ферми перебуває у рівновазі під дією плоскої системи довільних сил, а тому можна скласти для неї рівняння рівноваги, використовуючи умови рівноваги (1.57).

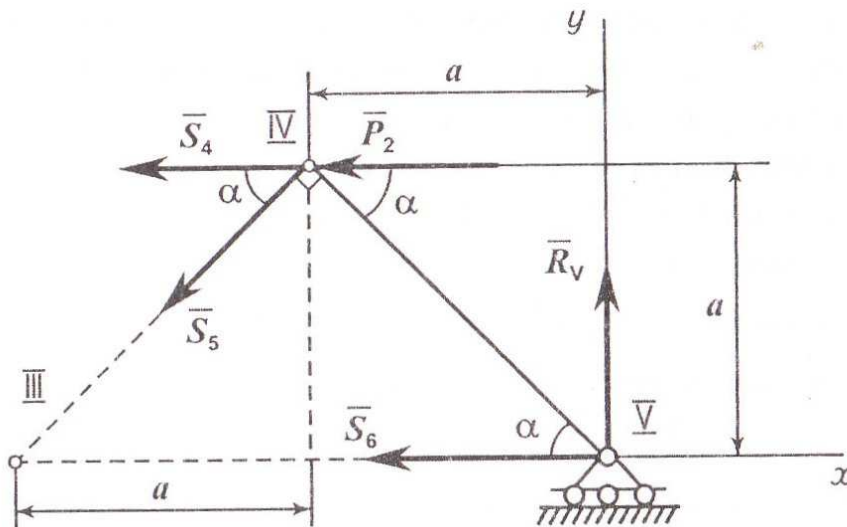


Рис. 1.40

Проте, тут доцільно застосувати **спосіб трьох моментних точок**.

Згідно з цим способом складаються рівняння рівноваги як суми моментів сил відносно тих точок, де перетинаються лінії дії двох векторів реакцій з невідомими зусиллями.

Тоді ці невідомі реакції в рівняння не входять.

Перевага способу моментних точок полягає в тому, що отримані рівняння рівноваги будуть простими, з одним невідомим. У нашому випадку (рис. 1.40) такими точками будуть вузли III і IV.

Відносно цих точок складемо суми моментів сил. Проте, третьої моментної точки тут не існує, тому що вектори \bar{S}_4 і \bar{S}_6 не перетинаються (паралельні).

Перше рівняння є сумою проєкцій сил на вертикаль.

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^n P_{ky} &= 0; & R_V - S_5 \sin \alpha &= 0, \\ \sum_{k=1}^n m_{III}(\bar{P}_k) &= 0; & P_2 \cdot a + S_4 \cdot a &= 0, \\ \sum_{k=1}^n m_{IV}(\bar{P}_k) &= 0; & R_V \cdot a - S_6 \cdot a &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.69)$$

Обчислимо невідомі зусилля. З першого рівняння визначимо зусилля:

$$S_5 = \frac{R_V}{\sin \alpha} = \frac{5}{0,707} = 7,00 \text{ kH}..$$

З другого рівняння:

$$S_4 = \frac{-P_2 \cdot a}{a} = -P_2 = -20,00 \text{ kH}.$$

З останнього рівняння: $S_6 = R_V = 5,0 \text{ kH}$.

Таким чином, стрижень 4 працює на стиск із зусиллям $20,00 \text{ kH}$, дійсний напрямок зусилля S_4 є протилежним тому, що показано на схемі (рис. 1.40).

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Яку конструкцію називають фермою?
2. Яка ферма є статично визначеною?
3. Що означає розрахувати ферму? Які припущення приймаються при цьому?
4. У чому полягає суть аналітичного методу вирізування вузлів?
5. У чому полягає метод перетину (метод Ріттера) під час розрахунків ферми?
6. Скільки стрижнів із невідомими зусиллями можуть бути в зоні перетину?
7. Відносно яких точок зручніше складати суми моментів сил частини ферми?
8. Чому метод перетину називають ще методом трьох моментів?
9. Який порядок розрахунку плоскої ферми?
10. Яка різниця між реакцією і зусиллям у стрижні?

1.7. тертя ковзання і тертя кочення

1.7.1. Рівновага тіла з урахуванням тертя.

Сили тертя ковзання

Дослід доводить, що при намаганні зсунути одне тіло по поверхні іншого у площині стикання тіл виникає **сила опору відносному ковзанню**.

Дослід переконує, що **тертя обумовлено** перш за все шорсткістю поверхонь контакту, що створює опір переміщенню, або **наявністю зчеплення** у притиснутих поверхонь.

Але вивчення складних фізико-механічних і хіміко-молекулярних проблем процесу тертя виходить за рамки курсу теоретичної механіки.

У цьому курсі теорією тертя ковзання користуються лише у зв'язку з визначенням реакцій в'язей реальних поверхонь у разі врахування сил тертя, якщо вони суттєво впливають на рух тіл.

Сила тертя ковзання – це **сила опору**, яка виникає під час руху одного тіла на поверхні іншого тіла і яка спрямована протилежно швидкості відносного руху тіла.

Розглянемо шорстку площину (рис. 1.41).

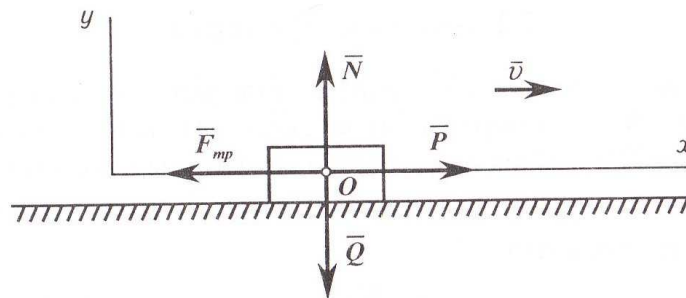


Рис. 1.41

На ній рівномірно рухається тіло вагою \bar{Q} під дією зовнішньої сили \bar{P} . Складемо розрахунково-силову схему, розглядаючи всі сили, які діють на це тіло.

Як відомо, опорна площина, яку умовно вважаємо як гладеньку площину, створює нормальну реакцію поверхні або **силу нормального тиску** \bar{N} , а в бік, що є протилежним напрямку дії сили \bar{P} , буде спрямована **сила тертя** $\bar{F}_{тр}$, що виникає внаслідок контакту шорстких поверхонь тіл, вектор якої прикладений до точки O .

Покажемо осі координат x у. Оскільки тіло перебуває у стані рівноваги, то є можливість скласти рівняння рівноваги тіла під дією плоскої системи збіжних сил. Запишемо умови і рівняння рівноваги тіла:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^n P_{kx} = 0; \quad P - F_{mp.} = 0, \\ \sum_{k=1}^n P_{ky} = 0; \quad N - Q = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.70)$$

З першого рівняння отримуємо $P = F_{mp.}$, а з другого рівняння – $N = Q$. Таким чином, сила \bar{P} зрівноважується силою тертя $\bar{F}_{mp.}$, а нормальний тиск тіла на площину \bar{N} дорівнює вазі тіла \bar{Q} .

Наближені закони тертя ковзання або тертя першого роду встановили французькі фізики Гільом Амонтон (1663–1705) і Шарль Кулон (1736–1806), за одним із цих законів сила тертя $F_{mp.}$ пропорційна силі нормального тиску N і змінюється від нуля до граничної (максимальної) величини в момент зрушення тіла з місця:

$$F_{mp.} = fN, \quad (1.71)$$

де f – безрозмірний коефіцієнт пропорційності.

Як було встановлено пізніше, коефіцієнт пропорційності f є статичним **коефіцієнтом тертя ковзання** за відносного спокою, а в умовах руху величина динамічного коефіцієнта тертя ковзання трошки зменшується порівняно зі статичним.

Кулон вважав, що коефіцієнт тертя ковзання f не залежить від величини площі контакту тіл, швидкості руху тіл і інших факторів.

Проте, подальші дослідження показали, що коефіцієнт тертя ковзання, навпаки, залежить від багатьох факторів: від матеріалу тіл, стану поверхонь, що контактують, температури, вологості, якостей мастил тощо.

1.7.2. Кут і конус тертя ковзання

Розглянемо горизонтальну шорстку поверхню, на якій розташоване тіло (рис. 1.42).

Як і в попередньому випадку, покажемо сили, прикладені у точці O : \bar{N} – реакція поверхні або сила нормального тиску, $\bar{F}_{mp.}$ – сила тертя. Додаючи векторно ці сили, отримаємо повну реакцію поверхні \bar{R} :

$$\bar{R} = \bar{N} + \bar{F}_{mp.} \quad (1.72)$$

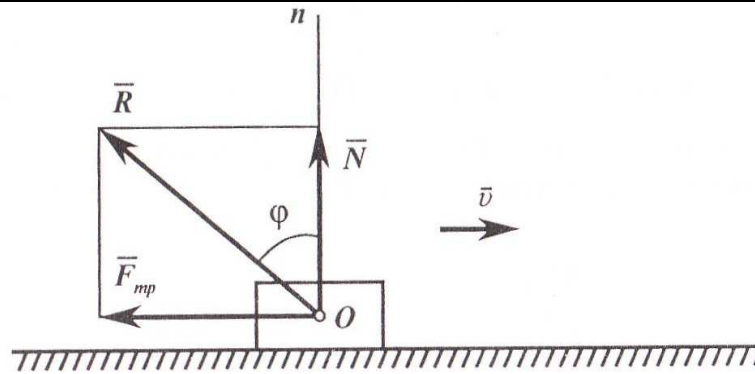


Рис. 1.42

Тепер проведемо крізь точку O , де прикладені сили, нормаль n і покажемо **кут тертя ковзання** φ , на який реакція \bar{R} відхилена від нормалі n .

Отже, **кут тертя ковзання** φ – це кут, який утворює рівнодійна \bar{R} нормального тиску \bar{N} і сили тертя \bar{F}_{mp} , тобто, повна реакція шорсткої поверхні \bar{R} з нормаллю n до поверхні в момент зрушення тіла з місця.

Визначимо кут тертя ковзання φ . Як легко побачити з рис. 1.42, його можна визначити так:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{F_{mp.}}{N}. \quad (1.73)$$

Проте, з виразу (1.71) маємо:

$$f = \frac{F_{mp.}}{N}. \quad (1.74)$$

Якщо порівняти ліві частини виразів (1.73) і (1.74), то отримаємо:

$$f = \operatorname{tg} \varphi. \quad (1.75)$$

Таким чином, **коефіцієнт тертя** ковзання f дорівнює **тангенсу кута тертя** φ .

З цього випливає, що коефіцієнт тертя ковзання є безрозмірною величиною. Визначити кут тертя можна також, якщо розглядати рівномірний рух тіла на похилій площині.

Нехай площина, на якій рухається тіло вагою \bar{G} (рис. 1.43), нахилена до горизонту під деяким кутом φ , таким, що рух тіла буде рівномірним.

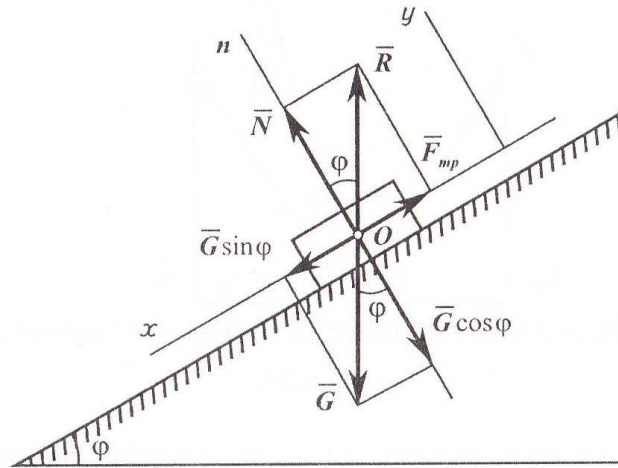


Рис. 1.43

Якщо показати осі координат x, y і вважати, що тіло перебуває у стані рівноваги під дією плоскої системи збіжних сил, то можна скласти систему двох рівнянь рівноваги (1.20):

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^n P_{kx} = 0; \quad -F_{mp.} + G \sin \varphi = 0, \\ \sum_{k=1}^n P_{ky} = 0; \quad N - G \cos \varphi = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.76)$$

З першого рівняння отримаємо значення сили тертя:

$$F_{mp.} = G \sin \varphi, \quad (1.77)$$

а з другого рівняння отримаємо значення нормальної реакції похилої площини:

$$N = G \cos \varphi. \quad (1.78)$$

Далі, якщо підставити вирази (1.77) і (1.78) у вираз (1.74), то матимемо:

$$f = \frac{F_{mp.}}{N} = \frac{G \sin \varphi}{G \cos \varphi} = \operatorname{tg} \varphi. \quad (1.79)$$

Звідси легко побачити, що у такому випадку кут φ і є той кут, на який відхилена від нормалі n повна реакція \bar{R} поверхні за векторного додавання векторів сил \bar{N} та $\bar{F}_{mp.}$. Цілком очевидно, якщо кут нахилу похилої площини до горизонту буде більшим, ніж φ , то тіло почне рухатись з деяким прискоренням.

Якщо поступово змінювати по колу напрямок горизонтальної рушійної сили \bar{P} , прикладеної до тіла, то внаслідок цього напрямки сили

Частина перша

тертя \bar{F}_{mp} також будуть послідовно змінюватись за колом. Тоді рівнодійна \bar{R} повної реакції поверхні буде повертатись навколо вектора \bar{N} , утворюючи як твірна кругову конічну поверхню (рис. 1.44).

У разі одного повного оберту реакції \bar{R} навколо вектора \bar{N} утворюється круговий конус, кут якого при вершині дорівнює 2φ .

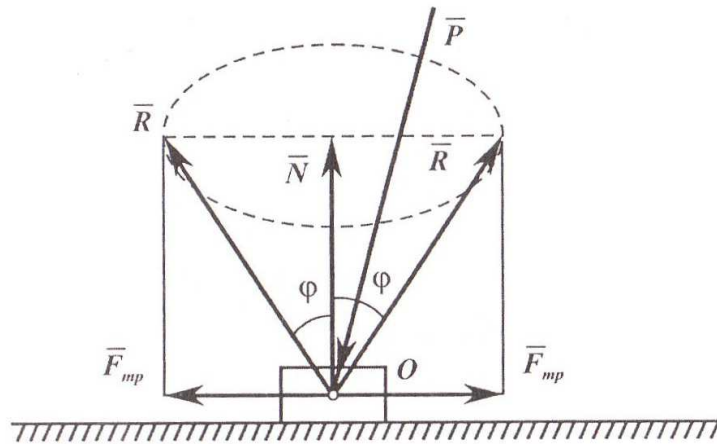


Рис. 1.44

Отже, конус тертя ковзання – це круговий конус, утворений реакцією шорсткої поверхні під час одного повного повороту рушійної сили, кут якого при вершині дорівнює подвійному куту тертя.

З поняття конуса тертя ковзання випливає таке правило: якщо вектор зовнішньої сили \bar{P} , прикладеної до тіла, розміщений всередині тіла конуса тертя, то, якою б великою за модулем ця сила не була, вона не зможе зрушити тіло з місця (рис. 1. 141). Це пов'язано з тим, що в разі збільшення зовнішньої сили \bar{P} нормальна реакція \bar{N} , тобто, проекція зовнішньої сили на вертикаль, а з нею і сила тертя ковзання \bar{F}_{mp} , зростатиме швидше, ніж рушійна сила, яка є проекцією сили \bar{P} на горизонталь.

Для доведення цього правила позначимо кут між вектором сили \bar{P} і вертикаллю через α . Рух тіла під час дії сили \bar{P} буде неможливий, якщо

$$\begin{aligned} P \sin \alpha < F_{mp} &\Rightarrow P \sin \alpha < f P \cos \alpha = \\ &= \operatorname{tg} \varphi P \cos \alpha \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha < \operatorname{tg} \varphi \Rightarrow \alpha < \varphi. \end{aligned}$$

Аналіз останнього виразу вказує на те, що поки вектор зовнішньої сили, яка тисне на тіло, перебуває у створі конуса тертя, рух неможливий. На цьому принципі працюють, наприклад, клинові або стопорні механізми у верстатах.

1.7.3. Рівновага тіла на похилій площині

Розглянемо тіло на похилій площині, кут нахилу якої до горизонту дорівнює α (рис. 1.45).

Вага тіла дорівнює \bar{Q} , до нього прикладена зовнішня сила \bar{P}_1 , яка викликає рівномірний рух тіла вгору зі швидкістю $v = const$.

Внаслідок рівномірного руху тіло перебуває у стані рівноваги, а тому можна використати рівняння статки.

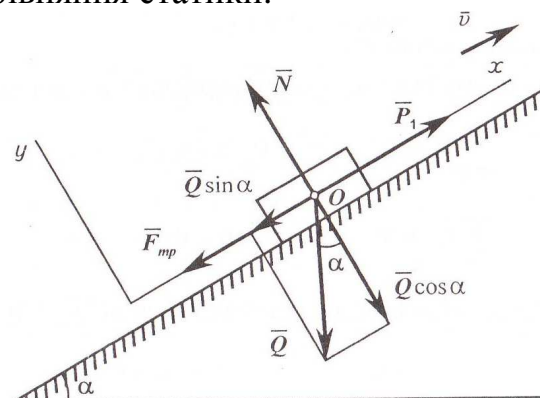


Рис. 1.45

Складемо розрахунково-силову схему. До тіла в точці O прикладена реакція поверхні \bar{N} (або сила нормального тиску), сила тертя \bar{F}_{mp} , напрямок якої протилежний напрямку руху тіла.

Складемо рівняння рівноваги (1.20), враховуючи, що тіло перебуває у рівновазі під дією плоскої системи збіжних сил:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^n P_{kx} &= 0; & P_1 - F_{mp} - Q \sin \alpha &= 0, \\ \sum_{k=1}^n P_{ky} &= 0; & N - Q \cos \alpha &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.80)$$

З другого рівняння знаходимо реакцію поверхні:

$$N = Q \cos \alpha, \quad (1.81)$$

а з першого рівняння:

$$P_1 = F_{mp} + Q \sin \alpha. \quad (1.82)$$

Оскільки $F_{mp} = fN$, то, враховуючи вираз (1.81), матимемо:

$$F_{mp} = f Q \cos \alpha. \quad (1.83)$$

Підставимо вираз (1.84) у вираз (1.83):

$$P_1 = fQ \cos \alpha + Q \sin \alpha = Q (\sin \alpha + f \cos \alpha). \quad (1.84)$$

1.7.4. Тертя кочення

Тертям кочення називається опір, який утворюється під час кочення одного тіла поверхнею іншого.

Уявимо коток радіусом R , що котиться (напрямок обертання показано стрілкою) на поверхні під дією рушійної сили \bar{P} , яка може бути прикладеною або до центра котка, або до його верхньої точки (рис. 1.46).

На поверхні коток утворює колію, з боку якої діють елементарні реакції. Епюру елементарних навантажень можна звести до зосередженої сили \bar{N} , яка буде віддалена від вертикальної осі котка на величину k в момент зрушення котка з місця (відстань AC). Ця **лінійна величина k** , яка має розмірність довжини, **називається коефіцієнтом тертя кочення** або плечем пари кочення (\bar{Q}, \bar{N}) .

Якщо коток рівномірно рухається, $v = const$, то сили, які до нього прикладені, зрівноважуються. Визначимо алгебраїчну суму моментів усіх сил відносно точки A .

Розглянемо спочатку перший випадок, якщо рушійна сила \bar{P}_1 прикладена до центра котка, а рушійний момент $M_{руш.} = P_1 R$.

$$\sum_{k=1}^n m_A(\bar{P}_k) = 0; Nk - P_1 R = 0. \quad (1.85)$$

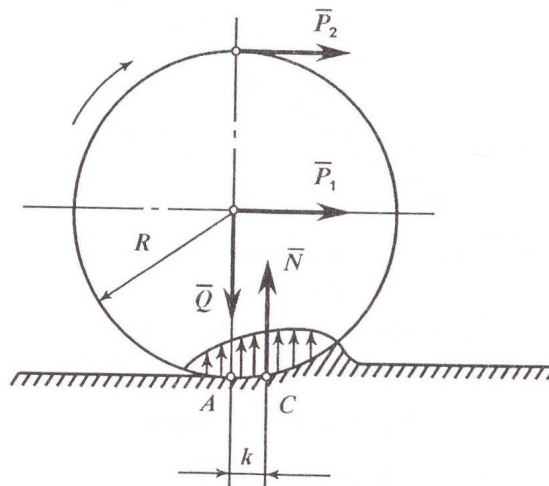


Рис. 1.144

Оскільки момент опору кочення $M_{он.} = Nk$, то

$$P_1 = \frac{k}{R} N = \frac{M_{on.}}{R}. \quad (1.86)$$

Порівнюючи формулу (1.86) і вираз закону Кулона (1.71), вважаючи, що сила тертя ковзання забезпечує чисте кочення без проковзування і дорівнює \bar{P}_1 , можна побачити, що $\frac{k}{R} \ll f$. Тому колесо і застосовується, що має таку велику перевагу у зменшенні сили під час переміщення.

Розглянемо далі другий випадок, коли сила \bar{P}_2 прикладена до верхньої точки котка. У цьому випадку рівняння рівноваги матиме такий вигляд:

$$\sum_{k=1}^n m_A(\bar{P}_k) = 0; \quad (1.87)$$

$$Nk - P_2 \cdot 2R = 0.$$

Звідки
$$P_2 = \frac{Nk}{2R} = \frac{M_{on.}}{2R}. \quad (1.88)$$

Якщо порівняти вирази (1.88) і (1.86), то можна побачити, що в другому випадку для зрушення котка з місця треба прикласти вдвічі менше зусилля, ніж у першому.

1.7.5. Тертя нитки і шорсткої циліндричної поверхні

Найбільш розповсюдженим типом передачі обертального руху є пасова передача, в якій рух від одного циліндричного шківа (ведучого) передається до другого (веденого) за допомогою гнучкої в'язі, тобто, пасів різноманітних конструкцій: плоский, клиновий, зубчастий... На ведучому валу, який примусово обертається і охоплюється гнучким тілом, виникають сили тертя, які і спричиняють передачу зусиль. На рис. 1.47 схематично показаний подібний ведучий шків радіуса R , який рівномірно обертається у напрямку кругової стрілки.

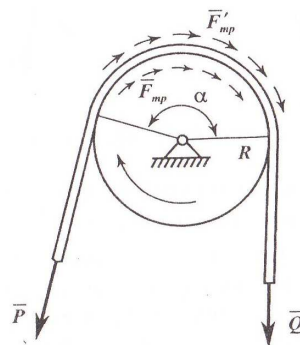


Рис. 1.47

При цьому кут обхвату шківа, що охоплюється пасом, дорівнює α .

Частина перша

Позначимо зусилля, що створюються у гілках паса (нитки), через \bar{P} і \bar{Q} . Умовно можна показати сили тертя \bar{F}_{mp} , які виникають на циліндричній поверхні самого шківів і мають напрямок, протилежний напрямку його обертання, а на поверхні паса (нитки) – рівні за величиною, але протилежно спрямовані сили тертя паса (нитки) і шківів \bar{F}'_{mp} .

Розглянемо взаємодію ідеальної абсолютно гнучкої нерозтяжної нитки з циліндричною поверхнею шківів і знайдемо співвідношення між силами натягу \bar{P} і \bar{Q} за заданого кута α (радіан) обхвату шківів ниткою. Складемо розрахунково-силову схему розглядаючи шків, який рівномірно обертається, а нитка перебуває у відносному спокої.

Центр шківів позначимо літерою O , його радіус – R . Сили натягу \bar{P} і \bar{Q} прикладені відповідно в точках B і A нитки (там, де нитка сходиться зі шківів), а тому центральний кут AOB і є кутом обхвату α (рис. 1.48)

Розглянемо рівновагу елемента DE , приклавши до нього такі сили: \bar{T} – сила натягу, прикладена у точці E ; $(\bar{T} + d\bar{T})$ – сила натягу, прикладена у точці D , де $d\bar{T}$ – різниця натягів, обумовлена наявністю сил тертя. Далі поділимо кут $d\theta$ навпіл і проведемо крізь точку C (на дузі DE) осі прямокутної натуральної системи координат τ і n (дотичну і нормаль).

Крізь точку C проходить елементарна нормальна сила тиску нитки $d\bar{N}$. Оскільки елемент DE перебуває у рівновазі, то різниця натягів $d\bar{T}$ зрівноважується силою тертя шківів і нитки $d\bar{F}_m$, яка прикладена у точці C , розміщена на дотичній τ і дорівнює:

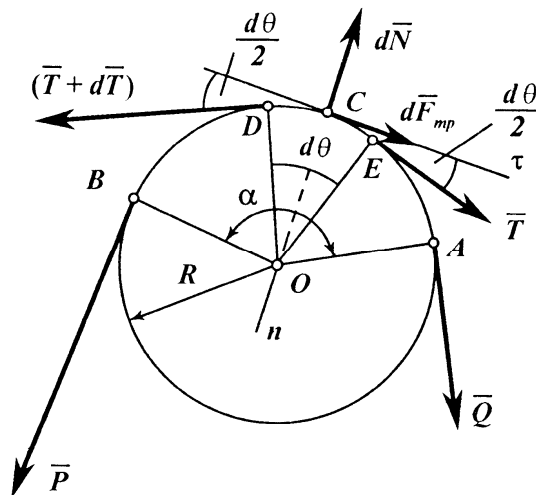


Рис. 1.48

$$dF_m = f \cdot dN, \tag{1.89}$$

де f – коефіцієнт тертя ковзання.

Кути нахилу сил \bar{T} і $\bar{T} + d\bar{T}$ до осі τ дорівнюють $\frac{d\theta}{2}$.

Складемо рівняння рівноваги елемента DE під дією прикладених сил, для чого спроекуємо всі сили на осі τ і n :

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^n (\bar{P}_k)_\tau = 0, \\ \sum_{k=1}^n (\bar{P}_k)_n = 0. \end{aligned} \right\} \begin{cases} T \cdot \cos \frac{d\theta}{2} + dF_{mp.} - (T + dT) \cdot \cos \frac{d\theta}{2} = 0, \\ T \cdot \sin \frac{d\theta}{2} + (T + dT) \cdot \sin \frac{d\theta}{2} - dN = 0. \end{cases} \quad (1.90)$$

З першого рівняння системи (1.90) знайдемо dT , для чого розкриємо дужки:

$$T \cdot \cos \frac{d\theta}{2} + dF_{mp.} - T \cdot \cos \frac{d\theta}{2} - dT \cdot \cos \frac{d\theta}{2} = 0. \quad (1.91)$$

Враховуючи, що $\cos \frac{d\theta}{2} \approx 1$, оскільки кут $d\theta$ дуже малий, а також на підставі виразу (1.89) з рівняння (1.91) маємо:

$$dT = f \cdot dN. \quad (1.92)$$

Перетворимо друге рівняння системи (1.90):

$$T \sin \frac{d\theta}{2} + T \sin \frac{d\theta}{2} + dT \sin \frac{d\theta}{2} - dN = 0. \quad (1.93)$$

У виразі (1.93) доданок $dT \sin \frac{d\theta}{2}$ є величиною вищого порядку мализни, як добуток нескінченно малих, тому цим доданком можна знехтувати. Крім того, за малого кута $\sin \frac{d\theta}{2} \approx \frac{d\theta}{2}$ у підсумку отримаємо:

$$2T \cdot \frac{d\theta}{2} = dN, \quad (1.94)$$

$$\text{або } dN = T \cdot d\theta. \quad (1.95)$$

Підставимо отримане значення dN у вираз (1.93):

$$dT = T d\theta \cdot f. \quad (1.96)$$

Розв'яжемо диференціальне рівняння (1.96), для чого відокремимо змінні величини:

$$\frac{dT}{T} = f \cdot d\theta. \quad (1.97)$$

Обчислимо визначені інтеграли від лівої і правої частин виразу (1.97).

Частина перша

При цьому величина натягу \bar{T} змінюється від початкового значення Q до кінцевого P , а кут θ має початкове значення 0 і змінюється до кінцевого значення α . Отже, межі інтегрування визначені.

$$\int_Q^P \frac{dT}{T} = f \int_0^\alpha d\theta.$$

Розв'язок цього диференціального рівняння такий:

$$\ln T \Big|_Q^P = f\theta \Big|_0^\alpha \Rightarrow \ln P - \ln Q = f\alpha \Rightarrow \ln \frac{P}{Q} = f\alpha \Rightarrow \frac{P}{Q} = e^{f\alpha}.$$

Остаточно визначимо силу натягу P :

$$P = Q \cdot e^{f\alpha}. \quad (1.98)$$

Таким чином, з останнього виразу (1.100) можна з'ясувати, що зусилля P більше від зусилля Q у $e^{f\alpha}$ разів, воно залежить від коефіцієнта тертя f і кута обхвату α , а не залежить від радіуса шківів R . Цілком зрозуміло, що за відсутності тертя ($f=0$) зусилля Q і P рівні. Вираз (1.98) носить назву формули Ейлера і дає можливість знайти найменшу силу Q , здатну зрівноважити силу P : $Q = P e^{-f\alpha}$.

Наведемо приклад розрахунку зусиль у вітках пасової передачі, яку показано на рис. 1.49.

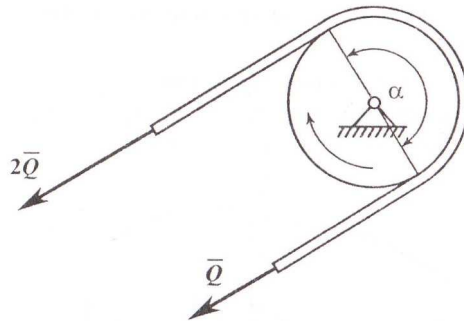


Рис. 1.49

З рисунка видно, що кут обхвату пасом ведучого шківів $\alpha = \pi$, коефіцієнт тертя гуми і сталі $f = 0,23$. Тоді:

$$e^{f\alpha} = 2,7^{0,23 \cdot \pi} = 2. \Rightarrow P = 2Q.$$

Таким чином, натяг ведучої вітки пасової передачі вдвічі більший, ніж веденої.

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Що називають силою тертя, від яких факторів вона залежить, куди напрямлений її вектор?
2. Що таке коефіцієнт тертя ковзання, кут тертя, конус тертя?
3. Як експериментально визначити коефіцієнт тертя ковзання на похилій площині?
4. Чому дорівнюють максимальна і мінімальна сили тертя у випадку рівноваги тіла на похилій площині?
5. Що таке тертя кочення?
6. Чому дорівнює коефіцієнт тертя кочення?
7. Чому дорівнює момент опору під час кочення?
8. Яка залежність між силами веденої і збіжної віток паса?
9. Як гасять енергію корабля під час причалювання?

1.8. просторова система сил. Момент сили відносно осі

1.8.1. Системи сил у просторі

Якщо лінії дії усіх сил, що прикладені до твердого тіла, розміщені будь-як у просторі, то така система сил має назву просторової. Але розташування сил у просторі може бути різним. Це може бути просторова система збіжних сил, паралельних сил і довільних сил.

Якщо розглянути тіло і вибрати прямокутну систему декартових координат $Oxyz$, то всі ці три випадки різних систем сил можна побачити на рис. 1.50:

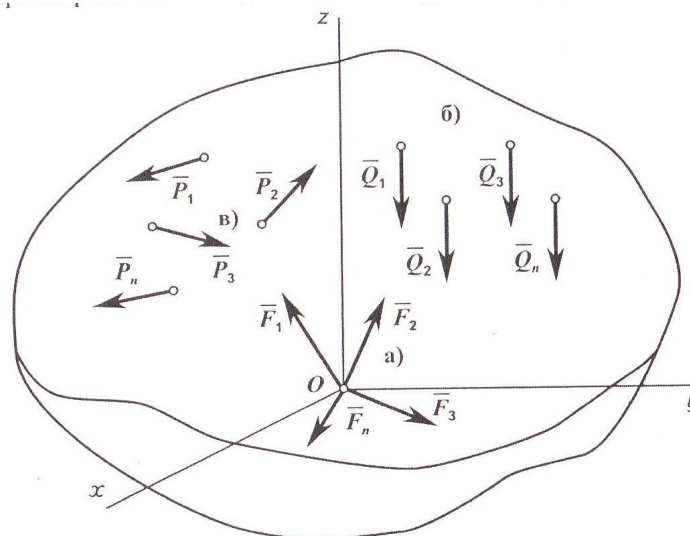


Рис. 1.50

1.8.2. Момент сили відносно осі

Розглянутий момент сили відносно центра (точки) характеризує обертальний ефект сили відносно точки.

Момент сили відносно осі характеризує обертальний ефект сили відносно осі. Якщо сила намагається повернути тіло навколо осі, то вона створює відповідний момент відносно цієї осі.

Визначимо момент відносно осі z від сили \vec{P} , вектор якої довільно розташований у просторі (рис. 1.51).

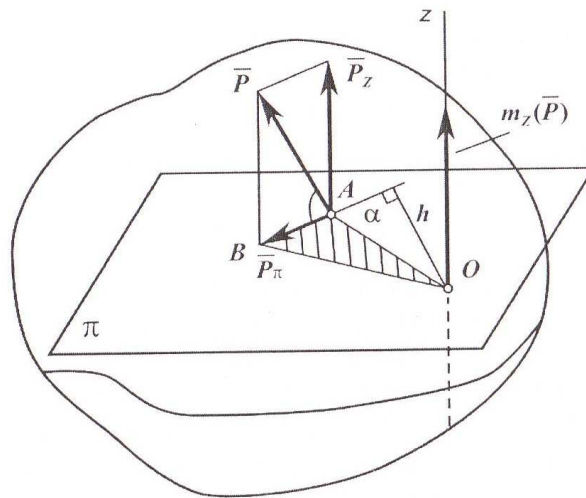


Рис. 1.51

Як можна побачити з рис. 1.51, складова \vec{P}_z не може повертати тіло відносно осі z , отже вона не створює моменту відносно цієї осі. Складова \vec{P}_π , навпаки, може повертати тіло навколо осі z з моментом:

$$m_z(\vec{P}) = m_z(\vec{P}_\pi). \quad (1.99)$$

Визначимо модуль моменту $m_z(\vec{P}_\pi)$. Проекція \vec{P}_π розташована у площині π і за величиною дорівнює:

$$P_\pi = P \cos \alpha, \quad (1.100)$$

де α – кут між вектором сили \vec{P} та площиною π .

Момент у площині π створюється відносно точки O , в якій перетинаються вісь z і площина π . Покажемо плече h , опускаючи перпендикуляр із точки O до лінії дії складової \vec{P}_π або до її продовження. Остаточню момент дорівнюватиме:

$$m_z(\vec{P}) = m_z(\vec{P}_\pi) = m_o(\vec{P}_\pi) = P_\pi h = P \cos \alpha \cdot h. \quad (1.101)$$

Знак моменту сили відносно осі визначається наступним чином: якщо, дивлячись з додатного кінця осі, можна побачити, що поворот площини під дією проекції сили на цю площину відбувається проти напрямку годинникової стрілки, то момент сили відносно осі вважається додатним і навпаки.

Остаточно сформулюємо визначення моменту:

Моментом сили відносно осі називається взята з відповідним знаком скалярна величина, що дорівнює моменту проекції цієї сили на площину, перпендикулярну до осі, відносно точки перетину осі з площиною.

Далі, у площині π з'єднаємо точку O з точками A і B . Утворено трикутник ΔOAB , у якого основою є сила \bar{P}_π , а вершина знаходиться в точці O .

Як уже відомо, момент проекції \bar{P}_π відносно точки O – це подвійна площа трикутника ΔOAB , а оскільки цей момент і є моментом сили \bar{P} відносно осі z , то

$$m_z(\bar{P}) = 2S\Delta OAB. \quad (1.102)$$

Відомо, що вектор моменту сили відносно точки розміщений перпендикулярно до площині трикутника і спрямований за правилом свердлика.

Тоді і алгебраїчну величину моменту сили відносно осі як напрямлений відрізок також можна розмістити перпендикулярно до площини трикутника, який утворено проекцією \bar{P}_π і точкою O .

Оскільки вказаний трикутник розташований у площині π , то спрямований відрізок моменту $m_z(P)$ буде знаходитись на осі z (див. рис. 1.51).

Розглянемо особливі умови, за яких момент сили відносно осі дорівнює нулю:

- **якщо сила паралельна осі** (у цьому випадку проекція сили на площину, перпендикулярну осі, дорівнюватиме нулю),
- **якщо лінія дії сили перетинає цю вісь** (тоді плече $h = 0$).

Звідси випливає, що якщо сила та вісь розміщені в одній площині, то момент сили відносно цієї осі дорівнюватиме нулю.

Якщо вектор сили не знаходиться з віссю в одній площині, але він перпендикулярний до осі, то момент цієї сили дорівнює добутку модуля сили на відстань між силою та віссю (з відповідним знаком).

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Яка система сил є просторовою системою довільних сил?
2. Як знайти момент сили відносно осі?
3. У яких випадках момент сили відносно осі дорівнює нулю?
4. Яка існує залежність між моментом сили відносно точки і моментом сили відносно осі, яка проходить крізь цю точку?
5. Що таке просторова система збіжних сил?
6. Що створює момент сили відносно осі?
7. Як спроектувати векторний момент сили відносно центра на координатні осі?
8. Сформулюйте методику визначення моменту сили відносно осі.

1.9. Просторова система пар сил. Головний вектор і головний момент системи сил

1.9.1. Пари сил у просторі

Як відомо, *пари сил* характеризуються трьома параметрами: *модулем*, що дорівнює добутку однієї із сил пари на плече пари, *площиною дії пари і напрямком повороту тіла* у цій площині. Для пар, розміщених в одній площині, остання є загальною для всіх пар, тому її, як окремий параметр, не треба враховувати під час перетворень. Якщо розглядати пари, які розміщені в різних площинах, то для кожної з них необхідно визначати всі три параметри.

1.9.2. Теорема про перенесення пари у паралельну площину

Не змінюючи дії пари сил на тіло, можна переносити цю пару у паралельну площину.

Доведемо це. Припустимо, що існує тіло, до якого у площині π прикладена пара сил (\bar{P}_1, \bar{P}_2) (рис. 1.52).

При цьому $P_1 = P_2$ і $\bar{P}_1 \parallel \bar{P}_2$. Позначимо точки прикладання сил \bar{P}_1 і \bar{P}_2 літерами A і B .

Візьмемо на тілі іншу площину π_1 , яка є паралельною даній площині π . Відрізок AB перенесемо паралельно самому собі у площину π_1 у положення A_1B_1 . Прикладемо у точках A_1 і B_1 зрівноважені системи сил \bar{P}_3, \bar{P}_4 і \bar{P}_5, \bar{P}_6 , які в сумі еквівалентні нулю.

При цьому модулі всіх сил виберемо однаковими. З'єднаємо всі чотири точки і отримаємо паралелограм AA_1B_1B (оскільки $AB = A_1B_1$ і $AB \parallel A_1B_1$). Покажемо діагоналі цього паралелограма. Вони перетинаються в одній точці,

яка поділяє кожну діагональ навпіл.

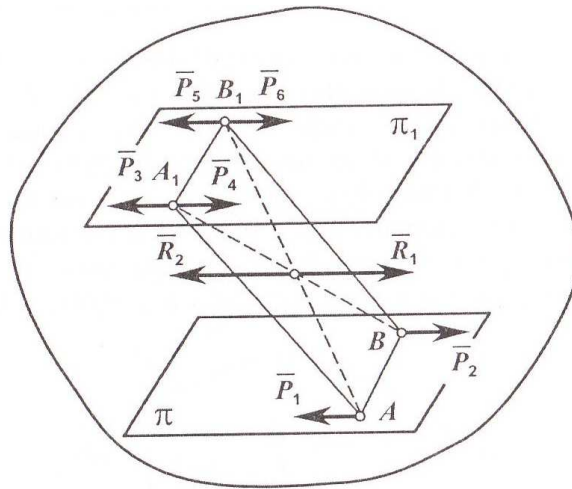


Рис. 1.52

Об'єднаємо сили \bar{P}_2 і \bar{P}_4 , які прикладені на кінцях першої діагоналі і спрямовані в один бік. Оскільки вони паралельні і мають однаковий напрямок, то їх можна додати, отримавши рівнодійну, яка у такому разі буде прикладена саме посередині діагоналі.

$$R_1 = P_2 + P_4 = 2P.$$

Те саме зробимо з силами \bar{P}_1 і \bar{P}_5 , одержуючи рівнодійну \bar{R}_2 , яка буде прикладена посередині другої діагоналі і спрямована у той самий бік, що і ці сили, але матиме напрямок, протилежний напрямку першої рівнодійної \bar{R}_1 .

$$R_2 = P_1 + P_5 = 2P.$$

Отже, в точці перетину діагоналей паралелограма AA_1B_1B є дві сили \bar{R}_1 і \bar{R}_2 , які є зрівноваженою системою сил і які, за другою аксіомою, можна відкинути.

На рис. 1.52 залишились лише сили \bar{P}_3 і \bar{P}_6 , які є парою сил, перенесеною і прикладеною у площині π_1 .

Таким чином, пару сил (\bar{P}_1, \bar{P}_2) перенесено з площини π у паралельну площину π_1 . Теорему доведено.

1.9.3. Умови еквівалентності пар сил у просторі

Як відомо, момент пари сил є векторною величиною. Момент пари як вектор має напрямок, перпендикулярний площині, у якій розташована пара сил, і спрямований таким чином, що, дивлячись з кінця вектора, можна

Частина перша

побачити поворот площини дії пари проти напрямку руху стрілки годинника. Також було встановлено, що пару сил можна пересувати і повертати у площині її дії, а також переносити у паралельну площину, оскільки момент пари сил є вектором вільним. Таким чином, момент пари сил як вектор або векторний момент пари можна переносити вздовж лінії його дії і пересувати паралельно самому собі. На підставі викладеного можна стверджувати, що пари сил у просторі є еквівалентними, якщо їхні векторні моменти рівні за модулем, паралельні і спрямовані в один бік.

1.9.4. Додавання просторової системи пар

Додати пари сил у просторі означає знайти таку рівнодійну пару, яка буде еквівалентною заданій системі пар (рис. 1.53).

А оскільки кожна пара сил характеризується її моментом як вектором, то момент еквівалентної пари сил повинен дорівнювати геометричній сумі векторних моментів складових пар сил.

Уявимо тіло, до якого прикладена система пар сил, довільно розташованих у просторі (рис. 1.53).

Позначимо вектори цих моментів через $\vec{m}_1, \vec{m}_2, \dots, \vec{m}_n$.

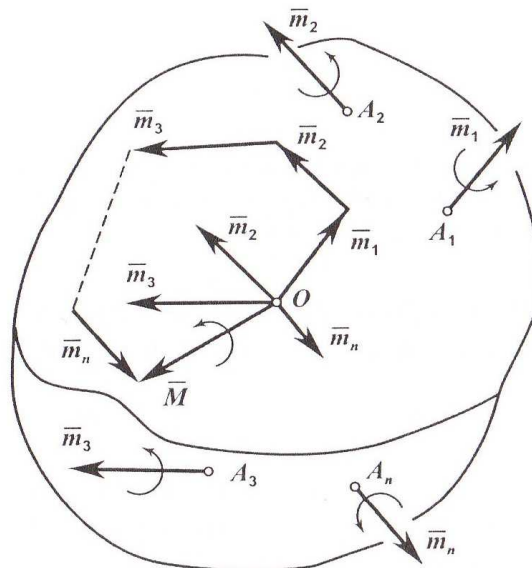


Рис. 1.53

Оскільки вектори-моменти пар сил є вільними векторами, то їх можна переносити паралельно самим собі у довільну точку. Якщо звести ці вектори до одного центра, то будемо мати систему векторних моментів, як систему збіжних векторів, яку можна геометрично додати.

Як відомо, додавання векторних моментів можна здійснювати за

правилом геометричного додавання векторів різної фізичної природи (сила, швидкість, прискорення тощо) методом силового многокутника. Векторну суму можна записати наступним чином:

$$\bar{M} = \bar{m}_1 + \bar{m}_2 + \dots + \bar{m}_n = \sum_{k=1}^n \bar{m}_k . \quad (1.103)$$

Таким чином, векторний момент рівнодійної або підсумкової пари дорівнює геометричній сумі векторних моментів складових пар .

1.9.5. Умови рівноваги системи пар у просторі

Якщо на тіло діє система пар сил, довільно розташованих у просторі, то тіло буде у стані рівноваги тільки тоді, коли момент рівнодійної (еквівалентної) пари дорівнює нулю. А оскільки векторний момент рівнодійної пари визначається як геометрична сума моментів складових пар, то ця векторна сума теж повинна дорівнювати нулю. Подібна умова рівноваги запишеться так:

$$\bar{M} = \bar{m}_1 + \bar{m}_2 + \dots + \bar{m}_n = \sum_{k=1}^n \bar{m}_k = 0 . \quad (1.104)$$

Для рівноваги тіла, яке перебуває під дією довільної системи пар сил у просторі, необхідно і достатньо, щоб векторна сума моментів складових пар дорівнювала нулю.

1.9.6. Зведення просторової системи довільних сил до центра. Головний вектор і головний момент системи

Уявимо тіло, яке перебуває під дією просторової системи довільних сил $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3, \dots, \bar{P}_n$, прикладених у точках $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ (рис. 1.54).

Виберемо довільну точку O як центр зведення і побудуємо прямокутну систему декартових координат $Oxuz$.

Послідовно перенесемо сили паралельно самим собі у центр O (метод Пуансо). При цьому до тіла необхідно кожен раз додавати моменти «приєднаних» компенсаційних пар сил, які дорівнюють моментам заданих сил відносно центра перенесення O . Момент першої пари позначимо $\bar{m}_1 = \bar{m}_o(\bar{P}_1)$, він прикладений у точці O перпендикулярно до площини трикутника OA_1P_1 і спрямований за правилом свердлика. Теж саме зробимо і з іншими силами, прикладеними до тіла. У результаті цього перенесення у центрі зведення O отримаємо систему збіжних сил і систему моментів пар сил у вигляді векторів, тобто, систему векторних моментів.

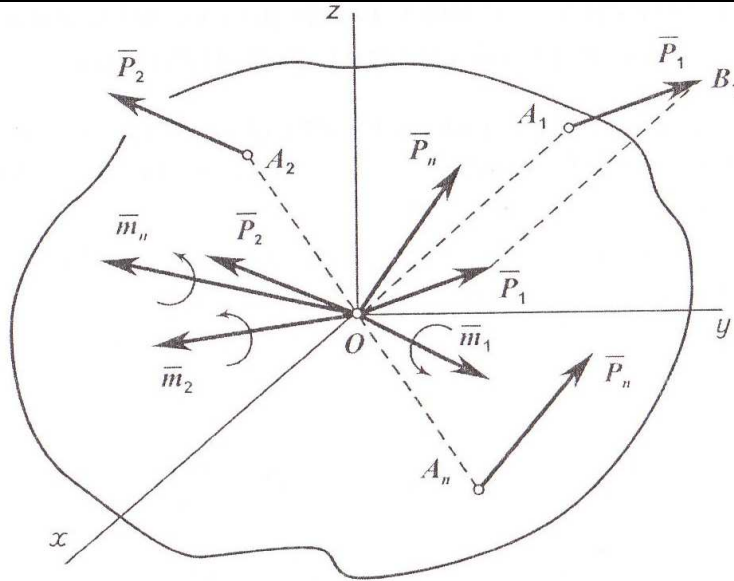


Рис. 1.54

Головний вектор \bar{R} дорівнює геометричній сумі векторів усіх сил, прикладених до тіла, а головний момент \bar{M} дорівнює векторній сумі усіх моментів сил відносно центра зведення. Систему збіжних сил $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3, \dots, \bar{P}_n$, перенесених і прикладених у центрі O , можна перетворити на підставі відомого методу векторних перетворень для системи збіжних сил і замінити однією підсумковою силою \bar{R} , яка називається головним вектором просторової системи довільних сил.

Аналогічні перетворення проведемо і для системи векторних моментів приєднаних пар.

Вектори-моменти пар $\bar{m}_1, \bar{m}_2, \bar{m}_3, \dots, \bar{m}_n$, які теж прикладені у центрі O , також можна замінити однією парою з підсумковим моментом \bar{M} , який називається головним моментом просторової системи довільних сил.

$$\left. \begin{aligned} \bar{R} &= \bar{P}_1 + \bar{P}_2 + \bar{P}_3 + \dots + \bar{P}_n = \sum_{k=1}^n \bar{P}_k, \\ \bar{M} &= \bar{m}_1 + \bar{m}_2 + \bar{m}_3 + \dots + \bar{m}_n = \sum_{k=1}^n \bar{m}_k. \end{aligned} \right\} \quad (1.105)$$

Отже, будь-яка **просторова система** довільних сил, що діє на тіло, може бути зведена до однієї сили – **головного вектора системи** і однієї пари сил – **головного моменту системи просторових сил**.

У загальному випадку головний вектор \bar{R} не залежить від положення центра зведення O , а головний момент \bar{M} , навпаки, залежить від положення центра, тому що за іншого положення центра змінюються плечі «приєднаних» пар або рівні їм плечі заданих сил відносно центра зведення.

1.9.7. Обчислення головного вектора і головного моменту просторової системи довільних сил

Визначимо аналітично головний вектор просторової системи довільних сил \bar{R} через його проєкції на осі просторової системи координат $Oxyz$. Позначимо ці проєкції літерами з відповідними індексами R_x, R_y, R_z . Проєкція головного вектора на вісь дорівнює алгебраїчній сумі проєкцій складових сил на ту саму вісь:

$$\left. \begin{aligned} R_x &= P_{1x} + P_{2x} + P_{3x} + \dots + P_{nx} = \sum_{k=1}^n P_{kx}, \\ R_y &= P_{1y} + P_{2y} + P_{3y} + \dots + P_{ny} = \sum_{k=1}^n P_{ky}, \\ R_z &= P_{1z} + P_{2z} + P_{3z} + \dots + P_{nz} = \sum_{k=1}^n P_{kz}. \end{aligned} \right\} \quad (1.106)$$

Якщо відомі проєкції головного вектора R на осі координат, то можна визначити його величину як діагональ паралелепіпеда, а якщо потрібно, то і напрямні косинуси:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}, \quad (1.107)$$

$$\cos(x, \wedge \bar{R}) = \frac{R_x}{R}, \quad \cos(y, \wedge \bar{R}) = \frac{R_y}{R}, \quad \cos(z, \wedge \bar{R}) = \frac{R_z}{R}.$$

Проєкція головного моменту \bar{M} на будь-яку вісь дорівнює алгебраїчній сумі проєкцій моментів складових сил на ту саму вісь:

$$\left. \begin{aligned} M_x &= [m_o(\bar{P}_1)]_x + [m_o(\bar{P}_2)]_x + \dots + [m_o(\bar{P}_n)]_x, \\ M_y &= [m_o(\bar{P}_1)]_y + [m_o(\bar{P}_2)]_y + \dots + [m_o(\bar{P}_n)]_y, \\ M_z &= [m_o(\bar{P}_1)]_z + [m_o(\bar{P}_2)]_z + \dots + [m_o(\bar{P}_n)]_z. \end{aligned} \right\} \quad (1.108)$$

Але проєкція моменту сили відносно точки на вісь, яка проходить крізь цю точку, дорівнює моменту сили відносно цієї осі:

$$\left. \begin{aligned} [m_o(\bar{P}_1)]_x &= m_x(\bar{P}_1), \quad [m_o(\bar{P}_2)]_x = m_x(\bar{P}_2), \quad \dots, \quad [m_o(\bar{P}_n)]_x = m_x(\bar{P}_n), \\ [m_o(\bar{P}_1)]_y &= m_y(\bar{P}_1), \quad [m_o(\bar{P}_2)]_y = m_y(\bar{P}_2), \quad \dots, \quad [m_o(\bar{P}_n)]_y = m_y(\bar{P}_n), \\ [m_o(\bar{P}_1)]_z &= m_z(\bar{P}_1), \quad [m_o(\bar{P}_2)]_z = m_z(\bar{P}_2), \quad \dots, \quad [m_o(\bar{P}_n)]_z = m_z(\bar{P}_n), \end{aligned} \right\}$$

З урахуванням останнього можна остаточно визначити проєкції вектора головного моменту на осі координат:

$$\left. \begin{aligned} M_x &= m_x(\bar{P}_1) + m_x(\bar{P}_2) + m_x(\bar{P}_3) + \dots + m_x(\bar{P}_n) = \sum_{k=1}^n m_x(\bar{P}_k), \\ M_y &= m_y(\bar{P}_1) + m_y(\bar{P}_2) + m_y(\bar{P}_3) + \dots + m_y(\bar{P}_n) = \sum_{k=1}^n m_y(\bar{P}_k), \\ M_z &= m_z(\bar{P}_1) + m_z(\bar{P}_2) + m_z(\bar{P}_3) + \dots + m_z(\bar{P}_n) = \sum_{k=1}^n m_z(\bar{P}_k). \end{aligned} \right\} \quad (1.109)$$

Якщо відомі проекції головного моменту \bar{M} на осі координат, то неважко визначити модуль головного векторного моменту:

$$M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}. \quad (1.110)$$

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Як читається теорема про перенесення пари сил у паралельну площину?
2. Які умови еквівалентності пар у просторі?
3. Як додати пари, що довільно розташовані у просторі?
4. Яка умова рівноваги системи пар у просторі?
5. Чому дорівнює головний вектор та головний момент просторової системи сил?
6. Як обчислити аналітично головний вектор та головний момент просторової системи довільних сил?
7. До яких силових факторів можна звести просторову систему довільних сил?
8. Про які окремі випадки зведення просторової системи довільних сил ви знаєте?
9. Чи можна звести до рівнодійної просторову систему довільних сил?
10. Що таке «динама» і як звести до неї будь-яку просторову систему довільних сил?

1.10. рівновага тіла під дією просторових систем сил

1.10.1. Умови рівноваги тіла у просторі

Оскільки будь-яку просторову систему довільних сил можна звести до двох силових факторів: однієї сили, головного вектора \bar{R} і однієї пари сил, головного моменту \bar{M} , які прикладені до тіла, то для рівноваги тіла необхідно і достатньо, щоб головний вектор \bar{R} і головний момент \bar{M} системи сил одночасно дорівнювали нулю:

$$\bar{R} = 0, \quad \bar{M} = 0. \quad (1.111)$$

Умова (1.119) справджується, якщо кожен доданок під радикалом у виразах (1.115) і (1.118) теж дорівнюватиме нулю:

$$\bar{R} = 0 \Rightarrow R_x = 0; \quad R_y = 0; \quad R_z = 0;$$

$$\bar{M} = 0 \Rightarrow M_x = 0; \quad M_y = 0; \quad M_z = 0.$$

Тоді на підставі виразів (1.111) умови рівноваги тіла під дією просторової системи довільних сил будуть мати такий вигляд:

$$\left. R_x = \sum_{k=1}^n P_{kx} = 0, R_y = \sum_{k=1}^n P_{ky} = 0, R_z = \sum_{k=1}^n P_{kz} = 0, \right\} \quad (1.112)$$

$$\left. M_x = \sum_{k=1}^n m_x(\bar{P}_k) = 0, M_y = \sum_{k=1}^n m_y(\bar{P}_k) = 0, M_z = \sum_{k=1}^n m_z(\bar{P}_k) = 0. \right\} \quad (1.113)$$

На підставі цих умов складаються конкретні рівняння рівноваги тіла.

Отже, **для рівноваги тіла, яке перебуває під дією просторової системи довільних сил, необхідно і достатньо, щоб алгебраїчні суми проєкцій сил на кожену із трьох координатних осей і алгебраїчні суми моментів сил відносно цих же осей дорівнювали нулю.**

1.10.2. Умови рівноваги тіла під дією просторової системи паралельних сил

Якщо сили, що прикладені до тіла, розташовані у просторі, але лінії їх дії паралельні, то можна так вибрати систему координат, щоб одна з осей (наприклад, вісь z) була паралельна цим силам (рис. 1.55).

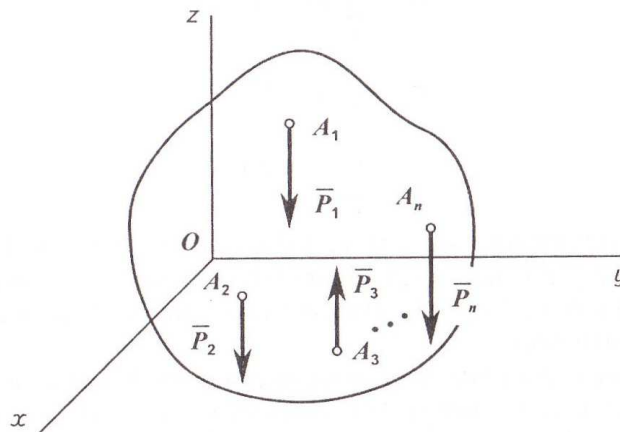


Рис. 1.55

Тоді дві інші осі (x, y) утворюють площину, яка буде перпендикулярною цим силам, тому проєкції заданих сил на осі x і y дорівнюватимуть нулю. Як паралельні сили, задані сили не створюють

Частина перша

моментів відносно осі z .

Отже, щодо загальної системи умов рівноваги (1.120), (1.121), то для просторової системи паралельних сил три умови рівноваги випадають, а залишаються три інші. Тоді для рівноваги просторової системи паралельних сил маємо наступні умови:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^n P_{kz} = 0, \quad \sum_{k=1}^n m_x(\bar{P}_k) = 0, \quad \sum_{k=1}^n m_y(\bar{P}_k) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.114)$$

Таким чином, для рівноваги тіла, що перебуває під дією просторової системи паралельних сил, необхідно і достатньо, щоб алгебраїчна сума проєкцій сил на вісь, яка паралельна силам, і алгебраїчні суми моментів відносно двох інших осей дорівнювали нулю.

1.10.3. Методика розв'язування задач і приклад для просторової системи довільних сил

Приклад 1.37

Горизонтальний вал трансмісії (рис. 1.56) несе два шківів C і D пасової передачі і може обертатися у підшипниках A і B . Радіуси шківів $r_C = 0,2 \text{ м}$, $r_D = 0,25 \text{ м}$.

Натяги гілок паса на шківі C – горизонтальні \bar{T}_1 і \bar{t}_1 , до того ж, $T_1 = 2t_1 = 490 \text{ Н}$.

Натяги гілок паса на шківі D – \bar{T}_2 і \bar{t}_2 , до того ж, $T_2 = 2t_2$, із вертикаллю вони утворюють кут $\alpha = 30^\circ$.

Лінійні розміри вала $a = b = 0,5 \text{ м}$, $c = 1 \text{ м}$. Система перебуває у стані рівноваги.

Визначити натяги гілок паса T_2, t_2 і реакції опорних підшипників A і B .

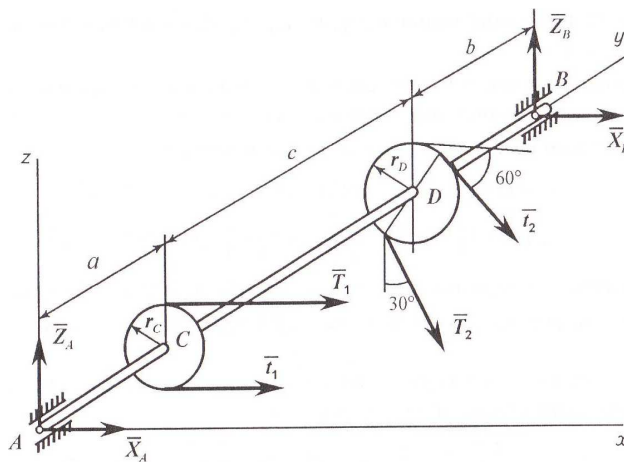


Рис. 1.56

Розв'язання

Розглянемо рівновагу вала AB із шківками C і D . Звільнимо вал від в'язей, замінивши їх відповідними реакціями.

У підшипниках реакції розташовані у площині, перпендикулярній осі вала AB .

Таким чином, реакції підшипників A і B розташовані відповідно у площині xAz і у площині, що паралельна до неї і проходить крізь точку B .

Невідомий вектор кожної реакції підшипників у площині визначається двома проекціями на осі x і z , як це показано на рис. 1.56

Після зроблених операцій на схемі отримана просторова система довільних сил, що перебуває у стані рівноваги.

Запишемо на підставі умов рівноваги (1.112) і (1.113) відповідні рівняння рівноваги просторової системи довільних сил (а).

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^n P_{kx} = 0; \quad X_A + X_B + t_1 + T_1 + t_2 \cos 60^\circ + T_2 \cos 60^\circ = 0, \\ \sum_{k=1}^n P_{kz} = 0; \quad Z_A + Z_B - t_2 \cos 30^\circ - T_2 \cos 30^\circ = 0, \\ \sum_{k=1}^n m_x(\bar{P}_k) = 0; \quad -t_2 \cos 30^\circ (a+c) - T_2 \cos 30^\circ (a+c) + Z_B (a+b+c) = 0, \\ \sum_{k=1}^n m_y(\bar{P}_k) = 0; \quad -t_1 r_C + T_1 r_C - T_2 r_D + t_2 r_D = 0, \\ \sum_{k=1}^n m_z(\bar{P}_k) = 0; \quad -(t_1 + T_1)a - (T_2 + t_2) \cos 60^\circ (a+c) - X_B (a+b+c) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

Як можна побачити із системи рівнянь (а), друге рівняння відсутнє, оскільки серед сил, прикладених до тіла, немає таких, які б могли бути спроектовані на вісь y (тобто всі сили лежать у площинах, перпендикулярних до осі y).

Проте, така система статично визначена, оскільки кількість невідомих величин (t_2, X_A, Z_A, X_B, Z_B) дорівнює кількості рівнянь рівноваги – 5.

Якщо підставити у цю систему рівнянь числові значення величин, що задані (враховуючи, що за умовою задачі $T_2 = 2t_2$) і розв'язати ці рівняння відносно невідомих, отримаємо відповіді:

$$\begin{aligned} t_2 &= 1962 \text{ Н}; T_2 = 3924 \text{ Н}; X_A = -6553,9 \text{ Н}; \\ Z_A &= 1275,3 \text{ Н}; X_B = -4046,7 \text{ Н}; Z_B = 3825,9 \text{ Н}. \end{aligned}$$

Значення визначених величин X_A і X_B від'ємні, а це означає, що, фактично, ці реакції мають протилежний напрямок, ніж це показано на рис. 1.56.

Для остаточного визначення реакцій підшипників в опорах A і B необхідно додати векторно їхні складові:

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Z_A^2} = \sqrt{(-6553,9)^2 + (1275,3)^2} = 6676,8 \text{ Н};$$

$$R_B = \sqrt{X_B^2 + Z_B^2} = \sqrt{(-4046,7)^2 + (3825,9)^2} = 5569,8 \text{ Н}.$$

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Які умови рівноваги тіла, що перебуває під дією просторової системи довільних сил? Сформулюйте їх.
2. Скільки незалежних рівнянь рівноваги можна скласти для просторової системи довільних сил?
3. Скільки рівнянь рівноваги можна скласти для просторової системи паралельних сил?
4. Як читається теорема Варіньйона про момент рівнодійної сили відносно осі?
5. Яка сила називається зрівноважувальною і чим вона відрізняється від рівнодійної?
7. Які умови рівноваги паралельних сил у просторі?
8. Надайте методику розв'язання задач для просторової системи довільних сил.
9. Напишіть рівняння рівноваги для просторової системи збіжних сил.
10. Сформулюйте умови рівноваги тіла, навантаженого системою довільних сил у просторі.
11. Сформулюйте умови рівноваги тіла, навантаженого системою паралельних сил у просторі.

1.11. центр паралельних сил і центр ваги

1.11.1. Центр паралельних сил

Допустимо, що до деякого тіла у точках $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ прикладена система паралельних і однаково спрямованих векторів сил $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3, \dots, \bar{P}_n$ (рис. 1.57. Додамо векторно сили \bar{P}_1 і \bar{P}_2 , визначивши їх рівнодійну $\bar{R}_{1,2}$:

$$\bar{R}_{1,2} = \bar{P}_1 + \bar{P}_2.$$

Точка C_1 прикладання цієї рівнодійної $\bar{R}_{1,2}$ визначається за відомим правилом додавання двох паралельних сил, які мають однаковий напрямок.

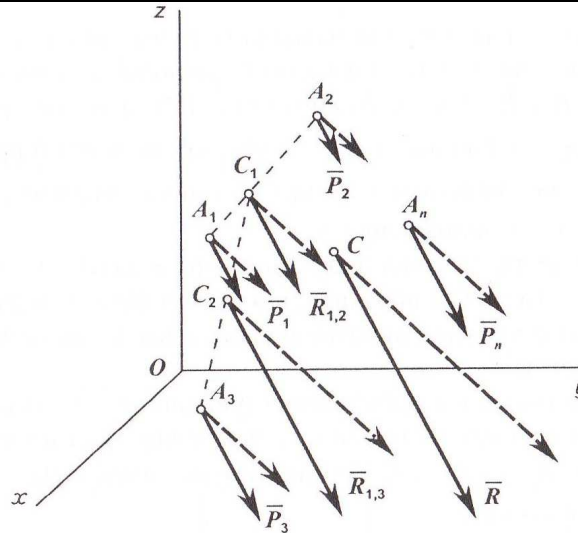


Рис. 1.57

Оскільки вектори сил \bar{P}_1 і \bar{P}_2 прикладені у точках A_1 і A_2 , то, з'єднавши ці точки прямою, можна відшукати положення точки C_1 на цій прямій за відомим рівнянням або пропорцією:

$$P_1 \cdot A_1C_1 = P_2 \cdot A_2C_1. \quad (1.115)$$

Далі аналогічно додамо вектори сил $\bar{R}_{1,2}$ і \bar{P}_3 , отримуючи їх рівнодійну $\bar{R}_{1,3}$, яка є рівнодійною трьох сил:

$$\bar{R}_{1,3} = \bar{R}_{1,2} + \bar{P}_3 = \bar{P}_1 + \bar{P}_2 + \bar{P}_3. \quad (1.116)$$

Точка C_2 прикладення цієї рівнодійної $\bar{R}_{1,3}$ також визначається за вказаним вище правилом на прямій C_1A_3 .

Таким же чином поведимося з рештою сил, послідовно їх додаючи, і отримаємо рівнодійну \bar{R} системи паралельних сил. Вона буде прикладена в точці C , спрямована у той же бік, що і задані паралельні сили, величина її буде дорівнювати:

$$R = P_1 + P_2 + P_3 + \dots + P_n = \sum_{k=1}^n P_k. \quad (1.117)$$

Повернемо вектори заданих сил навколо їх точок прикладання в один бік на один і той самий кут і знову знайдемо їх рівнодійну. Також починаємо з додавання сил \bar{P}_1 і \bar{P}_2 .

Але, як бачимо з рис. 1.57, а також з рівняння (1.115), ні модуль рівнодійної $\bar{R}_{1,2}$, ні положення точки її прикладання C_1 на прямій A_1A_2 , не зміняться.

Частина перша

Змінюється лише напрямок, який буде паралельним новому напрямку повернутих векторів.

І рівнодійна \bar{R} у такому випадку не змінює ні свого модуля, ні точки прикладання C . Змінюється лише напрямок її лінії дії.

Таким чином, точка прикладання рівнодійної \bar{R} системи паралельних сил завжди збігається з точкою C , положення якої відносно положень точок $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ завжди буде незмінним. Ця точка має назву центра паралельних сил.

Центр паралельних сил – це точка прикладання їх рівнодійної, яка не змінює свого положення під час повороту усіх векторів сил на однаковий кут в один і той самий бік.

1.11.2. Координати центра паралельних сил

Допустимо, що до тіла у точках $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ прикладена система паралельних векторів сил $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3, \dots, \bar{P}_n$, яка зведена до вектора рівнодійної сили \bar{R} , прикладеної у точці C (рис. 1.58). Виберемо прямокутну систему декартових координат $Oxyz$ так, щоб б одна з осей (наприклад, вісь z) була паралельна заданим силам. Знайдемо моменти усіх сил відносно осей координат x, y, z .

Позначимо у прийнятій системі відліку координати точок прикладання сил $A_1(x_1, y_1, z_1), A_2(x_2, y_2, z_2), A_3(x_3, y_3, z_3), \dots, A_n(x_n, y_n, z_n)$ і точки прикладання рівнодійної $\bar{R} - C(x_c, y_c, z_c)$.

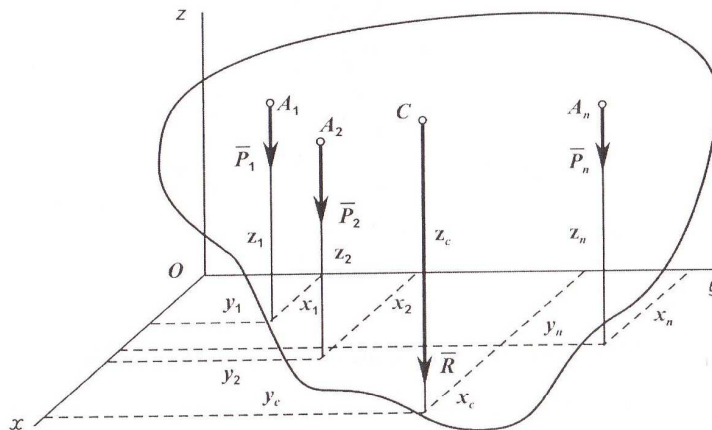


Рис. 1.58

Обчислимо спочатку моменти всіх сил відносно осі y . Оскільки $\bar{R} = \sum_{k=1}^n \bar{P}_k$, то за теоремою Варінійона для осі запишемо:

$$m_y(\bar{R}) = \sum_{k=1}^n m_y(\bar{P}_k),$$

$$R \cdot x_C = P_1 \cdot x_1 + P_2 \cdot x_2 + P_3 \cdot x_3 + \dots + P_n \cdot x_n = \sum_{k=1}^n P_k \cdot x_k. \quad (1.118)$$

Звідки координата центра ваги:

$$x_C = \frac{\sum_{k=1}^n P_k x_k}{R}. \quad (1.119)$$

Аналогічно визначимо моменти усіх сил відносно осі x :

$$-R \cdot y_C = -P_1 \cdot y_1 - P_2 \cdot y_2 - P_3 \cdot y_3 - \dots - P_n \cdot y_n = \sum_{k=1}^n (-P_k \cdot y_k) \quad (1.120)$$

і друга координата
$$y_C = \frac{\sum_{k=1}^n P_k y_k}{R}. \quad (1.121)$$

Далі повернемо всі сили на один і той самий кут в один бік (наприклад, на 90° , перпендикулярно до площини yOz).

Положення точки C , як відомо, під час повороту усіх сил на однаковий кут, в один і той самий бік не змінюється. Тепер обчислимо моменти усіх сил відносно осі y :

$$R \cdot z_C = P_1 \cdot z_1 + P_2 \cdot z_2 + P_3 \cdot z_3 + \dots + P_n \cdot z_n = \sum_{k=1}^n P_k \cdot z_k, \quad (1.122)$$

третя координата

$$z_C = \frac{\sum_{k=1}^n P_k z_k}{R}. \quad (1.123)$$

Таким чином, остаточно отримаємо формули для **координат центра паралельних сил**:

$$x_C = \frac{\sum_{k=1}^n P_k x_k}{R}, \quad y_C = \frac{\sum_{k=1}^n P_k y_k}{R}, \quad z_C = \frac{\sum_{k=1}^n P_k z_k}{R}. \quad (1.124)$$

1.11.3. Центр ваги тіла, об'єму, площі, лінії

На довільне тіло, яке розміщене поблизу поверхні землі, діє сила, що має вертикальний донизу напрямок і називається силою ваги (рис. 1.59).

Вважаємо радіус Землі достатньо великим (приблизно 6,4 тис. км). Тоді для тіл, розміри яких є малими порівняно з цим радіусом, вектори сили ваги окремих частинок малих тіл можна вважати паралельними, вони зберігають свою власну величину, незважаючи на будь-які повороти тіла.

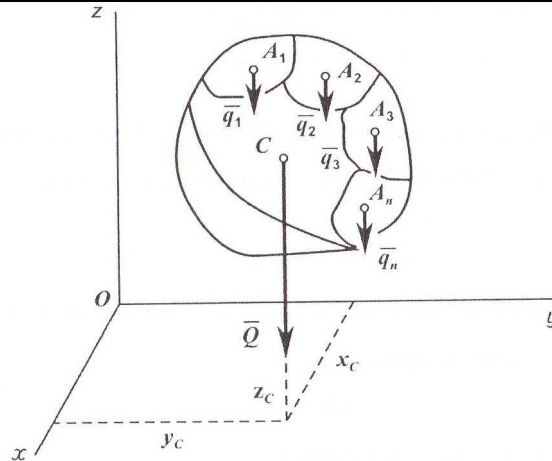


Рис. 1.59

Для визначення положення центра ваги умовно поділимо тіло на багато частинок.

Кожна частинка має свою силу ваги $\bar{q}_1, \bar{q}_2, \bar{q}_3, \dots, \bar{q}_n$. Як легко побачити, це є система паралельних сил, рівнодійну якої \bar{Q} можна визначити, використовуючи вираз (1.128):

$$\bar{Q} = \bar{q}_1 + \bar{q}_2 + \bar{q}_3 + \dots + \bar{q}_n = \sum_{k=1}^n \bar{q}_k. \quad (1.125)$$

За будь-якого повороту тіла сили \bar{q}_k залишаються прикладеними до тих самих точок і залишаються паралельними між собою. Змінюється лише напрямок цих сил відносно тіла. А тому рівнодійна \bar{Q} буде під час довільного повороту тіла прикладена у точці, яка є центром паралельних сил. Ця точка має назву центра ваги тіла.

Таким чином, **центр ваги тіла** – це геометрична точка, яка незмінно зв'язана з цим тілом, до якої прикладена сила ваги тіла і яка не змінює свого положення за довільного повороту тіла.

Визначимо **координати центра ваги** як центра паралельних сил $\bar{q}_1, \bar{q}_2, \bar{q}_3, \dots, \bar{q}_n$ на підставі виразів (1.124):

$$x_c = \frac{\sum_{k=1}^n q_k x_k}{Q}; \quad y_c = \frac{\sum_{k=1}^n q_k y_k}{Q}; \quad z_c = \frac{\sum_{k=1}^n q_k z_k}{Q}; \quad (1.126)$$

де x_k, y_k і z_k – координати прикладання сили ваги частинок тіла \bar{q}_k .

Розглянемо об'єм. Якщо тіло однорідне, то вага кожної частини пропорційна її об'єму:

$$q_k = \gamma \cdot V_k, \quad (1.137)$$

де γ – питома вага (вага одиниці об'єму); V_k – об'єм частинки тіла.

Вага усього тіла

$$Q = \gamma \cdot V, \quad (1.128)$$

де V – об'єм тіла; γ – питома вага тіла.

Тепер підставимо вирази (1.127) і (1.128) у вираз (1.126). До того ж питома вага γ , як загальний множник, скорочується.

$$x_C = \frac{\sum_{k=1}^n q_k x_k}{Q} = \frac{\sum_{k=1}^n \gamma (V_k x_k)}{\gamma \cdot V} = \frac{\sum_{k=1}^n V_k x_k}{V} \quad (1.129)$$

Аналогічно поведимось і під час визначення двох інших координат.

Тепер **розглянемо пластину** (рис. 1.60), товщина якої h відносно мала, тоді координата центра її ваги $z_C = \frac{h}{2}$.

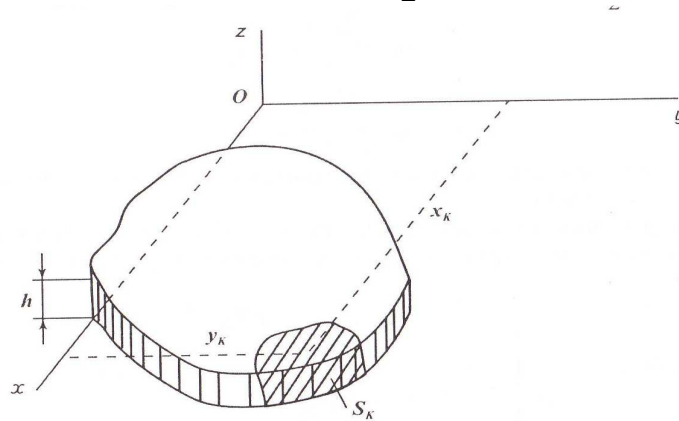


Рис. 1.60

Для визначення двох інших координат x_C, y_C використаємо вирази (1.126).

Пластину треба уявити у вигляді декількох частинок, які мають власну вагу. Далі вважаємо, що вага кожної частинки пластини

$$q_k = \gamma \cdot V_k = \gamma \cdot h \cdot s_k, \quad (1.130)$$

де γ – питома вага (вага одиниці об'єму); h – товщина пластини; S_k – площа кожної частинки пластини. Вага всієї пластини

$$Q = \gamma \cdot V = \gamma \cdot h \cdot S, \quad (1.131)$$

де S – площа пластини.

Тепер підставимо вирази (1.130) і (1.131) у перші два вирази (1.126).

Частина перша

Зробимо це спочатку для координати x_C :

$$x_C = \frac{\sum_{k=1}^n q_k x_k}{Q} = \frac{\sum_{k=1}^n \gamma h(s_k x_k)}{\gamma h \cdot S} = \frac{\sum_{k=1}^n s_k x_k}{S}. \quad (1.132)$$

Аналогічно обчислимо значення і другої координати y_C .

Остаточно матимемо **координати центра ваги тонкої пластини**:

$$x_C = \frac{\sum_{k=1}^n s_k x_k}{S}, \quad y_C = \frac{\sum_{k=1}^n s_k y_k}{S}. \quad (1.133)$$

Точка C , координати якої визначаються формулами (1.133), має назву центра ваги площі.

Далі визначимо координати центра ваги лінії (рис. 1.61). Це може бути, наприклад, дріт малого діаметра і постійного поперечного перерізу.

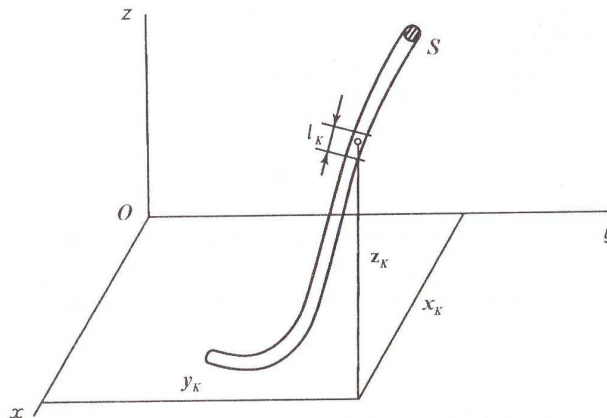


Рис. 1.61

Як і в попередніх випадках, спочатку визначимо вагу кожної частки лінії і вагу всієї лінії. Вага частки лінії

$$q_k = \gamma \cdot V_k = \gamma \cdot S \cdot l_k, \quad (1.134)$$

де γ – питома вага (вага одиниці об'єму); S – площа поперечного перерізу лінії; l_k – довжина частки лінії.

Вага всієї лінії

$$Q = \gamma \cdot V = \gamma \cdot S \cdot L, \quad (1.135)$$

де L – загальна довжина лінії.

Тепер підставимо значення виразів (1.134) і (1.135) у вираз (1.127) і визначимо спочатку координату x_C :

$$x_C = \frac{\sum_{k=1}^n q_k x_k}{Q} = \frac{\sum_{k=1}^n \gamma S(l_k x_k)}{\gamma S \cdot L} = \frac{\sum_{k=1}^n l_k x_k}{L}. \quad (1.136)$$

Таким же чином визначаємо дві інші координати центра ваги лінії.

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Що називають центром паралельних сил?
2. За якими формулами визначаються координати центра паралельних сил?
3. За якими формулами визначаються положення центра ваги тіла, об'єму, площі, лінії?
4. Що таке центр ваги тіла?
5. Як записати формули координат центра ваги тіла, об'єму, площі, лінії в інтегральній формі?

1.11.4. Способи визначення координат центра ваги тіла

У механіці знайшли застосування декілька способів визначення координат центра ваги тіл. Серед них розрізняють: метод симетрії, метод розбиття і доповнення, експериментальні способи. Розглянемо послідовно ці способи.

Метод симетрії

Якщо однорідне тіло має площину, вісь або центр симетрії, то його центр ваги лежить відповідно у площині симетрії, на осі симетрії або в центрі симетрії.

Таким чином, центр ваги однорідних симетричних тіл, таких як кільця, прямокутні пластини, прямокутні паралелепіпеди, кулі та інші тіла, які мають центр симетрії, розташований у геометричних центрах (центри симетрії) цих тіл.

Метод розбиття

Якщо тіло можна розбити на скінченне число таких часток, для кожної з яких положення центра ваги легко визначається, то координати центра ваги усього тіла можна визначити безпосередньо за формулами (1.126), (1.133), (1.36) і (1.137). Причому кількість доданків у чисельнику кожного із зазначених виразів дорівнюватиме кількості часток, на яке розбивається тіло.

Наведемо приклад визначення центра ваги тіла методом розбиття його

Частина перша

на окремі тіла, центри ваги яких відомі.

Приклад 1.39

Визначити координати центра ваги однорідної пластини. Розміри в міліметрах задані на рис. 1.62.

Оберемо осі координат x і y . Потрібно розбити пластину на окремі прямокутні частинки.

Для кожного прямокутника проведемо діагоналі, точки перетину яких c_1, c_2 і c_3 відповідають центрам ваги кожного прямокутника. У прийнятій системі координат неважко отримати значення координат цих точок (см): $c_1(-1, 1)$, $c_2(1, 5)$, $c_3(5, 9)$.

Площі кожного тіла дорівнюють, відповідно:

$$s_1 = 4 \text{ см}^2; s_2 = 20 \text{ см}^2; s_3 = 12 \text{ см}^2.$$

Площа всієї пластини $S = s_1 + s_2 + s_3 = 36 \text{ см}^2$.

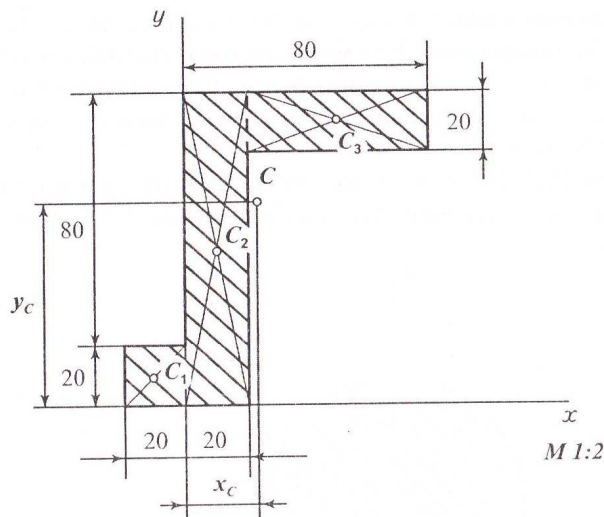


Рис. 1.62

Для визначення координат центра ваги заданої пластини використаємо вираз (1.144). Підставивши значення всіх відомих величин у рівняння, отримаємо:

$$x_c = \frac{\sum_{k=1}^n s_k x_k}{S} = \frac{s_1 x_1 + s_2 x_2 + s_3 x_3}{S} = 2,1 \text{ см},$$
$$y_c = \frac{\sum_{k=1}^n s_k y_k}{S} = \frac{s_1 y_1 + s_2 y_2 + s_3 y_3}{S} = 5,9 \text{ см}.$$

За обчисленими значеннями координат центра ваги пластини можна позначити точку $c(2,1; 5,9)$ на рис. 1.52.

Отже, **центр ваги** пластини, як **геометрична точка**, розміщений в

конкретному випадку за межами цієї пластини.

Метод доповнення

Спосіб, про який йдеться далі, є частковим випадком способу розбиття площі тіла. Він може застосовуватись до тіл, які мають вирізи, порожнини, причому для всього тіла без урахування вирізу або вирізаної частини тіла положення центра ваги відомо. Розглянемо приклад застосування такого методу.

Приклад 1.40

Визначити положення центра ваги круглої пластини радіусом R , яка має круговий отвір радіуса r (рис. 1.63). Відстань між точками C_1 і C_2 дорівнює a .

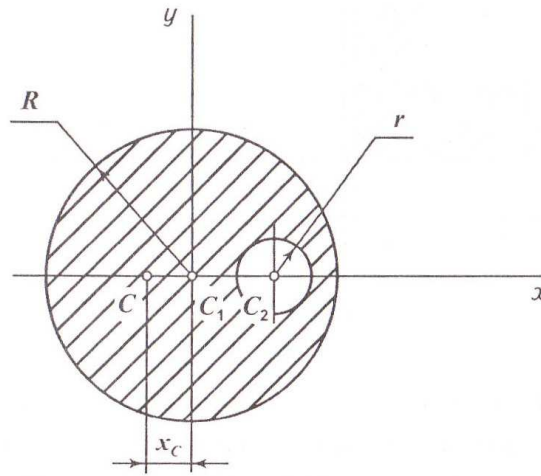


Рис. 1.63

Розв'язання

Як можна побачити з рисунка, центр ваги пластини міститься на осі симетрії пластини x , тобто на прямій, яка з'єднує точки C_1 і C_2 .

Таким чином, для визначення положення центра ваги цієї пластини необхідно обчислити тільки одну координату x_c , оскільки друга координата y_c дорівнює нулю. Покажемо осі координат x, y .

Приймемо, що пластина складається з двох тіл – з повного круга (без урахування вирізу) і тіла, яке утворено вирізом, площа якого віднімається.

У прийнятій системі координати x для центрів вказаних тіл дорівнюватимуть: $x_1 = 0$; $x_2 = C_1C_2 = a$.

Площі тіл $s_1 = \pi R^2$; $s_2 = -\pi r^2$. Загальна площа всього тіла дорівнюватиме фізичній різниці між площами першого і другого тіл, а саме: $S = s_1 - s_2 = \pi(R^2 - r^2)$.

Частина перша

Для визначення невідомої координати центра ваги заданої пластини використаємо перше рівняння виразу (1.134). Підставивши значення усіх відомих величин у це рівняння, отримаємо:

$$x_C = \frac{\sum_{k=1}^n s_k x_k}{S} = \frac{x_1 s_1 + x_2 s_2}{S} = \frac{-a \cdot \pi r^2}{\pi (R^2 - r^2)} = -\frac{a r^2}{(R^2 - r^2)}.$$

Оскільки значення координати x_C від'ємне, а друга координата $y_C = 0$, то центр ваги пластини C розміщений на осі x зліва від точки C_1 .

1.11.5. Центри ваги деяких однорідних тіл

Визначимо далі координати центрів ваги деяких простих однорідних тіл.

Центр ваги дуги кола

Розглянемо дугу AB кола радіусом R , у якої центральний кут OAB дорівнює 2α (радіан) (рис. 1.64).

Покажемо осі координат x, y , початок яких розмістимо у точці O . Оскільки дуга має вісь симетрії Ox , то центр її ваги буде розміщений саме на цій осі ($y_C = 0$).

Залишається обчислити тільки координату x_C . Використаємо для обчислення цієї координати перше рівняння виразу (1.147), замінивши вагу Q на довжину лінії L :

$$x_C = \frac{1}{L} \int x dl. \quad (1.138)$$

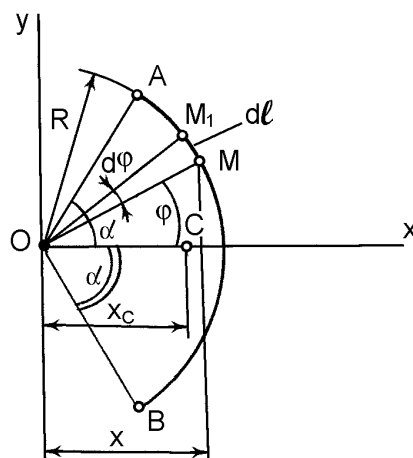


Рис. 1.64

Визначимо складові, які необхідно підставити у це рівняння. Для цього виділимо на дузі AB елемент MM_1 довжиною dl :

$$dl = R \cdot d\varphi. \quad (1.139)$$

Якщо кут φ визначає положення елемента MM_1 на дузі AB , то координата x цього елемента MM_1 дорівнюватиме:

$$x = R \cos \varphi. \quad (1.140)$$

Загальна довжина дуги AB

$$L = 2\alpha \cdot R. \quad (1.141)$$

Підставимо значення (1.140) і (1.141) у рівняння виразу (1.139). вважають, що інтеграл у чисельнику цього виразу має бути визначеним по всій довжині дуги:

$$\begin{aligned} x_C &= \frac{1}{L} \int_A^B x dl = \frac{R^2}{2\alpha R} \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos \varphi \cdot d\varphi = \frac{R}{2\alpha} \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos \varphi d\varphi = \\ &= \frac{R}{2\alpha} \sin \varphi \Big|_{-\alpha}^{\alpha} = \frac{R}{2\alpha} \left\{ \sin \alpha - \left[\sin (-\alpha) \right] \right\} = \frac{R \sin \alpha}{\alpha}. \end{aligned}$$

Таким чином, координата центра ваги дуги:

$$x_C = \frac{R \sin \alpha}{\alpha}. \quad (1.142)$$

Центр ваги трикутника

Уявимо довільний трикутник, вершини якого у прийнятій системі координат Ox відповідають точкам із координатами $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$ і $A_3(x_3, y_3)$ (рис. 1.65).

Якщо провести достатню кількість прямих, паралельних основі A_1A_3 , то вся площа трикутника складатиметься із смуг нескінченно малої ширини, тобто, ліній, центри ваги яких будуть розміщені посередині кожної смуги, а тому і центр ваги трикутника знаходитиметься на його медіані.

А якщо провести лінії, паралельні іншій стороні трикутника, то і в цьому випадку центр ваги буде розміщений на відповідній медіані. Таким чином, цілком очевидно, що центр ваги трикутника C буде розташований у точці перетину його медіан.

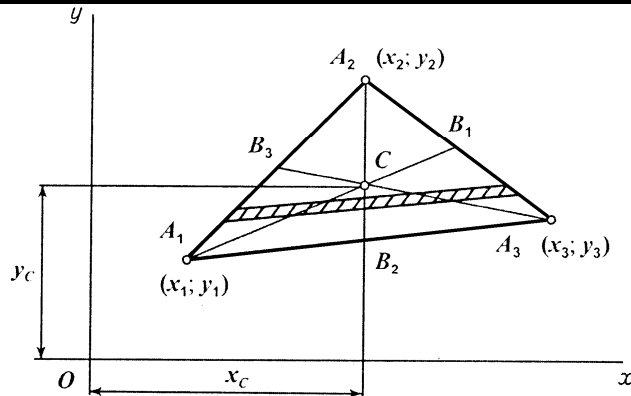


Рис. 1.65

Визначимо аналітично координати цієї точки. Із курсу аналітичної геометрії відомо, що точка перетину медіан трикутника у прийнятій системі координат визначається такими залежностями:

$$x_c = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3), y_c = \frac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3), \quad (1.143)$$

де x_1, x_2, \dots, x_3 – координати вершин трикутника.

Центр ваги сектора

Розглянемо коловий сектор OAB радіуса R , центральний кут якого дорівнює 2α (радіан) (рис. 1.66).

Центр ваги сектора розміщується на осі його симетрії, тобто на бісектрисі кута AOB .

Прийmemo її за вісь x і знайдемо на цій осі положення центра C .

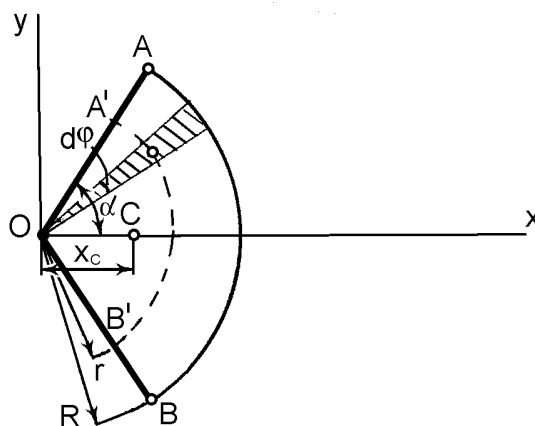


Рис. 1.66

Розіб'ємо площу сектора на нескінченно велику кількість елементарних секторів із центральними кутами $\Delta\varphi$. Розглядатимемо

кожний сектор як трикутник з основою $R \cdot \Delta\varphi$ і висотою R .

Центр ваги кожного трикутника знаходиться на відстані $r = \frac{2}{3}R$ від центра сектора.

Таким чином, центри ваги всіх трикутників розташовані на дузі $A'B'$.

Отже, якщо спрямувати кут до нуля $\Delta\varphi \rightarrow 0$, то центри ваги утворять дугу $A'B'$, на якій розміщений центр ваги сектора, і тоді залишається тільки знайти центр ваги дуги $A'B'$.

Використаємо формулу, за якою визначається центр ваги дуги кола радіусом r :

$$x_C = \frac{r \cdot \sin \alpha}{\alpha}, r = \frac{2}{3}R, x_C = \frac{2}{3} \frac{R \sin \alpha}{\alpha}. \quad (1.144)$$

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Які існують способи визначення координат центра ваги тіла?
2. Як визначити координати центра ваги дуги кола?
3. Як визначити координати центра ваги трикутника?
4. Як визначити координати центра ваги сектора?
5. Що таке метод симетрії і як ним користуються?
6. Що ви знаєте про методіку застосування способу розбиття тіла на частки?
7. Як і в яких випадках використовують метод підвішування плоских тіл?
8. Як визначають координати центра ваги складних машин?
9. На перетині яких прямих ліній розміщений центр ваги трикутника?
10. Чому дорівнює відстань від центра ваги трикутника до вершини?

РОЗДІЛ II КІНЕМАТИКА

2.1. Вступ. Кінематика матеріальної точки

2.1.1. Предмет кінематики

Кінематика – це розділ теоретичної механіки, в якому вивчають рух матеріальних об'єктів як моделей реальних тіл, як геометричних образів (матеріальна точка, абсолютно тверде тіло, матеріальна система) з геометричної точки зору, без урахування причин, що викликають цей рух. Тобто, *вивчаються геометричні властивості механічного руху* незалежно від фізичних факторів, що спричиняють ці рухи. Такий підхід не потребує врахування інерційних і силових характеристик: маси і моменту інерції, сили і моменту сили.

Кінематика спирається на основні положення геометрії, які визначають просторові співвідношення, необхідні під час вивчення механічного руху. На відміну від геометрії тут береться до уваги ще і час руху, оскільки *механічний рух відбувається у просторі і часі* як об'єктивно реальних формах існування матерії. Отже, вивчаються залежності між просторово-часовими характеристиками механічного руху.

Рух є формою існування матеріального світу, а механічний рух, найпростіша форма руху матерії, – одним із наслідків взаємодії матеріальних тіл.

Під механічним рухом розуміють зміну положення тіл у просторі протягом часу по відношенню до іншого тіла, з яким пов'язана система відліку.

Тільки на початку ХХ ст. створюється нова система просторово-часових відношень, яка базується на постулатах теорії відносності Лоренца, Пуанкаре, Ейнштейна і встановлює більш точний взаємозв'язок матеріальних об'єктів, що рухаються, з простором і часом.

Вперше чітко сформульовано ідею суто геометричного дослідження руху твердого тіла у творі Л. Ейлера «Теорія руху твердого тіла» (1775 р.). Дещо пізніше Г. Монж і Л. Карно вказують на необхідність виділити із механіки в окремий розділ вчення про геометричний рух у зв'язку з дослідженням кінематики машин. Цими ідеями скористувався А. Ампер, коли у праці «Дослід по філософії наук» (1834) запропонував термін «Кінематика», а вже в 1837 р. Ж. Понселе вперше створив курс кінематики і дванадцять років читав його у Паризькому університеті.

Згідно з основами класичної механіки, сформульованими

І. Ньютоном, *простір*, в якому відбувається рух геометричних моделей у формі перелічених матеріальних об'єктів, *вважається абсолютним*, метричні особливості його незалежні від руху матерії у різних точках і напрямках (*однорідність і ізотропність простору*).

За цими уявленнями простір і час, у якому відбувається рух, як би формально відокремлений від властивостей матерії. Метричні властивості цього простору повністю описуються системою аксіом Евкліда, де, наприклад, відстані між двома точками простору завжди визначено у вигляді довжини відрізка прямої.

Такий *простір* сприймається як *тривимірний*, тобто, у відповідній системі відліку *кожній точці* абсолютного простору відповідають *три координати*. Одиницею вимірювання простору у Міжнародній системі одиниць СІ є *метр (м)*.

Властивості *абсолютного часу* – *однорідність і універсальність*. Час однаково спливає у всіх точках простору, на всіх тілах. Вимір часу базується на відповідності між послідовними моментами часу і множиною дійсних чисел. Тому можна довільно вибрати початок відліку часу і вимірювати інтервали між окремими моментами часу. Одиницею вимірювання часу є *секунда (с)*.

За абсолютним простором і часом вводиться поняття *системи відліку*. Це сукупність системи координат, незмінно пов'язаної з деяким тілом відліку і пристроєм із періодичним процесом для вимірювання часу (годинник). Ця система може бути як рухомою, так і умовно нерухомою.

Хоча теорія відносності має інші уявлення про простір і час, ніж класична механіка, проте, для випадків звичайних рухів тривимірний евклідів простір і універсальний час є досить точним відображенням реального часу і простору.

У множині систем відліку, в яких можна вважати простір і час як абсолютні, вибираються так звані *інерціальні* системи відліку, в яких ізольована матеріальна точка може необмежено довго перебувати у стані спокою або рівномірного і прямолінійного руху під дією системи зрівноважених сил.

Якщо деяка система відліку є інерціальною із заданим ступенем точності, то можна вказати нескінченну кількість інерціальних систем відліку, які рухаються відносно вибраної системи поступально, рівномірно та прямолінійно.

Під час розв'язування задач небесної механіки, обчислення траєкторій супутників приймається *геліоцентрична система відліку* з початком у центрі мас Сонячної системи і осями координат, спрямованими на «нерухомі» зірки. У разі розв'язування багатьох технічних задач за інерціальну приймають *геоцентричну систему* відліку, яка пов'язана з центром Землі.

Рух тіла або закон руху тіла відносно вибраної системи відліку вважається відомим, якщо можна визначити положення цього тіла відносно даної системи у будь-який момент часу. При цьому розрізняють момент часу і проміжок часу. **Проміжок часу** – це перебіг часу між двома фізичними явищами. **Момент часу** – це границя між двома суміжними проміжками часу.

Положення моделі відносно даної системи відліку визначається відповідними параметрами, а її **рух – кінематичними рівняннями**, що виражають зміну цих параметрів як функцій часу.

Основна задача кінематики полягає у тому, щоб за відомими кінематичними рівняннями руху, що визначають закон руху даного геометричного образу, **знайти кінематичні характеристики цього руху**: траєкторії різних точок, їхні лінійні швидкості і прискорення; кутові швидкості і кутові прискорення тіла.

Очевидно, що рух геометричного образу щодо прийнятої системи відліку буде відомим, якщо є відомим рух кожної точки цього образу відносно цієї самої системи відліку. Тому вивченню руху будь-якого геометричного образу передуює вивчення руху однієї його точки, зумовлюючи поділення кінематики на два розділи: кінематику точки і кінематику твердого тіла.

2.1.2. Основні положення кінематики точки

Обмежимося спочатку вивченням руху точки відносно нерухомої системи координат. **Законом руху** матеріальної точки називають спосіб її переходу з одного положення у просторі і часі в інше положення. Введемо поняття переміщення і руху точки.

Під **переміщенням точки** розуміють перехід із одного положення у просторі в друге за визначений елементарний проміжок часу. Тобто, переміщення точки повністю визначається початковим і кінцевим положеннями і елементарним проміжком часу Δt .

Під **рухом точки** розуміють перехід із одного (початкового) положення у просторі в друге (кінцеве) деяким способом у певній залежності від часу.

Залежність між положенням точки, що рухається у просторі, і часом визначає **рівняння руху точки**. Основними кінематичними характеристиками руху точки є її **положення, швидкість і прискорення**.

Основною задачею кінематики точки є встановлення способу задання руху точки по відношенню до вибраної системи відліку і, виходячи з цього, знаходження методів визначення її кінематичних характеристик.

Задати рух кінематично або задати закон руху точки означає вказати

такий спосіб, який дає можливість визначити положення цієї точки відносно даної системи відліку у будь-який момент часу.

2.1.3. Способи задання руху точки.

Векторний спосіб

У відповідності до основної задачі кінематики точки розглянемо способи задання руху точки у просторі: векторний, координатний і натуральний.

Векторний спосіб знайшов широке застосування у теоретичних дослідженнях.

Розглянемо суть цього способу.

Допустимо, що довільна матеріальна точка M рухається у просторі за деякою кривою AB , яку називають траєкторією (рис. 2.1).

Візьмемо у просторі довільну нерухому точку O і проведемо до рухомої точки M радіус-вектор \vec{r} , який однозначно визначає положення точки.

Під час руху точки M її радіус-вектор \vec{r} змінюється за величиною (модулем) та напрямком, тобто, кожному моменту часу відповідає свій радіус-вектор. Моменту часу t_1 відповідає радіус-вектор \vec{r}_1 точки M_1 .

Таким чином, якщо задається закон зміни радіуса-вектора \vec{r} рухомої точки M у функції часу, то вважається заданим закон руху матеріальної точки **векторним способом**:

$$\vec{r} = \vec{r}(t). \quad (2.1)$$

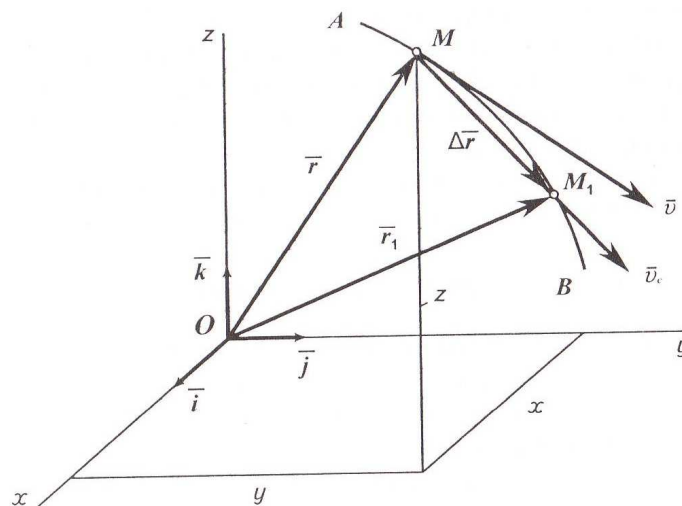


Рис. 2.1

Співвідношення (2.1) називається **кінематичним рівнянням руху** матеріальної точки у векторній формі і визначає положення точки у

просторі в будь-який момент часу. Одночасно цей вираз можна розглядати як *рівняння траєкторії* точки або *рівняння просторової кривої* у векторній формі. Функція $\bar{r}(t)$ повинна бути монотонною, неперервною і, принаймні, двічі диференційованою функцією часу.

Траєкторія точки і годограф векторної функції

Траєкторією точки називається геометричне місце положень точки під час руху в заданій системі відліку.

Введемо поняття годографа векторної функції $\bar{r}(t)$ (2.1) по скалярному аргументу t (час). Це крива, яка викреслюється кінцем радіуса-вектора \bar{r} у разі неперервного змінення аргументу t за умови, якщо початки цих векторів поєднані у фіксованій нерухомій точці O (рис. 2.1).

Тобто, годограф описують кінці векторів $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \dots, \bar{r}_n$, які відповідають конкретним положенням точки M у процесі руху. Це стосується не тільки радіусів-векторів, а й векторів швидкостей, прискорень тощо. У такому разі годограф збігається з траєкторією точки AB . Щоб знайти рівняння годографа в параметричному вигляді, досить знайти проєкції радіуса-вектора \bar{r} на ортогональні осі координат $Oxyz$ (рис. 2.1), розклавши його за ортами $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$:

$$\bar{r}(t) = x(t) \cdot \bar{i} + y(t) \cdot \bar{j} + z(t) \cdot \bar{k}. \quad (2.2)$$

$$x = x(t); \quad y = y(t); \quad z = z(t). \quad (2.3)$$

Рівності (2.3) є скалярними рівняннями годографа векторної функції $\bar{r}(t)$ в параметричній формі.

Як відомо із векторної алгебри, похідна $\frac{d}{dt}\bar{r}(t)$ від векторної функції $\bar{r}(t)$ є вектором, напрямленим по дотичній до годографа. За фізичним змістом *похідна* векторної функції $\bar{r}(t)$ визначає змінення вектора \bar{r} за часом і напрямлена *по дотичній до годографа* цієї функції.

Швидкість точки

Швидкість точки – це фізична векторна величина, яка характеризує міру змінення з часом радіуса-вектора точки у просторі за модулем і напрямом.

Одиницею швидкості у Міжнародній системі одиниць СІ є $[м/с]$.

Для визначення цієї кінематичної характеристики розглянемо рух матеріальної точки M за довільною траєкторією (рис. 2.1).

За деякий елементарний проміжок часу Δt точка переміщується із положення M у положення M_1 , яке характеризується радіусом-вектором \vec{r}_1 . Для того, щоб визначити **переміщення** точки M за проміжок часу Δt , з'єднаємо точки M і M_1 прямою і отримаємо вектор $\Delta\vec{r}$, який є геометричною різницею між векторами \vec{r}_1 і \vec{r} . Тоді середня наближена швидкість точки M за елементарний проміжок часу Δt (згідно з визначенням):

$$\bar{v}_c = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}.$$

За напрямом вектор середньої швидкості \bar{v}_c збігається з вектором $\Delta\vec{r}$, тобто він розміщений вздовж хорди MM_1 і спрямований у бік руху точки M , що відповідає зростанню часу t .

Якщо перейти до границі $\Delta t \rightarrow 0$, то отримаємо дійсну швидкість точки M у будь-який момент часу t :

$$\bar{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \bar{v}_c = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \quad (2.4)$$

*За векторного способу задання руху **швидкість** матеріальної точки дорівнює **першій похідній** від радіуса-вектора за часом у заданій системі відліку.*

Якщо наближати точку M_1 до M , коли $\Delta t \rightarrow 0$, то отримаємо дійсний напрямок вектора швидкості \bar{v} точки – по дотичній до траєкторії (годографа) і спрямований у бік її руху.

Прискорення точки

***Прискорення точки** в інерціальній системі відліку – це векторна величина, яка характеризує **міру змінення** модуля і напрямку **вектора швидкості** з часом у заданій системі відліку.*

Одиницею прискорення точки у системі СІ є $1 м/с^2$.

Визначимо прискорення матеріальної точки M . Розглянемо рух точки за довільною траєкторією AB (рис. 2.2).

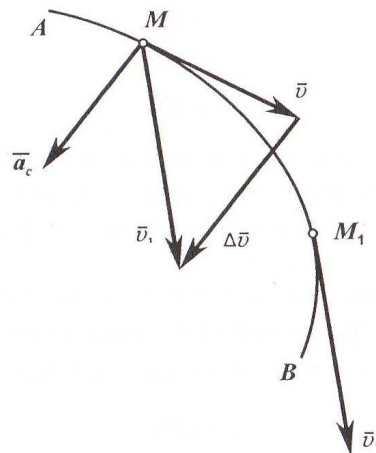


Рис. 2.2

У положенні M швидкість точки була \bar{v} , а у близькому положенні M_1 – \bar{v}_1 .

Знайдемо приріст швидкості за даний проміжок часу. Для цього перенесемо паралельно вектор швидкості \bar{v}_1 у положення M .

З'єднаємо кінці векторів \bar{v} і \bar{v}_1 прямою і отримаємо вектор $\Delta\bar{v}$. Відношення приросту $\Delta\bar{v}$ до проміжку часу Δt є середнім прискоренням рухомої матеріальної точки M :

$$\bar{a}_c = \frac{\Delta\bar{v}}{\Delta t}. \quad (2.5)$$

Для отримання дійсного прискорення матеріальної точки в даний момент часу необхідно розглянути нескінченно малий проміжок часу, а для виразу (2.5) здійснити перехід до границі $\Delta t \rightarrow 0$:

$$\bar{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \bar{a}_c = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\bar{v}}{\Delta t} = \frac{d\bar{v}}{dt}. \quad (2.6)$$

Підставимо у вираз (2.6) значення швидкості точки (2.4)

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \ddot{\bar{r}}. \quad (2.7)$$

За векторного способу задання руху матеріальної точки **прискорення дорівнює першій похідній від вектора швидкості за часом або другій похідній від радіуса-вектора рухомої точки у заданій системі відліку.**

Оскільки прискорення дорівнює похідній за часом від швидкості, то вектор прискорення \bar{a} матеріальної точки спрямований по дотичній до

годографа векторної функції $\bar{v}(t)$.

2.1.4. Координатний спосіб задання руху точки

Цей спосіб задання руху матеріальної точки широко використовують під час аналітичного розв'язування задач у технічних розрахунках.

Якщо вибрати у просторі нерухому ортогональну систему декартових координат $Oxyz$, то під час руху точки M всі три її координати будуть змінюватися з часом (рис. 2.1).

Необхідно задати координати як функції часу, однозначні, неперервні і, принаймні, двічі диференційовані:

$$\begin{aligned}x &= x(t), \\y &= y(t), \\z &= z(t).\end{aligned}\tag{2.8}$$

Ці параметричні рівняння, в яких роль параметра відіграє скалярний аргумент часу t , є **кінематичними рівняннями руху** точки в ортогональній системі декартових координат (або **законом руху** точки у координатній формі) і визначають суть цього способу.

Одночасно ці рівняння визначають зміну з часом просторового положення точки і є рівняннями траєкторії точки у параметричній формі.

Для одержання рівняння траєкторії в явній формі треба виключити з цих рівнянь час t .

Слід зауважити, якщо рух матеріальної точки здійснюється в одній площині xOy , то рівняння (2.8) набувають такого вигляду:

$$\begin{aligned}x &= x(t), \\y &= y(t).\end{aligned}\tag{2.9}$$

Якщо матеріальна точка здійснює прямолінійний рух, то цей рух буде описаний одним рівнянням:

$$x = x(t).\tag{2.10}$$

Зв'язок між векторним і координатним способами має вигляд (2.2):

$$\bar{r}(t) = x(t) \cdot \bar{i} + y(t) \cdot \bar{j} + z(t) \cdot \bar{k}.$$

Крім декартової системи в механіці використовують сферичну, циліндричну, полярну і інші системи координат.

Визначимо кінематичні характеристики руху матеріальної точки за такого способу задання її руху.

Траєкторія точки

Рівняння (2.8) і (2.9) є рівняннями траєкторії матеріальної точки у параметричній формі, де роль параметра відіграє час t .

Для знаходження **рівняння траєкторії** у координатній формі необхідно **виключити** з рівнянь руху **параметр часу t** . Це можна зробити декількома способами: підстановкою або піднесенням обох частин рівнянь до квадрату і почленним додаванням (якщо рівняння містять тригонометричні функції).

Наприклад, розв'язуючи останнє рівняння системи (2.8) відносно параметра часу t і підставляючи це співвідношення у два перші рівняння, дістанемо:

$$t = \varphi(z); \Rightarrow x = x[\varphi(z)]; \quad y = y[\varphi(z)]. \quad (2.11)$$

Останні два рівняння визначають траєкторію точки як лінію перетину двох циліндричних поверхонь, що проєктують траєкторію на координатні площини xOz і yOz .

Приклад 2.1

Рух матеріальної точки здійснюється у площині xOy і заданий рівняннями:

$$x = 2t \text{ м}, \quad y = 12t^2 \text{ м}.$$

Визначити рівняння траєкторії руху точки.

Розв'язання

Траєкторію руху матеріальної точки можна визначити одним із двох способів:

а) задати різні моменти часу і зобразити координати точки x, y на графіку;

б) виключити час t із заданих рівнянь руху.

Так, з першого рівняння визначаємо час $t = \frac{x}{2}$, і підставляємо у друге рівняння:

$$y = \frac{12x^2}{4} = 3x^2.$$

Таким чином, траєкторією руху точки є парабола з віссю симетрії Oy і з вершиною на початку координат.

Приклад 2.2

Рух матеріальної точки заданий рівняннями:

$$x = 3 \sin t \text{ см}, \quad y = 3 \cos t \text{ см}, \quad \text{де } t - \text{в секундах}.$$

Визначити рівняння траєкторії руху точки.

Розв'язання

Рівняння траєкторії руху можна визначити, якщо вилучити час t з рівнянь руху.

Перетворимо рівняння руху матеріальної точки:

$$\sin t = \frac{x}{3}, \quad \cos t = \frac{y}{3}.$$

Піднесемо до квадрату і додамо почленно ліві і праві частини цих виразів:

$$1 = \frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{3^2}, \Rightarrow x^2 + y^2 = 3^2.$$

Отже, траєкторією руху матеріальної точки є коло радіусом $R=3$ см з центром у початку координат.

Швидкість точки

Для визначення швидкості матеріальної точки за координатного способу задання скористаємось основними положеннями векторного способу.

З цієї метою підставимо вираз (2.2) у вираз (2.4):

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d \left[x(t)\bar{i} + y(t)\bar{j} + z(t)\bar{k} \right]}{dt} = \frac{dx}{dt}\bar{i} + \frac{dy}{dt}\bar{j} + \frac{dz}{dt}\bar{k}. \quad (2.12)$$

Розкладаючи вектор швидкості \bar{v} по осях прийнятої ортогональної системи декартових координат $Oxyz$:

$$\bar{v} = v_x\bar{i} + v_y\bar{j} + v_z\bar{k}, \quad (2.13)$$

і порівнюючи вирази (2.12) і (2.13), отримаємо:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}, \quad v_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}, \quad v_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}. \quad (2.14)$$

Проекції вектора швидкості матеріальної точки на осі ортогональної системи декартових координат $Oxyz$ дорівнюють першим похідним від функцій відповідних координат за часом.

Модуль вектора швидкості \bar{v} матеріальної точки визначається геометричною сумою:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}. \quad (2.15)$$

Напрямок вектора швидкості \bar{v} визначається напрямними косинусами кутів, які цей вектор утворює з відповідними осями координат. Напрямні косинуси – це проєкції ортів на відповідні осі координат.

$$\cos(\bar{i}, \bar{v}) = \frac{v_x}{v}, \quad \cos(\bar{j}, \bar{v}) = \frac{v_y}{v}, \quad \cos(\bar{k}, \bar{v}) = \frac{v_z}{v}. \quad (2.16)$$

Рівності (2.14), (2.15), (2.16) визначають вектор швидкості точки за координатним способом опису її руху.

Прискорення точки

Для визначення прискорення матеріальної точки за координатного способу поведимося аналогічно, як для швидкості руху. Значення радіуса-вектора \bar{r} (2.2) підставимо у вираз (2.7) і визначимо другу похідну за часом:

$$\bar{a} = \frac{d^2 \bar{r}}{dt^2} = \frac{d^2 [x(t)\bar{i} + y(t)\bar{j} + z(t)\bar{k}]}{dt^2} = \frac{d^2 x}{dt^2} \bar{i} + \frac{d^2 y}{dt^2} \bar{j} + \frac{d^2 z}{dt^2} \bar{k}. \quad (2.17)$$

Вектор прискорення \bar{a} можна розкласти по ортах ортогональної системи координат $Oxyz$:

$$\bar{a} = a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k}. \quad (2.18)$$

Якщо порівняти вирази (2.17) і (2.18), то можна написати такі співвідношення:

$$a_x = \frac{d^2 x}{dt^2} = \ddot{x}, \quad a_y = \frac{d^2 y}{dt^2} = \ddot{y}, \quad a_z = \frac{d^2 z}{dt^2} = \ddot{z}. \quad (2.19)$$

Проекції вектора прискорення матеріальної точки на осі ортогональної системи декартових координат $Oxyz$ дорівнюють другим похідним функцій відповідних координат рухомої точки або першим похідним проєкцій швидкостей за часом.

Модуль вектора прискорення матеріальної точки визначається геометричною сумою проєкцій:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \quad (2.20)$$

Напрямок вектора прискорення \bar{a} визначається напрямними

косинусами:

$$\cos(\hat{i}, \hat{a}) = \frac{a_x}{a}, \quad \cos(\hat{j}, \hat{a}) = \frac{a_y}{a}, \quad \cos(\hat{k}, \hat{a}) = \frac{a_z}{a}. \quad (2.21)$$

Таким чином, за координатного способу задання руху матеріальної точки вектор прискорення \vec{a} визначається за допомогою рівностей (2.19), (2.20) і (2.21).

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Що вивчає кінематика? Які незалежні змінні в кінематиці?
2. У чому полягають основні задачі кінематики?
3. Які існують способи задання руху точки?
4. Що таке закон руху матеріальної точки?
5. Яка залежність між радіусом-вектором точки і її координатами? Що таке годограф векторної функції?
6. Як спрямовується вектор швидкості точки?
7. Як визначаються положення, швидкість і прискорення точки за векторного способу задання руху?
8. Як визначаються положення, швидкість і прискорення точки за координатного способу задання руху?
9. Як визначити рівняння годографа?
10. Як визначити рівняння траєкторії точки за координатного способу?

2.1.5. Натуральний спосіб задання руху точки

Натуральний спосіб застосовують, коли попередньо відома траєкторія точки. Тоді положення точки у просторі визначиться заданням таких елементів (рис. 2.3):

– просторова або плоска крива AB , яка може бути задана рівнянням, графічно чи з вказівкою, наприклад: точка рухається вздовж кола радіусом R ;

– початок відліку O дугової координати s на траєкторії руху з вказівкою напрямів додатних (+) і від'ємних (–) значень. Крім того, приймають початковий момент відліку часу $t_0 = 0$;

– закон руху матеріальної точки вздовж траєкторії як функцію дугової координати від часу:

$$s = s(t). \quad (2.22)$$

Функція закону руху має бути однозначною, неперервною і, принаймні, двічі диференційованою.

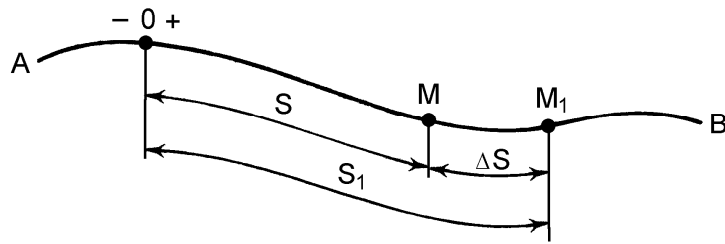


Рис. 2.3

Співвідношення (2.22) називається **кінематичним рівнянням** руху матеріальної точки **у натуральній формі** (або законом зміни дугової координати).

Дугова координата s у рівнянні (2.22) визначає положення точки на траєкторії точки.

Дугову координату не слід плутати з довжиною шляху, який проходить точка за певний проміжок часу: напрямок шляху може бути як у бік відліку додатних, так і у бік відліку від'ємних дугових координат. Шлях є монотонно зростаючою функцією часу.

Визначимо кінематичні характеристики руху матеріальної точки за натурального способу задання її руху.

Швидкість точки

Розглянемо схему руху матеріальної точки M (рис. 2.3). Положення точки M відповідає моменту часу t , а положення M_1 – моменту часу t_1 . Тоді елементарному проміжку часу $t_1 - t = \Delta t$ відповідає елементарна зміна дугової координати

$$s_1 - s = \Delta s.$$

Звідси можна визначити середню швидкість точки за елементарний проміжок часу Δt :

$$v_c = \frac{s_1 - s}{t_1 - t} = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Дійсну швидкість точки в момент часу t можна визначити, якщо перейти до границі, коли елементарний проміжок часу Δt прямує до нуля:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = \dot{s}. \quad (2.23)$$

Модуль швидкості матеріальної точки за натурального способу задання її руху дорівнює **першій похідній** за часом від закону руху точки вздовж траєкторії.

Напрямок вектора швидкості – по дотичній до траєкторії матеріальної точки.

Похідна за часом визначає чисельну алгебраїчну величину швидкості: якщо модуль швидкості додатний ($v = \dot{s} > 0$), то вектор швидкості спрямований у додатному напрямі відліку дугової координати, а якщо $v = \dot{s} < 0$, то – протилежно.

Приклад 2.3

Закон руху матеріальної точки заданий рівнянням $s = 4t^2 + t$ м. Визначити переміщення і швидкість руху точки в момент часу $t_1 = 1$ с.

Розв'язання

Визначимо спочатку положення точки на траєкторії руху якщо $t_1 = 1$ с. Відлік часу почався з початком моменту руху $s(0) = 0$. Підставимо у рівняння руху значення заданого моменту часу:

$$s = 4 \cdot 1^2 + 1 = 5 \text{ м.}$$

Для визначення швидкості руху точки візьмемо похідну за часом від рівняння руху:

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d(4t^2 + t)}{dt} = 8t + 1 \Rightarrow v(1) = 8 \cdot 1 + 1 = 9 \text{ м/с.}$$

2.1.6. Зв'язок між координатним і натуральним способами

Для переходу від одного способу завдання руху матеріальної точки до іншого необхідно знайти залежності між основними параметрами цих рухів.

На підставі виразу (2.22) можна записати

$$ds = v \cdot dt \Rightarrow s = \int_0^t v dt. \quad (2.24)$$

Оскільки за координатного способу завдання руху матеріальної точки її швидкість визначається згідно з виразом (2.14):

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2},$$

то, підставляючи його у попередній вираз, остаточно знайдемо залежність між дуговою координатою і проекціями швидкості на декартові осі координат:

$$s = \int_0^t \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt. \quad (2.25)$$

2.1.7. Натуральний тригранник і натуральні осі координат

Наведемо деякі відомості з диференціальної геометрії, які необхідні для подальшого визначення кінематичних характеристик руху матеріальної точки натуральним способом.

Побудуємо рухомий координатний базис $M\tau nb$ – натуральний тригранник. Припустимо, що крива AB є траєкторією точки M (рис. 2.4).

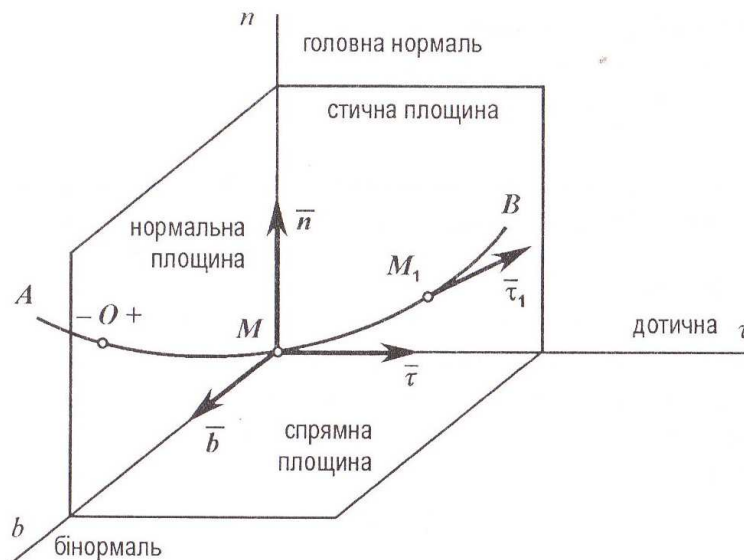


Рис. 2.4

Крізь довільну точку M і нескінченно наближену до неї точку M_1 проведемо дотичні до траєкторії. Орти, які відповідні цим дотичним, позначимо через $\bar{\tau}$ і $\bar{\tau}_1$. Потім перенесемо вектор $\bar{\tau}_1$ паралельно самому собі у точку M і проведемо через вектори $\bar{\tau}$ і $\bar{\tau}_1$ площину.

Граничне положення площини, проведеної крізь дотичні двох близьких точок, якщо проміжок часу прямує до нуля, а точка M_1 наближається до точки M , називається стичною площиною.

Крізь точку M проведемо площину, перпендикулярну до дотичної τ , яка називається **нормальною площиною**.

Лінія перетину нормальної і стичної площин визначає головну нормаль кривої.

Отже, **головна нормаль** – це єдина з нескінченної множини нормалей до кривої у точці M , яка розташована у стичній площині. Площина, що проходить через точку M перпендикулярно до головної нормалі, називається **спрямною**.

Лінія перетину спрямної і нормальної площин визначає **бінормаль кривої**.

Очевидно, що бінормаль перпендикулярна до головної нормалі.

Таким чином, у кожній точці кривої можна вказати три взаємно перпендикулярні напрями, за якими можна провести **дотичну** у бік зростання дугової координати (орт $\bar{\tau}$), **головну нормаль** – у бік угнутості кривої (орт \bar{n}), **бінормаль** з відповідним ортом \bar{b} , спрямовану так, що орти $\bar{\tau}$, \bar{n} , \bar{b} утворюють праву ортогональну трійку векторів.

Ортогональна система координатних осей з ортами $\bar{\tau}$, \bar{n} і \bar{b} , з початком у рухомій точці M називається **натуральним координатним базисом** або **натуральним рухомих тригранником** $M\tau n b$.

Зауважимо, що плоска крива розміщена у стичній площині, а головна нормаль є нормаллю до кривої у цій площині.

На відміну від інших систем відліку, натуральний трієдр рухається разом із точкою і змінює свою орієнтацію у просторі відповідно до характеру траєкторії.

2.1.8. Кривина кривої

Як можна побачити далі, прискорення точки у криволінійному русі залежить від кривини траєкторії, тому розглянемо цю характеристику кривої.

На рис. 2.5 зображена траєкторія AB точки і два близькі положення точок M і M_1 .

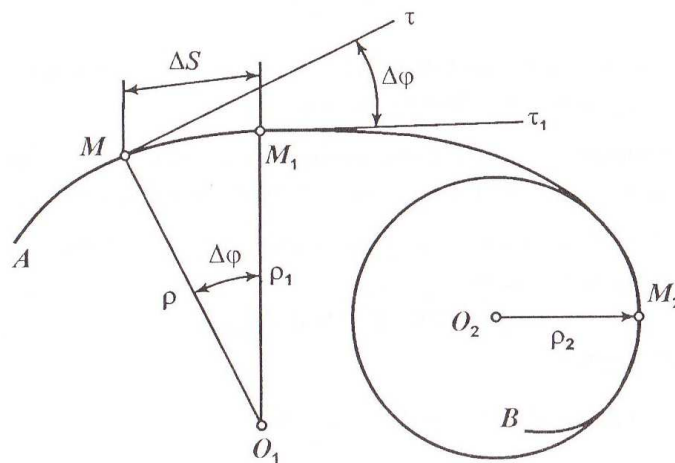


Рис. 2.5

Частина перша

Проведемо крізь точки M і M_1 дотичні τ і τ_1 . Елементарна відстань між цими точками вдовж траєкторії дорівнює Δs .

Кут $\Delta\varphi$ між дотичними у двох близьких точках називається кутом суміжності.

Кривиною кривої k у даній точці M називається границя відношення кута суміжності до дуги Δs , яка його стягує, якщо ця дуга прямує до нуля.

Відношення $\Delta\varphi$ до Δs є середньою кривиною:

$$k_c = \frac{\Delta\varphi}{\Delta s},$$

а зведення k_c до границі дає дійсне значення кривини кривої:

$$k = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} = \frac{d\varphi}{ds}. \quad (2.26)$$

Розглянемо коло радіусом R . Зробимо аналогічну геометричну побудову.

Виразимо Δs за відомою формулою $\Delta s = R \cdot \Delta\varphi$, або $ds = R \cdot d\varphi$ і підставимо у вираз (2.26):

$$k = \lim_{\Delta\varphi \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{R \cdot \Delta\varphi} = \frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{R} \Rightarrow k = \frac{1}{R}. \quad (2.27)$$

Коло є кривою сталої кривини, значення якої дорівнює оберненій величині радіуса.

Для визначення кривини довільної кривої в даній точці досить **підібрати коло кривини**, елемент дуги якого краще за все апроксимує ділянку кривої у даній точці.

Радіус кола кривини є радіусом кривини кривої, а центр кола – центром кривини.

На рис. 2.5 позначені такі геометричні характеристики кривої:

ρ_2 – радіус кривини кривої у точці M_2 ; O_2 – центр кривини;

$k_2 = \frac{1}{\rho_2}$ – кривина кривої у точці M_2 .

2.1.9. Прискорення точки в натуральних осях координат

В ортогональній системі декартових координат ми визначали прискорення точки у проєкціях на координатні осі x , y , z . В натуральних

осях координат визначимо проекції вектора прискорення на дотичну τ і головну нормаль n .

Але спочатку доведемо, що проекція вектора прискорення на бінормаль b дорівнює нулю. Для цього звернемось до рис. 2.6. Швидкості близьких точок M і M_1 – вектори \bar{v} і \bar{v}_1 напрямлені по дотичних $\bar{\tau}$ і $\bar{\tau}_1$ у цих точках.

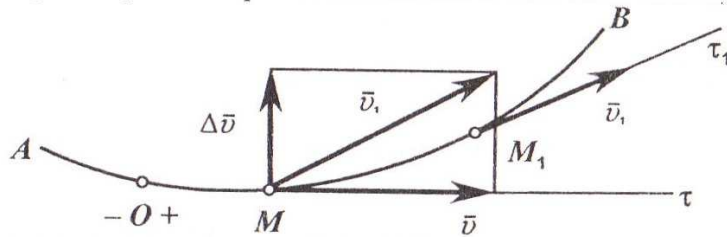


Рис. 2.6

Перенесемо паралельно вектор \bar{v}_1 у точку M і з'єднаємо кінці векторів \bar{v} і \bar{v}_1 .

Побудувавши паралелограм, з'ясуємо, що вектор $\Delta\bar{v}$ як різниця векторів швидкостей, що формує вектор прискорення, розміщений у стичній площині.

Паралельно $\Delta\bar{v}$ спрямований і вектор середнього прискорення \bar{a}_c , а вектор дійсного прискорення \bar{a} в даний момент часу дорівнює границі:

$$\bar{a} = \lim_{\substack{\Delta t \rightarrow 0 \\ M_1 \rightarrow M}} \frac{\Delta\bar{v}}{\Delta t},$$

і також буде розміщений у стичній площині. Це означає, що проекція вектора прискорення на бінормаль дорівнює нулю.

Знаючи, що вектор прискорення має тільки дотичну і нормальну складові, визначимо останні.

Для цього розглянемо схему, представлену рис. 2.7, де:

$M\tau$ – дотична до траєкторії; Mn – головна нормаль; Mb – бінормаль; C – центр кривини траєкторії; ρ – радіус кривини траєкторії.

Припустимо, що в момент часу t точка M має швидкість \bar{v} , а в момент часу $t_1 = t + \Delta t$ швидкість буде \bar{v}_1 .

Тоді прискорення точки:

$$\bar{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\bar{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\bar{v}_1 - \bar{v}}{\Delta t}.$$

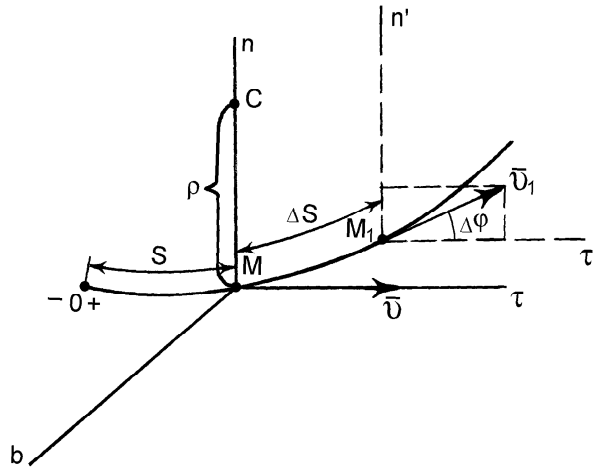


Рис. 2.7

Переходимо до проєкцій прискорення матеріальної точки на натуральні осі координат τ і n :

$$a_\tau = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v_{1\tau} - v_\tau}{\Delta t}, \quad (2.28)$$

$$a_n = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v_{1n} - v_n}{\Delta t}. \quad (2.29)$$

Враховуючи, що проєкції векторів на паралельні осі однакові, проведемо через точку M_1 осі $M_1\tau'$ і M_1n' , паралельні відповідним осям $M\tau$ і Mn , і позначимо кут суміжності $\Delta\varphi$.

Знайдемо проєкції векторів \bar{v} і \bar{v}_1 на осі $M\tau$ і Mn :

$$v_\tau = v, \quad v_n = 0, \quad v_{1\tau} = v_1 \cos\Delta\varphi, \quad v_{1n} = v_1 \sin\Delta\varphi.$$

Підставимо значення проєкцій у вирази (2.28) і (2.29):

$$a_\tau = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v_1 \cos\Delta\varphi - v}{\Delta t}, \quad (2.30)$$

$$a_n = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_1 \frac{\sin\Delta\varphi}{\Delta t}. \quad (2.31)$$

Якщо проміжок часу Δt прямує до нуля, то

$$M_1 \rightarrow M, \quad \Delta\varphi \rightarrow 0, \quad \Delta s \rightarrow 0, \quad v_1 \rightarrow v, \quad \cos\Delta\varphi \rightarrow 1.$$

Тоді за рівнянням (2.30) дотичне прискорення дорівнює:

$$a_{\tau} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v_1 - v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} \Rightarrow a_{\tau} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2}. \quad (2.32)$$

Дотичне прискорення матеріальної точки характеризує змінення в одиницю часу вектора швидкості за величиною і дорівнює **першій похідній від функції швидкості** або **другій похідній за часом від дугової координати**.

Визначимо нормальне прискорення a_n . Перетворимо вираз для нормального прискорення (2.31), помноживши чисельник і знаменник на добуток $\Delta\varphi \cdot \Delta s$:

$$a_n = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(v_1 \cdot \frac{\sin \Delta\varphi}{\Delta\varphi} \cdot \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t} \right). \quad (2.33)$$

Перепишемо вираз (2.33):

$$a_n = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_1 \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\sin \Delta\varphi}{\Delta\varphi} \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

$$\lim_{v_1 \rightarrow v} v_1 = v, \quad \lim_{\Delta\varphi \rightarrow 0} \frac{\sin \Delta\varphi}{\Delta\varphi} = 1,$$

Якщо $\Delta t \rightarrow 0$:

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} = \frac{1}{\rho}, \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = v.$$

Підставимо значення цих границь у вираз для нормального прискорення:

$$a_n = v \cdot 1 \cdot \frac{1}{\rho} \cdot v = \frac{v^2}{\rho} \Rightarrow a_n = \frac{v^2}{\rho}. \quad (2.34)$$

Нормальне (доцентрове) прискорення матеріальної точки характеризує змінення в одиницю часу вектора швидкості за напрямком і дорівнює квадрату швидкості, поділеному на радіус кривини траєкторії у даній точці.

Вектор нормального прискорення $\bar{a}_n = a_n \cdot \bar{n}$ спрямований вздовж нормалі до центра кривини кривої в даній точці. За знаком нормальне прискорення a_n додатне, тому що містить у чисельнику вираз v^2 . Вектор дотичного прискорення $\bar{a}_{\tau} = a_{\tau} \cdot \bar{\tau}$ направлений по дотичній до кривої і за знаком може бути як додатним, так і від'ємним.

Модуль повного прискорення \bar{a} може бути визначений геометричною сумою \bar{a}_{τ} та \bar{a}_n . Він є діагоналлю прямокутника, побудованого на вказаних векторах, як на сторонах (рис. 2.8).

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2}. \quad (2.35)$$

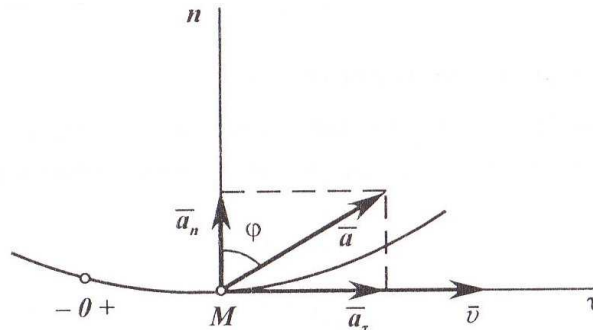


Рис. 2.8

Напрямок вектора прискорення визначається кутом φ між вектором \bar{a} і нормаллю n :

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{a_\tau}{a_n}.$$

Вектор прискорення \bar{a} може бути розкладений по ортах натурального триєдра a_τ і a_n :

$$\bar{a} = a_\tau \cdot \bar{\tau} + a_n \cdot \bar{n}, \quad (2.36)$$

$$\bar{a}_\tau = \bar{\tau} \cdot a_\tau, \quad \bar{a}_n = \bar{n} \cdot a_n, \quad \bar{a} = \bar{a}_\tau + \bar{a}_n. \quad (2.37)$$

2.1.10. Окремі випадки руху матеріальної точки.

Прямолінійний рух

Радіус кривини траєкторії, якою є пряма лінія, прямує до нескінченності: $\rho \rightarrow \infty$. Тому,

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = 0 \Rightarrow a = a_\tau = \frac{dv}{dt}.$$

Таким чином, в умовах прямолінійного руху вектор швидкості \bar{v} матеріальної точки змінюється лише чисельно, за модулем (нормальна проекція прискорення дорівнює нулю).

Дотичне прискорення a_τ характеризує зміну вектора швидкості за модулем.

А якщо цей рух є ще і рівномірним, $\bar{v} = \text{const}$, то прискорення матеріальної точки дорівнює нулю:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = 0, \quad a_n = \frac{v^2}{\rho} = 0, \quad a = 0.$$

Рівномірний криволінійний рух

У цьому випадку модуль швидкості сталий $v = const$, а радіус кривини траєкторії є кінцевою величиною $\rho \neq \infty$. Визначимо проекції прискорення \bar{a} руху матеріальної точки на натуральні осі:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = 0, \quad a_n = \frac{v^2}{\rho} = a.$$

Таким чином, модуль повного прискорення \bar{a} матеріальної точки в цьому випадку дорівнює нормальному прискоренню a_n . Вектор нормального (в даному випадку повного) прискорення \bar{a} напрямлений вздовж нормалі \bar{n} до траєкторії. Оскільки прискорення \bar{a} з'являється тільки за рахунок зміни напрямку вектора швидкості \bar{v} , то звідси впливає наступна інформація:

Нормальне прискорення a_n характеризує змінення вектора швидкості за напрямом.

Рівнозмінний криволінійний рух

У цьому випадку рух точки криволінійний, але прискорення a_τ є сталою величиною. Цей випадок носить назву рівнозмінного руху.

Визначимо кінематичні характеристики рівнозмінного руху матеріальної точки. Оскільки $a_\tau = \frac{dv}{dt}$, то звідси є можливість визначити швидкість руху точки:

$$dv = a_\tau dt.$$

Швидкість \bar{v} перебуває тут під знаком диференціала, а тому візьмемо визначений інтеграл:

$$\int_{v_0}^v dv = \int_0^t a_\tau dt \Rightarrow v - v_0 = a_\tau t \Rightarrow v = v_0 + a_\tau t. \quad (2.38)$$

Використаємо далі вираз: $v = \frac{ds}{dt} \Rightarrow ds = v dt$.

Замість v підставимо в останній вираз отримане значення (2.38):

$$ds = v_0 dt + a_\tau t dt.$$

Частина перша

Як і у попередньому випадку знайдемо переміщення s , взявши визначений інтеграл від лівої і правої частин виразу.

$$\int_{s_0}^s ds = \int_0^t v_0 dt + \int_0^t a_\tau t dt, \Rightarrow s = s_0 + v_0 t + a_\tau \frac{t^2}{2}. \quad (2.39)$$

Таким чином під час рівнозмінного руху матеріальної точки її швидкість і переміщення визначаються за допомогою знайдених виразів (2.38), (2.39).

Слід зауважити, що знак у правих частинах цих формул (перед a_τ) визначає характер рівнозмінного руху. Якщо знак додатний, то рух точки рівноприскорений, а якщо від'ємний, то – рівносповільнений.

Приклад 2.4

Палець кривошипу дизеля рухається відповідно до заданих параметрично рівнянь:

$$x = b \sin \omega t,$$

$$y = b \cos \omega t,$$

де x і y – в метрах; t – в секундах; b і ω – сталі величини.

Визначити рівняння траєкторії, швидкість і прискорення пальця.

Розв'язання

Для визначення рівняння траєкторії пальця кривошипа треба виключити з заданих рівнянь руху параметр часу t . Спочатку визначимо із заданих рівнянь тригонометричні функції:

$$\sin \omega t = \frac{x}{b}, \quad \cos \omega t = \frac{y}{b}.$$

Оскільки тригонометричні функції є функціями одного аргументу, то піднесемо до квадрату ліві та праві частини цих виразів і почленно додамо. Ліва частина останнього виразу дорівнює одиниці, оскільки $\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t = 1$, тому:

$$x^2 + y^2 = b^2.$$

Таким чином, з останнього виразу легко побачити, що траєкторією пальця кривошипа є коло радіуса b з центром у початку координат.

Для визначення швидкості знайдемо спочатку проекції швидкості пальця на координатні осі:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = b\omega \cdot \cos \omega t, \quad v_y = \frac{dy}{dt} = -b\omega \cdot \sin \omega t.$$

Модуль швидкості:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(b\omega \cdot \cos \omega t)^2 + (-b\omega \cdot \sin \omega t)^2} = b\omega.$$

З останнього виразу легко побачити, що палець рухається зі сталою швидкістю, яка дорівнює $b\omega$.

Знайдемо прискорення пальця кривошипу через проекції на осі координат. Для цього візьмемо другі похідні за часом від заданих координат:

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv_x}{dt} = -b\omega^2 \cdot \sin \omega t, \quad a_y = \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dv_y}{dt} = -b\omega^2 \cdot \cos \omega t.$$

Повне прискорення:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(-b\omega^2 \cdot \sin \omega t)^2 + (-b\omega^2 \cdot \cos \omega t)^2} = b\omega^2.$$

Оскільки палець кривошипу рухається по колу, тобто, за криволінійною траєкторією руху сталого радіуса b , то його прискорення можна визначити за натуральним способом задання руху матеріальної точки. Дотичне прискорення пальця кривошипу буде дорівнювати нулю, оскільки швидкість $b\omega = \text{const}$:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d(b\omega)}{dt} = 0.$$

Нормальне прискорення:

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{(b\omega)^2}{b} = b\omega^2.$$

Оскільки дотичного прискорення немає, то повне прискорення дорівнює нормальному: $a = a_n = b\omega^2$.

Таким чином, величина прискорення пальця кривошипу, визначена різними способами, збігається.

Приклад 2.5

Точка на ободі барабана зернозбирального комбайна у період розгону рухається згідно з рівнянням $s = 0,1 \cdot t^3$ (s – в метрах, t – в секундах). Радіус барабана дорівнює $R = 0,5$ м. Визначити дотичне і нормальне прискорення точки в момент, коли її швидкість дорівнює $v = 30$ м/с.

Розв'язання

Рівняння руху точки задане натуральним способом, а тому швидкість дорівнює:

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d(0,1 \cdot t^3)}{dt} = 0,3 \cdot t^2.$$

За заданим значенням швидкості точки $v = 30$ м/с знайдемо момент часу. Підставимо значення цієї швидкості в отриманий вираз і знайдемо час t :

$$30 = 0,3 \cdot t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{30}{0,3}} = 10 \text{ с.}$$

У функцію дотичного прискорення точки підставимо час:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d(0,3 \cdot t^2)}{dt} = 0,6t, \quad a_\tau(10) = 0,6 \cdot 10 = 60 \text{ м/с}^2.$$

Нормальне прискорення:

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{(0,3 \cdot t^2)^2}{0,5} = \frac{30^2}{0,5} = 1800 \text{ м/с}^2.$$

Знак «плюс» перед дотичним прискоренням a_τ означає, що барабан зернозбирального комбайна перебуває у стані розгону, що відповідає умові задачі.

Приклад 2.6

Рух точки відбувається згідно з рівняннями в координатній формі:

$$x = A \cos kt; \quad y = A \sin kt; \quad z = Bt; \quad \text{де } x, y, z - \text{ у метрах, } t - \text{ у секундах.}$$

Визначити:

- швидкість точки; закон руху точки вздовж траєкторії;
- рівняння годографа швидкості; прискорення точки;
- радіус кривини траєкторії точки.

Розв'язання

Виберемо систему координат, як показано на рис. 2.9. M_0 – початкове положення точки на траєкторії.

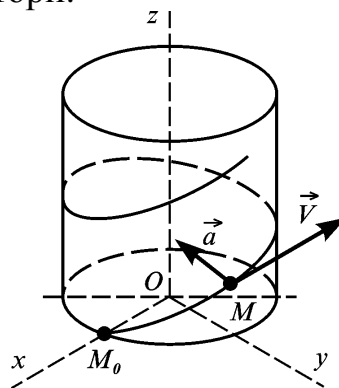


Рис. 2.9

Складові швидкості точки дорівнюють похідним від координат:

$$v_x = \dot{x} = -Ak \sin kt, \quad v_y = \dot{y} = Ak \cos kt, \quad v_z = \dot{z} = B.$$

Модуль швидкості

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} = \sqrt{A^2 k^2 + B^2} = \text{const.}$$

Траєкторією точки є гвинтова лінія. Напрямок швидкості, тобто напрям дотичної до гвинтової лінії (рис. 2.9), визначаємо за напрямними косинусами:

$$\cos(\bar{v}, \hat{Ox}) = -\frac{Ak}{\sqrt{A^2 k^2 + B^2}} \sin kt;$$

$$\cos(\bar{v}, \hat{Oy}) = \frac{Ak}{\sqrt{A^2 k^2 + B^2}} \cos kt;$$

$$\cos(\bar{v}, \hat{Oz}) = \frac{B}{\sqrt{A^2 k^2 + B^2}}.$$

Рівняння годографа швидкості знаходимо на підставі формул:

$$x_1 = v_x = -Ak \sin kt; \quad y_1 = v_y = Ak \cos kt; \quad z_1 = v_z = B.$$

Звідси $x_1^2 + y_1^2 = A^2 k^2$; $z_1 = B$ – рівняння годографа швидкості (рис. 2.10).

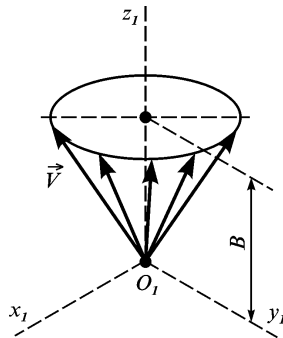


Рис. 2.10

Отже, годографом швидкості є коло радіуса Ak з центром у точці $z_1 = B$ на осі Oz_1 .

Знайдемо закон руху точки вздовж траєкторії $s = s(t)$:

$$v = \frac{ds}{dt}; \quad ds = vt; \quad s = \sqrt{A^2 k^2 + B^2} t + C.$$

Якщо $t = 0, s = 0$, то $C = 0$.

$$s = \sqrt{A^2 k^2 + B^2} t.$$

Для визначення проєкцій, модуля та напрямку прискорення скористаємося наведеними вище формулами:

$$\begin{aligned}a_x = \ddot{x} &= -Ak^2 \cos kt; \quad a_y = \ddot{y} = -Ak^2 \sin kt; \\ a_z = \ddot{z} &= 0; \quad \Rightarrow a = Ak^2; \\ \cos(\vec{a}, \hat{Ox}) &= -\cos kt; \quad \cos(\vec{a}, \hat{Oy}) = -\sin kt; \\ \cos(\vec{a}, \hat{Oz}) &= 0.\end{aligned}$$

Вектор прискорення розміщений у горизонтальній площині і спрямований від точки M до осі Oz (рис. 2.9).

Радіус кривини точки знаходимо на підставі формули (2.34). Нормальне прискорення визначаємо через повне і тангенціальне за формулами (2.35) і (2.32):

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2}.$$

Оскільки $v_\tau = \text{const}$ і $a_\tau = \dot{v}_\tau = 0$, то $a_n = a$. Знаходимо радіус кривини:

$$\rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{A^2 k^2 + B^2}{Ak^2} = A + \frac{B^2}{Ak^2}.$$

Задачі для самостійного опрацювання

Задача 1. Рух точки відбувається за законом

$$x = \frac{1}{3}t^2 + 1; \quad y = \frac{2}{3}t^2.$$

Визначити швидкість v , прискорення точки a , радіус кривини траєкторії ρ і закон руху точки вздовж траєкторії s .

$$\text{Відповідь: } v = \frac{2\sqrt{5}}{3}t; \quad a = \frac{2\sqrt{5}}{3}; \quad \rho = \infty; \quad s = \frac{\sqrt{5}}{3}t^2.$$

Задача 2. У деякий момент часу повне прискорення точки дорівнює $2,6 \text{ м/с}^2$. Точка рухається по кривій з дотичним прискоренням $1,4 \text{ м/с}^2$.

Знайти для даного моменту часу нормальне прискорення точки.

$$\text{Відповідь: } a_n \approx 2,2 \text{ м/с}^2.$$

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. У чому полягає зміст натурального способу визначення руху точки?
2. Що називають дуговою координатою?
3. Як знайти шлях, що його проходить точка?
4. Як знайти зв'язок між натуральним і координатним способом?
5. Визначте швидкість точки натуральним способом завдання руху?

6. Як знайти прискорення точки натуральним способом задання руху?
7. У чому полягає фізичний зміст тангенціального і нормального складових прискорення?
8. Які особливості має натуральний координатний базис?
9. Напишіть формулу рівномірного і рівнозмінного руху точки?
10. Які потрібні умови для задання руху точки натуральним способом?
11. З'ясуйте різницю між дуговою координатою і шляхом, пройденим точкою.

2.2. Кінематика твердого тіла

Переходимо до вивчення руху абсолютно твердого тіла. Якщо на тіло ніяких в'язей не накладено, то воно рухається вільно.

Закріпимо одну точку тіла (три в'язі), воно буде обертатись навколо цієї точки (три ступеня вільності).

Закріпимо дві точки (п'ять в'язей), тіло буде обертатись навколо нерухомої осі, маючи один ступінь вільності.

Закріпимо три точки і тіло опиниться нерухомим (шість в'язей).

Відповідно до згаданого в механіці розглядаються такі рухи твердого тіла: *поступальний, обертальний навколо нерухомої осі, плоско-паралельний або плоский, обертальний навколо нерухомої точки або сферичний, вільний і складний рухи.*

Основна задача кінематики твердого тіла полягає в установленні способу задання руху і вивченні кінематичних характеристик тіла загалом і окремих його точок.

Спосіб вважається встановленим, якщо визначено метод, що вказує положення довільної точки тіла в будь-який момент часу щодо вибраної системи координат.

Розглянемо спочатку найпростіші види руху: *поступальний і обертальний навколо нерухомої осі.*

2.2.1. Поступальний рух твердого тіла

Поступальним називається такий рух твердого тіла, за якого довільна пряма, проведена в тілі, рухається паралельно її початковому положенню.

Приклади поступального руху твердого тіла: рух планки мототила зернозбирального комбайна за прямолінійного руху останнього; рух клавіші соломотряса (шарнірного паралелограма O_1ABO_2 рис. 2.9а), яка здійснює коловий поступальний рух; рух штовхача кулачкового механізму (рис. 2.11б), який здійснює зворотно-поступальний рух; рух педалі велосипеда відносно рами, поршня двигуна відносно циліндра, рух

кузова автомобіля вздовж прямої дороги тощо.

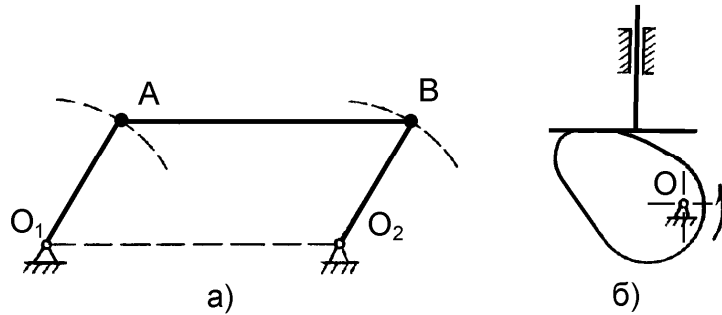


Рис. 2.11

З наведених прикладів легко побачити, що **траєкторією** точки тіла у разі поступального руху може бути як **пряма**, так і **крива** лінія.

Термін «поступальний рух» стосується тільки тіла, а не точки. Для дослідження поступального руху твердого тіла доведемо теорему:

Під час поступального руху тіла всі його точки рухаються конгруентними траєкторіями і мають у кожен момент часу однакові швидкості і прискорення.

Розглянемо в твердому тілі дві довільні точки A та B і визначимо їхні рухи векторним способом (рис. 2.12):

$$\vec{r}_A = \vec{r}_A(t); \quad \vec{r}_B = \vec{r}_B(t). \quad \vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{r}_{AB}. \quad (2.40)$$

Функції $\vec{r}_A(t)$ і $\vec{r}_B(t)$ визначають векторним способом траєкторії точок A і B .

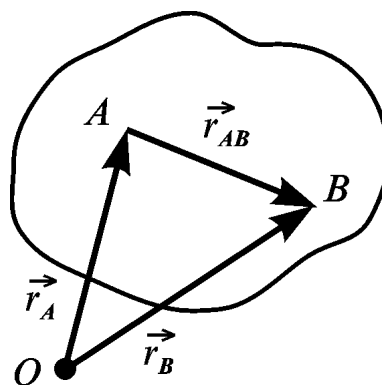


Рис. 2.12

Вектор \vec{r}_{AB} не змінюється з часом ні за величиною, ні за напрямом (тверде тіло). Отже, із виразу (2.40) видно, що траєкторію точки B можна

отримати з траєкторії точки A за допомогою паралельного переносу. Напрямок і величину переносу визначає сталий вектор \vec{r}_{AB} .

Оскільки вибір двох точок був довільний, то це означає, що всі **точки тіла рухаються конгруентними траєкторіями**.

Знайдемо похідну за часом t від виразу (2.40):

$$\frac{d\vec{r}_B}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \frac{d\vec{r}_{AB}}{dt}.$$

Вектор $\vec{r}_{AB} = \overrightarrow{cons}$, тому $\frac{d\vec{r}_B}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} \Rightarrow \vec{v}_B = \vec{v}_A$.

Диференціюючи останній вираз швидкості за часом t , дістанемо:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A.$$

Поступальний рух тіла цілком визначається рухом однієї довільної точки, оскільки всі точки тіла рухаються однаково.

Швидкість і прискорення, які є загальними для всіх точок тіла, називаються швидкістю і прискоренням поступального руху тіла, а рівняння руху будь-якої його точки є рівнянням руху тіла.

Внаслідок повної тотожності руху всіх точок тіла більшість задач із кінематики поступального руху розв'язуються методами кінематики матеріальної точки.

2.2.2. Обертальний рух твердого тіла навколо нерухомої осі.

Закон обертального руху

Обертальний рух тіла навколо нерухомої осі найбільш широко використовується в техніці.

Обертальним рухом твердого тіла навколо нерухомої осі називається такий рух, за якого **пряма, проведена крізь дві довільні точки тіла, під час руху тіла залишається нерухомою**. Ця пряма, що проходить крізь ці дві нерухомі точки, називається **віссю обертання тіла**.

Вісь обертання може знаходитись як всередині самого тіла, так і зовні його.

Для того, щоб здійснити обертальний рух твердого тіла, необхідно закріпити, наприклад, у підшипниках, дві точки цього тіла.

Визначення положення і закону обертального руху тіла

Нехай тверде тіло обертається навколо нерухомої осі z . Проведемо крізь нерухому вісь обертання z дві півплощини, одна з яких π_1 є нерухомою, а друга півплощина π_2 незмінно поєднана з тілом і обертається разом із ним. (рис. 2.13).

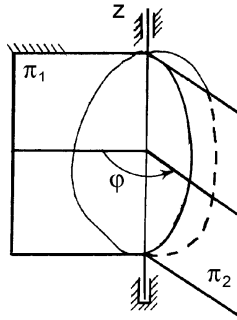


Рис. 2.13

Тоді **положення тіла** у будь-який момент часу t однозначно **визначається** двограним кутом φ між півплощинами π_1 і π_2 , який називається **кутом повороту** тіла φ .

Отже, положення твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі, визначається одним параметром, кутом повороту, тобто, тіло має один ступінь вільності.

Під час обертання тіла навколо нерухомої осі z кут повороту φ безперервно змінюється і є однозначною функцією часу:

$$\varphi = \varphi(t). \tag{2.41}$$

Вираз (2.41) називається **законом обертального руху** тіла або кінематичним рівнянням обертання навколо нерухомої осі. Якщо маємо цю функцію, то положення тіла визначено однозначно. Тобто, кожному значенню параметра часу t відповідає лише одне значення кута повороту.

Напрямок відліку кута повороту вибирається так. Суміщаємо координатну вісь z з віссю обертання. Кут φ вважається **додатним** ($\varphi > 0$), якщо з додатного кінця осі z перехід рухомої площини π_2 від нерухомої π_1 відбувається **проти ходу годинникової стрілки** (для правої системи координат). І навпаки, від'ємний ($\varphi < 0$), якщо, – **за ходом** годинникової стрілки.

Кут повороту тіла вимірюється в радіанах. Відомо, що один оберт відповідає 2π рад. А тому зв'язок між кутом повороту φ в радіанах і числом обертів N такий:

$$\varphi = 2\pi N.$$

Кутова швидкість і кутове прискорення обертового тіла

Кінематичними характеристиками обертального руху твердого тіла є кутова швидкість ω і кутове прискорення ε .

Кутова швидкість

Кутова швидкість ω характеризує кінематичну міру змінення кута повороту тіла φ за одиницю часу. Якщо за деякий малий проміжок часу $\Delta t = t_1 - t$ тіло здійснює поворот на кут $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi$, то середня кутова швидкість ω_c тіла за цей проміжок часу дорівнює:

$$\omega_c = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}.$$

Для знаходження дійсної кутової швидкості тіла ω у будь-який момент часу t необхідно взяти границю, до якої наближається ω_c , якщо елементарний проміжок часу Δt прямує до нуля:

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}. \quad (2.42)$$

Кутова швидкість тіла у будь-який момент часу дорівнює першій похідній за часом від кута його повороту і характеризує кінематичну міру змінення кута повороту в часі.

Знак кутової швидкості ω визначає напрямок обертання тіла і, у свою чергу, визначається знаком кута повороту φ .

Якщо $\omega > 0$, то тіло в даний момент часу обертається в додатному напрямі зростання кута повороту, тобто, проти ходу годинникової стрілки і – навпаки.

Якщо кутова швидкість є сталою величиною, то обертальний рух тіла рівномірний. Одиницею кутової швидкості ω є $\text{рад}/\text{с}$; $1/\text{с}$; с^{-1} .

Кутове прискорення

Введемо фізичну величину, що характеризує міру змінення кутової швидкості ω в часі.

Нехай за елементарний проміжок часу $\Delta t = t_1 - t$ кутова швидкість змінюється на величину $\Delta\omega = \omega_1 - \omega$, тоді відношення $\Delta\omega$ до Δt уявляє

собою середнє кутове прискорення $\varepsilon_c = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$.

Для знаходження дійсного кутового прискоренням тіла ε у будь-який момент часу t переходимо до границі, якщо Δt прямує до нуля:

$$\varepsilon = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}. \quad (2.43)$$

Кутове прискорення тіла у будь-який момент часу чисельно дорівнює першій похідній за часом від кутової швидкості або другій похідній від кута повороту тіла і характеризує кінематичну міру змінення кутової швидкості в часі.

Одиницею кутового прискорення ε прийнятий радіан за секунду в квадраті: $\text{рад}/\text{с}^2$; с^{-2} .

Якщо модуль кутової швидкості $\omega > 0$, то тіло обертається в додатному напрямі відліку кута повороту.

Якщо кутова швидкість зростає з часом, то $\varepsilon > 0$ і обертальний рух тіла є прискореним, а якщо зменшується $\varepsilon < 0$, то – сповільненим.

Якщо під час обертання тіла кутове прискорення залишається весь час сталою величиною, то обертальний рух тіла є рівнозмінним (рівноприскореним або рівносповільненим).

Окремі випадки обертання тіла навколо нерухомої осі

Залежно від того, які кінематичні характеристики має тіло під час обертання навколо нерухомої осі, можливі деякі окремі випадки.

Рівномірне обертання

Якщо кутова швидкість тіла залишається сталою за весь період часу руху тіла, то таке обертання називається рівномірним ($\omega = \text{const}$, $\varepsilon = 0$). Тоді кут повороту тіла визначається за формулою:

$$\varphi = \omega \cdot t \Rightarrow \omega = \frac{\varphi}{t}. \quad (2.44)$$

У техніці швидкість рівномірного обертання тіл найчастіше визначають **частотою обертання** n в обертах за хвилину: $\text{об}/\text{хв}$.

$$\omega = \frac{\varphi}{t} = \frac{2\pi n}{60} = \frac{\pi n}{30} \approx 0,1 n. \quad (2.45)$$

Рівнозмінний обертальний рух

У цьому випадку кутове прискорення стало $\varepsilon = const$, тобто, кутова швидкість тіла ω за рівні проміжки часу змінюється на одну і ту ж величину.

Визначимо кінематичні характеристики рівнозмінного обертального руху. Оскільки $\varepsilon = const$, то згідно з (2.43)

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} \Rightarrow d\omega = \varepsilon \cdot dt.$$

Для знаходження кутової швидкості ω використаємо визначений інтеграл в означених границях:

$$\int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \int_0^t \varepsilon dt.$$

Після інтегрування в означених границях отримаємо:

$$\omega - \omega_0 = \varepsilon t \Rightarrow \omega = \omega_0 + \varepsilon t, \quad (2.46)$$

де ω_0 – початкова кутова швидкість тіла.

Далі використаємо вираз (2.42)

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \Rightarrow d\varphi = \omega \cdot dt.$$

Підставимо (2.46) в останній вираз:

$$d\varphi = \omega_0 \cdot dt + \varepsilon t \cdot dt. \quad (2.47)$$

Як і у попередньому випадку, знайдемо кут повороту тіла φ :

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi = \int_0^t \omega_0 dt + \int_0^t \varepsilon t dt.$$

Після інтегрування в означених границях отримаємо:

$$\varphi - \varphi_0 = \omega_0 t + \varepsilon \frac{t^2}{2} \Rightarrow \varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}, \quad (2.48)$$

де φ_0 – початковий кут повороту тіла.

Таким чином, під час рівнозмінного обертального руху твердого тіла кутова швидкість ω і кут повороту φ визначаються за формулами (2.46) і (2.48).

Слід зауважити, що знак у правих частинах цих формул (плюс чи мінус перед ε) інформує про рівноприскорене або рівносповільнене обертання.

Приклад 2.7

Приводний вал силосорізки починає обертатись із стану спокою з кутовим прискоренням $\varepsilon = 7,5 \text{ рад/с}^2$.

Визначити кутову швидкість вала у кінці 15 секунди, а також, скільки обертів зробить вал за ці 15 секунд.

Розв'язання

За умовою прикладу кутове прискорення вала є сталою додатною величиною, а тому його обертальний рух буде рівноприскореним. Для визначення кутової швидкості ω і кута повороту φ вала можна скористатись виразами (2.46) і (2.48).

Слід відразу зазначити: оскільки вал починає обертатись зі стану спокою, то його початкова кутова швидкість дорівнює нулю.

Початковий кут повороту дорівнює нулю, якщо суміщені початок відліку кута повороту з початком руху:

$$\omega_0 = 0, \quad \varphi_0 = 0.$$

Підставимо далі у вираз для кутової швидкості значення кутового прискорення ε і часу $t_1 = 15 \text{ с}$.

Тоді кутова швидкість ω після п'ятнадцятої секунди буде дорівнювати:

$$\omega = \varepsilon t_1 = 7,5 \cdot 15 = 112,5 \text{ рад/с}.$$

Якщо підставити у вираз для кута повороту φ відомі величини, то отримаємо його значення за 15 секунд:

$$\varphi = \frac{\varepsilon t^2}{2} = \frac{7,5 \cdot 15^2}{2} = 843,75 \text{ рад}.$$

Для знаходження загальної кількості обертів вала скористаємось таким виразом: $\varphi = N \cdot 2\pi$.

Звідси кількість обертів N вала за 15 с дорівнює:

$$N = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{843,75}{6,28} = 134 \text{ об.}$$

Розподіл лінійних швидкостей і прискорень точок обертового тіла

Крім загальних кінематичних характеристик тіла, що обертається навколо нерухомої осі, – кутової швидкості ω і кутового прискорення ε –

визначимо *лінійні або колові швидкості* і *лінійні або колові прискорення* точок тіла.

З визначення обертального руху тіла випливає, що траєкторією довільної точки обертового тіла є накреслене точкою коло з радіусом, який дорівнює відстані до осі обертання тіла.

Площини кіл перпендикулярні до осі. Центри цих кіл знаходяться в точках перетину нерухомої осі обертання з указаними площинами. Радіуси даних кіл називають також радіусами обертання точок тіла.

Лінійна (колова) швидкість

Розглянемо тіло, що обертається навколо нерухомої осі z (рис. 2.14). Напрямок обертання показаний стрілкою. Виберемо в тілі будь-яку точку M , яка розміщується на відстані радіуса обертання R від осі z .

Точка M окреслює показане на рисунку коло радіусом R , площина якого перпендикулярна осі z обертання, а центр C розміщений на самій осі z .

За деякій проміжок часу dt відбувається елементарний поворот тіла на кут $d\varphi$, при цьому точка M здійснить уздовж своєї траєкторії переміщення в положення M_1 на величину:

$$ds = R d\varphi.$$

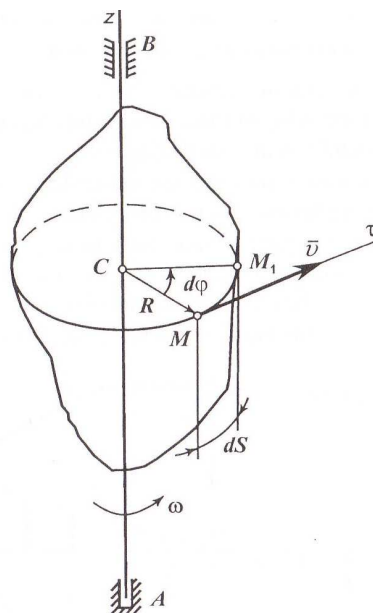


Рис. 2.14

Визначимо лінійну або колову швидкість точки M за відомим виразом (2.22):

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d(R d\varphi)}{dt} = R \frac{d\varphi}{dt} = R\omega,$$

$$v = \omega R. \quad (2.49)$$

Лінійна швидкість точки твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі, чисельно дорівнює добутку кутової швидкості тіла на радіус обертання точки.

Вектор лінійної швидкості \vec{v} напрямлений вздовж дотичної $\vec{\tau}$ до кола (перпендикулярно радіусу обертання), яке окреслюється точкою M під час руху, і спрямований у напрямку обертання.

Оскільки для всього тіла кутова швидкість ω у даний момент часу має одне і те ж саме значення, то лінійні швидкості точок тіла прямопропорційні їх відстаням до осі обертання.

Тому для діаметра KL картина розподілу швидкостей точок тіла має лінійний характер (рис. 2.15).

Як легко побачити, лінійна швидкість точки O , що розміщена на осі обертання, дорівнює нулю.

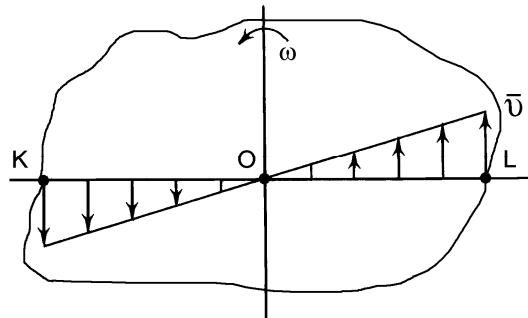


Рис. 2.15

Лінійне прискорення

Визначимо далі прискорення точки M , (рис. 2.14) за формулами (2.32) і (2.34).

У даному випадку радіус кривини кола $\rho = R$. Підставляючи вираз (2.49), матимемо формулу обертального або дотичного прискорення:

$$a_\tau = \frac{d(R\omega)}{dt} = R \frac{d\omega}{dt} = R\varepsilon \quad (2.50)$$

і доцентрового або нормального прискорення:

$$a_n = \frac{R^2 \omega^2}{R} = R\omega^2. \quad (2.51)$$

Дотичне прискорення \bar{a}_τ спрямоване за дотичною до траєкторії руху точки M у бік обертання, якщо рух тіла прискорений ($\varepsilon > 0$), і протилежно, якщо рух сповільнений ($\varepsilon < 0$).

Нормальне прискорення \bar{a}_n завжди додатне і спрямоване за нормаллю (радіусом) до центра кола, за яким рухається точка. Визначимо модуль повного прискорення \bar{a} точки M . Воно дорівнюватиме геометричній сумі складових дотичного \bar{a}_τ і нормального a_n прискорень:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{R^2 \varepsilon^2 + R^2 \omega^4} \Rightarrow a = R \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \quad (2.52)$$

Аналізуючи вираз (2.52), легко переконатися, що величина повного лінійного прискорення точки прямо пропорційна радіусу і не залежить від того, обертається тіло прискорено чи сповільнено. Визначимо напрямок вектора повного прискорення \bar{a} точки M тіла, що обертається з кутовою швидкістю ω і кутовим прискоренням ε (рис. 2.16).

Відхилення вектора повного прискорення \bar{a} від нормалі (радіуса) визначається кутом φ , який може бути обчислений за виразом:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{|a_\tau|}{a_n} = \frac{|R\varepsilon|}{R\omega^2} = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2} \Rightarrow \varphi = \operatorname{arctg} \frac{|\varepsilon|}{\omega^2}. \quad (2.53)$$

Як впливає з виразу (2.53), кут відхилення від нормалі вектора повного лінійного прискорення \bar{a} не залежить від радіуса обертання і в кожний даний момент часу однаковий для всіх точок тіла.

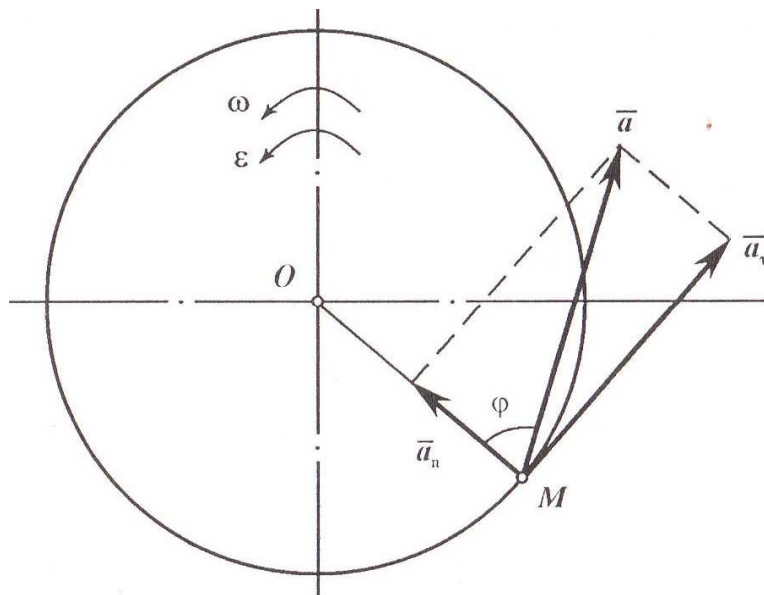


Рис. 2.16

Вектори кутової швидкості і кутового прискорення обертового тіла

Кутову швидкість ω і кутове прискорення ε обертового тіла зображують векторами.

Вектори кутових швидкості і прискорення обертового тіла розміщуються на осі обертання і спрямовані так, що, дивлячись з додатного кінця осі, можна побачити поворот тіла у напрямку проти ходу годинникової стрілки.

Вказаний напрямок вважається додатним у правій системі координат і від'ємним – у лівій.

Зазначимо, що вектор кутового прискорення спрямований у той же бік, що і вектор кутової швидкості, якщо обертання прискорене, і навпаки.

Якщо розглядати різні випадки обертання твердого тіла навколо нерухомої осі, то напрямки векторів $\bar{\omega}$ і $\bar{\varepsilon}$ будуть такими, як це показано на рис. 2.17.

Вектори кутової швидкості $\bar{\omega}$ і кутового прискорення $\bar{\varepsilon}$ є *ковзними* векторами.

Вектор $\bar{\omega}$ напрямлений по нерухомій осі обертання, його годографом є пряма лінія.

Вектор $\bar{\varepsilon}$ як похідна від $\bar{\omega}$ повинний мати напрям по дотичній до годографа $\bar{\omega}$. Але годографом останнього є пряма, тому і вектор $\bar{\varepsilon}$ для обертового тіла з нерухомою віссю обертання напрямлений також вздовж осі обертання.

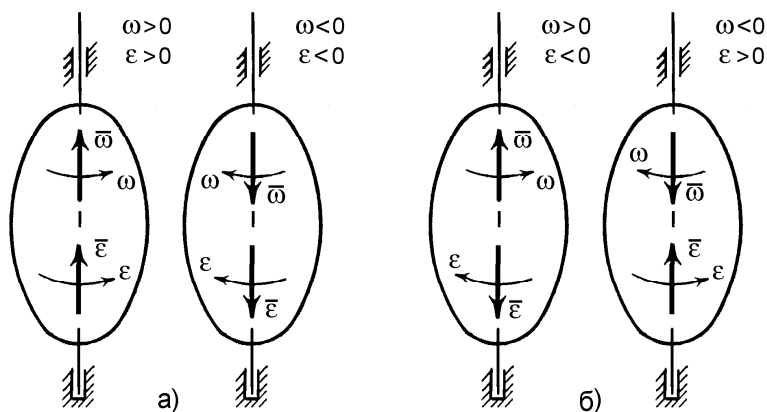


Рис. 2.17

Вектори кутової швидкості і кутового прискорення одночасно визначають наступні *три елементи*:

положення осі обертання даного тіла в нерухомій системі

координат; **величини**, які характеризують значення швидкості і прискорення; **напрямок** обертання тіла.

Якщо позначити на рис. 2.17 вісь обертання z ортом \bar{k} , то вектори $\bar{\omega}$ і $\bar{\varepsilon}$ можна уявити: $\bar{\omega} = \bar{k} \cdot \omega$; $\bar{\varepsilon} = \bar{k} \cdot \varepsilon$; $\omega_z = \pm \omega$, а проєкції цих векторів на осі координат x, y із ортами \bar{i}, \bar{j} дорівнюватимуть нулю: $\omega_x = \omega_y = 0$.

**Векторний вираз лінійної швидкості точки обертового тіла.
Формула Ейлера**

Лінійну швидкість точки обертового тіла можна уявити у вигляді векторного добутку. Нехай тіло обертається навколо нерухомої осі z у напрямку, показаному стрілкою (рис. 2.18).

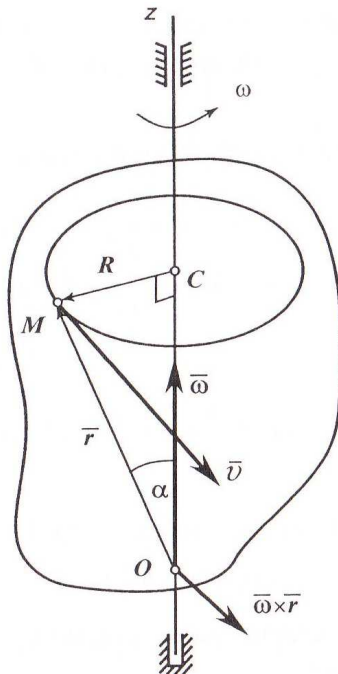


Рис. 2.18

Уявимо, що довільна точка M рухається по колу радіусом R . Виберемо на осі обертання z довільну точку відліку O і проведемо із цієї точки вектор кутової швидкості $\bar{\omega}$, спрямовуючи його вгору (за визначенням), і радіус-вектор \bar{r} цієї точки M , який визначає її положення відносно точки відліку.

Покажемо, що лінійна швидкість точки тіла, яке обертається навколо нерухомої осі, дорівнює векторному добутку кутової швидкості $\bar{\omega}$ тіла на радіус-вектор \bar{r} точки M .

Визначимо модуль лінійної швидкості v точки M :

$$v = \omega R, R = r \sin \alpha \Rightarrow v = \omega \cdot r \sin \alpha, \tag{2.54}$$

Частина перша

де α – кут між векторами $\bar{\omega}$ і \bar{r} .

Вектор \bar{v} лінійної швидкості точки M спрямований по дотичній до кола, яке є траєкторією руху точки M , тобто перпендикулярний площині трикутника OMC .

Далі визначимо модуль векторного добутку $\bar{\omega} \times \bar{r}$:

$$|\bar{\omega} \times \bar{r}| = \omega r \sin \alpha. \quad (2.55)$$

Напрямок векторного добутку $\bar{\omega} \times \bar{r}$ також перпендикулярний площині трикутника OMC , що безпосередньо впливає з визначення векторного добутку двох векторів $\bar{\omega}$ і \bar{r} .

Із цього можна дійти висновку, що не тільки збігаються модулі лінійної швидкості і векторного добутку (формули (2.54), (2.55)), але і їх напрямки. Звідси:

$$\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r}. \quad (2.56)$$

Лінійна швидкість будь-якої точки тіла, що обертається навколо нерухомої осі, дорівнює векторному добутку двох векторів: кутової швидкості і радіуса-вектора цієї точки відносно довільної точки осі обертання.

Формула (2.56) надає можливість отримати картину розподілу швидкостей точок тіла, що обертається навколо нерухомої осі.

З'ясуємо, чому ця формула інваріантна відносно довільності вибору точки відліку O на осі обертання.

Для цього звернемо увагу на модуль векторного добутку (2.55) і легко з'ясуємо, що результат коректує синус кута α між векторами: зі зміною положення точки відліку змінюється і сам кут і, відповідно, величина швидкості.

Визначимо лінійну швидкість точки M тіла, вісь обертання якого довільно розміщена у просторі відносно системи координат $Oxyz$ (рис. 2.19).

Виразимо лінійну швидкість \bar{v} за допомогою визначника векторного добутку:

$$\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = (\omega_y z - \omega_z y) \bar{i} + (\omega_z x - \omega_x z) \bar{j} + (\omega_x y - \omega_y x) \bar{k}. \quad (2.57)$$

Як відомо, вектор швидкості можна розкласти по ортах декартової системи координат:

$$\bar{v} = \bar{i} v_x + \bar{j} v_y + \bar{k} v_z.$$

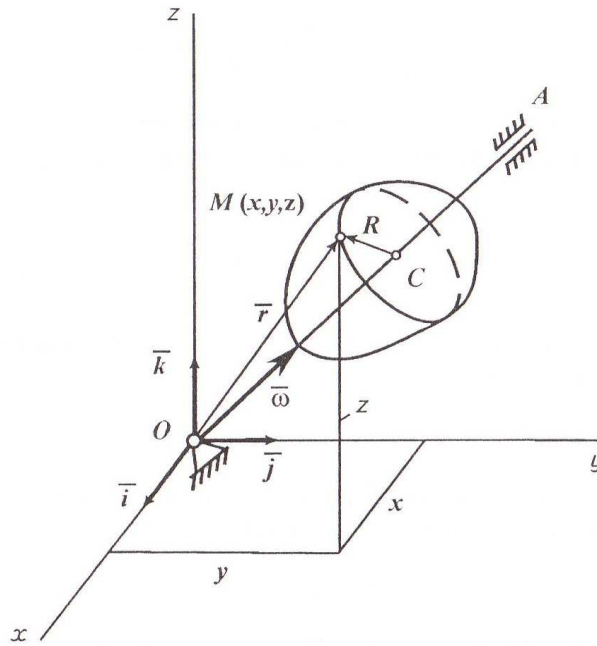


Рис. 2.19

Порівнюючи останні два вирази, легко переконатись, що проекції лінійної швидкості \bar{v} на осі координат дорівнюють:

$$\begin{aligned} v_x &= \omega_y z - \omega_z y, \\ v_y &= \omega_z x - \omega_x z, \\ v_z &= \omega_x y - \omega_y x. \end{aligned} \quad (2.58)$$

Формули (2.57) як скалярні співвідношення одержані академіком Ейлером у 1765 році. Але і формула (2.58) теж носить назву формули Ейлера.

Для окремого випадку, якщо вісь обертання вертикальна (рис. 2.18):

$$\omega_x = 0, \omega_y = 0, \omega_z = \omega.$$

Користуючись виразом (2.56), дістанемо результат, який свідчить про універсальність формули Ейлера:

$$v_x = -\omega y, v_y = \omega x, v_z = 0, v = \omega \sqrt{x^2 + y^2} = \omega R.$$

Приклад 2.8

Закон обертання маховика двигуна у пусковий період визначається рівнянням $\varphi = \frac{t^3}{3}$, де t – в секундах, φ – в радіанах.

Визначити модуль і напрям прискорення точки, розміщеної на відстані 50 см від осі обертання, в момент, коли її швидкість $v_1 = 8$ м/с.

Розв'язання

Для визначення прискорення руху матеріальної точки можна використати вираз (2.52): $a = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$. Кутові швидкість і прискорення руху маховика двигуна визначимо, використавши вирази (2.42) і (2.43):

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = t^2, \quad \varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d(t^2)}{dt} = 2t.$$

Визначимо момент часу, в який потрібно визначити прискорення точки.

Для цього, на підставі виразу (2.49), визначимо кутову швидкість обертання маховика:

$$\omega_1 = \frac{v_1}{R} = \frac{8}{0,5} = 16 \text{ c}^{-1}.$$

Оскільки визначена раніше кутова швидкість $\omega = t^2$, то можемо визначити час:

$$t_1 = \sqrt{\omega_1} = \sqrt{16} = 4 \text{ c}.$$

У формулу $\varepsilon = 2t$ підставимо час t_1 і отримаємо величину кутового прискорення у даний момент часу:

$$\varepsilon_1 = 2t_1 = 2 \cdot 4 = 8 \text{ c}^{-2}.$$

Підставимо значення ω_1 і ε_1 у вираз для повного прискорення і матимемо шуканий результат:

$$a = 0,5\sqrt{8^2 + 16^4} = 128,0 \text{ м/с}^2.$$

Напрямок вектора \bar{a} визначимо згідно з виразом (2.53):

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\varepsilon}{\omega^2} = \frac{8}{16^2} = \frac{1}{32}, \text{ звідки } \varphi = 1^\circ 48',$$

де φ – кут між радіусом обертання і вектором повного прискорення \bar{a} .

Передача обертального руху

Передача обертального руху здійснюється за допомогою зубчастих, пасових, ланцюгових передач, коліс тертя тощо. Простою передачею називають такий механізм, до складу якого входять тіла, що здійснюють тільки найпростіші рухи: поступальний або обертальний відносно

нерухомої осі (рис. 2.20).

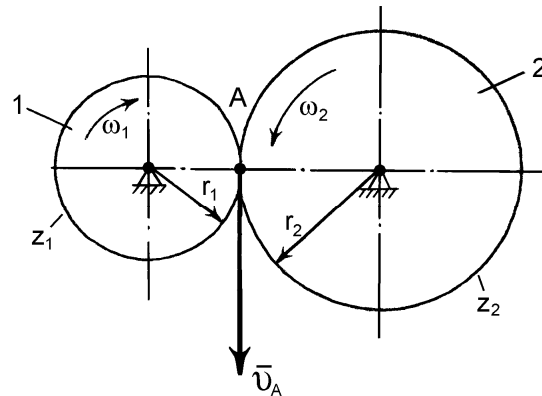


Рис. 2.20

Розглянемо передачу обертального руху за допомогою зубчастої передачі, яка складається з двох коліс, що обертаються навколо нерухомих осей.

Назвемо перше колесо (з меншим діаметром) ведучим (шестернею). Напрямок його обертання показано стрілкою. Воно має такі фізичні та кінематичні параметри: радіус – r_1 , кількість зубів – z_1 , кутова швидкість – ω_1 , частота обертання – n_1 .

Друге колесо, яке є веденим, має такі параметри: радіус – r_2 , кількість зубів – z_2 , кутова швидкість – ω_2 , частота обертання – n_2 . Напрямок обертання другого колеса також показано стрілкою.

Якщо передача обертального руху здійснюється без проковзування у місці контакту коліс, то лінійна швидкість точки контакту (точка A), яка належить одночасно двом колесам, має бути однаковою.

Лінійна швидкість точки A для першого колеса $v_A = \omega_1 \cdot r_1$, а лінійна швидкість точки A другого колеса $v_A = \omega_2 \cdot r_2$. Порівняємо обидва вирази для точки A :

$$\omega_1 \cdot r_1 = \omega_2 \cdot r_2$$

Перетворимо останній вираз

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1}.$$

Якщо вважати, що передаточне відношення – це відношення кутових швидкостей $\frac{\omega_1}{\omega_2} = u$, то можна остаточно написати:

$$u = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{z_2}{z_1}.$$

Передаточне відношення прямо пропорційне **відношенню кутових швидкостей** і частот обертання ведучого і веденого коліс. Воно

Частина перша

обернено пропорційне величинам радіусів і кількості зубців відповідних коліс.

Вказані основні положення про передачу обертального руху між двома колесами повністю придатні для визначення передаточного відношення для пасової або ланцюгової передач.

Методика і приклад розв'язування задач

Приклад 2.9

Два шківів I і II з'єднано нескінченним пасом (рис. 2.21). Радіуси шківів, відповідно $R_1 = 0,25$ м і $R_2 = 0,5$ м. Внутрішній радіус шківів II $r_2 = 0,2$ м.

Знайти швидкість v точок паса і кутові швидкості обох шківів, якщо рівняння руху тягара $x = 4t^2$ (x – в сантиметрах, t – в секундах).

Оскільки трос, на якому підвішений тягар III, є нерозтяжним, то швидкість точки M шківів II дорівнює швидкості тягара III.

З рівняння руху тягара ця швидкість:

$$v_M = \dot{x} = 8t \text{ см/с.}$$

Отже, кутова швидкість шківів II:

$$\omega_{II} = \frac{v_M}{r_2} = \frac{8t}{0,2} = 0,4t \text{ рад/с.}$$

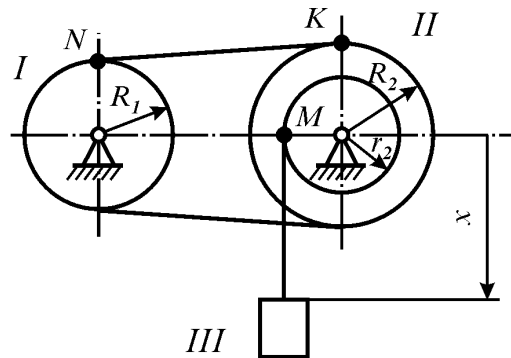


Рис. 2.21

Оскільки пас нерозтяжний і рухається без ковзання, то точки обводів шківів мають однакову швидкість $v_N = v_K = v$, тобто:

$$v = \omega_I R_1 = \omega_{II} R_2 = 0,4t \cdot 50 = 20t \text{ см/с,}$$
$$\frac{\omega_I}{\omega_{II}} = \frac{R_2}{R_1} \Rightarrow \omega_I = \frac{\omega_{II} R_2}{R_1} = \frac{0,4t \cdot 0,5}{0,25} = 0,8t \text{ рад/с.}$$

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Надайте означення і приклади поступального руху тіла.
2. Чи можна звести кінематику поступального руху до кінематики точки?
3. Як визначити положення обертового тіла? Що таке закон обертання?
4. Означте кутові швидкості і кутові прискорення обертового тіла, назвіть їхні одиниці виміру. Визначте частоту обертання.
5. Назвіть формули рівнозмінного обертання тіла.
6. Як спрямовані вектори лінійних швидкостей та прискорень точок обертового тіла?
7. Що таке передаточне відношення пари зубчастих коліс?
8. Як спрямувати вектори кутових швидкості і прискорення?
9. Запишіть і проаналізуйте формулу Ейлера.
10. В яких одиницях вимірюється кут повороту тіла?

2.2.3. Плоскопаралельний рух твердого тіла

Плоскопаралельний рух широко розповсюджений у техніці і його вивчення має велике значення. Багато механізмів, що зустрічаються на практиці, належать до, так званих, плоских механізмів.

Плоскопаралельним або плоским рухом твердого тіла називається такий рух, під час якого всі точки тіла рухаються паралельно деякій заданій нерухомій площині, яку називають напрямною або основною.

Розглянемо вказаний рух. Нехай всі точки твердого тіла, що здійснює плоскопаралельний рух, рухаються паралельно деякій нерухомій площині π (рис. 2.22).

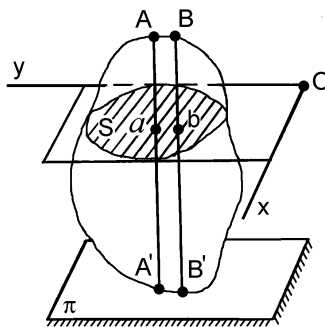


Рис. 2.22

Якщо перетнути тіло площиною xOy , яка паралельна нерухомій площині π , то у перерізі отримаємо плоску фігуру S . Фігура S під час

Частина перша

руху тіла довільно переміщується, залишаючись весь час у площині xOy .

У разі плоскопаралельного руху всі точки перпендикуляра до площини фігури AA' рухаються однаково, як і точка a перерізу, маючи однакові швидкості і прискорення, тому що цей перпендикуляр рухається поступально.

Якщо взяти на перерізі другу точку b та провести перпендикуляр BB' , то всі і його точки будуть мати однакові швидкості і прискорення. Але загалом швидкості і прискорення точок перпендикулярів є різними:

$$\bar{v}_A \neq \bar{v}_B \text{ і } \bar{a}_a \neq \bar{a}_b.$$

Якщо на перерізі тіла (фігура S) взяти велику кількість точок, то рух фігури перерізу S може повністю репрезентувати плоскопаралельний рух всього тіла. З вищенаведеного випливає, що для визначення плоскопаралельного руху твердого тіла достатньо знати рух плоскої фігури S , одержаної перетином тіла площиною xOy , паралельною заданій напрямній нерухомій площині π . Проте, рух плоскої фігури у площині визначається рухом відрізка прямої, проведеної на цій фігурі.

Таким чином, плоскопаралельний рух тіла, фактично, зводиться до розглядання руху відрізка прямої на площині.

Розкладання руху плоскої фігури на поступальний і обертальний рухи

Нехай плоска фігура S рухається у площині Oxy і за деякий малий проміжок часу переміщується із положення I у положення II (рис. 2.23).

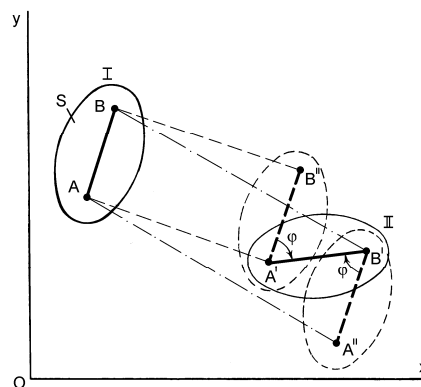


Рис. 2.23

Виберемо на фігурі S дві точки A і B і з'єднаємо їх прямою. Прослідкуємо за рухом відрізка AB .

Легко переконатися, що переміщення фігури S та незмінно

пов'язаного з нею відрізка AB можна вважати складеним із поступального і обертального рухів.

Дійсно, переміщення відрізка AB у положення $A'B'$ можна розглядати як поступальне переміщення у положення $A'B''$ і наступний поворот навколо точки A' , яку приймаємо за полюс, на деякий кут φ . Або як поступальне переміщення в положення $B'A''$ і наступний поворот на той же кут φ навколо точки B' , яку в цьому разі приймаємо за полюс.

Як видно з рис. 2.23, кут φ повороту фігури S навколо полюса A' дорівнює куту повороту навколо полюса B' . Однаковим буде і напрям повороту – за ходом годинникової стрілки.

Таким чином, кут повороту φ і напрям повороту фігури не залежать від вибору полюса. Слід зауважити, що такого ж самого кінцевого результату можна досягнути, якщо здійснити спочатку поворот тіла, а потім – поступальний рух.

Переміщення фігури S в її площині із одного положення у друге, яке нескінченно близьке до першого, у границі можна замінити двома елементарними простими плоскими переміщеннями – поступальним і обертальним.

Аналітичні дослідження плоскопаралельного руху тіла

Для визначення рівнянь плоскопаралельного руху твердого тіла розглянемо у площині руху фігури S ортогональну систему декартових координат Oxy , яка є нерухомою відносно цієї площини (рис. 2.24).

Візьмемо на фігурі S будь-яку точку A за полюс і за початок рухомої системи координат $Ax'y'$, яка жорстко зв'язана з фігурою S . Положення рухомої системи координат $Ax'y'$, як і усієї плоскої фігури S , буде визначатися положенням полюса A і кутом повороту φ осі x' щодо нерухомої осі x .

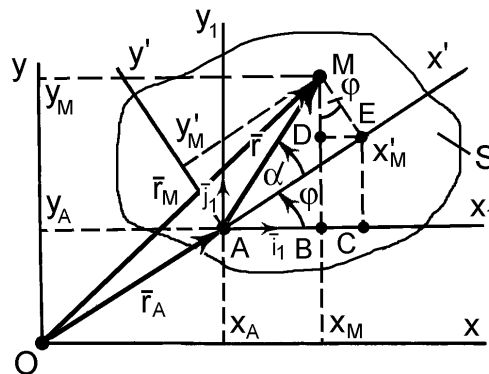


Рис. 2.24

Протягом часу координати полюса A і кут повороту тіла φ змінюються як однозначні функції часу, тому їх можна описати системою рівнянь:

$$x_A = f_1(t), \quad y_A = f_2(t), \quad \varphi = f_3(t). \quad (2.59)$$

Ці рівняння є рівняннями руху плоскої фігури або кінематичними рівняннями плоскопаралельного руху тіла.

Якщо координати полюса A і кут повороту φ відомі у будь-який момент часу, то можна визначити і положення будь-якої довільної точки M тіла у площині її руху.

Якщо з'єднати точку M з полюсом A радіусом-вектором \bar{r} , то у рухомій системі координат $Ax'y'$ її координати будуть x'_M і y'_M , а кут нахилу α визначатиме нахил радіуса-вектора \bar{r} до осі x' . Як можна побачити з рис. 2.24, координати x_M і y_M точки M у нерухомій системі координат Ox у дорівнюють:

$$\begin{aligned} x_M &= x_A + r \cos(\alpha + \varphi), \\ y_M &= y_A + r \sin(\alpha + \varphi). \end{aligned} \quad (2.60)$$

Враховуючи, що

$$r = \frac{x'_M}{\cos \alpha}, \quad r = \frac{y'_M}{\sin \alpha}$$

і підставляючи у вираз (2.60) ці величини, а також тригонометричні функції суми двох кутів, матимемо:

$$\begin{aligned} x_M &= x_A + \frac{x'_M}{\cos \alpha} \cos \alpha \cdot \cos \varphi - \frac{y'_M}{\sin \alpha} \sin \alpha \cdot \sin \varphi, \\ y_M &= y_A + \frac{x'_M}{\cos \alpha} \cos \alpha \cdot \sin \varphi + \frac{y'_M}{\sin \alpha} \sin \alpha \cdot \cos \varphi. \end{aligned}$$

Після відповідних скорочень остаточно маємо:

$$\begin{aligned} x_M &= x_A + x'_M \cos \varphi - y'_M \sin \varphi, \\ y_M &= y_A + x'_M \sin \varphi + y'_M \cos \varphi. \end{aligned} \quad (2.61)$$

Рівняння (2.61) і є кінематичними рівняннями руху довільної точки тіла (фігури) у її площині.

Визначення швидкостей точок плоскої фігури

Для визначення швидкостей довільної точки M фігури, що здійснює плоскопаралельний рух, введемо ортогональну систему координат Ax_1y_1 , яка рухається поступально відносно нерухомої системи координат (рис. 2.24).

Від центра O у нерухомій системі координат Oxy покажемо радіус-вектори: полюса $A - \bar{r}_A$ і точки $M - \bar{r}_M$. Радіус-вектор точки M відносно полюса A позначимо через \bar{r} .

Під час плоскопаралельного руху фігури зберігається векторна рівність:

$$\bar{r}_M = \bar{r}_A + \bar{r}.$$

Диференціюємо за часом цю рівність

$$\frac{d\bar{r}_M}{dt} = \frac{d\bar{r}_A}{dt} + \frac{d\bar{r}}{dt}.$$

У цьому виразі:

$$\frac{d\bar{r}_M}{dt} = \bar{v}_M; \quad \frac{d\bar{r}_A}{dt} = \bar{v}_A.$$

Доданок $\frac{d\bar{r}}{dt}$ є швидкістю точки M відносно рухомої системи координат Ax_1y_1 , яку позначимо: $\bar{v}_{MA} = \frac{d\bar{r}}{dt}$.

Рух фігури тіла відносно системи координат Ax_1y_1 є поворотом фігури навколо осі Az_1 , спрямованої перпендикулярно площині креслення (на рис. 2.26 не показана).

Таким чином, швидкість \bar{v}_{MA} є відносною швидкістю точки M під час обертання тіла навколо осі Az_1 , для визначення якої можна скористатись формулою Ейлера (2.54):

$$\bar{v}_{MA} = \bar{\omega} \times \bar{r},$$

де $\bar{\omega}$ – кутова швидкість фігури відносно точки A , яку прийняли за полюс і яка, як відомо, не залежить від вибору полюса.

Тоді вираз для швидкості точки у плоскому русі приймає вигляд:

$$\bar{v}_M = \bar{v}_A + \bar{v}_{MA} = \bar{v}_A + \bar{\omega} \times \bar{r}. \quad (2.62)$$

Швидкість довільної точки M плоскої фігури дорівнює векторній сумі швидкості полюса A і відносної швидкості точки M під час обертання фігури навколо полюса A .

Частина перша

Перший доданок у виразі (2.62) визначає поступальну швидкість фігури разом із полюсом, другий доданок – відносну швидкість точки в обертальному русі фігури навколо полюса.

Оскільки, $\bar{v}_{MA} = \bar{\omega} \times \bar{r} = \bar{\omega} \times \overline{AM}$, то модуль швидкості дорівнює $v_{MA} = \omega \cdot AM$, а вектор $\bar{\omega}$ перпендикулярний площині креслення.

Вектор \bar{v}_{MA} перпендикулярний AM : $\bar{v}_{MA} \perp \overline{AM} \perp \bar{r}$ і спрямований у бік обертання фігури S .

Якщо необхідно визначити швидкість іншої точки, наприклад, точки B , то вираз (2.62) запишемо так:

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{BA}.$$

На рис. 2.25 показано графічне розв'язання останнього векторного рівняння для визначення прискорення точки B .

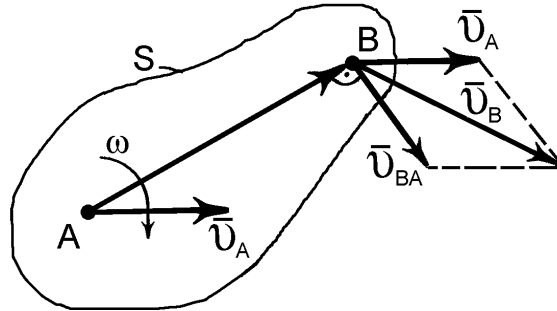


Рис. 2.25

Визначення прискорень точок плоскої фігури

Для визначення прискорення довільної точки M плоскої фігури S візьмемо похідну за часом від векторного виразу (2.62):

$$\frac{d\bar{v}_M}{dt} = \bar{a}_M = \frac{d\bar{v}_A}{dt} + \left(\frac{d\bar{\omega}}{dt} \times \bar{r} \right) + \left(\bar{\omega} \times \frac{d\bar{r}}{dt} \right).$$

Аналізуємо цей вираз, де:

$$\frac{d\bar{v}_A}{dt} = \bar{a}_A \text{ – прискорення полюса } A; \quad \frac{d\bar{\omega}}{dt} = \bar{\epsilon} \text{ – кутове прискорення в}$$

обертальному русі фігури S відносно полюса A ;

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{v}_{MA} = \bar{\omega} \times \bar{r} \text{ – відносна швидкість точки } M \text{ в обертальному русі}$$

фігури навколо полюса A .

Отже, вираз для прискорення точки M перепишемо так:

$$\bar{a}_M = \bar{a}_A + (\bar{\varepsilon} \times \bar{r}) + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}), \quad (2.63)$$

де $\bar{\varepsilon} \times \bar{r} = \bar{a}_{MA}^\tau$ – обертальне прискорення точки M відносно полюса A ;

$\bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) = \bar{a}_{MA}^n$ – доцентрове прискорення точки M відносно полюса A .

Повне відносне прискорення (рис. 2.26): $\bar{a}_{MA} = \bar{a}_{MA}^\tau + \bar{a}_{MA}^n$.

За модулем складові останнього виразу дорівнюють:

$$a_{MA}^\tau = \varepsilon \cdot AM, \quad a_{MA}^n = \omega^2 \cdot AM.$$

Модуль повного відносного прискорення точки M навколо полюса A :

$$a_{MA} = AM \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \quad (2.64)$$

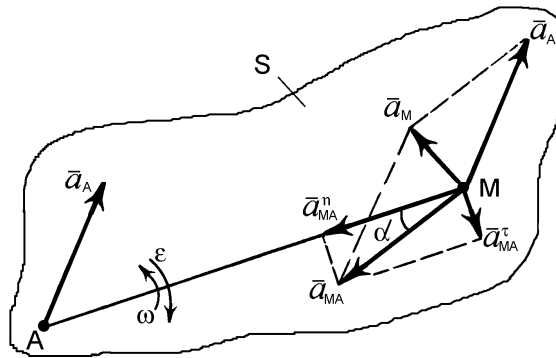


Рис. 2.26

Остаточно, прискорення довільної точки M плоскої фігури S , що здійснює плоскопаралельний рух, дорівнює:

$$\bar{a}_M = \bar{a}_A + \bar{a}_{MA}^\tau + \bar{a}_{MA}^n. \quad (2.65)$$

Прискорення будь-якої точки плоскої фігури дорівнює векторній сумі прискорення полюса і відносного прискорення цієї точки у обертальному русі точки разом із фігурою навколо полюса. Останнє складається із двох доданків.

Напрямки векторів зазначених складових прискорення:

– обертальне прискорення \bar{a}_{MA}^τ розміщене перпендикулярно до прямої AM і спрямоване у бік кутового прискорення ε , тобто, у бік напрямку відносної швидкості розглядуваної точки,

– доцентрове прискорення \bar{a}_{MA}^n розміщене на прямій AM і спрямоване

Частина перша

у бік полюса A ,

– вектор повного прискорення \bar{a}_{MA} складає з прямою AM кут α (рис. 2.26), тангенс якого визначається так :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a_{MA}^{\tau}}{a_{MA}^n} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}.$$

Оскільки величини ω і ε належать до всієї фігури S , то кут α для всіх точок фігури той самий. Відкладається кут завжди за напрямком кутової швидкості ω .

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Означте плоскопаралельний рух тіла, наведіть приклади з техніки.
2. На які два прості рухи розкладається плоскопаралельний рух?
3. Чи залежить обертальна частина плоскопаралельного руху від вибору полюса?
4. Які кінематичні рівняння плоскопаралельного руху тіла знаєте?
5. Як визначити швидкості і прискорення точок тіла, яке рухається плоскопаралельно?

Миттєвий центр швидкостей

У разі плоскопаралельного руху тіла може існувати одна точка плоскої фігури, що розташована на самій фігурі або на її уявному продовженні, швидкість якої в даний момент часу дорівнює нулю. Доведемо це.

Розглянемо фігуру S , яка здійснює плоско-паралельний рух (рис. 2.27).

Покажемо на тілі дві точки A і B та з'єднаємо їх прямою. За деякий елементарний проміжок часу Δt фігура переміститься у нове положення, а пряма AB займе положення A_1B_1 . Траєкторії руху точок A і B покажемо пунктирними лініями.

Оскільки положення відрізка прямої AB є нескінченно близьким до положення A_1B_1 , то хорди AA_1 і BB_1 прямують до дотичних, уздовж яких і розташовані вектори швидкостей точок A і B цієї фігури \bar{v}_A і \bar{v}_B . Поставивши перпендикуляри до векторів швидкостей \bar{v}_A і \bar{v}_B , отримаємо точку їх перетину P . Ця точка і буде миттєвим центром швидкостей (МЦШ). Швидкість точки P за такого руху тіла дорівнює нулю і тверде тіло в даний момент часу обертається навколо цієї точки.

Вибравши точку A за полюс, дістанемо для швидкості точки P :

$$\bar{v}_P = \bar{v}_A + \bar{v}_{PA} = 0 \Rightarrow \bar{v}_A = -\bar{v}_{PA};$$

$$v_A = \omega \cdot PA \Rightarrow PA = \frac{v_A}{\omega}.$$

Таким чином, із останнього виразу випливає, що МЦШ розміщений на перпендикулярі, проведеному з початку вектора швидкості точки A на відстані AP .

Для знаходження миттєвого центра швидкостей необхідно знати напрямки швидкостей двох точок плоскої фігури. Для отримання картини швидкостей плоскої фігури в заданий момент часу потрібно знати швидкість однієї точки і напрямок вектора швидкості іншої точки фігури.

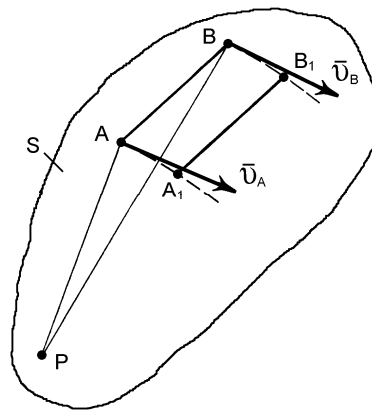


Рис. 2.27

Миттєвим центром швидкостей називається точка рухомої плоскої фігури, швидкість якої у даний момент часу дорівнює нулю ($\bar{v}_P = 0$).

Отже, якщо відоме положення миттєвого центра швидкостей і швидкість однієї з точок фігури, то можна визначати величину і напрямок швидкості будь-якої іншої точки плоскої фігури.

Окремі випадки визначення положення миттєвого центра швидкостей

Розглянемо окремі випадки визначення положення миттєвого центра швидкостей (рис. 2.28).

1. Миттєвий центр швидкостей фігури розміщений на перпендикулярі, який проведено до напрямку вектора швидкості деякої точки фігури (рис. 2.28а).

Частина перша

2. Миттєвий центр швидкостей фігури знаходиться в точці перетину двох перпендикулярів, які поставлені з двох точок фігури до напрямків векторів швидкостей цих точок (рис. 2.28б).

3. Якщо вектори швидкостей двох точок фігури паралельні (рис. 2.28в), а самі точки не розміщені на одному терпен-дикулярі до напрямків їх швидкостей, то обертання в цей момент відсутнє і фігура здійснює «миттєво-поступальний» рух, а швидкості усіх точок фігури в цей момент рівні. Це є ознакою миттєво-поступального руху тіла.

Зазначимо, миттєво-поступальний і «дійсно» поступальний рухи мають відмінності. Під час поступального руху має місце рівність швидкостей і прискорень усіх точок тіла на кінцевому проміжку часу. У разі миттєво-поступального руху рівними є лише швидкості точок тіла і тільки в заданий час, тобто лише в цю мить.

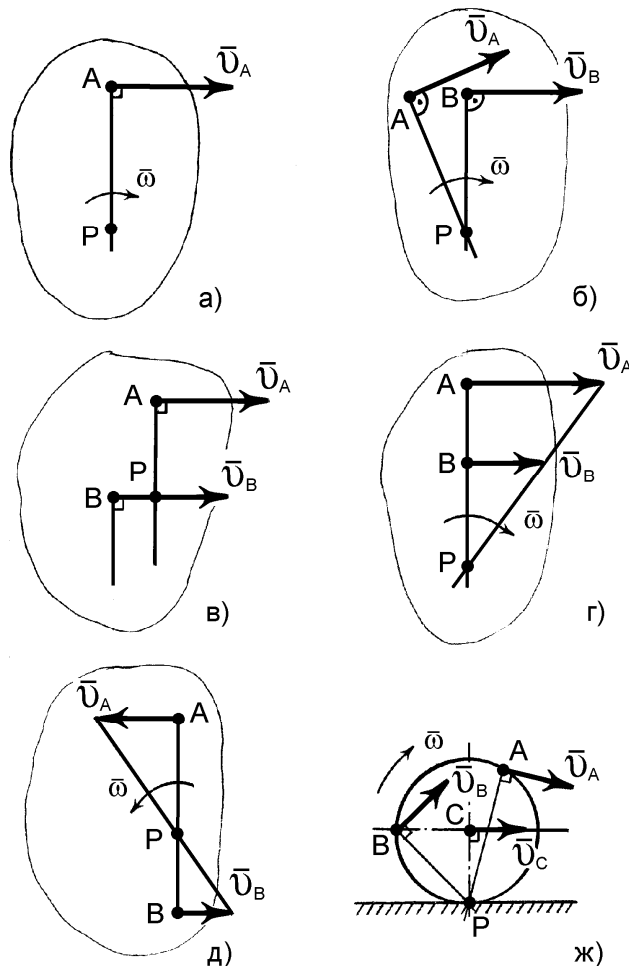


Рис. 2.28

4. Якщо вектори швидкостей двох точок фігури паралельні, спрямовані у один і той самий бік (рис. 2.28г) і відкладені у певному масштабі, точки розміщені на одному терпен-дикулярі до напрямків їх

швидкостей, а модулі швидкостей не однакові, то миттєвий центр швидкостей розміщується у точці перетину прямої, що з'єднує кінці векторів швидкостей з вказаним вище перпендикуляром.

Тоді, як бачимо з рис. 2.28г, можна записати:

$$\frac{AP}{BP} = \frac{v_A}{v_B}.$$

5. Якщо вектори швидкостей двох точок фігури паралельні, спрямовані в різні боки (рис. 2.28д) і відкладені в певному масштабі, точки розміщені на одному перпендикулярі до напрямків їх швидкостей (модулі швидкостей можуть бути однакові, або різні), то миттєвий центр швидкостей також (як в п. 4) розміщений в точці перетину прямої, що з'єднує кінці векторів швидкостей з вказаним вище перпендикуляром.

6. У разі кочення фігури (наприклад, колеса) без проковзування по деякій нерухомій лінії миттєвим центром швидкостей є точка контакту фігури з цією лінією (рис. 2.28ж), а швидкості всіх точок будуть обертальними навколо точки дотику P : $v_A \perp PA$; $v_B \perp PB$; $v_C \perp PC$.

Кутова швидкість фігури в кожний даний момент часу дорівнює відношенню модуля швидкості будь-якої точки фігури до відстаней до миттєвого центра швидкостей:

$$\omega = \frac{v_A}{PA} = \frac{v_B}{BP} = \frac{v_C}{CP}.$$

Визначення швидкостей точок фігури за допомогою миттєвого центра швидкостей

Розглянемо деякі практичні випадки визначення швидкостей точок фігури, що здійснює плоскопаралельний рух. Вибираючи миттєвий центр швидкостей за полюс і маючи на увазі, що швидкість його в даний момент часу дорівнює нулю, можна для будь-яких точок A і B цієї фігури скласти такі співвідношення:

$$\bar{v}_A = \bar{v}_P + \bar{v}_{AP} = \bar{v}_{AP}, \quad \bar{v}_B = \bar{v}_P + \bar{v}_{BP} = \bar{v}_{BP}.$$

Швидкість будь-якої точки плоскої фігури дорівнює обертальній, коловій швидкості цієї точки відносно миттєвого центра швидкостей.

Якщо це так, то легко знайти модуль і напрям швидкості кожної точки фігури (якщо відомі положення МЦШ і кутова швидкість фігури):

$$v_A = \omega \cdot AP, \quad v_B = \omega \cdot BP,$$

звідки можна записати таке співвідношення:

$$\frac{v_B}{v_A} = \frac{BP}{AP}.$$

Модулі швидкостей різних точок фігури в кожний момент часу пропорційні їх відстаням до миттєвого центра швидкостей.

Напрямки векторів швидкостей різних точок фігури перпендикулярні прямим, які з'єднують ці точки з миттєвим центром швидкостей, і спрямовані у бік обертання фігури (рис. 2.28ж).

Таким чином, швидкості різних точок плоскої фігури в будь-який момент часу розподіляються так, як би фігура обертається в цей момент часу навколо миттєвого центра швидкостей.

Це обертання відбувається навколо так званої осі обертання, яка проходить через миттєвий центр швидкостей перпендикулярно до площини, в якій цей рух відбувається.

Зазначимо, що під час руху тіла положення миттєвого центра швидкостей змінюється в кожний момент.

Геометричне місце миттєвих центрів швидкостей, віднесене до рухомої або нерухомої системи координат, називають рухомою або нерухомою центроїдою.

Таким чином, нерухома центроїда – це траєкторія миттєвого центра швидкостей на нерухомій площині Oxy (рис. 2.24), а рухома – це траєкторія миттєвого центра швидкостей на рухомій площині $Ax'y'$.

Наприклад, нерухомою центроїдою для колеса (рис. 2.28ж), яке котиться без ковзання горизонтально, є сама нерухома горизонтальна пряма, а рухомою центроїдою – коло, зв'язане з рухомою системою координат. У кожний момент часу рухома і нерухома центроїди мають загальну точку дотику – миттєвий центр швидкостей P .

Таку геометричну інтерпретацію плоско-паралельного руху надає теорема Пуансо:

Під час руху плоскої фігури рухома центроїда котиться нерухомою без ковзання.

Приклад 2.12

Розглянемо застосування теореми про розподіл прискорень у тілі під час плоскопаралельного руху.

У механізмі, зображеному на рис. 2.29, кривошип OA обертається зі сталою кутовою швидкістю ω_0 навколо нерухомої осі O і приводить до руху колесо Π , що котиться без ковзання по поверхні колеса I . Радіуси коліс однакові. Знайти прискорення точки N колеса Π .

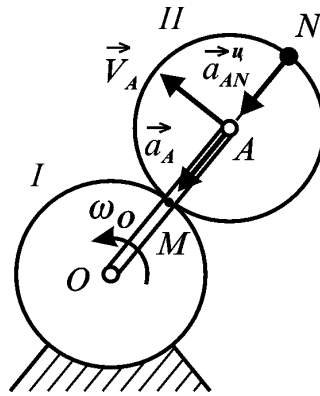


Рис. 2.29

Розв'язання

Згідно з теоремою, прискорення довільної точки плоскої фігури складається з прискорення полюса і прискорення обертального руху точки навколо полюса.

Полюс слід вибирати в точці, прискорення якої відоме, або його легко визначити з умови задачі.

Такою точкою є точка A , швидкість якої є сталою: $v_A = \omega_0 \cdot OA$.

Тому прискорення точки A дорівнює тільки нормальному прискоренню і напрямлене від точки A до центра O кривошипа OA :

$$a_A = 2\omega_0^2 r.$$

Щоб знайти прискорення \vec{a}_{AN} , згадаємо, що:

$$\vec{a}_{AN} = \vec{a}_{AN}^{об} + \vec{a}_{AN}^y,$$

$$\text{де } a_{AN}^{об} = \varepsilon \cdot AN; \quad a_{AN}^y = \omega^2 AN.$$

Тут ω і ε – миттєва кутова швидкість і миттєве кутове прискорення колеса II, які треба визначити.

З умови кочення без ковзання випливає, що швидкість точки M колеса II дорівнює нулю, тому вона є миттєвим центром швидкостей колеса II.

Тоді миттєва кутова швидкість:

$$\omega = \frac{v_A}{AM} = \frac{v_A}{r} = 2\omega_0 = const$$

і миттєве кутове прискорення

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = 0.$$

Частина перша

Отже, $a_{AN}^{об} = 0$; $a_{AN}^u = \omega^2 \cdot AN = 4\omega_0^2 \cdot r$.

Таким чином, прискорення точки N складається з двох векторів \vec{a}_A і \vec{a}_{AN}^u , напрямлених уздовж спільної прямої в один бік. Додаючи їх, маємо:

$$a_N = 6\omega_0^2 r.$$

Вектор \vec{a}_N напрямлений уздовж прямої NA від точки N до точки A .

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Який рух тіла називають плоскопаралельним?
2. У якій точці слід вибирати полюс?
3. Чи залежать від вибору полюса характеристики поступального руху, обертального руху?
4. Чому дорівнює швидкість довільної точки тіла під час плоскопаралельного руху?
5. Що називають миттєвим центром швидкостей? Доведіть його існування.
6. Яке співвідношення існує між швидкостями точок тіла, якщо відоме положення миттєвого центра швидкостей?
7. Чому дорівнює прискорення точки тіла під час плоскопаралельного руху?
8. Які властивості має прискорення обертального руху точки навколо полюса?
9. Які способи для визначення положення миттєвого центра швидкостей ви знаєте?
10. Наведіть приклади плоскопаралельного руху тіл із техніки.

РОЗДІЛ III ДИНАМІКА

3.1. Динаміка Матеріальної точки

3.1.1. Вступ. Задачі динаміки.

Динаміка вільної матеріальної точки

Пізнання законів руху тіл людством було дуже повільним і не завжди вдалим. Навіть великий Аристотель (IV ст. до н.е.) вважав, що тіло раптово припинить рух, якщо перестане діяти сила. Правильно сформульовані закони руху тіл, що відбуваються в природі, були відкриті внаслідок тривалих спостережень.

Основи динаміки розроблені у XVI-XVII ст., коли практика суспільного виробництва поставила перед людиною низку важливих проблем у військовій справі, судноплаванні, виробництві товарів тощо.

Відкриття М. Коперніком (XVI ст.) геліоцентричної системи світу, а Й. Кеплером (XVII ст.) – законів руху планет, відіграло найважливішу роль у розвитку динаміки.

Леонардо да Вінчі, Г. Галілей, Р. Декарт, Х. Гюйгенс (XVI-XVII ст.) – з цими іменами пов'язаний підготовчий період становлення динаміки. Л. да Вінчі досліджував рух тіла по похилій площині, тертя, питання теорії механізмів, ввів поняття моменту сили.

Галілей Г. експериментально довів закон падіння тіл у порожнині, досліджував рух тіла, кинутого під кутом до горизонту, встановив закон пропорційності між вагою і масою тіла, сформулював принцип відносності класичної механіки.

Декарт Р. ввів поняття про кількість руху як міру механічного руху, відкрив закон збереження кількості руху, його ідеї виявилися плідними для подальшого розвитку динаміки.

Гюйгенс Х. досліджував фізичний маятник, вперше почав використовувати вирази осьового моменту інерції тіла і кінетичної енергії.

Засновником динаміки є І. Ньютон (XVII ст.). Він систематизував і узагальнив дослідження, пов'язані з динамікою, і показав шляхи її подальшого розвитку. Ньютон вперше сформулював основні закони динаміки, ввів поняття маси і узагальнив поняття сили. Він відкрив закон всесвітнього тяжіння як основу сучасної механіки і фізики. Систематичне викладення класичної механіки подано Ньютоном у творі «Математичні засади натуральної філософії» (1687 р.).

Вперше аналітично виклав динаміку Л. Ейлер (XVIII ст.), дійсний член Санкт-Петербурзької Академії наук. Він довів важливу теорему динаміки про зміну кінетичного моменту, створив теорію моментів інерції, механіку суцільних середовищ, теорію стійкості, ввів поняття потенціального силового поля.

У цей же час М.В. Ломоносов відкрив загальний закон природи – закон збереження матерії і руху. На базі цього закону всі закони збереження механіки і фізики є конкретними проявами закону Ломоносова, який є природничо-науковою основою матеріалізму.

Подальший розвиток динаміки пов'язаний з працями Ж. Лагранжа, Л. Пуансо, С.В. Ковалевської, О.М. Ляпунова, М.Є. Жуковського, С.О. Чаплигіна, О.М. Крилова та ін.

Механіка тіл змінної маси заснована І.В. Мещерським. Цей розділ механіки став основою теорії реактивного руху і міжпланетних польотів К.Е. Цюлковського, подальший розвиток і практичне втілення її – у працях творця ракетної і космічної техніки С.П. Корольова.

У другій половині ХХ ст. з'явився новий напрям науки – робототехніка, науковою базою якого стала теоретична механіка. Особливістю робототехніки є те, що вона синтезує й об'єднує такі науки, як механіка, кібернетика і комп'ютерні технології. В Україні бурхливий розвиток отримала механіка суцільного середовища: теорія пружності і пластичності, гідроаеродинаміка. Дослідження вітчизняних учених Г.М. Савіна, О.М. Кільчевського, О.М. Гузя, В.Т. Грінченка є провідними у світовій науці.

Динаміка – розділ теоретичної механіки, в якому вивчаються закони руху моделей матеріальних об'єктів: точок, твердого тіла і матеріальної системи під дією прикладених сил з урахуванням властивостей мас.

Основою теоретичної механіки є декілька гіпотез, пов'язаних з уявленнями про простір і час, поняттями інерціальності системи відліку, поняттями сили і маси, а також систематизовані спостереження за звичайними рухами тіл макросвіту: закони Галілея – Ньютона.

Динаміка досліджує загальні властивості механічного руху як теорію достатньо повільних переміщень одних макроскопічних тіл відносно інших, поєднуючи особливості кінематичних властивостей руху з властивостями сил, які спричиняють цей рух, як внутрішній зв'язок між зовнішніми факторами (силами) і геометричними характеристиками рухів.

Теоретична або класична механіка є науковою основою, на якій побудована теорія відносності, механіка великих швидкостей, пов'язана з іншими просторово-часовими уявленнями про світ.

У динаміці розглядають дві основні задачі. Перша або пряма задача полягає у тому, щоб за заданими масою і законом руху тіла визначити силу або рівнодійну системи сил, під дією якої цей рух відбувається.

Друга або обернена задача динаміки – за заданими силами, прикладеними до тіла, масою і початковими умовами руху визначити закон руху, який цими обставинами обумовлюється.

Динаміку поділяють на динаміку матеріальної точки, динаміку твердого тіла і динаміку матеріальної системи.

Закони динаміки матеріальної точки

Основою динаміки є закони, сформульовані І. Ньютоном для матеріальної точки у творі «Математичні засади натуральної філософії». За уявленнями класичної механіки час і простір, де відбувається рух, вважаються об'єктивною реальністю, але абсолютними і однорідними. Абсолютність простору допускає незалежність механічного руху від властивостей простору в різних його точках і в різних напрямках, тобто, його однорідність і ізотропність. Це геометричний тривимірний Евклідів простір.

У класичній механіці допускається існування такого годинника, тривалість періоду якого не змінюється під час довільних переміщень тіл. Цей постулат еквівалентний твердженню про те, що величина цього часового проміжку відносно різних систем відліку, які рухаються довільно, однакова.

Згідно з уявленнями про час можна встановити одночасність двох подій на різних об'єктах незалежно від швидкості їхнього руху відносно Землі, що характеризує абсолютність часу. Однорідність часу передбачає довільний вибір початку відліку і вимір інтервалів між окремими моментами часу.

Незалежність властивостей абсолютних простору і часу від руху матеріальних об'єктів пов'язана з гіпотезою про миттєву передачу взаємодії між тілами через деякий порожній простір. За сучасними уявленнями миттєвих взаємодій в макросвіті не існує, вони здійснюються за допомогою силових полів, які є одним із різновидів матерії.

Можна вважати, що взаємодія передається з кінцевою швидкістю – зі швидкістю світла, а сукупність тіл і полів є єдиною матеріальною субстанцією. Під впливом взаємодії тіла можуть змінювати своє відносне розташування, тобто, переміщуватись у просторі. До того ж зміна відносного розташування характеризується тривалістю, яка виражається деякою функцією часу.

Простір і час – суть загальні форми існування матеріальних об'єктів. Створення теорії відносності підтвердило правильність такого уявлення. На думку Ейнштейна, «якщо б зникла матерія, то зникли б і простір, і час».

Таким чином, класична механіка вивчає такі переміщення тіл у просторі і часі, при яких процес передачі взаємодії тіл можна вважати практично миттєвим, а самі процеси, які при цьому відбуваються у фізичних полях, можна не розглядати.

Таке уявлення про простір і час дає можливість ввести відносну систему відліку як сукупність системи координат, жорстко пов'язаної з тілом відліку, і відмітника часу (годинника), встановленого на цьому тілі. При цьому система відліку має бути такою, в якій ізольована матеріальна точка може безмежно довго перебувати у стані спокою чи рівномірного і прямолінійного руху – це інерціальна галілеєва система відліку.

З достатнім ступенем точності за нерухому інерціальну систему можна вибрати геліоцентричну систему відліку Коперника з початком у центрі мас Сонячної системи і ортогональними осями координат, спрямованими до «нерухомих» зірок. Називати останніх нерухомими правомірно, тому що, приміром, річне кутове зміщення більшості зірок становить приблизно $0,01''$. Тому, систему відліку Сонце–зірки приймають за тверде тіло для порівняно довгих проміжків часу.

Не слід думати, що неправильне розуміння Ньютоном абсолютного простору призводить до хибності його законів. Для умов Землі і «нешвидких» рухів вони досить точно відображають реальну земну картину.

Перший закон Галілея-Ньютона, закон інерції

Існує система відліку, де ізольована матеріальна точка зберігає свій стан спокою або рівномірного і прямолінійного руху доти, поки прикладені сили не примусять її змінити цей стан.

Закон інерції – один із фундаментальних законів природи. Він встановлює нерозривний зв'язок між матерією і рухом, характеризує намагання тіл зберегти той механічний рух, який тіло набуло раніше. Останнє називається властивістю інертності, що в перекладі з латинської означає «лінощі», «рутинність».

Отже, з цього закону випливає, що самовільно матеріальна точка не може змінити стан свого руху чи спокою. Тобто, рух матеріальної точки змінюється тільки в результаті її взаємодії з іншими тілами. Якщо рух відхиляється від рівномірного і прямолінійного, виникає прискорення відносно інерціальної системи відліку.

Відмінність від нуля абсолютного прискорення матеріальної точки свідчить про вплив інших тіл з певною інтенсивністю і спрямованістю, що характеризується в класичній механіці поняттям сили.

Кількісне співвідношення між силою і кінематичними параметрами, що характеризують взаємодію матеріальної точки з іншими матеріальними об'єктами, визначає другий закон Ньютона або основний закон динаміки.

Основний закон динаміки

|| *Прискорення вільної матеріальної точки пропорційне прикладеній до неї силі і напрямлене вздовж вектора сили.*

Якщо силу або рівнодійну декількох сил, прикладених до точки, позначити літерою \vec{F} , прискорення – літерою \vec{a} , масу матеріальної точки – m і вважати останню згідно з уявленнями класичної механіки сталою, то закон матиме вираз:

$$m\vec{a} = \vec{F}, \quad (3.1)$$

де сила \vec{F} може бути рівнодійною.

Співвідношення (3.1), яке встановлює зв'язок між силою, масою і прискоренням, є найважливішим у класичній механіці і називається *основним рівнянням динаміки вільної матеріальної точки* у векторній формі.

Наведемо коротку характеристику сили і маси.

Векторно-кількісна міра фізико-механічної дії на матеріальну точку з боку інших тіл називається силою.

За сучасними уявленнями основу механічних взаємодій становлять гравітаційні і електромагнітні сили – сили ваги, сили пружності, сили тертя, сили опору середовища.

За проявом сили можуть давати статичний і динамічний ефект. Перший викликає деформацію тіла, другий – зміну швидкостей точок тіла, тобто, прискорення.

Наприклад, ефект від сили ваги тіла, яке вільно рухається у повітрі чи вакуумі – зміна величини і напрямку вектора початкової швидкості і, як наслідок, зміна траєкторії від прямої до параболи.

Другий закон динаміки надає кількісні співвідношення між чинниками під час механічної взаємодії тіл, тому він є основою цього фундаментального узагальнення класичної механіки.

Частина перша

З іншого боку, якщо сили в розділі «Статика» розглядались сталими за величиною і напрямком, то «Динаміка», як правило, оперує зі змінними силами, які, взагалі, є функціями часу, відстані (координат) і швидкості:

$$\bar{F} = \bar{F}(t, \bar{r}, \bar{v}).$$

Але природа багатьох сил допускає, що вони можуть бути функціями від окремих кінематичних параметрів. Наприклад, сила гравітаційної взаємодії на підставі закону всесвітнього тяжіння визначається так:

$$\bar{F} = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^3} \bar{r},$$

де m_1 і m_2 – маси тіл; γ – гравітаційна стала, $\bar{r} = \bar{r}_1 - \bar{r}_2$ – відносна відстань (\bar{r}_1 і \bar{r}_2 – радіуси-вектори мас в інерціальній системі відліку).

За описанням руху тіла в середовищі (повітря, рідина) сила опору, як встановлено експериментально, є функцією від швидкості:

$$\bar{F}_{on} = -\alpha \bar{v},$$

де α – коефіцієнт в'язкого тертя, який залежить від форми тіла і властивостей середовища.

Якщо швидкість збільшується, то сила опору може стати пропорційною квадрату, а то і кубу швидкості.

***Масою** матеріальної точки називається **фізична величина**, яка є **мірою інертних і гравітаційних властивостей тіла**, що моделює **точка**.*

Під інертними властивостями розуміють опір тіла у відповідь на зміну вектора швидкості, під гравітаційними – взаємне притягання тіла залежно від положення відносно земної поверхні. Тому не можна вважати масу коефіцієнтом пропорційності між силою і прискоренням (3.1), а визначати її методами, які відображають вище згадані властивості.

Перший метод пов'язаний з гравітаційними властивостями матерії і ґрунтується на законі всесвітнього тяжіння. Встановлено, що відношення ваги тіла до прискорення вільного падіння у порожнині у всіх точках земної кулі є сталою величиною. Це відношення визначає вагому масу

$$m_G = \frac{G}{g}, \quad (3.2)$$

де G – вага тіла; g – прискорення вільного падіння у вакуумі.

Із формули (3.2) випливає, що маси тіл і їх вага пропорційні. Тому можна одну з мас взяти за еталон одиниці маси і визначати інші маси зважуванням на терезах. Цей метод називається статичним.

Другий, динамічний метод, пов'язаний з інертними властивостями тіл. Якщо одна й та сама сила діє на тіла з різною масою, то вона викликає різні прискорення. Тоді з виразу (3.1) випливає

$$m_1 \cdot \bar{a}_1 = m_2 \cdot \bar{a}_2 \Rightarrow m_1 = m_2 \frac{a_2}{a_1}.$$

Якщо вибрати одну із цих мас за еталон, то за останнього виразу можна визначити іншу інертну масу.

Дослідами Б. Бесселя встановлено тотожність гравітаційної і інертної маси з точністю до десятого порядку мализни. Цей закон природи називається принципом еквівалентності, він покладений в основу загальної теорії відносності. Оскільки прискорення g , що входить до формули (3.2), змінюється в різних місцях земної поверхні, то буде різною і вага деякого тіла, тоді як його маса залишається незмінною.

Таким чином, поняття маси зосереджує в собі дві найзагальніші властивості фізичних тіл, які беруть до уваги в теоретичній механіці.

Перша – властивість інертності (про це йдеться в другому законі механіки).

Друга – гравітаційна властивість. Указані характеристики тіл у теоретичній механіці відображають внутрішні матеріальні властивості фізичних тіл.

Існує більш загальне формулювання другого закону Ньютона.

Похідна за часом від вектора кількості руху матеріальної точки дорівнює вектору прикладеної до точки сили.

$$\frac{d}{dt}(m\bar{v}) = \bar{F}, \tag{3.3}$$

де $m\bar{v}$ – кількість руху матеріальної точки як добуток маси на вектор швидкості.

Якщо маса не залежить від часу, то (3.3) можна спростити:

$$m \frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{F} \Rightarrow m\bar{a} = \bar{F}.$$

Частина перша

Слід відмітити, що закон інерції можна одержати з другого закону (3.3), якщо система відліку інерціальна: $\bar{F} = 0$; $m = const$. Тоді $\bar{v} = const$: і швидкість зберігається протягом всього часу руху.

Основний закон динаміки у формі (3.1) дозволяє вибрати і основні одиниці механічних величин – довжину, масу і час.

Одиницею маси в Міжнародній системі одиниць СІ слугує кілограм (кг), як маса еталона.

Одиницею довжини слугує метр (м), **оддиницею часу** – секунда (с).

Одиниця сили є похідною одиницею. Один ньютон (Н) є такою силою, яка тілу масою 1 кг надає прискорення 1 м/с^2 у напрямку вектора сили.

Таким чином, одиниці маси, довжини, сили і часу повинні визначатись з урахуванням основного закону динаміки, тому що ці категорії пов'язані між собою функціонально. Три з них – маса, довжина і час – в офіційній системі СІ є незалежними, для них існують еталони. Одиниця сили виводиться із основних одиниць за допомогою основного закону динаміки..

Третій закон Ньютона, принцип рівності дії і протидії

Кожній дії одного тіла завжди відповідає рівна за модулем і протилежна за напрямом протидія другого тіла. Коротко – дія дорівнює протидії.

При цьому слід враховувати: фізична взаємодія двох тіл, наслідком якої є механічний рух, хоча і викликає дві рівні за величиною і протилежні за напрямком сили, що діють по одній прямій, але вони не зрівноважуються, тому що дія і протидія прикладені до різних тіл.

Якщо, наприклад, буксирний катер тягне канатом баржу, то і баржа тягне назад катер з рівною силою. В цьому неважко переконатися, якщо з'єднати катер і баржу канатом через два динамометри, закріплені на катері і баржі. Показники на двох динамометрах будуть завжди однакові, навіть під час руху з прискоренням. Чому ж система рухається у напрямку сили тяги катера? Тому, що катер відштовхується від води за допомогою лопатей гребного гвинта. Тут також сили, які прикладені з боку води на лопаті гвинта і з боку гвинта на воду, завжди однакові і протилежні за напрямом. Останні також не зрівноважуються, тому що прикладені до різних тіл.

Третій закон Ньютона виконується і в неінерціальній системі відліку, тому що він не містить кінематичних характеристик матеріальних об'єктів.

Принцип незалежності дії сил (принцип суперпозиції)

Прискорення, яке отримує матеріальна точка від дії системи сил, дорівнює векторній сумі прискорень, які б отримувала точка від дії кожної сили окремо.

Із цього визначення можна зробити висновок, що кожна із сил надає точці прискорення, яке незалежне від дії інших сил. Цей закон впливає з аксіоми про паралелограм сил і справджується, якщо діючи на точку сили не залежать від її прискорення.

На підставі виразу (3.1)

$$m\bar{a}_1 = \bar{F}_1; m\bar{a}_2 = \bar{F}_2; \dots; m\bar{a}_n = \bar{F}_n.$$

Додамо ці вирази

$$m(\bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \dots + \bar{a}_n) = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \dots + \bar{F}_n = \bar{F}; \Rightarrow m\bar{a} = \bar{F}, \quad (3.4)$$

де \bar{a} – векторна сума прискорень від дії кожної сили окремо;

$\bar{F} = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k$ – рівнодійна прикладених сил.

Отже, рух матеріальної точки під дією системи сил буде таким самим, як і під дією однієї сили, рівнодійної, що дорівнює їх векторній сумі.

Закони Ньютона є лише першим наближенням до дійсності, але добре узгоджуються з нею при «малих» швидкостях, навіть якщо властивості матеріальних об'єктів вважаються незалежними від властивостей простору і часу. Кількісні відхилення законів сучасної механіки від законів класичної виявляються тільки під час руху поблизу великих мас типу Сонця, де викривляється простір, або при величезних швидкостях, близьких до швидкості світла.

Насправді ж, простір і час є атрибутами рухомої матерії. Проте, у межах своєї компетентності теоретична механіка має велике значення при дослідженні механічних процесів, що зустрічаються на практиці. «Земна» класична механіка є фундаментом для теоретичних і практичних висновків сучасної науки й техніки. Закони Ньютона мають і велике методологічне значення. Дійсно, перший закон Ньютона постулює в динаміці принцип незнищеності матерії і руху. Другий закон встановлює пропорційність між силою і прискоренням, дає змогу розв'язувати конкретні задачі механіки, збагачує поняття сили. Третій закон Ньютона дозволяє глибше розкрити суть поняття сили, двобічної дії і протидії як взаємодії між двома

Частина перша

матеріальними об'єктами, створюючи перехід до дослідження матеріальної системи.

Таким чином, сила як матеріальна категорія має джерелами фізичні тіла, між якими відбувається взаємодія, наслідком якої є перенесення механічного руху з одного тіла на інші тіла або перетворення енергії в рух.

Диференціальні рівняння руху вільної матеріальної точки

З розділу «Кінематика» відомо три способи задання руху матеріальної точки: векторний, координатний і натуральний. Відповідно до цього мають місце і форми складання диференціальних рівнянь руху матеріальної точки. В основу цих рівнянь покладено основний закон динаміки (3.1).

1. Диференціальне рівняння у векторній формі

Оскільки в цьому разі прискорення матеріальної точки $\bar{a} = \ddot{\bar{r}}$, то диференціальне рівняння руху матиме такий вигляд:

$$m \ddot{\bar{r}} = \bar{F}(t, \bar{r}, \dot{\bar{r}}). \quad (3.5)$$

Диференціальне рівняння (3.5) є *основним рівнянням динаміки точки у векторній формі*.

2. Диференціальні рівняння у координатній формі

Прискорення матеріальної точки в цьому разі визначається у проєкціях на відповідні осі прямокутної системи декартових координат

$$a_x = \ddot{x} = \frac{d^2 x}{dt^2}; \quad a_y = \ddot{y} = \frac{d^2 y}{dt^2}; \quad a_z = \ddot{z} = \frac{d^2 z}{dt^2}.$$

Проектуючи ліву і праву частини основного закону динаміки (16.1) на відповідні осі координат, отримуємо шукані рівняння

$$m\ddot{x} = \sum_{k=1}^n F_{kx}; \quad m\ddot{y} = \sum_{k=1}^n F_{ky}; \quad m\ddot{z} = \sum_{k=1}^n F_{kz}, \quad (3.6)$$

де $\sum_{k=1}^n F_{kx}$, $\sum_{k=1}^n F_{ky}$, $\sum_{k=1}^n F_{kz}$ – алгебраїчні суми проєкцій сил на осі x , y і z .

Рівності (3.6) мають шостий порядок і є основними диференціальними рівняннями точки в координатній формі.

3. Диференціальні рівняння у натуральній формі

Прискорення матеріальної точки в цьому разі визначаються у проєкціях на дотичну $\bar{\tau}$, нормаль \bar{n} і дорівнюють:

$$a^\tau = \frac{dv}{dt}; \quad a^n = \frac{v^2}{\rho},$$

де v – швидкість матеріальної точки; ρ – радіус кривини траєкторії, по якій рухається точка.

Проєкція прискорення точки на бінормаль відсутня $a^b = 0$. Проєктуючи ліву і праву частини (3.1) на осі натурального тригранника, дістанемо

$$m \frac{dv}{dt} = \sum_{k=1}^n F_k^\tau \quad m \frac{v^2}{\rho} = \sum_{k=1}^n F_k^n, \quad 0 = \sum_{k=1}^n F_k^b, \quad (3.7)$$

де останнє рівняння в проєкції на бінормаль є рівнянням статички.

Рівності (3.7) є диференціальними рівняннями руху точки в натуральній формі.

Як видно з виразу (3.1), вектор рівнодійної сили колінеарний вектору прискорення і розміщений у стичній площині траєкторії, тобто, її проєкція на бінормаль дорівнює нулю. Про це інформує третє рівняння системи (3.7).

Рівнянню (3.5) надають перевагу при доведеннях теорем. Рівняння (3.6) застосовують як для розв'язування задач, так і для теоретичних досліджень.

Рівняння (3.7) застосовують, як правило, якщо задана траєкторія руху точки, тобто, під час дослідження невідомої матеріальної точки.

Дві задачі динаміки матеріальної точки

Розглянемо основні задачі динаміки матеріальної точки. Оскільки основний закон динаміки точки (3.1) і диференціальні рівняння руху (3.5), (3.6), (3.7) мають у лівій частині прискорення – кінематичну

Частина перша

характеристику руху, а у правій частині – векторну суму сил, які діють на точку, або суму проекцій – силову характеристику руху, то, залежно від того, яка характеристика руху потребує визначення, формулюються дві основні задачі динаміки матеріальної точки.

Перша задача динаміки точки

За заданими масою матеріальної точки і кінематичним законом її руху визначити рівнодійну силу, яка спричиняє цей рух.

У цьому випадку розв'язання задачі зводиться до диференціювання кінематичних рівнянь руху матеріальної точки. Тому ця задача називається диференціальною.

Який би спосіб не застосовували, треба знайти проекції сили на осі, які дорівнюють добутку маси на проекцію відповідного прискорення.

Схема розв'язування першої задачі динаміки матеріальної точки проста. Розглянемо алгоритм її розв'язання на прикладі.

Приклад 3.1

Матеріальна точка рухається згідно з параметричними рівняннями:

$$\begin{cases} x = at, \\ y = bt - ct^2, \end{cases}$$

де x, y – в метрах, t – в секундах, a, b, c – сталі величини.

Визначити рівнодійну силу, яка діє на цю матеріальну точку.

Розв'язання

Знайдемо проекції швидкості на координатні осі x, y як першу похідну за часом від координат

$$v_x = \dot{x} = \frac{dx}{dt} = a; \quad v_y = \dot{y} = \frac{dy}{dt} = b - 2ct.$$

Знайдемо проекції прискорення матеріальної точки на осі координат як другу похідну за часом від координат

$$a_x = \ddot{x} = \frac{dv_x}{dt} = 0; \quad a_y = \ddot{y} = \frac{dv_y}{dt} = -2c.$$

Тоді проекції рівнодійної сили на координатні осі дорівнюють (3.6):

$$F_x = ma_x = 0, \quad F_y = ma_y = -2mc.$$

Рівнодійна сила, що діє на матеріальну точку

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = 2mc.$$

Ця сила діє паралельно осі Oy , тому що $F_x = 0$, і спрямована у бік від'ємних значень даної осі, адже $F_y = -2mc$.

Друга задача динаміки точки

Згідно із заданими силами, які діють на матеріальну точку певної маси, і початковими умовами руху (координати і проекції швидкості в деякий початковий момент часу) визначити закон руху точки.

Друга або обернена задача динаміки матеріальної точки розв'язується методом інтегрування диференціальних рівнянь руху: треба здійснити перехід від проекцій прискорень, які введені в диференціальних рівняннях, до координат у функції часу. Тому друга задача динаміки називається інтегральною. При цьому повинні бути задані початкові умови руху матеріальної точки: координати і проекції швидкості точки у початковий момент часу. Останні мають конкретний вплив на остаточний результат.

Таким чином, під час розв'язування другої задачі динаміки *відомі сили*, які діють на точку певної маси, *координати і проекції швидкостей у певний початковий момент часу*. Необхідно *знайти* кінематичні *рівняння руху точки* (закон руху).

Розв'язання цієї задачі зводиться до інтегрування диференціальних рівнянь руху матеріальної точки (3.6) або (3.7). Визначивши проекції сил на осі координат F_x, F_y, F_z і підставивши їх в праву частину рівнянь, двічі інтегруємо систему.

Розв'язком цієї системи рівнянь є функції координат від часу і шість сталих інтегрування C_1, C_2, \dots, C_6 :

$$x = x(t, C_1, C_2, \dots, C_6), \quad y = y(t, C_1, C_2, \dots, C_6), \quad z = z(t, C_1, C_2, \dots, C_6). \quad (3.8)$$

Для визначення сталих інтегрування підставимо початкові умови – координати і проекції швидкостей в деякий початковий момент часу t_0

$$\begin{aligned} x(t_0) &= x_0; & y(t_0) &= y_0; & z(t_0) &= z_0; \\ \dot{x}(t_0) &= \dot{x}_0; & \dot{y}(t_0) &= \dot{y}_0; & \dot{z}(t_0) &= \dot{z}_0. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Остаточний розв'язок

$$\begin{aligned}x &= x(t, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0), \\y &= y(t, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0), \\z &= z(t, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0).\end{aligned}\tag{3.10}$$

Вирази (3.10) називають загальним розв'язком диференці-альних рівнянь руху точки.

Розглядаючи рух точки у натуральній формі для розв'язання оберненої задачі, застосовують диференціальні рівняння (3.7). Початковими умовами руху в цьому випадку будуть значення дугової координати $s(t_0)$ і початкова швидкість $v(t_0) = \dot{s}_0$.

Інтегрування диференціальних рівнянь руху вільної точки

Інтегрування диференціальних рівнянь у значній мірі залежить від виду функції сили, проекції якої підставляють у праві частини рівнянь. У загальному випадку сила є функцією одночасно трьох кінематичних параметрів: часу, переміщення і швидкості $\bar{F} = \bar{F}(t, s, v)$. Інтегрування в цьому випадку є складною задачею.

Проте, в техніці і природі часто зустрічаються сили, які залежать тільки від одного кінематичного параметра. Так, сили, що мають місце при дослідженні роботи різного роду механізмів і машин, явно залежать від часу.

До позиційних сил, що залежать від положення точки (переміщення), належать сили пружності, які виникають у пружних тілах при їх деформації, а також сили притягання або відштовхування, що виникають при взаємодії тіл, які є наслідком гравітаційних або електромагнітних сил.

Сили, що залежать від швидкості, зустрічаються при дослідженні руху тіл у в'язкому середовищі (рідкому, газоподібному).

Алгоритм розв'язання другої задачі динаміки

1. Складання розрахункової схеми і диференціального рівняння руху точки:

- а) вибрати початок відліку, поєднуючи його з початком руху, і провести координатну вісь, як правило, у бік руху, а в умовах рівноваги початок відліку зручно вибрати у положенні статичної рівноваги;
- б) зобразити точку, що рухається, у довільному положенні, але так, щоб було $v > 0$. Останнє є суттєвим, якщо серед сил є

такі, що залежать від швидкості. Показати всі діючі на точку сили;

в) підрахувати суму проекцій всіх сил на координатну вісь і підставити цю суму в праву частину диференціального рівняння. При цьому всі змінні сили виразити через ті кінематичні параметри t, \bar{r}, \bar{v} , від яких вони залежать.

2. Інтегрування диференціального рівняння руху:

Інтегрування відбувається методами вищої математики і залежить від вигляду правої частини рівняння, тобто, від формул прикладених сил. У випадку, коли сила залежить тільки від одного параметра: часу, переміщення або швидкості, то рівняння прямолінійного руху можна інтегрувати методом відокремлення змінних. Якщо при цьому необхідно визначити тільки функцію швидкості від часу, то для цього обмежуються одним інтегруванням рівняння.

3. Визначення довільних сталих інтегрування

Для визначення довільних сталих інтегрування потрібно використати початкові умови: координати і проекції швидкостей в деякий час або на початку руху t_0 . Сталі інтегрування визначаються безпосередньо після кожного інтегрування.

Якщо у заданого диференціального рівняння змінні величини можна відокремити, то іноді використовуються визначені інтеграли у відповідних границях.

4. Знаходження шуканих величин і аналіз одержаних результатів.

Для створення можливостей аналізу отриманого розв'язку методом підрахунку розмірності необхідно проводити розв'язування задачі у загальному вигляді, а числові дані підставляти тільки в остаточний результат.

Надамо приклади розв'язування другої задачі динаміки у випадках, якщо сили змінюються в залежності від часу, переміщення і швидкості.

Прямолінійний рух точки

Припустимо, що матеріальна точка рухається прямолінійно, тоді вісь x треба направити у бік руху точки, крім того

$$\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow F_y = 0; F_z = 0.$$

Рушійна сила повинна бути спрямована вздовж осі $F_x = F$. Проте, ця умова прямолінійності руху точки є необхідною, але недостатньою. Потрібно, щоб і початкова швидкість була спрямована вздовж осі $v_0 = v(t_0) = v_{0x}$.

1. Рух точки під дією сили, яка змінюється з часом

Приклад 3.2

Трактор вагою G під час розгону із стану спокою рухається прямолінійно по горизонталі і його сила тяги збільшується пропорційно часу $F = kt$, де t – час у секундах; k – сталий коефіцієнт пропорційності.

Визначити закон руху трактора під час розгону $x = x(t)$.

Розв'язання

Трактор рухається поступально, тому приймаємо модель точки. Направимо вісь x у напрямку руху, а початок відліку помістимо в нерухому точку, де трактор перебував на початку руху, коли $t_0 = 0$, тоді початкова координата $x(t_0) = x_0 = 0$ і початкова швидкість $v(t_0) = v_0 = 0$.

Запишемо диференціальне рівняння (3.6) в проекції на вісь x

$$m = \frac{G}{g}; \quad m\ddot{x} = \sum F_{kx}; \quad m \frac{dv_x}{dt} = F_x = kt. \quad (a)$$

Відокремимо змінні у виразі (а), для чого помножимо на dt ліву і праву частини рівняння і інтегруємо

$$\int dv_x = \frac{k}{m} \int t dt + C_1 \Rightarrow v_x = \frac{k}{m} \frac{t^2}{2} + C_1. \quad (б)$$

Підставимо у вираз (б) $v_x = \frac{dx}{dt}$, знову відокремимо змінні і інтегруємо

$$\frac{dx}{dt} = \frac{k}{m} \frac{t^2}{2} + C_1 \Rightarrow \int dx = \frac{k}{m} \int \frac{t^2}{2} dt + C_1 \int dt + C_2.$$

Після другого інтегрування

$$x = \frac{k}{m} \frac{t^3}{6} + C_1 t + C_2. \quad (в)$$

Для визначення сталих інтегрування в рівняння (б) і (в) підставимо початкові умови: якщо $t = t_0 = 0$, то $v(t_0) = v_{0x} = 0$.

Розв'язуючи алгебраїчні рівняння, дістанемо $C_1 = 0; C_2 = 0$.

Остаточно закон руху :

$$x = \frac{kg}{6G} t^3 \text{ (м)}.$$

2. Рух точки під дією сили, пропорційної швидкості

Приклад 3.3

Тіло M вагою \bar{G} падає вниз без початкової швидкості із точки O , яку оберемо за початок координат (рис. 3.1).

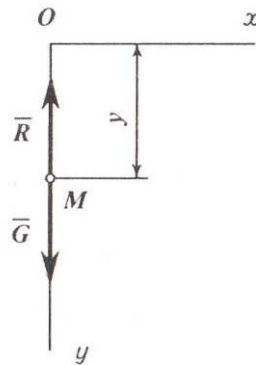


Рис. 3.1

Розв'язання

Припустимо, що задане тіло мале для земних умов, тому приймаємо його за точку. Складемо диференціальне рівняння руху тіла під дією сили ваги \bar{G} і сили опору повітря \bar{R} в проекції на вісь y (3.6)

$$m\ddot{y} = \sum F_{ky}; \quad m\ddot{y} = G_y - R_y = mg - \alpha v. \quad (\text{а})$$

Знизимо порядок рівняння (а), переходячи до $\ddot{y} = \frac{dv}{dt}$, і позначимо

$$\frac{\alpha}{m} = k; \Rightarrow \frac{dv}{dt} = g - kv \Rightarrow dv = (g - kv)dt. .$$

Відокремимо змінні $\frac{dv}{g - kv} = dt$.

Введемо нову змінну $u = g - kv \Rightarrow du = -kdv \Rightarrow dv = -\frac{du}{k}$ і отримаємо

рівняння $\frac{du}{u} = -kdt$. Інтегруємо

$$\ln u = -kt + C_1 \Rightarrow \ln(g - kv) = -kt + C_1. \quad (\text{б})$$

Частина перша

Із рівняння (б) визначимо значення C_1 , підставивши початкові умови: якщо $t = t_0 = 0$, то

$$v(t_0) = v_0 = 0 \Rightarrow \ln(g - k \cdot 0) = -k \cdot 0 + C_1 \Rightarrow C_1 = \ln g.$$

Підставимо значення C_1 в рівняння

$$\ln(g - kv) = -kt + \ln g \Rightarrow \ln\left(\frac{g - kv}{g}\right) = -kt. \quad (\text{в})$$

Потенціюємо вираз (в) і визначаємо швидкість

$$\frac{g - kv}{g} = e^{-kt} \Rightarrow v = \frac{g}{k}(1 - e^{-kt}). \quad (\text{г})$$

Із аналізу виразу (г) видно, якщо $t \rightarrow \infty$, $e^{-kt} \rightarrow 0$, $v \rightarrow \frac{g}{k}$, то швидкість стає максимальною і сталою $v_{\max} = \frac{g}{k}$, а рух – рівномірним.

Представимо рівняння (г) у вигляді

$$v = \frac{dy}{dt} = \frac{g}{k}(1 - e^{-kt}) \Rightarrow dy = \frac{g}{k}(1 - e^{-kt})dt. \quad (\text{д})$$

Інтегруємо рівняння (д)

$$y = \frac{g}{k}t + \frac{g}{k^2}e^{-kt} + C_2. \quad (\text{е})$$

Для визначення C_2 підставимо у вираз (е) початкові умови

$$t = t_0 = 0; y = y_0 = 0 \Rightarrow 0 = \frac{g}{k^2} + C_2 \Rightarrow C_2 = -\frac{g}{k^2}.$$

Підставимо знайдене значення C_2 у вираз (е) і отримаємо закон руху

$$y = \frac{g}{k}t - \frac{g}{k^2}(1 - e^{-kt}).$$

3. Рух точки під дією сили, яка залежить від переміщення

Приклад 3.4

Матеріальна точка M масою m рухається вздовж осі x під дією сили, пропорційної відстані $F = kmx$, де $k = 4$. На початку руху, якщо $t = t_0 = 0$, то координата і швидкість $x_0 = 5$ м; $v_0 = 2$ м/с.

Визначити закон руху точки $x = x(t)$.

Розв'язання

Складаємо диференціальне рівняння руху в проекції на вісь x (3.6)

$$m\ddot{x} = \sum F_{kx}; \quad m\ddot{x} = F_x = kmx.$$

Після скорочень маємо диференціальне рівняння

$$\ddot{x} - 4x = 0. \quad (\text{а})$$

Рівняння (а) є однорідним лінійним диференціальним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Розв'язок шукаємо у вигляді:

$$x = Ae^{ut}. \quad (\text{б})$$

Взявши першу \dot{x} і другу \ddot{x} похідні за часом від виразу (б), підставимо їх у рівність (а) і отримаємо характеристичне рівняння

$$u^2 - 4 = 0,$$

корені якого $u_1 = 2$; $u_2 = -2$.

Тоді загальний розв'язок диференціального рівняння (а)

$$x = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-2t}. \quad (\text{г})$$

Для визначення двох сталих інтегрування C_1 і C_2 треба друге рівняння, яке отримаємо, взявши похідну за часом від виразу (г)

$$v = \frac{dx}{dt} = 2C_1 e^{2t} - 2C_2 e^{-2t}. \quad (\text{д})$$

Підставивши у вирази (г) і (д) початкові умови, дістанемо алгебраїчні рівняння, з яких і визначимо сталі інтегрування

$$\begin{cases} 5 = C_1 + C_2; \\ 2 = 2C_1 - 2C_2. \end{cases} \Rightarrow C_1 = 3; C_2 = 2.$$

Шуканий закон або рівняння руху точки

$$x = 3e^{2t} + 2e^{-2t} \text{ (м).}$$

Криволінійний рух точки

Приклад 3.5

Розглянемо рух важкої матеріальної точки, наприклад, каменя, який кинули під кутом α до горизонту в площині xOy з початковою швидкістю v_0 і на який діє тільки сила ваги $\vec{G} = m\vec{g}$ (рис. 3.2).

Визначити рівняння руху $x(t)$, $y(t)$, рівняння траєкторії $y = f(x)$, час польоту t_1 , дальність польоту L і висоту польоту h .

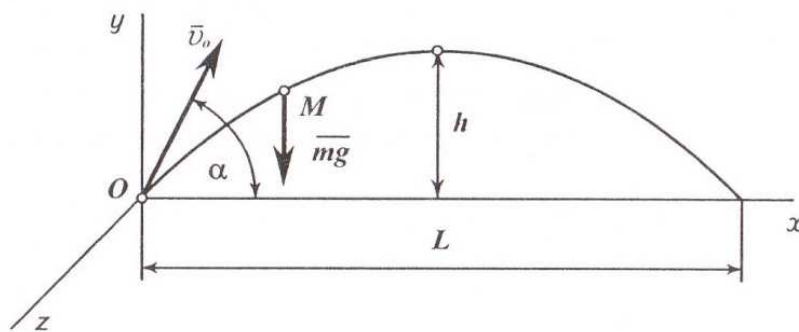


Рис. 3.2

Розв'язання

Користуючись розрахунковою схемою (рис. 3.2), складемо два диференціальні рівняння руху точки (3.6) в проекціях на дві координатні осі

$$\begin{cases} m\ddot{x} = 0; \\ m\ddot{y} = -mg. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} = 0; \\ \ddot{y} = -g. \end{cases} \quad (\text{a})$$

Початкові умови при $t = 0$:

$$x_0 = 0; y_0 = 0; v_{0x} = \dot{x}_0 = v_0 \cos \alpha; v_{0y} = \dot{y}_0 = v_0 \sin \alpha.$$

Інтегруємо диференціальні рівняння (а) і дістанемо закон зміни проекцій швидкостей

$$\begin{cases} \dot{x} = C_1 \\ \dot{y} = -gt + C_2. \end{cases} \quad (\text{б})$$

Далі інтегруємо рівняння (б) і отримаємо рівняння руху

$$\begin{cases} x = C_1 t + C_3; \\ y = -\frac{gt^2}{2} + C_2 t + C_4. \end{cases} \quad (\text{в})$$

Підставляючи початкові умови, визначаємо із рівнянь (б) і (в) сталі інтегрування C_1, C_2, C_3, C_4

$$\begin{aligned} C_3 &= 0; & C_1 &= v_0 \cos \alpha; \\ C_4 &= 0; & C_2 &= v_0 \sin \alpha. \end{aligned}$$

Підставимо сталі інтегрування у вирази (б), (в) і остаточно визначимо закон зміни швидкостей і закон руху точки

$$\begin{cases} \dot{x} = v_0 \cos \alpha; \\ \dot{y} = -gt + v_0 \sin \alpha; \end{cases} \quad \begin{cases} x = (v_0 \cos \alpha) \cdot t; \\ y = (v_0 \sin \alpha) \cdot t - \frac{gt^2}{2}. \end{cases} \quad (\text{г})$$

Для визначення рівняння траєкторії руху точки $y = f(x)$ виключимо параметр t з останніх рівнянь руху (г)

$$t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{(v_0 \sin \alpha) x}{v_0 \cos \alpha} - \frac{g x^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}; \\ y = tg \alpha \cdot x - \frac{g(1 + tg^2 \alpha)}{2v_0^2} x^2. \end{cases} \quad (\text{д})$$

Отримане рівняння (д) траєкторії руху $y = f(x)$ відповідає параболі.

Визначаємо із виразу (г) час польоту t_1 в момент падіння точки на землю, коли $y = 0$

$$y = 0; \Rightarrow (v_0 \sin \alpha) t_1 - \frac{gt_1^2}{2} = 0; \Rightarrow v_0 \sin \alpha = \frac{gt_1}{2} \Rightarrow t_1 = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}.$$

Частина перша

Дальність польоту $L = x(t_1)$ визначимо із виразу (г)

$$L = x(t_1) = (v_0 \cos \alpha) t_1 = \frac{v_0 \cos \alpha \cdot 2v_0 \sin \alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

Максимальна висота польоту $h = y(t_2)$ визначиться в момент

половини шляху і часу польоту $t_2 = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}$;

$$h = y_{\max} = (v_0 \sin \alpha) t_2 - \frac{gt_2^2}{2} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{g} - \frac{g(v_0^2 \sin^2 \alpha)}{2g^2} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}.$$

3.1.2. Диференціальні рівняння руху невідільної матеріальної точки

Рух невідільної матеріальної точки у просторі обмежений певними умовами або тілами, які називаються в'язями.

В'язі примушують точку рухатись по деякій поверхні або по лінії, яка є наслідком перетину двох поверхонь.

Вивчаючи рух невідільної точки, використовують аксіому про звільнення від в'язей. Вона дозволяє вважати точку вільною, якщо умовно відкинути фізичні в'язі і замінити їхню дію реакціями цих в'язей.

Диференціальне рівняння у векторній формі для невідільної матеріальної точки має такий вигляд:

$$m\bar{a} = \bar{F} + \bar{R}, \quad (3.11)$$

де \bar{F} – рівнодійна активних сил;

\bar{R} – рівнодійна сил реакцій в'язей.

Спроектуємо ліву і праву частини виразу (3.11) на осі прямокутної системи декартових координат x, y, z і осі натуральної системи координат τ, n, b

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 x}{dt^2} &= F_x + R_x, & m \frac{dv}{dt} &= F_\tau + R_\tau, \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} &= F_y + R_y, & m \frac{v^2}{\rho} &= F_n + R_n, \\ m \frac{d^2 z}{dt^2} &= F_z + R_z, & 0 &= F_b + R_b. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Рівності (3.12) є диференціальними рівняннями руху невідільної матеріальної точки в прямокутних декартових (ліворуч) і натуральних осях координат (праворуч).

Під час розв'язання задачі невідільної матеріальної точки зустрічаються певні складності. Якщо взяти рівняння (3.12) в декартових координатах, то система містить три невідомих проекції в'язі, як функції часу. Тому треба скласти три додаткові рівняння, які б враховували відповідні рівняння в'язей і їхні властивості.

3.1.3. Принцип д'Аламбера для невідільної матеріальної точки

Закони Ньютона стосуються руху вільної матеріальної точки. На невідільну точку накладені обмеження у вигляді умов в'язі, які реалізуються за допомогою сил реакцій. Аксиома про звільнення від в'язей дає можливість звести будь-яку невідільну точку до вільної, якщо включити до числа активних сил і реакції відповідних в'язей.

Тому метод, який базується на принципі д'Аламбера, що розглядається у даному параграфі, еквівалентний основному закону динаміки і аксіомі про звільнення від в'язей. Згаданий метод ефективно використовується для розв'язування першої задачі динаміки невідільної матеріальної точки, коли заданий закон її руху, а треба визначити шукану силу або силу реакції в'язі, яка обмежує рух точки в певному напрямі.

Припустимо, що невідільна матеріальна точка M рухається за заданою траєкторією (рис. 3.3) під дією рівнодійної активних сил

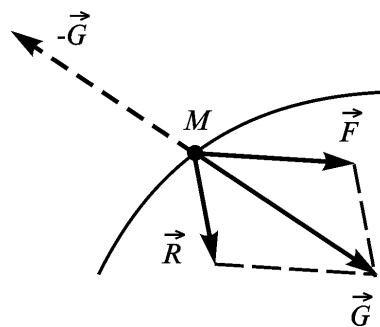


Рис. 3.3

\bar{F} і рівнодійної реакцій в'язей \bar{R} . На підставі аксіоми про паралелограм сил векторна сума сил \bar{F} і \bar{R} дорівнює \bar{G} .

Запишемо у векторній формі диференціальне рівняння руху невідільної матеріальної точки

$$m\bar{a} = \bar{F} + \bar{R} = \bar{G}. \quad (3.13)$$

Перепишемо рівняння (3.13)

$$\bar{F} + \bar{R} + (-m\bar{a}) = 0. \quad (3.14)$$

Силу $(-m\bar{a})$ називають *силою інерції точки* і позначають

$$\bar{\Phi} = -m\bar{a}. \quad (3.15)$$

Оскільки векторна сума сил дорівнює нулю, то, на перший погляд, точка перебуває у стані рівноваги.

Але згадана рівновага є умовною, тому що сили \bar{F} і \bar{R} прикладені до точки M , а сила $(-m\bar{a})$, яка дорівнює $(-\bar{G})$, до цієї точки не прикладена.

Силою інерції матеріальної точки називають вектор $\bar{\Phi}$, який дорівнює за модулем добутку маси точки на її прискорення і спрямований протилежно вектору прискорення \bar{a} .

Сила інерції є головним вектором сил протидії, прикладених до зовнішніх тіл, одні з яких є джерелами активних сил, інші – в'язями, тому в природі існують реально тільки її складові, прикладені до різних тіл.

Лише тоді, коли точка взаємодіє з одним тілом, головний вектор сил інерції фізично існує у вигляді однієї сили.

$$\bar{F} + \bar{R} + \bar{\Phi} = 0. \quad (3.16)$$

Рівність (3.16) є математичним відображенням принципу д'Аламбера. Сформулюємо цей принцип для матеріальної точки.

Активні сили і реакції в'язей, прикладені до точки, умовно зрівноважуються прикладеною до точки силою інерції.

Якщо рух точки заданий координатним способом, то сила інерції

$$\bar{\Phi} = -m\bar{a} = -(m\ddot{x} \cdot \bar{i} + m\ddot{y} \cdot \bar{j} + m\ddot{z} \cdot \bar{k}), \quad (3.17)$$

де \ddot{x} , \ddot{y} , \ddot{z} – проекції прискорення точки на відповідні осі координат. Проекції сили інерції на осі і повна сила інерції визначаються:

$$\Phi_x = -m\ddot{x}; \quad \Phi_y = -m\ddot{y}; \quad \Phi_z = -m\ddot{z}; \quad \Phi = \sqrt{\Phi_x^2 + \Phi_y^2 + \Phi_z^2}.$$

Якщо рух точки заданий натуральним способом, то сила інерції

$$\bar{\Phi} = -m\bar{a} = -\left(m \frac{dv}{dt} \bar{\tau} + m \frac{v^2}{\rho} \cdot \bar{n}\right), \quad (3.18)$$

де $a_\tau = \frac{dv}{dt}$ – дотична складова прискорення; $a_n = \frac{v^2}{\rho}$ – нормальна складова прискорення; ρ – радіус кривини траєкторії точки.

Або
$$\bar{\Phi} = \bar{\Phi}_\tau + \bar{\Phi}_n; \quad \bar{\Phi}_\tau = -m\bar{a}_\tau; \quad \bar{\Phi}_n = -m\bar{a}_n,$$

де $\bar{\Phi}_\tau$ – тангенціальна (дотична) складова сили інерції точки;

$\bar{\Phi}_n$ – нормальна складова сили інерції точки або відцентрова сила.

Припустимо, що точка M масою m розміщена на обертовому тілі і рухається разом з тілом на відстані r від осі O (рис. 3.4).

Тоді сила інерції точки визначається так:

$\Phi_\tau = ma_\tau = mr\varepsilon$ – тангенціальна складова сили інерції точки M ;

$\Phi_n = ma_n = m\omega^2 r$ – нормальна або відцентрова складова сили інерції.

Модуль повної сили інерції матеріальної точки

$$\Phi = \sqrt{\Phi_\tau^2 + \Phi_n^2} = mr\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}.$$

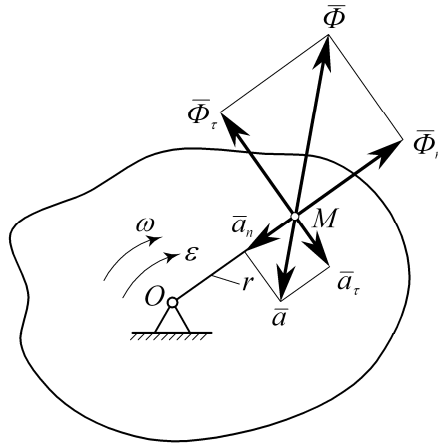


Рис. 3.4

Рівність (3.16) не є умовою рівноваги цих сил, оскільки вони прикладені до різних тіл: активна сила і реакція в'язі прикладена до матеріальної точки або тіла, а сила інерції – до тіл, що зумовлюють прискорення точки відносно абсолютної системи координат.

Сила інерції матеріальної точки вважається фіктивною, тому що до

Частина перша

самої точки вона не прикладена, а може бути прикладена до тих тіл, які надають точці прискорення або до в'язі, яка обмежує її рух. К тому ж, насправді, точка не перебуває в рівновазі, а має прискорення.

Принцип д'Аламбера є формально-математичним методом зведення рівнянь динаміки до рівнянь статички, проте, він дає математично точні і прості співвідношення для ефективного розв'язання першої задачі динаміки.

Векторному рівнянню (3.16) відповідають три рівняння в проекціях

$$F_x + R_x + \Phi_x = 0, F_y + R_y + \Phi_y = 0, F_z + R_z + \Phi_z = 0. \quad (3.19)$$

Значення принципу д'Аламбера полягає в тому, що він дає змогу складати рівняння руху невільної точки у формі рівнянь рівноваги.

Зрозуміло, що принцип д'Аламбера не дає можливості подолати складнощі при розв'язанні другої задачі динаміки, пов'язані з інтегруванням диференціальних рівнянь руху.

Приклад 3.6

Платформа з вантажем масою m опускається вниз з прискоренням \bar{a} (рис. 3.5). Визначити реакцію платформи \bar{N} .

Розв'язання

Оскільки рух платформи є поступальним, то він ідентичний руху точки. Покажемо на схемі активну силу ваги \bar{G} , реакцію платформи \bar{N} і силу інерції $\bar{\Phi}$.

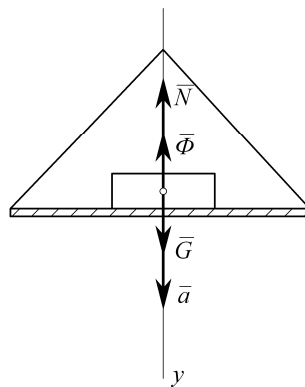


Рис. 3.5

$$|\bar{\Phi}| = ma - \text{сила інерції вантажу}, G = mg - \text{вага вантажу}.$$

Прикладемо умовно до вантажу силу інерції і запишемо рівняння рівноваги як суму проекцій сил на вісь y :

$$\sum F_{ky} = 0; \Rightarrow G - \Phi - N = 0.$$

Звідси реакція платформи

$$N = G - \Phi = mg - ma = m(g - a) = G(1 - a/g).$$

Якщо прискорення вантажу дорівнює прискоренню вільного падіння ($a = g$), то реакція платформи $N = 0$ (умова невагомості).

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Що вивчає динаміка, які її основні задачі?
2. Сформулюйте основні закони динаміки.
3. Напишіть диференціальні рівняння руху точки в координатній і натуральній формах.
4. Напишіть диференціальні рівняння руху невідомої матеріальної точки.
5. Як формулюється і розв'язується перша задача динаміки?
6. Як формулюється і розв'язується друга задача динаміки?
7. Що таке початкові умови руху точки?
8. Як визначаються сталі інтегрування диференціальних рівнянь руху?
9. Якими способами зручніше розв'язувати задачі механіки?
10. Чому перша задача динаміки називається диференціальною, а друга – інтегральною?
11. Визначте поняття сили інерції.
12. Як виражається сила інерції точки в декартових і натуральних осях?
13. Як формулюється принцип д'Аламбера для матеріальної точки?
14. Якою є умова невагомості тіла?

3.1.4. Коливання матеріальної точки

Коливальний рух – це рух, при якому деякі параметри цього руху періодично змінюються і повторюються.

Якщо параметри коливального руху змінюється за законом синуса або косинуса, то такий рух називається **гармонічним коливальним рухом**.

Наука про коливання складає основу ряду областей фізики і техніки. Коливання, які розглядаються у різних галузях, відрізняються за фізичною суттю (механіка, радіотехніка, акустика тощо), але основні закони цих коливань залишаються ідентичними.

Тому вивчення і дослідження механічних коливань є важливим не тільки для вдосконалення техніки, але й для багатьох інших галузей.

Кінематика гармонічних коливань

Якщо точка M рухається вздовж кола радіусом R рівномірно (рис. 3.6), то радіус точки OM обертається рівномірно навколо осі O з кутовою швидкістю ω за законом $\varphi = \alpha + \omega t$. Точка M_0 є початковим положенням на траєкторії, яке визначається кутом α .

Точка M_1 , що є проекцією точки M на вісь x , рухається за законом

$$x = OM_1 = OM \cos(\omega t + \alpha) = R \cos(\omega t + \alpha). \quad (3.20)$$

Аналогічно, точка M_2 , проекція точки M на вісь y , здійснює такий закон руху

$$y = OM_2 = OM \sin(\omega t + \alpha) = R \sin(\omega t + \alpha). \quad (3.21)$$

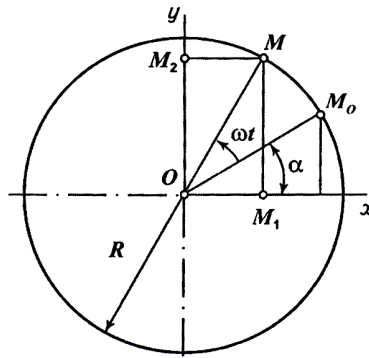


Рис. 3.6

Точку M відносно точок M_1 і M_2 називають допоміжною.

Таким чином, якщо допоміжна точка M рухається рівномірно вздовж кола радіусом R , то її проекції на координатні осі x і y здійснюють гармонічні коливання згідно з функціями синуса або косинуса.

Величина R , що стоїть множником перед функціями синуса або косинуса, називається **амплітудою коливань**.

Амплітудою називається максимальне відхилення точок M_1 і M_2 від точки O , як середнього положення або положення рівноваги.

Величина ω для точок M_1 і M_2 є **коловою або циклічною частотою**, це кутова швидкість радіуса допоміжної точки M .

Колова частота вимірюється в $[рад/с], [с^{-1}]$

Фазою коливань в радіанах називається вираз $(\omega t + \alpha)$, де α є початковою фазою коливань, коли час $t = 0$.

Повне коливання точок M_1 і M_2 відбудеться тоді, коли кожна з точок двічі пройде через те ж саме положення, а допоміжна точка M здійснить один повний оберт.

Найменший проміжок часу, за який відбувається одне повне коливання, а точка буде мати ту ж саму координату, називається періодом коливань T (с).

$$\text{Очевидно, що } \omega \cdot T = 2\pi; \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T}; \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega}. \quad (3.22)$$

Кількість коливань за одиницю часу (за одну секунду) називається **частотою коливань** і вимірюється в герцах [Гц].

$$f = \frac{1}{T}; \Rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} [\text{Гц}]. \quad (3.23)$$

Класифікація коливань

Коливальний рух матеріальної точки відбувається за умови, якщо на точку M , що відхиляється від положення спокою або рівноваги (точка O), діє сила \bar{F} , яка намагається повернути точку в попереднє положення рівноваги. Така сила називається **поновлювальною** (рис. 3.7).

Практично важливими є випадки, коли поновлювальна сила, пропорційна величині відхилення, є лінійною функцією переміщення (деформації)

$$P = c \cdot OM,$$

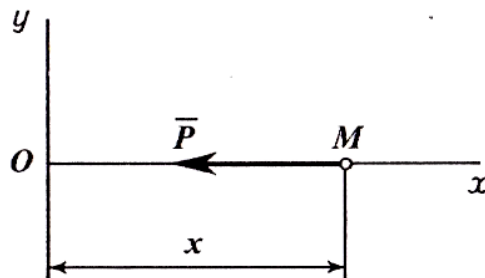


Рис. 3.7

Частина перша

де c – коефіцієнт пропорційності,

OM – переміщення точки або деформація пружного елемента.

Прикладом такої сили є сила пружності пружини, шини, деформованого тіла.

Коефіцієнт пропорційності у цьому разі називають **лінійним коефіцієнтом жорсткості, який чисельно дорівнює силі, що припадає на одиницю переміщення** (деформації пружини). Одиницею вимірювання коефіцієнта жорсткості у системі одиниць $СИ$ є H/m .

Коливання можуть відбуватись і під дією сил, підпорядкованих іншим законам.

На основі енергетичного балансу прямолінійні коливання матеріальної точки поділяються на чотири основні типи.

1. **Вільні коливання** під дією поновлювальної сили;
2. **Вільні згасаючі коливання** під дією поновлювальної сили і сили опору, пропорційної першому степеню швидкості;
3. **Змушені коливання без опору** під дією поновлювальної сили і збурювальної сили;
4. **Змушені коливання з опором** під дією поновлювальної сили, сили опору і збурювальної сили.

Динаміка коливань. Вільні коливання матеріальної точки

Вільні коливання точки відбуваються під дією поновлювальної сили, яка є лінійною функцією переміщення точки від положення рівноваги і завжди спрямована в напрямку до положення рівноваги, де б точка в даний момент часу не знаходилась.

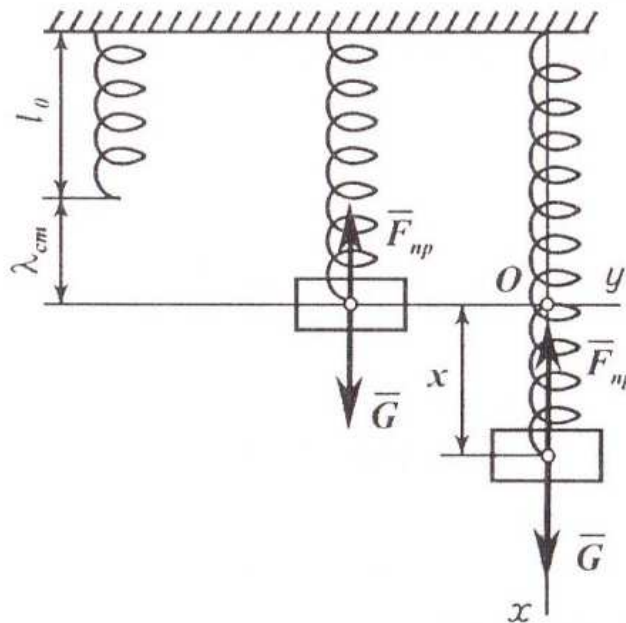


Рис. 3.8

Розглянемо динаміку прямолінійних вільних коливань на прикладі коливання вантажу на пружині вздовж осі x , яку спрямуємо вниз у бік руху тіла (рис. 3.8). Довжина пружини у недеформованому стані l_0 .

Поволі відпустимо вантаж, він опиниться в положенні статичної рівноваги. Відношення ваги вантажу до статичної деформації λ_{cm} , якщо система пружина – вантаж перебуває у стані рівноваги є **коефіцієнтом жорсткості пружини** c [Н / м].

$$c = G / \lambda_{cm}; \Rightarrow G = c \cdot \lambda_{cm}.$$

У стані рівноваги сила пружності дорівнює силі ваги

$$F_{np} = G = c \cdot \lambda_{cm}.$$

Коливання вантажу масою m відбувається навколо положення статичної рівноваги O , який називається **центром коливань**. Якщо вантаж відхилився від цього положення, то на нього крім сили ваги діють і дві складові сили пружності пружини, статична і динамічна

$$F_{np} = c(\lambda_{cm} + x) = c\lambda_{cm} + cx.$$

Складемо диференціальне рівняння руху вантажу в проекції на вісь x

$$m\ddot{x} = G - F_{np}; \Rightarrow m\ddot{x} = c \cdot \lambda_{cm} - c(\lambda_{cm} + x); \Rightarrow m\ddot{x} = -c \cdot x,$$

де $(c \cdot x)$ – поновлювальна сила, яка є рівнодієюною сили ваги і сили пружності в статичному положенні. **Стала сила G** , як неважко побачити, не змінює характеру коливань, а лише **зміщує центр** цих коливань у бік дії сили на величину статичної деформації λ_{cm} .

Тоді: $\ddot{x} + \frac{c}{m}x = 0$. Позначимо $\frac{c}{m} = k^2; \Rightarrow k = \sqrt{\frac{c}{m}}$ і, остаточно,

$$\ddot{x} + k^2 x = 0. \tag{3.24}$$

Рівність (3.24) є диференціальним рівнянням вільних коливань матеріальної точки. Це лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

Розв'язок рівняння (3.24) шукаємо у вигляді $x = e^{nt}$ і для визначення n складаємо характеристичне рівняння, підставляючи розв'язок і його другу похідну в рівняння

$$n^2 + k^2 = 0; \Rightarrow n_{1,2} = \pm ik, \text{ де } i = \sqrt{-1} \text{ – уявна одиниця.}$$

Частина перша

Тоді загальний розв'язок рівняння (3.24)

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt. \quad (3.25)$$

Довільні сталі інтегрування C_1 і C_2 розв'язку (3.25) знаходимо за допомогою початкових умов

$$\begin{cases} x(t_0) = x_0, \\ \dot{x}(t_0) = \dot{x}_0 = v_0. \end{cases}$$

Оскільки невідомих сталих інтегрування дві, то знайдемо друге рівняння, взявши похідну $v = \dot{x}(t)$ від виразу (3.25)

$$\dot{x} = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt. \quad (3.26)$$

У рівняння (3.25) і (3.26) підставимо початкові умови x_0 і v_0 , якщо $t_0 = 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_0 = C_1 \\ C_2 k = v_0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} C_1 = x_0 \\ C_2 = \frac{v_0}{k} \end{array} \right\}. \quad (3.27)$$

Значення довільних сталих (3.27) підставимо у рівність (3.25)

$$x = x_0 \cos kt + \frac{v_0}{k} \sin kt. \quad (3.28)$$

Вираз (3.28) є загальним розв'язком диференціального рівняння (3.24), законом вільних коливань. Його можна подати у вигляді однієї гармоніки шляхом підстановки

$$x_0 = A \sin \alpha; \quad \frac{v_0}{k} = A \cos \alpha. \quad (3.29)$$

Враховуючи підстановку (3.29), розв'язок (3.28) запишеться

$$\begin{aligned} x &= A \sin \alpha \cdot \cos kt + A \cos \alpha \cdot \sin kt. \\ x &= A \sin(kt + \alpha). \end{aligned} \quad (3.30)$$

Сталі коефіцієнти A і α знаходимо з рівнянь (3.29), якщо ліві і праві частини спочатку піднести до квадрату

$$x_0^2 = A^2 \sin^2 \alpha; \quad \frac{v_0^2}{k} = A^2 \cos^2 \alpha, \quad (3.31)$$

а потім почленно додати

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{k^2}}. \quad (3.32)$$

Якщо у виразах (3.29) перше рівняння поділити на друге, то

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{x_0 k}{v_0}; \quad \Rightarrow \quad \alpha = \operatorname{arctg} \frac{x_0 k}{v_0}. \quad (3.33)$$

Закон руху (3.30) інформує, що точка здійснює гармонічні коливання, амплітуда яких (3.32) і початкова фаза (3.33) залежать лише від початкових умов і важливої характеристики системи – колової або циклічної частоти вільних коливань $k = \sqrt{\frac{c}{m}}$ [c^{-1}].

Період вільних коливань

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{c}}. \quad (3.34)$$

Період вільних коливань можна знайти за наближеною формулою через таке еквівалентне перетворення

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{c}} = 2\sqrt{\frac{\pi^2 G \cdot \lambda_{cm}}{g \cdot G}} = 2\sqrt{\lambda_{cm}}. \quad (3.35)$$

Необхідно зазначити, що вільні гармонічні коливання в дійсності не існують, тому що завжди є реальний опір, завдяки чому згасання коливань неминуче. Отже, вільні коливання – це теоретична модель. Проте, при згасанні зменшується лише амплітуда коливань, а частота коливань залишається незмінною.

Тому частота вільних коливань є «динамічною індивідуальністю» системи і залежить тільки від характеристик самої системи в цілому.

Для простих коливальних систем частота залежить тільки від співвідношення маси і жорсткості пружних елементів. Це загальна закономірність. Якщо підвищуємо масу, то знижується власна частота,

Частина перша

підвищуємо жорсткість – збільшується. А для періоду коливань – навпаки (3.34).

Вільні коливання мають фундаментальне значення. Знаючи характеристики вільних коливань, можна передбачити поведінку механічної системи під дією різних збурювальних факторів.

Для розв'язання задач на вільні коливання матеріальної точки можна запропонувати такий **алгоритм**.

1. Зобразити матеріальну точку у довільному положенні та показати сили, що діють на дану точку.
2. Вибрати початок відліку у центрі коливань і спрямувати вісь у бік руху точки.
3. Записати початкові умови руху точки.
4. Скласти диференціальне рівняння руху матеріальної точки у проекції на вибрану вісь.
5. Інтегрувати диференціальне рівняння руху двічі.
6. Визначити довільні сталі інтегрування за допомогою початкових умов.
7. Записати остаточний закон коливального руху матеріальної точки.

Приклад 3.8

Вантаж масою $m = 2 \text{ кг}$ падає з висоти $h = 40 \text{ см}$ на середину твердої квадратної плити, закріпленої на чотирьох симетрично розміщених пружинах (рис. 3.9). Коефіцієнт жорсткості пружини $c_1 = 2 \text{ Н/см}$.

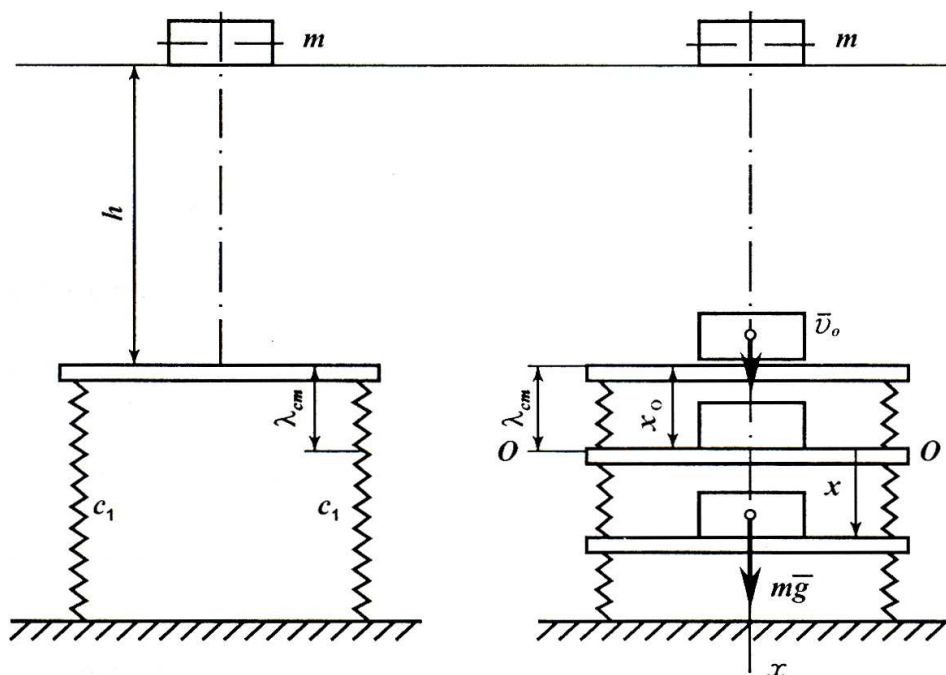


Рис. 3.9

Розв'язання

Спрямуємо вісь x вертикально вниз, початок осі помістимо в точку статичної рівноваги, де деформація пружини дорівнює статичній деформації λ_{cm} . Зведений коефіцієнт жорсткості пружин, з'єднаних паралельно $c = 4c_1 = 800 \text{ Н/м}$.

Початкова швидкість вантажу в момент торкання пластини визначається

$$v_0 = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9.8 \cdot 0.4} = 2,8 \text{ м/с}.$$

Отже, початкові умови руху вантажу на пружинах

$$x_0 = -\lambda_{cm} = -\frac{mg}{c} = -\frac{2 \cdot 9.8}{800} = -0,0245 \text{ м},$$

$$\dot{x}_0 = v_0 = 2,8 \text{ м/с}.$$

Вантаж здійснює вільні коливання з коловою частотою

$$k = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{800}{2}} = 20 \frac{1}{\text{с}}.$$

Закон руху вільних коливань (3.30)

$$x = A \sin(kt + \alpha),$$

де A – амплітуда коливань, яку визначимо з виразу (3.32)

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{k^2}} = \sqrt{(0,0245)^2 + \frac{2,8^2}{20^2}} = 0,142 \text{ м};$$

де α – початкова фаза коливань (3.33)

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{x_0 \cdot k}{v_0} = \frac{(-0,0245) \cdot 20}{2,8} = -0,175 \Rightarrow \alpha = -0,1754 \text{ рад}.$$

Остаточний закон коливального руху вантажу

$$x = 0,142 \sin(20t - 0,1754) \text{ м}.$$

Згасаючі коливання матеріальної точки

Розглянуті вище вільні коливання матеріальної точки в реальних умовах поступово згасають, оскільки на коливання впливає опір середовища. Розглянемо випадок коливання точки, коли сила опору пропорційна першому степеню швидкості (рис. 3.10).

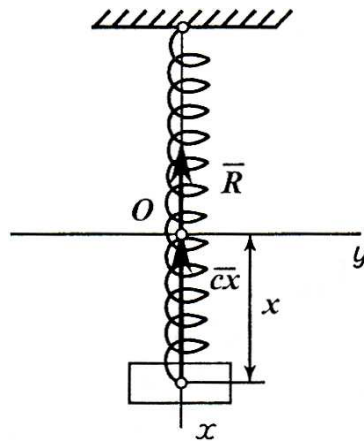


Рис 3.10

$$\bar{R} = -\mu\bar{v},$$

де μ – коефіцієнт пропорційності.

Знак «мінус» інформує, що вектори сили і швидкості спрямовані протилежно.

На точку масою m під час її руху діють поновлювальна сила $-cx$ (рівнодійна сили ваги і сили пружності пружини), де x – відхилення точки від положення статичної рівноваги O , початку системи координат, і сила опору \bar{R} .

$$\bar{R} = -\mu\bar{v}; \quad R_x = -\mu \dot{x}. \quad (3.36)$$

Диференціальне рівняння руху точки

$$m\ddot{x} = -cx - \mu\dot{x}; \Rightarrow m\ddot{x} + \mu \dot{x} + cx = 0. \quad (3.37)$$

Рівняння (3.37) поділимо на масу m і введемо позначення

$$\ddot{x} + \frac{\mu}{m} \dot{x} + \frac{c}{m} x = 0; \quad \frac{\mu}{m} = 2n; n = \frac{\mu}{2m}; \quad \frac{c}{m} = k^2; k = \sqrt{\frac{c}{m}},$$

де n – коефіцієнт згасання;

k – циклічна частота вільних коливань.

Зазначимо, що коефіцієнт згасання n і циклічна частота k мають однакову розмірність, тому їх можна порівнювати.

Остаточно отримаємо **диференціальне рівняння згасаючих коливань**

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2x = 0. \quad (3.38)$$

Рівняння (3.38) є однорідним лінійним диференціальним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

Характеристичне рівняння

$$r^2 + 2nr + k^2 = 0. \quad (3.39)$$

Корені характеристичного рівняння (3.39)

$$r_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - k^2}. \quad (3.40)$$

Розв'язок рівняння має різний вигляд у залежності від співвідношення коефіцієнтів n і k .

Якщо корені рівняння (3.39) є дійсними і різними чи дійсними і рівними $n^2 - k^2 \geq 0; \Rightarrow n \geq k$, тобто, якщо опір більший порівняно з відновлювальною силою, то відбувається аперіодичний рух за законом

якщо $n > k \Rightarrow x = C_1 e^{(-n + \sqrt{n^2 - k^2})t} + C_2 e^{(-n - \sqrt{n^2 - k^2})t}; \quad (3.41)$

якщо $n = k \Rightarrow x = C_1 e^{-nt} + C_2 t e^{-nt}. \quad (3.42)$

Оскільки вираз e^{-nt} є експоненціальною функцією, яка монотонно зменшується до нуля, то матеріальна точка під час коливань поступово наблизатиметься до стану рівноваги, де $x = 0$.

Наближений графік аперіодичного руху наведений на рис. 3.14. Крива 1 відповідає початковій швидкості $v_{x0} > 0$, крива 2 – $v_{x0} < 0$.

Якщо опір малий порівняно з поновлювальною силою $k > n$, то корені характеристичного рівняння (3.50) комплексні

$$r_{1,2} = -n \pm i\sqrt{k^2 - n^2}, \quad i = \sqrt{-1} \quad (3.43)$$

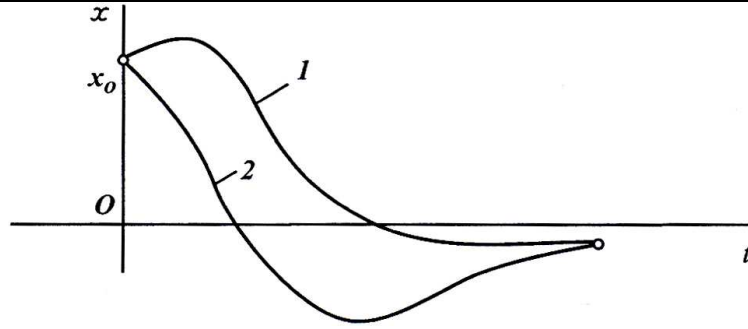


Рис 3.11

Тоді загальний розв'язок рівняння (3.38) має вигляд

$$x = e^{-nt} \left(C_1 \cos \sqrt{k^2 - n^2} t + C_2 \sin \sqrt{k^2 - n^2} t \right). \quad (3.44)$$

Довільні сталі інтегрування C_1 і C_2 визначимо із початкових умов. Оскільки сталі інтегрування дві, то потрібне друге рівняння, яке знайдемо як похідну за часом від виразу (3.44)

$$\begin{aligned} \dot{x} = & -ne^{-nt} \left(C_1 \cos \sqrt{k^2 - n^2} t + C_2 \sin \sqrt{k^2 - n^2} t \right) + \\ & + e^{-nt} \left(-C_1 \sqrt{k^2 - n^2} \sin \sqrt{k^2 - n^2} t + C_2 \sqrt{k^2 - n^2} \cos \sqrt{k^2 - n^2} t \right) \end{aligned} \quad (3.45)$$

Підставимо початкові умови: $x(t_0) = x_0$ і $\dot{x}(t_0) = \dot{x}_0 = v_0$, якщо $t_0 = 0$, в рівняння (3.44) і (3.45) і визначимо сталі інтегрування

$$C_1 = x_0; \quad C_2 = \frac{v_0 + nC_1}{\sqrt{k^2 - n^2}} = \frac{v_0 + nx_0}{\sqrt{k^2 - n^2}}. \quad (3.46)$$

Підставивши значення C_1 і C_2 у рівняння (3.44), остаточно отримаємо **закон згасаючих коливань**

$$x = e^{-nt} \left(x_0 \cos \sqrt{k^2 - n^2} t + \frac{v_0 + nx_0}{\sqrt{k^2 - n^2}} \sin \sqrt{k^2 - n^2} t \right). \quad (3.47)$$

Переміщенню x у виразі (3.47) можна надати іншого вигляду, якщо ввести підстановки і зробити перетворення

$$x_0 = B \sin \beta; \quad \frac{v_0 + nx_0}{\sqrt{k^2 - n^2}} = B \cos \beta. \quad (3.48)$$

Тоді $x = e^{-nt} (B \sin \beta \cos \sqrt{k^2 - n^2} t + B \cos \beta \sin \sqrt{k^2 - n^2} t)$;

або
$$x = B e^{-nt} \sin(\sqrt{k^2 - n^2} t + \beta). \quad (3.49)$$

Величини B і β визначаються з рівнянь (3.48). Обидва рівняння треба піднести до квадрату і додати

$$x_0^2 + \frac{(v_0 + nx_0)^2}{k^2 - n^2} = B^2 (\sin^2 \beta + \cos^2 \beta); \Rightarrow B = \sqrt{x_0^2 + \frac{(v_0 + nx_0)^2}{k^2 - n^2}}. \quad (3.50)$$

Якщо поділити перше рівняння на друге в системі (3.48), то

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{x_0 \sqrt{k^2 - n^2}}{v_0 + nx_0}. \quad (3.51)$$

Рух точки, що відповідає рівнянню (3.49), має коливальний характер, тому що координата x періодично змінює свій знак завдяки синусу. Коливання, що відбуваються за цим законом, називаються **згасаючими коливаннями**. Амплітуда $B e^{-nt}$ завдяки множнику e^{-nt} з плином часу зменшується, наближаючись до нуля.

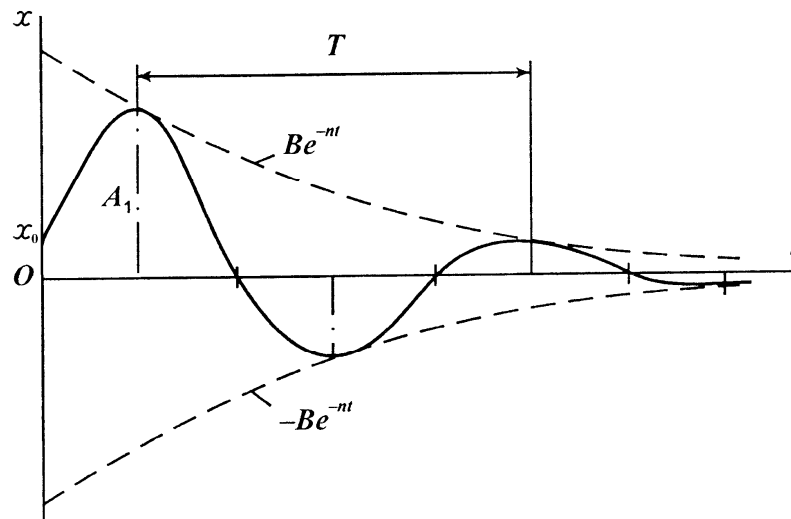


Рис. 3.12

Оскільки $-1 \leq \sin(\sqrt{k^2 - n^2} t + \beta) \leq 1$, то координати x згасаючих

Частина перша

коливань розміщуються між двома симетричними відносно осі абсцис кривими, що відповідають рівнянню $x = \pm Ve^{-nt}$, і називаються **амплітудними кривими**. Між ними розміщується графік згасаючих коливань, показаний на рис. 3.12.

Проміжок часу T , який дорівнює періоду функції $\sin(\sqrt{k^2 - n^2}t + \beta)$, називають **періодом згасаючих коливань**

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - n^2}}, \quad (3.52)$$

де $\sqrt{k^2 - n^2}$ – **колова частота** згасаючих коливань;
 β – **початкова фаза** коливань.

Для характеристики процесу згасання вводять поняття **декременту згасаючих коливань** як відношення однієї з амплітуд до попередньої. Декремент коливань є знаменником геометричної прогресії, константою коливального процесу.

$$q = \frac{A_{i+1}}{A_i} = \frac{A_2}{A_1} = \frac{Ve^{-n\left(\tau + \frac{T}{2}\right)}}{Ve^{-n\tau}} = e^{-\frac{nT}{2}}; \Rightarrow q^{-1} = e^{\frac{nT}{2}}. \quad (3.53)$$

Логарифмічний декремент згасаючих коливань є модулем натурального логарифма

$$\ln|q^{-1}| = \frac{nT}{2}. \quad (3.54)$$

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Що таке фаза коливань, колова частота, період коливань?
2. Як визначається колова частота вільних коливань, від яких параметрів вона залежить?
3. Напишіть закон вільних коливань.
4. Що таке аперіодичні коливання?
5. Чому дорівнює частота згасаючих коливань?
6. За якою функцією зменшуються амплітуди згасаючих коливань?
7. Що таке декремент згасаючих коливань, логарифмічний декремент?
8. Який вигляд мають диференціальні рівняння вільних і згасаючих коливань?
9. Від яких факторів залежить циклічна частота і період вільних коливань?

10. Від яких факторів залежить амплітуда і початкова фаза вільних коливань?

Змушені коливання матеріальної точки без урахування опору

На матеріальну точку (рис. 3.13), крім поновлювальної сили $F = -cx$ (рівнодійна сили ваги і статичної складової сили пружності), може діяти сила, яка періодично змінюється і називається **збурювальною силою**.

Проекція сили співпадає з напрямком руху і змушує матеріальну точку до коливань

$$Q = Q_0 \sin(pt + \delta),$$

де Q_0 – **амплітудне значення** збурювальної сили, H ;

p – **колова частота** збурювальної сили, $рад/с$;

$pt + \delta$ – **фаза** збурювальної сили, $рад$; δ – **початкова фаза**.

Сила Q є збурювальною гармонічною силою. **Колівання, які виникають під дією збурювальної сили, називаються змушеними.**

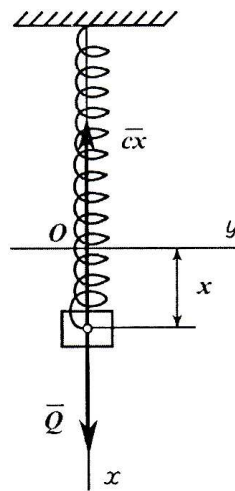


Рис. 3.13

Запишемо диференціальне рівняння зазначеного руху точки згідно розрахункової схеми (рис. 3.13)

$$m\ddot{x} = -cx + Q_0 \sin(pt + \delta), \tag{3.55}$$

$$\ddot{x} = -\frac{c}{m}x + \frac{Q_0}{m}\sin(pt + \delta).$$

$$\text{Позначимо: } \left. \begin{aligned} \frac{c}{m} = k^2, \quad k = \sqrt{\frac{c}{m}}, \quad \frac{Q_0}{m} = h_0. \end{aligned} \right\} \quad (3.56)$$

Тоді *диференціальне рівняння змушених коливань точки без опору* набуває вигляду:

$$\ddot{x} + k^2 x = h_0 \sin(pt + \delta). \quad (3.57)$$

Вираз (3.57) є лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Його розв'язок складається з двох частин:

$$x = x_1 + x_2, \quad (3.58)$$

де x_1 – загальний розв'язок однорідного диференціального рівняння

$$\ddot{x} + k^2 x = 0;$$

x_2 – частинний розв'язок неоднорідного рівняння (3.57).

Загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд (3.30):

$$x_1 = A \sin(kt + \alpha),$$

де A – амплітуда вільних коливань, $A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{k^2}}$ (3.32), яка залежить від початкових умов;

$\alpha = \arctg \frac{x_0 k}{v_0}$ – початкова фаза (3.33).

Частинний розв'язок рівняння (3.57) шукаємо у вигляді

$$x_2 = C \sin(pt + \delta). \quad (3.59)$$

Для підстановки розв'язку в рівняння (3.57) визначимо похідні від виразу (3.59) за часом

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 &= Cp \cos(pt + \delta), \\ \ddot{x}_2 &= -Cp^2 \sin(pt + \delta). \end{aligned} \quad (3.60)$$

Підставимо значення виразів (3.59), (3.60) в рівняння (3.57)

$$\begin{aligned} -Cp^2 \sin(pt + \delta) + k^2 C \sin(pt + \delta) &= h_0 \sin(pt + \delta), \\ C(k^2 - p^2) \sin(pt + \delta) &= h_0 \sin(pt + \delta). \end{aligned} \quad (3.61)$$

Порівняємо коефіцієнти при синусах зліва і справа у виразі (3.61), (вони повинні бути однакові) і визначимо динамічну амплітуду C

$$C(k^2 - p^2) = h_0 \Rightarrow C = \frac{h_0}{k^2 - p^2}. \quad (3.62)$$

Частинний розв'язок отримаємо, підставивши визначену амплітуду C у рівняння (3.59):

$$x_2 = \frac{h_0}{k^2 - p^2} \sin(pt + \delta). \quad (3.63)$$

Загальний розв'язок рівняння (3.57) має вигляд

$$x = A \sin(kt + \alpha) + \frac{h_0}{k^2 - p^2} \sin(pt + \delta). \quad (3.64)$$

Другий доданок розв'язку або друга гармоніка в рівнянні (3.64) характеризує змушені коливання, колова частота яких дорівнює коловій частоті збурювальної сили.

Амплітуда змушених коливань може бути представлена

$$C = \frac{h_0}{k^2 - p^2} = \frac{\frac{h_0}{k^2}}{1 - \frac{p^2}{k^2}} = \frac{\frac{Q_0 m}{mc}}{1 - \frac{p^2}{k^2}} = \frac{\frac{Q_0}{c}}{1 - \frac{p^2}{k^2}} = \frac{\lambda_{cm}}{1 - \frac{p^2}{k^2}}, \quad (3.65)$$

де $\lambda_{cm} = \frac{Q_0}{c}$ – деформація пружного елемента під дією амплітудного значення сили Q_0 , яка прикладається статично.

Визначимо відношення динамічної амплітуди до статичної.

$$\eta = \frac{C}{\lambda_{cm}} = \frac{1}{1 - \frac{p^2}{k^2}}, \text{ якщо } p < k \text{ (низькочастотні коливання)}, \quad (3.66)$$

$$\eta = \frac{C}{\lambda_{cm}} = \frac{1}{\frac{p^2}{k^2} - 1}, \text{ якщо } p > k \text{ (високочастотні коливання)}, (3.67)$$

де η – коефіцієнт динамічності.

Коефіцієнт динамічності η констатує, у скільки разів амплітуда змушених коливань C більша, ніж статична деформація пружного елемента λ_{cm} під дією амплітудного значення Q_0 збурювальної сили.

Графік залежності коефіцієнта динамічності від співвідношення частот збурювальної сили і вільних коливань показаний на рис. 3.14.

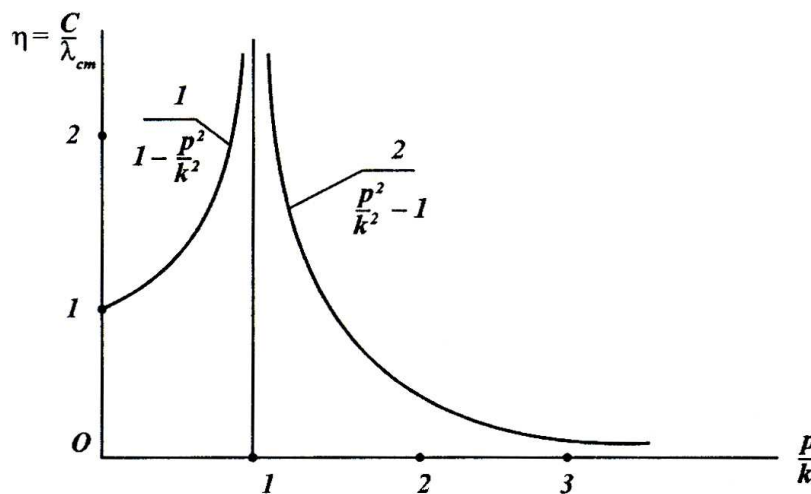


Рис. 3.14

Якщо $p = k \Rightarrow \frac{p}{k} = 1$, як можна побачити з рис. 3.18, коефіцієнт динамічності необмежено зростає (крива 1), що видно і із виразу (3.66). Тут має місце, так званий, механічний резонанс, при якому амплітуди змушених коливань теоретично необмежено зростають.

У зарезонансному режимі, коли $p > k$ згідно виразу (3.67), крива 2 коефіцієнта динамічності знижується асимптотично із нескінченності до координатної осі $\frac{p}{k}$.

Явище механічного резонансу

Характер коливань різко змінюється, якщо колова частота збурювальної сили збігається з коловою частотою вільних коливань.

У механіці це явище називають механічним резонансом. Амплітуди змушених коливань з плином часу необмежено зростають і можуть досягати недопустимо великих, небезпечних для механічної системи

значень.

Запишемо диференціальне рівняння резонансних коливань, замінюючи в правій частині виразу (3.57) p на k , оскільки вони збігаються у цих обставинах

$$\ddot{x} + k^2 x = h_0 \sin(kt + \delta). \quad (3.68)$$

Розв'язок однорідного рівняння (без правої частини) не відрізняється від розв'язку для вільних коливань (3.30):

$$x_1 = A \sin(kt + \alpha).$$

Частинний розв'язок рівняння (3.68) x_2 шукаємо у формі, яка є лінійно незалежною від x_1 :

$$x_2 = Ct \cos(kt + \delta). \quad (3.69)$$

Для підстановки частинного розв'язку в диференціальне рівняння резонансних коливань знайдемо другу похідну за часом

$$\ddot{x}_2 = -Ck \sin(kt + \delta) - Ck \sin(kt + \delta) + Ck^2 t \cos(kt + \delta).$$

Підставимо \ddot{x}_2 і x_2 у диференціальне рівняння і після скорочень маємо:

$$-2Ck \sin(kt + \delta) = h_0 \sin(kt + \delta) \Rightarrow C = -\frac{h_0}{2k}.$$

Загальний розв'язок, що характеризує закон руху точки під час резонансу:

$$x = x_1 + x_2 = A \sin(kt + \alpha) - \frac{h_0}{2k} t \cos(kt + \delta). \quad (3.70)$$

Перетворимо вираз загального розв'язку, переходячи у другому доданку до синуса з відповідним зсувом фази

$$x = A \sin(kt + \alpha) + \frac{h_0}{2k} t \sin(kt + \delta - \frac{\pi}{2}). \quad (3.71)$$

Аналіз закону свідчить, що рух точки за виразом (3.82) – це накладання вільних і змушених коливань. Перша гармоніка у формулі резонансних коливань характеризує вільні коливання, друга – змушені коливання, амплітуда яких дорівнює $\frac{h_0}{2k}t$. Остання зростає пропорційно часу і при $t \rightarrow \infty$ необмежено збільшується. Графік змінення **амплітуди змушених коливань** показано на рис. 3.15, де амплітудні прямі (пунктирні лінії із початку координат) відповідають рівнянням $x = \pm \frac{h_0}{2k}t$.

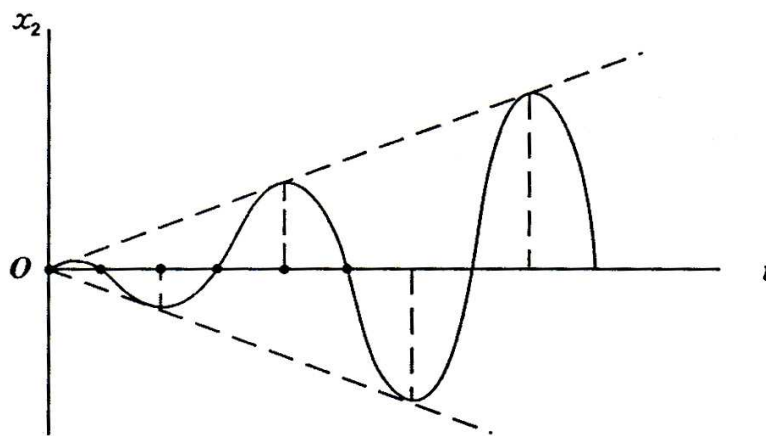


Рис. 3.15

Крім того, із загального розв'язку можна побачити, що під час резонансу фаза коливань синуса відстає на величину кута $\frac{\pi}{2}$ порівняно з фазою коливань збудовувальної сили Q .

У реальних конструкціях через різного роду тертя і нелінійні фактори амплітуда змушених коливань зростає повільніше, ніж за теоретичною моделлю, але, незаперечно, вона може досягати небезпечних величин.

Змушені коливання точки з урахуванням в'язкого тертя

Розглянемо коливання точки (рис. 3.16), на яку діють такі задані сили:

$F = -cx$ – поновлювальна сила,

$\bar{R} = -\mu\bar{v}$ – сила опору, пропорційна швидкості, $Q = Q_0 \sin(pt + \delta)$ –

збурювальна гармонічна сила.

Проекція сили опору на координатну вісь $R_x = -\mu \dot{x}$.

За таких умов диференціальне рівняння коливального руху точки

$$m\ddot{x} = -cx - \mu\dot{x} + Q_0 \sin(pt + \delta). \quad (3.72)$$

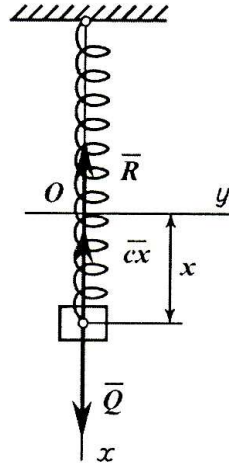


Рис. 3.16

Поділимо рівняння (3.72) на масу точки і введемо позначення

$$\ddot{x} = -\frac{c}{m}x - \frac{\mu}{m}\dot{x} + \frac{Q_0}{m}\sin(pt + \delta); \quad (3.73)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{c}{m} &= k^2; & k &= \sqrt{\frac{c}{m}}; \\ \frac{\mu}{m} &= 2n; & n &= \frac{\mu}{2m}; & \frac{Q_0}{m} &= h_0. \end{aligned} \right\} \quad (3.74)$$

З урахуванням виразу (3.74) вихідне диференціальне рівняння точки набуває вигляду:

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2x = h_0 \sin(pt + \delta). \quad (3.75)$$

Вираз (3.75) є диференціальним рівнянням змушених коливань точки при наявності сил опору. Це лінійне неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Його розв'язок складається із двох доданків

$$x = x_1 + x_2, \quad (3.76)$$

де x_1 – загальний розв’язок однорідного рівняння

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2 x = 0.$$

Якщо $k > n$, розв’язок x_1 набуває вигляду:

$$x_1 = B e^{-nt} \sin(\sqrt{k^2 - n^2} t + \beta); \quad (3.77)$$

де

$$B = \sqrt{x_0^2 + \frac{(v_0 + nx_0)^2}{k^2 - n^2}}; \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{x_0 \sqrt{k^2 - n^2}}{v_0 + nx_0}.$$

Але гармоніка x_1 досить швидко згасає, нею, як правило, нехтують. Доданок x_2 – це частинний розв’язок неоднорідного диференціального рівняння (3.75).

Розв’язок x_2 шукаємо у вигляді

$$x_2 = D \sin(pt + \delta - \gamma). \quad (3.78)$$

Для підстановки x_2 у рівняння (3.75) знайдемо похідні за часом

$$\dot{x}_2 = Dp \cos(pt + \delta - \gamma), \quad (3.79)$$

$$\ddot{x}_2 = -Dp^2 \sin(pt + \delta - \gamma). \quad (3.80)$$

Значення виразів (3.78), (3.79) і (3.80) підставимо в рівняння (3.75)

$$\begin{aligned} & -Dp^2 \sin(pt + \delta - \gamma) + 2nDp \cos(pt + \delta - \gamma) + \\ & + k^2 D \sin(pt + \delta - \gamma) = h_0 \sin(pt + \delta). \end{aligned} \quad (3.81)$$

$$\begin{aligned} h_0 \sin(pt + \delta) &= h_0 \sin((pt + \delta - \gamma) + \gamma) = h_0 \sin(pt + \delta - \gamma) \cos \gamma + \\ &+ h_0 \cos(pt + \delta - \gamma) \sin \gamma. \end{aligned}$$

Підставимо цей вираз, тоді рівняння (3.81) набуває вигляду:

$$\begin{aligned} & (D(k^2 - p^2) - h_0 \cos \gamma) \sin(pt + \delta - \gamma) + \\ & + (2nDp - h_0 \sin \gamma) \cos(pt + \delta - \gamma) = 0. \end{aligned} \quad (3.82)$$

Для того, щоб вираз (3.82) був тотожністю, необхідно, щоб коефіцієнти при синусі і косинусі були однакові. Звідки

$$\left. \begin{aligned} D(k^2 - p^2) &= h_0 \cos \gamma, \\ 2Dnp &= h_0 \sin \gamma. \end{aligned} \right\} \quad (3.83)$$

Якщо друге рівняння системи (3.83) поділити почленно на перше, то отримаємо величину кута γ :

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{2np}{k^2 - p^2}; \quad \gamma = \operatorname{arctg} \frac{2np}{k^2 - p^2}. \quad (3.84)$$

Якщо обидва рівняння (3.83) піднести до квадрату і потім почленно додати, то отримаємо вираз для визначення амплітуди D :

$$D^2 \left[(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2 \right] = h_0^2, \quad (3.85)$$

звідки

$$D = \frac{h_0}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}} = \frac{\frac{h_0}{k^2}}{\sqrt{\left(1 - \frac{p^2}{k^2}\right)^2 + 4 \frac{n^2}{k^2} \cdot \frac{p^2}{k^2}}}. \quad (3.86)$$

Якщо зробити перетворення, підставивши значення величин $\frac{h_0}{k^2} = \frac{Q_0 \cdot m}{m \cdot c} = \frac{Q_0}{c} = \lambda_{cm}$, остання величина є деформацією пружного елемента під дією амплітудного значення сили H , то отримаємо **амплітуду змушених коливань точки з опором:**

$$D = \frac{\lambda_{cm}}{\sqrt{\left(1 - \frac{p^2}{k^2}\right)^2 + 4 \frac{n^2 p^2}{k^4}}}, \quad (3.87)$$

і тоді змушені коливання будуть відбуватися за законом:

$$x = \frac{\lambda_{cm}}{\sqrt{\left(1 - \frac{p^2}{k^2}\right)^2 + 4 \frac{n^2 p^2}{k^4}}} \sin(pt + \delta - \gamma), \quad (3.88)$$

де $\lambda_{cm} = \frac{Q_0}{c}$; c – коефіцієнт жорсткості пружного елемента,

p – колова частота збурювальної сили, $k^2 = \frac{c}{m}$; m – маса вантажу, k

– колова частота вільних коливань, $n = \frac{\mu}{2m}$, μ – коефіцієнт пропорційності

у виразі сили опору, n – коефіцієнт згасання, $\frac{n}{k} = h$ – коефіцієнт

демпфірування, $\gamma = \arctg \frac{2np}{k^2 - p^2}$ – кут зсуву за фазою.

Проведемо аналіз амплітуди змушених коливань (3.87).

1. Якщо частота збурювальної сили значно менша, ніж частота вільних коливань $p \ll k$, то амплітуда змушених коливань наблизатиметься до статичного значення $D \rightarrow \lambda_{cm}$, тобто, коливання відбуваються з амплітудою, яка дорівнює статичній деформації пружного елемента.

2. Якщо частота збурювальної сили значно більша, ніж частота вільних коливань $p \gg k$, то амплітуда дорівнюватиме:

$$D \rightarrow \frac{\lambda_{cm}}{\frac{p^2}{k^2}} = \frac{\lambda_{cm} \cdot k^2}{p^2} = \frac{Q_0 \cdot c}{c \cdot m \cdot p^2} = \frac{Q_0}{p^2} = \frac{h_0}{p^2}.$$

З останнього виразу випливає, що величину амплітуди D можна отримати будь-якою малою.

Це важливий випадок для практики.

3. Якщо частота збурювальної сили дорівнює частоті вільних коливань $p = k$, то амплітуда D може досягати максимальних значень.

Настає явище механічного резонансу. Максимум амплітуди залежить від коефіцієнта демпфірування $h = \frac{n}{k}$.

Незначне збільшення коефіцієнта демпфірування різко змінює характер коливального процесу.

На рис 3.17 показаний графік змінення коефіцієнта динамічності η (вісь ординат) у функції відношення частот p/k (вісь абсцис) за різних значень коефіцієнта демпфірування $h = \frac{n}{k}$.

Графік називається амплітудно-частотною характеристикою коливальної системи.

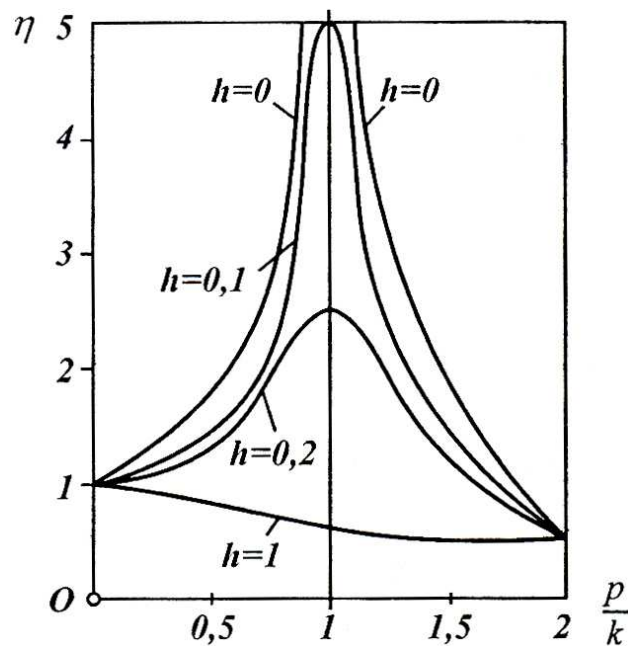


Рис. 3.17

Загальні властивості змушених коливань

1. Амплітуда змушених коливань не залежить від початкових умов.
2. Змушені коливання і при наявності сил опору не згасають.
3. Частота змушених коливань дорівнює частоті збурювальної сили і від характеристик системи не залежить.
4. Навіть за великих значень збурювальної сили технічними засобами можна досягти такої оптимальної конструкції, що змушені коливання будуть досить малими, якщо частота збурювальної сили значно відрізнятиметься від частоти вільних (власних) коливань.
5. Навіть за малих значень збурювальної сили можна отримати інтенсивні змушені коливання, якщо опір малий, а частота збурювальної сили наблизатиметься до частоти вільних коливань (механічний резонанс).

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Чим відрізняються диференціальні рівняння вільних коливань і змушених коливань без опору?
2. Скільки доданків має закон змушених коливань? Проаналізуйте їх.
3. Що таке коефіцієнт динамічності і як він визначається?
4. Які умови виникнення механічного резонансу і як змінюється амплітуда коливань під час резонансу?
5. Які доданки входять до диференціального рівняння змушених коливань з опором? Зробіть аналіз цих доданків.
6. Під дією яких сил матеріальна точка може здійснювати коливання?
7. Які тіла можуть бути джерелами поновлюючої сили?
8. Які характеристики коливань матеріальної точки не залежать від початкових умов, а які залежать?
9. Як називається точка, що визначається статичною рівновагою?
10. В якому вигляді шукають частинний розв'язок змушених коливань у випадку резонансу?
11. Із яких трьох видів коливань складається закон змушених коливань з опором?
12. Як впливає лінійний опір на амплітуду, фазу, частоту і період змушених коливань?
13. З'ясуйте явище резонансу і відповідний закон руху у цьому випадку?
14. Для дослідження яких коливань слугує коефіцієнт динамічності? Що він встановлює?
15. Перелічити загальні властивості змушених коливань матеріальної точки, які відрізняють їх від вільних коливань?

3.2. Матеріальна система. Геометрія мас

Механічна *система матеріальних точок* (далі матеріальна система) – це така *сукупність* взаємодіючих матеріальних *точок, положення і рух яких взаємопов'язано* і взаємозумовлено. Класичним прикладом матеріальної системи є сонячна система. Сюди ж можна віднести будь-який механізм, машину, споруду тощо.

Визначимо таку динамічну характеристику матеріальної системи як маса і розглянемо питання про розподіл маси матеріальної системи або твердого тіла як окремого випадку системи, тобто, геометрію мас.

3.2.1. Маса і центр мас матеріальної системи

Припустимо, що матеріальна система складається із n матеріальних точок, маси яких $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$. Положення кожної точки системи відносно фіксованої у просторі точки O визначається її радіусом-вектором $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{r}_3, \dots, \bar{r}_n$.

Маса матеріальної системи дорівнює арифметичній сумі мас окремих точок, які входять до складу системи.

$$m = m_1 + m_2 + \dots + m_n = \sum_{k=1}^n m_k. \quad (3.89)$$

Центр мас матеріальної системи визначається відповідно до положення центра ваги тіла.

Центр мас системи (центр інерції) є геометричною точкою, радіус-вектор якої обчислюється за виразом

$$\bar{r}_c = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^n m_k \bar{r}_k, \quad (3.90)$$

де \bar{r}_k – радіус-вектор k -ї точки системи.

Якщо з центром мас пов'язати прямокутну систему декартових координат x, y, z , то, проектуючи вираз (3.90) на осі цієї координатної системи, дістанемо координати центра мас матеріальної системи

$$x_c = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^n m_k x_k; \quad y_c = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^n m_k y_k; \quad z_c = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^n m_k z_k. \quad (3.91)$$

де $x_k, y_k, z_k; m_k$ – координати і маси точок матеріальної системи.

В однорідному гравітаційному полі Землі центр мас матеріальної системи збігається з центром ваги, але між ними є глибокі фізичні відмінності. Поняття центра мас більш широке. Воно дає змогу у ряді випадків звести задачу про рух матеріальної системи до задачі про рух однієї точки – центра мас. Крім того, положення центра мас залежать тільки від розподілу маси і не залежать від вибору системи координат і закону її руху.

Урахування деяких особливостей розподілу мас системи полегшує визначення положення центра мас. Наприклад, якщо матеріальна система має площину симетрії, то центр мас розміщений в цій площині. Якщо система має дві площини симетрії, то центр мас розміщений на лінії

перетину цих площин. Якщо система має три площини симетрії, то центр мас перебуває в точці перетину цих площин.

3.2.2. Моменти інерції матеріальної системи (тіла)

Положення центра мас системи або тіла недостатньо повно характеризує розподіл мас по об'єму. Наприклад, якщо маси точок системи змістити на однакову відстань від центра мас, то положення центра мас не зміниться, але на обертальний рух тіла відносно центра мас це суттєво вплине. Тому в механіці введена ще одна характеристика розподілу мас – момент інерції. Поняття моменту інерції належить до найважливіших понять механіки.

Моментом інерції матеріальної точки відносно осі z називається добуток маси точки на квадрат її відстані r_z до осі

$$I_z = m r_z^2.$$

Моментом інерції системи матеріальних точок відносно осі називають суму добутоків мас точок системи на квадрати їх відстаней до цієї осі.

$$I_z = \sum_{k=1}^n m_k r_{kz}^2, \quad k = 1, \dots, n. \quad (3.92)$$

Момент інерції тіла відносно осі – це фізична величина, що характеризує міру інертності тіла при обертальному русі навколо цієї осі. У разі обертання тіла навколо нерухомої точки момент інерції визначається відносно миттєвої осі, яка проходить через цю нерухому точку. Одиницею моменту інерції в Міжнародній системі SI є $[кг \cdot м^2]$.

Для твердого тіла момент інерції визначається інтегралом, поширеним на всю масу

$$I_z = \int_{(m)} r^2 dm. \quad (3.93)$$

Розрізняють моменти інерції **осьові або аксіальні, полярні, відцентрові**.

Покажемо, як визначити осьові і полярний моменти інерції суми точкових мас тіла відносно осей координат і початку координат (рис. 3.18.)

Якщо відомі координати окремих точок тіла, то осьові моменти інерції тіла можна обчислювати за формулами:

$$\begin{aligned} I_z &= \sum m_k r_{kz}^2 = \sum m_k (x_k^2 + y_k^2), \\ I_y &= \sum m_k r_{ky}^2 = \sum m_k (x_k^2 + z_k^2), \\ I_x &= \sum m_k r_{kx}^2 = \sum m_k (y_k^2 + z_k^2). \end{aligned} \quad (3.94)$$

де r_k – радіус-вектор k -ї точки (рис 3.18), який визначається

$$r_k^2 = x_k^2 + y_k^2 + z_k^2.$$

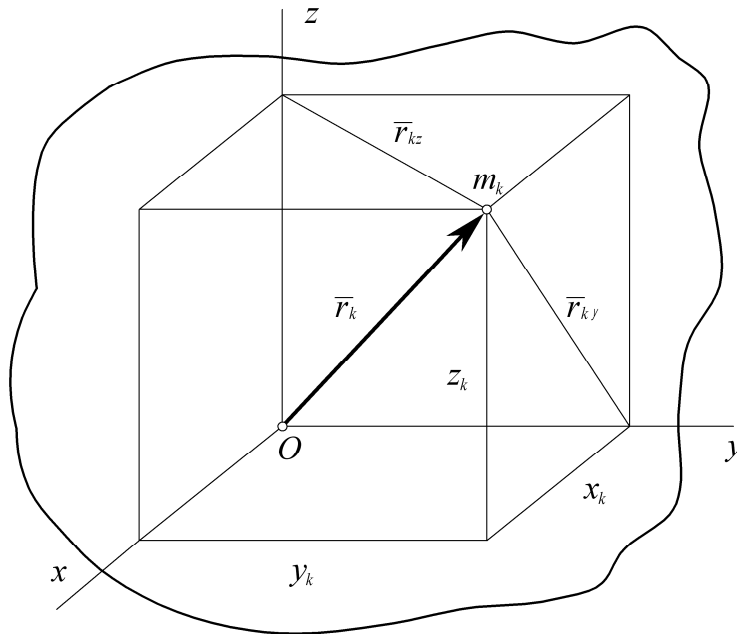


Рис. 3.18

Додамо три осьові моменти інерції

$$I_x + I_y + I_z = 2\sum m_k (x_k^2 + y_k^2 + z_k^2) = 2\sum m_k r_k^2 = 2I_0.$$

Отже, сума осьових моментів інерції дорівнює подвоєному полярному моменту інерції I_0 , який визначається, як сума добутків мас точок тіла на квадрати їх відстаней до полюса O .

$$I_0 = \sum m_k r_k^2, \quad (3.95)$$

Осьові і полярні моменти інерції тіл і систем є додатними величинами.

3.2.3. Радіус інерції тіла

Для обчислення моментів інерції користуються у ряді випадків поняттям радіуса інерції.

Радіусом інерції називають таку відстань від осі, на якій треба розмістити масу тіла, щоб добуток квадрату цієї відстані на масу визначав осьовий момент інерції тіла.

$$I_z = m \cdot \rho^2 \Rightarrow \rho = \sqrt{\frac{I_z}{m}} \quad (3.96)$$

де m – маса тіла.

Геометрично радіус інерції тіла відносно певної осі можна інтерпретувати як радіус умовного нескінченно тонкого колового циліндра з рівномірно розподіленою масою по бічній поверхні, момент інерції якого дорівнює моменту інерції тіла відносно цієї осі.

3.2.4. Теорема про моменти інерції відносно паралельних осей

Припустимо, що відомо положення центра мас тіла C , з яким пов'язана центральна прямокутна система декартових координат $Cx_ky_kz_k$ (рис. 3.19).

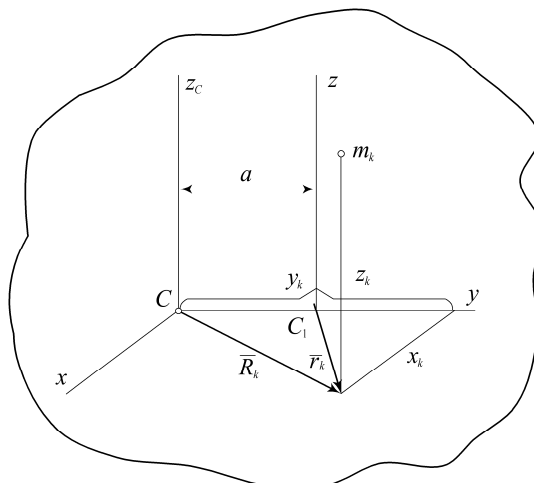


Рис. 3.19

Визначимо, чому дорівнює момент інерції тіла I_z відносно осі z , яка паралельна заданій центральній осі z_c і розміщена на відстані a від неї.

Сформулюємо теорему Гюйгенса – Штейнера.

Момент інерції тіла відносно довільної осі дорівнює сумі моменту інерції тіла відносно центральної паралельної осі і добутку маси тіла на квадрат відстані між осями.

Для доведення розглянемо довільну точку m_k з координатами x_k, y_k, z_k відносно центральної прямокутної системи декартових координат $Sxyz$. Відстані точки до вертикальних паралельних осей z_c і Z дорівнюють відповідно R_k і r_k .

Визначимо шуканий момент інерції тіла відносно паралельної осі Z як суму добутків мас на квадрати їх відстаней до цієї осі

$$I_z = \sum_{k=1}^n m_k r_k^2 = \sum m_k [(y_k - a)^2 + x_k^2] = \sum m_k (y_k^2 + x_k^2) + a^2 \sum m_k - 2a \sum m_k y_k.$$

Проаналізуємо доданки цієї формули.

$\sum m_k (y_k^2 + x_k^2) = \sum m_k R_k^2 = I_{z_c}$ – момент інерції тіла відносно осі z_c .

$\sum m_k = m$ – маса тіла,

$\sum m_k y_k = m \cdot y_c = 0$, оскільки координата центра мас відносно центральної осі дорівнює нулю $y_c = 0$. Звідки остаточно

$$I_z = I_{z_c} + m \cdot a^2. \tag{3.97}$$

Із аналізу виразу (3.97) видно, що центральна вісь z_c є віссю найменшого моменту інерції серед усіх паралельних осей.

3.2.5. Приклади обчислювання моментів інерції тіл простої форми

1.а Однорідний тонкий стрижень масою m обертається навколо осі z , яка проходить через кінець стрижня (рис. 3.20).

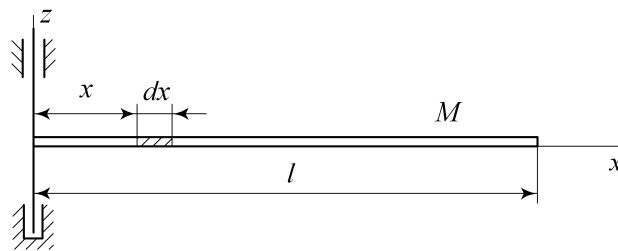


Рис. 3.20

Визначимо момент інерції стрижня як суцільного тіла

$$I_z = \int dm \cdot r^2, \quad r = x;$$

$dm = \mu \cdot dx$ – елементарна маса тонкого стрижня (лінії),

де $\mu = \frac{m}{l}$ – маса одиниці довжини стрижня. Тоді осьовий момент інерції стрижня

$$I_z = \int_0^l dm \cdot x^2 = \int_0^l \mu dx \cdot x^2 = \mu \int_0^l x^2 dx = \frac{\mu x^3}{3} \Big|_0^l = \frac{\mu l^3}{3} = \frac{m \cdot l^3}{l \cdot 3} = \frac{m \cdot l^2}{3} \quad (3.98)$$

1.6 Однорідний стрижень обертається відносно центральної осі z_c (рис. 3.21).

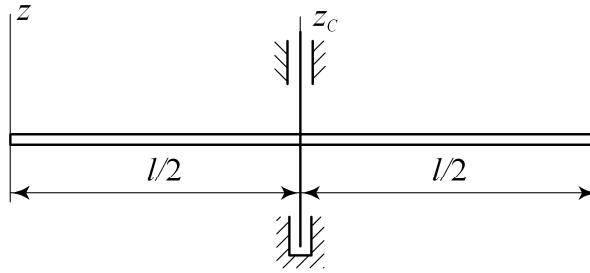


Рис. 3.21

Згідно з теоремою Гюйгенса–Штейнера $I_z = I_{z_c} + m \left(\frac{l}{2} \right)^2$, звідки

$$I_{z_c} = I_z - \frac{ml^2}{4} = \frac{ml^2}{3} - \frac{ml^2}{4} = \frac{ml^2}{12}. \quad (3.99)$$

2. Однорідне тонке кільце радіуса R або тонка циліндрична труба, маховик. Вісь z перпендикулярна площині кільця.

Усі точки кільця розміщені на однаковій відстані R від осі z , тому момент інерції кільця дорівнює $I_z = mR^2$.

Для двох інших взаємно-перпендикулярних осей x і y момент інерції вдвічі менше.

3. Кругла однорідна пластина або однорідний циліндр радіуса R (рис. 3.22).

Визначимо одиничну масу площі круга $\mu = \frac{m}{\pi R^2}$, тоді елементарна маса пластини $dm = \mu \cdot ds = \mu \cdot 2\pi r \cdot dr$.

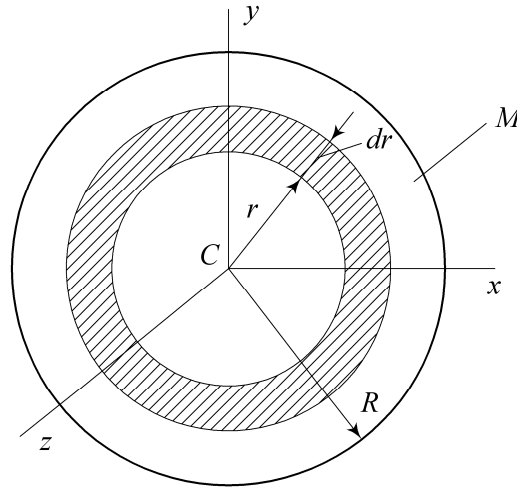


Рис. 3.22

Визначимо момент інерції тіла відносно осі z :

$$I_z = \int_0^R dm \cdot r^2 = \int_0^R \mu \cdot 2\pi r \cdot dr \cdot r^2 = 2\pi\mu \int_0^R r^3 dr = \frac{\mu\pi R^4}{2} = \frac{m\pi R^4}{2\pi R^2} = \frac{mR^2}{2};$$

$$I_z = \frac{1}{2} mR^2; \tag{3.100}$$

для двох інших осей: $I_x = I_y = \frac{1}{4} mR^2$.

4. Прямий коловий однорідний конус масою m і радіусом основи R

$$I_z = 0.3mR^2,$$

де z – вісь, яка проходить крізь вершину і центр кола основи.

5. Однорідна куля радіуса R . $I_z = I_x = I_y = 0.4mR^2$.

3.2.6. Відцентрові моменти інерції

Осьові моменти інерції не повністю характеризують розподіл маси по об'єму тіла або системи. Для характеристики асиметричного розподілу мас в механіці введені, так звані, відцентрові моменти інерції

$$I_{xy} = \sum m_k x_k y_k ; I_{xz} = \sum m_k y_k z_k ; I_{yz} = \sum m_k x_k z_k . \quad (3.101)$$

Для суцільного тіла знак суми замінюється інтегралом

$$I_{xy} = \int_{(m)} dm \cdot x \cdot y .$$

Відцентровий момент інерції дорівнює сумі добутків мас точок на їхні відстані до двох координатних осей.

Величини відцентрових моментів інерції залежать від напрямку координатних осей і вибору початку координат. Тому, говорячи про відцентровий момент у даній точці, розуміють, що початок координат збігається з цією точкою.

Відцентрові моменти інерції можуть дорівнювати нулю і мати додатний або від'ємний знак.

3.2.7. Момент інерції тіла відносно довільної осі, що перетинає задану точку

Знайдемо залежність між моментами інерції матеріальної системи (тіла) відносно довільної осі, що перетинає дану точку, і моментами інерції відносно координатних осей

Припустимо, що напрямок довільної осі N заданий кутами α, β, γ з відповідними осями координат x, y, z (рис. 3.23).

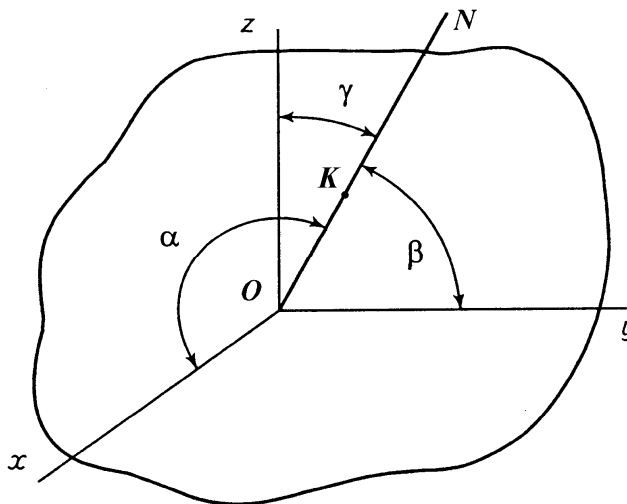


Рис. 3.23

Відомі також осьові і відцентрові моменти інерції тіла $I_x, I_y, I_z, I_{xy}, I_{xz}, I_{yz}$.

Тоді залежність між моментом інерції тіла (матеріальної системи) відносно довільної осі ON , що проходить через початок координат, і моментами інерції відносно координатних осей Ox, Oy, Oz має такий вигляд [1]:

$$I_N = I_x \cos^2 \alpha + I_y \cos^2 \beta + I_z \cos^2 \gamma - 2I_{xy} \cos \alpha \cos \beta - 2I_{yz} \cos \beta \cos \gamma - 2I_{xz} \cos \alpha \cos \gamma. \quad (3.102)$$

Візьмемо на осі ON точку K , таку, що $OK = d = \frac{1}{\sqrt{I_N}}$. Помножимо обидві частини виразу (3.113) на d^2 і, взявши до уваги, що координати x, y, z точки K задовольняють рівностям

$$x = d \cos \alpha; \quad y = d \cos \beta; \quad z = d \cos \gamma;$$

дістанемо рівняння поверхні другого порядку

$$I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 - 2I_{xy} xy - 2I_{yz} yz - 2I_{xz} xz = 1, \quad (3.103)$$

на якій рухається точка K , кінець відрізка OK , навколо нерухомого центра O початку координат, окреслюючи згадану поверхню, якщо змінюється напрям осі ON . Указана множина точок (3.103) є поверхнею еліпсоїда, який називається **еліпсоїдом інерції**. Осі симетрії еліпсоїда називаються **головними осями інерції** для тієї точки тіла, в якій побудовано еліпсоїд.

Якщо взяти іншу точку тіла, то напрями головних осей змінюються. А якщо осі координат збігаються з осями симетрії еліпсоїда, то рівняння поверхні (3.103) набуває канонічної форми

$$I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 = 1,$$

тобто, **відцентрові моменти інерції тіла відносно головних осей інерції дорівнюють нулю**.

Як наслідок, за відомому еліпсоїду інерції можна визначити момент інерції відносно будь-якої осі, що проходить крізь точку O . А якщо відомі головні осі інерції, то спрощуються рівняння руху твердого тіла, як це видно на прикладі спрощення формули (3.102) для моменту інерції відносно осі

$$I_N = I_x \cos^2 \alpha + I_y \cos^2 \beta + I_z \cos^2 \gamma.$$

Якщо однорідне тіло має площину симетрії, то вісь, перпендикулярна до цієї площини, є головною віссю інерції для точки перетину її з площиною.

Якщо однорідне тіло має вісь симетрії Oz , то в тілі завжди знайдуться точки з симетричними координатами за один і другий бік від осі

$$\begin{cases} x_k; & y_k; & z_k; \\ -x_k; & -y_k; & z_k. \end{cases}$$

Асиметрія відносно осі Oz в цих обставинах відсутня і відцентрові моменти інерції тіла, що характеризують асиметрію, дорівнюють нулю

$$\begin{cases} \sum m_k x_k z_k = 0 \\ \sum m_k y_k z_k = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_{xz} = 0 \\ I_{yz} = 0. \end{cases}$$

Вісь Oz , для якої відцентрові моменти інерції дорівнюють нулю, називається **головною віссю інерції** тіла.

Таким чином, якщо однорідне тіло має вісь симетрії, то вона є головною віссю інерції. Якщо всі три відцентрові моменти інерції тіла дорівнюють нулю, то кожна з координатних осей є головною віссю інерції цього тіла для точки O початку координат.

Моменти інерції тіла відносно головних осей інерції називаються головними моментами інерції.

Через довільну точку будь-якого однорідного тіла завжди можна провести хоча б одну систему трьох взаємно-перпендикулярних осей, які будуть осями симетрії і для яких відцентрові моменти інерції дорівнюють нулю, тоді кожна з цих осей буде головною віссю інерції тіла.

Довільна вісь, яка проходить через центр мас тіла, називається **центральною віссю**.

Головна вісь інерції, яка проходить через центр мас, є **головною центральною віссю інерції**.

Момент інерції тіла відносно головної центральної осі інерції називається головним центральним моментом інерції.

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Які моменти інерції тіла вам відомі?
2. В яких одиницях вимірюється момент інерції тіла і що він характеризує?
3. Що таке радіус інерції тіла?
4. Сформулюйте теорему Гюйгенса-Штейнера для паралельних осей.
5. Як обчислити моменти інерції стрижня, суцільного і порожнистого циліндра, кулі, конуса?
6. Що таке відцентрові моменти інерції тіла і як вони характеризують розподіл маси тіла?
7. Як визначити момент інерції тіла відносно довільної осі?
8. Які осі в тілі є головними центральними осями інерції?
9. Що таке еліпсоїд інерції і яка його формула?
10. Чи змінюється положення головних осей інерції тіла за переходу від однієї точки тіла до іншої?

3.3. Рух центра мас матеріальної системи

3.3.1. Класифікація сил і їхні властивості

Сили, що прикладені до точок матеріальної системи, виконують дві суттєво різні функції, а тому поділяються на дві категорії: а) *сили внутрішні* і *зовнішні*; б) *сили активні* і *сили реакцій в'язей*.

Внутрішні сили – це сили взаємодії між точками самої матеріальної системи. Внутрішні сили позначаються \bar{F}_k^{in} . Вони мають такі властивості:

– внутрішні сили діють на матеріальну систему попарно як дія і протидія ($\bar{F}_1^{in} = -\bar{F}_2^{in}$);

– векторна сума внутрішніх сил або головний вектор внутрішніх сил дорівнює нулю:

$$\sum_{k=1}^n \bar{F}_k^{in} = 0; \quad (3.104)$$

– векторна сума моментів внутрішніх сил відносно будь-якого центра або головний момент внутрішніх сил і алгебраїчна сума моментів сил відносно довільної осі дорівнюють нулю:

$$\sum_{k=1}^n \bar{m}_o(\bar{F}_k^{in}) = 0; \quad \sum_{k=1}^n m_z(\bar{F}_k^{in}) = 0. \quad (3.105)$$

Частина перша

Указані властивості внутрішніх сил (3.104), (3.105) отримані на основі третього закону механіки про дію і протидію. Але ці умови рівноваги можна розглядати як достатні, якщо внутрішні сили прикладені до абсолютно твердого тіла.

Зовнішні сили – це сили взаємодії між матеріальними точками системи і фізичними тілами, які не належать до цієї матеріальної системи.

Зовнішні сили позначаються \bar{F}_k^e . Розглянута класифікація сил застосовується, як правило, для вільної матеріальної системи.

Активні сили називають ще заданими силами. **Реакції в'язей** – це сили, з якими в'язі діють на систему матеріальних точок. Сили реакцій є невідомими і залежать від закону руху системи. Ця класифікація застосовується для невідільної матеріальної системи, а реакції в'язей вводяться на основі аксіоми про звільнення від в'язей. За допомогою цієї аксіоми невідільна матеріальна система перетворюється у вільну. Слід наголосити, що дана класифікація сил є відносною. Розглянутим у статисті методом перерізів внутрішню силу можна перетворити у зовнішню. А внутрішня сила двигуна автомобіля стає рушійною, провокуючи появу зовнішньої сили тертя між ведучими колесами і дорогою.

3.3.2. Диференціальні рівняння руху матеріальної системи

Розглянемо вільну матеріальну систему, яка складається із n матеріальних точок з масами $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$; положення кожної точки системи відносно якого-небудь центра визначається її радіусом-вектором $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{r}_3, \dots, \bar{r}_n$; до кожної точки системи прикладено, відповідно, рівнодійна внутрішніх сил $\bar{F}_1^{in}, \bar{F}_2^{in}, \bar{F}_3^{in}, \dots, \bar{F}_n^{in}$ і рівнодійна зовнішніх сил $\bar{F}_1^e, \bar{F}_2^e, \bar{F}_3^e, \dots, \bar{F}_n^e$.

Для кожної точки матеріальної системи можна скласти диференціальне рівняння:

$$m_k \frac{d^2 \bar{r}_k}{dt^2} = \bar{F}_k^{in} + \bar{F}_k^e, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (3.106)$$

Система n рівнянь (3.106) і є **системою диференціальних рівнянь руху матеріальної системи у векторній формі**.

У проєкціях на осі прямокутної системи декартових координат x, y, z системі (3.106) відповідають $3n$ наступних диференціальних рівнянь.

$$\begin{aligned}
 m_k \frac{d^2 x_k}{dt^2} &= F_{kx}^{in} + F_{kx}^e; \\
 m_k \frac{d^2 y_k}{dt^2} &= F_{ky}^{in} + F_{ky}^e; \quad k = 1, 2, \dots, n. \\
 m_k \frac{d^2 z_k}{dt^2} &= F_{kz}^{in} + F_{kz}^e.
 \end{aligned}
 \tag{3.107}$$

Рівності (3.107) є системою звичайних диференціальних рівнянь другого порядку, за інтегруванням якої отримуємо *bn* довільних сталих, які треба визначати з початкових умов руху. Математичні складності пов'язані і з рядом інших обставин. Подолати ці обставини допомагають загальні теореми динаміки, які починаємо розглядати.

3.3.3. Теорема про рух центра мас матеріальної системи

Про характер руху матеріальної системи іноді можна мати уяву, спостерігаючи за рухом центра мас матеріальної системи.

Приміром, важливо дослідити, чи є прямолінійною траєкторія руху центра мас такої сільськогосподарської машини як культиватор, щоб зробити висновок, яку ширину захисної зони можна взяти під час обробітку міжрядь просапних культур і не допустити їхнього пошкодження, а також у підсумку дослідження запропонувати заходи, які б дозволили удосконалити характеристики руху машин у цьому технологічному процесі.

Розглянемо теорему про рух центра мас системи. Для матеріальної системи із *n* матеріальних точок запишемо диференціальні рівняння у формі (3.106) і підсумуємо їх по всіх точках системи

$$\sum_{k=1}^n m_k \frac{d^2 \bar{r}_k}{dt^2} = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k^{in} + \sum_{k=1}^n \bar{F}_k^e.
 \tag{3.108}$$

Згідно з наведеними властивостями внутрішніх сил (3.104), перший доданок у правій частині рівняння (3.108) зникає

$$\sum_{k=1}^n m_k \frac{d^2 \bar{r}_k}{dt^2} = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k^e.
 \tag{3.109}$$

Із виразу (3.101) можна записати:

$$m\bar{r}_c = \sum_{k=1}^n m_k \bar{r}_k. \quad (3.110)$$

Візьмемо двічі похідну за часом від лівої і правої частин виразу (3.110)

$$m \frac{d^2 \bar{r}_c}{dt^2} = \sum_{k=1}^n m_k \frac{d^2 \bar{r}_k}{dt^2}. \quad (3.111)$$

З отриманого виразу (3.111) випливає, що його права частина збігається з лівою частиною виразу (3.109), тому

$$m \frac{d^2 \bar{r}_c}{dt^2} = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k^e \Rightarrow m \frac{d\bar{v}_c}{dt} = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k^e \Rightarrow m\bar{a}_c = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k^e. \quad (3.112)$$

На підставі аналізу математичного виразу (3.112) сформулюємо теорему про рух центра мас матеріальної системи.

Добуток маси матеріальної системи, зведеної до центра мас, на прискорення її центра мас дорівнює векторній сумі всіх зовнішніх сил, які діють на дану матеріальну систему.

Можна надати інше, як би фізичне формулювання закону.

Центр мас матеріальної системи рухається як вільна матеріальна точка, в якій зосереджена маса всієї системи і на яку діє сила, що дорівнює головному вектору зовнішніх сил.

Рівнянню (3.112) відповідають три рівняння у проекціях на декартові осі координат

$$m \frac{d^2 x_c}{dt^2} = \sum F_{kx}^e; \quad m \frac{d^2 y_c}{dt^2} = \sum F_{ky}^e; \quad m \frac{d^2 z_c}{dt^2} = \sum F_{kz}^e. \quad (3.113)$$

З теореми випливає, що рух центра мас системи залежить тільки від зовнішніх сил, які діють на матеріальну систему, внутрішні сили не змінюють положення і швидкості центра мас.

Проте, внутрішні сили можуть здійснювати непрямий вплив на рух центра мас, але через зовнішні сили.

Наприклад, в автомобілі внутрішні сили, що розвиває двигун, впливають на рух центра мас автомобіля лише через сили тертя коліс із

дорогою, а якщо тертя мале (лід), то рух може і не відбутися (машина буксує).

Зазначимо, що пари сил, прикладені до системи, не можуть змінити характер руху центра мас, бо головний вектор пар сил дорівнює нулю.

Пари сил можуть спричинити обертання системи навколо центра мас.

3.3.4. Закон збереження руху центра мас

У деяких випадках головний вектор зовнішніх сил може дорівнювати нулю, а тому із виразу (3.112)

$$\frac{d^2 \bar{r}_c}{dt^2} = \frac{d\bar{v}_c}{dt} = 0.$$

Звідси швидкість центра мас є сталою величиною

$$\bar{v}_c = \frac{d\bar{r}_c}{dt} = \text{const}.$$

На цій основі сформулюємо закон збереження руху центра мас матеріальної системи.

Якщо головний вектор зовнішніх сил дорівнює нулю, то центр мас системи рухається рівномірно і прямолінійно або перебуває у спокої.

Може статися, що проекція головного вектора зовнішніх сил лише на одну вісь, наприклад, вісь x дорівнює нулю.

Тоді за виразом (3.113)

$$\frac{d^2 x_c}{dt^2} = 0; \Rightarrow \frac{dx_c}{dt} = v_{cx} = \text{const}.$$

Якщо одна із проекцій головного вектора зовнішніх сил на вісь нерухомої системи координат дорівнює нулю, то проекція швидкості центра мас на цю вісь зберігає свою величину.

Цей висновок впливає безпосередньо з рівнянь (3.113). Крім того, необхідно зазначити, що коли швидкість центра мас або проекція швидкості на вісь на початку руху дорівнювала нулю, то за законом

Частина перша

зберігається незмінним положення центра мас (радіус-вектор або координата).

$$\bar{v}_c = \frac{d\bar{r}_c}{dt} = 0 \Rightarrow \bar{r}_c = const; v_{cx} = \frac{dx_c}{dt} = 0 \Rightarrow x_c = const .$$

У цьому випадку закон збереження руху центра мас дозволяє по переміщенню однієї частини системи знайти переміщення другої її частини.

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Що таке центр мас і як визначаються його координати?
2. Які властивості внутрішніх сил ви знаєте?
3. Запишіть диференціальне рівняння руху матеріальної системи у векторній і координатній формах.
4. Напишіть алгебраїчний вираз і сформулюйте теорему про рух центра мас матеріальної системи.
5. Чи можуть внутрішні сили змінити положення центра мас?
6. Надайте формулювання закону збереження центра мас матеріальної системи.
7. Чи зберігається положення центра мас системи, якщо одне із тіл системи переміщується під дією внутрішніх сил на деяку відстань?
8. Чому дорівнює головний вектор і головний момент внутрішніх сил матеріальної системи?
9. Порівняйте два формулювання закону руху центра мас матеріальної системи.
10. Наведіть приклад, коли внутрішні сили спонукають до руху?

3.4. Основні (загальні) теореми динаміки

Вирішення другої основної задачі динаміки матеріальної системи зводиться до складання і розв'язування диференціальних рівнянь руху з урахуванням початкових умов. Інтегралі рівнянь руху надають вичерпну інформацію про рух системи.

Проте, загальний розв'язок для матеріальної системи, крім окремих випадків, знайти не вдається.

Задача про два тіла, що рухаються під дією гравітаційних сил, є дуже складною для загального випадку. Класична задача про три тіла в загальному вигляді не вирішена.

Для невільної матеріальної системи треба одночасно розв'язувати дві задачі: визначення руху системи і визначення реакцій в'язей.

Проте, існує багато задач динаміки, розв'язання яких не потребує повної інформації про властивості досліджуваного руху системи, які містяться у диференціальних рівняннях.

Це задачі, пов'язані з визначенням зовнішніх сил, що діють на матеріальні точки системи або з визначенням руху центра мас і основних мір механічного руху системи: головного вектора кількості руху, головного моменту кількості руху, кінетичної енергії.

До ефективних методів розв'язування таких задач належать основні теореми динаміки, що встановлюють співвідношення між мірами механічного руху і мірами дії сил: імпульс сили, робота сили.

Основні теореми динаміки характеризують окремі властивості механічного руху і надають часткову інформацію про цей рух.

Основні теореми динаміки дозволяють уникнути складних операцій інтегрування диференціальних рівнянь руху матеріальної точки і матеріальної системи, що значно спрощує розв'язання ряду задач динаміки.

Розглянемо послідовно теореми про зміну кількості руху матеріальної точки і системи, моменту кількості руху, кінетичної енергії.

3.4.1. Міри механічного руху і міри дії сил

До основних мір руху належать кількість руху, момент кількості руху і кінетична енергія. До мір дії сил належать імпульс сили і робота сили.

Із диференціальних рівнянь руху випливають співвідношення між зміною протягом часу сумарних мір руху системи і мір дії сил – основні теореми динаміки, які називають загальними інтегралами диференціальних рівнянь руху. Міри руху є основою для встановлення загальних теорем динаміки.

Цікава дискусія точилася у XVII-XVIII століттях між прихильниками Р.Декарта і Г.Лейбніца про те, яка із мір механічного руху – кількість руху або кінетична енергія (жива сила, як її тоді називали) – визначає динамічні властивості тіл. Дискусія закінчилась безрезультатно. Тільки у XIX ст. вчені прийшли до висновку, що обидві міри руху одночасно існують в кожному тілі.

Декартова міра, кількість руху як перша міра руху, характеризує здатність механічного руху тіла переходити до другого тіла у формі самого ж механічного руху. Друга міра руху, кінетична енергія, характеризує здатність механічного руху тіла перетворюватись в еквівалентну кількість потенціальної, теплової та інших видів енергії. Тільки релятивістська

механіка (XX ст.) об'єднала ці дві міри руху в одну – тензор енергії (імпульс).

3.4.2. Кількість руху матеріальної точки і матеріальної системи

Однією з найважливіших динамічних характеристик руху матеріальної точки і матеріальної системи є *перша міра механічного руху – кількість руху*.

Кількість руху матеріальної точки є векторною функцією і дорівнює добутку маси точки на вектор її швидкості.

$$\bar{q} = m\bar{v}. \quad (3.114)$$

Напрямок вектора кількості руху \bar{q} збігається з напрямком вектора швидкості \bar{v} . Одиницею кількості руху є [кг м/с].

Головний вектор кількостей руху матеріальних точок або кількість руху матеріальної системи є вектором, який дорівнює векторній сумі кількостей руху точок системи

$$\bar{Q} = \sum_{k=1}^n \bar{q}_k = \sum_{k=1}^n m_k \bar{v}_k. \quad (3.115)$$

Вектор кількості руху системи визначається і через швидкість центра мас. Запишемо вираз (3.89) інакше $m \cdot \bar{r}_c = \sum_{k=1}^n m_k \bar{r}_k$ і візьмемо похідну за

часом від лівої і правої частин $m \frac{d\bar{r}_c}{dt} = \sum_{k=1}^n m_k \frac{d\bar{r}_k}{dt}$.

Оскільки $\frac{d\bar{r}_c}{dt} = \bar{v}_c$, а $\frac{d\bar{r}_k}{dt} = \bar{v}_k$, то

$$m\bar{v}_c = \sum_{k=1}^n m_k \bar{v}_k = \bar{Q}; \Rightarrow \bar{Q} = m\bar{v}_c. \quad (3.116)$$

Головний вектор кількості руху матеріальної системи дорівнює добутку маси m системи на вектор швидкості її центра мас.

Проекції кількості руху матеріальної системи на осі прямокутної системи декартових координат

$$Q_x = \sum_{k=1}^n m_k v_{kx} = m v_{cx}, \quad Q_y = \sum_{k=1}^n m_k v_{ky} = m v_{cy}, \quad Q_z = \sum_{k=1}^n m_k v_{kz} = m v_{cz}. \quad (3.117)$$

Звідси головний вектор кількості руху матеріальної системи і його напрямні косинуси

$$Q = \sqrt{Q_x^2 + Q_y^2 + Q_z^2};$$

$$\cos(\hat{Q}, x) = \frac{Q_x}{Q}; \quad \cos(\hat{Q}, y) = \frac{Q_y}{Q}; \quad \cos(\hat{Q}, z) = \frac{Q_z}{Q}.$$

3.4.3. Імпульс сили

Ефект дії сили залежить не тільки від її величини, а й від тривалості дії. Для характеристики дії сили на тіло за певний проміжок часу вводиться поняття елементарного імпульсу сили і імпульсу сили за кінцевий проміжок часу.

Елементарний імпульс \overline{dS} сили \overline{F} – це векторна величина, яка дорівнює добутку вектора сили на елементарний проміжок часу її дії.

$$\overline{dS} = \overline{F} \cdot dt. \quad (3.118)$$

Напрямок елементарного імпульсу сили збігається з напрямком вектора сили. Одиницею імпульсу сили у Міжнародній системі одиниць СІ є $[H \cdot c]$. Імпульс сили за кінцевий проміжок часу дорівнює інтегралу від елементарного імпульсу сили

$$\overline{S} = \int_0^{t_1} \overline{dS} = \int_0^{t_1} \overline{F} dt. \quad (3.119)$$

Для обчислення імпульсу сили використовують його проекції на відповідні осі координат.

$$S_x = \int_0^{t_1} dS_x = \int_0^{t_1} F_x dt, \quad S_y = \int_0^{t_1} dS_y = \int_0^{t_1} F_y dt, \quad S_z = \int_0^{t_1} dS_z = \int_0^{t_1} F_z dt. \quad (3.120)$$

Повний імпульс

$$S = \sqrt{S_x^2 + S_y^2 + S_z^2}.$$

У випадку, якщо сила є сталою величиною, то імпульс сили

$$\bar{S} = \bar{F}t. \quad (3.121)$$

3.4.4. Теорема про зміну кількості руху матеріальної точки

Запишемо основний закон динаміки матеріальної точки у формі

$$\frac{d}{dt}(m \cdot \bar{v}) = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k. \quad (3.122)$$

Перетворимо вираз (3.122)

$$d(m\bar{v}) = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k \cdot dt. \quad (3.123)$$

Рівність (3.123) є математичним виразом теореми про зміну кількості руху матеріальної точки у диференціальній формі.

Диференціал кількості руху матеріальної точки дорівнює векторній сумі елементарних імпульсів сил, що діють на дану точку.

Інтегруємо почленно ліву і праву частини виразу (3.123) в заданих границях

$$\int_{v_0}^{v_1} d(m\bar{v}) = \sum_{k=1}^n \int_0^{t_1} \bar{F}_k dt. \quad (3.124)$$

Права частина виразу (3.124) є сумою імпульсів сил за кінцевий проміжок часу

$$m\bar{v}_1 - m\bar{v}_0 = \sum_{k=1}^n \bar{S}_k. \quad (3.125)$$

Зміна кількості руху матеріальної точки за певний проміжок часу дорівнює векторній сумі імпульсів сил, які діють на точку за цей самий проміжок часу.

Вираз (3.125) у проєкціях на осі ортогональної системи декартових координат x , y , z

$$\left. \begin{aligned} mv_{1x} - mv_{0x} &= \sum_{k=1}^n S_{kx}; & mv_{1y} - mv_{0y} &= \sum_{k=1}^n S_{ky}; & mv_{1z} - mv_{0z} &= \sum_{k=1}^n S_{kz}. \end{aligned} \right\} (3.126)$$

Приклад 3.12

Автомобіль масою $m = 1000 \text{ кг}$ рухається вздовж прямої горизонтальної дороги зі швидкістю $v_0 = 5 \text{ м/с}$.

Далі протягом 10 с сила тяги двигуна автомобіля збільшується на 150 Н за кожну секунду. Визначити швидкість автомобіля v_1 після десятої секунди розгону.

Розв'язання

Вважаємо рух автомобіля поступальним. Тоді його можна прийняти за матеріальну точку.

На підставі виразу (3.126) запишемо

$$mv_{1x} - mv_{0x} = \sum S_{kx} = S. \quad (a)$$

Оскільки рух по прямій, то можна позбавитись індексів

$$v_{1x} = v_1; \quad v_{0x} = v_0; \quad S_x = S; \quad \Rightarrow mv_1 - mv_0 = S.. \quad (б)$$

Визначимо імпульс сили тяги двигуна за виразом (3.119)

$$\begin{aligned} F &= 150t; & S &= \int_0^{t_1} Fdt; \\ S &= \int_0^{t_1} 150tdt = 150 \int_0^{10} tdt = 150 \frac{t^2}{2} \Big|_0^{10} = \frac{150 \cdot 10^2}{2} = 7500 \text{ (Нс)}. \end{aligned}$$

$$\text{Із виразу (б)} \quad v_1 = \frac{S + mv_0}{m} = \frac{7500 + 1000 \cdot 5}{1000} = 12,5 \text{ м/с}.$$

Відповідь: $v_1 = 12,5 \text{ м/с}$.

3.4.5. Теорема про зміну кількості руху матеріальної системи

Для матеріальної системи, яка складається з n матеріальних точок, на підставі теореми про рух її центра мас можна записати:

$$m \frac{d\bar{v}_c}{dt} = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k^e \Rightarrow \frac{d(m\bar{v}_c)}{dt} = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k^e \Rightarrow \frac{d\bar{Q}}{dt} = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k^e. \quad (3.127)$$

де $m\bar{v}_c = \bar{Q}$ – кількість руху матеріальної системи.

Формула (3.127) є математичним виразом теореми про зміну кількості руху матеріальної системи у диференціальній формі.

Похідна за часом від вектора кількості руху матеріальної системи дорівнює векторній сумі всіх зовнішніх сил, які діють на матеріальну систему.

Перепишемо вираз (3.127)

$$d\bar{Q} = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k^e \cdot dt. \quad (3.128)$$

Інтегруємо почленно ліву та праву частини виразу (3.128) в границях від Q_0 до Q_1 і від 0 до t_1

$$\int_{Q_0}^{Q_1} d\bar{Q} = \int_0^{t_1} \sum_{k=1}^n \bar{F}_k^e \cdot dt = \sum_{k=1}^n \int_0^{t_1} \bar{F}_k^e dt \Rightarrow \bar{Q}_1 - \bar{Q}_0 = \sum_{k=1}^n \bar{S}_k^e. \quad (3.129)$$

Зміна вектора кількості руху матеріальної системи за деякий проміжок часу дорівнює імпульсу головного вектора зовнішніх сил, прикладених до точок системи, за той самий проміжок часу.

Рівність (3.129) виражає теорему про зміну кількості руху системи матеріальних точок в інтегральній формі.

Проектуємо вираз (3.129) на осі x, y, z нерухомої прямокутної інерціальної системи координат і отримуємо скалярні рівняння

$$Q_{1x} - Q_{0x} = \sum_{k=1}^n S_{kx}^e, \quad Q_{1y} - Q_{0y} = \sum_{k=1}^n S_{ky}^e, \quad Q_{1z} - Q_{0z} = \sum_{k=1}^n S_{kz}^e. \quad (3.130)$$

3.4.6. Закон збереження кількості руху матеріальної системи

Якщо в процесі руху матеріальної системи імпульс головного вектора зовнішніх сил, що діють на матеріальну систему, дорівнює нулю, то із виразу (3.127)

$$\frac{d\bar{Q}}{dt} = 0 \Rightarrow \bar{Q} = \text{const}; \bar{Q}_1 - \bar{Q}_0 = 0; \Rightarrow \bar{Q}_1 = \bar{Q}_0. \quad (3.131)$$

Якщо імпульс головного вектора зовнішніх сил, що діють на матеріальну систему, дорівнює нулю, то кількість руху системи залишається незмінною.

Аналогічно і відносно проєкцій головного імпульсу на якусь нерухому вісь координат. Якщо $\sum_{k=1}^n \bar{S}_{kx}^e = 0$, то $Q_{1x} - Q_{0x} = 0; \Rightarrow Q_{1x} = Q_{0x}$.

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Що таке кількість руху матеріальної точки і системи, яка її розмірність?
2. Які міри руху існують в тілі, що рухається?
3. Як визначити імпульс змінної і сталої сил?
4. Сформулюйте теорему про зміну кількості руху матеріальної точки і системи.
5. Напишіть теорему про зміну кількості руху точки в диференціальній формі.
6. Сформулюйте закон збереження кількості руху матеріальної системи.
7. Які задачі розв'язуються за допомогою загальних теорем динаміки?
8. Які міри дії сил мають місце під час руху тіла?
9. В якій системі координат справджуються закони збереження кількості руху точки і системи?
10. У чому суть дискусії між ученими 17-18 ст. про міри руху?

3.5. Теорема про зміну моменту кількості руху точки і кінетичного моменту системи

3.5.1. Момент кількості руху матеріальної точки відносно центра і осі

Поняття моменту відносно центра і осі можуть бути застосовані до будь-яких векторів, зокрема, до вектора сили в статиці або до вектора кількості руху матеріальної точки в динаміці.

Моментом кількості руху ($m\bar{v}$) матеріальної точки відносно центра O є вектор \bar{l}_o , який перпендикулярний до площини OAB , яку

Частина перша

утворює вектор $(m\bar{v})$ і центр O , і спрямований у той бік, звідки здається, що вектор $(m\bar{v})$ намагається повернути цю площину відносно центра O проти ходу годинникової стрілки (рис. 3.25).

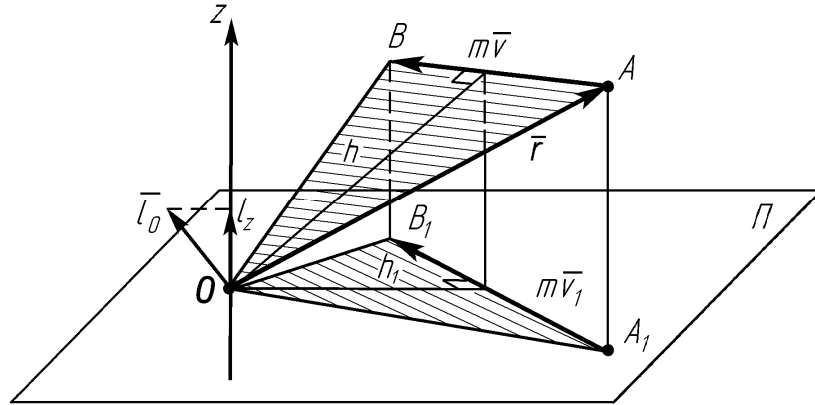


Рис. 3.25

Модуль моменту кількості руху точки відносно центра O дорівнює добутку модуля кількості руху точки на плече h – найкоротшу відстань від центра моменту до прямої лінії, на якій розміщений вектор $(m\bar{v})$:

$$l_0 = mv \cdot h = 2S\Delta OAB. \quad (3.132)$$

Момент кількості руху матеріальної точки відносно центра O може бути записаний у вигляді векторного добутку радіуса-вектора \bar{r} рухомої точки A відносно центра O на вектор кількості руху точки

$$\bar{l}_0 = \bar{r} \times m\bar{v}. \quad (3.133)$$

Момент кількості руху матеріальної точки відносно осі z дорівнює моменту проєкції $m\bar{v}_1$ кількості руху точки на площину Π , перпендикулярну до осі z , відносно точки O перетину осі z з площиною.

$$l_z = m_z(m\bar{v}) = \pm n p_{\Pi}(m\bar{v}) \cdot h_1 = mv_1 \cdot h_1 = 2S\Delta OA_1B_1. \quad (3.134)$$

Момент кількості руху відносно центра як векторний добуток може бути виражений через визначник

$$\begin{aligned} \bar{l}_0 &= \bar{r} \times m\bar{v} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x & y & z \\ mv_x & mv_y & mv_z \end{vmatrix} = \\ &= \bar{i}(ymv_z - zmv_y) + \bar{j}(zmv_x - xmv_z) + \bar{k}(xmv_y - ymv_x). \end{aligned}$$

Розкладемо вектор \bar{l}_0 за ортами ортогональної системи координат:

$$\bar{l}_0 = \bar{i}l_x + \bar{j}l_y + \bar{k}l_z.$$

Порівнюючи останні два вирази, можна записати:

$$l_x = ymv_z - zmv_y; \quad l_y = zmv_x - xmv_z; \quad l_z = xmv_y - ymv_x,$$

де x, y, z – координати точки A прикладання вектора кількості руху;
 $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ – орти координатних осей; mv_x, mv_y, mv_z – проекції вектора $m\bar{v}$ на осі координат.

Одиницею моменту кількості руху матеріальної точки відносно центра і осі координат є $[кг \cdot м^2 / с]$.

3.5.2. Теорема про зміну моменту кількості руху матеріальної точки і закон його збереження

Припустимо, що рух точки M вздовж траєкторії відбувається зі швидкістю \bar{v} і прискоренням \bar{a} під дією сили \bar{P} (рис. 3.26).

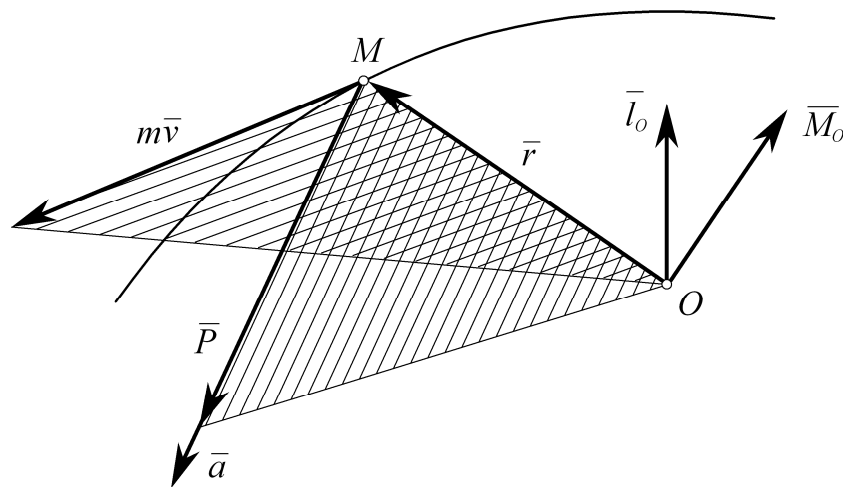


Рис. 3.26

Частина перша

Тоді момент кількості руху точки і момент сили \bar{P} відносно центра O дорівнюють відповідно:

$$\bar{l}_o = \bar{m}_o(m\bar{v}) = \bar{r} \times m\bar{v}, \quad \bar{M}_0 = \bar{m}_o(\bar{P}) = \bar{r} \times \bar{P},$$

де \bar{r} і $(m\bar{v})$ – змінні вектори;

\bar{r} – радіус-вектор точки M відносно центра O ;

\bar{P} – сила, що прискорює точку.

Візьмемо похідну за часом від вектора моменту кількості руху матеріальної точки

$$\frac{d\bar{l}_o}{dt} = \frac{d\bar{r}}{dt} \times (m\bar{v}) + \bar{r} \times \frac{d(m\bar{v})}{dt}.$$

Але перший доданок $\frac{d\bar{r}}{dt} \times m\bar{v} = \bar{v} \times m\bar{v} = 0$, оскільки вектори векторного добутку паралельні. Перетворимо другий доданок

$$\frac{d(m\bar{v})}{dt} = m \frac{d\bar{v}}{dt} = m\bar{a} = \bar{P},$$

де \bar{P} – рівнодійна сила, що діє на точку. У підсумку другий доданок

$$\bar{r} \times \frac{d(m\bar{v})}{dt} = \bar{r} \times \bar{P} = \bar{m}_o(\bar{P}) = \bar{M}_0.$$

Остаточно матимемо:

$$\frac{d\bar{l}_o}{dt} = \frac{d}{dt}(\bar{m}_o(m\bar{v})) = \bar{m}_o(\bar{P}) = \bar{M}_0 \Rightarrow \frac{d\bar{l}_o}{dt} = \bar{m}_o(\bar{P}). \quad (3.135)$$

Похідна за часом від моменту кількості руху матеріальної точки відносно довільного центра O дорівнює моменту рівнодійної сили відносно того самого центра.

Проектуємо вираз (3.135) на осі системи декартових координат

$$\frac{dl_z}{dt} = m_z(P); \quad \frac{dl_x}{dt} = m_x(P); \quad \frac{dl_y}{dt} = m_y(P). \quad (3.136)$$

Похідна за часом від моменту кількості руху точки відносно будь-якої нерухомої координатної осі дорівнює моменту рівнодійної сили відносно цієї ж осі.

Під час руху матеріальної точки може статися, що права частина рівняння (3.136) дорівнює нулю:

$$\bar{m}_o(\bar{P}) = 0 \Rightarrow \frac{d\bar{l}_o}{dt} = 0 \Rightarrow \bar{l}_o = \bar{m}_o(m\bar{v}) = const.$$

Якщо момент рівнодійної сили відносно будь-якого центра дорівнює нулю, то момент кількості руху точки відносно даного центра залишається незмінним.

Наприклад, під час руху планет сонячної системи під дією центральної сили притягання момент останньої відносно центра Сонця дорівнює нулю. Тому момент кількості руху планет завжди перпендикулярний площині екліптики і є незмінним за модулем.

За аналогією цей закон стосується і моменту кількості руху відносно будь-якої осі (3.136)

$$l_z = m_z(m\bar{v}) = const.$$

3.5.3. Кінетичний момент системи відносно центра і осі

Розглянутий матеріал про момент кількості матеріальної точки поширимо на систему матеріальних точок, вводячи поняття кінетичного моменту системи.

Кінетичним моментом матеріальної системи відносно будь-якого центра O є вектор \bar{L}_o , який дорівнює векторній сумі моментів кількості руху точок системи \bar{l}_{ok} відносно цього самого центра

$$\bar{L}_o = \sum \bar{l}_{ok} = \sum \bar{m}_o(m_k \bar{v}_k) = \sum (\bar{r}_k \times m_k \bar{v}_k). \quad (3.137)$$

де \bar{l}_{ok} – момент кількості руху k -ї точки системи;

$m_k \bar{v}_k$ – кількість руху k -ї точки; \bar{r}_k – радіус-вектор, що з'єднує k -ю точку системи з нерухомим центром. Кінетичним або головним моментом кількості руху матеріальної системи відносно будь-якої осі Oz є алгебраїчна сума моментів l_{zk} кількості руху точок системи відносно осі

$$L_z = \sum l_{zk} = \sum m_k (m_k \bar{v}_k).$$

3.5.4. Кінетичний момент твердого тіла відносно осі обертання

Нехай тверде тіло обертається навколо нерухомої осі Oz з кутовою швидкістю $\bar{\omega}$ (рис. 3.27).

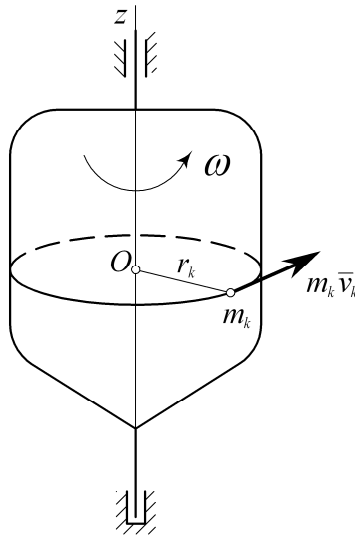


Рис. 3.27

Швидкість елементарного об'єму dm , віддаленого від осі обертання на відстань r становить $v = r\omega$, кількість руху $dQ = vdm = r\omega dm$, а елементарний кінетичний момент відносно осі Oz – $dl_z = r dQ = r v dm = r^2 \omega dm$. Для всього тіла кінетичний момент $L_z = \omega \int_{(m)} r^2 dm$, де інтегрування поширено на всю масу тіла.

Інтеграл $\int_{(m)} r^2 dm$ залежить лише від характеру розподілу маси в тілі і є моментом інерції тіла відносно осі обертання $I_z = \int_{(m)} r^2 dm$. З урахуванням цього кінетичний момент тіла відносно осі Oz запишеться

$$L_z = I_z \omega. \quad (3.138)$$

Кінетичний момент твердого тіла відносно нерухомої осі обертання дорівнює добутку осьового моменту інерції тіла відносно осі на кутову швидкість тіла.

3.5.5. Теорема про зміну кінетичного моменту матеріальної системи і закон його збереження

Нехай матеріальна система складається із n матеріальних точок,

де m_1, m_2, \dots, m_n – маси точок матеріальної системи;

$\bar{F}_1^e, \bar{F}_2^e, \dots, \bar{F}_n^e$ – зовнішні сили, прикладені до точок;

$\bar{F}_1^{in}, \bar{F}_2^{in}, \dots, \bar{F}_n^{in}$ – внутрішні сили взаємодії між точками;

$\bar{l}_{10}, \bar{l}_{20}, \dots, \bar{l}_{n0}$ – моменти кількості руху точок відносно центра O .

Для кожної точки застосуємо теорему про зміну моменту кількості руху (3.135), відокремивши її від системи і прикладаючи моменти внутрішніх сил

$$\frac{d\bar{l}_{ok}}{dt} = \bar{m}_o(\bar{F}_k^e) + \bar{m}_o(\bar{F}_k^{in}), \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Підсумуємо цей вираз по всіх точках системи

$$\sum \frac{d\bar{l}_{ok}}{dt} = \sum \bar{m}_o(\bar{F}_k^e) + \sum \bar{m}_o(\bar{F}_k^{in}); \Rightarrow \frac{d}{dt} \sum \bar{l}_{ok} = \sum \bar{m}_o(\bar{F}_k^e) + \sum \bar{m}_o(\bar{F}_k^{in}),$$

де $\sum \bar{l}_{ok} = \bar{L}_o$ – кінетичний момент системи,

$\sum \bar{m}_o(\bar{F}_k^{in}) = 0$ – головний вектор внутрішніх сил.

Остаточно

$$\frac{d\bar{L}_o}{dt} = \sum \bar{m}_o(\bar{F}_k^e) = \bar{M}_o \quad (3.139)$$

Похідна за часом від кінетичного моменту \bar{L}_o матеріальної системи відносно нерухомого центра O дорівнює головному моменту зовнішніх сил відносно того ж центра.

Проектуємо векторне рівняння (3.139) на осі декартових координат і отримуємо аналітичні вирази

$$\begin{aligned} \frac{dL_z}{dt} &= \sum m_z(\bar{F}_k^e) = M_{Oz}; & \frac{dL_x}{dt} &= \sum m_x(\bar{F}_k^e) = M_{Ox}; \\ \frac{dL_y}{dt} &= \sum m_y(\bar{F}_k^e) = M_{Oy} \end{aligned} \quad (3.140)$$

Частина перша

Рівняння (3.139) виражає теорему про зміну кінетичного моменту матеріальної системи в диференціальній формі.

Доведемо цю теорему в інтегральній формі, для чого запишемо вираз (3.139) у вигляді $d\bar{L}_o = \bar{M}_o dt$. Інтегруючи цю рівність у межах від t_0 до t , одержимо

$$\bar{L}_o(t) - \bar{L}_o(t_0) = \int_{t_0}^t \bar{M}_o dt = \bar{L}_o^e, \quad (3.141)$$

де \bar{L}_o^e – головний момент імпульсів зовнішніх сил відносно центра O .

Вираз (3.141) використовують під час вивчення елементарної теорії удару.

Під час руху матеріальної системи може статися, що сума моментів сил відносно центра дорівнює нулю

$$\sum \bar{m}_o(\bar{F}_k^e) = 0; \Rightarrow \bar{L}_o = \sum \bar{m}_o(m_k \bar{v}_k) = const.$$

Якщо головний момент зовнішніх сил, які діють на систему, відносно будь-якого центра дорівнює нулю, то кінетичний момент матеріальної системи відносно цього центра зберігає свою величину.

Як випадок, сума моментів сил відносно осі може дорівнювати нулю

$$\sum m_z(F_k^e) = 0 \Rightarrow L_z = \sum m_z(m_k v_k) = const.$$

З останнього виразу випливає, що для твердого тіла, яке обертається навколо осі z з кутовою швидкістю ω , кінетичний момент теж зберігає своє значення $L_z = I_z \cdot \omega = const$, а це означає, що коли, наприклад, зменшується осьовий момент інерції тіла I_z , то кутова швидкість обов'язково збільшуватиметься, щоб зберегти добуток незмінним

$$I_{z_1} \cdot \omega_1 = I_{z_2} \cdot \omega_2 = \dots = const.$$

Цей закон природи добре демонструє лава Жуковського, яку розкручують навколо вертикальної осі. І якщо в цей момент людина, яка стоїть на лаві, різко підніме руки в сторони, збільшуючи свій момент інерції навколо вертикальної осі, то кутова швидкість дуже помітно знижується.

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Визначте поняття моменту кількості руху точки і системи.
2. Сформулюйте теорему про зміну моменту кількості руху матеріальної точки. Напишіть математичний вираз теореми.
3. Сформулюйте теорему про зміну кінетичного моменту матеріальної системи. Напишіть математичний вираз теореми.
4. Як визначити кінетичний момент тіла відносно осі обертання?
5. Сформулюйте закон збереження кінетичного моменту матеріальної точки.
6. Сформулюйте закон збереження кінетичного моменту системи.
7. Наведіть приклади із побуту, як працює закон збереження кінетичного моменту системи.
8. Сформулюйте закон збереження кінетичного моменту матеріальної системи відносно осей координат.
9. Як визначити головний момент кількості руху системи?
10. Що демонструє лава Жуковського?

3.6. Динаміка твердого тіла

3.6.1. Основні задачі. Диференціальні рівняння поступального руху тіла

Як і в разі матеріальної точки для твердого тіла розглядають дві основні задачі динаміки: пряма і обернена. Для невірного руху тіла треба визначити і реакції в'язей. Аналізуючи сили, слід зазначити, що внутрішні сили у твердому тілі врівноважуються. Отже, сили, що діють на тверде тіло є зовнішніми. Крім того, за другою класифікацією сили, що діють на тверде тіло, поділяють на активні сили і реакції в'язей.

У динаміці твердого тіла вибирають нерухому систему координат і дві допоміжних системи: поступальну, осі якої паралельні осям нерухомої системи і яка рухається разом з полюсом, і систему координат, що незмінно зв'язана з тілом.

Положення вільного тіла у просторі визначається шістьма параметрами (наприклад, три координати полюса і три кути Ейлера). Тому для розв'язання згаданих задач динаміки необхідно шість рівнянь, які зв'язують кінематичні параметри із силами, що діють на тверде тіло. Подібно до того, як це було в кінематиці твердого тіла, розглянемо поступальний, обертальний рух навколо нерухомої осі, плоскопаралельний рух тіла.

При поступальному русі тіло перебуває у спокої відносно системи осей, що паралельні осям нерухомої системи координат. Тому для

Частина перша

здійснення поступального руху тіла треба, щоб головний момент зовнішніх сил відносно центра мас і початкова кутова швидкість дорівнювали нулю.

Диференціальні рівняння поступального руху твердого тіла в проєкціях на осі нерухомої системи координат

$$\begin{cases} m\ddot{x}_c = \sum F_{kx}^e, \\ m\ddot{y}_c = \sum F_{ky}^e, \\ m\ddot{z}_c = \sum F_{kz}^e, \end{cases} \quad (3.142)$$

де m – маса тіла; x_c, y_c, z_c – координати центра мас;

$F_{kx}^e, F_{ky}^e, F_{kz}^e$ – проєкції k -ї зовнішньої сили на осі координат.

Рівняння (3.142) дають змогу розв'язати першу і другу задачі динаміки поступального руху тіла.

3.6.2. Диференціальні рівняння обертального руху твердого тіла

Невільне тверде тіло (рис. 3.28) під дією прикладених до нього зовнішніх сил $\bar{P}_1^e, \bar{P}_2^e, \dots, \bar{P}_n^e$ обертається навколо нерухомої осі z з кутовою швидкістю ω , маючи один ступінь вільності.

Виведемо диференціальне рівняння обертального руху твердого тіла навколо нерухомої осі. Запишемо теорему про зміну кінетичного моменту системи або твердого тіла відносно осі

$$\frac{dL_z}{dt} = \sum m_z(\bar{P}_k). \quad (3.143)$$

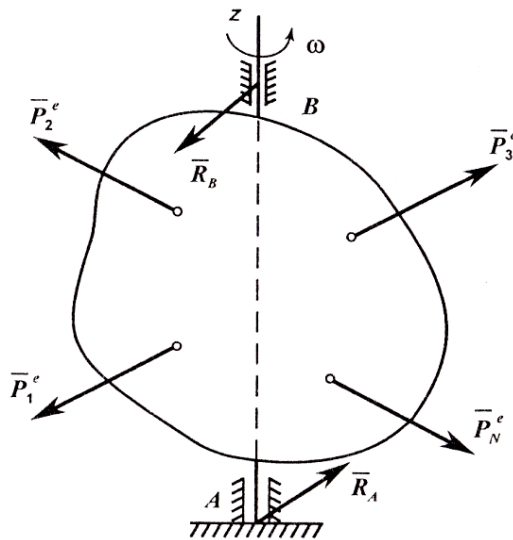


Рис. 3.28

Кінетичний момент твердого тіла відносно осі обертання z

$$L_z = I_z \cdot \omega, \quad (3.144)$$

де I_z – сталий осьовий момент інерції тіла; ω – кутова швидкість.

Візьмемо похідну за часом від виразу (3.144) і підставимо в (3.143)

$$I_z \frac{d\omega}{dt} = \sum m_z (\bar{P}_k^e). \quad (3.145)$$

Вираз (3.145) є шуканим **диференціальним рівнянням обертального руху тіла відносно нерухомої осі**.

Відомо, що кутове прискорення може бути виражено

$$\frac{d\omega}{dt} = \varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}$$

У відповідності з останнім і диференціальне рівняння обертального руху твердого тіла відносно нерухомої осі може бути записане у варіантах

$$I_z \cdot \varepsilon = \sum m_z (\bar{P}_k^e); I_z \cdot \frac{d\omega}{dt} = \sum m_z (\bar{P}_k^e); I_z \cdot \ddot{\varphi} = \sum m_z (\bar{P}_k^e). \quad (3.146)$$

Добуток осьового моменту інерції тіла відносно осі обертання на кутове прискорення дорівнює алгебраїчній сумі моментів зовнішніх сил відносно цієї самої осі.

При вивченні обертального руху тіла за додатний приймають напрямок обертання. Тоді моменти рушійних сил, які створюються двигунами і спрямовані у напрямку обертання, мають додатні значення, а моменти сил опору, спрямовані протилежно напрямку обертання – від’ємні.

Таким чином, обертання відбувається за рахунок різниці моментів рушійних сил і моментів сил опору.

Якщо $\sum m_z (\bar{P}_k^e) > 0$, то $\varepsilon = \ddot{\varphi} > 0$ – обертальний рух прискорений,

якщо $\sum m_z (\bar{P}_k^e) < 0$, то $\varepsilon = \ddot{\varphi} < 0$ – обертальний рух сповільнений,

якщо $\sum m_z (\bar{P}_k^e) = 0$, то $\varepsilon = \ddot{\varphi} = 0$ – обертання рівномірне ($\omega = const$).

Приклад 3.13

Колесо масою m і радіусом R обертається навколо осі Oz з кутовою швидкістю ω_0 . Визначити час гальмування t_1 і кут повороту колеса φ_1 до зупинки, якщо сила тиску, прикладена до колодки, дорівнює T , а коефіцієнт тертя ковзання – f (рис. 3.29).

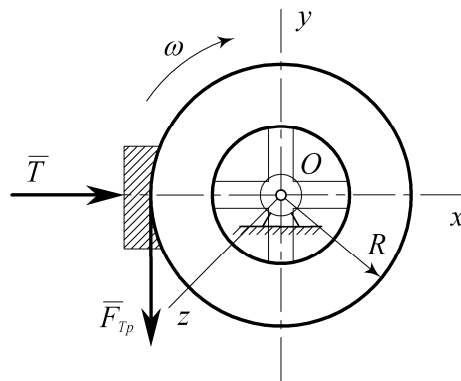


Рис. 3.29

Розв’язання

Запишемо диференціальне рівняння обертального руху колеса (3.145) і підставимо в праву частину момент прикладених сил, який направлений проти напрямку руху (гальмівний момент)

$$I_{oz} \frac{d\omega}{dt} = -F_{mp} \cdot R = -f \cdot T \cdot R \quad \Rightarrow \quad \frac{d\omega}{dt} = -\frac{fTR}{I_{oz}}.$$

Після відокремлення змінних і інтегрування

$$\omega = -\frac{fTR}{I_{oz}} \cdot t + C_1;$$

Довільну сталу інтегрування шукаємо із початкових умов: якщо $t_0 = 0$, то $\omega = \omega_0$.

Після підстановки в попередній вираз, отримаємо $C_1 = \omega_0$. Остаточний закон зміни кутової швидкості

$$\omega = \omega_0 - \frac{fTR}{I_{oz}} \cdot t. \quad (a)$$

Під час зупинки колеса $\omega = 0$. Із виразу (a) час гальмування

$$\omega_0 = \frac{fTR}{I_{oz}} \cdot t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{\omega_0 I_{oz}}{fTR}. \quad (б)$$

Визначимо кут повороту колеса:

$$\varphi = \int \omega \cdot dt = \int \left(\omega_0 - \frac{fTR}{I_{oz}} \cdot t \right) \cdot dt = \omega_0 t - \frac{fTR}{2I_{oz}} t^2 + C_2.$$

Якщо $t_0 = 0$, то $\varphi_0 = 0$, $C_2 = 0$ і остаточно

$$\varphi_1 = \omega_0 t_1 - \frac{fTR t_1^2}{2I_{oz}} = \frac{fTR t_1^2}{2I_{oz}}. \quad (в)$$

Обчислимо за умовою момент інерції колеса $I_{oz} = MR^2$.

Підставимо відповідні значення в рівняння (б), (в) і отримаємо в заданих параметрах час гальмування і кут повороту до зупинки

$$t_1 = \frac{M\omega_0 R}{fT}; \quad \varphi_1 = \frac{fT t_1^2}{2MR}.$$

3.6.3. Диференціальні рівняння плоского руху твердого тіла

Відомо, що плоский або плоскопаралельний рух твердого тіла можна уявити як суму двох найпростіших рухів: поступального разом з полюсом і обертального відносно полюса.

Поступальний рух визначається двома координатами полюса, а обертальний – кутом повороту навколо полюса.

Якщо обрати за полюс центр мас тіла C , то поступальна частина руху буде визначатись векторним рівнянням

$$m\bar{a}_c = \sum \bar{P}_k^e, \quad (3.147)$$

де \bar{a}_c – прискорення центра мас,

$\sum \bar{P}_k^e$ – головний вектор зовнішніх сил.

Обертальний рух відносно полюса визначається рівнянням

$$I_{zc} \cdot \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = \sum m_z (\bar{P}_k^e), \quad (3.148)$$

Частина перша

де I_{zc} – момент інерції відносно центральної осі, що перпендикулярна площині руху,

$\sum m_z(\bar{P}_k^e)$ – головний момент зовнішніх сил.

У координатній формі диференціальні рівняння плоского руху тіла

$$\begin{cases} m \cdot \ddot{x}_c = \sum P_{kx}^e, \\ m \cdot \ddot{y}_c = \sum P_{ky}^e, \\ I_{zc} \cdot \ddot{\phi} = \sum m_z(\bar{P}_k^e) \end{cases} \quad (3.149)$$

Отже, для реалізації плоского руху необхідно, щоб сума проєкцій сил на вісь z і суми моментів зовнішніх сил або головні моменти навколо двох інших осей дорівнювали нулю:

$$\sum \bar{P}_{kz}^e = 0; \quad \sum m_x(\bar{P}_k^e) = 0; \quad \sum m_y(\bar{P}_k^e) = 0.$$

Приклад 3.14

Суцільний однорідний коловий циліндр (рис. 3.30) радіуса R котиться вздовж похилої площини без ковзання. *Визначити* величину прискорення центра циліндра \bar{a}_c і силу \bar{F} , яка утримує циліндр від проковзування.

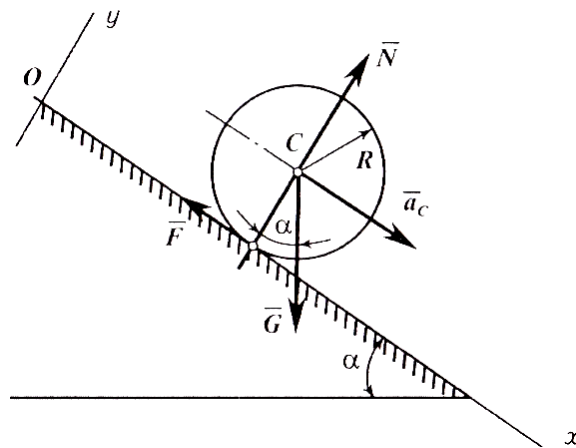


Рис. 3.30

m – маса циліндра; $G = m \cdot g$ – вага циліндра;

R – радіус циліндра; ε – кутове прискорення циліндра.

Розв'язання

Запишемо диференціальні рівняння плоского руху (3.149)

$$\begin{cases} m \cdot a_c = G \sin \alpha - F, & (a) \\ I_{zc} \cdot \varepsilon = F \cdot R. & (б) \end{cases}$$

Кутове прискорення $\varepsilon = \frac{a_c}{R}$ підставимо в рівняння (б)

$$I_{zc} \cdot \frac{a_c}{R} = F \cdot R \Rightarrow F = \frac{I_{zc} \cdot a_c}{R^2}.$$

Тоді рівняння (а) матиме вигляд

$$m \cdot a_c = mg \sin \alpha - \frac{I_{zc} \cdot a_c}{R^2}.$$

Для суцільного циліндра

$$I_{zc} = \frac{mR^2}{2}; \Rightarrow ma_c = mg \sin \alpha - \frac{ma_c}{2}.$$

Відповідь: $a_c = \frac{2}{3} g \sin \alpha; F = \frac{1}{3} G \sin \alpha.$

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Чому динаміка поступального руху тіла може бути зведена до динаміки точки?
2. Чому дорівнює кінетичний момент твердого тіла відносно нерухомої осі обертання?
3. Напишіть формулу і сформулюйте вираз диференціального рівняння обертального руху тіла відносно осі.
4. В яких випадках дії сил обертальний рух тіла буде рівномірним, прискореним чи сповільненим?
5. Напишіть закон коливань фізичного маятника. Чому дорівнює період коливань?
6. Що таке зведена довжина фізичного маятника і як вона визначається?
7. Скільки диференціальних рівнянь визначають динаміку плоского руху твердого тіла і який вигляд ці рівняння мають?
8. Що таке фізичний маятник і чим він відрізняється від

математичного?

9. Як визначити положення центра коливань фізичного маятника?

10. Які методи визначення моменту інерції тіл надає теорія коливань фізичного маятника?

3.7. Робота і потужність сили

3.7.1. Елементарна робота сили

Матеріальна точка M рухається під дією сили \vec{F} вздовж криволінійної траєкторії. Положення точки в довільний момент часу t визначається радіусом-вектором \vec{r} , проведеним із фіксованої точки O початку нерухомої системи відліку (рис. 3.31).

Під час переміщення точки радіус-вектор за нескінченно малий проміжок часу dt отримує приріст $d\vec{r}$ як елементарне переміщення точки.

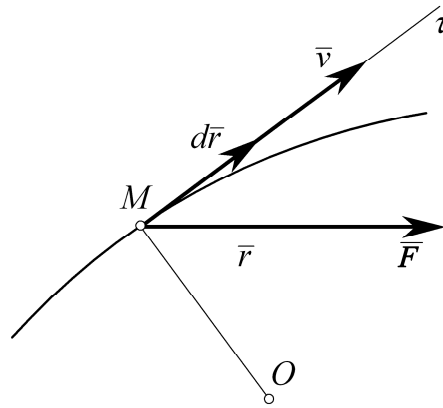


Рис. 3.31

Елементарною роботою сили \vec{F} на елементарному переміщенні $d\vec{r}$ називається міра дії сили, рівна скалярному добутку сили на елементарне переміщення точки її прикладання.

$$\delta A = \vec{F} \cdot d\vec{r}. \quad (3.150)$$

Вираз (3.150) визначає роботу сили за векторним способом задання руху точки.

За натуральним способом задання руху точки $d\vec{r} = \vec{\tau} ds$ ($\vec{\tau}$ – орт дотичної до траєкторії в точці M ; ds – диференціал дуги траєкторії). Тоді елементарна робота

$$\delta A = \vec{F} \cdot \vec{\tau} ds = F ds \cos(\hat{F}, \vec{v}). \quad (3.151)$$

Елементарна робота сили за натуральним способом задання руху точки дорівнює добутку сили на елементарне переміщення точки прикладання сили вздовж траєкторії і на косинус кута між векторами сили і швидкості.

Отже, роботу виконує дотична проекція сили

$$\begin{aligned} F \cos(\widehat{\vec{F}, \vec{v}}) &= F_\tau, \\ \delta A &= F_\tau \cdot ds. \end{aligned} \quad (3.152)$$

Якщо кут між векторами сили і швидкості $(\widehat{\vec{F}, \vec{v}}) < 90^\circ$, то елементарна робота додатна; кут $(\widehat{\vec{F}, \vec{v}}) = 0^\circ$; $\Rightarrow \delta A = F \cdot ds$, то робота максимальна; кут $(\widehat{\vec{F}, \vec{v}}) > 90^\circ$, то робота від'ємна; кут $(\widehat{\vec{F}, \vec{v}}) = 90^\circ$, то робота дорівнює нулю, тобто, сила, перпендикулярна вектору швидкості, роботу не виконує.

Зв'яжемо з точкою O прямокутну систему декартових координат з ортами $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$.

Визначимо елементарну роботу сили в координатній формі. Для цього силу \vec{F} і елементарне переміщення $d\vec{r}$ розкладемо за ортами осей системи координат

$$\vec{F} = \bar{i}F_x + \bar{j}F_y + \bar{k}F_z, \quad d\vec{r} = \bar{i}dx + \bar{j}dy + \bar{k}dz$$

і підставимо у вираз роботи (3.168)

$$\delta A = F_x dx + F_y dy + F_z dz. \quad (3.153)$$

Елементарна робота сили дорівнює сумі добутків проекцій сили на варіації відповідних координат точки прикладання сили.

3.7.2. Робота сили на кінцевому переміщенні. Потужність сили

Припустимо, що точка M перемістилась з положення M_1 у положення M_2 (рис. 3.32). Потрібно визначити роботу сили \vec{F} на кінцевому переміщенні.

Величина, рівна криволінійному інтегралу від елементарної роботи, взятому вздовж дуги кривої, окресленої точкою прикладання сили під час її переміщення, називається роботою сили

$$A = \int_{M_1}^{M_2} \delta A = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}. \quad (3.154)$$

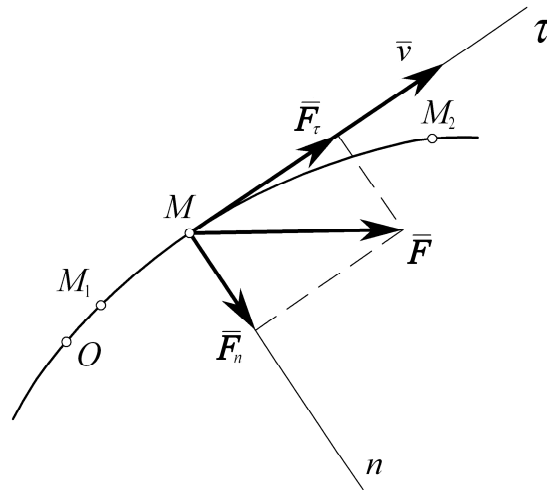


Рис. 3.32

За координатного способу задання руху повна робота сили виражається

$$A = \int_{M_1}^{M_2} (F_x dx + F_y dy + F_z dz). \quad (3.155)$$

За натурального способу задання руху повна робота сили

$$A = \int_{s_1}^{s_2} \delta A = \int_{M_1}^{M_2} F ds \cos(\vec{F}, \wedge \vec{v}). \quad (3.156)$$

Якщо перейти від криволінійного інтеграла (3.155) до визначеного, то треба врахувати $dx = \dot{x}dt$; $dy = \dot{y}dt$; $dz = \dot{z}dt$.

$$A = \int_{t_1}^{t_2} \left(F_x \frac{dx}{dt} + F_y \frac{dy}{dt} + F_z \frac{dz}{dt} \right) dt,$$

де t_1, t_2 – моменти часу, коли точка перебувала в положеннях M_1 і M_2 (рис. 3.32).

Робота сталої сили

$$A = F \cdot S \cdot \cos(\widehat{\vec{F}, \vec{v}}). \quad (3.157)$$

Робота сталої сили на прямолінійному переміщенні точки її прикладання дорівнює добутку модуля сили на величину переміщення і на косинус кута між векторами сили і швидкості.

Одиницею роботи сили в системі СІ є джоуль Дж.

Потужність сили – це фізична алгебраїчна величина, яка характеризує швидкість виконання роботи силою, яка прикладена до матеріальної точки, і дорівнює скалярному добутку сили на швидкість точки.

$$N = \vec{F} \cdot \vec{v} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = F_x \frac{dx}{dt} + F_y \frac{dy}{dt} + F_z \frac{dz}{dt}.$$

Знаючи потужність сили, можна визначити виконану роботу за деякий проміжок часу $A = \int_{t_1}^{t_2} N dt$. Якщо ж потужність стала, то $A = Nt$, де $t = t_2 - t_1$ – згаданий проміжок часу.

Одиницею потужності в системі СІ є ват Вт [Дж · с⁻¹].

3.7.3. Теорема про роботу рівнодійної сили

Робота рівнодійної сили на деякому переміщенні дорівнює алгебраїчній сумі робіт складових сил на тому ж самому переміщенні.

Нехай система складається із n сил. Проекція рівнодійної сили \vec{R} на вісь τ дорівнює алгебраїчній сумі проєкцій всіх сил на цю вісь (рис. 3.33).

$$R \cdot \cos(\widehat{\vec{R}, \vec{v}}) = F_1 \cdot \cos(\widehat{\vec{F}_1, \vec{v}}) + F_2 \cdot \cos(\widehat{\vec{F}_2, \vec{v}}) + \dots + F_n \cdot \cos(\widehat{\vec{F}_n, \vec{v}}) \quad (3.158)$$

Помножимо почленно рівняння (3.158) на dS і, інтегруючи на переміщенні від точки M_1 до точки M_2 , остаточно одержимо:

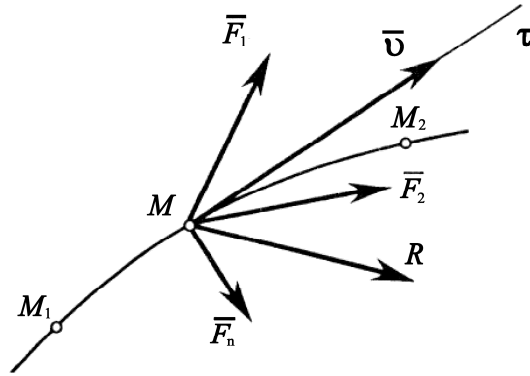


Рис. 3.33

$$\int_{M_1}^{M_2} R \cos(\widehat{R, \bar{v}}) \cdot ds = \int_{M_1}^{M_2} F_1 \cos(\widehat{F_1, \bar{v}}) \cdot ds + \int_{M_1}^{M_2} F_2 \cos(\widehat{F_2, \bar{v}}) \cdot ds + \dots + \int_{M_1}^{M_2} F_n \cos(\widehat{F_n, \bar{v}}) \cdot ds.$$

$$A_R = A_1 + A_2 + \dots + A_n. \quad (3.159)$$

3.7.4. Робота сили в окремих випадках

Припустимо, що матеріальна точка M рухається вздовж деякої траєкторії із положення $M_1(x_1, y_1, z_1)$ у положення $M_2(x_2, y_2, z_2)$ під дією сталої сили ваги $G = mg$, де g – прискорення вільного падіння.

Обчислимо роботу сили \bar{G} на переміщенні точки M_1M_2 . Оберемо нерухому прямокутну систему декартових координат, як на рис. 3.34.

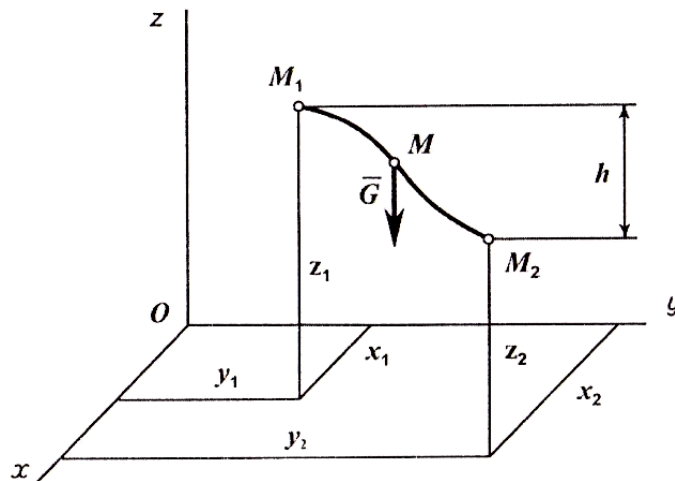


Рис. 3.34

Проекції сили \bar{G} на координатні осі

$$G_x = 0, \quad G_y = 0, \quad G_z = -G = -mg. \quad (3.160)$$

Використаємо координатний вираз елементарної роботи сили (3.173)

$$\delta A = G_x dx + G_y dy + G_z dz = -mg dz. \quad (3.161)$$

Знак мінус означає, що сила \overline{G} напрямлена протилежно відносно осі Oz .

Робота, що виконується силою \overline{G} на переміщенні точки з положення M_1 в положення M_2

$$\begin{aligned} A &= \int_{M_2}^{M_1} \delta A = \int_{z_1}^{z_2} -mg dz = -mg \int_{z_1}^{z_2} dz = -mgz \Big|_{z_1}^{z_2} = \\ &= -mg(z_2 - z_1) = mg(z_1 - z_2) = mgh, \end{aligned} \quad (3.162)$$

де $h = z_1 - z_2$ – величина вертикального переміщення точки M .

Якщо $z_1 > z_2$, то робота сили ваги додатна, а якщо $z_1 < z_2$, то робота сили ваги від'ємна.

Таким чином, робота, що виконується силою ваги

$$A = \pm mgh, \quad (3.163)$$

де знак «плюс» відповідає переміщенню точки донизу, а знак «мінус» – переміщенню точки вгору.

Робота, що виконується силою ваги матеріальної точки, дорівнює добутку модуля сили ваги на різницю висот початкового і кінцевого положення точки.

Робота сили ваги матеріальної точки не залежить від виду траєкторії, по якій рухається точка, а залежить тільки від різниці по вертикалі між положеннями точки.

Робота, що виконується силою ваги твердого тіла на замкненому переміщенні його центра ваги дорівнює нулю.

Робота лінійної сили пружності

Визначимо спочатку елементарну роботу пружної сили F_{np} , яка підкоряється закону Гука, прикладеної до точки B пружини (рис. 3.35) під час її деформації на елементарну величину dx .

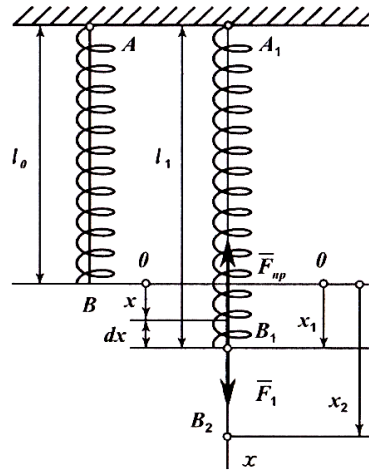


Рис. 3.35

Основною характеристикою пружного елемента є **коефіцієнт жорсткості** c (Н/м) – відношення сили, яка діє на пружний елемент, до величини його деформації.

Якщо обрати вісь x вздовж осі пружини у напрямі її розтягу, а початок координат O – у положенні недеформованої пружини довжиною l_0 , то сила пружності

$$F_{np} = -cx, \quad (3.164)$$

де x – деяка деформація пружного елемента.

Знак «мінус» свідчить, що вектор сили спрямований у бік, протилежний напрямку переміщення кінця пружини точки B .

Елементарна робота сили (3.173)

$$\begin{aligned} \delta A &= F_x dx + F_y dy + F_z dz. \quad F_{np_x} = -cx; \quad F_{np_y} = F_{np_z} = 0. \\ \delta A &= -F_{np} dx = -cxdx. \end{aligned} \quad (3.165)$$

За переміщенням точки прикладання сили з положення B_1 у положення B_2 , тобто, на відстань $x_2 - x_1$, сила пружності виконує роботу

$$A = \int_{B_1}^{B_2} \delta A = - \int_{x_1}^{x_2} F_{np} dx = -c \int_{x_1}^{x_2} x \cdot dx = - \frac{cx^2}{2} \Big|_{x_1}^{x_2} = - \frac{c(x_2^2 - x_1^2)}{2}. \quad (3.166)$$

Робота сили пружності, якщо вона відповідає закону Гука, дорівнює половині добутку коефіцієнта пружності на різницю квадратів координат кінця і початку переміщення точки прикладання сили, яке відраховується від положення

недеформованого стану.

Якщо позначити деформацію пружини $x_2 - x_1 = h$, то роботу сили пружності можна визначити

$$A = -\int_0^h F_{np} dx = -c \int_0^h x \cdot dx = -\frac{ch^2}{2}$$

Робота сили пружності від'ємна тому, що вектор сили пружності завжди спрямований протилежно напрямку переміщення точки її прикладання.

Якщо кінець пружини відпускати до початкового положення, то сила пружності виконує додатну роботу

Робота і потужність сили, прикладеної до обертового тіла

Тверде тіло обертається навколо нерухомої осі z під дією довільно розміщеної у просторі зовнішньої сили \vec{P} , прикладеної в точці M на відстані r від осі (рис. 3.36). Визначимо роботу цієї сили.

Для цього проведемо крізь точку M площину Π , перпендикулярну до осі. Розкладемо вектор сили \vec{P} на дві складові: \vec{P}_1 розміщену у площині Π , і \vec{P}_2 , паралельну осі z .

Відомо, що складова \vec{P}_2 роботу не виконує, оскільки її напрямок перпендикулярний вектору швидкості \vec{v} і згідно з формулою (3.157) її робота дорівнює нулю.

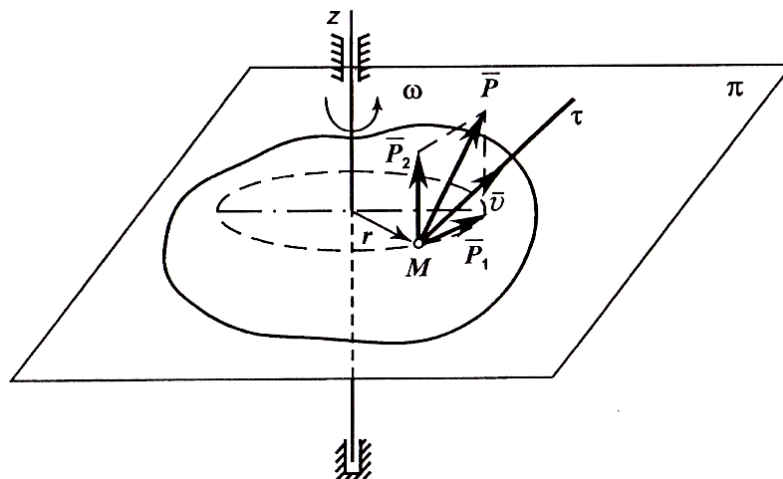


Рис. 3.36

Елементарна робота сили

$$\delta A = P_1 \cdot ds \cdot \cos(\overline{P_1}, \hat{\overline{v}}) = P_1 r \cdot \cos(\overline{P_1}, \hat{\overline{v}}) \cdot d\varphi = M_z d\varphi,$$

де $d\varphi$ – елементарний кут повороту тіла;

$ds = r \cdot d\varphi$ – елементарна дуга кола, що окреслює точка M під час обертання разом з тілом;

$$F_1 r \cdot \cos(\overline{F_1}, \hat{\overline{v}}) = M_z^e \quad \text{– обертальний момент сили } \overline{F}^e \text{ відносно осі } z.$$

Елементарна робота сили, прикладеної до тіла, що обертається відносно осі z , дорівнює добутку моменту цієї сили відносно осі z на елементарний кут повороту тіла.

Повна робота сили дорівнює інтегралу від елементарної роботи

$$A = \int_0^{\varphi} M_z^e \cdot d\varphi. \quad (3.167)$$

Якщо обертальний момент є сталою величиною ($M_z = const$), то

$$A = M_z^e \cdot \varphi. \quad (3.168)$$

Потужність сили, прикладеної до обертового тіла

$$N = \frac{\delta A}{dt} = \frac{M_z d\varphi}{dt} = M_z \cdot \omega. \quad (3.169)$$

Потужність сили, прикладеної до тіла, що обертається відносно нерухомої осі, характеризує швидкість виконаної роботи і дорівнює добутку моменту сили відносно цієї осі на кутову швидкість тіла.

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Що таке елементарна робота сили?
2. Як впливає кут між векторами сили і швидкості на величину і знак елементарної роботи?
3. Як визначити роботу сили на кінцевому переміщенні?
4. Напишіть формулу роботи сталої сили, спрямованої під кутом до вектора швидкості.

5. Як визначити роботу рівнодійної сили?
6. Визначте роботу сили ваги і сили пружності.
7. Як визначається робота сили, прикладеної до обертового тіла?
8. Що таке коефіцієнт корисної дії і як він визначається?
9. Як визначити потужність сили, прикладеної до обертового тіла?
10. Як визначити потужність сили, прикладеної до тіла, що рухається поступально?
11. Як визначити елементарну роботу сили, прикладеної до обертового тіла?
12. Чому дорівнює повна робота сталої сили, прикладеної до обертового тіла?
13. Чому робота сили пружності є від'ємною?
14. В яких випадках робота сили ваги є додатною, а в яких – від'ємною?
15. Що таке коефіцієнт жорсткості пружного елемента, як він визначається і яка його розмірність?

3.8. Кінетична енергія матеріальних точки і системи

3.8.1. Визначення кінетичної енергії. Теорема Кьоніга

Кінетична енергія характеризує здатність механічного руху перетворюватись в еквівалентну кількість іншої форми руху (потенціальна енергія, теплота тощо).

Кінетична енергія – це друга найважливіша міра механічного руху. Ця міра руху була введена Г. Лейбніцем і названа «живою силою». У ХІХ ст. з появою поняття енергії Г. Гельмгольц назвав цей вид енергії кінетичною.

Кінетичною енергією матеріальної точки називають скалярну міру механічного руху, яка дорівнює половині добутку маси точки на квадрат її швидкості в нерухомій системі координат

$$T = \frac{1}{2} m \bar{v} \cdot \bar{v} = \frac{1}{2} m v^2, \quad (3.170)$$

де \bar{v} – швидкість матеріальної точки відносно заданої системи відліку.

Вираз (3.170) приймає різний вигляд в залежності від способу задання руху точки. За векторного способу $\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt}$ і кінетична енергія дорівнює

$$T = \frac{1}{2} m \left(\frac{d\bar{r}}{dt} \right)^2. \quad (3.171)$$

За координатного способу швидкість $\bar{v} = \bar{i}\dot{x} + \bar{j}\dot{y} + \bar{k}\dot{z}$;

де $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ – орти осей прямокутної системи декартових координат

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2). \quad (3.172)$$

За натурального способу $\bar{v} = v_{\tau}\bar{\tau}$; $v_{\tau} = \dot{s}$; $\bar{\tau}$ – орт дотичної

$$T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \dot{s}^2. \quad (3.173)$$

Кінетичною енергією матеріальної системи в нерухомій системі координат називається скалярна величина, яка дорівнює арифметичній сумі кінетичних енергій точок, що належать системі

$$T = \sum_{k=1}^n T_k = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k v_k^2, \quad (3.174)$$

де \bar{v}_k – швидкість k -ї матеріальної точки відносно нерухомої інерціальної системи координат.

Зрозуміло, що кінетична енергія є додатною величиною і не залежить від напрямків швидкостей точок системи.

Визначимо кінетичну енергію матеріальної системи в абсолютному русі. Система у цьому разі здійснює складний рух, швидкість кожної точки якої складається з векторної суми переносної і відносної швидкостей. Обмежимося тим випадком, коли переносний рух є поступальним зі швидкістю, яка дорівнює швидкості центра мас системи, а початок рухомої системи координат співпадає з центром інерції (центр мас). Матеріальна система рухається довільним чином відносно рухомої системи координат, а разом з рухомою системою координат виконує поступальний рух навколо нерухомої системи координат. Тоді абсолютна швидкість довільної точки матеріальної системи $\bar{v}_k = \bar{v}_c + \bar{v}_{kr}$, де \bar{v}_c – швидкість центра мас, \bar{v}_{kr} – швидкість точки відносно рухомої системи координат, що здійснює поступальний рух. Підставимо абсолютну швидкість точки у вираз (3.173) і після перетворень маємо три доданки

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k v_k^2 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k \bar{v}_k \cdot \bar{v}_k = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k (\bar{v}_c + \bar{v}_{kr}) \cdot (\bar{v}_c + \bar{v}_{kr}) =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k v_c^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k v_{kr}^2 + \bar{v}_c \cdot \sum_{k=1}^n m_k \bar{v}_{kr}.$$

Останній доданок у цьому виразі дорівнює нулю на підставі (3.89): початок відліку рухомої системи координат вибраний в центрі мас і тому

$$\bar{r}_c = 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^n m_k \bar{r}_k = 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^n m_k \dot{\bar{r}}_k = \sum_{k=1}^n m_k \bar{v}_{kr} = 0.$$

Остаточно маємо:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k v_c^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k v_{kr}^2. \quad (3.175)$$

Формула (3.175) є математичним виразом теореми Кьоніга.

Кінетична енергія матеріальної системи у довільному русі дорівнює сумі кінетичних енергій поступального переносного руху системи разом із центром мас і відносного руху навколо центра мас.

3.8.2. Теорема про зміну кінетичної енергії матеріальної точки

Нехай матеріальна точка масою m рухається вздовж криволінійної траєкторії із положення M_1 в положення M_2 під дією рівнодійної сили \bar{P} .

Згідно з основним законом динаміки

$$m \cdot \bar{a} = \bar{P}, \quad (3.176)$$

де m – маса точки; \bar{a} – вектор прискорення точки; \bar{P} – рівнодійна сил, що діють на точку (рис. 3.37).

Спроекуємо рівняння (3.176) на дотичну

$$m \cdot a_\tau = P \cdot \cos(\hat{P}, \bar{v}), \quad (3.177)$$

де $a_\tau = \frac{dv}{dt}$ – тангенціальне прискорення.

Підставимо значення a_τ у вираз (3.177):

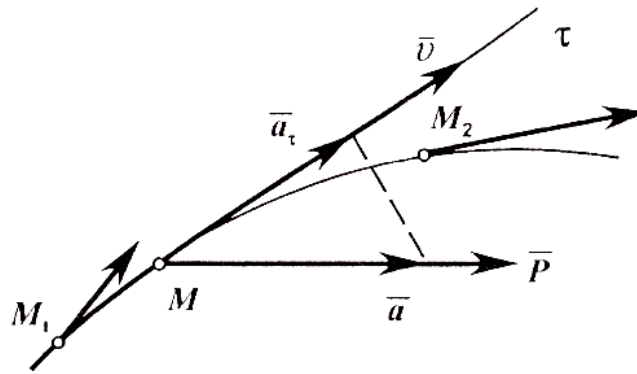


Рис. 3.37

$$m \cdot \frac{dv}{dt} = P \cdot \cos(\widehat{P, \bar{v}}). \quad (3.178)$$

Рівняння (3.178) помножимо на елементарне переміщення точки вздовж траєкторії ds

$$m \cdot \frac{dv}{dt} \cdot ds = P \cdot ds \cdot \cos(\widehat{P, \bar{v}}), \quad (3.179)$$

де $P \cdot ds \cdot \cos(\widehat{P, \bar{v}})$ – елементарна робота сили \bar{P} , $\frac{ds}{dt} = v$. Підставимо це у вираз (3.179)

$$mv \cdot dv = \delta A \Rightarrow d \left(\frac{mv^2}{2} \right) = \delta A \Rightarrow dT = \delta A. \quad (3.180)$$

Формула (3.180) є математичним виразом теореми у диференціальній формі:

|| диференціал кінетичної енергії матеріальної точки дорівнює елементарній роботі сил, що діють на цю точку.

Припустимо, що в момент часу t_1 швидкість точки дорівнювала v_1 , а в момент t_2 – v_2 , і візьмемо визначений інтеграл у відповідних границях

$$\int_{v_1}^{v_2} mv \cdot dv = \int_{M_1}^{M_2} \delta A.$$

Після інтегрування

$$\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = A. \quad (3.181)$$

Формула (3.181) є математичним виразом теореми у кінцевій формі.

Зміна кінетичної енергії точки на деякому її переміщенні дорівнює роботі рівнодійної сили, що прикладена до точки на цьому самому переміщенні.

Одиницею кінетичної енергії (як і роботи) у Міжнародній системі СІ є джоуль [Дж].

Розглянемо теорему про зміну кінетичної енергії точки у випадку її відносного руху, для якого основний закон динаміки має вигляд (3.20)

$$m\bar{a}_r = \sum \bar{F}_k + \bar{\Phi}_e + \bar{\Phi}_k$$

Проводячи подібні перетворення як для виразу (3.181), дістанемо

$$\frac{mv_{2r}^2}{2} - \frac{mv_{1r}^2}{2} = A(\sum \bar{F}_k) + A(\bar{\Phi}_e) + A(\bar{\Phi}_k), \quad (3.182)$$

де $A(\sum \bar{F}_k)$, $A(\bar{\Phi}_e)$, $A(\bar{\Phi}_k)$ – робота активних сил, переносної і коріолісової сил інерції відповідно;

v_{1r}^2, v_{2r}^2 – відносна швидкість точки на початку і наприкінці руху.

3.8.3. Обчислення кінетичної енергії твердого тіла

Тверде тіло рухається поступально

Приймаючи до уваги, що за поступальним рухом швидкості всіх точок тіла однакові і дорівнюють швидкості такої характерної точки тіла як центр мас \bar{v}_c , а відносні швидкості точок дорівнюють $\bar{v}_r = 0$, то запишемо на підставі теореми Кьоніга (3.194) формулу кінетичної енергії тіла, що рухається поступально

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k v_c^2 = \frac{1}{2} v_c^2 \sum_{k=1}^n m_k = \frac{1}{2} m v_c^2, \quad (3.183)$$

де $\sum_{k=1}^n m_k = m$ – маса тіла.

Кінетична енергія тіла при поступальному русі дорівнює половині добутку маси тіла на квадрат швидкості центра мас.

Тверде тіло обертається відносно центральної нерухомої осі

У цьому випадку швидкість центра мас $\bar{v}_c = 0$, а швидкість кожної точки тіла $v_k = \omega \cdot r_k$, де r_k – відстань точки до осі обертання. Тоді кінетична енергія тіла на підставі (3.194) дорівнює:

$$T = \sum \frac{m_k v_k^2}{2} = \sum \frac{m_k \omega^2 r_k^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum m_k r_k^2 = \frac{I_z \cdot \omega^2}{2} \Rightarrow T = \frac{I_z \cdot \omega^2}{2}, \quad (3.184)$$

де $I_z = \sum m_k r_k^2$ – осьовий момент інерції тіла, як міра інертності тіла за обертальним рухом.

Кінетична енергія тіла, яке обертається навколо нерухомої осі з кутовою швидкістю ω дорівнює половині добутку моменту інерції маси тіла відносно осі обертання на квадрат кутової швидкості.

Тверде тіло рухається плоскопаралельно

Плоскопаралельний рух тіла M можна розглядати у кожний заданий момент часу, як обертальний рух навколо миттєвого центра швидкостей – точки P (рис. 3.38).

Введемо такі позначення:

C – центр мас тіла; v_c – швидкість центра мас тіла;

I_{zc} – осьовий момент інерції тіла відносно осі z , яка проходить через центр мас C перпендикулярно до площини плоскопаралельного руху;

I_{zp} – осьовий момент інерції тіла відносно осі z , яка проходить через миттєвий центр швидкостей P .

За теоремою Гюйгенса-Штейнера (3.108) момент інерції відносно паралельної осі

$$I_{zp} = I_{zc} + m \cdot (PC)^2.$$

Оскільки $v_c = \omega \cdot PC$, то кінетична енергія тіла дорівнює

$$T = \frac{I_{zp} \cdot \omega^2}{2} = \frac{(I_{zc} + m \cdot (PC)^2) \cdot \omega^2}{2} = \frac{I_{zc} \omega^2}{2} + \frac{mv_c^2}{2};$$

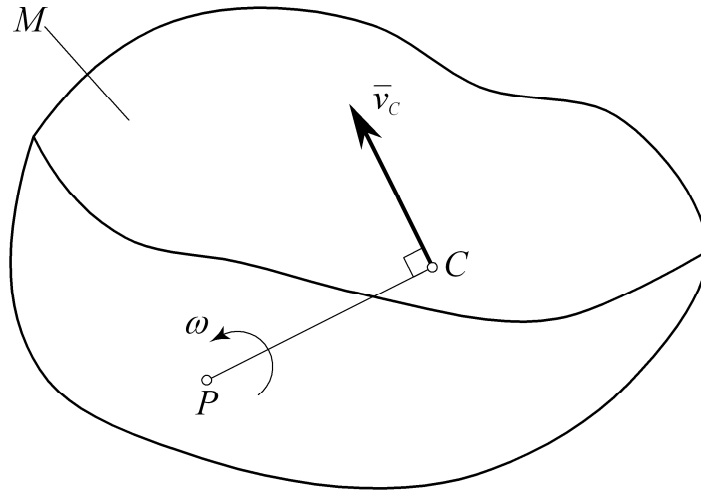


Рис. 3.38

$$T = \frac{mv_c^2}{2} + \frac{I_{zc} \omega^2}{2}. \quad (3.185)$$

Кінетична енергія тіла, яке рухається плоскопаралельно, дорівнює арифметичній сумі енергій поступального руху зі швидкістю центра мас і обертального руху відносно центра мас.

Аналогічно, формулу (3.185) можна отримати, сумуючи вирази (3.183) і (3.184).

3.8.4. Теорема про зміну кінетичної енергії матеріальної системи

Припустимо, що матеріальна система складається із n матеріальних точок і має такі параметри:

m_1, m_2, \dots, m_n – маси матеріальних точок;

$v_{10}, v_{20}, \dots, v_{n0}$ – початкові швидкості кожної точки;

v_1, v_2, \dots, v_n – кінцеві швидкості кожної точки;

$\bar{F}_1^e, \bar{F}_2^e, \dots, \bar{F}_n^e$ – рівнодійні зовнішніх сил, що діють на кожну точку;

$\bar{F}_1^{in}, \bar{F}_2^{in}, \dots, \bar{F}_n^{in}$ – рівнодійні внутрішніх сил, як сили взаємодії між

точками.

Для кожної точки системи можна записати теорему про зміну

$$\frac{m_k v_k^2}{2} - \frac{m_k v_{k0}^2}{2} = A_k^e + A_k^{in}, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (3.186)$$

де A_k^e – робота рівнодійної зовнішніх сил, які діють на k -у точку;

A_k^{in} – робота рівнодійної внутрішніх сил, які діють на k -у точку.

Підсумуємо рівняння (3.186) по всіх точках системи

$$\sum \frac{m_k v_k^2}{2} - \sum \frac{m_k v_{k0}^2}{2} = \sum A_k^e + \sum A_k^{in}. \quad (3.187)$$

Запишемо вираз (3.187) більш компактно:

де $\sum \frac{m_k v_k^2}{2} = T$ – кінцева кінетична енергія матеріальної системи;

$\sum \frac{m_k v_{k0}^2}{2} = T_0$ – початкова кінетична енергія матеріальної системи;

$\sum A_k^e$ – сума робіт зовнішніх сил, що діють на систему;

$\sum A_k^{in}$ – сума робіт внутрішніх сил, які діють між точками системи.

Остаточно вираз теореми має вигляд:

$$T - T_0 = \sum A_k^e + \sum A_k^{in}. \quad (3.188)$$

Зміна кінетичної енергії матеріальної системи на деякому переміщенні дорівнює алгебраїчній сумі робіт на цьому самому переміщенні зовнішніх і внутрішніх сил.

Особливістю цієї теореми є врахування роботи внутрішніх сил. Хоча головний вектор і головний момент цих сил дорівнюють нулю, але робота, що ними виконується, може відрізнитися від нуля. Зрозуміло, що для незмінних матеріальних систем (деформації тіл яких можна не враховувати) сума робіт внутрішніх сил рівна нулю $\sum A_k^{in} = 0$.

Тоді вираз (3.188) спрощується

$$T - T_0 = \sum A_k^e. \quad (3.189)$$

Приклад 3.15. Задача №38.24

(І.В. Мещерський. «Збірник задач з теоретичної механіки»).

На рис. 3.39 зображений підйомний механізм лебідки. Вантаж А вагою \bar{P}_1 піднімається за допомогою троса, що перекинутий через блок С і навитий на барабан В радіусом r_2 і вагою \bar{P}_2 .

До барабана прикладений обертальний момент, який з часу включення пропорційний квадрату кута повороту φ барабана $M_{об} = k\varphi^2$, де k – сталий коефіцієнт.

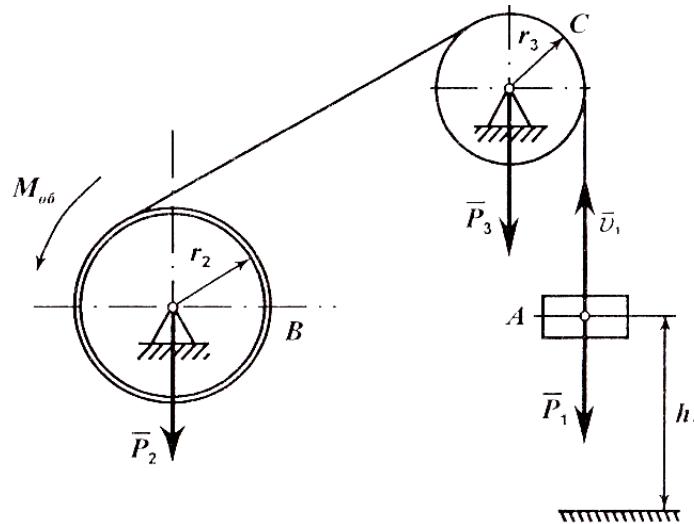


Рис. 3.39

Визначити швидкість вантажу А в момент, коли він підніметься на висоту h_1 .

Масу барабана В вважати рівномірно розподіленою по його ободу. Блок С є суцільним диском вагою \bar{P}_3 .

Масою і деформацією троса знехтувати. У початковий момент система перебувала у стані спокою.

Розв’язання

Задана задача розв’язується за допомогою теореми про зміну кінетичної енергії матеріальної системи, яка вважається незмінною (3.189)

$$T - T_0 = \sum A_k^e.$$

На початку руху система перебувала у стані спокою, тому $T_0 = 0$

$$T = \sum A_k^e. \tag{a}$$

Кінетична енергія матеріальної системи дорівнює сумі енергій тіл, що складають систему

$$T = T_A + T_B + T_C. \quad (б)$$

Визначимо кінетичну енергію кожного тіла, виразимо її через задані параметри і шукану швидкість.

$$T_A = \frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{P_1 v_1^2}{2g} \text{ – тіло рухається поступально;}$$

$$T_B = \frac{I_2 \omega_2^2}{2} \text{ – тіло обертається навколо нерухомої осі;}$$

$$I_2 = m_2 r_2^2 = \frac{P_2 r_2^2}{g} \text{ – осьовий момент інерції тіла;}$$

$$\omega_2 = \frac{v_1}{r_2} \text{ – кутова швидкість, виражена через шукану швидкість } v_1.$$

$$T_B = \frac{P_2 r_2^2 v_1^2}{2g \cdot r_2^2} = \frac{P_2 v_1^2}{2g}. \text{ Аналогічно і для обертового тіла } C:$$

$$T_C = \frac{I_3 \omega_3^2}{2}; \quad I_3 = \frac{m_3 r_3^2}{2} = \frac{P_3 r_3^2}{2g}; \quad \omega_3 = \frac{v_1}{r_3}; \quad T_C = \frac{P_3 r_3^2 \cdot v_1^2}{2 \cdot 2g \cdot r_3^2} = \frac{P_3 \cdot v_1^2}{4g}.$$

Підставимо значення кінетичних енергій у вираз (б):

$$T = T_A + T_B + T_C = \frac{P_1 v_1^2}{2g} + \frac{P_2 v_1^2}{2g} + \frac{P_3 v_1^2}{4g} = \frac{v_1^2}{4g} (2P_1 + 2P_2 + P_3).$$

Далі визначаємо праву частину виразу (а) – роботу діючих сил і моментів

$$\sum A_k^e = A(P_1) + A(M_{об}), \quad (с)$$

де $A(P_1) = -P_1 h_1$ (знак «мінус» свідчить, що це робота сили опору).

$$A(M_{об}) = \int_0^{\varphi} M_{об} \cdot d\varphi = \int_0^{\varphi} k\varphi^2 \cdot d\varphi = \frac{k\varphi^3}{3}; \quad \varphi = \frac{h_1}{r_2}.$$

Підставимо значення визначених робіт у вираз (с):

$$\sum A_k^e = \frac{k\varphi^3}{3} - P_1 h_1 = \frac{kh_1^3}{3r_2^3} - P_1 h_1 = \frac{h_1(kh_1^2 - 3P_1 r_2^3)}{3r_2^3}.$$

Підставимо сумарну кінетичну енергію і сумарну роботу у вираз (а):

$$\frac{v_1^2}{4g}(2P_1 + 2P_2 + P_3) = \frac{h_1(kh_1^2 - 3P_1 r_2^3)}{3r_2^3}.$$

Звідки шукана швидкість

$$v_1 = \frac{2}{r_2} \sqrt{\frac{gh_1(kh_1^2 - 3P_1 r_2^3)}{3r_2(2P_1 + 2P_2 + P_3)}}.$$

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Запишіть вираз кінетичної енергії точки і системи.
2. Як обчислюється кінетична енергія тіл, що рухаються поступально, плоскопаралельно і обертаються?
3. Сформулюйте теорему про зміну кінетичної енергії точки і напишіть її вираз у диференціальній і кінцевій формах.
4. Яка розмірність кінетичної енергії?
5. Сформулюйте теорему про зміну кінетичної енергії системи.
6. Сформулюйте теорему Кьоніга і запишіть її математичний вираз.
7. Означте кінетичну енергію як другу найважливішу міру руху.
8. Чи дорівнює нулю робота внутрішніх сил?
9. Як виражається кінетична енергія точки за натуральним способом задання руху?
10. Проілюструйте основні закони динаміки і закони їх збереження.

3.9. Кінетостатика невільної матеріальної системи

Принцип д'Аламбера надає можливість складати рівняння руху для невільної матеріальної системи, використовуючи умови геометричної статичності. Такий метод складання рівнянь руху називається методом кінетостатичності. Цей принцип для невільної системи, наприклад, механізму, можна сформулювати так.

Для невільної матеріальної системи або механізму в будь-який момент руху векторна сума головних векторів активних сил, сил реакцій зовнішніх в'язей і сил інерції, а також векторна сума

Частина перша

головних моментів активних сил, реакцій в'язей і сил інерції, обчислених відносно довільного центра, дорівнюють нулю.

Метод кінетостатики особливо успішно застосовується для силового або кінетостатичного розрахунку багатоланкових плоских механізмів, де розв'язується перша задача динаміки, коли за заданим законом руху ведучої ланки необхідно визначити сили і моменти сил на інших ланках і реакції у шарнірах або, більш точно, у кінематичних парах.

3.9.1. Принцип д'Аламбера для матеріальної системи

Припустимо, що матеріальна система складається з n матеріальних точок з масами m_1, m_2, \dots, m_n . На кожную точку системи діють активні сили, рівнодійні яких $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n$ і рівнодійні реакцій в'язей $\bar{N}_1, \bar{N}_2, \dots, \bar{N}_n$.

Під дією прикладених сил система рухається прискорено. Умовно прикладемо до кожної точки *силу інерції*

$$\bar{\Phi}_1 = -m_1\bar{a}_1, \bar{\Phi}_2 = -m_2\bar{a}_2, \dots, \bar{\Phi}_n = -m_n\bar{a}_n.$$

Застосуємо для k -ї матеріальної точки принцип д'Аламбера (3.15)

$$\bar{F}_k + \bar{N}_k + \bar{\Phi}_k = 0. \quad (3.190)$$

Підсумуємо почленно рівняння (3.190) по всіх точках k системи

$$\sum \bar{F}_k + \sum \bar{N}_k + \sum \bar{\Phi}_k = 0,$$

де $\sum \bar{F}_k = \bar{F}^A$ – головний вектор активних сил матеріальної системи,

$\sum \bar{N}_k = \bar{N}^R$ – головний вектор реакцій в'язей матеріальної системи,

$\sum \bar{\Phi}_k = \bar{\Phi}$ – головний вектор сил інерції матеріальної системи.

Тоді
$$\bar{F}^A + \bar{N}^R + \bar{\Phi} = 0. \quad (3.191)$$

У будь-який момент руху матеріальної системи головний вектор активних сил, головний вектор реакцій в'язей і головний вектор сил інерції умовно складають зрівноважену систему сил.

Обираємо у просторі довільний полюс O за центр зведення сил, які діють на матеріальну систему.

Кожна точка системи відносно полюса O матиме свій радіус-вектор $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \dots, \bar{r}_n$.

Кожний доданок рівняння (3.191) помножимо векторно на радіус-вектор \bar{r}_k , а потім підсумуємо по всіх точках системи

$$\bar{r}_k \times \bar{F}_k + \bar{r}_k \times \bar{N}_k + \bar{r}_k \times \bar{\Phi}_k = 0,$$

$$\sum \bar{r}_k \times \bar{F}_k + \sum \bar{r}_k \times \bar{N}_k + \sum \bar{r}_k \times \bar{\Phi}_k = 0,$$

де $\sum \bar{r}_k \times \bar{F}_k = \bar{M}_0^F$ – головний момент активних сил системи;

$\sum \bar{r}_k \times \bar{N}_k = \bar{M}_0^R$ – головний момент реакцій в'язей системи;

$\sum \bar{r}_k \times \bar{\Phi}_k = \bar{M}_0^\phi$ – головний момент сил інерції матеріальної системи.

Тоді
$$\bar{M}_0^F + \bar{M}_0^R + \bar{M}_0^\phi = 0 \tag{3.192}$$

У будь-який момент руху матеріальної системи сума головного моменту активних сил, головного моменту реакцій в'язей і головного моменту сил інерції, умовно прикладеного до тіл матеріальної системи, дорівнює нулю.

Рівнянням (3.191) і (3.192), які математично відображають принцип д'Аламбера для матеріальної системи, відповідають три рівняння в проєкціях на осі прямокутної системи декартових координат і три рівняння моментів відносно цих самих осей

$$\begin{aligned} F_x^A + N_x^R + \Phi_x &= 0, \\ F_y^A + N_y^R + \Phi_y &= 0, \\ F_z^A + N_z^R + \Phi_z &= 0, \\ M_x^F + M_x^R + M_x^\phi &= 0, \\ M_y^F + M_y^R + M_y^\phi &= 0, \\ M_z^F + M_z^R + M_z^\phi &= 0. \end{aligned} \tag{3.193}$$

Розглянутий метод внаслідок своєї простоти і наочності широко застосовується в інженерній практиці для розв'язування задач динаміки.

Особливо цей метод зручний для визначенні реакцій в'язей матеріальної системи.

Цей метод, звичайно, можна використовувати і для визначення прискорень тіл матеріальної системи.

3.9.2. Зведення сил інерції системи матеріальних точок до центра. Головний вектор і головний момент сил інерції

Головний вектор сил інерції окремих точок системи не залежить від вибору центра зведення і може бути обчислений задалегідь

$$\bar{\Phi}_k = -m_k \bar{a}_k; \Rightarrow \bar{\Phi} = -\sum m_k \bar{a}_k = m \cdot \bar{a}_c; \quad (3.194)$$

Головний вектор сил інерції матеріальної системи, що рухається довільно, дорівнює добутку маси системи на прискорення його центра мас і спрямований протилежно вектору прискорення.

де m – маса системи (тіла); \bar{a}_c – прискорення центра мас системи, яке можна розкласти на тангенціальну і нормальну складові:

$$\bar{a}_c = \bar{a}_c^\tau + \bar{a}_c^n; \Rightarrow \bar{\Phi} = -m(\bar{a}_c^\tau + \bar{a}_c^n) = -m \cdot \bar{a}_c^\tau - m \cdot \bar{a}_c^n = \bar{\Phi}^\tau + \bar{\Phi}^n.$$

Головний момент сил інерції залежить від вибору центра зведення і визначається для окремих випадків руху твердого тіла.

Поступальний рух системи (тіла)

За поступального руху системи (тіла) відсутнє обертання навколо центра мас, тобто, сума головного моменту активних сил і головного моменту реакцій в'язей відносно центра мас системи дорівнює нулю

$$M_c^F + M_c^R = 0.$$

Згідно з принципом д'Аламбера і з урахуванням останнього виразу

$$M_c^P + M_c^R + M_c^\phi = 0; \Rightarrow M_c^\phi = 0.$$

Оскільки головний момент сил інерції за поступального руху системи відсутній, то головний вектор сил інерції є рівнодієюю сил інерції, тобто, одиничним силовим фактором інерційних сил.

Обертальний рух тіла навколо нерухомої осі

Нехай тіло обертається навколо вертикальної осі зі сталою кутовою швидкістю ω і кутовим прискоренням ε (рис. 3.40). Довільна точка масою m_k описує коло радіуса r_k і має тангенціальне прискорення \vec{a}_k^τ .

Кожна точка матиме тангенціальну складову сили інерції $\vec{\Phi}_k^\tau = -m_k \vec{a}_k^\tau = -m_k \varepsilon \cdot r_k$ і нормальну або відцентрову силу інерції $\vec{\Phi}_k^n = -m_k \vec{a}_k^n = -m_k \omega^2 r_k$.

Остання складова не створює моменту відносно осі обертання, тому що вона перетинає цю вісь.

Тангенціальні складові сил інерції створюють моменти відносно осі обертання z . Плечі цих моментів є відстанями до осі обертання r_k

$$M_z^\phi = \sum \Phi_k^\tau \cdot r_k = -\sum m_k \varepsilon \cdot r_k^2 = -\varepsilon \sum m_k r_k^2 = -I_z \cdot \varepsilon,$$

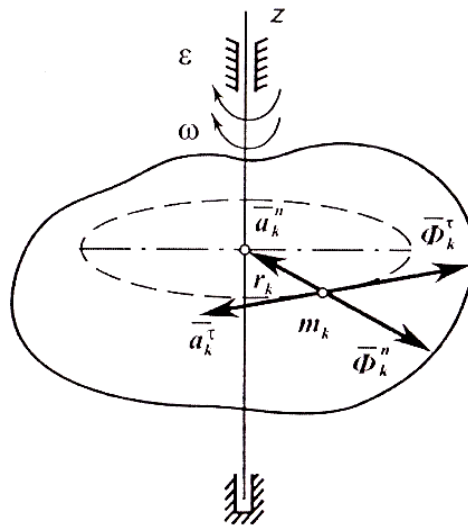


Рис. 3.40

$$M_z^\phi = -I_z \cdot \varepsilon. \tag{3.195}$$

Момент сил інерції тіла, яке обертається навколо нерухомої осі з кутовим прискоренням, дорівнює добутку осьового моменту інерції тіла відносно осі обертання на кутове прискорення і спрямований протилежно кутовому прискоренню.

Зазначимо, що момент сил інерції тіла виникає тільки в період

Частина перша

розгону або гальмування (перехідні режими). У період усталеного руху (рівномірне обертання) момент сил інерції дорівнює нулю.

Нагадаємо, що кожна матеріальна точка m_k обертового тіла, розміщена на деякій відстані r_k , створює елементарну тангенціальну складову сили інерції $\bar{\Phi}_k = -m_k \varepsilon \bar{r}_k$ як добуток маси на тангенціальне прискорення.

Підсумуємо елементарні сили за всіма точками тіла і отримаємо зведену тангенціальну силу інерції

$$\bar{\Phi}^\tau = \sum \bar{\Phi}_k^\tau = -\sum m_k \varepsilon \bar{r}_k = -\varepsilon \sum m_k \bar{r}_k = -\varepsilon \cdot m \cdot \bar{r}_c = -m \bar{a}_c^\tau, \quad (3.196)$$

де $\sum m_k \bar{r}_k = m \cdot \bar{r}_c$ на підставі виразу для положення центра мас (3.89).

Тангенціальна сила інерції тіла прикладена в центрі мас тіла і спрямована протилежно тангенціальному прискоренню центра мас, що і підкреслює знак мінус у виразі (3.196).

Зведемо далі відцентрові сили інерції точок тіла (рис. 3.41).

Згадаємо, що саме для кожної точки m_k маємо силу інерції $\Phi_k^n = m_k \omega^2 r_k$. Зведену або підсумкову силу інерції для всього тіла визначимо через проекції на осі координат, обрані на рис. 3.41

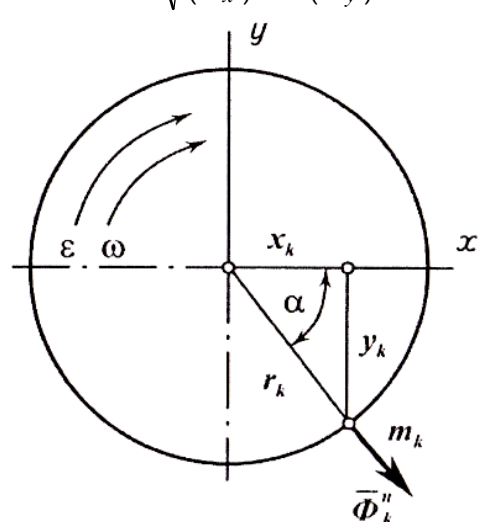
$$\Phi^n = \sqrt{(\Phi_x^n)^2 + (\Phi_y^n)^2}. \quad (3.197)$$


Рис. 3.41

$$\Phi_x^n = \sum \Phi_{kx}^n = \sum m_k \omega^2 r_k \cos \alpha = \omega^2 \sum m_k x_k .$$

Значення із формули для координати x_c центра мас (3.90) $\sum m_k x_k = m x_c$ підставимо в останнє рівняння

$$\Phi_x^n = \omega^2 \cdot m x_c . \quad (3.198)$$

Аналогічно визначимо і проекцію на вісь y

$$\Phi_y^n = \omega^2 \cdot m y_c . \quad (3.199)$$

Підставляємо вирази (3.198) і (3.199) у вираз (3.197)

$$\Phi^n = m \omega^2 \sqrt{x_c^2 + y_c^2} = m \omega^2 r_c = m \cdot a_c^n , \quad (3.200)$$

де r_c – радіус-вектор центра мас тіла; $a_c^n = \omega^2 r_c$ – нормальне або доцентрове прискорення центра мас.

Аналіз виразу (3.200) відцентрової сили інерції свідчить, що ця сила має місце при всіх режимах обертання (розгін, усталений рух, гальмування) і є досить небезпечною, бо вона пропорційна квадрату кутової швидкості. Відцентрова сила дорівнює нулю, якщо $r_c = 0$, тобто, коли центр мас розміщений на осі обертання. Це досягається методом балансування.

$$r_c = 0; \Rightarrow a_c^n = \omega^2 r_c = 0; \Rightarrow \Phi^n = m \omega^2 r_c = 0.$$

Плоскопаралельний рух тіла

Плоскопаралельний рух твердого тіла може бути розкладений на суму двох рухів: поступальний разом з полюсом і обертальний відносно полюса. За полюс, як правило, обирають центр мас точку C (рис. 3.42).

Тіло (стрижень AB) масою m рухається у площині рисунка, бо рух плоскопаралельний. Центр мас C має лінійне прискорення \bar{a}_c , кутове прискорення тіла – ε .

Головний вектор сил інерції і **головний момент** сил інерції дорівнюють, відповідно:

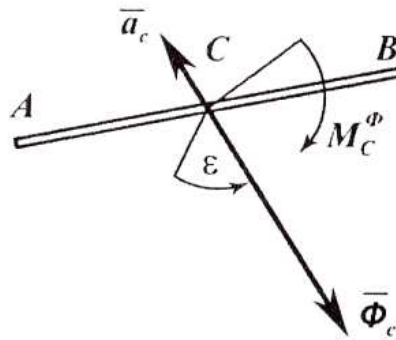


Рис. 3.42

$$\bar{\Phi}_c = -m\bar{a}_c, M_c^\phi = -I_{zc} \cdot \epsilon, \quad (3.201)$$

де I_{zc} – осьовий момент інерції тіла відносно осі z , яка перпендикулярна до площини руху і перетинає центр мас.

Напрямок головного вектора сил інерції протилежний вектору прискорення центра мас, де він прикладений. Напрямок головного моменту протилежний напрямку кутового прискорення тіла.

Далі надамо методику застосування принципу д’Аламбера і приклад для матеріальної системи.

Приклад 3.17

Визначити прискорення тіл і динамічні реакції під час руху матеріальної системи. Припустимо, що маса другого вантажу більше $m_2 > m_1$, тоді блок обертатиметься за ходом годинникової стрілки, саме туди напрямлене і кутове прискорення ϵ . Задані маси тіл A, B, C : m_1, m_2, m_3 . Шків однорідний і суцільний, трос нерозтяжний (рис. 3.43).

Визначити прискорення вантажів \bar{a} ; натяг тросу ліворуч N_1 ; натяг тросу праворуч N_2 ; реакцію опори шківа R_0 .

Розв’язання

Визначимо і прикладемо до відповідних тіл силу ваги, силу інерції і момент сил інерції. Визначимо вагу тіл $G_1 = m_1g, G_2 = m_2g, G_3 = m_3g$. Визначимо сили інерції тіл і прикладемо протилежно напрямкам їх прискорень $|\bar{\Phi}_1| = m_1a, |\bar{\Phi}_2| = m_2a$.

Визначимо через шукане прискорення момент сил інерції шківа і покажемо його напрямок на схемі дуговою стрілкою, яка спрямована проти напрямку кутового прискорення ϵ

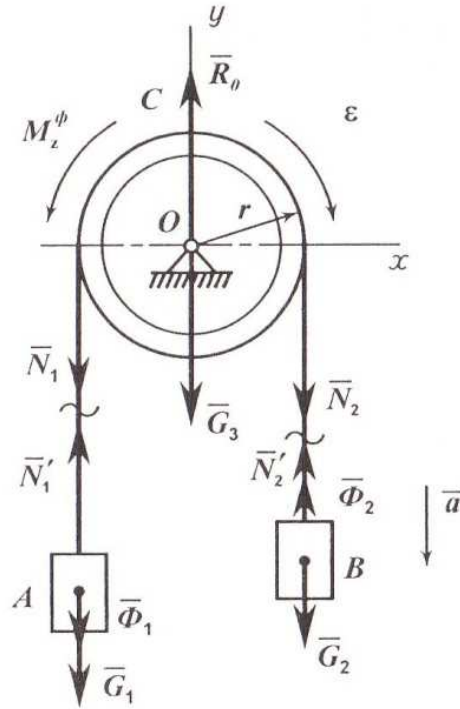


Рис. 3.43

$$|M_z^\phi| = I_z \varepsilon = I_z \cdot \frac{a}{r} = m_3 r^2 \frac{a}{r} = m_3 r a,$$

де $I_z = m_3 r^2$ – осьовий момент інерції шківів відносно центральної осі Oz (на схемі вісь не показано).

Якщо умовно прикласти до вантажів вектори сил інерції $\bar{\Phi}_1, \bar{\Phi}_2$, а до шківів – момент сил інерції M_z^ϕ , то система буде в рівновазі і на підставі принципу д'Аламбера можна скласти рівняння рівноваги системи у вигляді суми моментів сил відносно точки O , виключивши сили натягу тросів \bar{N}_1 і \bar{N}_2 як внутрішні

$$\Phi_1 r + G_1 r + \Phi_2 r - G_2 r + M_3^\phi = 0; \quad m_1 a r + m_1 g r + m_2 a r - m_2 g r + m_3 r a = 0,$$

$$\Rightarrow m_1 a + m_2 a + m_3 a = m_2 g - m_1 g.$$

Звідси шукане прискорення вантажів

$$a = \frac{g(m_2 - m_1)}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

Визначимо натяги тросів, зробивши переріз, і реакцію опори шківів. Натяг тросу ліворуч визначається із суми проєкцій

$$N_1' = G_1 + \Phi_1 = m_1 g + m_1 a = m_1 (g + a).$$

Натяг тросу праворуч для тіла 2 аналогічно

$$N_2' = G_2 - \Phi_2 = m_2 g - m_2 a = m_2 (g - a).$$

Реакція опори шківів визначається із суми проєкцій сил на вісь y

$$\begin{aligned} R_0 &= N_1 + N_2 + G_3 = m_1 (g + a) + m_2 (g - a) + m_3 g = \\ &= G_1 + G_2 + G_3 - a (m_2 - m_1). \end{aligned}$$

3.9.3. Визначення динамічних реакцій підшипників

Припустимо, що тіло обертається навколо нерухомої осі z зі сталою кутовою швидкістю ω (рис. 3.44).

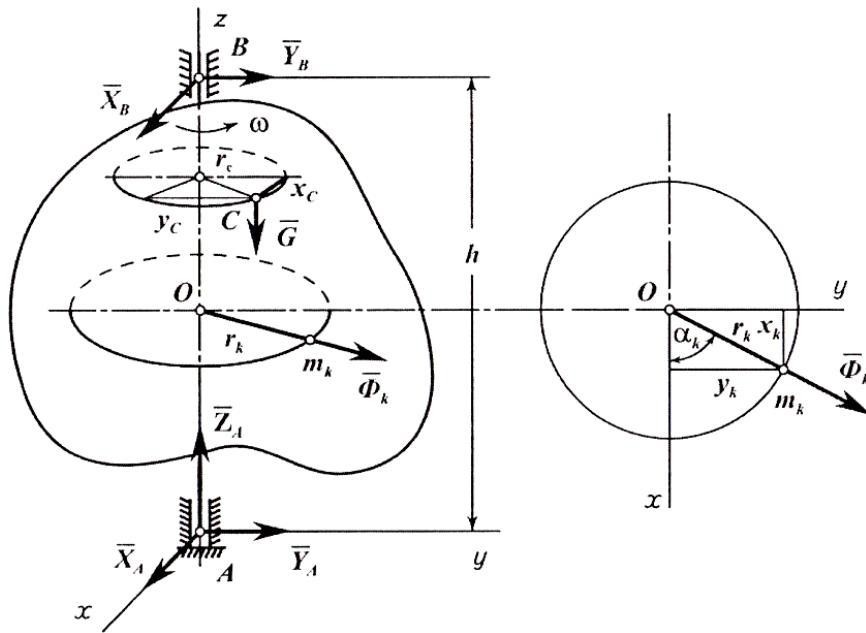


Рис. 3.44

Визначимо динамічні реакції від сил інерції. Якщо до кожної точки тіла прикласти відповідну силу інерції $\bar{\Phi}_k$, то тіло умовно перебуватиме у стані рівноваги під дією просторової системи довільних сил.

На рисунку показано: $G = mg$ – сила ваги тіла; m – маса тіла; h – вертикальна відстань між опорами A і B ; $\bar{\Phi}_k$ – сила інерції k -ї точки; x_c, y_c – координати центра мас C , де прикладена сила ваги.

Оскільки кутова швидкість є сталою величиною, то тангенціальна складова сил інерції дорівнює нулю. Динамічні доданки створює відцентрова сила, яка в кожній точці дорівнює $|\bar{\Phi}_k| = m_k \omega^2 r_k$.

$$\cos \alpha_k = \frac{x_k}{r_k}, \quad \sin \alpha_k = \frac{y_k}{r_k}.$$

Складемо шість рівнянь рівноваги на підставі принципу д'Аламбера:

$$\begin{aligned} 1. \quad \sum F_{kx} = 0 & \quad x_A + x_B + \sum \Phi_{kx} = 0, \\ 2. \quad \sum F_{ky} = 0 & \quad y_A + y_B + \sum \Phi_{ky} = 0, \\ 3. \quad \sum F_{kz} = 0 & \quad z_A - G = 0, \\ 4. \quad \sum m_x(\bar{F}_k) = 0 & \quad -G \cdot y_c - y_B \cdot h - \sum m_x(\bar{\Phi}_{ky}) = 0, \\ 5. \quad \sum m_y(\bar{F}_k) = 0 & \quad G \cdot x_c + x_B \cdot h + \sum m_y(\bar{\Phi}_{kx}) = 0. \\ 6. \quad \sum m_z(\bar{F}_k) = 0 & \end{aligned} \quad (3.202)$$

У шостому рівнянні сума моментів відносно осі тотожно дорівнює нулю, тому що всі сили паралельні або перетинають вісь обертання.

Визначимо проекцію головного вектора сил інерції на вісь x

$$\sum \Phi_{kx} = \sum m_k \omega^2 r_k \cos \alpha_k = \sum m_k \omega^2 r_k \frac{x_k}{r_k} = \sum m_k \omega^2 x_k = \omega^2 \sum m_k x_k = \omega^2 m \cdot x_c.$$

Аналогічно і на вісь y $\sum \Phi_{ky} = \omega^2 m \cdot y_c$.

Визначимо моменти від сил інерції відносно осей x і y

$$\begin{aligned} \sum m_x(\bar{\Phi}_{ky}) &= -\sum m_k \omega^2 y_k z_k = -\omega^2 \sum m_k y_k z_k = -\omega^2 \cdot I_{yz}, \\ \sum m_y(\bar{\Phi}_{kx}) &= \sum \Phi_{kx} \cdot z_k = \sum m_k \omega^2 x_k z_k = \omega^2 \sum m_k x_k z_k = \omega^2 I_{xz}, \end{aligned}$$

де I_{xz}, I_{yz} – відцентрові моменти інерції тіла.

Остаточно, після підстановки визначених сил інерції і моментів інерційних сил рівняння для динамічних реакцій набувають вигляду

$$1. \quad x_A + x_B + \omega^2 m x_c = 0, \quad ,$$

$$\begin{aligned}
 2. \quad & y_A + y_B + \omega^2 m y_c = 0, \\
 3. \quad & z_A - G = 0, \\
 4. \quad & -G \cdot y_C - y_B \cdot h - \omega^2 I_{yz} = 0, \\
 5. \quad & G \cdot x_C + x_B \cdot h + \omega^2 I_{xz} = 0.
 \end{aligned}
 \tag{3.203}$$

З рівнянь (3.203) можна визначити динамічні реакції, якщо відомі координати центра мас x_C , y_C і відцентрові моменти інерції тіла I_{xz} , I_{yz} . А шукані реакції, як можна побачити з системи рівнянь, залежать від квадрату кутової швидкості тіла ω^2 . Статичними реакціями є ті, що залишаються, якщо $\omega = 0$ (спокій).

Динамічні ж реакції можуть бути значно більші, ніж статичні, і це залежить не тільки від величини кутової швидкості ω , але і від геометричних і масових характеристик тіла x_C, y_C, I_{xz}, I_{yz} , які визначають розподіл маси тіла по відношенню до осі обертання z і асиметрію мас відносно двох осей. З аналізу рівнянь (3.203) випливає, що динамічні реакції опор, які виражаються останніми доданками в рівняннях 1, 2, 4, 5, будуть відсутні, якщо виконуються умови:

$$x_C = 0, \quad y_C = 0, \quad I_{xz} = 0, \quad I_{yz} = 0. \tag{3.204}$$

Перші дві умови (3.204) означають, що центр ваги або центр мас розміщений на осі обертання, а останні дві умови свідчать про те, що вісь z є головною віссю інерції.

Таким чином, для знешкодження динамічних реакцій на опорах (підшипниках) необхідно, щоб вісь обертання була головною центральною віссю інерції тіла для початку координат.

Сили інерції усіх точок при цьому врівноважуються, а вісь обертання буде вільною віссю обертання.

Тіла, які обертаються навколо осі і у яких реакції опор не залежать від величини кутової швидкості і кутового прискорення, називаються динамічно зрівноваженими.

3.9.4. Поняття про статичне і динамічне балансування

Тіло, що має вісь обертання, вважається статично збалансованим, якщо головний вектор сил інерції дорівнює нулю, а це є наслідком того, що координати центра ваги дорівнюють нулю ($x_C = 0$ і $y_C = 0$), а вісь обертання перетинає центр ваги (центр мас) тіла. Під час обертання таке тіло (ротор, барабан) зупиняється кожен раз у байдужому положенні. Це можливо при статично збалансованому тілі.

Для досягнення статичного зрівноважування (збалансування), якщо центральна вісь паралельна осі обертання, досить до тіла додати деяку

масу на певному радіусі або висвердлити таку ж масу і вісь обертання буде центральною віссю. Але для повного збалансування необхідно виконати і другу пару умов (3.204).

Відцентрові моменти інерції I_{xz} і I_{yz} , якщо тіло обертається відносно осі z , характеризують асиметрію тіла навколо осі обертання.

Якщо тіло статично збалансоване ($x_c = 0$; $y_c = 0$), але насаджене на вал з перекосом, тобто, площина його симетрії не перпендикулярна до осі обертання, то тіло не буде динамічно збалансованим.

Якщо тіло зрівноважене статично, то динамічно воно може бути і не зрівноваженим. І тільки тоді, коли тіло зрівноважене динамічно ($I_{xz} = 0$; $I_{yz} = 0$), воно збалансоване і статично (повне зрівноважування). Останнє означає, що динамічні додатки реакцій опор дорівнюють нулю.

Якщо тіло динамічно або моментно не збалансоване, то осі A_x , A_y і A_z (рис. 3.58) не будуть головними осями інерції. Як наслідок цього, в опорах створюється пара сил реакцій, реактивний момент якої необхідно зрівноважувати. А пару сил можна зрівноважити тільки парою. Тому в двох спеціально підібраних площинах корекції приєднують дві маси.

Але все це робиться на спеціальних балансувальних верстатах, про що детально розповідається в курсах теорії механізмів і машин.

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Напишіть формулу зведеного моменту сил інерції тіла, що обертається навколо нерухомої осі.
2. Чому сили інерції вважаються фіктивними, а принцип д'Аламбера – формальним?
3. Сформулюйте принцип Д'Аламбера для матеріальної системи.
4. Як звести до рівнодійної сили інерції точок тіла, яке рухається поступально?
5. Як звести до відповідних силових факторів сили інерції точок тіла, що обертається навколо осі, рухається плоскопаралельно?
6. На підставі якого принципу відбувається кінетостатичне дослідження механізму?
7. Який порядок приймається під час дослідження механізму?
8. Як визначаються динамічні реакції підшипників?
9. Назвіть умови динамічної зрівноваженості обертового тіла.
10. Що таке статичне балансування? Чому саме динамічне балансування є достатнім для повної зрівноваженості обертового тіла?

ЧАСТИНА II

ТЕОРІЯ МЕХАНІЗМІВ І МАШИН

2.1. Вступ. Предмет теорії механізмів і машин. Роль у розвитку машинобудування і приладобудування

Теорія механізмів і машин (ТММ) – наука про загальні методи дослідження властивостей механізмів і машин та проектування їх схем.

ТММ розглядає проблеми аналізу механізмів, що дозволяє визначити структуру механізмів и закон руху веденої ланки за заданим законом ведучої ланки або за заданими зовнішніми силами, методи кінестатики механізмів і методи синтезу окремих механізмів, а також інші питання, що виникають у конструктора під час створення і дослідження нових машин.

Технічний прогрес у машинобудуванні, створення нових більш удосконалених типів машин стали можливим завдяки використанню досягнень науки і, перш за все, теорії механізмів і машин. ТММ вирішують головні задачі проектування – вибір раціональних схем і доцільних законів руху ланок машин, визначення кінематичних і динамічних параметрів для нормальної роботи механізмів в умовах заданого технологічного процесу.

Таким чином, ТММ є теоретичною базою для розвитку машинобудування, надає можливість виконати початковий найважливіший етап проектування машин, роботів і маніпуляторів, на підставі якого в подальшому розв'язуються задачі розрахунку на міцність і конкретного конструювання усіх ланок і деталей механізмів.

Отже, предметом теорії механізмів і машин є структурне, кінематичне і динамічне дослідження механізмів і проектування нових механізмів і машин.

2.1.1. Зміст курсу і методи теорії механізмів і машин

Теорія механізмів і машин вирішує дві основні задачі: дослідження (аналіз) існуючих механізмів і проектування (синтез) нових механізмів за конкретних умов роботи.

Аналіз механізмів включає послідовне вивчення структури, кінематики, кінестатики і динаміки механізмів і машин.

У структурному аналізі досліджуються питання, пов'язані з будовою механізмів: класифікація структурних груп і кінематичних ланцюгів, визначення ступеня вільності (рухомості) механізму, знаходження надлишкових в'язей, принципи утворення механізмів та інші питання.

Кінематика механізмів досліджує основні закони руху механізмів, не пов'язані з дією сил: побудова планів (схем) механізмів і траєкторій окремих точок на ланках, визначення швидкостей і прискорень точок, кутових швидкостей і прискорень ланок, дослідження методом кінематичних діаграм, методи синтезу механізмів за заданих геометричних і кінематичних умов.

Кінетостатика розглядає методи силового дослідження механізмів: визначення зусиль (реакцій) у кінематичних парах (шарнірах, рухомих з'єднаннях), знаходження сил інерції ланок, урахування тертя в механізмах, визначення коефіцієнта корисної дії та інше.

Динаміка механізмів вивчає закони руху останніх під дією прикладених сил, вирішує питання регулювання машин, зрівноважування обертових мас, віброзахисту і стійкості машин на фундаменті.

Отже, у розділі динаміка машин розглядаються методи визначення закону руху механізму під дією рушійних сил і сил опору. Сили задаються залежно від тих процесів, що відбуваються в машинах. Приміром, у двигуні внутрішнього згоряння, що надає привід генератору електричного струму, рушійною силою є тиск на поршень газів, що розширюються, а силою опору – опір ротора генератора обертанню.

На відміну від спеціалізованих інженерних дисциплін, які вивчають конкретні види машин різних галузей, ТММ розглядає, в першу чергу, загальні питання дослідження і проектування механізмів незалежно від галузі застосування, розкриває загальні основи будови, кінематики та динаміки, які використовуються при вивченні конкретних механізмів і машин.

2.1.2. Загальні поняття теорії механізмів і машин

Розглянемо основні поняття і терміни, що застосовуються в ТММ.

Машиною називається механічний пристрій, який, здійснюючи механічний рух, перетворює енергію, матеріали чи інформацію з метою заміни або полегшення фізичної чи розумової праці людини.

Якщо машина працює без втручання людини, то це *машина-автомат*.

Машини поділяються на енергетичні, технологічні, інформаційні, кібернетичні.

Енергетичні машини призначені для перетворення будь-якого виду енергії в механічну чи навпаки. У першому випадку – це двигуни, у другому – генератори.

Технологічні машини призначені для перетворення матеріалів чи об'єктів. Їх поділяють на робочі, за допомогою яких змінюється форма, властивості й положення об'єкта, і транспортні, які змінюють тільки його

положення транспортувальних об'єктів.

Двигун і робоча машина, з'єднані для виконання корисної роботи, називаються машинним агрегатом. Приміром, агрегатами є електрогенератор, насосна установка тощо.

Як правило, машину утворюють сукупність взаємно зв'язаних механізмів

Механізмом називається система твердих тіл, призначена для перетворення руху одного чи кількох тіл у потрібні рухи інших тіл.

2.2. Структурний аналіз механізмів

Дослідження і проектування механізмів починається з визначення їх структури (будови), тому що від раціонального обрання схеми механізму у значній мірі залежить працездатність і надійність машин. До того ж, структура механізмів визначає і належний метод їх подальшого дослідження і проектування.

2.2.1. Кінематичні пари і їх класифікація

Як відомо, кожний механізм або машина складається з окремих деталей. Деталь – це частина механізму, яка виготовлена окремо, без складальних операцій.

Сукупність нерухомих деталей із жорстких твердих тіл утворює одну нерухому систему, ланку або стояк (станина, корпус, плита або рама машини).

Одна деталь або жорстке з'єднання групи деталей із твердих тіл, що утворює самостійну систему, яка рухається в складі механізму як єдине ціле, називається рухомою ланкою.

З'єднання двох стичних ланок, що забезпечує їх відносну рухомість, називається кінематичною парою.

Поверхня, лінія або точка, якими ланки стикаються між собою, називають елементами кінематичних пар.

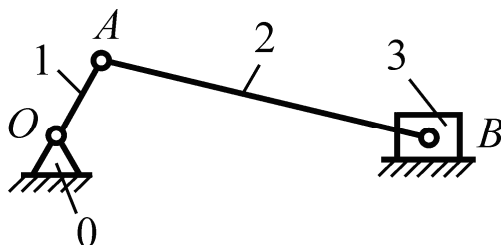


Рис. 2.1

На рис. 2.1 представлений найпростіший кривошипно-повзунний механізм, утворений трьома обертальними кінематичними парами

(шарнірами в точках O , A , B) і однією поступальною парою (повзун – напрямна). По числу ланок – це чотириланковий механізм. Він належить до плоских механізмів, тому що осі його шарнірів паралельні, а осі ланок рухаються в одній площині.

Розглянемо принцип утворення і класифікацію кінематичних пар.

Як зазначено вище, кінематичною парою називається рухоме з'єднання двох стичних ланок в механізмі, які перебувають у контакті.

Стикання ланок може бути геометричним – за рахунок їх геометричної форми або конструкції, чи силовим – за рахунок сили притискання, яка забезпечується пружиною, силою ваги тощо.

По характеру руху кінематичні пари ділять на поступальні і обертальні.

По характеру стикування ланок або залежно від форми елементів кінематичних пар, вони діляться на вищі і нижчі. У нижчих кінематичних парах ланки стикаються поверхнями, а у вищих – по лінії або в точці.

Механізми з нижчими кінематичними парами називаються важильними.

Вільне абсолютно тверде тіло має у просторі шість можливих переміщень або ступенів вільності: три поступальних рухомості вздовж координатних осей x, y, z і три елементарних повороти навколо цих самих осей (рис. 2.2).

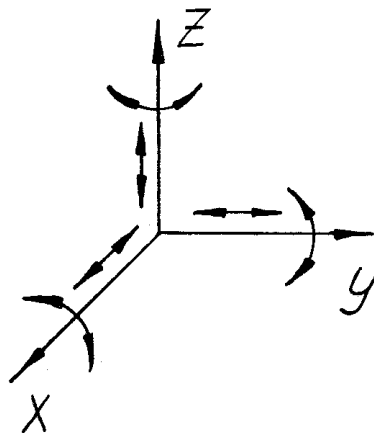


Рис. 2.2

У кінематичній парі кожна з ланок не може мати шість можливих переміщень, тому що одна ланка накладає на іншу ланку обмеження руху (в'язі), які залежать від способу їх з'єднання.

Тому кількість ступенів вільності H однієї ланки відносно іншої, які утворюють кінематичну пару, становить

$$H = 6 - S,$$

де S – кількість обмежень руху або умов в'язі.

Звідки

$$S = 6 - H.$$

Академік Артоболовський І.І. запропонував класифікувати кінематичні пари по класах залежно від кількості накладених умов в'язі S .

Тобто, номер класу пари дорівнює числу умов в'язі S , які накладаються парою на рух однієї ланки відносно іншої.

Умовні позначення основних кінематичних пар (КП) показані на рис. 2.3.

У п'ятирухомій вищій КП I класу куля – площина (рис. 2.3, а) куля може мати елементарні повороти навколо кожної з координатних осей і можливі переміщення вздовж двох горизонтальних осей, тобто, має 5 ступенів вільності ($H = 5$). Куля не може відірватись від площини, бо тоді ланки не будуть дотикатись, руйнуючи КП. Тобто, число умов в'язі $S = 1$. Тому за визначенням маємо п'ятирухому пару I класу. Номери класів пар позначають римськими цифрами. Стикання ланок відбувається в точці. Така пара називається вищою.

Для чотирирухомої вищої КП II класу куля – циліндр (рис. 2.3, б) число ступенів вільності $H = 4$, а кількість умов в'язі $S = 2$. Оскільки стикання відбувається в точці або по лінії, то пара є теж вищою.

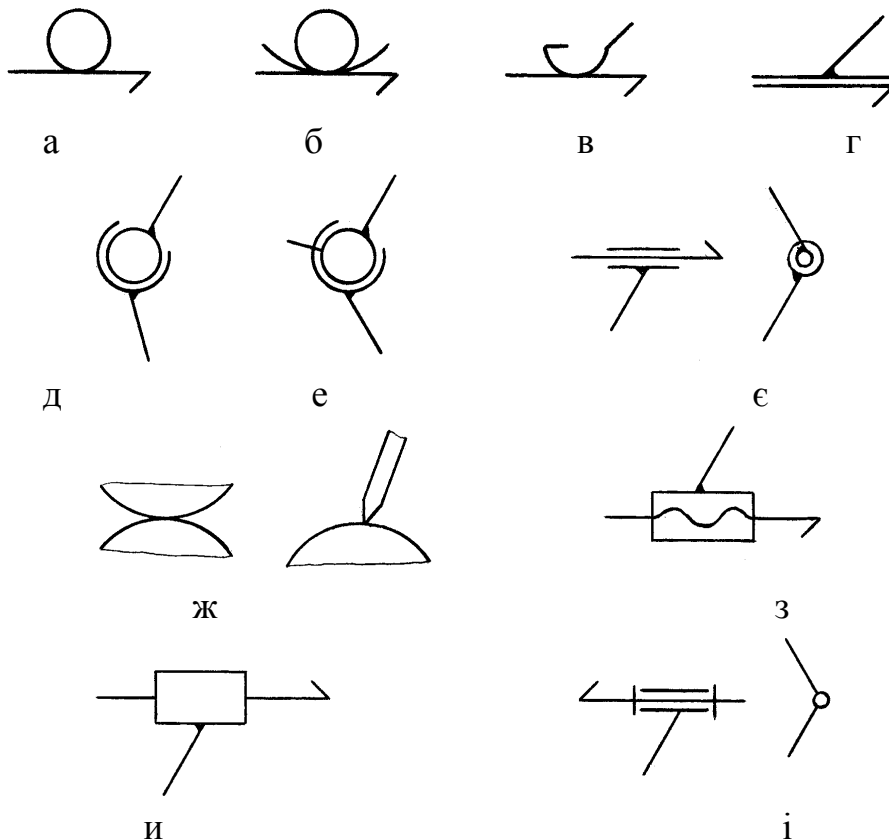


Рис. 2.3

Чотирирухома вища КП II класу циліндр – площина (рис. 2.3, в) має $H = 4$, $S = 2$.

У трирухомій нижчій КП III класу площинна (рис. 2.3, г) $H = 3$, $S = 3$. Стикання ланок відбувається по поверхні.

Для трирухомої нижчої КП III класу сферична (рис. 2.3, д) $H = 3$, $S = 3$.

Дворухома нижча КП IV класу сферична з пальцем (рис. 2.3, е) уявляє собою кулю всередині ланки зі сферичною поверхнею. Куля може повертатись навколо осі пальця та разом з ним повертатись вздовж паза, прорізаного в сферичній поверхні охоплюючої ланки. Тоді $H = 2$, $S = 4$.

У дворухомої нижчої КП IV класу циліндричної (рис. 2.3, є) внутрішня ланка є циліндром, а зовнішня – втулкою з циліндричним отвором. Циліндр може обертатися в отворі втулки та пересуватись вздовж неї. Тобто $H = 2$, $S = 4$.

У двох дворухомих вищих КП IV класу плоских (рис. 2.3, ж) одна ланка відносно іншої може ковзати та перекочуватись без ковзання або хитатись в одній площині. Просторові рухи ланок неможливі, бо тоді пари не були б плоскими. Для них $H = 2$, $S = 4$.

Для однорухомої нижчої пари V класу гвинтової (рис. 2.3, з) одна ланка може рухатись тільки вздовж гвинтової поверхні іншої. У цьому випадку $H = 1$, $S = 5$.

Внутрішня ланка *однорухомої нижчої КП V класу поступальної* (рис. 2.2, и) може пересуватись тільки вздовж напрямного отвору зовнішньої ланки. Обертання виключається конструктивно, наприклад, шпонковим чи шліцьовим з'єднанням. Для цієї пари $H = 1$, $S = 5$.

Одна ланка *однорухомої нижчої пари V класу обертальної* (рис. 2.3, і) може тільки повертатись відносно осі іншої. Тому для неї $H = 1$, $S = 5$.

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Що вивчає ТММ?
2. Що називається механізмом?
3. Надайте визначення кінематичної пари.
4. Вкажіть на можливі лінійні і кутові переміщення в одно- і дворухомих кінематичних парах.
5. Наведіть приклади нижчих і вищих кінематичних пар.
6. Наведіть визначення терміну «машина».
7. Як відрізнити вищі і нижчі кінематичні пари?
8. Що таке ступінь вільності ланки механізму?

9. Яка роль ТММ в науці і техніці?
10. Вкажіть основні задачі ТММ.

2.2.2. Кінематичні ланцюги і з'єднання

Кінематична пара є найпростішою рухомою системою, що належить механізму. Для одержання потрібних, доцільних рухів застосовують в машинах системи із більшої кількості ланок, так званих, ланцюгів. Будь-який механізм за своєю основою побудований із кінематичних ланцюгів (КЛ) шляхом послідовного з'єднання певної кількості кінематичних пар.

Зв'язана система ланок, з'єднаних між собою кінематичними парами, утворюють кінематичний ланцюг.

За способом з'єднання кінематичні ланцюги поділяють на прості і складні, на замкнені і незамкнені. У простих ланцюгах кожна ланка з'єднується тільки двома кінематичними парами.

У замкнених ланцюгах ланки утворюють один або кілька замкнених контурів (рис. 2.4, а). Незамкнені ланцюги (рис. 2.4,б) містять крайні ланки, що не мають елементів кінематичних пар, якими можна було б приєднатися до інших ланок.

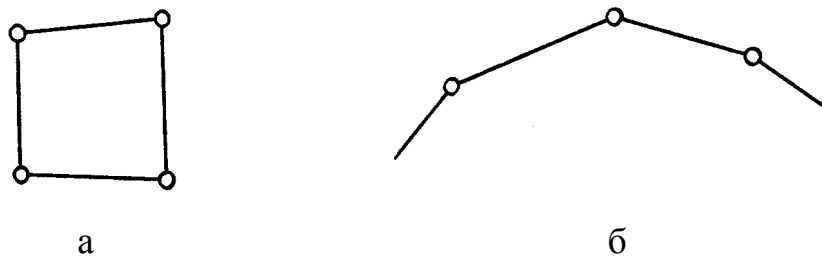


Рис. 2.4

За відносним рухом ланок кінематичні ланцюги також поділяються на просторові і плоскі. Точки ланок останніх теоретично рухаються в паралельних площинах, що забезпечується паралельним розміщенням осей обертальних КП. Просторовий рух відбувається в результаті непаралельності осей останніх.

Структурні особливості ланок і їх кількість у кінематичному ланцюгу визначають ступінь вільності останнього. Як згадувалося, вільне тіло, як і вільна ланка, має шість ступенів вільності. Тоді загальне число ступенів вільності ланцюга із k ланок до зборки має бути $H = 6k$.

Оскільки у складі кінематичного ланцюга можуть бути КП усіх класів, які накладають при з'єднанні відповідно до номера класу кількість в'язей, то в загальному випадку число ступенів вільності КЛ визначається різницею між кількістю ступенів вільності ланок і кількістю в'язей, накладених всіма КП.

$$H = 6k - 5p_5 - 4p_4 - 3p_3 - 2p_2 - p_1 = 6k - \sum_{i=5}^1 (6-i)p_i, \quad (2.1)$$

де k – кількість вільних ланок КЛ,

p_5, p_4, \dots, p_1 – кількість КП п'ятого, четвертого, ..., першого класів,

5, 4, ..., 1 – кількість умов в'язі, накладених КП п'ятого, четвертого, ..., першого класів.

Структурна формула КЛ (1) була одержана у 1887 р. проф. П.І. Сомовим, а у 1923 р. уточнена проф. А.П. Малишевим, тому в літературі називається формулою Сомова-Малишева.

Для плоских КЛ ступінь вільності визначається за умови трьох можливих переміщень, які має кожна ланка у плоскому русі. Плоску КЛ можна уявити як просторову, на яку накладені три загальні в'язі, в результаті чого КП усіх класів втрачають по три ступені вільності. Пар I, II, III класів у плоских механізмів не буває, бо їх ланки здійснюють просторові рухи.

$$H = 3k - 2p_5 - p_4. \quad (2.2)$$

Структурна формула Чебишева для плоских КЛ одержана їм у 1869 р.

Звичайно прості КЛ складають із КП п'ятого класу, для яких структурна формула має вигляд:

$$H = 3k - 2p_5. \quad (2.3)$$

2.2.3. Механізм як замкнений кінематичний ланцюг

У кінематичному ланцюгу всі ланки рухаються одна відносно одній. Якщо одну із ланок закріпити нерухомо, то рух кожної рухомої ланки відносно нерухомої буде абсолютним.

Отже, замкнений КЛ з однією нерухомою ланкою, в якій за заданим рухом одного або декількох ланок всі інші здійснюють потрібні рухи, називається механізмом. Тобто, механізм – це КЛ з однією нерухомою ланкою, стояком, це КЛ, «поставлена на одну ланку».

Ланки, закони руху яких задані, називаються ведучими, всі інші – веденими.

Ступінь вільності КЛ відносно її нерухомої ланки, стояка називають ступенем рухомості механізму. У цьому разі кількість рухомих ланок зменшиться на одиницю (одну зробили стояком) і кількість рухомих ланок залишиться рівним: $n = k - 1$. Тоді, виходячи із (2.1; 2.2; 2.3) ступінь рухомості механізму визначається за відповідними структурними формулами кінематичних ланцюгів:

$$W = 6n - 5p_5 - 4p_4 - 3p_3 - 2p_2 - p_1 = 6n - \sum_{i=5}^1 (6-i)p_i, \quad (2.4)$$

$$W = 3n - 2p_5 - p_4. \quad (2.5)$$

$$W = 3n - 2p_5. \quad (2.6)$$

Отже, число ступенів рухомості W просторового механізму відносно стояка, коротко, ступінь рухомості визначається за формулою (2.4).

Визначимо за цією формулою число ступенів рухомості механізму маніпулятора (рис. 2.5), не враховуючи руху губок захвату.

$$W = 6 \cdot 4 - 5 \cdot 3 - 4 \cdot 1 - 3 \cdot 0 - 2 \cdot 0 - 0 = 5.$$

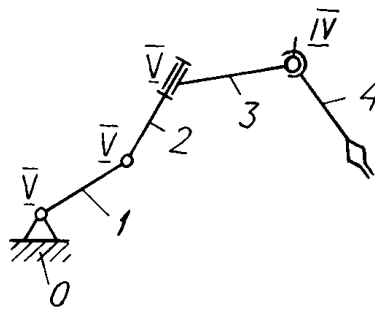


Рис. 2.5

Для плоских механізмів число ступенів рухомості ланок визначається за формулами (2.5; 2.6). Застосуємо ці формули для механізму, схема якого зображена на рис. 2.6.

$$W = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 - 0 = 1.$$

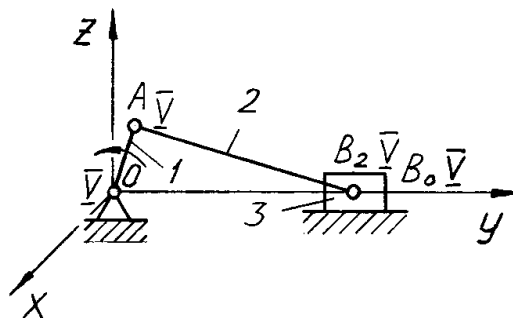


Рис. 2.6

Стосовно структури механізму ступінь рухомості означає кількість ланок, закони руху яких мають бути задані, тобто, кількість ведучих ланок.

Стосовно ж кінематики і динаміки механізму ступінь рухомості означає кількість незалежних параметрів або узагальнених координат, які однозначно визначають положення всіх точок механізму. Так, для кривошипно-повзунного механізму (рис. 2.6) кількість ведучих ланок або узагальнених координат дорівнює одиниці. Достатньо задати, приміром,

кут повороту φ_1 кривошипа для визначення координат всіх інших точок механізму.

Розрахунок свідчить, що для механізму маніпулятора (рис. 2.5) кількість ведучих або початкових ланок дорівнює 5.

2.2.4. Структурний аналіз і класифікація плоских механізмів

Дослідження і проектування нових механізмів потребує певної класифікації механізмів, яка, з одного боку, дозволяла б досліджувати окремі класи механізмів за належних їм ознаках, а, з другого боку, указувала шляхи утворення нових механізмів.

Структурний аналіз і класифікація механізмів необхідні для вибору методів їх розрахунку. Під час проведення структурного аналізу визначають:

1. кількість рухомих ланок механізму; 2. кількість і клас кінематичних пар; 3. ступінь рухомості механізму; 4. кількість і клас структурних груп, що утворюють механізм; 5. клас механізму в цілому, записують формулу будови механізму.

У кривошипно-повзунному механізмі (рис. 2.6) маємо три рухомі ланки $n = 3$: кривошип 1, шатун 2, повзун 3. Ці ланки утворюють чотири пари V класу, при цьому пари $A (0,1)$, $B (1,2)$, $C (2,3)$ обертальні, а пара $C (3,0)$ – поступальна. Стояк позначений штриховкою і цифрою 0.

Початкову ланку 1 і стояк 0 (рис. 4.14), що утворюють пару V класу, називають механізмом I класу.

Загалом механізм I класу чи початковий механізм складається із кривошипа 1 (рис. 2.7, а) або повзуна 1 (рис. 2.7, б), стояка 0 і, відповідно, одно рухомої V класу обертальної або поступальної пар O між ними.

Число ступенів рухомості механізму I класу

$$W = 3n - 2p_1 - p_2 = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 1 - 0 = 1.$$

Далі будемо розглядати механізм I класу тільки з кривошипом.

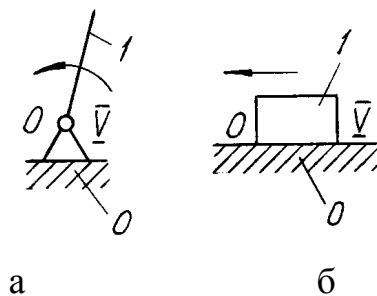


Рис. 2.7

Принцип утворення плоских механізмів такий: до механізму I класу приєднуються вільними елементами кінематичних пар структурні групи

Теорія механізмів і машин

Ассура. Структурною групою Ассура називається плоский кінематичний ланцюг, який:

1. має нульову ступінь рухомості, якщо його приєднати до стояка вільними елементами кінематичних пар;
2. він не ділиться на більш прості групи з нульовим ступенем рухомості.

Отже, ступінь рухомості групи Ассура:

$$W = 3n - 2p_1 = 0 \Rightarrow p_1 = 3n/2.$$

Оскільки число рухомих ланок n і число однорухомих пар p_1 є цілими числами, то кількість рухомих ланок n повинно бути парним. Тобто, до складу структурної групи входить тільки парне число ланок.

За останньою формулою n і p_1 приймають ряд послідовних значень:

n	2	4	6	8	...
p_1	3	6	9	12	...

Групи Ассура поділяються на *класи*. Номер класу структурної групи дорівнює найбільшому номеру класу контура, який входить до її складу. А номер класу контура дорівнює кількості кінематичних пар, які утворюють ланки контура. Контури різних класів показані на рис. 2.8, де поступальні пари V класу, якщо вони є, умовно замінені на обертальні.



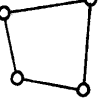
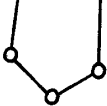
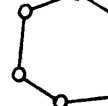
Клас	II	III	IV	V	VI	...
Умовне зображення						...

Рис. 2.8

Контури II і III класів – жорсткі фігури, що позначені штриховкою.

Номери класів структурних груп і контурів позначаються римськими цифрами. *Порядок* групи Ассура дорівнює числу вільних елементів кінематичних пар, якими група приєднується до інших ланок.

Найпростішими є *групи II класу* чи *двоповодкові групи, діади*. Вони складаються з двох ланок. *Поводок*, на відміну від ланки, має вільний елемент кінематичної пари. При з'єднанні його з вільним елементом іншої ланки утворюється кінематична пара.

Групи II класу поділяються на 5 типів (рис. 2.9). Для груп 2 ... 5 типів показані частинні випадки. У групі 1 типу спільна кінематична пара і вільні елементи – обертальні. Інші типи груп II класу можна одержати *заміною* окремих обертальних пар чи їх вільних елементів поступальними.

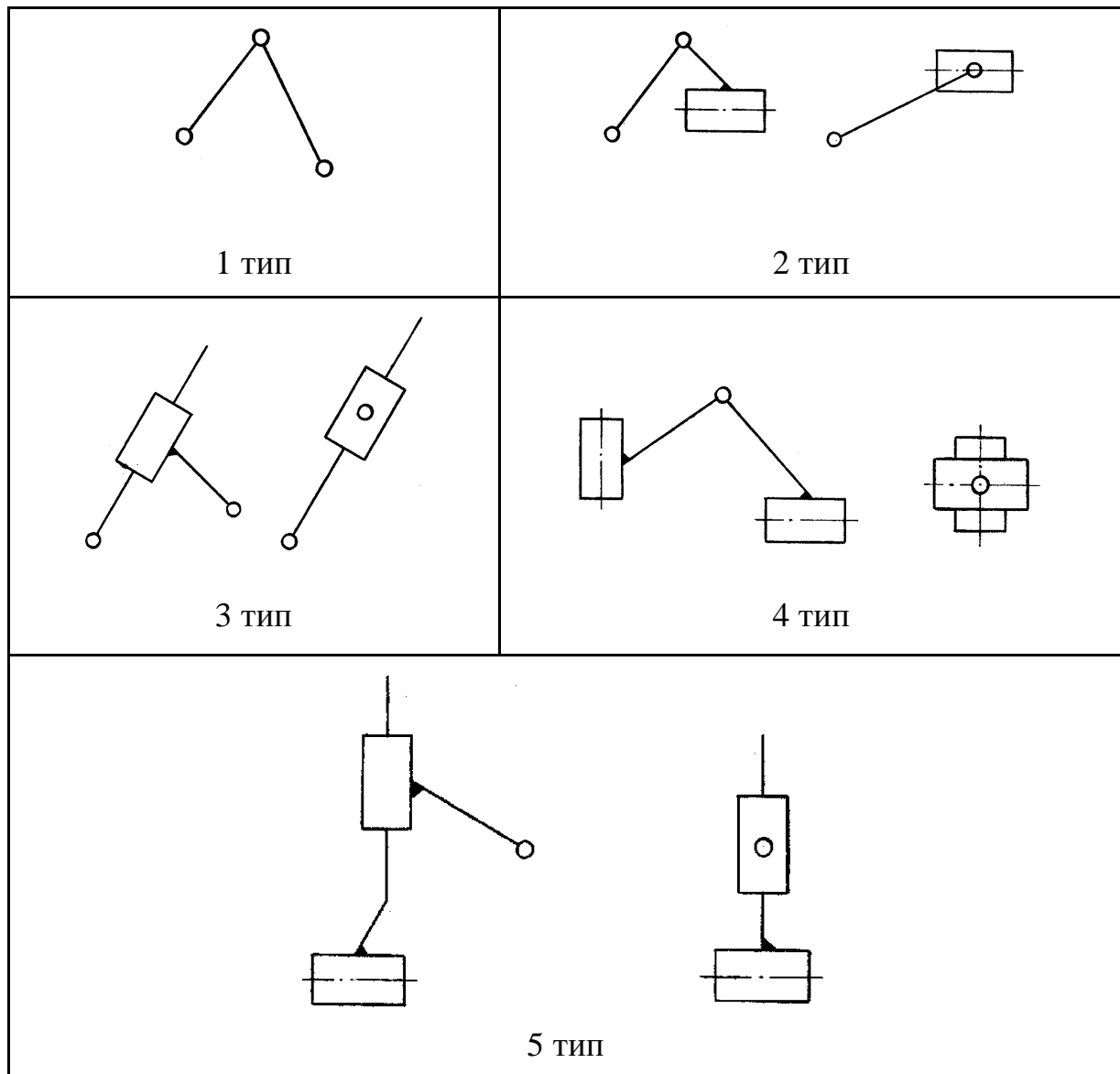


Рис. 2.9

Ступінь рухомості кожної з цих груп дорівнює нулю.

$$W = 3n - 2p_1 = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 3 = 0.$$

Усі ці групи мають другий порядок, оскільки вільних елементів кінематичних пар – 2.

Наведемо приклади структурних груп більш високих класів. На схемах вільні елементи кінематичних пар умовно показані збільшеними. Групи III класу можуть бути 3-го (рис. 2.10, а), 4-го (рис. 2.10, б), 5-го (рис. 2.10, в) і більших порядків.

Легко перевірити, що число ступенів рухомості кожної з наведених груп Ассур $W = 0$. Структурні групи входять до складу механізмів.

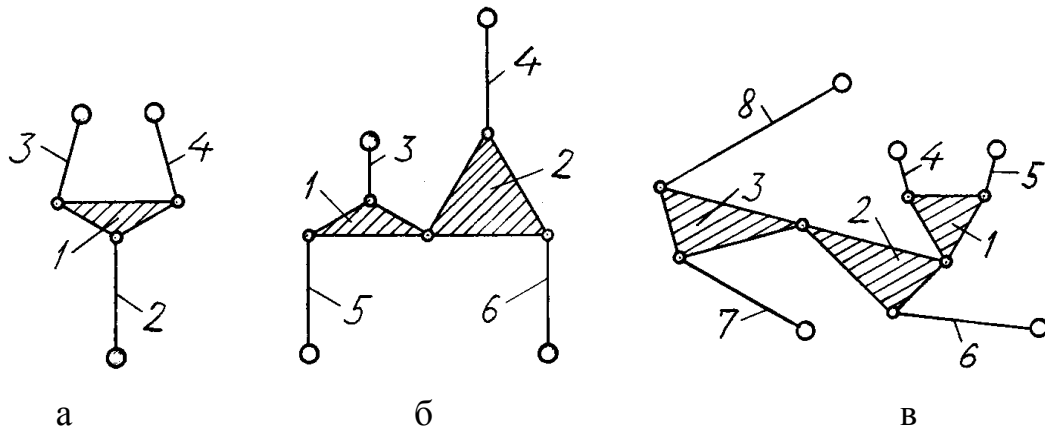


Рис. 2.10

Розглянемо принцип утворення плоских механізмів. Для цього до механізму I класу приєднуються групи Ассура вільними елементами кінематичних пар. Спочатку перша група приєднується одним вільним елементом до початкової ланки (найчастіше кривошипа), а другим чи іншими – до стояка.

Початковою називається ланка, положення якої є визначальним для знаходження положення інших ланок механізму. Наступні групи, 2, 3 і т.д., приєднуються послідовно до вже створеного механізму.

Наприклад, механізм на рис. 2.11 утворений послідовним

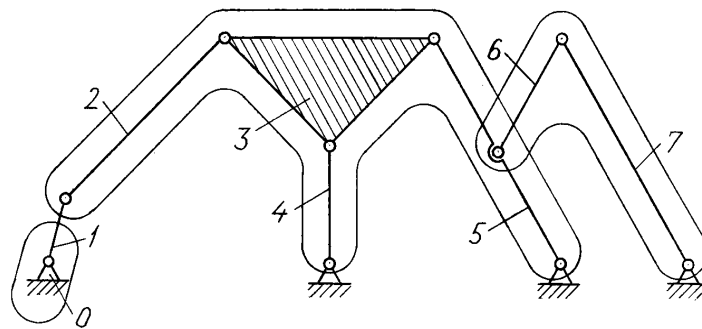


Рис. 2.11

приєднанням до механізму I класу, який складається з ланок 0, 1, спочатку групи III класу 3-го порядку, яка складається з ланок 2, 3, 4, 5, а тоді групи II класу 1 типу, яка складається з ланок 6, 7.

Слід зазначити, що приєднання групи Ассура з метою утворення нового механізму не змінює ступінь рухомості механічної системи.

Склад і послідовність приєднання груп Ассура виражається формулою будови механізму. Для згаданого механізму вона запишеться

I кл. (0,1) ← III кл. 3 пор. (2,3,4,5) ← II кл. 1 в. (6,7).

Номер класу механізму дорівнює найбільшому номеру класу групи,

яка входить до його складу. Згідно з визначенням, у прикладі розглянуто механізм III класу.

У техніці найбільшого розповсюдження набули механізми II класу.

ЗАПИТАННЯ ДО САМОКОНТРОЛЮ

1. Дайте визначення кінематичного ланцюга.
2. Які бувають кінематичні ланцюги?
3. Що називається кінематичним з'єднанням?
4. Виведіть формулу Сомова-Малишева.
5. Виведіть формулу Чебишева.
6. Скільки ланок входить до складу структурної групи?
7. Який принцип утворення плоских механізмів?
8. Дайте визначення механізму I класу і групи Ассура.
9. Наведіть приклади контурів різних класів.
10. Чому дорівнює ступінь рухомості групи Ассура?

2.3. Кінематичний аналіз механізмів

При кінематичному аналізі механізмів рух ланок розглядається з чисто геометричної точки зору без урахування сил, які є причиною цього руху.

Для цього використовується *кінематична схема механізму*, умовне зображення в масштабі.

Основними задачами кінематичного аналізу є визначення положень, переміщень, траєкторій, швидкостей та прискорень точок і кутових швидкостей та кутових прискорень ланок механізму.

Кінематичний аналіз механізмів проводиться, починаючи з механізму I класу, в порядку приєднання груп Ассура. Тобто, спочатку розглядається перша приєднана структурна група, тоді друга і т.д.

2.3.1. Побудова планів положень механізмів

Розглянемо побудову планів положень на прикладі кривошипно-повзунного механізму.

Плани положень будуються в масштабі довжин з масштабним коефіцієнтом μ_l . Зображуємо траєкторію точки A кривошипа (рис. 2.12). Знаходимо крайні положення механізму. Для них кривошип і шатун знаходяться на одній лінії. Позначаємо їх O і O' . З них початкове чи нульове положення O відповідає початку робочого ходу механізму. Траєкторію точки A ділимо на довільне число рівних частин, починаючи з

нульового. Нумеруємо точки поділу 0, 1, ..., 7 у напрямі обертання кривошипа.

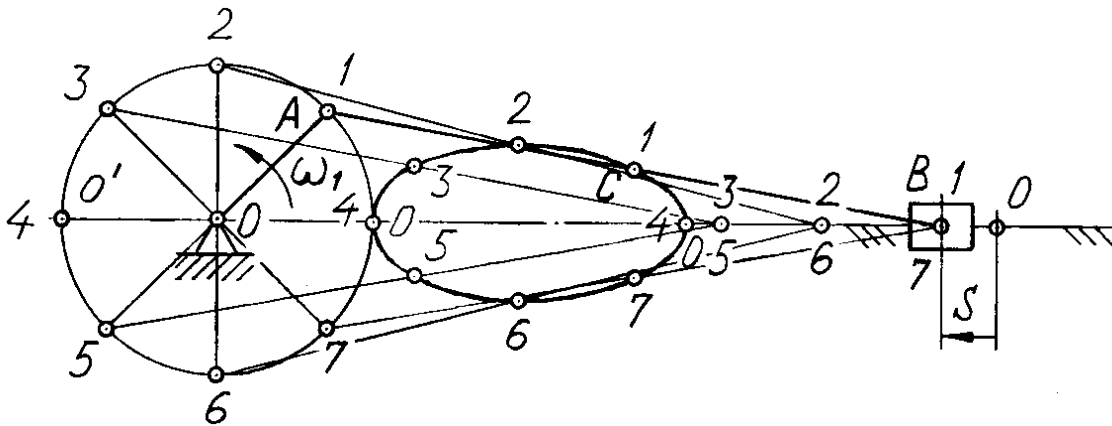


Рис. 2.12

Положення точки B знаходимо *методом засічок*. Від точки A радіусом AB робимо дугові засічки на траєкторії точки B . Нумеруємо відповідні точки перетину 0, 1, ..., 7. Сполучаємо відповідні точки A з точками B і одержуємо плани положень ланок механізму.

Розглянемо кривошипно-коромисловий механізм. Знайдемо крайні положення цього механізму (рис. 2.13). Для цього накреслимо траєкторії точок A кривошипа і B коромисла. З точки O радіусами $OA + AB$ і $AB - OA$ робимо дугові засічки на траєкторії точки B . Через одержані точки перетину B_0 і B'_0 та точку O кривошипа проводимо прямі. Ці прямі перетинають траєкторію точки A в точках A_0 і A'_0 . Для даного напрямку обертання кривошипа точка A_0 відповідає початку робочого ходу механізму. Робочий хід відбувається на більшому куті повороту кривошипа. Побудова проміжних положень механізму проводиться аналогічно попередньому випадку.

2.3.2. Побудова траєкторій точок механізмів

Побудову траєкторій точок розглянемо на прикладі кривошипно-повзунного механізму. Нехай треба знайти траєкторію якої-небудь точки C , яка лежить на шатуні (рис. 2.12).

На відповідних положеннях шатуна робимо дугові засічки радіусом AC . Послідовно з'єднавши точки C в різних положеннях механізму плавною кривою, одержимо траєкторію точки C .

Траєкторії точок, які лежать на шатуні називаються *шатунними кривими*. Шатунні криві широко використовуються при проектуванні механізмів з відповідними рухами робочих органів.

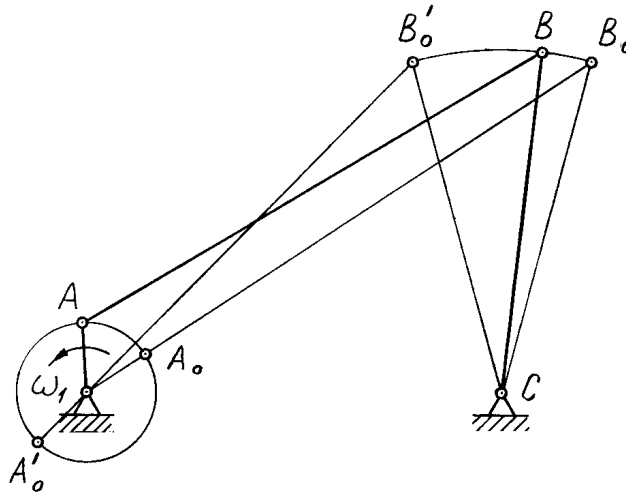


Рис. 2.13

2.3.3. Кінематичні діаграми. Побудова діаграми переміщень

Графіки переміщень, швидкостей і прискорень від часу називаються кінематичними діаграмами.

Розглянемо побудову діаграми лінійних переміщень повзуна кривошипно-повзунного механізму.

По осі абсцис відкладаємо відрізок довжиною l , мм, який відповідає повному оберту кривошипа (рис. 2.14). Цей відрізок ділимо на таке саме число рівних частин, як при побудові планів положень механізму. Нумеруємо точки поділу $0, 1, \dots, 7, 0$. Номер точки відповідає номеру положення механізму.

Час повного оберту кривошипа (період кінематичної діаграми)

$$T = 2\pi/\omega_1, \text{ с},$$

де $\omega_1, \text{ с}^{-1}$ – кутова швидкість кривошипа.

Масштабний коефіцієнт часу $\mu_t = T/l, \text{ с/мм}$.

е

Рис. 2.14

Масштабний коефіцієнт кута повороту кривошипа $\mu_\varphi = 2\pi/l, 1/\text{мм}$.

По осі ординат відкладаємо переміщення повзуна s (рис. 2.12) від його початкового положення в масштабі

$$\mu_s = 2l_{OA}/h, \text{ м/мм},$$

де $l_{OA}, \text{ м}$, – довжина кривошипа; $h, \text{ мм}$, – хід повзуна на діаграмі.

Одержані точки $0_1, 1_1, 2_1, \dots$ сполучаємо плавною кривою, яка називається *діаграмою переміщень* повзуна $s(t)$.

Аналогічно будуються діаграми лінійних переміщень точок і кутових переміщень ланок інших механізмів.

2.3.4. Діаграми швидкостей і прискорень

Діаграми швидкостей і прискорень можуть бути одержані аналітично чи за допомогою планів. Розглянемо їх побудову методом графічного диференціювання. Розглянемо побудову діаграми швидкостей.

Вибираємо полюсну відстань H_1 , мм (рис. 2.14). Із полюса P проводимо лінію, паралельну хорді 0_11_1 до перетину з віссю ординат. Із одержаної точки перетину проводимо горизонталь до ділянки 01 . Із полюса P проводимо лінію, паралельну хорді 1_12_1 до перетину з віссю ординат. Із точки перетину проводимо горизонталь до ділянки 12 , і т.д. Ці горизонталі на ділянках $01, 12, 23, \dots$ ділимо пополам. Точки поділу сполучаємо плавною тонкою лінією, а тоді цю лінію проводимо трохи вище чи нижче, щоб площі криволінійних трикутників (на рис. 2.14 заштриховані) над і під горизонталлями на ділянках $01, 12, 23, \dots$ були рівні.

Діаграма прискорень будується аналогічно. Відмінність у тому, що з полюса Q проводяться лінії, паралельні хордам $0_21_2, 1_22_2, \dots$

Масштабні коефіцієнти швидкостей і прискорень

$$\mu_v = \frac{\mu_s}{\mu_t H_1}, \text{ м} \cdot \text{с}^{-1} / \text{мм},$$

$$\mu_a = \frac{\mu_v}{\mu_t H_2}, \text{ м} \cdot \text{с}^{-2} / \text{мм},$$

де H_2 , мм, – полюсна відстань діаграми прискорень.

2.3.5. Визначення швидкостей і прискорень механізму I класу

Кінематична схема механізму, включаючи механізм I класу (рис. 2.15, а), будується в масштабі довжин

$$\mu_l = l_{OA} / OA, \text{ м} / \text{мм},$$

де l_{OA} , м, – довжина кривошипа; OA , мм, – довжина відповідного відрізка на кресленні.

Кутова швидкість ω_1 кривошипа може бути визначена за формулою:

$$\omega_1 = \pi n_1 / 30, \text{ с}^{-1},$$

де $n_1, \text{ хв}^{-1}$ – частота обертання кривошипа.

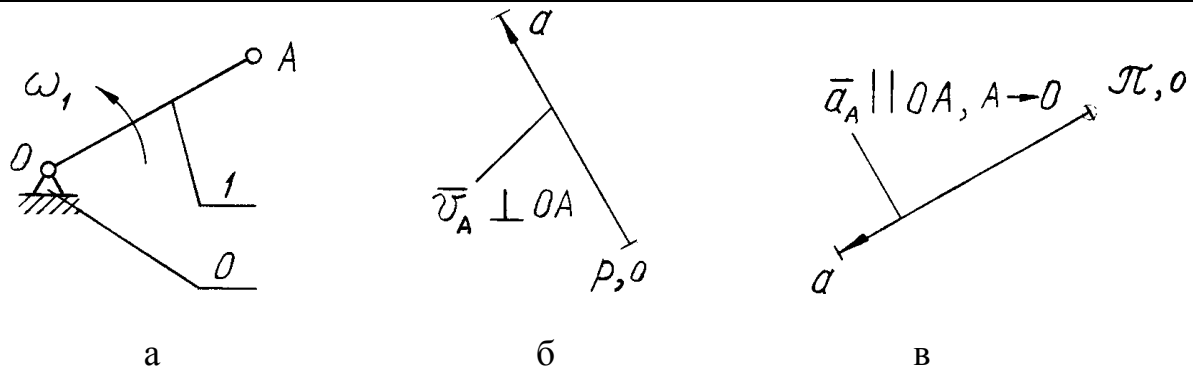


Рис. 2.15

Розглянемо побудову плану швидкостей.
Швидкість точки A кривошипа визначається

$$v_A = \omega_1 l_{OA}, \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}.$$

Масштабний коефіцієнт швидкостей механізму

$$\mu_v = v_A / ra, \text{ м} \cdot \text{с}^{-1} / \text{мм}.$$

Довжина відрізка ra , мм, вибирається так, щоб розміри плану всього механізму були в прийнятних межах і масштабний коефіцієнт μ_v мав по можливості одну значущу цифру. На площині вибираємо точку – полюс p (рис. 2.15, б). Від полюса p відкладаємо перпендикулярно OA в бік обертання відрізок ra , який зображує в масштабі μ_v швидкість точки A кривошипа. Швидкість точки O дорівнює нулю, тому відповідна точка o на плані співпадає з полюсом p .

Переходимо до побудови плану прискорень.

При рівномірному обертанні прискорення точки A кривошипа дорівнює її нормальному прискоренню

$$a_A = a_A^n = \omega_1^2 l_{OA}, \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}.$$

Масштабний коефіцієнт прискорень механізму

$$\mu_a = a_A / \pi a, \text{ м} \cdot \text{с}^{-2} / \text{мм},$$

де πa , мм, – відрізок на плані, який зображає прискорення точки A кривошипа. Його довжина πa вибирається за таким же принципом, як довжина відрізка ra на плані швидкостей.

На площині вибираємо полюс π . Від полюса π відкладаємо паралельно OA , у напрямі від A до O відрізок πa (рис. 2.15, в). Оскільки прискорення точки O дорівнює нулю, то відповідна точка o співпадає з полюсом π .

Переходимо до побудови планів швидкостей і прискорень для груп Ассура II класу.

2.3.6. План швидкостей групи II класу 1 типу

Розглянемо двоповодкову групу 1 виду (рис. 2.16, а). Нехай з попередніх планів механізму I класу чи структурних груп відомі швидкість \bar{v}_A , прискорення \bar{a}_A точки A та відрізки на планах, які їх зображують.

Швидкість точки B визначається відповідно до векторного рівняння

$$\frac{\bar{v}_B}{\perp BC} = \frac{\bar{v}_A}{\perp BC} + \frac{\bar{v}_{BA}}{\perp AB},$$

де \bar{v}_{BA} – швидкість точки B відносно A , перпендикулярна до AB .

Оскільки точка B лежить на коромислі 3, то її швидкість перпендикулярна BC .

Швидкість \bar{v}_A зображується на плані відрізком \overline{pa} , а $\bar{v}_{BA} - \overline{ab}$, так що останнє рівняння у відрізках плану запишеться

$$\overline{pb} = \overline{pa} + \overline{ab}.$$

Проводимо перпендикуляри: з точки A – до AB , а з полюса p – до BC (рис. 2.16, б). На їх перетині знаходиться точка b .

Швидкості $v_B = pb \cdot \mu_v$, $v_{BA} = ab \cdot \mu_v$.

Швидкість точки C дорівнює нулю, тому відповідна точка c співпадає з полюсом p .

Кутові швидкості шатуна 2 і коромисла 3

$$\omega_2 = v_{BA} / l_{AB}, \quad \omega_3 = v_B / l_{BC}, \quad c^{-1},$$

де l_{AB} , l_{BC} , m – відстані між відповідними точками.

Визначимо напрями знайдених кутових швидкостей. Точка B разом з ланкою 2 рухається навколо нерухомої у відносному русі точки A в напрямі швидкості \bar{v}_{BA} .

Тоді для даного положення групи шатун 2 обертається за стрілкою годинника з кутовою швидкістю ω_2 (рис. 2.16, а).

Точка B разом з ланкою 3 рухається навколо нерухомої точки C у напрямі швидкості \bar{v}_B .

У цьому випадку коромисло 3 повертається за стрілкою годинника з кутовою швидкістю ω_3 .

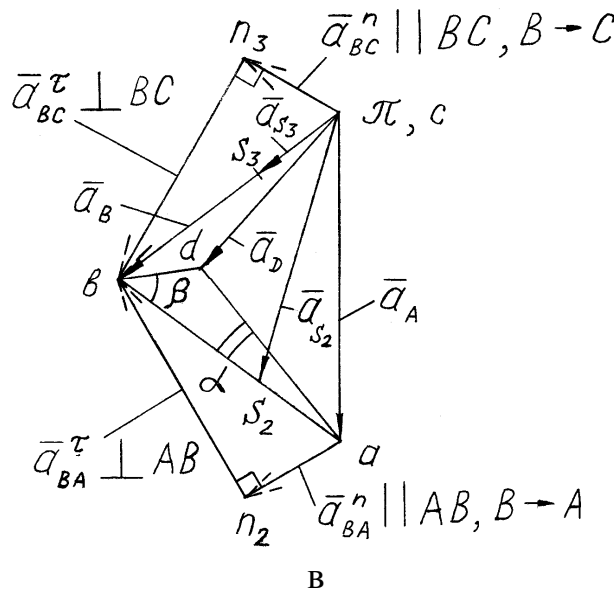
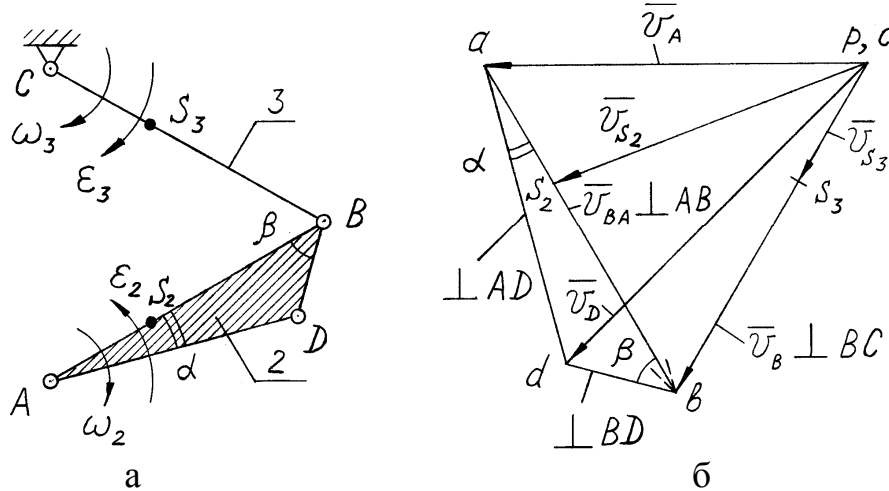


Рис. 2.16

2.3.7. Теорема подібності для планів швидкостей

Теорема подібності для планів швидкостей: *план швидкостей ланки подібний їй і повернутий відносно неї на 90° у бік миттєвого обертання.*

Використаємо цю теорему для визначення швидкостей точки D і центра мас шатуна S_2 (рис. 2.16, а). Для цього проводимо перпендикуляри (рис. 2.16, б): з точки a – до AD , а з точки b – до BD . На їх перетині знаходиться точка d . Трикутник abd подібний трикутнику ABD , бо у них кути з взаємно перпендикулярними сторонами, і відповідно розташований. Останнє означає, що при обході по контуру ланки і плану швидкостей у певному напрямі проти чи за стрілкою годинника зустрічаємо однойменні точки. На прямій ab відкладаємо відрізок

$$as_2 = ab \cdot AS_2 / AB, \text{ мм.}$$

Точки d і s_2 сполучаємо з полюсом p і тоді швидкості точок D і S_2

$$v_D = pd \cdot \mu_v, \quad v_{S_2} = ps_2 \cdot \mu_v.$$

Аналогічно визначаються швидкості інших точок ланок механізму.

2.3.8. Побудова плану прискорень двоповодкової групи 1 типу

Прискорення точки B визначається у відповідності з системою векторних рівнянь:

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \underbrace{\bar{a}_{BA}^n}_{\substack{\parallel AB, \\ B \rightarrow A}} + \underbrace{\bar{a}_{BA}^\tau}_{\perp AB}, \quad \bar{a}_B = \underbrace{\bar{a}_{BC}^n}_{\substack{\parallel BC, \\ B \rightarrow C}} + \underbrace{\bar{a}_{BC}^\tau}_{\perp BC},$$

$$\overline{pb} = \overline{pa} + \overline{an_2} + \overline{n_2b}, \quad \overline{pb} = \overline{pn_3} + \overline{n_3b},$$

де $\bar{a}_{BA}^n, \bar{a}_{BA}^\tau$ та $\bar{a}_{BC}^n, \bar{a}_{BC}^\tau$ – нормальні і тангенціальні прискорення точки B відносно точок A та C відповідно, $\overline{pb}, \overline{pa}, \overline{an_2}, \overline{n_2b}, \overline{pn_3}, \overline{n_3b}$ – відрізки на плані, які зображають відповідні прискорення.

Нормальні прискорення

$$a_{BA}^n = \omega_2^2 l_{AB}, \quad a_{BC}^n = \omega_3^2 l_{BC}$$

зображуються на плані відрізками

$$an_2 = a_{BA}^n / \mu_a, \quad pn_3 = a_{BC}^n / \mu_a, \text{ мм.}$$

Від точки a відкладаємо в напрямі від B до A відрізок $\overline{an_2}$, а від полюса π у напрямі від B до C відрізок $\overline{pn_3}$ (рис. 2.16, в). З точки n_2 проводимо лінію, перпендикулярну AB , а з точки n_3 – перпендикулярну BC . На їх перетині знаходимо точку b .

Прискорення

$$a_{BA}^\tau = n_2b \cdot \mu_a, \quad a_{BC}^\tau = n_3b \cdot \mu_a, \quad a_B = pb \cdot \mu_a.$$

Оскільки прискорення точки C дорівнює нулю, то відповідна точка c знаходиться в полюсі π .

Кутові прискорення ланок 2 і 3 дорівнюють:

$$\varepsilon_2 = a_{BA}^\tau / l_{AB}, \quad \varepsilon_3 = a_{BC}^\tau / l_{BC}, \quad c^{-2}.$$

Визначимо напрям кутових прискорень. Точку B разом з шатуном 2 рухаємо уявно навколо нерухомої у відносному русі точки A в напрямі тангенціального прискорення \bar{a}_{BA}^τ . Ланка 2 буде повертатись для цього положення проти стрілки годинника. Одержаний таким чином уявний напрям обертання співпадає з напрямом ε_2 . Для визначення напрямку ε_3 точку B разом з коромислом 3 повертаємо уявно навколо нерухомої точки

C у напрямі \bar{a}_{BC}^r . Тоді ланка 3 буде повертатись уявно за стрілкою годинника, що є напрямом ε_3 (рис. 2.16, а).

2.3.9. Теорема подібності для планів прискорень

Теорема подібності для планів прискорень: *план прискорень ланки подібний їй і повернутий відносно неї.*

Визначимо за цією теоремою прискорення точки D та центрів мас ланок S_2 і S_3 (рис. 2.16, а).

На плані прискорень будуємо трикутник abd , подібний трикутнику ABD та, як і для плану швидкостей, відповідно розташований. Для цього кути α і β з кінематичної схеми відкладаємо на плані (рис. 2.16, в), так щоб при обході по контуру в одному напрямі ланки 2 та її плану прискорень зустріти однойменні точки.

На прямій ab відкладаємо відрізок

$$as_2 = ab \cdot AS_2 / AB, \text{ мм},$$

а на прямій pb – відрізок

$$ps_3 = bc \cdot CS_3 / BC, \text{ мм}.$$

Прискорення точки D та центрів мас шатуна 2 і коромисла 3

$$a_D = \pi d \cdot \mu_a, \quad a_{S_2} = \pi S_2 \cdot \mu_a, \quad a_{S_3} = \pi S_3 \cdot \mu_a.$$

Аналогічно визначаються прискорення будь-яких інших точок ланок механізмів.

2.3.10. Плани швидкостей і прискорень груп II класу 2 типу

Побудуємо плани швидкостей та прискорень для двохповідкової групи 2 виду (рис. 2.17, а), для якої відомі швидкість \bar{v}_A та прискорення \bar{a}_A точки A .

Векторне рівняння для визначення швидкості точки B та відповідне рівняння у відрізках плану мають вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{\bar{v}_B}{\parallel xx} &= \frac{\bar{v}_A}{\parallel xx} + \frac{\bar{v}_{BA}}{\perp AB}, \\ \bar{pb} &= \bar{pa} + \bar{ab}, \end{aligned}$$

де \bar{v}_{BA} – швидкість точки B відносно A , перпендикулярна AB . Точка B рухається вздовж напрямної xx , тому її швидкість та прискорення паралельні напрямній.

З точки a проводимо перпендикуляр до AB , а з полюса p – лінію,

Теорія механізмів і машин

паралельну xx . На перетині їх знаходиться точка b (рис. 2.17, б).

$$\text{Швидкості } v_B = pb \cdot \mu_v, \quad v_{BA} = ab \cdot \mu_v.$$

Кутова швидкість шатуна 2

$$\omega_2 = v_{BA} / l_{AB}, \text{ с}^{-1},$$

де l_{AB} , м, – довжина шатуна.

Точка B разом з ланкою 2 рухається навколо нерухомої у відносному русі точки A в напрямі швидкості \bar{v}_{BA} . Тоді для даного положення шатун 2 повертається за стрілкою годинника з кутовою швидкістю ω_2 (рис. 2.17, а).

Для визначення прискорення точки B складемо векторне та відповідне рівняння у відрізках плану:

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^n + \bar{a}_{BA}^\tau,$$

$\parallel xx$ $\parallel AB, B \rightarrow A$ $\perp AB$

$$\pi b = \pi a + a n_2 + n_2 b,$$

де $\bar{a}_{BA}^n, \bar{a}_{BA}^\tau$ – нормальне і тангенціальне прискорення точки B відносно A .

Нормальне прискорення $a_{BA}^n = \omega_2^2 l_{AB}$ зображається на плані відрізком

$$a n_2 = a_{BA}^n / \mu_a, \text{ мм.}$$

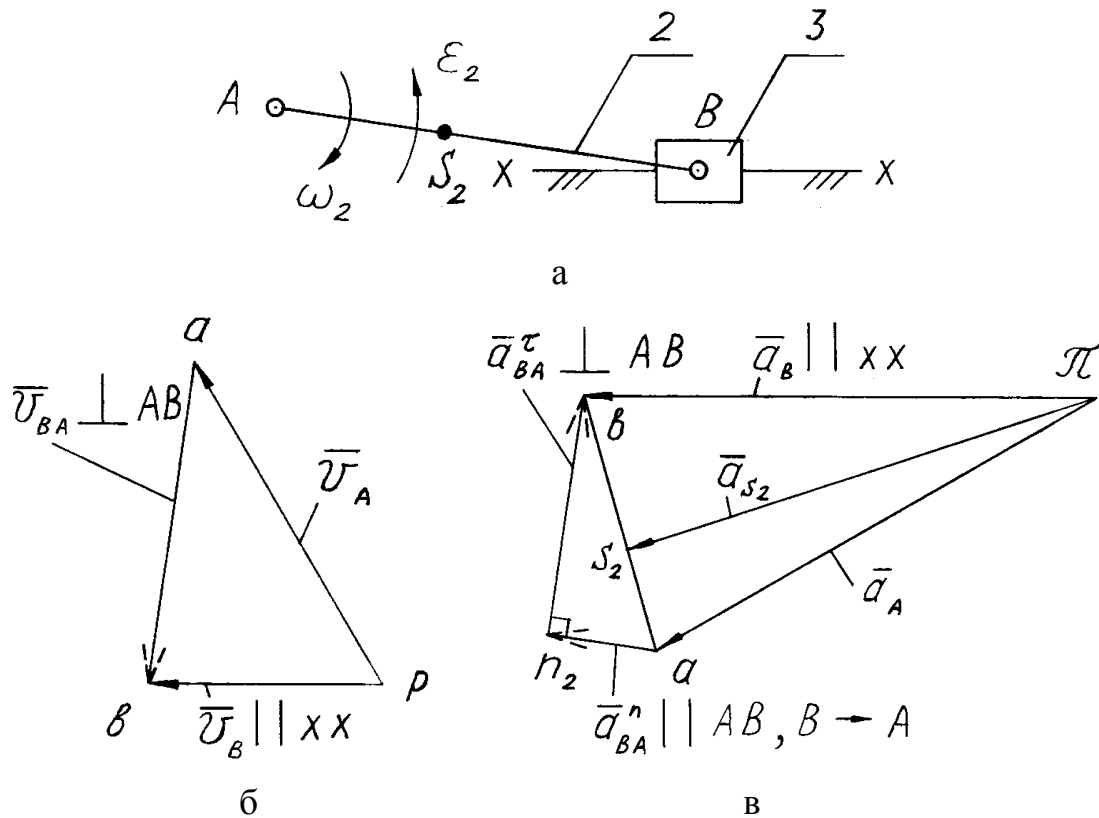


Рис. 2.17

Від точки a відкладаємо паралельно AB у напрямі від B до A відрізок $\overline{an_2}$ (рис. 2.17, в). З точки n_2 проводимо лінію, перпендикулярну AB , а з полюса π – паралельну xx . На перетині знаходиться точка b .

Прискорення

$$a_{BA}^r = n_2 b \cdot \mu_a, \quad a_B = \pi b \cdot \mu_a.$$

Кутове прискорення шатуна 2

$$\varepsilon_2 = a_{BA}^r / l_{AB}.$$

Для визначення напрямку кутового прискорення точку B разом з шатуном 2 повертаємо уявно навколо нерухомої у відносному русі точки A в напрямі тангенціального прискорення \bar{a}_{BA}^r . Одержаний для даного положення групи уявний напрям обертання проти стрілки годинника співпадає з напрямом ε_2 (рис. 2.17, а).

На прямій ab відкладаємо відрізок

$$as_2 = ab \cdot AS_2 / AB.$$

Прискорення центра мас S_2 шатуна 2

$$a_{S_2} = \pi s_2 \cdot \mu_a.$$

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Дайте визначення кінематичної схеми механізму.
2. Назвіть основні задачі кінематичного дослідження механізмів.
3. У якій послідовності проводиться кінематичний аналіз механізмів?
4. Як застосовуються теореми подібності для визначення швидкостей та прискорень точок ланок?
5. Схематично без розрахунків побудуйте план швидкостей і прискорень кривошипно – повзунного механізму.
6. Як визначаються напрями кутових швидкостей і прискорень?
7. У якій послідовності будуються плани положень механізмів?
8. Як визначаються крайні положення механізмів?
9. Що таке шатунна крива?
10. Яка послідовність побудови діаграм переміщень?

2.4. Тертя в механізмах і машинах

Реальні поверхні тіл є шорсткими з великою кількістю нерівностей і певною твердістю. В результаті при відносному переміщенні двох стичних тіл одного по другому на поверхні їх контакту виникає протидія цьому

переміщенню. В цьому випадку говорять про тертя.

Тертя належить до шкідливих явищ опору руху, на які частково витрачається енергія руху тіла, механізму або машини.

Тобто, *тертя – це опір відносному переміщенню двох стичних тіл.*

Процес тертя на сьогоднішній день теоретично вивчений недостатньо і тому, як правило, для визначення і врахування тертя користуються емпіричними залежностями, отриманими експериментально.

В цілому тертя являє собою складний комплекс фізичних явищ і процесів, з яких в залежності від умов ті чи інші переважають.

Розглянемо існуючі різновиди тертя. Розрізняють сухе та рідинне тертя. Тертя називається *сухим*, якщо виступаючи поверхні тіл дотикаються між собою, і *рідинним*, якщо вони розділені проміжним шаром мастила, тобто. безпосередньо не дотикаються.

Існує також *напівсухе* та *напіврідинне* тертя. Для них виступаючі поверхні не повністю розділяються шаром мастила. Різниця між ними полягає головним чином у тому, який з основних видів тертя переважає. У фрикційних, пасових та інших передачах спостерігається сухе тертя; в змащених підшипниках ковзання, підп'ятниках і т.д. – рідинне, яке іноді переходить в напівсухе чи навіть сухе (під час пуску машини).

По видам відносного руху стичних тіл розрізняють тертя ковзання і кочення (опір перекочуванню).

2.4.1. Сухе тертя ковзання тіл

Тертя ковзання поділяють на тертя спокою і тертя руху. Розглянемо тертя спокою.

Нехай тіло знаходиться в спокої на горизонтальній площині (рис. 2.18). На ньому позначені: \bar{Q} і \bar{T} – активні сили, відповідно; \bar{N} – нормальна реакція площини; \bar{F} – сила тертя, напрямлена паралельно площині у бік можливої відносної швидкості.

Сила тертя, яка має місце при відносному спокої тіл, називається *силою тертя спокою* чи *силою статичного тертя*, а сам процес – *тертям спокою* або *статичним*.

Рівняння рівноваги тіла (впливом перекидного моменту нехтуємо):

$$Q = N; \quad F = T.$$

Дослідами встановлено, що рівновага можлива, поки сила тертя спокою F не перевищує своє граничне значення F_c , тобто

$$F \leq F_c = f_c N,$$

де $f_c = \operatorname{tg} \varphi_c$ – коефіцієнт тертя спокою, φ_c – кут тертя спокою.

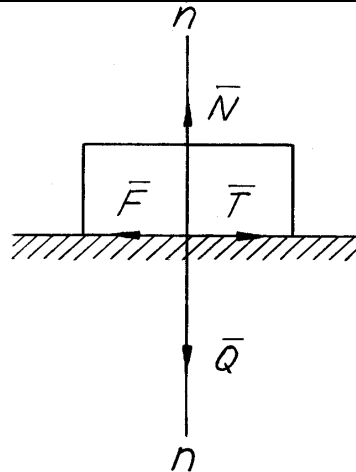


Рис. 2.18

Якщо стичні тіла знаходяться у відносному русі, то має місце *тертя руху* або *кінетичне тертя*.

Розглянемо сучасні погляди на сухе тертя.

Сила тертя руху за формулою Амонтонна – Кулона:

$$F = A + f_k N, \quad (2.7)$$

де f_k – коефіцієнт тертя ковзання; A – стала тертя, яка залежить не від тиску, а від здатності до попереднього зчеплення ("чіпкості") стичних поверхонь. Графічне зображення останнього співвідношення показано лінією 1 на рис. 2.19, а.

У більшості технічних розрахунків "чіпкістю" нехтують, користуючись формулою

$$F = fN, \quad (2.8)$$

де коефіцієнт тертя руху f визначається з дослідів і приймається сталим та однаковим для руху і спокою. Останній формулі відповідає лінія 2 на рис. 2.19, а.

Якщо силу тертя F з останньої формули підставити в передостанню, одержимо

$$fN = A + f_k N,$$

звідки

$$f = f_k + A/N. \quad (2.9)$$

Одержуємо гіперболічну залежність коефіцієнта тертя від нормального тиску (рис. 2.19, б).

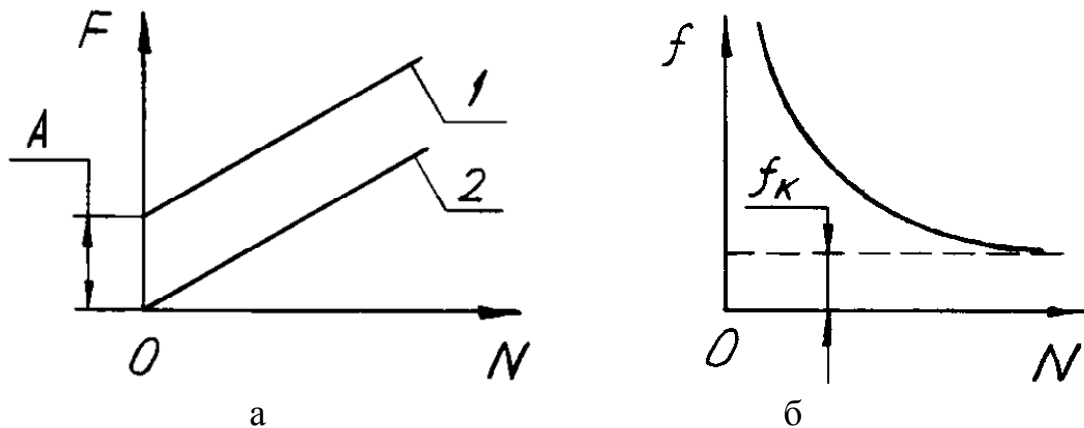


Рис. 2.19

Таким чином, сучасні погляди на сухе тертя наступні:

1. Коефіцієнт тертя f можна вважати сталим, а сили тертя F прямо пропорційними силам нормального тиску N тільки в певному діапазоні швидкостей v і навантажень N .
2. Сили тертя F завжди напрямлені в бік, протилежний відносним швидкостям v .
3. Граничне значення F_c сили тертя спокою в більшості випадків трохи більше сили тертя F руху.
4. Зі збільшенням швидкості руху v сила тертя F у більшості випадків зменшується, наближаючись до деякого сталого значення.
5. Із зростанням питомого тиску p сила тертя F у більшості випадків збільшується.
6. Зі збільшенням часу t попереднього контакту сила тертя F зростає.

2.4.2. Тертя поступальної кінематичної пари

Нехай повзун навантажений рівнодійною \bar{P} всіх активних сил (рис. 2.20). У свою чергу напрямна діє на повзун нормальною реакцією \bar{N} і силою тертя \bar{F} . Перенесемо силу \bar{P} вздовж її лінії дії в точку O і розкладемо на нормальну \bar{P}^n і тангенціальну \bar{P}^t складові.

Нехай повзун знаходиться в спокої. Повзун не зрушить з місця, якщо

$$P^t \leq F_c = Nf_c = P^n f_c = Pf_c \cos \alpha.$$

Але $P^t = P \sin \alpha$. Тоді

$$P \sin \alpha \leq Pf_c \cos \alpha; \quad \operatorname{tg} \alpha \leq f_c = \operatorname{tg} \varphi_c,$$

$$\alpha \leq \varphi_c.$$

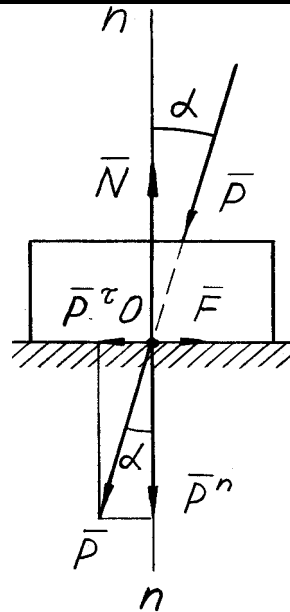


Рис. 2.20

Якщо $P^t > F_c$, повзун почне рухатись і тоді аналогічно виводиться, що $\alpha > \varphi_c$.

Якщо надати силі \bar{P} різні напрями в просторі, то область рівноваги буде обмежена конусом тертя спокою, який утворюється обертанням кута тертя спокою φ_c навколо нормалі $n - n$ до стичних поверхонь (рис. 2.21). Будь-яка сила \bar{P} , яка знаходиться всередині конуса, не зможе вивести його з стану спокою.

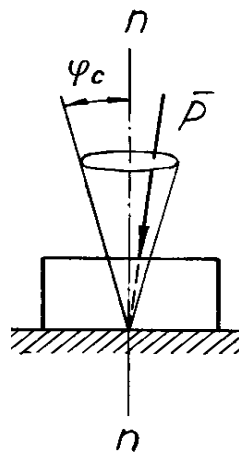


Рис. 2.21

Якщо повзун рухається, то сила тертя $F = fN$, де f – коефіцієнт тертя руху.

Знайдемо кут φ між повною реакцією \bar{R} і її нормальною складовою \bar{N} (рис. 2.22, а):

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{F}{N} = \frac{fN}{N} = f. \quad (2.10)$$

Кут φ називається кутом тертя руху.

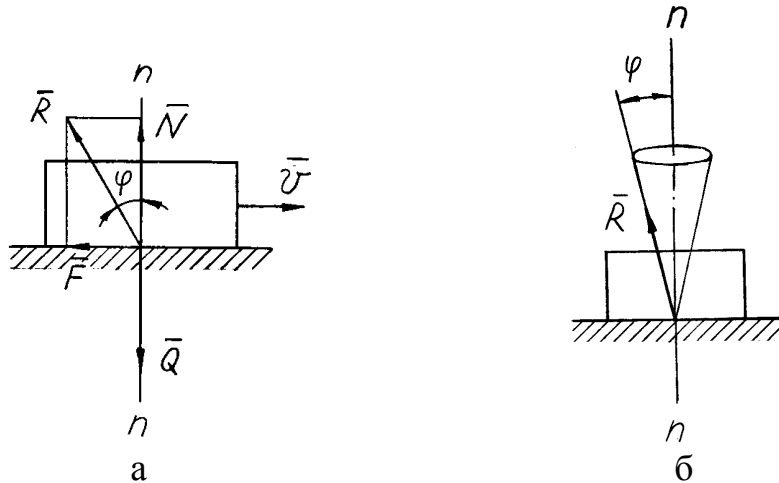


Рис. 2.22

Надамо швидкості \bar{v} різні напрями вздовж напрямної площини. Тоді повні реакції \bar{R} площини утворюють область, яка обмежується *твірними конуса тертя руху* (рис. 2.22, б). Цей конус утворюється обертанням кута тертя руху φ навколо нормалі $n - n$.

Таким чином, для врахування сил тертя в поступальній парі треба відхилити реакцію \bar{R} від напрямку нормалі $n - n$ на кут тертя руху φ у бік, протилежний напрямку швидкості \bar{v} повзуна відносно напрямної. Якщо повзун знаходиться в спокої, то реакція \bar{R} відхилена від нормалі $n - n$ на кут, менший кута тертя спокою φ_c .

2.4.3. Тертя клинчастого повзуна

Розглянемо тертя при русі клинчастого повзуна, що має вагу Q , центральний кут 2α при коефіцієнті тертя ковзання f (рис. 2.23).

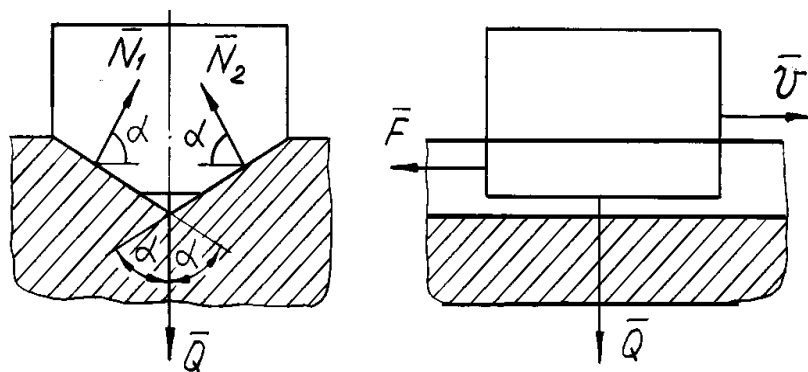


Рис. 2.23

Складаючи рівняння для суми проекцій сил на вертикальну вісь, одержимо:

$$(N_1 + N_2) \sin \alpha = Q;$$

$$2N_1 \sin \alpha = Q.$$

Сумарна сила тертя буде дорівнювати

$$F = F_1 + F_2 = N_1 f + N_2 f = 2N_1 f = \frac{Q}{\sin \alpha} f,$$

$$F = Qf', \quad (2.11)$$

де $f' = f / \sin \alpha$ - приведений коефіцієнт тертя клинчастого повзуна.

Звідси випливає, що коефіцієнт тертя f' в клинчастому повзуні більше, ніж у плоскому.

2.4.4. Тертя обертальної кінематичної пари

Нехай цапфа вала 1 завантажена радіальною силою \bar{Q} і обертається з кутовою швидкістю ω (рис. 2.24, а).

Між валом 1 і підшипником 2 є радіальний зазор. При наявності тертя цапфа буде "збігати" на підшипник. У точці дотику A виникає реакція \bar{R} , що паралельна \bar{Q} . За величиною ця реакція дорівнює

$$R = Q.$$

Визначаємо момент тертя відносно точки O :

$$M_T = R\rho,$$

де $\rho = r \sin \varphi$ - плече реакції \bar{R} .

При зміні напрямів сили \bar{Q} загальна реакція \bar{R} буде проходити по дотичній до кола радіуса ρ , описаного з центра вала (рис. 2.24, б).

Коло радіуса ρ по аналогії з конусом тертя називається *колом тертя*.

Для малих кутів тертя $\sin \varphi \cong \operatorname{tg} \varphi = f'$.

Тоді

$$M_T = Qrf', \quad (2.12)$$

де f' – коефіцієнт тертя в обертальній парі.

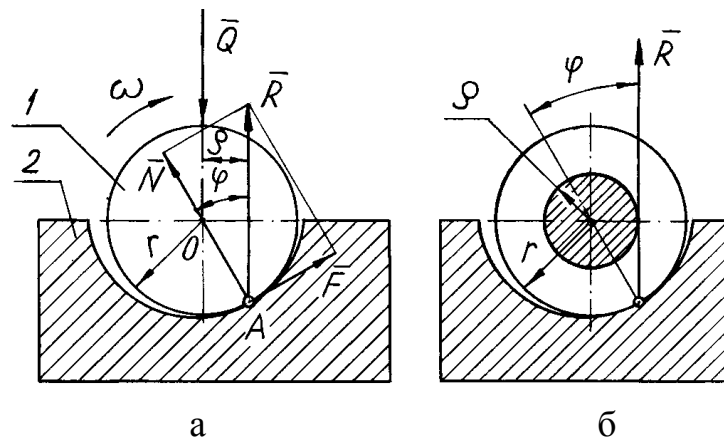


Рис. 2.24

Для неприпрацьованих цапф при сухому терті $f' = 3f/2$, для припрацьованих – $f' = 4f/3$, де f – коефіцієнт тертя для плоских поверхонь з тих же матеріалів.

2.4.5. Тертя ковзання змащених тіл

При рідинному терті відбувається в'язкий зсув окремих шарів мастила.

Для зручності технічних розрахунків рідинне тертя формально зводять до сухого. Для цього вводять поняття коефіцієнта рідинного тертя f , який залежить від швидкості v шарів мастила відносно один одного, навантаження P і динамічного коефіцієнта в'язкості η , $H \cdot c/mm$, тобто

$$f = f(v, P, \eta). \quad (2.13)$$

Ньютон знайшов дослідним шляхом, що при плоскопаралельному русі рідини величина сили в'язкого зсуву

$$T = S\eta \frac{dv}{dy}, \quad (2.14)$$

де S – площа поверхні ковзання; dv/dy – зміна швидкості (градієнт) по висоті шару.

Засновник теорії тертя змащених тіл Петров М.П. сформулював основні вимоги, необхідні для існування рідинного тертя:

1. Мазильна рідина повинна утримуватись у зазорі між поверхнями тертя, що знаходяться у відносному русі.

2. При відносному ковзанні змащених поверхонь у шарі мастила повинен виникати і підтримуватись внутрішній тиск, який зрівноважує зовнішнє навантаження, що притискує поверхні тіл одна до іншої.
3. Масильна рідина повинна повністю відокремлювати поверхні тертя, що ковзають.
4. Шар мастила між поверхнями тертя повинен мати товщину не менше мінімальної межі, яка визначається найбільш виступаючими висотами мікроповерхні.

2.4.6. Тертя кочення

Розглянемо нерухомий циліндр, притиснутий до площини силою \bar{Q} (рис. 2.25, а). Головний вектор реакцій \bar{N} і сила \bar{Q} зрівноважуються.

При перекочуванні циліндра по опорній поверхні зміна характеру деформації в зоні контакту приводить до перерозподілу сил нормального тиску. В результаті рівнодійна \bar{N} зміщується в бік руху на величину k (рис. 2.25, б).

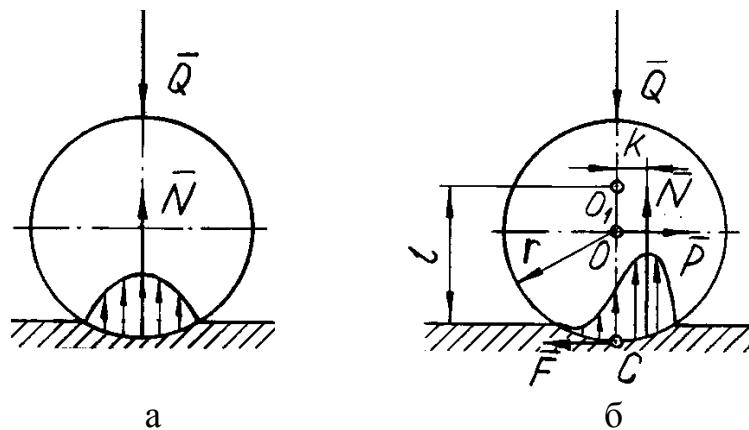


Рис. 2.25

Величину k називають *плечем пари тертя кочення* чи *коефіцієнтом тертя кочення*. Він має розмірність довжини.

При рівномірному перекочуванні циліндра рушійна сила P дорівнює за величиною силі тертя F .

Складемо рівняння моментів відносно точки C :

$$-P \cdot r + N \cdot k = 0,$$

де $Nk = Qk$ – момент опору перекочуванню або момент тертя при перекочуванні, $P \cdot r$ – момент рушійної сили.

З останнього рівняння

$$P = kQ/r. \quad (2.15)$$

Тобто, *рушійна сила P при перекочуванні циліндра по поверхні прямо пропорційна коефіцієнту тертя кочення k і обернено пропорційна радіусу циліндра r .*

Якщо сила P прикладена не в точці O , а в точці O_1 , необхідно в останніх формулах замінити r на l (рис. 2.25, б).

Тертя кочення у більшості випадків менше ніж тертя ковзання, тому по можливості найбільш доцільно застосовувати в механізмах елементи з'єднань з тертям кочення.

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Що уявляє собою сила тертя?
2. Чим відрізняється сухе тертя від рідинного?
3. Якою є умова рівноваги тіла з урахуванням тертя спокою?
4. Наведіть формулу для визначення сили тертя руху.
5. Викладіть сучасні погляди на сухе тертя.
6. Як враховуються сили тертя в поступальній кінематичній парі?
7. Як визначається коефіцієнт тертя клинчастого повзуна?
8. Які шляхи зменшення рушійної сили при рівномірному перекочуванні циліндра?
9. Наведіть основні вимоги, необхідні для існування рідинного тертя.
10. Напишіть формулу для розрахунку моменту тертя в обертальній кінематичній парі.

2.5. Динаміка машин

Предметом динаміки машин є вивчення їх руху із врахуванням діючих сил.

Розрізняють дві основні задачі динаміки машин.

Першою є задача силового аналізу. У ній по заданому закону руху початкової ланки визначають зовнішні сили, які забезпечують цей рух.

Другою є задача динаміки машин, у якій по заданим зовнішнім силам визначається закон руху початкової ланки.

2.5.1. Сили, які діють у машинах

Всі сили, що діють на машину можна розділити на задані сили і сили реакцій в'язей.

Задані сили обумовлені характером роботи машини і її призначенням.

Сили реакцій в'язей (наприклад реакцій в кінематичних парах) визначаються із силових розрахунків методом кінетостатики.

Задані сили, які прикладенні до ланок механізму і машини, поділяють на *рушійні та опору*. Перші намагаються прискорити рух, другі – сповільнити.

Рушійні сили приводять машину у рух. Вони виконують додатну роботу. Ними можуть бути: тиск газу, пари, повітря, рідини, електромагнітні сили, сили пружності, тяжіння.

Сили опору поділяються на сили *корисного опору*, для подолання яких призначений механізм, і *шкідливого опору*, до яких відносяться сили тертя в кінематичних парах. Прикладом сил корисного опору може бути опір деревини різанню в деревообробних станках, опір ґрунту при його обробці і т.п.

Робота сил опору є від'ємною, оскільки ці сили напрямлені протилежно напрямку руху точки їх прикладення або складають з напрямком руху тупий кут.

Сили ваги та сили інерції залежно від напрямку їх дії відносяться до рушійних сил чи сил опору.

Сили ваги проявляють себе при зміні положення центра ваги ланок механізму і машини відносно горизонту. Сили інерції виникають при криволінійному і прямолінійному нерівномірному русі ланок механізму і машини. Робота цих сил може бути додатною, або від'ємною в залежності від напрямку дії цих сил.

2.5.2. Механічні характеристики машин

При динамічному дослідженні машин рушійні сили і сили опору задаються у вигляді механічних характеристик.

Механічними характеристиками машин називаються залежності рушійних сил та сил опору від часу, швидкості, шляху та інших величин. Механічні характеристики машин визначаються в основному експериментально.

Розглянемо залежності моментів і потужностей від кутової швидкості $M = M(\omega)$, $P = P(\omega)$. Вони прикладені до веденого валу двигуна або ведучого валу робочої машини. Потужність і момент зв'язані співвідношенням $P = M\omega$.

На рис. 2.26, а показано механічну характеристику електродвигуна постійного струму з паралельним (—) і послідовним (---) збудженням. Залежність $M(\omega)$ завжди спадає. Двигун працює стійко при довільних значеннях ω .

На рис. 2.26, б зображено механічну характеристику асинхронного електродвигуна змінного струму. На зростаючій частині характеристики

ка двигун працює не стійко, на спадній ac – стійко.

Механічні характеристики робочих машин (рис. 2.26 в) є звичайно зростаючими кривими. Це пояснюється зростанням тертя, сил опорів при збільшенні швидкості.

Залежності середніх за цикл руху моменту і потужності на головному валу двигуна внутрішнього згоряння зображені на рис. 2.26, г.

Закон зміни тиску p газу в циліндрі двигуна внутрішнього згоряння або компресора від переміщення s поршня (рис. 2.27, а) задається індикаторною діаграмою.

Для чотиритактного двигуна внутрішнього згоряння повний цикл роботи відповідає двом обертам кривошипа.

Фази індикаторної діаграми (рис. 2.27, б): ra – всмоктування; ac – стиснення; $cz'z$ – згоряння пального; zb – розширення; br – вихлоп. Стрілками показаний напрям ходу процесу.

Механічна характеристика стругального верстата (рис. 2.27, в) подається у вигляді залежності сили F різання від переміщення різця s .

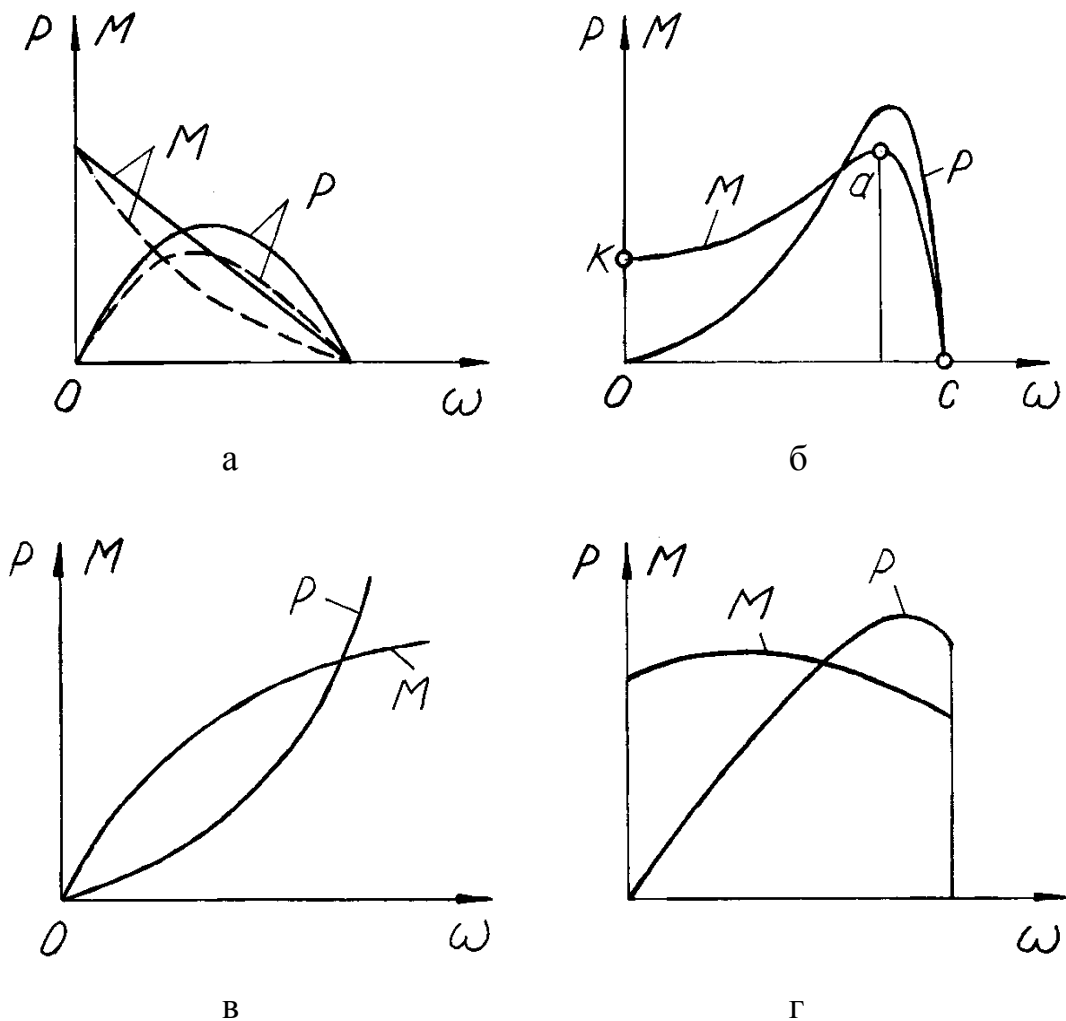


Рис. 2.26

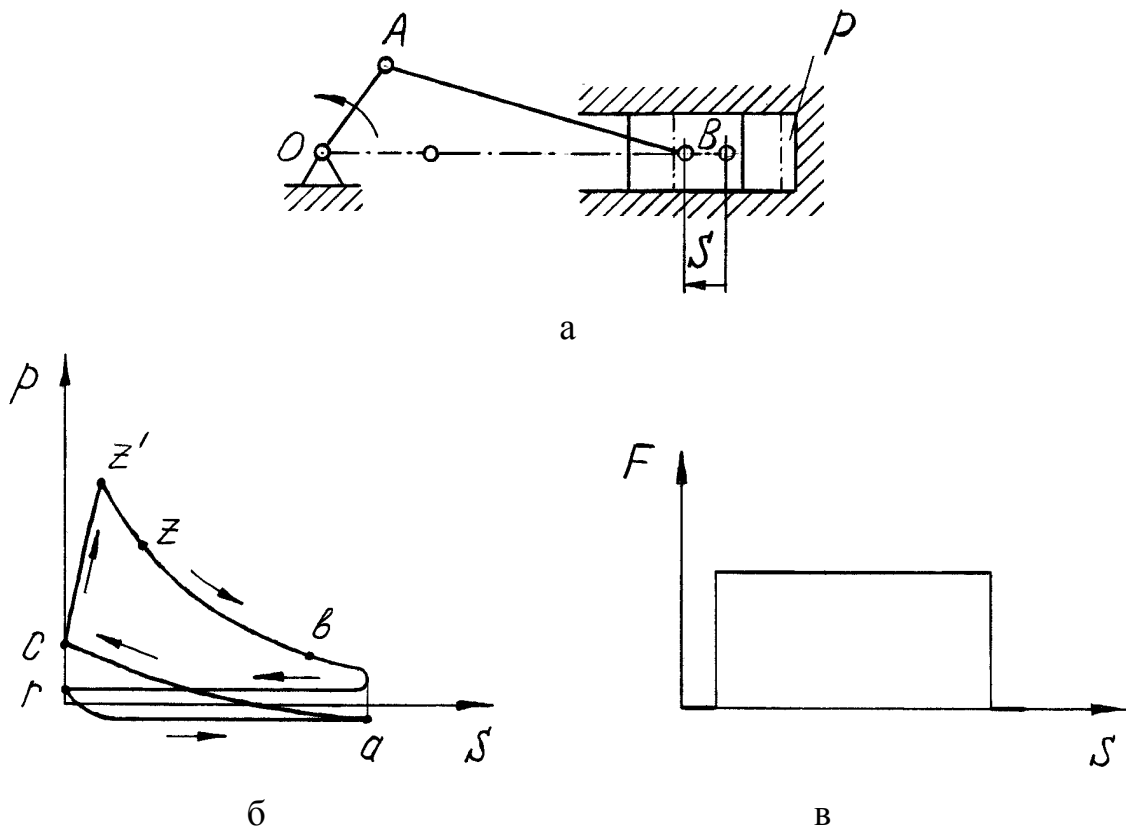


Рис. 2.27

2.5.3. Кінетична енергія механізму і машини.

Зведення мас в механізмах

Кінетична енергія є важливою динамічною характеристикою механізму і машини. В цілому кінетична енергія механізму T може бути визначена як сума кінетичних енергій його ланок

$$T = \sum_{i=1}^n T_i, \quad (2.16)$$

де i – номер ланки; n – кількість ланок; T_i – кінетична енергія ланки i .

Якщо ланки механізму – тверді тіла, що здійснюють плоскопаралельний рух, то кінетична енергія довільної ланки дорівнює:

$$T_i = \frac{m_i v_{S_i}^2}{2} + \frac{J_{S_i} \omega_i^2}{2}, \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n), \quad (2.17)$$

де m_i , ω_i – маса та кутова швидкість i -тої ланки, v_{S_i} , швидкість центра мас i -тої ланки, J_{S_i} – момент інерції i -тої ланки відносно її центра мас.

Дана формула є загальною для плоскопаралельного руху ланок. Для

окремих ланок механізму вона спрощується.

Для повзуна:
$$T_n = \frac{m_n v_n^2}{2}.$$

Для ротора електродвигуна:
$$T_e = \frac{J_e \omega_e^2}{2}.$$

Для зрівноваженого кривошипа:
$$T_l = \frac{J_l \omega_l^2}{2}.$$

Кінетична енергія всього механізму в загальному вигляді дорівнює:

$$T = \sum_{i=1}^n \frac{m_i v_{S_i}^2}{2} + \sum_{i=1}^n \frac{J_{S_i} \omega_i^2}{2}. \quad (2.18)$$

В задачах динаміки механізмів і машин всі ланки механізму з одним ступенем вільності зручно замінити однією еквівалентною їм ланкою зведення із еквівалентною зведеною масою і зведеним моментом інерції.

Ланкою зведення для важільних механізмів, як правило, є кривошип. Тоді динамічна модель механізму буде включати тільки одну ланку (рис. 2.28), що дозволяє отримати динамічні рівняння руху машини і механізму в простому і компактному вигляді.

Зведеною масою $m_{3\delta}$ механізму називається умовна маса, яка зосереджена в точці на ланці зведення, кінетична енергія якої дорівнює кінетичній енергії всього механізму:

$$T_{3\delta} = \sum_{i=1}^n T_i, \quad (2.19)$$

де T_i – кінетична енергія i -тої ланки.

Виходячи з цього, кінетична енергія механізму буде дорівнювати:

$$T = \frac{m_{3\delta} v_{3\delta}^2}{2}, \quad (2.20)$$

де $m_{3\delta}$, – зведена маса механізму, $v_{3\delta}$ – швидкість точки зведення.

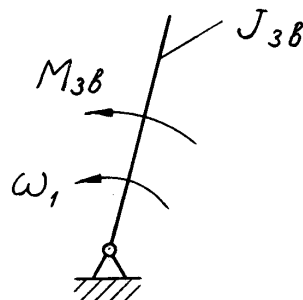


Рис. 2.28

За точку зведення маси механізму, як правило, вибирають точку з'єднання кривошипа (ведучої ланки) з групою Ассура.

Порівнявши загальний вираз для T з останнім рівнянням, одержимо:

$$\frac{m_{36} v_{36}^2}{2} = \sum_{i=1}^n \frac{m_i v_{S_i}^2}{2} + \sum_{i=1}^n \frac{J_{S_i} \omega_i^2}{2},$$

Звідки зведена маса механізму визначається як:

$$m_{36} = \sum_{i=1}^n m_i \left(\frac{v_{S_i}}{v_{36}} \right)^2 + \sum_{i=1}^n J_{S_i} \left(\frac{\omega_i}{v_{36}} \right)^2. \quad (2.21)$$

Аналогічно можна визначити *зведений момент інерції* ланки зведення.

Зведеним до ланки моментом інерції J_{36} механізму називається такий момент інерції, з яким ланка зведення має кінетичну енергію, що дорівнює кінетичній енергії всього механізму в цілому.

Тоді кінетична енергія механізму буде дорівнювати:

$$T = \frac{J_{36} \omega_1^2}{2}, \quad (2.22)$$

де J_{36} – зведений до кривошипа момент інерції ω_1 , – кутова швидкість ланки зведення (кривошипа).

Порівнявши загальний вираз для T з останнім рівнянням, одержимо:

$$\frac{J_{36} \omega_1^2}{2} = \sum_{i=1}^n \frac{m_i v_{S_i}^2}{2} + \sum_{i=1}^n \frac{J_{S_i} \omega_i^2}{2},$$

звідки зведений момент інерції механізму дорівнює:

$$J_{36} = \sum_{i=1}^n m_i \left(\frac{v_{S_i}}{\omega_1} \right)^2 + \sum_{i=1}^n J_{S_i} \left(\frac{\omega_i}{\omega_1} \right)^2. \quad (2.23)$$

Відношення в (4.22) визначаються як відношення відповідних відрізків плану швидкостей і тому вони разом із J_{36} не залежать від кутової швидкості ведучої ланки, а залежать тільки від кута її повороту.

Зведення сил в механізмах

При дослідженні руху машини і механізму наряду із поняттям зведеної маси і зведеного моменту інерції користуються поняттями *зведеної сили* і *зведеного моменту сил*, які прикладені до ланки зведення і замінюють діючі на всі ланки механізму рушійні сили і сили опору.

Така заміна буде еквівалентною, якщо потужність зведеної сили або

Теорія механізмів і машин

зведеного моменту дорівнюватиме потужності всіх діючих на механізм сил і моментів сил:

$$P_{36} = \sum_{i=1}^n P_i, \quad (2.24)$$

де i – номер ланки; n – кількість рухомих ланок; P_i – потужність усіх сил і моментів, прикладених до i -тої ланки.

Виходячи з цього, у випадку визначення зведеної сили загальна потужність механізму буде дорівнювати:

$$P = F_{36} v_{36},$$

де F_{36} – зведена сила, v_{36} – швидкість точки зведення.

Враховуючи, що всі сили, діючі на ланку механізму, можна звести до однієї сили і одного моменту, отримаємо:

$$P = \sum_{i=1}^n F_i v_i \cos \alpha_i + \sum_{i=1}^n M_i \omega_i,$$

де F_i , M_i – сила і момент, які діють на i -ту ланку механізму; v_i – швидкість точки прикладання сили F_i ; α_i – кут між векторами сили \vec{F}_i і швидкості \vec{v}_i ; ω_i – кутова швидкість i -ї ланки.

Прирівнявши два останніх вирази для P , одержимо:

$$F_{36} v_{36} = \sum_{i=1}^n F_i v_i \cos \alpha_i + \sum_{i=1}^n M_i \omega_i,$$

звідки зведена сила дорівнює:

$$F_{36} = \sum_{i=1}^n F_i \frac{v_i}{v_{36}} \cos \alpha_i + \sum_{i=1}^n M_i \frac{\omega_i}{v_{36}}. \quad (2.25)$$

Аналогічно можна визначити *зведений момент сил*, прикладений до ланки зведення. В цьому випадку загальна потужність механізму визначається так:

$$P = M_{36} \omega_1,$$

де M_{36} – заведений момент сил; ω_1 – кутова швидкість кривошипа.

Порівнявши загальний вираз для P з останнім рівнянням, одержимо:

$$M_{36} \omega_1 = \sum_{i=1}^n F_i v_i \cos \alpha_i + \sum_{i=1}^n M_i \omega_i,$$

звідки зведений момент сил дорівнює:

$$M_{36} = \sum_{i=1}^n F_i \frac{v_i}{\omega_1} \cos \alpha_i + \sum_{i=1}^n M_i \frac{\omega_i}{\omega_1}. \quad (2.26)$$

Визначимо відношення швидкостей, що входять в останню формулу:

$$\frac{v_i}{\omega_1} = l_{OA} \frac{v_i}{v_A};$$

якщо друга ланка шатун, то

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{v_{BA}/l_{AB}}{v_A/l_{OA}} = \frac{l_{OA}}{l_{AB}} \frac{v_{BA}}{v_A}.$$

Аналогічно визначаються відношення ω_i/ω_1 . Відношення швидкостей визначається, як відношення відповідних відрізків плану швидкостей, і тому вони, як і $J_{3\phi}$, залежать тільки від положення механізму та не залежать від кутової швидкості кривошипа.

2.5.4. Рівняння руху машини

В загальному випадку *рівняння руху* машини, як сукупності двигуна, передаточних механізмів і механізму робочої машини, можна представити через закон зміни її кінетичної енергії або інтеграла енергії:

$$A = A_{p.c.} - A_{on.} = T - T_0, \quad (2.27)$$

де A , $A_{p.c.}$, $A_{on.}$ – відповідно сумарна робота всіх сил, рушійних сил і сил опору; T і T_0 – кінетична енергія машини в кінці і на початку руху.

Враховуючи, що сумарна робота сил опору $A_{on.}$ складається із роботи сил корисного опору $A_{к.с.}$ і шкідливого опору $A_{ш.с.}$, можемо записати:

$$A_{p.c.} - A_{к.с.} - A_{ш.с.} = T - T_0. \quad (2.28)$$

Останнє рівняння називається загальним рівнянням руху машини в кінцевій або інтегральній формі.

Якщо всі сили і моменти сил, а також маси і моменти інерції ланок звести до ланки зведення, то дане рівняння можна представити двома способами: у формі рівняння сил або у формі рівняння моментів сил.

В першому випадку визначають сумарну потужність P всіх сил, діючих на машину, через зведену силу $F_{3\phi}$ і швидкість $v_{3\phi}$ точки зведення:

$$P = F_{3\phi} v_{3\phi},$$

звідки сумарна елементарна робота всіх сил за елементарний проміжок часу dt буде дорівнювати:

$$dA = P dt = F_{3\phi} v_{3\phi} dt = F_{3\phi} dS,$$

де dS - елементарне прирощення дугової координати точки зведення.

Теорія механізмів і машин

Відповідно повна робота за кінцевий проміжок часу $\Delta t = t - t_0$ визначається рівнянням:

$$A = \int_{S_0}^S F_{зв.} dS,$$

де S і S_0 - кінцеве і початкове значення дугової координати точки зведення.

Таким чином, остаточно рівняння руху машини у формі рівняння сил буде мати вигляд:

$$\int_{S_0}^S F_{зв.} dS = \frac{1}{2} (m_{зв} v_{зв}^2 - m_{зв.0} v_{зв.0}^2), \quad (2.29)$$

де $m_{зв}$, $m_{зв.0}$ - відповідно зведена маса машини в кінці і на початку руху, $v_{зв}$, $v_{зв.0}$ - лінійна швидкість точки зведення в кінці і на початку руху.

Аналогічно через роботу зведеного моменту всіх сил, що діють на машину, можна отримати загальне рівняння руху машини у формі рівняння моментів сил:

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} M_{зв.} d\varphi = \frac{1}{2} (J_{зв} \omega^2 - J_{зв.0} \omega_0^2), \quad (2.30)$$

де $M_{зв}$ - зведений момент усіх сил в машині; φ , φ_0 - кут повороту кривошипа в кінці та на початку руху, $J_{зв}$, $J_{зв.0}$ - зведений момент інерції машини в кінці і на початку руху; ω , ω_0 - кутова швидкість ланки зведення в кінці і на початку руху.

При більш точному дослідженні руху і врахуванні змінних значень параметрів $m_{зв.}$ і $J_{зв.}$ (наприклад, при $J_{зв.} = J_{зв.}(\varphi)$) рівняння руху зручно виразити у диференціальній формі.

Для цього продиференціюємо рівняння руху моментів сил по φ . В результаті отримаємо:

$$M_{зв.} = \frac{1}{2} \frac{d}{d\varphi} (J_{зв.} \omega^2) = \frac{1}{2} \omega^2 \frac{dJ_{зв.}}{d\varphi} + \frac{1}{2} J_{зв.} \cdot 2\omega \frac{d\omega}{d\varphi}. \quad (2.31)$$

Добуток в рівнянні (4.30):

$$\omega \frac{d\omega}{d\varphi} = \frac{d\omega}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt}.$$

Вважаємо ω складною функцією часу, тобто $\omega(\varphi(t))$. Тоді

$$\frac{d\omega}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\omega}{dt} = \varepsilon,$$

де ε – кутове прискорення кривошипа.

Підставляючи цей добуток у останнє рівняння, знаходимо

$$M_{36} = J_{36} \varepsilon + \frac{\omega^2}{2} \frac{dJ_{36}}{d\varphi}. \quad (2.32)$$

Слід зауважити, що використання рівнянь руху можливо, коли $F_{36} = const$ або $F_{36} = F_{36}(S)$ і $M_{36} = const$ або $M_{36} = M_{36}(\varphi)$, тобто коли зведені сили і моменти сил, що діють на машину, є або сталими, або залежать тільки від положення її рухомих частин (наприклад двигун внутрішнього згоряння при умові, що опір при роботі машини залишається майже незмінним).

2.5.5. Дослідження руху машини. Стадії руху

Для аналізу характерних стадій руху машини розглянемо її енергетичний баланс. Для цього використаємо загальне рівняння руху машини, виражене через закон зміни кінетичної енергії її рухомих частин.

Розрізняють три характерні стадії руху машини: пуск або розбіг, усталений рух і вибіг, що закінчується зупинкою.

На стадії *розбігу* швидкість ведучої ланки машини зростає від нуля до швидкості усталеного руху. Так як на початку руху кінетична енергія машини $T_0 = 0$, то із загального рівняння руху машини маємо:

$$A_{p.c.} - A_{k.c.} - A_{ш.c.} = T,$$

або

$$A_{p.c.} = A_{k.c.} + A_{ш.c.} + T. \quad (2.33)$$

Тобто, на стадії розбігу енергія рушійних сил витрачається не тільки на подолання корисних і шкідливих сил опору, але і на збільшення кінетичної енергії машини. Тому робота рушійних сил має бути більше сумарної роботи сил опору. Скорочення часу розбігу можна досягти шляхом збільшення потужності двигуна і зменшення сил шкідливого опору. Часто для цієї мети на стадії розбігу робоче навантаження (корисний опір технологічного процесу) в машинах також знімають (холостий хід). В такому разі:

$$A_{p.c.} = A_{ш.c.} + T. \quad (2.34)$$

На стадії *усталеного руху* лишається постійною, або коливається біля свого середнього значення. Такі коливання у більшості випадків носять

Теорія механізмів і машин

періодичний (циклічний) характер із постійним значенням параметрів циклу. При цьому зміна кінетичної енергії машини за весь період усталеного руху або за період, кратний циклу зміни швидкості, дорівнює нулю. Тоді загальне рівняння руху машини буде мати вигляд:

$$A_{p.c.} = A_{к.с.} + A_{ш.с.} \quad (2.35)$$

Тобто, на стадії усталеного руху енергія рушійних сил витрачається тільки на подолання корисних і шкідливих сил опору. Чим меншою буде робота шкідливих сил опору (сил тертя і т.п.), тим корисніше буде витрачатись енергія в машині. При цьому робота рушійних сил має дорівнювати сумарній роботі сил опору. Порушення цього балансу приведе до зміни кінетичної енергії машини, тобто, до порушення усталеного руху машини.

На стадії *вибігу* двигун машини відключається і швидкість ведучої ланки машини зменшується до нуля. При зупинці кінетична енергія машини $T=0$. Робота рушійних сил на цій стадії $A_{p.c.}=0$ (двигун відключений). Тоді загальне рівняння руху машини буде мати вигляд:

$$A_{к.с.} - A_{ш.с.} = T_0. \quad (2.36)$$

Таким чином, машина може зупинитись, коли вся кінетична енергія її рухомих частин буде витрачена на подолання сил корисного і шкідливого опору. Час вибігу можна скоротити шляхом додаткового збільшення сил шкідливого опору (гальмування). В такому разі:

$$A_{к.с.} - A_{ш.с.} - A_{z.c.} = T_0, \quad (2.37)$$

де $A_{z.c.}$ - робота гальмівних сил.

Всі вищенаведені загальні рівняння руху машини ще називають *рівняннями енергетичного балансу машини*, так як вони встановлюють необхідний розподіл енергії, потрібний для кожної стадії її руху.

Розглянемо рух машини, коли в початкових умовах задані зведені моменти рушійних сил $M_{зр}(\varphi)$ і сил опору $M_{зо}(\varphi)$ у вигляді графічних залежностей від кута повороту φ ланки зведення. В такому випадку розв'язання рівняння руху ведеться графоаналітичним методом.

Нехай графіки виконані в масштабі зведених моментів μ_M та кута повороту μ_φ ланки зведення. Для трьох характерних режимів руху машини: розбігу, усталеного руху і вибігу, відповідають кути φ_p , φ_y , φ_B , а одному оберту ланки зведення відповідає кут φ_o (рис. 2.29).

Тоді робота зведеного моменту сил буде дорівнювати:

$$A_{зв} = \int_0^{\varphi} (M_{зр} - M_{зо}) d\varphi. \quad (2.38)$$

Ця робота відповідає алгебраїчній сумі S заштрихованих площ S_i на діаграмі. Площі S_i беруться зі знаком "+", якщо $M_{зр} > M_{зо}$ і "-" – у протилежному випадку.

Робота підраховується за формулою

$$A_{зв} = S \mu_M \mu_{\varphi}. \quad (2.39)$$

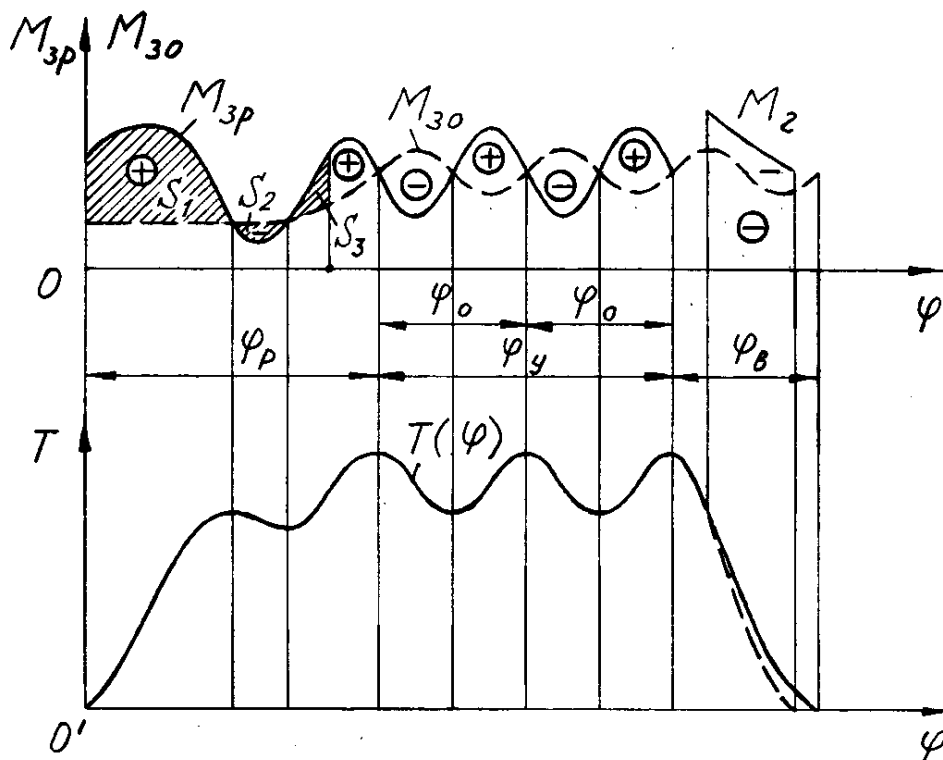


Рис. 2.29

Для показаного на рис. 2.29 кута повороту φ робота дорівнює:

$$A_{зв} = (S_1 - S_2 + S_3) \mu_M \mu_{\varphi}.$$

Аналогічно визначається робота для інших кутів повороту.

Оскільки в моменти пуску і зупинки кутова швидкість ланки зведення дорівнює нулю, то приріст кінетичної енергії ΔT за весь час роботи машини дорівнює нулю. Звідси, сума робіт чи площ зі знаком "+" дорівнює їх сумі зі знаком "-".

Час зупинки машини скорочується, якщо в режимі вибігу прикласти гальмівний момент M_2 (рис. 2.29).

2.5.6. Коефіцієнт корисної дії машини

Як відомо з динаміки, коефіцієнт корисної дії (ККД) характеризує відносну кількість енергії, що використовується в машині за прямим призначенням. Він дорівнює відношенню корисної роботи або середньої потужності до витраченої:

$$\eta = \frac{A_{\text{кор}}}{A_{\text{випр}}} = \frac{N_{\text{кор}}}{N_{\text{випр}}}.$$

Враховуючи, те що корисна робота в машині – це робота подолання всіх сил корисного опору (опору технологічного процесу), а витрачена робота – робота рушійних сил, то ККД машини можна визначити співвідношенням:

$$\eta = \frac{A_{\text{к.с.}}}{A_{\text{р.с.}}} = \frac{N_{\text{к.с.}}}{N_{\text{р.с.}}} < 1. \quad (2.40)$$

ККД машини є однією із важливіших характеристик її якості і раціональності. Чим більша величина η , тим більша частина енергії витрачається в машині корисно і тим менше доля втрат на шкідливий опір.

На збільшення величини ККД впливають фактори, пов'язані з конструкцією машини і її експлуатацією: наприклад, застосування підшипників кочення замість ковзання, а також застосування мастил.

Якщо машина складається із n послідовно з'єднаних механізмів, то кожен із наступних механізмів машини отримує рух від відомої ланки попереднього механізму (рис. 2.30, а). Загальний ККД такої машини η дорівнює добутку ККД всіх механізмів, що входять до її складу:

$$\eta = \frac{A_{\text{р.с.}} \cdot \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \dots \cdot \eta_n}{A_{\text{р.с.}}} = \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \eta_n. \quad (2.41)$$

Якщо машина складається із n паралельно з'єднаних механізмів, то кожен з цих механізмів має одне і теж загальне джерело енергії (рис. 2.30, б). Загальний ККД такої машини η дорівнює ККД кожного механізму, що входить до її складу:

$$\eta = \frac{A_{\text{р.с.}} \cdot \eta_1}{A_{\text{р.с.}}} = \frac{A_{\text{р.с.}} \cdot \eta_2}{A_{\text{р.с.}}} = \dots = \frac{A_{\text{р.с.}} \cdot \eta_n}{A_{\text{р.с.}}} = \eta_1 = \eta_2 = \dots = \eta_n. \quad (2.42)$$

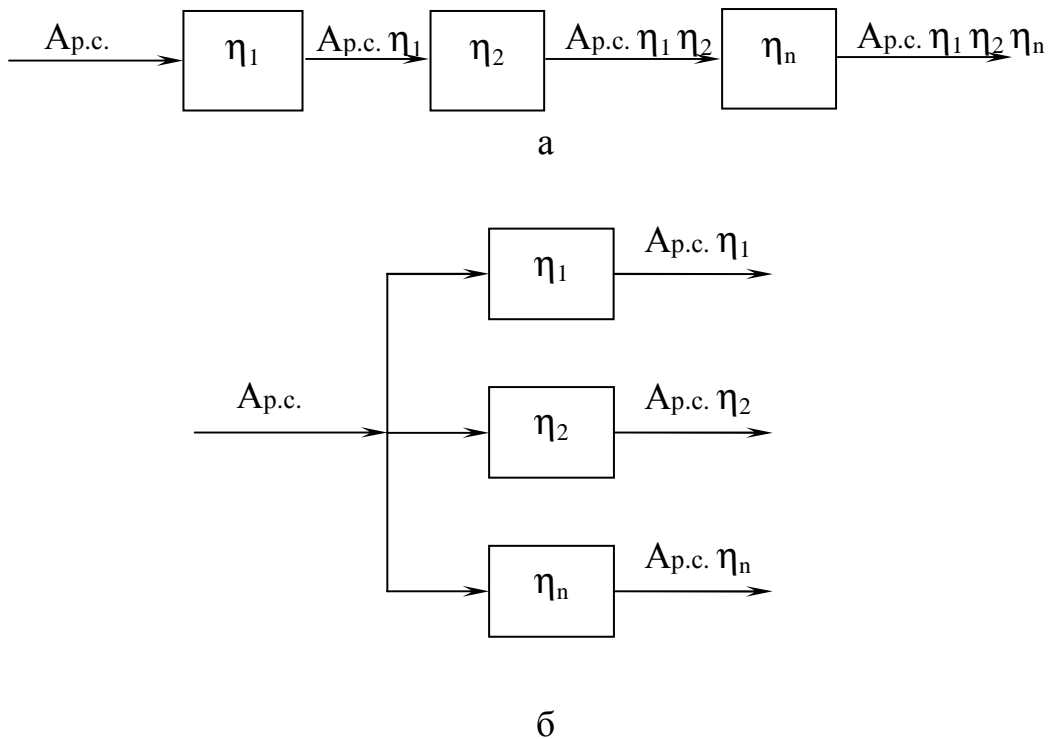


Рис. 2.30

2.5.7. Регулювання ходу машин

Основною задачею регулювання ходу машин є забезпечення необхідної рівномірності її руху. Це досягається шляхом зменшення коливань кутової швидкості головного вала ведучої ланки до меж, допустимих вимогами технологічного процесу.

Розглянемо причини виникнення нерівномірності ходу машини в період її усталеного руху.

За повний період циклу усталеного руху робота рушійних сил в машині дорівнює роботі сил опору. При цьому середнє значення зведеного моменту рушійних сил дорівнює середньому значенню зведеного моменту сил опору:

$$A_{p.c.} - A_{on.} = 0, \quad M_{зв.p.c.} - M_{зв.on.} = 0.$$

Але в дійсності на протязі одного циклу оберту зведені моменти $M_{зв.p.c.}$, $M_{зв.on.}$ періодично змінюються в залежності від кута повороту φ ведучої ланки, що приводить до періодичної зміни балансу робіт рушійних сил і сил опору. Тому, не дивлячись на те, що кутові швидкості на початку і в кінці періоду циклу однакові, головний вал ведучої ланки машини обертається нерівномірно (рис. 4.34).

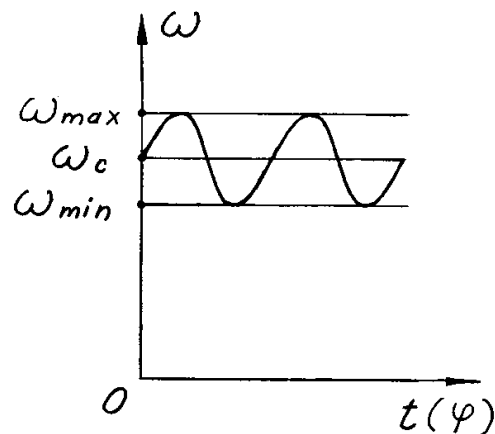


Рис. 2.31

Такі коливання кутової швидкості з періодичною зміною своєї величини за один цикл оберту головного валу називаються *періодичними*.

Періодичні коливання кутової швидкості виникають в машинах, в яких сили, діючі на ланки, змінюються періодично в певній залежності від кута повороту ведучої ланки (двигуни внутрішнього згоряння, поршневі насоси і т.п.). Величина цих коливань залежить, в першу чергу, від конструктивних особливостей машини.

Для характеристики коливань швидкості машини в період усталеного руху вводиться коефіцієнт нерівномірності руху:

$$\delta = \frac{\omega_{max} - \omega_{min}}{\omega_c}, \quad (2.43)$$

де ω_{max} , ω_{min} , ω_c – відповідно максимальна, мінімальна і середня кутова швидкість головного валу (рис. 2.31), $\omega_c = (\omega_{max} + \omega_{min})/2$.

Допустимі межі зміни коефіцієнта нерівномірності руху для кожного типу машин визначаються експериментально і наведені в довідковій літературі. Наприклад, для насосів – від 1/5 до 1/30, для двигунів внутрішнього згоряння – від 1/80 до 1/100, для генераторів змінного струму – від 1/200 до 1/300.

В машинах можуть виникнути також *неперіодичні* коливання кутової швидкості ведучої ланки. Такі коливання в машині не пов'язані з її конструкцією і викликані зміною балансу між роботою рушійних сил і сил опору внаслідок зміни на тривалий час режиму роботи машини (наприклад, збільшення або зменшення робочого навантаження або зміни підведеної енергії).

Для забезпечення рівномірності ходу при періодичних коливаннях на вал кривошипа машини встановлюють масивне *махове колесо* з важким ободом – *маховик*, який має великий момент інерції.

При неперіодичних коливаннях для регулювання рівномірності ходу машини застосовують спеціальні регулюючі пристрої – *регулятори швидкості*.

Принцип дії маховика полягає у тому, що внаслідок свого великого моменту інерції маховик збільшує інерційність механічної системи, що і усуває значні періодичні зміни кутової швидкості. Чим більший момент інерції маховика тим краще стабілізується кутова швидкість.

Маховик накопичує кінетичну енергію на ділянках циклу, де робота і зведений момент рушійних сил перевищують роботу і зведений момент сил опору, і віддає енергію на ділянках циклу, де це співвідношення протилежне.

Тобто, *маховик грає роль механічного акумулятора енергії машини*.

Розрахунок маховика зводиться до визначення його моменту інерції, який повинен забезпечити умови відхилення кутової швидкості ведучої ланки машини в заданих межах.

Зміна кінетичної енергії ведучої ланки зведення при зміні її кутової швидкості і порушенні рівності між зведеним моментом рушійних сил і зведеним моментом сил опору може бути виражено рівнянням:

$$\frac{J_{зв} \omega_{max}^2}{2} - \frac{J_{зв} \omega_{min}^2}{2} = \Delta A_{max}, \quad (2.44)$$

де ΔA_{max} – максимальна надлишкова робота зведеного моменту сил за проміжок часу зміни кутової швидкості від мінімального ω_{min} до максимального ω_{max} значень.

ΔA_{max} може бути визначена із графічних залежностей зведених моментів рушійних сил $M_{зр}(\varphi)$ і сил опору $M_{зо}(\varphi)$ (рис. 2.29) та кутової швидкості $\omega(\varphi)$ від кута повороту φ ланки зведення (рис. 2.31).

Перетворюючи останнє рівняння, отримаємо:

$$\frac{J_{зв} (\omega_{max}^2 - \omega_{min}^2)}{2} = J_{зв} \cdot \frac{(\omega_{max} - \omega_{min})}{\omega_c} \cdot \frac{(\omega_{max} + \omega_{min})}{2} \cdot \omega_c = \Delta A_{max},$$

$$J_{зв} \cdot \delta \cdot \omega_c^2 = \Delta A_{max}.$$

Звідки зведений момент інерції ланок механізму машини буде дорівнювати:

$$J_{зв} = \frac{\Delta A_{max}}{\delta \cdot \omega_c^2}, \quad (2.45)$$

де δ – коефіцієнт нерівномірності руху, ω_c – середня кутова швидкість ведучої ланки зведення.

Маховик збільшує зведений момент інерції механічної системи на величину свого моменту інерції J_M :

$$J_M + J_{зв} = \frac{\Delta A_{max}}{\delta \cdot \omega_c^2}. \quad (2.46)$$

Нехтуючи в механічній системі зведеним моментом інерції $J_{зв}$, так як його величина відносно мала, знаходимо момент інерції маховика:

$$J_M = \frac{\Delta A_{max}}{\delta \cdot \omega_c^2} \approx \frac{90 \cdot \Delta A_{max}}{\delta \cdot n^2}, \quad (2.47)$$

де n – частота обертання ведучої ланки (об/хв).

Масу і розміри маховика знаходять в залежності від його моменту інерції із відомої формули динаміки:

$$J_M = \frac{mD^2}{4}, \quad (2.48)$$

де m – рівномірно розподілена по ободу маса маховика, D – діаметр інерції (діаметру кола, описаного центром ваги переріза обода маховика).

Регулятори швидкості автоматично стабілізують неперіодичні коливання кутової швидкості ведучих ланок в заданих межах.

Регулювання швидкості обертання ведучого валу машини здійснюється шляхом зміни подачі енергії до двигуна або шляхом зміни опору на відомому валу машини.

Так, існують *відцентрові, гальмівні і електричні* регулятори.

У машинобудуванні найбільш поширені відцентрові регулятори. Гальмівні і електричні регулятори у більшості випадків застосовуються для приладів точної механіки.

Принцип дії *відцентрових* регуляторів заснований на використанні сили інерції обертальних мас A для регулювання подачі палива або електроенергії до двигуна (рис. 2.32).

Наприклад, зменшення зовнішнього навантаження утворює в машині надлишок рушійної сили. Це приводить до збільшення швидкості обертання вала двигуна машини, а відповідно, і регулятора, який зв'язаний з цим валом. Кулі A регулятора при цьому розвинуть відцентрову силу інерції, яка зростає із збільшенням швидкості. Під впливом відцентрові сили кулі розходяться і системою важелів піднімають муфту B , що приведе до повороту дросельного клапану, зменшення подачі палива до двигуна і відповідно зменшення швидкості обертання вала. При зменшенні швидкості відбувається зворотний процес, подача палива збільшується, а відповідно збільшується і швидкість обертання вала двигуна.

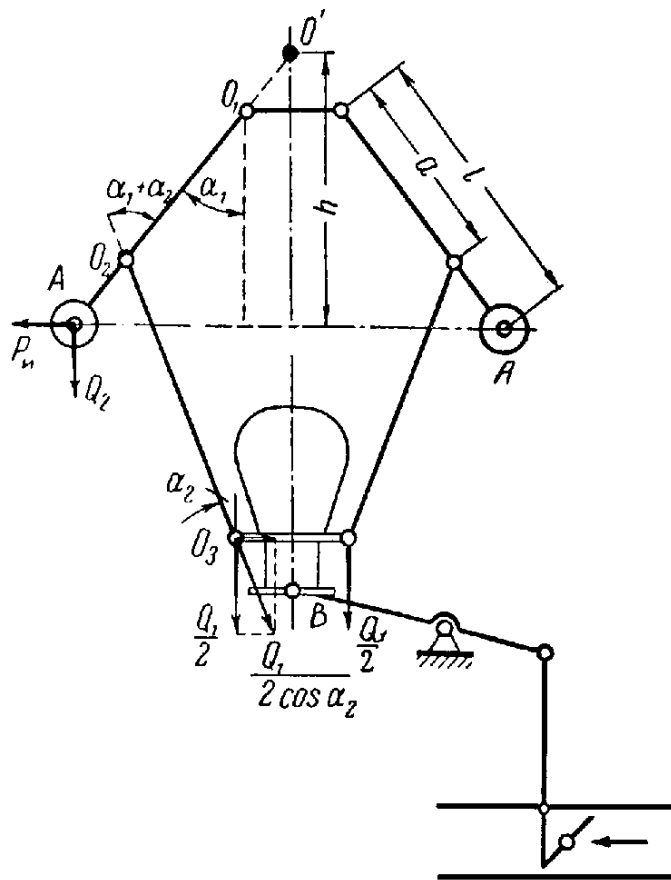


Рис. 2.32

Таким чином, задана швидкість обертання вала двигуна машини підтримується автоматично.

Забезпечення підтримки заданої кутової швидкості в регуляторі досягають підбором його відповідних параметрів: маси, розмірів, ланок важелів і т.ін.

Кінцевий вираз для визначення заданого числа обертів n (об/хв) вала двигуна машини в залежності від параметрів відцентрового регулятора має наступний вигляд:

$$n = 30 \cdot \sqrt{\frac{1 + \frac{Q_1 \cdot a}{Q_2 \cdot l}}{h}}, \quad (2.49)$$

де Q_1 – вага муфти з вантажем, Q_2 – вага кулі, a, l – довжина ланок регулятора, h – висота підйому муфти регулятора.

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Сформулюйте основні задачі динаміки механізмів і машин?
2. Що називається механічними характеристиками машин?
3. Дайте характеристику рушійних сил та сил опору.
4. На основі яких рівностей проводиться зведення мас та сил?
5. Напишіть рівняння руху машинного агрегату в формі кінетичної енергії.
6. Напишіть рівняння руху в диференціальній формі.
7. Дайте визначення ККД машини.
8. Назвіть три характерні режими руху машини.
9. Як будуються графіки робіт і приросту кінетичної енергії?
10. Чому кривошип обертається нерівномірно?
11. Як зменшити коефіцієнт нерівномірності руху машинного агрегату?
12. Який принцип дії маховика?
13. Опишіть принцип дії регуляторів ходу машин.

ЧАСТИНА III

ОПІР МАТЕРІАЛІВ

3.1. Основні положення

Опір матеріалів – це наука про теоретичні і експериментальні методи дослідження елементів машин, конструкцій і споруд на міцність, жорсткість і стійкість.

Під *міцністю* розуміють здатність матеріалу конструкції і її елементів витримувати прикладене певне навантаження без руйнування.

Розрахунки на міцність конструкції в опорі матеріалів дають можливість визначити оптимальні поперечні розміри її елементів, що витримують задане навантаження, при мінімальних витратах матеріалу.

Проте міцність конструкції ще не гарантує її надійність в цілому. Конструкція може не руйнуватись, але деякі її елементи під дією зовнішнього навантаження можуть так деформуватись, що подальше її використання стає неможливим. Отже конструкцію необхідно розраховувати і на обмеження деформації, тобто проводити розрахунки на жорсткість.

Жорсткістю називають здатність елемента конструкції протидіяти зовнішнім силам з точки зору допустимих розмірів і форми, тобто деформації.

Деякі елементи конструкцій мають особливу форму і працюють під дією характерних навантажень, наприклад тонкі і довгі стержні при стиску. Такі конструкції під навантаженням без будь – яких зовнішніх причин раптово втрачають свою рівновагу (стійкість), викривляються і швидко руйнуються. При цьому втрата стійкості відбувається при навантаженнях, значно менших від отриманих із розрахунків на міцність і жорсткість. Тому такі конструкції та їх елементи необхідно спеціально розраховувати на стійкість.

Під *стійкістю* розуміють здатність елементів конструкції зберігати положення рівноваги під дією зовнішніх сил.

Отже, опір матеріалів надає загальні методикі інженерних розрахунків несучих елементів машин, конструкцій і споруд на міцність, жорсткість і стійкість для забезпечення їх надійної роботи при мінімальній матеріаломісткості.

Розглянемо поняття внутрішніх сил і пружної деформації.

Як відомо, довільне тіло складається з молекул і атомів, між якими існують сили взаємного притягнення і відштовхування. Внаслідок

Опір матеріалів

наявності цих сил тверді тіла намагаються зберегти свою форму як єдине ціле. При деформації тіла від зовнішніх навантажень (при зміні його розмірів і форми) в результаті зміни взаємодії частинок всередині тіла виникають сили, які протидіють цій деформації.

Сили зміни внутрішньої взаємодії між частинками тіла, що протидіють його деформації від зовнішнього навантаження і намагаються повернути його розміри і форму в початковий стан називаються *внутрішніми силами*.

Деформація, яка повністю зникає після припинення дії зовнішнього навантаження, називається *пружною*. Деформація, що лишається після припинення дії зовнішніх сил, називається *пластичною* (або *залишковою*).

Виникнення значних залишкових деформацій, як правило, порушує нормальну роботу деталі чи елемента конструкції і тому в опорі матеріалів мають справу переважно із пружними деформаціями.

3.1.1. Головні гіпотези і припущення в курсі опору матеріалів

Для спрощення розрахунків в опорі матеріалів приймають деякі гіпотези і припущення що до структури і властивостей матеріалів, характеру деформацій, діючих сил і геометрії конструкцій.

1. Гіпотеза про суцільність матеріалу. Тіло вважається суцільним, (тобто неперервним) як до деформації, так і після деформації (без порожнин і розривів).

2. Гіпотеза про однорідність і ізотропність матеріалу. Вважається, що властивості тіла в будь-якій точці і в будь-якому напрямку однакові.

3. Гіпотези плоских перерізів. Плоскі перерізи, проведені в тілі до деформації, залишаються плоскими і після деформації. Вони залишаються нормальними до осі стержня в процесі деформації. Ця гіпотеза справедлива для тіл з довжиною, що перевищує його поперечні розміри (стержень, брус).

4. Гіпотеза ідеальної пружності. Вважається, що матеріали мають властивість повністю відновлювати свою первинну форму і розміри тіл після припинення дії зовнішніх сил.

5. Принцип Сен-Венана. В точках тіла, достатньо віддалених від місця прикладання зовнішніх сил, внутрішні зусилля дуже мало залежать від способу прикладання цих сил. Такий принцип дозволяє замінити одну систему сил статично їй еквівалентною (переміщення сил з верхньої частини балки на нижню, заміна зосередженої сили на групу розподілених і навпаки).

6. Принцип незалежності дії сил (суперпозиції). Ефект від суми впливу дорівнює сумі ефектів від окремого впливу. Згідно з цим принципом переміщення, внутрішні сили і деформації навантаженого тіла

вважають незалежними від порядку прикладання сил.

3.1.2 Метод перерізів. Внутрішні силові фактори і основні види деформацій

Зовнішні сили, що діють на тіло, як зазначалося, викликають в ньому виникнення внутрішніх сил, які намагаються протидіяти деформації. Для визначення цих внутрішніх сил в перерізах тіла використовують метод перерізів.

Тіло умовно розсікають площиною на дві частини (рис. 3.1 а). Далі одну із частин тіла відкидають, замінюють її дію на іншу внутрішніми силами, прикладеними в площині перерізу, і розглядають рівновагу частини, що лишилася під дією зовнішніх і внутрішніх сил.

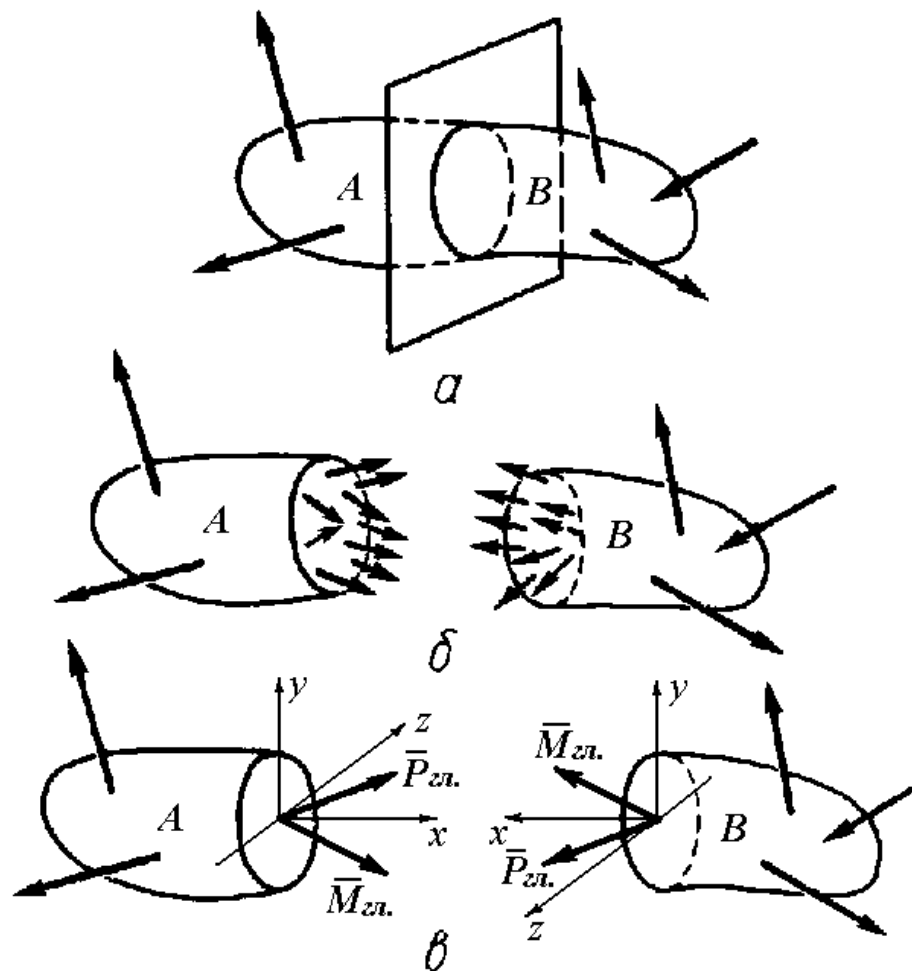


Рис. 3.1

Таким чином, зовнішні сили, прикладені до залишеної частини тіла, врівноважуються внутрішніми силами, діючими в площині перерізу тіла (рис. 3.1 б). Це дозволяє скласти для обої з двох частин тіла (наприклад

Опір матеріалів

частини А) в загальному випадку шість рівнянь рівноваги:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n P_{kx} &= 0, & \sum_{k=1}^n m_x(\bar{P}_k) &= 0, \\ \sum_{k=1}^n P_{ky} &= 0, & \sum_{k=1}^n m_y(\bar{P}_k) &= 0, \\ \sum_{k=1}^n P_{kz} &= 0, & \sum_{k=1}^n m_z(\bar{P}_k) &= 0.\end{aligned}\tag{3.1}$$

Дані рівняння дозволяють визначити статичний еквівалент системи внутрішніх сил, тобто знайти головний вектор і головний момент системи внутрішніх сил (рис. 3.1 в).

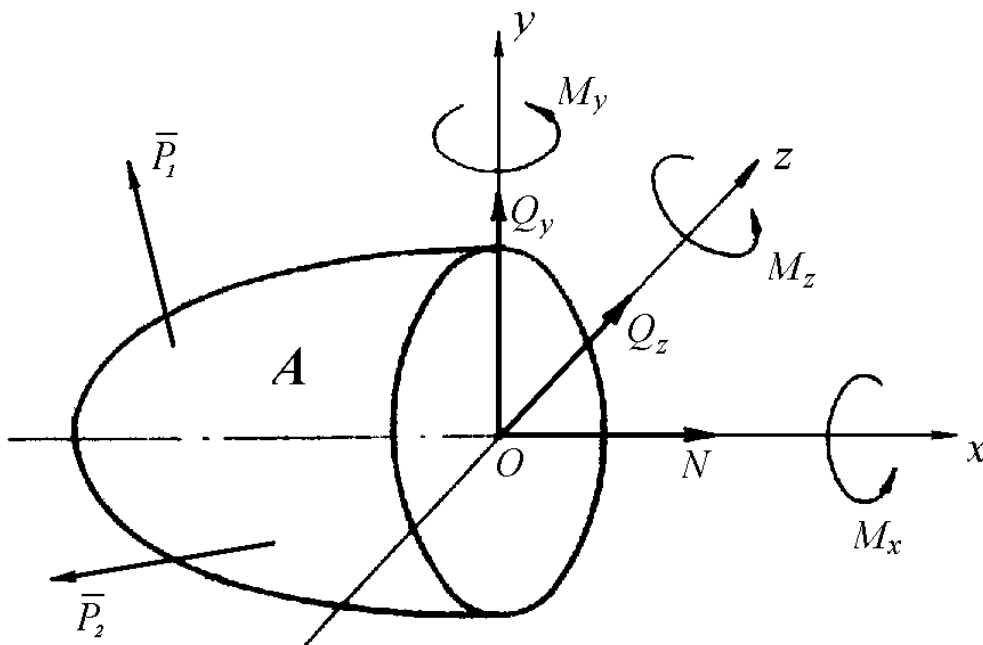


Рис. 3.2

В загальному випадку із шести рівнянь рівноваги в поперечному перерізі тіла визначаються шість складових внутрішніх сил: три сили N_z , Q_x , Q_y – складові головного вектора, напрямлені вздовж координатних осей, і три моменти M_x , M_y , M_z – складові головного моменту внутрішніх сил (рис. 3.2).

Вказані шість складових внутрішніх сил називаються *внутрішніми силовими факторами*, діючими в перерізі тіла. Кожна з цих складових має свою назву і позначення:

N_x – поздовжня (нормальна) сила N ,

Q_y, Q_z – поперечні сили Q ,

M_x – момент кручення M_k ,

M_y, M_z – згинаючі (згинальні) моменти $M_{зг}$.

Складові внутрішніх силових факторів залежать від характеру навантаження тіла і характеру його деформації (деформованого стану). При різних видах деформації в поперечному перерізі будуть виникати різні внутрішні силові фактори.

Розглянемо окремі випадки простих деформацій (простого деформованого стану) тіла, коли в його поперечному перерізі виникає лише один внутрішній силовий фактор:

1. *Деформація розтягу (або стиску)*, коли в поперечному перерізі виникає внутрішній силовий фактор – поздовжня сила N , напрямлена по поздовжній осі тіла. Такої деформації зазнають стержні, троси, штоки двигунів, навантажені зовнішніми силами вздовж їх осей (рис. 3.3 а, б).

2. *Деформація зсуву або зрізу*, коли в поперечному перерізі виникає внутрішній силовий фактор – поперечна сила Q , що лежить в площині перерізу. Така деформація спостерігається в болтах, клепках, зварних швах, де зовнішні сили діють паралельно і протилежно напрямлено, зміщуючи плоскі перерізи елементів з'єднання один відносно одного (рис. 3.3 в).

3. *Деформація кручення*, коли в поперечному перерізі виникає внутрішній силовий фактор – крутний момент M_k , який паралельний цій площині. Таку деформацію маємо, наприклад, у валах, де зовнішні сили утворюють моменти, що діють перпендикулярно до осі вала (рис. 3.3 г).

4. *Деформація чистого згину*. При цьому в поперечному перерізі перпендикулярно до нього виникає один внутрішній силовий фактор – згинаючий момент $M_{зг}$, що врівноважує дію зовнішніх згинаючих моментів. Деформація чистого згину можна отримати від дії на стержень зовнішніх згинаючих моментів (рис. 3.3 д).

При цьому слід зауважити, що в таких конструкціях може відбуватися *деформація поперечного згину*, коли в поперечному перерізі виникає одночасно два внутрішніх силових фактора – згинаючий момент $M_{зг}$, і поперечна сила Q від дії зовнішніх моментів і зовнішніх сил. Деформація згину спостерігається в балках (рис. 3.3 е), осях, зубцях зубчастих коліс, тощо. Більш докладно деформація згину буде розглянута пізніше.

Випадки одночасної дії в поперечних перерізах тіла декількох внутрішніх силових факторів відносять до складних видів деформованого стану тіла, при якому має місце поєднання основних видів деформації

Опір матеріалів

(наприклад, згин з крученням, кручення і розтяг і т. ін.).

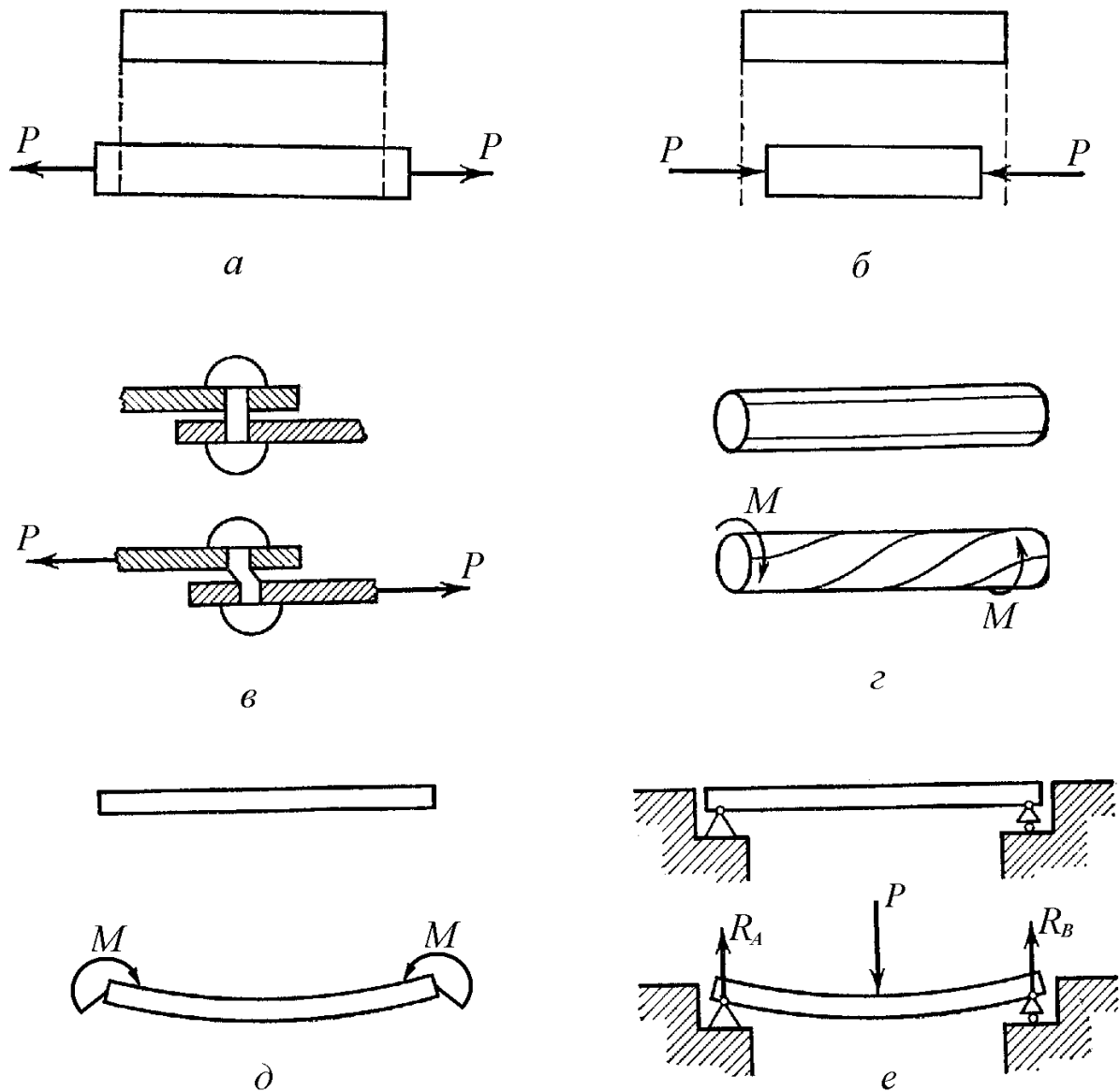


Рис. 3.3

3.1.3. Поняття про напруження

Метод перерізів дозволяє визначити внутрішні силові фактори в будь-якому перерізі тіла при дії на нього зовнішнього навантаження. Але при цьому неможливо встановити закон розподілу внутрішніх сил в самому перерізі. Тому для визначення характеру розподілу внутрішніх сил по площині перерізу введено поняття напруження.

Напруження – це значення внутрішніх сил, що приходяться на одиницю площі перерізу тіла.

Виходячи із положення, що внутрішні сили діють безперервно по

всьому перерізу, виділимо в поперечному перерізі тіла площу ΔA з рівнодійною внутрішніх сил $\Delta \bar{R}$. При зведенні цієї площі до точки при $\Delta A \rightarrow 0$, елемент площі dA буде настільки малим, що внутрішні сили на ньому будуть однаковими за величиною і напрямком, їх рівнодійна $d\bar{R}$ буде проходити через центр dA , а рівнодійний момент дорівнюватиме нулю. При цьому проекції рівнодійної $d\bar{R}$ на нормаль і дотичні напрямки координатних осей відповідно дадуть, як вже відомо, елементарні зусилля: dN , dQ_x , dQ_y (рис. 3.4).

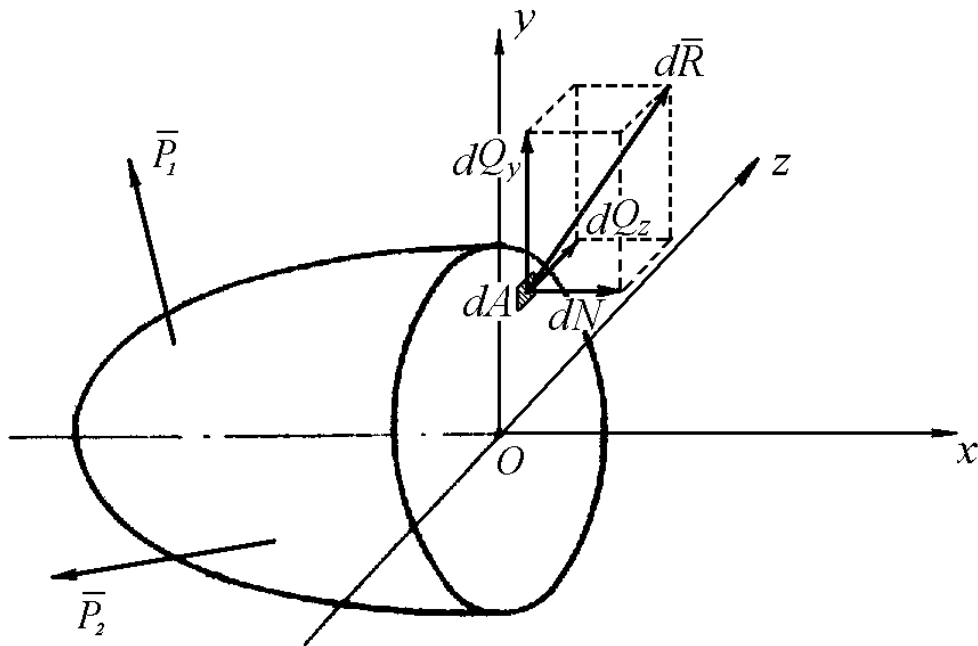


Рис. 3.4

Тоді повне напруження в точці перерізу можна визначити як межу відношення рівнодійної внутрішніх зусиль до елементарної площі при $\Delta A \rightarrow 0$:

$$\bar{p} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{R}}{\Delta A} = \frac{d\bar{R}}{dA}. \quad (3.2)$$

Повне напруження в точці являє собою векторну величину (тобто характеризується числовим значенням, точкою прикладення і напрямком) і залежить від положення проведеного через точку перерізу. Тому не можна говорити про напруження, не вказавши положення перерізу, в якому вони виникають.

Розмірність вимірювання напруження: в системі СІ:

$$p = \frac{1\text{н}}{1\text{мм}^2} = 1\text{Па}.$$

Так як одиниця 1Па дуже мала і користуватися нею незручно, то застосовують несистемну одиницю вимірювання напруження:

$$1\text{МПа} = 10^6 \text{Па} = 1 \frac{\text{Н}}{\text{мм}^2}.$$

Поняттям повного напруження в опорі матеріалів користуються порівняно рідко – переважно тільки в теоретичному плані. Проте проекції вектора повного напруження на нормаль і дотичну до елементарної площі перерізу мають велике значення для практичних розрахунків.

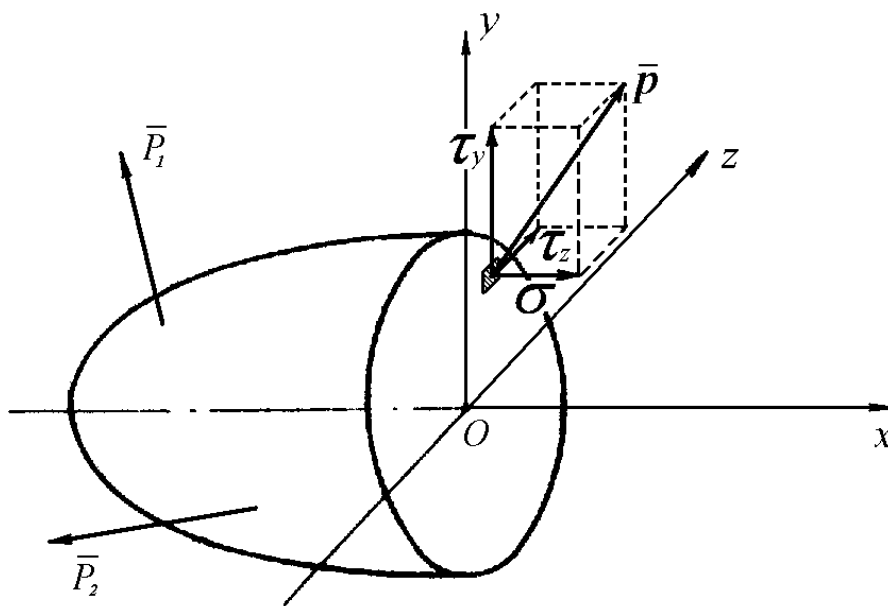


Рис. 3.5

Нормальну складову повного напруження називають *нормальним напруженням* σ , а дотичну – *дотичним напруженням* τ (рис. 3.5).

Нормальне і дотичні напруження в точці перерізу будуть відповідно дорівнювати:

$$\sigma = \frac{dN}{dA}, \quad \tau_y = \frac{dQ_y}{dA}, \quad \tau_z = \frac{dQ_z}{dA}, \quad (3.3)$$

де dN , dQ_y , dQ_z – відповідно поздовжня і поперечні сили, на які розкладається по координатним осям рівнодіюча внутрішніх сил $d\bar{R}$.

Величина повного дотичного напруження в точці визначається як:

$$\tau = \sqrt{\tau_y^2 + \tau_z^2}, \quad (3.4)$$

а повне напруження, що включає в себе нормальну і дотичні складові, тоді буде дорівнювати:

$$p = \sqrt{\sigma^2 + \tau_y^2 + \tau_z^2}. \quad (3.5)$$

Для запобігання руйнування елементів конструкцій і машин, виникаючі в них робочі (розрахункові) напруження σ , τ не повинні перевищувати допустимих напружень $[\sigma]$, $[\tau]$:

$$\sigma \leq [\sigma], \quad \tau \leq [\tau]. \quad (3.6)$$

Рівняння (3.6) називаються умовами міцності, де допустимі напруження – це максимальні значення напружень, що забезпечують безпечну роботу матеріалу. Допустимі напруження визначаються як деяка частина експериментально знайдених значень напружень, що визначають, границю міцності матеріалу σ_{sp} , τ_{sp} :

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{sp}}{n}, \quad [\tau] = \frac{\tau_{sp}}{n}, \quad (3.7)$$

де n – коефіцієнт запасу міцності.

3.2 Розтяг і стиск

Перейдемо до розгляду простих видів деформації на прикладі деформації бруса – тіла, довжина якого більша ніж поперечні розміри.

Розтягом або стиском називається такий вид деформації, при якому в поперечному перерізі бруса виникає лише один внутрішній силовий фактор – поздовжня сила N розтягу (стиску). Найпростішу деформацію розтягу або стиску можна отримати, якщо, наприклад, до бруса прикласти по його поздовжній осі дві зовнішніх сили, однакові за величиною і протилежні за напрямком (рис. 3.3 а, б).

Бруси, що працюють на розтяг (стиск) називають стержнями.

Розглянемо випадок, коли на стержень діють дві однакові розтягуючі зовнішні сили P (рис. 3.6). Для визначення величини поздовжньої сили N в цьому стержні, застосуємо метод перерізів.

1. Розріжемо стержень уявним перерізом $m - n$.
2. Відкинемо одну з частин, наприклад, праву.
3. Замінемо дію відкинутої частини внутрішньою силою.
4. Складемо рівняння рівноваги частини, що залишилася.

Із усіх шести рівнянь рівноваги (3.1) можна використати тільки одне, з якого і визначається внутрішнє зусилля N :

$$\sum_{k=1}^n P_{kx} = 0, \quad -P + N = 0, \quad N = P.$$

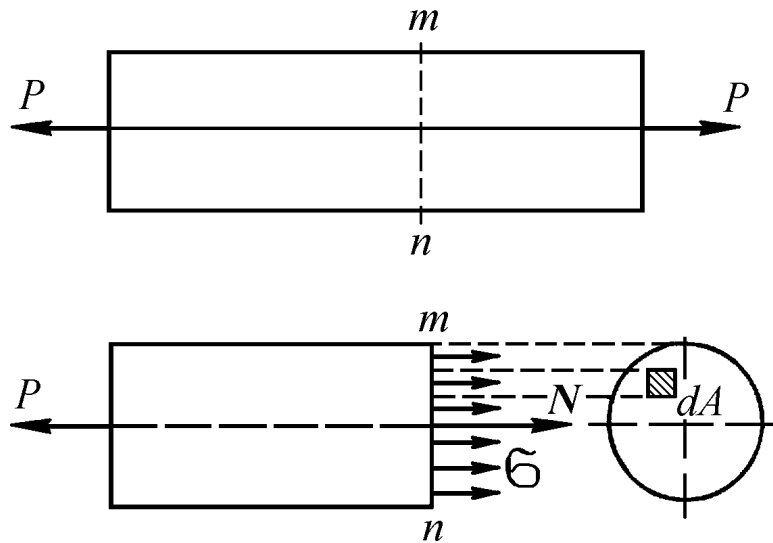


Рис. 3.6

Аналогічно можна розрахувати поздовжню силу N при дії на стержень двох стискуючих сил. Але в цьому випадку значення N приймаємо від'ємним:

$$N = -P.$$

Таким чином, при осьовому розтягу або стиску стержня зовнішніми навантаженнями P , прикладеними до його торців, поздовжня сила N у всіх його поперечних перерізах чисельно дорівнює зовнішній силі P .

При розтягу поздовжня сила N приймається додатною, а при стиску – від'ємною.

Визначимо напруження, що виникають в поперечних перерізах даного стержня. Дані напруження перпендикулярні до поперечного перерізу, тобто є нормальними напруженнями σ .

У відповідності до гіпотези плоских перерізів і, як показують досліди, при достатньо точному збігу зовнішніх сил з віссю стержня його поздовжні волокна зазнають однакового зміщення. Звідси можемо припустити, що напруження розподілені по перерізу стержня рівномірно.

Отже, рівнодіючу N внутрішніх сил можна знайти як:

$$N = \int_A \sigma \cdot dA = \sigma \int_A dA = \sigma \cdot A.$$

Звідки

$$\sigma = \frac{N}{A}. \quad (3.8)$$

де N – поздовжня сила, що виникає в поперечному перерізі стержня від дії зовнішніх осьових сил, A – площа даного поперечного перерізу.

3.2.1. Епюри поздовжніх сил і нормальних напружень

В попередньому випадку деформації стержня поздовжня сила N в його поперечних перерізах мала постійне значення на всій довжині стержня. Це пояснюється тим, що N зрівноважувала дію однієї із двох однакових зовнішніх сил P , прикладених до торця стержня по один із боків перерізу.

Але у випадку дії системи зовнішніх сил, прикладених, не тільки до торців стержня, а і в інших точках його осі, поздовжня сила може змінювати своє значення в перерізах, залежно від їх розташування на осі стержня.

При цьому величина N дорівнює алгебраїчній сумі зовнішніх сил, діючих з одного боку перерізу стержня, і має додатне значення у випадку його розтягу та від'ємне – у випадку стиску.

В свою чергу, нормальні напруження розтягу і стиску, що виникають в поперечних перерізах стержня залежать як від величини поздовжньої сили N , так і від самої площі перерізу.

Для наглядного відображення розподілу по осі стержня поздовжніх сил і нормальних напружень будують графіки цього розподілу, які називаються *епюрами поздовжніх сил і нормальних напружень*.

При побудові епюр поздовжніх сил і нормальних напружень спочатку послідовно визначаються значення N в кожному характерному перерізі стержня. Для цього використовується метод перерізів і розглядається рівновага однієї із частин стержня. Потім за виразом (3.8) визначаються напруження в цих перерізах.

Розглянемо побудову епюр на прикладі закріпленого одним кінцем ступінчастого стержня з площею поперечних перерізів A_1 і A_2 , на який діє система зовнішніх сил P_1 , P_2 і P_3 (рис. 3.7).

Розіб'ємо стержень на ділянки, починаючи з вільного кінця стержня. Межі ділянок визначаються перерізами, де прикладені зовнішні сили або де змінюються розміри самого поперечного перерізу. Всього по довжині стержня маємо чотири ділянки довжиною l_1 , l_2 , l_3 і l_4 .

При застосуванні метода перерізів нема різниці, яку із відсічених частин стержня розглядати у рівновазі. Але в даному випадку зручніше лишати праву частину і відкидати ліву, так як при цьому не треба попередньо знаходити опорну реакцію R , яка нам невідома.

Проведемо довільний поперечний переріз $I-I$ в межах першої ділянки і із умови рівноваги правої частини стержня знаходимо невідому поздовжню силу N_1 через зовнішнє навантаження P_1 , прикладене до цієї частини:

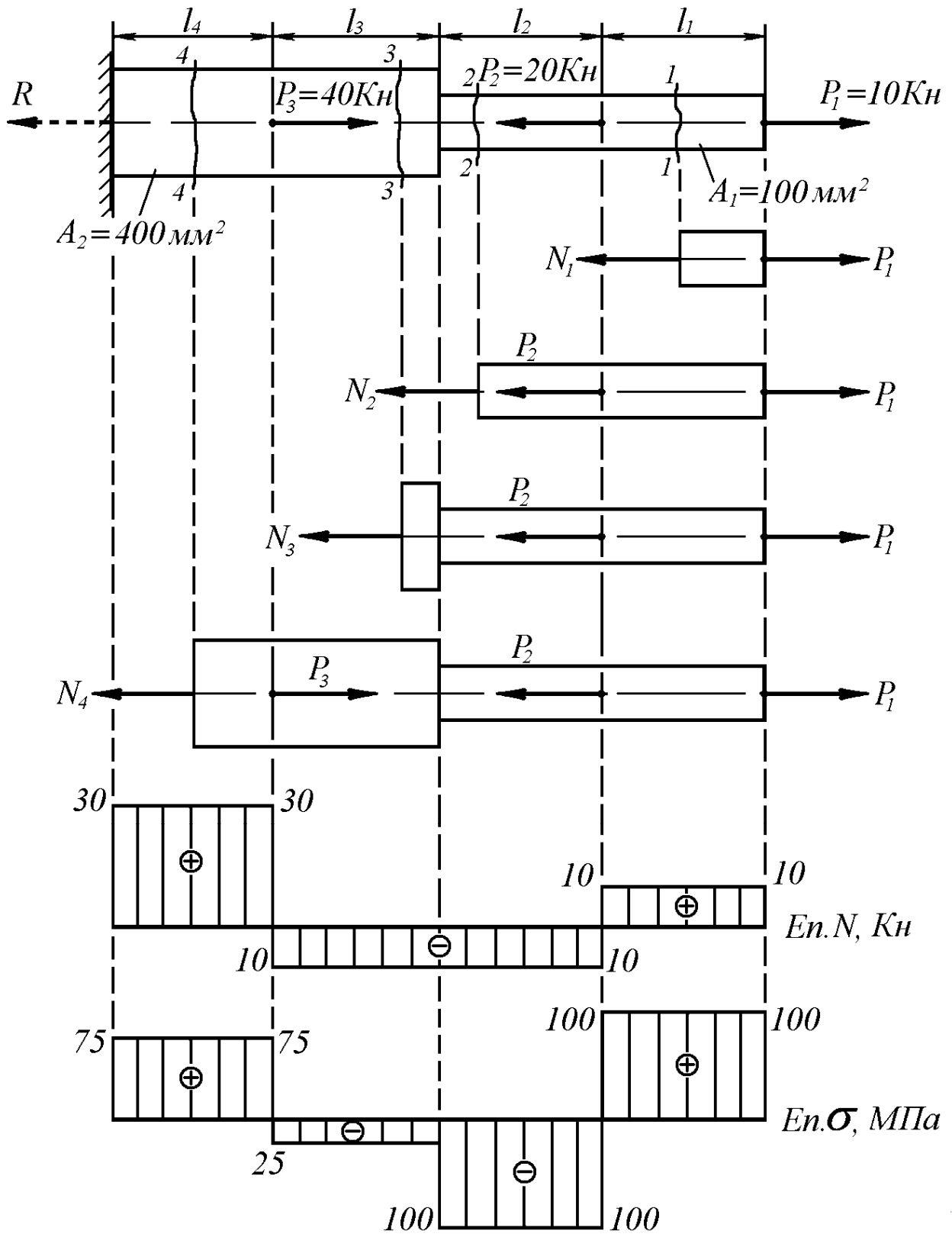


Рис. 3.7

$$N_1 = P_1 = 10 \text{ Кн}.$$

Значення N_1 додатне, тому що під дією зовнішньої сили P_1 стержень має деформацію розтягу. Незавжди побачити, що для всіх інших перерізів ділянки l_1 значення N_1 не зміниться.

Аналогічно в межах другої ділянки в довільному перерізі 2 – 2 :

$$N_2 = P_1 - P_2 = 10 - 20 = -10 \text{ Кн}.$$

На цій ділянці відбудеться стиск із результуючою від дії двох зовнішніх сил (P_1 розтягує стержень, а P_2 , його стискає).

В довільному перерізі 3 – 3 в межах третьої ділянки значення N_3 не зміниться, тому що на праву відсічену частину діють ті самі зовнішні сили:

$$N_3 = N_2 = P_1 - P_2 = -10 \text{ Кн}.$$

В межах четвертої ділянки в довільному перерізі 4 – 4 :

$$N_4 = P_1 - P_2 + P_3 = 10 - 20 + 40 = 30 \text{ Кн}.$$

На цій ділянці відбудеться розтяг із результуючою від дії трьох зовнішніх сил (P_1 і P_3 розтягують стержень, а P_2 , його стискає).

Аналогічні результати можна отримати, якщо будувати епюру зліва на право, розглядаючи рівновагу лівої частини стержня. Але в цьому випадку, як вже було відмічено, необхідно спочатку визначити реакцію опори R із умови рівноваги всього стержня:

$$\sum_{k=1}^n P_{kx} = 0, \quad -R + P_3 - P_2 + P_1 = 0, \quad R = P_3 - P_2 + P_1 = 30 \text{ Кн}.$$

Як бачимо, значення епюри N на її кінцях дорівнює значенням відповідних крайніх зовнішніх сил.

Визначимо нормальні напруження в перерізах стержня, на його характерних ділянках.

Для першої ділянки (площа перерізу $A_1 = 100 \text{ мм}^2$):

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{10 \cdot 10^3}{100} = 100 \frac{\text{Н}}{\text{мм}^2} = 100 \text{ МПа}.$$

Для другої ділянки (площа перерізу $A_1 = 100 \text{ мм}^2$):

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_1} = \frac{-10 \cdot 10^3}{100} = -100 \frac{\text{Н}}{\text{мм}^2} = -100 \text{ МПа}.$$

Для третьої ділянки (площа перерізу $A_1 = 400 \text{ мм}^2$):

$$\sigma_3 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{-10 \cdot 10^3}{400} = -25 \frac{\text{Н}}{\text{мм}^2} = -25 \text{ МПа}.$$

Для четвертої ділянки (площа перерізу $A_1 = 400 \text{ мм}^2$):

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{A_2} = \frac{30 \cdot 10^3}{400} = 75 \frac{H}{мм^2} = 75 \text{ МПа}.$$

По знайденим величинам будемо епюри поздовжніх сил N і нормальних напружень σ , відкладаючи від нульової лінії у вибраному масштабі від'ємні значення вниз, а додатні – вгору.

3.2.2. Деформації при розтягу або стиску

Визначимо параметри деформацій і встановимо закономірності, по яким стержень змінює свої розміри при розтягу (стиску).

Розглянемо розтяг стержня (рис. 3.8), в якому перерізи $m-n$, лишаючись плоскими, переміщуються в деяке положення $m'-n'$, початкова довжина l збільшується до l_1 і стержень одержує абсолютну деформацію:

$$\Delta l = l_1 - l. \quad (3.9)$$

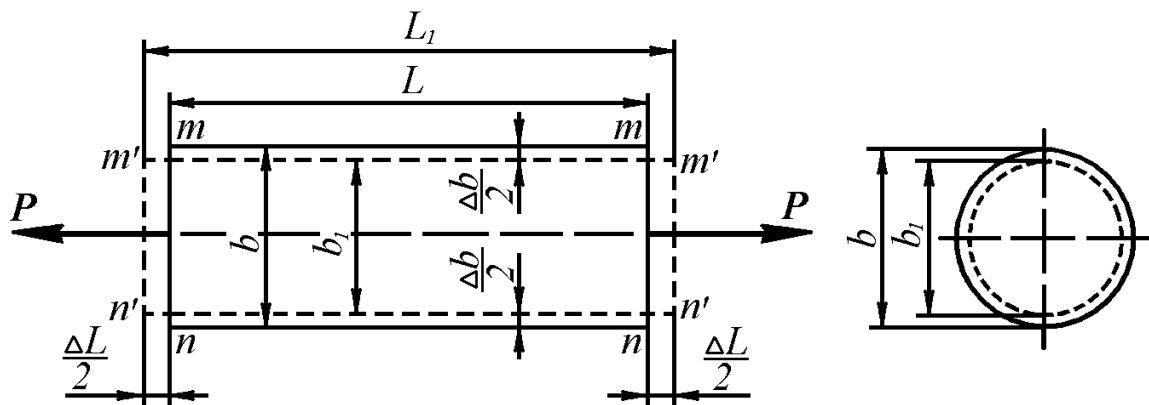


Рис. 3.8

При цьому відносна деформація всіх волокон стержня буде дорівнювати:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}, \quad (3.10)$$

абсолютне поперечне скорочення (зменшення поперечних розмірів):

$$\Delta b = |b_1 - b|, \quad (3.11)$$

відносне поперечне скорочення:

$$\varepsilon_l = \frac{\Delta b}{b}. \quad (3.12)$$

При стиску довжина стержня зменшується, а поперечні розміри збільшуються.

Перейдемо до розгляду фізичної сторони явища розтяг-стиск, яке вивчається за допомогою експериментальних дослідів над зразками з різних матеріалів.

Поки напруження розтягу (або стиску) σ (3.8) не досягло деякої певної для кожного матеріалу межі, стержень залишається пружним і його деформації зникають після усунення зовнішніх сил розтягу (стиску). В цих межах подовження ε і напруження σ перебувають в постійному відношенні, цілком визначеному для кожного матеріалу:

$$\frac{\sigma}{\varepsilon} = E = const. \quad (3.13)$$

Співвідношення (3.13) встановлює залежність між напруженням і відносним подовженням:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon. \quad (3.14)$$

Вираз (3.14) носить назву закону Гука, який відкрив дослідним шляхом англійський фізик Роберт Гук у 1660 році: *нормальне напруження прямо пропорційне відносному подовженню*.

Коефіцієнт пропорційності E має різні значення для різних матеріалів і характеризує їх пружні властивості (можливість протистояти дії зовнішніх сил). Величина E називається модулем поздовжньої пружності або модулем пружності першого роду.

Середнє значення E для ряду матеріалів, МПа: сталь – $2 \cdot 10^5$, мідь технічна – $1 \cdot 10^5$, бетон – $(0,15 \dots 0,3) \cdot 10^5$, деревина вздовж волокон – $(0,1 \dots 0,16) \cdot 10^5$, деревина поперек волокон $(0,005 \dots 0,01) \cdot 10^5$.

Формулу (3.10) з урахуванням (3.8) і (3.10) можна перетворити до виду:

$$\Delta l = \frac{N \cdot l}{E \cdot A}. \quad (3.15)$$

Із (3.11) видно, що чим більший знаменник, тим менша податливість або тим більша жорсткість стержня, тому добуток знаменника $E \cdot A$ називають жорсткістю стержня при розтягу (стиску).

При розтягу-стиску стержня одночасно виникають не тільки поздовжні, але і поперечні деформації. Досліди показують, що для багатьох матеріалів поперечна деформація в 3...4 рази менша, ніж поздовжня.

Опір матеріалів

Абсолютна величина відношення відносної поперечної деформації ε_1 , до відносної поздовжньої ε називається *коефіцієнтом поперечної деформації*:

$$\mu = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}. \quad (3.16)$$

Вперше коефіцієнт μ теоретично встановив французький математик і механік Симеон Пуассон. Тому число μ називається ще коефіцієнтом Пуассона.

Величина μ – це стала матеріалу, яка також характеризує його пружні властивості. Для реальних матеріалів він набуває значення 0...0,5. Середнє значення його для металів – 0,3.

Таким чином, для ізотропних матеріалів коефіцієнти E і μ повністю визначають їх пружні властивості.

3.2.3. Діаграма розтягу.

Механічні характеристики матеріалів

При розрахунках на міцність необхідно знати механічні властивості матеріалів, які визначаються експериментально. Всі конструкційні матеріали з точки зору різниці механічних властивостей при простому розтягу-стиску і при звичайній температурі поділяють на крихкі і пластичні. Крихкі матеріали руйнуються при досить малих залишкових деформаціях. Руйнування пластичних матеріалів настає після значної залишкової деформації. До крихких матеріалів відносять чавун, бетон, камінь та інші; до пластичних – мідь, сталь, сплави кольорових металів, полімери і композити. Поведінку різних типів матеріалів, як при розтягу так і стиску, з'ясовують дослідним шляхом аж до їх руйнування.

При дослідженні металів на розтяг виготовляють зразки циліндричної або призматичної форми, які розтягують на розривних машинах. Такі машини мають пристрої, які автоматично викреслюють залежність між силою розтягу P і абсолютним подовженням Δl . Ця залежність називається *діаграмою розтягу*.

Діаграма розтягу може бути представлена також в координатах $\varepsilon - \sigma$, якщо по осі ординат відкласти напруження σ , а по осі абсцис – відносне подовження E . Такий вид представлення діаграми більш зручний для відображення фізичних властивостей матеріалу, тому що не залежить від геометрії зразка (його довжини і поперечного поперечних розмірів).

Приклад діаграми розтягу дослідного зразка із маловуглецевої сталі типу Ст 3 показаний на рис. 3.9.

Зазначимо на цій діаграмі характерні точки. На першому етапі розтягу матеріалу, доки напруження не досягло певної величини, діаграма

зображується прямою лінією OA . Найбільше напруження (точка A), для якого справедливий ще закон Гука, називається *границею пропорційності* і позначається через $\sigma_{пц}$. До тих пір, доки σ не досягне значення $\sigma_{пц}$ модуль пружності E – величина постійна.

Із діаграми видно, що нахил її прямолінійної ділянки OA залежить від значення модуля пружності E :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sigma}{\varepsilon} = E = \operatorname{const}.$$

Тобто, чим більший кут α ділянки OA , тим більшим буде модуль пружності E і тим жорсткіше буде матеріал.

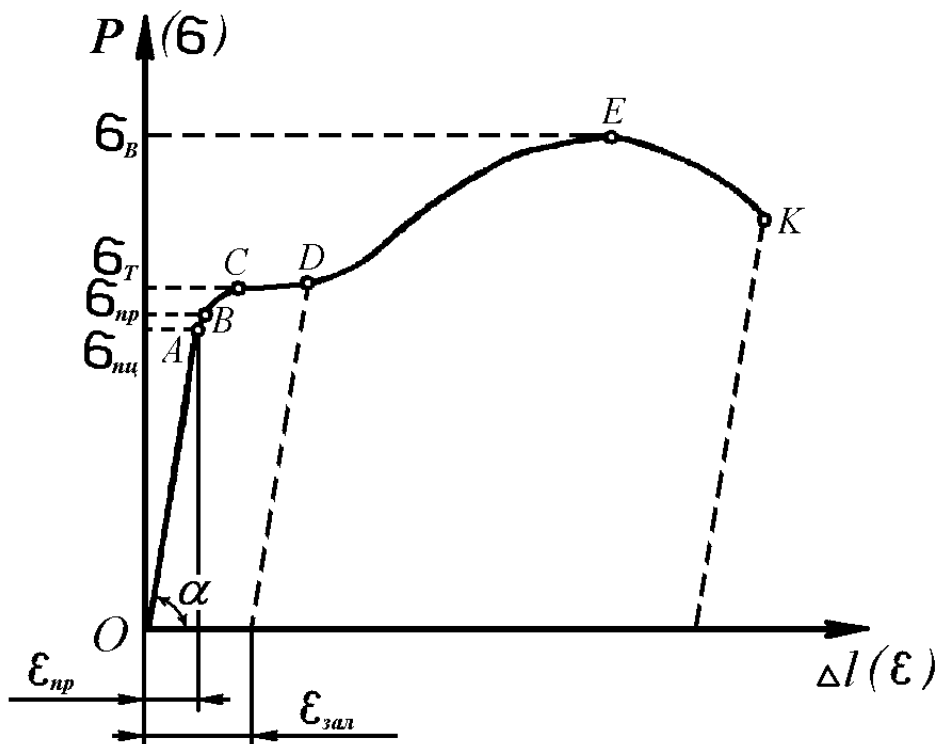


Рис. 3.9

За точкою A відбувається скривлення діаграми. Максимальне напруження (точка B), при якому в матеріалі ще не виникають залишкові деформації, називається *границею пружності* $\sigma_{пр}$. Границя пружності є характеристикою, що не пов'язана із законом Гука, але значення між $\sigma_{пр}$ і $\sigma_{пц}$ дуже близькі за величиною і різницею між ними часто нехтують.

На другому етапі розтягу відбувається *текучість матеріалу* – зростання деформацій при майже постійному навантаженні. Цей процес на

Опір матеріалів

діаграмі відображений майже горизонтальною прямою $C-D$ і характеризується виникненням пластичних (залишкових) деформацій $\varepsilon_{зал}$, які не зникають навіть після зняття навантаження.

Границею текучості σ_T називається мінімальне напруження, при якому з'являється текучість і пластична деформація матеріалу (точка C).

За границею текучості пластична деформація матеріалу змінює його механічні властивості: збільшується міцність матеріалу (границя пружності і пропорційності) і зменшується його пластичність. Це явище носить назву *наклепу*. Наклеп може використовуватись для зміцнення окремих елементів конструкцій (наприклад, в ланцюгах підйомних машин, арматурі залізобетонних конструкцій, тросах, робочих органах ріжучих і копальних агрегатів). Але наклеп приводить і до небажаних результатів – зміни форми і розмірів деталей, підвищення їх крихкості і виникнення тріщин.

На третьому етапі розтягу після стадії текучості матеріал ущільнюється, тобто знову набуває здатності опору розтягу, але тимчасово. Напруження, яке відповідає на діаграмі найвищій її точці (точка E), носить назву *межі міцності* або *тимчасового опору* σ_e , а навантаження, яке викликало таке напруження, – *навантаженням руйнування*.

З моменту, коли досягнуто навантаження σ_e , деформації зосереджуються в одному місці зразка і утворюється так звана шийка. При звуженні поперечного перерізу діюча сила зменшується і в точці K відбувається розрив, тобто розділення зразка на дві частини.

Отримані на діаграмі розтягу матеріалу значення σ_{nc} , σ_{np} , σ_T характеризують його механічні властивості і, наряду із пружними постійними E , μ , належать до *механічних характеристик матеріалу*.

При цьому за основну характеристику міцності при розтягу пластичних матеріалів, до яких відноситься сталь Ст.3, приймають границю текучості σ_T , так як виникнення великих залишкових деформацій розглядається як порушення міцності елементу конструкції.

Діаграми розтягу крихких матеріалів значно відрізняються від наведеної діаграми пластичного матеріалу. Крихкі матеріали руйнуються, як правило, несподівано, без утворення шийки і при незначних подовженнях. Якщо маловуглецева сталь при розриві подовжується на 20...25%, то такі типові крихкі матеріали, як чавун, розтріскуються, подовжуючись лише на 0,5...0,6%. Крихкі матеріали погано чинять опір розтягу, навіть при малих напруженнях в них спостерігається відхилення від закону Гука. Але в межах тих робочих напружень, за яких матеріал використовується в конструкціях і спорудах, дане відхилення незначне і в при розрахунках не враховується.

За характеристику міцності крихких матеріалів приймають найбільше напруження, що відповідає його розриву – границю міцності $\sigma_{ми}$ на відміну від тимчасового опору руйнування σ_e для пластичних матеріалів.

Таким чином, при статичному навантаженні пластичного матеріалу в якості небезпечного напруження необхідно приймати границю текучості σ_T , а при тих же умовах для крихкого матеріалу – границю міцності $\sigma_{ми}$.

Як вже було відмічено, на підставі експериментально знайдених граничних напружень із виразу (3.7) визначають допустимі напруження.

Для пластичних матеріалів допустиме напруження визначається як частина границі текучості:

$$[\sigma] = \frac{\sigma_T}{n}, \quad (n = 1,4 \dots 1,6), \quad (3.17)$$

а для крихких – як частина границі міцності:

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{ми}}{n}, \quad (n = 2,5 \dots 3,0). \quad (3.18)$$

У порівнянні з розтягом, при стиску крихкі матеріали значно збільшують свої характеристики міцності, а пластичні – майже не змінюють.

3.2.4 Розрахунки на міцність і жорсткість при розтягу або стиску.

Виходячи із загальних умов міцності (3.6) і виразу (3.8) для напружень, що виникають в поперечних перерізах елемента конструкції, можна отримати наступну розрахункову формулу при розтягу і стиску:

$$\sigma = \frac{N}{A} \leq [\sigma], \quad (3.19)$$

де N – величина поздовжньої сили у поперечному перерізі, A – площа поперечного перерізу, $[\sigma]$ – допустиме напруження розтягу (стиску) для матеріалу елемента конструкції.

Вираз (3.19) називається *умовою міцності при розтягу і стиску* і формулюється так: *розрахункове нормальне напруження в небезпечному перерізі не повинно перевищувати допустиме.*

В залежності від форми використання умови міцності (3.19) зустрічаються три види розрахунків елементів конструкцій на міцність.

1. Проектний розрахунок, при якому визначається розміри небезпечного поперечного перерізу:

$$A \geq \frac{N_{max}}{[\sigma]}. \quad (3.20)$$

Опір матеріалів

2. Перевірний розрахунок, при якому визначається максимальне робоче напруження і порівнюється із допустимим:

$$\sigma_{max} = \frac{N}{A} \leq [\sigma]. \quad (3.21)$$

3. Визначення максимально допустимого навантаження:

$$N_{max} \leq A \cdot [\sigma]. \quad (3.22)$$

Аналогічно умові міцності можна записати умову жорсткості при розтягу або стиску:

$$\Delta l = \frac{N \cdot l}{E \cdot A} \leq [\Delta l], \quad (3.23)$$

де Δl – розрахункова абсолютна деформація елемента конструкції, l – довжина елемента, E – модуль пружності, $[\Delta l]$ – допустима абсолютна деформація матеріалу.

Умова жорсткості формулюється так: *абсолютне видовження (або скорочення) навантаженого елемента конструкції не повинно перевищувати допустимого значення.*

Користуючись умовою жорсткості (3.23), можна провести ті самі три типи розрахунків, що і за умовою міцності – перевірний, проектний і допустимого (найбільшого) навантаження.

Слід відмітити, що стержневі конструкції розраховують переважно за умовою міцності, а умову жорсткості використовують як перевірний розрахунок.

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Що вивчають в опорі матеріалів?
2. Дайте визначення поняттям міцності, жорсткості і стійкості.
3. Дайте визначення внутрішнім силам і назвіть причини їх виникнення.
4. Яка деформація називається пружною?
5. Назвіть основні гіпотези і припущення в опорі матеріалів.
6. За яким методом визначаються внутрішні сили при деформації тіла, в чому полягає його сутність?
7. Які внутрішні сили виникають в загальному випадку деформації тіла?
8. Назвіть окремі випадки простої деформації тіла.
9. Дайте визначення напруження. На які складові можна розкласти повне напруження?

10. Що таке допустиме напруження і допустимий коефіцієнт запасу міцності?
11. Які внутрішні сили і напруження виникають при розтягу (стиску) прямого бруса?
12. Як будуються епюри поздовжніх сил і нормальних напружень?
13. Напишіть закон Гука для розтягу (стиску).
14. Як визначити абсолютну деформацію розтягу (стиску) прямого бруса?
15. Які основні механічні характеристики можна визначити із діаграми розтягу (стиску) матеріалів?
16. Напишіть умову міцності і жорсткості при розтягу (стиску)?
17. Які основні види розрахунків дозволяє зробити умова міцності на розтяг (стиск)?

3.3. Зсув

Зсувом називається такий вид деформації, при якому в поперечному перерізі бруса виникає лише один внутрішній силовий фактор – поперечна сила Q . Деформацію зсуву можна отримати при прикладенні до бруса двох близько розташованих і протилежно напрямлених рівних сил, які діють перпендикулярно до поздовжньої осі і викликають паралельне відносне зміщення його поперечних перерізів. Зсув спостерігається, наприклад, при різанні ножицями металічних прутків або полос.

Розглянемо деформацію зсуву однієї частини бруса відносно другої, під дією таких сил (рис. 3.10).

Поперечну силу Q , яка виникла від зовнішньої сили P , визначимо із умов рівноваги однієї із частин бруса (наприклад, лівої) за допомогою методу перерізів:

$$\sum_{k=1}^n P_{ky} = 0, \quad P - Q = 0, \quad Q = P.$$

Визначимо напруження в поперечних перерізах бруса. Дані напруження діють вздовж поперечного перерізу, тобто є дотичними напруженнями τ .

Припустимо, що напруження розподілені по перерізу рівномірно. Тоді рівнодіючу Q внутрішніх сил можна знайти як:

$$Q = \int_A \tau \cdot dA = \tau \int_A dA = \tau \cdot A.$$

Звідки

$$\tau = \frac{Q}{A}. \tag{3.24}$$

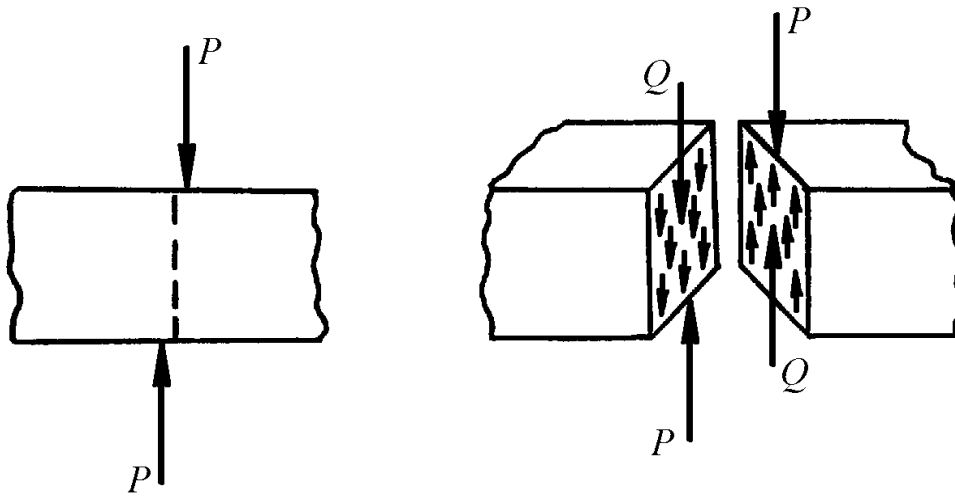


Рис. 3.10

Слід зауважити, що наведений розрахунок дотичних напружень при зсуві лише наближений до реального, тому що лінії дії сил P і Q точно не співпадають і являють собою в дійсності пару сил. Але момент цієї пари дуже малий і напруженням, що відповідає йому, можна знехтувати.

Таке припущення в багатьох випадках себе виправдовує і в інженерній практиці вираз (3.8) широко використовується для реальних конструкцій.

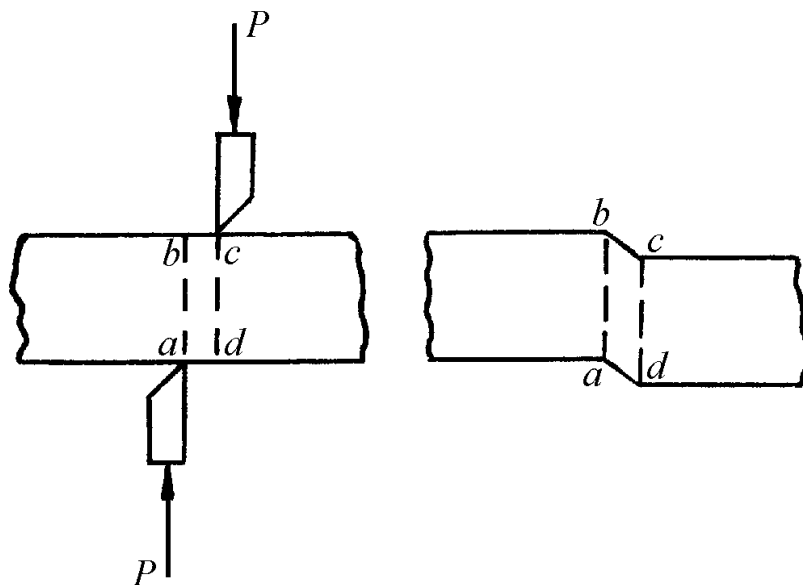


Рис. 3.11

Визначимо параметри, що характеризують деформацію при зсуві.

Як видно з рис. 3.11 деформація зсуву приводить до перекошування прямих кутів елементарного паралелепіпеда $adcd$ бруса.

Тобто, на відміну від лінійних деформацій, пов'язаних із зміною

лінійних розмірів елементів, при зсуві виникають кутові деформації, які викликають скривлення прямих кутів елементарних паралелепіпедів, виділених із бруса.

Продемонструємо процес загального випадку деформації зсуву на виділеному в тілі елементарному елементі $adcd$, нижню грань якого dc будемо вважати умовно нерухомою (рис. 3.12).

Такий елемент можна змістити, якщо вздовж його зовнішніх протилежних граней прикласти дві пари однакових за величиною і протилежних за напрямком елементарних зусиль (дотичних напружень τ).

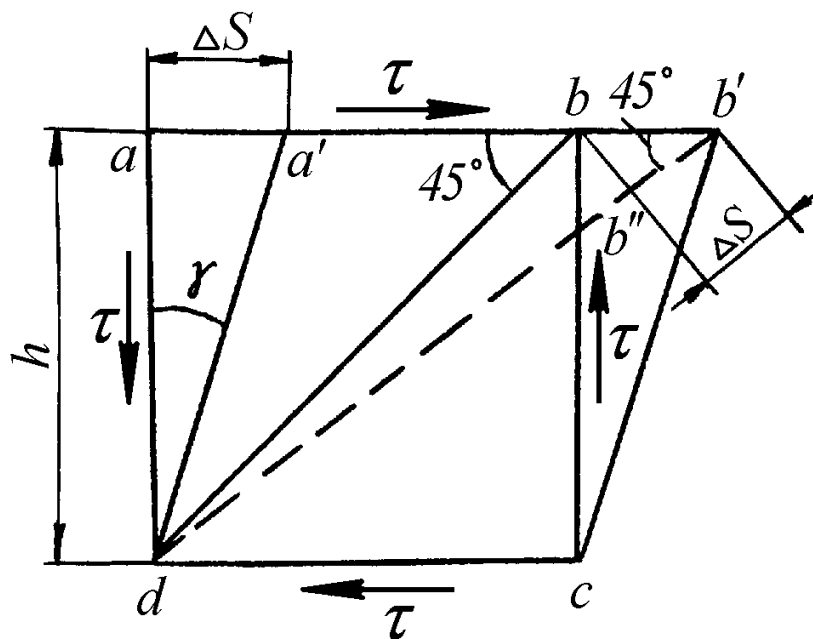


Рис. 3.12

При цьому грань ab зміститься паралельно на величину $aa' = bb' = \Delta s$, яка називається *абсолютним зсувом*. Елемент $adcd$ перекосяться і його прямі кути скривляться на величину γ . Кут γ називається *кутом зсуву або відносним зсувом*.

Величина відносного зсуву досить мала і визначається через абсолютний зсув:

$$\operatorname{tg} \gamma = \gamma = \frac{\Delta s}{h}. \quad (3.25)$$

В межах пружності матеріалу між напруженнями і деформацією при зсуві спостерігається залежність, яка аналогічна залежності при деформації розтягу (стиску):

$$\tau = G \cdot \gamma. \quad (3.26)$$

Вираз (3.26) називається законом Гука при зсуві і формулюється так: *дотичне напруження прямо пропорційне відносному зсуву.*

Коефіцієнт пропорційності G характеризує пружні властивості матеріалу при зсуві і називається *модулем зсуву* або *модулем пружності другого роду*. Модуль зсуву матеріалу знаходиться експериментальним шляхом із діаграми зсуву $\gamma - \tau$ при скручуванні тонкостінної труби, коли маємо випадок так званої деформації “чистого зсуву”, який буде розглядатись далі. Середнє значення G для ряду матеріалів, МПа: сталь – $0,8 \cdot 10^5$, мідь технічна – $0,4 \cdot 10^5$, деревина вздовж волокон – $0,0055 \cdot 10^5$.

Між модулем пружності E і модулем зсуву G матеріалу існує наступна залежність:

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \mu)}, \quad (3.27)$$

де μ – коефіцієнт поперечної деформації (коефіцієнт Пуасона).

3.3.1. Розрахунки на зріз і зминання

Деформація зсуву, доведена до руйнування матеріалу, називається *зрізом* (стосовно металічних елементів конструкцій) або *сколюванням* (стосовно неметалічних).

При цьому умова міцності при зрізі або сколюванні:

$$\tau = \frac{Q}{A} \leq [\tau], \quad (3.28)$$

де Q – поперечна сила, яка дорівнює зовнішньому навантаженню ($Q = P$), A – площа зрізу або сколювання, $[\tau]$ – допустиме напруження на зріз або сколювання.

Для пластичних металів значення допустимих напружень на зріз приймають в залежності від границі текучості σ_T в межах:

$$[\tau_{zp}] = (0,25 \dots 0,35) \cdot \sigma_T.$$

Для деревини допустимі напруження на сколювання приймають в межах $[\tau_{ск}] = 0,5 \dots 1,4$ МПа в залежності від сорту деревини і напрямку дії зовнішнього навантаження по відношенню до волокон.

Класичним прикладом металічних конструкцій, елементи, яких працюють на зріз є заклепочні (болтові) та зварні з'єднання.

В заклепочному з'єднанні із боку листів на заклепку передається зовнішні сили P , які можуть її зрізати по перерізу ab (рис. 3.13).

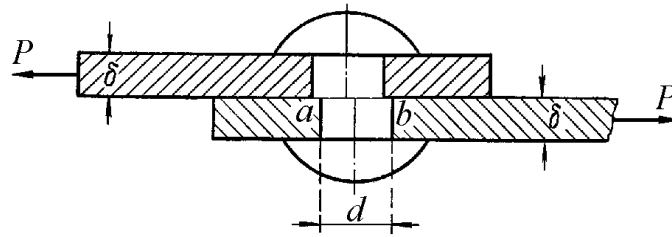


Рис. 3.13

Тоді умова міцності на зріз для з'єднання, що має n заклепок діаметром d (рис. 3.14) можна записати наступним чином:

$$\tau_{зр} = \frac{Q}{A_{зр}} = \frac{P}{\frac{\pi d^2}{4} n \cdot i} \leq [\tau_{зр}], \quad (3.29)$$

де i – кількість площин зрізу при з'єднанні більше ніж двох листів.

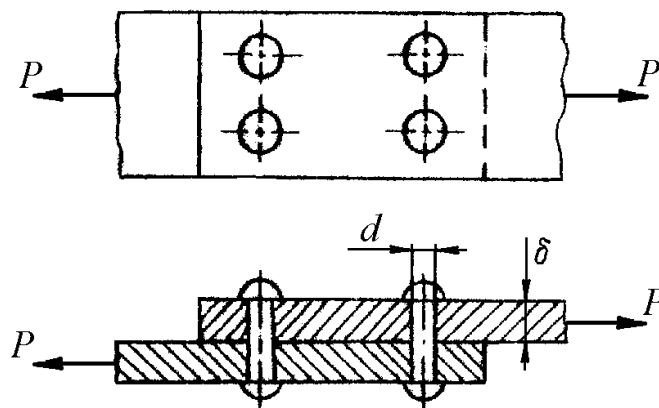


Рис. 3.14

Крім цього, в подібного роду елементах конструкцій виникає деформація зминання.

Зминанням називається місцевий стиск матеріалів, в контактуючих поверхнях деталей.

Виникаючі нормальні напруження зминання є місцевими і швидко зменшуються при віддаленні від поверхні контакту деталей. При цьому на поверхні контакту напруження зминання розподілені нерівномірно за невідомим законом. Тому для спрощення розрахунків за площу зминання замість поверхні половини циліндра умовно приймають проекції цієї поверхні на діаметральну площину (рис. 3.15).

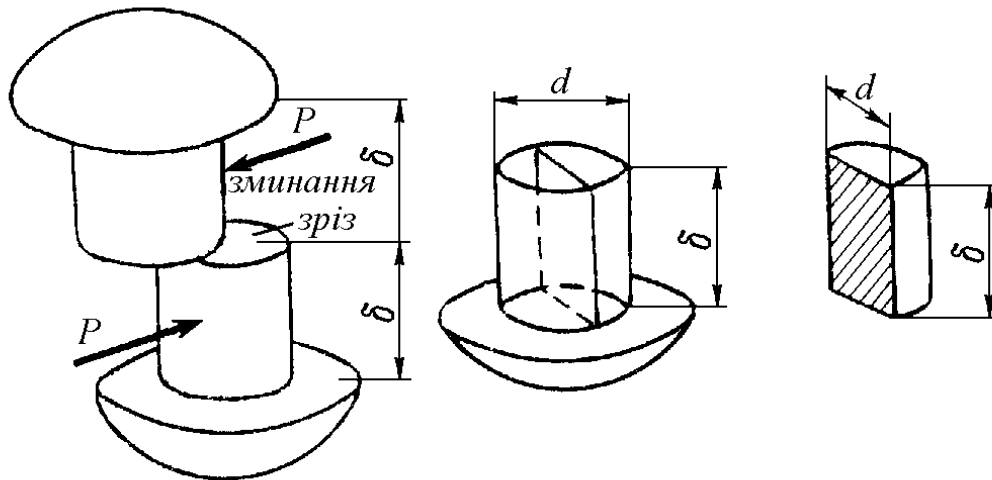


Рис. 3.15

Розрахункова площа зминання для клепки буде дорівнювати:

$$A_{зм} = d \cdot \delta_{min}, \quad (3.30)$$

де δ_{min} – товщина листа, яка приймається мінімальною в разі з'єднання листів різної товщини.

Таким чином, умова міцності на зминання для заклепочного (болтового) з'єднання має вигляд:

$$\sigma_{зм} = \frac{P}{A_{зм}} = \frac{P}{d \cdot \delta_{min}} \leq [\sigma_{зм}], \quad (3.31)$$

де $[\sigma_{зм}]$ – допустиме напруження на зминання.

В інженерній практиці допустимі напруження на зминання приймають для різних матеріалів в межах значень: для маловуглецевої сталі – 100...120 МПа, для клепаних сталевих з'єднань – 240...320 МПа, для деревини (сосна, дуб) – 2,4...11 МПа в залежності від сорту і напрямку деформації волокон.

3.4. Кручення

Крученням називається такий вид деформації, при якому в поперечному перерізі бруса виникає лише один внутрішній силовий фактор – крутний момент M_k . Деформацію кручення можна отримати, якщо до бруса в площинах, перпендикулярних його поздовжньої осі, прикласти дві пари зовнішніх сил з обертальними моментами M , які діють в протилежних напрямках і рівні за величиною (рис. 3.16).

Бруси, що працюють на кручення називають валами. На практиці спостерігається кручення валів двигунів, механічних передач, турбін і гребних гвинтів. Крім цього деформацію кручення можуть також зазнавати і інші деталі – болти під час закручування, пружини тощо.

Розглянемо детальніше випадок кручення валу, коли на нього жорстко насаджені два шківів 1 і 2, що передають енергію руху від джерела до приймача. Наприклад, шків 1 отримує обертальний момент M_1 від електродвигуна, а з шківів 2 знімається обертальний момент M_2 до робочих органів машини (рис. 3.16).

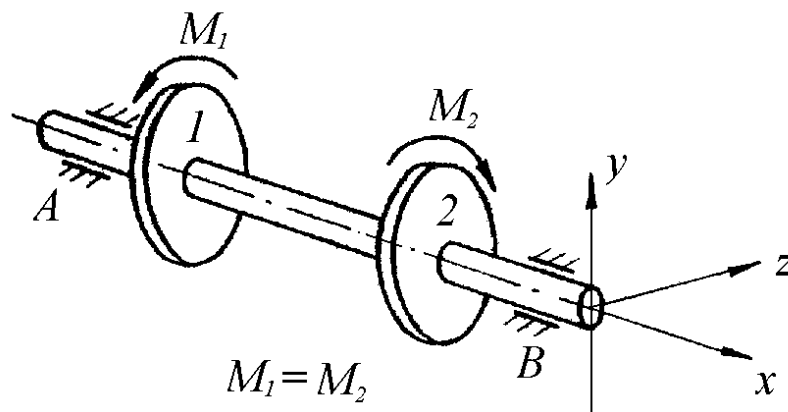


Рис. 3.16

Внаслідок протидії сил опору робочих органів машини рушійним силам електродвигуна, обертальні моменти на шківів M_1 і M_2 будуть протилежними за напрямком, а за законом збереження енергії (без урахування сил тертя і при рівномірному обертанні) – однакові за величиною. В результаті дії цих моментів M_1 і M_2 вал і отримає деформацію кручення.

Крутний момент M_k , що виникає при такій деформації в поперечному перерізі валу, можна визначити із умови рівноваги однієї із частин валу (наприклад, лівої) за допомогою метода перерізів. Вибрана ліва частина валу перебуває в стані рівноваги під дією внутрішнього моменту M_k і зовнішнього M_1 (рис. 3.17).

Умовно приймемо за додатний напрямок обертання моментів проти годинникової стрілки при спостереженні за ними із торця перерізу розглянутої частини валу.

Тоді рівняння рівноваги між зовнішнім і внутрішнім моментами буде мати вигляд:

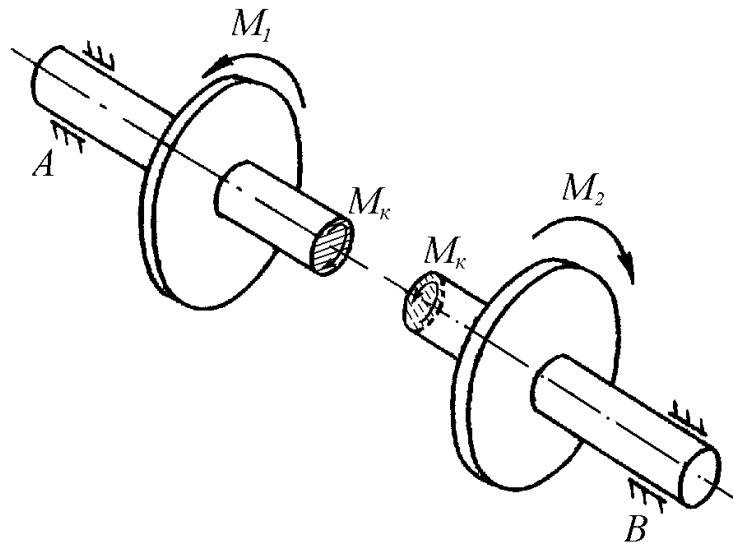


Рис. 3.17

$$\sum_{k=1}^n M_x = 0, \quad -M_k + M_1 = 0.$$

Звідки

$$M_k = M_1.$$

Очевидно, що для другої частини вала (правої): $M_k = M_2$, а з урахуванням того, що $M_1 = M_2$:

$$M_k = M_1 = M_2.$$

Тобто, на всій довжині вала, де відбувається деформація кручення, крутний момент в поперечних перерізах має постійне значення і зрівноважує зовнішній момент, діючий по один із боків перерізу.

Знак моменту M_k в даному випадку буде додатний, але він приймається умовно тільки для складання рівняння рівноваги і на розрахунки жорсткості та міцності вала не впливає. Але це правило знаків будемо використовувати і далі.

Цілком зрозуміло, що у випадку дії на відсічену частину декількох зовнішніх моментів необхідно розглядати рівновагу між внутрішнім крутним моментом і сумарною дією зовнішніх моментів.

Таким чином, для подальших розрахунків зробимо висновки.

Крутний момент, що виникає в поперечному перерізі вала, зрівноважує його зовнішні моменти, які прикладені по один із боків перерізу, і дорівнює їх алгебраїчній сумі із урахуванням знаку.

Правило знаків приймаємо наступне.

Зовнішні моменти рахуються додатними, при обертанні проти годинникової стрілки, якщо спостерігати за ними із торця перерізу

розглянутої частини валу, і від'ємними - в протилежному випадку.

3.4.1. Побудова епюри крутних моментів

Коли обертання від двигуна передається за допомогою передаточного валу кільком робочим машинам, крутний момент не лишається постійним по довжині валу. Характер зміни крутного моменту в цьому випадку зручно представити у вигляді епюри крутних моментів.

Розглянемо побудову такої епюри на прикладі (рис. 3.18).

Нехай вал обертається рівномірно, а тертя в його опорах незначне. Тоді зовнішній момент M_1 , що подається на шків 1 валу буде врівноважений сумою зовнішніх моментів, які знімаються з його шківів 2, 3, 4:

$$M_1 = M_2 + M_3 + M_4$$

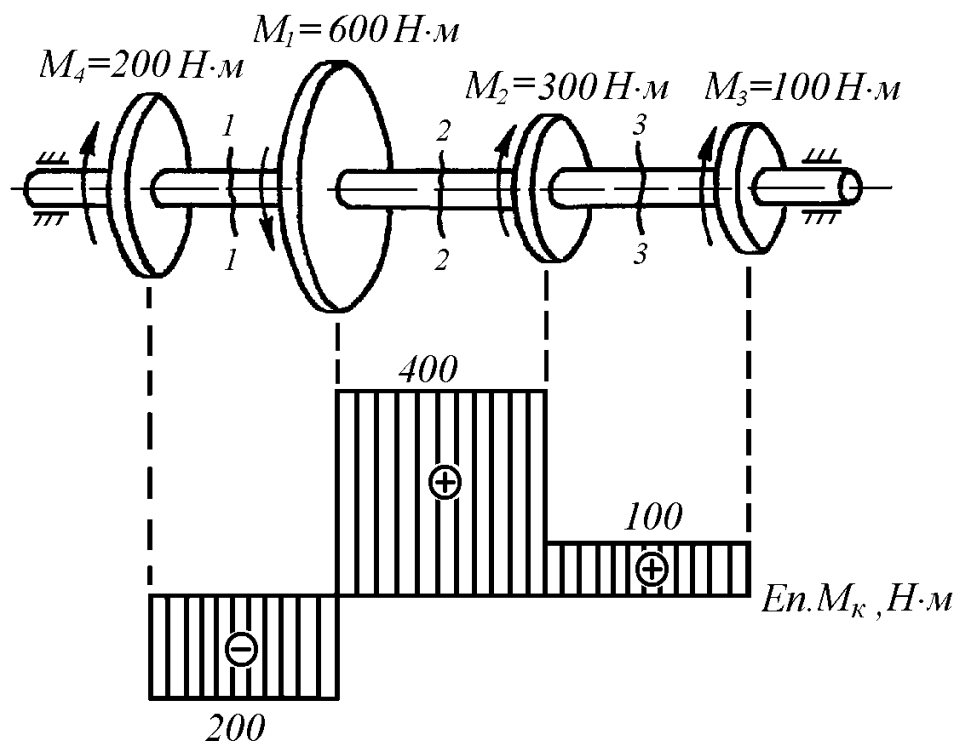


Рис. 3.18

Розбиваємо вал на три ділянки 1, 2, 3 з межами в точках прикладання зовнішніх моментів. Визначимо крутні моменти в поперечних перерізах вала кожної ділянки, застосувавши метод перерізів. При цьому будемо складати рівняння рівноваги для лівої частини валу, відкинувши праву, і використовувати прийняте правило знаків для зовнішніх моментів, що діють на цю частину.

Опір матеріалів

Тоді крутний момент в будь-якому перерізі першої ділянки валу дорівнює:

$$M_{к1} = -M_4 = -200 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

На другій ділянці :

$$M_{к2} = -M_4 + M_1 = -200 + 600 = 400 \text{ Н} \cdot \text{м}$$

На третій ділянці:

$$M_{к3} = -M_4 + M_1 - M_2 = -200 + 600 - 300 = 100 \text{ Н} \cdot \text{м}$$

По знайденим величинам будемо епюру крутних моментів, відкладаючи від нульової лінії у вибраному масштабі від'ємні значення вниз, а додатні – вгору.

Аналогічні результати можна отримати, якщо будувати епюру зліва на право, розглядаючи рівновагу правої частини валу. Звідси можна зробити висновок що, значення епюри в її крайніх точках дорівнює зовнішнім моментам, діючих на відповідних кінцях вала.

Слід також зауважити, що досить часто в інженерній практиці бувають задані не зовнішні обертальні моменти M_i ($\text{н} \cdot \text{м}$), а потужності N_i (Вт), що передаються на вал, і кутова швидкість ω (рад/с) обертання валу або його частота n (об/хв). В такому випадку зовнішні обертальні моменти можуть бути визначені із відомої залежності:

$$M_i = \frac{N_i}{\omega} = \frac{30 \cdot N_i}{\pi \cdot n}.$$

3.4.2. Напруження і деформації при крученні

З'ясуємо характер деформацій і напружень при крученні. Для цього розглянемо кручення валу суцільного (або кільцевого) перерізу з жорстко закріпленим одним кінцем (рис. 3.19).

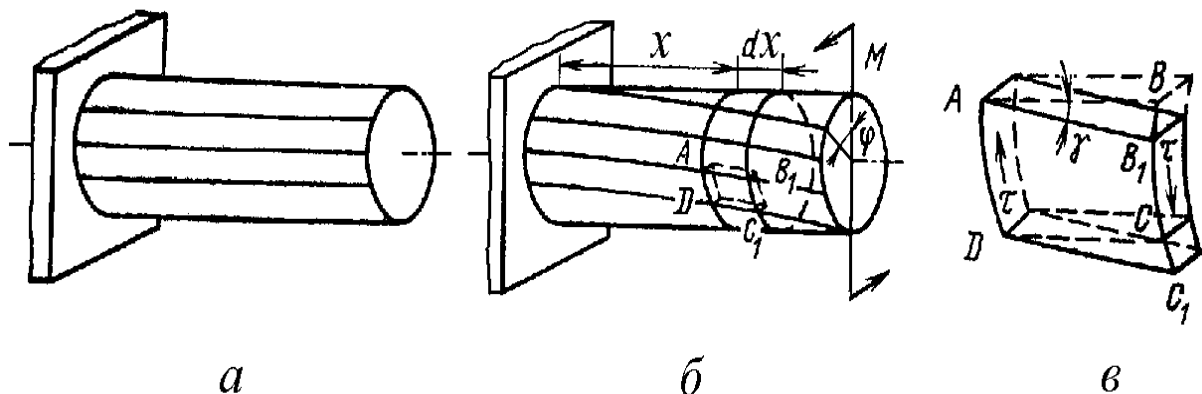


Рис. 3.19

При деформації кручення можна спостерігати наступне: *поперечні перерізи валу зберігають свою плоску форму, вісь валу залишиться прямою і відстані між перерізами не зміняться, твірні на поверхні валу перетворюються у гвинтові лінії.*

Таким чином, деформація кручення валу полягає у відносному повороті його поперечних перерізів навколо вісі кручення. При цьому кути повороту перерізів прямо пропорційні відстані до місця закріплення валу і називаються *кутами закручування*. Кути закручування визначаються в радіанах або в градусах.

Кут повороту крайнього перерізу валу від місця його закріплення називається повним кутом закручування φ (рис. 3.19 б).

Розглядаючи тонкий шар матеріалу на поверхні валу, можна побачити, що елементарний паралелепіпед $ABCD$ при крученні перекошується і прямі кути між його гранями змінюються на кут γ , який є кутом зсуву, або відносним зсувом (рис. 3.19 в). Аналогічна картина спостерігалась при вивченні деформації зсуву.

Тобто, при крученні також виникає зсув, але не за рахунок поступального, а в результаті обертального руху одного поперечного перерізу відносно іншого. Такий зсув називається «чистим зсувом».

На цій підставі можна зробити висновок, що при крученні в результаті відносного зсуву поперечних перерізів в них виникають тільки дотичні напруження τ .

Визначимо закон розподілення дотичних напружень в перерізі валу.

Двома поперечними перерізами виділимо елемент валу довжиною dx , а з нього, в свою чергу, двома циліндричними поверхнями з радіусами ρ і $\rho + d\rho$ виділимо елементарне кільце (рис. 3.20 а).

Правий переріз кільця повертається при крученні відносно лівого на кут $d\varphi$. Твірна DC при цьому зміститься на кут зсуву γ і займе положення DC_1 .

Відрізок CC_1 дорівнює, з одного боку, $\rho \cdot d\varphi$, а з другого – $\gamma \cdot dx$. Тоді відносний зсув γ перерізу дорівнює:

$$\gamma = \rho \frac{d\varphi}{dx}, \quad (3.32)$$

Введемо позначення

$$\frac{d\varphi}{dx} = \theta. \quad (3.33)$$

Величина θ називається *відносним кутом закручування* і аналогічна відносному видовженню стержня при розтягу ($\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$).

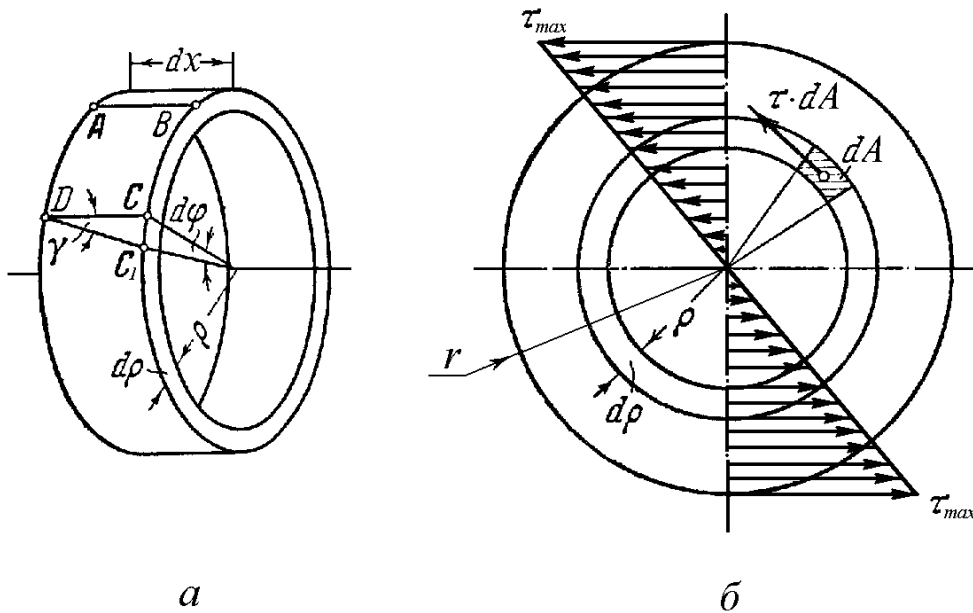


Рис. 3.20

Величину відносного зсуву в такому разі можна записати у вигляді:

$$\gamma = \rho \cdot \theta. \quad (3.34)$$

Напрямок деформації зсуву елементу $ABCD$ визначає напрямок виникаючих в ньому дотичних напружень τ . Це буде перпендикуляр до відповідного радіуса ρ елементу (рис. 3.20 б).

Величина цих дотичних напружень τ визначається за законом Гука для зсуву із урахуванням виразу (3.34):

$$\tau = G \cdot \gamma = G\rho\theta. \quad (3.35)$$

де G – модуль зсуву.

Із співвідношення (3.35) можна зробити висновок, що дотичні напруження τ при крученні валу змінюються в поперечному перерізі по довжині радіуса за лінійним законом. Вони дорівнюють нулю в центрі переріза і мають максимальне значення на поверхні валу (рис. 3.20 б):

$$\tau_{min} = 0 \quad \text{при } \rho = 0, \quad \tau_{max} = G\rho\theta \quad \text{при } \rho = r.$$

Таким чином, дотичні напруження τ в кожній точці поперечного перерізу валу напрямлені перпендикулярно до відповідного радіуса точки перерізу і по величині змінюються пропорційно радіусу від нульового значення в центрі перерізу до максимального на поверхні валу

З іншого боку, знаючи закон розподілення дотичних напружень, можна визначити їх значення в залежності від внутрішнього моменту, що

виникає в даному поперечному перерізі.

Якщо dA – елементарна площа, то елементарна внутрішня дотична сила, що діє на цій площі, дорівнює:

$$dP = \tau \cdot dA = G\rho\theta \cdot dA.$$

Елементарний момент, що утворює елементарна сила dP :

$$dM = dP \cdot \rho = G\rho^2\theta \cdot dA.$$

Сума таких елементарних моментів, взята по всій площі поперечного перерізу валу, дорівнює внутрішньому крутному моменту M_{κ} , що діє в цьому перерізі, і в даному конкретному випадку дорівнює зовнішньому моменту M :

$$M_{\kappa} = \int_A dM = \int_A G\rho^2\theta \cdot dA.. \quad (3.36)$$

Так як $G = const$ і $\theta = const$, то

$$M_{\kappa} = G\theta \cdot \int_A \rho^2 \cdot dA..$$

Величина $\int_A \rho^2 \cdot dA = J_p$, як відомо з розділу динаміки, називається полярним моментом інерції. Тоді останній вираз запишемо як:

$$M_{\kappa} = G \cdot \theta \cdot J_p. \quad (3.37)$$

Звідки

$$\theta = \frac{M_{\kappa}}{GJ_p}. \quad (3.38)$$

Повний кут закручування в радіанах:

$$\varphi = \theta \cdot l = \frac{M_{\kappa}l}{GJ_p}, \quad (3.39)$$

або в градусах:

$$\varphi^{\circ} = \frac{M_{\kappa}l}{GJ_p} \cdot \frac{180}{\pi}, \quad (3.40)$$

Добуток $G \cdot J_p$ називається жорсткістю валу при крученні.

Знайдемо залежність напруження від крутного моменту. Для цього у співвідношення (3.33) замість θ підставимо його значення із (3.38):

$$\tau = G\rho\theta = G\rho \frac{M_\kappa}{GJ_p} = \frac{M_\kappa\rho}{J_p}. \quad (3.41)$$

В точках, найбільше віддалених від центру перерізу валу (при $\rho = r$), напруження будуть максимальними:

$$\tau_{max} = \frac{M_\kappa r}{J_p}, \quad (3.42)$$

або

$$\tau_{max} = \frac{M_\kappa}{W_p}, \quad (3.43)$$

де $W_p = J_p / r$ – полярний момент опору поперечного перерізу валу.

Полярний момент опору перерізу є його геометричною характеристикою (як і полярний момент інерції).

Для суцільного перерізу валу діаметром d :

$$W_p = \frac{2\pi d^4}{32d} = \frac{\pi d^3}{16}. \quad (3.44)$$

Для валу кільцевого перерізу із зовнішнім D і внутрішнім d діаметрами:

$$W_p = \frac{2\pi(D^4 - d^4)}{32D} = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{16D}. \quad (3.45)$$

3.4.3. Умови міцності і жорсткості при крученні.

Міцність при крученні вала визначається умовою:

$$\tau = \frac{M_\kappa}{W_p} \leq [\tau_\kappa], \quad (3.46)$$

де M_κ – максимальне значення крутного моменту в поперечних перерізах валу, яке визначається із епюри крутних моментів, $[\tau_\kappa]$ – допустиме дотичне напруження при крученні, яке для сталей дорівнює $30 - 50 \text{ МПа}$.

Умова жорсткості валу при крученні має вигляд:

$$\varphi^\circ = \frac{M_\kappa l}{GJ_p} \cdot \frac{180}{\pi} \leq [\varphi^\circ], \quad (3.47)$$

де $[\varphi^\circ]$ – допустимий кут закручування, який приймають: $0,25 - 1,0 \text{ град/м}$.

Аналогічно розтягу (стиску) при крученні за умовами (3.46) і (3.47) можна виконати три види розрахунків: проектний, перевірний і на

визначення допустимого навантаження.

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Дайте визначення деформації зсуву. Як її можна отримати?
2. Які внутрішні сили і напруження виникають при деформації зсуву?
3. Сформулюйте закон Гука для зсуву.
4. Напишіть умову міцності на зріз.
5. Напишіть умову міцності на зминання.
6. Дайте визначення деформації кручення. Як її можна отримати?
7. Як визначити крутний момент при крученні валів?
8. Як будується епюра крутних моментів?
9. Які напруження виникають при крученні?
10. Що таке “чистий зсув”?
11. Напишіть умову міцності при крученні.
12. Напишіть умову жорсткості при крученні.

3.5. Згин

Чистим згином називається такий вид деформації, при якому в поперечному перерізі бруса виникає тільки один внутрішній силовий фактор – згинаючий момент M_{z_2} . Деформацію чистого згину можна отримати, наприклад, якщо до бруса в площинах, що проходять через його вісь, прикласти дві пари зовнішніх сил, які діють в протилежних напрямках і рівні за величиною (рис. 3.3 д).

В більшості практичних задач до бруса, крім зовнішніх моментів, прикладені також поперечні сили, що приводить до виникнення в його поперечних перерізах відповідно двох внутрішніх силових факторів – згинаючого моменту M_{z_2} і поперечної сили Q . Такий згин називається *поперечним* (рис. 3.3 е).

Але в будь-якому випадку деформація згину бруса, пов'язана із скривленням його осі під дією пар сил або поперечних навантажень.

Бруси, що працюють на згин, називають балками.

За розташуванням прикладених навантажень на балку розрізняють *плоский згин*, коли всі зовнішні поперечні сили і пари сил розміщені в одній площині (така площина називається силовою), причому ця площина збігається з однією із головних площин перерізу. Головними називають площини, які проходять через вісь балки і одну із головних центральних осей поперечного перерізу. Випадки плоского чистого і плоского поперечного згину консольної балки показані відповідно на рис. 3.21 а, б.

Опір матеріалів

Якщо сили і пари сил діють в повздовжній площині, що проходить через вісь балки, але не співпадає ні з однією із головних площин, має місце *косий згин* (рис. 3.21 в).

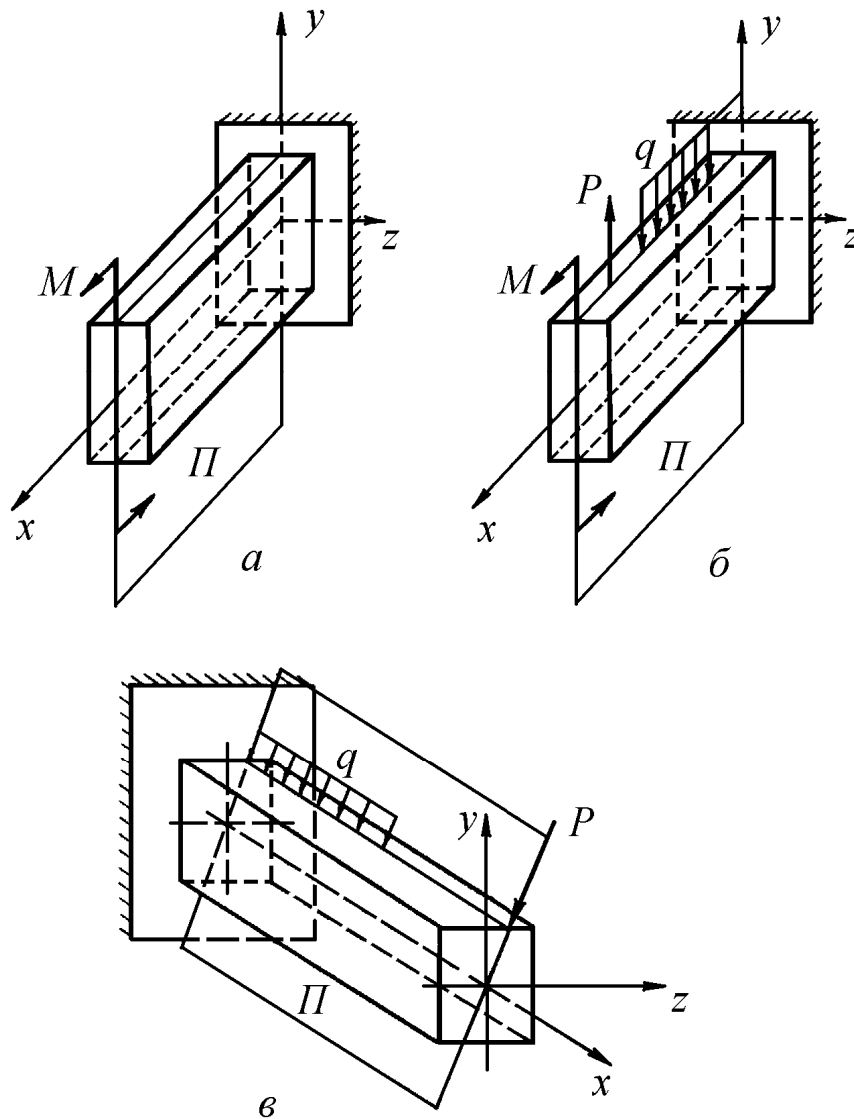


Рис. 3.21

В інженерній практиці існують багато елементів конструкцій, які працюють на згин і можна розглядати як балку. Це не тільки будівельна балка, але також вали та осі машин, гвинти, болти та зуби зубчастих коліс шатун кривошипно – шатунного механізму та інші. При цьому в багатьох випадках балки задовольняють таким умовам: переріз балки має хоча б одну вісь симетрії, всі зовнішні сили, враховуючи і реакції опор, лежать в площині симетрії. Тобто, маємо випадок плоского згину балки, який викликає практичний інтерес і буде розглянутий далі.

3.5.1. Внутрішні силові фактори при плоскому згині балок

При плоскому згині прямолінійної балки, як вже відмічалось, в загальному випадку виникають два внутрішні силові фактори – згинаючий момент M_{z_2} і поперечна сила Q . Для їх визначення застосовують метод перерізів.

Умовно балку розрізають на дві частини поперечним перерізом. Відкидають одну із частин балки, замінюють її дію на іншу внутрішніми силовими факторами, прикладеними до площини перерізу, і розглядають рівновагу частини, що лишилася під дією зовнішніх (в тому числі і реакцій опор) і внутрішніх навантажень (рис. 3.22).

При цьому в розглянутому випадку плоского поперечного згину поперечна сила Q і згинаючий момент M_{z_2} , як і зовнішні навантаження, розташовані у вертикальній площині, що проходить через вісь x балки. Позначимо їх відповідно до напрямку дії через Q_y і M_z .

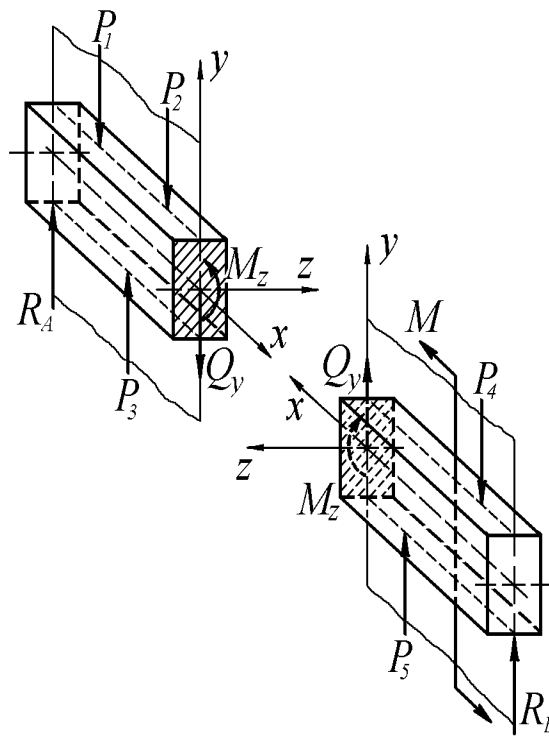


Рис. 3.22

Для отриманої системи сил, прикладених для правої або лівої частини балки, із загальних шести рівнянь рівноваги (3.1) можна використати тільки два, з яких і визначаються внутрішні силові фактори Q_y і M_z :

$$\sum_{k=1}^n P_{ky} = 0, \quad \sum_{k=1}^n m_z(\bar{P}_k) = 0.$$

В результаті поперечна сила Q_y , яка виникає в поперечному перерізі,

Опір матеріалів

чисельно буде дорівнювати алгебраїчній сумі проєкцій на вісь y усіх зовнішніх сил, розміщених по один бік від перерізу. Знак поперечної сили Q_y визначається за таким правилом.

Поперечна сила в перерізі вважається додатною, якщо зовнішня сила намагається зсунути ліву від перерізу частину балки відносно правої вгору, або праву відносно лівої вниз, і від'ємною, коли навпаки (рис. 3.23 а).

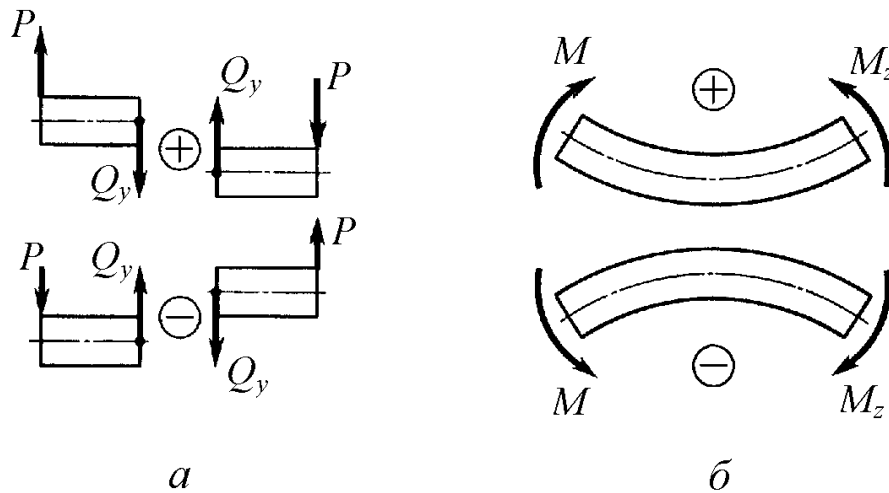


Рис. 3.23

Згинаючий момент M_z в перерізі чисельно буде дорівнювати алгебраїчній сумі моментів усіх зовнішніх сил і зовнішніх моментів пар сил, розташованих по один бік перерізу, відносно головної центральної осі z цього перерізу.

Знак згинаючого моменту M_z визначають за наступним правилом.

Згинаючий момент вважається додатним, якщо зовнішня сила чи момент, що спричиняють згин, згинають балку так, що стиснуті волокна знаходяться вгорі балки, і від'ємним, якщо стиснуті нижні волокна балки (рис. 3.23 б).

Слід нагадати, що величина згинаючого моменту M_z в довільному поперечному перерізі від окремої зовнішньої сили визначається як добуток цієї сили на найкоротшу відстань від лінії дії сили до перерізу (плече сили):

$$M_z = P \cdot x,$$

а від окремого зовнішнього моменту M – самому моменту:

$$M_z = M.$$

При цьому необхідно враховувати вищенаведене правило знаків.

3.5.2. Побудова епюр поперечних сил і згинаючих моментів

Для відображення закономірностей зміни величин Q_y і M_z вздовж

осі балки і визначення їх максимальних і мінімальних значень будують епюри поперечних сил і згинаючих моментів. При цьому використовують метод перерізів і послідовно знаходять величини Q_y і M_z в кожному характерному перерізі балки. До характерних відносяться ті перерізи, в яких прикладені зосереджені сили або моменти, а також перерізи, де починається або закінчується розподілене навантаження.

В загальному випадку послідовність побудови епюр наступна:

1. Складають рівняння рівноваги балки і визначають її опорні реакції, які відносять до зовнішніх сил.

2. Характерними перерізами балку розбивають на окремі ділянки, в межах яких значення Q_y і M_z змінюються за одним законом. Першу ділянку вибирають або з правого, або з лівого боку балки, але так, щоб на відсічену частину балки діяла мінімальна кількість зовнішніх навантажень.

3. На кожній ділянці беруть довільний переріз на відстані x від початку побудови епюри і складають рівняння для поперечних сил Q_y і згинаючих моментів M_z як функції абсциси x , тобто $Q_y = f(x)$ і $M_z = f(x)$.

4. За отриманими виразами обчислюють ординати епюр для характерних перерізів (характерних точок).

5. Відповідно отриманим значенням Q_y і M_z будують епюри у вибраному масштабі, відкладаючи від базової лінії, що паралельна осі балки, додатні величини вгору, а від'ємні – вниз.

6. Визначають перерізи, в яких діють максимальні Q_y і M_z і враховують значення цих величин, якщо вони ще обчислені.

Розглянемо деякі характерні приклади побудови епюр поперечних сил і згинаючих моментів.

Розглянемо спочатку жорстко зацеплені одним кінцем консольні балки. Характерною особливістю таких балок є те, що для них відпадає необхідність знаходити опорні реакції, якщо починати будувати епюри з вільного кінця балки.

Приклад 1.

Консольна балка навантажена зосередженою парою сил, з моментом M (рис. 3.24).

Балка має одну ділянку AB довжиною l . Будуємо епюри з права наліво від точки B , розглядаючи рівновагу правої частини балки.

В довільному перерізі на відстані x від точки B значення функцій $Q_y(x)$ і $M_z(x)$ будуть наступними:

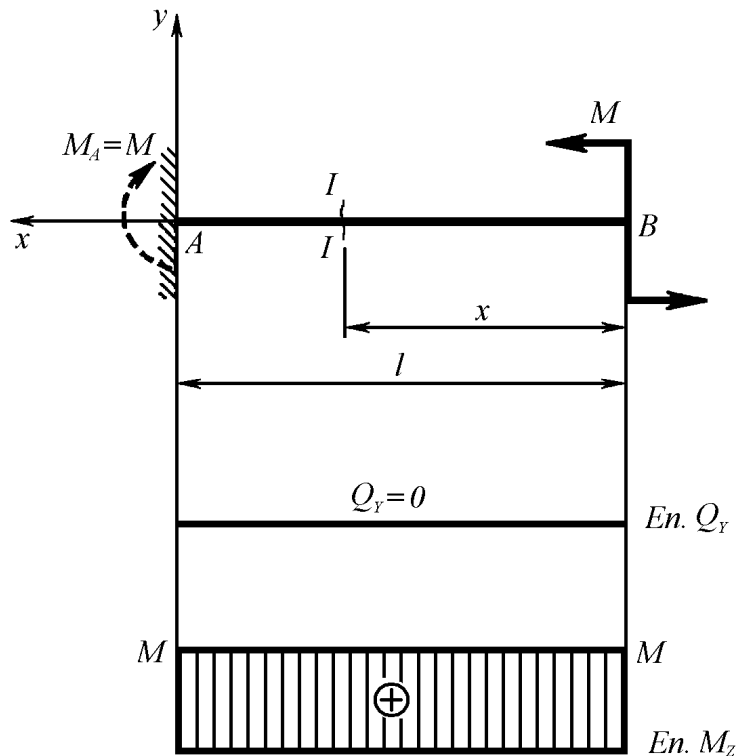


Рис. 3.24

$$Q_y(x) = 0 \text{ (не залежить від } x \text{),}$$

$$M_z(x) = M \text{ (не залежить від } x \text{).}$$

В цьому випадку у всіх перерізах балки, поперечна сила дорівнює нулю, тому що сума проєкцій моменту пари сил на любую вісь дорівнює нулю. Згинаючий момент у цих перерізах має постійне додатне значення і дорівнює зовнішньому моменту.

Епюри поперечних сил і згинаючих моментів показані на рис. 3.24.

При такому навантаженні спостерігається чистий згин балки і, як видно із епюри, значення M_z дорівнює також моменту в опорі балки.

Приклад 2.

Консольна балка навантажена зосередженою силою P , яка прикладена до вільного кінця балки (рис. 3.25).

Балка має лише одну ділянку AB довжиною l . Будуємо епюри зправа наліво, взявши за початок відліку абсциси x точку B .

Розглянувши рівновагу правої частини балки, визначаємо функції $M_z(x)$ і $Q_y(x)$ на довжині $0 \leq x \leq l$:

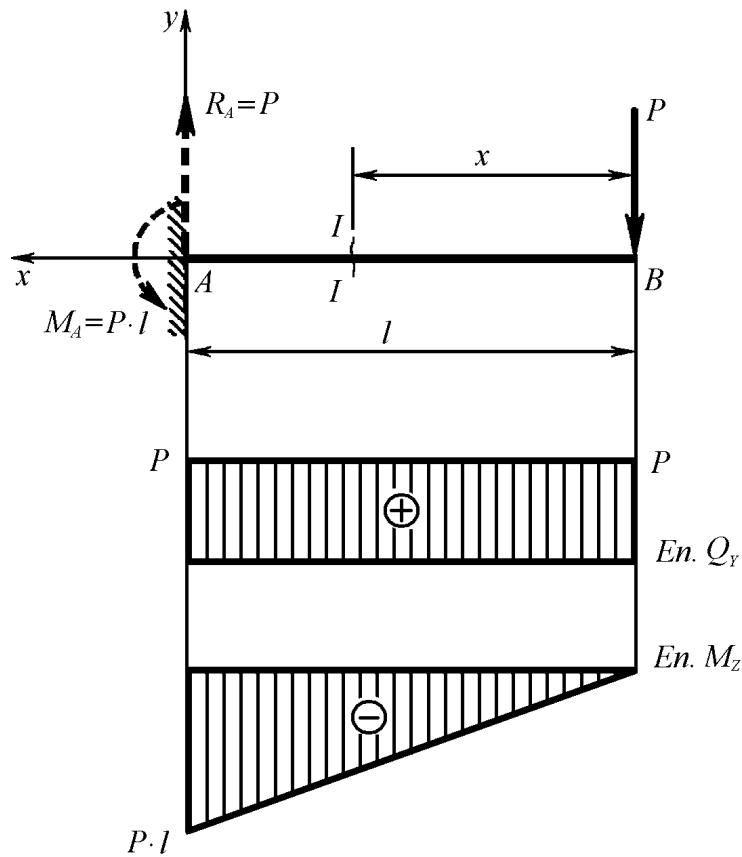


Рис. 3.25

$$Q_y(x) = P \text{ (не залежить від } x \text{),}$$

$$M_z(x) = -P \cdot x.$$

Як видно з рівнянь, поперечні сили мають постійне додатне значення на всій довжині балки, а функція згинаючого моменту $M_z(x)$ лінійна із значеннями в характерних перерізах:

$$\text{при } x = 0 \text{ (переріз } B \text{): } M_B = -P \cdot 0 = 0,$$

$$\text{при } x = l \text{ (переріз } A \text{): } M_A = -P \cdot l.$$

За отриманими даними будуємо епюри поперечних сил і згинаючих моментів (рис. 3.25). Максимальним згинаючий момент буде в точці B .

Приклад 3.

На консольну балку діє рівномірно розподілене по всій її довжині навантаження інтенсивності $q \left(\frac{\kappa H}{m} \right)$ (рис. 3.26).

Балка має одну ділянку AB довжиною l . Будуємо епюри справа наліво, прийнявши за початок відліку x точку B .

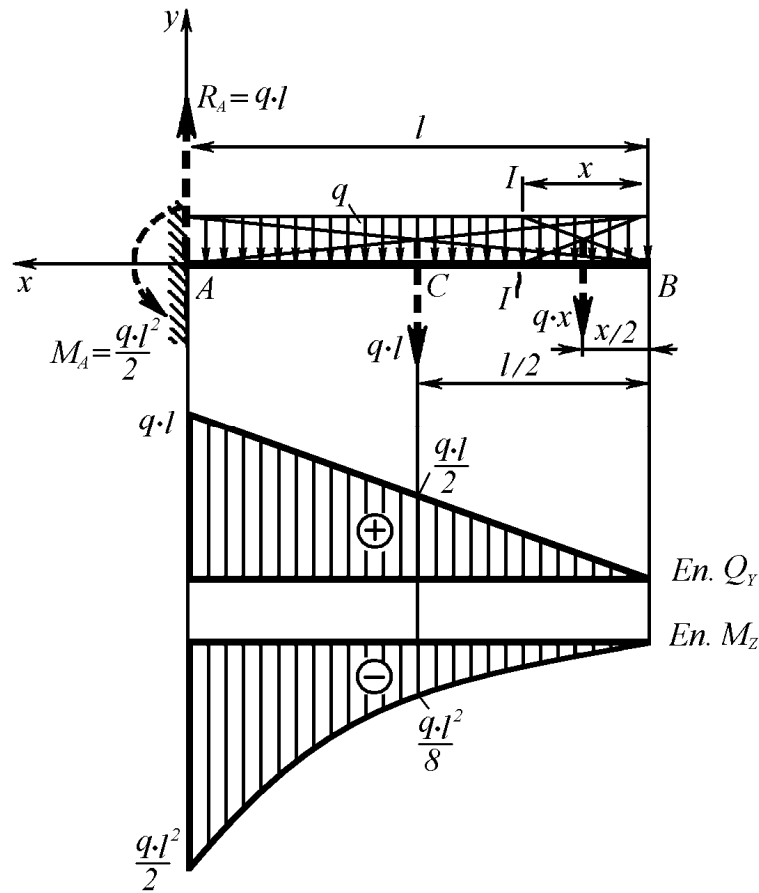


Рис. 3.26

Розглянувши рівновагу правої частини балки, визначаємо функції $M_z(x)$ і $Q_y(x)$ на довжині $0 \leq x \leq l$:

$$Q_y(x) = -q \cdot x,$$

$$M_z(x) = -qx \cdot \frac{x}{2} = -\frac{qx^2}{2}.$$

Тобто, поперечна сила $Q_y(x)$ змінюється за законом прямої, а згинаючий момент $M_z(x)$ – за законом квадратичної параболи.

Для побудови епюри поперечних сил достатньо визначити ординати у двох характерних перерізах:

при $x = 0$ (переріз B): $Q_B = -q \cdot 0 = 0,$

при $x = l$ (переріз A): $Q_A = -q \cdot l.$

Враховуючи, що епюра згинаючих моментів має криволінійний закон зміни, для її побудови визначимо ординати в трьох поперечних перерізах:

при $x = 0$ (переріз B): $M_B = 0,$

при $x = \frac{l}{2}$ (переріз C): $M_A = -\frac{ql^2}{8}$,

при $x = l$ (переріз A): $M_A = -\frac{ql^2}{2}$.

За отриманими даними будуюмо епюри поперечних сил і згинаючих моментів (рис. 3.26). Бачимо, що $Q_y(x)$ і $M_z(x)$ змінюються від нуля в перерізі B до максимального значення в перерізі A .

Перейдемо до розгляду балок, для яких при побудові епюр поперечних сил і згинаючих моментів без попереднього визначення опорних реакцій обійтись неможливо. Це балки на двох опорах.

Приклад 4.

Двохопорна балка навантажена зосередженою силою P , яка прикладена між опорами (рис. 3.27).

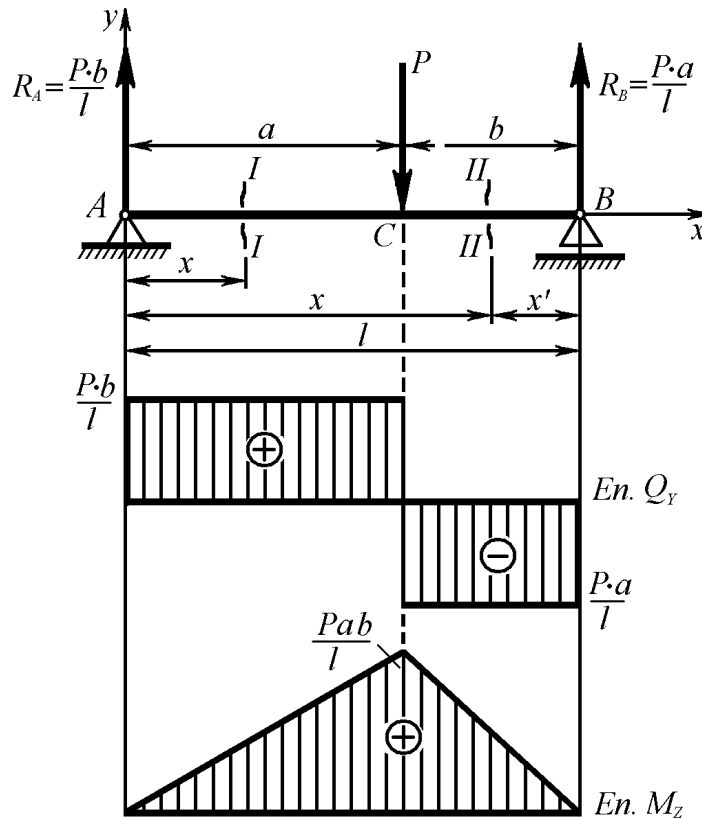


Рис. 3.27

Спочатку визначимо опорні реакції.

Опір матеріалів

$$\sum_{k=1}^n m_B(\bar{P}_k) = 0, \quad -R_A \cdot l + P \cdot b = 0, \quad R_A = \frac{Pb}{l},$$

$$\sum_{k=1}^n m_A(\bar{P}_k) = 0, \quad -P \cdot a + R_B \cdot l = 0, \quad R_B = \frac{Pa}{l}.$$

Виконуємо обов'язково перевірку правильності визначення реакцій:

$$\sum_{k=1}^n P_{ky} = 0, \quad R_A + R_B - P = 0.$$

В даному випадку балка має дві ділянки AC і CB із точкою C на їх границі. Будуємо епюри зліва направо, прийнявши за початок відліку x точку A .

Розглядаємо рівновагу лівої частини балки.

На першій ділянці AC в межах значень $0 \leq x \leq a$ для довільного переріза $I-I$:

$$Q_y^I(x) = R_A = \frac{Pb}{l} \text{ (не залежить від } x),$$

$$M_z^I(x) = R_A \cdot x = \frac{Pb}{l} \cdot x.$$

Тобто, на першій ділянці поперечні сили $Q_y^I(x)$ однакові у всіх перерізах і дорівнюють додатному значенню реакції в опорі A , їх епюра має вигляд горизонтальної прямої. Епюра згинаючих моментів $M_z^I(x)$ змінюється за законом прямої із значеннями в характерних перерізах:

$$\text{при } x=0 \text{ (переріз } A): M_A = 0,$$

$$\text{при } x=a \text{ (переріз } C): M_B = \frac{Pab}{l}.$$

На другій ділянці CB в межах значень $a \leq x \leq l$ для довільного переріза $II-II$:

$$Q_y^{II}(x) = R_A - P = \frac{Pb}{l} - P = -P \frac{l-b}{l} = -\frac{Pa}{l} \text{ (не залежить від } x),$$

$$\begin{aligned} M_z^{II}(x) &= R_A \cdot x - P(x-a) = \frac{Pb}{l} \cdot x - P(x-a) = \\ &= \frac{P}{l}(bx - lx + la) = \frac{P}{l}(-ax + la) = \frac{Pa}{l}(l-x). \end{aligned}$$

В даному випадку функції $M_z^{II}(x)$ і $Q_y^{II}(x)$ простіше було визначати при побудові епюри на цій ділянці зправа наліво (тобто, при розгляданні рівноваги правої частини балки із застосуванням координати довільного переріза x' в напрямку від точки B до точки A):

$$Q_y^{II}(x') = -R_B = -\frac{Pa}{l} \text{ (не залежить від } x'),$$

$$M_z^{II}(x') = R_B \cdot x' = R_B \cdot (l - x) = \frac{Pa}{l} \cdot (l - x).$$

Як бачимо, в обох випадках результат отримали однаковий.

На другій ділянці поперечні сили $Q_y^{II}(x)$ також постійні за величиною, але мають від'ємне значення реакції в опорі B . Згинаючі моменти $M_z^{II}(x)$ змінюється за законом прямої, значення яких в характерних перерізах дорівнюють:

$$\text{при } x = a \text{ (переріз } C): M_C = \frac{Pa}{l}(l - a) = \frac{Pab}{l},$$

$$\text{при } x = l \text{ (переріз } B): M_B = \frac{Pa}{l}(l - l) = 0.$$

В результаті отримаємо епюри, які представлені на рис. 3.27. Можна побачити, що при $x = a$ функція $Q_y(x)$ має стрибок на величину зовнішньої сили P , а функція $M_z(x)$ в цьому перерізі має злам і максимальне значення.

Приклад 5.

Двохопорна балка навантажена зосередженою парою сил, із моментом M (рис. 3.28).

Спочатку визначимо опорні реакції.

$$\sum_{k=1}^n m_B(\bar{P}_k) = 0, \quad -R_A \cdot l - M = 0, \quad R_A = -\frac{M}{l},$$

$$\sum_{k=1}^n m_A(\bar{P}_k) = 0, \quad -M + R_B \cdot l = 0, \quad R_B = \frac{M}{l}.$$

Виконуємо обов'язково перевірку правильності визначення реакцій:

$$\sum_{k=1}^n P_{ky} = 0, \quad R_A + R_B = 0.$$

Отримане від'ємне значення реакції R_A вказує на те, що в дійсності вона направлена не вгору, як це було прийнято на початку розрахунків, а вниз. Змінюємо напрямок R_A на розрахунковій схемі балки на протилежний і приймаємо його значення додатним.

Балка має дві ділянки AC і CB із точкою C на їх границі. Будуємо епюри зліва направо, прийнявши за початок відліку x точку A .

Розглядаємо рівновагу лівої частини балки.

На першій ділянці AC в межах значень $0 \leq x \leq a$ для довільного переріза $I - I$:

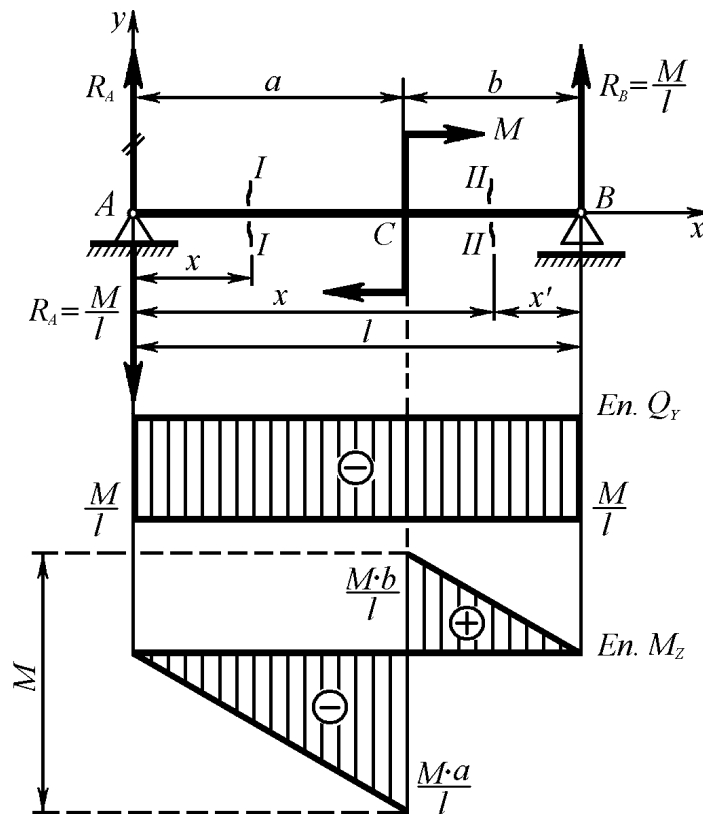


Рис. 3.28

$$Q_y^I(x) = -R_A = -\frac{M}{l} \text{ (не залежить від } x \text{),}$$

$$M_z^I(x) = -R_A \cdot x = \frac{M}{l} \cdot x.$$

На другій ділянці CB в межах значень $a \leq x \leq l$ для довільного переріза $II - II$:

$$Q_y^{II}(x) = -R_A = -\frac{M}{l} \text{ (не залежить від } x \text{),}$$

$$\begin{aligned} M_z^{II}(x) &= -R_A \cdot x + M = -\frac{M}{l} \cdot x + M = \\ &= \frac{Ml}{l} - \frac{M}{l}x = \frac{M}{l}(l - x). \end{aligned}$$

Аналогічні результати отримаємо, якщо розглядати рівновагу правої частини балки і будувати епюру зправа наліво на цій ділянці:

$$Q_y^{II}(x') = -R_B = -\frac{M}{l} \text{ (не залежить від } x' \text{),}$$

$$M_z^{II}(x') = R_B \cdot x' = \frac{M}{l} \cdot x' = \\ = \frac{M}{l}(l - x).$$

Із цих виразів видно, що поперечні сили $Q_y(x)$ у всіх перерізах балки на обох ділянках мають однакове від'ємне значення. Функція згинаючого моменту $M_z(x)$ має лінійний характер і в характерних перерізах обох ділянок набуває наступні значення (при побудові епюри зліва направо):

на першій ділянці AC ($0 \leq x \leq a$)

при $x = 0$ (переріз A): $M_A = 0$,

при $x = a$ (переріз C): $M_B = \frac{Ma}{l}$,

на другій ділянці CB ($a \leq x \leq l$)

при $x = a$ (переріз C): $M_C = \frac{Ma}{l} + M$,

при $x = l$ (переріз B): $M_B = \frac{Ma}{l}(l - l) + M = 0$.

Епюри поперечних сил і згинаючих моментів, побудовані по отриманим значенням, показані на рис. 3.27. Бачимо, що функція $Q_y(x)$ являє собою пряму, яка паралельна поздовжній осі балки і дорівнює по величині від'ємному значенню опорних реакцій. Функція $M_z(x)$ в місці дії зовнішнього моменту M (при $x = a$) має стрибок на величину цього моменту. При цьому кут нахилу прямих, що обмежують епюру $M_z(x)$ до і після стрибка не змінюється (тобто ці прямі паралельні одна одній). Максимальне значення епюра згинаючих моментів має в місці дії зовнішнього моменту.

Приклад 6.

На двохопорну балку діє рівномірно розподілене по всій її довжині навантаження інтенсивності $q \left(\frac{\kappa H}{m} \right)$ (рис. 3.29).

Визначаємо опорні реакції балки. Для цього зводимо розподілене навантаження до зосередженого ql , яке прикладене посередині його розподілення $\left(\frac{l}{2}, m \right)$, і з рівнянь рівноваги для всієї балки отримаємо:

Опір матеріалів

$$\sum_{k=1}^n m_B(\bar{P}_k) = 0, \quad -R_A \cdot l + ql \cdot \frac{l}{2} = 0, \quad R_A = \frac{ql}{2},$$

$$\sum_{k=1}^n m_A(\bar{P}_k) = 0, \quad -ql \cdot \frac{l}{2} + R_B \cdot l = 0, \quad R_B = \frac{ql}{2}.$$

Отримані результати в даному випадку очевидні, так як зосереджене навантаження ql прикладене посередині балки і тому його дія сприймається опорами A і B в рівній мірі: $R_A = R_B = \frac{ql}{2}$.

Але в інших випадках, коли навантаження розподілене тільки на частині довжини балки, $R_A \neq R_B$ і тоді необхідно провести перевірку правильності визначення реакцій:

$$\sum_{k=1}^n P_{ky} = 0, \quad R_A + R_B - ql = 0.$$

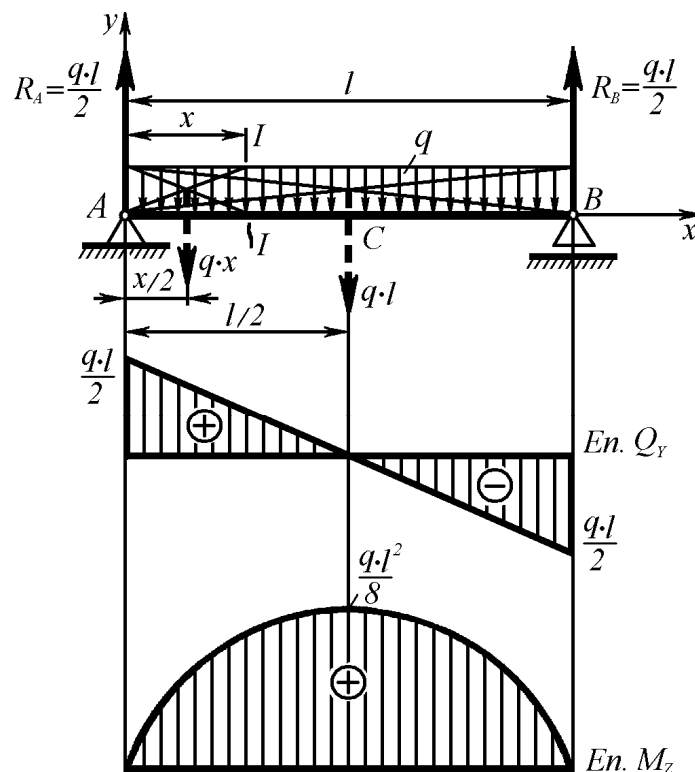


Рис. 3.29

Переходимо до побудови епюр поперечних сил і згинаючих моментів. Балка має одну ділянку AB довжиною l . Будуємо епюри зліва направо, прийнявши за початок відліку x точку A .

Розглянувши рівновагу лівої частини балки, визначаємо функції

$M_z(x)$ і $Q_y(x)$ на довжині $0 \leq x \leq l$:

$$Q_y(x) = R_A - q \cdot x = \frac{ql}{2} - qx,$$

$$M_z(x) = R_A \cdot x - qx \cdot \frac{x}{2} = \frac{ql}{2}x - \frac{qx^2}{2}.$$

Із отриманих рівнянь бачимо, що поперечна сила $Q_y(x)$ змінюється за лінійним законом, а згинаючий момент $M_z(x)$ – за законом квадратичної параболи.

Для побудови епюри поперечних сил достатньо визначити ординати у двох характерних перерізах:

при $x = 0$ (переріз A): $Q_A = \frac{ql}{2}$.

при $x = l$ (переріз B): $Q_B = -\frac{ql}{2}$,

Враховуючи, що епюра згинаючих моментів має криволінійний закон зміни, для її побудови визначимо ординати в трьох поперечних перерізах:

при $x = 0$ (переріз A): $M_A = 0$.

при $x = \frac{l}{2}$ (переріз C): $M_C = -\frac{ql^2}{8}$,

при $x = l$ (переріз B): $M_B = 0$.

На побудованих епюрах можна побачити, що функція $Q_y(x)$ змінюється прямолінійно від максимального значення в опорі A до від'ємного в опорі B , а в центрі розподіленого навантаження дорівнює нулю. Згинаючі моменти, навпаки, в опорах A і B дорівнюють нулю і збільшуються в квадратичній залежності до максимального значення в центрі дії розподіленого навантаження (переріз C).

3.5.3. Загальні закономірності в епюрах поперечних сил і згинаючих моментів

На підставі розглянутих прикладів побудови епюр поперечних сил і згинаючих моментів можна визначити їх загальні закономірності.

1. На ділянці балки, де відсутнє розподілене навантаження, епюра Q_y - пряма, яка паралельна поздовжньої осі балки, а епюра M_z - похила пряма.

2. В перерізі, де до балки прикладена зосереджена сила P , на епюрі Q_y буде стрибок на величину цієї зовнішньої сили, а на епюрі M_z - злам.

3. В перерізі, де до балки прикладена зосереджена пара сил з

Опір матеріалів

моментом M , на епюрі M_z буде стрибок на величину цього моменту, а на епюрі Q_y змін не буде.

4. На ділянці дії рівномірно розподіленого навантаження q епюра Q_y буде похилою прямою, а епюра M_z - параболою із випуклістю назустріч дії розподіленого навантаження.

5. Якщо на ділянці дії розподіленого навантаження q епюра Q_y перетинає базову лінію (точка, де $Q_y = 0$), то в цьому перерізі згинаючий момент має екстремальне значення.

6. Згинаючий момент в кінцевих перерізах балки завжди дорівнює нулю, крім випадку, коли до цього перерізу прикладена зосереджена пара сил з моментом M . В такому разі згинаючий момент M_z в кінцевому перерізі дорівнює моменту зосередженої пари сил.

Вказані закономірності дозволяють спростити побудову епюр у складних випадках навантаження балки і обчислювати значення епюр тільки в характерних перерізах балки.

3.5.4. Нормальні напруження при згині

Розглянемо характер деформації балки, при чистому згині, коли до її кінців прикладені дві пари зовнішніх сил із моментами M (рис. 3.30).

При такій деформації балка вигнеться і можна спостерігати наступні особливості зміни розмірів і форми.

1. Плоскі поперечні перерізи балки $a-a$, $b-b$, ... $e-e$ залишаться плоскими, але будуть повернуті один відносно одного на деякий кут.

2. Плоскі поздовжні перерізи $a-e$, $o-o$ стануть викривленими по дузі кола з деяким радіусом. Це можна побачити, якщо нанести на бокові грані балки поздовжні лінії. При згині вони стануть кривими.

3. Верхні поздовжні волокна балки будуть стиснутими, а нижні розтягнутими. При цьому на якомусь рівні по висоті поперечного переріза буде знаходитись *нейтральний шар* (поздовжній переріз $o-o$), де волокна не змінять своєї довжини. Лінія перетину нейтрального шару і поперечного перерізу балки називається *нейтральною лінією*.

Наведені положення є гіпотезою плоских перерізів і дозволяють зробити висновок, що при чистому згині в балці відбувається тільки розтяг і стиск поздовжніх волокон. Це приводить до виникнення в її поперечних перерізах нормальних напружень розтягу і стиску.

Зрозуміло, що деформація волокон не залежить від їх положення по ширині балки. Тобто, нормальні напруження лишаються постійними по ширині поперечного переріза і змінюються тільки по його висоті.

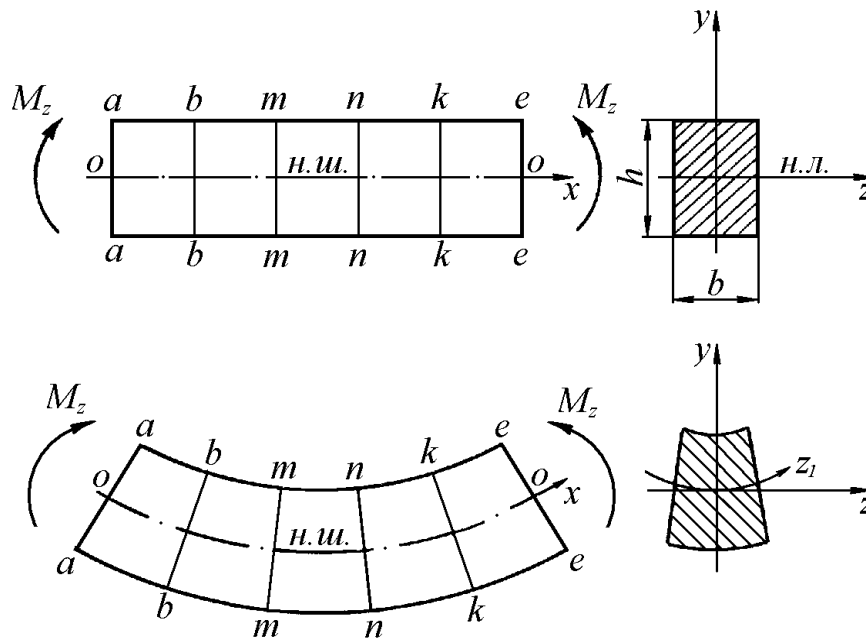


Рис. 3.30

Визначимо закон розподілення цих нормальних напружень по висоті переріза. Для цього виділимо елемент балки довжиною dx , обмежений двома поперечними перерізами $m - m$ і $n - n$ (рис. 3.31).

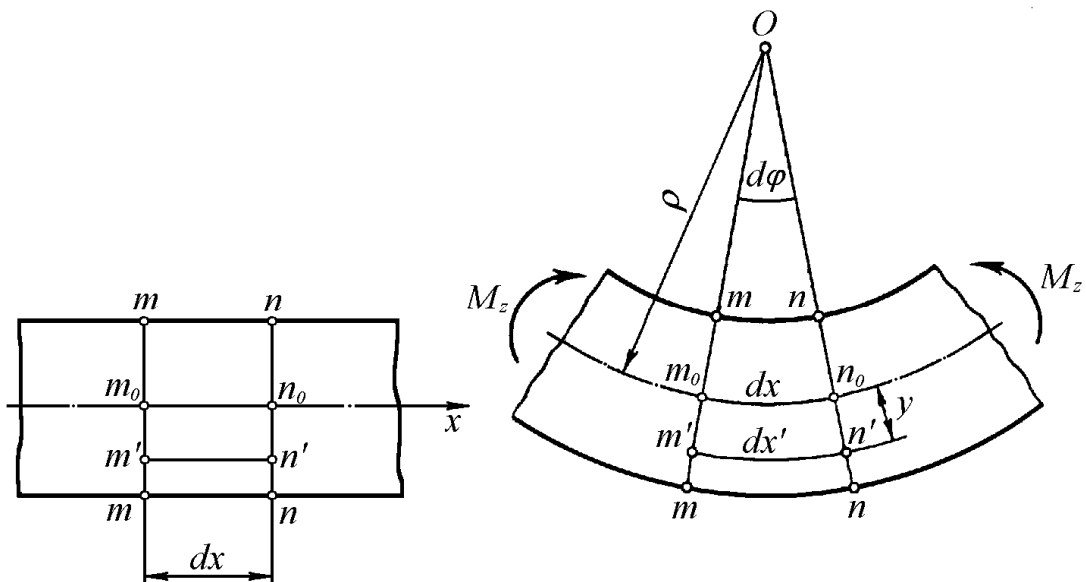


Рис. 3.31

При чистому згині перерізи $m - m$ і $n - n$ лишаються плоскими і повертаються на кут $d\phi$, а нейтральний шар балки або її вісь довжиною dx перетворюється на дугу з радіусом ρ . Тоді довільне волокно, що знаходиться на відстані y від нейтрального шару, стане також дугою

Опір матеріалів

довжиною dx' і радіусом кривизни $\rho + y$.

Виразимо довжини дуг dx і dx' через радіуси їх кривизни і кут $d\varphi$:

$$\begin{aligned} dx &= \rho \cdot d\varphi, \\ dx' &= (\rho + y)d\varphi. \end{aligned}$$

Враховуючи те, що деформація волокна нейтрального шару відсутня, відносне подовження довільного волокна можна знайти як:

$$\varepsilon = \frac{dx' - dx}{dx} = \frac{(\rho + y)d\varphi - \rho \cdot d\varphi}{\rho \cdot d\varphi} = \frac{y}{\rho} \quad (3.48)$$

Аналогічну залежність можна отримати для волокон, що знаходяться з протилежного боку від нейтрального шару і зазнають деформації стиску. В цьому випадку будемо мати від'ємне значення ε .

Знаючи відносну деформацію, можна застосувати закон Гука і знайти нормальні напруження, діючі в перерізі на відстані y від нейтрального шару:

$$\sigma = E\varepsilon = E \frac{y}{\rho}. \quad (3.49)$$

Наведена залежність визначає лінійний закон розподілу напружень по перерізу балки в площині її згину. Тобто, *нормальні напруження в поперечному перерізі вигнутої балки прямо пропорційні відстані від точок, що розглядаються, до нейтральної осі.*

Найбільшого значення нормальні напруження досягають в найбільше віддалених точках перерізу від нейтральної осі. Цілком зрозуміло, що для розтягнутих волокон це будуть напруження розтягу, а для стиснутих – стиску. В точках нейтральної осі x (при $y=0$) напруження дорівнюють нулю (рис. 3.32).

Знаючи закон розподілення нормальних напружень, можна визначити їх значення в залежності від внутрішнього згинаючого моменту.

Для знаходження зв'язку між нормальними напруженнями і внутрішніми силовими факторами в площі поперечного перерізу виділимо елементарну площу dA на відстані y від нейтральної осі x (рис. 3.32).

Тоді елементарна внутрішня нормальна сила, що діє на цій площі, дорівнює:

$$dN = \sigma dA = E \frac{y}{\rho} dA.$$

Складемо рівняння рівноваги для відсіченої частини балки, на яку діє зовнішній момент M і сума елементарних внутрішніх зусиль dN .

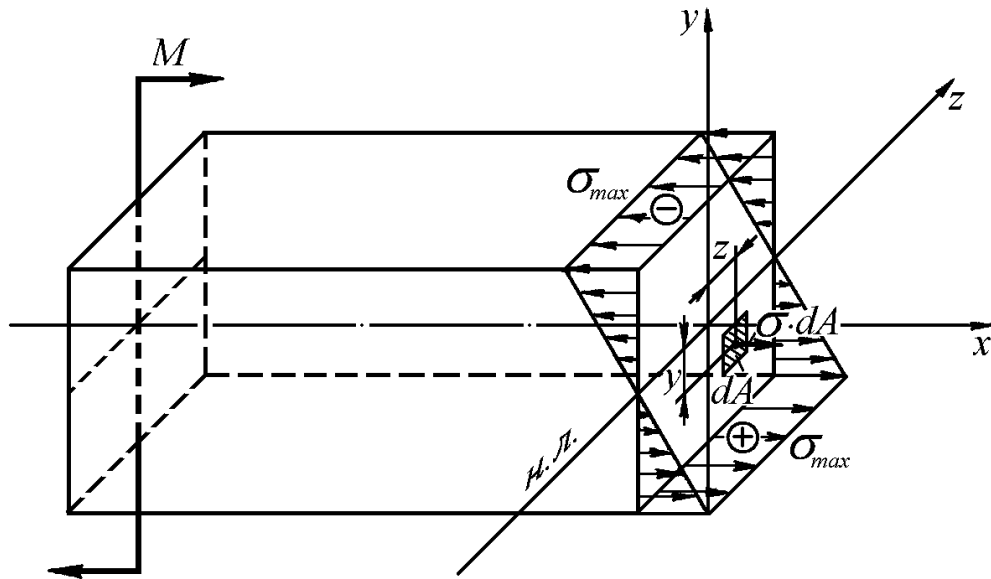


Рис. 3.32

Інтегруючи dN по перерізу, отримаємо два рівняння рівноваги:

$$\sum_{k=1}^n P_{kx} = 0, \quad \int_A dN = \int_A \sigma dA = \int_A E \frac{y}{\rho} dA = \frac{E}{\rho} \int_A y dA = 0, \quad (3.50)$$

$$\sum_{k=1}^n m_z(\bar{P}_k) = 0, \quad M - \int_A y dN = 0. \quad (3.51)$$

В рівнянні (3.50) складова $\int_A y dA = S_z$ є статичним моментом площі перерізу відносно осі z (нейтральної осі). Відношення $\frac{E}{\rho} \neq 0$, тому $S_z = 0$, а це означає, що при згині нейтральна вісь проходить через центр ваги поперечного перерізу.

Розглянемо друге рівняння рівноваги (3.51). Так як при чистому згині згинаючий момент в поперечному перерізі дорівнює зовнішньому моменту $M_z = M$, то

$$M_z = \int_A y dN = \int_A y \sigma dA = \int_A y \frac{E y}{\rho} dA = \frac{E}{\rho} \int_A y^2 dA,$$

або

$$M_z = \frac{E}{\rho} I_z, \quad (3.52)$$

Опір матеріалів

де $I_z = \int_A y^2 dA$ – момент інерції поперечного перерізу відносно нейтральної

осі z – геометрична характеристика перерізу.

Формулу (3.52) можна записати у вигляді

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_z}{EI_z}. \quad (3.53)$$

Величини, що входять у вираз (3.53) називаються: $\frac{1}{\rho}$ – кривизною вигнутої

осі балки, EI_z – жорсткістю поперечного переріза при згині.

Таким чином, при згині кривизна осі балки прямо пропорційна згинаючому моменту M_z і обернено пропорційна жорсткості балки EI_z , яка залежить від форми поперечного перерізу і матеріалу балки.

Так як для балки постійного поперечного перерізу при чистому згині $M_z = const$, $EI_z = const$, то

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_z}{EI_z} = const.$$

Тобто, у випадку чистого згину балки з постійним поперечним перерізом її вигнута вісь є дугою кола з радіусом ρ .

Знайдемо залежність напруження від згинаючого моменту M_z .

Для цього у співвідношення (3.49) замість $\frac{1}{\rho}$ підставимо його значення із

формули (3.53):

$$\sigma = E \frac{y}{\rho} = E y \frac{M_z}{EI_z} = \frac{M_z y}{J_z}. \quad (3.54)$$

В точках перерізу, найбільше віддалених від нейтральної осі (при $y = y_{max}$), напруження будуть максимальними:

$$\sigma_{max} = \frac{M_z y_{max}}{J_z}, \quad (3.55)$$

або

$$\sigma_{max} = \frac{M_z}{W_z}, \quad (3.56)$$

де $W_z = J_z / y_{max}$ – осьовий момент опору поперечного перерізу балки.

Осьовий момент опору перерізу W_z являється його геометричною характеристикою (як осьовий момент інерції I_z , статичний момент площі

S_z і т.п.).

Для балки прямокутного перерізу із шириною b і висотою h :

$$W_z = \frac{2bh^3}{12h} = \frac{bh^2}{6}. \quad (3.57)$$

Для балки круглого поперечного перерізу із діаметром d :

$$W_z = \frac{2\pi d^4}{64d} = \frac{\pi d^3}{32}. \quad (3.58)$$

Для балки кільцевого перерізу із зовнішнім D і внутрішнім d діаметрами:

$$W_p = \frac{2\pi(D^4 - d^4)}{64D} = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{32D}. \quad (3.59)$$

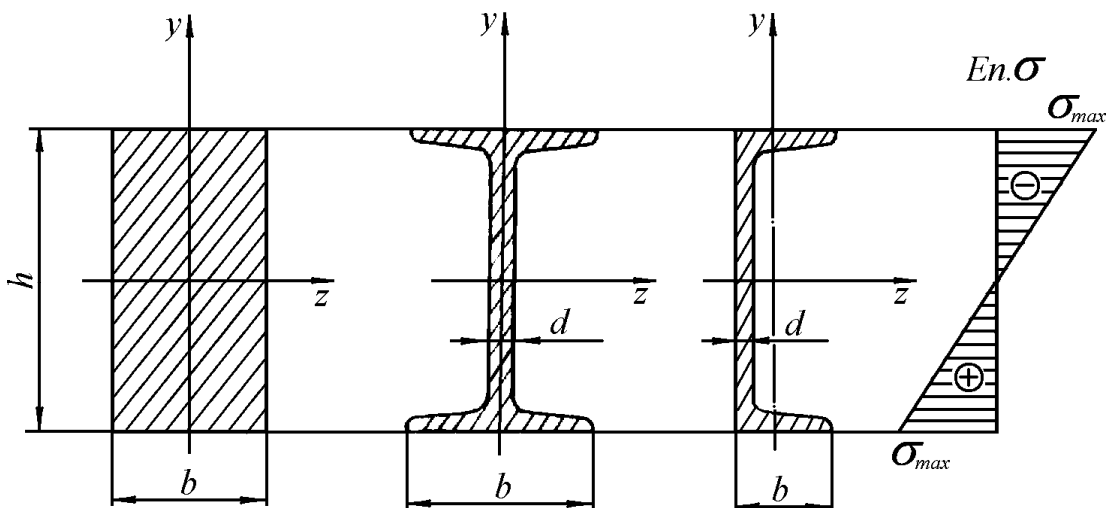


Рис. 3.33

Закон розподілення по перерізу нормальних напружень σ за формулою (3.56), дозволяє зробити висновок, що раціональними будуть ті перерізи, які мають найбільший момент опору при найменшій площі. До таких перерізів відносяться двотаври, таври, швелери, труби, в яких максимальне навантаження сприймають найбільше віддалені від нейтральної лінії шари матеріалу. Порівняно з ними балки із суцільним круглим і прямокутним перерізами менш доцільні з точки зору економії матеріалу в рівних умовах навантаження (рис. 3.33).

На завершення треба відмітити, що формула (3.56) виведена для випадку чистого згину. Проте нею можна користуватись і у випадку прямого поперечного згину, коли в перерізах виникає не тільки згинаючий

Опір матеріалів

момент M_z але і поперечна сила Q_y . Поперечні сили, як показує практика і теоретичні дослідження, суттєво не впливають на нормальні напруження.

3.5.5. Розрахунки на міцність при згині.

Міцність при згині балки визначається по максимальним нормальним напруженням розтягу (стиску) в поперечному перерізі за умовою:

$$\sigma_{max} = \frac{M_z}{W_z} \leq [\sigma_{p,c}], \quad (3.60)$$

де M_z – максимальне значення згинаючого моменту в поперечних перерізах балки, яке визначається із епюри згинаючих моментів, $[\sigma_{p,c}]$ – допустиме нормальне напруження розтягу або стиску.

Згідно умови міцності (3.60) можна виконати три види розрахунків: проектний, перевірний і на визначення допустимого навантаження.

Слід зауважити, що при проведенні проектних розрахунків для балок стандартного профілю визначається величина осьового моменту опору перерізу W_z :

$$W_z \geq \frac{M_z}{[\sigma]},$$

а розміри відповідного профілю балки (його номер) вибирається по найбільшому ближчому значенню W_z із стандартних таблиць сортового прокату.

3.5.6. Дотичні напруження при згині

В загальному випадку плоского згину в поперечних перерізах балки крім згинаючого моменту M_z існує також поперечна сила Q_y . При цьому в точках перерізу виникають не тільки нормальні напруження σ , але і дотичні напруження τ .

Дотичні напруження є наслідком деформації зсуву волокон балки і діють як у поперечному напрямку, так і вздовж волокон. Наявність дотичних напружень в поздовжніх перерізах пояснює факт утворення в дерев'яних балках при поперечному згині поздовжніх тріщин (рис. 3.34).

Вперше формула для визначення дотичних напружень при поперечному згині балок прямокутного перерізу була виведена у 1885 р. російським інженером, проф. Д.І. Журавським. Необхідність в такій формулі була викликана широким застосуванням на той час дерев'яних конструкцій, які погано працюють на сколювання вздовж волокон.

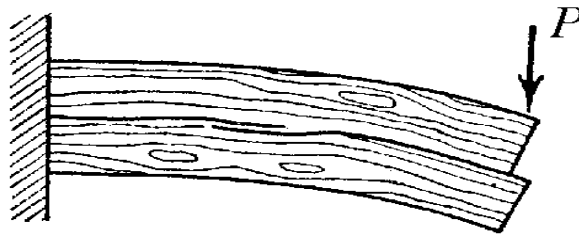


Рис. 3.34

Визначимо приблизну величину дотичних напружень при згині балки прямокутного профілю $b \times h$. Для цього виділимо елемент балки, довжиною dx двома поперечними перерізами $m-m$ і $n-n$, в яких відповідно діють згинаючі моменти M_z і $M_z + dM_z$ (рис. 3.35).

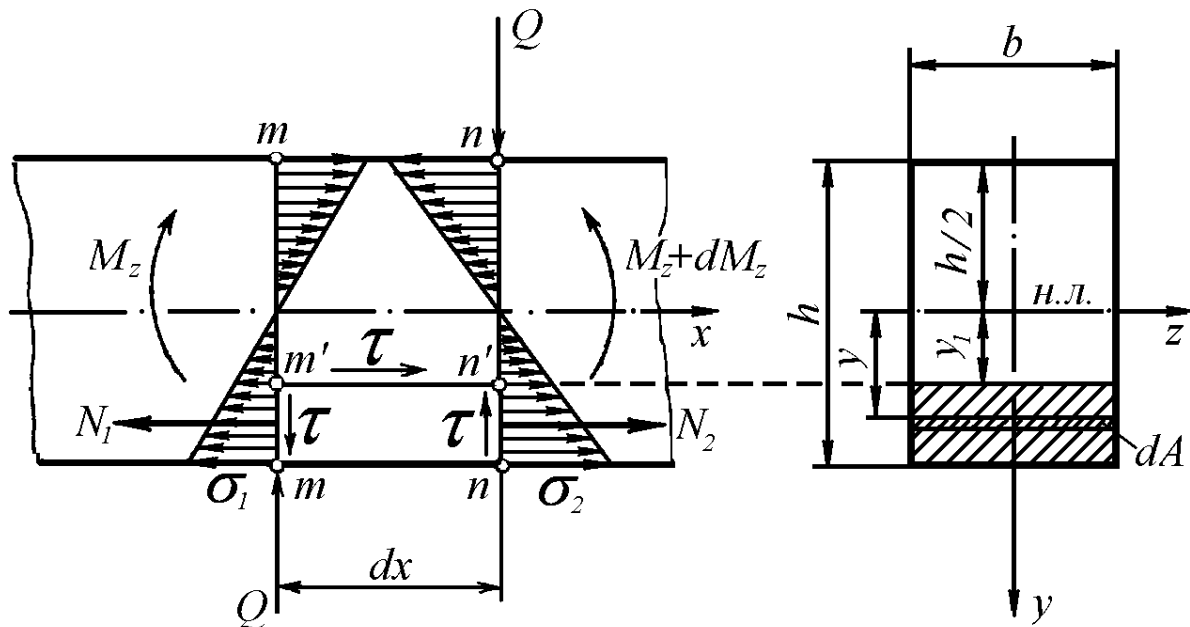


Рис. 3.35

На відстані y від нейтральної осі проведемо поздовжній переріз і розглянемо рівновагу елементарного паралелепіпеду $mm'n'n'$, що має розміри $b \times dx \times \left(\frac{h}{2} - y\right)$.

Рівнодіючу нормальних внутрішніх сил, діючих на грань mm' , позначимо через N_1 , а діючих на грань nn' – через N_2 . Відповідно до цього введемо позначення змінних нормальних напружень в цих гранях – σ_1 і σ_2 .

Якщо dA – елементарний шар із змінним значенням відстані y' до

Опір матеріалів

нейтральної осі, тоді

$$N_1 = \int_A \sigma_1 dA = \int_A \frac{M_z y_1}{I_z} dA = \frac{M_z}{I_z} \int_A y_1 dA,$$
$$N_2 = \int_A \sigma_2 dA = \int_A \frac{(M_z + dM_z) y_1}{I_z} dA = \frac{M_z + dM_z}{I_z} \int_A y_1 dA.$$

Припустимо, що дотичні напруження по ширині b перерізу розподілені рівномірно. В такому разі дотичне зусилля dT , що діє на грань mn елемента, дорівнює:

$$dT = \tau b dx.$$

Запишемо рівняння рівноваги елементарного паралелепіпеда $mm'n'n'$:

$$\sum_{k=1}^n P_{kx} = 0, \quad N_2 - N_1 - dT = 0,$$

Підставивши в це рівняння знайдені величини зусиль, отримаємо:

$$\frac{M_z + dM_z}{I_z} \int_A y_1 dA - \frac{M_z}{I_z} \int_A y_1 dA - \tau b dx = 0.$$

Складова $\int_A y_1 dA = S_z(y)$ – це статичний момент площі перерізу, який знаходиться між горизонтальним шаром рівня y і поверхнею балки.

В результаті останній вираз можна записати як:

$$\tau b dx = \frac{dM_z S_z(y)}{I_z}.$$

Враховуючи, що згідно теореми Журавського $\frac{dM_z}{dx} = Q_y$, остаточно отримаємо формулу Журавського:

$$\tau = \frac{Q_y S_z(y)}{b I_z}. \quad (3.61)$$

Тобто, дотичні напруження τ в поперечному перерізі балки дорівнюють добутку поперечної сили Q_y на статичний момент площі $S_z(y)$ відносно нейтральної осі частини перерізу, що лежить вище від розглянутого шару волокон, поділеному на момент інерції I_z всього перерізу відносно нейтральної осі і на ширину b розглянутого перерізу.

Для балки прямокутного перерізу $b \times h$ статичний момент відсіченої частини площі змінюється за висотою y квадратичній залежності:

$$S_z(y) = b \left(\frac{h}{2} - y \right) \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} + y \right) = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) = \frac{bh^2}{8} \left(1 - \frac{4y^2}{h^2} \right).$$

Тому дотичні напруження в прямокутному перерізі також

змінюються за висотою згідно із законом квадратичної параболи:

$$\tau = Q_y \frac{\frac{bh^2}{8} \left(1 - \frac{4y^2}{h^2}\right)}{b \frac{bh^3}{12}} = \frac{3 Q_y}{2 bh} \left(1 - \frac{4y^2}{h^2}\right), \quad (3.62)$$

де $I_z = \frac{bh^3}{12}$ – осьовий момент інерції прямокутного перерізу балки.

При цьому на поверхні балки і у волокнах нейтрального шару дотичні напруження відповідно будуть дорівнювати:

$$\text{при } y = \pm \frac{h}{2} \quad \tau = 0,$$

$$\text{при } y = 0 \quad \tau = \tau_{max} = \frac{3 Q_y}{2 bh} = \frac{3 Q_y}{2 A}.$$

Закон розподілу дотичних напружень балки прямокутного перерізу представлений на рис. 3.36. Аналогічний розподіл дотичних напружень за висотою стінки має балка двотаврового перерізу.

Таким чином, максимальні значення дотичних напружень виникають у волокнах нейтрального шару, там де нормальні напруження дорівнюють нулю. І навпаки – у волокнах, де нормальні напруження максимальні, дотичні напруження відсутні.

Довготривалий досвід експлуатації балок показав, що найбільш небезпечними є розтягнені волокна на поверхні балки. Тому більшість балок розраховують тільки по нормальним напруженням.

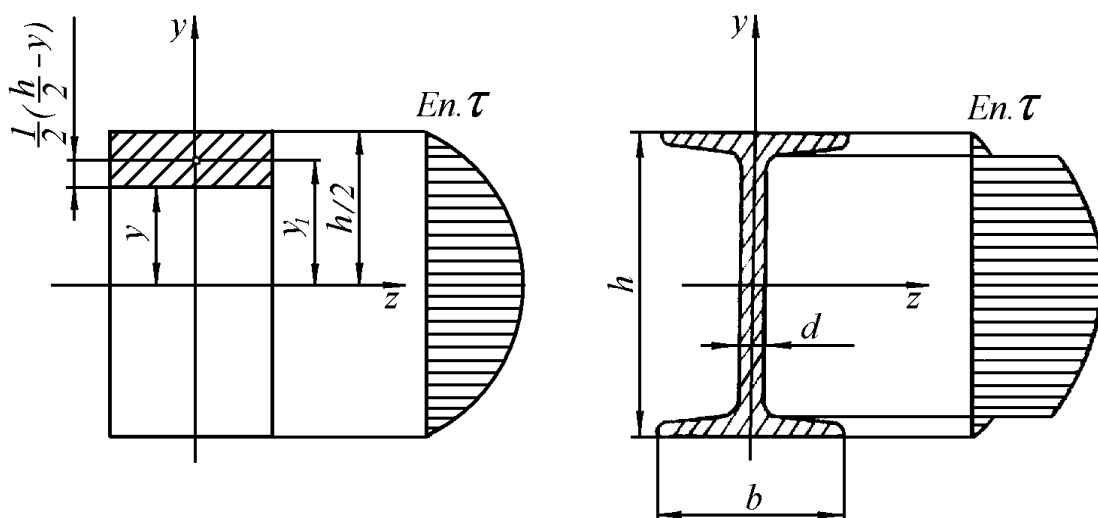


Рис. 3.36

У разі необхідності можна провести перевірочний розрахунок по дотичним напруженням із умови міцності:

$$\tau_{max} = \frac{Q_y S_z(y)}{b I_z} \leq [\tau]. \quad (3.63)$$

До балок, які треба перевіряти по дотичним напруженням, відносяться наступні.

1. Дерев'яні балки, тому що деревина погано працює на сколювання.
2. Вузькі балки (наприклад двотаврові), тому що максимальні дотичні напруження обернено пропорційні ширині нейтрального шару.
3. Короткі балки, тому що при відносно невеликих згинаючому моменті і нормальних напруженнях в таких балках можуть виникати значні поперечні зусилля і дотичні напруження.

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Дайте визначення деформації чистого згину. Як її можна отримати?
2. Який згин називається поперечним?
3. Коли відбувається плоский або косий згин балки?
4. Які внутрішні силові фактори виникають при плоскому згині балок?
5. Чому дорівнює поперечна сила при згині? Сформулюйте правило знаків.
6. Як визначити згинаючий момент при згині? Сформулюйте правило знаків.
7. Опишіть послідовність побудови епюр поперечних сил і згинаючих моментів.
8. Які спостерігаються загальні закономірності в епюрах поперечних сил і згинаючих моментів?
9. Напишіть умову міцності балки при згині по нормальним напруженням.
10. Яка форма перерізу балки є найбільш оптимальною?
11. Напишіть формулу Журавського.
12. В яких випадках балку перевіряють на умову міцності по дотичним напруженням?

ЧАСТИНА IV

ДЕТАЛІ МАШИН

4.1. Основні положення

Деталі машин — це технічна дисципліна, в якій вивчають методи, правила і норми розрахунку та конструювання типових деталей і складальних одиниць машин.

Деталі машин, синтезуючи досягнення математичних і технічних наук з результатами лабораторних досліджень і практики застосування різних машин, є теоретичною основою машинобудування.

Метою деталей машин є вивчення сучасних інженерних методів, правил і норм розрахунку та конструювання (проектування) деталей і складальних одиниць машин загального призначення (болти, гайки, вали, зубчасті колеса, підшипники та ін.).

Завданням деталей машин є отримання навичок розрахунку і конструювання типових деталей і складальних одиниць машин загального призначення, раціонального вибору матеріалу і форми деталей, правильного визначення точності і якості обробки поверхонь, розрахунків на міцність, жорсткість, стійкість, зносостійкість і т. ін., виходячи із заданих умов роботи деталей у машині.

Деталі машин тісно пов'язані з попередніми розділами технічної механіки: теоретичною механікою, теорією механізмів і машин, правила і закони яких дають можливість визначати діючі на деталь сили і закони руху деталей; опором матеріалів, який дає змогу розраховувати деталі на міцність, жорсткість і стійкість. Деталі машин також пов'язані із іншими загальнотехнічними дисциплінами: матеріалознавством, технологією металів і неметалевих матеріалів, які дають необхідні відомості про раціональний вибір матеріалу деталі та методи її виготовлення, технічним (машинобудівним) кресленням, що дає правила і закони оформлення креслень конструкцій машин, окремих деталей і складальних одиниць.

При проектуванні і виготовленні технічних виробів машинобудування розрізняють наступні їх види: *деталь, складальна одиниця, комплекси, комплекти.*

Названі вироби, залежно від наявності або відсутності в них складових частин, поділяють на *неспецифіковані*, тобто такі, що не мають складових частин (деталі), і *специфіковані*, що складаються з двох (і більше) складових частин (складальні одиниці, комплекси або комплекти).

Деталлю називається виріб, виготовлений з однорідного матеріалу

Частина четверта

без застосування монтажних і складальних операцій.

Наприклад, гвинт, болт, гайка, шуруп, вал, шків, зубчасте колесо, литий корпус.

Виріб, що складається з кількох частин (деталей), з'єднаних між собою складальними операціями, називається складальною одиницею. Наприклад, муфта, підшипник, редуктор, коробка передач, зварний корпус.

Два (і більше) специфіковані вироби, не з'єднані складальними операціями, але призначені для виконання взаємопов'язаних експлуатаційних функцій, називаються комплексом.

Наприклад, потокова лінія, деревообробний комплекс і т. ін.

Два (і більше) вироби, що не з'єднані складальними операціями і являють собою набір виробів допоміжного характеру, називаються комплектом.

Наприклад, комплект запасних частин, комплект інструменту і приладдя.

У машинобудуванні і народному господарстві застосовується багато різних деталей і складальних одиниць машин. Всю різноманітність деталей (складальних одиниць) машин можна умовно поділити на дві групи: *загального призначення і спеціального призначення.*

Деталі загального призначення зустрічаються майже у всіх машинах і складають більшість всіх деталей, а деталі спеціального призначення зустрічаються тільки у одному або кількох типах машин.

До деталей загального призначення відносяться:

- з'єднувальні деталі (шпонки, штифти, болти, гвинти, гайки тощо) і з'єднання (зварні, заклепочні, клейові, клинові, шліцьові, шпонкові та ін.);
- передачі обертального руху (фрикційні, пасові, ланцюгові, зубчасті, черв'ячні і т. ін.);
- деталі, що обслуговують передачі (вали, осі, підшипники, муфти).

До деталей спеціального призначення відносяться: шатуни, кривошипи, колінчасті вали, поршні, куліси, коромисла, кулачки, ексцентрики, маховики, лопатки і диски турбін, рейки, блоки, гаки і т. ін.

4.1.1. Вимоги, що ставляться до машин та їх деталей

Сучасний розвиток машинобудування вимагає при проектуванні та виготовленні нових машин і механізмів гармонійності конструкції і раціонального компоновання її деталей та складальних одиниць при забезпеченні високих функціональних властивостей.

Виріб повинен бути надійним і точним, міцним і довговічним, бути зручним для монтажу, демонтажу і придатним для ремонту, мати високу продуктивність, відзначатись простотою керування, обслуговування та догляду, мати малі габарити, бути транспортабельним, швидко окупати всі затрати на проектування і виготовлення, а також відповідати вимогам

естетичності (художнє проектування і технічний дизайн).

Деталі проекрованої машини повинні задовольняти наступним вимогам: мати достатню міцність, жорсткість, стійкість, зносостійкість, допускати можливість виготовлення з недорогих матеріалів, мати таку конструктивну форму, щоб їх можна було виготовити найпростішими і найпродуктивнішими технологічними процесами.

Тобто, деталі повинні бути *технологічними* і мати високу *надійність* (виконувати задані функції із збереженням експлуатаційних показників протягом потрібного ресурсу).

Міцність і довговічність деталей можна підвищити наступним чином:

– використовуючи матеріали з високими фізико-механічними характеристиками (звичайно, застосування таких матеріалів, наприклад високоякісних легованих сталей, обмежується високою їх вартістю);

– конструктивною зміною форми деталі (наприклад, для деталей, які працюють на згин, раціональніше застосовувати кільцевий або двотавровий переріз замість круглого чи прямокутного);

– впровадженням термохімічної обробки або поверхневого пластичного деформування деталі (обкатка поверхні деталі роликми або обдубання сталі дробом);

– використання плазменого, іонно-плазменого і газотермічного напилення поверхонь деталей порошковими матеріалами, що істотно поліпшує антикорозійні властивості і зносостійкість.

Поверхнєве пластичне деформування і напилення – простий і дуже ефективний спосіб підвищення довговічності деталі. Ресурс таких деталей збільшується в 3 ... 15 разів.

Для зміцнення пружин, ресор, шатунів, зубчастих коліс застосовують дробострумінні пристрої. Для зміцнення осей, валів, плунжерів – спеціальні верстати для обкатки роликми або кульками. Для зміцнення лопаток компресорів і турбін, пружин, валів — гідроабразивні і гідродробострумінні пристрої.

Сформулюємо докладніше вимоги економічного характеру до конструкцій машин, їх складальних одиниць і деталей.

Економічність – це забезпечення мінімальних затрат на придбання матеріалів та обладнання, заміна дорогих матеріалів дешевшими з необхідною міцністю, жорсткістю і зносостійкістю (заміна легованих сталей вуглецевими або заміна кольорових металів і сплавів пластмасами та синтетичними матеріалами тощо).

Технологічність – це забезпечення швидкого і високоякісного виготовлення деталей, а також монтажу складальних одиниць і всієї машини при мінімальних затратах коштів і часу на технічну підготовку. Технологічні конструкції дають змогу застосовувати прогресивні методи

виготовлення і монтажу в умовах підприємства.

Використання деталей і складальних одиниць, які раніше освоєні в працюючих машинах і можуть виконувати відповідні функції в машині нової конструкції.

Уніфікація конструкції – це максимально можлива заміна деталей різної форми і типорозмірів однаковими (болти, гайки, шайби, підшипники, осі, вали, зубчасті колеса, шпонки), а також застосування по можливості однакових діаметрів отворів і валів, розмірів фасок, галтелей; використання однакових класів точності і шорсткості поверхонь; однакових способів зміцнюючої технології (загартування, ціанування, азотування, наклепування тощо).

Спрощення конструкції – це застосування деталей найпростіших форм, виготовлення яких не потребує спеціального обладнання або високої кваліфікації робітника.

4.1.2. Короткі відомості про машинобудівні матеріали

Для виготовлення деталей машин застосовують різні матеріали – металеві, неметалеві, композиційні. Правильний вибір матеріалу деталі – важливий етап процесу конструювання і виготовлення, від якого в значній мірі залежить вага, габарити, вартість і довговічність машини.

Тому загальними передумовами вибору матеріалу деталі є експлуатаційна надійність, технологічність і економічність.

Дуже поширеними в машинобудуванні є метали, які розділяють на чорні і кольорові.

Чорні метали (сталі і чавуни) в машинах займають більше 90 % їх ваги. Вони відносно дешеві, мають високу міцність і жорсткість. Основні недоліки чорних металів – значна питома вага і низька корозійна стійкість.

Сталь (вуглецева і легована) – один із основних матеріалів машинобудування.

Сталь вуглецева звичайної якості, яку поставляють за механічними властивостями, позначається так: Ст0, Ст1, Ст2, Ст3, ..., Ст6. Нумерують ці сталі в порядку зростання їх твердості, границь міцності і текучості та зниження пластичності.

Сталь вуглецева якісна конструкційна позначається так: Сталь 10, Сталь 15, Сталь 20, ..., Сталь 55 і т. д., де числа 10, 15, 20, ... показують приблизний вміст вуглецю в сотих частках процента. Якісна вуглецева конструкційна сталь з підвищеним вмістом марганцю позначається так: Сталь 15Г, Сталь 20Г, Сталь 50Г і т. д.

Сталь легована конструкційна позначається так: Сталь 15Х, Сталь 35Х, Сталь 40ХНЗА і т. д., де перші дві цифри (15, 35, 40) показують орієнтовний вміст вуглецю в сотих частках процента, а наступні букви і

цифри показують легуючий елемент та його орієнтовний процентний вміст. Так, сталь 15X13H7C2A містить приблизно 0,15 % вуглецю, 13 % хрому, 7 % нікелю і 2 % кремнію; буква А показує високу якість сталі, тобто зниження до мінімуму шкідливих домішок – сірки і фосфору.

Фізико – механічні властивості сталей можна підвищити застосуванням об'ємної або поверхневої термічної (нормалізація, загартування, відпускання) або хіміко – термічної (цементация, азотування, ціанування) обробки, а також поверхневим зміцненням (дробострумінна обробка, обкатка загартованими роликками).

Чавун широко використовується в машинобудуванні, особливо для виготовлення литих заготовок деталей. За хімічним складом, структурою і технологією виготовлення чавун поділяють на сірий (СЧ 12-28, СЧ 15-32, СЧ 18-36 та ін.), антифрикційний (АСЧ-1, АСЧ-2, АСЧ-3 для сірого чавуну; АВЧ-1, АВЧ-2 для високоміцного чавуну), високоміцний (ВЧ 45-0, ВЧ 50-1,5 і т. п.), жаростійкий (ЖЧХ-0,8, ЖЧС-5,5 і т. ін.).

Числа, що стоять після буквеного позначення марки чавуну, показують значення його механічних характеристик. Наприклад, для сірого чавуну перше число означає границю міцності при розтягу, друге – при згині (0,1 МПа), для високоміцного чавуну перше число означає σ_B (0,1 МПа), а друге – відносне подовження в процентах при розриві.

Кольорові метали (мідь, олово, цинк, магній, хром, свинець, алюміній, титан, срібло, золото, платина) у чистому вигляді в машинобудуванні застосовуються рідко. Їх використовують в основному в вигляді сплавів (латунь – мідно – цинковий сплав, бронза – безолов'яна і олов'яна, алюмінієві і титанові сплави), які мають кращі фізико – механічні властивості, ніж кожен із цих металів окремо. Кольорові метали (за винятком сплавів) використовують для покриття металевих поверхонь з метою захисту матеріалу від корозії (лудіння, цинкування), підвищення поверхневої твердості, зносостійкості й антикорозійних властивостей сталейних деталей (хромування) або підвищення їх жаростійкості (алітування, тобто насичення поверхневого шару сталі алюмінієм). Легкі сплави (особливо титанові) мають високу міцність при малій питомій вазі.

Кольорові метали і сплави значно дорожче чорних, але їх цінні властивості, виправдовують застосування деталей із таких матеріалів в залежності від призначення і умов роботи.

Неметалеві матеріали – дерево, шкіра, бавовняні тканини, гума, скло, азбест, пластмаси, композиційні матеріали.

Серед неметалевих матеріалів все більше застосовуються пластмаси і особливо композиційні матеріали (склопластики, металопластики, біметали, металокераміка та багато інших).

Пластмаси мають невелику питому вагу, хімічну стійкість, водо – , масло – і бензостійкість, високі електроізоляційні властивості, достатню

механічну міцність, що не поступається у ряді випадків перед міцністю сплавів кольорових металів і чавуну, малу трудомісткість переробки в деталі машин та ін. Але недоліком пластмас є їх низька теплостійкість і старіння, що супроводжується поступовою зміною механічних характеристик, кольору і навіть розмірів деталей.

Композиційні матеріали утворюються сполученням різнорідних компонентів і можуть мати певні високі фізико – механічні властивості, притаманні кожному із цих компонентів. Тому розробка і застосування нових композиційних матеріалів з підвищеними експлуатаційними якостями є важливим напрямком розвитку сучасного машинобудування.

Із пластмас та композиційних матеріалів виготовляють корпуси апаратів і машин, баки, цистерни, кузови автомобілів, корпуси суден, шлюпок, яхт, зубчасті колеса, вкладиші підшипників, труби, лопатки компресорів, а також будівельні елементи житлових будинків і промислових споруд.

4.1.3. Стандартизація і взаємозамінність деталей машин

Весь комплекс вимог до виготовленої сучасної техніки і обладнання може бути виконаний на основі використання принципів стандартизації, уніфікації і взаємозамінності деталей і складальних одиниць машин.

Стандартизацією називається процес встановлення і застосування обов'язкових норм, правил і вимог технічних і якісних характеристик, параметрів, яким повинна відповідати вироблена продукція, її виготовлення, транспортування і зберігання.

Завданням стандартизації як у машинобудуванні, так і інших галузях виробничої діяльності, є дотримання єдиних систем документації, норм і вимог у галузі проектування і виготовлення виробів, визначення єдиної системи показників якості виробів, запровадження єдиних науково-технічних термінів, символів, одиниць вимірювання тощо.

Переважна більшість виробів, що випускаються промисловими і народногосподарськими підприємствами України та іншими країнами близького зарубіжжя стандартизована.

У машинобудуванні, наприклад, стандартизовані:

- позначення загальнотехнічних величин, правила оформлення креслень, числові ряди лінійних розмірів;
- точність і якість поверхні деталей;
- матеріали, їх хімічний склад, основні механічні властивості і термообробка;
- форма і розміри деталей і складальних одиниць масового застосування: болтів, гвинтів, рейок, підшипників кочення, шурупів, муфт, штифтів, пасів, ланцюгів, штифтів і т. ін.;

– конструктивні елементи більшості деталей машин: модулі зубчастих і черв'ячних коліс, діаметри і ширина шківів, конструктивні форми і розміри шліцьових з'єднань і т. ін.

На нестандартні вироби завод – виготовлювач має розробляти окремі технічні умови, які також повинні відповідати вимогам певних стандартів.

Із стандартизацією тісно пов'язана уніфікація деталей і складальних одиниць машин.

Уніфікацією називається доцільне скорочення номенклатури, типорозмірів і конструктивних форм деталей і складальних одиниць, надання їм однаковості з метою можливого застосування і використання в різних машинах та народногосподарських об'єктах.

Зводячи різні види промислових виробів до невеликої кількості певних типів з універсальними можливостями застосування їх у машинобудуванні, уніфікація дає змогу *скоротити номенклатурний список виробів*, підвищити якість виробів, зменшити затрати виробництва і збільшити можливість взаємозамінності деталей і складальних одиниць однієї машини деталями і складальними одиницями іншої.

Взаємозамінністю називається властивість конструкції складової частини виробу забезпечити можливість її застосування замість іншої без додаткової обробки, зі збереженням заданої якості виробу, до складу якого вона входить. Взаємозамінність є важливою рисою сучасного машинобудування, без якої неможливе серійне і масове виробництво.

Таким чином, стандартизація, уніфікація і взаємозамінність створюють сприятливі умови для організації масового виробництва деталей і складальних одиниць на спеціалізованих підприємствах, зменшують трудомісткість і вартість виготовлення, забезпечують підвищення якості і збільшення довговічності деталей; скорочують час конструювання та освоєння нових машин; спрощують ремонт, зводячи його до заміни спрацьованих або тих, що вийшли з ладу, деталей і складальних одиниць новими, стандартними.

4.1.4. Нероз'ємні з'єднання

З'єднання деталей машин і інших технічних виробів може бути *нероз'ємними і роз'ємними*.

Нероз'ємними називаються з'єднання, які неможливо розібрати без руйнування або пошкодження деталей, що його складають. До них відносяться заклепочні, зварні, клейові, паяні та інші.

На відміну від нероз'ємних з'єднань роз'ємні можливо розібрати і знову зібрати без їх руйнування. До них відносяться різьбові, шпонкові, шліцьові та інші.

Розглянемо спочатку докладніше основні типи нероз'ємних

з'єднань.

4.1.5. Заклепочні з'єднання

Заклепочне з'єднання здійснюється за допомогою *клепок* – конструктивних елементів, які, як правило, являють собою металеві стержні циліндричної форми із закладною головкою на кінці.

Для утворення заклепочного шва стержень заклепки треба ввести в отвори, продавлені або просвердлені в з'єднуваних деталях, і ударами молотка або тисненням спеціальних клепальних машин за допомогою обтискачів розклепати виступаючий кінець заклепки (утворити замикаючу головку).

Переваги заклепочних з'єднань:

- висока міцність і надійність з'єднання;
- простота контролю якості з'єднання;
- можливість з'єднання деталей із будь – яких матеріалів;
- незмінність фізико – хімічних властивостей матеріалів деталей з'єднання у процесі клепання;
- висока працездатність при ударних і повторно – змінних навантаженнях.

Недоліки заклепочних з'єднань:

- неповне використання матеріалу з'єднуваних деталей внаслідок ослаблення їх заклепочними отворами;
 - складність технологічного процесу виготовлення клепаних конструкцій;
 - важкість з'єднання деталей складної конструкції;
 - з'єднання деталей у стик потребує застосування спеціальних накладок, що призводить до додаткового збільшення маси конструкцій.
- Усі ці недоліки дуже істотні, тому вони привели до різкого скорочення застосування заклепочних з'єднань і заміни їх зварними, паяними та клейовими з'єднаннями.

Заклепки застосовують у з'єднаннях, для яких методи зварювання і склеювання розроблено недостатньо або вони малоефективні; у з'єднаннях деталей з різнорідних матеріалів, кольорових металів і сплавів, де нагрівання деталей недопустиме через короблення або відпускання; в особливо відповідальних з'єднаннях (унікальні ферми залізничних мостів та ін.); у з'єднаннях, які працюють при великих ударних і вібраційних (авіація) навантаженнях, та ін.

Заклепки виготовляють із каліброваних прутків на спеціальних верстатах-автоматах. Найпоширеніші заклепки із сталі Ст2, Ст3, 10, 15, мідних та алюмінієвих сплавів.

За формою головки розрізняють заклепки з напівкруглою головкою,

які найбільш поширені (рис. 4.1, а), з потайною (рис. 4.1, б), напівпотайною (рис. 4.1, в), плоскою (рис. 4.1, г) головками. У деяких галузях машинобудування застосовують трубчасті і вибухові заклепки.

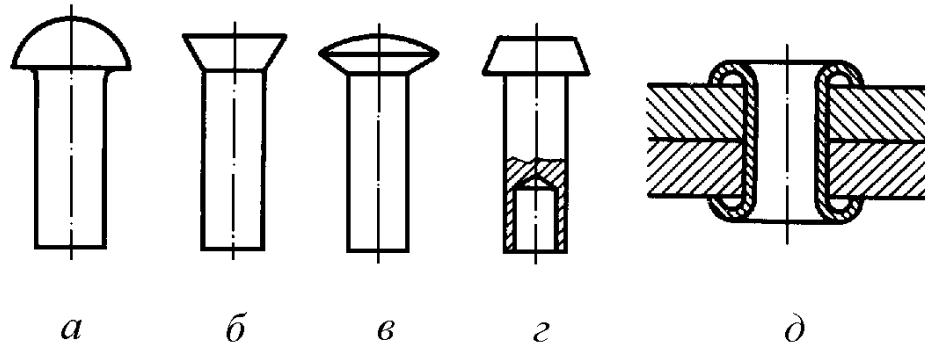


Рис. 4.1

Вибухові заклепки (рис. 4.1, г) застосовують при неможливості утворення замикаючої головки звичайними способами (за допомогою клепальної машини або молотка). Трубчасті заклепки, або заклепки – пістони (рис. 4.1, д), в основному застосовують для з'єднання неметалевих матеріалів (шкіра, фібра, прогумована тканина).

За функціональним призначенням заклепочні з'єднання класифікують на *міцні* і *щільні*, від яких потрібна не тільки міцність, а і герметичність з'єднання. Заклепки щільних швів ставлять у гарячому стані, при остиганні вони щільніше притискають поверхні з'єднаних деталей. На сьогоднішній час щільні шви майже повністю замінені зварюванням.

За конструктивними ознаками заклепочні з'єднання бувають напусківі (рис. 4.2, а), з однією (рис. 4.2, б) і двома (рис. 4.2, в) накладками; однорядні, дворядні (рис. 4.2, г), трирядні і т.д.

Незважаючи на складну залежність між силами, напруженнями і деформаціями в заклепочному шві, заклепки розраховують тільки на зріз і зминання, а з'єднані деталі – тільки на розтяг (стиск) по ослабленому отворами перерізу.

При розрахунку приймають такі допущення: навантаження рівномірно розподілено між усіма заклепками; концентрацію напружень біля отворів не враховують; тиски між бічною поверхнею заклепки і стінкою отвору (напруження зминання) вважають розподіленими рівномірно; напруження зрізу приймають розподіленими рівномірно по поперечному перерізу заклепки.

Розрахункові формули на міцність заклепочного з'єднання мають наступний вигляд.

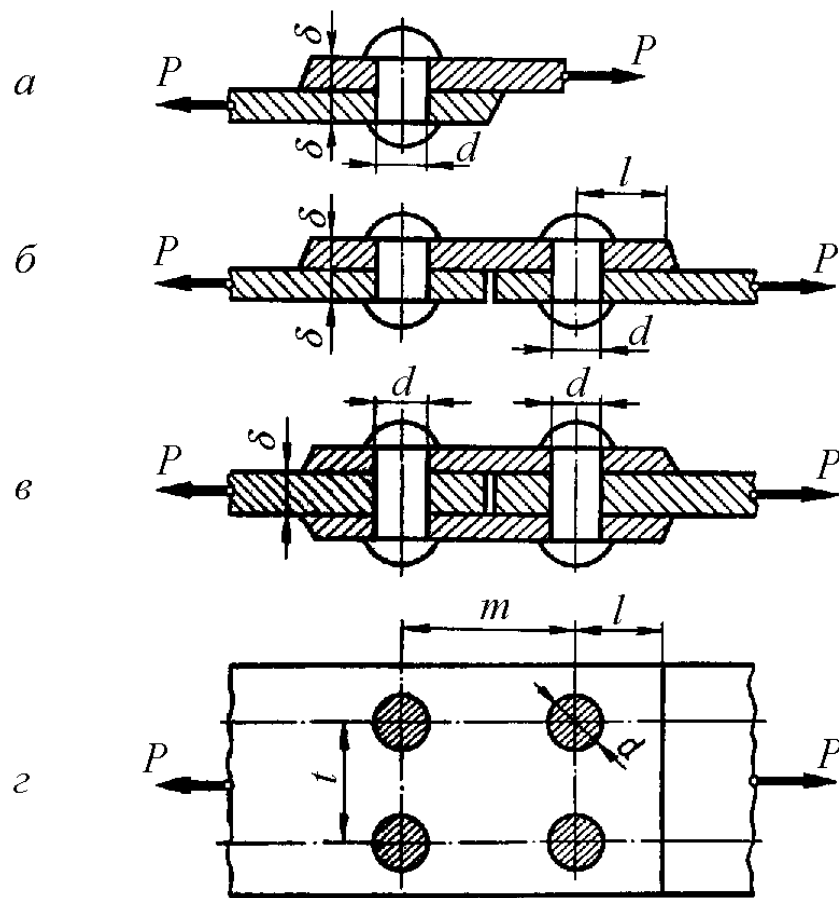


Рис. 4.2

Міцність заклепок на зріз:

$$\tau_{зр} = \frac{P}{A_{зр} n i} \leq [\tau_{зр}], \quad (4.1)$$

де $A_{зр} = \frac{\pi d^2}{4}$ – площа зрізу однієї заклепки, n – кількість заклепок у з'єднанні, i – кількість площин зрізу однієї заклепки.

Міцність з'єднання на зминання:

$$\sigma_{зм} = \frac{P}{A_{зм} n} \leq [\sigma_{зм}], \quad (4.2)$$

де $A_{зм} = d \delta_{min}$ – площа зминання однієї заклепки, δ_{min} – найменша товщина з'єднаних деталей, n – кількість заклепок у з'єднанні.

Міцність з'єднаних листів на розтяг (стиск):

$$\sigma_p = \frac{P}{A_p n} \leq [\sigma_p], \quad (4.3)$$

де $A_{зм}$ – розрахункова площа у небезпечному перерізі розтягнутого (стиснутого листа),

n – кількість отворів у небезпечному перерізі листа.

Із умови рівномірності з'єднання крок заклепочного шва приймають $t = (3...6)d$, відстань між рядами заклепок – $(2...3)d$, де d – діаметр заклепки.

4.1.6. Зварні з'єднання

У сучасному машинобудуванні і будівництві великого поширення набули нероз'ємні з'єднання, які здійснюються за допомогою зварювання.

Зварювання – технологічний процес утворення нероз'ємного з'єднання деталей за допомогою місцевого сплавлення або деформування із метою утворення міцних зв'язків між атомами і молекулами.

На сьогоднішній день існує понад 60 методів зварювання, які поділяються на дві основні групи: *зварювання плавленням* (газове, аргонодугове, високочастотне, дугове та ін.) і *зварювання пластичним деформуванням* (холодне, газопресове, контактне, стикове, точкове та ін.).

Газове зварювання – зварювання плавленням, при якому джерелом теплоти є високотемпературне полум'я горючих газів (ацетилену, водню) в струмені кисню. За допомогою газового зварювання можна зварювати тонку листову сталь, чавун, кольорові метали і сплави. Полум'я газового пальника використовують також для різання металів.

Контактне зварювання – зварювання, при якому зварювані деталі розігріваються теплою, що виділяється при проходженні електричного струму через місце контакту з'єднуваних деталей, доводяться до пластичного стану і механічно здавлюються.

Електродугове зварювання – зварювання, при якому між електродом, що є присадним металом, і зварюваними деталями утворюється електрична дуга, в зоні якої формується шов внаслідок плавлення електрода.

Крім перелічених видів зварювання застосовують і інші: *електрошлакове* – при великій товщині з'єднуваних деталей (до 2 м), *ковальське*, *термітне*, *атомно-водневе*, *ультразвукове*, *тертям*, *електронно* – *променево*, *дифузне*, *плазмове*, *світловим промінням* та ін.

Пластмаси зварюють у струмені гарячого повітря або гарячим металевим лезом, струмами високої частоти, ультразвуком.

Електродугове зварювання можна виконувати вручну і автоматично. При автоматичному зварюванні непокритий електродний дріт безперервно подається в зону зварювання і дуга горить під шаром шлаку (флюсу), що

Частина четверта

забезпечує високу якість шва. Крім того, автоматичний метод зварювання в 10...20 раз продуктивніший від ручного.

Основні переваги зварних з'єднань по відношенню до заклепочних:

- економія матеріалу (зварні конструкції в середньому легші від клепаных на 20...25 %);
- щільність з'єднань (в клепаных котлах та інших резервуарах, що перебувають під тиском);
- можливість з'єднувати деталі будь-яких криволінійних профілів довільної товщини;
- зменшення витрат праці у зв'язку із виключенням операцій розмітки і свердління або продавлювання отворів;
- менша собівартість;
- безшумність технологічного процесу зварювання і можливість автоматизації.

Основні недоліки зварних з'єднань:

- можливість порушення фізико – хімічних властивостей з'єднаних деталей у зоні зварювання;
- висока концентрація напружень у зоні зварних швів, обумовлена як геометрією зварюваних деталей і самих швів, так і можливими дефектами зварювання.

Концентрація напружень знижує міцність з'єднання, особливо при ударних і вібраційних навантаженнях.

При електродуговому зварюванні в залежності від взаємного розташування деталей, що зварюються розрізняють стикові, напусткові, таврові і кутові з'єднання.

Стикове з'єднання (рис. 4.3, а) двох деталей, які розташовані в одній площині (на одній поверхні), є найраціональнішим видом зварного з'єднання.

Стикові з'єднання характеризуються високою міцністю і надійністю при всіх видах навантажень.

У *напусткових з'єднаннях* (рис. 4.3, б) з'єднані деталі розташовані паралельно і частково перекривають одна одну.

Таврове з'єднання (рис. 4.3, в) – це зварне з'єднання, в якому до бічної поверхні однієї деталі виробу примикає під кутом і приварена торцем інша деталь

Кутове з'єднання (рис. 4.3, г) двох деталей, розташованих під будь – яким кутом (найчастіше 90°) і зварених у місці примикання їх країв, застосовують для виготовлення захисних засобів, тари та інших виробів, деталі яких сприймають невеликі навантаження. Кутові і таврові з'єднання відзначаються простотою виконання і економною витратою матеріалу.

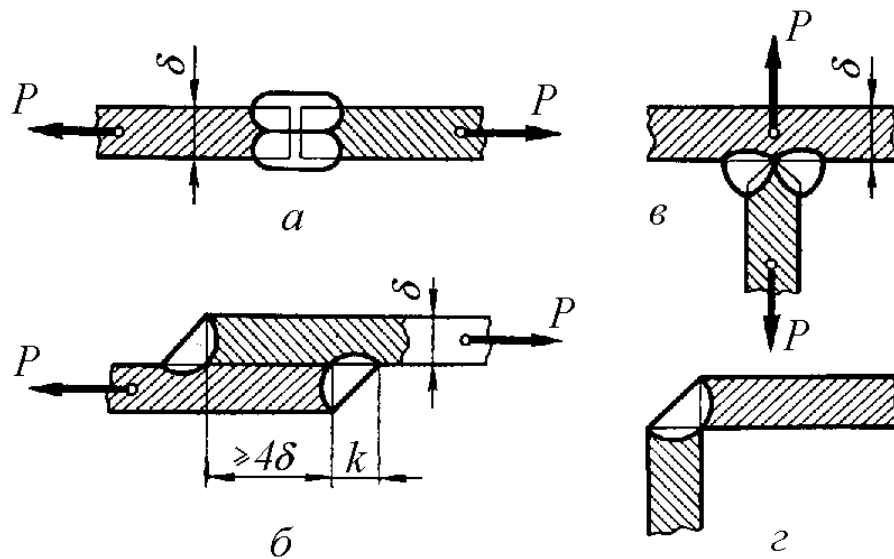


Рис. 4.3

За формою підготовки кромки листів розрізняють зварні з'єднання із відбортованими кромками (рис. 4.4, а), без скошених кромки (рис. 4.4, б, в) і зі скошеними кромками (рис. 6.4, г), односторонні (рис. 4.4, б) і двосторонні (рис. 4.4, в, г).

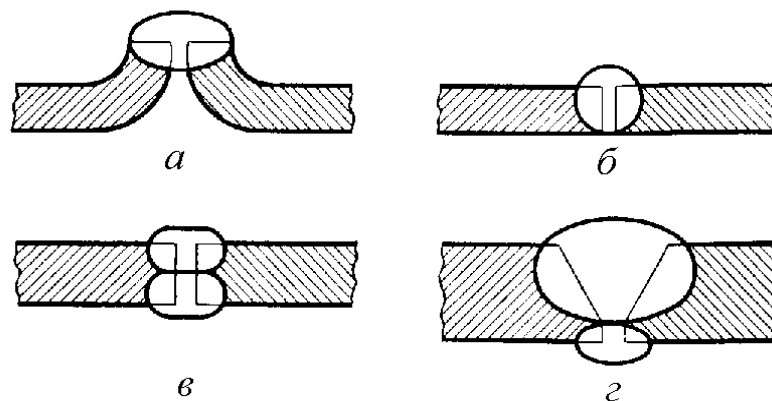


Рис. 4.4

Зварні шви також поділяються за протяжністю – на неперервні і переривчасті; по положенню у просторі – на нижні, горизонтальні, вертикальні і стельові; за зовнішньою формою – на плоскі (рис. 4.5, а), угнуті (рис. 4.5, б) і опуклі (рис. 4.5, в).

Треба відмітити, що раціональнішими є шви плоского і угнутого профілів. Угнутий профіль особливо доцільний при динамічних навантаженнях, так як забезпечує знижену концентрацію напружень. При ручному зварюванні звичайно застосовуються опуклі шви.

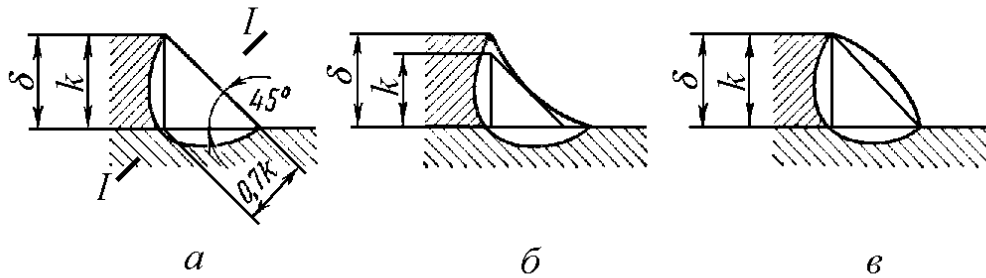


Рис. 4.5

Основним критерієм працездатності швів зварних з'єднань є їх *міцність*. Незважаючи на нерівномірність розподілу напружень по периметру шва, при розрахунках зварних з'єднань на міцність концентрацію напружень не враховують. Такий розрахунок умовний, однак виправданий практикою експлуатації.

Стикові зварні з'єднання розраховують тільки за нормальними напруженнями розтягу (стиску):

$$\sigma'_{p,c} = \frac{P}{\delta l} \leq [\sigma'_{p,c}], \quad (4.4)$$

де P – зовнішня сила розтягу (стиску) з'єднання;

δ – товщина елементів з'єднання;

l – довжина шва;

$[\sigma'_{p,c}]$ – допустиме напруження матеріалу шва.

Напусткові зварні з'єднання розраховують тільки на зріз за дотичними напруженнями $\tau'_{зр}$.

Небезпечним тут приймають бісекторний переріз $I-I$ шва заввишки приблизно $k \cos 45^\circ \approx 0,7k$, де k – катет шва (рис. 4.5, а).

Таким чином, розрахункову площу зрізу шва при його сумарній довжині l визначають із виразу:

$$A_{зр} = 0,7kl.$$

При цьому рівняння міцності зварного шва на зріз має вигляд:

$$\tau'_{зр} = \frac{P}{A_{зр}} = \frac{P}{0,7kl} \leq [\tau'_{зр}], \quad (4.5)$$

де $[\tau'_{p,c}]$ – допустиме дотичне напруження матеріалу шва.

Наведені розрахункові формули (4.4) і (4.5) застосовуються для швів зварних з'єднань, навантажених осьовими силами, але не моментами.

Останній випадок зустрічається рідко і тут не розглядається.

Допустимі напруження зварних швів приймають залежно від допустимого напруження $[\sigma_p]$ основного металу конструкції, способу зварювання та характеристики електродів. Орієнтовано для сталевих конструкцій при статичному навантаженні:

$$[\sigma'_p] = (0,9 \dots 1,0) [\sigma_p], \quad [\sigma'_c] = [\sigma_p], \\ [\tau'] = (0,6 \dots 0,65) [\sigma_p].$$

Значення допустимого напруження при розтягу залежить від границі текучості σ_T основного матеріалу (з'єднуваних деталей) і допустимого коефіцієнту запасу міцності $[n]$:

$$[\sigma_p] = \frac{\sigma_T}{[n]}.$$

Для низьковуглецевої сталі приймають $[n] = 1,3 \dots 1,6$, а для низьколегованої сталі – $[n] = 1,5 \dots 1,7$. Менші значення $[n]$ рекомендується брати для маловідповідальних з'єднань і при легких режимах роботи, більші – у відповідальних (крани, ферми мостів і т. д.) і при важких умовах роботи.

4.1.7. Клейові і інші нероз'ємні з'єднання

Клейовим називається нероз'ємне з'єднання, яке отримують методом склеювання деталей із однорідних або неоднорідних матеріалів (сталі, чавуну, алюмінію та його сплавів, міді, латуні, скла, мармуру, пластичних мас, синтетичних матеріалів, тканин, гумових виробів, шкіри і т. ін.).

Склеювання деталей із металевих матеріалів, матеріалів органічного та неорганічного походження засновано на утворенні міцних зв'язків між молекулами клейової плівки і поверхнями деталей.

Такий вид з'єднання перспективний і постійно вдосконалюється.

Основні переваги клейових з'єднань:

- корозійна і бензомаслостійкість;
- зменшення маси конструкції порівняно з іншими видами з'єднань;
- невисока концентрація напружень у місці з'єднання;
- можливість з'єднання практично будь – яких конструкційних матеріалів, однорідних і неоднорідних;
- можливість з'єднання деталей практично будь – якої форми поверхонь склеювання;
- герметичність і достатня надійність з'єднання;
- висока втомна міцність, яка перевершує в ряді випадків міцність паяних і зварних з'єднань;
- відсутність короблення з'єднуваних деталей;

Частина четверта

- значно менша, ніж при зварюванні і клепанні, собівартість;
- міцність і щільність з'єднання.

Основні недоліки клейових з'єднань:

- «старіння», тобто зниження міцності з'єднання з часом;
- низька теплостійкість – міцність з'єднання порушується при порівняно невисоких температурах 60...100 °С. (деякі марки клеїв на основі елементоорганічних і неорганічних полімерів задовільно працюють при $t = 1000^\circ\text{C}$, але не мають достатньої еластичності);
- невисокий опір проти розтягу і зсуву, особливо в разі нерівномірного відриву;
- необхідність старанного зачищення і припасування поверхонь.

Незважаючи на перелічені недоліки, застосування клейових з'єднань у народному господарстві розширюється. Це виробництво електро- і радіообладнання, оптична, мебльова і деревообробна промисловість, авіація, виготовлення різального і вимірювального інструменту, будівництво, кріплення арматури, виготовлення оснастки і т. ін.

Міцність клейового з'єднання залежить від площі склеювання. Найбільш міцним є з'єднання, яке працює на зсув або рівномірний відрив, коли напруження по всій площі розподілені відносно рівномірно.

У випадку нерівномірного відриву застосовують комбіновані з'єднання – клейозаклепочні і клейозварні.

Розрахункові формули на зсув (зріз) і відрив (розтяг – стиск) для клейових з'єднань мають вигляд:

$$\tau_{зр} = \frac{P}{A_{\kappa}} \leq [\tau_{зр}], \quad (4.6)$$

$$\sigma_p = \frac{P}{A_{\kappa}} \leq [\sigma_p], \quad (4.7)$$

де P – діюча сила, A_{κ} – площа склеювання.

При цьому допустимі напруження визначаються із відомих залежностей:

$$[\tau_{зр}] = \frac{\tau_B}{[n]}, \quad [\sigma_p] = \frac{\sigma_B}{[n]},$$

де межа міцності при зсуві $\tau_B \leq 60 \text{ МПа}$, межа міцності при розтягу $\sigma_B \leq 50 \text{ МПа}$, а допустимий коефіцієнт запасу міцності $[n] = 1,2 \dots 1,5$.

Крім клейових, зварних і заклепочних існують також інші види нероз'ємних з'єднань.

З'єднання пайкою, коли деталі з'єднуються за допомогою розплавленого припою. В якості припою застосовують метали і сплави, які можна розділити на легкоплавкі (з температурою плавлення до 300°C) і

тугоплавкі (з температурою плавлення вище 500°C). До легкоплавких припоїв належать сплави олова і свинцю, сплави олова, свинцю і кадмію. До тугоплавких – сплави срібла, міді і кадмію, сплави міді і нікелю, сплави срібла, міді і олова. Для очищення поверхні деталей перед пайкою застосовують флюси (каніфоль, буру, кислотні і спиртові розчини).

Пайкою з'єднують вироби із сталі, чавуну, кольорових металів і сплавів, благородних металів. Таким способом можливо з'єднати також різнорідні матеріали: метал із склом, гумою, але для цього поверхню неметалевої деталі необхідно металізувати гальванічним способом.

Паяні з'єднання широко застосовуються в приладобудуванні і електронній промисловості.

З'єднання пресуванням (з натягом) отримують для деталей циліндричної форми при застосуванні пресових посадок.(з'єднання зубчастого колеса із валом, втулки із валом). При пресовій посадці вал виготовляють більшого діаметру, ніж діаметр отвору відповідної деталі. Тому їх з'єднання можливо за допомогою преса, який створює необхідну силу тиску. Отвір деталі перед посадкою можна також розігріти (гаряча посадка). При цьому на поверхні контакту деталей після посадки утворюються зусилля тиску, які і утримують деталі виробу разом. Такі посадки ще називають посадками з натягом.

Такий спосіб з'єднання застосовують в машинобудуванні для збірки деталей, на які діють значні вібраційні і ударні навантаження.

Слід відмітити, що з'єднання з натягом умовно відносять до нероз'ємних. При достатній міцності і твердості поверхні деталей вони можуть бути розібрані (розпресовані) і знову зібрані.

З'єднання формуванням отримують заливкою металічних частин виробу рідкою пластмасою, гумою або іншою масою, яка після затвердіння утворює нероз'ємне з'єднання.

Такий спосіб з'єднання широко застосовують як у промисловості, так і при виготовленні товарів народного споживання.

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Що вивчають в деталях машин?
2. Дайте визначення деталі, складальної одиниці, комплексу, комплекту.
3. Назвіть деталі загального і спеціального призначення.
4. Які основні вимоги ставляться до машин і їх деталей?
5. Як можна підвищити міцність і довговічність деталі?
6. Яку конструкцію можна вважати економічною і технологічною?
7. Що таке уніфікація конструкції?
8. Які фактори впливають на вибір матеріалу деталі?

9. Як класифікують машинобудівні матеріали?
10. Для чого потрібна стандартизація і взаємозамінність деталей машин?
11. Які з'єднання називають нероз'ємними?
12. Які переваги і недоліки заклепочних з'єднань?
13. Напишіть основні формули розрахунку заклепочних з'єднань.
14. Навести основні методи зварювання.
15. Які переваги і недоліки зварних з'єднань?
16. Напишіть основні формули розрахунку зварних з'єднань.
17. Які переваги і недоліки клейових з'єднань?
18. Яким чином здійснюється з'єднання пайкою?
19. Як здійснюється з'єднання пресуванням і формуванням?

4.2. Роз'ємні з'єднання

З'єднання деталей машин і інших технічних виробів, які розбираються і знову можуть бути зібрані без пошкодження їх складових частин називаються *роз'ємними*. До роз'ємних належать різьбові, шпонкові, шліцьові і штифтові з'єднання. Розглянемо докладніше основні їх типи.

4.2.1. Різьбові з'єднання

Різьбові з'єднання, здійснюються різьбовими кріпильними деталями (болтами, гвинтами, шпильками) або безпосереднім згвинчуванням деталей з різьбою. Завдяки зручності складання і розбирання та високій надійності різьбові з'єднання набули великого поширення.

Основою різьбового з'єднання є *різьба*, яку отримують шляхом вирізання на поверхні деталей канавок по *гвинтовій лінії*.

Розглянемо, як утворюється гвинтова лінія.

Якщо прямий коловий циліндр огинати прямокутним трикутником (рис. 4.6) так, щоб точки одного з катетів AC збігалися з відповідними точками кола πd_2 основи циліндра, то гіпотенуза AB опише на бічній поверхні циліндра *гвинтову лінію*.

Кут, утворений гіпотенузою AB , яка є розгорткою гвинтової лінії, і катетом AC (розгортка кола основи циліндра) називається *кутом підйому гвинтової лінії* ψ . Відстань AB між двома сусідніми точками гвинтової лінії, які лежать на одній із твірних циліндра, називається *кроком* p *гвинтової лінії*.

Якщо геометричну фігуру (трикутник, прямокутник, трапецію, сегмент), що лежить в одній площині з віссю циліндра, обертати навколо його осі так, щоб будь – яка з точок основи фігури ковзала по гвинтовій лінії, то контурні лінії заданої фігури опишуть *гвинтову поверхню*.

Таким чином, *різьбою* називається поверхня, утворена при гвинтовому русі плоского контуру (трикутника, трапеції і т. д.) по циліндричній або конічній поверхні. Різьба, утворена на циліндричній поверхні, називається *циліндричною*, а на конічній – *конічною*.

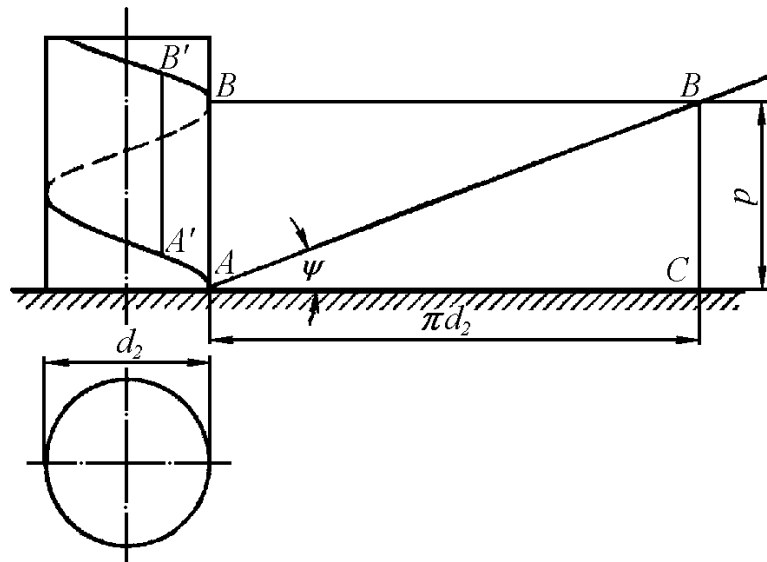


Рис. 4.6

Циліндр або конус, бічна поверхня якого переходить у гвинтову поверхню, називається гвинтом – циліндричним або конічним. Один оберт різьби (гвинтової лінії) на бічній поверхні циліндра (конуса) називається *витком*.

Розглянемо основні геометричні параметри різьби.

Контур перерізу різьби в площині, яка проходить через її вісь (вісь гвинта), називається *профілем різьби*. Очевидно, профілем різьби є та фігура, при гвинтовому русі якої утворюється різьба.

Із них найбільшого поширення набули в машинобудуванні трикутна (кріпильна різьба) і трапецеїдальна (ходова, яка призначена для передавання сили і руху в гвинтах пресів, домкратів, верстатів тощо).

Відстань між сусідніми однойменними бічними сторонами профілю в напрямку, паралельному осі різьби, називається *кроком різьби* p .

На рис. 4.7 показано п'ять основних профілів різьби: *a* – трикутна, *б* – упорна, *в* – трапецеїдальна, *г* – прямокутна, *д* – кругла.

Якщо на видимій частині циліндра (конуса) гвинтова поверхня піднімається зліва направо, то різьбу називають *правою* (рис. 4.8, а, в), а якщо справа наліво, то *лівою* (рис. 4.8, б).

Різьбу нарізують або накатують на циліндричному (конічному) стержні різьбонарізним інструментом (різець, плашка, фреза, гребінка, ролики). Якщо обидві основи циліндра (обидва торця заготовки для гвинта)

Частина четверта

поділити на кілька однакових частин (дві, три, чотири і т. ін.) і потім з розмічених точок нарізати різьбу, то на тілі гвинта (болта) утвориться дво – (рис. 4.8, б), три – (рис. 4.8, в) і чотирьохзахідна різьба.

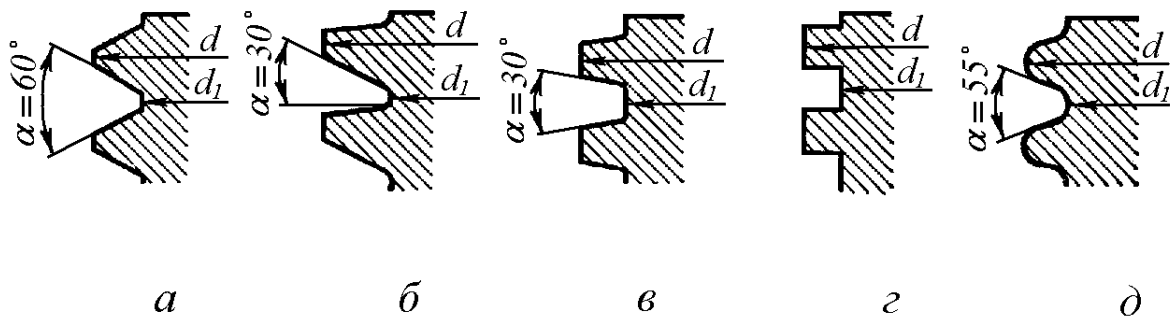


Рис. 4.7

Багатозахідна різьба характеризується кроком p і ходом p_h . Відстань між найближчими однойменними бічними сторонами профілю, що належать тій самій гвинтовій поверхні в напрямі осі різьби, називається *ходом різьби* p_h (рис. 4.8, б, в). Для однозахідної різьби поняття кроку і ходу збігаються (рис. 4.8, а).

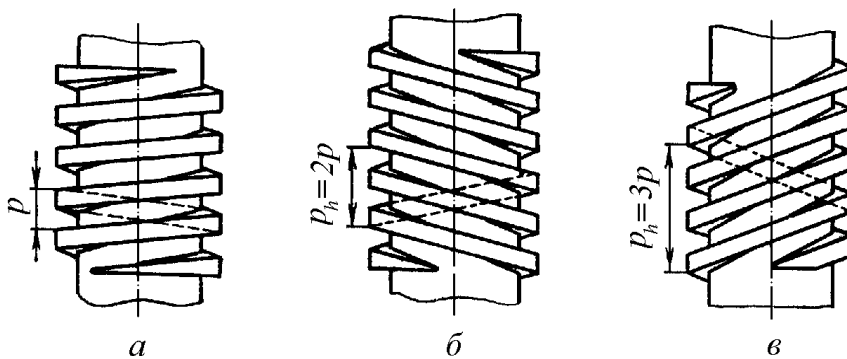


Рис. 4.8

Для багатозахідних різьб хід дорівнює добутковій кількості заходів n на крок різьби:

$$p_h = n p . \quad (4.8)$$

Різьбу також характеризують діаметри: зовнішній d , внутрішній d_1 і середній d_2 :

$$d_2 = \frac{(d + d_1)}{2}. \quad (4.9)$$

Під кутом підйому різьби розуміють кут підйому гвинтової лінії на циліндрі з діаметром, який дорівнює середньому діаметру d_2 .

Кут підйому багатозахідної різьби дорівнює

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{P_h}{\pi d_2}. \quad (4.10)$$

Розглянемо класифікацію різьб за призначенням.

Залежно від призначення різьби можна поділити на три групи: *кріпильна*, яка забезпечує міцність з'єднання; *кріпильно – ущільнювальна*, яка забезпечує міцність і герметичність з'єднання (арматура трубопроводів; з'єднування трубопроводів для рідин, пари і газів), цю різьбу часто роблять конічною; *спеціальна*, яку застосовують для передавання руху з зовнішнім навантаженням (гвинти вантажопідйомних, натискних пристроїв тощо).

Кріпильна і кріпильно – ущільнювальна різьби, як правило, мають трикутний профіль, який забезпечує високу міцність різьби і найсприятливіші умови для самовідгвинчування.

Різьби трикутного профілю поділяють на два основних типи.

1. *Метрична* з великим і малим кроком, яка стандартизована для $d = 0,25 \dots 600 \text{ мм}$, $p = 0,075 \dots 6 \text{ мм}$, має кут профілю $\alpha = 60^\circ$ і є *основною кріпильною різьбою*. Циліндричну метричну різьбу з великим кроком позначають буквою M і числом, що відповідає її зовнішньому (номінальному) діаметру, наприклад, $M22$ для $d = 22 \text{ мм}$. У позначенні різьби з малим кроком значення кроку вказують співмножником, наприклад $M24 \times 2$ для $d = 24 \text{ мм}$ і $p = 2 \text{ мм}$. Конічну метричну різьбу позначають буквами MK і співмножниками d і p , наприклад $MK20 \times 1,5$ для $d = 20 \text{ мм}$ і $p = 1,5 \text{ мм}$.

2. *Трубна* циліндрична різьба для $d = 1/8 \dots 6''$ при 28...11 витках на $1''$ (один дюйм) з кутом профілю $\alpha = 55^\circ$. Її позначення: $2''$ Труб для $d = 2''$. За номінальний діаметр трубної різьби d беруть внутрішній діаметр труби (прохід у проясненні) в дюймах ($1'' = 25,4 \text{ мм}$).

Як *спеціальні* різьби застосовують: *трапецеїдальну* для $d = 10 \dots 640 \text{ мм}$, $p = 2 \dots 48 \text{ мм}$, $\alpha = 30^\circ$; *упорну* для $d = 10 \dots 600 \text{ мм}$, $p = 2 \dots 48 \text{ мм}$; нестандартну *прямокутну*.

У деяких окремих випадках при важких умовах експлуатації (вагонні стяжки) або при частому згвинчуванні в забрудненому середовищі (пожежна і гідравлічна арматура), а також для накатки в тонкостінних

Частина четверта

виробах (цоколі і патрони електроламп) застосовують *круглу* різьбу із $d = 8...200\text{ мм}$, $p = 2,54...6,35\text{ мм}$.

Розглянемо конструктивні форми різьбових з'єднань.

Залежно від призначення різьбового з'єднання в машинобудуванні застосовують різні типи кріпильних виробів: болти, гвинти, шпильки, гайки, шайби, параметри і якісні характеристики яких стандартизовано.

Болтом (рис. 4.9, а) називають циліндричний стержень з різьбою і головкою (шестигранною, рідше чотиригранною, півкруглою). Стержень болта з головкою може бути зроблений із шестигранного прутка або іншого профілю, що відповідає профілеві головки болта. Болти застосовують у з'єднаннях, в яких з'єднувані деталі мають відносно невелику товщину.

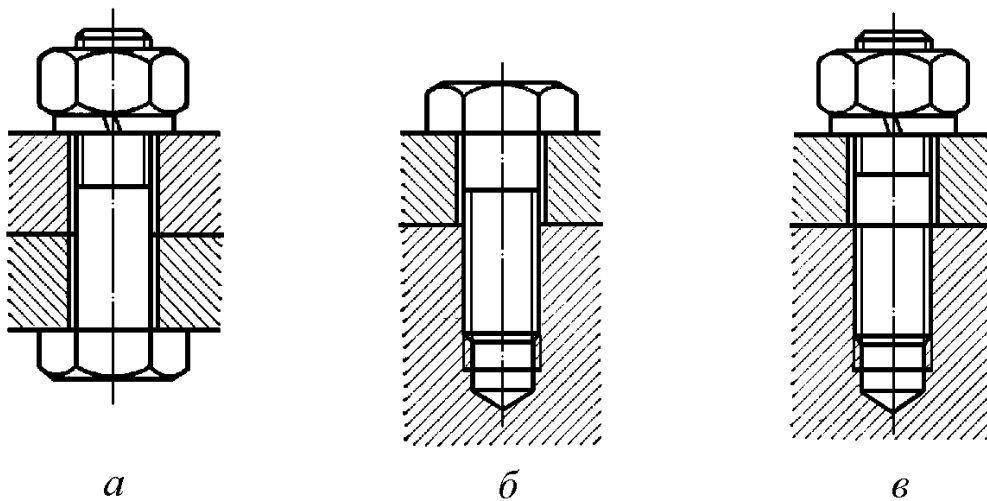


Рис. 4.9

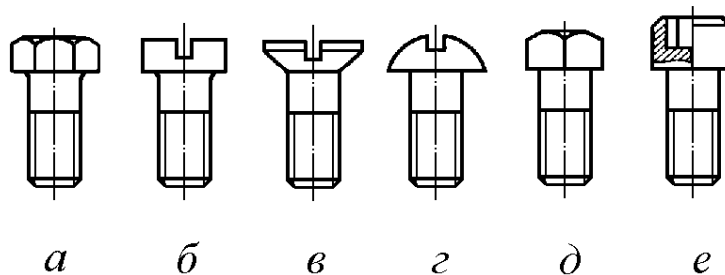


Рис. 4.10

Гвинт (рис. 4.9, б) – це болт, гайкою якого є одна із скріплюваних деталей. Залежно від розмірів та призначення гвинти (болти) мають різні головки: шестигранні, циліндричні з шліцом під викрутку, потайні, циліндричні напівкруглі, чотиригранні, циліндричні з внутрішнім

шестигранником під ключ (рис. 4.10).

Шпилька (рис. 4.9, в) – це циліндричний стержень з гвинтовою нарізкою з обох кінців. Шпильки застосовують у тих випадках, коли болт не можна пропустити крізь занадто товсті деталі або коли необхідно часто виконувати операцію розбирання і збирання конструкції.

Гайка – деталь з різьбовим отвором. Гайка є замикаючим елементом різьбового (болтового) з'єднання. Залежно від призначення гайки мають різну конструктивну форму. Найбільш поширеними є *шестигранні гайки*.

Шайба (підкладна і стопорна) – це деталь невеликої товщини з круглим отвором для вільного проходу болта, гвинта, шпильки.

Підкладну шайбу закладають між з'єднуваною деталлю і гайкою або між деталлю і головкою болта (гвинта) для вирівнювання і зменшення напруження змінання на опорній поверхні деталі і захисту поверхні від пошкодження. Стопорні шайби застосовують, щоб захистити гайки від самовідгвинчування.

Існують також спеціальні болти (гвинти): *фундаментні* болти для з'єднання машин з фундаментом, *розпірні* болти для збереження сталої відстані між з'єднуваними деталями, *анкерні* болти для укріплення станин машин, які працюють з динамічними (ударними) навантаженнями, до фундаменту, *відкидні* болти для закріплення і вивільнення деталей у з'єднаннях, які часто розбирають, *установочні гвинти* для закріплення на валу установочних кілець, невеликих шківів, покажчиків, щоб запобігти зміщенню їх уздовж осі вала при невеликих осьових силах.

4.2.2. Розрахунок різьбових з'єднань

Переважає більшість болтів, гвинтів і шпильок працює зі значною попередньою затяжкою. В результаті затягнення болта (гвинта, шпильки) в його поперечному перерізі виникають поздовжня сила і крутний момент. Таким чином, стержень гвинта зазнає розтягу і кручення, а різьба гвинта піддається зрізу, згинанню і змінанню.

При стандартизації різьбових виробів висота головки болтів і гайок встановлюється, виходячи із умови рівномірності їх із стержнем болта (гвинта, шпильки) по різьбі. Тому для стандартних кріпильних виробів, які працюють при статичних навантаженнях, можна обмежитись розрахунком за основним критерієм працездатності – міцності стержня болта при одночасній дії розтягу і кручення.

Небезпечним перерізом болта (гвинта, шпильки), що працює на розтяг або розтяг і кручення, приймають переріз в його нарізаній частині з *розрахунковим діаметром*

$$d_p \approx d - 0,94 p, \quad (4.11)$$

де d – зовнішній діаметр, p – крок різьби.

Розглянемо характерні приклади розрахунків болтового з'єднання.

1. Розрахунок незатягнутого болтового з'єднання під дією зовнішнього осьового навантаження.

Незатягнуті (ненапружені) болти, які навантажені осьовою силою, трапляються дуже рідко, наприклад хвостовик вантажного гака (рис. 4.11).

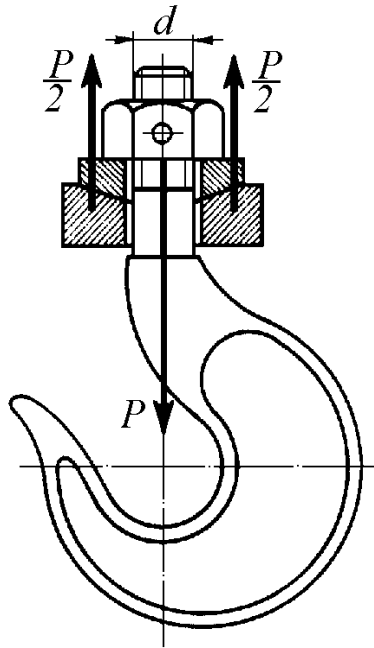


Рис. 4.11

Незатягнуті болти розраховують тільки на розтяг за умовою міцності:

$$\sigma_p = \frac{P}{A_p} = \frac{4P}{\pi d_p^2} \leq [\sigma_p], \quad (4.12)$$

де P — осьове навантаження, еквівалентне поздовжній силі,
 $A_p = \frac{\pi d^2}{4}$ — розрахункова площа поперечного перерізу болта;

$[\sigma_p]$ — допустиме напруження на розтяг. Для болтів із вуглецевої сталі $[\sigma_p] = 0,6 \sigma_T$.

Із попередньої формули визначаємо розрахунковий діаметр різьби:

$$d_p \geq \sqrt{\frac{4P}{\pi[\sigma_p]}}. \quad (4.13)$$

Знайшовши d_p , інші розміри різьби визначають за стандартами.

2. Розрахунок затягнутого болтового з'єднання без зовнішнього навантаження.

Прикладом такого з'єднання є кріплення люків, кришок, до герметичності яких нема особливих вимог (рис. 4.12).

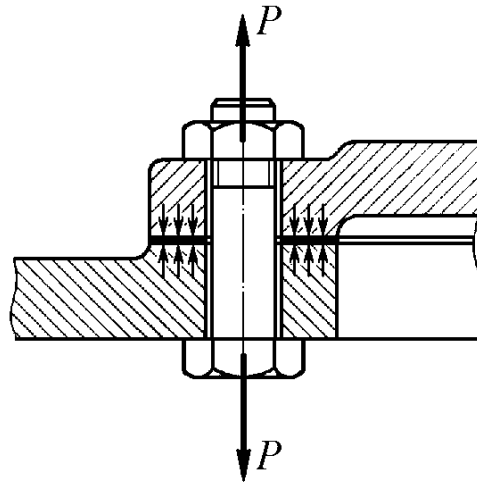


Рис. 4.12

В результаті затяжки з'єднання болт отримує деформацію розтягу і кручення. В цьому випадку розрахунки проводять тільки на розтяг, а вплив кручення при затягненні болта враховують коефіцієнтом $k_{зам}$, значення якого залежить від співвідношення параметрів різьби і умов навантаження. Для розрахунків метричної різьби можна прийняти $k_{зам} = 1,3$.

Тоді із умови міцності на розтяг:

$$d_p = \sqrt{\frac{4P_0}{\pi[\sigma_p]}} = \sqrt{\frac{5,2P}{\pi[\sigma_p]}}, \quad (4.14)$$

де $P_0 = k_{зам} P = 1,3P$ — розрахункове осьове навантаження.

3. Розрахунок затягнутого болтового з'єднання під дією зовнішнього осьового навантаження.

Розглянутий приклад характерний для герметичного кріплення кришок резервуарів під тиском рідини або газу (рис. 6.13).

В даному випадку із урахуванням впливу кручення при затяжці для забезпечення нерозкриття стику і в залежності від пружних властивостей матеріалу розрахункове осьове навантаження P_0 приймають в межах $P_0 = (1,4...1,8)P$.

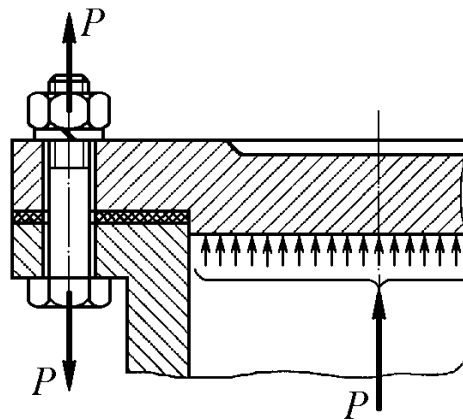


Рис. 4.13

Прийнявши $P_0 = 1,8 P$, отримаємо наступну формулу для визначення розрахункового діаметра різьби:

$$d_p \geq \sqrt{\frac{7,2 P}{\pi [\sigma_p]}}. \quad (4.15)$$

3. Розрахунок болтового з'єднання, під дією зовнішньої поперечної сили.

У випадку, якщо болт поставлений в отвір із зазором (рис. 4.14, а), його необхідно затягнути з такою силою F_r , щоб сила тертя R_f між поверхнями стичних деталей забезпечила нормальну роботу з'єднання без відносного зміщення його частин від поперечної сили Q .

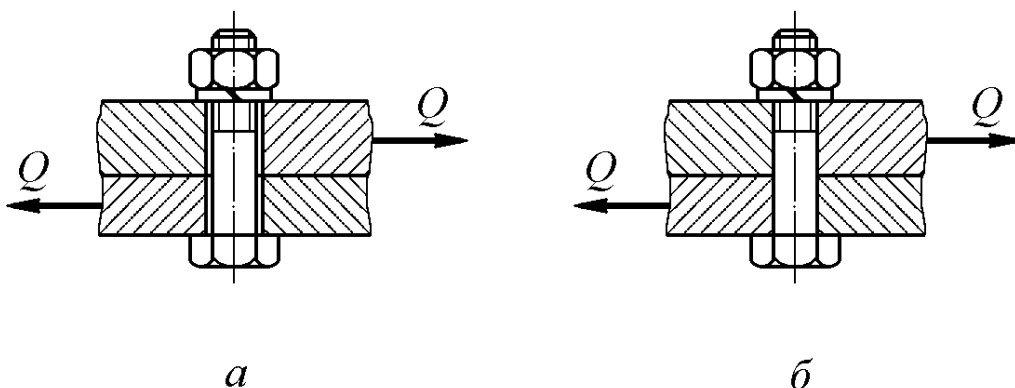


Рис. 4.14

Зв'язок між силою тертя R_f і силою затяжки F_r при коефіцієнті тертя f і поперечній силі Q буде наступним:

$$R_f = f F_r \approx (1,2 \dots 1,3) Q,$$

звідки

$$F_r \geq (1,2 \dots 1,3) \frac{Q}{f}. \quad (4.16)$$

Враховуючи, що при цьому також відбувається розтяг і кручення болта при його зтяжці, розрахункова формула діаметру болта має вигляд:

$$d_p \geq \sqrt{\frac{4 \cdot 1,3 \cdot 1,2 Q}{\pi f [\sigma_p]}} \approx 1,4 \sqrt{\frac{Q}{\pi f [\sigma_p]}}. \quad (4.17)$$

У випадку, якщо болт поставлений в отвір без зазору (рис. 4.14, б), його діаметр визначають із розрахунків на зріз:

$$\tau_{зр} = \frac{Q}{A_{зр}} = \frac{4Q}{\pi d_o^2 i} \leq [\tau_{зр}] \quad (4.18)$$

і перевіряють на умову міцності зминанню:

$$\sigma_{зм} = \frac{Q}{A_{зм}} = \frac{Q}{d_o \delta_{min}} \leq [\sigma_{зм}], \quad (4.19)$$

де d_o – діаметр стержня болта (ненарізаної частини), $A_{зр} = \frac{\pi d_o^2 i}{4}$ – розрахункова площа зрізу;

i — кількість площин зрізу болта (при з'єднанні більше ніж двох деталей); $A_{зм} = d_o \delta_{min}$ – розрахункова площа зминання стержня болта;

δ_{min} – найменша товщина з'єднаних деталей

При розрахунках різьбових з'єднань, які складаються із n болтів, треба врахувати, що розрахункова площа цих з'єднань збільшуються відповідно в n разів.

4.2.3. Шпонкові з'єднання

Шпонковим називають роз'ємне з'єднання складових частин виробу із застосуванням шпонок.

Шпонка – це елемент з'єднання, що встановлюється у пази стикованих деталей і перешкоджає їх відносному повороту або зсуву. Шпонки переважно застосовують для передавання обертального моменту від вала до шківів, зірочки, зубчастого колеса і т. ін. або навпаки.

З'єднання деталей за допомогою шпонок можуть бути напруженими і ненапруженими. З'єднання називають напруженими, якщо в їхніх деталях

Частина четверта

виникають напруження в процесі складання, тобто до прикладення робочих навантажень. До напружених належать з'єднання *клиновими шпонками*, які добре сприймають ударні навантаження.

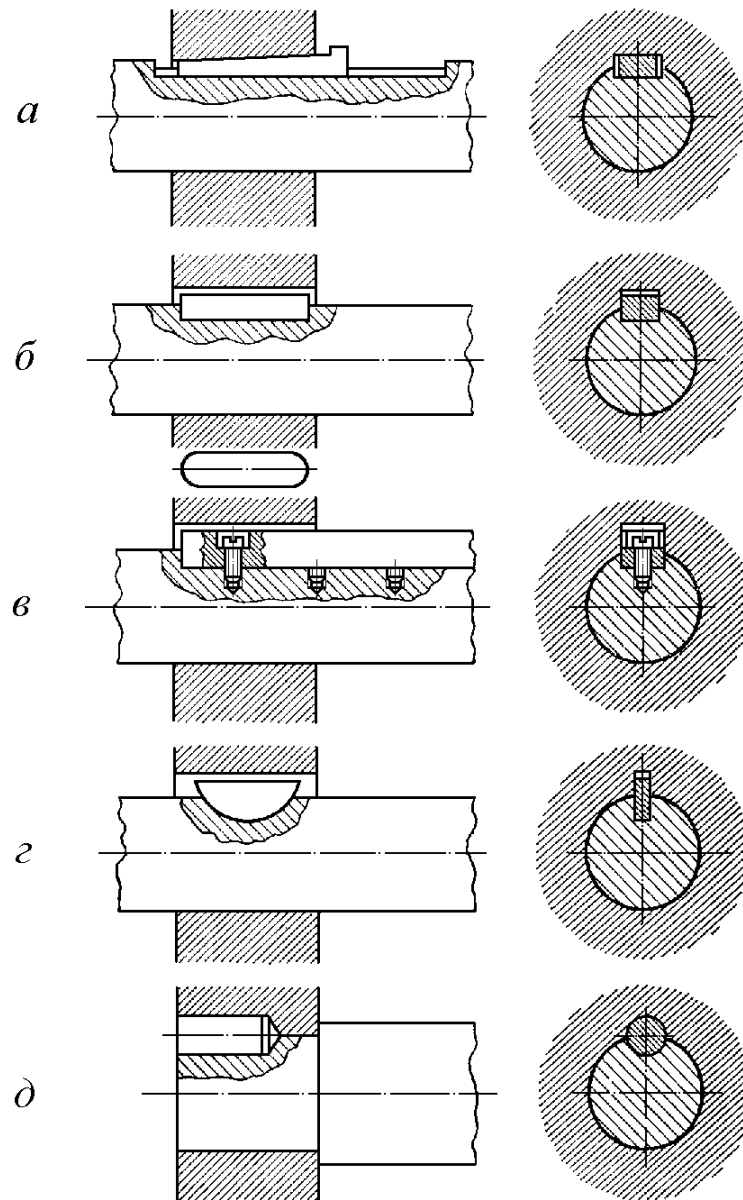


Рис. 4.15

Клинова шпонка (рис. 4.15, а) має форму клина з уклоном верхньої грані $1 : 100$ і монтується між валом і деталлю ударами молотка (забивна шпонка) або затягується насаджуваною на вал деталлю (закладна шпонка), що забезпечує напруженість з'єднання. Робочими поверхнями клинових шпонок є верхня і нижня широкі грані.

Клинові шпонки застосовують у тихохідних передачах низької точності. При посадці зубчастого колеса, шків, зірочки, муфти тощо на вал за допомогою клинової шпонки порушується центрування деталі і вала внаслідок зміщення осі отвору деталі відносно осі вала. Це приводить до порушення нормальної роботи передачі, збільшення биття або перекосу з'єднаних деталей.

Ненапружені шпонкові з'єднання здійснюють призматичними і сегментними шпонками.

Призматичні шпонки (рис. 4.15, б) бувають зі закругленими торцями, плоскими торцями, одним закругленим і другим плоским торцем. У цих шпонках робочими є бічні грані.

Крім звичайних призматичних шпонок застосовують напрямні шпонки, які кріплять до вала гвинтами (рис. 4.15, в). По цим шпонкам уздовж вала переміщують шестерні коробок передач, рухомі частини кулачкових і фрикційних муфт і т. ін.

Сегментні шпонки (рис. 4.15, г) набули великого поширення в автотракторобудуванні, верстатобудуванні і літакобудуванні завдяки простоті виготовлення і зручності при складанні та розбиранні. Обертальний момент від вала до насадженої деталі (або від деталі до вала) передається бічними гранями шпонки. При передаванні великих моментів можна ставити в ряд по довжині вала дві або три шпонки.

Розміри шпонок регламентовано відповідними стандартами, крім круглої циліндричної і конічної шпонок (рис. 4.15, д).

Переваги шпонкових з'єднань:

- простота і надійність конструкції;
- легкість збирання і розбирання з'єднання;
- порівняно низька вартість.

Недоліки шпонкових з'єднань:

- шпонкові пази істотно ослаблюють міцність стикованих деталей вала і насадженої на нього деталі;
- концентрація напружень, що виникають у зоні шпонкової канавки; знижує опір проти втомленості вала;
- складність забезпечення взаємозамінності призматичних шпонок через припасування або добирання шпонки по пазу (сегментні шпонки з глибоким пазом не мають цього недоліку і тому їх застосовують при масовому виробництві).

Шпонки виготовляють із сталі Ст5, Ст6, 45, 50, 55, 60 та інших більш міцних марок з границею міцності $\sigma_B \geq 590 \text{ МПа}$.

Розміри шпонки вибирають за таблицями стандарту залежно від діаметра вала і роблять перевірочний розрахунок.

З'єднання, здійснювані за допомогою призматичних або сегментних шпонок, перевіряють переважно на зминання робочих поверхонь шпонки і

Частина четверта

з'єднаних деталей (рис. 6.16) за формулою:

$$\sigma_{зм} = \frac{F_t}{A_{зм}} = \frac{2M}{d(h-t_1)l_p} \leq [\sigma_{зм}], \quad (4.20)$$

де $F_t = \frac{2M}{d}$ – колове зусилля, яке діє на шпонку;

M — обертальний момент на валу;

d — діаметр вала, $A_{зм} = (h-t_1)l_p$ — розрахункова площа змінання паза в маточині;

h — висота перерізу шпонки;

t_1 — глибина паза вала;

l_p — робоча довжина шпонки.

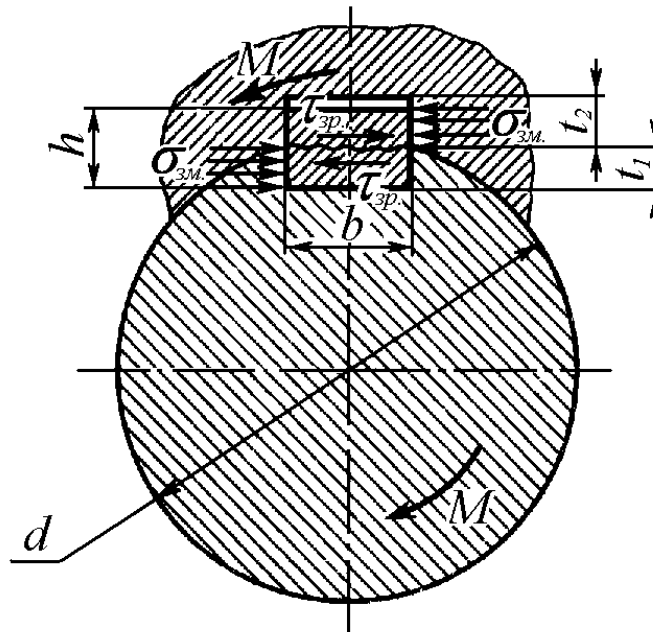


Рис. 4.16

Сегментні шпонки на відміну від призматичних крім змінання перевіряють також на зріз:

$$\tau_{зп} = \frac{F_t}{A_{зп}} = \frac{2M}{dbl_p} \leq [\tau_{зп}], \quad (4.21)$$

де $A_{зп} = dbl_p$ – розрахункова площа зрізу:

b — ширина шпонки (рис. 4.16).

Допустимі напруження при розрахунках шпонкових з'єднань

приймаються наступними: $[\tau_{зр}] = 60 \dots 100 \text{ МПа}$ – допустиме напруження на зріз, $[\sigma_{зм}] = 100 \dots 130 \text{ МПа}$ – допустиме напруження на зминання для маточин із сталі і $[\sigma_{зм}] = 50 \dots 70 \text{ МПа}$ – із чавуну. Менші значення допустимих напружень вибирають при нерівномірних і ударних навантаженнях.

4.2.4. Шліцьові з'єднання

Шліцьовим називається роз'ємне з'єднання складових частин виробу із застосуванням пазів (шліців) і виступів (зубів). Шліцьове або зубчасте з'єднання можна розглядати як багатошпонкове, в якому шпонки – зуби виготовлені разом з валом.

У шліцьовому з'єднанні профіль перерізу зубів має прямокутну, евольвентну або трикутну форму (рис. 6.16).

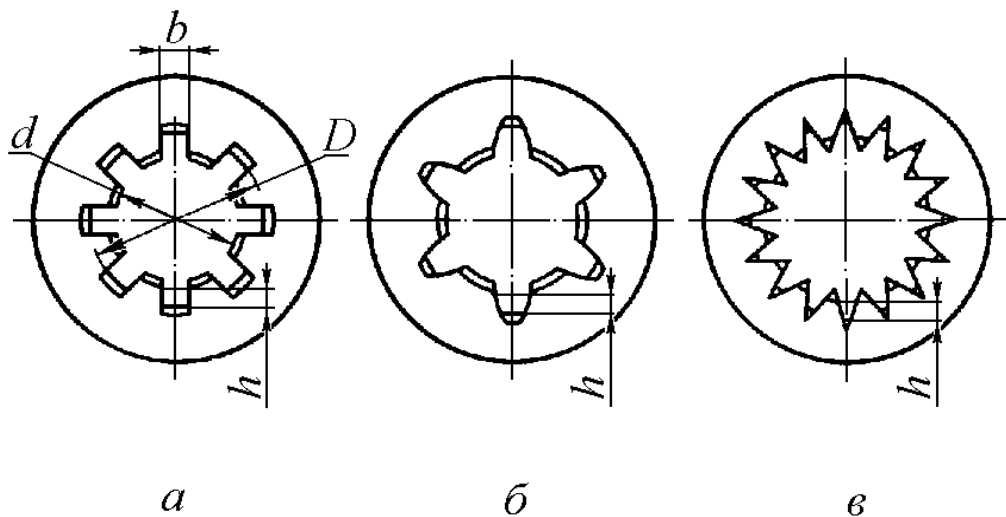


Рис. 4.17

Найбільш поширені *прямокутні* (рис. 4.17, а) і *евольвентні* (рис. 4.17, б) зубчасті з'єднання, які стандартизовані і застосовуються в рухомих та нерухомих з'єднаннях. Останнім часом перевагу віддають евольвентним шліцьовим з'єднанням, оскільки їх можна виготовляти за допомогою устаткування для нарізування зубчастих коліс, а також внаслідок підвищеної міцності цих з'єднань і достатньої точності центрування стичних деталей.

Шліцьові з'єднання з *трикутним* (рис. 4.17, в) профілем зубів менш поширені, ніж евольвентні і прямокутні, вони не стандартизовані. Завдяки великій кількості низьких зубів їх успішно застосовують у нерухомих з'єднаннях тонкостінних втулок або порожнистих валів, які передають

Частина четверта

невеликі моменти, а також коли потрібні відносно малі регулювальні повороти деталей.

Шліцьові з'єднання можуть бути рухомими (встановлення рухомих шестерень коробок передач верстатів або автомобілів на шліцьовий вал) або нерухомими (нерухоме закріплення деталей на шліцьовому валу).

Стандартом регламентовано три серії з'єднань з прямобічним профілем зубів: *легку*, в основному для нерухомих і малонавантажених з'єднань; *середню*, головним чином для рухомих середньонавантажених з'єднань з великою кількістю зубів, причому втулка переміщується по шліцах без навантаження (коробка передач); *важку* для передавання великих моментів і пересування втулки під навантаженням.

Переваги шліцьових з'єднань порівняно із шпонковими:

– деталі краще центруються на валах і мають точніший напрям при осьовому переміщенні;

– внаслідок збільшення сумарної робочої поверхні зубів, зменшення глибини пазів і рівномірного розподілу навантаження по колу вала міцність з'єднання, особливо при динамічних навантаженнях, істотно підвищується.

Усе це забезпечує велике поширення шліцьових з'єднань в автотракторній промисловості, верстатобудуванні, авіабудуванні та ін.

Недоліком шліцьових з'єднань є складність технології їх виготовлення і висока вартість.

Шліцьові з'єднання вибирають за таблицями стандартів залежно від діаметра вала.

Вибране шліцьове з'єднання перевіряють на зминання активних поверхонь зубів і пазів за наступними формулами.

Для прямобічних шліців

$$\sigma_{зм} = \frac{F_t}{A_{зм}} = \frac{2M}{(D+d)hl_p z} \leq [\sigma_{зм}], \quad (4.22)$$

де $F_t = \frac{2M}{d_{cp}}$ – колове зусилля;

M — обертальний момент на валу;

$d_{cp} = \frac{D+d}{2}$ — середній діаметр з'єднання;

D і d – відповідно зовнішній і внутрішній діаметр шліців;

$A_{зм} = hl_p z$ – розрахункова площа зминання зубів;

h — робоча висота зуба;

l_p – робоча довжина зуба;

z — кількість зубів з'єднання.

Для евольвентних шліців

$$\sigma_{зм} = \frac{P_t}{A_{зм}} = \frac{2M}{0,8(D+d)ml_p z} \leq [\sigma_{зм}], \quad (4.23)$$

де $P_t = \frac{2M}{d}$ – колове зусилля ;

$$d = \frac{D+d}{2} = mz \text{ — діаметр ділильного кола}$$

m — модуль зуба;

z — кількість зубів;

$A_{зм} = 0,8ml_p z$ – розрахункова площа змінання зубів евольвентного профілю;

l_p – робоча довжина зуба.

Допустиме напруження на змінання визначається як

$$[\sigma_{зм}] = \frac{\sigma_T}{nK_{зм}K_\delta}, \quad (4.24)$$

де $n = 1,25 \dots 1,4$ – коефіцієнт запасу міцності, σ_T – границя текучості матеріалу зуба, $K_{зм} = 4 \dots 5$ – загальний коефіцієнт концентрації навантаження, $K_\delta = 2 \dots 2,5$ – коефіцієнт динамічного навантаження.

4.2.5. Клинові і штифтові з'єднання

Клиновим називається роз'ємне з'єднання складових частин виробу із застосуванням деталі, яка має форму клина.

Клинові з'єднання можна поділити на *установочні* та *силові*.

Установочні (рис. 4.18, а) клинові з'єднання призначені для регулювання і встановлення потрібного відносного положення деталей, а *силові* (рис. 4.18, б, в) – для міцного їх з'єднання.

В свою чергу силові клинові з'єднання поділяють на *ненапружені* і *напружені*.

Ненапружені (рис. 4.18, в) клинові з'єднання (до прикладення зовнішніх навантажень у деталях цього з'єднання напружень немає) застосовують при односторонніх навантаженнях.

Найбільшого поширення набули *напружені* (рис. 4.18, б) клинові з'єднання (клин запресовується в отвір з'єднуваних деталей з деякою силою, що спричинює напруження до прикладення зовнішнього навантаження), які забезпечують достатню надійність у режимі змінних навантажень.

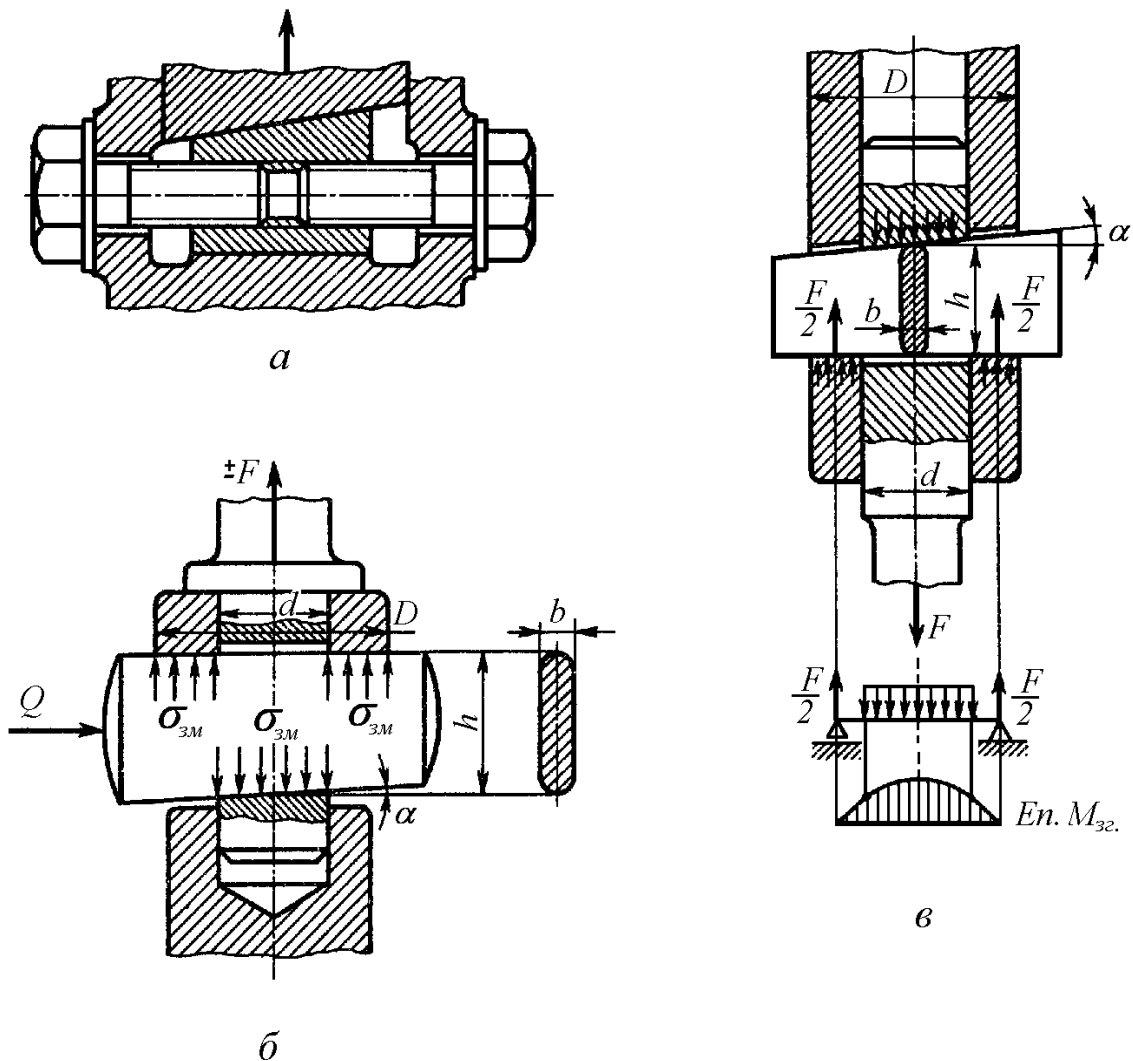


Рис. 4.18

Силкові клини застосовують для з'єднання тяг, різних маховиків, поршневих штоків з повзунами, вкладишів та ін.

Для забезпечення самогальмування приймають, що кут клина в силових клинових з'єднаннях дорівнює $1:100$, $1:40$ або $1:30$, а в установочних — $1:10$, $1:6$ або $1:4$.

Переваги силових клинових з'єднань:

- простота конструкції, складання і розбирання;
- відносна дешевизна,
- можливість передавати значні навантаження.

Недоліки:

- ослаблення з'єднаних деталей отвором під клин;
- відносна складність обробки отворів;
- необхідність індивідуального припасування клина до отвору.

При конструюванні клинового з'єднання орієнтовно можна брати

товщину клина $b = (1/4...1/3)d$, висоту перерізу клина $h \geq 3b$.

Вибрані розміри з'єднання можуть перевірятись за умовами (рівняннями) міцності на зминання, на зріз і на згин. Розрахункова схема клина на згин показана на рис. 4.18, в.

Штифтовим називається роз'ємне з'єднання складових частин виробу із застосуванням *штифта*. При цьому штифти можуть бути *циліндричними, конічними або фасонними*.

На рис. 4.19 показано різновиди штифтових з'єднань: за допомогою циліндричного штифта (а), конічного штифта (б, в), конічного розвідного штифта (г).

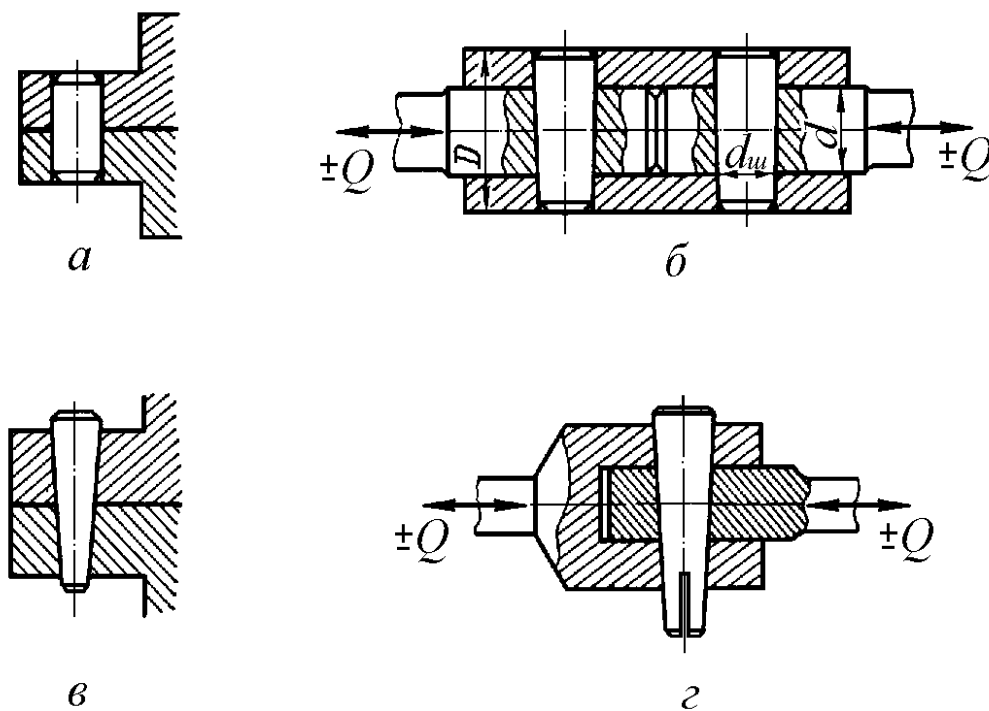


Рис. 4.19

Циліндричні і конічні штифти застосовують як установочні (рис. 4.19, а, в) або для передавання відносно невеликих навантажень (рис. 4.19, б, г).

Великого поширення набули гладкі конічні (конусність 1:50) і фасонні (циліндричні і конічні з видавленими або насіченими канавками, штифти, які забезпечують центрування з'єднаних деталей і надійне самогальмування.

При передаванні поперечного навантаження штифт працює на зріз і зминання і тому його розраховують на умову міцності зрізу і зминання.

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Назвіть основні види роз'ємних з'єднань.
2. Дайте визначення різьбового з'єднання.
3. Назвіть основні геометричні параметри різьби.
4. Назвіть основні типи різьб.
5. Які є основні конструктивні типи кріпильних виробів із різьбою?
6. Чим відрізняється розрахунок незатягнутого і затягнутого різьбового з'єднання?
7. Дайте визначення шпонкового з'єднання.
8. Як класифікують шпонкові з'єднання?
9. Напишіть основні формули розрахунку шпонкових з'єднань.
10. Дайте визначення шліцьового з'єднання і його класифікацію.
11. Напишіть основні формули розрахунку шліцьових з'єднань.
12. Які переваги і недоліки шліцьових з'єднань порівняно із шпонковими?
13. Які з'єднання називають клиновими? Назвіть їх основні види.
14. Які переваги і недоліки клинових з'єднань?
15. Що таке штифтове з'єднання?
16. Назвіть основні типи штифтів і їх призначення.

4.3. Загальні відомості про передачі

Механічні пристрої, що застосовуються для передавання механічної енергії від джерела до споживача із зміною кутової швидкості або виду руху, називають *механічними передачами* або просто *передачами*.

Необхідність введення передачі між двигуном і виробничою машиною пояснюється багатьма причинами.

1. Джерела руху — двигуни — працюють, як правило, в режимі високих кутових швидкостей, які забезпечують їм найбільшу потужність, к. к. д. і малі габаритні розміри. При цьому кутові швидкості валів виробничих машин відрізняються від кутової швидкості вала двигуна.

2. Зміну швидкості виробничої машини, а отже, і значення обертового моменту вигідніше здійснювати за допомогою передачі, а не зміною кутової швидкості вала двигуна, оскільки при зменшенні кутової швидкості вала двигуна його потужність і к. к. д. знижуються.

3. Двигуни, як правило, передають обертовий рух, а робочі органи машини іноді потребують зворотно-поступального, хитного, гвинтового та інших видів руху.

4. Часто виникає необхідність передавати енергію від одного двигуна до кількох виробничих машин, вали яких обертаються з неоднаковими кутовими швидкостями.

За способом передавання руху механічні передачі класифікують на *передачі тертям* — фрикційні, пасові, канатні і *передачі зачепленням* — зубчасті, черв'ячні, гвинтові, ланцюгові. Можливий і інший принцип класифікації механічних передач, згідно з яким їх поділяють на передачі з безпосереднім контактом (фрикційні, зубчасті, черв'ячні та ін.) і передачі з проміжною гнучкою ланкою (пасові, ланцюгові і канатні).

В кожному передаточному механізмі існує дві ланки: *ведуча* і *ведена*. В багатоступінчастих передачах існують також проміжні ланки.

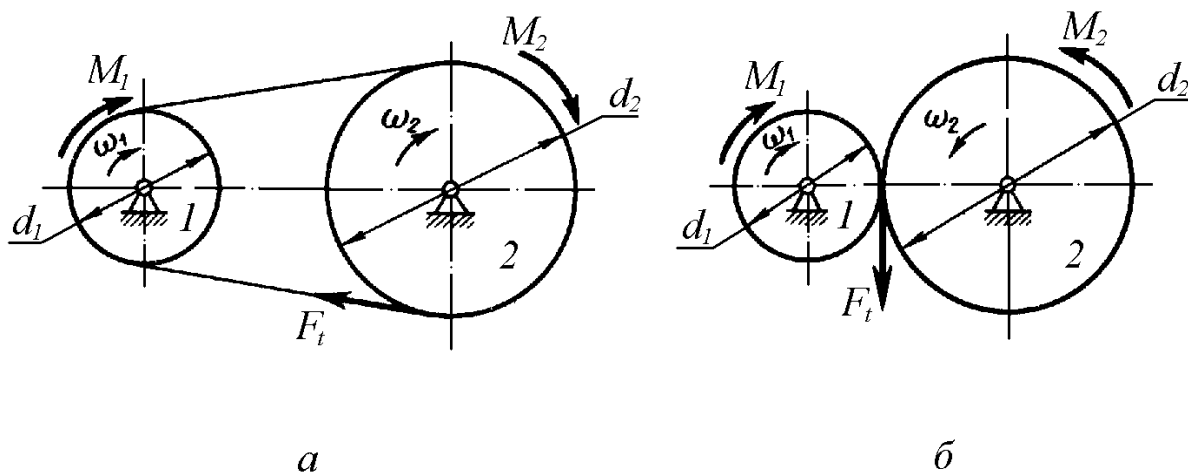


Рис. 4.20

На рис. 4.18 схематично зображені передача з гнучкою ланкою (а) і передача з безпосереднім контактом (б). Ведучі ланки і величини, які до них відносяться позначаються індексом 1, а ведені – індексом 2.

Визначимо параметри, якими характеризуються механічні передачі.

1. Потужність ведучої і веденої ланок: N_1 і N_2 , (Bm).

2. Кутова швидкість ведучої і веденої ланок: ω_1 і ω_2 , ($рад/с$)

або частота їх обертання n_1 і n_2 , ($об/хв$)

На підставі цих параметрів за формулами, відомими із теоретичної механіки, можна визначити інші параметри передачі:

3. Механічний коефіцієнт корисної дії (ККД) передачі:

$$\eta = \frac{N_2}{N_1}.$$

Механічний ККД характеризує втрати потужності на сили шкідливого опору в передачі (тертя рухомих частин, деформації робочих тіл і т. ін.). Для різних передач ККД знаходиться в межах 0,85...0,98 і залежить від їх конструктивних особливостей.

4. Коллові швидкості ведучої і веденої ланки:

$$v_1 = \omega_1 \frac{d_1}{2}, \quad v_2 = \omega_2 \frac{d_2}{2},$$

де d_1, d_2 – відповідно діаметри ведучої і веденої ланки (колеса, шківів, котка і т. ін.).

Колові швидкості обох ланок при відсутності проковзування за величиною повинні бути однаковими: $v_1 = v_2$.

7. Передаточне відношення (передаточне число).

На підставі того, що при відсутності проковзування $v_1 = v_2$, запишемо:

$$\omega_1 \frac{d_1}{2} = \omega_2 \frac{d_2}{2} \quad \text{або} \quad \frac{\pi n_1 d_1}{60} = \frac{\pi n_2 d_2}{60},$$

звідки

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{d_2}{d_1}.$$

Відношення кутової швидкості ведучої ланки до кутової швидкості веденої називається *передаточним відношенням*:

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{d_2}{d_1}. \quad (4.25)$$

Тобто, передаточне відношення характеризує відносну зміну кутової швидкості при передачі обертального руху від ведучої ланки 1 до веденої ланки 2. Якщо передаточне відношення менше одиниці, то передача понижуюча, а якщо більше одиниці – то підвищуюча.

Передачі закритого виконання, які призначені для зменшення кутової швидкості називаються *редукторами*, а для збільшення – *мультиплікаторами*.

Передаточним числом передачі називається відношення завжди більшої кутової швидкості до меншої незалежно від того, яка ланка ведуча, а яка ведена:

$$u = \frac{\omega_{max}}{\omega_{min}} \geq 1. \quad (4.26)$$

На відміну від передаточного відношення передаточне число не може бути меншим одиниці. Цілком зрозуміло, що для передач, які зменшують кутову швидкість ($\omega_1 \geq \omega_2$), передаточне число і передаточне відношення співпадають: $u = i_{12}$, а для передач, які збільшують кутову швидкість ці величини обернено пропорційні: $u = \frac{1}{i_{12}}$.

Слід зазначити, що традиційно розрахункові формули на міцність передач містять, як правило, передаточні числа, а при кінематичних

розрахунках, особливо багатоступінчастих передач з проміжними ланками, застосовують передаточні відношення.

5. Обертальні моменти на ведучій і веденій ланках відповідно дорівнюють:

$$M_1 = \frac{N_1}{\omega_1}, \quad M_2 = \frac{N_2}{\omega_2}.$$

Визначимо співвідношення між обертальними моментами M_1 і M_2 .

Так як $N_2 = \eta N_1$, то

$$M_2 \omega_2 = \eta M_1 \omega_1,$$

$$M_2 = \eta M_1 \frac{\omega_1}{\omega_2} = \eta M_1 i_{12}. \quad (4.27)$$

Якщо втрати в передачі невеликі, то ними нехтують і приймають

$$M_2 \approx M_1 i_{12}. \quad (4.28)$$

6. Колове зусилля F_t від обертального моменту M_1 на ведучій ланці:

$$F_t = \frac{2M_1}{d_1} = \frac{N_1}{v_1}.$$

Обертальний момент M_2 веденої ланки через рушійну колову силу F_t (при невеликих втратах на тертя) можна виразити як:

$$M_2 = \eta F_t \frac{d_2}{2} \approx F_t \frac{d_2}{2}. \quad (4.29)$$

Визначимо передаточне відношення, ККД і обертальний момент M_3 на вихідному валу для двохступінчастої передачі. Для цього послідовно з'єднаємо дві окремих передачі (рис. 4.21).

Передаточне відношення цієї передачі дорівнює:

$$i_{13} = \frac{\omega_1 \omega_2}{\omega_2 \omega_3} = \frac{\omega_1}{\omega_3} = i_{12} i_{23}.$$

Коефіцієнт корисної дії:

$$\eta_{13} = \frac{N_2 N_3}{N_1 N_2} = \frac{N_3}{N_1} = \eta_{12} \eta_{23}.$$

Обертальний момент M_3 на третьому валу:

$$M_3 = M_2 i_{23} \eta_{23} = M_1 i_{12} i_{23} \eta_{12} \eta_{23} = M_1 i_{13} \eta_{13}.$$

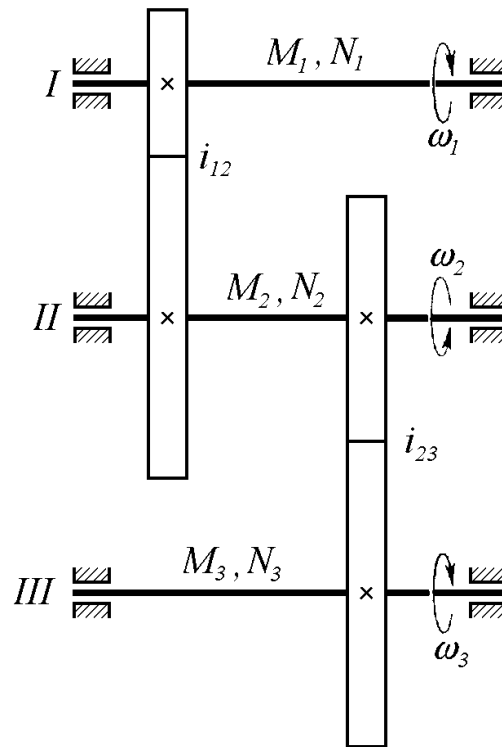


Рис. 4.21

В загальному випадку для багатоступінчастої передачі її передаточне відношення і ККД відповідно дорівнює:

$$i_{1n} = \frac{\omega_1}{\omega_n} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \frac{\omega_2}{\omega_3} \frac{\omega_3}{\omega_4} \dots \frac{\omega_{n-1}}{\omega_n} = i_{12} i_{23} i_{34} \dots i_{n-1 n}, \quad (4.30)$$

$$\eta_{1n} = \frac{N_n}{N_1} = \frac{N_2}{N_1} \frac{N_3}{N_2} \frac{N_4}{N_3} \dots \frac{N_n}{N_{n-1}} = \eta_{12} \eta_{23} \eta_{34} \dots \eta_{n-1 n}, \quad (4.31)$$

де i_{12} , i_{23} , i_{34} , $i_{n-1 n}$ – передаточні відношення між кожною парою коліс;

η_{12} , η_{23} , η_{34} , $\eta_{n-1 n}$ – коефіцієнти корисної дії кожної пари коліс у багатоступінчастій передачі.

Тобто, загальне передаточне відношення ряду послідовно з'єднаних передач дорівнює добутку їх передаточних відношень.

Загальний ККД багатоступінчастої послідовно з'єднаної передачі дорівнює добутку ККД передач, що входять до її складу.

Обертальний момент на n – му валу для такої передачі дорівнює:

$$M_n = M_1 i_{1n} \eta_{1n}, \quad (4.32)$$

Обертальний момент на n – валу багатоступінчастої послідовно з'єднаної передачі дорівнює добутку момента на ведучому валу,

загального передаточного числа і загального коефіцієнта корисної дії.

4.3.1. Фрикційні передачі

Передачі, в яких рух від одного вала до іншого передається силами тертя, що виникають між робочими поверхнями обертових котків, називають *фрикційними*.

Для утворення сили тертя, достатньої для передачі заданого моменту від ведучого вала до веденого, у фрикційних передачах застосовують натискні пристрої із використанням сили ваги, пружин, системи важелів тощо.

Залежно від призначення фрикційні передачі поділяють на передачі з умовно сталим передаточним відношенням між валами (передаточне відношення не може бути цілком сталим, оскільки завжди є відносне проковзування котків, яке змінюється залежно від навантаження передачі) з паралельними (рис. 4.22, а, б) і пересічними (рис. 4.22, в) геометричними осями, а також на передачі із змінним передаточним відношенням – варіатори (рис. 4.22, г).

Переваги фрикційних передач відносно інших:

- плавність і безшумність роботи;
- простота конструкції;
- можливість безступінчастого регулювання швидкості, включення і виключення передачі без зупинки машини;
- при перевантаженнях відбувається проковзування (буксування) котків, яке захищає механізм привода від руйнування.

Недоліки фрикційних передач:

- несталість передаточного відношення;
- обмеженість потужностей, що можуть ними передаватись – до 10...20 КВт (але силові фрикційні передачі із сталевими загартованими котками, які працюють у маслі, можуть передавати значно більшу потужність – до 200...300 КВт);
- великі навантаження на вали та їх опори (підшипники), що приводить до громіздкості конструкції і великих втрат енергії на подолання тертя в опорах;
- порівняно низький ККД ($\eta = 0,85...0,97$);
- підвищене і часто нерівномірне спрацювання активних (робочих) поверхонь котків.

Через інтенсивне спрацювання активних поверхонь котків та значне їх нагрівання колова швидкість силової передачі не повинна перевищувати 7...10 м/с (при $v \geq 7...10$ м/с котки звичайно працюють у маслі).

У машинобудуванні фрикційні силові передачі з умовно сталим передаточним відношенням використовують дуже рідко. Як приклад

Частина четверта

можна назвати фрикційні лебідки, які іноді застосовують у буровій техніці. Варіатори широко використовують у різних галузях промисловості. Їх часто застосовують у приводах транспортерів, зварювальних і ливарних машинах, металорізальних і інших верстатах.

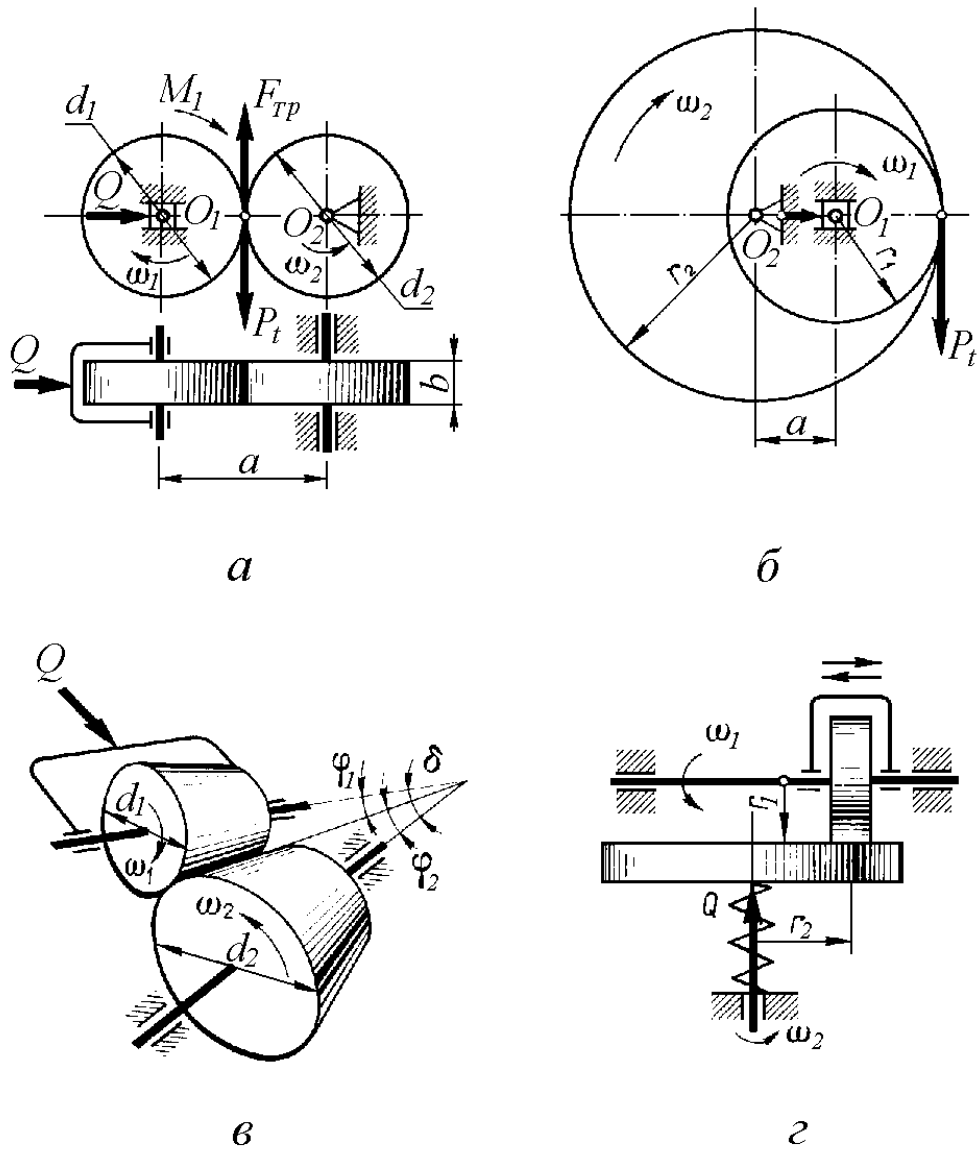


Рис. 4.22

До матеріалів, що застосовуються для виготовлення фрикційних котків, ставляться такі вимоги: зносостійкість; високий коефіцієнт тертя, що забезпечує при невеликих силах стиску на стикових активних поверхнях котків достатні сили тертя для передачі заданого моменту; високий модуль поздовжньої пружності для забезпечення достатньої жорсткості котків.

При передаванні порівняно великих моментів для обмеження габаритів передачі фрикційні котки виготовляють із загартованої

шарикопідшипникової сталі (сталь ШХ 15). Котки звичайно працюють у масляній ванні. Часто застосовують також котки з чавуну з підвищеною поверхневою твердістю. Чавун може працювати в парі із сталлю.

Для передавання невеликих моментів застосовують матеріали, що мають у парі з сталлю або чавуном підвищений коефіцієнт тертя: дерево, текстоліт, гетинакс, шкіру, гуму, прогумовану тканину, фібру. Перелічені неметалеві матеріали застосовують для робочої поверхні ведучого чавунного або сталюого котка. Ведений коток, як правило, виготовляють з чавуну або сталі без облицювального покриття.

Розглянемо кінематичні співвідношення і зусилля у фрикційній циліндричній передачі із гладкими котками і паралельним розташуванням осей валів (рис. 4.22, а).

Без проковзування (при однакових швидкостях точок контактів котків $v_1 = v_2$) передаточне число (передаточне відношення) передачі:

$$u = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2} \approx \frac{d_2}{d_1}.$$

Проковзування котків, яке в дійсності зменшує кутову швидкість ω_2 , враховується *коефіцієнтом ковзання*, який залежить від конструкції передачі, навантаження, матеріалу котків і приймається в межах $\varepsilon = 0,01 \dots 0,03$.

Тоді із урахуванням проковзування передаточне число дорівнює:

$$u = \frac{d_2}{d_1(1 - \varepsilon)}. \quad (4.33)$$

Для однієї пари котків силових передач приймають $u \leq 7$, для передач приладів – $u \leq 25$.

Нормальна робота (без буксування) фрикційної передачі буде забезпечена, якщо сила тертя F_{mp} , що виникає між котками при стисканні їх із силою Q , буде не меншою від колової сили F_t , необхідної для передавання моменту M_1 :

$$F_{mp} \geq F_t = \frac{2M_1}{d_1},$$

або

$$\frac{F_{Tp} d_1}{2} = \frac{f Q d_1}{2} \geq M_1, \quad (4.34)$$

де f — коефіцієнт тертя ковзання для матеріалів котків, який приймається $f = 0,04 \dots 0,05$ – для сталі і чавуну із змащуванням, $f = 0,15 \dots 0,20$ – без змащування, $f = 0,20 \dots 0,30$ – для неметалічного котка.

Застосувавши коефіцієнт запасу зчеплення k , отримаємо:

$$\frac{f Q d_1}{2} = k M_1.$$

Звідки необхідна сила притискання котків:

$$Q = \frac{2k M_1}{f d_1}. \quad (4.35)$$

Коефіцієнт запасу зчеплення або коефіцієнт навантаження k приймають у силових передачах $k = 1, 2 \dots 1, 5$, для передач приладів – $k = 3 \dots 5$.

Фрикційні передачі розраховують на контактну витривалість і зносостійкість.

При стисканні котків силами Q в місці їх стикання на поверхні виникає місцева деформація стиску, яка є причиною утворення контактних напружень σ_H .

Для матеріалів, що підпорядковані закону Гука, модуль найбільших контактних напружень визначається за формулою Герца — Беляєва:

$$\sigma_H = \sqrt{\frac{Q E_{36}}{2\pi(1-\nu^2) b \rho_{36}}}. \quad (4.36)$$

Для котків із сталі та інших матеріалів, коефіцієнт Пуассона яких $\nu \approx 0,3$, формулу (4.36) можна записати у вигляді:

$$\sigma_H = 0,418 \sqrt{\frac{Q E_{36}}{b \rho_{36}}}, \quad (4.37)$$

де $E_{36} = \frac{2E_1 E_2}{E_1 + E_2}$ — зведений модуль пружності котків, E_1, E_2 —

модулі пружності матеріалів взаємодіючих котків, $\rho_{36} = \frac{d_1 d_2}{2(d_1 + d_2)}$ —

зведений радіус кривизни котків, d_1 і d_2 — діаметри циліндричних котків.

При значних контактних напруженнях, які циклічно змінюються, на активних поверхнях котків виникають тріщини від втомленості, що приводить до поступового руйнування котків. Для запобігання цьому явищу, розрахункові контактні напруження не повинні перевищувати допустимих, тобто умова контактної витривалості повинна мати вигляд:

$$\sigma_H \leq [\sigma_H]$$

При *проектному* розрахунку циліндричної фрикційної передачі, котки якої виготовлені з матеріалів, що *підпорядковані закону Гука*, визначається міжосьова відстань a передачі із умови контактної

витривалості:

$$a \geq (u + 1)^3 \sqrt{\left(\frac{0,418}{[\sigma_H]}\right)^2 \frac{E_{36} k M_1}{f \psi_a u}}, \quad (4.38)$$

де u – передаточне число фрикційної передачі, $\psi_a = 0,2 \dots 0,4$ – коефіцієнт ширини котків, b – ширина котків.

Визначивши міжосьову відстань, діаметри і ширину котків можна розрахувати за формулами:

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{2a}{u + 1}, \\ d_2 &= d_1 u, \\ b &= \psi_a a. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Допустиме контактне напруження $[\sigma_H] = 1,2 \dots 1,5 \text{ НВ, МПа}$ – для сталевих котків без змащування, $[\sigma_H] = 2,4 \dots 2,8 \text{ НВ, МПа}$ – для сталевих котків із змащуванням, $[\sigma_H] \approx 1,5 \sigma_{B.32}$ – для чавунних котків, де НВ – число твердості за Брінеллем, $\sigma_{B.32}$ – границя міцності чавуну при згинанні.

Для котків з робочою поверхнею з дерева, шкіри, гуми та інших матеріалів, які не підпорядковані закону Гука, параметри передачі визначають із розрахунку на зносостійкість за допустимим навантаженням q , яке діє на одиницю довжини контактної лінії:

$$q = \frac{Q}{b} = \frac{2 k M_1}{b f d_1} \leq [q]. \quad (4.40)$$

Із урахуванням (6.39) отримуємо формулу для проектного розрахунку:

$$a \geq \sqrt{\frac{k M_1 (u + 1)}{[q] f \psi_a}}. \quad (4.41)$$

Допустиме навантаження $[q]$ орієнтовно приймається: $[q] = 40 \dots 80 \text{ Н/мм}$ – для пластмас, $[q] = 2,5 \dots 5,0 \text{ Н/мм}$ – для деревини, $[q] = 10 \dots 30 \text{ Н/мм}$ – для резини, $[q] = 15 \dots 25 \text{ Н/мм}$ – для шкіри.

4.3.2. Пасові передачі

Передача руху, що здійснюється гнучким зв'язком за допомогою тертя між пасом і шківом, називається *пасовою*. Пасова передача

Частина четверта

складається з двох або більшої кількості шківів і безкінечного паса, надітого на шківів з натягом (рис. 4.23).

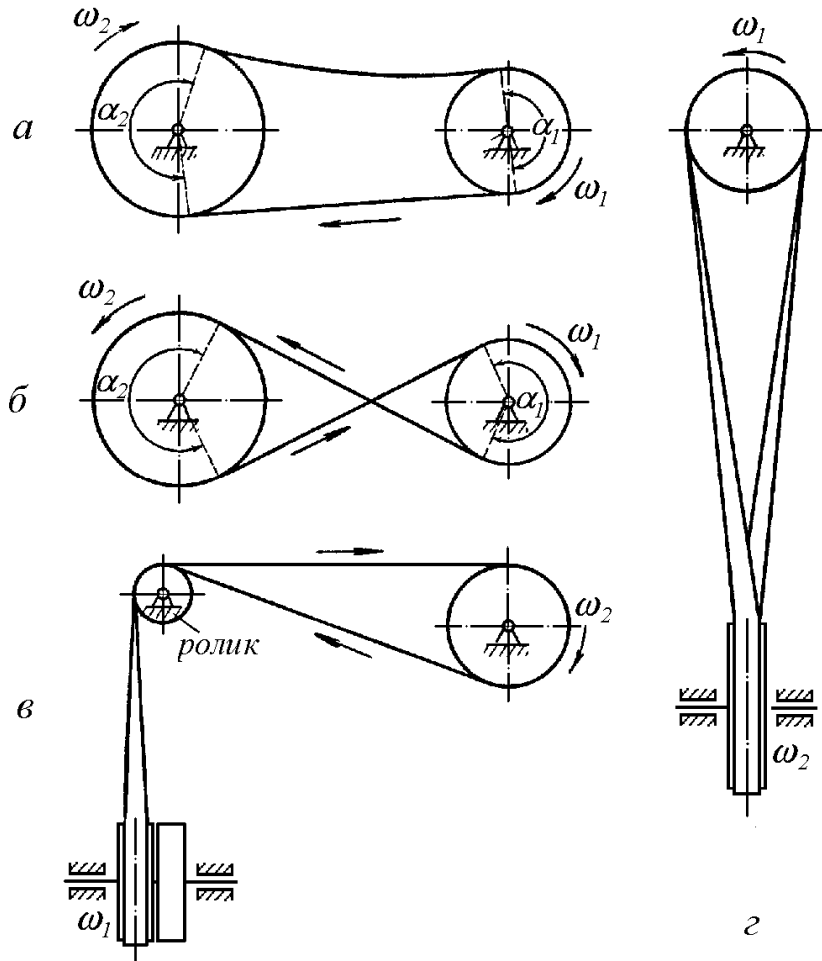


Рис. 4.23

Залежно від призначення передачі та взаємного розміщення осей валів пасові передачі класифікують на *відкриті* з паралельними осями валів і обертанням їхніх шківів в одному напрямі (рис. 4.23, а); *перехресні* з паралельними осями валів і обертанням шківів у протилежних напрямках (рис. 4.23, б); *кутові* з осями валів, які схрещуються або перехрещуються (рис. 4.23, в); *напівперехресні* з перехресними осями валів (рис. 4.23, г).

Залежно від форми поперечного перерізу паса розрізняють наступні види пасових передач: *плоскопасові* з прямокутним профілем поперечного перерізу паса (рис. 4.24, а); *клинопасові* з трапецієвидним профілем поперечного перерізу паса (рис. 4.24, б); *поліклинопасові*, що мають поздовжні клинові виступи – ребра на внутрішній поверхні паса, які

входять у кільцеві клинові канавки шківів(рис. 4.24, в); *круглопасові* з круглим профілем поперечного перерізу паса (рис. 4.24, г).

Крім названих видів пасових передач у машинобудуванні також широко застосовують передачі із *зубчастими пасами* (рис. 4.24, д), які забезпечують постійне значення передаточного відношення і добру тягову здатність.

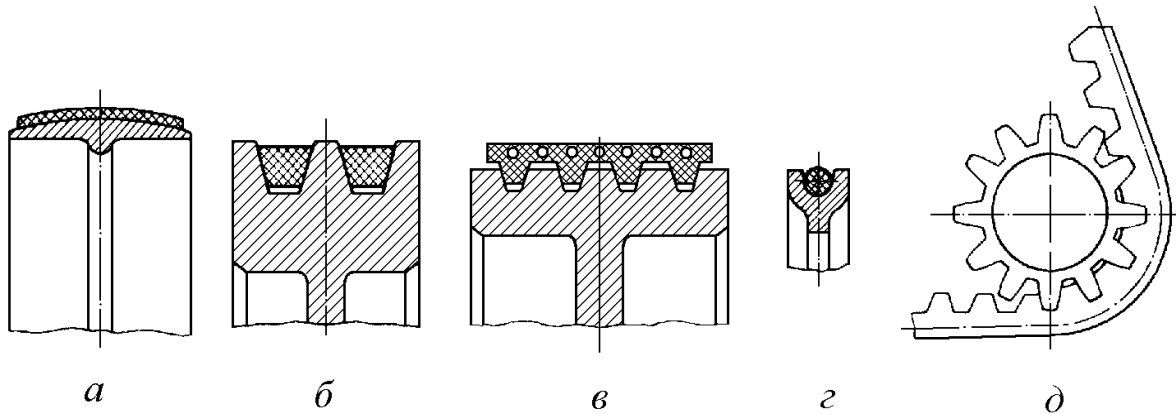


Рис. 4.24

Найбільшого поширення набули відкриті плоско – і клинопасові передачі (клинові, поліклинові зубчасті паси можна застосовувати тільки у відкритих передачах).

Переваги пасових передач:

- можливість передавання енергії на значні відстані: $a_{max} = 12...25$ м плоскими пасами і $a_{max} = 6,0$ м клиновими пасами;
- простота і низька вартість конструкції;
- плавність і безшумність ходу, здатність пом'якшувати удари завдяки еластичності паса і захищати механізм від руйнування при буксуванні і перевантаженні;
- можливість передавати потужності до 50 кВт (рідко до 300 кВт) при колій швидкості до 30 м/с ;
- простота обслуговування і догляду.

Недоліки пасових передач.

- нестале передаточне відношення, яке змінюється залежно від навантаження внаслідок пружного ковзання;
- відносно великі габарити передачі і невисока довговічність паса (особливо у швидкохідних передачах);
- витягування паса в процесі експлуатації передачі приводить до необхідності застосування додаткових натяжних пристроїв або до частого перешивання плоского паса;
- неможливість застосування у вибухонебезпечних приміщеннях

внаслідок електризації паса;

– великі навантаження на вали та їх опори (підшипники);

Незважаючи на ці недоліки, пасові передачі широко використовуються в промисловості і народному господарстві. У будь-якій галузі машинобудування і приладобудування можна зустріти плоскопасову або клинопасову передачу: приводи насосів, вентиляторів, транспортерів, приводи комбайнів та інших сільськогосподарських машин; приводи машин у текстильній, автомобільній, тракторній, хімічній, нафтовій та інших галузях промисловості.

Плоскопасові передачі рекомендується застосовувати при високих колових швидкостях, великих міжосьових відстанях та підвищених вимогах до плавності і еластичності роботи передачі.

Клинопасові і поліклинопасові передачі застосовують при порівняно великих передаточних відношеннях, вертикальному і похилому розташуванні паралельних осей валів, потребі у малогабаритності передачі і менших навантажень на опори валів, передаванні енергії на кілька валів.

Круглопасові передачі призначені в основному для передавання малих потужностей і тому менше поширені (швейні машини, радіоапаратура, прилади, настільні верстати, машини домашнього вжитку).

Тяговим елементом пасових передач є пас, від якості якого залежать довговічність і нормальна робота передачі.

До нього ставляться наступні вимоги: достатня міцність, надійність і довговічність, невисока вартість матеріалу паса, висока тягова здатність та еластичність, відносно високий коефіцієнт тертя між пасом і шківом.

Плоскі приводні паси мають прямокутний поперечний переріз і являють собою гнучку скінчену або рідше безконечну стрічку з прогумованої бавовняної тканини або шкіри.

Шкіряні паси мають високу тягову здатність, пружність і еластичність, але мають також високу вартість.

Зубчасті паси можуть передавати енергію при незмінному передаточному відношенні з високими коловими швидкостями. Ці паси виготовляють з армованого металевим тросом неопрену, значно рідше використовують пластмасу (поліуретан). Для використання в кінематичних механізмах верстатів їх каркас виготовляють із скловолокна або поліамідного шнура.

У *поліклинових пасах* несучий шар виготовляють у вигляді корд-шнура з хімічних волокон (віскоза, лавсан, скловолокно). Ці паси поєднують достоїнства плоских пасів — монолітність і гнучкість і клинових — підвищене зчеплення з шківом.

Роботоздатність і довговічність пасів залежать від якості тканини, кордної нитки, поліамідних смол і каучуку. Застосування синтетичних матеріалів і сталених тросів істотно збільшує міцність і довговічність

пасів. Нові *плівкові паси*, що виготовляються із пластмас на основі поліамідних смол, армованих кордом з капрону або лавсану, мають високу статичну міцність і міцність на втомленість.

Кордтканинні або кординурові клинові паси загального призначення стандартизовані і використовуються для вентиляторів автомобілів, тракторів і комбайнів.

Гумотканинні паси при постійних навантаженнях мають добру тягову здатність і пружність при відносно низькій вартості. Тому вони дуже поширені і працюють у широкому діапазоні потужностей (до 50 кВт) зі значними швидкостями (до 30 м/с).

Шківні пасових передач виготовляють із сталі при $v \geq 30$ м/с або із чавуну при менших швидкостях. У швидкохідних передачах рекомендується застосовувати шківні із алюмінієвих сплавів. Найпоширенішим матеріалом для виготовлення шківів являється сірий чавун СЧ 12-28 при $v \leq 25$ м/с, СЧ 15-32 і СЧ 21-40 при $v \leq 30$ м/с.

Розглянемо кінематичні і силові співвідношення у пасових передачах.

На рис. 4.25 представлена схема відкритої передачі, яка складається із двох шківів і плоского паса. Частина паса, що набігає на ведучій шків називається *ведучою* (в даному випадку – нижня), а та, що набігає на ведений шків – *веденою*.

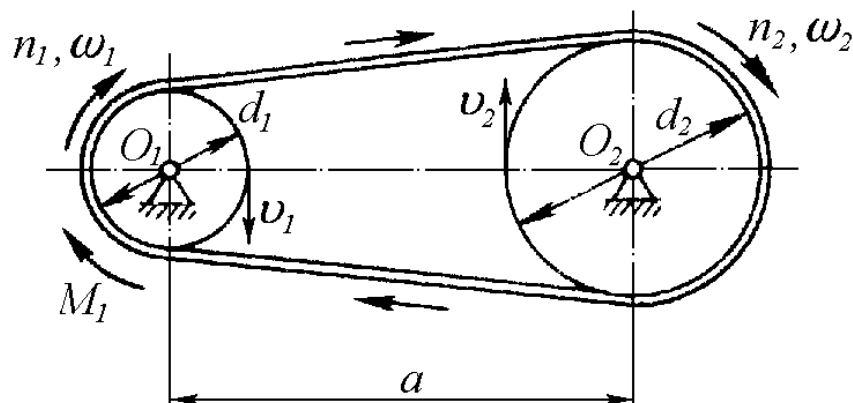


Рис. 4.25

Довжина паса (довжина гнучкої нерозтяжної нитки) визначається за формулою:

$$L \approx 2a + \frac{\pi}{2}(d_2 + d_1) + \frac{(d_2 - d_1)^2}{4a}. \quad (4.42)$$

Частина четверта

Чим коротшим буде пас, тим частіше він при даній швидкості додатково деформується при огинанні шківів і тим скоріше вийде з ладу внаслідок втомлюваності. Тому міжцентрову відстань вибирають із умови втомної довговічності паса за емпіричною формулою:

$$a \approx (0,1 \dots 0,7)v,$$

або

$$a \geq (1,5 \dots 2,0)(d_1 + d_2).$$

Для визначення передаточного числа треба знати колові швидкості ведучого і веденого шківів, які знаходимо через їх відповідні кутові швидкості ω_1 , ω_2 і діаметри d_1 , d_2 шківів:

$$v_1 = \omega_1 \frac{d_1}{2}$$

$$v_2 = \omega_2 \frac{d_2}{2}$$

Без пружного ковзання пасу по шківу при однакових лінійних швидкостях шківів ($v_1 = v_2$) передаточне число (передаточне відношення) передачі дорівнює:

$$u = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2} \approx \frac{d_2}{d_1}.$$

Пружне ковзання в дійсності зменшує кутову швидкість ω_2 , і лінійну швидкість v_2 веденого шківа. Це зменшення характеризується *коефіцієнтом пружного ковзання*, який залежить від конструкції передачі, навантаження, матеріалів і приймається в межах $\varepsilon = 0,01 \dots 0,03$.

Враховуючи ковзання, можна записати:

$$v_2 = (1 - \varepsilon)v_1$$

а передаточне число буде дорівнювати:

$$u = \frac{d_2}{d_1(1 - \varepsilon)}. \quad (4.43)$$

Найменший кут обхвату (кут обхвату малого шківа) визначається співвідношенням:

$$\alpha_1 = 180^\circ - 57^\circ \frac{d_2 - d_1}{a}.$$

Для плоскопасових передач рекомендовано $\alpha_1 \geq 150^\circ$, а для клинопасових $\alpha_1 \geq 120^\circ$. Якщо α_1 виявиться меншим від рекомендованих значень, треба збільшити міжосьову відстань або встановити натяжний ролик.

Необхідну силу тертя між пасом і шківками, яка забезпечує передачу

потрібного (заданого) моменту, досягають попереднім (початковим) натягом паси. При цьому у гілках непрацюючого паси виникає сила F_0 (рис. 4.26, а). Такі самі сили діють і при холостому ході передачі.

При роботі (навантаженні) пасової передачі, тобто при прикладенні до ведучого вала обертаючого моменту M_1 , а до веденого вала моменту опору M'_2 , який направлений протилежно напрямку ω_2 , сила натягу ведучої частини паси збільшується до значення F_1 , а веденої – зменшується до значення F_2 (рис. 4.26, б).

При цьому колова сила пасової передачі дорівнює:

$$F_t = \frac{2M_1}{d_1}$$

Із умови рівноваги (при $\omega_1 = const$) ведучого шківів:

$$\sum M_{O_1} = 0, \quad F_1 \frac{d_1}{2} - F_2 \frac{d_1}{2} - M_1 = 0,$$

звідки

$$F_1 - F_2 = \frac{2M_1}{d_1} = F_t. \quad (4.44)$$

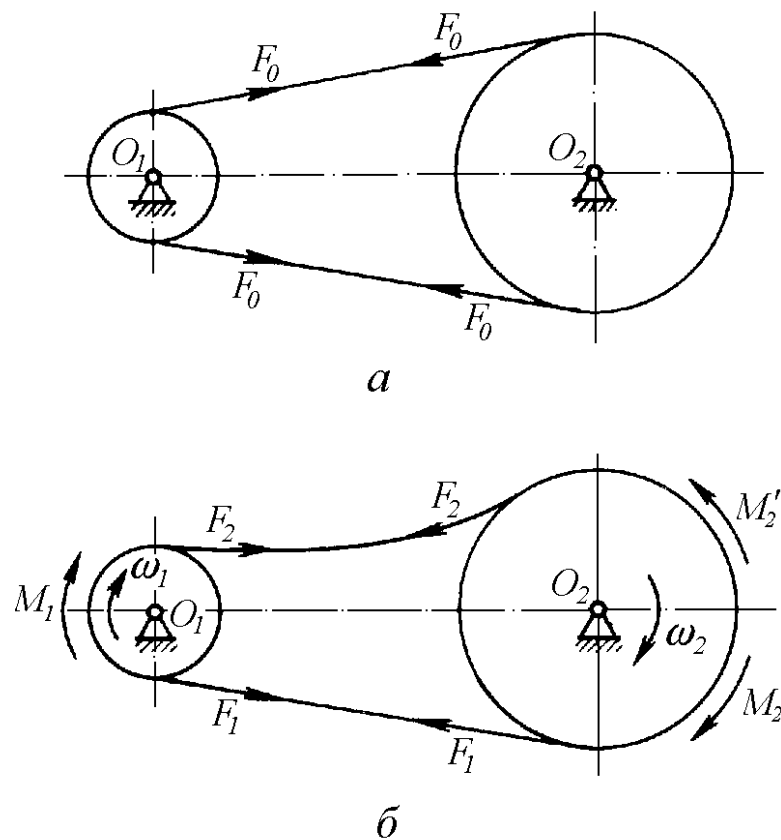


Рис. 4.26

Частина четверта

Таким чином, колова сила дорівнює різниці між силами натягу ведучої і веденої частин пасу.

Неоднаковий натяг пасу і є причиною його пружного ковзання, яке характерне для всіх пасових передач (крім зубчастих).

Визначимо напруження, що виникають у пасі під час роботи передачі. Ці напруження обумовлені згином пасу при набіганні на шків, дією відцентрових сил і сил розтягу.

Нормальні напруження від розтягу пасу:

$$\sigma_1 = \frac{F_1}{A} = \frac{F_1}{\delta b},$$

де F_1 – сила розтягу ведучої частини пасу;

$A = \delta b$ – площа поперечного перерізу пасу:

δ – товщина пасу;

b – ширина пасу.

Нормальні напруження згину в місці набігання пасу на менший шків (ведучій шків діаметром d_1):

$$\sigma_{зг} = \frac{E\delta}{d_1},$$

де E – модуль поздовжньої пружності пасу.

Нормальні напруження від дії відцентрових сил:

$$\sigma_v = q_0 v^2,$$

де q – густина пасу (маса 1 м пасу із площею перерізу 1 м^2).

Максимальні напруження виникають у місці набігання пасу на шків меншого діаметру і дорівнюють:

$$\sigma_{max} = \sigma_1 + \sigma_{зг} + \sigma_v = \frac{F_1}{\delta b} + \frac{E\delta}{d_1} + q_0 v^2. \quad (4.45)$$

Треба зауважити, що основним методом розрахунку пасових передач (крім зубчастих) є не розрахунок пасу на міцність по максимальним напруженням, а розрахунок передачі за тяговою здатністю, який забезпечує високий ККД передачі при достатній довговічності пасу. При цьому виходять із того, що пасова передача повинна передавати максимально можливе колове зусилля без буксування. На відміну від пружного ковзання, яке є нормальним і закономірним явищем пасових передач, буксування є наслідком перевантаження і вважається неприпустимим.

Але із збільшенням F_1 зростає і ковзання, яке може перерости в буксування, тому що збільшується різниця між силами натягу ведучої і

веденої частини пасу ($F_t = F_1 - F_2$). Провівши заміри F_t і ε , можна отримати їх графічну залежність і визначити критичну точку початку буксування.

При цьому на практиці зручніше користуватися залежністю між корисним напруженням $k_0 = \frac{F_t}{A}$ (тобто зусиллям F_t , що приходить на одиницю площі перерізу пасу) і коефіцієнтом ковзання ε , яка називається *кривою ковзання*. Такі криві, отримані експериментально для різних пасів, являються характеристикою їх тягової здатності і є критерієм працездатності пасових передач із тертям.

4.3.3. Ланцюгові передачі

Передача руху між двома або кількома паралельними валами, що здійснюється зачепленням за допомогою гнучкого нескінченного ланцюга і зірочок, називається *ланцюговою*.

У машинобудуванні і народному господарстві існують наступні види ланцюгів: *вантажні*, які застосовуються для підвішування, піднімання і опускання вантажу в різних підіймно – транспортних механізмах при швидкостях, які не перевищують $0,25...0,5$ м/с; *тягові*, які застосовуються для транспортування вантажів (транспортери, елеватори, ескалатори) при невеликих лінійних швидкостях – до $2...4$ м/с; *приводні*, що використовуються для передавання енергії в широкому діапазоні швидкостей з сталим передаточним відношенням.

Далі будемо розглядати тільки приводні ланцюги (рис. 4.27).

Приводні ланцюги — роликові, втулкові і зубчасті – застосовують у велосипедах, мотоциклах, сільськогосподарських машинах, верстатах, транспортерах, комбайнах, приводах допоміжного механізму прокатного устаткування, приводах підіймно – транспортних машин і т. ін.

Переваги ланцюгових передач:

- можливість передавати потужності на значні відстані ($a \leq 8$ м) при передаточному відношенні $i \leq 6$;
- порівняно невеликі (менші, ніж у фрикційних і пасових передачах) навантаження на вали та їх опори;
- великий діапазон потужностей: від часток кіловата до сотень кіловат (відомі передачі потужністю до 4000 кВт) і великий діапазон швидкостей: від часток м/с до $30...35$ м/с; роликові втулкові ланцюги допускають швидкість до $10... 15$ м/с;
- можливість передавати рух одним ланцюгом кільком валам із однаковим або протилежним напрямом обертання;
- високий ККД: $\eta = 0,94...0,98$ (при передаванні повної потужності, старанному догляді і доброму мащенні).

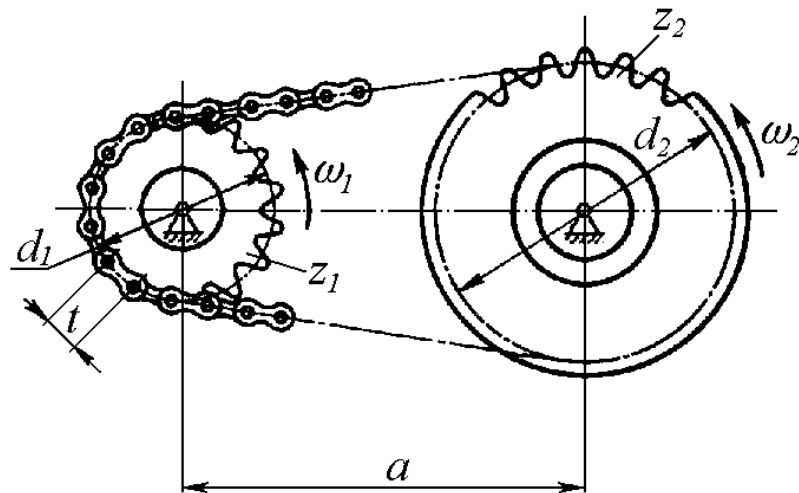


Рис. 4.27

Недоліки ланцюгових передач:

- ланцюгові передачі дорожчі, потребують вищої точності встановлення валів, ніж пасові передачі, і складнішого догляду – мащення, регулювання;
- складність мащення шарнірів збільшує їх спрацювання, внаслідок чого ланцюг витягується і потребує встановлення натяжних пристроїв, строк служби передачі скорочується;
- основною причиною спрацювання шарнірів (крім недостатнього мащення), шуму, додаткових динамічних навантажень і нерівномірності обертання веденої системи є те, що ланцюг складається з окремих ланок, розташованих на зірочках не по дугах кіл, а по ламаних лініях.

Ланцюгові передачі складаються із ланцюга і зірочок.

Роликові ланцюги (рис. 4.28, а) виготовляють одно – і багаторядними. Звичайні однорядні роликові ланцюги мають по два ряди зовнішніх і внутрішніх пластин. На вісь, що зароблена у зовнішні пластини, надіта втулка, яка запресована у внутрішні пластини. На втулку насаджений ролик, який вільно обертається і перекочується по зубцям зірочки.

Втулкові ланцюги (рис. 6428, б) відрізняються від розглянутих тим, що в них немає роликів, тому зносостійкість їх нижча.

Втулкові і роликові ланцюги малих кроків і високої якості виготовлення (ланцюги для нафтової промисловості) при великій кількості зубів зірочок і доброму мащенні допускають швидкість 15...30 м/с. Втулкові ланцюги також установлюються у двигунах автомобілів і працюють при швидкості до 20 м/с.

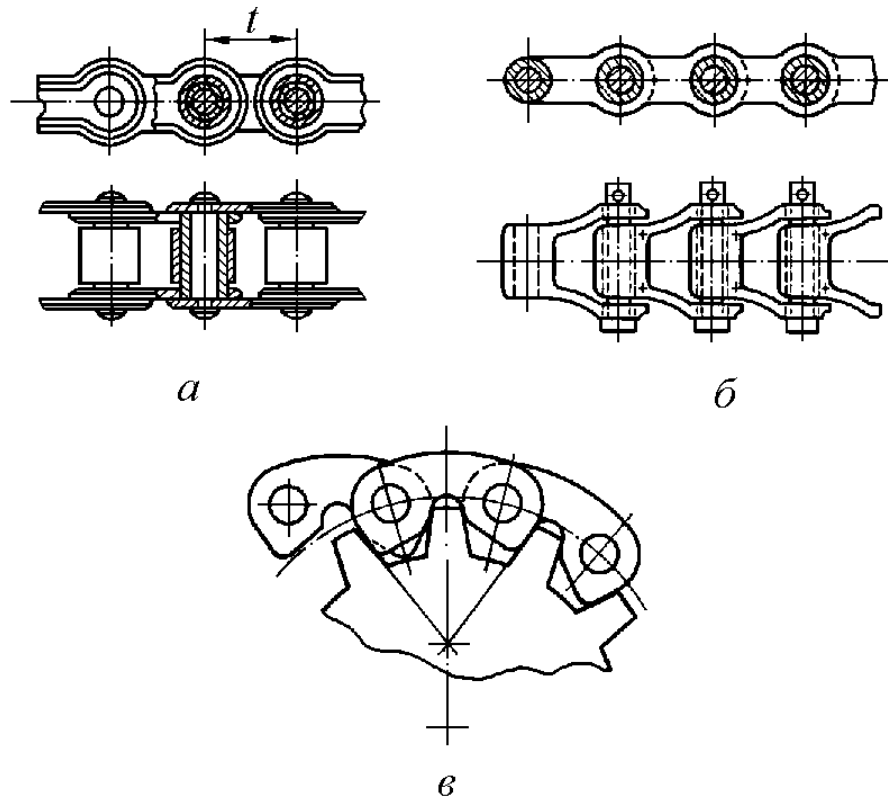


Рис. 4.28

Зубчасті ланцюги (рис. 4.28, в) застосовують при значних швидкостях – до 25...35 м/с, вони працюють плавно із меншим шумом, менше витягуються, однак важкі і дорогі. Ланцюг складається із набору шарнірно з'єднаних зубчастих пластин особливого профілю, який відповідає профілю зубів зірочки.

Для роликівих і втулкових ланцюгів виготовляють зірочки із робочим профілем зуба, окресленого дугою відповідного кола (рис. 4.27). Для зубчастих ланцюгів профілі зубів більш складні і мають прямолінійну робочу ділянку (рис. 4.28, в).

Конструктивні розміри і форма зірочок залежать від параметрів вибраного ланцюга та передаточного відношення, яке лімітує кількість зубів меншої зірочки. Мінімальне число зубів для роликівих і втулкових ланцюгів $z_{min} = 13$, для зубчастих ланцюгів – $z_{min} = 17$. Правильний вибір профілю і числа зубів меншої (ведучої) зірочки впливає на працездатність і надійність ланцюгової передачі.

Для виготовлення ланцюгових передач використовують вуглецеві (сталь 10, 15, 40, 45, 50) і леговані (сталь 15Х, 15ХА, 12ХНЗА, 20Х, 40Х, 40ХН) термооброблені сталі.

Передаточне число (передаточне відношення) ланцюгової передачі

$$u = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{z_2}{z_1},$$

Частина четверта

де $\omega_1, \omega_2, n_1, n_2$ – кутові швидкості і частота обертання відповідно ведучого і веденого вала;

z_1, z_2 – число зубів ведучої і веденої зірочок.

Треба зауважити, що передаточне число (передаточне відношення) ланцюгової передачі за один оберт ведучої зірочки не лишається сталою величиною, тобто відбувається коливання кутової швидкості веденої ланки. Сталим можна рахувати тільки середнє значення u .

Основним геометричним параметром ланцюга є його крок t – відстань між однойменними точками двох сусідніх ланок ланцюга (рис. 4.28, а). Номінальне значення кроку ланцюгової передачі визначається із розрахунку на зносостійкість по величині тиску в шарнірах ланцюга.

Формула проектного розрахунку кроку t , мм має вигляд:
для втулкових і роликкових ланцюгів

$$t = 2,83 \sqrt{\frac{M_1 k}{z_1 [p] m}},$$

для зубчастих ланцюгів

$$t = 3,33 \sqrt{\frac{M_1 k}{z_1 [p] \psi_t}},$$

де M_1 – обертальний момент на ведучому валу, $H \cdot \text{мм}$;

k – коефіцієнт навантаження;

$[p]$ – допустимий тиск в шарнірах, МПа ;

m – число рядів ланцюга;

$\psi_t = 2 \dots 8$ – коефіцієнт ширини b ланцюга ($\psi_t = b/t$).

Коефіцієнт навантаження k дорівнює добутку трьох коефіцієнтів:

$$k = k_1 k_2 k_3,$$

де $k_1 = 1 \dots 1,4$, $k_2 = 1 \dots 1,5$, $k_3 = 1 \dots 1,45$ – межі значень коефіцієнтів, які відповідно враховують характер навантаження, засоби мащення і середню тривалість роботи ланцюга за робочий день:

Отримане значення кроку округляється до найближчого стандартного (бажано меншого) значення.

Міжосьова відстань вибирається в межах $a = (30 \dots 50)t$ при максимальному значенні $a_{\max} = 80t$.

Кількість ланок ланцюга визначається за формулою:

$$L_t = 2 \frac{a}{t} + \frac{z_1 + z_2}{2} + \left(\frac{z_2 - z_1}{2\pi} \right)^2 \frac{t}{a}, \quad (4.46)$$

де $L = t L_t$ – довжина ланцюга.

Лінійна (колова швидкість, m/s) ланцюга визначається як:

$$v = \frac{t z_1 n_1}{60 \cdot 1000}.$$

Вибрані ланцюги перевіряють на зносостійкість по допустимому тиску у шарнірах $[p]$:

$$p = \frac{F_t k}{A} \leq [p], \quad (4.47)$$

де p – фактичний тиск у шарнірах ланцюга, $F_t = \frac{N_1}{v}$ – колове зусилля, що передається ланцюгом, N_1 – потужність передачі, k – коефіцієнт навантаження, A – площа проекції опорної поверхні шарніра ($A = db$ – для втулкових і роликкових ланцюгів, $A = 0,76 db$ – для зубчастих ланцюгів, d – діаметр осі шарніра, b – ширина ланцюга).

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Що називають механічною передачею?
2. Дайте основну класифікацію передач.
3. Якими основними параметрами характеризується передачі?
4. Чим передаточне число відрізняється від передаточного відношення?
5. Напишіть формулу визначення передаточного числа і ККД багатоступінчастої передачі із послідовно з'єднаними ланками.
6. Дайте визначення фрикційної передачі.
7. Які основні переваги і недоліки фрикційних передач?
8. Напишіть формулу Герца – Беляєва і поясніть її призначення..
9. Дайте визначення пасової передачі і основну класифікацію.
10. Які переваги і недоліки пасових передач?
11. Назвіть основні типи пасових передач за формою поперечного перерізу паса і галузь їх застосування.
12. Поясніть причину виникнення пружного ковзання в пасовій передачі.
13. Як визначити максимальні нормальні напруження в поперечному перерізі паса навантаженої пасової передачі?
14. Що таке тягова здатність пасової передачі?
15. Дайте визначення ланцюгової передачі і основну класифікацію.
16. Які основні переваги і недоліки ланцюгових передач?
17. Назвіть основні типи ланцюгів і галузь їх застосування.
18. Як розраховують ланцюгові передачі?

4.4. Зубчасті передачі. Загальні відомості

Механізм, призначений для передавання (перетворення) обертального руху за допомогою пари зубчастих коліс (колеса і рейки), що перебувають у зачепленні, називають *зубчастою передачею*. Зубчасті передачі можуть бути із зовнішнім і внутрішнім зачепленням (рис. 4.29, г). Найбільше розповсюджені передачі із зовнішнім зачепленням.

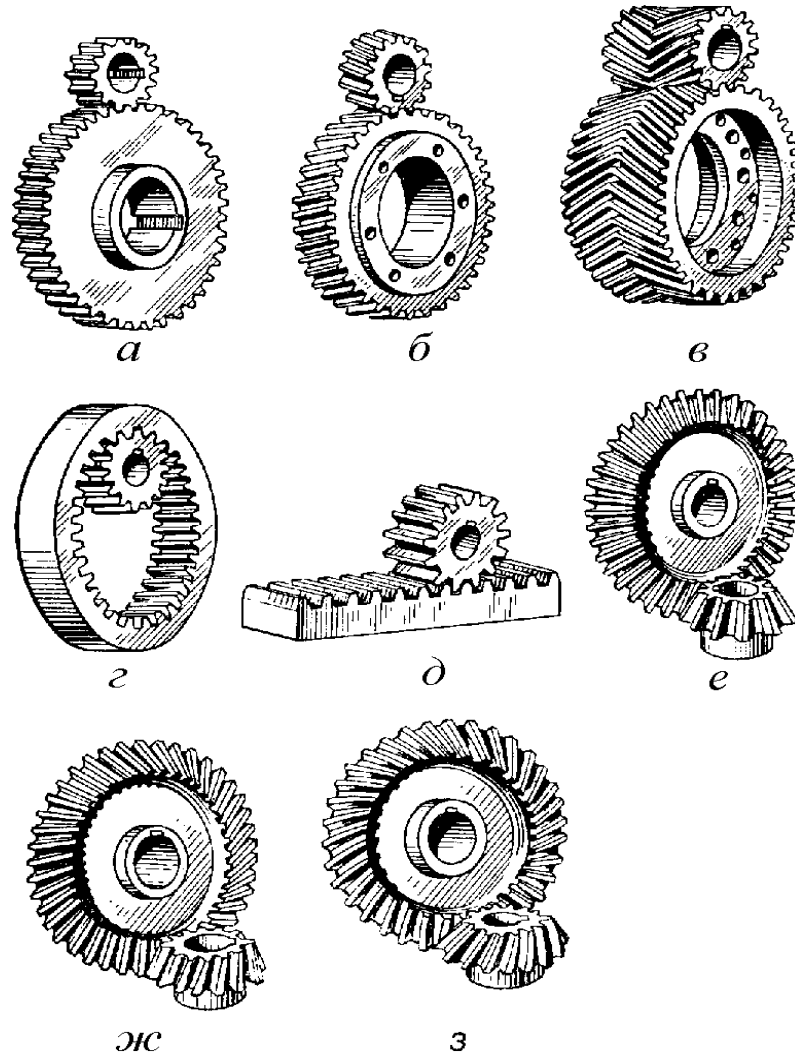


Рис. 6.29

Переваги зубчастих передач:

- широкий діапазон робочих потужностей (до 50 000 кВт і більше) і колових швидкостей (до 30... 150 м/с);
- стала величина передаточного відношення (за винятком спеціальних передач із некруглими зубчастими колесами);
- компактність, надійність і висока втомна довговічність передачі;

- високий ККД ($\eta = 0,96...0,99$) при високій точності виготовлення та монтажу, низькій шорсткості робочої поверхні зубів і рідкому мастилі;
- простота обслуговування та догляду;
- порівняно невеликі сили тиску на вали та їх опори.

Недоліки зубчастих передач:

- обмеженість передаточного відношення (для однієї пари зубчастих коліс $i_{max} = 12,5$, а практично $i \leq 7$, лише у відкритих тихохідних передачах невеликої потужності $i \leq 20$);
- є джерелом вібрації і шуму, особливо при низькій якості виготовлення і монтажу та значних швидкостях;
- при великих перевантаженнях можливе зруйнування, тому що пробуксовування виключено.
- відносна складність виготовлення високоточних зубчастих коліс.

Зубчасті передачі є найбільш поширеними типами механічних передач і широко застосовуються у будь-якій галузі машинобудування, приладобудування, у транспорті і зв'язку. Їх використовують в автомобілях, тракторах, літаках, верстатах, електрорічильниках, годинниках, вимірювальних приладах і т. д.

Зубчасті передачі класифікують:

а) за конструктивним оформленням: *відкриті*, що не мають захисного кожуха і масляної ванни; *напіввідкриті*, які мають захисний кожух; *закриті*, що мають картер і кришку, яка добре ізолює передачу від зовнішнього середовища (редуктори, коробки передач тощо);

б) за коловою швидкістю: *тихохідні* ($v_{max} = 3...4 \text{ м/с}$); *середньошвидкісні* ($4 \text{ м/с} \leq v \leq 15 \text{ м/с}$); *високошвидкісні* ($v \geq 15 \text{ м/с}$);

в) за взаємним розташуванням осей валів: із паралельними осями валів — *циліндричні* (рис. 4.29, а, б, в, г); із осями валів, що перетинаються, — *конічні* (рис. 4.29, е, ж); із осями валів, що перехрещуються, — *гвинтові, гіпоїдні* (рис. 4.29, з).

г) за розташуванням зубів на твірній поверхні колеса: *прямозубі* (рис. 4.29, а, г, е), *косозубі* (рис. 4.29, б, ж), *шевронні* (рис. 4.29, в), *із криволінійними зубами* (рис. 4.29, з).

є) за формою профілю зуба: *евольвентні*, із зачепленням *Новикова, циклоїдальні*.

Для перетворення обертального руху у поступальний або навпаки застосовується рейкова передача (рис. 4.29, д), яка є особливим випадком циліндричної зубчастої передачі. Рейка розглядається як колесо, радіус якого дорівнює нескінченності.

Елементи зачеплення двох евольвентних зубчастих коліс.

Найбільшого поширення у сучасному машинобудуванні набули зубчасті колеса евольвентного профілю.

4.4.1. Елементи теорії зубчастого зачеплення

При обертанні зубчастих коліс неперервне зачеплення із сталим передаточним відношенням можливе тільки в тому разі, якщо профіль зуба окреслений кривою, що підлягає основній теоремі зачеплення.

Для збереження сталого передаточного числа необхідно і достатньо, щоб спільна нормаль $N-N$ до спряжених профілів зубів у точці їх дотику k завжди перетинала лінію центрів O_1O_2 (міжосьову відстань a_ω) у одній і тій же точці P , яку називають полюсом зачеплення. Ця точка ділить лінію центрів у співвідношенні, яке дорівнює передаточному числу (рис. 4.30).

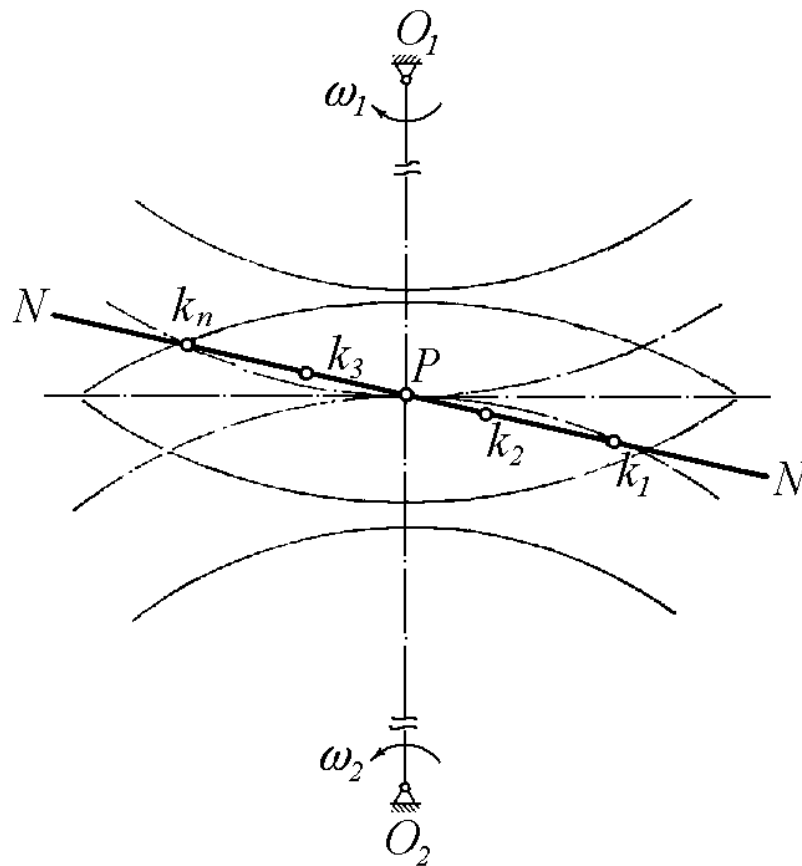


Рис. 4.30

Основному закону зачеплення відповідає багато кривих, але практично (крім окремих випадків) зуби коліс профілюють по евольвенті.

Евольвентою, або розгорткою, кола називають криву $A_0 A_1 A_2 \dots A_n$ (рис. 4.31), яку описує люба точка A прямої NN , що перекочується без ковзання по нерухомому колу діаметра d_b в площині кола. Це коло називають основним колом евольвенти $A_0 A_1 A_2 \dots A_n$.

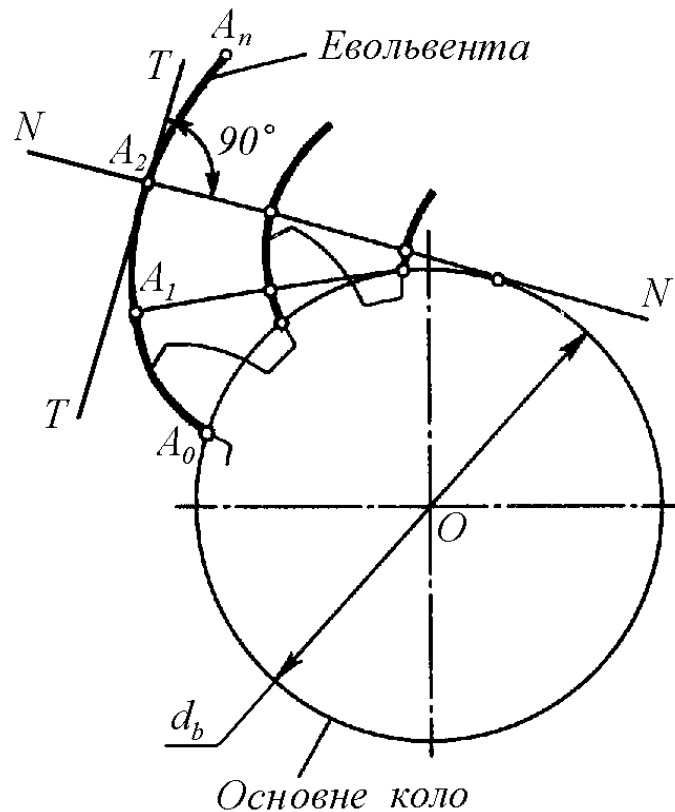


Рис. 4.31

Профілювання бічної поверхні зубів по евольвенті вперше запропонував знаменитий математик Ейлер у 1754 р. При цьому профіль зуба окреслює дві евольвенти – права і ліва, які можна отримати перекочуванням прямої NN по одному основному колу у протилежних напрямках (рис. 4.31).

Очевидно, що із збільшенням діаметра d_b основного кола радіуси кривизни евольвенти будуть збільшуватись і при $d_b \rightarrow \infty$ евольвента перетвориться на пряму. Для рейки із евольвентним зачепленням профіль зуба має бути прямим. Тому зуби, профіль яких окреслений евольвентою, відносно легко, просто і точно можна нарізати на зуборізних верстатах інструментальною рейкою із прямолінійними ріжучими кромками.

На рис. 4.32 показана послідовність контакту точок профілю бічних поверхонь пари спряжених зубів в процесі їх зачеплення. Від початку зачеплення (точка k_1) до його кінця (точка k_n) всі точки контакту знаходяться на загальній нормалі NN до профілю бічних поверхонь пари зубів. При цьому положення на лінії центрів O_1O_2 полюса зачеплення P , через який проходить пряма NN , лишається незмінним. Тобто, умови

Частина четверта

основної теореми зачеплення виконуються.

Нормаль NN до спряжених профілів зубів, яка є геометричним місцем їх точок контакту, називають *лінією зачеплення*. Лінія зачеплення одночасно є *лінією тиску* спряжених зубів в процесі передачі руху від одного колеса друге.

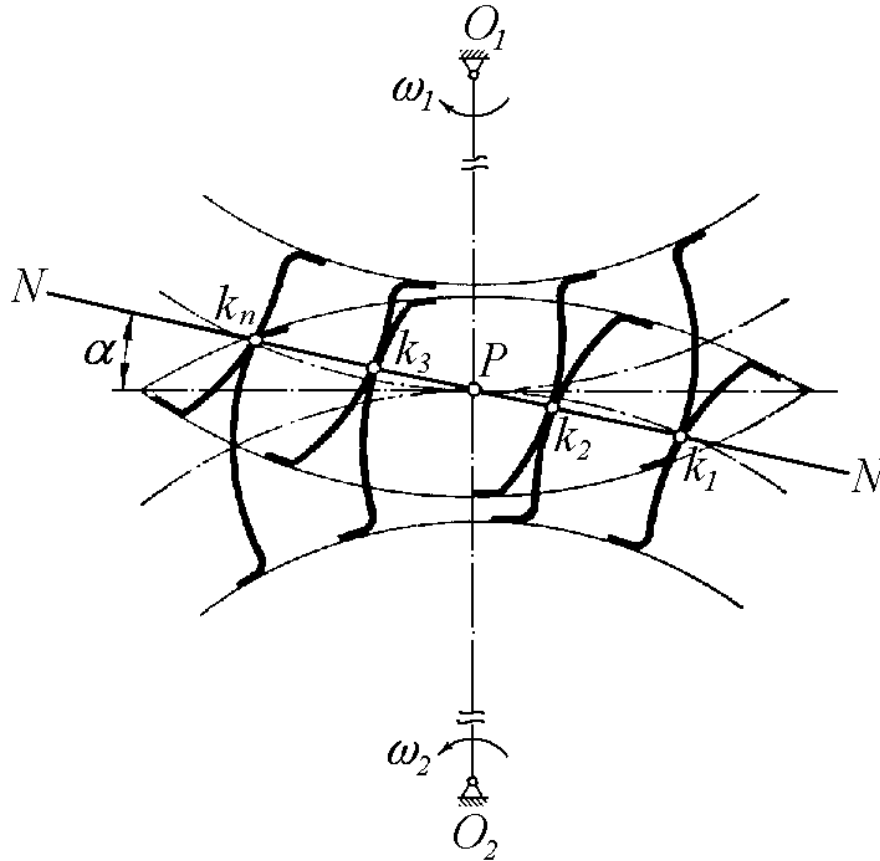


Рис. 4.32

Лінія зачеплення утворює із перпендикуляром до лінії центрів O_1O_2 кут α , який називається *кутом зачеплення*. Значення кута зачеплення стандартизовано і складає $\alpha = 20^\circ$.

Евольвентна система зачеплення забезпечує високу міцність зубів, простоту і зручність вимірювання параметрів зачеплення та взаємозамінність зубчастих коліс при різних передаточних відношеннях.

Зубчасте колесо із меншою кількістю зубів називають шестернею, а з більшим – колесом.

Треба відмітити, що при виготовленні шестерні із мінімальною кількістю зубів, може відбутись подрізання зубів – врізання головки зуба нарізної рейки у ніжку зуба шестерні (рис. 4.33). При цьому значно знижується міцність шестерні. Тому при проектуванні зубчастих передач кількість зубів шестерні приймають не менше ніж $z_{min} = 17$.

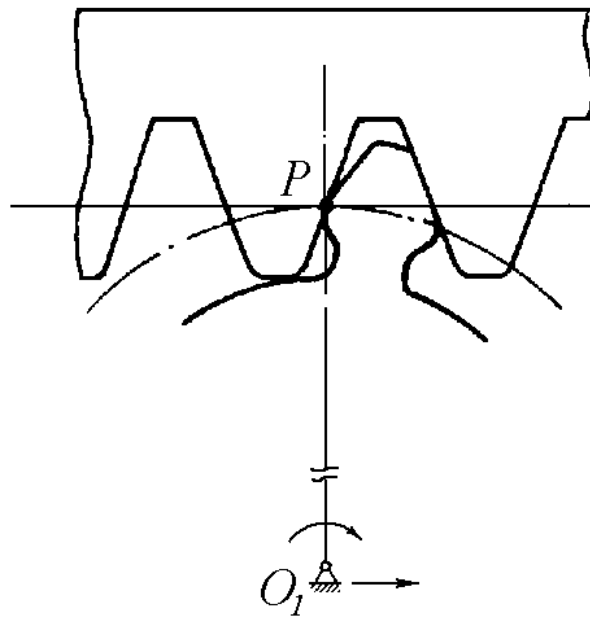


Рис. 4.33

4.4.2. Геометрія стандартного евольвентного зубчастого зачеплення

Кола ведучого і веденого зубчастих коліс, що стикаються одне з одним у полюсі зачеплення, мають спільні із зубчастими колесами центри і перекочуються одне по одному без ковзання, називають *початковими* (рис. 4.34). Їх діаметри позначають $d_{\omega 1}$ і $d_{\omega 2}$.

При зміні міжосьової відстані $a_{\omega} = O_1O_2$ пари зубчастих коліс змінюється і положення полюса зачеплення P на лінії центрів O_1O_2 , а отже і розмір початкових діаметрів зубчастих коліс. Тобто пара спряжених зубчастих коліс може мати *незліченну кількість початкових кіл*. Таким чином, поняття «початкові кола» стосується тільки пари спряжених зубчастих коліс, а для окремо взятого зубчастого колеса не можна говорити про початкове коло.

Якщо замінити одне з коліс зубчастою рейкою, то для кожного зубчастого колеса знайдеться тільки одне коло, яке котиться по початковій прямій рейки без ковзання. Це коло називають *ділильним*.

Далі розглядаються тільки такі зубчасті передачі, в яких початкові і ділильні кола зубчастих коліс збігаються.

Оскільки у кожного зубчастого колеса є тільки одне ділильне коло, то воно покладене в основу визначення геометричних параметрів коліс

Частина четверта

зубчастої передачі Діаметр ділильного кола позначають d_1 – для ведучого колеса і d_2 – для веденого (рис. 4.34).

Відстань між однойменними профілями сусідніх зубів, яка виміряна по дузі ділильного кола, називається *кововим кроком* p_t (або p).

Для спряженої пари зубчастих коліс крок p шестірні і колеса однаковий і дорівнює крокові виробляючої (інструментальної) рейки.

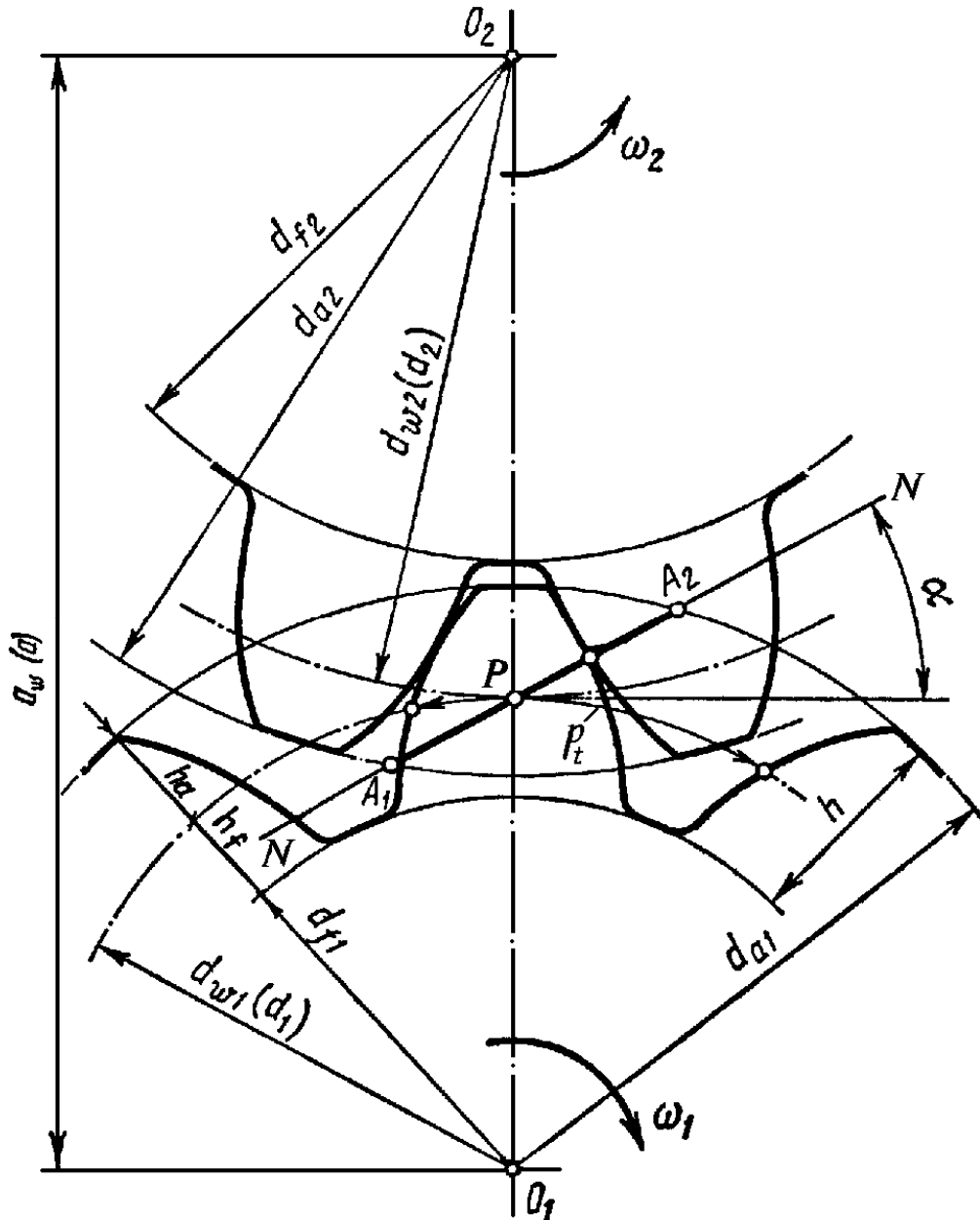


Рис. 4.34

Із визначення кроку витікає, що довжина ділильного кола дорівнює

$$L_d = \pi d = p z,$$

де z – число зубів колеса.

Звідки діаметр ділительного кола можна визначити як:

$$d = \frac{p}{\pi} z = m_t z, \quad (4.47)$$

де $m_t = \frac{p}{\pi}$ – коловий модуль зубів (для прямозубих коліс $m_t = m$).

Коловий модуль зубів m є основним параметром зубчастої передачі, – це частина ділительного кола, що припадає на один зуб колеса. Значення модуля зубів стандартизовані.

Коло, яке обмежує висоту зубів, називають *колом вершин (виступів) зубчастого колеса* d_a . Коло, яке обмежує западини зубів, називають *колом западин* зубчастого колеса d_f .

Частина профілю зуба, яка обмежена ділительним колом і колом виступів, називається *головкою зуба*. Згідно стандарту висота головки зуба h_a дорівнює коловому модулю:

$$h_a = m. \quad (4.48)$$

Частина профілю зуба, обмежена ділительним колом і колом западин, називається *ніжкою зуба*. Висота ніжки зуба h_f приймається:

$$h_f = 1,25m. \quad (4.49)$$

Тоді висота зуба визначається як:

$$h = h_a + h_f = m + 1,25m = 2,25m. \quad (4.50)$$

Різниця у висоті ніжки зуба одного колеса і висоті головки другого необхідна для утворення радіального зазору

$$c = h_f - h_a = 0,25m. \quad (4.51)$$

Діаметр кола виступів і западин відповідно дорівнює

$$d_a = d + 2h_a = zm + 2m = m(z + 2). \quad (4.52)$$

$$d_f = d - 2h_f = zm - 2,5m = m(z - 2,5). \quad (4.53)$$

Міжцентрова (міжосьова) відстань двох зубчатих коліс у зачепленні дорівнює:

$$a_w = \frac{d_1}{2} + \frac{d_2}{2} = \frac{z_1 m}{2} + \frac{z_2 m}{2} = \frac{m(z_1 + z_2)}{2}. \quad (4.54)$$

Відрізок A_1A_2 лінії зачеплення, який обмежений колами виступів

Частина четверта

шестірні і колеса, називається активною частиною лінії зачеплення або *довжиною зачеплення*. Довжина зачеплення визначає початок і кінець зачеплення пари спряжених зубів.

Шлях, що його проходить точка профілю зуба по ділильному (початковому) колу за час його фактичного зачеплення, називається *дугою зачеплення* S . Для неперервної нормальної роботи зубчастої передачі потрібно, щоб довжина зачеплення була більшою від колового кроку p .

Відношення дуги зачеплення S до колового кроку p називається *коефіцієнтом перекриття*

$$\varepsilon = \frac{S}{p}. \quad (4.55)$$

Коефіцієнт перекриття характеризує середню кількість пар зубів, що одночасно перебуває у зачепленні. При $\varepsilon \leq 1$ передача нормально працювати не буде, оскільки при виході із зачеплення однієї пари зубів інша пара не потрапляє на лінію зачеплення і неперервність обертання зубчастих коліс порушується. Якщо $\varepsilon > 1$, то до виходу із зачеплення однієї пари зубів до лінії зачеплення підходить інша пара зубів — це і забезпечує неперервність зачеплення і плавність ходу передачі.

Для циліндричних зубчастих передач приймають $\varepsilon \geq 1,2$.

4.4.3. Виготовлення зубчастих коліс і види їх руйнування

Зуби коліс нарізують на фрезерних або спеціальних зуборізних верстатах. Є два основні способи нарізування зубів: *копіювання*, що здійснюється на фрезерних верстатах за допомогою дискової або пальцевої фрез, ріжучі кромки яких мають профіль, що відповідає профілеві западини зуба; *обкатка*, яка здійснюється на зубофрезерних або зубостругальних верстатах за допомогою відповідного різального інструменту – черв'ячної фрези, довбача, інструментальної рейки – гребінки, які перебувають у неперервному зачепленні із заготовкою на всій стадії нарізування зубів. Спосіб обкатки забезпечує високу продуктивність і достатню точність виготовлення зубчастих коліс.

Шевронні колеса виготовляти складніше, і вони дорожчі від прямозубих і косозубих.

Зубчасті колеса виготовляють з вуглецевої сталі (Ст5, Ст6, сталь 35; 45; 50; 50Г), легованої сталі (12ХН3; 15Х; 20Х; 35Х), сталюого литва (35Л; 45Л; 55Л), чавуну (СЧ 15-32; СЧ 18-36; СЧ 21-40), неметалевих матеріалів (пластик, капрон). Чавунні зубчасті колеса застосовують у тихохідних передачах. Зубчасті колеса з неметалевих матеріалів працюють у парі з металевими і їх застосовують для зниження шуму швидкохідних передач невеликих потужностей.

До матеріалів, які застосовують для виготовлення зубчастих коліс, ставлять вимоги достатньої загальної і поверхневої міцності, твердості, опору проти втомлюваності зубів при згинанні, стійкості проти абразивного спрацювання і заїдання. Ці вимоги найкраще задовольняють термічно або термохімічно оброблені сталі.

При неточному розрахунку, вадах конструкції, великих перевантаженнях, недбалості монтажу або порушенні правил нормальної експлуатації передачі можливі поломки зубів, викришування, заїдання і передчасне спрацювання робочих поверхонь зубів.

Існують наступні види руйнування і пошкодження зубів.

Поломка зубів призводить не тільки до виходу із ладу передачі, а і до пошкодження підшипників, валів тощо. Причини поломки зубів: великі перевантаження ударної або статичної дії або перевантаження, що багаторазово повторюються і ведуть до втомленості матеріалу.

Щоб запобігти поломкам, зуби розраховують на згин.

Викришування від втомленості поверхневих шарів зубів є дуже небезпечним і найпоширенішим видом пошкодження зубів для більшості закритих, добре змащуваних і надійно захищених від забруднень зубчастих коліс. Викришування полягає в появі на активних поверхнях невеликих заглиблень і має характер втомленості. Викришування починається поблизу полюсної лінії на ніжках зубів, де виникають великі сили тертя і поступово поширюється на всю поверхню ніжок. Це приводить до підвищення тиску на непошкоджених ділянках поверхні, витискування мастила в ямки і, нарешті, до пластичного деформування або заїдання. Щоб запобігти викришуванню, зуби розраховують на контактну витривалість.

Заїдання є наслідком роздавлювання масляної плівки в зоні контакту зубів, зчеплення поверхневих частинок матеріалу шестірні і колеса та утворення на поверхні менш міцного зуба ямок при відносному русі зубів. Заїдають більше зуби з незагартованими поверхнями із однорідних матеріалів.

Спрацювання відбувається в результаті стирання активних поверхонь зубів внаслідок механічного, молекулярно – механічного і корозійно – механічного спрацювання.

4.4.4. Прямозуба циліндрична передача

Зубчаста передача, у якій твірні бічних поверхонь зубів паралельні до твірних діляльного циліндра шестерні і колеса, називається *прямозубою циліндричною* (рис. 4.35).

Основні геометричні співвідношення прямозубої циліндричної передачі визначаються за формулами (4.48) – (4.55) стандартного

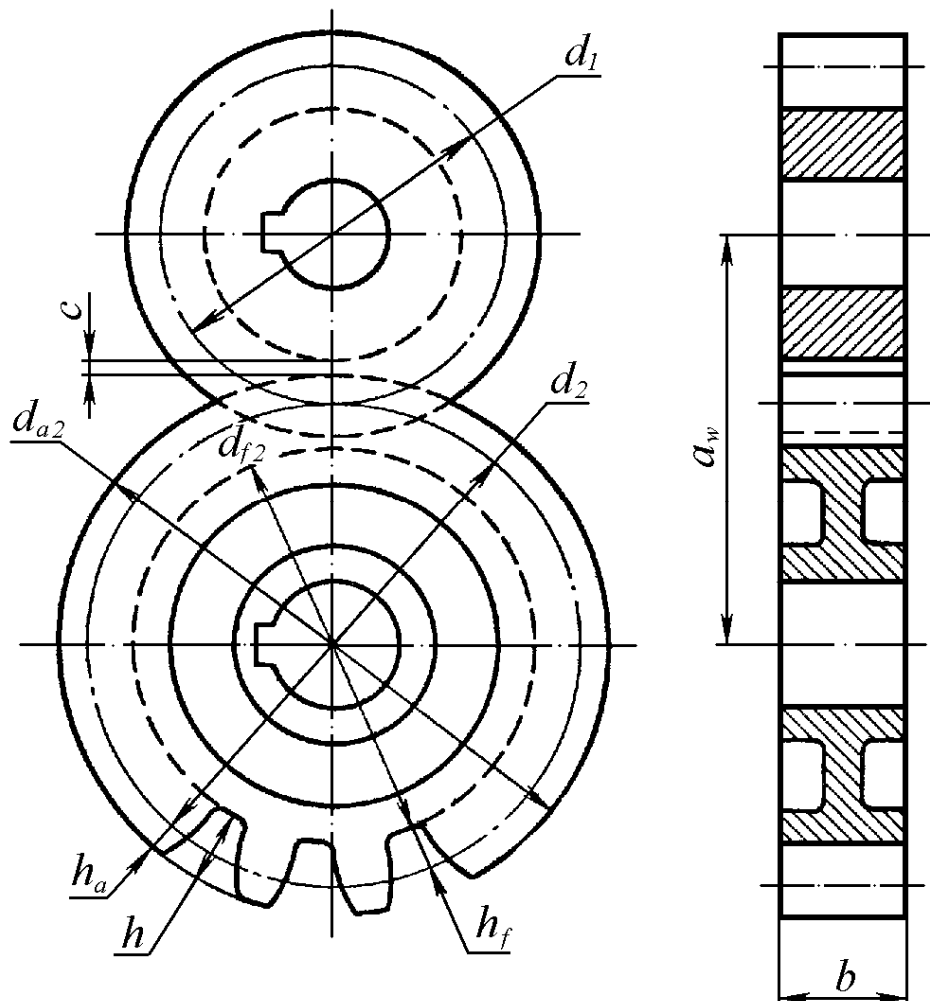


Рис. 4.35

Розглянемо сили, що діють у зачепленні передачі.

При контакті пари зубів у полюсі P силова взаємодія коліс полягає у передачі по лінії тиску (нормалі NN) сили тиску F_n . При точному виготовленні і монтажі спряжених зубчастих коліс сила F_n рівномірно розподілена по ширині зубчастого вінця (рис. 4.36).

Перенесемо F_n по лінії NN в точку O , що лежить на осі зуба, і розкладемо за двома напрямками: по дотичній до ділильного кола (колова сила F_t) і по нормалі до лінії центрів (радіальна сила F_r).

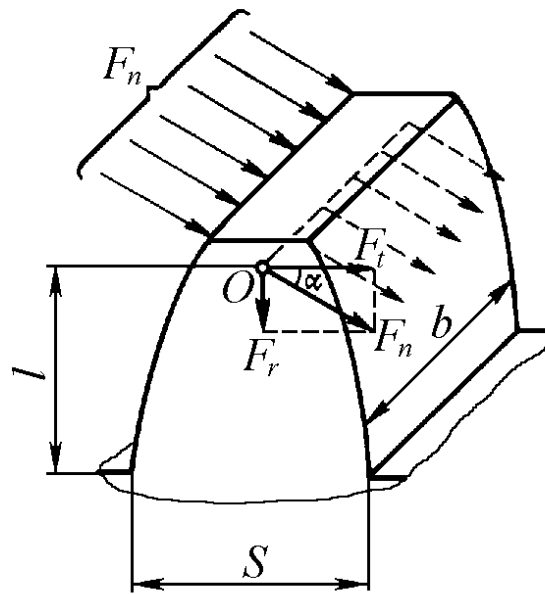


Рис. 4.36

Тоді колова сила, яка згинає зуб дорівнює

$$F_t = F_n \cos \alpha \frac{2M}{d}, \quad (4.56)$$

де $\alpha = 20^\circ$ – кут зачеплення, M – обертальний момент, що передається.

Радіальна сила, яка стискує зуб, дорівнює

$$F_r = F_n \sin \alpha = F_t \operatorname{tg} \alpha. \quad (4.57)$$

Нехтуючи відносно невеликими напруженнями стиску, розглянемо умову міцності зуба при згині.

При цьому зуб можна розглядати як консольну балку із навантаженням на вільному кінці. Тоді умова міцності має вигляд:

$$\sigma_F = \frac{M_{зз} k_\sigma}{W_x} \leq [\sigma_F],$$

де σ_F – напруження згину, $M_{зз} = F_t l$ – згинаючий момент біля кореня ніжки зуба, l – плече зуба, $W_x = \frac{bS^2}{6}$ – осьовий момент опору небезпечного перерізу, S – товщина зуба.

Застосувавши коефіцієнти $\mu = \frac{l}{m}$ і $\gamma = \frac{S}{m}$, а також коефіцієнт

форми зуба $Y_F = \frac{6\lambda k_\sigma}{\gamma^2}$ і коефіцієнт навантаження K_F , отримаємо остаточну формулу перевірного розрахунку на згин прямозубих передач:

$$\sigma_F = \frac{Y_F F_t K_F}{b m} \leq [\sigma_F], \quad (4.58)$$

де K_F – враховує нерівномірність розподілу навантаження по дожині зуба. Приблизно можна прийняти $K_F \approx 1,5 \dots 2,0$ в залежності від положення коліс відносно опор, точності, колової швидкості і твердості поверхні зубів.

Із умови міцності (6.58) можна визначити необхідний модуль зубів:

$$m = \frac{Y_F F_t K_F}{b [\sigma_F]}. \quad (4.59)$$

Довжину зубів b виразимо через модуль m :

$$b = \psi_b m, \quad (4.60)$$

де ψ_b – коефіцієнт ширини колеса ($\psi_b = 6 \dots 25$), який залежить від точності виготовлення колеса.

Колову силу виразимо через обертальний момент:

$$F_t = \frac{2 M_1}{d_1} = \frac{2 M_1}{m z_1}.$$

Підставивши значення b і F_t у (4.59), отримаємо формулу для проектного розрахунку прямозубої циліндричної передачі:

$$m \geq \sqrt[3]{\frac{Y_F 2 M_1 K_F}{\psi_b z_1 [\sigma_F]}}, \quad (4.61)$$

де $[\sigma_F]$ – допустиме напруження згину.

Дані розрахунки на міцність при згині застосовуються для відкритих зубчастих передач із врахуванням їх зносу, припускаючи, що в зачепленні перебуває одна пара зубів і сил тертя немає.

Закриті зубчасті передачі, які працюють у мастильній ванні, розраховують на контактну витривалість. При цьому максимальні контактні напруження визначають за формулою:

$$\sigma_H = z_M z_H z_\varepsilon \sqrt{\frac{2 M_2 K_H (u + 1)}{d_2^2 b}}, \quad (4.62)$$

де z_M , z_H , z_ε – коефіцієнти, які відповідно враховують механічні властивості матеріалів коліс, форму зубів у полюсі зачеплення і ступінь

перекриття, M_2 – обертальний момент на зубчастому колесі, d_2 – діаметр ділильного кола колеса, b – довжина зуба, K_H – коефіцієнт, що враховує нерівномірність розподілу навантаження по довжині зуба.

Для сталених циліндричних зубчастих передач формула для перевірного розрахунку на контактну витривалість має вигляд:

$$\sigma_H = \frac{310}{a_w} \sqrt{\frac{M_2 K_H (u+1)^3}{b_2 u^2}} \leq [\sigma_H], \quad (4.63)$$

звідки можна знайти міжосьову відстань

$$a_w = (u+1) \sqrt[3]{\left(\frac{310}{[\sigma_H] u}\right)^2 \frac{M_2 K_H}{\psi_{ba}}}, \quad (4.64)$$

де $\psi_{ba} = \frac{b}{a_w}$ – коефіцієнт ширини зуба, який приймають в межах

$\psi_{ba} = 0,125 \dots 0,25$, коефіцієнт навантаження $K_H = 1,1 \dots 1,7$.

Рекомендації по вибору основних параметрів циліндричної прямозубої передачі наступні:

- передаточне число не треба приймати більше ніж $u = 6$ і як виключення $u \leq 12,5$,

- кількість зубів шестерні бажано вибирати у межах $z_1 = 17 \dots 30$.

Більша кількість зубів забезпечує більш плавну роботу і більшу довговічність коліс.

4.4.5. Косозубі і шевронні циліндричні передачі

Зуб прямозубого колеса входить у зачеплення відразу по всій довжині. Тому при значних швидкостях і невисокій точності виготовлення плавність роботи прямозубих передач зменшується. Внаслідок цього при колових швидкостях $v \geq 6$ м/с краще застосовувати косозубі або шевронні передачі.

Колеса із косими і шевронними зубами (рис. 4.37) мають нахил контактної лінії до основи зуба, потовщення зуба в небезпечному перерізі, більше значення коефіцієнта перекриття і більшу сумарну довжину контактних ліній. Такі передачі міцніші від прямозубих, мають плавний хід внаслідок поступового входу зубів у зачеплення (не відразу по всій довжині, як у прямозубих) і працюють відносно безшумно навіть при високих швидкостях. Недоліком косозубої передачі (рис. 4.37, а) є наявність осьової сили F_a , яка намагається зсунути колесо вздовж осі вала.

Застосування здвоєних косозубих коліс, зуби яких нахилені в

Частина четверта

протилежні боки (шевронних коліс), усуває осьову силу (рис. 4.37, б, в). Шевронні колеса можуть передавати великі потужності при високих колових швидкостях (до 60...70 м/с) і плавності ходу, а колеса, що мають проточку між половинами зубів (рис. 4.37, в), передають ще більші потужності.

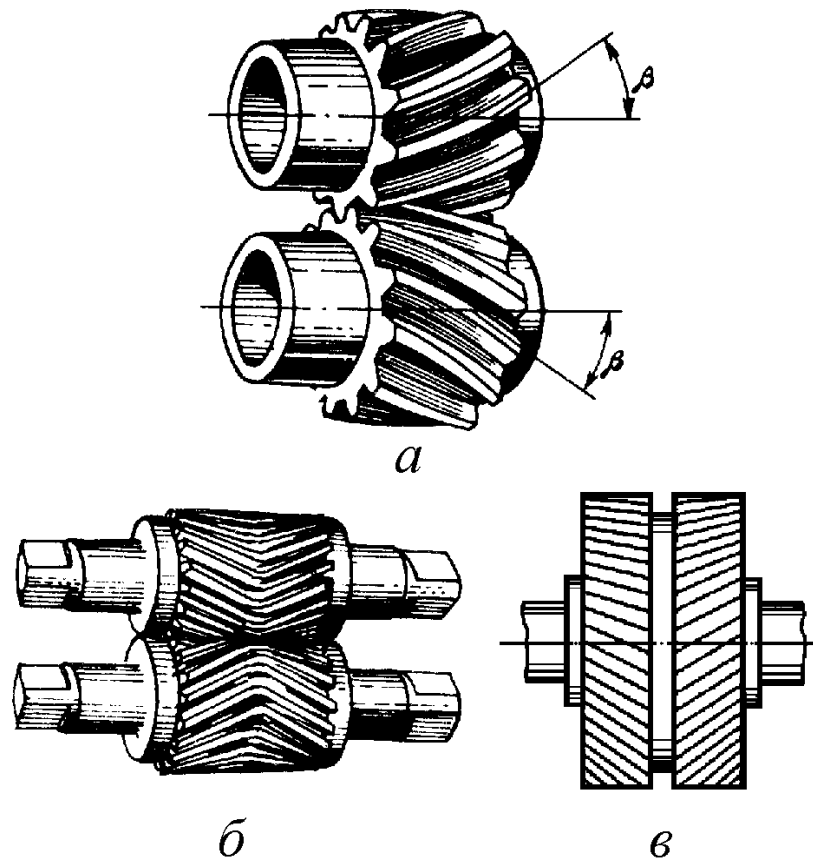


Рис. 4.37

Зуби косозубих і шевронних коліс, як і прямозубих, можуть бути нарізані методами копіювання (на фрезерних верстатах) або обкатки (на зубодовбальних або зубофрезерних верстатах).

Твірна зубів косозубих коліс розташована по гвинтовій лінії. Тому у косозубих передачах розрізняють два кроки (p_n, p_t) і відповідно два модулі (m_n, m_t). Крок, виміряний у площині, нормальній до бічної поверхні зуба по ділільному циліндру (рис. 4.38), називають *нормальним кроком* (p_n). Крок, виміряний у площині обертання колеса (тобто в площині, перпендикулярній до осі обертання) по дузі ділільного кола, називають *коловим ділільним кроком* (p_t).

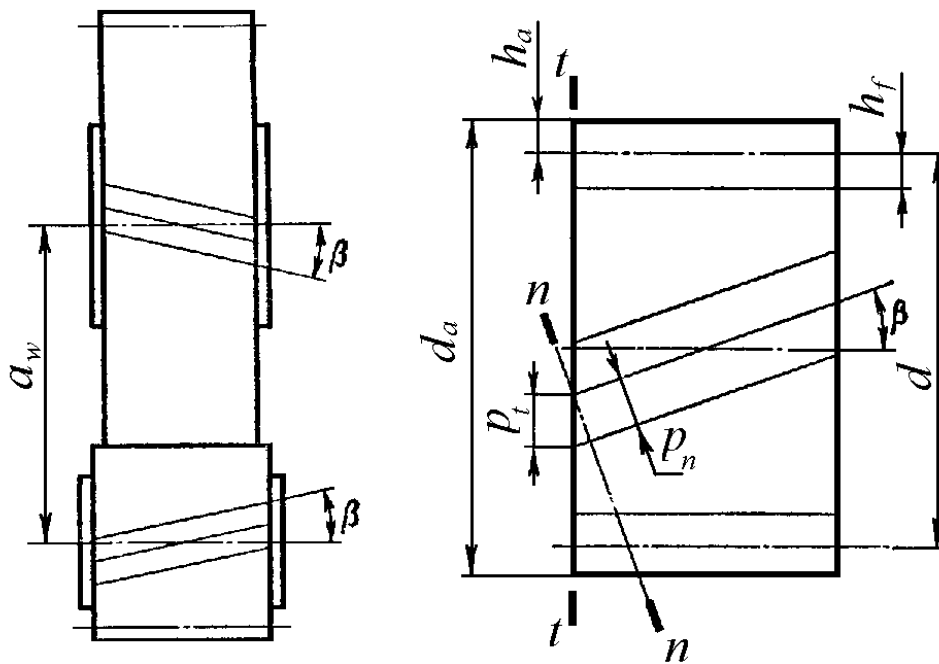


Рис. 4.38

Залежність між p_t p_n і можна визначити із рис. 4.38:

$$p_t = \frac{p_n}{\cos \beta}, \quad (4.65)$$

де β – кут нахилу зубів до осі колеса.

Відповідно нормальний і коловий модулі дорівнюють:

$$m_n = \frac{p_n}{\pi}, \quad (4.66)$$

$$m_t = \frac{p_t}{\pi} = \frac{m_n}{\cos \beta}. \quad (4.67)$$

Оскільки вихідний контур зубчастої рейки визначає параметри і профілі зубів усіх зубчастих коліс нормального зачеплення, то для косозубих і шевронних коліс із двох модулів стандартом регламентований тільки нормальний. Це не стосується шевронних коліс без проточки між половинами зубів, які нарізують на спеціальних верстатах за методом обкатки. Для них стандартизований коловий (торцевий) модуль.

У косозубих передачах ділильні діаметри можна виразити через коловий або нормальний модулі:

$$d = m_t z = \frac{m_n z}{\cos \beta}. \quad (4.68)$$

Частина четверта

Висоту головки і ніжки зуба визначають через стандартний нормальний модуль:

$$h_a = m_n, \quad (4.69)$$

$$h_f = 1,25 m_n. \quad (4.70)$$

Відповідно діаметри вершин зубів і западин зубчастих коліс:

$$d_a = d + 2 m_n, \quad (4.71)$$

$$d_f = d - 2,5 m_n. \quad (4.72)$$

Міжосьова відстань дорівнює:

$$a_w = \frac{d_1 + d_2}{2} = m_t \frac{z_1 + z_2}{2} = m_n \frac{z_1 + z_2}{2 \cos \beta} = m_n \frac{z_1(u+1)}{2 \cos \beta}. \quad (4.73)$$

Передаточне число визначають так само, як і в прямозубій передачі:

$$u = \frac{z_2}{z_1} = \frac{d_2}{d_1} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = i.$$

В косозубих передачах можна зменшити мінімально допустиму кількість зубів шестірні без ризику підрізування ніжки зуба при виготовленні зубчастих коліс методом обкатування. Для косозубих коліс

$$z_{min} = z_{min \text{ пр.}} \cos^3 \beta,$$

де $z_{min \text{ пр.}} = 17$ для прямозубих коліс.

Ширину колеса b (довжину зуба) вибирають так, щоб зміщення c зуба дорівнювало або було більше його колового кроку:

$$c \geq b \operatorname{tg} \beta \geq p_t = \frac{p_n}{\cos \beta} = \frac{\pi m_n}{\cos \beta},$$

або

$$b \geq \frac{\pi m_n}{\sin \beta}. \quad (4.74)$$

Як у прямозубій, так і в косозубій передачі сила тиску зуба шестірні на зуб колеса за весь період зачеплення діє по нормалі до бічної поверхні відповідних пар зубів, тобто, по лінії зачеплення.

Нормальну силу тиску F_n можна розкласти за трьома взаємно перпендикулярними напрямками на колову силу F_t , напрямлену по дотичній, радіальну силу F_r – по ділільному радіусу і F_a – по прямій, паралельній осі вала шестірні (колеса) (рис. 4.39):

$$\bar{F}_n = \bar{F}_t + \bar{F}_r + \bar{F}_a.$$

Складові F_a і F_r виражають через колову силу $F_t = \frac{2M_1}{d_1}$:

$$F_a = F_t \operatorname{tg} \beta, \quad (4.75)$$

$$F_r = F_t \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\cos \beta}, \quad (4.76)$$

де α – кут профілю (зачеплення) в нормальній площині, $\alpha = 20^\circ$.

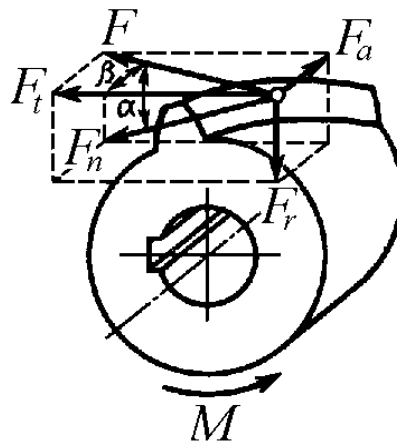


Рис. 4.39

Для запобігання великого осьового навантаження на опори валу не рекомендовано застосовувати косозубі колеса із великими кутами β . Як правило $\beta \leq 15^\circ$. Разом з тим кути менші ніж 8° не надають належного ефекту, що очікується від використання косозубих передач.

Кут нахилу β зубів у шевронних колесах в залежності від осьової відстані приймається у межах $25 \dots 38^\circ$ і як виключення до 45° .

Розрахунок косозубих і шевронних передач на міцність проводять аналогічно розрахункам для прямозубих коліс, але із урахуванням геометрії косозубих коліс за допомогою відповідних коефіцієнтів.

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Дайте визначення зубчастій передачі і основну класифікацію.
2. Які переваги і недоліки зубчастих передач?
3. Сформулюйте основну теорему зачеплення.
4. Що називають лінією зачеплення?
5. Поясніть принцип утворення евольвентного зачеплення.

Частина четверта

6. Яку мінімальну кількість зубів може мати зубчасте колесо? Чим це пояснюється?
7. Що називають ділильним колом?
8. Назвіть основні геометричні параметри евольвентного зачеплення.
9. Що характеризує коефіцієнт перекриття?
10. Назвіть види руйнування зубів зубчастих коліс.
11. Як визначити модуль зубів відкритої прямозубої циліндричної передачі?
12. Який вид розрахунку застосовується для закритих прямозубих циліндричних передач?
13. Назвіть переваги і недоліки застосування косозубих і шевронних циліндричних коліс.
14. Що таке коловий і нормальний крок в косозубих циліндричних передачах?
15. На які складові розкладають нормальну силу тиску в косозубій циліндричній передачі?

4.5. Просторові зубчасті передачі

4.5.1. Конічні зубчасті передачі

Зубчаста передача, осі валів якої перетинаються, називається *конічною*. Геометричні осі валів передачі можуть перетинатись під будь – яким кутом (рис. 4.40, а), але практично застосовують конічні зубчасті передачі, у яких кут перетину осей валів 90° (рис. 4.40, б).

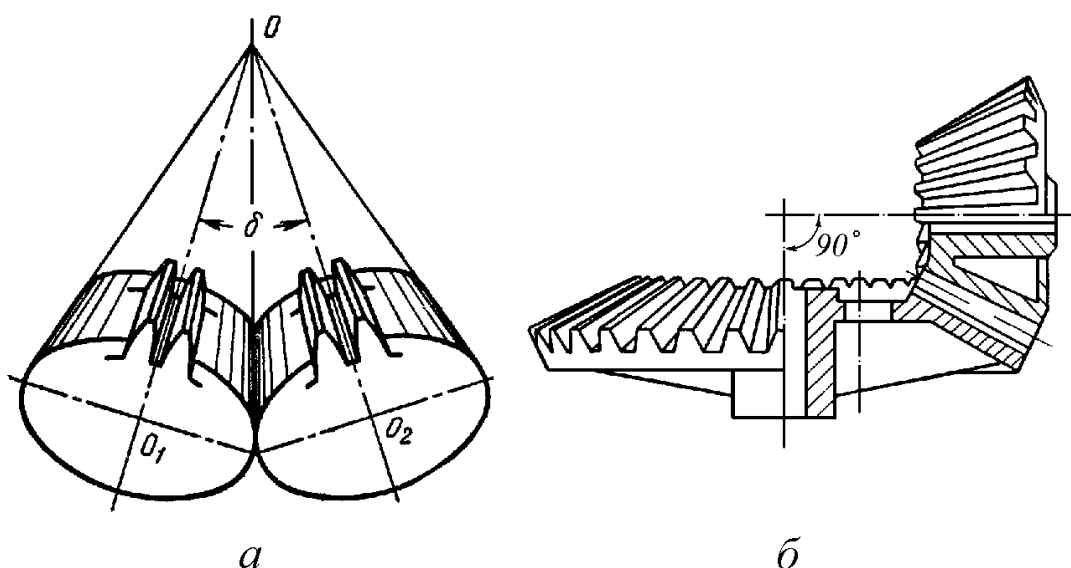


Рис. 4.40

Профільовання зубів конічних передач, як і циліндричних, найчастіше провадиться за евольвентою. При цьому конічні зубчасті колеса виготовляють з прямими, тангенціальними (косими) і коловими (криволінійними) зубами і застосовують там, де виникає необхідність передавати момент від одного вала до іншого з пересічними осями (привод заднього моста автомобіля, диференціал, редуктори, приводи механізмів пересування деяких підйомних кранів).

Конічні зубчасті передачі складніше виготовляти і складати, ніж циліндричні. Проектують їх порівняно невеликих потужностей, оскільки консольне розташування шестірні на валі при значних силах у зачепленні приводить до великих деформацій, які порушують точність зачеплення і нормальну роботу передачі. Проте іноді застосовують конічні передачі, в яких шестірня розміщена між опорами, а не консольно, але така конструкція складніша і дорожча.

Конічні передачі з тангенціальними і коловими зубами перевершують прямозубі за несучою здатністю, плавністю і безшумністю роботи при високих колових швидкостях.

Колеса конічної передачі являють собою конуси з вершинами у точці перетину осей валів. Зуби знаходяться на бічних поверхнях конусів і зменшують свій розмір (товщину і висоту) у напрямку до вершини конусів. Відповідно змінюється крок і модуль зачеплення, а також і діаметри ділильного кола, вершин і западин зубів. В торцевих перерізах зубчастих коліс, що відповідають їх найбільшим діаметрам, крок і модуль зачеплення найбільші. Тому тут розрізняють максимальний (виробничий) модуль m_e і середній модуль m_m (по середині довжини зуба). Максимальний модуль m_e , як правило, вибирають із стандартного ряду модулів.

Основні параметри зачеплення конічної прямозубої передачі виражаються через модулі (рис. 4.41):

для прямозубої передачі

$$d_m = m_{tm} z, \quad (4.77)$$

$$d_e = m_{te} z, \quad (4.78)$$

для передачі з коловими зубами

$$d_m = m_{nm} z, \quad (4.79)$$

$$d_e = m_{ne} z, \quad (4.80)$$

де d_m – середній ділильний (початковий) діаметр шестірні (d_{m1}) або колеса (d_{m2});

d_e – зовнішній ділильний (початковий) діаметр (діаметр основи ділильного конуса) шестірні (d_{e1}) або колеса (d_{e2});

Частина четверта

z – кількість зубів шестірні або колеса;
 m_m і m_{nm} – середній коловий (прямий зуб) і середній нормальний (коловий зуб) модуль;
 m_e і m_{te} – зовнішній коловий модуль з прямими і коловими зубами, значення якого звичайно узгоджують із стандартом.

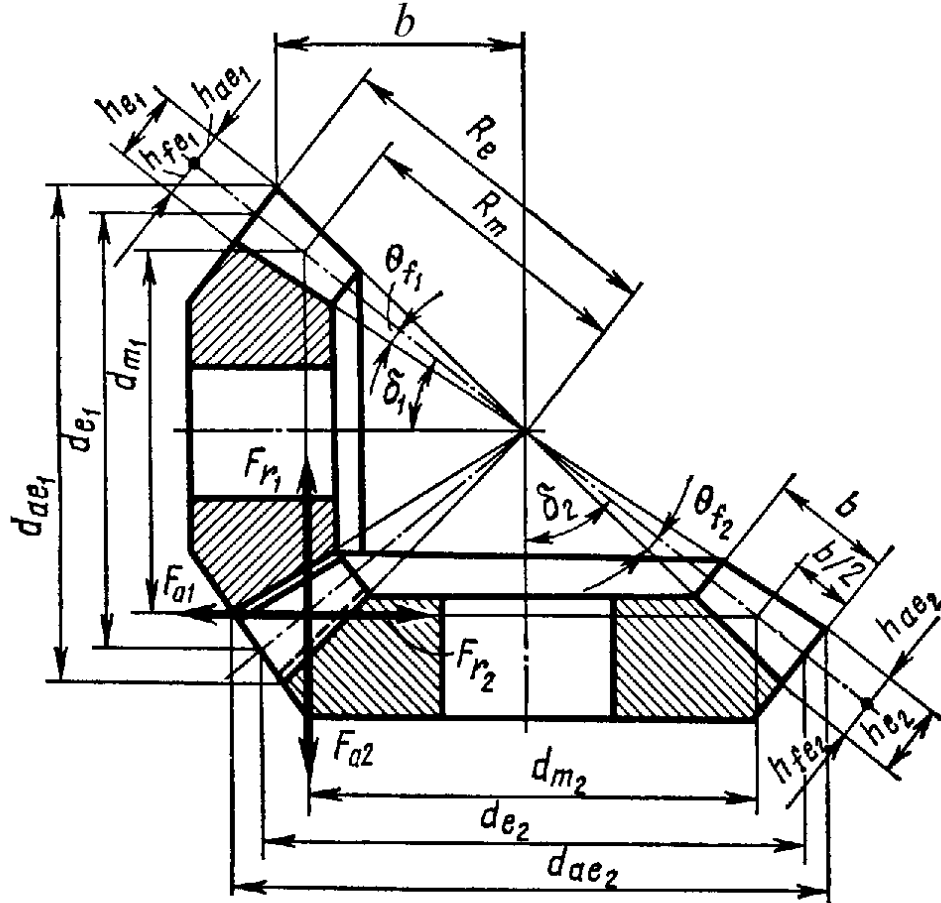


Рис. 4.41

Між модулями m_{nm} , m_m і m_{te} (m_e) існує залежність:

$$m_{nm} = m_n \cos \beta_m = m_{te} \left(1 - \frac{k_{be}}{2} \right) \cos \beta_m = \left(m_{te} - b \sin \frac{\delta}{z} \right) \cos \beta_m, \quad (4.81)$$

де β_m – кут нахилу колового зуба;

$k_{be} = \frac{b}{R_e}$ – коефіцієнт ширини зубчастого вінця;

b – ширина зубчастого вінця (довжина зуба), яка виміряна паралельно твірній ділительного конуса;

R_e – зовнішня конусна відстань;

δ – кут ділительного конуса шестерні (δ_1) або колеса (δ_2),

причому $\delta_\Sigma = \delta_1 + \delta_2 = 90^\circ$.

Зовнішню конусну відстань можна визначити як:

$$R_e = \frac{b}{k_{be}} = \frac{d_e}{2 \sin \delta} = m_{e(te)} \frac{\sqrt{z_1^2 + z_2^2}}{2}. \quad (4.82)$$

Середня конусна відстань дорівнює:

$$R_m = R_e - \frac{b}{2}. \quad (4.83)$$

Зовнішню висоту головки h_{ae} , ніжки h_{fe} зуба і радіальний зазор c приймають:

$$\begin{aligned} h_{ae} &= m_e = m_{te}, \\ h_{fe} &= 1,2 m_e = 1,25 m_{te}, \\ c_e &= 0,2 m_e = 0,25 m_{te}, \end{aligned} \quad (4.84)$$

Кут вихідного контуру α :

$$\alpha = \alpha_n = 20^\circ.$$

Діаметри вершин зубів і западин конічного зубчастого колеса відповідно дорівнюють:

для прямозубої передачі

$$d_{ae} = d_e + 2h_{ae} \cos \delta = d_e + 2m_e \cos \delta, \quad (4.85)$$

$$d_{fe} = d_e - 2h_{fe} \cos \delta = d_e - 2,4 m_e \cos \delta, \quad (4.86)$$

для передачі з коловими зубами

$$d_{ae} = d_e + 2m_{te} \cos \delta, \quad (4.87)$$

$$d_{fe} = d_e - 2,5 m_{te} \cos \delta. \quad (4.88)$$

Передаточне число при $\delta_\Sigma = \delta_1 + \delta_2 = 90^\circ$ визначається як

$$u = \frac{z_2}{z_1} = \frac{d_{e2}}{d_{e1}} = \frac{d_{m2}}{d_{m1}} = \operatorname{tg} \delta_2 = \frac{\omega_1}{\omega_2} = i. \quad (4.89)$$

Розглянемо сили, що діють у зачепленні зубчастих конічних коліс.

При роботі конічної прямозубої передачі рівнодіюча F_n сил нормального тиску прикладена в середньому перерізі зуба до його бічної поверхні по лінії контакту (рис. 4.42).

Силу нормального тиску F_n можна розкласти за трьома взаємно перпендикулярними напрямками на колову силу F_t , напрямлену по

Частина четверта

дотичній до середнього ділильного діаметра шестірні і колеса, радіальну силу F_r – по середньому ділильному радіусу шестірні (колеса) і F_a – по прямій, паралельній осі вала колеса (шестірні):

$$\bar{F}_n = \bar{F}_t + \bar{F}_r + \bar{F}_a.$$

При цьому колові сили F_t на шестерні і на колесі за величиною однакові, але діють у протилежних напрямках:

$$F_{t1} = \frac{2M_1}{d_{m1}} = F_{t2}. \quad (4.90)$$

Радіальна сила на шестерні за величиною дорівнює осьовій силі на колесі:

$$F_{r1} = F_{t1} \operatorname{tg} \alpha \cos \delta_1 = F_{a2}. \quad (4.91)$$

Осьова сила на шестерні за величиною дорівнює радіальній силі на колесі:

$$F_{a1} = F_{t1} \operatorname{tg} \alpha \sin \delta_1 = F_{r2}, \quad (4.92)$$

де $\alpha = 20^\circ$ — кут головного профілю (зацеплення).

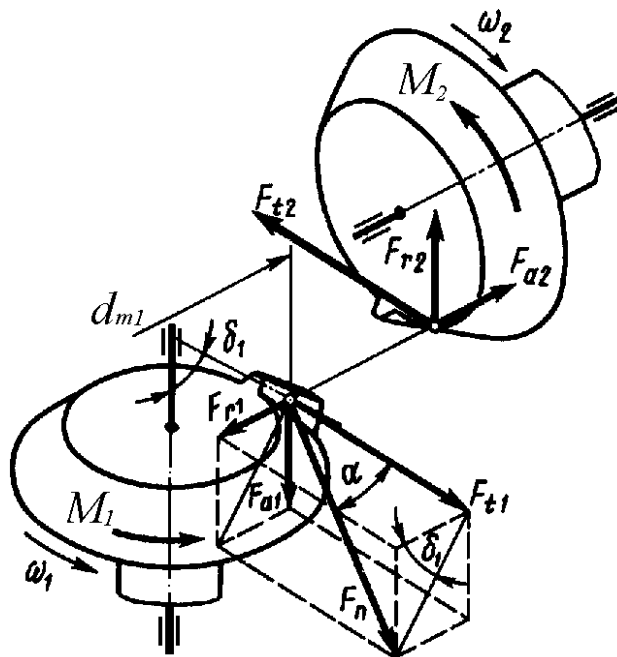


Рис. 4.42

Наявність у передачі осьових сил потребує надійного осьового кріплення валів шестірні і колеса відносно осі вала.

Розрахунок конічних зубчастих передач на міцність проводять аналогічно розрахункам для циліндричних коліс, але із урахуванням особливостей конічних коліс за допомогою відповідних коефіцієнтів. Досвід експлуатації конічних і циліндричних передач показав, що при однакових матеріалах, ширині (довжині зубів), умовах роботи, допустиме навантаження конічних передач складає 85% допустимого навантаження циліндричних передач.

4.5.2. Черв'ячні передачі

Черв'ячна (або зубчато-гвинтова) передача (рис. 4.43, а) являє собою кінематичну пару, що складається з черв'яка і черв'ячного колеса.

Черв'ячну передачу можна розглядати як модифікацію гвинтової пари, довга гайка якої розрізається поздовжньою площиною (паралельною осі гвинта) і згинається в кругове кільце — зубчасте колесо, що охоплює тіло гвинта — черв'яка по дузі.

Черв'як — це гвинт з різьбою певного профілю, нарізаною на циліндричній поверхні – архімедів, конволютний, евольвентний та інші черв'яки (рис. 6.43, а) або на глобоїді – глобоїдний черв'як (рис. 6.43, б).

Архімедів черв'як (рис. 6.43, в) являє собою циліндричний гвинт з трапецеїдальним профілем різьби. У торцевому перерізі витки цього черв'яка окреслені архімедовою спіраллю.

Конволютний черв'як – це циліндричний гвинт з прямолінійними обрисами профілю западин або витків у перерізі, нормального до бічної поверхні різьби.

Евольвентний черв'як (рис. 4.43, г) можна розглядати як косозубе циліндричне колесо з дуже великим кутом нахилу зуба до твірної циліндра і з малою кількістю зубів. Профіль витків – зубів такого черв'яка окреслений евольвентою.

Глобоїдний черв'як (рис. 4.43, б) являє собою гвинт, нарізаний на поверхні тора (глобоїда). В центральній осьовій площині черв'яка витки мають прямолінійний профіль. Передачу з таким черв'яком називають *глобоїдною*. Незважаючи на те, що при однакових габаритних розмірах навантажувальна здатність передачі з глобоїдним черв'яком значно вища, ніж із циліндричним, вона поки що не набула значного поширення через комплекс причин, пов'язаних з тепловідведенням, виготовленням і складанням глобоїдного черв'яка і черв'ячного колеса.

Завдяки відносній простоті технології виготовлення черв'яка і колеса (зуби черв'ячного колеса нарізують черв'ячною фрезою, а різьбу черв'яка нарізують різцем на токарному верстаті або дисковою фрезою на спеціальному черв'ячно-фрезерному верстаті) передачі з циліндричним архімедовим черв'яком широко застосовуються в різних галузях

Частина четверта

машинобудування і народного господарства. Поряд з цим останнім часом дедалі більшого застосування набувають і евольвентні черв'яки.

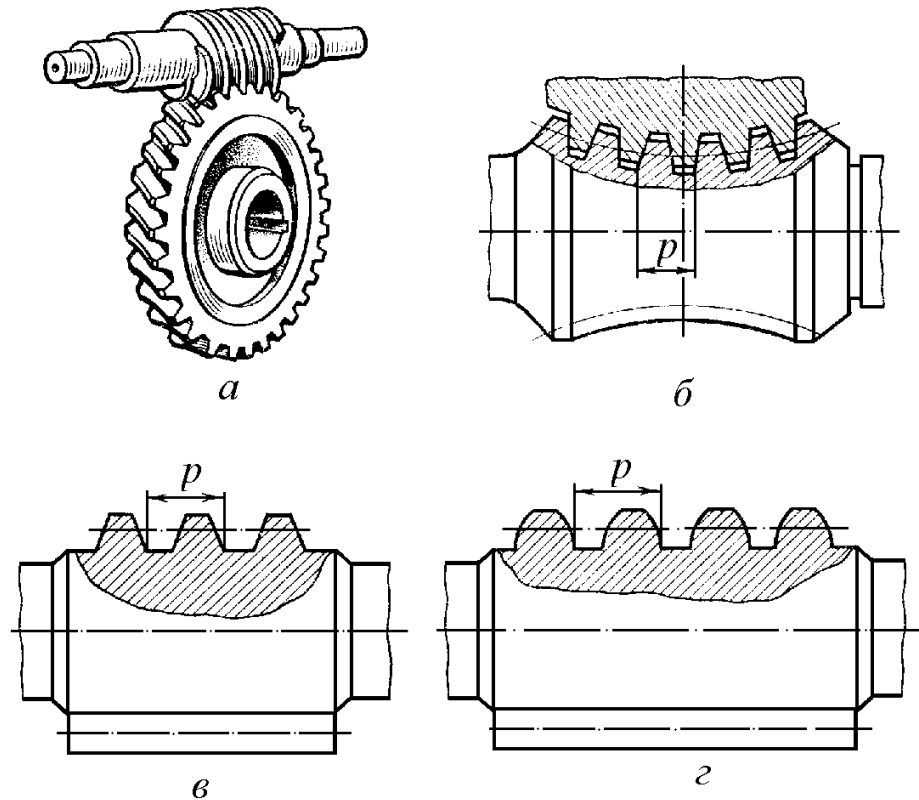


Рис. 4.43

Переваги черв'ячних передач:

- можливість здійснення одноступінчастої передачі з великими передаточними числами при невеликих габаритах (в кінематичних передачах $u = 5...500$, а в силових – $u = 8...80$ і як виняток до 120);
- плавність зачеплення і безшумність роботи;
- можливість здійснення самогальмівної передачі (тобто рух може передаватись тільки від черв'яка до колеса, але не навпаки, що важливо для підйомних механізмів);
- невелика маса передачі на одиницю потужності при великому передаточному числі.

Недоліки черв'ячних передач:

- порівняно низький ККД $\eta = 0,7...0,92$ внаслідок значних сил тертя в передачі;
- обмеженість потужностей, що можуть ними передаватись, – до $50...100 \text{ KВт}$;
- сильне нагрівання передачі при тривалій неперервній роботі;

– висока вартість матеріалу вінців черв'ячних коліс (бронза) та інструменту для нарізування зубів черв'ячних коліс (черв'ячні фрези), а також шліфування черв'яка.

Незважаючи на недоліки, черв'ячні передачі широко застосовують в машинобудуванні і приладобудуванні завдяки можливості зміни кутової швидкості в широкому діапазоні при перехресних осях валів: у механізмах привода тролейбуса, підйомно – транспортних машин, пасажирських і вантажних ліфтів, верстатів, різних приладів тощо.

Розглянемо геометричні співвідношення в черв'ячній передачі з циліндричним архімедовим черв'яком.

Відстань p , виміряна між однойменними точками двох середніх витків профілю різьби черв'яка (рис. 4.44), називається *кроком* черв'яка і черв'ячного колеса. Відношення кроку p до π називають *модулем*:

$$m = \frac{p}{\pi}. \quad (4.93)$$

Циліндр, на твірній якого товщина витка і ширина западини різьби черв'яка однакові, називають *ділильним*, його діаметр позначають d_1 .

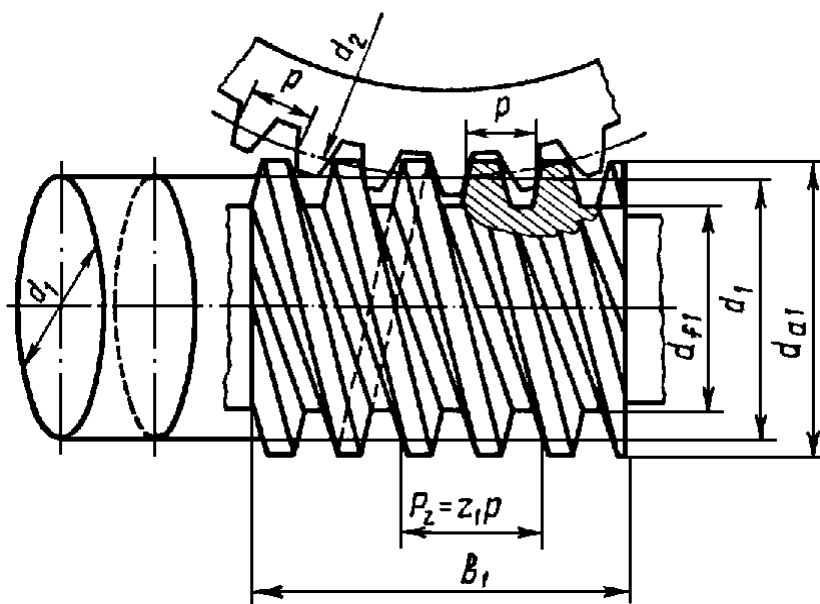


Рис. 4.44

Черв'як, як і гвинт, може мати одновиткову (однозахідну) або багатовиткову (багатозахідну) різьбу. Кількість витків різьби черв'яка позначають z_1 . У силових черв'ячних передачах застосовують черв'яки із $z_1 = 1, 2, 4$.

Хід витка для багатозахідного черв'яка:

$$p_{z_1} = p z_1 . \quad (4.94)$$

Ділильний діаметр черв'яка прийнято виражати через модуль:

$$d_1 = m q . \quad (4.95)$$

Параметр q визначає кількість модулів у ділильному діаметрі черв'яка і називається *коефіцієнтом діаметра черв'яка*. Значення m і q стандартизовані.

Тангенс кута підйому лінії витка (різьби черв'яка) визначають на ділильному циліндрі черв'яка:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{p_{z_1}}{\pi d_1} = \frac{p z_1}{\pi m q} = \frac{m z_1}{m q} ,$$

звідки

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{z_1}{q} . \quad (4.96)$$

Таким чином, зі збільшенням коефіцієнта діаметра черв'яка зменшується кут підйому його різьби, що, приводить до зниження ККД механізму.

Висоту ділильної головки h_{a_2} , ніжки h_{f_2} зуба і радіальний зазор c черв'ячного колеса відповідно приймають:

$$\begin{aligned} h_{a_2} &= m , \\ h_{f_2} &= 1,2 m , \\ c &= 0,2 m . \end{aligned} \quad (4.97)$$

Діаметри вершин витків і западин черв'яка:

$$d_{a1} = d_1 + 2 h_{a_2} = d_1 + 2 m , \quad (4.98)$$

$$d_{f1} = d_1 - 2 h_{f_2} = d_1 - 2,4 m . \quad (4.99)$$

Ділильний діаметр черв'ячного колеса d_2 в середньому перерізі (рис. 4.45) при кількості зубів z_2 :

$$d_2 = m z_2 . \quad (4.100)$$

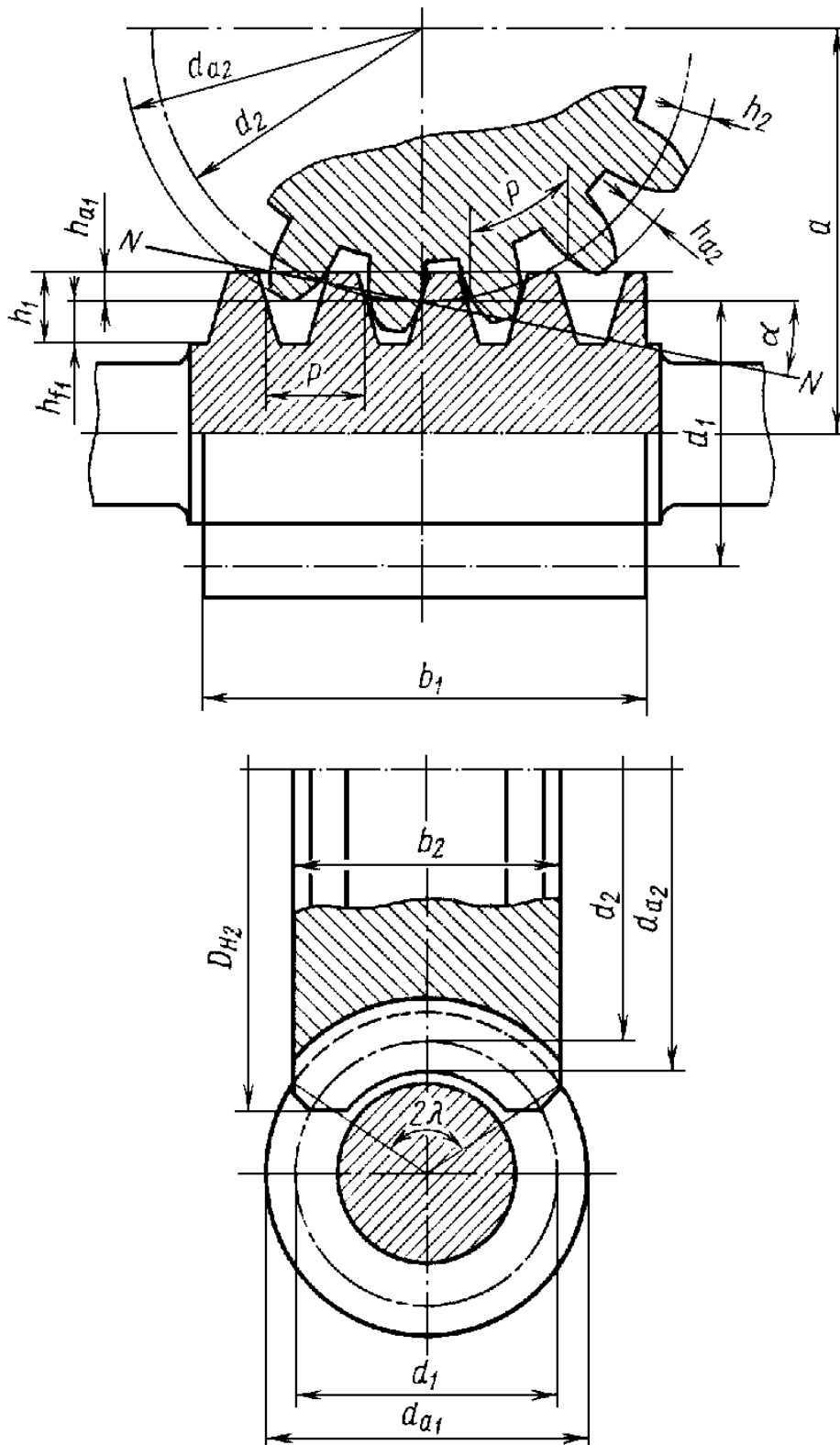


Рис. 4.45

Діаметри вершин зубів і западин черв'ячного колеса в середньому

Частина четверта

перерізі (рис. 4.45):

$$d_{a2} = d_2 + 2h_{a2} = d_2 + 2m, \quad (4.101)$$

$$d_{f2} = d_2 - 2h_{f2} = d_2 - 2,4m. \quad (4.102)$$

Міжосьова відстань черв'ячної передачі:

$$a_w = \frac{d_1 + d_2}{2} = \frac{m(q + z_2)}{2}. \quad (4.103)$$

Лінійна швидкість точки на ділильному колі d_1 черв'яка вздовж його осі при обертанні черв'яка:

$$v_1 = \frac{p z_1 \omega_1}{2\pi} = \frac{p z_1 \omega_1}{2\pi} = \frac{p z_1 n_1}{60},$$

де ω_1, n_1 – кутова швидкість і частота обертання черв'яка відповідно.

Лінійна швидкість цієї точки на ділильному колі d_2 черв'ячного колеса:

$$v_2 = \frac{d_2 \omega_2}{2} = \frac{\pi d_2 n_2}{60},$$

де ω_2, n_2 – кутова швидкість і частота обертання черв'ячного колеса.

Знайдені швидкості $v_1 = v_2$ із умови зачеплення. Прирівнюючи праві частини двох останніх виразів, отримаємо:

$$p z_1 n_1 = \pi d_2 n_2.$$

Враховуючи, що довжина ділильного кола черв'ячного колеса $\pi d_2 = z_2 p$, передаточне число дорівнює:

$$u = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{z_2 p}{z_1 p} = \frac{z_2}{z_1} = i, \quad (4.104)$$

де z_2 , – кількість зубів черв'ячного колеса, z_1 – кількість витків черв'яка.

Розглянемо сили, що діють у зачепленні черв'ячної передачі (рис. 4.46).

Силу нормального тиску F_n між зубами колеса і витками різьби черв'яка, яка виникає при роботі черв'ячної передачі, вважаємо прикладеною в полюсі зачеплення. За правилом паралелепіеда розкладемо F_n на три взаємно перпендикулярні складові:

$$\bar{F}_n = \bar{F}_t + \bar{F}_r + \bar{F}_a.$$

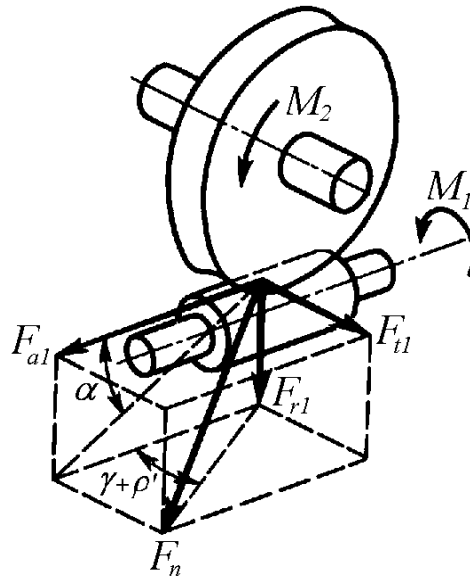


Рис. 4.46

Колова сила на черв'яку, яка дорівнює за значенням осьовій силі на черв'ячному колесі,

$$F_{t1} = \frac{2M_1}{d_1} = F_{a2}. \quad (4.105)$$

Колова сила на черв'ячному колесі, що дорівнює за значенням осьовій силі на черв'яку,

$$F_{t2} = \frac{2M_2}{d_2} = F_{a1}. \quad (4.106)$$

Співвідношення між величинами F_{t1} і F_{t2} можна знайти із їх взаємного розташування:

$$F_{t1} = F_{t2} \operatorname{tg} \gamma,$$

або із врахуванням тертя у черв'ячній парі:

$$F_{t1} = F_{t2} \operatorname{tg}(\gamma + \rho'), \quad (4.107)$$

де γ – кут підйому лінії витку черв'яка;

$\rho' = 1 \dots 6^\circ$ – зведений кут тертя.

Радіальна сила в черв'ячній парі:

$$F_{r1} = F_{r2} = F_{a1} \operatorname{tg} \alpha, \quad (4.108)$$

де $\alpha = 20^\circ$ – кут профілю в осьовому перерізі черв'яка.

Коефіцієнт корисної дії черв'ячної передачі визначається втратами на

Частина четверта

тертя в зачепленні, втратами на розбризування і перемішування мастила в картері і втратами в опорах валів. Причому останні два види втрат окремо не враховуються, а входять у експериментально знайдене значення ρ' .

При визначенні втрат на тертя в зачепленні черв'ячної передачі як у гвинтовій парі ККД передачі можна знайти за формулою:

$$\eta = \frac{\operatorname{tg} \gamma}{\operatorname{tg}(\gamma + \rho')} \quad (4.109)$$

Оскільки ККД черв'ячної передачі істотно залежить від значення кута підйому лінії витка черв'яка (при зростанні кута γ ККД збільшується), то силові черв'ячні передачі не рекомендується робити одновитковими, оскільки при цьому γ , а отже, і ККД малі. Застосування таких передач виправдане тільки при необхідно мати велике передаточне відношення, а також коли потрібне самогальмування передачі. Орієнтовні значення к. к. д. такі: при $z_1 = 1$ $\eta = 0,7 \dots 0,75$, при $z_1 = 2$ $\eta = 0,75 \dots 0,82$, при $z_1 = 4$ $\eta = 0,82 \dots 0,92$.

У черв'ячних передачах поєднання великої швидкості ковзання із дуже несприятливим напрямом її відносно лінії контакту призводить до погіршення мащення, розриву масляного шару між третювими поверхнями, зниження ККД, підвищення спрацювання і схильності до заїдання. Тому основним розрахунком як для закритих, так і для відкритих черв'ячних передач є розрахунок на контактну витривалість, що запобігає викришуванню і заїданню. Розрахунок на витривалість зубів при згинанні роблять як перевірний.

Черв'яки виготовляють із вуглецевої (сталь 45; 50) або легованої (сталь 20Х; 40Х; 40ХН; 12ХНЗА; 18ХНВА; 38ХМІОА) сталі з відповідною термічною або термохімічною обробкою і наступним шліфуванням та поліруванням поверхонь зачеплення.

Довжину нарізаної частини черв'яка приймають:

при $z_1 = 1 \dots 2$:

$$b_1 \geq (11 + 0,06 z_1) m + a,$$

при $z_1 = 4$:

$$b_1 \geq (12,5 + 0,09 z_2) m + a,$$

де $a = 25 \text{ мм}$ при $m \leq 10 \text{ мм}$, $a = 35 \dots 40 \text{ мм}$ при $m = 11 \dots 15 \text{ мм}$, $a = 50 \text{ мм}$ при $m \geq 16 \text{ мм}$.

Черв'ячне колесо виготовляють із чавуну при швидкості ковзання $v_s \leq 2 \text{ м/с}$. При більших швидкостях ковзання виникає небезпека заїдання, тому черв'ячне колесо роблять складеним: вінець (обід або бандаж) виготовляють із олов'яної (БрОФ 10-1, ОНФ, ОЦС 6-6-3) або безолов'яної (БрАЖ 9-4Л, АЖН 10-4-4Л) бронзи, а колесо (колісний центр) із чавуну

(СЧ 15-32; СЧ 18-36). Олов'яні бронзи, що мають високі антифрикційні властивості, дорогі. Тому при $v_s \leq 7 \text{ м/с}$ рекомендується застосовувати безолов'яні бронзи або латунь (ЛАЗМц 66-6-3-2), які мають високі механічні характеристики при дещо знижених антифрикційних властивостях.

Ширину вінця черв'ячного колеса приймають:

при $z_1 = 1 \dots 2$:

$$b_2 \leq 0,75 d_{a1},$$

при $z_1 = 4$:

$$b_2 \leq 0,67 d_{a1},$$

Найбільший діаметр черв'ячного колеса:

при $z_1 = 1$

$$d_{aM2} \leq d_{a2} + 2m,$$

при $z_1 = 2$:

$$d_{aM2} \leq d_{a2} + 1,5m,$$

при $z_1 = 4$:

$$d_{aM2} \leq d_{a2} + m.$$

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Яка передача називається конічною і як вона утворена?
2. Назвіть основні параметри зачеплення конічної прямозубої передачі.
3. На які складові розкладається сила нормального тиску в конічній зубчастій передачі і як їх визначити?
4. Дайте визначення черв'ячної передачі і основну класифікацію.
5. Які характерні особливості має черв'ячна передача порівняно з іншими зубчастими передачами?
6. Назвіть основні переваги і недоліки черв'ячних передач.
7. Які основні геометричні співвідношення в черв'ячній передачі?
8. Яку кількість заходів різьби може мати стандартний черв'як?
9. Що таке хід витка багатозахідного черв'яка?
10. Як визначається ділительний діаметр черв'яка?
11. Напишіть формули складових сил в зачепленні черв'ячної передачі.
12. Чому дорівнює ККД черв'ячної передачі?
13. Які матеріали застосовують для виготовлення черв'яків і черв'ячних коліс?

4.6. Осі, вали, муфти

Деталь, на яку насаджують (рухомою чи нерухомою) обертові пристрої (блок, зубчасте колесо та ін.), називають *віссю* або *валом*.

Осі і вали відрізняються між собою за умовами роботи: *вісь* не передає обертального моменту і працює тільки на згин (рис. 4.47, а). Вісь може бути обертовою або нерухомою. Вал завжди обертається і завжди передає обертальний момент, наприклад вал зубчастої передачі в редукторі (рис. 4.47, б), колінчастий вал двигуна, кривошипний вал (рис. 4.48, в, г).

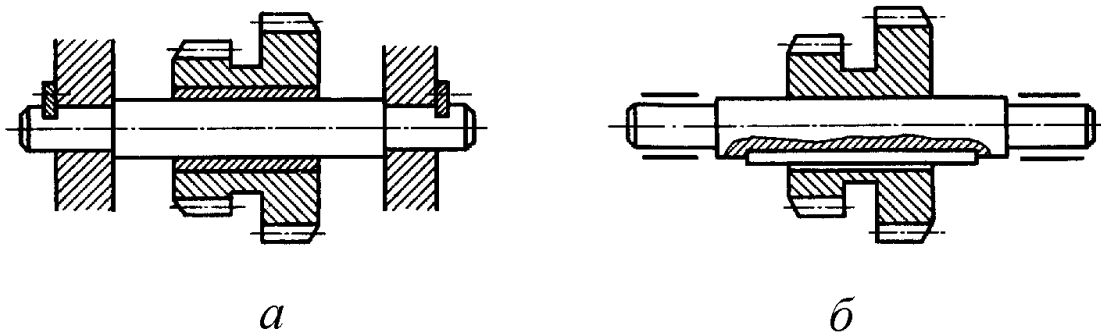


Рис. 4.47

Вали класифікують наступним чином:

– за призначенням: *вали передач* - несучі зубчасті колеса, шківів, зірочки, муфти та інші деталі передач; *корінні вали* машин, які крім деталей передач несуть ще і робочі органи виробничих машин або машин двигунів. Наприклад, вали турбін, на які насажені колеса або диски турбін, вали токарних і свердлильних верстатів, на яких встановлено затискні патрони, вали електродвигунів, на які насаджено ротори; колінчасті і кривошипні вали;

– за формою геометричної осі — *прямі* (рис. 4.48, а, б), що набули найбільшого поширення в різних галузях машинобудування; *кривошипні і колінчасті* (рис. 6.48, в, г) які використовують не тільки для передавання моменту, а і для перетворення зворотно – поступального руху на обертальний (поршневі двигуни) або, навпаки, обертального руху на зворотно-поступальний (насоси, верстати); *гнучкі* (рис. 6.48, д) із змінюваною формою геометричної осі, які застосовують у різних приводах механізованого інструменту, наприклад вал переносної свердлильної або загвинчуючої установки, а також у несилових приводах приладів, наприклад спідометрів та інших приладів дистанційного вимірювання або керування:

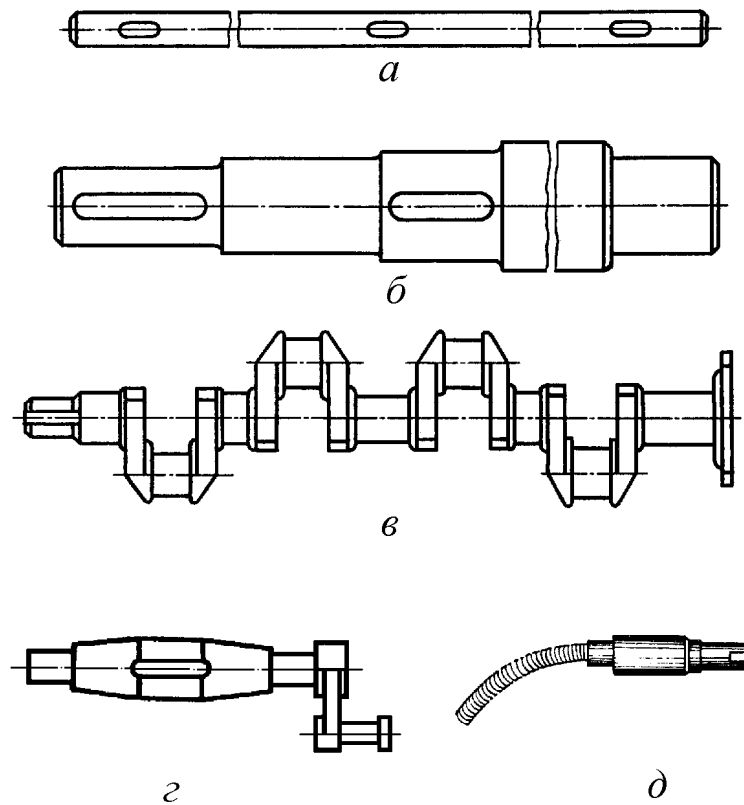


Рис. 4.48

– за формою і конструктивними ознаками – *гладкі* сталого поперечного перерізу (рис. 4.48, а) – трансмісійні, вали гребних гвинтів тощо ; *ступінчасто-змінного поперечного* перерізу (рис. 4.48, б, г, д) – вали більшості передач. Сюди ж можна віднести *шліцьові* вали, *вали-черв'яки* і *вали-шестірні*.

Для зменшення маси вали іноді роблять *порожністими*.

Вал звичайно працює на згин, кручення (вал прямозубого редуктора, фрикційної, пасової і ланцюгової передач) або на згин, кручення і осьовий стиск (розтяг) – вал косозубого циліндричного, конічного та черв'ячного редукторів.

Осі або вали з'єднують з деталями передач (шківками, зубчастими колесами і т. п.), насадженими на них, за допомогою шпонок, шліців, штифтів і т. ін. Насаджені на вал (вісь) деталі тримаються від зсування в осьовому напрямі (косозубі циліндричні, конічні і черв'ячні зубчасті колеса та ін.) за допомогою буртів або заплечиків на валі, спеціальних установочних кілець, розпірних втулок, стопорних гвинтів і т. д.

Вали і осі виготовляють із вуглецевої (Ст3, Ст4, Ст5, сталь 30, 35, 40, 45, 50) і легованої (сталь 40Х, 40ХН, 30ХНЗА, 30ХГТ) сталей, значно рідше – із сталюого литва (сталь 35Л, 40Л, 45Л, 50Л) із відповідною термічною обробкою, а також якісного сірого чавуну, високоміцного

чавуну, сплавів кольорових металів (годинники, прилади) і пластмас.

Оскільки осі і вали мають круглий (суцільний) або рідше кільцевий поперечний переріз, то як заготовки для виготовлення їх застосовують круглий прокат при діаметрі осі або вала, що не перевищує 200 мм, або поковки при діаметрі понад 200 мм. При масовому виробництві ступінчасті вали виготовляють із штампованих заготовок. Осі і вали кільцевого перерізу можна виготовляти з труб. Посадочні поверхні осей і валів обробляють на токарних і шліфувальних верстатах. із шорсткістю $R_a = 2,5 \dots 0,63 \text{ мкм}$. Для зменшення концентрації напружень у місцях переходу від одного перерізу вала (осі) до іншого рекомендується плавно змінювати діаметр, тобто робити перехідні заокруглення (галтелі) по можливості більшого радіуса.

Осі і вали розраховують на міцність і жорсткість як бруси круглого поперечного перерізу, які працюють на згин (осі) або на згин із крученням (вали).

4.6.1. Опори валів і осей. Підшипники ковзання

Опори осей і валів поділяють на дві групи: опори ковзання і опори кочення. Опори ковзання і кочення, призначені для сприймання радіальних навантажень, називають *підшипниками*, а опори, призначені для сприймання осьових навантажень,— *підп'ятниками*, або упорними підшипниками (для опор кочення).

Підшипники ковзання поділяють на три основних типи.

Нерознімні (глухі) підшипники у найпростіших конструкціях відливають як одне ціле із станиною тихохідної машини, що працює з великими перервами (рис. 4.49, а). Іноді їх роблять знімними, прикріплюючи болтами до станини машини. Знімні глухі підшипники виготовляють як із вкладишами 2 (чавунні, бронзові, капронові та інші втулки, запресовані в отвір чавунного або сталюого корпусу підшипника), так і без них. Останні застосовують для тихохідних малонавантажених валів. Основна перевага глухих підшипників — простота конструкції і дешевизна. Незважаючи на це, вони мало поширені, бо не дають можливості компенсувати спрацювання активних поверхонь втулок і валів.

Нерознімні підшипники поділяють за стандартом на вузькі, широкі, фланцеві, та гніздові.

Рознімні підшипники (рис. 4.49, б) складаються з корпусу 1, двох вкладишів 4 (втулка із антифрикційного матеріалу, розрізана по твірній), кришки 2 і стяжних болтів 3. Спрацювання активної поверхні вкладиша компенсується підтисканням кришки до верхньої половини вкладиша. Масло для мащення підшипників ковзання надходить на поверхні тертя через отвір у кришці з мастильного резервуара — маслянки 5 або з

масляної ванни за допомогою обертового кільця. Кільцеве мащення застосовують тільки при порівняно великих колових швидкостях цапфи.

Підшипники із самоустановними вкладишами застосовують при великих відношеннях довжини цапфи (шипа або шийки) до її діаметра. В таких випадках звичайний вкладиш не може повторювати відхилень осі цапфи від деформації вала, що порушує нормальну роботу підшипника.

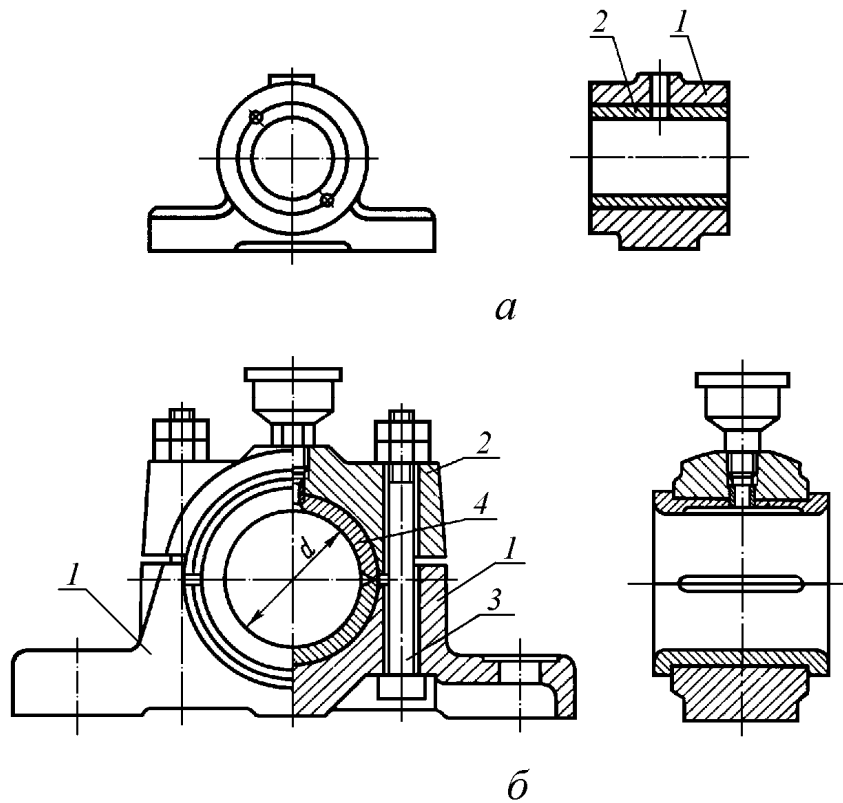


Рис. 4.49

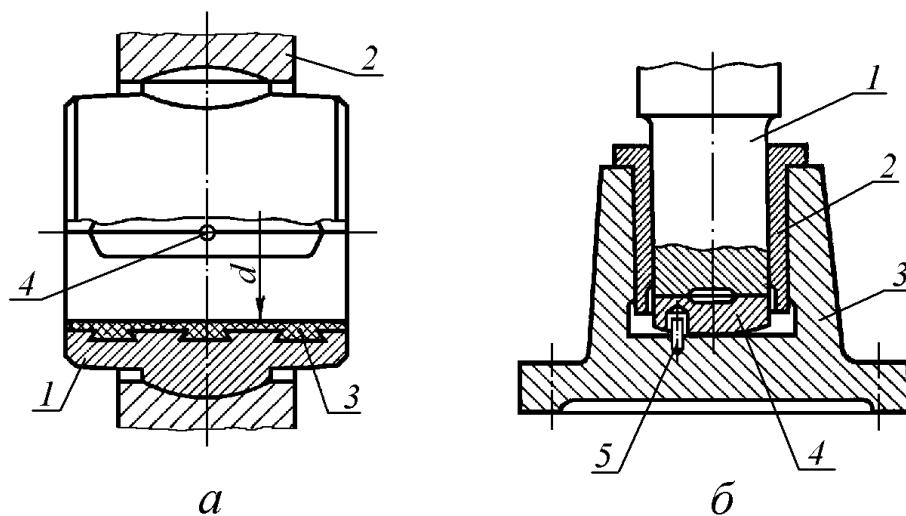


Рис. 4.50

Частина четверта

Самоустановний вкладиш 1 підшипника (рис. 4.50, а) має випуклу сферичну поверхню, що спирається на сферичну поверхню кільця 2, яке, запресоване в гніздо корпусу підшипника. Це дає можливість вкладишу повторювати відхилення осі деформованого вала. Мастило подається через отвір корпусу в канавку 4 вкладиша.

Опори ковзання для осьових навантажень — *підп'ятники* — звичайно об'єднуються в одному спільному корпусі із підшипником, який сприймає радіальні навантаження вала і врівноважує їх. Опорна частина підп'ятника (рис. 4.49, б) являє собою кільце 4 з чавуну, бронзи або іншого антифрикційного матеріалу з прорізаними по торцю мастильними канавками. Це кільце спирається на корпус 3. Радіальне навантаження опори сприймається вкладишем 2. Упорне кільце зафіксовано штифтом 5.

Переваги підшипників ковзання:

- висока працездатність при великих швидкостях і ударних навантаженнях;
- безшумність і забезпечення вібростійкості вала при роботі підшипника в режимі рідинного тертя (масляний шар між поверхнями цапфи і вкладиша має властивість гасити коливання);
- невеликі розміри в радіальному напрямі;
- можливість працювати в особливих умовах (хімічно агресивних середовищах, при бідному або забрудненому мащенні) і т. ін.

Недоліки підшипників ковзання:

- великі втрати на тертя (не стосується підшипників, що працюють у режимі рідинного тертя);
- значні розміри в осьовому напрямі;
- необхідність застосування дорогих кольорових сплавів (бронза, бабіт) для вкладишів;
- порівняна складність конструкції і велика витрата мастила;
- не забезпечена взаємозамінність підшипників, оскільки більшість їх типів не стандартизовано.

Підшипники і підп'ятники ковзання застосовують у сепараторах для високошвидкісних шпинделів верстатів, газових турбінах, центрифугах, двигунах внутрішнього згоряння (колінчасті вали встановлюють на підшипники ковзання), при особливо важких режимах роботи машин (прокатні стани, каменедробарки та ін.).

Корпус і кришку підшипників ковзання відливають із сірого чавуну. Металеві вкладиші виготовляють з антифрикційного чавуну, бронзи, сплавів на алюмінієвій основі. Бабіт, що має високі антифрикційні властивості, застосовують для заливання тонким шаром поверхні тертя чавунного, сталюого або бронзового вкладиша. Застосовують також біметалеві тонкостінні вкладиші, самозмащувані вкладиші із графіту, дисульфиду молібдену. В якості матеріалів вкладишів використовують

також металокераміку (залізографітні і бронзографітні вкладиші) і неметалеві матеріали: пластмаси (текстоліт, капрон та ін.), тверді породи дерева (самшит, бук, дуб, граб), пресовану деревину; гуму. Вибір матеріалу вкладиша залежить від умов експлуатації, характеру навантаження, кутової швидкості цапфи, режиму мащення та ін.

Підшипники ковзання переважно розраховують на зносостійкість.

4.6.2. Підшипники кочення

Опори валів і осей, в яких тертя ковзання замінено тертям кочення, називають *підшипниками кочення*.

Переваги підшипників кочення порівняно із підшипниками ковзання:

– значно менші втрати на тертя, вищий ККД (до 0,995) і менше нагрівання;

– економія кольорових матеріалів (бабіту, бронзи);

– менші габаритні розміри в осьовому напрямку;

– простота обслуговування і заміни;

– менша витрата мастил;

– порівняно невисока вартість внаслідок масовості виготовлення стандартних підшипників, відносно малі експлуатаційні витрати, а також їх взаємозамінність, що спрощує ремонт машин і устаткування.

Недоліки підшипників кочення:

– обмежена можливість застосування при дуже великих навантаженнях і високих кутових швидкостях цапф (за винятком спеціальних закритих підшипників кочення);

– непридатність для роботи при значних ударних і вібраційних навантаженнях через високі контактні напруження і погану здатність демпфірувати коливання.

– більші, ніж у підшипників ковзання, габаритні розміри в радіальному напрямі.

– нероз'ємність конструкції, що не дає змоги застосовувати підшипники кочення в деяких складальних одиницях (наприклад, для шийок колінчастих валів).

Незважаючи на недоліки підшипники кочення дуже поширені. Наприклад, тільки у тракторному і сільськогосподарському машинобудуванні використовують підшипники 630 типорозмірів, які входять до 28 конструктивних груп.

Підшипники кочення (рис. 4.51) звичайно складаються з двох кілець: внутрішнього 2, насадженого на вал, і зовнішнього 1, закріпленого в корпусі підшипника; тіл кочення – кульок або роликів 3, які котяться по бігових доріжках кілець на певній відстані один від одного, і сепаратора 4 – деталі, яка відокремлює тіла кочення.

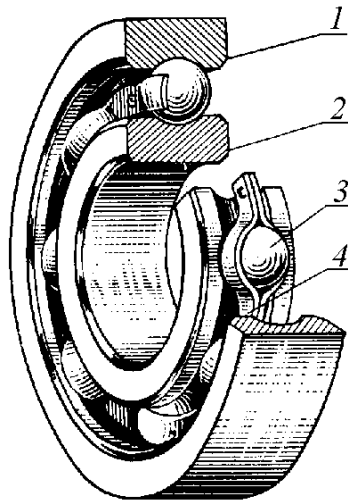


Рис. 4.51

Кільця і тіла кочення виготовляють із шарикопідшипникової сталі з високим вмістом хрому (ШХ6, ШХ15, ШХ20СГ) та інших легованих сталей, наприклад сталі 12Х2Н4А, 18ХГТ. Сепаратор виготовляють із сталей Ст1, Ст2, 0, 8, 10, а також з латуні, бронзи, капрону, текстоліту, металопластмас, фторопласту з металевими і неметалевими наповнювачами.

Підшипники кочення виготовляють різних конструкцій із зовнішнім діаметром від 1 до 3000 мм. Допуски, терміни і визначення підшипників кочення стандартизовані.

Класифікують підшипники кочення за такими ознаками.

За напрямом сприйняття навантаження — *радіальні* (рис. 4.52, а), в основному для радіальних навантажень; *радіально-упорні* (рис. 4.52, в) для сумісних радіальних та осьових навантажень; *упорні* (рис. 4.52, б) для осьових навантажень, *упорно-радіальні* для осьового та радіального навантажень.

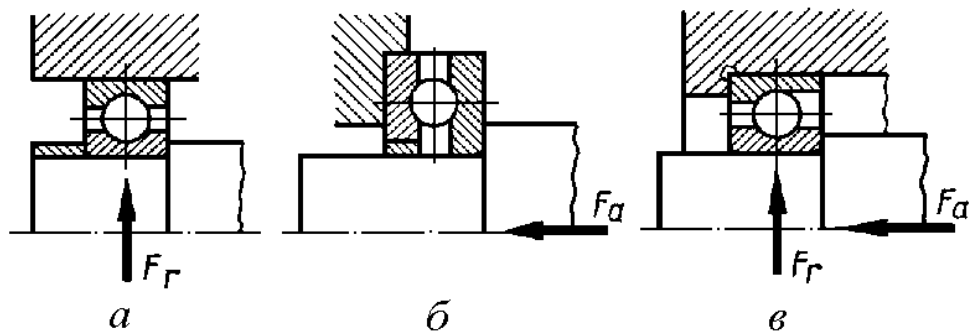


Рис. 4.52

За формою тіл кочення — *кулькові, роликові* (з циліндричними, конічними, бочкоподібними, голчастими й витими роликами).

За кількістю рядів тіл кочення — *однорядні, дворядні, чотирирядні*.

За способом самоустановлення — *несамоустановні, самоустановні* (сферичні).

Залежно від навантажувальної здатності і габаритних розмірів при одному й тому самому діаметрі внутрішнього кільця підшипники за стандартом поділяють на серії: за радіальними розмірами — *надлегкі, особливо легкі, легкі, середні, важкі*; за шириною — *вузькі, нормальні, широкі, особливо широкі*.

Коротко розглянемо найпоширеніші стандартні підшипники кочення.

Радіальні однорядні шарикопідшипники (рис. 4.53а,б,в) можуть сприймати радіальне і незначне осьове навантаження. Набули найбільшого поширення в машинобудуванні. Витримують великі кутові швидкості вала (особливо з сепараторами з кольорових металів) і допускають перекіс кілець до 10'. найдешевші з підшипників кочення. Можуть мати канавку на зовнішньому кільці, для запобігання від осьового зміщення у корпусі редуктора (рис. 4.53, в).

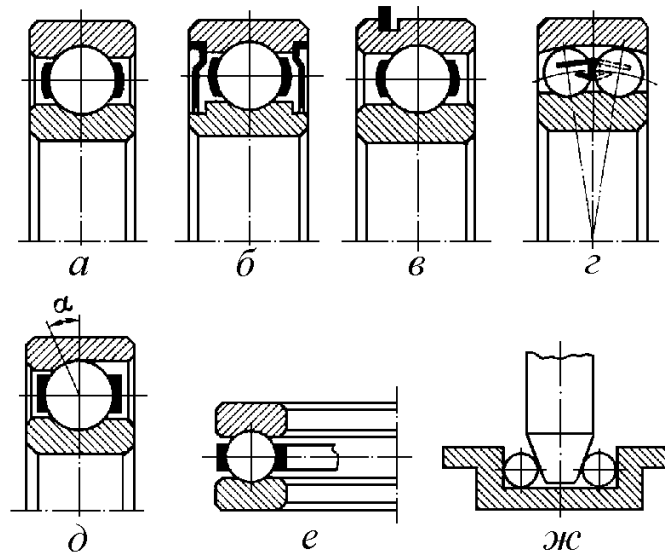


Рис. 4.53

Радіальні роликотілопідшипники (рис. 4.54, а) з циліндричними роликами сприймають тільки радіальне навантаження, але якщо є борти на кільцях (рис. 4.54, б), то можуть сприймати незначне осьове навантаження. Навантажувальна здатність підшипників значно більша, ніж кулькових, однак вони не допускають перекошу кілець, оскільки ролики починають

працювати кромками й підшипники швидко виходять з ладу.

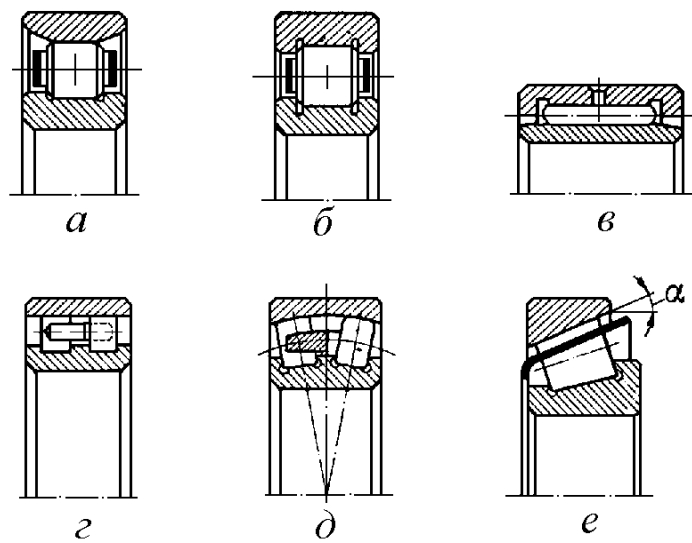


Рис. 4.54

Роликові підшипники з витими роликами сприймають радіальне навантаження при невисоких кутових швидкостях. Застосовують при ударних навантаженнях (удари пом'якшуються податливістю витих роликів). Не потребують високої точності монтажу і спеціального захисту від забруднень.

Голчасті підшипники (рис. 4.54, в) мають ролики з відношенням довжини до діаметра 4... 10. Можуть працювати при значних радіальних навантаженнях, витримують ударні навантаження при невисоких кутових швидкостях. Не допускають осьового навантаження і перекосу кілець. Стандарт також регламентує розміри голчастих підшипників без кілець. Ці підшипники застосовують у карданних шарнірах, двигунах і коробках передач мотоциклів, автомобілів і тракторів, в опорах кривошипно – повзунних і кулісних механізмів.

Радіально – упорні шарикопідшипники (рис. 4.53, д) застосовують у підшипникових вузлах, які сприймають разом радіальні і осьові навантаження. Радіальна вантажопідйомність таких підшипників на 30...40 % більша, ніж у радіальних однорядних шарикопідшипниках. Їх застосовують при середніх і високих кутових швидкостях і неударних навантаженнях.

Стандартом регламентовано також основні розміри *радіально-упорних роликових сферичних одинарних підшипників*. Кульковий радіально-упорний підшипник може сприймати осьове навантаження тільки в одному напрямі.

Конічні роликові підшипники (рис. 4.54, е) також призначені для сприймання радіального і осьового навантажень. Порівняно з радіально-упорними кульковими підшипниками мають більшу вантажопідйомність, відзначаються можливістю роздільного монтажу внутрішнього (разом з роликами і сепараторами) і зовнішнього кілець, а також властивістю сприймати невеликі ударні навантаження. Недоліком цих підшипників є велика чутливість до неспіввісності та відносного перекошення кілець.

Кулькові (рис. 4.53, г) і *роликові* (рис. 4.54, г) *дворядні підшипники* мають підвищену вантажопідйомність порівняно з однорядними. Допускають перекид кілець до 2° і тому їх можна застосовувати для валів зниженої жорсткості, а також у тих випадках, коли співвісність посадочних місць не гарантовано.

При дії значних радіальних і осьових навантажень застосовують радіально – упорні підшипники з конічними роликами (рис. 4.54, е).

Упорні шарико – або роликопідшипники (рис. 4.53, е, ж) призначені для сприймання тільки осьового навантаження. Їх установлюють в парі з радіальними шарико – або роликопідшипниками, які центрують вісь вала і обмежують його переміщення в радіальному напрямі.

Спеціальні підшипники: високошвидкісні для газотурбінних двигунів, для електроагрегатів, які працюють при форсованих режимах, корозійностійкі, які працюють в агресивних середовищах (розчини кислот, лугів, морська вода) і середовищах з низькою мастильною здатністю.

Методика добирання підшипників кочення відповідає вимогам міжнародних стандартів. Підшипники розраховують (підбирають) за критерієм статичної або динамічної вантажопідйомності (вантажопідйомної сили).

Розрахунок і наступне добирання підшипників здійснюють за спеціальними таблицями каталогів залежно від ряду характеристик їх роботи: розміру й напрямку діючих на підшипник навантажень, характеру навантаження (спокійне, з поштовхами або ударами та ін.), діаметра цапфи, на яку насаджується підшипник, кутової швидкості (частоти обертання) кільця підшипника, потрібного строку служби підшипника (його довговічності), навколишнього середовища та його температури, особливих вимог до підшипника (самоустановлення, переміщення вала в осьовому напрямі, підвищення жорсткості і точності обертання) і прийнятної його вартості.

Підшипники кочення, обертові кільця яких мають кутову швидкість $\omega \leq 0,105 \text{ рад/с}$ або частоту обертання $n \leq 1 \text{ об/хв}$, розраховують, а потім добирають за *статичною вантажопідйомністю* (вантажопідйомною силою):

$$P_0 \leq C_0, \quad (4.110)$$

Частина четверта

де P_0 — еквівалентне навантаження підшипника, H , яке визначають за формулою

$$P_0 = X_0 F_r + Y_0 F_a, \quad (4.111)$$

де F_r, F_a — відповідно радіальне і осьове навантаження підшипника;

X_0, Y_0 — коефіцієнти радіального і осьового навантажень;

C_0 — допустиме табличне значення статичної вантажопідйомності.

При частоті обертання кільця підшипника $n > 1$ об/хв його добирають за динамічною вантажопідйомністю (розрахунок на довговічність). Для цього визначають потрібне значення динамічної вантажопідйомності $C_{нотр}$ (H або κH) і потім за таблицею каталогу добирають підшипник, табличне значення динамічної вантажопідйомності якого не нижче від потрібного:

$$C_{нотр} \leq C. \quad (4.112)$$

Потрібне значення динамічної вантажопідйомності (вантажопідйомної сили) визначають за формулою:

$$C_{нотр} = P \left(\frac{60n L_h}{10^6} \right)^{\frac{1}{p}}, \quad (4.113)$$

де P, H — еквівалентне динамічне навантаження, n , об/хв — частота обертання, L_h , год — бажана або потрібна довговічність підшипника (для механізмів загального машинобудування $L_h = (2 \dots 20) 10^3$ год, для підшипників редукторів рекомендовано $L_h = (12 \dots 25) 10^3$ год), p — величина, яка залежить від форми кривої контактної втомленості (для кулькових підшипників $p = 3$, для роликкових підшипників $p = \frac{10}{3}$).

Еквівалентне динамічне навантаження знаходять за формулою:

$$P = (X V F_r + Y F_a) K_\sigma K_T, \quad (4.114)$$

де X — коефіцієнт радіального навантаження, Y — коефіцієнт осьового навантаження, F_r, H — фактичне радіальне навантаження підшипника, F_a, H осьове навантаження підшипника, $V = 1,0 \dots 1,2$ — коефіцієнт обертання, $K_\sigma = 1,0 \dots 3,0$ — коефіцієнт безпеки, що залежить від типу механізму, в якому підшипник установлений, і характеру навантаження на нього, K_T — температурний коефіцієнт, що залежить від температури підшипника (при $t \geq 100^\circ$).

Коефіцієнти X і Y залежать від відношення $\frac{F_a}{V F_r}$, від значення коефіцієнта впливу осьового навантаження ε , а також від відношення осьового навантаження підшипника до його статичної вантажопідйомності $\frac{F_a}{C_0}$. Для підшипників з короткими циліндричними роликами і для голчастих підшипників $X = 1$, причому $F_a = 0$. Для упорних підшипників $Y = 1$, причому $F_r = 0$.

Під дією радіальних навантажень F_r в радіально – упорних підшипниках (кулькових і роликових) виникають осьові складові S реакцій, які розраховують за формулами:

для кулькових радіально-упорних підшипників

$$S = e F_r, \quad (4.115)$$

для конічних роликових підшипників

$$S = 0,83 e F_r, \quad (4.116)$$

де e – коефіцієнт осьового навантаження, який залежить від кута контакту.

Отже, при розрахунку радіально – упорних підшипників треба в формули (4.111) і (4.114) замість F_a підставляти сумарне осьове навантаження в опорах вала A і B : F_{aA} і F_{aB} , що відображає вплив зовнішнього осьового навантаження F_a та осьових складових реакцій S_A і S_B , які обчислюють за формулами (4.115) і (4.116).

Оскільки звичайно підшипники, на які спирається вал, мають той самий типорозмір, їх добирають за найбільшою статичною або динамічною вантажопідйомністю (вантажопідйомною силою).

При дії комбінованого навантаження (радіального F_r і осьового F_a) можливе застосування радіальних шарико – підшипників, якщо

$$\frac{F_a}{F_{r \max}} \leq 0,2 \dots 0,25.$$

Основні геометричні розміри підшипників кочення і значення їх допустимої статичної та динамічної вантажопідйомності стандартизовані.

4.6.3. Муфти

Пристрої, призначені для з'єднання двох валів між собою або із деталями, насадженими на вал, з метою передавання обертального моменту, називають *муфтами*. Функціональне призначення муфт різне. Деякі трансмісії (з'єднання валів) потребують регульованих або

Частина четверта

запобіжних муфт, а також муфт, які можуть легко з'єднувати або роз'єднувати вали, з'єднувати вали різного діаметра або віддалені кінці валів.

У машинобудуванні *механічні муфти* (електричні, гідравлічні та інші муфти не розглядаються) умовно можна поділити на чотири класи:

1. *Муфти нерозчипні* (постійно діючі) з'єднують вали так, що їх роз'єднати можна тільки демонтажем муфти після зупинки машини. Муфти цього класу поділяють на жорсткі, компенсуючі і пружні.

2. *Муфти керовані* призначені для з'єднання або роз'єднання валів навіть під час роботи машини. До цього класу входять синхронні і фрикційні (асинхронні) муфти.

3. *Муфти самодіючі*. Ці муфти автоматично виконують включення і виключення при заданій швидкості (відцентрові муфти), передавання моменту тільки в одному напрямі (обгінні муфти), обмеження обертового моменту (запобіжні муфти).

4. *Інші муфти* являють собою конструктивне поєднання різних муфт. Розглянемо основні типи нерозчипних муфт.

Існує три основні види *жорстких* муфт, що потребують точної співвісності з'єднаних валів. Найпростішою із них є *втулкова муфта*, яку закріплюють на валах за допомогою конічних шрифтів (рис. 4.55, а) або призматичних клинових (рідше) шпонок (рис. 4.55, б).

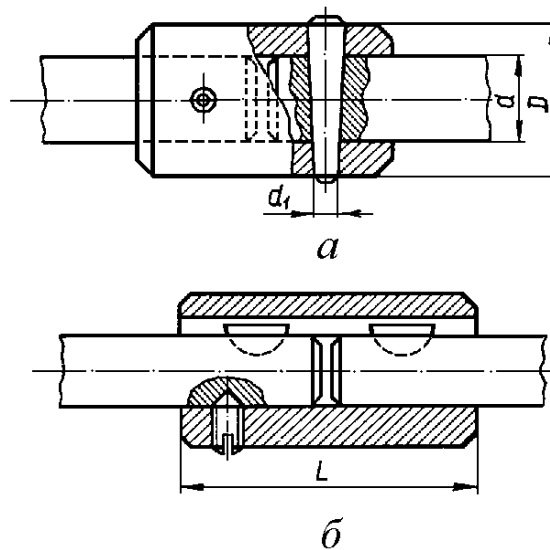


Рис. 4.55

Втулкові муфти застосовують порівняно рідко, оскільки крім загального недоліку, характерного для жорстких муфт, – вимоги точної співвісності осей з'єднаних валів – вони незручні при складанні і розбиранні.

Фланцева муфта складається з двох півмуфт (рис. 4.56), що мають форму фланців з коловим виступом на одній із півмуфт і западиною

(виточкою) на другій, які забезпечують співвісність фланців при складанні. Фланцеві муфти надійно з'єднують співвісні вали і можуть передавати великі моменти; вони прості за конструкцією, дешеві і можуть з'єднувати вали різних діаметрів. Півмуфти з'єднані між собою болтами, які працюють на зріз. Такі муфти застосовують там, де потрібна максимальна жорсткість з'єднання або відповідне фазове співвідношення ведучого і веденого валів.

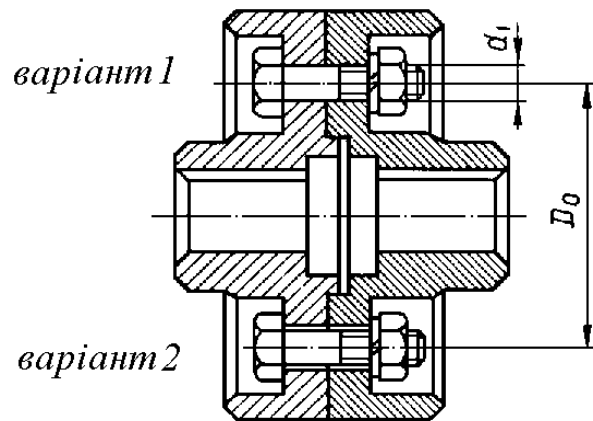


Рис. 4.56

Поздовжньо – рознімна муфта складається із двох половин з внутрішніми напівциліндричними поверхнями (рис. 4.57), які охоплюють консольні частини з'єднуваних валів і стягнуті болтами. Болти, що стягують півмуфти, працюють на розтяг, тобто їх треба затягти так, щоб створити між поверхнями півмуфт і охоплюваних валів сили тертя, які забезпечують передачу заданого моменту.

Як і всі жорсткі муфти, поздовжньо – рознімна потребує точної співвісності з'єднуваних валів та, як і втулкова муфта, призначена звичайно для з'єднання валів однакового діаметра.

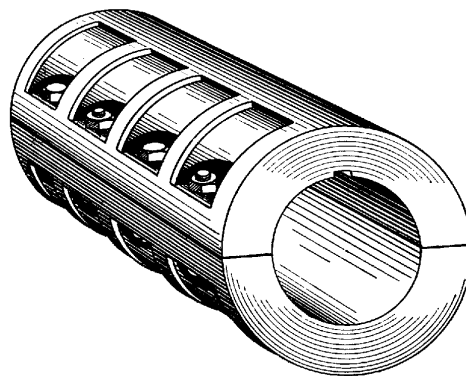


Рис. 4.57

Компенсуючі самоустановні муфти застосовують для компенсації помилок відносного положення з'єднаних валів – радіального зміщення центрів, неспіввісності (взаємний нахил осей валів), осьового зміщення та інших похибок, які можуть бути наслідком неточності обробки і монтажу, виникнення деформацій і зміни температури.

До компенсуючих самоустановних муфт належать:

1) кулачково – розширювальна муфта (рис. 4.58, а), яка компенсує незначні осьові переміщення;

2) кулачково – дискова муфта, що складається з двох півмуфт (рис. 4.58 б), насаджених з натягом на кінці валів, і середнього диска з двома взаємно перпендикулярними виступами (кулачками). Тертюві поверхні цієї муфти змащують, і вона компенсує радіальні і кутові зміщення осей валів;

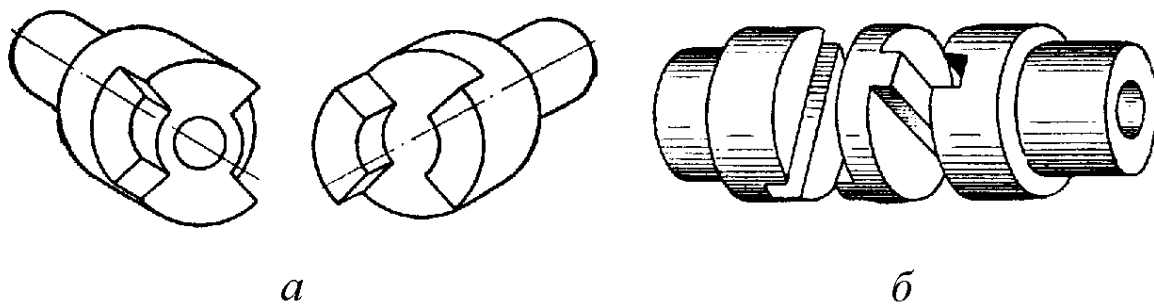


Рис. 4.58

3) зубчаста муфта (рис. 4.59, а) також компенсує радіальне і кутове зміщення осей валів і застосовується для передавання великих моментів без ударів і різких поштовхів;

4) ланцюгова муфта, яка має таке саме призначення, що і зубчаста, але передає менші моменти;

5) хрестово – шарнірна муфта (універсальна муфта Кардана – Гука (рис. 4.59, б), що дуже поширена в автомобільній та авіаційній промисловості і в приладобудуванні. Складається з двох вилок і хрестовини. Вилки насаджують на з'єднані кінці валів, а хрестовина шарнірно з'єднує вилки. Компенсує значні кути нахилу осей валів (до 30°). Дві послідовно з'єднані муфти компенсують великі зміщення осей валів.

Пружні муфти застосовують у машинах, які працюють зі змінним навантаженням і частими включеннями, а також там, де неможливо досягти точної співвісності з'єднаних валів. Пружні елементи муфт роблять із пружинної сталі, гуми, пластмас. Вони пом'якшують поштовхи і удари при роботі муфти. Пружні муфти встановлюють на швидкохідні

вали і застосовують у механізмах, які працюють у режимі динамічних навантажень. В якості пружних елементів в різних конструкціях пружних муфт застосовують гуму, шкіру, пружини різних форм і жорсткості.

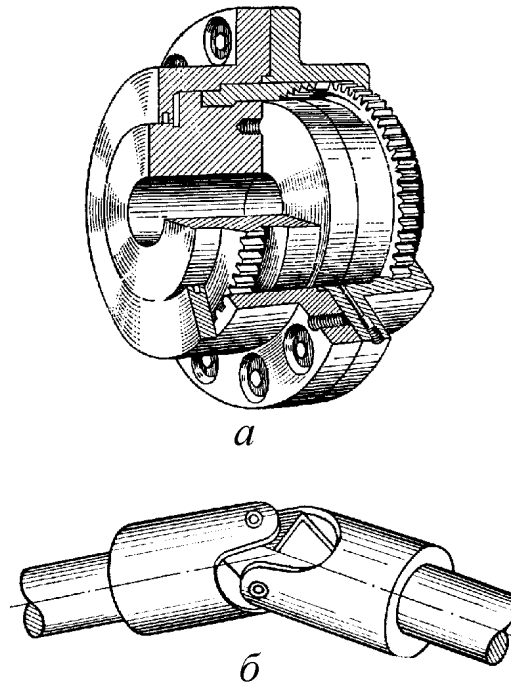


Рис. 4.59

Розглянемо керовані муфти.

Розрізняють синхронні *кулачкові* (рис. 4.60, а) і асинхронні *фрикційні* (рис. 4.60, б) керовані муфти.

Найпоширенішими є фрикційні муфти, які використовуються в транспортних машинах, верстатах і т. ін. Вони забезпечують плавне зчеплення веденого і ведучого валів за рахунок сил тертя при будь – якій різниці кутових швидкостей з'єднаних валів. При виникненні різких перевантажень півмуфти пробуксовують, захищаючи механізм від руйнування. Залежно від форми та кількості активних поверхонь тертя фрикційні муфти поділяють на дискові (рис. 4.60, б), багатодискові, конусні, циліндричні, барабанні (з колодками, розтискними кільцями або обтяжними стрічками). Найчастіше застосовують багатодискові фрикційні муфти, що мають малі габарити й потребують для включення невеликих зусиль.

Розглянемо самодіючі муфти. Ці муфти забезпечують автоматичне з'єднання і роз'єднання валів при зміні заданого режиму роботи машини.

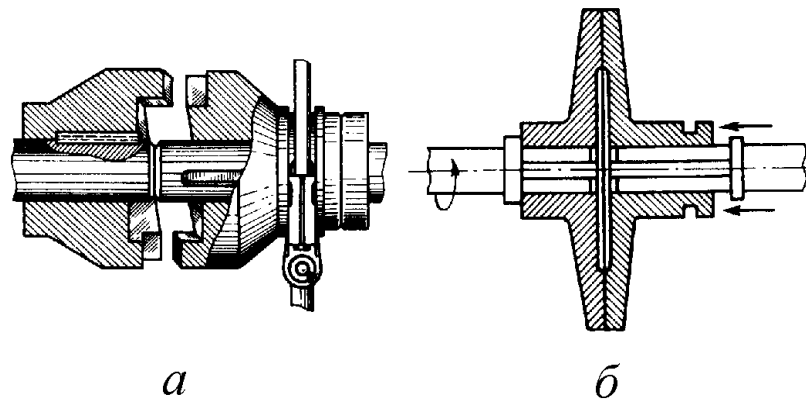


Рис. 4.60

Відцентрова муфта (рис.4.61, а) призначена для автоматичного зчеплення (розчеплення) валів при певних кутових швидкостях внаслідок дії відцентрових сил, при збільшенні кутової швидкості фрикційні колодки відтискуються і муфта замикається.

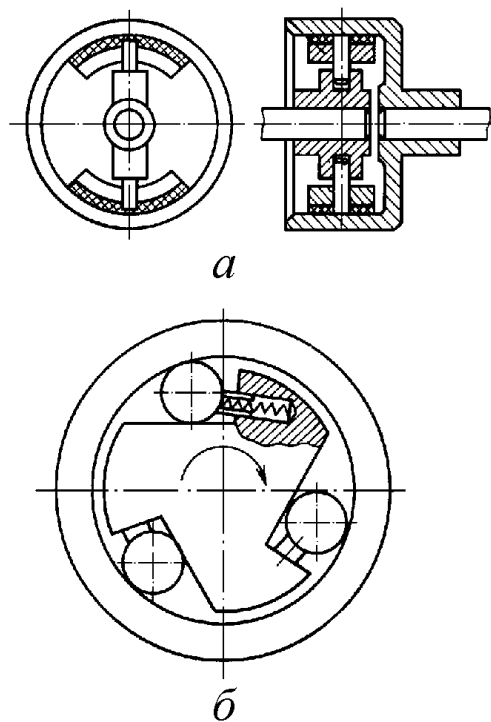


Рис. 4.61

Обгінна муфта (муфта вільного ходу) забезпечує автоматичне з'єднання валів. Обгінні муфти бувають зубчасті, кулачкові і фрикційні. На рис. 4.61, б показано фрикційну обгінну муфту, що набула найбільшого поширення. При передаванні обертального моменту ролики обгінної муфти внаслідок тертя заклинюються між поверхнями обойми і зірочки

муфти. При зворотному обертанні ролики викочуються в широкі ділянки обойми і муфта розмикається.

Запобіжні фрикційні муфти найбільше застосовуються при порівняно частих перевантаженнях. Вони відрізняються від керованих в основному тим, що в них немає механізму включення, тобто запобіжні муфти постійно замкнуті, тертьові поверхні притиснуті одна до одної пружинами. Менш поширені кулачкові і кулькові запобіжні муфти, в яких при перевантаженнях кулачки або кульки однієї півмуфти видавлюються з западин другої і муфта розмикається.

Коли перевантаження виникають рідко, застосовують *запобіжні муфти з руйнівною ланкою* – зрізним штифтом 1 (рис. 4.62). При перевантаженні сталеві штифти, вставлені в отвори загартованих втулок 2, зрізуються і муфта розмикається. Запобіжні муфти встановлюють якомога ближче до місця виникнення перевантаження; вони працездатні при точній співвісності валів.

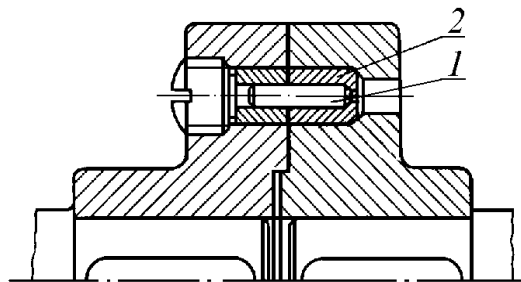


Рис. 4.62

До інших муфт відносяться такі, що складаються із комбінацій окремих муфт (найчастіше пружно – або жорсткокомпенсуючі муфти із запобіжними муфтами). Їх застосовують, коли немає можливості забезпечити потрібний характер з'єднання валів однією муфтою.

Вхідним параметром для розрахунку муфт є обертальний момент на з'єднаних валах.

4.6.4. Редуктори

Редуктором називається зубчастий, черв'ячний або зубчато – черв'ячний передавальний механізм, виконаний і у закритому корпусі і призначений для зниження кутової швидкості, а отже, підвищення обертального моменту.

На відміну від редуктора, механізм, призначений для підвищення кутової швидкості (відповідно до зниження обертального моменту), називають *мультиплікатором* (прискорювачем).

Закритий корпус редуктора захищає механізм передачі від пороху і бруду, а також грає роль масляної ванни. Крім цього розміщення опор валів редуктора в одному жорсткому корпусі забезпечує стале відносне розташування осей валів, що дозволяє використовувати широкі колеса із малим модулем. А застосування малих модулів, в свою чергу, приводить до збільшення точності, тихохідності передачі і до зменшення її вартості. Добре змащування сприяє збільшенню зносостійкості і ККД передачі. Наявність корпуса надає також безпеку в роботі редукторів.

Ці безперечні переваги редукторів пояснюють їх широке застосування на відміну від відкритих передач, які використовують тільки в окремих специфічних випадках, коли застосування редукторів недоцільно або неможливо.

Редуктори класифікують:

– за видом передач — на *циліндричні* з паралельними осями валів (рис. 4.63, а), *конічні* з пересічними осями валів (рис. 4.63, б), *черв'ячні* з перехресними осями валів (рис. 4.63, в), *комбіновані* конічно – циліндричні, зубчасто – черв'ячні та ін.;

– за кількістю пар передач — на *одноступінчасті циліндричні* з прямозубими колесами при $u \leq 7$, з косозубими або шевронними колесами при $u \leq 10$ і $N \leq 50000 \text{ KВт}$, *одноступінчасті конічні* з прямими, косими і криволінійними зубами при $u \leq 5$ і $N \leq 100 \text{ KВт}$, *одноступінчасті черв'ячні* при $u = 8 \dots 80$ і $N \leq 50 \text{ KВт}$, *багатоступінчасті* (найчастіше дво – і триступінчасті).

Для двоступінчастих циліндричних редукторів $u \leq 50$, для триступінчастих $u \leq 160$. Треба нагадати, що загальне передаточне число багатоступінчастих передач дорівнює добуткові передаточних чисел окремих ступенів.

Тихохідний ступінь циліндричних двоступінчастих редукторів виконують прямозубим і косозубим, а швидкохідний – косозубим. При оптимальному розподілі загального передаточного числа між ступенями циліндричного редуктора рекомендується передаточне число наступного тихохідного ступеня брати на 20...40 % меншим, ніж попереднього швидкохідного. Цим досягають найменшої маси і розміру коліс усіх ступенів редуктора; поліпшуються умови мащення зачеплень і забезпечується повніше заповнення колесами внутрішнього об'єму корпуса редуктора.

Мащення зубчастих і черв'ячних редукторів зменшує втрати потужності на тертя в зачепленні і підшипниках, значно знижує спрацювання тертьових поверхонь, зменшує нагрівання передачі, знижує шум і захищає від корозії.

Частина четверта

Машення зубчастих і черв'ячних зачеплень в редукторах, які передають порівняно невеликі потужності при колових швидкостях, що не перевищують 12 м/с , здійснюють зануренням зубчастих або черв'ячних коліс (черв'яків) у масло, яке заливають у картер редуктора (для черв'ячних передач $v_s \leq 12 \text{ м/с}$).

У черв'ячних редукторах при коловій швидкості черв'яка $v_1 \geq 4 \dots 5 \text{ м/с}$ рекомендується черв'як розміщувати над колесом. При нижньому розміщенні черв'яка (під колесом) і $v_1 \geq 5 \text{ м/с}$ черв'як інтенсивно збовтує масло, що призводить до швидкого його старіння і погіршення машення.

Достатній такий рівень масла в корпусі редуктора, при якому забезпечено занурення циліндричного колеса на висоту зуба, а конічного – на всю довжину і висоту зуба. Звичайно глибина занурення для циліндричних зубчастих коліс дорівнює $(1 \dots 5)t_n$, а для конічних – $(0,5 \dots 1)b$. Об'єм масляної ванни приймають $\sim 0,4 \dots 0,8 \text{ л}$ масла на 1 кВт потужності редуктора.

В багатоступінчастих редукторах діаметри коліс не однакові, тому нормальне занурення у масло зубів коліс меншого діаметра приводить до глибшого, ніж зазначено, занурення зубів коліс більшого діаметра (з метою обмеження втрати потужності на розмішування мастильного матеріалу не рекомендується занурювати тихохідне зубчасте колесо на глибину більше як $\frac{1}{6}d_a$). У деяких випадках, щоб уникнути надмірного занурення коліс у масло, застосовують спеціальні мастильні шестірні, мастильні кільця, бризковики або роздільні мастильні ванни в корпусі редуктора.

У швидкохідних редукторах або в редукторах, які передають великі потужності, зачеплення передач змащують за допомогою насосів, що подають масло із картера редуктора безпосередньо в зону зачеплення.

Підшипники змащують рідким маслом, що надходить до них із загальної масляної ванни (картера) редуктора, розбризкуванням або, при малих швидкостях, пластичними мазями (солідол), які герметизують вузли тертя і добре заповнюють зазори.

Мастильний матеріал повинен мати *маслянистість* – здатність утворювати на поверхні тертя стійкі адсорбовані плівки і *в'язкість* – опір проти відносного зсуву шарів масла.

Рідке масло — основний мастильний матеріал. Воно має низький коефіцієнт внутрішнього тертя, легко надходить до місця машення, має охолоджувальну дію. Стандартом регламентовано наступні марки (залежно від кінематичної в'язкості при $50 \text{ }^\circ\text{C}$) індустриальних масел: И – 5А, И – 8А, И – 12А, И – 20А, И – 25А, И – 30А, И – 40А, И – 50А, И – 70А, И – 100А.

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. В чому полягає різниця між віссю і валом?
2. Наведіть основну класифікацію валів і галузь їх застосування.
3. Поясніть необхідність використання підшипників.
4. Наведіть класифікацію підшипників ковзання і галузь їх застосування.
5. Які переваги і недоліки мають підшипники ковзання у порівнянні із підшипниками кочення?
6. Наведіть класифікацію підшипників кочення і галузь їх застосування.
7. Поясніть принцип розрахунку радіальних підшипників кочення.
8. Як враховується осьова складова навантаження при розрахунках радіально – упорних підшипників?
9. Дайте визначення муфти і її основне призначення.
10. Назвіть основну класифікацію муфт і галузь їх застосування.
11. Поясніть призначення і принцип дії запобіжних муфт.
12. Дайте визначення редуктора. Чим редуктор відрізняється від мультиплікатора?
13. Які переваги мають редуктори порівняно із відкритими передачами?
14. Наведіть основну класифікацію редукторів.
15. Як здійснюється мащення механізму передачі в редукторах?

ЧАСТИНА V

ПІДЙОМНО-ТРАНСПОРТНІ МАШИНИ

5.1. Умови застосування підйомно-транспортних машин

5.1.1. Класифікація і характеристика вантажів

Вантажі класифікують по наступним ознакам: фізико-механічні властивості; способи навантаження та розвантаження; умови транспортування та кількість вантажів, що одночасно перевозяться.

Особливості сільськогосподарських вантажів полягають у тому, що протягом часу в них можуть проходити біологічні процеси, що змінюють їх якісні властивості та приводять до втрат при перевантаженнях та транспортуванні.

Способи проведення навантажувально-розвантажувальних робіт та транспортування також значно впливають на втрати, якість та тривалість послідуєчого зберігання сільськогосподарської продукції. Проведені дослідження показують, що 40-50% загальних втрат сільськогосподарської продукції пов'язано з процесами їх навантаження та транспортування. Ці втрати також залежать від виду тари, зручності укладання продукції в тару та в транспорт.

Всі вантажі діляться на тверді (зерно, мінеральні добрива), газоподібні (ацетилен, кисень) та рідинні (молоко, паливо, вода).

Найголовніша характеристика вантажів – їх щільність насипна (при вільному заповненні об'єму) та об'ємна (при різних ступенях ущільнення). По щільності вантажі поділяються на дуже легкі – до 300, легкі – від 300 до 600, середні – від 600 до 1100, важкі – від 1100 до 2000 та дуже важкі – від 2000 кг/м³.

Щільність силосу залежить від сорту кукурудзи, вологості, довжини різки, стиглості, способу та глибини закладки і може змінюватись в 1,5...3 рази.

Сипкі вантажі (зерно, сухий пісок) можуть самоущільнюватись або втрясатись. При цьому об'ємна щільність може збільшуватись на 5...15%.

Коефіцієнт використання вантажопідйомності визначають за формулою:

$$\psi = \frac{\gamma \cdot V}{G}, \quad (5.1)$$

де γ – щільність вантажу, кг/м³;

V – об’єм контейнера або кузова транспортного засобу, м³;

G – номінальна вантажопідйомність транспортного засобу або вантажопідйомника, кг.

По коефіцієнту використання вантажопідйомності всі вантажі поділяються на чотири класи, за якими розраховують оплату за їх перевезення.

Перший клас – $\psi=1$ (зерно, мінеральні добрива, пісок ...).

Другий клас – $\psi=0,71...0,99$ (комбікорм, пресоване сіно та солома ...).

Третій клас – $\psi=0,51...0,70$ (непресована солома...).

Четвертий клас – $\psi=0,50$ і менше (непресоване сіно...).

Важливими характеристиками при проектуванні та експлуатації підйомно-транспортної техніки служать: кут природного укосу, коефіцієнт тертя і коефіцієнт зсуву. Ними користуються при визначенні кутів нахилу кузовів при розвантаженні, стінок кузовів та бункерів.

Розрізняють кут природного укосу в спокої та русі. Для технічних розрахунків приймають кут природного укосу в русі рівним 70% від кута природного укосу в спокої. Кут природного укосу в спокої для зерна – 35°, картоплі – 25...35°, земля, пісок – 45°, мука – 55°. На величину кутів природного укосу суттєво впливає (зменшує) вібрація. Насипна куча зерна пшениці з кутом природного укосу 30...35° через 3 с після початку вібрації розтікається в кучу з кутом природного укосу менше 10°. У сільськогосподарських продуктів на відміну від ґрунтів кут природного укосу зі збільшенням вологості зростає.

Коефіцієнт тертя сипких вантажів залежить не тільки від властивостей самого вантажу, а й від властивостей матеріалу, з яким він дотикається при переміщенні. Розрізняють коефіцієнти тертя спокою та руху (динамічний). Для технічних розрахунків можна застосовувати залежність, що коефіцієнт тертя спокою та руху рівний 70...90% від коефіцієнту тертя спокою. Коефіцієнти тертя зерна по металу орієнтовно становить 0,32...0,47, зерна кукурудзи по металу – 0,25...0,57, зерна кукурудзи по гумі технічній – 0,54...0,62.

Коефіцієнт зсуву – відношення сили опору зсуву до суми сил тяжіння та зчеплення порції вантажу, що зсувається. Математично коефіцієнт зсуву визначають за формулою:

$$\operatorname{tg} \psi = P_c / (gG + P_{зч}) \quad (5.2)$$

де P_c – сила зсуву, Н;

$P_{зч}$ – сила зчеплення, Н.

Для силосу коефіцієнт зсуву орієнтовно становить 0,8...1,6, коефіцієнт внутрішнього тертя – 0,67...0,87. За цими даними можна бачити вплив ефекту зчеплення частинок силосу. На практиці це враховується при визначенні найкращих умов захвату силосу та гною і розрахунку робочих

органів. Досвід показує, що при відриві силосу опір в горизонтальному напрямку в два рази більше, ніж у вертикальному, при абсолютному значенні першого 5 кПа.

В процесі перевезення вантажі можуть пошкоджуватися внаслідок дії на них динамічних та статичних навантажень. Вид та ступінь пошкоджень залежать від щільності вантажу, пружності поверхні, розміру та форми частинок, коефіцієнта тертя та висоти падіння.

Картопля та цукровий буряк при навантаженні та розвантаженні ударяються об днище кузова та об однойменний вантаж. Дослідженнями встановлено, що допустима висота падіння картоплі на сталь становить 0,4 м, на дерево – 0,5 м, на резину – 0,75 м та на картоплю – 1,25 м. Допустима висота падіння цукрового буряку на сталь становить 0,3 м, на дерево – 0,4 м, на резину – 1,25 м та на цукровий буряк – 1,0 м. Перевищення висоти падіння може привести до пошкодження картоплі до 80%, а цукрового буряку – до 55%.

Швидкість падіння коренеклубнеплодів розраховують по формулі:

$$V = \sqrt{2gH}, \text{ м/с} \quad (5.3)$$

де H – висота падіння, м.

Швидкість співударяння приймають в межах 0,65...2,2 м/с. Пошкодження зменшується, якщо робочі органи покриті гумою.

По способу навантаження та розвантаження вантажі поділяються на штучні та тарні, навалочні, насипні та наливні.

По умовам перевезення та зберігання вантажі поділяють на звичайні та специфічні. До останніх відносяться негабаритні. Довгомірні, небезпечні та такі, що недовго зберігаються. При навантаженні-розвантаженні небезпечних вантажів потрібно особливо ретельно виконувати правила техніки безпеки.

5.1.2. Основи застосування підйомно-транспортних машин у сільському господарстві

Навантажувально-розвантажувальні та транспортні роботи пов'язані з технологічними операціями, що проводяться за принципом потоку. При цьому машини входять в склад поточної системи.

Об'єм транспортних та навантажувально-розвантажувальних робіт залежить від характеру, масштабу і особливостей вантажопотоку. Вантажопотік – це кількість вантажу, що переміщується за одиницю часу. Особливості вантажопотоку визначаються специфікою сільськогосподарського виробництва:

- цикл завершується календарним роком або сезоном;
- технологічні операції періодичні та безперервні, розташовані на

великій території;

- в перевантажувальних матеріалах протікають біологічні процеси.

До характеристики вантажопотоку відносяться: вид вантажу, кількість переміщень його за одиницю часу, маса одного вантажу, кількість переміщень (ходок) та перевантажень, шлях та характер переміщень.

До найбільш потужних вантажопотоків відносяться: збиральні – зерновий та овочевий; розподільчі – кормові на фермі, вивезенню гною та добрив. Процеси вантажопотоків оснащуються навантажувально-розвантажувальними та транспортними засобами.

Вантажопотік спостерігається і в окремо взятій машині: зерно-, буряко- та гноєнавантажувачах, між її складовими частинами: приймальною. Транспортувальною та розвантажувальною. Неперервність потоку та безвідмовність руху матеріалу, що транспортується, в заданому неперервному або порціонному ритмі забезпечують відповідною продуктивністю кожної наступної машини або її частини.

Продуктивність машини – кількість вантажу, що переміщується на задану відстань за одиницю часу при періодичному і неперервному вантажопотоці зі штучним та сипким вантажем, визначається відповідно по формулах:

$$P = 3600G/T ; \quad P = 3600G \cdot v/l ; \quad P = 3600\gamma \cdot F \cdot v, \quad (5.4)$$

де G – маса штучного вантажу, кг;

T – тривалість циклу, с;

v – швидкість переміщення, м/с;

γ – щільність вантажу, кг/м³;

F – площа перерізу потоку вантажу, м²;

l – відстань (крок) між вантажами, м.

Тривалість циклу – сума часу, що затрачується на окремі операції. В загальному вигляді тривалість циклу для підйомно-транспортних машин визначається по формулі:

$$T = t_z + t_p + t_{don} + \sum t_{nid} + \sum t_{nep} + \sum t_{nos} + \sum t_2 \quad (5.5)$$

де t_z , t_p , t_{don} – відповідно час на захват і розвантаження вантажу та допоміжне маневрування машини;

$\sum t_{nid}$, $\sum t_{nep}$, $\sum t_{nos}$, $\sum t_2$ – відповідно сумарний час на підйом і опускання, перенос, поворот, розгін та гальмування вантажу (t_2 приймають в межах 0,5...2 с на елементарний рух).

5.1.3. Класифікація підйомно-транспортних машин

Особливості сільськогосподарського виробництва та вантажів

Частина п'ята

обумовлюють різноманітність методів та прийомів їх перевезення та перевантаження.

Підйомно-транспортні машини можна поділити по наступним ознакам:

- по характеру переміщення вантажу – на машини періодичної (крани, навантажувачі) та неперервної дії (транспортери, навантажувачі, транспорт). Особливу групу складають машини наземного та підвісного транспорту, суміщаючи в собі підйом та переміщення вантажу;

- по призначенню – загального (крани, транспортери, автовантажувачі) та спеціального призначення (зерно навантажувачі, буряконавантажувачі, зерномети, скирдомети); вбудовані в складні машини (транспортери в комбайнах, елеватори в зерноочисних пунктах);

- по способу встановлення – стаціонарні, що встановлені нерухомо на фундаменті або в виробничому приміщенні (кран-балка в ремонтній майстерні), пересувні (транспортери на зернотоках), самохідні, що монтуються на трактори та автомобілі або мають власне шасі, навісні, що тимчасово навішуються на трактори та автомобілі (навантажувачі, волокуші).

Вибір способу та засобу для переміщення вантажу залежить від оптимальної технологічної схеми, процесу та умов сільськогосподарського виробництва. Цей вибір визначається родом та властивостями вантажу: характеристикою виробничого процесу; транспортними та навантажувальними роботами і їх взаємозв'язком з технологічними операціями; характером, напрямком і відстанню транспортування; способами захвату, подачі та вкладання вантажу; необхідною продуктивністю, джерелом енергії; безпечністю та зручністю обслуговування.

Ефективність використання підйомно-транспортні машин в сільському господарстві залежить від ритму та видів роботи: збирання, сімба, обслуговування тваринницьких ферм, що необхідно враховувати при проектуванні і виборі засобів механізації. Кінцеве рішення приймають на основі аналізу експлуатаційних та економічних показників: приведених затрат, довговічності та надійності роботи.

5.1.4. Техніко-економічні характеристики підйомно-транспортних машин

Виробничі процеси в рослинництві та тваринництві організують по системі потоку, неперервність яких забезпечується певним співвідношенням числа, продуктивності та часу роботи машин на окремих ділянках потоку.

Загальна ефективність потоку буде визначатися оптимальністю

взаємо розташування та взаємодії машин окремих ділянок і відповідністю техніко-економічних характеристик, і в тому числі, машин та механізмів, що забезпечують навантажувально-розвантажувальні та транспортні роботи.

Розрізняють наступні характеристики підйомно-транспортні машин: енергоємність, енергонасиченість, питома продуктивність, питома металоємність.

До найбільш важливих техніко-економічних характеристик підйомно-транспортні машин відносяться:

- коефіцієнт енергоємності

$$K_{енг} = N / П; \quad (5.6)$$

- коефіцієнт затрат енергії на одиницю маси вантажу, що переміщується на 1 м

$$K'_{енг} = N / П; \quad (5.7)$$

- коефіцієнт енергонасиченості

$$K_{енн} = N / G_o; \quad (5.8)$$

- коефіцієнт металоємності

$$K_{мг} = G / П \text{ або } K_{мг} = G_o / П \cdot L; \quad (5.9)$$

- коефіцієнт металоємності (його враховують в залежності від маси вантажу при розрахунках вантажопідйомників і навантажувачів)

$$K_{мг} = G_o / G, \quad (5.10)$$

де $П$ – продуктивність;

N – потужність;

G_o – маса машини;

G – маса одиночного вантажу;

L – довжина транспортування.

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. В чому заключаються особливості сільськогосподарських вантажів?
2. Як в залежності від щільності поділяються вантажі?
3. На які класи по коефіцієнту використання вантажопідйомності поділяються вантажі?
4. Які механіко-технологічні характеристики вантажів враховують

при проектуванні підйомно-транспортних машин?

5. Що таке вантажопотік?

6. По яким ознакам поділяються підйомно-транспортні машини?

7. Які техніко-економічні характеристики підйомно-транспортних машин відносяться до найбільш важливих?

5.2. Стрічкові транспортери

5.2.1. Призначення, класифікація і застосування

Транспортери, в яких рухома стрічка переміщує вантаж, що подається на її поверхню, називаються стрічковими.

Стрічкові транспортери по призначенню розрізняють на призначені для:

- горизонтального та малопохилого транспортування під кутом до 20% до горизонту (гладка стрічка);

- транспортування під кутом до 40% до горизонту (рифлена стрічка);

- вертикального та крутопохилого транспортування (спеціальна стрічка з планками, двострічкові, стрічково-трубчасті; з еластичними стрічками з пористої гуми – для вантажів, що легко пошкоджуються).

За напрямком траси транспортери поділяють на: прямолінійні та криволінійні. Для обслуговування криволінійних трас застосовують окремі секції транспортерів.

Стрічкові транспортери використовують як механізми, вбудовані в сільськогосподарські машини, так і і самостійно.

Стрічкові транспортери бувають: стаціонарні, переносні та пересувні (рухомі).

Стрічкові транспортери бувають: з проміжним розвантаженням та розвантаження через кінцевий барабан.

До складу стрічкового транспортеру входять: приводний барабан; натяжний барабан; стрічка, що огинає барабани; настил або роликові опори, які підтримують стрічку; завантажувальний ківш; розвантажувальний рукав; натяжний пристрій; привод, що складається з двигуна, редуктора, ланцюгової або пасової передачі; рама.

Крім того в склад транспортера можуть входити: механізм регулювання нахилу транспортера, механізм пересування, пристосування для очищення стрічки, гальмо для стопоріння стрічки на випадок виключення електроенергії.

Переваги стрічкових транспортерів: простота конструкції, надійність в роботі, висока продуктивність і невелика питома витрата енергії.

Недоліки: складність роботи при великому куті нахилу робочої вітки до горизонту і незручність проміжного розвантаження.

У сільському господарстві стрічкові транспортери застосовуються на механізованих тваринницьких фермах, у складах, на зерноочисних токах.

5.2.2. Транспортуючі стрічки

Стрічка є тяговим і несучим органом стрічкового транспортера. Вона сприймає та передає рухаючу (тягову) силу, яка переборює всі опори, що виникають при переміщенні вантажу.

До стрічок, відповідальному і дорогому елементу транспортера, висувають наступні вимоги: мала гігроскопічність, високі гнучкість і міцність, зносостійкість і мале відносне видовження. Всім цим вимогам відповідає прогумована стрічка, яка є найбільш поширеною. Крім того стрічки бувають: конопляні, бавовняні, шерстяні та сталеві.

Прогумовані стрічки виготовляють з кількох шарів тканини, проклеєних сировою гумою та про вулканізованих під пресом. Тканина надає стрічці механічної міцності та дає можливість передавати значні тягові зусилля. Поверхня стрічки покривається шаром гуми, яка запобігає стиранню тканини та оберігає її від дії вологи. Товщина гуми з робочої сторони 1,5...6 мм, а з опорної – 1...2 мм. Товщина гумових прошарків звичайно дорівнює 0,25 мм.

В залежності від матеріалу тканини стрічки мають такі характеристики, що приведені в таблиці 5.1.

Прогумовані стрічки бувають загального і спеціального призначення. Стрічки загального призначення використовують для роботи при температурах від +60 до –20°C. При більш високій температурі гума втрачає свою еластичність і стає крихкою, а при більш низькій відбувається її ствердіння і у гумі з'являються тріщини. До стрічок спеціального призначення відносяться: теплостійкі, морозостійкі, маслостійкі, харчові та ін.

Оскільки стрічка найдорожчий елемент транспортера (до 20...40% його вартості), тому постійно потрібно стежити за її правильною експлуатацією. Особливо ретельно треба з'єднувати її кінці. З'єднання повинно бути міцним, але одночасно не повинно знижувати гнучкість і збільшувати її масу в місцях з'єднання. Кращим способом з'єднання є склеювання косими східчастими стиками з наступною вулканізацією. Застосовують також заклепочні з'єднання; з'єднання за допомогою гачків; шарнірні з'єднання та з'єднання за допомогою металевих затискачів.

Таблиця 5.1 – Характеристики стрічок

Матеріал стрічки	Марка	Межа міцності на розрив однієї прокладки $[K_p]$, кН/м	Діаметр привідного барабана D_6 , м
Бавовнянопаперова (белтінг)	Б-820	55	$(0,125...0,15) \cdot i$
Бавовнянопаперова (особливо міцний белтінг)	ОПБ-5 та ОПБ-72	115	$(0,17...0,18) \cdot i$
Лавсано-бавовнянопаперова	ЛХ-120	120	$(0,17...0,18) \cdot i$
Капронова		150-	$(0,16...0,2) \cdot i$
Анідна	К-4-3	200	$(0,16...0,2) \cdot i$
	А-12-3	300	
Примітка. i – кількість прокладок			

5.2.3. Визначення ширини стрічки

Ширину стрічки транспортерів, які переміщують вантаж суцільним рівномірним шаром, визначають, виходячи з формули визначення продуктивності транспортера:

$$Q = \gamma \cdot F \cdot v, \text{ кг/с} \quad (5.11)$$

де γ – щільність вантажу, кг/м^3 ;

v – швидкість переміщення вантажу, м/с ;

F – площа перерізу потоку вантажу, м^2 .

Орієнтовно швидкість переміщення вантажу (руху стрічки) становить $1,0...4,5$ м/с . Більша швидкість приймається в металевих транспортерах.

Визначаючи ширину стрічки плоскострічкового транспортеру, виходять з того, що поперечний переріз шару вантажу, який лежить на стрічці, – трикутник. Ширину шару вантажу, щоб не допустити звалювання його за край стрічки, визначаючи за формулою:

$$b = 0,8 \cdot B, \text{ м} \quad (5.12)$$

де B – ширина стрічки, м.

Поперечний переріз вантажу, який знаходиться на рухомій стрічці, розміщено до горизонту під кутом, величина якого визначається за

формулою:

$$\varphi = (0,4...0,6) \cdot \varphi_0, \text{ град} \quad (5.13)$$

де φ_0 – кут природного укосу вантажу в стані спокою (для зернових 25...45°).

Менші значення кута беруть при більших швидкостях і при спиранні стрічки на роликові опори, більші – при малих швидкостях і при спиранні стрічки на настил.

Якщо врахувати затуплення вершини шару вантажу і нахил транспортера до горизонту, то площу поперечного перерізу при плоскій стрічці визначають за формулою:

$$F = C_0 \frac{b \cdot h}{2} = C_0 \left(\frac{b}{2}\right)^2 \cdot \operatorname{tg} \varphi = 0,16 C_0 \cdot B^2 \cdot \operatorname{tg} \varphi, \text{ м}^2 \quad (5.14)$$

де C_0 – коефіцієнт, що враховує затуплення вершини шару і нахил транспортера до горизонту (при $\beta = 0...10^\circ$, $C_0 = 0,98$; при $\beta = 10...15^\circ$, $C_0 = 0,95$; при $\beta = 15...20^\circ$, $C_0 = 0,90$; при $\beta = > 20^\circ$, $C_0 = 0,85$).

Кут нахилу транспортера до горизонту треба приймати на 4...5° меншим від кута тертя вантажу об стрічку транспортера під час руху, тобто

$$\beta = \rho - (4...5^\circ), \text{ град.} \quad (5.15)$$

де β – кут нахилу транспортеру до горизонту;
 ρ – кут тертя вантажу об стрічку під час руху.

$$\rho = \operatorname{arctg} f, \text{ град.} \quad (5.16)$$

де f – коефіцієнт тертя вантажу об стрічку під час руху.

$$f = (0,7...0,9) f_0, \quad (5.17)$$

де f_0 – коефіцієнт тертя вантажу об стрічку в стані спокою (для зерна по гумі орієнтовно 0,36...0,66).

Підставивши значення поперечного перерізу з формули (5.14) в формулу (5.11) отримаємо:

$$Q = 0,16 C_0 \cdot B^2 \cdot \operatorname{tg} \varphi \cdot v \cdot \gamma, \text{ кг/с.} \quad (5.18)$$

З цієї формули визначимо ширину плоскої стрічки:

$$B = 10 \sqrt{\frac{Q}{16 \cdot C_0 \cdot v \cdot \gamma \cdot \operatorname{tg} \varphi}}, \text{ м} \quad (5.19)$$

Площа поперечного шару вантажу, що лежить на жолобоподібній стрічці, складається з трапеції та трикутника. Кут нахилу бокових сторін стрічки звичайно дорівнює 20°, ширина середньої частини стрічки дорівнює 0,4B і ширина шару вантажу дорівнює 0,8B. Отже площа

Частина п'ята

поперечного перерізу шару вантажу, що лежить на жолобоподібній стрічці визначається за формулою:

$$F = 0,0436 \cdot B^2 + 0,16C_0 \cdot B^2 \cdot \operatorname{tg} \varphi, \text{ м}^2 \quad (5.20)$$

Підставивши значення поперечного перерізу з формули (5.19) в формулу (5.11) отримаємо ширину жолобоподібної стрічки:

$$B = 10 \sqrt{\frac{Q}{v \cdot \gamma (4,36 + 16 \cdot C_0 \cdot \operatorname{tg} \varphi)}}, \text{ м} \quad (5.21)$$

Ширина стрічки повинна бути заокруглена до стандартного розміру.

5.2.4. Пристрій для підтримування стрічки. Барабани. Натяжні пристрої та привід

Стрічка транспортера звичайно підтримується плоскими (настилами) або роликівими опорами. Плоскі опори дешевші і простіші від роликівих, але мають підвищений знос стрічки і більші витрати енергії. Роликові опори найчастіше виготовляють з сталевих труб. Маточини роликів опираються на підшипники кочення. Діаметри роликів (орієнтовно 60...108 мм) вибирають так, щоб їх швидкість обертання не перевищувала 300 об/хв.

Барабани бувають приводні, натяжні та відхиляючі. Привідний барабан приводить у рух стрічку і надає їй тягового зусилля, яке потрібне для подолання всіх опорів. Натяжний барабан змінює траєкторію руху стрічки і забезпечує зчеплення стрічки з приводним барабаном. Відхиляючі барабани змінюють напрям руху стрічки. Барабани здебільшого відливають з сірого чавуну або зварюють з листової сталі.

У транспортерів, що застосовуються в сільському господарстві, розрахунковий діаметр округлюють до стандартного, а довжина повинна бути більшою від ширини стрічки на 10...12 см. Один з барабанів для центрування стрічки виготовляють опуклим.

У стрічці крім напружень розтягу, виникають напруження згину, які збільшуються із зменшенням діаметра та із збільшенням товщини стрічки.

Для транспортерів з прогумованими стрічками діаметри барабанів визначають за формулою:

$$D = k \cdot i, \text{ мм} \quad (5.22)$$

де k – коефіцієнт пропорціональності. Для приводних барабанів стаціонарних транспортерів $k = 100...125$, для натяжних – $k = 80...100$. Для приводних барабанів пересувних та переносних транспортерів $k = 80...120$, для натяжних – $k = 60...100$;

i – кількість прокладок.

Зменшення діаметра барабана призводить до зменшення строків служби стрічки.

Для збільшення сили зчеплення стрічки з ободом приводного барабана до його зовнішньої поверхні прикріплюють гуму.

Приводні барабани кріплять на валах за допомогою шпонок, а натяжні та відхиляючі монтують на обертових та нерухомих осях.

Щоб отримати мінімальний натяг стрічки, рекомендується приводний барабан розміщувати біля розвантажувального кінця несучої вітки транспортера. Якщо приводний барабан розташувати на холостій вітці стрічки, то внаслідок додаткових перегинів зменшиться строк її служби.

Щоб створити між стрічкою і приводним барабаном достатнє зчеплення, а також зменшити провисання стрічки і компенсувати її видовження внаслідок витягання, застосовують натяжні пристрої. Натяжні пристрої бувають з періодичним і автоматичним регулюванням натягу стрічки. Натяжні пристрої найчастіше бувають гвинтовими: з тягнучим та штовхаючим гвинтом.

5.2.5. Завантажувальні і розвантажувальні пристрої

Конструкція завантажувальних пристроїв залежить від характеру транспортованих вантажів та способу завантажування. Штучні вантажі завантажують за допомогою різних напрямних спусків, а при невеликій швидкості стрічки їх укладають на неї безпосередньо. Сипкі вантажі завантажують за допомогою ковша з напрямним лотком, який повинен формувати на поверхні стрічки стійкий і рівномірний шар вантажу вждовж і впоперек неї.

Як правило вантаж поступає на стрічку поблизу від кінцевого барабана, але іноді і в проміжних пунктах робочої вітки. В останньому випадку місця завантажування обладнують стаціонарними або пересувними завантажувальними ковшами.

Довжина бортів лотка дорівнює шляху сковзання вантажу по стрічці. Шлях сковзання сипкого або дрібношматкового вантажу по стрічці визначається за формулою:

$$l = \frac{v_c^2 - v_o^2}{2g(f \cdot \cos \beta - \sin \beta)}, \text{ м} \quad (5.23)$$

де v_o – початкова швидкість руху вантажу;

v_c – кінцева швидкість вантажу або швидкість стрічки;

g – прискорення вільного падіння;

f – коефіцієнт тертя вантажу об стрічку;

β – кут нахилу робочої поверхні стрічки транспортера до

горизонту.

Сили опору руху та сили натягу визначимо для транспортера представленого на рисунку 5.1.

Силу опору руху вантажу сипкого або дрібношматкового вантажу, яка виникає в період завантаження стрічкового транспортера, при безперервній подачі вантажу на стрічку, визначається за формулою:

$$W_1 = \frac{f \cdot Q(v_c - v_o) \cos \beta}{f \cdot \cos \beta - \sin \beta}, \text{ Н} \quad (5.24)$$

де Q – продуктивність транспортера.

Силу опору руху вантажу штучного вантажу, яка виникає в період завантаження стрічкового транспортера визначається за формулою:

$$W_1 = f \cdot m' \cdot g \cdot \cos \beta, \text{ Н} \quad (5.25)$$

де m' – маса одиночного вантажу.

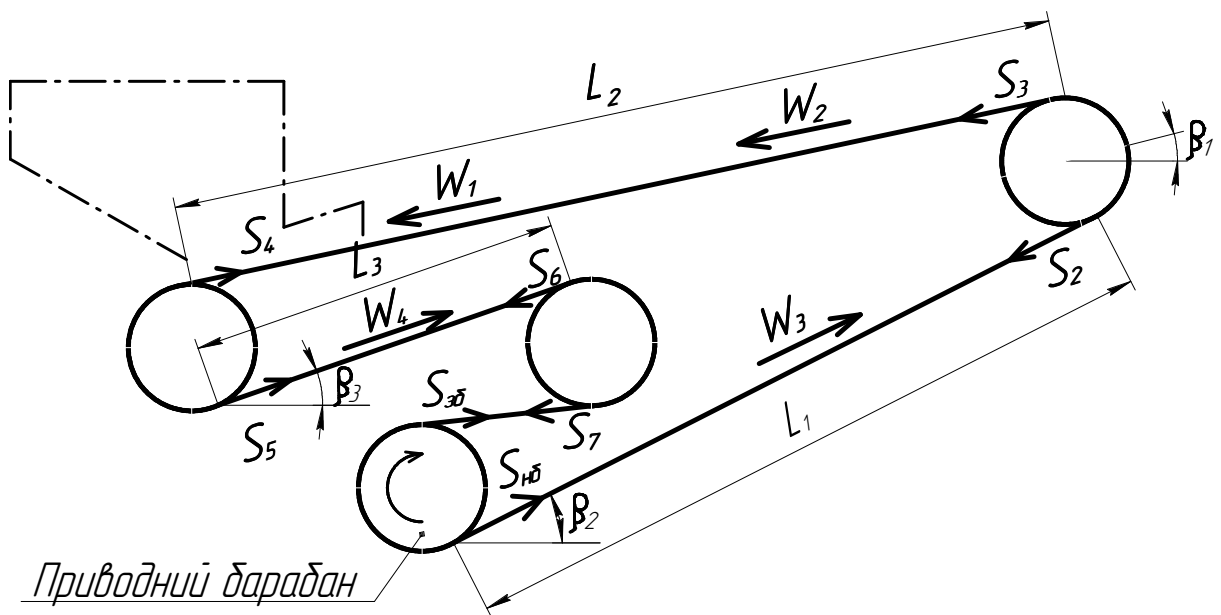


Рис. 5.1 Схема стрічкового транспортера для визначення сил опору руху та сил натягу

Розвантаження стрічкових транспортерів відбувається з кінцевого барабана, а іноді і за допомогою спеціальних пристроїв в середній частині робочої вітки.

Сила опору при розвантаженні щитів визначається за наближеною формулою:

$$W_p = 2,7q_s \cdot g \cdot B, \text{ Н} \quad (5.26)$$

де q_g – погонна маса вантажу, кг/м;

B – ширина стрічки, м.

При розвантаженні транспортера через кінцевий барабан сила опору при розвантаженні рівна нулю.

Сили опору руху стрічки. Сила опору пересування вантажу у робочій вітці тягового органу визначається за формулою:

$$W_2 = (q_g + q_m)L_2 \cdot g(w_s \cdot \cos \beta_1 + \sin \beta_1), \text{ Н} \quad (5.27)$$

де q_g і q_m – погонна маса вантажу і стрічки, кг/м;

L_2 – довжина робочої вітки стрічки, м;

β_1 – кут нахилу робочої поверхні стрічки транспортера до горизонту;

w_s – коефіцієнт опору руху стрічки.

Сили опору руху ділянок холостої вітки визначаються за такими формулами:

$$W_3 = q_m \cdot L_1 \cdot g(w_s \cdot \cos \beta_2 - \sin \beta_2), \text{ Н} \quad (5.28)$$

$$W_4 = q_m \cdot L_3 \cdot g(w_s \cdot \cos \beta_3 - \sin \beta_3), \text{ Н} \quad (5.29)$$

Якщо стрічка опирається на плоскі напрямні, то коефіцієнт опору руху дорівнює коефіцієнту тертя, тобто $w_s=f$. Коли стрічка підтримується роликками, то $w_s=f'$ – зведений коефіцієнт тертя роликкової опори. Для транспортерів з роликковими опорами, змонтованими на підшипниках кочення $w_s = 0,06...0,10$, а на дерев'яних настилах – $w_s = 0,35...0,60$.

Коли прямолінійна холоста вітка тягового органу не опирається, а провисає, для неї $w_s = 0$ і формули (5.28) та (5.29) набудуть такого вигляду:

$$W_3 = -q_m \cdot L_1 \cdot g \cdot \sin \beta_2, \text{ Н} \quad (5.30)$$

$$W_4 = -q_m \cdot L_3 \cdot g \cdot \sin \beta_3, \text{ Н} \quad (5.31)$$

Рушійна сила попередньо виражається за сумою всіх сил опору руху з урахуванням втрат на всіх барабанах, крім приводного за формулою:

$$P_0 = c \cdot \sum W, \text{ Н} \quad (5.32)$$

де c – коефіцієнт, який враховує втрати на всіх барабанах (крім приводного). Сюди входять втрати на перегинання стрічки (жорсткість) і опір тертя у підшипниках при обертанні барабана.

$$c = c_1^n \cdot c_2^m, \quad (5.33)$$

де n – кількість барабанів з кутом обхвату $\geq 180^\circ$;

m – кількість барабанів з кутом обхвату $\leq 90^\circ$.

Для одного барабана з кутом обхвату $\geq 180^\circ$ $c_1=1,1...1,05$, а для

одного барабана з кутом обхвату $\leq 90^\circ$ $c_2^I = 1,05 \dots 1,02$.

Щоб за рахунок натягу забезпечити достатнє зчеплення стрічки з приводним барабаном, розраховують натяг у набігаючій на приводний барабан вітці за формулою:

$$S_1 = S_{нб} = K_0 \frac{P_0 \cdot e^{\alpha f}}{e^{\alpha f} - 1}, \text{ Н} \quad (5.34)$$

де e – основа натуральних логарифмів;

$K_0 = 1,0 \dots 1,4$ – коефіцієнт запасу натягу;

α – кут обхвату стрічкою приводного барабана, рад;

f – коефіцієнт тертя – зчеплення стрічки з барабаном.

Натяг у всіх характерних перерізах стрічки визначають методом обходу контуру стрічки проти її руху за формулами:

$$\begin{aligned} S_2 &= S_{нб} - W_3; & S_3 &= \frac{S_2}{c_1^I}; & S_4 &= S_3 - W_1 - W_2 - W_p; \\ S_5 &= \frac{S_4}{c_1^I}; & S_6 &= S_5 - W_4; & S_7 &= \frac{S_6}{c_1^I} = S_8 = S_{зб} \end{aligned} \quad (5.35)$$

Величина рушійної сили (колової сили на приводному барабані) уточняється за формулою:

$$P_0 = S_{нб} - S_{зб}, \text{ Н} \quad (5.36)$$

У тому випадку, коли холоста вітка стрічки провисає, визначення натягів у характерних перерізах стрічки роблять методом обходу контуру стрічки за її рухом.

Після визначення рушійної сили перевіряють можливість передавання її за рахунок зчеплення стрічки з приводним барабаном за формулою:

$$e^{\alpha f} \geq \frac{S_{нб}}{S_{зб}} \quad (5.37)$$

5.2.6. Розрахунок потужності привода. Розрахунок стрічки на міцність

Щоб перебороти всі опори руху тягового органу (з урахуванням опорів, що виникають на приводному барабані і його підшипниках), до вала приводного барабана необхідно підвести потужність, яка розраховується по формулі:

$$N_m = v_c \cdot P_0 \cdot c_0, \text{ кВт} \quad (5.38)$$

де v_c – швидкість стрічки, м/с;

P_0 – рушійна сила (сила тяги у стрічці), н;

$c_0 = 1,1...1,3$ – коефіцієнт, який враховує опір на приводному барабані (жорсткість стрічки і тертя у підшипниках).

Потужність, що відбирається від вала двигуна, визначається за формулою:

$$N_d = K \frac{N_m}{1000 \cdot \eta_m}, \text{ кВт} \quad (5.39)$$

де $K = 1,1...1,25$ – коефіцієнт, що враховує короточасне перевантаження в момент пуску транспортера під навантаженням;

η_m – к.к.д. трансмісії, який береться для попередніх розрахунків 0,6...0,95.

За цією потужністю підбирають двигун.

Розрахунок стрічки проводять перевіркою запасу міцності за формулою:

$$n_0 = \frac{i \cdot B \cdot [K_p]}{S_{\max}} \leq [n_0], \quad (5.40)$$

де $[K_p]$ – межа міцності на розрив однієї прокладки;

S_{\max} – найбільший натяг стрічки.

Допустимий запас міцності для стрічок: бельтингових 9...11,5; синтетичних 9...10 та гумотросових 8...9.

Відповідність вибраного барабана перевіряють по питомому тиску за формулою:

$$p = \frac{S_{нб} - S_{зб}}{D_0 \cdot B} \leq [p] = 0,4 \text{ МПа} \quad (5.41)$$

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Як визначається ширина стрічки?
2. Як визначається діаметр приводного барабана?
3. Які сили опору руху стрічки слід враховувати при визначенні потрібної потужності приводного двигуна?
4. Як перевірити можливість передавання рушійної сили за рахунок зчеплення стрічки з приводним барабаном?
5. Яку частину вартості стрічкового транспортера становить вартість тягового органу?
6. Який інтервал робочих температур допускають прогумовані стрічки загального призначення?
7. Яким конструктивним прийомом забезпечується центрування

стрічки на барабані?

8. З якою метою в конструкціях стрічкових транспортерів застосовують відхиляючий барабан?

9. Як змінюється сила опору руху стрічки, коли замість настилів застосувати роликові опори?

10. Яка властивість вантажу визначає максимально допустимий кут нахилу стрічкового транспортера до горизонту?

5.3. Ковшові елеватори

5.3.1. Призначення, будова і класифікація ковшових елеваторів

Ковшові елеватори (норії) призначені для вертикального або крутопохилого переміщення вантажу за допомогою ковшів, прикріплених до безперервно рухомого гнучкого тягового органу.

Ковшовий елеватор складається з гнучкого тягового органу з прикріпленими до нього ковшами; головки з приводним барабаном (зірочкою) і зупинником; трансмісії з двигуном; башмака з напрямним барабаном (зірочкою) і натяжним пристроєм; завантажувального ковша з регулювальною заслінкою; кожуха, що захищає робочий орган елеватора.

Ковшові елеватори бувають: вертикальні і крутопохилі; стаціонарні, пересувні, переносні і вбудовані в різноманітні машини; з стрічками або ланцюговим тяговим органом, з розставленими і зімкнутими ковшами

Перевагою ковшових елеваторів є малі габаритні розміри у поперечному перерізі. Можливість подавати вантажі на велику висоту (до 45...60 м і вище), великий діапазон продуктивності (1...20 м³/год для сільськогосподарського виробництва); недоліком – необхідність завантажувати ковші до певного рівня, бо переповнення їх викликає передчасний початок розвантаження, тобто "зворотний осип" вантажу, складність конструкції і чутливість до перевантаження.

У сільськогосподарському виробництві ковшові елеватори застосовують: на зерноочисних токах, у млинах і крупорушках, на комбікормових і маслоробних заводах тощо. Вони часто входять до складу механізмів сільськогосподарських машин.

5.3.2. Ковші і основні вузли елеватора

Ковші бувають: глибокі (для добре сипких матеріалів), мілкі (для поганосипких матеріалів), гострокутні (для тихохідних елеваторів) та нестандартні. Ковші виготовляють з листової сталі, гуми та пластмаси.

Форма ковша визначається основними параметрами: кутом черпання

α , кутом зрізу β , шириною B , вильотом A та глибиною C (рис. 5.2). Ковші кріплять болтами з потайними головками і заклепками, пластмасові та гумові – спеціальним клеєм.

Тяговими органами в елеваторах служать стрічки та ланцюги. Стрічки переважно застосовують в швидкохідних елеваторах для зернових, мучних та пильовидних матеріалів. Для шматкових вантажів, а також при

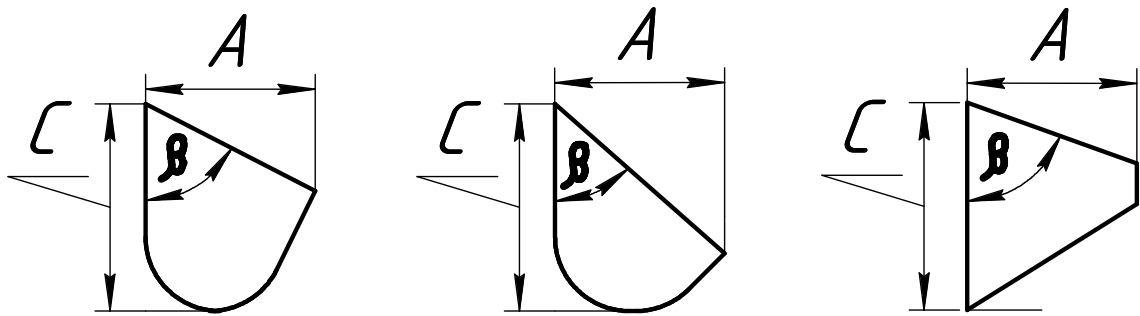


Рис. 5.2 Ковші

похилому транспортуванні частіше застосовують ланцюги (один або два).

Нижня частина ковшового елеватора, яка називається башмаком, складається з натяжної зірочки або натяжного барабана, змонтованого на осі, яка закріплена у повзунках. Повзунки мають можливість переміщатися вздовж своїх напрямних за допомогою натяжних гвинтів. Башмак має закруглене дно, що забезпечує краще зачерпування вантажу ковшами. До складу башмака входить завантажувальний ківш з регулюючою заслінкою, що забезпечує подачу необхідної кількості вантажу.

У нижній частині башмака обладнано оглядовий люк для очищення башмаку.

Верхня частина ковшового елеватора, що називається головою, складається з приводного барабану або зірочки і зупинника, який запобігає зворотньому руху тягового органу при зупиненні його руху в бік підйому вантажу. Вал барабана монтується на сферичних підшипниках.

5.3.3. Завантаження і розвантаження ковшів

Робочий процес ковшового елеватора складається з трьох основних етапів: заповнення ковшів вантажем, транспортування вантажу від башмака до головки та розвантаження ковшів.

Є чотири способи завантаження ковшів:

- зачерпування з відкритої кучі (для транспортування легко сипких вантажів):

- зачерпування з башмака;
- наповнення ковшів на шляху їх прямолінійного руху;
- та зачерпування вантажу з башмака з наступним довантаженням ковшів на шляху їх прямолінійного руху.

Останній спосіб називається змішаним, і застосовується найчастіше.

При першому способі завантаження сила тертя ковшів об вантаж дуже велика, що обмежує його застосування.

При зачерпуванні вантажу з башмака завантаження елеватора необхідно проводити проти ходу стрічки. Щілина завантажувального ковша повинна бути розміщена вище від центра нижнього барабана, в протилежному випадку вона може бути завалена вантажем, що вилітає з ковшів під дією відцентрової сили, і подача вантажу в башмак буде переривчастою. Якщо завантажувальний ківш розміщують з боку низхідної вітки тягового органу, то це приводить до збільшення роботи сил тертя в період завантаження. Це відбувається тому, що ковші переміщуються в масі вантажу і пересувають його в башмаку на більшу відстань, ніж в попередньому випадку.

При третьому способі завантаження усунення попадання вантажу в башмак досягається шляхом встановлення зімкнутого розміщення гострокутних ковшів або застосуванням спеціального завантажувального пристрою (порційного живильника).

При змішаному завантаженні щілина завантажувального ковша повинна розміщуватися вище центра нижнього барабана настільки, щоб вантаж, надходячи в башмак, довантажував ковші які проходять поблизу завантажувальної щілини. Цей спосіб дає можливість одержувати будь-яке заповнення ковшів.

Під час прямолінійного руху ковші розгойдуються, що може призвести до часткового висипання з них вантажу. Щоб уникнути цього, тяговий орган повинен мати достатній натяг.

Наповнення ковшів не повинно виходити за граничний рівень, тому що зайва частина вантажу під час обігу ковшами верхнього барабана (зірочки) передчасно розвантажиться і зсиплеться в башмак через кожух висхідної або низхідної віток транспортера.

Якщо ківш з вантажем рухається навколо шківів (зірочки), то на вантаж, крім сили тяжіння $G = m \cdot g$, буде діяти відцентрова сила, яка визначається за формулою:

$$P_c = m \cdot r \cdot \omega_0^2, \text{ Н} \quad (5.42)$$

де ω_0 – кутова швидкість обертання приводного вала елеватора;

m – маса вантажу, що знаходиться в ковші;

r – радіус кола, по якому рухається вантаж;

g – прискорення вільного падіння.

Рівнодіючі цих сил у кожному миттєвому положенні ковша за розміром і напрямом не однакові. Проте, якщо продовжити вектори рівнодіючих до перетину з вертикаллю, яка проходить через центр барабана (зірочки), то вони перетнуться цю вертикаль в одній і тій же точці, яка називається полюсом. **Відстань від полюса до центра барабана (зірочки) називається полюсною відстанню.**

Величина полюсної відстані визначається з подібності трикутників АОВ та АСГ (рис.5.3):

$$\frac{l}{r} = \frac{G}{P_c} = \frac{mg}{m \cdot r \cdot \omega_0^2} = \frac{g}{r \cdot \omega_0^2}, \quad (5.43)$$

звідки при $\omega = \frac{\pi \cdot n}{30}$

$$l = \frac{g}{\omega_0^2} = \frac{895}{n^2}, \text{ м} \quad (5.44)$$

де n – число обертів приводного барабана (зірочки), об/хв.

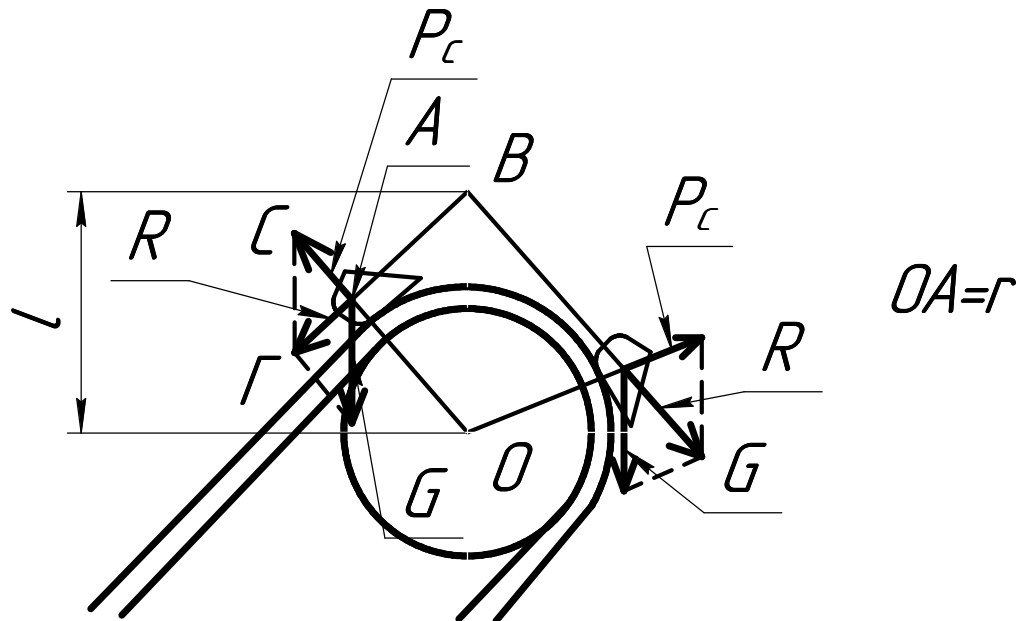


Рис. 5.3 Розрахунок полюсної відстані

З рівняння (5.44) виходить, що величина полюсної відстані залежить тільки від числа обертів приводного барабана (зірочки).

Залежно від величини полюсної відстані розрізняють три режими розвантаження ковшів: відцентровий, відцентрово-самопливний і самопливний.

Відцентрове розвантаження характеризується малою величиною

Частина п'ята

полюсної відстані $l \leq R_g$ (де R_g – радіус кола, дотичного до внутрішньої стінки ковша). Цей радіус для ковшових елеваторів визначається за формулою:

$$R_g = R_o + \delta, \text{ м} \quad (5.45)$$

де R_o – половина діаметра барабана, м;
 δ – товщина стрічки, м.

У даному випадку на розвантаження ковшів більше впливають відцентрові сили, ніж сили тяжіння, а тому частки вантажу пересуваються до передньої стінки ковша і викидаються через зовнішнє ребро ковша. Рекомендується, щоб

$$l = (0,9 \dots 1,0) R_g, \text{ м} \quad (5.46)$$

Відцентрово-самопливне розвантаження (змішане) відбувається при $R_g < l < R_o$ (де R_o – радіус кола, що проходить через зовнішні ребра ковшів). У цьому випадку частки вантажу, що знаходяться за колом, проведеним з центра барабана через полюс, переміщуються до передньої стінки ковша і викидаються під дією відцентрових сил через зовнішнє ребро ковша. Частки, що знаходяться всередині цього кола, переміщуються до задньої стінки ковша і викидаються також під дією відцентрової сили, але із задньої стінки ковша.

Самопливне розвантаження відбувається при $l > R_o$. У цьому випадку сили тяжіння впливають на розвантаження більше, ніж відцентрові сили, а тому частки вантажу переміщуються до задньої стінки ковша і викидаються або сповзають по ній.

Вид розвантаження і пов'язані з ним траєкторії руху частинок вантажу вимагають відповідного профілю кожуха головки.

Порядок побудови профілю кожуха для відцентрового і відцентрово-самопливного розвантаженнях (рис.5.4) наступний.

Найвищу точку підйому вантажу знаходять за формулою:

$$H = \frac{R_o^2 + l^2}{2l}, \text{ м} \quad (5.47)$$

Характерну точку начала контуру кожуха знаходять визначенням можливої висоти підйому вантажу при русі його вверх по інерції за формулою:

$$h = \frac{R_o^2}{2l}, \text{ м} \quad (5.48)$$

Відстань від центра барабана до найближчої точки прольоту вантажу на рівні горизонтальної осі барабана знаходять за формулою:

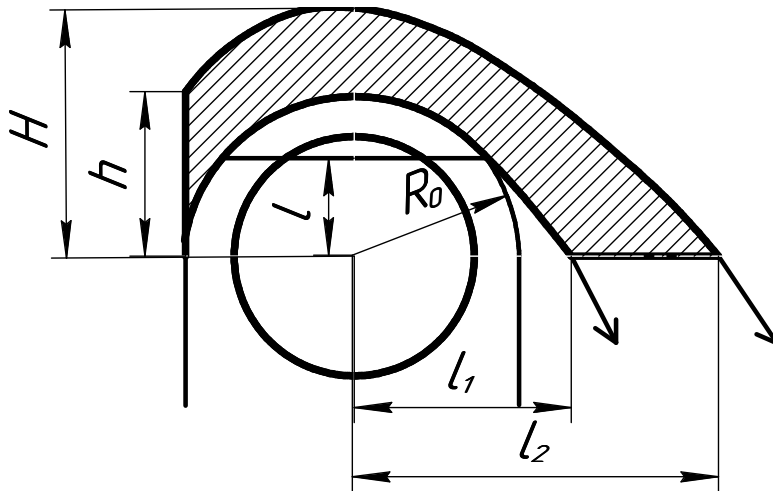


Рис. 5.4 Кожух для відцентрового і відцентрово-самопливного розвантаження

$$l_1 = \sqrt{R_0^2 + l^2}, \text{ м} \quad (5.49)$$

Відстань від центра барабана до найдальшої точки польоту вантажу на рівні горизонтальної осі барабана знаходять за формулою:

$$l_2 = \sqrt{R_0^2 + l^2} \cdot \frac{R_0}{l}, \text{ м} \quad (5.50)$$

На практиці зовнішній контур кожуха часто виконують з прямолінійних ділянок, що обходять зовнішню теоретичну параболу.

Траєкторії польоту частинок вантажу з відцентровим розвантаженням будують аналогічно, але контури головки виконують по бараболі, що пересікає параболи траєкторії руху частинок вантажу так, що кут між дотичними в цих точках пересікання складає 14...18°. Це сприяє кращому відбиванню частинок вантажу від стінок кожуха головки.

5.3.4. Силовий розрахунок елеватора

Продуктивність елеватора визначають за формулою:

$$Q = \frac{i \cdot \psi}{s} v \cdot \gamma, \text{ кг/с} \quad (5.51)$$

де i – місткість ковша, м³;

ψ – коефіцієнт заповнення ковшів;

v – швидкість тягового органу, м/с;

Частина п'ята

s – крок розміщення ковшів, м.

Потужність в елеваторі витрачається на подолання опору від транспортування вантажу, руху ходової частини (холостого ходу), від зачерпування або завантаження вантажу. Оскільки визначити потужність можливо тільки дослідним шляхом, то орієнтовно потужність визначають за формулою:

$$N = Q \cdot H \left(1,15 + \frac{k}{\gamma} \right), \text{ кВт} \quad (5.52)$$

де H – висота піднімання вантажу, м;

$k = 1,15 \dots 1,5$ для стрічкових та $0,75 \dots 1,05$ для ланцюгових елеваторів.

Потужність на валу двигуна для елеваторів визначають за формулою:

$$N_o = \frac{k_o \cdot N}{\eta}, \text{ кВт} \quad (5.53)$$

де $k_o = 1,2 \dots 1,7$ – коефіцієнт запасу потужності, що враховує перевантаження при пуску;

$\eta = 0,6 \dots 0,85$ – коефіцієнт корисної дії.

Сили опору руху тягового органа ковшового елеватора та сили натягу визначаємо для норії представлені на рисунку 5.5.

Силу опору руху тягового органу в момент зачерпування вантажу визначають за формулою:

$$W_1 = W_1' + W_1'' = q_o \cdot B_o + \frac{m(v^2 - v_o^2)}{3h_1}, \text{ Н} \quad (5.54)$$

де W_1' та W_1'' – відповідно сила опору зачерпуванню та сила опору інерції;

q_o – питомий опір заглибленню ковша у вантаж, Н/м;

B_o – довжина ребра ковша, що заглиблюється у вантаж, м;

m – маса вантажу, що знаходиться в ковші, н;

v – швидкість руху тягового органу (можна взяти рівним нулю);

v_o – початкова швидкість руху вантажу;

h_1 – висота зовнішнього ребра ковша. м.

Силу опору руху тягового органу на прямолінійних відрізках крутопохилого ковшового елеватора, у якого холоста вітка провисає, а робоча – опирається на напрямні, визначається за формулами:

$$W_2 = (q_s + q_m)L \cdot g(w_s \cdot \cos \beta + \sin \beta), \text{ Н} \quad (5.55)$$

$$W_3 = -q_m \cdot L \cdot g \cdot \sin \beta \text{ Н}, \quad (5.56)$$

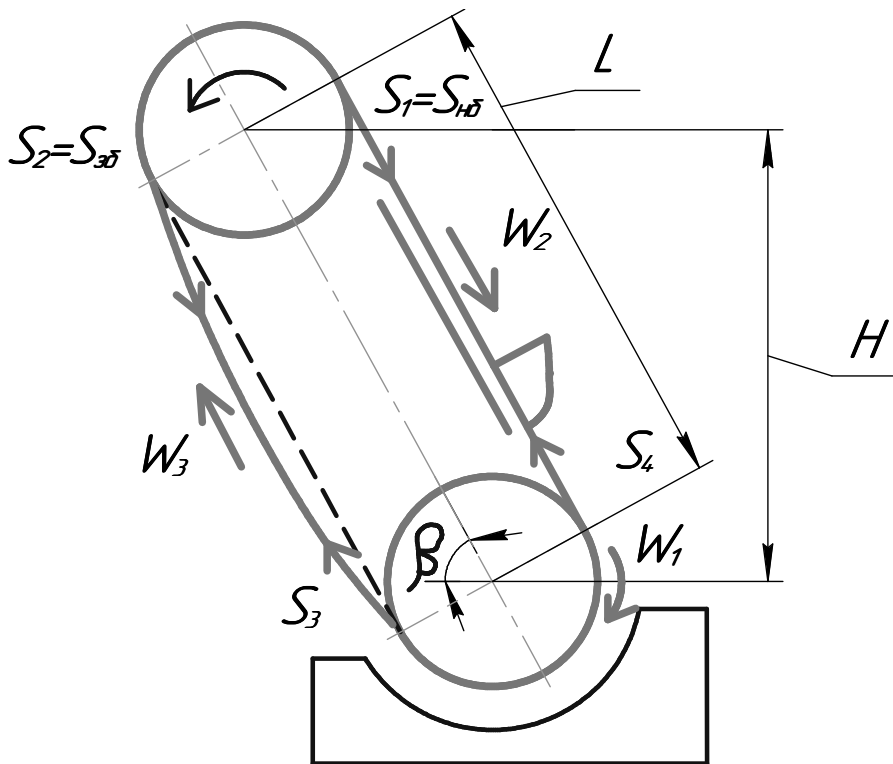


Рис. 5.5 Схема норії для визначення сил опору руху та сил натягу

де q_b – погонна маса тягового органу, кг/м;

L – довжина робочої вітки тягового органу, м;

β – кут нахилу робочої поверхні тягового органу елеватора до горизонту;

w_s – коефіцієнт опору руху тягового органу.

Знак мінус свідчить про те, що насправді напрям сили буде протилежний зазначеному на рисунку.

При проектуванні крутопохилого ковшового елеватора усі розрахунки виконують так, як і для плоскострічкових пологопохилих транспортерів з холостою віткою, що провисає, за формулами:

$$S_2 = S_{нб} - W_3; \quad S_3 = \frac{S_2}{c}; \quad S_4 = (S_3 + W_1)c; \quad S_1 = S_{нб} = S_4 + W_2 \quad (5.57)$$

Вертикальні ковшові елеватори розраховують за такими ж формулами, тільки підставляється кут $\beta=90^\circ$. У вертикальних ковшових елеваторах натяг у збігаючій з приводного барабана (зірочки) вітці тягового органу часто визначають за формулою:

$$S_2 = S_{зб} \geq 1,5H \cdot q_m \cdot g, \text{ Н} \quad (5.58)$$

Натяг у набігаючій на натяжну зірочку у вітці:

$$S_3 = S_2 - H \cdot q_m \cdot g, \text{ Н} \quad (5.59)$$

Після визначення рушійної сили перевіряють можливість передавання її за рахунок зчеплення стрічки з приводним барабаном за формулою:

$$e^{\alpha f} \geq \frac{S_{нб}}{S_{зб}} \quad (5.60)$$

де $e = 2,72$ – основа натуральних логарифмів;

α – кут обхвату стрічкою приводного барабана, рад;

f – коефіцієнт тертя зчеплення стрічки з барабаном.

5.3.5. Зупинник елеватора

Для проектування зупинника визначають силу тяги робочого органу при зворотному русі стрічки під дією сили ваги вантажу, що знаходиться в ковшах (при вимкненому джерелі енергії), а також визначають крутний момент зворотного ходу на приводному валу елеватора за формулами:

$$W_{op} = q \cdot L \cdot g \cdot \sin \beta - (q_b + q_m)L \cdot g \cdot w_s \cdot \cos \beta, \text{ Н} \quad (5.61)$$

$$M_{\kappa} = W_{op} \left(\frac{D_b}{2} + \frac{A}{2} \right), \text{ Нм} \quad (5.62)$$

Перший доданок правої частини формули (5.61) – рухома сила, другий – сила опору руху стрічки.

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Які способи завантаження ковшів відомі і використовуються?
2. Які способи розвантаження ковшів відомі і використовуються?
3. Що називається полюсною відстанню?
4. При якій полюсній відстані здійснюється відцентрове розвантаження ковшів?
5. При якій полюсній відстані здійснюється самопливне розвантаження ковшів?
6. При якій полюсній відстані здійснюється змішане розвантаження ковшів?
7. Що називається башмаком у ковшовому елеваторі?
8. Для чого в ковшовому елеваторі передбачено зупинник?
9. Які тягові робочі органи використовують у ковшових

елеваторах?

10. Які сили беруть до уваги при визначенні полюсної відстані?

11. Для яких вантажів застосовують глибокі (мілкі, гострокутні) ковші?

5.4. Скребкові транспортери

5.4.1. Тягові, робочі і допоміжні органи

Скребкові транспортери працюють по принципу волочіння матеріалу по жолобу або матеріалу. Скребкові транспортери застосовуються в сільському господарстві для переміщення зерна, гною, комбікормів.

Тягові органи (ланцюги, канати і стрічки) повинні бути дешевими, міцними і стійкими проти спрацювання, мати малу масу і просту конструкцію.

В сільськогосподарських транспортерах застосовують головним чином ланцюгові тягові органи: зварні ланцюги, гачкові ланцюги, комбіновані, пластинчасті та розбірні (в підвісних транспортерах).

Робочими органами в залежності від призначення і виду вантажу є: скребки, планки, пластини та прутки. Застосовують скребки для порційного та суцільного волочіння. Принцип суцільного волочіння оснований на тому, що опір проходження скребка через вантаж більше, ніж опір переміщенню вантажу по жолобу.

5.4.2. Визначення продуктивності транспортера

Продуктивність скребкового транспортера порційного волочіння залежить від властивостей вантажу, розмірів скребка, кута нахилу жолоба до горизонту, ступеня заповнення міжскребкового простору і швидкості руху скребок. Продуктивність скребкового транспортера порційного волочіння визначають за формулою:

$$Q = \frac{i \cdot \psi}{s} v \cdot \gamma, \text{ кг/с} \quad (5.63)$$

де i – об'єм міжскребкового простору, м³;

ψ – коефіцієнт заповнення міжскребкового простору;

v – швидкість ланцюга, м/с;

γ – щільність вантажу, кг/м³.

Об'єм міжскребкового простору визначають за формулою:

$$i = B \cdot h \cdot s, \text{ м}^3 \quad (5.64)$$

де B – довжина скребка, м;

h – висота скребка, м;

s – відстань між скребками (крок скребоків), м.

Остаточно продуктивність визначають за формулою:

$$Q = B \cdot h \cdot \psi \cdot v \cdot \gamma \cdot K_1 \cdot K_2, \text{ кг/с} \quad (5.65)$$

де K_1 – коефіцієнт, що враховує вплив швидкості ланцюга на заповнення міжскребкового простору (орієнтовно 0,75...0,97);

K_2 – коефіцієнт, що враховує вплив форми скребка на заповнення міжскребкового простору (орієнтовно 0,9...1,0).

Якщо продуктивність задана, то можна, користуючись формулою (5.65) визначити розміри скребка.

У скребоквих транспортерів суцільного волочіння ланцюги і скребки робочої вітки повністю занурені в масу вантажу, а тому під час руху тягового органу відбувається зсув по жолобу всієї маси вантажу, що знаходиться в ньому.

Недоліками скребоквих транспортерів суцільного волочіння є велика витрата енергії та інтенсивне спрацювання ланцюга і жолоба; позитивними ознаками – можливість крутопохилого і навіть вертикального переміщення вантажів.

Продуктивність скребоквих транспортерів суцільного волочіння визначають за формулою:

$$Q = B \cdot h \cdot v \cdot \gamma \cdot K_0, \text{ кг/с} \quad (5.66)$$

де B – ширина шару вантажу, м;

h – висота шару вантажу (висота жолоба), м;

v – швидкість тягового органу (орієнтовно 0,1...0,25), м/с;

γ – щільність вантажу, кг/м³.

K_0 – коефіцієнт, що враховує ступінь відставання вантажу від ланцюга, що рухається (орієнтовно 0,45...0,90).

5.4.3. Силовий розрахунок транспортера

При роботі скребоквого транспортера колова сила на приводній зірочці (сила тяги в ланцюгу) повинна перебороти:

- опір руху вантажу, що виникає в період завантаження при зміні швидкості руху вантажу від початкової до кінцевої, тобто до швидкості усталеного руху вантажу;
- складові сил тяжіння вантажу, якщо його переміщення відбувається похило вгору;
- сили тертя, що виникають між жолобом і вантажем;
- опір обертання зірочок і спрямовуючих блоків;
- сили тертя скребоків і ланцюгів об підтримуючі опори або жолоб;

- опір жорсткості тягового органу (тертя в шарнірах ланцюга), що виникає при русі тягового органу на напрямних зірочках і блоках.

Сили опору руху та сили натягу розраховуємо для транспортера представленого на рисунку 5.6.

Силу опору руху вантажу (силу інерції) визначають за формулою:

$$W_1 = \frac{q_e \cdot (v^2 - v_0^2)}{0,2} = 5q_e(v^2 - v_0^2), \text{ Н} \quad (5.67)$$

де q_e – погонна маса вантажу, Н/м;

v – швидкість руху тягового органу;

v_0 – швидкість руху вантажу вздовж кожуха в початковий період руху.

Сили опору руху вантажу і тягового органу на прямолінійних ділянках траси тягового органу визначають за формулами:

$$W_2 = (q_e + q_m)L \cdot g(w_s \cdot \cos \beta + \sin \beta), \text{ Н} \quad (5.68)$$

$$W_3 = q_m \cdot L \cdot g(w_s \cdot \cos \beta - \sin \beta), \text{ Н} \quad (5.69)$$

де q_m – погонна маса тягового органу з скребками, Н/м;

L – довжина робочої вітки тягового органу, м;

β – кут нахилу робочої поверхні тягового органу транспортера до горизонту;

w_s – коефіцієнт опору руху вантажу і тягового органу.

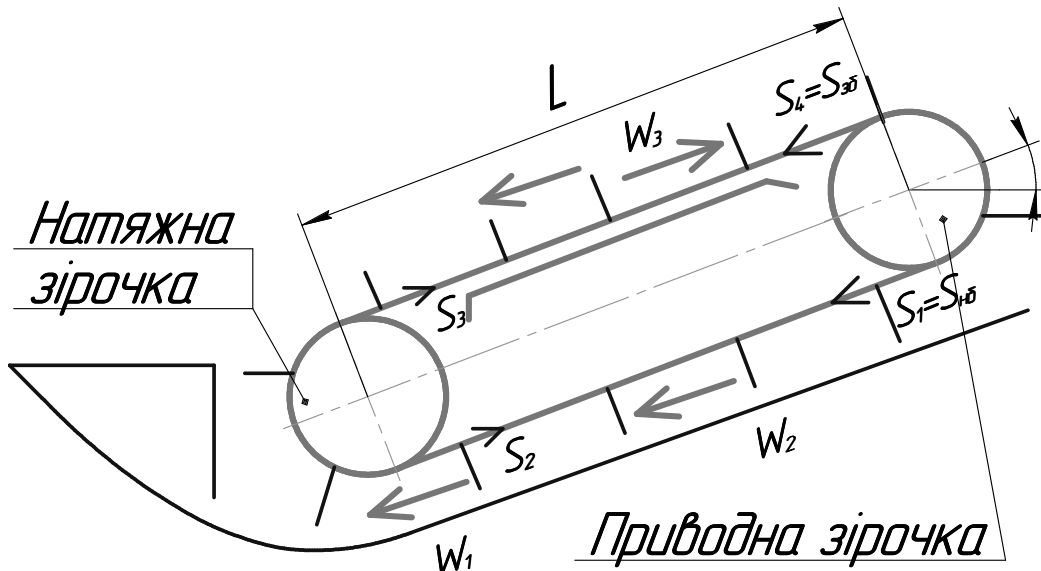


Рис. 5.6 Схема скребкового транспортера для визначення сил опору руху та сил натягу

Погонну масу тягового органу з скребками визначають за формулою:

$$q_m = k' \cdot q_s, \text{ Н} \quad (5.70)$$

де $k' = 0,5 \dots 0,9$.

Суть коефіцієнта опору руху вантажу і тягового органу, що і коефіцієнта тертя. Але він більший, оскільки враховує тертя вантажу об дно і стінки жолоба, а також тертя скребків і ланцюгів об напрямні при можливих перекосах скребків під час їх руху.

Рушійну силу визначають за формулою:

$$P_0 = c \cdot \sum W, \text{ Н} \quad (5.71)$$

де c – коефіцієнт, який враховує втрати на всіх зірочках (крім приводного). Сюди входять втрати на перегинання ланцюга (жорсткість) і опір тертя у підшипниках при обертанні осей.

$$c = c_1^n \cdot c_2^m, \quad (5.72)$$

де n – кількість зірочок з кутом обхвату $\geq 180^\circ$;

m – кількість зірочок з кутом обхвату $\leq 90^\circ$.

Для однієї зірочки з кутом обхвату $\geq 180^\circ$ $c_1^1 = 1,1 \dots 1,05$, а для однієї зірочки з кутом обхвату $\leq 90^\circ$ $c_2^1 = 1,05 \dots 1,02$.

Тяговий орган ланцюгових транспортерів вибирають, залежно від розрахункового натягу, який виникає в перерізі, що набігає на приводну зірочку:

$$S_{розр} = K_0 \cdot P_0, \text{ Н} \quad (5.73)$$

де $K_0 = 1,5 \dots 2,0$ – коефіцієнт запасу натягу.

Ланцюг рекомендується вибрати по величині розривного навантаження за формулою:

$$Q_{розр} = K \cdot S_{розр}, \text{ Н} \quad (5.74)$$

де K – коефіцієнт запасу міцності.

Після вибору ланцюга слід уточнити крок скребків (він повинен бути кратним кроку ланцюга), уточнити погонну масу тягового органу з врахуванням погонної маси ланцюга і погонної маси скребків з деталями їх кріплення до ланцюга.

Необхідно також уточнити сили опору руху тягового органу і вантажу на прямолінійних ділянках траси транспортера, а також розрахунковий натяг, який виникає в перерізі, що набігає на приводну зірочку.

Швидкість ланцюга, навіть при встановленому русі, величина змінна, що відображається в формулі:

$$v_{\perp} = v_0 \cdot \cos \varphi = w_0 \cdot R_0 \cdot \cos \varphi, \text{ м/с} \quad (5.75)$$

де v_0 та w_0 – колова та кутова швидкості зірочки, величини яких можна вважати сталими;

R_0 – радіус початкового ободу зірочки, м;

φ – кут, що змінюється в межах від $-0,5\alpha$ до $+0,5\alpha$;

α – центральний кут, що відповідає кроку ланцюга і становить – $360/z$;

z – кількість зубів зірочки.

У зв'язку з прискоренням і уповільненням руху в ланцюгу виникає динамічна сила (сила інерції), яка впливає на міцність. Максимальну величину цієї сили визначають за формулами:

- для пластинчастих і гачкових ланцюгів, у яких кожна ланка зачіплюється із зубами зірочки

$$P_0 = 6m \left(\frac{\pi \cdot v}{z} \right)^2 \frac{l}{t}, \text{ Н} \quad (5.76)$$

- для блочних і зварних ланцюгів, а також пластинчастих і гачкових ланцюгів, що зачіплюється із зубами зірочки через ланку

$$P_0 = 6m \left(\frac{\pi \cdot v}{z} \right)^2 \frac{t_1}{(t_1 + t_2)^2}, \text{ Н} \quad (5.77)$$

де m – маса вантажу, що рухається, на яку поширюється нерівномірність руху ланцюга, кг;

v – швидкість руху ланцюга, що вибрана при розрахунку розмірів скребка, м/с;

t – крок пластинчастого (гачкового) ланцюга при зачепленні кожної ланки з зубами зірочки, м;

t_1 та t_2 – кроки двох суміжних ланок ланцюга при зачепленні його через зуб зірочки, м;

z – кількість зубів зірочки.

Натяг у вітці, що набігає на приводну зірочку, визначається за формулою:

$$S_1 = S_{нб} = S_{розр} + P_0' + P_0'', \text{ Н} \quad (5.78)$$

де $S_{розр}$ – розрахунковий натяг, що визначається за формулою (5.73) і уточнений після вибору тягового органу;

P_0' та P_0'' - динамічні сили в робочій і холостій вітках тягового органу, що визначаються за формулами (5.76) або (5.77).

Натяги в інших перерізах тягового органу, що спирається прямолінійними ділянками на настили, визначають методом обходу тягового органу проти його руху за формулами:

$$S_2 = S_1 - W_1 - W_2 - P'_0; \quad S_3 = \frac{S_2}{C_1} \quad S_4 = S_{нб} = S_3 - W_3 - P''_0 \quad (5.79)$$

Уточнимо рушійну силу (колову силу на приводній зірочці) за формулою:

$$P_0 = S_{нб} - P'_0 - P''_0 - S_{зб}, \text{ Н} \quad (5.80)$$

У випадку провисання холостої вітки визначення натягів у характерних перерізах тягового органу проводять методом обходу траси по руху тягового органу.

5.4.4. Перевірка ланцюга на міцність

Ланцюгові тягові органи перевіряють на міцність за фактичним коефіцієнтом міцності:

- одноланцюгові за формулою:

$$K_\phi = \frac{Q_{розр}^{табл}}{S_{нб}} \geq [K] \quad (5.81)$$

- дволанцюгові за формулою:

$$K_\phi = \frac{2Q_{розр}^{табл}}{1,5S_{нб}} \geq [K] \quad (5.82)$$

де K_ϕ – фактичний коефіцієнт запасу міцності;

$Q_{розр}^{табл}$ – табличне значення розривного навантаження одного ланцюга, взяте за таблицею стандарту;

$[K]$ – допустима величина запасу міцності;

1,5 – коефіцієнт, який враховує нерівномірність розподілу натягу між ланцюгами.

У скребкових транспортерах з нижнім жолобом скребок під дією сили опору руху відхиляється на кут α , величина якого залежить від величини натягу S_2 . З рівняння рівноваги скребка кут визначимо за формулою:

$$\alpha = \arctg \frac{2W' \cdot h}{i(2S_2 + W')} \quad (5.83)$$

де W' – сила опору руху одного скребка, Н;

h – висота скребка, м.

Кут α повинен бути для увігнутих скребків не більше 5° , а для плоских – не більше 3° .

Потужність на валу приводної зірочки транспортера та потужність двигуна визначаємо за формулами:

$$N_m = v_c \cdot P_0 \cdot c_0, \text{ кВт} \quad (5.84)$$

де v_c – швидкість тягового органу, м/с;

P_0 – рушійна сила (сила тяги у тяговому органі), Н;

$c_0 = 1,1 \dots 1,3$ – коефіцієнт, який враховує опір на приводній зірочці (жорсткість ланцюга і тертя у підшипниках).

Потужність, що відбирається від вала двигуна, визначається за формулою:

$$N_\delta = K \frac{N_m}{1000 \cdot \eta_m}, \text{ кВт} \quad (5.85)$$

де $K = 1,1 \dots 1,25$ – коефіцієнт, що враховує короткочасне перевантаження в момент пуску транспортера під навантаженням;

η_m – к.к.д. трансмісії, який береться для попередніх розрахунків $0,6 \dots 0,95$.

За цією потужністю підбирають двигун. Потім розраховують передаточне число трансмісії. Число обертів приводного вала транспортера визначається за формулою:

$$n_m = \frac{60 \cdot v}{z \cdot t_{зп}}, \text{ об/хв.} \quad (5.86)$$

5.4.5. Муфти

Для запобігання деталей транспортера від поломок (при можливих перевантаженнях) застосовують запобіжні муфти. Основною вимогою, що ставляться до них, є роз'єднання ведучої і веденої частин привода при зростанні крутного моменту до граничної величини.

У сільськогосподарському машинобудуванні набули поширення запобіжні пружинно-кулачкові муфти, що називаються сигнальними. Вони бувають одно-, три-, чотири- і шести пружинними.

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Який основний недолік скребкових транспортерів?
2. Які типи ланцюгів використовують у скребкових ланцюгових транспортерах як тягові органи?
3. Які параметри потрібно врахувати при визначенні продуктивності скребкового транспортера порційного (суцільного) волочінн?
4. Який запобіжний пристрій застосовується в скребковому транспортері з ланцюговим тяговим органом?
5. Як здійснити конструктивно проміжне розвантаження

скребкового транспортера?

6. Чи зміниться величина динамічних навантажень у ланцюговому тяговому органі, якщо крок ланцюга збільшити вдвоє, а всі інші параметри залишити без змін?

7. Як визначити погонну масу тягового органу при попередніх розрахунках сил опору руху тягового органу скребкового транспортера?

5.5. Гвинтові транспортери

5.5.1. Призначення та будова

Транспортери з гвинтовим робочим органом, що обертається в нерухомому жолобі (кожусі), називаються гвинтовими.

Гвинтові транспортери бувають: горизонтальні, похилі та вертикальні; тихохідні й швидкохідні; стаціонарні, пересувні та переносні.

Гвинтовий транспортер складається з таких основних вузлів: жолоба, завантажувального ковша і розвантажувальних патрубків; гвинта, який називається шнеком та складається з приводного вала і закріпленої на ньому гвинтової поверхні; кінцевих і проміжних підшипників, трансмісії та джерела механічної енергії.

Вантаж в транспортері переміщується за допомогою обертового шнека і вивантажується в будь-якому місці вздовж руху вантажу.

Переваги гвинтових транспортерів – простота будови і догляду; невелика вартість; зручність проміжного завантаження і розвантаження; відсутність втрат вантажу, бо переміщення його відбувається в закритому жолобі; невеликі габаритні розміри.

Недоліки – стирання вантажу внаслідок тертя його об стінки жолобу і гвинтову поверхню шнека; подрібнення вантажу при затисканні його в зазорах між шнеком і жолобом; великі витрати енергії, що викликаються тертям вантажу в процесі транспортування.

Шнеки гвинтових транспортерів бувають правого і лівого обертання. Їх гвинтові поверхні виготовляють найчастіше із сталюї стрічки способом штамповки або прокатки на спеціальних верстатах.

Шнеки бувають:

- із суцільною гвинтовою поверхнею, які застосовують для пересування сипких вантажів;
- стрічкові, які мають гвинтову поверхню, зроблену з вузької сталюї стрічки, яку кріплять до вала з зазором, що дає можливість вантажу (під час його пересування) перевалюватися за виток і цим сприяти змішуванню кількох його видів (застосовується в кормопідготовчих пристроях і протруювачах);

- лопатеві, які складаються з окремих лопатей, прикріплених до вала по гвинтовій лінії, які служать для розпушування, перемішування і переміщення вантажу (застосовується в кормоприготувальних машинах);

- фасонні з вирізами на зовнішньому ребрі гвинтової поверхні, які служать для розпушування злежаних вантажів і для транспортування.

Для зменшення дроблення сільськогосподарського вантажу необхідно, щоб між зовнішнім ребром шнека і жолобом був зазор 5...10 мм.

У місцях підвішування проміжних підшипників гвинтова поверхня шнека переривається і на цій ділянці вантаж проштовхується від однієї секції шнека до другої. Проміжні підшипники часто сприяють закупорюванню жолоба вантажем, а тому у вертикальних і крутопохилих транспортерах вони не застосовуються.

Для запобігання поломок шнека (при можливих перевантаженнях) застосовують запобіжні сигнальні муфти.

5.5.2. Основні параметри вертикальних і крутопохилих транспортерів

Вертикальні і крутопохилі транспортери призначені для переміщення знизу вгору в основному сипких і дрібношматкових вантажів. Вони відносяться до групи швидкісних транспортерів. Принцип дії їх такий: необхідна для забезпечення максимальної продуктивності кількість вантажу надходить до нижньої відкритої частини шнека і захоплюється ним в обертових рух і в рух вздовж кожуха шнека; обертовий рух маси вантажу уповільнюється за рахунок тертя її об внутрішню поверхню кожуха (рис.5.7), а тому гвинтова поверхня шнека сковзає по вантажу і пересуває його до розвантажувального патрубку.

Продуктивність вертикальних і крутопохилих транспортерів визначається за формулою:

$$Q = \frac{\pi \cdot (D^2 - d^2)}{4} v_n \cdot \psi \cdot \gamma \cdot c_0, \text{ кг/с} \quad (5.87)$$

де D – зовнішній діаметр шнека, м;

d – внутрішній діаметр ребра шнека (у суцільних гвинтових – діаметр вала шнека). Орієнтовно $(0,25...0,30) D$, м;

v_n – швидкість руху шару вантажу вздовж кожуха (паралельно до осі кожуха), м/с;

ψ – коефіцієнт заповнення вантажем міжвиткового простору шнека (орієнтовно $0,25...0,6$);

γ – щільність вантажу, кг/м³;

$c_0 = 0,9...1,0$ – коефіцієнт, що враховує висипання вантажу через

зазори між зовнішнім ребром шнека і кожухом.

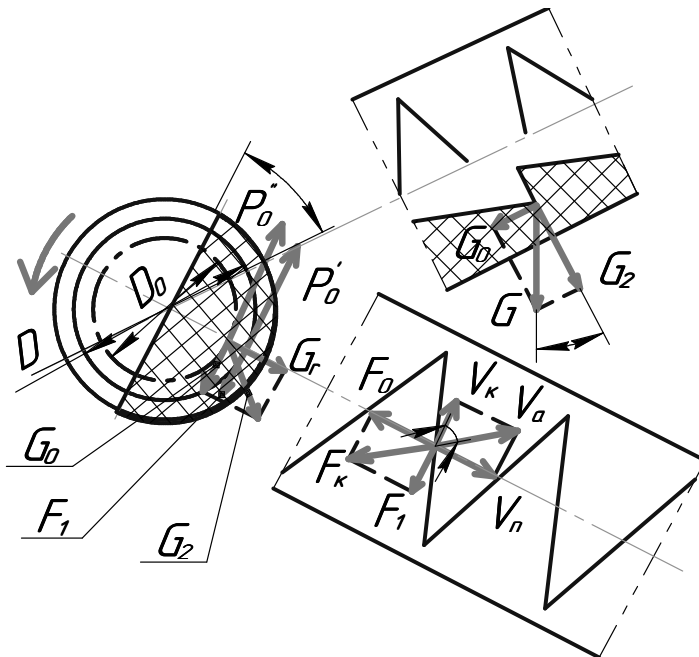


Рис.5.7 Схема гвинтового транспортера для визначення сил опору руху та сил натягу

Швидкість руху шару вантажу вздовж кожуха (паралельно до осі кожуха) при колівій швидкості вантажу рівній нулю визначається за формулою:

$$v_n = \frac{s \cdot n}{60}, \text{ м/с} \quad (5.88)$$

де s – крок шнека, м;

n – число обертів шнека, об/хв.

При колівій швидкості вантажу, що дорівнює колівій швидкості шнека, швидкість руху шару вантажу вздовж кожуха рівна нулю.

Крок шнека визначається за формулою:

$$s = (0,25 \dots 1,25)D, \text{ м} \quad (5.89)$$

Залежність між колівією швидкістю руху вантажу і швидкістю руху шару вантажу вздовж кожуха

$$v_\kappa = v_n \cdot \text{ctg} \varepsilon, \text{ м/с} \quad (5.90)$$

де ε – кут між напрямом абсолютної швидкості руху вантажу і напрямом колівієї швидкості руху вантажу.

Колівіє швидкість зовнішнього ребра шнека визначається за формулою:

$$v = v_n (\text{ctg} \alpha + \text{ctg} \varepsilon), \text{ м/с} \quad (5.91)$$

де α – кут підйому гвинтової нитки шнека по зовнішньому діаметру.
Кутові швидкості шнека і вантажу визначається за формулами:

$$w = \frac{2v}{D}, \text{ c}^{-1} \qquad w_g = \frac{2v_k}{D}, \text{ c}^{-1} \qquad (5.92)$$

Кутова швидкість вантажу звичайно менша від кутової швидкості шнека і тому вантаж пересувається вздовж кожуха шнека.

У гвинтових транспортерів потужність витрачається на:

- переборювання сил інерції, які виникають при зміні швидкості руху вантажу від початкової до кінцевої;
- переборювання тертя шару вантажу об внутрішню поверхню кожуха шнека;
- на підйом вантажу і переборювання тертя його об гвинтову поверхню шнека;
- переміщення і дроблення вантажу;
- переборювання опорів, що виникають в трансмісії.

Сила інерції, що виникає в період пуску транспортера, визначається за формулою:

$$P_i = \frac{n \cdot Q \cdot L \cdot v_a}{60v_n}, \text{ Н} \qquad (5.93)$$

де v_a – абсолютна швидкість вантажу, м/с;

L – довжина шнека, м.

Потужність, необхідна для переборювання сил інерції, що виникають в період пуску, визначається за формулою:

$$N_1 = P_i \cdot v_a, \text{ Вт} \qquad (5.94)$$

Потужність, необхідна для переборювання тертя шару вантажу об внутрішню поверхню кожуха шнека, визначається за формулою:

$$N_2 = F_k \cdot v_a, \text{ Вт} \qquad (5.95)$$

де F_k – сила тертя шару вантажу об кожух.

Потужність на підйом вантажу і на переборювання тертя його об гвинтову поверхню визначається за формулою:

$$N_3 = \frac{P'_0(w - w_g)D_0 + P''_0(w - w_g)D}{2}, \text{ Вт} \qquad (5.96)$$

Потужність, підведена до вала шнека, визначається за формулою:

$$N_0 = \frac{(N_1 + N_2 + N_3)k_0}{\eta_n}, \text{ Вт} \qquad (5.97)$$

де k_0 – коефіцієнт, що враховує перемішування і дроблення вантажу

(орієнтовно 1,15...1,3);

η_n – коефіцієнт корисної дії підшипників вала шнека, для однієї пари (орієнтовно 0,97...0,99).

Потужність на валу двигуна визначається за формулою:

$$N_o = \frac{N_o}{\eta_m}, \text{ кВт} \quad (5.98)$$

де η_m – коефіцієнт корисної дії трансмісії.

5.5.3. Основні параметри горизонтальних і пологопохилих транспортерів

Характерною особливістю горизонтальних і пологопохилих транспортерів є те, що кут повороту вільної поверхні шару вантажу, який переміщується, не перебільшує кута природного укусу вантажу під час руху:

$$\varphi' < \varphi \approx 0,7\varphi_0 \quad (5.99)$$

де φ' – кут повороту вільної поверхні шару вантажу;

φ – кут природного ухилу вантажу в стані руху;

φ_0 – кут природного ухилу вантажу в стані спокою.

Продуктивність пологопохилого транспортера визначається за формулою:

$$Q = \frac{\pi \cdot (D^2 - d^2)}{4} v_n \cdot \psi \cdot \gamma \cdot c_0, \text{ кг/с} \quad (5.100)$$

де D – зовнішній діаметр шнека, м;

d – внутрішній діаметр ребра шнека (у суцільних гвинтових – діаметр вала шнека). Орієнтовно (0,20...0,25) D , м;

v_n – швидкість руху шару вантажу вздовж кожуха (паралельно до осі кожуха), м/с;

ψ – коефіцієнт заповнення вантажем міжвиткового простору шнека (орієнтовно 0,3...0,7);

γ – щільність вантажу, кг/м³;

$c_0 = 0,7...1,0$ – коефіцієнт, що враховує зниження продуктивності через нахил транспортера до горизонту.

Швидкість руху шару вантажу вздовж кожуха (паралельно до осі кожуха) визначається за формулою:

$$v_n = \frac{s \cdot n}{60}, \text{ м/с} \quad (5.101)$$

де s – крок шнека, м;

n – число обертів шнека, об/хв.

Число обертів шнека визначається за формулою:

$$n = \frac{2400Q}{\pi \cdot (D^2 - d^2)s \cdot \psi \cdot c_0 \cdot \gamma}, \text{ об/хв} \quad (5.102)$$

Потужність двигуна визначається так, як і для крутопохилого транспортера. При цьому відцентрова сила рівна нулю, а швидкість руху вантажу вздовж кожуха рівна абсолютній швидкості руху вантажу і обидві діють в одному напрямі.

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. В яких межах встановлюють зазор між гвинтом і жолобом у гвинтових транспортерах сільськогосподарського призначення?
2. Які параметри впливають на величину продуктивності гвинтового транспортера?
3. Назвіть складові затрати енергії при транспортуванні вантажу гвинтовим транспортером?
4. З якою метою виготовляють гвинти з кроком, що поступово зменшується (від завантажувального бункера до розвантажувальної горловини)?
5. Які функції можна виконувати гвинтовим транспортером крім переміщення вантажу?
6. При якому співвідношенні продуктивностей послідовно встановлених гвинтових транспортерів виникає забивання транспортера при вивантаженні?
7. Яку форму мають шнеки, що призначені для роз рихлення злежаних вантажів?

5.6. Коливальні транспортери

5.6.1. Призначення та принцип дії

Коливальні транспортери – це транспортери без спеціального тягового органу. Транспортування вантажу відбувається послідовно повторювальними переміщеннями чи скачками вантажу по вантажонесучому органу.

В залежності від характеру і режиму руху розрізняють транспортери:
- інерційні з постійним або змінним тиском вантажу на днище жолоба, в яких вантаж переміщається ковзанням, не відриваючись від днища жолоба;

- вібраційні, в яких переміщення здійснюється мікрокидками з відривом частинок вантажу від днища жолоба.

Переваги коливальних транспортерів: зниження питомих енергоємності і металомісткості, габаритів машин і установок, зменшення будівельної висоти будівель.

Недоліки коливальних транспортерів: підвищений знос жолоба при транспортуванні вантажів; складність переміщення липких вантажів; передача вібраційних навантажень на конструкції машин і шум.

В сільськогосподарському виробництві коливальні транспортери застосовуються головним чином в сільськогосподарських машинах.

5.6.2. Інерційні транспортери

Привод інерційних транспортерів здійснюється в основному простим кривошипно-шатунним механізмом.

Частинка вантажу переміститься по жолобу при умові, що сили інерції частинки більше сили тертя:

$$P_n > F \quad (5.103)$$

Переміщення можливе по ходу руху матеріалу і проти нього. Але шлях ковзання вперед по ходу більше, ніж проти ходу. Тоді транспортуюча здатність транспортера визначається за формулою:

$$T = \frac{s_1 - s_2}{s}, \quad (5.104)$$

де s_1 – шлях ковзання вперед по ходу, м;

s_2 – шлях ковзання вперед проти ходу, м;

s – хід жолоба, м.

При похилому розташуванні жолоба транспортера швидкість транспортування залежить від кута нахилу транспортера до горизонту. Транспортування вгору можливе тільки при малих кутах нахилу транспортера до горизонту. Транспортування вниз можливе при любых кутах нахилу транспортера до горизонту, але якщо кут нахилу буде більше кута тертя. То почнеться самоплив матеріалу.

Продуктивність інерційних транспортерів визначається за формулою:

$$П = 3600\psi \cdot \gamma \cdot F \cdot v_c, \text{ т/год} \quad (5.105)$$

де $\psi = 0,5 \dots 0,8$ – коефіцієнт наповнення жолоба або труби;

γ – щільність вантажу, т/м³;

F – площа жолоба або труби, м²;

V_c – середня швидкість транспортування, м/с.

Середня швидкість транспортування визначається за діаграмою або

за формулою:

$$v_c = \frac{S \cdot n}{60}, \text{ м/с} \quad (5.106)$$

де S – шлях, що проходить вантаж за один оберт вала, м;

n – число обертів кривошипа, об/хв.

Орієнтовно потужність визначається за формулою:

$$N \approx 0,014g(G_g + G_k), \text{ кВт} \quad (5.107)$$

де G_k – сумарна маса рухомих частин транспортера, т;

G_g – маса вантажу, т.

Коефіцієнт режиму роботи – відношення нормальної (до днища жолоба) складової прискорення від сил інерції до ваги, визначається за формулою:

$$\Gamma = \frac{A \cdot \omega^2 \cdot \sin \theta}{g \cdot \cos \beta} \leq 1, \quad (5.108)$$

де θ – кут між площиною транспортування і напрямом коливань, град;

A – амплітуда, м;

β – кут нахилу транспортера до горизонту, град.

5.6.3. Вібраційні транспортери

Вібраційні транспортери відрізняються від інерційних режимом роботи, який характеризується коефіцієнтом режиму роботи. Для вібраційних транспортерів коефіцієнт режиму роботи завжди $\Gamma > 1$. Це означає, що нормальна складова від сили інерції більше нормальної складової сили ваги і частинки в процесі транспортування відриваються від днища жолоба, здійснюючи кидки.

В залежності від пружних систем підвіски вібраційні транспортери діляться на:

- резонансні, в яких частота коливань приводу і власних коливань приблизно однакові або рівні;
- дорезонансні, в яких частота коливань приводу менше частоти власних коливань;
- зарезонансні, в яких частота коливань приводу більше частоти власних коливань.

По принциповій схемі будови вібраційні транспортери діляться на:

- горизонтальні і пологопохилі (по куту нахилу до горизонту);
- трубчасті і з жолобом (по формі поперечного перерізу вантажонесучого органу);
- неурівноважені і урівноважені (по динамічній характеристиці);

Частина п'ята

- одномасові, двомасові і багатомасові (по кількості коливальних мас).

Процес переміщення вантажу вібраційним транспортером має складні прояви в залежності від особливостей вантажу, його фізико-механічних властивостей і впливу опору повітря. Траєкторія руху частинок, які переміщуються з підкиданням, описується рівнянням:

$$\Gamma = \sqrt{\pi^2 \cdot p^2 + 1}, \quad (5.109)$$

де p – любе ціле число.

Приймаючи $p = 0, 1, 2$ отримаємо коефіцієнт режиму роботи 1; 3,3 та 6,36. При $\Gamma = 1$ частинка знаходиться у завислому стані, якщо $\Gamma = 3,3$ частинка опускається на транспортер під час кожного коливання і при $\Gamma = 6,36$ частинка буде зустрічатися з транспортером через одне коливання, що приводить до великих прискорень і відповідно динамічним навантаженням. Тому коефіцієнт режиму роботи необхідно вибирати в межах $1 < \Gamma < 3,3$.

Середня швидкість транспортування вантажу визначається за формулою:

$$v_c = \eta_0 \cdot v_{жс}, \text{ м/с} \quad (5.110)$$

де $\eta_0 = 0,3 \dots 0,62$ – коефіцієнт проковзування;

$v_{жс}$ – швидкість жолоба, м/с.

Швидкість жолоба визначається за формулою:

$$v_{жс} = w \cdot A, \text{ м/с} \quad (5.111)$$

де A – амплітуда (орієнтовно 0,2...15 мм).

Продуктивність вібраційних транспортерів визначається за формулою:

$$П = 3600\psi \cdot \gamma \cdot F \cdot v_c, \text{ т/год} \quad (5.112)$$

де $\psi = 0,6 \dots 0,9$ – коефіцієнт наповнення жолоба або труби;

γ – щільність вантажу;

F – площа жолоба або труби;

V_c – середня швидкість транспортування.

Ширину жолоба і діаметр труби по продуктивності визначається за формулами:

$$B = 2\sqrt{\frac{П}{\gamma}}, \text{ м} \quad D = 1,6\sqrt{\frac{П}{\gamma}}, \text{ м} \quad (5.113)$$

Висоту шару матеріалу приймають (0,25...0,8) від ширини жолоба.

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Що називають коефіцієнтом режиму роботи коливального транспортера?
2. При яких значеннях коефіцієнта режиму роботи коливальний транспортер працює за інерційним режимом?
3. При яких значеннях коефіцієнта режиму роботи коливальний транспортер працює за вібраційним режимом?
4. В яких межах знаходиться коефіцієнт заповнення жолоба інерційного транспортера?
5. В яких межах знаходиться коефіцієнт заповнення жолоба вібраційного транспортера?
6. Які параметри впливають на продуктивність коливального транспортера?
7. Які основні недоліки мають коливальні транспортери?

5.7. Пневмотранспортні установки

5.7.1. Призначення і класифікація

Принцип дії пневмотранспортних установок заключається в переміщенні вантажу за допомогою потоку повітря, що рухається по трубопроводу.

Пневматичні транспортери менш металоємні і більш прості в експлуатації при високому ступені автоматизації процесу транспортування; працюють спокійно, без ривків, з малими втратами.

Недоліки пневматичного транспортера: підвищене споживання електроенергії (в 4...6 раз більше, ніж у механічного) і підвищений знос частин, що стикаються з вантажем.

По будові і способу переміщення вантажу розрізняють: пневматичні транспортери, аерожолоби і аероліфти.

Пневматичні транспортери по принципу дії поділяються на наступні.

Всмоктувальні транспортери застосовуються для переміщення вантажу на невеликі відстані. Вони працюють при розрідженні 10...50 кПа. Їх використовують при розвантаженні сипких вантажів. Сільськогосподарські установки в більшості випадків працюють з викидом повітря в атмосферу.

Нагнітальні транспортери використовують для транспортування вантажу на великі відстані. В залежності від тиску, що створюється вентилятором, ці установки бувають: низького тиску – до 1 кПа,

середнього тиску – до 3 кПа, високого тиску – до 15 кПа, що використовуються для транспортування зерна та інших сипких вантажів. При більш високих тисках (до 600 кПа) застосовують компресори. Вантаж можна подавати через боковий отвір вентилятора, якщо механічна дія лопатей на нього не шкідлива, або через спеціальний завантажувальний пристрій для вантажів, пошкодження яких недопустиме (посівне зерно).

Змішані транспортери найчастіше використовуються для подачі силосної (сінажної) маси в башти. Матеріал тут проходить через вентилятор, на що додатково витрачається значна кількість енергії. На принципі дії таких установок основана робота пневматичних підбирачів.

5.7.2. Основи теорії і розрахунку

Теорія транспортерів основана на процесах, що проходять в потоках.

Швидкість повітря вертикального направлено вгору потоку, при якій частинки матеріалу знаходяться у завислому стані або безперервно пульсуючому русі, називається швидкістю витання. Величина швидкості витання залежить від розмірів частинок, їх щільності і щільності повітря.

Для проектування пневматичного транспортера важливо вірно вибрати швидкість руху повітря. Дуже високі швидкості ведуть до перевитрати енергії, пошкодження вантажу, збільшують габарити установки, збільшують її вартість; недостатні швидкості при найменшому перевантаженні транспортера приводять до завалу.

Швидкість руху повітря для всмоктувальних і нагнітальних установок низького тиску визначається за формулою:

$$v_n = \varphi \cdot v_k, \text{ м/с} \quad (5.114)$$

де φ – коефіцієнт, що залежить від складності траси, концентрації суміші і фізико-механічних властивостей вантажу (орієнтовно 1,25...3,7);

v_k – швидкість витання (для зерна орієнтовно 5...17 м/с.).

Щоб не допускати завала трубопроводу, більші значення φ приймають при більшій масовій концентрації і підвищеній вологості вантажу.

Швидкість частинок вантажу незалежно від початкової швидкості на різних ділянках транспортера на вертикальній та горизонтальній ділянках визначається за формулами:

$$v_{ван} = v_n - v_k, \text{ м/с} \quad v_{ван} = 0,85v_n, \text{ м/с} \quad (5.115)$$

Коефіцієнт масової концентрації суміші – відношення маси вантажу до маси (витрати) повітря, що переміщуються за одиницю часу, і визначається за формулою:

$$\mu = \frac{P}{3,6G}, \quad (5.116)$$

де P – продуктивність установки, т/год;

G – витрата повітря, кг/с.

В практиці експлуатації зустрічаються установки з коефіцієнтом масової концентрації для зерна – 1...25, цементу – 20...60.

При виборі коефіцієнта масової концентрації потрібно вважати, що чим складніше траса транспортера, тим меншу концентрацію суміші необхідно приймати.

Витрата повітря визначається за формулою:

$$V_n = \frac{P}{3,6\mu \cdot \gamma_n}, \quad \text{м}^3/\text{ГОД} \quad (5.117)$$

де γ_n – щільність повітря (орієнтовно 1,24 і залежить від вологості і температури), кг/м³.

Діаметр трубопроводу визначається за формулою:

$$d = 0,6 \sqrt{\frac{P \cdot p_0}{\mu \cdot \gamma_0 \cdot v_n \cdot p_n}}, \quad \text{м} \quad (5.118)$$

де v_n і p_n – відповідно швидкість і тиск повітря в розрахунковому перерізі;

γ_0 і p_0 – відповідно щільність і тиск повітря на виході з трубопроводу, $p_0 = 0,1$ МПа.

Швидкість в будь-якому перерізі трубопроводу визначається за формулою:

$$v_n = v_0 \frac{p_n}{p_0}, \quad \text{м/с} \quad (5.119)$$

Пневматичні установки на практиці виконують двох типів: з постійним діаметром трубопроводу – вони дешевші в експлуатації, тому що для них потрібна менша потужність, і з постійною швидкістю повітря при змінному діаметрі – вони потребують менших початкових затрат на виготовлення. Для сільськогосподарських установок діаметр трубопроводу приймають постійним по всій довжині.

Напором називається різниця тисків, що створюється на кінцях трубопроводу, необхідна для переборювання всіх опорів, що виникають при транспортуванні вантажу. Ця різниця повинна бути рівна сумі всіх втрат тисків (напорів) на окремих ділянках установки.

В загальні втрати напору можуть входити втрати при вводі вантажу в трубопровід; при русі вантажу і повітря по трубопроводу; втрати на вертикальний підйом вантажу і повітря, в колінах і відводах, в розвантажувачах і фільтрах.

Частина п'ята

Для пневмотранспорту загальний напір складається з динамічного або швидкісного напору, що йде на переборювання інерції повітря та вантажу і статичного напору, що йде на всі інші опори.

Динамічний напір, що йде на придання швидкості матеріалу і повітря визначається за формулою:

$$h_0 = \frac{\gamma_n \cdot v_n^2}{2} (1 + 0,72\mu) \quad (5.120)$$

Статичний напір витрачається на переборювання тертя в трубопроводі, місцевих опорів (коліно, сопло, розвантажувач) і на підйом вантажу.

Існує чотири складові повного статичного напору:

- втрати тиску на тертя від руху повітря на певній довжині трубопровода визначаються за формулою:

$$h'_m = \lambda \frac{L}{d} \cdot \frac{\gamma_n \cdot v_n^2}{2} \quad (5.121)$$

де λ – коефіцієнт опору тертю;

L – довжина трубопроводу, м.

- втрати тиску на тертя при русі по трубах суміші повітря і вантажу

$$h_m = h'_m (1 + c \cdot \mu) \quad (5.122)$$

де c – коефіцієнт, що залежить від концентрації суміші, швидкості і фізико-механічних властивостей вантажу (орієнтовно 0,31...0,68).

- втрати тиску в місцевих опорах визначаються за формулою:

$$h'_m = \xi \cdot \frac{\gamma_n \cdot v_n^2}{2} \quad (5.123)$$

де ξ – коефіцієнт місцевих опорів.

- втрати тиску на підйом вантажу визначаються за формулою:

$$h_n = g \cdot \mu \cdot \gamma_{ван} \cdot H \quad (5.124)$$

де H – висота підйому, м.

Повний напір з врахуванням всіх втрат тиску визначається за формулою:

$$h = h_0 + h'_m + h'_m + h_n \quad (5.125)$$

Викладене відноситься до пневмотранспортерів сільськогосподарського виробництва. В установках з змінним діаметром трубопроводу напір визначається на кожній його ділянці.

В пневматичних установках завжди бувають витоки і підсоси повітря, тому витрату повітря, отриману за розрахунком, необхідно

збільшити на 3...5%.

Потужність двигуна для привода вентилятора витрачається на транспортування повітря і вантажу і на переборювання втрат у вентиляторі і приводному пристрої та визначається за формулою:

$$N = \frac{V \cdot h}{3.6 \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \eta_3}, \text{ кВт} \quad (5.126)$$

де η_1 – к.к.д. вентилятора, рівний 0,55...0,80;

η_2 – к.к.д. підшипників, рівний 0,95...0,97;

η_3 – к.к.д. передачі, рівний 0,96...1,00.

5.7.3. Основні частини пневматичних конвеєрів

Пневматичні установки складаються з повітродувного, завантажувального і розвантажувального пристрою, трубопровода і очисника.

Повітродувні пристрої, що забезпечують необхідний напір, бувають поршневі, ротаційні і відцентрові.

В сільськогосподарських пневматичних транспортерах переважно використовуються вентилятори низького (до 1,0 кПа), середнього (до 3,0 кПа) і високого (до 15,0 кПа) тиску при продуктивності 3500...77000 м³/год.

В залежності від способів розташування лопатей розрізняють відцентрові (радіальні) та осьові (гвинтові) вентилятори.

Завантажувальні пристрої бувають: сопла, воронки і шлюзові затвори.

Сопла складаються з двох труб, по одній з яких подається повітря, а по другій повітрям вантаж. Сопло потрібно розташовувати найближче до матеріалу, тому що на відстані одного метра від входу сопла швидкість повітря складає тільки 7% від швидкості повітря в трубопроводі.

Завантажувальні воронки встановлюють на трубопроводі в тому місці, де він звужується. Цим досягається збільшення динамічного напору проти завантажувального вікна і в нагнітальних пневмотранспортерах не тільки не вибивається повітря, а й, навпаки, проходить всмоктування як результат інжекції повітря та вантажу.

Шлюзовий затвор представляє собою секційний барабан, що обертається від спеціального привода. Вантаж з бункера самопливом поступає в секції барабана і по мірі провертання його висипається в трубопровід.

Трубопровід служить для направлення вантожо-повітряної суміші. В сільськогосподарських транспортерах діаметр труби знаходиться в межах 0,075...0,60 м, довжина секції до 3м. Для зміни напрямку руху вантажу

Частина п'ята

встановлюються коліна з кутом вигину 45...90°. При необхідності подачі матеріалу в декілька місць встановлюють розгалужуючі пристрої з заслінками. В місцях можливих завалів встановлюють люки для очищення.

Розвантажувальні пристрої. Досить часто при розвантаженні на відкритому повітрі вантаж з повітрям викидається безпосередньо через кінцеву секцію трубопроводу. Для розвантаження вантажу з транспортерів, що працюють в приміщенні, найчастіше розвантажувачі складаються з відокремлювача і затвора. В об'ємному відокремлювачі – циліндричному резервуарі, діаметром в 8...10 разів діаметра трубопроводу, розділення суміші повітря і вантажу досягається при значному (до 0,2...0,8 м/с) зниженні швидкості. Внаслідок цього з суміші виділяються частинки матеріалу під дією сил тяжіння.

При транспортуванні мучнистих і легких продуктів відокремлювач і очисник повітря сконструйовані в одній конструкції. Подібні конструкції називаються циклоном. В них використовується ефект вихрових рухів суміші: відцентрові сили сприяють розділенню вантажу і повітря.

По характеру руху повітряного потоку розвантажувачі і очисники з ідеальним вертикальним потоком, що отримується в результаті вводу суміші через спіральний канал, бувають з низхідним і висхідним спіралеподібними вихрами, що виникають між внутрішнім і зовнішнім циліндрами. При цьому внутрішній циліндр слугує випускною трубою.

Вихідний потік повітря навіть при правильному регулюванні роботи транспортуючої установки може виносити з собою частинки вантажу розміром від 1 до 8 мкм (мучнисті продукти), тому для очищення використовують фільтри. Фільтри бувають мокрі, що встановлюються на всмоктувальних установках, і з тканини, які допускають навантаження від 1 до 2,5 м³ повітря на 1 м² тканини.

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. В яких межах розрідження працюють всмоктувальні пневмотранспортні установки?
2. В яких межах тиску працюють пневмотранспортні установки низького тиску?
3. В яких межах тиску працюють пневмотранспортні установки високого тиску?
4. Що називають швидкістю витання?
5. Що називають коефіцієнтом масової концентрації суміші?
6. В чому полягає призначення статичного та динамічного напору?
7. Що потрібно знати, щоб визначити потрібну витрату повітря

для роботи пневмотранспортної установки?

8. Які дані слід враховувати при визначенні діаметру трубопроводу в пневмотранспортній установці?

5.8. Бункери і самопливний транспорт

5.8.1. Призначення і класифікація бункерів

Допоміжні пристрої: бункери і спуски, скатні дошки. Лотки і труби застосовуються в складі інших транспортуючих механізмів.

Бункери – ємності різних форм і призначення, по конструкції розрізняють прості і складні.

По призначенню розрізняють бункери:

- збірні або резервні, в які вантаж поступає безперервно, а вивантажується періодично; виконує роль накопичувачів для наступного забезпечення виробництва;

- розподільні, що заповнюються вантажем періодично при безперервному вивантаженні (бункер сівалок);

- навантажувальні, або пересипні, що наповнюються по мірі надходження матеріалу і розвантажуються в залежності від місткості транспортних засобів;

- сховища, що використовуються для зберігання матеріалу з розвантаженням і завантаженням по мірі необхідності.

Місткість бункера визначається ритмом технологічного процесу, місткістю і частотою подачі транспортних засобів. Для гарантування безперервності процесу встановлюються додаткові бункери (компенсатори).

Переваги бункерів - розвантаження самопливом.

Кожний бункер має затвор для регулювання або припинення випуску вантажу. При зв'язних вантажах бункери обладнують збуджувачами випуску в вигляді ворушилок, вібраційних пристроїв.

5.8.2. Основи теорії і розрахунку бункерів

Процес витікання вантажів з бункерів складний і до цих пір складає предмет дослідження. Витікання вантажу залежить від його механіко-технологічних властивостей, стану поверхонь частинок вантажу і бункера, геометричних розмірів і форми бункера та отворів та інше.

В роботі бункера розрізняють: заповнення; початок витікання, яке відповідає перехідному періоду; встановлене витікання при постійному і змінному рівні; вивантаження.

Частина п'ята

Найбільшій увагу приділяють процесу встановленого витікання, який має два види – нормальний та гідравлічний (масовий). При певних умовах можливий змішаний вид витікання.

При нормальному витіканні рух матеріалу відбувається в межах певного каналу, розташованого над вихідним отвором. Весь інший матеріал залишається в спокої. Цей вид витікання спостерігається у більш зв'язних вантажів.

При гідравлічному витіканні весь матеріал, що знаходиться в бункері, приходить в рух з початком вивантаження. Подача матеріалу відбувається за рахунок зрушування матеріалу в зоні над вихідним отвором, цю зону називають об'ємом зрушування. Такий вид витікання можливий для вантажів з малим коефіцієнтом внутрішнього тертя при куті нахилу бокових стінок бункера на $5...10^\circ$ більше кута природного укусу вантажу.

Нормальна експлуатація бункерів досягається вірним вибором геометричних параметрів: кута нахилу стінок та розміру вихідного отвору. На зв'язних вантажах можливе заклинювання маси матеріалу, а на зерновому і шматковому вантажах – склепінеутворення. Тому існує декілька типів пристроїв для активізації витікання (скребковий транспортер, вібраційні збуджувачі.

Щоб запобігти утворенню склепіння при витіканні зернових та гранульованих вантажів, рекомендуються розміри отворів робити більше склепінеутворюючих:

- круглих

$$d_c \approx 8\sqrt{b \cdot c}, \text{ м}; \quad (5.127)$$

- квадратних

$$d_c > 7,09\sqrt{b \cdot c}, \text{ м} \quad (5.128)$$

де b і c – найменший і найбільший розміри частинок вантажу, м.

Швидкість витікання вантажу при нормальному витіканні визначається за формулою:

$$v = 5,65\lambda\sqrt{R_c}, \text{ м/с} \quad (5.129)$$

де λ – коефіцієнт витікання, що враховує вплив сил внутрішнього тертя, тертя об стінки отворів та ін. (для добре сипких вантажів – $0,55...0,65$, шматкових – $0,3...0,5$, порошкоподібних – $0,2...0,25$);

R_c – величина гідравлічного радіусу (відношення площі отвору до його периметра), м.

Для круглого і квадратного отворів гідравлічний радіус визначається за формулою:

$$R_z = 0,25d, \text{ м} \quad (5.130)$$

де d – діаметр отвору, м.

Для прямокутного отвору гідравлічний радіус визначається за формулою:

$$R_z = 0,5 \frac{a \cdot b}{a + b}, \text{ м} \quad (5.131)$$

де a і b – розміри сторін отворів, м.

При гідравлічному витіканні вантаж витікає подібно рідині.

Швидкість витікання вантажу при гідравлічному витіканні визначається за формулою:

$$v = \lambda_0 \sqrt{2gH} = 4,46 \lambda_0 \sqrt{H}, \text{ м/с} \quad (5.132)$$

де H – висота шару вантажу, м;

λ_0 – коефіцієнт витікання, орієнтовно рівний 0,6...0,7.

Враховуючи вплив відношення площ вихідного отвору і бункера швидкість витікання вантажу при гідравлічному витіканні визначається за формулою:

$$v = \lambda_0 \sqrt{\frac{2g \cdot H}{1 - \left(\frac{F}{F_0}\right)}}, \text{ м/с} \quad (5.133)$$

де F – площа вихідного отвору, м²;

F_0 – площа бункеру, м².

Продуктивність витікання через вихідний отвір, розташований в центрі бункера, визначається за формулою:

$$P = 3600 k_n \cdot \gamma \cdot F \cdot v, \text{ т/год} \quad (5.134)$$

де k_n – коефіцієнт продуктивності, що враховує вплив зменшення площі вихідного отвору і розподілення частинок в зоні витікання (орієнтовно 0,8...1,0).

Площу вихідного отвору з врахуванням зменшення для круглого отвору та квадратного відповідно визначається за формулами:

$$F = 0,785(d - a_0)^2, \text{ м}^2 \quad F = (a - a_0)^2, \text{ м}^2 \quad (5.135)$$

де a_0 – найбільший розмір частинок вантажу, м.

При розташуванні отворів в стінці, біля стінки або в куту днища бункера продуктивність збільшиться на 10...20%.

Бункери в процесі роботи відчувають дію сил: від маси вантажу, від власної ваги, від додаткових (внутрішніх) сил, від нерівномірного навантаження і від осьового навантаження. Дія цих сил залежить від роду і

Частина п'ята

стану вантажу, геометричних розмір бункера і умов роботи. В залежності від цього і необхідно розраховувати міцність стінок бункера, рами і стійкість опор.

В бункері від вантажу діють навантаження: початкове – при завантаженні без витікання; перехідне – при відкриванні та закриванні затвору і робоче – при встановленому режимі витікання.

Під дією цих навантажень днище і стінки бункера відчувають статичний тиск, який визначається за формулою:

$$p = \sigma = \frac{\gamma \cdot R_c}{f_g} [1 - e^{-\lambda \frac{H}{D}}], \text{ МПа} \quad (5.136)$$

де H і D – відповідно висота насипного вантажу і діаметр бункера, м;

λ – коефіцієнт в показнику експоненти;

f_g – коефіцієнт внутрішнього тертя.

Коефіцієнт в показнику експоненти визначається за формулою:

$$\lambda = (2 \dots 4) k_c \cdot \operatorname{tg} \varphi, \quad (5.137)$$

де k_c – величина, що враховує сипкість вантажу.

Для бункерів малої висоти статичний тиск визначається за формулою:

$$p = \sigma = k_c \cdot \gamma \cdot H, \text{ МПа} \quad (5.138)$$

В умовах початку і встановленого витікання величина тиску в різних елементах бункера і його розподіл змінюються. В зоні переходу циліндричної частини в конічну тиск різко збільшується до максимального.

Державні стандарти рекомендують вести розрахунок найбільш навантажених поясів бункера на подвоєний статичний тиск. При ексцентричному розташуванні отвору тиск на стінки збільшується.

5.8.3. Самопливний транспорт

Переміщення штучних і сипких вантажів під дією сили тяжіння називають самопливним транспортом. Для цього використовують спускні пристрої, скати, гвинтові спуски, жолоби, труби лотки.

Спускні пристрої – лотки і дошки – застосовуються для переміщення штучних вантажів. В залежності від призначення вони можуть працювати в режимах прискореного руху вантажу, з постійною швидкістю або гальмуванням. Зміна швидкості досягається застосуванням криволінійним або комбінованих поверхонь спусків.

Комбінований спуск (скліз) складається з двох похилих простих спусків. На ньому можна отримати любі кінцеві швидкості. Основною

умовою безвідмовної роботи спуску є вірний вибір кута нахилу, початкової швидкості, форми і матеріалу поверхні. Значне збільшення кута підйому спуска може привести до розпилювання і пошкодження вантажів.

Швидкість в кінці спуску визначається за формулою:

$$v_k = \sqrt{2g(H - f \cdot L) + v_n^2}, \text{ м/с} \quad (5.139)$$

де L – довжина спуску в горизонтальній проекції, м;

H – висота спуску, м;

f – коефіцієнт тертя матеріалу по спуску;

V_n – початкова швидкість спуску, м/с.

По швидкості $v_k = 2$ м/с (для сільськогосподарських продуктів) можливо визначити довжину та висоту спуску.

Для зменшення кінцевої швидкості кінець спусків роблять з меншим кутом до горизонту, а на стику спусків забезпечують плавний перехід. Зниження швидкості можна досягнути, виготовивши кінець спуску з матеріалу з більшим коефіцієнтом тертя.

Скат – пристрій, що застосовується для переміщення коченням вантажів, що мають форму тіл обертання.

Жолоба і труби для транспортування сипких вантажів бувають по формі траси – прямолінійні і криволінійні, а по поперечному перерізу – прямокутні, кутові, трапецієподібні, круглі та напівкруглі.

Рух сипкого вантажу по трубах відбувається з опором від тертя частинок між собою і повітряним середовищем. Опір повітряного середовища досягає значної величини при транспортуванні вантажу по трубах, що розташовані під кутом більше 50° .

Рух матеріалу по лотку називається зв'язаним, якщо він рухається без внутрішнього переміщення частинок одна відносно іншої. Цей рух забезпечується умовою:

$$\varphi < \beta < \varphi_0 \quad (5.140)$$

де φ , β і φ_0 – відповідно кути зовнішнього тертя, нахилу труби, внутрішнього тертя.

При відносному зміщенні частинок виникають сили внутрішнього тертя. Такий рух називається незв'язаним і визначається умовою:

$$\beta > \varphi_0 \quad (5.141)$$

Дослідження і практика показують, що стійкий рух по трубах досягається при незв'язаному русі, при якому швидкість сипкого вантажу не залежить від висоти шару вантажу. Тому рекомендується кут нахилу самопливних труб і лотків призначати більшим, ніж кут внутрішнього тертя вантажу. Практично рекомендується: для зерна $\beta = 21...27^\circ$, при підвищеній вологості до 45° ; для муки, жмиха та висівок $\beta = 32...48^\circ$; для

Частина п'ята

картоплі і коренеплодів $\beta = 30...43^\circ$.

В залежності від відношення основних параметрів самоплив може працювати в режимах прискорення і гальмування. Кінцева швидкість вантажу визначається за формулою:

$$v_k = \sqrt{2g \cdot l(\sin \beta - \varepsilon \cdot f \cdot \cos \beta) + v_n^2}, \text{ м/с} \quad (5.142)$$

де l – довжина спуску самопливу, м;

ε – коефіцієнт, що залежить від відношення роботи зовнішніх сил і сил внутрішнього тертя і форми поперечного перерізу (орієнтовно 1,5...1,65);

f – коефіцієнт тертя матеріалу по спуску;

V_n – початкова швидкість спуску, м/с.

Продуктивність самопливної установки визначається за формулою:

$$P = 3600\psi \cdot \gamma \cdot F \cdot v_c, \text{ т/год} \quad (5.143)$$

де ψ – коефіцієнт наповнення жолоба або труби (орієнтовно для зерна 0,4...0,5, висівок і муки 0,2...0,3);

γ – щільність вантажу, т/м³;

F – площа жолоба або труби, м²;

V_c – середня швидкість транспортування, м/год.

Частіше цією формулою користуються при визначенні площі перерізу лотка, жолоба або труби по заданій продуктивності. При куті нахилу $\beta = 36^\circ$ труба діаметром 200 мм забезпечує продуктивність 45 т/год, а діаметром 450 мм – 350 т/год.

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. За якою залежністю визначають швидкість витoku вантажу з бункера при гідравлічному витoku?
2. Які існують види процесу встановленого витoku вантажу з бункера?
3. В чому суть нормального процесу витoku вантажу з бункера і яким видам вантажів він присутній?
4. В чому суть гідравлічного процесу витoku вантажу з бункера і яким видам вантажів він присутній?
5. Що таке гідравлічний радіус отвору бункера?
6. В якому місці бункера потрібно розташувати отвір для витoku вантажу, щоб отримати більшу продуктивність?
7. Який вид самопливної установки називається склізом?
8. За рахунок чого досягається зміна швидкості руху вантажу на самопливній установці?

5.9. Характеристика вантажопідйомних машин

5.9.1. Класифікація і основні параметри вантажопідйомних машин

Вантажопідйомні машини загального призначення застосовуються головним чином для переміщення тучних вантажів, тому в сільськогосподарському виробництві їх використовують відносно рідко. Для сипких, кускових і зв'язних вантажів застосовують машини неперервної дії і спеціальні навантажувачі періодичної дії.

Вантажопідйомні машини поділяють: по конструкції – на підйомні пристрої (домкрат, лебідка, таль; крани (автомобільний, козловий і мостовий); навантажувачі (грейферний, автонавантажувач); по виду привода – з ручним, машинним і комбінованим; по напрямку руху вантажу – вертикальне, горизонтальне і комбіноване по складним траєкторіям.

В залежності від режиму експлуатації механізму підйому вантажопідйомники розділяють на п'ять груп (табл. 5.2). Крани майстерень, ремонтних заводів, розвантажувальних майданчиків в сільському господарстві відносяться в основному до першої та другої груп.

Таблиця 5.2 – Характеристики вантажопідйомних машин

Група	Режим експлуатації	Коефіцієнт річного використання, K_p	Коефіцієнт добового використання, K_d	Відносна тривалість включення, ПВ, %
1	Легкий (Л)	0,25	0,33	15
	Середній			
2	(С)	0,50	0,67	25
3	Важкий (В)	0,75	0,67	40

Коефіцієнт річного використання визначається за формулою:

$$K_p = \frac{z_{d,p}}{365}, \quad (5.144)$$

де $z_{d,p}$ – число днів роботи за рік.

Коефіцієнт добового використання визначається за формулою:

$$K_d = \frac{z_{ч,p}}{24}, \quad (5.145)$$

де $z_{ч,p}$ – число годин роботи за добу.

Відносна тривалість включення (ПВ) – відношення сумарного часу роботи механізму протягом циклу до всього часу, що затрачується на цикл, і визначається за формулою:

$$ПВ = \frac{\sum t}{\sum t + \sum t_0} 100, \% \quad (5.146)$$

де $\sum t$ і $\sum t_0$ – відповідно сумарний час роботи механізму і пауз, хв.

Кранові асинхронні двигуни при різній відносній тривалості включення можуть розвивати різну потужність, наприклад, 125% від номінальної при ПВ = 15%; 100% від номінальної при ПВ = 25% і тільки 80% від номінальної при ПВ = 40%. У випадку приводу механізмів підйому від двигуна внутрішнього згорання величина ПВ характеризує тільки режим експлуатації.

Основні характеристики вантажопідйомної машини: вантажопідйомність, швидкість підйому, швидкість переміщення, швидкість повороту, висота підйому, проліт, виліт, база, габаритні розміри, маса і потужність.

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Як класифікуються вантажопідйомні машини за конструктивними ознаками?.
2. Які показники характеризують режим роботи вантажопідйомних машин?
3. Що називається коефіцієнтом річного використання крана?
4. Що називається коефіцієнтом добового використання крана?
5. Що таке відносна тривалість включення?
6. За якими режимами працюють крани ремонтних майстерень?

5.10. Деталі та вузли вантажопідйомних машин

5.10.1. Тягові органи

Люба вантажопідйомна машина складається з вантажозахватного органу, тягового органу, механізмів підйому, переміщення і повороту, гальмівних пристроїв, двигуна системи керування.

Ланцюги, що застосовуються в вантажопідйомних машинах, по конструкції діляться на зварні і пластинчасті. Зварні ланцюги виготовляються з сталей Ст. 2, Ст. 3 і сталі 10, бувають довголанкові з кроком (довжина великої вісі внутрішнього овалу) ланцюга більше п'яти

діаметрів дроту зварної ланки і коротколанкові з кроком ланцюга менше трьох з половиною діаметрів дроту зварної ланки при ширині ланцюга три з половиною діаметра.

Ланцюги випробовують під навантаженням рівним половині руйнуючої. При цьому залишкових деформацій не повинно бути.

Зварні ланцюги мають велику гнучкість. Можуть працювати з блоками, зірочками і барабанами з діаметрами $D = (20...30)d$.

Недоліки ланцюгів: велика власна вага, можливість не передбачуваного обриву і обмежена швидкість руху до 0,6...0,75 м/с.

Руйнуюче навантаження при приблизному розрахунку ланцюгів визначається за формулою:

$$P_{руй} \geq n \cdot S, \quad (5.147)$$

де $P_{руй}$ – руйнуюче навантаження, Н;

n – запас міцності, який приймається для чалочних ланцюгів 5...6 і вантажних 3...8;

S – найбільше робоче зусилля на ланцюг, Н.

Пластинчасті ланцюги по конструкції і вантажопідйомності діляться на чотири типи: I – з розклепуванням осей без шайб (для вантажопідйомності до 2,0 т); II – з розклепуванням осей на шайбі (для вантажопідйомності від 3,0 до 10,0 т); III – на шплінтах з шайбами (для вантажопідйомності від 15,0 до 40,0 т); IV – з гладкими валиками. Виготовляють план часті ланцюги із сталей 40, 45 та 50.

Переваги пластинчастих ланцюгів – велика надійність і гнучкість. Але ланцюг не допускає навантаження в напрямку, що перпендикулярний до площини обертання її шарнірів. Тому, щоб не допускати перевантажень і поломок ланцюга, необхідно знижувати швидкість пересування вантажопідйомника до 0,25 м/с.

Перевірочний розрахунок ланцюгів проводять за формулою (5.147) при запасі міцності 5...8.

Канати виготовляють з пенькового і капронового волокна, сталюого дроту. Перші переважно використовуються для обв'язування і підвішування штучних вантажів. До їх недоліків відносяться мала міцність, швидкий знос, можливість механічних пошкоджень.

Розрахунок на розтяг проводиться по повному перерізу при $[\sigma_p] = 9...10$ МПа для пенькового і $[\sigma_p] = 30...40$ МПа для капронового канатів.

Навантаження на одну вітку каната визначається за формулою:

$$S = \frac{Q_0}{Z \cdot \eta}, \text{ Н} \quad (5.148)$$

де Q_0 – сумарна сила тяжіння вантажу;

Z – число віток поліспасти;

η – к. к. д. поліспасти, рівний 0,78...0,97.

Сумарна сила тяжіння вантажу визначається за формулою:

$$Q_0 = g \cdot G_0, \text{ Н} \quad (5.149)$$

При підвішуванні вантажу на декількох стропах певної довжини і куті нахилу до вертикалі $\alpha = 30...45^\circ$ рекомендується висота підвісу, що визначається за формулою:

$$h = (0,7...0,8)l_c, \text{ м} \quad (5.150)$$

де l_c – довжина стропи.

Натяг стропи в такому випадку визначається за формулою:

$$S = (1,15...1,42) \frac{Q_0}{Z}, \text{ Н} \quad (5.151)$$

Збільшення висоти підвісу приводить до зниження натягу стропи, але скорочує корисну висоту підйому.

Вибір канату ведеться по руйнівному навантаженню, яке визначається за формулою:

$$P_{руй} \geq n \cdot S, \text{ Н} \quad (5.152)$$

де $P_{руй}$ – руйнуюче навантаження, Н;

n – запас міцності, який приймається для канатів рівним 12.

Стальні канати – найбільш розповсюджений тяговий орган вантажопідйомних машин.

Переваги сталевих канатів – висока міцність, менша маса, достатня пружність, безшумність в роботі і більша надійність. Початок руйнування попереджується розривом окремих дротиків. Кількість обірваних дротинок на один крок завивки каната служить бракувальною ознакою.

Стальні канати виготовляють з високовуглецевого холоднотягнутого дроту з межею міцності $\sigma_m = 1,7...2,2 \text{ кН/мм}^2$. В вантажопідйомних машинах застосовують канати подвійної завивки з органічним осердям, просякнутим складом з 50% кам'яновугільної смоли і 50% мазуту, який при згинах змащує пряди, зменшуючи втрати на тертя і знос. За напрямком завивки дротів розрізняють канати правої і лівої завивки. В канатах односторонньої завивки дроти і пряди звиваються в одну сторону і мають лінійний контакт (ЛК). Канати хрестової завивки – в різні сторони. Канати односторонньої завивки прагнуть розкручуватися, але вони більш гнучкі і рекомендуються для підвішування вантажу на декількох вітках. Канати хрестової завивки завжди мають точковий контакт (ТК) між дротами, вони більш жорсткі і робота їх супроводжується при згинах підвищеним зносом.

В процесі роботи (навантаження) каната в його дротах виникають напруження: розтягу – від зусилля натягу, згину – від згину на барабані

(блоці), стиску – від сплющування при згині, кручення – при звиванні і зминання – в місцях контакту дротів між собою і з поверхнею барабана або блока.

Попередня деформація дротів і прядей перед завивкою по формі спіралей підвищує працездатність каната на 40% і попереджує саморозкручування.

Розрахунок сталевих канатів проводиться на розтяг за формулою:

$$S \leq \frac{P_{роз}}{n}, \text{ Н} \quad (5.153)$$

де S – робочий натяг вітки каната, Н;

$P_{роз}$ – дійсне розривне зусилля каната, що вибирається по таблицям, Н;

n – запас міцності, рівний 4...6.

Для зменшення напруг згину і забезпечення певної довговічності рекомендується найменший діаметр барабана і блока визначається за формулою:

$$D_{\min} = e_1 \cdot e_2 \cdot d, \text{ м} \quad (5.154)$$

де e_1 – коефіцієнт, що залежить від типу вантажопідйомника і режиму експлуатації, рівний 16...20;

e_2 – коефіцієнт, що залежить від конструкції канату, рівний 1,0...0,85 (більші значення при точковому контакті і хрестовій завивці).

При розрахунку каната на розтяг не враховуються всі фактори, що впливають на працездатність. Враховуючи, що руйнування канату в кінцевому рахунку обумовлюється втомлюваністю металу, враховують практичні і теоретичні передумови на витривалість.

В основу розрахунку на довговічність закладені дослідні дані, що виражають допустиме число згинів канату, яке визначається за формулою:

$$[Z] = \frac{C(\psi - 8)}{8,5 \cdot C_1 \cdot C_2 \cdot \sigma_p + 8 - \psi}, \quad (5.155)$$

де $[Z]$ – допустиме число тисяч згинів;

C – коефіцієнт, що залежить від марки дроту, рівний 920...1080;

C_1 – коефіцієнт, що залежить від конструкції канату і якості металу, рівний 0,73...1,08;

C_2 – коефіцієнт, що залежить від діаметру канату, при діаметрі дроту 8...35 рівний 0,85...1,16.

Дійсне число згинів канату, яке визначається за формулою:

$$Z_o = \beta \cdot a \cdot z_{\psi} \cdot T, \quad (5.156)$$

де β – коефіцієнт зміни витривалості, що залежить від режиму

роботи і виду привода;

a – середнє число робочих циклів за місяць;

$z_{\text{ц}}$ – кількість повторних згинів за один цикл;

T – строк служби каната, місяців.

Строк служби канату визначається за формулою:

$$T = \frac{\varphi \cdot [Z]}{\beta \cdot a \cdot z_{\text{ц}}}, \text{ місяців} \quad (5.157)$$

де φ – коефіцієнт використання (запасу) працездатності, рівний 0,45...0,55.

Подальшу працездатність каната визначають після спеціального випробовування.

5.10.2. Вантажозахватні пристрої

Продуктивність вантажопідйомних машин тим вище, чим досконаліша конструкція вантажозахватного пристрою. Найбільша продуктивність досягається при захваті максимально допустимого вантажу і витраті мінімального часу. Практика показує, що час на захват вантажу складає іноді до 60% всього часу циклу.

До вантажозахватних пристроїв ставляться такі вимоги: відповідність вантажу і умовам роботи, міцність і надійність у відповідності з правилами техніки безпеки, максимальна автоматизація, збереженість вантажу, мінімальна маса і невеликі розміри і висота, зручність експлуатації.

В залежності від категорії вантажу вони розділяються на дві групи:

- для штучних вантажів: крюки, петлі, скоби, стропи, захвати, електромагніти;
- для сипких і зв'язних (пухких) вантажів: ковші, кігті, контейнери, грейфери.

Гаки, призначені для безпосереднього або за допомогою чалочних строп підвішування вантажів, поділяють на однорогі вантажопідйомністю 0,25 ...20 т і дворогі. При підвісі гака на декількох вітках його кріплять на підвісці гака.

Гаки кують або штамнують з сталі 20. литі гаки застосовуються за кордоном.

В сільськогосподарському виробництві, крім стандартних застосовують гаки місцевого виготовлення з круглим і прямокутним перерізами.

Вибір і розрахунок гаків на необхідну вантажопідйомність виконують двома методами;

- по заданій вантажопідйомності вибирають стандартний гак, який

розрахунком не перевіряють;

- гаки, що конструюють і виготовлюють на місці, обов'язково розраховують на міцність.

Напруга на розтяг в різьбі визначається за формулою:

$$\sigma_p = \frac{4Q}{\pi \cdot d_i^2} \leq [\sigma_p], \text{ кН/мм}^2 \quad (5.158)$$

де Q – сила навантаження гака, Н;

d_i – внутрішній діаметр різьби, мм.

Висоту гайки знаходять з умови розрахунку на зминання різьби за формулами:

$$H = z \cdot s, \text{ мм} \quad \text{і} \quad Q = 0,785z(d^2 - d_i^2)[p], \text{ кН} \quad (5.159)$$

де z – кількість витків;

s – крок різьби, мм;

d – зовнішній діаметр різьби, мм;

$[p]$ – питомий тиск, рівний 30...35 МПа.

Напруга в небезпечному перерізі вушка визначається за формулою:

$$\sigma_p = \frac{4Q}{b \cdot d_0} \cdot \frac{2D^2}{D^2 - d_0^2} \leq [\sigma_p], \text{ МПа} \quad (5.160)$$

де Q – сила навантаження гака, кН;

D – зовнішній діаметр вушка, мм;

b – товщина вушка, мм;

d_0 – діаметр отвору вушка, мм;

$[\sigma_p]$ – допустима напруга для сталі 20, рівна 100 МПа.

В загнутій частині гака найбільша напруга виникає в точці, розташованій на горизонтальній вісі отвору зева гака на відстані від центру отвору, що називається радіусом кривизни нейтрального шару. Радіус кривизни нейтрального шару для круглого перерізу визначається за формулою:

$$r_0 = \frac{d^2}{4(2r - \sqrt{4r^2 - d^2})}, \text{ мм} \quad (5.161)$$

де r – відстань від центру отвору зева по горизонтальній вісі до центра тяжіння гака, мм.

Напруга в загнутій частині гака менша, чим менший зев гака, який не повинен бути менше двох перерізів строп. Найбільш раціональна трапецієподібна форма поперечного перерізу гака.

Всі гаки випробовують на міцність під навантаженням, на 25% більшій номінальній вантажопідйомності. Тривалість випробувань 10 хв. Після випробувань гак не повинен мати тріщин і залишкових деформацій.

Вантажні петлі (скоби) в сільськогосподарському виробництві

Частина п'ята

застосовують суцільно кованими. Розраховують їх на міцність наближеним способом.

Сумарний згинаючий момент визначається за формулою:

- для поперечини

$$M_1 = 0,17Q \cdot l + P \cdot x, \text{ Нм} \quad (5.162)$$

- для бокової частини

$$M_2 = 0,08Q \cdot l, \text{ Нм} \quad (5.163)$$

де l – найбільша відстань між центрами профілю скоби в горизонтальному напрямку;

x – відстань в вертикальному напрямку між центром профілю скоби найнижчої частини скоби і віссю, що проходить в горизонтальному напрямку через центри профілю скоби з найбільшою відстанню.

Сумарна напруга в поперечині визначається за формулою:

$$\sigma = \frac{M_1}{W} \cdot \frac{P_1}{F} \leq [\sigma_3], \quad (5.164)$$

де P_1 – горизонтальна складова сили тяжіння, Н;

W – момент опору поперечини;

F – площа перерізу поперечини, м².

Для попередження випадіння чалочних канатів із зеву гака його оснащують замикальним пристосуванням.

Для самовстановлення підвішеного вантажу використовують врівноважувальні блоки в поліспасти і сферичні шайби під упорні підшипники.

Для попередження ударів гакової підвіски об раму чи барабан вантажопідйомника встановлюють кінцеві вимикачі.

Зачалюють і підвішують вантажі за допомогою строп. Найбільше розповсюджені стропи із сталевих канатів. Через кожні шість місяців роботи стропи випробовують подвійним робочим навантаженням при найбільш несприятливим умовам захвату вантажу.

Грейфери – найбільш розповсюджені в сільському господарстві вантажозахватні пристрої. Грейферні пристрої можна класифікувати по схемі підвісу: на гнучкому зв'язку і жорстко зв'язані зі стрілою; по кінематиці механізму: на одно- і двоканатні, гвинтові, вібраційні і гідравлічні і по принципу захвату вантажу: на самовхідні в вантаж під дією сили тяжіння, вібраційні і напірні під дією зусилля від стріли.

В сільському господарстві грейфери застосовують легкого типу для вантажів з об'ємною щільністю до 1 т/м³ і рідше середнього типу – з об'ємною щільністю від 1,1 т/м³ до 2 т/м³.

Характеристикою грейферів слугує коефіцієнт відношення маси

грейфера до маси вантажу, що захватується. Для грейферів загального призначення коефіцієнт рівний 1,0...1,1, а для навантажувачів сільськогосподарських вантажів – 0,4...0,5.

Зусилля входження челюстей грейфера складається з опору різання, здвигу, зминання, розриву елементів вантажу і його початкового підйому і визначається за формулою:

$$P_p = F \cdot [q], \text{ кН} \quad (5.165)$$

де F – площа поперечного перерізу ріжучої кромки ковша, м^2 ;

$[q]$ – розрахункове питоме зусилля входженню в залежності від властивостей вантажу, рівне 1...8 МПа.

5.10.3. Блоки, зірочки і барабани

Блоки, зірочки і барабани – деталі, які взаємодіють в роботі з підвісними і тяговими органами. Блоки слугують для плавного перегину і зміни напрямку руху тягового органу. Зірочки і барабани – ведучі елементи вантажопідйомних машин, за допомогою яких намотується і розмотується підвісний або тяговий орган.

В залежності від призначення розрізняють **блоки**, які обертаються і не обертаються, рухомі і нерухомі.

Рухомі блоки переміщуються в просторі. Їх використовують в підвісному пристрої для зміни натягу і швидкості канату.

Нерухомі блоки слугують для зміни напрямку канату. Їх вісі закріплені на нерухомій частині вантажопідйомника.

Блоки для каната і ланцюгів виготовляють звичайно з чавунного лиття марок СЧ 12-28 і СЧ 15-32. При великих навантаженнях блоки виготовляють з сталюого лиття або зварними.

Діаметр блока в залежності від умов роботи визначається за формулою (5.154):

$$D_{\min} = e_1 \cdot e_2 \cdot d, \text{ м} \quad (5.166)$$

де e_1 – коефіцієнт, що залежить від типу вантажопідйомника і режиму експлуатації, рівний 16...20;

e_2 – коефіцієнт, що залежить від конструкції канату, рівний 1,0...0,85 (більші значення при точковому контакті і хрестовій завивці);

d – діаметр канату, м

Зменшення діаметра на 10...20% допускається тільки для врівноважувальних блоків. Профіль канавки блока виконують по розмірам, що визначаються за формулами:

- глибина

$$h \approx (1,5...2,0)d, \text{ м} \quad (5.167)$$

- ширина

$$b \approx (2,0...2,5)d, \text{ м} \quad (5.168)$$

- радіус дна

$$r \approx (0,6...0,7)d, \text{ м} \quad (5.169)$$

Працездатність пари вісь – втулка блока перевіряється по питомому тиску і питомій роботі тертя.

Діаметр блоків для зварних ланцюгів визначають по співвідношенням:

- при ручному приводі

$$D > 20d, \text{ м} \quad (5.170)$$

- при машинному приводі

$$D > 30d, \text{ м} \quad (5.171)$$

де d – діаметр дроту ланки ланцюга.

Розрізняють **зірочки** для каліброваних і пластинчастих ланцюгів. Ланки каліброваного ланцюга вміщуються в спеціальне заглиблення в зірочці – чарунку, яке відповідає формі ланки ланцюга.

Діаметр зірочок для каліброваних і пластинчастих ланцюгів відповідно визначаються за формулами:

$$D_0 = \sqrt{\left(\frac{t}{\sin \frac{90}{z}}\right)^2 + \left(\frac{d}{\cos \frac{90}{z}}\right)^2}, \text{ м} \quad \text{та} \quad D_0 = \frac{t}{\sin \frac{180}{z}}, \text{ м} \quad (5.172)$$

де t – крок ланцюга, м;

d – діаметр дроту ланки ланцюга, м;

z – кількість чарунок, рівна > 5 або зубів від 7 до 11.

Барабани. Це деталі підйомного або тягового механізму, на які навивається тяговий орган – ланцюг або канат. Він представляє собою полий циліндр з однією або двома маточинами в залежності від його ширини.

Робоча поверхня барабана буває гладкою або з гвинтовою канавкою для направленої навивки ланцюга або сталюого канату. Багатошарова навивка допустима тільки на гладкі барабани, бо вона приводить до підвищеного зносу каната.

Барабани виготовляють: литі МЧС 28-48 і СЧ 15-32 і зварні із сталей Ст. 3 та Ст. 5.

Профіль канавки барабана для сталюого каната виконують по розмірам, що визначаються за формулами:

- товщина стінки

$$c = (0,25...0,4)d, \text{ м} \quad (5.173)$$

- ширина

$$t = d + (2...3), \text{ м} \quad (5.174)$$

- радіус дна

$$r = (0,6...0,7)d, \text{ м} \quad (5.175)$$

На барабан можна намотувати одну або дві вітки канату. В першому випадку гвинтова канавка звичайно має праву навивку, в другому випадку – праву з одного кінця і ліву з другого до середини барабана. Таке розташування канавок забезпечує вертикальне опускання і піднімання вантажу.

Відхилення каната або ланцюга від напрямку канавки допускається на величину не більше ніж 1:40 для гладкого барабана і 1:10 для барабана з гвинтовою навивкою.

Основні розміри барабана круглого полого перерізу розрізняють такі: номінальний (розрахунковий) діаметр, зовнішній та внутрішній.

Номінальний діаметр визначається за формулою (5.166). Зовнішній діаметр, що вимірюється по дну канавок, визначається за формулою:

- для каната

$$D = D_0 - d, \text{ м} \quad (5.176)$$

- для ланцюга

$$D = D_0 - B, \text{ м} \quad (5.177)$$

Внутрішній діаметр барабана визначається за формулою:

$$D_0 = D - 2\delta, \text{ м} \quad (5.178)$$

Довжина каната при одношаровій навивці на один барабан визначається за формулою:

$$L_0 = H \frac{z}{z_n}, \text{ м} \quad (5.179)$$

де H – висота підйому або довжина переміщення вантажу, м;

z – кількість віток підвісу або тяги;

z_n – кількість віток, що намотується на барабан.

Кількість робочих витків на барабані визначається за формулою:

$$i = \frac{z \cdot H}{z_n \cdot \pi \cdot D_0} + (1,5...2,0), \quad (5.180)$$

де (1,5...2,0) – запасні витки, що рекомендуються використовувати для розвантаження кріплення канатів на барабані.

Довжина барабана визначається за формулою:

$$l_{\sigma} = z_n \cdot l_p + l_1 + 2l_2, \text{ м} \quad (5.181)$$

де l_p – робоча довжина барабана, м;
 l_1 – розмір середньої частини барабана, м;
 l_2 – розмір кінцевої частини барабана, м.

Робоча довжина барабана визначається за формулою:

$$l_p = i \cdot t, \text{ м} \quad (5.182)$$

де I – число робочих витків;
 t – розмір кроку, м.

При багатошаровій навивці каната на барабан повна кількість витків визначається за формулою (5.180) по середньому діаметру, який визначається за формулою:

$$D_{сер} = D_{\sigma} + md, \text{ м} \quad (5.185)$$

де m – число шарів навивки.

Розрахунок барабана на міцність. В процесі роботи барабана в стінках виникають напруги від спільної дії згинаючого і крутного моментів, які визначаються за формулою:

$$\sigma = \frac{M_{зв}}{W} = \frac{\sqrt{M_{зг} + M_{кр}}}{0,8(D - \delta)^2 \delta} < [\sigma], \text{ МПа} \quad (5.186)$$

де $M_{зв}$ – зведений момент;
 W – момент інерції перерізу;
 $M_{зг}$ – згинаючий момент, кНм;
 $M_{кр}$ – крутний момент, кНм.

При довжині барабана в три рази менше зовнішнього діаметра найбільш небезпечна деформація виявляється від стискання стінок барабана. В цьому випадку напруги визначаються за формулою:

$$\sigma_{\max} = 2p \frac{D^2}{D^2 - D_{\sigma}^2} = \frac{4D \cdot S}{(D^2 - D_{\sigma}^2)i} < [\sigma_{cm}], \text{ МПа} \quad (5.187)$$

При розрахунку барабана з врахуванням одночасної дії згину, кручення та стискання рекомендується мати запас міцності: для сталевих барабанів > 2 і для чавунних барабанів > 5 .

З'єднання барабана з вихідним валом редуктора за допомогою зубчастої муфти компенсує перекося і розвантажує вісь барабана.

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. З якою метою у середині сталюого канату вмонтовано органічне осердя?
2. Що означають в умовних позначеннях канатів букви ТК і ЛК?
3. Які напруження виникають у дротинках сталюих канатів при огинанні ними блоків і барабанів під навантаженням?
4. Для якого канату встановлюють більший запас міцності для робочих тягових чи для чалочних?
5. Назвіть переваги і недоліки пластинчастих ланцюгів порівняно із зварними?
6. Від якого параметру залежить діаметр блока для сталюих канатів?
7. За якою залежністю визначають діаметр ділильного кола вантажної зірочки для зварних каліброваних ланцюгів?
8. За якою залежністю визначають діаметр ділильного кола вантажної зірочки для пластинчастих ланцюгів?
9. Яку кількість зубів рекомендовано вибирати для вантажних зірочок, що заціплюються з пластинчастими ланцюгами?
10. Яку кількість чарунок рекомендовано вибирати для вантажних зірочок, що заціплюються із зварними каліброваними ланцюгами?
11. У яких випадках виготовляють барабани з гвинтовими канавками, а коли з гладенькою циліндричною поверхнею?
12. Яка різниця в будові барабана для одинарного і здвоеного поліспасти?
13. З якого матеріалу виготовляють барабани вантажопідйомних машин?
14. На яку деформацію необхідно перевірити міцність барабанів, у яких довжина барабана в три рази менше зовнішнього діаметра?

5.11. Механізми вантажопідйомних машин

5.11.1. Механізми підйому і тяги

Для підйому, утримання на заданій висоті і плавного опускання вантажу використовують: лебідки, талі, поліспасти, пневматичні і гідравлічні підйомники, домкрати.

При горизонтальному або похилому транспортуванні вантажу механізм підйому можна використовувати як тяговий пристрій.

Поліспасти складається з тягового органу і охоплюваних ними

Частина п'ята

декількох рухомих і нерухомих блоків.

Зусилля для переміщення вантажу до 0,5 т прикладається до кінцевої вітки поліспасти вручну або за допомогою лебідки.

В залежності від схеми роботи розрізняють поліспасти для виграшу в силі або швидкості. Перші застосовують у вигляді самостійних механізмів і силових передач, другі – в гідравлічних і пневматичних підйомниках при незначному ході поршня.

В сільському господарстві поліспасти використовуються для підйому вантажів, натягування електричних проводів.

Поліспасти, вбудовані в вантажопідйомні машини, бувають одинарні і здвоєні. Здвоєний поліспаст забезпечує вертикальний і стійкий підйом вантажу при намотуванні одночасно двох віток. Для вирівнювання натягу і довжини віток каната встановлюють зрівноважувальні блоки. Підвішування вантажу на декількох вітках дозволяє знизити навантаження на канат, зменшити його переріз, розміри блоків і барабанів, масу і розміри механізму в цілому.

Основною характеристикою поліспасти є кратність. В одинарному поліспасті кратність рівна кількості віток, на яких висить вантаж. В здвоєному поліспасті кратність визначається за формулою:

$$k = \frac{z}{z_n}, \quad (5.186)$$

де z – кількість віток в поліспасті;

z_n – кількість віток в поліспасті, що намотується.

Натяг віток поліспасти. При нерухомо підвішеному вантажі зусилля в будь-якій вітці каната здвоєного поліспасти визначається за формулою:

$$S = \frac{Q}{z}, \text{ Н} \quad (5.187)$$

При підйомі вантажу зусилля в вітці, що набігає на поліспаст, постійно зростає і досягає максимального. Тоді зусилля в інших вітках визначається за формулами:

$$S_2 = S_1 \cdot \eta, \text{ Н} \quad S_3 = S_1 \cdot \eta^2, \text{ Н} \quad S_z = S_1 \cdot \eta^{z-1}, \text{ Н} \quad (5.188)$$

де η – к. к. д. блоків поліспасти.

Підставляючи в рівняння рівноваги поліспасти

$$Q = S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_{z-1} + S_z \quad (5.189)$$

значення попередніх формул отримаємо:

$$Q = S_1(1 + \eta + \eta^2 + \dots + \eta^{z-2} + \eta^{z-1}) \quad (5.190)$$

Вираз в дужках представляє собою геометричну прогресію зі знаменником η , тоді зусилля в вітці, що набігає на поліспаст визначається за формулою:

$$S_l = Q \frac{1-\eta}{1-\eta^z}, \text{ Н} \quad (5.191)$$

Поділивши праві і ліві частини формул (5.187) та (5.190), отримаємо к. к. д. поліспасти при збіганні канату з рухомого і нерухомого блоків, які визначаються за формулами:

$$\eta_p = \frac{S}{S_l} = \frac{1-\eta^z}{z(1-\eta)} \quad \text{і} \quad \eta_{н,р} = \frac{(1-\eta^z)\eta}{z(1-\eta)} \quad (5.192)$$

Довжину каната, що намотується, визначається за формулою:

$$L = k \cdot z_n \cdot H, \text{ Н} \quad (5.193)$$

де k – кратність поліспасти;

H – висота підйому, Н.

Швидкість намотування каната в залежності від швидкості підйому вантажу визначається за формулою:

$$v_k = k \cdot v_g = \frac{\pi \cdot D_o \cdot n}{60}, \text{ м/с} \quad (5.194)$$

де v_k – швидкість намотування канату, м/с;

v_g – швидкість підйому вантажу, м/с;

n – кількість обертів барабана, об/хв.

5.11.2. Талі

Таль – переносний підйомний механізм, який застосовується на монтажних роботах і для підйому вантажу. Талі використовують при ремонтних роботах в сільськогосподарських майстернях. Для підвішування талей застосовують треноги, козлові опори і підвісні колії.

По конструкції розрізняють черв'ячні та шестеренчасті талі. По виду приводу – ручні, електричні, пневматичні і гідравлічні талі.

Черв'ячна таль має пластинчастий вантажний ланцюг або зварний калібрований ланцюг, який утворює здвоєний поліспаст. Привідний механізм складається з черв'ячної передачі, яка для збільшення к. к. д. виконана несамогальмівною з двозахідним черв'яком з кутом підйому гвинтової лінії 15...20°, тому для попередження самовільного опускання вантажу таль має дисковий вантажоупорне гальмо. Вантажопідйомність черв'ячних талей від 0,5 до 10 т, а к. к. д. – 0,55...0,7. Тягове зусилля від 0,3 до 0,7 кН. Швидкість підйому від 0,11 до 0,55 м/хв. при швидкості руху

привідного ланцюга 30 м/хв.

Шестеренчаста таль з планетарним зубчастим редуктором має більш високий к. к. д., компактнішу конструкцію і можливість підйому вантажу на підвищених швидкостях. Підйомний механізм приводиться в дію нескінченим каліброваним зварним ланцюгом. Для попередження самовільного опускання вантажу таль має гвинтове дискове вантажоупорне гальмо, вбудоване в тягове колесо. При підйомі вантажу заскочка гальма не заважає обертанню храповика, і навпаки, при опусканні вантажу вона спирається на зуб храповика. При відкручуванні привідного колеса з гвинта розблоковується гальмо і вантаж повільно опускається.

Вантажопідйомність шестеренчастих талей від 0,5 до 4 т, а к. к. д. – 0,7...0,8. Тягове зусилля від 0,26 до 0,55 кН. Швидкість підйому від 0,2 до 1,3 м/хв. при швидкості руху привідного ланцюга 30 м/хв.

Електроталі відрізняються компактністю конструкції і простотою обслуговування. Електроталі підвішуються до нерухомих опор (балок, колон, стін) за допомогою болтів або крюків, або візків, які переміщуються по монорельсовій колії. Управління механізмом підйому електроталі виконується з підлоги за допомогою двокнопкового поста управління, підвішеного до талі. Вантажопідйомність електроталей від 0,1 до 15 т. Висота підйому і швидкість підйому вантажу відповідно не більше 40 м і від 5 до 25 м/хв. При необхідності (наприклад при виконанні монтажних робіт) електроталі крім основної швидкості підйому можуть мати і додаткову, яка може бути в декілька разів менше основної.

Електроталі можуть використовуватися як самостійні вантажопідйомні машини, так і бути в якості механізму підйому в більш складних машинах (мостових кранах, консольних кранах). Швидкість переміщення по монорельсам до 30 м/хв. і по кран-балкам 15 м/хв. Більшість електроталей мають в якості гнучкого вантажного елемента сталевий канат і рідше зварний або пластинчастий ланцюг.

Пневматичні талі використовують для роботи у вибухонебезпечному середовищі, де використання електродвигунів не допускається.

5.11.3. Домкрати

Домкрати – самостійні механізми, що застосовуються для підйому, переміщення і фіксації його в певному положенні. В залежності від застосування розрізняють домкрати: загального призначення, спеціальні і вбудовані в машину.

В сільському господарстві найбільш розповсюджені гвинтові, рейкові і гідравлічні домкрати.

Домкрати загального призначення слугують для підйому вантажів на

порівняно невелику висоту (0,2...1,0 м) при ручному приводі, тому вантаж піднімається повільно. Для частого або швидкого підйому слугують спеціальні домкрати з електричним приводом.

Рейкові домкрати застосовують при установочних роботах і для переміщення на невелику відстань конструкції або частин машин. Рейкові домкрати завжди мають ручний привід. Їх вантажопідйомність становить 0,5...10 т. К. к. д. рейкових домкратів складає 0,50...0,85 в залежності від кількості пар зачеплення. Вони бувають важільно- і зубчасто-рейкові.

Недолік важільно-рейкових домкратів – перервність в роботі і самовільне падіння вантажу внаслідок швидкого спрацювання запобіжної заскочки.

Вантажопідйомність домкрата і зусилля на важелі залежить від передаточного числа механізму, яке визначається за формулою:

$$i = \frac{M_{ш}}{M_p \cdot \eta} = \frac{Q \cdot d_{ш}}{2F_p \cdot R_p \cdot \eta}, \quad (5.195)$$

де $M_{ш}$ – момент, що створений вантажем на валу шестерні, яка входить у зачеплення з рейкою, Нм;

M_p – крутний момент на валу рукоятки, що створений робітником, Нм;

Q – вантажопідйомність домкрата, Н;

$d_{ш}$ – діаметр початкового коліна шестерні, м;

F_p – сила, що створюється робітником, Н;

R_p – плече рукоятки, м;

η – к. к. д. домкрата.

Діаметр початкового коліна шестерні визначається за формулою:

$$d_{ш} = m \cdot z, \quad (5.196)$$

де m – модуль зчеплення;

z – число зубів шестерні, що зчіплюється з рейкою.

Зусилля на важелі визначається за формулою:

$$F_p = \frac{Q \cdot m \cdot z}{2i \cdot R_p \cdot \eta}, \quad (5.197)$$

Гвинтові домкрати застосовують для підйому вантажу вагою від 0,5 т до 50 т і більше, а також як спеціальні і вмонтовані в машину пристрої.

Переваги гвинтових домкратів – це можливість плавного підйому і опускання вантажу, наявність самогальмування, надійність і безпечність в роботі. Недоліки – низький к. к. д. (0,3...0,4) і відносно малі швидкості підйому (15...35 м/хв.). Гвинтовий домкрат не має спеціальних стопорних

Частина п'ята

пристроїв, так як гвинт у нього самогальмівний з трапецієподібною або упорною різьбою та кутом підйому гвинтової лінії 4...5°, який повинен бути менше кута тертя різьби.. Такий малий кут підйому гвинтової лінії впливає і на к. к. д. таких домкратів, який визначається за формулою:

$$\eta = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg}(\alpha + \rho)}, \quad (5.198)$$

де α – кут підйому гвинтової лінії;

ρ – кут тертя різьби.

Гвинтові домкрати працюють за принципом кінематичної пари гвинт-гайка. Переміщення гвинта здійснюється або обертанням його в нерухомій гайці, або обертанням гайки при нерухомому гвинті.

Зусилля робітника на важелі визначається за формулою:

$$F_g = \frac{Q \cdot d(\operatorname{tg} \alpha + \rho) + f \cdot d_{cep}}{2L}, \text{ Н} \quad (5.199)$$

де Q – навантаження на домкрат, Н;

d – середній діаметр різьби, м;

f – коефіцієнт тертя між опорною голівкою і гвинтом;

d_{cep} – середній діаметр поверхні тертя опорної голівки домкрата по гвинту, м;

L – довжина рукоятки, м.

Існують гвинтові домкрати подвійної дії, який має два гвинти з нарізкою різьби різного напрямку (правий та лівий). В результаті коливання рукоятки в горизонтальній площині нижній гвинт вигвинчується з корпусу, а верхній (внутрішній) гвинт під час роботи рухається тільки поступально, оскільки вантаж перешкоджає його обертанню.

Гідравлічні домкрати особливо широко застосовують на транспорті, де необхідні великі зусилля. Цей тип домкратів в останній час здобув широке розповсюдження завдяки таким перевагам як велика вантажопідйомність (300...500 т); порівняно високий к. к. д. (до 0,7...0,75), плавність підйому і опускання. Можливість зупинки вантажу в будь-якому положенні.

Промисловість випускає спеціальні мастила для гідродомкратів (амортизаційну рідину АЖ-12), але робочою рідиною в домкратах може бути вода, суміш води із спиртом, гліцерин, веретенне мастило, автол, дизельне мастило. При застосуванні не спеціальних мастил зменшується к. к. д. та збільшуються зусилля, що застосовуються, внаслідок великої в'язкості робочих рідин.

За конструктивними ознаками гідравлічні домкрати ділять на такі

три основні типи:

- одинарні, що дозволяють піднімати вантаж на висоту, що дорівнює довжині штока;
- телескопічні, шток яких складається із кількох складових частин, що дозволяє збільшити висоту підйому в 2...3 рази порівняно з одинарними;
- безперервні, які являють собою конструктивну різновидність гідравлічного домкрата, у якого при підйомі вантажу рухається циліндр. Основна перевага такого домкрата полягає в можливості підйому вантажу на висоту, що перевищує величину ходу циліндра.

Розрахунок гідравлічного домкрата з поршневим насосом при ручному приводі зводиться до визначення зусилля на рукоятці, швидкості підйому вантажу і тиску рідини в циліндрі.

Загальне передаточне число визначається за формулою:

$$i = \frac{D^2}{d^2} \cdot \frac{L}{a}, \quad (5.200)$$

де D і d – відповідно діаметри циліндра і поршня насоса;

L і a – відповідно довжина рукоятки і виліт кулачка.

Зусилля на рукоятці із врахуванням к. к. д. визначається за формулою:

$$P = Q \cdot \frac{d^2}{D^2} \cdot \frac{a}{L} \cdot \frac{1}{\eta}, \text{ Н} \quad (5.201)$$

де Q – навантаження на домкрат, Н;

η – к. к. д. домкрата.

Швидкість підйому вантажу визначається за формулою:

$$v = \beta \cdot \frac{d^2}{D^2} \cdot s \cdot n, \text{ м/хв} \quad (5.202)$$

де β – коефіцієнт витікання робочої рідини через ущільнення, рівний 0,9...0,95;

s – хід поршня, м;

n – число робочих ходів за хвилину.

Робочий тиск визначається за формулою:

$$p = 1,4 \frac{Q}{D^2}, \text{ МПа} \quad (5.203)$$

5.11.4. Лебідки

Лебідки – машини для підйому або переміщення вантажу. Лебідки розрізняють по ряду ознак:

Частина п'ята

- по тяговому органу – канатні і ланцюгові;
- по виду привода – з ручним приводом і механічним;
- по передаточному механізму – з зубчастими, черв'ячними і фрикційними передачами;
- по кількості робочих барабанів – одно-, дво- та багато барабанні;
- по схемі роботи – односторонньої дії і реверсивні;
- по способу встановлення – стаціонарні, переносні і пересувні.

Лебідка з ручним приводом. Вантажопідйомність ручних лебідок, як правило, не перевищує 0,5...1,0 кН, а зусилля на рукоятці від 0,1 до 0,3 кН.

Передаточне число лебідки визначається за формулою:

$$i = \frac{M_{\delta}}{M_p \cdot \eta}, \quad (5.204)$$

де M_{δ} – крутний момент на барабані, Нм;

M_p – крутний момент на рукоятці, Нм;

η – к. к. д. лебідки.

Крутний момент на барабані визначається за формулою:

$$M_{\delta} = 0,5S \cdot D_p, \text{ Нм} \quad (5.205)$$

де S – максимальне зусилля в канаті, Н;

D_p – розрахунковий діаметр барабана по центрам витків канату, м.

Максимальне зусилля в канаті визначається за формулою:

$$S = \frac{Q_{pyi}}{n}, \text{ Н} \quad (5.206)$$

де Q_{pyi} – табличне значення руйнуючого навантаження в канаті, Н;

n – коефіцієнт запасу міцності, рівний для робочих тягових канатів 4...6.

Крутний момент на рукоятці визначається за формулою:

$$M_p = P \cdot R, \text{ Нм} \quad (5.207)$$

де P – зусилля на рукоятці, м;

R – довжина рукоятки, м.

Швидкість підйому вантажу визначається за формулою:

$$v_k = \frac{2\pi \cdot R \cdot n_p}{i}, \text{ м/хв} \quad (5.208)$$

де n – частота обертання рукоятки, рівна 15...18 об/хв.

Практично швидкість каната на барабані ручної лебідки становить від 0,4 до 4,5 м/хв.

Лебідки з механічним приводом поділяються на трансмісійні і агрегатні. Трансмісійні лебідки обслуговуються двигунами, що

встановлюються окремо від них. Агрегатні лебідки монтують на одній рамі з двигуном. Існують лебідки з приводом від двигуна внутрішнього згорання. Але найбільш розповсюджені електричні лебідки. Реверсування в них досягається переключенням фаз електродвигуна. Таким чином вантаж піднімається і опускається з однаковою швидкістю. Електролебідки з тяговим зусиллям 5,0...100 кН і швидкістю руху тягового каната від 0,5 до 1 м/с мають електродвигун, редуктор і барабан. Двоколодочне гальмо звичайно монтується на первинному валу і під час підйому вантажу воно розгальмоване.

Робоча поверхня барабана звичайно гладка, так як більшість лебідок призначені для роботи з канатом великої довжини, при багатшаровій навивці.

Канатоємність барабана з врахуванням запасних витків визначається за формулою:

$$L_k = H \cdot k + z_s \cdot \pi \cdot D, \text{ м} \quad (5.209)$$

де H – висота підйому, м;

k – кратність поліспасти;

z – число витків запасу і закріплення, в межах 3...6;

D – діаметр барабана, м.

5.11.5. Крановий механізм підйому

В умовах сільського господарства для привода автокранів використовують двигуни внутрішнього згорання. В ремонтних майстернях для привода підйомно-транспортної техніки використовують електричні двигуни змінного струму.

Двигун внутрішнього згорання – універсальний вид силового обладнання для рухомих підйомно-транспортних машин, незалежний від зовнішнього джерела енергії, має достатній діапазон регулювання кутової швидкості (в 2...3 рази). Суттєвий недолік цього двигуна заключається в неможливості реверсування обертання вала і зміни крутного моменту без спеціальних коробок швидкостей.

Крутний момент двигунів внутрішнього згорання відносно постійний, мало залежить від зміни частоти обертання. Тому двигун для кранового підйомного механізму необхідно підбирати по режиму найбільшого навантаження, що відповідає періоду пуску.

Перевантаження в 30...40% від його потужності двигун внутрішнього згорання спроможний короткочасно (до 1 с) переборювати за рахунок кінетичної енергії обертаючих мас (маховика і других вузлів).

Кранові механізми підйому з електроприводом по конструкції подібні лебідці.

Невелика висота підйому дозволяє зробити барабан з гвинтовим жолобом для навивки в один шар. Передаточний механізм між електродвигуном і барабаном виконаний у вигляді двохступеневого редуктора. Двохколодочне гальмо з коротко ходовим електромагнітом встановлене на валу двигуна.

Вихідними даними для розрахунку механізму підйому служать вантажопідйомність, швидкість підйому і цикл роботи вантажопідйомника.

Проектування і розрахунок підйомного механізму проводять в наступному порядку: вибір типу гнучкого органу і схеми підвісу вантажу; розрахунок тягового органу і поліспасти; розрахунок блоків і барабана, визначення крутного моменту і потужності, розрахунок передаточного числа механізмів привода і вибір його схеми.

Необхідна потужність електродвигуна визначається за формулою визначається за формулою:

$$P_{\text{дв}} = K \frac{F_1 \cdot V}{1000 \eta_l \cdot \eta_{\text{бар}}}, \text{ кВт} \quad (5.210)$$

де K – коефіцієнт запасу потужності, що враховує перевантаження двигуна в період неустановленого руху (переборювання сил інерції поступального і обертового рухаючи мас);

F_1 – зусилля в набігаючій на приводний барабан вітки, Н;

V – швидкість руху тягової вітки канату, м/с;

η_l – к. к. д. лебідки;

$\eta_{\text{бар}}$ – к. к. д. приводного барабана.

Передаточне число трансмісії визначається за формулою:

$$i_{\text{тр}} = \frac{n_{\text{дв}}}{n_{\text{бар}}} \quad (5.211)$$

Відповідний редуктор підбирають по таблицям стандартів. Виходячи з крутного моменту, що передається, і групи режиму роботи механізму.

5.11.6. Механізми пересування

Механізми пересування застосовують для переміщення вантажопідйомної машини з вантажем або на холостому ході (кран-балки вздовж майстерні). Механізми пересування переміщують тягою. Штовханням або з приводом на ходове колесо. В зв'язку з цим колеса бувають холості і приводні. Найбільш розповсюджені два і чотири колеса.

Любий механізм пересування складається з ходових коліс, рельс або направляючих елементів, рами, передаточного механізму між валами ходових коліс і двигуна, тягового елемента, якщо механізм знаходиться поза машиною.

Ходові колеса підтримують машину і вантаж, а ведучі колеса підтримують і переміщують машину і вантаж.

Ходові колеса тельферів, візків та кранів виготовляють з сталі і чавуну штампуванням і литтям, одноребордними і двоуребордними, з циліндричним, конічним і випуклими ободами. Для зменшення зносу поверхонь сталевих коліс термічно оброблюють до твердості HRC 35...45, а чавунні марки СЧ 18-36 з вибіленою поверхнею ободів – до твердості HB – 180...240.

Основні розміри коліс і рейок стандартизовані.

Навантаження на колесо досягає найбільшої величини при крайньому положенні візка.

При симетрично розташованому вантажі навантаження на колесо визначається за формулою:

$$P_{\max} = R_1 = R_2 = \frac{g(G + G_m)}{z}, \text{ Н} \quad (5.212)$$

де G і G_m – відповідно маси вантажу і тельфера, Н;

g – прискорення сили тяжіння, м/с²;

z – число коліс.

При несиметричному підвішуванні вантажу навантаження на колеса візка і моста крана при $b_2 > b_1$ і $l_2 > l_1$ відповідно визначається за формулою:

$$R'_{\max} = \frac{2g}{z} \left(\frac{G \cdot b_2}{l} + \frac{G}{2} \right), \text{ Н} \quad \text{та} \quad R_{\max} = \frac{2g}{z} \left(\frac{G + G_m}{l} l_2 + \frac{G_m}{2} \right), \text{ Н} \quad (5.213)$$

де G_m – маси моста, Н;

z – загальне число коліс візка або моста.

Діаметр коліс, враховуючи ширину колії, визначається за формулою:

$$D = \frac{k_c \cdot R_{\max}}{b[p]}, \text{ м} \quad (5.214)$$

де $[p]$ – допустимий тиск для чавунних коліс, рівна 2,5...3 Мпа, і для сталевих – 5...6 Мпа;

k_c – коефіцієнт впливу швидкості, рівний $1 + 0,2v$;

v – швидкість, м/хв.

Більш точно колеса перевіряють по контактній міцності при лінійному і точковому контактах, як критерію працездатності.

Опір пересуванню. При русі колісного ходу крана і тельфера переборюються опори: перекочуванню коліс, нахилу колії, вітру, сил інерції при зрушенні з місця (пуск механізму). Сума опорів може бути виражена у вигляді штовхаючої або тягнучої сили і моменту на ходових колесах.

Частина п'ята

Сила і момент опору перекочуванню коліс визначаються за формулами:

$$W = \varphi_n \cdot g(G + G_m), \text{ Н} \quad \text{та} \quad M = 0,5\varphi_n \cdot g(G + G_m)D, \text{ Нм} \quad (5.215)$$

де φ_n – коефіцієнт тяги або коефіцієнт опору перекочуванню.

Рельсова колія вантажопідійомників звичайно нахилу не має, тому сила і момент на переборювання нахилу рівні нулю.

Опір і момент від повітряного навантаження при роботі кранів на відкритому повітрі визначаються за формулами:

$$W_g = \rho(k \cdot F_m + F_2), \text{ Н} \quad \text{та} \quad M_g = 0,5W_g \cdot D, \text{ Нм} \quad (5.216)$$

де ρ – тиск вітру, рівний 150 Па;

k – аеродинамічний коефіцієнт, рівний 1,2;

F_m і F_2 – відповідно площі підвітряних сторін машини і вантажу, м².

Сила і момент опору на колесі від інерції мас, що рухаються поступально, визначаються за формулами:

$$W_{in} = (G + G_2) \frac{v}{t_p}, \text{ Н} \quad \text{та} \quad M = 0,5(G + G_2) \frac{v \cdot D}{t_p}, \text{ Нм} \quad (5.217)$$

Момент опору при переміщенні від інерції обертаючих мас, приведених до вала двигуна, враховується для самохідних машин.

Потужність на переборювання сил опору пересуванню визначається за формулою:

$$N = \frac{M_\Sigma \cdot n_d}{9550}, \text{ кВт} \quad (5.218)$$

По цій потужності по каталогу підбирають двигун, який перевіряють на запас крутного моменту, як це робиться для механізму підйому.

5.11.7. Механізми повороту

Механізм повороту переміщує вантаж в горизонтальній площині або повертає його відносно заданої вісі. Такими механізмами обладнують стаціонарні поворотні крани, штабелери.

Сили, діючі на опори. Крани опираються на підшипники, на які діють сили, що визначається за формулами:

- без противаги

$$H = \frac{g(G \cdot L + G_k \cdot l)}{h}, \text{ Н} \quad (5.219)$$

- при противагах, відповідно в навантаженому і не навантаженому станах

$$H' = \frac{g(G \cdot L + G_k \cdot l - G_0 \cdot l_0)}{h}, \text{ Н та } H'' = \frac{g(G_0 \cdot l_0 - G_k \cdot l)}{h}, \text{ Н} \quad (5.220)$$

де G, G_k і G_0 – відповідно маси вантажу, крана і противаги, Н;
 L, l і l_0 – плечі діючих сил, м.

Сумарна осьова сила на опорний пристрій визначається за формулою:

$$T = g(G + G_k + G_0), \text{ Н} \quad (5.221)$$

Розрізняють крани з поворотною колонною, неповоротною колонною і на поворотному крузі.

Сили опору під час повороту. При повороті крана в період пуску діють опори: від сил тертя в опорах; від вітрового навантаження на вантаж і конструкцію крана; від сили тяжіння вантажу і поворотної частини крана при роботі на ухилі; від інерції обертових мас крана і вантажу і обертових деталей привідного механізму. Сумарний момент на валу двигуна визначається за формулою:

$$M_n = \frac{(M_{mp} + M_e + M_\alpha + M_{is})}{i \cdot \eta_0} + M_{io}, \text{ Нм} \quad (5.222)$$

а при встановленому русі за формулою:

$$M = \frac{(M_{mp} + M_e + M_\alpha)}{i \cdot \eta_0}, \text{ Нм} \quad (5.223)$$

Момент опору повороту від сил тертя для кранів визначається за формулою:

$$M_{mp} = M_1 + M_2 + M_3, \text{ Нм} \quad (5.224)$$

де M_1 та M_2 – моменти сил тертя відповідно верхній та нижній цапфах ;

M_3 – момент тертя в п'яті.

Момент опору повороту від сил вітру визначається за формулою:

$$M_e = \rho_e(F_k + F_2)l_e, \text{ Нм} \quad (5.225)$$

де ρ_e – тиск вітру, рівний 250 Па;

F_k і F_2 – відповідно площі підвітряних сторін вантажу і крана м^2 ;

l_e – плече прикладання вітрового навантаження, м.

Момент опору на ухилі визначається за формулою:

$$M_\alpha = g(G \cdot L + G_k \cdot l) \sin \alpha, \text{ Нм} \quad (5.226)$$

де α – кут перекосу працюючого крана.

Потужність електродвигуна при встановленому режимі роботи

Частина п'ята

визначається за формулою:

$$N = \frac{M \cdot n_k}{9550 \cdot \eta_0}, \text{ кВт} \quad (5.227)$$

де n_k – частота обертання крана, що визначається по заданій коловій швидкості вантажу, об/хв.

Для визначення потужності двигуна при пуску враховують момент, що необхідний для прискорення руху вантажу і крана. Він в декілька разів більше, ніж момент від сил тертя в опорах.

Момент для прискорення маси вантажу і поворотної частини крану відносно вісі обертання визначається за формулою:

$$M_{is} = \theta(I_k + I_e), \text{ Нм} \quad (5.228)$$

де θ – кутове прискорення, м/с²;

I_k і I_e – відповідно момент інерції крану та вантажу.

Момент на валу двигуна для прискорення обертових деталей механізму визначається, як для механізмів підйому і пересування.

По сумарному моменту в момент пуску, що визначається по формулі (5.222), пускова потужність визначається за формулою:

$$N_n = \frac{M_n \cdot n_o}{9550}, \text{ кВт} \quad (5.229)$$

Номінальна потужність, по якій вибирається електродвигун визначається за формулою:

$$N_n = \frac{N_n}{\varphi}, \text{ кВт} \quad (5.230)$$

де φ – коефіцієнт пускового перевантаження двигуна, рівний 1,3...1,8.

Вибравши по каталогу двигун, перевірив запас моменту і часу пуску порівняно з допустимим (3...7 с), можна визначити загальне передаточне число механізму за формулою:

$$i = \frac{2\pi \cdot L \cdot n}{v} \quad (5.231)$$

де L – виліт крану, м;

v – швидкість обертання крану, яка звичайно не більше 100 м/с.

При машинному приводі частота обертання крана коливається в межах 0,4...2 об/хв.

Гальмування повороту. Гальмівний момент для механізму повороту, як і для механізму підйому і пересування, визначається за формулою:

$$M_z = M_v + M_\alpha + M_{iv} + M_{io6} - M, \quad (5.232)$$

При розрахунку гальмівного моменту особливо уважно потрібно враховувати момент від інерції мас вантажу, крана і механізмів передач, що обертаються.

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Що називається поліспастом?
2. Яка різниця між одинарним і здвоєним поліспастом?
3. Що називається кратністю поліспаста?
4. Як визначити кратність здвоєного поліспасту?
5. У якому з поліспастів використовують зрівноважу вальний блок?
6. Яка перевага здвоєних поліспастів над одинарними?
7. У яких випадках використовують поліспаст як самостійний механізм?
8. Яке призначення талі?
9. Які талі розрізняють по конструкції?
10. Яке призначення домкрату?
11. Які домкрати розрізняють по конструкції?
12. Область застосування рейкових, гвинтових та гідравлічних домкратів?
13. Переваги та недоліки рейкових, гвинтових та гідравлічних домкратів?
14. Призначення лебідок?
15. Які опори переборюються при русі колісного ходу крана і тельфера?
16. Які сили опору діють під час повороту крана в період пуску?

5.12. Пристрої вантажопідйомних машин

5.12.1. Зупинники

Після зупинки двигуна вантаж під дією сил тяжіння може рухатись вниз. Зупинники, призначені для утримування вантажу в підвішеному стані.

Зупинники по конструкції поділяють на храпові, фрикційні та роликові.

Храпові зупинники надійніші в роботі і більш розповсюджені. Храповий зупинник являє собою пристрій. Який складається з: храпового

Частина п'ята

колеса, що має зуби особливої форми), яке насаджене на приводному валу, і заскочки, що знаходиться з ним у зачепленні і вільно повертається на нерухомій вісі.

Для того, щоб у період зупинки заскочка не вийшла з зачеплення з храповиком, потрібно геометричну вісь повороту собачки розміщати на дотичній до ободу храповика, проведеної у вершині зуба, що знаходиться в зачепленні з заскочкою, і упорна площина повинна складати певний кут до радіуса храповика, що проходить через вершину цього зуба.

При роботі храпового зупинника сила тиску храповика на собачку, нормальна до упорної площини зуба, може бути розкладена на дві сили: колову, що передається через заскочку на вісь повороту і з неї на раму, та радіальну, що направлена по радіусу храповика і передається на вал, а з нього на раму. Радіальна сила прагне повернути заскочку і притиснути її до дна западини храпового зуба.

Основні розміри профілю зуба і храповика приймають в залежності від модуля (від 6 до 30) і числа зубів (від 10 до 30).

Модуль визначається за формулою:

$$m = \sqrt[3]{\frac{c_1 \cdot M_k}{\psi \cdot z \cdot [\sigma]_{32}}}, \quad (5.233)$$

де c_1 – коефіцієнт, рівний 5,35 для зовнішнього і 2,65 для внутрішнього зачеплення;

M_k – крутний момент, Нм;

ψ – коефіцієнт ширини зуба, рівний для чавуна 1,5...3,5 і для сталі 1,5...2,5;

z – число зубів храпового колеса;

$[\sigma]_{32}$ – допустима напруга на згин, рівна 20 МПа для чавуну і 60...70 МПа для сталі.

Зуби храповика перевіряють на інтенсивність навантаження по довжині зуба за формулою:

$$q = \frac{N_0}{b} \leq [q], \quad \text{кН/м} \quad (5.234)$$

де N_0 – сила тиску зуба храповика на собачку, кН;

b – довжина зуба храпового колеса, м;

$[q]$ – допустима інтенсивність навантаження, рівна для чавунних храповиків 100 кН/м і для сталевих 300 кН/м.

Заскочка працює одночасно на стиск і згин. Найбільші напруги виникають у момент упору її носика у вершину зуба храповика, коли діє максимальний згинаючий момент, і визначаються за формулою:

$$\sigma_{\max} = \sigma_{\text{ст}} + \sigma_{32} \leq [\sigma]_{32}, \quad \text{МН/м}^2 \quad (5.235)$$

де σ_{cm} – напруга стиску, мН/м²;

$\sigma_{зз}$ – напруга згину, мН/м²;

$[\sigma]_{зз}$ – допустима напруга, яка враховуючи ударний характер навантаження для сталі Ст.3 та Ст.4 становить 25...40 мН/м².

Напруги стиску та згину відповідно визначаються за формулами:

$$\sigma_{cm} = \frac{P}{b_1 \cdot s}, \text{ мН/м}^2 \quad \text{та} \quad \sigma_{зз} = \frac{6P \cdot c}{b_1 \cdot s^2}, \text{ мН/м}^2 \quad (5.236)$$

де P – колова сила, Н;

b_1 – ширина заскочки, яка більша на 2...3 мм від ширини зуба храпового колеса, м;

s – висота поперечного перерізу собачки в небезпечному перерізі, м;

c – плече згинального моменту, м.

Крім храпових зупинників, поширені роликові зупинники. Вони діють плавно і тому не мають ривків, але складніші за конструкцією і дорожчі. Роликовий зупинник складається з нерухомого кожуха, у який запресовано стальну втулку; диска, жорстко насадженого на приводний вал; роликів, розміщених у гніздах диска.

При робочому обертанні приводного вала ролики перестають бути заклиненними і не перешкоджають обертанню вала. При намаганні приводного вала обертатися в оберненому напрямку, ролики заклинюються між втулкою і опорними поверхнями гнізда диска. Внаслідок чого обертання вала припиняється.

Внутрішній діаметр нерухомого кожуха при числі роликів 4...6 з умов контактної міцності визначається за формулою:

$$D_0 \cong 0,44 \cdot \sqrt[3]{\frac{M_k}{z}}, \text{ м} \quad (5.237)$$

Діаметр ролика приймають приблизно у 8 разів менше внутрішнього діаметра нерухомого кожуха, а їх довжину – в 1...2 рази більше діаметра.

Умова заклинювання забезпечується при куті заклинювання приблизно рівному 4°.

5.12.2. Гальма

Гальма – універсальні пристрої для стопоріння вантажу на потрібній висоті і плавного опускання. В залежності від умов роботи та застосування гальмівні пристрої поділяються:

- по призначенню – на стопорні (для зупинки вантажу) і спускні або відцентрові (для обмеження швидкості руху в заданих межах);
- по конструкції – на колодкові, стрічкові, дискові і конусні;

- по схемі включення – відкритого типу (гальмування здійснюється від зусилля, що прикладається до рукоятки або педалі), замкнутого типу (робочі органи постійно притискаються спеціальним вантажем, тиснутою пружиною) і автоматичні (включаються в роботу без застосування обслуговуючого персоналу).

Гальмівні пристрої повинні здійснювати поступовим гальмуванням, забезпечувати швидке розмикання гальма, відрізнитися високою надійністю, зручністю обслуговування, мати велику зносо- і теплостійкість.

В механізмах кранів встановлюють автоматичні гальма замкнутого типу, а при швидкості пересування більше 30 м/хв. – автоматично діючими при вимкненні струму.

При двигунах внутрішнього згорання допускається застосовувати гальма замкнутого типу з надійним зупинниковим пристроєм.

Гальма надійніше встановлювати безпосередньо на робочому органі (барабані, колесі), але конструкція гальма при цьому буде незручною. З метою компактності і розвантаження механізму від інерційних сил прийнято встановлювати гальма на приводному валу, кінематично жорстко зв'язаним з валом робочого органу.

Гальмівний момент механізму підйому визначають двома способами: по статичному моменту або найбільшому гальмівному моменту.

При першому способі гальмівний момент визначається за формулою:

$$M_{\text{гальм}} = k_2 \cdot M_c, \text{ Нм} \quad (5.238)$$

де k_2 – коефіцієнт запасу гальмування (1,75...2,0 для стопорно-спускного і 2,1...2,2 при одночасному встановленні вантажоупорного і стопорного гальма);

M_c – статичний момент, приведений до вала на якому встановлюється гальмо, Нм.

При виборі коефіцієнтів гальмування необхідно враховувати, що надлишковий гальмівний момент стопорного гальма приводить до випереджаючої дії вантажоупорного, обернене викличе порушення плавності опускання вантажу.

При другому способі найбільший гальмівний момент, приведений до вала двигуна, визначається за формулою:

$$M_{\text{г.м}} = M_c + M_{i,n} + M_{i,o}, \text{ Нм} \quad (5.239)$$

де $M_{i,n}$ – момент від інерційних сил поступального руху вантажу, Нм;

$M_{i,o}$ – момент від інерційних сил обертових частин механізму, Нм.

Процес гальмування подібний розгону з тією різницею, що сили інерції і витрати на тертя змінюють знак, а розрахунок відрізняється тим,

що коефіцієнт корисної дії переноситься з знаменника у чисельник формул, так як шкідливий опір в механізмах здійснює гальмівну дію і знижує необхідний гальмівний момент.

Для отримання найбільш можливо більшого гальмівного моменту при найменших розмірах гальма застосовують спеціальні матеріали з підвищеними фрикційними властивостями: стрічка ткани азбестова, просякнута бітумом; стрічка з азбесту і залізного сурику, зв'язаних клеєм для гуми. Крім того в гальмах застосовують чавун, сталь, текстоліт та ін.

До характеристик матеріалів, що застосовуються в гальмах, відносяться: коефіцієнт тертя 0,15...0,2 для металів і 0,3...0,42 для стрічки з азбесту; питомий тиск 0,8...1,5 МПа для колодкових і стрічкових гальм та 0,2...0,8 МПа для дискових і конусних (більші значення приймають при мащенні).

Коефіцієнт тертя між обкладинками і гальмівним шківом залежить від теплового режиму гальма. Рекомендується, щоб температура не перевищувала 175...200°C.

Зміна питомого тиску до 0,8 МПа не впливає суттєво на коефіцієнт тертя.

Колодкові гальма прості і надійні в роботі, але великі за розміром. Одноколодкові гальма застосовують в механізмах з ручним приводом. Двоколодкові гальма придатні для гальмування вала, що обертається в різних напрямках. При цьому гальмівний вал не піддається поперечному навантаженню.

Колодкові гальма звичайно автоматично замкнені за допомогою вантажу або стисненої пружини. Розгальмовуються гальма зусиллям звичайно пристроями з електроприводом.

Одноколодкові гальма призначені для одностороннього гальмування. Для двостороннього гальмування одноколодкове гальмо можна застосовувати при умові, що центр обертання ричага буде знаходитись на дотичній до поверхні гальмування.

Двоколодкове гальмо розвантажує вал від поперечного навантаження і представляє собою комбінацію з двох простих одноколодкових гальм, що приводяться в дію механізмом, який забезпечує одночасне навантаження колодок. Недолік такого гальма – складна система ричагів і великий мертвий хід.

Гальмівний момент при розрахунку двоколодкового гальма з довгоходовим і короткоходовим електромагнітами визначається за формулою (5.238).

Для розрахунку двоколодкового гальма з довгоходовим електромагнітом сила нормального тиску на колодки визначається за формулою:

$$F_N = \frac{2M_{\text{гальм}}}{f_1 \cdot D}, \text{ Н} \quad (5.240)$$

де f_1 – коефіцієнт тертя між колодками і гальмівним шківом (0,05...0,45);

D – діаметр гальмівного шківа, який попередньо приймається рівним зовнішньому діаметру муфти, м.

Зусилля на кінцях гальмівних ричагів визначається за формулою:

$$F_1' = \frac{F_N \cdot a}{l}, \text{ Н} \quad (5.241)$$

де a і l – величини плеч, що приймаються виходячи з діаметра гальмівного шківа, м.

Зусилля, за яким визначається величина замикаючої сили, визначається за формулою:

$$F_2 = \frac{F_1' \cdot n}{m}, \text{ Н} \quad (5.242)$$

де n і m – розміри, що задаються конструктивно, м.

Величина замикаючої сили визначається за формулою:

$$F_{\text{зм}} = \frac{F_2 \cdot m}{l_2} \leq 30 \dots 100 \text{ Н}, \quad (5.243)$$

де l_2 – розмір, що задається конструктивно, м.

Різниця між підйомною силою електромагніта і силою тяжіння якоря визначається за формулою:

$$F_M - G_{\text{як}} = \frac{F_{\text{зм}} \cdot l_2}{l_1}, \text{ Н} \quad (5.244)$$

де l_1 – розмір, що задається конструктивно, м.

По результатам розрахунків підбираємо електромагніт.

Ширина колодки, виходячи з розрахунку на питомий тиск, визначається за формулою:

$$b_0 = \frac{F_N}{l_0 \cdot [p]}, \text{ м} \quad (5.245)$$

де l_0 – довжина колодки (розмір по хорді), м;

$[p]$ – допустимий питомий тиск для стопорних колодкових гальм рівний 0,2...0,8 МПа, а для спускних колодкових гальм – 0,15...0,5 МПа (в залежності від матеріалів поверхонь, що труться).

Довжина колодки визначається за формулою:

$$l_0 = \frac{D}{\sin \frac{\gamma}{2}}, \text{ м} \quad (5.246)$$

де γ – кут обхвату шківів колодкою, рівний 60...100°С.

Нагрів і знос гальм залежить від величини питомого тиску і швидкості ковзання на поверхні тертя – умовної величини роботи тертя. Тому проводять перевірку на нагрів за формулою:

$$p \cdot v \leq [p \cdot v], \quad (5.247)$$

де $[p \cdot v]$ – допустима величина рівна 5 МПа·м/с для стопорних і комбінованих гальм, 2,5 МПа·м/с для спускних гальм.

Хід гальмівного важеля визначається за формулою:

$$h_p = \frac{2l \cdot l_2}{a \cdot m} \leq h, \text{ м} \quad (5.248)$$

де a – радіальний зазор при відході колодок від шківів, рівний 1,0...2,0 м;

h – робочий хід якоря, м.

Стрічкові гальма. Розрізняють прості, диференціальні, сумуючі та двострічкові гальма. Робочими органами стрічкового гальма служить сталеві стрічка, іноді обшита фрикційним матеріалом, і шківів.

Ширину стрічки перевіряють по питомому тиску, який визначається за формулою:

$$b = \frac{2T}{D_e \cdot [p]}, \text{ м} \quad (5.249)$$

де T – найбільший натяг вітки стрічки, Н;

$[p]$ – допустимий питомий тиск, рівний 0,8...1,5 МПа·м/с;

D_e – діаметр шківів, м.

Рекомендуються розміри: діаметра шківів – 0,1...0,8 м, ширини стрічки – 0,04...0,08 м і товщини стрічки – 0,002...0,005 м.

Широкі стрічки знижують щільність прилягання стрічки до шківів. Збіг стрічки в сторону попереджується ребордами шківів.

Просте стрічкове гальмо застосовують для одностороннього гальмування.

Натяг набігаючої вітки визначається за формулою:

$$T = P_e \frac{e^{f\alpha}}{e^{f\alpha} - 1}, \text{ Н} \quad (5.250)$$

де P_e – різниця натягу набігаючої і збігаючої віток, Н;

f – коефіцієнт тертя між стрічкою і шківом, рівний 0,15...0,42;

α – кут обхвату шківів стрічкою, рівний 250...350°.

Частина п'ята

Маса вантажу для замикання гальма, виходячи з умови рівноваги важеля, визначається за формулою:

$$G_{зм} = \frac{\frac{t \cdot \alpha}{g \cdot \eta} - (G_p \cdot l_p + G_y \cdot l_y)\eta}{l_{зм}}, \text{ Н} \quad (5.251)$$

де t – натяг в збігаючій вітці, Н;

α – відстань між точками кріплення набігаючої і збігаючої віток, м;

η – к. к. д. гальма, рівний 0,9...0,95;

G_p – маса гальмівного важеля, Н;

l_p – відстань від точки закріплення набігаючої вітки до середини гальмівного важеля, м;

G_y – маса якоря електромагніта, Н;

l_y – відстань від точки закріплення набігаючої вітки до вісі електромагніта, м;

$l_{зм}$ – відстань від точки закріплення набігаючої вітки до точки дії маси вантажу для замикання гальма, м.

При зміні напрямку обертання зусилля натягу віток поміняються місцями і величина замикального зусилля і гальмівного моменту збільшаться в 2...4 рази.

Хід рухомого кінця стрічки залежить від установочного зазору, який приймається рівним 0,8...1,5 мм і визначається різницею дуг стрічки у включеному і виключеному станах гальма. Цей хід визначається за формулою:

Недоліки стрічкових гальм – велике навантаження на вал і нерівномірне спрацювання стрічки. В зв'язку з цим розрахунок на питомий тиск проводять в найбільш навантаженому місці.

Нагрів і знос гальм залежить від величини питомого тиску і швидкості ковзання на поверхні тертя – умовній величині роботи тертя. Тому проводять перевірку на нагрів за формулою:

$$p \cdot v \leq [p \cdot v], \quad (5.252)$$

де $[pv]$ – допустима величина рівна 1,5...2,5 МПа·м/с для стрічкових гальм.

В *диференційному стрічковому гальмі* обидва кінці стрічки закріплюють в рухомих точках вантажного ричага на різних відстанях по обидві сторони від вісі його качання.

При роботі гальма стрічка в процесі гальмування повертається в сторону шківа і гальмування проходить більш м'яко. Диференційне гальмо застосовується для одностороннього гальмування.

Розрахунки, проведені для простого гальма, відносяться і до диференційного, крім визначення замикального зусилля і ходу стрічки.

Маса замикаючого вантажу для диференційного гальма менше, ніж для простого, тому що натяг набігаючої вітки створює момент, що сприяє гальмуванню, і визначається за формулою:

$$G_{зм} = \frac{\frac{t \cdot \alpha - T \cdot a_l}{g \cdot \eta} - (G_p \cdot l_p + G_y \cdot l_y)\eta}{l_{зм}}, \text{ Н} \quad (5.253)$$

де a_l – відстань від вісі качання вантажного важеля до точки кріплення набігаючої вітки.

Сумуюче стрічкове гальмо застосовують в механізмах для двостороннього гальмування. Величина гальмівного моменту у нього залежить від напрямку обертання шківів. Це забезпечується закріпленням обох кінців стрічки з однієї сторони і на однаковій відстані від шарніра обертання важеля.

З урахуванням умови рівноваги важеля з врахуванням маси важеля і якоря маса замикального вантажу визначається за формулою:

$$G_{зм} = \frac{\frac{t \cdot \alpha}{g \cdot \eta} (e^{f\alpha} + 1) - (G_p \cdot l_p + G_y \cdot l_y)\eta}{l_{зм}}, \text{ Н} \quad (5.254)$$

Замикальне зусилля у сумуючого гальма в $(e^{f\alpha} + 1)$ раз більше, ніж у простого гальма, а хід стрічки в два рази менше.

Двострічкове гальмо представляє собою з'єднання двох простих стрічкових. В ньому успішно вирішене завдання двостороннього гальмування, розвантаження вала і створення великого кута обхвату (до 320°).

Стрічку розраховують на розрив по найбільшому натягу в ослабленому місці, де вона заклепками з'єднується з шарніром або азбестовою обкладкою. В конструкції гальма необхідно передбачати регульовальний пристрій для компенсації зносу.

Конічне гальмо складається з конуса, що нерухомо сидить на валу, та конічної чашки. Замикання і розмикання гальма відбувається внаслідок переміщення конуса вздовж вала за допомогою спеціального ричажного механізму. Зворотне обертання (спуск) стопориться храповим зупинником.

Колове зусилля на середньому діаметрі конуса визначається за формулою:

$$P = f \cdot N = \frac{2M_{гальм}}{D_c}, \text{ Н} \quad (5.255)$$

Середній діаметр конуса визначається за формулою:

$$D_c = 0,5(D_1 + D_2), \text{ м} \quad (5.256)$$

Частина п'ята

де D_1 та D_2 – відповідно найбільший та найменший діаметри конуса, м.

Найбільший діаметр конуса приймається в 1,2...1,6 рази більше від найменшого діаметра.

Замикальне зусилля, що діє вждовж вала, визначається за формулою:

$$Q = N \cdot \sin\alpha = \frac{P \cdot \sin\alpha}{f} = \frac{2M_{\text{гальм}} \cdot \sin\alpha}{f \cdot D_c}, \text{ Н} \quad (5.257)$$

де α – кут конуса, який для уникнення заклинювання, роблять не менше 15° ;

f – коефіцієнт тертя на робочих поверхнях конуса, рівне для поверхні покритій азбестовою стрічкою 0,3...0,4.

Питомий тиск на робочій поверхні конуса визначається за формулою:

$$p = \frac{1,27Q}{(D_1^2 - D_2^2)} \leq [p], \quad (5.258)$$

де $[p]$ – допустимий питомий тиск, рівний 0,1...0,15 МПа.

Довжину твірної конуса по допустимому питомому тиску визначається за формулою:

$$b = \frac{2Q}{\pi(D_1 + D_2)[p]\sin\alpha} \quad (5.259)$$

Робоча поверхня конуса працює при різних колових зусиллях, що викликає нерівномірний знос.

Для повного розмикання зазор між поверхнями, що труться. Повинен бути при азбестовій прокладці не менше 0,75 мм і при металічних поверхнях не менше 0,2 мм.

Дискове гальмо представляє собою систему фрикційних дисків, із яких один обертається, а інші нерухомі або стопоряться при обертанні в одну із сторін. В багатодискових гальмах при одному і тому ж осьовому зусиллі можна отримати великий гальмівний момент, який визначається за формулою:

$$M_{\text{гальм}} = 0,5z \cdot f \cdot Q \cdot D_c, \quad (5.260)$$

де z – число пар поверхонь, що труться і яке менше на одиницю від суми дисків.

Найбільший діаметр диска приймається в 1,2...2,5 рази більше від найменшого діаметра. Різність діаметрів не рекомендується приймати більше 120 мм.

Розрахунок дискового гальма, проводиться за розрахунком конічного гальма.

Замикальне зусилля, що діє вждовж вала, визначається за формулою:

$$Q = N = \frac{P}{f}, \text{ Н} \quad (5.261)$$

Керування гальмом. Гальма діляться на автоматичні і керовані, замкнуті і розімкнуті. Управління гальмом – це включення, виключення, регулювання гальмівного моменту, часу, шляху і процесу гальмування.

Привід гальма може бути ручним, ножним, електричним або гідравлічним. Управління за допомогою електромагніта розповсюджене в промислових підйомно-транспортних машинах.

До характеристик довгоходових електромагнітів КПМ і КМТ відносяться тягове зусилля і хід плунжера, а короткоходових МП і МО – момент якоря відносно кута повороту і кут його повороту. Особливість гальм з електромагнітами заключається в миттєвому замиканню і розмиканню.

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Яка різниця між зупинником і гальмом?
2. Які існують типи гальм?
3. Які матеріали використовуються для гальм?
4. Яка різниця між сумуючим та диференційним стрічковим гальмом?
5. З якою метою в гальмах використовуються електромагніти?
6. Які існують типи зупинників?
7. За яким критерієм ведуть перевірку міцності зубів храпового колеса?
8. Які напруження виникають у заскочці храпового колеса?
9. З якого матеріалу виготовляють храпові колеса?
10. З якого матеріалу виготовляють заскочки?
11. В чому полягає основна конструктивна особливість храпового зупинника?

5.13. Особливості конструкції кранів

5.13.1. Навантаження на остов

Елементи остова вантажопідйомника виготовляють з вуглецевих і маловуглецевих сталей і з'єднують між собою зварюванням, заклепками або шарнірами. Роль ланок змінної довжини виконують гідроциліндри. На остов діють постійні, тимчасові, інерційні та вітрові навантаження.

Постійне навантаження виникає від сили тяжіння власної ваги і визначається за формулою:

$$P_n = k_1 \cdot g \cdot G_k, \text{ Н} \quad (5.262)$$

де G_k – маса крану, Н;

k_1 – коефіцієнт, що враховує вплив поштовхів, при швидкості більше 60 м/с.

Тимчасове навантаження появляється від сили тяжіння мас вантажу, візка і вантажозахватних пристроїв і визначається за формулою:

$$P_m = k_2 \cdot g(G + G_g), \text{ Н} \quad (5.263)$$

де k_2 – коефіцієнт динамічності, що враховує вид приводу і режим роботи;

G і G_g – відповідно маси вантажу і візка;

Інерційне навантаження виникає при невстановленому поступальному (міст, візок) або обертальному (поворотний кран, навантажувач) русі. Його визначають як найбільше для періоду гальмування, прямолінійному русі і при повороті.

Вітрове навантаження визначають раніше викладеними методами.

$$P_m = \rho(k \cdot F_m + F_g), \text{ Н} \quad (5.264)$$

5.13.2. Балки і ферми кранів

Остов крана виконують у вигляді однієї, двох балок або решітчастих ферм.

Кран-балка піддається згину від сил тяжіння мас вантажу, візка та балки. З певними допущеннями сумарний момент визначається за формулою:

$$M_{32} = \left[k_1 + \frac{q \cdot L^2}{8} + k_2 \frac{G + G_g}{4} L \right] g \quad (5.265)$$

Знаючи метал балки і допустиму напругу, момент опору перерізу визначають за формулою:

$$W = \frac{M_{32}}{[\sigma]_{32}} \quad (5.266)$$

Знаючи момент опору перерізу за стандартами вибирають профіль прокату або проектують зварну балку. Висоту балок рекомендується приймати для одностійкових балок (0,06...0,07) L і для коробчастих – (0,05...0,066) L .

Жорсткість балки перевіряють по питомій стрілі прогину за

формулою:

$$f_0 = \frac{g(G+G_s)}{48E \cdot I} \leq [f_0], \quad (5.267)$$

де $[f_0] = f : L$, дорівнює 1:400 – для ручних мостових кранів, 1:500 для кран-балок і 1:700 для електричних кранів.

Поворотні крани в якості остова оснащуються стрілою або фермою. Розрізняють стріли у вигляді консольних і двохопорних балок. Найбільша жорсткість досягається при коробчастих і решітчастих перерізах. При більшій колівій швидкості до 5 м/с і вище необхідно забезпечити жорсткість стріли в горизонтальній площині, а при наявності у стріли хобота потрібно враховувати зкручуючий момент.

Двохопорну стрілу, що застосовується в башневих та автомобільних кранах, розраховують на стиск і згин у вертикальній горизонтальній площинах.

Міцність і жорсткість стріли перевіряють для всіх небезпечних перерізів відповідно за формулами:

$$\sigma = \frac{N_{cm}}{F} + \frac{M_{32B}}{W_B} + \frac{M_{32Z}}{W_Z} \leq [\sigma]_{32} \quad \text{та} \quad \sigma = \frac{N_{cm}}{\varphi \cdot F} + \frac{M_{32B}}{W_B} \leq [\sigma]_{32}, \quad (5.268)$$

де M_{32B} , M_{32Z} , W_B і W_Z – відповідно згинаючі моменти і моменти опору перерізів стріли у вертикальній і горизонтальній площинах;

φ – коефіцієнт зменшення допустимої напруги в залежності від коефіцієнта гнучкості, рівний 0,19...0,52.

Ферми поворотних кранів розраховують по найбільшим зусиллям і моментам, діючих на їх стержні. Краще застосовувати графічний спосіб, який дає можливість контролювати, проектувати і вносити корективи в конструкцію.

Порядок визначення зусиль в стержнях наступний:

- накреслити в масштабі схему ферми з навантаженнями;
- побудувати діаграми зусиль в стержнях: від корисного навантаження, від сил тяжіння мас і від внутрішніх сил.

При побудові діаграм зусиль напрямок їх повинен відповідати напрямку вісі стержня.

По отриманим зусиллям розраховують поперечні перерізи. Розтягнуті стержні перевіряють на гнучкість за формулою:

$$\lambda = \frac{l_c}{r_i} = \frac{l_c}{\sqrt{\frac{I_{min}}{F}}} \leq [\lambda], \quad (5.269)$$

де l_c – довжина стержня, м;

r_i – радіус інерції, м;

I_{min} – момент інерції перерізу;

F – площа перерізу стержня, м².

Стиснуті стержні (для них $[\lambda]=120$) розраховують з врахуванням повздовжнього згину по формулі:

$$F = \frac{P_x}{\varphi \cdot [\sigma]_{cm}}, \text{ Н} \quad (5.270)$$

де φ – коефіцієнт зменшення допустимої напруги, рівний 0,19...0,99 відповідно при $\lambda = 10...200$.

5.13.3. Стійкість крана

Ходова частина під'ємних і навантажувальних машин буває колісною і гусеничною. Умови роботи цих машин в сільському господарстві відрізняються нерівномірністю щільності ґрунту, наявністю ухилів, низьким тиском в шинах, відсутністю додаткових упорів і переміщенням вантажів на значні відстані, тобто всім тим, що зменшує стійкість і збільшує нерівномірність навантажень на елементи ходової частини (колеса, гусениці).

Розподілення навантаження на ходові колеса в варіанті, що найчастіше зустрічається – вісь обертання навантажувача не співпадає з центром опор. Така схема типова для автокранів, автонавантажувачів і грейферних навантажувачів на тракторах.

Для підвищення стійкості встановлюють ширші колеса, спарені колеса, виносні опори.

Відомо, що більше половини аварій з вантажопідйомними машинами виникає внаслідок втрати стійкості.

Стійкість пересувних вантажопідйомних машин – головна вимога техніки безпеки при їх експлуатації, особливо в сільськогосподарському виробництві, де пересування проходить по нерівностям поля, при поривах вітру, перекосах і розкачуванні машини і вантажу.

Норма стійкості визначається коефіцієнтом стійкості. Розрізняють коефіцієнти вантажної стійкості і власної стійкості, що розраховуються в найгірших умовах навантаження.

Коефіцієнт вантажної стійкості – відношення суми моментів всіх сил (крім вантажу) відносно лінії перекидання до моменту вантажу, визначається за формулою:

$$K_g = \frac{M_0 + M_k - \sum M_i - \sum M_e}{M} \geq 1,15, \quad (5.271)$$

де M_0 і M_k – відповідно моменти від противаги і маси вантажопідйомника, Нм;

$\sum M_i$ – сума моментів від інерції вантажу і вантажопідйомника, Нм;

$\sum M_g$ – сума моментів від вітрового навантаження на вантаж і вантажопідйомник, Нм;

M – моменти від дії маси вантажу.

Коефіцієнт власної стійкості – відношення моментів, що відновлюють стійкість вантажопідйомника, до суми моментів, що перекидають його відносно опор при несприятливому збігу дії цих навантажень. Визначається за формулою:

$$K_{вл} = \frac{M'_k}{M'_0 + M_{вк}} \geq 1,15, \quad (5.272)$$

де M'_k – момент від сили тяжіння маси вантажопідйомника, Нм;

M'_0 – момент від противаги, Нм.

Викладений метод визначення вантажної і власної стійкості застосовується для автокранів, автонавантажувачів, навісних тракторних навантажувачів.

Повздовжня стійкість для навантажувачів з фронтальною навіскою вантажозахватного органу перевіряється за формулою (5.272).

Коефіцієнт повздовжньої стійкості рекомендується приймати в межах 1,4...1,6. Зі збільшенням вантажопідйомності коефіцієнт має тенденцію до зменшення. При збільшенні висоти підйому вантажу він збільшується. У випадку перевищення висоти підйому в 2,8...3,5 м рекомендується зменшувати допустиму масу вантажу. Крім того необхідно мати на увазі, що дуже великий коефіцієнт знижує експлуатаційні якості навантажувачів.

Повздовжню стійкість перевіряють при перекиданні за формулою:

$$K_n = \frac{M_0 + M_k - \sum M_i - \sum M_g - M_F}{M_{p_0}}, \quad (5.273)$$

де M_F – момент від сили тертя і деформації зв'язних вантажів при відході навантажувача, Нм;

M_{p_0} – момент від сумарної сили відриву вантажу, Нм.

Поперечна стійкість може бути порушена при русі навантажувача і копицемета при поворотах. Для забезпечення поперечної стійкості дотримуються допустимої швидкості повороту і допустимого радіуса повороту.

Навантажувач в умовах сільського господарства може працювати як транспортна машина з піднятим вантажем. Тому при пересуванні навантажувача з вантажем повинна бути перевірена його стійкість.

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Які навантаження діють на остов крана?
2. Які конструктивні елементи остова крана виконують роль ланок змінної довжини?
3. Яким навантаженням піддається кран-балка під час роботи?
4. Які особливості умов роботи в сільському господарстві збільшують нерівномірність навантажень на елементи ходової частини кранів?
5. Які конструктивні елементи кранів застосовуються для підвищення його стійкості?
6. Яким показником визначається норма стійкості кранів?
7. Які розрізняють коефіцієнти стійкості?
8. Які розрізняють види стійкості кранів?

5.14. Навантажувальні машини

5.14.1. Призначення та класифікація навантажувачів

Навантажувальні машини призначені для навантажувальних і розвантажувальних робіт. Навантажувальні машини поділяються на:

- по принципу роботи: періодичної і безперервної дії;
- по призначенню: універсальні, які використовуються для багатьох вантажів, і спеціальні, які призначені для однорідних вантажів (зерна, мінеральних добрив);
- по енергетичній базі: двигун внутрішнього згорання трактора та автомобіля, електропривод;
- по конструкції: навісні, самохідні (автономні), причіпні, підйомники і навантажувальні пристосування.

5.14.2. Навантажувальні машини періодичної дії

Навантажувальні машини періодичної дії служать для підйому і транспортування вантажу при обслуговуванні виробничих процесів: вантажоперевалках на складах, навантаження в транспортні засоби, переробці сільськогосподарської продукції. Особливе розповсюдження самохідні навантажувачі отримали при механізації трудомістких процесів, а різноманітність вантажів привела до універсалізації навантажувачів.

Навісні навантажувачі. До навісних відносяться широко

розповсюджені навантажувачі, що складаються із навантажувального обладнання, яке навіщується на трактор, автомобіль або самохідне шасі. Обладнання складається з підйомної або підйомно-поворотної стріли з вантажозахоплюючим органом: ковшем, грейфером, грабельною решіткою, кліщами (звичайно з гідравлічним механізмом управління).

Фронтальні навантажувачі з переднім розташуванням робочого органу зручні для управління, але мають підвищене навантаження на передні колеса. При задньому розташуванні робочого органу передні колеса розвантажуються, але можливі незручності з управлінням трактором та створюються незручності для спостереження за процесом забору вантажу і використання трактора в якості тягача.

Для універсалізації навантажувачі оснащують набором робочих органів: грейфери для сипких вантажів, гною і силосу, коренеплодів, екскаваторною лопатою і бульдозером.

Для збільшення транспортної вантажопідйомності на фронтальні навантажувачі ззаду на гідросистему навішують грабельну решітку або ківш для сипких вантажів.

Автономні навантажувачі – це самостійні машини на власному шасі. Автономні навантажувачі бувають на колісному і гусеничному ході. До них також відносяться автонавантажувачі, що приводяться в рух від двигуна внутрішнього згорання, і електронавантажувачі, що приводяться в дію електродвигуном з живленням від акумуляторних батарей.

Автонавантажувач – універсальна підйомно-транспортна машина має велику маневреність, безпечність в роботі, малі габарити і відносно невелику власну вагу. В автонавантажувачів великі навантаження на колеса, яке збільшується за рахунок наявності противаг (над задньою віссю) для забезпечення стійкості.

Електронавантажувачі з живленням від акумуляторних батарей відрізняються більш простою конструкцією і більш високими техніко-економічними показниками.

Основи проектування та розрахунку навантажувачів. Розроблено наступні рекомендації по проектуванню навантажувачів:

- основними характеристиками служать енергоємність, енергонасиченість і металоємність;
- підвищення продуктивності може бути досягнуто при збільшенні вантажопідйомності і скороченні циклу, що може привести до підвищення динамічних навантажень;
- гідравлічний привід більш перспективний, бо спрощує конструкцію і управління механізмами;
- наповнення ковша напором без руху машини і грейфера з підривом ґрунту, а також вібраційна дія на вантаж – кращі прийоми забору вантажу;

Частина п'ята

- забезпечення безумовної стійкості навантажувача під час роботи – основна вимога при проектуванні і експлуатації;
- безпечність, простота і легкість управління, найменша втомлюваність, найбільше використання автоматизації – основи ергономічних вимог до навантажувача;
- процес захвату, транспортування і розвантаження не повинен пошкоджувати вантаж;
- маса навантажувача повинна бути оптимальною, достатньою для стійкої роботи, що сприяє кращим умовам захвату (різання) вантажу;
- основними параметрами при проектуванні являються: навантаження – зусилля відриву і сили інерції; геометричні розміри – виліт, висота підйому, база навантажувача; види вантажів; умови роботи.

Найбільшої ефективності і найкращої якості роботи навантажувача досягають застосуванням автономного навантажувача. Орієнтування на навісні навантажувачі на базі існуючих тракторів не завжди забезпечує оптимальні умови і результати.

Зусилля відриву вантажу. Навантажувачі характеризуються вантажопідйомністю і зусиллям відриву. Зусилля відриву показує кількісне і якісне навантаження елементів навантажувача. Відношення зусилля відриву до сили тяжіння мас вантажу і вантажозахватуючого пристрою представляє собою запас зусилля, який для тракторних навантажувачів рівний 1,7...1,8.

Зусилля відриву при підйомі вантажу визначається за формулою:

$$P_o = g \cdot G + g \cdot G_2 + P_c + \psi(P_{i_1} + P_{i_2}), \text{ Н} \quad (5.274)$$

де $g \cdot G$ – сила тяжіння мас вантажу, Н;

$g \cdot G_2$ – сила тяжіння мас грейфера, Н;

P_c – опір відриву і тертя, Н;

P_{i_1} – опір інерції вантажу, Н;

P_{i_2} – опір інерції грейфера, Н;

ψ – коефіцієнт демпфування системи.

Виражаючи складові формули (5.274) через масу вантажу і безрозмірні коефіцієнти за формулами:

$$G_2 = \varepsilon_2 \cdot G; \quad P_c = \varepsilon_c \cdot g \cdot G; \quad P_{i_1} = a \cdot G; \quad P_{i_2} = a \cdot G_2 = \varepsilon_2 \cdot a \cdot G \quad (5.275)$$

В результаті отримаємо:

$$P_o = \varepsilon_0 \cdot g \cdot G = \left[(1 + \varepsilon_2) \left(1 + \psi \frac{a}{g} \right) + \varepsilon_c \right] g \cdot G, \text{ Н} \quad (5.276)$$

де ε_0 – коефіцієнт відриву, який рівний 1,3...4,0 (від коренеплодів, сіна, силосу до гною збільшується);

ε_2 – коефіцієнт відношення маси грейфера до маси вантажу, рівний 0,8...1,0;

ε_c – коефіцієнт опору відриву, для сільськогосподарських вантажів рівний 0,25...0,5;

$1 + \psi \frac{a}{g}$ – коефіцієнт динамічності, рівний 0,5...1,0.

Продуктивність навантажувача буде підвищуватися при $\varepsilon_0 \rightarrow 1$;
 $1 + \psi \frac{a}{g} \rightarrow 1$; $\varepsilon_c \rightarrow 0$.

Встановлення в конструкцію і гідросистему додаткових демпфувальних пристроїв і зменшення амплітуди коливань і їх кількості дозволяє знизити коефіцієнт динамічності.

При роботі навантажувача з важкими вантажами або екскаваторних роботах зусилля, необхідне для різання і зачерпування вантажу визначається за формулою:

$$P_p = q_p \cdot F_c, \text{ Н} \quad (5.277)$$

де q_p – питомий опір різанню вантажу (для піску, чорнозему рівний 0,05 МПа, щебеню – 0,15...0,2 МПа);

F_c – площа поперечного перерізу шару вантажу, що захвачується.

В процесі зачерпування, захвата і відриву вантажу змінюються зусилля.

Потужність навантажувача можна визначити по опору відриву і швидкості або по роботі за цикл при грейферному захваті за формулою:

$$N = \frac{P_0 \cdot v}{\eta}, \text{ кВт} \quad (5.278)$$

де v – швидкість підйому, рівна 0,1...0,3 м/с;

η – к. к. д., рівний 0,8...0,95.

При захваті вантажу ковшем при напорі по питомому опору потужність навантажувача визначається за формулою:

$$N = \frac{P_p \cdot v}{\eta} = \frac{k_n \cdot V_k \cdot q_p}{k_p \cdot t \cdot \eta}, \text{ кВт} \quad (5.279)$$

де v – швидкість зачерпування, м/с;

k_n – коефіцієнт наповнення, рівний 0,45...1,0;

V_k – об'єм ковша, м³;

t – час зачерпування, год;

η – к. к. д., рівний 0,8...0,85.

При зачерпуванні ковшем по питомій роботі на одиницю маси вантажу потужність навантажувача визначається за формулою:

$$N = \frac{G \cdot q_0}{t \cdot \eta}, \text{ кВт} \quad (5.280)$$

Частина п'ята

де q_0 – питомий робота на одиницю маси вантажу (для піску, чорнозему рівний 3,5...5,0 Нм/кг, щебеню – 5,0...8,0 Нм/кг).

По потужності і швидкості переміщення кромки ковша або машини напірне зусилля (опір) визначається за формулою:

$$T = \frac{N}{v}, \text{ Н} \quad (5.281)$$

Для зменшення напірного зусилля машини застосовують ходозменшувачі.

Необхідно враховувати, що наявність бокових стінок у ковша підвищує опір входу ковша у вантаж на 50%. Його можна знизити при випуклій ріжучій кромці на 15% і при наявності зубів на 18...20%.

Ширина ковша (довжина ріжучої кромки) визначається за формулою:

$$L_k = \frac{T}{k}, \text{ м} \quad (5.282)$$

де k – питомий (погонний) опір входу ковша у вантаж (для сипких вантажів приймають 10,...15,0 кН/м).

Геометричні параметри навантажувача. Основні геометричні параметри навантажувача це висота підйому вантажу, глибина захвату, максимальний і мінімальний виліт та довжина стріли.

Співвідношення між основними геометричними параметрами навантажувача визначаються за формулами:

$$\begin{aligned} H_{\max} &= H_0 + R \sin(\alpha - 90^\circ) \quad \text{і} \quad H_{\min} = H_0 + R \cos \beta \\ L_{\max} &= R, \quad L = R \cos(\alpha - 90^\circ) \quad \text{і} \quad L_{\min} = R \sin \beta, \end{aligned} \quad (5.283)$$

де H_{\max} – висота підйому вантажу, м;

H_0 – висота від поверхні землі до горизонтальної вісі повороту стріли, м;

H_{\min} – глибина захвату, м;

L_{\max} і L_{\min} – відповідно максимальний і мінімальний виліт стріли, м;

L – виліт стріли при максимальній висоті підйому вантажу, м;

α – кут найбільшого підйому стріли;

β – кут найбільшого опускання стріли.

Зусилля в конструкціях навантажувача. Підйом вантажу на решітках, в контейнерах, на вилах зі збереженням положення досягається за допомогою паралелограмних механізмів, в яких стріла виконує роль однієї з ланок. Ця ланка (стріла) працює на стиск і згин. Тому її виготовляють коробчастого перерізу. Ланка паралельна стрілі працює на розтяг, і тому її виготовляють з прутка або труби.

Оптимальне розташування точок кріплення стріли і гідроциліндра підйому пов'язане з розподілом навантаження на колеса і раму.

Фронтальні навантажувачі, що навішуються спереду трактора, збільшують навантаження на передні колеса і зменшують на задні. Навішування навантажувача позаду трактора приводить до оберненого перерозподілу навантаження і навантаження на колеса визначаються за формулами:

$$T_2 = \frac{P_0(a + L)}{L}, \text{ Н} \quad \text{та} \quad T_1 = \frac{P_0 \cdot a}{L}, \text{ Н} \quad (5.284)$$

де T_1 та T_2 – відповідно навантаження на колеса, що розташовані ближче до вантажу і далі, Н;

P_0 – зусилля, що діє в місці підвісу вантажу, Н;

a – відстань від площини дії вантажу до вісі найближчих коліс, м;

L – відстань між осями передніх і задніх коліс, м.

Перевантаження шин у автовантажувачів знижує строк служби шин на 70%, а зменшення веде до зниженню зчеплення з ґрунтом.

Пересувні підіймачі. Пересувні підіймачі, як засоби малої механізації, застосовують в майстернях. Вантаж підіймають за допомогою лебідки або гідравлічного підіймача, як правило з ручним приводом. Подібні засоби малої механізації полегшують працю робітників, але вони малопродуктивні.

Навантажувальні пристосування. Навантажувальні пристосування застосовуються при перевалюванні невеликих партій вантажів, коли використання стаціонарних або спеціальних навантажувальних машин економічно не вигідно.

Навантажувальні пристосування бувають навісними або причіпними, застосовуватись тільки під час навантажувальних робіт і монтуватись як постійне обладнання на транспортний засіб.

5.14.3. Навантажувачі безперервної дії

Великий об'єм навантажувально-розвантажувальних робіт в сільському господарстві ефективно виконують навантажувальні машини безперервної дії.

Ці машини від транспортерів відрізняє наявність забірною пристрою і самопересування. В їх склад входить до трьох транспортерів.

Переваги навантажувачів безперервної дії: висока продуктивність, безперервність потоку вантажу, самозабір вантажу, мобільність і маневреність.

Недолік – порівняно мале використання робочого часу протягом року, можливість універсалізації цих навантажувачів обмежена через

Частина п'ята

суттєвої різниці механіко-технологічних властивостей вантажів. Тому в сільському господарстві використовують спеціальні навантажувачі для зерна, коренеплодів, соломи та ін.

Навантажувачі безперервної дії можна класифікувати:

- по способу забору вантажу: зачерпуванням, загрибанням, підгрибанням і підкопуванням;
- по способу агрегування: навісні, причіпні, на власному шасі (автономні).

Забірні пристрої. Працездатність навантажувальних машин безперервної дії залежить від відповідності забірною пристрою механіко-технологічним властивостям вантажів і його надійності в роботі.

Забірні пристрої по конструкції бувають: грабельні, скребкові, кулачкові, лопастні, ротаційні, ковшові барабанні, елеваторні, дискові, вібраційні та ін.

Види навантажувачів. В сільському господарстві найбільшого застосування набули навантажувачі спеціального призначення: зернонавантажувачі, тюкопідбирачі, буряконавантажувачі, завантажувачі сівалок та сухих кормів.

Основи проектування навантажувачів безперервної дії. Навантажувальні машини безперервної дії звичайно зв'язують технологічний ланцюг виробничого процесу і тому повинні бути машинами високої експлуатаційної надійності.

При проектуванні навантажувальної машини необхідно забезпечувати:

- максимально можливу відповідність забірною пристрою роду вантажу (це має особливе значення для сільськогосподарських вантажів);
- збільшення часу використання навантажувачів шляхом їх універсалізації, оснастивши його змінними забірними пристроями;
- самопересування при максимальній здатності до маневрування і роботі на ходу і позиційно;
- простоту завантаження транспортних засобів, для чого скидальний транспортер зробити поворотним в обидві сторони до 90°;
- простоту і легкість управління машиною.

Робота в навантажувачі забірною пристрою, підйомного і скидального транспортерів взаємопов'язана і тому повинна бути узгоджена.

При проектуванні необхідно забезпечити послідовно наростаючу транспортну здатність, що виражається формулою:

$$P_z < P_n < P_c, \text{ т/год} \quad (5.285)$$

де P_z , P_n та P_c – відповідно розрахункові продуктивності забірною, підйомного та скидального транспортерів, т/год.

При одномоторному приводі загальна потужність навантажувальної машини безперервної дії рівна сумі потужностей, що споживається усіма робочими і допоміжними органами при одночасній їх роботі:

$$N = N_z + N_n + N_c + N_{пер}, \text{ кВт} \quad (5.286)$$

де N_z , N_n та N_c – відповідно потужності забірною, підйомного та скидального транспортерів, кВт;

$N_{пер}$ – потужність на пересування з врахуванням напорного опору.

При проектуванні навантажувачів безперервної дії в подальшому користуються розрахунками по машинам періодичної дії.

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. На які типи поділяються навантажувачі?
2. Які бувають навантажувачі безперервної дії?
3. Які бувають навантажувачі періодичної дії?
4. Як повинна бути узгоджена робота в навантажувачі забірною пристрою, підйомного і скидального транспортерів?
5. Які вимоги до роботи навантажувачів потрібно врахувати при їх проектуванні?

5.15. Безрейковий та рейковий транспорт

5.15.1. Безрейковий транспорт

Безрейковий транспорт – ручні, самопересувні і причіпні візки, які широко застосовуються в сільському господарстві. Щоб вони успішно працювали покриття поля або дороги повинно бути достатньо твердим і рівним.

Ручні візки конструюють так, щоб допустиме зусилля робітника, що їх штовхає, було не більше 100 Н при безперервній роботі, 200...300 Н при роботі з переривами, при рушанні з місця – до 500 Н; швидкість переміщення візка до 1 м/с.

На стомлення робітника впливає вертикальне зусилля на рукоятках. Тому необхідно, щоб центр тяжіння завантаженого двоколісного візка був розташований не далі 0,2 м від вісі колеса в сторону рукояток.

Самохідні візки застосовують для транспортування вантажів більшої маси і незначні відстані. Акумуляторні електровізки приводяться в рух електродвигунами, що отримують енергію від батарей постійного струму напругою 40...80 В, масою 500 кг. Акумуляторні батареї вимагають

зарядних станцій, дорогі в експлуатації через швидке спрацювання.

Автовізки або автокари, приводяться в дію від двигуна. Їх перевага складається в необмеженому радіусі дії, але в процесі експлуатації вони виділяють вихлопні гази і тому не рекомендуються для закритих приміщень.

В сільському господарстві використовується також наступний безрейковий транспорт: автотракторні причіпи, одноосні причіпи, причіпи-розпуски, копицевози.

5.15.2. Рейковий транспорт

Для механізації транспортних робіт на тваринницьких фермах і в ремонтних майстернях застосовують вузьку наземну і підвісну рейкові дороги і конвейєри. Застосування механізації дає можливість скоротити число працівників, зайнятих на цих роботах на 40...50%.

Наземні вузькоколіїні дороги надійні, стійкі, дозволяють перевозити у вагонетках від 200 до 2000 кг маси вантажу, прості і відносно дешеві, не загороджують територію наземними спорудами. До недоліків відноситься необхідність очищення колій.

Підвісні дороги і конвейєри придатні для перевезення вантажів як всередині приміщень, так і зовні, прості в обслуговуванні, їх робота не залежить від кліматичних умов. Недоліки підвісної дороги: ручна відкатка і велика витрата будівельних матеріалів для підвішування колій.

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Які бувають типи безрейкового транспорту?
2. Які бувають типи рейкового транспорту?
3. Які параметри враховуються при проектуванні ручних візків?
4. Які основні недоліки електровізків?

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Павловський М.А. Теоретична механіка / М.А. Павловський. – К.: Техніка, 2002. – 510 с.
2. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики / С.М. Тарг. – М.: Наука, 1986. – 416 с.
3. Яблонский А.А. Курс теоретической механики. Ч 1. Статика. Кинематика / А.А. Яблонский, В.М. Никифорова. – М.: Высш. шк., 1972. – 436 с.
4. Савин Г.Н. Теоретическая механика / Савин Г.Н., Путята Т.В., Фрадлин Б.Н. – К.: Вища школа, 1971. – 359 с.
5. Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике / И.В. Мещерский. – М.: Наука, 1972. – 258 с.
6. Веселовский И.Н. Очерки по истории теоретической механики / И.Н. Веселовский. – М.: Высш. шк., 1974. – 287 с.
7. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике ; под общ. ред. проф. А.А. Яблонского. – М.: Высш. шк., 1978. – 326 с.
8. Булгаков В.М. Інженерна механіка. Ч I. Теоретична механіка / Булгаков В.М., Литвинов О.І., Войтюк Д.Г. – Вінниця: Нова книга, 2007. – 502 с.
9. Булгаков В.М. Теоретична механіка. Динаміка / Булгаков В.М., Лукач В.С., Литвинов О.І., Головач І.В. – Ніжин: МІЛАНІК, 2007. – 368 с.
10. Лойцянский Л.Г. Курс теоретической механики / Л.Г. Лойцянский, А.И. Лурье. – М.: Наука, 1982. – Ч. 1. – 368 с.; Ч. 2 – 640 с.
11. Бутенин Н.В. Курс теоретической механики / Н.В. Бутенин, Я.Л. Лунц, Д.Р. Меркин – М.: Наука, 1979. Т. 1. – 270 с.; Т. 2 – 542 с.
Бутенин Н.В. Введение в аналитическую механику / Н.В. Бутенин – М.:

Наука, 1971. – 264 с.

12. Ньютон И. Математические начала натуральной философии. – *Крылов А.Н. Собрание трудов.* – М.: Наука, 1936. –Т. 7.

13. Яблонский А.А. Курс теоретической механики / А.А. Яблонский. – М. : Высш. шк., 1984. – 423 с.

14. Добронравов В.В. Курс теоретической механики / Добронравов В.В., Никитин Н.Н., Дворников А.Л. – М.: Высш. шк., 1974. – 528 с.

15. Яблонский А.А. Курс теоретической механики / А.А. Яблонский, В.М. Никифорова. – М.: Высш. шк., 1977. – 431 с.

16. Бялер І.Я., Левінсон В.Н., Михайловський В.А., Саліон В.Ю. Технічна механіка. – К.: Вища школа, 1971.

17. Мовнин М.С., Израелит А.Б., Рубашкин А.Г. Основы технической механики. – Л.: Судостроение, 1973.

18. Ковалев Н.А. Прикладная механика. - М.: Высшая школа, 1982. – 400 с.

19. Жуков К.П. Расчет и проектирование машин. – М.: Высшая школа, 1980.- 247 с.

20. Булгаков В.М., Литвинов О.І., Войтюк Д.Г. Інженерна механіка. Ч. І. Теоретична механіка – Вінниця «Нова Книга»: , 2006. – 502 с.

21. Еременко О.І. Теорія механізмів і машин. Конспект лекцій. – К.: НАУ, 2002. – 150 с.

22. Мовнин М.С., Израелит А.Б. Техническая механика. Часть II. Соппротивление материалов. - Л.: Изд-во ЛТА, 1972. – 65 с.

23. Таубер В.А. Подъемно-транспортные машины. - М.: Лесная промышленность, 1980. – 456 с.

24. Слупський Є.І. Деталі машин. Н.: Техніка, 1971. – 136 с.

25. Корнеєв Г.В. Підйомно-транспортні машини безперервної дії, застосовувані в сільському господарстві / Г.В.Корнеєв, З.Б.Пивоваров. – К.: Урожай, 1968. – 152 с.

26. Красников В.В. Подъемно-транспортные машины в сельском хозяйстве / В.В.Красников. – М.: Колос, 1973. – 464 с.

27. Ярошенко В.Ф. Підйомно-транспортні машини. Питання до захисту курсових робіт. Методичні вказівки до курсового проектування / В.Ф.Ярошенко, В.С.Лукач. – К.: Видавничий центр НАУ, 2001. – 20 с.

28. Красников В.В. Подъемно-транспортные машины / В.В.Красников. – М.: Колос, 1981. – 263 с.

29. Ярошенко В.Ф. Підйомно-транспортні машини. Транспортуючі машини безперервної дії без гнучкого тягового органу і бункери. Методичні розробки для програмованого контролю знан студентів / В.Ф.Ярошенко, В.М.Білоножка. – К.: Видавничий центр НАУ, 2000. – 72 с.

30. Руденко Н.Ф. Курсовое проектирование грузоподъемных машин / Н.Ф.Руденко, М.П.Александров, А.Г.Лысяков. – М.: Машиностроение, 1971. – 464 с.

31. Александров М.П. Грузоподъемные машины / М.П.Александров. – М.: Машиностроение, 1986. – 400 с.

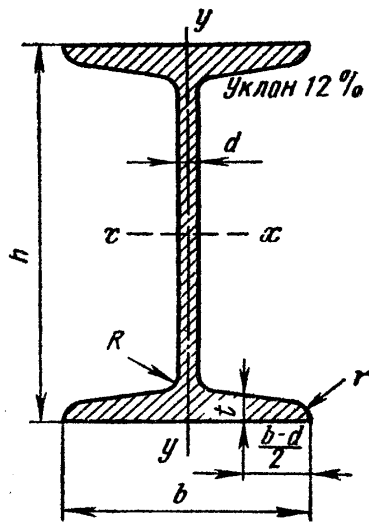
Додаток А
Значення E , G , ν , $[\sigma_p]$, $[\sigma_c]$ для деяких матеріалів при 20°C

Матеріал	Модуль поздовжньої пружності	Модуль зсуву	Коефіцієнт Пуассона	Допустиме напруження на розтяг	Допустиме напруження на стиск
	$E \cdot 10^5$, $H/мм^2$	$G \cdot 10^4$, $H/мм^2$	ν	$[\sigma_p]$, $H/мм^2$	$[\sigma_c]$, $H/мм^2$
Сталь	1,96 – 2,16	7,8 – 8,3	0,25 – 0,33	60 – 250	760 – 250
Чавун	1,5 – 1,6	4,5	0,23 – 0,27	28 – 80	120 – 150
Мідь	1,0 – 1,3	4,0 – 4,9	0,31 – 0,34	30 – 120	30 – 120
Латунь	0,98 – 1,08	3,5 – 3,7	0,32 – 0,34	70 – 140	70 – 140
Бронза	0,74 – 1,22	–	0,32 – 0,35	60 – 120	60 – 120
Дерево	0,1 – 0,16	0,055	–	9 – 13	13 – 15

Додаток Б
Нормальні лінійні розміри, мм
(по ГОСТ 6636 – 74)

Ряди				Ряди			
<i>Ra 5</i>	<i>Ra 10</i>	<i>Ra 20</i>	<i>Ra 40</i>	<i>Ra 5</i>	<i>Ra 10</i>	<i>Ra 20</i>	<i>Ra 40</i>
		1,0	1,0		3,2		3,4
	1,0		1,05			3,6	3,6
		1,1	1,1				3,8
1,0			1,15			4,0	4,0
		1,2	1,2		4,0		4,2
	1,2		1,3			4,5	4,5
		1,4	1,4	4,0			4,8
			1,5			5,0	5,0
		1,6	1,6		5,0		5,3
	1,6		1,7			5,6	5,6
		1,8	1,8				6,0
1,6			1,9			6,3	6,3
		2,0	2,0		6,3		6,7
	2,0		2,1			7,1	7,1
		2,2	2,2	6,3			7,5
			2,4			8,0	8,0
		2,5	2,5		8,0		8,5
	2,5		2,6			9,0	9,0
		2,8	2,8				9,5
2,5			3,0	10		10,0	10,0

Додаток В
Сортамент прокатної сталі (ГОСТ 8239 – 72, 8509-72)
(Балки двотаврові)

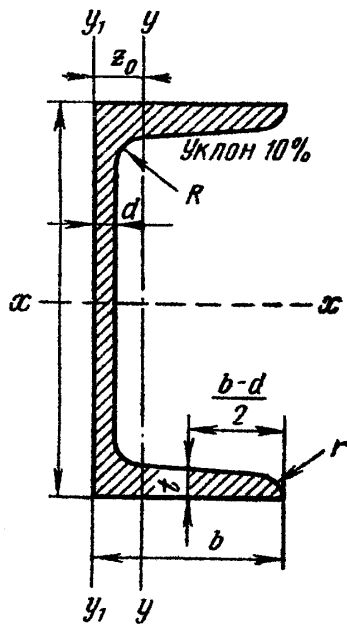


Позначення:

h - висота балки;
 b - ширина полиці;
 d - товщина стінки;
 t - середня товщина полиці;
 J - момент інерції;
 W - момент опору;
 S - статичний момент.

№ про-філя	Розміри				Для осі $x-x$			Для осі $y-y$	
	h , мм	b , мм	d , мм	t , мм	J_x , см ⁴	W_x , см ³	S_x , см ³	J_y , см ⁴	W_y , см ³
10	100	55	4,5	7,2	198	39,7	23,0	17,9	6,49
12	120	64	4,8	7,3	350	58,4	33,7	27,9	8,72
14	140	73	4,9	7,5	572	81,7	46,8	41,9	11,5
16	160	81	5,0	7,8	873	109	62,3	58,6	14,5
18	180	90	5,1	8,1	1290	143	81,4	82,6	18,4
18a	180	100	5,1	8,3	1430	159	89,8	114	22,8
20	200	100	5,2	8,4	1840	184	104	115	23,1
20a	200	110	5,2	8,6	2030	203	114	155	28,2
22	220	110	5,4	8,7	2550	232	131	157	28,6
22a	220	120	5,4	8,9	2790	254	143	206	34,3
24	240	115	5,6	9,5	3460	289	163	198	34,5
24a	240	125	5,6	9,8	3800	317	178	260	41,6
27	270	125	6,0	9,8	5010	371	210	260	41,5
27a	270	135	6,0	10,2	5500	407	229	337	50,0
30	300	135	6,5	10,2	7080	472	268	337	49,9
30a	300	145	6,5	10,7	7780	518	292	436	60,1
33	330	140	7,0	11,2	9840	597	339	419	59,9
36	360	145	7,5	12,3	13380	743	423	516	71,1
40	400	155	8,3	13,0	19062	953	545	667	86,1
45	450	160	9,0	14,2	27696	1231	708	808	101
50	500	170	10,0	15,2	39727	1589	919	1043	123
55	550	180	11,0	16,5	55962	2035	1181	1356	151

Додаток Г
Сортамент прокатної сталі (ГОСТ 8239 – 72, 8509-72)
(Швеллер)



Позначення:

- h - висота швеллера;
- b - ширина полиці;
- d - товщина стінки;
- t - середня товщина полиці;
- J - момент інерції;
- W - момент опору;
- S - статичний момент.

№ про-філя	Розміри				Для осі $x-x$			Для осі $y-y$	
	h , мм	b , мм	d , мм	t , мм	J_x , см ⁴	W_x , см ³	S_x , см ³	J_y , см ⁴	W_y , см ³
5	50	32	4,4	7,0	22,8	9,1	5,59	5,61	2,75
6,5	65	36	4,4	7,2	48,6	15,0	9,00	8,70	3,68
8	80	40	4,5	7,4	89,4	22,4	13,3	12,8	4,75
10	100	46	4,5	7,6	174	34,8	20,4	20,4	6,48
12	120	52	4,8	7,8	304	50,6	29,6	31,2	8,52
14	140	58	4,9	8,1	491	70,2	40,8	45,4	11,0
16	160	64	5,0	8,4	747	93,4	54,1	63,3	13,8
16a	160	68	5,0	9,0	823	103	59,4	78,8	16,4
18	180	70	5,1	8,7	1090	121	69,8	86,0	17,0
18a	180	74	5,1	9,3	1190	132	76,1	105	20,0
20	200	76	5,2	9,0	1520	152	87,8	113	20,5
20a	200	80	5,2	9,7	1670	167	95,9	139	24,2
22	220	82	5,4	9,5	2110	192	110	151	25,1
22a	220	87	5,4	10,2	2330	212	121	187	30,0
24	240	90	5,6	10,0	2900	242	139	208	31,6
27	270	95	6,0	10,5	4160	308	178	262	37,3
30	300	100	6,5	11,0	5810	387	224	327	43,6
33	330	105	7,0	11,7	7980	484	281	410	51,8
36	360	110	7,5	12,6	10820	601	350	513	61,7
40	400	115	8,0	13,5	15220	761	444	642	73,4

Литвинов Олег Іванович

Лукач Василь Степанович

Шейко Леонід Олексійович

Мороз Любов Іванівна

Кириченко Олександр Миколайович

ІНЖЕНЕРНА МЕХАНІКА

Здано, Підп. до друку
Формат. Папір офсет. №1. Офс. друк.

Ум. друк. арк.. Обл.- вид. арк.. Наклад **500** прим.

Ціна

Замовлення