Дмитрий Письменный

Конспект лекций по теории вероятностей, математической статистике и случайным процессам

Высшее образование

3-е издание

МОСКВА
АЙРИС ПРЕСС
2008

УДК 519.2(075.8)
ББК 22.17я73-2
П35

Серийное оформление *А. М. Драгового*

Письменный, Д. Т.

П35 Конспект лекций по теории вероятностей, математической статистике и случайным процессам / Дмитрий Письменный. — 3-е изд. — М.: Айрис-пресс, 2008. — 288 с. — (Высшее образование).

ISBN 978-5-8112-2966-6

Настоящая книга представляет собой курс лекций по теории вероятностей, случайным процессам и математической статистике.

Первая часть книги содержит основные понятия и теоремы теории вероятностей, такие как случайные события, вероятность, случайные функции, корреляция, условная вероятность, закон больших чисел и предельные теоремы. В отдельной главе приведены основные понятия теории случайных процессов (стационарный процесс, марковский процесс, теорема Винера–Хинчина).

Вторая часть книги посвящена математической статистике, в ней излагаются основы выборочного метода, теории оценок и проверки гипотез. Изложение теоретического материала сопровождается рассмотрением большого количества примеров и задач, ведется на доступном, по возможности строгом языке.

Предназначена для студентов экономических и технических вузов.

ББК 22.17я73-2
УДК 519.2(075.8)

ISBN 978-5-8112-2966-6

Содержание

Раздел первый
Элементарная теория вероятностей и случайных процессов

Глава 1. Случайные события

Глава 2. Случайные величины

Глава 3. Системы случайных величин

Глава 4. Функции случайных величин

Глава 5. Предельные теоремы теории вероятностей

Глава 6. Основы теории случайных процессов

Раздел второй
Основы математической статистики

Введение

Теория вероятностей, как и другие науки, возникла из потребностей практики. Ее элементы были «знакомы» еще первобытным людям: шансы убить зверя у двух охотников, конечно, больше, чем у одного.

Возникновение «математики случайного» относится к середине XVII века и связано с попыткой создания теории азартных игр, особенно в кости.

Пример одной из ситуаций: два игрока договорились играть в кости до момента, когда одному из них удастся выиграть три партии; игра была прервана, когда первый игрок выиграл две партии, а второй — одну; как справедливо разделить ставку? 3 : 1 — как показали французские математики Б. Паскаль (1623–1662) и П. Ферма (1601–1665). И в настоящее время примеры из области азартных игр широко применяются в теории вероятностей, так как для них легко строить математические модели.

Первую книгу по теории вероятностей «О расчетах в азартной игре» опубликовал голландский математик Х. Гюйгенс (1629–1695).

Становление теории вероятностей как математической науки связано с именем Я. Бернулли (1654–1705), который ввел классическое определение события и доказал простейший случай закона больших чисел.

В XVIII–XIX веках центральное место в развитии теории вероятностей занимали предельные теоремы. К этому периоду относятся работы А. Муавра (1667–1754), П. Лапласа (1749–1827), К. Гаусса (1777–1855), С. Пуассона (1781–1840).

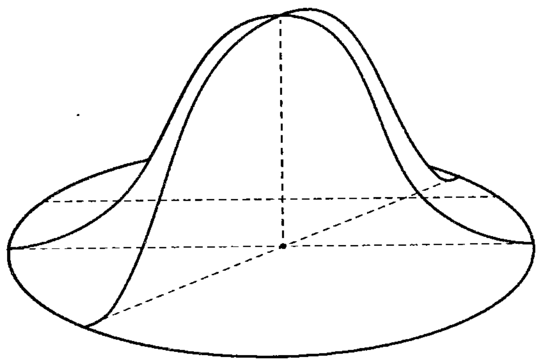
В конце XIX — начале XX века благодаря усилиям П. Л. Чебышева (1821–1894), А. А. Маркова (1856–1922), А. М. Ляпунова (1857–1918) созданы методы доказательства предельных теорем для сумм независимых произвольно распределенных случайных величин.

Дальнейшее развитие теории вероятностей связано с именами русских математиков Е. Е. Слуцкого (1880–1948), А. Я. Хинчина (1894–1959), А. Н. Колмогорова (1903–1987), Б. В. Гнеденко (1912–1995), а также зарубежных ученых Н. Винера (1894–1964), Э. Бореля (1871–1956), В. Феллера (1906–1970), Р. Фишера (1890–1962) и др. Теория вероятностей получила строгое формально-логическое основание на базе теории множеств. Следует особо отметить академика А. Н. Колмогорова, установившего аксиоматику теории вероятностей. Огромное развитие получили «отпочковавшиеся» от теории вероятностей такие отрасли науки, как математическая статистика, теория случайных процессов, теория массового обслуживания, теория информации и др.

Современная теория вероятностей — строго обоснованная математическая наука. Она широко использует достижения других математических наук (по этому поводу современный вероятностик Дж. Дуб в шутку как-то сказал: «Всем специалистам по теории вероятностей хорошо известно, что математика представляет собой часть теории вероятностей»); имеет, в свою очередь, многочисленные приложения в естественных и гуманитарных науках.

Элементарная теория вероятностей и случайных процессов

Раздел первый



Глава 1
Случайные события

1.1. Предмет теории вероятностей

Любая точная наука изучает не сами явления, протекающие в природе, в обществе, а их математические модели, т. е. описание явлений при помощи набора строго определенных символов и операций над ними. При этом для построения математической модели реального явления во многих случаях достаточно учитывать только основные факторы, закономерности, которые позволяют предвидеть результат опыта (наблюдения, эксперимента) по его заданным начальным условиям. Этим и занимаются большинство математических (и других) дисциплин. Обнаруженные закономерности явления называются *детерминистическими* (определенными). Так, например, формула

$$S = \frac{1}{2}gt^2$$

позволяет найти путь, пройденный свободно падающим телом за t секунд от начала движения.

Однако есть множество задач, для решения которых приходится (надо!) учитывать и случайные факторы, придающие исходу опыта элемент неопределенности. Например, в вопросах стрельбы по цели невозможно без учета случайных факторов ответить на вопрос: сколько ракет нужно потратить для поражения цели? Невозможно предсказать, какая сторона выпадет при бросании монеты. Сколько лет проживет родившийся сегодня ребенок? Сколько времени проработает купленный нами телевизор? Сколько студентов опоздают на лекцию по теории вероятностей? И т. д. Такие задачи, исход которых нельзя предсказать с полной уверенностью, требуют изучения не только основных, главных закономерностей, определяющих явление в общих чертах, но и случайных, второстепенных факторов. Выявленные в таких задачах (опытах) закономерности называются *статистическими* (или *вероятностными*). Статистические закономерности исследуются методами специальных математических дисциплин — теории вероятностей и математической статистики.

Теория вероятностей — математическая наука, изучающая закономерности, присущие массовым случайным явлениям. При этом изучаемые явления рассматриваются в абстрактной форме, независимо от их конкретной природы. То есть теория вероятностей рассматривает не сами реальные явления, а их упрощенные схемы — математические модели. *Предметом теории вероятностей* являются математические модели случайных явлений. При этом под *случайным явлением* понимают явление, предсказать исход которого невозможно (при неоднократном воспроизведении одного и того же опыта оно протекает каждый раз несколько по-иному). *Примеры случайных явлений*: выпадение герба при подбрасывании монеты, выигрыш по купленному лотерейному билету, результат измерения какой-либо величины, длительность работы телевизора и т. п.

Цель теории вероятностей — осуществление прогноза в области случайных явлений, влияние на ход этих явлений, контроль их, ограничение сферы действия случайности. В настоящее время нет практически ни одной области науки, в которой в той или иной степени не применялись бы вероятностные методы.

1.2. Случайные события, их классификация

Сначала определим понятие «случайное событие» исходя из его интуитивного, наглядного понимания. Пусть проводится некоторый опыт (эксперимент, наблюдение, испытание), исход которого предсказать заранее нельзя. Такие эксперименты в теории вероятностей называют *случайными*. При этом рассматриваются только такие эксперименты, которые можно повторять, хотя бы теоретически, при неизменном комплексе условий произвольное число раз.

Случайным событием (или просто: *событием*) называется любой исход опыта, который может произойти или не произойти.

События обозначаются, как правило, заглавными буквами латинского алфавита: A, B, C, $\ldots$.

Пример 1.1. Опыт: бросание игральной кости; событие A — выпадение 5 очков, событие B — выпадение четного числа очков, событие C — выпадение 7 очков, событие D — выпадение целого числа очков, событие E — выпадение не менее 3-х очков, $\ldots$.

Непосредственные исходы опыта называются *элементарными событиями* и обозначаются через w. Элементарные события (их называют также «элементами», «точками», «случаями») рассматриваются как неразложимые и взаимоисключающие исходы w_1, w_2, w_3 ... этого опыта.

Множество всех элементарных событий называется *пространством элементарных событий или пространством исходов*, обозначается через Ω.

Рассмотрим пример 1.1. Здесь 6 элементарных событий w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6. Событие w_i означает, что в результате бросания кости выпало i очков, $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Пространство элементарных событий таково: $\Omega = \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6\}$ или $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Событие называется *достоверным*, если оно обязательно наступит в результате данного опыта, обозначается через Ω.

Событие называется *невозможным*, если оно заведомо не произойдет в результате проведения опыта, обозначается через $\varnothing$.

В примере 1.1 события A и B — случайные, событие C — невозможное, событие D — достоверное.

Два события называются *несовместными*, если появление одного из них исключает появление другого события в одном и том же опыте, т. е. не смогут произойти вместе в одном опыте. В противном случае события называются *совместными*.

Так, в примере 1.1 события A и B — несовместные, A и E — совместные.

События $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называются *попарно-несовместными*, если любые два из них несовместны.

Несколько событий образуют *полную группу*, если они попарно несовместны и в результате каждого опыта происходит одно и только одно из них.

В примере 1.1 события w_1 w_6 образуют полную группу, w_1 w_5 — нет.

Несколько событий в данном опыте называются *равновозможными*, если ни одно из них не является объективно более возможным, чем другие, т. е. все события имеют равные «шансы».

В примере 1.1 элементарные события w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6 равновозможны. Выпадение герба (A) или решки (B) при бросании монеты — равновозможные события, если, конечно, монета имеет симметричную форму, не погнута, ...

1.3. Действия над событиями

Введем основные операции над событиями; они полностью соответствуют основным операциям над множествами.

Суммой событий A и B называется событие $C = A + B$, состоящее в наступлении хотя бы одного из них (т. е. или A, или B, или A и B вместе).

Произведением событий A и B называется событие $C = A \cdot B$, состоящее в совместном наступлении этих событий (т. е. и A и B одновременно).

Разностью событий A и B называется событие $C = A - B$, происходящее тогда и только тогда, когда происходит событие A, но не происходит событие B.

Противоположным событию A называется событие $\overline{A}$, которое происходит тогда и только тогда, когда не происходит событие A (т. е. $\overline{A}$ означает, что событие A не наступило).

Событие A *влечет событие* B (или A является частным случаем B), если из того, что происходит событие A, следует, что происходит событие B; записывают $A \subseteq B$.

Если $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$, то события A и B называются *равными*; записывают $A = B$.

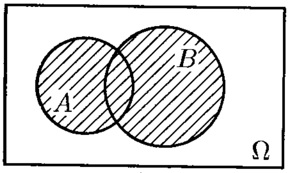
Так, в примере 1.1 (п. 1.2) $B = \{2, 4, 6\}$, $E = \{3, 4, 5, 6\}$, $A = \{5\}$, $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Тогда: $B + E = \{2, 3, 4, 5, 6\}$, $B \cdot E = \{4, 6\}$, $B - E = \{2\}$, $\overline{A} = \{1, 2, 3, 4, 6\}$, $B \subseteq D$, $D = \Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

События и действия над ними можно наглядно иллюстрировать с помощью *диаграмм Эйлера–Венна*: достоверное событие Ω изображается прямоугольником; элементарные случайные события — точками прямоугольника; случайное событие — областью внутри него.

Действия над событиями можно изобразить так, как показано на рис. 1–5.

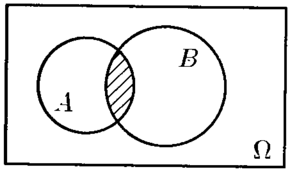
Операции над событиями обладают следующими свойствами:

- $A + B = B + A$, $A \cdot B = B \cdot A$ (переместительное);
- $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$, $A \cdot B + C = (A + C) \cdot (B + C)$ (распределительное);
- $(A + B) + C = A + (B + C)$, $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ (сочетательное);
- $A + A = A$, $A \cdot A = A$;
- $A + \Omega = \Omega$, $A \cdot \Omega = A$;
- $A + \overline{A} = \Omega$, $A \cdot \overline{A} = \varnothing$;
- $\overline{\varnothing} = \Omega$, $\overline{\Omega} = \varnothing$, $\overline{\overline{A}} = A$;
- $A - B = A \cdot \overline{B}$;
- $\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$ и $\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$ — законы де Моргана.



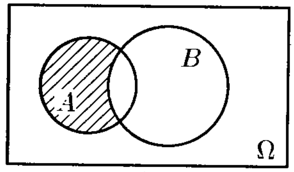
$A + B$

Рис. 1



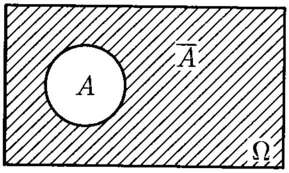
$A \cdot B$

Рис. 2



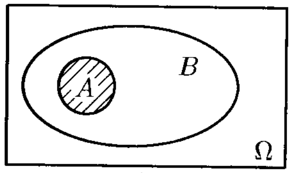
$A - B$

Рис. 3



$\overline{A}$

Рис. 4



$A \subseteq B$

Рис. 5

В их справедливости можно убедиться с помощью диаграмм Эйлера–Венна.

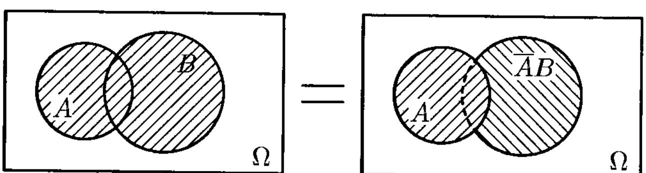
Пример 1.2. Доказать формулу $A + B = A + \overline{A}B$.

❍ Используя некоторые из выше приведенных правил, получаем:

$$A+B = (A+B)\cdot\Omega = A\cdot\Omega+B\cdot\Omega = A\cdot\Omega+B\cdot(A+\overline{A}) = A\cdot\Omega+(A+\overline{A})\cdot B =$$
$$= A\cdot\Omega + A\cdot B + \overline{A}\cdot B = (\Omega + B)\cdot A + \overline{A}\cdot B = \Omega\cdot A + \overline{A}\cdot B = A + \overline{A}\cdot B.$$

Таким образом, *сумму любых двух событий можно представить в виде суммы двух несовместных событий.*

Геометрическое доказательство представлено на рис. 6. ●



$A + B$ $\qquad$ $A + \overline{A}B$

Рис. 6

Упражнения

1. Доказать формулы: 1) $B = A{\cdot}B + \overline{A}{\cdot}B$; 2) $(A+C){\cdot}(B+C) = A{\cdot}B+C$; 3) $\overline{A+B} = \overline{A}\cdot\overline{B}$.

2. Пусть A, B и C — три произвольных события. Выразить через них следующие события: а) произошли все три события; б) произошло только C; в) произошло хотя бы одно из событий; г) ни одного события не произошло; д) произошли A и B, но C не произошло; е) произошло одно из этих событий; ж) произошло не более двух событий.

3. Релейная схема (рис. 7) состоит из 6 элементов. Пусть события A_i ($i = \overline{1,6}$) состоят в том, что соответствующие элементы работают безотказно в течение времени T. Выразить через A_i событие, состоящее в том, что схема за время T работает безотказно.

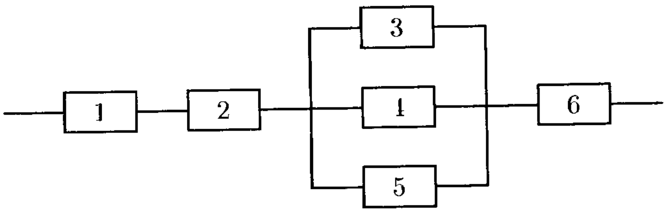


Рис. 7

1.4. Случайные события. Алгебра событий. (Теоретико-множественная трактовка)

Определим теперь основные понятия теории вероятностей, следуя теоретико-множественному подходу, разработанному академиком Колмогоровым А. Н. в 1933 году.

Пусть производится некоторый опыт со случайным исходом.

Множество $\Omega = \{\omega\}$ всех возможных взаимоисключающих исходов данного опыта называется *пространством элементарных событий* (коротко: ПЭС), а сами исходы ω — *элементарными событиями* (или «элементами», «точками»).

Случайным событием A (или просто *событием* A) называется любое подмножество множества Ω, если Ω конечно или счетно (т. е. элементы этого множества можно пронумеровать с помощью множества натуральных чисел): $A \subseteq \Omega$.

Элементарные события, входящие в подмножество A пространства Ω, называются *благоприятствующими событию* A.

Множество Ω называется *достоверным* событием. Ему благоприятствует любое элементарное событие: в результате опыта оно обязательно произойдет.

Пустое множество $\varnothing$ называется *невозможным* событием; в результате опыта оно произойти не может.

Пример 1.3. Опыт: один раз бросают игральную кость. В этом случае ПЭС таково: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ или $\Omega = \{w_1, w_2, \ldots w_6\}$, где w_i — элементарное событие, состоящее в выпадении грани с i очками ($i = \overline{1, 6}$). В данном случае Ω конечно. Примером события A является, например, выпадение нечетного числа очков; очевидно, что $A = \{w_1, w_3, w_5\}$; событию A благоприятствуют элементарные события w_1, w_3, w_5. Однако если нас интересует только факт выпадения четного числа очков, то ПЭС можно построить иначе: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$, где ω_1 — выпадение четного числа очков, ω_2 — нечетного.

Пример 1.4. Опыт: стрельба по цели до первого попадания. Тогда $\Omega = \left\{\frac{\text{П}}{w_1}, \frac{\text{НП}}{w_2}, \frac{\text{ННП}}{w_3}, \frac{\text{НННП}}{w_4}; \ldots\right\}$, где П означает попадание в цель, Н — непопадание. Исходов у этого опыта бесконечно (теоретически); Ω счетно.

Пример 1.5. Опыт: наблюдение за временем безотказной работы некоторого агрегата. В этом случае в качестве результата может появиться любое число $t \geqslant 0$; время t меняется непрерывно; ПЭС таково: $\Omega = \{t, 0 \leqslant t < \infty\}$. Исходов у этого опыта бесконечно, Ω несчетно (континуально).

Над событиями можно проводить все операции, выполнимые для множеств.

Сумма (или объединение) двух событий $A \in \Omega$ и $B \in \Omega$ (обозначается $A + B$ или $A \cup B$) — это множество, которое содержит элементы, принадлежащие хотя бы одному из событий A и B.

Произведение двух событий $A \in \Omega$ и $B \in \Omega$ (обозначается AB или $A \cap B$) — это множество, которое содержит элементы, общие для событий A и B.

Разность событий $A \in \Omega$ и $B \in \Omega$ (обозначается $A - B$ или $A \backslash B$) — это множество, которое содержит элементы события A, не принадлежащие событию B.

Противоположное событию $A \in \Omega$ событие $\overline{A} = \Omega \backslash A$. ($\overline{A}$ называют также *дополнением* множества A.)

Событие A влечет событие B (обозначается $A \subseteq B$), если каждый элемент события A содержится в B.

По определению: $\varnothing \subseteq A$ для любого A.

События A и B называются *несовместными*, если их произведение есть невозможное событие, т. е. $A \cdot B = \varnothing$.

Несколько событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ образуют *полную группу* несовместных событий, если их сумма представляет все ПЭС, а сами события несовместны, т. е. $\sum\limits_{i=1}^{n} A_i = \Omega$ и $A_i \cdot A_j = \varnothing$ $(i \neq j)$.

Полную группу образуют, например, события A и $\overline{A}$ ($A + \overline{A} = \Omega$, $A \cdot \overline{A} = \varnothing$).

В случае несчетного пространства Ω в качестве событий рассматриваются не все подмножества Ω, а лишь некоторые классы этих подмножеств, называемые алгебрами и σ-алгебрами множеств.

Класс S подмножеств пространства Ω называется *алгеброй множеств (событий)*, если:

1. $\varnothing \in S$, $\Omega \in S$;
2. из $A \in S$ вытекает, что $\overline{A} \in S$;
3. из $A \in S$, $B \in S$ вытекает, что $A + B \in S$, $A \cdot B \in S$.

Заметим, что в условии 3 достаточно требовать либо $A + B \in S$, либо $AB \in S$, так как $A + B = \overline{\overline{A} \cdot \overline{B}}$, $A \cdot B = \overline{\overline{A} + \overline{B}}$.

Алгебру событий образует, например, система подмножеств $S = \{\varnothing, \Omega\}$. Действительно, в результате применения любой из вышеприведенных операций к любым двум элементам класса S снова получается элемент данного класса: $\varnothing + \Omega = \Omega$, $\varnothing \cdot \Omega = \varnothing$, $\overline{\varnothing} = \Omega$, $\overline{\Omega} = \varnothing$.

При расширении операций сложения и умножения на случай счетного множества алгебра множеств S называется σ-алгеброй, если из $A_n \in S$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, следует $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in S$, $\prod\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in S$ (достаточно требовать либо $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in S$, либо $\prod\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in S$).

Множество всех подмножеств множества Ω, если оно конечно или счетно, образует алгебру.

1.5. Свойство статистической устойчивости относительной частоты события

Пусть в n повторяющихся опытах некоторое событие A *наступило* n_A *раз.*

Число n_A называется *частотой* события A, а отношение

$$\frac{n_A}{n} = P^*(A) \tag{1.1}$$

называется *относительной частотой* (или *частостью*) события A в рассматриваемой серии опытов.

Относительная частота события обладает следующими свойствами:

1. Частость любого события заключена между нулем и единицей, т. е.

$$0 \leqslant P^*(A) \leqslant 1.$$

2. Частость невозможного события равна нулю, т. е.

$$P^*(\varnothing) = 0.$$

3. Частость достоверного события равна 1, т. е.

$$P^*(\Omega) = 1.$$

4. Частость суммы двух несовместных событий равна сумме частостей этих событий, т. е. если $AB = \varnothing$, то

$$P^*(A + B) = P^*(A) + P^*(B).$$

❏ Свойства очевидны, так как $0 \leqslant n_A \leqslant n$ для любого события A; для невозможного события $n_A = 0$; для достоверного события $n_A = n$; если события A и B несовместны ($AB = \varnothing$), то $n_{A+B} = n_A + n_B$, следовательно, $P^*(A+B) = \frac{n_{A+B}}{n} = \frac{n_A + n_B}{n} = \frac{n_A}{n} + \frac{n_B}{n} = P^*(A) + P^*(B)$. ■

Частость обладает еще одним фундаментальным свойством, называемым *свойством статистической устойчивости*: с увеличением числа опытов (т. е. n) она принимает значения, близкие к некоторому постоянному числу (говорят: «частость стабилизируется, приближаясь к некоторому числу», «частость колеблется около некоторого числа», или «ее значения группируются около некоторого числа»).

Так, например, в опыте — бросание монеты (однородной, симметричной, ...) — относительная частота появления герба при 4040 бросаниях (Ж. Бюффон) оказалась равной $0{,}5069 = \frac{2048}{4040}$, а в опыте с 12000 и 24000 бросаниями (К. Пирсон) она оказалась равной соответственно $0{,}5015 = \frac{6018}{12\,000}$ и $0{,}5005 = \frac{12012}{24000}$, т. е. частность приближается к числу $\frac{1}{2} = 0{,}500\ldots$. А частость рождения мальчика, как показывают наблюдения, колеблется около числа 0,515.

Отметим, что теория вероятностей изучает только те массовые случайные явления с неопределенным исходом, для которых предполагается наличие устойчивости относительной частоты.

1.6. Статистическое определение вероятности

Для математического изучения случайного события необходимо ввести какую-либо количественную оценку события. Понятно, что одни события имеют больше шансов («более вероятны») наступить, чем другие. Такой оценкой является *вероятность события*, т. е. число, выражающее степень возможности его появления в рассматриваемом опыте. Математических определений вероятности существует несколько, все они дополняют и обобщают друг друга.

Рассмотрим опыт, который можно повторять любое число раз (говорят: «проводятся повторные испытания»), в котором наблюдается некоторое событие A.

Статистической вероятностью события A называется число, около которого колеблется относительная частота события A при достаточно большом числе испытаний (опытов).

Вероятность события A обозначается символом $P(A)$. Согласно данному определению

$$P(A) \approx P^*(A) = \frac{n_A}{n}. \qquad (1.2)$$

Математическим обоснованием близости относительной частоты $P^*(A)$ и вероятности $P(A)$ некоторого события A служит теорема Я. Бернулли (см. п. 5.3).

Вероятности $P(A)$ приписываются свойства 1–4 относительной частоты:

1. Статистическая вероятность любого события заключена между нулем и единицей, т. е.
$$0 \leqslant P(A) \leqslant 1.$$
2. Статистическая вероятность невозможного события равна нулю, т. е.
$$P(\varnothing) = 0.$$

3. Статистическая вероятность достоверного события равна единице, т. е.

$$P(\Omega) = 1.$$

4. Статистическая вероятность суммы несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий, т. е. если $A \cdot B = \varnothing$, то

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

Статистический способ определения вероятности, опирающийся на реальный опыт, достаточно полно выявляет содержание этого понятия. Некоторые ученые (Р. Мизес и другие) считают, что эмпирическое определение вероятности (т. е. $p = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n_A}{n}$) следует считать основным определением вероятности.

Недостатком статистического определения является неоднозначность статистической вероятности; так в примере с бросанием монеты (п. 1.5) в качестве вероятности можно принять не только число 0,5, но и 0,49 или 0,51 и т. д. Для надежного определения вероятности нужно проделать большое число испытаний (опытов), что не всегда просто (или дешево).

1.7. Классическое определение вероятности

Существует простой способ определения вероятности события, основанный на равновозможности любого из конечного числа исходов опыта. Пусть проводится опыт с n исходами, которые можно представить в виде *полной группы несовместных равновозможных* событий. Такие исходы называются *случаями*, *шансами*, *элементарными событиями*, опыт — *классическим*. Про такой опыт говорят, что он сводится к *схеме случаев* или *схеме урн* (ибо вероятностную задачу для такого опыта можно заменить эквивалентной ей задачей с урнами, содержащими шары разных цветов).

Случай ω, который приводит к наступлению события A, называется *благоприятным* (или — *благоприятствующим*) ему, т. е. случай w влечет событие A: $w \subseteq A$.

Вероятностью события A называется отношение числа m случаев, благоприятствующих этому событию, к общему числу n случаев, т. е.

$$P(A) = \frac{m}{n}, \tag{1.3}$$

Наряду с обозначением $P(A)$ для вероятности события A используется обозначение p, т. е. $p = P(A)$.

Из классического определения вероятности (1.3) вытекают следующие свойства:

1. Вероятность любого события заключена между нулем и единицей, т. е.

$$0 \leqslant P(A) \leqslant 1.$$

2. Вероятность невозможного события равна нулю. т. е.

$$P(\varnothing) = 0.$$

3. Вероятность достоверного события равна единице, т. е.

$$P(\Omega) = 1.$$

4. Вероятность суммы несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий, т. е. если $A \cdot B = \varnothing$, то

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

Они проверяются так же, как и для относительной частоты (п. 1.5). В настоящее время свойства вероятности определяются в виде аксиом (см. п. 1.11).

Пример 1.6. В урне (емкости) находятся 12 белых и 8 черных шаров. Какова вероятность того, что наудачу вынутый шар будет белым?

❍ Пусть A — событие, состоящее в том, что вынут белый шар. Ясно, что $n = 12 + 8 = 20$ — число всех равновозможных случаев (исходов опыта). Число случаев, благоприятствующих событию A, равно 12, т. е. $m = 12$. Следовательно, по формуле (1.3) имеем: $P(A) = \frac{12}{20}$, т. е. $P(A) = 0,6$. ●

Упражнения

1. Найти вероятность того, что в наудачу написанном двузначном числе цифры разные.

2. Набирая номер телефона, абонент забыл 2 последние цифры и набрал их наугад. Найти вероятность того, что набраны нужные цифры.

1.8. Элементы комбинаторики

Согласно классическому определению подсчет вероятности события A сводится к подсчету числа благоприятствующих ему исходов. Делают это обычно комбинаторными методами.

Комбинаторика — раздел математики, в котором изучаются задачи выбора элементов из заданного множества и расположения их в группы по заданным правилам, в частности задачи о подсчете числа комбинаций (выборок), получаемых из элементов заданного конечного множества. В каждой из них требуется подсчитать число возможных вариантов осуществления некоторого действия, ответить на вопрос «сколькими способами?».

Многие комбинаторные задачи могут быть решены с помощью следующих двух важных правил, называемых соответственно *правилами умножения и сложения.*

Правило умножения (основной принцип): если из некоторого конечного множества первый объект (элемент x) можно выбрать n_1 способами и после каждого такого выбора второй объект (элемент y) можно выбрать n_2 способами, то оба объекта (x и y) в указанном порядке можно выбрать $n_1 \cdot n_2$ способами.

Этот принцип, очевидно, распространяется на случай трех и более объектов.

Пример 1.7. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, если: а) цифры не повторяются? б) цифры могут повторяться?

❍ Имеется 5 различных способов выбора цифры для первого места (слева в трехзначном числе). После того как первое место занято, например, цифрой 2, осталось четыре цифры для заполнения второго места. Для заполнения третьего места остается выбор из трех цифр. Следовательно, согласно правилу умножения имеется $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ способов расстановки цифр, т. е. искомое число трехзначных чисел есть 60. (Вот некоторые из этих чисел: 243, 541, 514, 132, ...) Понятно, что если цифры могут повторяться, то трехзначных чисел $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$. (Вот некоторые из них: 255, 333, 414, 111, ...) ●

Правило суммы. Если некоторый объект x можно выбрать n_1 способами, а объект y можно выбрать n_2 способами, причем первые и вторые способы не пересекаются, то любой из указанных объектов (x или y), можно выбрать $n_1 + n_2$ способами.

Это правило распространяется на любое конечное число объектов.

Пример 1.8. В студенческой группе 14 девушек и 6 юношей. Сколькими способами можно выбрать, для выполнения различных заданий, двух студентов одного пола?

По правилу умножения двух девушек можно выбрать $14 \cdot 13 = 182$ способами, а двух юношей — $6 \cdot 5 = 30$ способами. Следует выбрать двух студентов одного пола: двух студенток или двух юношей. Согласно правилу сложения таких способов выбора будет $182 + 30 = 212$. ●

Решение вероятностных (и не только их) задач часто облегчается, если использовать комбинаторные формулы. Каждая из них определяет число всевозможных исходов в некотором опыте (эксперименте), состоящем в выборе наудачу m элементов из n различных элементов рассматриваемого множества.

Существуют две схемы выбора m элементов ($0 < m \leqslant n$) из исходного множества: *без возвращения* (без повторений) и *с возвращением* (с повторением). В первом случае выбранные элементы не возвращаются обратно; можно отобрать сразу все m элементов или последовательно отбирать их по одному. Во второй схеме выбор осуществляется поэлементно с обязательным возвращением отобранного элемента на каждом шаге.

Схема выбора без возвращений

Пусть дано множество, состоящее из n различных элементов.

Размещением из n элементов по m элементов ($0 < m \leqslant n$) называется любое упорядоченное подмножество данного множества, содержащее m элементов.

Из определения вытекает, что размещения — это выборки (комбинации), состоящие из m элементов, которые отличаются друг от друга либо составом элементов, либо порядком их расположения.

Число размещений из n элементов по m элементов обозначается символом A_n^m («А из эн по эм») и вычисляется по формуле

$$A_n^m = n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot (n-m+1) \tag{1.4}$$

или

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}, \quad \text{где} \quad n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n, \quad 1! = 1, \quad 0! = 1. \tag{1.5}$$

❑ Для составления размещения A_n^m надо выбрать m элементов из множества с n элементами и упорядочить их, т. е. заполнить m мест элементами множества. Первый элемент можно выбрать n способами, т. е. на первое место можно поместить любой из n элементов. После этого второй элемент можно выбрать из оставшихся $n-1$ элементов $n-1$ способами. Для выбора третьего элемента имеется $n-2$ способа, четвертого — $n-3$ способа, и, наконец, для последнего m-го элемента — $(n-(m-1))$ способов. Таким образом, по правилу умножения, существует $n(n-1)(n-2)\dots(n-(m-1))$ способов выбора m элементов из данных n элементов, т. е. $A_n^m = n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)$. ■

Пример 1.9. Составить различные размещения по 2 из элементов множества $D = \{a, b, c\}$; подсчитать их число.

❍ Из трех элементов можно образовать следующие размещения по два элемента: (a, b), (b, a), (a, c), (c, a), (b, c), (c, b). Согласно формуле (1.4) их число: $A_3^2 = 3 \cdot 2 = 6$. ●

Перестановкой из n элементов называется размещение из n элементов по n элементов.

Из определения вытекает, что перестановки — это выборки (комбинации), состоящие из n элементов и отличающиеся друг от друга только порядком следования элементов. Число перестановок из n элементов обозначается символом P_n («пэ из эн») и вычисляется по формуле

$$P_n = n!. \tag{1.6}$$

Формула (1.6) следует из определения перестановки:

$$P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!.$$

Пример 1.10. Составить различные перестановки из элементов множества $E = \{2, 7, 8\}$; подсчитать их число.

❍ Из элементов данного множества можно составить следующие перестановки: $(2, 7, 8)$; $(2, 8, 7)$; $(7, 2, 8)$; $(7, 8, 2)$; $(8, 2, 7)$; $(8, 7, 2)$. По формуле (1.6) имеем: $P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$. ●

Пример 1.11. Сколькими способами можно расставить на полке 5 различных книг?

❍ Искомое число способов равно числу перестановок из 5 элементов (книг), т. е. $P_5 = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$. ●

Сочетанием из n элементов по m $(0 < m \leqslant n)$ элементов называется любое подмножество, которое содержит m элементов данного множества.

Из определения вытекает, что сочетания — это выборки (комбинации), каждая из которых состоит из m элементов, взятых из данных n элементов, и которые отличаются друг от друга хотя бы одним элементом, т. е. отличаются только составом элементов.

Число сочетаний из n элементов по m элементов обозначается символом C_n^m («цэ из эн по эм») и вычисляется по формуле

$$C_n^m = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots m} \tag{1.7}$$

или

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}. \tag{1.8}$$

❑ Число A_n^m размещений из n элементов по m элементов можно найти следующим образом: выбрать m элементов из множества, содержащего n элементов (это можно сделать C_n^m способами); затем в каждом из полученных сочетаний (подмножеств) сделать все перестановки для упорядочения подмножеств (это можно сделать P_m способами). Следовательно, согласно правилу умножения, можно записать: $A_n^m = C_n^m \cdot P_m$. Отсюда $C_n^m = \dfrac{A_n^m}{P_m} = \dfrac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots m}$ или $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$ ■

Можно показать, что имеют место формулы:

$$C_n^m = C_n^{n-m}, \quad (m \leqslant n), \tag{1.9}$$

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n, \tag{1.10}$$

$$C_n^m = C_{n-1}^m + C_{n-1}^{m-1}, \quad (1 < m < n). \tag{1.11}$$

Формулу (1.9) удобно использовать при вычислении сочетаний, когда $m > \frac{n}{2}$. Так, $C_{15}^{13} = C_{15}^2 = \dfrac{15 \cdot 14}{1 \cdot 2} = 105$. Формула (1.10) выражает число всех подмножеств множества из n элементов (оно равно 2^n). Числа C_n^0, C_n^1, C_n^2, …, C_n^n являются коэффициентами в разложении бинома Ньютона: $(a+b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b + \ldots + C_n^n a^0 b^n$.

Пример 1.12. Составить различные сочетания по 2 из элементов множества $D = \{a, b, c\}$; подсчитать их число.

Из трех элементов можно образовать следующие сочетания по два элемента: (a, b); (a, c); (b, c). Их число: $C_3^2 = \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2} = 3$ (формула (1.7)). ●

Пример 1.13. Сколькими способами можно выбрать 3 цветка из вазы, в которой стоят 10 красных и 4 розовых гвоздики? А если выбрать 1 красную гвоздику и 2 розовых?

Так как порядок выбора цветов не имеет значения, то выбрать 3 цветка из вазы, в которой стоят 14 гвоздик, можно C_{14}^3 способами. По формуле (1.7) находим: $C_{14}^3 = \frac{14 \cdot 13 \cdot 12}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 7 \cdot 13 \cdot 4 = 364$. Далее: красную гвоздику можно выбрать $C_{10}^1 = 10$ способами. Выбрать две розовые гвоздики из имеющихся четырех можно $C_4^2 = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 6$ способами. Поэтому букет из одной красной и двух розовых гвоздик можно составить, по правилу умножения, $C_{10}^1 \cdot C_4^2 = 10 \cdot 6 = 60$ способами. ●

Схема выбора с возвращением

Если при выборке m элементов из n элементы возвращаются обратно и упорядочиваются, то говорят, что это *размещения с повторениями*.

Размещения с повторениями могут отличаться друг от друга элементами, их порядком и количеством повторений элементов. Число всех размещений из n элементов по m с повторениями обозначается символом $\bar{A}_n^m$ и вычисляется по формуле

$$\bar{A}_n^m = n^m. \tag{1.12}$$

Пример 1.14. Из 3 элементов a, b, c составить все размещения по два элемента с повторениями.

По формуле (1.12) число размещений по два с повторениями равно $\bar{A}_3^2 = 3^2 = 9$. Это: (a, a), (a, b), (a, c), (b, b), (b, a), (b, c), (c, c), (c, a), (c, b). ●

Пример 1.15. Сколько пятизначных чисел можно составить, используя цифры: а) 2, 5, 7, 8; б) 0, 1, 9?

а) Все пятизначные числа, составленные из цифр 2, 5, 7, 8, отличаются друг от друга либо порядком их следования (например, 25558 и 52855), либо самими цифрами (например, 52788 и 78888). Следовательно, они являются размещениями из 4 элементов по 5 с повторениями, т. е. $\bar{A}_4^5$. Таким образом, искомое число пятизначных чисел равно $\bar{A}_4^5 = 4^5 = 1024$. Этот же результат можно получить, используя правило умножения: первую цифру слева в пятизначном числе можно выбрать четырьмя способами, вторую — тоже четырьмя способами, третью — четырьмя, четвертую — четырьмя, пятую — четырьмя. Всего получается $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 1024$ пятизначных чисел.

б) Если пятизначные числа состоят из цифр 0, 1, 9, то первую цифру слева можно выбрать двумя способами (0 не может занимать первую позицию), каждую из оставшихся четырех цифр можно выбрать тремя способами. Согласно правилу умножения, таких чисел будет $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 162$. (Иначе: $\bar{A}_3^5 - \bar{A}_3^4 = 243 - 81 = 162$.) ●

Если при выборке m элементов из n элементы возвращаются обратно без последующего упорядочивания, то говорят, что это *сочетания с повторениями.*

Число всех сочетаний из n элементов по m с повторениями обозначается символом $\bar{C}_n^m$ и вычисляется по формуле

$$\bar{C}_n^m = C_{n+m-1}^m. \qquad (1.13)$$

Пример 1.16. Из трех элементов a, b, c составить все сочетания по два элемента с повторениями.

По формуле (1.13) число сочетаний по два с повторениями равно $\bar{C}_3^2 = C_{3+2-1}^2 = C_4^2 = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 6$. Составляем эти сочетания с повторениями: (a,a), (a,b), (a,c), (b,b), (b,c), (c,c). ●

Пример 1.17. Сколькими способами можно составить букет из 5 цветов, если в наличии есть цветы трех сортов?

Рассматриваемое множество состоит из трех различных элементов, а выборки имеют объем, равный 5. Поскольку порядок расположения цветов в букете не играет роли, то искомое число букетов равно числу сочетаний с повторениями из трех элементов по 5 в каждом. По формуле (1.13) имеем $\bar{C}_3^5 = C_7^5 = C_7^{7-5} = C_7^2 = \frac{7 \cdot 6}{1 \cdot 2} = 21$. ●

Пусть в множестве с n элементами есть k различных элементов, при этом 1-й элемент повторяется n_1 раз, 2-й элемент — n_2 раз .... k-й элемент — n_k раз, причем $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$.

Перестановки из n элементов данного множества называют *перестановками с повторениями из n элементов*.

Число перестановок с повторениями из n элементов обозначается символом $P_n(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ и вычисляется по формуле

$$P_n(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_k!}. \tag{1.14}$$

Пример 1.18. Сколько различных пятизначных чисел можно составить из цифр 3, 3, 5, 5, 8?

Применим формулу (1.14). Здесь $n = 5$, $n_1 = 2$, $n_2 = 2$, $n_3 = 1$. Число различных пятизначных чисел, содержащих цифры 3, 5 и 8, равно $P_5(2, 2, 1) = \dfrac{5!}{2! \cdot 2! \cdot 1!} = 30$. ●

Упражнения

1. Сколько различных «слов», состоящих из трех букв, можно образовать из букв слова БУРАН? А если «слова» содержат не менее трех букв?

2. Сколькими способами можно выбрать один цветок из корзины, в которой имеется 12 гвоздик, 15 роз и 7 хризантем?

3. Группа студентов изучает 10 различных дисциплин. Сколькими способами можно составить расписание занятий в понедельник, если в этот день должно быть 4 разных занятия?

4. Из 10 мальчиков и 10 девочек спортивного класса для участия в эстафете надо составить три команды, каждая из которых состоит из мальчика и девочки. Сколькими способами это можно сделать?

5. Сколько можно составить четырехзначных чисел так, чтобы любые две соседние цифры были различны?

6. В электричке 12 вагонов. Сколько существует способов размещения 4 пассажиров, если в одном вагоне должно быть не более одного пассажира?

7. Сколькими способами 3 награды могут быть распределены между 10 участниками соревнования?

8. Из 4 первокурсников, 5 второкурсников и 6 третьекурсников надо выбрать 3 студента на конференцию. Сколькими способами можно осуществить этот выбор, если среди выбранных должны быть студенты разных курсов?

9. Сколькими способами можно расставить на полке 7 различных книг, чтобы определенные три книги стояли рядом? Не рядом?

10. Сколькими способами можно рассадить 5 человек за круглым столом? (Рассматривается только расположение сидящих относительно друг друга.)

11. 10 студентов, среди которых С. Федин и А. Шилов, случайным образом занимают очередь в библиотеку. Сколько имеется вариантов расстановки студентов, когда между Фединым и Шиловым окажутся 6 студентов?

12. У одного школьника имеется 7 различных книг для обмена, а у другого — 16. Сколькими способами они могут осуществить обмен: книга на книгу? Две книги на две книги?

13. В урне 12 белых и 8 черных шаров. Сколькими способами можно выбрать 5 шаров, чтобы среди них было: а) 5 черных; б) 3 белых и 2 черных?

14. Сколькими способами можно распределить 15 выпускников по трем районам, если в одном из них имеется 8, в другом — 5 и в третьем — 2 вакантных места?

15. Известно, что 7 студентов сдали экзамен по теории вероятностей на хорошо и отлично. Сколькими способами могли быть поставлены им оценки?

16. Игральная кость (на ее 6 гранях нанесены цифры от 1 до 6) бросается 3 раза. Сколько существует вариантов выпадения очков в данном опыте? Напишите некоторые из них.

17. Сколькими способами можно распределить 6 различных подарков между четырьмя ребятишками?

18. Сколькими способами можно составить набор из 6 пирожных, если имеется 4 сорта пирожных?

19. Группа учащихся из 8 человек отправляется в путешествие по Крыму. Сколькими способами можно составить группу из учащихся 5–7 классов?

20. Сколькими способами можно распределить 4 книги на трех полках книжного шкафа? Найти число способов расстановки книг на полках, если порядок их расположения на полке имеет значение.

21. Сколько «слов» можно получить, переставляя буквы в слове: а) ГОРА; б) ИНСТИТУТ?

22. Сколько существует способов размещения 9 человек в двухместный, трехместный и четырехместный номера гостиницы?

23. Сколькими способами можно распределить 16 видов товаров по трем магазинам, если в 1-й магазин надо доставить 9, во 2-й — 4, а в третий — 3 вида товаров?

1.9. Примеры вычисления вероятностей

Пример 1.19. В урне находятся 12 белых и 8 черных шаров. Найти вероятность того, что среди наугад вынутых 5 шаров 3 будут черными?

❍ Выбрать 5 шаров из 20 можно C_{20}^5 различными способами (все выборки — неупорядоченные подмножества, состоящие из 5 элементов), т. е. $n = C_{20}^5$. Определим число случаев, благоприятствующих событию B — «среди 5 вынутых шаров 3 будут черными». Число способов выбрать 3 черных шара из 8, находящихся в урне, равно C_8^3. Каждому такому выбору соответствует C_{12}^2 способов выбора 2-х белых шаров из 12 белых в урне. Следовательно, по основному правилу комбинаторики (правилу умножения), имеем: $m = C_8^3 \cdot C_{12}^2$. По формуле (1.3) находим, что $P(B) = \dfrac{C_8^3 \cdot C_{12}^2}{C_{20}^5} \approx 0{,}24$. ●

Пример 1.20. В коробке 5 синих, 4 красных и 3 зеленых карандаша. Наудачу вынимают 3 карандаша. Какова вероятность того, что: а) все они одного цвета; б) все они разных цветов; в) среди них 2 синих и 1 зеленый карандаш.

Сначала заметим, что число способов выбрать 3 карандаша из 12 имеющихся в наличии равно $n = C_{12}^3 = 220$.

а) Выбрать 3 синих карандаша из 5 можно C_5^3 способами; 3 красных из имеющихся 4 можно выбрать C_4^3 способами; 3 зеленых из 3 зеленых — C_3^3 способами.

По правилу сложения общее число m случаев, благоприятствующих событию $A = \{$три карандаша, вынутых из коробки, одного цвета$\}$, равно $m = C_5^3 + C_4^3 + C_3^3 = 15$. Отсюда $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{15}{220} = \frac{3}{44}$.

б) Пусть событие $B = \{$три вынутых карандаша разных цветов$\}$. Число m исходов, благоприятствующих наступлению события B, по правилу умножения равно $m = C_5^1 \cdot C_4^1 \cdot C_3^1 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$. Поэтому $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{60}{220} = \frac{3}{11}$.

в) Пусть событие $C = \{$из трех выбранных карандашей 2 синих и 1 зеленый$\}$. Выбрать 2 синих карандаша из имеющихся 5 синих можно C_5^2 способами, а 1 зеленый из имеющихся 3 зеленых — C_3^1 способами. Отсюда по правилу умножения имеем: $m = C_5^2 \cdot C_3^1 = 30$. Поэтому $P(\mathrm{C}) = \frac{m}{n} = \frac{30}{220} = \frac{3}{22}$. ●

Пример 1.21. Дано шесть карточек с буквами Н, М, И, Я, Л, О. Найти вероятность того, что: а) получится слово ЛОМ, если наугад одна за другой выбираются три карточки; б) получится слово МОЛНИЯ, если наугад одна за другой выбираются шесть карточек и располагаются в ряд в порядке появления.

а) Из шести данных букв можно составить $n = A_6^3 = 120$ трехбуквенных «слов» (НИЛ, ОЛЯ, ОНИ, ЛЯМ, МИЛ и т. д.). Слово ЛОМ при этом появится лишь один раз, т. е. $m = 1$. Поэтому вероятность появления слова ЛОМ (событие A) равна $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{120}$.

б) Шестибуквенные «слова» отличаются друг от друга лишь порядком расположения букв (НОЛМИЯ, ЯНОЛИМ, ОЛНИЯМ и т. д.). Их число равно числу перестановок из 6 букв, т. е. $n = P_6 = 6!$. Очевидно, что $m = 1$. Тогда вероятность появления слова МОЛНИЯ (событие B) равна $P(B) = \frac{m}{n} = \frac{1}{6!} = \frac{1}{720}$. ●

Пример 1.22. В почтовом отделении имеются открытки 6 видов. Какова вероятность того, что среди 4 проданных открыток все открытки: а) одинаковы. б) различны?

Выбрать 4 открытки 6 видов можно $\overline{C_6^4} = 126$ способами, т. е. $n = 126$.

а) Пусть событие A = {продано 4 одинаковые открытки}. Число m исходов, благоприятствующих наступлению события A, равно числу видов открыток, т. е. $m = 6$. Поэтому

$P(A) = \frac{6}{126} = \frac{1}{21}$.

б) Пусть событие B = {проданы 4 различные открытки}. Выбрать 4 открытки из 6 можно $C_6^4 = 15$ способами. т. е. $m = 15$. Следовательно,

$P(B) = \frac{15}{126} = \frac{5}{42}$. ●

Упражнения

1. В лифт 9-этажного дома вошли 4 человека. Каждый из них независимо друг от друга может выйти на любом (начиная со второго) этаже. Какова вероятность того, что все вышли: а) на разных этажах; б) на одном этаже: в) на 5 этаже?

2. Из колоды карт (их 36) вытаскивают наудачу 5 карт. Какова вероятность того, что будут вытащены 2 туза и 3 шестерки?

3. Семь человек рассаживаются наудачу на скамейке. Какова вероятность того, что два определенных человека будут сидеть рядом?

4. На 5 карточках разрезной азбуки изображены буквы Е, Е, Л, П, П. Ребенок случайным образом выкладывает их в ряд. Какова вероятность того, что у него получится слово ПЕПЕЛ?

5. Из 60 вопросов, входящих в экзаменационные билеты, студент знает 50. Найти вероятность того, что среди 3-х наугад выбранных вопросов студент знает: а) все вопросы; б) два вопроса.

6. В барабане револьвера 7 гнезд, из них в 5 заложены патроны. Барабан приводится во вращение, потом нажимается спусковой курок. Какова вероятность того, что, повторив такой опыт 2 раза подряд: а) оба раза не выстрелит; б) оба раза револьвер выстрелит?

7. Для проведения соревнования 10 команд, среди которых 3 лидера, путем жеребьевки распределяются на 2 группы по 5 команд в каждой. Какова вероятность того, что 2 лидера попадут в одну группу, 1 лидер — в другую?

8. Из колоды карт (их 36) наугад вынимают 2 карты. Найти вероятность, что среди них окажется хотя бы одна «дама».

1.10. Геометрическое определение вероятности

Геометрическое определение вероятности применяется в случае, когда исходы опыта равновозможны, а ПЭС (или Ω) есть бесконечное несчетное множество. Рассмотрим на плоскости некоторую область Ω, имеющую площадь S_Ω, и внутри области Ω область D с площадью S_D (см. рис. 8).

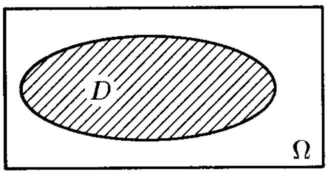


Рис. 8

В области Ω случайно выбирается точка X. Этот выбор можно интерпретировать как *бросание точки X в область* Ω. При этом попадание точки в область Ω — достоверное событие, в D — случайное. Предполагается, что все точки области Ω равноправны (все элементарные события равновозможны), т. е. что брошенная точка может попасть в любую точку области Ω и вероятность попасть в область D пропорциональна площади этой области и не зависит от ее расположения и формы. Пусть событие $A = \{X \in D\}$, т. е. брошенная точка попадет в область D.

Геометрической вероятностью события A называется отношение площади области D к площади области Ω, т. е.

$$P(A) = \frac{S_D}{S_\Omega}. \tag{1.15}$$

Геометрическое определение вероятности события применимо и в случае, когда области Ω и D обе линейные или объемные. В первом случае

$$P(A) = \frac{l_D}{l_\Omega}, \tag{1.16}$$

во втором —

$$P(A) = \frac{V_D}{V_\Omega}, \tag{1.17}$$

где l — длина, а V — объем соответствующей области.

Все три формулы ((1.15)), ((1.16)), ((1.17)) можно записать в виде

$$P(A) = \frac{\operatorname{mes} D}{\operatorname{mes} \Omega}, \tag{1.18}$$

где через mes обозначена мера (S, l, V) области.

Геометрическая вероятность обладает всеми свойствами, присущими классическому (и другим) определению:

1. Геометрическая вероятность любого события заключена между нулем и единицей, т. е.
$$0 \leqslant P(A) \leqslant 1.$$
2. Геометрическая вероятность невозможного события равна нулю, т. е.
$$P(\varnothing) = 0.$$
3. Геометрическая вероятность достоверного события равна единице, т. е.
$$P(\Omega) = 1.$$
4. Геометрическая вероятность суммы несовместимых событий равна сумме вероятностей этих событий, т. е. если $A \cdot B = \varnothing$, то
$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

Проверим, например, свойство 4: пусть $A = \{x \in D_1\}$, $B = \{x \in D_2\}$, где $D_1 \cdot D_2 = \varnothing$, т. е. D_1 и D_2 непересекающиеся области. Тогда $P(A + B) = \dfrac{S_{D_1 + D_2}}{S_\Omega} = \dfrac{S_{D_1}}{S_\Omega} + \dfrac{S_{D_2}}{S_\Omega} = P(A) + P(B)$.

Пример 1.23. (Задача о встрече.) Два человека договорились о встрече между 9 и 10 часами утра. Пришедший первым ждет второго в течение 15 мин, после чего уходит (если не встретились). Найти вероятность того, что встреча состоится, если каждый наудачу выбирает момент своего прихода.

○ Пусть x — время прихода первого, а y — второго. Возможные значения x и y: $0 \leqslant x \leqslant 60$, $0 \leqslant y \leqslant 60$ (в качестве единиц масштаба возьмем минуты), которые на плоскости Oxy определяют квадрат со стороной, равной 60. Точки этого квадрата изображают время встречающихся (см. рис. 9).

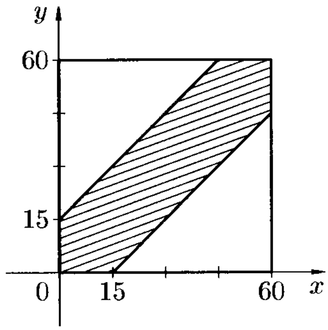


Рис. 9

Тогда $\Omega = \{(x, y) : 0 \leqslant x \leqslant 60, 0 \leqslant y \leqslant 60\}$; все исходы Ω равновозможны, так как лица приходят наудачу. Событие A — лица встретятся — произойдет, если разность между моментами их прихода будет не более 15 мин (по модулю), т. е. $A = \{(x, y) : |y - x| \leqslant 15\}$. Неравенство $|y - x| \leqslant 15$, т. е. $x - 15 \leqslant y \leqslant x + 15$ определяет область, заштрихованную на рис. 9, т. е. точки полосы есть исходы, благоприятствующие встрече. Искомая вероятность определяется по формуле (1.15): $P(A) = \dfrac{60^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 45 \cdot 45}{60^2} = \dfrac{7}{16} \approx 0{,}44.$ ●

Упражнения

1. В круг радиуса R вписан правильный треугольник. Найти вероятность того, что точка, брошенная в этот круг, попадет в данный треугольник.

2. На отрезке $[0, 5]$ случайно выбирается точка. Найти вероятность того, что расстояние от нее до правого конца отрезка не превосходит 1,6 единиц.

3. Стержень длины l разломан в двух наугад выбранных точках. Найти вероятность того, что из полученных отрезков можно составить треугольник.

1.11. Аксиоматическое определение вероятности

Аксиоматическое построение теории вероятностей создано в начале 30-х годов академиком А. Н. Колмогоровым. Аксиомы теории вероятностей вводятся таким образом, чтобы вероятность события обладала основными свойствами статистической вероятности, характеризующей ее практический смысл. В этом случае теория хорошо согласуется с практикой.

Пусть Ω — множество всех возможных исходов некоторого опыта (эксперимента), S — алгебра событий. Напомним (см. п. 1.4), что совокупность S подмножеств множества Ω называется *алгеброй* (*σ-алгеброй*), если выполнены следующие условия:

1. S содержит невозможное и достоверное события.

2. Если события A_1, A_2, A_3, … (конечное или счетное множество) принадлежат S, то S принадлежит сумма, произведение и дополнение (т. е. противоположное для A_i) этих событий.

Вероятностью называется функция $P(A)$, определенная на алгебре событий S, принимающая действительные значения и удовлетворяющая следующим аксиомам:

А1. *Аксиома неотрицательности:* вероятность любого события $A \in S$ неотрицательна, т. е.
$$P(A) \geqslant 0.$$

А2. *Аксиома нормированности:* вероятность достоверного события равна единице, т. е.
$$P(\Omega) = 1.$$

А3. *Аксиома аддитивности:* вероятность суммы несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий, т. е. если $A_i \cdot A_j = \varnothing$ $(i \neq j)$, то
$$P\Big(\sum_k A_k\Big) = \sum_k P(A_k).$$

Совокупность объектов (Ω, S, P), где Ω — пространство элементарных событий, S — алгебра событий, P — числовая функция, удовлетворяющая аксиомам А1 А3, называется *вероятностным пространством* случайного эксперимента.

Вероятностное пространство служит математической моделью любого случайного явления; заданием этого пространства завершается аксиоматика теории вероятностей.

1.12. Свойства вероятностей

Приведем ряд свойств вероятности, являющихся следствием аксиом Колмогорова.

С1. Вероятность невозможного события равна нулю, т. е.

$$P(\varnothing) = 0.$$

С2. Сумма вероятностей противоположных событий равна единице, т. е.

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1.$$

С3. Вероятность любого события не превосходит единицы, т. е.

$$P(A) \leqslant 1.$$

С4. Если $A \subseteq B$, т. е. событие A влечет за собой событие B, то

$$P(A) \leqslant P(B).$$

С5. Если события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ образуют полную группу несовместных событий, т. е. $\sum\limits_{i=1}^{n} A_i = \Omega$ и $A_i \cdot A_j = \varnothing$, то

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1.$$

❏ С1. Так как $A + \varnothing = A$ и $A \cdot \varnothing = \varnothing$, то согласно аксиоме А3 имеем $P(A) + P(\varnothing) = P(A)$, следовательно, $P(\varnothing) = 0$.

С2. Поскольку $A + \overline{A} = \Omega$, то $P(A + \overline{A}) = P(\Omega)$, а так как $A \cdot \overline{A} = \varnothing$, то в силу аксиом А2 и А3 получаем $P(A) + P(\overline{A}) = 1$.

С3. Из свойства С2 вытекает, что $P(A) = 1 - P(\overline{A})$. С учетом аксиомы А1 получаем $P(A) \leqslant 1$.

С4. Так как $B = (B - A) + A$ при $A \subseteq B$ и $(B - A) \cdot A = \varnothing$, то согласно аксиоме А3 получаем $P(B) = P(B - A) + P(A)$. Но $P(B - A) \geqslant 0$ (аксиома А1), поэтому $P(B) \geqslant P(A)$.

С5. Так как $A_1 + A_2 + \ldots + A_n = \Omega$, то, согласно аксиомам А2 и А3, имеем $P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = 1$. ■

Заметим, что из $P(A) = 0$ не следует $A = \varnothing$.

Пример 1.24. Из колоды, содержащей 36 карт, наудачу вынимают три карты. Найти вероятность того, что среди них окажется *хотя бы одна* «дама».

○ Пусть A — интересующее нас событие, A_1 — появление одной «дамы», A_2 — двух «дам», A_3 — трех «дам». Тогда $A = A_1 + A_2 + A_3$, причем события A_1, A_2, A_3 несовместные. Поэтому $P(A) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3)$. Число всевозможных случаев выбора трех карт из 36 равно C_{36}^3; число случаев, благоприятных событиям A_1, A_2, A_3, соответственно равно $m_1 = C_4^1 \cdot C_{32}^2$, $m_2 = C_4^2 \cdot C_{32}^1$, $m_3 = C_4^3 \cdot C_{32}^0$. Таким образом, $P(A) = \dfrac{C_4^1 \cdot C_{32}^2 + C_4^2 \cdot C_{32}^1 + C_4^3 \cdot C_{32}^0}{C_{36}^3} \approx 0{,}31$.

Задача решается проще, если воспользоваться свойством C2. Находим $P(\overline{A})$, где $\overline{A}$ — среди вынутых карт нет ни одной «дамы»! $P(\overline{A}) = \dfrac{C_{32}^3}{C_{36}^3} \approx 0{,}69$. Значит, $P(A) = 1 - 0{,}69 = 0{,}31$. ●

1.13. Конечное вероятностное пространство

Пусть производится некоторый опыт (эксперимент), который имеет конечное число возможных исходов w_1, w_2, w_3, …, w_n. В этом случае $\Omega = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ (или коротко $\Omega = \{w\}$) — конечное пространство, S — алгебра событий, состоящая из всех (их 2^n) подмножеств множества Ω.

Каждому элементарному событию $w_i \in \Omega$, $i = 1, 2, \ldots, n$ поставим в соответствие число $p(w_i)$, которое назовем «вероятностью элементарного события», т. е. зададим на Ω числовую функцию, удовлетворяющую двум условиям:

1) условие неотрицательности: $p(w_i) \geqslant 0$ для любого $w_i \in \Omega$;

2) условие нормированности $\sum\limits_{i=1}^{n} p(w_i) = 1$.

Вероятность $P(A)$ для любого подмножества $A \in \Omega$ *определим как сумму*

$$P(A) = \sum_{w_i \in A} p(w_i), \tag{1.19}$$

т. е. вероятностью $P(A)$ события A назовем сумму вероятностей элементарных событий, составляющих событие A. Введенная таким образом вероятность удовлетворяет аксиомам Колмогорова (А1–А3):

$$P(A) \geqslant 0, \quad P(\Omega) = \sum_{w_i \in \Omega} p(w_i) = \sum_{i=1}^{n} p(w_i) = 1,$$

$$P(A+B) = \sum_{w_i \in A+B} p(w_i) = \sum_{w_i \in A} p(w_i) + \sum_{w_i \in B} p(w_i) = P(A) + P(B),$$

если $AB = \varnothing$, т. е. A и B — два несовместных события. Так определенная тройка $\{\Omega, S, P\}$ есть конечное вероятностное пространство, называемое «дискретным вероятностным пространством».

Частным случаем определения вероятности (1.19) является *классическое определение вероятности*, когда все исходы опыта равновозможны: $p(w_1) = p(w_2) = \ldots = p(w_n) = \frac{1}{n}$ (следует из условия нормированности: $\sum\limits_{i=1}^{n} p(w_i) = 1$). Формула (1.19) приобретает вид:

$$P(A) = \sum_{w_i \in A} p(w_i) = \underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n}}_{m} = \frac{m}{n},$$

т. е. $P(A) = \frac{m}{n}$, где m — число элементарных событий, образующих событие A (т. е. m — число случаев, благоприятствующих появлению события A).

1.14. Условные вероятности

Пусть A и B — два события, рассматриваемые в данном опыте. Наступление одного события (скажем, A) может влиять на возможность наступления другого (B). *Для характеристики зависимости одних событий от других* вводится понятие условной вероятности.

Условной вероятностью события B при условии, что произошло событие A, называется отношение вероятности произведения этих событий к вероятности события A, причем $P(A) \neq 0$, обозначается символом $P(B|A)$.

Таким образом, по определению

$$P(B|A) = \frac{P(A \cdot B)}{P(A)}, \qquad P(A) \neq 0. \tag{1.20}$$

Вероятность $P(B)$, в отличие от условной, называется *безусловной вероятностью*.

Аналогично определяется условная вероятность события A при условии B, т. е. $P(A|B)$:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)}, \qquad P(B) \neq 0. \tag{1.21}$$

Отметим, что условная вероятность, скажем $P(B|A)$, удовлетворяет аксиомам Колмогорова (п. 1.11): $P(B|A) \geqslant 0$, очевидно: $P(\Omega|A) = \frac{P(\Omega \cdot A)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1$; $P((B+C)|A) = P(B|A) + P(C|A)$, если $B \cdot C = \varnothing$. Поэтому для условной вероятности справедливы все следствия (свойства) из аксиом, полученные в п. 1.12. Формула (1.20) принимается по определению при аксиоматическом определении вероятности; в случае классического (геометрического, статистического) определения она может быть доказана.

Пример 1.25. В урне 2 белых и 7 черных шаров. Из нее последовательно вынимают два шара. Какова вероятность того, что 2-й шар окажется белым при условии, что 1-й шар был черным?

Решим задачу двумя способами.

1. Пусть A — 1-й шар черный, B — 2-й шар белый. Так как событие A произошло, то в урне осталось 8 шаров, из которых 2 белых. Поэтому $P(B|A) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$.

2. Найдем $P(B|A)$ по формуле (1.20). Очевидно, что $P(A) = \frac{7}{9}$. Находим $P(AB)$: $n = 9 \cdot 8 = 72$ — общее число исходов (появление двух шаров). Событию AB благоприятствуют $m = C_2^1 \cdot C_7^1 = 14$ исходов. Поэтому $P(AB) = \frac{14}{72} = \frac{7}{36}$. Следовательно, $P(B|A) = \frac{7}{36} : \frac{7}{9} = \frac{1}{4}$. ●

1.15. Вероятность произведения событий. Независимость событий

Из определения условной вероятности (п. 1.14) следует, что

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B|A) = P(B) \cdot P(A|B), \tag{1.22}$$

т. е. *вероятность произведения* двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого при условии, что первое событие произошло.

Равенство (1.22) называют *правилом* или *теоремой* (для схемы случаев оно доказывается) *умножения вероятностей*. Это правило обобщается на случай n событий:

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n) = \\ = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cdot A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n|A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_{n-1}). \quad (1.23)$$

Так для 3-х событий A_1, A_2, A_3 получаем

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3) = P((A_1 \cdot A_2) \cdot A_3) = P(A_1 \cdot A_2) \cdot P(A_3|A_1 \cdot A_2) = \\ = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cdot A_2).$$

Пример 1.26. В коробке находится 4 белых. 3 синих и 2 черных шара. Наудачу последовательно вынимают 3 шара. Какова вероятность того, что 1-й шар будет белым, 2-й — синим, 3-й — черным?

◐ Введем следующие события: A_1 — первым вытащили белый шар, A_2 — вторым — синий, A_3 — третьим — черный. Тогда интересующее нас событие A представится в виде $A = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$. По правилу умножения вероятностей $P(A) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cdot A_2)$. Но $P(A_1) = \frac{4}{9}$; $P(A_2|A_1) = \frac{3}{8}$, так как шаров осталось 8, а число благоприятных случаев для события A_2 равно 3; $P(A_3|A_1 \cdot A_2) = \frac{2}{7}$, так как уже два шара (белый и синий) вытащены. Следовательно, $P(A) = \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} = \frac{1}{21} \approx 0{,}05$. ●

Правило умножения вероятностей имеет особо простой вид, если события, образующие произведение, независимы.

Событие A называется *независимым от события* B, если его условная вероятность равна безусловной, т. е. если выполняется равенство

$$P(A|B) = P(A). \quad (1.24)$$

Лемма 1.1 (о взаимной независимости событий). Если событие A не зависит от события B, то и событие B не зависит от события A.

❑ Из равенства (1.22), с учетом равенства (1.24), следует $P(B|A) = \frac{P(A|B) \cdot P(B)}{P(A)} = \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(A)} = P(B)$, т. е.

$$P(B|A) = P(B), \quad (1.25)$$

а это означает, что событие B не зависит от события A. ■

Можно дать следующее (новое) определение независимости событий.

Два события называются *независимыми*, если появление одного из них не меняет вероятность появления другого.

Для независимых событий правило умножения вероятностей (1.22) принимает вид:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B), \tag{1.26}$$

т. е. вероятность произведения двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий.

Равенство (1.26) часто используют в качестве определения (еще одного!) независимости событий: события A и B называются *независимыми*, если $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$.

Можно показать, что если события A и B независимы, то независимы события $\overline{A}$ и B, A и $\overline{B}$, $\overline{A}$ и $\overline{B}$.

На практике о независимости тех или иных событий часто судят исходя из интуитивных соображений и анализа условий опыта, считая независимыми события, «между которыми нет причинно-следственных связей».

Понятие независимости может быть распространено на случай n событий.

События $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называются *независимыми* (или *независимыми в совокупности*), если каждое из них не зависит от произведения любого числа остальных событий и от каждого в отдельности. В противном случае события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называются *зависимыми*.

Для независимых событий их условные вероятности равны безусловным, и формула (1.23) упрощается

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n). \tag{1.27}$$

Из попарной независимости событий A_1, A_2, ..., A_n (любые два из них независимы) не следует их независимость в совокупности (обратное верно).

Убедимся в этом, рассмотрев следующий пример.

Пример 1.27. Производится выбор (наудачу) флага из 4-х, имеющихся в наличии: красного, голубого, белого и трехцветного (красно-бело-голубого). Исследовать на независимость события: К — выбранный флаг имеет красный цвет; Г — имеет голубой цвет; Б — имеет белый цвет.

Возможных исходов выбора 4; событию К благоприятствуют 2 исхода (красный цвет имеется у двух флагов). Поэтому $P(\text{К}) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. Аналогично находим, что $P(\text{Г}) = P(\text{Б}) = \frac{1}{2}$. Событию $\text{К} \cdot \text{Г}$ — выбран флаг, имеющий 2 цвета (красный и голубой), — благоприятствует один исход. Поэтому, $P(\text{К} \cdot \text{Г}) = \frac{1}{1}$. И так как $P(\text{К} \cdot \text{Г}) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(\text{К}) \cdot P(\text{Г})$, то события К и Г независимы. Аналогично убеждаемся в независимости событий К и Б, Б и Г. Стало быть, события К, Б, Г попарно независимы. А так как $P(\text{К} \cdot \text{Г} \cdot \text{Б}) = \frac{1}{4} \neq P(\text{К}) \cdot P(\text{Г}) \cdot P(\text{Б}) = \frac{1}{8}$, то события К, Г и Б не являются независимыми в совокупности. ●

Упражнения

1. Бросается игральная кость. Пусть событие A — появление четного числа очков, событие B — появление более трех очков. Зависимы или нет события A и B?

2. Из букв разрезной азбуки составлено слово СТАТИСТИКА. Какова вероятность того, что, перемешав буквы и укладывая их в ряд по одной (наудачу), получим слово : а) ТИСКИ; б) КИСКА; в) КИТ; г) СТАТИСТИКА?

3. Найти вероятность отказа схемы (рис. 10), предполагая, что отказы отдельных элементов независимы, а вероятность отказа элемента с номером i равна 0,2.

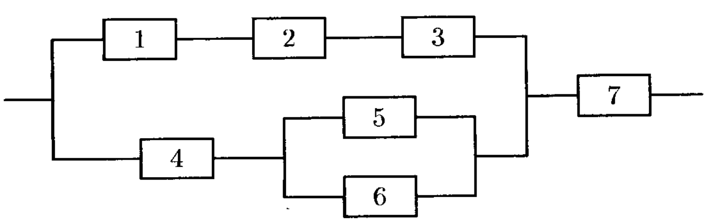


Рис. 10

1.16. Вероятность суммы событий

Как известно (п. 1.11), вероятность суммы двух несовместных событий определяется аксиомой А3: $P(A+B) = P(A)+P(B)$. $A \cdot B = \varnothing$. Выведем формулу вероятности суммы двух совместных событий.

Теорема 1.1. Вероятность суммы двух совместных событий равна сумме их вероятностей без вероятности их произведения,

$$P(A+B) = P(A)+P(B) - P(A \cdot B). \qquad (1.28)$$

❑ Представим события $A+B$ и B в виде суммы двух несовместных событий: $A+B = A+B\cdot\overline{A}$, $B = AB+B\overline{A}$ (см. п. 1.3, пример 1.2 и упражнение 1). В справедливости этих формул можно наглядно убедиться на рис. 11.

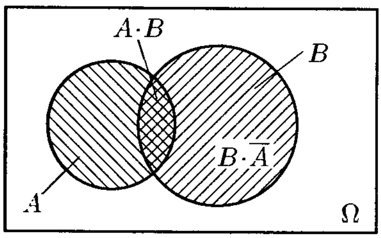


Рис. 11

Тогда, согласно аксиоме А3, имеем $P(A+B) = P(A)+P(B\cdot\overline{A})$ и $P(B) = P(A\cdot B)+P(B\cdot\overline{A})$. Отсюда следует $P(A+B) = P(A)+P(B) - P(A\cdot B)$. ■

Формула (1.28) справедлива для любых событий A и B.

Можно получить формулу вероятности суммы трех и большего числа совместных событий; для трех событий она имеет вид

$$P(A+B+C) = P(A)+P(B)+P(C) - P(A\cdot B) - P(A\cdot C) - P(B\cdot C) + P(A\cdot B\cdot C). \qquad (1.29)$$

Справедливость равенства поясняет рис. 12.

Проще, однако, найти вероятность суммы нескольких совместных событий $P(S) = P(A_1+A_2+\ldots+A_n)$, используя равенство $P(S)+P(\overline{S}) = 1$, где $\overline{S} = \overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\cdot\ldots\cdot\overline{A_n}$ — противоположно событию S. Тогда $P(S) = 1 - P(\overline{S})$. Мы уже использовали этот прием в п. 1.12.

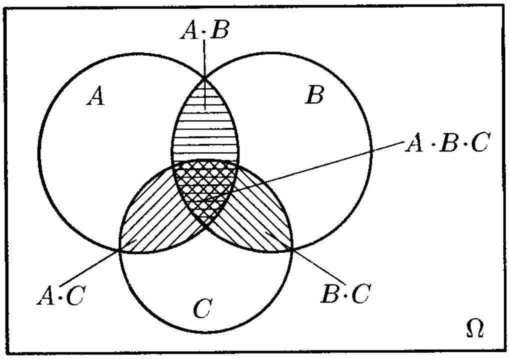


Рис. 12

Пример 1.28. Бросаются две игральные кости. Какова вероятность появления хотя бы одной шестерки?

Введем события: A — появление шестерки на первой кости, B — на второй кости. Тогда $A+B$ — появление хотя бы одной шестерки при бросании костей. События A и B совместные. По формуле (1.28) находим $P(A+B) = \frac{1}{6}+\frac{1}{6}-\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{11}{36}$. (Иначе: $P(\overline{S}) = P(\overline{A}\cdot\overline{B}) = \frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6} = \frac{25}{36}$. Следовательно, $P(S) = 1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}$.) ●

Упражнения

1. В урне 2 белых и 7 черных шаров. Из нее наудачу вынимают (без возврата) 2 шара. Какова вероятность того, что они оба будут разных цветов?

2. Три орудия стреляют в цель независимо друг от друга. Вероятность попадания в цель каждого равна 0,7. Найти вероятность попадания в цель: а) только одного из орудий; б) хотя бы одного.

3. Надежность (т. е. вероятность безотказной работы) прибора равна 0,7. Для повышения надежности данного прибора он дублируется $n-1$ другими такими же приборами (рис. 13). Сколько приборов надо взять, чтобы повысить его надежность до 0,95?

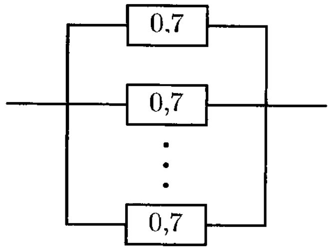


Рис. 13

1.17. Формула полной вероятности

Одним из следствий совместного применения теорем сложения и умножения вероятностей являются формулы полной вероятности и Байеса. Напомним, что события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ образуют полную группу, если $A_i \cdot A_j = \varnothing$, $i \neq j$ и $\sum\limits_{i=1}^{n} A_i = \Omega$. Систему таких событий называют также *разбиением*.

Теорема 1.2. Пусть события $H_1, H_2, \ldots, H_n$ образуют полную группу. Тогда для любого, наблюдаемого в опыте, события A имеет место формула *полной вероятности* или *средней вероятности*.

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A|H_i), \tag{1.30}$$

❑ Так как $H_1 + H_2 + \ldots + H_n = \Omega$, то в силу свойств операций над событиями (п. 1.3), $A = A \cdot \Omega = A \cdot (H_1 + H_2 + \ldots + H_n) = A \cdot H_1 + A \cdot H_2 + \ldots + A \cdot H_n$. Из того, что $H_i \cdot H_j = \varnothing$, следует, что $(A \cdot H_i) \cdot (A \cdot H_j) = \varnothing$, $i \neq j$, т. е. события $A \cdot H_i$ и $A \cdot H_j$ также несовместны. Тогда по теореме сложения вероятностей $P(A) = P(A \cdot H_1) + P(A \cdot H_2) + \ldots + P(A \cdot H_n)$ т. е. $P(A) = \sum\limits_{i=1}^{n} P(A \cdot H_i)$. По теореме умножения вероятностей $P(A \cdot H_i) = P(H_i) \cdot P(A|H_i)$, откуда и следует формула (1.30). ■

Отметим, что в формуле (1.30) события $H_1, H_2, \ldots, H_n$ обычно называют *гипотезами*; они исчерпывают все возможные предположения (гипотезы) относительно исходов как бы первого этапа опыта, событие A — один из возможных исходов второго этапа.

Пример 1.29. В сборочный цех завода поступает 40% деталей из I цеха и 60% — из II цеха. В I цехе производится 90% стандартных деталей, а во II — 95%. Найти вероятность того, что наудачу взятая сборщиком деталь окажется стандартной.

Взятие детали можно разбить на два этапа. Первый — это выбор цеха. Имеется две гипотезы: H_1 — деталь изготовлена I цехом, H_2 — II цехом. Второй этап — взятие детали. Событие A - взятая наудачу деталь стандартна. Очевидно, события H_1 и H_2 образуют полную группу, $P(H_1) = 0{,}4$, $P(H_2) = 0{,}6$. Числа 0,90 и 0.95 являются условными вероятностями события A при условии гипотез H_1 и H_2 соответственно, т. е. $P(A|H_1) = 0{,}90$ и $P(A|H_2) = 0.95$. По формуле (1.30) находим

$$P(A) = \sum_{i=1}^{2} P(H_i) \cdot P(A|H_i) = 0{,}4 \cdot 0{,}90 + 0{,}6 \cdot 0{,}95 = 0{,}93.$$

1.18. Формула Байеса (теорема гипотез)

Следствием формулы (1.30) является формула Байеса или *теорема гипотез*. Она позволяет переоценить вероятности гипотез H_i, принятых до опыта и называемых *априорными* («a priori», доопытные, лат.) *по результатам уже проведенного опыта*, т. е. найти условные вероятности $P(H_i|A)$, которые называют *апостериорными* («a posteriori», послеопытные).

Теорема 1.3. Пусть события $H_1, H_2, \ldots, H_n$ образуют полную группу событий. Тогда условная вероятность события H_k $(k = \overline{1,n})$ при условии, что событие A произошло, задается формулой

$$P(H_k|A) = \frac{P(H_k) \cdot P(A|H_k)}{P(A)}, \tag{1.31}$$

где $P(A) = P(H_1) \cdot P(A|H_1) + \ldots + P(H_n) \cdot P(A|H_n)$ — формула полной вероятности. Формула (1.31) называется *формулой Байеса*[1].

[1]1702–1761, английский священник, математик

❑ Применив формулы условной вероятности (п. 1.14) и умножения вероятностей (п. 1.15), имеем

$$P(H_k|A) = \frac{P(H_k \cdot A)}{P(A)} = \frac{P(H_k) \cdot P(A|H_k)}{P(A)},$$

где $P(A)$ — формула полной вероятности (п. 1.17) ■

Пример 1.30. В примере 1.29 (п. 1.17) найти вероятность того, что эта стандартная деталь изготовлена II цехом.

❍ Определим вероятность гипотезы H_2 при условии, что событие A (взятая деталь стандартна) уже произошло, т. е. $P(H_2|A)$:

$$P(H_2|A) = \frac{P(H_2) \cdot P(A|H_2)}{P(A)} = \frac{0{,}6 \cdot 0{,}95}{0{,}93} = \frac{19}{31} \approx 0{,}613.$$ ●

Упражнения

1. Прибор содержит две микросхемы. Вероятность выхода из строя в течение 10 лет первой микросхемы равна 0,07, а второй — 0,10. Известно, что из строя вышла одна микросхема. Какова вероятность того, что вышла из строя первая микросхема?

2. Из 40 экзаменационных билетов студент П выучил только 30. Каким выгоднее ему зайти на экзамен, первым или вторым?

3. Известно, что 90% изделий, выпускаемых данным предприятием, отвечает стандарту. Упрощенная схема проверки качества продукции признает пригодной стандартную деталь с вероятностью 0,96 и нестандартную с вероятностью 0,06. Определить вероятность того, что:

   а) взятое наудачу изделие пройдет контроль;

   б) изделие, прошедшее контроль качества, отвечает стандарту.

1.19. Независимые испытания. Схема Бернулли

С понятием «независимых событий» связано понятие «независимых испытаний (опытов)».

Несколько опытов называются *независимыми*, если их исходы представляют собой независимые события (независимые в совокупности).

Другими словами, если проводится несколько испытаний, т. е. опыт выполняется при данном комплексе условий многократно (такое явление называется «последовательностью испытаний»), причем вероятность наступления некоторого события A в каждом испытании не зависит от исходов других испытаний, то такие испытания называются *независимыми*.

Примерами независимых испытаний могут служить: несколько (n раз) подбрасываний монеты; стрельба (n раз) по мишени без поправок на ранее допущенную ошибку при новом выстреле; несколько (n раз) выниманий из урны одинаковых на ощупь занумерованных шаров, если шары каждый раз (после просмотра) возвращаются назад в урну, и т. д.

При практическом применении теории вероятностей часто используется стандартная схема, называемая схемой Бернулли или схемой независимых испытаний.

Последовательность n независимых испытаний, в каждом из которых может произойти некоторое событие A (его называют *успехом*) с вероятностью $P(A) = p$ или противоположное ему событие $\overline{A}$ (его называют *неудачей*) с вероятностью $P(\overline{A}) = q = 1 - p$, называется *схемой Бернулли.*

Например, при стрельбе по мишени: событие A — попадание (успех), событие $\overline{A}$ — промах (неудача); при обследовании n изделий на предмет годности: событие A — деталь годная (успех), событие $\overline{A}$ — деталь бракованная (неудача) и т. д.

В каждом таком опыте ПЭС состоит только из двух элементарных событий, т. е. $\Omega = \{w_0, w_1\}$, где w_0 — неудача, w_1 — успех, при этом $A = \{w_1\}$, $\overline{A} = \{w_0\}$. Вероятности этих событий обозначают через p и q соответственно ($p + q = 1$). Множество элементарных исходов для n опытов состоит из 2^n элементов. Например, при $n = 3$, т. е. опыт повторяется 3 раза, $\Omega = \left\{ \frac{(\overline{A}, \overline{A}, \overline{A})}{w_0}; \frac{(A, A, \overline{A})}{w_1}; \frac{(A, \overline{A}, A)}{w_2}; \frac{(\overline{A}, A, A)}{w_3}; \frac{(A, \overline{A}, \overline{A})}{w_4}; \frac{(\overline{A}, A, \overline{A})}{w_5}; \frac{(\overline{A}, \overline{A}, A)}{w_6}; \frac{(A, A, A)}{w_7} \right\}$. Вероятность каждого элементарного события определяется однозначно. По теореме умножения вероятность события, скажем $w_6 = (\overline{A}, \overline{A}, A)$, равна $q \cdot q \cdot p = pq^2$, события w_7 — $p \cdot p \cdot p = p^3 q^0 = p^3$ и т. д.

Часто успеху сопоставляют число 1, неудаче — число 0. Элементарным событием для n опытов будет последовательность из n нулей и единиц. Тройка чисел $(0, 0, 0)$ означает, что во всех трех опытах событие A не наступило; тройка чисел $(0, 1, 0)$ означает, что событие A наступило во 2-м опыте, а в 1-м и 3-м — не наступило.

1.20. Формула Бернулли

Простейшая задача, относящаяся к схеме Бернулли, состоит в определении вероятности того, что в n независимых испытаниях событие A наступит m раз $(0 \leqslant m \leqslant n)$. Обозначается искомая вероятность так: $P_n(m)$ или $P_{n,m}$ или $P(\mu_n = m)$, где μ_n — число появления события A в серии из n опытов.

Например, при бросании игральной кости 3 раза $P_3(2)$ означает вероятность того, что в 3-х опытах событие A — выпадение цифры 4 — произойдет 2 раза. Очевидно,

$$P_3(2) = p^2q + p^2q + p^2q =$$
$$= \left[\left\{(A, A, \overline{A}); (A, \overline{A}, A); (\overline{A}, A, A)\right\}\right] = 3p^2q = 3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{72} = 0{,}069.$$

Теорема 1.4. Если производится n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A равна p, а вероятность его непоявления равна $q = 1 - p$, то вероятность того, что событие A произойдет m раз определяется *формулой Бернулли*

$$P_n(m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}, \quad m = 0, 1, 2, \ldots, n. \tag{1.32}$$

❑ Вероятность одного сложного события, состоящего в том, что событие A в n независимых опытах появится m раз в первых m опытах и не появится $(n - m)$ раз в остальных опытах (это событие $\underbrace{A \cdot A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{m \text{ раз}} \cdot \underbrace{\overline{A} \cdot \overline{A} \cdot \ldots \cdot \overline{A}}_{(n-m) \text{ раз}}$) по теореме умножения вероятностей равна $p^m q^{n-m}$. Вероятность появления события A снова m раз, но в другом порядке (например, $\overline{A}\cdot\underbrace{A\cdot A\ldots\cdot A}_{m\text{ раз}}\overline{A}\cdot\overline{A}\cdot\ldots\cdot\overline{A}$ или $A\overline{A}A\overline{A}\cdot\ldots\cdot A\overline{A}$ и т. д.) будет той же самой, т. е. $p^m q^{n-m}$.

Число таких сложных событий — в n опытах m раз встречается событие A в различном порядке — равно числу сочетаний из n по m, т. е. C_n^m. Так как все эти сложные события несовместны, то по теореме сложения вероятностей искомая вероятность равна сумме вероятностей всех возможных сложных событий, т. е.

$$P_n(m) = \underbrace{p^m q^{n-m} + \ldots + p^m q^{n-m}}_{C_n^m\text{ слагаемых}} = C_n^m p^m q^{n-m}, \quad m = 0, 1, \ldots, n. \quad \blacksquare$$

Можно заметить, что вероятности $P_n(m)$, $m = 0, 1, \ldots, n$ являются коэффициентами при x^m в разложении $(q+px)^n$ по формуле бинома Ньютона:

$$(q+px)^n = q^n + C_n^1 q^{n-1}px + C_n^2 q^{n-2}p^2x^2 + \ldots + C_n^m q^{n-m}p^m x^m + \ldots + p^n x^n.$$

Поэтому совокупность вероятностей $P_n(m)$ называют *биномиальным законом распределения вероятностей* (см. п. 2.7), а функцию $\varphi(x) = (q+px)^n$ — *производящей функцией* для последовательности независимых опытов.

Если в каждом из независимых испытаний вероятности наступления события A *разные*, то вероятность того, что событие A наступит m раз в n опытах, равна коэффициенту при m-й степени многочлена $\varphi_n(z) = (q_1 + p_1 z)(q_2 + p_2 z)\cdot\ldots\cdot(q_n + p_n z)$, где $\varphi_n(z)$ — производящая функция.

Если в серии из n независимых опытов, в каждом из которых может произойти одно и только одно из k событий A_1, A_2, ..., A_k с соответствующими вероятностями p_1, p_2, ..., p_k, то вероятность того, что в этих опытах событие A_1 появится m_1 раз, событие A_2 — m_2 раз, ..., событие A_k — m_k раз, равна

$$P_n(m_1, m_2, \ldots, m_k) = \frac{n!}{m_1!m_2!\ldots m_k!}p_1^{m_1}p_2^{m_2}\ldots p_k^{m_k}, \qquad (1.33)$$

где $m_1 + m_2 + \ldots + m_k = n$. Вероятности (1.33) называются *полиномиальным распределением*.

Пример 1.31. Производится 3 независимых выстрела по цели. Вероятности попадания при разных выстрелах одинаковы и равны $p = 0{,}9$. Какова вероятность: а) промаха; б) одного попадания; в) двух попаданий; г) трех попаданий? Решить задачу в случае, если вероятности попадания при разных выстрелах различны: $p_1 = 0{,}7$, $p_2 = 0{,}8$, $p_3 = 0{,}9$.

○ В данном случае $n = 3$, $p = 0{,}9$, $q = 0{,}1$. Пользуясь формулой Бернулли (1.32), находим:

а) $P_3(0) = C_3^0 \cdot 0{,}9^0 \cdot 0{,}1^3 = 0{,}001$ — вероятность трех промахов;

б) $P_3(1) = C_3^1 \cdot 0{,}9^1 \cdot 0{,}1^2 = 3 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}01 = 0{,}027$ — вероятность одного попадания;

в) $P_3(2) = C_3^2 \cdot 0{,}9^2 \cdot 0{,}1^1 = 3 \cdot 0{,}81 \cdot 0{,}1 = 0{,}243$ — вероятность двух попаданий;

г) $P_3(3) = C_3^3 \cdot 0{,}9^3 \cdot 0{,}1^0 = 0{,}9^3 = 0{,}729$ — вероятность трех попаданий. ●

Эти результаты можно изобразить графически, отложив на оси Ox значения m, на оси Oy — значения $P_n(m)$ (рис. 14).

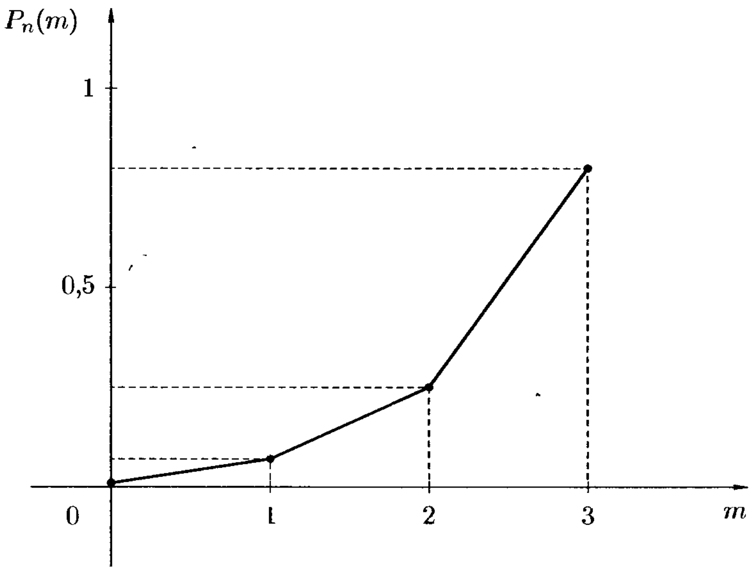


Рис. 14

Ломаная, соединяющая точки $(0; 0{,}001)$, $(1; 0{,}027)$, $(2; 0{,}243)$, $(3; 0{,}729)$, называется *многоугольником распределения вероятностей.*

Если вероятности при разных выстрелах различны, то производящая функция имеет вид $\varphi_3(z) = (0{,}3 + 0{,}7z)(0{,}2 + 0{,}8z)(0{,}1 + 0{,}9z) = 0{,}504z^3 + 0{,}398z^2 + 0{,}092z + 0{,}006$. Откуда находим вероятность трех, двух, одного попаданий, промаха соответственно: $P_3(3) = 0{,}504$, $P_3(2) = 0{,}398$, $P_3(1) = 0{,}092$, $P_3(0) = 0{,}006$. (Контроль: $0{,}504 + 0{,}398 + 0{,}092 + 0{,}006 = 1$.)

Упражнения

1. Монету подбрасывают 10 раз. Какова вероятность того, что герб выпадет (появится): а) 4 раза; б) ни разу; в) хотя бы один раз.

2. Что вероятнее выиграть у равносильного противника-шахматиста: две партии из четырех или три из шести? Ничьи во внимание не принимаются.

3. В семье трое детей. Какова вероятность того, что: а) все они мальчики; б) один мальчик и две девочки. Считать вероятность рождения мальчика 0,51, а девочки — 0,49.

4. В каждом из карманов (их 2) лежит по коробку спичек (по 10 спичек в коробке). При каждом закуривании карман выбирается наудачу. При очередном закуривании коробок оказался пустым. Найти вероятность того, что во втором коробке 6 спичек.

1.21. Предельные теоремы в схеме Бернулли

Использование формулы Бернулли (1.32) при больших значениях n и m вызывает большие трудности, так как это связано с громоздкими вычислениями. Так, при $n = 200$, $m = 116$, $p = 0{,}72$ формула Бернулли принимает вид $P_{200}(116) = C_{200}^{116} \cdot (0{,}72)^{116} \cdot (0{,}28)^{84}$. Подсчитать результат практически невозможно. Вычисление $P_n(m)$ вызывает затруднения также при малых значениях p (q). Возникает необходимость в отыскании приближенных формул для вычисления $P_n(m)$, обеспечивающих необходимую точность. Такие формулы дают нам предельные теоремы; они содержат так называемые асимптотические формулы, которые при больших значениях испытаний дают сколь угодно малую относительную погрешность. Рассмотрим три предельные теоремы, содержащие асимптотические формулы для вычисления биномиальной вероятности $P_n(m)$ при $n \to \infty$.

Теорема Пуассона

Теорема 1.5. Если число испытаний неограничено увеличивается ($n \to \infty$) и вероятность p наступления события A в каждом испытании неограничено уменьшается ($p \to 0$), но так, что их произведение np является постоянной величиной ($np = a = \text{const}$), то вероятность $P_n(m)$ удовлетворяет предельному равенству

$$\lim_{n\to\infty} P_n(m) = \frac{a^m e^{-a}}{m!}. \qquad (1.34)$$

Выражение (1.34) называется *асимптотической формулой Пуассона.*

❑ Преобразуем формулу Бернулли (1.32) с учетом того, что $p = \frac{a}{n}$:

$$P_n(m) = \frac{n!}{m!(n-m)!}\cdot\left(\tfrac{a}{n}\right)^m\cdot\left(1-\tfrac{a}{n}\right)^{n-m} =$$
$$= \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-(m-1))}{m!}\cdot\frac{a^m}{n^m}\cdot\left(1-\tfrac{a}{n}\right)^n\cdot\left(1-\tfrac{a}{n}\right)^{-m} =$$
$$= \frac{a^m}{m!}\cdot\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n}\cdot\ldots\cdot\frac{n-(m-1)}{n}\cdot\left(1-\tfrac{a}{n}\right)^n\cdot\left(1-\tfrac{a}{n}\right)^{-m} =$$
$$= \frac{a^m}{m!}\cdot 1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{m-1}{n}\right)\cdot\left(1-\tfrac{a}{n}\right)^n\cdot\left(1-\tfrac{a}{n}\right)^{-m}.$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$, получим $\lim\limits_{n\to\infty} P_n(m) = \dfrac{a^m e^{-a}}{m!}$ ($\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\tfrac{a}{n}\right)^n = e^{-a}$ согласно второму замечательному пределу). ■

Из предельного равенства (1.34) при больших n и малых p вытекает приближенная *формула Пуассона*

$$P_n(m) \approx \frac{a^m e^{-a}}{m!}, \quad a = np, \quad m = 0, 1, 2, \ldots. \qquad (1.35)$$

Формулу (1.35) применяют, когда вероятность $p = \text{const}$ успеха крайне мала, т. е. сам по себе успех (появление события A) является *редким событием* (например, выигрыш автомобиля по лотерейному билету), но количество испытаний n велико, *среднее число успехов* $np = a$ незначительно. Приближенную формулу (1.35) обычно используют, когда $n \geqslant 50$, а $np \leqslant 10$.

Формула Пуассона находит применение *в теории массового обслуживания.*

Пример 1.32. Завод «Золотая балка» (Крым) отправил в Москву 1500 бутылок вина «Каберне». Вероятность того, что в пути бутылка может разбиться, равна 0,002. Найти вероятность того, что в пути будет разбито не более 4-х бутылок (событие A).

Искомая вероятность равна

$$P_{1500}(0) + P_{1500}(1) + P_{1500}(2) + P_{1500}(3) + P_{1500}(4).$$

Так как $n = 1500$, $p = 0{,}002$, то $a = [np] = 3$. Вероятность события A найдем, используя формулу Пуассона (1.35):

$$P(A) = \frac{3^0 \cdot e^{-3}}{0!} + \frac{3^1 \cdot e^{-3}}{1!} + \frac{3^2 \cdot e^{-3}}{2!} + \frac{3^3 \cdot e^{-3}}{3!} + \frac{3^4 \cdot e^{-3}}{4!} \approx 0{,}815. \quad \bullet$$

Формулу Пуассона можно считать математической моделью простейшего потока событий.

Потоком событий называют последовательность событий, наступающих в случайные моменты времени (например, поток посетителей в парикмахерской, поток вызовов на телефонной станции, поток отказов элементов, поток обслуженных абонентов и т. п.).

Поток событий, обладающий свойствами стационарности, ординарности и отсутствия последствия называется *простейшим* (*пуассоновским*) *потоком.*

Свойство *стационарности* означает, что вероятность появления k событий на участке времени длины τ зависит только от его длины (т. е. не зависит от начала его отсчета). Следовательно, *среднее число событий, появляющихся в единицу времени,* так называемая *интенсивность* λ потока, есть величина постоянная: $\lambda(t) = \lambda$.

Свойство *ординарности* означает, что событие появляется не группами, а поодиночке. Другими словами, вероятность появления более одного события на малый участок времени Δt пренебрежительно мала по сравнению с вероятностью появления только одного события (например, поток катеров, подходящих к причалу, ординарен).

Свойство *отсутствия последствия* означает, что вероятность появления k событий на любом участке времени длины τ не зависит от того, сколько событий появилось на любом другом не пересекающимся с ним участком (говорят: «будущее» потока не зависит от «прошлого», например, поток людей, входящих в супермаркет).

Можно доказать, что вероятность появления m событий простейшего потока за время продолжительностью t определяется формулой

Пуассона

$$P_t(m) = p_m = \frac{(\lambda t)^m \cdot e^{-\lambda t}}{m!}.$$

Пример 1.33. Телефонная станция обслуживает 2000 абонентов. Вероятность позвонить любому абоненту в течение часа равна 0,003. Какова вероятность того, что в течение часа позвонят 5 абонентов?

❍ Среднее число позвонивших в течение часа абонентов равно $2000 \cdot 0.003 = 6$ $(a = np = \lambda t)$. Стало быть, $p_5 = \dfrac{6^5 e^{-6}}{5!} \approx 0{,}13$. ●

Локальная и интегральная теоремы Муавра–Лапласа

В тех случаях, когда число испытаний n велико, а вероятность p не близка к нулю ($p \neq 0$, $p \neq 1$), для вычисления биномиальных вероятностей используют теоремы Муавра–Лапласа. Приведем только их формулировки в силу сложности доказательства.

Теорема 1.6 (Локальная теорема Муавра–Лапласа). Если вероятность p наступления события A в каждом испытании постоянна и отлична от нуля и единицы, а число независимых испытаний достаточно велико, то вероятность $P_n(m)$ может быть вычислена по приближенной формуле

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad \text{где} \quad x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}. \tag{1.36}$$

Равенство (1.36) тем точнее, чем больше n.

Выражение

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} = \varphi(x) \tag{1.37}$$

называется *функцией Гаусса*, а ее график — *кривой вероятностей* (см. рис. 15).

Равенство (1.36) можно переписать в виде

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x), \quad \text{где} \quad x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}. \tag{1.38}$$

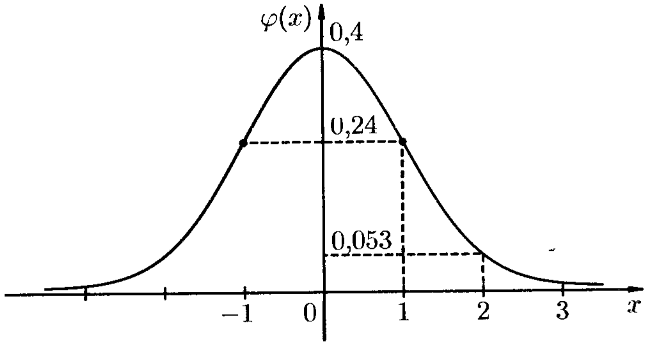


Рис. 15

Для функции $\varphi(x)$ составлены таблицы значений (они находятся, как правило, в так называемых «Приложениях» книг по теории вероятностей см. приложение 1 на с. 284). Пользуясь таблицей, следует учитывать, что:

а) функция $\varphi(x)$ четная, т. е. $\varphi(-x) = \varphi(x)$;

б) при $x \geqslant 4$ можно считать, что $\varphi(x) = 0$.

Функция Гаусса (1.37) будет подробнее рассмотрена в п. 2.7.

Пример 1.34. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для данного стрелка равна 0,7. Найти вероятность того, что при 200 выстрелах мишень будет поражена 160 раз.

Здесь $n = 200$, $p = 0{,}7$, $q = 0{,}3$, $m = 160$. Применим формулу (1.38). Имеем: $\sqrt{npq} = \sqrt{200 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3} = \sqrt{42} \approx 6{,}48$, следовательно, $x = \dfrac{160 - 200 \cdot 0{,}7}{\sqrt{42}} = \dfrac{20}{6{,}48} \approx 3{,}09$. Учитывая, что $\varphi(3{,}09) \approx 0{,}0034$, получаем $P_{200}(160) \approx \dfrac{1}{6{,}48} \cdot 0{,}0034 \approx 0{,}0005$. ●

В тех случаях, когда требуется вычислить вероятность того, что в n независимых испытаниях событие A появится не менее k_1 раз, но не более k_2 раз, т. е. $P_n(k_1 \leqslant m \leqslant k_2)$ или $P_n(k_1; k_2)$, используют интегральную теорему Муавра–Лапласа (является частным случаем более общей теоремы — центральной предельной теоремы).

Теорема 1.7 (Интегральная теорема Муавра–Лапласа). Если вероятность p наступления события A в каждом испытании постоянна и отлична от нуля и единицы, то вероятность $P_n(k_1 \leqslant m \leqslant k_2)$ может быть найдена по приближенной формуле

$$P_n(k_1 \leqslant m \leqslant k_2) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx, \quad \text{где} \quad x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}, \quad x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}. \tag{1.39}$$

Равенство (1.39) тем точнее, чем больше n.

Используя функцию Гаусса (1.37), равенство (1.39) можно записать в виде

$$P_n(k_1, k_2) \approx \int\limits_{x_1}^{x_2} \varphi(x)\,dx.$$

Однако для упрощения вычислений, при использовании формулы (1.39), вводят специальную функцию

$$\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt, \tag{1.40}$$

называемую *нормированной функцией Лапласа.*

Функция (1.40) нечетна $\left(\Phi_0(-x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^{-x} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = [t = -z] = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz = -\Phi_0(x)\right)$; при $x \geqslant 5$ можно считать, что $\Phi_0(x) = 0{,}5$; график функции $\Phi_0(x)$ приведен на рис. 16.

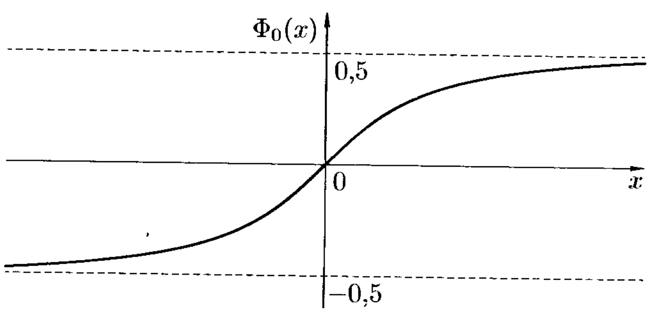


Рис. 16

Выразим правую часть равенства (1.39) через функцию Лапласа (1.40):

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{x_1}^{0} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{x_2} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = \Phi_0(x_2) - \Phi_0(x_1).$$

Равенство (1.39) принимает вид

$$P_n(k_1 \leqslant m \leqslant k_2) = \Phi_0(x_2) - \Phi_0(x_1),$$
$$\text{где}\quad x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}},\quad x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}. \qquad (1.41)$$

Эту формулу обычно используют на практике.

Наряду с нормированной функцией Лапласа (1.40) используют функцию

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt, \qquad (1.42)$$

называемую также *функцией Лапласа*. Для нее справедливо равенство $\Phi(-x) + \Phi(x) = 1$; она связана с функцией $\Phi_0(x)$ формулой

$$\Phi(x) = 0{,}5 + \Phi_0(x). \qquad (1.43)$$

Имеются таблицы приближенных значений функций $\Phi_0(x)$ и $\Phi(x)$ (интеграл не берется в элементарных функциях), которые приводятся в большинстве учебников по теории вероятностей (см. также приложение 2 на с. 285).

Приближенную формулу для вычисления вероятности $P_n(k_1 \leqslant \leqslant m \leqslant k_2)$ (1.39) можно записать в виде

$$P_n(k_1 \leqslant m \leqslant k_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1) = \Phi_0(x_2) - \Phi_0(x_1),$$
$$\text{где}\quad x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}},\quad x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}. \qquad (1.41)$$

Пример 1.35. Проверкой установлено, что цех в среднем выпускает 96% продукции высшего сорта. На базе приемщик проверяет 200 изделий этого цеха. Если среди них окажется более 10 изделий не высшего сорта, то вся партия изделий бракуется, т. е. возвращается в цех. Какова вероятность того, что партия будет принята?

○ Здесь $n = 200$, $p = 0{,}04$ (вероятность негодного изделия), $q = 0{,}96$. Вероятность принятия всей партии, т. е. $P_{200}(0 \leqslant m \leqslant 10)$, можно найти по формуле (1.44); здесь $k_1 = 0$. $k_2 = 10$. Находим, что $x_1 = \dfrac{0 - 200 \cdot 0{,}04}{\sqrt{200 \cdot 0{,}04 \cdot 0{,}96}} \approx -2{,}89$, $x_2 = \dfrac{10 - 200 \cdot 0{,}04}{\sqrt{200 \cdot 0{,}04 \cdot 0{,}96}} \approx 0{,}72$, $P_{200}(0 \leqslant m \leqslant 10) = \Phi_0(0{,}72) - \Phi_0(-2{,}89) = 0{,}26424 + 0{,}49807 = 0{,}7623$. Заметим, что $\Phi(0{,}72) - \Phi(-2{,}89) = 0{,}7642 - (1 - \Phi(2{,}89)) = 0{,}7642 - (1 - 0{,}998074) = 0{,}7623$. ●

Замечание. С помощью функции Лапласа можно найти вероятность отклонения относительной частоты $\frac{n_A}{n}$ от вероятности p в n независимых испытаниях. Имеет место формула

$$P\left\{\left|\frac{n_A}{n} - p\right| \leqslant \varepsilon\right\} = 2\Phi_0\left(\varepsilon \cdot \sqrt{\frac{n}{pq}}\right),$$

где $\varepsilon > 0$ — некоторое число.

❑ Из $\left|\frac{n_A}{n} - p\right| \leqslant \varepsilon$ следует: $-\varepsilon \leqslant \frac{n_A}{n} - p \leqslant \varepsilon$, $np - n\varepsilon \leqslant n_A \leqslant np + n\varepsilon$. По формуле (1.39) получаем:

$$P_n\{np - n\varepsilon \leqslant n_A \leqslant np + n\varepsilon\} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\varepsilon \cdot \sqrt{\frac{n}{pq}}}^{\varepsilon \cdot \sqrt{\frac{n}{pq}}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{\varepsilon \cdot \sqrt{\frac{n}{pq}}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = 2\Phi_0\left(\varepsilon \cdot \sqrt{\frac{n}{pq}}\right),$$

т. е. $P\left\{\left|\frac{n_A}{n} - p\right| \leqslant \varepsilon\right\} = 2\Phi_0\left(\varepsilon \cdot \sqrt{\frac{n}{pq}}\right)$. ■

Пример 1.36. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,6. Найти вероятность того, что при $n = 1200$ независимых выстрелах отклонение «частости» от вероятности по модулю не превышает $\varepsilon = 0{,}05$.

○ $P_{1200}\left\{\left|\frac{n_A}{n} - 0{,}6\right| \leqslant 0{,}05\right\} = 2\Phi_0\left(0{,}05 \cdot \sqrt{\frac{1200}{0{,}6 \cdot 0{,}4}}\right) = 2\Phi_0(3{,}54) = 0{,}9996$. ●

Упражнения

1. На лекции по теории вероятностей присутствуют 84 студента. Какова вероятность того, что среди них есть 2 студента, у которых сегодня день рождения?

2. Вероятность брака при изготовлении некоторого изделия равна 0,02. Найти вероятность того, что среди 200 произведенных изделий не более одного бракованного.

3. Найти вероятность того, что при подбрасывании монеты 100 раз событие A — появление герба — наступит ровно 60 раз.

4. Найти такое число m, чтобы с вероятностью 0,95 можно было бы утверждать, что среди 800 новорожденных более m девочек. Считать, что вероятность рождения девочки равна 0,485.

Глава 2
Случайные величины

2.1. Понятие случайной величины. Закон распределения случайной величины

Одним из важнейших понятий теории вероятностей (наряду со случайным событием и вероятностью) является понятие случайной величины.

Под *случайной величиной* понимают величину, которая в результате опыта принимает то или иное значение, причем неизвестно заранее, какое именно.

Случайные величины (сокращенно: с. в.) обозначаются прописными латинскими буквами $X. Y, Z, \ldots$ (или строчными греческими буквами ξ (кси), η (эта), θ (тэта), ψ (пси) и т. д.), а принимаемые ими значения соответственно малыми буквами $x_1, x_2, \ldots, y_1, y_2, y_3, \ldots$.

Примерами с. в. могут служить: 1) X — число очков, появляющихся при бросании игральной кости; 2) Y — число выстрелов до первого попадания в цель; 3) Z — время безотказной работы прибора и т. п. (рост человека, курс доллара, количество бракованных деталей в партии, температура воздуха, выигрыш игрока, координата точки при случайном выборе ее на $[0; 1]$, прибыль фирмы, ...).

Случайная величина, принимающая конечное или счетное множество значений, называется *дискретной* (сокращенно: д. с. в.).

Если же множество возможных значений с. в. несчетно, то такая величина называется *непрерывной* (сокращенно: н. с. в.).

То есть д. с. в. принимает отдельные изолированные друг от друга значения, а н. с. в. может принимать любые значения из некоторого промежутка (например, значения на отрезке, на всей числовой прямой и т. д.). Случайные величины X и Y (примеры 1) и 2)) являются дискретными. С. в. Z (пример 3)) является непрерывной: ее возможные значения принадлежат промежутку $[0, t)$, где $t \geqslant 0$, правая граница не определена (теоретически $t = +\infty$). Отметим, что рассматриваются также с. в. смешанного типа.

Дадим теперь строгое определение с. в., исходя из теоретико-множественной трактовки основных понятий теории вероятностей.

Случайной величиной X называется числовая функция, определенная на пространстве элементарных событий Ω, которая каждому элементарному событию w ставит в соответствие число $X(w)$, т.е. $X = X(w)$, $w \in \Omega$ (или $X = f(w)$).

Пример. Опыт состоит в бросании монеты 2 раза. На ПЭС $\Omega = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$, где w_1 = ГГ, w_2 = ГР, w_3 = РГ, w_4 = РР, можно рассмотреть с.в. X — число появлений герба. С.в. X является функцией от элементарного события w_i: $X(w_1) = 2$, $X(w_2) = 1$, $X(w_3) = 1$, $X(w_4) = 0$; X — д.с.в. со значениями $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$.

Отметим, что если множество Ω конечно или счетно, то случайной величиной является любая функция, определенная на Ω. В общем случае функция $X(w)$ должна быть такова, чтобы для любых $x \in \mathbb{R}$ событие $A = \{w : X(w) < x\}$ принадлежало σ-алгебре множеств S и, значит, для любого такого события была определена вероятность $P(A) = P(X < x)$.

Для полного описания с.в. недостаточно лишь знания ее возможных значений; необходимо еще знать вероятности этих значений.

Любое правило (таблица, функция, график), позволяющее находить вероятности произвольных событий $A \subseteq S$ (S — σ-алгебра событий пространства Ω), в частности, указывающее вероятности отдельных значений случайной величины или множества этих значений, называется *законом распределения случайной величины* (или просто: *распределением*). Про с.в. говорят, что «она подчиняется данному закону распределения»:

2.2. Закон распределения дискретной случайной величины. Многоугольник распределения

Пусть X – д.с.в., которая принимает значения $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$ (множество этих значений конечно или счетно) с некоторой вероятностью p_i, где $i = 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ *Закон распределения* д.с.в. удобно задавать с помощью формулы $p_i = P\{X = x_i\}$, $i = 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$, определяющей вероятность того, что в результате опыта с.в. X примет значение x_i. Для д.с.в. X закон распределения может быть задан в виде *таблицы распределения:*

X	x_1	x_2	$\ldots$	x_n	$\ldots$
P	p_1	p_2	$\ldots$	p_n	$\ldots$

,

где первая строка содержит все возможные значения (обычно в порядке возрастания) с. в., а вторая — их вероятности. Такую таблицу называют *рядом распределения.*

Так как события $\{X = x_1\}$, $\{X = x_2\}$ ... несовместны и образуют полную группу, то сумма их вероятностей равна единице (см. п. 1.12), т. е. $\sum\limits_i p_i = 1$.

Закон распределения д. с. в. можно задать *графически*, если на оси абсцисс отложить возможные значения с. в., а на оси ординат — вероятности этих значений. Ломаную, соединяющую последовательно точки (x_1, p_1), (x_2, p_2), ... называют *многоугольником* (или *полигоном*) *распределения* (см. рис. 17).

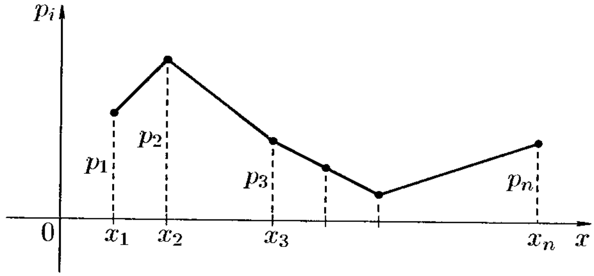


Рис. 17

Теперь можно дать более точное определение д. с. в.

Случайная величина X *дискретна*, если существует конечное или счетное множество чисел x_1, x_2, ...таких, что $P\{X = x_i\} = p_i > 0$ $(i = 1, 2, \ldots)$ и $p_1 + p_2 + p_3 + \ldots = 1$.

Определим математические операции над дискретными с. в.

Суммой (*разностью*, *произведением*) д. с. в. X, принимающей значения x_i с вероятностями $p_i = P\{X = x_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ и д. с. в. Y, принимающей значения y_j с вероятностями $p_j = P\{Y = y_j\}$, $j = 1, 2, \ldots, m$, называется д. с. в. $Z = X + Y$ $(Z = X - Y$, $Z = X \cdot Y)$, принимающая значения $z_{ij} = x_i + y_j$ $(z_{ij} = x_i - y_j$, $z_{ij} = x_i \cdot y_j)$ с вероятностями $p_{ij} = P\{X = x_i, Y = y_j\}$ для всех указанных значений i и j. В случае совпадения некоторых сумм $x_i + y_j$ (разностей $x_i - y_j$, произведений $x_i y_j$) соответствующие вероятности складываются.

Произведение д. с. в. *на число* c называется д. с. в. cX, принимающая значения cx_i с вероятностями $p_i = P\{X = x_i\}$.

Две д. с. в. X и Y называются *независимыми*, если события $\{X = x_i\} = A_i$ и $\{Y = y_j\} = B_j$ независимы для любых $i = 1, 2, \ldots, n$;

$j = 1, 2, \ldots, m$, т. е.

$$P\{X = x_i; Y = y_j\} = P\{X = x_i\} \cdot P\{Y = y_j\}.$$

В противном случае с. в. называются *зависимыми*. Несколько с. в. называются взаимно независимыми, если закон распределения любой из них не зависит от того, какие возможные значения приняли остальные величины.

Пример 2.1. В урне 8 шаров, из которых 5 белых, остальные — черные. Из нее вынимают наудачу 3 шара. Найти закон распределения числа белых шаров в выборке.

Возможные значения с. в. X — числа белых шаров в выборке есть $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 3$. Вероятности их соответственно будут $p_1 = P\{X = 0\} = \frac{C_5^0 \cdot C_3^3}{C_8^3} = \frac{1}{56}$, $p_2 = P\{X = 1\} = \frac{C_5^1 \cdot C_3^2}{C_8^3} = \frac{15}{56}$, $p_3 = \frac{30}{56}$, $p_4 = \frac{10}{56}$. Закон распределения запишем в виде таблицы.

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{56}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{30}{56}$	$\frac{10}{56}$

(Контроль: $\sum\limits_1^4 p_i = \frac{1}{56} + \frac{15}{56} + \frac{30}{56} + \frac{10}{56} = 1$.)

Упражнения

1. Монета бросается 4 раза. Построить многоугольник распределения с. в. X — числа выпадений герба.

2. Вероятность сдачи экзамена первым студентом равна 0,6, а вторым — 0,9. Составить ряд распределения с. в. X — числа студентов, успешно сдавших экзамен в случае, когда: а) экзамены пересдавать нельзя; б) экзамен можно один раз пересдать.

2.3. Функция распределения и ее свойства. Функция распределения дискретной случайной величины

Очевидно, ряд распределения с. в. может быть построен только для д. с. в.; для н. с. в. нельзя даже перечислить все ее возможные значения. Кроме того, как увидим позже (п. 2.3, 2.4), вероятность каждого отдельно взятого значения н. с. в. равна нулю! Представим себе вероятность того, что рост мужчины — н. с. в. — точно равен $\sqrt{3} = 1{,}7320508\ldots$ метров; купленная нами лампа проработает — н. с. в. — ровно 900 часов; $\ldots$. Удивительно интересный факт: *событие возможное, но имеет нулевую вероятность.*

Для характеристики поведения н. с. в. целесообразно использовать вероятность события $\{X < x\}$ (а не $\{X = x\}$), где x — некоторое действительное число. С точки зрения практики нас мало интересует событие, состоящее, например, в том, что лампочка проработает ровно 900 часов, т. е. $X = 900$. Более важным является событие вида $\{X < 900\}$ (или $\{X > 900\}$). Такое событие имеет ненулевую вероятность; при изменении x вероятность события $\{X < x\}$ в общем случае будет меняться. Следовательно, вероятность $P\{X < x\}$ является функцией от x.

Универсальным способом задания закона распределения вероятностей, пригодным как для дискретных, так и для непрерывных случайных величин, является ее функция распределения, обозначаемая $F_X(x)$ (или просто $F(x)$, без индекса, если ясно, о какой с. в. идет речь).

Функцией распределения с. в. X называется функция $F(x)$, которая для любого числа $x \in R$ равна вероятности события $\{X < x\}$.

Таким образом, по определению

$$F(x) = P\{X < x\} \quad \text{т. е.} \quad F(x) = P\{w : X(w) < x\}. \tag{2.1}$$

Функцию $F(x)$ называют также *интегральной функцией распределения.*

Геометрически равенство (2.1) можно истолковать так: $F(x)$ есть вероятность того, что с. в. X примет значение, которое изображается на числовой оси точкой, лежащей *левее точки* x, т. е. случайная точка X попадет в интервал $(-\infty, x)$, см. рис. 18.

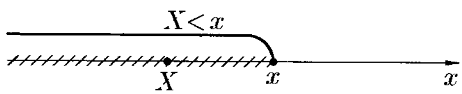


Рис. 18

Функция распределения обладает следующими свойствами:

1. $F(x)$ ограничена, т. е.

$$0 \leqslant F(x) \leqslant 1.$$

2. $F(x)$ — неубывающая функция на R, т. е. если $x_2 > x_1$, то

$$F(x_2) \geqslant F(x_1).$$

3. $F(x)$ обращает в ноль на минус бесконечности и равна единице в плюс бесконечности, т. е.

$$F(-\infty) = 0, \qquad F(+\infty) = 1.$$

4. Вероятность попадания с. в. X в промежуток $[a, b)$ равна приращению ее функции распределения на этом промежутке, т. е.

$$P\{a \leqslant X < b\} = F(b) - F(a). \tag{2.2}$$

5. $F(x)$ непрерывна слева, т. е.

$$\lim_{x \to x_0 - 0} F(x) = F(x_0).$$

❑ 1. Первое свойство следует из определения (2.1) и свойств вероятности (п. 1.11, 1.12).

2. Пусть $A = \{X < x_1\}$, $B = \{X < x_2\}$. Если $x_1 < x_2$, то событие A влечет событие B (п. 1.4), т. е. $A \subseteq B$. Но тогда согласно свойству 4 (п. 1.12), имеем $P(A) \leqslant P(B)$, т. е. $P\{X < x_1\} \leqslant P\{X < x_2\}$ или $F(x_1) \leqslant F(x_2)$.

Геометрически свойство 2 очевидно: при перемещении точки x вправо по числовой оси вероятность попадания случайной точки X в интервал $(-\infty, x)$ не может уменьшаться.

3. Третье свойство вытекает непосредственно из того, что $\{X < -\infty\} = \varnothing$, а $\{X < +\infty\} = \Omega$; согласно свойствам вероятности (п. 1.11, 1.12), имеем: $F(-\infty) = P\{X < -\infty\} = P\{\varnothing\} = 0$, $F(+\infty) = P\{X < +\infty\} = P\{\Omega\} = 1$.

4. Так как $a < b$, то очевидно, что $\{X < b\} = \{X < a\} + \{a \leqslant X < b\}$ (это хорошо видно на рис. 19).

Так как слагаемые в правой части — несовместные события, то по теореме сложения вероятностей (п. 1.11) получаем $P\{X < b\} = P\{X < a\} + P\{a \leqslant X < b\}$. Отсюда следует $P\{a \leqslant X < b\} = P\{X < b\} - P\{X < a\} = F(b) - F(a)$.

5. Свойство 5 проиллюстрируем далее на примере 2.2. ■

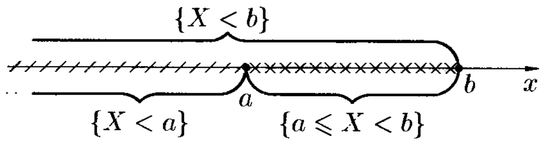


Рис. 19

Всякая функция $F(x)$, обладающая свойствами 1–3, 5, может быть функцией распределения некоторой случайной величины.

Заметим, что формула (2.2) (свойство 4) справедлива и для н. с. в., и для д. с. в.

С помощью функции распределения можно вычислить вероятность события $\{X \geqslant x\}$:

$$P\{X \geqslant x\} = 1 - F(x). \tag{2.3}$$

Можно дать *более точное определение н. с. в.*

Случайную величину X называют *непрерывной*, если ее функция распределения непрерывна в любой точке и дифференцируема всюду, кроме, может быть, отдельных точек.

Используя свойство 4 можно показать, что «вероятность того, что н. с. в. X примет заранее указанное определенное значение a, равна нулю».

Действительно, применим формулу (2.2) к промежутку $[a, x)$: $P\{a \leqslant X < x\} = F(x) - F(a)$. Будем неограниченно приближать точку x к a. Так как функция $F(x)$ непрерывна в точке a, то $\lim\limits_{x\to a} F(x) = F(a)$. В пределе получим $P\{X = a\} = \lim\limits_{x\to a} F(x) - F(a) = F(a) - F(a) = 0$. Если функция $F(x)$ везде непрерывна, то вероятность каждого отдельного значения с. в. равна нулю.

Следовательно, для н. с. в. справедливы равенства

$$P\{a \leqslant x < b\} = P\{a < x < b\} = P\{a \leqslant x \leqslant b\} = P\{X \in (a, b]\}.$$

Действительно,

$$P\{a \leqslant x < b\} = P\{X = a\} + P\{a < x < b\} = P\{a < x < b\}$$

и т. д.

Функция распределения д. с. в. имеет вид

$$F(x) = \sum_{x_i < x} p_i. \tag{2.4}$$

Здесь суммирование ведется по всем i, для которых $x_i < x$. Равенство (2.4) непосредственно вытекает из определения (2.1).

Пример 2.2. По условию примера 2.1 (п. 2.2) найти функцию распределения $F(x)$ и построить ее график.

Будем задавать различные значения x и находить для них $F(x) = P\{X < x\}$:

1. Если $x \leqslant 0$, то, очевидно, $F(x) = P\{X < 0\} = 0$;
2. Если $0 < x \leqslant 1$, то $F(x) = P\{X < x\} = P\{X = 0\} = \frac{1}{56}$;
3. Если $1 < x \leqslant 2$, то $F(x) = P\{X = 0\} + P\{X = 1\} = \frac{1}{56} + \frac{15}{56} = \frac{16}{56}$;
4. Если $2 < x \leqslant 3$, то $F(x) = P\{X = 0\} + P\{X = 1\} + P\{X = 2\} = \frac{1}{56} + \frac{15}{56} + \frac{30}{56} = \frac{46}{56}$;
5. Если $3 < x$, то $F(x) = P\{X = 0\} + P\{X = 1\} + P\{X = 2\} + P\{X = 3\} = \frac{46}{56} + \frac{10}{56} = 1$.

Итак,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x \leqslant 0; \\ \frac{1}{56}, & \text{если} \quad 0 < x \leqslant 1; \\ \frac{16}{56}, & \text{если} \quad 1 < x \leqslant 2; \\ \frac{46}{56}, & \text{если} \quad 2 < x \leqslant 3; \\ 1, & \text{если} \quad 3 < x. \end{cases} \tag{2.5}$$

Строим график $F(x)$, рис. 20.

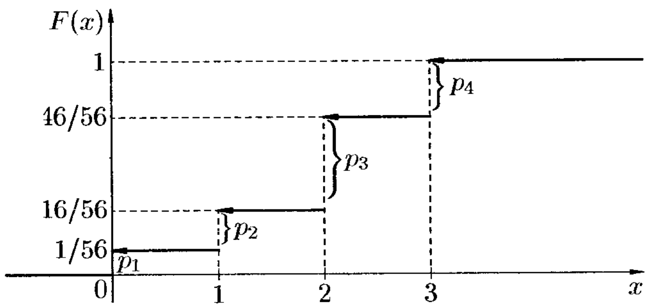


Рис. 20

Как видим, функция распределения д. с. в. X есть разрывная, со скачками p_i в точках x_i, функция, «непрерывная слева» (при подходе к точке разрыва слева функция $F(x)$ сохраняет значение). Ее график имеет ступенчатый вид.

Отметим, что, пользуясь равенством (2.4), функцию распределения можно сразу записать в виде (2.5)

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ \dfrac{1}{56}, & 0 < x \leqslant 1, \\ \dfrac{1}{56} + \dfrac{15}{56}, & 1 < x \leqslant 2, \\ \dfrac{1}{56} + \dfrac{15}{56} + \dfrac{30}{56}, & 2 < x \leqslant 3, \\ \dfrac{1}{56} + \dfrac{15}{56} + \dfrac{30}{56} + \dfrac{10}{56}, & 3 < x. \end{cases}$$

Упражнения

1. Два стрелка делают по одному выстрелу в одну мишень. Вероятность попадания для первого стрелка равна 0.6, а для второго — 0,8. Найти и построить функцию распределения с. в. X — числа попаданий в мишень.

2. Убедиться, что функция

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leqslant 0, \\ 1 - e^{-x}, & \text{если } x > 0 \end{cases}$$

является функцией распределения некоторой случайной величины. Найти $P\{0 \leqslant x < 1\}$ и построить график $F(x)$.

3. Дана функция распределения

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leqslant 0, \\ \dfrac{x^2}{2}, & \text{при } 0 < x \leqslant \sqrt{2}, \\ 1, & \text{при } x > \sqrt{2}. \end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате четырех испытаний с. в. X трижды примет значение, принадлежащее интервалу $(0; 1)$.

2.4. Плотность распределения и ее свойства

Важнейшей характеристикой *непрерывной случайной величины* (помимо функции распределения) является плотность распределения вероятностей. Напомним (см. п. 2.3), что: с. в. X называется *непрерывной*, если ее функция распределения непрерывна и дифференцируема всюду, кроме, быть может, отдельных точек.

Плотностью распределения вероятностей (*плотностью распределения*, *плотностью вероятностей* или просто *плотностью*) непрерывной случайной величины X называется производная ее функции распределения.

Обозначается плотность распределения н. с. в. X через $f_X(x)$ (или $p_X(x)$) или просто $f(x)$ (или $p(x)$), если ясно о какой с. в. идет речь.

Таким образом, по определению

$$f(x) = F'(x). \tag{2.6}$$

Функцию $f(x)$ называют также *дифференциальной функцией распределения*; она является одной из форм закона распределения случайной величины, существует только для непрерывных случайных величин.

Установим вероятностный смысл плотности распределения. Из определения производной следует

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x}.$$

Но согласно формуле (2.2), $F(x+\Delta x) - F(x) = P\{x \leqslant X < x + \Delta x\}$. Отношение $\dfrac{P\{x \leqslant X < x+\Delta x\}}{\Delta x}$ представляет собой среднюю вероятность, которая приходится на единицу длины участка $[x, x+\Delta x)$, т. е. среднюю плотность распределения вероятности. Тогда

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P\{x \leqslant X < x+\Delta x\}}{\Delta x}, \tag{2.7}$$

т. е. плотность распределения есть предел отношения вероятности попадания с. в. в промежуток $[x; x+\Delta x)$ к длине Δx этого промежутка, когда Δx стремится к нулю. Из равенства (2.7) следует, что

$$P\{x \leqslant X < x + \Delta x\} \approx f(x)\Delta x.$$

То есть *плотность вероятности определяется как функция $f(x)$, удовлетворяющая условию $P\{x \leqslant X < x + dx\} \approx f(x)\,dx$*; выражение $f(x)\,dx$ называется *элементом вероятности*.

Отметим, что плотность $f(x)$ аналогична таким понятиям, как плотность распределения масс на оси абсцисс или плотность тока в теории электричества.

Плотность распределения обладает следующими свойствами:

1. $f(x)$ неотрицательная, т. е.

$$f(x) \geqslant 0.$$

2. Вероятность попадания н. с. в. в промежуток $[a; b]$ равна определенному интегралу от ее плотности в пределах от a до b, т. е.

$$P\{a \leqslant X \leqslant b\} = \int_a^b f(x)\,dx. \tag{2.8}$$

3. Функция распределения н. с. в. может быть выражена через ее плотность вероятности по формуле

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt.$$

4. Условие нормировки: несобственный интеграл от плотности вероятности н. с. в. в бесконечных пределах равен единице, т. е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1.$$

❏ 1. Плотность распределения $f(x)$ — неотрицательная функция: $F(x)$ — неубывающая функция (п. 2.3), следовательно, $F'(x) \geqslant 0$, т. е. $f(x) \geqslant 0$. Это означает, что график плотности $f(x)$, называемый *кривой распределения*, не ниже оси абсцисс; плотность может принимать сколь угодно большие значения.

2. Так как $F(x)$ есть первообразная для плотности $f(x)$, то по формуле Ньютона–Лейбница имеем

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Отсюда в силу свойства 4 функции распределения (формула (2.2)), получаем

$$\int_a^b f(x)\,dx = P\{a \leqslant X \leqslant b\}.$$

Геометрически эта вероятность равна площади S фигуры, ограниченной сверху кривой распределения $f(x)$ и опирающейся на отрезок $[a; b]$ (рис. 21).

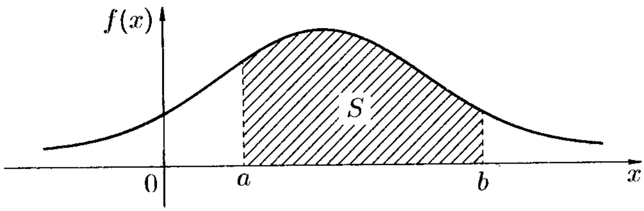


Рис. 21

3. Используя свойство 2, получаем:

$$F(x) = P\{X < x\} = P\{-\infty < X < x\} = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

(буква t для ясности).

4. Полагая в формуле (2.8) $a = -\infty$ и $b = +\infty$, получаем достоверное событие $X \in (-\infty; +\infty)$. Следовательно,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = P\{-\infty < X < +\infty\} = P\{\Omega\} = 1.$$

Геометрически свойство нормировки означает, что площадь фигуры, ограниченной кривой распределения $f(x)$ и осью абсцисс, равна единице. ■

Можно дать такое определение непрерывной случайной величины: случайная величина X называется *непрерывной*, если существует неотрицательная функция $f(x)$ такая, что́ при любом x функцию распределения $F(x)$ можно представить в виде

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt.$$

А затем получить, что $f(x) = F'(x)$. Отсюда следует, что $F(x)$ и $f(x)$ являются эквивалентными обобщающими характеристиками с. в. X.

Как отмечалось ранее (п. 2.3) для н. с. в. X, вероятность события $\{X = c\}$, где c — число, равна нулю. Действительно,

$$P\{X = c\} = P\{c \leqslant X \leqslant c\} = \int\limits_c^c f(x)\,dx = 0.$$

Отсюда также следует, что

$$P\{X \in [a;b)\} = P\{X \in [a;b]\} = P\{X \in (a;b)\}.$$

Пример 2.3. Плотность распределения с. в. X задана функцией $f(x) = \dfrac{a}{1+x^2}$. Найти значение параметра a.

❍ Согласно свойству 4 плотности, имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{a}{1+x^2}\,dx = 1, \quad \text{т. е.} \quad a \lim_{\substack{d\to+\infty\\ c\to-\infty}} \int\limits_c^d \frac{dx}{1+x^2} = 1, \quad \text{т. е.} \quad a \cdot \lim_{\substack{d\to+\infty\\ c\to-\infty}} \operatorname{arctg} x\Big|_c^d = 1$$

или $a \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = 1$ и, наконец, получаем $a\pi = 1$, т. е. $a = \frac{1}{\pi}$. ●

Упражнения

1. Случайная величина X задана функцией распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leqslant -1,\\ a(x+1)^2, & \text{при } -1 < x \leqslant 2,\\ 1, & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

Найти значение a, построить графики $F(x)$ и $f(x)$.

2. Кривая распределения н. с. в. X имеет вид, указанный на рис. 22. Найти выражение для $f_X(x)$, функцию распределения $F_X(x)$, вероятность события $\left\{X \in \left(\frac{1}{4};1\right)\right\}$.

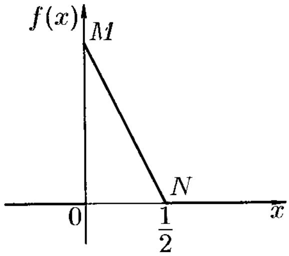


Рис. 22

3. Является ли плотностью распределения некоторой с. в. каждая из следующих функций:

а) $f(x) = \dfrac{x}{\pi(1+x^2)}$ при $x \in (-\infty; +\infty)$;

б) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}, & \text{при } x \in (-1; 1], \\ 0, & \text{при } x \notin (-1; 1]; \end{cases}$

в) $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < 0 \text{ и } x > 2, \\ ax^2, & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant 2. \end{cases}$

2.5. Числовые характеристики случайных величин

Закон распределения полностью характеризует случайную величину. Однако при решении многих практических задач достаточно знать лишь некоторые *числовые параметры, характеризующие отдельные существенные свойства (черты) закона распределения с. в.* Такие числа принято называть *числовыми характеристиками с. в.*

Важнейшими среди них являются характеристики положения: математическое ожидание (центр распределения с. в.), мода, медиана; характеристики рассеяния: дисперсия (отклонение значений с. в. от ее центра), среднее квадратическое отклонение.

Математическое ожидание случайной величины

Математическим ожиданием (или *средним* значением) д. с. в. X, имеющей закон распределения $p_i = P\{X = x_i\}$, $i = 1, 2, 3, \ldots, n$, называется число, равное сумме произведений всех ее значений на соответствующие им вероятности.

Математическое ожидание (сокращенно: м. о.) обозначается через MX (или: $M[X]$, $M(X)$, EX, m_X, a_X).

Таким образом, по определению

$$MX = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i. \tag{2.9}$$

Если число возможных значений с. в. X бесконечно (счетно), то

$$MX = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \cdot p_i, \tag{2.10}$$

причем ряд в правой части предполагается сходящимся (в противном случае с. в. X не имеет м. о.).

Формулы (2.9) и (2.10) можно записать в виде $MX = \sum_i x_i p_i$.

Вероятностный смысл математического ожидания состоит в том, что оно является средним значением с. в. Действительно, т. к. $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$, то

$$MX = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i p_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i} = x_{\text{среднее}}.$$

Математическим ожиданием н. с. в. X с плотностью вероятности $f(x)$, называется число

$$MX = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\, dx. \tag{2.11}$$

Интеграл в правой части равенства (2.11) предполагается абсолютно сходящимся, т. е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| \cdot f(x)\, dx < \infty$$

(в противном случае н. с. в. X не имеет м. о.).

Формула (2.11) является интегральным аналогом формулы (2.9). Заменяя в ней «прыгающий» аргумент x_i на непрерывно меняющийся x, вероятность p_i — элементом вероятности $f(x)\,dx$ ($f(x)\,dx = F'(x)\,dx = dF(x) \approx \Delta F(x) = F(x+\Delta x) - F(x) = P\{x < X < x+\Delta x\}$), получим равенство (2.11).

Отметим, что MX имеет ту же размерность, что и с. в. X.

Свойства математического ожидания.

1. Математическое ожидание постоянной равно самой этой постоянной, т. е.
$$Mc = c.$$

2. Постоянный множитель выносится за знак м. о., т. е.
$$M(cX) = cMX.$$

3. М. о. суммы с. в. равно сумме их м. о., т. е.
$$M(X+Y) = MX + MY.$$

4. М. о. отклонения с. в. от ее м. о. равно нулю, т. е.
$$M(X - MX) = 0.$$

5. М. о. произведения независимых с. в. равно произведению их м. о., т. е. если X и Y независимы, то
$$M(X \cdot Y) = MX \cdot MY.$$

❑ 1. Постоянную c можно рассматривать как д. с. в. X, принимающую лишь одно значение с вероятностью 1. Поэтому $Mc = c \cdot P\{X = c\} = c \cdot 1 = c$.

2. Так как д. с. в. cX принимает значения cx_i $(i = \overline{1,n})$ с вероятностями p_i, то
$$McX = \sum_{i=1}^{n} cx_i \cdot p_i = c\sum_{i=1}^{n} x_i p_i = cMX.$$

3. Так как д. с. в. $X+Y$ принимает значения $x_i + y_j$ с вероятностями $p_{ij} = P\{X_i = x_i, Y = y_j\}$, то
$$M(X+Y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(x_i + y_j)p_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i p_{ij} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} y_j p_{ij} =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{m} p_{ij} + \sum_{j=1}^{m} y_j \sum_{i=1}^{n} p_{ij} = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i + \sum_{j=1}^{m} y_j \cdot p_j = MX + MY.$$

При доказательстве воспользовались, в частности, тем, что
$$\sum_{j=1}^{m} p_{ij} = p_i \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^{n} p_{ij} = p_j.$$

Действительно: так как

$$\sum_{j=1}^{m}\{X = x_i; Y = y_j\} = \{X = x_i\}\sum_{j=1}^{m}\{Y = y_j\} = \{X = x_i\}\cdot\Omega = \{X = x_i\}.$$

то

$$p_i = P\{X = x_i\} = P\left(\sum_{j=1}^{m}\{X = x_i; Y = y_j\}\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} P\{X = x_i; Y = y_j\} = \sum_{j=1}^{m} p_{ij};$$

аналогично получаем

$$p_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij}.$$

Свойство 3 распространяется на произвольное конечное число слагаемых.

4. Согласно свойствам 1 и 3, имеем: $M(X-MX) = MX-M(MX) = MX - MX = 0$. Отметим, что разность $X - MX$ (или $X - m_X$) называется *отклонением* с. в. X от ее м. о. MX и обозначается символом $\overset{\circ}{X}$:

$$\overset{\circ}{X} = X - MX.$$

Эта с. в. $\overset{\circ}{X}$ называется также *центрированной* с. в.

5. Так как с. в. X и Y независимы, то $p_{ij} = P\{X = x_i; Y = y_j\} = P\{X = x_i\}\cdot P\{Y = y_j\} = p_i \cdot p_j$. Следовательно,

$$MXY = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i y_j \underbrace{P\{X = x_i; Y = y_j\}}_{p_{ij}} =$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i y_j \underbrace{P\{X = x_i\}}_{p_i}\underbrace{P\{Y = y_j\}}_{p_j} = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i \sum_{j=1}^{m} y_j p_j = MX \cdot MY. \quad \blacksquare$$

Свойства м. о., доказанные для д. с. в., остаются справедливы и для непрерывных с. в. Так, например,

$$McX = \int_{-\infty}^{\infty} cxf(x)\,dx = c\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx = cMX.$$

Пример 2.4. В лотерее имеется 1000 билетов, из них выигрышных: 10 по 500 руб, 50 по 50 руб, 100 по 10 руб, 150 по 1 руб. Найти математическое ожидание выигрыша на один билет.

Ряд распределения с. в. X — суммы выигрыша на один билет таков:

X	500	50	10	1	0
p	0,01	0,05	0,1	0,15	0,69

(Контроль: $\sum\limits_{i=1}^{5} p_i = 1$.) Находим MX:
$MX = 500 \cdot 0{,}01 + 50 \cdot 0{,}05 + 10 \cdot 0{,}1 + 1 \cdot 0{,}15 + 0 \cdot 0{,}69 = 8{,}65$ руб. ●

Дисперсия

Дисперсией (*рассеянием*) с. в. X называется математическое ожидание квадрата ее отклонения от своего математического ожидания.

Обозначается дисперсия через DX (или $D[X]$, D_X, $D(X)$). Таким образом, по определению

$$DX = M(X - MX)^2, \tag{2.12}$$

или $DX = M\dot{X}^2$, или $DX = M(X - m_X)^2$. Дисперсия характеризует разброс значений с. в. X относительно ее м. о. Из определения дисперсии следуют формулы для ее вычисления:

$$DX = \sum_i (x_i - MX)^2 \cdot p_i \text{ — для д. с. в. } X, \tag{2.13}$$

$$DX = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x - MX)^2 \cdot f(x)\,dx \text{ — для н. с. в. } X. \tag{2.14}$$

На практике дисперсию с. в. удобно находить по формуле

$$DX = MX^2 - (MX)^2. \tag{2.15}$$

Она получается из формулы (2.12): $DX = M(X^2 - 2X \cdot MX + (MX)^2) = MX^2 - M(2X \cdot MX) + M(MX)^2 = MX^2 - 2MX \cdot MX + (MX)^2 = MX^2 - (MX)^2$.

Это позволяет записать формулы для ее вычисления ((2.13) и (2.14)) в другом виде:

$$DX = \sum_i x_i^2 \cdot p_i - (MX)^2, \tag{2.16}$$

$$DX = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x)\,dx - (MX)^2. \tag{2.17}$$

Свойства дисперсии.

1. Дисперсия постоянной равна нулю. т. е.

$$Dc = 0.$$

2. Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возведя его в квадрат, т. е.

$$DcX = c^2 DX.$$

3. Дисперсия суммы независимых с. в. равна сумме их дисперсий, т. е. если X и Y независимы. то

$$D(X+Y) = DX + DY.$$

4. Дисперсия с. в. не изменится, если к этой с. в. прибавить постоянную, т. е.

$$D(X+c) = DX.$$

5. Если с. в. X и Y независимы, то

$$D(XY) = MX^2 \cdot MY^2 - (MX)^2 \cdot (MY)^2.$$

❑ 1. $Dc = M(c - Mc)^2 = M(c-c)^2 = M0 = 0$.

2. $DcX = M(cX - M(cX))^2 = M(cX - cMX)^2 = M(c^2(X-MX)^2) = c^2 M(X-MX)^2 = c^2 DX$.

3. Используя формулу (2.15), получаем $D(X+Y) = M(X+Y)^2 - (M(X+Y))^2 = MX^2 + 2MXY + MY^2 - (MX)^2 - 2MX \cdot MY - (MY)^2 = MX^2 - (MX)^2 + MY^2 - (MY)^2 + 2(MXY - MX \cdot MY) = DX + DY + 2(MX \cdot MY - MX \cdot MY) = DX + DY$.

Отметим, что если с. в. X и Y *зависимы*, то

$$D(X+Y) = DX + DY + 2M((X - MX) \cdot (Y - MY)).$$

4. $D(c+X) = M((c+X) - M(c+X))^2 = M(X - MX)^2 = DX$.

Доказательство свойства 5 не приводим. ■

Свойства дисперсии, доказанные выше для дискретных случайных величин, остаются справедливыми и для непрерывных с. в.

Среднее квадратическое отклонение

Дисперсия DX имеет размерность квадрата с. в. X, что в сравнительных целях неудобно. Когда желательно, чтобы оценка разброса (рассеяния) имела размерность с. в., используют еще одну числовую характеристику — среднее квадратическое отклонение (сокращенно: с. к. о.).

Средним квадратическим отклонением или *стандартным отклонением* с. в. X называется квадратный корень из ее дисперсии, обозначают через σ_X (или σX, $\sigma[X]$, σ). Таким образом, по определению

$$\sigma_X = \sqrt{DX}. \tag{2.18}$$

Из свойств дисперсии вытекают соответствующие свойства с. к. о.: $\sigma c = 0$, $\sigma_{cX} = |c|\sigma_X$, $\sigma(c + X) = \sigma_X$.

Для изучения свойств случайного явления, независящих от выбора масштаба измерения и положения центра группирования, исходную случайную величину X приводят к некоторому стандартному виду: ее центрируют, т. е. записывают разность $X - MX$ (геометрически означает, что начало координат переносится в точку с абсциссой, равной м. о.), затем делят на с. к. о. σ_X.

Случайную величину $Z = \dfrac{X - MX}{\sigma_X}$ называют *стандартной случайной величиной*. Ее м. о. равно 0, а дисперсия равна 1. Действительно,

$$MZ = M\left(\frac{X - MX}{\sigma_X}\right) = \frac{1}{\sigma_X}M(X - MX) = 0,$$

$$DZ = \frac{1}{\sigma_X^2}D(X - MX) = \frac{DX}{\sigma_X^2} = \frac{DX}{DX} = 1.$$

То есть Z — *центрированная* ($MZ = 0$) и *нормированная* ($DZ = 1$) случайная величина.

Пример 2.5. Д. с. в. X задана рядом распределения.

X	-1	0	1	2
p	0,2	0,1	0,3	0,4

Найти MX, DX, σ_X.

❍ Используем формулы (2.9), (2.13), (2.18): $MX = -1 \cdot 0{,}2 + 0 \cdot 0{,}1 + 1 \cdot 0{,}3 + 2 \cdot 0{,}4 = 0{,}9$; $DX = (-1 - 0{,}9)^2 \cdot 0{,}2 + (0 - 0{,}9)^2 \cdot 0{,}1 + (1 - 0{,}9)^2 \cdot 0{,}3 + (2 - 0{,}9)^2 \cdot 0{,}4 = 1{,}29$ (или, используя формулу (2.16), $DX = (-1)^2 \cdot 0{,}2 + 0^2 \cdot 0{,}1 + 1^2 \cdot 0{,}3 + 2^2 \cdot 0{,}4 - (0{,}9)^2 = 1{,}29$); $\sigma_X = \sqrt{1{,}29} \approx 1{,}14$. ●

Мода и медиана. Моменты случайных величин. Асимметрия и эксцесс. Квантили

Модой д. с. в. X называется ее значение, принимаемое с наибольшей вероятностью по сравнению с двумя соседними значениями, обозначается через M_0X. Для н. с. в. M_0X — точка максимума (локального) плотности $f_X(x)$.

Если мода единственна, то распределение с. в. называется *унимодальным*, в противном случае — *полимодальным* (рис. 23).

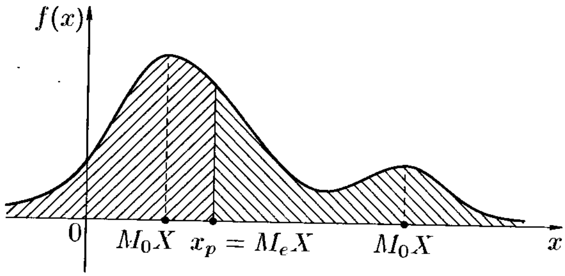


Рис. 23

Медианой M_eX н. с. в. X называется такое ее значение x_p, для которого

$$P\{X < x_p\} = P\{X > x_p\} = \frac{1}{2}, \tag{2.19}$$

т. е. одинаково вероятно, окажется ли с. в. X меньше x_p или больше x_p (рис. 23).

С помощью функции распределения $F(x)$ равенство (2.19) можно записать в виде $F(M_eX) = 1 - F(M_eX)$. Отсюда $F(M_eX) = \frac{1}{2}$.

Для д. с. в. медиана обычно не определяется.

Математическое ожидание и дисперсия являются частными случаями следующих более общих понятий — моментов с. в.

Начальным моментом порядка k с. в. X называется м. о. k-й степени этой величины, обозначается через α_k.

Таким образом, по определению

$$\alpha_k = M(X^k).$$

Для д. с. в. начальный момент выражается суммой:

$$\alpha_k = \sum_i x_i^k \cdot p_i,$$

а для н. с. в. — интегралом:

$$\alpha_k = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^k \cdot f(x)\,dx.$$

В частности, $\alpha_1 = MX$, т. е. начальный момент 1-го порядка есть м. о.

Центральным моментом порядка k с. в. X называется м. о. величины $(X - MX)^k$, обозначается через μ_k.

Таким образом, по определению

$$\mu_k = M(X - MX)^k.$$

В частности, $\mu_2 = DX$, т. е. центральный момент 2-го порядка есть дисперсия; $\mu_1 = M(X - MX) = 0$ (см. свойство 4 м. о.).

Для д. с. в.:

$$\mu_k = \sum_i (x_i - MX)^k \cdot p_i,$$

а для н. с. в.:

$$\mu_k = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x - MX)^k \cdot f(x)\,dx.$$

Центральные моменты могут быть выражены через начальные моменты. Так, $\mu_2 = DX = \alpha_2 - \alpha_1^2$ (действительно: $\mu_2 = DX = MX^2 - (MX)^2 = \alpha_2 - \alpha_1^2$); $\mu_3 = \alpha_3 - 3\alpha_1\alpha_2 + 2\alpha_1^3$, $\mu_4 = \alpha_4 - 4\alpha_1\alpha_3 + 6\alpha_1^2\alpha_2 - 3\alpha_1^4$ и т. д.

Среди моментов высших порядков особое значение имеют центральные моменты 3-го и 4-го порядков, называемых соответственно коэффициентами асимметрии и эксцесса.

Коэффициентом асимметрии («скошенности») A с. в. X называется величина

$$A = \frac{\mu_3}{\sigma_X^3} = \frac{M(X - MX)^3}{(DX)^{\frac{3}{2}}}.$$

Если $A > 0$, то кривая распределения более полога справа от M_0X (рис. 24).

Если $A < 0$, то кривая распределения более полога слева от M_0X (рис. 25).

Коэффициентом эксцесса («островершинности») E с. в. X называется величина

$$E = \frac{\mu_4}{\sigma_X^4} - 3 = \frac{M(X - MX)^4}{(DX)^2} - 3.$$

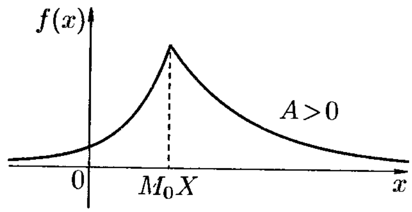


Рис. 24

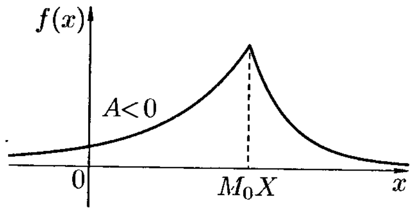


Рис. 25

Величина E характеризует островершинность или плосковершинность распределения. Для нормального закона распределения (см. п. 2.7) $A = 0$ и $E = 0$; остальные распределения сравниваются с нормальным: если $E > 0$ — более островершинные, а распределения «плосковершинные» имеют $E < 0$ (рис. 26).

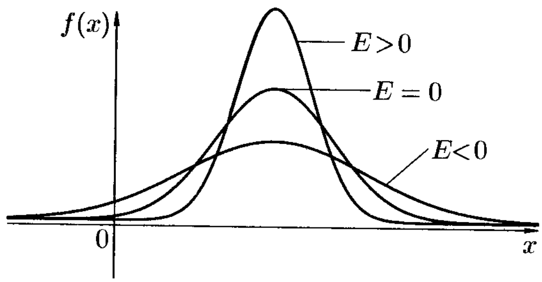


Рис. 26

Кроме рассмотренных выше числовых характеристик с. в., в приложениях используются так называемые квантили.

Квантилью уровня p с. в. X называется решение уравнения

$$F_X(x_p) = p,$$

где p — некоторое число, $0 < p < 1$.

Квантили $x_{0,25}$, $x_{0,5}$ и $x_{0,75}$ имеют свои названия: *нижняя квартиль*, *медиана* ($M_eX = x_{0,5}$), *верхняя квартиль* соответственно. Они делят числовую прямую на 4 части, вероятности попадания в которые равны 0,25 (рис. 27).

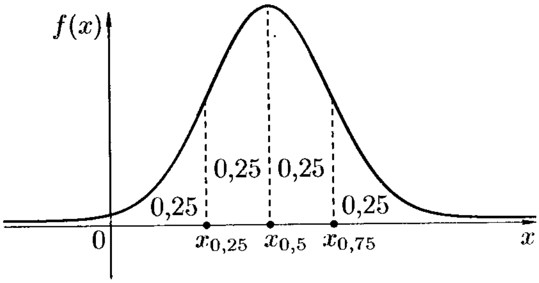


Рис. 27

Упражнения

1. Производится 3 независимых выстрела по цели. Вероятности попадания при разных выстрелах одинаковы и равны $p = 0{,}9$. Найти м. о. числа попаданий. Решить задачу в случае, если вероятности попадания при разных выстрелах различны: а) $p_1 = 0{,}7$, б) $p_2 = 0{,}8$, в) $p_3 = 0{,}9$.

2. Непрерывная случайная величина задана плотностью распределения

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leqslant 0 \text{ и } x > \pi, \\ \frac{1}{2}\sin x, & \text{при } 0 < x \leqslant \pi. \end{cases}$$

Найти математическое ожидание случайной величины X.

3. Пусть X и Y — независимые д. с. в., причем $MX = 2$, $MY = -3$, $DX = 2$, $DY = 9$. Найти MZ и DZ, если $Z = 5X - 3Y + 2$.

4. По условию упражнения 2 найти DX и σ_X.

5. С. в. X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leqslant A, \\ 0{,}25x^2, & \text{при } A < x \leqslant B, \\ 1, & \text{при } B < x. \end{cases}$$

Найти значения A и B, MX и σ_X.

6. Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — последовательность независимых с. в. с $MX_i = a$ и $DX_i = \sigma^2$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Найти м. о. и дисперсию среднего арифметического n независимых с. в. X_i.

2.6. Производящая функция

Нахождение важнейших числовых характеристик д. с. в. с целыми неотрицательными значениями удобно производить с помощью производящих функций.

Пусть д. с. в. X принимает значения $0, 1, 2, \dots, k, \dots$ с вероятностями $p_0, p_1, p_2, \dots, p_k = P\{X = k\}, \dots$.

Производящей функцией для д. с. в. X называется функция вида

$$\varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k \cdot z^k = p_0 + p_1 z + p_2 z^2 + \dots, \tag{2.20}$$

где z — произвольный параметр, $0 < z \leqslant 1$.

Отметим, что коэффициентами степенного ряда (2.20) являются вероятности закона распределения д. с. в. X.

Дифференцируя по z производящую функцию, получим

$$\varphi'(z) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot p_k \cdot z^{k-1}.$$

Тогда

$$\varphi'(1) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot p_k = MX = \alpha_1,$$

т. е.

$$\alpha_1 = MX = \varphi'(1). \tag{2.21}$$

Взяв вторую производную функции $\varphi(z)$ и положив в ней $z = 1$, получим:

$$\varphi''(z) = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) \cdot p_k \cdot z^{k-2}, \quad \varphi''(1) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \cdot p_k - \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot p_k = \alpha_2 - \alpha_1,$$

где α_2 и α_1 — начальные моменты соответственно 2-го и 1-го порядков ($\alpha_2 = MX^2$, $\alpha_1 = MX$). Тогда $DX = MX^2 - (MX)^2 = \alpha_2 - \alpha_1^2 = (\alpha_2 - \alpha_1) + \alpha_1 - \alpha_1^2 = \varphi''(1) + \varphi'(1) - (\varphi'(1))^2$, т. е.

$$DX = \varphi''(1) + \varphi'(1) - (\varphi'(1))^2. \tag{2.22}$$

Полученные формулы (2.21) и (2.22) используются для нахождения м. о. и дисперсии рассматриваемого распределения.

Пример 2.6. Найти дисперсию с. в. X — числа попаданий в упражнении 1 (п. 2.5).

❍ Ряд распределения с. в. X:

X	0	1	2	3
p	0,01	0,027	0,243	0,729

Найдем DX, используя формулу (2.22). Производящая функция $\varphi(z) = 0{,}01+0{,}027z+0{,}243z^2+0{,}729z^3$. Тогда $\varphi'(z) = 0{,}027+0{,}486z+2{,}187z^2$. Полагая $z = 1$, находим $\varphi'(1) = 2{,}7 = MX$ (упражнение 1 из п. 2.5). $\varphi''(z) = 0{,}486+4{,}374z$. Поэтому $\varphi''(1) = 4{,}46$ и $DX = 4{,}86+2{,}7-(2{,}7)^2 = 0{,}27$ (формула (2.22)).

Аналогично решаем во втором случае, когда вероятности при разных выстрелах различны (п. 1.20, пример 1.31). $\varphi(z) = 0{,}006 + 0{,}092z + 0{,}398z^2 + 0{,}504z^3$. $\varphi'(z) = 0{,}092 + 0{,}796z + 1{,}512z^2$, $\varphi'(1) = 2{,}4 = MX$. $\varphi''(z) = 0{,}796+3{,}024z$, $\varphi''(1) = 3{,}82$. Поэтому $DX = 3{,}82+2{,}4-(2{,}4)^2 = 0{,}46$. ●

2.7. Основные законы распределения случайных величин

Биномиальный закон распределения

Среди законов распределения д. с. в. наиболее распространенным является биномиальное распределение, с которым мы уже встречались (п. 1.20).

Дискретная с. в. X имеет *биномиальное распределение* (или *распределена по биномиальному закону*), если она принимает значения $0, 1, 2, 3, \dots, n$, с вероятностями:

$$p_m = P\{X = m\} = C_n^m p^m q^{n-m}, \tag{2.23}$$

где $0 < p < 1$, $q = 1 - p$, $m = 0, 1, \dots, n$.

Случайная величина X, распределенная по биномиальному закону, является числом успехов с вероятностью p в схеме Бернулли проведения n независимых опытов.

Если требуется вычислить вероятность «не менее m успехов в n независимых опытах», т. е. $P\{X \geqslant m\}$, то имеем : $P_m = P\{X \geqslant m\} = P\{X = m\}+P\{X = m+1\}+\ldots+P\{X = n\}$. Вероятность P_m бывает удобно находить через вероятность противоположного события: $P_m = P\{X \geqslant m\} = 1 - P\{X < m\}$; та из двух формул лучше, где меньше слагаемых.

Ряд распределения д. с. в. X, имеющей биномиальное распределение, имеет вид:

$X = m$	0	1	2	...	m	...	n
$p_m = P\{X = m\}$	q^n	$C_n^1 p^1 q^{n-1}$	$C_n^2 p^2 q^{n-2}$	...	$C_n^m p^m q^{n-m}$	...	p^n

Контроль: $\sum\limits_{m=0}^{n} p_m = (p+q)^n = 1$.

Функция распределения с. в. X, распределенной по биномиальному закону, имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leqslant 0 \\ \sum\limits_{m<x} C_n^m p^m q^{n-m}, & \text{при } 0 < x \leqslant n \\ 1, & \text{при } n < x. \end{cases}$$

Найдем числовые характеристики этого распределения. Производящей функцией биномиального распределения является

$$\varphi(z) = \sum_{m=0}^{n} C_n^m p^m q^{n-m} z^m = \sum_{m=0}^{n} C_n^m (pz)^m q^{n-m} = (q+pz)^n,$$

т. е. $\varphi(z) = (q+pz)^n$. Тогда

$$\varphi'(z) = n(q+pz)^{n-1}p, \qquad \varphi''(z) = n(n-1)p^2(q+pz)^{n-2}.$$

Следовательно (см. п. 2.6), $MX = \varphi'(1) = np$, т. к. $p + q = 1$, $DX = \varphi''(1) + \varphi'(1) - (\varphi'(1))^2 = n(n-1)p^2 + np - n^2p^2 = npq$. Итак,

$$MX = np, \qquad DX = npq. \tag{2.24}$$

Эти формулы полезно знать.

Пример 2.7. По условию упражнения 1 из п. 2.5 найти MX и DX, где X — число попаданий в цель.

○ С. в. X имеет биномиальное распределение. Здесь $n = 3$, $p = 0{,}9$, $q = 0{,}1$. По формулам (2.24) находим MX и DX: $MX = 3 \cdot 0{,}9 = 2{,}7$, $DX = 3 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1 = 0{,}27$. ●

Распределение Пуассона

Дискретная случайная величина X имеет *распределение Пуассона*, если ее возможные значения: $0, 1, 2, \ldots, m, \ldots$ (счетное множество значений), а соответствующие вероятности выражаются формулой Пуассона

$$p_m = P\{X = m\} = \frac{a^m \cdot e^{-a}}{m!}, \tag{2.25}$$

где $m = 0, 1, 2, \ldots$, a — параметр.

Распределение Пуассона является предельным для биномиального, когда $n \to \infty$ и $p \to 0$ так, что $np = a$ — постоянно. Примерами случайных величин, имеющих распределение Пуассона, являются: число вызовов на телефонной станции за время t; число опечаток в большом тексте; число бракованных деталей в большой партии; число α-частиц, испускаемых радиоактивным источником, и т. д. При этом считается, что события появляются независимо друг от друга с постоянной *средней интенсивностью*, характеризующейся параметром $a = np$.

Случайная величина X, распределенная по закону Пуассона, имеет следующий ряд распределения

$X = m$	0	1	2	$\ldots$	m	$\ldots$
p_m	e^{-a}	$\frac{a \cdot e^{-a}}{1!}$	$\frac{a^2 \cdot e^{-a}}{2!}$	$\ldots$	$\frac{a^m \cdot e^{-a}}{m!}$	$\ldots$

Контроль: $\sum\limits_{m=0}^{\infty} p_m = e^{-a} \sum\limits_{m=0}^{\infty} \frac{a^m}{m!} = e^{-a} \cdot e^a = 1.$

Найдем м. о. и дисперсию с. в. X, распределенной по закону Пуассона. Производящей функцией распределения Пуассона будет

$$\varphi(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a^m \cdot e^{-a}}{m!} z^m = e^{-a} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(az)^m}{m!} = e^{-a} \cdot e^{az} = e^{a(z-1)},$$

т. е. $\varphi(z) = e^{a(z-1)}$. Тогда $\varphi'(z) = a \cdot e^{a(z-1)}$, $\varphi''(z) = a^2 \cdot e^{a(z-1)}$. Стало быть, $MX = \varphi'(1) = a$, $DX = \varphi''(1) + \varphi'(1) - (\varphi'(1))^2 = a^2 + a - a^2 = a$. Итак,

$$MX = DX = a, \tag{2.26}$$

т. е. параметр a пуассоновского распределения равен одновременно м. о. и дисперсии с. в. X, имеющей это распределение. В этом состоит отличительная особенность изучаемого распределения, которая используется на практике (на основании опытных данных находят оценки для м. о. и дисперсии; если они близки между собой, то есть основание считать, что с. в. распределена по закону Пуассона).

Пример 2.8. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,01. Какова вероятность того, что число попаданий при 200 выстрелах составит не менее 5 и не более 10?

❍ Вероятность $p = 0{,}01$ очень мала, а число выстрелов (опытов) достаточно велико. Поэтому искомую вероятность будем находить, используя формулу Пуассона. С. в. X — число попаданий. Требуется найти $P\{5 \leqslant X \leqslant 10\}$. По теореме сложения вероятностей $P\{5 \leqslant X \leqslant 10\} = P\{X = 5\} + P\{X = 6\} + \ldots + P\{X = 10\}$. Имеем: $a = np = 200 \cdot 0{,}01 = 2$. $e^{-a} = e^{-2} \approx 0{,}135$,

$$P\{5 \leqslant X \leqslant 10\} = 0{,}135 \left(\frac{2^5}{5!} + \frac{2^6}{6!} + \frac{2^7}{7!} + \frac{2^8}{8!} + \frac{2^9}{9!} + \frac{2^{10}}{10!}\right) \approx 0.053. \quad \bullet$$

Геометрическое распределение

Дискретная с. в. X имеет *геометрическое распределение*, если ее возможные значения: 1,2,3,4,..., а вероятности этих значений:

$$p_m = P\{X = m\} = q^{m-1}p, \tag{2.27}$$

где $m = 1, 2, 3, \ldots$.

Геометрическое распределение имеет с. в. X, равная числу опытов в схеме Бернулли, проведенных до первого успеха, с вероятностью успеха p в единичном опыте. Примерами реальных случайных величин, распределенных по геометрическому закону, являются: число выстрелов до первого попадания, число испытаний прибора до первого отказа, число бросаний монеты до первого выпадения решки и т. д.

Ряд распределения случайной величины X, имеющей геометрическое распределение, имеет вид

$X = m$	1	2	3	...
p_m	p	qp	q^2p	...

Контроль: $\sum\limits_{m=1}^{\infty} pq^{m-1} = p \sum\limits_{m=1}^{\infty} q^{m-1} = p \cdot \dfrac{1}{1-q} = \dfrac{p}{p} = 1$.

Вероятности p_m образуют геометрическую прогрессию p, qp, q^2p, q^3p, ... По этой причине распределение (2.27) называют *геометрическим*.

Найдем математическое ожидание и дисперсию геометрического распределения. Производящей функцией для с. в. X является функция

$$\varphi(z) = \sum_{m=1}^{\infty} q^{m-1}pz^m = pz\sum_{m=1}^{\infty}(qz)^{m-1} = pz\frac{1}{1-qz},$$

т. е. $\varphi(z) = \frac{pz}{1-qz}$. Для нее $\varphi'(z) = \frac{p}{(1-qz)^2}$, $\varphi''(z) = \frac{2pq}{(1-qz)^3}$. Стало быть,

$$\begin{aligned} MX &= \varphi'(1) = \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}, \\ DX &= \varphi''(1) + \varphi'(1) - (\varphi'(1))^2 = \frac{2pq}{p^3} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{q}{p^2}, \end{aligned} \tag{2.28}$$

т. е. $MX = \frac{1}{p}$, $DX = \frac{q}{p^2}$ и, значит, $\sigma_X = \frac{\sqrt{q}}{p}$.

Пример 2.9. Вероятность попадания в цель при отдельном выстреле для данного стрелка равна 0,1. Найти математическое ожидание и дисперсию с. в. X — числа выстрелов по цели до первого попадания.

○ С. в. X имеет геометрическое распределение с параметром $p = 0{,}1$. По формулам (2.28): $MX = \frac{1}{0{,}1} = 10$, $DX = \frac{0{,}9}{(0{,}1)^2} = 90$ ($\sigma_X = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$). ●

Замечание. Геометрическое распределение является частным случаем так называемого *распределения Паскаля*: $P\{X = m\} = C_{r+m-1}^{r-1}p^r q^{m-1}$, $m = 1, 2, 3, \ldots$, $r > 0$ — целое; $MX = \frac{r}{p}$, $DX = \frac{rq}{p^2}$.

При $r = 1$ распределение Паскаля совпадает с геометрическим; при $r > 1$ — совпадает с распределением суммы независимых с. в., имеющих геометрическое распределение; при натуральном r оно описывает число опытов в схеме Бернулли, необходимых для того, чтобы получить значение 1 ровно r раз. Распределение Паскаля имеет приложение к статистике несчастных случаев и заболеваний и т. д.

Гипергеометрический закон распределения

Дискретная с. в. X имеет *гипергеометрическое распределение*, если она принимает значения 0.1.2...,m,...,$\min(n, M)$ с вероятностями

$$p_m = P\{X = m\} = \frac{C_M^m \cdot C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}, \tag{2.29}$$

где $m = 0, 1, \ldots, \min(n, M)$, $M \leqslant N$, $m \leqslant n$, $n \leqslant N$; n, M, N — натуральные числа.

Гипергеометрическое распределение возникает в случаях, подобных следующему: в урне N шаров, из них M белых, а остальные черные; из нее вынимается n шаров. Требуется найти вероятность того, что среди извлеченных шаров будет ровно m белых (остальные черные). Случайная величина X — число белых шаров среди извлеченных из урны.

В п. 1.7 разобран пример 1.6 подобного типа.

Математические ожидания д. с. в. X, имеющей гипергеометрическое распределение, есть

$$MX = n \cdot \frac{M}{N}, \tag{2.30}$$

а ее дисперсия

$$DX = n \cdot \frac{M}{N-1} \cdot \frac{(N-M)(N-n)}{N^2}. \tag{2.31}$$

Гипергеометрическое распределение определяется тремя параметрами N, M, n. Если n мало по сравнению с N (практически при $n < \frac{1}{10}N$), он приближается к биномиальному распределению с параметрами n и

$$p = \frac{M}{N} \quad \left(\frac{C_M^m \cdot C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n} \approx C_n^m \cdot p^m q^{n-m}\right).$$

Гипергеометрическое распределение используется при решении задач, связанных с контролем качества продукции (и других).

Пример 2.10. В группе из 21 студентов 5 девушек. Из этой группы наудачу отбирается 3 студента. Составить закон распределения д. с. в. X — числа девушек из отобранных студентов. Найти MX.

◐ С. в. X принимает значения 0,1,2,3. Вероятности этих значений находим по формуле (2.29): $p_0 = P\{X = 0\} = \frac{C_5^0 \cdot C_{16}^3}{C_{21}^3} \approx 0{,}4211$,

$p_1 = P\{X = 1\} = \dfrac{C_5^1 \cdot C_{16}^2}{C_{21}^3} \approx 0{,}4511$, $p_2 = P\{X = 2\} = \dfrac{C_5^2 \cdot C_{16}^1}{C_{21}^3} \approx 0{,}1203$,

$p_3 = P\{X = 3\} = \dfrac{C_5^3 \cdot C_{16}^0}{C_{21}^3} \approx 0{,}0075$. Ряд распределения:

$X = m$	0	1	2	3
p_m	0,4211	0.4511	0,1203	0,0075

Значение MX найдем двумя способами: а)по ряду распределения: $MX = 0 \cdot 0{,}4211 + 1 \cdot 0{,}4511 + 2 \cdot 0{,}1203 + 3 \cdot 0{,}0075 = 0{,}7142$; б)по формуле (2.30) $MX = 3 \cdot \frac{5}{21} = \frac{5}{7} \approx 0{,}7142$. ●

Равномерный закон распределения

Непрерывная с. в. X имеет *равномерное распределение* на отрезке $[a, b]$, если ее плотность вероятности $f(x)$ постоянна на этом отрезке, а вне его равна нулю:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & \text{при } x \in [a, b], \\ 0, & \text{при } x \notin [a, b], \end{cases} \tag{2.32}$$

(т. е. $f(x) = c$ при $x \in [a, b]$, но

$$\int_{-\infty}^{+\infty} c\,dx = 1,$$

отсюда следует, что $cx\Big|_a^b = 1$, $c = \dfrac{1}{b-a}$; вместо отрезка $[a, b]$ можно писать (a, b) или $(a, b]$, $[a, b)$, так как с. в. X — непрерывна.)

График плотности $f(x)$ для равномерного распределения н. с. в. X изображен на рис. 28.

Равномерное распределение с. в. X на участке $[a, b]$ (или (a, b)) будем обозначать: $X \sim R[a, b]$.

Найдем функцию распределения $F(x)$ для $X \sim R[a, b]$. Согласно формуле (см. п. 2.4)

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt,$$

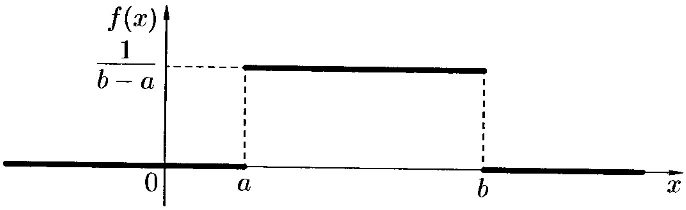


Рис. 28

имеем

$$F(x) = \int_a^x \frac{dt}{b-a} = \frac{t}{b-a}\Big|_a^x = \frac{x-a}{b-a}$$

при $a < x \leqslant b$; $F(x) = 0$ при $x \leqslant a$, и

$$F(x) = \int_{-\infty}^a 0\,dt + \int_a^b \frac{dt}{b-a} + \int_b^x 0\,dt = \frac{t}{b-a}\Big|_a^b = 1$$

при $x > b$. Таким образом,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leqslant a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & \text{при } a < x \leqslant b, \\ 1, & \text{при } b < x. \end{cases} \tag{2.33}$$

График $F(x)$ изображен на рис. 29.

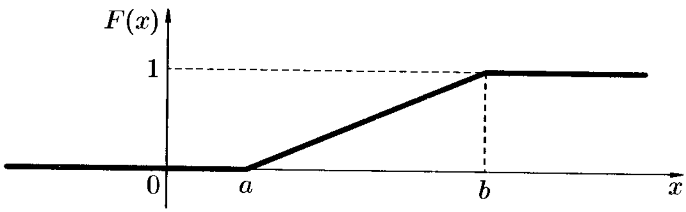


Рис. 29

Определим MX и DX с. в. $X \sim R[a,b]$.

Согласно формуле (2.11),

$$MX = \int_{-\infty}^a x\cdot 0\,dx + \int_a^b \frac{x}{b-a}\,dx + \int_b^{+\infty} x\cdot 0\,dx = \frac{a+b}{2}.$$

(Ожидаемый результат: математическое ожидание с. в. $X \sim R[a,b]$ равно абсциссе середины отрезка; MX совпадает с медианой, т. е. $MX = M_eX$.)

Согласно формуле (2.14),

$$DX = \int\limits_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 \cdot \frac{dx}{b-a} = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{1}{3}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^3 \Big|_a^b =$$

$$= \frac{1}{3(b-a)} \left(\frac{(b-a)^3}{8} - \frac{(a-b)^3}{8}\right) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Таким образом, для н. с. в. $X \sim R[a,b]$ имеем

$$MX = \frac{a+b}{2}, \quad DX = \frac{(b-a)^2}{12}. \tag{2.34}$$

Пример 2.11. Пусть с. в. $X \sim R(a,b)$. Найти вероятность попадания с. в. X в интервал (α,β), принадлежащий целиком интервалу (a,b).

○ Согласно формуле (2.8), имеем

$$P\{X \in (\alpha,\beta)\} = \int\limits_\alpha^\beta f(x)\,dx = \int\limits_\alpha^\beta \frac{1}{b-a}\,dx = \frac{\beta-\alpha}{b-a},$$

т. е. $P\{X \in (\alpha,\beta)\} = \dfrac{\beta-\alpha}{b-a}$.

Геометрически эта вероятность представляет собой площадь прямоугольника, заштрихованного на рис. 30. ●

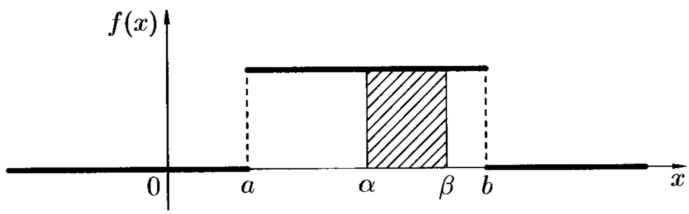


Рис. 30

К случайным величинам, имеющим равномерное распределение, относятся: время ожидания пассажиром транспорта, курсирующего с определенным интервалом; ошибка округления числа до целого (она равномерно распределена на отрезке $[-0{,}5; 0{,}5]$). И вообще случайные величины, о которых известно, что все ее значения лежат внутри некоторого интервала и все они имеют одинаковую вероятность (плотность).

Дискретная случайная величина X имеет равномерное распределение, если она принимает целочисленные значения 1, 2, 3, …, n с вероятностью $p_m = P\{X = m\} = \frac{1}{n}$, где $m = 1, 2, 3, \ldots, n$.

В этом случае $MX = \frac{1+n}{2}$, $DX = \frac{n^2-1}{12}$. Так, при $n = 5$, многоугольник распределения имеет вид, представленный на рис. 31. $MX = 3$.

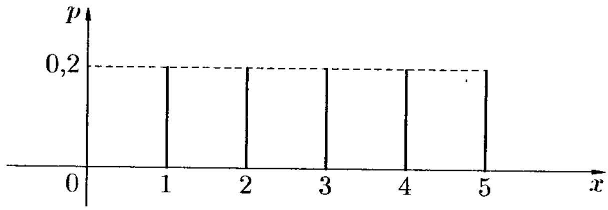


Рис. 31

Показательный закон распределения

Непрерывная случайная величина X имеет *показательный* (или *экспоненциальный*) закон распределения, если ее плотность вероятности имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{при } x \geqslant 0, \\ 0, & \text{при } x < 0. \end{cases} \tag{2.35}$$

где $\lambda > 0$ — параметр распределения.

График плотности $f(x)$ приведен на рис. 32.

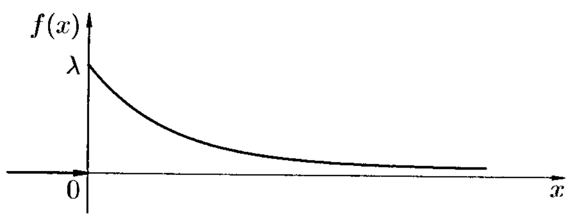


Рис. 32

Функция распределения показательного распределения имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & \text{при } x \geqslant 0, \\ 0, & \text{при } x < 0. \end{cases} \tag{2.36}$$

□ $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int\limits_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int\limits_{0}^{x} \lambda e^{-\lambda x}\,dt = 1 - e^{-\lambda x}.$ ■

График $F(x)$ представлен на рис. 33.

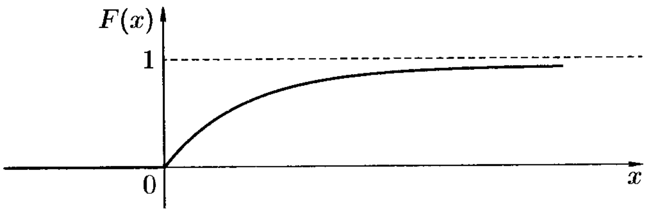


Рис. 33

Найдем математическое ожидание и дисперсию показательного распределения:

$$MX = \int\limits_{0}^{\infty} x\cdot\lambda e^{-\lambda x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int\limits_{0}^{b} x\cdot\lambda e^{-\lambda x}\,dx = [\text{интегрируем по частям}] =$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left(-x\cdot e^{-\lambda x}\Big|_0^b - \frac{1}{\lambda}\cdot e^{-\lambda x}\Big|_0^b\right) = 0 - \frac{1}{\lambda}(0-1) = \frac{1}{\lambda}.$$

$$DX = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx - (MX)^2 = [\text{формула (2.17)}] = \lambda\int\limits_{0}^{\infty} x^2 e^{-\lambda x}\,dx - \frac{1}{\lambda^2} =$$

$$= [\text{дважды интегрируем по частям}] =$$

$$= \lambda\left(\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{x^2}{\lambda}e^{-\lambda x} + \frac{2}{\lambda}\left(-\frac{x}{\lambda}e^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda^2}e^{-\lambda x}\right)\right)\Big|_0^b\right) - \frac{1}{\lambda^2} =$$

$$= \lambda\left(0 + \frac{2}{\lambda}\left(0 + 0 - \frac{1}{\lambda^2}(0-1)\right)\right) - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Таким образом,

$$MX = \frac{1}{\lambda}, \quad DX = \frac{1}{\lambda^2}, \quad \sigma_X = \frac{1}{\lambda}. \tag{2.37}$$

Найдем вероятность попадания случайной величины X, распределенной по показательному закону, в интервал (a,b). Используя формулу (2.2) и формулу (2.36), получаем

$$P\{a < X < b\} = F(b) - F(a) = (1 - e^{-\lambda b}) - (1 - e^{-\lambda a}) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b},$$

т. е. $P\{a < X < b\} = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$.

Пример 2.12. Случайная величина T — время работы радиолампы имеет показательное распределение. Найти вероятность того, что лампа проработает не менее 800 часов, если среднее время работы радиолампы 400 часов.

○ $MT = 400$, значит (формула (2.37)), $\lambda = \frac{1}{400}$. Искомая вероятность $P\{T \geqslant 800\} = 1 - P\{T < 800\} = 1 - F(800) = 1 - (1 - e^{-\frac{800}{400}}) = e^{-2} \approx 0{,}135$. ●

Показательное распределение используется в приложениях теории вероятностей, особенно в теории массового обслуживания (ТМО), в физике, в теории надежности. Оно используется для описания распределения случайной величины вида: длительность работы прибора до первого отказа, длительность времени обслуживания в системе массового обслуживания и т. д.

Рассмотрим, например, н.с.в. T — длительность безотказной работы прибора. Функция распределения с. в. T, т. е. $F(t) = P\{T < t\}$, определяет *вероятность отказа за время* длительностью t. И, значит, *вероятность безотказной работы за время* t равна $R(t) = P\{T > t\} = 1 - F(t)$. Функция $R(t)$ называется *функцией надежности.*

Случайная величина T часто имеет показательное распределение. Ее функция распределения имеет вид $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$ (формула (2.36)). В этом случае функция надежности имеет вид $R(t) = 1 - F(t) = 1 - (1 - e^{-\lambda t}) = e^{-\lambda t}$, т. е. $R(t) = e^{-\lambda t}$, где λ — *интенсивность отказов*, т. е. среднее число отказов в единицу времени.

Показательный закон — единственный из законов распределения, который обладает свойством «отсутствия последствия» (т. е. если промежуток времени T уже длился некоторое время τ, то показательный закон распределения остается таким же и для оставшейся части $T_1 = T - \tau$ промежутка).

Нормальный закон распределения

Нормальный закон («закон Гаусса») играет исключительную роль в теории вероятностей. Главная особенность закона Гаусса состоит в том, что он является *предельным* законом, к которому приближаются, при определенных условиях, другие законы распределения. Нормальный закон наиболее часто встречается на практике.

Непрерывная с. в. X распределена *по нормальному закону* с параметрами a и $\sigma > 0$, если ее плотность распределения имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in R. \tag{2.38}$$

Тот факт, что с. в. X имеет нормальное (или гауссовское) распределение с параметрами a и σ, сокращенно записывается так: $X \sim N(a, \sigma)$.

Убедимся, что $f(x)$ — это функция плотности. Очевидно, $f(x) > 0$. Проверим выполнение условия нормировки $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$. Имеем:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\,dx = \frac{\sigma \cdot \sqrt{2}}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{x-a}{\sqrt{2}\cdot\sigma}\right)^2} d\left(\frac{x-a}{\sqrt{2}\cdot\sigma}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \sqrt{\pi} = 1.$$

Здесь применили подстановку и использовали «интеграл Пуассона»

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}. \tag{2.39}$$

Из равенства (2.39) следует:

$$\int\limits_{0}^{\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad \int\limits_{0}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz = \sqrt{\frac{\pi}{2}} = \int\limits_{-\infty}^{0} e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz. \tag{2.40}$$

Функция распределения $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$ н. с. в. $X \sim N(a, \sigma)$ имеет вид

$$F(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}}\,dt. \tag{2.41}$$

Если $a = 0$ и $\sigma = 1$, то нормальное распределение с такими параметрами называется *стандартным*. Плотность стандартной случайной величины имеет вид

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

С ней мы уже встречались в п. 1.21, формула (1.37).

Функция распределения с. в. $X \sim N(0,1)$ имеет вид

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$$

и называется, как мы уже знаем (п. 1.21, формула (1.42)), *функцией Лапласа*. Она связана с нормированной функцией Лапласа $\Phi_0(x)$ (п. 1.21, формула (1.40)), как мы уже знаем (формула (1.43) п. 1.21), равенством

$$\Phi(x) = 0{,}5 + \Phi_0(x). \tag{2.42}$$

Действительно,

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2}} + \Phi_0(x) = \frac{1}{2} + \Phi_0(x).$$

(см. (2.40)).

Установим смысл параметров a и σ нормального распределения. Для этого найдем математическое ожидание и дисперсию с. в. $X \sim N(a,\sigma)$.

$$MX = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\, dx = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\, dx =$$
$$= \left[\text{подстановка } \frac{x-a}{\sqrt{2}\sigma} = t\right] = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\sqrt{2}\sigma t + a) e^{-t^2} \sqrt{2}\sigma\, dt =$$
$$= \frac{\sigma\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t e^{-t^2}\, dt + \frac{a}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\, dt = 0 + \frac{a}{\sqrt{\pi}} \cdot \sqrt{\pi} = a,$$

т. е. $MX = a$. Первый интеграл равен нулю, так как подынтегральная функция нечетная, а пределы интегрирования симметричны относительно нуля, а второй интеграл равен $\sqrt{\pi}$ (см. равенство (2.39)). Таким образом, параметр a — математическое ожидание.

При нахождении дисперсии с. в. $X \sim N(a,\sigma)$ снова сделаем подстановку $\frac{x-a}{\sqrt{2}\sigma} = t$ и применим метод интегрирования по частям:

$$DX = \int_{-\infty}^{\infty} (x-a)^2 f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} (x-a)^2 \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\,dx =$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} 2\sigma^2 t^2 e^{-t^2} \sigma\sqrt{2}\,dt = \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t^2 e^{-t^2}\,dt =$$

$$= \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \left(-\frac{1}{2} t e^{-t^2} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\,dt \right) = \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{\pi} = \sigma^2.$$

Таким образом, $DX = \sigma^2$, а σ — среднее квадратичное отклонение.

Можно показать, что для с. в. $X \sim N(a,\sigma)$: $M_0 X = M_e X = a$. $A = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = 0$, $E = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 = 0$.

Исследуем дифференциальную функцию (2.38) нормального закона:

1. $f(x) > 0$ при любом $x \in (-\infty, \infty)$; график функции расположен выше оси Ox.
2. Ось Ox служит асимптотой графика функции $f(x)$, так как $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$.
3. Функция $f(x)$ имеет один максимум при $x = a$, равный $f(a) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$. Действительно,

$$f'(x) = -\frac{(x-a)}{\sigma^3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Отсюда $f'(x) = 0$ при $x = a$, при этом: если $x < a$, то $f'(x) > 0$, а если $x > a$, то $f'(x) < 0$. Это и означает, что $x = a$ точка максимума и $f_{\max} = f(a) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$.

4. График функции $f(x)$ симметричен относительно прямой $x = a$, так как аналитическое выражение $f(x)$ содержит разность $x - a$ в квадрате.
5. Можно убедиться, что точки

$$M_1\left(a - \sigma, \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}}\right) \quad \text{и} \quad M_2\left(a + \sigma, \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}}\right)$$

являются точками перегиба графика функции $f(x)$.

Пользуясь результатами исследования, строим график плотности распределения вероятности нормального закона — кривую распределения, называемую *нормальной кривой*, или *кривой Гаусса* (рис. 34).

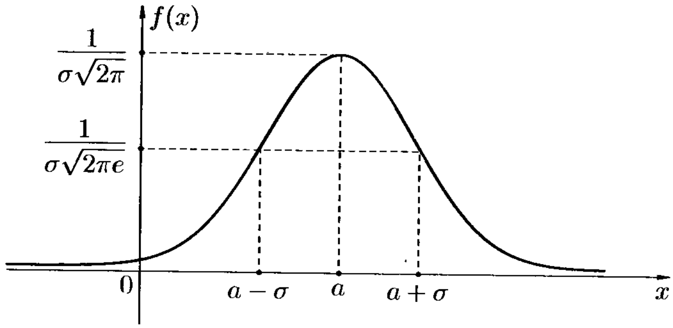


Рис. 34

Как влияет изменение параметров a и σ на форму кривой Гаусса? Очевидно, что изменение a не изменяет форму нормальной кривой (графики функции $f(x)$ и $f(x-a)$ имеют одинаковую форму; график $f(x-a)$ получается из графика функции $f(x)$ путем сдвига последнего на a единиц вправо, если $a > 0$, и влево, если $a < 0$). С изменением σ максимальная ордината точки кривой изменяется. Так как площадь, ограниченная кривой распределения, равна единице при любом значении σ, то с возрастанием σ кривая Гаусса становится более пологой, растягивается вдоль оси Ox ....

На рис. 35 изображены нормальные кривые при различных значениях σ ($\sigma_1 < \sigma < \sigma_2$) и некотором значении a (одинаковом для всех трех кривых).

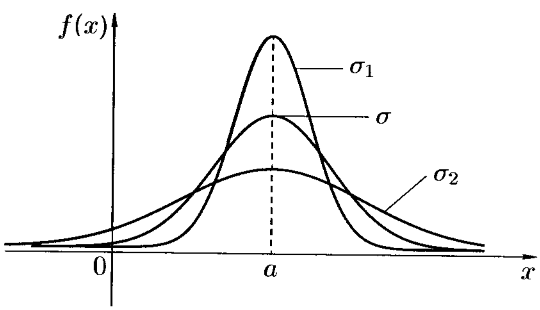


Рис. 35

Нормальному закону подчиняются ошибки измерений, величины износа деталей в механизмах, рост человека, ошибки стрельбы, вес клубней картофеля, величина шума в радиоприемном устройстве, колебания курса акций и т. д.

Найдем *вероятность попадания с. в.* $X \sim N(a, \sigma)$ *на заданный участок* (α, β). Как было показано,

$$P\{a < X < b\} = \int_a^b f(x)\,dx$$

(п. 2.4, формула (2.8)). В случае нормального распределения

$$P\{\alpha < X < \beta\} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_\alpha^\beta e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\,dx = \left[\frac{x-a}{\sigma} = t\right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\alpha-a}{\sigma}}^{\frac{\beta-a}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\frac{\beta-a}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\frac{\alpha-a}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt.$$

Используя функцию Лапласа (см. п. 1.21, формула (1.40))

$$\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt,$$

получаем

$$P\{\alpha < X < \beta\} = \Phi_0\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right). \tag{2.43}$$

Через функцию Лапласа $\Phi_0(x)$ выражается и функция распределения $F(x)$ нормально распределенной с. в. X.

$$F(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}}\,dt = P\{-\infty < X < x\} =$$

$$= \Phi_0\left(\frac{x-a}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(\frac{-\infty-a}{\sigma}\right) = \Phi_0\left(\frac{x-a}{\sigma}\right) + \frac{1}{2},$$

т. е.

$$F(x) = \frac{1}{2} + \Phi_0\left(\frac{x-a}{\sigma}\right). \tag{2.44}$$

Здесь воспользуемся формулой (2.43), нечетностью функции $\Phi_0(x)$ и тем, что $\Phi_0(\infty) = \frac{1}{2}$, действительно

$$\Phi_0(\infty) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}.$$

Если функция Лапласа (или «интеграл вероятностей») есть

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt,$$

то

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right) \tag{2.45}$$

(непосредственно вытекает из равенств (2.42)) и (2.44)).

Равенство (2.43) можно переписать и так:

$$P\{\alpha < X < \beta\} = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right). \tag{2.46}$$

На практике часто приходиться вычислять *вероятность попадания нормально распределенной случайной величины в интервал, симметричный относительно центра рассеяния* a. Пусть таким интервалом будет $(a - l, a + l)$ длины $2l$. Тогда $P\{a - l < X < a + l\} = P\{|X - a| < l\} = \Phi_0\left(\frac{a+l-a}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(\frac{a-l-a}{\sigma}\right) = 2\Phi_0\left(\frac{l}{\sigma}\right)$, т. е.

$$P\{|X - a| < l\} = 2\Phi_0\left(\frac{l}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{l}{\sigma}\right) - 1. \tag{2.47}$$

Полагая в равенстве (2.47) $l = 3\sigma$, получим $P\{|X - a| < 3\sigma\} = 2\Phi_0(3)$. По таблице значений для $\Phi_0(x)$ находим: $\Phi_0(3) = 0.49865$. Следовательно, $P\{|X - a| < 3\sigma\} \approx 0.9973$, т. е. отклонение с. в. X от своего математического ожидания меньше, чем 3σ – почти достоверное событие.

Важный вывод: практически достоверно, что с. в. $X \sim N(a, \sigma)$ принимает свои значения в промежутке $(a - 3\sigma, a + 3\sigma)$. Это утверждение называется «*правилом трех сигм*».

Пример 2.13. При измерении детали получаются случайные ошибки, подчиненные нормальному закону с параметром $\sigma = 10$ мм. Производится 3 независимых измерения детали. Найти вероятность того, что ошибка хотя бы одного измерения не превосходит по модулю 2 мм.

❍ По формуле (2.47) находим:

$$P\{|X - a| < 2\} = 2\Phi_0\left(\frac{2}{10}\right) \approx 2 \cdot 0{,}07926 = 0{,}15852.$$

Вероятность того, что эта ошибка (погрешность) превышает 2 мм в одном опыте (измерении), равна

$$P\{|X - a| > 2\} = 1 - P\{|X - a| < 2\} = 0{,}84148.$$

По теореме умножения вероятность того, что во всех трех опытах ошибка измерения превышает 2 мм. равна $0{,}84148^3 \approx 0{,}5958$. Следовательно, искомая вероятность равна $1 - 0{,}5958 = 0{,}4042$. ●

Упражнения

1. Известно, что с. в. $X \sim N(3, 2)$. Найти

$$P\{-3 < X < 5\}, \quad P\{X \leqslant 4\}, \quad P\{|X - 3| < 6\}.$$

2. Нормально распределенная с. в. X задана плотностью вероятностей

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Найти: а) вероятность попадания с. в. в интервал $(1, 3)$; б) симметричный относительно математического ожидания интервал, в который с вероятностью 0,8926 попадет с. в. X в результате опыта; в) $M_0 X$ и $M_e X$. Построить нормальную кривую $f(x)$.

3. Найти коэффициенты асимметрии и эксцесса нормального распределения с параметром $a = 0$.

Глава 3
Системы случайных величин

3.1. Понятие о системе случайных величин и законе ее распределения

При изучении случайных явлений часто приходится иметь дело с двумя, тремя и большим числом случайных величин. Совместное рассмотрение нескольких случайных величин приводит к системам случайных величин. Так, точка попадания снаряда характеризуется системой (X, Y) двух случайных величин: абсциссой X и ординатой Y; успеваемость наудачу взятого абитуриента характеризуется системой n случайных величин $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ — оценками, проставленными в его аттестате зрелости.

Упорядоченный набор $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ случайных величин X_i ($i = \overline{1, n}$), заданных на одном и том же ПЭС Ω, называется *n-мерной случайной величиной* или *системой n случайных величин.*

Одномерные с. в. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ называются *компонентами* или *составляющими* n-мерной с. в. $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$. Их удобно рассматривать как координаты случайной точки или случайного вектора $\bar{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ в пространстве n измерений.

На многомерные случайные величины распространяются почти без изменений основные понятия и определения, относящиеся к одномерным случайным величинам. Ограничимся для простоты рассмотрением системы двух случайных величин; основные понятия обобщаются на случай большего числа компонент.

Упорядоченная пара (X, Y) двух случайных величин X и Y называется *двумерной случайной величиной* или *системой двух одномерных случайных величин* X и Y.

Систему (X, Y) можно изобразить *случайной точкой* $M(X, Y)$ или *случайным вектором* OM (рис. 36 и 37).

Система (X, Y) есть функция элементарного события: $(X, Y) = \varphi(w)$. Каждому элементарному событию w ставится в соответствие два действительных числа x и y (или x_1 и x_2) — значения X и Y (или X_1 и X_2) в данном опыте. В этом случае вектор $\bar{x} = (x_1, x_2)$ называется *реализацией* случайного вектора $\bar{X} = (X_1, X_2)$.

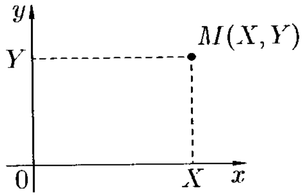


Рис. 36

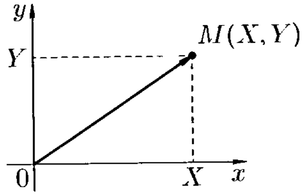


Рис. 37

Пример 3.1. Бросаются две игральные кости. Пусть с. в. X — число выпавших очков на первой кости, с. в. Y — на второй; ПЭС состоит из 36 элементов: $\Omega = \{(1,1),(1,2),\ldots,(1,6),(2,1),(2,2),\ldots,(6,4),(6,5),(6,6)\}$. Элементарному событию, например, $(6,5) = w_{65}$ соответствует пара чисел $x = 6$ и $y = 5$. Совокупность этих значений — функция элементарного события w.

Системы случайных величин могут быть *дискретными*, *непрерывными* и *смешанными* в зависимости от типа случайных величин, образующих систему. В первом случае компоненты этих случайных систем дискретны, во втором — непрерывны, в третьем — разных типов.

Полной характеристикой системы (X,Y) является ее *закон распределения вероятностей*, указывающий область возможных значений системы случайных величин и вероятности этих значений. Как и для отдельных случайных величин закон распределения системы может иметь разные формы (таблица, функция распределения, плотность, ...).

Так, закон распределения дискретной двумерной с. в. (X,Y) можно задать формулой

$$p_{ij} = P\{X = x_i, Y = y_j\}, \qquad i = \overline{1,n}, \quad j = \overline{1,m} \tag{3.1}$$

или в форме таблицы с двойным входом:

$X \diagdown Y$	y_1	y_2	y_3	$\cdots$	y_m
x_1	p_{11}	p_{12}	p_{13}	$\cdots$	p_{1m}
x_2	p_{21}	p_{22}	p_{23}	$\cdots$	p_{2m}
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
x_n	p_{n1}	p_{n2}	p_{n3}	$\cdots$	p_{nm}

Причем, сумма всех вероятностей p_{ij}, как сумма вероятностей полной группы несовместных событий $\{X = x_i, Y = y_j\}$, равна единице:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p_{ij} = 1.$$

На рис. 38 приведен примерный график распределения двумерной дискретной случайной величины (X, Y).

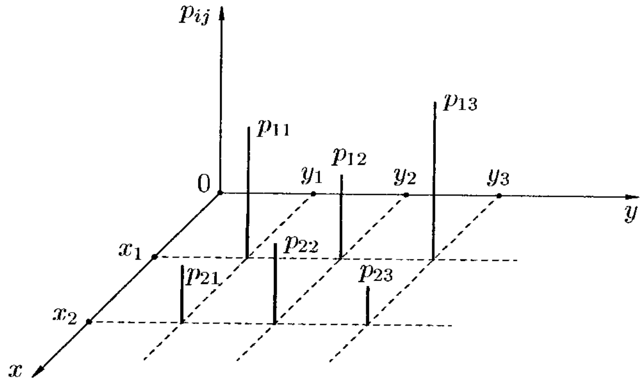


Рис. 38

Зная закон распределения двумерной дискретной случайной величины, *можно найти законы распределения каждой из компонент* (обратное, вообще говоря, неверно). Так, $p_{x_1} = P\{X = x_1\} = p_{11} + p_{12} + \ldots + p_{1m}$, что следует из теоремы сложения несовместных событий $\{X = x_1, Y = y_1\}$, $\{X = x_1, Y = y_2\}$, ..., $\{X = x_1, Y = y_m\}$. Аналогично можно найти

$$p_{x_i} = P\{X = x_i\} = \sum_{j=1}^{m} p_{ij}, \qquad p_{y_j} = P\{Y = y_j\} = \sum_{i=1}^{n} p_{ij}.$$

Пример 3.2. В урне 4 шара: 2 белых, 1 черный, 1 синий. Из нее наудачу извлекают два шара. Пусть с. в. X — число черных шаров в выборке, с. в. Y — число синих шаров в выборке. Составить закон распределения для системы (X, Y). Найти законы распределения X и Y.

○ С. в. X может принимать значения 0, 1; с. в. Y — значения 0, 1. Вычислим соответствующие вероятности: $p_{11} = P\{X = 0, Y = 0\} = \frac{C_2^2}{C_4^2} = \frac{1}{6}$ (или: $\frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$); $p_{12} = P\{X = 0, Y = 1\} = \frac{C_2^1}{C_4^2} = \frac{2}{6}$; $p_{21} = P\{X = 1, Y = 0\} = \frac{2}{6}$; $p_{22} = P\{X = 1, Y = 1\} = \frac{1}{6}$. Таблица распределения системы (X, Y) имеет вид:

$X \diagdown Y$	0	1
0	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$
1	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$

Отсюда следует: $P\{X = 0\} = \frac{1}{6} + \frac{2}{6} = \frac{1}{2}$, $P\{X = 1\} = \frac{2}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$; $P\{Y = 0\} = \frac{1}{6} + \frac{2}{6} = \frac{1}{2}$, $P\{Y = 1\} = \frac{2}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$. Законы распределения составляющих X и Y имеют вид:

X	0	1
p	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

и

Y	0	1
p	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

●

3.2. Функция распределения двумерной случайной величины и ее свойства

Универсальной формой задания распределения двумерной случайной величины является функция распределения (или «интегральная функция»), пригодная как для дискретной, так и для непрерывной случайной величины, обозначаемая $F_{X,Y}(x, y)$ или просто $F(x, y)$.

Функцией распределения двумерной случайной величины (X, Y) называется функция $F(x, y)$, которая для любых действительных чисел x и y равна вероятности совместного выполнения двух событий $\{X < x\}$ и $\{Y < y\}$.

Таким образом, по определению

$$F(x, y) = P\{X < x, Y < y\} \tag{3.2}$$

(событие $\{X < x, Y < y\}$ означает произведение событий $\{X < x\}$ и $\{Y < y\}$).

Геометрически функция $F(x, y)$ интерпретируется как вероятность попадания случайной точки (X, Y) в бесконечный квадрант с вершиной в точке (x, y), лежащий левее и ниже ее (рис. 39).

Функция распределения двумерной дискретной случайной величины (X, Y) находится суммированием всех вероятностей p_{ij}, для которых $x_i < x$, $y_j < y$, т. е.

$$F(x, y) = \sum_{x_i < x} \sum_{y_j < y} p_{ij}. \tag{3.3}$$

Геометрическая интерпретация функции распределения позволяет наглядно иллюстрировать ее свойства.

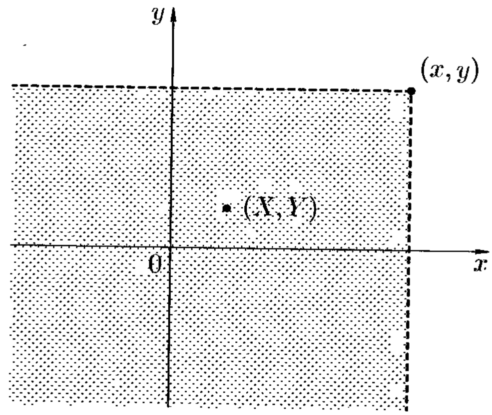


Рис. 39

Свойства функции распределения двумерной случайной величины:

1. Функция распределения $F(x, y)$ ограничена, т. е.

$$0 \leqslant F(x, y) \leqslant 1.$$

2. $F(x, y)$ не убывает по каждому из своих аргументов при фиксированном другом, т. е.

$$F(x_2, y) \geqslant F(x_1, y) \quad \text{при} \quad x_2 > x_1;$$
$$F(x, y_2) \geqslant F(x, y_1) \quad \text{при} \quad y_2 > y_1.$$

3. Если хотя бы один из аргументов обращается в $-\infty$, то функция распределения $F(x, y)$ равна нулю, т. е.

$$F(x, -\infty) = F(-\infty, y) = F(-\infty, -\infty) = 0.$$

4. Если оба аргумента обращаются в $+\infty$, то $F(x, y)$ равна 1, т. е.

$$F(+\infty, +\infty) = 1.$$

5. Если один из аргументов обращается в $+\infty$, то функция распределения системы случайных величин становится функцией распределения с. в., соответствующей другому элементу, т. е.

$$F(x, +\infty) = F_1(x) = F_X(x), \quad F(+\infty, y) = F_2(y) = F_Y(y). \tag{3.4}$$

6. $F(x, y)$ непрерывна слева по каждому из своих аргументов, т. е.

$$\lim_{x \to x_0 - 0} F(x, y) = F(x_0, y), \qquad \lim_{y \to y_0 - 0} F(x, y) = F(x, y_0).$$

❑ 1. $F(x, y)$ есть вероятность, следовательно, $0 \leqslant F(x, y) \leqslant 1$.

2. При увеличении какого-либо из аргументов (x, y) заштрихованная на рис. 39 область увеличивается; значит, вероятность попадания в нее случайной точки (X, Y) не может уменьшаться.

3. События $\{X < -\infty\}$, $\{Y < -\infty\}$ и их произведение невозможны: попадание в квадрант с отодвинутой в $-\infty$ границей невозможно. Вероятность такого события равна нулю.

4. Событие $\{X < +\infty\} \cdot \{Y < +\infty\}$ достоверно, следовательно, его вероятность равна единице.

5. $\{X < +\infty\}$ — достоверное событие, следовательно $\{X < +\infty\} \times \{Y < y\} = \{Y < y\}$ и $F(+\infty, y) = P\{X < +\infty; Y < y\} = P\{Y < y\} = F_Y(y)$.

Аналогично, $F(x, +\infty) = F_X(x)$. ■

Подчеркнем: зная совместное распределение двух случайных величин X и Y, можно найти одномерные распределения этих случайных величин, но обратное, вообще говоря, неверно.

Отметим, что с геометрической точки зрения $F(x, y)$ *есть некоторая поверхность* (*ступенчатая* для двумерной дискретной случайной величины), обладающая указанными свойствами.

С помощью функции $F(x, y)$ легко можно найти *вероятность попадания случайной точки* (X, Y) *в прямоугольник* D со сторонами, параллельными координатным осям:

$$P\{x_1 \leqslant X \leqslant x_2, y_1 \leqslant Y \leqslant y_2\} = \\ = F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1). \quad (3.5)$$

Приведем «геометрическое доказательство», см. рис. 40.

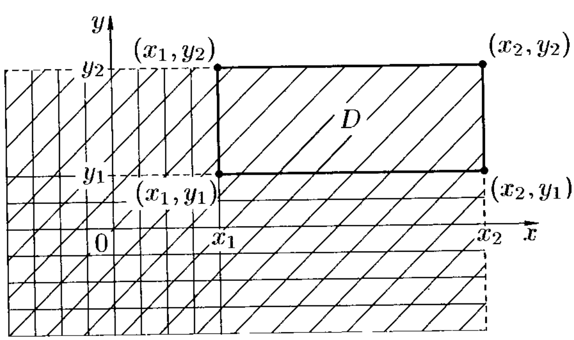


Рис. 40

Здесь $F(x_2, y_2)$ — вероятность попадания случайной точки в область, заштрихованную косыми линиями, $F(x_1, y_2)$ — вертикальными, $F(x_2, y_1)$ — горизонтальными, $F(x_1, y_1)$ — косыми, вертикальными, горизонтальными (эту область дважды вычли, следует один раз прибавить).

Пример 3.3. По таблицам распределения системы (X, Y) компонент X и Y примера 3.2 п. 3.1 найти $F_1(x)$, $F_2(y)$, $F(x, y)$.

Используя формулу (2.4), находим функции распределения $F_1(x)$ и $F_2(y)$:

$$F_1(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leqslant 0, \\ 0{,}5, & \text{при } 0 < x \leqslant 1, \\ 1, & \text{при } x > 1, \end{cases} \qquad F_2(y) = \begin{cases} 0, & \text{при } y \leqslant 0, \\ 0{,}5, & \text{при } 0 < y \leqslant 1, \\ 1. & \text{при } y > 1. \end{cases}$$

Используя формулу (3.3), находим функцию распределения $F(x, y)$:

$X \diagdown Y$	$y \leqslant 0$	$0 < y \leqslant 1$	$1 < y$
$x \leqslant 0$	0	0	0
$0 < x \leqslant 1$	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}\left(=\frac{1}{6}+\frac{2}{6}\right)$
$1 < x$	0	$\frac{1}{2}\left(=\frac{1}{6}+\frac{2}{6}\right)$	$1\left(=\frac{1}{6}+\frac{2}{6}+\frac{2}{6}+\frac{1}{6}\right)$

3.3. Плотность распределения вероятностей двумерной случайной величины и ее свойства

Исчерпывающей характеристикой непрерывной двумерной случайной величины является плотность вероятности. Вводится это понятие аналогично тому, как это делалось при рассмотрении плотности распределения вероятностей одной случайной величины (п. 2.4).

Двумерная случайная величина называется *непрерывной*, если ее функция распределения $F(x, y)$ есть непрерывная функция, дифференцируемая по каждому из аргументов, у которой существует вторая смешанная производная $F''_{xy}(x, y)$.

Плотностью распределения вероятностей (или *совместной плотностью*) непрерывной двумерной случайной величины (X, Y) называется вторая смешанная производная ее функции распределения.

Обозначается совместная плотность системы двух непрерывных случайных величин (X, Y) через $f(x, y)$ (или $p(x, y)$).

Таким образом, по определению

$$f(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\, \partial y} = F''_{xy}(x,y). \tag{3.6}$$

Плотность распределения вероятностей непрерывной двумерной случайной величины (X, Y) есть предел отношения вероятности попадания случайной точки (X, Y) в элементарный прямоугольник со сторонами Δx и Δy, примыкающий к точке (x, y), к площади этого прямоугольника, когда его размеры Δx и Δy стремятся к нулю (рис. 41).

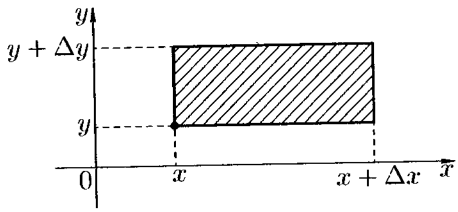


Рис. 41

Действительно, используя формулу (3.5), получаем: средняя плотность вероятности в данном прямоугольнике равна

$$f_{\text{ср}} = \frac{P\{x \leqslant X < x + \Delta x, y \leqslant Y < y + \Delta y\}}{\Delta x \cdot \Delta y} =$$
$$= \frac{1}{\Delta y} \cdot \left(\frac{F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x, y + \Delta y)}{\Delta x} - \frac{F(x + \Delta x, y) - F(x, y)}{\Delta x} \right).$$

Переходя к пределу при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$, получаем

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} f_{\text{ср}} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{F'(x, y + \Delta y) - F'(x, y)}{\Delta y},$$

т. е. $f(x,y) = (F'_x(x,y))'_y = F''_{xy}(x,y)$.

По аналогии с плотностью вероятности одномерной непрерывной случайной величины, для двумерной случайной величины (X, Y) плотность вероятности определяется как функция $f(x, y)$, удовлетворяющая условию

$$P\{x \leqslant X < x + dx, y \leqslant Y < y + dy\} \approx f(x,y)\, dxdy; \tag{3.7}$$

выражение $f(x, y)\, dxdy$ называется *элементом вероятности* двумерной случайной величины (X, Y).

Геометрически плотность распределения вероятностей $f(x, y)$ системы двух случайных величин (X, Y) представляет собой некоторую поверхность, называемую *поверхностью распределения* (рис. 42).

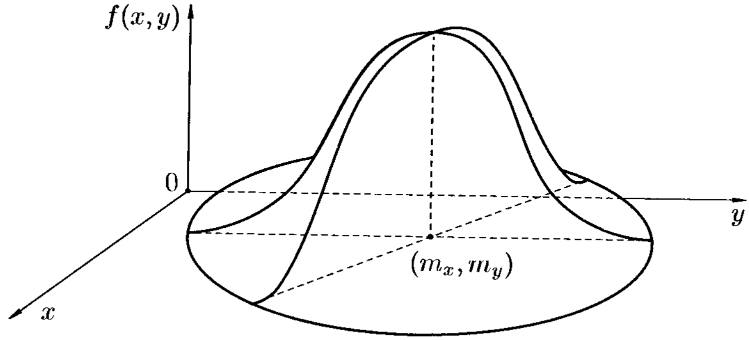


Рис. 42

Плотность распределения $f(x, y)$ обладает следующими свойствами:

1. Плотность распределения двумерной случайной величины неотрицательна, т. е.

$$f(x, y) \geqslant 0.$$

2. Вероятность попадания случайной точки (X, Y) в область D равна двойному интегралу от плотности по области D, т. е.

$$P\{(X, Y) \in D\} = \iint\limits_D f(x, y)\, dxdy. \tag{3.8}$$

3. Функция распределения двумерной случайной величины может быть выражена через ее плотность распределения по формуле:

$$F(x, y) = \int\limits_{-\infty}^{x} \int\limits_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(u, v)\, dudv. \tag{3.9}$$

4. Условие нормировки: двойной несобственный интеграл в бесконечных пределах от плотности вероятности двумерной с. в. равен единице, т. е.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dxdy = 1.$$

5. Плотности распределения одномерных составляющих X и Y могут быть найдены по формулам:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy = f_1(x) = f_X(x), \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx = f_2(y) = f_Y(y). \qquad (3.10)$$

❑ 1. Следует из того, что $F(x,y)$ есть неубывающая функция по каждому из аргументов.

2. Элемент вероятности $f(x,y)\,dxdy$ (см. (3.7)) представляет собой вероятность попадания случайной точки (X,Y) в прямоугольник со сторонами dx и dy (с точностью до бесконечно малых более высокого порядка по сравнению с произведением $dxdy$). Разбив область D на прямоугольники и применив к каждому из них равенство (3.7), получаем, по теореме сложения вероятностей, при стремлении к нулю площадей прямоугольников (т. е. $dx \to 0$ и $dy \to 0$), формулу (3.8). Геометрически эта вероятность изображается объемом цилиндрического тела, ограниченного сверху поверхностью распределения $f(x,y)$ и опирающегося на область D.

3. Выражение функции распределения $F(x,y)$ системы случайных величин (X,Y) через плотность $f(x,y)$ получим, используя формулу (3.8) (область D есть прямоугольник, ограниченный абсциссами $-\infty$, x и ординатами $-\infty$, y):

$$F(x,y) = P\{X < x, Y < y\} = P\{-\infty < X < x, -\infty < Y < y\} =$$
$$= \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,dudv.$$

4. Положив в формуле (3.9) $x = y = +\infty$ и учитывая, что $F(+\infty,+\infty) = 1$, получим

$$F(+\infty,+\infty) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dxdy = 1.$$

Геометрически свойство 4 означает, что *объем тела, ограниченного поверхностью распределения и плоскостью Oxy, равен единице.*

5. Найдем сначала функции распределения (зная совместную плотность двумерной случайной величины (X,Y)), составляющих X и Y:

$$F_1(x) = F(x,+\infty) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u,y)\,dudy,$$

$$F_2(y) = F(+\infty, y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{y} f(x,v)\,dxdv,$$

т. е.

$$F_1(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(u,y)\,dy \right) du, \quad F_2(y) = \int\limits_{-\infty}^{y} \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,v)\,dx \right) dv. \tag{3.11}$$

Дифференцируя первое равенство по x, а второе по y, получим плотности распределения случайных величин X и Y:

$$f_1(x) = F_1'(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy$$

и

$$f_2(y) = F_2'(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx.$$

Отметим, что решение обратной задачи (восстановить закон распределения системы (X, Y) по известным законам распределения составляющих системы) в общем случае невозможно. ■

Пример 3.4. Двумерная случайная величина (X, Y) задана плотностью распределения вероятностей $f(x,y) = \dfrac{A}{(1+x^2)(1+y^2)}$. Найти: 1) A; 2) $F(x,y)$; 3) $P\{X < 1, Y < 1\}$; 4) $f_1(x)$ и $f_2(y)$.

◐ 1) Постоянную A найдем, используя условие нормировки:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{A}{(1+x^2)(1+y^2)}\,dxdy = 1,$$

$$A \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{1+y^2} = 1,$$

$$A \cdot \operatorname{arctg} x \Big|_{-\infty}^{+\infty} \cdot \operatorname{arctg} y \Big|_{-\infty}^{+\infty} = 1,$$

$$A \cdot \pi^2 = 1.$$

Следовательно, $A = \dfrac{1}{\pi^2}$.

2) Используя формулу (3.9), находим:

$$F(x,y) = \int\limits_{-\infty}^{y} \left(\int\limits_{-\infty}^{x} \frac{1}{\pi^2} \cdot \frac{du}{1+u^2} \right) \frac{dv}{1+v^2} = \frac{1}{\pi^2} \left(\operatorname{arctg} x + \frac{\pi}{2} \right) \cdot \operatorname{arctg} v \Big|_{-\infty}^{y} =$$

$$= \left(\frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} y + \frac{1}{2} \right).$$

3) $P\{X < 1, Y < 1\} = F(1,1) = \left(\frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \right) = \frac{9}{16}$ (использовали формулу (3.2), можно воспользоваться формулой (3.8)).

4) По формуле (3.10) получаем:

$$f_1(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi^2} \cdot \frac{dy}{(1+x^2)(1+y^2)} = \frac{1}{\pi^2(1+x^2)} \operatorname{arctg} y \Big|_{-\infty}^{\infty} =$$

$$= \frac{1}{\pi^2(1+x^2)} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{1}{\pi(1+x^2)},$$

$$f_2(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi^2} \cdot \frac{dx}{(1+x^2)(1+y^2)} = \ldots = \frac{1}{\pi(1+y^2)}.$$

●

Упражнения

1. Двумерная случайная величина (X, Y) задана совместной плотностью распределения

$$f(x,y) = \begin{cases} Ae^{-x-y}, & \text{при } x \geqslant 0, y \geqslant 0, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Найти: 1) коэффициент A; 2) $F_{X,Y}(x,y)$; 3) $F_X(x)$ и $F_Y(y)$; 4) $f_X(x)$ и $f_Y(y)$; 5) $P\{X > 0, Y < 1\}$.

2. Непрерывная двумерная случайная величина (X, Y) равномерно распределена (т.е. $f(x,y) = c$) внутри треугольника с вершинами $O(0,0)$, $A(0,4)$, $B(4,0)$. Найти: 1) совместную плотность $f(x,y)$; 2) $f_X(x)$ и $f_Y(y)$; 3) вероятность события

$$A = \{0 < X < 1, 1 < Y < 3\}.$$

3. Вероятность попадания в цель при одном выстреле для I стрелка равна 0,4, для II — 0,6. Оба стрелка, независимо друг от друга, делают по два выстрела в цель. Найти: 1) закон распределения случайных величин X и Y; 2) совместный закон распределения системы случайных величин (X, Y); 3) функцию распределения $F_{X,Y}(x, y)$, если случайная величина X — число попаданий I стрелка, случайная величина Y — II стрелка.

3.4. Зависимость и независимость двух случайных величин

Зная законы распределения случайных величин X и Y, входящих в систему (X, Y), можно найти закон распределения системы *только в случае, когда случайные величины X и Y — независимы.* С понятием независимости случайных величин мы уже встречались в п. 2.2: две случайные величины называются *независимыми*, если закон распределения каждой из них не зависит от того, какие значения принимает другая. В противном случае случайные величины называются *зависимыми.*

Теперь дадим общее определение независимости случайных величин.

Случайные величины X и Y называются *независимыми*, если независимыми являются события $\{X < x\}$ и $\{Y < y\}$ для любых действительных x и y. В противном случае случайные величины называются *зависимыми.*

Сформулируем условие независимости случайных величин.

Теорема 3.1. Для того, чтобы случайные величины X и Y были независимы, необходимо и достаточно, чтобы функция распределения системы (X, Y) была равна произведению функций распределения составляющих:

$$F(x, y) = F_1(x) \cdot F_2(y). \tag{3.12}$$

❑ Если случайные величины X и Y независимы, то события $\{X < x\}$ и $\{Y < y\}$ независимы. Следовательно, $P\{X < x, Y < y\} = P\{X < x\}\times$ $\times P\{Y < y\}$, т. е. $F(x, y) = F_1(x) \cdot F_2(y)$. Если же имеет место равенство (3.12), то $P\{X < x, Y < y\} = P\{X < x\} \cdot P\{Y < y\}$. Значит, случайные величины X и Y независимы. ■

Заметим, что условие (3.12) есть иначе записанное условие независимости двух событий: $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$ (п. 1.15) для случая событий $A = \{X < x\}$, $B = \{Y < y\}$.

Теорема 3.2. Необходимым и достаточным условием независимости двух непрерывных случайных величин, образующих систему (X, Y), является равенство

$$f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y). \tag{3.13}$$

❑ Если X и Y независимые непрерывные случайные величины, то имеет место равенство (3.12). Дифференцируя это равенство по x, а затем по y, получим $f(x,y) = \dfrac{d}{dx}F_1(x) \cdot \dfrac{d}{dy}F_2(y)$ или $f(x,y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$. И обратно. Интегрируя равенство (3.13) по x и по y, получим

$$\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,dudv = \int_{-\infty}^{x} f_1(u)\,du \cdot \int_{-\infty}^{y} f_2(v)\,dv,$$

т. е. $F(x,y) = F_1(x) \cdot F_2(y)$. На основании теоремы 3.1 заключаем, что случайные величины X и Y независимы. ■

Теорема 3.3. Необходимым и достаточным условием независимости двух дискретных случайных величин X и Y, образующих систему (X, Y), является равенство

$$P\{X = x_i, Y = y_j\} = P\{X = x_i\} \cdot P\{Y = y_j\} \tag{3.14}$$

$$\text{для любых} \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad j = 1, 2, \ldots, m$$

(или, что то же самое: $p_{ij} = p_{x_i} \cdot p_{y_j}$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$).

Пример 3.5. Зависимы или независимы случайные величины X и Y, рассмотренные в примерах а) 3.2 п. 3.1; б) 3.4 п. 3.3?

○ а) $p_{11} = P\{X = 0, Y = 0\} = \frac{1}{6}$, а $P\{X = 0\} \cdot P\{Y = 0\} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, т. е. $p_{11} \neq p_{x_1} \cdot p_{y_1}$. Случайные величины X и Y зависимы.

б) $f(x,y) = \dfrac{1}{\pi^2(1+x^2)(1+y^2)}$, а $f_1(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+x^2}$, $f_2(y) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+y^2}$. Так как $f(x,y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$, то, согласно условию (3.13), заключаем: случайные величины X и Y независимы. ●

3.5. Условные законы распределения

Если случайные величины X и Y, образующие систему (X, Y), зависимы между собой, то *для характеристики их зависимости* вводится понятие условных законов распределения случайных величин.

Условным законом распределения одной из случайных величин, входящей в систему (X, Y), называется ее закон распределения, найденный при условии, что другая случайная величина приняла определенное значение (или попала в какой-то интервал).

Пусть (X, Y) — дискретная двумерная случайная величина и $p_{ij} = P\{X = x_i, Y = y_j\}$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$. В соответствии с определением условных вероятностей событий (напоминание: $P(B|A) = \dfrac{P(AB)}{P(A)}$, п. 1.14), *условная вероятность того, что случайная величина Y примет значение y_j при условии, что $X = x_i$* определяется равенством

$$P\{Y = y_j | X = x_i\} = \frac{P\{X = x_i, Y = y_j\}}{P\{X = x_i\}},$$

$$i = 1, 2, \ldots, n; \quad j = 1, 2, \ldots, m \qquad (3.15)$$

(или коротко: $p(y_j|x_i) = \dfrac{p_{ij}}{p_{x_i}}$).

Совокупность вероятностей (3.15), т. е. $p(y_1|x_i), p(y_2|x_i), \ldots$ $\ldots, p(y_m|x_i)$, представляет собой *условный закон распределения случайной величины Y при условии $X = x_i$*. Сумма условных вероятностей $p(y_j|x_i)$ равна 1, действительно:

$$\sum_{j=1}^{m} p(y_j|x_i) = \sum_{j=1}^{m} \frac{p_{ij}}{p_{x_i}} = \frac{1}{p_{x_i}} \sum_{j=1}^{m} p_{ij} = \frac{p_{x_i}}{p_{x_i}} = 1$$

(см. п. 3.1: $p_{x_i} = \sum\limits_{j=1}^{m} p_{ij}$).

Аналогично определяются *условная вероятность, условный закон распределения случайной величины X при условии $Y = y_j$*:

$$P\{X = x_i | Y = y_j\} = \frac{P\{X = x_i, Y = y_j\}}{P\{Y = y_j\}},$$

$$i = 1, 2, \ldots, n; \quad j = 1, 2, \ldots, m \qquad (3.16)$$

(или коротко: $p(x_i|y_j) = \dfrac{p_{ij}}{p_{y_j}}$, где $p_{y_j} = \sum\limits_{i=1}^{n} p_{ij}$).

Пример 3.6. Задана таблица распределения двумерной случайной величины (X, Y):

$X \setminus Y$	1	2	3
0,1	0,12	0,08	0,40
0,2	0,16	0,10	0.14

Найти: а) безусловные законы распределения случайных величин X и Y; б) условный закон распределения случайной величины X при $Y = 2$.

а) Так как $p_{xi} = \sum\limits_{j=1}^{m} p_{ij}$ и $p_{yj} = \sum\limits_{i=1}^{n} p_{ij}$, то

X	0,1	0,2
p	0,60	0,40

,

Y	1	2	3
p	0,28	0,18	0,54

б) С учетом формулы (3.16) имеем: $P\{X = 0{,}1|Y = 2\} = \dfrac{0{,}08}{0{,}18} = \dfrac{4}{9}$. $P\{X = 0{,}2|Y = 2\} = \dfrac{0{,}10}{0{,}18} = \dfrac{5}{9}$. Таким образом, условный закон распределения случайной величины X при $Y = 2$ таков

X	0,1	0,2
$P_{Y=2}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{5}{9}$

($\sum\limits_{i=1}^{2} p_i = 1$). Очевидно несовпадение условного и безусловного законов распределения случайной величины X. Следовательно, случайные величины X и Y зависимы. ●

Пусть теперь (X, Y) — непрерывная двумерная случайная величина с плотностью $f(x, y)$; $f_1(x)$ и $f_2(y)$ — плотности распределения соответственно случайной величины X и случайной величины Y.

Плотность вероятности условного распределения (или *условная плотность*) *случайной величины Y при условии $X = x$* определяется равенством

$$f(y|x) = \frac{f(x.y)}{f_1(x)} = \frac{f(x,y)}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy}, \quad \text{где} \quad f_1(x) \neq 0. \tag{3.17}$$

Условная плотность обладает свойствами плотности распределения, так: $f(y|x) \geqslant 0$, $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(y|x)\,dy = 1$.

Аналогично определяется условная плотность распределения случайной величины X при условии $Y = y$:

$$f(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_2(y)} = \frac{f(x,y)}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx}, \quad f_2(y) \neq 0. \tag{3.18}$$

Используя соотношения (3.17) и (3.18), можно записать

$$f(x,y) = f_1(x) \cdot f(y|x) = f_2(y) \cdot f(x|y), \tag{3.19}$$

т. е. совместная плотность распределения системы случайных величин равна произведению плотности одной составляющей на условную плотность другой составляющей при заданном значении первой.

Равенство (3.19) называют **теоремой (правилом) умножения плотностей распределений** (она аналогична теореме умножения вероятностей для событий, п. 1.15).

Пример 3.7. Двумерная случайная величина (X, Y) задана плотностью совместного распределения

$$f(x,y) = \begin{cases} Cxy, & \text{при } (x,y) \in D, \\ 0, & \text{при } (x,y) \notin D, \end{cases}$$

где D — область на плоскости

$$\begin{cases} y > -x, \\ y < 2, \\ x < 0. \end{cases}$$

Найти безусловное и условное распределение составляющей X. Убедиться, что случайные величины X и Y зависимы.

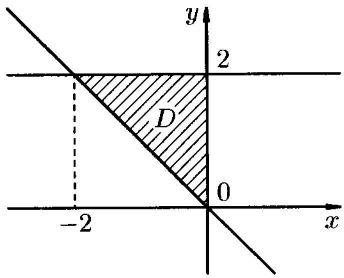


Рис. 43

Область D изображена на рис. 43.

Сначала найдем коэффициент C из условия нормировки:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dxdy = 1.$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dxdy = \int_{-2}^{0} dx \int_{-x}^{2} Cxy\,dy = C\int_{-2}^{0} x\,dx\left(\frac{y^2}{2}\Big|_{-x}^{2}\right) =$$

$$= C\int_{-2}^{0} x\left(2-\frac{x^2}{2}\right)dx = C\left(x^2-\frac{x^4}{8}\right)\Big|_{-2}^{0} = -2C.$$

Поэтому $C = -\frac{1}{2}$. Теперь находим

$$f_1(x) = \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy\right] = \int_{-x}^{2}\left(-\frac{1}{2}xy\right)dy = -\frac{1}{2}x\cdot\frac{y^2}{2}\Big|_{-x}^{2} =$$

$$= -\frac{1}{4}x(4-x^2) = \frac{x^3-4x}{4},$$

т. е. $f_1(x) = \frac{1}{4}(x^3-4x)$, $x\in(-2,0)$ (контроль:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)\,dx = \int_{-2}^{0}\frac{1}{4}(x^3-4x)\,dx = \frac{1}{4}\left(\frac{x^4}{4}-2x^2\right)\Big|_{-2}^{0} = \frac{1}{4}(-4+8) = \frac{4}{4} = 1).$$

Для нахождения $f(x|y)$ воспользуемся формулой (3.18), предварительно найдя $f_2(y)$:

$$f_2(y) = \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx\right] = \int_{-y}^{0}\left(-\frac{1}{2}xy\right)dx = -\frac{1}{2}y\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_{-y}^{0} = \frac{y^3}{4},$$

$y \in (0,2)$. Тогда $f(x|y) = \left[\dfrac{f(x,y)}{f_2(y)}\right] = -\dfrac{1}{2}xy : \dfrac{y^3}{4} = -\dfrac{2x}{y^2}$. $(x,y) \in D$ (контроль:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x|y)\,dx = \int\limits_{-y}^{0} \left(-\frac{2x}{y^2}\right) dx = -\frac{2}{y^2}\frac{x^2}{2}\Big|_{-y}^{0} = -\frac{1}{y^2}(0 - y^2) = 1).$$

Как видно, безусловный закон распределения случайной величины X ($f_1(x)$) не совпадает с условным законом распределения случайной величины X ($f(x|y)$); случайные величины X и Y — зависимы. ●

В случае произвольного типа случайных величин функция распределения $F(x,y)$ системы зависимых случайных величин (X,Y) может быть записана в виде:

$$F(x,y) = F_1(x) \cdot F_2(y|X < x) = F_2(y) \cdot F_1(x|Y < y),$$

где $F_2(y|X < x) = P\{Y < y|X < x\}$ — условная функция распределения случайной величины Y при условии $\{X < x\}$; $F_1(x|Y < y) = P\{X < x|Y < y\}$ — условная функция распределения случайной величины X при условии $\{Y < y\}$.

3.6. Числовые характеристики двумерной случайной величины. Математическое ожидание и дисперсия

Для системы случайных величин также вводятся числовые характеристики, подобные тем, какие были для одной случайной величины. В качестве числовых характеристик системы (X,Y) обычно рассматривают моменты различных порядков (см. п. 2.5). На практике чаще всего используются моменты I и II порядков: математическое ожидание (м. о.), дисперсия и корреляционный момент. Математическое ожидание и дисперсия двумерной случайной величины служат соответственно средним значением и мерой рассеяния. Корреляционный момент выражает меру взаимного влияния случайных величин, входящих в систему (X,Y).

Математическим ожиданием двумерной с. в. (X,Y) называется совокупность двух м. о. MX и MY, определяемых равенствами:

$$MX = m_x = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i p_{ij}, \quad MY = m_y = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} y_j p_{ij}, \tag{3.20}$$

если (X, Y) — дискретная система с. в. (здесь $p_{ij} = P\{X = x_i, Y = y_j\}$); и

$$MX = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x,y)\, dxdy, \quad MY = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} y\, f(x,y)\, dxdy, \tag{3.21}$$

если (X, Y) — непрерывная система с. в. (здесь $f(x, y)$ — плотность распределения системы).

Дисперсией системы с. в. (X, Y) называется совокупность двух дисперсий DX и DY, определяемых равенствами:

$$DX = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(x_i - m_x)^2 p_{ij}, \quad DY = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(y_j - m_y)^2 p_{ij}, \tag{3.22}$$

если (X, Y) — дискретная система с. в. и

$$DX = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x - m_x)^2 f(x,y)\, dxdy, \quad DY = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(y - m_y)^2 f(x,y)\, dxdy, \tag{3.23}$$

если (X, Y) — непрерывная система с. в.

Дисперсии DX и DY характеризуют рассеяние (разброс) случайной точки (X, Y) в направлении осей Ox и Oy вокруг точки (m_x, m_y) на плоскости Oxy — центра рассеяния.

Математические ожидания m_x и m_y являются частными случаями *начального момента* $\alpha_{k,s}$ *порядка* $k + s$ системы (X, Y), определяемого равенством

$$\alpha_{k,s} = M(X^k Y^s);$$

$m_x = M(X^1Y^0) = \alpha_{1,0}$ и $m_y = M(X^0Y^1) = \alpha_{0,1}$.

Дисперсии DX и DY являются частными случаями *центрального момента* $\mu_{k,s}$ *порядка* $k + s$ системы (X, Y), определяемого равенством

$$\mu_{k,s} = M((X - m_x)^k (Y - m_y)^s);$$

$DX = M(X - m_x)^2 = \mu_{2,0}$ и $DY = M(Y - m_y)^2 = \mu_{0,2}$.

Математическое ожидание с. в. $\varphi(X, Y)$, являющейся функцией компонент X и Y двумерной с. в. (X, Y) находится, аналогично, по формулам:

$$M(\varphi(X,Y)) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x,y) f(x,y)\, dxdy \tag{3.24}$$

для непрерывного случая и

$$M(\varphi(X,Y)) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\varphi(x_i,y_j)p_{ij} \qquad (3.25)$$

для дискретного случая.

Начальный момент II порядка $\alpha_{1,1} = MXY$ часто встречается в приложениях. Вычисляется по формуле

$$MXY = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}x_iy_jp_{ij} \qquad (3.26)$$

для дискретных с. в.

$$MXY = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} xy\,f(x,y)\,dxdy \qquad (3.27)$$

для непрерывных с. в.

3.7. Корреляционный момент, коэффициент корреляции

Особую роль играет центральный смешанный момент второго порядка $\mu_{1,1} = M(X-m_x)(Y-m_y) = M\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{Y}$, называемый корреляционным моментом или *моментом связи*.

Корреляционным моментом (или *ковариацией*) двух случайных величин X и Y называется м. о. произведения отклонений этих с. в. от их м. о. и обозначается через K_{XY} или $\operatorname{cov}(X,Y)$.

Таким образом, по определению

$$K_{XY} = \operatorname{cov}(X,Y) = M[(X-m_x)(Y-m_y)] = M\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{Y}. \qquad (3.28)$$

При этом: если (X,Y) — дискретная двумерная с. в., то ковариация вычисляется по формуле

$$K_{XY} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(x_i-m_x)(y_j-m_y)p_{ij}; \qquad (3.29)$$

если (X,Y) — непрерывная двумерная с. в., то

$$K_{XY} = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(x-m_x)(y-m_y)f(x,y)\,dxdy \qquad (3.30)$$

(формулы (3.29) и (3.30) получены на основании формул (3.24) и (3.25)).

Ковариацию часто удобно вычислять по формуле

$$K_{XY} = \operatorname{cov}(X, Y) = MXY - MX \cdot MY, \tag{3.31}$$

которая получается из определения (3.28) на основании свойств математического ожидания:

$$K_{XY} = M[(X - m_x)(Y - m_y)] = M(XY - Xm_y - Ym_x + m_x m_y) =$$
$$= MXY - m_y MX - m_x MY + m_x m_y = MXY - m_x m_y - m_x m_y + m_x m_y =$$
$$= MXY - MX \cdot MY.$$

Формулу (3.30) можно записать в виде

$$K_{XY} = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} xy\, f(x, y)\, dxdy - m_x m_y. \tag{3.32}$$

Свойства ковариации:

1. Ковариация симметрична, т. е.

$$K_{XY} = K_{YX}.$$

2. Дисперсия с. в. есть ковариация ее с самой собой, т. е.

$$K_{XX} = DX, \qquad K_{YY} = DY.$$

3. Если случайные величины X и Y независимы, то

$$K_{XY} = 0.$$

4. Дисперсия суммы (разности) двух случайных величин равна сумме их дисперсий плюс (минус) удвоенная ковариация этих случайных величин, т. е.

$$D(X \pm Y) = DX + DY \pm 2K_{XY}.$$

5. Постоянный множитель можно вынести за знак ковариаций, т. е.

$$K_{cX,Y} = c \cdot K_{XY} = K_{X,cY} \quad \text{или} \quad \operatorname{cov}(cX, Y) = c \cdot \operatorname{cov}(X, Y) = \operatorname{cov}(X, cY).$$

6. Ковариация не изменится, если к одной из с. в. (или к обоим сразу) прибавить постоянную, т. е.

$$K_{X+c,Y} = K_{XY} = K_{X,Y+c} = K_{X+c,Y+c}$$

или

$$\operatorname{cov}(X + c, Y) = \operatorname{cov}(X, Y) = \operatorname{cov}(X, Y + c) = \operatorname{cov}(X + c, Y + c).$$

7. Ковариация двух случайных величин по абсолютной величине не превосходит их с. к. о., т. е.

$$|K_{XY}| \leqslant \sigma_x \cdot \sigma_y.$$

❑ 1. Следует из определения (3.28) ковариации.

2. $K_{XX} = M\big[(X - m_x)(X - m_x)\big] = M(X - m_x)^2 = DX$.

3. Из независимости с. в. X и Y следует независимость их отклонений $X - m_x$ и $Y - m_y$. Пользуясь свойствами м. о. (п. 2.5), получаем $K_{XY} = M(X - m_x) \cdot M(Y - m_y) = 0$.

4. $D(X + Y) = M((X + Y) - M(X + Y))^2 =$

$$= M((X - MX) + (Y - MY))^2 = M(X - MX)^2 + 2M(X - MX)(Y - MY) + M(Y - MY)^2 = DX + DY + 2K_{XY},$$

$$D(X - Y) = DX + D(-Y) + 2M(X - MX)(-Y - M(-Y)) = DX + DY - 2K_{XY}.$$

5. $K_{cX,Y} = M(cX - McX)(Y - MY) = M[c(X - MX)(Y - MY)] = cK_{XY}$.

6. Доказывается аналогично.

7. Применяя свойство 4 к двум стандартным с. в. $\dfrac{X - m_x}{\sigma_x}$ и $\dfrac{Y - m_y}{\sigma_y}$ (см. п. 2.5), получаем:

$$D\left(\frac{X - m_x}{\sigma_x} \pm \frac{Y - m_y}{\sigma_y}\right) = D\left(\frac{X - m_x}{\sigma_x}\right) + D\left(\frac{Y - m_y}{\sigma_y}\right) \pm$$
$$\pm 2M\left[\left(\frac{X - m_x}{\sigma_x} - M\left(\frac{X - m_x}{\sigma_x}\right)\right)\left(\frac{Y - m_y}{\sigma_y} - M\left(\frac{Y - m_y}{\sigma_y}\right)\right)\right] =$$
$$= 1 + 1 \pm 2M\left(\frac{X - m_x}{\sigma_x} \cdot \frac{Y - m_y}{\sigma_y}\right) = 2\left(1 \pm \frac{K_{XY}}{\sigma_x \sigma_y}\right).$$

Любая дисперсия неотрицательна, поэтому

$$2\left(1 \pm \frac{K_{XY}}{\sigma_x \sigma_y}\right) \geqslant 0. \tag{3.33}$$

Отсюда следует, что $-\sigma_x\sigma_y \leqslant K_{XY} \leqslant \sigma_x\sigma_y$, т. е. $|K_{XY}| \leqslant \sigma_x\sigma_y$. ■

Из свойства 3 следует, что если $K_{XY} \neq 0$, то с. в. X и Y зависимы. Случайные величины X и Y в этом случае ($K_{XY} \neq 0$) называют *коррелированными*. Однако из того, что $K_{XY} = 0$, не следует независимость с. в. X и Y. В этом случае ($K_{XY} = 0$) с. в. X и Y называют *некоррелированными*. Из независимости вытекает некоррелированность; обратное, вообще говоря, неверно.

Как следует из свойств ковариации, она (K_{XY}) характеризует и степень зависимости случайных величин, и их рассеяние вокруг точки (m_x, m_y). Размерность ковариации равна произведению размерностей с. в. X и Y. В качестве числовой характеристики зависимости (а не рассеяния) с. в. X и Y берут безразмерную величину — коэффициент корреляции. Он является лучшей оценкой степени влияния одной с. в. на другую.

Коэффициентом корреляции r_{XY} двух с. в. X и Y называется отношение их ковариации (корреляционного момента) к произведению их с. к. о.:

$$r_{XY} = \frac{K_{XY}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}. \tag{3.34}$$

Очевидно, коэффициент корреляции равен ковариации стандартных с. в. $Z_1 = \dfrac{X - m_x}{\sigma_x}$ и $Z_2 = \dfrac{Y - m_y}{\sigma_y}$, т. е. $r_{XY} = \operatorname{cov}(Z_1, Z_2)$.

Свойства коэффициента корреляции:

1. Коэффициент корреляции по абсолютной величине не превосходит 1, т. е.
$$|r_{XY}| \leqslant 1 \quad \text{или} \quad -1 \leqslant r_{XY} \leqslant 1.$$
2. Если X и Y независимы, то
$$r_{XY} = 0.$$
3. Если с. в. X и Y связаны линейной зависимостью, т. е. $Y = aX + b$, $a \neq 0$, то
$$|r_{XY}| = 1,$$
причем $r_{XY} = 1$ при $a > 0$,
$r_{XY} = -1$ при $a < 0$.
4. Если $|r_{XY}| = 1$, то с. в. X и Y связаны линейной функциональной зависимостью.

❑ 1. Так как $|K_{XY}| \leqslant \sigma_x \cdot \sigma_y$ (свойство 7 ковариации), то

$$|r_{XY}| = \frac{|K_{XY}|}{\sigma_x \sigma_y} \leqslant \frac{\sigma_x \sigma_y}{\sigma_y \sigma_x} = 1.$$

2. $K_{XY} = 0$ в случае независимости X и Y. Следовательно,

$$r_{XY} = \frac{K_{XY}}{\sigma_x \sigma_y} = 0.$$

3. Согласно свойствам ковариации, имеем

$$\operatorname{cov}(X,Y) = \operatorname{cov}(X, aX+b) = \operatorname{cov}(aX+b, X) = a\operatorname{cov}\left(X+\frac{b}{a}, X\right) = \\ = a\operatorname{cov}(X,X) = a\,DX$$

и $DY = D(aX+b) = a^2 DX$. Поэтому

$$r_{XY} = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}} = \frac{a\,DX}{\sqrt{DX}\cdot|a|\cdot\sqrt{DX}} = \frac{a}{|a|} = \begin{cases} 1, & \text{при } a>0, \\ -1, & \text{при } a<0. \end{cases}$$

4. Пусть $r_{XY} = 1$. Тогда из равенства

$$D\left(\frac{X-m_x}{\sigma_x} - \frac{Y-m_y}{\sigma_y}\right) = 2\left(1 - \frac{K_{XY}}{\sigma_x\sigma_y}\right)$$

(см. свойство 7 ковариации) получаем

$$D\left(\frac{X-m_x}{\sigma_x} - \frac{Y-m_y}{\sigma_y}\right) = 0,$$

т. е. $\dfrac{X-m_x}{\sigma_x} - \dfrac{Y-m_y}{\sigma_y} = c$ — постоянная. Но

$$c = Mc = M\left(\frac{X-m_x}{\sigma_x} - \frac{Y-m_y}{\sigma_y}\right) = M\left(\frac{X-m_x}{\sigma_x}\right) - M\left(\frac{Y-m_y}{\sigma_y}\right) = \\ = 0 - 0 = 0,$$

т. е. $c = 0$. Значит, $\dfrac{X-m_x}{\sigma_x} = \dfrac{Y-m_y}{\sigma_y}$, т. е. $Y = \dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}(X-m_x) + m_y$. При $r_{XY} = -1$ получаем

$$Y = -\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(X-m_x) + m_y.$$

Таким образом, при $r_{XY} = \pm 1$ с. в. X и Y связаны линейной функциональной зависимостью. ■

Итак, для независимых случайных величин $r_{XY} = 0$, для линейно связанных $|r_{XY}| = 1$, а в остальных случаях $-1 < r_{XY} < 1$; говорят, что с. в. связаны *положительной корреляцией*, если $r_{XY} > 0$; если

$r_{XY} < 0$ — *отрицательной корреляцией.* Чем ближе $|r_{XY}|$ к единице, тем больше оснований считать, что X и Y связаны линейной зависимостью. Отметим, что корреляционные моменты и дисперсии системы с. в. обычно задаются *корреляционной матрицей*:

$$\begin{pmatrix} K_{XX} & K_{XY} \\ K_{YX} & K_{YY} \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} DX & K_{XY} \\ & DY \end{pmatrix}.$$

Пример 3.8. Закон распределения дискретной двумерной с. в. задан таблицей:

$X\diagdown Y$	-1	0	1
0	0,15	0,40	0,05
1	0,20	0,10	0,10

Найти коэффициент корреляции r_{XY}.

Находим законы распределения составляющих X и Y:

X	0	1
p	0,6	0,4

и

Y	-1	0	1
p	0,35	0,50	0,15

Находим математическое ожидание составляющих: $m_x = 0 \cdot 0{,}6 + 1 \cdot 0.4 = 0{,}4$, $m_y = -1 \cdot 0{,}35 + 0 \cdot 0{,}50 + 1 \cdot 0{,}15 = -0.20$ (их можно было бы найти, используя формулу (3.20); так

$$m_x = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3} x_i p_{ij} = 0 \cdot 0{,}15 + 0 \cdot 0{,}40 + 0 \cdot 0{,}05 + 1 \cdot 0{,}20 + 1 \cdot 0{,}10 + 1 \cdot 0{,}10 = 0{,}4).$$

Находим дисперсии составляющих:

$$DX = [MX^2 - (MX)^2] = (0^2 \cdot 0{,}6 + 1^2 \cdot 0{,}4) - (0{,}4)^2 = 0.24,$$
$$DY = ((-1)^2 \cdot 0{,}35 + 0^2 \cdot 0{,}50 + 1^2 \cdot 0{,}15) - (-0{,}20)^2 = 0{,}46.$$

Стало быть: $\sigma_x = \sqrt{0{,}24} \approx 0{,}49$, $\sigma_y = \sqrt{0{,}46} \approx 0{,}68$. Находим MXY, используя формулу (3.26): $MXY = 0 \cdot (-1) \cdot 0{,}15 + 0 \cdot 0 \cdot 0{,}40 + 0 \cdot 1 \cdot 0{,}05 + 1 \cdot (-1) \cdot 0{,}20 + 1 \cdot 0 \cdot 0{,}10 + 1 \cdot 1 \cdot 0{,}10 = -0.10$ (можно было бы составить закон распределения $Z = XY$, а затем найти $MZ = MXY$:

$Z = XY$	-1	0	1
p	0,20	0,70	0,10

,

$MZ = MXY = -1 \cdot 0{,}20 + 0 \cdot 0{,}70 + 1 \cdot 0{,}10 = -0{,}10$). Находим корреляционный момент, используя формулу (3.31): $K_{XY} = [MXY - MX \cdot MY] = -0{,}10 - 0{,}4 \cdot (-0{,}20) = -0{,}10 + 0{,}08 = -0{,}02 \neq 0$. Находим коэффициент корреляции (формула (3.34)):

$$r_{XY} = \left[\frac{K_{XY}}{\sigma_x \sigma_y}\right] = \frac{-0{,}02}{0{,}49 \cdot 0{,}68} \approx -0{,}06,$$

отрицательная корреляция. ●

Упражнения

1. Двумерная с. в. (X, Y) задана законом распределения.

$X \diagdown Y$	1	2	3	4
1	0,07	0,04	0.11	0,11
2	0,08	0,11	0,06	0,08
3	0,09	0,13	0,10	0,02

Проверить, зависимы ли с. в. X и Y. Найти $\operatorname{cov}(X, Y)$.

2. Плотность совместного распределения с. в. X и Y задана формулой

$$f(x, y) = \begin{cases} a(1 - xy^3), & \text{при } |x| \leqslant 1,\ |y| \leqslant 1, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Найти постоянную a и коэффициент корреляции.

3. Непрерывная двумерная с. в. (X, Y) задана плотностью распределения вероятностей

$$f(x, y) = \begin{cases} c(x + y), & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Зависимы ли с. в. X и Y? Найти м. о. и дисперсию с. в. X и Y.

3.8. Двумерное нормальное распределение

Среди законов распределения двумерной с. в. (X, Y) на практике чаще всего встречается нормальное (гауссовское) распределение вероятностей. Оно применяется, в частности, для описания 2-х результатов измерения, абсциссы и ординаты точки попадания (X, Y) при стрельбе и т. д.

Двумерная с. в. (X, Y) *называется распределенной по нормальному закону*, если ее совместная плотность $f(x, y)$ имеет вид

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-r^2}} \times$$
$$\times\, e^{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left(\frac{(x-m_x)^2}{\sigma_x^2} - \frac{2r(x-m_x)(y-m_y)}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{(y-m_y)^2}{\sigma_y^2}\right)}, \quad (3.35)$$

где m_x, m_y, σ_x, σ_y, $r = r_{XY}$ — параметры этого распределения.

Распределение (3.35) называется также *нормальным законом распределения на плоскости* или *двумерным нормальным* (гауссовским) *распределением.*

Можно доказать, что $f(x, y)$ — это функция плотности, т. е. справедливо равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dxdy = 1;$$

$m_x = MX$, $m_y = MY$; σ_x и σ_y — средние квадратические отклонения (с. к. о.); r — коэффициент корреляции с. в. X и Y.

Это означает, что двумерное нормальное распределение полностью определяется заданием его числовых характеристик, что удобно на практике (опытным путем находят эти параметры-характеристики и получают совместную плотность $f(x, y)$ двух нормально распределенных с. в. X и Y).

Выясним смысл, например, параметров m_x и σ_x, найдя распределение вероятностей составляющей X (т. е. плотность вероятностей одномерной с. в. X). Согласно формуле (3.10) (п. 3.3) имеем:

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-r^2}} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2(1-r^2)}} \times$$
$$\times \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left(\frac{(y-m_y)^2}{\sigma_y^2} - \frac{2r(x-m_x)(y-m_y)}{\sigma_x\sigma_y}\right)} dy =$$

$$= \left[\text{подстановки } \frac{x-m_x}{\sqrt{2}\sigma_x} = t,\ \frac{y-m_y}{\sqrt{2}\sigma_y} = z\right] =$$

$$= \frac{\sqrt{2}\sigma_y}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-r^2}} e^{-\frac{t^2}{1-r^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{1-r^2}(z^2-2rtz)} dz =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}\pi\sigma_x\sqrt{1-r^2}} e^{-\frac{t^2}{1-r^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{1-r^2}((z-rt)^2-r^2t^2)} dz =$$

$$= \frac{e^{-\frac{t^2}{1-r^2}+\frac{r^2t^2}{1-r^2}}}{\sqrt{2}\pi\sigma_x\sqrt{1-r^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(z-rt)^2}{1-r^2}} dz =$$

$$= \left[\text{подстановка } \frac{z-rt}{\sqrt{1-r^2}} = u\right] =$$

$$= \frac{e^{-t^2}\sqrt{1-r^2}}{\sqrt{2}\pi\sigma_x\sqrt{1-r^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du = \frac{e^{-t^2}}{\sqrt{2}\pi\sigma_x}\sqrt{\pi} =$$

$$= \left[\text{так как } \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi} \text{ — интеграл Пуассона, формула (2.39)}\right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}},$$

т. е.

$$f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}. \tag{3.36}$$

Случайная величина X имеет нормальное распределение с м. о. m_x и дисперсией σ_x^2. Аналогично получаем

$$f_2(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y} e^{-\frac{(y-m_y)^2}{2\sigma_y^2}}, \tag{3.37}$$

т. е. $Y \sim N(m_y, \sigma_y)$.

График плотности $f(x, y)$ нормального распределения двумерной с. в. (X, Y) представляет собой холмообразную поверхность, вершина которой находится в точке $\left(m_x, m_y, \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-r^2}}\right)$, т. е. максимум функции $f(x, y)$ достигается в точке (m_x, m_y), рис. 42. Сечения поверхности распределения плоскостями, проходящими через точку

$\left(m_x, m_y, \dfrac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-r^2}}\right)$ перпендикулярно плоскости Oxy, представляют собой кривые Гаусса вида $z = be^{-a(x-m_x)^2}$. Пересекая поверхность распределения $z = f(x,y)$ плоскостью $z = z_0$, где $0 < z_0 < z_{\max}$, параллельной плоскости Oxy, получим в сечении *эллипс*, уравнение проекции которого на плоскость Oxy, имеет вид

$$\frac{(x-m_x)^2}{\sigma_x^2} - 2r\frac{(x-m_x)(y-m_y)}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{(y-m_y)^2}{\sigma_y^2} = h^2. \qquad (3.38)$$

где $h^2 = -2(1-r^2)\ln(2\pi z_0\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-r^2})$. (В силу ограничения на z_0 аргумент логарифма меньше 1, следовательно, значение логарифма отрицательно.) Если осуществить преобразование параллельного переноса и поворота осей по формулам

$$\begin{cases} x = m_x + x_0\cos\alpha - y_0\sin\alpha, \\ y = m_y + x_0\sin\alpha + y_0\cos\alpha, \end{cases}$$

где угол α подобран так, что $\operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{2r\sigma_x\sigma_y}{\sigma_x^2 - \sigma_y^2}$, то уравнение (3.38) преобразуется в каноническое уравнение эллипса. Эллипс (3.38) называют *эллипсом рассеяния*; оси симметрии эллипса (они образуют с осью Ox углы α и $\frac{\pi}{2} + \alpha$) — *главными осями рассеяния*, а центр эллипса (точка (m_x, m_y)) — *центром рассеяния*.

Если компоненты двумерной нормально распределенной с. в. (X, Y) некоррелированы ($r = r_{XY} = 0$), то функция плотности (3.35) принимает вид

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{(x-m_x)^2}{\sigma_x^2} + \frac{(y-m_y)^2}{\sigma_y^2}\right)} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x}e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y}e^{-\frac{(y-m_y)^2}{2\sigma_y^2}} = f_1(x)\cdot f_2(y),$$

т. е. $f(x,y) = f_1(x)\cdot f_2(y)$, где $f_1(x)$ — плотность распределения с. в. X, $f_2(y)$ — с. в. Y. Отсюда следует вывод: *некоррелированные нормально распределенные случайные величины являются также и независимыми*. Справедливо и обратное утверждение. Таким образом, для нормально распределенных с. в. термины «независимость» и «некоррелированность» эквивалентны.

Уравнение эллипса рассеяния для некоррелированных с. в. записывается в виде

$$\frac{(x-m_x)^2}{(h\sigma_x)^2}+\frac{(y-m_y)^2}{(h\sigma_y)^2}=1$$

(следует из равенства (3.38) при $r=0$). На рис. 44 изображен один такой эллипс (при $h=1$).

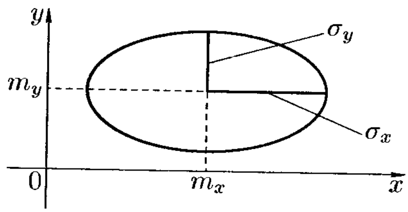


Рис. 44

Утверждение. Если с. в. X и Y независимы, то *вероятность попадания случайной точки (X, Y), распределенной по нормальному закону, в прямоугольник* $R=\{a\leqslant x\leqslant b, c\leqslant y\leqslant d\}$, находится по формуле:

$$P\{a\leqslant X\leqslant b, c\leqslant Y\leqslant d\}=\left(\Phi_0\left(\frac{b-m_x}{\sigma_x}\right)-\Phi_0\left(\frac{a-m_x}{\sigma_x}\right)\right)\times$$
$$\times\left(\Phi_0\left(\frac{d-m_y}{\sigma_y}\right)-\Phi_0\left(\frac{c-m_y}{\sigma_y}\right)\right),$$

где $\Phi_0(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz$ — функция Лапласа.

❑ Используя формулу (3.8),находим:

$$P\{a\leqslant X\leqslant b, c\leqslant Y\leqslant d\}=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x}\int\limits_a^b e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}\,dx\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y}\int\limits_c^d e^{-\frac{(y-m_y)^2}{2\sigma_y^2}}\,dy=$$
$$=\left(\Phi_0\left(\frac{b-m_x}{\sigma_x}\right)-\Phi_0\left(\frac{a-m_x}{\sigma_x}\right)\right)\cdot\left(\Phi_0\left(\frac{d-m_y}{\sigma_y}\right)-\Phi_0\left(\frac{c-m_y}{\sigma_y}\right)\right).$$

■

Произвольную область D можно приближенно заменить областью, составленной из прямоугольников. На этом основано применение так называемых «сеток рассеивания».

Можно показать, что вероятность попадания такой же точки (X, Y) в один из эллипсов рассеяния равна

$$P\left\{\frac{(x-m_x)^2}{\sigma_x^2}+\frac{(y-m_y)^2}{\sigma_y^2}\leqslant h^2\right\}=1-e^{-\frac{1}{2}h^2}.$$

Пример 3.9. Найти вероятность попадания точки (X, Y) в прямоугольник $\{|x| \leqslant 1, |y| \leqslant 2\}$, если плотность совместного распределения с. в. X и Y равна $f(x,y)=\frac{1}{3\pi}e^{-\frac{x^2+4y^2}{6}}$.

Функцию $f(x, y)$ можно переписать в виде

$$f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-0)^2}{2(\sqrt{3})^2}}\cdot\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y-0)^2}{2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}}=f_1(x)\cdot f_2(y).$$

Значит, с. в. X и Y независимы и $X \sim N(0, \sqrt{3})$, $Y \sim N\left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Поэтому $P\{|x| \leqslant 1, |y| \leqslant 2\} = 2\Phi_0\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cdot 2\Phi_0\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right) = 4\Phi_0(0{,}58)\cdot\Phi_0(2{,}31) = 0{,}428$. ●

3.9. Регрессия. Теорема о нормальной корреляции

При изучении двумерной случайной величины рассматриваются не только числовые характеристики одномерных компонент X и Y (см. п. 3.6), но и числовые характеристики условных распределений: условные м. о., условные дисперсии.

Условным математическим ожиданием одной из с. в., входящих в систему (X, Y) называется ее м. о., вычисляемое при условии, что другая с. в. приняла определенное значение (или попала в данный интервал). Обозначается: $M(Y|X = x)$ или $M(Y|x)$ и $M(X|y)$.

Вычисляются эти характеристики по обычным формулам м. о., в которых вместо плотности распределения и вероятностей событий используются условные плотности распределения или условные вероятности (п. 3.5).

Для непрерывных с. в.

$$M(Y|x) = \int_{-\infty}^{\infty} y\, f(y|x)\, dy, \quad M(X|y) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x|y)\, dx, \tag{3.39}$$

где $f(y|x)$ и $f(x|y)$ — условные плотности распределения с. в. X и Y, определяемые равенствами (3.17) и (3.18) п. 3.5.

Для дискретных с. в. X и Y условные м. о. вычисляются по формулам

$$M(Y|x_i) = \sum_{j=1}^{m} y_j\, p(y_j|x_i) \quad M(X|y_j) = \sum_{i=1}^{n} x_i\, p(x_i|y_j), \tag{3.40}$$

где $p(y_j|x_i) = P\{Y = y_j|X = x_i\}$, $p(x_i|y_j) = P\{X = x_i|Y = y_j\}$, формулы (3.15) и (3.16).

Условное математическое ожидание с. в. Y при заданном $X = x$, т. е. $M(Y|x) = \varphi(x)$, называется *функцией регрессии* или просто *регрессией* Y на x (или Y по x). Аналогично, $M(X|y) = \varphi(y)$ — *регрессия* X на y (или X по y).

Графики этих функций называются соответственно *линиями* (или «кривыми») *регрессии* Y на x и X на y.

Если обе функции регрессии Y на x и X на y линейны, то говорят, что с. в. X и Y связаны *линейной корреляционной зависимостью*.

Теорема 3.4 (Теорема о нормальной корреляции). Если двумерная с. в. (X, Y) распределена по нормальному закону, то с. в. X и Y связаны линейной корреляционной зависимостью.

❑ Условное м. о. $M(Y|x)$ (т. е. функцию регрессии Y на x) найдем, используя условный закон распределения с. в. Y при $X = x$, который определяется условной плотностью распределения $f(y|x)$. Согласно формуле (3.17) $f(y|x) = \dfrac{f(x,y)}{f_1(x)}$. Совместная плотность $f(x,y)$ задана формулой (3.35), а плотность распределения составляющей X есть

$$f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}$$

(см. формулу (3.36)). Имеем

$$f(y|x) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-r^2}} \times$$
$$\times e^{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left(\frac{(x-m_x)^2}{\sigma_x^2} - \frac{2r(x-m_x)(y-m_y)}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{(y-m_y)^2}{\sigma_y^2}\right)} \cdot \frac{\sqrt{2\pi}\sigma_x}{e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}}$$

Произведем упрощение показателя экспоненты в последней формуле. Так как

$$-\frac{1}{2(1-r^2)}\left(\frac{(x-m_x)^2}{\sigma_x^2} - \frac{2r(x-m_x)(y-m_y)}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{(y-m_y)^2}{\sigma_y^2}\right) +$$
$$+ \frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2} \cdot \frac{1-r^2}{1-r^2} = -\frac{1}{2(1-r^2)} \times$$
$$\times \left(\frac{(x-m_x)^2}{\sigma_x^2} - \frac{2r(x-m_x)(y-m_y)}{\sigma_x\sigma_y} - \frac{(x-m_x)^2(1-r^2)}{\sigma_x^2} + \frac{(y-m_y)^2}{\sigma_y^2}\right) =$$
$$= -\frac{1}{2(1-r^2)}\left(\frac{(y-m_y)^2}{\sigma_y^2} - \frac{2r(x-m_x)(y-m_y)}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{r^2(x-m_x)^2}{\sigma_x^2}\right) =$$
$$= -\frac{1}{2(1-r^2)}\left(\frac{y-m_y}{\sigma_y} - r \cdot \frac{x-m_x}{\sigma_x}\right)^2,$$

то

$$f(y|x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(\sigma_y\sqrt{1-r^2})} e^{-\frac{\left(y-\left(m_y + r\cdot\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x-m_x)\right)\right)^2}{2(\sigma_y\sqrt{1-r^2})^2}}.$$

Как видно, условный закон распределения является тоже нормальным с условным м. о. и условной дисперсией, определяемыми формулами

$$M(Y|x) = m_y + r \cdot \frac{\sigma_y(x-m_x)}{\sigma_x} \quad \text{и} \quad D(Y|x) = \sigma_y^2(1-r^2). \qquad (3.41)$$

Аналогично можно получить функцию регрессии X на y:

$$\varphi(y) = M(X|y) = m_x + r \cdot \frac{\sigma_x(y-m_y)}{\sigma_y} \quad \text{и} \quad D(X|y) = \sigma_x^2(1-r^2). \quad (3.42)$$

Так как обе функции регрессии (3.41) и (3.42) линейны, то корреляция между с. в. X и Y линейная. ■

Пример 3.10. Построить линию регрессии Y на x для двумерной с. в. (X, Y), закон распределения которой задан таблицей:

$X \diagdown Y$	-1	0	1	$\sum$
0	0,10	0,15	0,20	0,45
1	0,15	0,25	0,15	0,55
$\sum$	0.25	0,40	0,35	1

Находим условные ряды распределения с. в. Y при $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, используя формулы (3.15).

$$p(y_1|x_1) = P\{Y = -1|X = 0\} = \frac{0{,}10}{0.45} = \frac{10}{45},$$
$$p(y_2|x_1) = P\{Y = 0|X = 0\} = \frac{0{,}15}{0{,}45} = \frac{15}{45},$$
$$p(y_3|x_1) = P\{Y = 1|X = 0\} = \frac{0{,}20}{0{,}45} = \frac{20}{45}.$$

Согласно (3.40) имеем $M(Y|x_1) = -1 \cdot \frac{10}{45} + 0 \cdot \frac{15}{45} + 1 \cdot \frac{20}{45} = \frac{10}{45}$.

Далее:

$$p(y_1|x_2) = P\{Y = -1|X = 1\} = \frac{0{,}15}{0{,}55} = \frac{15}{55},$$
$$p(y_2|x_2) = P\{Y = 0|X = 1\} = \frac{0{,}25}{0{,}55} = \frac{25}{55},$$
$$p(y_3|x_2) = P\{Y = 1|X = 1\} = \frac{0{,}15}{0{,}55} = \frac{15}{55}.$$

Следовательно, $M(Y|x_2) = -1 \cdot \frac{15}{55} + 0 \cdot \frac{25}{55} + 1 \cdot \frac{15}{55} = 0$.

Линия регрессии Y на x изображена на рис. 45. ●

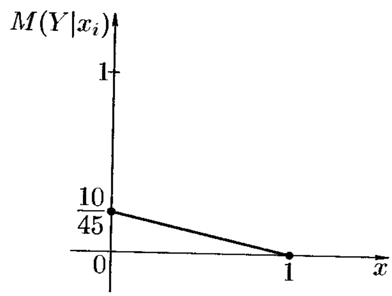


Рис. 45

Упражнения

1. Построить линию регрессии X на y по условию примера 3.10.

2. Пусть (X, Y) — двумерная нормальная с. в. с параметрами $m_x = m_y = 0$, $\sigma_x = \sigma_y = 1$. Найти условную плотность распределения с. в. X при условии, что $Y = y$ и с. в. Y при условии, что $X = x$ (воспользоваться формулами (3.36) и (3.37)).

3.10. Многомерная (n-мерная) случайная величина (общие сведения)

Систему n случайных величин называют *n-мерной (многомерной) с. в.* или случайным вектором $\bar{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

Многомерная с. в. есть функция элементарного события w: $(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \varphi(w)$; каждому элементарному событию w ставится в соответствие n действительных чисел x_1, x_2, ..., x_n — значения, принятые с. в. X_1, X_2, ..., X_n в результате опыта. Вектор $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется *реализацией* случайного вектора $(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \overline{X}$.

Закон распределения вероятностей n-мерной с. в. задается ее *функцией распределения*

$$F_{X_1, X_2, \ldots, X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P\{X_1 < x_1, X_2 < x_2, \ldots, X_n < x_n\}.$$

Функция распределения $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ обладает такими же свойствами, как и функция распределения двух с. в. $F(x, y)$. В частности: она принимает значения на отрезке $[0, 1]$, $F(+\infty, +\infty, \ldots, \infty) = 1$, $F_3(x_3) = F(+\infty, +\infty, x_3, +\infty, \ldots, +\infty)$.

Плотность распределения системы n непрерывных с. в. $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ определяется равенством

$$f_{X_1, X_2, \ldots, X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{\partial^n F(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_n}.$$

При этом: $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geqslant 0$ и

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty}}_{n} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1 dx_2 \ldots, dx_n = 1.$$

Вероятность попадания случайной точки $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ *в область* D из n-мерного пространства выражается n-кратным интегралом

$$P\{(X_1, X_2, \dots, X_n) \in D\} = \underset{(D)}{\int\int \dots \int} f(x_1, x_2, \dots, x_n)\, dx_1 dx_2 \dots, dx_n.$$

Функция распределения $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ выражается через плотность $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ n-кратным интегралом

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \underbrace{\int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2} \dots \int_{-\infty}^{x_n}}_{n} f(x_1, x_2, \dots, x_n)\, dx_1 dx_2 \dots, dx_n.$$

Необходимым и достаточным условием взаимной независимости n с. в. является равенство:

$$F_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = F_{X_1}(x_1) \cdot F_{X_2}(x_2) \dots F_{X_n}(x_n);$$

для n непрерывных с. в.:

$$f_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_{X_1}(x_1) \cdot f_{X_2}(x_2) \dots f_{X_n}(x_n).$$

Основными *числовыми характеристиками многомерной с. в.* $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ являются:

1. n м. о. составляющих X_i, т. е. $m_1 = MX_1$, $m_2 = MX_2$, ..., $m_n = MX_n$;
2. n дисперсий составляющих X_i, т. е. $D_1 = DX_1$, $D_2 = DX_2$, ..., $D_n = DX_n$, при этом $D_i = M(X_i - m_i)^2$, $i = \overline{1, n}$;
3. $n(n-1)$ ковариаций, т. е. $K_{ij} = M(\overset{\circ}{X}_i \cdot \overset{\circ}{X}_j)$, $i \neq j$, при этом $K_{ij} = K_{ji}$, $K_{ii} = D_i$.

Ковариации K_{ij} образуют ковариационную матрицу

$$\begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & K_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{n1} & K_{n2} & \dots & K_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} D_1 & K_{12} & \cdots & K_{1n} \\ & D_2 & \cdots & K_{2n} \\ & & \cdots & \cdots \\ & & & D_n \end{pmatrix}.$$

3.11. Характеристическая функция и ее свойства

Наряду с функцией распределения, содержащей все сведения о с. в., для ее описания можно использовать так называемую *характеристическую* функцию. С ее помощью, в частности, упрощается задача нахождения распределения суммы независимых с. в., нахождения числовых характеристик с. в.

Характеристической функцией с. в. X называется м.о. с.в. e^{itX}, обозначается через $\varphi_X(t)$ или просто $\varphi(t)$.

Таким образом, по определению

$$\varphi_X(t) = Me^{itX},$$

где t — параметр, $i = \sqrt{-1}$ — мнимая единица.

Для д.с.в. X, принимающей значения x_1, x_2, ... с вероятностями $p_k = P\{X = x_k\}$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, характеристическая функция определяется формулой

$$\varphi_X(t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{itx_k} p_k. \tag{3.43}$$

для н.с.в. с плотностью $f(x)$ — формулой

$$\varphi_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x)\, dx. \tag{3.44}$$

Заметим, что:

1. Характеристическая функция н.с.в. есть преобразование Фурье от плотности ее распределения; плотность $f(x)$ выражается через $\varphi(t)$ обратным преобразованием Фурье:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) e^{-itx}\, dt.$$

2. Если с.в. принимает целочисленные значения $0, 1, 2, \ldots$, то $\varphi(t) = \psi(z)$, где $z = e^{it}$. Тогда

$$\psi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k p_k$$

(см. п. 2.6).

Свойства характеристической функции:

1. Для всех $t \in R$ имеет место неравенство

$$|\varphi(t)| \leqslant \varphi(0) = 1.$$

2. Если $Y = aX + b$, где a и b — постоянные, то

$$\varphi_Y(t) = e^{itb} \varphi_X(at).$$

3. Характеристическая функция суммы двух независимых с. в. X и Y равна произведению их характеристистических функций, т. е.

$$\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t) \cdot \varphi_Y(t).$$

4. Если для некоторого k существует начальный момент k-го порядка с. в. X, т. е. $\alpha_k = M(X^k)$, то существует k-я призводная характеристической функции и ее значение при $t = 0$ равно α_k, умноженному на i^k, т. е.

$$\varphi_X^{(k)}(0) = i^k M(X^k) = i^k \alpha_k.$$

❑ 1. $|\varphi(t)| = |Me^{itX}| \leqslant M|e^{itX}| = M1 = 1$. (Действительно, $|e^{itX}| = |\cos tX + i\sin tX| = \sqrt{\cos^2 tX + \sin^2 tX} = 1$); $\varphi(0) = Me^0 = M1 = 1$.

2. $\varphi_Y(t) = Me^{itY} = Me^{it(aX+b)} = M(e^{itb}e^{iaXt}) = e^{itb}Me^{iatX} = e^{itb}\varphi_X(at)$.

3. $\varphi_{X_1+X_2}(t) = Me^{it(X_1+X_2)} = M(e^{itX_1}e^{itX_2}) = Me^{itX_1} \cdot Me^{itX_2} = \varphi_{X_1}(t)\cdot\varphi_{X_2}(t)$. Свойство справедливо для суммы n независимых с. в.

4. $\varphi_X^{(k)}(t) = \dfrac{d^k Me^{itX}}{dt^k} = i^k M(X^k e^{itX})$. Поэтому при $t = 0$ имеем $\varphi_X^{(k)}(0) = i^k M(X^k) = i^k \alpha_k$. ■

Из свойства 4 следует $\alpha_k = i^{-k}\varphi_X^{(k)}(0)$. Отсюда, как частный случай, можно получить:

$$\alpha_1 = MX = -i\varphi'(0) \qquad \left(i^{-1} = \frac{1}{i} = \frac{i}{i^2} = \frac{i}{-1} = -i\right),$$
$$\alpha_2 = MX^2 = -\varphi''(0), \tag{3.45}$$
$$DX = \alpha_2 - \alpha_1^2 = -\varphi''(0) + (\varphi'(0))^2.$$

Пример 3.11. Найти характеристическую функцию с. в. X, распределенной по биномиальному закону. Найти MX и DX.

❍ С. в. X принимает значения $0, 1, 2, \ldots, n$ с вероятностями

$$p_k = P\{X = k\} = C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Поэтому, используя формулу (3.43) и формулу бинома Ньютона, находим, что

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{n} e^{itk} C_n^k p^k q^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (e^{it}\cdot p)^k q^{n-k} = (e^{it}p + q)^n,$$

т. е. $\varphi(t) = (e^{it}p + q)^n$. Используя формулы (3.45), находим:

$$MX = -i(n(e^{it}p+q)^{n-1} \cdot pe^{it} \cdot i)\Big|_{t=0} = np, \quad DX = npq. \qquad \bullet$$

Упражнения

1. Найти характеристическую функцию с. в. X, равномерно распределенной на отрезке $[a, b]$.
2. Найти MX с. в. X, распределенной по закону Пуассона с параметром a, используя характеристическую функцию $\varphi_X(t)$.
3. Дано $f_X(x) = \begin{cases} -2x, & \text{при } x \in [-1, 0], \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$ — плотность с. в. X. Найти $\varphi_X(t)$.

3.12. Характеристическая функция нормальной случайной величины

Согласно формуле (3.44), характеристическая функция с. в. $X \sim N(a, \sigma)$ равна

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itx} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2-2(a+it\sigma^2)x+a^2}{2\sigma^2}}\,dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2-2x(a+it\sigma^2)+(a+it\sigma^2)^2+a^2-(a+it\sigma^2)^2}{2\sigma^2}}\,dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-(a+it\sigma^2))^2}{2\sigma^2}} \cdot e^{\frac{2ait\sigma^2+(it\sigma^2)^2}{2\sigma^2}}\,dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{2ait\sigma^2-t^2\sigma^4}{2\sigma^2}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-(a+it\sigma^2))^2}{2\sigma^2}}\,dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{iat-\frac{t^2\sigma^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{x-(a+it\sigma^2)}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2} d\left(\frac{x-(a+it\sigma^2)}{\sqrt{2}\sigma}\right) \cdot \sqrt{2}\sigma =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{ita-\frac{t^2\sigma^2}{2}} \sqrt{\pi} = e^{ita-\frac{t^2\sigma^2}{2}}$$

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}\, du = \sqrt{\pi} \text{ — интеграл Пуассона}\right).$$

Таким образом, $\varphi_X(t) = e^{ita-\frac{t^2\sigma^2}{2}}$, если $X \sim N(a, \sigma)$.

Пример 3.12. Найти с помощью характеристической функции м. о. и дисперсию с. в. $X \sim N(a, \sigma)$.

❍ Применим формулы (3.45):

$$MX = [-i\varphi'(0)] = -ie^{iat-\frac{t^2\sigma^2}{2}}(ia - t\sigma^2)\Big|_{t=0} = -i \cdot 1 \cdot ia = a,$$

т. е. $MX = a$;

$$DX = [-\varphi''(0) + (\varphi'(0))^2] =$$

$$= -\left(-\sigma^2 e^{iat-\frac{t^2\sigma^2}{2}} + (ia - t\sigma^2)^2 e^{iat-\frac{t^2\sigma^2}{2}}\right)\Big|_{t=0} + (ia)^2 =$$

$$= \sigma^2 - i^2a^2 + i^2a^2 = \sigma^2,$$

т. е. $DX = \sigma^2$. Получили известные нам результаты: a — м. о., σ — с. к. о.; эти параметры полностью определяют с. в., распределенную по нормальному закону. ●

Глава 4

Функции случайных величин

Часто возникают задачи, в которых по известному закону распределения (или числовым характеристикам) одной (или нескольких) случайной величины требуется определить распределение другой (или нескольких) случайной величины, функционально связанной с первой. Построение законов распределения функций некоторых д. с. в. (cX, $X+Y$, $X \cdot Y$) уже было рассмотрено в п. 2.5 (свойства 2, 3, 5 математического ожидания).

4.1. Функция одного случайного аргумента

Если каждому возможному значению с. в. X по определенному правилу соответствует одно возможное значение с. в. Y, то Y называют *функцией случайного аргумента* X, записывают $Y = \varphi(X)$.

Пусть X — д. с. в. с возможными значениями $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, вероятности которых равны соответственно $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$, т. е. $p_i = P\{X = x_i\}$, $i = 1, 2, 3, \ldots, n$. Очевидно, что с. в. $Y = \varphi(X)$ также д. с. в. с возможными значениями $y_1 = \varphi(x_1)$, $y_2 = \varphi(x_2)$, $y_3 = \varphi(x_3), \ldots, y_n = \varphi(x_n)$, вероятности которых равны соответственно $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$, т. е. если $y_i = \varphi(x_i)$, то $p_i = P\{Y = y_i\} = P\{X = x_i\}$, $i = \overline{1, n}$.

Отметим, что различным значениям с. в. X могут соответствовать одинаковые значения с. в. Y. В этом случае вероятности повторяющихся значений следует складывать.

Математическое ожидание и дисперсия функции $Y = \varphi(X)$ определяются соответственно равенствами

$$MY = \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i) p_i, \quad DY = \sum_{i=1}^{n} (\varphi(x_i) - m_y)^2 p_i.$$

Пример 4.1. Задан закон распределения д. с. в. X:

X	-1	1	2
p	0,1	0,3	0,6

Найти MY, если: а) $Y = X^2$, б) $Y = 2X + 10$.

а) С. в. Y принимает значения $y_1 = \varphi(x_1) = (-1)^2 = 1$, $y_2 = 1^2 = 1$, $y_3 = 2^2 = 4$, т. е. она принимает два значения: 1 и 4, причем $p_1 = P\{Y = 1\} = P\{X = -1\} + P\{X = 1\} = 0{,}1 + 0{,}3 = 0{,}4$, $p_2 = P\{Y = 4\} = P\{X = 2\} = 0{,}6$. Следовательно, $MY = 1 \cdot 0{,}4 + 4 \cdot 0{,}6 = 2{,}8$.

б) Закон распределения Y имеет вид

Y	8	12	14
p	0,1	0,3	0,6

Значит, $MY = 8 \cdot 0{,}1 + 12 \cdot 0{,}3 + 14 \cdot 0{,}6 = 12{,}8$.

Пусть X — непрерывная с. в. с плотностью распределения $f(x)$, а с. в. Y есть функция от X, т. е. $Y = \varphi(X)$. Найдем закон распределения с. в. Y. Будем считать функцию $Y = \varphi(X)$ непрерывной, строго возрастающей и дифференцируемой в интервале (a, b) (он может быть бесконечным: $(-\infty, \infty)$) всех возможных значений с. в. X. Тогда существует функция $x = \psi(y)$, обратная функции $y = \varphi(x)$ (случайная точка (X, Y) лежит на кривой $y = \varphi(x)$). Функция распределения $G_Y(y)$ (ее можно обозначить и так: $G(y)$, $F_Y(y)$ или $F_Y(x)$) с. в. Y определяется по формуле $G(y) = P\{Y < y\}$. И так как событие $\{Y < y\}$ эквивалентно событию $\{X < \psi(y)\}$ (рис. 46), то

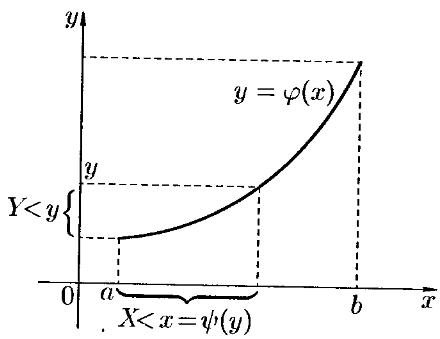


Рис. 46

$$G(y) = P\{Y < y\} = P\{X < \psi(y)\} = F_X(\psi(y)) = \int\limits_a^{\psi(y)} f(x)\,dx. \text{ т. е.}$$

$$G(y) = \int\limits_a^{\psi(y)} f(x)\,dx.$$

Дифференцируя полученное равенство по y, найдем плотность распределения с. в. Y:

$$g(y) = \frac{dG(y)}{dy} = f(\psi(y)) \cdot \frac{d}{dy}(\psi(y)) = f(\psi(y)) \cdot \psi'(y),$$

т. е.

$$g(y) = f(\psi(y))\psi'(y). \tag{4.1}$$

Если функция $y = \varphi(x)$ в интервале (a, b) строго убывает, то событие $\{Y < y\}$ эквивалентно событию $\{X > \psi(y)\}$. Поэтому

$$G(y) = \int\limits_{\psi(y)}^{b} f(x)\,dx = -\int\limits_b^{\psi_y} f(x)\,dx.$$

Отсюда следует, что

$$g(y) = -f(\psi(y))\psi'(y). \tag{4.2}$$

Учитывая, что плотность распределения не может быть отрицательной, формулы (4.1) и (4.2) можно объединить в одну

$$g(y) = f(\psi(y))|\psi'(y)|. \tag{4.3}$$

И, наконец, если функция $y = \varphi(x)$ немонотонна в интервале (a, b), то для нахождения $g(y)$ следует разбить интервал на n участков монотонности, найти обратную функцию на каждом из них и воспользоваться формулой

$$g(y) = \sum_{i=1}^{n} f(\psi_i(y))|\psi_i'(y)|. \tag{4.4}$$

Если с. в. X является непрерывной и $f(x)$ — плотность ее распределения, то для нахождения числовых характеристик с. в. $Y = \varphi(X)$ необязательно находить закон ее распределения, можно пользоваться формулами

$$MY = M(\varphi(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) f(x)\, dx,$$
$$DY = D(\varphi(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} (\varphi(x) - m_y)^2 f(x)\, dx. \tag{4.5}$$

Пример 4.2. Найти плотность распределения функции $Y = -5X + 2$, считая X н. с. в. с плотностью $f(x)$.

Функция $y = -5x + 2$ монотонно убывает в интервале $(-\infty, \infty)$. Обратная функция есть $x = \frac{1}{5}(2 - y) = \psi(y)$, $\psi'(y) = -\frac{1}{5}$. По формуле (4.3) имеем $g(y) = f\left(\frac{2-y}{5}\right) \cdot \left|-\frac{1}{5}\right| = \frac{1}{5} f\left(\frac{2-y}{5}\right)$, $y \in (-\infty, \infty)$. ●

Проиллюстрируем на примере 4.2 вывод формул для функции и плотности распределения:

$$G(y) = P\{Y < y\} = P\{-5X + 2 < y\} = P\left\{X > \frac{2-y}{5}\right\} =$$
$$= 1 - P\left\{X \leqslant \frac{2-y}{5}\right\} = 1 - \left(P\left\{X < \frac{2-y}{5}\right\} + P\left\{X = \frac{2-y}{5}\right\}\right) =$$
$$= 1 - P\left\{X < \frac{2-y}{5}\right\} = 1 - F_X\left(\frac{2-y}{5}\right),$$

так как $P\left\{X = \frac{2-y}{5}\right\} = 0$, т. е. $G(y) = 1 - F_X\left(\frac{2-y}{5}\right)$ — функция распределения с. в. Y. Тогда

$$g(y) = G'(y) = \left(1 - F_X\left(\frac{2-y}{5}\right)\right)'_y = -f_X\left(\frac{2-y}{5}\right) \cdot \left(\frac{2-y}{5}\right)'_y =$$
$$= -f\left(\frac{2-y}{5}\right) \cdot \left(-\frac{1}{5}\right),$$

т. е. $g(y) = \frac{1}{5} f\left(\frac{2-y}{5}\right)$, $y \in (-\infty, \infty)$.

Отметим, что линейное преобразование $Y = aX + b$ не меняет характера распределения: из нормальной с. в. получается нормальная; из равномерной — равномерная.

Пример 4.3. Пусть с. в. X имеет равномерное распределение в интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Найти математическое ожидание с. в. $Y = \cos X$: а) найдя плотность $g(y)$; б) не находя $g(y)$.

а) Имеем:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, & x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \\ 0, & x \notin \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right). \end{cases}$$

В интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ функция $y = \cos x$ не монотонна: в $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ функция возрастает, в $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ — убывает. На первом участке обратная функция $x_1 = -\arccos y = \psi_1(y)$, на втором — $x_2 = \arccos y = \psi_2(y)$. По формуле (4.4) имеем

$$g(y) = f(\psi_1(y))|\psi_1'(y)| + f(\psi_2(y))|\psi_2'(y)| =$$
$$= \frac{1}{\pi}\left|\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\right| + \frac{1}{\pi}\left|-\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\right| = \frac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}},$$

т. е.

$$g(y) = \begin{cases} \frac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}}, & \text{при } 0 < y < 1, \\ 0, & \text{при } y \leqslant 0 \text{ или } y \geqslant 1. \end{cases}$$

Тогда

$$MY = \left[\int_{-\infty}^{\infty} y\, g(y)\, dy\right] = \int_0^1 y \cdot \frac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}}\, dy =$$
$$= -\frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{2} \int_0^1 (1-y^2)^{-\frac{1}{2}}\, d(1-y^2) = -\frac{1}{\pi} \cdot 2\sqrt{1-y^2}\Big|_0^1 = \frac{2}{\pi},$$

т. е. $MY = \frac{2}{\pi}$.

б) Используем формулу (4.5):

$$MY = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot \frac{1}{\pi}\, dx = \frac{1}{\pi} \sin x \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\pi}(1 - (-1)) = \frac{2}{\pi},$$

т. е. $MY = \frac{2}{\pi}$. ●

Упражнения

1. Дискретная с. в. X задана законом распределения

X	-2	-1	0	1	2	3
p	0,10	0,20	0,30	0,25	0,10	0,05

Найти закон распределения случайных величин: а) $Y = 2X^2 - 3$; б) $Y = \sqrt{X+2}$; в) $Y = \sin\frac{\pi}{3}X$.

2. Дискретная с. в. X задана своим рядом распределения

X	0	1	2	3
p	0,3	0,4	0,2	0,1

Построить многоугольник распределения с. в. X и $Y = \cos^2\frac{\pi}{2}X$. Найти MY и σY.

3. Найти плотность распределения и дисперсию с. в. $Y = X + 1$, если $X \sim R[-2, 2]$.

4. Случайная величина $X \sim N(0, 1)$. Найти плотность распределения с. в.: а) $Y = 3X^3$; б) $Y = |X|$.

5. Пусть X — н. с. в. с плотностью

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & \text{при } x \geqslant 0, \\ 0, & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

Найти функцию распределения и плотность распределения с. в. Y, если а) $Y = 2X - 1$; б) $Y = X^2$.

4.2. Функции двух случайных аргументов

Для решения ряда практических задач необходимо знать закон распределения (или числовые характеристики) случайных величин вида $Z = X \pm Y$, $Z = X \cdot Y$, $Z = \sqrt{X^2 + Y^2}$, $Z = \max(X, Y)$ и других.

Если каждой паре возможных значений с. в. X и Y по определенному правилу соответствует одно возможное значение с. в. Z, то Z называют *функцией двух случайных аргументов* X *и* Y, записывают $Z = \varphi(X, Y)$.

Найдем закон распределения суммы двух случайных величин (наиболее важный на практике), т. е. закон распределения с. в. $Z = X + Y$.

Пусть система двух непрерывных с. в. (X, Y) имеет совместную плотность распределения $f(x, y)$. Найдем по формуле (3.8) функцию распределения с. в. $Z = X + Y$.

$$F_Z(z) = P\{Z < z\} = P\{X + Y < z\} = \iint\limits_{D_z} f(x, y)\,dxdy.$$

Здесь D_z — множество точек плоскости Oxy, координаты которых удовлетворяют неравенству $x + y < z$, см. рис. 47.

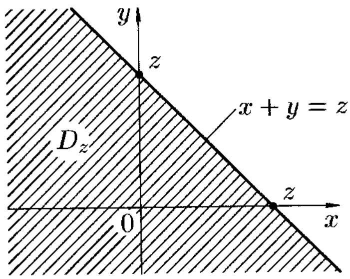


Рис. 47

Имеем

$$F_Z(z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\int\limits_{-\infty}^{z-x} f(x, y)\,dy \right) dx.$$

Дифференцируя полученное равенство по переменной z, входящей в верхний предел внутреннего интеграла, получаем выражение для плотности распределения с. в. $Z = X + Y$:

$$f_Z(z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x, z - x)\,dx. \tag{4.6}$$

Если с. в. X и Y *независимы*, то, как известно (п. 3.4), $f(x, y) = f_1(x) f_2(y)$. Формула (4.6) примет вид

$$f_Z(z) = f_{X+Y}(z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_1(x) f_2(z - x)\,dx. \tag{4.7}$$

Закон распределения *суммы независимых с. в.* называется *композицией* или *сверткой* законов распределения слагаемых.

Плотность распределения с. в. Z можно записать в виде $f_{X+Y} = f_X * f_Y$, где $*$ — знак свертки, а формулу (4.7) называют формулой свертки или формулой композиции двух распределений.

Записав Z в виде $Z = Y + X$, можно получить другое представление для $f_Z(z)$, а именно

$$f_Z(z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(z-y, y)\,dy$$

и

$$f_Z(z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_1(z-y) f_2(y)\,dy$$

в случае независимости с. в. X и Y.

Задача нахождения закона распределения с. в. вида $Z = X - Y$, $Z = X \cdot Y$ и других решаются аналогично.

Пример 4.4. Пусть с. в. $X \sim N(0,1)$, с. в. $Y \sim N(0,1)$. Найти закон распределения с. в. $Z = X + Y$, считая X и Y независимыми с. в.

❍ Используя формулу (4.7), получаем

$$f_Z(z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z-x)^2}{2}}\,dx = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{2x^2 - 2zx + z^2}{2}}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{2\left(\left(x-\frac{z}{2}\right)^2 + \frac{z^2}{4}\right)}{2}}\,dx = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{z^2}{4}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(x-\frac{z}{2}\right)^2}\,d\left(x - \frac{z}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{z^2}{4}} \sqrt{\pi} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2(\sqrt{2})^2}}$$

$$\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}\,du = \sqrt{\pi} \ \text{— интеграл Пуассона} \right).$$

т. е.

$$f_{X+Y}(z) = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2(\sqrt{2})^2}}.$$

Сумма независимых нормальных с. в. (с $m = 0$, $\sigma = 1$) имеет нормальное распределение (с $m = 0$, $\sigma = \sqrt{2}$). ●

Пример 4.5. Совместное распределение с. в. X и Y задано плотностью распределения вероятностей

$$f(x,y)=\begin{cases}x+y, & \text{при } 0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 1,\\ 0, & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Найти плотность распределения вероятностей с. в. $Z=X-Y$.

Найдем сначала функцию распределения $F(z)$ с. в. Z, а затем — ее производную $F'_Z(z)=f_Z(z)$.

$$F_Z(z)=P\{Z<z\}=P\{X-Y<z\}=\iint\limits_{D_z}(x+y)\,dxdy,$$

где D_z — множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству $x-y<z$, т. е. $y>x-z$ (они находятся выше прямой $y=x-z$), где z — произвольное число. Очевидно, если $z\leqslant -1$, то $F(z)=0$; так как $f(x,y)=0$ вне квадрата $0\leqslant x\leqslant 1$, $0\leqslant y\leqslant 1$. Область интегрирования D_z при $-1<z\leqslant 0$ изображена на рис. 48, при $0<z\leqslant 1$ — на рис. 49).

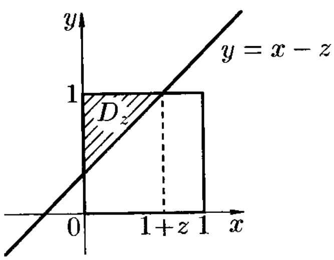


Рис. 48

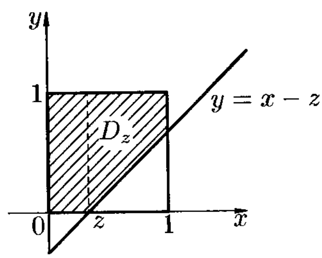


Рис. 49

При $-1<z\leqslant 0$ имеем

$$F(z)=\iint\limits_{D_z}(x+y)\,dxdy=\int\limits_0^{1+z}dx\int\limits_{x-z}^{1}(x+y)\,dy=\int\limits_0^{1+z}dx\left(xy+\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{x-z}^{1}=$$

$$=\int\limits_0^{1+z}\left(x+\frac12-x^2+xz-\frac{(x-z)^2}{2}\right)dx=$$

$$=\left(\frac{x^2}{2}+\frac12 x-\frac{x^3}{3}+z\frac{x^2}{2}-\frac{(x-z)^3}{6}\right)\Bigg|_0^{1+z}=$$

$$=\frac{(1+z)^2}{2}+\frac{1+z}{2}-\frac{(1+z)^3}{3}+\frac{z(1+z)^2}{2}-\frac16-\frac{z^3}{6}=\frac{(z+1)^2}{2}.$$

При $0 < z \leqslant 1$ имеем

$$F(z) = \iint\limits_{D_z} (x+y)\,dxdy = \int\limits_0^z dx \int\limits_0^1 (x+y)\,dy + \int\limits_z^1 dx \int\limits_{x-z}^1 (x+y)\,dy =$$

$$= \int\limits_0^z dx \left(xy + \frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^1 + \int\limits_z^1 dx \left(xy + \frac{y^2}{2}\right)\Big|_{x-z}^1 =$$

$$= \int\limits_0^z \left(x + \frac{1}{2}\right) dx + \int\limits_z^1 \left(x + \frac{1}{2} - x^2 + xz - \frac{(x-z)^2}{2}\right) dx =$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2}\right)\Big|_0^z + \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} - \frac{x^3}{3} + z\frac{x^2}{2} - \frac{(x-z)^3}{6}\right)\Big|_z^1 =$$

$$= \frac{z^2}{2} + \frac{z}{2} + \frac{1}{2} - \frac{z^2}{2} + \frac{1}{2} - \frac{z}{2} - \frac{1}{3} + \frac{z^3}{3} + \frac{z}{2} - \frac{z^3}{2} - \frac{(1-z)^3}{6} - 0 = \frac{-z^2 + 2z + 1}{2}.$$

При $z > 1$ имеем

$$F(z) = \iint\limits_{D_z} (x+y)\,dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 (x+y)\,dy =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(x + \frac{1}{2}\right) dx = \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2}\right)\Big|_0^1 = 1.$$

Таким образом,

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0, & \text{при } z \leqslant -1, \\ \dfrac{(z+1)^2}{2}, & \text{при } -1 < z \leqslant 0, \\ \dfrac{-z^2 + 2z + 1}{2}, & \text{при } 0 < z \leqslant 1, \\ 1, & \text{при } z > 1. \end{cases}$$

Следовательно,

$$F'_Z(z) = f_Z(z) = \begin{cases} 0, & \text{при } z \leqslant -1,\ z > 1, \\ z+1, & \text{при } -1 < z \leqslant 0, \\ 1-z, & \text{при } 0 < z \leqslant 1. \end{cases}$$

Контроль:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(z)\,dz = \int\limits_{-\infty}^{-1} 0\,dz + \int\limits_{-1}^{0} (z+1)\,dz + \int\limits_{0}^{1} (1-z)\,dz + \int\limits_{1}^{\infty} 0\,dz =$$

$$= \frac{(z+1)^2}{2}\Big|_{-1}^{0} - \frac{(1-z)^2}{2}\Big|_{0}^{1} = \frac{1}{2} - 0 - 0 + \frac{1}{2} = 1. \quad \bullet$$

Пример 4.6. Независимые с. в. X и Y распределены равномерно $X \sim R[0,4]$, $Y \sim R[0,1]$. Найти плотность распределения вероятностей с. в. $Z = X + Y$ (рис. 50).

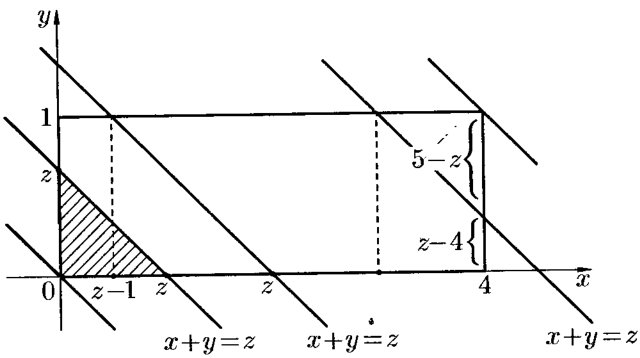


Рис. 50

Система с. в. (X,Y) равномерно распределена в прямоугольнике $D = \{0 \leqslant x \leqslant 4, 0 \leqslant y \leqslant 1\}$,

$$f_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & x \in [0,4], \\ 0, & x \notin [0,4], \end{cases} \qquad f_2(y) = \begin{cases} 1, & y \in [0,1], \\ 0, & y \notin [0,1]. \end{cases}$$

Так как с. в. X и Y независимы, то $f(x,y) = f_1(x) \cdot f_2(y) = \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{1}{4}$.

$$F_Z(z) = P\{X+Y<z\} = \iint\limits_{\substack{D_z \\ (x+y<z)}} \frac{1}{4}\,dxdy = \frac{1}{4} S_{D_z},$$

где S_{D_z} — площадь области D_z — части прямоугольника, лежащей ниже прямой $x + y = z$. Если $z \leqslant 0$, то $F(z) = 0$; если $0 < z \leqslant 1$, то $F(z) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} z^2$ (так как $S_{D_Z} = \frac{1}{2} \cdot z \cdot z$); если $1 < z \leqslant 4$, то

$$F(z) = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{z-1+z}{2} \cdot 1\right) = \frac{1}{8}(2z-1);$$

если $4 < z \leqslant 5$, то

$$F(z) = \frac{1}{4}\cdot\left(1\cdot 4 - \frac{1}{2}(5-z)(5-z)\right) = \frac{1}{8}(8-(5-z)^2);$$

если $5 < z$, то $F(z) = \frac{1}{4}\cdot 4 = 1$. Итак,

$$f(z) = F'_Z(z) = \begin{cases} 0, & z \leqslant 0,\ z > 5,\\ 0{,}25z, & 0 < z \leqslant 1,\\ 0{,}25, & 1 < z \leqslant 4,\\ 0{,}25(5-z), & 4 < z \leqslant 5.\end{cases}$$

Контроль:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(z)\,dz = \int\limits_0^1 \frac{1}{4}z\,dz + \int\limits_1^4 \frac{1}{4}\,dz + \frac{1}{4}\int\limits_4^5 (5-z)\,dz = 1.$$

Полученную плотность распределения $f_Z(z)$ можно найти другим способом, используя формулу

$$f(z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_1(x)\cdot f_2(z-x)\,dx.$$

Имеем

$$f(z) = \int\limits_0^4 \frac{1}{4} f_2(z-x)\,dx = \frac{1}{4}\int\limits_0^4 f_2(z-x)\,dx.$$

Функция под знаком интеграла отлична от нуля лишь в случае

$$\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 4,\\ 0 \leqslant z - x \leqslant 1,\end{cases}$$

т. е.

$$\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 4,\\ z-1 \leqslant x \leqslant z.\end{cases} \tag{4.8}$$

Решение системы зависит от значения z.

1. Если $z \leqslant 0$, система несовместна; отрезки $[0.4]$ и $[z-1, z]$ не пересекаются, (см. рис. 51).

Следовательно, $f_2(z-x) = 0$ и $f_{X+Y}(z) = 0$.

2. Если $0 < z \leqslant 1$, система (4.8) эквивалентна неравенству $0 \leqslant x < z$ (см. рис. 52).

Поэтому

$$f_{X+Y}(z) = \frac{1}{4}\int\limits_0^z 1\,dx = \frac{1}{4}x\Big|_0^z = \frac{z}{4}.$$

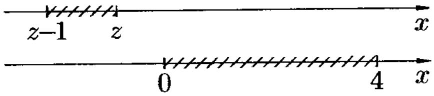


Рис. 51

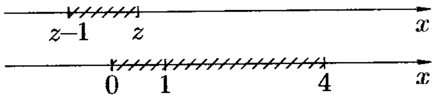


Рис. 52

3. Если $1 < z \leqslant 4$, система (4.8) эквивалентна неравенству $z - 1 \leqslant \leqslant x < z$ (см. рис. 53).

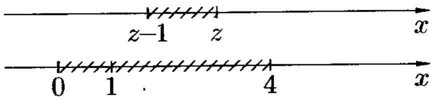


Рис. 53

Поэтому

$$f_{X+Y}(z) = \frac{1}{4}\int\limits_{z-1}^{z} 1\,dz = \frac{1}{4}x\Big|_{z-1}^{z} = \frac{1}{4}(z - z + 1) = \frac{1}{4}.$$

4. Если $4 < z \leqslant 5$, то $z - 1 \leqslant x < 4$ (см. рис. 54).

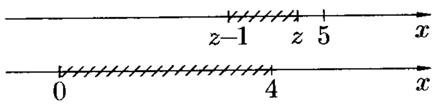


Рис. 54

Поэтому

$$f_Z(z) = \frac{1}{4}\int\limits_{z-1}^{4} 1\,dx = \frac{1}{4}x\Big|_{z-1}^{4} = \frac{1}{4}(4 - z + 1) = \frac{5-z}{4}.$$

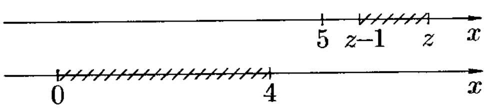


Рис. 55

5. Если $5 < z$, то система (4.8) несовместна (см. рис. 55), а, значит, $f_Z(z) = 0$. Итак.

$$f(z) = \begin{cases} 0, & z \leqslant 0,\ z > 5, \\ 0{,}25z, & 0 < z \leqslant 1, \\ 0{,}25, & 1 < z \leqslant 4, \\ 0{,}25(5 - z), & 4 < z \leqslant 5. \end{cases}$$

Упражнения

1. По условию примера 4.5 найти функцию и плотность распределения вероятностей с. в. $Z = X + Y$.

2. По условию примера 4.5 найти плотность распределения вероятностей с. в. $Z = \dfrac{Y}{X}$.

4.3. Распределение функций нормальных случайных величин

Рассмотрим распределение некоторых с. в., представляющих функции нормальных величин. используемые в математической статистике.

Распределение χ^2 (хи-квадрат или Пирсона)

Распределением χ_n^2 *с* n *степенями свободы* называется распределение суммы квадратов n независимых стандартных случайных величин, т. е.

$$\chi_n^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2, \quad \text{где} \quad X_i \sim N(0,1), \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Плотность вероятности с. в. χ^2 зависит только от числа n, т. е. числа слагаемых. Если $n = 1$, то $\chi^2 = X^2$, где $X \sim N(0,1)$,

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Плотность распределения с. в. $Y = X^2$ равна (согласно (4.4))

$$g(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} e^{-\frac{y}{2}}, \quad y > 0.$$

Плотность распределения χ_n^2 имеет вид

$$f_{\chi_n^2}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, & \text{при } x > 0, \\ 0, & \text{при } x \leqslant 0, \end{cases}$$

где $\Gamma(p) = \int\limits_0^{\infty} t^{p-1} e^{-t}\, dt$ — гамма-функция Эйлера ($\Gamma(p) = (p-1)!$ для целых положительных p). С возрастанием числа степеней свободы n распределение χ^2 приближается к нормальному закону распределения (при $n > 30$ распределение χ^2 практически не отличается от нормального);

$$M\chi_n^2 = n, \quad D\chi_n^2 = 2n.$$

На практике, как правило, используют не плотность вероятности, а квантили распределения χ_n^2.

Квантилью распределения χ_n^2, отвечающей уровню значимости α, называется такое значение $\chi_n^2 = \chi_{\alpha,n}^2$, при котором

$$P\{\chi_n^2 > \chi_{\alpha,n}^2\} = \int\limits_{\chi_{\alpha,n}^2}^{\infty} f_{\chi_n^2}(x)\, dx = \alpha.$$

С геометрической точки зрения нахождение квантили $\chi_{\alpha,n}^2$ заключается в выборе такого значения $\chi_n^2 = \chi_{\alpha,n}^2$, чтобы площадь заштрихованной на рис. 56 фигуры была равна α.

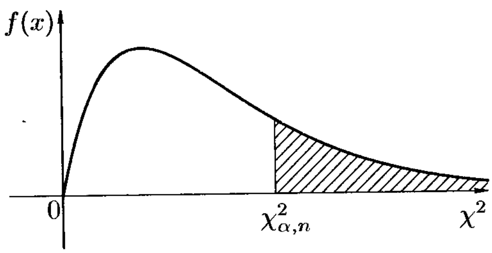


Рис. 56

Значения квантилей приводятся в специальных таблицах-приложениях.

Для стандартного нормального распределения квантили уровня α обозначаются через $\pm u_\alpha$, причем u_α является решением уравнения $\Phi(u_\alpha) = \dfrac{1-\alpha}{2}$.

Распределение Стьюдента

Распределением Стьюдента (или *t-распределением*) с n степенями свободы называется распределение с. в.

$$T_n = \frac{Z}{\sqrt{\frac{1}{n}\chi_n^2}},$$

где $Z \sim N(0,1)$ — стандартная нормальная величина, независимая от χ_n^2-распределения.

Плотность вероятности распределения Стьюдента имеет вид

$$f_{T_n}(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\sqrt{\pi n}}\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}; \quad t \in (-\infty; \infty).$$

При $n \to \infty$ распределение Стьюдента приближается (уже при $n > 30$ почти совпадает) к нормальному;

$$MT_n = 0, \qquad DT_n = \frac{n}{n-2}, \quad n > 2.$$

На практике используют квантили t-распределения: такое значение $t = t_{\frac{\alpha}{2},n}$, что

$$P\{|t| > t_{\frac{\alpha}{2},n}\} = 2\int_{t_{\frac{\alpha}{2},n}}^{\infty} f(t)\,dt = \alpha.$$

С геометрической точки зрения нахождение квантилей заключается в выборе такого значения $t = t_{\frac{\alpha}{2},n}$, чтобы площадь заштрихованной на рис. 57 фигуры была равна α.

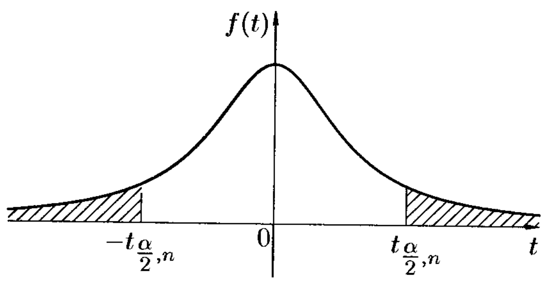


Рис. 57

Распределение Фишера–Снедекора

Распределением Фишера–Снедекора (или *F-распределением*) с m и n *степенями свободы* называется распределение с. в.

$$F = \frac{\frac{1}{m}\chi_m^2}{\frac{1}{n}\chi_n^2},$$

где χ_m^2 и χ_n^2 — независимые с. в., имеющие χ^2-распределение соответственно с m и n степенями свободы.

При $n \to \infty$ F-распределение стремится к нормальному закону.

$$MF = \frac{n}{n-2}, \quad n > 2, \qquad DF = \frac{2n^2(m+n-2)}{m(n-2)^2(n-4)}, \quad n > 4.$$

На практике обычно используют квантили распределения: такое значение $F = F_{\alpha,m,n}$, что

$$P\{F > F_{\alpha,m,n}\} = \int\limits_{F_{\alpha,m,n}}^{\infty} f(F)\,dF = \alpha.$$

С геометрической точки зрения нахождение квантили заключается в выборе такого значения $F = F_{\alpha,m,n}$, чтобы площадь заштрихованной на рис. 58 фигуры была равна α.

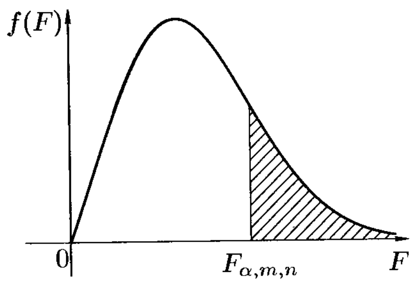


Рис. 58

Глава 5

Предельные теоремы теории вероятностей

Рассмотрим ряд утверждений и теорем из большой группы так называемых предельных теорем теории вероятностей, устанавливающих связь между теоретическими и экспериментальными характеристиками случайных величин при большом числе испытаний над ними. Они составляют основу математической статистики. Предельные теоремы условно делят на две группы. Первая группа теорем, называемая *законом больших чисел* (коротко: ЗБЧ), устанавливает устойчивость средних значений: при большом числе испытаний их средний результат перестает быть случайным и может быть предсказан с достаточной точностью. Вторая группа теорем, называемая *центральной предельной теоремой* (коротко: ЦПТ), устанавливает условия, при которых закон распределения суммы большого числа случайных величин неограниченно приближается к нормальному.

В начале рассмотрим неравенство Чебышева, которое можно использовать: а) для грубой оценки вероятностей событий, связанных со с. в., распределение которых неизвестно; б) доказательства ряда теорем ЗБЧ.

5.1. Неравенство Чебышева

Теорема 5.1. Если с. в. X имеет м. о. $MX = a$ и дисперсию DX, то для любого $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство Чебышева

$$P\{|X - MX| \geqslant \varepsilon\} \leqslant \frac{DX}{\varepsilon^2}. \qquad (5.1)$$

❑ Докажем неравенство (5.1) для непрерывной с. в. X с плотностью $f(x)$. Вероятность $P\{|X-a|\geqslant\varepsilon\}$ есть вероятность попадания с. в. X в область, лежащую вне промежутка $[a-\varepsilon, a+\varepsilon]$. Можно записать

$$P\{|X-a|\geqslant\varepsilon\} = \int\limits_{-\infty}^{a-\varepsilon} f(x)\,dx + \int\limits_{a+\varepsilon}^{+\infty} f(x)\,dx = \int\limits_{|x-a|\geqslant\varepsilon} f(x)\,dx =$$

$$= \int\limits_{|x-a|\geqslant\varepsilon} 1\cdot f(x)\,dx \leqslant \int\limits_{|x-a|\geqslant\varepsilon} \frac{(x-a)^2}{\varepsilon^2} f(x)\,dx,$$

так как область интегрирования $|x-a|\geqslant\varepsilon$ можно записать в виде $(x-a)^2\geqslant\varepsilon^2$, откуда следует $1\leqslant\dfrac{(x-a)^2}{\varepsilon^2}$. Имеем

$$P\{|X-a|\geqslant\varepsilon\} \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_{|x-a|\geqslant\varepsilon} (x-a)^2 f(x)\,dx \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} (x-a)^2 f(x)\,dx,$$

так как интеграл от неотрицательной функции при расширении области интегрирования может только возрасти. Таким образом,

$$P\{|X-a|\geqslant\varepsilon\} \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} (x-a)^2 f(x)\,dx = \frac{1}{\varepsilon^2} DX,$$

т. е. $P\{|X-a|\geqslant\varepsilon\}\leqslant\dfrac{DX}{\varepsilon^2}$.

Аналогично доказывается неравенство Чебышева и для дискретной с. в. X, принимающей значения $x_1, x_2, x_3, \ldots$ с вероятностями $p_1, p_2, p_3, \ldots$; только интегралы (вида $\int\limits_{|x-a|\geqslant\varepsilon}$) заменяются соответствующими суммами (вида $\sum\limits_{|x_i-a|\geqslant\varepsilon}$). ■

Отметим, что неравенство Чебышева можно записать в другой форме:

$$P\{|X-MX|<\varepsilon\}\geqslant 1-\frac{DX}{\varepsilon^2}. \tag{5.2}$$

В форме (5.2) оно устанавливает нижнюю границу вероятности события, а в форме (5.1) — верхнюю.

Неравенство Чебышева справедливо *для любых с. в.* В частности, для с. в. $X = m$, имеющей *биномиальное распределение* с математическим ожиданием $MX = a = np$ и дисперсией $DX = npq$ (п. 2.7), оно принимает вид

$$P\{|m - np| < \varepsilon\} \geqslant 1 - \frac{npq}{\varepsilon^2}; \tag{5.3}$$

для *частости* $\frac{m}{n}$ (или $\frac{n_A}{n}$, п. 1.5) события в n независимых испытаниях, в каждом из которых оно может произойти с вероятностью $p = M\left(\frac{m}{n}\right) = a$, дисперсия которых $D\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{pq}{n}$, неравенство Чебышева имеет вид

$$P\left\{\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} \geqslant 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2}. \tag{5.4}$$

Оценку вероятности попадания с. в. X в промежуток $[\varepsilon, \infty)$ дает неравенство Маркова.

Теорема 5.2 (Неравенство Маркова). Для любой неотрицательной с. в. X, имеющей м. о. MX и $\varepsilon > 0$, справедливо неравенство:

$$P\{X \geqslant \varepsilon\} \leqslant \frac{MX}{\varepsilon}, \tag{5.5}$$

❑ $P\{X \geqslant \varepsilon\} = \int\limits_{\varepsilon}^{\infty} f(x)\,dx \leqslant \int\limits_{\varepsilon}^{\infty} \frac{x}{\varepsilon} f(x)\,dx = \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\varepsilon}^{\infty} xf(x)\,dx \leqslant$
$\leqslant \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{0}^{\infty} xf(x)\,dx = \frac{MX}{\varepsilon}.$ ■

Неравенство (5.5) можно записать в форме

$$P\{X < \varepsilon\} \geqslant 1 - \frac{MX}{\varepsilon}. \tag{5.6}$$

Пример 5.1. Оценить с помощью неравенства Чебышева вероятность того, что отклонение с. в. X от своего м. о. будет меньше трех с. к. о., т. е. меньше $3\sigma_x$.

❍ Полагая $\varepsilon = 3\sigma_x$ в формуле (5.2), получаем

$$P\{|X - MX| < 3\sigma_x\} \geqslant 1 - \frac{\sigma_x^2}{(3\sigma_x)^2} = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9} \approx 0{,}8889.$$

Эта оценка, как известно (п. 2.7), называется *правилом трех сигм*; для с. в. $X \sim N(a, \sigma)$ эта вероятность равна 0,9973. ●

5.2. Теорема Чебышева

Основное утверждение ЗБЧ содержится в теореме Чебышева. В ней и других теоремах ЗБЧ используется понятие «сходимости случайных величин по вероятности».

Случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ *сходятся по вероятности* к величине A (случайной или неслучайной), если для любого $\varepsilon > 0$ вероятность события $\{|X_n - A| < \varepsilon\}$ при $n \to \infty$ стремится к единице, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} P\{|X_n - A| < \varepsilon\} = 1$$

(или $P\{|X_n - A| < \varepsilon\} \to 1$). Сходимость по вероятности символически записывают так:

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} A.$$

Следует отметить, что *сходимость по вероятности* требует, чтобы неравенство $|X_n - A| < \varepsilon$ выполнялось *для подавляющего числа членов* последовательности (в математическом анализе — для всех $n > N$, где N — некоторое число), а при $n \to \infty$ практически все члены последовательности должны попасть в ε-окрестность A.

Теорема 5.3 (ЗБЧ в форме П. Л. Чебышева, 1886 г.). Если случайные величины X_1, X_2, …, X_n, … независимы и существует такое число $C > 0$, что $DX_i \leqslant C$, $i = 1, 2, \ldots$, то для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} MX_i\right| < \varepsilon\right\} = 1, \tag{5.7}$$

т. е. среднее арифметическое этих случайных величин сходится по вероятности к среднему арифметическому их м. о.:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow[n\to\infty]{P} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} MX_i.$$

❑ Так как $DX_i \leqslant C$, $i = 1, 2, \ldots$, то

$$D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2} D\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} DX_i =$$

$$= \frac{1}{n^2}(DX_1 + DX_2 + \ldots + DX_n) \leqslant \frac{1}{n^2}(C + C + \ldots + C) = \frac{1}{n^2}Cn = \frac{C}{n}.$$

Тогда, применяя к с. в.

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

неравенство Чебышева (5.2), имеем

$$P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} MX_i\right| < \varepsilon\right\} \geqslant 1 - \frac{D\left(\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i\right)}{\varepsilon^2} \geqslant 1 - \frac{C}{n\varepsilon^2}. \quad (5.8)$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$ и учитывая, что вероятность любого события не превышает 1, получаем

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} MX_i\right| < \varepsilon\right\} = 1. \qquad \blacksquare$$

Следствие. Если с. в. $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ независимы и одинаково распределены, $MX_i = a$, $DX_i = \sigma^2$, то для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - a\right| < \varepsilon\right\} = 1, \quad (5.9)$$

т. е. среднее арифметическое с. в. сходится по вероятности к математическому ожиданию a:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow[n\to\infty]{P} a.$$

❑ Так как

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} MX_i = \frac{1}{n}(MX_1 + MX_2 + \ldots + MX_n) = \frac{1}{n}(a + a + \ldots + a) = \frac{1}{n}\cdot na = a,$$

а дисперсии с. в. X_i равны числу σ^2, т. е. ограничены, то, применив ЗБЧ в форме Чебышева (5.7), получим утверждение (5.9). ■

Следствие (5.9) теоремы Чебышева обосновывает «принцип среднего арифметического с. в. X_i», постоянно используемый на практике. Так, пусть произведено n независимых измерений некоторой величины, истинное значение которой a (оно неизвестно). Результат каждого измерения есть с. в. X_i. Согласно следствию (5.9), в качестве приближенного значения величины a можно взять среднее арифметическое результатов измерений:

$$a \approx \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \bar{X}.$$

Равенство тем точнее, чем больше n.

На теореме Чебышева основан также широко применяемый в статистике *выборочный метод*, суть которого в том, что о качестве большого количества однородного материала можно судить по небольшой его пробе.

Теорема Чебышева подтверждает связь между случайностью и необходимостью: среднее значение *случайной величины*

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

практически не отличается от *неслучайной величины*

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} MX_i.$$

Пример 5.2. Глубина моря измеряется прибором, не имеющим систематической ошибки. Среднее квадратическое отклонение измерений не превосходит 15 м. Сколько нужно сделать независимых измерений, чтобы с вероятностью, не меньшей 0,9, можно было утверждать, что среднее арифметическое этих измерений отличается от a (глубины моря) по модулю меньше, чем на 5 м?

○ Обозначим через X_i результаты n независимых измерений глубины моря. Нужно найти число n, которое удовлетворяет неравенству (5.8):

$$P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} MX_i\right| < \varepsilon\right\} \geqslant 1 - \frac{C}{n\varepsilon^2},$$

где $MX_i = a$, *что означает отсутствие при измерениях систематической ошибки* (т. е. измерения производятся с одинаковой точностью). По условию $\varepsilon = 5$, $C = 225$, так как $\sigma = \sqrt{DX} = 15$м. Отсюда

$$P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - a\right| < 5\right\} \geqslant 1 - \frac{225}{25n} \geqslant 0{,}9,$$

т. е. $0{,}1 \geqslant \frac{9}{n}$, $n \geqslant 90$. Измерение нужно проводить не менее 90 раз. ●

5.3. Теорема Бернулли

Теорема Бернулли исторически является первой и наиболее простой формой закона больших чисел. Она теоретически обосновывает свойство устойчивости относительной частоты (см. п. 1.5).

Теорема 5.4 (ЗБЧ в форме Я. Бернулли, 1713 г.). Если вероятность появления события A в одном испытании равна p, число наступления этого события при n независимых испытаниях равно n_A, то для любого числа $\varepsilon > 0$ имеет место равенство

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{n_A}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} = 1, \tag{5.10}$$

т. е. относительная частота $P^*(A)$ события A сходится по вероятности к вероятности p события A: $P^*(A) \xrightarrow[n\to\infty]{P} P(A)$.

❑ Введем с. в. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ следующим образом: $X_i = 1$, если в i-м испытании появилось событие A, а если не появилось, то $X_i = 0$. Тогда число n_A (число успехов) можно представить в виде

$$n_A = \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

М. о. и дисперсия с. в. X_i равны: $MX_i = 1 \cdot p + 0 \cdot (1-p) = p$, $DX_i = (0-p)^2(1-p) + (1-p)^2 p = p(1-p) = pq$. Закон распределения с. в. X_i имеет вид

X_i	0	1
P	$1-p$	p,

при любом i. Таким образом, с. в. X_i независимы, их дисперсии ограничены одним и тем же числом $\frac{1}{4}$, так как

$$p(1-p) = p - p^2 = \frac{1}{4} - \left(p - \frac{1}{2}\right)^2 \leqslant \frac{1}{4}.$$

Поэтому к этим с. в. можно применить теорему Чебышева (5.7):

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} MX_i\right| < \varepsilon\right\} = 1.$$

Но

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{n_A}{n}, \quad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} MX_i = \frac{1}{n}\cdot np = p.$$

Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{n_A}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} = 1.$ ■

Теорема Бернулли теоретически обосновывает возможность приближенного вычисления вероятности события с помощью его относительной частоты. Так, например, за вероятность рождения девочки можно взять относительную частоту этого события, которая, согласно статистическим данным, приближенно равна 0,485.

Неравенство Чебышева (5.2) для случайных величин

$$n_A = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

принимает вид

$$P\left\{\left|\frac{n_A}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} \geqslant 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2}. \tag{5.11}$$

Обобщением теоремы Бернулли на случай, когда вероятности p_i появления события A в каждом из n испытаний различны, является *теорема Пуассона*:

$$P^*(A) \xrightarrow[n\to\infty]{P} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} p_i, \tag{5.12}$$

где p_i — вероятность события A в i-м испытании.

Пример 5.3. Вероятность наличия опечатки на одной странице рукописи равна 0,2. Оценить вероятность того, что в рукописи, содержащей 400 страниц, частость появления опечатки отличается от соответствующей вероятности по модулю меньше, чем 0,05.

○ Воспользуемся формулой (5.11). В данном случае $p = 0{,}2$, $q = 0{,}8$, $n = 400$, $\varepsilon = 0{,}05$. Имеем

$$P\left\{\left|\frac{n_A}{n} - 0{,}2\right| < 0{,}05\right\} \geqslant \left[1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2}\right] = 1 - \frac{0{,}2\cdot 0{,}8}{400\cdot 0{,}05^2} = 0{,}84,$$

т. е. $p \geqslant 0{,}84$. ●

5.4. Центральная предельная теорема

Центральная предельная теорема (ЦПТ) представляет собой вторую группу предельных теорем, которые устанавливают связь между законом распределения суммы с. в. и его предельной формой — нормальным законом распределения.

Сформулируем ЦПТ для случая, когда члены суммы имеют одинаковое распределение (именно эта теорема чаще других используется на практике, так в математической статистике выборочные случайные величины имеют одинаковые распределения, так как получены из одной и той же генеральной совокупности).

Теорема 5.5. Пусть с. в. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ независимы, одинаково распределены, имеют конечные математическое ожидание $MX_i = a$ и дисперсию $DX_i = \sigma^2$, $i = \overline{1,n}$. Тогда функция распределения центрированной и нормированной суммы этих случайных величин стремится при $n \to \infty$ к функции распределения стандартной нормальной случайной величины:

$$Z_n = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i - M\left(\sum\limits_{i=1}^{n} X_i\right)}{\sqrt{D\left(\sum\limits_{i=1}^{n} X_i\right)}} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i - na}{\sigma\sqrt{n}},$$

$$F_{Z_n}(x) = P\{Z_n < x\} \xrightarrow[n\to\infty]{} \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt. \tag{5.13}$$

Из соотношения (5.13) следует, что при достаточно большом n сумма Z_n приближенно распределена по нормальному закону: $Z_n \sim N(0,1)$. Это означает, что сумма $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ приближенно распределена по нормальному закону: $S_n \sim N(na, \sqrt{n}\sigma)$. Говорят, что при $n \to \infty$ с. в. $\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ *асимптотически нормальна*.

Напомним, что:

1. С. в. X называется центрированной и нормированной (т. е. стандартной), если $MX = 0$, а $DX = 1$.
2. Если с. в. X_i, $i = \overline{1,n}$ независимы, $MX_i = a$, $DX_i = \sigma^2$, то

$$M\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = a + a + \ldots + a = na,$$

$$D\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} DX_i = \sigma^2 + \sigma^2 + \ldots + \sigma^2 = n\sigma^2.$$

3. $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$ — функция Лапласа; $\Phi(x) = \dfrac{1}{2} + \Phi_0(x)$, где

$\Phi_0(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{0}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$ — нормированная функция Лапласа.

Формула (5.13) позволяет при больших n вычислять вероятности различных событий, связанных с суммами случайных величин. Так, перейдя от с. в.

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

к стандартной с. в., получим:

$$P\left\{\alpha \leqslant \sum_{i=1}^{n} X_i \leqslant \beta\right\} = P\left\{\frac{\alpha - na}{\sigma\sqrt{n}} \leqslant \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i - na}{\sigma\sqrt{n}} \leqslant \frac{\beta - na}{\sigma\sqrt{n}}\right\} \approx$$

$$\approx \Phi\left(\frac{\beta - na}{\sigma\sqrt{n}}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - na}{\sigma\sqrt{n}}\right).$$

или

$$P\{\alpha \leqslant S_n \leqslant \beta\} \approx \Phi\left(\frac{\beta - MS_n}{\sqrt{DS_n}}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - MS_n}{\sqrt{DS_n}}\right) \quad — \tag{5.14}$$

формула для определения вероятности того, что сумма нескольких с. в. окажется в заданных пределах (см. (2.43) и (2.46)). Часто ЦПТ используют, если $n > 10$.

Пример 5.4. Независимые с. в. X_i распределены равномерно на отрезке $[0, 1]$. Найти закон распределения с. в.

$$Y = \sum_{i=1}^{100} X_i,$$

а также вероятность того, что $55 < Y < 70$.

○ Условия ЦПТ соблюдаются, поэтому с. в. Y имеет приближенно плотность распределения

$$f_Y(y) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y} e^{-\frac{(y - m_y)^2}{2\sigma_y^2}}.$$

По известным формулам для м. о. и дисперсии в случае равномерного распределения находим: $MX_i = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$, $DX_i = \frac{(1-0)^2}{12} = \frac{1}{12}$, $\sigma X_i = \frac{1}{\sqrt{12}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$. Тогда

$$m_y = M\left(\sum_{i=1}^{100} X_i\right) = \sum_{i=1}^{100} MX_i = 100 \cdot \frac{1}{2} = 50,$$

$$\sigma_y^2 = D\left(\sum_{i=1}^{100} X_i\right) = \sum_{i=1}^{100} DX_i = 100 \cdot \frac{1}{12} = \frac{25}{3},$$

$\sigma_y = \frac{5\sqrt{3}}{3}$. Поэтому

$$f_Y(y) \approx \frac{3}{5\sqrt{6\pi}} e^{-\frac{3(y-50)^2}{50}}.$$

Используя формулу (5.14), находим

$$P\{55 < Y < 70\} = \Phi\left(\frac{70-50}{\frac{5\sqrt{3}}{3}}\right) - \Phi\left(\frac{55-50}{\frac{5\sqrt{3}}{3}}\right) = \Phi(4\sqrt{3}) - \Phi(\sqrt{3}) =$$

$$= \Phi(6{,}9282) - \Phi(1{,}73) \approx 0{,}04.$$

т. е. $P\{55 < Y < 70\} \approx 0{,}04$. ●

5.5. Интегральная теорема Муавра–Лапласа

Следствиями ЦПТ являются рассмотренные ранее (п. 1.21) локальная и интегральная теоремы Муавра Лапласа. Приведем вывод интегральной теоремы Муавра Лапласа.

Рассмотрим схему Бернулли. Пусть n_A — число появления события A (число успехов) в n независимых испытаниях, в каждом из которых оно может появиться с вероятностью p (не появиться — с вероятностью $q = 1 - p$). Случайную величину n_A можно представить в виде суммы n независимых с. в. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ таких, что $X_i = 1$, если в i-м испытании событие A наступило, и $X_i = 0$ в противном случае, т. е.

$$n_A = \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Так как $MX_i = p$, $DX_i = pq$ (п. 5.3), то

$$Mn_A = M\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = np, \quad Dn_A = D\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = npq$$

(да это уже давно известно, см. (2.24), ведь с. в. n_A имеет биномиальный закон распределения). Тогда с. в.

$$Z_n = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i - M\left(\sum\limits_{i=1}^{n} X_i\right)}{\sqrt{D\left(\sum\limits_{i=1}^{n} X_i\right)}} = \frac{n_A - np}{\sqrt{npq}}$$

представляет также сумму n независимых, одинаково распределенных случайных величин. При этом $Z_n \sim N(0, 1)$, действительно:

$$MZ_n = M\left(\frac{n_A - np}{\sqrt{npq}}\right) = \frac{np - np}{\sqrt{npq}} = 0$$

и

$$DZ_n = D\left(\frac{n_A - np}{\sqrt{npq}}\right) = \frac{1}{npq} Dn_A = \frac{npq}{npq} = 1.$$

Следовательно, на основании ЦПТ (5.13) с. в. Z_n при большом числе n имеет приближенно нормальное распределение. Согласно свойству (2.46) нормального закона, записываем

$$P\{z_1 \leqslant Z_n \leqslant z_2\} \approx \Phi\left(\frac{z_2 - 0}{1}\right) - \Phi\left(\frac{z_1 - 0}{1}\right) = \Phi(z_2) - \Phi(z_1)$$

($\Phi(z)$ — функция Лапласа). Полагая

$$z_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}, \quad z_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}},$$

двойное неравенство в скобках

$$\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} \leqslant \frac{n_A - np}{\sqrt{npq}} \leqslant \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$$

можно переписать в эквивалентном виде $k_1 \leqslant n_A \leqslant k_2$. Таким образом, получаем

$$P\{k_1 \leqslant n_A \leqslant k_2\} = \Phi(z_2) - \Phi(z_1),$$

т. е. *интегральную формулу Муавра–Лапласа.*

Заметим, что: 1. Интегральная предельная теорема Муавра–Лапласа

$$P\left\{\frac{n_A - np}{\sqrt{npq}} < x\right\} \to \Phi(x) \tag{5.15}$$

для схемы Бернулли непосредствнно вытекает из ЦПТ (5.13) с учетом результатов, полученных в п. 5.3 ($n_A = \sum_{i=1}^{n} X_i$, $MX_i = p$, $DX_i = pq$; тогда $na = np$, $\sigma\sqrt{n} = \sqrt{pq}\sqrt{n} = \sqrt{npq}$).

2. Для подсчета сумм биномиальных вероятностей можно воспользоваться приближенной формулой

$$\sum_{k=0}^{m} P_{n,k} \approx \Phi\left(\frac{m - np}{\sqrt{npq}}\right) \tag{5.16}$$

Действительно,

$$\sum_{k=0}^{m} P_{n,k} = P\{n_A \leqslant m\} = P\{-\infty < n_A \leqslant m\} =$$
$$= P\left\{-\infty < \frac{n_A - np}{\sqrt{npq}} < \frac{m - np}{\sqrt{npq}}\right\} = \Phi\left(\frac{m - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi(-\infty) =$$
$$= \Phi\left(\frac{m - np}{\sqrt{npq}}\right),$$

где $\Phi(x)$ — функция Лапласа.

Пример 5.5. Машинистке требуется напечатать текст, содержащий 8000 слов, состоящих из четырех и более букв. Вероятность сделать ошибку в любом из этих слов равна 0,01. Какова вероятность, что при печатании будет сделано не более 90 ошибок?

❍ Применим формулу (5.16). Так как $n = 8000$, $p = 0{,}01$, $q = 0{,}99$, $m = 90$, то

$$\frac{1}{\sqrt{npq}} = \frac{1}{\sqrt{8000 \cdot 0{,}01 \cdot 0{,}99}} = \frac{1}{\sqrt{79{,}2}} \approx 0.112.$$
$$\frac{m - np}{\sqrt{npq}} \approx \frac{10}{8{,}9} \approx 1{,}12,$$

$\Phi(1{,}12) = 0{,}8686$. Следовательно, $P\{n_A \leqslant 90\} = \sum_{k=0}^{90} P_{n,k} \approx 0{,}869$. ●

Упражнения

1. Оценить с помощью неравенства Чебышева вероятность того, что: а) при бросании монеты 500 раз число выпадений герба будет заключено между 200 и 300; б) при бросании 10 игральных костей сумма очков отклонится от м. о. меньше, чем на 8.

2. Дисперсия каждой из данных независимых случайных величин не превышает 5. Найти число этих величин, при котором вероятность отклонения их средней арифметической от средней арифметической их м. о. менее чем на 0,1 превысит 0,9.

3. Оценить вероятность того, что при бросании монеты 500 раз частость появления герба отклонится от вероятности появления герба при одном бросании по модулю менее чем на 0,1.

4. Стрелок попадает при выстреле в мишень в десятку с вероятностью 0,5, в девятку — 0,3, в восьмерку — 0,1, в семерку — 0,1. Стрелок сделал 100 выстрелов. Какова вероятность того, что он набрал не менее 940 очков?

5. Приживаются в среднем 70% числа посаженных саженцев. Сколько нужно посадить саженцев, чтобы с вероятностью не меньшей 0,9 ожидать, что отклонение числа прижившихся саженцев от их м. о. не превышало по модулю 40? Решить задачу с помощью неравенства Чебышева.

Глава 6
Основы теории случайных процессов

6.1. Понятие случайной функции (процесса)

При изучении ряда явлений часто приходится иметь дело со случайными величинами, изменяющимися в процессе наблюдения (опыта, испытания) с течением времени. Примерами таких случайных величин могут служить: сигнал на выходе радиоприемника под воздействием помех, загруженность студентов в семестре, длина очереди за билетом в «Ленком», колебания напряжения в сети, рейтинг политической партии, траектория частиц в броуновском движении и т. д.

Такие случайные величины, изменяющиеся в процессе опыта, называют *случайными функциями.*

Раздел математики, изучающий случайные явления в динамике их развития, называется *теорией случайных функций (случайных процессов).* Ее методы используются, в частности, в теории автоматического управления, при анализе и планировании финансовой деятельности предприятий (и отдельной семьи), при обработке и передаче сигналов радиотехнических устройств, в экономике, в теории массового обслуживания.

Рассмотрим основные понятия теории случайных процессов (с. п.).

Если каждому значению $t \in T$, где T — некоторое множество действительных чисел, поставлена в соответствие с. в. $X(t)$, то говорят, что на множестве T задана *случайная функция* (с. ф.) $X(t)$. Другими словами, случайной функцией $X(t)$ называют с. в., зависящую от неслучайного аргумента t.

Если параметр t интерпретируется как время, то с. ф. называется *случайным процессом.* Другими словами, случайным процессом называется семейство случайных величин $X(t, \omega)$, заданных на одном и том же пространстве элементарных событий Ω, зависящих от параметра $t \in T$. Обозначается через $X(t, \omega)$ или $X(t)$, X_t.

Случайный процесс можно задать формулой, если вид случайной функции известен, а случайные величины, определяющие параметры с. ф., можно задать аналитически. Так, с. ф. $X(t) = Y \cdot \sin t$, где $t \geqslant 0$,

$Y \sim R[0;1]$ — с. в., имеющая равномерное распределение, является случайным процессом.

При фиксированном значении t, т. е. при $t = t_0 \in T$, случайный процесс $X(t,\omega)$ обращается в с. в. $X(t_0,\omega)$, называемую *сечением случайного процесса*.

Реализацией или *траекторией случайного* процесса $X(t,\omega)$ называется неслучайная функция времени $x(t) = X(t,\omega_0)$ при фиксированном $\omega = \omega_0$, т. е. конкретный вид, принимаемый случайным процессом в результате испытания.

Реализации с. п. обозначают через $x_1(t)$, $x_2(t), \ldots$, где индекс указывает номер опыта.

На рис. 59 показаны три реализации $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ случайного процесса при $\omega = \omega_1$, $\omega = \omega_2$, $\omega = \omega_3$ (они напоминают траектории трех приходов домой подвыпившего после работы грузчика). Каждая такая реализация (траектория) является обычной функцией $x(t)$. В виде жирных точек на рисунке изображены значения с. в. $X(t_0,\omega)$ в трех опытах.

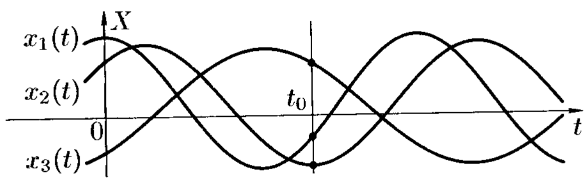


Рис. 59

Так, если в рассмотренном выше примере с. в. Y в первом опыте приняла значение 1, во втором — 2, в третьем — $\frac{1}{2}$, то получим три реализации с. п.: $x_1(t) = \sin t$, $x_2(t) = 2\sin t$, $x_3(t) = \frac{1}{2}\sin t$ — неслучайные функции. Если же в этом примере зафиксировать момент времени, например $t = \frac{\pi}{6}$, то получим сечение: $X\left(\frac{\pi}{6}\right)$, т. е. $X\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}Y$ — случайная величина.

В заключение параграфа отметим, что функция $F_t(x) = P\{X(t) < x\}$ — так называемый *одномерный закон распределения случайного процесса* $X(t)$ — не является исчерпывающей характеристикой случайного процесса. Случайный процесс $X(t)$ представляет собой совокупность всех сечений при различных значениях $t \in T$, поэтому для его полного описания надо рассматривать совместную функцию распределения сечений процесса:

$$F_{t_1,t_2,\ldots,t_n}(x_1,x_2,\ldots,x_n) = P\{X(t_1) < x_1, X(t_2) < x_2, \ldots, X(t_n) < x_n\} \text{ —}$$

так называемый *конечномерный закон распределения* с. п. в моменты $t_1, t_2, \ldots, t_n$, т. е. рассматривать многомерную с. в. $(X(t_1), X(t_2), \ldots, X(t_n))$.

Таким образом, понятие случайного процесса является обобщением понятия системы случайных величин, когда этих величин — бесконечное множество.

6.2. Классификация случайных процессов

Случайный процесс, протекающий в любой физической системе S, представляет собой случайные переходы системы из одного состояния в другое. В зависимости от множества этих состояний W, от множества T значений аргумента t все случайные процессы делят на классы:

1. Дискретный процесс (дискретное состояние) с дискретным временем.
2. Дискретный процесс с непрерывным временем.
3. Непрерывный процесс (непрерывное состояние) с дискретным временем.
4. Непрерывный процесс с непрерывным временем.

В *1-м и 3-м случаях множество T дискретно,* т. е. аргумент t принимает дискретные значения $t_0, t_1, t_2, \ldots$ (обычно $t = 0, 1, 2, 3, \ldots$); в 1-м случае множество значений случайной функции $X(t)$, т. е. $X(t_0) = x_0$, $X(t_1) = x_1, \ldots$ — дискретное множество (множество W конечно или счетно), а в 3-м случае — множество W несчетно, т. е. сечение случайного процесса в любой момент времени t представляет собой непрерывную случайную величину.

Во *2-м и 4-м случаях множество T непрерывно,* во 2-м случае множество состояний системы W конечно или счетно, а в 4-м случае — W несчетное.

Примерами случайных процессов 1-4 классов являются соответственно:

1. Футболист может забить или не забить один или несколько голов в ворота соперника во время матчей, проводимых в определенные моменты (согласно расписанию игр) времени $t_1, t_2, \ldots$. Случайный процесс $X(t)$ — число забитых голов до момента t.
2. $X(t)$ — число просмотренных телепрограмм на первом канале от начала работы телевизора до момента t.

3. В определенные моменты времени $t_0, t_1, t_2, \dots$ измеряется температура $Y(t)$ заболевшего человека. $Y(t)$ — случайный процесс непрерывного типа с дискретным временем.
4. Давление воздуха $P(t)$ в шине колеса автомобиля.

Отметим, что рассматриваются и другие, более сложные классы случайных процессов. Для различных классов случайных процессов разработаны различные методы их изучения.

6.3. Основные характеристики случайного процесса

Для случайного процесса также вводятся простейшие характеристики, аналогичные основным характеристикам случайных величин. Знание их оказывается также достаточно для решения многих задач (напомним, полная характеристика случайного процесса дается ее многомерным (конечномерным) законом распределения). В отличие от числовых характеристик с. в., представляющих собой определенные числа, характеристики с. п. представляют собой в общем случае не числа, а функции.

Математическое ожидание случайного процесса

Математическим ожиданием с. п. $X(t)$ называется неслучайная функция $m_X(t)$, которая при любом фиксированном значении аргумента t равна математическому ожиданию соответствующего сечения случайного процесса:

$$m_X(T) = MX(t). \tag{6.1}$$

Математическое ожидание с. п. обозначают кратко и так: $m(t)$, $a(t)$.

Функция $m_X(t)$ характеризует поведение с. п. в среднем. Геометрически математическое ожидание $m(t)$ истолковывается как «средняя кривая», около которой расположены кривые — реализации (см. рис. 60).

Опираясь на свойства математического ожидания случайной величины и учитывая, что $X(t)$ - случайный процесс, а $f(t)$ — неслучайная функция, получаем *свойства математического ожидания случайного процесса*:

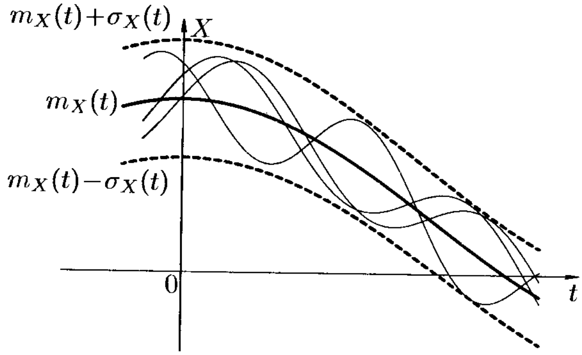


Рис. 60

1. Математическое ожидание неслучайной функции равно самой функции, т. е.
$$M\,(f(t)) = f(t).$$

2. Неслучайный множитель можно выносить за знак математического ожидания случайного процесса, т. е.
$$M\,(f(t)\cdot X(t)) = f(t)\cdot m_X(t).$$

3. Математическое ожидание суммы (разности) двух случайных процессов равно сумме (разности) математических ожиданий слагаемых, т. е.
$$M\,(X(t)\pm Y(t)) = m_X(t)\pm m_Y(t).$$

Отметим, что, зафиксировав аргумент t и переходя от случайного процесса к случайной величине (т. е. к сечению случайного процесса), можно найти математическое ожидание этого процесса.

Так, если сечение с. п. $X(t)$ при данном t есть непрерывная с. в. с плотностью $f(t,x)$, то его математическое ожидание можно найти по формуле
$$MX(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x\cdot f(t,x)\,dx. \tag{6.2}$$

Пример 6.1. Случайный процесс определяется формулой
$$Y(t) = X\cdot e^{-t},\quad t>0,\quad X\sim N(3;1),$$
т. е. X — с. в., распределена по нормальному закону с $a=3$, $\sigma=1$. Найти математическое ожидание случайного процесса $Y(t)$.

○ Так как $f(x) = \frac{1}{1 \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-3)^2}{2 \cdot 1^2}}$, то, используя формулу (6.2), находим:

$$m_Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot e^{-t} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-3)^2}{2}}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-t} \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot e^{-\left(\frac{x-3}{\sqrt{2}}\right)^2} dx =$$

$$= \frac{e^{-t}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (x-3+3) \cdot e^{-\left(\frac{x-3}{\sqrt{2}}\right)^2} dx =$$

$$= \frac{e^{-t}}{\sqrt{2\pi}} \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} (x-3) \cdot e^{-\left(\frac{x-3}{\sqrt{2}}\right)^2} dx + 3 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{x-3}{\sqrt{2}}\right)^2} dx \right) =$$

$$= \frac{e^{-t}}{\sqrt{2\pi}} \left(- \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{x-3}{\sqrt{2}}\right)^2} d\left(-\left(\frac{x-3}{\sqrt{2}}\right)^2 \right) + \right.$$

$$\left. +3 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{x-3}{\sqrt{2}}\right)^2} d\left(\frac{x-3}{\sqrt{2}}\right) \cdot \sqrt{2} \right) =$$

$$= \frac{e^{-t}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{\pi}} \left(\left. \frac{-1}{e^{\frac{(x-3)^2}{2}}} \right|_{-\infty}^{\infty} + 3 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{\pi} \right) =$$

$$= \frac{e^{-t}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{\pi}} (0 + 3 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{\pi}) = 3 \cdot e^{-t},$$

т. е. $m_Y(t) = 3 \cdot e^{-t}$.

Приведем другое решение: согласно свойству 2

$$m_Y(t) = M\left(X \cdot e^{-t}\right) = e^{-t} \cdot MX,$$

но $X \sim N(3; 1)$, следовательно, $MX = 3$ и $m_Y(t) = 3e^{-t}$. ●

Дисперсия случайного процесса

Дисперсией случайного процесса $X(t)$ называется неслучайная функция $D_X(t)$, которая при каждом значении t равна дисперсии соответствующего сечения:

$$D_X(t) = DX(t) = MX^2(t) - m_X^2(t). \tag{6.3}$$

Дисперсия $D_X(t)$ с. п. характеризует разброс (рассеяние) возможных значений с. п. относительно его математического ожидания.

Наряду с дисперсией с. п. рассматривается также *среднее квадратическое отклонение* $\sigma(t)$ (коротко с. к. о.), определяемое равенством:

$$\sigma_X(t) = \sqrt{D_X(t)}. \tag{6.4}$$

Размерность функции $\sigma_X(t)$ равна размерности с. п. $X(t)$.

Значения реализаций с. п. при каждом t отклоняются от математического ожидания $m_X(t)$ на величину порядка $\sigma_X(t)$ (см. рис. 60).

Очевидны следующие *свойства дисперсии* с. п.

1. Дисперсия неслучайной функции равна нулю, т. е.

$$D\,(f(t)) = 0.$$

2. Дисперсия с. п. неотрицательна, т. е.

$$D_X(t) = \sigma_X^2(t).$$

3. Дисперсия произведения неслучайной функции на случайную функцию равна произведению квадрата неслучайной функции на дисперсию случайной функции, т. е.

$$D_X\,(f(t)\cdot X(t)) = f^2(t)\cdot D_X X(t).$$

4. Дисперсия суммы с. п. и неслучайной функции равна дисперсии с. п., т. е.

$$D_X\,(X(t) \pm f(t)) = D_X(t).$$

Пример 6.2. Используя условие примера 6.1, найти дисперсию и среднее квадратическое отклонение с. п.

Находим дисперсию, используя ее свойство 3: $D_Y(t) = D(X\cdot e^{-t}) = (e^{-t})^2\cdot DX = e^{-2t}\cdot DX$. Но $X \sim N(3,1)$, следовательно, [$DX = \sigma^2$, см. с. 99] $DX = 1^2 = 1$.

Поэтому $D_Y(t) = e^{-2t}\cdot 1 = e^{-2t}$, т. е. $D_Y(t) = e^{-2t}$.

$$\sigma_Y(t) = \sqrt{e^{-2t}} = e^{-t}, \text{ т. е. } \sigma_Y(t) = e^{-t}.$$

Корреляционная функция случайного процесса

Математическое ожидание и дисперсия не являются исчерпывающими характеристиками случайного процесса.

В частности, зная математическое ожидание и дисперсию, ничего нельзя сказать о зависимости двух (и более) сечений с. п.

Для определения связи между различными сечениями с. п. используется корреляционная функция — аналог ковариации

$$K_{XY} = M\big((X - m_X)\cdot(Y - m_Y)\big) = MXY - m_X \cdot m_Y,$$

характеризующей степень связи между двумя с. в. X и Y.

Корреляционной (ковариационной, автоковариационной, автокорреляционной) функцией с. п. $X(t)$ называется неслучайная функция двух аргументов $K_X(t_1;t_2)$, которая при каждой паре значений t_1 и t_2 равна корреляционному моменту (ковариации) соответствующих сечений $X(t_1)$ и $X(t_2)$:

$$K_X(t_1;t_2) = M\Big(\big(X(t_1) - m(t_1)\big)\cdot\big(X(t_2) - m(t_2)\big)\Big)$$

или

$$K_X(t_1;t_2) = M\big(\overset{\circ}{X}(t_1)\cdot\overset{\circ}{X}(t_2)\big) = M\big(X(t_1)\cdot X(t_2)\big) - m_X(t_1)\cdot m_X(t_2),$$

где $\overset{\circ}{X}(t) = X(t) - m(t)$ — центрированная случайная функция.

Приведем *основные свойства корреляционной (автоковариационной) функции* $K_X(t_1;t_2)$ случайного процесса $X(t)$.

1. Корреляционная функция при одинаковых значениях аргументов равна дисперсии с. п., т. е.

$$K_X(t;t) = D_X(t).$$

❑ Действительно,

$$K_X(t;t) = \operatorname{cov}\big(X(t),X(t)\big) = M\Big(\big(X(t) - m(t)\big)\cdot\big(X(t) - m(t)\big)\Big) =$$
$$= M\big(X(t) - m(t)\big)^2 = D_X(t). \quad ■$$

Это свойство позволяет считать математическое ожидание и корреляционную функцию главными характеристиками с. п.; необходимость в дисперсии отпадает.

2. Корреляционная функция не меняется при перестановке аргументов местами, т. е.

$$K_X(t_1; t_2) = K_X(t_2; t_1).$$

Это свойство непосредственно вытекает из определения корреляционной функции.

3. Если к с. п. прибавить неслучайную функцию, то корреляционная функция не изменится, т. е. если $Y(t) = X(t) + f(t)$, то

$$K_Y(t_1; t_2) = K_X(t_1; t_2).$$

❑ Так как $m_Y(t) = m_X(t) + f(t)$, то

$$Y(t) - m_Y(t) = X(t) + f(t) - m_X(t) - f(t),$$

т. е. $Y(t) - m_Y(t) = X(t) - m_X(t)$. Отсюда следует, что $K_Y(t_1; t_2) = K_X(t_1; t_2)$. ■

4. Модуль корреляционной функции не превосходит произведения среднеквадратических отклонений, т. е.

$$|K_X(t_1; t_2)| \leqslant \sqrt{D_X(t_1) \cdot D_X(t_2)} = \sigma_X(t_1) \cdot \sigma_X(t_2).$$

Свойство 4 непосредственно вытекает из соответствующего свойства корреляционного момента двух с. в. (см. п. 3.7) с учетом первого свойства корреляционной функции с. п. $X(t)$.

5. При умножении с. п. $X(t)$ на неслучайный множитель $f(t)$ ее корреляционная функция умножится на произведение $f(t_1) \cdot f(t_2)$, т. е. если $Y(t) = X(t) \cdot f(t)$, то

$$K_Y(t_1; t_2) = f(t_1) \cdot f(t_2) \cdot K_X(t_1; t_2).$$

Наряду с корреляционной функцией с. п. рассматривается также нормированная корреляционная функция (или нормированная *автоковариационная функция*) $r_X(t_1; t_2)$, определяемая равенством

$$r_X(t_1; t_2) = \frac{K_X(t_1; t_2)}{\sigma_X(t_1) \cdot \sigma_X(t_2)}.$$

С учетом свойства 1 можно записать так:

$$r_X(t_1; t_2) = \frac{K_X(t_1; t_2)}{\sqrt{K_X(t_1; t_1)} \cdot \sqrt{K_X(t_2; t_2)}}.$$

По своему смыслу $r_X(t_1; t_2)$ аналогична коэффициенту корреляции для с. в., но не является постоянной величиной, зависит от аргументов t_1 и t_2.

Свойства нормированной корреляционной функции аналогичны свойствам коэффициента корреляции (см. п. 3.7):

1. $|r_X(t_1; t_2)| \leqslant 1$;
2. $r_X(t; t) = 1$;
3. $r_X(t_1; t_2) = r_X(t_2; t_1)$.

Пример 6.3. Используя условие примера 6.1, найти корреляционную и нормированную корреляционную функции с. п. $Y(t)$.

Действительно,

$$K_Y(t_1; t_2) = M\big((X \cdot e^{-t_1} - 3 \cdot e^{-t_1}) \cdot (X \cdot e^{-t_2} - 3 \cdot e^{-t_2})\big) =$$

$$= M(X^2 \cdot e^{-t_1} \cdot e^{-t_2} - 6X \cdot e^{-t_1} \cdot e^{-t_2} + 9e^{-t_1} \cdot e^{-t_2}) =$$

$$= M\big(e^{-t_1} \cdot e^{-t_2} \cdot (X-3)^2\big) = e^{-t_1} \cdot e^{-t_2} \cdot DX = e^{-t_1} \cdot e^{-t_2} \cdot 1^2 = e^{-(t_1+t_2)},$$

т. е. $K_Y(t_1; t_2) = e^{-(t_1+t_2)}$.

Тогда $r_Y(t_1; t_2) = \dfrac{e^{-t_1} \cdot e^{-t_2}}{e^{-t_1} \cdot e^{-t_2}} = 1$, т. е. $r_Y(t_1; t_2) = 1$.

При решении примера использовались определения корреляционной и нормированной корреляционной функций, а также результат решения примера 6.2. ●

Взаимная корреляционная функция случайного процесса

Для определения степени зависимости сечений двух случайных процессов используют корреляционную функцию связи или взаимную корреляционную функцию.

Взаимной корреляционной функцией двух с. п. $X(t)$ и $Y(t)$ называется неслучайная функция $R_{XY}(t_1; t_2)$ двух независимых аргументов t_1 и t_2, которая при каждой паре значений t_1 и t_2 равна корреляционному моменту двух сечений $X(t_1)$ и $Y(t_2)$:

$$R_{XY}(t_1; t_2) = M\Big(\big(X(t_1) - m_X(t_1)\big) \cdot \big(Y(t_2) - m_Y(t_2)\big)\Big) = M\big(\overset{\circ}{X}(t_1) \cdot \overset{\circ}{Y}(t_2)\big).$$

Два с. п. $X(t)$ и $Y(t)$ называются *некоррелированными*, если их взаимная корреляционная функция тождественно равна нулю, т. е. $R_{XY}(t_1;t_2)=0$ для любых t_1 и t_2. Если $R_{XY}(t_1;t_2)\neq 0$, то с. п. $X(t)$ и $Y(t)$ называются *коррелированными* (или *связанными*).

Свойства взаимной корреляционной функции непосредственно вытекают из ее определения и свойств корреляционного момента (см. п. 3.7):

1. При одновременной перестановке индексов и аргументов взаимная корреляционная функция не меняется, т. е.

$$R_{XY}(t_1;t_2)=R_{YX}(t_2;t_1).$$

2. Модуль взаимной корреляционной функции двух с. п. не превышает произведения их средних квадратических отклонений, т. е.

$$|R_{XY}(t_1;t_2)|\leqslant \sigma_X(t_1)\cdot\sigma_Y(t_2).$$

3. Корреляционная функция не изменится, если к с. п. $X(t)$ и $Y(t)$ прибавить неслучайные функции $f(t)$ и $\varphi(t)$ соответственно, т. е.

$$R_{X_1Y_1}(t_1;t_2)=R_{XY}(t_1;t_2),$$

где $X_1(t)=X(t)+f(t)$, $Y_1(t)=Y(t)+\varphi(t)$.

4. Неслучайные множители можно вынести за знак корреляции, т. е. если $X_1(t)=f(t)\cdot X(t)$, $Y_1(t)=\varphi(t)\cdot Y(t)$, то

$$R_{X_1Y_1}(t_1;t_2)=f(t_1)\cdot\varphi(t_2)R_{XY}(t_1;t_2).$$

5. Если $X(t)=X_1(t)+X_2(t)$, то

$$K_X(t_1;t_2)=K_{X_1}(t_1;t_2)+K_{X_2}(t_1;t_2)+R_{X_1X_2}(t_1;t_2)+R_{X_2X_1}(t_1;t_2).$$

6. Если с. п. $X_1(t)$ и $X_2(t)$ некоррелированы, то корреляционная функция их суммы равна сумме их корреляционных функций:

$$K_X(t_1;t_2)=K_{X_1}(t_1;t_2)+K_{X_2}(t_1;t_2).$$

Для оценки степени зависимости сечений двух с. п. используют также *нормированную взаимную корреляционную функцию* $r_{XY}(t_1;t_2)$, определяемую равенством:

$$r_{XY}(t_1;t_2)=\frac{R_{XY}(t_1;t_2)}{\sqrt{D_X(t_1)\cdot D_Y(t_2)}}=\frac{R_{XY}(t_1;t_2)}{\sqrt{K_X(t_1;t_1)}\cdot\sqrt{K_Y(t_2;t_2)}}.$$

Функция $r_{XY}(t_1;t_2)$ обладает теми же свойствами, что и функция $R_{XY}(t_1;t_2)$, но свойство 2 заменяется на следующее: $|r_{XY}(t_1;t_2)| \leqslant 1$, т. е. модуль нормированной взаимной корреляционной функции не превышает единицы.

Пример 6.4. Найти взаимную корреляционную функцию двух с. п. $X(t) = t \cdot V$ и $Y(t) = (t+2)V$, где V — с. в., причем $DV = 3$.

○ Так как $m_X(t) = M(t{\cdot}V) = t{\cdot}MV = t{\cdot}m_V$, а $m_Y(t) = M\big((t{+}2){\cdot}V\big) = (t+2)\cdot m_V$, то

$$\begin{aligned}R_{XY}(t_1;t_2) &= M\,(t_1V - t_1m_V)\,\big((t_2+2)V - (t_2+2)m_V\big) = \\ &= M\big(t_1(V - m_V)\big)\big((t_2+2)(V-m_V)\big) = t_1\cdot(t_2+2)\cdot M(V-m_V)^2 = \\ &= t_1\cdot(t_2+2)DV = 3t_1\cdot(t_2+2),\end{aligned}$$

т. е. $R_{XY}(t_1;t_2) = 3t_1\cdot(t_2+2)$. ●

Упражнения

1. Случайный процесс определяется формулой $X(t) = V\cdot\sin t$, где $t \geqslant 0$, $V \sim R[2;4]$ — случайная величина, имеющая равномерное распределение. Найти: а) сечение с. п. $X(t)$ в момент времени $t = \frac{\pi}{4}$; б) реализацию с. п. при одном испытании, в котором с. в. V приняла значение 2.

2. Для случайного процесса из упражнения 1 найти: а) математическое ожидание с. п.; б) дисперсию и среднее квадратическое отклонение; в) корреляционную (автоковариационную) функцию; г) нормированную корреляционную функцию с. п. $X(t)$.

6.4. Стационарный случайный процесс в узком и широком смысле

Важным классом с. п. являются стационарные случайные процессы, т. е. процессы, не изменяющие свои характеристики с течением времени. Они имеют вид непрерывных случайных колебаний вокруг некоторого среднего значения. Таковыми являются: давление газа в газопроводе, колебания самолета при «автополете», колебания напряжения в электрической сети и т. д.

Случайный процесс $X(t)$ называется *стационарным в широком смысле*, если его математическое ожидание $m_X(t)$ постоянно, а корреляционная функция $K_X(t_1; t_2)$ зависит только от разности аргументов, т. е.

$$m_X(t) = m = \text{const}, \quad K_X(t_1; t_2) = K_X(t_2 - t_1).$$

Из этого определения следует, что корреляционная функция стационарного процесса есть функция одного аргумента:

$$K_X(t_1; t_2) = K_X(\tau), \quad \text{где } \tau = t_2 - t_1.$$

Это обстоятельство зачастую упрощает операции над стационарными случайными процессами.

Случайный процесс называют *стационарным в узком смысле*, если все его характеристики зависят не от значений аргументов, а лишь от их взаимного расположения. То есть для функций распределения сечений процесса должно выполняться равенство:

$$F_{t_1+h, t_2+h, \ldots, t_n+h}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F_{t_1, t_2, \ldots, t_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

при любых $h > 0$, $n \geqslant 1$, $t_1, t_2, \ldots, t_n \in T$.

Отметим, что из стационарности с. п. в узком смысле следует стационарность его в широком смысле; обратное утверждение неверно.

В дальнейшем будем рассматривать только стационарные с. п. в широком смысле.

Приведем основные свойства корреляционной функции стационарного случайного процесса (с. с. п.).

1. Дисперсия с. с. п. постоянна и равна значению корреляционной функции в нуле, т. е.

$$D_X(t) = K_X(0) = \text{const}$$

(т. е. в начале координат $D_X(t) = K_X(t; t) = K_X(t - t) = K_X(0)$).

2. Корреляционная функция с. с. п. является четной, т. е.

$$K_X(\tau) = K_X(-\tau).$$

3. Модуль корреляционной функции с. с. п. не превышает ее значения при $\tau = 0$, т. е.

$$|K_X(\tau)| \leqslant K_X(0).$$

Нормированная корреляционная функция с. с. п. есть неслучайная функция аргумента τ:

$$r_X(\tau) = \frac{K_X(\tau)}{K_X(0)} = \frac{K_X(\tau)}{\sigma_X^2}, \quad \text{при этом } |r_X(\tau)| \leqslant 1.$$

Большинство с. с. п. обладают важным для практики *эргодическим свойством*, сущность которого состоит в том, что по одной, достаточно длинной, отдельной реализации можно судить о всех свойствах процесса также как по любому количеству реализаций, т. е., другими словами, отдельные характеристики с. с. п. $\{m_X, K_X(\tau)\}$ могут быть определены как соответствующие средние по времени для одной реализации достаточно большой продолжительности. Связь между классами стационарных и эргодических с. п. приведена на рисунке 61.

Рис. 61

Достаточным условием эргодического с. п. $X(t)$ относительно математического ожидания и корреляционной функции является стремление к нулю его корреляционной функции при $\tau \to \infty$, т. е. $\lim\limits_{\tau\to\infty} K_X(\tau) = 0$.

В качестве оценок характеристик эргодических с. с. п. принимают усредненное по времени значение:

$$\tilde{m}_X(t) = \frac{1}{T}\int\limits_0^T x(t)\,dt,$$

$$\tilde{k}_X(\tau) = \frac{1}{T-\tau}\int\limits_0^{T-\tau} \big(x(t) - \tilde{m}_X(t)\big)\cdot\big(x(t+\tau) - \tilde{m}_X(t)\big)\,dt.$$

Интегралы, в правых частях равенств, вычисляют на практике приближенно.

Случайные процессы $X(t)$ и $Y(t)$ называются стационарно связанными, если их взаимно корреляционная функция $K_{XY}(t_1; t_2)$ зависит только от $\tau = t_1 - t_2$. В качестве примера стационарного процесса можно взять с. п. $X(t) = A\cdot\cos(\omega t + \varphi)$ — гармоническое колебание. Можно показать, что $m_X(t) = 0$, а

$$K_X(t_1; t_2) = \frac{1}{2}M(A^2)\cdot\cos\omega(t_1 - t_2) = \sigma_X^2\cdot\cos\omega\tau.$$

6.5. Линейные и нелинейные преобразования случайных процессов

При проектировании различных систем (систем автоматического управления или регулирования и т. д.) и других практических задач возникает следующая задача: на вход системы S подается «входной сигнал» с. п. $X(t)$ с известными характеристиками; система преобразует этот сигнал, в результате чего на выходе системы S получается с. п. $Y(t)$, называемый «выходным сигналом»; требуется определить характеристики с. п. $Y(t)$ на выходе системы S (см. рис. 62).

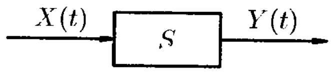


Рис. 62

Преобразование с. п. $X(t)$ в с. п. $Y(t)$, осуществляемое системой (прибором) S, символически записывается в виде $Y(t) = A\{X(t)\}$, где A – *преобразование* или *оператор системы* S.

Оператор A может иметь любой вид: оператор сложения или умножения, оператор дифференцирования или интегрирования и т. д.

Так, например, если $x(t) = \sin 2t$, оператор A есть оператор интегрирования $A = \int\limits_0^t x(\tau)\,d\tau$, то

$$y(t) = A\{\sin 2t\} = \int\limits_0^t \sin 2V\,dV = -\frac{1}{2}\cos 2V\Big|_0^t = \frac{1}{2}(1 - \cos 2t).$$

Все виды подобных преобразований (операторов) можно разделить на две различные группы: линейные L и нелинейные N. В свою очередь линейные преобразования делятся на линейные однородные L_0 и линейные неоднородные L_H.

Преобразование (оператор) L_0 называется *линейным однородным*, если оно (он) обладает свойствами:

1. Оператор суммы функций (с. п.) равен сумме операторов от каждой функции, входящих в сумму, т. е.

$$L_0\{X_1(t) + X_2(t)\} = L_0\{X_1(t)\} + L_0\{X_2(t)\}.$$

2. Постоянную величину можно выносить за знак оператора, т. е.

$$L_0\{c \cdot X(t)\} = cL_0\{X(t)\}.$$

Преобразование L_H называется *линейным неоднородным*, если оно состоит из линейного однородного преобразования L_0 с прибавлением заданной неслучайной функции $f(t)$, т. е. $L_H\{X(t)\} = L_0\{X(t)\} + f(t)$.

Все преобразования, не являющиеся линейными, называются *нелинейными*.

Примерами линейных однородных операторов являются оператор дифференцирования $Y(t) = \dfrac{dX(t)}{dt}$, оператор интегрирования $Y(t) = \int\limits_0^t X(\tau)\,d\tau$, оператор умножения на заданную функцию $Y(t) = f(t)\cdot X(t)$. Примерами линейных неоднородных —

$$Y(t) = \frac{dX(t)}{dt} + f(t), \quad Y(t) = \int\limits_0^t X(\tau)\,d\tau + f(t), \quad Y(t) = f(t)\cdot X(t) + \varphi(t).$$

Примерами нелинейных — $Y(t) = X^2(t)$, $Y(t) = \dfrac{dX(t)}{dt} + \cos X(t)$.

6.6. Дифференцирование и интегрирование случайных процессов

Пусть с. п. $X(t)$, характеристики которого $m_X(t)$ и $K_X(t_1;t_2)$ заданы, подвергается *дифференцированию* $Y(t) = \dfrac{dX(t)}{dt}$. Требуется найти характеристики $m_Y(t)$ и $K_Y(t_1;t_2)$ «выходного сигнала» — с. п. $Y(t)$.

Предполагая, что с. п. $X(t)$ является непрерывным, производная от него существует, а м. о. предела равно пределу математического ожидания, от равенства

$$Y(t) = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{X(t+\Delta t) - X(t)}{\Delta t}$$

перейдем к следующему

$$MY(t) = m_X(t) = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{m_X(t+\Delta t) - m_X(t)}{\Delta t}, \text{ т. е. } m_Y(t) = \frac{dm_X(t)}{dt}.$$

Итак, *математическое ожидание производной с. п. равно производной от ее м. о.* (коротко: $m_{\dot{X}}(t) = m'_X(t)$ или $M(X'(t)) = (MX(t))'$).

Можно показать, *что корреляционная функция производной от с. п. $X(t)$ равна второй смешанной частной производной от корреляционной функции с. п. $X(t)$:*

$$K_Y(t_1;t_2) = \frac{\partial K_X(t_1;t_2)}{\partial t_1 \cdot \partial t_2}.$$

Пример 6.5. Используя результаты решений примеров 6.1 и 6.3, найти м. о. и корреляционную функцию с. п. $Y(t) = \dfrac{dX(t)}{dt}$.

○ Искомое м. о. есть $M\big(Y(t)\big) = M\big(X'(t)\big) = \Big(M\big(X(t)\big)\Big)' = (3e^{-t})' = -3e^{-t}$.

Находим корреляционную функцию с. п. $Y(t)$:

$$K_Y(t_1;t_2) = \frac{\partial K_X(t_1;t_2)}{\partial t_1 \cdot \partial t_2} = \frac{\partial e^{-t_1-t_2}}{\partial t_1 \cdot \partial t_2} = \frac{\partial}{\partial t_2}\left(e^{-t_1-t_2}\right)'_{t_1} =$$
$$= \frac{\partial}{\partial t_2}\left(-e^{-t_1-t_2}\right) = \left(-e^{-t_1-t_2}\right)'_{t_2} = e^{-t_1-t_2} = e^{-(t_1+t_2)}. \quad \bullet$$

Пусть известны характеристики $m_X(t)$ и $K_X(t_1;t_2)$ с. п. $X(t)$, а линейное преобразование с. п. состоит в его *интегрировании*:

$$Y(t) = \int_0^t X(\tau)\,d\tau.$$

Требуется найти характеристики с. п. $Y(t)$.

Можно доказать, что *математическое ожидание интеграла от с. п. равно интегралу от м. о. этого с. п.*, т. е.

$$m_Y(t) = \int_0^t m_X(\tau)\,d\tau.$$

Иными словами, операции нахождения м. о. и интегрирования можно менять местами:

$$M\left(\int_0^t X(\tau)\,d\tau\right) = \int_0^t MX(\tau)\,d\tau.$$

Корреляционная функция интеграла от с. п. равна двойному интегралу от корреляционной функции с. п., т. е.

$$K_Y(t_1;t_2) = \int_0^{t_1}\int_0^{t_2} K_X(\tau_1;\tau_2)\,d\tau_1 d\tau_2.$$

Пример 6.6. Зная м.о. $m_X(t) = 3 \cdot e^{-t}$ и корреляционную функцию $K_X(t_1;t_2) = e^{-t_1-t_2}$, найти м.о. и корреляционную функцию с. п.

$$Y(t) = \int_0^t X(\tau)\,d\tau.$$

○ Искомое м. о. есть $m_Y(t) = \int_0^t 3 \cdot e^{-\tau}\,d\tau = -3 \cdot e^{-\tau}\Big|_0^t = 3 - 3e^{-t}$.

Далее:

$$K_Y(t_1;t_2) = \int_0^{t_1}\int_0^{t_2} e^{-\tau_1-\tau_2}\,d\tau_1 d\tau_2 = \int_0^{t_1} e^{-\tau_1}\,d\tau_1 \int_0^{t_2} e^{-\tau_2}\,d\tau_2 =$$

$$= \int_0^{t_1} e^{-\tau_1}\left(-e^{-\tau_2}\Big|_0^{t_2}\right) d\tau_1 = (1-e^{-t_2})\cdot(-e^{-\tau_1})\Big|_0^{t_1} = (1-e^{-t_2})(1-e^{-t_1}). \quad \bullet$$

Упражнения

1. Какие из приведенные ниже случайных процессов являются стационарными (в широком смысле):

а) $X(t) = V \cdot \sin t$, $t \geqslant 0$, $V \sim N[2;4]$ — случайная величина;

б) $X(t) = \sin(t + \varphi)$, $t \geqslant 0$, $\varphi \sim R[0;2\pi]$ — случайная величина;

в) $X(t) = A \cdot \cos(t + \varphi_0)$, $t \geqslant 0$, $\varphi_0 = \mathrm{const}\,t$, A — случайная величина;

г) $X(t) = Y \cdot \cos 3t$, Y — случайная величина.

2. Известны характеристики двух некоррелированных случайных процессов $X(t)$ и $Y(t)$: $m_X(t) = t + 2$, $K_X(t_1;t_2) = t_1 \cdot t_2$, $m_Y(t) = -t + 3$, $K_Y(t_1;t_2) = 2e^{-t_1-t_2}$. Найти математическое ожидание и корреляционную функцию с. п. $Z(t) = X(t) + Y(t)$.

3. Зная математическое ожидание и корреляционную функцию с. п. $X = V \cdot \sin t$, $t \geqslant 0$, $V \sim R[2;4]$, $m_X(t) = 3 \cdot \sin t$, $K_X(t_1;t_2) = \frac{1}{3}\sin t_1 \sin t_2$, найти: а) математическое ожидание и корреляционную функцию с. п. $Y(t) = \frac{dX(t)}{dt}$; б) м. о. и корреляционную функцию с. п.

$$Y(t) = \int_0^t X(\tau)\, d\tau.$$

4. Задан с. п. $X(t) = Y \cdot \cos t$, где $t \geqslant 0$, $Y \sim N(2;1)$ — нормально распределенная с. в. Является ли с. п. $X(t)$ стационарным? Найти $m_Z(t)$ и $K_Z(t_1;t_2)$ случайного процесса $Z(t) = X(t) - 2 \cdot \frac{dX(t)}{dt}$.

6.7. Спектральное разложение стационарного случайного процесса

Как известно, неслучайную функцию $x(t)$, удовлетворяющую определенным условиям (условиям Дирихле), можно разложить в промежутке $[-T;+T]$ в ряд Фурье.

Оказывается, что любой с. п. $X(t)$ также можно разложить (т. е. представить в виде суммы так называемых *элементарных случайных процессов*) в ряд вида

$$X(t) = \varphi_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} V_k \cdot \varphi_k(t),$$

где V_k — случайные величины, $\varphi_k(t)$ — неслучайные функции времени.

Метод разложения с. п. упрощает различные преобразования с. п. (линейных и нелинейных), в частности, упрощает определение характеристик выходного процесса стационарной линейной системы по известным характеристикам входного сигнала.

Рассмотрим с. п.

$$X(t) = U\cos\omega t + V\sin\omega t, \tag{6.5}$$

где U и V — некоррелированные случайные величины с м. о., равными нулю и одинаковыми дисперсиями, ω — действительное число (или коротко: ω — константа. $m_U = m_V = 0$, $D_U = D_V = D$, $K_{UV} = M(\overset{\circ}{U}\cdot\overset{\circ}{V}) = 0$).

Покажем, что этот процесс является стационарным.

❑ Находим м. о. с. п. $X(t)$:

$$M\,(X(t)) = m_X(t) = MU\cdot\cos\omega t + MV\cdot\sin\omega t = 0.$$

Следует, что $X(t) = \overset{\circ}{X}(t)$ (напомним, что $\overset{\circ}{X}(t) = X(t) - m_X(t)$), т. е. $X(t)$ — центрированный случайный процесс.

Находим теперь корреляционную функцию:

$$\begin{aligned}K_X(t_1;t_2) &= M\big(\overset{\circ}{X}(t_1)\cdot\overset{\circ}{X}(t_2)\big) = M\big(X(t_1)\cdot X(t_2)\big) = \\ &= M\,(U\cdot\cos\omega t_1 + V\cdot\sin\omega t_1)\cdot(U\cdot\cos\omega t_2 + V\cdot\sin\omega t_2) = \\ &= M(U^2)\cos\omega t_1\cdot\cos\omega t_2 + M(V^2)\sin\omega t_1\cdot\sin\omega t_2 + 0 = \\ &= D(U)\cos\omega t_1\cdot\cos\omega t_2 + D(V)\sin\omega t_1\cdot\sin\omega t_2 = D\cdot\cos\omega(t_1 - t_2).\end{aligned}$$

Следовательно, $X(t)$ с. с. п. (см. п. 6.4). ■

Рассмотрим теперь с. п.

$$X(t) = m_X + \sum_{k=0}^{\infty} U_k\cdot\cos\omega_k t + V_k\cdot\sin\omega_k t, \tag{6.6}$$

где $MU_k = 0 = MV_k$, $DU_k = DV_k = D_k$, $M(U_k\cdot V_k) = 0$, $M(V_k\cdot V_l) = M(U_k\cdot U_l) = 0$ при $k \neq l$, ω_k — константы.

Этот с. п. также является стационарным.

Действительно,

$$M(X(t)) = M(m_X) + M\left(\sum_{k=0}^{\infty} U_k\cdot\cos\omega_k t + V_k\cdot\sin\omega_k t\right) = m_X + 0 = m_X.$$

Следовательно, $X(t) = \overset{\circ}{X}(t)$.

Так как слагаемые в с. п. (6.6) некоррелированны, то с учетом формулы для корреляционной функции с. п. (6.5) и свойства 6 (см. с. 186) корреляционной функции получаем

$$K_X(t_1;t_2) = \sum_{k=0}^{\infty} D_k\cos\omega_k\tau,\ \text{ где } \tau = t_1 - t_2. \tag{6.7}$$

Итак, с. п. (6.6) является стационарным с. п.

Отметим, что равенство (6.7) можно рассматривать как разложение корреляционной функции $K_X(t_1; t_2)$ на промежутке $[-T; +T]$ в ряд Фурье по косинусам: $K_X(t_1; t_2) = K_X(\tau) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} D_k \cos\omega_k\tau$, где

$$\omega_k = k\omega_1 = k\frac{\pi}{T}, \quad D_0 = \frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T} K_x(\tau)\,d\tau,$$
$$D_k = \frac{1}{T}\int\limits_{-T}^{T} K_X(\tau)\cos\omega_k\tau\,d\tau = \frac{2}{T}\int\limits_{0}^{T} K_X(\tau)\cos\omega_k\tau\,d\tau. \tag{6.8}$$

Можно доказать, что $D_k \geqslant 0$ для любой корреляционной функции с. с. п. $X(t)$.

Каноническое разложение (6.6) называется *спектральным разложением стационарного случайного процесса.*

Разложение (6.7) называется *спектральным разложением корреляционной функции* с. п. $X(t)$.

Отметим. что спектральное разложение с. с. п. (6.6) можно представить в виде суммы гармонических колебаний со случайными амплитудами A_k, фазами φ_k и частотами ω_k:

$$X(t) = m_X + \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cdot \sin(\omega_k t + \varphi_k),$$

где $A_k = \sqrt{U_k^2 + V_k^2}$, $\quad \varphi_k = \operatorname{arctg}\dfrac{U_k}{V_k}$.

Дисперсия с. с. п., представленного в виде (6.6), *равна сумме дисперсий всех гармоник его спектрального разложения:*

$$D_X = \sum_{k=0}^{\infty} D_k.$$

Действительно,

$$D_X = [K_X(t; t)] = K_X(0) = \sum_{k=0}^{\infty} D_k \cos(\omega_k \cdot 0) = \sum_{k=0}^{\infty} D_k.$$

Совокупность дисперсий D_k называют *спектром с. с. п.*, а ординаты D_k — *спектральными линиями*, соответствующими частотами ω_k.

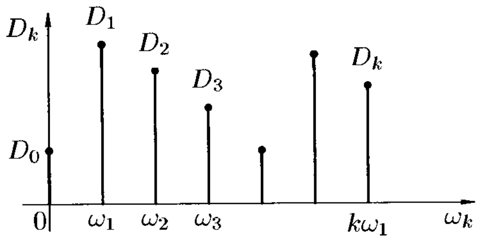


Рис. 63

Спектр можно изобразить графически (рис. 63).

Сумма всех ординат спектра равна дисперсии с. п. $X(t)$. Спектр с. п. (6.6) называется *линейчатым дискретным* с бесконечным числом равноотстоящих спектральных линий. Расстояние между соседними линиями по частоте равно $\omega_1 = \frac{\pi}{T} = \Delta\omega$.

6.8. Спектральная плотность случайного процесса. Теорема Винера–Хинчина

Спектральное разложение с. п. на промежутке $[-T; T]$ дает приближенное его описание. Более полное представление о с. п. при его спектральном разложении может быть получено при увеличении величины T.

При неограниченном увеличении промежутка разложения ($T \to \infty$) число слагаемых в сумме $D_X = \sum\limits_{k=0}^{\infty} D_k$ неограниченно увеличивается (D_k — коэффициент разложения корреляционной функции, см. (6.7)), каждое слагаемое D_k неограниченно уменьшается, но сумма остается постоянной. Интервал между соседними частотами $\omega_1 = \frac{\pi}{T} = \Delta\omega$ будет стремиться к нулю. т. е. $\Delta\omega \to 0$.

Обозначим среднюю плотность дисперсии $\frac{D_k}{\Delta\omega}$ через $S_X(\omega_k)$, т. е.

$$S_X(\omega_k) = \frac{D_k}{\Delta\omega} = \frac{D_k}{\omega_1}. \tag{6.9}$$

Спектральной плотностью $S_X(\omega)$ стационарного случайного процесса $X(t)$ называется предел отношения дисперсии, приходящийся на интервал частот $\Delta\omega$ к длине этого интервала, когда последняя стремится к нулю:

$$S_X(\omega) = \lim_{\Delta\omega \to 0} \frac{D_k}{\Delta\omega}, \tag{6.10}$$

т. е. спектральная плотность с. с. п. есть предел средней плотности дисперсии (6.9), когда $\Delta\omega \to 0$.

Получим формулы, связывающие спектральную плотность $S_X(\omega)$ и корреляционную функцию $K_X(\tau)$ в случае, когда $T \to \infty$ ($\Delta\omega \to 0$).

Выразим дисперсию D_k из равенства (6.9) и подставим ее в равенства (6.7) и (6.8). Получаем: $D_k = S_X(\omega_k) \cdot \Delta\omega = S_X(\omega_k) \cdot \frac{\pi}{T}$,

$$K_X(t_1; t_2) = K_X(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} S_X(\omega_k) \cdot \cos\omega_k\tau \cdot \Delta\omega, \tag{6.11}$$

$$D_k = S_X(\omega_k)\frac{\pi}{T} = \frac{2}{T}\int_0^T K_X(\tau)\cos\omega_k\tau\, d\tau,$$

т. е.

$$S_X(\omega_k) = \frac{2}{\pi}\int_0^T K_X(\tau)\cos\omega_k\tau\, d\tau. \tag{6.12}$$

Переходя к пределу при $T \to \infty$ ($\Delta\omega \to 0$), из равенств (6.11) и (6.12) получаем следующее утверждение.

Теорема 6.1 (Теорема Винера–Хинчина). Корреляционная функция и спектральная плотность с. с. п. связаны между собой взаимно обратными косинус-преобразованиями Фурье:

$$K_X(\tau) = \int_0^\infty S_X(\omega)\cos\omega\tau\, d\omega, \tag{6.13}$$

$$S_X(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty K_X(\tau)\cos\omega\tau\, d\tau. \tag{6.14}$$

Дискретный линейчатый спектр разложения переходит, при $T \to \to \infty$, в непрерывный спектр, в котором каждой частоте $\omega \geqslant 0$ соответствует неотрицательная ордината $S_X(\omega)$.

Кривая $S_X(\omega)$ изображает плотность распределения дисперсий по частотам непрерывного спектра (см. рис. 64).

Спектральная плотность $S_X(\omega)$ стационарного с. п. обладает следующими свойствами:

1. Спектральная плотность — неотрицательная функция, т. е.

$$S_X(\omega) \geqslant 0.$$

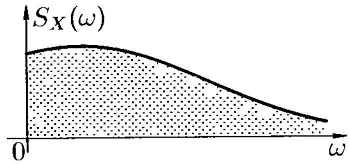


Рис. 64

Это свойство вытекает из определения (6.10), где $D_k \geqslant 0$, $\Delta\omega > 0$.

2. Интеграл от спектральной плотности в пределах от 0 до ∞ равен дисперсии с. с. п., т. е.

$$\int_0^\infty S_X(\omega)d\omega = D_X.$$

Это свойство вытекает из равенства (6.13):

$$D_X = K_X(0) = \int_0^\infty S_X(\omega)\cos(\omega \cdot 0) \cdot d\omega = \int_0^\infty S_X(\omega)\,d\omega.$$

Отметим, что для упрощения математических выкладок удобно использовать спектральное разложение с. с. п. в комплексной форме, считая, что частоты изменяются в интервале $(-\infty, +\infty)$ (частоты $\omega < 0$ физического смысла не имеют).

Спектральной плотностью стационарного с. п. в комплексной форме называется функция

$$S_X^*(\omega) = \frac{1}{2} \cdot S_X\big(|\omega|\big). \tag{6.15}$$

Формулы Винера–Хинчина в комплексной форме имеют вид

$$K_X(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_X^*(\omega) \cdot e^{i\omega\tau} \cdot d\omega, \tag{6.16}$$

$$S_X^*(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_X(\tau) \cdot e^{-i\omega\tau} \cdot d\tau. \tag{6.17}$$

Они получаются, если в спектральном разложении (6.7) заменить тригонометрические функции, используя формулы Эйлера

$$\cos\omega_k\tau = \frac{e^{i\omega_k\tau} + e^{-i\omega_k\tau}}{2}, \qquad \sin\omega_k\tau = \frac{e^{i\omega_k\tau} - e^{-i\omega_k\tau}}{2i},$$

и перейти к пределу при $T \to \infty$ ($\Delta\omega \to 0$).

Отметим, что спектральная плотность $S_X^*(\omega)$ — четная функция на интервале $(-\infty, +\infty)$, т. е. $S_X^*(-\omega) = S_X^*(\omega)$.

На участке $(0; +\infty)$ имеем $S_X^*(\omega) = \frac{1}{2} \cdot S_X(\omega)$ (см. рис. 65).

Значения функции $S_X^*(\omega)$ в 2 раза меньше значений $S_X(\omega)$ при тех же значениях аргумента ω.

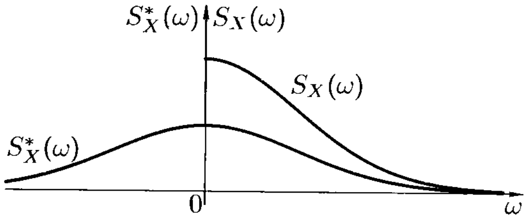


Рис. 65

Пример 6.7. Найти спектральную плотность стационарного с. п. $X(t)$, зная его корреляционную функцию $K_X(\tau) = D \cdot e^{-\alpha\cdot|\tau|}$, $\alpha > 0$.

❍ Используя формулу (6.17), получаем

$$S_X^*(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} D \cdot e^{-\alpha\cdot|\tau|} \cdot e^{-i\omega\tau}\, d\tau =$$

$$= \frac{D}{2\pi}\left(\int\limits_{-\infty}^{0} e^{\alpha\cdot\tau} \cdot e^{-i\omega\tau}\, d\tau + \int\limits_{0}^{\infty} e^{-\alpha\cdot\tau} \cdot e^{-i\omega\tau}\, d\tau\right) =$$

$$= \frac{D}{2\pi}\left(\int\limits_{-\infty}^{0} e^{(\alpha-i\omega)\tau}\, d\tau + \int\limits_{0}^{\infty} e^{-(\alpha+i\omega)\tau}\, d\tau\right) =$$

$$= \frac{D}{2\pi}\left(\frac{1}{\alpha-i\omega} \cdot e^{(\alpha-i\omega)\tau}\Big|_{-\infty}^{0} - \frac{1}{\alpha+i\omega} \cdot e^{-(\alpha+i\omega)\tau}\Big|_{0}^{\infty}\right) =$$

$$= \frac{D}{2\pi}\left(\frac{1}{\alpha-i\omega} - \frac{1}{\alpha+i\omega}(0-1)\right) = \frac{D}{2\pi} \cdot \frac{\alpha+i\omega+\alpha-i\omega}{\alpha^2+\omega^2} = \frac{D}{2\pi} \cdot \frac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2},$$

т. е. $S_X^*(\omega) = \dfrac{D\cdot\alpha}{\pi(\alpha^2+\omega^2)}$ или $S_X(\omega) = \dfrac{2D\cdot\alpha}{\pi(\alpha^2+\omega^2)}$. ●

Пример 6.8. Найти корреляционную функцию с. п. со спектральной плотностью

$$S_X^*(\omega) = \begin{cases} S_0, & |\omega| \leqslant \omega_0, \\ 0, & |\omega| > \omega_0. \end{cases}$$

Используя формулу (6.16), получаем

$$K_X(\tau) = \int\limits_{-\omega_0}^{\omega_0} S_0 \cdot e^{i\omega\tau}\, d\omega = S_0 \cdot \frac{1}{i\tau} \cdot e^{i\omega\tau}\Big|_{-\omega_0}^{\omega_0} =$$

$$= \frac{S_0}{\tau} \cdot \frac{e^{i\omega_0\tau} - e^{-i\omega_0\tau}}{2i} \cdot 2 = 2 \cdot S_0 \cdot \omega_0 \cdot \frac{\sin\omega_0\tau}{\omega_0\tau}.$$

Вид $K_X(\tau)$ изображен на рис. 66. ●

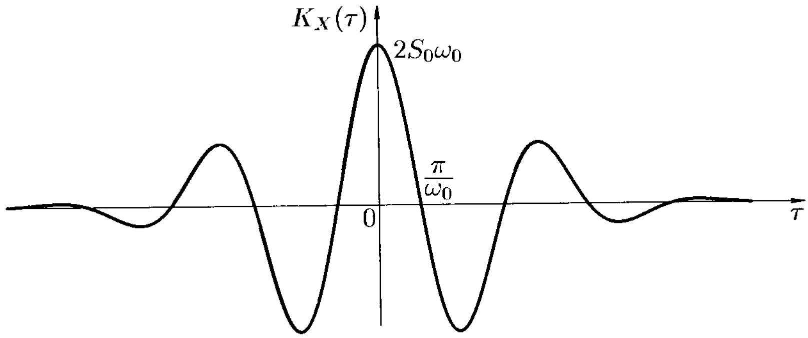


Рис. 66

6.9. Стационарный белый шум

Одним из конкретных типов стационарного с. п. является так называемый стационарный белый шум.

Стационарным белым шумом называется стационарный с. п. $X(t)$, спектральная плотность которого постоянна:

$$S_X^*(\omega) = S_0 = \text{const} \text{ для } \omega \in (-\infty; +\infty).$$

Найдем корреляционную функцию белого шума, используя формулу (6.16) и учитывая, что $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \cdot d\omega = 2\pi \cdot \delta(t)$, где $\delta(t)$ — дельта-функция (см. замечание):

$$K_X(\tau) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} S_0 \cdot e^{i\omega\tau}\, d\omega = S_0 \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau}\, d\omega = S_0 \cdot 2\pi \cdot \delta(\tau),$$

т. е.

$$K_X(\tau) = 2\pi S_0 \cdot \delta(\tau).$$

Как видно, корреляционная функция стационарного белого шума пропорциональна дельта-функции; коэффициент $2\pi S_0$ называется *интенсивностью белого шума.*

Замечание 1. Дельта-функция Дирака $\delta(x)$ есть предел последовательности функций $\delta_\varepsilon(x)$: $\delta(x) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\delta_\varepsilon(x)$, где $\delta_\varepsilon(x) = \begin{cases}\dfrac{1}{2\cdot\varepsilon}, & |x| \leqslant \varepsilon,\\ 0, & |x| > \varepsilon.\end{cases}$

Условно записывают так: $\delta(x) = \begin{cases}0, & x \neq 0;\\ \infty, & x = 0;\end{cases}$ причем $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\delta(x)\,dx = 1.$

Дельта-функция представима интегралом Фурье: $\delta(x) = \dfrac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x}\,dx.$

Наглядно график функции Дирака похож на график, изображенный на рисунке 67.

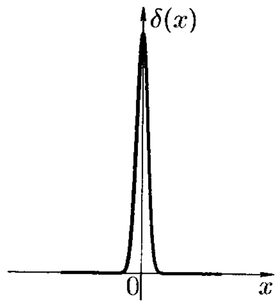


Рис. 67

Дельта-функция может быть представлена как плотность распределения масс, при которой в точке $x = 0$ сосредоточена единичная масса, а масса в остальных точках равна нулю.

Замечание 2. Равенство $K_X(\tau) = S_0\cdot 2\pi\cdot\delta(\tau)$ означает некоррелированность любых двух различных сечений $X(t_1)$ и $X(t_2)$ (ведь $\delta(x) = 0$ при всех значениях $x \neq 0$). В силу этого осуществить белый шум невозможно, т. е. белый шум — полезная математическая абстракция. Белый шум используется в случаях, когда спектральная плотность с. п. примерно постоянна в определенном диапазоне (интересующем нас) частот.

Упражнения

1. Задана корреляционная функция некоторого случайного процесса $X(t)$: $K_X(\tau) = \begin{cases} 2, & |\tau| \leqslant T, \\ 0, & |\tau| > T. \end{cases}$ Выяснить, является ли заданный с. п. $X(t)$ стационарным в широком смысле?

2. Показать, что функция $K_X(\tau) = 3e^{-\tau^2}$ может быть корреляционной функцией стационарного с. п. $X(t)$.

3. Найти корреляционную функцию стационарного с. п. $X(t)$, зная, что $m_X(t) = 1$, а спектральная плотность $S_X^*(\omega) = \dfrac{4}{\pi(1+\omega^2)}$.

4. Известно, что спектральная плотность стационарного с. п. $X(t)$ имеет вид $S_X(\omega) = \dfrac{8}{\pi(1+\omega^2)}$.

   Найти дисперсию случайного процесса $X(t)$.

6.10. Понятие марковского случайного процесса

Среди случайных процессов особое место занимают марковские случайные процессы.

Рассмотрим некоторую физическую систему S, в которой происходит случайный процесс. С течением времени она может под влиянием случайных факторов переходить из одного состояния в другое состояние.

Случайный процесс называется *процессом с дискретными состояниями*, если множество его возможных состояний s_1, s_2, $s_3, \ldots$, $s_i, \ldots$ конечно или счетно (можно заранее перечислить), а переход из одного состояния в другое осуществляется скачком, переходы возможны только в определенные моменты времени $t_1, t_2, t_3, \ldots$.

Если переходы возможны в любой момент времени, т. е. моменты переходов из одного состояния в другое случайны, то процесс называется *процессом с непрерывным временем.*

Случайный процесс с дискретными состояниями называется *марковским*, если для любого момента времени t_0 условная вероятность каждого из состояний системы S в будущем (т. е. при $t > t_0$) зависит только от ее состояния в настоящем (т. е. при $t = t_0$) и не зависит от того, когда и как система пришла в это состояние (т. е. каковы были состояния системы S в прошлом, при $t < t_0$).

Марковский процесс называют также *процессом без последствия*: будущее в нем зависит от прошлого только через настоящее, т. е. вероятность системы S попасть в состояние s_j в момент времени t_k ($S(t_k) = s_j$) зависит лишь от состояния s_i, в котором система находилась в предыдущий момент времени t_{k-1} ($S(t_{k-1}) = s_i$):

$$P\left(S(t_k) = s_j \mid S(t_1) = x_1,\ S(t_2) = x_2, \ldots, S(t_{k-1}) = s_i\right) = \\ = P\left(S(t_k) = s_j \mid S(t_{k-1}) = s_i\right),$$

где x_1, $x_2 \ldots$ — есть возможные состояния системы $\{s_1, s_2, \ldots, s_i, \ldots \ldots, s_j, \ldots, s_n\}$.

Марковский процесс служит моделью для многих процессов в биологии (распределение эпидемий, рост популяции), в физике (распад радиоактивного вещества), в теории массового обслуживания. Отметим, что в СМО множество состояний системы определяется числом каналов, т. е. линий связи, вычислительные машины, продавцы и т. д.; переходы между состояниями системы S происходят под воздействием потока событий (т. е. потока заявок, требований, отказов и т. д.), которые являются простейшими, пуассоновскими.

Случайные процессы с дискретными состояниями удобно иллюстрировать с помощью так называемого *графа состояний*. В нем состояния $s_1, s_2, \ldots$ системы S изображаются прямоугольниками (или кружками), а возможные непосредственные переходы из состояния в состояние — стрелками (или ориентированными дугами), соединяющими состояния.

Пример 6.9. Построить граф состояний следующего с. п.: устройство S в случайный момент времени может выйти из строя, оно осматривается в определенные моменты времени, например через каждые 3 часа, и в случае необходимости — ремонтируется.

❍ Возможные состояния системы (устройства) S: s_1 — устройство исправно; s_2 — устройство неисправно, требуется ремонт; s_3 — устройство неисправно, ремонту не подлежит, списано.

Граф системы имеет вид, изображенный на рис. 68.

Процесс представляет собой случайное блуждение системы S по состояниям, время (3 часа) — шаг процесса.

Реализация с. п. блуждения системы может иметь, в частности, такой вид:

$$s_1^{(1)}, s_1^{(2)}, s_1^{(3)}, s_2^{(4)}, s_1^{(5)}, s_1^{(6)}, s_3^{(7)},$$

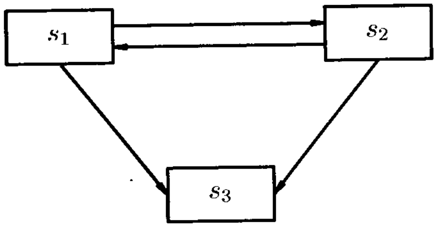


Рис. 68

что означает: при 1-м, 2-м, 3-м осмотрах устройство исправно; при 4-м осмотре — неисправно, ремонтируется; при 5-м, 6-м — исправно; при 7-м — устройство признано негодным, списано. Процесс закончился. ●

Для описания с. п. с дискретными состояниями пользуются *вероятностями состояний системы* S, то есть значениями $p_1(t), p_2(t), \ldots$ $\ldots, p_n(t)$, где $p_i(t) = P\{S(t) = s_i\}$ — вероятность того, что в момент времени t система находится в состоянии s_i; $S(t)$ — случайное состояние системы S в момент t.

Очевидно, что для любого момента t сумма вероятностей всех состояний равна единице (как сумма вероятностей полной группы несовместных событий):

$$\sum_{i=1}^{n} p_i(t) = 1.$$

6.11. Дискретный марковский процесс. Цепь Маркова

Пусть в некоторой системе S происходит с. п. с дискретными состояниями $s_1, s_2, \ldots, s_n$ и дискретным временем, т. е. переход системы из одного состояния в другое происходит только в определенные моменты времени $t_0, t_1, t_2, \ldots$. Эти моменты называют *шагами* процесса (обычно разности смежных моментов наблюдения $t_i - t_{i-1}$ равны постоянному числу — длине шага, принимаемого в качестве единицы времени); t_0 — начало процесса.

Этот с. п. можно рассматривать как последовательность (цепь) событий $S(0)$, $S(1)$, $S(2), \ldots$ ($S(0)$ — начальное состояние системы, т. е. перед 1-м шагом; $S(1)$ — состояние системы после 1-го шага, $S(2)$ — после 2-го шага и т. д.), т. е. событий вида $\{S(k) = s_i\}$, где $i = 1, 2, 3, \ldots, n$; $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Марковский случайный процесс с дискретными состояниями и дискретным временем называют *марковской цепью* (цепь Маркова).

Отметим, что цепь, в которой условные вероятности состояний в будущем зависят только от состояния на данном, последнем шаге (и не зависят от предыдущих), называют *простой цепью Маркова*. (А. А. Марков (1856–1922) — русский математик).

Будем рассматривать только простые цепи Маркова, вычислять вероятности состояний системы

$$p_i(k) = P\{S(k) = s_i\}, \; i = 1, 2, 3, \ldots, n; \; k = 0, 1, 2, \ldots$$

Здесь $P\{S(k) = s_i\}$ — безусловная вероятность того, что на k-м шаге система будет находиться в состоянии s_i.

Для нахождения безусловной вероятности нужно знать начальное распределение вероятностей $p_1(0), p_2(0), \ldots, p_n(0)$, т. е. вероятности состояний $p_i(0)$ в момент времени $t_0 = 0$ (начало процесса) и так называемые *переходные вероятности* $p_{ij}(k)$ марковской цепи на k-м шаге.

Переходной вероятностью $p_{ij}(k)$ называют условную вероятность перехода системы S на k-м шаге в состояние s_j, если известно, что на предыдущем $(k-1)$-м шаге она была в состоянии s_i, т. е.

$$p_{ij}(k) = P\{S(k) = s_j \mid S(k-1) = s_i\}, \quad i, j = 1, 2, 3, \ldots, n$$

(первый индекс указывает номер предшествующего, а второй — номер последующего состояния).

Цепь Маркова называется *однородной*, если $p_{ij}(k) = p_{ij}$, т. е. условные вероятности $p_{ij}(k)$ не зависят от номера испытаний.

Далее будем рассматривать только однородные цепи, которые могут быть заданы с помощью вектора $(p_1(0), p_2(0), \ldots, p_n(0))$ — вероятности состояний в момент времени $t_0 = 0$ и матрицы

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix},$$

называемой *матрицей перехода системы*.

Элементы матрицы $\mathcal{P}$ обладают следующими свойствами:

а) $p_{ij} \geqslant 0$.

б) $\sum\limits_{j=1}^{n} p_{ij} = 1$ $(i = 1, 2, 3, \ldots, n)$, т. е. сумма вероятностей каждой строки матрицы перехода равна единице (как вероятности событий —

перехода из одного состояния s_i в любое возможное состояние s_j — образующих полную группу).

Справедлива формула $\mathcal{P}(n) = \mathcal{P}^n$, т. е. матрица переходов за n шагов есть n-я степень матрицы переходов за один шаг.

Пример 6.10. Задана матрица перехода $\mathcal{P} = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}5 \\ 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}3 & 0{,}2 \end{pmatrix}$. Найти матрицу вероятностей переходов за два шага.

○ По формуле $\mathcal{P}(2) = \mathcal{P}^2$ находим

$$\mathcal{P}(2) = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}5 \\ 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}3 & 0{,}2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}5 \\ 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}3 & 0{,}2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}38 & 0{,}27 & 0{,}35 \\ 0{,}37 & 0{,}28 & 0{,}35 \\ 0{,}29 & 0{,}27 & 0{,}44 \end{pmatrix}. \quad \bullet$$

Заметим, что цепь Маркова представляет собой дальнейшее обобщение схемы Бернулли уже на случай зависимых испытаний; независимые испытания являются частным случаем марковской цепи. Под «событием» понимается состояние системы, а под «испытанием» — изменение ее состояния.

Если «испытания» (опыты) независимы, то появление определенного события в любом опыте не зависит от результатов ранее произведенных испытаний.

6.12. Понятие о непрерывном марковском процессе. Уравнения Колмогорова

Пусть в некоторой системе S происходит марковский с. п. с дискретными состояниями $s_1, s_2, \ldots, s_n$.

Если переходы системы из состояния в состояние происходят не в фиксированные моменты $t_0, t_1, t_2, \ldots$, а в случайные моменты времени (что чаще встречается на практике), то такой процесс называют *марковским процессом с дискретными состояниями и непрерывным временем.*

Марковские с. п. указанного типа используются, в частности, для исследования реальных систем массового обслуживания (СМО); процессы в них протекают в непрерывном времени. Под состоянием системы понимается число требований (заявок) на обслуживание, находящихся в системе.

Будем считать, что переходы системы из состояния s_i в состояние s_j осуществляются под воздействием пуассоновского потока событий (см. п. 1.21) с интенсивностью $\lambda_{ij} = \text{const}$.

Граф состояний системы с проставленными у стрелок интенсивностями называют *размеченным* (см. рис. 69).

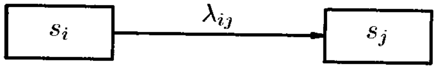


Рис. 69

Переход системы из состояния s_1 в s_2 происходит в момент, когда наступает первое событие потока.

Вероятность события, состоящего в том, что в момент времени t система S будет находиться в состоянии s_1, как уже знаем, обозначается через $p_i(t)$:

$$p_i(t) = P\{S(t) = s_i\}, \text{ причем } \sum_{i=1}^{n} p_i(t) = 1.$$

Для нахождения этих вероятностей, т. е. $p_i(t)$ — вероятностей состояний системы $s_1, s_2, \ldots, s_n$, нужно решить систему дифференциальных уравнений — *уравнений Колмогорова*, имеющих вид

$$\frac{dp_i(t)}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} \cdot p_j(t) - p_i(t) \cdot \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij}. \quad (i = 1, 2, 3, \ldots, n)$$

с начальными условиями $p_1(0), p_2(0), \ldots p_n(0)$; $p_i(0) \geqslant 0$, $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i(0) = 1$ и условием нормировки $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i(t) = 1$.

При составлении системы уравнений Колмогорова удобно пользоваться размеченным графом состояний системы.

Правило составления уравнений Колмогорова таково: в левой части каждого из уравнений стоит производная вероятности s_i состояния, т. е. $\frac{dp_i(t)}{dt}$; в правой части — *сумма* произведений вероятностей $p_i(t)$ всех состояний (когда стрелка ведет *в* данное состояние) на интенсивности соответствующих потоков *минус* суммарная интенсивность всех потоков (когда стрелка ведет *из* данного состояния), умноженная на вероятность данного s_i состояния.

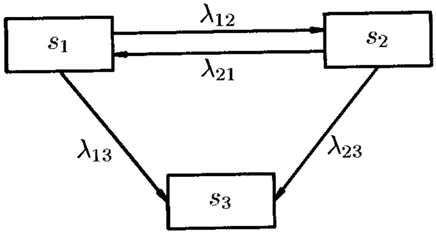


Рис. 70

Например, для системы S, размеченный граф состояний которой показан на рис. 70, система дифференциальных уравнений будет:

$$\begin{cases} p_1'(t) = \lambda_{21} \cdot p_2(t) - (\lambda_{12} + \lambda_{13}) \cdot p_1(t), \\ p_2'(t) = \lambda_{12} \cdot p_1(t) - (\lambda_{21} + \lambda_{23}) \cdot p_2(t), \\ p_3'(t) = \lambda_{13} \cdot p_1(t) + \lambda_{23} \cdot p_2(t). \end{cases}$$

Нормировочное условие $p_1(t) + p_2(t) + p_3(t) = 1$.

При интегрировании такой системы следует учесть состояние системы в начальный момент, т. е. при $t = 0$. Так, если в этот момент она была в состоянии s_k, то полагают $p_k(0) = 1$, $p_i(0) = 0$ при $i \neq k$.

Замечание. Случайный процесс, устанавливающийся в системе при $t \to \infty$ (т. н. *предельный стационарный режим*), характеризуют так называемые *предельные вероятности состояний*, т. е. вероятности $p_i(t)$ при $t \to \infty$.

Предельные вероятности существуют, если число состояний конечно, «состояний без выхода» (из них невозможен переход ни в какое другое состояние) нет, потоки событий стационарны ($\lambda_{ij} = \text{const}$).

Предельная вероятность состояния s_i показывает *среднее относительное время пребывания системы в этом состоянии.*

Для нахождения предельных вероятностей в уравнениях Колмогорова полагают все производные $\dfrac{dp_i(t)}{dt}$ равными 0 и решают систему алгебраических уравнений (с учетом нормировки $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i(t) = 1$).

Пример 6.11. Найти предельные вероятности для системы S, граф которой изображен на рис. 71.

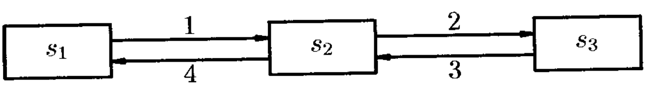


Рис. 71

❍ Составляем дифференциальные уравнения Колмогорова:

$$\begin{cases} p_1' = 4p_2 - p_1, \\ p_2' = p_1 + 3p_3 - (2+4)\cdot p_2, \\ p_3' = 2\cdot p_2 - 3\cdot p_3. \end{cases}$$

Тогда система алгебраических уравнений, описывающих стационарный режим системы S, принимает вид

$$\begin{cases} 4p_2 - p_1 = 0, \\ p_1 + 3p_3 - 6p_2 = 0, \\ 2p_2 - 3p_3 = 0, \\ p_1 + p_2 + p_3 = 1. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим $p_1 = \frac{12}{17}$, $p_2 = \frac{3}{17}$, $p_3 = \frac{2}{17}$, т. е. система S в среднем 70,6 % будет находиться в состоянии s_1; 17,6 % — в состоянии s_2; 11,8 % — в состоянии s_3. ●

Упражнения

1. Цепь Маркова управляется матрицей перехода

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Определить матрицу вероятностей переходов за три шага.

2. Цепь Маркова с двумя состояниями s_1 и s_2 задана матрицей вероятностей переходов

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

В качестве начального состояния процесса некоторое устройство выбирает s_1 с вероятностью $\frac{1}{4}$ и s_2 — с вероятностью $\frac{3}{4}$. Построить граф, соответствующий матрице. Найти вероятность того, что после первого шага процесс перейдет в состояние s_1.

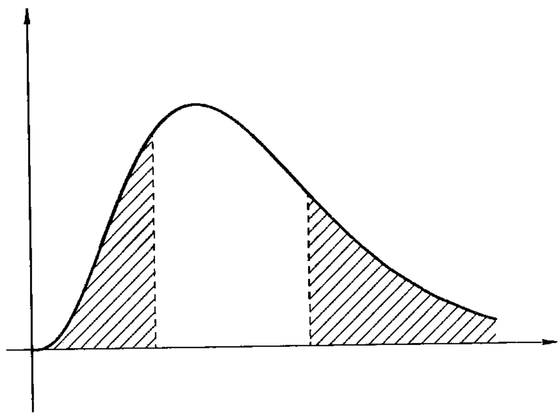
3. Матрица вероятностей переходов за один шаг цепи Маркова имеет вид

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}5 \\ 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}4 \\ 0{,}5 & 0{,}2 & 0{,}3 \end{pmatrix}.$$

Найти предельные вероятности.

Основы математической статистики

Раздел второй



Глава 7

Выборки и их характеристики

7.1. Предмет математической статистики

Математическая статистика — раздел математики, в котором изучаются методы сбора, систематизации и обработки результатов наблюдений массовых случайных явлений для выявления существующих закономерностей.

Математическая статистика тесно связана с теорией вероятностей. Обе эти математические дисциплины изучают массовые случайные явления. Связующим звеном между ними являются предельные теоремы теории вероятностей. При этом теория вероятностей выводит из математической модели свойства реального процесса, а математическая статистика устанавливает свойства математической модели, исходя из данных наблюдений (говорят «из статистических данных»).

Предметом математической статистики является изучение случайных величин (или случайных событий, процессов) по результатам наблюдений. Полученные в результате наблюдения (опыта, эксперимента) данные сначала надо каким-либо образом обработать: *упорядочить*, представить в удобном для обозрения и анализа виде. Это первая задача. Затем, это уже вторая задача, *оценить*, хотя бы приблизительно, *интересующие* нас *характеристики* наблюдаемой случайной величины. Например, дать оценку неизвестной вероятности события, оценку неизвестной функции распределения, оценку математического ожидания, оценку дисперсии случайной величины, оценку параметров распределения, вид которого неизвестен, и т. д.

Следующей, назовем ее условно третьей, задачей является *проверка статистических гипотез*, т. е. решение вопроса согласования результатов оценивания с опытными данными. Например, выдвигается гипотеза, что: а) наблюдаемая с. в. подчиняется нормальному закону; б) м. о. наблюдаемой с. в. равно нулю; в) случайное событие обладает данной вероятностью и т. д.

Одной из важнейших задач математической статистики является разработка методов, позволяющих по результатам обследования выборки (т. е. части исследуемой совокупности объектов) делать обоснованные выводы о распределении признака (с. в. X) изучаемых объектов по всей совокупности.

Для обработки статистических данных созданы специальные программные пакеты (STADIA, СтатЭксперт, Эвриста, SYSTAT, STATGRAPHICS и др.), которые выполняют трудоемкую работу по расчету различных статистик, построению таблиц и графиков. Простейшие статистические функции имеются в программируемых калькуляторах и популярных офисных программах (EXCEL).

Результаты исследования статистических данных методами математической статистики *используются для принятия решения* (в задачах планирования, управления, прогнозирования и организации производства, при контроле качества продукции, при выборе оптимального времени настройки или замены действующей аппаратуры и т. д.), т. е. для научных и практических выводов.

Говорят, что «математическая статистика — это теория принятия решений в условиях неопределенности».

Математическая статистика возникла в XVIII веке в работах Я. Бернулли, П. Лапласа, К. Пирсона. В ее современном развитии определяющую роль сыграли труды Г. Крамера, Р. Фишера, Ю. Неймана и др. Большой вклад в математическую статистику внесли русские ученые П. Л. Чебышев, А. М. Ляпунов, А. Н. Колмогоров, Б. В. Гнеденко и другие.

7.2. Генеральная и выборочная совокупности

Пусть требуется изучить данную совокупность объектов относительно некоторого признака. *Например*, рассматривая работу диспетчера (продавца, парикмахера,...), можно исследовать: его загруженность, тип клиентов, скорость обслуживания, моменты поступления заявок и т. д. Каждый такой признак (и их комбинации) образует случайную величину, наблюдения над которой мы и производим.

Совокупность всех подлежащих изучению объектов или возможных результатов всех мыслимых наблюдений, производимых в неизменных условиях над одним объектом, называется *генеральной совокупностью*.

Более строго: генеральная совокупность — это с. в. $X(\omega)$, заданная на пространстве элементарных событий Ω с выделенным в нем классом S подмножеств событий, для которых указаны их вероятности.

Зачастую проводить *сплошное обследование*, когда изучаются все объекты (например — перепись населения), трудно или дорого, экономически нецелесообразно (например — не вскрывать же каждую консервную банку для проверки качества продукции), а иногда невозможно. В этих случаях наилучшим способом обследования является *выборочное наблюдение*: выбирают из генеральной совокупности часть ее объектов («выборку») и подвергают их изучению.

Выборочной совокупностью (*выборкой*) называется совокупность объектов, отобранных случайным образом из генеральной совокупности.

Более строго: *выборка* — это последовательность $X_1, X_2, \ldots, X_n$ независимых одинаково распределенных с. в., распределение каждой из которых совпадает с распределением генеральной случайной величины.

Число объектов (наблюдений) в совокупности, генеральной или выборочной, называется ее *объемом*; обозначается соответственно через N и n.

Конкретные значения выборки, полученные в результате наблюдений (испытаний), называют *реализацией выборки* и обозначают строчными буквами $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Метод статистического исследования, состоящий в том, что на основе изучения выборочной совокупности делается заключение о всей генеральной совокупности, называется *выборочным*.

Для получения хороших оценок характеристик генеральной совокупности необходимо, чтобы выборка была *репрезентативной* (или *представительной*), т. е. достаточно полно представлять изучаемые признаки генеральной совокупности. Условием обеспечения репрезентативности выборки является, согласно закону больших чисел, соблюдение случайности отбора, т. е. все объекты генеральной совокупности должны иметь равные вероятности попасть в выборку.

Различают выборки *с возвращением* (*повторные*) и *без возвращения* (*бесповторные*). В первом случае отобранный объект возвращается в генеральную совокупность перед извлечением следующего; во втором — не возвращается. На практике чаще используется бесповторная выборка.

Заметим, если объем выборки значительно меньше объема генеральной совокупности, различие между повторной и бесповторной выборками очень мало, его можно не учитывать.

В зависимости от конкретных условий для обеспечения репрезентативности применяют различные способы отбора: *простой*, при котором из генеральной совокупности извлекают по одному объекту; *типиче-*

ский, при котором генеральную совокупность делят на «типические» части и отбор осуществляется из каждой части (например, мнение о референдуме спросить у случайно отобранных людей, разделенных по признаку пола, возраста,...); *механический*, при котором отбор производится через определенный интервал (например, мнение спросить у каждого шестидесятого...); *серийный*, при котором объекты из генеральной совокупности отбираются «сериями», которые должны исследоваться при помощи сплошного обследования.

На практике пользуются сочетанием вышеупомянутых способов отбора.

Пример 7.1. Десять абитуриентов проходят тестирование по математике. Каждый из них может набрать от 0 до 5 баллов включительно. Пусть X_k — количество баллов, набранных k-м ($k = 1, 2, \dots, 10$) абитуриентом.

Тогда значения 0, 1, 2, 3, 4, 5 — все возможные количества баллов, набранных одним абитуриентом, — образуют генеральную совокупность.

Выборка $X_1, X_2, X_3, \dots, X_{10}$ - - результат тестирования 10 абитуриентов.

Реализациями выборки могут быть следующие наборы чисел: {5, 3, 0, 1, 4, 2. 5. 4. 1, 5} или {4, 4, 5, 3, 3, 1, 5, 5, 2, 5} или {3, 4, 5. 0. 1. 2. 3, 4, 5, 4} и т. д.

7.3. Статистическое распределение выборки. Эмпирическая функция распределения

Пусть изучается некоторая с. в. X. С этой целью над с. в. X производится ряд независимых опытов (наблюдений). В каждом из этих опытов величина X принимает то или иное значение.

Пусть она приняла n_1 раз значение x_1, n_2 раз — значение x_2, ..., n_k раз — значение x_k. При этом $n_1+n_2+\ldots+n_k = n$ — объем выборки. Значения $x_1, x_2, \dots, x_k$ называются *вариантами* с. в. X.

Вся совокупность значений с. в. X представляет собой первичный статистический материал, который подлежит дальнейшей обработке, прежде всего — упорядочению.

Операция расположения значений случайной величины (признака) по неубыванию называется *ранжированием* статистических данных. Полученная таким образом последовательность $x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)}$

значений с. в. X (где $x_{(1)} \leqslant x_{(2)} \leqslant \ldots \leqslant x_{(n)}$ и $x_{(1)} = \min\limits_{1\leqslant i\leqslant n} X_i, \ldots, x_{(n)} = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} X_i$) называется *вариационным рядом*.

Числа n_i, показывающие, сколько раз встречаются варианты x_i в ряде наблюдений, называются *частотами*, а отношение их к объему выборки — *частостями* или *относительными частотами* (p_i^*), т. е.

$$p_i^* = \frac{n_i}{n}, \tag{7.1}$$

где $n = \sum\limits_{i=1}^{k} n_i$.

Перечень вариантов и соответствующих им частот или частостей называется *статистическим распределением выборки* или *статистическим рядом*.

Записывается статистическое распределение в виде таблицы. Первая строка содержит варианты, а вторая — их частоты n_i (или частости p_i^*).

Пример 7.2. В результате тестирования (см. пример 7.1) группа абитуриентов набрала баллы: 5, 3, 0, 1, 4, 2, 5, 4, 1, 5. Записать полученную выборку в виде: а) вариационного ряда; б) статистического ряда.

а) Проранжировав статистические данные (т. е. исходный ряд), получим вариационный ряд $(x_{(1)}, x_{(2)}, \ldots x_{(10)})$:

$$(0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 4,\ 5,\ 5,\ 5).$$

б) Подсчитав частоту и частость вариантов $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 3$, $x_5 = 4$, $x_6 = 5$, получим статистическое распределение выборки (так называемый дискретный статистический ряд)

x_i	0	1	2	3	4	5
n_i	1	2	1	1	2	3

$$\left(\sum_{i=1}^{6} n_i = 10\right)$$

или

x_i	0	1	2	3	4	5
p_i^*	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$

$$\left(\sum_{i=1}^{6} p_i^* = 1\right).$$

Статистическое распределение выборки является оценкой неизвестного распределения. В соответствии с теоремой Бернулли (п. 5.3) относительные частоты p_i^* сходятся при $n \to \infty$ к соответствующим вероятностям p_i, т. е. $p_i^* \xrightarrow[n\to\infty]{p} p_i$. Поэтому при больших значениях n статистическое распределение мало отличается от истинного распределения.

В случае, когда число значений признака (с. в. X) велико или признак является непрерывным (т. е. когда с. в. X может принять любое значение в некотором интервале), составляют *интервальный статистический ряд*. В первую строку таблицы статистического распределения вписывают частичные промежутки $[x_0, x_1)$, $[x_1, x_2), \ldots, [x_{k-1}, x_k)$, которые берут обычно одинаковыми по длине: $h = x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \ldots$. Для определения величины интервала (h) можно использовать формулу Стерджеса:

$$h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{1 + \log_2 n},$$

где $x_{\max} - x_{\min}$ — разность между наибольшим и наименьшим значениями признака, $m = 1 + \log_2 n$ — число интервалов ($\log_2 n \approx 3{,}322 \lg n$).

За начало первого интервала рекомендуется брать величину $x_{\text{нач}} = x_{\min} - \frac{h}{2}$. Во второй строчке статистического ряда вписывают количество наблюдений n_i ($i = \overline{1,k}$), попавших в каждый интервал.

Пример 7.3. Измерили рост (с точностью до см) 30 наудачу отобранных студентов. Результаты измерений таковы:

178; 160, 154, 183, 155, 153, 167, 186, 163, 155,
157, 175, 170, 166, 159, 173, 182, 167, 171, 169,
179, 165, 156, 179, 158, 171, 175, 173, 164, 172.

Построить интервальный статистический ряд.

○ Для удобства проранжируем полученные данные:
153, 154, 155, 155, 156, 157, 158, 159, 160, 163, 164, 165, 166, 167, 167, 169, 170, 171, 171, 172, 173, 173, 175, 175, 178, 179, 179, 182, 183, 186.

Отметим, что X — рост студента — непрерывная с. в. При более точном измерении роста значения с. в. X обычно не повторяются (вероятность наличия на Земле двух человек, рост которых равен, скажем $\sqrt{3} = 1{,}732050808\ldots$ метров, равна нулю!).

Как видим, $x_{\min} = 153$, $x_{\max} = 186$; по формуле Стерджеса, при $n = 30$, находим длину частичного интервала

$$h = \frac{186 - 153}{1 + \log_2 30} \approx \frac{33}{1 + 3{,}322 \lg 30} \approx \frac{33}{5{,}907} \approx 5{,}59.$$

Примем $h = 6$. Тогда $x_{\text{нач}} = 153 - \frac{6}{2} = 150$. Исходные данные разбиваем на 6 ($m = 1 + \log_2 30 = 5{,}907 \approx 6$) интервалов: $[150{,}156)$, $[156{,}162)$, $[162{,}168)$, $[168{,}174)$, $[174, 180)$, $[180, 186)$.

Подсчитав число студентов (n_i), попавших в каждый из полученных промежутков, получим интервальный статистический ряд:

Рост	[150–156)	[156–162)	[162–168)	[168–174)	[174–180)	[180–186)
Частота	4	5	6	7	5	3
Частость	0,13	0,17	0,20	0,23	0,17	0,10

●

Одним из способов обработки вариационного ряда является построение эмпирической функции распределения.

Эмпирической (статистической) функцией распределения называется функция $F_n^*(x)$, определяющая для каждого значения x частость события $\{X < x\}$:

$$F_n^*(x) = p^*\{X < x\}. \tag{7.2}$$

Для нахождения значений эмпирической функции удобно $F_n^*(x)$ записать в виде

$$F_n^*(x) = \frac{n_x}{n},$$

где n — объем выборки, n_x — число наблюдений, меньших x ($x \in \mathbb{R}$).

Очевидно, что $F_n^*(x)$ удовлетворяет тем же условиям, что и истинная функция распределения $F(x)$ (см. п. 2.3).

При увеличении числа n наблюдений (опытов) относительная частота события $\{X < x\}$ приближается к вероятности этого события (теорема Бернулли, п. 5.3). Эмпирическая функция распределения $F_n^*(x)$ является *оценкой* вероятности события $\{X < x\}$, т. е. оценкой теоретической функции распределения $F(x)$ с. в. X. Имеет место

Теорема 7.1. Пусть $F(x)$ — теоретическая функция распределения с. в. X, а $F_n^*(x)$ — эмпирическая. Тогда для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{|F_n^*(x) - F(x)| < \varepsilon\right\} = 1.$$

Пример 7.4. Построить функцию $F_n^*(x)$, используя условие и результаты примера 7.2.

○ Здесь $n = 10$. Имеем $F_{10}^*(x) = \dfrac{0}{10} = 0$ при $x \leqslant 0$ (наблюдений меньше 0 нет); $F_{10}^*(x) = \dfrac{1}{10}$ при $0 < x \leqslant 1$ (здесь $n_x = 1$) и т. д. Окончательно получаем

$$F_{10}^*(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leqslant 0, \\ 0{,}1, & \text{при } 0 < x \leqslant 1, \\ 0{,}3, & \text{при } 1 < x \leqslant 2, \\ 0{,}4, & \text{при } 2 < x \leqslant 3, \\ 0.5, & \text{при } 3 < x \leqslant 4, \\ 0{,}7, & \text{при } 4 < x \leqslant 5, \\ 1, & \text{при } 5 < x. \end{cases}$$

График эмпирической функции распределения приведен на рис. 72. ●

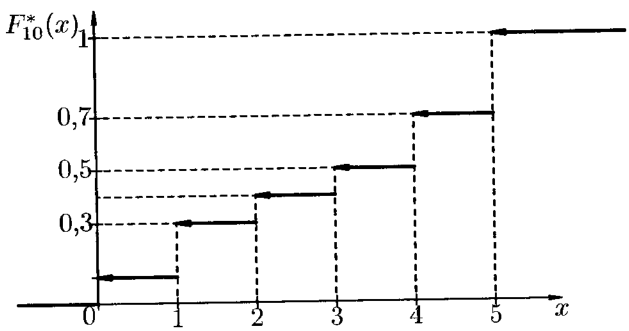


Рис. 72

7.4. Графическое изображение статистического распределения

Статистическое распределение изображается графически (для наглядности) в виде так называемых полигона и гистограммы. Полигон, как правило, служит для изображения дискретного (т. е. варианты отличаются на постоянную величину) статистического ряда.

Полигоном частот называют ломаную, отрезки которой соединяют точки с координатами $(x_1, n_1), (x_2, n_2), \ldots, (x_k, n_k)$; *полигоном частостей* — с координатами (x_1, p_1^*), $(x_2, p_2^*), \ldots, (x_k, p_k^*)$.

Варианты (x_i) откладываются на оси абсцисс, а частоты и, соответственно, частости — на оси ординат.

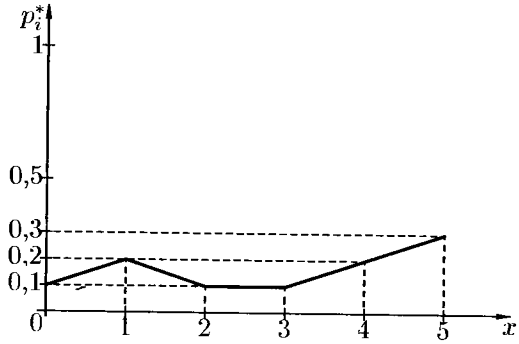


Рис. 73

Пример 7.5. Для примера 7.2 (п. 7.3) полигон частостей имеет вид, изображенный на рис. 73.

Заметим, что $p_1^* + p_2^* + \ldots + p_6^* = 1$.

Как видно, полигон частостей является статистическим аналогом многоугольника распределения (см. п. 2.2).

Для непрерывно распределенного признака (т. е. варианты могут отличаться один от другого на сколь угодно малую величину) можно построить полигон частот, взяв середины интервалов в качестве значений $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Более употребительна так называемая гистограмма.

Гистограммой частот (*частостей*) называют ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длины h, а высоты равны отношению $\frac{n_i}{h}$ — плотность частоты ($\frac{p_i^*}{h}$ или $\frac{n_i}{n \cdot h}$ — плотности частости).

Очевидно, площадь гистограммы частот равна объему выборки, а площадь гистограммы частостей равна единице.

Пример 7.6. Используя условие и результаты примера 7.3 из п. 7.3 построить гистограмму частостей.

○ В данном случае длина интервала равна $h = 6$. Находим высоты h_i прямоугольников: $h_1 = \frac{0{,}13}{6} \approx 0{,}022$, $h_2 = \frac{0{,}17}{6} \approx 0{,}028$, $h_3 = \frac{0{,}20}{6} \approx$ $\approx 0{,}033$, $h_4 = \frac{0{,}23}{6} \approx 0{,}038$, $h_5 \approx \frac{0{,}17}{6} = 0{,}028$, $h_6 \approx \frac{0{,}1}{6} = 0{,}017$. Гистограмма частостей изображена на рис. 74.

Гистограмма частот является статистическим аналогом дифференциала функции распределения (плотности) $f(x)$ с. в. X. Сумма площа-

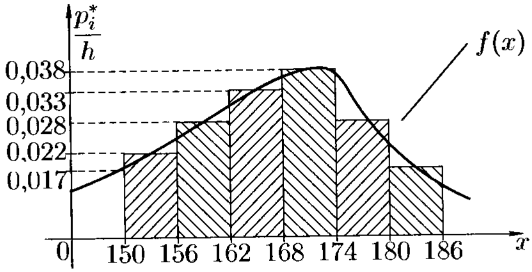


Рис. 74

дей прямоугольников равна единице

$$\left(h \cdot \frac{p_1^*}{h} + \ldots + h \cdot \frac{p_6^*}{h} = p_1^* + \ldots + p_6^* = 1\right),$$

что соответствует условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$$

для плотности вероятностей $f(x)$ (см. п. 2.4). На рис. 74 показана и плотность вероятностей $f(x)$.

Если соединить середины верхних оснований прямоугольников отрезками прямой, то получим полигон того же распределения. ●

7.5. Числовые характеристики статистического распределения

Для выборки можно определить ряд числовых характеристик, аналогичным тем, что в теории вероятностей определялись для случайных величин (см. п. 2.5).

Пусть статистическое распределение выборки объема n имеет вид:

x_i	x_1	x_2	x_3	...	x_k
n_i	n_1	n_2	n_3	...	n_k

(7.3)

Выборочным средним $\overline{x}_в$ называется среднее арифметическое всех значений выборки:

$$\overline{x}_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i \cdot n_i. \qquad (7.4)$$

Выборочное среднее можно записать и так:

$$\overline{x}_{\text{в}} = \sum_{i=1}^{k} x_i \cdot p_i^*, \tag{7.5}$$

где $p_i^* = \dfrac{n_i}{n}$ — частость. Для обозначения выборочного среднего используют следующие символы: $\overline{x}$, $M^*(X)$, m_x^*.

Отметим, что в случае интервального статистического ряда в равенстве (7.4) в качестве x_i берут середины его интервалов, а n_i соответствующие им частоты.

Выборочной дисперсией $D_{\text{в}}$ называется среднее арифметическое квадратов отклонений значений выборки от выборочной средней $\overline{x}_{\text{в}}$, т. е.

$$D_{\text{в}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} (x_i - \overline{x}_{\text{в}})^2 \cdot n_i \tag{7.6}$$

или, что то же самое.

$$D_{\text{в}} = \sum_{i=1}^{k} (x_i - \overline{x}_{\text{в}})^2 \cdot p_i^*. \tag{7.7}$$

Можно показать. что $D_{\text{в}}$ может быть подсчитана также по формуле: $D_{\text{в}} = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{i=1}^{k} x_i^2 \cdot n_1 - (\overline{x}_{\text{в}})^2$, т. е.

$$D_{\text{в}} = \overline{x^2} - (\overline{x})^2, \tag{7.8}$$

здесь $\overline{x} = \overline{x}_{\text{в}}$.

Выборочное среднее квадратическое отклонение выборки определяется формулой

$$\sigma_{\text{в}} = \sqrt{D_{\text{в}}}. \tag{7.9}$$

Особенность выборочного с. к. о. ($\sigma_{\text{в}}$) состоит в том, что оно измеряется в тех же единицах, что и изучаемый признак.

При решении практических задач используется и величина

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{k} (x_i - \overline{x}_{\text{в}})^2 \cdot n_i, \tag{7.10}$$

т. е.

$$S^2 = \frac{n}{n-1} D_{\text{в}}, \tag{7.11}$$

которая называется *исправленной выборочной дисперсией* (см. далее п. 8.1).

Величина

$$S = \sqrt{S^2} \qquad (7.12)$$

называется *исправленным выборочным средним квадратическим отклонением.*

Для непрерывно распределенного признака формулы для выборочных средних будут такими же, но за значения $x_1, x_2, \ldots, x_k$ надо брать не концы промежутков $[x_0, x_1), [x_1, x_2), \ldots$ а их середины $\frac{x_0 + x_1}{2}, \frac{x_1 + x_2}{2}, \ldots$

В качестве описательных характеристик вариационного ряда $x_{(1)}$, $x_{(2)}, \ldots, x_{(n)}$ (или полученного из него статистического распределения выборки (7.3)) используется медиана, мода, размах вариации (выборки) и т. д.

Размахом вариации называется число $R = x_{(n)} - x_{(1)}$, где $x_{(1)} = \min\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} x_k$, $x_{(n)} = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} x_k$ или $R = x_{\max} - x_{\min}$, где $x_{\max}$ — наибольший, $x_{\min}$ — наименьший вариант ряда.

Модой M_o^* вариационного ряда называется вариант, имеющий наибольшую частоту.

Медианой M_e^* вариационного ряда называется значение признака (с. в. X), приходящееся на середину ряда.

Если $n = 2k$ (т. е. ряд $x_{(1)}, x_{(2)}, \ldots, x_{(k)}, x_{(k+1)}, \ldots, x_{(2k)}$ имеет четное число членов), то $M_e^* = \frac{x_{(k)} + x_{(k+1)}}{2}$; если $n = 2k + 1$, то $M_e^* = x_{(k+1)}$.

Пример 7.7. По условию примера 7.2 из п. 7.3 найти характеристики выборки — результаты тестирования 10 абитуриентов.

◐ Используя формулы (7.4)–(7.12) и определения из п. 7.5, находим:

$\overline{x}_{\text{в}} = \frac{1}{10} \cdot (0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + \ldots + 5 \cdot 3) = 3$,

$D_{\text{в}} = \frac{1}{10} \left((0-3)^2 \cdot 1 + (1-3)^2 \cdot 2 + \ldots + (5-3)^2 \cdot 3\right) = 3{,}2$,

$\sigma_{\text{в}} = \sqrt{3{,}2} \approx 1.79.$

$S^2 = \frac{10}{9} \cdot 3{,}2 \approx 3{,}56$,

$S = \sqrt{3{,}56} \approx 1{,}87$,

$R = 5 - 0 = 5$,

$M_o^* = 5$,

$M_e^* = \frac{3+4}{2} = 3{,}5.$ ●

Упражнения

1. Найти и построить эмпирическую функцию распределения для выборки, представленной статистическим рядом.

x_i	1	3	6
n_i	10	8	12

2. На телефонной станции производились наблюдения за числом неправильных соединений в минуту. Результаты наблюдений в течение часа представлены в виде статистического распределения.

x_i	0	1	2	3	4	5	6
n_i	8	17	16	10	6	2	1

Найти выборочные среднее и дисперсию. Сравнить распределение частостей с распределением Пуассона $\left(p_{n,m} \approx \dfrac{e^{-a} \cdot a^m}{m!}\right)$.

3. Изучается с. в. X — число выпавших очков при бросании игральной кости. Кость подбросили 60 раз. Получены следующие результаты:
3, 2, 5, 6, 6, 1, 4, 6, 4, 6, 3, 6, 4, 2, 1, 5, 3, 1, 6, 4,
5, 4, 2, 2, 4, 2, 6, 3, 1, 5, 6, 1, 6, 6, 4, 2, 5, 4, 3, 6,
4, 1, 5, 6, 3, 2, 4, 4, 5, 2, 5, 6, 2, 3, 5, 4, 1, 2, 5, 3.
1. Что в данном опыте-наблюдении представляет генеральную совокупность? 2. Перечислите элементы этой совокупности. 3. Что представляет собой выборка? 4. Приведите 1–2 реализации выборки. 5. Оформите ее в виде: а) вариационного ряда; б) статистического ряда. 6. Найдите эмпирическую функцию распределения выборки. 7. Постройте интервальный статистический ряд. 8. Постройте полигон частот и гистограмму частостей. 9. Найдите: а) выборочную среднюю; б) выборочную дисперсию: в) исправленную выборочную дисперсию и исправленное среднее квадратическое отклонение; г) размах вариации, моду и медиану.

Глава 8
Элементы теории оценок и проверки гипотез

8.1. Оценка неизвестных параметров

Понятие оценки параметров

Пусть изучается случайная величина X с законом распределения, зависящим от одного или нескольких параметров. *Например*, это параметр a в распределении Пуассона $\left(P\{X = m\} = \dfrac{a^m \cdot e^{-a}}{m!}\right)$ или параметры a и σ для нормального закона распределения.

Требуется по выборке $X_1, X_2, \ldots, X_n$, полученной в результате n наблюдений (опытов), оценить неизвестный параметр θ.

Напомним, что $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — случайные величины: X_1 — результат первого наблюдения, X_2 — второго и т. д., причем с. в. X_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, имеют такое же распределение, что и с. в. X; конкретная выборка $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — это значения (реализация) независимых с. в. $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Статистической оценкой $\widetilde{\theta}_n$ (далее просто *оценкой* $\widetilde{\theta}$) параметра θ теоретического распределения называют его приближенное значение, зависящее от данных выбора.

Очевидно, что оценка $\widetilde{\theta}$ есть значение некоторой функции результатов наблюдений над случайной величиной, т. е.

$$\widetilde{\theta} = \widetilde{\theta}(X_1, X_2, \ldots, X_n). \tag{8.1}$$

Функцию результатов наблюдений (т. е. функцию выборки) называют *статистикой*.

Можно сказать, что *оценка* $\widetilde{\theta}$ параметра θ есть статистика, которая в определенном смысле близка к истинному значению θ.

Так, $F^*(x)$ есть оценка $F_X(x)$, гистограмма — плотности $f(x)$.

Оценка $\widetilde{\theta}$ является случайной величиной, так как является функцией независимых с. в. $X_1, X_2, \ldots, X_n$; если произвести другую выборку, то функция примет, вообще говоря, другое значение.

Если число опытов (наблюдений) невелико, то замена неизвестного параметра θ его оценкой $\widetilde{\theta}$, *например* математического ожидания средним арифметическим, приводит к ошибке. Это ошибка в среднем тем больше, чем меньше число опытов.

К оценке любого параметра предъявляется ряд требований, которым она должна удовлетворять, чтобы быть «близкой» к истинному значению параметра, т. е. быть в каком-то смысле «доброкачественной» оценкой.

Свойства статистических оценок

Качество оценки определяют, проверяя, обладает ли она свойствами несмещенности, состоятельности, эффективности.

Оценка $\widetilde{\theta}$ параметра θ называется *несмещенной*, если $M\widetilde{\theta} = \theta$.

Если $M\widetilde{\theta} \neq \theta$, то оценка $\widetilde{\theta}$ называется *смещенной*.

Чтобы оценка $\widetilde{\theta}$ не давала систематической ошибки (ошибки одного знака) в сторону завышения ($M\widetilde{\theta} > \theta$) или занижения ($M\widetilde{\theta} < \theta$), надо потребовать, чтобы «математическое ожидание оценки было равно оцениваемому параметру».

Если $M\widetilde{\theta}_n \to \theta$, то оценка $\widetilde{\theta}_n$ называется *асимптотически несмещенной*.

Требование несмещенности особенно важно при малом числе наблюдений (опытов).

Оценка $\widetilde{\theta}_n$ параметра θ называется *состоятельной*, если она сходится по вероятности к оцениваемому параметру:

$$\widetilde{\theta}_n \xrightarrow[n \to \infty]{p} \theta,$$

т. е. для любого $\varepsilon > 0$ выполнено

$$\lim_{n \to \infty} P\left\{|\widetilde{\theta}_n - \theta| < \varepsilon\right\} = 1.$$

Это означает, что с увеличением объема выборки мы все ближе приближаемся к истинному значению параметра θ, т. е. практически достоверно $\widetilde{\theta}_n \approx \theta$.

Свойство состоятельности обязательно для любого правила оценивания (несостоятельные оценки не используются).

Состоятельность оценки $\widetilde{\theta}_n$ часто может быть установлена с помощью следующей теоремы.

Теорема 8.1. Если оценка $\widetilde{\theta}_n$ параметра θ является несмещенной и $D\widetilde{\theta}_n \to 0$ при $n \to \infty$, то $\widetilde{\theta}_n$ — состоятельная оценка.

❑ Запишем неравенство Чебышева для с. в. $\widetilde{\theta}_n$ для любого $\varepsilon > 0$:

$$P\big(|\widetilde{\theta}_n - \theta| < \varepsilon\big) \geqslant 1 - \frac{D\widetilde{\theta}_n}{\varepsilon^2}.$$

Так как по условию $\lim\limits_{n\to\infty} D\widetilde{\theta}_n = 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} P\big(|\widetilde{\theta}_n - \theta| < \varepsilon\big) \geqslant 1$. Но вероятность любого события не превышает 1 и, следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} P\big(|\widetilde{\theta}_n - \theta| < \varepsilon\big) = 1,$$

т. е. $\widetilde{\theta}_n$ — состоятельная оценка параметра θ. ■

Несмещенная оценка $\widetilde{\theta}_n$ параметра θ называется *эффективной*, если она имеет наименьшую дисперсию среди всех возможных несмещенных оценок параметра θ, т. е. оценка $\widetilde{\theta}_n$ эффективна, если ее дисперсия минимальна.

Эффективную оценку в ряде случаев можно найти, используя *неравенство Рао–Крамера*:

$$D\widetilde{\theta}_n \geqslant \frac{1}{n \cdot I},$$

где $I = I(\theta)$ — информация Фишера, определяемая в дискретном случае формулой

$$I = M\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\ln p(X,\theta)\right]^2 = \sum_{i=1}^{m}\left[\frac{p'_\theta(x_i,\theta)}{p(x_i,\theta)}\right]^2 \cdot p(x_i,\theta),$$

где $p(x,\theta) = p\{X = x\}$, а в непрерывном — формулой

$$I = M\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(X,\theta)\right]^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{f'_\theta(x,\theta)}{f(x,\theta)}\right]^2 \cdot f(x,\theta)\,dx,$$

где $f(x,\theta)$ — плотность распределения н. с. в. X.

Эффективность оценки определяется отношением

$$\operatorname{eff}\widetilde{\theta}_n = \frac{D\widetilde{\theta}_n^{\text{э}}}{D\widetilde{\theta}_n},$$

где $\widetilde{\theta}_n^{\text{э}}$ — эффективная оценка $\left(D\widetilde{\theta}_n^{\text{э}} = \dfrac{1}{n \cdot I}\right)$. Чем ближе $\operatorname{eff} \widetilde{\theta}_n$ к 1, тем эффективнее оценка $\widetilde{\theta}_n$. Если $\operatorname{eff} \widetilde{\theta}_n \to 1$ при $n \to \infty$, то оценка называется *асимптотически эффективной*.

Отметим, что на практике не всегда удается удовлетворить всем перечисленным выше требованиям (несмещенность, состоятельность, эффективность), и поэтому приходится довольствоваться оценками, не обладающими сразу всеми тремя свойствами. Все же три свойства, как правило, выделяют оценку однозначно.

Точечные оценки математического ожидания и дисперсии

Пусть изучается с. в. X с математическим ожиданием $a = MX$ и дисперсией DX; оба параметра неизвестны.

Статистика, используемая в качестве приближенного значения неизвестного параметра генеральной совокупности, называется ее *точечной оценкой*. То есть точечная оценка характеристики генеральной совокупности — это число, определяемое по выборке.

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — выборка, полученная в результате проведения n независимых наблюдений за с. в. X. Чтобы подчеркнуть случайный характер величин $x_1, x_2, \ldots, x_n$, перепишем их в виде $X_1, X_2, \ldots$ $\ldots, X_n$, т. е. под X_i будем понимать значение с. в. X в i-м опыте. Случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_n$ можно рассматривать как n независимых «экземпляров» величины X. Поэтому $MX_1 = MX_2 = \ldots$ $\ldots = MX_n = MX = a$, $DX_1 = DX_2 = \ldots = DX_n = DX$.

Теорема 8.2. Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — выборка из генеральной совокупности и $MX_i = MX = a$, $DX_i = DX$ $(i = \overline{1, n})$. Тогда выборочное среднее $\overline{X}_{\text{в}} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ — несмещенная и состоятельная оценка математического ожидания MX.

❑ Найдем м. о. оценки $\overline{X}_{\text{в}}$:

$$M\overline{X}_{\text{в}} = M\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}M\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} MX_i = \frac{1}{n} \cdot n \cdot a = a.$$

Отсюда по определению получаем, что $\overline{X}_{\text{в}}$ — несмещенная оценка MX. Далее, согласно теореме Чебышева (п. 5.2), для любого $\varepsilon > 0$ имеет место равенство

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} MX_i\right| < \varepsilon\right\} = 1,$$

которое, согласно условию теоремы, можно переписать так:

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{|\overline{X}_{\text{в}} - MX| < \varepsilon\right\} = 1$$

или, что то же самое, $\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{|\overline{\theta} - \theta| < \varepsilon\right\} = 1$. Согласно определению, получаем, что $\overline{X}_{\text{в}}$ — состоятельная оценка MX. ■

Можно показать, что при нормальном распределении с. в. X эта оценка, т. е. $\overline{X}_{\text{в}}$, будет и эффективной. На практике во всех случаях в качестве оценки математического ожидания используется среднее арифметическое, т. е. $\overline{X}_{\text{в}}$.

В статистике оценку математического ожидания принято обозначать через $\overline{X}$ или $\overline{X}_{\text{в}}$, а не $\widetilde{X}$.

Покажем, что

$$MD_{\text{в}} = \frac{n-1}{n} DX. \tag{8.2}$$

Действительно,

$$MD_{\text{в}} = M\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2\right) = M\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2\right) =$$

$$= \frac{1}{n} M\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right) - \frac{1}{n^2} M\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2 = \frac{1}{n}\cdot M(X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2) -$$

$$- \frac{1}{n^2}\cdot M(X_1 + X_2 + \ldots + X_n)^2 = \frac{1}{n}(MX_1^2 + MX_2^2 + \ldots + MX_n^2) -$$

$$-\frac{1}{n^2}\cdot M\Bigl(X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2 + 2\underbrace{(X_1X_2 + X_1X_3 + X_2X_3 + \ldots + X_{n-1}X_n)}_{C_n^2}\Bigr) =$$

$$= \frac{n-1}{n^2}\cdot(MX_1^2 + MX_2^2 + \ldots + MX_n^2) -$$

$$- \frac{2}{n^2}\cdot(MX_1\cdot MX_2 + MX_1MX_3 + MX_2MX_3 + \ldots + MX_{n-1}MX_n) =$$

$$= \frac{n-1}{n^2}\cdot\underbrace{(MX^2 + MX^2 + \ldots + MX^2)}_{n} -$$

$$- \frac{2}{n^2}(MX\cdot MX + MX\cdot MX + \ldots + MX\cdot MX) =$$

$$= \frac{n-1}{n^2}\cdot n\cdot MX^2 - \frac{2}{n^2}\cdot\frac{n(n-1)}{2}\cdot(MX)^2 = \frac{n-1}{n}\cdot MX^2 - \frac{n-1}{n}(MX)^2 =$$

$$= \frac{n-1}{n}(MX^2 - (MX)^2) = \frac{n-1}{n} \cdot DX.$$

Из равенства (8.2) следует, что $MD_{\text{в}} \neq DX$, т.е. *выборочная дисперсия является смещенной оценкой дисперсии* DX. Поэтому выборочную дисперсию исправляют, умножив ее на $\frac{n}{n-1}$, получая формулу $S^2 = \frac{n}{n-1} D_{\text{в}}$ (см. (7.11)).

Теорема 8.3. Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — выборка из генеральной совокупности и $MX_i = MX = a$, $DX_i = DX$ $(i = \overline{1,n})$. Тогда исправленная выборочная дисперсия $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 = \frac{n}{n-1} \cdot D_{\text{в}}$ — несмещенная состоятельная оценка дисперсии DX.

❑ Примем без доказательства состоятельность оценки S^2. Докажем ее несмещенность.

Имеем

$$MS^2 = M\left(\frac{n}{n-1} D_{\text{в}}\right) = \frac{n}{n-1} \cdot MD_{\text{в}} = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n} DX = DX,$$

т.е. $MS^2 = DX$. Отсюда по определению получаем, что S^2 — несмещенная оценка DX. ■

Отметим, что при больших значениях n разница между $D_{\text{в}}$ и S^2 очень мала и они практически равны, поэтому оценку S^2 используют для оценки дисперсии при малых выборках, обычно при $n \leqslant 30$.

Имеют место следующие теоремы.

Теорема 8.4. Относительная частота $\frac{n_A}{n}$ появления события A в n независимых испытаниях является несмещенной состоятельной и эффективной оценкой неизвестной вероятности $p = P(A)$ этого события (p — вероятность наступления события A в каждом испытании).

Отметим, что состоятельность оценки $\widetilde{\theta} = \frac{n_A}{n}$ непосредственно вытекает из теоремы Бернулли (см. п. 5.3).

Теорема 8.5. Эмпирическая функция распределения выборки $F^*(x)$ является несмещенной состоятельной оценкой функции распределения $F(x)$ случайной величины X.

Пример 8.1. Монету подбрасывают n раз. Вероятность выпадения герба при каждом подбрасывания равна p. В ходе опыта монета выпала гербом n_A раз. Показать несмещенность оценки $\widetilde{\theta} = \frac{n_A}{n}$ вероятности $\theta = p$ выпадения герба в каждом опыте.

Число успехов (n_A) имеет распределение Бернулли. Тогда $M(n_A) = np$, $D(n_A) = npq = np(1-p)$. Следовательно, $M\widetilde{\theta} = M\left(\frac{n_A}{n}\right) = \frac{1}{n} \cdot M(n_A) = \frac{1}{n} \cdot n \cdot p = p = \theta$, т. е. оценка $\widetilde{\theta} = \frac{n_A}{n}$ — несмещенная. ●

8.2. Методы нахождения точечных оценок

Рассмотрим наиболее распространенные методы получения точечных оценок параметров распределения: метод моментов и метод максимального правдоподобия (кратко: ММП) и метод наименьших квадратов (кратко МНК).

Метод моментов

Метод моментов для нахождения точечных оценок неизвестных параметров заданного распределения состоит *в приравнивании теоретических моментов распределения соответствующим эмпирическим моментам*, найденных по выборке.

Так, если распределение зависит от одного параметра θ (*например*, задан вид плотности распределения $f(x,\theta)$), то для нахождения его оценки надо решить относительно θ одно уравнение:

$$MX = \overline{X}_{\text{в}}$$

$(MX = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x,\theta)\,dx = \varphi(\theta)$ есть функция от $\theta)$.

Если распределение зависит от двух параметров (например, вид плотности распределения $f(x,\theta_1,\theta_2)$) — надо решить относительно θ_1 и θ_2 систему уравнений:

$$\begin{cases} MX = \overline{X}_{\text{в}}, \\ DX = D_{\text{в}}. \end{cases}$$

И, наконец, если надо оценить n параметров $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ — надо решить одну из систем вида:

$$\begin{cases} MX = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i, \\ MX^2 = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2, \\ \ldots \\ MX^k = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^k; \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} MX = \overline{X}, \\ DX = D_в, \\ \ldots \\ M(X - MX)^k = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_в)^k. \end{cases}$$

Метод моментов является наиболее простым методом оценки параметров. Он был предложен в 1894 г. Пирсоном. Оценки метода моментов обычно состоятельны, однако их эффективность часто значительно меньше единицы.

Пример 8.2. Найти оценки параметров нормального распределения с. в. X методом моментов.

❍ Требуется по выборке $x_1, x_2, \ldots, x_n$ найти точечные оценки неизвестных параметров $a = MX = \theta_1$ и $\sigma = \sqrt{DX} = \theta_2$.

По методу моментов приравниваем их, соответственно, к выборочному среднему и выборочной дисперсии ($\alpha_1 = MX$ — начальный момент I порядка, $\mu_2 = DX$ — центральный момент II порядка). Получаем

$$\begin{cases} MX = \overline{x}_в, \\ DX = D_в, \end{cases}$$

т. е.

$$\begin{cases} a = \overline{x}_в, \\ \sigma^2 = D_в. \end{cases}$$

Итак, искомые оценки параметров нормального распределения: $\widetilde{\theta}_1 = \overline{x}_в$ и $\widetilde{\theta}_2 = \sqrt{D_в}$. ●

Метод максимального правдоподобия

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — выборка, полученная в результате проведения n независимых наблюдений за с. в. X. И пусть вид закона распределения величины X, например, вид плотности $f(x, \theta)$, известен, но неизвестен параметр θ, которым определяется этот закон. Требуется по выборке оценить параметр θ.

В основе метода максимального правдоподобия (ММП), предложенного Р. Фишером, лежит понятие функции правдоподобия.

Функцией правдоподобия, построенной по выборке $x_1, x_2, \ldots, x_n$, называется функция аргумента θ вида

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta) = f(x_1, \theta) \cdot f(x_2, \theta) \cdot \ldots \cdot f(x_n, \theta)$$

или

$$L(x, \theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \theta),$$

где $f(x, \theta)$ — плотность распределения с. в. X в случае, если X — непрерывная. Если X — дискретная с. в., то функция правдоподобия имеет вид

$$L(x, \theta) = p(x_1, \theta) \cdot p(x_2, \theta) \cdot \ldots \cdot p(x_n, \theta) = \prod_{i=1}^{n} p(x_i, \theta),$$

где $p(x_i, \theta) = P\{X = x_i, \theta\}$.

Из определения следует, что чем больше значение функции $L(x, \theta)$, тем более вероятно (правдоподобнее) появление (при фиксированном θ) в результате наблюдений чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

За точечную оценку параметра θ, согласно ММП, берут такое его значение $\widetilde{\theta}$, при котором функция правдоподобия достигает максимума.

Эта оценка, называемая *оценкой максимального правдоподобия*, является решением уравнения

$$\left.\frac{dL(x, \theta)}{d\theta}\right|_{\theta = \widetilde{\theta}} = 0.$$

Так как функции $L(x, \theta)$ и $\ln L(x, \theta)$ достигают максимума при одном и том же значении θ, то вместо отыскания максимума функции $L(x, \theta)$ ищут (что проще) максимум функции $\ln L(x, \theta)$.

Таким образом, для нахождения оценки максимального правдоподобия надо:

1. решить уравнение правдоподобия

$$\left.\frac{d(\ln L(x, \theta))}{d\theta}\right|_{\theta = \widetilde{\theta}} = 0;$$

2. отобрать то решение, которое обращает функцию $\ln L(x,\theta)$ в максимум (удобно использовать вторую производную: если

$$\left.\frac{d^2 \ln L(x,\theta)}{d\theta^2}\right|_{\theta=\widetilde{\theta}} < 0,$$

то $\theta = \widetilde{\theta}$ — точка максимума).

Если оценке подлежат несколько параметров $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ распределения, то оценки $\widetilde{\theta}_1, \ldots, \widetilde{\theta}_n$ определяются решением системы уравнений правдоподобия:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial(\ln L)}{\partial\theta_1} = 0, \\ \ldots, \\ \dfrac{\partial(\ln L)}{\partial\theta_n} = 0. \end{cases}$$

Пример 8.3. Найти оценку параметра a распределения Пуассона методом максимального правдоподобия.

○ В данном случае $P\{X=m\} = \dfrac{a^m \cdot e^{-a}}{m!}$. Поэтому

$$p(x_i,\theta) = P\{X = x_i, \theta\} = \frac{\theta^{x_i}\cdot e^{\ \ \theta}}{x_i!}$$

при $x_i \in \mathbb{N}$. Составляем функцию правдоподобия (для дискретной с. в. X):

$$L(x,\theta) = \frac{\theta^{x_1}\cdot e^{-\theta}}{x_1!}\cdot\frac{\theta^{x_2}\cdot e^{-\theta}}{x_2!}\cdot\ldots\cdot\frac{\theta^{x_n}\cdot e^{-\theta}}{x_n!} = e^{-\theta n}\cdot\theta^{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}\cdot\frac{1}{x_1!\cdot\ldots\cdot x_n!}.$$

Тогда

$$\ln L(x,\theta) = -n\cdot\theta + \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \ln\theta - \ln(x_1!\cdot x_2!\cdot\ldots\cdot x_n!)$$

и

$$\frac{d\ln L(x,\theta)}{d\theta} = -n + \frac{1}{\theta}\cdot\sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Уравнение правдоподобия имеет вид:

$$\left.\left(-n + \frac{1}{\theta}\cdot\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\right|_{\theta=\widetilde{\theta}} = 0.$$

Отсюда находим

$$\widetilde{\theta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \overline{x}_{\text{в}}.$$

А так как

$$\left.\frac{d^2 \ln L(x,\theta)}{d\theta^2}\right|_{\theta=\widetilde{\theta}} = -\frac{1}{\widetilde{\theta}^2}\sum_{i=1}^{n} x_i < 0,$$

то оценка $\widetilde{\theta} = \overline{x}_{\text{в}}$ является оценкой максимального правдоподобия. Итак, $\widetilde{\theta} = \widetilde{a} = \overline{x}_{\text{в}}$. ●

Метод наименьших квадратов

Метод нахождения оценки $\widetilde{\theta}$ неизвестного параметра θ, основанный на *минимизации суммы квадратов отклонений выборочных данных* от определяемой (искомой) оценки θ, называется *методом наименьших квадратов* (коротко: МНК).

Другими словами, в МНК требуется найти такое значение $\widetilde{\theta}$, которое минимизировало бы сумму

$$F(\theta) = \sum_{i=1}^{n}(X_i - \theta)^2 \to \min.$$

Отметим, что МНК является наиболее простым методом нахождения оценок параметра θ.

Пример 8.4. Найти оценку параметра a распределения Пуассона методом наименьших квадратов.

○ Найдем точку минимума функции $F(\theta) = \sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \theta)^2$:

$$F'(\theta) = \left(F = \sum_{i=1}^{n}(X_i - \theta)^2\right)'_{\theta} = \sum_{i=1}^{n} 2(X_i - \theta)\cdot(-1);$$

из уравнения $F'(\theta) = 0$ находим критическую точку: $-2\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \theta) = 0$, т. е. $\sum\limits_{i=1}^{n} X_i - \sum\limits_{i=1}^{n}\theta = 0$, т. е. $\sum\limits_{i=1}^{n} X_i = n\theta$, $\theta_{\text{кр}} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$. А так как

$$F''(\theta_{\text{кр}}) = \left(-2\sum_{i=1}^{n}(X_i - \theta)\right)'_{\theta} = -2\sum_{i=1}^{n}(-1) = 2n > 0$$

при любом значении θ, то $\theta_{\text{кр}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ — точка минимума функции $F(\theta)$. Таким образом, оценкой параметра a в распределении Пуассона $P(m; a) = \frac{a^m \cdot e^{-a}}{m!}$, $m = 0, 1, 2, \ldots$ согласно МНК, является $\widetilde{\theta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.

Можно доказать, что:

$$M(\widetilde{\theta}) = \theta = a, \quad D(\widetilde{\theta}) = \frac{\theta}{n}. \qquad \bullet$$

Упражнения

1. Найти оценку параметра распределения Пуассона методом моментов.

2. Пользуясь ММП, оценить вероятность появления герба, если при 10 бросаниях монеты герб появился 6 раз.

3. Найти оценку неизвестной вероятности успеха в схеме Бернулли методом моментов и ММП.

4. Дано: с. в. $X \sim R[a, b]$. По выборке $x_1, x_2, \ldots, x_n$ оценить величины a и b методом моментов.

5. Найти оценки параметров нормального распределения с. в. X методом максимального правдоподобия.

8.3. Понятие интервального оценивания параметров

Точечные оценки неизвестного параметра θ хороши в качестве первоначальных результатов обработки наблюдений. Их недостаток в том, что неизвестно, с какой точностью они дают оцениваемый параметр.

Для выборок небольшого объема вопрос о точности оценок очень существенен, так как между θ и $\widetilde{\theta}$ может быть большое расхождение в этом случае. Кроме того, при решении практических задач часто требуется определить и надежность этих оценок. Тогда и возникает задача о приближении параметра θ не одним числом, а целым интервалом $(\widetilde{\theta}_1, \widetilde{\theta}_2)$.

Оценка неизвестного параметра называется *интервальной*, если она определяется двумя числами — концами интервала.

Задачу интервального оценивания можно сформулировать так: по данным выборки построить числовой интервал $(\widetilde{\theta}_1, \widetilde{\theta}_2)$, относительно которого с заранее выбранной вероятностью γ можно сказать, что внутри этого интервала находится точное значение оцениваемого параметра (см. рис. 75).

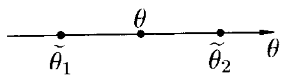


Рис. 75

Интервал $(\widetilde{\theta}_1, \widetilde{\theta}_2)$, накрывающий с вероятностью γ истинное значение параметра θ, называется *доверительным интервалом*, а вероятность γ — *надежностью оценки* или *доверительной вероятностью.*

Очень часто (но не всегда) доверительный интервал выбирается симметричным относительно несмещенной точечной оценки $\widetilde{\theta}$, т. е. выбирается интервал вида $(\widetilde{\theta} - \varepsilon, \widetilde{\theta} + \varepsilon)$ такой, что

$$P\left\{\theta \in (\widetilde{\theta} - \varepsilon, \widetilde{\theta} + \varepsilon)\right\} = P\left\{|\theta - \widetilde{\theta}| < \varepsilon\right\} = \gamma.$$

Число $\varepsilon > 0$ характеризует точность оценки: чем меньше разность $|\theta - \widetilde{\theta}|$, тем точнее оценка.

Величина γ выбирается заранее, ее выбор зависит от конкретно решаемой задачи. Так, степень доверия авиапассажира к надежности самолета, очевидно, должна быть выше степени доверия покупателя к надежности телевизора, лампочки, игрушки... Надежность γ принято выбирать равной 0,9; 0,95; 0,99 или 0,999. Тогда практически достоверно нахождение параметра θ в доверительном интервале $(\widetilde{\theta} - \varepsilon, \widetilde{\theta} + \varepsilon)$.

8.4. Доверительные интервалы для параметров нормального распределения

Построим доверительные интервалы для параметров нормального распределения, т. е. когда выборка производится из генеральной совокупности, имеющей нормальное распределение с параметрами a и σ.

Доверительный интервал для математического ожидания при известной дисперсии

Пусть с. в. $X \sim N(a, \sigma)$; σ — известна, доверительная вероятность (надежность) γ — задана.

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — выборка, полученная в результате проведения n независимых наблюдений за с. в. X. Чтобы подчеркнуть случайный характер величин $x_1, x_2, \ldots, x_n$, перепишем их в виде $X_1, X_2, \ldots$ $\ldots, X_n$, т. е. под X_i будем понимать значение с. в. X в i-м опыте. Случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — независимы. закон распределения любой из них совпадает с законом распределения с. в. X (т. е. $X_i \sim N(a, \sigma)$). А это значит, что $MX_1 = MX_2 = \ldots = MX_n = MX = a$, $DX_1 = DX_2 = \ldots = DX_n = DX$.

Выборочное среднее

$$\overline{X}_{\text{в}} = \overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

также будет распределено по нормальному закону (примем без доказательства). Параметры распределения $\overline{X}$ таковы: $M(\overline{X}) = a$, $D(\overline{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$. Действительно.

$$M(\overline{X}) = M\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} MX_i = \frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} MX = \frac{1}{n}\cdot n\cdot MX = a,$$

$$D(\overline{X}) = D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} DX_i = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} DX = \frac{1}{n^2}\cdot n\cdot DX = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Таким образом, $\overline{X} \sim N\left(a, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

Следовательно, пользуясь формулой

$$p\left\{|X - a| < l\right\} = 2\Phi_0\left(\frac{l}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{l}{\sigma}\right) - 1$$

(формула (2.47)), можно записать

$$\gamma = P\{|\overline{X} - a| < \varepsilon\} = 2\Phi_0\left(\frac{\varepsilon \cdot \sqrt{n}}{\sigma}\right) = 2\Phi_0(t),$$

где $t = \frac{\varepsilon \cdot \sqrt{n}}{\sigma}$. Из последнего равенства находим

$$\varepsilon = \frac{t \cdot \sigma}{\sqrt{n}}, \tag{8.3}$$

поэтому $\gamma = P\left\{|\overline{X} - a| < \frac{t \cdot \sigma}{\sqrt{n}}\right\} = 2\Phi_0(t)$ или

$$P\left\{\overline{X} - t \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \overline{X} + t \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right\} = 2\Phi_0(t) = \gamma. \tag{8.4}$$

В соответствии с определением доверительного интервала получаем, что доверительный интервал для $a = MX$ есть

$$\left(\overline{X} - t \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + t \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right), \tag{8.5}$$

где t определяется из равенства (8.4), т. е. из уравнения

$$\Phi_0(t) = \frac{\gamma}{2} \tag{8.6}$$

(или $\Phi(t) = \frac{1+\gamma}{2}$); при заданном γ по таблице функции Лапласа находим аргумент t.

Заметим, что из равенства (8.3) следует: с возрастанием объема выборки n число ε убывает и, значит, точность оценки увеличивается; увеличение надежности γ влечет уменьшение точности оценки.

Пример 8.5. Произведено 5 независимых наблюдений над с. в. $X \sim N(a, 20)$. Результаты наблюдений таковы: $x_1 = -25$, $x_2 = 34$, $x_3 = -20$, $x_4 = 10$, $x_5 = 21$. Найти оценку для $a = MX$, а также построить для него 95%-й доверительный интервал.

○ Находим сначала $\overline{x}_в$: $\overline{x} = \frac{1}{5} \cdot (-25 + 34 - 20 + 10 + 21) = 4$, т. е. $\overline{x} = 4$. Учитывая, что $\gamma = 0{,}95$ и $\Phi_0(t) = \frac{\gamma}{2}$, получаем $\Phi_0(t) = 0{,}475$. По таблице (см. Приложение) выясняем, что $t = t_\gamma = 1.96$. Тогда $\varepsilon = \frac{1{,}96 \cdot 20}{\sqrt{5}} \approx 17{,}5$ (формула (8.3)). Доверительный интервал для $a = MX$ (согласно (8.5)) таков: $(4 - 17{,}5; 4 + 17{,}5)$, т. е. $(-13{,}5; 21{,}5)$. ●

Доверительный интервал для математического ожидания при неизвестной дисперсии

Пусть с. в. $X \sim N(a, \sigma)$, σ — неизвестна, γ — задана. Найдем такое число ε, чтобы выполнялось соотношение $P\{\overline{X} - \varepsilon < a < \overline{X} + \varepsilon\} = \gamma$ или

$$P\{|\overline{X} - a| < \varepsilon\} = \gamma. \tag{8.7}$$

Введем случайную величину

$$T = \frac{\overline{X} - a}{\frac{S}{\sqrt{n}}},$$

где S — исправленное среднее квадратическое отклонение с. в. X, вычисленное по выборке:

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2}.$$

Доказывается, что с. в. T имеет распределение Стьюдента (см. п. 4.3) с $n-1$ степенью свободы. Плотность этого распределения имеет вид:

$$f_T(t, n-1) = \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\sqrt{\pi(n-1)} \cdot \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \cdot \left(1 + \frac{t^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}},$$

где $\Gamma(p) = \int\limits_0^{\infty} u^{p-1} \cdot e^{-u} du$ — гамма-функция; $f_T(t, n-1)$ — четная функция.

Перейдем в левой части равенства (8.7) от с. в. $\overline{X}$ к с. в. T:

$$P\left\{\frac{|\overline{X} - a|}{\frac{S}{\sqrt{n}}} < \frac{\varepsilon}{\frac{S}{\sqrt{n}}}\right\} = \gamma$$

или $P\left\{|T| < \frac{\varepsilon\sqrt{n}}{S}\right\} = \gamma$ или $P\{|T| < t_\gamma\} = \gamma$, где

$$t_\gamma = \frac{\varepsilon \cdot \sqrt{n}}{S}. \tag{8.8}$$

Величина t_γ находится из условия

$$P\{|T| < t_\gamma\} = \int\limits_{-t_\gamma}^{t_\gamma} f_T(t, n-1)\,dt = 2\cdot\int\limits_0^{t_\gamma} f_T(t, n-1)\,dt = \gamma,$$

т. е. из равенства

$$2\cdot\int\limits_0^{t_\gamma} f_T(t, n-1)\,dt = \gamma.$$

Пользуясь таблицей квантилей распределения Стьюдента (см. приложение 4 на с. 287), находим значение t_γ в зависимости от доверительной вероятности γ и числа степеней свободы $n-1$ (t_γ — квантиль уровня $1-\gamma$).

Определив значение t_γ, из равенства (8.8), находим значение ε:

$$\varepsilon = t_\gamma\cdot\frac{S}{\sqrt{n}}. \tag{8.9}$$

Следовательно, равенство (8.7) принимает вид

$$P\left\{\overline{X} - t_\gamma\cdot\frac{S}{\sqrt{n}} < a < \overline{X} + t_\gamma\cdot\frac{S}{\sqrt{n}}\right\} = \gamma.$$

А это значит, что интервал

$$\left(\overline{X} - t_\gamma\cdot\frac{S}{\sqrt{n}}, \overline{X} + t_\gamma\cdot\frac{S}{\sqrt{n}}\right)$$

покрывает $a = MX$ с вероятностью γ, т. е. является доверительным интервалом для неизвестного математического ожидания с. в. X.

Пример 8.6. По условию примера 8.5, считая, что с. в. $X \sim N(a, \sigma)$, построить для неизвестного $MX = a$ доверительный интервал. Считать $\gamma = 0{,}95$.

❍ Оценку $\overline{x}$ для MX уже знаем: $\overline{x} = 4$. Находим значение S: $S^2 = \frac{1}{4}\big((-25-4)^2\cdot 1 + (34-4)^2 + (-20-4)^2 + (10-4)^2 + (21-4)^2\big) = 660{,}5$; $S \approx 25{,}7$. По таблице для $\gamma = 0{,}95$ и $n-1 = 4$ находим $t_\gamma = 2{,}78$. Следовательно, $\varepsilon = 2{,}78\cdot\frac{25{,}7}{2{,}24} \approx 31{,}9$. Доверительный интервал таков: $(-27{,}9; 35{,}9)$. ●

Доверительный интервал для среднего квадратического отклонения нормального распределения

Пусть с. в. $X \sim N(a, \sigma)$, σ — неизвестно, γ — задано. Можно показать, что *если* $MX = a$ *известно*, то доверительный интервал для среднего квадратического отклонения σ имеет вид:

$$\left(\frac{\sqrt{n} \cdot S_0}{\chi_2}, \frac{\sqrt{n} \cdot S_0}{\chi_1}\right),$$

где n — объем выборки, $S_0^2 = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - a)^2$, а

$$\chi_1^2 = \chi^2_{\frac{1+\gamma}{2},n}; \quad \chi_2^2 = \chi^2_{\frac{1-\gamma}{2};n}$$

являются квантилями χ^2-распределения с n степенями свободы (см. п. 4.3), определяемые по таблице квантилей $\chi^2_{\alpha,n}$ распределения χ^2_n (см. приложение 3 на с. 286).

Если $a = MX$ *неизвестно*, то доверительный интервал для неизвестного σ имеет вид:

$$\left(\frac{\sqrt{n-1} \cdot S}{\chi_2}, \frac{\sqrt{n-1} \cdot S}{\chi_1}\right),$$

где n — объем выборки, $S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}$ — исправленное среднее квадратическое отклонение, квантили

$$\chi_1^2 = \chi^2_{\frac{1+\gamma}{2};n-1}, \quad \chi_2^2 = \chi^2_{\frac{1-\gamma}{2};n-1}$$

определяются по таблице $\chi^2_{\alpha,k}$ при $k = n - 1$ и $\alpha = \frac{1+\gamma}{2}$ и $\alpha = \frac{1-\gamma}{2}$ соответственно.

Пример 8.7. Для оценки параметра нормально распределенной случайной величины была сделана выборка объема в 30 единиц и вычислено $S = 1{,}5$. Найти доверительный интервал, покрывающий σ с вероятностью $\gamma = 0{,}90$.

Имеем $n = 30$, $\gamma = 0{,}9$. По таблице $\chi^2_{\alpha,k}$ находим

$$\chi_1^2 = \chi^2_{\frac{1+0{,}9}{2};30-1} = \chi^2(0{,}95; 29) = 17{,}7,$$

$$\chi_2^2 = \chi^2_{\frac{1-0,9}{2};30-1} = \chi^2(0{,}05; 29) = 42{,}6.$$

Доверительный интервал имеет вид:

$$\left(\frac{\sqrt{30-1} \cdot 1{,}5}{\sqrt{42{,}6}}, \frac{\sqrt{30-1} \cdot 1{,}5}{\sqrt{17{,}7}} \right)$$

или $1.238 < \sigma < 1{,}920$. ●

Скажем несколько слов о доверительном интервале для оценки вероятности успеха при большом числе испытаний Бернулли.

Доверительный интервал, который с надежностью γ покрывает оцениваемый параметр p при больших значениях n (порядка сотен), имеет вид (p_1, p_2), где

$$p_1 = p^* - t \cdot \sqrt{\frac{p^*(1-p^*)}{n}} \quad \text{и} \quad p_2 = p^* + t \cdot \sqrt{\frac{p^*(1-p^*)}{n}}, \tag{8.10}$$

где $p^* = \frac{n_A}{n}$ — относительная частота события A; t определяется из равенства $2\Phi_0(t) = \gamma$.

Для оценки приближенного равенства $p \approx p^*$ можно использовать равенство $P\{|p^* - p| < \varepsilon\} = 2\Phi_0\left(\frac{\varepsilon \cdot \sqrt{n}}{\sqrt{pq}}\right)$ (см. п. 1.21, замечание).

Упражнения

1. Глубина моря измеряется прибором, систематическая ошибка которого равна нулю, а случайные ошибки распределены нормально с $\sigma = 15$ м. Сколько надо сделать независимых измерений, чтобы определить глубину моря с ошибкой не более 5 м при надежности $\gamma = 0{,}9$?

2. По условию примера 7.3 найти точечную оценку и доверительный интервал для среднего роста студентов, считать $\gamma = 0{,}95$.

3. Производятся независимые испытания с одинаковой, но с неизвестной вероятностью p появления события A в каждом испытании. Найти доверительный интервал для оценки p с надежностью 0,95, если в 400 испытаниях события A появилось 80 раз.

8.5. Проверка статистических гипотез

Задачи статистической проверки гипотез

Одна из часто встречающихся на практике задач, связанных с применением статистических методов, состоит в решении вопроса о том, должно ли на основании данной выборки быть принято или, напротив, отвергнуто некоторое предположение (гипотеза) относительно генеральной совокупности (случайной величины).

Например, новое лекарство испытано на определенном числе людей. Можно ли сделать по данным результатам лечения обоснованный вывод о том, что новое лекарство более эффективно, чем применявшиеся ранее методы лечения? Аналогичный вопрос логично задать, говоря о новом правиле поступления в вуз, о новом методе обучения, о пользе быстрой ходьбы, о преимуществах новой модели автомобиля или технологического процесса и т. д.

Процедура сопоставления высказанного предположения (гипотезы) с выборочными данными называется *проверкой гипотез*.

Задачи статистической проверки гипотез ставятся в следующем виде: относительно некоторой генеральной совокупности высказывается та или иная гипотеза H. Из этой генеральной совокупности извлекается выборка. Требуется указать правило, при помощи которого можно было бы по выборке решить вопрос о том, следует ли отклонить гипотезу H или принять ее.

Следует отметить, что статистическими методами гипотезу *можно только опровергнуть или не опровергнуть*, но не доказать. *Например*, для проверки утверждения (гипотеза H) автора, что «в рукописи нет ошибок», рецензент прочел (изучил) несколько страниц рукописи.

Если он обнаружил хотя бы одну ошибку, то гипотеза H отвергается, в противном случае – не отвергается, говорят, что «результат проверки с гипотезой согласуется».

Выдвинутая гипотеза может быть правильной или неправильной, поэтому возникает необходимость ее проверки.

Статистическая гипотеза. Статистический критерий

Под *статистической гипотезой* (или просто *гипотезой*) понимают всякое высказывание (предположение) о генеральной совокупности, проверяемое по выборке.

Статистические гипотезы делятся на гипотезы о параметрах распределения известного вида (это так называемые *параметрические* гипотезы) и гипотезы о виде неизвестного распределения (*непараметрические* гипотезы).

Одну из гипотез выделяют в качестве *основной* (или *нулевой*) и обозначают H_0, а другую, являющуюся логическим отрицанием H_0, т. е. противоположную H_0 — в качестве *конкурирующей* (или *альтернативной*) гипотезы и обозначают H_1.

Гипотезу, однозначно фиксирующую распределение наблюдений, называют *простой* (в ней идет речь об одном значении параметра), в противном случае *сложной*.

Например, гипотеза H_0, состоящая в том что математическое ожидание с. в. X равно a_0, т. е. $MX = a_0$, является простой. В качестве альтернативной гипотезы можно рассматривать одну из следующих гипотез: H_1: $MX > a_0$ (сложная гипотеза), H_1: $MX < a_0$ (сложная), H_1: $MX \neq a_0$ (сложная) или H_1: $MX = a_1$ (простая гипотеза).

Имея две гипотезы H_0 и H_1, надо на основе выборки $X_1, \ldots, X_n$ принять либо основную гипотезу H_0, либо конкурирующую H_1.

Правило, по которому принимается решение принять или отклонить гипотезу H_0 (соответственно, отклонить или принять H_1), называется *статистическим критерием* (или просто *критерием*) проверки гипотезы H_0.

Проверку гипотез осуществляют на основании результатов выборки $X_1, X_2, \ldots, X_n$, из которых формируют функцию выборки $T_n = T(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, называемой *статистикой критерия*.

Основной принцип проверки гипотез состоит в следующем. Множество возможных значений статистики критерия T_n разбивается на два непересекающихся подмножества: *критическую область* S, т. е. область отклонения гипотезы H_0 и *область* $\overline{S}$ *принятия* этой гипотезы. Если фактически наблюдаемое значение статистики критерия (т. е. значение критерия, вычисленное по выборке: $T_{\text{набл}} = T(x_1, x_2, \ldots, x_n)$) попадает в критическую область S, то основная гипотеза H_0 отклоняется и принимается альтернативная гипотеза H_1; если же $T_{\text{набл}}$ попадает в $\overline{S}$, то принимается H_0, а H_1 отклоняется.

При проверке гипотезы может быть принято неправильное решение, т. е. могут быть допущены ошибки двух родов:

Ошибка первого рода состоит в том, что отвергается нулевая гипотеза H_0, когда на самом деле она верна.

Ошибка второго рода состоит в том, что отвергается альтернативная гипотеза H_1, когда она на самом деле верна.

Рассматриваемые случаи наглядно иллюстрирует следующая таблица.

Гипотеза H_0	Отвергается	Принимается
верна	ошибка 1-го рода	правильное решение
неверна	правильное решение	ошибка 2-го рода

Вероятность ошибки 1-го рода (обозначается через α) называется *уровнем значимости критерия.*

Очевидно, $\alpha = P(H_1|H_0)$. Чем меньше α, тем меньше вероятность отклонить верную гипотезу. Допустимую ошибку 1-го рода обычно задают заранее.

В одних случаях считается возможным пренебречь событиями, вероятность которых меньше 0,05 ($\alpha = 0{,}05$ означает, что в среднем в 5 случаях из 100 испытаний верная гипотеза будет отвергнута), в других случаях, когда речь идет, например, о разрушении сооружений, гибели судна и т. п., нельзя пренебречь обстоятельствами, которые могут появиться с вероятностью, равной 0,001.

Обычно для α используются стандартные значения: $\alpha = 0{,}05$; $\alpha = 0{,}01$; $0{,}005$; $0{,}001$.

Вероятность ошибки 2-го рода обозначается через β, т. е. $\beta = P(H_0|H_1)$.

Величину $1-\beta$, т. е. вероятность недопущения ошибки 2-го рода (отвергнуть неверную гипотезу H_0, принять верную H_1), называется *мощностью критерия.*

Очевидно, $1-\beta = P(H_1|H_1) = P\big((x_1, x_2, \ldots, x_n) \in S|H_1\big)$.

Чем больше мощность критерия, тем вероятность ошибки 2-го рода меньше, что, конечно, желательно (как и уменьшение α).

Последствия ошибок 1-го, 2-го рода могут быть совершенно различными: в одних случаях надо минимизировать α, в другом — β. Так, применительно к радиолокации говорят, что α — вероятность пропуска сигнала, β — вероятность ложной тревоги; применительно к производству, к торговле можно сказать, что α — риск поставщика (т. е. забраковка по выборке всей партии изделий, удовлетворяющих стандарту), β — риск потребителя (т. е. прием по выборке всей партии изделий, не удовлетворяющей стандарту); применительно к судебной системе, ошибка 1-го рода приводит к оправданию виновного, ошибка 2-го рода — осуждению невиновного.

Отметим, что *одновременное уменьшение ошибок 1-го и 2-го рода возможно лишь при увеличении объема выборок.* Поэтому обычно при заданном уровне значимости α отыскивается критерий с наибольшей мощностью.

Методика проверки гипотез сводится к следующему:

1. Располагая выборкой $X_1, X_2, \ldots, X_n$, формируют нулевую гипотезу H_0 и альтернативную H_1.

2. В каждом конкретном случае подбирают статистику критерия $T_n = T(X_1, X_2, \ldots X_n)$, обычно из перечисленных ниже: U — нормальное распределение, χ^2 — распределение хи-квадрат (Пирсона), t — распределение Стьюдента, F — распределение Фишера-Снедекора.

3. По статистике критерия T_n и уровню значимости α определяют критическую область S (и $\overline{S}$). Для ее отыскания достаточно найти критическую точку $t_{\text{кр}}$, т. е. границу (или квантиль), отделяющую область S от $\overline{S}$.

Границы областей определяются, соответственно, из соотношений: $P(T_n > t_{\text{кр}}) = \alpha$, для правосторонней критической области S (рис. 76); $P(T_n < t_{\text{кр}}) = \alpha$, для левосторонней критической области S (рис. 77); $P(T_n < t^{\text{л}}_{\text{кр}}) = P(T_n > t^{\text{п}}_{\text{кр}}) = \frac{\alpha}{2}$, для двусторонней критической области S (рис. 78).

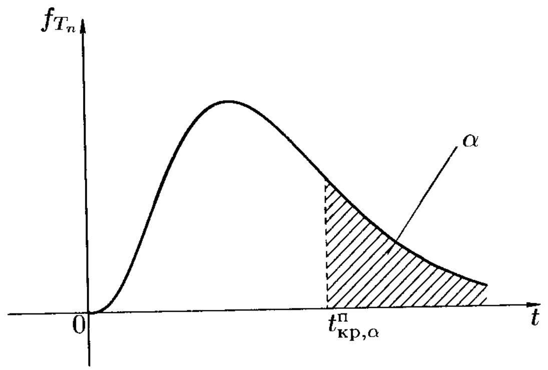


Рис. 76

Для каждого критерия имеются соответствующие таблицы, по которым и находят критическую точку, удовлетворяющую приведенным выше соотношениям.

4. Для полученной реализации выборки $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ подсчитывают значение критерия, т. е. $T_{\text{набл}} = T(x_1, x_2, \ldots, x_n) = t$.

5. Если $t \in S$ (например, $t > t_{\text{кр}}$ для правосторонней области S), то нулевую гипотезу H_0 отвергают; если же $t \in \overline{S}$ ($t < t_{\text{кр}}$), то нет оснований, чтобы отвергнуть гипотезу H_0.

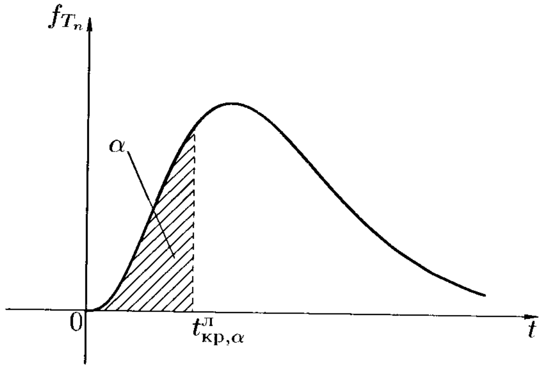


Рис. 77

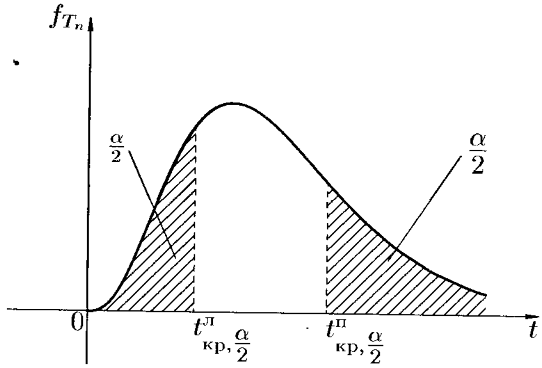


Рис. 78

8.6. Проверка гипотез о законе распределения

Во многих случаях закон распределения изучаемой случайно величины неизвестен, но есть основания предположить, что он имеет вполне определенный вид: нормальный, биномиальный или какой-либо другой.

Пусть необходимо проверить гипотезу H_0 о том, что с.в. X подчиняется определенному закону распределения, заданному функцией распределения $F_0(x)$, т.е. H_0: $F_X(x) = F_0(x)$. Под альтернативной гипотезой H_1 будем понимать в данном случае то, что просто не выполнена основная (т.е. H_1: $F_X(x) \neq F_0(x)$).

Для проверки гипотезы о распределении случайной величины X проведем выборку, которую оформим в виде статистического ряда:

x_i	x_1	x_2	$\ldots$	x_m
n_i	n_1	n_2	$\ldots$	n_m

(8.11)

где $\sum\limits_{i=1}^{m} n_i = n$ — объем выборки.

Требуется сделать заключение: согласуются ли результаты наблюдений с высказанным предположением. Для этого используем специально подобранную величину — критерий согласия.

Критерием согласия называют статистический критерий проверки гипотезы о предполагаемом законе неизвестного распределения. (Он используется для проверки согласия предполагаемого вида распределения с опытными данными на основании выборки.)

Существуют различные критерии согласия: Пирсона. Колмогорова, Фишера, Смирнова и др.

Критерий согласия Пирсона — наиболее часто употребляемый критерий для проверки простой гипотезы о законе распределения.

Критерий χ^2 Пирсона

Для проверки гипотезы H_0 поступают следующим образом.

Разбивают всю область значений с. в. X на m интервалов Δ_1, $\Delta_2, \ldots, \Delta_m$ и подсчитывают вероятности p_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ попадания с. в. X (т. е. наблюдения) в интервал Δ_i, используя формулу $P\{\alpha \leqslant X \leqslant \beta\} = F_0(\beta) - F_0(\alpha)$. Тогда теоретическое число значений с. в. X, попавших в интервал Δ_i, можно рассчитать по формуле $n \cdot p_i$. Таким образом, имеем статистический ряд распределения с. в. X (8.11) и теоретический ряд распределения:

Δ_1	Δ_2	$\ldots$	Δ_m
$n'_1 = np_1$	$n'_2 = np_2$	$\ldots$	$n'_m = np_m$

(8.12)

Если эмпирические частоты (n_i) сильно отличаются от теоретических $(np_i = n'_i)$, то проверяемую гипотезу H_0 следует отвергнуть; в противном случае — принять.

Каким критерием, характеризующим степень расхождения между эмпирическими и теоретическими частотами, следует воспользоваться? В качестве меры расхождения между n_i и np_i для $i = 1, 2, \ldots, m$

К. Пирсон (1857–1936; англ. математик, статик, биолог, философ) предложил величину («критерий Пирсона»):

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{m} \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i} = \sum_{i=1}^{m} \frac{n_i^2}{np_i} - n. \qquad (8.13)$$

Согласно теореме Пирсона, при $n \to \infty$ статистика (8.13) имеет χ^2-распределение с $k = m - r - 1$ степенями свободы, где m — число групп (интервалов) выборки, r — число параметров предполагаемого распределения. В частности, если предполагаемое распределение нормально, то оценивают два параметра (a и σ), поэтому число степеней свободы $k = m - 3$.

Правило применения критерия χ^2 сводится к следующему:

1. По формуле (8.13) вычисляют $\chi^2_{\text{набл}}$ — выборочное значение статистики критерия.
2. Выбрав уровень значимости α критерия, по таблице χ^2-распределения находим критическую точку (квантиль) $\chi^2_{\alpha,k}$.
3. Если $\chi^2_{\text{набл}} \leqslant \chi^2_{\alpha,k}$, то гипотеза H_0 не противоречит опытным данным; если $\chi^2_{\text{набл}} > \chi^2_{\alpha,k}$, то гипотеза H_0 отвергается.

Необходимым условием применения критерия Пирсона является наличие в каждом из интервалов не менее 5 наблюдений (т. е. $n_i \geqslant 5$). Если в отдельных интервалах их меньше, то число интервалов надо уменьшить путем объединения (укрупнения) соседних интервалов.

Пример 8.8. Измерены 100 обработанных деталей; отклонения от заданного размера приведены в таблице:

$[x_i, x_{i+1})$	$[-3,-2)$	$[-2,-1)$	$[-1,0)$	$[0,1)$	$[1,2)$	$[2,3)$	$[3,4)$	$[4,5)$
n_i	3	10	15	24	25	13	7	3

Проверить при уровне значимости $\alpha = 0{,}01$ гипотезу H_0 о том, что отклонения от проектного размера подчиняются нормальному закону распределения.

Число наблюдений в крайних интервалах меньше 5, поэтому объединим их с соседними. Получим следующий ряд распределения ($n = 100$):

$[x_i, x_{i+1})$	$[-3,-1)$	$[-1,0)$	$[0,1)$	$[1,2)$	$[2,3)$	$[3,5)$
n_i	13	15	24	25	13	10

Случайную величину — отклонение — обозначим через X. Для вычисления вероятностей p_i необходимо вычислить параметры, определяющие нормальный закон распределения (a и σ). Их оценки вычислим по выборке: $\bar{x} = \frac{1}{100} \cdot (-2 \cdot 13 + (-0{,}5) \cdot 15 + \ldots + 4 \cdot 10) = 0{,}885 \approx 0{,}9$, $D_в = \frac{1}{100}(4 \cdot 13 + 0{,}25 \cdot 15 + \ldots + 16 \cdot 10) - (0{,}885)^2 \approx 2{,}809$, $\sigma \approx 1{,}676 \approx 1{,}7$.

Находим p_i $(i = \overline{1,6})$. Так как с.в. $X \sim N(a, \sigma)$ определена на $(-\infty, \infty)$, то крайние интервалы в ряде распределения заменяем, соответственно, на $(-\infty, -1)$ и $(3, +\infty)$. Тогда $p_1 = P\{-\infty < X < -1\} = \Phi_0\left(\frac{-1-0{,}9}{1{,}7}\right) - \Phi_0(-\infty) = \frac{1}{2} - \Phi_0(1{,}12) = 0{,}1314$. Аналогично получаем: $p_2 = 0{,}1667$, $p_3 = 0{,}2258$, $p_4 = 0{,}2183$, $p_5 = 0{,}1503$, $p_6 = p\{3 \leqslant X < \infty\} = \Phi_0(\infty) - \Phi_0\left(\frac{3-0{,}9}{1{,}7}\right) = 0{,}5 - \Phi_0(1{,}24) = 0{,}1075$.

Полученные результаты приведем в следующей таблице:

$[x_i, x_{i+1})$	$(-\infty, -1)$	$[-1, 0)$	$[0, 1)$	$[1, 2)$	$[2, 3)$	$[3, \infty)$
n_i	13	15	24	25	13	10
$n' = np_i$	13,14	16.67	22,58	21,83	15,03	10,75

Вычисляем $\chi^2_{набл}$:

$$\chi^2_{набл} = \sum_{i=1}^{6} \frac{n_i^2}{np_i} - n =$$
$$= \left(\frac{13^2}{13{,}14} + \frac{15^2}{16{,}67} + \ldots + \frac{10^2}{10{,}75}\right) - 100 = 101{,}045 - 100,$$

т. е. $\chi^2_{набл} \approx 1{,}045$.

Находим число степеней свободы; по выборке рассчитаны два параметра, значит, $r = 2$. Количество интервалов 6, т. е. $m = 6$. Следовательно, $k = 6 - 2 - 1 = 3$. Зная, что $\alpha = 0{,}01$ и $k = 3$, по таблице χ^2-распределения находим $\chi^2_{\alpha,k} = 11.3$. Итак, $\chi^2_{набл} < \chi^2_{\alpha,k}$, следовательно, нет оснований отвергнуть проверяемую гипотезу. ●

Критерий Колмогорова

Критерий Колмогорова для простой гипотезы является наиболее простым критерием проверки гипотезы о виде закона распределения. Он связывает эмпирическую функцию распределения $F_n^*(x)$ с функцией распределения $F(x)$ непрерывной случайной величины X.

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — конкретная выборка из распределения с неизвестной непрерывной функцией распределения $F(x)$ и $F_n^*(x)$ — эмпирическая функция распределения. Выдвигается простая гипотеза H_0: $F(x) = F_0(x)$ (альтернативная H_1: $F(x) \neq F_0(x)$, $x \in \mathbb{R}$).

Сущность критерия Колмогорова состоит в том, что вводят в рассмотрение функцию

$$D_n = \max_{-\infty<x<\infty} |F_n^*(x) - F_0(x)|, \tag{8.14}$$

называемой *статистикой Колмогорова*, представляющей собой максимальное отклонение эмпирической функции распределения $F_n^*(x)$ от гипотетической (т. е. соответствующей теоретической) функции распределения $F_0(x)$.

Колмогоров доказал, что при $n \to \infty$ закон распределения случайной величины $\sqrt{n} \cdot D_n$ независимо от вида распределения с. в. X стремится к *закону распределения Колмогорова*:

$$P\{\sqrt{n} \cdot D_n < x\} \to K(x),$$

где $K(x)$ — функция распределения Колмогорова, для которой составлена таблица, ее можно использовать для расчетов уже при $n \geqslant 20$:

α	0,1	0,05	0,02	0,01	0,001
x_0	1,224	1.358	1,520	1,627	1,950

Найдем D_0 такое, что $P(D_n > D_0) = \alpha$.

Рассмотрим уравнение $K(x) = 1-\alpha$. С помощью функции Колмогорова найдем корень x_0 этого уравнения. Тогда по теореме Колмогорова, $P\{\sqrt{n} \cdot D_n < x_0\} = 1 - \alpha$, $P\{\sqrt{n} \cdot D_n > x_0\} = \alpha$, откуда $D_0 = \frac{x_0}{\sqrt{n}}$.

Если $D_n < D_0$, то гипотезу H_0 нет оснований отвергать; в противном случае — ее отвергают.

Пример 8.9. Монету бросали 4040 раз (Бюффон). Получили $n_1 = 2048$ выпадений герба и $n_2 = 1992$ выпадений решки. Проверить, используя а) критерий Колмогорова; б) критерий Пирсона, согласуются ли эти данные с гипотезой H_0 о симметричности монеты ($\alpha = 0.05$).

Случайная величина X принимает два значения: $x_1 = -1$ (решка) и $x_2 = 1$ (герб). Гипотеза H_0: $P\{X = -1\} = P\{X = 1\} = \frac{1}{2}$.

а) По таблице распределения Колмогорова находим корень уравнения $K(x) = 1-\alpha$ при $\alpha = 0{,}05$. Следует $x_0 = 1{,}358$. Тогда $D_0 = \frac{x_0}{\sqrt{n}} = \frac{1{,}358}{\sqrt{4040}} \approx 0{,}021$.

Для нахождения по выборке D_n строим функции $F_0(x)$ и $F_n^*(x)$ и вычисляем величину $D_n = \max\limits_x |F_n^*(x) - F_0(x)|$.

x_i	решка $x_1 = -1$	герб $x_2 = 1$
p_i	0,5	0,5

$$\longrightarrow F_0(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leqslant -1, \\ 0{,}5, & \text{при } -1 < x \leqslant 1, \\ 1, & \text{при } 1 < x. \end{cases}$$

x_i	решка $x_1 = -1$	герб $x_2 = 1$
n_i	1992	2048
p_i^*	$\sim 0{,}493$	$\sim 0{,}507$

$$\longrightarrow F_n^*(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leqslant -1, \\ 0{,}493, & \text{при } -1 < x \leqslant 1, \\ 1, & \text{при } 1 < x. \end{cases}$$

Максимальное отклонение $F_0(x)$ от $F_n^*(x)$ равно 0,007, т. е. $D_n = 0{,}007$. Поскольку $D_n < D_0$, то нет оснований отвергать гипотезу H_0; опытные данные согласуются с гипотезой H_0 о симметричности монеты.

б) Вычисляем статистику χ^2:

$$\chi^2_{\text{набл}} = \sum_{i=1}^{2} \frac{n_i^2}{np_i} - n = \frac{1992^2}{\frac{1}{2}\cdot 4040} + \frac{2048^2}{\frac{1}{2}\cdot 4040} - 4040 = 0{,}776.$$

По таблице χ^2-распределения находим критическую точку $\chi^2_{\alpha,k} = \chi^2_{0{,}05;1} = 3{,}8$. Так как $\chi^2_{\text{набл}} < \chi^2_{0{,}05;1}$, то опытные данные согласуются с гипотезой о симметричности монеты. ●

Упражнения

1. Распределение признака X (случайной величины X) в выборке задано следующей таблицей.

$x_{i-1} - x_i$	$0 - 0{,}1$	$0{,}1 - 0{,}2$	$0{,}2 - 0{,}3$	$0{,}3 - 0{,}4$	$0{,}4 - 0{,}5$
n_i	105	95	100	100	102
$x_{i-1} - x_i$	$0{,}5 - 0{,}6$	$0{,}6 - 0{,}7$	$0{,}7 - 0{,}8$	$0{,}8 - 0{,}9$	$0{,}9 - 1{,}0$
n_i	98	104	96	105	95

При уровне значимости $\alpha = 0{,}01$ проверить гипотезу H_0, состоящую в том, что с. в. X имеет равномерное распределение на отрезке [0,1] (вероятности p_i определяются формулами $p_i = h_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$, где h_i — длина i-го отрезка $[x_{i-i}; x_i]$ $\left(\sum\limits_{i=1}^{k} h_i = 1\right)$).

2. Результаты наблюдений над с. в. X (рост мужчины) представлены в виде статистического ряда:

X(рост)	[150 – 155)	[155 – 160)	[160 – 165)	[165 – 170)
n_i(частота)	6	22	36	46
X(рост)	[170 – 175)	[175 – 180)	[180 – 185)	[185 – 190)
n_i(частота)	56	24	8	2

Проверить при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ гипотезу H_0 о том, что с. в. X подчиняется нормальному закону распределения, используя критерий согласия Пирсона.

3. По данным упражнения 2 проверить гипотезу о нормальном распределении с. в. X, используя критерий Колмогорова.

Ответы к упражнениям

Раздел первый

Глава 1

1.3

1. 1) $B = B \cdot \Omega = B(A + \overline{A}) = A \cdot B + \overline{A} \cdot B$; 2) $(A + C) \cdot (B + C) = AB + AC + BC + C = AB + AC + C = A \cdot B + C$; 3) Пусть $w \in \overline{A + B} \Rightarrow w \notin A + B \Rightarrow w \notin A, w \notin B \Rightarrow w \in \overline{A}, w \in \overline{B} \Rightarrow w \in \overline{A} \cdot \overline{B}$, т. е. $\overline{A + B} \subseteq \overline{A} \cdot \overline{B}$. Аналогично убеждаемся, что $\overline{A} \cdot \overline{B} \subseteq \overline{A + B} \Rightarrow \overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$.

2. а) ABC; б) $\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C$; в) $A + B + C$; г) $\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}$; д) $AB\overline{C}$; е) $A\overline{B} \cdot \overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A} \cdot \overline{B}C$; ж) $\overline{ABC} = \overline{A} + \overline{B} + \overline{C}$.

3. $A_1 A_2 (A_3 + A_4 + A_5) A_6$.

1.7

1. Из 90 двузначных чисел 9 имеют одинаковые цифры, т. е. $n = 90$, $m = 90 - 9 = 81$. Следовательно, $p = \dfrac{81}{90} = 0.9$.

2. $p = 0{,}01$, так как $m = 1$, $n = 10 \cdot 10 = 100$.

1.8

1. $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$; $5 \cdot 4 \cdot 3 + 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 + 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 300$.

2. $12 + 15 + 7 = 34$.

3. $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$.

4. $(10 \cdot 9 \cdot 8)^2 = 720^2 = 518400$ или $A_{10}^3 \cdot A_{10}^3$.

5. $9^4 = 6561$.

6. $A_{12}^4 = 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 = 11880$.

7. $A_{10}^3 = 720$.

8. $A_4^1 \cdot A_5^1 \cdot A_6^1 = 120$.

9. $P_5 \cdot P_3 = 720$; $P_7 - 720 = 4320$.

10. $P_4 = 4! = 24$ (один сел где угодно).

11. $3 \cdot 2 \cdot 8! = 241920$ (см. рис. 79).

Рис. 79

12. $112 = 7 \cdot 16$; $2520 = C_7^2 \cdot C_{16}^2$.

13. а) $C_8^5 = 56$; б) $C_{12}^3 \cdot C_8^2 = 6160$.

14. $C_{15}^8 \cdot C_7^5 \cdot C_2^2$ или $\dfrac{15!}{8!5!2!} = 135135$.

15. $\bar{A}_2^7 = 2^7 = 128$ или $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$.

16. $6^3 = 216$. Это 234, 666, 165, ...

17. $\bar{A}_4^6 = 4^6 = 4096$.

18. $\bar{C}_4^6 = C_9^6 = C_9^3 = \dfrac{9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 21 \cdot 4 = 84$.

19. $\bar{C}_3^8 = C_{10}^8 = C_{10}^2 = 45$.

20. $\bar{C}_3^4 = C_6^4 = C_6^2 = 15$, $15 \cdot P_4 = 360$.

21. а) $4! = 24$; б) $\dfrac{8!}{2! \cdot 3! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1!} = 3360$.

22. $\dfrac{9!}{2! \cdot 3! \cdot 4!} = 1260$.

23. $\dfrac{16!}{9! \cdot 4! \cdot 3!} = 400400 = C_{16}^9 \cdot C_7^4 \cdot C_3^3$.

1.9

1. $n = \bar{A}_8^4 = 8^4 = 4096$ а) $m = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1680$, $p_1 = \dfrac{1680}{4096} \approx 0{,}41$; б) $m = 8$, $p_2 = \dfrac{8}{4096} \approx 0{,}00195$; в) $m = 1$, $p_3 = \dfrac{1}{4096} \approx 0{,}00024$.

2. $n = C_{36}^5$, $m = C_4^2 \cdot C_4^3$, $p = \dfrac{C_4^2 \cdot C_4^3}{C_{36}^5} \approx 0{,}000064$.

3. $n = 7!$, $m = 6! \cdot 2$, $p = \dfrac{6! \cdot 2}{7!} = \dfrac{2}{7} \approx 0{,}29$.

4. $n = 5! = 120$, $m = 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1$; $p = \dfrac{4}{120} = 0{,}033\ldots$.

5. а) $p = \dfrac{C_{50}^3}{C_{60}^3} \approx 0{,}573$; б) $p = \dfrac{C_{50}^2 \cdot C_{10}^1}{C_{60}^3} \approx 0{,}36$.

6. а) $p = \dfrac{2 \cdot 2}{7 \cdot 7} = \dfrac{4}{49} \approx 0{,}08$; б) $p = \dfrac{5 \cdot 4}{49} \approx 0{,}408$.

7. Группа из 5 команд может быть выбрана C_{10}^5 способами (вторая группа образуется автоматически), т. е. $n = C_{10}^5$. В первую группу попадет либо один лидер, либо два. Стало быть, $m = C_3^1 \cdot C_7^4 + C_3^2 \cdot C_7^3$. Поэтому $p = \dfrac{C_3^1 \cdot C_7^4 + C_3^2 \cdot C_7^3}{C_{10}^5} \approx 0{,}833$.

8. $P = \dfrac{C_4^1 \cdot C_{32}^1}{C_{36}^2} + \dfrac{C_4^2 \cdot C_{32}^0}{C_{36}^2} \approx 0{,}21$. Воспользовались свойством: $P(A+B) = P(A) + P(B)$, $AB = \varnothing$. Здесь $A = \{\text{одна дама}\}$, $B = \{\text{две дамы}\}$.

1.10

1. Сторона треугольника равна $R\sqrt{3}$. Значит, $p = \dfrac{S_\triangle}{S_\circ} = \dfrac{3R^2\sqrt{3}}{4\pi R^2} = \dfrac{3\sqrt{3}}{4\pi} \approx 0{,}41$.

2. $p = \dfrac{1{,}6}{5} = 0{,}32$.

3. Обозначим длину I отрезка через x, II — через y, тогда III отрезок имеет длину $l - x - y$. $\Omega = \{(x, y) : 0 < x + y < l\}$, т.е. $0 < x + y < l$ — все возможные комбинации длин частей отрезка. Чтобы из них можно было составить треугольник, необходимо выполнение условий: $x + y > l - x - y$, $x + l - x - y > y$, $y + l - x - y > x$, т.е. $x < \dfrac{l}{2}$, $y < \dfrac{l}{2}$, $x + y > \dfrac{l}{2}$. Эти неравенства определяют область, заштрихованную на рис. 80.

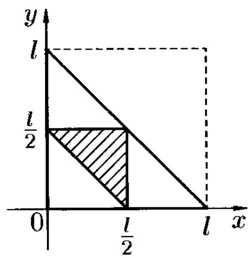


Рис. 80

Имеем: $P = \dfrac{\frac{1}{2} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{2}}{\frac{1}{2} l \cdot l} = 0{,}25$.

1.15

1. Да. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{4, 5, 6\}$. Ясно, что $P(A) = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$, $P(B) = \dfrac{1}{2}$, а $P(AB) = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$, т.е. $P(AB) = \dfrac{1}{3} \neq P(A) \cdot P(B) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}$.

2. а) A_1 — первая буква Т, A_2 — вторая буква И, …, A_5 — пятая буква И. Вероятность события A — получится слово ТИСКИ, равна $P(A) = P(A_1 A_2 A_3 A_4 A_5) = \dfrac{3}{10} \cdot \dfrac{2}{9} \cdot \dfrac{2}{8} \dfrac{1}{7} \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{2520} \approx 0{,}0004$; б) 0, так как второй буквы К в слове СТАТИСТИКА нет; в) $p = \dfrac{1}{10} \cdot \dfrac{2}{9} \cdot \dfrac{3}{8} = \dfrac{1}{120} \approx 0{,}008$; г) $p = \dfrac{2}{10} \cdot \dfrac{3}{9} \cdot \dfrac{2}{8} \cdot \dfrac{2}{7} \cdot \dfrac{2}{6} \cdot \dfrac{1}{5} \cdot \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot 1 \approx 0{,}0000132$.

3. $q_i = 0{,}2$ — вероятность отказа i-го элемента, $p_i = 0{,}8$ — вероятность его исправной работы. Цепь последовательно соединенных элементов 1–2–3 будет работать, если исправны все три элемента: $p_{123} = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 = 0{,}8^3 = 0{,}512$. Цепь параллельно соединенных элементов 5–6 откажет, только в случае отказа обоих элементов: $q_{56} = q_5 q_6 = 0{,}2^2 = 0{,}04$, а вероятность ее исправной работы равна $p_{56} = 1 - q_{56} = 0{,}96$; $p_{456} = p_4 \cdot p_{56} = 0{,}8 \cdot 0{,}96 = 0{,}768$; $p_{123456} = 1 - q_{123} \cdot q_{456} = 1 - (1 - 0{,}512) \cdot (1 - 0{,}768) \approx 0{,}887$; $P_{\text{отк}} = 1 - p_{123456} \cdot p_7 \approx 1 - 0{,}887 \cdot 0{,}8 \approx 0{,}291$.

1.16

1. A — первый шар белый, B — второй шар черный. Тогда $AB + \bar{A}\bar{B}$ — оба шара разных цветов. $P(AB + \bar{A}\bar{B}) = \frac{2}{9} \cdot \frac{7}{8} + \frac{7}{9} \cdot \frac{2}{8} = \frac{28}{72} = \frac{7}{18} \approx 0{,}39$.
2. а) A_1 — попадание первого орудия, A_2 — второго, A_3 — третьего. Значит, $A\bar{B}\bar{C} + \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C = D$ — попадание только одного из них. $P(D) = 0{,}7 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}3 \cdot 3 = 0{,}189$; б) $\bar{S} = \bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3$ — три промаха. $P(\bar{S}) = 0{,}3 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}3 = 0{,}027$. Значит, $P(S) = P(A_1 + A_2 + A_3) = 1 - P(\bar{S}) = 1 - 0{,}027 = 0{,}973$.
3. Вероятность выхода из строя всех n приборов равна

$$\underbrace{(1 - 0{,}7) \cdot (1 - 0{,}7) \cdot \ldots \cdot (1 - 0{,}7)}_{n} = 0{,}3^n.$$

Следовательно, вероятность безотказной работы равна $1 - 0{,}3^n$. По условию $1 - 0{,}3^n \geqslant 0{,}95$. Отсюда $0{,}3^n \leqslant 0{,}05$, $n \ln 0{,}3 \leqslant \ln 0{,}05$,

$$n \geqslant \ln 0.05 : \ln 0{,}3 \approx 2{,}488,$$

т. е. $n \geqslant 3$.

1.18

1. A — вышла из строя одна микросхема, H_0 — отказали обе, H_1 — отказала первая микросхема, H_2 — отказала вторая, H_3 — обе не отказали. Тогда $P(H_0) = 0{,}07 \cdot 0{,}1 = 0{,}007$, $P(H_1) = 0{,}063$, $P(H_2) = 0{,}093$, $P(H_3) = 0{,}837$ (Контроль: $\sum\limits_{i=0}^{3} P(H_i) = 1$). $P(A|H_0) = 0$, $P(A|H_1) = 1$, $P(A|H_2) = 1$, $P(A|H_3) = 0$. Значит, $P(A) = 0{,}156$ и $P(H_1|A) \approx 0{,}404$.
2. A_1 — студент П сдаст экзамен, если зайдет первым, $P(A_1) = \frac{30}{40} = \frac{3}{4}$. A_2 — студент П сдаст экзамен, если зайдет вторым, $P(A_2) = ?$ Введем гипотезы: H_1 — первый студент вытащил билет, который знает студент П, H_2 — первый студент вытащил билет, который не знает студент П. $P(H_1) = \frac{30}{40} = \frac{3}{4}$, $P(H_2) = \frac{10}{40} = \frac{1}{4}$ $\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1\right)$. Далее: $P(A_2|H_1) = \frac{29}{39}$, $P(A_2|H_2) = \frac{30}{39}$. Значит, $P(A_2) = \frac{3}{4} \cdot \frac{29}{39} + \frac{1}{4} \cdot \frac{30}{39} = \frac{3}{4}$. Все равно.

3. Пусть A — изделие пройдет контроль, H_1 — взятое изделие стандартно, H_2 — не стандартно. $P(H_1) = 0{,}9$; $P(H_2) = 0{,}1$; $P(A|H_1) = 0{,}96$; $P(A|H_2) = 0{,}06$. Следовательно, а) $P(A) = 0{,}9 \cdot 0{,}96 + 0{,}1 \cdot 0{,}06 = 0{,}87$; б) $P(H_1|A) = \dfrac{0{,}9 \cdot 0{,}96}{0{,}87} \approx 0{,}993$.

1.20

1. а) $P_{10}(4) = C_{10}^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 \approx 0{,}21$; б) $P_{10}(0) = \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \approx 0{,}00098$; в) $p = P_{10}(1) + P_{10}(2) + \ldots + P_{10}(10) = 1 - P_{10}(0) \approx 0{,}999$.
2. $p = q = \frac{1}{2}$. $P_4(2) = C_4^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8}$; $P_6(3) = C_6^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{5}{16}$. Следует, что $P_4(2) > P_6(3)$, т. е. 2 из 4.
3. а) $P_3(3) = C_3^3 \cdot 0{,}51^3 \cdot 0{,}49^0 \approx 0{,}133$, б) $P_3(1) = C_3^1 \cdot 0{,}51 \cdot 0{,}49^2 \approx 0{,}368$.
4. Спички брались $2 \cdot 10 - 6 = 14$ раз, из них 10 раз из коробки, которая оказалась пустой. Имеем 10 «успехов» в 14 «испытаниях», т. е. $P_{14}(10) = C_{14}^{10} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 \approx 0{,}061$.

1.21

1. $p = 1 : 365 \approx 0{,}0027$, $n = 84$, $a \approx 0{,}23$. По формуле Пуассона $P_{84}(2) \approx \dfrac{0{,}23^2 \cdot 0{,}7945}{2!} \approx 0{,}021$. ($e^{-0{,}23} \approx 0{,}7945$).
2. $n = 200$, $p = 0{,}02$. Значит, $a = [np] = 4$. Искомая вероятность:
$$P_{200}(0) + P_{200}(1) = \frac{4^0 e^{-4}}{0!} + \frac{4e^{-4}}{1!} \approx 0{,}09.$$
3. Здесь $n = 100$, $m = 60$, $p = q = \frac{1}{2}$. Используем локальную теорему Муавра-Лапласа: $x = \dfrac{60 - 100 \cdot 0{,}5}{\sqrt{100 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5}} = 2$. Тогда $P_{100}(60) = \frac{1}{5}\varphi(2) = 0{,}2 \cdot 0{,}054 \approx 0{,}0108$.
4. $P_{800}(m, 800) = 0{,}95$. Используем интегральную теорему Муавра–Лапласа: $x_1 = \dfrac{m - 388}{14}$, $x_2 = 29$. Значит,
$$\Phi_0(x_2) = 0{,}5; \quad 0{,}5 - \Phi_0\left(\frac{m - 388}{14}\right) = 0{,}95.$$
Откуда $\Phi_0\left(\dfrac{388 - m}{14}\right) = 0{,}45$, $\dfrac{388 - m}{14} = 1{,}65$. Значит, $m = 365$.

Глава 2

2.2

1. Возможные значения с. в. X есть 0, 1, 2, 3, 4. Их вероятности равны соответственно: $p_1 = P\{X = 0\} = C_4^0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$, $p_2 = P\{X = 1\} = C_4^1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{4}{16}$, $p_3 = \frac{6}{16}$, $p_4 = \frac{4}{16}$, $p_5 = P\{X = 4\} = \frac{1}{16}$.
2. Пусть A_1 — первый студент сдает экзамен, A_2 — второй сдает экзамен. С. в. X принимает три значения: 0,1,2. а) $p_1 = P\{X = 0\} = P(\bar{A}_1\bar{A}_2) = 0{,}4 \cdot 0{,}1 = 0{,}04$; $p_2 = P\{X = 1\} = P(A_1\bar{A}_2 + \bar{A}_1A_2) = 0{,}6 \cdot 0{,}1 + 0{,}4 \cdot 0{,}9 = 0{,}42$; $p_3 = P\{X = 2\} = P(A_1A_2) = 0{,}6 \cdot 0{,}9 = 0{,}54$ $(\sum p_i = 1)$; б) $p_1 = P\{X = 0\} = P(\bar{A}_1\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_2) = 0{,}4 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}1 = 0{,}0016$; $p_2 = P\{X = 1\} = P(A_1\bar{A}_2\bar{A}_2 + \bar{A}_1\bar{A}_1A_2 + \bar{A}_1\bar{A}_2A_1\bar{A}_2 + \bar{A}_1\bar{A}_1\bar{A}_2A_2) = \ldots = 0{,}1668$;

$$p_3 = P\{X = 2\} = P(A_1A_2 + A_1\bar{A}_2A_2 + \bar{A}_1A_1A_2 + A_1\bar{A}_2A_1A_2) =$$
$$= 0{,}6 \cdot 0{,}9 + 0.6 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9 + 0{,}4 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}9 + 0{,}4 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}9 = 0{,}8316$$

$(\sum_{i=1}^{3} p_i = 1)$.

2.3

1. A_1 — попадание I стрелка, A_2 — II. Тогда $P\{X = x_1\} = P\{X = 0\} = P(\bar{A}_1\bar{A}_2) = 0{,}08$, $P\{X = x_2\} = P\{X = 1\} = P(A_1\bar{A}_2 + \bar{A}_1A_2) = 0{,}44$, $P\{X = 2\} = 0{,}48$.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0; \\ 0{,}08, & 0 < x \leqslant 1; \\ 0{,}52, & 1 < x \leqslant 2; \\ 1, & 2 < x. \end{cases}$$

2. $F(x)$ удовлетворяет свойствам функции распределения;

$$P\{0 \leqslant x < 1\} = F(1) - F(0) = 1 - e^{-1} = 1 - \frac{1}{e} \approx 0.632.$$

3. $P\{X \in (0,1)\} = F(1) - F(0) = \frac{1}{2}$. Значит, $P_4(3) = C_4^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 = 0{,}25$.

2.4

1. $F(2) = 1$. Значит,

$$1 = a(2+1)^2, \quad a = \frac{1}{9}; \quad f(x) = F'(x) = \begin{cases} \dfrac{2(x+1)}{9}, & x \in (-1; 2], \\ 0, & x \notin (-1; 2]. \end{cases}$$

2. $S_\Delta = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} h = 1$. Значит, $OM = h = 4$. Уравнение MN: $\frac{y-4}{0-4} = \frac{x-0}{\frac{1}{2}-0}$, т. е. $y = -8x + 4$. Стало быть,

$$f(x) = \begin{cases} -8x+4, & x \in \left(0; \frac{1}{2}\right], \\ 0, & x \notin \left(0; \frac{1}{2}\right]; \end{cases}$$

если $x \leqslant 0$, то

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0;$$

если $0 < x \leqslant \frac{1}{2}$, то

$$F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_{0}^{x} (-8t+4)\,dt = -4x^2 + 4x;$$

если $x > \frac{1}{2}$, то

$$F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_{0}^{\frac{1}{2}} (-8t+4)\,dt + \int_{\frac{1}{2}}^{x} 0\,dt = 1,$$

таким образом

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ -4x^2+4x, & 0 < x \leqslant \frac{1}{2}, \\ 1, & x > \frac{1}{2}; \end{cases}$$

$$P\left\{X \in \left(\frac{1}{4}, 1\right)\right\} = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} (-8x+4)\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} 0\,dx = \frac{1}{4}.$$

3. а) нет, так как $f(x) \leqslant 0$ при $x \in (-\infty, 0)$; б) да, $f(x) \geqslant 0$, $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$;

в) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{2} ax^2\,dx + \int_{2}^{\infty} 0\,dx = 1$, т. е. $\left.\frac{ax^3}{3}\right|_0^2 = 1$, $a = \frac{3}{8}$. Если $a = \frac{3}{8}$, то $f(x)$ — плотность распределения; $a \neq \frac{3}{8}$ — нет.

2.5

1. Учитывать результаты примера примера 1.31 (п. 1.20) в первом случае имеем: $MX = 0 \cdot 0{,}001 + 1 \cdot 0{,}027 + 2 \cdot 0{,}243 + 3 \cdot 0{,}729 = 2{,}7$; во втором случае: $MX = 0 \cdot 0{,}006 + 1 \cdot 0{,}092 + 2 \cdot 0{,}398 + 3 \cdot 0{,}504 = 2.4$.

2. $MX = \left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx\right] = \int\limits_{-\infty}^{0} x{\cdot}0\,dx + \int\limits_{0}^{\pi} \frac{1}{2}x\sin x\,dx + \int\limits_{\pi}^{\infty} x{\cdot}0\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\pi} x\sin x\,dx = \frac{\pi}{2}$.

3. Согласно свойствам м.о. и дисперсии, имеем $MZ = M(5X - 3Y + 2) = M5X - M3Y + M2 = 5MX - 3MY + 2 = 5 \cdot 2 - 3 \cdot (-3) + 2 = 21$ и $DZ = D(5X - 3Y + 2) = D5X + D(-3Y) + D2 = 25DX + 9DY + 0 = 25 \cdot 2 + 9 \cdot 9 = 131$.

4. $DX = \left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx - (MX)^2\right] = \int\limits_{-\infty}^{0} x^2 \cdot 0\,dx + \int\limits_{0}^{\pi} x^2 \cdot \frac{1}{2}\sin x\,dx + \int\limits_{\pi}^{\infty} x^2 \cdot 0\,dx - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\pi} x^2 \sin x\,dx - \frac{\pi^2}{4} = \frac{1}{2}\left(-x^2\cos x\Big|_0^{\pi} + 2\left(x\sin x\Big|_0^{\pi} + \cos x\Big|_0^{\pi}\right)\right) - \frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi^2}{2} - 2 - \frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi^2}{4} - 2 \approx 0{,}467$; $\sigma_X = \sqrt{0{,}467} \approx 0{,}68$.

5. Если $x \to A$, то $F(x) \to 0$, $\lim\limits_{x\to A+0} 0{,}25x^2 = 0$, т. е. $0{,}25A^2 = 0$, $A = 0$; $\lim\limits_{x\to B} 0{,}25x^2 = 1$, т. е. $0{,}25B^2 = 1$, $B = 2$. Поэтому

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leqslant 0, \\ 0{,}25x^2, & \text{при } 0 < x \leqslant 2, \\ 1, & \text{при } 2 < x. \end{cases}$$

Тогда

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leqslant 0 \text{ и } x > 2, \\ 0{,}5x, & \text{при } 0 < x \leqslant 2. \end{cases}$$

Поэтому

$$MX = \int\limits_0^2 x \cdot 0{,}5x\,dx = \frac{x^3}{6}\Big|_0^2 = 4/3, \quad DX = \int\limits_0^2 x^2 \cdot 0{,}5x\,dx - \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{2}{9}.$$

Значит, $\sigma_X = \frac{\sqrt{2}}{3}$.

6. $M\left(\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} MX_i = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} a = \frac{1}{n}(\underbrace{a + a + \ldots + a}_{n}) = \frac{1}{n} \cdot na = a$;

$D\left(\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2} D\left(\sum\limits_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum\limits_{i=1}^{n} DX_i = \frac{1}{n^2}\sum\limits_{i=1}^{n} \sigma^2 = \frac{1}{n^2} \cdot n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$.

2.7

1. $P\{-3 < X < 5\} = \Phi_0\left(\frac{5-3}{2}\right) - \Phi_0\left(\frac{-3-3}{2}\right) = \Phi_0(1) + \Phi_0(3) = 0{,}8413$; $P\{X \leqslant 4\} = P\{-\infty < X \leqslant 4\} = \Phi_0\left(\frac{4-3}{2}\right) - \Phi_0\left(\frac{-\infty-3}{2}\right) = \Phi_0(0{,}5) + \Phi_0(\infty) = 0{,}19146 + 0{,}5 = 0{,}69146$; $P\{|X-3| < 6\} = P\{|X-3| < 3\cdot 2\} = 2\Phi_0(3) = 0{,}9973$.
2. По условию $a = 0$, $\sigma = 1$ а) $P\{X \in (1,3)\} = \Phi_0\left(\frac{3-0}{1}\right) - \Phi_0\left(\frac{1-0}{1}\right) = \Phi_0(3) - \Phi_0(1) = 0{,}49865 - 0{,}34134 = 0{,}1573$; б) $2\Phi_0\left(\frac{l}{1}\right) = 0{,}8926$, отсюда $\Phi_0(l) = 0{,}4463$. По таблицам находим, $l = 1{,}62$, и интервал имеет вид $(-1{,}62; 1{,}62)$; в) $M_0X = 0$; $M_e = 0$.
3. Коэффициент асимметрии A нормального распределения равен 0 ($A = 0$), так как кривая Гаусса симметрична относительно прямой $x = a$, проходящей через центр распределения a. Найдем (аналитически) коэффициент эксцесса, т. е. $E = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$. Сначала найдем μ_4:

$$\mu_4 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^4 \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\,dx = \left[\begin{array}{l|l} u = x^3 & du = 3x^2\,dx \\ dv = xe^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\,dx & v = -\sigma^2 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \end{array}\right] =$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\left(-x^3\sigma^2 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\Big|_{-\infty}^{\infty} + 3\sigma^2 \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\,dx\right) =$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\left(0 + 3\sigma^2\left(-xe^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\sigma^2\Big|_{-\infty}^{\infty} + \sigma^2 \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\,dx\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\left(3\sigma^2\left(0 + \sigma^2\sigma\sqrt{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{x}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2} d\left(\frac{x}{\sqrt{2}\sigma}\right)\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}(3\sigma^2\sigma^3\sqrt{2}\sqrt{\pi}) = 3\sigma^4.$$

Стало быть: $E = \frac{3\sigma^4}{\sigma^4} - 3 = 3 - 3 = 0$.

Глава 3

3.3

1. 1) $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dxdy = 1$. Поэтому $A\int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty} e^{-x-y}\,dxdy = A\int\limits_{0}^{\infty} e^{-x}\,dx \times$ $\times\int\limits_{0}^{\infty} e^{-y}\,dy = A\int\limits_{0}^{\infty} e^{-x}\left(-e^{-y}\Big|_0^{\infty}\right)dx = A\int\limits_{0}^{\infty} e^{-x}\,dx = A = 1$. 2) $F(x,y) =$ $= \int\limits_{0}^{x}\int\limits_{0}^{y} e^{-u-v}\,dudv = \int\limits_{0}^{x} e^{-u}\,du\int\limits_{0}^{y} e^{-v}\,dv = \int\limits_{0}^{x} e^{-u}\left(-e^{-v}\Big|_0^{y}\right)du = (1-e^{-y})\times$ $\times\int\limits_{0}^{x} e^{-u}\,du = (1-e^{-x})(1-e^{-y})$ при $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, т. е.

$$F_{X,Y} = \begin{cases} (1-e^{-x})(1-e^{-y}), & \text{при } x \geqslant 0, y \geqslant 0,\\ 0, & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

3) $F_X(x) = \left[\int\limits_{-\infty}^{x}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy\right)dx\right] = \int\limits_{0}^{x}\left(\int\limits_{0}^{\infty} e^{-u}e^{-v}\,dv\right)du = \int\limits_{0}^{x} 1\cdot e^{-u}\,du =$ $= -e^{-u}\Big|_0^{x} = 1 - e^{-x}$. при $x \geqslant 0$, т. е.

$$F_X = \begin{cases} 1-e^{-x}, & \text{при } x \geqslant 0,\\ 0, & \text{при } x < 0.\end{cases}$$

Аналогично

$$F_Y = \begin{cases} 1-e^{-y}, & \text{при } y \geqslant 0,\\ 0, & \text{при } y < 0.\end{cases}$$

4) $f_x(x) = f_1(x) = F'_x(x) = \begin{cases} (1-e^{-x})', & \text{при } x \geqslant 0,\\ 0, & \text{при } x < 0,\end{cases} = \begin{cases} e^{-x}, & \text{при } x \geqslant 0,\\ 0, & \text{при } x < 0.\end{cases}$

Аналогично, $f_Y(y) = \begin{cases} e^{-y}, & \text{при } y \geqslant 0,\\ 0, & \text{при } y < 0.\end{cases}$

5) $P\{X > 0, Y < 1\} = \int\limits_{0}^{\infty} e^{-x}\,dx\int\limits_{0}^{1} e^{-y}\,dy = -(e^{-1}-1)\int\limits_{0}^{\infty} e^{-x}\,dx =$ $= \left(1-\frac{1}{e}\right)(e^{-x})\Big|_0^{\infty} = 1 - \frac{1}{e} \approx 0{,}63.$

2. 1) $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dxdy = 1$, т. е. $\int\limits_0^4 dx \int\limits_0^{4-x} C\,dy = 1$, $C\int\limits_0^4 (4-x)\,dx = 1$, $C = \frac{1}{8}$.

Следовательно, $f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{8}, & \text{при } x \geqslant 0, y \geqslant 0, x+y \leqslant 4; \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$

2) $f_X(x) = \left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy\right] = \int\limits_0^{4-x} \frac{1}{8}\,dy = \frac{1}{8}y\Big|_0^{4-x} = \frac{4-x}{8}$, $x \in (0,4)$, $f_Y(y) = \frac{4-y}{8}$, $0 < y < 4$; 3) $P\{0 < X < 1, 1 < Y < 3\} = \iint\limits_{D_1} f(x,y)\,dxdy = \frac{1}{8}\int\limits_0^1 dx \int\limits_1^3 dy = 0{,}25$ (см. рис. 81).

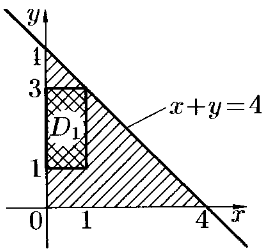


Рис. 81

3. 1) С. в. X принимает значения 0, 1, 2. Очевидно, $p_1 = P\{X = 0\} = 0{,}6 \cdot 0{,}6 = 0{,}36$, $p_2 = 0{,}4 \cdot 0{,}6 + 0{,}6 \cdot 0{,}4 = 0{,}48$, $p_3 = 0{,}4 \cdot 0{,}4 = 0{,}16$. Стало быть:

X	0	1	2
p	0,36	0,48	0,16

$(\sum\limits_{i=1}^{3} p_i = 1)$. Аналогично находим, что

Y	0	1	2
p	0,16	0,48	0,36

есть ряд распределения с. в. Y. 2) Возможные значения системы (X,Y): $(0,0)$, $(0,1)$, $(0,2)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(1,2)$, $(2,0)$, $(2,1)$, $(2,2)$. Совместная таблица распределения имеет вид:

$X\diagdown Y$	0	1	2
0	0,0576	0,1728	0,1296
1	0,0768	0,2304	0,1728
2	0.0256	0,0768	0,0576

,

так как $p_{11} = P\{X = 0, Y = 0\} = 0{,}4 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}6 = 0{,}16 \cdot 0{,}36 = 0{,}0576$, $p_{12} = P\{X = 0, Y = 1\} = 0{,}36 \cdot 0{,}48 = 0{,}1728$, $p_{13} = P\{X = 0, Y = 2\} = 0{,}36 \cdot 0{,}36 = 0{,}1296$, $p_{21} = P\{X = 1, Y = 0\} = 0{,}48 \cdot 0{,}16 = 0{,}0768$, $p_{22} = P\{X = 1, Y = 1\} = 0{,}48 \cdot 0{,}48 = 0{,}2304$, $p_{23} = P\{X = 1, Y = 2\} = 0{,}48 \cdot 0{,}36 = 0{,}1728$, $p_{31} = P\{X = 2, Y = 0\} = 0{,}16 \cdot 0{,}16 = 0{,}0256$, $p_{32} = P\{X = 2, Y = 1\} = 0{,}16 \cdot 0{,}48 = 0{,}0768$, $p_{33} = P\{X = 2, Y = 2\} = 0{,}16 \cdot 0{,}36 = 0{,}0576$. 3) По таблице распределения, пользуясь равенством $F(x, y) = \sum\limits_{x_i<x}\sum\limits_{y_j<y} p_{ij}$, находим значения функции распределения $F(x, y)$:

$X\diagdown Y$	$y \leqslant 0$	$0 < y \leqslant 1$	$1 < y \leqslant 2$	$y > 2$
$x \leqslant 0$	0	0	0	0
$0 < x \leqslant 1$	0	0,0576	0,2304	0,3600
$1 < x \leqslant 2$	0	0,1344	0,5376	0,8400
$x > 2$	0	0,1600	0,6400	1,0000

3.7

1. Имеем

X	1	2	3
p	0,33	0,33	0,34

и

Y	1	2	3	4
p	0,24	0,28	0,27	0,21

.

Тогда $m_x = 1 \cdot 0.33 + 2 \cdot 0.33 + 3 \cdot 0{,}34 = 2{,}01$, $m_y = 1 \cdot 0{,}24 + 2 \cdot 0{,}28 + 3 \cdot 0{,}27 + 4 \cdot 0{,}21 = 2{,}45$. Так как

$$P\{X = 1, Y = 1\} = 0{,}07 \neq P\{X = 1\} \cdot P\{Y = 1\} = 0{,}33 \cdot 0{,}24 = 0{,}0792,$$

то с. в. X и Y — зависимы. Находим MXY: $MXY = 1 \cdot 0{,}07 + 2 \cdot 0{,}04 + 3 \cdot 0{,}11 + 4 \cdot 0{,}11 + 2 \cdot 0{,}08 + 4 \cdot 0{,}11 + 6 \cdot 0{,}06 + 8 \cdot 0{,}08 + 3 \cdot 0{,}09 + 6 \cdot 0{,}13 + 9 \cdot 0{,}10 + 12 \cdot 0{,}02 = 4{,}71$. Поэтому $\operatorname{cov}(X, Y) = 4{,}71 - 2{,}01 \cdot 2{,}45 = -0{,}2145$.

2. $\iint\limits_D f(x, y)\,dxdy = 1$, поэтому

$$a\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{-1}^{1} (1 - xy^3)\,dy = a\int\limits_{-1}^{1} dx \left(y - x\frac{y^4}{4}\right)\Big|_{-1}^{1} = a\int\limits_{-1}^{1} 2\,dx = 4a = 1, \quad a = \frac{1}{4}.$$

$$MX = \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} x\,dx \int_{-1}^{1} (1 - xy^3)\,dy = \ldots = 0,$$

$$MY = \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} dx \int_{-1}^{1} y(1-xy^3)\,dy = \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} dx \left(\frac{y^2}{2} - x\frac{y^5}{5}\right)\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{4}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{1} = 0.$$

$$DX = \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} (x-0)^2\,dx \int_{-1}^{1} (1 - xy^3)\,dy = \ldots = \frac{1}{3},$$

значит, $\sigma_x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

$$DY = \left[\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (y-m_y)^2 f(x,y)\,dxdy\right] = \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} dx \int_{-1}^{1} y^2(1-xy^3)\,dy = \ldots = \frac{1}{3},$$

значит, $\sigma_y = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

$$K_{XY} = \frac{1}{4}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} xy(1 - xy^3)\,dxdy - 0 = \ldots = -\frac{1}{15}.$$

Следовательно, $r_{XY} = \dfrac{-\frac{1}{15}}{\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}} = -\dfrac{1}{5}$.

3. $c\displaystyle\int_0^1 dx \int_0^1 (x+y)\,dy = 1$. Отсюда $c = 1$. Находим плотность вероятности:

$$f_1(x) = \int_0^1 (x+y)\,dy = x + \frac{1}{2},$$

$$f_2(y) = \int_0^1 (x+y)\,dx = \left(\frac{x^2}{2} + yx\right)\Big|_0^1 = y + \frac{1}{2}.$$

Так как $f_1(x)\cdot f_2(y) = \left(x+\frac{1}{2}\right)\left(y+\frac{1}{2}\right) \neq x + y = f(x,y)$, то с. в. X и Y зависимы.

$$MX = \int_0^1 x\,dx \int_0^1 (x+y)\,dy = \int_0^1 x\left(x+\frac{1}{2}\right)dx = \frac{7}{12},$$

$MY = \frac{7}{12}$,

$$DX = \int\limits_0^1 \left(x - \frac{7}{12}\right)^2 dx \int\limits_0^1 (x+y)\,dy = \frac{11}{144}$$

или

$$DX = \int\limits_0^1 x^2\,dx \int\limits_0^1 (x+y)\,dy - \left(\frac{7}{12}\right)^2 = \frac{11}{144},$$

$DY = \frac{11}{144}$.

3.9

1. Найдем условное распределение X: $p(x_1|y_1) = P\{X = 0|Y = -1\} = \frac{0{,}10}{0{,}25} = \frac{10}{25}$, $p(x_2|y_1) = \frac{0{,}15}{0{,}25} = \frac{15}{25}$. Значит, $M(X|y_1) = 0 \cdot \frac{10}{25} + 1 \cdot \frac{15}{25} = \frac{15}{25} = 0.6$. $p(x_1|y_2) = \frac{0{,}15}{0{,}40} = \frac{15}{40}$, $p(x_2|y_2) = \frac{25}{40}$. Значит, $M(X|y_2) = 0 \cdot \frac{15}{40} + 1 \cdot \frac{25}{40} = \frac{25}{40} \approx 0{,}63$. $p(x_1|y_3) = \frac{20}{35}$, $p(x_2|y_3) = \frac{15}{35}$. Значит, $M(X|y_3) = \frac{15}{35} \approx 0{,}43$. Кривая регрессии X на y имеет вид, изображенный на рис. 82.

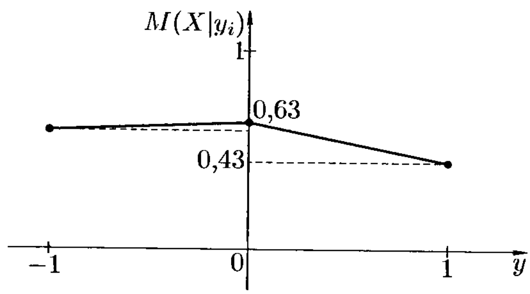


Рис. 82

2. Как известно, для нормально распределенной с. в. (X, Y) ее составляющая Y также распределена по нормальному закону (формула (3.37)):

$$f_2(y) = \frac{1}{\sigma_y\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-m_y)^2}{2\sigma_y^2}}.$$

Имеем

$$f(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_2(y)} = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-r^2}} e^{-\frac{1}{2(1-r^2)}(x^2-2rxy+y^2)} : \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sqrt{1-r^2}} e^{-\frac{(x-yr)^2}{2(\sqrt{1-r^2})^2}},$$

т. е. условная плотность распределения $f(x|y)$ есть плотность нормального распределения с параметрами $m = yr$ и $\sigma = \sqrt{1-r^2}$. Аналогично находим, что

$$f(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-r^2}} e^{-\frac{(y-xr)^2}{2(\sqrt{1-r^2})^2}}.$$

3.11

1. Так как

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a,b], \\ 0, & x \notin [a,b], \end{cases}$$

то

$$\varphi(t) = \frac{1}{b-a}\int_a^b e^{itx}\,dx = \frac{1}{b-a}\cdot\frac{1}{it}(e^{itb} - e^{ita}) = \frac{i}{(a-b)t}(e^{itb} - e^{ita}).$$

2. Так как $p_k = \frac{a^k e^{-a}}{k!}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, то

$$\varphi_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk}\frac{a^k e^{-a}}{k!} = e^{-a}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a\,e^{it})^k}{k!} = e^{-a}\cdot e^{a\,e^{it}} = e^{-a(1-e^{it})}.$$

Тогда $\varphi'(t) = e^{-a(1-e^{it})}\cdot(-a)\cdot(-e^{it})\cdot i$, значит, $MX = [-i\varphi'(0)] = -i\cdot(1\cdot ai) = a$, т. е. $MX = a$.

3. $$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{-1} e^{itx}\cdot 0\,dx + \int_{1}^{0} e^{itx}(-2x)\,dx + \int_0^{\infty} e^{itx}\cdot 0\,dx = -2\int_{-1}^{0} e^{itx}x\,dx =$$

$$= -2\left(\frac{x}{it}e^{itx}\Big|_{-1}^{0} - \frac{1}{it}\cdot\frac{1}{it}e^{itx}\Big|_{-1}^{0}\right) = -2(0 - \frac{-1}{it}e^{-it} + \frac{1}{t^2}(1 - e^{-it})) = \frac{2ie^{-it}}{t} -$$

$$- \frac{2}{t^2} + \frac{2e^{-it}}{t^2} = \frac{2ite^{-it} - 2 + 2e^{-it}}{t^2}.$$

Глава 4

4.1

1. а)

Y	-3	-1	5	15
p	0,30	0,45	0,20	0,05

;

б)

Y	0	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	2	$\sqrt{5}$
p	0,10	0,20	0,30	0,25	0,10	0,05

;

в)

Y	$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	0	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
p	0,3	0,35	0,35

.

2.

Y	0	1
p	0,5	0,5

Многоугольники распределения с. в. X и Y изображены, соответственно, на рис. 83, 84.

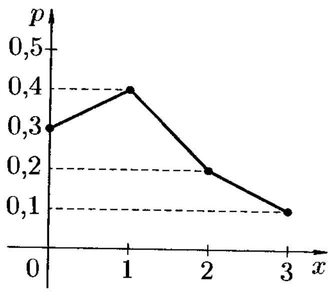


Рис. 83

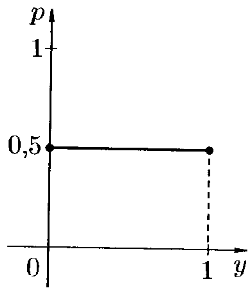


Рис. 84

$MY = 0 \cdot 0{,}5 + 1 \cdot 0.5 = 0{,}5$; $DY = [MY^2 - (MY)^2] = 0^2 \cdot 0{,}5 + 1^2 \cdot 0.5 - (0{,}5)^2 = 0{,}5 - 0{,}25 = 0{,}25$. Отсюда $\sigma Y = \sqrt{DY} = \sqrt{0{,}25} = 0{,}5$.

3. С. в. X имеет равномерное распределение, значит,

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & x \in [-2, 2], \\ 0, & x \notin [-2, 2]. \end{cases}$$

Функция $y = x + 1$ строго возрастает в $(-\infty, \infty)$, обратная функция $x = y - 1 = \psi(y)$, $y \in [-1, 3]$. По формуле $g(y) = f(\psi(y)) \cdot |\psi'(y)|$ находим:

$$g(y) = \begin{cases} \frac{1}{4} \cdot 1, & y \in [-1, 3], \\ 0, & y \notin [-1, 3], \end{cases}$$

т. е. $Y \sim R[-1, 3]$. Находим MY: $MY = \int\limits_{-1}^{3} \frac{y}{4}\, dy = 1$ (или $MY = M(X+1) = \int\limits_{-2}^{2} (x+1) \cdot \frac{1}{4}\, dx = 1$). $DY = MY^2 - (MY)^2 = \int\limits_{-1}^{3} \frac{y^2}{4}\, dy - 1^2 = \frac{4}{3}$, $\sigma Y = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

4. По условию $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$. а) Функция $y = 3x^3$ имеет обратную $x = \sqrt[3]{\frac{y}{3}} = \psi(y)$, $x' = \psi'(y) = \frac{1}{\sqrt[3]{3}} \cdot \frac{1}{3\sqrt[3]{y^2}}$. Поэтому

$$g(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{3\sqrt[3]{3y^2}} e^{-\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{y^2}{9}}}, \quad y \neq 0.$$

б) $y = |x| = \begin{cases} x, & x \geqslant 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$ На $(-\infty, 0)$ обратная функция для $y = |x|$ есть $x_1 = -y = \psi_1(y)$. На $[0, \infty)$ обратная функция есть $x_2 = y = \psi_2(y)$. Стало быть,

$$g(y) = \sum_{i=1}^{2} f(\psi_i(y))|\psi_i'(y)| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}} \cdot 1 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}} \cdot 1 = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}},$$

$y \in [0, \infty)$.

5. а) По условию $f(x) = e^{-x}$, $x \geqslant 0$ и $F(x) = 1 - e^{-x}$, $x \geqslant 0$. $G(y) = P\{Y < y\} = P\{2X - 1 < y\} = P\left\{X < \frac{y+1}{2}\right\} = F\left(\frac{y+1}{2}\right) = 1 - e^{-\frac{y+1}{2}}$, $y \geqslant -1$ (так как условие $x \geqslant 0$ переходит для $y = 2x - 1$ в условие $y \geqslant -1$). Следовательно, $g(y) = G'(y) = -e^{-\frac{y+1}{2}}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}e^{-\frac{y+1}{2}}$ при $y > -1$ ($g(y) = 0$ при $y < -1$). б) Если $y \leqslant 0$, то $G(y) = P\{Y < 0\} = 0$ и $g(y) = G'(y) = 0$. При $y > 0$ имеем $G(y) = P\{Y < y\} = P\{X^2 < y\} = P\{|X| < \sqrt{y}\} = P\{-\sqrt{y} < X < \sqrt{y}\} = P\{0 < X < \sqrt{y}\} = P\{X < \sqrt{y}\} - P\{X < 0\} = F(\sqrt{y}) - F(0) = (1 - e^{-\sqrt{y}}) - (1 - e^0) = 1 - e^{-\sqrt{y}}$, $y > 0$. Тогда $g(y) = G'(y) = (1 - e^{-\sqrt{y}})'_y = \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot e^{-\sqrt{y}}$, т. е.

$$g(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{y}}, & y > 0, \\ 0, & y < 0. \end{cases}$$

Контроль: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(y)\,dy = 1$, $\int\limits_{-\infty}^{0} 0 \cdot dx + \int\limits_{0}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{y}}e^{-\sqrt{y}}dy = -\int\limits_{0}^{\infty} e^{-\sqrt{y}}d(-\sqrt{y}) = -e^{-\sqrt{y}}\Big|_0^{\infty} = -(0 - 1) = 1$. (Иначе: при $x \in (0, \infty)$ имеем $x = \sqrt{y} = \psi(y)$. Поэтому $g(y) = f(\sqrt{y}) \cdot (\sqrt{y})'_y = e^{-\sqrt{y}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}}$, $y > 0$.)

4.2

1. Находим $F_{X+Y}(z)$. $F(z) = P\{X+Y < z\} = \iint\limits_{\substack{D_z \\ (x+y<z)}} (x+y)\,dxdy$. $F(z) = 0$ при $z \leqslant 0$; при $0 < z \leqslant 1$ (на рис. 85 область D_z заштрихована вертикальными линиями) имеем

$$F(z) = \int\limits_0^z dx \int\limits_0^{z-x} (x+y)\,dy = \int\limits_0^z \left(zx - x^2 + \frac{(z-x)^2}{2}\right) dx =$$

$$= \left(\frac{zx^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{(x-z)^3}{6}\right)\Big|_0^z = \frac{1}{3}z^3;$$

при $1 < z \leqslant 2$ (область D_z заштрихована горизонтальными линиями) имеем

$$F(z) = \int\limits_0^{z-1} dx \int\limits_0^1 (x+y)\,dy + \int\limits_{z-1}^1 dx \int\limits_0^{z-x} (x+y)\,dy =$$

$$= \int\limits_0^{z-1} \left(x + \frac{1}{2}\right) dx + \int\limits_{z-1}^1 \left(xz - x^2 + \frac{(z-x)^2}{2}\right) dx =$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2}\right)\Big|_0^{z-1} + \left(\frac{zx^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{(x-z)^3}{6}\right)\Big|_{z-1}^1 = \frac{1}{3}(-z^3 + 3z^2 - 1);$$

при $z > 2$ $\quad F(z) = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 (x+y)\,dy = 1$. Итак,

$$F(z) = \begin{cases} 0, & z \leqslant 0, \\ \frac{1}{3}z^3, & 0 < z \leqslant 1, \\ \frac{1}{3}(-z^3 + 3z^2 - 1), & 1 < z \leqslant 2, \\ 1, & z > 2. \end{cases}$$

Отсюда

$$f(z) = F'(z) = \begin{cases} 0, & z \leqslant 0, \text{ или } z > 2, \\ z^2, & 0 < z \leqslant 1, \\ 2z - z^2, & 1 < z \leqslant 2. \end{cases}$$

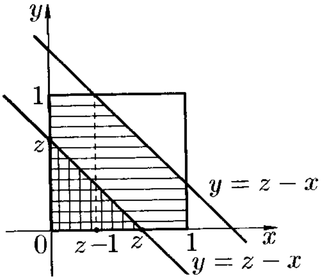


Рис. 85

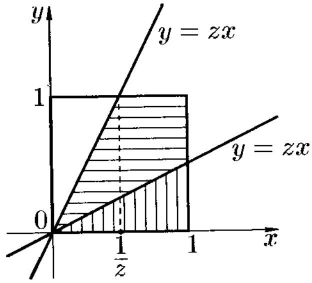


Рис. 86

2. $F(z) = P\left\{\frac{Y}{X} < z\right\} = \iint\limits_{\substack{D_z \\ (\frac{y}{x}<z)}} (x+y)\,dxdy$. $F(z) = 0$ при $z \leqslant 0$; при $0 < z \leqslant 1$ имеем

$$F(z) = \int_0^1 dx \int_0^{zx} (x+y)\,dy = \frac{z}{3} + \frac{z^2}{6}.$$

При $1 < z < \infty$ имеем

$$F(z) = \int_0^{\frac{1}{z}} dx \int_0^{xz} (x+y)\,dy + \int_{\frac{1}{z}}^1 dx \int_0^1 (x+y)\,dy =$$

$$= \frac{1}{3z^2} + \frac{1}{6z} + 1 - \frac{1}{2z^2} - \frac{1}{2z} = 1 - \frac{1}{3z} - \frac{1}{6z^2}.$$

Следовательно,

$$F'(z) = f(z) = \begin{cases} 0, & z \leqslant 0, \\ \frac{1}{3} + \frac{z}{3}, & 0 < z \leqslant 1, \\ \frac{1}{3z^2} + \frac{1}{3z^3}, & 1 < z < \infty. \end{cases}$$

Контроль: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(z)\,dz = \int\limits_0^1 \left(\frac{1}{3} + \frac{z}{3}\right) dz + \int\limits_1^{\infty} \left(\frac{1}{3z^2} + \frac{1}{3z^3}\right) dz = 1$ (см. рис. 86).

Глава 5

5.5

1. а) С. в. X — число выпавших гербов. $MX = 500 \cdot \frac{1}{2} = 250$. Неравенство $200 < X < 300$ можно переписать в виде $-50 < X - 250 < 50$ или $|X - 250| <$

< 50. А так как $DX = [npq] = 500 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 125$, то $P\{200 < X < 300\} = P\{|X - 250| < 50\} \geqslant \left[1 - \frac{DX}{\varepsilon^2}\right] = 1 - \frac{125}{50^2} = 1 - 0.05 = 0{,}95$; б) с. в. X — сумма очков, X_i — число очков на i-ой кости ($i = 1, 2, \ldots, 6$). $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_{10}$. $MX_i = \frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6) = 3{,}5$, $DX_i = \frac{35}{12}$. Значит, $MX = \sum\limits_{i=1}^{10} MX_i = 35$, $DX = \frac{175}{6}$. Поэтому $P\{|X - 35| < 8\} \geqslant 1 - \frac{175}{6 \cdot 64} = 1 - 0{,}4557 = 0{,}5443$.

2. $P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} MX_i\right| < \varepsilon\right\} \geqslant 1 - \frac{C}{n\varepsilon^2}$, при $\varepsilon = 0.1$ и $C = 5$ получаем: $1 - \frac{5}{n \cdot (0.1)^2} > 0.9$. Отсюда $n > 5000$.

3. $P\left\{\left|\frac{n_A}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} \geqslant 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2}$. Из условия следует, что $n = 500$, $\varepsilon = 0{,}1$, $p = q = \frac{1}{2}$. Получаем $P\left\{\left|\frac{n_A}{500} - 0{,}5\right| < 0{,}1\right\} \geqslant 1 - \frac{0{,}5 \cdot 0{,}5}{500 \cdot (0{,}1)^2} = 0{,}95$.

4. Пусть X_i — число набранных очков при i-м выстреле, а S_{100} — суммарное число очков при 100 выстрелах. Тогда $MX_i = 10 \cdot 0{,}5 + 9 \cdot 0{,}3 + 8 \cdot 0{,}1 + 7 \cdot 0{,}1 = 9{,}2$,

$$M\left(\sum_{i=1}^{100} X_i\right) = 9{,}2 \cdot 100 = 920;$$

$$DX_i = 100 \cdot 0{,}5 + 81 \cdot 0{,}3 + 64 \cdot 0{,}1 + 49 \cdot 0{,}1 - (9.2)^2 = 0{,}96,$$

$$D\left(\sum_{i=1}^{100} X_i\right) = 0{,}96 \cdot 100 = 96.$$

По формуле (5.14) $P\{940 \leqslant S_{100} < \infty\} \approx \Phi(\infty) - \Phi\left(\frac{940 - 920}{\sqrt{96}}\right) = 1 - \Phi(2.04) = 1 - 0{,}9793 = 0{,}0207$.

5. Пусть X — число прижившихся из n посаженных саженцев. По условию $p = 0.7$, $q = 0{,}3$. Тогда $MX = 0{,}7n$, $DX = 0{,}3 \cdot 0{,}7n = 0{,}21n$. $P\{|X - 0{,}7n| \leqslant 40\} \geqslant 1 - \frac{0{,}21n}{1600}$. Имеем $1 - \frac{0{,}21n}{1600} \geqslant 0{,}9$, $n \leqslant 761$.

Глава 6

6.3

1. а) $X_1 = \frac{V}{\sqrt{2}}$; б) $x_1 = 2\sin t$.

2. а) $m_X(t) = 3\sin t$; б) $D_X(t) = \frac{1}{3}\cdot\sin^2 t$, $\sigma_X(t) = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot|\sin t|$; в) $K_X(t_1;t_2) = = \frac{1}{3}\sin t_1\cdot\sin t_2$; г) $r_X(t_1;t_2) = \begin{cases} 1, & \sin t_1\cdot\sin t_2 > 0, \\ -1, & \sin t_1\cdot\sin t_2 < 0, \end{cases}$ $t \neq \pi n,\ n\in\mathbb{Z}$.

6.6

1. а) нестационарный; б) стационарный; в),г) нестационарные с. п.
2. $MZ(t) = 5$; $K_Z(t_1;t_2) = t_1t_2 + 2e^{-t_1-t_2}$.
3. а) $m_Y(t) = 3\cos t$; $K_Y(t_1;t_2) = \frac{1}{3}\cos t_1\cdot\cos t_2$; б) $m_Y(t) = 3(1-\cos t)$; $K_Y(t_1;t_2) = \frac{1}{3}(1-\cos t_1)(1-\cos t_2)$.
4. с. п. $X(t)$ не является стационарным процессом, $m_Z(t) = 2(\cos t + 2\sin t)$; $K_Z(t) = (\cos t_1 + 2\sin t_1)(\cos t_2 + 2\sin t_2)$.

6.9

1. $X(t)$ — нестационарный с. п.
3. $K_X(\omega) = 4e^{-|\tau|}$.
4. $D_X = 4$.

6.12

1. $\begin{pmatrix} \frac{29}{72} & \frac{43}{72} \\ \frac{43}{108} & \frac{65}{108} \end{pmatrix}$.
2. Граф, соответствующий матрице $\mathcal{P}$ изображен на рис. 87. Обозначим через A событие, состоящие в переходе процесса после первого хода в состояние s_1; событие H_1 — устройство выбирает состояние s_1; событие H_2 — устройство выбирает состояние s_2. Тогда $P(H_1) = \frac{1}{4}$, $P(H_2) = \frac{3}{4}$ и $P(A|H_1) = \frac{2}{3}$, $P(A|H_2) = \frac{1}{2}$. По формуле полной вероятности находим $P(A) = \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3} + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2} = \frac{13}{24}$.

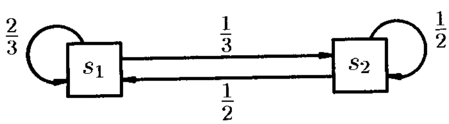


Рис. 87

3. $\frac{48}{131}$; $\frac{31}{131}$; $\frac{52}{131}$.

Раздел второй

Глава 7

7.5

1. $n = 30$, $p_1^* = \dfrac{10}{30}$, $p_2^* = \dfrac{8}{30}$, $p_3^* = \dfrac{12}{30}$. $F_{10}^*(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leqslant 1, \\ \dfrac{1}{3}, & \text{при } 1 < x \leqslant 3, \\ \dfrac{3}{5}, & \text{при } 3 < x \leqslant 6, \\ 1, & \text{при } 6 < x. \end{cases}$

2. $\bar{x}_в = 1{,}983 \approx 2$; $D_в = 1{,}949 \approx 1{,}95$. Частость p_i^* такова: $p_1^* = \dfrac{8}{60} \approx 0{,}133$, $p_2^* = \dfrac{17}{60} \approx 0{,}283$, $p_3^* = 0{,}267$, $p_4^* = 0{,}167$, $p_5^* = 0{,}100$, $p_6^* = 0{,}033$, $p_7^* = 0{,}017$ $(\sum\limits_{i=1}^{7} p_i^* = 1)$. Находим вероятности p_i по формуле Пуассона, считая $a = \bar{x}_в = 2$. $p_1 = \dfrac{e^{-2} \cdot 2^0}{0!} \approx 0{,}135$, $p_2 = \dfrac{e^{-2} \cdot 2^1}{1!} \approx 0{,}270$, $p_3 = \dfrac{0{,}135 \cdot 2^2}{2!} \approx 0{,}270$, $p_4 = \dfrac{0{,}135 \cdot 2^3}{3!} \approx 0{,}180$, $p_5 \approx 0{,}090$, $p_6 \approx 0{,}036$, $p_7 \approx 0{,}017$ $(\sum\limits_{i=1}^{7} p_i = 1)$. Как видим, с. в. X — число неправильных соединений имеет практическое пуассоновское распределение.

3. 1. Все возможные значения с. в. X — числа очков, выпавших на верхней грани кости при одном подбрасывании ее.

2. Это числа 1, 2, 3, 4, 5, 6.

3. Это результат 60-ти подбрасываний игральной кости, описывается с. в. $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_{59}, X_{60}$.

4. Первая реализация выборки приведена в условии, вторая — может быть такая: 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6. Здесь $x_{(1)} = 1, \ldots, x_{(30)} = 4, x_{(31)} = 4, \ldots, x_{(60)} = 6$.

5. а) Вторая реализация и представляет собой вариационный ряд.

б) Статистический ряд таков:

x_i	1	2	3	4	5	6
n_i	7	10	8	12	10	13
p_i^*	$\frac{7}{60}$	$\frac{10}{60}$	$\frac{8}{60}$	$\frac{12}{60}$	$\frac{10}{60}$	$\frac{13}{60}$

$(\sum\limits_{i=1}^{6} n_i = 60,\ \sum\limits_{i=1}^{6} p_i^* = 1)$.

6. $F_{60}^{*}(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leqslant 1, \\ \dfrac{7}{60}, & \text{при } 1 < x \leqslant 2, \\ \dfrac{17}{60}, & \text{при } 2 < x \leqslant 3, \\ \dfrac{25}{60}, & \text{при } 3 < x \leqslant 4, \\ \dfrac{37}{60}, & \text{при } 4 < x \leqslant 5, \\ \dfrac{47}{60}, & \text{при } 5 < x \leqslant 6, \\ 1, & \text{при } 6 < x. \end{cases}$

7. Число интервалов $m = 1 + \log_2 60 = 1 + 3{,}322 \lg 60 \approx 6{,}9$. Возьмем $m = 6$. $x_{\max} - x_{\min} = 6 - 1 = 5$; длина интервала $h = \dfrac{5}{6} = 0{,}833$. Возьмем $h = 1$. Интервальный статистический ряд имеет вид:

$[x_{i-1}; x_i)$	$[0{,}5; 1{,}5)$	$[1{,}5; 2{,}5)$	$[2{,}5; 3{,}5)$	$[3{,}5; 4{,}5)$	$[4.5{:}\ 5{,}5)$	$[5{,}5; 6{,}5)$
n_i	7	10	8	12	10	13

8. Полигон частот и гистограмма частостей изображены, соответственно, на рис. 88 и 89.

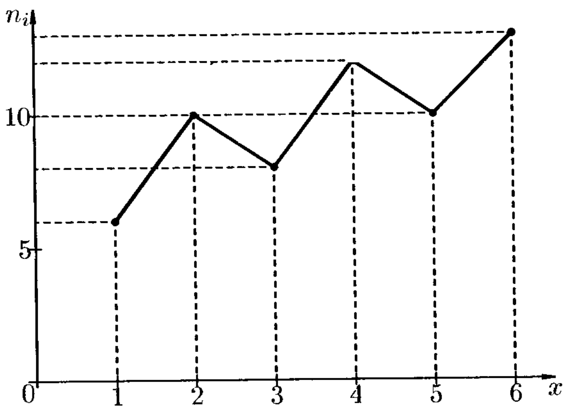


Рис. 88

9. а) $\overline{x}_{\text{в}} = \dfrac{1 \cdot 7 + 2 \cdot 10 + \ldots + 6 \cdot 13}{60} \approx 3{,}783$; б) $D_{\text{в}} = \dfrac{1}{60}(1^2 \cdot 7 + 2^2 \cdot 10 + \ldots$ $\ldots + 6^2 \cdot 13) - (3{,}783)^2 \approx 2{,}839$; в) $S^2 \approx \dfrac{60}{59} \cdot 2{,}839 \approx 2{,}888$, $S = \sqrt{S^2} \approx 1{,}699$; г) $R = 6 - 1 = 5$; $M_0^* = 6$; $M_e^* = \dfrac{1}{2}(x_{(30)} + x_{(31)}) = \dfrac{1}{2} \cdot (4 + 4) = 4$.

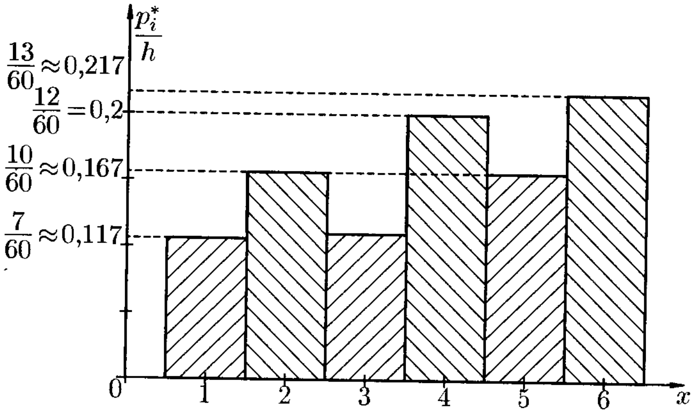


Рис. 89

Глава 8

8.2

1. Распределение Пуассона $P\{X=m\}=\dfrac{a^m\cdot e^{-a}}{m!}$ содержит один параметр a. Для оценки его методом моментов запишем уравнение $MX=\overline{x}_{\text{в}}$, т. е. $a = \overline{x}_{\text{в}}$. Оценка $\widetilde{\theta}$ параметра $a=\theta$ есть $\widetilde{\theta}=\overline{x}_{\text{в}}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i$, т. е. $\widetilde{\theta}=\overline{x}$.

2. X — дискретная с. в. с законом распределения

x_i	0	1
p_i	$1-p$	p

.

Так как

$$p(x_i,\theta)=P\{X=x_i,\theta\}=\begin{cases}1-\theta, & \text{если } x_i=0,\\ \theta, & \text{если } x_i=1,\end{cases}$$

то функция правдоподобия имеет вид: $L=L(x,\theta)=\theta^6\cdot(1-\theta)^4$. Тогда $\ln L = 6\cdot\ln\theta+4\ln(1-\theta)$, уравнение правдоподобия

$$\left(\frac{6}{\theta}-\frac{4}{1-\theta}\right)\Big|_{\theta=\widetilde{\theta}}=0.$$

Отсюда находим, что $\widetilde{\theta}=p^*=0{,}6$.

3. а) Пусть $\widetilde{\theta}$ (или $\widetilde{p}$ или p^*) — оценка неизвестной вероятности θ (или p) появления некоторого события A (успех) в одном испытании. Согласно методу моментов приравниваем теоретическое $MX=p$ выборочному среднему

$$\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i,\quad p=\overline{x}.$$

Искомая оценка есть $\widetilde{\theta} = \overline{x}$.

б) Так как

$$p(x_i,\theta) = P\{X = x_i,\theta\} = \begin{cases} 1-\theta, & \text{если } x_i = 0, \\ \theta. & \text{если } x_i = 1, \end{cases}$$

то функция правдоподобия имеет вид:

$$L = L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta) = P\{X = x_i, \theta\} = \\ = p\{x_1, \theta\} \cdot p\{x_2, \theta\} \cdot \ldots \cdot p\{x_n, \theta\} = \theta^{n_A} \cdot (1-\theta)^{n-n_A}.$$

где $n_A = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ — число успехов (наступления события A) в n независимых испытаниях. $\ln L = n_A \cdot \ln\theta + (n - n_A)\ln(1-\theta)$. Решаем уравнение правдоподобия $\frac{n_A}{\theta} - \frac{n-n_A}{1-\theta} = 0$. Отсюда $\theta = \frac{n_A}{n}$, т. е. оценка $\widetilde{\theta} = \frac{n_A}{n}$, $((\ln L)''_{\theta\theta} < 0)$.

4. Требуется оценить две величины θ_1 и θ_2, т. е. a и b, методом моментов. Так как для с. в. $X \sim R[a.b]$, то $MX = \frac{a+b}{2}$, $DX = \frac{(b-a)^2}{12}$. Решаем систему уравнений

$$\begin{cases} MX = \overline{x}_{\text{в}}, \\ DX = D_{\text{в}}, \end{cases} \quad \text{т. е.} \quad \begin{cases} \dfrac{a+b}{2} = \overline{x}_{\text{в}}, \\ \dfrac{(b-a)^2}{12} = \sigma^2_{\text{в}}, \end{cases}$$

$b = 2\overline{x}_{\text{в}} - a$, $(2\overline{x}_{\text{в}} - 2a)^2 = 12\sigma^2_{\text{в}}$, т. е. $(\overline{x}_{\text{в}} - a)^2 = 3\sigma^2_{\text{в}}$, $\overline{x}_{\text{в}} - a = \pm\sqrt{3}\sigma_{\text{в}}$, $\overline{x}_{\text{в}} = a + \sqrt{3}\sigma_{\text{в}}$ и. значит, $a = \overline{x}_{\text{в}} - \sqrt{3}\sigma_{\text{в}}$, $b = \overline{x}_{\text{в}} + \sqrt{3}\sigma_{\text{в}}$ (вариант $\overline{x}_{\text{в}} = a - \sqrt{3}\sigma_{\text{в}}$, т. е. $a = \overline{x}_{\text{в}} + \sqrt{3}\sigma_{\text{в}}$, $b = \overline{x}_{\text{в}} - \sqrt{3}\sigma_{\text{в}}$ исключаем, так как $a < b$).

Таким образом, оценки величин a и b таковы: $\widetilde{\theta}_1 = \widetilde{a} = \overline{x}_{\text{в}} - \sqrt{3}\sigma_{\text{в}}$, $\widetilde{\theta}_2 = \widetilde{b} = \overline{x}_{\text{в}} + \sqrt{3}\sigma_{\text{в}}$.

Отметим, что, решая систему

$$\begin{cases} MX = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i = \overline{x}, \\ MX^2 = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2 = \overline{x^2}, \end{cases}$$

получим те же оценки для a и b. В этом случае

$$MX = \int\limits_a^b \frac{x\,dx}{b-a} = \frac{a+b}{2}, \quad MX^2 = \int\limits_a^b \frac{x^2dx}{b-a} = \frac{a^2+ab+b^2}{3}.$$

Система принимает вид:

$$\begin{cases} \dfrac{a+b}{2} = \overline{x}, \\ \dfrac{a^2+ab+b^2}{3} = \overline{x^2}. \end{cases}$$

Отсюда следует, $\widetilde{a} = \overline{x} - \sqrt{3} \cdot \sqrt{\overline{x^2} - (\overline{x})^2} = \overline{x} - \sqrt{3} \cdot \sqrt{D_\text{в}} = \overline{x} - \sqrt{3}\sigma_\text{в}$, $\widetilde{b} = \overline{x} + \sqrt{3}\sigma_\text{в}$.

5. В данном случае

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} = f_X(x, a, \sigma).$$

Так как

$$f(x_i, \theta) = \frac{1}{\theta_2 \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x_i - \theta_1)^2}{2\theta_2^2}},$$

то функция правдоподобия имеет вид:

$$L = L(x, \theta) = \frac{1}{\theta_2^n \cdot (2\pi)^{\frac{n}{2}}} \cdot e^{-\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \theta_1)^2}{2\theta_2^2}}.$$

Тогда

$$\ln L = -n \ln \theta_2 - \frac{n}{2} \ln 2\pi - \frac{1}{2\theta_2^2} \cdot \sum_{i=1}^{n}(x_i - \theta_1)^2.$$

Система уравнений максимального правдоподобия имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \ln L}{\partial \theta_1} = \dfrac{1}{\theta_2^2} \cdot \sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \theta_1) = 0, \\ \dfrac{\partial \ln L}{\partial \theta_2} = -\dfrac{n}{\theta_2} + \dfrac{1}{\theta_2^3} \cdot \sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \theta_1)^2 = 0. \end{cases}$$

Отсюда

$$\sum_{i=1}^{n} x_i - n\widetilde{\theta}_1 = 0, \quad \text{т. е.} \quad \widetilde{\theta}_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \overline{x},$$

$\widetilde{\theta}_2^2 = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$ ($\widetilde{\theta}_2$ — оценка неизвестного параметра $\sigma = \theta_2$). Можно убедиться, что $(\widetilde{\theta}_1, \widetilde{\theta}_2)$ — точка максимума функции $\ln L(x, \theta)$. Найдем $\Delta = AC - B^2$, где

$$A = \left.\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \theta_1^2}\right|_{(\widetilde{\theta}_1, \widetilde{\theta}_2)} = -\frac{n}{\widetilde{\theta}_2^2},$$

$$B = \left.\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \theta_1 \partial \theta_2}\right|_{(\widetilde{\theta}_1, \widetilde{\theta}_2)} = -\frac{2}{\widetilde{\theta}_2^3} \cdot \sum_{i=1}^{n}(x_i - \widetilde{\theta}_1) = -\frac{2}{\widetilde{\theta}_2^3} \cdot 0 = 0,$$

$$C = \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \theta_2^2}\bigg|_{(\widetilde{\theta}_1,\widetilde{\theta}_2)} = \frac{n}{\widetilde{\theta}_2^2} - \frac{3}{\widetilde{\theta}_2^4} \cdot \sum_{i=1}^{n}(x_i - \widetilde{\theta}_1)^2 = \frac{n}{\widetilde{\theta}_2^2} - \frac{3}{\widetilde{\theta}_2^4} \cdot n \cdot \widetilde{\theta}_2^2 = -\frac{n}{\widetilde{\theta}_2^2}.$$

Следовательно, $\Delta = \dfrac{n^2}{\widetilde{\theta}_2^3} > 0$, $A < 0$, поэтому точка $(\widetilde{\theta}_1, \widetilde{\theta}_2)$ есть точка максимума функции $L(x,\theta)$.

8.4

1. Воспользуемся формулой (8.3): $\varepsilon = \dfrac{t \cdot \sigma}{\sqrt{n}}$ и (8.6) $\Phi_0(t) = \dfrac{\gamma}{2}$. Имеем $\varepsilon = 5$, $\sigma = 15$, $\gamma = 0{,}9$, $\Phi_0(t) = 0{,}45$. По таблице находим, что $t = 1{,}65$. Тогда $5 = \dfrac{1{,}65 \cdot 15}{\sqrt{n}}$. Отсюда $n = \dfrac{1{,}65^2 \cdot 15^2}{5^2} = 24{,}5025$, т. е. необходимо сделать не менее 25 измерений.
2. $\overline{x}_{\text{в}} = \overline{x} = \dfrac{1}{30}\sum\limits_{i=1}^{6} x_i n_i = \dfrac{1}{30} \cdot (153 \cdot 4 + 159 \cdot 5 + 165 \cdot 6 + 171 \cdot 7 + 177 \cdot 5 + 183 \cdot 3) = 167{,}6$; $S = 9{,}28$; при $\gamma = 0{,}95$ и $n - 1 = 29$ по таблице распределения Стьюдента находим $t_\gamma = 2{,}05$. Следовательно, $\varepsilon = \dfrac{2{,}05 \cdot 9{,}28}{\sqrt{30}} \approx 3{,}47$. Доверительный интервал таков: $(164{,}13; 171{,}07)$.
3. По условию $n = 400$, $n_A = 80$, $\gamma = 0{,}95$. Относительная частота события A есть $p^* = \dfrac{n_A}{n} = 0{,}2$. Из соотношения $\Phi_0(t) = \dfrac{\gamma}{2} = 0{,}475$ находим t, пользуясь таблицей значений функции Лапласа: $t = 1{,}96$. Находим p_1 и p_2 (формула (8.10)): $p_1 = 0{,}2 - 1{,}96 \cdot \sqrt{\dfrac{0{,}2 \cdot 0{,}8}{400}} \approx 0{,}161$, $p_2 = 0{,}2 + 1{,}96 \cdot \sqrt{\dfrac{0{,}2 \cdot 0{,}8}{400}} \approx 0{,}239$. Итак, доверительный интервал есть $(0{,}161; 0{,}239)$.

8.6

1. $n = 1000$, $X \sim [0,1]$, т. е. $a = 0$, $b = 1$, $p_1 = 0{,}1 = p_2 = \ldots = p_{10}$; $\chi^2_{\text{набл}} = \dfrac{105^2}{100} + \dfrac{95^2}{100} + \ldots + \dfrac{105^2}{100} + \dfrac{95^2}{100} - 1000 = 1{,}4$; $\chi^2_{0{,}01;9} = 21{,}7$. Так как $\chi^2_{\text{набл}} < \chi^2_{0{,}01;9}$, то гипотеза не отвергается.
2. Находим $\overline{x}_{\text{в}}$ и $\sigma_{\text{в}}$: $\overline{x}_{\text{в}} = (152{,}5 \cdot 6 + 157{,}5 \cdot 22 + 162{,}5 \cdot 36 + \ldots + 187{,}5 \cdot 2) \cdot \dfrac{1}{200} = 168{,}45$. Здесь $152{,}5 = \dfrac{150 + 155}{2}$, $157{,}5 = \dfrac{155 + 160}{2}$ и т. д. $D_{\text{в}} = \dfrac{1}{200}(152{,}5^2 \cdot 6 + 157{,}5^2 \cdot 22 + \ldots + 187{,}5^2 \cdot 2) - (168{,}45)^2 = 53{,}348$. Тогда $\sigma = 7{,}3$. Так как $n_8 = 2$ — мало, то последние два интервала объединяем. Составляем таблицу:

$(-\infty, 155)$	$[155, 160)$	$[160, 165)$	$[165, 170)$	$[170, 175)$	$[175, 180)$	$[180, +\infty)$
6	22	36	46	56	24	10

Для расчета вероятностей p_i попадания случайной величины X в i-й интервал используем функцию Лапласа:

$$p_1 = \Phi_0\left(\frac{155-168{,}45}{7{,}3}\right) - \Phi_0(-\infty) = 0.5 - \Phi_0(1{,}84) = 0{,}5 - 0{,}4671 = 0{,}0329,$$

$$p_2 = \Phi_0\left(\frac{160-168{,}45}{7{,}3}\right) - \Phi_0\left(\frac{155-168.45}{7{,}3}\right) =$$

$$= \Phi_0(-1{,}15) - \Phi_0(-1{,}84) = 0{,}0922,$$

$$p_3 = \Phi_0\left(\frac{165-168{,}45}{7{,}3}\right) - \Phi_0\left(\frac{160-168{,}45}{7{,}3}\right) =$$

$$= \Phi_0(-0{,}47) - \Phi_0(-1{,}15) = 0{,}1941,$$

$$p_4 = \Phi_0\left(\frac{170-168{,}45}{7{,}3}\right) - \Phi_0\left(\frac{155-168{,}45}{7{,}3}\right) =$$

$$= \Phi_0(-0.21) - \Phi_0(-0.47) = 0.264.$$

$$p_5 = 0{,}2327, \quad p_6 = 0{,}127, \quad p_7 = 0{,}5 - \Phi_0(1{,}58) = 0{,}0571.$$

Тогда

$$\chi^2_{\text{набл}} = \left[\sum_{i=1}^{7} \frac{n_i^2}{np_i} - n\right] = \frac{1}{200}\left(\frac{6^2}{0{,}0329} + \frac{22^2}{0{,}0922} + \ldots + \frac{10^2}{0{,}0571}\right) - 200 \approx 4.$$

По таблице $\chi^2_{\alpha,k} = \chi^2_{0{,}05;4} = 9{,}5$. Так как $\chi^2_{\text{набл}} < \chi^2_{0{,}05;4}$, то гипотеза H_0 не отвергается.

3.

X	$[150.155)$	$[155,160)$	$[160,165)$	$[165,170)$
n_i	6	22	36	46
p_i^*	$\frac{6}{200} = 0{,}03$	0,11	0,18	0,23

X	$[170,175)$	$[175,180)$	$[180,185)$	$[185,190)$
n_i	56	24	8	2
p_i^*	0,28	0,12	0,04	0,01

$\sum_{i=1}^{8} p_i^* = 1$, $\overline{x}_\text{в} = 168{,}45$, $\sigma = 7{,}3$.

Составим таблицу:

x	150	155	160	165	170
$F_n^*(x)$	0	0,03	0,14	0,32	0,55
$F_0(x)$	0,0057	0,0329	0,123	0,3192	0,5832
$\Delta = \lvert F_n^* - F_0\rvert$	0,0057	0,0029	0,017	0,0008	0,0332

x	175	180	185	190
$F_n^*(x)$	0,83	0,95	0,99	1
$F_0(x)$	0,8159	0,9429	0,9884	0,9984
$\Delta = \lvert F_n^* - F_0\rvert$	0,0141	0,0071	0,0016	0,0016

Проверяемая гипотеза состоит в том, что с. в. X имеет нормальное распределение, т. е. $F_0(x) = 0{,}5 + \Phi_0(\frac{x-a}{\sigma})$:

$$F_0(150) = 0{,}5 + \Phi_0\left(\frac{150 - 168{,}45}{7{,}3}\right) = 0{,}5 - \Phi_0(2{,}53) = 0{,}0057;$$

$$F_0(155) = 0{,}5 + \Phi_0\left(\frac{155 - 168{,}45}{7{,}3}\right) = 0{,}5 - \Phi_0(1{,}84) = 0.0329;$$

$$F_0(160) = 0{,}5 + \Phi_0\left(\frac{160 - 168{,}45}{7{,}3}\right) = 0.5 - \Phi_0(1{,}16) = 0{,}123;$$

$$F_0(165) = 0{,}5 + \Phi_0\left(\frac{165 - 168{,}45}{7{,}3}\right) = 0.5 - \Phi_0(0{,}47) = 0{,}3192;$$

$$F_0(170) = 0{,}5 + \Phi_0\left(\frac{170 - 168{,}45}{7{,}3}\right) = 0{,}5 + \Phi_0(0{,}21) = 0{,}5832;$$

$$F_0(175) = 0{,}5 + \Phi_0\left(\frac{175 - 168{,}45}{7{,}3}\right) = 0{,}5 + \Phi_0(0{,}90) = 0{,}8159;$$

$$F_0(180) = 0.5 + \Phi_0\left(\frac{180 - 168{,}45}{7{,}3}\right) = 0{,}5 + \Phi_0(1{,}58) = 0{,}9429;$$

$$F_0(185) = 0{,}5 + \Phi_0\left(\frac{185 - 168{,}45}{7{,}3}\right) = 0{,}5 + \Phi_0(2{,}27) = 0{,}9884:$$

$$F_0(190) = 0{,}5 + \Phi_0\left(\frac{190 - 168{,}45}{7.3}\right) = 0{,}5 + \Phi_0(2{,}95) = 0.9984.$$

Максимальное отклонение эмпирической функции распределения от теоретической есть $D_n = |F_n^*(170) - F_0(170)| = 0{,}0332$. Следовательно, $D_n \cdot \sqrt{n} = \sqrt{200} \cdot 0{,}0332 \approx 0{,}47$. Критическое значение критерия Колмогорова равно $\lambda_{0{,}05} = \lambda_\alpha = 1{,}36$. Так как $D_n\sqrt{n} < \lambda_\alpha$, то гипотеза H_0 согласуется с опытными данными.

Приложения

Приложение 1. Значение функции $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

x	Сотые доли x									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3721	3605	3588	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3411	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1827	1804	1781	1759	1736
1,3	1714	1692	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1540	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1181	1163	1145	1127
1.6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0941	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
	Десятые доли x									
x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2.	0540	0440	0355	0283	0224	0175	0136	0104	0079	0060
3,	0044	0033	0024	0017	0012	0009	0006	0004	0030	0020
4,	0001									

Приложение 2. Значение функции $\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$

x	Сотые доли x									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0040	0080	0112	0160	0199	0239	0279	0319	0359
0,1	0398	0438	0478	0517	0557	0596	0636	0675	0714	0754
0,2	0793	0832	0871	0910	0948	0987	1026	1064	1103	1141
0,3	1179	1217	1255	1293	1331	1368	1406	1443	1480	1517
0,4	1554	1591	1628	1664	1700	1736	1772	1808	1844	1879
0,5	1915	1950	1985	2019	2054	2088	2123	2157	2190	2224
0,6	2258	2291	2324	2357	2389	2422	2454	2486	2518	2549
0,7	2580	2612	2642	2673	2704	2734	2764	2794	2823	2852
0,8	2881	2910	2939	2967	2996	3023	3051	3079	3106	3133
0,9	3159	3186	3212	3238	3264	3289	3315	3340	3365	3389
1,0	3413	3438	3461	3485	3508	3531	3553	3577	3599	3621
1,1	3643	3665	3686	3708	3729	3749	3770	3790	3810	3830
1,2	3849	3869	3888	3907	3925	3944	3962	3980	3997	4015
1,3	4032	4049	4066	4082	4099	4115	4131	4147	4162	4177
1,4	4192	4207	4222	4236	4251	4265	4279	4292	4306	4319
1.5	4332	4345	4357	4370	4382	4394	4406	4418	4430	4441
1.6	4452	4463	4474	4485	4495	4505	4515	4525	4535	4545
1,7	4554	4564	4573	4582	4591	4599	4608	4616	4625	4633
1,8	4641	4649	4656	4664	4671	4678	4686	4693	4700	4706
1,9	4713	4719	4726	4732	4738	4744	4750	4756	4762	4767
x	Десятые доли x									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2,	4773	4821	4861	4893	4918	4938	4953	4965	4974	4981
3,	4987	4990	4993	4995	4997	4998	4998	4999	4999	5000[1]

[1]Точное значение отличается меньше, чем на $5 \cdot 10^{-5}$.

Приложение 3. Квантили $\chi^2_{\alpha,k}$ распределения χ^2_k
(k — число степеней свободы)

k	Уровень значимости α					
	0,01	0,025	0,05	0,95	0,975	0,99
1	6,6	5.0	3,8	0,0039	0,00098	0,00016
2	9,2	7,4	6,0	0,103	0,051	0,020
3	11.3	9,4	7,8	0,352	0,216	0,115
4	13,3	11,1	9,5	0,711	0,484	0.297
5	15,1	12,8	11,1	1,15	0,831	0,554
6	16,8	14,4	12,6	1,64	1.24	0,872
7	18,5	16,0	14,1	2.17	1,69	1,24
8	20,1	17,5	15.5	2.73	2,18	1,65
9	21,7	19.0	16,9	3,33	2,70	2,09
10	23.2	20,5	18,3	3,94	3,25	2,56
11	24.7	21,9	19,7	4,57	3,82	3,05
12	26.2	23,3	21,0	5,23	4,40	3,57
13	27,7	24,7	22,4	5,89	5,01	4.11
14	29,1	26,1	23,7	6,57	5,63	4.66
15	30,6	27,5	25,0	7.26	6,26	5,23
16	32,0	28,8	26,3	7.96	6.91	5,81
17	33,4	30,2	27,6	8,67	7,56	6,41
18	34,8	31.5	28,9	9,39	8,23	7,01
19	36.2	32.9	30,1	10,1	8,91	7,63
20	37,6	34,2	31,4	10,9	9,59	8,26
21	38,9	35,5	32,7	11,6	10,3	8,26
22	40,3	36,8	33,9	12,3	11,0	9,54
23	41,6	38,1	35,2	13,1	11.7	10.2
24	43,0	39,4	36,4	13,8	12.4	10,9
25	44,3	40,6	37.7	14.6	13,1	11,5
26	45,6	41,9	38.9	15.4	13,8	12,2
27	47,0	43.3	40,1	16,2	14,6	12,9
28	48.3	44.5	41,3	16,9	15,3	13,6
29	49.6	45,7	42,6	17,7	16,0	14,3
30	50,9	47,0	43,8	18,5	16,8	15,0

Приложение 4. Квантили t-распределения Стьюдента
(k — число степеней свободы)

k	Уровень значимости α (двусторонняя критическая область)					
	0,10	0,05	0,02	0,01	0,002	0,001
1	6,31	12,7	31,82	63,7	318,3	637,0
2	2,92	4,30	6,97	9,92	22,33	31.6
3	2,35	3,18	4,54	5,84	10,22	12,9
4	2,13	2.78	3,75	4,60	7,17	8,61
5	2,01	2,57	3.37	4,03	5,89	6,86
6	1,94	2,45	3,14	3,71	5,21	5,96
7	1,89	2,36	3,00	3.50	4,79	5,40
8	1,86	2,31	2,90	3,36	4.50	5,04
9	1,83	2,26	2,82	3,25	4.30	3.78
10	1,81	2,23	2,76	3,17	4,14	4.59
11	1,80	2,20	2,72	3,11	4,03	4.44
12	1.78	2,18	2,68	3,05	3,93	4,32
13	1,77	2.16	2,65	3,01	3,85	4,22
14	1,76	2,14	2,62	2,98	3,79	4,14
15	1,75	2,13	2.60	2,95	3,73	4,07
16	1,75	2,12	2,58	2,92	3,69	4,01
17	1,74	2,11	2,57	2,90	3,65	3,96
18	1,73	2,10	2,55	2,88	3,61	3.92
19	1.73	2,09	2,54	2,86	3,58	3,88
20	1.73	2,09	2,53	2,85	3,55	3,85
21	1,72	2.08	2,52	2,83	3,53	3,82
22	1,72	2.07	2,51	2,82	3,51	3,79
23	1,71	2,07	2.50	2,81	3,49	3,77
24	1,71	2,06	2,49	2,80	3,47	3,74
25	1,71	2,06	2,49	2.79	3,45	3,72
26	1,71	2,05	2,48	2,78	3,44	3,71
27	1,71	2,05	2,47	2,77	3,42	3,69
28	1.70	2,05	2,46	2,76	3,40	3.66
29	1.70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
30	1,70	2.04	2,46	2,75	3,39	3,65
40	1,68	2,02	2,42	2,70	3,31	3,55
60	1,67	2,00	2.39	2,66	3,23	3,46
120	1,66	1,98	2,36	2.62	3,17	3,37
∞	1,64	1,96	2,33	2,58	3,09	3,29

По вопросам оптовых закупок обращаться:
тел./факс: (495) 785-15-30, e-mail: trade@airis.ru
Адрес: Москва, пр. Мира, 104

Наш сайт: www.airis.ru

Вы можете приобрести наши книги
с 11^{00} до 17^{30}, кроме субботы, воскресенья,
в киоске по адресу: пр. Мира, д. 106, тел.: (495) 785-15-30

Адрес редакции: 129626, Москва, а/я 66

Издательство «АЙРИС-пресс» приглашает к сотрудничеству
авторов образовательной и развивающей литературы.
По всем вопросам обращаться
по тел.: (495) 785-15-33, e-mail: editor@airis.ru

Учебное издание

Письменный Дмитрий Трофимович

КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ, МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКЕ И СЛУЧАЙНЫМ ПРОЦЕССАМ

Ведущий редактор *В. В. Черноруцкий*
Редактор *Н. Г. Рысьева*
Художественный редактор, оформление *А. М. Драговой*
Технический редактор *С. С. Коломеец*
Компьютерная верстка *Е. Г. Иванов*
Корректор *З. А. Тихонова*

Подписано в печать 19.10.07. Формат 70×100/16.
Печать офсетная. Печ. л. 18. Усл.-печ. л. 23,4.
Тираж 5000 экз. Заказ № 2257.

ООО «Издательство «АЙРИС-пресс»
113184, Москва, ул. Б. Полянка, д. 50, стр. 3.

Отпечатано в ОАО «Можайский полиграфический комбинат»
143200, г. Можайск, ул. Мира, 93

Дмитрий Письменный

К НСПЕК ЛЕК ИИ

по тео ии ве оятностеи математической статистике и сл чайны о м

Высшее образование

Практически все современные отрасли естествознания
используют статистические методы,
которые, в свою очередь,
базируются на теории вероятностей.

Знания основ теории вероятностей, случайных процессов
и математической статистики необходимы в настоящее
время как инженеру практически любого профиля,
так и менеджеру и маркетологу,
поскольку серьезный анализ рынка немыслим
без владения статистическими методами.

Курс лекций **Д. Т. Письменного** — это находка для студента,
который при наличии дефицита времени
сможет получить достаточный объем знаний
и приобрести начальные п[illegible]кт[illegible]ские навыки,
необходи[illegible]ые, т[illegible] уверенно [illegible]еб[illegible]ч[illegible] вова[illegible]
на за[illegible]ете [illegible] экза[illegible] о этим не[illegible]ы [illegible] дисциплинам.

АЙРИС ПРЕСС

9 785811 229666